

Berechnung der elektrischen Parameter von  
Leitungsstrukturen auf verlustbehafteten,  
anisotropen Substraten

Von der Fakultät für  
Elektrotechnik und Informatik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte Dissertation

von Dipl.-Phys. Michael Vogt  
geboren am 11. September 1967 in Hannover

2006

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Mathis

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Volkert Hansen

Tag der Promotion: 19. Juli 2006

## Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, das zur Bestimmung der elektromagnetischen Eigenschaften von Leitungssystemen mit konstantem Querschnitt dient. Das Verfahren ist anwendbar auf geschirmte oder ungeschirmte Anordnungen, die anisotrope und verlustbehaftete Medien enthalten. Die Teilgebiete des Leitungsquerschnitts können beliebige Polygone darstellen. Die Spezifikation der Geometrie und der Materialeigenschaften dieser Teilgebiete erfolgt mit einer komfortablen Beschreibungssprache (siehe Anhang C).

Das vorgestellte Verfahren arbeitet im Frequenzbereich und erlaubt die Bestimmung der elektromagnetischen Feldverteilung der Moden (Eigenfunktionen) des Leitungssystems und der zugehörigen Ausbreitungskonstanten. Weiterhin können die frequenzabhängigen Leitungsparametermatrizen  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{Z}_{\text{char}}$  aus den Feldern berechnet werden.

Hierfür wird der Leitungsquerschnitt in homogene Teilgebiete zerlegt. Für jedes Teilgebiet wird dann mit Hilfe der Finite-Element-Methode (FEM) oder der Boundary-Element-Methode (BEM) ein Gleichungssystem aufgestellt und mit den Gleichungssystemen der Nachbargebiete über die Stetigkeitsbedingungen der Feldkomponenten gekoppelt. Dabei hat der Anwender die Möglichkeit, für jedes Teilgebiet zwischen den beiden Methoden zu wählen, unabhängig von der für andere Gebiete getroffenen Wahl. Damit steht erstmalig ein hybrides FEM-BEM-Verfahren für Leitungssysteme mit konstantem Querschnitt zur Verfügung.

Die implementierte FEM wendet zweidimensionale edge elements zur Approximation der transversalen Feldkomponenten  $E_x$  und  $E_y$  und herkömmliche Knotenelemente zur Approximation der axialen Komponente  $E_z$  an. Bei diesem Ansatz treten keine nichtphysikalischen Lösungen auf. Die erforderliche Triangulierung des Gebietes wird mit einem Algorithmus generiert, der eine vom Anwender vorgegebene ortsabhängige Kantenlängenfunktion berücksichtigt und dabei die Entstehung von Dreiecken mit sehr kleinen oder sehr großen Winkeln vermeidet.

Die implementierte BEM stellt die elektromagnetischen Felder als Summe der Felder von Stromfäden dar, die in axialer Richtung verlaufen, wobei die Schnittpunkte mit dem Leitungsquerschnitt auf den Rändern der Teilgebiete liegen. Dieser Ansatz leidet im Gegensatz zu BEM- $E_z$ ,  $H_z$ -Ansätzen nicht unter nichtphysikalischen Lösungen. Als Ursache für das Auftreten solcher Lösungen in  $E_z$ ,  $H_z$ -Ansätzen wurde das Vorhandensein von Lösungen der nicht diskretisierten Ausgangsgleichungen für  $\kappa = 0$  ( $\omega^2 \varepsilon \mu = k^2$ ) identifiziert. Da die Ausgangsgleichungen für  $\kappa = 0$  nicht zu den Maxwell'schen Gleichungen äquivalent sind, erfüllen diese Lösungen die Maxwell'schen Gleichungen nicht. Durch die Diskretisierung erfolgt dann eine Verschiebung der Lösungen zu  $\kappa$ -Werten  $\kappa \neq 0$ . Dies konnte durch analytische Behandlung der

diskretisierten Gleichungen für einen kreisförmigen Wellenleiter nachvollzogen werden.

Die hier vorgestellten FEM- und BEM-Varianten sind darüber hinaus – anders als etwa FEM-Knotenelemente oder BEM- $H_x, H_y$ -Ansätze – in der Lage, TEM- und Quasi-TEM-Moden mit der erforderlichen Genauigkeit zu approximieren, auch bei Anwesenheit von Feldsingularitäten an leitenden Kanten.

Die geometrische Diskretisierung der FEM- und BEM-Gebiete wird adaptiv an die berechneten Lösungen angepaßt. Als Maß für den lokalen Berechnungsfehler werden im Fall der FEM die Gradienten der  $\vec{E}$ -Feldkomponenten und im Fall der BEM die Tangentialableitungen der virtuellen Oberflächenströme herangezogen. Die adaptive Diskretisierung erlaubt es dem Anwender, die Berechnung mit einem Netz gleichverteilter Knoten zu starten, selbst dann, wenn aufgrund des Vorhandenseins von Feldsingularitäten die Knotendichte der adaptierten Verteilung örtlich um den Faktor 100 variiert. Der Anwender muß also lediglich die Anzahl der Knoten vorgeben, benötigt aber keine Informationen darüber, wo diese Knoten aufgrund des Feldverlaufs sinnvoll zu positionieren sind.

Das resultierende Gleichungssystem der Gestalt  $\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x} = 0$  wird nicht durch Lösung der charakteristischen Gleichung  $\det \mathbf{M}(k) = 0$  behandelt, sondern durch Minimierung der Funktion

$$R(k) = \frac{1}{|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|},$$

wobei  $\vec{x}_0$  einen Startvektor darstellt. Dieses Verfahren erlaubt durch geeignete Wahl von  $\vec{x}_0$  die Ausblendung bereits gefundener Lösungen und damit die Bestimmung mehrerer Lösungen mit ähnlichen oder gleichen Ausbreitungskonstanten. Außerdem können die Ableitungen  $\frac{\partial R}{\partial \Re k}$  und  $\frac{\partial R}{\partial \Im k}$  leicht bestimmt werden und so zur Beschleunigung des iterativen Minimierungsvorgangs dienen. Der Ausdruck  $\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0$  wird durch Anwendung einer Sparse-**LU**-Zerlegung berechnet. Dieser Algorithmus berücksichtigt die speziellen Eigenschaften der Matrix  $\mathbf{M}$  (schwach besetzt, aber keine Bandmatrix; singular für ein exaktes  $k$ ) am besten.

Die Leitungsparametermatrizen werden aus den so berechneten Feldern mittels des *RI*-Modells bestimmt. Dieses Modell liefert für verlustlose Leitungssysteme die gleichen Leitungsparameter wie das *PI*-Modell. Im Fall eines verlustbehafteten, reziproken Leitungssystems ( $\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}$  symmetrisch) sind die Matrizen jedoch anders als beim *PI*-Modell stets symmetrisch, d. h. das *RI*-Modell stellt ein reziprokes Leitungsmodell dar.

## Abstract

In this thesis, a numerical method for the calculation of the electromagnetic characteristics of uniform transmission line systems will be presented. The method can be applied to shielded or unshielded configurations with anisotropic and lossy media. The transmission line cross section may consist of areas with arbitrary polygonal boundaries. For the specification of the geometry and the media properties of these areas, a convenient input language is available (see appendix C).

The presented method operates in the frequency domain and is capable of calculating the electromagnetic field distribution of propagating modes and the corresponding propagation constants. In addition, the frequency-dependent line parameter matrices  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$  and  $\mathbf{Z}_{\text{char}}$  can be obtained from the field distributions.

For this purpose, the transmission line cross section is subdivided into homogeneous areas. For each area, an equation system is set up using either the Finite Element Method (FEM) or the Boundary Element Method (BEM) and coupled to the equation systems of adjacent areas via the boundary conditions of the field components. The user may choose between FEM and BEM for each area, independently of the choice made for other areas. Thus, for the first time, a hybrid FEM/BEM approach for uniform transmission lines is available.

The implemented FEM utilizes two-dimensional edge elements for approximation of the transversal field components  $E_x$  and  $E_y$ , but classical nodal elements for approximation of the axial component  $E_z$ . This approach avoids appearance of spurious modes. The required domain triangulation is generated by an algorithm which adheres to a user-defined node density distribution and simultaneously avoids creation of triangles with very small or large angles.

The implemented BEM approximates the electromagnetic fields with a superposition of the fields of thin wire currents propagating in axial direction. The intersections of these wires with the cross section are located on area boundaries. As opposed to BEM- $E_z, H_z$  algorithms, this approach does not suffer from spurious modes. For  $E_z, H_z$  approaches, such modes will be shown to originate from solutions of the non-discretized governing equations for  $\kappa = 0$  ( $\omega^2 \varepsilon \mu = k^2$ ). As the governing equations are not equivalent to Maxwell's equations for  $\kappa = 0$ , these solutions do not satisfy Maxwell's equations. The discretization then shifts these solutions to  $\kappa$ -values  $\kappa \neq 0$ . This will be shown by analytically solving the discretized equations for a circular waveguide.

In contrast to nodal finite elements or BEM- $H_x, H_y$  approaches, these FEM and BEM versions are capable of computing TEM and quasi-TEM modes with high accuracy, even if field singularities occur at conducting edges.

The geometrical discretization is adapted iteratively to the calculated solutions. The local numerical error is estimated by calculating the gradients of the electrical field components in the FEM case and the tangential derivation of the virtual surface currents in the BEM case. The adaptive discretization enables the user to start with a mesh of equidistant nodes, even if the node density of the adapted mesh varies by a factor of 100 in the case of field singularities. Thus, the user only has to specify the number of nodes but does not need any knowledge about where to place the nodes.

The resulting equation system  $\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x} = 0$  will not be solved via the characteristic equation  $\det \mathbf{M}(k) = 0$  but by minimizing the function

$$R(k) = \frac{1}{|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|},$$

where  $\vec{x}_0$  is a start vector. With a suitable choice of  $\vec{x}_0$ , already found solutions can be suppressed, so that the calculation of several modes with similar or equal propagation constants becomes possible. Moreover, the derivations  $\frac{\partial R}{\partial \Re k}$  and  $\frac{\partial R}{\partial \Im k}$  required for accelerating the iterative minimization can be obtained easily. The term  $\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0$  is calculated by applying a sparse **LU** decomposition. This algorithm best suits the specific properties of the matrix  $\mathbf{M}$  (sparse but not a band matrix; singular for a solution  $k$ ).

The transmission line parameter matrices are extracted from the calculated fields using the *RI* model. For lossless line systems, this model yields the same results as the *PI* model. However, in the case of lossy, reciprocal line systems ( $\boldsymbol{\epsilon}$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  symmetrical), the obtained matrices are always symmetrical, in contrast to the *PI* model results. Thus, the *RI* model is a reciprocal transmission line model.

## Schlagwörter

hybrides FEM-BEM-Verfahren, nichtphysikalische Lösungen, frequenzabhängige Leitungsparameter

## Key words

hybrid FEM-BEM approach, spurious modes, frequency-dependent transmission line parameters,

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Problemstellung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen und Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1	Maxwellsche Gleichungen . . . . .	5
2.1.1	Ausgangsgleichungen . . . . .	5
2.1.2	Ableitungen der Ausgangsgleichungen für bestimmte Anwendungsfälle . . . . .	6
2.2	Stand der Technik . . . . .	7
2.2.1	Die Finite-Element-Methode (FEM) . . . . .	7
2.2.2	Die Boundary-Element-Methode (BEM) . . . . .	14
2.2.3	Die Finite-Differenzen-Methode (FDM) . . . . .	18
2.2.4	Die Methode der Geraden . . . . .	23
2.2.5	Die Spectral-Domain-Methode . . . . .	25
2.2.6	Die Transmission-Line-Matrix-Methode (TLM-Methode) . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Hybrides FEM/BEM-Verfahren zur Berechnung elektrischer Kenngrößen von Leitungsstrukturen</b>	<b>29</b>
3.1	Wahl der Methoden . . . . .	29
3.2	Entwicklung einer Finite-Element-Methode . . . . .	31
3.2.1	Auswahl der Elementfunktionen . . . . .	31
3.2.2	Diskretisierung der vektoriellen Wellengleichung mit edge elements . . . . .	35
3.2.3	Triangulierung mit ortsabhängiger Knotendichte . . . . .	38
3.3	Entwicklung einer Boundary-Element-Methode . . . . .	53
3.3.1	Überblick . . . . .	53
3.3.2	$\underline{E}_z, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}, \underline{H}_z, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen . . . . .	55
3.3.3	$\underline{E}_z, \underline{E}_s, \underline{H}_z, \underline{H}_s$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen . . . . .	56
3.3.4	$\underline{E}_z, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}, \underline{H}_z, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ -Formulierung mit Greenschen Funktionen als Ansatzfunktionen . . . . .	59
3.3.5	Modell zur Erklärung nichtphysikalischer Lösungen bei $\underline{E}_z, \underline{H}_z$ -Ansätzen . . . . .	62
3.3.6	$\underline{H}_x, \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial n}, \underline{H}_y, \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial n}$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen . . . . .	74
3.3.7	$\vec{n} \times \underline{\underline{E}}, \vec{n} \times \underline{\underline{H}}$ -Formulierung mit Greenschen Funktionen als Ansatzfunktionen . . . . .	75
3.4	Implementierung der FEM/BEM-Kopplung . . . . .	81
3.5	Numerische Lösung des Eigenwertproblems . . . . .	88
3.5.1	Beschreibung des Eigenwertproblems . . . . .	88
3.5.2	Lösung der Gleichung $\det \mathbf{M}(k) = 0$ . . . . .	89

3.5.3	Lösung durch inverse Iteration . . . . .	90
3.5.4	Berechnung der Nullstellen der Funktion $R(k)$ . . . . .	92
3.5.5	Elimination von Lösungen . . . . .	94
3.6	Adaptive Verbesserung der Diskretisierung . . . . .	97
3.6.1	Auswahl eines Fehlerkriteriums . . . . .	97
3.6.2	Berechnung von $d(x, y)$ . . . . .	99
3.6.3	Ablauf der adaptiven Netzgenerierung . . . . .	100
3.7	Berechnung von Leitungsparametern . . . . .	101
<b>4</b>	<b>Validierung</b>	<b>107</b>
4.1	Microstrip-Anordnung mit drei Mikrostreifen auf zwei Lagen . . . . .	107
4.2	Zwei asymmetrisch gekoppelte Mikrostreifen . . . . .	108
4.3	Koplanarer Wellenleiter mit $\text{LiNbO}_3$ -Substrat . . . . .	110
4.4	Mehrschichtige, anisotrope, verlustbehaftete Masselage . . . . .	113
4.5	Asymmetrischer, magnetooptischer Wellenleiter . . . . .	114
4.6	Dreiadriges, verlustbehaftetes Kabel . . . . .	116
4.7	Vergleich FEM/BEM anhand einer Microstrip-Anordnung . . . . .	118
<b>5</b>	<b>Ausblick</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Herleitungen</b>	<b>123</b>
A.1	Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen bei Knotenelementen . . . . .	123
A.2	Berechnung von TEM-Wellen mit edge elements . . . . .	126
A.3	Genauigkeit von edge elements in anisotropen Netzen . . . . .	127
A.4	Randintegralgleichung für $\vec{n} \times \vec{E}$ und $\vec{n} \times \vec{H}$ . . . . .	129
<b>B</b>	<b>Numerische Methoden</b>	<b>131</b>
B.1	Numerische Berechnung der BEM-Randintegrale . . . . .	131
B.2	Numerische Berechnung der Bessel-Funktionen $K_0$ und $K_1$ . . . . .	136
B.3	Berechnung des <i>RI</i> -Modells . . . . .	137
B.3.1	Allgemeine Bemerkungen . . . . .	137
B.3.2	Durchführung der Integrationen über FEM-Gebiete . . . . .	137
B.3.3	Durchführung der Integrationen über BEM-Gebiete . . . . .	139
<b>C</b>	<b>Definition einer Beschreibungssprache zur Spezifikation von Leitungsquerschnitten</b>	<b>143</b>
C.1	Übersicht . . . . .	143
C.2	Der <code>Control</code> -Block . . . . .	143
C.2.1	Die <code>frequency</code> -Anweisung . . . . .	143
C.2.2	Die <code>modes</code> -Anweisung . . . . .	144
C.2.3	Die <code>method</code> -Anweisung . . . . .	145
C.2.4	Die <code>iterations</code> -Anweisung . . . . .	145
C.2.5	Die <code>elements</code> -Anweisung . . . . .	145

C.2.6	Die <code>sing</code> -Anweisung . . . . .	146
C.2.7	Die <code>adaptive</code> -Anweisung . . . . .	146
C.3	Der <code>Die</code> -Block . . . . .	146
C.3.1	Die <code>eps</code> -Anweisung . . . . .	147
C.3.2	Die <code>eps_rel</code> -Anweisung . . . . .	147
C.3.3	Die <code>sigma</code> -Anweisung . . . . .	147
C.3.4	Die <code>mu</code> -Anweisung . . . . .	148
C.3.5	Die <code>mu_rel</code> -Anweisung . . . . .	148
C.3.6	Die <code>PEC</code> -Anweisung . . . . .	148
C.3.7	Die <code>bnd</code> -Anweisung . . . . .	148
C.3.8	Die <code>method</code> -Anweisung . . . . .	150
C.3.9	Die <code>elfactor</code> -Anweisung . . . . .	150
C.3.10	Die <code>sing</code> -Anweisung . . . . .	151
C.4	Der <code>Cond</code> -Block . . . . .	151
C.5	Der <code>Output</code> -Block . . . . .	151
C.5.1	Die <code>showmesh</code> -Anweisung . . . . .	151
C.5.2	Die <code>showprop</code> -Anweisung . . . . .	152
C.5.3	Die <code>showfield</code> -Anweisung . . . . .	152
<b>D</b>	<b>Verzeichnis der Formelsymbole und Abkürzungen</b>	<b>153</b>
D.1	Symbole . . . . .	153
D.2	Abkürzungen . . . . .	158
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>161</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>165</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>177</b>
	<b>Werdegang</b>	<b>179</b>



# 1 Einleitung und Problemstellung

Hersteller von elektrischen und elektronischen Systemen stehen heute einem immer schneller werdenden Wandel der Markt- und Wettbewerbssituation sowie der Kundenanforderungen gegenüber, was zu einer ständigen Verkürzung der Entwicklungszyklen zwingt. Dies wiederum kann nur erreicht werden, wenn Entwurfsfehler nicht erst im Prototypstadium, sondern bereits in früheren Entwurfsphasen erkannt werden, so daß zeit- und kostenintensive Redesigns vermieden werden.

Ein Bereich, der in diesem Zusammenhang in den letzten Jahren stark an Bedeutung gewonnen hat, ist in dem Problemfeld der *Elektromagnetischen Verträglichkeit (EMV)* zu sehen. Die diesem Bereich zuzuordnenden Störeffekte, wie z. B. Übersprechen (Crosstalk), Simultaneous Switching Noise (SSN) und Ab-/Einstrahlungsprobleme, haben in der Regel die Eigenschaft, bei Verkleinerung der Strukturgrößen der betrachteten Schaltung bzw. bei Erhöhung der Signalfrequenzen eine zunehmende Wirkung zu entfalten. Höhere Integrationsdichten und Verarbeitungsgeschwindigkeiten sind aber gerade die angestrebten Entwurfsziele, so daß bei einem immer größeren Anteil der Entwürfe EMV-Probleme auftreten. In Verbindung mit der oben erläuterten Tendenz zur Verkürzung der Entwicklungszyklen ergibt sich daraus die Notwendigkeit, bereits während des Entwurfs eines elektronischen Systems, also noch vor der Herstellung eines Prototypen, die elektromagnetische Verträglichkeit des Systems sicherzustellen. Hierfür ist der Einsatz geeigneter, rechnergestützter Werkzeuge zur umfassenden EMV-Analyse erforderlich.

Diese Problematik wurde ausführlich in dem MEDEA-Projekt A408 (Microelectronic System Design with Physical Constraints) und im MEDEA+-Projekt A509 (Microelectronic EMC System Design for High Density Interconnect and High Frequency Environment – MESDIE) auf europäischer Ebene adressiert. Beide Vorhaben hatten zum Ziel, für die EMV-Analyse mikroelektronischer Systeme unter industriellen Bedingungen – durch Zusammenarbeit im europäischen industriellen Verbund – die erforderlichen wissenschaftlichen Grundlagen zu schaffen und umzusetzen.

Zur Durchführung einer solchen Analyse (speziell bei Problemen der sogenannten Signalintegrität – SI) gehört – neben einer Vielzahl anderer Fragestellungen – die elektrische Charakterisierung der Übertragungsstrukturen des Systems, z. B. Leitungen in integrierten Schaltungen und auf Leiterplatten sowie Kabelverbindungen. Dabei treten unterschiedliche Gegebenheiten hinsichtlich Geometrie (rechteckige bzw. trapezförmige Leiterquerschnitte für ICs und Leiterplatten, runde Querschnitte bei Kabeln; Anordnung geschirmt/ungeschirmt; Strukturgrößen im Querschnitt zwischen  $0.1 \mu\text{m}$  und  $10 \text{ mm}$ ), Materialien (verlustbehaftet/verlustlos; isotrop/anisotrop) und Frequenzbereich (bis zu  $5 \text{ GHz}$  auf ICs bzw. ein Vielfaches davon bei Berücksichtigung von Oberwellen) auf, was ein sehr vielseitiges Charakterisierungs-

werkzeug erforderlich macht.

Die Berechnung der Übertragungseigenschaften derartiger Leitungsstrukturen erfolgt oftmals unter der Annahme, daß die axialen Feldkomponenten gegenüber den transversalen Komponenten vernachlässigbar klein sind (Quasi-TEM-Ansatz). Unter dieser Bedingung läßt sich aus den Maxwell'schen Gleichungen die zweidimensionale Laplace-Gleichung herleiten, deren Lösung die Ermittlung von Kapazitäts- und Induktivitätsbelägen der Leitungen ermöglicht.

Mit diesem Ansatz wird jedoch die Frequenzabhängigkeit der Leitungseigenschaften nicht erfaßt, was nicht in jedem Fall wünschenswert ist. Eine nicht mehr vernachlässigbare Frequenzabhängigkeit tritt beispielsweise bei Anwesenheit verlustbehafteter Materialien (z. B. Silizium und Aluminium in integrierten Schaltungen) auf. In solchen Fällen ist die Verwendung eines Verfahrens, das direkt auf den Maxwell'schen Gleichungen basiert (Full-Wave-Ansatz), vorteilhaft. Daher war im Rahmen dieser Arbeit ein Verfahren zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für Leitungsstrukturen zu entwickeln, deren Querschnitt in axialer Richtung konstant ist. Es erfolgt also eine Reduktion auf ein zweidimensionales Problem, indem lediglich der Leitungsquerschnitt diskretisiert wird. Dabei muß die Berechnung von Anordnungen sowohl mit verlustbehafteten als auch mit anisotropen Medien möglich sein. Anisotrope Substrate werden beispielsweise für integrierte Mikrowellenschaltungen verwendet (z. B. Bornitrid, Polytetrafluorethylen). Weiterhin können Masseflächen in Leiterplatten, die aus leitenden Fasern hergestellt werden, als homogene, verlustbehaftete, anisotrope Materialien modelliert werden (siehe Kap. 4.4).

Neben der Berechnung der Feldverteilung der ausbreitungsfähigen Moden für solche Anordnungen war außerdem die Extraktion von Leitungsparametern ( $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{Z}_{\text{char}}$ ) zu ermöglichen.

Zur Lösung dieser Aufgabe stehen eine Reihe von numerischen Verfahren zur Verfügung (siehe Kap. 2.2). Keines dieser Verfahren ist den anderen in jeder Hinsicht überlegen, aber bei bestimmten Geometrien kann sich die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Methoden deutlich unterscheiden. So führt beispielsweise die Verwendung der Methode der finiten Differenzen zu einer schnellen und speicherplatzsparenden Diskretisierung rechteckiger Gebiete. Sollen jedoch Bereiche, in denen eine starke Oszillation des Feldes zu erwarten ist, feiner diskretisiert werden, so ist die Methode der finiten Elemente (FEM) das geeignetere Verfahren. Zur Berücksichtigung des Einflusses der unbeschränkten Umgebung ungeschirmter Strukturen bietet sich dagegen die Boundary-Element-Methode (BEM) an, bei der das Feld nur auf dem Gebietsrand betrachtet wird. Das für eine gegebene Leitungsgeometrie optimale Verfahren wird also auf verschiedene Teilgebiete des Leitungsquerschnitts unterschiedliche Berechnungsmethoden anwenden. Ein derartiges Hybridverfahren wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelt und vorgestellt.

Damit der zur Verfügung stehende Speicherplatz und die Rechenleistung optimal genutzt werden, müssen die implementierten Methoden die Fähigkeit aufweisen, eine zunächst grobe Diskretisierung schrittweise adaptiv zu verfeinern. Eine adaptive Verfeinerung orientiert sich am Ergebnis, das die vorhergehende Diskretisierung geliefert hat, und verbessert diese nur dort, wo der geschätzte Berechnungsfehler noch zu hoch ist.

Die nachfolgend vorgestellte Problemlösung erfüllt vollständig die in den MEDEA-Projekten A408 und A509 (MESDIE) formulierten Forderungen nach wissenschaftlicher Durchdringung und einer umfassenden Vorbereitung für den industriellen Einsatz.



## 2 Theoretische Grundlagen und Stand der Technik

### 2.1 Maxwell'sche Gleichungen

#### 2.1.1 Ausgangsgleichungen

Die Maxwell'schen Gleichungen für makroskopische Materie lauten im SI-Einheitensystem unter Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems [2]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}. \quad (2.4)$$

Bei der Behandlung der Wellenausbreitung auf Leitungen ist es vorteilhaft, eine zweifache Fouriertransformation durchzuführen, und zwar bezüglich der longitudinalen Koordinate  $z$  (parallel zur Leitung) und der Zeit. Die Größen  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{J}$  und  $\varrho$  transformieren sich dann gemäß

$$\underline{X}(x, y, k, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(x, y, z, t) e^{-j(\omega t - kz)} dt dz, \quad (2.5)$$

$$X(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{X}(x, y, k, \omega) e^{j(\omega t - kz)} dk d\omega, \quad (2.6)$$

wobei  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz und  $k$  die (i. allg. komplexe) Ausbreitungskonstante der Welle darstellen. Wird außerdem berücksichtigt, daß die Operatoren  $\partial/\partial t$  und  $\partial/\partial z$  im Fourierraum wie  $j\omega$  bzw.  $-jk$  wirken, resultieren daraus die transformierten Maxwell'schen Gleichungen:

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \cdot \vec{D} = \varrho, \quad (2.7)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.8)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} = -j\omega \vec{B}, \quad (2.9)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D}. \quad (2.10)$$

mit

$$\vec{\nabla}^{(t)} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

wobei der Index „(t)“ für den transversalen Anteil (d. h.  $x$ - und  $y$ -Komponente) des jeweiligen Vektors steht.

Damit die in diesen Gleichungen auftretenden Feldgrößen eindeutig bestimmt sind, müssen noch Materialgleichungen hinzugefügt werden. In dieser Arbeit werden ausschließlich lineare Medien behandelt, die sich durch folgende Gleichungen beschreiben lassen:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \vec{E}, \quad (2.12)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \underline{\mu}_r \vec{H}, \quad (2.13)$$

$$\vec{J} = \underline{\sigma} \vec{E}. \quad (2.14)$$

Dabei ist  $\underline{\varepsilon}_r = \underline{\varepsilon}_r(x, y, \omega)$  der Tensor der relativen Permittivität,  $\underline{\mu}_r = \underline{\mu}_r(x, y, \omega)$  der Tensor der relativen Permeabilität und  $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}(x, y, \omega)$  der Leitfähigkeitstensor. Wegen der vorausgesetzten Invarianz des Leitungsquerschnitts gegenüber Translation in axialer Richtung sind die Elemente dieser Tensoren unabhängig von der axialen Koordinate  $z$ . Vernachlässigt werden Abweichungen vom Ohmschen Gesetz (2.14), die z. B. durch den anomalen Skin-Effekt hervorgerufen werden<sup>1</sup>.

Einsetzen der Materialgleichungen in die Gleichungen (2.7)–(2.10) liefert die Ausgangsgleichungen für alle weiteren Betrachtungen:

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)(\varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \vec{E}) = \underline{\rho}, \quad (2.15)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)(\mu_0 \underline{\mu}_r \vec{H}) = 0, \quad (2.16)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \underline{\mu}_r \vec{H}, \quad (2.17)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} = (\underline{\sigma} + j\omega \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r) \vec{E}. \quad (2.18)$$

### 2.1.2 Ableitungen der Ausgangsgleichungen für bestimmte Anwendungsfälle

Für  $\omega \neq 0$  lassen sich mit den Definitionen

$$\underline{\varepsilon} := \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r + \frac{\underline{\sigma}}{j\omega}, \quad \underline{\mu} := \mu_0 \underline{\mu}_r \quad (2.19)$$

die Gleichungen (2.17) und (2.18) folgendermaßen formulieren:

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} = -j\omega \underline{\mu} \vec{H}, \quad (2.20)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} = j\omega \underline{\varepsilon} \vec{E}. \quad (2.21)$$

<sup>1</sup>Der anomale Skin-Effekt kann bei Leitern mit kleiner Eindringtiefe  $\delta$  des Feldes auftreten. Solange  $\delta$  (und damit der Abstand, der für die räumliche Variation des Feldes charakteristisch ist) groß gegenüber der freien Weglänge der Leitungselektronen ist, behält das Ohmsche Gesetz (2.14) Gültigkeit. Ist diese Bedingung jedoch nicht mehr erfüllt, so muß das Ohmsche Gesetz durch eine räumlich nichtlokale Beziehung ersetzt werden [1, S. 362].

Dies ist ein gekoppeltes System partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung für  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ . Eine DGL 2. Ordnung läßt sich auch für  $\vec{H}$  allein ableiten, indem (2.21) nach  $\vec{E}$  aufgelöst und in (2.20) eingesetzt wird:

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \epsilon^{-1} [(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H}] - \omega^2 \mu \vec{H} = 0. \quad (2.22)$$

Eine ähnliche Gleichung gilt auch für  $\vec{E}$ :

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \mu^{-1} [(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E}] - \omega^2 \epsilon \vec{E} = 0. \quad (2.23)$$

Besteht eine zu berechnende Anordnung aus Materialien mit  $\mu_r = 1$ , was in der Praxis oft auftritt, ist das magnetische Feld  $\vec{H}$  eine stetige Funktion des Ortes auch an Übergängen zwischen zwei Medien, so daß bei Verwendung der Gleichung (2.22) die Approximation der gesuchten Lösung durch stetige Ansatzfunktionen erleichtert wird.

Sind die Materialkonstanten skalare Größen ( $\epsilon = \epsilon \mathbf{1}$ ,  $\mu = \mu \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}$  = Einheitsmatrix) und innerhalb eines Gebietes konstant, so läßt sich aus (2.22) unter Verwendung von (2.16) die vektorielle Helmholtz-Gleichung herleiten:

$$\Delta^{(t)} \vec{H} + (\omega^2 \epsilon \mu - k^2) \vec{H} = 0 \quad (2.24)$$

mit

$$\Delta^{(t)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.25)$$

Das Gleichungssystem für die gesamte Anordnung besteht dann aus den Helmholtz-Gleichungen für die homogenen Teilgebiete und den Stetigkeitsbedingungen, die diese Gebiete miteinander koppeln.

## 2.2 Stand der Technik

Im folgenden werden einige Verfahren, die zur numerischen Feldberechnung in Leitungssystemen eingesetzt werden, erläutert. Aktuelle Entwicklungen bezüglich dieser Verfahren werden aufgezeigt und diskutiert.

### 2.2.1 Die Finite-Element-Methode (FEM)

**Grundlagen.** Zur numerischen Lösung einer Differentialgleichung mit der Methode der finiten Elemente gibt es zwei unterschiedliche Zugänge, die jedoch in äquivalente Gleichungssysteme münden. Dabei handelt es sich um die Methode der gewichteten Residuen und um das Variationsverfahren. Beiden Verfahren gemeinsam ist die Approximation der gesuchten Funktion  $u$  durch ein Element  $\tilde{u}$  eines endlichdimensionalen Vektorraumes, d. h.

$$\tilde{u} = \sum_{q=1}^N \alpha_q u_q. \quad (2.26)$$

Die Basisfunktionen  $u_q$  werden als *Ansatzfunktionen* bezeichnet. Bei der FEM werden sie so gewählt, daß sie nur über Teilgebieten oder *Elementen*, in die das gesamte betrachtete Gebiet zerlegt ist, von Null verschieden sind. Als Elemente werden geometrisch einfache Teilgebiete wie Dreiecke und Rechtecke in der Ebene bzw. Tetraeder und Quader bei dreidimensionalen Problemen verwendet. In Abb. 2.1 ist die Aufteilung eines rechteckigen Grundgebietes in Dreieckselemente zu sehen. Eine einfache Wahl der Ansatzfunktionen über dieser Diskretisierung ist in Abb. 2.2 zu sehen. Die dort abgebildete Funktion  $u_q$  ist entsprechend für jede Stützstelle zu definieren. Mit diesem Satz von Ansatzfunktionen lassen sich stetige Funktionen darstellen, die zwischen den Stützstellen linear verlaufen. Der Ansatzkoeffizient  $\alpha_q$  entspricht dann dem Wert der approximierten Funktion an der Stützstelle  $q$ . In Verbindung mit solchen linearen Ansatzfunktionen werden die Dreieckselemente als lineare  $C^0$ -Elemente bezeichnet.

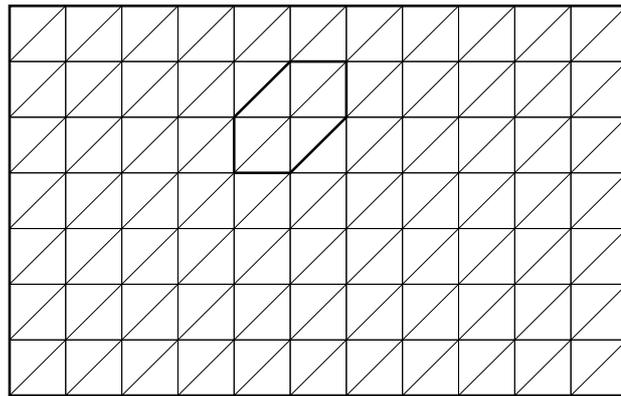


Abbildung 2.1: Triangulierung eines Rechtecks

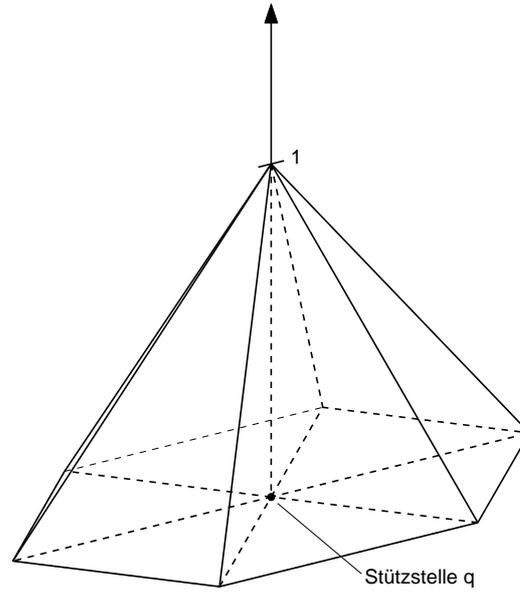
Sei nun  $\mathcal{L}u = f$  die in einem Gebiet  $A \subset \mathbb{R}^2$  zu lösende Differentialgleichung, wobei  $\mathcal{L}$  ein linearer Differentialoperator ist. Äquivalent dazu ist die Gleichung

$$\forall v \in V : \quad \langle v | \mathcal{L}u \rangle = \langle v | f \rangle \quad (2.27)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle f | g \rangle := \iint_A f^* \cdot g \, dA. \quad (2.28)$$

Die *Testfunktion*  $v$  ist Element des Vektorraums  $V$ , der den Definitionsbereich des Operators  $\mathcal{L}$  darstellt. Es ist hinreichend, in (2.27) für  $v$  die Basisfunktionen von  $V$  einzusetzen.

Abbildung 2.2: Ansatzfunktion  $u_q$  des linearen  $C^0$ -Elementes

**Die Methode der gewichteten Residuen.** Bei dieser Methode wird (2.27) diskretisiert, indem für  $u$  der Ansatz (2.26) eingesetzt wird<sup>2</sup>. Gleichung (2.27) kann dann jedoch nicht mehr für jedes beliebige  $v$  erfüllt werden, da ja nur noch endlich viele Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. Daher wird eine endliche Menge von Testfunktionen  $v_p$  verwendet:

$$\forall p, 1 \leq p \leq N : \sum_{q=1}^N \alpha_q \langle v_p | \mathcal{L}u_q \rangle = \langle v_p | f \rangle. \quad (2.29)$$

Diese sogenannten *Petrov-Galerkin-Gleichungen* bilden ein lineares Gleichungssystem für die Ansatzkoeffizienten  $\alpha_q$ . Der Spezialfall  $v_p = u_p$  liefert die *Galerkin-Gleichungen*:

$$\forall p, 1 \leq p \leq N : \sum_{q=1}^N \alpha_q \langle u_p | \mathcal{L}u_q \rangle = \langle u_p | f \rangle. \quad (2.30)$$

Die Methode der gewichteten Residuen wurde in der Vergangenheit häufig als *Momentenmethode* bezeichnet. Seit einigen Jahren wird dieser Begriff jedoch fast ausschließlich für die Behandlung von Strahlungs- und Streupro-

<sup>2</sup>Diese Vorgehensweise ist jedoch nur zulässig, sofern die approximierende Funktion  $\tilde{u}$  die gestellten Randbedingungen a priori erfüllt, da diese in (2.27) nicht enthalten sind. Genügt  $\tilde{u}$  den Randbedingungen nicht, muß die diskretisierte Gleichung um Randintegralterme erweitert werden.

blemen mit Hilfe von Randintegralgleichungsverfahren (Boundary-Element-Methode, siehe Kap. 2.2.2) verwendet. Daher findet der Begriff *Momentenmethode* im weiteren keine Anwendung.

**Das Variationsverfahren.** Ist der Operator  $\mathcal{L}$  selbstadjungiert ( $\langle v | \mathcal{L}u \rangle = \langle \mathcal{L}v | u \rangle$ ) und positiv definit ( $\langle u | \mathcal{L}u \rangle > 0$  für alle  $u \neq 0$ ), so ist (2.27) äquivalent zur Forderung, daß

$$F = \langle u | \mathcal{L}u \rangle - \langle f | u \rangle - \langle u | f \rangle \stackrel{!}{=} \min. \quad (2.31)$$

Dieses Variationsproblem wird wiederum durch Einsetzen des Ansatzes (2.26) gelöst (Ritz-Verfahren):

$$F = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \alpha_p^* \alpha_q \langle u_p | \mathcal{L}u_q \rangle - \sum_{p=1}^N \alpha_p \langle f | u_p \rangle - \sum_{p=1}^N \alpha_p^* \langle u_p | f \rangle \stackrel{!}{=} \min. \quad (2.32)$$

Um die Koeffizienten  $\alpha_q$  zu ermitteln, sind nun die Ableitungen nach den Real- und Imaginärteilen der  $\alpha_q$  zu bestimmen und gleich 0 zu setzen. Dies führt jedoch ebenfalls auf die Galerkin-Gleichungen (2.30).

Auch für den Fall nicht selbstadjungierter Operatoren können die Galerkin-Gleichungen hergeleitet werden, wenn das Funktional (2.31) in geeigneter Weise verallgemeinert wird [6]. Die Verwendung unterschiedlicher Ansatzfunktionen für die Ausgangsgleichung und ihre adjungierte Gleichung liefert dann die Petrov-Galerkin-Gleichungen. Damit besteht eine vollständige Analogie zwischen der Methode der gewichteten Residuen und dem Variationsansatz.

Weitere Ausführungen zu diesen beiden Verfahren finden sich in [5], [6] und [12].

**Spurious modes.** Ein wichtiger Aspekt bei der Entwicklung von FEM-Verfahren ist die Berücksichtigung der sogenannten *nichtphysikalischen Lösungen* (*spurious modes*). Dabei handelt es sich um Lösungen der diskretisierten Gleichung, die keiner Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zugeordnet werden können, also keine physikalische Bedeutung besitzen. Nach einer Untersuchung von LYNCH und PAULSEN [19] treten nichtphysikalische Lösungen bei der numerischen Behandlung der Gleichungen (2.20)–(2.23) auf, nicht jedoch im Fall der vektoriellen Helmholtz-Gleichung (2.24). Als Begründung hierfür wird in der Literatur (siehe z. B. [27] und darin zitierte Referenzen) die Tatsache gesehen, daß die Gleichungen (2.20)–(2.23) für den Fall  $\omega = 0$  durch den Gradienten einer beliebigen skalaren Funktion ( $\vec{E}$  bzw.  $\vec{H} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi$ ) gelöst werden. Kommt es aufgrund der Diskretisierung zu einer schlechten Approximation dieser Lösungen, so können diese bei Frequenzen  $\omega \neq 0$  auftreten. Im Gegensatz dazu gibt SVEDIN [25] ein

Verfahren an, das von den Gleichungen (2.20) und (2.21) ausgeht, aber keine nichtphysikalischen Lösungen liefern soll.

Eine schon früh entwickelte Methode zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen besteht in der Einführung eines sogenannten Penalty-Terms in den Variationsansatz (2.31) [23]. Die Methode beruht auf der Beobachtung, daß bei nichtphysikalischen Lösungen das  $\vec{B}$ -Feld nicht quellenfrei ist ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$ ). Der Zusatzterm „bestraft“ Lösungen mit nicht verschwindender Divergenz und führt daher bei Minimierung des Variationsausdrucks zu einer quellenfreien Lösung. Der Nachteil dieser Methode besteht in der Notwendigkeit, einen Parameter zu wählen, der den Einfluß des Zusatzterms festlegt. Ein zu großer oder zu kleiner Parameter führt nicht zur erwünschten Verbesserung, sondern kann sogar schlechtere Resultate hervorrufen. Diesen Nachteil vermeidet das in [22] beschriebene Verfahren, bei dem die Bedingung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  direkt in die zugrundeliegende Gleichung (2.23) eingebaut wird. Auf dieses Verfahren wird in Anhang A.1 näher eingegangen.

Eine andere Methode beruht auf der Auflösung der Gleichung (2.8) nach  $\underline{B}_z$  [16]:

$$\underline{B}_z = \frac{1}{jk} \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{B}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{B}_y \right). \quad (2.33)$$

Damit lassen sich alle Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes durch  $\underline{B}_x$  und  $\underline{B}_y$  ausdrücken. Die Quellenfreiheit des  $\vec{B}$ -Feldes ist dann automatisch gewährleistet. Gleichung (2.33) läßt sich jedoch nur für  $k \neq 0$  anwenden, d. h.  $\omega$  darf nicht der Abschneidefrequenz einer der Moden entsprechen.

Neben diesen auf Feldgleichungen beruhenden Ansätzen läßt sich das Problem auch durch Verwendung von Potentialen umgehen. So vermeiden BARDI und BIRO [13] nichtphysikalische Lösungen durch Darstellung der Felder mittels des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$  und des skalaren elektrischen Potentials  $\phi$ .

Die Lösungsansätze sind jedoch nicht auf Auswahl bzw. Modifikation der Ausgangsgleichungen beschränkt; auch die Diskretisierung dieser Gleichungen kann optimiert werden. Eine in den letzten Jahren populär gewordene Methode ist die Verwendung von Kantenelementen (edge elements). Bei diesen Elementen entsprechen die Ansatzkoeffizienten den Tangentialkomponenten der Felder längs der Elementkanten, im Gegensatz zu den Knotenelementen (z. B.  $C^0$ -Element in Abb. 2.2), deren Ansatzkoeffizienten Feldkomponenten an den Elementecken darstellen. Der Einsatz der Kantenelemente hat in einigen Fällen zur Beseitigung nichtphysikalischer Lösungen geführt (siehe z. B. [15, 17]). MUR zeigt jedoch in [20] und [21], daß auch bei Verwendung von Kantenelementen derartige Lösungen auftreten können. Dies hat seinen Grund darin, daß sich die Normalkomponenten der Felder beim Übergang von einem Kantenelement zu einem Nachbarelement sprunghaft ändern

können, obwohl sie in homogenen Medien einen stetigen Verlauf aufweisen sollten, was durch die herkömmlichen Elemente auch erzwungen wird.

**Berechnung ungeschirmter Anordnungen.** Ein weiteres Problem der FEM ist in der Tatsache begründet, daß sich mit einer endlichen Anzahl endlich großer (finiter) Elemente auch nur endliche Gebiete diskretisieren lassen. Bei Anordnungen ohne metallische Schirmung ist jedoch die Einbeziehung des unendlich großen Außenraumes erforderlich (Beispiel: Leitung auf der Außenlage eines PCB<sup>3</sup>). Eine einfache Möglichkeit zur Lösung dieses Problems besteht in der Einführung einer künstlichen Begrenzung des FEM-Netzes, auf der die Felder sogenannte *absorbierende Randbedingungen* erfüllen müssen (siehe z. B. [88, 93, 98]). Diese Randbedingungen sollen das physikalische Verhalten der auslaufenden Wellen nachbilden und so vermeiden, daß es zu Reflexionen an der künstlichen Begrenzung kommt, was z. B. der Fall wäre, wenn die Begrenzung ein idealer Leiter wäre. Damit die durch die absorbierenden Randbedingungen eingeführte Näherung das Ergebnis nicht zu stark beeinträchtigt, darf die Begrenzung nicht zu dicht an der eigentlichen Anordnung liegen.

Bei der MEI-Methode (Measured Equation of Invariance) [95] kommen Randbedingungen der Form

$$\sum_i a_i \phi_i = 0 \quad (2.34)$$

zum Einsatz, wobei  $\phi_i$  das Potential am Knoten  $i$  ist. Die Summation erstreckt sich über einen Randknoten und seine Nachbarknoten. Die Grundlage der MEI-Methode ist die Annahme, daß die Koeffizienten  $a_i$  unabhängig von der Anregung und der Geometrie des Problems sind, so daß sie mit Hilfe der Greenschen Funktion des freien Raumes berechnet werden können.

Eine sehr erfolgreiche Methode wurde 1994 von BÉRENGER [89] angegeben. Hier wird die zu berechnende Anordnung mit einer Schale eines nicht-physikalischen Mediums (Perfectly Matched Layer – PML) umgeben. Die Wellenausbreitung im PML wird durch modifizierte Maxwellsche Gleichungen beschrieben. Wesentliches Merkmal dieser Modifikation ist für TE-Wellen die Aufspaltung der  $z$ -Komponente des  $\vec{H}$ -Feldes in zwei Komponenten  $H_{zx}$  und  $H_{zy}$  (im TM-Fall wird  $E_z$  aufgespalten). Dadurch wird erreicht, daß der Reflexionsfaktor beim Übergang Vakuum-PML für alle Frequenzen und Einfallswinkel theoretisch gleich 0 wird, obwohl die Welle im PML senkrecht zur Grenzfläche exponentiell gedämpft wird. Durch die Diskretisierung geht diese Eigenschaft allerdings verloren, und es entstehen von 0 verschiedene Reflexionsfaktoren, die mit zunehmender Leitfähigkeit des PML ansteigen; in ungünstigen Fällen kann es sogar zur Totalreflexion kommen [90]. Je kleiner

<sup>3</sup>PCB = Printed Circuit Board = gedruckte Leiterplatte

die Leitfähigkeit ist, desto größer muß allerdings die Dicke des PML gewählt werden ( $\Rightarrow$  Erhöhung der Anzahl der Unbekannten). Ein möglicher Ausweg besteht darin, die Leitfähigkeit mit zunehmender Entfernung von der Grenzfläche ausgehend von 0 ansteigen zu lassen. In [92] wird eine Strategie zur Optimierung der  $N$  Leitfähigkeiten eines  $N$ -schichtigen PML vorgestellt. Für  $N$   $(f, \alpha)$ -Paare ( $f$  = Frequenz,  $\alpha$  = Einfallswinkel) wird der Reflexionsfaktor sogar trotz Diskretisierung 0.

In [99] wird gezeigt, daß sich auch Medien, welche die nicht modifizierten Maxwell'schen Gleichungen erfüllen, wie ein PML verhalten können. Dabei handelt es sich um elektrisch und magnetisch leitfähige und anisotrope Medien. Auch im Fall verlustbehafteter Anordnungen können solche Medien definiert werden [102].

Das Verfahren der *transparenten Randbedingungen* (TAB – Transparent Absorbing Boundary) [97] bietet ebenfalls – zumindest theoretisch – verschwindende Reflexionsfaktoren am Gebietsrand. Grundlage ist die Ersetzung der gesuchten Felder  $\vec{E}_0(\vec{r})$  und  $\vec{H}_0(\vec{r})$  durch Hilfsfelder  $\vec{E}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot \vec{E}_0(\vec{r})$  und  $\vec{H}(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot \vec{H}_0(\vec{r})$ , wobei  $f(\vec{r})$  eine stetig differenzierbare Funktion ist, die auf dem Gebietsrand 0 wird. Die Absorption findet also schon innerhalb der Anordnung selbst statt und nicht in einem separaten umgebenden Medium. Einsetzen dieser Definitionsgleichungen in die Maxwell'schen Gleichungen für  $\vec{E}_0$  und  $\vec{H}_0$  liefert modifizierte Maxwell'sche Gleichungen für  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ . Diese führen dann nicht mehr zu DGL der Form (2.22) oder (2.23), sondern zu wesentlich komplizierteren Gleichungen. Bei entsprechender Wahl der Funktion  $f(\vec{r})$  können PML-Medien als Sonderfall der TAB-Methode interpretiert werden.

Das Problem der Wahl geeigneter Randbedingungen und der Positionierung der künstlichen Begrenzung wird vermieden, wenn der Außenraum nicht mit der FEM, sondern mit einer anderen Methode behandelt wird, die nicht auf endliche Gebiete beschränkt ist, während die eigentliche Anordnung weiterhin mit der FEM diskretisiert wird (Hybridverfahren). Besonders häufig wird die Kombination aus FEM und Boundary-Element-Methode (BEM, Kap. 2.2.2) eingesetzt (siehe beispielsweise [83, 84, 85, 86, 87]). Wird die Grenzfläche zwischen dem mit der BEM und dem mit der FEM diskretisierten Gebiet kugelförmig (bzw. kreisförmig bei zweidimensionalen Problemen) gewählt, so kann der entsprechende Teil der Systemmatrix durch Ausnutzung der Rotationsinvarianz sehr schnell berechnet werden [80]. Die Anwendung eines FEM/BEM-Hybridverfahrens auf die Berechnung der Ausbreitungskonstanten von Leitungssystemen wurde in der Literatur bislang nicht beschrieben.

Anstatt eine künstliche Netzbegrenzung einzuführen, ist es auch möglich, ein unendliches großes FEM-Netz zu konstruieren. So verwendet SVEDIN infinite Elemente, die in einer Richtung unendlich ausgedehnt sind. Die Abhängigkeit des Feldes von der entsprechenden Koordinate wird dabei

durch asymptotisch richtige Ausdrücke angenähert [100]. MATSUHARA et al. hingegen transformieren den unendlichen Außenraum in den Einheitskreis und diskretisieren das dann endliche Gebiet mit den üblichen Methoden [94].

Eine umfassende Übersicht über Verfahren zur Berechnung ungeschirmter Strukturen mit der FEM wird in [91] gegeben.

**Behandlung von Singularitäten.** Ebenfalls wichtig für die Anwendung der FEM für Feldberechnungen ist die Frage nach der numerischen Behandlung von leitenden Ecken, an denen Feldsingularitäten auftreten können. In [24] wird die Umgebung solcher Ecken mit sogenannten Superelementen diskretisiert. Diesen Elementen liegen Ansatzfunktionen zugrunde, die an der betreffenden Ecke selbst singularär werden und so die Feldsingularität nachbilden können. Die Ansatzkoeffizienten bleiben dabei endlich.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der Anwendung einer konformen Abbildung, die bewirkt, daß die Lösungsfunktion im Bildbereich keine Singularitäten mehr enthält [14].

Verbessern läßt sich die Situation auch durch Verwendung der oben diskutierten Kantenelemente, da bei diesen Elementen keine Stützstellen direkt auf der Ecke, also auf dem singulären Punkt, positioniert werden [15].

Ein inzwischen recht verbreitetes Verfahren ist die adaptive Verfeinerung des Netzes. Bei dieser Methode wird das Gleichungssystem zunächst für ein relativ grobmaschiges Netz gelöst. Anhand der erhaltenen Lösung wird dann abgeschätzt, an welchen Stellen des Netzes der Diskretisierungsfehler noch zu groß ist. Dort wird das Netz dann verfeinert. Eine mögliche Implementierung dieser Vorgehensweise ist in [29] beschrieben.

### 2.2.2 Die Boundary-Element-Methode (BEM)

**Herleitung einer Randintegralgleichung.** Die Lösung der Differentialgleichung  $\mathcal{L}u = f$  mit Hilfe der BEM basiert ebenfalls auf dem Ansatz (2.27). Die linke Seite von (2.27) wird nun solange partiell integriert, bis keine Ableitungen von  $u$  mehr vorkommen. Nach der verallgemeinerten Greenschen Formel [36, S. 4] mündet diese Vorgehensweise stets in eine Gleichung der Form

$$\langle v | \mathcal{L}u - f \rangle_A = \langle \mathcal{L}^+ v | u \rangle_A - \langle v | f \rangle_A + \left\langle \vec{\mathcal{F}}v \left| \vec{\mathcal{G}}u \right. \right\rangle_{\partial A} - \left\langle \vec{\mathcal{G}}v \left| \vec{\mathcal{F}}u \right. \right\rangle_{\partial A} \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.35)$$

Dabei sind  $\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\mathcal{G}}$  i. allg. Vektoren, deren Elemente Operatoren sind<sup>4</sup>. Die Indizes  $A$  und  $\partial A$  geben das Gebiet an, über das bei der Berechnung des Skalarproduktes nach (2.28) integriert wird<sup>5</sup>. Die beiden letzten Skalarproduk-

<sup>4</sup> $\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\mathcal{G}}$  sind Vektoren, falls  $\mathcal{L}$  Ableitungen höherer Ordnung als 2 enthält, und Skalare im anderen Fall.

<sup>5</sup> $\partial A$  steht für den Rand des Gebietes  $A$ .

te stellen demnach Randintegralterme dar.  $\mathcal{L}^+$  bezeichnet den adjungierten Operator zum Operator  $\mathcal{L}$ . Gleichung (2.35) kann als Definitionsgleichung für  $\mathcal{L}^+$  angesehen werden.

Die Randbedingungen des Problems werden zweckmäßigerweise mit Hilfe der Operatoren  $\vec{\mathcal{F}}$  und  $\vec{\mathcal{G}}$  formuliert:

$$\vec{\mathcal{F}}u = \vec{F} \quad (\text{wesentliche Randbedingungen}), \quad (2.36)$$

$$\vec{\mathcal{G}}u = \vec{G} \quad (\text{natürliche Randbedingungen}). \quad (2.37)$$

Um ausgehend von (2.35) zu einer Gleichung zu gelangen, in der die gesuchte Funktion  $u$  nur noch in Randintegralen vorkommt, wird die Testfunktion  $v$  so gewählt, daß

$$\mathcal{L}^+v = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_p), \quad (2.38)$$

wobei  $\vec{r}_p$  ein beliebiger Aufpunkt ist. Die für die Lösungsfunktion  $u$  geforderten Randbedingungen werden der Funktion  $v$  dabei nicht auferlegt. Die Funktion  $v^*$  ist dann die *Greensche Funktion des freien Raumes*. Durch Einsetzen in (2.35) entsteht eine *Fredholmsche Integralgleichung*:

$$c(\vec{r}_p)u(\vec{r}_p) + \langle v | f \rangle_A = \langle \vec{\mathcal{F}}v | \vec{\mathcal{G}}u \rangle_{\partial A} - \langle \vec{\mathcal{G}}v | \vec{\mathcal{F}}u \rangle_{\partial A}, \quad (2.39)$$

$$c(\vec{r}_p) = \iint_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_p) dA. \quad (2.40)$$

$c(\vec{r}_p)$  ist 0, wenn der Punkt  $\vec{r}_p$  außerhalb des Gebietes  $A$  liegt, und 1, wenn er innerhalb liegt. Ist  $\vec{r}_p$  ein Randpunkt von  $A$ , nimmt  $c(\vec{r}_p)$  einen Wert zwischen 0 und 1 an (0.5, falls der Rand am Punkt  $\vec{r}_p$  glatt ist). Gleichung (2.39) besagt also, daß  $u$  aus den Funktionswerten von  $\vec{\mathcal{F}}u$  und  $\vec{\mathcal{G}}u$  auf dem Rand von  $A$  für jeden Punkt des Gebietsinneren berechnet werden kann. Die Lösung von (2.39) muß also zunächst nur auf dem Rand, d. h. für alle  $\vec{r}_p \in \partial A$ , bestimmt werden. Dazu werden die Funktionen  $u$ ,  $\vec{\mathcal{F}}u$  und  $\vec{\mathcal{G}}u$  durch Linearkombinationen aus Ansatzfunktionen approximiert, die nur auf dem Rand definiert sind und außerhalb der Randelemente, denen sie zugeordnet sind, verschwinden. Im Fall der Laplace-Gleichung beispielsweise ( $\mathcal{L} = \Delta$ ) ist  $\mathcal{F}u = u$  und  $\mathcal{G}u = \partial u / \partial n$  (aus  $\vec{\mathcal{F}}$  und  $\vec{\mathcal{G}}$  werden die skalaren Operatoren  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$ , da die Laplace-Gleichung nur Ableitungen maximal 2. Ordnung enthält). Es müssen also lediglich die Funktionen  $u$  und  $\partial u / \partial n$  entlang des Randes approximiert werden. Nach Einsetzen der Approximationen in (2.39) können die noch unbekanntenen Ansatzkoeffizienten vor die Integrale gezogen werden. Unter dem Integralzeichen stehen dann nur noch Ansatzfunktionen, so daß die verbleibenden Integrale berechnet werden können.

**Galerkin-Ansatz, point matching.** Da die Anzahl der Ansatzkoeffizienten endlich ist, kann (2.39) nicht für jeden Punkt  $\vec{r}_p$  des Gebietsrandes erfüllt werden. Beim *point matching* wird für  $\vec{r}_p$  nur eine entsprechende Anzahl von Randpunkten eingesetzt, während beim Galerkin-Ansatz Gleichung (2.39) mit entsprechend vielen, linear unabhängigen Testfunktionen  $w_i(\vec{r}_p)$  multipliziert und nochmals über den Rand integriert wird, wobei  $\vec{r}_p$  die Integrationsvariable ist. Sind die  $w_i$  Delta-Funktionen, entspricht der Galerkin-Ansatz dem point matching. Beide Fälle führen zu einem linearen Gleichungssystem für die Ansatzkoeffizienten.

Beim point matching können für  $\vec{r}_p$  statt Randpunkten auch Punkte außerhalb des betrachteten Gebietes eingesetzt werden. In diesem Fall ist  $c(\vec{r}_p) = 0$ , so daß in der zu lösenden Randintegralgleichung (2.39) die gesuchte Funktion  $u$  nur noch unter dem Integralzeichen vorkommt. (2.39) stellt dann eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art dar (für  $c(\vec{r}_p) \neq 0$  handelt es sich um eine Integralgleichung zweiter Art). Durch diese Technik entfällt die Notwendigkeit, über die Singularität der Greenschen Funktion bei  $\vec{r} = \vec{r}_p$  zu integrieren [36, Kap. 6].

Anstelle einer Greenschen Funktion, die den Ansatz (2.38) erfüllt, kann für  $v$  auch eine Funktion eingesetzt werden, die der homogenen Gleichung  $\mathcal{L}^+v = 0$  genügt, wobei die Randbedingungen des Ausgangsproblems nicht erfüllt werden müssen. In (2.39) entfällt dann der erste Term der linken Seite, so daß wiederum eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art entsteht. Solche Gleichungen können jedoch zu numerischen Problemen führen, da die resultierenden Systemmatrizen keine Diagonaldominanz mehr aufweisen und daher schlecht konditioniert sein können [37, S. 61].

**Verwendung spezieller Greenscher Funktionen.** Soll das numerische Verfahren auf eine bestimmte Klasse von Anordnungen angewendet werden, so kann anstatt der Greenschen Funktion des freien Raumes auch eine Greensche Funktion konstruiert werden, die bereits charakteristische Eigenschaften der betrachteten Klasse berücksichtigt. So kommen bei Verfahren für Anordnungen mit geschichteten Medien üblicherweise Greensche Funktionen zum Einsatz, die das Feld einer Punktquelle für die betreffende Schichtstruktur beschreiben, so daß bei der Diskretisierung der Anordnung lediglich Inhomogenitäten und Leitungsstrukturen betrachtet werden müssen. Die Inhomogenitäten können dabei auch mit einer FEM diskretisiert werden, wie EIBERT und HANSEN in [83] zeigen.

Die Berechnung derartiger Greenscher Funktionen kann durch Auswertung eines Superpositionsintegrals über Lösungen der Wellengleichung in zylindrischen Koordinaten erfolgen (Sommerfeld-Ansatz). Je nach Abstand  $d$  von der Punktquelle kommen verschiedene Integrationstechniken zum Einsatz: die Sattelpunktmethode ( $d \gg \lambda$ ), numerische Ansätze ( $0.1\lambda < d < 3\lambda$ ) oder Approximationsformeln ( $d \ll \lambda$ ), die physikalisch als Spiegelladungs-

verfahren gedeutet werden können [40, Kap. 2.4].

Die numerische Integration wird durch den Umstand erschwert, daß der komplexe Integrand Verzweigungspunkte und Pole besitzt, die für verlustlose Anordnungen auf der reellen Achse liegen. Weiterhin gibt es Probleme mit divergierenden oder schlecht konvergierenden Integralen, die durch Aufspaltung in einen analytischen und einen schneller konvergierenden numerischen Anteil behoben werden können [40, Kap. 2.4.3.3].

**Behandlung von Singularitäten.** Ein für die BEM wichtiges Thema ist die Behandlung von Singularitäten an den Kanten idealer Leiter. Die Ansätze zur Lösung dieses Problems sind mit den für die FEM entwickelten Strategien (Kap. 2.2.1) durchaus vergleichbar. So schlagen LEAN und WEXLER [44] vor, den asymptotischen Verlauf der Singularität in die Ansatzfunktionen einfließen zu lassen. Einen ähnlichen Weg beschreiten INGHAM et al. [42], indem sie das Feld in der Nähe der Singularität durch die ersten Terme einer Reihenentwicklung approximieren und dann ein BEM-Gleichungssystem für die Differenz zwischen der gesuchten Funktion und der Approximationsfunktion aufstellen. Die Aufspaltung der Lösung in einen singulären und einen regulären Teil ist auch Basis des Ansatzes von CECCHINI et al. [38].

Wie im Fall der FEM lassen sich die Singularitäten auch bei Verwendung der BEM durch eine konforme Abbildung wegtransformieren, wie in [41] gezeigt wird. Voraussetzung hierfür ist jedoch, daß die zu lösende DGL die Laplace-Gleichung ist.

CHANDLER [39] hat Konvergenzuntersuchungen für Gebietsranddiskretisierungen durchgeführt, die eine abnehmende Randelementlänge bei Annäherung an eine Ecke des Gebietes beinhalten. Er hat gezeigt, daß bei kontinuierlicher Verfeinerung der Diskretisierung eine ebenso schnelle Konvergenz wie für Gebiete mit glattem Rand erzielt wird, wenn die Elementlänge durch Funktionen einer bestimmten Klasse beschrieben werden kann.

Mit variablen Elementlängen arbeitet auch die von JOHN und REMMERT [43] entwickelte Methode, bei der die Elementverteilung in mehreren Iterationsschritten adaptiv verfeinert wird. Die Verfeinerung findet im wesentlichen dort statt, wo die im vorhergehenden Iterationsschritt berechnete Lösung hohe Amplituden aufweist. Dadurch werden in die Nähe von Singularitäten besonders viele Elemente gelegt. Aber auch nichtsinguläre Peaks der Lösungsfunktion (die z. B. auf Masselagen von Leiterplatten in der Nähe signalführender Leiter auftreten) werden auf diese Weise berücksichtigt.

**Ansatz- und Testfunktionen.** Als Ansatz- und Testfunktionen (Funktionen  $w_i(\vec{r}_p)$  – siehe oben) werden bei der BEM üblicherweise konstante, lineare, quadratische und kubische Polynome eingesetzt, wobei die drei letztgenannten als kontinuierliche Ansatzfunktionen bezeichnet werden, da die

mit ihnen modellierten Funktionen stetig sind. Im Fall der oben genannten Singularitäten, die ja Unstetigkeitsstellen darstellen, können kontinuierliche Ansatzfunktionen jedoch zu numerischen Schwierigkeiten führen. Einen Ausweg bieten partiell diskontinuierliche Elemente, bei denen der Funktionswert nur an einem Endpunkt des Elementes und an einem oder mehreren (je nach Grad der verwendeten Polynome) auf dem Element liegenden Punkten festgelegt ist. Auf diese Weise wird am anderen Endpunkt, der dem Ort der Singularität entspricht, eine Unstetigkeitsstelle zugelassen [36, Kap. 6].

Werden Polynome als Ansatzfunktionen verwendet, muß nicht notwendigerweise das Galerkin-Verfahren mit entsprechenden Testfunktionen angewendet werden. Auch point matching kann eingesetzt werden: SARANEN und WENDLAND [46] haben gezeigt, daß für diese Kombination Konvergenz zu erwarten ist.

Einige Autoren verwenden neben Polynomen auch Funktionen anderer Klassen. So hat ARNOLD [35] gezeigt, daß die Näherungslösung bei Verwendung von Polynomen als Ansatzfunktionen und von trigonometrischen Funktionen als Testfunktionen exponentiell konvergiert. RUOTSALAINEN und SARANEN [45] verwenden Polynome als Testfunktionen und Delta-Funktionen als Ansatzfunktionen und können unter Bedingungen, die allgemeiner als bei herkömmlichen Verfahren sind, Konvergenz nachweisen.

### 2.2.3 Die Finite-Differenzen-Methode (FDM)

**Grundlagen.** Die Finite-Differenzen-Methode ist eine im Vergleich zu anderen Verfahren leicht zu implementierende Methode, zumindest solange ihre Anwendung auf die Behandlung von Körpern bzw. Flächen beschränkt wird, deren Begrenzungsflächen bzw. -linien parallel zu den Koordinatenebenen bzw. -achsen sind. Ist das der Fall, stellt die FDM ein schnelles und speicherplatzsparendes Verfahren dar.

