

Interferometrische Messung der thermischen Zustandsgrößen von Edelgasstoßwellenplasmen ¹

D. Meiners und C. O. Weiss

Institut für Plasmaphysik der Technischen Universität Hannover

(Z. Naturforsch. **28 a**, 1294–1307 [1973]; eingegangen am 6. April 1973)

Interferometric Measurement of Thermodynamic Variables of Rare Gas Plasmas Produced by Shock Waves

The variation of electron density and neutral atom density behind incident shock waves in argon, krypton, and xenon are measured using a two wavelength laser interferometer with photoelectric detection of fringe shifts. The accuracy of the measured area densities $\int N_e dl$ and $\int N_a dl$ is better than 1 per cent. Densities measured at the moment of maximum electron density agree well with Rankine-Hugoniot densities. There are no indications to deviations from LTE. Additionally, in the radiation cooling region the decrease of temperature is determined.

1. Einleitung

In Membranstoßrohren erzeugte Plasmen sind in vielen Untersuchungen als spektroskopische Lichtquelle verwendet worden. Dem Nachteil der Instationarität dieser Plasmen stehen die Vorteile der Homogenität auf Beobachtungsstrahlen senkrecht zur Rohrachse und der Berechenbarkeit der thermodynamischen Zustandsgrößen mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Gleichungen aus der relativ einfach meßbaren Stoßwellengeschwindigkeit gegenüber. Bei dieser Zustandsberechnung wird vorausgesetzt, daß sich das Plasma im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet und daß Grenzschichteffekte sowie Verlustmechanismen, wie z. B. Strahlungskühlung, vernachlässigt werden können.

Nach Kolb und Griem, die in ² die bis 1961 durchgeführten Untersuchungen kritisch diskutiert haben, kann es als gesichert gelten, daß diese idealisierte hydrodynamische Theorie die realen Verhältnisse im wesentlichen richtig beschreibt und daß sich das Stoßwellenplasma am Ende der Ionisationsrelaxationszone im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Der Grad der Übereinstimmung zwischen den gemessenen Zustandsgrößen und den mit Hilfe der Rankine-Hugoniot-Gleichungen berechneten Werten ist allerdings nicht besonders hoch. Bei der Elektronendichte z. B. sind Abweichungen von 10 bis 20% durchaus üblich. Übereinstimmungen mit einer ähnlichen Genauigkeit sind auch in mehreren

späteren Untersuchungen (z. B. ^{3, 4}) festgestellt worden.

Für viele quantitative spektroskopische Untersuchungen, wie z. B. die Messung der atomaren Emissionskoeffizienten im Kontinuum (ξ -Faktoren) oder die Bestimmung von Stark-Effekt-Konstanten, wäre es wünschenswert, von einer in engeren Grenzen gesicherten Übereinstimmung ausgehen zu können. Als Gründe für Abweichungen zwischen den tatsächlich vorhandenen Zustandsgrößen von den Rankine-Hugoniot-Werten kommen in erster Linie Strahlungskühlung in der Relaxationszone, Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht am Ende der Relaxationszone sowie Abweichungen von der idealen eindimensionalen Strömung in Frage.

Hinweise auf den zuletzt genannten Grund enthält eine Arbeit von Bengtson et al. ⁵. Hinter reflektierten Stoßwellen in Neon hat sich zwar lokales thermodynamisches Gleichgewicht eingestellt, es werden jedoch nicht die Rankine-Hugoniot-Zustandsgrößen gemessen. Bei der Elektronendichte z. B. betragen die Abweichungen bis zu $\pm 30\%$.

Noch größere Diskrepanzen haben Carls et al. ^{6, 7, 8} gefunden. Messungen der Kontinuumsintensität hinter einlaufenden Stoßwellen in Krypton haben um einen Faktor 2 kleinere Werte ergeben, als nach den Rankine-Hugoniot-Rechnungen unter Verwendung der von Schlüter ⁹ berechneten ξ -Faktoren zu erwarten war. Hinter reflektierten Stoßwellen in Krypton bzw. Xenon waren die gemessenen Intensitäten sogar um den Faktor 4,5 bzw. 9 zu klein. Da die Kontinuumsintensität zum Quadrat der Elektronendichte proportional ist, entsprechen diese Intensitätsabwei-

Sonderdruckanforderungen an Prof. Dr. D. Meiners, Physikalisches Institut der Universität Düsseldorf, D-4000 Düsseldorf, Moorenstraße 5 oder Dr. C. O. Weiss, Physikalisch-Technische Bundesanstalt, D-3300 Braunschweig, Bundesallee 100.

chungen einem Faktor 1,4 bis 3 bei der Elektronendichte. Im Fall der einlaufenden Welle in Krypton ist diese Abweichung durch interferometrische Messungen der Elektronendichte bestätigt worden. Allerdings war der relative Fehler dieser Messungen mit 20 mit 40% recht groß.

Die Diskrepanzen werden von Carls et al. darauf zurückgeführt, daß sich das Plasma hinter der einlaufenden Stoßwelle zum Zeitpunkt maximaler Kontinuumsintensität nicht im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befindet. Strahlungskühlung in der Relaxationszone ist durch Messungen im Vakuum-UV als Ursache ausgeschlossen worden.

In dieser Situation sind weitere Experimente, in denen möglichst direkt gemessene Zustandsgrößen mit Rankine-Hugoniot-Werten verglichen werden, zur Klärung nötig. Die Genauigkeit solcher Messungen muß jedoch erheblich verbessert werden, um sichere Ergebnisse zu erhalten. Messungen der Elektronendichte z. B. sollten mit einer Genauigkeit von einigen Prozent vorgenommen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie mit einem Zweiwellenlängeninterferometer unabhängig von der Voraussetzung des lokalen thermodynamischen Gleichgewichts die zeitlichen Verläufe der Elektronendichte und der Atomdichte hinter der einlaufenden Stoßwelle mit der genannten Genauigkeit gemessen werden können. Die am Ende der Ionisationsrelaxationszone gemessene maximale Elektronendichte sowie die zugehörige Atomdichte werden bei verschiedenen Stoßwellengeschwindigkeiten und bei verschiedenen Edelgasen mit den Rankine-Hugoniot-Werten verglichen. Da sich keine Anhaltspunkte für Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht ergeben, wird für die nachfolgende Strahlungskühlungszone mit Hilfe der Saha-Gleichung zusätzlich zu den Dichteverläufen der Temperaturabfall bestimmt.

2. Stoßrohr

Zur Plasmaerzeugung wurde ein Membranstoßrohr mit Heizung des Treibgases durch eine Kondensatorentladung eingesetzt, dessen Prinzip z. B. von Roders¹⁰ ausführlich beschrieben worden ist. Als Treibgas wurde Wasserstoff mit einem Druck von 7 atm verwendet. Zur Zündung der Hochdruckentladung befand sich in der Achse des zylindrischen Treibrohres ein Aluminiumdraht von 0,1 mm Durchmesser, über den die Kondensatorbatterie mit einem Energieinhalt von maximal 15,8 kJ entladen wurde.

Als Membran wurde eine kreuzweise geritzte Aluminiumfolie von 0,2 mm Dicke verwendet.

Das Laufrohr war in seinem mittleren Teil (1 bis 3 m Entfernung von der Membran) als Edelstahlrohr mit quadratischem Querschnitt ($50 \times 50 \text{ mm}^2$) ausgebildet. Im letzten Drittel dieses Rohres waren zwei gegenüberliegende Glasfenster angebracht, welche die gesamte Höhe des Stoßwellenplasmas auf einer Länge von 0,7 m zu beobachten gestatteten. Am Meßort für das Interferometer, der 2,60 m von der Membran entfernt war, waren Quarzfenster mit 30 mm Durchmesser in die Glasfenster eingekittet, um im Infraroten eine hohe Transmission zu erreichen und um Spannungsdoppelbrechung zu vermeiden. Weitere Details über das Stoßrohr sind in¹¹ zu finden.

Als Testgase wurden Argon rein (Fa. Linde, 99,99%), Krypton reinst (Fa. Linde, 99,95%) und Xenon reinst (Fa. Linde, 99,95%) verwendet. Der Restgasdruck im Stoßrohr nach dem Auspumpen betrug $5 \cdot 10^{-4}$ Torr. Bei allen Experimenten wurde mit einem Druck von 10 Torr im Laufrohr gearbeitet. Die Stoßwellengeschwindigkeit wurde durch Veränderung der Kondensatorenergie (Zahl der Kondensatoren) variiert.

3. Interferometrisches Meßverfahren

3.1. Prinzip

Die Messungen der Teilchendichten wurden mit Hilfe der Methode der Zweiwellenlängeninterferometrie^{12, 13} durchgeführt. Grundlage dieser Methode ist die Abhängigkeit des Brechungsindex eines Plasmas von der Wellenlänge λ und den Dichten der Plasmakomponenten.

