

# Zum Entwurf nichtlinearer zeitdiskreter Beobachter mittels Normalformen

Vom Fachbereich Elektrotechnik und Informationstechnik

der Universität Hannover

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur genehmigte

## **Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Torsten Lilge

geboren am 20. Dezember 1966 in Hannover

1999

1. Referent Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c.mult. M. Thoma

2. Referent Prof. Dr.-Ing. M. Popp

Tag der Promotion 11. Februar 1999

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter und Akademischer Rat am Institut für Regelungstechnik der Universität Hannover. Allen Institutsangehörigen möchte ich für Ihre Hilfs- und Diskussionsbereitschaft sowie die stets vorhandene angenehme Arbeitsatmosphäre danken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c.mult. M. Thoma für die wohlwollende Förderung dieser Arbeit und die Übernahme des Hauptreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Popp danke ich für das der Arbeit entgegengebrachte Interesse und für die Übernahme des Korreferats.

Herrn Prof. Dr.-Ing. W. Gerth gilt mein Dank für die Mitwirkung am Promotionsverfahren und die stets vorhandene Diskussionsbereitschaft.

Auch Herrn Prof. Dr. H. Nijmeijer und Herrn Dr. H.J.C. Huijberts bin ich für die hilfreichen Diskussionen sehr verbunden.

Nicht zuletzt gilt mein Dank jedoch meiner Familie, meinen Freunden und in besonderem Maße meiner Frau Sabine und meinen Kindern Sven und Alexandra für ihre Unterstützung, ihre Geduld und ihr entgegengebrachtes Verständnis.

Hannover, im Februar 1999

Torsten Lilge



# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Grundlagen und Übersicht</b>	<b>4</b>
2.1 Nichtlineare zeitdiskrete Systeme . . . . .	4
2.2 Grundlagen und Definitionen . . . . .	5
2.2.1 Der relative Systemgrad . . . . .	5
2.2.2 Definitionen zu Beobachtern . . . . .	6
2.3 Der Einsatz von Beobachtern zur Regelung nichtlinearer Systeme . . . . .	7
2.4 Übersicht über nichtlineare Normalformbeobachter . . . . .	14
<b>3 Lokale starke Beobachtbarkeit nichtlinearer zeitdiskreter Systeme</b>	<b>17</b>
3.1 Definition der lokalen starken Beobachtbarkeit . . . . .	17
3.2 Beobachtbarkeitsnormalform für Systeme mit einer Ausgangsgröße . . . . .	18
3.2.1 Stetige Beobachtbarkeitsnormalform . . . . .	20
3.3 Beobachtbarkeitsnormalform für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen . . . . .	23
<b>4 Beobachterentwurf via ENBNF</b>	<b>26</b>
4.1 Systeme mit einer Ausgangsgröße . . . . .	26
4.1.1 Die Zwei-Schritt-Transformation nach Brodmann . . . . .	26
4.1.2 Erweiterung der Zwei-Schritt-Transformation . . . . .	27
4.1.3 Systemdarstellung und Beobachter in ENBNF . . . . .	31
4.1.4 Transformation auf ENBNF . . . . .	33
4.1.5 Freiheitsgrade der Transformation auf ENBNF . . . . .	36
4.1.6 Alternative Beobachter in ENBNF . . . . .	53

4.2	Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen . . . . .	58
4.2.1	Systemdarstellung in ENBNF . . . . .	58
4.2.2	Transformation auf ENBNF . . . . .	60
4.2.3	Systemerweiterung mit dem Ziel gleich großer Subsysteme . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Beobachterentwurf nach Ciccarella et al.</b>	<b>77</b>
5.1	Systeme mit einer Ausgangsgröße . . . . .	77
5.1.1	Alternative Beobachterberechnung . . . . .	80
5.2	Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Bewertung und Vergleich der Beobachterentwürfe</b>	<b>86</b>
6.1	Einschwingverhalten der Beobachter . . . . .	89
6.1.1	ENBNF-Beobachter . . . . .	89
6.1.2	NABKNF-Beobachter . . . . .	90
6.1.3	Exemplarische Verifikation . . . . .	91
6.2	Robustheit gegenüber Meßrauschen am Systemausgang . . . . .	93
6.2.1	ENBNF-Beobachter . . . . .	94
6.2.2	NABKNF-Beobachter . . . . .	101
6.2.3	Exemplarische Verifikation . . . . .	105
6.3	Robustheit gegen Parameterunsicherheiten und Meßrauschen an Systemeingängen	111
6.3.1	ENBNF-Beobachter . . . . .	111
6.3.2	NABKNF-Beobachter . . . . .	112
6.3.3	Exemplarische Untersuchung bei Meßrauschen an Systemeingängen . .	113
6.3.4	Exemplarische Untersuchung bei Parameterunsicherheiten . . . . .	115
6.4	Realisierbarkeit der Beobachterentwürfe . . . . .	116
6.4.1	Durchführbarkeit der Entwürfe . . . . .	117
6.4.2	Rechentechnische Aspekte . . . . .	118
6.5	Zusammenfassende Gegenüberstellung . . . . .	119

---

<b>7 Beobachter im geschlossenen Regelkreis</b>	<b>121</b>
7.1 Zustandsregelung mit Hilfe exakter Linearisierung . . . . .	121
7.2 Beobachter im nichtlinearen, geschlossenen Regelkreis . . . . .	124
7.2.1 ENBNF- und NABKNF-Beobachter . . . . .	125
7.3 Beobachtergestützte Stabilisierung eines Pendels . . . . .	126
<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>136</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>139</b>

# Symbolverzeichnis

Symbole, die nur innerhalb eines kurzen Kontextes Gültigkeit haben, sind im Symbolverzeichnis nicht enthalten.

Vektorielle Größen sind fett dargestellt, z. B. die Ausgangsfunktion  $\mathbf{h}()$  eines Systems mit mehreren Ausgangsgrößen. Die entsprechende skalare Größe wird kursiv dargestellt, z. B. die Ausgangsfunktion  $h()$  bei nur einem Ausgang.

Wenn nicht anders angegeben, sind die Komponenten einer vektoriellen Größe oder Abbildung wie diese selbst benannt, jedoch kursiv statt fett gedruckt und mit zugehörigem Lauindex versehen. Zum Beispiel:  $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \cdots x_n(k)]^T$ . Ist ein System in  $m$  Subsysteme der Ordnungen  $n_j$  mit  $j = 1, 2, \dots, m$  eingeteilt, gilt für die vektoriellen Komponenten der Systembeschreibung, wenn nicht anders angegeben, folgende, anhand des Zustandsvektors beispielhaft dargestellte, Notation:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(k) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_j(k) = \begin{bmatrix} x_{j,1}(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}(k) \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

## Abkürzungen

ANDF	Allgemeine nichtlineare Darstellungsform
NBKNF	Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform
NABKNF	Nichtlineare Alt-Beobachtbarkeitsnormalform
NBNF	Nichtlineare Beobachternormalform
ENBNF	Erweiterte nichtlineare Beobachternormalform
NRNF	Nichtlineare Regelungsnormalform

## Skalare Größen

$n$	Systemordnung
$n_j$	Ordnung des $j$ -ten Subsystems in Normalform
$d$	Relativer Systemgrad für Systeme mit einer Ausgangsgröße
$m$	Anzahl der Systemausgänge
$p$	Anzahl der Systemeingänge
$\lambda_i$	Eigenwerte einer $n \times n$ -Matrix ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
$q_{i-1}$	Koeffizienten des charakteristischen Polynoms eines Systems ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

## Laufindizes

$k$	Laufindex zeitdiskreter Größen, $k \in \mathbb{N}^0$
$i$	Laufindex im Bereich $i = 1, 2, \dots, n$ oder $i = 1, 2, \dots, n_j$
$j, \xi$	Laufindizes im Bereich $j = 1, 2, \dots, m$ und $\xi = 1, 2, \dots, m$
$\mu, \nu$	variable Laufindizes

## Zeitfolgen

$\mathbf{x}(k)$	$n$ -dimensionaler Zustandsvektor in ANDF
$\mathbf{x}^\square(k)$	$n$ -dimensionaler Zustandsvektor in NBKNF oder NABKNF
$\mathbf{x}^*(k)$	$n$ -dimensionaler Zustandsvektor in NBNF oder ENBNF
$\mathbf{x}^\circ(k)$	$n$ -dimensionaler Zustandsvektor in NRNF
$\hat{\mathbf{x}}(k)$	$n$ -dimensionaler Beobachter-Zustandsvektor in ANDF
$\hat{\mathbf{x}}^\square(k)$	$n$ -dimensionaler Beobachter-Zustandsvektor in NBKNF o. NABKNF
$\hat{\mathbf{x}}^*(k)$	$n$ -dimensionaler Beobachter-Zustandsvektor in NBNF oder ENBNF
$\Psi(k)$	$n$ -dimensionaler Schätzvetkor für $\mathbf{x}(k-n+1)$
$\mathbf{e}(k)$	Beobachterfehler in allg. Darstellung, $(\mathbf{e}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k))$
$\mathbf{e}^\square(k)$	Beobachterfehler in NBKNF o. NABKNF, $(\mathbf{e}^\square(k) = \hat{\mathbf{x}}^\square(k) - \mathbf{x}^\square(k))$
$\mathbf{e}^*(k)$	Beobachterfehler in NBNF oder ENBNF, $(\mathbf{e}^*(k) = \hat{\mathbf{x}}^*(k) - \mathbf{x}^*(k))$
$\mathbf{y}(k)$	$m$ -dimensionaler Ausgangsvektor eines Systems, $y(k)$ für $m = 1$
$\mathbf{u}(k)$	$p$ -dimensionaler Eingangsvektor eines Systems, $u(k)$ für $p = 1$
$\bar{\mathbf{y}}_{[\mu, \nu]}(k)$	Folge des Ausgangsvektors $\mathbf{y}(k + \mu), \dots, \mathbf{y}(k + \nu)$ , $\bar{y}_{[\mu, \nu]}(k)$ für $m = 1$
$\bar{\mathbf{u}}_{[\mu, \nu]}(k)$	Folge des Eingangsvektors $\mathbf{u}(k + \mu), \dots, \mathbf{u}(k + \nu)$ , $\bar{u}_{[\mu, \nu]}(k)$ für $p = 1$
$\bar{\mathbf{y}}_{[\mu, \min(\nu, \tau)]}^\diamond(k)$	Folge aller $m$ Ausgangsgrößen (nicht vektorieil) von $y_\xi(k + \mu)$ bis $y_\xi(k + \nu)$ für $\nu \leq \tau$ oder $y_\xi(k + \tau)$ für $\nu > \tau$ ; dabei ist $\nu$ fest und $\tau$ abhängig von $n_\xi$ , der Ordnung des $\xi$ -ten Subsystems mit $\xi = 1, 2, \dots, m$ (s. auch S. 59).

## Funktionen und Abbildungen

$\mathbf{f}()$	$n$ -dimensionale Systemfunktion in ANDF
$\mathbf{f}^\square()$	$n$ -dimensionale Systemfunktion in NBKNF oder NABKNF
$f_{j, \mu}^*$	$\mu = 0, 1, \dots, n_j - 1$ Systemnichtlinearitäten des $j$ -ten Subsystems in ENBNF; $f_\mu^*$ für Systeme mit einer Ausgangsgröße
$\mathbf{f}_j^*$	$n$ -dimensionale Funktion in ENBNF, bestehend aus den skalaren Funktionen $f_{j, \mu}^*$ ; der Index $j$ entfällt bei Systemen mit einer Ausgangsgröße
$\mathbf{h}()$	$m$ -dimensionale Ausgangsfunktion in ANDF
$\mathbf{h}^\square()$	$m$ -dimensionale Ausgangsfunktion in NBKNF oder NABKNF

- $\mathbf{h}^*(\cdot)$   $m$ -dimensionale Ausgangsfunktion in NBNF oder ENBNF  
 $\mathbf{t}^\square(\cdot)$   $n$ -dimensionale Transformation von ANDF auf NBKNF  
 $\mathbf{r}(\cdot)$   $p$ -dimensionale nichtlineare Zustandsrückführung  
 $\mathbf{q}(\cdot)$   $n$   $m$ -dimensionale Beobachtbarkeitsabbildung  
 $\mathbf{F}^\mu(\cdot)$   $\mu$ -fache Anwendung der Systemfunktion:  $\mathbf{F}^0(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}(k)$ ,  
 $\mathbf{F}^\mu(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, \mu-1]}(k)) = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \dots), \mathbf{u}(k + \mu - 1))}_{\mu\text{-mal}}$ , mit  $\mu \geq 1$

## Matrizen und Vektoren

- $\mathbf{0}_\nu$   $\nu$ -dimensionaler Nullvektor  
 $\mathbf{I}_\nu$   $\nu \times \nu$  - dimensionale Einheitsmatrix  
 $\mathbf{E}_\nu$   $\nu \times \nu$  - dimensionale Matrix der Form

$$\mathbf{E}_\nu = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{Q}$   $nm \times n$  - dimensionale Beobachtbarkeitsmatrix  
 $\mathbf{K}_O$   $n \times n$  - dimensionale Rückführmatrix des Beobachterfehlers in NABKNF,

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & w_2 - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & w_3 - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & w_n - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}_q$   $n \times n$  - dimensionale, mögliche Systemmatrix des Beobachterfehlers in ENBNF,

$$\mathbf{A}_q = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -q_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -q_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -q_{n-1} \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}_\lambda$   $n \times n$  - dimensionale, mögliche Systemmatrix des Beobachterfehlers in ENBNF,

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}_{\lambda w}$   $n \times n$  - dimensionale Systemmatrix des Beobachterfehlers in NABKNF,

$$\mathbf{A}_{\lambda w} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & w_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

## Operatoren

$\|\mathbf{x}\|$  Euklidische Norm  $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$

## Vektorräume, Mengen und Klassen

- $\mathbb{N}$  Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}^0$  Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0
- $\mathbb{R}$  Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{R}^i$   $i$ -dimensionaler Vektorraum
- $\mathcal{N}$  Zustandsmannigfaltigkeit  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$
- $\mathcal{M}$  Wertebereich der Ausgangsgrößen  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$
- $\mathcal{P}$  Definitionsbereich der Eingangsgrößen  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$
- $C^\mu$  Klasse der  $\mu$ -mal stetig ableitbaren Funktionen
- $C^\infty$  Klasse der glatten Funktionen
- $C^\omega$  Klasse der analytischen Funktionen

## Abstract

Moderne Methoden der Regelungstechnik basieren zumeist auf der Kenntnis aller Zustandsgrößen des physikalischen Systems. Da eine Messung dieser Größen gewöhnlich nicht praktikabel ist, kommt der Beobachtungsaufgabe eine große Bedeutung zu. Nach mittlerweile zahlreichen Ansätzen für nichtlineare zeitkontinuierliche Systeme finden in zunehmenden Maße auch zeitdiskrete Systeme Beachtung. Für eine relativ kleine Systemklasse gelingt die Transformation auf eine Normalform, die einen Beobachterentwurf mit linearer Fehlerdifferenzgleichung gestattet.

In der vorliegenden Arbeit wird das Verfahren der sogenannten „Zwei-Schritt-Transformation“ auf nichtlineare Beobachternormalform (NBNF) mit dem Ziel erweitert, die Klasse der transformierbaren Systeme erheblich zu vergrößern. Die Berücksichtigung von Altwerten der Systemein- und ausgangsgrößen führt auf eine erweiterte NBNF (ENBNF), in der ein Beobachterentwurf mit linearer Fehlerdifferenzgleichung gelingt. Die Transformation auf ENBNF beinhaltet Freiheitsgrade, die eine gezielte Beeinflussung einiger Beobachtereigenschaften erlauben und bei einer bestimmten Wahl auf eine Struktur der ENBNF führen, die den Entwurf von drei weiteren Beobachtern mit unterschiedlichem Verhalten ermöglicht. Die ENBNF existiert, im Gegensatz zur NBNF, für jedes lokal stark beobachtbare System mit einer Ausgangsgröße. Für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen ergeben sich im Vergleich zur Transformation auf NBNF ebenfalls deutlich schwächere Bedingungen.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird ein zweiter, der Literatur zu entnehmender Ansatz betrachtet. Neben der Angabe einer alternativen Beobachterstruktur erfolgt dabei eine Erweiterung des Verfahrens auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen. Zur Einordnung aller betrachteten Beobachterentwürfe werden Vergleiche durchgeführt, wobei das Einschwingverhalten, die Robustheit gegen verrauschte Messungen, die Robustheit gegen Parameterunsicherheiten, die Durchführbarkeit der Entwürfe sowie die Realisierbarkeit auf einem Digitalrechner Beachtung finden.

Da die beobachtergestützte Zustandsregelung ein Haupteinsatzgebiet von Beobachtern darstellt und das von linearen Systemen bekannte Separationsprinzip für nichtlineare Systeme i. a. nicht gilt, geht diese Arbeit auch der Frage nach der Eignung der betrachteten Beobachter für diesen Anwendungsfall nach. Eine experimentelle Untersuchung anhand der Stabilisierung eines invertierten Pendels in der instabilen Ruhelage demonstriert die Anwendbarkeit der behandelten Beobachterentwürfe unter praktischen Bedingungen und zeigt deutliche Unterschiede zwischen einzelnen Entwürfen beim Einsatz in einer beobachtergestützten Regelung.

**Schlagwörter:** Nichtlineare zeitdiskrete Beobachter, nichtlineare zeitdiskrete Systeme, nichtlineare Normalformen.

Modern control design methods are based on the knowledge of all state variables of the considered system. Since a measurement of all states is in most cases not possible or too expensive, the use of observers is of great importance. Up to now, nonlinear observers have mainly been studied for continuous-time systems, however, discrete-time representations are of increasing interest. For a relatively small class of systems an observer design with linearizable error dynamics based on canonical forms is possible.

This work gives an extension of the so called „Two-Step-Transformation“ to nonlinear observer canonical form. This extension allows to enlarge the class of transformable systems considerably. Considering past measurements of the systems in- and output variables leads to the so called extended nonlinear observer canonical form which also allows to design an observer with linearizable error dynamics. The transformation into extended observer form includes several degrees of freedom which help to select the structure and the characteristics of the resulting observers. The extended observer form exists for every strongly locally observable system with one output. The transformation of a system with several outputs is subject to further conditions. Compared to the transformation into classical observer form, these conditions are noticeably less restrictive.

The observers via extended observer form are compared to another design procedure, which can be found in the literature. For the latter, an alternative structure and an extension to systems with several outputs is presented in this work. The comparison of all considered observers includes the transient behaviour, robustness to noisy measurements, parameter sensitivity and the feasibility of the design procedure.

One of the main tasks to use observers is the state feedback of dynamical systems. Since the separation principle which holds for all linear, timeinvariant systems does not hold in the nonlinear case, this work also focuses on the problem of nonlinear discrete-time observers for nonlinear state feedback. An experimental investigation of the closed loop dynamics was carried out for the stabilization of an inverted pendulum. The results show the general applicability to technical systems of all considered observers and furthermore significant differences between some observers in the closed loop were emphasized.

**Keywords:** Nonlinear discrete-time observers, nonlinear discrete-time systems, nonlinear canonical forms.



---

# 1 Einleitung

Moderne Methoden der Regelungstechnik und Prozeßführung setzen gewöhnlich die Kenntnis aller Zustandsgrößen des physikalischen Prozesses voraus. Da sich eine Messung dieser Größen in den meisten Fällen als nicht praktikabel oder als zu kostenintensiv erweist, kommt der Zustandsbeobachtung eine große Bedeutung zu. Obgleich technische Prozesse fast ausschließlich ein nichtlineares Verhalten aufweisen, gelingt in einigen Anwendungsfällen die Angabe einer linearen Systembeschreibung, die das Verhalten des Prozesses in einer gewissen Umgebung um den betrachteten Arbeitspunkt mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Das dann vorliegende Beobachtungsproblem ist mit Hilfe eines klassischen linearen Beobachterentwurfs lösbar.

Systeme mit starken Nichtlinearitäten oder großen Abweichungen der Systemzustände vom Arbeitspunkt, wie sie z. B. beim Anfahren von Prozessen auftreten, führen jedoch bei einer mathematischen Modellierung auf nichtlineare Gleichungen in der Systembeschreibung, die einen entsprechend aufwendigen Beobachterentwurf nach sich ziehen. Für nichtlineare zeitkontinuierliche Beobachter sind in der Vergangenheit zahlreiche Verfahren vorgestellt worden, wobei die Arbeiten [23, 140, 169] und [194] umfassende Übersichten beinhalten.

Nichtlineare Beobachter erfordern in vielen Fällen einen hohen rechentechnischen Aufwand sowohl bei der Durchführung des Entwurfs als auch bei der Berechnung des resultierenden Algorithmus auf dem Prozeßrechner. Zur Unterstützung nichtlinearer Entwurfsverfahren finden vermehrt symbolverarbeitende Programme Anwendung [25, 26, 15, 57, 20, 19, 23, 83, 103, 27, 81]. Die immer weiter fortschreitende Entwicklung von Mikroprozessoren und digitalen Speicherbausteinen sowie deren fallende Kosten erlauben ferner auch die Realisierung sehr aufwendiger Algorithmen auf einem Prozeßrechner. Der Einsatz eines Digitalrechners legt dabei einen zeitdiskreten Regelungs- und Beobachterentwurf nahe, falls eine Systemdarstellung gefunden wird, die das Verhalten des zeitkontinuierlichen Systems zu den Abtastzeitpunkten mit ausreichender Genauigkeit beschreibt. Das zeitdiskrete Systemmodell berücksichtigt die Abtastung der Meßgrößen und erlaubt üblicherweise längere Abtastintervalle als eine „quasikontinuierliche“ Realisierung zeitkontinuierlicher Entwurfsverfahren. Ein längeres Abtastintervall gestattet die Verwendung kostengünstigerer Prozeßrechner mit geringerer Rechenleistung, eine anderweitige Nutzung der freigesetzten Rechnerkapazitäten oder die Regelung schnellerer Prozesse bei gleicher Recherausstattung. Darüber hinaus existieren dynamische Systeme, die unmittelbar durch ein zeitdiskretes Modell beschreibbar sind, wie z. B. die Entwicklung eines geschlossenen Wirtschaftskreislaufs [160].

Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen fand die zeitdiskrete Beobachtungsaufgabe in der Literatur bis vor wenigen Jahren lediglich geringe Beachtung. Besonders hervorzuheben sind die seit 1990 in der Literatur diskutierten Verfahren, die auf einer Transformation der

Systembeschreibung auf eine kanonische Darstellung basieren. Diese Normalform gestattet die Wahl der Beobachterrückführung derart, daß die Beobachterfehler einer linearen Differenzgleichung genügen und die Dynamik, analog zur Eigenwertvorgabe linearer Systeme, frei wählbar ist. Bewährte Kriterien für die Auslegung der Beobachtdynamik linearer Systeme lassen sich so auch auf nichtlineare Systeme anwenden. Führt die Transformationsvorschrift bei kleinen Änderungen in Normalform lediglich zu kleinen Änderungen des Originalsystems, dann bleibt das in kanonischer Darstellung gewählte dynamische Verhalten zumindest qualitativ auch in der Originalbeschreibung erhalten.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt zunächst eine bewertende Gegenüberstellung der in der Literatur genannten Verfahren zur Transformation eines Systems auf Beobachternormalform. Sie schließt sich am Ende von Kapitel 2 einigen grundlegenden Definitionen und Sätzen zu nichtlinearen zeitdiskreten Systemen an. Kapitel 3 widmet sich der Transformation nichtlinearer zeitdiskreter Systeme auf Beobachtungsnormalform und den sich dabei ergebenden Besonderheiten im Vergleich zu zeitkontinuierlichen Systemen.

Die zumeist restriktiven Bedingungen, unter denen ein Normalformentwurf gelingt, ziehen eine sehr eingeschränkte mögliche Systemklasse nach sich. Die Erweiterung der sogenannten Zwei-Schritt-Transformation nach BRODMANN [33], aus der eine beachtliche Vergrößerung der möglichen Systemklasse hervorgeht, stellt einen wesentlichen Punkt der vorliegenden Arbeit dar. Das neu vorgestellte Verfahren gewährt neben einer in Normalform frei wählbaren Fehlerdynamik weitere Freiheitsgrade, die unter anderem den Entwurf von vier unterschiedlichen Beobachtern mit verschiedenen Eigenschaften zuläßt. Die Fragestellung, welche Auswirkungen eine bestimmte Wahl der Freiheitsgrade auf den Beobachterentwurf aufweist, wird detailliert diskutiert.

Die Einordnung des neuen Entwurfsverfahrens erfolgt anhand eines Vergleichs mit einem auf der Arbeit [55] von CICCARELLA ET AL. basierenden Ansatz. Der approximative Entwurf aus [55] beruht auf einer Normalform, die für eine bestimmte Systemklasse auch einen exakten Beobachterentwurf erlaubt. Kapitel 5 beinhaltet die Vorstellung dieses exakten Beobachters sowie seine Erweiterung auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen.

Die in Kapitel 6 angegebene, gegenüberstellende Analyse der Beobachter schließt die Untersuchung des Einschwingverhaltens, der Rauschempfindlichkeit, der Robustheit gegen Parameterunsicherheiten sowie der Realisierbarkeit der Entwürfe ein. Den theoretischen Analysen schließen sich zur Verifikation der Ergebnisse exemplarische Untersuchungen mit Hilfe von Simulationen an.

Ein Hauptanwendungsgebiet von Beobachtern stellt die beobachtergestützte Zustandsregelung dar. Für lineare Systeme existiert das Separationsprinzip, nach dem der Regelungs- und Beobachterentwurf unabhängig voneinander durchführbar sind. Die Eigenwerte des Regelkreises setzen sich dann aus denen des ohne Beobachter geregelten Systems und den Beobachtereigenwerten zusammen. Im Falle nichtlinearer Systeme existiert kein Separationsprinzip

und der Frage nach dem dynamischen Verhalten des Regelkreises kommt infolgedessen eine besondere Bedeutung zu. Dieser Aspekt findet in der vorliegenden Arbeit bei allen Analysen der betrachteten Beobachter stets Beachtung. Die Auswirkungen der verschiedenen Beobachter im geschlossenen Regelkreis werden abschließend in Kapitel 7 anhand der Stabilisierung eines Pendels in der instabilen Gleichgewichtslage demonstriert. Der erfolgreiche Einsatz der Beobachter an einem realen technischen Prozeß unterstreicht außerdem die praktische Verwendbarkeit der Entwurfsverfahren.

## 2 Grundlagen und Übersicht

### 2.1 Nichtlineare zeitdiskrete Systeme

Den Betrachtungen in dieser Arbeit liegen allgemeine nichtlineare zeitdiskrete Systeme der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{x}(k=0) &= \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

zugrunde. Dabei bezeichnet  $\mathbf{x}(k)$  den  $n$ -dimensionalen Zustandsvektor mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{y}(k)$  den  $m$ -dimensionalen Ausgangsvektor mit  $\mathbf{y} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^m$  und  $\mathbf{u}(k)$  den  $p$ -dimensionalen Eingangsvektor mit  $\mathbf{u} \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^p$ . Die Abbildungen  $\mathbf{f} : \mathcal{N} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{N}$  sowie  $\mathbf{h} : \mathcal{N} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$  stellen, wenn nicht anders angegeben, analytische Funktionen dar, d. h. sie sind glatt und in jedem Punkt des Definitionsbereichs in eine Taylorreihe entwickelbar. Ohne Verlust der Allgemeingültigkeit gelte  $\mathbf{f}(\mathbf{0}_n, \mathbf{0}_p) = \mathbf{0}_n$  und  $\mathbf{h}(\mathbf{0}_n, \mathbf{0}_p) = \mathbf{0}_m$ . Ein Beobachter für die jeweiligen Systemzustände sei dann durch die allgemeine Form

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(k+1) &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)), \\ \hat{\mathbf{x}}(k) &= \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)), \\ \mathbf{z}(k=0) &= \mathbf{z}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

charakterisiert, wobei  $\mathbf{z}(k)$  den  $l$ -dimensionalen internen Zustandsvektor des Beobachters und  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  den  $n$ -dimensionalen Schätzvektor für den Systemzustand  $\mathbf{x}(k)$  darstellt. Des Weiteren gilt  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{0}_l, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_m) = \mathbf{0}_l$  sowie  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{0}_l, \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_m) = \mathbf{0}_n$ . Das zugehörige Blockschaltbild des Gesamtsystems zeigt Bild 2.1, falls der Beobachter für eine Zustandsregelung mit  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}(k))$ ,  $\mathbf{r} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}$ , Verwendung findet.

Die Beobachtergleichung (2.2) enthält aus Übersichtsgründen nur die aktuellen Werte  $\mathbf{u}(k)$  bzw.  $\mathbf{y}(k)$  der Ein- bzw. Ausgangsgröße. Die hier betrachteten Beobachterentwürfe benötigen jedoch zusätzlich Altwerte der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}(k - \mu)$  mit  $\mu > 0$  sowie Alt- und Neuwerte der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(k + \nu)$  mit  $\nu \neq 0$ . Auf diese Problematik wird noch ausführlich in den folgenden Kapiteln eingegangen.

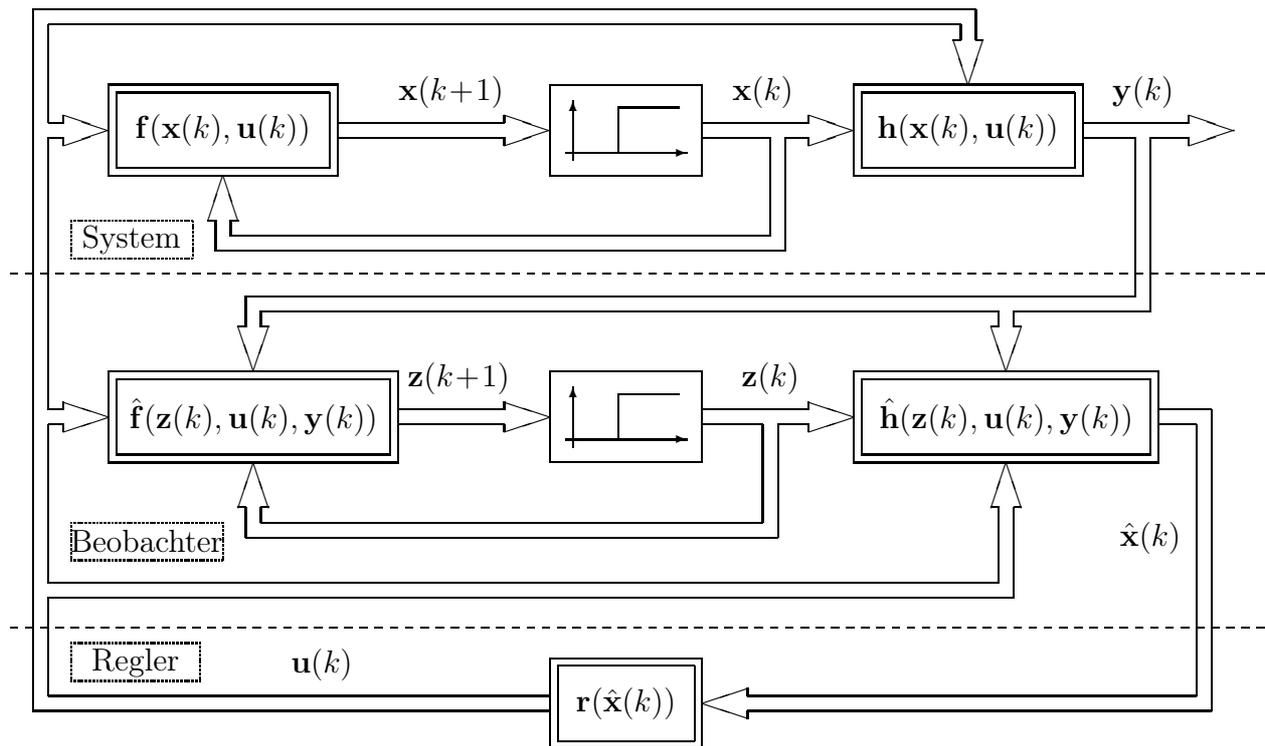


Bild 2.1: Nichtlinearer zeitdiskreter Beobachter zur Zustandsregelung eines Systems

## 2.2 Grundlagen und Definitionen

Für die weiteren Betrachtungen sind noch einige Definitionen und Darstellungen grundlegender Zusammenhänge hilfreich.

### 2.2.1 Der relative Systemgrad

Eine für die Analyse zeitdiskreter Systeme bedeutende Kenngröße stellt der *relative Systemgrad*<sup>1</sup> dar. Sie bezeichnet die Anzahl der Schritte, nach denen sich eine Eingangsgröße erstmalig auf die betrachtete Ausgangsgröße des Systems auswirkt. Eine Definition des relativen Systemgrads für zeitkontinuierliche<sup>2</sup> Mehrgrößensysteme (MIMO-Systeme) kann [89] oder [177] mit der Einschränkung  $m = p$ , also gleicher Anzahl Ein- und Ausgangsgrößen, entnommen werden. Die Übertragung dieser Definition auf zeitdiskrete MIMO-Systeme ist nachstehend angegeben.

<sup>1</sup>Andere geläufige Bezeichnungen: *Differenzengrad* ([87]) oder *characteristic number* ([114]).

<sup>2</sup>Für zeitkontinuierliche Systeme kennzeichnet der relative Systemgrad die Anzahl der Ableitungen des betrachteten Systemausgangs, nach denen sich erstmalig eine Eingangsgröße auswirkt.

**Definition 2.1: Relativer Systemgrad**

Die Antwort eines Systems (2.1) mit dem Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  auf die Eingangsfolge  $\mathbf{u}(k) = \{\mathbf{u}_0, 0, 0, \dots\}$ ,  $\mathbf{u}_0 = [u_{0,1}, \dots, u_{0,p}]^T$ , lautet

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{h}(\mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1 \text{ mal}}), \mathbf{u}(k)). \quad (2.3)$$

Dabei ist  $\mathbf{F}^k$  die  $k$ -malige Anwendung der Systemfunktion  $\mathbf{f}$  (s. Symbolverzeichnis). Das System mit  $m = p$  hat den **relativen Grad**  $\{d_1, \dots, d_m\}$ , wenn

1.  $\frac{\partial y_j(k)}{\partial u_{0,\xi}} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{F}^k(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, 0, \dots, 0), \mathbf{u}(k))}{\partial u_{0,\xi}} = 0$   
für  $0 \leq k < d_j$ ,  $1 \leq j \leq m$  und  $1 \leq \xi \leq m$ ,
2. die  $m \times m$  Matrix  $\mathbf{D} = \left[ \frac{\partial y_j(d_j)}{\partial u_{0,\xi}} \right]_{1 \leq j \leq m, 1 \leq \xi \leq m}$  den vollen Rang aufweist.

■

Obige Definition enthält als Spezialfall auch Systeme mit nur einer Ein- und Ausgangsgröße. Für diese Systemklasse wird im folgenden die Bezeichnung  $d$  anstelle von  $d_1$  gewählt. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden auch Systeme mit  $m = 1$  Ausgangsgröße und  $p > 1$  Eingangsgrößen behandelt. In diesem Fall ist hier mit dem relativen Systemgrad  $d$  stets die Anzahl von Schritten gemeint, nach denen sich mindestens eine Eingangsgröße erstmalig am Systemausgang auswirkt.

Man beachte, die aus Übersichtsgründen in dieser Arbeit verwendete Schreibweise für eine Verschiebung des  $j$ -ten Systemausgangs um  $\nu$  Schritte in die Zukunft, also

$$y_j(k + \nu) = h_j(\mathbf{F}^\nu(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + \nu - 1)), \mathbf{u}(k + \nu)), \quad (2.4)$$

berücksichtigt stets die i. a. maximal mögliche Anzahl von zukünftigen Eingangswerten, ungeachtet des relativen Systemgrades. Gilt für den zugehörigen relativen Grad  $d_j > 0$ , hängt  $y_j(k + \nu)$  lediglich von den Eingangswerten  $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k + \nu - d_j)$  ab, falls  $\nu \geq d_j$  gilt.

**2.2.2 Definitionen zu Beobachtern**

Die allgemeine Definition eines Beobachters für zeitdiskrete Systeme lautet nach [74]:

**Definition 2.2: Asymptotischer Beobachter**

Das System (2.2) charakterisiert dann einen asymptotischen Beobachter für das System (2.1), wenn

1. für alle  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{N}$  ein  $\mathbf{z}(0)$  derart existiert, daß  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k)$  für alle  $k \geq 1$ ,

2. für alle  $\mathbf{x}(0)$  und  $\mathbf{z}(0)$  gilt:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)\| = 0$ .

Ist die Konvergenz von  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  auf  $\mathbf{x}(k)$  exponentiell, stellt (2.2) zudem einen **exponentiellen Beobachter** dar. ■

Die in [129, Definition 3.1] gegebenen Bedingungen für einen exponentiellen Beobachter werden in der folgenden Definition wiedergegeben:

*Definition 2.3: Exponentieller Beobachter*

Das System (2.2) charakterisiert dann einen lokalen exponentiellen Beobachter für das System (2.1), wenn

1. aus  $\mathbf{x}(0) = \hat{\mathbf{x}}(0)$  folgt  $\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k)$  für alle  $k \geq 1$ ,
2. in einer offenen Umgebung  $\mathcal{U}$  um den Ursprung gilt mit den Konstanten  $M > 0$  und  $0 < a < 1$ :  $\|\hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)\| \leq M a^k \|\hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)\|$  für alle  $k$  und für alle  $(\hat{\mathbf{x}}(0) - \mathbf{x}(0)) \in \mathcal{U}$ . ■

Gilt zudem für den Beobachter (2.2)  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{z}(k)$ , also  $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)) = \mathbf{z}(k)$  sowie  $l = n$ , liegt ein **Identitätsbeobachter** vor. In diesem Fall nimmt Gleichung (2.2) die vereinfachte Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+1) &= \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k)), \\ \hat{\mathbf{x}}(k=0) &= \hat{\mathbf{x}}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

an. Der **Beobachterfehler**  $\mathbf{e}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}(k)$  stellt die Differenz zwischen geschätztem Zustand und wahren Zustand dar.

## 2.3 Der Einsatz von Beobachtern zur Regelung nichtlinearer Systeme

Eines der Haupteinsatzgebiete von Beobachtern stellt die beobachtergestützte Zustandsregelung eines Systems dar. Bei dem Entwurf einer derartigen Regelung für lineare Systeme ergibt sich durch das Separationsprinzip die Möglichkeit, Beobachter und Zustandsregler nach bekannten Verfahren getrennt zu entwerfen. Für nichtlineare Systeme hat das Separationsprinzip jedoch i. a. keine Gültigkeit. Unter Einbeziehung des Regelgesetzes  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}(k))$ , wobei  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  durch  $\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k)$  zu ersetzen ist, folgt im Falle eines Identitätsbeobachters für

die Systemgleichung des geschlossenen Kreises

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k))) \\
 \mathbf{e}(k+1) &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k)), \mathbf{h}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k)))) \\
 &\quad - \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{e}(k))) \\
 \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{e}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Analog dem linearen Fall hat auch hier der Beobachterfehler Einfluß auf den zeitlichen Verlauf der Systemzustände. Sowohl der zukünftige Zustand  $\mathbf{x}(k+1)$  als auch der zukünftige Beobachterfehler  $\mathbf{e}(k+1)$  hängen jedoch von einer nichtlinearen Verknüpfung zwischen dem aktuellen Zustand  $\mathbf{x}(k)$  und dem aktuellen Beobachterfehler  $\mathbf{e}(k)$  ab. Die Fehlerdifferenzgleichung hängt also im Gegensatz zum linearen Fall vom aktuellen Systemzustand ab.

Die geschilderten Zusammenhänge erschweren eine Analyse der Dynamik des geschlossenen Kreises erheblich, selbst dann, wenn sowohl der Beobachter als auch das ohne Beobachter geregelte System asymptotisch stabil<sup>3</sup> sind. Lediglich beim Entwurf eines Beobachters mit endlicher Einschwingzeit (Dead-Beat-Entwurf) bleibt auch im nichtlinearen Fall das Separationsprinzip gültig ([74, 87]), falls das System während der Einschwingzeit des Beobachters nicht den Bereich verläßt, in dem die Zustandsrückführung das System stabilisiert. Dead-Beat-Entwürfe weisen i. a. den Nachteil auf, daß die Beobachter empfindlich gegenüber Meßrauschen sind. Da das Beobachterentwurfsmodell desweiteren nie mit dem physikalischen System übereinstimmt, ist ein echter Dead-Beat-Entwurf praktisch nicht realisierbar.

Allgemeinere Bedingungen für die asymptotische Stabilität der Ruhelage<sup>4</sup> des geschlossenen Regelkreises geben GRIZZLE und MORAAL in [74, Lemma 4.1] wie folgt an:

*Satz 2.1:*

Das System (2.1) mit  $\mathbf{f} \in C^2$  und  $\mathbf{h} \in C^2$  werde durch die Zustandsrückführung  $\mathbf{r}(\mathbf{x}(k))$ , wobei  $\mathbf{r}(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_p$  sowie  $\mathbf{r} \in C^2$  gilt, asymptotisch stabilisiert. Außerdem existiert ein Beobachter  $\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{u}(k), \mathbf{y}(k))$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\hat{\mathbf{f}} \in C^2$ .
2. In einer offenen Umgebung um den Ursprung gilt:  

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k)), \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k)))) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k))).$$
3.  $\mathbf{0}_n$  ist eine exponentiell stabile Ruhelage des freilaufenden Beobachters  

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{\mathbf{x}}(k), \mathbf{0}_p, \mathbf{0}_m).$$

<sup>3</sup>Dem in dieser Arbeit verwendeten Stabilitätsbegriff liegt die Stabilitätsdefinition nach Ljapunov (s. z. B. [65, Bd. I]) zugrunde.

<sup>4</sup>Obwohl ein nichtlineares System beliebig viele Ruhelagen aufweisen kann, wird hier nur die Ruhelage ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n, \mathbf{u} = \mathbf{0}_p$ ) betrachtet, auf die das System geregelt werden soll.

Unter den genannten Voraussetzungen stellt  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$ , und damit  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}_n$  auch dann eine asymptotisch stabile Ruhelage des geschlossenen Kreises dar, wenn für die Regelung der Beobachterzustand zum Einsatz kommt ( $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}(k))$ ).

■

Bedingung 3 fordert für die lokale asymptotische Stabilität der Ruhelage des geschlossenen Kreises einen exponentiellen Beobachter. Vergleichbare Kriterien geben auch BYRNES und LIN in [129] und [38] an. Der Beweis basiert auf der Theorie der zentralen Mannigfaltigkeiten ([41] und [13]), da vorausgesetzt wurde, daß für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$  lediglich eine asymptotisch stabile Ruhelage des geschlossenen Regelkreises  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(\mathbf{x}(k)))$  vorliegt und nach der Methode der ersten Näherung von Ljapunov (z. B. [65]) einige Eigenwerte der Matrix

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{r}(\mathbf{x}))}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}_n}$$

auf dem Einheitskreis liegen können. Stabilisiert die Zustandsrückführung ohne Beobachter das System in der Ruhelage exponentiell, liegen also alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  innerhalb des Einheitskreises, folgt die lokale Stabilität des geschlossenen Kreises mit exponentiellem Beobachter unmittelbar, wenn das linearisierte System vollständig steuer- und beobachtbar ist ([74] und [129]).

Der Satz 2.1 ermöglicht die Stabilitätsaussage nur beim Einsatz eines Identitätsbeobachters und ist lediglich lokal gültig. INGENBLEEK gibt in [87] eine „Separation der ersten Näherung“ an, die für hinreichend kleine Beobachterfehler die Stabilität des geregelten Systems unabhängig von der Beobachterdynamik sicherstellt. Da lediglich eine Linearisierung des geschlossenen Regelkreises betrachtet wird, handelt es sich ebenfalls nur um eine lokale Aussage. Die Frage nach dem Verhalten des Systems während der Einschwingzeit des Beobachters bleibt jeweils völlig offen.

Die Arbeiten [62] und [16] enthalten für einen speziellen Anwendungsfall einen Ansatz zur Berücksichtigung der Beobachterdynamik im Regelungsentwurf, dem nicht die System-, sondern die Beobachtergleichungen zugrunde liegen. Mit anderen Worten, das Ziel der Regelung liegt zunächst in der Stabilisierung des, vollständig meßbaren, Beobachterzustands in der Ruhelage. Der Beobachterfehler hat dabei keinen Einfluß, da der für die Regelung erforderliche Zustand dem bekannten Beobachterzustand entspricht, wogegen bei einem Regelungsentwurf für das System der unbekannte Systemzustand in der Rückführung durch den Beobachterzustand zu ersetzen ist. Das Einschwingen des Beobachters führt schließlich zu der gewünschten Regelung des Systemzustands. Es ist jedoch zu beachten, daß der nichtlineare Beobachterentwurf i. a. zu sehr viel komplexeren Differenzgleichungen führt als die Beschreibung des Systems, was natürlich den auf den Beobachtergleichungen beruhenden Regelungsentwurf erheblich erschwert und die praktische Anwendbarkeit in Frage stellt.

Das nachfolgende, einfache Beispiel verdeutlicht die oben dargestellte Problematik bei der Regelung und Beobachtung nichtlinearer Systeme im Vergleich zu linearen Systemen. Ferner wird der Ansatz einer Regelung des Beobachters anstelle des Systems erläutert.

### Beispiel 2.1:

Gegeben ist das System erster Ordnung

$$x(k+1) = x(k) + x(k)^3 + u(k), \quad y(k) = x(k), \quad x(0) = x_0 \quad (2.7)$$

sowie das um die Ruhelage  $x = 0$ ,  $u = 0$  linearisierte System

$$x_l(k+1) = x_l(k) + u_l(k), \quad y_l(k) = x_l(k), \quad x_l(0) = x_{l,0}. \quad (2.8)$$

Die Regelgesetze

$$\begin{aligned} u(k) &= (\lambda_1 - 1)x(k) - x(k)^3 \\ \text{bzw. } u_l(k) &= (\lambda_1 - 1)x_l(k) \end{aligned} \quad (2.9)$$

stabilisieren die zugehörigen Systeme für  $|\lambda_1| < 1$  in ihrer Ruhelage exponentiell. Es werden zudem die exponentiellen Beobachter

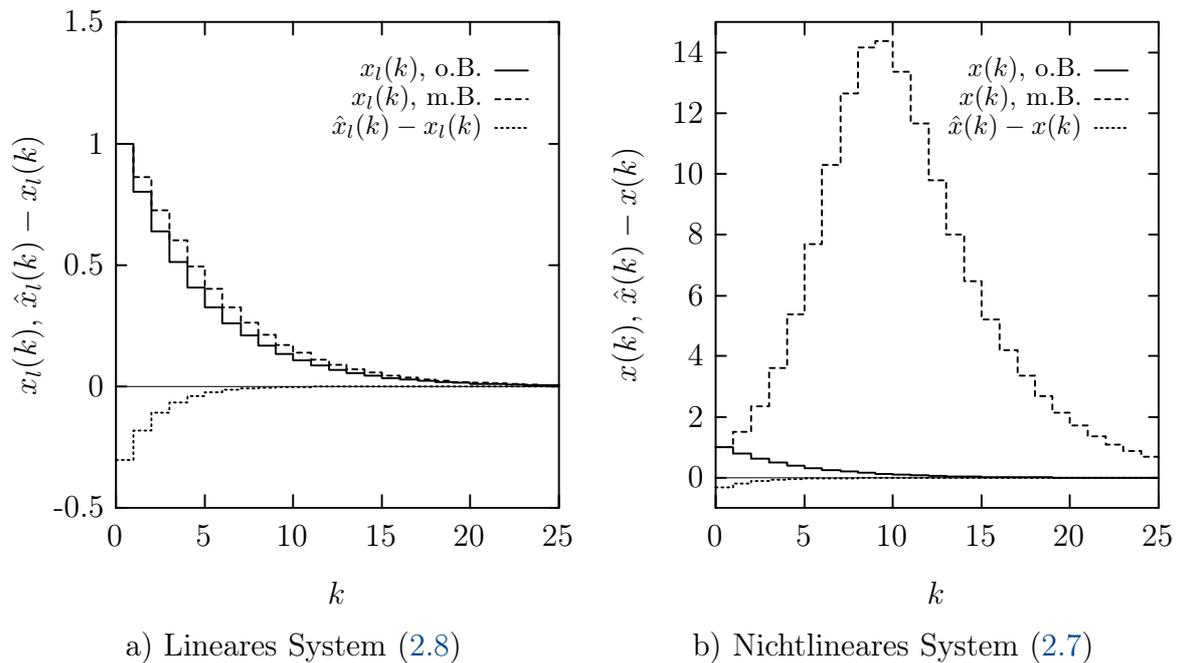
$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= y(k) + y(k)^3 + u(k) + \lambda_2(\hat{x}(k) - y(k)), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ \text{bzw. } \hat{x}_l(k+1) &= y_l(k) + u_l(k) + \lambda_2(\hat{x}_l(k) - y_l(k)), \quad \hat{x}_l(0) = \hat{x}_{l,0} \end{aligned} \quad (2.10)$$

mit  $|\lambda_2| < 1$  eingesetzt. Für die folgenden Simulationen der Systeme gilt:  $x_0 = x_{l,0} = 1.0$ ,  $\hat{x}_0 = \hat{x}_{l,0} = 0.7$ ,  $\lambda_1 = 0.8$  und  $\lambda_2 = 0.6$ . Der Beobachterfehler klingt also deutlich schneller ab als das geregelte System.

Bild 2.2-a zeigt das Verhalten des geregelten linearisierten Systems (2.8) mit und ohne Verwendung des Beobachters sowie den Beobachterfehler. Letztgenannter weist in beiden Fällen den gleichen Verlauf auf, was für ein lineares System auch zu erwarten war. Die Unterschiede in den Verläufen des Systemzustands  $x_l(k)$  sind sehr gering.

Nach Satz 2.1 ist die Ruhelage des mittels Beobachter geregelten nichtlinearen Systems (2.7) asymptotisch stabil<sup>5</sup>. Bild 2.2-b stellt den Verlauf von  $x(k)$  bei einer Regelung des Systems mit und ohne Beobachter sowie den Beobachterfehler dar. In diesem Fall weisen der Beobachterfehler sowie der Zustand des ohne Beobachter geregelten Systems den gleichen Verlauf wie das linearisierte System auf. Auch ist der Beobachterfehler unabhängig von der Art der

<sup>5</sup>Die Ruhelage ist in diesem Fall sogar exponentiell stabil, da die Zustandsrückführung  $u(k) = (\lambda_1 - 1)x(k) - x(k)^3$  das System exponentiell und nicht nur asymptotisch stabilisiert.

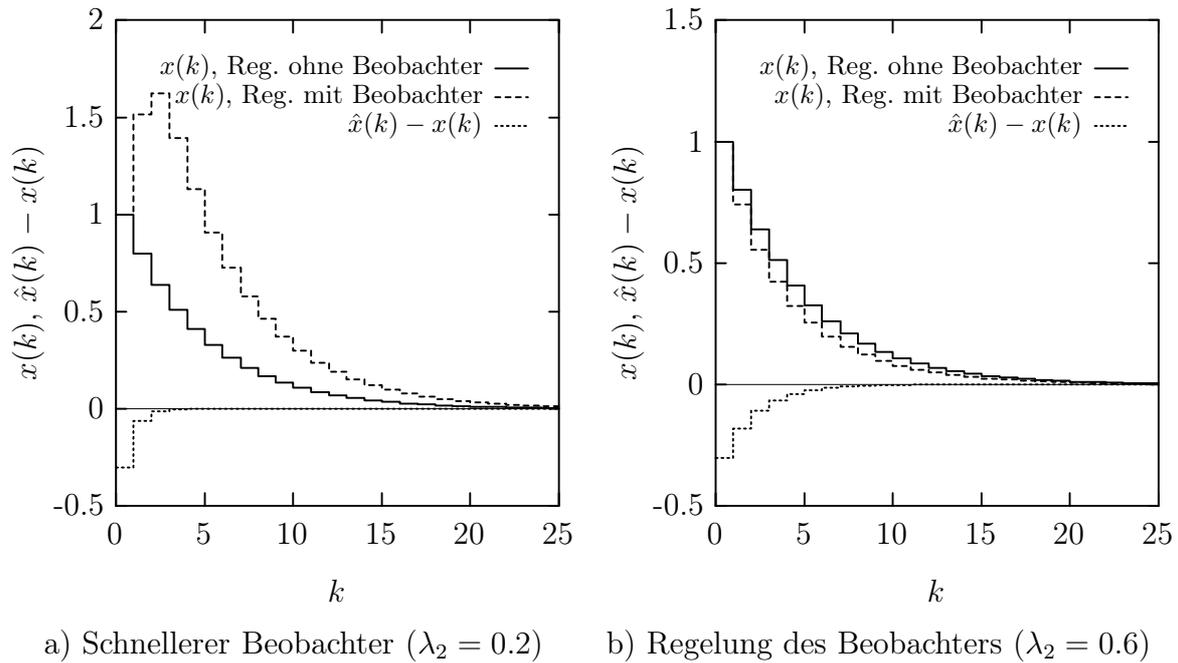


**Bild 2.2:** Beobachterfehler und Systemzustand bei Regelung mit (m.B.) und ohne Beobachter (o.B.) des linearisierten und des nichtlinearen Systems ( $\lambda_1 = 0.8$ ,  $\lambda_2 = 0.6$ )

Rückführung. Dieses ist ein Spezialfall, da das gegebene System erster Ordnung bereits in einer für den Regler- und Beobachterentwurf besonders geeigneten Form vorliegt, in der die Nichtlinearitäten durch die Ein- bzw. Ausgangsgröße kompensiert werden können und somit lineare Entwurfsverfahren zur Verfügung stehen. Im allgemeinen ist es erforderlich, das nichtlineare System zuerst auf eine solche Normalform mittels einer nichtlinearen, ggf. von  $u(k)$  abhängigen Abbildung zu transformieren. Dann kann sich das in Normalform vorliegende Einschwingverhalten durch die nichtlineare Rücktransformation in die Originaldarstellung deutlich verändern. Bild 2.2 macht deutlich, daß selbst in dem vorliegenden, nahezu idealen Fall das Verhalten des über den Beobachter geregelten Systems wesentlich schlechter ausfällt als ohne Beobachter, obwohl der Beobachterfehler ebenso schnell wie im linearen Fall abklingt. Bei der Wahl von  $\hat{x}(0) = 0.6$  nimmt  $x(k)$  Werte an, die bei der Simulation auf dem verwendeten Digitalrechner nicht mehr darstellbar waren. Grund für dieses Verhalten ist die auf der Kompensation der Nichtlinearitäten (hier  $x(k)^3$ ) beruhende Zustandsrückführung; ein kleiner Beobachterfehler führt bereits zu einer großen Differenz  $\hat{x}(k)^3 - x(k)^3$ .