Zur Erläuterung der FDM werde ein zweidimensionales, rechteckiges Gebiet betrachtet, auf dem eine Differentialgleichung zu lösen ist. In dieses Gebiet wird nun ein Gitter aus waagerechten und senkrechten Linien gelegt, die im einfachsten Fall äquidistant sind. Dann wird die zu lösende Differentialgleichung für jeden Knoten, also für jeden Kreuzungspunkt der Gitterlinien, in eine Differenzgleichung umgewandelt, indem die in der Gleichung auftretenden Differentialquotienten durch Anwendung geeigneter Näherungsformeln mit Differenzenquotienten approximiert werden. Bei Verwendung der Näherungsformel

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_0} \approx \frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} \quad (2.41)$$

läßt sich beispielsweise die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \kappa^2 u = 0 \quad (2.42)$$

am Knoten  $(i, j)$  (Schnittpunkt der  $i$ ten senkrechten mit der  $j$ ten waagerechten Gitterlinie) durch die Differenzengleichung

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + (\kappa^2 h^2 - 4)u_{i,j} = 0 \quad (2.43)$$

annähern, wobei  $h$  der Abstand der Gitterlinien ist. Wird diese Gleichung für alle  $N$  Knoten des Gitters unter Berücksichtigung der Randbedingungen aufgestellt, führt dies zu einem linearen Gleichungssystem mit  $N$  Unbekannten. Die Systemmatrix ist, wie auch im Fall der FEM, schwach besetzt.

Gleichung (2.41) stellt eine für allgemeine Funktionen  $u(x)$  geeignete Näherung dar, die jedoch so modifiziert werden kann, daß sich bei Anwendung auf Lösungen der Helmholtz-Gleichung (2.42) ein geringerer Fehler ergibt [53].

**Inhomogene Medien.** Die oben angegebene Helmholtz-Gleichung gilt für homogene Medien. Für die Behandlung von Anordnungen mit ortsabhängiger Permittivität oder Permeabilität gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Ortsabhängigkeit von  $\varepsilon$  und  $\mu$  wird approximiert, indem für jede Zelle des Gitters ein jeweils konstantes  $\varepsilon$  und  $\mu$  angenommen wird. Innerhalb jeder Zelle gelten dann nach wie vor alle für homogene Medien hergeleiteten Gleichungen, wie z. B. Helmholtz- oder Laplace-Gleichung. Die Felder in den Zellen müssen jedoch über die Stetigkeitsbedingungen für die Tangential- und Normalkomponenten miteinander verkoppelt werden. Eine solche Vorgehensweise wird in [49] ausführlich dargestellt.
2. Es werden Feldgleichungen gewählt, die von vornherein für Medien mit ortsabhängigen Eigenschaften gelten, z. B. die Maxwell'schen Gleichungen (2.20) und (2.21) (siehe Seite 6) oder Gleichung (2.22). In diesen Gleichungen sind lediglich die Differential- durch Differenzenquotienten zu ersetzen. Die Stetigkeitsbedingungen müssen dann nicht mehr berücksichtigt werden. Diesen Weg hat unter anderem WEILAND [57] beschritten.

Beide Ansätze lassen auch die Berechnung anisotroper Medien zu, wie in den beiden zitierten Arbeiten gezeigt wird.

**Form der Ausgangsgleichungen.** Um die FDM anwenden zu können, müssen die Feldgleichungen nicht in der üblichen differentiellen Form vorliegen. So werden in [48] die Maxwell'schen Gleichungen in Integralform diskretisiert, wobei die auftretenden Linien- und Flächenintegrale durch Summen approximiert werden. Ein anderer möglicher Zugang besteht in der Verwendung eines Variationsansatzes. Hierzu ist ein Funktional zu bestimmen, das für die gesuchte Lösung ein Minimum annimmt (siehe Seite 10). Dieses Minimum kann ermittelt werden, indem das Funktional diskretisiert wird und die Ableitungen des so erhaltenen Ausdrucks nach den Unbekannten gleich 0 gesetzt werden. Die Diskretisierung des Funktionals kann nun auch auf einem FDM-Gitter anstelle eines FEM-Netzes erfolgen, indem Integrale wie bei der Behandlung der Maxwell'schen Gleichungen in Integralform durch Summen ersetzt werden. Dieses Verfahren haben z. B. SCHWEIG und BRIDGES angewendet [54].

**Nichtäquidistante Gitterlinien.** Die in (2.43) angegebene diskretisierte Form der Helmholtz-Gleichung gilt für den Fall äquidistanter Gitterlinien. Dies ist jedoch keine zwingende Voraussetzung; der Gitterlinienabstand kann variiert werden, um das Gitter an Orten mit starker Veränderlichkeit des Feldes zu verfeinern. Dazu muß die symmetrische Näherungsformel (2.41) durch entsprechende asymmetrische Formeln ersetzt werden. Diese haben jedoch nach WEXLER [12, S. 422] den Nachteil reduzierter Genauigkeit. Außerdem können bei iterativen Gleichungslösern Konvergenzprobleme auftreten, wenn sich benachbarte Zellen in ihrer Größe zu stark unterscheiden [50].

**Diskretisierung nichtorthogonaler Strukturen.** Nichtäquidistante Gitterlinien können hilfreich bei der Diskretisierung von Flächen sein, deren Begrenzungslinien nicht parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Durch Teilung der rechteckigen Zellen längs einer ihrer Diagonalen und Belegung der beiden entstehenden Dreiecke mit unterschiedlichen Materialkonstanten kann bei geeigneter Positionierung der Gitterlinien praktisch jede durch einen Polygonzug berandete Kontur diskretisiert werden. Diese Technik wurde bereits 1967 von GALLOWAY et al. [50] und später von WEILAND [58] und JOHN [52] angewendet. Eine weitere Möglichkeit besteht in der Verwendung gemittelter Permittivitäten für Zellen, die mit unterschiedlichen Materialien belegt sind [68]. Sind die Begrenzungslinien gekrümmt, ist die Einführung krummliniger Koordinatensysteme sinnvoll. Dies hat HOLLAND [62] erstmals für die FDM durchgeführt.

**Berechnung ungeschirmter Anordnungen.** Die Diskretisierung ungeschirmter Anordnungen macht es erforderlich, das FDM-Gitter auf einen endlich großen, geeignet gewählten Bereich zu beschränken. Dies kann mit den

gleichen Methoden geschehen, wie sie auch zur Begrenzung von FEM-Netzen eingesetzt werden, insbesondere durch Anwendung absorbierender Randbedingungen (siehe Seite 12). Auch die Begrenzung des Gitters durch Verwendung einer Randintegralgleichung ist bei der FDM möglich [82].

**Behandlung von Singularitäten.** Auch im Fall der FDM müssen Maßnahmen ergriffen werden, um die durch Singularitäten der Lösung hervorgerufenen Genauigkeitsprobleme zu bewältigen. Hierfür können im Prinzip die gleichen Techniken verwendet werden, die bereits bei der Beschreibung von FEM und BEM besprochen wurden. So ist es auch bei der FDM möglich, ein Gitter zu verwenden, das in der Nähe einer Singularität feiner ist. Dies kann durch einen variablen Gitterlinienabstand erreicht werden (siehe z. B. [51]). Allerdings hat diese Methode den Nachteil, daß das Gitter nicht nur am gewünschten Punkt, sondern auch längs einer waagerechten sowie längs einer senkrechten, durch den Punkt gehenden Linie verfeinert wird. Die Gitterverfeinerung kann auch adaptiv erfolgen, indem ausgehend von einer Feldverteilung, die mit einem relativ grob gerasterten Gitter berechnet wurde, durch geeignete Fehlerabschätzungen ein neues, an kritischen Stellen feineres Gitter ermittelt wird [52].

Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, das Gitter tatsächlich nur am gewünschten Ort zu verfeinern. SINNOTT et al. [56] betrachten eine Umgebung der Singularität losgelöst vom Rest der Anordnung und verfeinern das Gitter nur in dieser Umgebung, wobei die Knoten des ursprünglichen Gitters auch Knoten des verfeinerten Gitters sind. Auch der in [66] beschriebene Ansatz bietet lokale Verfeinerungen, wobei hier die Grenze zwischen grobem und feinem Gitter sogar dielektrische Grenzflächen schneiden darf.

Die Verwendung spezieller Ansatzfunktionen in der Nähe der Singularität ist bei der FDM ebenfalls möglich (siehe z. B. SINNOTT [55] und WHITING [59]).

### **Die Finite-Difference-Time-Domain-Methode (FDTD-Methode).**

Die Methode der finiten Differenzen, angewendet im Zeitbereich (FDTD-Methode), hat sich zu einer der am häufigsten eingesetzten Verfahren zur Berechnung elektromagnetischer Felder entwickelt. Der Algorithmus geht zurück auf YEE [67] und basiert auf den im Zeitbereich geltenden Maxwell'schen Gleichungen (2.3) und (2.4). Die in diesen Gleichungen auftretenden räumlichen und zeitlichen Ableitungen werden in Differenzenquotienten umgewandelt. Dabei befinden sich die Knoten für die Komponenten des  $\vec{E}$ -Feldes auf den Kanten der quaderförmigen Gitterzellen, während die Knoten für die  $\vec{H}$ -Feldkomponenten auf den Seitenflächen der Zellen positioniert sind.  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  werden über die Materialgleichungen  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  und  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  auf  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  zurückgeführt. Durch Ausnutzung der Divergenzbeziehungen für  $\vec{D}$  und

$\vec{B}$  können darüber hinaus  $E_y$  und  $H_y$  durch andere Feldkomponenten dargestellt werden, wodurch die Anzahl unbekannter Komponenten auf vier sinkt [63].

Da im Zeitbereich gerechnet wird, haben die Knoten auch eine zeitliche Koordinate: Das  $\vec{E}$ -Feld wird zu den Zeitpunkten  $n\Delta t$ , das  $\vec{H}$ -Feld zu den Zeitpunkten  $(n + \frac{1}{2})\Delta t$  berechnet, wobei  $\Delta t$  die Zeitschrittweite der Simulation darstellt und  $n$  eine ganze Zahl ist. Sind alle Felder bis zum Zeitpunkt  $n\Delta t$  bekannt, so kann mit Gleichung (2.3)  $\vec{H}$  für  $t = (n + \frac{1}{2})\Delta t$  berechnet werden. Die Anwendung von Gleichung (2.4) ergibt dann  $\vec{E}$  zum Zeitpunkt  $t = (n + 1)\Delta t$ . Dies kann iterativ fortgesetzt werden. Dabei darf  $\Delta t$  aus Gründen der numerischen Stabilität eine bestimmte Obergrenze nicht überschreiten. YEE hat als Stabilitätskriterium die Bedingung

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} > c_{\max}\Delta t \quad (2.44)$$

angegeben. Dabei sind  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  die Abmessungen der Gitterzellen.  $c_{\max}$  stellt die größte auftretende Phasengeschwindigkeit dar. Durch geschickte Umstellung der Reihenfolge, in der die Feldkomponenten aktualisiert werden, läßt sich diese Stabilitätsbedingung jedoch umgehen. Pro Iterationsschritt ist dann allerdings ein Gleichungssystem mit tridiagonaler Systemmatrix zu lösen [65].

Wird das FDTD-Verfahren auf Wellenleiter mit konstantem Querschnitt angewendet, so kann die Anzahl der Unbekannten erheblich reduziert werden, indem die dreidimensionale Diskretisierung des Wellenleiters durch die zweidimensionale Diskretisierung seines Querschnitts ersetzt wird. Die Abhängigkeit von der axialen Koordinate  $z$  wird berücksichtigt, indem die Felder als proportional zu  $e^{-jkz}$  angenommen werden, wobei  $k$  die vorab zu wählende Ausbreitungskonstante ist. Alle Ableitungen nach  $z$  werden dann durch Multiplikationen mit  $-jk$  ersetzt. Dies haben für die FDTD-Methode erstmals ASI und SHAFAI durchgeführt [60]. CANGELLARIS hat für diesen Algorithmus die folgende Stabilitätsbedingung hergeleitet [61]:

$$\left[ \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \left(\frac{k}{2}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \geq c\Delta t. \quad (2.45)$$

Wie bei der FDM müssen auch im Fall der FDTD-Methode spezielle Maßnahmen ergriffen werden, um ungeschirmte Anordnungen berechnen zu können. Neben der Verwendung absorbierender Randbedingungen ist auch die Kopplung mit Randintegralverfahren möglich. Dies wird in [81] anhand der FIT (finite Integrationstechnik, eine Variante der FDTD-Methode, die auf der Integralform der Maxwell'schen Gleichungen basiert) und einer BEM im Zeitbereich demonstriert.

Einen Nachteil der FDTD-Methode stellt die Beschränkung auf frequenzunabhängige Materialparameter dar. Für bestimmte, nicht zu komplexe Frequenzabhängigkeiten läßt sich die FDTD-Methode jedoch entsprechend erweitern. Diese (FD)<sup>2</sup>TD-Methode (frequency-dependent FDTD) wird in [64] beschrieben.

#### 2.2.4 Die Methode der Geraden

**Grundlagen.** Die Methode der Geraden ist ein Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen für zweidimensionale Probleme. Zur Erläuterung der Methode werde das in Abb. 2.3 dargestellte Gebiet betrachtet, das seitlich durch zwei zur  $y$ -Achse parallele Geradenabschnitte begrenzt wird. Dies stellt jedoch keine zwingende Voraussetzung dar, weil die Länge der beiden Geradenabschnitte im Grenzfall auch 0 sein kann. Vorausgesetzt werden muß jedoch, daß jede zur  $y$ -Achse parallele Gerade den Gebietsrand höchstens zweimal schneidet.

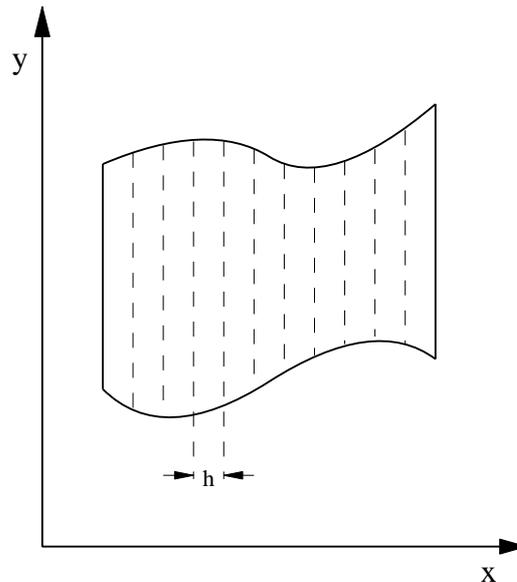


Abbildung 2.3: Gebietsdiskretisierung bei der Methode der Geraden

Die Diskretisierung wird bei der Methode der Geraden nur bezüglich einer Koordinate, in diesem Fall der  $x$ -Koordinate, durchgeführt, indem in das Gebiet  $N$  zur  $y$ -Achse parallele Geraden gelegt werden (siehe Abb. 2.3). Die gesuchte Funktion  $u(x, y)$  wird demnach durch  $N + 2$  Funktionen  $u^{(i)}(y)$  approximiert ( $u^{(0)}$  und  $u^{(N+1)}$  bezeichnen  $u$  auf den beiden Randgeraden). Die zu lösende Differentialgleichung  $\mathcal{L}u(x, y) = 0$  wird dann nur für die entsprechenden  $x_i$ -Werte ( $1 \leq i \leq N$ ) betrachtet, wobei Ableitungen nach  $x$  durch

Differenzenquotienten angenähert werden. Dadurch entsteht ein System von  $N$  gekoppelten Differentialgleichungen für die  $N + 2$  Funktionen  $u^{(i)}(y)$ . Die Randbedingungen für die Grenzgeraden bei  $x_0$  und  $x_{N+1}$  liefern zwei weitere Bestimmungsgleichungen.

Werden die  $u^{(i)}$ -Funktionen für  $1 \leq i \leq N$  in einem  $N$ -dimensionalen Vektor  $\vec{u}$  zusammengefaßt und  $u^{(0)}$  und  $u^{(N+1)}$  durch Verwendung der Randbedingungen eliminiert, läßt sich das Differentialgleichungssystem in Vektorschreibweise darstellen. Dies führt im Fall der skalaren Helmholtz-Gleichung (2.42) auf eine Gleichung der Form

$$h^2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2} - (\mathbf{P} - h^2 \kappa^2 \mathbf{1}) \vec{u} = -\vec{F}, \quad (2.46)$$

wobei  $h$  der Abstand der äquidistanten Geraden ist. Der Vektor  $\vec{F}$  enthält die vorgegebenen Randwerte, während  $\mathbf{P}$  die Matrix der Koeffizienten zur Berechnung der Differenzenquotienten darstellt.  $\mathbf{P}$  ist eine Bandmatrix und somit für die Verkopplung der Differentialgleichungen verantwortlich. Durch Diagonalisierung von  $\mathbf{P}$  läßt sich das Gleichungssystem jedoch entkoppeln. Hierzu ist eine Matrix  $\mathbf{T}$  zu bestimmen, für die  $\mathbf{T}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{T} = \text{diag}$  gilt. Dies kann ohne großen numerischen Aufwand geschehen, da die einfache Struktur von  $\mathbf{P}$  zumindest im Fall äquidistanter Geraden die analytische Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\mathbf{P}$  gestattet. Die Transformation  $\vec{u}' := \mathbf{T}^{-1} \vec{u}$  führt dann zu einem System entkoppelter DGL, das analytisch gelöst werden kann. Die Lösung enthält cosh- und sinh-Terme, deren Vorfaktoren noch unbestimmt sind. Zur Berechnung der insgesamt  $2N$  Vorfaktoren wird die Lösung für  $\vec{u}'$  gemäß  $\vec{u} = \mathbf{T} \vec{u}'$  zurücktransformiert. Das Ergebnis wird in die Randbedingungen eingesetzt, die auf den beiden krummlinigen Randabschnitten, im Fall der Abb. 2.3 also auf dem oberen und dem unteren Randabschnitt, gelten. Dies führt auf ein Gleichungssystem der Form  $\mathbf{M} \vec{x} = 0$ , wobei die Elemente der Systemmatrix  $\mathbf{M}$  von  $\kappa$  abhängen. Nicht-triviale Lösungen gibt es nur, wenn  $\kappa$  die Gleichung  $\det \mathbf{M}(\kappa) = 0$  erfüllt.

**Anwendbarkeit.** Die Methode der Geraden ist, wie auch FEM und FDM, im Prinzip auf endliche Gebiete beschränkt. Durch Verwendung geeigneter absorbierender Randbedingungen kann das Verfahren jedoch auch für seitlich offene Strukturen verwendet werden [70]. Die Berücksichtigung anisotroper Medien ist möglich [73]. In [69] wird gezeigt, daß sich mit Hilfe nichtäquidistanter Linienverteilungen verschiedene Bereiche der Anordnung unterschiedlich fein diskretisieren lassen.

Das Verfahren kann nicht nur im Frequenzbereich, sondern auch im Zeitbereich angewendet werden. Weiterhin ist eine Erweiterung auf dreidimensionale Strukturen möglich, indem das betreffende Volumen durch eine Matrix paralleler Geraden diskretisiert wird [71].

Eine detaillierte Darstellung der Methode der Geraden findet sich in [72].

### 2.2.5 Die Spectral-Domain-Methode

**Grundlagen.** Die Anwendung der Spectral-Domain-Methode setzt die Homogenität der Anordnung bezüglich einer Koordinate voraus. In Abb. 2.4 ist eine derartige Anordnung zu sehen. In diesem Fall sind die materialbeschreibenden Parameter  $\varepsilon$  und  $\mu$  unabhängig von der  $x$ -Koordinate, da die in der Grenzschicht beider Medien verlaufende Streifenleitung als planare Leitung angesehen wird, ihre Metallisierungsdicke also verschwindet. Aufgrund der Voraussetzung der Homogenität gilt dies für alle mit der Spectral-Domain-Methode berechenbaren Leitungen.

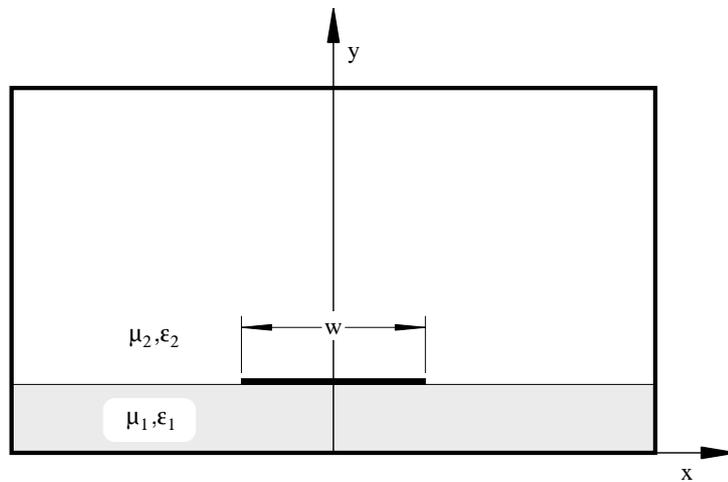


Abbildung 2.4: Streifenleitung zwischen zwei Dielektrika in einem leitenden Kasten

In der  $z$ -Richtung, der Ausbreitungsrichtung der Leitung, ist die Anordnung in der Regel unveränderlich. Mit der Spectral-Domain-Methode können jedoch auch Anordnungen mit einer einfachen  $z$ -Abhängigkeit untersucht werden, z. B. der rechteckige Mikrostreifenresonator, der einem Stück einer rechteckigen Mikrostreifenleitung entspricht, oder Anordnungen mit periodisch variierender Streifenbreite. Liegt eine solche  $z$ -Abhängigkeit nicht vor, so ist lediglich das zweidimensionale Problem  $\mathcal{L}u(x, y) = 0$  zu behandeln. Dazu wird die Gleichung bezüglich der Koordinate, in der die Anordnung homogen ist, in diesem Fall bezüglich der  $x$ -Koordinate, einer Fouriertransformation unterzogen. Dies führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung  $\hat{\mathcal{L}}\hat{u}(\xi, y) = 0$ , wobei  $\xi$  die der  $x$ -Koordinate entsprechende Variable im Fourierraum ist und  $\hat{u}(\xi, y)$  die Fouriertransformation von  $u$  bezüglich  $x$  darstellt.  $\hat{\mathcal{L}}$  lässt sich bestimmen, indem in  $\mathcal{L}$  der Operator  $\partial/\partial x$  durch  $j\xi$  ersetzt wird.

Entspricht  $\mathcal{L}u = 0$  der Laplace- oder der Helmholtz-Gleichung, lässt sich die resultierende gewöhnliche DGL analytisch lösen. Für die Helmholtz-Gleichung ergeben sich cosh- und sinh-Terme, wobei die von  $\xi$  abhängigen

Vorfaktoren zunächst unbekannt sind, wie auch die Ausbreitungskonstante  $k$ , die im Argument der cosh- und sinh-Funktionen auftaucht. Um diese Größen zu ermitteln, sind durch Anwendung von Stetigkeitsbedingungen an den Grenzflächen die Vorfaktoren durch die noch unbekanntes Fouriertransformierten der Stromverteilungen auf den Leitungen auszudrücken. Werden nun die noch nicht berücksichtigten Randbedingungen ( $\vec{n} \times \vec{E} = 0$  auf dem leitenden Streifen,  $\vec{J} = 0$  in der dielektrischen Grenzfläche) verwendet, entsteht ein Gleichungssystem für die Stromverteilungen, die Funktionen von  $\xi$  sind. Dieses Gleichungssystem kann nun wiederum durch point matching oder einen Galerkin-Ansatz gelöst werden. In beiden Fällen ergibt sich ein lineares Gleichungssystem  $\mathbf{M}\vec{x} = 0$ , wobei die Systemmatrix  $\mathbf{M}$  von der Ausbreitungskonstanten  $k$  abhängt. Die Bestimmungsgleichung für  $k$  lautet dann  $\det \mathbf{M}(k) = 0$ .

**Anwendbarkeit.** Die Spectral-Domain-Methode ist anwendbar auf Strukturen mit mehreren dielektrischen Schichten und mehreren Streifenleitern der Dicke 0. Die Dielektrika können sowohl verlustbehaftet als auch anisotrop sein (siehe z. B. [74]). Eine weiterführende Darstellung der Spectral-Domain-Methode ist in [75] zu finden.

### 2.2.6 Die Transmission-Line-Matrix-Methode (TLM-Methode)

**Grundlagen.** In der Elektrotechnik werden oft Ersatzschaltbilder verwendet, um das elektromagnetische Verhalten bestimmter Komponenten zu modellieren. Dabei kann es z. B. um das Ein- und Ausgangsverhalten integrierter Schaltkreise oder um die Übertragungseigenschaften einer Leitung oder einer Leitungsdiskontinuität gehen. In der Transmission-Line-Matrix-Methode wird ein Ersatzschaltbild eingesetzt, das die elektromagnetischen Eigenschaften eines dielektrischen Mediums, in dem sich eine Welle ausbreitet, simuliert. Im Fall der zweidimensionalen TLM-Methode stellt dieses Ersatzschaltbild ein zweidimensionales Gitter gleichartiger Zellen dar. Die Elementarzelle des Gitters besteht für verlustlose, isotrope Medien aus zwei zueinander orthogonal verlaufenden, verlustlosen Leitungssegmenten (Abb. 2.5a). Diese Elementarzelle läßt sich durch das Ersatzschaltbild in Abb. 2.5b approximieren. Dabei entsprechen  $L$  und  $C$  den längenbezogenen Induktivitäten und Kapazitäten der Leitungssegmente.

Bei Anwendung der Kirchhoffschen Maschen- und Knotenregeln auf dieses Netzwerk läßt sich für den Fall  $\Delta l \rightarrow 0$  die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial z^2} = 2LC \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \quad (2.47)$$

herleiten, wobei  $U_y$  der in Abb. 2.5a dargestellten Potentialdifferenz entspricht. Dies ist die zweidimensionale Wellengleichung im Zeitbereich. Eine analoge Gleichung läßt sich aus den Maxwellschen Gleichungen ableiten,

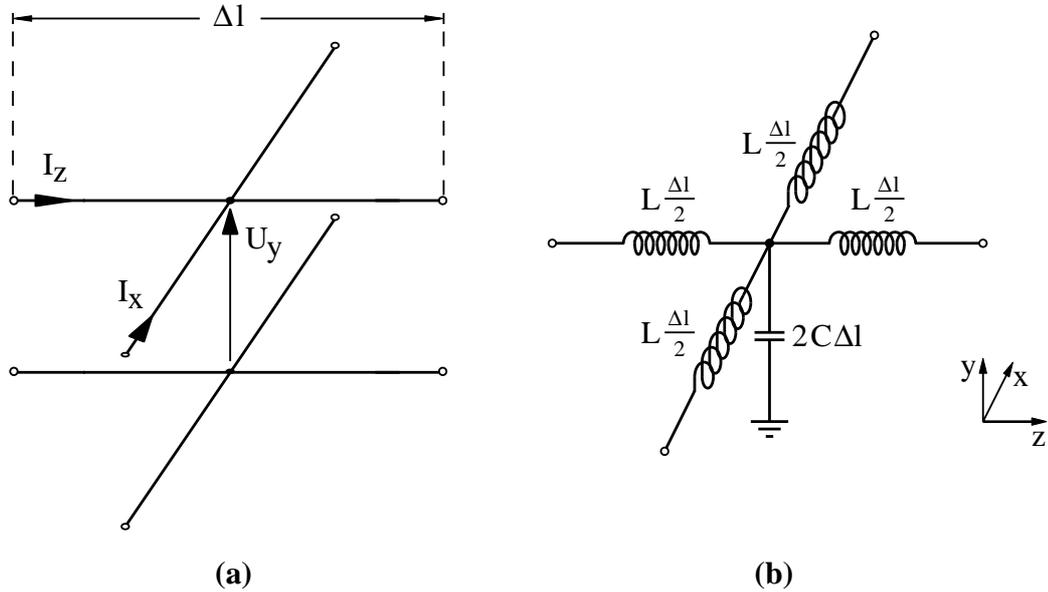


Abbildung 2.5: Elementarzelle des zweidimensionalen TLM-Gitters

wenn  $E_x = E_z = H_y = 0$  gilt. Diese Bedingung wird beispielsweise von  $TE_{n0}$ -Moden in rechteckigen Hohlleitern erfüllt. Es folgt

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (2.48)$$

Diese Gleichung geht aus (2.47) durch die folgenden Ersetzungen hervor:

$$E_y \equiv U_y, \quad \varepsilon \equiv 2C, \quad \mu \equiv L. \quad (2.49)$$

Durch Simulation des Leitungsnetzwerks im Zeitbereich kann somit eine Lösung der Feldgleichung (2.48) berechnet werden.

**Das dreidimensionale TLM-Netz.** Ist keine der sechs Feldkomponenten von vornherein 0, so ist die zweidimensionale Wellengleichung nicht anwendbar. In diesem Fall ist ein dreidimensionales TLM-Netz erforderlich, das durch sechs Gleichungen beschrieben wird, die den insgesamt sechs Komponenten der beiden Maxwellschen Gleichungen (2.3) und (2.4) entsprechen [76, Kap. 5]. Das Netz besteht aus zwei ineinander geschachtelten Teilnetzen, die durch jeweils drei Gleichungen beschrieben werden. Für Leitungssysteme mit konstantem Querschnitt kann jedoch auch ein zweidimensionales Netz aus 3D-TLM-Knoten verwendet werden, mit dem sich die Ausbreitungskonstanten bestimmen lassen [78].

**Anwendbarkeit.** Die TLM-Methode kann nicht nur verlustlose, sondern auch verlustbehaftete Medien simulieren, indem die Impulsamplituden bei Ausbreitung des Impulses längs einer Strecke  $\Delta l$  mit  $e^{-\alpha\Delta l}$  multipliziert werden, wobei  $\alpha$  der aus den Materialeigenschaften berechenbare Schwächungskoeffizient ist. Eine andere Möglichkeit besteht darin, an den Knoten Stichleitungen anzubringen, die dem Impuls beim Streuvorgang Energie entziehen. Diese Vorgehensweise wird im Fall inhomogener Medien angewandt. Auch anisotrope Medien können behandelt werden [76, Kap. 5.4.2], allerdings nur bei Verwendung des 3D-TLM-Netzes.

Der Einsatz von Netzen mit variablem Netzlinienabstand ist bei der TLM-Methode ebenfalls möglich. Dies wird in [76, Kap. 7.1] demonstriert.

Das Verfahren kann auch im Frequenzbereich angewendet werden, indem das Netz mit einer Impulsfolge mit sinusförmiger Einhüllender angeregt wird. Auf diese Weise lassen sich die Übertragungseigenschaften für die Frequenz der Einhüllenden ermitteln [77].

Die TLM-Methode ist verwandt mit der Methode der finiten Differenzen im Zeitbereich (FDTD) und kann unter bestimmten Bedingungen sogar numerisch äquivalent zu dieser sein. Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Verfahren sind in [79] dargestellt.

## 3 Hybrides FEM/BEM-Verfahren zur Berechnung elektrischer Kenngrößen von Leitungsstrukturen

### 3.1 Wahl der Methoden

Die in Kap. 2.2 beschriebenen Verfahren zur Feldberechnung lassen sich grob in zwei Gruppen unterteilen: Bei der Finite-Element-, der Finite-Differenzen- und der Transmission-Line-Matrix-Methode muß ein zweidimensionales Gebiet durch ein Netz (bzw. ein Gitter) diskretisiert werden. Daher lassen sich diese Verfahren nur mit Hilfsmitteln (z. B. absorbierende Randbedingungen) auf ungeschirmte Strukturen anwenden, da das Netz nicht unendlich groß sein kann. Jeder Knoten der Diskretisierung wird durch die zu lösende Gleichung jeweils nur mit den Nachbarknoten verknüpft, was zu Gleichungssystemen mit schwach besetzten Matrizen führt. Die Koeffizienten der Systemmatrix lassen sich i. allg. einfach und schnell berechnen.

Bei der Boundary-Element-Methode, der Methode der Geraden und der Spectral-Domain-Methode wird die Dimension des zu lösenden Problems zunächst um 1 reduziert. Bei der Boundary-Element-Methode erfolgt dies durch Umwandlung der DGL in eine Randintegralgleichung. Bei der Methode der Geraden wird die DGL bezüglich einer Koordinate analytisch gelöst, so daß eine Diskretisierung der Anordnung in dieser Koordinatenrichtung nicht erforderlich ist. Die Spectral-Domain-Methode beinhaltet ebenfalls die analytische Lösung bezüglich einer Koordinate nach vorausgegangener Fouriertransformation bezüglich der anderen Koordinate.

Diese Dimensionsreduzierung führt zwar einerseits zu einer Verringerung der Anzahl der Unbekannten, aber andererseits auch zu vollbesetzten Systemmatrizen. Die Berechnung der Matrixkoeffizienten ist darüber hinaus aufwendiger als bei den Gebietsdiskretisierungsverfahren. Wird beispielsweise die BEM auf die zweidimensionale Helmholtz-Gleichung angewendet, sind die Matrixkoeffizienten durch Integrale über Funktionen gegeben, die die Besselfunktionen  $K_0$  und  $K_1$  enthalten. Die Integrale müssen numerisch ausgewertet werden, da eine analytische Behandlung nicht möglich ist. Auch bei den beiden anderen Verfahren treten transzendente Funktionen auf. Ungeschirmte Strukturen können mit diesen Verfahren hingegen besser behandelt werden, insbesondere mit der BEM (Ausnahme: Methode der Geraden).

Durch Auswahl jeweils einer Methode aus jeder Gruppe lassen sich die Vorteile beider Gruppen vereinen. Hierfür wird die zu berechnende Anordnung partitioniert und auf die verschiedenen Teilgebiete die jeweils am besten geeignete der beiden Methoden angewendet. Da das Verfahren in der Lage sein soll, eine Vielzahl unterschiedlicher Leitungssysteme zu behandeln (Leitungen auf Leiterplatten und ICs, Kabel, Mikrowellenkomponenten, ...),

müssen hinreichend flexible Methoden gewählt werden. In der Gruppe der Gebietsdiskretisierungsverfahren ist daher eindeutig die FEM zu bevorzugen, da sie am besten für die Diskretisierung nichtrechteckiger Querschnitte geeignet ist. Auch eine örtliche Variation der Stützstellendichte ist bei der FEM völlig unproblematisch. Aus der Gruppe der dimensionsreduzierenden Verfahren wird die BEM ausgewählt, weil mit ihr nichtrechteckige Querschnitte ebenfalls gut diskretisiert werden können und weil sie die Behandlung ungeschirmter Strukturen ohne zusätzliche Annahmen oder Näherungen, wie z. B. absorbierende Randbedingungen, gestattet.

Durch Kombination von FEM und BEM eröffnet sich die Möglichkeit, für die meisten Teilgebiete der untersuchten Anordnung die hohe Geschwindigkeit der FEM auszunutzen, während die BEM zur Diskretisierung von Teilgebieten verwendet wird, die für eine Behandlung mit der FEM nicht geeignet sind. Dazu zählen die unendlich große Umgebung ungeschirmter Strukturen sowie schwach verlustbehaftete Leiter. Letztere weisen eine geringe Eindringtiefe auf, so daß einfallende Wellen zum Inneren des Leiters hin sehr schnell abklingen. Die Approximation solcher Feldverteilungen mit finiten Elementen würde eine sehr feine Diskretisierung des Leiters in der Nähe des Randes erfordern.

Eine Alternative zur Kombination FEM-BEM ist die Verwendung der FEM in Verbindung mit geeigneten absorbierenden Randbedingungen. Diese Möglichkeit wurde in der vorliegenden Arbeit jedoch aus folgenden Gründen nicht realisiert:

- Wenn die BEM nicht zur Verfügung steht, werden neben absorbierenden Randbedingungen auch sogenannte *Oberflächenimpedanzbedingungen* (*surface impedance boundary conditions*) benötigt, die das exponentielle Abklingen des Feldes im Inneren guter Leiter approximieren. Bei weniger guten Leitern, die vollständig vom Feld durchdrungen werden, muß der Leiter dagegen wie gewohnt diskretisiert werden. Es ist also zusätzlich ein Algorithmus erforderlich, der in Abhängigkeit von der Eindringtiefe und der Leitergeometrie zwischen beiden Varianten entscheidet.
- Bei Einsatz absorbierender Randbedingungen muß die künstliche Begrenzung, auf der diese Randbedingungen zum Einsatz kommen, in geeigneter Entfernung von der Anordnung positioniert werden. Dies kann i. allg. nicht automatisch, sondern nur durch Benutzerintervention erfolgen. Die Anwendung des Verfahrens wird dadurch komplizierter und erfordert mehr Vorwissen. PML-Absorber können sich zwar in geringer Entfernung zur Anordnung befinden, jedoch müssen hierbei der Abstand, die Absorberdicke und der Leitfähigkeitsverlauf im Absorber sorgfältig aufeinander abgestimmt werden, wenn die Anzahl der Unbekannten nicht zu hoch werden soll.

- Aufgrund des Abstands der künstlichen Begrenzung zur Anordnung erhöht sich die Anzahl der Unbekannten, so daß sich die Rechenzeit gegenüber der Verwendung der BEM nicht unbedingt reduziert. ÖZDEMİR und VOLAKIS haben die Effizienz absorbierender Randbedingungen am Beispiel der Streuung an einer Massefläche mit Schlitzen untersucht [96]. Dabei kamen sie zu dem Ergebnis, daß die Verwendung einer absorbierenden Randbedingung zweiter Ordnung zu einer höheren Rechenzeit führte als die Terminierung des Netzes mit einer Randintegralgleichung.

Im Fall von PML-Randbedingungen kann der Abstand zur Anordnung zwar sehr gering gewählt werden, aber nur bei entsprechender Dicke des PML-Mediums (z. B. 15 FDM-Zellen bei einem Abstand von 2 Zellen [89]). Also erhöht auch das PML-Verfahren die Anzahl der Unbekannten signifikant, wenn auch längst nicht so dramatisch wie bei den klassischen absorbierenden Randbedingungen.

- Die Anwendung von absorbierenden Randbedingungen kann zum Auftreten nichtphysikalischer Lösungen führen. Dabei handelt es sich um modifizierte Hohlleitermoden, die durch die endliche Ausdehnung des Netzes hervorgerufen werden. Im Fall von PML-Absorbern lassen sich solche Moden am Verhältnis der Leistungsflüsse im PML und im Leitungssystem erkennen [101]. Jedoch müssen diese Moden hierfür erst einmal berechnet werden, was die Effizienz des Verfahrens herabsetzt.

## 3.2 Entwicklung einer Finite-Element-Methode

### 3.2.1 Auswahl der Elementfunktionen

Als Grundlage für die Herleitung einer FEM für verlustbehaftete und anisotrope Medien wird im folgenden Gleichung (2.22) verwendet, die eine partielle Differentialgleichung für alle drei Komponenten des magnetischen Feldes darstellt. Diese Gleichung hat gegenüber der entsprechenden Gleichung für das elektrische Feld (2.23) den Vorteil, daß  $\vec{H}$  im Fall konstanter Permeabilität auch an dielektrischen Grenzflächen stetig ist. Da die für dieses Verfahren geplanten Einsatzgebiete (ICs, Leiterplatten, Kabel) vorwiegend Anordnungen mit konstanter Permeabilität beinhalten, wurde Gleichung (2.22) gewählt. Die Anwendung der Helmholtz-Gleichung  $\Delta^{(t)}u + (\omega^2\varepsilon\mu - k^2)u = 0$  für  $H_x$  und  $H_y$  reduziert zwar die Anzahl der Unbekannten um ein Drittel, scheidet jedoch aus, da anisotrope Medien hierbei nicht möglich sind.

Gleichung (2.22) wurde zunächst durch Anwendung der in Kap. 2.2.1 beschriebenen linearen Knotenelemente diskretisiert. Diese sind besonders einfach zu implementieren und bieten gegenüber edge elements den Vorteil, daß der lokale Approximationsfehler mit  $\mathcal{O}(h^2)$  abnimmt ( $h$  = Kantenlänge

der Elementdreiecke) und nicht mit  $\mathcal{O}(h)$  wie bei edge elements der niedrigsten Ordnung (Whitney-1-Elemente) [21]. Der Approximationsfehler läßt sich durch Verwendung von edge elements höherer Ordnung zwar auch auf  $\mathcal{O}(h^2)$  reduzieren, allerdings bei einer gegenüber den linearen Knotenelementen wesentlich höheren Anzahl von Unbekannten [21].

Die Diskretisierung erfolgt gemäß Gleichung (2.27) durch Multiplikation von (2.22) mit der zum Knoten  $p$  gehörenden Testfunktion  $v_p$ , die beim hier gewählten Galerkin-Ansatz der Ansatzfunktion  $u_p$  entspricht (Abb. 2.2), und anschließender Integration über das betrachtete Gebiet  $A$ :

$$\forall p : \iint_A v_p \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \epsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} \right] - \omega^2 \mu \vec{H} \right\} dA = 0. \quad (3.1)$$

Partielle Integration führt auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \forall p : \iint_A \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) v_p \times \epsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} \right] + \omega^2 v_p \mu \vec{H} \right\} dA \\ - j\omega \oint_{\partial A} v_p (\vec{n} \times \vec{E}) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Gemäß Gleichung (2.26) wird  $\vec{H}$  diskretisiert durch

$$\vec{H} = \sum_{q=1}^N \vec{H}_q u_q, \quad (3.3)$$

wobei die Vektoren  $\vec{H}_q$  die gesuchten Ansatzkoeffizienten enthalten. Für den hier gewählten Elementtyp entspricht  $\vec{H}_q$  dem magnetischen Feld am Knoten  $q$ , da  $u_p$  am Knoten  $q$  für  $p \neq q$  den Wert 0 hat. Einsetzen von (3.3) in (3.2) ergibt

$$\begin{aligned} \forall p : \sum_{q=1}^N \iint_A \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) v_p \times \epsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) u_q \times \vec{H}_q \right] \right. \\ \left. + \omega^2 v_p u_q \mu \vec{H}_q \right\} dA - j\omega \oint_{\partial A} v_p (\vec{n} \times \vec{E}) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Wird  $\vec{n} \times \vec{E}$  auf dem Rand des Gebietes  $A$  vorgegeben, stellt (3.4) ein lineares Gleichungssystem mit  $3N$  Gleichungen und  $3N$  Unbekannten ( $N$  Vektoren  $\vec{H}_q$ ) dar. Die Koeffizienten dieses Gleichungssystems hängen nichtlinear von der ebenfalls unbekanntem Ausbreitungskonstante  $k$  ab. Damit liegt eine Gleichung der Form  $\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x} = 0$  vor, die nur im Fall  $\det \mathbf{M}(k) = 0$  nichttriviale Lösungen liefert.

Diese Vorgehensweise führt jedoch schon bei einfachsten Anordnungen zu nichtphysikalischen Lösungen (spurious modes). Betrachtet werde beispielsweise ein rechteckiger Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden ( $\Rightarrow \vec{n} \times \vec{E} = 0$ )

mit den Querschnittsabmessungen  $50 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ . In Abb. 3.1 ist der Verlauf der Funktion  $R(k)$  zu sehen, deren Bedeutung in Kap. 3.5.3 erläutert wird. Die Nullstellen dieser Funktion entsprechen den Lösungen für die Ausbreitungskonstante  $k$ .

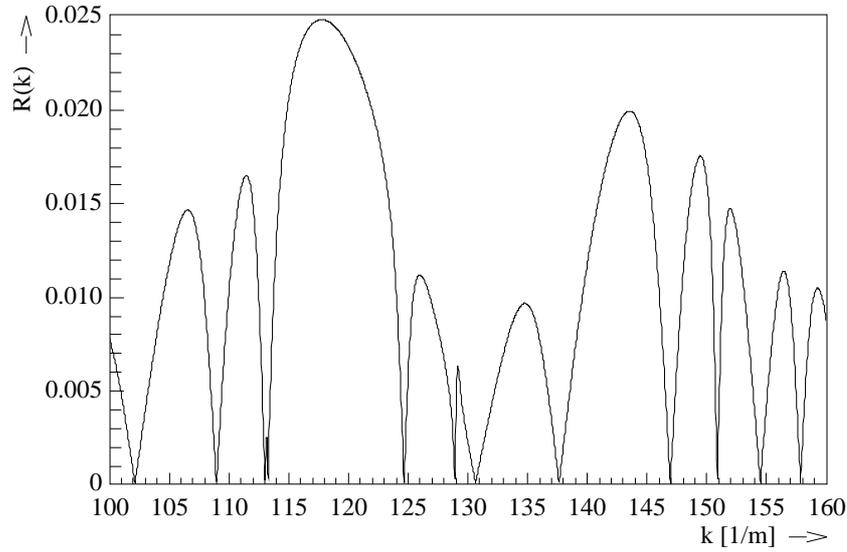


Abbildung 3.1:  $R(k)$  für einen rechteckigen Hohlleiter ( $50 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ ) bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 50 \text{ GHz}$ , berechnet mit (3.4)

Neben den erwarteten Lösungen bei  $k = 154.5 \text{ m}^{-1}$  ( $\text{TE}_{10}$ ),  $k = 129.8 \text{ m}^{-1}$  ( $\text{TE}_{01}$ ),  $k = 113.6 \text{ m}^{-1}$  ( $\text{TE}_{11}$ ,  $\text{TM}_{11}$ ) und  $k = 109.7 \text{ m}^{-1}$  ( $\text{TE}_{20}$ ) treten zahlreiche andere Lösungen auf, die keiner physikalisch existierenden Lösung entsprechen. Ursache hierfür ist die Tatsache, daß Gleichung (2.22) für  $\omega = 0$  durch  $\vec{H} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi$  für jede beliebige Funktion  $\psi$  gelöst wird [27]. Diese statischen Lösungen können mit linearen Knotenelementen nur schlecht approximiert werden, so daß sie durch die Diskretisierung zu Frequenzen  $\omega \neq 0$  verschoben werden. Die schlechte Approximierbarkeit wiederum ist darin begründet, daß diese Lösungen rotationsfrei sind, d. h. es gilt  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{H} = 0$ , was ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z + jk \underline{H}_y = 0, \quad (3.5)$$

$$-jk \underline{H}_x - \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_y - \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_x = 0 \quad (3.7)$$

ergibt. Im Fall  $k = 0$  folgt aus (3.5) und (3.6)  $\underline{H}_z = \text{const.}$  Um diese Bedingung bei Verwendung linearer Knotenelemente zu erfüllen, wird eine Gleichung pro Knoten benötigt. Die linke Seite von (3.7) ist konstant innerhalb

eines Elementes, da  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  stückweise linear sind. Um diesen Ausdruck auf 0 zu setzen, ist also eine Gleichung pro Element erforderlich. Dies entspricht zwei Gleichungen pro Knoten, da in unendlich ausgedehnten Triangulierungen die Anzahl der Dreiecke doppelt so groß ist wie die der Knoten. Um mit linearen Knotenelementen für  $k = 0$  rotationsfreie Felder darzustellen, müssen also drei Bedingungen pro Knoten erfüllt werden. Da es aber nur drei Freiheitsgrade pro Knoten gibt, verbleiben nicht genügend viele Freiheitsgrade, um die statischen Lösungen hinreichend gut zu approximieren. Dies ist auch für  $k \neq 0$  der Fall, da dann gemäß (3.5) und (3.6)  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  wegen der stückweisen Linearität von  $\underline{H}_z$  innerhalb eines Elementes konstant sein müssen. Aufgrund der Stetigkeit von  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  kann diese Bedingung nur erfüllt werden, wenn  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  im gesamten triangulierten Bereich konstant sind. Damit sind aber auch die  $x$ - und  $y$ -Ableitungen von  $\underline{H}_z$  festgelegt, so daß auch  $\underline{H}_z$  – abgesehen von einem im gesamten triangulierten Bereich konstanten Summanden – nicht variiert werden kann.

Aus dieser Begründung für das Auftreten nichtphysikalischer Lösungen lassen sich zwei verschiedene Problemlösungsstrategien ableiten:

1. Gleichung (2.22) wird so modifiziert, daß die statischen Lösungen keine Lösungen der modifizierten Gleichung sind, die restliche Lösungsmenge sich jedoch nicht verändert.
2. Es werden Elementfunktionen für die Diskretisierung verwendet, die genügend Freiheitsgrade bieten, um die statischen Lösungen gut zu approximieren.

Die erste Möglichkeit scheidet jedoch von vornherein aus, da das Anwendungsgebiet des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens in der Berechnung von Leitungsparametern ( $L, C, R, G$ ) liegt, was die Bestimmung der Ausbreitungskonstanten und Feldverteilungen von Quasi-TEM-Moden erfordert. Charakteristisch für diese Moden sind kleine axiale Feldkomponenten, d. h. es gilt  $\underline{H}_z \ll \underline{H}_x, \underline{H}_y$  und  $\underline{E}_z \ll \underline{E}_x, \underline{E}_y$ . Damit muß auch der Ausdruck  $\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{H}}$  sehr klein werden. Dadurch werden jedoch wie im oben beschriebenen Fall die zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade gebunden. Dies bedeutet, daß die zu geringe Anzahl verbleibender Freiheitsgrade bei linearen Knotenelementen sowohl das Auftreten nichtphysikalischer Lösungen begünstigt als auch die Approximation von Quasi-TEM-Moden erschwert, so daß eine Problemlösung nach Möglichkeit 2 erforderlich wird. Möglichkeit 1 kommt nur für Verfahren in Frage, die nicht zur Berechnung von Quasi-TEM-Moden eingesetzt werden sollen. In Anhang A.1 wird ein entsprechender Ansatz zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen entwickelt, der bei Anwendung auf Quasi-TEM-Wellen erwartungsgemäß zu großen Ungenauigkeiten führt. Daher müssen andere Elementfunktionen gewählt werden, die den oben beschriebenen Nachteil nicht aufweisen. Dies können beispielsweise  $C^1$ -Elemente sein, die auch

an den Elementgrenzen stetig differenzierbar sind, oder aber edge elements, die speziell zur Modellierung rotationsfreier Felder geeignet sind. Die stetige Differenzierbarkeit der  $C^1$ -Elemente ist an ideal leitenden Kanten eher von Nachteil, da die Felder dort weder differenzierbar noch stetig sind. Edge elements der niedrigsten Ordnung hingegen lassen auch Unstetigkeiten zu und erleichtern damit die Modellierung von Feldsingularitäten an leitenden Kanten. Aus diesem Grund werden diese Elemente trotz ihrer schlechten Konvergenzeigenschaften im folgenden zur Diskretisierung der zu lösenden Gleichung verwendet.

### 3.2.2 Diskretisierung der vektoriellen Wellengleichung mit edge elements

Als Ausgangsgleichung für eine Diskretisierung mit edge elements dient im folgenden nicht Gleichung (2.22), sondern deren  $\vec{E}$ -Feld-Äquivalent (2.23). Die Begründung dafür ist darin zu sehen, daß die Stetigkeit des  $\vec{H}$ -Feldes bei konstanter Permeabilität, die im Fall der Knotenelemente das Argument für die Auswahl der  $\vec{H}$ -Feld-Gleichung darstellte, bei edge elements kein Vorteil mehr ist, da dort als Unbekannte nur noch die Tangentialkomponenten des Feldes längs der Elementkanten sowie die  $z$ -Komponenten an den Knoten auftreten. Diese sind sowohl beim elektrischen als auch beim magnetischen Feld stetig, sogar an Grenzflächen, an denen  $\epsilon$  und  $\mu$  sich ändern. Vorteile bietet jedoch Gleichung (2.23) an ideal leitenden Grenzflächen, da die Tangential- und die  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes dort 0 werden, was zur Einsparung der entsprechenden Unbekannten führt.

Da edge elements ursprünglich für dreidimensionale Feldberechnungsprobleme entwickelt wurden, ist die Anwendung auf das hier vorliegende zweidimensionale Problem nicht ohne weiteres möglich. Der in [18] vorgestellte Ansatz stellt eine hierfür geeignete Kombination aus Knotenelementen und edge elements dar. Er beinhaltet die Approximation der  $z$ -Komponente des elektrischen Feldes mit herkömmlichen, linearen Elementfunktionen:

$$\underline{E}_z = \sum_{i=1}^{N_n} a_i \lambda_i. \quad (3.8)$$

$N_n$  entspricht dabei der Anzahl der Knoten, und  $\lambda_i$  stellt die in Abb. 2.2 dargestellte lineare Ansatzfunktion des Knotens  $i$  dar. Die transversalen Komponenten von  $\vec{E}$  werden durch edge elements approximiert:

$$\vec{E}^{(t)} = \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ 0 \end{pmatrix} = \sum_{(i_1, i_2)} a_{(i_1, i_2)} \left( \lambda_{i_1} \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_{i_2} - \lambda_{i_2} \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_{i_1} \right). \quad (3.9)$$

Die Summation wird über alle Knotenpaare  $(i_1, i_2)$  ausgeführt, bei denen  $i_1$

und  $i_2$  durch eine Kante verbunden sind. Jeder Elementkante ist also genau eine Elementfunktion zugeordnet.

Werden die Knoten von 1 bis  $N_n$  und die Kanten von  $N_n + 1$  bis  $N_n + N_e$  ( $N_e =$  Anzahl der Kanten) durchnummeriert, lassen sich die folgenden vektoriellen Ansatzfunktionen definieren:

$$\vec{u}_q = \begin{cases} \lambda_q \vec{e}_z & \text{für } 1 \leq q \leq N_n, \\ \lambda_{i_1(q)} \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_{i_2(q)} - \lambda_{i_2(q)} \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_{i_1(q)} & \text{für } N_n + 1 \leq q \leq N_n + N_e. \end{cases} \quad (3.10)$$

Dabei sind  $i_1(q)$  und  $i_2(q)$  die Nummern der Knoten, die von der Kante mit der Nummer  $q$  verbunden werden. Mit (3.10) läßt sich die Approximation von  $\vec{E}$  in einer Form schreiben, die der von Gleichung (2.26) entspricht:

$$\vec{E} = \sum_{q=1}^{N=N_n+N_e} \alpha_q \vec{u}_q. \quad (3.11)$$

Für  $1 \leq q \leq N_n$  entspricht der Ansatzkoeffizient  $\alpha_q$  dem Wert von  $\underline{E}_z$  am Knoten  $q$ . Zwischen den Knoten verläuft  $\underline{E}_z$  linear. Für  $N_n + 1 \leq q \leq N_n + N_e$  läßt sich aus (3.10) und (3.11) folgern, daß

$$\alpha_q = l_q \vec{s}_q \vec{E} \quad (3.12)$$

gilt, wobei  $l_q$  der Länge der Kante  $q$  und  $\vec{s}_q$  dem normierten Vektor längs der Kante  $q$  (vom Anfangsknoten  $i_1(q)$  in Richtung des Endknotens  $i_2(q)$  weisend) entspricht.  $\alpha_q$  ist also proportional zur tangentialen elektrischen Feldkomponente bezüglich der Kante  $q$ . Diese Feldkomponente ist bei Ansatzfunktionen nach Gleichung (3.10) konstant längs der Kante  $q$ . Im Gegensatz dazu variiert die Normalkomponente des  $\vec{E}$ -Feldes linear längs der Kante, mit einer Steigung, die proportional zum Ausdruck  $\frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_y - \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_x$  ist, in benachbarten Elementen also unterschiedliche Werte annehmen kann. Die Normalkomponente ist bei edge elements im Gegensatz zur Tangentialkomponente also nicht über Elementgrenzen hinweg stetig, selbst wenn die Materialkonstanten  $\epsilon$  und  $\mu$  stetig sind.

Die Herleitung einer diskretisierten Gleichung erfolgt in ähnlicher Weise wie in Kap. 3.2.1, mit dem Unterschied, daß Gleichung (2.23) nun mit einer vektoriellen Testfunktion  $\vec{v}_p$  multipliziert wird, die gemäß Galerkin-Ansatz den vektoriellen Ansatzfunktionen aus (3.10) entspricht, d. h.  $\vec{v}_p = \vec{u}_p$ . Integration der mit  $\vec{v}_p$  multiplizierten Gleichung über ein Gebiet  $A$  und anschließende partielle Integration ergeben dann

$$\forall p: \quad \iint_A \left\{ \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{v}_p \right] \cdot \mu^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} \right] - \omega^2 \vec{v}_p \cdot \epsilon \vec{E} \right\} dA - j\omega \oint_{\partial A} \vec{v}_p (\vec{n} \times \vec{H}) ds = 0. \quad (3.13)$$

Diese Gleichung wird durch Einsetzen von (3.11) diskretisiert:

$$\forall p: \quad \sum_{q=1}^N \alpha_q \iint_A \left\{ \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{v}_p \right] \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{u}_q \right] - \omega^2 \vec{v}_p \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \vec{u}_q \right\} dA - j\omega \oint_{\partial A} \vec{v}_p (\vec{n} \times \vec{H}) ds = 0. \quad (3.14)$$

Bei der Lösung des Gleichungssystems (3.14) wurden bislang keine nichtphysikalischen Lösungen beobachtet. In Abb. 3.2 ist der Verlauf der Funktion  $R(k)$  bei Anwendung von (3.14) auf den Hohlleiter aus Kap. 3.2.1 zu sehen. Die unerwünschten Lösungen aus Abb. 3.1 treten hier nicht mehr auf (bei  $k \approx 113 \text{ m}^{-1}$  ist eine diskretisierungsbedingte Trennung der  $\text{TE}_{11}$ - und  $\text{TM}_{11}$ -Moden zu erkennen). Diese Feststellung trifft auch für komplexere Anordnungen zu.

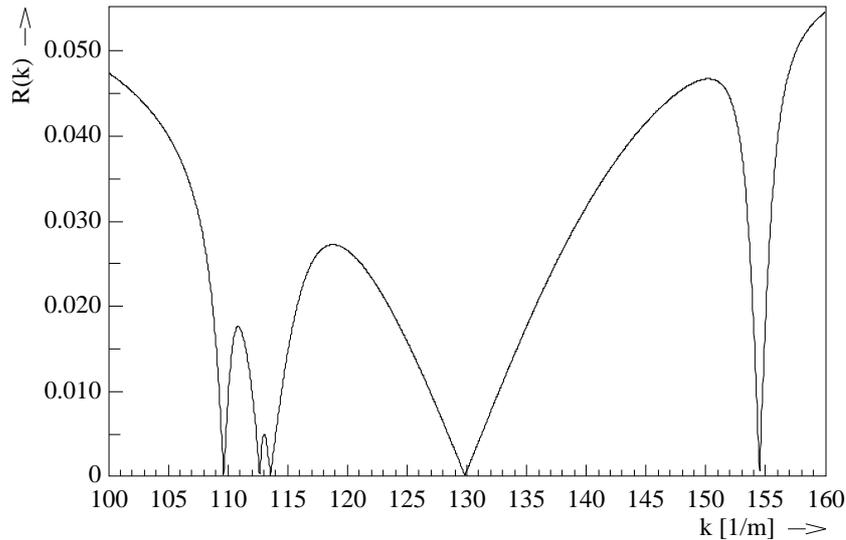


Abbildung 3.2:  $R(k)$  für einen rechteckigen Hohlleiter ( $50 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ ) bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 50 \text{ GHz}$ , berechnet mit (3.14)

Im Gegensatz zu dem in Anhang A.1 beschriebenen Ansatz (Modifikation der Gleichung (2.22) zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen) kommt es bei Anwendung von (3.14) auf die Berechnung von TEM- und Quasi-TEM-Wellen nicht zu den dort erwähnten Ungenauigkeiten, wie die Ergebnisse in Kap. 4 zeigen. Für das Koaxialkabel aus Anhang A.1 (homogenes, isotropes Dielektrikum  $\Rightarrow$  TEM-Lösung) liefert das Verfahren sogar den exakten Wert für die Ausbreitungskonstante,  $k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_r}$ , und zwar unabhängig von der Wahl der Diskretisierung. Ein Beweis für diese Eigenschaft der edge elements konnte in der Literatur jedoch nicht gefunden werden. Daher wird in

Anhang A.2 eine Herleitung für den allgemeinen Fall eines Mehrleitersystems angeben.

### 3.2.3 Triangulierung mit ortsabhängiger Knotendichte

**Anforderungen an das Triangulierungsverfahren.** Die Anwendung des im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Verfahrens benötigt einen Triangulierungsalgorithmus für die Zerlegung des Gebietes, innerhalb dessen die Feldgleichungen zu lösen sind, in dreieckige Elemente. Diese auf den ersten Blick einfache Fragestellung erhält ihre Komplexität und Bedeutung aus der Feststellung, daß die Triangulierung maßgeblichen Einfluß sowohl auf die Berechnungsgenauigkeit (kleinere Elemente  $\Rightarrow$  höhere Genauigkeit) als auch auf die Rechenzeit (größere Elementanzahl  $\Rightarrow$  höhere Rechenzeit) hat. Ziel ist die Erzeugung von Triangulierungen, die eine bestimmte Berechnungsgenauigkeit mit einer möglichst geringen Anzahl von Elementen erreichen. Weiterhin müssen die Triangulierungen bestimmten, für das jeweilige Anwendungsgebiet spezifischen Anforderungen genügen (z. B. einzuhaltende Winkelgrenzen). Da auch die Berechnungsgenauigkeit anwendungsspezifisch, also abhängig von der DGL und dem Lösungsverfahren ist, kann die Frage nach dem geeignetsten Triangulierungsverfahren nicht allgemeingültig, sondern nur für den vorliegenden Einzelfall beantwortet werden.

Aus den in Kap. 1 geforderten Eigenschaften des zu entwickelnden Berechnungsverfahrens ergeben sich die folgenden Anforderungen an den Triangulierungsalgorithmus:

1. Das Verfahren muß beliebige, nicht notwendigerweise konvexe, mehrfach zusammenhängende Polygone („Polygone mit Löchern“) triangulieren können.
2. Das erzeugte Netz sollte keine Vorzugsrichtungen aufweisen, sondern möglichst isotrop sein, da Vorzugsrichtungen zu richtungsabhängigen Wellenausbreitungseigenschaften und damit zu numerischen Fehlern führen können. In [26] berechnen WARREN und SCOTT den richtungsabhängigen Phasenfehler pro Wellenlänge für den Fall einer ebenen Welle, die ein unendlich ausgedehntes, regelmäßiges Netz in verschiedenen Richtungen durchläuft. Untersucht wurden Netze aus Quadraten (Seiten parallel zu den Koordinatenachsen), verschiedene Triangulierungen mit rechtwinkligen Dreiecken (Katheten parallel zu den Koordinatenachsen) sowie ein Netz gleichseitiger Dreiecke. Außer bei letzterem ist in den Polardiagrammen des Phasenfehlers eine starke Richtungsabhängigkeit zu sehen, die die jeweiligen Vorzugsrichtungen des Netzes deutlich widerspiegelt.
3. Die Triangulierungen sollten möglichst keine sehr kleinen ( $< 30^\circ$ ) oder sehr großen Winkel ( $> 120^\circ$ ) enthalten, da dies zu numerischen Probleme

men führen kann. Bei Verwendung von edge elements sind die Ansatzkoeffizienten proportional zu den Tangentialkomponenten des Feldes längs der Dreieckskanten. Je kleiner der Winkel zwischen zwei Kanten wird, desto ähnlicher werden sich die beiden zugehörigen Tangentialkomponenten. Da diese aber Unbekannte eines Gleichungssystems darstellen, bewirkt diese Angleichung eine Verschlechterung der Konditionierung der Gleichungssystemmatrix und damit je nach gewähltem Lösungsalgorithmus eine Erschwerung des Lösungsvorganges.

Darüber hinaus wird in Anhang A.3 gezeigt, daß edge elements die höchste Approximationsgenauigkeit bei Verwendung gleichseitiger Dreiecke erreichen.

4. Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren erlaubt die Behandlung benachbarter Teilgebiete einer Anordnung mit unterschiedlichen Berechnungsverfahren (FEM, BEM). Für jedes Teilgebiet wird mit dem jeweils gewählten Verfahren ein Gleichungssystem aufgestellt. Um die Kopplung dieser Gleichungssysteme zu ermöglichen, ist eine für beide Teilgebiete identische Diskretisierung des gemeinsamen Randes erforderlich. Vor Diskretisierung des Gebietsinneren müssen also zunächst die Gebietsgrenzen segmentiert werden.

Für Teilgebiete, die mit der BEM behandelt werden, ist die Diskretisierungsaufgabe durch Festlegung der Randdiskretisierung bereits erledigt, während für die mit der FEM zu behandelnden Gebiete Triangulierungen gefunden werden müssen, die zur gewählten Randdiskretisierung konform sind. Daher ist ein Algorithmus zu verwenden, der ohne Positionierung zusätzlicher Knoten auf dem Rand arbeitet.

5. Um Triangulierungen erzeugen zu können, die unter Verwendung möglichst weniger Elemente eine möglichst hohe Genauigkeit erzielen, muß die Triangulierung an die Lösung angepaßt werden. Da die Lösung zunächst nicht bekannt ist, wird in der Regel eine iterative Vorgehensweise angewendet: Zunächst wird auf Basis einer relativ groben Triangulierung eine erste Näherungslösung berechnet. Aus dieser Näherungslösung wird mit Hilfe geeigneter Fehlerschätzverfahren der ortsabhängige Berechnungsfehler abgeschätzt. Anhand dieser Informationen wird eine zweite, feinere Triangulierung generiert, bei der besonders die Bereiche, für die der Fehlerschätzer einen hohen Wert anzeigt, kleinere Elemente aufweisen. Mit dieser zweiten Triangulierung wird die Berechnung wiederholt. Dieser Verfeinerungsschritt kann mehrmals durchgeführt werden.

Die Generierung der neuen Triangulierung anhand des geschätzten Fehlers kann auf zwei Arten erfolgen:

- (a) Die bestehende Triangulierung wird in Bereichen, in denen der Fehler einen bestimmten Grenzwert überschreitet, unter Beibehaltung der bisherigen Knotenpositionen durch Einfügen neuer Knoten verfeinert (adaptive refinement).
- (b) Es wird eine vollständig neue Triangulierung erstellt (adaptive remeshing).