Bei einem nicht zu dichten Plasma setzt sich die Refraktivität $n - 1$ additiv aus den Refraktivitäten aller Komponenten zusammen. Für ein teilweise einfach ionisiertes Edelgasplasma gilt für Frequenzen weit oberhalb der Plasmafrequenz (z. B.¹³):

$$n(\lambda) - 1 = 2\pi\alpha_a(\lambda)N_a + 2\pi\alpha_iN_i + \left(\frac{-e^2}{2\pi m_e c^2} \lambda^2\right)N_e \quad (1)$$

(α_a, α_i : Polarisierbarkeit des Atoms bzw. Ions; N_a, N_i, N_e : Anzahldichte der Atome, Ionen bzw. Elektronen; e : Elementarladung; m_e : Elektronenmasse; c : Lichtgeschwindigkeit).

Diese Gleichung erlaubt es, aus Messungen der Plasmarefraktivität bei zwei Wellenlängen die Elektronendichte (= Ionendichte) und die Atomdichte zu bestimmen, wenn die Polarisierbarkeit α_a und α_i

bei diesen Wellenlängen bekannt sind. Auf diese Voraussetzung wird weiter unten näher eingegangen.

Zur Bestimmung der Refraktivität wird die Streifenverschiebung, welche das Plasma in einem Interferometer gegenüber einem definierten Bezugsobjekt erzeugt (z. B. Vakuum oder Testgas vor der Stoßfront) gemessen. Der Zusammenhang zwischen der Streifenverschiebung Δs und der Änderung der Refraktivität $\Delta(n-1)$ zwischen Meß- und Ausgangszustand wird gegeben durch

$$\Delta s(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \int_0^l \Delta(n(\lambda) - 1) dl, \quad (2)$$

wobei die Integration längs des Beobachtungsstrahls durch das möglicherweise inhomogene Meßobjekt zu erstrecken ist.

Einsetzen von Gl. (1) in Gl. (2) für zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2 führt unter Berücksichtigung von $N_e = N_i$ unter Verwendung der Abkürzungen $\Delta_1 =$

$\Delta s(\lambda_1)$ und $\Delta_2 = \Delta s(\lambda_2)$ nach elementarer Umformung zu:

$$\int_0^l \Delta N_e dl = \frac{\Delta_1 \lambda_1 \alpha_a(\lambda_2) - \Delta_2 \lambda_2 \alpha_a(\lambda_1)}{\left(\frac{e^2}{2\pi m_e c^2}\right) [\lambda_2^2 \alpha_a(\lambda_1) - \lambda_1^2 \alpha_a(\lambda_2)] + 2\pi [\alpha_a(\lambda_2) \alpha_i(\lambda_1) - \alpha_a(\lambda_1) \alpha_i(\lambda_2)]}. \quad (3)$$

Wegen der geringen Dispersion der Atome und Ionen kann der zweite Summand im Nenner meistens gegen den ersten Summand vernachlässigt werden. Exakt Null ist der zweite Summand, wenn Atome und Ionen dieselbe relative Dispersion haben, d. h. wenn der Quotient

$$\beta = \alpha_i(\lambda) / \alpha_a(\lambda) \quad (4)$$

wellenlängenunabhängig ist. Da bei Edelgasen im sichtbaren und infraroten Spektralgebiet diese Näherung wegen der Lage der Resonanzlinien im Vakuum-UV sicher gut erfüllt ist, wird im folgenden immer diese Näherung benutzt. Hiermit vereinfacht sich Gl. (3) unter Verwendung der Abkürzung

$$\gamma = \alpha_a(\lambda_2) / \alpha_a(\lambda_1) \quad (5)$$

zu

$$\int_0^l \Delta N_e dl = \frac{\gamma \Delta_1 \lambda_1 - \Delta_2 \lambda_2}{\left(\frac{e^2}{2\pi m_e c^2}\right) (\lambda_2^2 - \gamma \lambda_1^2)}. \quad (6)$$

Für die Atomflächendichte ergibt sich:

$$\int_0^l \Delta N_a dl = \frac{(\Delta_1 \lambda_2 - \Delta_2 \lambda_1) \lambda_1 \lambda_2}{2\pi \alpha_a(\lambda_1) (\lambda_2^2 - \gamma \lambda_1^2)} - \beta \int_0^l \Delta N_e dl. \quad (7)$$

Die Gln. (6) und (7) zeigen, daß sich Meßfehler bei Δ_1 und Δ_2 um so weniger auswirken, je größer $|\lambda_2^2 - \gamma \lambda_1^2|$ ist. Da γ bei genügendem Abstand von Linien etwa 1 ist, muß eine der beiden Wellenlängen möglichst groß, die andere möglichst klein sein. Diese Bedingungen werden z. B. von Helium-Neon-Lasern mit den Wellenlängen 623,8 nm und 1152,3 nm gut erfüllt.

Besonders betont sei, daß die Bestimmung der Elektronendichte von der nur sehr ungenau bekannten Polarisierbarkeit der Ionen im Rahmen der Näherung $\beta = \text{const}$ völlig unabhängig ist. Dagegen beeinflußt diese Größe die Bestimmung der Atomdichte; bei Plasmen mit geringem Ionisationsgrad ist der zweite Summand in Gl. (7) jedoch klein, so daß der Einfluß der Ionenpolarisierbarkeit auf die Genauigkeit der Atomdichte nicht groß ist.

Die Messungen der Plasmarefraktivität wurden mit einem modifizierten Michelson-Interferometer durchgeführt. Dieser Typ wurde gewählt, weil der doppelte Durchgang des Lichts durch das Meßobjekt eine um den Faktor 2 größere Streifenverschiebung als bei dem meist verwendeten Mach-Zehnder-Interferometer bewirkt. Als Lichtquellen wurden Helium-Neon-Laser benutzt. Wegen der geringen Leistung kam bei der benötigten Zeitauflösung von unter 0,1 μs aus Intensitätsgründen nur eine fotoelektrische Registrierung der zeitlichen Veränderung des Interferenzstreifensystems in Frage.

Bei der Interferenz von zwei Strahlen mit den zeitlich konstanten Intensitäten I_1 und I_2 und der Phasendifferenz φ , die wegen der Veränderung der Refraktivität im Meßarm zeitlich veränderlich ist, hat der resultierende Strahl bekanntlich die Intensität

$$I(t) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \varphi(t). \quad (8)$$

Wird $I(t)$ an einer bestimmten Stelle des Interferenzfeldes mit einer Fotodiode gemessen, deren Abmessung wesentlich kleiner ist als der eingestellte Streifenabstand, so kann hieraus $\varphi(t)$ mit Gl. (8) bestimmt werden, wenn $\varphi(t)$ im Beobachtungszeit-

raum so stark variiert, daß mindestens ein Maximum und ein Minimum der Cosinusfunktion registriert werden. Der Zusammenhang mit der in Gl. (2) definierten Streifenverschiebung Δs wird durch

$$\Delta s = \frac{1}{2\pi} [\varphi(t) - \varphi_0] \quad (9)$$

gegeben, wobei φ_0 die Phasendifferenz zwischen Meßstrahl und Referenzstrahl ist, wenn sich das Bezugsobjekt im Meßarm befindet.

In der Umgebung der Extrema der Cosinusfunktion ist die beschriebene Phasenmessung natürlich ungenau. Außerdem ist mit einer solchen Messung nicht zu entscheiden, ob sich im Extremum die optische Weglänge monoton weiterverändert durch ebenfalls ein Extremum besitzt. Diese beiden Nachteile des fotoelektrischen Verfahrens werden durch eine zweite Messung beseitigt, die an einer Stelle des Streifensystems durchgeführt wird, bei der sich die Phasendifferenz $\varphi(t)$ gerade um $\pi/2$ von der an der ersten Stelle unterscheidet¹⁴. Einzelheiten werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

3.2. Experimentelle Anordnung.

Die verwendete experimentelle Anordnung ist in Abb. 1 schematisch dargestellt. Die Strahlen der Helium-Neon-Laser L_1 ($\lambda_1 = 623,8$ nm; 5 mW) und L_2 ($\lambda_2 = 1152,3$ nm; 4 mW) werden durch einen di-

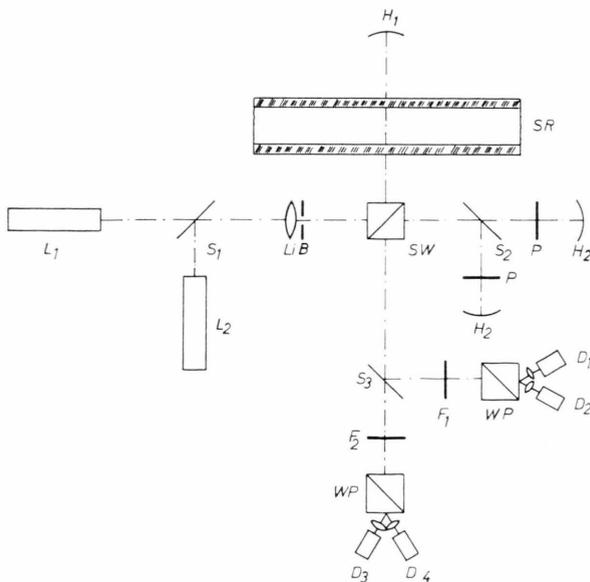


Abb. 1. Zweiwellenlängen-Michelson-Interferometer zur Messung der Elektronendichte und der Atomdichte.

elektrischen Spiegel S_1 vereinigt, welcher in der gezeichneten Stellung bei λ_1 zu 80% transparent ist und bei λ_2 fast vollständig reflektiert¹⁵. Zwecks Erhöhung des räumlichen Auflösungsvermögens werden die Laserstrahlen mit der Linse Li in die Achse des Stoßrohres SR auf einen Durchmesser von etwa 0,5 mm fokussiert.