Erhöht man die Dynamik des Beobachters (z. B.  $\lambda_2 = 0.2$ ), gelingt es, wie Bild 2.3-a zu entnehmen ist, das Regelungsverhalten des geschlossenen Kreises mit Beobachter deutlich zu verbessern. Jedoch ist es noch immer weitaus schlechter als das Verhalten des linearisierten Systems. Zudem ist es in praktischen Fällen i. a. nicht möglich, den Beobachter beliebig schnell auszulegen, da dann der Einfluß von Meßrauschen zunimmt.

Ausgehend vom nichtlinearen System (2.7) mit dem zugehörigen Beobachter nach Gl. (2.10)



**Bild 2.3:** Beobachterfehler und Zustand des nichtlinearen Systems bei Verwendung alternativer Regelungsstrategien für die Regelung mit und ohne Beobachter

gelingt für dieses einfache System erster Ordnung ein Regelungsentwurf für den Beobachter in der Form

$$u(k) = -y(k) - y(k)^3 + \lambda_1 \hat{x}(k) - \lambda_2 (\hat{x}(k) - y(k)). \quad (2.11)$$

Die Kompensation der Nichtlinearität erfolgt jetzt mit der gemessenen Ausgangsgröße  $y(k)$ . Das Einsetzen der Regler- in die Beobachtergleichung (2.10) liefert  $\hat{x}(k+1) = \lambda_1 \hat{x}(k)$ , also das gewünschte dynamische Verhalten des Beobachterzustands. Unter Berücksichtigung von  $y(k) = x(k)$  weist die Systemdifferenzgleichung die Form

$$x(k+1) = \lambda_1 \hat{x}(k) - \lambda_2 (\hat{x}(k) - y(k)) \quad (2.12)$$

auf. Bei eingeschwungenem Beobachter (also  $\hat{x}(k) = x(k)$ ) gilt  $x(k+1) = \lambda_1 x(k)$ . Bild 2.3-b zeigt die simulierten Zeitverläufe für  $x_0 = 1.0$ ,  $\hat{x}_0 = 0.7$ ,  $\lambda_1 = 0.8$  und  $\lambda_2 = 0.6$ . Der Systemzustand liegt bei der Regelung mit Beobachter sogar unterhalb des Verlaufs bei Regelung ohne Beobachter. Der Beobachterfehler weist weiterhin identisches Verhalten im Vergleich zu den obigen Fällen auf, da bei diesem speziellen System weder der Systemzustand noch die Eingangsgröße die Dynamik des Beobachterfehlers beeinflusst.

■

Wie das Beispiel zeigt, lässt sich in diesem Fall das dynamische Verhalten des über einen Beobachter geschlossenen Kreises durch die Wahl der Beobachterdynamik oder durch die Regelung

des Beobachterzustands erheblich verbessern. Die Regelung des betrachteten Systems erster Ordnung erfordert selbstverständlich keinen Beobachter. Die beobachtergestützte Regelung diente im Beispiel lediglich zur Illustration der vorliegenden Problematik. Für allgemeine Systeme höherer Ordnung, deren Zustandsregelung nur mit Hilfe eines Beobachters gelingt, erscheint eine Anwendung des Verfahrens zur Regelung des Beobachterzustands aufgrund der zumeist aufwendigen, nichtlinearen Beobachtergleichungen nicht praktikabel. Die im Beispiel mit Hilfe dieses Entwurfs erreichbare Verbesserung des dynamischen Verhaltens des geschlossenen Regelkreises beruht auf der Verwendung der meßbaren Ausgangsgröße anstelle eines Beobachterzustands für die im Regelungsgesetz enthaltene Kompensation der Nichtlinearität. Ein Hinzuziehen gemessener Ausgangsgrößen zur Regelung ist jedoch auch für Systeme höherer Ordnung möglich und besonders dann sehr einfach durchführbar, wenn die Ausgangsgrößen, wie im obigen Beispiel, einzelnen Systemzuständen entsprechen. Ein Nachteil dieser Vorgehensweise tritt bei einer verrauschten Messung der Ausgangsgrößen auf: Das Rauschsignal wird über das Regelungsgesetz ohne Filterung im Beobachter direkt der Stellgröße eingekoppelt.

Zusammenfassend ergeben sich folgende qualitative Kriterien für einen Beobachter im allgemeinen sowie zum Einsatz in Zustandsrückführungen nichtlinearer zeitdiskreter Systeme:

- Die Dynamik des Beobachterfehlers sollte in gewissen Bereichen frei wählbar sein, um sie der Dynamik des geschlossenen Kreises anzupassen. Der Beobachter muß einerseits schneller einschwingen als der geschlossene Regelkreis, andererseits sollte er auch vorhandenes Meßrauschen filtern.
- Der Beobachterfehler sollte während der Einschwingzeit des Beobachters nicht wesentlich größer als der Anfangsfehler sein.
- Der Beobachter sollte gegen Meßrauschen und gegen Parameterunsicherheiten robust sein. Diese Anforderungen sind i. a. widersprüchlich, da ein gegen Meßrauschen robuster Beobachter mehr Informationen aus dem internen Modell des Systems als aus den gemessenen Ausgangsgrößen verwenden muß. Dieses führt sofort zu einer größeren Empfindlichkeit gegenüber Modellfehlern. Die Parameterauslegung des Beobachters sollte daher zumindest eine Anpassung an die Gegebenheiten ermöglichen (Meßrauschen oder Parameterunsicherheiten).
- Der Beobachterentwurf sollte eine möglichst große Systemklasse einschließen.
- Die Realisierung des Beobachters auf einem Prozeßrechner sollte mit geringem Aufwand möglich sein. Dieses bedingt Beobachtergleichungen, die sich ohne Schwierigkeiten in ein Echtzeitprogramm integrieren lassen und deren Berechnung innerhalb der erforderlichen Abtastzeit möglich ist.

Beobachterentwurfsverfahren, denen die Systemdarstellung in einer Normalform zugrunde liegt, gestatten eine in gewissen Grenzen frei wählbare Dynamik des Beobachterfehlers. Diese Vorgehensweise hat den Vorzug, daß in der Systembeschreibung in Normalform nur noch

Nichtlinearitäten bezüglich der meßbaren Ein- und Ausgangsgrößen auftreten. Die Darstellungsform ist linear bezüglich der Zustände und die Systemmatrix weist gewöhnlich eine kanonische Struktur auf, die der linearen Beobachternormalform ähnelt. Durch Kompensation der Nichtlinearitäten ist in Normalform ein einfacher Beobachter mit linearer Fehlerdynamik angebar. Eine Eigenwertvorgabe wie bei linearen Systemen ist somit gewährleistet. Das gewählte Einschwingverhalten liegt jedoch nur für die Beobachterdarstellung in Normalform vor. Die Rücktransformation auf Originalform erfordert eine nichtlineare Transformation; eine genaue Aussage über das Einschwingverhalten des Beobachters ist daher nicht möglich. Es erscheint jedoch plausibel, daß ein Beobachter mit Eigenwerten in Normalform nahe Null, auch in der Originaldarstellung schnell einschwingt. Diese Annahme ist insbesondere im Falle einer glatten Transformation zwischen Original- und Normalform berechtigt. Kleine Änderungen in Normalform führen dann zu kleinen Änderungen in Originalform.

## 2.4 Übersicht über nichtlineare Normalformbeobachter

Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen Systemen (z. B. [22, 98, 96, 112, 111, 163, 213, 205]) fanden bisher nur wenige Entwurfsverfahren für nichtlineare zeitdiskrete Normalformbeobachter Beachtung. Die Darstellung einer nichtlinearen Beobachternormalform, im folgenden NBNF abgekürzt, erfolgte erstmalig 1990 von CHUNG und GRIZZLE in [51] sowie von LEE und NAM in [121] und [122]. Die von den Autoren angegebenen Bedingungen für die Existenz einer Systemdarstellung in NBNF sind identisch. Dieses gilt auch für die Entwicklung von partiellen Differentialgleichungssystemen, durch deren Integration die Transformationsvorschrift von ANDF auf NBNF bestimmbar ist. Lediglich die Reihenfolge der Zustände innerhalb des Zustandsvektors in NBNF unterscheidet sich. Der vorgestellte Beobachterentwurf hat, wie bereits in [131] und [33] erwähnt, einige Nachteile. Einerseits ist die Transformationsvorschrift aus der Integration eines partiellen Differentialgleichungssystems zu bestimmen, was im allgemeinen Probleme aufwerfen kann. Andererseits ist das Verfahren lediglich für autonome Systeme mit einer umkehrbar eindeutigen Systemfunktion anwendbar. Dieses schränkt die Systemklasse, für die eine Transformation auf NBNF angebar ist, stark ein.

Eine Erweiterung des Ansatzes nach LEE und NAM erfolgt durch INGENBLEEK in [85, 86] und [87]. In dem dort erörterten Ansatz werden auch Systeme mit nichtlinearer Ausgangsgleichung und mit Eingangsgröße berücksichtigt. Die NBNF ist im allgemeinen von Zukunftswerten der Eingangsgröße abhängig. Die Wahl der Ausgangsfunktion in Normalform stellt einen Freiheitsgrad dar, der unter gewissen Bedingungen genutzt werden kann, um die Anzahl der erforderlichen, zukünftigen Eingangsgrößen zu verringern. Auch hier erhält man die Transformationsvorschrift nur durch Lösung eines partiellen Differentialgleichungssystems, das in [87] auf ein entkoppeltes Differentialgleichungssystem zurückgeführt wird.

BESANÇON und BORNARD geben in [20] Bedingungen an, unter denen ein Eingrößensys-

tem äquivalent zu einem System mit linearer Abhängigkeit der Zustände ist. Die zeitvariante Systemmatrix weist im Gegensatz zur NBNF jedoch keine kanonische Struktur auf und ist zudem von der Eingangsgröße abhängig, was den Beobachterentwurf erschwert. Die Arbeit [20] enthält lediglich einen Algorithmus zur Prüfung der Existenz einer zustandsaffinen Systemdarstellung. Ein Verfahren zur Berechnung der gesuchten Transformation geben BESANÇON, HAMMOURI und BENAMOR in [21] an.

BRODMANN in [33] sowie BYRNES und LIN in [131] geben unabhängig voneinander ein auf einer Zwei-Schritt-Transformation beruhendes Entwurfsverfahren an. Im ersten Schritt erfolgt die Transformation auf *nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform* (NBKNF). Genügt die Systemdarstellung in NBKNF gewissen Bedingungen, gelingt eine Transformation von NBKNF auf NBNF. Die Arbeiten berücksichtigen Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen. In [33] sind zudem auch nichtlineare Ausgangsfunktionen zugelassen und es wird ein Ansatz zur Berücksichtigung einer Eingangsgröße vorgestellt. Die Systemzustände in NBKNF entsprechen der Ausgangsfolge vom Zeitpunkt  $k$  bis zum zukünftigen Zeitpunkt  $k + n - 1$ . Daraus folgt bei gesteuerten Systemen im allgemeinen das Auftreten von Zukunftswerten der Eingangsgrößen in der NBKNF, was zu einem nicht kausalen Beobachter führt. Die Bedingungen, denen die Systembeschreibung in NBKNF genügen muß, um in NBNF darstellbar zu sein, sind sehr restriktiv und schränken die mögliche Systemklasse stark ein.

Die erstmals in dieser Arbeit vorgestellte Erweiterung der NBNF um Altwerte der Ein- und Ausgangsgrößen weist den Vorzug auf, daß sich die Transformation auf NBNF für Systeme mit einem Ausgang ohne weitere Bedingungen stets angeben läßt, sobald man die Systemdarstellung in NBKNF gefunden hat. Systeme mit mehreren Ausgängen unterliegen ebenfalls weniger restriktiven Bedingungen als in [33] und [131]. Die Herleitung der Transformation auf die sogenannte *erweiterte nichtlineare Beobachternormalform* (ENBNF) erfolgt im Unterabschnitt 4.1.2. Die NBKNF einer speziellen Klasse von Systemen entspricht zudem einer *nichtlinearen Regelungsnormalform* (NRNF) und erlaubt neben dem Beobachter- auch einen Regelungsentwurf (s. Kapitel 7).

CICCARELLA ET AL. verwenden in [54] und [55] ebenfalls die Transformationsvorschrift auf NBKNF, jedoch ausgehend von einem Altwert des Systemzustands. Der Zustandsvektor in Normalform entspricht somit den bekannten Ausgangswerten vom Zeitpunkt  $k - n + 1$  bis  $k$ . In dieser Systemdarstellung gelingt ein relativ einfacher Beobachterentwurf. Um einen aktuellen Schätzwert des Systemzustands zu erhalten, ist die  $(n - 1)$ -malige Anwendung der Systemfunktion ( $\mathbf{F}^{n-1}$  s. Symbolverzeichnis) auf den in ANDF zurücktransformierten Beobachterzustand erforderlich. Der auf Systeme mit einem Ausgang beschränkte Entwurf basiert auf einem Ansatz von GRIZZLE und MORAAL (z. B. [75, 74, 151, 149]). In diesen Arbeiten erfolgt zunächst die Abbildung eines vergangenen Systemzustands auf eine Folge von Ausgangswerten. Die Verfasser verwenden für die Invertierung dieser nichtlinearen Abbildung die Verfahren nach Newton bzw. Broyden. Auch in diesem Fall erhält man schließlich einen aktuellen Schätzwert des Systemzustandes durch eine wiederholte Anwendung der Systemfunk-

tion. Ein großer Vorteil dieser Verfahren liegt darin, daß für Systeme ohne Durchgangsanteil Zukunftswerte der Eingangsgröße nicht erforderlich sind.

CICCARELLA ET AL. verwenden für die inverse Transformation eine Linearisierung entlang der Trajektorie des Beobachterzustands als Approximation, was zwar zu einer größeren möglichen Systemklasse führt, jedoch eines hinreichend kleinen Beobachteranfangsfehlers bedarf. Systeme mit angebbarer Systemdarstellung in NBKNF (also mit berechenbarer inverser Transformationsvorschrift auf NBKNF) erlauben jedoch stets einen exakten Entwurf.

Einen großen Vorzug der zuletzt genannten Verfahren der Zwei-Schritt-Transformation und der Invertierung der Zustands-Ausgangs-Abbildung stellt die vergleichsweise einfache Berechnung der Transformationsvorschriften dar, die keine Lösung eines partiellen Differentialgleichungssystems erfordert. Lediglich das Auffinden der inversen Transformationsvorschrift stellt wie bei allen anderen Normalformverfahren ein Problem dar. Der weitere Text widmet sich daher der oben bereits erwähnten Erweiterung des Verfahrens nach BRODMANN (Kapitel 4), der Vorstellung des exakten Verfahrens nach CICCARELLA ET AL. und dessen Erweiterung auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen (Kapitel 5) sowie einem detaillierten Vergleich beider Verfahren in Kapitel 6. Diesen Ausführungen gehen in Kapitel 3 noch einige generelle Bemerkungen zur Beobachtbarkeit nichtlinearer zeitdiskreter Systeme voraus.

### 3 Lokale starke Beobachtbarkeit nichtlinearer zeitdiskreter Systeme

Im Rahmen dieser Arbeit finden lokal stark beobachtbare Systeme der Form (2.1) Beachtung. Die lokale starke Beobachtbarkeit wird häufig auch als „schwache  $n$ -Schritt Beobachtbarkeit“ bezeichnet (s. z. B. [87]) und ist nach [87] von entscheidender praktischer Bedeutung. Die folgenden Abschnitte widmen sich der Definition der lokalen starken Beobachtbarkeit und der sich daraus ergebenden *nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform* (NBKNF). Sie stellt eine notwendige Voraussetzung für die in dieser Arbeit vorgestellten Beobachterentwürfe dar. Der Test auf lokale starke Beobachtbarkeit läßt sich auf eine einfache Rangprüfung einer Matrix zurückführen. Es existieren jedoch lokal stark beobachtbare Systeme, die die oben genannte (hinreichende) Rangbedingung nicht erfüllen. Der Unterabschnitt 3.2.1 geht der Frage nach der Existenz einer Darstellung derartiger Systeme in NBKNF nach.

#### 3.1 Definition der lokalen starken Beobachtbarkeit

Die Definition für die lokale starke Beobachtbarkeit ist für autonome Systeme z. B. in den Arbeiten [158] und [33] enthalten sowie für Systeme mit einem Eingang in [87]. Für Systeme der Form (2.1) lautet sie:

*Definition 3.1: Lokale starke Beobachtbarkeit*

Ein nichtlineares zeitdiskretes System (2.1) ist lokal stark beobachtbar in  $\mathbf{x}_0$ , falls eine offene Umgebung  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}$  um  $\mathbf{x}_0$  derart existiert, daß für jedes  $\tilde{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{U}$  die Gleichheit der  $n$  Ausgangsgrößen

$$\mathbf{h}(\mathbf{F}^\mu(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{\mu-1}), \mathbf{u}_\mu) = \mathbf{h}(\mathbf{F}^\mu(\tilde{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{\mu-1}), \mathbf{u}_\mu), \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1$$

für alle auftretenden Eingangsfolgen  $\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$  die Identität von  $\mathbf{x}_0$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_0$ , also  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0$ , impliziert. Dabei ist  $\mathbf{F}^\mu$  die  $\mu$ -malige Anwendung der Systemfunktion  $\mathbf{f}$  (s. Symbolverzeichnis).

Ein System ist lokal stark beobachtbar, wenn diese Bedingung für alle  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{N}$  gilt. ■

Dabei weisen die Begriffe *lokal* und *stark* auf folgende Systemeigenschaften hin:

**lokal:** Zwei Zustände  $\mathbf{x}_0$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  müssen nur innerhalb einer gewissen Umgebung  $\mathcal{U}$  unterscheidbar sein.

**stark:** Für die Unterscheidung der Zustände  $\mathbf{x}_0$  und  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  reicht die Betrachtung von  $n$  Ausgangswerten aus.

Die Beobachtbarkeit<sup>1</sup> hängt im allgemeinen von den Eingangsgrößen des Systems ab. Nach [87, Satz 5.6] ist nur dann ein System unabhängig von der Eingangsgröße lokal stark beobachtbar, wenn es diese Eigenschaft für impulsförmige Eingangssignale  $u_0\delta(k) = \{u_0, 0, 0, \dots\}$  aufweist. Eine Beschränkung auf diese Systemklasse erweist sich für die betrachteten Beobachterentwürfe als nicht erforderlich, wenn Eingangsfolgen, für die die Beobachtbarkeit verlorenght, ausgeschlossen sind (s. auch Beispiel 4.2).

## 3.2 Beobachtbarkeitsnormalform für Systeme mit einer Ausgangsgröße

Aus Übersichtsgründen werden zunächst lediglich Systeme mit einer Ausgangsgröße der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ y(k) &= h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \\ \mathbf{x}(k=0) &= \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit  $y \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}$  und  $h : \mathcal{N} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$ , betrachtet. Für lokal stark beobachtbare Systeme existiert eine nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF), die für autonome Systeme in [158] und [33] angegeben ist. Für das System (3.1) lautet sie:

*Definition 3.2: Nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform (NBKNF)*

Die nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform für ein zeitdiskretes System (3.1) lautet:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \vdots \\ x_n^\square(k) \\ f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_1^\square(k), \\ \mathbf{x}^\square(k=0) &= \mathbf{x}_0^\square \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei  $\bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)$  die Liste der Eingangsvektoren  $\mathbf{u}(k), \mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(k+n)$  darstellt (s. Symbolverzeichnis) und der Zustandsvektor  $\mathbf{x}^\square(k) = [y(k), \dots, y(k+n-1)]^T$  aus dem aktuellen und den zukünftigen  $n-1$  Werten der Ausgangsgröße besteht. ■

<sup>1</sup>Mit dem Begriff „Beobachtbarkeit“ ist im folgenden, wenn nicht anders angegeben, die lokale starke Beobachtbarkeit gemeint.

Diese Normalform stellt das zeitdiskrete Äquivalent zur nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform zeitkontinuierlicher Systeme nach [213] und [98] dar. Analog zu den in Gl. (3.2) auftretenden Zukunftswerten der Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(k+n)$  hängt die zeitkontinuierliche Normalform von den zeitlichen Ableitungen  $\dot{\mathbf{u}}(t), \dots, \overset{(n)}{\mathbf{u}}(t)$  ab. Die Darstellung gemäß Gl. (3.2) unterscheidet sich von der in [87] für zeitdiskrete Systeme definierten „verallgemeinerten Beobachtbarkeitsnormalform“<sup>2</sup>, die nur für Systeme existiert, deren Beobachtbarkeit nicht von den Eingangsgrößen abhängt.

Aus der Systemdarstellung (3.2) in NBKNF folgt unmittelbar die lokale starke Beobachtbarkeit des Systems nach Definition 3.1. Die vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0^\square$  verursachte Ausgangsfolge der Länge  $n$

$$\{y(0), y(1), \dots, y(n-1)\} = \{x_{0,1}^\square, x_{0,2}^\square, \dots, x_{0,n}^\square\}. \quad (3.3)$$

enthält genau die  $n$  Komponenten von  $\mathbf{x}_0^\square$  und ist nicht von der Funktion  $f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k))$  und den Eingangsgrößen abhängig. Eine identische Ausgangsfolge kann daher nur aus identischen Anfangszuständen hervorgehen. Für die Untersuchung der Beobachtbarkeit eines Systems stellt sich daher die Frage, ob eine zumindest lokal gültige Systemdarstellung in NBKNF existiert. Die Transformation  $\mathbf{t}^\square$  auf NBKNF ist für Systeme mit einer Ausgangsgröße identisch mit der aus der Literatur bekannten Beobachtbarkeitsabbildung  $\mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k))$  (z. B. [158] und [33] für autonome Systeme sowie [85] und [87] für Systeme mit Eingängen)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k) &= \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) = \mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)), \\ \text{mit } \mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) &= \begin{bmatrix} h(\mathbf{F}^0(\mathbf{x}(k))) \\ h(\mathbf{F}^1(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \mathbf{u}(k+1)) \\ \vdots \\ h(\mathbf{F}^{n-1}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-2]}(k)), \mathbf{u}(k+n-1)) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit  $\mathbf{q} : \mathcal{N} \times \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$  ( $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$ , da lediglich eine Ausgangsgröße vorliegt). Sie bildet den Systemzustand auf die Folge des aktuellen und der zukünftigen  $n-1$  Ausgangswerte ab. Existiert die Inverse  $\mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k))$  dieser Abbildung, dann gilt dieses auch für die Systemdarstellung in NBKNF mit

$$\begin{aligned} f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) &= \\ h(\mathbf{F}^n(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)), u(k+n)) \Big|_{\mathbf{x}(k) = \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k))} & \end{aligned} \quad (3.5)$$

und das System weist die Eigenschaft der lokalen starken Beobachtbarkeit auf. Während ein in NBKNF dargestelltes System unabhängig von den Eingangsgrößen beobachtbar ist, gelingt

<sup>2</sup>Siehe [67] für zeitkontinuierliche Systeme.

die, für die Transformation eines Systems auf NBKNF erforderliche, eindeutige Auflösung der Beobachtbarkeitsabbildung (3.4) nach  $\mathbf{x}(k)$  i. a. nur in Abhängigkeit der Eingangsgrößen.

Da eine lokale Bedingung vorliegt, wird in der Literatur der Test der lokalen starken Beobachtbarkeit häufig auf die relativ einfach durchführbare Ranguntersuchung der Jacobimatrix der Beobachtbarkeitsabbildung, die sogenannte *Beobachtbarkeitsmatrix*

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \quad (3.6)$$

zurückgeführt [33, 131, 85, 158]. Ist die Beobachtbarkeitsmatrix in  $\mathbf{x}_0$  regulär, gilt also

$$\text{rang } \mathbf{Q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = n, \quad (3.7)$$

dann stellt die Beobachtbarkeitsabbildung und somit die Transformationsvorschrift  $\mathbf{t}^\square$  nach dem Theorem über inverse Funktionen (*inverse function theorem* [28, S. 41] oder [89, S. 471]) einen lokalen Diffeomorphismus dar; mit anderen Worten, die glatte<sup>3</sup> Abbildung  $\mathbf{t}^\square \in C^\infty$  weist in der betrachteten Umgebung eine glatte Inverse  $\mathbf{t}^{\square-1} \in C^\infty$  auf. Das System ist somit lokal stark beobachtbar. Es existieren jedoch durchaus Abbildungen, die lediglich stetige Inverse besitzen, so zum Beispiel  $x^3$ . Die Rangbedingung für  $x = 0$  ist nicht erfüllt, obwohl eine eindeutig invertierbare Funktion vorliegt. Der Frage nach der Existenz einer NBKNF für Systeme, deren Beobachtbarkeitsabbildung lediglich eine stetige Inverse aufweist, widmet sich der folgende Unterabschnitt.

### 3.2.1 Stetige Beobachtbarkeitsnormalform

In [176, S. 417] findet man als Eigenschaften einer Zustandstransformation  $\mathbf{x}^\square = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x})$  (vgl. auch [89, S. 11] für zeitkontinuierliche Systeme):

1.  $\mathbf{t}^\square(\mathbf{x})$  ist invertierbar, d. h. es existiert eine Funktion  $\mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square)$  so, daß  $\mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{t}^\square(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ .
2.  $\mathbf{t}^\square \in C^\infty$  und  $\mathbf{t}^{\square-1} \in C^\infty$ , d. h. es existieren partielle Ableitungen beliebiger Ordnung.

Die erste Eigenschaft erweist sich als notwendig, um den Originalzustand wieder herstellen zu können, wogegen die zweite sicherstellt, daß die Systembeschreibung in den neuen Koordinaten glatt ist. Eine Abbildung mit beiden Eigenschaften innerhalb einer offenen Umgebung  $\mathcal{U}$  um  $\mathbf{x}_0$  stellt einen lokalen Diffeomorphismus dar und besitzt somit eine reguläre Jacobimatrix in  $\mathbf{x}_0$ . Letztere ist für die Zustandstransformation zeitkontinuierlicher Systeme von entscheidender Bedeutung, da hier die Jacobimatrizen der Transformationsvorschriften zur Berechnung der Systemdarstellung in den neuen Koordinaten existieren müssen, wie die folgenden Ausführungen veranschaulichen.

<sup>3</sup>Dieses folgt direkt aus der Berechnungsvorschrift (3.4) von  $\mathbf{t}^\square$ , da sowohl  $\mathbf{f} \in C^\omega$  als auch  $\mathbf{h} \in C^\omega$  und somit  $\mathbf{f} \in C^\infty$  und  $\mathbf{h} \in C^\infty$ .

Gegeben sei das autonome, zeitkontinuierliche System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_c(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.8)$$

und die glatte Abbildung  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}_c(\mathbf{x}(t))$  mit

$$\text{rang} \left. \frac{\partial \mathbf{t}_c(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}_0} < n. \quad (3.9)$$

In einer Umgebung von  $\mathbf{x}_0$  existiert keine Zustandsäquivalenz zwischen  $\mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{z}(t)$ , selbst wenn  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}_c(\mathbf{x}(t))$  eindeutig nach  $\mathbf{x}(t)$  auflösbar ist, also die Inverse  $\mathbf{t}_c^{-1}(\mathbf{z}(t))$  besitzt. Nach [202] ist es in diesem Fall dennoch formell möglich, die Systemdarstellung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \left. \frac{d\mathbf{t}_c(\mathbf{x}(t))}{dt} \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{t}_c^{-1}(\mathbf{z}(t))} = \left. \frac{\partial \mathbf{t}_c(\mathbf{x}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \mathbf{f}_c(\mathbf{x}(t)) \right|_{\mathbf{x}(t)=\mathbf{t}_c^{-1}(\mathbf{z}(t))} = \mathbf{f}_{c,z}(\mathbf{z}(t)), \quad (3.10)$$

$$\mathbf{z}(t=0) = \mathbf{z}_0 = \mathbf{t}_c(\mathbf{x}_0)$$

anzugeben. Man spricht dann von einem sogenannten *Semi-Diffeomorphismus* der Abbildung  $\mathbf{t}_c$ . Sowohl  $\mathbf{t}_c^{-1}$  als auch  $\mathbf{f}_{c,z}$  sind i. a. nur stetig, nicht aber glatt. Ausgehend von den  $\mathbf{z}$ -Koordinaten ist es mit Hilfe von  $\mathbf{f}_{c,z}$ ,  $\mathbf{t}_c^{-1}$  und  $\mathbf{t}_c$  jedoch nicht möglich, die Originaldarstellung  $\mathbf{f}_c$  in  $\mathbf{x}$ -Koordinaten zu berechnen, da aufgrund des Rangdefektes von  $\frac{\partial \mathbf{t}_c(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  an der Stelle  $\mathbf{x}_0$  die Jacobimatrix  $\frac{\partial \mathbf{t}_c^{-1}(\mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}}$  an der Stelle  $\mathbf{t}_c(\mathbf{x}_0)$  nicht existiert. Sehr wohl besteht aber die Möglichkeit, eine Lösung (Trajektorie)  $\mathbf{z}(t)$  der Differentialgleichung (3.10) mittels  $\mathbf{t}_c^{-1}$  in die Trajektorie  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{t}_c^{-1}(\mathbf{z}(t))$  des Originalsystems zu transformieren. Dieser Sachverhalt wird in [202] als *Trajektorienäquivalenz* bezeichnet. Ein auf der Systemdarstellung in  $\mathbf{z}$ -Koordinaten basierender Beobachterentwurf führt aufgrund dieser Trajektorienäquivalenz auch zu einem Schätzwert von  $\mathbf{x}(t)$ , denn infolge der Stetigkeit der Rücktransformation läßt sich aus der Konvergenz des Beobachterzustands in  $\mathbf{z}$ -Koordinaten auf die Konvergenz desjenigen in  $\mathbf{x}$ -Koordinaten schließen. Aus den genannten Gründen sind die Beobachtergleichungen in  $\mathbf{x}$ -Koordinaten jedoch nicht darstellbar.

Ergänzend sei hier die Forderung von SCHULZE in [174, S. 9] nach einer lediglich bijektiven und nicht diffeomorphen Beobachtbarkeitsabbildung für die Beobachtbarkeit zeitkontinuierlicher Systeme erwähnt.

Läßt man, wie oben für zeitkontinuierliche Systeme, auch bei der Zustandstransformation von zeitdiskreten Systemen die Forderung einer glatten Systemdarstellung in den neuen Koordinaten fallen, erweist sich hier die Regularität der Jacobimatrix der Transformation als irrelevant, wie das nachfolgende Beispiel 3.1 zeigt. Eine invertierbare Transformation vorausgesetzt, besteht sogar bei singulären Jacobimatrizen die Möglichkeit, die Systemdarstellungen

beider Koordinaten ineinander zu überführen, was bei zeitkontinuierlichen Systemen nur in einer Richtung gelingt.

**Beispiel 3.1:**

Gegeben ist das autonome, zeitdiskrete System zweiter Ordnung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_1(k)x_2(k) \end{bmatrix}, \quad y(k) = x_1(k)^3, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.11)$$

Die Beobachtbarkeitsabbildung für dieses System lautet

$$\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} x_1(k)^3 \\ x_2(k)^3 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

mit der Jacobimatrix

$$\frac{\partial \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} = \begin{bmatrix} 3x_1(k)^2 & 0 \\ 0 & 3x_2(k)^2 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

die für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_2$  den Rang Null aufweist. Dennoch gelingt die Angabe der inversen Abbildung

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k)) = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{x_1^\square(k)} \\ \sqrt[3]{x_2^\square(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

deren Jacobimatrix

$$\frac{\partial \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k))}{\partial \mathbf{x}^\square(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt[3]{x_1^\square(k)^2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt[3]{x_2^\square(k)^2}} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

für  $\mathbf{t}^\square(\mathbf{0}_2) = \mathbf{0}_2$  nicht existiert. Für die Durchführung der Transformationen des Systems zwischen Originalform und NBKNF ist letztgenannte jedoch nicht erforderlich. Es gilt:

$$\mathbf{x}^\square(k+1) = \mathbf{f}^\square(\mathbf{x}^\square(k)) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k)))|_{\mathbf{x}(k) = \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k))} = \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ x_1^\square(k)x_2^\square(k) \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

$$y(k) = x_1^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}_0)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{f}^\square(\mathbf{x}^\square(k)))|_{\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k))} = \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_1(k)x_2(k) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$y(k) = x_1(k)^3, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{t}^\square(\mathbf{x}_0)) = \mathbf{x}_0$$

(vgl. Gl. (3.11)). Da die Systemdarstellung in NBKNF (3.16) existiert, ist die lokale starke Beobachtbarkeit des Systems garantiert. Für das hier betrachtete System ergibt sich zudem in NBKNF, trotz lediglich stetiger Rücktransformation  $\mathbf{t}^{\square-1}$ , dennoch eine glatte Systemfunktion  $\mathbf{f}^{\square} \in C^{\infty}$ .

■

Wie das Beispiel zeigt, kann trotz einer in einem Punkt singulären Beobachtbarkeitsmatrix ein Beobachterentwurf via NBKNF möglich sein. Die generelle Regularität der Jacobimatrix der Beobachtbarkeitsabbildung stellt somit nur eine hinreichende, aber keine notwendige Bedingung für die Existenz einer Systemdarstellung in NBKNF und somit für die lokale starke Beobachtbarkeit eines zeitdiskreten Systems dar.

Im Gegensatz zu den zeitkontinuierlichen Systemen lassen sich dann aus den genannten Gründen die in Normalform gefundenen Beobachtergleichungen mit Hilfe der Transformationsvorschriften in  $\mathbf{x}$ -Koordinaten darstellen. Ein von der NBKNF ausgehender Beobachterentwurf für das im obigen Beispiel eingeführte System (3.11) erfolgt in Beispiel 4.3 des Kapitels 4.

Es ist anzumerken, daß aus der Existenz einer Inversen der Beobachtbarkeitsabbildung i. a. noch nicht folgt, daß diese auch explizit anzugeben ist. Die Berechnung der Systemdarstellung in NBKNF erweist sich tatsächlich als die größte Hürde der in dieser Arbeit betrachteten Beobachterentwürfe. Gelingt die Berechnung der NBKNF trotz eines Rangdefekts der Beobachtbarkeitsmatrix, ist folgendes zu beachten: Eine Approximation der Transformationsvorschriften oder der Systemfunktion in NBKNF durch eine Taylorreihenentwicklung ist nicht möglich, da i. a. nur stetige, aber nicht glatte (und damit auch nicht analytische) Funktionen auftreten. Ein auf der NBKNF basierender Beobachterentwurf erfüllt in diesem Falle auch nicht die in Satz 2.1 geforderte Voraussetzung  $\hat{\mathbf{f}} \in C^2$ , die eine Aussage über die Stabilität der Ruhelage des geschlossenen Regelkreises zuläßt.

### 3.3 Beobachtbarkeitsnormalform für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen

Das vorgestellte Beobachtbarkeitskonzept läßt sich ohne weiteres auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen der Form (2.1) übertragen (vgl. [33] für autonome Systeme). Die Beobachtbarkeitsabbildung lautet für diesen Fall

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n-1]}(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{y}(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{F}^0(\mathbf{x}(k))) \\ \mathbf{h}(\mathbf{F}^1(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \mathbf{u}(k+1)) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\mathbf{F}^{n-1}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n-2]}(k)), \mathbf{u}(k+n-1)) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

mit  $\mathbf{q} : \mathcal{N} \times \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{M}^n$ , und ist für lokal stark beobachtbare Systeme in einer Umgebung  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{N}$  eindeutig nach  $\mathbf{x}(k)$  auflösbar. Aus dieser  $nm$ -dimensionalen Abbildung geht die Transformation auf NBKNF durch Auswahl von  $n$  Komponenten hervor, die zweckmäßigerweise über die Wahl von  $n$  strukturell linear unabhängigen Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{F}^1(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \mathbf{u}(k+1))}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{F}^{n-1}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-2]}(k)), \mathbf{u}(k+n-1))}{\partial \mathbf{x}(k)} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

erfolgt. Dieser Auswahlprozeß liefert die Anzahl  $n_j$  der vom  $j$ -ten Systemausgang berücksichtigten Verschiebungen  $y_j(k), y_j(k+1), \dots, y_j(k+n_j-1)$  mit  $j = 1, 2, \dots, m$  und ist unter Umständen aufgrund möglicher Redundanzen der Ausgangsgrößen mehrdeutig. Eine eindeutige Transformation eines Systems auf NBKNF gelingt über die *Beobachtbarkeits-Indizes*. Bezeichnet  $\kappa_j = n_j$  die Anzahl der vom Ausgang  $y_j$  berücksichtigten Verschiebungen, dann stellen die Beobachtbarkeits-Indizes das im lexikographischen Sinn kleinste  $m$ -Tupel

$$\{\kappa_1, \dots, \kappa_m\} \quad \text{mit} \quad \kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_m \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \kappa_j = n$$

dar [160, 168], was ggf. ein Umsortieren der Ausgangsgrößen  $y_1, \dots, y_m$  erfordert. Die entsprechende Veränderung der Reihenfolge der Ausgangsgrößen im Vektor  $\mathbf{y}$  und der damit verbundenen Modifikation der Ausgangsfunktion  $\mathbf{h}$  gelingt mit Hilfe von Permutationsmatrizen und wird im folgenden stets als bereits durchgeführt vorausgesetzt.

Die Auswahl der Transformationskomponenten entsprechend der Beobachtbarkeits-Indizes (s. auch [33]) erfolgt wie nachstehend beschrieben. Beginnend mit der ersten Zeile werden die Zeilen ausgesucht, die strukturell noch nicht linear von den vorherigen abhängig sind. Die Reihenfolge der Zeilen in der Beobachtbarkeitsmatrix nach Gl (3.19) gewährleistet stets die Betrachtung aller Ausgangsgrößen bevor ein neuer Verschiebungsschritt berücksichtigt wird. Trifft man auf die erste linear abhängige Zeile, ist der zugehörige Systemausgang von der weiteren Suche auszuschließen, da er keine weitere Information für die Beobachtung liefern kann. Für die Transformation sind die Zeilen dann derart zu sortieren, daß alle einem Systemausgang zugehörigen Zeilen aufeinander folgen. Diese Vorgehensweise stellt sicher, daß alle Systemausgänge einen möglichst gleichen Anteil an Information zur Beobachtung der Systemzustände beitragen.

Nach dem Sortieren der ausgewählten Komponenten entsprechend der zugehörigen Ausgangs-

größen lautet die Transformation auf NBKNF

$$\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1-1]}(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\square(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1-1]}(k)) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\square(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_m-1]}(k)) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

mit

$$\mathbf{t}_j^\square(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_j-1]}(k)) = \begin{bmatrix} h_j(\mathbf{F}^0(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))) \\ h_j(\mathbf{F}^1(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \mathbf{u}(k+1)) \\ \vdots \\ h_j(\mathbf{F}^{n_j-1}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_j-2]}(k)), \mathbf{u}(k+n_j-1)) \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Dabei gilt  $\sum_{j=1}^m n_j = n$  und  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$ , da die  $n_j$  den Beobachtbarkeits-Indizes entsprechen. Die Transformation auf NBKNF hängt daher nicht wie im Fall einer Ausgangsgröße von maximal  $n-1$ , sondern lediglich von  $n_1-1$  zukünftigen Werten der Eingangsgrößen ab. Die Systemdarstellung eines Systems (2.1) in NBKNF lautet somit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k+1) &= \mathbf{f}^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1]}(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1]}(k)) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1]}(k)) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{h}^\square(\mathbf{x}^\square(k)) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square(k) \\ \vdots \\ x_{m,1}^\square(k) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^\square(0) &= \mathbf{x}_0^\square \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\square(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^\square(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_j^\square(k) = \begin{bmatrix} x_{j,1}^\square(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}^\square(k) \end{bmatrix} \quad \text{und} \\ \mathbf{f}_j^\square &= \begin{bmatrix} x_{j,2}^\square(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}^\square(k) \\ f_{j,n_j}^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n_1]}(k)) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m \end{aligned} \quad (3.23)$$

und enthält  $m$  Subsysteme der Ordnungen  $n_1, \dots, n_m$  entsprechend der Beobachtbarkeits-Indizes, woraus eine Reihenfolge der Subsysteme gemäß ihrer Ordnungen hervorgeht.

## 4 Beobachterentwurf via ENBNF

In diesem Kapitel erfolgt zunächst die Erweiterung der Zwei-Schritt-Transformation nach BRODMANN, die er in [33] für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen eingeführt hat. In Analogie zu der Bezeichnung *nichtlineare Beobachternormalform* (NBNF) wird hier der Begriff *erweiterte nichtlineare Beobachternormalform* (ENBNF) eingeführt. Der Beobachterentwurf beschränkt sich dabei zunächst auf Systeme mit einer Ausgangsgröße und mehreren Eingangsgrößen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit erfolgt auch nur für diesen Systemtyp eine detaillierte Beschreibung der Eigenschaften des Beobachterentwurfs. Eine Behandlung von Systemen mit mehreren Ausgangsgrößen schließt das Kapitel ab.

### 4.1 Systeme mit einer Ausgangsgröße

#### 4.1.1 Die Zwei-Schritt-Transformation nach Brodmann

Gegeben sei ein lokal stark beobachtbares, autonomes System mit einer Ausgangsgröße

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)), \\ y(k) &= h(\mathbf{x}(k)), \\ \mathbf{x}(k=0) &= \mathbf{x}_0 \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

BRODMANN stellt in [33] die Zwei-Schritt-Transformation des Systems (4.1) auf die sogenannte *nichtlineare Beobachternormalform* (NBNF)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(k) + \begin{bmatrix} f_0^*(y(k)) \\ f_1^*(y(k)) \\ \vdots \\ f_{n-1}^*(y(k)) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= h^*(x_n^*(k)), \quad \mathbf{x}^*(0) = x_0^*, \quad k \in \mathbb{N}^0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

mit invertierbarer Ausgangsfunktion  $h^*$  vor. Für diese NBNF gelingt ein nichtlinearer Beobachterentwurf, dessen Beobachtungsfehler einer linearen Differenzgleichung genügt. Der erste Schritt enthält die in Gl. (3.4) angegebene Transformation auf *nichtlineare Beobachtbarkeitsnormalform* (NBKNF). Kann man die inverse Transformationsvorschrift  $\mathbf{t}^{\square-1}(\mathbf{x}^\square(k))$

explizit angeben, führt dieses auf die Systemdarstellung in NBKNF

$$\mathbf{x}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \vdots \\ x_n^\square(k) \\ f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k)) \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

$$y(k) = x_1^\square(k),$$

$$\mathbf{x}^\square(k=0) = \mathbf{x}_0^\square \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

Der zweite Schritt beinhaltet die Transformation von NBKNF auf NBNF. Diese Transformation gelingt dann und nur dann, wenn die im folgenden Satz angegebene *Separabilitätsbedingung* nach [33] erfüllt ist.

*Satz 4.1:*

Ein System ist dann und nur dann **von NBKNF auf NBNF transformierbar**, wenn die Funktionen  $h^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_\mu^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ ) derart existieren, daß die Gleichung

$$h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k))) = \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_{\mu+1}^\square(k)), \quad (4.4)$$

erfüllt ist. ■

Die Funktion  $h^*$  stellt dabei die Ausgangsfunktion in NBNF dar und die Funktionen  $f_\mu^*$  beinhalten die Systemnichtlinearitäten in NBNF, die nur noch von der Ausgangsgröße abhängen. Angaben zur Transformationsvorschrift auf NBNF sind in [33] zu finden. Die harte Separabilitätsbedingung nach Satz 4.1 erweist sich als starke Einschränkung der Systemklasse, für die die Transformation auf NBNF durchführbar ist, da z. B. Produkte von Zustandsgrößen in NBKNF nicht zulässig sind. Diese Bedingung läßt sich, wie im folgenden dargestellt, durch Berücksichtigung von Altwerten der Ausgangsgröße umgehen. Aus der neuen Vorgehensweise folgt dann die *erweiterte nichtlineare Beobachternormalform* (ENBNF).

### 4.1.2 Erweiterung der Zwei-Schritt-Transformation

Die Erweiterung der vorgestellten Zwei-Schritt-Transformation mit dem Ziel der Herleitung der ENBNF erfolgt zunächst ebenfalls für autonome Systeme mit einer Ausgangsgröße. Eine Erweiterung auf Systeme mit Eingangsgrößen ist dann mit relativ geringem Aufwand möglich. Gegeben sei daher wieder das System (4.1). Dieses System ist um  $n-1$  Zustände zu erweitern,

die den verfügbaren Altwerten  $y(k-1), \dots, y(k-n+1)$  der Ausgangsgröße entsprechen. Der  $(2n-1)$ -dimensionale Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}$  des erweiterten Systems lautet dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \dots\dots\dots \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{n+1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-1}(k) \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Der Zustandsvektor  $\tilde{\mathbf{x}}(k+1)$  im nächsten Abtastschritt folgt aus der Verschiebung der einzelnen Komponenten von  $\tilde{\mathbf{x}}(k)$  um einen Schritt in die Zukunft, wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) & \text{ in } \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)), \\ y(k-1) & \text{ in } y(k) = h(\mathbf{x}(k)) \quad \text{und} \\ y(k-2), \dots, y(k-n+1) & \text{ in } y(k-1) = \tilde{x}_{n+1}(k), \dots, y(k-n+2) = \tilde{x}_{2n-2}(k) \end{aligned}$$

übergehen. Somit ergibt sich die Systemdarstellung

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}(k+1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ \dots\dots\dots \\ y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(k)) \\ \dots\dots\dots \\ h(\mathbf{x}(k)) \\ \tilde{x}_{n+1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-2}(k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) &= \begin{bmatrix} \tilde{h}_1(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{h}_2(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \\ \vdots \\ \tilde{h}_n(\tilde{\mathbf{x}}(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \dots\dots\dots \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}(k)) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{n+1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-1}(k) \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{x}}(k=0) &= \tilde{\mathbf{x}}_0, \quad k \in \mathbb{N}^0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

wobei  $\tilde{\mathbf{y}}$  den  $n$ -dimensionalen Ausgangsvektor bezeichnet. Die Erweiterung führt auf ein System mit  $m = n$  Ausgangsgrößen  $\tilde{y}_1(k), \dots, \tilde{y}_n(k)$  und dem in Bild 4.1 dargestellten Blockschaltbild.

Ist das ursprüngliche System lokal stark beobachtbar, ergibt sich der Zustandsvektor des Mehrgrößensystems in NBKNF zu

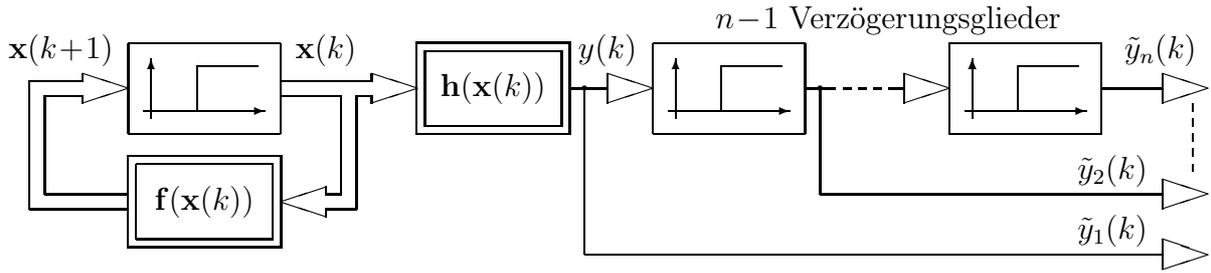


Bild 4.1: Blockschaltbild des erweiterten Systems

$$\tilde{\mathbf{x}}^\square(k) = \begin{bmatrix} h(\mathbf{x}(k)) \\ h(\mathbf{f}(\mathbf{x}(k))) \\ \vdots \\ h(\mathbf{f}^{n-1}(\mathbf{x}(k))) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{n+1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-1}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

wobei die letzten  $n - 1$  Zustände unverändert bleiben, da sie Subsysteme erster Ordnung darstellen. Die Systembeschreibung in NBKNF lautet schließlich

$$\tilde{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} y(k+1) \\ \vdots \\ y(k+n-1) \\ y(k+n) \\ \dots\dots\dots \\ y(k) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_2^\square(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^\square(k) \\ \tilde{f}_n^\square(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k)) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_1^\square(k) \\ \tilde{x}_{n+1}^\square(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-2}^\square(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1^\square(k) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{n+1}^\square(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2n-1}^\square(k) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^\square(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0^\square \quad \text{und} \quad k \in \mathbb{N}^0.$$

Diese Darstellung weist ein Subsystem  $n$ -ter Ordnung (Zustände  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ ) und  $n - 1$  Subsysteme erster Ordnung (Zustände  $\tilde{x}_{n+1}, \dots, \tilde{x}_{2n-1}$ ) auf. Letztere liegen bereits in NBNF vor, da die skalaren Systemfunktionen dieser Subsysteme (entspricht  $f_0^*$  in Gl. (4.2)) jeweils mit einer Komponente des Ausgangsvektors  $\tilde{\mathbf{y}}(k)$  identisch sind. Die Transformation der zugehörigen Zustände auf NBNF lautet demnach

$$\tilde{x}_\mu^*(k) = \tilde{x}_\mu^\square(k) \quad \text{mit} \quad n+1 \leq \mu \leq 2n-1. \quad (4.9)$$

Wie von Brodmann in [33] angegeben, ergibt sich für das erste Subsystem (Zustände  $\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k)$ , Ordnung  $n$ ) die Separabilitätsbedingung

$$\tilde{h}_1^{*-1}(\tilde{f}_n^\square(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k))) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \tilde{f}_\mu^*(\tilde{y}_1(k+\mu), \dots, \tilde{y}_n(k+\mu)) \quad (4.10)$$

mit  $\tilde{h}_1^*$  und  $\tilde{f}_\mu^*$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , skalaren Funktionen. Die Verschiebung der Ausgangsgrößen  $\tilde{y}_\nu(k) = y(k-\nu+1)$  mit  $\nu = 1, 2, \dots, n$  um  $\mu$  Schritte in die Zukunft führt auf

$$\tilde{y}_\nu(k+\mu) = y(k-\nu+\mu+1) = \begin{cases} \tilde{x}_{2-\nu+\mu}^\square(k) & \text{für } 0 \leq \mu+1-\nu \leq n-1 \\ \tilde{x}_{n-\mu+\nu-1}^\square(k) & \text{für } 0 > \mu+1-\nu \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\text{mit} \quad 1 \leq \nu \leq n, \quad 0 \leq \mu \leq n-1.$$

Bei der Transformation auf NBNF werden die Funktionen  $\tilde{f}_\mu^*(\tilde{y}_1(k+\mu), \dots, \tilde{y}_n(k+\mu))$  jeweils um  $\mu$  Abtastschritte zeitlich verzögert [33], so daß die nichtlinearen Zusammenhänge dieser Funktionen in der NBNF nur noch bezüglich der meßbaren Ausgangsgröße auftreten. Entsprechend der Separabilitätsbedingung nach Satz 4.1 dürfen die Zustände  $\tilde{x}_\nu^\square(k) = y_1(k+\nu-1)$  für  $\nu = 1, 2, \dots, n$  nicht Argument der Funktionen  $\tilde{f}_\mu^*$  (mit  $\mu \neq \nu-1$ ) sein, da bei der zeitlichen Verzögerung sonst entweder ein Zukunftswert ( $\mu < \nu-1$ ) oder ein Altwert ( $\mu > \nu-1$ ) der Ausgangsgröße auftritt. Da Zukunftswerte des Systemausgangs nicht verfügbar sind, ist der erste Fall nicht realisierbar. Die Altwerte der Ausgangsgröße erhält man hingegen durch einfache Zwischenspeicherung der Meßwerte im Prozeßrechner. Im erweiterten System stellen die Zustände  $\tilde{x}_{n+1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_{2n-1}^\square(k)$  die erforderlichen Altwerte unmittelbar dar und deren Verwendung ermöglicht die Angabe einer im Vergleich zu Gl. (4.10) weitaus weniger harten Separabilitätsbedingung. Für das erste Subsystem der NBKNF nach Gl. (4.8) lautet diese

$$\tilde{h}_1^{*-1}(\tilde{f}_n^\square(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k))) = \sum_{\mu=0}^{n-1} \tilde{f}_\mu^*(\tilde{y}_1(k), \dots, \tilde{y}_1(k+\mu), \tilde{y}_2(k+\mu), \dots, \tilde{y}_n(k+\mu)), \quad (4.12)$$

mit  $\tilde{f}_\mu^* : \mathbb{R}^{n+\mu} \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ . Mit Hilfe von Gl. (4.11) erhält man dann

$$\begin{aligned} \tilde{h}_1^{*-1}(\tilde{f}_n^\square(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k))) &= \tilde{f}_0^*(\tilde{x}_1^\square(k), \tilde{x}_{n+1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_{2n-1}^\square(k)) \\ &+ \tilde{f}_1^*(\tilde{x}_1^\square(k), \tilde{x}_2^\square(k), \tilde{x}_1^\square(k), \tilde{x}_{n+1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_{2n-2}^\square(k)) \\ &+ \quad \dots \\ &+ \tilde{f}_{n-1}^*(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_{n-1}^\square(k), \tilde{x}_n^\square(k), \tilde{x}_{n-1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_1^\square(k)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da die Funktion  $\tilde{f}_n^\square$  nicht von den Zuständen  $\tilde{x}_{n+1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_{2n-1}^\square(k)$  abhängt, erscheinen diese Zustände auch nicht auf der rechten Seite der Gl. (4.13). Die Separabilitätsbedingung des ersten Subsystems läßt sich daher wie folgt vereinfachen:

$$\tilde{h}_1^{*-1}(\tilde{f}_n^\square(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_n^\square(k))) = \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(\tilde{x}_1^\square(k), \dots, \tilde{x}_{\mu+1}^\square(k)). \quad (4.14)$$

Die Funktionen  $f_\mu^*$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , unterscheiden sich von  $\tilde{f}_\mu^*$ , da erstgenannte  $\mu + 1$ , letztere hingegen  $n + \mu$  Argumente besitzen. Die Transformation der erweiterten Zustände  $\tilde{x}_{n+1}^\square(k), \dots, \tilde{x}_{2n-1}^\square(k)$  auf NBNF ist unter praktischen Gesichtspunkten nicht erforderlich, da diese Zustände die bekannten Altwerte der Ausgangsgröße darstellen und somit eine Beobachtung entfällt. Bei der Transformation des ersten Subsystems der NBKNF nach Gl. (4.8) und der damit verbundenen Verzögerung der Funktionen  $f_\mu^*$  treten zwar Altwerte des Zustands  $\tilde{x}_1^\square(k)$  auf, die jedoch in Form der erweiterten Zustände zur Verfügung stehen. In der Systemdarstellung in NBNF sind diese durch die entsprechenden Altwerte der Ausgangsgröße zu ersetzen. Die nichtlinearen Terme in NBNF hängen dann lediglich von der Ausgangsgröße  $y(k)$  und deren  $n - 1$  Altwerten  $y(k-1), \dots, y(k-n+1)$  ab. Da alle diese Größen bekannt sind, läßt sich die Nichtlinearität in der Beobachtergleichung exakt kompensieren, was einen Beobachterentwurf in NBNF mit linearer Fehlerdynamik ermöglicht.