Der Nachteil der ersten Methode besteht darin, daß das Einfügen neuer Knoten, ohne alte Knoten zu verschieben, zu Sprüngen in der Knotendichte und damit zu künstlichen, durch die Diskretisierung bedingten Diskontinuitäten führt. Wellen werden an solchen Diskontinuitäten gestreut, was zu numerischen Fehlern führen kann. Außerdem können sich dabei die Winkeleigenschaften der Netze verschlechtern. Der Vorteil liegt in der Verwendbarkeit sogenannter hierarchischer Basen: Durch die Beibehaltung der alten Knotenpositionen ist der Vektorraum, der von den Elementfunktionen der alten Triangulierung aufgespannt wird, ein Unterraum des entsprechenden Vektorraumes der neuen Triangulierung. Mit Hilfe dieser Eigenschaft können sogenannte Multigrid-Verfahren konstruiert werden, die ein exaktes Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme, angewandt auf ein grobes Gitter, kombinieren mit einem iterativen Lösungsverfahren (z.B. conjugate gradient oder successive overrelaxation), angewandt auf verfeinerte Gitter (siehe z.B. [29] und [32]). Diese Verfahren sind jedoch auf den hier vorgestellten FEM/BEM-Ansatz, der die Lösung eines nichtlinearen Eigenwertproblems beinhaltet (siehe Kap. 3.5.1), nicht anwendbar, da die Eigenschaften der Systemmatrix des Eigenwertproblems die Konvergenz der iterativen Gleichungslöser zunichte machen (siehe hierzu auch die Diskussion in Kap. 3.5.3). Daher wird in dieser Arbeit eine adaptive Netzverfeinerung nach Methode (b) vorgeschlagen (siehe Kap. 3.6). Dies führt zur folgenden Anforderung an den Triangulierungsalgorithmus: Die ortsabhängigen Kantenlängen der Elementdreiecke müssen möglichst gut mit einer vorgegebenen Funktion  $d(x, y)$ , die aus dem geschätzten Fehler berechnet wird, übereinstimmen.  $d(x, y)$  ist eine weitgehend beliebige Funktion und unterliegt nur den folgenden Einschränkungen:

- (a)  $d(x, y) > 0$ .
- (b)  $d(x, y)$  stetig, da Unstetigkeiten, wie oben beschrieben, zu Streueffekten führen können.
- (c)  $|\text{grad } d| \leq m_{\max}$ , d. h.  $d(x, y)$  darf nicht zu steil werden, um die Erzeugung verzerrter Dreiecke mit sehr spitzen oder sehr stumpfen Winkeln zu verhindern. Für  $m_{\max} = 1$  ändert sich  $d(x, y)$  längs

einer Elementkante um bis zu 100 %, was dazu führt, daß sich benachbarte Dreiecke stark in ihrer Größe unterscheiden. Die Entstehung verzerrter Dreiecke kann dann nicht verhindert werden. Die Erfahrungen mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Netzgenerator zeigen, daß dieser Effekt bei Verwendung der Obergrenze  $m_{\max} = 0.6$  weitgehend ausgeschlossen werden kann.

6. Der Aufwand zur Generierung der Triangulierung sollte klein gegenüber dem Aufwand zur anschließenden numerischen Lösung der Feldgleichungen sein.

Im folgenden Abschnitt werden einige Standard-Diskretisierungsverfahren vorgestellt und hinsichtlich der obigen Anforderungen bewertet.

**Methoden zur Erzeugung von Triangulierungen.** Die im folgenden beschriebenen Methoden werden in [28] und [31] detailliert erläutert. Daher wird auf Literaturangaben bei der Diskussion der Verfahren verzichtet.

Bei Triangulierungen zweidimensionaler Gebiete, deren Rand durch einen Polygonzug gegeben ist, wird zwischen *strukturierten* und *unstrukturierten* Netzen unterschieden. Ein strukturiertes Netz entsteht durch periodische Aneinanderreihung eines einfachen Grundelementes (z. B. trianguliertes Quadrat oder Sechseck), ggf. gefolgt von einem Transformationsschritt, der das Netz so deformiert, daß der Rand des zu diskretisierenden Gebietes durch Kanten des Netzes überdeckt wird. In der Regel wird das Einheitsquadrat mit einem regelmäßigen Gitter in kleinere Quadrate eingeteilt, die dann durch Hinzufügen der Diagonalen trianguliert werden. Anschließend wird das Einheitsquadrat mittels einer Koordinatentransformation auf den Rand des zu triangulierenden Gebietes abgebildet.

Die verschiedenen Verfahren zur Generierung strukturierter Netze unterscheiden sich in der Art der Bestimmung der zugehörigen Transformationsfunktion. Bei der *transfiniten Interpolation* wird der Gebietsrand in einen „oberen“, „unteren“, „linken“ und „rechten“ Rand eingeteilt. Auf den „oberen“ und „unteren“ Rändern werden jeweils gleich viele Gitterpunkte positioniert, die die „vertikalen“ Gittergeraden festlegen. Diese werden äquidistant durch weitere Gitterpunkte unterteilt (vertikale Interpolation) und so deformiert, daß sie je nach horizontaler Position mehr dem „linken“ oder mehr dem „rechten“ Rand ähneln (horizontale Korrektur). Da die transfinite Interpolation in ungünstigen Fällen Gitter mit sich schneidenden Gitterlinien der gleichen Koordinatenrichtung erzeugt (gefaltete Gitter), kann sie mit einer vorgeschalteten *Blockaufteilung* des Gebietes in geometrisch einfachere Teilgebiete kombiniert werden.

Bei den *intrinsischen Methoden* dient als Transformationsfunktion ein Separationsansatz, in dem nur Funktionen vorkommen, die lediglich von einer

Koordinate abhängen. Diese Funktionen werden durch Einsetzen des Einheitsquadrates in die Transformationsfunktion und Vergleich mit den Randkurven des Gebietes ermittelt.

Neben diesen algebraischen Methoden besteht auch die Möglichkeit zur *Gittererzeugung mit Differentialgleichungen*. Bei diesem Verfahren wird ein Startgitter (typischerweise erzeugt mit einem algebraischen Verfahren) durch iterative Lösung einer DGL, die die Transformationsfunktion beschreibt, schrittweise verbessert.

Der wesentliche Nachteil all dieser Verfahren besteht in der Schwierigkeit, geometrisch komplizierte Gebiete zu behandeln (Verletzung von Bedingung 1). Die algebraischen Methoden können für ein allgemeines Polygon die Erzeugung gefalteter Gitter nicht zuverlässig ausschließen. Die Gittererzeugung mit DGL kann dies durch entsprechende Wahl der DGL verhindern. Zusätzlich kann auf diese Weise die Gitterliniendichte lokal variiert werden. Auch bei diesem Verfahren ist es jedoch für komplizierte Gebiete i. allg. schwierig, Gitter zu erzeugen, die hinsichtlich Elementgröße und -form zufriedenstellend sind. Außerdem ist die numerische Lösung einer partiellen DGL sehr rechenzeitintensiv (Verletzung von Bedingung 6). Darüber hinaus enthalten strukturierte Netze häufig Vorzugsrichtungen (Verletzung von Bedingung 2), insbesondere bei Behandlung rechteckiger Gebiete. Aus diesen Gründen wird in der vorliegenden Arbeit ein Verfahren zur Erzeugung unstrukturierter Netze eingesetzt.

In der Praxis wird ein unstrukturiertes Netz außer den Ecken des zu triangulierenden Polygons bzw. den Punkten einer zu triangulierenden Punktmenge noch zahlreiche weitere Knoten, sogenannte *Steiner-Punkte*, enthalten (Steiner-Triangulierung). Triangulierungsmethoden, die keine Steiner-Punkte einfügen, weisen jedoch häufig Optimierungseigenschaften auf. So ist z. B. die *Delaunay-Triangulierung* (DT) einer Punktmenge diejenige Triangulierung, deren kleinster Winkel größer und deren größter Dreiecksumkreis kleiner als bei allen anderen Triangulierungen dieser Punktmenge ist. Die *Constrained-Delaunay-Triangulierung* (CDT) erfüllt diese Bedingungen im Fall der Triangulierung eines Polygons. Gegenüber der Triangulierung einer Punktmenge kommt hier die Einschränkung (constraint) hinzu, daß die Kanten des Polygons durch Kanten der Triangulierung vollständig überdeckt werden müssen. Der *Edge-Insertion-Algorithmus* kann Optimierungskriterien wie z. B. Minimierung des größten Winkels oder Maximierung der kleinsten Dreieckshöhe erfüllen. Mittels *dynamischer Programmierung* können noch weitere Kriterien berücksichtigt werden, z. B. Minimierung der größten Kantenlänge oder der Summe aller Kantenlängen, jedoch nur für einfach zusammenhängende Polygone.

Algorithmen, die keine Steiner-Punkte hinzufügen, sind zwar für den hier beschriebenen Anwendungsfall zunächst ungeeignet, können wegen ihrer Optimierungseigenschaften jedoch als letzter Schritt eines Steiner-

Triangulierungsverfahrens eingesetzt werden.

Die Steiner-Triangulierungsverfahren lassen sich einteilen in *heuristische* Verfahren und Verfahren, die Netze mit bestimmten mathematischen Eigenschaften erzeugen (ggf. unter Einbeziehung einer der oben beschriebenen Algorithmen). Zu den heuristischen Verfahren zählen z. B. *Advancing-Front-Methoden*<sup>6</sup> und die *Rivara-Verfeinerung*<sup>7</sup>.

Die nichtheuristischen Verfahren können Netze erzeugen, die u. a. eine der folgenden Eigenschaften aufweisen:

- Keine kleinen Winkel  
Alle neuen Winkel des erzeugten Netzes sind größer als eine feste Untergrenze (Winkel zwischen den Kanten des zu triangulierenden Polygons können natürlich nicht vergrößert werden). Beispiele hierfür sind Quadtree-Algorithmen (Untergrenze  $15.26^\circ$ ) sowie die Algorithmen von CHEW (Untergrenze  $30^\circ$ ) und RUPPERT (benutzerdefinierte Grenze).
- Keine großen Winkel / keine stumpfen Winkel  
Alle Winkel des erzeugten Netzes sind kleiner als eine feste Obergrenze. Alle Algorithmen, die Netze mit Grenzen für den kleinsten Winkel erzeugen, begrenzen zwangsläufig auch den größten Winkel (z. B. auf  $120^\circ$  beim Algorithmus von CHEW). Umgekehrt gilt dies nicht, es sei denn, die Obergrenze für den größten Winkel ist kleiner als  $90^\circ$ . Die schärfste Obergrenze, die keine Untergrenze für den kleinsten Winkel impliziert, ist also  $90^\circ$  (nichtstumpfwinklige Triangulierung). Ein Beispiel für einen Algorithmus, der eine nichtstumpfwinklige Triangulierung erzeugt, ohne eine Mindestgröße kleiner Winkel zu fordern, stellt das *Disc-Packing-Verfahren* von BERN, MITCHELL und RUPPERT dar. Bei diesem Verfahren wird das Polygon nach einem bestimmten Schema mit sich nicht überlappenden Kreisen überdeckt, so lange bis jeder nicht überdeckte Bereich höchstens vier (ggf. gekrümmte) Seiten hat. Die Kreismittelpunkte und die Berührungspunkte der Kreise untereinander und mit dem Polygon dienen dann als Steiner-Punkte.
- Maximierung der kleinsten Dreieckshöhe  
BERN et al. geben einen Algorithmus an, der Triangulierungen erzeugt, deren kleinste Dreieckshöhe sich nur um einen konstanten Faktor vom theoretisch erreichbaren Maximalwert unterscheidet. Der Algorithmus

---

<sup>6</sup>Diskretisierung des Randes; Positionierung von Steiner-Punkten in einem bestimmten Abstand vom Rand, bis eine geschlossene „Schicht“ aus Dreiecken entstanden ist; Erzeugung weiterer Schichten, bis das Gebiet ausgefüllt ist.

<sup>7</sup>Erzeugung einer Start-Triangulierung; Unterteilung eines zu verfeinernden Dreiecks durch Positionierung eines Steiner-Punktes auf der Mitte der längsten Seite; rekursive Durchführung dieses Schritts für alle Dreiecke, auf deren Seiten noch Steiner-Punkte liegen (z. B. das an die längste Seite des initialen Dreiecks angrenzende Dreieck); Durchführung des Algorithmus für weitere Dreiecke, bis das Netz fein genug ist.

legt ein Gitter über das Polygon, entfernt nicht benötigte Gitterlinien, schiebt Gitterpunkte in der Nähe des Gebietsrandes auf den Gebietsrand und faßt Rechtecke im Innern des Gebietes zu Polygonen zusammen, die dann trianguliert werden.

In Anhang A.3 wird gezeigt, daß bei der Berechnung von TEM-Wellen mit edge elements gleichseitige Elementdreiecke die höchste Genauigkeit bei vorgegebener Elementfläche bieten. Damit scheidet eine nichtstumpfwinklige Triangulierung ohne Begrenzung des kleinsten Winkels von vornherein aus, da hierbei beliebig langgezogene Dreiecke mit beliebig kleinen Winkeln entstehen können. Auch die Maximierung der kleinsten Dreieckshöhe verhindert nicht unbedingt die Entstehung derartiger Dreiecke, da die kleinste Dreieckshöhe nach oben durch die sogenannte *input feature size* (IFS) beschränkt ist. Die IFS eines Polygons ist definiert als der kürzeste Abstand innerhalb des Polygons von einem Eckpunkt zu einer Kante, die den Eckpunkt nicht berührt. Sind alle Höhen eines Dreiecks größer als die IFS, enthält das betreffende Dreieck nicht die kleinste Höhe, so daß für den Algorithmus hier kein Optimierungspotential besteht, unabhängig von der Form des Dreiecks. Als sinnvollste Variante zur Generierung von möglichst gleichseitigen Dreiecken erscheint somit die Verwendung eines Verfahrens, das mit einer festen unteren Winkelgrenze arbeitet. In der Literatur werden die folgenden Verfahren beschrieben:

- Quadtree-Methoden

Diese Methoden basieren auf der Konstruktion von *Quadtrees*, die über das zu triangulierende Polygon gelegt werden. Quadtrees sind rekursive Unterteilungen eines quadratischen Gebietes in kleinere Quadrate mit achsenparallelen Kanten (siehe Abb. 3.3). Die Quadtrees werden so konstruiert, daß sich in jeder Zelle höchstens ein Eckpunkt des Polygons befindet und die Kantenlänge benachbarter Zellen sich höchstens um den Faktor 2 unterscheidet (balancierter Quadtree). Nach bestimmten Regeln werden dann die Knoten des Quadtrees, die in der Nähe des Polygonrandes liegen, auf den Rand verschoben (*warping*). Anschließend werden die Zellen des Quadtrees durch Einfügen von Diagonalen trianguliert (Abb. 3.4). Die dabei entstehenden Winkel sind mindestens  $15.26^\circ$  groß.

- Methode von CHEW

Die Methode von CHEW beinhaltet als ersten Schritt die Unterteilung der Randkanten des Polygons, bis alle Kantenlängen zwischen  $h$  und  $h\sqrt{3}$  liegen, wobei  $h$  ein frei wählbarer Parameter mit  $h \leq \text{IFS}$  ist. Anschließend wird die CDT des unterteilten Polygons (ohne Hinzufügung von Steiner-Punkten) berechnet. Im weiteren Verlauf werden Steiner-Punkte auf den Mittelpunkten von Dreiecksumkreisen mit einem Radi-

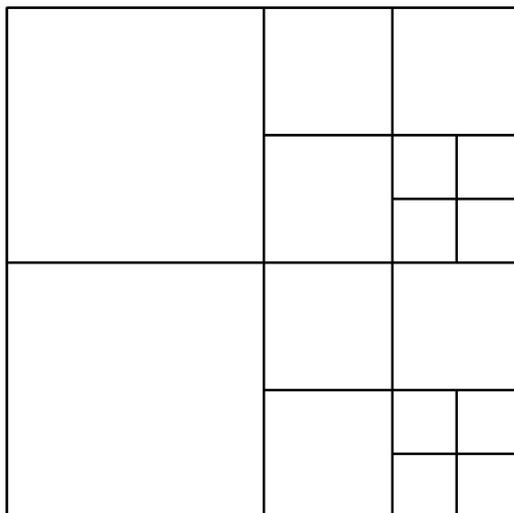


Abbildung 3.3: Balancierter Quadtree

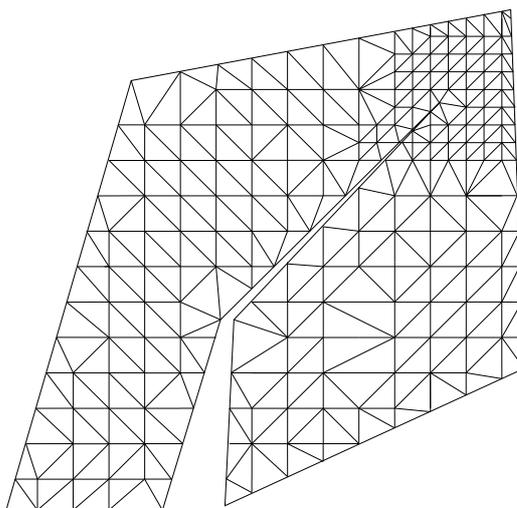


Abbildung 3.4: Quadtree-Triangulierung (aus [31])

us  $\rho > h$  positioniert. Jeder neue Steiner-Punkt führt zur Neuberechnung der CDT. Die Prozedur endet, wenn alle Umkreisradien kleiner als  $h$  sind. Die neu entstandenen Winkel liegen dann zwischen  $30^\circ$  und  $120^\circ$ .

- Methode von RUPPERT  
Die Methode von RUPPERT ist eine Abwandlung von CHEWs Methode. Das Einfügekriterium für neue Steiner-Punkte ist hier nicht unbedingt der Umkreisradius, sondern eine benutzerdefinierte Nebenbe-

dingung für die Fläche oder den kleinsten Winkel eines Dreiecks. Ein Steiner-Punkt wird jedoch nicht eingefügt, wenn er im Durchmesser-kreis einer Randkante (kleinster Kreis, der die Randkante enthält) liegt; stattdessen wird die Randkante unterteilt.

Die Quadtree-Methoden sind für den hier geplanten Einsatzzweck weniger gut geeignet, da sie Netze mit stark ortsabhängiger Dreiecksgröße erzeugen (siehe Abb. 3.4), wobei die Ortsabhängigkeit nicht von außen steuerbar ist, sondern allein durch die Geometrie des Polygons gegeben ist (Verletzung der Bedingung 5). Demgegenüber kann die Methode von CHEW Netze mit einer vom Benutzer vorgegebenen Größenverteilung erzeugen, indem die Umkreisradien nicht mit dem Parameter  $h$ , sondern mit der vom Benutzer gewünschten ortsabhängigen Kantenlänge verglichen werden. Weiterhin weisen Quadtree-Netze deutliche Vorzugsrichtungen auf (Verletzung der Bedingung 2) und benötigen Steiner-Punkte auf dem Gebietsrand (Verletzung der Bedingung 4). Den letzteren Nachteil weist auch das Verfahren von RUPPERT auf. Bei der Methode von CHEW werden zwar auch Randkanten unterteilt, jedoch geschieht dies zu Beginn, d. h. vor der eigentlichen Triangulierung, die dann keine weiteren Steiner-Punkte auf dem Rand benötigt. Zunächst können also alle Randkanten aller Teilgebiete der Anordnung diskretisiert werden. Erst danach wird der Triangulierungsschritt von CHEWs Methode auf die Teilgebiete angewendet, die mit der FEM behandelt werden sollen. Somit stellt CHEWs Methode den einzigen der hier beschriebenen Algorithmen dar, mit dem alle genannten Anforderungen erfüllt werden können. Im folgenden Abschnitt werden die Details eines Triangulierungsverfahrens dargelegt, das auf dieser Methode basiert und Rand- sowie Gebietsdiskretisierungen nach benutzerdefinierten Elementgrößenverteilungen erzeugen kann.

**Entwicklung eines Triangulierungsverfahrens.** Das hier vorgeschlagene Diskretisierungsverfahren läßt sich in die folgenden Schritte aufteilen:

1. Zunächst werden die Ränder aller Teilgebiete der Anordnung in Randelemente unterteilt. Dabei wird eine vom Benutzer vorgegebene ortsabhängige Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  beachtet. Für alle Gebiete, die mit der BEM behandelt werden sollen, ist der Diskretisierungsvorgang damit beendet; die weiteren Schritte werden nur für FEM-Gebiete ausgeführt.
2. Für jedes FEM-Gebiet wird die CDT des diskretisierten Randes berechnet. Anschließend werden solange Steiner-Punkte auf Umkreismitelpunkten zu großer Dreiecke positioniert, bis die vorgegebene Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  von der Triangulierung möglichst gut eingehalten wird. Die Randelemente werden nicht unterteilt, da zum einen

die Längen dieser Elemente bereits im ersten Schritt an die Kantenlängenfunktion angepaßt wurden und zum anderen eine unterschiedliche Randdiskretisierung benachbarter Gebiete die Formulierung der Gleichungen für die Gebietskopplung erschwert (Bedingung 4).

3. Im letzten Schritt wird durch geringfügige Veränderungen der Knotenpositionen eine Optimierung hinsichtlich der Übereinstimmung der Triangulierung mit der Kantenlängenfunktion vorgenommen. Dabei verbessern sich auch die Winkeleigenschaften der Dreiecke. Die Randdiskretisierung wird bei diesem Schritt nicht verändert.

Die folgenden Abschnitte beschreiben die konkrete Ausprägung dieser drei Schritte.

**Schritt 1: Randdiskretisierung** Im ersten Schritt sind die Randkanten aller Polygone so zu unterteilen, daß die Längenverteilung der entstehenden Randelemente möglichst gut mit der vom Benutzer vorgegebenen Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  übereinstimmt. Dazu wird zunächst der Kehrwert von  $d(x, y)$  längs der zu diskretisierenden Kante integriert:

$$\tilde{M} = \int_C \frac{1}{d(x, y)} ds. \quad (3.15)$$

Der Integrationsweg  $C$  entspricht dabei der jeweiligen Kante. Für konstantes  $d$  ergibt sich  $\tilde{M} = l_C/d$ , wobei  $l_C$  die Länge des Integrationsweges ist. In diesem Fall stellt  $\tilde{M}$  also die Anzahl der Randelemente dar, in die die Kante zu unterteilen ist. Die Verallgemeinerung auf den nichtkonstanten Fall führt zu Gleichung (3.15).

Der so ermittelte Wert für  $\tilde{M}$  wird auf einen ganzzahligen Wert  $M$  gerundet. Mit dem Korrekturfaktor  $a = M/\tilde{M}$  ergibt sich

$$M = \int_C \frac{a}{d(x, y)} ds. \quad (3.16)$$

Um nun  $M$  Randelemente zu erzeugen, müssen  $M - 1$  Randknoten eingefügt werden. Zur Bestimmung der Position des ersten Knotens ist ein Integrationsweg  $C_1$  zu bestimmen, der einen zusammenhängenden Ausschnitt von  $C$  darstellt, den gleichen Startpunkt wie  $C$  hat und die Gleichung

$$1 = \int_{C_1} \frac{a}{d(x, y)} ds \quad (3.17)$$

erfüllt. Die Anzahl der Randelemente längs des Weges  $C_1$  ist dann genau 1, so daß der Endpunkt von  $C_1$  der Position des ersten Knotens entspricht. Die

zweite Knotenposition wird analog durch Festlegung eines zweiten Integrationsweges  $C_2$  bestimmt, der am Endpunkt von  $C_1$  beginnt und die Gleichung

$$1 = \int_{C_2} \frac{a}{d(x, y)} ds \quad (3.18)$$

erfüllt. Auf diese Weise entstehen  $M$  Integrationswege mit  $C = C_1 \cup \dots \cup C_M$ .

Implementiert wurde dieser Ansatz mittels Durchführung einer numerischen Integration zur Berechnung des Integrals in (3.16). Beim Abfahren des Weges  $C$  wächst der numerisch ermittelte Wert kontinuierlich von 0 auf  $M$ . Immer wenn dieser Wert eine ganze Zahl überschreitet, wird ein Knoten eingefügt.

**Schritt 2: Triangulierung** Zur Triangulierung eines FEM-Gebietes wird zunächst die Delaunay-Triangulierung (DT) der im ersten Schritt festgelegten Randknoten ermittelt. Dazu werden, ausgehend von einer Starttriangulierung, die Randknoten nacheinander dem Netz hinzugefügt, jeweils gefolgt von einer Neuberechnung der DT. Die Starttriangulierung besteht aus einem zufällig ausgewählten Randknoten sowie aus drei Hilfsknoten, die ein Dreieck bilden, das die konvexe Hülle aller Randknoten enthält und deutlich größer als diese ist. Diese Maßnahme begrenzt die maximale Umkreisgröße der Dreiecke in der entstehenden DT, wodurch einige numerische Probleme vermieden werden können. Außerdem entfällt dadurch die Sonderbehandlung des Falls, daß ein neu einzufügender Knoten die konvexe Hülle der bisherigen Knoten verläßt. Auch bei der Ermittlung der Einfügeposition sind Fallunterscheidungen zur Behandlung des Randes nicht mehr erforderlich.

Anschließend werden die restlichen Randknoten in zufälliger Reihenfolge eingefügt. Durch diesen Random-Incremental-Ansatz wird ein bei geordneter Einfügereihenfolge mögliches ungünstiges Anwachsen der Laufzeit vermieden. Zum Einfügen eines neuen Randknotens wird zunächst das Dreieck der bisherigen Triangulierung gesucht, das den neuen Knoten enthält. Mit Hilfe eines Suchbaums, der alle bisher eingefügten Knoten enthält, wird ein in der Nähe der Einfügeposition liegender Knoten gesucht. Durch Überprüfung der benachbarten Dreiecke gelangt der Algorithmus dann zum fraglichen Dreieck. Um den neuen Knoten so in das Netz einzufügen, daß die Delaunay-Eigenschaft erhalten bleibt, muß der Netzgenerator nun prüfen, ob die drei Kanten dieses Dreiecks (Kanten  $AB$ ,  $BE$  und  $EA$  in Abb. 3.5) in der aktualisierten DT noch vorkommen. Dazu trägt er die Kanten in eine Liste noch zu überprüfender Kanten ein. Die Überprüfung einer Kante läuft dann folgendermaßen ab: Jede Kante gehört zu dem Dreieck, in das der neue Knoten eingefügt wird, und zu einem benachbarten Dreieck. Es wird nun das Viereck betrachtet, das von dem benachbarten Dreieck und dem einzufügenden Knoten gebildet wird (z.B. das Viereck  $EFAG$  zur Überprüfung der Kante  $AE$ ). Die zu überprüfende Kante stellt eine von zwei möglichen Diagonalen

des Vierecks dar, d. h. es gibt zwei Möglichkeiten, das Viereck zu triangulieren. Eine dieser beiden Möglichkeiten stellt die DT des Vierecks dar. Bei der DT beträgt die Summe der beiden Innenwinkel, die von der Diagonale geteilt werden, mindestens  $180^\circ$ . Ist dies nicht der Fall, muß die Diagonale durch die andere Diagonale ersetzt werden, um eine DT herzustellen. Diese Ersetzung wird als *Flipping-Operation* bezeichnet. Können in einer Triangulierung keine Flipping-Operationen mehr durchgeführt werden, stellt diese Triangulierung eine DT dar, so daß die DT allein mittels Flipping erzeugt werden kann. Aus einer lokalen Delaunay-Eigenschaft (alle Vierecke sind Delaunay-trianguliert) folgt also die globale Eigenschaft (gesamte Triangulierung ist eine DT).

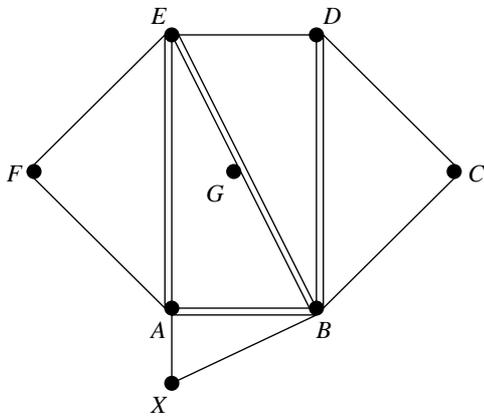


Abbildung 3.5: Triangulierung vor dem Einfügevorgang des Knotens  $G$

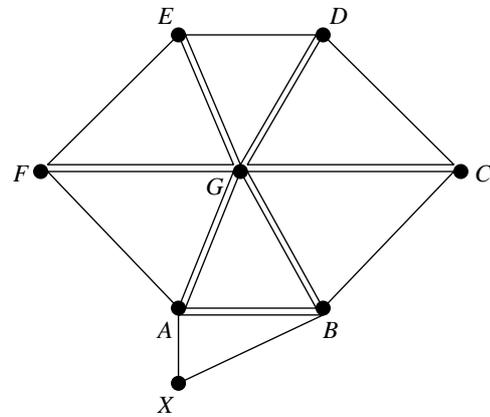


Abbildung 3.6: Triangulierung nach dem Einfügevorgang

Muß eine Kante geflippt werden, wird sie zunächst aus dem Netz entfernt. Außerdem werden die verbleibenden beiden Kanten des benachbarten Dreiecks, dem die überprüfte Kante angehörte, in die Liste der zu überprüfenden Kanten eingetragen. Muß die Kante nicht geflippt werden, sind ihre beiden Endpunkte Nachbarknoten des neu einzufügenden Knotens  $G$ . Mit dieser Methode werden im Beispiel in Abb. 3.5 die Kanten  $BE$ ,  $BD$  und  $EA$  entfernt und als Nachbarknoten die Knoten  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  und  $F$  identifiziert. Zum Schluß werden die Kanten vom einzufügenden Knoten  $G$  zu seinen Nachbarknoten eingetragen (Abb. 3.6). Auf diese Weise kann in der Regel mit relativ wenigen Operationen die DT nach Einfügen eines neuen Randknotens aktualisiert werden. Dies wird fortgesetzt, bis alle Randknoten eingefügt sind.

Der hier beschriebene Random-Incremental-Ansatz wird in der Literatur als langsam verglichen mit dem üblicherweise für die DT-Berechnung verwendeten Divide-and-conquer-Algorithmus angesehen [33]. Durch die Einführung des oben erwähnten Suchbaums zur Lokalisierung des Dreiecks, in dem die

Einfügeposition liegt, konnte jedoch eine ähnliche Laufzeit erreicht werden. Dies wurde in [30] durch Vergleich mit dem Triangle-Paket von SHEWCHUK [33] bestätigt. Der Vorteil des Random-Incremental-Ansatzes liegt in der höheren numerischen Robustheit. Beim Divide-and-conquer-Ansatz sind aufwendige Kunstgriffe erforderlich, um ein numerisches Versagen der Methode zu verhindern (z.B. Arithmetik mit adaptiver Genauigkeit, siehe [33]), während sich die hier beschriebene Implementation u. a. aufgrund der Einführung der Hilfsknoten bei der DT-Berechnung als äußerst robust erwiesen hat.

An diesem Punkt des Verfahrens steht die DT der Randknoten des zu triangulierenden Polygons und der drei Hilfsknoten zur Verfügung. Diese Triangulierung enthält jedoch nicht notwendigerweise die Randkanten des Polygons, da nur die Knotenpositionen, nicht aber die Nachbarschaftsbeziehungen vorgegeben wurden. Daher muß nach der Erzeugung der DT der Übergang  $DT \rightarrow CDT$  durchgeführt werden. Bei der Überprüfung der Randkanten können drei Fälle auftreten:

1. Die Randkante ist bereits in der DT enthalten: keine weitere Aktion erforderlich.
2. Die Randkante fehlt, kann aber durch einfaches Flipping erzeugt werden: Durchführung der Flipping-Operation.
3. In den übrigen Fällen werden alle Kanten, welche die fehlende Randkante schneiden, entfernt, so daß diese in das Netz eingefügt werden kann. Auf beiden Seiten der Randkante befindet sich nun je ein nicht trianguliertes Polygon. Es ist dann die CDT des Polygons zu bestimmen, das innerhalb des Ausgangsgebietes liegt. Dazu wird die hier beschriebene Methode zur Bestimmung von DT und CDT rekursiv aufgerufen. Dieser Fall tritt allerdings in der Praxis nur selten auf; in der Regel ist die Randkante bereits in der DT enthalten oder kann durch einfaches Flipping erzeugt werden.

Unabhängig davon, welcher Fall eintritt, wird die betreffende Randkante nach der Bearbeitung als fest markiert, damit sie bei den nachfolgenden Verarbeitungsschritten nicht mehr eliminiert werden kann.

Nach Bestimmung der CDT der Randknoten und -kanten erfolgt die Verfeinerung des Netzes durch Hinzufügen von Steiner-Punkten, die im Inneren, jedoch nicht auf dem Rand des Gebietes liegen. Wie bei der Positionierung der Randknoten besteht das Ziel auch hier in der Einhaltung der vorgegebenen Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$ . Dazu wird vom Algorithmus eine *Priority Queue* angelegt, die alle Dreiecke enthält, welche dieser Vorgabe noch nicht in ausreichendem Maße genügen. Entscheidend dafür ist der Umkreisradius  $\rho$ . Wenn das Kriterium

$$\rho > 0.74 d(x_m, y_m) \quad (3.19)$$

erfüllt ist, wobei  $(x_m, y_m)$  den entsprechenden Umkreismittelpunkt darstellt, wird das Dreieck in die Priority Queue eingetragen. Der Wert 0.74 wurde empirisch ermittelt und hat folgende Bedeutung: Die oben erläuterte Methode von CHEW, die Grundlage des hier beschriebenen Verfahrens ist, verwendet als Kriterium die Bedingung  $\rho > h$ , wobei  $h$  eine ortsunabhängige Größe ist. Die Methode von CHEW erzeugt mit diesem Kriterium Netze, deren Kantenlängen zwischen  $h$  und  $2h$  liegen. Entsprechend würde das Kriterium  $\rho > d$  für den Fall  $d(x, y) = \text{const.}$  Kantenlängen zwischen  $d$  und  $2d$  produzieren, d. h. im Mittel wären die Kanten deutlich länger als gewünscht. Läge der Mittelwert bei  $1.5d$ , müßte das Kriterium  $\rho > \frac{2}{3}d$  lauten, um im Mittel die Kantenlänge  $d$  zu erhalten. Da dies jedoch nicht der Fall ist, ist ein anderer Vorfaktor hierfür erforderlich. Unter Verwendung verschiedener Anordnungen und Verteilungsfunktionen  $d(x, y)$  wurde empirisch ein mittlerer Vorfaktor von 0.74 ermittelt.

Durch die Ortsabhängigkeit des Kriteriums (3.19) geht die Winkelgarantie von CHEWs Methode (Erzeugung von Winkeln zwischen  $30^\circ$  und  $120^\circ$ ) verloren. Für Kantenlängenfunktionen  $d(x, y)$  mit nicht zu großem Gradienten ( $|\text{grad } d| < 0.6$ ) verläßt jedoch nur ein kleiner Teil der Winkel dieses Intervall. Dieser Anteil wird durch einen nachfolgenden Optimierungsschritt außerdem deutlich reduziert (Abb. 3.8a–3.8c).

Die Dreiecke, die Kriterium (3.19) erfüllen, werden in die Priority Queue eingetragen und nach der Größe des Umkreisradius sortiert. Beginnend mit dem Dreieck, das den größten Umkreis hat, werden dann die Umkreismittelpunkte als Steiner-Punkte in das Netz eingefügt, sofern sie nicht außerhalb des zu triangulierenden Gebietes liegen oder sich so nahe an einer Randkante befinden, daß das Verhältnis zwischen Abstand zur Randkante und Länge der Kante einen konfigurierbaren Wert unterschreitet. Der Einfügevorgang ist nahezu identisch zum Einfügen der Randknoten bei der Berechnung der DT, besteht also aus dem Finden des Dreiecks, das die Einfügeposition enthält, und dem Bearbeiten benachbarter Kanten mit dem Flipping-Kriterium. Beim Einfügen von Steiner-Punkten muß zusätzlich die Priority Queue aktualisiert werden, da bestehende Dreiecke entfernt wurden und neue hinzugekommen sind. Nach Beendigung eines Einfügevorgangs stellt die Triangulierung die CDT der bis zu diesem Zeitpunkt eingefügten Knoten dar, da die als fest markierten Randkanten im Netz enthalten sind und keine Flipping-Operationen mehr möglich sind. Die Prozedur endet, wenn die Priority Queue leer ist.

**Schritt 3: Optimierung** Der Optimierungsschritt dient dazu, die Kantenlängen, die nach dem Triangulierungsschritt etwa zwischen dem 0.7- und dem 1.5-fachen der erwünschten Kantenlänge  $d(x, y)$  liegen (Abb. 3.8a), etwas besser an diese anzugleichen und dabei auch die Winkelgrenzen weiter einzuengen (*smoothing*). Die folgenden zwei Verfahren wurden entwickelt und auf ihre diesbezügliche Eignung hin untersucht:

1. Minimierung der quadratischen Abweichung von der Zielkantenlänge  
Für jeden Knoten wird diejenige Position ermittelt, für welche die Summe der quadratischen Abweichungen der Nachbarknotenabstände von den Zielkantenlängen ein Minimum annimmt. Die Zielkantenlänge  $d_{ij}$  für die Verbindung von einem Knoten  $i$  zu einem Nachbarknoten  $j$  wird dabei gemäß

$$d_{ij} = \frac{d(x_i, y_i) + d(x_j, y_j)}{2} \quad (3.20)$$

berechnet, stellt also den Mittelwert der Zielkantenlängen an den Endpunkten der Verbindung dar. Da die Minimierung auf analytischem Weg nicht möglich ist, werden die Ableitungen des zu minimierenden Ausdrucks nach seinen beiden Unbekannten ( $x$ - und  $y$ -Koordinate der Knotenposition) gleich 0 gesetzt. Das resultierende nichtlineare Gleichungssystem wird dann iterativ mit dem Newton-Verfahren gelöst. Dies wird nacheinander für alle Knoten durchgeführt. Anschließend werden ggf. Flipping-Operationen durchgeführt, um wieder eine CDT zu erhalten. Diese Abfolge wird insgesamt viermal durchgeführt. Die durch weitere Iterationen hervorgerufenen Änderungen sind in der Regel vernachlässigbar.

2. Modifiziertes Laplace-Smoothing

Beim Laplace-Smoothing wird ein Knoten in den Schwerpunkt des Polygons der Nachbarknoten verschoben. Dieses Verfahren mußte aufgrund der Ortsabhängigkeit der angestrebten Kantenlänge folgendermaßen modifiziert werden: Zunächst werden die Schwerpunkte der Dreiecke, die den zu verschiebenden Knoten berühren, berechnet. Jedem Schwerpunkt wird dann das „Gewicht“  $A/d^2(x_s, y_s)$  zugeordnet, wobei  $A$  die Fläche des zugehörigen Dreiecks ist und  $(x_s, y_s)$  dessen Schwerpunkt. Das Gewicht entspricht also der Dreiecksfläche in Einheiten des Quadrats der Zielkantenlänge, ausgewertet am Dreiecksschwerpunkt. Die neue Knotenposition ist dann der gewichtete Mittelwert der Schwerpunkte.

Nach Durchführung dieses Verfahrens für alle Knoten wird mit Flipping-Operationen eine CDT erzeugt. Dieser Ablauf wird ebenfalls viermal durchgeführt.

Zum Vergleich der Wirkungsweise der beiden Verfahren wird das Einheitsquadrat mit der Kantenlängenvorgabe  $d(x, y) = 0.00005 + 0.3|\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5|$  trianguliert. Die minimale Kantenlänge 0.00005 führt zu einem Netz mit über 500000 Knoten. Abb. 3.7 zeigt das resultierende Netz. Die meisten Knoten befinden sich in der Nähe des Kreises  $x^2 + y^2 = 0.25$ , da dort  $d(x, y)$  fast 0 ist und die Knotendichte somit sehr hoch ist. In Abb. 3.8a ist die resultierende Winkel- und Kantenlängenverteilung für den Fall ohne Smoothing-Schritt

zu sehen. Die dargestellte Kantenlängenverteilung bezieht sich auf normierte, d. h. durch die jeweilige Zielkantenlänge dividierte Kantenlängen. Angestrebt wird also der Wert 1.

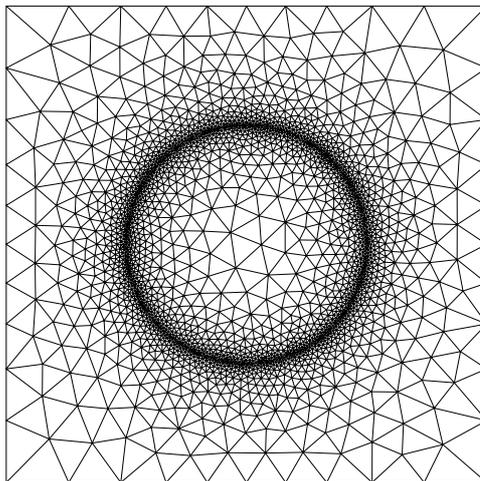


Abbildung 3.7: Triangulierung des Einheitsquadrats mit der Kantenlängenvorgabe  $d(x, y) = 0.00005 + 0.3|\sqrt{x^2 + y^2} - 0.5|$

Die Abb. 3.8b und 3.8c zeigen die entsprechenden Verteilungen für die beiden Smoothing-Varianten. Beide Methoden verbessern die Netzqualität erheblich: Die mittleren quadratischen Abweichungen sowohl vom Winkelmittelwert ( $60^\circ$ ) als auch vom Längenmittelwert ( $\approx 1$ ) werden deutlich reduziert. Weiterhin halten die nachbearbeiteten Netze engere Winkelgrenzen ein. Beim modifizierten Laplace-Smoothing sind die Winkelgrenzen in diesem Fall etwas besser als beim Smoothing nach Methode 1, während bei letzterem bessere Grenzen bezüglich der normierten Kantenlänge eingehalten werden. Dies verwundert nicht, da Methode 1 eine Optimierung hinsichtlich der Kantenlänge beinhaltet. Aus diesem Grund wird die bessere Einhaltung der vorgegebenen Kantenlänge durch Methode 1 auch bei anderen Beispielen beobachtet, wohingegen die Winkelgrenzen je nach Anordnung mal bei der einen, mal bei der anderen Methode besser sind. Daher wird im weiteren Methode 1 verwendet.

### 3.3 Entwicklung einer Boundary-Element-Methode

#### 3.3.1 Überblick

Im Rahmen der Entwicklung einer Variante der Boundary-Element-Methode, die für die geplanten Einsatzfelder geeignet ist, wurden fünf verschiedene

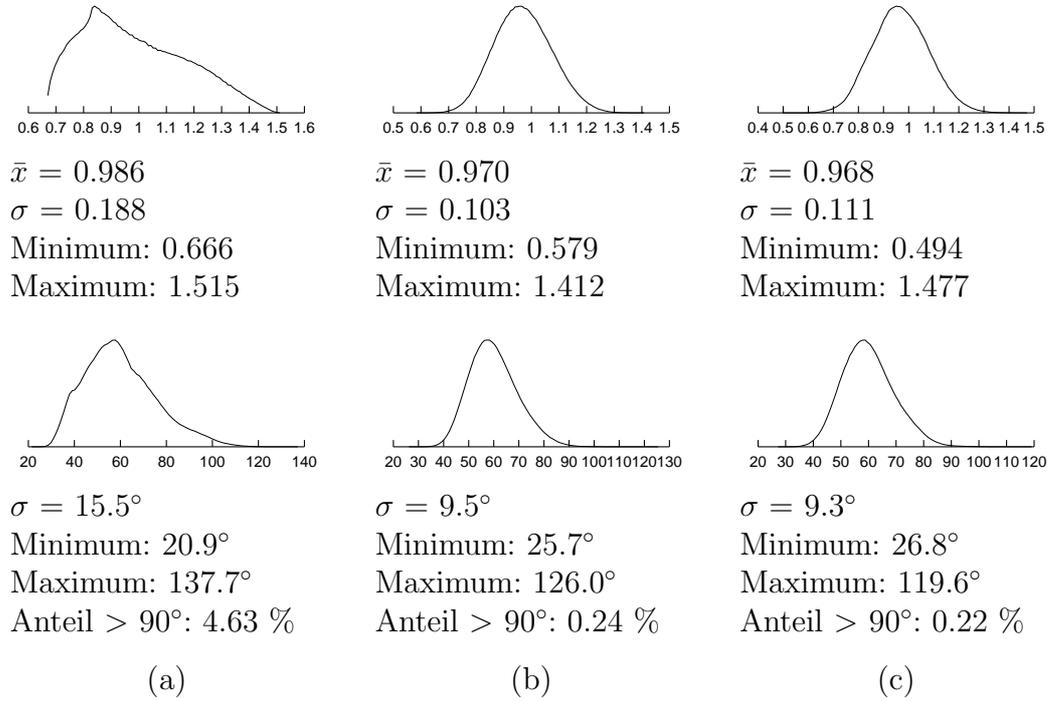


Abbildung 3.8: Mittelwert  $\bar{x}$ , Standardabweichung  $\sigma$ , Minimum und Maximum der Längen- und Winkelverteilung ohne Smoothing (a), mit Smoothing-Methode 1 (b) und mit Smoothing-Methode 2 (c)

Ansätze konzipiert und auf ihre Eignung untersucht. Die Ansätze unterscheiden sich hinsichtlich der zu diskretisierenden Ausgangsgleichung sowie der gewählten Ansatz- und Testfunktionen. Folgende Ansätze wurden untersucht:

1. Integralgleichung (abgeleitet aus der Helmholtz-Gleichung) für  $\underline{E}_z$ ,  $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}$ ,  $\underline{H}_z$  und  $\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ , konstante Ansatzfunktionen, point matching (Kap. 3.3.2),
2. Integralgleichung (abgeleitet aus der Helmholtz-Gleichung) für  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{H}_z$  und  $\underline{H}_s$ , konstante Ansatzfunktionen, point matching (Kap. 3.3.3),
3. Integralgleichung (abgeleitet aus der Helmholtz-Gleichung) für  $\underline{E}_z$ ,  $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}$ ,  $\underline{H}_z$  und  $\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ , Greensche Funktionen als Ansatzfunktionen, Polynome als Testfunktionen (Kap. 3.3.4),
4. Integralgleichung (abgeleitet aus der Helmholtz-Gleichung) für  $\underline{H}_x$ ,  $\frac{\partial \underline{H}_x}{\partial n}$ ,  $\underline{H}_y$  und  $\frac{\partial \underline{H}_y}{\partial n}$ , konstante Ansatzfunktionen, point matching (Kap. 3.3.6),
5. Integralgleichung (abgeleitet aus Gleichung (2.23)) für  $\vec{n} \times \underline{\underline{E}}$  und  $\vec{n} \times \underline{\underline{H}}$ ,

Greensche Funktionen als Ansatzfunktionen, Polynome als Testfunktionen (Kap. 3.3.7).

Es zeigt sich, daß bei den ersten vier Ansätzen ähnliche Schwierigkeiten beobachtet werden wie bei FEM-Knotenelementen, und zwar nichtphysikalische Lösungen sowie Ungenauigkeiten bei der Modellierung von TEM- bzw. Quasi-TEM-Feldern. Erst die spezielle Wahl von Ansatz- und Testfunktionen in Verbindung mit der Verwendung von (2.23) als Ausgangsgleichung beim fünften Ansatz liefert zuverlässige Ergebnisse.

### 3.3.2 $\underline{E}_z, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}, \underline{H}_z, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen

Im Fall isotroper Medien (skalares  $\varepsilon$  und  $\mu$ ) lassen sich die Gleichungen (2.20) und (2.21) so umformulieren, daß sich die Feldkomponenten  $\underline{E}_x, \underline{E}_y, \underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  aus den axialen Komponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  berechnen lassen. Ein numerisches Berechnungsverfahren braucht also zunächst nur  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  zu bestimmen und kann daraus die anderen Komponenten in einem nachgeschalteten Schritt ermitteln.

In Bereichen des Leitungsquerschnitts mit konstanten Materialparametern  $\varepsilon$  und  $\mu$  (homogenes Medium) genügen  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  der Helmholtz-Gleichung

$$\Delta^{(t)}u + (\omega^2\varepsilon\mu - k^2)u = 0, \quad u \in \{\underline{E}_z, \underline{H}_z\}. \quad (3.21)$$

Daraus folgt durch Anwendung des zweiten Greenschen Satzes je eine Integralgleichung der Form (2.39):

$$c(\vec{r}_p)u(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} \left[ G(\vec{r}_p, \vec{r}) \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(\vec{r}) - \frac{\partial G}{\partial n}(\vec{r}_p, \vec{r}) \cdot u(\vec{r}) \right] ds, \quad (3.22)$$

$$c(\vec{r}_p) = \iint_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_p) dA. \quad (3.23)$$

Dabei ist  $A$  der betrachtete homogene Bereich, und  $\frac{\partial}{\partial n}$  steht für die Richtungsableitung senkrecht zur Randkurve von  $A$  (Normalenableitung).  $G$  entspricht der Greenschen Funktion der Helmholtz-Gleichung für den freien, zweidimensionalen Raum:

$$G = \frac{1}{2\pi} K_0(-j\kappa|\vec{r} - \vec{r}_p|), \quad (3.24)$$

$$\kappa^2 = \omega^2\varepsilon\mu - k^2, \quad \Im \kappa \geq 0. \quad (3.25)$$

$K_0$  ist die modifizierte Besselsche Funktion zweiter Gattung nullter Ordnung. Die i. allg. komplexe Wurzel aus  $\kappa^2$  ist so zu wählen, daß der Imaginärteil von  $\kappa$  größer gleich 0 ist.

Die Operatoren  $\mathcal{L}$ ,  $\vec{\mathcal{F}}$ ,  $\hat{\mathcal{F}}$ ,  $\vec{\mathcal{G}}$  und  $\hat{\mathcal{G}}$  aus Gleichung (2.39) sind in diesem Fall skalare Operatoren und lassen sich durch Vergleich mit (3.21) und (3.22) ermitteln:

$$\mathcal{L} = \Delta^{(t)} + \omega^2 \varepsilon \mu - k^2, \quad (3.26)$$

$$\mathcal{F} = \hat{\mathcal{F}} = 1, \quad (3.27)$$

$$\mathcal{G} = \hat{\mathcal{G}} = \frac{\partial}{\partial n}. \quad (3.28)$$

In der zu lösenden Gleichung (3.22) treten die unbekannt Funktionen  $u$  und  $\partial u / \partial n$  nur auf dem Rand des betrachteten Gebietes  $A$  auf. Zur Diskretisierung dieser Gleichung wird der Rand mit dem bereits in Kap. 3.2.3 beschriebenen Verfahren in Elemente unterteilt, innerhalb derer  $u$  und  $\partial u / \partial n$  als konstant angesehen werden (konstante Ansatzfunktionen). Bei einer Aufteilung in  $M$  Elemente ergibt sich somit eine Anzahl von  $4M$  Unbekannten (je  $M$  für  $\underline{E}_z, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}, \underline{H}_z, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ ). Aufgrund dieser begrenzten Anzahl von Freiheitsgraden kann (3.22) nicht für alle Punkte  $\vec{r}_p$  erfüllt werden. Stattdessen werden für  $\vec{r}_p$  nur die Mittelpunkte der  $M$  Elemente eingesetzt, was  $2M$  Gleichungen ergibt (point matching). Die noch fehlenden  $2M$  Gleichungen sind aus den Randbedingungen abzuleiten (z. B.  $\underline{E}_z = 0, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n} = 0$  für jedes ideal leitende Element im Fall isotroper Medien).

Dieses Verfahren leidet jedoch wie die FEM mit Knotenelementen unter dem Auftreten nichtphysikalischer Lösungen schon bei sehr einfachen Anordnungen. Für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 beispielsweise ergibt sich für die Funktion  $R(k)$  der in Abb. 3.10 dargestellte Verlauf. Neben den richtigen Lösungen bei  $k/k_0 = 1.4896$  und  $k/k_0 = 1.4980$  sind zahlreiche andere Lösungen zu sehen, die jedoch keiner physikalisch ausbreitungsfähigen Welle entsprechen. In den Abschnitten 3.3.3–3.3.7 werden mögliche Ursachen und daraus resultierende Abhilfemaßnahmen untersucht.

### 3.3.3 $\underline{E}_z, \underline{E}_s, \underline{H}_z, \underline{H}_s$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen

Bei der Lösung der Gleichung (3.22) muß an Grenzflächen zwischen zwei Dielektrika die Stetigkeit der tangentialen  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Feldkomponenten gefordert werden, da in solchen Grenzflächen keine Oberflächenströme auftreten. Tangential zur Grenzfläche sind bei Leitungssystemen mit konstantem Querschnitt die axialen Komponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  sowie die Komponenten längs der zugehörigen Grenzlinie im Leitungsquerschnitt, die im folgenden mit  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  bezeichnet werden. Es gilt  $\underline{E}_s = \vec{s} \vec{E}, \underline{H}_s = \vec{s} \vec{H}$ , wobei der Einheitsvektor  $\vec{s}$  tangential zur Grenzlinie liegt und in Richtung eines mathematisch positiven Umlaufs um das Gebiet, dem er zugeordnet ist, zeigt.

Die Stetigkeit von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  läßt sich leicht dadurch gewährleisten, daß den Randelementen auf der Grenzlinie Variablen für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  zugeord-

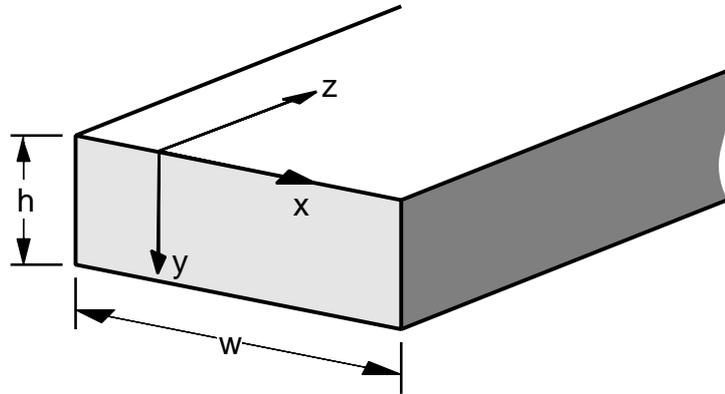


Abbildung 3.9: Rechteckiger, dielektrischer Wellenleiter mit  $w = 2h$  und der Permittivität  $\varepsilon_{\text{core}} = 2.28\varepsilon_0$ . Die Umgebung habe die Permittivität  $\varepsilon_{\text{cladding}} = 2.05\varepsilon_0$ .

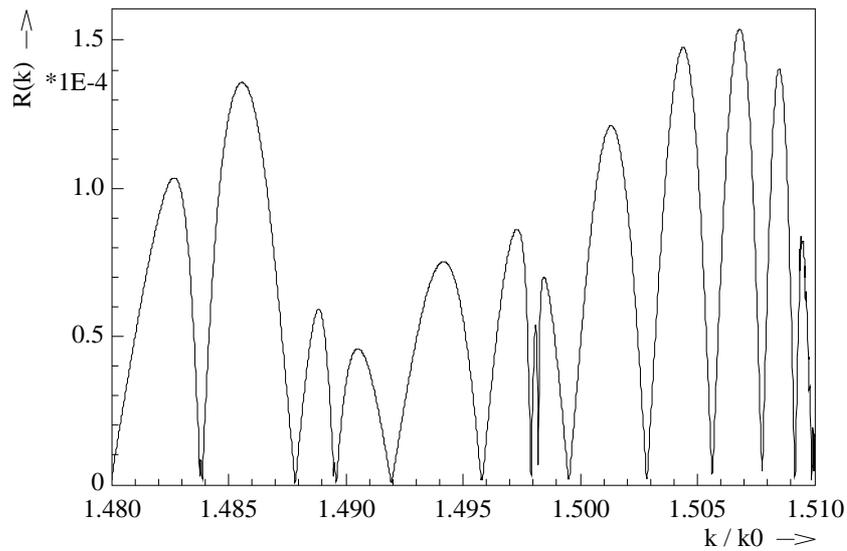


Abbildung 3.10:  $R(k)$  für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für  $k_0 h = 15$ ,  $k_0^2 := \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.2

net werden, die für beide angrenzenden Gebiete gelten. Um die Stetigkeit von  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  zu erreichen, müssen beide Größen durch die Unbekannten  $\underline{E}_z$ ,  $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}$ ,  $\underline{H}_z$ ,  $\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$  ausgedrückt werden. Durch Transformation von (2.20) und (2.21) in das  $(n, s, z)$ -Koordinatensystem ( $n = \text{Normalenrichtung}$ ,  $s = \text{Tangentialrichtung}$ ) können die folgenden Gleichungen hergeleitet werden:

$$\kappa^2 \underline{E}_s = -jk \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial s} + j\omega\mu \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}, \quad (3.29)$$

$$\kappa^2 \underline{H}_s = -jk \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}. \quad (3.30)$$

Um die Gleichungen für die Stetigkeit von  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  aufzustellen, ist es somit erforderlich, die Ableitungen von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  längs der Grenzlinie zu berechnen. Im Fall der in Kap. 3.3.2 gewählten Approximation von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  durch konstante Ansatzfunktionen können die approximierten Funktionen jedoch nicht ohne weiteres abgeleitet werden, da die Ableitung einer Summe von Rechteckfunktionen entweder 0 ist oder nicht existiert (an den Sprungstellen). Stattdessen müssen diese Funktionen lokal durch Funktionen höherer Ordnung, z. B. Parabeln (siehe Abb. 3.11), approximiert werden, deren Ableitung dann ermittelt werden kann.

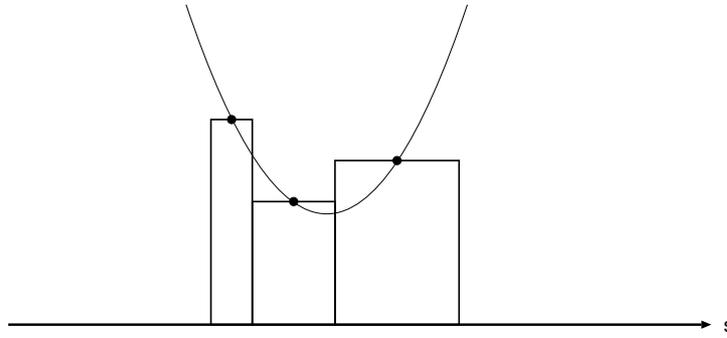


Abbildung 3.11: Berechnung der Ableitung einer mit konstanten Ansatzfunktionen approximierten Funktion

Diese zusätzliche Approximation könnte eine Ursache nichtphysikalischer Lösungen sein. Sie läßt sich vermeiden, indem  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  durch Ansatzfunktionen höherer Ordnung approximiert werden, oder indem  $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}$  und  $\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$  in den Integralgleichungen mit Hilfe von (3.29) und (3.30) durch  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{H}_s$ ,  $\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s}$  ausgedrückt werden. Dies ergibt im Fall der  $\underline{E}_z$ -Integralgleichung

$$\begin{aligned} c(\vec{r}_p) \underline{E}_z(\vec{r}_p) &= \oint_{\partial A} \left( G \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n} - \underline{E}_z \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds \\ &= \oint_{\partial A} \left( -\frac{\kappa^2}{j\omega\varepsilon} \underline{H}_s G - \frac{k}{\omega\varepsilon} G \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s} - \underline{E}_z \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Mittels partieller Integration folgt

$$\oint_{\partial A} G \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial s} ds = \oint_{\partial A} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (G \underline{H}_z) - \underline{H}_z \frac{\partial G}{\partial s} \right] ds = - \oint_{\partial A} \underline{H}_z \frac{\partial G}{\partial s} ds \quad (3.32)$$

$$\Rightarrow c(\vec{r}_p) \underline{E}_z(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} \left( \frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_z \frac{\partial G}{\partial s} - \frac{\kappa^2}{j\omega\varepsilon} \underline{H}_s G - \underline{E}_z \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (3.33)$$

Für die  $\underline{H}_z$ -Integralgleichung liefert diese Vorgehensweise

$$c(\vec{r}_p)\underline{H}_z(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} \left( -\frac{k}{\omega\mu}\underline{E}_z\frac{\partial G}{\partial s} + \frac{\kappa^2}{j\omega\mu}\underline{E}_sG - \underline{H}_z\frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (3.34)$$

Damit steht ein Satz von Integralgleichungen für die Unbekannten  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{H}_z$  und  $\underline{H}_s$  zur Verfügung. Diese Gleichungen enthalten nur noch die (analytisch berechenbare) tangentialer Ableitung der Greenschen Funktion, aber keine tangentialen Ableitungen der unbekannt Funktionen mehr, wodurch die Approximation dieser Größen vermieden wird. Diese Maßnahme hat jedoch keine Auswirkung auf das Vorhandensein nichtphysikalischer Lösungen, wie Abb. 3.12 zeigt.

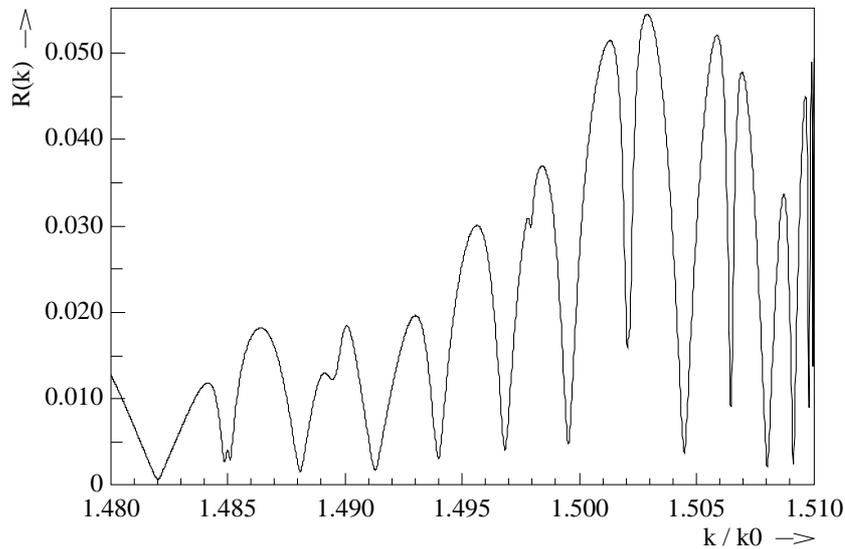


Abbildung 3.12:  $R(k)$  für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für  $k_0h = 15$ ,  $k_0^2 := \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.3

Die Approximation tangentialer Ableitungen bei Verwendung konstanter Ansatzfunktionen stellt demnach nicht die Ursache nichtphysikalischer Lösungen dar. Dies stimmt mit der Beobachtung von SCHROEDER [47] überein, der als Ansatzfunktionen B-Splines 2. Ordnung verwendet und trotzdem nichtphysikalische Lösungen beobachtet.

### 3.3.4 $\underline{E}_z, \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial n}, \underline{H}_z, \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial n}$ -Formulierung mit Greenschen Funktionen als Ansatzfunktionen

Eine vielversprechende Methode zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen stellt die Beschränkung des Lösungsansatzes auf Funktionen dar, die von

vornherein die *nicht diskretisierte* Ausgangsgleichung erfüllen. Eine Möglichkeit hierfür besteht darin,  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  als Summe Greenscher Funktionen darzustellen:

$$\underline{E}_z(\vec{r}_p) = \sum_{q=1}^M \mathcal{E}_q G(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(E)}), \quad \underline{H}_z(\vec{r}_p) = \sum_{q=1}^M \mathcal{H}_q G(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(H)}). \quad (3.35)$$

Die Normalenableitungen  $\partial \underline{E}_z / \partial n$  und  $\partial \underline{H}_z / \partial n$  tauchen jetzt nicht mehr als Unbekannte auf, da sie aus dem Ansatz (3.35) berechnet werden können. Die Quellpunkte  $\vec{r}_q^{(E)}$  und  $\vec{r}_q^{(H)}$  liegen auf dem Rand des Gebietes  $A$ . Mit diesem Ansatz erfüllen  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  außer an den Quellpunkten (Singularitäten der Greenschen Funktion) von vornherein die Helmholtz-Gleichung (3.21). Die Ansatzkoeffizienten  $\mathcal{E}_q$  und  $\mathcal{H}_q$  müssen nun lediglich so gewählt werden, daß die Stetigkeitsbedingungen der Feldkomponenten eingehalten werden. Diese Aufgabe verdient jedoch eine eingehendere Betrachtung.

Bei den in Kap. 3.3.2 und 3.3.3 beschriebenen Verfahren wird für jedes Randelement einer dielektrischen Grenzfläche die Kontinuität der Komponenten  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  gefordert. Würden diese Komponenten für jeden Punkt des Randelementes stetig übergehen, könnte daraus mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen (2.7)–(2.10) wegen der Abwesenheit von Grenzflächenladungen und -strömen die Kontinuität der Normalkomponenten  $\underline{D}_n$  und  $\underline{B}_n$  hergeleitet werden. Da die bisher beschriebenen Verfahren point matching verwenden, ist die Kontinuität der Tangentialkomponenten jedoch für nur einen Punkt des Randelementes, typischerweise für den Mittelpunkt, garantiert, so daß nicht mehr auf die Kontinuität der Normalkomponenten geschlossen werden kann. Die Verletzung dieser Bedingungen kann eine Ursache für nichtphysikalische Lösungen sein. Das Hinzufügen der entsprechenden Bedingungen zum Gleichungssystem ist jedoch nicht sinnvoll, da dadurch die Anzahl der Gleichungen die Anzahl der Unbekannten übersteigen würde. Bei geschickter Wahl der Testfunktionen folgt jedoch auch nach der Diskretisierung die Kontinuität der Normalkomponenten aus derjenigen der Tangentialkomponenten. Um dies zu erreichen, ist es erforderlich, die Kontinuitätsbedingungen nicht für einzelne Punkte (z.B. Mittelpunkte der Randelemente) zu betrachten, sondern mit einer Testfunktion  $v$  zu multiplizieren und über den gemeinsamen Rand der beiden angrenzenden Gebiete  $A_1$  und  $A_2$  zu integrieren:

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_z)} (\underline{E}_{z_1} - \underline{E}_{z_2}) \, ds = 0, \quad (3.36)$$

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(H_z)} (\underline{H}_{z_1} - \underline{H}_{z_2}) \, ds = 0, \quad (3.37)$$

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} (\underline{E}_{s_1} - \underline{E}_{s_2}) \, ds = 0, \quad (3.38)$$

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(H_s)} (\underline{H}_{s_1} - \underline{H}_{s_2}) ds = 0. \quad (3.39)$$

$\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  können dabei mit Hilfe der Gleichungen (3.29) und (3.30) aus den Ansätzen für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  in (3.35) ermittelt werden. Das zugrundeliegende  $(n, s, z)$ -Koordinatensystem entspreche dem des Gebietes  $A_1$ , d.h.  $\vec{n}$  zeige vom Gebiet  $A_1$  in das Gebiet  $A_2$ .

Aus den Gleichungen (3.36)–(3.39) kann nun die Kontinuität von  $\underline{D}_n$  und  $\underline{B}_n$  abgeleitet werden. Aus (2.9) folgt

$$\frac{\partial}{\partial s} \underline{E}_z + jk \underline{E}_s = -j\omega \underline{B}_n, \quad (3.40)$$

da die  $n$ -,  $s$ - und  $z$ -Achsen ein rechtshändiges System bilden. Wird für  $\underline{B}_n$  die gleiche Testfunktion wie für  $\underline{E}_s$  verwendet, ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} -j\omega \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} (\underline{B}_{n_1} - \underline{B}_{n_2}) ds &= \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \underline{E}_{z_1} - \frac{\partial}{\partial s} \underline{E}_{z_2} \right) ds \\ &+ jk \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} (\underline{E}_{s_1} - \underline{E}_{s_2}) ds. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Gemäß Gleichung (3.38) ist der zweite Term der rechten Seite 0. Der erste Term der rechten Seite verschwindet ebenfalls, wenn gefordert wird, daß die  $s$ -Ableitung von  $v_p^{(E_s)}$  einer Linearkombination aus  $v_p^{(E_z)}$ -Funktionen entspricht:

$$\frac{\partial}{\partial s} v_p^{(E_s)} \stackrel{!}{=} \sum_j a_p^{(j)} v_j^{(E_z)}. \quad (3.42)$$

Dann folgt durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \underline{E}_{z_1} - \frac{\partial}{\partial s} \underline{E}_{z_2} \right) ds &= - \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} \frac{\partial}{\partial s} v_p^{(E_s)} \cdot (\underline{E}_{z_1} - \underline{E}_{z_2}) ds \\ &= - \sum_j a_p^{(j)} \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_j^{(E_z)} (\underline{E}_{z_1} - \underline{E}_{z_2}) ds \stackrel{(3.36)}{=} 0, \end{aligned} \quad (3.43)$$

sofern  $v_p^{(E_s)}$  an den Endpunkten der Grenzlinie zwischen  $A_1$  und  $A_2$  den Wert 0 annimmt oder die Grenzlinie geschlossen ist.