Die Strahlteilung in Meßarm und Referenzarm erfolgt durch den Strahlteilungswürfel SW. Im Referenzarm und im Detektorarm werden der rote und der infrarote Laserstrahl mit den selektiv transmittierenden und reflektierenden Spiegeln S_2 und S_3 wieder getrennt, damit die Einstellung und die Registrierung der Interferenzstreifen für jede Wellenlänge unabhängig von der anderen Wellenlänge vorgenommen werden können. (Die Trennung im Referenzarm ist außerdem Voraussetzung für die Benutzung der $\lambda/8$ -Platten P, deren Funktion weiter unten beschrieben wird.)

Zur Verhinderung von Rückwirkungen des Interferometers auf die Laseremission ist die Ebene der an den Interferometerspiegeln H_1 und H_2 reflektierten Strahlen gegen die der einfallenden Strahlen etwas geneigt. Das von dem Strahlteiler in Richtung der Laser zurückkehrende Licht fällt auf die an der Linse Li angebrachte Blende B und gelangt nicht zu den Lasern.

In der Stoßfront und in der Relaxationszone ist der Gradient des Brechungsindex im Meßobjekt so groß, daß das Michelson-Interferometer in der üblichen Anordnung mit Planspiegeln durch die im Meßarm entstehende Strahlablenkung dejustiert wird. Um diese Strahlablenkung unschädlich zu machen, wird im Meßarm ein Hohlspiegel verwendet^{16, 17}. Der Krümmungsmittelpunkt dieses Hohlspiegels H_1 ($f = 100$ mm) befindet sich 0,5 mm senkrecht unter dem Schnittpunkt des ankommenden Laserstrahls mit der Achse des Stoßrohres. In der Projektion auf die Ebene der einfallenden Laserstrahlen werden auch abgelenkte Strahlen in guter Näherung in sich selbst reflektiert, wenn die Ablenkung nicht zu groß ist und der Krümmungsradius des Spiegels hinreichend groß gewählt ist¹⁸. Hohlspiegel mit derselben Brennweite werden im Referenzarm verwendet (H_2).

Aus Intensitätsgründen erwies es sich als zweckmäßig, mit einem Streifenabstand zu arbeiten, der sehr groß gegen den Durchmesser des Laserstrahls war, und den ganzen Laserstrahl auf die Fotodioden zu fokussieren. Aus diesem Grunde konnte die Messung mit zwei Detektoren, die um $\pi/2$ phasenverschobene Interferenzsignale registrieren, nicht einfach in der Weise durchgeführt werden, daß für jede Wellenlänge zwei Fotodioden an entsprechende Stellen des Interferenzstreifensystems gebracht wurden. Es wurde daher das von Rowley¹⁷ vorgeschlagene

Verfahren benutzt, welches eine solche Messung an einer Stelle des Interferenzfeldes ermöglicht.

Das von den Lasern emittierte linear polarisierte Licht wird bei diesem Verfahren im Referenzarm nach zweimaligem Durchgang durch $\lambda/8$ -Platten P zu zirkular polarisiertem Licht, welches als Summe zweier linear polarisierter Komponenten aufgefaßt werden kann, deren Polarisationsrichtungen senkrecht zueinander stehen und die gegeneinander um $\pi/2$ verzögert sind. Das linear polarisierte Licht des Meßarms kann in zwei zueinander senkrecht polarisierte Komponenten zerlegt werden, die gleichphasig sind. In diesen beiden Polarisationsrichtungen ergeben sich also um $\pi/2$ phasenverschobene Interferenzen¹⁹.

Das Licht der beiden Polarisationsrichtungen wird durch Wollaston-Prismen WP räumlich getrennt und auf Fotodioden D (623,8 nm: Monsanto MD2; 1152,3 nm: Philco L4520) fokussiert. Durch Interferenzfilter F mit 10 nm Halbwertsbreite werden die Eigenstrahlung des Plasmas sowie Anteile des Lichts

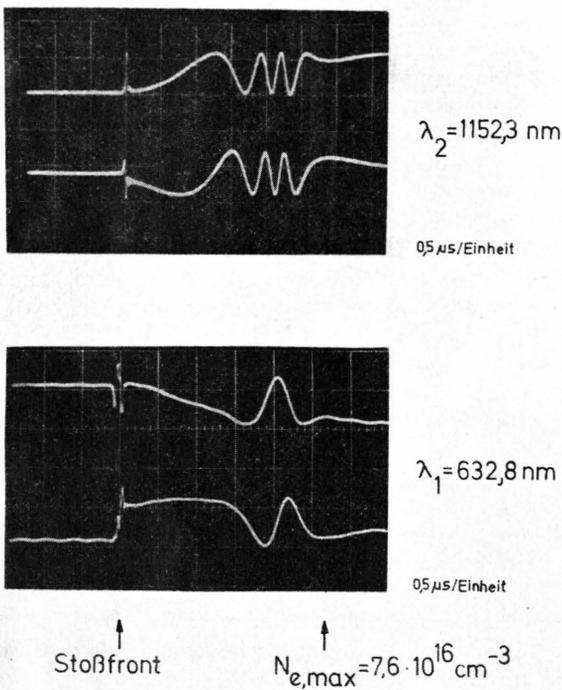


Abb. 2. Interferogramme der Ionisationsrelaxationszone hinter einer Stoßwelle mit $M=12,6$ in 10 Torr Argon.

der anderen Laserwellenlänge diskriminiert. Typische Oszillogramme der 4 Fotodiodensignale sind in Abb. 2 wiedergegeben.

Der mechanische Aufbau und die Justierung des beschriebenen Interferometers waren völlig problem-

los. Für die benötigte Meßzeit von maximal $50 \mu\text{s}$ gewährleistet der Aufbau von Strahlteiler und Interferometerspiegeln auf einer Leichtmetallplatte von 20 mm Dicke eine genügende Stabilität.

3.3. Auswertung und Genauigkeit

Aus den zu jeder Wellenlänge gehörenden zwei Oszillogrammen mit den um $\pi/2$ phasenverschobenen Interferenzsignalen wird die Phase mit der Formel

$$\varphi(t) = \arctan [a(t)/b(t)] \quad (10)$$

bestimmt, wobei $a(t)$ und $b(t)$ die auf die Amplitude 1 normierten Wechselspannungsanteile der beiden Signale sind. Bei dieser Normierung muß die Quadratsumme

$$x = a^2 + b^2 \quad (11)$$

zeitunabhängig den Wert 1 haben. Die auf Grund von Meßfehlern unvermeidlichen Abweichungen ermöglichen eine Fehlerabschätzung für $\varphi(t)$, wie weiter unten ausgeführt wird.

Für die Berechnung der Streifenverschiebung mit Gl. (9) ist die Festlegung einer Bezugsphase nötig. Da das Interferometer bei senkrechtem Durchgang durch das Stoßrohr den Dichtesprung in der Stoßfront nicht auflösen kann, ist es nicht möglich, das ungestörte Testgas vor der Stoßwelle als Bezugsobjekt zu wählen. Statt dessen wurde das komprimierte Gas unmittelbar hinter der Stoßfront als Bezugsobjekt genommen. Weil hier die Elektronendichte noch Null ist, kann in Gl. (6) N_e statt ΔN_e gesetzt werden.

Da unmittelbar hinter der Stoßfront nur die Freiheitsgrade der Translation angeregt sind, kann die Atomdichte, auf die sich die Differenz ΔN_a in Gl. (7) bezieht, mit der Formel

$$N_{a,F} = N_{a,0} ((z+1)M^2 / [(z-1)M^2 + 2]) \quad (12)$$

berechnet werden, welche in der Gasdynamik für ideale Gase mit konstanter spezifischer Wärme abgeleitet wird. Dabei bedeuten $N_{a,0}$ die Atomdichte im ungestörten Testgas, z das Verhältnis der spezifischen Wärmen und M die Machzahl der Stoßwelle.

Abbildung 3 zeigt ein Beispiel für die Funktionen $\Delta_1(t)$, $\Delta_2(t)$, $N_e(t)$ und $N_a(t)$ vom Beginn der Relaxationszone bis in die Strahlungskühlungszone, wobei für die Berechnung von N_e und N_a Homogenität des Plasmas längs des Beobachtungsstrahls angenommen wurde.