Das eben vorgestellte Vorgehen erweitert die Systemklasse erheblich, für die ein Normalformbeobachter über NBNF angebar ist. Die Systemerweiterung erweist sich jedoch, insbesondere im Hinblick auf eine spätere Erweiterung auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen, als recht unübersichtlich. Die nachfolgenden Ausführungen sind daher der Definition der ENBNF (erweiterte nichtlineare Beobachternormalform) gewidmet, die den Vorzug aufweist, daß sich die Systemerweiterung implizit bei der Transformation von NBKNF auf ENBNF ergibt. Zudem berücksichtigt der vorgestellte Entwurf im Gegensatz zu [131] und [33] generell Systeme mit Eingangsgrößen.

### 4.1.3 Systemdarstellung und Beobachter in ENBNF

Wie bereits erwähnt, enthält die Systemdarstellung in ENBNF sowohl Altwerte der Ausgangsgröße, als auch Alt- und Zukunftswerte der Eingangsgrößen. Für Systeme mit einem

Ausgang gemäß Gl. (3.1) weist sie die Form

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}_n} \mathbf{x}^*(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} f_0^*(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) \\ f_1^*(\bar{y}_{[-1,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)) \\ \vdots \\ f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,n]}(k))}, \quad (4.15)$$

$$y(k) = h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)), \quad \mathbf{x}^*(0) = x_0^*, \quad y(-\mu) = y_\mu \quad (\mu = 1, \dots, n-1)$$

auf. Dabei enthalten die Funktionen  $f_0^*, f_1^*, \dots, f_{n-1}^*$  die Nichtlinearitäten des Systems, die in dieser Darstellungsform nur von den Eingängen und dem Ausgang abhängen<sup>1</sup>. Um einen Beobachterentwurf zu ermöglichen, muß die Ausgangsfunktion  $h^*$  bezüglich  $x_n^*(k)$  invertierbar sein. In ENBNF gelingt für  $k \geq n-1$ <sup>2</sup> ein nichtlinearer Beobachterentwurf der Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \mathbf{E}_n \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \mathbf{f}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,n]}(k)) \\ &\quad + \left[ q_0 \quad q_1 \quad \cdots \quad q_{n-1} \right]^T \underbrace{\left( h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) - \hat{x}_n^*(k) \right)}_{x_n^*(k)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\hat{y}(k) = h^*(\hat{x}_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)), \quad \hat{\mathbf{x}}^*(n-1) = \hat{\mathbf{x}}_0^*, \quad k \geq n-1,$$

wobei  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der linearen Dynamik des Beobachterfehlers darstellen. Bild 4.2 zeigt das Blockschaltbild des Beobachters mit

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{k}_o = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_{n-1} \end{bmatrix}^T.$$

Das Blockschaltbild enthält aus Übersichtsgründen nicht die für die Speicherung der Altwerte der Ein- und Ausgangsgrößen erforderlichen Verzögerer.

Die Differenzgleichung des Beobachterfehlers  $\mathbf{e}^*(k) = \hat{\mathbf{x}}^*(k) - \mathbf{x}^*(k)$  in ENBNF lautet

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -q_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -q_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -q_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_q} \mathbf{e}^*(k), \quad \mathbf{e}^*(n-1) = \mathbf{e}_0^*, \quad k \geq n-1. \quad (4.17)$$

<sup>1</sup> $\bar{y}_{[\nu,\mu]}(k)$  stellt die Folge der Ausgangswerte  $y(k+\nu), \dots, y(k+\mu)$  mit  $\mu \geq \nu$  dar (s. Symbolverzeichnis);  $\bar{\mathbf{u}}_{[\nu,\mu]}(k)$  repräsentiert entsprechend eine Folge von Eingangsvektoren.

<sup>2</sup>Diese Einschränkung ist notwendig, da für den Anfangszeitpunkt  $k=0$  der Messung erst bei  $k=n-1$  alle erforderlichen Altwerte bekannt sind.



Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1^\square(k) &= h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) \\
x_2^\square(k) &= h^*(x_{n-1}^*(k) + f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,-1]}(k), x_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \\
&\vdots \\
x_n^\square(k) &= h^*(x_1^*(k) + \sum_{\mu=1}^{n-1} f_\mu^*(y(k-1), x_1^\square(k), \dots, x_\mu^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)).
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Der Zusammenhang der Funktionen  $h^*$ ,  $f_\mu^*$  der ENBNF nach Gl. (4.15) und  $f_n^\square$  der NBKNF nach Gl. (3.2) ergibt sich durch Berechnung von  $x_n^\square(k+1)$  aus der letzten Komponente von Gl.(4.19),

$$\begin{aligned}
x_n^\square(k+1) &= h^*(x_1^*(k+1) + \sum_{\mu=1}^{n-1} f_\mu^*(y(k), x_1^\square(k+1), \dots, x_\mu^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) \\
&= h^*(f_0^*(x_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) \\
&\quad + \sum_{\mu=1}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) \\
&= h^*(\sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Der Vergleich von  $x_n^\square(k+1)$  mit  $f_n^\square$ , der letzten Komponente der Systemfunktion in NBKNF, liefert schließlich die Beziehung

$$f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) = h^*\left(\sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)\right) \tag{4.21}$$

bzw.

$$h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) = \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)). \tag{4.22}$$

Die Gleichung (4.22) stellt eine wesentliche Erweiterung von Gl. (4.4) des Satzes 4.1 dar. Obwohl auch sie die Bedingung für die Wahl der Funktionen  $h^*$  und  $f_\mu^*$  mit  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$  liefert, ist, wie im folgenden gezeigt, die Existenz von geeigneten Funktionen zur Erfüllung von Gl. (4.22) jedoch stets gewährleistet. Der Ausdruck  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  enthält die Zustände  $x_1^\square(k), \dots, x_n^\square(k)$  sowie die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n)$ . Die Summe  $\sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k))$  beinhaltet ebenfalls die oben genannten Zustände und Eingangsgrößen. Da die in der Summe enthaltene Funktion  $f_{n-1}^*$  von allen vorstehend genannten Größen abhängt, sind diese durch eine geeignete Wahl von  $f_{n-1}^*$  in der durch

$h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  vorgegebenen Struktur miteinander verknüpfbar. Die Auswahl der Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF unterliegt bei Beachtung der Invertierbarkeit bzgl. des ersten Arguments keinen weiteren Bedingungen. Ferner besteht *immer* die Möglichkeit,

$$\begin{aligned} f_\mu^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) &= 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-2 \quad \text{und} \\ f_{n-1}^*(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) &= h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

zu wählen. Dennoch kann es sich als sinnvoll erweisen, additive Terme in  $f_n^\square$  nicht nur  $f_{n-1}^*$ , sondern auch  $f_0^*, f_1^*, \dots, f_{n-2}^*$  zuzuordnen, um beispielsweise die Anzahl der erforderlichen Altwerte zu minimieren. Die Auswirkungen der Wahl der Funktionen  $h^*$  und  $f_\mu^*$  auf den Beobachterentwurf werden im nächsten Abschnitt ausführlich diskutiert. Zusammenfassend läßt sich folgender Satz angeben:

*Satz 4.2:*

Das System (3.1) ist dann und nur dann äquivalent zu einem System in ENBNF, wenn es lokal stark beobachtbar ist, also die Systemdarstellung in NBKNF existiert.

Die Berechnung der ENBNF ist möglich, wenn es gelingt, die inverse Transformationsvorschrift des Systems auf NBKNF explizit anzugeben und somit das System in NBKNF nach Gl. (3.2) darzustellen. Für die Transformation von NBKNF auf ENBNF sind dann die in der ENBNF enthaltenen Funktionen  $h^*$  und  $f_0^*, f_1^*, \dots, f_{n-1}^*$  gemäß Gl. (4.22) zu wählen. Für diese Wahl existieren i. a. mehrere Möglichkeiten; folglich ist die Systemdarstellung in ENBNF nicht eindeutig. ■

Zusätzliche Bedingungen für die Transformation von NBKNF auf ENBNF sind nicht erforderlich. Dieses stellt im Vergleich zu [33] und [131] eine beachtliche Erweiterung der Systemklasse dar, die sich auf eine nichtlineare Beobachternormalform transformieren lassen. Da die Transformation von NBKNF auf ENBNF invertierbar und die Inverse einfach zu berechnen ist, gelingt es stets, eine Systemdarstellung in NBKNF zu berechnen, falls ein System in ENBNF vorliegt. Jede existierende Systemdarstellung in ENBNF ist daher über den Umweg der NBKNF zu finden (s. auch [33, Satz 4.3]).

Eine Systemdarstellung in Beobachternormalform ohne Abhängigkeit von Altwerten der Ausgangsgröße, wie sie neben [33] und [131] auch in [122] und [51] für autonome Systeme (s. Gl. (4.2)) sowie in [85] und [87] für Systeme mit Eingangsgröße angegeben wird, stellt einen Spezialfall der in dieser Arbeit vorgestellten ENBNF dar und ist daher ebenfalls über die NBKNF auffindbar. Der hier betrachtete Beobachterentwurf gelingt zudem auch für Systeme, die zwar eine Darstellung in NBKNF, jedoch keine in NBNF aufweisen. Folglich gestattet der Beobachterentwurf via ENBNF die Berücksichtigung einer weitaus größeren Systemklasse als die oben genannten Verfahren.

Da, wie bereits erwähnt, die NBNF einen Spezialfall der ENBNF darstellt und letztere für Systeme mit Eingangsgrößen hergeleitet wurde, erfolgt hier auch eine generelle Erweiterung der Zwei-Schritt-Transformation (ZST) mit erfüllter Separabilitätsbedingung (4.4) nach BRODMANN auf Systeme mit Eingangsgrößen. Die Funktionen  $f_\mu^*$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , in Gl. (4.22) hängen in diesem Spezialfall nur von dem Zustand  $x_{\mu+1}^\square(k)$  und den Eingangsgrößen  $\bar{u}_{[0,n]}(k)$  ab. BRODMANN schlägt hingegen in [33] für eine Berücksichtigung von gesteuerten Systemen vor, eine Eingangsgröße  $u(k)$  als Funktion einer neuen Zustandsvariablen  $x_{n+1}(k) = k$  aufzufassen, d.h.  $u(k) = u(x_{n+1}(k))$  mit  $x_{n+1}(k+1) = x_{n+1}(k) + 1$ ,  $x_{n+1}(0) = 0$ . Das System mit Eingangsgrößen kann so auf ein autonomes System höherer Ordnung zurückgeführt werden, das dann allerdings die restriktive Separabilitätsbedingung gemäß Gl. (4.1) erfüllen muß. Dieses erweist sich jedoch als nicht erforderlich, wenn, wie auch in [87], Altwerte der Eingangsgrößen zugelassen sind, was auch unter praktischen Gegebenheiten keine Einschränkung darstellt.

Wie jedoch INGENBLEEK in [87] angibt, ist die ZST nicht unmittelbar auf Systeme mit Eingangsgrößen übertragbar, da INGENBLEEK von der in [87] definierten „verallgemeinerten Beobachtbarkeitsnormalform“ und nicht von der NBKNF nach Gl. (3.2) als notwendige Voraussetzung für die ZST von Systemen mit Eingangsgrößen ausgeht. Im Gegensatz zur NBKNF existiert die verallgemeinerte Beobachtbarkeitsnormalform lediglich für Systeme, die unabhängig von der Eingangsgröße lokal stark beobachtbar sind, was tatsächlich auf eine sehr eingeschränkte Systemklasse eines auf dieser Darstellungsform basierenden Ansatzes führen würde.

Zur Verifikation der Behauptung, das Verfahren nach BRODMANN sei nicht unmittelbar auf Systeme mit Eingangsgrößen übertragbar, gibt INGENBLEEK das in [87, *Beispiel 6.2*] vorgestellte Beispielsystem an. Im Beispiel 4.2 der vorliegenden Arbeit erfolgt jedoch für dieses System eine Transformation auf NBNF (als Spezialfall der ENBNF) via Zwei-Schritt-Transformation. Dabei gelingt ferner eine Wahl der Ausgangsfunktion  $h^*$  in NBNF, die eine kausale Darstellung in Normalform nach sich zieht. Somit erweist sich auch der in [87] angegebene Nachteil der Zwei-Schritt-Transformation, keinen Freiheitsgrad zur Reduzierung der erforderlichen Zukunftswerte der Eingangsgrößen zu enthalten, als unzutreffend.

Die ZST auf ENBNF gestattet neben der Wahl der Ausgangsfunktion  $h^*$  in Normalform ferner Freiheitsgrade bei der Wahl der Funktionen  $f_\mu^*$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ . Die sich ergebenden Möglichkeiten zur gezielten Beeinflussung des via ENBNF entworfenen Beobachters stellt den Inhalt des folgenden Unterabschnitts dar.

#### 4.1.5 Freiheitsgrade der Transformation auf ENBNF

Dieser Abschnitt enthält eine Betrachtung der Freiheitsgrade, die sich bei der Wahl der Funktionen  $h^*$  und  $f_\mu^*$  ergeben. Besondere Beachtung gilt dem Einfluß dieser Funktionen auf

die zurücktransformierte Beobachtergleichung in ANDF.

#### 4.1.5.1 Der Einfluß der Funktionen $f_\mu^*$

Da die Transformation zwischen ANDF und NBKNF nach Gl. (3.4) eindeutig und nicht von der Wahl der Funktionen  $h^*$  sowie  $f_\mu^*$  abhängig ist, genügt für die Untersuchung des Einflusses der genannten Funktionen auf den Beobachter in ANDF die Betrachtung der auf NBKNF zurücktransformierten Beobachtergleichung (4.16). Unter Verwendung der Transformationsvorschriften (4.18) und (4.19) kann der Beobachter (4.16) durch folgende rekursive Gleichung in NBKNF dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} h^*(h^{*-1}(\hat{x}_2^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \\ + f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,-1]}(k), y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) \\ - f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,-1]}(k), \hat{x}_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) - q_{n-1} e_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k) ) \\ \dots \\ h^*(h^{*-1}(\hat{x}_3^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-n+3,2]}(k)) \\ + \sum_{\mu=n-2}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[2-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu+2-n}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,2]}(k)) \\ - \sum_{\mu=n-2}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[2-n,-1]}(k), \hat{x}_1^\square(k), \dots, \hat{x}_{\mu+3-n}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,2]}(k)) \\ - q_{n-2} e_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[3-n,2]}(k) ) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ h^*(h^{*-1}(\hat{x}_n^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) \\ + \sum_{\mu=1}^{n-1} f_\mu^*(y(k-1), y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu-1}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)) \\ - \sum_{\mu=1}^{n-1} f_\mu^*(y(k-1), \hat{x}_1^\square(k), \dots, \hat{x}_\mu^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)) \\ - q_1 e_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k) ) \\ \dots \\ h^*(\sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_\mu^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) \\ - q_0 e_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k) ) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\hat{y}(k) = \hat{x}_1^\square(k), \quad \hat{\mathbf{x}}^\square(n-1) = \hat{\mathbf{x}}_0^\square, \quad k \geq n-1,$$

mit  $e_n^*(k) = h^{*-1}(\hat{x}_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) - h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k))$ ; man beachte, daß eine Variablenliste  $\hat{x}_1^\square, \dots, \hat{x}_\nu^\square$  im Argument einer Funktion für  $\nu = 0$  leer ist. Die Differenz

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=n-\nu}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \\ & - \sum_{\mu=n-\nu}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), \hat{x}_1^\square(k), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \end{aligned} \quad (4.25)$$

in der  $\nu$ -ten Komponente der Beobachtergleichung (4.24) mit  $\nu = 1, 2, \dots, n-1$  wird nicht durch die Addition von

$$\sum_{\mu=0}^{n-\nu-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}, \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) - \sum_{\mu=0}^{n-\nu-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}, \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) = 0 \quad (4.26)$$

verändert. Die Differenz (4.25) ist daher auch in der Form

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=0}^{n-\nu-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}, \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \\ & \quad + \sum_{\mu=n-\nu}^{n-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_{\mu}^{\square}(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n}^{\square}(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \\ & - \sum_{\mu=0}^{n-\nu-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}, \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \\ & \quad - \sum_{\mu=n-\nu}^{n-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), \hat{x}_{\mu}^{\square}(k), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n+1}^{\square}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \end{aligned} \quad (4.27)$$

angebbar, die sich wiederum durch Zusammenfassen der Einzelsummen zu

$$\begin{aligned} & \sum_{\mu=0}^{n-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_{\mu}^{\square}(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n}^{\square}(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \\ & - \sum_{\mu=0}^{n-1} f_{\mu}^{*}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), \hat{x}_{\mu}^{\square}(k), \dots, \hat{x}_{\mu+\nu-n+1}^{\square}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)) \end{aligned} \quad (4.28)$$

vereinfachen läßt. Schließlich ist die Differenz (4.28) mit Hilfe der Gl. (4.22) durch

$$\begin{aligned} & h^{*-1}(f_n^{\square}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_{\nu}^{\square}(k+1), \dots, \hat{x}_{\nu-1}^{\square}(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n+1,\nu]}(k)) \\ & - h^{*-1}(f_n^{\square}(\bar{y}_{[\nu-n,-1]}(k), \hat{x}_{\nu}^{\square}(k), \dots, \hat{x}_{\nu}^{\square}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n,\nu]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[\nu-n+1,\nu]}(k)) \end{aligned} \quad (4.29)$$

zu ersetzen. Die Substitution der Differenzen (4.25) durch (4.29) in den ersten  $n-1$  Kompo-

nenten sowie von  $\sum_{\mu=0}^{n-1} f_{\mu}^{*}(y(k), \hat{x}_{\mu}^{\square}(k+1), \dots, \hat{x}_{\mu}^{\square}(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k))$  durch

$h^{*-1}(f_n^{\square}(y(k), \hat{x}_{\nu}^{\square}(k+1), \dots, \hat{x}_{\nu-1}^{\square}(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  gemäß Gl. (4.22) in der letzten

Komponente der Beobachtergleichung (4.24) führt auf

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} h^*(h^{*-1}(\hat{x}_2^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \\ + h^{*-1}(f_n^\square(\bar{y}_{[1-n,-1]}(k), y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \\ - h^{*-1}(f_n^\square(\bar{y}_{[1-n,-1]}(k), \hat{x}_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \\ - q_{n-1} e_n^*(k), \quad \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k) ) \\ \dots \\ h^*(h^{*-1}(\hat{x}_3^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-n+3,2]}(k)) \\ + h^{*-1}(f_n^\square(\bar{y}_{[2-n,-1]}(k), y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,2]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[3-n,2]}(k)) \\ - h^{*-1}(f_n^\square(\bar{y}_{[2-n,-1]}(k), \hat{x}_1^\square(k), \hat{x}_2^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,2]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[3-n,2]}(k)) \\ - q_{n-2} e_n^*(k), \quad \bar{\mathbf{u}}_{[-n+3,2]}(k) ) \\ \dots \\ \vdots \\ \dots \\ h^*(h^{*-1}(\hat{x}_n^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) \\ + h^{*-1}(f_n^\square(y(k-1), y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_{n-2}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)), \\ \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) \\ - h^{*-1}(f_n^\square(y(k-1), \hat{x}_1^\square(k), \dots, \hat{x}_{n-1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n-1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k)) \\ - q_1 e_n^*(k), \quad \bar{\mathbf{u}}_{[0,n-1]}(k) ) \\ \dots \\ h^*(h^{*-1}(f_n^\square(y(k), \hat{x}_1^\square(k+1), \dots, \hat{x}_{n-1}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) \\ - q_0 e_n^*(k), \quad \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k) ) \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

$$\hat{y}(k) = \hat{x}_1^\square(k), \quad \hat{\mathbf{x}}^\square(n-1) = \hat{\mathbf{x}}_0^\square, \quad k \geq n-1$$

als Beobachtergleichung in NBKNF, die von der gewählten Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF abhängt. Die Funktionen  $f_\mu^*$  sind dagegen weder in dieser Darstellung des Beobachters noch in der Transformation zwischen NBKNF und ANDF (s. Gl. (3.4)) enthalten. Somit gilt der folgende Satz:

*Satz 4.3:*

Die auf ANDF zurücktransformierte Beobachtergleichung (4.16) hängt von der Wahl der Ausgangsfunktion  $h^*$ , jedoch nicht von der gemäß Gl. (4.22) möglichen Wahl der Funktionen  $f_0^*, f_1^*, \dots, f_{n-1}^*$  ab.

■

Die Wahl der Funktionen  $f_\mu^*$  hat folglich keinen Einfluß auf das Verhalten des Beobachters in ANDF. Dieses gilt natürlich auch, falls der Beobachter gemäß Gl. (4.16) in ENBNF berechnet und der Beobachterzustand  $\hat{\mathbf{x}}^*(k)$  in jedem Schritt auf ANDF transformiert wird, um  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  zu erhalten. Man kann jedoch Kriterien für die Wahl der Funktionen  $f_\mu^*$  angeben, die aus rechentechnischen Gründen sinnvoll sind, um entweder das Entwurfsverfahren oder die Online-Berechnung des Beobachters zu vereinfachen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

### Beobachterberechnung in ANDF

Beabsichtigt man, die Beobachterberechnung in ANDF durchzuführen, erweist sich die stets mögliche Wahl

$$\begin{aligned} f_\mu^*(x_1^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) &= 0, \text{ für } \mu = 0, 1, \dots, n-2, \\ f_{n-1}^*(x_1^\square(k), \dots, x_n^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)) &= h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k)) \end{aligned} \quad (4.31)$$

als besonders günstig. Eine detailliertere, und somit aufwendigere Analyse des Ausdrucks  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  zur Auswahl der Funktionen  $f_\mu^*$  gemäß Gl. (4.22) führt zu keinem Nutzen, da nach Satz 4.3 weder der Umfang der Beobachtergleichungen in ANDF noch die Anzahl der benötigten Alt- oder Zukunftswerte der Meßgrößen damit zu verringern ist. Diese Tatsache wird besonders bei der Betrachtung des folgenden Spezialfalls deutlich: Erfüllt die Darstellung eines autonomen Systems in NBKNF die harte Separabilitätsbedingung (4.4), gelingt ein Beobachterentwurf ohne Altwerte, da jede Funktion  $f_\mu^*$  mit  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$  lediglich in Abhängigkeit von  $x_{\mu+1}^\square(k)$  wählbar ist. Da nach Satz 4.3 die Wahl der Funktionen aber unerheblich für den Beobachter in ANDF ist, führt auch die einfache Auswahl entsprechend Gl. (4.31) zu einem Beobachter in ANDF, dessen Berechnung keinen Altwert erfordert.

### Beobachterberechnung in ENBNF

Bei zahlreichen Anwendungen erweist es sich als vorteilhaft, die Beobachtergleichungen auf dem Prozeßrechner in ENBNF zu berechnen und anschließend den so gewonnenen Schätzwert des Systemzustands in ENBNF zurück auf ANDF zu transformieren. Dieses Vorgehen führt in den meisten Fällen auf wesentlich überschaubarere Gleichungen als bei einer Beobachterdarstellung in ANDF. Zudem kann auf die Rücktransformation des Beobachterzustands verzichtet werden, wenn eine Zustandsregelung des Systems mit Hilfe des Beobachters erfolgt. Die Transformation des verwendeten Regelungsgesetzes  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}(k))$  auf ENBNF liefert  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{r}^*(\hat{\mathbf{x}}^*(k), \bar{y}_{[1-n, -1]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n, n]})$  und der Beobachterzustand in ENBNF kann direkt verwendet werden.<sup>3</sup>

Die Anzahl der erforderlichen Altwerte der Meßgrößen hängt in den geschilderten Fällen besonders von der Wahl der Funktionen  $f_\mu^*$  ab. Die minimale Anzahl der erforderlichen Altwerte der Meßgrößen mit vorgegebener Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF ergibt sich bei einer Rücktransformation der Beobachtergleichungen auf ANDF, da sich ggf. Altwerte durch Einsetzen der Gleichungen in die Transformationsvorschriften kompensieren. Dieses ist bei Berechnung des Beobachterzustands in ENBNF und nachträglicher Rücktransformation nicht möglich. Mit anderen Worten, die Anzahl der Altwerte fällt bei einer Berechnung in ENBNF keinesfalls kleiner, möglicherweise aber größer aus. Erfolgt beispielsweise die Wahl der Freiheitsgrade nach Gl. (4.31), ergeben sich im allgemeinen jeweils  $n-1$  Altwerte der Ausgangsgröße und

<sup>3</sup>Ein Problem stellt hier bei Systemen mit einem relativen Systemgrad  $d < n$  die Abhängigkeit des Regelungsgesetzes  $\mathbf{r}^*$  von den aktuellen und zukünftigen Eingangsgrößen dar (s. Unterabschnitt 6.4.2).

der Eingangsgrößen. Dieses trifft auch bei Systemen zu, die die harte Separabilitätsbedingung nach Gl. (4.4) erfüllen, bei denen der Beobachterentwurf also eigentlich keiner Altwerte bedarf. Will man dieses auch für den Beobachter in ENBNF erreichen, sind beim Entwurf folgende Auswahlkriterien für die Funktionen  $f_\mu^*$  zu beachten:

1. Zur Reduzierung der Anzahl der in ENBNF erforderlichen Altwerte der Ausgangsgröße, sind alle von  $x_i^\square(k)$  abhängigen, additiven Anteile, die in  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  auftreten, der Funktion  $f_{\mu-1}^*$  mit kleinstmöglichem  $\mu \geq i$  zuzuordnen. Im Fall  $\mu > i$  ist die Systemdarstellung in ENBNF von  $y(k - \mu + i)$  abhängig.
2. Zur Reduzierung der Anzahl der in ENBNF erforderlichen Alt- bzw. Zukunftswerte der Eingangsgrößen, sind alle von  $\mathbf{u}(k+\nu)$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$ , abhängigen, additiven Anteile, die in  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[1,n]}(k))$  auftreten, der Funktion  $f_\mu^*$  mit  $\nu = \mu$  zuzuordnen. Im Fall  $\nu \neq \mu$  ist die Systemdarstellung in ENBNF von  $\mathbf{u}(k+\nu-\mu)$  abhängig.

Es ist selten möglich, beide Bedingungen zu erfüllen, da die Funktion  $f_n^\square$  Produkte aus Zuständen und Eingangsgrößen enthalten kann. In diesen Fällen ist zu entscheiden, ob die Zuordnung entsprechend Regel 1 oder Regel 2 durchgeführt wird. Man beachte, daß die Zukunftswerte der Eingangsgrößen im Gegensatz zu deren Altwerten bereits bei der, von den Funktionen  $f_\mu^*$  unabhängigen, Transformation auf NBKNF entstehen. Mit einer geschickten Wahl der Funktionen  $f_\mu^*$  kann man zwar Zukunftswerte in ENBNF, jedoch nicht in der Transformationsvorschrift zwischen ENBNF und ANDF vermeiden. Letztere ist unumgänglich, da entweder der Beobachterzustand auf ANDF oder ein in ANDF vorliegendes Regelungsgesetz auf ENBNF transformiert werden muß<sup>4</sup>. Die Auswahl der Funktionen  $f_\mu^*$  hat demnach keinen Einfluß auf die Anzahl zukünftiger Eingangswerte.

#### 4.1.5.2 Der Einfluß der Funktion $h^*$

Da, wie aus Gl. (4.30) hervorgeht, die Funktion  $h^*$  im Gegensatz zu  $f_\mu^*$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , einen Einfluß auf den Beobachter in ANDF aufweist, widmet sich der folgende Text drei Aspekten, die bei der Auswahl der Funktion  $h^*$  von Bedeutung sind.

#### Anzahl der Altwerte für den Beobachterentwurf

Nach [33] ermöglicht unter Umständen nur eine geeignete Wahl von  $h^*$  die Separation nach Gl. (4.4) der Systembeschreibung in NBKNF. Entsprechend besteht für die Transformation

---

<sup>4</sup>Eine Ausnahme stellt der Fall eines Regelungsentwurfs direkt in ENBNF dar, da dann die Transformation des Regelungsgesetzes auf ENBNF entfällt. Eine Systemdarstellung in ENBNF ermöglicht dann eine Online-Berechnung von Beobachter und Regelung, die keine Zukunftswerte der Eingangsgrößen erfordert, obwohl die Transformation zwischen ANDF und ENBNF diese enthält. Ein Regelungsentwurf in ENBNF erweist sich aber als äußerst problematisch und nur für wenige Spezialfälle durchführbar.

auf ENBNF die Möglichkeit, die Anzahl der erforderlichen Altwerte der Ausgangsgröße zu reduzieren, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

**Beispiel 4.1:**

Gegeben sei die Darstellung eines autonomen Systems dritter Ordnung in NBKNF mit

$$f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k)) = x_1^\square(k) + x_2^\square(k) + x_3^\square(k) + (x_1^\square(k) + x_2^\square(k) + x_3^\square(k))^3.$$

Offensichtlich treten für  $h^*(x_3^*(k)) = x_3^*(k)$  in ENBNF die Altwerte  $y(k-1)$  und  $y(k-2)$  auf, da alle Zustandsgrößen der NBKNF in der Funktion  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k))) = f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k))$  multiplikativ verknüpft sind. Die Wahl  $h^*(x_3^*(k)) = x_3^*(k) + x_3^*(k)^3$  führt hingegen auf  $h^{*-1}(f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k))) = x_1^\square(k) + x_2^\square(k) + x_3^\square(k)$  und mit einer Wahl der Funktionen  $f_0^* = x_1^\square(k)$ ,  $f_1^* = x_2^\square(k)$  sowie  $f_2^* = x_3^\square(k)$  auf eine ENBNF ohne Altwerte. ■

**Anzahl der erforderlichen Zukunftswerte der Eingangsgrößen**

Fordert man einen kausalen Beobachterentwurf, darf die Transformation von ANDF auf ENBNF weder von  $\mathbf{u}(k)$ , noch von Zukunftswerten  $\mathbf{u}(k+\nu)$ ,  $\nu > 0$ , abhängen. Die Abhängigkeit von Altwerten ist hingegen zulässig. Aus Gl. (4.18) folgt die Bestimmungsgleichung der Zustandsgrößen  $x_i^*(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , zu

$$x_i^*(k) = h^{*-1}(x_{n+1-i}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-i, n-i]}(k)) - \sum_{\mu=i}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[-i, -1]}(k), x_1^\square(k), \dots, x_{\mu-i+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-i, n-i]}(k)), \quad (4.32)$$

wobei die Zustandsgrößen  $x_\nu^\square(k)$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, n+1-i$ , gemäß Gl. (3.4) durch

$$x_\nu^\square(k) = y(k+\nu-1) = h(\mathbf{F}^{\nu-1}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, \nu-2]}(k)), \mathbf{u}(k+\nu-1)) \quad (4.33)$$

zu ersetzen sind. Berücksichtigt man den relativen Systemgrad  $d$  des vorliegenden Systems, stellt  $y(k+d)$  den ersten, von der Eingangsgröße  $\mathbf{u}(k)$  abhängigen Wert des Ausgangs dar. Dann gilt

$$x_{d+1}^\square(k) = y(k+d) = \bar{h}_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad (4.34)$$

wobei  $\bar{h}_\nu$  mit

$$h(\mathbf{F}^\nu(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, \nu-1]}(k)), \mathbf{u}(k+\nu)) = \begin{cases} \bar{h}_\nu(\mathbf{x}(k)) & \text{für } \nu < d \\ \bar{h}_\nu(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, \nu-d]}(k)) & \text{für } \nu \geq d \end{cases} \quad (4.35)$$

eine neue Schreibweise für die um  $\nu$  Schritte in die Zukunft verschobene Ausgangsgröße  $y(k+\nu)$  darstellt. Sie weist den Vorzug einer Berücksichtigung des relativen Systemgrads  $d$  auf. Ein zukünftiger, von  $\mathbf{u}(k)$  abhängender Wert der Ausgangsgröße tritt nach der Bestimmung von  $x_n^*(k), \dots, x_{n-d+1}^*(k)$  zuerst in der Komponente

$$\begin{aligned} x_{n-d}^*(k) &= h^{*-1}(x_{d+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[d-n+1, d]}(k)) \\ &\quad - \sum_{\mu=n-d}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[d-n, -1]}(k), x_1^\square(k), \dots, x_{\mu-n+d+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[d-n, d]}(k)), \end{aligned} \quad (4.36)$$

in Form von  $x_{d+1}^\square(k) = y(k+d)$  im Argument von  $h^{*-1}$  auf. Das Einsetzen von Gl. (4.35) liefert demnach

$$\begin{aligned} x_{n-d}^*(k) &= h^{*-1}(\bar{h}_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[d-n+1, d]}(k)) \\ &\quad - \sum_{\mu=n-d}^{n-1} f_\mu^*(\bar{y}_{[d-n, -1]}(k), \bar{h}_0(\mathbf{x}(k)), \dots, \bar{h}_{\mu-n+d}(\mathbf{x}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[d-n, d]}(k)). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Unter Umständen gelingt durch eine entsprechende Abhängigkeit der Funktion  $h^{*-1}$  von ihrem ersten Argument ( $\bar{h}_d(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ ) sowie von ihrem  $(n+1-d)$ -ten Argument ( $\mathbf{u}(k)$ ) die Elimination von  $\mathbf{u}(k)$  in dieser Komponente der Transformation von ANDF auf ENBNF. Die Funktionen  $f_\mu^*$  bleiben dabei zunächst unberücksichtigt. In den nachfolgenden  $n-d-1$  Komponenten erscheinen die Terme

$$h^{*-1}(\bar{h}_{d+\nu}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+\nu)), \bar{\mathbf{u}}_{[d-n+1+\nu, d+\nu]}(k)), \quad 1 \leq \nu \leq n-d-1.$$

Da ein Ausdruck mit gleicher Struktur wie in Gl. (4.37) vorliegt, erfolgt die Elimination von  $\mathbf{u}(k+\nu)$  in  $\bar{h}_{d+\nu}$  durch das  $(n+1-d)$ -te Argument ( $\mathbf{u}(k+\nu)$ ) von  $h^{*-1}$ . Allerdings treten nun weitere Eingangsgrößen auf, so daß gewöhnlich jeweils nur der am weitesten in der Zukunft liegende Wert der Eingangsgrößen in den Beobachtergleichungen eliminiert werden kann (vgl. auch [87]).

Die bisherigen Betrachtungen beruhen auf der Annahme, die Funktionen  $f_{n-d}^*, \dots, f_{n-1}^*$  in Gl. (4.37) hängen nicht von dem im Ausdruck  $h^{*-1}(\bar{h}_d(\dots), \dots)$  eliminierten Wert  $\mathbf{u}(k)$  oder Zukunftswerten der Eingangsgrößen ab. Die der Auswahl der  $f_\mu^*$  zugrunde liegende Gl. (4.22) läßt sich wegen

$$x_n^\square(k+1) = y(k+n) = \bar{h}_n(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n-d))$$

auch in der Form

$$\begin{aligned} h^{*-1}(\bar{h}_n(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), \dots, \mathbf{u}(k+n-d)), \bar{\mathbf{u}}_{[1, n]}(k)) &= \\ &\quad \sum_{\mu=0}^{n-1} f_\mu^*(x_1^\square(k), \dots, x_{\mu+1}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0, n]}(k)) \end{aligned} \quad (4.38)$$

darstellen. Bei oben beschriebener Wahl von  $h^{*-1}$  erfolgt auf der linken Seite von Gl. (4.38) die Elimination von  $\mathbf{u}(k+n-d)$  in  $\bar{h}_n$  durch das  $(n+1-d)$ -te Argument von  $h^{*-1}$  (jetzt  $\mathbf{u}(k+n-d)$ ). Ferner treten dann die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(k+\nu)$ ,  $\nu = n-d, n-d+1, \dots, n$ , nicht auf der linken Seite der Gleichung auf. Demnach können die Funktionen  $f_\mu^*$  in Gl. (4.38) ebenfalls nicht von den Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(k+\nu)$ ,  $\nu = n-d, n-d+1, \dots, n$ , abhängen. Die in den Komponenten der Transformation von ANDF auf ENBNF zu eliminierenden Eingangsgrößen erscheinen somit stets nur in  $h^{*-1}$ , jedoch nicht in den Funktionen  $f_\mu^*$ , die jeweils gerade nicht mehr von den genannten und weiter in der Zukunft liegenden Werten der Eingangsgrößen abhängen.

Das folgende Beispiel veranschaulicht die geschilderten Zusammenhänge.

### Beispiel 4.2:

Gegeben sei ein bilineares System mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße in der Form

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(k) + 5x_2(k)u(k) \\ x_1(k)(1+3u(k)) + x_2(k)(2+u(k)) \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$y(k) = x_1(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

INGENBLEEK führt dieses System in [87, *Beispiel 6.2*] zur Bestätigung seiner Aussage, die Zwei-Schritt-Transformation auf NBNF nach [33] sei nicht unmittelbar auf Systeme mit Eingangsgrößen übertragbar, an. Zudem wird in [87, *Beispiel 6.2*] die Wahl des Freiheitsgrades mit dem Ziel einer kausalen Normalform demonstriert. Letzteres stellt auch einen zentralen Aspekt bei der nachstehend betrachteten Transformation des Systems auf ENBNF dar. Zudem gelingt für das System (4.39) die Transformation auf ENBNF ohne Verwendung von Altwerten der Ausgangsgröße, was die Übertragbarkeit der in [33] vorgestellten Zwei-Schritt-Transformation autonomer Systeme auf gesteuerte Systeme demonstriert und die oben angegebene Aussage aus [87] widerlegt.

Die Transformation des für  $u(k) \neq -0.2$  lokal stark beobachtbaren Systems (4.39) auf NBKNF lautet

$$\mathbf{x}^\square(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k)(1+5u(k)) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1^\square(k) \\ \frac{x_2^\square(k)}{1+5u(k)} \end{bmatrix}, \quad u(k) \neq -0.2. \quad (4.40)$$

Die folgenden Betrachtungen setzen stets  $u(k) \neq -0.2 \forall k$  voraus. Der zweite Zustand in NBKNF,  $x_2^\square(k) = y(k+1)$ , hängt von der Eingangsgröße  $u(k)$  ab. Der relative Systemgrad

ist daher  $d = 1$  und die Systemdarstellung in NBKNF

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \left( x_1^\square(k)(1+3u(k)) + x_2^\square(k) \frac{2+u(k)}{1+5u(k)} \right) (1+5u(k+1)) \end{bmatrix} \\ y(k) &= x_1^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square \end{aligned} \quad (4.41)$$

enthält den zukünftigen Wert der Eingangsgröße  $u(k+1)$ . Die Transformation von ANDF auf ENBNF lautet allgemein

$$x_2^*(k) = h^{*-1}(x_1^\square(k), u(k-1), u(k)) = h^{*-1}(x_1(k), u(k-1), u(k)) \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} x_1^*(k) &= h^{*-1}(x_2^\square(k), u(k), u(k+1)) - f_1^*(y(k-1), x_1^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,1]}(k)) \\ &= h^{*-1}(x_2(k)(1+5u(k)), u(k), u(k+1)) - f_1^*(y(k-1), x_1(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,1]}(k)). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Diese Transformation sollte, falls möglich, nicht von den Eingangsgrößen  $u(k+\nu)$  für  $\nu \geq 0$  abhängen. Aus der Bestimmungsgleichung (4.42) von  $x_2^*(k)$  folgt, daß die Funktion  $h^{*-1}$  nicht von ihrem letzten Argument ( $u(k)$ ) abhängen darf. Aus der Bestimmungsgleichung (4.43) von  $x_1^*(k)$  erhält man dann ohne Berücksichtigung der Funktion  $f_1^*$  die Bedingung

$$\frac{\partial h^{*-1}(x_2(k)(1+5u(k)), u(k), u(k+1))}{\partial u(k)} = 0 \quad (4.44)$$

die mit

$$h^{*-1}(x_2^\square(k), u(k), u(k+1)) = \frac{x_2^\square(k)}{1+5u(k)} \quad (4.45)$$

erfüllt ist. Der Zusammenhang zwischen NBKNF und ENBNF lautet nach Einsetzen der Systemdarstellung (4.41) in Gl. (4.22)

$$\begin{aligned} h^{*-1} \left( \left( x_1^\square(k)(1+3u(k)) + x_2^\square(k) \frac{2+u(k)}{1+5u(k)} \right) (1+5u(k+1)), u(k+1), u(k+2) \right) &= \\ f_0^*(x_1^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)) + f_1^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)) & \end{aligned} \quad (4.46)$$

und nach Einsetzen von Gl. (4.45) schließlich

$$x_1^\square(k)(1+3u(k)) + x_2^\square(k) \frac{2+u(k)}{1+5u(k)} = f_0^*(x_1^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)) + f_1^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)). \quad (4.47)$$

Aus der Wahl

$$\begin{aligned} f_0^*(x_1^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)) &= x_1^\square(k)(1+3u(k)) \\ f_1^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k), \bar{u}_{[0,2]}(k)) &= x_2^\square(k) \frac{2+u(k)}{1+5u(k)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

folgt eine Systemdarstellung in ENBNF ohne Altwerte der Ausgangsgröße, da  $f_1^*$  lediglich von  $x_2^\square(k)$ , nicht aber von  $x_1^\square(k)$  abhängt. Ferner tritt in  $f_1^*(y(k-1), x_1(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,1]}(k))$  in Gl. (4.43) lediglich  $u(k-1)$ , nicht aber  $u(k)$  oder gar  $u(k+1)$  auf. Dieser Sachverhalt bestätigt die Vorgehensweise, die Funktion  $f_1^*$  in Gl. (4.43) bei der Auswahl von  $h^{*-1}$  nicht zu berücksichtigen.

Die Transformation zwischen ANDF und ENBNF lautet somit

$$\mathbf{x}^*(k) = \begin{bmatrix} x_2(k) - x_1(k) \frac{2 + u(k-1)}{1 + 5u(k-1)} \\ \frac{x_1(k)}{1 + 5u(k-1)} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_2^*(k)(1 + 5u(k-1)) \\ x_1^*(k) + x_2^*(k)(2 + u(k-1)) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

und führt auf die kausale Systemdarstellung in ENBNF

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \begin{bmatrix} y(k)(1 + 3u(k)) \\ x_1^*(k) + y(k) \frac{2 + u(k-1)}{1 + 5u(k-1)} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

$$y(k) = x_2^*(k)(1 + 5u(k-1)), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*.$$

Altwerte der Ausgangsgrößen sind in der erhaltenen Beobachternormalform nicht enthalten. Mit  $y(k) = x_2^*(k)(1 + 5u(k-1))$  folgt schließlich

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \begin{bmatrix} x_2^*(k)(1 + 3u(k))(1 + 5u(k-1)) \\ x_1^*(k) + x_2^*(k)(2 + u(k-1)) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$y(k) = x_2^*(k)(1 + 5u(k-1)), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*.$$

die der in [87, *Beispiel 6.2*] gefundenen Systemdarstellung in Normalform entspricht. ■

Das Beispiel zeigt den möglichen Nutzen des durch die Wahl der Ausgangsfunktion  $h^*$  gegebenen Freiheitsgrades, dessen gezielte Verwendung im geschilderten Fall auf eine kausale ENBNF führt. Die Äußerung in [87], die Zwei-Schritt-Transformation nach [33] sei nicht unmittelbar auf Systeme mit Eingangsgrößen übertragbar, erweist sich als unzutreffend.

### Einschwingverhalten des Beobachters in ANDF

Ein weiteres wichtiges Ziel bei der Wahl der Freiheitsgrade stellt eine Transformation zwischen ANDF und ENBNF mit einer möglichst geringen Anzahl nichtlinearer Ausdrücke dar. Im Idealfall erweist sich die Transformation als linear, was den Beobachterentwurf erheblich erleichtert und ferner zu einem engeren Zusammenhang zwischen der Beobachterdynamik in ANDF

und dem in ENBNF vorgegebenen dynamischen Verhalten führt. In den Komponenten (4.32) der Transformation von NBKNF auf ENBNF treten nach der Substitution der  $x_i^\square(k)$  in  $h^{*-1}$  gemäß Gl. (3.4) Ausdrücke der Form  $h^{*-1}(h(\dots), \dots)$  auf, die additiv mit den Funktionen  $f_\mu^*$  verknüpft sind. Die Auswahl letzterer erfolgt gemäß Gleichung (4.22), wobei  $h^{*-1}(f_n^\square(\dots), \dots)$  nach Einsetzen von Gl. (3.5) ebenfalls einen Ausdruck der Form  $h^{*-1}(h(\dots), \dots)$  ergibt. Die Funktion  $h^{*-1}$  bzw.  $h^*$  ist daher von großer Bedeutung für die Struktur der Transformation zwischen ANDF und ENBNF. Insbesondere erscheint die Auswahl von  $h^*$  ähnlich zu  $h$  sinnvoll, um mit  $h^{*-1}(h(\dots), \dots)$  einen möglichst einfachen Ausdruck zu erhalten. Im folgenden ist diese sehr allgemeine Forderung für eine spezielle Struktur der Ausgangsfunktion erläutert.

Unter der Annahme, daß  $h$  von einer Linearkombination der Zustände und der Eingänge abhängt, also

$$h(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) = \tilde{h}(\mathbf{v}_x^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k)), \quad (4.52)$$

wobei  $\mathbf{v}_x^T$  bzw.  $\mathbf{v}_u^T$  konstante Zeilenvektoren der Dimension  $n$  bzw.  $p$  sind, ergibt sich

$$y(k) = \tilde{h}(\mathbf{v}_x^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k)) = h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)). \quad (4.53)$$

In diesem Fall erweist sich offensichtlich die Wahl

$$h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) = \tilde{h}(x_n^*(k) + \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k)) \quad (4.54)$$

als günstig, da sie auf die lineare Komponente

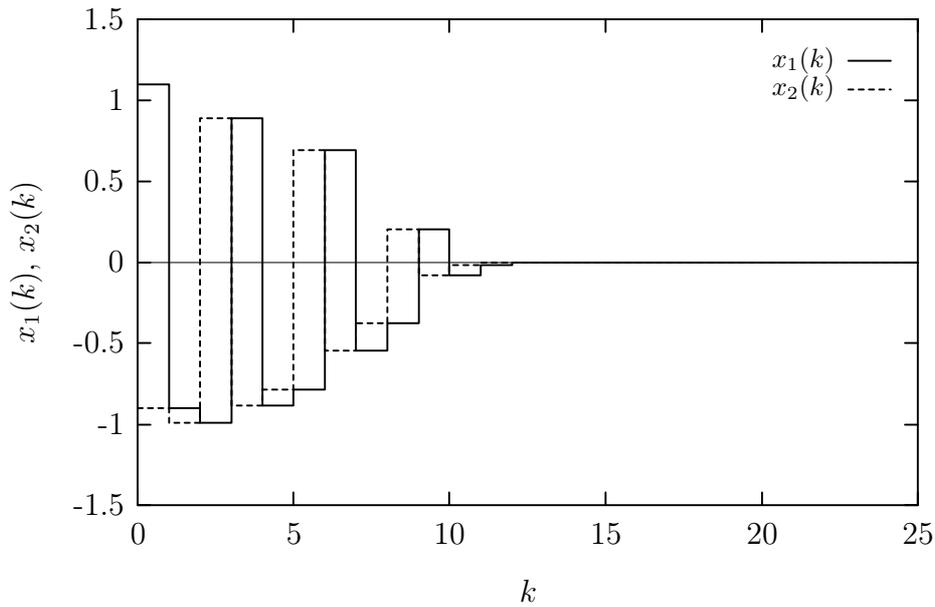
$$\begin{aligned} x_n^*(k) &= h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) \\ &= \tilde{h}^{-1}(y(k)) - \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k) \\ &= \tilde{h}^{-1}(\tilde{h}(\mathbf{v}_x^T \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k))) - \mathbf{v}_u^T \mathbf{u}(k) \\ &= \mathbf{v}_x^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (4.55)$$

der Transformation von ANDF auf ENBNF führt, wie auch bereits das Einsetzen der Gl. (4.54) in Gl. (4.53) ergibt. Die aus der Verknüpfung von  $h^*$  und  $h$  resultierenden Nichtlinearitäten in den übrigen Komponenten der Transformation kompensieren sich ebenfalls, was unmittelbar aus dem Einsetzen der Transformationsvorschrift (3.4) in Gl. (4.18) folgt.

Das folgende Beispiel dient zur Demonstration des Einflusses der Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF auf die Dynamik des Beobachterfehlers in ANDF.

### Beispiel 4.3:

Gegeben sei das in Beispiel 3.1 vorgestellte, autonome System (3.11) mit den Anfangswerten  $\mathbf{x}_0 = [1.1, -0.9]$ , woraus die in Bild 4.3 dargestellten Zeitverläufe der Zustände hervorgehen.



**Bild 4.3:** Zeitverläufe der Systemzustände

Für den Entwurf eines Beobachters in ENBNF werden im folgenden zwei Fälle unterschieden. Ausgehend von der bereits in Beispiel 3.1 berechneten Systemdarstellung (3.16) in NBKNF erfolgt zunächst ein Entwurf mit der Wahl einer linearen Ausgangsfunktion  $h^*$ , dem sich ein Entwurf mit der Wahl einer nichtlinearen Ausgangsfunktion anschließt. Das Beispiel endet mit einer Gegenüberstellung beider Beobachter.