Aus (3.43) folgt

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(E_s)} (\underline{B}_{n_1} - \underline{B}_{n_2}) ds = 0. \quad (3.44)$$

Analog läßt sich zeigen, daß aus

$$\frac{\partial}{\partial s} v_p^{(H_s)} \stackrel{!}{=} \sum_j a_p^{(j)} v_j^{(H_z)} \quad (3.45)$$

die Kontinuität von  $\underline{D}_n$  folgt:

$$\forall p : \int_{\partial A_1 \cap \partial A_2} v_p^{(H_s)} (\underline{D}_{n_1} - \underline{D}_{n_2}) ds = 0. \quad (3.46)$$

Vier Gleichungen können also bei geschickter Wahl der Testfunktionen die Erfüllung aller sechs (diskretisierten) Kontinuitätsbedingungen gewährleisten. Die obige Betrachtung zeigt, daß sich aufgrund der Diskretisierung die Kontinuität der Normalkomponenten bei willkürlicher Wahl der Testfunktionen nicht automatisch ergibt.

Die Bedingungen (3.42) und (3.45) lassen noch ausreichend Spielraum für die Wahl der Testfunktionen. Insbesondere können sie so gewählt werden, daß eine Ankopplung an benachbarte, mit der FEM diskretisierte Gebiete erleichtert wird. Ein entsprechender Satz von Testfunktionen wird in Kap. 3.4 vorgestellt. Dabei ist  $v_p^{(H_z)}$  eine Rechteckfunktion über dem Randelement  $p$ , die also symmetrisch zum Mittelpunkt dieses Elementes ist, während  $v_p^{(E_z)}$  eine Dreiecksfunktion über den Randelementen  $p-1$  und  $p$  ist, die (im Fall gleich langer Randelemente) symmetrisch zum Berührungspunkt beider Elemente ist (siehe Abb. 3.18). Daher werden die Quellpunkte  $\vec{r}_q^{(E)}$  und  $\vec{r}_q^{(H)}$  aus Gleichung (3.35) so gewählt, daß  $\vec{r}_q^{(H)}$  auf dem Mittelpunkt des Elementes  $q$  und  $\vec{r}_q^{(E)}$  auf dem Berührungspunkt der Elemente  $q-1$  und  $q$  liegt. Würde  $\vec{r}_q^{(E)}$  auf dem Elementmittelpunkt oder  $\vec{r}_q^{(H)}$  auf dem Berührungspunkt liegen, käme es bei geschlossenen Grenzlinien mit gleich langen Randelementen aufgrund der erwähnten Symmetrien der Testfunktionen zu linearen Abhängigkeiten in den  $4M$  Gleichungen (3.36)–(3.39) ( $M = \text{Anzahl der Randelemente}$ ).

Die Anwendung des in diesem Kapitel beschriebenen Verfahrens auf den dielektrischen Wellenleiter aus Kap. 3.3.2 liefert den in Abb. 3.13 dargestellten Verlauf für die Funktion  $R(k)$ . Die nichtphysikalischen Lösungen haben sich zu höheren  $k$ -Werten verschoben, so daß nun die beiden korrekten Lösungen, die in dem dargestellten  $k$ -Intervall zu erwarten sind ( $k/k_0 = 1.4896$ ,  $k/k_0 = 1.4980$ ), nicht mehr von spurious modes überdeckt werden. Die Verwendung Greenscher Funktionen als Ansatzfunktionen in Verbindung mit der Erfüllung aller sechs Kontinuitätsbedingungen hat demzufolge zwar Einfluß auf die Position der nichtphysikalischen Lösungen, kann ihr Auftreten jedoch nicht verhindern.

### 3.3.5 Modell zur Erklärung nichtphysikalischer Lösungen bei $E_z, H_z$ -Ansätzen

Alle in den Kapiteln 3.3.2–3.3.4 beschriebenen Ansätze beruhen auf Gleichungen für die axialen Komponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  und leiden unter dem Auftreten nichtphysikalischer Lösungen. Dies gilt auch für den von SCHROEDER in [47] untersuchten Ansatz. SCHROEDER sieht allein die Diskretisierung als Ursache

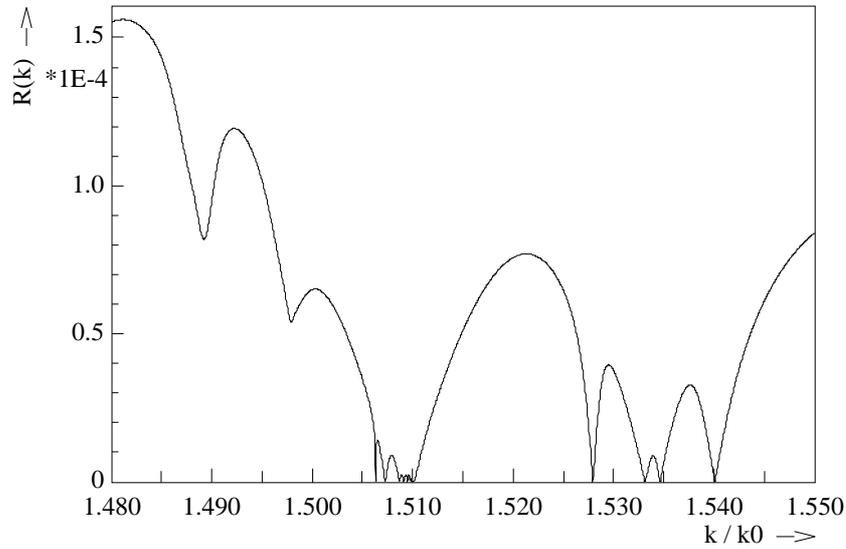


Abbildung 3.13:  $R(k)$  für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für  $k_0 h = 15$ ,  $k_0^2 := \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.4

nichtphysikalischer Lösungen an: Der (unendlichdimensionale) Bildraum der in den Ausgangsgleichungen enthaltenen Differentialoperatoren wird infolge der Diskretisierung auf den von den Testfunktionen aufgespannten (endlichdimensionalen) Unterraum projiziert. Liegt nun das Bild des Raumes der Ansatzfunktionen teilweise außerhalb dieses Unterraumes, also im dazu orthogonalen (unendlichdimensionalen) Komplement, können Lösungen auftreten, die keiner Lösung der Ausgangsgleichung entsprechen.

Es ist jedoch fraglich, ob die in den Abschnitten 3.3.2–3.3.4 beobachteten nichtphysikalischen Lösungen ausschließlich der Diskretisierung zugeschrieben werden können. Die folgenden zwei Punkte sprechen dagegen:

1. Die Methoden aus Kap. 3.3.2–3.3.4 und aus [47] verwenden unterschiedliche Ansatz- und Testfunktionen, also unterschiedliche Diskretisierungen, ohne daß dies Einfluß auf das Auftreten nichtphysikalischer Lösungen hätte. Sogar die Diskretisierung von Helmholtz-Gleichungen für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  mit der Methode der finiten Differenzen führt zu solchen Lösungen, die jedoch nicht auftreten, wenn  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  anstelle von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  als unbekannte Funktionen verwendet werden [49]. Die Wahl der Ausgangsgleichung hat also mindestens so großen Einfluß wie die Wahl des Diskretisierungsschemas.
2. Die bei der FEM-Lösung der Gleichung (2.22) auftretenden nichtphysikalischen Lösungen entstehen nicht primär durch die Diskretisierung. Wie in Kap. 3.2.1 ausgeführt, handelt es sich um Lösungen für  $\omega = 0$ ,

die aufgrund der Diskretisierung schlecht approximiert werden und dadurch zu Frequenzen  $\omega \neq 0$  verschoben werden. Die Ursache liegt also darin, daß bereits die noch nicht diskretisierte Ausgangsgleichung Lösungen besitzt, die nicht den Maxwell'schen Gleichungen genügen. Die Ausgangsgleichung ist zu den Maxwell'schen Gleichungen nur unter bestimmten Bedingungen (hier:  $\omega \neq 0$ ) äquivalent. Werden diese Bedingungen verletzt, ist die Lösungsmenge von derjenigen der Maxwell'schen Gleichungen verschieden. So besitzt die nicht diskretisierte Gleichung (2.22) für  $\omega = 0$  Lösungen, die nicht divergenzfrei sind, also die Maxwell'schen Gleichungen verletzen. Die Kombination mit einem Diskretisierungsschema, das zur Approximation solcher Lösungen ungeeignet ist, führt zum Auftreten nichtphysikalischer Lösungen.

Diese beiden Beobachtungen legen es nahe, den Lösungsraum der (nicht diskretisierten) Ausgangsgleichungen von  $E_z, H_z$ -Ansätzen nach Lösungen, die nicht die Maxwell'schen Gleichungen erfüllen, zu durchsuchen.

Für isotrope, homogene Medien ( $\varepsilon, \mu$  skalar und ortsunabhängig) folgt aus (2.20) und (2.21):

$$\Delta^{(t)} \underline{E}_z + \kappa^2 \underline{E}_z = 0, \quad (3.47)$$

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_z + \kappa^2 \underline{H}_z = 0, \quad (3.48)$$

$$\kappa^2 \underline{E}_x = -jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z - j\omega\mu \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z, \quad (3.49)$$

$$\kappa^2 \underline{E}_y = -jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z + j\omega\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z, \quad (3.50)$$

$$\kappa^2 \underline{H}_x = -jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z + j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z, \quad (3.51)$$

$$\kappa^2 \underline{H}_y = -jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z, \quad (3.52)$$

$$\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - k^2. \quad (3.53)$$

Diese Gleichungen bilden die Basis aller  $E_z, H_z$ -Ansätze. Bei der BEM werden die Gleichungen (3.47) und (3.48) noch vor der Diskretisierung in Integralgleichungen umgewandelt (siehe Kap. 3.3.2).

Für  $\omega \neq 0$  und  $\kappa \neq 0$  sind diese Gleichungen zu den Maxwell'schen Gleichungen äquivalent. Aus jedem Paar  $(\underline{E}_z, \underline{H}_z)$ , das den Helmholtz-Gleichungen (3.47) und (3.48) genügt, lassen sich also mit Hilfe der Gleichungen (3.49)–(3.52) die übrigen Feldkomponenten so berechnen, daß alle Maxwell'schen Gleichungen erfüllt sind. Lösungen der Gleichungen (3.47)–(3.52), die die Maxwell'schen Gleichungen nicht erfüllen, können also höchstens für  $\omega = 0$  oder  $\kappa = 0$  auftreten. Für diese Fälle werden die Gleichungen zwar nicht angewendet; es ist jedoch vorstellbar, daß wie im Fall der FEM die entsprechenden Lösungen durch Diskretisierungsfehler bei  $\omega \neq 0$  bzw.  $\kappa \neq 0$  sichtbar werden.

Für  $\omega = 0$  und  $\kappa \neq 0$  ( $\Rightarrow k \neq 0$ ) lauten die Gleichungen (3.47)–(3.52):

$$\Delta^{(t)} \underline{E}_z - k^2 \underline{E}_z = 0, \quad (3.54)$$

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_z - k^2 \underline{H}_z = 0, \quad (3.55)$$

$$k^2 \underline{E}_x = jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z, \quad (3.56)$$

$$k^2 \underline{E}_y = jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z, \quad (3.57)$$

$$k^2 \underline{H}_x = jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z, \quad (3.58)$$

$$k^2 \underline{H}_y = jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z. \quad (3.59)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen erfüllen die Maxwell'schen Gleichungen (2.15)–(2.18), wenn die Bedingungen  $\omega = 0$ ,  $\underline{\rho} = 0$  und  $\sigma = 0$  eingesetzt werden, und zwar unabhängig davon, ob die Leitfähigkeit  $\sigma$  des betrachteten homogenen Gebietes tatsächlich 0 ist oder nicht. Für  $\sigma \neq 0$  und  $\omega = 0$  liefern (3.47)–(3.52) also unrichtige Lösungen. Dieser Umstand ist zur Erklärung nichtphysikalischer Moden jedoch ungeeignet, da diese auch für  $\sigma = 0$  beobachtet werden. Außerdem ist kein Grund erkennbar, der für die Verschiebung dieser Lösungen zu  $\omega$ -Werten ungleich 0 verantwortlich sein könnte.

Für  $\omega = 0$  und  $\kappa = 0$  ( $\Rightarrow k = 0$ ) verbleiben lediglich die Gleichungen

$$\Delta^{(t)} \underline{E}_z = 0, \quad (3.60)$$

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_z = 0, \quad (3.61)$$

so daß die übrigen Feldkomponenten frei gewählt werden können. Durch diese Wahlfreiheit ist es leicht möglich, die Maxwell'schen Gleichungen zu verletzen. Jedoch ist auch hier kein Grund erkennbar, der dazu führen könnte, daß das Diskretisierungsschema diese Lösungen nicht approximieren kann, ohne zu  $\omega$ - und  $\kappa$ -Werten ungleich 0 überzugehen.

Für  $\kappa = 0$  und  $\omega \neq 0$  ( $\Rightarrow k \neq 0$ ) folgt aus den Gleichungen (3.47)–(3.52):

$$\Delta^{(t)} \underline{E}_z = 0, \quad (3.62)$$

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_z = 0, \quad (3.63)$$

$$0 = -jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z - j\omega\mu \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z, \quad (3.64)$$

$$0 = -jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z + j\omega\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z, \quad (3.65)$$

$$0 = -jk \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z + j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z, \quad (3.66)$$

$$0 = -jk \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z. \quad (3.67)$$

Auch hier sind die Feldkomponenten  $\underline{E}_x$ ,  $\underline{E}_y$ ,  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  nicht mehr in den Gleichungen vertreten und können daher frei gewählt werden. Allerdings müssen jetzt sechs Gleichungen ausschließlich durch geeignete Wahl von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  erfüllt werden. Falls solche Lösungen existieren, könnte es für ein Diskretisierungsschema schwierig sein, die diskretisierten Äquivalente von (3.62)–(3.67) gleichzeitig zu erfüllen.

Aus  $\kappa = 0$  folgt die Beziehung  $\frac{k}{\omega\mu} = \frac{\omega\varepsilon}{k}$ , was zur Konsequenz hat, daß die Gleichungen (3.66) und (3.67) mit (3.64) und (3.65) übereinstimmen. Diese wiederum legen, wenn beispielsweise  $\underline{E}_z$  gegeben ist,  $\underline{H}_z$  gemäß der Beziehung

$$\underline{H}_z(x, y) = \underline{H}_z(0, 0) + \frac{k}{\omega\mu} \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z(x', 0) dx' - \frac{k}{\omega\mu} \int_0^y \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z(x, y') dy' \quad (3.68)$$

fest, wobei  $\underline{H}_z(0, 0)$  frei wählbar ist.

Aus (3.68) folgt zusammen mit (3.62)

$$\begin{aligned} \omega\mu \frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_z &= k \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z(x, 0) - k \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{E}_z(x, y') dy' \\ &\stackrel{(3.62)}{=} k \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z(x, 0) + k \int_0^y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{E}_z(x, y') dy' \\ &= k \frac{\partial}{\partial y} \underline{E}_z(x, y), \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\omega\mu \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_z = -k \frac{\partial}{\partial x} \underline{E}_z(x, y), \quad (3.70)$$

was den Gleichungen (3.64) und (3.65) entspricht. Weiterhin folgt

$$\omega\mu \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underline{H}_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \underline{H}_z \right) = k \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \underline{E}_z - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \underline{E}_z \right) = 0, \quad (3.71)$$

was der Gleichung (3.63) entspricht. Für jede beliebige Lösung der Gleichung (3.62) lassen sich demnach durch Anwendung von (3.68) alle restlichen fünf Gleichungen (3.63)–(3.67) gleichzeitig erfüllen. Da die  $x$ - und  $y$ -Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  frei wählbar sind, können somit Lösungen konstruiert werden, die jede beliebige Maxwell'sche Gleichung verletzen.

Im Fall des dielektrischen Wellenleiters sind zwei Medien mit unterschiedlicher Permittivität beteiligt, nämlich das Material, aus dem der Wellenleiterkern besteht (core), und das Material, aus dem die Umgebung besteht (cladding). Folglich gibt es für eine gegebene Ausbreitungskonstante  $k$  zwei Werte  $\kappa_{\text{core}}^2 = \omega^2 \varepsilon_{\text{core}} \mu - k^2$  und  $\kappa_{\text{cladding}}^2 = \omega^2 \varepsilon_{\text{cladding}} \mu - k^2$ . Nichtphysikalische Lösungen existieren sowohl für  $\kappa_{\text{core}}^2 = 0$  als auch für  $\kappa_{\text{cladding}}^2 = 0$ . Zur Konstruktion solcher Lösungen für den Fall  $\kappa_{\text{core}}^2 = 0$  wird auf der Grenzfläche beider Medien eine beliebige Funktion für  $\underline{E}_z$  vorgegeben. Daraus läßt sich  $\underline{E}_z$  im Wellenleiterkern mit  $\Delta^{(t)} \underline{E}_z = 0$  berechnen.  $\underline{H}_z$  ergibt sich durch

Anwendung von (3.68). Damit sind die Gleichungen (3.62)–(3.67) im Wellenleiterkern erfüllt. Wegen  $\kappa_{\text{cladding}}^2 \neq 0$  lassen sich aus den  $\underline{E}_z$ - und  $\underline{H}_z$ -Komponenten, die nun auf der Grenzfläche bekannt sind,  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  auf der Grenzfläche durch Anwendung von (3.33) und (3.34) auf die Wellenleiterumgebung bestimmen. Wäre  $\kappa_{\text{core}}^2 \neq 0$ , würden diese beiden Gleichungen bei Anwendung auf den Wellenleiterkern i. allg. andere, also nicht kompatible Werte für  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  liefern, so daß keine nichtphysikalische Lösung entstünde. Für  $\kappa_{\text{core}}^2 = 0$  fallen  $\underline{E}_s$  und  $\underline{H}_s$  jedoch aus den Gleichungen heraus, so daß sich kein Widerspruch ergibt. Somit führt jede beliebige Wahl von  $\underline{E}_z$  auf der Grenzfläche zu einer nichtphysikalischen Lösung bei  $\kappa_{\text{core}}^2 = 0$ . Im Fall der Diskretisierung von  $\underline{E}_z$  auf der Grenzfläche mit  $M$  Randelementfunktionen sind also  $M$  linear unabhängige nichtphysikalische Lösungen des diskretisierten Gleichungssystems zu erwarten. Diese Vorhersage wird in der Praxis bestätigt, wie das ab Seite 71 diskutierte Beispiel zeigt.

Es ist nun zu untersuchen, ob diese nichtphysikalischen Lösungen durch die BEM-Diskretisierung zu  $\kappa$ -Werten  $\kappa_{\text{core}}^2 \neq 0$  verschoben werden. Dazu wird die Diskretisierung der Integralgleichungen (3.33) und (3.34) betrachtet. Diese Ausgangsgleichungen bieten für die weiteren Untersuchungen den Vorteil, daß sie auch für  $\kappa \rightarrow 0$  aufgestellt werden können, denn es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^2 G &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^2 K_0(-j\kappa|\vec{R}|) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^2 \ln(-j\kappa|\vec{R}|) = 0, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \vec{\nabla}^{(t)} G &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j\kappa \vec{R}}{2\pi|\vec{R}|} K_1(-j\kappa|\vec{R}|) \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{j\kappa \vec{R}}{2\pi|\vec{R}|} \cdot \frac{1}{-j\kappa|\vec{R}|} = -\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|^2}, \end{aligned} \quad (3.73)$$

mit

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_p. \quad (3.74)$$

Für  $\kappa \rightarrow 0$  gehen (3.33) und (3.34) daher über in

$$c(\vec{r}_p) \underline{E}_z(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} \left( -\frac{1}{2\pi} \frac{\vec{s}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \frac{k}{\omega\varepsilon} \underline{H}_z + \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{n}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \underline{E}_z \right) ds, \quad (3.75)$$

$$c(\vec{r}_p) \underline{H}_z(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} \left( \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{s}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \frac{k}{\omega\mu} \underline{E}_z + \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{n}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} \cdot \underline{H}_z \right) ds, \quad (3.76)$$

wobei  $\vec{n}$  der Normalenvektor und  $\vec{s}$  der Tangentialvektor zum Wegelement  $ds$  ist.

Bei Diskretisierung dieser Gleichungen mit dem in Kap. 3.3.2 beschriebenen Verfahren entsteht ein Gleichungssystem der Gestalt

$$\mathbf{N}\vec{\mathcal{E}} - \frac{k}{\omega\varepsilon}\mathbf{S}\vec{\mathcal{H}} = 0, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{N}\vec{\mathcal{H}} + \frac{k}{\omega\mu}\mathbf{S}\vec{\mathcal{E}} = 0, \quad (3.78)$$

wobei die Vektoren  $\vec{\mathcal{E}}$  und  $\vec{\mathcal{H}}$  die Ansatzkoeffizienten für die Approximation von  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  enthalten. Im Fall konstanter Ansatzfunktionen sind dies die Werte für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  auf den einzelnen Randelementen. Für die Matrizen  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  gilt:

$$N_{pq} = c(\vec{r}_p) \cdot \delta_{pq} - \frac{1}{2\pi} \int_{C_q} \frac{\vec{n}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} ds, \quad (3.79)$$

$$S_{pq} = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_q} \frac{\vec{s}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} ds, \quad (3.80)$$

wobei der Integrationsweg  $C_q$  dem Randelement  $q$  entspricht. Der Aufpunkt  $\vec{r}_p$  ist der Mittelpunkt des Randelementes  $p$  (point matching). Im Fall  $p = q$  werden die Integranden singularär, so daß ein Grenzübergang durchzuführen ist, bei dem  $\vec{r}_p$  innerhalb oder außerhalb des Gebietes  $A$  liegt und sich dann dem Gebietsrand  $\partial A$  nähert. Die Integration über die Singularität in (3.80) liefert 0, während die Grenzwertbetrachtung im Fall des Integrals in (3.79) die Werte  $\pi$  oder  $-\pi$  ergibt, je nachdem, ob  $\vec{r}_p$  innerhalb oder außerhalb von  $A$  liegt. Da jedoch nach Gleichung (3.23)  $c(\vec{r}_p) = 1$  für  $\vec{r}_p \in (A \setminus \partial A)$  und  $c(\vec{r}_p) = 0$  für  $\vec{r}_p \notin (A \cup \partial A)$  ist, liefert die Singularität immer den Beitrag  $1/2$  zum Koeffizienten  $N_{pp}$ , unabhängig von der Art des Grenzübergangs.

Um die weiteren Untersuchungen zu vereinfachen, wird der Fall betrachtet, daß es sich bei dem Gebiet  $A$  um einen Kreis mit dem Radius  $\rho$  handelt, dessen Rand in  $M$  gleich große Kreisbögen, die die Randelemente darstellen, unterteilt ist. Die Integrale in (3.79) und (3.80) liefern dann für jeden der  $M$  Aufpunkte  $\vec{r}_p$  (Mittelpunkte der Kreisbögen) die gleichen Werte, d. h. es gilt

$$N_{p \bmod M+1, q \bmod M+1} = N_{pq}, \quad S_{p \bmod M+1, q \bmod M+1} = S_{pq}. \quad (3.81)$$

Jede Zeile der Matrix  $\mathbf{N}$  oder  $\mathbf{S}$  geht also aus der vorhergehenden Zeile hervor, indem in dieser alle Elemente um eine Position nach rechts verschoben werden und das Element am rechten Rand zum linken Rand übertragen wird.  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  sind somit eindeutig durch ihre erste Zeile, also durch die Koeffizienten  $N_{11} \dots N_{1M}$  bzw.  $S_{11} \dots S_{1M}$ , charakterisiert. Aus (3.81) folgt

$$\mathbf{N} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{0 \cdot 2m\pi j/M} \\ \vdots \\ e^{(M-1) \cdot 2m\pi j/M} \end{pmatrix}}_{=:\vec{u}_m} =$$

$$\underbrace{(N_{11}e^{0 \cdot 2m\pi j/M} + \dots + N_{1M}e^{(M-1) \cdot 2m\pi j/M})}_{=: \lambda_m^{(N)}} \begin{pmatrix} e^{0 \cdot 2m\pi j/M} \\ \vdots \\ e^{(M-1) \cdot 2m\pi j/M} \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

wobei  $m$  zwischen 1 und  $M$  liegt. Eine analoge Beziehung gilt für die Matrix  $\mathbf{S}$ . Die Eigenwerte  $\lambda_m^{(N)}$  und Eigenvektoren  $\vec{u}_m$  von  $\mathbf{N}$  lassen sich also auf einfache Weise analytisch berechnen. Interessanterweise sind die Eigenvektoren unabhängig von den Matrixkoeffizienten und somit für alle Matrizen dieses Typs gleich. Außerdem erfüllen sie die Gleichung

$$\vec{u}_{m_1}^* \vec{u}_{m_2} = M \delta_{m_1 m_2}. \quad (3.83)$$

Daraus folgt, daß die Matrix  $\mathbf{U}$ , deren Spalten die normierten Eigenvektoren  $\frac{1}{\sqrt{M}} \vec{u}_m$  darstellen, unitär ist ( $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^+ := \mathbf{U}$  transponiert und konjugiert komplex) und die Matrizen  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  diagonalisiert:

$$\mathbf{U}^+ \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}^{(N)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(N)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{U}^+ \mathbf{S} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}^{(S)} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(S)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_M^{(S)} \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

$$\Rightarrow \mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{(N)} \mathbf{U}^+, \quad \mathbf{S} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{(S)} \mathbf{U}^+. \quad (3.86)$$

Werden diese Ausdrücke für  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  in die Gleichungen (3.77) und (3.78) eingesetzt, so läßt sich das Gleichungssystem

$$\mathbf{\Lambda}^{(N)} \vec{\mathcal{E}}^{(U)} - \frac{k}{\omega \varepsilon} \mathbf{\Lambda}^{(S)} \vec{\mathcal{H}}^{(U)} = 0, \quad (3.87)$$

$$\mathbf{\Lambda}^{(N)} \vec{\mathcal{H}}^{(U)} + \frac{k}{\omega \mu} \mathbf{\Lambda}^{(S)} \vec{\mathcal{E}}^{(U)} = 0 \quad (3.88)$$

mit

$$\vec{\mathcal{E}}^{(U)} := \mathbf{U}^+ \vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{\mathcal{H}}^{(U)} := \mathbf{U}^+ \vec{\mathcal{H}} \quad (3.89)$$

herleiten. Dieses Gleichungssystem zerfällt wegen der Diagonalgestalt von  $\mathbf{\Lambda}^{(N)}$  und  $\mathbf{\Lambda}^{(S)}$  in die  $M$  unabhängigen Gleichungssysteme

$$\lambda_m^{(N)} \mathcal{E}_m^{(U)} - \frac{k}{\omega \varepsilon} \lambda_m^{(S)} \mathcal{H}_m^{(U)} = 0, \quad (3.90)$$

$$\lambda_m^{(N)} \mathcal{H}_m^{(U)} + \frac{k}{\omega \mu} \lambda_m^{(S)} \mathcal{E}_m^{(U)} = 0, \quad (3.91)$$

$$1 \leq m \leq M. \quad (3.92)$$

Damit wie im Fall der nicht diskretisierten Ausgangsgleichungen für jede beliebige Wahl von  $\underline{E}_z$  auf dem Gebietsrand eine Lösung bei  $\kappa = 0$  existiert, müßte das Gleichungssystem (3.77)–(3.78) und damit auch das System (3.87)–(3.88)  $M$  linear unabhängige Lösungen besitzen, d. h. die Gleichungen (3.90) und (3.91) müßten für alle  $m$  linear abhängig sein. Wegen  $\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - k^2 = 0$  ist diese Forderung äquivalent zur Bedingung

$$\forall m : \quad \lambda_m^{(N)^2} + \lambda_m^{(S)^2} = 0 \quad (3.93)$$

$$\Leftrightarrow \forall m : \quad \lambda_m^{(N)} = \pm j \lambda_m^{(S)}. \quad (3.94)$$

Für den Fall des Kreises mit Radius  $\rho$ , der in  $M$  gleich große Kreisbögen unterteilt ist, gilt

$$\frac{\vec{n}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} = \frac{1}{2\rho} \text{ für } \vec{R} \neq \vec{0}, \text{ also für } \vec{r} \neq \vec{r}_p \quad \Rightarrow \quad (3.95)$$

$$N_{11} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2M}, \quad N_{1q} = -\frac{1}{2M} \text{ für } q \neq 1. \quad (3.96)$$

Der Koeffizient  $N_{11}$  (Integration über das Randelement, auf dem  $\vec{r}_p$  liegt) unterscheidet sich von den anderen Koeffizienten wegen des Beitrags der Singularität. Zusammen mit (3.82) folgt

$$\lambda_M^{(N)} = 0, \quad \lambda_m^{(N)} = \frac{1}{2} \text{ für } m \neq M. \quad (3.97)$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\vec{s}\vec{R}}{|\vec{R}|^2} = \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (3.98)$$

wobei der Parameter  $\theta$  so definiert ist, daß er beim Durchlaufen des Kreisrandes von 0 bis  $2\pi$  läuft und am Punkt  $\vec{r}_p$  (Mittelpunkt des Randelementes 1) den Wert 0 annimmt. Wenn die Endpunkte des Randelementes  $q$  durch die  $\theta$ -Werte  $\theta_q$  und  $\theta_{q+1}$  ( $\theta_{M+1} := \theta_1$ ) gegeben sind, folgt daraus für die Koeffizienten von  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{aligned} S_{1q} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{C_q} \frac{1}{2\rho} \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} ds \stackrel{ds=\rho d\theta}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{4\pi} [\ln(1 - \cos \theta)]_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos \theta_{q+1}}{1 - \cos \theta_q}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Zusammen mit (3.82) lassen sich daraus die  $\lambda_m^{(S)}$  ermitteln. Tabelle 3.1 stellt die Werte für  $\lambda_m^{(N)}$  und  $j\lambda_m^{(S)}$  für den Fall  $M = 8$  gegenüber.

Es zeigt sich, daß die Forderung (3.94) nur im Fall  $m = 8$  erfüllt wird. In dem Gleichungssystem der  $2M$  Gleichungen (3.90) und (3.91) können also

$m$	$\lambda_m^{(N)}$	$j\lambda_m^{(S)}$
1	0.5	0.401
2	0.5	0.281
3	0.5	0.144
4	0.5	0
5	0.5	-0.144
6	0.5	-0.281
7	0.5	-0.401
8	0	0

Tabelle 3.1: Eigenwerte von  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{S}$  für den Fall  $M = 8$ 

nicht  $M$  Gleichungen, sondern nur eine Gleichung wegen linearer Abhängigkeit gestrichen werden. In den diskretisierten Gleichungen (3.77) und (3.78) kann  $\vec{\mathcal{E}}$  daher nicht frei gewählt werden. Dagegen ist in den nicht diskretisierten Integralgleichungen (3.75) und (3.76)  $\underline{E}_z$  auf dem Gebietsrand wegen der Äquivalenz zu (3.62)–(3.67) frei wählbar, wie oben dargelegt wurde. Diese Eigenschaft geht durch die Diskretisierung verloren. Das Diskretisierungsschema ist somit zur Approximation der Lösungen der nicht diskretisierten Ausgangsgleichungen für  $\kappa = 0$  ungeeignet. Ein ganz ähnlicher Sachverhalt (schlechte Approximierbarkeit der Lösungen von (2.22) bei  $\omega = 0$ ) hat bereits im Fall der FEM-Knotenelemente zum Auftreten nichtphysikalischer Lösungen geführt (siehe Kap. 3.2.1). Daher liegt die Vermutung nahe, daß dies auch bei der BEM die Ursache für spurious modes ist. Es müßten dann im Fall des Kreises mit Radius  $\rho$ , der in  $M$  gleich lange Randelemente unterteilt wird, von den  $M$  zu erwartenden nichtphysikalischen Lösungen eine bei  $\kappa = 0$  und  $M - 1$  bei  $\kappa \neq 0$  auftreten. Für die in Kap. 3.3.2 und 3.3.4 erläuterten BEM-Varianten (obige Ausführungen stützen sich auf die Integralgleichungen des Kap. 3.3.3) ist ein ähnliches Ergebnis zu erwarten, da auch bei diesen Verfahren die Ansatz- und Testfunktionen nicht hinsichtlich der gleichzeitigen Erfüllbarkeit der Gleichungen (3.62)–(3.67) gewählt wurden.

Zur Überprüfung dieser Vermutung werden die Lösungen eines dielektrischen Wellenleiters betrachtet, dessen Querschnitt keinen Kreis, sondern ein regelmäßiges Achteck mit dem Umkreisradius  $\rho$  darstellt, da das implementierte Berechnungsverfahren keine gekrümmten Randelemente unterstützt. Wie in Abb. 3.9 wurde  $\varepsilon_{\text{core}} = 2.28\varepsilon_0$  und  $\varepsilon_{\text{cladding}} = 2.05\varepsilon_0$  gewählt. Zur Berechnung wird das in Kap. 3.3.4 beschriebene Verfahren verwendet, da dort die nichtphysikalischen Lösungen von den korrekten Lösungen separiert waren, was die Überprüfung der oben geäußerten Hypothese ermöglicht.

Abb. 3.14 zeigt die auf diese Weise berechnete Funktion  $R(k)$  für die Frequenz  $k_0\rho = 15$  ( $k_0^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ ). Neben den korrekten Lösungen bei  $k/k_0 = 1.4914$  und  $k/k_0 = 1.5029$  tritt noch eine Lösung bei  $k/k_0 \approx 1.51$

(entspricht  $\kappa_{\text{core}} \approx 0$ ) auf, die bei vergrößerter Darstellung aus fünf eng beieinanderliegenden Lösungen besteht. Die zugehörigen Feldverteilungen zeigen einen entlang des Gebietsrandes sinusförmigen Verlauf, was durch die Eigenvektoren  $\vec{u}_m$  aus Gleichung (3.82) auch vorhergesagt wird. Aus der Anzahl der Minima bzw. Maxima der Feldkomponenten auf dem Rand kann auf den Index  $m$  geschlossen werden. Tabelle 3.2 faßt die  $k/k_0$ - und  $m$ -Werte der fünf Lösungen zusammen.

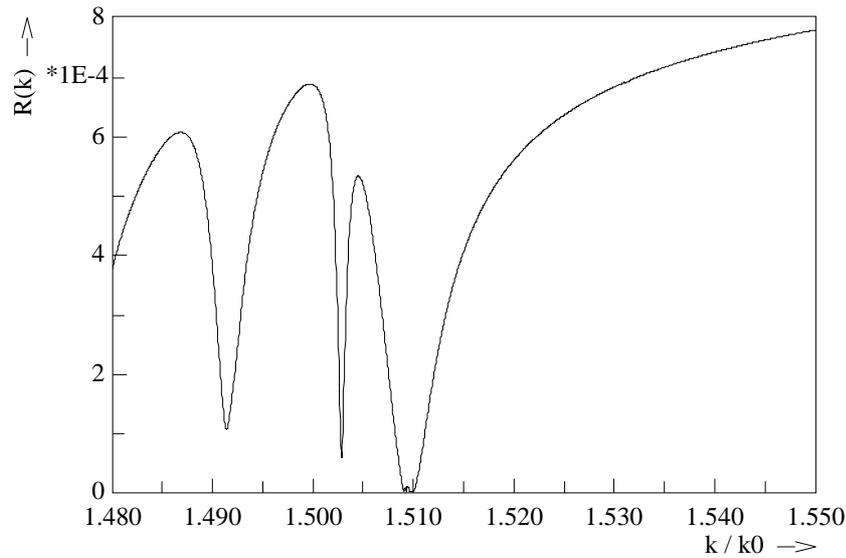


Abbildung 3.14:  $R(k)$  für ein regelmäßiges Achteck mit Umkreisradius  $\rho$  für den Fall  $k_0\rho = 15$

$k/k_0$	Anzahl Minima bzw. Maxima	$m$
1.509044	4	4
1.509287	3	3 oder 5
1.509706	2	2 oder 6
1.509936	1	1 oder 7
1.509967	0	8

Tabelle 3.2: Nichtphysikalische Lösungen eines regelmäßigen Achtecks mit Umkreisradius  $\rho$ ,  $\varepsilon_{\text{core}} = 2.28\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{\text{cladding}} = 2.05\varepsilon_0$  und  $k_0\rho = 15$

Für drei Lösungen sind die  $m$ -Werte nicht eindeutig, da in  $\vec{u}_m$  die Addition von  $M = 8$  zu  $m$  nichts ändert.  $m = 5$  beispielsweise entspricht  $m = -3$  und führt daher ebenso wie  $m = 3$  zu einer Feldverteilung mit drei Minima und drei Maxima. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Lösungen für  $m \in \{1, 7\}$ ,  $m \in \{2, 6\}$  bzw.  $m \in \{3, 5\}$  aufgrund der hohen Symmetrie der Anordnung

zusammenfallen, was erklären würde, warum nur fünf anstelle der erwarteten acht Lösungen beobachtet wurden. Diese Vermutung wird durch die Tatsache gestützt, daß die Größe  $\lambda_m^{(N)^2} + \lambda_m^{(S)^2}$ , die ein Maß für die Verletzung der Gleichung (3.94) ist, nach Tabelle 3.1 für  $m \in \{1, 7\}$ ,  $m \in \{2, 6\}$  bzw.  $m \in \{3, 5\}$  jeweils gleich ist. In Verbindung mit Tabelle 3.2 wird deutlich, daß ein zunehmender Wert für  $\lambda_m^{(N)^2} + \lambda_m^{(S)^2}$  zu einer höheren Abweichung vom Fall  $\kappa_{\text{core}} = 0$  ( $k/k_0 = 1.509967$ ) führt.

Wenn diese Vermutungen korrekt sind, müßte sich die Entartung der Lösungen durch eine unregelmäßige Deformation des Achtecks aufheben lassen, so daß alle acht Lösungen sichtbar werden. In Tabelle 3.3 sind die Koordinaten der Eckpunkte eines solchen Achtecks dargestellt. Die Kantenlängen wurden nur um wenige Prozent verändert.

$x/\rho$	$y/\rho$
1 + 0	0 + 0.04
$\frac{1}{\sqrt{2}} + 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.02$
0 - 0.02	1 + 0.02
$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.01$
-1 - 0.04	0 + 0.02
$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0$
0 + 0.04	-1 - 0.02
$\frac{1}{\sqrt{2}} + 0$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0.01$

Tabelle 3.3: Koordinaten (bezogen auf den Umkreisradius  $\rho$ ) der Eckpunkte des deformierten Achtecks

Die Berechnung von  $R(k)$  für die so veränderte Anordnung liefert tatsächlich genau acht nichtphysikalische Lösungen. Tabelle 3.4 faßt die Ergebnisse zusammen.

Die  $k/k_0$ -Werte zeigen, daß sich die Lösungen mit 1, 2 und 3 Minima wie erwartet in jeweils zwei Lösungen aufgespalten haben. Von den nun sichtbaren acht Lösungen liegt eine ( $m = 8$ ) bei  $\kappa_{\text{core}} = 0$  ( $k/k_0 = 1.509967$ ), während die anderen sieben bei  $\kappa_{\text{core}} \neq 0$  liegen, genau wie es oben vorausgesagt wurde. Dabei nimmt die Abweichung vom Fall  $\kappa_{\text{core}} = 0$  mit steigendem  $\lambda_m^{(N)^2} + \lambda_m^{(S)^2}$  zu.

Dieser experimentelle Befund stellt einen starken Hinweis auf die Richtigkeit der in diesem Kapitel angestellten Betrachtungen dar. Das vorgeschlagene Modell zur Erklärung nichtphysikalischer Lösungen bei BEM- $E_z$ ,  $H_z$ -Verfahren steht im Einklang mit den Beobachtungen.

$k/k_0$	Anzahl Minima bzw. Maxima	$m$
1.509051	4	4
1.509278	3	3 oder 5
1.509311	3	3 oder 5
1.509695	2	2 oder 6
1.509726	2	2 oder 6
1.509936	1	1 oder 7
1.509938	1	1 oder 7
1.509967	0	8

Tabelle 3.4: Nichtphysikalische Lösungen des Achtecks aus Tabelle 3.3 mit  $\varepsilon_{\text{core}} = 2.28\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_{\text{cladding}} = 2.05\varepsilon_0$  und  $k_0\rho = 15$

### 3.3.6 $\underline{H}_x, \frac{\partial \underline{H}_x}{\partial n}, \underline{H}_y, \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial n}$ -Formulierung mit konstanten Ansatzfunktionen

Eine Möglichkeit zur Vermeidung der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Situation besteht in der Ausnutzung der bereits zuvor erwähnten Beobachtung von BIERWIRTH [49]. BIERWIRTH hatte festgestellt, daß bei der Anwendung der Finite-Differenzen-Methode auf Wellenleiterstrukturen keine nichtphysikalischen Lösungen auftreten, wenn nicht die Helmholtz-Gleichung für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$ , sondern für  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  diskretisiert wird. Sind  $\underline{H}_x$  und  $\underline{H}_y$  gegeben, ist  $\underline{H}_z$  über die Divergenzfreiheit des magnetischen Feldes und  $\underline{E}$  über Gleichung (2.21) festgelegt. Die Ausgangsgleichungen lauten also

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_x + \kappa^2 \underline{H}_x = 0, \quad (3.100)$$

$$\Delta^{(t)} \underline{H}_y + \kappa^2 \underline{H}_y = 0, \quad (3.101)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \underline{H}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{H}_y - jk \underline{H}_z = 0, \quad (3.102)$$

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk \vec{e}_z) \times \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E}. \quad (3.103)$$

Die BEM-Diskretisierung von (3.100) und (3.101) kann wie in Kap. 3.3.2 durch Umwandlung in eine Randintegralgleichung und Verwendung konstanter Ansatzfunktionen in Verbindung mit point matching erfolgen.

Tatsächlich werden bei Verwendung einer solchen BEM-Variante zur Behandlung des dielektrischen Wellenleiters aus Abb. 3.9 keine nichtphysikalischen Lösungen beobachtet. Abb. 3.15 zeigt den Verlauf von  $R(k)$  für diesen Fall.

Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Berechnung von TEM- und Quasi-TEM-Moden kommt es jedoch zu großen Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Ausbreitungskonstante  $k$ . Für ein Koaxialkabel (Radius Außenleiter 5 mm, Radius Innenleiter 0.5 mm,  $\varepsilon_r = 1$ , Frequenz  $f = 10$  GHz)

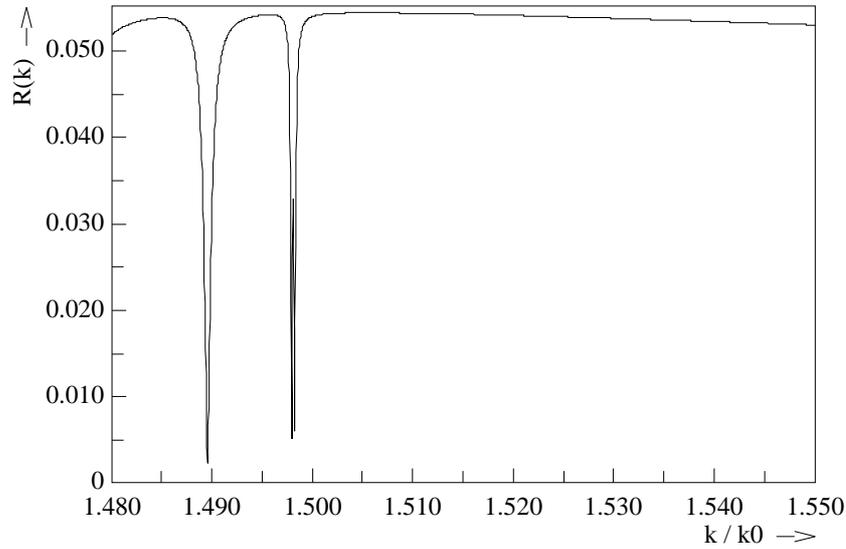


Abbildung 3.15:  $R(k)$  für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für  $k_0 h = 15$ ,  $k_0^2 := \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.6

ergibt sich bei Unterteilung des Gebietsrandes in 70 Elemente (je 35 für den Außen- und den Innenleiter) die Lösung  $k = 231.1 \text{ m}^{-1}$ , was von der exakten Lösung  $k = 209.6 \text{ m}^{-1}$  (entspricht dem Fall  $\kappa = 0$ ) um mehr als 10 % abweicht. Dieser Fehler nimmt zu, wenn die Frequenz ansteigt oder die Querschnittsabmessungen abnehmen. Dieses Verhalten wurde auch bei der in Anhang A.1 beschriebenen Methode beobachtet, die nichtphysikalische Lösungen bei der FEM durch Elimination der Lösungen bei  $\omega = 0$  vermeidet. Wie die FEM gewährleistet also der  $\underline{H}_x, \underline{H}_y$ -Ansatz die Approximierbarkeit von Lösungen bei bzw. in der Nähe von  $\kappa = 0$  nicht, ebensowenig wie die in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen  $\underline{E}_z, \underline{H}_z$ -Ansätze, was in Kap. 3.3.5 für den Fall der  $\underline{E}_z, \underline{E}_s, \underline{H}_z, \underline{H}_s$ -Formulierung bewiesen wurde. Im Fall der FEM wurde dieses Problem durch Verwendung von edge elements (Kap. 3.2.2) gelöst, die sowohl die unerwünschten Lösungen der Ausgangsgleichungen als auch TEM-Moden hinreichend gut approximieren können und dadurch nichtphysikalische Lösungen vermeiden *und gleichzeitig* genaue Ergebnisse bei der Berechnung von TEM-Moden liefern. Im nächsten Abschnitt wird ein BEM-Verfahren entwickelt, das auf der selben Ausgangsgleichung (2.23) basiert und ähnliche Eigenschaften besitzt.

### 3.3.7 $\vec{n} \times \underline{\vec{E}}, \vec{n} \times \underline{\vec{H}}$ -Formulierung mit Greenschen Funktionen als Ansatzfunktionen

Für die Konstruktion einer BEM für Gleichung (2.23) muß diese zunächst in eine Randintegralgleichung transformiert werden. Dabei gilt wie im Fall der

zuvor besprochenen BEM-Implementationen die Voraussetzung, daß  $\varepsilon$  und  $\mu$  ortsunabhängige, skalare Größen sind. Daraus folgt die Gleichung

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{E}} \right] - \omega^2 \varepsilon \mu \underline{\vec{E}} = 0. \quad (3.104)$$

Die weiteren Schritte erfordern die Kenntnis der Greenschen Funktion der Gleichung (3.104). Zur Bestimmung dieser Funktion kann in diesem Fall jedoch nicht die Definitionsgleichung (2.38) herangezogen werden, da diese nur für skalare, aber nicht für vektorielle Ausgangsgleichungen wie (3.104) gilt. Stattdessen wird die folgende Definition zugrunde gelegt:

$$(\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_p) \right] - \omega^2 \varepsilon \mu \vec{G}(\vec{r}, \vec{r}_p) = -\vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}_p). \quad (3.105)$$

In (3.105) tritt anstelle von  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)$  der Term  $(\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z)$  auf, da nach Gleichung (2.38) die Definitionsgleichung der Greenschen Funktion mit dem adjungierten Operator formuliert werden muß. Der Vektor  $\vec{a}$  stellt einen zunächst beliebigen Vektor dar.

Die Definitionsgleichung (3.105) wird gelöst durch

$$\vec{G} = - \left\{ \vec{a} + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} \left[ \vec{a} (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \right] (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \right\} G. \quad (3.106)$$

Dabei ist  $G$  die in (3.24) angegebene Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung (3.21).

Mit Hilfe der Eigenschaft (3.105) kann (3.104) nun in eine Randintegralgleichung für  $\vec{n} \times \underline{\vec{E}}$  und  $\vec{n} \times \underline{\vec{H}}$  transformiert werden (siehe Anhang A.4). Es folgt

$$\begin{aligned} c(\vec{r}_p) \cdot \vec{a} \underline{\vec{E}}(\vec{r}_p) &= \oint_{\partial A} \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) G \right] (\vec{n} \times \underline{\vec{E}}) ds \\ &\quad - j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G}(\vec{n} \times \underline{\vec{H}}) ds. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Die Lösung der Gleichung (3.107) soll wie in Kap. 3.3.4 durch Verwendung von Greenschen Funktionen und deren Ableitungen als Ansatzfunktionen erfolgen. Zur Herleitung eines derartigen Ansatzes wird das fiktive Feld  $\underline{\vec{E}}'$  außerhalb des Gebietes  $A$  berechnet, das zu erwarten wäre, wenn außerhalb von  $A$  die gleichen Materialeigenschaften ( $\varepsilon, \mu$ ) vorliegen würden wie in  $A$ . Zur Bestimmung dieses Feldes wird in (3.107) das Gebiet  $A$  durch seine Komplementärmenge  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  ersetzt. Dazu ist  $\vec{n}$  durch  $-\vec{n}$  und  $c(\vec{r}_p)$  gemäß der Definition (3.23) durch  $1 - c(\vec{r}_p)$  zu ersetzen. Die Randintegrale über ggf. im Unendlichen liegende äußere Gebietsränder von  $A$  oder  $\mathbb{R}^2 \setminus A$  liefern den Beitrag 0, wenn entsprechende Abstrahlungsbedingungen gefordert werden, so

daß der Integrationsweg  $\partial A$  beim Übergang  $A \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A$  beibehalten werden kann. Daraus folgt

$$\begin{aligned} [1 - c(\vec{r}_p)] \vec{a} \vec{E}'(\vec{r}_p) &= - \oint_{\partial A} \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) G \right] (\vec{n} \times \vec{E}') ds \\ &+ j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G}(\vec{n} \times \vec{H}') ds, \end{aligned} \quad (3.108)$$

wobei  $\vec{E}'$  und  $\vec{H}'$  die Felder außerhalb von  $A$  darstellen. Mit Hilfe von (3.108) kann  $\vec{n} \times \vec{H}'$  auf  $\partial A$  aus  $\vec{n} \times \vec{E}'$  auf  $\partial A$  berechnet werden und umgekehrt. Einer von beiden Termen kann also durch eine Randbedingung festgelegt werden. Mit der Bedingung  $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{n} \times \vec{E}'$  ergibt die Addition von (3.107) und (3.108)

$$c(\vec{r}_p) \cdot \vec{a} \vec{E}(\vec{r}_p) + [1 - c(\vec{r}_p)] \vec{a} \vec{E}'(\vec{r}_p) = j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G} \left[ \vec{n} \times (\vec{H}' - \vec{H}) \right] ds. \quad (3.109)$$

Der Ausdruck  $\vec{n} \times (\vec{H}' - \vec{H})$  kann als Oberflächenstrom  $\vec{K}$  interpretiert werden, der auf dem Rand von  $A$  in tangentialer und in  $z$ -Richtung fließt, d. h.  $\vec{K} = \underline{K}_s \vec{s} + \underline{K}_z \vec{e}_z$ , wobei  $\vec{s}$  den Tangentialvektor der Randkurve darstellt. Unter der Voraussetzung, daß der Punkt  $\vec{r}_p$  innerhalb von  $A$ , aber nicht auf dem Rand liegt ( $\Rightarrow c(\vec{r}_p) = 1$ ), folgt

$$\begin{aligned} \forall \vec{a}: \quad \vec{a} \vec{E}(\vec{r}_p) &= j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G} \vec{K} ds = j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G} (\underline{K}_s \vec{s} + \underline{K}_z \vec{e}_z) ds \\ &= j\omega\mu \oint_{\partial A} (\underline{K}_s \vec{a} \vec{G}_s + \underline{K}_z \vec{a} \vec{G}_z) ds \quad \Rightarrow \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = j\omega\mu \oint_{\partial A} (\underline{K}_s \vec{G}_s + \underline{K}_z \vec{G}_z) ds. \quad (3.111)$$

Die Greenschen Funktionen  $\vec{G}_s$  und  $\vec{G}_z$  gehen aus  $\vec{G}$  hervor, indem in (3.106)  $\vec{a}$  durch  $\vec{s}$  bzw.  $\vec{e}_z$  ersetzt wird. Die Anwendung von (2.20) liefert den entsprechenden Ansatz für das  $\vec{H}$ -Feld:

$$\vec{H}(\vec{r}_p) = \oint_{\partial A} (\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z) G \times (\underline{K}_s \vec{s} + \underline{K}_z \vec{e}_z) ds, \quad (3.112)$$

$$\vec{\nabla}_p^{(t)} := \begin{pmatrix} \partial/\partial x_p \\ \partial/\partial y_p \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Die Gleichungen (3.111) und (3.112) liefern das wohlbekanntes Resultat, daß sich jedes elektromagnetische Feld, das (3.107) erfüllt, als ein Feld darstellen läßt, das von virtuellen Oberflächenströmen erzeugt wird, die im Gebietsrand fließen. Diese beschreiben wegen der Voraussetzung  $c(\vec{r}_p) = 1$  jedoch

nur das Feld im Gebietsinneren, also für Punkte  $\vec{r}_p$ , die nicht auf dem Gebietsrand oder außerhalb von  $A$  liegen. Um mit Hilfe von (3.111) oder (3.112) Feldgrößen auf dem Rand zu berechnen, muß eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt werden, bei der sich  $\vec{r}_p$  von innen dem gewünschten Randpunkt nähert.

Der Ansatz (3.111), (3.112) genügt der zu lösenden Integralgleichung (3.107) bereits a priori, unabhängig von der Wahl der Oberflächenströme  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$ . Die verbleibende Aufgabe besteht nun darin,  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  so zu bestimmen, daß die geforderten Randbedingungen erfüllt werden. Dazu sind (3.111) und (3.112) zunächst zu diskretisieren. Um den Aufwand zur Durchführung numerischer Integrationen bei der Erfüllung der Randbedingungen möglichst gering zu halten, werden  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  als Summe von  $\delta$ -Funktionen dargestellt:

$$\underline{K}_s = \sum_{q=1}^M I_q^{(s)} \delta(s - s_q^{(s)}), \quad (3.114)$$

$$\underline{K}_z = \sum_{q=1}^M I_q^{(z)} \delta(s - s_q^{(z)}). \quad (3.115)$$

$s$  ist die Koordinate längs des Weges  $\partial A$ , entspricht also der Weglänge von einem beliebig gewählten Nullpunkt zum betrachteten Punkt. Jede  $\delta$ -Funktion beschreibt einen in  $z$ -Richtung verlaufenden Stromfaden, der die Querschnittsebene am Punkt  $s_q^{(s)}$  bzw.  $s_q^{(z)}$  schneidet. Die ( $z$ )-Stromfäden führen einen in  $z$ -Richtung, also in Richtung des Stromfadens fließenden Strom der Stärke  $I_q^{(z)}$ , der in  $z$ -Richtung allerdings mit dem Faktor  $e^{-jkz}$  moduliert ist. Die ( $s$ )-Stromfäden führen einen Strom, der tangential zur Randkurve  $\partial A$  fließt, also senkrecht zum Stromfadenverlauf. Dies ist zwar physikalisch nicht sinnvoll, stellt aber kein Ausschlußkriterium dar, da es sich lediglich um virtuelle Quellen zur Modellierung einer Feldverteilung handelt. Die Stromstärke in den ( $s$ )-Stromfäden beträgt  $I_q^{(s)} e^{-jkz}$ . Die Einheit der  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$  ist A, während die Oberflächenströme  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  die Einheit A/m haben. Trotzdem sind (3.114) und (3.115) konsistent, da die  $\delta$ -Funktionen die Einheit 1/m besitzen<sup>8</sup>.

Einsetzen der Ausdrücke für  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  in (3.111) und (3.112) ergibt

$$\vec{E}(\vec{r}_p) = j\omega\mu \sum_{q=1}^M \left[ I_q^{(s)} \vec{G}_s(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(s)}) + I_q^{(z)} \vec{G}_z(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(z)}) \right], \quad (3.116)$$

<sup>8</sup>Die Dimension der Funktion  $\delta(x)$  ist gleich dem Inversen der Dimension des Arguments  $x$ , d. h.  $[\delta(x)] = [x]^{-1}$ , da die  $\delta$ -Funktion der Gleichung  $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = 1$  genügt. Weil das Differential  $dx$  die gleiche Dimension wie  $x$  hat, kann nur so die dimensionslose rechte Seite erreicht werden.

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}_p) = & \sum_{q=1}^M \left[ (\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z)G(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(s)}) \times I_q^{(s)}\vec{s} \right. \\ & \left. + (\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z)G(\vec{r}_p, \vec{r}_q^{(z)}) \times I_q^{(z)}\vec{e}_z \right]. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Dabei entsprechen die  $\vec{r}_q^{(s)}$  bzw.  $\vec{r}_q^{(z)}$  den durch  $s_q^{(s)}$  bzw.  $s_q^{(z)}$  bezeichneten Randpunkten. Die Gleichungen (3.116) und (3.117) stellen den gewünschten Ansatz auf Basis der Greenschen Funktion dar. Die zu bestimmenden Ansatzkoeffizienten sind die Ströme  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$ , durch die  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  eindeutig definiert sind.

Die nun noch zu erfüllenden Randbedingungen entsprechen den Stetigkeitsbedingungen für  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_s$ ,  $\underline{H}_z$ ,  $\underline{D}_n$  und  $\underline{B}_n$ . Dies soll wie in Kap. 3.3.4 so erfolgen, daß die Stetigkeit der Normalkomponenten  $\underline{D}_n$  und  $\underline{B}_n$  an den Grenzflächen nicht durch separate Gleichungen gefordert wird, sondern automatisch aus den Stetigkeitsbedingungen für  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  folgt. Die Stetigkeitsbedingungen können aufgrund der beschränkten Anzahl der Freiheitsgrade ( $2M$  Ströme) nicht für jeden Punkt des Randes erfüllt werden, sondern nur im Mittel über bestimmten Randabschnitten. Hierzu werden  $4M$  Testfunktionen  $v_p^{(E_s)}$ ,  $v_p^{(E_z)}$ ,  $v_p^{(H_s)}$ ,  $v_p^{(H_z)}$ ,  $p = 1 \dots M$ , definiert, mit deren Hilfe die  $4M$  diskretisierten Stetigkeitsbedingungen (3.36)–(3.39) aus Kap. 3.3.4 aufgestellt werden können. Genügen die Testfunktionen den Forderungen (3.42) und (3.45), so folgen aus den  $4M$  Stetigkeitsbedingungen für  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  die  $2M$  Stetigkeitsbedingungen (3.44) und (3.46) für  $\underline{B}_n$  und  $\underline{D}_n$ .

Die konkrete Wahl der Testfunktionen wird in Kap. 3.4 beschrieben und begründet. Die dort definierten Testfunktionen  $v_p^{(E_s)}$  und  $v_p^{(H_z)}$  sind – gleich lange Randelemente vorausgesetzt – symmetrisch zum Mittelpunkt des Randelementes  $p$ , während  $v_p^{(E_z)}$  und  $v_p^{(H_s)}$  symmetrisch zum Berührungspunkt der Elemente  $p - 1$  und  $p$  sind. Wie im Fall des in Kap. 3.3.4 beschriebenen Verfahrens können diese Symmetrien durch ungeschickte Wahl der Quellpunkte  $\vec{r}_q^{(s)}$ ,  $\vec{r}_q^{(z)}$  zu linearen Abhängigkeiten im resultierenden Gleichungssystem für die  $I_q^{(s)}$ ,  $I_q^{(z)}$  führen, insbesondere bei einfachen Randgeometrien (z. B.  $n$ -Eck mit gleich langen Randelementen). Eine genaue Analyse des Ansatzes (3.116)–(3.117) in Verbindung mit den Stetigkeitsbedingungen (3.36)–(3.39) zeigt, daß die  $\vec{r}_q^{(s)}$  nicht auf den Elementberührungspunkten und die  $\vec{r}_q^{(z)}$  nicht auf den Elementmittelpunkten liegen dürfen. Daher wird die umgekehrte Wahl getroffen, d. h.  $\vec{r}_q^{(s)}$  liegt auf dem Mittelpunkt des Elementes  $q$  und  $\vec{r}_q^{(z)}$  auf dem Berührungspunkt der Elemente  $q - 1$  und  $q$ .

Die numerische Auswertung der in den Stetigkeitsbedingungen (3.36)–(3.39) vorkommenden Randintegrale, deren Integranden  $G$  oder  $\partial G/\partial n$  enthalten, wird in Anhang B.1 behandelt.

Der bis jetzt beschriebene Ansatz besitzt die folgenden vorteilhaften Eigenschaften:

1. Die  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder aus (3.116) und (3.117) erfüllen alle *nicht diskretisierten* Maxwell'schen Gleichungen, da es sich um Linearkombinationen Greenscher Funktionen handelt.
2. Alle sechs diskretisierten Stetigkeitsbedingungen (3.36)–(3.39), (3.44) und (3.46) werden erfüllt.
3. TEM- bzw. Quasi-TEM-Moden können gut approximiert werden. Aus (3.116) und (3.117) folgt für  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\underline{E}_z \rightarrow 0$  und  $\underline{H}_z \rightarrow 0$  lediglich  $I_q^{(s)} \rightarrow 0$ , während die  $I_q^{(z)}$  durch diesen Grenzübergang nicht beeinträchtigt werden und somit als Freiheitsgrade zur Modellierung dieser Moden voll zur Verfügung stehen. Die in Kap. 3.2.1 beschriebenen Probleme bei linearen FEM-Knotenelementen, die nicht genügend Freiheitsgrade zur Modellierung von TEM-Moden bieten, treten hier daher nicht auf.

Darüber hinaus gilt für den beschriebenen Grenzübergang

$$\oint_{\partial A'} \underline{E}_s \, ds \rightarrow 0, \quad (3.118)$$

wobei  $\partial A'$  ein beliebiger, geschlossener Integrationsweg ist, der vollständig innerhalb des Gebietes  $A$  verläuft ( $A' \subset A$ ). Eine derartige Beziehung läßt sich auch für die in Kap. 3.2.2 beschriebenen edge elements herleiten.

4. In (3.106) wird der erste Summand für  $\omega \rightarrow 0$  vernachlässigbar klein gegenüber dem zweiten Summanden, was dazu führt, daß  $(\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{G}$  beliebig klein gegenüber  $\vec{G}$  wird, da der zweite Summand hierfür keinen Beitrag liefert. Damit wird aber auch  $(\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E}(\vec{r}_p)$  beliebig klein, unabhängig von der Wahl der  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$  aus (3.116). Die nichtphysikalischen Lösungen der Gleichung (2.23),  $\vec{E}(\vec{r}_p) = -(\vec{\nabla}_p^{(t)} - jk\vec{e}_z)\underline{\phi}$ ,  $\underline{\phi}$  beliebig, können somit gut modelliert werden; eine Verschiebung zu  $\omega$ -Werten ungleich 0 wie bei linearen FEM-Knotenelementen läßt sich daher nicht beobachten.

Die bei  $E_z, H_z$ -Ansätzen beobachteten nichtphysikalischen Lösungen treten mit diesem Ansatz nicht mehr auf. Abb. 3.16 zeigt den Verlauf der Funktion  $R(k)$  bei Anwendung dieses Verfahrens auf den dielektrischen Wellenleiter aus Kap. 3.3.2.

Neben den beiden erwarteten Lösungen ist noch ein Minimum bei  $k/k_0 = 1.509967$  (entspricht  $\kappa_{\text{core}} = 0$ ) zu sehen. Dieser Effekt hängt mit der Eigenschaft (3.118) zusammen, die zu einer linearen Abhängigkeit in der Systemmatrix für  $\kappa = 0$  führt. Das hier beschriebene Verfahren liefert also für jedes

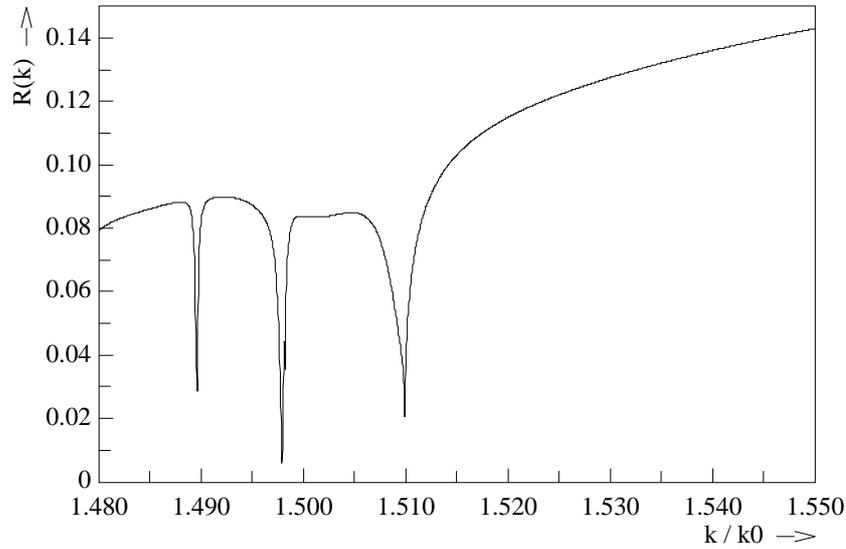


Abbildung 3.16:  $R(k)$  für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für  $k_0 h = 15$ ,  $k_0^2 := \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.7

dielektrische Gebiet eine nichtphysikalische Lösung bei  $\kappa = 0$ . Da die  $k$ -Werte dieser Lösungen aber von vornherein bekannt sind, können diese bei der Berechnung der korrekten Lösungen ausgeblendet werden.

Für ein homogenes Dielektrikum, das von einer ideal leitenden Schirmung umgeben ist und in dem sich  $N_c$  ideale Leiter befinden, liefert diese BEM-Variante genau  $N_c + 1$  Lösungen bei  $\kappa = 0$ , nämlich die  $N_c$  erwarteten TEM-Lösungen sowie die oben erwähnte nichtphysikalische Lösung. Wie die FEM mit edge elements besitzt also auch diese BEM-Variante die Eigenschaft, daß der berechnete  $k$ -Wert von TEM-Moden dem analytischen Wert unabhängig von der Wahl der Diskretisierung entspricht. Dies belegt die oben erwähnte Fähigkeit zur guten Approximation von TEM- und Quasi-TEM-Moden. Die Ungenauigkeiten bei Berechnung von Koaxialkabeln, unter denen der im vorigen Abschnitt beschriebene  $\underline{H}_x, \underline{H}_y$ -Ansatz leidet, treten hier somit nicht auf.