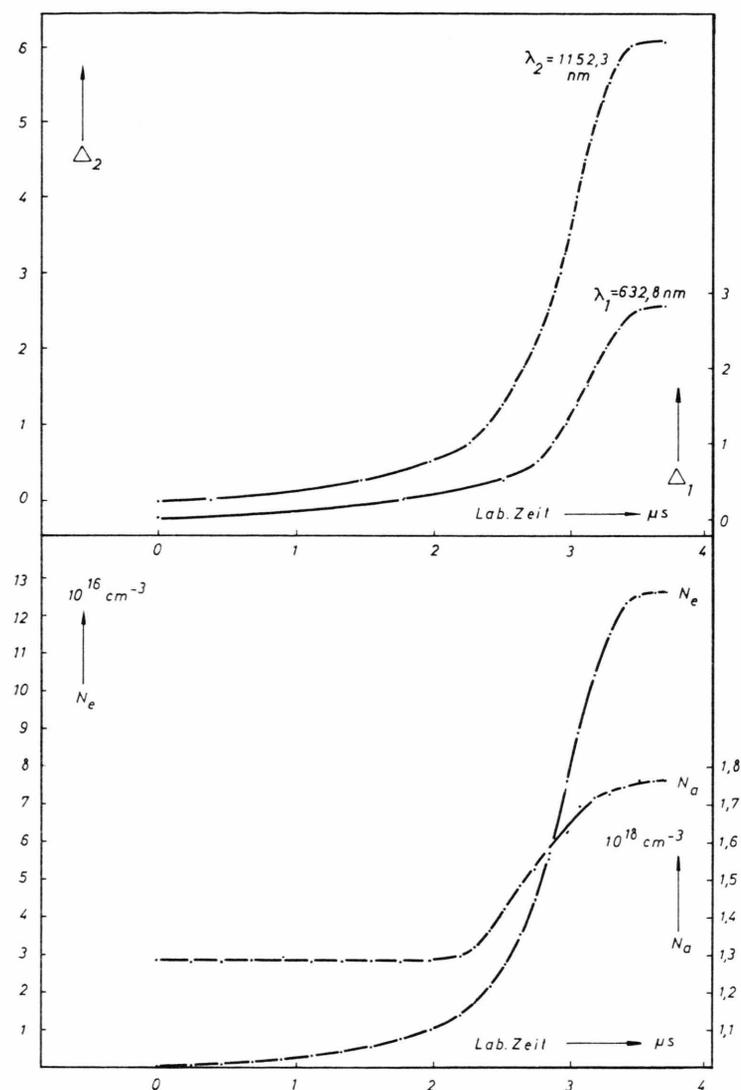


Abb. 3. Interferenzstreifenverschiebung, Elektronendichteverlauf und Atomdichteverlauf hinter einer Stoßwelle mit $M=13,6$ in 10 Torr Argon.

Die für die Auswertung benutzten Daten über Atom- und Ionenpolarisierbarkeiten sind in Tab. 1

Tab. 1. Zusammenstellung der bei der Auswertung verwendeten Werte für die Polarisierbarkeiten.

Element	$\alpha_n(632,8 \text{ nm})$	γ	β
Argon	$1,68 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^{-3}$	0,990	0,67
Krypton	$2,48 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^{-3}$	0,986	1
Xenon	$4,03 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^{-3}$	0,981	1

zusammengestellt. Für Argon wurde die Polarisierbarkeit des Neutralatoms mit der in ¹³ angegebenen Dispersionsformel berechnet. Angeregte Zustände wurden nicht besonders berücksichtigt, weil deren

quantitative Erfassung noch zu unsicher erscheint²⁰. Für das Verhältnis von Ionen- und Atompolarisierbarkeit wurde der in ¹³ angegebene Wert 0,67 verwendet²¹.

Die Atompolarisierbarkeiten von Krypton und Xenon wurden mit den in ²² angegebenen Dispersionsformeln berechnet. Da die mit diesen Formeln berechneten Refraktivitäten im sichtbaren Spektralgebiet im Mittel um 1% unter den Tabellenwerten^{23, 24} liegen, wurden die berechneten Polarisierbarkeiten mit einem Aufschlag von 1% versehen. Auch bei diesen Gasen wurden immer die Kaltgaswerte verwendet. Wegen des Fehlens von Daten über die Polarisierbarkeit der Ionen wurde diese gleich der Polarisierbarkeit der Atome gesetzt.

Der Fehler bei der Phasenmessung kann durch Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Gl. (10) abgeschätzt werden:

$$\delta\varphi^2 = \frac{1}{a^2 + b^2} [(b \delta a)^2 + (a \delta b)^2]. \quad (13)$$

Dabei bedeuten δa bzw. δb den mittleren Fehler der Einzelmessung von a bzw. b . Mit $a^2 + b^2 \approx 1$ und $\delta a = \delta b$ folgt hieraus

$$\delta\varphi = \delta a. \quad (14)$$

Mit der sich bei Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf Gl. (11) ergebenden Beziehung

$$\delta a = \delta x/2 \quad (15)$$

folgt weiter

$$\delta\varphi = \delta x/2. \quad (16)$$

Bei der Auswertung ergaben sich für x immer Werte zwischen 0,9 und 1,1. 0,1 ist somit eine obere Schranke für δx . Hiermit ergibt sich $\delta\varphi < 0,05$. Die Lokalisierung eines Interferenzstreifens erfolgt also mit einer Genauigkeit, die besser als 1/100 des Streifenabstandes ist²⁵.

Für die Elektronenflächendichte ergibt die Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes auf die Gl. (9) und (6) $\int N_e dl < 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$. Für ein homogenes Plasma der Länge 5 cm folgt hieraus $\delta N_e < 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, was bei den für diese Arbeit typischen Plasmaparametern einem Fehler unter 1% entspricht.

In entsprechender Weise ergibt sich für die Atomdichte ein Fehler $\delta N_a < 1,4 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ bei Argon, $< 9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ bei Krypton und $< 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ bei Xenon. Stärker als diese Meß- und Auswertungsfehler, welche für die hier untersuchten Plasmen ebenfalls kleiner als 1% sind, wirken sich bei den Atomdichten die systematischen Fehler der verwendeten Daten für die Polarisierbarkeiten aus (Nichtberücksichtigung angeregter Zustände sowie $\beta = 1$ für Krypton und Xenon).

Abweichungen von der Homogenität des Plasmas und ihr Einfluß auf die Genauigkeit der Bestimmung von N_e und N_a werden in Abschnitt 5 diskutiert.

4. Bestimmung der Rankine-Hugoniot-Zustandsgrößen

Wenn der Zustand des Gases vor der Stoßwelle und die Geschwindigkeit der Stoßwelle bekannt sind,

können die Gleichgewichtszustandsgrößen hinter der Stoßwelle berechnet werden. Grundlagen solcher Berechnungen sind die Erhaltungssätze für den Massenstrom, den Impulsstrom und den Energiestrom, sowie die thermische und die kalorische Zustandsgleichung. Bei starken Stoßwellen in Edelgasen, bei denen das durch die Stoßfront strömende Gas ionisiert wird, muß dieses System der Rankine-Hugoniot-Beziehungen noch durch die Saha-Gleichung ergänzt werden.

Bei den durchgeführten Berechnungen wurde die Erniedrigung der Ionisierungsenergie mit der Formel von Griem²⁶ bestimmt. Die Zustandssummen wurden auf der Basis der Tabellenwerte von Drawin und Felenbok²⁷ berechnet. Als thermische Zustandsgleichung wurde die Zustandsgleichung für ideale Gase benutzt. Bei der kalorischen Zustandsgleichung wurde neben der Translationsenergie und der Ionisationsenergie auch die Anregungsenergie berücksichtigt; diese wurde aus der Temperaturabhängigkeit der Zustandssumme berechnet.

Die Messung der Stoßwellengeschwindigkeit muß mit großer Präzision vorgenommen werden, da die Elektronendichte sehr empfindlich von der Geschwindigkeit abhängt. Bei den hier untersuchten Bedingungen pflanzt sich der relative Fehler der Geschwindigkeit um den Faktor 5 bis 10 verstärkt in die Elektronendichte fort. Um bei der Bestimmung der Rankine-Hugoniot-Elektronendichte dieselbe Genauigkeit zu erreichen wie bei der interferometrischen Messung, darf der relative Fehler der Geschwindigkeit bis zu etwa 0,2% betragen.

Wegen dieser hohen Genauigkeit und wegen des Umstands, daß die Stoßwellengeschwindigkeit in Stoßrohren nicht konstant ist, wurde zur Durchführung der Geschwindigkeitsmessung erheblich mehr Aufwand benötigt, als sonst üblich ist. Wegen der Instationarität mußte die Geschwindigkeitsmessung möglichst lokal vorgenommen werden. Als Kompromiß zwischen Meßgenauigkeit und räumlicher Auflösung bei gleichzeitiger möglichst genauer Erfassung der Beschleunigung wurde der Zeitpunkt des Durchgangs der Stoßwelle an vier Meßstellen im Abstand von jeweils 50 mm beobachtet.