### Lineare Ausgangsfunktion in ENBNF

Im Fall  $h^*(x_2^*(k)) = x_2^*(k)$  ist der Ausgang in ENBNF linear mit  $x_2^*(k)$  verknüpft. Die Transformation von NBKNF auf ENBNF mit  $f_0^*(x_1^\square(k)) = 0$  und  $f_1^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k)) = x_1^\square(k)x_2^\square(k)$  lautet dann

$$\begin{aligned} x_2^*(k) &= x_1^\square(k) \\ x_1^*(k) &= x_2^\square(k) - y(k-1)x_1^\square(k). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Durch Ersetzen von  $x_1^\square(k)$  bzw.  $x_2^\square(k)$  durch  $x_1^3(k)$  bzw.  $x_2^3(k)$  (s. Gl. (3.12)) folgt die Transformationsvorschrift von ANDF auf ENBNF

$$\begin{aligned} x_2^*(k) &= x_1(k)^3 \\ x_1^*(k) &= x_2(k)^3 - y(k-1)x_1(k)^3 \end{aligned} \tag{4.57}$$

mit der Inversen

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \sqrt[3]{x_2^*(k)} \\ x_2(k) &= \sqrt[3]{x_1^*(k) + y(k-1)x_2^*(k)}, \end{aligned} \quad (4.58)$$

die keine linearen Anteile aufweist. Ein Beobachterentwurf in ENBNF mit der gewünschten Dynamik des Beobachterfehlers kann in diesem Falle nicht auf eine ähnliche Dynamik des Beobachterfehlers in ANDF führen, da die Zustände der ANDF mit denen der ENBNF jeweils durch  $[\bullet]^3$  bzw.  $\sqrt[3]{[\bullet]}$  miteinander verknüpft sind. Für die Systemdarstellung in ENBNF

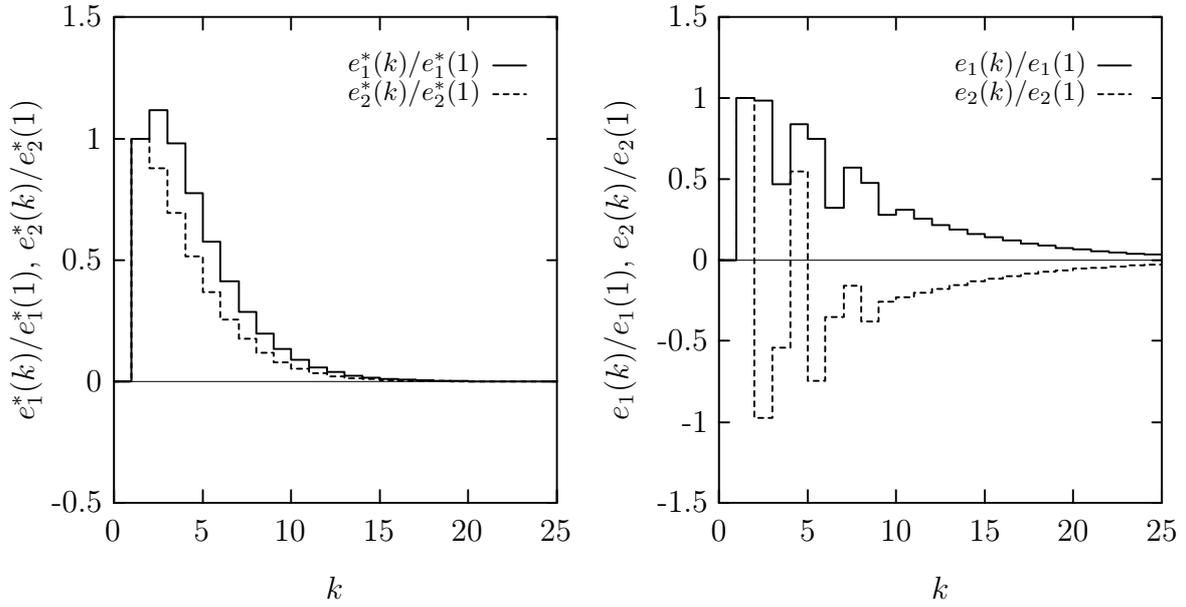
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ y(k-1)y(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_2^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^* \end{aligned} \quad (4.59)$$

nimmt der Beobachter für  $k \geq 1$  die Form

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ y(k-1)y(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} (y(k) - \hat{x}_2^*(k)), \\ \hat{y}(k) &= \hat{x}_2^*(k), \quad \hat{\mathbf{x}}^*(1) = \hat{\mathbf{x}}_0^* \end{aligned} \quad (4.60)$$

an. In diesem Beispiel wurden  $q_0$  und  $q_1$  so gewählt, daß sich die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0.6$  und  $\lambda_2 = 0.6$  des Beobachterfehlers in ENBNF ergeben. Die Anfangswerte der Beobachterzustände in ANDF lauten  $\hat{\mathbf{x}}_0 = [3, 3]$ . Zum Zeitpunkt  $k = 1$  werden diese auf ENBNF transformiert und die Beobachterberechnung beginnt. Zur besseren Vergleichbarkeit der Verläufe der Beobachterfehler in ENBNF und ANDF wurden die Beobachterfehler auf den jeweiligen Wert zum Startzeitpunkt  $k = 1$  bezogen. Zum Zeitpunkt  $k = 0$  ist der relative Beobachterfehler nicht bekannt und in den folgenden Bildern willkürlich als Null dargestellt. Bild 4.4-a zeigt den Verlauf der relativen Beobachterfehler in ENBNF, Bild 4.4-b den in ANDF.

Die Beobachterfehler in ENBNF zeigen erwartungsgemäß einen exponentiell abklingenden Verlauf, wogegen sich in ANDF zunächst das alternierendes Verhalten der Systemzustände wiederfindet, die aufgrund der nichtlinearen Transformation zwischen ANDF und ENBNF einen Einfluß auf den Beobachterfehler haben. Nach Abklingen der Systemzustände weisen auch die Beobachterfehler in ANDF einen exponentiellen Verlauf auf, jedoch mit einer deutlich kleineren Konvergenzrate.



a) Relative Beobachterfehler in ENBNF      b) Relative Beobachterfehler in ANDF

**Bild 4.4:** Relative Beobachterfehler in ENBNF und ANDF bei linearer Ausgangsfunktion in ENBNF

### Nichtlineare Ausgangsfunktion in ENBNF

Wählt man die Ausgangsfunktion in ENBNF analog zu der in ANDF, also  $h^*(x_2^*(k)) = x_2^*(k)^3$ , folgt  $f_0^*(x_1^\square(k)) = 0$  und  $f_1^*(x_1^\square(k), x_2^\square(k)) = \sqrt[3]{x_1^\square(k)x_2^\square(k)}$  und somit

$$\begin{aligned} x_2^*(k) &= \sqrt[3]{x_1^\square(k)} \\ x_1^*(k) &= \sqrt[3]{x_2^\square(k)} - \sqrt[3]{y(k-1)x_1^\square(k)}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Nach Substitution von  $x_1^\square(k)$  und  $x_2^\square(k)$  entsprechend Gl. (3.12) lautet die Transformation zwischen ANDF und ENBNF

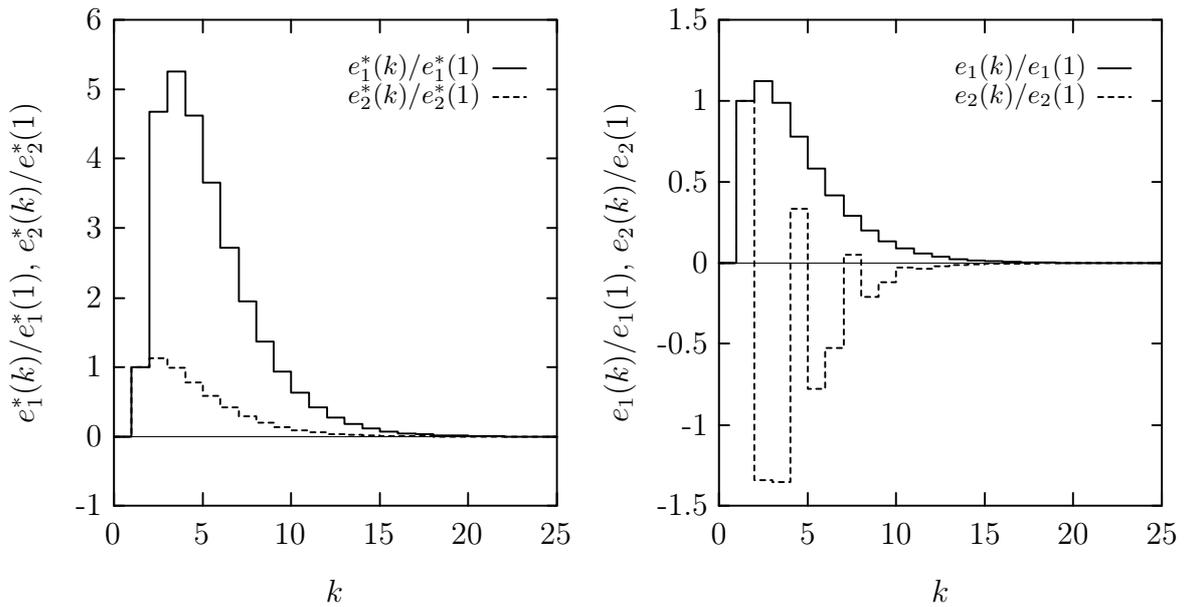
$$\begin{aligned} x_2^*(k) &= x_1(k) \\ x_1^*(k) &= x_2(k) - x_1(k)\sqrt[3]{y(k-1)} \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} x_1(k) &= x_2^*(k) \\ x_2(k) &= x_1^*(k) + x_2^*(k)\sqrt[3]{y(k-1)}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

die linear in den Zuständen  $\mathbf{x}(k)$  bzw.  $\mathbf{x}^*(k)$  ist. Die in ENBNF vorgegebene Dynamik der Beobachterfehler sollte daher auch in ANDF erhalten bleiben. Die Systemdarstellung in ENBNF lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{y(k-1)y(k)} \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_2^*(k)^3, \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Der Beobachter in ENBNF für  $k \geq 1$  hat die Form

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt[3]{y(k-1)y(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \end{bmatrix} (\sqrt[3]{y(k)} - \hat{x}_2^*(k)), \\ \hat{y}(k) &= \hat{x}_2^*(k)^3, \quad \hat{\mathbf{x}}^*(1) = \hat{\mathbf{x}}_0^*.\end{aligned}\quad (4.64)$$



a) Relative Beobachterfehler in ENBNF      b) Relative Beobachterfehler in ANDF

**Bild 4.5:** Relative Beobachterfehler in ENBNF und ANDF bei nichtlinearer Ausgangsfunktion in ENBNF

Die Anfangswerte sowie die Parameter  $q_0$  und  $q_1$  entsprechen denen der Simulationen mit linearer Ausgangsfunktion. Bild 4.5-a zeigt den Verlauf der relativen Beobachterfehler in ENBNF, Bild 4.5-b den in ANDF. Auch hier ist in ANDF zunächst wieder der Einfluß der alternierenden Systemzustände auf die Beobachterfehler zu erkennen. Im Anschluß klingen die Beobachterfehler in ANDF mit gleicher Konvergenzrate ab wie die in ENBNF.

### Vergleich des Einschwingverhaltens beider Entwürfe

Einen quantitativen Vergleich des Einschwingverhaltens der Beobachter gestattet eine Maßzahl für die Konvergenzrate der Beobachterfehler ab  $k = 2$  in der Form

$$\tilde{\lambda}(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{e_1(k)}{e_1(k-1)} + \frac{e_2(k)}{e_2(k-1)} \right) \text{ bzw. } \tilde{\lambda}^*(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{e_1^*(k)}{e_1^*(k-1)} + \frac{e_2^*(k)}{e_2^*(k-1)} \right). \quad (4.65)$$

Diese Maßzahlen gelten auch für die oben dargestellten relativen Beobachterfehler, da sich der Bezugswert in der Berechnung herauskürzt. Für die lineare Fehlerdynamik in ENBNF folgt für die Zeitverläufe der Beobachterfehler

$$\begin{aligned}
 e_1^*(k) &= (a_1 + b_1 k) \lambda^k, & e_2^*(k) &= (a_2 + b_2 k) \lambda^k, \\
 \text{mit } a_1 &= e_1^*(0), & a_2 &= e_2^*(0), \\
 b_1 &= -e_1^*(0) + \lambda e_2^*(0), & b_2 &= e_2^*(0) + \frac{e_1^*(0)}{\lambda},
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

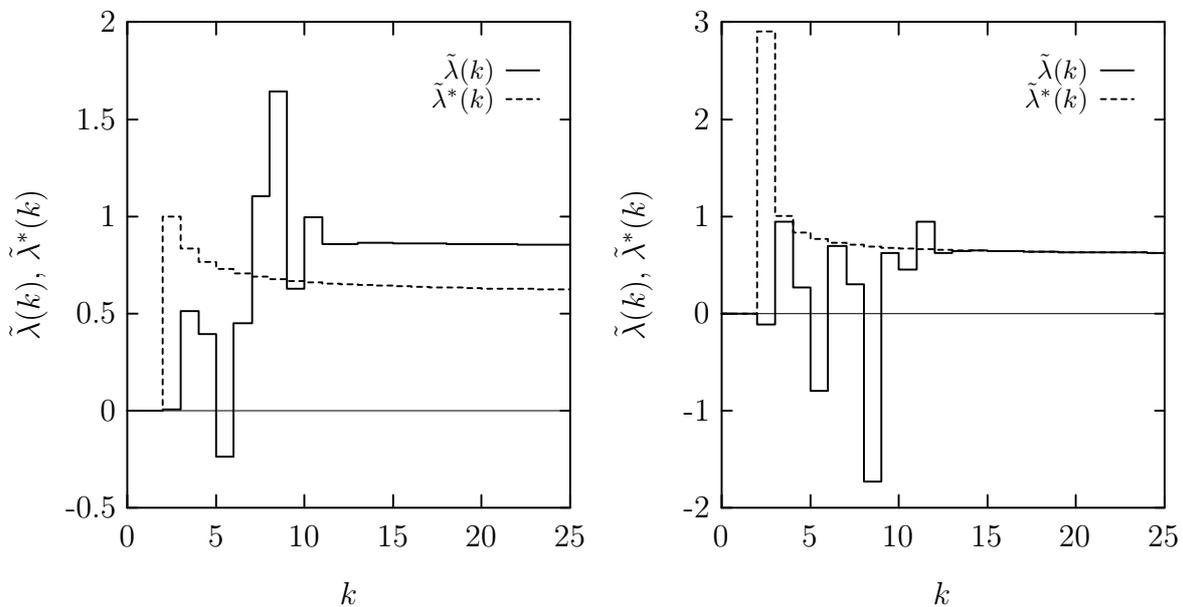
falls bei der Eigenwertvorgabe zwei gleiche Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$  gewählt wurden. Die Maßzahl der Konvergenzrate lautet dann für  $k \geq 2$

$$\tilde{\lambda}^*(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{a_1 + b_1 k}{a_1 + b_1(k-1)} \lambda + \frac{a_2 + b_2 k}{a_2 + b_2(k-1)} \lambda \right) \tag{4.67}$$

und weist für große Werte von  $k$  den Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}^*(k) = \lambda \tag{4.68}$$

auf, der dem zweifach gewählten Eigenwert entspricht. Bild 4.6-a zeigt den Verlauf der Maßzahlen bei **linearer Ausgangsfunktion in ENBNF**, wobei für  $k < 2$  willkürlich der Wert Null gewählt wurde.



a) Lineare Ausgangsfunktion in ENBNF

b) Nichtlin. Ausgangsfkt. in ENBNF

**Bild 4.6:** Abklinggeschwindigkeiten des Beobachterfehlers in ENBNF und ANDF

Im Gegensatz zu  $\tilde{\lambda}^*(k)$  zeigt  $\tilde{\lambda}(k)$  zunächst einen Verlauf, der wiederum den Einfluß der Systemzustände auf den Beobachterfehler in ANDF verdeutlicht. Für große Werte von  $k$  ergibt

sich für  $\tilde{\lambda}^*(k)$  der Wert 0.6, der den bei dem Beobachterentwurf vorgegebenen Eigenwerten entspricht.  $\tilde{\lambda}(k)$  strebt jedoch gegen den Wert  $0.84 = \sqrt[3]{0.6}$ . Die Wahl einer linearen Ausgangsfunktion in ENBNF führt daher tatsächlich zu einem Einschwingverhalten in ANDF, das nicht den in ENBNF vorgegebenen Eigenwerten entspricht. Wie Bild 4.6-b entnommen werden kann, schafft die Wahl einer **nichtlinearen Ausgangsfunktion in ENBNF**, die mit  $h^*(x_n^*(k)) = x_n^*(k)^3$  strukturell gleich der in ANDF ist, Abhilfe. An dem Verlauf von  $\tilde{\lambda}(k)$  für  $k < 12$  läßt sich auch hier der Einfluß der Systemzustände auf das Einschwingverhalten des Beobachters in ANDF deutlich erkennen. Für große Werte von  $k$  hingegen konvergieren sowohl  $\tilde{\lambda}^*$  als auch  $\tilde{\lambda}$  gegen den Wert 0.6, was den in ENBNF vorgegebenen Eigenwerten des Beobachterfehlers entspricht. Lediglich die Wahl einer nichtlinearen Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF führt somit im vorliegenden Fall auf ein Einschwingverhalten des Beobachters in ANDF, das der in ENBNF gewählten Beobachterdynamik entspricht.

Der Einfluß der Ausgangsfunktion in ENBNF zeigt sich bereits bei einem Vergleich der Transformationen von ANDF auf ENBNF. Im Fall einer linearen Ausgangsfunktion  $h^*$  weist diese Transformation (4.57) nur nichtlineare Anteile auf, während die Transformation (4.62), die aus der Wahl der nichtlinearen Funktion  $h^*(x_n^*(k)) = x_n^*(k)^3$  hervorgeht, linear bezüglich der Zustände ist.

■

Das Beispiel veranschaulicht eindrucksvoll die Bedeutung der Wahl von  $h^*$ . Wird die Funktion  $h^*$  willkürlich nichtlinear und nicht nach oben genannten Aspekten gewählt, können jedoch sehr aufwendige Gleichungen beim Entwurf und der Beobachterberechnung auftreten. Dieser Sachverhalt resultiert aus der Beobachtergleichung (4.16) in ENBNF, insbesondere aber in den Transformationsvorschriften (4.19) von ENBNF auf NBKNF sowie in der Beobachtergleichung (4.30) in NBKNF, in denen  $h^*$  wiederum auf nichtlineare Ausdrücke angewendet wird.

#### 4.1.6 Alternative Beobachter in ENBNF

Neben dem in Gl. (4.16) dargestellten Entwurf (im folgenden als **ENBNF-Beobachter 1** bezeichnet) erlaubt die spezielle Auswahl der Funktionen  $f_\mu^*$  gemäß Gl. (4.31), die in diesem Unterabschnitt stets vorausgesetzt wird, weitere Beobachterstrukturen in ENBNF.

Die mit Hilfe der in ENBNF gegebenen Systemdarstellung (4.15) durchführbare Berechnung

der Zustände in ENBNF für  $k > 0$  und beliebige Anfangswerte  $\mathbf{x}^*(0)$  liefert

$$\begin{aligned} x_1^*(k) &= 0 \quad \text{für } k \geq 1, \\ x_2^*(k) &= 0 \quad \text{für } k \geq 2, \\ &\vdots \\ x_{n-1}^*(k) &= 0 \quad \text{für } k \geq n-1. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Die letzte Komponente der Systemdarstellung in ENBNF geht dann für  $k \geq n-1$  in

$$x_n^*(k+1) = f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k))$$

über. Aus  $h^*(x_n^*(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) = y(k+1)$  folgt schließlich

$$f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) = h^*(y(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \quad \text{für } k \geq n-1. \tag{4.70}$$

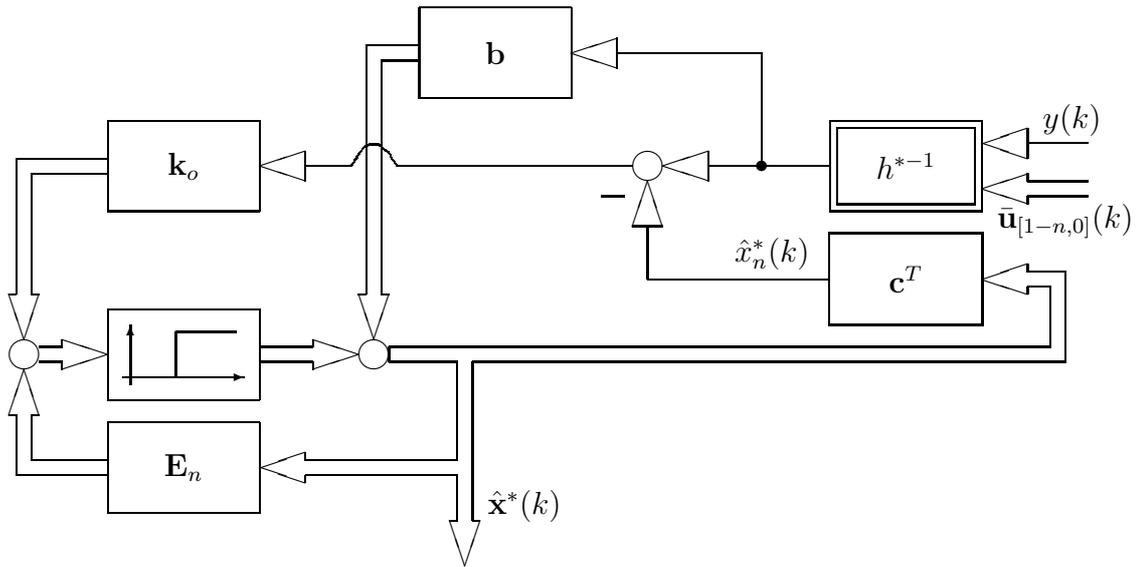
Die Substitution nach Gl. (4.70) der Funktion  $f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k))$  in Gl. (4.16) durch  $h^*(y(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k))$  führt auf den **ENBNF-Beobachter 2**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \mathbf{E}_n \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h^{*-1}(y(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \end{bmatrix} \\ &+ \left[ q_0 \quad q_1 \quad \dots \quad q_{n-1} \right]^T (h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) - \hat{x}_n^*(k)), \\ \hat{y}(k) &= h^*(\hat{x}_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)), \quad \hat{\mathbf{x}}^*(n-1) = \hat{\mathbf{x}}_0^*, \quad k \geq n-1, \end{aligned} \tag{4.71}$$

mit der Matrix  $\mathbf{E}_n$  nach Gl. (4.15). Die Anwendung des ENBNF-Beobachters 2 liefert ebenso wie der ENBNF-Beobachter 1 die Fehlerdifferenzgleichung (4.17). Bild 4.7 zeigt das Blockschaltbild dieses Beobachters mit

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right]^T, \\ \mathbf{c}^T &= \left[ 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \right] \\ \text{und } \mathbf{k}_o &= \left[ q_0 \quad q_1 \quad \dots \quad q_{n-1} \right]^T. \end{aligned}$$

Die dargestellte Struktur berücksichtigt einen wichtigen Aspekt der Realisierung des Beobachters. Die nach Gl. (4.71) erforderliche Addition des Ausdrucks  $\mathbf{b} h^{*-1}(y(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k))$  vor dem Verzögerer wird durch die völlig gleichwertige Addition von  $\mathbf{b} h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k))$



**Bild 4.7:** Blockschaltbild des ENBNF-Beobachters 2 nach Gl. (4.71)

nach dem Verzögerer ersetzt. Die Berechnung des Beobachterzustands  $\hat{\mathbf{x}}^*(k)$  gelingt ohne Kenntnis des zukünftigen Ausgangswertes  $y(k+1)$ , die Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}^*(k+1)$  jedoch nicht (s. Gl. (4.71)).

Bei Berücksichtigung der für  $k \geq n-1$  abgeklungenen Zustände  $x_1^*, x_2^*, \dots, x_{n-1}^*$  nach Gl. (4.69) erhält man den **ENBNF-Beobachter 3**

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 \hat{x}_1^*(k) \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \hat{x}_{n-1}^*(k) \\ \lambda_n (\hat{x}_n^*(k) - h^{*-1}(y(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k))) \end{bmatrix}, \quad (4.72)$$

$$\hat{y}(k) = h^*(\hat{\mathbf{x}}_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)), \quad \hat{\mathbf{x}}^*(n-1) = \hat{\mathbf{x}}_0^*, \quad k \geq n-1.$$

Ausgehend von  $x_\mu^*(k) = 0$  für  $k \geq n-1$  sowie  $\mu = 1, 2, \dots, n-1$  stellen die entsprechenden Beobachterzustände  $\hat{x}_\mu^*(k)$  für  $k \geq n-1$  die Beobachterfehler  $\hat{x}_\mu^*(k) - x_\mu^*(k)$  dar. Die Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  entsprechen dabei den Eigenwerten der Differenzgleichung des Beobachterfehlers





## 4.2 Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen

Die Systemdarstellung in ENBNF für Systeme mit einer Ausgangsgröße läßt sich auch auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen übertragen. In den nachfolgenden Unterabschnitten wird lediglich die Transformation eines Systems auf ENBNF abgeleitet. Da der Beobachterentwurf in ENBNF analog zum Eingrößenfall erfolgt, wird nur exemplarisch in Beispiel 4.5 darauf eingegangen.

### 4.2.1 Systemdarstellung in ENBNF

Die Darstellung eines Systems  $n$ -ter Ordnung mit  $m$  Ausgangs- und  $p$  Eingangsgrößen in ENBNF beinhaltet, wie in Gl. (4.78) dargestellt,  $m$  Subsysteme mit den Ordnungen

$$n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m, \quad \text{wobei} \quad \sum_{j=1}^m n_j = n.$$

Dabei stellt  $n_1$  die Ordnung des größten und ersten Subsystems innerhalb der Systemdarstellung in ENBNF dar. Die übrigen  $m-1$  Subsysteme sind mit kleiner werdender Ordnung absteigend sortiert. Dieses stellt eine neue Forderung gegenüber der Vorgehensweise [33] dar, bei der die Reihenfolge frei ist. Die Einschränkung erweist sich, wie in Abschnitt 4.2.2 gezeigt, bei der Herleitung der Transformation auf ENBNF als sinnvoll. Die geforderte Reihenfolge der Subsysteme ergibt sich bereits in der zu den Beobachtbarkeits-Indizes korrespondierenden Systemdarstellung (3.22) in NBKNF (s. Unterabschnitt 3.3)<sup>5</sup>. Da auch im Fall mehrerer Ausgangsgrößen die Transformation auf ENBNF über die NBKNF erfolgt, erhält man auch in ENBNF ohne weitere Einschränkungen die oben geforderte Reihenfolge der Subsysteme.

Der Zustandsvektor weist in ENBNF die Form

$$\mathbf{x}^*(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^*(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^*(k) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_j^*(k) = \begin{bmatrix} x_{j,1}^*(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}^*(k) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m \quad (4.77)$$

<sup>5</sup>Die dafür ggf. modifizierte Reihenfolge der Ausgangsgrößen im Vektor  $\mathbf{y}$  wird, wie bereits erwähnt, stets vorausgesetzt.

auf. Damit lautet die Systemdarstellung in ENBNF

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{n_1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_{n_2} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{E}_{n_m} \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(k) + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_1,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,n_1]}(k)) \\ \mathbf{f}_2^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_2,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_2,n_1]}(k)) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_m^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_m,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_m,n_1]}(k)) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_m(k) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1^*(x_{1,n_1}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)) \\ h_2^*(x_{1,n_1}^*(k), x_{2,n_2}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_2,0]}(k)) \\ \vdots \\ h_m^*(x_{1,n_1}^*(k), \dots, x_{m,n_m}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_m,0]}(k)) \end{bmatrix}}_{\mathbf{h}^*(x_{1,n_1}^*(k), \dots, x_{m,n_m}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k))}, \quad (4.78)$$

$$\mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*, \quad \mathbf{y}(-\mu) = \mathbf{y}_\mu \text{ für } \mu = -1, -2, \dots, 1 - n_1 \text{ und } k \in \mathbb{N}^0.$$

Die Funktionen  $y_j(k) = h_j^{*-1}(x_{1,n_1}^*(k), \dots, x_{j,n_j}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,0]}(k))$  mit  $j = 1, 2, \dots, m$  müssen dabei bezüglich  $x_{j,n_j}^*$  invertierbar sein. Die quadratischen Matrizen  $\mathbf{E}_{n_j}$  der Ordnung  $n_j$  haben die Form

$$\mathbf{E}_{n_j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.79)$$

Für die Funktionen  $\mathbf{f}_j^*$  gilt

$$\mathbf{f}_j^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_j,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,n_1]}(k)) = \begin{bmatrix} f_{j,0}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[0,\min(0,n_\xi-1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)) \\ f_{j,1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[-1,\min(0,n_\xi-2)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n_1-1]}(k)) \\ \vdots \\ f_{j,n_j-1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_j,\min(0,n_\xi-n_j)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,n_1-n_j+1]}(k)) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

und im Argument der Funktion  $f_{j,\mu}^*$  des  $j$ -ten Subsystems bedeutet

$$\bar{\mathbf{y}}_{[-\mu,\min(0,n_\xi-\mu-1)]}^\diamond(k) = y_1(k-\mu), \dots, y_1(k+k_1^\circ), y_2(k-\mu), \dots, y_2(k+k_2^\circ), \dots \\ \dots, y_m(k-\mu), \dots, y_m(k+k_m^\circ), \quad (4.81)$$

wobei

$$k_\xi^\circ = \begin{cases} 0 & \text{für } n_\xi \geq \mu + 1 \text{ (immer für } \xi \leq j) \\ n_\xi - \mu - 1 & \text{für } 0 < n_\xi < \mu + 1 \end{cases} \quad (4.82)$$

mit  $1 \leq \xi \leq m$ ,  $0 \leq \mu \leq n_j - 1$  und  $1 \leq j \leq m$ .

Für den Sonderfall  $n_\xi = 0$  hängt die Funktion  $f_{j,\mu}^*$  nicht von  $y_\xi$  ab. Dieser Fall ist nur denkbar, wenn ein Ausgang des Systems keine Information über den Systemzustand beinhaltet oder der Systemausgang aufgrund stark verrauschter Messungen nicht zur Beobachtung herangezogen wird.

In den Funktionen  $f_{j,0}^*, f_{j,1}^*, \dots, f_{j,n_j-1}^*$  erscheinen somit i. a. nicht die gleiche Anzahl von Altwerten der Komponenten des Ausgangsvektors. Dieses ist nur dann der Fall, wenn alle Subsysteme die gleiche Ordnung aufweisen. Der Grund für diesen Sachverhalt und die notwendige Dreieckstruktur der Ausgangsfunktion  $\mathbf{h}^*$  wird bei der späteren Betrachtung der Transformation (4.92) zwischen NBKNF und ENBNF des  $j$ -ten Subsystems deutlich.

### 4.2.2 Transformation auf ENBNF

Zu der Systemdarstellung in ENBNF gelangt man, wie bereits erwähnt, auch im Fall mehrerer Ausgangsgrößen über die Systemdarstellung in NBKNF gemäß Gl. (3.22).

Die mögliche Auswahl der Komponenten der Transformation nach Gl. (3.20) auf NBKNF und damit die Bestimmung der Subsystemordnungen  $n_j$  erfolgt entsprechend der Beobachtbarkeits-Indizes gemäß Unterabschnitt 3.3. Dieses gewährleistet bereits die oben geforderte Reihenfolge der Subsysteme entsprechend ihrer Ordnung und führt i. a. zu einer minimalen Anzahl von Altwerten der Aus- und Eingangsgrößen sowie der zukünftigen Eingangsgrößen. Desweiteren ist die später noch herzuleitende Bedingung für die Transformierbarkeit eines Systems von NBKNF auf ENBNF nur dann stets erfüllbar, wenn alle Subsysteme die gleiche Ordnung aufweisen<sup>6</sup>. Je größer der Unterschied zwischen größtem und kleinstem Subsystem ist, um so schwerer läßt sich die Bedingung erfüllen (s. nachfolgenden Satz 4.4 mit anschließenden Bemerkungen).

Neben den bereits in [33] genannten Fällen, für die es sich dennoch als zweckmäßig erweisen könnte, von dem im Abschnitt 3.3 vorgestellten Verfahren zur Auswahl der Komponenten der Transformation auf NBKNF abzuweichen<sup>7</sup>, lassen sich folgende weitere angeben, wobei jedoch die Reihenfolge der Subsysteme entsprechend ihrer Ordnungen stets einzuhalten ist.

- Nicht in allen Komponenten der Funktion  $\mathbf{h}(\mathbf{F}^\mu(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,\mu-1]}(k)), \mathbf{u}(k+\mu))$  in der Beobachtbarkeitsabbildung (3.18) mit  $\mu = 1, 2, \dots, n-1$  treten die möglichen Zukunftswerte der Eingangsgrößen auf. Bei der Auswahl der Transformation auf NBKNF könnten daher vorzeitig die Systemausgänge unberücksichtigt bleiben, die sonst zu einer Abhängigkeit der Transformation von einer Eingangsgröße führen würde.

<sup>6</sup>In [33] weisen für diesen Spezialfall die Separabilitätsbedingungen eine besonders einfache Struktur auf, sind aber nicht immer erfüllbar.

<sup>7</sup>stark verrauschter Systemausgang oder schlechte numerische Konditionierung der Beobachtbarkeitsmatrix bzgl. eines Systemausganges.

- Bei der mehrmaligen Anwendung der Systemfunktion treten im allgemeinen schon nach wenigen Schritten sehr umfangreiche Ausdrücke auf, die das Auffinden der inversen Transformationsvorschrift erschweren oder unmöglich machen. Auch hier könnte auf die Berücksichtigung des  $j$ -ten Systemausgangs verzichtet werden, wenn dessen Komponente  $h_j(\mathbf{F}^\mu(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,\mu-1]}(k)))$  der Beobachtbarkeitsabbildung zu deutlich komplizierteren Ausdrücken führt als andere Komponenten.

Der vorzeitige Ausschluß der Anteile eines Systemausgangs an der Transformation auf NBKNF gelingt nicht generell, da unter Umständen nicht mehr der volle Rang  $n$  der Beobachtbarkeitsmatrix erreicht wird. Ist dieses dennoch der Fall, bedarf es der Berücksichtigung weiterer Anteile der anderen Ausgänge, was zu einer Erhöhung der Ordnung  $n_1$  des größten Subsystems führt.

Die nachstehend aufgeführte exemplarische Transformtion eines Mehrgrößensystems auf NBKNF veranschaulicht die geschilderten Zusammenhänge sowie die möglichen Freiheitsgrade.

#### Beispiel 4.4:

Gegeben sei ein System siebter Ordnung, mit drei Aus- und zwei Eingangsgrößen in der Form

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_7(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5(k) \\ x_1(k) + x_3(k) - x_4(k) + u_2(k) \\ x_2(k) + x_2(k)^3 + x_4(k) \\ \cos(x_2(k)) - (x_1(k) + x_3(k) - x_4(k) + u_2(k))^3 \\ x_7(k) \\ x_1(k)x_6(k) - x_2(k)^3 - x_4(k) \\ x_2(k) - u_1(k) \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0.$$

Der Übersicht halber wird im nachfolgenden Text, außer wenn eine Zeitverschiebung vorliegt, auf die Angabe der Zeitabhängigkeit  $k$  verzichtet. Die Beobachtbarkeitsabbildung dieses Sys-

tems lautet

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,6]}(k)) =$$

$$\left[ \begin{array}{c} x_1 \\ x_3 \\ x_6 \\ \dots \\ x_5 \\ x_2 + x_2^3 + x_4 \\ x_1 x_6 - x_2^3 - x_4 \\ \dots \\ x_7 \\ x_1 + x_3 - x_4 + \cos(x_2) + u_2 \\ x_5(x_1 x_6 - x_4 - x_2^3) - \cos(x_2) \\ \dots \\ x_2 - u_1 \\ x_2 + x_2^3 + x_4 + x_5 - \cos(x_2) + \cos(x_1 + x_3 - x_4 + u_2) + (x_1 + x_3 - x_4 + u_2)^3 + u_2(k+1) \\ x_7(x_5(x_1 x_6 - x_2^3 - x_4) - \cos(x_2)) - \cos(x_1 + x_3 - x_4 + u_2) \\ \dots \\ x_1 + x_3 - x_4 - u_1(k+1) + u_2 \\ \vdots \end{array} \right].$$

Die Jacobimatrix dieser Abbildung stellt die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{O}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,6]}(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+3x_2^2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_6 & -3x_2^2 & 0 & -1 & 0 & x_1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\sin(x_2) & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5x_6 & \sin(x_2)-3x_2^2x_5 & 0 & -x_5 & x_1x_6-x_2^3-x_4 & x_1x_5 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

dar, aus der  $n = 7$  linear unabhängige Zeilen auszuwählen sind. Mit \* gekennzeichnete Matrixelemente charakterisieren bereits relativ umfangreiche Ausdrücke, die aus Übersichts- und Platzgründen nicht explizit dargestellt werden.

### Auswahl mit dem Ziel, Subsysteme möglichst gleicher Ordnung zu erhalten

Die ersten sieben Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix sind linear unabhängig. Wählt man daher die Zeilen 1, 4, 7, 2, 5, 3, 6 (bereits entsprechend der Zugehörigkeit zu den Systemausgängen sortiert) als Grundlage der Transformation auf NBKNF, erhält man drei Subsysteme der Ordnungen  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$  und  $n_3 = 2$  entsprechend den Beobachtbarkeits-Indizes dieses Systems. Die Determinante der Jacobimatrix der resultierenden Transformation auf NBKNF

ist 1 und somit unabhängig von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{u}$ . Für die Transformationsvorschrift folgt

$$\mathbf{x}^\square(k) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ \dots \\ x_{2,1}^\square \\ x_{2,2}^\square \\ \dots \\ x_{3,1}^\square \\ x_{3,2}^\square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_7 \\ \dots \\ x_3 \\ x_2 + x_2^3 + x_4 \\ \dots \\ x_6 \\ x_1 x_6 - x_2^3 - x_4 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

mit der Inversen

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square \\ x_{2,1}^\square \\ x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square - x_{3,2}^\square - (x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)^3 \\ x_{1,2}^\square \\ x_{3,1}^\square \\ x_{1,3}^\square \end{bmatrix}. \quad (4.85)$$

Bei dieser Wahl der Transformation hängt diese nicht von den Eingangsgrößen ab. Die resultierende Systemdarstellung in NBKNF ist daher kausal:

$$\mathbf{x}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square - u_1 \\ \dots \\ x_{2,2}^\square \\ x_{1,1}^\square + x_{2,1}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square + (x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)^3 \\ \quad + \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square) + u_2 \\ \dots \\ x_{3,2}^\square \\ x_{1,2}^\square x_{3,2}^\square - \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square) \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{2,1}^\square \\ x_{3,1}^\square \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square.$$

**Auswahl mit dem Ziel, eine möglichst einfache Transformationsvorschrift zu erhalten**

Eine Alternative zu der oben durchgeführten Transformation stellt die Auswahl der linear unabhängigen Zeilen 1,4,7,10,13,2,3 (nach Ausgängen sortiert) aus der Beobachtbarkeitsmatrix dar. Diese Zeilen enthalten nur Konstanten und hängen nicht von den Zustandsgrößen ab. Man erhält drei Subsysteme mit den Ordnungen  $n_1 = 5$ ,  $n_2 = 1$  sowie  $n_3 = 1$  sowie eine lineare Transformationsvorschrift auf NBKNF der Form

$$\mathbf{x}^\square(k) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ x_{1,4}^\square \\ x_{1,5}^\square \\ \dots \\ x_{2,1}^\square \\ \dots \\ x_{3,1}^\square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_7 \\ x_2 - u_1 \\ x_1 + x_3 - x_4 - u_1(k+1) + u_2 \\ \dots \\ x_3 \\ \dots \\ x_6 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

mit der Inversen

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{1,4}^\square + u_1 \\ x_{2,1}^\square \\ x_{1,1}^\square - x_{1,5}^\square + x_{2,1}^\square - u_1(k+1) + u_2 \\ x_{1,2}^\square \\ x_{3,1}^\square \\ x_{1,3}^\square \end{bmatrix}. \quad (4.88)$$

Die konstante Jacobimatrix dieser Transformation weist eine Determinante von  $-1$  auf. Da die Transformation von den Eingangsgrößen abhängt, liefert sie eine nicht kausale Systembe-

schreibung in NBKNF

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ x_{1,4}^\square \\ x_{1,5}^\square \\ x_{1,1}^\square + x_{1,2}^\square + x_{1,4}^\square - x_{1,5}^\square + x_{2,1}^\square - \cos(x_{1,4}^\square + u_1) + u_1 - u_1(k+1) \\ + (x_{1,4}^\square + u_1)^3 + (x_{1,5}^\square + u_1(k+1))^3 - u_1(k+2) + u_2 + u_2(k+1) \\ \dots \\ x_{1,1}^\square + x_{1,4}^\square - x_{1,5}^\square + x_{2,1}^\square + u_1 + (x_{1,4}^\square + u_1)^3 - u_1(k+1) + u_2 \\ \dots \\ x_{1,5}^\square - x_{1,1}^\square - x_{2,1}^\square + x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square - (x_{1,4}^\square + u_1)^3 + u_1(k+1) - u_2 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{2,1}^\square \\ x_{3,1}^\square \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square.
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

■

Für die Herleitung der Transformation von NBKNF auf ENBNF erweist sich die Darstellung der Inversen der  $j$ -ten Ausgangsfunktion in ENBNF nur in Abhängigkeit der Aus- und Eingangsgrößen als notwendig. Aus

$$\begin{aligned}
 x_{1,n_1}^*(k) &= h_1^{*-1}(y_1(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)) \\
 x_{2,n_2}^*(k) &= h_2^{*-1}(x_{1,n_1}^*(k), y_2(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_2,0]}(k)) \\
 &= h_2^{*-1}(h_1^{*-1}(y_1(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)), y_2(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_2,0]}(k))
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

folgt durch rekursives Einsetzen der Funktionen  $h_\mu^{*-1}$  ( $\mu = 1, \dots, j-1$ ) in  $h_j^{*-1}$  die Funktion

$$\begin{aligned}
 h_j^{*-1}(x_{1,n_1}^*(k), \dots, x_{j-1,n_{j-1}}^*(k), y_j(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,0]}) = \\
 \bar{h}_j^{*-1}(y_1(k), y_2(k), \dots, y_j(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k));
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

$\bar{h}_j^{*-1}$  hängt nur noch von Aus- und Eingangsgrößen, aber nicht vom Zustandsvektor  $\mathbf{x}^*(k)$  ab (s. auch [33]). Die Transformationsvorschrift von NBKNF auf ENBNF erhält man aus der

Struktur der ENBNF nach Gl. (4.78). Für das  $j$ -te Subsystem gilt

$$\begin{aligned}
x_{j,n_j}^*(k) &= \bar{h}_j^{*-1}(y_1(k), \dots, y_j(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)) \\
x_{j,n_j-1}^*(k) &= x_{j,n_j}^*(k+1) - f_{j,n_j-1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_j,\min(0,n_\xi-n_j)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,n_1-n_j+1]}(k)) \\
&= \bar{h}_j^{*-1}(y_1(k+1), \dots, y_j(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n_1,1]}(k)) \\
&\quad - f_{j,n_j-1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_j,\min(0,n_\xi-n_j)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j,n_1-n_j+1]}(k)) \\
x_{j,n_j-2}^*(k) &= x_{j,n_j-1}^*(k+1) - f_{j,n_j-2}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[2-n_j,\min(0,n_\xi-n_j+1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n_j,n_1-n_j+2]}(k)) \\
&= \bar{h}_j^{*-1}(y_1(k+2), \dots, y_j(k+2), \bar{\mathbf{u}}_{[3-n_1,2]}(k)) \\
&\quad - f_{j,n_j-1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[2-n_j,\min(1,n_\xi-n_j+1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n_j,n_1-n_j+2]}(k)) \\
&\quad - f_{j,n_j-2}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[2-n_j,\min(0,n_\xi-n_j+1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n_j,n_1-n_j+2]}(k)) \\
&\quad \vdots \\
x_{j,1}^*(k) &= \bar{h}_j^{*-1}(y_1(k+n_j-1), \dots, y_j(k+n_j-1), \bar{\mathbf{u}}_{[n_j-n_1,n_j-1]}(k)) \\
&\quad - \sum_{\mu=1}^{n_j-1} f_{j,\mu}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[-1,\min(\mu-1,n_\xi-2)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1,n_1-1]}(k)).
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Ersetzt man in Gl. (4.92)  $y_\xi(k+\mu)$  durch  $x_{\xi,\mu+1}^\square(k)$  für  $\mu = 0, 1, \dots, n_\xi-1$ , dann wird der Grund für die vorgeschriebene Reihenfolge der Subsysteme entsprechend ihrer Ordnung deutlich. Sie weist folgenden Vorzug auf: Alle auftretenden aktuellen und zukünftigen Ausgangswerte  $y_\xi(k+\nu)$  mit  $\nu = 0, 1, \dots, n_\xi-1$  und  $\xi = 1, 2, \dots, j$  im Argument von  $\bar{h}_j^{*-1}$  sind durch Komponenten von  $\mathbf{x}_1^\square(k), \dots, \mathbf{x}_j^\square(k)$  ersetzbar. Gleiches gilt für die in den Argumenten der Funktionen  $f_{j,\mu}^*$  enthaltenen Werte der Ausgangsgrößen: In den dort auftretenden Folgen  $\bar{\mathbf{y}}_{[.,\min(.,.)]}^\diamond(k)$  (s. Gl. (4.81)) sind neben Altwerten nur Verschiebungen von  $y_\xi(k)$  enthalten, die man durch Komponenten von  $\mathbf{x}_\xi^\square(k)$  ersetzen kann.

Die genannten Einschränkungen sind im Gegensatz zu dem Ansatz in [33] notwendig, da dort Zukunftswerte der Ausgangsgrößen  $y_\xi(k+\mu-1)$  mit  $\mu > n_\xi$ , die man nicht mehr durch Komponenten von  $\mathbf{x}_\xi^\square(k)$  ersetzen kann, mit Hilfe von  $f_{\xi,n_\xi}^{\square\mu-n_\xi}(\mathbf{x}^\square(k))$  berechnet werden. Da in dieser Arbeit der Mehrgrößenfall als Erweiterung zu [33] auch für Systeme mit Eingangsgrößen Beachtung findet, würde eine Verwendung der Systemfunktion in NBKNF zur Erzeugung von weiteren Zukunftswerten der Ausgänge i. a. auch weitere Zukunftswerte der Eingangsgrößen erforderlich machen. Dieses ist unbedingt zu vermeiden, da z. B. eben die Auswahl der Transformation auf NBKNF es unter Umständen ermöglicht, Zukunftswerte der Eingänge zu verhindern. Der dabei erforderliche Aufwand wäre sinnlos, wenn die Transformation von NBKNF auf ENBNF dennoch von zukünftigen Eingangsgrößen abhängt.

Auf die Darstellung der Transformation nach Ersetzen der Ausgangsgröße durch Zustandsgrößen der NBKNF wird aus Platzgründen verzichtet. Die Rücktransformation von ENBNF auf NBKNF muß rekursiv erfolgen. Im Schritt  $\nu$  der Transformation sind die Zustände

$x_{1,\nu}^\square(k), x_{2,\nu}^\square(k), \dots, x_{m,\nu}^\square(k)$  in der angegebenen Reihenfolge zu berechnen. Im einzelnen folgt für das  $j$ -te Subsystem mit  $j = 1, 2, \dots, m$  und  $\xi = 1, 2, \dots, m$ :

1. Schritt:

$$x_{j,1}^\square(k) = \bar{h}_j^*(y_1(k), \dots, y_{j-1}(k), x_{j,n_j}^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)). \quad (4.93)$$

Dabei sind die Ausgangsgrößen  $y_1(k), \dots, y_{j-1}(k)$  durch die zuvor berechneten Zustandsgrößen  $x_{1,1}^\square(k), \dots, x_{j-1,1}^\square(k)$  zu substituieren.

2. Schritt:

$$\begin{aligned} x_{j,2}^\square(k) &= \bar{h}_j^*(y_1(k+1), \dots, y_{j-1}(k+1), \\ & x_{j,n_j-1}^*(k) + f_{j,n_j-1}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[1-n_j, \min(0, n_\xi - n_j)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_j, n_1 - n_j + 1]}(k)), \\ & \bar{\mathbf{u}}_{[2-n_1, 1]}(k) ). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Hier sind  $y_1(k+1), \dots, y_{j-1}(k+1)$  durch die zuvor in diesem Rechenschritt ermittelten Zustände  $x_{1,1}^\square(k), \dots, x_{j-1,2}^\square(k)$  und  $y_1(k), \dots, y_m(k)$  im Argument der Funktion  $f_{j,n_j-1}^*$  durch  $x_{1,1}^\square(k), \dots, x_{m,1}^\square(k)$  aus dem 1. Schritt zu ersetzen. Analog zum bisherigen Vorgehen erfolgt die Berechnung der nächsten Zustände in NBKNF. Die Rücktransformation der kleineren,  $\nu$ -ten Subsysteme mit  $\nu = j+1, \dots, m$  endet zwischenzeitlich mit dem Rechenschritt  $n_\nu \leq n_j$ . Es folgt schließlich der

$n_j$ -te Schritt:

$$\begin{aligned} x_{j,n_j}^\square(k) &= \bar{h}_j^*(y_1(k+n_j-1), \dots, y_{j-1}(k+n_j-1), \\ & x_{j,1}^*(k) + \sum_{\mu=1}^{n_j-1} f_{j,\mu}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[-1, \min(\mu-1, n_\xi - 2)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[-1, n_1 - 1]}(k)), \\ & \bar{\mathbf{u}}_{[n_j - n_1, n_j - 1]}(k) ). \end{aligned} \quad (4.95)$$

Auch hier sind die Substitutionen der Ausgangsgrößen mit Ausnahme der Altwerte durch zuvor berechnete Zustände der NBKNF erforderlich. Zum Abschluß der gesamten Rücktransformation sind für die größeren Subsysteme ( $1, \dots, j-1$ ) die, entsprechend des jeweiligen Größenunterschieds zum  $j$ -ten Subsystem, verbleibenden Rechenschritte durchzuführen. Die Rücktransformation endet schließlich nach insgesamt  $n_1$  Schritten mit der Berechnung von  $x_{1,n_1}^\square(k)$ .

Mit Hilfe der Berechnung von  $x_{j,n_j}^\square(k+1)$  durch Verschiebung der Gleichung (4.95) um einen Schritt in die Zukunft und dem Vergleich mit  $f_{j,n_j}^\square$ , der letzten Komponente der Systemfunkt-

tion des  $j$ -ten Subsystems nach Gl. (3.23) erhält man

$$\begin{aligned} f_{j,n_j}^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)) &= \bar{h}_j^*(y_1(k+n_j), \dots, y_{j-1}(k+n_j), \\ & f_{j,0}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[0,\min(0,n_\xi-1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)) + \sum_{\mu=1}^{n_j-1} f_{j,\mu}^*(\bar{\mathbf{y}}_{[0,\min(\mu,n_\xi-1)]}^\diamond(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)), \quad (4.96) \\ & \bar{\mathbf{u}}_{[n_j-n_1+1,n_j]}(k) ). \end{aligned}$$

Die Umformung und das Einsetzen der Zustände der NBKNF, wobei im Argument von  $\bar{h}_j^*$

$$\begin{aligned} y_\nu(k+n_j) &= x_{\nu,n_j}^\square(k+1) = \begin{cases} x_{\nu,n_j+1}^\square(k) & \text{für } n_\nu > n_j \\ f_{\nu,n_\nu}^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)) & \text{für } n_\nu = n_j \end{cases} \quad (4.97) \\ \text{mit } \nu &= 1, 2, \dots, j-1 \end{aligned}$$

zu berücksichtigen ist, liefert schließlich die Beziehung

$$\begin{aligned} \bar{h}_j^{*-1}(x_{1,n_j}^\square(k+1), \dots, x_{j-1,n_j}^\square(k+1), f_{j,n_j}^\square(\mathbf{x}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)), \bar{\mathbf{u}}_{[n_j-n_1+1,n_j]}(k)) = \\ \sum_{\mu=0}^{n_j-1} f_{j,\mu}^*(\bar{\mathbf{x}}_\mu^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[0,n_1]}(k)) \quad (4.98) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_\mu^\square(k) &= x_{1,1}^\square(k), \dots, x_{1,\mu+1}^\square(k), \dots \\ & \dots, x_{j,1}^\square(k), \dots, x_{j,\mu+1}^\square(k), x_{j+1,1}^\square(k), \dots, x_{j+1,\min(\mu+1,n_{j+1})}^\square(k) \dots \\ & x_{m,1}^\square(k), \dots, x_{m,\min(\mu+1,n_m)}^\square(k). \quad (4.99) \end{aligned}$$

*Satz 4.4:*

Ein System (2.1) mit  $p$  Eingangs- und  $m$  Ausgangsgrößen ist äquivalent zu einem System in ENBNF, wenn

1. das System lokal stark beobachtbar ist, also eine Systemdarstellung in NBKNF existiert, und
2. eindeutig invertierbare Ausgangsfunktionen  $h_1^*, \dots, h_m^*$  und Funktionen  $f_{j,\mu}^*$  ( $j = 1, 2, \dots, m$  und  $\mu = 0, 1, \dots, n_j - 1$ ) existieren, die, nach Umrechnung der Ausgangsfunktionen in  $\bar{h}_1^*, \dots, \bar{h}_m^*$  gemäß Gl. (4.91), die Gleichung (4.98) erfüllen.

Die Berechnung der Systemdarstellung in ENBNF ist lediglich möglich, wenn die Systemdarstellung in NBKNF explizit angebar ist.