### 3.4 Implementierung der FEM/BEM-Kopplung

In den Kapiteln 3.2.2 und 3.3.7 wurde dargelegt, wie mit der FEM (edge elements) bzw. der BEM ( $\vec{n} \times \vec{E}, \vec{n} \times \vec{H}$ -Formulierung) Gleichungssysteme für Teilgebiete des Leitungsquerschnitts aufgestellt werden. Dieses Kapitel erläutert, wie diese Gleichungssysteme mit Hilfe der für die einzelnen Feldkomponenten geltenden Kontinuitätsbedingungen an dielektrischen Grenzflächen zu einem Gesamtgleichungssystem kombiniert werden. Das hierfür benötigte Kopplungsschema muß bei Kopplung zweier benachbarter Gebiete

die Fälle FEM-FEM, FEM-BEM und BEM-BEM berücksichtigen. An Punkten, wo drei oder mehr Gebiete zusammenstoßen, tritt eine entsprechend größere Anzahl von Fällen auf. Diese Anzahl erhöht sich noch, wenn berücksichtigt wird, daß die Anordnung auch ideal leitende Teilgebiete enthalten kann, die nicht diskretisiert werden. Abb. 3.17 zeigt einen Fall, in dem sich zwei FEM-Gebiete und zwei BEM-Gebiete, die von einem ideal leitenden Schirm umgeben sind, in einem Punkt treffen.

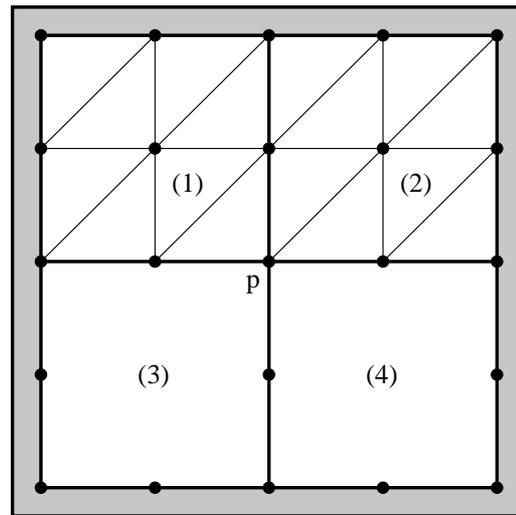


Abbildung 3.17: Kopplung zweier FEM- und zweier BEM-Gebiete, die von einem ideal leitenden Schirm umgeben sind

Um mit den verschiedenen, an den Randelementen und -knoten auftretenden Konstellationen umgehen zu können, wird ein geeignetes numerisches Schema zur Kopplung der Gebiete benötigt. Ein derartiges Schema wird im folgenden vorgestellt.

Zunächst ist festzulegen, welche Unbekannten des Gleichungssystems den einzelnen Gebieten zugeordnet werden, und welche Unbekannten auf den gemeinsamen Gebietsgrenzen zur Kopplung erforderlich sind. Zu BEM-Gebieten gehören nach Kap. 3.3.7 eine  $I_q^{(s)}$ -Unbekannte für jedes Randelement des Gebietes und eine  $I_q^{(z)}$ -Unbekannte für jeden Randknoten. Den Gebieten (3) und (4) aus Abb. 3.17 werden also jeweils acht  $I_q^{(s)}$ - und acht  $I_q^{(z)}$ -Unbekannte zugeordnet. Bei FEM-Gebieten wird jeder Dreieckskante, die nicht auf dem Rand liegt (die Endpunkte dürfen jedoch auf dem Rand liegen), eine  $\underline{E}_s$ -Unbekannte ( $\underline{E}$ -Feldkomponente in Richtung der Kante) und jedem Knoten des Gebietes, der nicht auf dem Rand liegt, eine  $\underline{E}_z$ -Unbekannte zugeordnet (Koeffizienten  $\alpha_q$  aus Gleichung (3.11)). Den Gebieten (1) und (2) werden also jeweils acht  $\underline{E}_s$ -Unbekannte und eine  $\underline{E}_z$ -Unbekannte zugeordnet.

Zwischen den Knoten wird  $\underline{E}_z$  durch lineare Interpolation bestimmt (Gleichung (3.8)), während  $\underline{E}_s$  längs der Kanten als konstant angesehen wird, was auf die in Gleichung (3.9) angegebene Interpolationsvorschrift zur Berechnung von  $\underline{E}_x$  und  $\underline{E}_y$  innerhalb der Dreiecke führt.

Für jede FEM-Unbekannte wird eine Gleichung der Form (3.14) aufgestellt, wobei die Testfunktion  $\vec{v}_p$  für die  $\underline{E}_z$ -Unbekannten dem oberen Fall (Knotenansatzfunktionen) und für die  $\underline{E}_s$ -Unbekannten dem unteren Fall (Kantenansatzfunktionen) der Gleichung (3.10) entspricht. Der Randintegralterm in (3.14) liefert nur dann einen Beitrag, wenn  $\vec{v}_p$  die zu einer Randkante oder einem Randknoten gehörige Testfunktion ist. Da die FEM-Unbekannten definitionsgemäß nur inneren Knoten und Kanten zugeordnet sind, werden zum Aufstellen der entsprechenden Gleichungen also keine Informationen über  $\vec{n} \times \vec{H}$  auf dem Rand benötigt. In den Gleichungen treten jedoch  $\underline{E}_s$ - und  $\underline{E}_z$ -Randwerte auf (Koeffizienten  $\alpha_q$  für Randknoten und -kanten). Da diese Größen an dielektrischen Grenzflächen stetig übergehen, bietet es sich an, sie als Kopplungsunbekannte zu verwenden und dem gemeinsamen Rand der angrenzenden Gebiete zuzuordnen. Daher wird jedem Randknoten der Anordnung, der nicht auf einer ideal leitenden Oberfläche liegt, eine  $\underline{E}_z$ -Unbekannte und jeder nicht ideal leitenden Randkante (die Endpunkte dürfen auf ideal leitenden Oberflächen liegen) eine  $\underline{E}_s$ -Unbekannte zugewiesen. Im ideal leitenden Fall wird beim Aufstellen der Gleichungen implizit mit  $\underline{E}_s = 0$  bzw.  $\underline{E}_z = 0$  gerechnet. Im Beispiel aus Abb. 3.17 werden demnach fünf  $\underline{E}_z$ - und acht  $\underline{E}_s$ -Randunbekannte eingeführt. Wie im Inneren der FEM-Gebiete wird  $\underline{E}_z$  zwischen den Knoten linear interpoliert, während  $\underline{E}_s$  längs einer Randkante als konstant angesehen wird.

Wie bei FEM-Gebieten müssen auch die Unbekannten der BEM-Gebiete ( $I_q^{(s)}, I_q^{(z)}$ ) mit den Randunbekannten verkoppelt werden. Hierzu wird der Unbekannten  $I_p^{(s)}$  eine Gleichung der Form

$$\oint_{\partial A} v_p^{(E_s)} \underline{E}_s(s) ds = \oint_{\partial A} v_p^{(E_s)} \cdot \vec{s} \vec{E}(\vec{r}) ds \quad (3.119)$$

und der Unbekannten  $I_p^{(z)}$  eine Gleichung der Form

$$\oint_{\partial A} v_p^{(E_z)} \underline{E}_z(s) ds = \oint_{\partial A} v_p^{(E_z)} \cdot \vec{e}_z \vec{E}(\vec{r}) ds \quad (3.120)$$

zugeordnet. Dabei bezeichnet  $A$  das betreffende BEM-Gebiet,  $\underline{E}_s(s)$  und  $\underline{E}_z(s)$  stehen für den durch die Randunbekannten festgelegten Verlauf der entsprechenden  $\vec{E}$ -Feldkomponenten (stückweise konstant für  $\underline{E}_s$ , stückweise linear für  $\underline{E}_z$ ; 0 auf perfekt leitenden Oberflächen), und  $\vec{E}(\vec{r})$  ist das gemäß (3.116) aus den  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$  berechnete Feld. Durch (3.119) und (3.120) wird die Stetigkeit von  $\underline{E}_s$  und  $\underline{E}_z$  an Grenzflächen, an denen BEM-Gebiete beteiligt sind, gewährleistet. Die Anwendung von (3.119) und (3.120) erfordert nun

noch die Wahl der Testfunktionen  $v_p^{(E_s)}$  und  $v_p^{(E_z)}$ . Da  $\underline{E}_z(s)$  eine stückweise lineare Funktion ist, bieten sich lineare Testfunktionen als Wahl für  $v_p^{(E_z)}$  an, d. h.  $v_p^{(E_z)}$  wächst längs des Randelementes  $p-1$  linear von 0 auf 1 und fällt längs des Elementes  $p$  linear von 1 auf 0 (siehe Abb. 3.18). Die Randelemente des Gebietes  $A$  seien im mathematisch positiven Umlaufsinn (entgegen dem Uhrzeigersinn) fortlaufend durchnummeriert. Mathematisch wird  $v_p^{(E_z)}$  demnach beschrieben durch die Gleichung

$$v_p^{(E_z)}(s) = \begin{cases} 1 + \frac{s}{l_{p-1}} & \text{für } s \in \text{Randelement } p-1, \\ 1 - \frac{s}{l_p} & \text{für } s \in \text{Randelement } p, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.121)$$

wobei der Punkt  $s = 0$  dem Berührungspunkt zwischen den Randelementen  $p-1$  und  $p$  entspricht.  $l_{p-1}$  und  $l_p$  stellen die Längen der beiden Elemente dar.

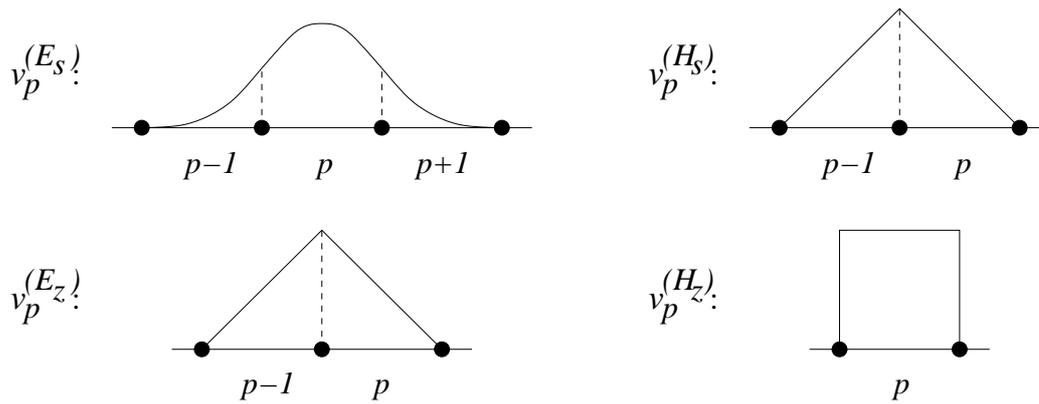


Abbildung 3.18: BEM-Testfunktionen

Da  $\underline{E}_s(s)$  eine stückweise konstante Funktion ist, wären Rechteckfunktionen prinzipiell die geeignetste Wahl für  $v_p^{(E_s)}$ . Dies würde jedoch die Bedingung (3.42) verletzen. Die Ableitung von  $v_p^{(E_z)}$  wäre dann eine Linearkombination aus  $v_p^{(E_s)}$ -Funktionen; nach (3.42) soll es jedoch genau umgekehrt sein, damit aus der Stetigkeit von  $\underline{E}_s$  und  $\underline{E}_z$  diejenige von  $\underline{B}_n$  folgt. Daher muß eine andere Wahl getroffen werden. Aus (3.121) folgt

$$\oint_{\partial A} v_p^{(E_z)} ds = \frac{l_{p-1} + l_p}{2}. \quad (3.122)$$

Zusammen mit (3.42) ergibt sich daraus die Bedingung

$$0 = \oint_{\partial A} \frac{\partial}{\partial s} v_p^{(E_s)} ds \stackrel{(3.42)}{=} \sum_j a_p^{(j)} \oint_{\partial A} v_j^{(E_z)} ds = \sum_j a_p^{(j)} \frac{l_{j-1} + l_j}{2}. \quad (3.123)$$

Die naheliegendste nichttriviale Lösung wird durch den Fall

$$a_p^{(j)} = \begin{cases} \frac{2}{l_{p-1}+l_p} & \text{für } j = p, \\ -\frac{2}{l_p+l_{p+1}} & \text{für } j = p + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.124)$$

beschrieben. Die  $s$ -Ableitung von  $v_p^{(E_s)}$  ist dann eine Linearkombination der Funktionen  $v_p^{(E_z)}$  und  $v_{p+1}^{(E_z)}$ .  $v_p^{(E_s)}$  ergibt sich somit durch Integration über diese Funktionen längs des Randes:

$$v_p^{(E_s)}(s) = \int_{s_0}^s \left[ \frac{2}{l_{p-1} + l_p} v_p^{(E_z)}(s') - \frac{2}{l_p + l_{p+1}} v_{p+1}^{(E_z)}(s') \right] ds'. \quad (3.125)$$

Der Startpunkt  $s_0$  entspricht dem Anfangspunkt des Elementes  $p-1$ . Aus der Integration resultiert die in Abb. 3.18 dargestellte, stückweise quadratische Funktion über den Randelementen  $p-1$ ,  $p$  und  $p+1$ . Wegen der Stetigkeit des Integranden in (3.125) ist  $v_p^{(E_s)}$  auch an den Stoßstellen der Elemente stetig differenzierbar. Erst die zweite Ableitung weist dort Unstetigkeitsstellen auf.

Bis jetzt wurden jeder FEM- und jeder BEM-Unbekannten jeweils eine Gleichung zugeordnet. Die Gleichungen gewährleisten, daß die Feldkomponenten  $\underline{E}_s$  und  $\underline{E}_z$  an Grenzflächen stetig übergehen bzw. auf perfekt leitenden Oberflächen verschwinden. Damit die Anzahl der Gleichungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt, müssen nun noch den  $\underline{E}_s$ - und  $\underline{E}_z$ -Randunbekannten Gleichungen zugeordnet werden. Hierfür bieten sich Bedingungen an, die die Stetigkeit der  $\vec{H}$ -Feldkomponenten  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  an Grenzflächen fordern, da dies von den bis jetzt aufgestellten Gleichungen nicht berücksichtigt wird. Die Randunbekannten wurden, wie oben beschrieben, nur den nicht ideal leitenden Randabschnitten zugeordnet. Da auch nur dort die Stetigkeit von  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  gefordert werden kann (auf perfekt leitenden Oberflächen: Sprung gemäß  $\vec{n} \times \vec{H} = \vec{K}$ ,  $\vec{K} =$  Oberflächenstrom), ist es möglich, eine 1:1-Beziehung zwischen Randunbekannten und  $\vec{H}$ -Stetigkeitsbedingungen herzustellen.

Wie im Fall der  $\vec{E}$ -Stetigkeitsbedingungen (3.119) und (3.120) werden die betreffenden Feldkomponenten mit Testfunktionen multipliziert und über den Gebietsrand integriert, d. h. für jedes der aneinandergrenzenden Gebiete werden die Terme  $\oint_{\partial A} v_p^{(H_s)} \cdot \vec{s} \vec{H}(\vec{r}) ds$  und  $\oint_{\partial A} v_p^{(H_z)} \cdot \vec{e}_z \vec{H}(\vec{r}) ds$  berechnet und miteinander verglichen. Dabei stellt  $\vec{H}(\vec{r})$  das Feld dar, das aus den Unbekannten, die dem betreffenden Gebiet zugeordnet sind, berechnet wurde. Für BEM-Gebiete wird  $\vec{H}(\vec{r})$  also über Gleichung (3.117) aus den  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$  berechnet. Bei der FEM besteht die Möglichkeit, durch Anwendung der Gleichung (3.14) Randintegrale der oben beschriebenen Form direkt zu bestimmen. Gleichung (3.14) wurde oben bereits zur Aufstellung der Gleichungen, die den FEM-Unbekannten zugeordnet sind, verwendet. Dabei wurden für die

Testfunktion  $\vec{v}_p$  gemäß Gleichung (3.10) Funktionen eingesetzt, die zu einem Knoten oder einer Kante des Netzes gehören, wobei Randknoten und -kanten nicht betrachtet wurden. Dadurch war der Randintegralterm in (3.14) stets 0. Da nun der Randintegralterm explizit benötigt wird, können für  $\vec{v}_p$  die den Randknoten und -kanten zugeordneten Testfunktionen eingesetzt werden.

Für einen Randknoten  $p$ , der nicht auf einer perfekt leitenden Oberfläche liegt, gilt  $\vec{v}_p = \lambda_p \vec{e}_z$ , wobei  $\lambda_p$  die lineare Elementfunktion aus Abb. 2.2 zum Knoten  $p$  darstellt. Für den Randintegralterm aus Gleichung (3.14) gilt dann

$$\oint_{\partial A} \vec{v}_p(\vec{n} \times \vec{H}) \, ds = \oint_{\partial A} \lambda_p \vec{e}_z [\vec{n} \times (\underline{H}_n \vec{n} + \underline{H}_s \vec{s} + \underline{H}_z \vec{e}_z)] \, ds = \oint_{\partial A} \lambda_p \underline{H}_s \, ds. \quad (3.126)$$

$\lambda_p$  wird dabei nur auf dem Rand ausgewertet. Liegt der Randknoten  $p$  zwischen den Randelementen  $p-1$  und  $p$ , wächst  $\lambda_p$  längs des Elementes  $p-1$  linear von 0 auf 1 und fällt längs des Elementes  $p$  linear von 1 auf 0. Damit entspricht  $\lambda_p$  auf dem Rand der oben definierten Testfunktion  $v_p^{(Ez)}$ . Es ist also sinnvoll, die Testfunktion  $v_p^{(Hs)}$  so zu wählen, daß  $v_p^{(Hs)} = v_p^{(Ez)}$  gilt (Abb. 3.18). Aus (3.126) folgt dann

$$\oint_{\partial A} \vec{v}_p(\vec{n} \times \vec{H}) \, ds = \oint_{\partial A} v_p^{(Hs)} \underline{H}_s \, ds. \quad (3.127)$$

Die rechte Seite von (3.127) kann bei FEM-Gebieten also berechnet werden, indem in (3.14) für  $\vec{v}_p$  die zum Randknoten  $p$  gehörige Elementfunktion eingesetzt wird.

Für ein Randelement  $p$ , das nicht auf einer perfekt leitenden Oberfläche liegt, ist gemäß (3.10)  $\vec{v}_p = \lambda_p \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_{p+1} - \lambda_{p+1} \vec{\nabla}^{(t)} \lambda_p$ , wobei die Randknoten  $p$  und  $p+1$  die Anfangs- und Endpunkte des Randelementes  $p$  seien (bei mathematisch positivem Umlauf um das Gebiet). Auf dem Rand gilt

$$\vec{s} \cdot \vec{v}_p(s) = \begin{cases} \frac{1}{l_p} & \text{für } s \in \text{Randelement } p, \\ 0 & \text{für } s \in \text{anderes Randelement.} \end{cases} \quad (3.128)$$

Daraus folgt

$$\oint_{\partial A} \vec{v}_p(\vec{n} \times \vec{H}) \, ds = -\frac{1}{l_p} \int_{\text{Randelement } p} \underline{H}_z \, ds, \quad (3.129)$$

da  $\vec{v}_p$  keine  $z$ -Komponente besitzt und die  $\vec{n}$ -Komponente in dem Spatprodukt wirkungslos bleibt.

Diese Wahl für  $\vec{v}_p$  liefert also ein Randintegral über  $\underline{H}_z$ . Erfüllt die Testfunktion  $v_p^{(Hz)}$  (Abb. 3.18) die Bedingung

$$v_p^{(Hz)}(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } s \in \text{Randelement } p, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.130)$$

folgt aus (3.129):

$$\oint_{\partial A} \vec{v}_p(\vec{n} \times \vec{H}) ds = -\frac{1}{l_p} \oint_{\partial A} v_p^{(H_z)} \underline{H}_z ds. \quad (3.131)$$

Bei FEM-Gebieten kann  $\oint_{\partial A} v_p^{(H_z)} \underline{H}_z ds$  also berechnet werden, indem in (3.14) für  $\vec{v}_p$  die zum Randelement  $p$  gehörige Elementfunktion eingesetzt wird.

Aus den so gewonnenen Definitionen für  $v_p^{(H_s)}$  und  $v_p^{(H_z)}$  läßt sich die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial s} v_p^{(H_s)} = \frac{1}{l_{p-1}} v_{p-1}^{(H_z)} - \frac{1}{l_p} v_p^{(H_z)} \quad (3.132)$$

herleiten. Daraus folgt das überraschende Ergebnis, daß die für edge elements verwendeten Testfunktionen (Gleichung (3.10)) die aus der Verkopplung von Gebieten resultierende Forderung (3.45) für  $v_p^{(H_s)}$  und  $v_p^{(H_z)}$  erfüllen. Wenn also zwei Gebiete über diese Testfunktionen miteinander verknüpft werden, ist – wie in Kap. 3.3.4 dargelegt – neben der Stetigkeit von  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  an Grenzflächen auch die Stetigkeit von  $\underline{D}_n$  gewährleistet. Edge elements sind Knotenelementen folglich auch in dieser Hinsicht überlegen.

Mit Hilfe der Testfunktionen  $v_p^{(H_s)}$  und  $v_p^{(H_z)}$  können nun die Kopplungsgleichungen formuliert werden. Da  $v_p^{(H_z)}$  nur auf dem Randelement  $p$  von 0 verschieden ist, wird in der  $\underline{H}_z$ -Kopplungsgleichung auch nur über dieses Randelement integriert. Weil an jedes Randelement immer genau zwei Gebiete angrenzen, lautet die Kopplungsgleichung

$$\oint_{\partial A_1} v_p^{(H_z)} \vec{e}_z \vec{H}_1(\vec{r}) ds = \oint_{\partial A_2} v_p^{(H_z)} \vec{e}_z \vec{H}_2(\vec{r}) ds. \quad (3.133)$$

Die Indizes „1“ und „2“ bezeichnen jeweils eines der angrenzenden Gebiete. Die Randintegrale werden je nach Art des Gebietes (FEM oder BEM) mit einer der oben besprochenen Methoden berechnet. Da (3.133) nur für nicht perfekt leitende Randelemente aufgestellt wird, werden diese Gleichungen den  $\underline{E}_s$ -Randunbekannten zugeordnet, die auch genau dort existieren. Im Fall der Abb. 3.17 werden den acht  $\underline{E}_s$ -Randunbekannten acht Gleichungen der Gestalt (3.133) zugeordnet.

Bei der Formulierung der  $\underline{H}_s$ -Kopplungsgleichungen tritt die Schwierigkeit auf, daß sich die Testfunktionen  $v_p^{(H_s)}$  über zwei Randelemente erstrecken. Wenn sich am Knoten zwischen diesen beiden Elementen mehr als zwei Gebiete treffen, wie z. B. im Fall des Knotens  $p$  aus Abb. 3.17, ist jedes dieser Gebiete mit mehr als einem anderen Gebiet verknüpft. Durch Verwendung eines Integrationsweges, der strahlenförmig jedes den Knoten  $p$  berührende Randelement entlangläuft (Hin- und Rückweg erforderlich), läßt sich folgende

$\underline{H}_s$ -Kopplungsgleichung für den Knoten  $p$  herleiten:

$$\sum_{j=1}^{N_p} \oint_{\partial A_j} v_{p,j}^{(H_s)} \vec{s}_j \underline{\vec{H}}_j \, ds = 0. \quad (3.134)$$

Dabei ist  $N_p$  die Anzahl der am Knoten  $p$  zusammentreffenden Gebiete,  $\partial A_j$  entspricht dem Rand des Gebietes  $j$ , und  $v_{p,j}^{(H_s)}$  stellt die zum Gebiet  $j$  gehörige  $\underline{H}_s$ -Testfunktion für den Knoten  $p$  dar.  $\vec{s}_j$  ist der Tangentialvektor zum Gebietsrand  $\partial A_j$  in Richtung eines mathematisch positiven Umlaufs. Längs eines Randelementes zwischen den Gebieten (1) und (2) gilt daher  $\vec{s}_1 = -\vec{s}_2$ . Für einen Knoten  $p$ , an dem nur zwei Gebiete zusammentreffen ( $N_p = 2$ ), folgt dann aus (3.134):

$$\oint_{\partial A_1} v_p^{(H_s)} \vec{s}_1 \underline{\vec{H}}_1 \, ds = \oint_{\partial A_2} v_p^{(H_s)} \vec{s}_1 \underline{\vec{H}}_2 \, ds. \quad (3.135)$$

Dieser Normalfall der  $\underline{H}_s$ -Kopplung ist also in (3.134) enthalten. Die Testfunktion  $v_p^{(H_s)}$  ist für beide Gebiete auf den gleichen Randelementen definiert, muß also in diesem Fall nicht mehr mit der Gebietsnummer  $j$  indiziert werden.

Gleichung (3.134) wird für jeden Randknoten der Anordnung aufgestellt, der nicht auf einer perfekt leitenden Oberfläche liegt. Da zu jedem dieser Knoten eine  $\underline{E}_z$ -Randunbekannte gehört, kann die Kopplungsgleichung dieser Unbekannten zugewiesen werden. Damit gibt es nun zu jeder Unbekannten genau eine Gleichung, so daß ein Gleichungssystem mit quadratischer Systemmatrix entsteht. Die einzelnen Summanden in (3.134) werden wie bei der Aufstellung der Gleichung (3.133) je nach Art des entsprechenden Gebietes (FEM oder BEM) entweder aus (3.14) oder mit Hilfe von (3.117) ermittelt. Für BEM-Gebiete ist hierfür eine numerische Auswertung der in den Gleichungen auftretenden Randintegrale erforderlich. Auf die dazu verwendeten numerischen Algorithmen wird in Anhang B.1 eingegangen.

## 3.5 Numerische Lösung des Eigenwertproblems

### 3.5.1 Beschreibung des Eigenwertproblems

Die Anwendung der in Kap. 3.2.2 beschriebenen FEM und der in Kap. 3.3.7 beschriebenen BEM zur Aufstellung von Teilgleichungssystemen für die einzelnen Gebiete und die Verknüpfung dieser Teilsysteme mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Kopplungsgleichungen zu einem Gesamtsystem ergeben eine Gleichung der Gestalt

$$\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x} = 0. \quad (3.136)$$

Der Vektor  $\vec{x}$  enthält die Unbekannten des Systems, also die Koeffizienten  $\alpha_q$  der FEM-Gebiete, die Ströme  $I_q^{(s)}$ ,  $I_q^{(z)}$  der BEM-Gebiete sowie die Randunbekannten  $\underline{E}_s$  und  $\underline{E}_z$ . Die Koeffizienten der Systemmatrix  $\mathbf{M}(k)$  hängen nichtlinear von der ebenfalls unbekanntem Ausbreitungskonstante  $k$  ab: Bei den Koeffizienten der FEM-Gleichungen besteht eine quadratische Abhängigkeit, während in den BEM-Gleichungen  $k$  im Argument der Besselfunktionen  $K_0$  und  $K_1$  auftritt. Damit stellt (3.136) ein verallgemeinertes, nichtlineares Eigenwertproblem dar. Solange  $\mathbf{M}(k)$  eine reguläre Matrix ist ( $\det \mathbf{M}(k) \neq 0$ ), hat (3.136) nur die triviale Lösung  $\vec{x} = 0$ ; nichttriviale Lösungen gibt es also nur für  $\det \mathbf{M}(k) = 0$ .

Das Auffinden dieser Lösungen wird durch folgende Gegebenheiten erschwert:

- $\mathbf{M}$  besteht aus Blöcken, die schwach (FEM-Gebiete) oder stark (BEM-Gebiete) besetzt sein können.
- $\mathbf{M}$  ist keine Bandmatrix.
- Die Koeffizienten von  $\mathbf{M}$  sind i. allg. komplex.
- $\mathbf{M}$  ist nicht symmetrisch, hermitesch, diagonaldominant oder positiv definit.
- Entspricht  $k$  einer Lösung  $k_s$ , wird  $\mathbf{M}(k)$  singular; je mehr  $k$  sich  $k_s$  nähert, desto mehr nähert  $\mathbf{M}$  sich diesem Zustand.

Diese Gegebenheiten stellen hohe Anforderungen an die Vielseitigkeit und numerische Stabilität des Lösungsverfahrens.

### 3.5.2 Lösung der Gleichung $\det \mathbf{M}(k) = 0$

Die klassische Art, Gleichungen vom Typ (3.136) zu lösen, besteht darin, diejenigen Werte für die Ausbreitungskonstante  $k$  zu ermitteln, für die

$$\det \mathbf{M}(k) = 0 \tag{3.137}$$

gilt. Solange die zu berechnende Anordnung ausschließlich FEM-Gebiete enthält, ist  $\det \mathbf{M}(k)$  ein Polynom in  $k$ , so daß zur Nullstellenbestimmung die hierfür geeigneten Methoden zum Einsatz kommen können. Sobald jedoch ein BEM-Gebiet hinzukommt, wird aus der polynomialen eine transzendente Abhängigkeit von  $k$ . Damit können nur noch Methoden für die Nullstellenbestimmung allgemeiner nichtlinearer Funktionen, wie z. B. das Newton-Verfahren, verwendet werden. Das Hauptproblem hierbei stellen dicht nebeneinander liegende Lösungen oder Mehrfachlösungen (mehrere Moden mit gleicher Ausbreitungskonstante  $k$ ) dar. Allgemeine Verfahren zur Nullstellensuche werden in einem solchen Fall nur eine Lösung finden. Sind die Lösungen

deutlich voneinander getrennt, können sie zwar leichter aufgefunden werden, jedoch ist es auch dann sehr schwierig, die Konvergenz gegen bereits zuvor ermittelte Lösungen zuverlässig zu vermeiden, was die Effizienz des Verfahrens reduziert.

Weiterhin ist die Bestimmung der Ableitung von  $\det \mathbf{M}$  nach  $k$  aufwendig. Wegen

$$\frac{d}{dk} \det \mathbf{M}(k) = \det \mathbf{M}(k) \cdot \text{Sp} \left[ \mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \frac{d}{dk} \mathbf{M}(k) \right] \quad (3.138)$$

erfordert die Berechnung der Ableitung die Berechnung der inversen Matrix und damit die Lösung von  $N$  linearen Gleichungssystemen ( $N = \text{Zeilen- bzw. Spaltenanzahl von } \mathbf{M}$ ). Selbst wenn ausgenutzt wird, daß die Gleichungssysteme sich nur in der rechten Seite unterscheiden (Systemmatrix immer gleich  $\mathbf{M}$ ), z. B. durch Anwendung der  $\mathbf{LU}$ -Zerlegung, benötigt das  $N$ -fache Rückwärtseinsetzen noch einmal etwa den gleichen Aufwand wie die Zerlegung selbst. Dies verringert die Effizienz aller Iterationsverfahren, die mit der ersten Ableitung arbeiten, erheblich.

Um die beschriebenen Nachteile vermeiden zu können, wurde ein alternativer Lösungsansatz entwickelt, der im folgenden dargestellt wird.

### 3.5.3 Lösung durch inverse Iteration

Die Bedingung (3.136) ist äquivalent zur Aussage, daß die Matrix  $\mathbf{M}(k)$  den Eigenwert 0 besitzt. Entspricht also  $k$  einer Lösung  $k_s$ , ist der betragsmäßig kleinste Eigenwert 0, ansonsten ist er ungleich 0. Zur Lösung von (3.136) kann somit auch die Kenntnis des betragsmäßig kleinsten Eigenwerts von  $\mathbf{M}(k)$ ,  $\lambda_{\min}(k)$ , dienen. Die Bestimmung dieses Eigenwerts erfolgt üblicherweise mit Hilfe des Verfahrens der inversen Iteration [9], bei dem eine Folge von Vektoren  $\{\vec{x}_i\}$  durch Wahl eines Startvektors  $\vec{x}_0$  und Anwendung der Regel

$$\vec{x}_{i+1} = \mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_i \quad (3.139)$$

gebildet wird. Besitzt  $\mathbf{M}(k)$  die  $N$  linear unabhängigen Eigenvektoren  $\vec{u}_1(k), \dots, \vec{u}_N(k)$  mit den Eigenwerten  $\lambda_1(k), \dots, \lambda_N(k)$  (die  $k$ -Abhängigkeit dieser Größen wird aus Gründen der Übersichtlichkeit im folgenden nicht mehr erwähnt), lassen sich die  $\vec{x}_i$  als Linearkombination der Eigenvektoren darstellen:

$$\vec{x}_0 = \sum_{n=1}^N a_n \vec{u}_n \quad \Rightarrow \quad (3.140)$$

$$\vec{x}_i = \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\lambda_n^i} \vec{u}_n = \frac{1}{\lambda_1^i} \left[ a_1 \vec{u}_1 + \sum_{n=2}^N \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^i a_n \vec{u}_n \right]. \quad (3.141)$$

Ist  $\lambda_1$  der betragsmäßig kleinste Eigenwert, streben die Terme  $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^i a_n \vec{u}_n$  für  $i \rightarrow \infty$  gegen 0, so daß  $\vec{x}_i$  gegen  $\vec{u}_1$  konvergiert<sup>9</sup> ( $\frac{\vec{x}_i}{|\vec{x}_i|} \rightarrow \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ ). Das Verhältnis eines Koeffizienten von  $\vec{x}_i$  zum entsprechenden Koeffizienten von  $\vec{x}_{i+1}$  konvergiert gegen  $\lambda_1$ . Die Konvergenzgeschwindigkeit und damit die Anzahl der benötigten Iterationen hängt nach (3.141) von den Verhältnissen  $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$  ab. Sind diese Quotienten hinreichend klein, z. B. weil  $\lambda_1$  sehr nahe bei 0 liegt, genügt sogar eine Iteration. Da dies der einzig interessierende Fall ist, und der exakte Wert von  $\lambda_1$  für den Fall, daß  $\lambda_1$  nicht in der Nähe von 0 liegt, unwichtig ist, wird im folgenden das Verfahren der inversen Iteration mit nur einer Iteration betrachtet. Ein solches Verfahren beinhaltet lediglich die Berechnung des Vektors  $\vec{x}_1$  nach Gleichung (3.139). Strebt der betragskleinste Eigenwert  $\lambda_1$  gegen 0, folgt aus (3.141)  $|\vec{x}_1| \rightarrow \infty$  und  $\frac{\vec{x}_1}{|\vec{x}_1|} \rightarrow \frac{\vec{u}_1}{|\vec{u}_1|}$ . Dies bedeutet, daß die Funktion

$$R(k) := \frac{1}{|\vec{x}_1|} = \frac{1}{|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|} \quad (3.142)$$

gegen 0 strebt, wenn sich  $k$  einer Lösung  $k_s$  nähert (siehe z. B. Abb. 3.2 und 3.16). Außerdem konvergiert  $\frac{\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0}{|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|}$  gegen den zugehörigen Lösungsvektor  $\vec{x}_s$ . Die Lösung des Problems (3.136) läßt sich also auf eine Suche der Nullstellen von  $R(k)$  reduzieren.

Damit ist allerdings zunächst noch nicht viel gewonnen, denn die Berechnung eines  $R(k)$ -Wertes erfordert die Lösung des Gleichungssystems  $\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_0$ , was – je nach verwendetem Lösungsverfahren – etwa soviel Rechenzeit wie die Berechnung der Determinante in Anspruch nehmen kann. Der Vorteil besteht jedoch darin, daß die Ableitungen von  $R(k)$  nach Real- und Imaginärteil von  $k$  mit relativ geringem Aufwand bestimmt werden können, was in Kap. 3.5.4 zur Konstruktion eines Verfahrens zur Nullstellensuche genutzt wird. Außerdem können bereits gefundene Lösungen durch geeignete Wahl des Startvektors  $\vec{x}_0$  ausgeblendet werden ( $R(k)$  hat bei dem entsprechenden  $k$ -Wert dann keine Nullstelle mehr), was die Behandlung von Mehrfachlösungen und dicht beieinanderliegenden Lösungen gestattet (Kap. 3.5.5).

Die Lösung der Gleichung  $\mathbf{M}(k) \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_0$  kann im Prinzip mit einem beliebigen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme erfolgen. Allerdings sollte das Verfahren ausnutzen, daß  $\mathbf{M}$  schwach besetzt sein kann, aber keine Bandmatrixstruktur aufweist. Weiterhin ist eine hohe numerische Stabilität des Verfahrens erforderlich, damit die Lösung des Gleichungssystems auch dann noch gelingt, wenn  $\mathbf{M}(k)$  bei Annäherung von  $k$  an eine Lösung  $k_s$  nahezu singular wird (aus numerischen Gründen wird  $\mathbf{M}(k)$  nie exakt singular). Auf ihre Eignung untersucht wurden die iterativen Verfahren GMRES

<sup>9</sup>Gibt es zwei oder mehr Eigenvektoren zum betragsmäßig kleinsten Eigenwert, konvergiert  $\vec{x}_i$  gegen eine Linearkombination dieser Eigenvektoren.

(Generalized Minimal Residual) [10], BiCG (Biconjugate Gradient) [8] und BiCGstab( $N$ ) (BiCG stabilized) [11]. Als Vertreter der direkten Methoden wurde die Sparse-**LU**-Zerlegung von KUNDERT [7] gewählt.

Das BiCGstab( $N$ )-Verfahren nutzt aus, daß beim BiCG-Verfahren Vektoren  $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \dots$  gebildet werden, für die  $\tilde{q}_i = p_i(\mathbf{M}) \cdot \tilde{q}_0$  gilt, wobei  $\mathbf{M}\vec{x} = \vec{b}$  das zu lösende Gleichungssystem darstellt und  $p_i$  ein Polynom vom Grad  $i$  ist, in das die Systemmatrix  $\mathbf{M}$  eingesetzt wird. Der BiCG-Ansatz beruht nun darauf, daß die Residuumvektoren  $\vec{q}_i = \vec{b} - \mathbf{M}\vec{x}_i$  orthogonal zu  $\tilde{q}_j$  mit  $j < i$  und damit orthogonal zu  $\mathbf{M}^j \tilde{q}_0$  mit  $j < i$  sind. Für diese Eigenschaft spielen die Koeffizienten der  $p_i$  jedoch keine Rolle. Beim BiCGstab( $N$ )-Verfahren wird daher für jeweils  $N$  BiCG-Schritte ein optimales Polynom  $p_N$  bestimmt, so daß der Betrag des Residuumvektors minimal wird. Aufgrund dieser Minimierungseigenschaft wird dem Algorithmus in [11] die Vereinigung der Vorteile von GMRES und BiCG unterstellt.

Es zeigte sich, daß der Sparse-**LU**-Algorithmus im Vergleich zu den iterativen Verfahren beim Übergang  $k \rightarrow k_s$  deutlich stabiler bleibt und für jeden beliebigen  $k$ -Wert zuverlässige Ergebnisse liefert, selbst dann, wenn  $|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|$  für  $|\vec{x}_0| = 1$  in der Größenordnung  $10^{16}$  liegt. Der Sparse-**LU**-Algorithmus erwies sich zudem als schneller, da die zeitaufwendige Zeilen- und Spaltensortierung (gewährleistet, daß  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{U}$  möglichst schwach besetzt sind) nur beim ersten  $k$ -Wert erforderlich ist; bei den weiteren  $R(k)$ -Berechnungen wird die Sortierung wiederverwendet, da die Matrixstruktur sich nicht verändert hat. Mit vorgegebener Sortierung kann die Zerlegung dann sehr schnell ausgeführt werden.

### 3.5.4 Berechnung der Nullstellen der Funktion $R(k)$

Für die Nullstellenbestimmung kann in diesem Fall nicht das Newton-Verfahren für komplexwertige Funktionen zum Einsatz kommen, da die Funktion  $R(k)$  nicht holomorph ist (die komplexe Ableitung  $\frac{dR}{dk}$ ,  $k \in \mathbb{C}$ , existiert nicht). Dies ist auf die nichtholomorphe Betragsfunktion in (3.142) zurückzuführen. Aus dem gleichen Grund ist auch das Verfahren von MÜLLER nicht anwendbar. Ein Iterationsverfahren mit ähnlich guten Konvergenzeigenschaften läßt sich jedoch herleiten, indem  $R(k)$  als Funktion der beiden Argumente  $k_r = \Re\{k\}$  und  $k_i = \Im\{k\}$  aufgefaßt wird.

Hierzu ist zunächst die Richtung des stärksten Abstiegs in der  $k_r, k_i$ -Ebene zu bestimmen, die – abgesehen vom Vorzeichen – durch den Gradienten von  $R$  gegeben ist:

$$\text{grad } R(k_r, k_i) = \left( \frac{\partial R}{\partial k_r}, \frac{\partial R}{\partial k_i} \right). \quad (3.143)$$

In der komplexen  $k$ -Ebene entspricht dies der Größe

$$a = \frac{\partial R}{\partial k_r} + j \frac{\partial R}{\partial k_i}. \quad (3.144)$$

Sind die Elemente von  $\mathbf{M}$  holomorphe Funktionen von  $k$  (bei der FEM immer erfüllt, bei der BEM nur für  $\kappa^2 \in \mathbb{R} \wedge \kappa^2 \geq 0$  verletzt), läßt sich der folgende Ausdruck für  $a$  herleiten:

$$a = \frac{\left(\frac{d\mathbf{M}}{dk} \mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right)^+ \left(\mathbf{M}^{+-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right)}{\left|\mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right|^3}. \quad (3.145)$$

Dabei bezeichnet „+“ die transjungierte Matrix (transponiert und konjugiert komplex).

Nun wird die Funktion

$$f(x) = R(k + ax) = R(\Re k + x \cdot \Re a, \Im k + x \cdot \Im a), \quad x \in \mathbb{R} \quad (3.146)$$

definiert und das Newton-Verfahren am Punkt  $x = 0$  angewendet ( $\frac{df}{dx}$  existiert, da  $\frac{\partial R}{\partial k_r}$  und  $\frac{\partial R}{\partial k_i}$  existieren). Dies bedeutet, daß  $R(k)$  als Funktion über der zweidimensionalen  $k_r, k_i$ -Ebene aufgefaßt wird und der Schnittpunkt einer in Richtung des stärksten Abstiegs verlaufenden Tangente von  $R(k_r, k_i)$  mit der  $k_r, k_i$ -Ebene ermittelt wird. Das hier entwickelte Verfahren stellt also eine Kombination aus der Methode des stärksten Abstiegs und dem Newton-Verfahren dar. Diese Vorgehensweise führt auf die folgende Iterationsvorschrift:

$$k_{n+1} = k_n - \frac{\left|\mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right|^2}{\left(\mathbf{M}^{+-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right)^+ \left(\frac{d\mathbf{M}}{dk} \mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0\right)} \Bigg|_{k=k_n}. \quad (3.147)$$

Dieses Verfahren weist sehr gute Konvergenzeigenschaften auf: In einer Umgebung der Nullstelle ( $R(k_n) \ll 1$ ) gilt  $R(k_{n+1}) \approx R^2(k_n)$  (quadratische Konvergenz). Daher werden zur Bestimmung sehr genauer  $k$ -Werte nur wenige Iterationen benötigt (typischerweise zwischen drei und sieben, je nach Güte des Startwerts).

Der rechnerische Aufwand der Anwendung von (3.147) hält sich in Grenzen, da  $\mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0$  ohnehin zur Bestimmung von  $R(k)$  berechnet werden muß. Die Auswertung des Terms  $\mathbf{M}^{+-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0$  erfordert die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit  $\mathbf{M}^+$  als Systemmatrix. Da bei Anwendung des Sparse-**LU**-Algorithmus  $\mathbf{M}$  bereits zerlegt vorliegt ( $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ ), ist auch die Zerlegung von  $\mathbf{M}^+$  bekannt ( $\mathbf{M}^+ = \mathbf{U}^+ \mathbf{L}^+$ ), so daß dieses Gleichungssystem durch einfaches Rückwärtseinsetzen sehr schnell gelöst werden kann.

Hat das Verfahren gegen eine Lösung  $k_s$  konvergiert, liegt somit auch der zugehörige Lösungsvektor  $\vec{x}_s = \frac{\mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0}{|\mathbf{M}^{-1} \vec{x}_0|}$  unmittelbar vor.

Problematisch wird das oben beschriebene Verfahren, wenn  $R(k)$  am Ort der Lösung aus numerischen Gründen nicht nahe genug an 0 herankommt (wegen  $R(k) \geq 0$  sind die Nullstellen keine Nulldurchgänge, sondern Minima). Dies wurde bei Verwendung der BEM ohne Kombination mit der FEM beobachtet. Die in der Nähe dieser Minima angelegten Tangenten verlaufen nahezu waagrecht, so daß es durch den Iterationsschritt zu einer Verschlechterung der Lösung kommt ( $R(k_{n+1}) > R(k_n)$ ). In einem solchen Fall wird der Abstand  $k_{n+1} - k_n$  solange halbiert, bis  $R(k_{n+1}) < R(k_n)$  gilt. Der so entstandene Vorfaktor  $1/2^i$  wird dann auch auf alle nachfolgenden Iterationsschritte angewendet und ggf. weiter halbiert. Durch diese Maßnahmen konvergiert das Verfahren auch in kritischen Fällen. Die guten Konvergenzeigenschaften gehen dabei allerdings verloren.

### 3.5.5 Elimination von Lösungen

Eines der größten Probleme bei der iterativen Bestimmung von Nullstellen sind dicht beieinanderliegende Lösungen oder Mehrfachlösungen. Benachbarte Lösungen lassen sich evtl. durch unterschiedliche Startwerte berechnen, was allerdings hohe Anforderungen an die Genauigkeit dieser Startwerte stellt. Für Mehrfachlösungen ist diese Methode nicht von Nutzen. Auf Basis des in Kap. 3.5.3 vorgestellten Ansatzes läßt sich jedoch ein recht elegantes Verfahren entwickeln, das im folgenden vorgestellt wird.

In Gleichung (3.141) ist für  $\lambda_1 \rightarrow 0$  und  $i = 1$  der dominierende Term  $\frac{a_1 \vec{u}_1}{\lambda_1}$ . Dieser Term sorgt dafür, daß  $R(k)$  bei dem  $k$ -Wert, für den  $\lambda_1 = 0$  wird, eine Nullstelle hat ( $\left| \frac{a_1 \vec{u}_1}{\lambda_1} \right| \rightarrow \infty \Rightarrow |\vec{x}_1| \rightarrow \infty \Rightarrow R(k) \rightarrow 0$ ). Die Idee ist nun, nach Berechnung der Lösung den Startvektor  $\vec{x}_0$  so zu wählen, daß  $a_1 = 0$  wird, und somit die betreffende Nullstelle für folgende Berechnungen aus dem Verlauf von  $R(k)$  zu eliminieren. Hierfür müssen zunächst die durch Gleichung (3.140) definierten  $a_i$  berechnet werden, was die Kenntnis der Eigenvektoren  $\vec{v}_i$  der Matrix  $\mathbf{M}^+$  erforderlich macht. Bei geeigneter Normierung gilt

$$\mathbf{M} \vec{u}_i = \lambda_i \vec{u}_i, \quad (3.148)$$

$$\mathbf{M}^+ \vec{v}_i = \lambda_i^* \vec{v}_i, \quad (3.149)$$

$$\vec{v}_i^* \vec{u}_j = \delta_{ij}, \quad (3.150)$$

d. h. Eigenvektoren von  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{M}^+$ , die zu nicht korrespondierenden (zueinander konjugiert-komplexen) Eigenwerten gehören, sind zueinander orthogonal (Biorthogonalität). Damit läßt sich  $a_i$  bestimmen, indem (3.140) von links mit  $\vec{v}_i^*$  multipliziert wird:

$$\vec{v}_i^* \vec{x}_0 = \sum_{n=1}^N a_n \vec{v}_i^* \vec{u}_n = a_i. \quad (3.151)$$

Der dominierende Term lautet demnach  $\frac{\vec{v}_1^* \vec{x}_0}{\lambda_1} \vec{u}_1$ , wobei  $\lambda_1$ ,  $\vec{u}_1$  und  $\vec{v}_1$  Funktionen von  $k$  sind. Wird  $\vec{x}_0$  nun so gewählt, daß  $\vec{v}_1^*(k_s) \cdot \vec{x}_0 = 0$  ist, strebt der dominierende Term für  $k \rightarrow k_s$  gegen einen unbestimmten Ausdruck der Form  $\frac{0}{0}$ , was die Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL erlaubt:

$$\lim_{k \rightarrow k_s} \frac{\vec{v}_1^* \vec{x}_0}{\lambda_1} \vec{u}_1 = \lim_{k \rightarrow k_s} \frac{\frac{d\vec{v}_1^* \vec{x}_0}{dk}}{\frac{d\lambda_1}{dk}} \vec{u}_1. \quad (3.152)$$

Es gilt

$$\lambda_1 = \frac{\vec{v}_1^* \cdot \mathbf{M} \vec{u}_1}{\vec{v}_1^* \vec{u}_1} \stackrel{(3.150)}{=} \vec{v}_1^* \cdot \mathbf{M} \vec{u}_1 \Rightarrow \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dk} &= \frac{d\vec{v}_1^*}{dk} \cdot \mathbf{M} \vec{u}_1 + \vec{v}_1^* \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dk} \vec{u}_1 + \vec{v}_1^* \cdot \mathbf{M} \frac{d\vec{u}_1}{dk} \\ &= \vec{v}_1^* \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dk} \vec{u}_1 + \lambda_1 \frac{d}{dk} (\vec{v}_1^* \vec{u}_1) = \vec{v}_1^* \cdot \frac{d\mathbf{M}}{dk} \vec{u}_1. \end{aligned} \quad (3.154)$$

Im Gegensatz zu  $\mathbf{M} \vec{u}_1$  wird  $\frac{d\mathbf{M}}{dk} \vec{u}_1$  für  $k \rightarrow k_s$  i. allg. nicht gegen den Nullvektor konvergieren, so daß  $\frac{d\lambda_1}{dk}(k_s)$  ungleich 0 ist. Daraus folgt über Gleichung (3.152), daß  $\frac{\vec{v}_1^* \vec{x}_0}{\lambda_1}$  nicht mehr divergiert, so daß  $R(k)$  bei dieser speziellen Wahl von  $\vec{x}_0$  keine Nullstelle bei  $k_s$  hat.

Die Anwendung dieser Technik läuft dann folgendermaßen ab: Zunächst wird ein zufälliger Startvektor  $\vec{x}_0$  gewählt und damit eine erste Nullstelle  $k_s^{(1)}$  bestimmt. Anschließend wird ein modifizierter Startvektor  $\vec{x}'_0$  berechnet, der die Bedingung  $\vec{v}_1^*(k_s^{(1)}) \cdot \vec{x}'_0 = 0$  erfüllt, der also orthogonal zu  $\vec{v}_1(k_s^{(1)})$  ist:

$$\vec{x}'_0 = \vec{x}_0 - \frac{\vec{v}_1^*(k_s^{(1)}) \cdot \vec{x}_0}{|\vec{v}_1(k_s^{(1)})|^2} \vec{v}_1(k_s^{(1)}). \quad (3.155)$$

Die Anwendung dieser Gleichung erfordert noch die Berechnung des Eigenvektors  $\vec{v}_1(k_s^{(1)})$  zum betragskleinsten Eigenwert  $\lambda_1^*(k_s^{(1)}) = 0$  von  $\mathbf{M}^+$ . Analog zur Konvergenz von  $\frac{\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0}{|\mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0|}$  gegen  $\frac{\vec{u}_1(k_s^{(1)})}{|\vec{u}_1(k_s^{(1)})|}$  für  $k \rightarrow k_s^{(1)}$  strebt  $\frac{\mathbf{M}^{+-1}(k) \cdot \vec{x}_0}{|\mathbf{M}^{+-1}(k) \cdot \vec{x}_0|}$  gegen  $\frac{\vec{v}_1(k_s^{(1)})}{|\vec{v}_1(k_s^{(1)})|}$ , was sich zur Bestimmung des fraglichen Eigenvektors nutzen läßt. In der Praxis wird dieser Grenzwert ermittelt, indem einfach  $k_s^{(1)}$  für  $k$  eingesetzt wird; der Term  $\frac{\mathbf{M}^{+-1}(k_s^{(1)}) \cdot \vec{x}_0}{|\mathbf{M}^{+-1}(k_s^{(1)}) \cdot \vec{x}_0|}$  existiert zwar nicht im mathematischen Sinn, da  $\mathbf{M}^+(k_s^{(1)})$  theoretisch singular ist, numerisch betrachtet ist diese Matrix jedoch nur fast singular, so daß der sehr stabile Sparse-**LU**-Algorithmus den Term direkt auswerten kann. Hierfür wird allerdings keine neue **LU**-Zerlegung durchgeführt, sondern die noch im Speicher vorhandene Zerlegung von  $\mathbf{M}(k_s^{(1)})$  (die für die  $R(k)$ -Berechnung benötigt wurde) genutzt.

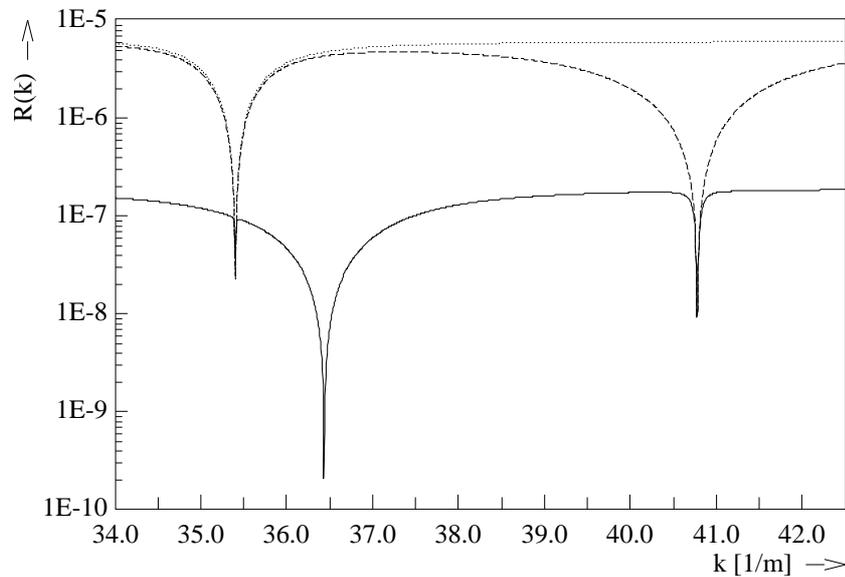


Abbildung 3.19: Elimination von Nullstellen für eine Dreileiter-Anordnung

Mit dem modifizierten Startvektor  $\vec{x}'_0$  wird dann die nächste Nullstelle  $k_s^{(2)}$  ermittelt. Dabei kann der gleiche  $k$ -Startwert wie für  $k_s^{(1)}$  verwendet werden. Dann wird ein weiterer Startvektor  $\vec{x}''_0$  bestimmt, der orthogonal zu  $\vec{v}_1(k_s^{(1)})$  und  $\vec{v}_1(k_s^{(2)})$  ist. Dies wird fortgesetzt, bis die gewünschte Anzahl von Lösungen vorliegt. Theoretisch kann ein Startvektor orthogonal zu  $N - 1$  Eigenvektoren sein ( $N = \text{Anzahl der Unbekannten}$ ); in der Praxis wird der Anwender deutlich weniger als  $N - 1$  Moden berechnen wollen, so daß diese Grenze nicht erreicht wird.

In Abb. 3.19 ist der  $R(k)$ -Verlauf bei Berechnung einer Dreileiter-Microstrip-Anordnung mit FEM (Substrat) und BEM (Umgebung) zu sehen. Mit dem ersten Startvektor (durchgezogene Linie) sind drei Nullstellen bei  $k = 35.4 \text{ m}^{-1}$ ,  $k = 36.4 \text{ m}^{-1}$  und  $k = 40.8 \text{ m}^{-1}$  zu erkennen, wobei zwei dieser Nullstellen sehr schmale Minima darstellen, deren Entdeckung durch ein iteratives Lösungsverfahren relativ unwahrscheinlich ist<sup>10</sup>. Die gestrichelte Linie stellt den  $R(k)$ -Verlauf nach Elimination der Nullstelle bei  $k_s^{(1)} = 36.4 \text{ m}^{-1}$  dar. Die beiden verbleibenden Minima haben sich durch die Elimination verbreitert, so daß die zugehörigen Nullstellen jetzt wesentlich leichter bestimmt werden können. Die gepunktete Linie entspricht dem Verlauf mit zusätzlich eliminiertes Nullstelle  $k_s^{(2)} = 40.8 \text{ m}^{-1}$ .

Abb. 3.20 zeigt  $R(k)$  (durchgezogene Linie) für eine FEM-Berechnung ei-

<sup>10</sup>Die Minima erreichen hier wegen der logarithmischen Darstellung und wegen der Abtastung der Funktion mit endlich vielen Stützstellen nicht den Wert 0. Die iterative Nullstellenberechnung liefert  $R(k)$ -Werte in der Größenordnung  $10^{-15}$ .

ner Anordnung mit einer Doppellösung (leitender Kasten mit homogenem Dielektrikum und zwei Streifenleitern). Nach einmaliger Elimination der Lösung bei  $k_s^{(1)} = 45.9 \text{ m}^{-1}$  entsteht der gestrichelte Verlauf. Die Nullstelle ist immer noch sichtbar, was auch erwünscht ist, da beide Lösungen berechnet werden sollen. Der gepunktete Verlauf stellt das Ergebnis der zweiten Elimination dar ( $k_s^{(2)} = k_s^{(1)}$ ); wie erwartet ist die Nullstelle nun verschwunden. Die berechneten Vektoren  $\vec{u}_1(k_s^{(1)})$  und  $\vec{u}_1(k_s^{(2)})$  sind linear unabhängig, spannen also den Lösungsraum der Nullstelle auf. Da  $\vec{x}'_0$  orthogonal zu  $\vec{v}_1(k_s^{(1)})$  ist, kann beim zweiten Durchgang nicht der gleiche Eigenvektor herauskommen.

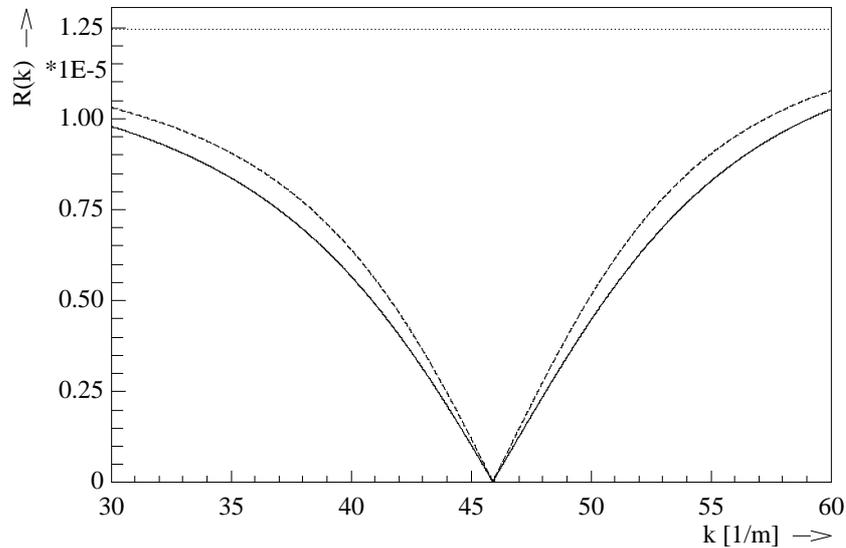


Abbildung 3.20: Elimination einer doppelten Nullstelle bei einer Zweileiter-Anordnung im homogenen Dielektrikum

## 3.6 Adaptive Verbesserung der Diskretisierung

### 3.6.1 Auswahl eines Fehlerkriteriums

Um die Anforderungen an die Angaben des Anwenders zur ortsabhängigen Kantenlänge der Diskretisierung (Funktion  $d(x, y)$  aus Kap. 3.2.3) möglichst gering zu halten, ist es erforderlich, daß das Berechnungsverfahren die Diskretisierung selbständig an die Lösungen der Feldgleichungen anpaßt. Wie bereits in Kap. 3.2.3 begründet, wird hierfür in dieser Arbeit eine Adaptive-Remeshing-Prozedur (komplette Neuberechnung der Diskretisierung nach jedem Durchgang) anstelle einer Adaptive-Refinement-Prozedur (Unterteilung bestehender Elemente in kleinere Elemente, in der Regel ohne Verschiebung

bereits vorhandener Knoten) vorgeschlagen. Dazu muß nach jeder Feldberechnung eine neue Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  festgelegt werden, die an Orten mit großen Berechnungsfehlern kleine Kantenlängen liefert und umgekehrt. Hierfür ist ein Fehlerkriterium notwendig, das einfach zu berechnen ist und ein möglichst gutes Maß für den lokalen Berechnungsfehler darstellt.

Zur Auswahl stehen empirisch gewonnene Kriterien und solche, die mathematisch beweisbare Fehlerschranken liefern. Kriterien des letzteren Typs können selbst für einfache DGL wie beispielsweise die Laplace-Gleichung nur mit hohem mathematischen Aufwand konstruiert werden (siehe z.B. [34]) und sind daher weder für die DGL (2.23) in Verbindung mit edge elements noch für die BEM-Variante aus Kap. 3.3.7, die ein neues Verfahren darstellt, verfügbar. Aus diesem Grund kommt in dieser Arbeit ein empirisches Kriterium zum Einsatz.

Die im Fall der FEM verwendeten Ansatzfunktionen (3.10) erlauben keine vollständige Modellierung stückweise linearer Funktionen, da die Tangentialkomponenten dieser Vektorfunktionen konstant entlang der zugehörigen Elementkanten sind. Dies legt die Vermutung nahe, daß die Beträge der Gradienten der  $\vec{E}$ -Feldkomponenten ein geeignetes Maß für den lokalen Approximationsfehler darstellen. Daher wird als FEM-Verfeinerungskriterium der Parameter

$$m_{\text{FEM}} = \sqrt{|\vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_x|^2 + |\vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_y|^2 + |\vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_z|^2} \quad (3.156)$$

definiert. Im Fall der BEM ist es dagegen sinnvoller, die Tangentialableitung der virtuellen Oberflächenströme  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  längs des Randes als Fehlerkriterium heranzuziehen:

$$m_{\text{BEM}} = \sqrt{\left| \frac{\partial}{\partial s} \underline{K}_s \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial s} \underline{K}_z \right|^2}. \quad (3.157)$$

Bei der Bestimmung der Tangentialableitungen ist zu beachten, daß  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  nach (3.114) und (3.115) Linearkombinationen von Delta-Funktionen sind. Um sinnvolle Werte zu erhalten, wird daher jede  $\underline{K}_z$ -Deltafunktion (entsprechen den Stromfäden an Elementberührungspunkten) durch eine lineare Ansatzfunktion gleicher Fläche, die sich über die beiden benachbarten Randelemente erstreckt, ersetzt, während jede  $\underline{K}_s$ -Deltafunktion (entsprechen den Stromfäden an Elementmittelpunkten) durch eine quadratische Ansatzfunktion ersetzt wird, die sich über das betreffende Randelement und die beiden benachbarten Elemente erstreckt.

Die gewählten Kriterien lassen sich sehr schnell berechnen und sind dazu geeignet, die für eine Diskretisierung kritischen Gebiete zu identifizieren. Kritische Gebiete sind beispielsweise die Umgebung von Kanten idealer oder guter Leiter und der unter einem Mikrostreifen befindliche Teil der Massefläche.

### 3.6.2 Berechnung von $d(x, y)$

Aus den in Kap. 3.6.1 definierten Fehlerkriterien ist nun eine adaptierte Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  zu gewinnen. Dazu wird für FEM-Gebiete die Festlegung

$$d(x, y) \sim m_{\text{FEM}}^{-\nu} \quad (3.158)$$

mit einer noch zu definierenden Proportionalitätskonstante getroffen. Der Parameter  $\nu$  legt fest, in welchem Maß die Dichte der FEM-Knoten in Gebieten mit hohem  $\vec{E}$ -Feldgradienten ansteigt. Je größer  $\nu$ , desto größer ist der Unterschied der Knotendichte zwischen Gebieten mit hohem und niedrigem Feldgradienten.

Im Fall der in dieser Arbeit betrachteten Anordnungen sind die Gebiete mit erhöhtem Feldgradienten in der Regel die Umgebungen von Leiterkanten mit den entsprechenden Feldsingularitäten. Bei rechteckigen Leitern beispielsweise hat die Singularität des  $\vec{E}$ -Feldes im quasi-statischen Fall die Gestalt  $r^{-1/3}$ , wobei  $r$  der Abstand von der Kante ist, so daß sich näherungsweise  $m_{\text{FEM}} \sim r^{-4/3}$  und damit  $d(x, y) \sim r^{4\nu/3}$  ergibt. Für Werte  $\nu \geq 3/4$  führt dies theoretisch auf eine unendliche Anzahl von Dreiecken in einer Umgebung der Singularität. In der Praxis bleibt der vorgestellte Netzgenerator zwar trotz dieser unerfüllbaren Forderung stabil, plazierte aber die meisten der zur Verfügung stehenden Knoten in der unmittelbaren Nähe der Singularität, so daß die übrigen Bereiche zu schwach diskretisiert werden. Im Fall rechteckiger Leiter hat sich experimentell der Wert  $\nu = 5/8$  als gut geeignet herausgestellt.

Für BEM-Gebiete wird  $d$  gemäß

$$d(x, y) \sim \left( m_{\text{BEM}} \cdot \frac{\oint |\vec{E}| ds}{\oint \sqrt{|\underline{K}_s|^2 + |\underline{K}_z|^2} ds} \right)^{-\nu} \quad (3.159)$$

bestimmt, wobei sich die Randintegrale über den Rand des betreffenden BEM-Gebietes erstrecken. Die Aufgabe des Randintegralquotienten ist es, den Wertebereich der von Gleichung (3.159) geforderten Elementkantenlängen demjenigen des FEM-Kriteriums (3.158) anzugleichen, damit an den Grenzen zwischen FEM- und BEM-Gebieten keine widersprüchlichen Forderungen an den Netzgenerator gestellt werden.

Für die Wahl des Parameters  $\nu$  gilt das vorstehend gesagte, da sich im Quasi-TEM-Fall  $|\underline{K}_z|$  in der Nähe von Singularitäten asymptotisch wie  $|\vec{E}|$  verhält, während  $|\underline{K}_s|$  gegen 0 geht. Auch hier wird bei rechteckigen Leitern die Anzahl der Randelemente für  $\nu \geq 3/4$  in einer Umgebung der Singularität theoretisch unendlich groß.