Bei der benötigten Genauigkeit ist es nicht möglich, die Geschwindigkeit der Leuchtfrent zu messen und mit der Geschwindigkeit der Stoßwelle gleichzusetzen. Es ist vielmehr nötig, die Geschwindigkeit der nichtleuchtenden Stoßfront selbst zu messen. Das im folgenden beschriebene Meßverfahren basiert

auf der Ablenkung eines senkrecht zur Achse durch das Stoßrohr tretenden Lichtstrahls auf Grund der Diskontinuität des Brechungsindex in der Stoßfront (Schliere) ⁶.

Die optische Anordnung zur Messung der Geschwindigkeit der Stoßfront ist in Abb. 4 schematisch dargestellt. Aus dem Strahl eines Helium-Neon-Lasers L (632,8 nm; 8 mW) werden durch Strahlteilungswürfel SW und Spiegel S vier zueinander parallele Teilstrahlen erzeugt, die das Stoßrohr SR senkrecht zur Achse durchsetzen. Hinter dem Stoßrohr treffen diese Strahlen auf teilweise abgedeckte

nicht abgedeckten Seite hin verschoben. Die benötigte hohe räumliche Auflösung wird durch Fokussierung des Laserstrahls in die Rohrachse erreicht. Die dargestellte symmetrische Anordnung ermöglicht eine gleich gute Fokussierung aller vier Strahlen.

Die Messungen wurden mit einem Strahldurchmesser von etwa 0,2 mm in der Achse durchgeführt, der mit einem Öffnungsverhältnis von etwa 1:200 erzeugt wurde. Diese Daten waren ein Kompromiß zwischen hoher räumlicher Auflösung und hoher Schlierenempfindlichkeit. Vor jedem Experiment wurden der senkrechte Durchgang der vier Strahlen durch das Stoßrohr überprüft und die Abstände der Strahlen fotografisch mit einem Fehler von weniger als 0,05 mm vermessen.

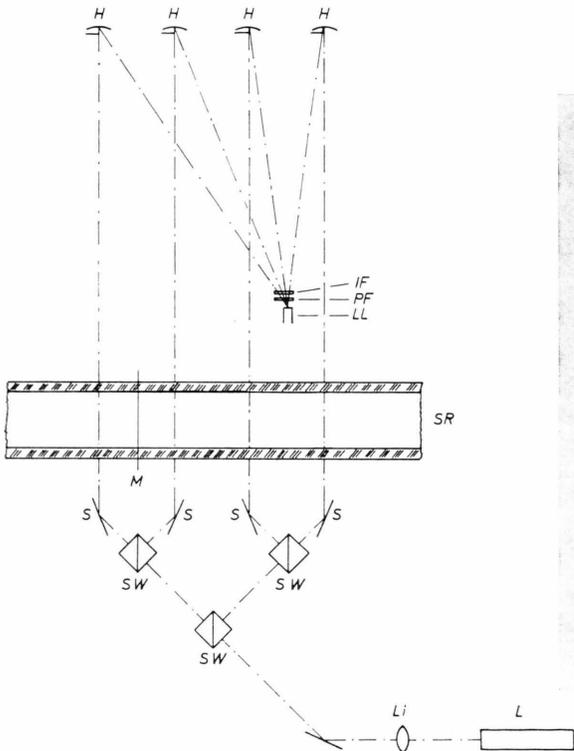


Abb. 4. Optische Anordnung zur Messung der Geschwindigkeit der Stoßfront durch Ablenkung von vier Laserstrahlen.

Hohlspiegel H, welche das Laserlicht auf die Eintrittsfläche eines Lichtleiters LL fokussieren, der zu einem Fotomultiplier führt. Vor dem Lichtleiter befinden sich zwecks Unterdrückung der Plasmaeigenstrahlung ein Polarisationsfilter PF und ein Interferenzfilter IF mit 1 nm Halbwertsbreite.

Beim Durchgang der Stoßfront durch einen der vier Laserstrahlen wird dieser Strahl abgelenkt und auf dem Hohlspiegel von der Abdeckung weg zu der

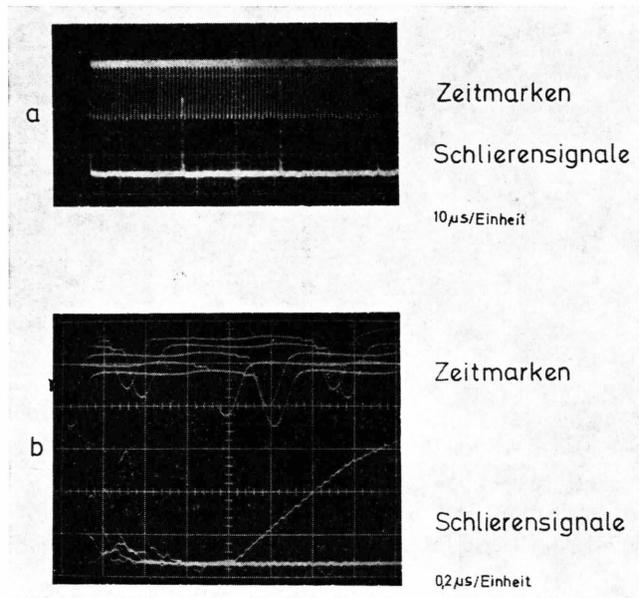


Abb. 5. Oszillographische Registrierung des Durchgangs der Stoßfront durch die vier Laserstrahlen.

Die Zeitpunkte des Durchgangs der Stoßfront durch die Laserstrahlen wurden durch oszillographische Registrierung des Fotomultipliersignals und gleichzeitige Aufzeichnung von Quarzzeitmarken mit einem Zweistrahloszillografen bestimmt (Abb. 5 a). Zur Erhöhung der Genauigkeit wurde die Umgebungs von allen vier Schlierensignalen bei 50-facher Zeitdehnung mit einem zweiten Oszillografen auf einem einzigen Oszillogramm registriert (Abb. 5 b) ²⁸. Auf diese Weise konnten die Laufzeiten der Stoßfront zwischen den Meßstellen mit einem Fehler

unter 20 ns gemessen werden. In Verbindung mit der oben angegebenen Genauigkeit der Ortsmessung ergibt sich der Fehler der Geschwindigkeit zu weniger als 0,2%.

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit und der Verzögerung der Stoßfront in dem 150 mm langen Meßintervall wurden für jede Messung die vier Wertepaare (x_i, t_i) durch ein Polynom 2. Grades

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 \quad (17)$$

approximiert. Die Geschwindigkeit ergibt sich als Funktion der Zeit durch Differentiation; die Verzögerung beträgt $-2C$.

In Tabelle 2 ist die Verzögerung als Funktion der Stoßwellengeschwindigkeit für die untersuchten Gase angegeben. Umrechnung auf die Ortskoordinate ergibt eine relative Geschwindigkeitsänderung von 16 bis 22%/m.

Tab. 2. Untersuchte Geschwindigkeitsbereiche und typische Verzögerungen (v ist in mm/ μ s einzusetzen).

Element	Geschwindigkeit (in mm/ μ s)	typische Verzögerung (in mm/ μ s ²)
Argon	3,5 ... 4,6	$7 \cdot 10^{-4} v$
Krypton	2,4 ... 3,1	$6 \cdot 10^{-4} v$
Xenon	1,8 ... 2,2	$5 \cdot 10^{-4} v$

Zusätzlich zu den Koeffizienten wurden die Ausgleichsfehler δB und δC berechnet. Über alle Messungen gemittelt ergab sich in Übereinstimmung mit der oben durchgeführten Fehlerdiskussion der mittlere relative Fehler der Geschwindigkeit zu 0,2%. Die systematischen Meßfehler (Ungenauigkeit des Zeitmarkengenerators, Nichtmaßhaltigkeit der Fotoplatte) sind gegen diese zufälligen Fehler zu vernachlässigen. Der bei der Ausgleichsrechnung bestimmte mittlere relative Fehler der Verzögerung betrug 17%.

5. Ergebnisse

5.1. Vergleich der interferometrisch gemessenen Dichten mit den Rankine-Hugoniot-Werten

In Abb. 6 sind die interferometrisch am Ende der Relaxationszone gemessene maximale Elektronendichte und die mit den Rankine-Hugoniot-Beziehungen berechnete Elektronendichte als Funktion der Stoßwellengeschwindigkeit dargestellt. Die Meßwerte für die Elektronendichte sind mit der Annahme konstanter Elektronendichte längs des Beobachtungs-

strahls bestimmt worden. Der in Abschnitt 3 angegebene Fehler von $\pm 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ entspricht dem halben Durchmesser der Kreise, welche die Meßpunkte markieren. Als Abszisse ist die mit dem Approximationspolynom (17) für den Ort der interferometrischen Messung berechnete Geschwindigkeit angegeben; als Fehler ist der Ausgleichsfehler $\pm \delta B$ eingezeichnet, sofern er größer als der Kreisdurchmesser ist.