■

Im Vergleich zu Systemen mit nur einer Ausgangsgröße werden einige wesentliche Unterschiede deutlich:

- Gleichung (4.98) ist nur dann generell erfüllbar, wenn alle Subsysteme die gleiche Ordnung aufweisen. Ist z. B. in der Funktion  $f_{j,n_j}^\square$  in der linken Seite von Gl. (4.98) der Zustand  $x_{\mu,\nu}^\square$  mit  $\mu < j$  und  $\nu > n_j$  enthalten, kann dieser nur für  $\nu = n_j + 1$  durch eine entsprechende Wahl von  $\bar{h}_j^{*-1}$  (falls möglich) eliminiert werden, da dieser Zustand in der rechten Seite der Gleichung nicht enthalten ist. Gilt  $\nu > n_j + 1$ , ist die Bedingung auf keinen Fall erfüllbar. Im Vergleich zu dem Mehrgrößenfall aus [33] ergibt sich dennoch eine größere Klasse von Systemen, für die eine ENBNF angebar ist, da nach [33] in der NBKNF nur Produktterme der  $m$  Zustände in NBKNF erlaubt sind, die der gleichen Verschiebung des zugehörigen Subsystemausgangs entsprechen. Dieses ist bei dem hier vorgestellten Verfahren durch die Verwendung von Altwerten der Ausgänge nicht der Fall. Der Vorteil, der sich zudem in [33] bei gleich großen Subsystemen ergibt, ist lediglich eine einfachere Struktur der Bedingungen und nicht, wie für das hier vorgestellte Verfahren, deren generelle Erfüllbarkeit.
- Es ist bei Subsystemen mit ungleichen Ordnungen i. a. nicht mehr möglich, eine kausale Darstellung in ENBNF anzugeben, da  $f_{j,n_j}^\square$  von  $\mathbf{u}(k + n_1)$  abhängen kann. Dieser Zukunftswert kann für  $n_j < n_1$  nicht durch  $\bar{h}_j^{*-1}$  eliminiert werden, da hier lediglich Zukunftswerte bis  $\mathbf{u}(k + n_j)$  enthalten sind. Auch die Abhängigkeit einer der Funktionen  $f_{j,\mu}^*$  von  $\mathbf{u}(k + n_1)$  führt für  $n_j < n_1$  in ENBNF auf die Abhängigkeit von  $\mathbf{u}(k + n_1 - \mu)$  mit  $\mu < n_1 - 1$ .

Folgendes Beispiel soll das Vorgehen bei der Transformation von NBKNF auf ENBNF veranschaulichen.

#### Beispiel 4.5:

Gegeben ist die Systemdarstellung (4.86) in NBKNF aus Beispiel 4.4. Es gilt also

$$\begin{aligned}
 f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) &= x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square - u_1, \\
 f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) &= x_{1,1}^\square + x_{2,1}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square + (x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)^3 \\
 &\quad + \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square) + u_2, \\
 f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) &= x_{1,2}^\square x_{3,2}^\square - \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square).
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Die Bedingungen (4.98) für die Transformation auf ENBNF lauten

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1^{*-1}(f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{1,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) \\
&\quad + f_{1,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) \\
&\quad + f_{1,2}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{1,3}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2), \\
\bar{h}_2^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{2,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) \\
&\quad + f_{2,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2), \\
\bar{h}_3^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}), f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{3,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) \\
&\quad + f_{3,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2),
\end{aligned} \tag{4.101}$$

und lassen sich durch die Wahl

$$\begin{aligned}
\bar{h}_1^{*-1}(f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\
f_{1,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= -x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square - u_1 \\
f_{1,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= x_{2,2}^\square + x_{3,2}^\square \\
f_{1,2}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{1,3}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= 0, \\
\bar{h}_2^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\
f_{2,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= x_{1,1}^\square + x_{2,1}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + u_2 \\
f_{2,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= x_{3,2}^\square + (x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)^3 \\
&\quad + \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square), \\
\bar{h}_3^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}), f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\
f_{3,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= 0 \\
f_{3,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= x_{1,2}^\square x_{3,2}^\square - \cos(x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

erfüllen. Da die Funktionen  $\bar{h}_1^*$ , ...,  $\bar{h}_3^*$  Identitäten darstellen, gilt dieses auch für die Funktionen

$h_1^*, \dots, h_3^*$ . Für die Transformation von NBKNF auf ENBNF folgt

$$\begin{aligned}
x_{1,3}^* &= x_{1,1}^\square \\
x_{1,2}^* &= x_{1,2}^\square - 0 \\
x_{1,1}^* &= x_{1,3}^\square - x_{2,1}^\square - x_{3,1}^\square \\
x_{2,2}^* &= x_{2,1}^\square \\
x_{2,1}^* &= x_{2,2}^\square - x_{3,1}^\square - (x_{2,1}^\square - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,1}^\square)^3 \\
&\quad - \cos(x_{2,1}^\square - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,1}^\square) \\
x_{3,2}^* &= x_{3,1}^\square \\
x_{3,1}^* &= x_{3,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + \cos(x_{2,1}^\square - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,1}^\square).
\end{aligned} \tag{4.103}$$

Die rekursive Berechnung der inversen Transformationsvorschrift ergibt

$$\begin{aligned}
x_{1,1}^\square &= x_{1,3}^* \\
x_{2,1}^\square &= x_{2,2}^* \\
x_{3,1}^\square &= x_{3,2}^* \\
x_{1,2}^\square &= x_{1,2}^* \\
x_{2,2}^\square &= x_{2,1}^* + x_{3,2}^* + (x_{2,2}^* - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,2}^*)^3 \\
&\quad + \cos(x_{2,2}^* - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,2}^*) \\
x_{3,2}^\square &= x_{3,1}^* + x_{1,3}^* x_{3,2}^* + \cos(x_{2,2}^* - y_1(k-1)y_3(k-1) + x_{3,2}^*) \\
x_{1,3}^\square &= x_{1,1}^* + x_{2,2}^* + x_{3,2}^*.
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4.103), (4.104) und (4.86) läßt sich schließlich die Systemdarstel-

lung in ENBNF

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -y_1 y_3 - u_1 \\ x_{1,1}^* & +y_2 + y_3 \\ x_{1,2}^* & +0 \\ \dots & \dots \\ 0 & +y_1 + y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ x_{2,1}^* & +y_3 + (y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3)^3 \\ & + \cos(y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3) \\ \dots & \dots \\ 0 & +0 \\ x_{3,1}^* & +y_1 y_3 + \cos(y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3) \end{bmatrix}, \quad (4.105)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_{1,3}^* \\ x_{2,2}^* \\ x_{3,2}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*, \quad y_1(-1) = y_{1,1}, \quad y_3(-1) = y_{3,1}$$

angeben. Der Beobachter

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -y_1 y_3 - u_1 \\ \hat{x}_{1,1}^* & +y_2 + y_3 \\ \hat{x}_{1,2}^* & +0 \\ \dots & \dots \\ 0 & +y_1 + y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \hat{x}_{2,1}^* & +y_3 + (y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3)^3 \\ & + \cos(y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3) \\ \dots & \dots \\ 0 & +0 \\ \hat{x}_{3,1}^* & +y_1 y_3 + \cos(y_2 - y_1(k-1)y_3(k-1) + y_3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{1,0}(y_1 - x_{1,3}^*) \\ q_{1,1}(y_1 - x_{1,3}^*) \\ q_{1,2}(y_1 - x_{1,3}^*) \\ \dots \\ q_{2,0}(y_2 - x_{2,2}^*) \\ q_{2,1}(y_2 - x_{2,2}^*) \\ \dots \\ q_{3,0}(y_3 - x_{3,2}^*) \\ q_{3,1}(y_3 - x_{3,2}^*) \end{bmatrix}, \quad (4.106)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,3}^* \\ \hat{x}_{2,2}^* \\ \hat{x}_{3,2}^* \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}^*(1) = \hat{\mathbf{x}}_0^*$$

führt schließlich für  $k \geq 1$  auf die lineare Differenzgleichung des Beobachterfehlers in

ENBNF

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -q_{1,0} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -q_{1,1} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q_{1,2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -q_{2,0} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & -q_{2,1} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -q_{3,0} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1 & -q_{3,1} \end{bmatrix} \mathbf{e}^*(k), \quad \mathbf{e}^*(1) = \mathbf{e}_0^*. \quad (4.107)$$

Die Eigenwerte des  $j$ -ten entkoppelten Subsystems dieser Fehlerdynamik sind durch die charakteristischen Koeffizienten  $q_{j,\nu}$  mit  $\nu = 0, 1, \dots, n_\nu - 1$  vorgebar. Mit Hilfe der inversen Transformationsvorschriften (4.104) und (4.85) gelingt schließlich die Berechnung des Beobachterzustands  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  in ANDF.

Die, ebenfalls Bedingung (4.98) erfüllende, Wahl der Freiheitsgrade

$$\begin{aligned} \bar{h}_1^{*-1}(f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\ f_{1,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= 0 \\ f_{1,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= 0 \\ f_{1,2}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{1,3}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= f_{1,3}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}), \\ \bar{h}_2^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\ f_{2,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= 0 \\ f_{2,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\ \bar{h}_3^{*-1}(x_{1,3}^\square, f_{2,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}), f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u})) &= f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \\ f_{3,0}^*(x_{1,1}^\square, x_{2,1}^\square, x_{3,1}^\square, u_1, u_2) &= 0 \\ f_{3,1}^*(x_{1,1}^\square, x_{1,2}^\square, x_{2,1}^\square, x_{2,2}^\square, x_{3,1}^\square, x_{3,2}^\square, u_1, u_2) &= f_{3,2}^\square(\mathbf{x}^\square, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.108)$$

erlaubt auch den Entwurf der ENBNF-Beobachter 2, 3 oder 4 für die einzelnen Subsysteme.

Für die zweite, in Beispiel 4.4 dargestellte Wahl der (in diesem Fall linearen) Transformation auf NBKNF gelingt es nicht, die zweite Bedingung nach Satz 4.4 zu erfüllen. Eine auf dieser Systemdarstellung in NBKNF basierende Darstellung in ENBNF existiert daher nicht.

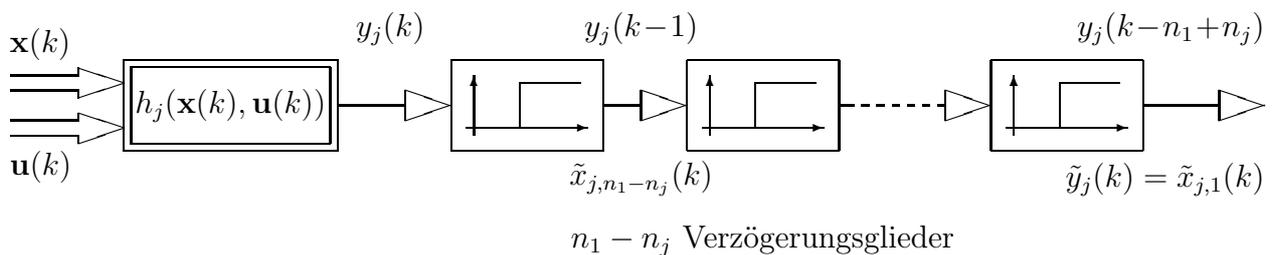
■

Die Existenz verschiedener Beobachtbarkeitsnormalformen eines Systems führt dazu, daß, im Gegensatz zu Systemen mit einer Ausgangsgröße, die Darstellung in ENBNF nicht zwangsläufig über die NBKNF gefunden wird. Im obigen Beispiel gelingt eine Transformation auf ENBNF lediglich für eine der beiden zuvor ermittelten Systemdarstellungen in NBKNF. Da die Transformation von ENBNF auf NBKNF immer eindeutig und invertierbar ist<sup>8</sup>, folgt aber stets aus der Existenz der Systemdarstellung in ENBNF auch die Existenz einer zugehörigen Darstellung in NBKNF, die somit eine notwendige Bedingung für die ENBNF darstellt.

Die Transformation von NBKNF auf ENBNF ist immer auffindbar, wenn alle  $m$  Subsysteme die gleiche Ordnung  $n_1 = n_2 = \dots = n_m = \frac{n}{m}$  aufweisen. Dieses setzt neben  $\frac{n}{m} \in \mathbb{N}$  auch voraus, daß sich jeder Ausgang  $\frac{n}{m}$ -mal zur Beobachtungsaufgabe verwenden läßt. Im nachstehenden Unterabschnitt wird eine geeignete Systemerweiterung vorgestellt, die diese Systemeigenschaft gewährleistet.

### 4.2.3 Systemerweiterung mit dem Ziel gleich großer Subsysteme

Der Ausgang  $y_j(k)$ , dessen zugehöriges Subsystem  $j$  in NBKNF mit  $n_j < n_1$  eine zu kleine Ordnung aufweist, ist  $(n_1 - n_j)$ -mal zu verzögern. Der Ausgang  $\tilde{y}_j(k)$  dieser Serienschaltung von  $n_1 - n_j$  Verzögerungsgliedern stellt dann den neuen, für die Auswahl der Transformation auf NBKNF zu verwendenden Ausgang  $\tilde{y}_j(k) = y_j(k - n_1 + n_j)$  dar. Die Ausgänge der Verzögerer sind dabei neue Zustände  $\tilde{x}_{j,n_1-n_j-\mu+1}(k) = y_j(k - \mu)$  des Systems. Eine Erweiterung des  $j$ -ten Ausgangs hat die in Bild 4.10 dargestellte Struktur.



**Bild 4.10:** Blockschaltbild des erweiterten,  $j$ -ten Systemausgangs

Nach Erweiterung der zu kleinen Subsysteme 2 bis  $m$  nimmt der Zustandsvektor des erwei-

<sup>8</sup>Freiheitsgrade existieren in dieser Richtung nicht, da die Funktionen  $h_j^*$  und  $f_{j,\mu}^*$  ja bereits durch die ENBNF vorgegeben sind.

terten Systems die Form

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{2,1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2,n_1-n_2}(k) \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{m,1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,n_1-n_m}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ \dots\dots\dots \\ y_2(k - n_1 + n_2) \\ \vdots \\ y_2(k - 1) \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ y_m(k - n_1 + n_m) \\ \vdots \\ y_m(k - 1) \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

an. Die Systembeschreibung lautet demnach

$$\tilde{\mathbf{x}}(k+1) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{2,2}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{2,n_1-n_2}(k) \\ h_2(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \tilde{x}_{m,2}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,n_1-n_m}(k) \\ h_m(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ \tilde{x}_{2,1}(k) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{m,1}(k) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \tilde{\mathbf{x}}_0. \quad (4.110)$$

Die neuen Komponenten der Systembeschreibung entsprechen strukturell einer Beobachtbarkeitsnormalform. Aus einem lokal stark beobachtbaren System  $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$  resultiert somit auch ein lokal stark beobachtbares, erweitertes System (4.110). Ein Nachteil des vorgestellten Verfahrens besteht in der Verwendung einer veralteten Information über den Systemausgang, obwohl aktuelle Meßwerte vorliegen. Mit anderen Worten, eine Veränderung der Systemzustände, z. B. durch nicht meßbare Störungen, wird dann bei der Beobachtung des Systems erst entsprechend verzögert berücksichtigt.

## 5 Beobachterentwurf nach Ciccarella et al.

CICCARELLA ET AL. stellen in den Arbeiten [54] und [55] einen approximativen Beobachterentwurf für nichtlineare zeitdiskrete Systeme mit einer Ausgangs- und mehreren Eingangsgrößen vor. Dieses Kapitel ist zunächst der Darstellung des exakten Beobachterentwurfs gewidmet, der dem approximativen Ansatz in [55] zugrunde liegt. Als Erweiterung erfolgt anschließend die Herleitung einer alternativen Beobachterberechnung sowie die Anwendung des Verfahrens auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen.

### 5.1 Systeme mit einer Ausgangsgröße

Der Beobachterentwurf nach CICCARELLA ET AL. basiert auf der Transformation des Zustands  $\mathbf{x}(k - n + 1)$  auf Beobachtbarkeitsnormalform. Die Zustände dieser Normalform entsprechen somit den Ausgangswerten  $y(k - n + 1), \dots, y(k)$ . Die Reihenfolge der Zustände wurde in den sich anschließenden Darstellungen im Vergleich zu [54] und [55] vertauscht, um eine Analogie zu der NBKNF aus Kapitel 3 herzustellen. Da die von CICCARELLA ET AL. betrachtete Normalform eine um  $n - 1$  Schritte in die Vergangenheit verschobene NBKNF darstellt, wird sie als NABKNF (*nichtlineare Alt-Beobachtbarkeitsnormalform*) bezeichnet. Aufgrund der Analogie zur NBKNF heißt der Zustandsvektor der NABKNF ebenfalls  $\mathbf{x}^\square(k)$ . Die Transformationsvorschrift auf NABKNF entspricht der um  $n - 1$  Schritte in die Vergangenheit verschobene Abbildung  $\mathbf{t}^\square$  nach Gl. (3.4). Es gilt also

$$\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k - n + 1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)). \quad (5.1)$$

Als Erweiterung zu [54] und [55] werden auch Systeme mit Durchgangsanteil behandelt, deren Beobachtung die Kenntnis von  $\mathbf{u}(k + 1)$  erfordert. Bei Systemen ohne Durchgangsanteil sind keine Zukunftswerte der Eingangsgrößen notwendig. Die Systemdarstellung in NABKNF

$$\mathbf{x}^\square(k + 1) = \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \vdots \\ x_n^\square(k) \\ y(k + 1) \end{bmatrix}, \quad y(k) = x_n^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square \quad (5.2)$$

liefert für  $k \geq n - 1$  den **NABKNF-Beobachter 1**

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^\square(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n^\square(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_O \begin{bmatrix} \hat{x}_1^\square(k) - y(k-n+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}^\square(k) - y(k-1) \\ \hat{x}_n^\square(k) - y(k) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(0) = \hat{\mathbf{x}}_0^\square, \quad k \geq n - 1$$

mit der  $n \times n$ -Matrix  $\mathbf{K}_O$ . Bild 5.1 zeigt das Blockschaltbild dieses Beobachters mit

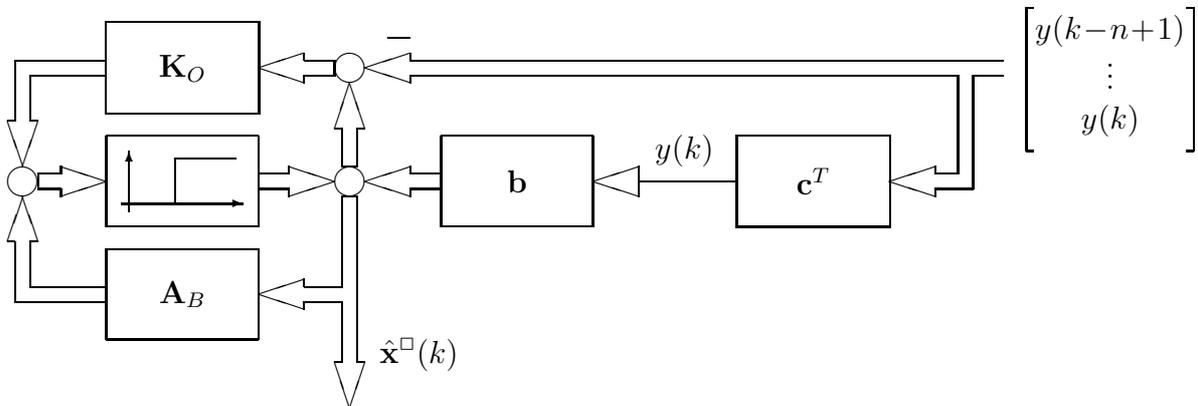
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(5.4)

und

$$\mathbf{A}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$



**Bild 5.1:** Blockschaltbild des NABKNF-Beobachters 1 nach Gl. (5.3)

Analog der Vorgehensweise bei den ENBNF-Beobachtern 2 und 4 ersetzt die Addition von  $\mathbf{b} y(k)$  hinter dem Verzögerungsglied die nicht realisierbare Addition von  $\mathbf{b} y(k+1)$  vor dem Verzögerer. Für

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & w_2 - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & w_3 - 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & w_n - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

nimmt die Differenzgleichung des Beobachterfehlers die Form

$$\mathbf{e}^\square(k+1) = \hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) - \mathbf{x}^\square(k+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & w_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & w_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & w_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\lambda w}} \mathbf{e}^\square(k), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{e}^\square(n-1) = \mathbf{e}_0^\square, \quad k \geq n-1$$

an. Die Eigenwerte der Fehlerdifferenzgleichung lauten  $\lambda_i$ , mit  $i = 1, 2, \dots, n$ . Die Wichtungsfaktoren  $w_\mu$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , ermöglichen die Vorgabe einer Kopplung zwischen den Komponenten von  $\mathbf{e}^\square(k)$ . Für  $w_\mu = 0$  liegt eine vollständige Entkopplung vor, was ein sehr günstiges Einschwingverhalten liefert. Wie bei den ENBNF-Beobachtern 3 und 4 liegt hier eine interne Rückführung des Beobachterzustands  $\hat{\mathbf{x}}^\square(k)$  über die Matrix  $\mathbf{A}_B + \mathbf{K}_O$  vor, die mit einer modalen Regelung eines Systems  $n$ -ter Ordnung mit  $n$  Eingangsgrößen vergleichbar ist. Diese Struktur erlaubt somit auch für  $w_\mu = 0$  die Vorgabe identischer Eigenwerte mit einer resultierenden, diagonalen Systemmatrix des Beobachterfehlers.

Aus der Rücktransformation von  $\hat{\mathbf{x}}^\square(k)$  geht der Zustand

$$\Psi(k) = \mathbf{t}^{\square-1}(\hat{\mathbf{x}}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) \quad (5.7)$$

hervor, der eine Schätzung für  $\mathbf{x}(k-n+1)$  darstellt. Da im Gegensatz zu [54] und [55] eine explizit angebbare Rücktransformation vorausgesetzt wird, entfällt die Notwendigkeit der Approximation durch eine Linearisierung entlang der Beobachtertrajektorie. Im Vergleich zum Beobachterentwurf via ENBNF führt diese Forderung zu keiner Einschränkung, da beide Verfahren die explizite Berechnung der inversen Transformation auf NBKNF (und damit auch auf NABKNF) erfordern.

Aus Gl. (5.3) und (5.7) folgt die Beobachtergleichung in  $\Psi$ -Koordinaten

$$\begin{aligned} \Psi(k+1) &= \mathbf{t}^{\square-1}(\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1), \bar{\mathbf{u}}_{[2-n,1]}(k)) \Big|_{\hat{\mathbf{x}}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\Psi(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k))}, \\ \Psi(n-1) &= \Psi_0, \quad k \geq n-1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Diese direkte Berechnung des Beobachters in  $\Psi$ -Koordinaten nach Gleichung (5.8) bedingt für Systeme mit Durchgangsanteil die Kenntnis des zukünftigen Eingangsvektors  $\mathbf{u}(k+1)$ . Der

Schätzwert des aktuellen Systemzustands folgt schließlich aus der  $(n-1)$ -maligen Anwendung der Systemfunktion

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F}^{n-1}(\Psi(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,-1]}(k)) \quad (5.9)$$

unter Berücksichtigung der Eingangsfolge  $\mathbf{u}(k-n+1), \dots, \mathbf{u}(k-1)$ .

Außer bei der Wahl der von der Matrix  $\mathbf{A}_{\lambda w}$  charakterisierten Dynamik des Beobachterfehlers ergeben sich beim Beobachterentwurf keine weiteren Freiheitsgrade.

### 5.1.1 Alternative Beobachterberechnung

Unter der Voraussetzung einer explizit berechenbaren Inversen der Transformationsvorschrift (5.1) kann die Systemdarstellung in NABKNF nach Gl. (5.2) auch analog zur NBKNF nach Gl. (3.2) in der Form

$$\mathbf{x}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \vdots \\ x_n^\square(k) \\ f_n^\square(x_1^\square(k), \dots, x_n^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$y(k) = x_n^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square$$

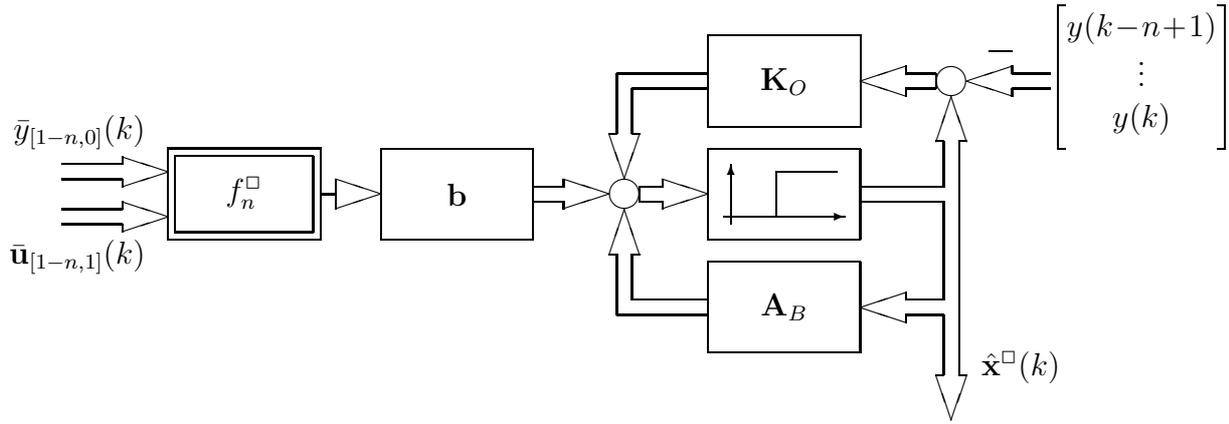
angegeben werden. Bei Systemen mit Durchgangsanteil tritt bereits jetzt der zukünftige Eingangsvektor  $\mathbf{u}(k+1)$  auf. Ein auf Gl. (5.10) basierender Beobachter mit einer Fehlerdifferenzgleichung (5.6) lautet

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^\square(k) \\ \vdots \\ \hat{x}_n^\square(k) \\ f_n^\square(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,1]}(k)) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_O \begin{bmatrix} \hat{x}_1^\square(k) - y(k-n+1) \\ \vdots \\ \hat{x}_{n-1}^\square(k) - y(k-1) \\ \hat{x}_n^\square(k) - y(k) \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(0) = \hat{\mathbf{x}}_0^\square$$

mit  $\mathbf{K}_O$  nach Gl. (5.5). Das Blockschaltbild dieses, im folgenden mit **NABKNF-Beobachter 2** bezeichneten, Entwurfs stellt Bild 5.2 mit der in Gl. (5.4) angegebenen Notation dar.

Die Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  erfolgt, wie bereits für den NABKNF-Beobachter 1 beschrieben, mit Hilfe der Rücktransformation von  $\hat{\mathbf{x}}^\square(k)$  gemäß Gl. (5.7) oder mittels direkter Berechnung des Beobachters in  $\Psi$ -Koordinaten nach Gl. (5.8) mit jeweils anschließender  $(n-1)$ -maliger Anwendung der Systemfunktion auf den Schätzvektor  $\Psi(k)$  entsprechend Gl. (5.7).



**Bild 5.2:** Blockschaltbild des NABKNF-Beobachters 2 nach Gl. (5.11)

## 5.2 Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen

Die in diesem Abschnitt behandelte Anwendung des Beobachterentwurfs via NABKNF auf Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen setzt wiederum die bereits in Abschnitt 3.3 dargestellte Sortierung der Ausgänge voraus, aus der in NABKNF Subsysteme mit den Ordnungen  $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m$  hervorgehen. Die Transformation auf NABKNF basiert auf dem Zustand  $\mathbf{x}(k - n_1 + 1)$ , da dann in der Systemfunktion des ersten Subsystems in NABKNF gerade  $y_1(k + 1)$  erscheint. Auf den vom Beobachter gelieferten Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}(k - n_1 + 1)$  ist dann  $(n_1 - 1)$  Mal die Systemfunktion mit der Eingangsfolge  $\mathbf{u}(k - n_1 + 1), \dots, \mathbf{u}(k - 1)$  anzuwenden.

Die Systemdarstellung in NABKNF lautet mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}^\square(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^\square(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m^\square(k) \end{bmatrix}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_j^\square(k) = \begin{bmatrix} x_{j,1}^\square(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}^\square(k) \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

$$\mathbf{x}_j^\square(k+1) = \begin{bmatrix} x_{j,2}^\square(k) \\ \vdots \\ x_{j,n_j}^\square(k) \\ y_j(k+1-n_1+n_j) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Die Transformationsvorschrift auf NABKNF weist in Analogie zum Eingrößenfall die Form

$$\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{t}^\square(\mathbf{x}(k - n_1 + 1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)) = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^\square(\mathbf{x}(k - n_1 + 1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1,0]}(k)) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_j^\square(\mathbf{x}(k - n_1 + 1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, n_j - n_1]}(k)) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_m^\square(\mathbf{x}(k - n_1 + 1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, n_m - n_1]}(k)) \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

mit

$$\mathbf{t}_j^\square(\mathbf{x}(k-n_1+1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, n_j-n_1]}(k)) = \begin{bmatrix} h_j(\mathbf{F}^0(\mathbf{x}(k-n_1+1)), \mathbf{u}(k-n_1+1)) \\ h_j(\mathbf{F}^1(\mathbf{x}(k-n_1+1), \mathbf{u}(k-n_1+1)), \mathbf{u}(k-n_1+2)) \\ \vdots \\ h_j(\mathbf{F}^{n_j-1}(\mathbf{x}(k-n_1+1), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, n_j-n_1-1]}(k)), \mathbf{u}(k-n_1+n_j)) \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

auf. Die mögliche Auswahl der Komponenten der Transformation auf NABKNF und die damit einhergehende Bestimmung der Subsystemordnungen  $n_j$  erfolgt entsprechend der in Abschnitt 3.3 dargestellten Vorgehensweise.

In der Systemdarstellung in NABKNF nach Gl. (5.12) hat der im  $j$ -ten Subsystem erscheinende Ausgangswert  $y_j(k+1-n_1+n_j)$  i. a. nur für  $j = 1$  den eigentlich gewünschten Laufindex  $k + 1$ . Alle anderen Subsysteme ( $j > 1$ ) weisen einen Laufindex kleiner oder gleich  $k + 1$  auf. Die Beobachterberechnung in NABKNF des  $j$ -ten Subsystems mit  $2 \leq j \leq m$  erfolgt daher mit einem älteren Wert der zugehörigen Ausgangsgröße. Dieses ist vergleichbar mit dem Beobachterentwurf via ENBNF bei nicht erfüllter Bedingung (4.98). Aufgrund der dann erforderlichen Systemerweiterung nach Gl. (4.110) bleiben die aktuellen Ausgangsgrößen der Subsysteme 2 bis  $m$  ebenfalls unberücksichtigt.

Weisen in NABKNF alle Subsysteme die gleiche Ordnung auf, erfolgt die Beobachterberechnung, wie im Eingrößenfall, mit den aktuellsten Meßwerten der Ausgangsgrößen. Mit Ausnahme dieses Spezialfalls erfolgt die Beobachterberechnung via NABKNF jedoch stets mit veralteten Ausgangswerten, was bei der Berechnung via ENBNF nur bei nicht erfüllter Bedingung (4.98) der Fall ist.

Der Beobachterentwurf in NABKNF entspricht aufgrund der Entkopplung der  $m$  Subsysteme (s. Gl. (5.12)) dem Eingrößenfall. Die Rücktransformation  $\mathbf{t}^{\square-1}(\hat{\mathbf{x}}^\square(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, 0]}(k))$  des gesamten Beobachterzustands in NABKNF führt auf  $\Psi(k)$ , dem Schätzwert des Systemzustands in ANDF zum Zeitpunkt  $k-n_1+1$ . Die  $(n_1-1)$ -malige Anwendung der Systemfunktion  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F}^{n_1-1}(\Psi(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n_1, -1]}(k))$  führt schließlich auf den Schätzwert des aktuellen Systemzustands.

### Beispiel 5.1:

Zur Veranschaulichung des dargestellten Beobachterentwurfs dient das bereits in Beispiel 4.4 dargestellte System (4.83) siebter Ordnung mit drei Ausgangsgrößen. Die in Beispiel 4.4 durchgeführte Auswahl der Transformation mit dem Ziel möglichst gleich großer Subsysteme, also eine Auswahl entsprechend der Beobachtbarkeits-Indizes, liefert drei Subsysteme der Ordnungen  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$  und  $n_3 = 2$ . Die resultierende Transformation auf NABKNF, die

wegen  $n_1 = 3$  auf dem Zustand  $\mathbf{x}(k-2)$  beruht, lautet

$$\mathbf{x}^\square = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ \dots \\ x_{2,1}^\square \\ x_{2,2}^\square \\ \dots \\ x_{3,1}^\square \\ x_{3,2}^\square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(k-2) \\ y_1(k-1) \\ y_1(k) \\ \dots \\ y_2(k-2) \\ y_2(k-1) \\ \dots \\ y_3(k-2) \\ y_3(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(k-2) \\ x_5(k-2) \\ x_7(k-2) \\ \dots \\ x_3(k-2) \\ x_2(k-2) + x_2(k-2)^3 + x_4(k-2) \\ \dots \\ x_6(k-2) \\ x_1(k-2)x_6(k-2) - x_2(k-2)^3 - x_4(k-2) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

mit der Inversen

$$\mathbf{x}(k-2) = \begin{bmatrix} x_{1,1}^\square \\ x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square \\ x_{2,1}^\square \\ x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square - x_{3,2}^\square - (x_{2,2}^\square - x_{1,1}^\square x_{3,1}^\square + x_{3,2}^\square)^3 \\ x_{1,2}^\square \\ x_{3,1}^\square \\ x_{1,3}^\square \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Auf die Angabe des Laufindex  $k$  wird wiederum aus Platzgründen verzichtet. Ausnahmen stellen lediglich die Ausgangsgrößen und zeitlich verschobene Größen dar. Die Systemdarstellung in NABKNF hat die Form

$$\mathbf{x}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} y_1(k-1) \\ y_1(k) \\ y_1(k+1) \\ \dots \\ y_2(k-1) \\ y_2(k) \\ \dots \\ y_3(k-1) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,2}^\square \\ x_{1,3}^\square \\ y_1(k+1) \\ \dots \\ x_{2,2}^\square \\ y_2(k) \\ \dots \\ x_{3,2}^\square \\ y_3(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square, \quad (5.17)$$

für die der Beobachter

$$\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,2}^\square \\ \hat{x}_{1,3}^\square \\ y_1(k+1) \\ \dots \\ \hat{x}_{2,2}^\square \\ y_2(k) \\ \dots \\ \hat{x}_{3,2}^\square \\ y_3(k) \end{bmatrix} + \mathbf{K}_O \begin{bmatrix} \hat{x}_{1,1}^\square - y_1(k-2) \\ \hat{x}_{1,2}^\square - y_1(k-1) \\ \hat{x}_{1,3}^\square - y_1(k) \\ \dots \\ \hat{x}_{2,1}^\square - y_2(k-2) \\ \hat{x}_{2,2}^\square - y_2(k-1) \\ \dots \\ \hat{x}_{3,1}^\square - y_3(k-2) \\ \hat{x}_{3,2}^\square - y_3(k-1) \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}}^\square(0) = \hat{\mathbf{x}}_0^\square \quad (5.18)$$

mit

$$\mathbf{K}_O = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & w_{1,2} - 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{1,2} & w_{1,3} - 1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{1,3} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_{2,1} & w_{2,2} - 1 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_{2,2} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \lambda_{3,1} & w_{3,2} - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_{3,2} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

auf die lineare Fehlerdifferenzgleichung für  $k \geq 2$

$$\mathbf{e}^\square(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & w_{1,2} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{1,2} & w_{1,3} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{1,3} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_{2,1} & w_{2,2} & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_{2,2} & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \lambda_{3,1} & w_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda_{3,2} \end{bmatrix} \mathbf{e}^\square(k), \quad \mathbf{e}^\square(2) = \mathbf{e}_0^\square \quad (5.20)$$

führt. Mit Hilfe der inversen Transformationsvorschrift (5.16) erhält man die Schätzung  $\Psi(k)$  für den Zustandsvektors  $\mathbf{x}(k-2)$ . Eine zweimalige Anwendung der Systemfunktion unter

Berücksichtigung der Eingangswerte  $u_1(k-2)$ ,  $u_1(k-1)$ ,  $u_2(k-2)$  und  $u_2(k-1)$  resultiert schließlich in der aktuellen Schätzung  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  des Systemzustands.

■

Während ein Beobachterentwurf via ENBNF für das im Beispiel betrachtete System keiner Einschränkung unterliegt, bleiben notwendigerweise beim Entwurf via NABKNF die aktuellsten Werte der zweiten und dritten Ausgangsgröße für einen Schritt unberücksichtigt.

## 6 Bewertung und Vergleich der Beobachterentwürfe

Dieses Kapitel beinhaltet eine Gegenüberstellung der in den Kapiteln 4 und 5 vorgestellten Beobachterentwürfe. Dabei werden Systeme mit einer Ausgangsgröße betrachtet, um die Darstellungen auf das wesentliche zu beschränken. Folgende Eigenschaften der Beobachter finden Beachtung:

**Einschwingverhalten:** Hier interessiert insbesondere die Frage, ob der Beobachterfehler während der Einschwingzeit des Beobachters stets abnimmt oder auch größer werden kann.

**Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang:** Die Filterung von Meßrauschen am Systemausgang stellt eine wesentliche Eigenschaft von Beobachtern in praktischen Anwendungen dar und wird deshalb besonders ausführlich behandelt. Das parasitäre Rauschsignal sollte sich möglichst nicht auf den Beobachterzustand auswirken.

**Robustheit gegen Meßrauschen an den Systemeingängen:** Meßrauschen an den Systemeingängen sollte sich ebenfalls nicht auf den Beobachterzustand auswirken. Dieses erweist sich aber nur in dem Fall als relevant, wenn die Berechnung der Systemeingänge nicht im Prozeßrechner zur Systemregelung erfolgt und sich somit eine Messung der Eingangsgrößen erübrigt.

**Robustheit gegen Parameterunsicherheiten:** Da in der Praxis die für das Beobachtermodell zugrunde gelegten Systemparameter nie exakt mit den Parameterwerten des physikalischen Systems übereinstimmen, sollte die Funktionsweise eines Beobachters auch bei Parameterunsicherheiten noch gewährleistet sein.

**Aspekte der Realisierung:** Die Realisierung der Beobachterentwürfe wirft unmittelbar die Frage nach der Durchführbarkeit des Verfahrens und dem Rechenaufwand der Implementierung auf einem Prozeßrechner auf. Dabei kommt dem Umfang und der Kausalität der Beobachtergleichungen sowie der von der Beobachterberechnung hervorgerufenen Totzeit im geschlossenen Regelkreis eine wichtige Bedeutung zu.

Da die Transformation auf ENBNF, wie nachstehend gezeigt, für alle vier **ENBNF-Beobachter** als gleich vorausgesetzt werden darf, können sich unterschiedliche Eigenschaften der Entwürfe nur aus den verschiedenen Fehlerdifferenzgleichungen in ENBNF ergeben. Für die Beobachter 2, 3 und 4 wurde eine Wahl der Freiheitsgrade der Transformation nach Gl. (4.31) vorausgesetzt. Wie jedoch aus Satz 4.3 hervorgeht, hat die Wahl der Funktionen  $f_{\mu}^*$  beim Beobachter 1 keinen Einfluß auf die Beobachtergleichungen in ANDF. Die Wahl der Transformation nach (4.31) ändert daher nicht die Eigenschaften dieses Beobachters in ANDF, was schließlich die Annahme gleicher Transformationen zwischen ENBNF und ANDF

für alle vier Beobachter rechtfertigt. Unterschiede im Verhalten der Beobachter lassen sich daher lediglich mit verschiedenen Beobachterstrukturen in Normalform begründen. Falls eine analytische Transformation zwischen beiden Darstellungsformen vorliegt und kleine Änderungen in Normalform lediglich kleine Änderungen in ANDF hervorrufen<sup>1</sup>, lassen sich die Eigenschaften der Beobachter in ENBNF qualitativ auch auf die Darstellungen in ANDF übertragen.

Zur Erleichterung des allgemeinen Vergleichs der ENBNF-Beobachter liegt in diesem Kapitel stets die folgende, vereinfachende Annahme zugrunde. Für die Ausgangsfunktion in ENBNF gilt stets

$$h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) = x_n^*(k). \quad (6.1)$$

Die beiden in Kapitel 5 behandelten **NABKNF-Beobachter** 1 und 2 weisen untereinander, wie auch die ENBNF-Beobachter, identische Transformationen zwischen allgemeiner Darstellung und Normalform auf, da die Transformation auf NABKNF nach Gl. (5.1) keine Freiheitsgrade zuläßt. Ein unterschiedliches Verhalten beider Beobachter muß daher auch in Normalform erkennbar sein. Ein Vergleich der NABKNF- mit den ENBNF-Beobachtern kann jedoch aufgrund der verschiedenen nichtlinearen Transformationen auf ENBNF und NABKNF lediglich exemplarisch erfolgen.

Die Fehlerdifferenzgleichungen der behandelten Beobachter in der jeweiligen Normalform gelten ab  $k \geq n - 1$ , da i. a. erst zu diesem Zeitpunkt die erforderlichen Altwerte der Meßgrößen vorliegen<sup>2</sup>. Mit Hilfe einer Verschiebung  $k^\bullet = k - n + 1$  entlang der  $k$ -Achse kann der Anfangszeitpunkt aber stets in den Ursprung  $k^\bullet = 0$  gelegt werden. Aus Übersichtsgründen wird diese Verschiebung bei allen theoretischen Untersuchungen dieses Kapitels stets vorausgesetzt und  $k^\bullet$  durch  $k$  ersetzt.

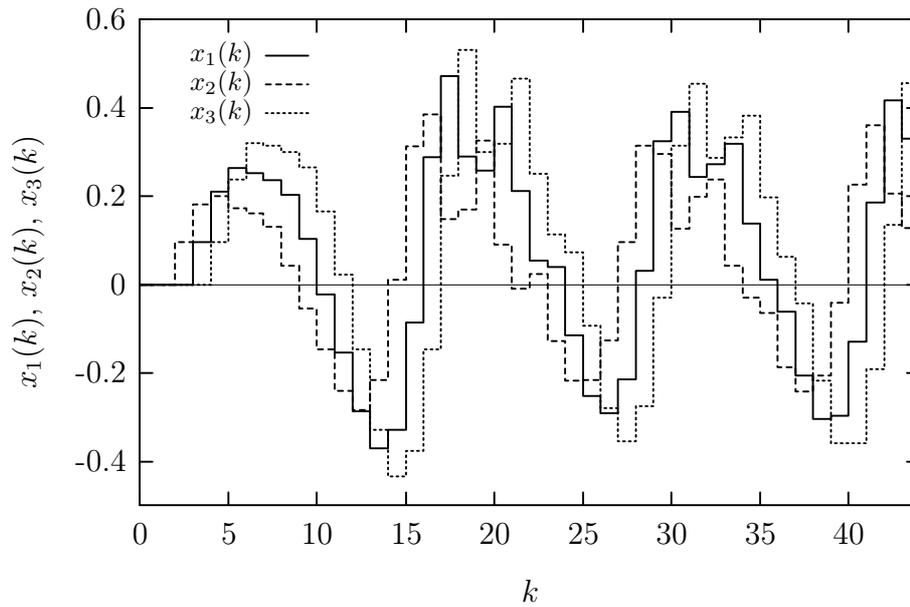
Alle experimentellen Untersuchungen der Beobachter in ANDF, sowohl zur Verifikation der in Normalform ermittelten Eigenschaften, als auch zum Vergleich der ENBNF- und NABKNF-Beobachter, gehen stets vom System

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2(k) + ax_1(k) \\ (1 - x_2(k))u(k) + ax_2(k) - x_1(k)x_2(k) + \sin(x_3(k))^2 \\ x_1(k) + ax_3(k) - x_3(k)^3 \end{bmatrix} \\ y(k) &= x_3(k), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (6.2)$$

mit  $u(k) = \hat{u} \sin(0.5k)$ ,  $\hat{u} = 0.2$  und  $a = 0.3$  aus. Die Zeitverläufe der Zustandsvariablen zeigt Bild 6.1. Die nicht sinusförmigen Verläufe gehen auf den Einfluß der Nichtlinearitäten zurück.

<sup>1</sup>Diese Eigenschaft sollte dabei für alle möglichen Eingangsgrößen, von denen die Transformation zwischen ANDF und Normalform abhängt, erfüllt sein.

<sup>2</sup>Bei bereits bekannten Altwerten der Meßgrößen liegt der Anfangszeitpunkt bei  $k = 0$ .



**Bild 6.1:** Zeitverläufe der Zustandsgrößen des Systems 6.2 für  $u(k) = 0.2 \sin(0.5k)$

Die nachfolgenden Unterabschnitte sind folgendermaßen organisiert: Zuerst erfolgt für alle Beobachter eine allgemeine, theoretische Untersuchung. Es schließt sich jeweils eine Simulation der sechs Beobachter für das System nach Gl. (6.2) an. Dabei liegt in allen Fällen die Fehlerquadratsumme

$$E_{k_{min}}^{k_{max}} = \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} (\hat{x}_1(k) - x_1(k))^2 + (\hat{x}_2(k) - x_2(k))^2 + (\hat{x}_3(k) - x_3(k))^2 \quad (6.3)$$

als Gütekriterium zugrunde, die eine Beurteilung des Beobachterverhaltens ermöglicht. Die Summationsgrenzen  $k_{min}$  und  $k_{max}$  wurden gemäß Tabelle 6.1 gewählt. Die untere Summationsgrenze liegt bei den Untersuchungen der Robustheit gegen parasitäre Einflüsse bei 400, damit Beobachterfehler während der Einschwingzeit des Beobachters ohne Einfluß auf das Gütekriterium bleiben.

**Tabelle 6.1:** Summationsgrenzen der Fehlerquadratsumme  $E_{k_{min}}^{k_{max}}$  nach Gl. (6.3)

Untersuchung ...	$k_{min}$	$k_{max}$
des Einschwingverhaltens ohne parasitäre Einflüsse	0	100
der Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang	400	500
der Robustheit gegen Meßrauschen am Systemeingang	400	500
der Robustheit gegen Parameterunsicherheiten	400	500

Der Anfangswert des Beobachterzustands lautet jeweils  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$  mit Ausnahme der exemplarischen Untersuchung des Einschwingverhaltens, bei der das Gütekriterium  $E_0^{100}$  in Abhängigkeit verschiedener Anfangswerte ermittelt wird.

## 6.1 Einschwingverhalten der Beobachter

Das Einschwingverhalten eines Beobachters stellt eine wesentliche Eigenschaft beim Einsatz in einer dynamischen Ausgangsrückführung dar. Es ist im allgemeinen nicht möglich, die Anfangswerte des Beobachters identisch mit denen des Systems zu wählen. Auch kurzzeitige, nicht meßbare Störungen des Systems führen zu Beobachterfehlern. In der darauffolgenden Einschwingzeit des Beobachters sollte der Betrag des Beobachterfehlers möglichst monoton fallen. Eine Vergrößerung des Fehlers während des Einschwingvorgangs des Beobachters stellt eine unnötige Beeinträchtigung des Regelungsverhaltens dar. Aufgrund der nichtlinearen Transformation kann infolge einer geringfügigen Zunahme des Beobachterfehlers in Normalform ein weitaus größerer Fehler in ANDF auftreten.

### 6.1.1 ENBNF-Beobachter

Ohne Meßrauschen und Modellungenauigkeiten sind die Fehlerdifferenzgleichungen der Beobachter in ENBNF unabhängig davon, ob der Beobachterentwurf mittels Gl. (4.70) erfolgte oder nicht. Es entfällt entweder die Funktion  $f_{n-1}^*$  oder der Meßwert  $y(k+1)$  bei der Bildung der Fehlerdifferenzgleichung.

#### 6.1.1.1 ENBNF-Beobachter 1 und 2

Bei Anwendung dieser Beobachter basiert der Beobachterfehler in ENBNF auf der Differenzgleichung (4.17). Bei positiv reellen Eigenwerten steigen die Beträge der Parameter  $q_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , mit zunehmendem  $\mu$  und einige können Werte größer als eins annehmen. Wegen

$$e_\mu^*(k+1) = e_{\mu-1}^*(k) - q_{\mu-1}e_n^*(k), \quad \mu = 2, 3, \dots, n \quad (6.4)$$

kann daher  $|e_\mu^*(k+1)| > |e_n^*(k)|$  folgen, sogar falls  $|e_\mu^*(k)| = 0$  gilt, also die betrachtete Komponente des Beobachterfehlers im vorangegangenen Schritt bereits abgeklungen war. Während der Einschwingzeit der Beobachter können daher die Komponenten des Beobachterfehlers den Anfangswert um das vielfache übersteigen.

### 6.1.1.2 ENBNF-Beobachter 3 und 4

Für diese Beobachter gilt ohne parasitäre Einflüsse die Fehlerdifferenzgleichung (4.75) in ENBNF. Da  $e_\mu^*(k+1) = \lambda_\mu e_\mu^*(k)$  für  $\mu = 1, 2, \dots, n$  gilt, nehmen im Schritt  $k+1$  alle Komponenten des Beobachterfehlers betragsmäßig kleinere Werte an als im aktuellen Schritt<sup>3</sup>. Es liegt somit ein deutlich besseres Einschwingverhalten als bei den Beobachtern 1 und 2 vor.

### 6.1.2 NABKNF-Beobachter

Ohne parasitäre Einflußeffekte ergibt sich für beide Beobachter in NABKNF die Fehlerdifferenzgleichung (5.6). Gilt  $w_\mu = 0$  für  $\mu = 2, 3, \dots, n$  (entkoppeltes Differenzgleichungssystem), werden alle Komponenten des Beobachterfehlers in jedem Schritt entsprechend den ENBNF-Beobachtern 3 und 4 betragsmäßig kleiner. Für  $w_\mu \neq 0$  trifft dieses lediglich für die letzte Komponente des Beobachterfehlers,  $e_n^\square(k)$ , zu. Wegen

$$e_\mu^\square(k+1) = \lambda_\mu e_\mu^\square(k) + w_{\mu+1} e_{\mu+1}^\square(k), \quad \mu = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.5)$$

und der damit verbundenen Einkopplung von  $e_{\mu+1}^\square(k)$  in  $e_\mu^\square(k+1)$  kann insbesondere  $e_1^\square(k)$  deutlich größere Werte als zum Zeitpunkt  $k = 0$  annehmen. Bereits nach den ersten zwei Schritten

$$\begin{aligned} e_1^\square(1) &= \lambda_1 e_1^\square(0) + w_2 e_2^\square(0), \\ e_1^\square(2) &= \lambda_1^2 e_1^\square(0) + (\lambda_1 + \lambda_2) w_2 e_2^\square(0) + w_2 w_3 e_3^\square(0), \end{aligned} \quad (6.6)$$

kann man die mögliche Zunahme von  $e_1^\square$  deutlich erkennen. Gilt z. B.  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$  sowie  $w_2 = w_3 = 1$ , dann folgt

$$e_1^\square(2) = 0.25 e_1^\square(0) + e_2^\square(0) + e_3^\square(0) \quad (6.7)$$

und die Anfangswerte

$$e_1^\square(0) = e_2^\square(0) = e_3^\square(0) \quad (6.8)$$

führen auf

$$e_1^\square(2) = 2.25 e_1^\square(0), \quad (6.9)$$

was mehr als eine Verdopplung des Anfangsfehlers darstellt.

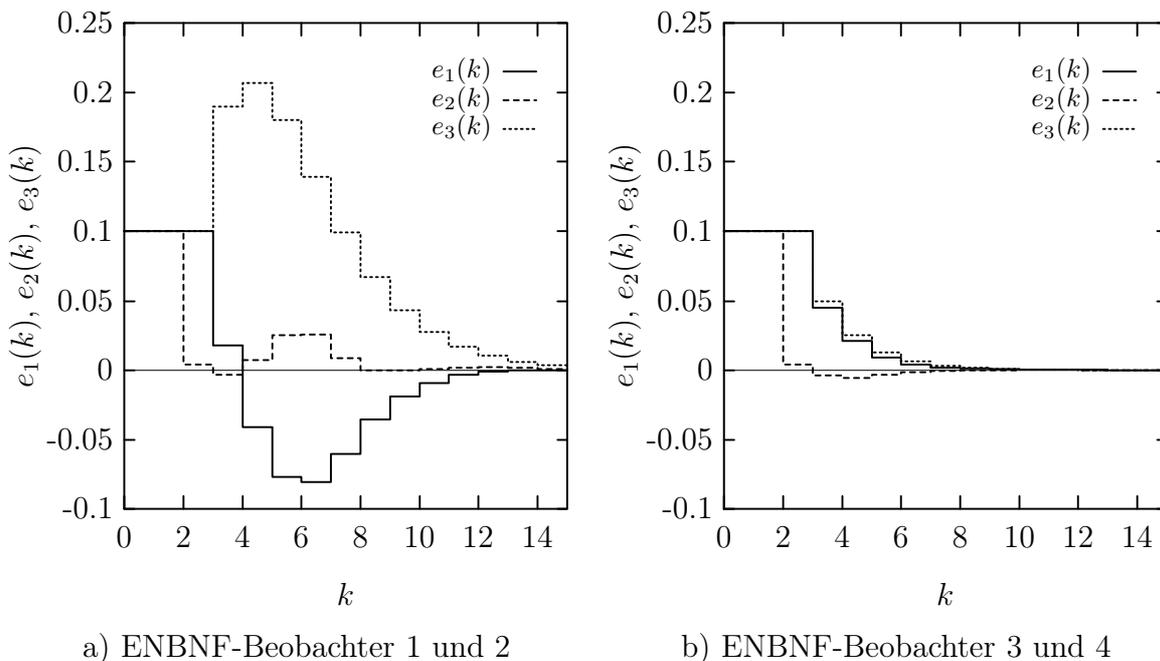
---

<sup>3</sup>Vorausgesetzt, alle Eigenwerte liegen innerhalb des Einheitskreises.

### 6.1.3 Exemplarische Verifikation

Zur exemplarischen Untersuchung des Einschwingverhaltens der Beobachter wird das System (6.2) mit den jeweiligen Beobachtern simuliert. Allen Simulationen liegen die Eigenwerte der Fehlerdynamik in Normalform  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$  zugrunde. Für die Anfangswerte der Beobachter gilt zunächst  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$ . Die Beobachterzustände blieben zunächst konstant, bis alle erforderlichen Altwerte der Meßgrößen zur Verfügung standen. Der erste berechnete Schätzwert lag dann bei  $k = 3$  vor.