Die so erhaltene Funktion  $d(x, y)$  muß nun noch skaliert werden (Festlegung der Proportionalitätskonstante), damit die Knotenanzahl des resultierenden Netzes im gewünschten Bereich liegt (z. B. Knotenanzahl des vorhergehenden Netzes multipliziert mit einem festen Steigerungsfaktor). Sie muß

außerdem geglättet werden, um evtl. vorhandene hohe Gradienten von  $d$  (siehe Kap. 3.2.3) abzuschwächen. Dazu ist es erforderlich, die Werte von  $d$  an bestimmten Stützstellen in einer hierfür geeigneten Datenstruktur abzulegen. Folgende Vorgehensweise wurde implementiert:

1. Den Schwerpunkten aller FEM-Elementdreiecke wird das mittlere  $m_{\text{FEM}}$  des jeweiligen Dreiecks zugeordnet.
2. Den Mittelpunkten aller BEM-Randelemente wird das mittlere  $m_{\text{BEM}}$  des jeweiligen Randelementes zugeordnet.
3. Aus den berechneten  $m$ -Werten werden vorläufige  $d$ -Werte bestimmt, indem (3.158) und (3.159) mit Proportionalitätskonstante 1 angewendet werden.
4. Es wird die Delaunay-Triangulierung aller Dreiecksschwerpunkte und Randelementmittelpunkte ermittelt. Für jeden Knoten dieser Triangulierung gibt es einen  $d$ -Wert. Innerhalb der Dreiecke der Triangulierung wird zwischen diesen Stützstellen linear interpoliert. Dies führt zu einer stetigen Funktion  $d(x, y)$ . Die Stetigkeit wird von dem in Kap. 3.2.3 beschriebenen Netzgenerator benötigt.
5. Um  $d$  auf die gewünschte Knotenanzahl skalieren zu können, muß zunächst abgeschätzt werden, welche Knotenanzahl das unskalierte  $d$  liefern würde. Für BEM-Gebiete ergibt sich die Anzahl der Randknoten mit Hilfe von Gleichung (3.15). Für FEM-Gebiete läßt sich die Knotenanzahl durch den Ausdruck

$$N_n = \iint_A \frac{a}{d^2(x, y)} \, dA \quad (3.160)$$

abschätzen, wobei die Proportionalitätskonstante  $a$  von der Gestalt der Dreiecke abhängt (für gleichseitige Dreiecke wäre  $a = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1.155$ ). Für den hier verwendeten Netzgenerator wurde empirisch  $a = 1.4$  ermittelt.

6. Schließlich wird das skalierte  $d$  so geglättet, daß überall (auch dort, wo zwei Gebiete aneinanderstoßen)  $|\text{grad } d| < 0.6$  gilt (siehe Kap. 3.2.3).

### 3.6.3 Ablauf der adaptiven Netzgenerierung

Der in Kap. 3.5.5 beschriebene Orthogonalisierungstrick zur Elimination von Nullstellen funktioniert nur, wenn alle beteiligten Moden mit der gleichen Diskretisierung berechnet werden, damit alle Lösungsvektoren die gleiche Dimension und Unbekanntenreihenfolge haben. Daher ist es nicht möglich, für jede einzelne Lösung die jeweils optimale Diskretisierung zu bestimmen, da dann nicht ausgeschlossen werden kann, auf eine bereits berechnete Lösung zu

stoßen. Dies ist besonders bei Mehrfachlösungen von Nachteil, da sich dort die Feldverteilungen der einzelnen Lösungen erheblich voneinander unterscheiden (z. B. Even- und Odd-Mode bei Zweileiter-Systemen). Dieses Problem ist nicht spezifisch für das in dieser Arbeit beschriebene Berechnungsverfahren, sondern ist allgemeiner Natur, würde also auch auftreten, wenn anstelle einer Gleichung der Form (3.136) ein gewöhnliches Eigenwertproblem zu lösen wäre.

Da die Orthogonalisierung auf jeden Fall beibehalten werden muß, kann hier nur der folgende Weg beschritten werden:

1. Berechnung aller beteiligten Moden mit der Startdiskretisierung,
2. Berechnung von Vorschlägen für das neue  $d$  auf Basis jeweils eines Moden, Mittelung über alle Vorschläge und Generierung einer entsprechenden Diskretisierung, ggf. mit höherer Knotenanzahl,
3. erneute Berechnung aller Moden mit der verbesserten Diskretisierung,
4. Wiederholung der Schritte 2 und 3, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Trotz der Mittelung über alle Lösungen ist es mit dieser Vorgehensweise möglich, ausgehend von einer Startdiskretisierung mit relativ wenigen, gleichverteilten Knoten zu genauen Berechnungsergebnissen zu gelangen. Die in Kap. 4 dokumentierten Ergebnisse sind auf diese Weise entstanden. Das angestrebte Hauptziel der adaptiven Netzgenerierung, die Reduktion der Anforderungen an die Startdiskretisierung, konnte somit erreicht werden. Das Optimum hinsichtlich der Effizienz der Berechnung wird hierdurch allerdings nicht erzielt.

### 3.7 Berechnung von Leitungsparametern

Bei den bisherigen Betrachtungen lag das Augenmerk auf der Ermittlung der elektromagnetischen Feldverteilung und der Ausbreitungskonstante der Wellenformen (Moden), die sich auf einem gegebenen Leitungssystem ausbreiten. Bei der Charakterisierung von Leitungssystemen, die Teil eines elektronischen Schaltkreises (z. B. Leiterplatte oder IC) sind, gilt das Interesse jedoch in der Regel weniger feldtheoretischen Aussagen, sondern leitungstheoretischen, *integralen* Kenngrößen wie z. B. Wellenwiderstände oder Kapazitäts- und Induktivitätsbeläge. Solche Größen lassen sich nur im Fall einer TEM-Wellenausbreitung ( $\underline{E}_z = 0$ ,  $\underline{H}_z = 0$ ) eindeutig definieren. Für eine TEM-Wellenausbreitung müssen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

1. isotropes, homogenes Dielektrikum ( $\Rightarrow$  keine dielektrischen Grenzflächen) mit  $\omega^2 \varepsilon \mu = k^2$ ,

2. ideale Leiter,
3. mindestens ein weiterer Leiter neben dem Referenzleiter.

Sind die Bedingungen 1 und 2 verletzt, was in der Regel der Fall ist, kommt es zur Ausbreitung von *Quasi-TEM-Moden*, die dadurch charakterisiert sind, daß die Komponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  klein gegenüber den übrigen Komponenten sind. Diese Ähnlichkeit zu TEM-Moden wird mit zunehmender Verletzung der Bedingungen 1 und 2 sowie mit zunehmender Frequenz geringer.

Im TEM-Fall kann das elektrische Feld als Gradient eines skalaren, elektrischen Potentials  $\underline{\phi}$  dargestellt werden:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}^{(t)} \underline{\phi}(x, y). \quad (3.161)$$

Im Quasi-TEM-Fall gelten (3.161) und die daraus im folgenden abgeleiteten Beziehungen nur näherungsweise.

Existiert ein elektrisches Potential, läßt sich ein bidirektionales Leitungssystem durch die sogenannte *Telegraphengleichung* beschreiben. Nach einer Fouriertransformation bezüglich  $t$  und  $z$  (siehe Gleichungen (2.5)–(2.6)) nimmt diese Gleichung die folgende Gestalt an:

$$-jk\vec{U} + \mathbf{Z}\vec{I} = 0, \quad (3.162)$$

$$-jk\vec{I} + \mathbf{Y}\vec{U} = 0. \quad (3.163)$$

Dabei enthält der Vektor  $\vec{I}$  die auf den  $N_c$  Leitungen des Systems fließenden Ströme. Die Komponenten von  $\vec{U}$  stellen die Potentialdifferenzen der Leitungen gegenüber einem zusätzlichen Referenzleiter dar, der nicht zu den  $N_c$  Leitungen gehört und bei geschirmten Anordnungen durch die Schirmung gegeben ist. Die Matrizen  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{Y}$  sind die komplexen Impedanz- und Admittanzmatrizen. Sie werden gemäß

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}, \quad (3.164)$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C} \quad (3.165)$$

in die reellen Leitungsparametermatrizen  $\mathbf{R}$  (Matrix der Widerstandsbeläge),  $\mathbf{G}$  (Matrix der Leitwertbeläge),  $\mathbf{L}$  (Matrix der Induktivitätsbeläge) und  $\mathbf{C}$  (Matrix der Kapazitätsbeläge) zerlegt.

Zur Bestimmung der Leitungsparametermatrizen werden Größen ausgewählt, die zum einen in den Gleichungen (3.162) und (3.163) vorkommen oder aus den darin enthaltenen Größen bestimmt werden können, und die zum anderen aus den Feldverteilungen der (Quasi-)TEM-Moden extrahiert werden können. Beim *UI-Modell* beispielsweise werden die Vektoren  $\vec{U}$  und  $\vec{I}$  für jede der  $N_c$  (Quasi-)TEM-Feldverteilungen ermittelt. Mit Hilfe der Gleichungen (3.162) und (3.163) lassen sich aus diesen Informationen  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{Y}$

berechnen. Die Bestimmung des Stromes auf der Leitung  $n$  aus der Feldverteilung erfolgt über die Beziehung

$$\underline{I}_n = \oint_{C_n} \underline{H}_s \, ds, \quad (3.166)$$

wobei  $C_n$  die Randkurve des Querschnitts der Leitung  $n$  darstellt.  $\underline{H}_s$  ist die bezüglich der Randkurve  $C_n$  tangentielle Komponente des magnetischen Feldes. Die Potentialdifferenz zwischen der Leitung  $n$  und dem Referenzpotential wird mittels

$$\underline{U}_n = - \int_{C_{0n}} \underline{E}_s \, ds \quad (3.167)$$

berechnet, wobei  $C_{0n}$  einem Integrationsweg vom Referenzleiter zum Leiter  $n$  entspricht. Im TEM-Fall ist das Integral in (3.167) wegen Gleichung (3.161) unabhängig von der Wahl des Integrationsweges, solange dieser innerhalb einer Querschnittsebene des Leitungssystems liegt. Ist der TEM-Fall jedoch nur näherungsweise gegeben (Quasi-TEM-Fall:  $\underline{E}_z, \underline{H}_z$  klein, aber nicht 0), wie bei allen Anordnungen, die mehr als ein Dielektrikum enthalten, liefert das Integral in (3.167) für jeden Integrationsweg einen anderen Wert, so daß sich die Frage nach der geeigneten Wahl dieses Weges stellt. Um dieses Problem zu umgehen, wird häufig auf das *PI*-Modell zurückgegriffen. Bei diesem Modell werden außer den Strömen aus Gleichung (3.166) die Leistungsterme

$$P_{ij} = \frac{1}{2} \iint_A \underline{e}_z \left( \underline{\vec{E}}^{(i)} \times \underline{\vec{H}}^{(j)*} \right) \, dA \quad (3.168)$$

aus den Feldverteilungen ermittelt. Das Integrationsgebiet  $A$  erstreckt sich dabei über den gesamten Querschnitt des Leitungssystems. Die Indizes  $i$  und  $j$  laufen von 1 bis  $N_c$  und bezeichnen die Nummern von (Quasi-)TEM-Moden. Für  $i = j$  stellt  $P_{ij}$  das Integral über die axiale Komponente des komplexen Poynting-Vektors des Modes mit der Nummer  $i$  dar; für  $i \neq j$  wird  $P_{ij}$  als *Kreuzleistungsterm* bezeichnet.

Im TEM-Fall gilt

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{1}{2} \iint_{A'} \left[ \underline{e}_z \left( \underline{\vec{E}}^{(i)} \times \underline{\vec{H}}^{(j)*} \right) - \underline{\phi}^{(i)} \left( \underbrace{\underline{e}_z \cdot j\omega\varepsilon \underline{\vec{E}}^{(j)}}_{=0} \right)^* \right] \, dA \\ &\stackrel{(3.161)}{=} -\frac{1}{2} \iint_{A'} \left[ \left( \underline{\vec{\nabla}}^{(t)} \underline{\phi}^{(i)} \right) \left( \underline{\vec{H}}^{(j)*} \times \underline{e}_z \right) + \underline{\phi}^{(i)} \underline{\vec{\nabla}}^{(t)} \left( \underline{\vec{H}}^{(j)*} \times \underline{e}_z \right) \right] \, dA \\ &= -\frac{1}{2} \iint_{A'} \underline{\vec{\nabla}}^{(t)} \left[ \underline{\phi}^{(i)} \left( \underline{\vec{H}}^{(j)*} \times \underline{e}_z \right) \right] \, dA \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial A'} \underline{\vec{n}} \cdot \underline{\phi}^{(i)} \left( \underline{\vec{H}}^{(j)*} \times \underline{e}_z \right) \, ds \\ &= -\frac{1}{2} \oint_{\partial A'} \underline{\phi}^{(i)} \cdot \underline{H}_s^{(j)*} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \oint_{\partial A'} \left( \underline{\phi}^{(i)} - \underline{\phi}_0^{(i)} \right) \cdot \underline{H}_s^{(j)*} ds - \frac{1}{2} \underline{\phi}_0^{(i)} \underbrace{\oint_{\partial A'} \underline{H}_s^{(j)*} ds}_{=0} \\
&\stackrel{(3.166)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_c} \underline{U}_n^{(i)} \underline{I}_n^{(j)*}. \tag{3.169}
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\underline{\phi}^{(i)}$  die Potentialverteilung zum Mode mit der Nummer  $i$  und  $\underline{\phi}_0^{(i)}$  das zugehörige Potential des Referenzleiters.  $\underline{U}_n^{(i)}$  stellt die Potentialdifferenz des Leiters  $n$  zum Referenzleiter dar. Das Integrationsgebiet  $A'$  entspricht dem Querschnitt des Leitungssystems abzüglich der idealen Leiter, die eine Voraussetzung für den TEM-Fall sind. Der Rand von  $A'$  kann auch im Unendlichen liegen. In diesem Fall müssen entsprechende Abstrahlungsbedingungen gefordert werden, damit das Integral über den äußeren Rand verschwindet.

Die Gleichungen (3.168) und (3.169) zeigen, daß die  $P_{ij}$ -Terme sowohl aus der Feldverteilung als auch aus den Spannungen und Strömen bestimmt werden können. Durch Berechnung der  $P_{ij}$  aus den Feldverteilungen mit Gleichung (3.168) und Anwendung von (3.166) zur Bestimmung der  $\underline{I}_n^{(j)}$  sind also die  $\underline{U}_n^{(i)}$  und damit auch die Leitungsparametermatrizen über Gleichung (3.169) eindeutig festgelegt.

Ein Nachteil des *PI*-Modells besteht darin, daß die damit berechneten Leitungsparametermatrizen nicht unbedingt symmetrisch sind. Die Matrizen beschreiben dann ein nichtreziprokes Leitungssystem, selbst wenn die der Berechnung zugrunde gelegte Anordnung reziprok war ( $\Leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\mu}$  symmetrisch). Dieser Effekt tritt bei Anwesenheit verlustbehafteter Medien auf. OLYSLAGER et al. [3] sehen die Ursache hierfür in der Gleichsetzung von Leistungsgrößen, die aus der Feldverteilung bzw. aus Spannungen und Strömen ermittelt werden. Diese Gleichsetzung sei bei Anwesenheit verlustbehafteter Medien nicht gerechtfertigt, da dann ein Teil der Verlustleistung der Anregung von Moden höherer Ordnung zuzuschreiben sei, die vom Leitungsmodell nicht berücksichtigt werden.

Daher schlagen die Autoren das sogenannte *RI*-Modell vor, bei dem die Gleichsetzung der Leistungsterme durch die Bedingung eines reziproken Leitungsmodells ersetzt wird. Grundlage des Modells ist die Gleichung

$$\frac{1}{2} \iint_A \vec{e}_z \left( \underline{\vec{E}}^{(i)} \times \underline{\vec{H}}^{(j)} \right) dA = \delta_{ij}. \tag{3.170}$$

Für  $i = j$  stellt (3.170) eine Bedingung dar, mit deren Hilfe die berechneten Felder normiert werden können. Im Fall  $i \neq j$  ist (3.170) automatisch erfüllt, wenn die Permittivitäts- und Permeabilitätstensoren  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\mu}$  von der Gestalt

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & 0 \\ T_{xy} & T_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & T_{zz} \end{pmatrix} \tag{3.171}$$

sind [3]. Die Reziprozität der Materialien des Leitungssystems ist eine notwendige Voraussetzung für Gleichung (3.170), so daß sie durch (3.170) implizit mitgefordert wird.

Analog zur Herleitung der Gleichung (3.169) folgt aus (3.170)

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_c} \underline{U}_n^{(i)} \underline{I}_n^{(j)} = \delta_{ij}. \quad (3.172)$$

Mit Hilfe dieser Beziehung werden in [3] aus (3.162) und (3.163) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die Leitungsparametermatrizen gewonnen:

$$\mathbf{Z} = 2j (\mathbf{I}^T)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{I}^{-1}, \quad (3.173)$$

$$\mathbf{Y} = \frac{j}{2} \mathbf{I} \mathbf{K} \mathbf{I}^T. \quad (3.174)$$

Dabei ist  $\mathbf{K}$  eine Diagonalmatrix, deren Diagonalelemente den Ausbreitungskonstanten der  $N_c$  Moden entsprechen. Die Matrix  $\mathbf{I}$  enthält die mit Gleichung (3.166) ermittelten Ströme auf den Leitungen;  $I_{ni}$  stellt den Strom auf Leitung  $n$  für den Mode  $i$  dar. Bei der Anwendung von (3.166) sind die gemäß (3.170) normierten Felder zu verwenden. Neben der Reziprozität gehen also die aus der Feldverteilung extrahierten Ströme in das Leitungsmodell ein, was den Namen „*RI*-Modell“ erklärt.

Außer den Matrizen  $\mathbf{Z}$  und  $\mathbf{Y}$  (entsprechend  $\mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{G}$ ) ist auch häufig die *charakteristische Impedanzmatrix* oder *Wellenwiderstandsmatrix*  $\mathbf{Z}_{\text{char}}$  von Interesse, die durch die Gleichung

$$\vec{\underline{U}} = \mathbf{Z}_{\text{char}} \vec{\underline{I}} \quad (3.175)$$

definiert wird. Im *RI*-Modell ist sie durch

$$\mathbf{Z}_{\text{char}} = 2 (\mathbf{I}^T)^{-1} \mathbf{I}^{-1} \quad (3.176)$$

gegeben.

Das *RI*-Modell bietet die folgenden Vorteile:

- Die Matrizen  $\mathbf{Z}, \mathbf{Y}$  (und damit auch  $\mathbf{L}, \mathbf{C}, \mathbf{R}, \mathbf{G}$ ) und  $\mathbf{Z}_{\text{char}}$  sind stets symmetrisch.
- Die Matrix  $\mathbf{Z}\mathbf{Y} = -(\mathbf{I}^T)^{-1} \mathbf{K}^2 \mathbf{I}^T$  ist stets diagonalisierbar, da  $\mathbf{K}^2$  eine Diagonalmatrix ist. Diese Eigenschaft wird von einigen Leitungssimulatoren zur Berechnung der Matrixexponentialfunktion  $e^{\pm\sqrt{\mathbf{Z}\mathbf{Y}}z}$  vorausgesetzt.
- Im Fall verlustloser Leitungssysteme liefert das *RI*-Modell die gleichen Ergebnisse wie das *PI*-Modell.

- Im Gegensatz zum *PI*-Modell entfällt die Berechnung der  $N_c^2$  Leistungsterme  $\iint_A \vec{e}_z \left( \underline{\vec{E}}^{(i)} \times \underline{\vec{H}}^{(j)*} \right) dA$ ; stattdessen sind nur  $N_c$  Normierungsbedingungen zu erfüllen.

Aus diesen Gründen wurde das *RI*-Modell für das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren ausgewählt. Die Anwendung dieses Modells erfordert die Berechnung der Integrale in (3.170) für den Fall  $i = j$  (Normierungsbedingung) und in (3.166) (Berechnung der Leitungsströme). In Anhang B.3 wird beschrieben, wie diese Integrale im Fall der FEM und der BEM numerisch ausgewertet werden.

## 4 Validierung

### 4.1 Microstrip-Anordnung mit drei Mikrostreifen auf zwei Lagen

Im folgenden werden die mit dem hier vorgestellten Verfahren ermittelten Ergebnisse mit veröffentlichten Berechnungs- bzw. Meßergebnissen verglichen, um die Genauigkeit des Verfahrens anhand praxisrelevanter Beispiele zu überprüfen. Die zugrundeliegenden Leitungsstrukturen wurden mit der Zielsetzung ausgewählt, das Verfahren für einen möglichst großen Teil seiner Anwendungsmöglichkeiten zu validieren und so gleichzeitig die Vielseitigkeit des Verfahrens zu demonstrieren.

Die erste betrachtete Struktur ist die in Abb. 4.1 dargestellte Dreileiter-Microstrip-Anordnung. Die beiden Substrate sind anisotrop und bestehen aus dem gleichen Material mit dem relativen Permittivitätstensor

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} 9.4 & 0 & 0 \\ 0 & 11.6 & 0 \\ 0 & 0 & 9.4 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Oberhalb der Substrate befinde sich Luft bzw. Vakuum ( $\epsilon_r = 1$ ).

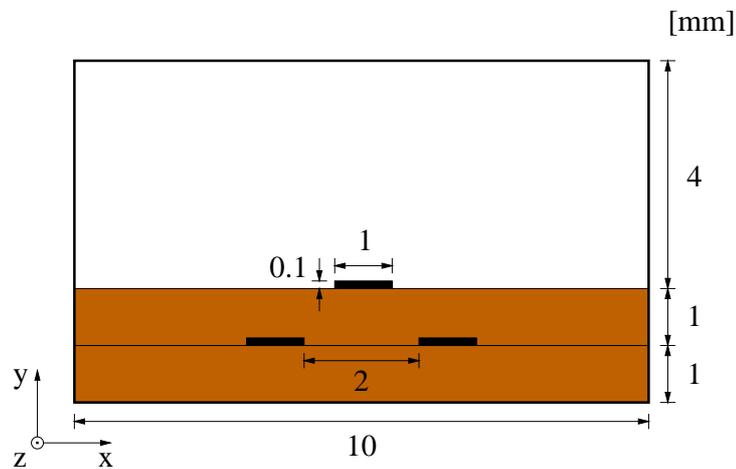


Abbildung 4.1: Microstrip-Anordnung mit ideal leitenden Streifen in einem ideal leitenden Kasten

Aufgrund des geschlossenen, ideal leitenden Kastens wurde zur Berechnung der Anordnung eine reine FEM-Diskretisierung gewählt. Die Startdiskretisierung für die adaptive Verfeinerung bestand aus 50 gleichmäßig verteilten FEM-Knoten. Die adaptive Anpassung der Diskretisierung erfolgte durch

sieben der in Kap. 3.6 beschriebenen Verfeinerungsschritte mit  $\nu = 5/8$ . Dabei wurde der erste Verfeinerungsschritt lediglich zur Neuordnung der vorhandenen Knoten verwendet, während bei den übrigen sechs Schritten eine Verdopplung der Knotenanzahl angestrebt wurde. Das resultierende Netz bestand aus 2416 Knoten ( $\Rightarrow$  Steigerung der Knotenanzahl pro Schritt um den Faktor 1.9) und ist in Abb. 4.2 zu sehen. Der Algorithmus hat die Leiterkanten besonders fein diskretisiert, was auch erforderlich ist, da die Felder dort Singularitäten aufweisen.

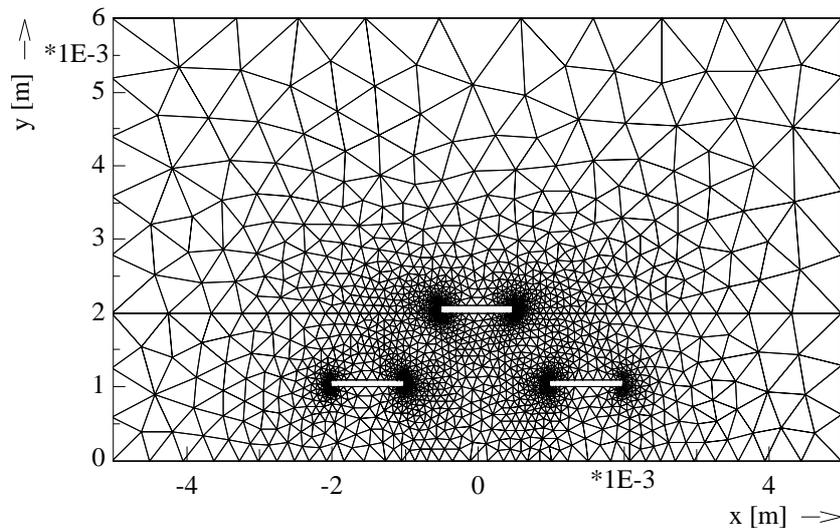


Abbildung 4.2: Adaptiv erzeugte FEM-Diskretisierung der Anordnung aus Abb. 4.1

Abb. 4.3 zeigt die auf diese Weise berechnete Wellenwiderstandsmatrix  $Z_{\text{char}}$  für Frequenzen von 1 bis 30 GHz, zusammen mit Referenzwerten aus [103], die ebenfalls mit einem Finite-Element-Verfahren ermittelt wurden (Diskretisierung mit etwa 350 Kantenelementen höherer Ordnung). Der Verlauf von  $Z_{22}$  im oberen Frequenzbereich weist mit bis zu 3.5 % die größte Abweichung auf. Da die Leitungsströme und damit letztlich auch die Feldverteilung nach Gleichung (3.176) aber quadratisch in die Berechnung der Wellenwiderstände eingehen, bedeutet dies nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz, daß die Feldstärken im Mittel weniger als 2 % voneinander abweichen.

## 4.2 Verlustbehaftete Anordnung mit zwei asymmetrisch gekoppelten Mikrostreifen

Die veröffentlichten Ergebnisse von Leitungsparameterberechnungen stützen sich bei der Extraktion der Parameter aus der Feldverteilung hauptsächlich

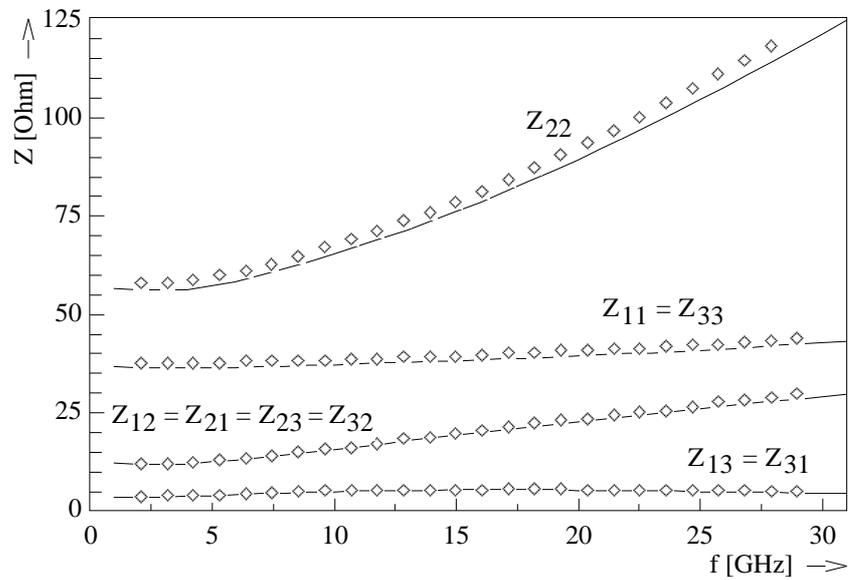


Abbildung 4.3: Frequenzabhängige Wellenwiderstandsmatrix  $Z_{\text{char}}$  der Anordnung aus Abb. 4.1. Die Indizes 1, 2 bzw. 3 entsprechen dem linken, mittleren bzw. rechten Streifenleiter. —: das hier beschriebene Verfahren, ◇: Referenzwerte aus [103]

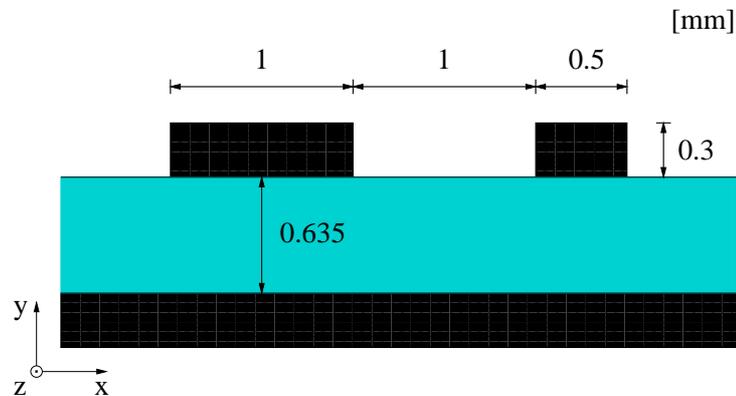


Abbildung 4.4: Zwei ideal leitende Mikrostreifen auf einem verlustbehafteten Substrat (komplexe relative Permittivität  $\varepsilon_r = 9.8(1 - 0.005j)$ ) und einer ideal leitenden Masselage

auf das  $PI$ -Modell. Damit können diese Ergebnisse im Fall verlustbehafteter Anordnungen nur bedingt zur Validierung des hier beschriebenen Verfahrens verwendet werden, da dieses auf dem in [3] beschriebenen  $RI$ -Modell beruht. Daher wird im folgenden die in Abb. 4.4 dargestellte, ebenfalls mit dem  $RI$ -Modell berechnete Anordnung aus [3] betrachtet.

Das Substrat der Anordnung wurde mit einem FEM-Netz diskretisiert, während die nicht geschirmte Umgebung mit der BEM behandelt wurde. Die idealen Leiter werden nicht diskretisiert, da kein Feld in sie eindringt. Die Startdiskretisierung bestand aus 17 FEM-Knoten und 27 BEM-Randelementen und wurde in sieben adaptiven Schritten verfeinert ( $\nu = 5/8$ ). Die resultierende Diskretisierung enthielt 1827 FEM-Knoten und 319 BEM-Randelemente.

In Abb. 4.5 sind die mit dieser Diskretisierung erzielten Ergebnisse für die Kapazitätsmatrix  $\mathbf{C}$  und die Leitwertmatrix  $\mathbf{G}$  zu sehen. Die Referenzwerte aus [3] beruhen auf der Anwendung eines Randintegralverfahrens. Während bei niedrigen Frequenzen die Übereinstimmung sehr gut ist, zeigt sich zu höheren Frequenzen hin eine immer stärkere Abweichung. Die Diagonalelemente der Kapazitätsmatrix,  $C_{11}$  und  $C_{22}$ , weichen bei  $f = 100$  GHz um etwa 5 % von den Referenzdaten ab ( $\Rightarrow$  mittlerer Unterschied der Feldstärken etwa 2.5 %). Im Fall des Nebendiagonalelementes  $C_{12}$  liegt die absolute Abweichung erwartungsgemäß in der gleichen Größenordnung wie diejenige der Diagonalelemente und damit aufgrund der geringen Kopplung der Streifenleiter in der gleichen Größenordnung wie  $C_{12}$  selbst. Für die Diagonalelemente der Leitwertmatrix sind wesentlich höhere relative Differenzen als bei  $\mathbf{C}$  zu erwarten, da  $\mathbf{G}$  und  $\omega\mathbf{C}$  Real- und Imaginärteil der Admittanzmatrix  $\mathbf{Y}$  sind und die Elemente von  $\mathbf{G}$  klein gegen die Elemente von  $\omega\mathbf{C}$  sind (bei  $f = 100$  GHz gilt  $G_{11}/\omega C_{11} \approx 0.0038$ ). Die tatsächlichen Abweichungen belaufen sich jedoch nur auf etwa 5 % ( $G_{11}$ ) bzw. 12 % ( $G_{22}$ ). Für das Nebendiagonalelement  $G_{12}$  gilt das bereits für  $C_{12}$  gesagte.

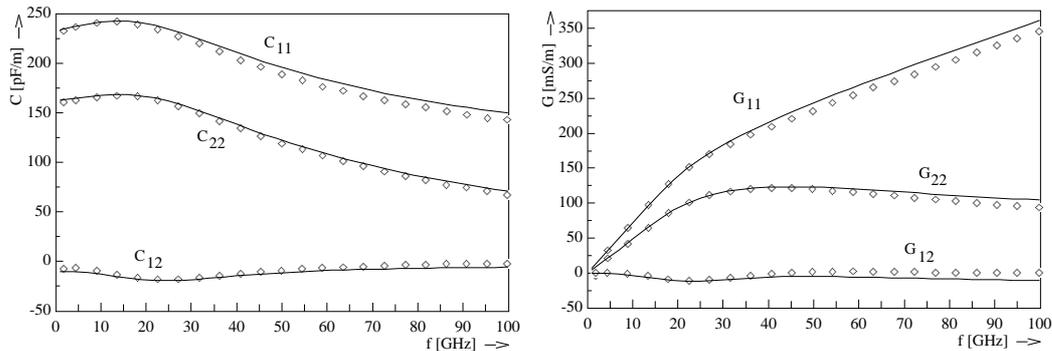


Abbildung 4.5: Kapazitätsmatrix  $\mathbf{C}$  und Leitwertmatrix  $\mathbf{G}$  der Anordnung aus Abb. 4.4. —: das hier beschriebene Verfahren,  $\diamond$ : Referenzwerte aus [3]

### 4.3 Koplanarer Wellenleiter mit $\text{LiNbO}_3$ -Substrat

In diesem Abschnitt wird die in Abb. 4.6 dargestellte Koplanarleitung betrachtet. Die Leitfähigkeit der Goldelektroden sei  $\sigma = 41$  MS/m, die relative

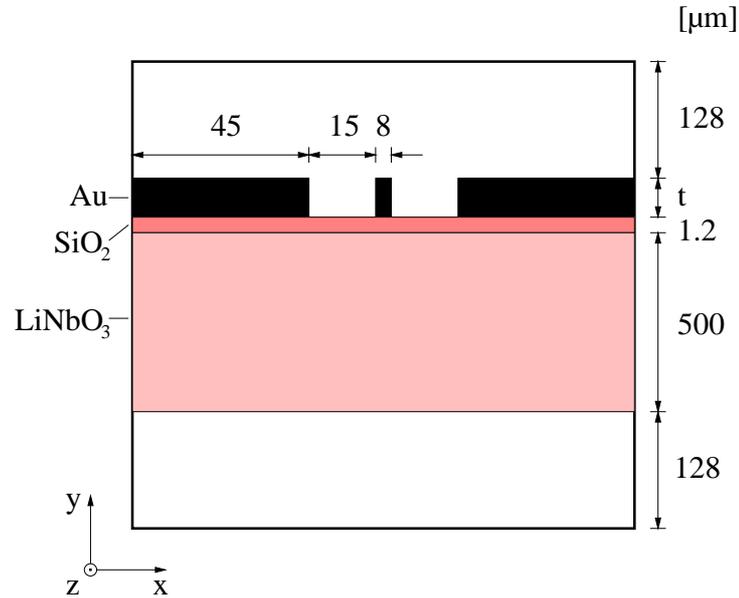


Abbildung 4.6: Koplanarleitung in einem ideal leitenden Kasten mit Goldelektroden auf einer Siliziumdioxid-Schicht und einem Lithiumniobat-Substrat. Die Metallisierungsdicke  $t$  beträgt 5 bzw. 15  $\mu\text{m}$ .

Permittivität der  $\text{SiO}_2$ -Schicht beträgt  $\epsilon_r = 3.8$ . Das  $\text{LiNbO}_3$ -Substrat ist anisotrop, wobei der relative Permittivitätstensor durch

$$\epsilon_r = \begin{pmatrix} 43 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 43 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

gegeben ist.

Da die Berechnung der Leitungsparameter für Frequenzen von bis zu 100 GHz erfolgen soll, wurden die Goldelektroden mit der BEM diskretisiert, da die Eindringtiefe bei dieser Frequenz lediglich  $0.25 \mu\text{m}$  beträgt. Eine FEM-Diskretisierung müßte also sehr kleine Elemente in der Nähe der Leiteroberfläche aufweisen, um genaue Ergebnisse zu liefern. Die übrigen Bereiche der Anordnung können dagegen problemlos mit der FEM behandelt werden. Die Startdiskretisierung bestand aus 52 FEM-Knoten und 12 BEM-Randelementen und wurde in fünf adaptiven Schritten verfeinert ( $\nu = 5/8$ ), was für den Fall  $t = 5 \mu\text{m}$  ( $t = 15 \mu\text{m}$ ) auf eine Diskretisierung mit 962 (962) FEM-Knoten und 79 (90) BEM-Randelementen führte.

Die Abbildungen 4.7 und 4.8 zeigen die berechneten Induktivitäts- und Widerstandsbeläge sowie den komplexen Wellenwiderstand, zusammen mit den Referenzwerten aus [107], die mit einer Mode-Matching-Methode ermittelt wurden. Während die Übereinstimmung der Induktivitätsbeläge sehr gut

ist (Abweichung kleiner als 1.5 %), steigt die relative Differenz der Widerstandsbeläge zumindest für  $t = 15 \mu\text{m}$  bei hohen Frequenzen auf bis zu 15 % an. Dies kann zum einen an dem unterschiedlichen Leitungsmodell liegen (Referenzwerte: *PI*-Modell, hier verwendet: *RI*-Modell), zum anderen an der Tatsache, daß die Anordnung nur schwach verlustbehaftet ist ( $R/\omega L \approx 0.025$  bei  $f = 100 \text{ GHz}$ ). Im Fall des komplexen Wellenwiderstands sind die Abweichungen analog zu den Ergebnissen bei  $L$  und  $R$  kleiner als 1 % bei  $\Re\{Z_{\text{char}}\}$  und maximal 15 % (für hohe Frequenzen) bei  $\Im\{Z_{\text{char}}\}$ .

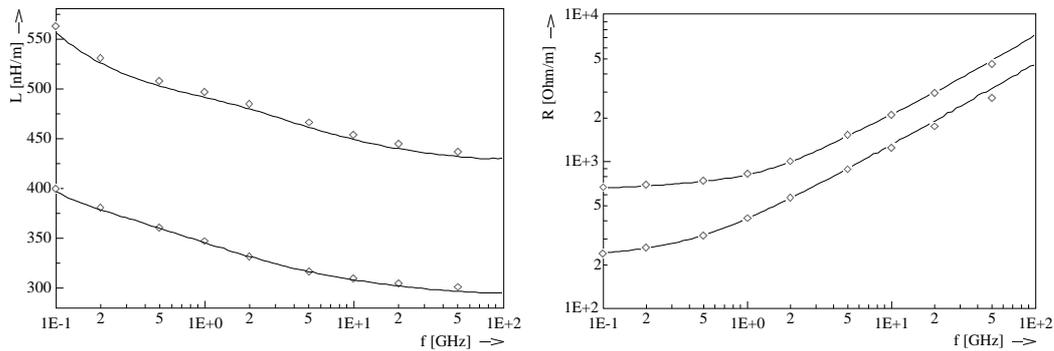


Abbildung 4.7: Induktivitätsbelag  $L$  und Widerstandsbelag  $R$  der Anordnung aus Abb. 4.6 für  $t = 5 \mu\text{m}$  (obere Kurven) und  $t = 15 \mu\text{m}$  (untere Kurven). —: das hier beschriebene Verfahren,  $\diamond$ : Referenzwerte aus [107]

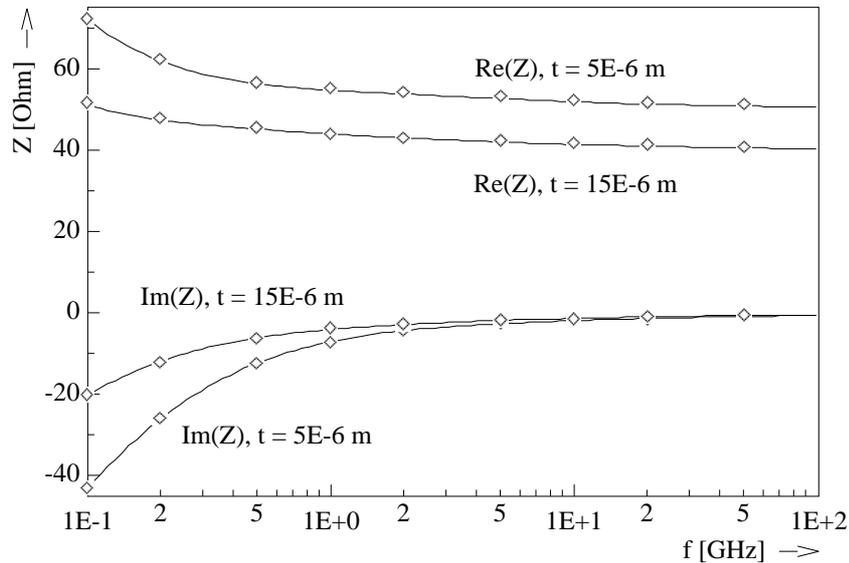


Abbildung 4.8: Komplexer Wellenwiderstand  $Z_{\text{char}}$  der Anordnung aus Abb. 4.6. —: das hier beschriebene Verfahren,  $\diamond$ : Referenzwerte aus [107]

#### 4.4 Leiterplatte mit mehrschichtiger, anisotroper, verlustbehafteter Masselage

Abb. 4.9 zeigt den Querschnitt einer Leiterplatte, die eine Massefläche aufweist, welche sich herstellungsbedingt aus mehreren Schichten zusammensetzt. Diese Schichten haben eine Dicke von  $t = 12.7 \mu\text{m}$  und bestehen aus metallischen Fasern, wobei die Leitfähigkeit in Richtung der Fasern  $40000 \text{ S/m}$ , in einer Richtung senkrecht dazu jedoch nur  $50 \text{ S/m}$  beträgt, so daß die Leitfähigkeit durch einen Tensor beschrieben werden muß. Die Fasern verlaufen in der  $xz$ -Ebene; ihre Richtung geht für die Gebiete (2), (3), (4) bzw. (5) aus der  $x$ -Achse durch mathematisch positive Drehung um die  $y$ -Achse mit den Winkeln  $\alpha_2 = 0^\circ$ ,  $\alpha_3 = 45^\circ$ ,  $\alpha_4 = 90^\circ$  bzw.  $\alpha_5 = 135^\circ$  hervor. Die relative Permittivität des Substrats (1) beträgt  $2.2$  bzw.  $9.8$ , seine Höhe ist  $h = 1 \text{ mm}$ . Die fünf nicht bezeichneten Schichten sind Gebiete des Typs (5), (4), (3), (2) und (1) (von oben nach unten). Die beiden leitenden Streifen haben eine Breite von  $w = 5 \text{ mm}$ , eine vernachlässigbare Höhe und werden als ideal leitend angenommen.

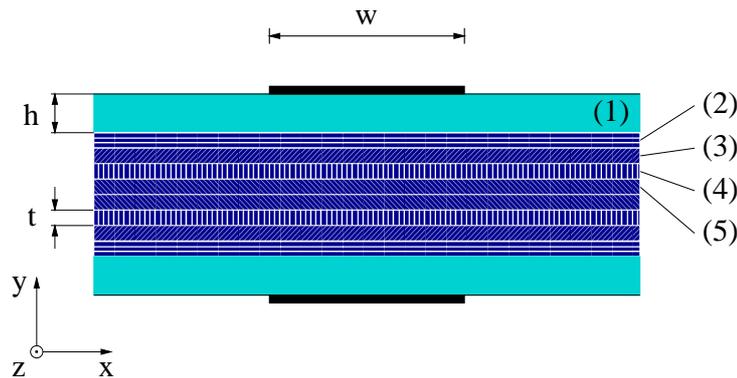


Abbildung 4.9: Leiterplattenquerschnitt mit einer mehrlagigen, anisotropen Massefläche

Die beiden Substrate (Gebietstyp (1)) wurden mit der FEM diskretisiert. Die acht Schichten der Masselage mußten aufgrund ihrer Anisotropie ebenfalls mit der FEM behandelt werden. Für die nicht geschirmte Umgebung wurde die BEM verwendet. Die Startdiskretisierung bestand aus 88 FEM-Knoten und 39 BEM-Randelementen und wurde in vier adaptiven Schritten verfeinert ( $\nu = 5/8$ ), was eine Diskretisierung mit 792 FEM-Knoten und 163 BEM-Randelementen ergab.

Aufgrund der endlichen Leitfähigkeit der Masselage kommt es zu einer Kopplung der beiden leitenden Streifen, so daß sich eine Even-Mode- und eine Odd-Mode-Lösung ausbilden. Abb. 4.10 zeigt die berechneten Real- und Imaginärteile der normierten Ausbreitungskonstante  $k/k_0$ ,  $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , für

beide Moden in Abhängigkeit von Signalfrequenz und Substratpermittivität. Die Vergleichswerte aus [105] wurden mit einer Spectral-Domain-Methode ermittelt.

Der Realteil weist mit einer maximalen Abweichung von 1 % eine sehr gute Übereinstimmung mit den Literaturwerten auf. Der (deutlich kleinere) Imaginärteil weicht maximal 6 % von den Referenzwerten ab.

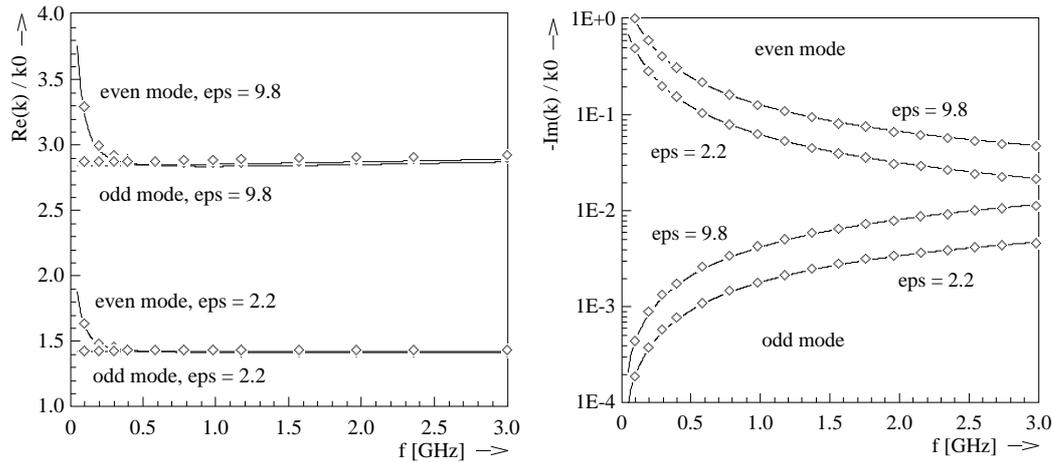


Abbildung 4.10: Real- und Imaginärteil der normierten Ausbreitungskonstante  $k/k_0$  der Anordnung aus Abb. 4.9 für Even-Mode und Odd-Mode. —: das hier beschriebene Verfahren,  $\diamond$ : Referenzwerte aus [105]

## 4.5 Asymmetrischer, magnetooptischer Wellenleiter

Das folgende Beispiel zeigt, daß sich das hier vorgestellte Verfahren nicht nur auf Leitungen auf Chip- oder Leiterplattenebene, sondern auch auf dielektrische Wellenleiter anwenden läßt. Abb. 4.11 zeigt einen derartigen Wellenleiter mit zylindrischem Querschnitt. Die obere Zylinderhälfte (1) besteht aus einem magnetooptischen Material. In einem solchen Material wird durch ein äußeres Magnetfeld  $\vec{H}_0$  eine künstliche zirkulare Doppelbrechung induziert (*Faraday-Effekt*). Durchläuft also eine linear polarisierte Welle das Medium in Richtung des äußeren Feldes, wird ihre Schwingungsebene gedreht. Entspricht die Richtung des äußeren Feldes der  $x$ -Richtung, kann ein solches Medium durch einen komplexen Permittivitätstensor der Gestalt

$$\varepsilon_r = \begin{pmatrix} n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & -j\eta \\ 0 & j\eta & n^2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

beschrieben werden, wobei  $n$  der Brechungsindex ist. Der Parameter  $\eta$  beschreibt die Stärke des Faraday-Effekts und ist proportional zur Stärke des angelegten Feldes.

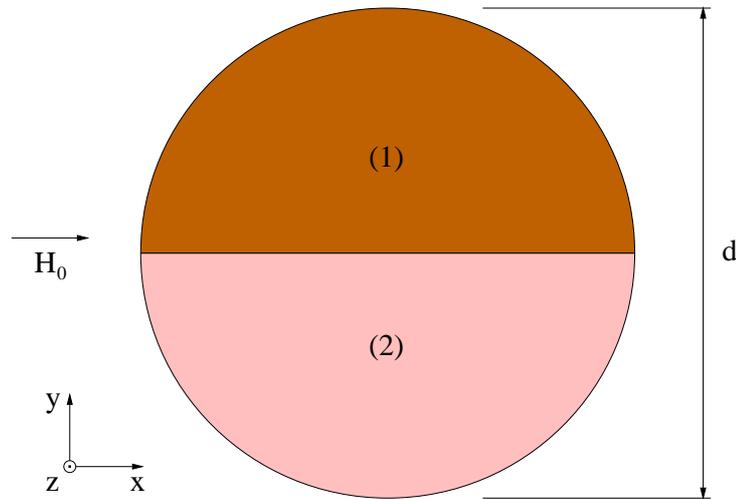


Abbildung 4.11: Dielektrischer, magnetooptischer Wellenleiter

Die untere Zylinderhälfte (2) besteht aus einem dielektrischen, aber nicht magnetooptischen Medium. Die Tatsache, daß nur eine Zylinderhälfte den Faraday-Effekt aufweist, hat zur Folge, daß das Leitungssystem nicht bidirektional ist, so daß die Ausbreitungskonstante eines Modes, der sich in positiver  $z$ -Richtung ausbreitet, von derjenigen des entsprechenden, sich in negativer  $z$ -Richtung ausbreitenden Modes verschieden ist ( $k_+ \neq k_-$ ). Dieser Effekt wird bei der Konstruktion von Bauelementen für optische Kommunikationssysteme ausgenutzt.

Gegenstand der folgenden Berechnungen ist die Phasendifferenz pro Längeneinheit für den Quasi-TM-Mode niedrigster Ordnung,  $\Delta k = k_+ - k_-$ . Dabei sei der Brechungsindex der Umgebung des Zylinders  $n_0 = 1.458$ , während der Brechungsindex beider Zylinderhälften durch  $n = n_0 + \Delta n$  mit  $\Delta n = 0.006, 0.012, 0.02$  gegeben ist.

Die Diskretisierung des Gebietes (1) kann wegen der durch das äußere Magnetfeld induzierten Anisotropie nur mit der FEM erfolgen, so daß es sinnvoll ist, auch für Gebiet (2) die FEM zu verwenden. Die Diskretisierung der ungeschirmten Umgebung muß dagegen mit der BEM erfolgen. Die Startdiskretisierung bestand aus 70 FEM-Knoten und 40 BEM-Randelementen und wurde in fünf adaptiven Schritten verfeinert ( $\nu = 5/8$ ), was für den Fall  $\Delta n = 0.006$  (0.012, 0.02) auf eine Diskretisierung mit 1034 (1012, 1024) FEM-Knoten und 80 BEM-Randelementen führte.

In Abb. 4.12 wird die längenbezogene Phasendifferenz in Abhängigkeit vom Faserdurchmesser dargestellt, wobei Phasendifferenz und Faserdurchmesser zu dimensionslosen, von  $\eta$  unabhängigen Größen normiert wurden. Dies ist dann möglich, wenn  $\Delta k$  proportional zu  $\eta$  ist, was unter der Bedingung  $|\eta| \ll n^2$  näherungsweise erfüllt ist. Um diese Bedingung bei der Be-

rechnung der normierten Phasendifferenz zu erfüllen, andererseits aber  $\Delta k$  nicht zu klein werden zu lassen ( $\Rightarrow$  Genauigkeitsverlust durch Differenzbildung zweier etwa gleich großer Zahlen), wurde  $\eta = 0.05$  gewählt.

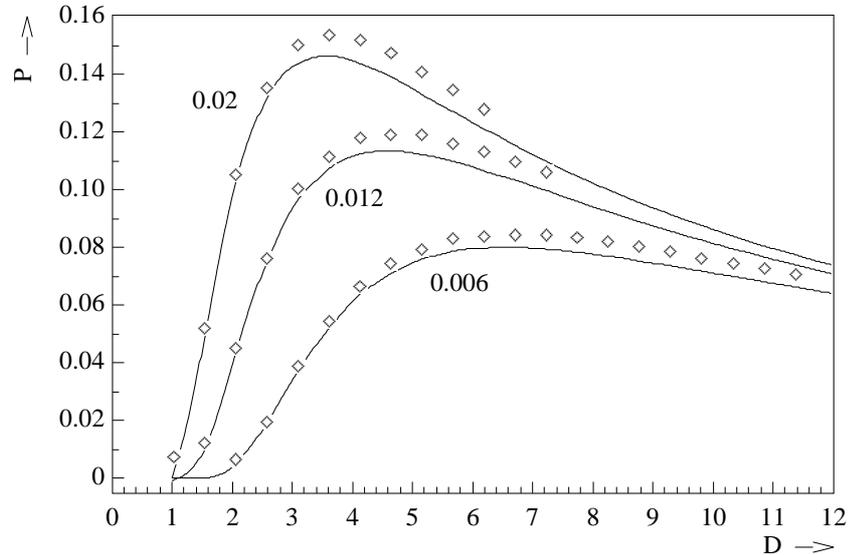


Abbildung 4.12: Normierte Phasendifferenz  $P = \lambda\Delta k/\eta$  der Anordnung aus Abb. 4.11 in Abhängigkeit vom normierten Faserdurchmesser  $D = d/\lambda$  für  $\Delta n = 0.006, 0.012$  und  $0.02$ . —: das hier beschriebene Verfahren,  $\diamond$ : Referenzwerte aus [108]

Die Abweichung von den Referenzwerten aus [108] beträgt maximal 6 %. Zur Bewertung dieser Abweichung muß berücksichtigt werden, daß die Ausbreitungskonstanten der hin- und rücklaufenden Wellen,  $k_+$  und  $k_-$ , für  $\eta = 0.05$  weniger als 0.1 % voneinander abweichen. Um die Differenz  $k_+ - k_-$  auf 6 % genau zu berechnen, müssen somit sehr hohe Genauigkeitsanforderungen an die Berechnung von  $k_+$  und  $k_-$  gestellt werden.

## 4.6 Dreiadriges, verlustbehaftetes Kabel

In diesem Abschnitt wird das hier vorgestellte Berechnungsverfahren mit der in [106] angegebenen Methode zur meßtechnischen Ermittlung von Leitungsparametern verglichen. Gegenstand der Betrachtungen ist das in Abb. 4.13 dargestellte dreiadrige Kabel, das über einer Massefläche aus Aluminium ( $\sigma = 38 \text{ MS/m}$ ) verläuft. Für die relative Permittivität der Kabelisolierung wird in [106] der Wert  $\varepsilon_r = 4$  angenommen. Für die Leiter gilt  $\sigma = 23 \text{ MS/m}$ . Die Abmessungen  $l_1$  und  $l_2$  werden in [106] nicht angegeben; es wird daher unterstellt, daß sie der Hälfte der Länge der Stege zwischen zwei Leitern entsprechen ( $\Rightarrow l_1 = l_2 = 0.77 \text{ mm}$ ).

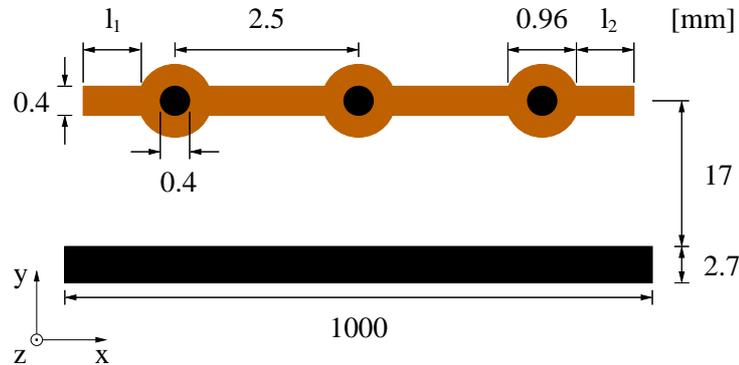


Abbildung 4.13: Dreiadriges, verlustbehaftetes Kabel über einer verlustbehafteten Massefläche

Da die Leitungsparameter für den Grenzfall einer Quasi-TEM-Wellenausbreitung gemessen wurden, muß die Berechnung für eine möglichst niedrige Frequenz durchgeführt werden. Im Fall  $f = 0$  weist die Systemmatrix des zu lösenden Gleichungssystems jedoch lineare Abhängigkeiten auf, so daß bei zu starker Annäherung an diesen Fall numerische Schwierigkeiten bei der Lösung des Eigenwertproblems (3.136) auftreten. Daher wurde  $f = 100$  MHz gewählt; bei dieser Frequenz ist die Quasi-TEM-Annahme hinreichend gut erfüllt, ohne daß numerische Probleme die Berechnung stören.

Die verlustbehafteten Leiter der Anordnung, also die drei signalführenden Leiter sowie die Massefläche, wurden mit der BEM diskretisiert, während auf die Kabelisolierung die FEM angewendet wurde. Die Startdiskretisierung bestand aus 40 FEM-Knoten und 56 BEM-Randelementen und wurde in vier adaptiven Schritten verfeinert. Die Wahl  $\nu = 5/8$  lieferte in diesem Fall keine befriedigende Diskretisierung, da die Elementdichte mit zunehmendem Abstand von den signalführenden Leitern, insbesondere aber auf der Massefläche, zu gering wurde. Stattdessen wurde  $\nu = 1/3$  gewählt, was auf eine Diskretisierung mit 350 FEM-Knoten und 288 BEM-Randelementen führte.

Die folgenden Kapazitäts- und Induktivitätsmatrizen wurden gemessen bzw. berechnet:

$$\mathbf{L}_{\text{Messung}} = \begin{pmatrix} 1.02 & 0.523 & 0.395 \\ 0.523 & 1.03 & 0.541 \\ 0.395 & 0.541 & 1.04 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}, \quad (4.4)$$

$$\mathbf{L}_{\text{Berechnung}} = \begin{pmatrix} 1.038 & 0.5233 & 0.3874 \\ 0.5233 & 1.036 & 0.5234 \\ 0.3874 & 0.5234 & 1.037 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}, \quad (4.5)$$

$$\mathbf{C}_{\text{Messung}} = \begin{pmatrix} 23.45 & -12.70 & -3.32 \\ -12.71 & 30.94 & -13.47 \\ -3.32 & -13.47 & 24.48 \end{pmatrix} \text{pF/m}, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{C}_{\text{Berechnung}} = \begin{pmatrix} 24.62 & -14.31 & -3.139 \\ -14.31 & 33.04 & -14.32 \\ -3.139 & -14.32 & 24.64 \end{pmatrix} \text{ pF/m.} \quad (4.7)$$

Die Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Induktivitätskoeffizienten betragen weniger als 2 % auf der Hauptdiagonale und weniger als 3.5 % bei den Nebendiagonalelementen, was als erstaunlich gute Übereinstimmung zu werten ist. Im Fall der Kapazitätsmatrix betragen die Abweichungen dagegen bis zu 12.5 %. Eine mögliche Ursache hierfür ist die ungenaue Kenntnis der Permittivität der Kabelisolierung (Angabe in [106]: „ $\varepsilon_r \approx 4$ “). Allerdings erklärt dies nicht die Abweichung zwischen den gemessenen  $C_{11}$ - und  $C_{33}$ -Werten (bzw. zwischen  $C_{12}$  und  $C_{23}$ ), die aufgrund der Symmetrie der Anordnung gleich groß sein müßten (was für die berechneten Werte auch gilt). In [106] wird die Differenz damit begründet, daß das Meßobjekt aus einem fünfadrigen Kabel durch Abtrennen zweier Leiter hergestellt worden sei, was zu einer Asymmetrie geführt habe ( $l_2 > l_1$ ). Um diese Hypothese zu überprüfen, wurde die Berechnung für die maximal mögliche Asymmetrie ( $l_1 = 0$  mm,  $l_2 = 1.54$  mm) wiederholt, was auf die Kapazitätsmatrix

$$\mathbf{C}_{\text{Berechnung}} = \begin{pmatrix} 24.07 & -14.15 & -3.088 \\ -14.15 & 32.99 & -14.39 \\ -3.088 & -14.39 & 24.88 \end{pmatrix} \text{ pF/m} \quad (4.8)$$

führte. Während die Asymmetrie die Abweichung zwischen  $C_{11}$  und  $C_{33}$  zu 80 % erklären kann, beträgt die berechnete Abweichung zwischen  $C_{12}$  und  $C_{23}$  nur etwa ein Drittel der gemessenen Abweichung, so daß die Asymmetrie der Anordnung für sich allein betrachtet keine schlüssige Deutung der Abweichungen darstellt.

## 4.7 Vergleich FEM/BEM anhand einer Microstrip-Anordnung

Bei den bisherigen Berechnungen wurde bei gut, aber nicht ideal leitenden Gebieten die BEM gegenüber der FEM bevorzugt. Die Begründung hierfür liegt in der Eindringtiefe des Feldes, die bei guter Leitfähigkeit und hoher Signalfrequenz so gering sein kann, daß nur in der Nähe der Leiteroberfläche ein nennenswertes Feld existiert, während der Leiter im Inneren praktisch feldfrei ist (Skin-Effekt). Im folgenden wird anhand vergleichender Berechnungen untersucht, ob die BEM in solchen Fällen wirklich der FEM überlegen ist.

Für den Vergleich wird eine ungeschirmte Mikrostreifenleitung herangezogen. Der leitende Streifen habe die Breite  $w_c = 0.2$  mm, die Höhe  $t = 10$   $\mu\text{m}$  und die Leitfähigkeit  $\sigma = 56$  MS/m, das Substrat habe die Breite  $w_s = 2$  mm, die Höhe  $h = 0.1$  mm und die relative Permittivität  $\varepsilon_r = 4$ . Die Massefläche

habe die gleiche Breite wie das Substrat und die gleiche Höhe und Leitfähigkeit wie der leitende Streifen.

Das Substrat und die Massefläche wurden mit der FEM diskretisiert, während die ungeschirmte Umgebung mit der BEM behandelt wurde. Der leitende Streifen wurde sowohl mit der FEM als auch mit der BEM diskretisiert. Im Fall der FEM erfolgte die Diskretisierung in sechs adaptiven Schritten, im Fall der BEM dienten hierfür fünf Schritte. In beiden Fällen war  $\nu = 5/8$ . Die Rechenzeiten lagen für beide Diskretisierungsvarianten in einer vergleichbaren Größenordnung.

Eine ungenaue Modellierung der Stromverteilung innerhalb des Leiters infolge einer ungeeigneten Diskretisierung wird sich am deutlichsten auf den Widerstandsbelag  $R$  auswirken, da dieser direkt von der effektiven Querschnittsfläche, auf die sich der Strom verteilt, abhängt. Daher wurden FEM und BEM anhand der ermittelten  $R$ -Werte verglichen. Die Berechnung erfolgte für die Frequenzen  $f = 1$  GHz bzw.  $f = 10$  GHz. Bei diesen Frequenzen betragen die Eindringtiefen für die oben angegebene Leitfähigkeit  $2.1 \mu\text{m}$  bzw.  $0.67 \mu\text{m}$ . Tabelle 4.1 zeigt die entsprechenden Berechnungsergebnisse, die Anzahl der jeweils zur Diskretisierung des leitenden Streifens verwendeten FEM-Knoten bzw. BEM-Randelemente sowie Vergleichswerte aus [104], die durch Anwendung von Näherungsformeln ermittelt wurden.

$f$ [GHz]	1	10
$R_{\text{FEM}} [\frac{\Omega}{\text{m}}]$	36.7	85.3
$R_{\text{BEM}} [\frac{\Omega}{\text{m}}]$	41.0	123.4
$R_{\text{Literatur}} [\frac{\Omega}{\text{m}}]$	40.7	128.5
Anzahl FEM-Knoten	125	127
Anzahl BEM-Randelemente	34	34

Tabelle 4.1: Widerstandsbelag  $R$  einer Mikrostreifenleitung, berechnet durch Diskretisierung des leitenden Streifens mit der FEM bzw. mit der BEM, sowie durch Anwendung von Näherungsformeln [104]

Im Fall der BEM-Diskretisierung des Leiters stimmen die Ergebnisse wesentlich besser mit den Literaturwerten überein (unter 1 % bei  $f = 1$  GHz, 4 % bei  $f = 10$  GHz) als bei Verwendung der FEM (10 % bei  $f = 1$  GHz, 34 % bei  $f = 10$  GHz). Die BEM kann das exponentielle Abklingen des Feldes im Leiterinneren erheblich besser modellieren, da die Greensche Funktion (3.24) diesen Verlauf bereits implizit enthält (für reelle Argumente verläuft  $K_0$  asymptotisch exponentiell). Damit erscheint die BEM im Fall guter Leiter als der FEM überlegen.



## 5 Ausblick

Ein möglicher Ansatzpunkt für die weitere Verbesserung des Verfahrens besteht in der Entwicklung eines schnelleren Algorithmus für die Berechnung der Integrale über die Randelemente bei der BEM. Obwohl der in Anhang B.1 beschriebene adaptive Integrationsalgorithmus verwendet wird, stellt die Randintegration den bei weitem rechenzeitintensivsten Teil der BEM dar, nimmt also in der Regel deutlich mehr Zeit in Anspruch als die Sparse-**LU**-Zerlegung, die bei der FEM den Berechnungsaufwand dominiert. Wegen der Randintegration schneidet die BEM hinsichtlich der Effizienz schlechter ab als die FEM (Ausnahme: gute Leiter, siehe Kap. 4.7), so daß hier noch Optimierungspotential besteht. Ein denkbarer Ansatz hierfür ist die Approximation der Greenschen Funktion  $G$  und ihrer Normalenableitung  $\frac{\partial G}{\partial n}$  durch Funktionen, die eine analytische Auswertung der Integrale in (B.1) erlauben.

Eine weitere Möglichkeit zur Beschleunigung der BEM stellt die Ausnutzung spezieller Geometrien dar. Da die BEM häufig zur Begrenzung von FEM-Netzen bei ungeschirmten Anordnungen eingesetzt wird, bietet es sich an, eine kreisförmige FEM/BEM-Grenze zu wählen und durch ein regelmäßiges  $n$ -Eck zu approximieren, wie es in [80] vorgeschlagen wird. Aufgrund der Symmetrie muß der Satz der Randintegrale dann anstatt für alle nur für ein Element bestimmt werden, was den Berechnungsaufwand erheblich reduziert.

Darüber hinaus können noch Verbesserungen des Bedienungskomforts vorgenommen werden, was das automatische Auffinden aller  $N_c$  Quasi-TEM-Moden eines  $N_c$ -Leiter-Systems betrifft. Die zugehörigen Minima der  $R(k)$ -Funktion sind teilweise recht schmal, so daß der Algorithmus nicht immer alle Lösungen ohne Unterstützung durch den Anwender findet. Ein möglicher Ausweg besteht darin, zunächst für alle Dielektrika in der Anordnung  $\varepsilon_r = 1$  zu setzen und alle Leiter als ideal leitend anzusehen. Die Berechnung der  $N_c$  Moden ist dann sehr einfach, weil in diesem Fall für alle Moden  $k = \omega/c_0$ ,  $c_0 =$  Vakuumlichtgeschwindigkeit, gilt. Anschließend kann sich das Verfahren durch schrittweise Veränderung der  $\varepsilon_r$ - und  $\sigma$ -Werte iterativ der tatsächlichen Anordnung nähern. Die Ausbreitungskonstanten und Feldverteilungen der Moden müssen dann in jedem Iterationsschritt aktualisiert werden.