Bei Argon stimmen interferometrische Meßwerte und Rankine-Hugoniot-Werte innerhalb von 5% überein, wenn man von drei Meßwerten absieht, welche ganz aus dem Rahmen fallen. Diese Ausnahmen werden weiter unten noch diskutiert. Bei Krypton und Xenon liegt eine Übereinstimmung innerhalb von 2% vor. Für alle drei Edelgase ist damit eine Übereinstimmung in wesentlich engeren Fehlergrenzen als in früheren Arbeiten anderer Autoren gefunden worden. Insbesondere kann völlig sicher ausgeschlossen werden, daß eventuelle Abweichungen vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht wesentliche Abweichungen der Elektronendichte vom Rankine-Hugoniot-Wert verursacht haben.

Eine genaue Analyse der Übereinstimmung in Abb. 6 zeigt, daß die Abweichungen, obwohl sie sehr klein sind, doch größer sind, als nach der Fehlerdiskussion zu erwarten ist. Die interferometrischen Werte liegen systematisch etwas niedriger als die Rankine-Hugoniot-Werte. Dies dürfte vor allem auf die kalten Grenzschichten an den Wänden des Stoßrohres zurückzuführen sein. Da hier die Elektronendichte kleiner ist als in der ungestörten Strömung im Zentrum, ist die unter der Annahme eines im ganzen Rohrquerschnitt homogenen Plasmas bestimmte Elektronendichte sicher kleiner als die Elektronendichte in der ungestörten Strömung, für welche die Rankine-Hugoniot-Rechnungen gelten.

Eine andere Art von systematischer Abweichung ist durch die Instationarität der Stoßwelle bedingt. Wegen der Ionisationsrelaxation ist die im Zeitpunkt der maximalen Elektronendichte beobachtete Materie nicht am Ort der interferometrischen Messung, sondern schon etwas früher durch die Stoßfront getreten, als die Stoßwellengeschwindigkeit noch etwas größer war als am Ort der interferometrischen Messung. Die quantitativen Auswirkungen der Instationarität und der Einfluß der Grenzschichten werden z. Zt. untersucht.

Eine nähere Analyse der drei Experimente, die zu den Meßwerten geführt haben, welche bei Argon

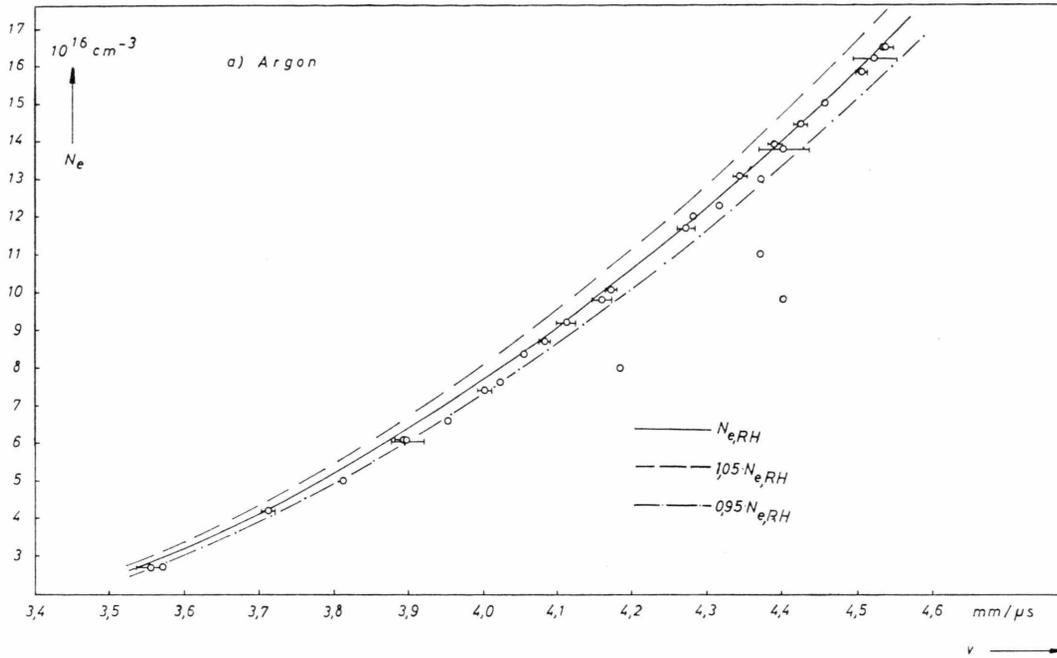


Abb. 6 a

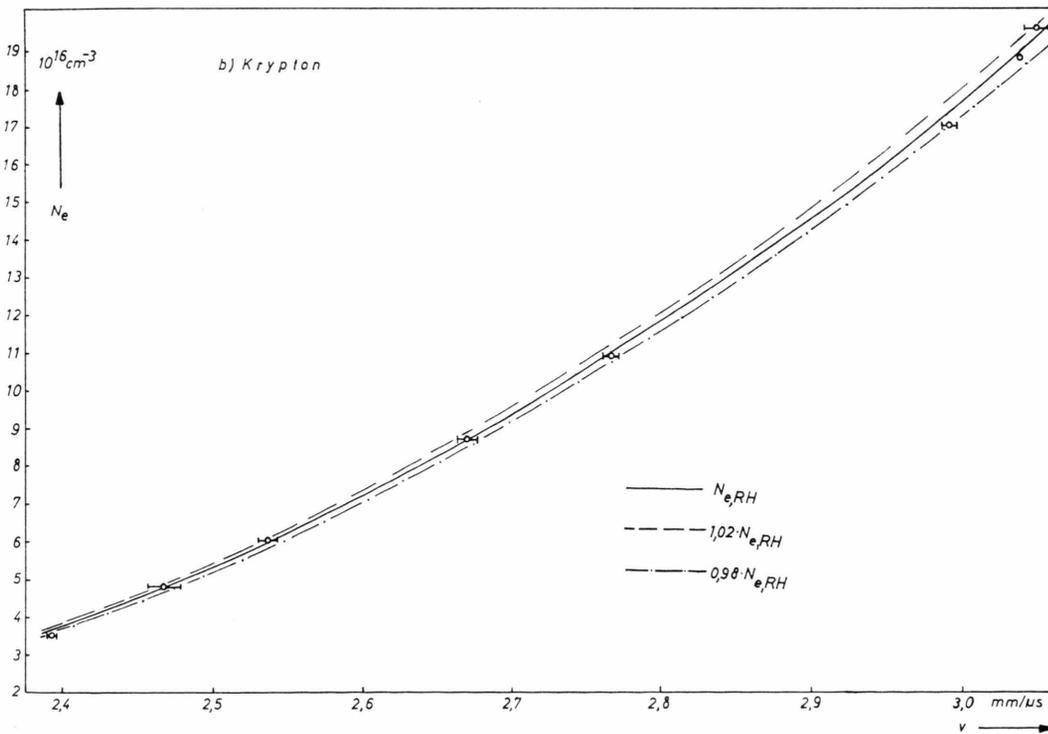


Abb. 6 b

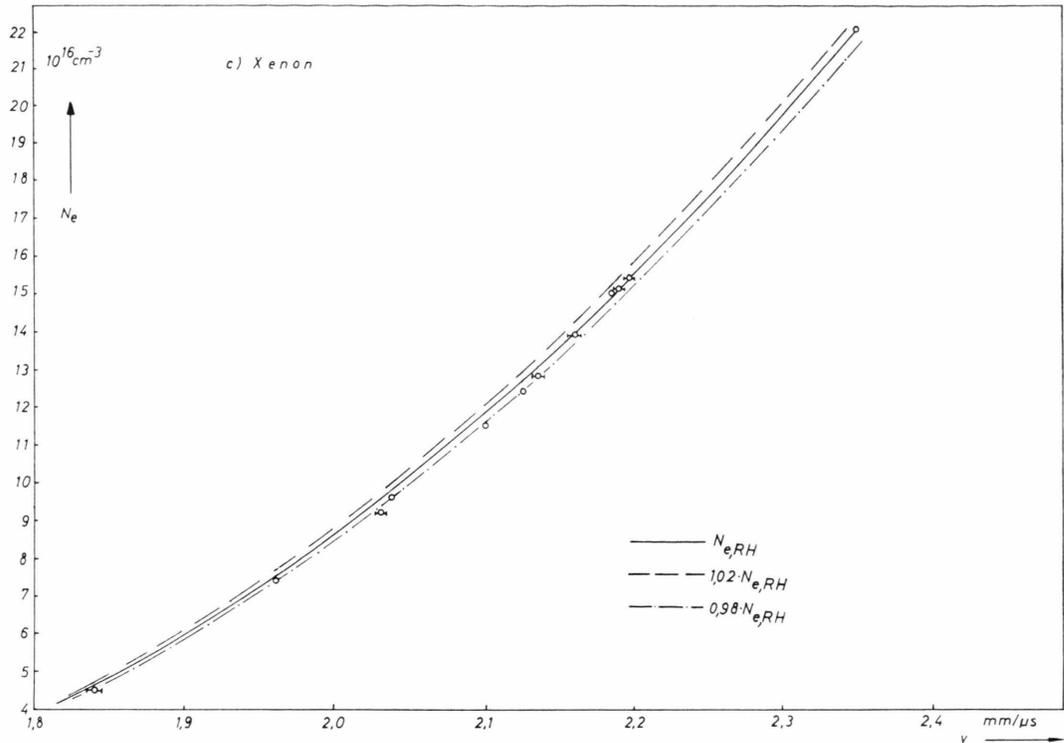


Abb. 6 c

Abb. 6. Vergleich der interferometrisch gemessenen Elektronendichte (Kreise) mit der Rankine-Hugoniot-Elektronendichte $N_{e,RH}$ (durchgezogene Kurven).