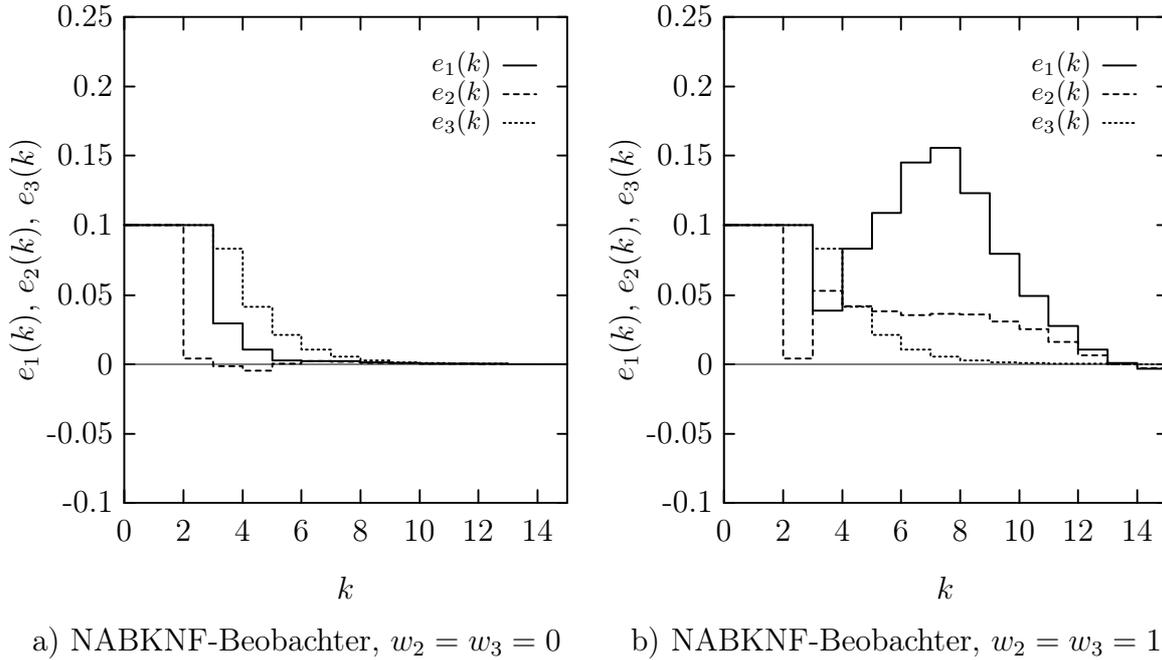
Die Zeitfolgen der Beobachtungsfehler  $e_i(k) = \hat{x}_i(k) - x_i(k)$  der ENBNF-Beobachter 1 und 2 sind in Bild 6.2-a dargestellt, während Bild 6.2-b das Einschwingverhalten der ENBNF-Beobachter 3 und 4 zeigt. Die, im Gegensatz zu den Beobachtern 3 und 4, zwischenzeitlich deutlich zunehmenden Fehler der ersten beiden Beobachter lassen auf ein ungünstigeres Einschwingverhalten schließen.



**Bild 6.2:** Einschwingverhalten der ENBNF-Beobachter für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$  sowie  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$

Bild 6.3-a stellt die Zeitverläufe der Beobachterfehler bei Verwendung der NABKNF-Beobachter 1 und 2 für  $w_2 = w_3 = 0$  und Bild 6.3-b für  $w_2 = w_3 = 1$  dar. Im ersten Fall ergibt sich ein Einschwingverhalten, das ähnlich dem der ENBNF-Beobachter 3 und 4 ist (s. Bild 6.2-b). Im zweiten Fall fällt das Einschwingverhalten deutlich schlechter aus.

Eine quantitative Beurteilung des transienten Verhaltens ermöglicht das Gütekriterium  $E_0^{100}$  nach Gl. (6.3), das in Bild 6.4-a für die ENBNF-Beobachter und in Bild 6.4-b für die NABKNF-Beobachter jeweils in Abhängigkeit der Beobachteranfangswerte dargestellt ist.

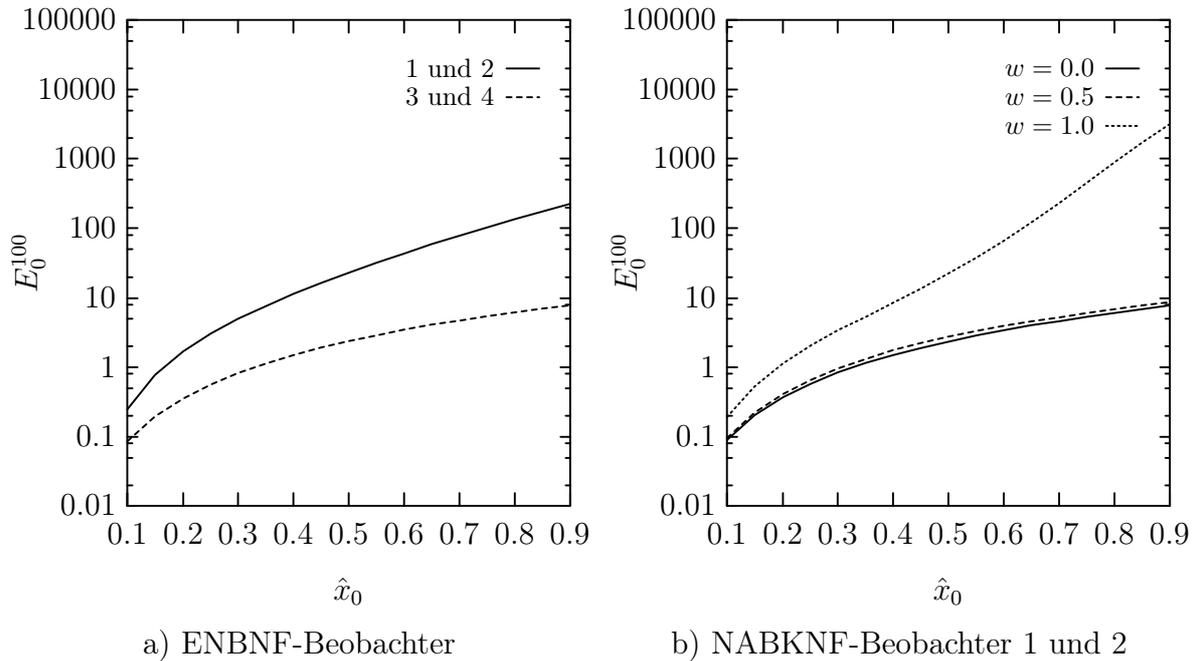


**Bild 6.3:** Einschwingverhalten der NABKNF-Beobachter für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$  sowie  $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0.1 \ 0.1 \ 0.1]^T$

Die Anfangswerte wurden dabei beginnend bei 0.1 für jede Simulation um jeweils 0.05 erhöht. Die letzte Simulation erfolgte mit Anfangswerten der Größe 0.9. Zudem wurden verschiedene Wichtungsfaktoren  $w_2 = w_3 = w$  für die NABKNF-Beobachter untersucht. Obwohl die Simulationen für jeden untersuchten Beobachter die Werte des Gütekriteriums  $E_0^{100}$  lediglich zu 17 einzelnen Anfangswerten lieferten, wurden diese Punkte in den Bildern 6.4-a und 6.4-b aus Übersichtsgründen durch Linien verbunden<sup>4</sup>. Dieser Vorgehensweise liegt die Annahme gutmütiger Systeme zugrunde, die bei kleinen Änderungen der Anfangswerte oder Parameter nur kleine Änderungen im Verhalten aufweisen.

Man kann erkennen, daß die ENBNF-Beobachter 3 und 4 sowie die NABKNF-Beobachter 1 und 2 mit  $w = 0$  bei größeren Anfangsfehlern auf deutlich kleinere Werte von  $E_0^{100}$  führen als die ENBNF-Beobachter 1 und 2. Die Entwürfe via NABKNF mit  $w_2 = w_3 = 1$  weisen hingegen bei steigenden Anfangswerten die größten Fehlerquadratsummen auf. Ursache ist die für  $w = 1$  vorhandene Größenordnung der Kopplung zwischen den Komponenten des Beobachterfehlers. Die Simulationen bestätigen somit die Ergebnisse der vorangegangenen, theoretischen Betrachtungen.

<sup>4</sup>Bei allen noch folgenden grafischen Darstellungen des Gütekriteriums über der jeweils schrittweise veränderten Einflußgröße der Beobachter wurde ebenfalls derart verfahren.



**Bild 6.4:** Fehlerquadratsumme  $E_0^{100}$  für das Einschwingverhalten der ENBNF- und NABKNF-Beobachter in Abhängigkeit der Beobachteranfangswerte

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = [\hat{x}_0 \ \hat{x}_0 \ \hat{x}_0]^T \text{ für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.5$$

## 6.2 Robustheit gegenüber Meßrauschen am Systemausgang

Bei der Schätzung des Systemzustands kommt dem Beobachter auch die Aufgabe zu, eventuell vorhandenes Meßrauschen am Systemausgang zu filtern. Dabei ist von großem Interesse, wie gut die Filtereigenschaften des Beobachters sind und wie diese von den frei wählbaren Parametern abhängen. In den folgenden Untersuchungen wird ein, der meßbaren Ausgangsgröße des Systems überlagertes, mittelwertfreies, weißes Rauschen  $r_y(k)$  mit der Autokorrelationsfunktion  $R_{rr}\delta(k)$  (Varianz  $R_{rr}$ ) angenommen. Die dem Beobachter zugeführte Größe lautet demnach  $\tilde{y}(k) = y(k) + r_y(k)$  anstelle von  $y(k)$ . Aus Gründen der Vereinfachung werden im folgenden ausschließlich Systeme ohne Eingangsgrößen betrachtet. Als Bewertungskriterium dient

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad (6.10)$$

die Summe über die Varianzen  $\sigma_i^2$  der Beobachterfehler  $e_i^*(k)$  bzw.  $e_i^\square(k)$  in Normalform.

Zudem werden in den nachstehenden Ausführungen die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\Delta f_{n-1}^* &= f_{n-1}^*(\tilde{y}(k-n+1), \dots, \tilde{y}(k)) - f_{n-1}^*(y(k-n+1), \dots, y(k)), \\ \Delta f_n^\square &= f_n^\square(\tilde{y}(k-n+1), \dots, \tilde{y}(k)) - f_n^\square(y(k-n+1), \dots, y(k)).\end{aligned}\tag{6.11}$$

eingeführt

## 6.2.1 ENBNF-Beobachter

### 6.2.1.1 ENBNF-Beobachter 1

Für diesen Beobachter ergibt sich die Fehlerdifferenzgleichung

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_q \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f_{n-1}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} r_y(k), \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^*,\tag{6.12}$$

mit  $\mathbf{A}_q$  nach Gl. (4.17). Eine allgemeine Auswertung dieser Gleichung gestaltet sich aufgrund der unbekanntnen Form von  $\Delta f_{n-1}^*$  als äußerst schwierig. Setzt man jedoch lediglich kleine Werte von  $r_y(k)$  sowie kleine Abweichungen des Systems von seiner Ruhelage voraus, kann eine Linearisierung der Gleichungen zumindest einen Anhaltspunkt für die Rauschempfindlichkeit des Beobachters liefern. Für den Beobachter 1 erweist es sich als zweckmäßig, bereits die Systemdarstellung in NBKNF zu linearisieren. Allgemein gilt dann für das autonome, linearisierte System

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ \vdots \\ x_n^\square(k) \\ -a_0 x_1^\square(k) - \dots - a_{n-1} x_n^\square(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_1^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square,\end{aligned}\tag{6.13}$$

mit  $a_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , den Koeffizienten des charakteristischen Polynoms des linearisierten Systems. Aufgrund der Linearisierung gelingt eine vollständige Separation<sup>5</sup> mit

<sup>5</sup>Eine vollständige Separation ist nur für den Beobachter 1 möglich. Da der Beobachter in ANDF identisch mit dem ist, der sich bei der Wahl nach Gl. (4.31) ergeben würde (s. Satz 4.3), bleibt die Vergleichbarkeit mit den anderen Beobachtern erhalten.

$f_\mu^* = -a_\mu x_{\mu+1}^\square(k)$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , und die Systembeschreibung in ENBNF führt auf die, als Beobachternormalform linearer Systeme bekannte, Darstellung

$$\mathbf{x}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(k), \quad y(k) = x_n^*(k), \quad \mathbf{x}^*(0) = \mathbf{x}_0^*. \quad (6.14)$$

Ein Beobachterentwurf gemäß Gleichung (4.16) mit dem rauschbehafteten Meßsignal  $\tilde{y}(k)$  liefert

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \begin{bmatrix} -a_0 \\ -a_1 \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} \tilde{y}(k) + \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix} (\tilde{y}(k) - \hat{x}_n^*(k)), \quad (6.15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^*(0) = \hat{\mathbf{x}}_0^*.$$

Dieser Entwurf ist identisch mit dem, von linearen Systemen bekannten, Beobachterentwurf in Normalform<sup>6</sup>

$$\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}^*(k) + \begin{bmatrix} q_0 - a_0 \\ q_1 - a_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} (\tilde{y}(k) - \hat{x}_n^*(k)), \quad (6.16)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^*(0) = \hat{\mathbf{x}}_0^*$$

mit der Fehlerdifferenzgleichung

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_q \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} q_0 - a_0 \\ q_1 - a_1 \\ \vdots \\ q_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix} r_y(k), \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^*. \quad (6.17)$$

Im Fall von  $q_\mu = a_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , hat  $r_y(k)$  keinen Einfluß auf den Beobachterfehler der linearisierten Normalform. Mit  $e^*(0) = 0$  gilt dann  $\Gamma = 0$  für die Summe der Varianzen der Beobachterfehler  $e_i^*(k)$ . Diese spezielle Eigenwertvorgabe gelingt jedoch nur dann, wenn die linearisierte Systembeschreibung lediglich Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises aufweist. Ferner verschwindet in diesem Fall der Rückführvektor der gemessenen Ausgangsgröße, der

<sup>6</sup>Der ENBNF-Beobachter 1 geht daher für lineare Systeme in den bekannten linearen Beobachter über.

Beobachter stützt sich lediglich auf das Systemmodell. Da keine Informationen aus der Ausgangsgröße vorliegen, erscheint diese Wahl der Parameter wenig praktikabel. Zudem gelten die aufgezeigten Zusammenhänge für das nichtlineare System mit nichtlinearem Beobachter nur in einer beliebig kleinen Umgebung um die betrachtete Ruhelage. Wie die Simulationen im Unterabschnitt 6.2.3 zeigen, kann jedoch eine Wahl der Eigenwerte des Beobachterfehlers in ENBNF in der Nähe der Eigenwerte des linearisierten Systems auch im nichtlinearen Fall zu einem Entwurf mit geringer Rauschempfindlichkeit führen. Dieses gilt insbesondere dann, wenn sowohl die Zustände des Systems als auch die des Beobachters in einer kleinen Umgebung um die Ruhelage bleiben und zudem auch  $r_y(k)$  klein bleibt.

### 6.2.1.2 ENBNF-Beobachter 2

Dieser Beobachter führt, im Gegensatz zum ENBNF-Beobachter 1, auch bei Meßrauschen am Systemausgang auf eine lineare Fehlerdifferenzgleichung in ENBNF, die die Form

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_q \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_y(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} r_y(k), \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^* \quad (6.18)$$

aufweist. Die Lösung dieser Differenzgleichung setzt sich aus der durch die Anfangswerte hervorgerufenen und der durch die Erregerfunktion  $r_y(k)$  erzwungenen Bewegung zusammen, wobei lediglich letztere von  $r_y(k)$  abhängt und somit für die Untersuchungen der Rauschempfindlichkeit des Beobachters relevant ist. Für die Anfangswerte  $\mathbf{e}_0^* = \mathbf{0}_n$  lautet der  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsvektor

$$\frac{\mathbf{E}^*(z)}{R_y(z)} = (\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_q)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} q_0 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ z + q_{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(z)}. \quad (6.19)$$

Aufgrund der kanonischen Struktur von  $\mathbf{A}_q$  gelingt es, das Bildungsgesetz der Matrix  $(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_q)^{-1}$  in der allgemeinen Form

$$(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_q)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_q)} \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

mit

$$a_{i,\nu} = \begin{cases} z^{\nu-1} \left( z^{n-i} + \sum_{\mu=0}^{n-i-1} q_{i+\mu} z^\mu \right) & \text{für } \nu \leq i \\ -z^{\nu-i-1} \sum_{\mu=0}^{i-1} q_\mu z^\mu & \text{für } \nu > i \end{cases} \quad (6.21)$$

$$1 \leq i \leq n \quad 1 \leq \nu \leq n.$$

anzugeben. Das Produkt  $(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}q)^{-1} \mathbf{b}(z)$  in Gl. (6.20) ergibt nach einigen, im einzelnen nicht dargestellten, Rechenschritten

$$\frac{\mathbf{E}^*(z)}{R_y(z)} = \frac{1}{\det(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}q)} \begin{bmatrix} a_{1,n}z + \sum_{\mu=0}^{n-1} q_\mu a_{1,\mu+1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n}z + \sum_{\mu=0}^{n-1} q_\mu a_{n-1,\mu+1} \\ a_{n,n}z + \sum_{\mu=0}^{n-1} q_\mu a_{n,\mu+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Das Rauschsignal  $r_y(k)$  hat somit lediglich Einfluß auf die letzte Komponente des Beobachterfehlers, wobei  $e_n^*(k) = r_y(k)$  und somit  $\Gamma = \sigma_n^2 = R_{rr}$  gilt. Die Wahl der Dynamik übt dabei keinerlei Einfluß auf die Rauschempfindlichkeit aus. Lediglich für sehr große Werte von  $r_y(k)$  oder großen Abweichungen des Systems von der Ruhelage kann sich daraus ein Vorteil gegenüber dem ENBNF-Beobachter 1 ergeben, bei dem das Rauschsignal  $r_y(k)$  über die nichtlineare Verknüpfung  $\Delta f_{n-1}^*$  in die Differenzgleichung des Beobachterfehlers nach Gl. (6.12) eingekoppelt wird. Je nach Struktur der Funktion  $\Delta f_{n-1}^*$  stellt dann die, für die Untersuchung des ENBNF-Beobachters 1 durchgeführte, Linearisierung dieser Funktion eine unzulässige Vereinfachung dar. Insbesondere kann für sehr große Werte von  $r_y(k)$ ,  $y(k)$  oder deren  $n-1$  Altwerte die Funktion  $\Delta f_{n-1}^*$ , und damit die Erregerfunktion der Fehlerdifferenzgleichung des Beobachters 1, Werte annehmen, die wesentlich größer sind als das Rauschsignal  $r_y(k)$  selbst. Aufgrund der linearen Beziehung  $e_n^*(k) = r_y(k)$  ist dieses beim ENBNF-Beobachter 2 nicht möglich.

### 6.2.1.3 ENBNF-Beobachter 3

Der ENBNF-Beobachter 3 führt bei Auftreten von Meßrauschen am Ausgang des Systems auf die Fehlerdifferenzgleichung in ENBNF

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f_{n-1}^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix} r_y(k), \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^* \quad (6.23)$$

mit der in Gl. (4.75) angegebenen Matrix  $\mathbf{A}_\lambda$ . Analog der Untersuchung des ENBNF-Beobachters 1 erweist sich eine allgemeingültige Aussage über die Rauschempfindlichkeit aufgrund dieser Gleichung als sehr problematisch. Auch in diesem Fall führt aber eine Linearisierung weiter. Da die Wahl der Transformation auf ENBNF nach Gleichung (4.31) eine notwendige Voraussetzung für diesen Beobachter darstellt und sich somit auch für eine vollständig separierbare, lineare Darstellung in NBKNF keine Freiheitsgrade für die Transformation auf ENBNF ergeben, bietet sich, im Gegensatz zum ENBNF-Beobachter 1, nicht die Betrachtung der linearisierten Systemdarstellung in NBKNF an. Für die Erregerfunktion  $\Delta f_{n-1}^*$  der Fehlerdifferenzgleichung (6.23) folgt die linearisierte Darstellung

$$\Delta f_n^* \approx -\sum_{\mu=0}^{n-1} a_{n-1-\mu} r_y(k-\mu), \quad (6.24)$$

die nur für einen beliebig kleinen Bereich um die Ruhelage gilt. Dabei stellen die  $a_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der linearisierten Systemdarstellung dar. Die Anwendung der  $\mathcal{Z}$ -Transformation auf Gl. (6.23) liefert für  $\mathbf{e}_0^* = \mathbf{0}_n$

$$\frac{\mathbf{E}^*(z)}{R_y(z)} = -(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_\lambda)^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n + \sum_{\mu=0}^{n-1} a_\mu z^{\mu-n+1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}(z)}. \quad (6.25)$$

Wegen

$$(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z - \lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{z - \lambda_n} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

folgt

$$\frac{\mathbf{E}^*(z)}{R_y(z)} = -(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_\lambda)^{-1} \mathbf{b}(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{(\lambda_n + a_{n-1})z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_0}{z^{n-1}(z - \lambda_n)} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Das Rauschsignal  $r_y(k)$  wirkt sich wie beim ENBNF-Beobachter 2 lediglich auf die letzte Komponente des Fehlers aus. Eine Filterung von  $r_y(k)$  ist möglich, wobei jedoch nur  $\lambda_n$  einen

Einfluß auf die Rauschempfindlichkeit des Beobachters aufweist. Im Gegensatz zum ENBNF-Beobachter 2 lassen sich weder die Kennzahl  $\Gamma$  noch eine sinnvolle Wahl des Parameters  $\lambda_n$  unmittelbar aus dem  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsvektor nach Gl. (6.27) ablesen. Die Bestimmung von  $\Gamma$  erfolgt daher über die Berechnung der Autokorrelationsfunktion  $R_{e_n^* e_n^*}(k)$  des Fehlers  $e_n^*(k)$ . Der quadratische Mittelwert  $R_{e_n^* e_n^*}(0)$  von  $e_n^*(k)$  ist unter der Voraussetzung eines mittelwertfreien Rauschsignals  $r_y(k)$  und somit einer Mittelwertfreiheit<sup>7</sup> von  $e_n^*(k)$  identisch mit der Varianz  $\sigma_n^2$  (s. [32]). Da  $e_n^*(0) = 0$ , gilt somit  $\Gamma = \sigma_n^2 = R_{e_n^* e_n^*}(0)$ . Nach [78] berechnet sich die Autokorrelationsfunktion zu

$$R_{e_n^* e_n^*}(k) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g(-\mu) \underbrace{\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} g(\nu) \delta(k-\nu-\mu)}_{g(k-\mu)R_{rr}}, \quad (6.28)$$

wobei  $g(k)$  die Antwort von  $e_n^*(k)$  auf die diskrete Impulsfolge  $\delta(k) = \{1, 0, 0, \dots\}$  und  $R_{rr}\delta(k)$  die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens  $r_y(k)$  bezeichnen. Weiterhin folgt

$$R_{e_n^* e_n^*}(0) = R_{rr} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g(-\mu)^2. \quad (6.29)$$

Die Impulsantwort  $g(k)$  erhält man z. B. aus der  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsfunktion

$$\frac{E_n^*(z)}{R_y(z)} = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + g(3)z^{-3} + \dots \quad (6.30)$$

zu

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ -\lambda_n^k - \sum_{\mu=1}^k a_{n-\mu} \lambda_n^{k-\mu} & \text{für } 1 \leq k \leq n \\ -\left(\lambda_n^n + \sum_{\mu=1}^n a_{n-\mu} \lambda_n^{n-\mu}\right) \lambda_n^{k-n} & \text{für } k > n \end{cases}. \quad (6.31)$$

Die allgemeine Berechnung von  $R_{e_n^* e_n^*}(0)$  unter Verwendung symbolverarbeitender Programmsysteme, wie z. B. *Mathematica* [201], liefert die Gesetzmäßigkeit

$$\Gamma = R_{e_n^* e_n^*}(0) = R_{rr} \left( (c_1 + c_2 \lambda_n) \sum_{\mu=0}^{\infty} \lambda_n^{2\mu} - 2P(\lambda_n) \right) \quad (6.32)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (1 + a_1 + a_3 + \dots + a_{n-2})^2 + (a_0 + a_2 + \dots + a_{n-1})^2 \\ c_2 &= 2(1 + a_1 + a_3 + \dots + a_{n-2})(a_0 + a_2 + \dots + a_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad n \text{ ungerade,} \quad (6.33)$$

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1})^2 + (1 + a_0 + a_2 + \dots + a_{n-2})^2 \\ c_2 &= 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1})(1 + a_0 + a_2 + \dots + a_{n-2}) \end{aligned} \right\} \quad n \text{ gerade}$$

<sup>7</sup>Aus der Mittelwertfreiheit von  $r_y(k)$  kann man lediglich bei der Betrachtung des linearisierten System auf die Mittelwertfreiheit von  $e_n^*(k)$  schließen.

sowie

$$\begin{aligned}
 P(\lambda_n) &= \frac{1}{2} + d_0 + d_1\lambda_n + \dots + d_{n-2}\lambda_n^{n-2} \\
 \text{mit} \quad d_{n-2} &= a_0 & \text{und} \quad k_1 &= 1 \\
 d_{n-3} &= a_0k_1 + a_1 & k_2 &= a_{n-1} \\
 d_{n-4} &= a_0k_2 + a_1k_1 + a_2 & k_3 &= 1 + a_{n-2} \\
 d_{n-5} &= a_0k_3 + a_1k_2 + a_2k_1 + a_3 & k_4 &= a_{n-1} + a_{n-3} \\
 &\vdots & k_5 &= 1 + a_{n-2} + a_{n-4} \\
 & & &\vdots
 \end{aligned} \tag{6.34}$$

Da bei stabilen Beobachtern stets  $\lambda_n < 1$  gilt, nimmt Gl. (6.32) die vereinfachte Form

$$\Gamma = R_{e_n^* e_n^*}(0) = R_{rr} \left( \frac{c_1 + c_2\lambda_n}{1 - \lambda_n^2} - 2P(\lambda_n) \right) \tag{6.35}$$

an. Diese allgemeine Darstellung erlaubt es bei einem konkret vorliegendem System, den Eigenwert  $\lambda_n$ , der auf ein Minimum von  $\Gamma$  führt, zu berechnen.

#### 6.2.1.4 Beobachter Typ 4

Dieser Beobachter gehorcht bei Meßrauschen am Systemausgang in ENBNF der Fehlerdifferenzgleichung

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ r_y(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{bmatrix} r_y(k), \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^*. \tag{6.36}$$

Die Berechnung der erzwungenen Bewegung im  $\mathcal{Z}$ -Bereich liefert

$$\frac{\mathbf{E}^*(z)}{R_y(z)} = (\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z - \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.37}$$

und ist identisch mit der vom ENBNF-Beobachter 2. Auch hier gelten wiederum  $\Gamma = R_{rr}$  sowie die zum Beobachter 2 gemachten Ausführungen.

## 6.2.2 NABKNF-Beobachter

### 6.2.2.1 NABKNF-Beobachter 1

Der Einsatz dieses Beobachters führt bei additiver Störung der Ausgangsmessung mit  $r_y(k)$  auf die Fehlerdifferenzgleichung in NABKNF

$$\mathbf{e}^\square(k+1) = \mathbf{A}_{\lambda w} \mathbf{e}^\square(k) + \begin{bmatrix} r_y(k-n+2) \\ \vdots \\ r_y(k+1) \end{bmatrix} - \mathbf{A}_{\lambda w} \begin{bmatrix} r_y(k-n+1) \\ \vdots \\ r_y(k) \end{bmatrix}, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{e}^\square(0) = \mathbf{e}_0^\square$$

mit der in Gl. (5.6) angegebenen Matrix  $\mathbf{A}_{\lambda w}$ . Im  $\mathcal{Z}$ -Bereich gilt für die erzwungene Bewegung

$$(\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_{\lambda w}) \mathbf{E}^\square(z) = (\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_{\lambda w}) \begin{bmatrix} z^{-n+1} \\ \vdots \\ z^0 \end{bmatrix} R_y(z), \quad (6.39)$$

woraus unmittelbar

$$\mathbf{e}^\square(k) = \begin{bmatrix} r_y(k-n+1) \\ \vdots \\ r_y(k) \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

folgt. Der Beobachterfehler besteht aus dem aktuellen und  $n-1$  Altwerten des Rauschsignals  $r_y(k)$ . Eine Veränderung der Rauschempfindlichkeit über die Wahl der Beobachterdynamik ist daher nicht möglich. Bei den NABKNF-Beobachtern genügt für die Ermittlung der Kennzahl  $\Gamma$  die alleinige Betrachtung des Beobachterfehlers in Normalform nicht, da der Systemdarstellung in NABKNF ein vergangener Systemzustand zugrunde liegt. Zusätzlich ist die  $(n-1)$ -malige Faltung des Beobachterzustands mit der Systemfunktion zu berücksichtigen. Den nachfolgenden Betrachtungen liegt eine linearisierte<sup>8</sup>, kanonische Systemdarstellung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_S \mathbf{x}(k), \quad y(k) = x_1(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.41)$$

mit der Matrix

$$\mathbf{A}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.42)$$

<sup>8</sup>Um allgemeine Aussagen zu erhalten, wird, analog zur Vorgehensweise für die ENBNF-Beobachter 1 und 3, eine Systemlinearisierung angewendet.

zugrunde. Die Struktur dieser Darstellungsform entspricht der NABKNF; die Transformationsvorschrift (5.1) auf NABKNF lautet somit  $\mathbf{x}^\square(k) = \mathbf{x}(k-n+1)$ . Der aktuelle Schätzwert ergibt sich nach Gl. (5.9) somit zu  $\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{A}_S^{n-1} \hat{\mathbf{x}}^\square(k)$  und da eine linearisierte Systembeschreibung vorliegt, gilt für den aktuellen Beobachterfehler ebenfalls  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}_S^{n-1} \mathbf{e}^\square(k)$ .

Das nachfolgend betrachtete Übertragungssystem weist die skalare Eingangsgröße  $r_y(k)$  und die  $n$ -dimensionale Ausgangsgröße  $\mathbf{e}(k)$  auf. Aus Gl. (6.40) folgt die  $n$ -dimensionale Impulsantwort  $\mathbf{g}(k)$

$$\mathbf{g}(k) = \mathbf{A}_S^{n-1} \begin{bmatrix} \delta(k-n+1) \\ \vdots \\ \delta(k) \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

dieses Übertragungssystems. Die gesuchten Varianzen  $\sigma_i^2$  der Beobachterfehler  $e_i(k)$  stimmen mit den Diagonalelementen der Autokorrelationsmatrix

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}\mathbf{e}}(k) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(-\mu) \underbrace{\left( \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(\nu) \delta(k-\nu-\mu) R_{rr} \right)^T}_{\mathbf{g}(k-\mu)^T R_{rr}} \quad (6.44)$$

zum Zeitpunkt  $k = 0$  überein. Dabei stellt  $R_{rr} \delta(k)$  wiederum die Autokorrelationsfunktion des weißen Rauschens  $r_y(k)$  dar. Das Einsetzen von Gl. (6.43) unter Berücksichtigung von  $k = 0$  führt auf

$$\mathbf{R}_{\mathbf{e}\mathbf{e}}(0) = R_{rr} \mathbf{A}_S^{n-1} \left( \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta(-\mu-n+1) \\ \vdots \\ \delta(-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(-\mu-n+1) \\ \vdots \\ \delta(-\mu) \end{bmatrix}^T \right) (\mathbf{A}_S^T)^{n-1}. \quad (6.45)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta(-\mu-n+1) \\ \vdots \\ \delta(-\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta(-\mu-n+1) \\ \vdots \\ \delta(-\mu) \end{bmatrix}^T &= \\ & \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \delta(-\mu-n+1)^2 & \cdots & \delta(-\mu-n+1)\delta(-\mu) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta(-\mu)\delta(-\mu-n+1) & \cdots & \delta(-\mu)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.46)$$

und

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \delta(-\mu + \nu_1) \delta(-\mu + \nu_2) = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu_1 = \nu_2 \\ 0 & \text{für } \nu_1 \neq \nu_2 \end{cases} \quad (6.47)$$

läßt sich Gl. (6.45) auch in der vereinfachten Form

$$\mathbf{R}_{ee}(0) = R_{rr} \mathbf{A}_S^{n-1} (\mathbf{A}_S^T)^{n-1} \quad (6.48)$$

angeben. Die Kennzahl

$$\Gamma = \text{Spur} \left\{ R_{rr} \mathbf{A}_S^{n-1} (\mathbf{A}_S^T)^{n-1} \right\} \quad (6.49)$$

hängt somit nicht von der gewählten Beobachterdynamik ab.

### 6.2.2.2 NABKNF-Beobachter 2

Die Fehlerdifferenzgleichung in NABKNF unter Verwendung dieses Beobachters lautet

$$\mathbf{e}^\square(k+1) = \mathbf{A}_{\lambda w} \mathbf{e}^\square(k) + \begin{bmatrix} r_y(k-n+2) \\ \vdots \\ r_y(k) \\ \Delta f_n^\square \end{bmatrix} - \mathbf{A}_{\lambda w} \begin{bmatrix} r_y(k-n+1) \\ \vdots \\ r_y(k-1) \\ r_y(k) \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

$$\mathbf{e}^\square(0) = \mathbf{e}_0^\square.$$

Die Betrachtung des Systems innerhalb eines kleinen Bereiches um die Ruhelage gestattet die Linearisierung

$$\Delta f_n^\square \approx - \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{n-1-\mu} r_y(k-\mu), \quad (6.51)$$

mit den Koeffizienten  $a_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-1$ , des charakteristischen Polynoms des linearisierten Systems. Das Einsetzen von (6.51) in die Fehlerdifferenzgleichung (6.50) und ihre  $\mathcal{Z}$ -Transformation liefert für die vom Rauschsignal erzwungene Bewegung des Fehlersignals

$$\frac{\mathbf{E}^\square(z)}{R_y(z)} = \begin{bmatrix} z^{-n+1} \\ \vdots \\ z^{-1} \\ z^0 \end{bmatrix} - (\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_{\lambda w})^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z + \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{n-1-\mu} z^{-\mu} \end{bmatrix}, \quad (6.52)$$

mit der Matrix

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{I}_n z - \mathbf{A}_{\lambda w})^{-1} &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \\
 \text{wobei } a_{i,\nu} &= \begin{cases} 0 & \text{für } \nu < i \\ \frac{1}{z - \lambda_i} & \text{für } \nu = i \\ \frac{\prod_{\mu=2}^{\nu} w_{\mu}}{\prod_{\mu=i}^{\nu} (z - \lambda_{\mu})} & \text{für } \nu > i \end{cases} \quad (6.53) \\
 &1 \leq i \leq n \quad 1 \leq \nu \leq n.
 \end{aligned}$$

Das Rauschsignal weist somit einen Einfluß auf alle Komponenten des Beobachterfehlers auf. Die Bestimmung von Parametern  $w_2, \dots, w_n$  sowie  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , die zu einer größtmöglichen Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang führen, ist in dieser Darstellung nicht unmittelbar möglich. Die Berechnung der Kennzahl  $\Gamma$  muß daher ebenfalls über die Autokorrelationsmatrix des Beobachterfehlers erfolgen. Wie bereits beim NABKNF-Beobachter 1 ist dabei die  $(n-1)$ -malige Anwendung der Systemfunktion auf den Beobachterzustand zu berücksichtigen. Der nachfolgenden Betrachtung liegt daher wieder eine linearisierte, kanonische Systemdarstellung entsprechend Gl. (6.42) und (6.41) zugrunde; es gilt also  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{A}_S^{n-1} \mathbf{e}^{\square}(k)$ . Für die Darstellung der  $n$ -dimensionalen Impulsantwort  $\mathbf{g}(k) = [g_1(k) \ \dots \ g_n(k)]^T$  des Übertragungssystems mit  $r_y(k)$  als Eingangs- und  $\mathbf{e}(k)$  als Ausgangsgröße sind zunächst die nachfolgend angegebenen Definitionen der Polynome

$$P_{n,\mu}(\lambda_n) = \begin{cases} \lambda_n^{\mu} + a_{n-1} \lambda_n^{\mu-1} + \dots + a_{n-\mu+1} \lambda_n + a_{n-\mu} & \text{für } \mu \leq n \\ P_{n,n}(\lambda_n) \lambda_n^{\mu-n} & \text{für } \mu > n \end{cases} \quad (6.54)$$

sowie

$$P_{\nu,\mu}(\lambda_{\nu}, \dots, \lambda_n) = \quad (6.55)$$

$$\lambda_{\nu}^{\mu} + P_{\nu+1,1}(\lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_n) \cdot \lambda_{\nu}^{\mu-1} + \dots + P_{\nu+1,\mu-1}(\lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_n) \cdot \lambda_{\nu} + P_{\nu+1,\mu}(\lambda_{\nu+1}, \dots, \lambda_n)$$

mit  $\nu = 1, 2, \dots, n-1$  erforderlich. Ferner beschränken sich die Betrachtungen auf  $n-1$  identische Wichtungsfaktoren  $w_2 = w_3 = \dots = w_n = w$ . Die gesuchte Impulsantwort lautet dann  $\mathbf{g}(k) = \mathbf{A}_S^{n-1} \mathbf{g}^{\square}(k)$ , wobei die  $i$ -te Komponente  $g_i^{\square}(k)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , der Antwort des Beobachterfehlers  $\mathbf{e}^{\square}(k)$  in NABKNF auf  $\delta(k)$  die Form

$$g_i^{\square}(k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < n - i \\ 1 - w^{n-i} & \text{für } k = n - i \\ -w^{n-i} P_{i,k-n+i}(\lambda_i, \dots, \lambda_n) & \text{für } k > n - i \end{cases} \quad (6.56)$$

annimmt, wie z. B. aus dem  $\mathcal{Z}$ -Übertragungsvektor nach Gl. (6.52) hervorgeht. Entsprechend Gl. (6.56) werden alle Komponenten des Beobachterfehlers  $\mathbf{e}^\square(k)$  bzw.  $\mathbf{e}(k)$  von  $r_y(k)$  beeinflusst. Die Autokorrelationsmatrix (6.44) lautet für  $k = 0$

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}(0) = R_{rr} \mathbf{A}_S^{n-1} \left( \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}^\square(-\mu) \mathbf{g}^\square(-\mu)^T \right) (\mathbf{A}_S^T)^{n-1}. \quad (6.57)$$

Die Kennzahl  $\Gamma = \text{Spur}\{\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}(0)\}$ , also die Summe der Diagonalelemente von  $\mathbf{R}_{\mathbf{ee}}(0)$  nach Gl. (6.57), hängt vom Wichtungsfaktor  $w$  und den  $n$  Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  der Fehlerdynamik in NABKNF ab. Die Berechnung von  $\Gamma$  kann für ein speziell vorliegendes System wiederum mit Hilfe von symbolverarbeitenden Programmen erfolgen. Da  $\mathbf{g}^\square(k)$  die Impulsantwort eines stabilen Systems darstellt, läßt sich die unendliche Summe in Gl. (6.57) durch eine endliche mit ausreichender Genauigkeit annähern. Mit Hilfe der frei wählbaren Parameter  $w, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  ist dann eine Minimierung von  $\Gamma$  möglich.

### 6.2.3 Exemplarische Verifikation

Nach den vorstehend dargestellten theoretischen Untersuchungen beinhaltet dieser Unterabschnitt die Ergebnisse von experimentellen Untersuchungen der Beobachter bei Auftreten von Meßrauschen am Systemausgang. Diese Untersuchungen erfolgten mit Hilfe von Simulationen des bereits vorgestellten Beispielsystems (6.2) mit den jeweiligen Beobachtern und ermöglichen eine Verifikation der zuvor erhaltenen theoretischen Ergebnisse. Dieser Unterabschnitt ist wie folgt gegliedert. Nachstehend erfolgt zunächst die Beschreibung der durchgeführten Simulationen. Anschließend werden die oben entwickelten theoretischen Analysen für das vorliegende System durchgeführt und schließlich mit den Simulationsergebnissen verglichen.

Die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der Fehlerdynamik in Normalform wurden bei den durchgeführten Simulationen im Bereich von -0.8 bis 0.8 in Schritten von 0.05, die Wichtungsfaktoren  $w_\mu = w, \mu = 2, 3, \dots, n$ , der NABKNF-Beobachter im Bereich von -2.0 bis 2.0 in Schritten von 0.5 variiert. Die Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  dient anschließend dazu, die Rauschempfindlichkeit in Abhängigkeit dieser Beobachterparameter zu bestimmen. Mit Hilfe eines Zufallsgenerators wurde eine mittelwertfreie Pseudo-Zufallszahlenfolge mit einer Amplitude von 0.02 als Rauschsignal  $r_y(k)$  dem Systemausgang  $y(k)$  überlagert. Diese Pseudo-Zufallszahlenfolge war bei allen Simulationsläufen identisch, was die Vergleichbarkeit der Ergebnisse gewährleistet.

#### 6.2.3.1 Ergebnisse der theoretischen Analyse

Die linearisierte Darstellung des Systems (6.2) weist mit dem Parameter  $a = 0.3$  drei Eigenwerte  $\lambda_{S1} = \lambda_{S2} = \lambda_{S3} = 0.3$  auf. Die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms lauten

somit

$$a_0 = -0.027, \quad a_1 = 0.27, \quad a_2 = -0.9. \quad (6.58)$$

Die in den vorstehenden Unterabschnitten dargestellten Analysen der Rauschempfindlichkeit für die Beobachter in Normalform liefern mit den Systemkoeffizienten nach (6.58) die in Tabelle 6.2 dargestellte minimale Kennzahl  $\Gamma_{min}$  in Abhängigkeit der Varianz  $R_{rr}$  des Rauschsignals  $r_y(k)$  sowie die zu  $\Gamma_{min}$  gehörenden Werte der Beobachterparameter. Die Kennzahlen  $\Gamma_{min}$  der ENBNF-Beobachter sind dabei nicht mit denen der NABKNF-Beobachter vergleichbar, da jeweils eine andere Transformation auf die betrachtete Normalform vorliegt.

**Tabelle 6.2:** Theoretisch ermittelte Kennzahl  $\Gamma_{min}$  bei minimalem Einfluß des Ausgangsmeßrauschens und die dazugehörigen Beobachterparametern

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-Beobachter	
	1	2	3	4	1	2
$\Gamma_{min}$	0	$R_{rr}$	$0.063R_{rr}$	$R_{rr}$	$2.22R_{rr}$	$0.067R_{rr}$
bei den Parametern	$\lambda_1 = 0.3$ $\lambda_2 = 0.3$ $\lambda_3 = 0.3$	$ \lambda_1  < 1$ $ \lambda_2  < 1$ $ \lambda_3  < 1$	$ \lambda_1  < 1$ $ \lambda_2  < 1$ $\lambda_3 = 0.72$	$ \lambda_1  < 1$ $ \lambda_2  < 1$ $ \lambda_3  < 1$	$w$ beliebig $ \lambda_1  < 1$ $ \lambda_2  < 1$ $ \lambda_3  < 1$	$w = 0.49$ $\lambda_1 = 0.00$ $\lambda_2 = 0.66$ $\lambda_3 = 0.72$

### 6.2.3.2 Simulationsergebnisse

Die Simulationsläufe für die Beobachter ergaben die in Tabelle 6.3 dargestellten minimalen Güten  $E_{400}^{500}$  und die zugehörigen Beobachterparameter. Das Zeichen \* kennzeichnet dabei Parameter, die im untersuchten Wertebereich keinen Einfluß auf  $E_{400}^{500}$  aufweisen.

Man beachte, der Zahlenwert der Kennzahl  $\Gamma$  ist nicht mit dem des Gütekriteriums  $E_{400}^{500}$  vergleichbar, da  $\Gamma$  in Normalform,  $E_{400}^{500}$  jedoch in ANDF ermittelt wurde. Die Simulationsergebnisse lassen nachstehende Schlußfolgerungen zu:

- Die ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie der NABKNF-Beobachter 1 weisen identische, von den Beobachterparametern unabhängige Fehlerquadratsummen  $E_{400}^{500}$  auf. Die minimal erreichbare Empfindlichkeit dieser Beobachter bezüglich Ausgangsmeßrauschen ist deutlich größer als die der übrigen Beobachter.
- Der NABKNF-Beobachter 2 weist in diesem Fall die größte erreichbare Robustheit gegen Ausgangsmeßrauschen auf. Die dafür erforderliche Fehlerdynamik ist wegen  $\lambda_1 = 0.55$ ,  $\lambda_2 = 0.10$  und  $\lambda_3 = 0.55$  jedoch im Vergleich zur Systemdynamik<sup>9</sup> re-

<sup>9</sup>Alle Eigenwerte der linearisierten Systembeschreibung liegen bei  $\lambda_{S1} = \lambda_{S2} = \lambda_{S3} = 0.3$ .

**Tabelle 6.3:** Simulierte minimale Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  bei Ausgangsmeßrauschen mit den dazugehörigen Beobachterparametern sowie  $E_{400}^{500}$  bei Verwendung der theoretisch ermittelten Parameter gemäß Tabelle 6.2

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-Beobachter	
	1	2	3	4	1	2
min. $E_{400}^{500}$	1.567E-02	2.924E-02	1.567E-02	2.924E-02	2.924E-02	1.162E-02
bei den Parametern	$\lambda_1 = 0.00$ $\lambda_2 = 0.00$ $\lambda_3 = 0.55$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.55$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = *$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = 0.5$ $\lambda_1 = 0.55$ $\lambda_2 = 0.10$ $\lambda_3 = 0.55$
$E_{400}^{500}$	1.996E-02	2.924E-02	1.643E-02	2.924E-02	2.924E-02	1.462E-02
bei den Parametern gemäß Tabelle 6.2	$\lambda_1 = 0.30$ $\lambda_2 = 0.30$ $\lambda_3 = 0.30$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.70$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = *$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = 0.5$ $\lambda_1 = 0.00$ $\lambda_2 = 0.65$ $\lambda_3 = 0.70$

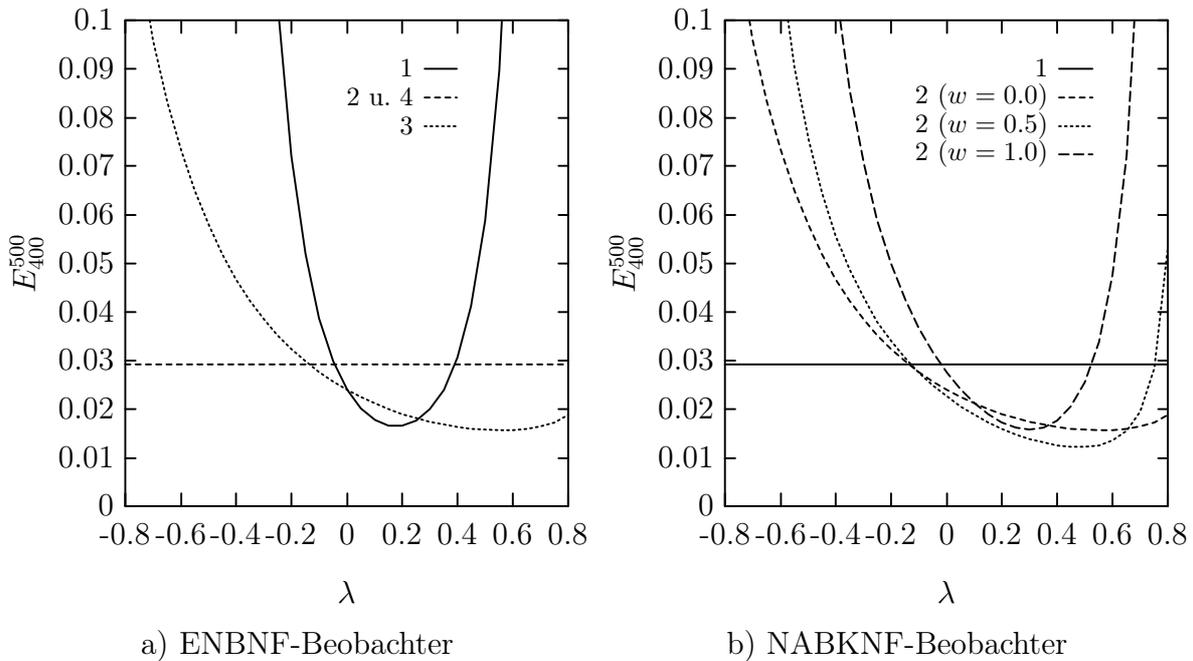
lativ langsam. Der Preis für eine hohe Robustheit gegen Meßrauschen liegt somit in einem vergleichsweise langsam einschwingendem Beobachter.

- Die minimale Güte sowie die zugehörigen Beobachterparameter der ENBNF-Beobachter 1 und 3 sind identisch, da beim Beobachter 3 die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  keinen Einfluß auf  $E_{400}^{500}$  aufweisen und somit auch hier die betragsmäßig kleinsten Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  die optimale Wahl darstellen.
- Die Fehlerquadratsummen der ENBNF-Beobachter 1 und 3 sowie des NABKNF-Beobachters 2 für die zuvor theoretisch ermittelten Parameter<sup>10</sup> nach Tab. 6.2 sind zwar um bis zu 30% größer als die erreichbaren Minima, liegen aber noch deutlich unter den Werten der anderen drei Beobachter.

Zusammenfassend kann man folgenden Schluß ziehen. Die theoretische Untersuchung der Entwürfe unter Zuhilfenahme von Linearisierungen liefert durchaus sinnvolle Ergebnisse. In welchem Maß sich die Wahl der Beobachterparameter auf die Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang auswirkt, zeigen die Bilder 6.5-a für die ENBNF-Beobachter bzw. 6.5-b für die NABKNF-Beobachter. Sie stellen die Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  dar, falls für alle drei Eigenwerte des Beobachterfehlers in Normalform  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

<sup>10</sup>Aufgrund der Schrittweiten der Parameteränderungen wurden jeweils die Parameterwerte gewählt, die den geringsten Abstand zu den theoretisch ermittelten Werten aufweisen.

gilt. Man beachte, die in diesen Bildern erkennbaren Minima von  $E_{400}^{500}$  liegen aufgrund dieser Wahl der Eigenwerte etwas oberhalb der absoluten Minima gemäß Tabelle 6.3. Beim ENBNF-Beobachter 3 sowie beim NABKNF-Beobachter 2 für  $w = 0$  hängt  $E_{400}^{500}$  lediglich von  $\lambda_3$  und nicht von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  ab. Die Darstellungen gelten in diesen Fällen daher auch für beliebige Werte von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .



**Bild 6.5:** Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bei Ausgangsmessrauschen in Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  der Beobachterfehlerdynamik in Normalform.

Die Diagramme zeigen deutlich die Unabhängigkeit der Rauschempfindlichkeit der ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie des NABKNF-Beobachters 1 von der gewählten Beobachterdynamik. Diese weist hingegen beim ENBNF-Beobachter 1 und, mit großen Werten von  $w$ , beim NABKNF-Beobachter 2 einen entscheidenden Einfluß auf. Trotz unterschiedlicher Entwurfsverfahren führen die ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie der NABKNF-Beobachter 1 auf gleiche Ergebnisse. Desweiteren liefert der ENBNF-Beobachter 3 identische Resultate wie der NABKNF-Beobachter 2 für  $w = 0$ .

### 6.2.3.3 Simulationsergebnisse für $u(k) = 0$

Die vorstehend dargestellten Ergebnisse zeigen Unterschiede zwischen den theoretisch und experimentell ermittelten optimalen Beobachterparametern auf, obwohl sich das Gütekriterium  $E_{400}^{500}$  für beide Einstellungen nicht wesentlich unterscheidet. Den theoretischen Betrachtungen liegt eine linearisierte Systemdarstellung in Normalform zugrunde. Es ist daher zu klären, ob

diese Näherung die Abweichungen zu den experimentell ermittelten optimalen Parametern erklärt. Um andere Ursachen ausschließen zu können, wurden die gleichen, oben angegebenen, Simulationen durchgeführt, wobei jedoch  $u(k) = 0$  galt. Wegen  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}_n$  führt dieses Eingangssignal auf  $\mathbf{x}(k) = \mathbf{0}_n$  und reduziert den Linearisierungsfehler deutlich. Dieser Fall entspricht bei einem geregelten System dem eingeschwungenen Regelkreis. Auch dann sollte das Ausgangsmeßrauschen möglichst wenig Auswirkungen auf den Beobachterzustand aufweisen, da anderenfalls die rauschbehaftete Stellgröße zu unnötigen Belastungen des Stellglieds führt. Die Tabelle 6.4 enthält die entsprechenden Simulationsergebnisse.