Die Adaptive-Remeshing-Prozedur aus Kap. 3.6 könnte noch hinsichtlich der verwendeten Fehlerkriterien (3.156), (3.157), (3.158) und (3.159) optimiert werden. Die geeignete Wahl des Parameters  $\nu$  aus (3.158) und (3.159) ist, wie sich in Kap. 4 gezeigt hat, von der Leitergeometrie abhängig (z.B.  $\nu = 5/8$  bei rechteckigen,  $\nu = 1/3$  bei runden Leitern). Um diesen Nachteil zu vermeiden, sind genauere Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen dem lokalen Berechnungsfehler und den Fehlerkriterien (3.156), (3.157) (bzw. weiterentwickelten Kriterien) erforderlich.

Schließlich besteht noch Potential zur Erhöhung der Konvergenzgeschwin-

digkeit bei der Nullstellenberechnung der Funktion  $R(k)$ . Wegen  $R(k) \geq 0$  besitzt diese Funktion keine Nulldurchgänge (Vorzeichenwechsel); die Nullstellen sind also gleichzeitig Minima. Numerisch gesehen handelt es sich dabei lediglich um  $k$ -Werte mit sehr kleinem  $R(k) \neq 0$ . Solange  $R(k)$  dort hinreichend klein ist, sorgt das verwendete Verfahren für hohe Konvergenzgeschwindigkeiten. Ist dies jedoch nicht der Fall, kommt die im letzten Absatz in Kap. 3.5.4 beschriebene Vorgehensweise zum Einsatz, die eine deutlich geringere Konvergenzgeschwindigkeit bietet. Hier wäre ein effizienterer Algorithmus wünschenswert.

## A Herleitungen

### A.1 Ansatz zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen bei Knotenelementen

In diesem Kapitel wird ein FEM-Ansatz hergeleitet, der auf linearen Knotenelementen beruht, aber trotzdem keine nichtphysikalischen Lösungen liefert. Dazu wird die erste der beiden in Kap. 3.2.1 geschilderten Problemlösungsstrategien angewendet, d. h. Modifikation der Gleichung (2.22), so daß  $\underline{\vec{H}} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi$  keine Lösung für  $\omega = 0$  mehr ist.

PAULSEN und LYNCH [22] schlagen eine Modifikation der Gleichung (2.23) für den Fall isotroper Medien vor, die bei Übertragung auf (2.22) und Erweiterung auf anisotrope Medien folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \epsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{H}} \right] \\ & - \hat{\epsilon}^{-1} \hat{\mu}^{-1} (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} \right] - \omega^2 \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Dabei sind  $\hat{\epsilon}$  und  $\hat{\mu}$  frei wählbare Permittivitäts- bzw. Permeabilitätswerte, die dafür sorgen, daß der Zusatzterm die richtige Dimension erhält. Der Zusatzterm ist 0 für Felder, welche die Maxwell'schen Gleichungen erfüllen; die Modifikation ist somit erlaubt.

Dieser Term verhindert zwar das Auftreten der statischen Lösungen ( $\underline{\vec{H}} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi$  ist i. allg. keine Lösung für  $\omega = 0$ ), hat jedoch den Nachteil, daß die Divergenzfreiheit von  $\underline{\mu} \underline{\vec{H}}$  aus (A.1) nicht hergeleitet werden kann, was bei Gleichung (2.22) noch möglich war (durch Anwendung des Operators  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)$  auf die Gleichung). Die mit (A.1) ermittelten Lösungen erfüllen daher nicht unbedingt die Divergenzbedingung. Dies läßt sich auch durch die Wahl der Randbedingungen nicht erzwingen. Bei einem quadratischen Hohlleiter der Kantenlänge  $w$  mit  $\epsilon = \hat{\epsilon} = \epsilon_0, \mu = \hat{\mu} = \mu_0$  tritt beispielsweise die Lösung

$$\underline{H}_x = \sin ax \cos ay, \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{H}_y = \cos ax \sin ay, \quad (\text{A.3})$$

$$\underline{H}_z = \frac{jk}{a} \cos ax \cos ay, \quad (\text{A.4})$$

$$a = \frac{\pi}{w}, \quad (\text{A.5})$$

$$k^2 = \omega^2 \epsilon \mu - 2a^2 \quad (\text{A.6})$$

auf, die auf dem Rand ( $x = \pm \frac{w}{2}$  oder  $y = \pm \frac{w}{2}$ ) die Bedingungen  $\vec{n} \times \underline{\vec{E}} = 0$  und  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0$  erfüllt, letztere aber nicht innerhalb des Querschnitts. Auf dem Rand ist außerdem die Forderung  $\underline{H}_n = 0$  verletzt. Es

existieren auch Lösungen mit  $\underline{H}_n = 0$ , die dann aber eine der beiden anderen Randbedingungen verletzen und auch nicht divergenzfrei sind. Alle drei Randbedingungen können nicht gefordert werden, da dann die Anzahl der Gleichungen größer wäre als die Anzahl der Unbekannten.

Der subtrahierte Term läßt sich jedoch so modifizieren, daß die Divergenzbeziehung wieder erfüllt ist:

$$\begin{aligned} & (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \varepsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{H}} \right] \\ & - \hat{\varepsilon}^{-1} \hat{\mu}^{-1} \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \right] \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} \right] - \omega^2 \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

wobei  $\vec{a}$  ein beliebiger Vektor ist. Aus dieser Gleichung folgt  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0$  für  $\omega \neq 0$  (durch Anwendung des Operators  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)$ ), obwohl  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi$  keine Lösung von (A.7) ist. Trotzdem führt die Diskretisierung von (A.7) zu nichtphysikalischen Lösungen. Die Ursache hierfür ist darin zu sehen, daß für  $\omega = 0$  wiederum Lösungen auftreten, die aus einem beliebig wählbaren Potential  $\psi$  abgeleitet werden können. Für konstantes, skalares  $\varepsilon$  und  $\mu$  und mit der Festlegung  $\hat{\varepsilon} = \varepsilon, \hat{\mu} = \mu$  sind dies Lösungen der Form

$$\underline{\vec{H}} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z)\psi - \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \right] \psi. \quad (\text{A.8})$$

Diese Lösungen sind zwar nicht rotationsfrei, genügen aber der Beziehung

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{H}} - \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \right] \times \underline{\vec{H}} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Die Erfüllung dieser Bedingung bindet im Fall linearer Knotenelemente wiederum alle zur Verfügung stehenden Freiheitsgrade (drei Feldkomponenten pro Knoten), so daß auch diese Lösungen nicht ausreichend gut approximiert werden können und daher bei Frequenzen  $\omega \neq 0$  auftreten (vgl. Kap. 3.2.1).

Die Gemeinsamkeit der statischen Lösungen der Gleichung (2.22) und der Lösungen der Form (A.8) für Gleichung (A.7) liegt darin, daß beide Lösungsmengen nicht die Bedingung der Divergenzfreiheit erfüllen, da diese aus (2.22) bzw. aus (A.7) nur für  $\omega \neq 0$  folgt. Eine zuverlässige Methode zur Vermeidung nichtphysikalischer Lösungen muß also sicherstellen, daß auch für  $\omega = 0$   $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0$  gilt. Dies läßt sich folgendermaßen bewerkstelligen: Sei

$$\vec{F} = (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \varepsilon^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{H}} \right] - \omega^2 \underline{\mu} \underline{\vec{H}}. \quad (\text{A.10})$$

$\vec{F}$  entspricht also der linken Seite der Gleichung (2.22). Es folgt

$$(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \vec{F} = -\omega^2 (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}}. \quad (\text{A.11})$$

Äquivalent zur Gleichung (2.22) ist die Gleichung  $\vec{F} = 0$ . Aus dieser Gleichung folgt mit (A.11)  $(\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \underline{\mu} \underline{\vec{H}} = 0$ , aber nur für  $\omega \neq 0$ . Umgekehrt folgt aus dieser Divergenzbedingung zusammen mit (A.11) zunächst

$\frac{\partial}{\partial x}F_x + \frac{\partial}{\partial y}F_y = jkF_z$ . Daraus läßt sich mit den Gleichungen  $F_x = 0$  und  $F_y = 0$  die fehlende Gleichung  $F_z = 0$  herleiten, allerdings nur für  $k \neq 0$ . Wird also in der Vektorgleichung (2.22) die  $z$ -Komponente durch die Divergenzbedingung ersetzt, so sind für  $k \neq 0$  sowohl (2.22) als auch die Divergenzbedingung erfüllt.

Die Diskretisierung der modifizierten Vektorgleichung mit Knotenelementen erfolgt wie in Kap. 3.2.1 beschrieben. Da die  $x$ - und  $y$ -Komponenten dieser Gleichung sich gegenüber (2.22) nicht verändert haben, entsprechen ihre diskretisierten Äquivalente den  $x$ - und  $y$ -Komponenten der Gleichung (3.4). Die Diskretisierung der neuen  $z$ -Komponente nach Kap. 3.2.1 ergibt

$$\forall p : \sum_{q=1}^N \iint_A [(\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z)v_p] \cdot u_q(\mu\vec{H}_q) dA - \oint_{\partial A} v_p u_q \vec{n}(\mu\vec{H}_q) ds = 0. \quad (\text{A.12})$$

Durch diese Modifikation wird das Auftreten nichtphysikalischer Lösungen verhindert. Abb. A.1 zeigt den Verlauf der Funktion  $R(k)$  bei Anwendung dieser Methode auf den Hohlleiter aus Kap. 3.2.1.

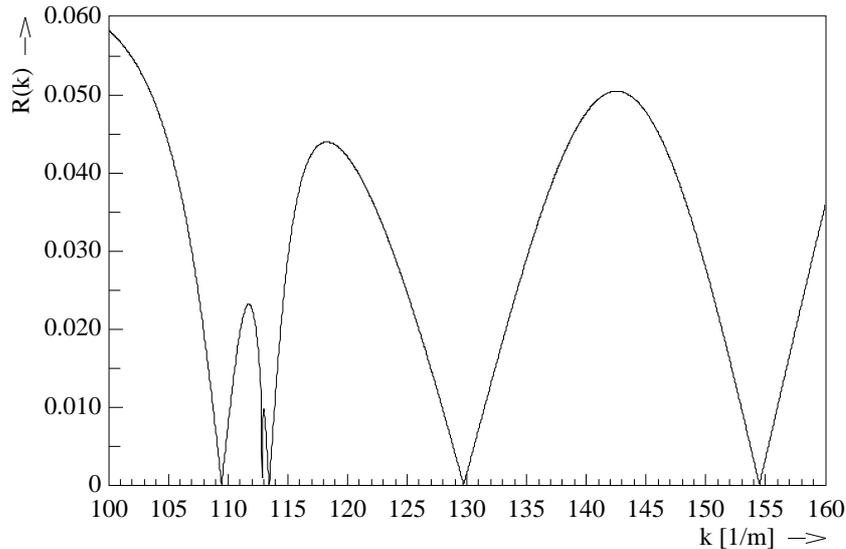


Abbildung A.1:  $R(k)$  für einen rechteckigen Hohlleiter ( $50 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ ) bei einer Kreisfrequenz von  $\omega = 50 \text{ GHz}$ , berechnet mit (A.12) und den  $x$ - und  $y$ -Komponenten von (3.4)

Die Nullstellen von  $R(k)$  entsprechen nun den gesuchten Lösungen (bei  $k \approx 113 \text{ m}^{-1}$  ist eine diskretisierungsbedingte Trennung der  $\text{TE}_{11}$ - und  $\text{TM}_{11}$ -Moden zu sehen). Dies ist auch bei komplexeren Anordnungen der Fall. Bei Anwendung dieses Verfahrens auf die Berechnung von TEM- oder Quasi-TEM-Wellen stellt sich jedoch heraus, daß sich die Ausbreitungskonstante

$k$  nur ungenau bestimmen läßt. So ergibt sich beispielsweise für eine Koaxialleitung (Radius Außenleiter 10 mm, Radius Innenleiter 1 mm,  $\varepsilon_r = 1$ , Frequenz  $f = 10$  GHz) bei einer Diskretisierung mit 377 Knoten die Lösung  $k = 179.5 \text{ m}^{-1}$ , was von der exakten Lösung  $k = 209.6 \text{ m}^{-1}$  um mehr als 14 % abweicht. Diese Abweichung wird größer bei zunehmender Frequenz oder bei abnehmenden Querschnittsabmessungen. Das ist eine Folge des Unvermögens linearer Knotenelemente, rotationsfreie Felder darzustellen. Das in diesem Kapitel beschriebene Verfahren eignet sich daher nur für Wellenleiter, die – abgesehen von einer äußeren, leitenden Begrenzung – keine leitenden Strukturen enthalten, wie z. B. Hohlleiter und dielektrische Wellenleiter, die keine TEM- oder Quasi-TEM-Moden führen.

## A.2 Berechnung von TEM-Wellen mit edge elements

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß die Berechnung einer TEM-Lösung mit edge elements immer den exakten Wert für die Ausbreitungskonstante ( $k = \frac{\omega}{c_0} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ ) liefert, unabhängig von der Wahl der Diskretisierung. Die Eigenschaft läßt sich herleiten, indem ein Leitungssystem mit  $N_c$  idealen Leitern, die von einer ideal leitenden Schirmung umgeben sind, betrachtet wird. Zwischen den Leitern und der Schirmung befindet sich ein homogenes, isotropes Medium mit der Permittivität  $\varepsilon$  und der Permeabilität  $\mu$ . Die Diskretisierung bestehe aus  $N_t$  Dreiecken mit  $N_n$  inneren Knoten (also ohne auf der Schirmung oder den Leitern liegende Knoten) und  $N_e$  inneren Kanten. In Gleichung (3.13) werden demnach  $N_n$  Knotentestfunktionen ( $1 \leq p \leq N_n$ ) und  $N_e$  Kantentestfunktionen ( $N_n + 1 \leq p \leq N_n + N_e$ ) eingesetzt. Für die Kantentestfunktionen läßt sich aus (3.13) unter der Bedingung  $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$  (TEM-Fall) die folgende Gleichung herleiten:

$$\forall p, N_n + 1 \leq p \leq N_n + N_e : \quad \iint_A \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} \times \vec{v}_p) (\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{E}}^{(t)}) - jk \vec{v}_p \vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_z \right\} dA = 0. \quad (\text{A.13})$$

Dabei steht  $A$  für den gesamten Leitungsquerschnitt.

Die  $N_e$  Einzelgleichungen, die in (A.13) enthalten sind, lassen sich erfüllen, indem die Ansatzkoeffizienten  $\alpha_q$  aus (3.11) so gewählt werden, daß  $\underline{\vec{E}}$  von vornherein den Gleichungen  $\underline{E}_z = 0$  und  $\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{E}}^{(t)} = 0$  genügt.  $\underline{E}_z$  ist bei den hier gewählten Ansatzfunktionen eine stetige, stückweise lineare Funktion. Daher läßt sich  $\underline{E}_z = 0$  erfüllen, indem  $\underline{E}_z$  an jedem Knoten auf 0 gesetzt wird. Dies ergibt  $N_n$  Gleichungen. Für die Knoten auf der Schirmung oder den Leitern müssen keine entsprechenden Gleichungen aufgestellt werden, da auf idealen Leitern immer  $\underline{E}_z = 0$  gilt und deswegen keine Ansatzkoeffizienten für  $\underline{E}_z$  dort vorgesehen werden.

Der Ausdruck  $\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{E}}^{(t)}$  besitzt nur eine  $z$ -Komponente und ist bei edge elements konstant innerhalb eines Dreiecks. Die Bedingung  $\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{E}}^{(t)} = 0$  läßt sich daher durch  $N_t$  Einzelgleichungen erfüllen. Von diesen ist eine jedoch überflüssig: Gilt  $\vec{\nabla}^{(t)} \times \underline{\vec{E}}^{(t)} = 0$  innerhalb eines Dreiecks, so ist dies bei edge elements äquivalent zur Forderung  $\oint_{\partial\Delta} \underline{\vec{E}} d\vec{s} = 0$ , wobei sich die Integration über den Rand des Dreiecks erstreckt. Addition aller  $N_t$  Gleichungen dieser Form ergibt

$$\oint_{\partial A} \underline{\vec{E}} d\vec{s} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Diese Gleichung ist für die hier diskutierten Anordnungen aber a priori erfüllt, da die tangentielle  $\underline{\vec{E}}$ -Feldkomponente auf dem leitenden Rand verschwindet und daher keine Ansatzkoeffizienten dort vorgesehen werden ( $\Rightarrow$  die Tangentialkomponente des Ansatzes (3.11) ist 0 auf dem Rand). Eine der  $N_t$  Gleichungen kann also gestrichen werden, da sie aus den anderen  $N_t - 1$  Gleichungen folgt. Damit ergibt sich eine Gesamtanzahl von  $N_n + N_t - 1$  Gleichungen, die zur Erfüllung von (A.13) erforderlich sind.

In FEM-Netzen sind die Anzahl der Dreiecke, Kanten und Knoten miteinander verknüpft. Aus geometrischen Überlegungen folgt

$$N_t = N_e - N_n - N_c + 1 \quad \Rightarrow \quad (\text{A.15})$$

$$N_n + N_t - 1 = N_e - N_c. \quad (\text{A.16})$$

Die  $N_e$  Einzelgleichungen, aus denen (A.13) besteht, lassen sich also durch  $N_e - N_c$  äquivalente Gleichungen ersetzen. Die Dimension des Lösungsraumes dieses Gleichungssystems beträgt daher  $N_c$ . Der Lösungsraum enthält somit  $N_c$  linear unabhängige Lösungen, die den bei  $N_c$  Leitern zu erwartenden TEM-Lösungen entsprechen. Damit wurde gezeigt, daß für den Fall  $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$  eine entsprechende Anzahl von Lösungen auftritt, unabhängig von der Wahl der Diskretisierung.

### A.3 Genauigkeit von edge elements in anisotropen Netzen

Für manche Feldberechnungsprobleme sind FEM-Netze wünschenswert, deren Dreiecke in eine bestimmte Richtung gestreckt sind, so daß das Netz eine Vorzugsrichtung erhält. Beim rechteckigen Hohlleiter beispielsweise ist die  $\text{TE}_{10}$ -Lösung von der Gestalt  $\underline{H}_z = \underline{H}_{z_0} \sin(ax)$ . Die Feldverteilung ist also in einer Richtung (hier:  $y$ ) konstant, so daß die Verwendung einer Diskretisierung aus langgezogenen Dreiecken, die in  $y$ -Richtung ausgerichtet sind, als sinnvoll erscheint. Bei den in Kap. 2.2.1 beschriebenen  $C^0$ -Elementen (in Verbindung mit der Spurious-Mode-Unterdrückung aus Anhang A.1) führt dies im Vergleich zu einem Netz mit gleich vielen, gleichseitigen Dreiecken

tatsächlich zu einer Erhöhung der Genauigkeit des berechneten  $k$ -Werts. Bei den hier präferierten edge elements kommt es dagegen überraschenderweise zu einer Verschlechterung. Für den Spezialfall der TEM-Wellen konnte diese Beobachtung mathematisch begründet werden. Hierfür wird die Eigenschaft der edge elements verwendet, im TEM-Fall (also für  $\kappa = 0$ ) zu konstanten Elementen zu werden ( $\Rightarrow \underline{E}_x$  und  $\underline{E}_y$  aus (3.9) konstant innerhalb eines Dreiecks). Nach Kap. 3.2.2 ist die tangentielle Komponente von  $\vec{E}$  längs der Dreieckskanten konstant, während die Normalkomponente linear mit einer Steigung proportional zu  $\frac{\partial}{\partial x}\underline{E}_y - \frac{\partial}{\partial y}\underline{E}_x$  verläuft, im TEM-Fall also auch konstant längs der Kanten ist. Da edge elements lineare Elemente sind, folgt  $\underline{E}_x, \underline{E}_y = \text{const.}$  auch im Inneren des Dreiecks.

Sei nun das betrachtete Dreieck so klein, daß das gesuchte TEM-Feld innerhalb des Dreiecks näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden kann. Wegen der Eigenschaften von TEM-Wellen haben  $\underline{E}_x$  und  $\underline{E}_y$  dann die Form

$$\underline{E}_x = a_1x + a_2y + a_3, \quad \underline{E}_y = a_2x - a_1y + a_4. \quad (\text{A.17})$$

Nach geeigneter Drehung des Koordinatensystems gilt  $a_2 = 0$ . Außerdem wird der Koordinatenursprung in den Schwerpunkt des Dreiecks gelegt ( $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$  mit den Eckpunkten  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ).

Ein Maß für die Abweichung der berechneten von der tatsächlichen Lösung ist das Integral über das Betragsquadrat der Differenz:

$$\begin{aligned} F &= \iint_{\Delta} \left( |\underline{E}_x - \underline{E}_x^{(e)}|^2 + |\underline{E}_y - \underline{E}_y^{(e)}|^2 \right) dA \\ &\stackrel{(\text{A.17})}{=} \frac{1}{12} A_{\Delta} \sum_{i=1}^3 \left( |a_1x_i + a_3 - \underline{E}_x^{(e)}|^2 + |-a_1y_i + a_4 - \underline{E}_y^{(e)}|^2 \right) \\ &\quad + \frac{3}{4} A_{\Delta} \left( |a_3 - \underline{E}_x^{(e)}|^2 + |a_4 - \underline{E}_y^{(e)}|^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Die Integration erstreckt sich dabei über das betrachtete Dreieck;  $A_{\Delta}$  ist die Dreiecksfläche.  $\underline{E}_x^{(e)}$  und  $\underline{E}_y^{(e)}$  stellen die mit edge elements berechnete, innerhalb des Dreiecks konstante Approximation dar.  $F$  wird minimal für  $\underline{E}_x^{(e)} = a_3$  und  $\underline{E}_y^{(e)} = a_4$ . Für diesen Fall folgt

$$F = \frac{A_{\Delta}}{12} |a_1|^2 (|\vec{r}_1|^2 + |\vec{r}_2|^2 + |\vec{r}_3|^2). \quad (\text{A.19})$$

Weil der Dreiecksschwerpunkt im Ursprung liegt, lassen sich  $\vec{r}_3$  und  $A_{\Delta}$  durch  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  ausdrücken, was eine Funktion  $F(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  ergibt. Da die Minimierung dieser Funktion auf ein Dreieck der Fläche 0 führt, ist es erforderlich,  $F$  als Funktion von  $|\vec{r}_1|$ ,  $A_{\Delta}$  und dem Winkel  $\alpha$  zwischen  $\vec{r}_1$  und  $\vec{r}_2$  darzustellen. Bei festgehaltenem  $A_{\Delta}$  wird  $F$  dann minimal für  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2|$  und  $\alpha = 120^\circ$ ,

woraus auch  $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_3|$  folgt. Bei der Behandlung von TEM-Wellen mit edge elements bieten gleichseitige Dreiecke somit den kleinsten Berechnungsfehler bei gegebener Dreiecksfläche.

Aufgrund der hier beschriebenen theoretischen und experimentellen Ergebnisse wurde die Verwendung anisotroper Netze nicht weiter in Betracht gezogen.

#### A.4 Herleitung einer Randintegralgleichung für $\vec{n} \times \underline{\vec{E}}$ und $\vec{n} \times \underline{\vec{H}}$

Zur Umwandlung von (3.104) in eine Randintegralgleichung dienen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \iint_A \vec{P}(\vec{\nabla}^{(t)} \times \vec{Q}) \, dA &= \iint_A \left[ \vec{\nabla}^{(t)}(\vec{Q} \times \vec{P}) + \vec{Q}(\vec{\nabla}^{(t)} \times \vec{P}) \right] \, dA \\ &= \iint_A \vec{Q}(\vec{\nabla}^{(t)} \times \vec{P}) \, dA + \oint_{\partial A} \vec{n}(\vec{Q} \times \vec{P}) \, ds, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

$$\iint_A \vec{P}(\vec{e}_z \times \vec{Q}) \, dA = - \iint_A \vec{Q}(\vec{e}_z \times \vec{P}) \, dA. \quad (\text{A.21})$$

Daraus folgt die partielle Integrationsregel

$$\begin{aligned} \iint_A \vec{P} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{Q} \right] \, dA &= \iint_A \vec{Q} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{P} \right] \, dA \\ &\quad + \oint_{\partial A} \vec{n}(\vec{Q} \times \vec{P}) \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Die zweimalige Anwendung dieser Regel führt zur folgenden Gleichung:

$$\begin{aligned} &\iint_A \vec{G} \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{E}} \right] - \omega^2 \varepsilon \mu \underline{\vec{E}} \right\} \, dA \\ &\quad - \iint_A \underline{\vec{E}} \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{G} \right] - \omega^2 \varepsilon \mu \vec{G} \right\} \, dA \\ &= \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \underline{\vec{E}} \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{G} \right] \right\} \, ds \\ &\quad - \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \vec{G} \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{E}} \right] \right\} \, ds. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Zusammen mit (3.104) und (3.105) ergibt sich

$$\begin{aligned} c(\vec{r}_p) \cdot \vec{a} \underline{\vec{E}}(\vec{r}_p) &= \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \underline{\vec{E}} \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \times \vec{G} \right] \right\} \, ds \\ &\quad - \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \vec{G} \times \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \underline{\vec{E}} \right] \right\} \, ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \underline{\vec{E}} \times \left[ -(\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z)G \times \vec{a} \right] \right\} ds \\
&\quad - \oint_{\partial A} \vec{n} \left\{ \vec{G} \times \left[ -j\omega\mu\underline{\vec{H}} \right] \right\} ds \\
&= \oint_{\partial A} \left[ \vec{a} \times (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z)G \right] (\vec{n} \times \underline{\vec{E}}) ds \\
&\quad - j\omega\mu \oint_{\partial A} \vec{G}(\vec{n} \times \underline{\vec{H}}) ds. \tag{A.24}
\end{aligned}$$

Die Beziehung (A.24) stellt eine Randintegralgleichung für  $\vec{n} \times \underline{\vec{E}}$  und  $\vec{n} \times \underline{\vec{H}}$  dar.

## B Numerische Methoden

### B.1 Numerische Berechnung der BEM-Randintegrale

Die in Abschnitt 3.3.7 beschriebene BEM beinhaltet die explizite Erfüllung der Stetigkeitsbedingungen für die Feldkomponenten  $\underline{E}_s$ ,  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$ . Daher müssen durch Anwendung von (3.116) und (3.117) Gleichungen aufgestellt werden, die diese Feldkomponenten mit den Unbekannten  $I_q^{(s)}$  und  $I_q^{(z)}$  in Beziehung setzen. Dazu werden die  $s$ - und  $z$ -Komponenten von (3.116) und (3.117) mit den in Kap. 3.4 definierten Testfunktionen multipliziert und längs des Gebietsrandes integriert. Die dabei auftretenden Randintegrale über die vektorielle Greensche Funktion  $\vec{G}$  aus Gleichung (3.106) und über die skalare Greensche Funktion  $G$  der zweidimensionalen Helmholtz-Gleichung lassen sich auf den folgenden Satz von Integralen zurückführen:

$$\left. \begin{aligned} I_{00} &= \int_{C_p} G(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p, & I_{10} &= \int_{C_p} \frac{\partial G}{\partial n_p}(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p, \\ I_{01} &= \int_{C_p} s_p \cdot G(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p, & I_{11} &= \int_{C_p} s_p \cdot \frac{\partial G}{\partial n_p}(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p, \\ I_{02} &= \int_{C_p} s_p^2 \cdot G(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p, & I_{12} &= \int_{C_p} s_p^2 \cdot \frac{\partial G}{\partial n_p}(\vec{r}_p, \vec{r}_q) \, ds_p. \end{aligned} \right\} \quad (\text{B.1})$$

Dabei steht  $C_p$  für das Randelement  $p$ . Die Integrationsvariable  $s_p$  stellt den Abstand des Punktes  $\vec{r}_p$  vom Anfangspunkt dieses Randelementes (im Sinne eines mathematisch positiven Umlaufs um das betreffende Gebiet) dar. Der Quellpunkt  $\vec{r}_q$  entspricht dem Ort eines Stromfadens und liegt auf einem Elementmittelpunkt ( $\vec{r}_q^{(s)}$ ,  $(s)$ -Stromfaden) oder einem Elementanfangspunkt ( $\vec{r}_q^{(z)}$ ,  $(z)$ -Stromfaden).

Bei der Auswertung dieser Integrale muß der Fall, daß  $\vec{r}_q$  auf dem Element  $p$  liegt, gesondert behandelt werden, da dies zu einer Singularität von  $G$  bzw.  $\partial G/\partial n_p$  bei  $\vec{r}_p = \vec{r}_q$  führt. Liegt  $\vec{r}_q$  nicht auf Element  $p$ , sind die Integrale in (B.1) nicht geschlossen lösbar. Daher wird ein adaptiver numerischer Integrationsalgorithmus angewendet, der folgendermaßen abläuft: Das Element wird durch eine Stützstelle  $s_1$  in zwei gleich lange Teile zerlegt, so daß inklusive der beiden Endpunkte drei Stützstellen  $s_0$ ,  $s_1$  und  $s_2$  zur Verfügung stehen. Mit Hilfe der Trapez-Regel wird ein erster Näherungswert  $\tilde{I}_{\text{Trapez}}$  des Integrals berechnet:

$$\tilde{I}_{\text{Trapez}} = \frac{h}{2} [f(s_0) + 2f(s_1) + f(s_2)]. \quad (\text{B.2})$$

Dabei ist  $h$  der Abstand zwischen den Stützstellen und  $f(s)$  der Integrand. Die Auswertung des Integranden erfordert die Berechnung der Bessel-Funktionen  $K_0(z)$  und  $K_1(z)$  mit komplexem Argument (siehe Anhang B.2).

Ein weiterer Näherungswert  $\tilde{I}_{\text{Simpson}}$  wird mit der Simpson-Regel ermittelt:

$$\tilde{I}_{\text{Simpson}} = \frac{h}{3} [f(s_0) + 4f(s_1) + f(s_2)]. \quad (\text{B.3})$$

Als Maß für die Genauigkeit dieser beiden Werte wird ihre relative Abweichung herangezogen. Weitere Elementunterteilungen werden nur vorgenommen, wenn

$$\left| \tilde{I}_{\text{Simpson}} - \tilde{I}_{\text{Trapez}} \right| > \gamma \left| \tilde{I}_{\text{Trapez}} \right| \quad (\text{B.4})$$

gilt, wobei  $\gamma$  dem gewünschten maximalen relativen Fehler entspricht. Für praktische Anwendungen hat sich eine Schranke von  $\gamma = 10^{-4}$  als ausreichend erwiesen.

Ist (B.4) erfüllt, müssen weitere Stützstellen positioniert werden. Dazu werden beide Teilelemente in eine Liste noch zu bearbeitender Integrationsintervalle eingetragen. Ein Intervall  $n$  in dieser Liste wird dann folgendermaßen bearbeitet:

1. Positioniere eine neue Stützstelle  $s_1^{(n)}$  auf dem Mittelpunkt des Intervalls  $n$ .
2. Berechne  $\tilde{I}_{\text{Trapez}}^{(n)}$  und  $\tilde{I}_{\text{Simpson}}^{(n)}$  für dieses Intervall.
3. Aktualisiere  $\tilde{I}$ , den Näherungswert für das Gesamtintegral über das ganze Randelement. Zu Beginn der Abarbeitung der Intervallliste wird  $\tilde{I}$  mit dem  $\tilde{I}_{\text{Trapez}}$ -Wert des Randelementes (Gleichung (B.2)) initialisiert. Die Aktualisierung erfordert die Berücksichtigung der neuen Stützstelle und erfolgt ebenfalls durch Anwendung der Trapez-Regel:

$$\tilde{I} + \frac{h^{(n)}}{2} [-f(s_0^{(n)}) + 2f(s_1^{(n)}) - f(s_2^{(n)})] \rightarrow \tilde{I}. \quad (\text{B.5})$$

$s_0^{(n)}$ ,  $s_1^{(n)}$  und  $s_2^{(n)}$  sind die drei Stützstellen des Intervalls  $n$  und  $h^{(n)}$  ist ihr Abstand.

4. Verfeinere das Intervall  $n$ , wenn

$$\left| \tilde{I}_{\text{Simpson}}^{(n)} - \tilde{I}_{\text{Trapez}}^{(n)} \right| > \frac{l_n}{l} \gamma \left| \tilde{I} \right| \quad (\text{B.6})$$

gilt.  $l_n$  entspricht dabei der Länge des Intervalls  $n$  und  $l$  der Länge des gesamten Randelementes. Die Begründung für den Faktor  $l_n/l$  ist die Folgende:  $\tilde{I}$  ist der aktuelle Näherungswert für das Gesamtintegral.  $\gamma|\tilde{I}|$  ist demnach der zulässige absolute Integrationsfehler. Dieser wird auf die einzelnen Integrationsintervalle gemäß ihrer Länge verteilt. Dadurch wird bei Intervallen mit kleinen Funktionswerten  $f(s)$  ein höherer relativer Fehler erlaubt als im Fall großer Funktionswerte. Die Kriterien

(B.4) und (B.6) sind identisch, wenn das Integrationsintervall  $n$  dem gesamten Element entspricht, da  $\tilde{I}$  zu Beginn der Unterteilungen mit  $\tilde{I}_{\text{Trapez}}$  initialisiert wird.

5. Soll Intervall  $n$  unterteilt werden, wird es in der Liste zu bearbeitender Intervalle durch die beiden (gleich langen) Teilintervalle ersetzt. Muß es nicht unterteilt werden, wird der mit der Trapez-Regel berechnete Beitrag des Intervalls zu  $\tilde{I}$  durch den aus der genaueren Simpson-Regel folgenden Beitrag ersetzt. Aus der Differenz zwischen (B.3) und (B.2) folgt die Ersetzungsregel

$$\tilde{I} + \frac{h^{(n)}}{6} \left[ -f(s_0^{(n)}) + 2f(s_1^{(n)}) - f(s_2^{(n)}) \right] \rightarrow \tilde{I}. \quad (\text{B.7})$$

Die Simpson-Regel kann nicht bereits in (B.5) verwendet werden, da sie eine ungerade Anzahl von Stützstellen erfordert und daher die Hinzunahme einer weiteren, einzelnen Stützstelle nicht berücksichtigen kann. Die Aktualisierung von  $\tilde{I}$  kann somit zunächst nur mit der Trapez-Regel erfolgen. Erst wenn feststeht, daß innerhalb eines Intervalls keine weiteren Stützstellen mehr positioniert werden, kann zur genaueren Simpson-Regel übergegangen werden.

Das Verfahren bricht ab, wenn die Bedingung (B.6) für kein Integrationsintervall mehr erfüllt ist. Das Resultat ist eine nichtäquidistante Stützstellenverteilung, die dort, wo ein höherer Integrationsfehler zu erwarten ist, eine erhöhte Stützstellendichte aufweist. Der mitgeführte Wert  $\tilde{I}$  entspricht dann der Summe der mit der Simpson-Regel berechneten Beiträge der Integrationsintervalle.

Liegt der Quellpunkt  $\vec{r}_q$  auf dem Element  $p$  (der Fall, daß  $\vec{r}_q$  auf den Endpunkten dieses Elementes liegt, sei darin eingeschlossen), kann das oben beschriebene Verfahren nicht mehr sinnvoll angewendet werden, da der Integrand am Punkt  $\vec{r}_q$  singulär wird. Daher ist für diesen Fall eine andere Vorgehensweise erforderlich. Für die Integrale  $I_{00}$ ,  $I_{01}$  und  $I_{02}$  gilt dann nach Gleichung (3.24)

$$I_{00} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l K_0(-j\kappa|s_p - s_q|) ds_p, \quad (\text{B.8})$$

$$I_{01} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l s_p \cdot K_0(-j\kappa|s_p - s_q|) ds_p, \quad (\text{B.9})$$

$$I_{02} = \frac{1}{2\pi} \int_0^l s_p^2 \cdot K_0(-j\kappa|s_p - s_q|) ds_p, \quad (\text{B.10})$$

wobei  $l$  die Länge des Randelementes  $p$  und  $s_q$  der Abstand des Quellpunkts  $\vec{r}_q$  vom Anfangspunkt des Randelementes ist.  $s_q$  kann also nur die Werte 0,

$l$  ( $(z)$ -Stromfaden) oder  $l/2$  ( $(s)$ -Stromfaden) annehmen. Mittels Variablen-  
substitution lassen sich  $I_{00}$ ,  $I_{01}$  und  $I_{02}$  durch Integrale der Gestalt

$$I'_{00} = \int_0^{l'} K_0(-j\kappa x) dx, \quad (\text{B.11})$$

$$I'_{01} = \int_0^{l'} x K_0(-j\kappa x) dx, \quad (\text{B.12})$$

$$I'_{02} = \int_0^{l'} x^2 K_0(-j\kappa x) dx \quad (\text{B.13})$$

ausdrücken.

$I'_{00}$  wird mit zwei verschiedenen Verfahren berechnet, je nachdem, in welchem Wertebereich das Argument  $-j\kappa x$  liegt. Für  $|\kappa l'| \leq 6$  wird eine Reihenentwicklung von  $K_0$  integriert. Diese läßt sich aus der Definition von  $K_0$ ,

$$K_0(z) = -I_0(z) \left[ \ln \frac{z}{2} + C \right] + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \Phi(n) \left( \frac{z}{2} \right)^{2n}, \quad (\text{B.14})$$

$$\Phi(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}, \quad (\text{B.15})$$

herleiten, indem die Funktion  $I_0(z)$  (modifizierte Besselsche Funktion erster Gattung nullter Ordnung) durch ihre Taylorreihendarstellung

$$I_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!^2} \left( \frac{z}{2} \right)^{2n} \quad (\text{B.16})$$

ersetzt wird. Die beiden unendlichen Summen in (B.14) und (B.16) werden nach dem 10. Glied abgebrochen. Der entstehende Näherungsausdruck läßt sich trotz des  $\ln$ -Terms in (B.14) analytisch integrieren.

Für  $|\kappa l'| > 6$  ist die Genauigkeit dieser schnellen Methode nicht mehr ausreichend. In diesem Fall wird die Beziehung

$$I'_{00} = \int_0^{l'} K_0(-j\kappa x) dx = l' K_0(-j\kappa l') - \int_0^{l'} j\kappa x K_1(-j\kappa x) dx \quad (\text{B.17})$$

zur Berechnung von  $I'_{00}$  herangezogen (folgt mittels partieller Integration aus  $K'_0(z) = -K_1(z)$ ). Da der Ausdruck  $-j\kappa x K_1(-j\kappa x)$  für  $x \rightarrow 0$  gegen 1 konvergiert und nicht divergiert wie  $K_0(-j\kappa x)$ , kann das Integral über diesen Ausdruck mit dem oben beschriebenen adaptiven Integrationsverfahren bestimmt werden. Gegenüber der obigen Beschreibung erfolgt lediglich die Modifikation, daß der mitgeführte Wert  $\tilde{I}$  nicht mit  $\tilde{I}_{\text{Trapez}}$ , sondern mit  $l' K_0(-j\kappa l') + \tilde{I}_{\text{Trapez}}$  initialisiert wird. Damit bezieht sich (B.6) auf einen Näherungswert von  $I'_{00}$  und nicht auf einen Näherungswert des Integrals über

$-j\kappa x K_1(-j\kappa x)$ , wodurch gewährleistet wird, daß die Berechnung nicht mit unnötig hoher Genauigkeit durchgeführt wird.

Durch Anwendung der Beziehung  $zK_1'(z) + K_1(z) = -zK_0(z)$  kann das Integral  $I'_{01}$  im Gegensatz zu  $I'_{00}$  analytisch berechnet werden:

$$I'_{01} = \frac{l'}{j\kappa} \left[ K_1(-j\kappa l') + \frac{1}{j\kappa l'} \right]. \quad (\text{B.18})$$

$I'_{02}$  kann mit Hilfe der gleichen Beziehung aus  $I'_{00}$  abgeleitet werden:

$$I'_{02} = \frac{l'}{\kappa^2} K_0(-j\kappa l') + \frac{l'^2}{j\kappa} K_1(-j\kappa l') - \frac{1}{\kappa^2} I'_{00}. \quad (\text{B.19})$$

Die Integrale  $I_{10}$ ,  $I_{11}$  und  $I_{12}$  können für den Fall, daß  $\vec{r}_q$  auf dem Element  $p$  liegt, durch Grenzwertbildung analytisch berechnet werden. Wegen

$$\frac{\partial G}{\partial n_p}(\vec{r}_p, \vec{r}_q) = \frac{\vec{n}_p(\vec{r}_p - \vec{r}_q)}{2\pi|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} j\kappa K_1(-j\kappa|\vec{r}_p - \vec{r}_q|) \quad (\text{B.20})$$

liefert nur die Singularität bei  $\vec{r}_p = \vec{r}_q$  einen Beitrag, da der Normalenvektor  $\vec{n}_p$  senkrecht auf dem Element steht ( $\Rightarrow \vec{n}_p(\vec{r}_p - \vec{r}_q) = 0$ ). Der Beitrag der Singularität läßt sich durch Modifikation des Integrationsweges wie in Abb. B.1 dargestellt ermitteln.

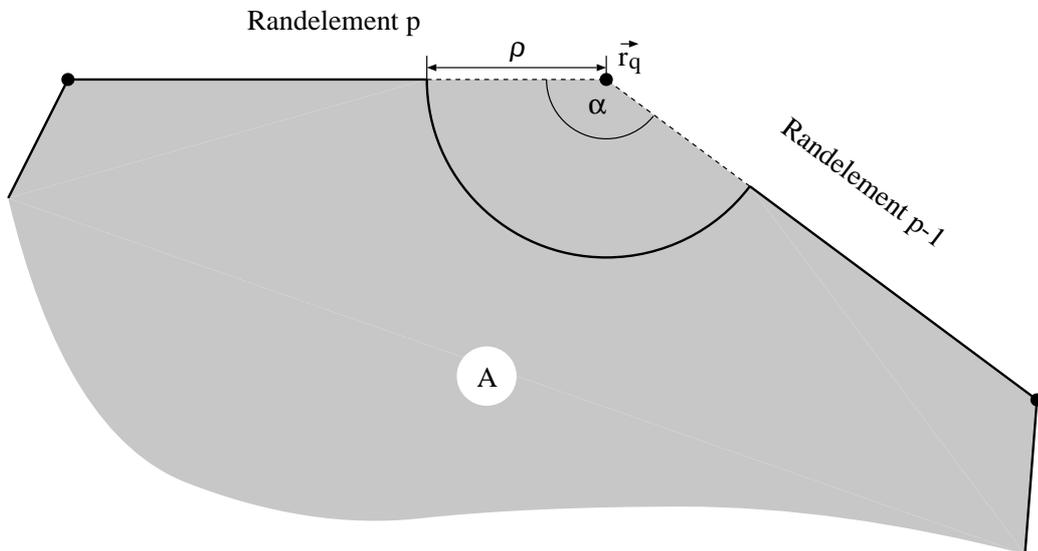


Abbildung B.1: Integrationsweg zur Berechnung der Integrale  $I_{10}$ ,  $I_{11}$ ,  $I_{12}$

Die Abbildung zeigt den Fall, daß  $\vec{r}_q$  auf dem Berührungspunkt zweier Elemente liegt. Die Singularität bei  $\vec{r}_q$  wird mit einem kreisförmigen Bogen

mit dem Radius  $\rho$  umgangen. Der Bogen muß innerhalb des Gebietes  $A$  verlaufen, da bei der Herleitung von Gleichung (3.111) vorausgesetzt wurde, daß der Punkt  $\vec{r}_p$ , der diesen Integrationsweg entlangläuft, stets innerhalb des Gebietsrandes liegt. Würde der Integrationsweg außerhalb von  $A$  um den Punkt  $\vec{r}_q$  geführt, ergäbe sich ein anderer Wert für das Integral.

Für das Integral über  $\frac{\partial G}{\partial n_p}$  entlang des Bogens gilt

$$\begin{aligned} \int_{\text{Bogen}} \frac{\partial G}{\partial n_p}(\vec{r}_p, \vec{r}_q) ds_p &= \int_{\text{Bogen}} \frac{-\rho}{2\pi\rho} j\kappa K_1(-j\kappa\rho) ds_p \\ &= -\frac{j\kappa}{2\pi} K_1(-j\kappa\rho) \int_{\text{Bogen}} ds_p = -\frac{j\kappa\rho\alpha}{2\pi} K_1(-j\kappa\rho). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Für den Grenzübergang  $\rho \rightarrow 0$  folgt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\text{Bogen}} \frac{\partial G}{\partial n_p} ds_p = \frac{\alpha}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{-j\kappa\rho}{-j\kappa\rho} = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad (\text{B.22})$$

da sich  $K_1(z)$  für  $z \rightarrow 0$  wie  $1/z$  verhält. Liegt  $\vec{r}_q$  auf dem Mittelpunkt des Elementes, ist  $\alpha = \pi$ , woraus  $I_{10} = \frac{1}{2}$  folgt. Für  $I_{11}$  und  $I_{12}$  liefert eine analoge Vorgehensweise die Werte  $I_{11} = \frac{l}{4}$  und  $I_{12} = \frac{l^2}{8}$  ( $l =$  Länge des Randelementes). Liegt  $\vec{r}_q$  auf dem Anfangspunkt des Elementes und ist  $\alpha$  der Winkel zum vorhergehenden Element  $p - 1$ , ergibt sich  $I_{10} = \frac{\alpha}{4\pi}$ ,  $I_{11} = 0$  und  $I_{12} = 0$  (wegen  $s_p = 0$  am Anfang des Elementes). Der Wert für  $I_{10}$  ist nur halb so groß wie der mit Gleichung (B.22) ermittelte, da das Integral in die Beiträge der Elemente  $p$  und  $p - 1$ , die beide an  $\vec{r}_q$  grenzen, aufgeteilt werden muß. Liegt  $\vec{r}_q$  auf dem Endpunkt des Elementes  $p$ , gilt entsprechend  $I_{10} = \frac{\alpha}{4\pi}$ ,  $I_{11} = l \frac{\alpha}{4\pi}$  und  $I_{12} = l^2 \frac{\alpha}{4\pi}$ , wobei  $\alpha$  jetzt den Winkel zwischen den Elementen  $p$  und  $p + 1$  bezeichnet.

## B.2 Numerische Berechnung der Bessel-Funktionen $K_0$ und $K_1$

Die Berechnung der Funktionen  $K_0(z)$  und  $K_1(z)$  für Argumente  $z \in \mathbb{C}$  erfolgt mit dem Algorithmus 484 der Association for Computing Machinery (ACM), der in [4] beschrieben ist.

Für kleine Argumente ( $|z| < 4.3$ ) werden die Reihenentwicklungen aus (B.14) und (B.16) sowie die entsprechende Reihe für  $K_1$  zugrunde gelegt. Für mittlere Argumente ( $4.3 \leq |z| \leq 14$ ) ist es nach den Untersuchungen in [4] effizienter, auf Integraldarstellungen für  $K_0$  und  $K_1$  zurückzugreifen, die mittels Gauß-Hermite-Quadratur ausgewertet werden. Für große Argumente ( $|z| > 14$ ) werden asymptotische Entwicklungen (Approximation von  $\sqrt{z}e^z K_n(z)$  durch ein Polynom in  $\frac{1}{z}$ ) verwendet. Für alle drei Wertebereiche wird in [4] ein maximaler relativer Fehler von unter  $4 \cdot 10^{-10}$  angegeben.

## B.3 Berechnung des *RI*-Modells

### B.3.1 Allgemeine Bemerkungen

Bei der Anwendung des *RI*-Modells aus Kap. 3.7 ist zu beachten, daß das hier beschriebene Feldberechnungsverfahren die Unterteilung der Anordnung in FEM- und BEM-Gebiete erlaubt. Die daraus resultierenden Konsequenzen werden im folgenden beschrieben.

Der erste Schritt bei der Anwendung des *RI*-Modells stellt die Erfüllung der Normierungsbedingung (3.170) für den Fall  $i = j$  dar. Dazu muß das Integral auf der linken Seite von (3.170) bestimmt werden, wobei sich die Integration über den gesamten Leitungsquerschnitt erstreckt. Für  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  sind dann die nicht normierten Felder einzusetzen. Bei der Berechnung des Integrals läßt sich die Aufteilung des Leitungsquerschnitts in FEM- und BEM-Gebiete leicht berücksichtigen, indem die Teilintegrale über die einzelnen Gebiete ermittelt und aufsummiert werden. In Anhang B.3.2 und B.3.3 wird erläutert, wie dieses Integral für FEM- bzw. BEM-Gebiete numerisch bestimmt wird.

Im Anschluß an die Normierung sind die Leitungsströme nach Gleichung (3.166) zu berechnen. Handelt es sich bei dem Leiter  $n$  nicht um einen idealen Leiter, stellt er selbst ein FEM- oder BEM-Gebiet dar. Die Berechnung des Ringintegrals in diesen beiden Fällen wird in Anhang B.3.2 bzw. B.3.3 beschrieben. Ein idealer Leiter wird jedoch nicht diskretisiert, da keine Felder in ihn eindringen, tritt also nach der Diskretisierung weder als FEM- noch als BEM-Gebiet auf. Das Ringintegral muß dann aus den Randwerten der angrenzenden Gebiete bestimmt werden. Wie die Teilintegrale über die angrenzenden Gebiete berechnet werden, richtet sich wiederum danach, ob es sich um FEM-Gebiete (Anhang B.3.2) oder BEM-Gebiete (Anhang B.3.3) handelt.

### B.3.2 Durchführung der Integrationen über FEM-Gebiete

Die Berechnung des Integrals in (3.170) über ein FEM-Gebiet für  $i = j$  erfolgt durch Summation der Teilintegrale über die einzelnen Elementdreiecke der Gebietstriangulierung. Aus Gleichung (3.11) in Verbindung mit (3.10) folgt, daß die Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  innerhalb eines Elementdreiecks lineare Funktionen darstellen, so daß  $\vec{e}_z(\vec{E} \times \vec{H})$  eine elementweise quadratische Funktion ist, deren Integration auf analytischem Weg möglich ist.

Die Berechnung des Ringintegrals in (3.166) für den Fall eines verlustbehafteten Leiters, der mit der FEM diskretisiert wird, kann durch Anwendung der Gleichung (3.14) erfolgen. Das in dieser Gleichung enthaltene Randintegral ist, wie bereits in Kap. 3.4, Gleichung (3.126), festgestellt wurde, äqui-

valent zum Ausdruck  $\oint_{\partial A} \lambda_p \underline{H}_s \, ds$ , wenn  $\lambda_p \vec{e}_z$  für  $\vec{v}_p$  eingesetzt wird. Wegen

$$\forall \vec{r} \in \partial A : \sum_p \lambda_p(\vec{r}) = 1 \quad (\text{B.23})$$

gilt

$$\sum_p \oint_{\partial A} \lambda_p \underline{H}_s \, ds = \oint_{\partial A} \underline{H}_s \, ds, \quad (\text{B.24})$$

wobei sich die Summation über alle Randknoten des Gebietes erstreckt. Durch Summation der Flächenintegralterme in (3.14) mit  $\vec{v}_p = \lambda_p \vec{e}_z$  über alle Randknoten des Gebietes kann also der innerhalb des Gebietes in  $z$ -Richtung fließende Strom berechnet werden. Es stellt sich jedoch die Frage, ob dies auch der beste Weg ist, denn dieser Algorithmus würde für die Berechnung nur Koeffizienten  $\alpha_q$  nutzen, die zu Knoten und Kanten in der Nähe des Randes gehören, so daß der größte Teil der vorhandenen Information ungenutzt bliebe. Die Nutzung aller Informationen könnte zu einer Erhöhung der Berechnungsgenauigkeit führen. Eine entsprechende Möglichkeit besteht in der Integration des Terms  $\vec{e}_z(j\omega\epsilon\vec{E})$  über dem Gebiet, denn aus der Maxwell'schen Gleichung (2.21) folgt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial A} \underline{H}_s \, ds &= \oint_{\partial A} (\vec{n} \times \vec{H}) \vec{e}_z \, ds = \iint_A (\vec{\nabla}^{(t)} \times \vec{H}) \vec{e}_z \, dA \\ &\stackrel{(2.21)}{=} \iint_A \vec{e}_z(j\omega\epsilon\vec{E}) \, dA. \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Bei den hier verwendeten edge elements sind die Komponenten von  $\vec{E}$  elementweise lineare Funktionen, so daß die Teilintegrale über die einzelnen Elemente analytisch berechnet und aufsummiert werden können.

Zwischen diesen beiden Arten der Stromberechnung läßt sich eine interessante Beziehung herleiten. Das von den edge elements approximierte  $\vec{E}$ -Feld erfüllt die Gleichung (3.13), wobei für  $\vec{v}_p$  die in (3.10) auftretenden Funktionen eingesetzt werden. Für  $\vec{v}_p = \lambda_p \vec{e}_z$  wird aus (3.13)

$$\begin{aligned} \forall p : \quad &\iint_A \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} \lambda_p \times \vec{e}_z) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} \right] - \omega^2 \lambda_p \vec{e}_z(\epsilon\vec{E}) \right\} dA \\ &- j\omega \oint_{\partial A} \lambda_p \underline{H}_s \, ds = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Da die Summe über die  $\lambda_p$ -Funktionen aller Knoten des Gebietes (inklusive der Randknoten) konstant 1 ergibt, gilt außerdem

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \{\text{alle Knoten}\}} \iint_A \left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} \lambda_p \times \vec{e}_z) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} \right] \right. \\ \left. - \omega^2 \lambda_p \vec{e}_z(\epsilon\vec{E}) \right\} dA = -\omega^2 \iint_A \vec{e}_z(\epsilon\vec{E}) \, dA. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt

$$\begin{aligned}
\iint_A \vec{e}_z(j\omega\epsilon\vec{E}) &= \frac{1}{j\omega} \iint_A -\omega^2 \vec{e}_z(\epsilon\vec{E}) \, dA \\
\stackrel{\text{(B.27)}}{=} \sum_{p \in \{\text{alle Knoten}\}} \frac{1}{j\omega} \iint_A &\left\{ (\vec{\nabla}^{(t)} \lambda_p \times \vec{e}_z) \cdot \boldsymbol{\mu}^{-1} \left[ (\vec{\nabla}^{(t)} - jk\vec{e}_z) \times \vec{E} \right] \right. \\
&\quad \left. - \omega^2 \lambda_p \vec{e}_z(\epsilon\vec{E}) \right\} \, dA \\
\stackrel{\text{(B.26)}}{=} \sum_{p \in \{\text{alle Knoten}\}} \oint_{\partial A} &\lambda_p \underline{H}_s \, ds = \oint_{\partial A} \underline{H}_s \, ds. \tag{B.28}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung entspricht (B.25), wurde aber nicht über die Maxwell'schen Gleichungen hergeleitet, sondern mit Hilfe der Gleichung, die für die mit edge elements berechneten Lösungen gilt. Dies bedeutet, daß sich die Eigenschaft (B.25), die für die realen Felder gilt, auf die diskretisierten Felder überträgt. Es spielt also keine Rolle, ob der Strom aus der FEM-Lösung mittels (3.166) oder durch Integration über  $\vec{e}_z(j\omega\epsilon\vec{E})$  bestimmt wird, obwohl im ersten Fall nur Koeffizienten von Knoten und Kanten in der Nähe des Gebietsrandes berücksichtigt werden, während im zweiten Fall alle Koeffizienten in die Integration einfließen. Wegen der geringeren Rechenzeit ist dann der erste Fall zu bevorzugen, d. h. Berechnung des Ringintegrals über  $\underline{H}_s$  durch Anwendung der Gleichung (3.14). Auf die gleiche Weise kann auch das in Anhang B.3.1 erwähnte Teilintegral über  $\underline{H}_s$  entlang eines Randabschnitts bestimmt werden, der an einen idealen Leiter grenzt.

### B.3.3 Durchführung der Integrationen über BEM-Gebiete

Die Berechnung des Integrals in (3.170) ist für ein BEM-Gebiet erheblich aufwendiger als im FEM-Fall, da  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  durch Anwendung der Gleichungen (3.116) und (3.117) für viele Punkte des Gebietes berechnet werden müssen. Dies erfordert die Summation über die Felder aller Stromfäden ( $2M$  Stromfäden bei  $M$  Randelementen) für jeden einzelnen Punkt. Die Umwandlung dieses Gebietsintegrals in ein Randintegral ist nicht möglich. Für isotrope, homogene Medien gilt jedoch die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
\iint_A \vec{e}_z(\vec{E} \times \vec{H}) \, dA &= \iint_A (\underline{E}_x \underline{H}_y - \underline{E}_y \underline{H}_x) \, dA \\
&= -\frac{1}{\kappa^2} \oint_{\partial A} (jk \underline{E}_z \underline{H}_s + j\omega \mu \underline{H}_z \underline{H}_n) \, ds \\
&\quad - \frac{k\omega}{\kappa^2} \iint_A (\epsilon \underline{E}_z^2 + \mu \underline{H}_z^2) \, dA. \tag{B.29}
\end{aligned}$$

Die rechte Seite von (B.29) enthält zwar nach wie vor ein Gebietsintegral, dessen Beitrag jedoch klein gegenüber dem Randintegral in (B.29) ist, da

die Feldkomponenten  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  bei Annäherung an den TEM-Fall ( $\kappa \rightarrow 0$ ) gegen 0 gehen. Da diese  $z$ -Komponenten im Gebietsintegral quadratisch, im Randintegral aber nur linear vorkommen, dominiert das Randintegral im (Quasi-)TEM-Fall. Daher müssen an die Berechnung des Gebietsintegrals keine hohen Genauigkeitsanforderungen gestellt werden, so daß die Anzahl der Stützstellen bei der numerischen Integration entsprechend klein gehalten werden kann, was der Verringerung der Rechenzeit zugute kommt. Um die Stützstellen effizient zu positionieren, wird ein adaptives Integrationschema verwendet. Im einzelnen läuft die Berechnung folgendermaßen ab:

1. Zunächst wird das Randintegral in (B.29) berechnet. Dazu werden die Feldkomponenten  $\underline{E}_z$ ,  $\underline{H}_n$ ,  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  durch Funktionen approximiert, die ranelementweise konstant sind, so daß sich das Integral durch eine Summation über alle Ranelemente auswerten läßt. Die dafür benötigten Werte der Feldkomponenten für jedes Ranelement,  $\underline{E}_z^{(p)}$ ,  $\underline{H}_n^{(p)}$ ,  $\underline{H}_s^{(p)}$  und  $\underline{H}_z^{(p)}$ , werden folgendermaßen bestimmt: Wie in Kap. 3.4 beschrieben, gibt es für jeden Randknoten eine  $\underline{E}_z$ -Unbekannte und für jedes Ranelement eine  $\underline{E}_s$ -Unbekannte. Wird zwischen zwei  $\underline{E}_z$ -Werten längs eines Ranelementes linear interpoliert und  $\underline{E}_s$  als konstant auf dem Element betrachtet, läßt sich daraus  $\underline{H}_n^{(p)}$  mit Hilfe der Beziehung  $-j\omega\mu\underline{H}_n = \frac{\partial}{\partial s}\underline{E}_z + jk\underline{E}_s$  berechnen. Für  $\underline{E}_z^{(p)}$  wird der Mittelwert der  $\underline{E}_z$ -Unbekannten, die zu den beiden das Element  $p$  begrenzenden Randknoten gehören, verwendet.  $\underline{H}_s^{(p)}$  und  $\underline{H}_z^{(p)}$  werden durch die Integrale  $\frac{1}{l_p} \oint_{\partial A} v_p^{(H_s)} \underline{H}_s ds$  und  $\frac{1}{l_p} \oint_{\partial A} v_p^{(H_z)} \underline{H}_z ds$  definiert, wobei  $v_p^{(H_s)}$  die konstante Testfunktion aus (3.130) ist. Für  $\underline{H}_s$  und  $\underline{H}_z$  sind bei der Integration die aus (3.117) folgenden Ausdrücke einzusetzen. Die Durchführung der Integration erfolgt mit dem in Anhang B.1 beschriebenen adaptiven Verfahren.
2. Auf Basis der vom Anwender vorgegebenen Kantenlängenfunktion  $d(x, y)$  wird das BEM-Gebiet mit dem in Kap. 3.2.3 beschriebenen Verfahren trianguliert. Im Fall eines unbeschränkten Gebietes wird eine künstliche Begrenzung so positioniert, daß der Beitrag des Gebietsintegrals außerhalb der Begrenzung vernachlässigbar klein wird.
3. Unter Verwendung der Knoten der Triangulierung als Stützstellen wird eine erste Näherung des Gebietsintegrals in der rechten Seite von (B.29) bestimmt. Die Addition zu dem unter Punkt 1 berechneten Wert des Randintegrals ergibt eine erste Näherung der linken Seite von (B.29).
4. Aus diesem Näherungswert wird der angestrebte maximale absolute Fehler durch Multiplikation mit  $10^{-4}$  berechnet. Dieser absolute Fehler wird auf alle Dreiecke der Triangulierung verteilt, wobei der Beitrag eines Dreiecks zum Gebietsintegral als Verteilungsschlüssel dient.

5. Für jedes Dreieck werden ein mittlerer  $\underline{E}_z$ -Wert  $\overline{\underline{E}_z}$  und ein mittlerer  $\underline{H}_z$ -Wert  $\overline{\underline{H}_z}$  bestimmt. Der Beitrag dieses Dreiecks zum Gebietsintegral ist dann  $A_\Delta(\varepsilon\overline{\underline{E}_z}^2 + \mu\overline{\underline{H}_z}^2)$ , wobei  $A_\Delta$  die Dreiecksfläche darstellt.  $\overline{\underline{E}_z}$  und  $\overline{\underline{H}_z}$  werden durch Integration über die durch (3.116) und (3.117) gegebenen Ausdrücke für  $\underline{E}_z$  und  $\underline{H}_z$  ermittelt. Diese Integrale lassen sich in Teilintegrale zerlegen, die den Einfluß jeweils eines Stromfadens berücksichtigen. Über das Fehlerfortpflanzungsgesetz kann der in Schritt 4 gewonnene absolute Fehler des Dreiecksbeitrags mit den Fehlern dieser Teilintegrale in Beziehung gesetzt werden. Dies ermöglicht die Berechnung der Teilintegrale mit individuellen Fehlerschranken, was auch erforderlich ist, da für ein Dreieck in der Nähe des Randes der Einfluß einiger weniger Stromfäden um ein Vielfaches höher ist als derjenige der übrigen Stromfäden.

Die Berechnung eines Teilintegrals beginnt mit der Positionierung von drei Stützstellen auf den Mittelpunkten der Dreiecksseiten, was einer Unterteilung des Elementes in vier Teildreiecke entspricht. Bewirkt die Hinzunahme dieser neuen Stützstellen zu den bereits vorhandenen (den Ecken des Dreiecks) eine Änderung des Integrationswerts, der kleiner als der erlaubte absolute Fehler dieses Teilintegrals ist, dann ist die gewünschte Genauigkeit bereits erreicht. Im anderen Fall werden die vier Teildreiecke ihrerseits unterteilt, solange bis die Abbruchbedingung für jedes Teildreieck erfüllt ist. Die angewandte Integrationsregel ist die Trapezregel für den Fall zweier unabhängiger Variablen, d. h. es wird linear zwischen den Stützstellen interpoliert.

Gehört das Teilintegral zu einem Stromfaden, der auf dem Rand des betreffenden Dreiecks liegt, ist obige Vorgehensweise wegen der Singularität am Ort des Stromfadens nicht mehr sinnvoll anwendbar. Die betreffenden Integrale können jedoch in Randintegrale über den Dreiecksrand umgewandelt werden, die keine Singularität mehr aufweisen.

Durch diese Vorgehensweise wird die Feldverteilung eines Stromfadens nur dort mit vielen Stützstellen integriert, wo ein hoher Beitrag zu erwarten ist, nämlich in der Nähe der Feldsingularität am Ort des Stromfadens.

Die Berechnung des Ringintegrals in (3.166) erfolgt wie im Fall der FEM gemäß Gleichung (B.24):

$$\oint_{\partial A} \underline{H}_s ds = \sum_p \oint_{\partial A} \lambda_p \underline{H}_s ds = \sum_p \oint_{\partial A} v_p^{(H_s)} \underline{H}_s ds. \quad (\text{B.30})$$

Dabei ist  $\underline{H}_s$  durch (3.117) gegeben. Gleichung (B.30) dient auch zur Berechnung der in Anhang B.3.1 erwähnten Teilintegrale über  $\underline{H}_s$  auf Randabschnitten, die an ideale Leiter grenzen.



## C Definition einer Beschreibungssprache zur Spezifikation von Leitungsquerschnitten

### C.1 Übersicht

Für das in dieser Arbeit vorgestellte Berechnungsverfahren wurde eine Beschreibungssprache entwickelt, die es dem Anwender gestattet, die geometrischen und elektrischen Daten des Leitungsquerschnitts zu spezifizieren, die Diskretisierung des Querschnitts zu beeinflussen und den Ablauf der Berechnung zu steuern. Für jede Anordnung ist ein Inputfile zu erstellen, welches das in Abb. C.1 dargestellte Format besitzt.

Die in den einzelnen Blöcken zulässigen Anweisungen werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

### C.2 Der Control-Block

Dieser Abschnitt beschreibt die Anweisungen des Control-Blocks. Die Reihenfolge, in der die Anweisungen im Block stehen, ist unerheblich.

#### C.2.1 Die frequency-Anweisung

Die **frequency**-Anweisung dient zur Festlegung der Signalfrequenz  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ), bei der die Berechnung durchzuführen ist. Das Format der Anweisung ist

**frequency** =  $\langle$ Ausdruck $\rangle$ ;

wobei  $\langle$ Ausdruck $\rangle$  eine über die vier Grundrechenarten verknüpfte Menge von reellen oder komplexen Zahlenkonstanten darstellt, wie z.B.  $2*(3.5e6 - 50000)$ . Ein Ausdruck kann die Konstanten **PI** (Kreiszahl  $\pi$ ), **EPS\_NULL** (Vakuumpermittivität  $\varepsilon_0$  in der Einheit As/Vm), **MU\_NULL** (Vakuumpermeabilität  $\mu_0$  in der Einheit Vs/Am), **C\_NULL** (Vakuumlichtgeschwindigkeit  $c_0$  in der Einheit m/s) und **J** (imaginäre Einheit  $j$ ) enthalten. Die **frequency**-Anweisung erwartet die Angabe der Frequenz in der Einheit Hz.

Die Anweisung

**frequency** =  $\langle$ Ausdruck  $f_0$  $\rangle$ ,  $\langle$ Ausdruck  $\Delta f$  $\rangle$ ,  $\langle$ Ausdruck  $N$  $\rangle$ ;

bewirkt, daß die Berechnungen nicht nur für eine Frequenz, sondern für die  $N$  Frequenzen  $f_0, f_0 + \Delta f, \dots, f_0 + (N - 1)\Delta f$  durchgeführt werden.