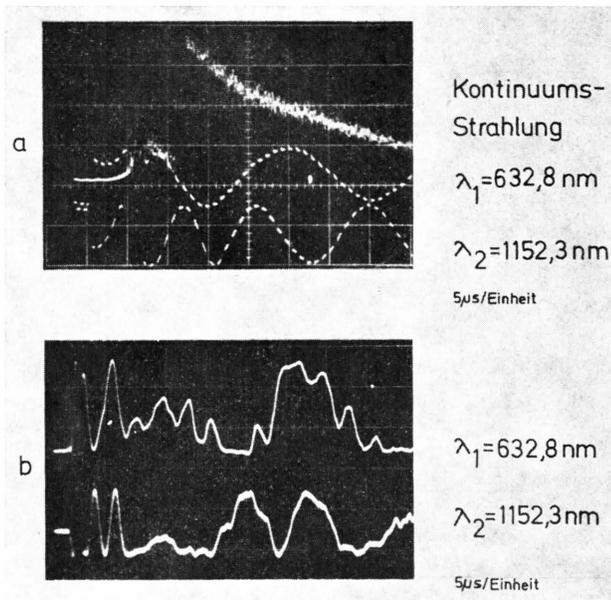


Abb. 7. Interferogramme der Strahlungskühlungszone bei Argon. a) Normales Verhalten; b) Vermischung von Treibgas und Testgas.

ganz aus dem Rahmen fallen, ergibt, daß hier auch die Interferogramme der Strahlungskühlungszone völlig anders aussehen als im Normalfall (Abbildung 7). Es ist wahrscheinlich, daß hier eine turbulente Vermischung von Treibgas und Testgas stattgefunden hat, welche bis in die Relaxationszone hinein reicht²⁹.

Abbildung 8 zeigt die interferometrisch zum Zeitpunkt der maximalen Elektronendichte gemessene Atomdichte sowie die Rankine-Hugoniot-Atomdichte in Abhängigkeit von der Stoßwellengeschwindigkeit. Die Meßwerte, welche wieder mit der Annahme eines homogenen Plasmas bestimmt worden sind, liegen im Mittel um einige Prozent tiefer als die Rankine-Hugoniot-Werte und streuen erheblich stärker, als nach der Fehlerdiskussion in den Abschnitten 3 und 4 zu erwarten ist.

Die Interferogramme der Strahlungskühlungszone legen folgende Erklärung dieser Streuung nahe: Bei vielen Experimenten sind der relativ langsamen monotonen Zunahme der optischen Weglänge kurzzeitige Schwankungen überlagert, welche bei

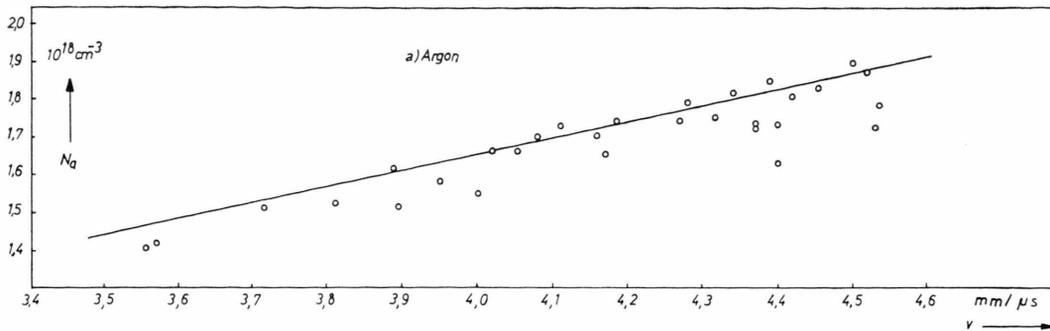


Abb. 8 a

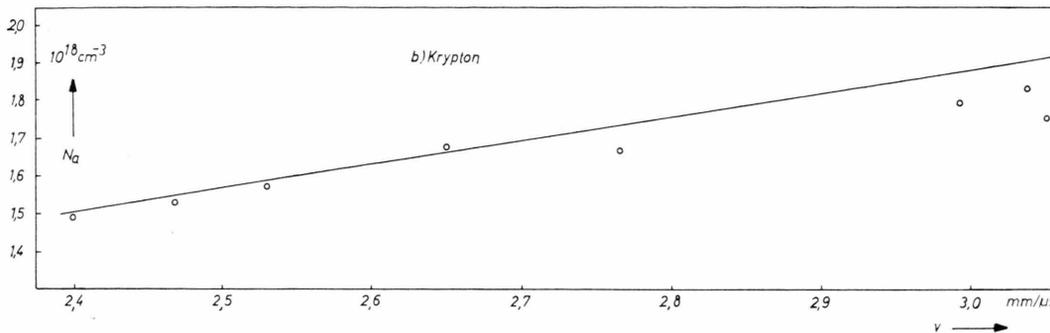


Abb. 8 b

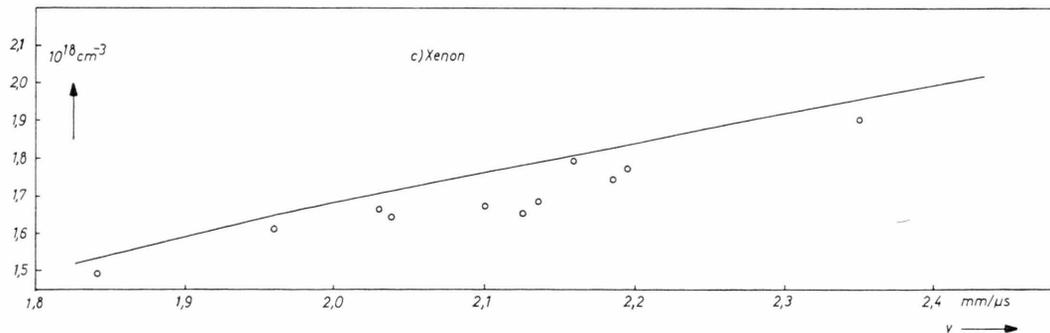


Abb. 8 c

Abb. 8. Vergleich der interferometrisch gemessenen Atomdichte (Kreise) mit der Rankine-Hugoniot-Atomdichte (durchgezogene Kurve).

632,8 nm wesentlich stärker ausgeprägt sind als bei 1152,3 nm (Abb. 9). Die quantitative Auswertung ergibt, daß keine Fluktuationen der Elektronenflächendichte vorliegen und daß die Fluktuationen der Atomflächendichte bis zu 5% betragen. Daraus wird gefolgert, daß es sich bei dieser Erscheinung um Turbulenzen der kalten Grenzschichten handelt. Da diese Dichteschwankungen in der Strahlungskühlungszone eines einzelnen Experiments von glei-

cher Größe sind wie die Streuungen der Meßwerte in Abb. 8, wird angenommen, daß auch letztere durch Grenzschichtturbulenz verursacht worden sind.

Diese Diskussion zeigt, daß die Messung der Atomdichte stärker als die Messung der Elektronendichte durch die Grenzschichten beeinflusst wird. Obwohl durch weitere Untersuchungen noch geklärt werden muß, in welchem Umfang die systematischen Abweichungen in Abb. 8 ebenfalls durch Grenz-

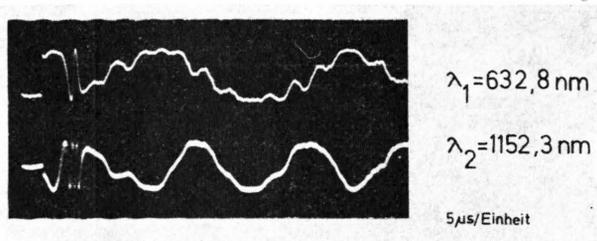


Abb. 9. Interferogramm einer Strahlungskühlungszone mit turbulenter Wandgrenzschicht.

schichteffekte oder durch systematische Fehler der verwendeten Daten für die Polarisierbarkeit verursacht worden sind, dürfte der Fehler der durchgeführten Atomdichtemessung 5% kaum übersteigen; er ist damit klein im Vergleich zu dem Fehler anderer Meßverfahren.