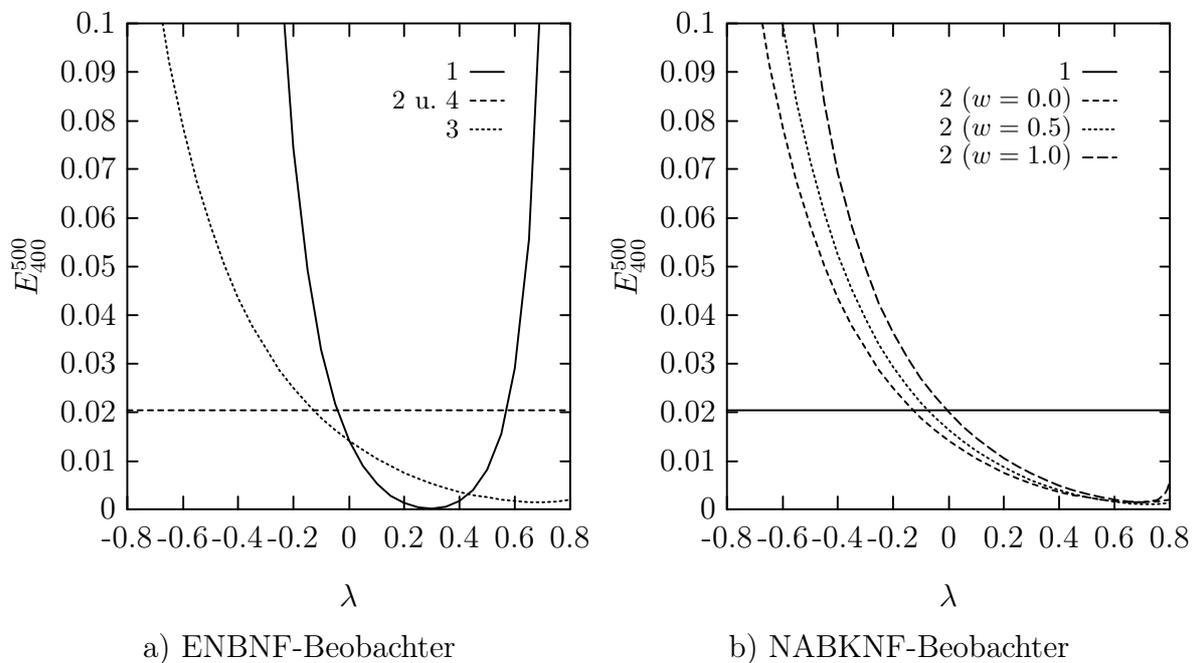
**Tabelle 6.4:** Simulierte minimale Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  bei Ausgangsmeßrauschen mit den dazugehörigen Beobachterparametern für  $u(k) = 0$  sowie  $E_{400}^{500}$  bei Verwendung der theoretisch ermittelten Parameter gemäß Tabelle 6.2

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-Beobachter	
	1	2	3	4	1	2
min. $E_{400}^{500}$	1.005E-04	2.046E-02	1.426E-03	2.046E-02	2.046E-02	1.0306E-03
bei den Parametern	$\lambda_1 = 0.30$ $\lambda_2 = 0.30$ $\lambda_3 = 0.30$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.70$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = *$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = 0.5$ $\lambda_1 = 0.00$ $\lambda_2 = 0.60$ $\lambda_3 = 0.75$
$E_{400}^{500}$	1.005E-04	2.046E-02	1.426E-03	2.046E-02	2.046E-02	1.041E-03
bei den Parametern gemäß Tabelle 6.2	$\lambda_1 = 0.30$ $\lambda_2 = 0.30$ $\lambda_3 = 0.30$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.70$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = *$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = 0.5$ $\lambda_1 = 0.00$ $\lambda_2 = 0.65$ $\lambda_3 = 0.70$

Sie bestätigen die theoretischen Untersuchungen sehr gut, wobei lediglich beim NABKNF-Beobachter 2 noch unwesentliche Abweichungen erkennbar sind. Mit dem ENBNF-Beobachter 1 kann man die mit Abstand größte Robustheit gegen Ausgangsmeßrauschen erzielen. Besonders deutlich tritt der große Unterschied zwischen den drei Beobachtern, bei denen die Robustheit nicht durch die Wahl der Beobachterdynamik beeinflussbar ist (ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie NABKNF-Beobachter 1), und den übrigen Beobachtern auf. Im Vergleich zum Fall mit  $u(k) = 0.2 \sin(0.5k)$  (vgl. Tab. 6.3) weisen erstgenannte Entwürfe nur eine geringfügige Verbesserung auf. Die Fehlerquadratsumme der übrigen Beobachter nahm jedoch um das 10- bis 150-fache ab; wie zu erwarten war, wirkt die Filterung hier um so besser, je geringer der Einfluß der Systemnichtlinearitäten ausfällt. Bei den ENBNF-Beobachtern 2 und 4 sowie dem NABKNF-Beobachter 1 tritt hingegen keine Filterung des Rauschsignals auf, was sich

bei starkem Einfluß der Nichtlinearitäten als Vorteil erweisen kann, da die Beobachtergleichungen in Normalform die Nichtlinearitäten nicht enthalten und somit auch keinen Einfluß auf die Einkopplung des Rauschsignals aufweisen. Bei den übrigen Beobachtern können hier aufgrund der nichtlinearen Verknüpfungen sogar Verstärkungen des Rauschens auftreten. Bei Festwertregelung befindet sich der geschlossene Regelkreis jedoch überwiegend in der Ruhelage und die ENBNF-Beobachter 1 und 3 sowie der NABKNF-Beobachter 2 eignen sich dann besonders gut bei Auftreten von Ausgangsmeßrauschen.

Die Abhängigkeit der Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  von der wählbaren Beobachterdynamik zeigen die Bilder 6.6-a für die ENBNF-Beobachter bzw. 6.6-b für die NABKNF-Beobachter. Dargestellt ist  $E_{400}^{500}$  für verschiedene Werte von  $\lambda$ , falls für die drei Eigenwerte des Beobachterfehlers in Normalform  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  gilt.



**Bild 6.6:** Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bei Ausgangsmeßrauschen für  $u(k) = 0$  in Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  der Beobachterfehlerdynamik in Normalform

Wie schon für den Fall mit Eingangsgröße, weist der ENBNF-Beobachter 1 die größte Abhängigkeit von der gewählten Fehlerdynamik auf. Üblicherweise wird der Betrag der Beobachtereigenwerte kleiner als der Betrag der Systemeigenwerte eingestellt. Sie liegen damit in einem Bereich mit relativ kleiner Fehlerquadratsumme des ENBNF-Beobachters 1 (s. Bild 6.6-a für  $0 < \lambda < 0.3$ ). Vergleichbare Werte von  $E_{400}^{500}$  erreicht der ENBNF-Beobachter 3 und der NABKNF-Beobachter 2 erst für einen größeren Wert für  $\lambda$ ; dabei weisen jedoch  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  keinen Einfluß auf<sup>11</sup> und können somit zu  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  gewählt werden.

<sup>11</sup>Beim NABKNF-Beobachter 2 gilt dieses lediglich für  $w = 0$ .

## 6.3 Robustheit gegen Parameterunsicherheiten und Meßrauschen an den Systemeingängen

Die nachfolgenden Ausführungen widmen sich dem Verhalten der betrachteten Beobachterentwürfe bei Parameterunsicherheiten oder additiven Rauschsignalen bei der Messung der Systemeingangsgrößen<sup>12</sup>.

Die folgenden Abkürzungen dienen zur Erleichterung der Schreibarbeit:

$$\begin{aligned}\Delta f_{n-1}^* &= \tilde{f}_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \tilde{\mathbf{u}}(k-n+1), \dots, \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) - \\ &\quad f_{n-1}^*(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \mathbf{u}(k-n+1), \dots, \mathbf{u}(k+1)), \\ \Delta f_n^\square &= \tilde{f}_n^\square(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \tilde{\mathbf{u}}(k-n+1), \dots, \tilde{\mathbf{u}}(k+1)) - \\ &\quad f_n^\square(\bar{y}_{[1-n,0]}(k), \mathbf{u}(k-n+1), \dots, \mathbf{u}(k+1)),\end{aligned}\tag{6.59}$$

wobei  $\tilde{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{u}(k) + \mathbf{r}_u(k)$  den Meßvektor der Systemeingänge mit additiv überlagertem Rauschsignal  $\mathbf{r}_u(k)$  darstellt. Zudem unterscheiden sich die Funktionen  $\tilde{f}_{n-1}^*$  bzw.  $\tilde{f}_n^\square$  von  $f_{n-1}^*$  bzw.  $f_n^\square$  durch die sie charakterisierenden Parameter, die von denen des physikalischen Systems abweichen.

### 6.3.1 ENBNF-Beobachter

#### 6.3.1.1 ENBNF-Beobachter 1

Für diesen Beobachter ergibt sich bei der Auswahl der Funktionen  $f_\mu^*$  gemäß Gl. (4.31) eine Fehlerdifferenzgleichung in ENBNF der Form

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_q \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f_{n-1}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^*.\tag{6.60}$$

Die Störfunktion  $\Delta f_{n-1}^*$  wirkt in jedem Fall auf die letzte Komponente  $e_n^*(k)$  und für  $q_\mu \neq 0$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, n-2$ , auch auf alle übrigen Komponenten des Beobachterfehlers. Die Wahl der Fehlerdynamik beeinflusst dabei die Einkopplung der Störungen.

<sup>12</sup>Bei einer Regelung des Systems ist die Messung der Systemeingangsgrößen unter Umständen nicht erforderlich, da die Eingangsgrößen im Rechner generiert werden und somit unmittelbar für die Beobachterberechnung zur Verfügung stehen.

### 6.3.1.2 ENBNF-Beobachter 2 und 4

Die in den Gl. (4.71) bzw. (4.74) angegebenen Differenzgleichungen dieser Beobachter beinhalten für  $h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k) = x_n^*(k)$  weder die Eingangsgröße noch einen vom Systemmodell abhängigen Ausdruck. Auf die Beobachter in Normalform üben die betrachteten Parameter- und Meßunsicherheiten daher keinen Einfluß aus. Lediglich die bei allen ENBNF-Beobachtern identische Rücktransformation auf ANDF beeinflusst dann die Arbeitsweise der Beobachter. Die ENBNF-Beobachter 2 und 4 erweisen sich somit als relativ robust gegen Parameterunsicherheiten und Meßrauschen an den Systemeingängen, wobei die Wahl der Beobachterdynamik keinen Einfluß aufweist.

### 6.3.1.3 ENBNF-Beobachter 3

Der Fehler dieses Beobachters gehorcht in ENBNF der Differenzgleichung

$$\mathbf{e}^*(k+1) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{e}^*(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f_{n-1}^* \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^*(0) = \mathbf{e}_0^*. \quad (6.61)$$

Die Störfunktion  $\Delta f_{n-1}^*$  wirkt lediglich auf die letzte Komponente  $e_n^*(k)$  des Beobachterfehlers. Dabei weist von den frei wählbaren Beobachterparametern nur  $\lambda_n$  einen Einfluß auf die Störeinkopplung auf.

## 6.3.2 NABKNF-Beobachter

### 6.3.2.1 NABKNF-Beobachter 1

Aufgrund der von den hier betrachteten Störungen unabhängigen Fehlerdifferenzgleichung (5.6) gelten für diesen Beobachter die bereits für die ENBNF-Beobachter 2 und 4 ermittelten Aussagen. Es liegt somit ein relativ robuster Beobachter bezüglich Parameterunsicherheiten und Meßrauschen an den Systemeingängen vor.

### 6.3.2.2 Beobachter Typ 2

Die Fehlerdifferenzgleichung in NABKNF nimmt bei Verwendung dieses Beobachters die Form

$$\mathbf{e}^\square(k+1) = \mathbf{A}_{\lambda w} \mathbf{e}^\square(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta f_n^\square \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^\square(0) = \mathbf{e}_0^* \quad (6.62)$$

an. Die Sensitivität des Beobachters in NABKNF bzgl. der Störfunktion  $\Delta f_n^\square$  ist für  $w_\mu = 0$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , identisch mit der des ENBNF-Beobachters 3 bzgl.  $\Delta f_{n-1}^*$ . Im Fall  $w_\mu \neq 0$  beeinflusst  $\Delta f_n^\square$  zudem alle Komponenten des Beobachterfehlers. In diesem Fall hängt der Störeinfluß zusätzlich von den Parametern  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  ab.

### 6.3.3 Exemplarische Untersuchung bei Meßrauschen an den Systemeingängen

Dieser Unterabschnitt beinhaltet die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen der Beobachter bei Auftreten von Meßrauschen am Systemeingang. Diese Untersuchungen erfolgten, wie schon im Unterabschnitt 6.2.3 beschrieben, mit Hilfe von Simulationen des Systems (6.2) mit den jeweiligen Beobachtern. Dieser Unterabschnitt ist wie folgt gegliedert: Nach der Beschreibung der durchgeführten Simulationen erfolgt die Darstellung der Simulationsergebnisse sowie ein Vergleich mit den vorstehend durchgeführten theoretischen Betrachtungen.

Die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  der Fehlerdynamik in Normalform wurden bei den durchgeführten Simulationen im Bereich von -0.8 bis 0.8 in Schritten von 0.1, die Wichtungsfaktoren  $w_\mu = w$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , der NABKNF-Beobachter im Bereich von -2.0 bis 2.0 in Schritten von 0.5 variiert. Die Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  dient anschließend dazu, die Rauschempfindlichkeit in Abhängigkeit dieser Beobachterparameter zu bestimmen. Mit Hilfe eines Zufallsgenerators wurde eine mittelwertfreie Pseudo-Zufallszahlenfolge mit einer Amplitude von 0.02 als Rauschsignal  $r_u(k)$  der Messung des Systemeingangs  $u(k)$  überlagert<sup>13</sup>. Diese Pseudo-Zufallszahlenfolge war auch hier bei allen Simulationsläufen identisch.

Die beschriebenen Simulationsdurchläufe führten zu den in Tabelle 6.5 dargestellten Ergebnissen. Das Zeichen \* kennzeichnet dabei wiederum Parameter, die im untersuchten Wertebereich keinen Einfluß auf  $E_{400}^{500}$  aufwiesen.

Die Simulationsergebnisse lassen folgende Schlußfolgerungen zu:

<sup>13</sup>Dem System wurde das Rauschsignal nicht zugeführt.

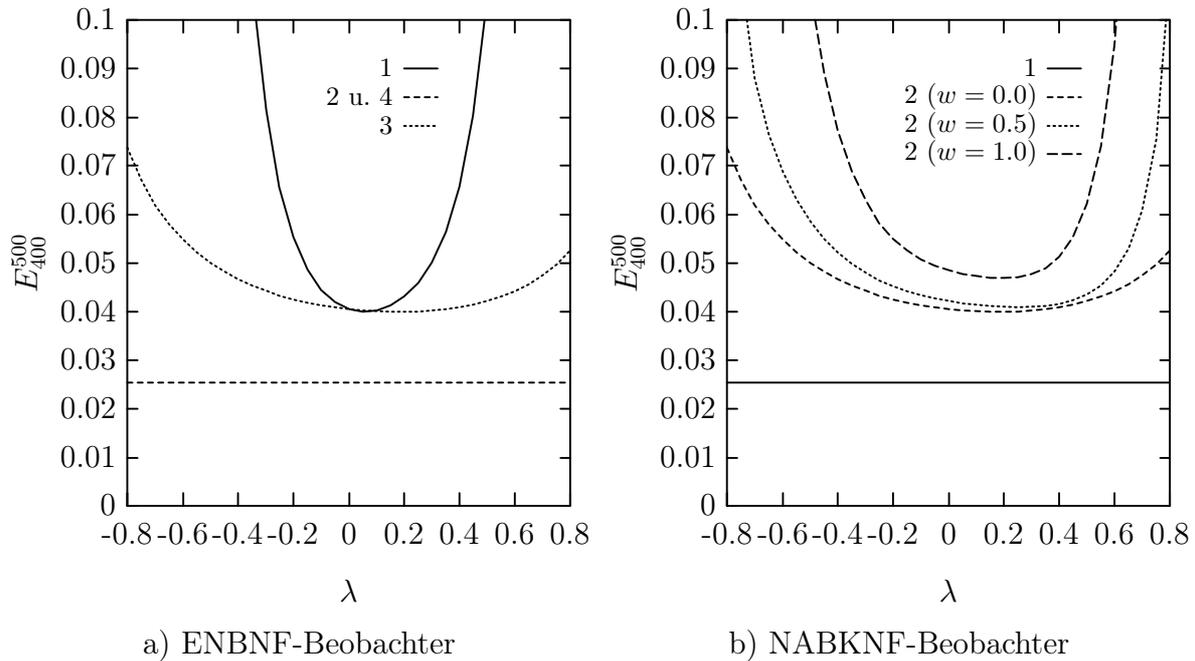
**Tabelle 6.5:** Simulierte minimale Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  bei Eingangsmeißrauschen mit den dazugehörigen Beobachterparametern

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-Beobachter	
	1	2	3	4	1	2
min. $E_{400}^{500}$	3.997E-02	2.542E-02	4.003E-02	2.542E-02	2.542E-02	4.003E-02
bei den Parametern	$\lambda_1 = -0.2$ $\lambda_2 = 0.0$ $\lambda_3 = 0.3$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.2$	$\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = *$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = *$	$w = 0.0$ $\lambda_1 = *$ $\lambda_2 = *$ $\lambda_3 = 0.2$

- Die ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie der NABKNF-Beobachter 1 weisen identische, von den Beobachterparametern unabhängige Fehlerquadratsummen auf. Die Empfindlichkeit dieser Beobachter bezüglich Meißrauschen an den Systemeingängen ist sehr viel geringer als die der übrigen Beobachter (s. Tab. 6.5). Trotz einer Rauschintensität, wie sie auch bei der experimentellen Untersuchung mit Ausgangsmeißrauschen vorlag, ergeben sich hier kleinere Werte für die Fehlerquadratsummen der ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie des NABKNF-Beobachters 1 (vgl. Tab. 6.3 und Tab. 6.5). Die übrigen Beobachter sind gegenüber Meißrauschen an den Systemeingängen offenbar deutlich weniger robust als gegen Ausgangsmeißrauschen (vgl. ebenfalls mit Tab. 6.3).
- Die ENBNF-Beobachter 1 und 3 sowie der NABKNF-Beobachter 2 mit  $w = 0$  führen zu nahezu identischen minimalen Fehlerquadratsummen. Offensichtlich erweist sich eine Wahl der Eigenwerte in der Nähe von  $\lambda = 0$  (Dead-Beat-Entwurf) als günstig (s. auch Bild 6.7). Für  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  (und  $w = 0$ ) ergab sich bei allen drei Beobachtern  $E_{400}^{500} = 4.057E-02$ , was nur unwesentlich über den ermittelten Minima liegt. Im Bereich um  $w = 0$  weist die Wahl von  $w$  nur einen sehr geringen Einfluß auf die erreichbare minimale Fehlerquadratsumme des NABKNF-Beobachters 2 aus.

Die Beurteilung der Abhängigkeit der Robustheit gegen Meißrauschen am Systemeingang von der wählbaren Beobachterdynamik erlauben die Bilder 6.7-a für die ENBNF-Beobachter bzw. 6.7-b für die NABKNF-Beobachter. Sie zeigen die Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  über  $\lambda$ , falls wiederum die drei Eigenwerte des Beobachterfehlers in Normalform  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  vorliegen.

Die Diagramme lassen deutlich die große Robustheit der ENBNF-Beobachter 2 und 4 und des NABKNF-Beobachters 1 gegen Meißrauschen am Systemeingang sowie die Unabhängigkeit der Rauschempfindlichkeit von der wählbaren Beobachterdynamik erkennen. Im Gegensatz hierzu ist die Wahl der Dynamik bei den übrigen Beobachtern, und insbesondere beim ENBNF-Beobachter 1, von großer Bedeutung.



**Bild 6.7:** Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bei Eingangsmeißrauschen in Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$  der Beobachterfehlerdynamik in Normalform

### 6.3.4 Exemplarische Untersuchung bei Parameterunsicherheiten

Die Vorgehensweise bei der experimentellen Untersuchung der Beobachter bei auftretenden Parameterunsicherheiten ist analog zu der bereits in Unterabschnitt 6.3.3 dargestellten. Anstelle der Störung der Eingangssignalmessung durch ein Rauschsignal wurde hier der Parameter  $a$  im System (6.2) halbiert, also  $a = 0.15$ . Den Beobachterberechnungen lag weiterhin der nominelle Wert  $a = 0.3$  zugrunde.

Die Simulationsergebnisse ergaben die in Tabelle 6.6 dargestellten Ergebnisse. Das Zeichen \* kennzeichnet dabei wiederum Parameter, die im untersuchten Wertebereich keinen Einfluß auf  $E_{400}^{500}$  aufwiesen.

Die Simulationsergebnisse lassen folgende Schlußfolgerungen zu:

- Die ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie der NABKNF-Beobachter 1 weisen identische, von den Beobachterparametern unabhängige Fehlerquadratsummen auf. Die Empfindlichkeit dieser Beobachter bezüglich Parameterunsicherheiten ist, wie erwartet, sehr viel geringer als die der übrigen Beobachter.
- Die Minimierung der Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  macht bei den ENBNF-Beobachtern 1 und 3 sowie dem NABKNF-Beobachter 2 negative Eigenwerte erforderlich, also alternierende Anteile der Eigenbewegungen der Beobachterfehler. Von diesen drei Beobachtern

**Tabelle 6.6:** Simulierte minimale Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  bei Parameterunsicherheiten mit den dazugehörigen Beobachterparametern

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-Beobachter	
	1	2	3	4	1	2
min. $E_{400}^{500}$	4.279E-01	2.648E-01	6.713E-01	2.648E-01	2.648E-01	6.626E-01
bei den Parametern	$\lambda_1 = -0.8$	$\lambda_1 = *$	$\lambda_1 = *$	$\lambda_1 = *$	$w = *$	$w = -0.5$
	$\lambda_2 = -0.4$	$\lambda_2 = *$	$\lambda_2 = *$	$\lambda_2 = *$	$\lambda_1 = *$	$\lambda_1 = -0.8$
	$\lambda_3 = -0.3$	$\lambda_3 = *$	$\lambda_3 = -0.8$	$\lambda_3 = *$	$\lambda_2 = *$	$\lambda_2 = 0.8$
					$\lambda_3 = *$	$\lambda_3 = -0.8$

weist der ENBNF-Beobachter 1 die größte erreichbare Robustheit auf. Im konkreten Anwendungsfall können jedoch negative Eigenwerte zu praktischen Schwierigkeiten führen. Beim Einsatz des Beobachters zur Zustandsrückführung würden alternierende Beobachterfehler auch zu entsprechendem „Schnattern“ des Stellglieds führen, was bei kleinen Abtastzeiten sehr problematisch sein kann.

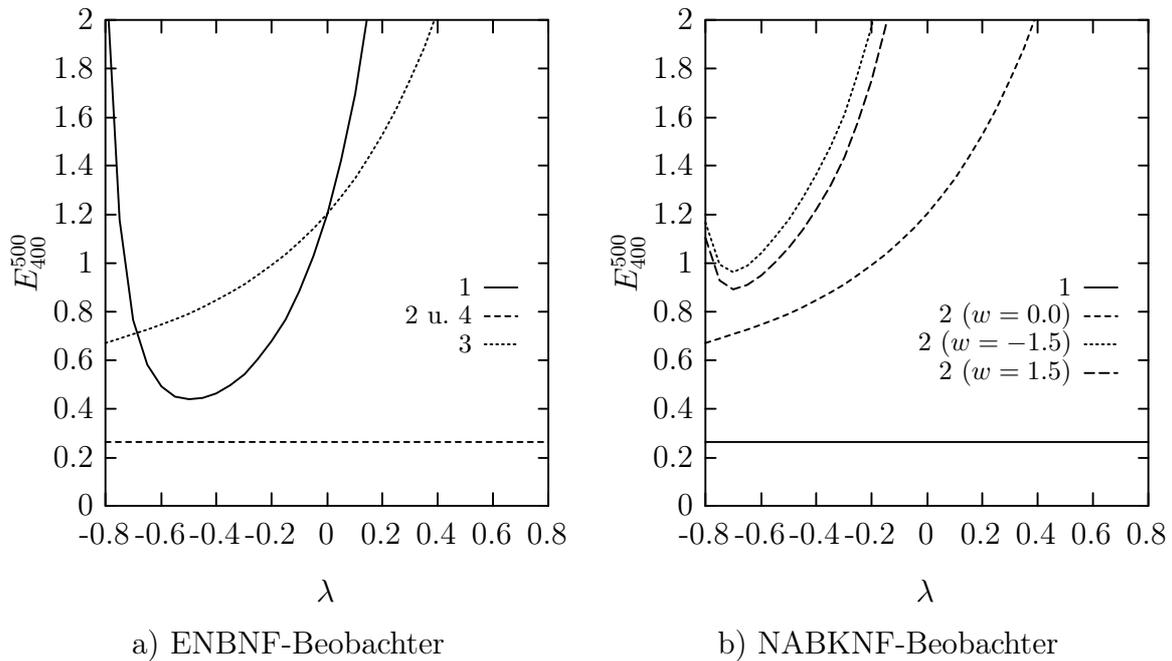
- Für den NABKNF-Beobachter 2 bleibt anzumerken, daß die Wahl des Parameters  $w = 0.0$  (min.  $E_{400}^{500} = 6.713E-01$ ) und  $w = 0.5$  (min.  $E_{400}^{500} = 6.682E-01$ ) zu ähnlichen Fehlerquadratsummen führt wie  $w = -0.5$ .

Bild 6.8-a für die ENBNF-Beobachter sowie Bild 6.8-b für die NABKNF-Beobachter gestatten eine Beurteilung der Abhängigkeit der Robustheit gegen Parameterunsicherheiten von der wählbaren Beobachterdynamik. Sie zeigen wiederum die Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  über  $\lambda$  für den Fall  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ .

Die Diagramme lassen die Robustheit der ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie des NABKNF-Beobachters 1 gegen Parameterunsicherheiten sowie die Unabhängigkeit der Robustheit von den frei wählbaren Beobachterparametern erkennen. Die Wahl der Fehlerdynamik weist bei den übrigen, deutlich parametersensitiveren Beobachtern einen relevanten Einfluß auf die Empfindlichkeit auf. Wie auch schon bei den vorigen Untersuchungen zeigt das Verhalten des ENBNF-Beobachters 1 die größte Abhängigkeit von der gewählten Beobachterdynamik.

## 6.4 Realisierbarkeit der Beobachterentwürfe

Dieser Abschnitt dient zur Unterstreichung einiger Aspekte der praktischen Anwendung der vorgestellten Beobachterentwürfe.



**Bild 6.8:** Fehlerquadratsumme  $E_{400}^{500}$  der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bei Parameterunsicherheiten in Abhängigkeit der Eigenwerte  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  der Beobachterfehlerdynamik in Normalform

### 6.4.1 Durchführbarkeit der Entwürfe

Alle sechs behandelten Beobachterentwürfe setzen lokal stark beobachtbare Systeme voraus. Ein Entwurf der Beobachter gelingt immer dann, wenn die Inverse  $\mathbf{t}^{\square-1}$  der Transformation auf Beobachtbarkeitsnormalform explizit angebar ist. Entwürfe für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen erfordern bei den NABKNF-Beobachtern Verschiebungen einzelner Ausgangsgrößen in die Vergangenheit, um Subsysteme gleicher Ordnung in Normalform zu erhalten. Die Entwürfe via ENBNF gelingen unter Umständen für Mehrgrößensysteme auch ohne zusätzliche Meßwertverzögerungen (s. Satz 4.4).

Die Durchführung der Beobachterentwürfe erfolgt zweckmäßigerweise mit Hilfe symbolverarbeitender Programmsysteme. Die Entwürfe für alle in dieser Arbeit angegebenen Beispiele wurden mit *Mathematica* [201] berechnet. Die Darstellung der Beobachtergleichungen in ANDF führt generell auf sehr umfangreiche Ausdrücke; sie sind kaum noch anschaulich interpretierbar. Zudem können symbolverarbeitende Programme nicht alle möglichen Vereinfachungen eines mathematischen Ausdrucks erkennen. Um auf dem Prozeßrechner möglichst kurze Rechenzeiten zu erhalten, ist daher eine manuelle Nachbearbeitung zweckmäßig.

## 6.4.2 Rechentechnische Aspekte

### Aufwand zur Berechnung des Beobachterzustands

Die Bestimmung des aktuellen Zustandsvektor der NABKNF-Beobachter auf einem Prozeßrechner teilt sich mindestens in zwei Rechenschritte auf, nämlich in die Berechnung von  $\Psi(k+1)$  nach Gl. (5.8) und in die  $(n-1)$ -malige Anwendung der Systemfunktion auf  $\Psi(k)$  nach Gl. (5.9). Aufgrund des nichtlinearen Charakters der vorliegenden Gleichungen entstehen bei der Verknüpfung mehrerer Funktionen generell sehr umfangreiche mathematische Ausdrücke. Anstelle der direkten Berechnung des NABKNF-Beobachters in  $\Psi$ -Koordinaten nach Gl. (5.8) bietet sich daher die Bestimmung von  $\hat{\mathbf{x}}^\square(k+1)$  entsprechend Gl. (5.3) (oder Gl. (5.11)) mit der anschließenden Rücktransformation nach Gl. (5.7) an.

Für die ENBNF-Beobachter ist es ebenfalls empfehlenswert, der Berechnung die Darstellung der Beobachter in Normalform zugrunde zu legen. Die Ermittlung des aktuellen Schätzvektors erfolgt dann ebenfalls in zwei Schritten, nämlich die Iteration der Beobachterdifferenzgleichung in Normalform (je nach Beobachertyp Gl. (4.16), (4.71), (4.72) oder (4.74)) sowie die Rücktransformation des Beobachterzustands auf ANDF (Gl. (4.19) und Inverse von (3.4)). Bei der Verwendung des Beobachters für eine Zustandsrückführung besteht bei den ENBNF-Beobachtern die Möglichkeit, das Regelungsgesetz für den Zustandsvektor  $\mathbf{x}^*(k)$  in ENBNF anzugeben. In diesem Fall erfolgt die Beobachterberechnung lediglich in ENBNF ohne weitere Rücktransformationen. Der Zustandsvektor  $\hat{\mathbf{x}}^\square(k)$  der NABKNF sowie  $\Psi(k)$  repräsentieren hingegen einen vergangenen Systemzustand und eignen sich folglich nicht für eine Zustandsrückführung. Eine Beobachter- und Reglerberechnung in NABKNF ohne weitere Rücktransformationen erweist sich daher als nicht durchführbar.

### Kausalität der Beobachtergleichungen

Im allgemeinen sind für die ENBNF-Beobachter die zukünftigen Werte  $\mathbf{u}(k+1), \dots, \mathbf{u}(k+n)$  notwendig;  $\mathbf{u}(k+n)$  jedoch nur bei Systemen mit Durchgangsanteil. Lediglich in einigen Fällen kann man das Auftreten von Zukunftswerten durch eine geschickte Wahl der Ausgangsfunktion  $h^*$  in ENBNF vermeiden (s. Unterabschnitt 4.1.5.2).

Die aus einem Entwurf via NABKNF resultierenden Beobachtergleichungen sind für Systeme ohne Durchgangsanteil stets kausal. Lediglich Systeme mit Durchgangsanteil, die von sehr viel geringerer praktischer Bedeutung sind, erfordern für die Beobachterberechnung die Kenntnis von  $\mathbf{u}(k+1)$  (s. Abschnitt 5.1). Für eine beobachtergestützte Zustandsregelung unter Verwendung der ENBNF-Beobachter 2 und 4 oder des NABKNF-Beobachter 1 wirft ein Durchgangsanteil generell Probleme auf. Die Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  legt bei diesen Beobachtern die Kenntnis der aktuellsten Ausgangsgröße  $y(k)$  zugrunde. Diese hängt bei vorhandenem Durchgangsanteil jedoch von der Eingangsgröße  $u(k)$  ab, die sich aber wiederum erst

aus  $u(k) = r(\hat{\mathbf{x}}(k))$  berechnet. Im Gegensatz zu zukünftigen Eingangsgrößen wäre in diesen Fällen ein zukünftiger Ausgangswert des Systems erforderlich. Abhilfe schafft ein vor das System geschaltetes Verzögerungsglied, da dann das, für den Regelungsentwurf zu betrachtende, Gesamtsystem keinen Durchgangsanteil aufweist. Diese Vorgehensweise entspricht der in [87] vorgeschlagenen Verzögerung der Stellgrößen bei einer Zustandsregelung mit dem Ziel, zukünftige Eingangswerte des System exakt ermitteln zu können. Der aktuelle Ausgabewert des Reglers stellt wegen der zwischen Regler und System hinzugefügten Verzögerungsglieder einen zukünftigen Eingangswert des Systems dar. Diese Verzögerer sind jedoch beim Regelungsentwurf zu berücksichtigen und verschlechtern im allgemeinen die Dynamik des geschlossenen Kreises.

### Totzeit im geschlossenen Regelkreis durch die Beobachterberechnung

Die Verwendung der ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie des NABKNF-Beobachters 1 erfordert zur Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  den aktuellsten Meßwert  $y(k+1)$ . Ist der Beobachterzustand für eine Zustandsrückführung erforderlich, dann tritt das Problem auf, daß die Stellgröße  $\mathbf{u}(k+1)$  für den Abtastschritt  $k+1$  noch nicht in Schritt  $k$ , sondern nur zu Beginn des Abtastschrittes  $k+1$  ermittelt werden kann. Dieses kommt einer Totzeit im geschlossenen Regelkreis gleich. Den geschilderten Sachverhalt stellen auch die Blockschaltbilder 4.7, 4.9 und 5.1 der betroffenen Beobachter anschaulich dar. In Normalform steht am Ausgang des Verzögerungsgliedes (entspricht dem Beginn eines neuen Abtastschrittes) nicht unmittelbar der Beobachterzustand zur Verfügung, sondern erst nach weiteren Rechenoperationen.

Bei Verwendung der übrigen Beobachter gelingt die Berechnung von  $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$  und der Stellgröße  $\mathbf{u}(k+1)$  bereits zum Zeitpunkt  $k$ . Die Stellgröße steht dann unmittelbar zu Beginn des Schrittes  $k+1$  als Eingangsgröße des zu regelnden Prozesses zur Verfügung. Im geschlossenen Regelkreis entsteht also durch die Beobachterberechnung keine Totzeit. Auch in diesem Fall erlauben die zugehörigen Blockschaltbilder 4.2, 4.8 und 5.2 der Beobachter in Normalform eine anschauliche Darstellung des Sachverhalts. Der Ausgang des Verzögerungsgliedes entspricht dem aktuellen, der Eingang des Verzögerers folglich dem zukünftigen Beobachterzustand. Die Anwendung eines Regelungsgesetzes unmittelbar vor dem Verzögerer (also am Ende eines Abtastschrittes) stellt am Ausgang (zu Beginn eines Abtastschrittes) die Stellgröße ohne weitere Rechenoperationen bereit.

## 6.5 Zusammenfassende Gegenüberstellung

Die Tabelle 6.7 zeigt eine zusammenfassende Gegenüberstellung der in diesem Kapitel theoretisch und experimentell ermittelten Eigenschaften der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bei Systemen mit einer Ausgangsgröße. Bei den ENBNF-Beobachtern wurde dabei der Ein-

fachheit halber  $h^*(x_n^*(k), \bar{\mathbf{u}}_{[1-n,0]}(k)) = x_n^*(k)$  vorausgesetzt. Die positive Bewertung „+“ gilt dabei jeweils bei einer entsprechend günstigen Wahl der Parameter. Man beachte, unterschiedliche Störungen erfordern i. a. auch verschiedene, sich durchaus widersprechende Parametereinstellungen. Die negative Bewertung „-“ beurteilt ebenfalls den Beobachter mit einer bestmöglichen Wahl der Parameter.

**Tabelle 6.7:** Zusammenfassende Gegenüberstellung der ermittelten Beobachtereigenschaften der ENBNF- und NABKNF-Beobachter

	ENBNF-Beobachter				NABKNF-B.	
	1	2	3	4	1	2
Einschwingverhalten	-	-	+	+	+	+
Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang	+	-	+	-	-	+
Robustheit gegen Meßrauschen an den Systemeingängen	-	+	-	+	+	-
Robustheit gegen Parameterunsicherheiten	-	+	-	+	+	-
max. Zahl der erforderlichen Eingangszukunftswerte	$n$	$n$	$n$	$n$	1	1
Berechnung von $\hat{\mathbf{x}}(k+1)$ in Schritt	$k$	$k+1$	$k$	$k+1$	$k+1$	$k$
Auftreten von Totzeit durch die Beobachterberechnung im geschlossenen Regelkreis	nein	ja	nein	ja	ja	nein

## 7 Beobachter im geschlossenen Regelkreis

Dieses Kapitel widmet sich dem Einsatz von Beobachtern für Zustandsrückführungen nichtlinearer zeitdiskreter Systeme. Der nachstehende Abschnitt enthält zunächst die Darstellung des aus der Literatur bekannten Regelungsentwurfsverfahrens via exakter Linearisierung. Der darauf folgende Abschnitt beinhaltet die Betrachtung einer Regelung via exakter Linearisierung, falls anstelle des Systemzustands ein Beobachterzustand verwendet wird. Dazu erfolgt eine Abschätzung der Eignung der in den vorstehenden Kapiteln vorgestellten Beobachtern für den Einsatz im geschlossenen Regelkreis. Es folgt ein Vergleich der Beobachter beim Einsatz zur Stabilisierung eines Pendels in der oberen Gleichgewichtslage.

Allen folgenden Ausführungen liegt ein nichtlineares zeitdiskretes System der Form

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), u(k)), \quad y(k) = h(\mathbf{x}(k)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (7.1)$$

mit jeweils einer Ein- und Ausgangsgröße ohne Durchgangsanteil zugrunde.

### 7.1 Zustandsregelung mit Hilfe exakter Linearisierung

Ein häufig in der Literatur beschriebenes Verfahren zum Entwurf einer Zustandsrückführung nichtlinearer zeitdiskreter Systeme stellt die exakte Linearisierung über Zustandstransformation und -rückführung dar [117, 114, 116, 92]. Mit Hilfe einer geeigneten Transformation erhält man eine Systemdarstellung in Normalform, die die Kompensation der Nichtlinearitäten durch die Eingangsgröße erlaubt. LEE und MARCUS geben in [117] Bedingungen an, unter denen ein System exakt linearisierbar ist. Die Schreibweise

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^1(\mathbf{x}, u_0) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u_0) \\ \tilde{\mathbf{f}}^{\mu+1}(\mathbf{x}, u) &= \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{f}}^\mu(\mathbf{x}, u_0), 0) \quad \text{mit} \quad 1 \leq \mu \leq n-1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

für den Zustand  $\mathbf{x}(\nu) = \tilde{\mathbf{f}}^\nu(\mathbf{x}(0), u_0)$  in Abhängigkeit eines Eingangs  $u_0$  zum Zeitpunkt  $k = 0$  dient zur übersichtlichen Darstellung der folgenden Ergebnisse aus [117].

Satz 7.1:

Das System (7.1) ist nach [117, Lemma 1] dann und nur dann mittels Zustandstransformation und einer Zustandsrückführung lokal in der Ruhelage ( $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$ ,  $u = 0$ ) exakt linearisierbar, falls eine analytische Funktion  $g : \mathcal{U} \subset \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  derart existiert, daß

1.  $\mathcal{U}$  eine offene Umgebung von  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$  darstellt,
2.  $g(\mathbf{0}_n) = 0$ ,
3.  $\frac{\partial g(\tilde{\mathbf{f}}^\mu(\mathbf{x}, u_0))}{\partial u_0} \equiv 0$  für  $1 \leq \mu \leq n-1$  in einer gewissen Umgebung von  $\mathbf{0}_n$ ,
4.  $\frac{\partial g(\tilde{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}, u_0))}{\partial u_0} \neq 0$ ,
5.  $\det \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}_n} \\ \left( \frac{\partial g(\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, u_0))}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}_n} \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial g(\tilde{\mathbf{f}}^{n-1}(\mathbf{x}, u_0))}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}_n} \end{bmatrix} \neq 0.$

■

Die Bedingung 5 verlangt die Steuerbarkeit des linearisierten Systems, während 3 und 4 einen relativen Systemgrad  $d = n$  bezüglich eines gedachten Systemausgangs  $\tilde{y}(k) = g(\mathbf{x}(k))$  fordern<sup>1</sup>. Sind die Bedingungen nach Satz 7.1 erfüllt, dann gelingt es, die Transformation

$$\mathbf{x}^\circ(k) = \mathbf{t}^\circ(\mathbf{x}(k)) = \begin{bmatrix} g(\mathbf{x}(k)) \\ g(\tilde{\mathbf{f}}^1(\mathbf{x}(k))) \\ \vdots \\ g(\tilde{\mathbf{f}}^{n-1}(\mathbf{x}(k))) \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

auf die Systemdarstellung in sogenannter *nichtlinearer Regelungsnormalform* (NRNF)

$$\mathbf{x}^\circ(k+1) = \begin{bmatrix} x_2^\circ(k) \\ \vdots \\ x_n^\circ(k) \\ f_n^\circ(\mathbf{x}^\circ(k), u(k)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^\circ(0) = \mathbf{x}_0^\circ \quad (7.4)$$

mit

$$f_n^\circ(\mathbf{x}^\circ(k), u(k)) = g(\tilde{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}(k), u(k))) \Big|_{\mathbf{x}(k) = \mathbf{t}^{\circ-1}(\mathbf{x}^\circ(k))} \quad (7.5)$$

---

<sup>1</sup>Die Matrix in Bedingung 5 enthält  $u_0$  wegen  $\frac{\partial g(\tilde{\mathbf{f}}^\mu(\mathbf{x}, u_0))}{\partial u_0} \equiv 0$  für  $1 \leq \mu \leq n-1$  (s. Bedingung 3) nicht.

anzugeben. Da die Jacobimatrix der Transformation (7.3) nach Bedingung 5 für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$  regulär ist, stellt die Transformation  $\mathbf{t}^\circ(\mathbf{x}(k))$  zumindest in einer Umgebung um  $\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$  einen Diffeomorphismus dar. Dieses gewährleistet die Existenz einer lokalen Systemdarstellung in NRNF.

Stellt  $f_n^\circ$  eine bezüglich  $u(k)$  eindeutig invertierbare Funktion dar, dann führt das Regelungsgesetz

$$u(k) = f_n^{\circ-1}(\mathbf{x}^\circ(k), v(k)) \quad (7.6)$$

auf die lineare Systemdynamik des geschlossenen Regelkreises

$$\mathbf{x}^\circ(k+1) = \begin{bmatrix} x_2^\circ(k) \\ \vdots \\ x_n^\circ(k) \\ v(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}^\circ(0) = \mathbf{x}_0^\circ \quad (7.7)$$

mit dem neuen Eingang  $v(k)$ . Die Darstellungsform (7.7) erlaubt einen von linearen Systemen bekannten Regelungsentwurf. Die lineare Zustandsrückführung

$$v(k) = -a_0 x_1^\circ(k) - a_1 x_2^\circ(k) - \dots - a_{n-1} x_n^\circ(k) = \mathbf{k}^T \mathbf{x}^\circ(k) \quad (7.8)$$

ermöglicht z. B. eine Polvorgabe mit  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ , den Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms des geschlossenen Regelkreises. Die gesamte Rückführung nimmt dann in NRNF die Form

$$u(k) = f_n^{\circ-1}(\mathbf{x}^\circ(k), \mathbf{k}^T \mathbf{x}^\circ(k)) \quad (7.9)$$

an. Die Berechnung der Rückführung in ANDF, also in  $\mathbf{x}$ -Koordinaten, erfordert nicht die explizite Invertierung der Transformation  $\mathbf{t}^\circ$ ; lediglich  $f_n^{\circ-1}$  in Gl. (7.9) ist in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  anstelle  $\mathbf{x}^\circ$  zu ermitteln. Aus Gl. (7.5) folgt

$$f_n^\circ(\mathbf{x}^\circ(k), u(k)) = g(\tilde{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}(k), u(k))) \quad (7.10)$$

und mit  $\bar{f}_n^\circ(\mathbf{x}(k), u(k)) := g(\tilde{\mathbf{f}}^n(\mathbf{x}(k), u(k)))$  lautet das Regelungsgesetz (7.9) in Abhängigkeit von  $\mathbf{x}$  schließlich

$$u(k) = \bar{f}_n^{\circ-1}(\mathbf{x}(k), \mathbf{k}^T \mathbf{t}^\circ(\mathbf{x}(k))). \quad (7.11)$$

Die Bestimmung einer geeigneten Funktion  $g(\mathbf{x}(k))$  stellt im allgemeinen ein Problem dar. Ist das System (7.1) lokal stark beobachtbar und weist es ferner einen relativen Systemgrad

$d = n$  auf, erfüllt die Ausgangsfunktion  $h(\mathbf{x}(k))$  des Systems die in Satz 7.1 aufgeführten Bedingungen für  $g(\mathbf{x}(k))$ . Die Systemdarstellung in NRNF nach Gl. (7.4) ist dann mit der in NBKNF nach Gl. (3.2) identisch. Auf diese Parallelen zwischen NRNF und NBKNF weist bereits BRODMANN in [33] hin. Falls die Funktion  $f_n^\square(\mathbf{x}^\square(k), u(k))$  bzgl.  $u(k)$  eindeutig invertierbar ist, gelingt die exakte Linearisierung mit Hilfe einer Zustandsrückführung in NBKNF. Der Regelungs- und der Beobachterentwurf erfolgen somit über die gleiche Normalform.

Das beschriebene Verfahren der exakten Linearisierung setzt die Kenntnis des gesamten Zustandsvektors  $\mathbf{x}(k)$  voraus. Die Erfüllung dieser Forderung führt in praktischen Anwendungen jedoch zu erheblichen Schwierigkeiten, weshalb  $\mathbf{x}(k)$  durch den Schätzvektor  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  eines Beobachters zu ersetzen ist.

## 7.2 Beobachter im nichtlinearen, geschlossenen Regelkreis

Wird für die Zustandsrückführung nach Gl. (7.9) in NRNF der Beobachterzustand  $\hat{\mathbf{x}}^\circ(k)$  anstelle des Systemzustands  $\mathbf{x}(k)^\circ$  herangezogen, gehorcht die Dynamik des geschlossenen Regelkreises der Differenzgleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\circ(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\circ(k) \\ \vdots \\ x_n^\circ(k) \\ f_n^\circ(\mathbf{x}^\circ(k), f_n^{\circ-1}(\mathbf{x}^\circ(k) + \mathbf{e}^\circ(k), \mathbf{k}^T(\mathbf{x}^\circ(k) + \mathbf{e}^\circ(k)))) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}^\circ(0) &= \mathbf{x}_0^\circ, \end{aligned} \quad (7.12)$$

falls  $\mathbf{e}^\circ(k)$  den Beobachterfehler in NRNF darstellt. Aufgrund der nichtlinearen Einkopplung des Beobachterfehlers in die letzte Komponente der Systembeschreibung ist keine allgemeine Aussage über das Verhalten des über einen Beobachter geschlossenen Kreises möglich. ALLGÖWER und GILLES weisen in [7] im Zusammenhang mit zeitkontinuierlichen Systemen auf die fehlende Robustheit des Entwurfs über exakte Linearisierung bei Modellunsicherheiten hin. Insbesondere können kleine Modellierungsfehler die Linearität des kompensierten Systems bereits vollständig zerstören. Die Auswirkungen eines Beobachterfehlers sind mit denen von Modellierungsfehlern vergleichbar und stellen somit ebenfalls ein Problem bei einem Regelungsentwurf via exakter Linearisierung dar.

Ein besonderer Vorzug der NBKNF folgt in diesem Zusammenhang aus der Ausgangsgleichung  $y(k) = x_1^\square(k)$ , da in einem Regelungsgesetz der Beobachterzustand  $\hat{x}_1^\square(k)$  unmittelbar durch  $y(k)$  substituierbar ist. Die dem Verfahren der exakten Linearisierung zugrunde liegende, fehlerempfindliche Kompensation der Nichtlinearitäten erfolgt dann unter Umständen

mittels  $y(k)$  und nicht mittels der, ggf. fehlerbehafteten, Zustandsgröße  $\hat{x}_1^\square(k)$  des Beobachters. Dieser Aspekt findet im Abschnitt 7.3 Beachtung, während der nachstehende Unterabschnitt eine Betrachtung der ENBNF- und NABKNF-Beobachter im geschlossenen Kreis beinhaltet. Die mögliche Verwendung der gemessenen Ausgangsgröße bleibt dabei unberücksichtigt.

### 7.2.1 ENBNF- und NABKNF-Beobachter

Das Regelentwurfsverfahren über die exakte Linearisierung stabilisiert die Ruhelage des geschlossenen Kreises exponentiell, da alle Eigenwerte der klassisch linearisierten<sup>2</sup> Systemdarstellung des Regelkreises innerhalb des Einheitskreises liegen<sup>3</sup>. Wie in den Arbeiten [74] und [129] angegeben und bereits in Kapitel 2 erwähnt, führt eine Zustandsrückführung ohne Beobachter, die das System lokal stabilisiert, auch zu einer lokal stabilen Ruhelage des über einen exponentiellen Beobachter geschlossenen Regelkreises.

Alle in dieser Arbeit betrachteten Beobachter erfüllen die Forderung nach exponentieller Konvergenz des Beobachterzustands in Normalform für  $k \geq n-1$ , wie die linearen Differenzgleichungen der jeweiligen Beobachterfehler belegen. Verlassen die Systemzustände für  $0 \leq k < n-1$  den Einzugsbereich des Regelungs- und Beobachterentwurfs nicht, kann, wie bereits in Kapitel 6 (s. Seite 87), der Anfangszeitpunkt der Berechnungen aus Übersichtsgründen bei  $k = 0$  angenommen werden. Der geschlossene Regelkreis weist somit eine asymptotisch stabile Ruhelage auf, wenn die Zustandsrückführung ohne Beobachter das System asymptotisch stabilisiert<sup>4</sup>. Zudem bleibt die beim Entwurf festgelegte Dynamik des Beobachterfehlers in Normalform unbeeinflusst von der Eingangsgröße.

Aus der detaillierten Untersuchung des Einschwingverhaltens der in dieser Arbeit betrachteten Beobachterentwürfe in Kapitel 6 lassen sich weitere Aussagen über die Eignung der Beobachter für eine Zustandsrückführung ableiten.

Nach Definition 2.3 erfüllt ein exponentieller Beobachter die Bedingungen

- aus  $\mathbf{x}^*(0) = \hat{\mathbf{x}}^*(0)$  folgt  $\mathbf{x}^*(k) = \hat{\mathbf{x}}^*(k)$  für alle  $k \geq 1$ ,
- mit den Konstanten  $M > 0$  und  $0 < a < 1$  gilt

$$\|\hat{\mathbf{x}}^*(k) - \mathbf{x}^*(k)\| \leq M a^k \|\hat{\mathbf{x}}^*(0) - \mathbf{x}^*(0)\| \quad \forall k. \quad (7.13)$$

<sup>2</sup>Taylorreihenentwicklung und Abbruch nach dem ersten Glied.

<sup>3</sup>Würden einige Eigenwerte auf, aber keine außerhalb des Einheitskreises liegen, ist nach der Methode der ersten Näherung von Ljapunov [65] keine unmittelbare Stabilitätsaussage möglich. Das nichtlineare System kann dann bestenfalls nur asymptotisch, nicht aber exponentiell stabil sein.

<sup>4</sup>Der Satz 2.1 ist wegen der Voraussetzung eines Identitätsbeobachters jedoch nicht unmittelbar auf die NABKNF-Beobachter anwendbar, falls kein Dead-Beat-Entwurf vorliegt (s. [74, Beweis von Theorem 4.2]).

Die Konstante  $M$  darf dabei jedoch beliebig groß sein. Der Betrag des Beobachteranfangsfehlers  $\|\hat{\mathbf{x}}^*(0) - \mathbf{x}^*(0)\|$  stellt somit kein unmittelbares Maß für den maximal zu erwartenden Fehler eines exponentiellen Beobachters dar. Für die ENBNF-Beobachter 3 und 4 sowie die NABKNF-Beobachter ( $w_\mu = 0$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, n$ ) gilt jedoch für die Beobachterfehler in Normalform<sup>5</sup>

$$e_i^*(k+1) = \lambda_i e_i^*(k), \quad e_i^*(0) = e_{i,0}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.14)$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}^*(k)\| &= \sqrt{e_1^*(k)^2 + e_2^*(k)^2 + \dots + e_n^*(k)^2} = \sqrt{\lambda_1^2 e_{1,0}^{*2} + \lambda_2^2 e_{2,0}^{*2} + \dots + \lambda_n^2 e_{n,0}^{*2}} \\ &\leq \lambda_{max}^k \sqrt{e_{1,0}^{*2} + e_{2,0}^{*2} + \dots + e_{n,0}^{*2}} = \lambda_{max}^k \|\mathbf{e}^*(0)\|, \end{aligned} \quad (7.15)$$

falls  $\lambda_{max} = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$  das Maximum der Beträge der Beobachtereigenwerte mit  $0 \leq \lambda_{max} < 1$  darstellt. Es folgt

$$\|\hat{\mathbf{x}}^*(k) - \mathbf{x}^*(k)\| \leq \lambda_{max}^k \|\hat{\mathbf{x}}^*(0) - \mathbf{x}^*(0)\| \quad (7.16)$$

und ein Koeffizientenvergleich mit Gl. (7.13) liefert  $a = \lambda_{max}$  und  $M = 1$ . Aufgrund der oberen Beschränkung des Beobachterfehlers in Normalform auf  $\|\hat{\mathbf{x}}^*(0) - \mathbf{x}^*(0)\|$  sind die ENBNF-Beobachter 3 und 4 sowie beide NABKNF-Beobachter mit  $w_\mu = 0$ ,  $\mu = 2, 3, \dots, n$ , für den Einsatz in einer beobachtergestützten Zustandsregelung im allgemeinen besser geeignet als die übrigen Beobachter. Dieses bestätigen auch die im folgenden Abschnitt 7.3 dargestellten, experimentellen Ergebnisse bei der Stabilisierung eines Pendels.

### 7.3 Beobachtergestützte Stabilisierung eines Pendels

Am Institut für Regelungstechnik der Universität Hannover existiert ein Pendel auf einem Wagen, dessen prinzipiellen Aufbau das Bild 7.1 zeigt.