Der **Control**-Block muß genau eine **frequency**-Anweisung enthalten, anderenfalls wird eine Fehlermeldung ausgelöst.

```
// Steuerungsblock

Control {

    // Control-Anweisungen

}

// Anweisungsblock zur Beschreibung eines Dielektrikums
// (ein Block für jedes Dielektrikum)

Die {

    // Die-Anweisungen

}

// Anweisungsblock zur Beschreibung eines Leiters
// (ein Block für jeden Leiter)

Cond {

    // Cond-Anweisungen

}

// Ausgabeblock

Output {

    // Output-Anweisungen

}
```

Abbildung C.1: Aufbau eines Inputfiles

### C.2.2 Die modes-Anweisung

Mit der Anweisung

$$\text{modes} = \langle \text{positive ganze Zahl} \rangle;$$

wird festgelegt, daß für jede spezifizierte Frequenz die durch  $\langle \text{positive ganze Zahl} \rangle$  gegebene Anzahl von Moden (Wellenformen) berechnet wird. Die Be-

rechnung von Leitungsparametern setzt voraus, daß dieser Wert der Anzahl der Leiter (ohne Referenzleiter) entspricht, damit alle (Quasi-)TEM-Moden erfaßt werden. Fehlt die `modes`-Anweisung, wird `modes = 1` gesetzt.

### C.2.3 Die method-Anweisung

Mit der Anweisung

```
method = ⟨Berechnungsmethode⟩;
```

wird die Standardmethode für die Diskretisierung der Gebiete definiert. Für `⟨Berechnungsmethode⟩` kann dabei `FEM` oder `BEM` eingesetzt werden. Die so gewählte Methode wird auf alle Gebiete angewendet, für die im Rahmen der Gebietsdefinition (`Die`- oder `Cond`-Block) keine eigene Methode ausgewählt wurde. Fehlt die `method`-Anweisung im `Control`-Block, ist die FEM die Standardmethode.

### C.2.4 Die iterations-Anweisung

Mit der Anweisung

```
iterations = ⟨positive ganze Zahl⟩;
```

wird die maximale Anzahl der in Kap. 3.5.4 beschriebenen Iterationen zur Nullstellenberechnung der Funktion  $R(k)$  eingestellt. Fehlt die `iterations`-Anweisung, werden fünf Iterationen für jede Nullstelle durchgeführt, wenn nicht bereits vorher Konvergenz eintritt.

### C.2.5 Die elements-Anweisung

Die Anweisung

```
elements = ⟨Ausdruck⟩;
```

legt die Kantenlänge der Dreiecke in Triangulierungen und die Länge der Randelemente in Randdiskretisierungen fest. Dabei wird die in Kap. 3.2.3 beschriebene Zielkantenlänge  $d(x, y)$  auf einen konstanten Wert gesetzt:

$$d(x, y) = \frac{\sqrt{A}}{\langle \text{Ausdruck} \rangle}. \quad (\text{C.1})$$

$A$  bezeichnet hier die Fläche des gesamten Leitungsquerschnitts. Ist der Querschnitt ein Quadrat, wird der Diskretisierungsalgorithmus demnach anstreben, die Kanten des Quadrats in `⟨Ausdruck⟩` Randelemente zu unterteilen und im Inneren des Quadrats Dreiecke mit einer ähnlichen Kantenlänge zu erzeugen.

Fehlt die `elements`-Anweisung, gilt `elements = 5`.

### C.2.6 Die `sing`-Anweisung

Mit Hilfe der `sing`-Anweisung kann die Diskretisierung an Ecken leitender Gebiete, wo Feldsingularitäten (ideale Leiter) oder zumindest stark ansteigende Feldamplituden (nichtideale Leiter) zu erwarten sind, verfeinert werden. Wird die Anweisung innerhalb des `Control`-Blocks verwendet, betrifft sie die perfekt leitende Schirmung, die der Algorithmus automatisch um den vom Anwender spezifizierten Leitungsquerschnitt legt, sofern kein unendlich ausgedehntes Dielektrikum definiert wird (siehe Kap. C.3.7). Die `sing`-Anweisung wirkt dann auf die Ecken der Schirmung, deren Innenwinkel größer als  $180^\circ$  sind, da nur dort Feldsingularitäten auftreten können.

Die `sing`-Anweisung hat das folgende Format:

```
sing( <Ausdruck 1>, <Ausdruck 2> );
```

<Ausdruck 1> gibt den Faktor an, um den die Elementkantenlänge am Ort der Singularität kleiner ist als die durch die `elements`-Anweisung (Kap. C.2.5) festgelegte Kantenlänge. Mit zunehmendem Abstand von der Singularität verändert sich die Kantenlänge linear vom `sing`-Wert zum `elements`-Wert. Nimmt dieser Abstand um  $\Delta l$  zu, erhöht sich die Kantenlänge um  $\Delta d$ . Das dimensionslose Verhältnis  $\Delta d/\Delta l$ , das dem Betrag des Gradienten von  $d(x, y)$  entspricht, kann über <Ausdruck 2> eingestellt werden.

### C.2.7 Die `adaptive`-Anweisung

Die Anweisung

```
adaptive( <Ausdruck 1>, <Ausdruck 2>, <Ausdruck 3> );
```

aktiviert die in Kap. 3.6 beschriebene Adaptive-Remeshing-Prozedur. Dabei gibt <Ausdruck 1> an, wie oft das Remeshing durchgeführt wird ( $\Rightarrow$  Anzahl der Berechnungen = <Ausdruck 1> + 1). <Ausdruck 2> stellt das angestrebte Verhältnis zwischen der Anzahl der Knoten (FEM- und BEM-Knoten) nach und vor Durchführung der Remeshing-Aktionen dar. Da beim ersten Remeshing die Knotenanzahl nicht verändert wird, erhöht sie sich bei jedem weiteren Remeshing also näherungsweise um den Faktor  $\langle \text{Ausdruck 1} \rangle^{-1} \sqrt{\langle \text{Ausdruck 2} \rangle}$ . <Ausdruck 3> entspricht dem Parameter  $\nu$  in den Gleichungen (3.158) und (3.159) auf Seite 99, steuert also die Zunahme der Knotendichte in Gebieten mit erhöhten  $\vec{E}$ -Feldgradienten (FEM) bzw. Tangentialableitungen von  $\underline{K}_s$  und  $\underline{K}_z$  (BEM).

Fehlt die `adaptive`-Anweisung, wird kein Remeshing durchgeführt.

## C.3 Der `Die`-Block

Der `Die`-Block definiert ein Gebiet mit homogenen Materialeigenschaften. Dabei kann es sich auch um ein leitendes Material handeln. Für jedes Ge-

biet ist ein separater **Die**-Block anzugeben. Dabei ist die Reihenfolge der in den nächsten Abschnitten definierten Anweisungen innerhalb des Blocks unerheblich.

### C.3.1 Die eps-Anweisung

Die **eps**-Anweisung dient zur Festlegung der (komplexen) Permittivität des Gebietes. Die Permittivität kann dabei als Skalar (isotropes Medium) oder als Tensor (anisotropes Medium) definiert werden. Eine skalare Permittivität wird mit der Anweisung

$$\text{eps} = \langle \text{Ausdruck} \rangle ;$$

angegeben. Dabei wird  $\langle \text{Ausdruck} \rangle$  in der Einheit As/Vm erwartet. Für die Festlegung eines Permittivitätstensors wird die Anweisung

$$\text{eps} = ( \langle \text{Ausdruck 11} \rangle, \langle \text{Ausdruck 12} \rangle, \langle \text{Ausdruck 13} \rangle, \\ \langle \text{Ausdruck 21} \rangle, \langle \text{Ausdruck 22} \rangle, \langle \text{Ausdruck 23} \rangle, \\ \langle \text{Ausdruck 31} \rangle, \langle \text{Ausdruck 32} \rangle, \langle \text{Ausdruck 33} \rangle ) ;$$

verwendet.

Die so definierte Permittivität ist innerhalb des betreffenden Gebietes konstant. Die in Kap. 3.2.2 beschriebene FEM wäre dagegen auch für Gebiete mit ortsabhängiger Permittivität geeignet. Dies wird jedoch zur Zeit durch die Beschreibungssprache nicht unterstützt.

### C.3.2 Die eps\_rel-Anweisung

Anstelle der **eps**-Anweisung kann die **eps\_rel**-Anweisung verwendet werden, mit der die *relative* Permittivität festgelegt wird, aus der die Permittivität durch Multiplikation mit  $\varepsilon_0$  berechnet werden kann. Durch Verwendung der **eps\_rel**-Anweisung erübrigt sich somit die manuelle Umrechnung. Die Syntax entspricht derjenigen der **eps**-Anweisung; es ist lediglich das Schlüsselwort **eps** durch **eps\_rel** zu ersetzen.

Fehlt eine **eps**- oder **eps\_rel**-Anweisung in einem **Die**-Block, wird für das betreffende Dielektrikum  $\varepsilon = \varepsilon_0$ , also  $\varepsilon_r = 1$ , gesetzt.

### C.3.3 Die sigma-Anweisung

Die **sigma**-Anweisung definiert die Leitfähigkeit eines Gebietes und ist zur Verwendung in Verbindung mit der **eps\_rel**-Anweisung gedacht. Die Gesamtpermittivität berechnet sich dann gemäß

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega}, \quad \omega = 2\pi f. \quad (\text{C.2})$$

Syntaktisch sind die `sigma`- und `eps`-Anweisungen identisch. Die Angabe der Leitfähigkeit erfolgt in der Einheit  $1/\Omega\text{m}$ . Die `sigma`-Anweisung darf nicht in Kombination mit der `eps`-Anweisung verwendet werden; nur die Kombination mit der `eps_rel`-Anweisung ist erlaubt.

### C.3.4 Die `mu`-Anweisung

Mit der `mu`-Anweisung kann die (komplexe) Permeabilität des Gebietes festgelegt werden. Wie bei der `eps`-Anweisung gibt es eine skalare und eine tensorielle Schreibweise; es ist lediglich `eps` durch `mu` zu ersetzen. Die Permeabilität ist in der Einheit  $\text{Vs}/\text{Am}$  anzugeben.

### C.3.5 Die `mu_rel`-Anweisung

Die `mu_rel`-Anweisung dient der Festlegung der *relativen* Permeabilität, aus der sich die Permeabilität durch Multiplikation mit  $\mu_0$  ergibt. Syntaktisch ist sie ebenfalls zur `eps`-Anweisung identisch.

Fehlt eine `mu`- oder `mu_rel`-Anweisung in einem `Die`-Block, wird für das betreffende Gebiet  $\mu = \mu_0$ , also  $\mu_r = 1$ , gesetzt.

### C.3.6 Die `PEC`-Anweisung

Mit Hilfe der Anweisung

```
PEC;
```

wird ein Gebiet als ideal leitend markiert (`PEC` = Perfect Electrical Conductor). Die Kombination mit `eps`-, `eps_rel`-, `sigma`-, `mu`- oder `mu_rel`-Anweisungen ist nicht erlaubt.

### C.3.7 Die `bnd`-Anweisung

Die `bnd`-Anweisung dient der Spezifikation des Gebietsrandes (`bnd`  $\hat{=}$  BouNDary). Folgende Formen der Anweisung sind erlaubt:

```
bnd = rect( <Ausdruck xlu>, <Ausdruck ylu>,
           <Ausdruck xro>, <Ausdruck yro> );
```

```
bnd = poly( <Ausdruck x1>, <Ausdruck y1>,
           <Ausdruck x2>, <Ausdruck y2>,
           ⋮
           <Ausdruck xN>, <Ausdruck yN> );
```

```
bnd = circle( <Ausdruck xm>, <Ausdruck ym>, <Ausdruck ρ> );
```

```
bnd = infinity;
```

Mit der `rect`-Variante wird ein rechteckiger Gebietsrand definiert. Dabei ist  $(x_{lu}, y_{lu})$  die linke untere Ecke und  $(x_{ro}, y_{ro})$  die rechte obere Ecke.

Die `poly`-Variante erlaubt die Spezifikation eines beliebigen überschneidungsfreien Polygons. Dazu sind die  $N$  Eckpunkte  $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$  im Sinne eines mathematisch positiven Umlaufs um das Gebiet anzugeben.

Die Anwendung der `circle`-Variante führt zu einem kreisförmigen Gebietsrand mit dem Mittelpunkt  $(x_m, y_m)$  und dem Radius  $\rho$ . Dieser Kreis wird im Rahmen der Diskretisierung des Leitungsquerschnitts durch einen Polygonzug approximiert. Die Längen der Seiten dieses Polygons richten sich nach der Zielkantenlänge  $d(x, y)$  und sind damit ortsabhängig, so daß der Kreis i. allg. nicht durch ein regelmäßiges  $n$ -Eck approximiert wird. Dadurch paßt der approximierende Polygonzug optimal zur Randdiskretisierung bzw. zur Triangulierung des Gebietes. Abb. C.2 zeigt einen triangulierten Kreis, der sich in der Nähe einer Feldsingularität befindet, deren Umgebung mit Hilfe einer `sing`-Anweisung (Kap. C.3.10) feiner diskretisiert wurde.

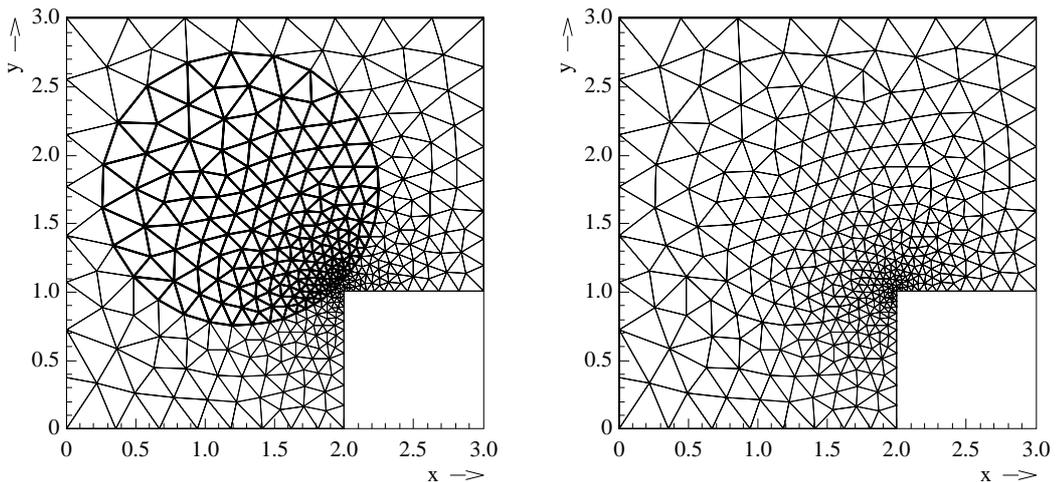


Abbildung C.2: Triangulierter Kreis in der Nähe einer Feldsingularität. In der linken Abbildung wurde die Triangulierung des Kreises zur besseren Erkennbarkeit hervorgehoben.

Mit der `infinity`-Variante wird festgelegt, daß die gesamte zweidimensionale Ebene zum betreffenden Gebiet gehört. Dies erscheint auf den ersten Blick wenig sinnvoll, wird aber in Verbindung mit der Clipping-Eigenschaft des Algorithmus, der die Inputdatei auswertet, verständlich. Diese Eigenschaft wird wirksam, wenn zwei sich überlappende Gebiete definiert werden. Dabei ist die Reihenfolge, in der die beiden Gebiete in der Inputdatei auftreten, entscheidend: Die Schnittmenge beider Gebiete wird mit Hilfe eines Polygon-Clipping-Algorithmus von dem Gebiet, das als erstes in der Datei definiert wurde, entfernt und dem zweiten Gebiet zugerechnet. Jedes Gebiet überdeckt also gewissermaßen alle zuvor definierten Gebiete. Ein Dielektrikum im Vakuum ohne Schirmung kann also erzeugt werden, indem zunächst

ein Gebiet mit `bnd = infinity`; und `eps_rel = 1`; (unendlich ausgedehntes Vakuum) und danach das Dielektrikum definiert wird. Die Fläche des letzteren wird dann automatisch aus dem unendlichen Gebiet ausgeschnitten. Dadurch muß die Randkurve des dielektrischen Gebietes nur einmal eingegeben werden. Dies ist auch dann vorteilhaft, wenn ein Leiter innerhalb eines Dielektrikums liegt.

Wird kein `infinity`-Gebiet angelegt, wird automatisch eine ideal leitende Schirmung um den Leitungsquerschnitt gelegt. Die Berechnung eines Hohlleiters erfordert also nur die Definition des dielektrischen Gebietes im Inneren des Hohlleiters.

Jeder `Die`-Block muß eine `bnd`-Anweisung enthalten, anderenfalls wird eine Fehlermeldung ausgelöst. Alle  $x$ - und  $y$ -Koordinaten sind in der Einheit `m` anzugeben.

### C.3.8 Die `method`-Anweisung

Mit der Anweisung

```
method = <Berechnungsmethode>;
```

wird festgelegt, mit welcher Berechnungsmethode (`FEM` oder `BEM`) das betreffende Gebiet bearbeitet wird. Fehlt diese Anweisung, wird die im `Control`-Block definierte Methode verwendet. Wurde auch dort keine Methode definiert, wird die `FEM` verwendet.

`infinity`-Gebiete müssen mit der `BEM` bearbeitet werden, während Gebiete mit anisotropen Medien nur mit der `FEM` behandelt werden können.

Im Fall von `PEC`-Gebieten ist die `method`-Anweisung überflüssig, da diese Gebiete nicht diskretisiert werden.

### C.3.9 Die `elfactor`-Anweisung

Die Anweisung

```
elfactor( <Ausdruck 1>, <Ausdruck 2> );
```

beeinflußt die Diskretisierung des Gebietes. `<Ausdruck 1>` legt den Faktor fest, um den die Zielkantenlänge  $d(x, y)$  innerhalb des Gebietes kleiner sein soll als die im `Control`-Block mit der `elements`-Anweisung (Kap. C.2.5) festgelegte Kantenlänge. Außerhalb des Gebietes wächst die Kantenlänge mit zunehmendem Abstand vom Gebiet linear auf den im `Control`-Block festgelegten Wert, d. h. innerhalb dieses Übergangsbereichs ist  $|\text{grad } d(x, y)| = \Delta d / \Delta l$  konstant, wobei  $l$  die kürzeste Entfernung zum Gebietsrand darstellt. Die dimensionslose Steigung  $\Delta d / \Delta l$  wird mit `<Ausdruck 2>` eingestellt.

### C.3.10 Die `sing`-Anweisung

Stellt das aktuelle Gebiet einen guten oder idealen Leiter dar, empfiehlt sich eine feinere Diskretisierung an den Ecken des Gebietes, um die Feldsingularitäten bzw. -peaks besser approximieren zu können. Dies kann mit Hilfe der bereits in Kap. C.2.6 beschriebenen `sing`-Anweisung erfolgen. Tritt diese innerhalb eines `Die`-Blocks auf, wirkt sie auf alle Eckpunkte des betreffenden Gebietes, deren *Außenwinkel* größer als  $180^\circ$  sind. Ansonsten entsprechen Syntax und Wirkungsweise der in Kap. C.2.6 enthaltenen Darstellung.

## C.4 Der Cond-Block

Ein `Cond`-Block dient zur Definition eines Leiters. Da auch mit einem `Die`-Block leitende (sogar perfekt leitende) Gebiete definiert werden können, scheint der `Cond`-Block zunächst überflüssig zu sein. Der Unterschied zwischen einem `Cond`-Block und einem `Die`-Block liegt darin, daß `Cond`-Blöcke Teile des Leitungsquerschnitts beschreiben, die aufgrund einer äußeren Beschaltung des Leitungssystems mit Signalen beaufschlagt werden. Sie stellen also die Elektroden des Leitungssystems dar und bilden zusammen mit dem Rückleiter, der entweder durch die perfekt leitende Schirmung gegeben ist oder (wenn ein `infinity`-Gebiet definiert wurde) als `Die`-Block zu spezifizieren ist, die Tore des Leitungssystems. Das Berechnungsverfahren benötigt die Informationen über die externe Beschaltung, um die Leitungsparametermatrizen berechnen zu können. Jedes `Cond`-Gebiet liefert eine Zeile bzw. eine Spalte in den Leitungsparametermatrizen.

Wird beispielsweise ein Aluminium-Leiter auf einem Silizium-Substrat mit einer darunterliegenden Masselage aus Gold betrachtet, so stellen alle drei Materialien mehr oder weniger stark verlustbehaftete Leiter dar, die sich durch eine komplexe Permittivität beschreiben lassen. Extern beschaltet sind jedoch nur der Aluminium-Leiter und die Goldschicht. Da letztere den Rückleiter darstellt, ist nur der Aluminium-Leiter als `Cond`-Gebiet zu definieren.

Abgesehen von diesem Unterschied verhalten sich `Cond`-Blöcke genauso wie `Die`-Blöcke. Alle in Kap. C.3 beschriebenen Anweisungen können in gleicher Weise auch in `Cond`-Blöcken zum Einsatz kommen.

## C.5 Der Output-Block

Der `Output`-Block legt fest, welche Ergebnisse vom Berechnungsverfahren ermittelt und ausgegeben werden sollen.

### C.5.1 Die `showmesh`-Anweisung

Mit der Anweisung

`showmesh = <Wahrheitswert>;`

wird festgelegt, ob die Diskretisierung des Leitungsquerschnitts als AnaRes-Datei<sup>11</sup> abgelegt wird. Für <Wahrheitswert> ist dabei `TRUE` oder `FALSE` einzusetzen. Fehlt die `showmesh`-Anweisung, wird eine AnaRes-Datei erzeugt.

### C.5.2 Die `showprop`-Anweisung

Die Anweisung

`showprop = <Wahrheitswert>;`

entscheidet darüber, ob eine Datei erzeugt wird, welche die berechneten Ausbreitungskonstanten (propagation constants) und ggf. die Leitungsparametermatrizen enthält. Fehlt diese Anweisung, wird eine solche Datei erzeugt.

### C.5.3 Die `showfield`-Anweisung

Die Anweisung

`showfield = <Wahrheitswert>;`

legt fest, ob grafische Darstellungen der ortsabhängigen Real- und Imaginärteile der sechs  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Feldkomponenten aller berechneten Moden erzeugt werden und in einem Format abgelegt werden, das vom symbolischen Algebra-Paket Maple zur Anzeige gebracht werden kann. Fehlt die Anweisung, werden derartige Dateien erzeugt.

---

<sup>11</sup>AnaRes (Analyze Results) ist ein grafisches Analysewerkzeug der Zuken GmbH, Paderborn

## D Verzeichnis der Formelsymbole und Abkürzungen

### D.1 Symbole

$\vec{\nabla}$	$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix}$ (Nabla-Operator)
$\vec{\nabla}^{(t)}$	$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix}$ (transversaler Nabla-Operator)
$\vec{\nabla}_p^{(t)}$	$= \begin{pmatrix} \partial/\partial x_p \\ \partial/\partial y_p \\ 0 \end{pmatrix}$
$\partial\Delta$	Rand eines Elementdreiecks
$\mathbf{1}$	$(3 \times 3)$ -Einheitsmatrix
$a$	Richtung in der komplexen Ebene
$a, a_i$	Vorfaktoren
$\vec{a}$	Richtungsvektor
$A$	Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ bzw. der Flächeninhalt eines solchen Gebietes
$\partial A$	Rand des Gebietes $A$
$\vec{A}$	magnetisches Vektorpotential
$\vec{b}$	rechte Seite eines linearen Gleichungssystems
$\vec{B}$	magnetische Flußdichte in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\vec{B}}$	magnetische Flußdichte in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$c$	Phasengeschwindigkeit
$c_0$	$= 299792458$ m/s (Vakuumlichtgeschwindigkeit)
$c(\vec{r}_p)$	$= \iint_A \delta(\vec{r} - \vec{r}_p) dA$
$C$	Kapazitätsbelag einer Leitung
$C$	$= 0.577216 \dots$ (Eulersche Konstante)
$C, C_i$	Integrationswege
$\mathbf{C}$	Matrix der Kapazitätsbeläge
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$d$	Kreisdurchmesser
$d, d_{ij}$	Kantenlängen in Triangulierungen
$d(x, y)$	angestrebte, ortsabhängige Kantenlänge von FEM-Dreieckselementen bzw. Länge von BEM-Randelementen
$D$	$= d/\lambda$ (normierter Kreisdurchmesser)
$\vec{D}$	elektrische Flußdichte in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\vec{D}}$	elektrische Flußdichte in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
det	Determinante

diag	Diagonalmatrix
$e$	$= 2.71828 \dots$ (Eulersche Zahl)
$\vec{e}_z$	$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Einheitsvektor in $z$ -Richtung)
$\vec{E}$	elektrische Feldstärke in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\vec{E}}$	elektrische Feldstärke in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$\underline{\vec{E}}^{(t)}$	$= \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ 0 \end{pmatrix}$
$\vec{\mathcal{E}}$	Vektor der BEM- $\underline{E}_z$ -Ansatzkoeffizienten
$f$	Frequenz
$f, g$	skalare Funktionen
$F$	zu minimierendes Funktional
$\vec{F}, \vec{G}$	vektorielle Funktionen
$\mathcal{F}, \hat{\mathcal{F}}, \mathcal{G}, \hat{\mathcal{G}}$	lineare Differentialoperatoren
$\vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{F}}, \vec{\mathcal{G}}, \vec{\mathcal{G}}$	vektorielle, lineare Differentialoperatoren
$G$	Leitwertbelag einer Leitung
$G(\vec{r}_p, \vec{r})$	$= \frac{1}{2\pi} K_0(-j\kappa \vec{r} - \vec{r}_p )$ (Greensche Funktion der Helmholtz-Gleichung für den freien, zweidimensionalen Raum)
$\vec{G}(\vec{r}_p, \vec{r})$	$= - \left\{ \vec{a} + \frac{1}{\omega^2 \varepsilon \mu} [\vec{a}(\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z)] (\vec{\nabla}^{(t)} + jk\vec{e}_z) \right\} G$ (vektorielle Greensche Funktion der Gleichung (3.104))
$\vec{G}_s(\vec{r}_p, \vec{r})$	$= G(\vec{r}_p, \vec{r}) _{\vec{a}=\vec{s}}$
$\vec{G}_z(\vec{r}_p, \vec{r})$	$= G(\vec{r}_p, \vec{r}) _{\vec{a}=\vec{e}_z}$
$\mathbf{G}$	Matrix der Leitwertbeläge
grad	Gradient
$h$	Gitterlinienabstand bei der FDM, Geradenabstand bei der Methode der Geraden, Dreieckskantenlänge bei der FEM
$h$	Höhe eines rechteckigen, dielektrischen Gebietes
$h$	Stützstellenabstand bei der numerischen Integration
$\vec{H}$	magnetische Feldstärke in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\vec{H}}$	magnetische Feldstärke in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$\underline{\vec{H}}_q$	$q$ ter Ansatzkoeffizient für $\underline{\vec{H}}$ bei FEM-Knotenelementen
$\vec{\mathcal{H}}$	Vektor der BEM- $\underline{H}_z$ -Ansatzkoeffizienten
$i, j$	ganzzahlige Indizes
$I_0$	modifizierte Besselsche Funktion erster Gattung nullter Ordnung
$I_{mn}$	Integrale über $G$ oder $\partial G/\partial n$
$I_q^{(s)}, I_q^{(z)}$	im Gebietsrand fließende Ersatzströme zur Modellierung der Feldverteilung bei der BEM
$\tilde{I}$	Approximation eines $I_{mn}$ -Wertes

$\vec{I}$	Vektor der Ströme auf den $N_c$ Leitungen eines Leitungssystems in Abhängigkeit von $k, \omega$
$\mathbf{I}$	Matrix, deren Spalten die Stromvektoren $\vec{I}$ der $N_c$ Moden sind
$\mathfrak{Im}$	Imaginärteil
$j$	$= \sqrt{-1}$ (imaginäre Einheit)
$\vec{J}$	elektrische Stromdichte in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\vec{J}}$	elektrische Stromdichte in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$k$	Ausbreitungskonstante
$k_0$	$= \omega/c_0$ (Ausbreitungskonstante im Vakuum)
$k_i$	$= \mathfrak{Im}\{k\}$
$k_r$	$= \mathfrak{Re}\{k\}$
$k_s$	Lösung der Gleichung $\det \mathbf{M}(k) = 0$
$\Delta k$	längenbezogene Phasendifferenz zwischen hin- und rücklaufender Welle
$K_0, K_1$	modifizierte Besselsche Funktionen zweiter Gattung nullter und erster Ordnung
$\vec{K}$	Oberflächenstrom in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$\mathbf{K}$	Diagonalmatrix mit den Ausbreitungskonstanten der Moden auf der Hauptdiagonale
$l$	Länge eines BEM-Randelementes, eines Integrationsweges oder der Kante eines FEM-Elementes
$\Delta l$	Maschenweite eines TLM-Netzes
$L$	Induktivitätsbelag einer Leitung
$\mathbf{L}$	Matrix der Induktivitätsbeläge
$\mathbf{L}$	untere Dreiecksmatrix
$\mathcal{L}, \hat{\mathcal{L}}$	lineare Differentialoperatoren
$m, n$	ganzzahlige Indizes
$m_{\text{BEM}}$	$= \sqrt{ \frac{\partial}{\partial s} \underline{K}_s ^2 +  \frac{\partial}{\partial s} \underline{K}_z ^2}$ (Maß für die Änderung von $\vec{K}$ längs des Gebietsrandes bei der BEM)
$m_{\text{FEM}}$	$= \sqrt{ \vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_x ^2 +  \vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_y ^2 +  \vec{\nabla}^{(t)} \underline{E}_z ^2}$ (Maß für die räumliche Änderung des $\vec{E}$ -Feldes bei der FEM)
$m_{\text{max}}$	maximale Richtungsableitung der Kantenlängenfunktion $d(x, y)$
$M$	Anzahl der Randelemente
$\tilde{M}$	angestrebte Randelementeanzahl (nicht auf einen ganzzahligen Wert gerundet)
$\mathbf{M}$	Systemmatrix eines linearen Gleichungssystems
$n$	Koordinate in $\vec{n}$ -Richtung
$n, n_0$	Brechungsindizes
$\Delta n$	Differenz zwischen den Brechungsindizes des Wellenleiterkerns (core) und der Umgebung (cladding)
$\vec{n}$	Normalenvektor

$N$	natürliche Zahl
$N_c$	Anzahl der Leiter eines Leitungssystems
$N_e$	Kantenanzahl in FEM-Netzen
$N_n$	Knotenanzahl in FEM-Netzen
$N_t$	Dreiecksanzahl in FEM-Netzen
$\mathbf{N}$	Koeffizientenmatrix als Ergebnis einer Diskretisierung von BEM-Integralgleichungen (Koeffizienten sind Integrale über $\partial G/\partial n$ )
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol
$p, q$	Nummern von Ansatz- bzw. Testfunktionen
$p_i(\mathbf{M})$	Matrixpolynom vom Grad $i$
$P$	$= \lambda \Delta k / \eta$ (normierte Phasendifferenz)
$P_{ij}$	Kreuzleistungsterm
$\vec{P}, \vec{Q}$	vektorielle Funktionen
$\mathbf{P}$	Matrix der Koeffizienten zur Approximation der zweiten Ableitung bei der Methode der Geraden
$\vec{q}_i, \tilde{q}_i$	Residuumvektoren beim BiCG-Verfahren
$r$	Entfernung vom Ursprung in einem Polarkoordinatensystem
$\vec{r}, \vec{r}_p$	Punkte im $\mathbb{R}^2$
$\vec{r}_q$	Orte virtueller Quellen bei der BEM
$R$	Widerstandsbelag einer Leitung
$R(k)$	$= 1/ \mathbf{M}^{-1}(k) \cdot \vec{x}_0 $
$\vec{R}$	$= \vec{r} - \vec{r}_p$
$\mathbf{R}$	Matrix der Widerstandsbeläge
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\Re$	Realteil
$s$	Koordinate in $\vec{s}$ -Richtung
$s_q^{(s)}, s_q^{(z)}$	$s$ -Koordinaten der in $z$ -Richtung verlaufenden Stromfäden, in denen die Ersatzströme $I_q^{(s)}, I_q^{(z)}$ fließen
$\vec{s}$	Tangentialvektor
$\vec{s}_q$	Tangentialvektor längs der Kante $q$ in einem FEM-Netz
$\mathbf{S}$	Koeffizientenmatrix als Ergebnis einer Diskretisierung von BEM-Integralgleichungen (Koeffizienten sind Integrale über $\partial G/\partial s$ )
$t$	Dicke eines leitenden Belags
$t$	Zeitkoordinate
$\Delta t$	Zeitschrittweite in einer Zeitbereichssimulation
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$u$	gesuchte Lösung einer DGL
$u_q, \vec{u}_q$	$q$ te Ansatzfunktion
$\hat{u}$	Fouriertransformierte von $u$
$\tilde{u}$	Approximation einer Lösung $u$ durch eine Linearkombination von Ansatzfunktionen
$\vec{u}$	Lösung einer vektoriiellen DGL

$\vec{u}_m$	Eigenvektor
$U_y$	Potentialdifferenz
$\vec{U}$	Vektor der Potentialdifferenzen auf den $N_c$ Leitungen eines Leitungssystems gegenüber einem Referenzleiter in Abhängigkeit von $k, \omega$
$\mathbf{U}$	Matrix der normierten Eigenvektoren
$\mathbf{U}$	obere Dreiecksmatrix
$v, v_p, \vec{v}_p, w_i$	Testfunktionen
$\vec{v}_m$	Eigenvektor der transjungierten Matrix
$V$	Vektorraum der Testfunktionen
$w$	Breite eines leitenden Streifens oder eines dielektrischen Wellenleiters
$x, y, z$	Raumkoordinaten
$\Delta x, \Delta y,$	Abmessungen einer FDTD-Gitterzelle
$\Delta z$	
$\bar{x}$	Mittelwert
$\vec{x}$	Lösung eines linearen Gleichungssystems
$\vec{x}_i$	Ergebnis des $i$ ten Iterationsschritts bei der inversen Iteration bzw. beim BiCG-Verfahren
$\vec{x}_s$	Lösung der Gleichung $\mathbf{M}(k_s) \cdot \vec{x} = 0$ mit $\vec{x} \neq 0$
$\mathbf{Y}$	$= \mathbf{G} + j\omega\mathbf{C}$ (Admittanzmatrix)
$z$	komplexe Variable
$Z_{\text{char}}$	Wellenwiderstand einer Leitung
$\mathbf{Z}$	$= \mathbf{R} + j\omega\mathbf{L}$ (Impedanzmatrix)
$\mathbf{Z}_{\text{char}}$	Wellenwiderstandsmatrix, charakteristische Impedanzmatrix
$\alpha$	Schwächungskoeffizient
$\alpha, \alpha_i$	Winkel
$\alpha_q$	Ansatzkoeffizient (Vorfaktor der $q$ ten Ansatzfunktion)
$\gamma$	relativer Fehler
$\delta$	Delta-Funktion
$\delta$	Eindringtiefe
$\delta_{pq}$	1 für $p = q$ , 0 sonst
$\Delta$	$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ (Laplace-Operator)
$\Delta^{(t)}$	$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (transversaler Laplace-Operator)
$\varepsilon$	$= \varepsilon_0 \varepsilon_r + \frac{\sigma}{j\omega}$ (Permittivität)
$\varepsilon_0$	$= \frac{1}{\mu_0 c_0^2}$ (elektrische Feldkonstante)
$\varepsilon_r$	relative Permittivität
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$= \varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}_r + \frac{1}{j\omega} \boldsymbol{\sigma}$ (Permittivitätstensor)
$\boldsymbol{\varepsilon}_r$	Tensor der relativen Permittivität
$\eta$	Maß für die Stärke des Faraday-Effekts
$\theta$	Winkelkoordinate in einem Polarkoordinatensystem
$\kappa$	$= \sqrt{\omega^2 \varepsilon \mu - k^2}$

$\lambda$	Wellenlänge
$\lambda_m$	Eigenwert
$\lambda_q$	lineare Ansatzfunktion zum FEM-Knoten $q$
$\Lambda$	Diagonalmatrix mit den Eigenwerten einer anderen Matrix auf der Hauptdiagonale
$\mu$	$= \mu_0 \mu_r$ (Permeabilität)
$\mu_0$	$= 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am (magnetische Feldkonstante)
$\mu_r$	relative Permeabilität
$\boldsymbol{\mu}$	$= \mu_0 \boldsymbol{\mu}_r$ (Permeabilitätstensor)
$\boldsymbol{\mu}_r$	Tensor der relativen Permeabilität
$\nu$	Exponent von $m_{\text{FEM}}$ und $m_{\text{BEM}}$ bei der Berechnung von $d(x, y)$
$\xi$	entspricht der $x$ -Koordinate im Fourierraum
$\pi$	$= 3.14159 \dots$ (Kreiszahl)
$\rho$	Kreisradius
$\varrho$	elektrische Ladungsdichte in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\varrho}$	elektrische Ladungsdichte in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$\sigma$	Leitfähigkeit
$\sigma$	Standardabweichung
$\boldsymbol{\sigma}$	Leitfähigkeitstensor
$\phi$	elektrisches Potential in Abhängigkeit von $x, y, z, t$
$\underline{\phi}$	elektrisches Potential in Abhängigkeit von $x, y, k, \omega$
$\chi$	elektrische Suszeptibilität
$\psi$	skalare Funktion
$\omega$	$= 2\pi f$ (Kreisfrequenz)

## D.2 Abkürzungen

BEM	Boundary-Element-Methode
BiCG	biconjugate gradient
BiCGstab	biconjugate gradient stabilized
CDT	Constrained-Delaunay-Triangulierung
DGL	Differentialgleichung
DT	Delaunay-Triangulierung
FDM	Finite-Differenzen-Methode
FDTD	finite difference time domain
(FD) <sup>2</sup> TD	frequency-dependent FDTD
FEM	Finite-Element-Methode
GMRES	generalized minimal residual
IC	integrated circuit
IFS	input feature size
MEI	measured equation of invariance
PCB	printed circuit board
PML	perfectly matched layer

TAB	transparent absorbing boundary
TE	transversal-elektrisch
TEM	transversal-elektromagnetisch
TLM	transmission line matrix
TM	transversal-magnetisch



## Abbildungsverzeichnis

2.1	Triangulierung eines Rechtecks . . . . .	8
2.2	Ansatzfunktion $u_q$ des linearen $C^0$ -Elementes . . . . .	9
2.3	Gebietsdiskretisierung bei der Methode der Geraden . . . . .	23
2.4	Streifenleitung zwischen zwei Dielektrika in einem leitenden Kasten . . . . .	25
2.5	Elementarzelle des zweidimensionalen TLM-Gitters . . . . .	27
3.1	$R(k)$ für einen rechteckigen Hohlleiter (50 mm $\times$ 30 mm) bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 50$ GHz, berechnet mit (3.4) . . . . .	33
3.2	$R(k)$ für einen rechteckigen Hohlleiter (50 mm $\times$ 30 mm) bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 50$ GHz, berechnet mit (3.14) . . . . .	37
3.3	Balancierter Quadtree . . . . .	45
3.4	Quadtree-Triangulierung (aus [31]) . . . . .	45
3.5	Triangulierung vor dem Einfügevorgang des Knotens $G$ . . . . .	49
3.6	Triangulierung nach dem Einfügevorgang . . . . .	49
3.7	Triangulierung des Einheitsquadrats mit der Kantenlängen- vorgabe $d(x, y) = 0.00005 + 0.3 \sqrt{x^2 + y^2} - 0.5 $ . . . . .	53
3.8	Mittelwert $\bar{x}$ , Standardabweichung $\sigma$ , Minimum und Maxi- mum der Längen- und Winkelverteilung ohne Smoothing (a), mit Smoothing-Methode 1 (b) und mit Smoothing-Methode 2 (c) . . . . .	54
3.9	Rechteckiger, dielektrischer Wellenleiter mit $w = 2h$ und der Permittivität $\varepsilon_{\text{core}} = 2.28\varepsilon_0$ . Die Umgebende habe die Permittivität $\varepsilon_{\text{cladding}} = 2.05\varepsilon_0$ . . . . .	57
3.10	$R(k)$ für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für $k_0h = 15$ , $k_0^2 := \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.2 . . . . .	57
3.11	Berechnung der Ableitung einer mit konstanten Ansatzfunk- tionen approximierten Funktion . . . . .	58
3.12	$R(k)$ für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für $k_0h = 15$ , $k_0^2 := \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.3 . . . . .	59
3.13	$R(k)$ für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für $k_0h = 15$ , $k_0^2 := \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.4 . . . . .	63
3.14	$R(k)$ für ein regelmäßiges Achteck mit Umkreisradius $\rho$ für den Fall $k_0\rho = 15$ . . . . .	72
3.15	$R(k)$ für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für $k_0h = 15$ , $k_0^2 := \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.6 . . . . .	75

3.16	$R(k)$ für den dielektrischen Wellenleiter aus Abb. 3.9 für $k_0 h = 15$ , $k_0^2 := \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ , bei Anwendung der BEM-Variante aus Kap. 3.3.7 . . . . .	81
3.17	Kopplung zweier FEM- und zweier BEM-Gebiete, die von einem ideal leitenden Schirm umgeben sind . . . . .	82
3.18	BEM-Testfunktionen . . . . .	84
3.19	Elimination von Nullstellen für eine Dreileiter-Anordnung . . .	96
3.20	Elimination einer doppelten Nullstelle bei einer Zweileiter-Anordnung im homogenen Dielektrikum . . . . .	97
4.1	Microstrip-Anordnung mit ideal leitenden Streifen in einem ideal leitenden Kasten . . . . .	107
4.2	Adaptiv erzeugte FEM-Diskretisierung der Anordnung aus Abb. 4.1 . . . . .	108
4.3	Frequenzabhängige Wellenwiderstandsmatrix $\mathbf{Z}_{\text{char}}$ der Anordnung aus Abb. 4.1. Die Indizes 1, 2 bzw. 3 entsprechen dem linken, mittleren bzw. rechten Streifenleiter. —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [103] . . . . .	109
4.4	Zwei ideal leitende Mikrostripen auf einem verlustbehafteten Substrat (komplexe relative Permittivität $\varepsilon_r = 9.8(1 - 0.005j)$ ) und einer ideal leitenden Masselage . . . . .	109
4.5	Kapazitätsmatrix $\mathbf{C}$ und Leitwertmatrix $\mathbf{G}$ der Anordnung aus Abb. 4.4. —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [3] . . . . .	110
4.6	Koplanarleitung in einem ideal leitenden Kasten mit Goldelektroden auf einer Siliziumdioxid-Schicht und einem Lithiumniobat-Substrat. Die Metallisierungsdicke $t$ beträgt 5 bzw. 15 $\mu\text{m}$ . . . . .	111
4.7	Induktivitätsbelag $L$ und Widerstandsbelag $R$ der Anordnung aus Abb. 4.6 für $t = 5 \mu\text{m}$ (obere Kurven) und $t = 15 \mu\text{m}$ (untere Kurven). —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [107] . . . . .	112
4.8	Komplexer Wellenwiderstand $Z_{\text{char}}$ der Anordnung aus Abb. 4.6. —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [107] . . . . .	112
4.9	Leiterplattenquerschnitt mit einer mehrlagigen, anisotropen Massefläche . . . . .	113
4.10	Real- und Imaginärteil der normierten Ausbreitungskonstante $k/k_0$ der Anordnung aus Abb. 4.9 für Even-Mode und Odd-Mode. —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [105] . . . . .	114
4.11	Dielektrischer, magnetooptischer Wellenleiter . . . . .	115

4.12	Normierte Phasendifferenz $P = \lambda\Delta k/\eta$ der Anordnung aus Abb. 4.11 in Abhängigkeit vom normierten Faserdurchmesser $D = d/\lambda$ für $\Delta n = 0.006, 0.012$ und $0.02$ . —: das hier beschriebene Verfahren, $\diamond$ : Referenzwerte aus [108] . . . . .	116
4.13	Dreiadriges, verlustbehaftetes Kabel über einer verlustbehafteten Massefläche . . . . .	117
A.1	$R(k)$ für einen rechteckigen Hohlleiter ( $50 \text{ mm} \times 30 \text{ mm}$ ) bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 50 \text{ GHz}$ , berechnet mit (A.12) und den $x$ - und $y$ -Komponenten von (3.4) . . . . .	125
B.1	Integrationsweg zur Berechnung der Integrale $I_{10}, I_{11}, I_{12}$ . . .	135
C.1	Aufbau eines Inputfiles . . . . .	144
C.2	Triangulierter Kreis in der Nähe einer Feldsingularität. In der linken Abbildung wurde die Triangulierung des Kreises zur besseren Erkennbarkeit hervorgehoben. . . . .	149



## Literaturverzeichnis

### Feldtheorie

- [1] J. D. JACKSON: Klassische Elektrodynamik. De Gruyter; Berlin, New York; 1982
- [2] K. SIMONYI: Theoretische Elektrotechnik. Barth, Ed. Dt. Verl. der Wiss.; Leipzig, Berlin, Heidelberg; 10. Auflage, 1993

### Leitungstheorie

- [3] F. OLYSLAGER, D. DE ZUTTER, A. T. DE HOOP: New reciprocal circuit model for lossy waveguide structures based on the orthogonality of the eigenmodes. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 42, No. 12, S. 2261–2269, 1994

### Numerische Verfahren

- [4] K. H. BURRELL: Evaluation of the modified Bessel functions  $K_0(z)$  and  $K_1(z)$  for complex arguments. Communications of the ACM, Vol. 17, No. 9, S. 524–526, 1974
- [5] CH. GROSSMANN, H.-G. ROOS: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner; Stuttgart; 1992
- [6] G. JENG, A. WEXLER: Self-adjoint variational formulation of problems having non-self-adjoint operators. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 26, No. 2, S. 91–94, 1978
- [7] K. S. KUNDERT: Sparse matrix techniques. In: A. E. RUEHLI (Hrsg.): Circuit analysis, simulation and design. Advances in CAD for VLSI, Vol. 3, Part 1; Elsevier Science Publishers; Amsterdam, Niederlande; 1986
- [8] C. LANCZOS: Solution of systems of linear equations by minimized iterations. J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 49, No. 1, S. 33–53, 1952
- [9] G. PETERS, J. H. WILKINSON: Inverse iteration, ill-conditioned equations and Newton's method. SIAM Review, Vol. 21, No. 3, S. 339–360, 1979
- [10] Y. SAAD, M. H. SCHULTZ: GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, No. 3, S. 856–869, 1986

- [11] G. L. G. SLEIJPEN, D. R. FOKKEMA: BICGSTAB( $L$ ) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, Vol. 1, S. 11–32, 1993
- [12] A. WEXLER: Computation of electromagnetic fields. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 17, No. 8, S. 416–439, 1969

### **Finite-Element-Methode**

- [13] I. BARDI, O. BIRO: An efficient finite-element formulation without spurious modes for anisotropic waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 7, S. 1133–1139, 1991
- [14] C.-N. CHANG, W.-C. CHANG, C.H. CHEN: Full-wave analysis of multilayer coplanar lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 4, S. 747–750, 1991
- [15] K. ISE, K. INOUE, M. KOSHIBA: Three-dimensional finite-element method for electromagnetic waveguide discontinuities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 8, S. 1289–1295, 1991
- [16] M. KOSHIBA: The finite-element method. In: E. YAMASHITA (Hrsg.): *Analysis methods for electromagnetic wave problems*. Artech House; Norwood, Massachusetts, USA; 1990
- [17] M. KOSHIBA, K. INOUE: Simple and efficient finite-element analysis of microwave and optical waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 2, S. 371–377, 1992
- [18] J.-F. LEE: Finite element analysis of lossy dielectric waveguides. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 42, No. 6, S. 1025–1031, 1994
- [19] D. R. LYNCH, K. D. PAULSEN: Origin of vector parasites in numerical Maxwell solutions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 3, S. 383–394, 1991
- [20] G. MUR: Compatibility relations and the finite-element formulation of electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, S. 2972–2975, 1994
- [21] G. MUR: Edge elements, their advantages and their disadvantages. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 30, No. 5, S. 3552–3557, 1994
- [22] K. D. PAULSEN, D. R. LYNCH: Elimination of vector parasites in finite element Maxwell solutions. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 3, S. 395–404, 1991

- [23] B. M. A. RAHMAN, J. B. DAVIES: Penalty function improvement of waveguide solution by finite elements. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 32, No. 8, S. 922–928, 1984
- [24] B. SCHIFF: Eigenvalues for ridged and other waveguides containing corners of angle  $3\pi/2$  or  $2\pi$  by the finite element method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 6, S. 1034–1039, 1991
- [25] J. A. M. SVEDIN: A numerically efficient finite-element formulation for the general waveguide problem without spurious modes. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 37, No. 11, S. 1708–1715, 1989
- [26] G. S. WARREN, W. R. SCOTT: Numerical dispersion of higher order nodal elements in the finite-element method. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 44, No. 3, S. 317–320, 1996
- [27] J. P. WEBB: Edge elements and what they can do for you. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 29, No. 2, S. 1460–1465, 1993

### Netzgenerierung und -verfeinerung

- [28] M. BERN, D. EPPSTEIN: Mesh generation and optimal triangulation. In: D.-Z. DU, F. HWANG (Hrsg.): *Computing in Euclidean geometry*. Lecture Notes Series on Computing, Vol. 1; World Scientific Publishing; 1992
- [29] P. DEUFLHARD, P. LEINEN, H. YSERENTANT: Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Preprint SC 88-5, 1988
- [30] U. HOMANN: Entwicklung eines Verfahrens zur adaptiven Diskretisierung für die numerische Berechnung elektromagnetischer Felder mit Finite- und Boundary-Element-Methoden. Diplomarbeit Universität-GH Paderborn, FB 17, 1998
- [31] N. KÖCKLER, F. NEUGEBAUER: Gittererzeugung. Vorlesungsskript SS 2001, Universität-GH Paderborn, <http://math-www.uni-paderborn.de/user/norbert/gitter.ps.gz>
- [32] U. RÜDE: Fully adaptive multigrid methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 30, No. 1, S. 230–248, 1993
- [33] J. R. SHEWCHUK: Triangle: Engineering a 2D quality mesh generator and Delaunay triangulator. First Workshop on Applied Computational Geometry (Philadelphia, Pennsylvania), ACM, S. 124–133, Mai 1996

- [34] R. VERFÜRTH: A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Wiley, Teubner; Chichester, Stuttgart; 1996

### **Boundary-Element-Methode**

- [35] D. N. ARNOLD: A spline-trigonometric Galerkin method and an exponentially convergent boundary integral method. *Mathematics of Computation*, Vol. 41, No. 164, S. 383–397, 1983
- [36] C. A. BREBBIA: Topics in boundary element research. Volume 1: Basic principles and applications. Springer; Berlin, Heidelberg, New York, Tokio; 1984
- [37] C. A. BREBBIA, J. C. F. TELLES, L. C. WROBEL: *Boundary Element Techniques*. Springer; Berlin, Heidelberg, New York, Tokio; 1984
- [38] P. CECCHINI, F. BARDATI, R. RAVANELLI: A general approach to edge singularity extraction near composed wedges in boundary-element method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 4, S. 730–733, 2001
- [39] G. A. CHANDLER: Superconvergent approximations to the solutions of a boundary integral equation on polygonal domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 23, No. 6, S. 1214–1229, 1986
- [40] V. W. HANSEN: *Numerical solution of antennas in layered media*. Research Studies Press; Taunton, Somerset, England; 1989
- [41] D. HOMENTCOVSCHI, L. KREINDLER: Conformal mapping and complex spline boundary element method. Record of the 9th COMPUMAG Conference on the Computation of Electromagnetic Fields; Miami, Florida, USA; S. 296–297; 1993
- [42] D. B. INGHAM, P. J. HEGGS, M. MANZOOR: Boundary integral equation analysis of transmission-line singularities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 29, No. 11, S. 1240–1243, 1981
- [43] W. JOHN, R. REMMERT: Parameterberechnung für Leiterplatten- und Hybridverdrahtungen mit Hilfe der Boundary Element Method. *Kleinheubacher Berichte*, Band 35, S. 349–362, 1991
- [44] M. H. LEAN, A. WEXLER: Accurate field computation with the boundary element method. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 18, No. 2, S. 331–335, 1982

- [45] K. RUOTSALAINEN, J. SARANEN: Some boundary element methods using Dirac's distributions as trial functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 24, No. 4, S. 816–827, 1987
- [46] J. SARANEN, W. L. WENDLAND: On the asymptotic convergence of collocation methods with spline functions of even degree. *Mathematics of Computation*, Vol. 45, No. 171, S. 91–108, 1985
- [47] W. SCHROEDER: Ein Randintegralverfahren zur quasi-statischen und elektromagnetischen Analyse allgemeiner längshomogener Wellenleiterstrukturen. Dissertation Universität-Gesamthochschule-Duisburg, 1993

### **Finite-Differenzen-Methode**

- [48] M. BARTSCH, M. DEHLER, M. DOHLUS, F. EBELING, P. HAHNE, R. KLATT, F. KRAWCZYK, M. MARX, Z. MIN, T. PRÖPPER, D. SCHMITT, P. SCHÜTT, B. STEFFEN, B. WAGNER, T. WEILAND, S. G. WIPF, H. WOLTER: Solution of Maxwell's equations. *Computer Physics Communications* 72, S. 22–39, 1992
- [49] K. BIERWIRTH: Berechnung der Ausbreitungskonstanten hybrider Wellentypen auf querschnittsinhomogenen isotropen und anisotropen dielektrischen Wellenleitern mit der Methode finiter Differenzen. *Fortschritt-Berichte, VDI Reihe 21, Nr. 11; VDI-Verlag; Düsseldorf; 1987*
- [50] R. H. GALLOWAY, H. MCL. RYAN, M. F. SCOTT: Calculation of electric fields by digital computer. *Proc. IEE*, Vol. 114, No. 6, S. 824–829, 1967
- [51] R. R. GUPTA: Accurate impedance determination of coupled TEM conductors. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 17, No. 8, S. 479–489, 1969
- [52] W. JOHN: Anwendung der Finite-Differenzen-Methode auf die Berechnung der Leitungsparameter von quasi-planaren Mikrostreifenleitungsstrukturen. 37. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium, TU Ilmenau, September 1992
- [53] J. W. NEHRBASS, J. O. JEVTIĆ, R. LEE: Reducing the phase error for finite-difference methods without increasing the order. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 46, No. 8, S. 1194–1201, 1998
- [54] E. SCHWEIG, W. B. BRIDGES: Computer analysis of dielectric waveguides: a finite-difference method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 32, No. 5, S. 531–541, 1984

- [55] D. H. SINNOTT: The use of interpolation in improving finite difference solutions of TEM mode structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 17, No. 1, S. 20–28, 1969
- [56] D. H. SINNOTT, G. K. CAMBRELL, C. T. CARSON, H. E. GREEN: The finite difference solution of microwave circuit problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 17, No. 8, S. 464–478, 1969
- [57] T. WEILAND: Eine numerische Methode zur Lösung des Eigenwellenproblems längshomogener Wellenleiter. *AEÜ*, Band 31, Heft 7/8, S. 308–314, 1977
- [58] T. WEILAND: Verlustbehaftete Wellenleiter mit beliebiger Randkontur und Materialbelegung. *AEÜ*, Band 33, Heft 4, S. 170–174, 1979
- [59] K. B. WHITING: A treatment for boundary singularities in finite difference solutions of Laplace's equation. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 16, No. 10, S. 889–891, 1968

### **FDTD-Methode**

- [60] A. ASI, L. SHAFAI: Dispersion analysis of anisotropic inhomogeneous waveguides using compact 2D-FDTD. *Electronics Letters*, Vol. 28, No. 15, S. 1451–1453, 1992
- [61] A. C. CANGELLARIS: Numerical stability and numerical dispersion of a compact 2-D/FDTD method used for the dispersion analysis of waveguides. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 3, No. 1, S. 3–5, 1993
- [62] R. HOLLAND: Finite-difference solution of Maxwell's equations in generalized nonorthogonal coordinates. *IEEE Trans. Nuc. Sci.*, Vol. 30, No. 6, S. 4589–4591, 1983
- [63] G. D. KONDYLLIS, F. DE FLAVIIS, G. J. POTTIE, T. ITOH: A memory-efficient formulation of the finite-difference time-domain method for the solution of Maxwell equations. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 7, S. 1310–1320, 2001
- [64] R. LUEBBERS, F. P. HUNSBERGER, K. S. KUNZ, R. B. STANDLER, M. SCHNEIDER: A frequency-dependent finite-difference time-domain formulation for dispersive materials. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 32, No. 3, S. 222–227, 1990

- [65] T. NAMIKI: A new FDTD algorithm based on alternating-direction implicit method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 47, No. 10, S. 2003–2007, 1999
- [66] M. J. WHITE, Z. YUN, M. F. ISKANDER: A new 3-D FDTD multigrid technique with dielectric traverse capabilities. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 49, No. 3, S. 422–430, 2001
- [67] K. S. YEE: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equation in isotropic media. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 14, No. 3, S. 302–307, 1966
- [68] W. YU, R. MITTRA: A conformal finite difference time domain technique for modeling curved dielectric surfaces. *IEEE Microwave and Wireless Component Letters*, Vol. 11, No. 1, S. 25–27, 2001

### **Methode der Geraden**

- [69] H. DIESTEL, S. B. WORM: Analysis of hybrid field problems by the method of lines with nonequidistant discretization. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 32, No. 6, S. 633–638, 1984
- [70] A. DREHER, R. PREGLA: Analysis of planar waveguides with the method of lines and absorbing boundary conditions. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 1, No. 6, S. 138–140, 1991
- [71] S. NAM, H. LING, T. ITOH: Time-domain method of lines applied to planar guided wave structures. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 37, No. 5, S. 897–901, 1989
- [72] U. SCHULZ: Die Methode der Geraden – ein neues Verfahren zur Berechnung planarer Mikrowellenstrukturen. Dissertation FernUniversität Hagen; 1980
- [73] B. M. SHERRILL, N. G. ALEXÓPOULOS: The method of lines applied to a finline/strip configuration on an anisotropic substrate. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 35, No. 6, S. 568–575, 1987

### **Spectral-Domain-Methode**

- [74] Y. CHEN, B. BEKER: Dispersion characteristics of open and shielded microstrip lines under a combined principal axes rotation of electrically and magnetically anisotropic substrates. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 41, No. 4, S. 673–679, 1993

- [75] D. MIRSHEKAR-SYAHKAL: Spectral domain method for microwave integrated circuits. John Wiley & Sons; New York, Chichester, Toronto, Brisbane, Singapore; 1990

### **Transmission-Line-Matrix-Methode**

- [76] W. J. R. HOEFER: The transmission line matrix (TLM) method. In: T. ITOH (Hrsg.): Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures. John Wiley & Sons; New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore; 1989
- [77] H. JIN, R. VAHLDIECK: The frequency-domain transmission line matrix method – a new concept. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 40, No. 12, S. 2207–2218, 1992
- [78] H. JIN, R. VAHLDIECK: Full-wave analysis of guiding structures using a 2-D array of 3-D TLM nodes. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 41, No. 3, S. 472–477, 1993
- [79] P. B. JOHNS: On the relationship between TLM and finite-difference methods for Maxwell's equations. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 35, No. 1, S. 60–61, 1987

### **Hybrid-Methoden**

- [80] C.-H. AHN, B.-S. JEONG, S.-Y. LEE: Efficient vectorial hybrid FE-BE method for electromagnetic scattering problem. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, No. 5, S. 3136–3139, 1994
- [81] A. BECKER, V. HANSEN: A hybrid method combining the FDTD and a time domain boundary-integral equation marching-on-in-time algorithm. Advances in Radio Science, Vol. 1, S. 99–104, 2003
- [82] I. A. CERMAK, P. SYLVESTER: Solution of 2-dimensional field problems by boundary relaxation. Proc. IEE, Vol. 115, No. 9, S. 1341–1348, 1968
- [83] TH. F. EIBERT, V. HANSEN: 3-D FEM/BEM-hybrid approach based on a general formulation of Huygens' principle for planar layered media. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., Vol. 45, No. 7, S. 1105–1112, 1997
- [84] K. HIRAYAMA, M. KOSHIBA: Analysis of discontinuities in an asymmetric dielectric slab waveguide by combination of finite and boundary

- elements. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 4, S. 686–691, 1992
- [85] J.-M. JIN, J. L. VOLAKIS, J. D. COLLINS: A finite-element–boundary-integral method for scattering and radiation by two- and three-dimensional structures. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 33, No. 3, S. 22–32, 1991
- [86] O. M. RAMAHI: A surface integral equation method for the finite element solution of waveguide discontinuity problems. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 3, S. 604–608, 1991
- [87] K.-L. WU, C. WU, J. LITVA: Characterizing microwave planar circuits using the coupled finite-boundary element method. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 40, No. 10, S. 1963–1966, 1992

### **Behandlung ungeschirmter Anordnungen**

- [88] A. BAYLISS, M. GUNZBURGER, E. TURKEL: Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 42, No. 2, S. 430–451, 1982
- [89] J.-P. BÉRENGER: A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comp. Phys.*, Vol. 114, No. 2, S. 185–200, 1994
- [90] J.-P. BÉRENGER: Evanescent waves in PML's: Origin of the numerical reflection in wave-structure interaction problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 47, No. 10, S. 1497–1503, 1999
- [91] Q. CHEN, A. KONRAD: A review of finite element open boundary techniques for static and quasi-static electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 33, No. 1, S. 663–676, 1997
- [92] J. S. JUNTUNEN, N. V. KANTARTZIS, T. D. TSIBOUKIS: Zero reflection coefficient in discretized PML. *IEEE Microwave and Wireless Component Letters*, Vol. 11, No. 4, S. 155–157, 2001
- [93] V. N. KANELLOPOULOS, J. P. WEBB: A numerical study of vector absorbing boundary conditions for the finite-element solution of Maxwell's equations. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 1, No. 11, S. 325–327, 1991
- [94] M. MATSUHARA, H. YUNOKI, A. MARUTA: Analysis of open-type waveguides by the vector finite-element method. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, Vol. 1, No. 12, S. 376–378, 1991

- [95] K. K. MEI, R. POUS, Z. CHEN, Y.-W. LIU, M. D. PROUTY: Measured equation of invariance: A new concept in field computations. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 42, No. 3, S. 320–328, 1994
- [96] T. ÖZDEMİR, J. L. VOLAKIS: A comparative study of an ABC and an artificial absorber for truncating 3-D finite element meshes. *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, 19.–24. Juni 1994, Volume 1, S. 410–413, University of Washington, Seattle, 1994
- [97] J. PENG, C. A. BALANIS: A generalized reflection-free domain-truncation method: Transparent absorbing boundary. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 46, No. 7, S. 1015–1022, 1998
- [98] O. M. RAMAHI, A. KHEBIR, R. MITTRA: Numerically derived absorbing boundary conditions for the solution of open region scattering problems. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 39, No. 3, S. 350–353, 1991
- [99] Z. S. SACKS, D. M. KINGSLAND, R. LEE, J.-F. LEE: A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 43, No. 12, S. 1460–1463, 1995
- [100] J. A. M. SVEDIN: A modified finite-element method for dielectric waveguides using an asymptotically correct approximation on infinite elements. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 39, No. 2, S. 258–266, 1991
- [101] TH. TISCHLER, W. HEINRICH: The perfectly matched layer as lateral boundary in finite-difference transmission-line analysis. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 48, No. 12, S. 2249–2253, 2000
- [102] D. C. WITTWER, R. W. ZIOLKOWSKI: Two time-derivative Lorentz material (2TDLM) formulation of a Maxwellian absorbing layer matched to a lossy medium. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 48, No. 2, S. 192–199, 2000

### Referenzwerte

- [103] M. S. ALAM, M. KOSHIBA, K. HIRAYAMA, Y. HAYASHI: Hybrid-mode analysis of multilayered and multiconductor transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 45, No. 2, S. 205–211, 1997
- [104] A. R. DJORDJEVIĆ, T. K. SARKAR: Closed-form formulas for frequency-dependent resistance and inductance per unit length of microstrip

- and strip transmission lines. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 42, No. 2, S. 241–248, 1994
- [105] J.-F. KIANG: Propagation and coupling characteristics of microstrip lines with laminated ground plane. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, Vol. 44, No. 2, S. 208–217, 1996
- [106] J. VAN DER MERWE, H. C. READER, J. H. CLOETE: S-parameter measurements yielding the characteristic matrices of multiconductor transmission lines. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, Vol. 40, No. 3, S. 249–256, 1998
- [107] W.-K. WANG, R. W. SMITH, P. J. ANTHONY: Full-wave analysis of coplanar waveguides for  $\text{LiNbO}_3$  optical modulators by the mode-matching method considering nonideal conductors on etched buffer layers. *J. Lightwave Technol.*, Vol. 13, No. 11, S. 2250–2257, 1995
- [108] W.-K. WANG, R. WOLFE, P. J. ANTHONY: Analysis of magneto-optic nonreciprocal phase shift in asymmetric fibers for all-fiber isolators by variational vector-wave mode-matching method. *J. Lightwave Technol.*, Vol. 14, No. 5, S. 749–759, 1996



## Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Mathis für die Betreuung und Förderung dieser Arbeit. Sein großes Engagement und Interesse sowie das in mich gesetzte Vertrauen waren wichtige Garanten für den erfolgreichen Abschluß dieses Projekts.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Volkert Hansen danke ich für die Übernahme des Korreferates und die damit verbundene Mühe.

Diese Arbeit entstand in enger Kooperation mit der Abteilung Advanced System Engineering Paderborn des Fraunhofer Instituts für Zuverlässigkeit und Mikrointegration (IZM). Besonders hervorheben möchte ich den Beitrag von Herrn Dipl.-Ing. Werner John, der die Anregung zu dieser Arbeit gab und stets die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens im Sinne der MEDEA-Projekte A408 und A509 (MESDIE) im Auge behielt: Bei aller Begeisterung für die notwendigen theoretischen Überlegungen und Herleitungen hat er mit seiner Sicht auf die Erfordernisse einer industrie-orientierten Forschung sowie durch zahlreiche fachliche Diskussionen und kritische Anmerkungen nicht unerheblich zum Erfolg dieser Arbeit beigetragen.

Frau Dr. Steffi Mitzenheim danke ich für das Korrekturlesen des Manuskriptes und ihre Anregungen zur sprachlichen Optimierung des Textes.



## Werdegang

- 10/1987 – 03/1990 5 Semester Physik an der TU Braunschweig, im Oktober 1989 Erwerb des Vordiploms
- 04/1990 – 06/1992 5 Semester Physik an der Universität Göttingen, mit der Diplom-Prüfung abgeschlossen  
Thema der Diplomarbeit: Rekonstruktionsalgorithmen für die Computertomografie
- 10/1992 – 02/1996 wissenschaftlicher Mitarbeiter im C-LAB / Universität-GH Paderborn  
Arbeitsgebiet: numerische Simulation elektromagnetischer Felder
- 03/1996 – 06/1998 Leiter der Arbeitsgruppe „Electromagnetic Field Analysis“ im C-LAB
- 06/1998 – 12/2002 Leiter Quality Assurance bei der Brokat AG (später Encorus Technologies)
- seit 01/2003 selbständiger Unternehmensberater  
Gesellschafter der Vogt + Partner GbR