5.2. Bestimmung weiterer Zustandsgrößen

Da keine Hinweise dafür vorliegen, daß zum Zeitpunkt maximaler Elektronendichte Abweichungen

vom lokalen thermodynamischen Gleichgewicht vorhanden sind, wird im folgenden die Existenz dieses Gleichgewichts für diesen Zeitpunkt und die nachfolgende Strahlungskühlungszone angenommen. Aus den interferometrisch gemessenen Dichten $N_e(t)$ und $N_a(t)$ kann mit Hilfe der Saha-Gleichung der Temperaturverlauf in der Strahlungskühlungszone berechnet werden. Abbildung 10 zeigt ein typisches Beispiel.

Diese Methode zur Temperaturbestimmung ist sehr genau, da sich die Temperatur mit N_e^2/N_a nur sehr langsam verändert. Die im Zeitpunkt maximaler Elektronendichte bestimmten Temperaturen weichen nur 0,1 bis 0,2% von den Rankine-Hugoniot-Werten ab.

Mit den so gewonnenen Verläufen von Temperatur, Elektronendichte und Atomdichte ist der Zustand des Plasmas in der Strahlungskühlungszone vollständig bestimmt. Alle weitere Zustandsgrößen, insbesondere auch Dichten angeregter Zustände, lassen sich mit den allgemein bekannten Methoden leicht berechnen.

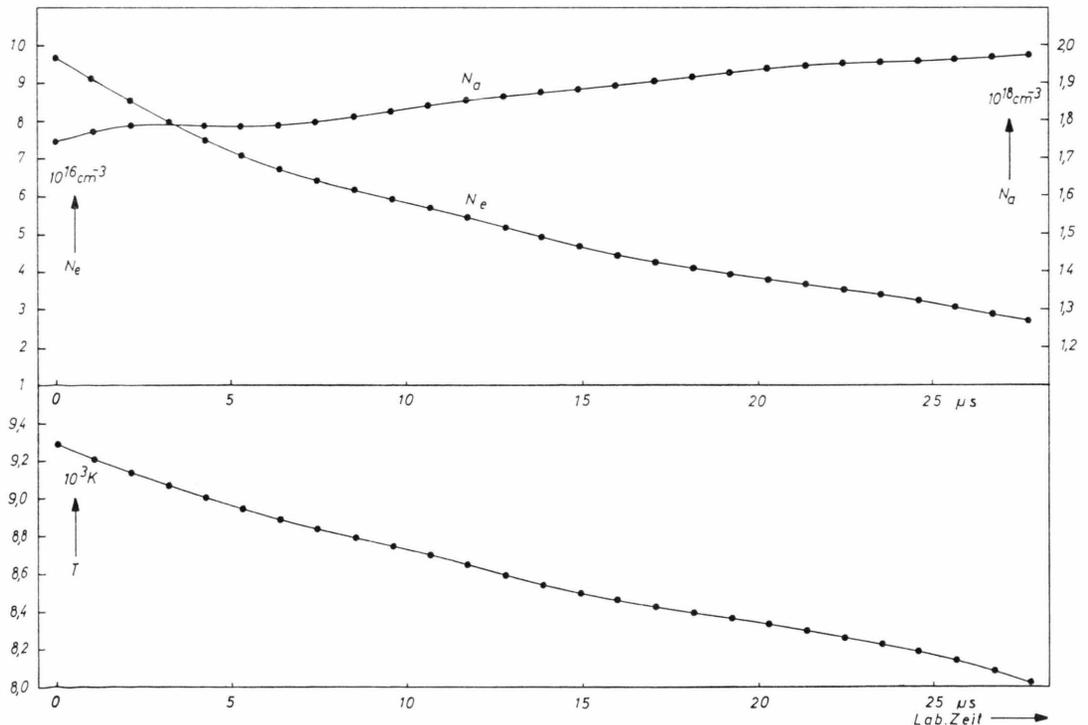


Abb. 10. Zeitlicher Verlauf von Elektronendichte, Atomdichte und Temperatur in der Strahlungskühlungszone hinter einer Stoßwelle mit $M=11,5$ in 10 Torr Xenon.

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Wissenschaft geförderten Vorhabens PV 3001 c.

Herrn Prof. Dr. W. Böttcher danken wir für fördernde Diskussionen.

- ¹ Auszug aus der Dissertation von C. O. Weiss (TU Hannover 1972) und auszugsweise vorgetragen auf der Frühjahrstagung 1972 der DPG in Kiel (Verhandl. DPG (VI) 7, 122 [1972]).
- ² A. C. Kolb u. H. R. Griem, High-Temperature Shock Waves, in: Atomic and Molecular Processes (Ed. D. R. Bates), Academic Press, New York 1962.
- ³ K. P. Horn, H. Wong u. D. Bershader, J. Plasma Physics 1, 157 [1967].
- ⁴ G. H. Stickford, AIAA Paper No. 72-106 [1972].
- ⁵ R. D. Bengtson, M. H. Miller, D. W. Koopman u. T. D. Wilkerson, Phys. Fluids 13, 372 [1970].
- ⁶ H. Carls, H. Haase u. W. Zuzak, Forschungsbericht K 71-13 des BMBW [1971].
- ⁷ H. H. Carls u. W. W. Zuzak, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 11, 1135 [1971].
- ⁸ H. H. Carls u. H. Haase, in: Proc. 10-th Intern. Conf. on Phenomena in Ionized Gases, Oxford 1971, Contributed Papers, p. 62, Donald Parsons, Oxford 1971.
- ⁹ D. Schlüter, Z. Physik 210, 80 [1968].
- ¹⁰ H. Roders, Forschungsbericht K 69-28 des BMwF [1969].
- ¹¹ C. O. Weiss, Forschungsbericht K 73-14 des BMBW [1973].
- ¹² R. A. Alpher u. D. R. White, Phys. Fluids 2, 162 [1959].
- ¹³ R. A. Alpher u. D. R. White, Optical Interferometry, in: Plasma Diagnostic Techniques, Eds. R. H. Huddlestone u. S. L. Leonard, Academic Press, New York 1965.
- ¹⁴ A. L. Besse u. J. G. Kelley, Rev. Sci. Instrum. 37, 1497 [1966].
- ¹⁵ Herrn Prof. Welling und Herrn Dipl.-Phys. Ahrens vom Institut für Angewandte Physik der TU Hannover danken wir für die Anfertigung der Spiegel.
- ¹⁶ S. S. Medley, J. Appl. Phys. 41, 142 [1970].
- ¹⁷ P. D. Rowley, Rev. Sci. Instrum. 41, 313 [1970].
- ¹⁸ Daß auf abgelenkten Strahlen wegen des schrägen Durchgangs durch das Beobachtungsfenster der optische Weg größer ist als auf dem nicht abgelenkten Strahl, braucht bei den hier vorkommenden sehr kleinen Ablenkwinkeln nicht berücksichtigt werden.
- ¹⁹ Einen Schönheitsfehler bewirkt der Strahlteiler: Bei der Reflexion des zirkular polarisierte Lichts wird aus diesem elliptisch polarisiertes Licht. Die Intensitäten der beiden Interferenzen sind daher etwas verschieden.
- ²⁰ M. P. F. Bristow, UTIAS Report No. 158 [1971].
- ²¹ In dem Report ²⁰, welcher den Autoren erst nach der Durchführung der Auswertungen bekannt wurde, wird als theoretischer Wert 0,72 und als experimenteller Wert bei 530 nm $0,647 \pm 0,041$ angegeben.
- ²² G. I. Chashchina u. E. Y. Shreider, Opt. Spectrosc. 27, 79 [1968].
- ²³ Landolt-Börnstein, Zahlenwerte aus Physik, Chemie usw., Bd. II, Teil 8, 6. Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1962.
- ²⁴ International Critical Tables of Numerical Data, Vol. VII, 1st Edition, McGraw-Hill, New York 1930.
- ²⁵ Bei der Phasenmessung mit nur einem Detektor und Auswertung nach der Formel $\varphi(t) = \arcsin a(t)$ wird diese Genauigkeit nicht zu jedem Zeitpunkt, sondern nur bei den Nulldurchgängen der Funktion $a(t)$ erreicht, wie man an der Formel $\delta\varphi^2 = \delta a^2 (1 - a^2)^{-1}$ sofort erkennt.
- ²⁶ H. R. Griem, Phys. Rev. 128, 997 [1962].
- ²⁷ H. W. Drawin u. P. Felenbok, Data for Plasmas in Local Thermal Equilibrium, Gauthier-Villars, Paris 1965.
- ²⁸ Um trotz des bei jedem Experiment viermal erfolgenden Überlaufs des Elektronenstrahls eine eindeutige Zuordnung eines jeden Schlierensignals zu den zugehörigen Zeitmarken vornehmen zu können, wurde der Strahl zwischen zwei Überläufen in definierter Weise elektronisch verschoben. Der fünfte Überlauf in Abb. 5 b hat keine Bedeutung.
- ²⁹ M. A. Levine, Phys. Fluids 13, 1166 [1970].