Ziel der Regelung stellt die, über eine geeignete Ansteuerung des Servomotors zu realisierende, Stabilisierung des Pendels in der oberen, instabilen Gleichgewichtslage dar. Als Meßwert liegt lediglich der Pendelwinkel  $\Phi(t)$ , nicht aber die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\Phi}(t)$  vor. Der Servomotor treibt über das Antriebsband den Wagen an. Servomotor, Verstärker und die Ausgabeinheit des Prozeßrechners sind derart konfiguriert, daß die vom Regelungsalgorithmus im Prozeßrechner zu berechnende Stellgröße der Wagenbeschleunigung  $U(t) = \ddot{S}(t)$  entspricht. Die im folgenden zugrunde gelegte Systembeschreibung des Pendels weist somit  $U(t)$  als

<sup>5</sup>Für die NABKNF-Beobachter wird hier zur Vereinfachung der Darstellung der Fehler ebenfalls mit  $\mathbf{e}^*(k)$  bezeichnet

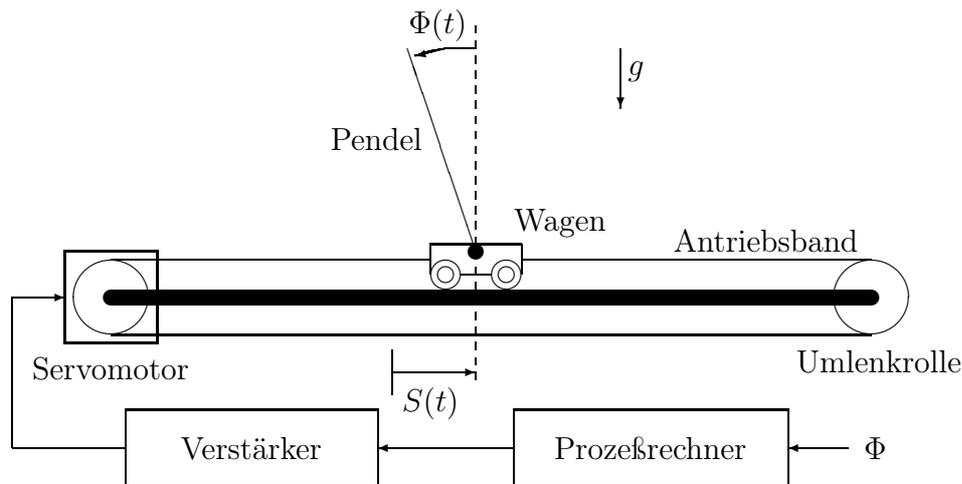


Bild 7.1: Prinzipieller Aufbau des Pendels

Eingangsgröße auf. Die Zustandsraumdarstellung mit dem Zustandsvektor  $\begin{bmatrix} \Phi(t) & \dot{\Phi}(t) \end{bmatrix}^T$  lautet

$$\begin{bmatrix} \dot{\Phi}(t) \\ \ddot{\Phi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}(t) \\ b g \sin(\Phi(t)) + b \cos(\Phi(t)) U(t) \end{bmatrix}, \quad (7.17)$$

$$y(t) = \Phi(t), \quad \Phi(0) = \Phi_0, \dot{\Phi}(0) = \dot{\Phi}_0$$

mit dem Parameter  $b = 2.36 \frac{1}{m}$  sowie der Erdbeschleunigung  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ . Das Systemmodell ist relativ einfach, denn es vernachlässigt sowohl die Dynamik des Verstärkers als auch Lager- und Luftreibung des Pendels. Im folgenden gelten die in dieser Arbeit üblicherweise verwendeten Bezeichnungen

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(t) \\ \dot{\Phi}(t) \end{bmatrix}, \quad (7.18)$$

$$u(t) = U(t).$$

Eine näherungsweise Diskretisierung der Systembeschreibung (7.17) für die konstante Abtastzeit  $T$  gelingt mit Hilfe des Differenzenquotienten

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((k+1)T) - \mathbf{x}(kT)}{T} \quad (7.19)$$

sowie der Annahme einer zwischen den Abtastzeitpunkten konstanten Eingangsgröße

$$u(t) = u(kT) = \text{const.} \quad \text{für } kT \leq t < (k+1)T. \quad (7.20)$$

Die resultierende, zeitdiskrete Systembeschreibung, die das Verhalten des Pendelsystems zu den Abtastzeitpunkten näherungsweise beschreibt, lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} x_1(k) + Tx_2(k) \\ x_2(k) + T(bg \sin(x_1(k)) + b \cos(x_1(k)) u(k)) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_1(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{aligned} \quad (7.21)$$

wobei hier, wie auch in den folgenden Darstellungen,  $kT$  im Argument der Zeitfolgen durch  $k$  ersetzt wird. Da ein lokal stark beobachtbares System vorliegt, führt die Transformation

$$\mathbf{x}^\square(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_1(k) + Tx_2(k) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1^\square(k) \\ \frac{x_2^\square(k) - x_1^\square(k)}{T} \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

auf die Systemdarstellung in NBKNF mit der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ f_2^\square(x_1^\square(k), x_2^\square(k), u(k)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ T^2bg \sin(x_1^\square(k)) + T^2b \cos(x_1^\square(k)) u(k) - x_1^\square(k) + 2x_2^\square(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_1^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square, \end{aligned} \quad (7.23)$$

die wegen  $d = n = 2$  mit der NRNF übereinstimmt. Da die inverse Funktion  $f_2^{\square-1}$  bezüglich  $u(k)$  für  $-\frac{\pi}{2} < x_1^\square(k) < \frac{\pi}{2}$  existiert und auch explizit angebar ist, führt das Regelungsgesetz

$$u(k) = -\frac{(a_0 - 1)x_1^\square(k) + (2 + a_1)x_2^\square(k) + gbT^2 \sin(x_1^\square(k))}{bT^2 \cos(x_1^\square(k))} \quad (7.24)$$

in NBKNF auf die Dynamik

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\square(k+1) &= \begin{bmatrix} x_2^\square(k) \\ -a_0x_1^\square(k) - a_1x_2^\square(k) \end{bmatrix}, \\ y(k) &= x_1^\square(k), \quad \mathbf{x}^\square(0) = \mathbf{x}_0^\square, \end{aligned} \quad (7.25)$$

des geschlossenen Regelkreises. Die frei wählbaren Parameter  $a_0$  und  $a_1$  stellen dabei die Koeffizienten des gewünschten charakteristischen Polynoms dar.

Die Beschränkung von  $x_1^\square(k)$  und somit des Pendelwinkels  $\Phi$  auf den Bereich zwischen  $-\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$  beruht auf der nicht möglichen Beeinflussung des waagrecht liegenden Pendels durch die Wagenbeschleunigung. Das System ist für Pendelwinkel, die ein ungeradzahliges Vielfaches

von  $\pm\frac{\pi}{2}$  darstellen, nicht steuerbar. Für diese Winkel existiert die inverse Funktion  $f_2^{\square-1}$  nicht, da  $\cos(\mu\frac{\pi}{2}) = 0$  für  $\mu = \pm 1, \pm 3, \dots$ .

Mit Hilfe des Regelungsgesetzes (7.24) erfolgte für alle sechs ENBNF- und NABKNF-Beobachter eine beobachtergestützte Zustandsregelung des Pendels, wobei die wahren Systemzustände  $x_1^{\square}$  und  $x_2^{\square}$  in NBKNF nach Gl. (7.24) durch die entsprechenden Beobachterzustände  $\hat{x}_1^{\square} = \hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2^{\square} = \hat{x}_1 + T\hat{x}_2$  ersetzt wurden.

Für die einzelnen Entwürfe folgen nachstehend die Beobachtergleichungen in Normalform sowie die Rücktransformation des Beobachterzustands auf ANDF. Der Laufindex  $k$  wird dabei nur bei verschobenen Zeitfolgen angegeben.

**ENBNF-Beobachter 1:** Aufgrund der erfüllten Separabilitätsbedingung ergeben sich für diesen Beobachter keine Altwerte der Meßgrößen  $y(k)$  und  $u(k)$ .

Beobachtergleichung in ENBNF:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} q_0(y - \hat{x}_2^*) + bT^2(g \sin(y) + \cos(y)u) - y \\ \hat{x}_1^* + q_1(y - \hat{x}_2^*) + 2y \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}}^*(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0^*.\end{aligned}\quad (7.26)$$

Rücktransformation des Beobachterzustands:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^* \\ \frac{1}{T}(\hat{x}_1^* + \hat{x}_2^*) \end{bmatrix}.\quad (7.27)$$

**ENBNF-Beobachter 2:** Beobachtergleichung in ENBNF:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} q_0(y - \hat{x}_2^*) \\ \hat{x}_1^* + q_1(y - \hat{x}_2^*) + y(k+1) \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}}^*(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0^*.\end{aligned}\quad (7.28)$$

Rücktransformation des Beobachterzustands:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{x}_2^* \\ \frac{1}{T}(\hat{x}_1^* + \hat{x}_2^* + bT^2(g \sin(y(k-1)) + \cos(y(k-1))u(k-1)) - y(k-1)) \end{bmatrix}.\quad (7.29)$$

**ENBNF-Beobachter 3:** Beobachtergleichung in ENBNF:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \hat{x}_1^* \\ \lambda_2(\hat{x}_2^* - y) + bT^2(g \sin(y(k-1)) + \cos(y(k-1))u(k-1)) \\ -y(k-1) + 2y \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}}^*(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0^*.\end{aligned}\quad (7.30)$$

Rücktransformation des Beobachterzustands: Siehe Gl. (7.29).

**ENBNF-Beobachter 4:** Beobachtergleichung in ENBNF:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}^*(k+1) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 \hat{x}_1^* \\ \lambda_2 (\hat{x}_2^* - y) + y(k+1) \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}}^*(0) &= \hat{\mathbf{x}}_0^*.\end{aligned}\quad (7.31)$$

Rücktransformation des Beobachterzustands: Siehe Gl. (7.29).

**NABKNF-Beobachter 1:** Beobachtergleichung in  $\Psi$ -Koordinaten ( $w_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Psi(k+1) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 (\Psi_1 - y(k-1)) + y \\ \frac{1}{T} (\lambda_1 (y(k-1) - \Psi_1) + \lambda_2 (\Psi_1 + T\Psi_2 - y) - y + y(k+1)) \end{bmatrix}, \\ \Psi(0) &= \Psi_0.\end{aligned}\quad (7.32)$$

Anwendung der Systemfunktion:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \begin{bmatrix} \Psi_1 + \Psi_2 T \\ \Psi_2 + bT(g \sin(\Psi_1) + \cos(\Psi_1)u(k-1)) \end{bmatrix}.\quad (7.33)$$

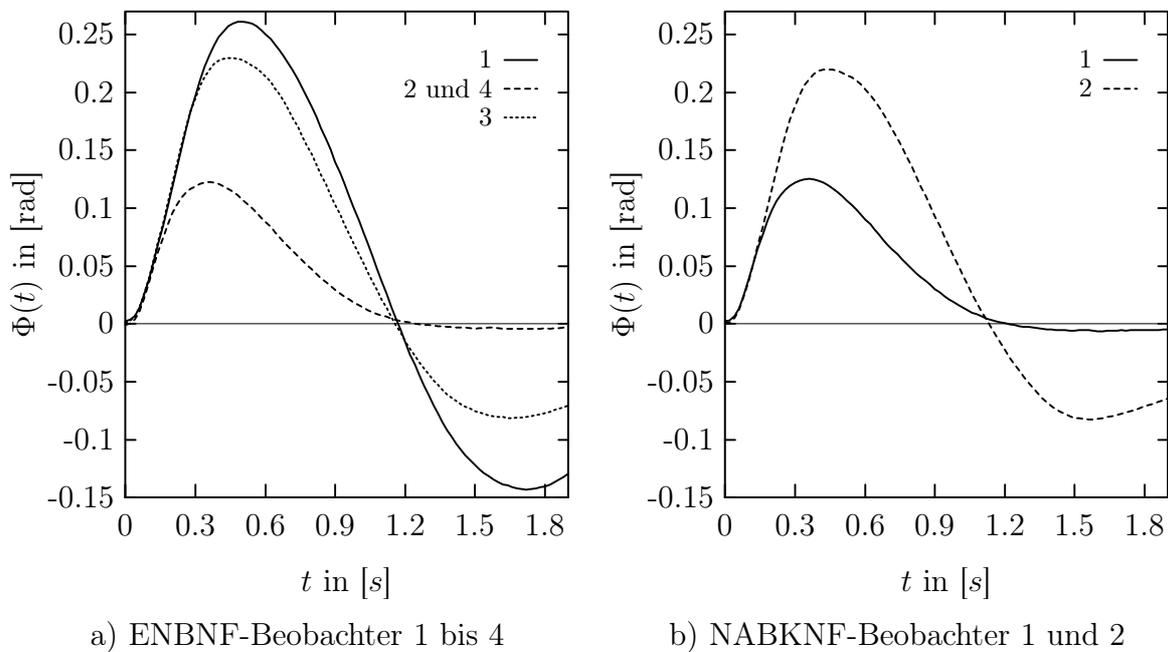
**NABKNF-Beobachter 2:** Beobachtergleichung in  $\Psi$ -Koordinaten ( $w_2 = 0$ ):

$$\begin{aligned}\Psi(k+1) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 (\Psi_1 - y(k-1)) + y \\ \frac{1}{T} (\lambda_1 (y(k-1) - \Psi_1) + \lambda_2 (\Psi_1 + T\Psi_2 - y) + y \\ + bT^2 (g \sin(y(k-1)) + \cos(y(k-1))u(k-1)) - y(k-1)) \end{bmatrix}, \\ \Psi(0) &= \Psi_0.\end{aligned}\quad (7.34)$$

Anwendung der Systemfunktion: Siehe Gl. (7.33).

Die Abtastzeit betrug  $T = 0.08s$ . Das Einzelpendel wurde zunächst in der oberen Gleichgewichtslage stabilisiert und der Wagenbeschleunigung zum Zeitpunkt  $t = 0$  für die Dauer eines Abtastschrittes eine Störung der Größe  $3.8 \frac{m}{s^2}$  überlagert. Da diese Störgröße dem Beobachter nicht zugeführt wurde, rief sie außer einer Abweichung des Pendels aus der Gleichgewichtslage bei einigen Beobachtern auch einen Fehler hervor. Beim Regelungsentwurf wurde eine Dynamik des geschlossenen Regelkreises mit den Eigenwerten  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.65$  vorgegeben, während für die Eigenwerte der Beobachterfehler in Normalform  $\lambda_{B1} = \lambda_{B2} = 0.4$  galt. Bei der verwendeten Abtastzeit von  $0.08s$  entspricht dieses den Eigenwerten  $s_{1,2} = \frac{1}{T} \ln(0.65) \approx -5.4 \frac{1}{s}$  bzw.  $s_{B1,2} = \frac{1}{T} \ln(0.4) \approx -11.5 \frac{1}{s}$  des zeitkontinuierlich betrachteten Regelkreises bzw. Beobachters. Die Eigenwerte des linearisierten, unregulierten Pendelsystems lauten  $s_{P1} = -4.8 \frac{1}{s}$  und  $s_{P2} = 4.8 \frac{1}{s}$ . Die für den geschlossenen Kreis vorgegebenen Eigenwerte liegen folglich in der Nähe des negativen Eigenwertes der Regelstrecke und stellen somit eine adäquate Wahl dar. Die gewählte Beobachterdynamik genügt der allgemeinen Forderung nach einem im Vergleich zum System etwa zweimal schnelleren Beobachter.

Der positive Störimpuls am Systemeingang  $U(t)$  führt zunächst zu einer Destabilisierung des Pendels; die Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\Phi}(t)$  und der Pendelwinkel  $\Phi(t)$  nehmen zu. Hängt die Beobachterberechnung von der Eingangsgröße ab, wird diese fälschlicherweise zu Null angenommen und der Beobachterzustand im folgenden Abtastzeitpunkt  $k = 1$  ( $t = T$ ) befindet sich im Gegensatz zum Systemzustand noch in der Ruhelage des Systems. Der beobachtergestützte Zustandsregler greift trotz vorhandener Regelabweichung nicht ein und das Pendel fällt weiter. Die Größe des folgenden Beobachterfehlers ( $k = 2$ ,  $t = 2T$ ) hängt vom Einschwingverhalten des Beobachters und dem Einfluß von Altwerten der, fehlerhaft ermittelten, Eingangsgröße auf die Beobachterberechnung ab. Erst bei hinreichend kleinen Beobachterfehlern erfolgt die gewünschte Stabilisierung der Zustandsregelung. Da die Regelabweichung durch das fallende Pendel mittlerweile zugenommen hat, muß verhältnismäßig viel Stellenergie aufgewendet werden.



**Bild 7.2:** Störung des Einzelpendels bei beobachtergestützter Zustandsregelung unter Verwendung der ENBNF- und NABKNF-Beobachter

Bild 7.2-a zeigt die Zeitverläufe des Pendelwinkels  $\Phi(t)$  bei Zustandsregelungen unter Verwendung der ENBNF-Beobachter 1 bis 4. Das beste Verhalten liefern die ENBNF-Beobachter 2 und 4, wobei die gemessenen Winkelverläufe für beide Beobachter bis auf geringe Unterschiede<sup>6</sup> übereinstimmen. Im konkret vorliegenden Fall eines mit relativ großer Abtastzeit, näherungsweise diskretisierten und zudem verhältnismäßig einfachen Systemmodells tritt aufgrund der Robustheit gegen Modellunsicherheiten (s. Abschnitt 6.3) ein wesentlicher Vorteil

<sup>6</sup>Eine exakte Reproduzierbarkeit der Ergebnisse ist im Gegensatz zu Simulationen an einer realen Anlage nicht möglich.

dieser beiden Beobachter zutage. Zusätzlich wird die vorhandene Störung durch Verwendung von  $y(k+1)$  zur Beobachterberechnung früher erkannt als bei den übrigen Beobachtern. Insbesondere eine der Eingangsgröße überlagerte Störung weist einen geringen Einfluß auf, da die Berechnung der Beobachter 2 und 4 in Normalform die Eingangsgröße nicht berücksichtigt<sup>7</sup>. Im vorliegenden Fall hängt darüber hinaus auch die Transformation der ENBNF-Zustände auf den Zustand  $\hat{x}_1(k)$  nach Gl. (7.29) für die ENBNF-Beobachter 2 und 4 nicht von der Eingangsgröße ab. Für  $x_1(k) = \Phi(kT)$  tritt daher trotz Störung kein Beobachterfehler auf, was auch der in Bild 7.3-a dargestellte, meßbare Beobachterfehler  $e_1(k)$  belegt. Die Transformation der ENBNF-Zustände auf den zweiten Zustand in ANDF lautet für die Beobachter 2 und 4

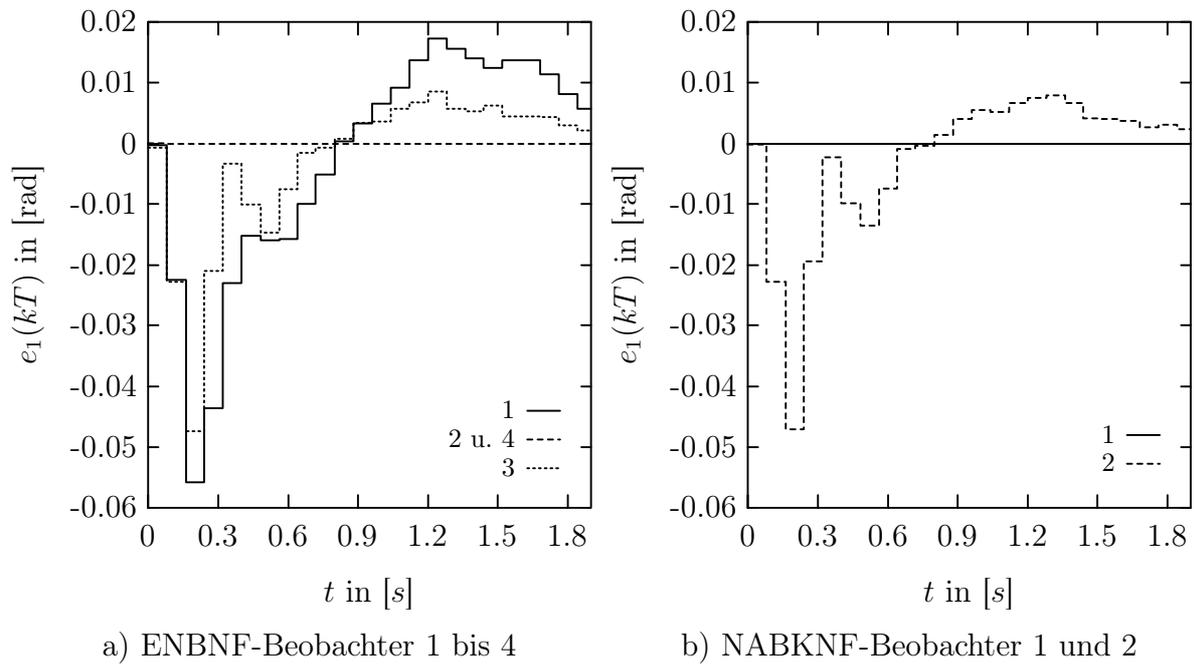
$$\hat{x}_2(k) = \frac{\hat{x}_1^*(k) + \hat{x}_2^*(k) + bT^2(g \sin(y_1(k-1)) + \cos(y(k-1))u(k-1)) - y(k-1)}{T} \quad (7.35)$$

(s. Gl. (7.29)) und hängt von  $u(k-1)$  ab. Der, nur für  $k = 0$  vorhandene, Meßfehler der Eingangsgröße tritt folglich nur für  $k = 1$  in dieser Transformation auf und führt zu einem Beobachterfehler  $e_2(1) \neq 0$ . Für  $k > 1$  liegt wieder der exakte Wert für  $u(k-1)$  vor und da die Beobachterfehler in ENBNF trotz Störung Null bleiben, gilt auch  $e_2(k) = 0 \quad \forall \quad k \neq 1$ . Die generellen Unterschiede im Einschwingverhalten der Beobachter 2 und 4 treten somit im vorliegenden Fall nicht in Erscheinung.

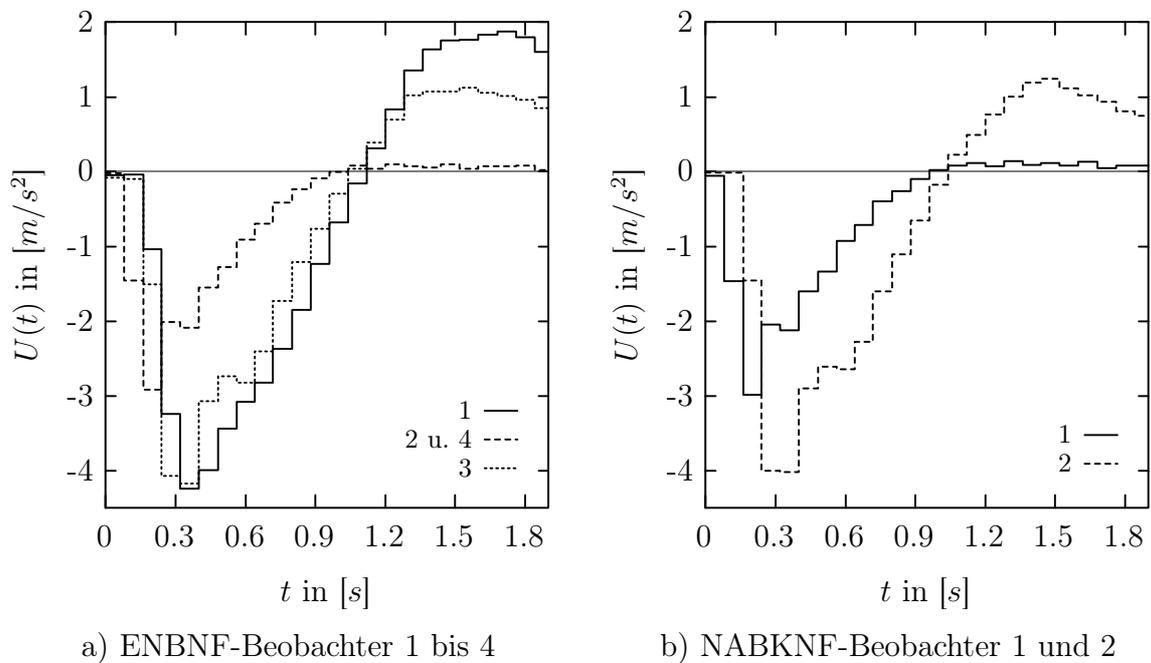
Wie aus Kapitel 6 folgt, stimmt das Einschwingverhalten der ENBNF-Beobachter 1 und 2 sowie das der ENBNF-Beobachter 3 und 4 ohne Störeinflüsse überein. Der meßbare Beobachterfehler  $e_1(1)$  nach dem Störimpuls nimmt für die ENBNF-Beobachter 1 und 3 zudem identische Werte an, wie Bild 7.3-a zeigt. Der Einfluß des unterschiedlichen Einschwingverhaltens ist daher am Verhalten dieser beiden Beobachter erkennbar. Wie die Verläufe von  $\Phi(t)$  aus Bild 7.2-a verdeutlichen, führt der Beobachter 3 zu kleineren Regelabweichungen des Pendelwinkels. Der meßbare Beobachterfehler  $e_1$  nimmt für  $k > 1$  ( $t > T$ ) ebenfalls betragsmäßig kleinere Werte an als beim Beobachter 1 (Bild 7.3-a), obgleich der Beobachter 3 vom Altwert  $u(k-1)$  abhängt (s. Gl. (7.29) und (7.30)) und somit auch die Berechnung des Schätzwertes  $\hat{x}(2)$  auf der fehlerbehafteten Größe  $u(0)$  basiert. Offenbar überwiegt hier jedoch bereits das, im Vergleich zum ENBNF-Beobachter 1, günstigere Einschwingverhalten, welches ungeachtet des Einflusses von  $u(k-1)$  bereits für  $k > 1$  zu kleineren Beobachterfehlern führt.

Das Pendel entfernt sich, wie oben bereits erläutert, aufgrund eines Beobachterfehlers auch nach der Störung zunächst noch unregelmäßig weiter von der Ruhelage, wie aus den Verläufen der Stellgröße  $U(t)$  in Bild 7.4-a gefolgert werden kann. Die Stellgröße ist in den ersten Abtastschritten nach dem Störimpuls für die Beobachter 2 und 4 betragsmäßig am größten (der Regler greift schnell ein) und für den Beobachter 1 am kleinsten (der Regler greift noch nicht ein). Dieses kehrt sich bei kleiner werdenden Beobachterfehlern aufgrund des mehr

<sup>7</sup>Dieses folgt bereits aus den Ausführungen in Kapitel 6 über die Robustheit der Beobachter gegen Meßrauschen an den Systemeingängen.



**Bild 7.3:** Meßbarer Beobachterfehler  $e_1(kT) = \hat{\Phi}(kT) - \Phi(kT)$  der ENBNF- und NABKNF-Beobachter, dargestellt als Treppenkurve

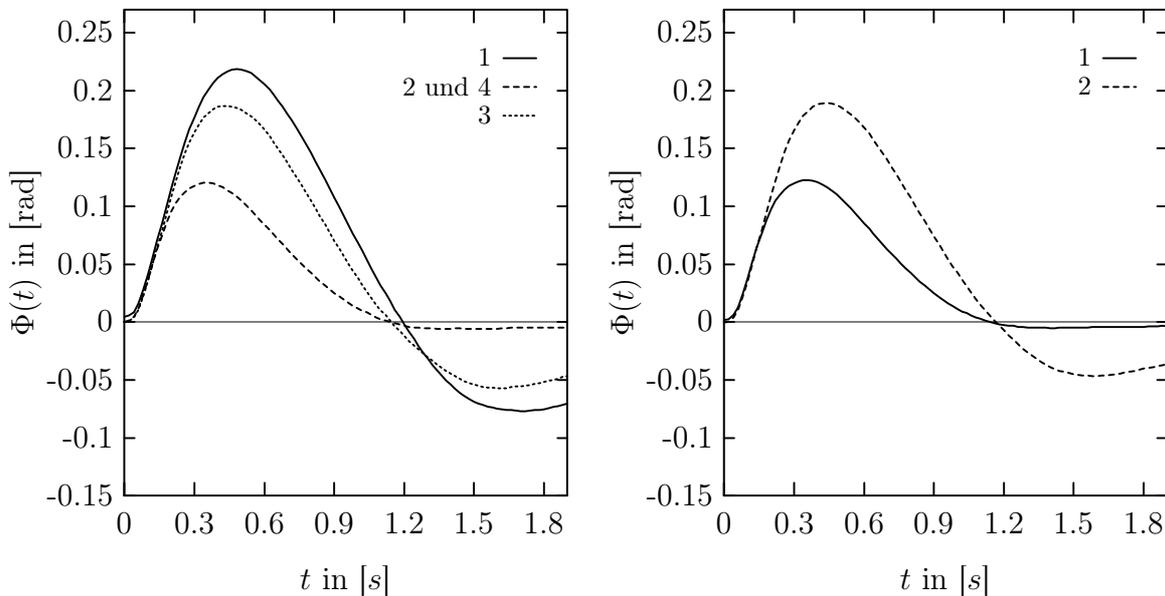


**Bild 7.4:** Stellgröße  $U(t)$  für die Stabilisierung des Einzelpendels unter Verwendung der ENBNF- und NABKNF-Beobachter

oder weniger stark gefallenem Pendels um, denn ab  $k = 4$  erfordert die Regelung mit dem ENBNF-Beobachter 1 die größte Stellenergie zur Stabilisierung des Pendels. Im Gegensatz zu einer nicht beobachtergestützten Regelung, bei der i. a. eine kleinere Regelabweichung nur durch eine höhere Reglerverstärkung und daher mit mehr Stelleingriff zu erzielen ist, führt der Beobachter 1 trotz höherer Stellenergie auf eine größere maximale Regelabweichung.

Die Anwendung einer auf den NABKNF-Beobachtern mit  $w_2 = 0$  (s. Fehlerdifferenzengl. (5.6)) basierenden Zustandsregelung führt zu den in Bild 7.2-b dargestellten Verläufen des Pendelwinkels. Wie bereits die Untersuchungen aus Kapitel 6 erwarten lassen, führen die NABKNF-Beobachter 1 bzw. 2 praktisch zu identischem Verhalten wie die ENBNF-Beobachter 4 bzw. 3. Dieses gilt auch für den meßbaren Beobachterfehler  $e_1$  nach Bild 7.3-b sowie für die zur Regelung erforderliche Stellgröße nach Bild 7.4-b.

Eine Verbesserung des dynamischen Verhaltens des geschlossenen Regelkreises ermöglicht die Verwendung der gemessenen Ausgangsgröße im Regelungsgesetz. Eine Substitution von  $x_1^\square(k)$  in Gl. (7.24) durch  $y(k)$  anstelle  $\hat{x}_1^\square(k)$  erscheint sinnvoll, da die nichtlinearen Anteile der Systembeschreibung in NBKNF ausschließlich von  $x_1^\square(k)$  abhängen. Das Regelungsgesetz erlaubt daher eine exakte Kompensation der Nichtlinearitäten, falls  $y(k)$  Verwendung findet. Da der Pendelwinkel zudem mit einem inkrementellen Winkelgeber (Auflösung  $\pi \cdot 10^{-4}$  rad) erfasst wird, tritt außer einem möglichen Quantisierungsrauschen kein weiteres Meßrauschen auf.



a) ENBNF-Beobachter 1 bis 4

b) NABKNF-Beobachter 1 und 2

**Bild 7.5:** Störung des Einzelpendels bei Zustandsregelung basierend auf den ENBNF- und NABKNF-Beobachtern und gleichzeitiger Verwendung der gemessenen Ausgangsgröße

Erwartungsgemäß zeigt der in Bild 7.5-a dargestellte Verlauf des Pendelwinkels für die

ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie den NABKNF-Beobachter 1 keinen Unterschied zum Verhalten ohne Substitution von  $\hat{x}_1^\square(k)$  durch  $y(k)$  im Regelungsgesetz (7.24). Im letztgenannten Fall galt  $e_1(k) = 0$ , woraus wegen  $\hat{x}_1^\square(k) = \hat{x}_1(k)$  (s. Transformation (7.22) zwischen ANDF und NBKNF)  $e_1^\square(k) = 0$  und somit  $y(k) = \hat{x}_1^\square(k)$  folgt. Bei Verwendung der übrigen Beobachter gelingt hingegen eine Reduzierung der maximalen Regelabweichung des Pendelwinkels um 16% (ENBNF-Beobachter 1) bzw. 19% (ENBNF-Beobachter 3 und NABKNF-Beobachter 2).

Die vorgestellten Ergebnisse der Stabilisierung des Einzelpendels zeigen deutlich Unterschiede der betrachteten Beobachter im geschlossenen Regelkreis. Die Auswirkungen der Beobachter auf die Dynamik des Regelkreises stimmten dabei gut mit den theoretischen Überlegungen des Unterabschnitts 7.2.1 überein. Eine Ausnahme stellen die ENBNF-Beobachter 2 und 4 sowie der NABKNF-Beobachter 1 dar. Die im Beispiel verwendete Störung des Pendelsystems beeinträchtigt die Funktionsweise dieser Beobachter lediglich geringfügig. Die Ergebnisse bestätigen damit auch unter praktischen Gegebenheiten die bereits in Kapitel 6 festgestellte große Robustheit dieser Beobachter gegen Meßstörungen an den Systemeingängen.

Das dynamische Verhalten des Regelkreises bei Verwendung der ENBNF-Beobachter 1 und 3 sowie des NABKNF-Beobachters 1 konnte durch Verwendung von  $y(k)$  im Regelungsgesetz erkennbar verbessert werden, was für das vorliegende Pendelsystem auf folgenden Begebenheiten beruht. Die Systemnichtlinearität hängt in NBKNF (und somit in NRNF) lediglich von  $x_1^\square(k) = y(k)$  ab. Zudem können für das in NBKNF vorliegende System zweiter Ordnung  $\frac{m}{n} = 50\%$  der Beobachterzustände im Regelungsgesetz durch  $y(k)$  ersetzt werden ( $m$  Anzahl der Systemausgänge,  $n$  Systemordnung). Für Systeme höherer Ordnung mit nur einer Ausgangsgröße folgt hier zwangsweise ein weitaus kleinerer Anteil und somit auch eine geringere Möglichkeit zur Verbesserung des Regelungsverhaltens. Für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen gelingt in NBKNF stets die Substitution der  $m$  Zustandsgrößen  $\hat{x}_{j,1}^\square(k)$  durch  $y_j(k)$  für  $j = 1, 2, \dots, m$ .

Die nach Kapitel 6 guten Filtereigenschaften der ENBNF-Beobachter 1 und 3 sowie des NABKNF-Beobachters 2 bzgl. Meßrauschen am Systemausgang wirken sich bei dem vorstehend beschriebenen Vorgehen nicht in vollem Umfang im geschlossenen Regelkreis aus, da das Rauschsignal über  $y(k)$  im Regelungsgesetz direkt in die Stellgröße eingekoppelt wird. Für das Pendelsystem stellt dieses aufgrund einer sehr rauscharmen Messung des Pendelwinkels jedoch kein Problem dar. Bei stärker verrauschten Messungen bietet sich eine lediglich zeitweise Substitution von  $\hat{x}_{j,1}^\square(k)$  durch  $y_j(k)$  in Abhängigkeit der meßbaren Beobachterfehlerkomponenten an. Dieser Ansatz ermöglicht bei größeren Beobachterfehlern die Genauigkeitserhöhung der Kompensation der Nichtlinearitäten und bei kleinen Beobachterfehlern die Ausnutzung der Filterwirkung des Beobachters.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Lösung der Beobachtungsaufgabe zeitkontinuierlicher, nichtlinearer Systeme sind der Literatur zahlreiche Konzepte zu entnehmen. Demgegenüber nahm das Interesse an nichtlinearen, zeitdiskreten Systemen erst in den letzten Jahren erkennbar zu. Die Normalformentwurfverfahren weisen zumeist den Nachteil auf, nur für eine sehr kleine Systemklasse durchführbar zu sein. Ferner finden in der Literatur wichtige Aspekte für die Realisierung der Beobachterentwürfe, wie z. B. Einschwingverhalten, Rausch- oder Parameterempfindlichkeit, nur selten Beachtung. Die vorliegende Arbeit soll einen Beitrag zur Beseitigung der genannten Unzulänglichkeiten leisten und berücksichtigt dabei insbesondere die Aspekte eines Haupteinsatzgebietes von Beobachtern, die beobachtergestützte Zustandsregelung.

Der Normalformbeobachterentwurf nach BRODMANN [33] basiert auf der sogenannten Zweischritt-Transformation, deren erster Schritt in der Transformation des lokal stark beobachtbaren Systems auf NBKNF besteht. Genügt die Systemdarstellung in NBKNF der harten Separabilitätsbedingung, gelingt im zweiten Schritt die Transformation auf NBNF, die einen Beobachterentwurf mit linearer Differenzgleichung des Beobachterfehlers gestattet. Eine gravierende Einschränkung des Verfahrens stellt die Separabilitätsbedingung dar.

In dieser Arbeit wurde eine *erweiterte nichtlineare Beobachternormalform* (ENBNF) angegeben, in der die Systemnichtlinearitäten bei autonomen Systemen mit einer Ausgangsgröße vom aktuellen Wert und  $n-1$  Altwerten der Ausgangsgröße abhängen. Die Altwerte dürfen als bekannt vorausgesetzt werden, da sie durch Speicherung der aktuellen Meßwerte im Prozeßrechner zur Verfügung stehen. Die Transformation eines lokal stark beobachtbaren Systems auf ENBNF erfolgt ebenfalls über die NBKNF, wobei, als wesentlicher Vorzug zu [33], eine Systemdarstellung in NBKNF ohne weitere Einschränkungen in eine Beschreibung in ENBNF überführt werden kann. Folglich existiert für jedes lokal stark beobachtbare System eine Darstellung in ENBNF. Dieses gilt ferner für Systeme mit  $m > 1$  Ausgangsgrößen, wenn eine Darstellung in NBKNF mit  $m$  Subsystemen gleicher Ordnung vorliegt; anderenfalls müssen die Nichtlinearitäten in NBKNF eine bestimmte Abhängigkeit von den Zustandsgrößen aufweisen. Diese Bedingung kann jedoch mit Hilfe einer geeigneten Verzögerung der Systemausgänge umgangen werden. Die Berechnung der ENBNF gelingt stets in den Fällen, in denen die inverse Transformation auf NBKNF explizit angebar ist.

Da die NBNF ohne Altwerte der Ausgangsgrößen als Spezialfall der ENBNF angesehen werden kann, schließt das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren alle Systeme ein, für die auch die Transformationen auf NBNF nach BRODMANN oder auch LIN und BYRNES [131], INGENBLEEK [87], CHUNG und GRIZZLE [52] sowie LEE und NAM [121, 122] durchführbar sind. Zusätzlich gelingt jedoch ein Beobachterentwurf für alle weiteren Systeme, deren ENBNF von Altwerten der Ausgangsgrößen abhängt.

Die Darstellung gesteuerter Systeme in ENBNF erfordert Alt- und Zukunftswerte der Eingangsgrößen (vgl. [87] für die NBNF gesteuerter Systeme). Während erstgenannte wiederum als verfügbar vorausgesetzt werden dürfen, stellen die, i. a. unbekannt, Zukunftswerte ein Problem dar. Sie entsprechen den, ebenfalls nicht bekannten, zeitlichen Ableitungen der Eingangsgrößen bei Normalformbeobachtern zeitkontinuierlicher Systeme. Im Falle einer Regelung des Systems erlaubt eine, zwischen Reglerausgang und Systemeingang angeordnete, Serienschaltung von Verzögerungsgliedern den Zugriff auf die Zukunftswerte der Systemeingangsgrößen [87]. Der Regelungsentwurf muß dabei selbstverständlich diese Verzögerer berücksichtigen.

Ein Beobachterentwurf via ENBNF beinhaltet neben der in Normalform vorgebbaren Beobachterfehlerdynamik mehrere Freiheitsgrade, die zur Beeinflussung

- der Anzahl der in ENBNF erforderlichen Altwerte der Meßgrößen,
- der Anzahl der für die Beobachterberechnung notwendigen Zukunftswerte der Eingangsgrößen und
- des dynamischen Verhaltens des Beobachterfehlers in ANDF im Vergleich zur Eigenwertvorgabe des Beobachterfehlers in ENBNF

genutzt werden können. Neben dem generell in ENBNF möglichen Beobachteransatz erlaubt eine spezielle Wahl der Freiheitsgrade den Entwurf drei weiterer Beobachter mit unterschiedlichen Eigenschaften.

Einen weiteren vielversprechenden Normalformansatz stellt der von CICCARELLA ET AL. in [55] angegebene Entwurf dar. Die Autoren dieser Arbeit leiten einen approximativen Beobachter für Systeme mit einer Ausgangsgröße her, dessen zugrunde liegende kanonische Form (NABKNF), eine um  $n-1$  Schritte in die Vergangenheit verschobene NBKNF, ebenfalls einen exakten Beobachterentwurf ermöglicht. Ein Teil dieser Arbeit widmet sich eben diesem exakten Beobachter und enthält die Herleitung einer alternativen Beobachterberechnung sowie eine Erweiterung des Verfahrens auf Systeme mit  $m > 1$  Ausgangsgrößen. Ein Beobachterentwurf für letztgenannte Systeme bedarf in jedem Fall einer Systemdarstellung in NABKNF mit  $m$  Subsystemen gleicher Ordnung. Außer dem zukünftigen Wert  $\mathbf{u}(k+1)$  für Systeme mit Durchgangsanteil erfordert die Beobachterberechnung via NABKNF jedoch keine weiteren Zukunftswerte der Eingangsgrößen, was einen wesentlichen Vorzug dieses Verfahrens darstellt.

Ein detaillierter Vergleich der in der vorliegenden Arbeit näher betrachteten Entwürfe liefert Anhaltspunkte für die praktische Anwendbarkeit der Beobachter sowohl unter idealen Bedingungen als auch unter Störeinflüssen. Die durchgeführte Analyse berücksichtigt dabei die nachstehend aufgeführten Eigenschaften:

- Einschwingverhalten,
- Robustheit gegen Meßrauschen am Systemausgang,

- Robustheit gegen Meßrauschen am Systemeingang,
- Robustheit gegen Parameterunsicherheiten und
- Durchführbarkeit der Entwürfe und Realisierbarkeit der Beobachtergleichungen auf einem Prozeßrechner.

Ausführliche Simulationen an einem Beispielsystem stützen die theoretisch gewonnenen Ergebnisse. Erwartungsgemäß geht aus den Untersuchungen kein Beobachter hervor, der sich bzgl. jedes der oben aufgeführten Kriterien als vorteilhaft erweist. Je nach vorliegenden Gegebenheiten führt der Einsatz eines anderen Beobachters zu günstigen Ergebnissen.

Da die beobachtergestützte Zustandsregelung ein Haupteinsatzgebiet von Beobachtern ist, kommt der Fragestellung nach der Auswirkung eines Beobachters im geschlossenen Regelkreis große Bedeutung zu. Alle in dieser Arbeit näher betrachteten Beobachter führen in Kombination mit einer Regelung, die bei Rückführung des Originalzustands das System exponentiell stabilisiert, zu einer, zumindest lokal, exponentiell stabilen Ruhelage des Regelkreises. Sie beeinflussen jedoch mehr oder weniger deutlich die Dynamik der Regelung. Die ENBNF und NABKNF-Beobachter wurden zur weiteren Untersuchung in einer beobachtergestützten Zustandsregelung eines Pendels in seiner instabilen Gleichgewichtslage eingesetzt. Die Experimente an dem technischen Prozeß belegen einerseits einige bereits beim Beobachervergleich ermittelten Eigenschaften und zeigen andererseits, je nach Beobachter, deutliche Unterschiede im dynamischen Verhalten des Regelkreises auf.

Die verbleibende Einschränkung bei der Durchführung eines Beobachterentwurfs via ENBNF für ein lokal stark beobachtbares System mit einer Ausgangsgröße stellt die Forderung einer explizit angebbaren Inversen der Transformation auf NBKNF dar. Die Behebung dieser Hürde sollte ein Ziel weiterführender Untersuchungen darstellen. Ein möglicher Ansatz ergibt sich aus der Analogie der Systemnichtlinearität in NBKNF mit dem, das Ein-/Ausgangsverhalten des Systems beschreibende, NARMAX-Modell (Nonlinear AutoRegressive Moving Average models with eXogenous inputs [161, 47, 46]). Mit einer Identifikation des NARMAX-Modells, falls möglich, wäre auch die NBKNF des Systems bekannt. Gelingt zudem in dieser NBKNF ein Regelungsentwurf (z. B. möglich für Systeme mit vollem Systemgrad  $d = n$ ), bedarf es im Falle einer beobachtergestützten Zustandsregelung keiner Berechnung der Transformation zwischen ANDF und NBKNF.

Die vorliegende Arbeit beinhaltet eine Bewertung der ENBNF- und NABKNF-Beobachter bzgl. ihrer Eignung für den Einsatz in beobachtergestützten Regelkreisen. Weiterer Forschungsbedarf besteht in der Entwicklung neuer Strategien zum Entwurf des Reglers unter Einbeziehung der Beobachterdynamik. Der für wenige spezielle Anwendungsfälle in der Literatur angegebene Ansatz, mit Hilfe des zurückgeführten Beobachterzustands eben diesen in der Ruhelage zu stabilisieren, erscheint dabei jedoch aufgrund der zumeist sehr umfangreichen Beobachtergleichungen nicht unmittelbar für eine Verallgemeinerung geeignet.

---

## Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMANN, J.: *Abtastregelung*. 3. Aufl. Berlin : Springer-Verlag, 1988
- [2] AEYELS, D.: Generic observability of differentiable systems. In: *Siam Journal on Control and Optimization* 19 (1981), Nr. 5, S. 595–603
- [3] AEYELS, D.: On the number of samples necessary to achieve observability. In: *Systems & Control Letters* 1 (1981), Nr. 2, S. 92–94
- [4] AITKEN, V. C. ; SCHWARTZ, H. M.: On the exponential stability of discrete-time systems with applications in observer design. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 39 (1994), Sept., Nr. 9, S. 1959–1962
- [5] AITKEN, V. C. ; SCHWARTZ, H. M.: On the exponential stability of discrete-time systems with applications in observer design. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1994 American Control Conf. Baltimore*. Baltimore, MD, USA, Juni 1994, S. 2196–2201
- [6] AITKEN, V. C. ; SCHWARTZ, H. M.: Towards robust discrete-time sliding mode observers. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1995 American Control Conf. Seattle*. Seattle, Washington, USA, Juni 1995, S. 3730–3734
- [7] ALLGÖWER, F. ; GILLES, E. D.: Einführung in die exakte und näherungsweise Linearisierung nichtlinearer Systeme. In: ENGELL, S. (Hrsg.): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. München : Oldenbourg Verlag, 1995, S. 23–52
- [8] ALVAREZ, J.: An internal-model controller for nonlinear discrete-time systems. In: *Proc. of the 3rd European Control Conf.* Rome, Sept. 1995, S. 301–306
- [9] AMICUCCI, G. L. ; MONACO, S.: An observer for a class of nonlinear systems. In: *Proc. of the 3rd European Control Conf.* Rome, Sept. 1995, S. 3423–3428
- [10] ARANDA-BRICAIRE, E. ; KOTTA, Ü. ; MOOG, C. H.: Linearization of discrete-time systems. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 34 (1996), Nr. 6, S. 1999–2023
- [11] ARAPOSTATHIS, A. ; JAKUBCZYK, B. ; LEE, H.-G. ; MARCUS, S. I. ; SONTAG, E. D.: The effect of sampling on linear equivalence and feedback linearization. In: *Systems & Control Letters* 13 (1989), S. 373–381
- [12] AUSLANDER, L. ; MACKENZIE, R. E.: *Introduction to Differentiable Manifolds*. New York : McGraw-Hill, 1963
- [13] BACCIOTTI, A.: *Local Stabilizability of Nonlinear Control Systems*. Singapore : World Scientific, 1992
- [14] BANKS, S. P.: *Mathematical Theories of Nonlinear Systems*. New York : Prentice Hall, 1988

- [15] BÄR, M. ; FRITZ, H. ; ZEITZ, M.: Rechnergestützter Entwurf nichtlinearer Beobachter mit Hilfe einer symbolverarbeitenden Programmiersprache. In: *Automatisierungstechnik* 35 (1987), Nr. 5, S. 177–183
- [16] BARBOT, J. P. ; HERNANDEZ, J. ; MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D.: Quadratic dynamic feedback linearization with observer in discrete time. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, Dez. 1994, S. 1645–1646
- [17] BASTIN, G. ; GEVERS, M. R.: Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 33 (1988), Juli, Nr. 7, S. 650–658
- [18] BELL, D. J.: *Mathematics Of Linear And Nonlinear Systems*. New York : Oxford University Press, 1990
- [19] BESANÇON, G. ; BORNARD, G.: Symbolic computation aided design of observers for a class of nonlinear control systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1995 American Control Conf. Seattle*. Seattle, Washington, USA, Juni 1995, S. 3017–3018
- [20] BESANÇON, G. ; BORNARD, G.: Time-varying linearization up to output injection of discrete-time nonlinear systems. In: *Proc. of the 3rd European Control Conf.* Rome, Sept. 1995, S. 3772–3776
- [21] BESANÇON, G. ; HAMMOURI, H. ; BENAMOR, S.: State equivalence of discrete-time nonlinear control systems to state affine form up to input/output injection. In: *Systems & Control Letters* 33 (1998), Nr. 1, S. 1–10
- [22] BESTLE, D. ; ZEITZ, M.: Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. In: *Int. Journal of Control* 38 (1983), Nr. 2, S. 419–431
- [23] BIRK, J.: *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1992 (VDI-Fortschrittberichte 294 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Stuttgart
- [24] BIRK, J. ; ZEITZ, M.: Extended luenberger observer for non-linear multivariable systems. In: *Int. Journal of Control* 47 (1988), Nr. 6, S. 1823–1836
- [25] BIRK, J. ; ZEITZ, M.: Computer-aided design of nonlinear observers. In: *Nonlinear Control Systems Design. Selected Papers from the IFAC Symposium*. Capri, Italien, 1989, S. 1–6
- [26] BIRK, J. ; ZEITZ, M.: Anwendung eines symbolverarbeitenden Programmsystems zur Analyse und Synthese von Beobachtern für nichtlineare Systeme. In: *Messen, Steuern, Regeln* 33 (1990), Nr. 12, S. 536–543
- [27] BÖHM, H.: *Untersuchung eines nichtlinearen Beobachteransatzes für zeitdiskrete Systeme*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Studienarbeit, Feb. 1996

- 
- [28] BOOTHBY, W. M.: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. 2. Aufl. Orlando : Academic Press, 1986 (Pure and Applied Mathematics 120)
- [29] BORNARD, G. ; CELLE-COUCENNE, F. ; GILLES, G.: Observability and observers. In: FOSSARD, A. J. (Hrsg.) ; NORMAND-CYROT, D. (Hrsg.): *Nonlinear Systems* Bd. 1. London : Chapman & Hall, 1995, S. 173–216
- [30] BOUTAYEB, M. ; RAFARALAHY, H. ; DAROUACH, M.: Convergence analysis of the Extended Kalman Filter as an observer for non-linear discrete-time systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA, Dez. 1995, S. 1555–1560
- [31] BOUTAYEB, M. ; RAFARALAHY, H. ; DAROUACH, M.: Convergence analysis of the Extended Kalman Filter used as an observer for nonlinear deterministic discrete-time systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 42 (1997), Apr., Nr. 4, S. 581–586
- [32] BRAMMER, K. ; SIFFLING, G.: *Stochastische Grundlagen des Kalman-Bucy-Filters*. München : R. Oldenbourg Verlag, 1975
- [33] BRODMANN, M.: *Beobachterentwurf für nichtlineare zeitdiskrete Systeme*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1994 (VDI Fortschrittberichte 416 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Hannover
- [34] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. 22. Aufl. Thun und Frankfurt/Main : Verlag Harri Deutsch, 1985
- [35] BYRNES, C. I. ; ISIDORI, A.: New results and examples in nonlinear feedback stabilization. In: *Systems & Control Letters* 12 (1989), S. 437–442
- [36] BYRNES, C. I. ; ISIDORI, A.: Steady state response, separation principle and the output regulation of nonlinear systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 28th IEEE Conf. on Decision and Control*. Tampa, Florida, Dez. 1989, S. 2247–2251
- [37] BYRNES, C. I. ; ISIDORI, A. ; WILLEMS, J. C.: Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 36 (1991), Nov., Nr. 11, S. 1228–1240
- [38] BYRNES, C. I. ; LIN, W.: On discrete-time nonlinear control. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control*. San Antonio, Texas, 1993, S. 2990–2996
- [39] BYRNES, C. I. ; LIN, W.: Losslessness, feedback equivalence, and the global stabilization of discrete-time nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 39 (1994), Jan., Nr. 1, S. 83–98
- [40] BYRNES, C. I. ; LIN, W. ; GHOSH, B. K.: Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback. In: *Systems & Control Letters* 21 (1993), S. 255–263

- [41] CARR, J.: *Applications of Centre Manifold Theory*. New York : Springer-Verlag, 1981 (Applied Mathematical Sciences 35)
- [42] CASTI, J. L.: *Nonlinear System Theory*. London : Academic Press Inc., 1985 (Mathematics in Science and Engineering 175)
- [43] CHANG, Y.-C. ; CHEN, B.-S. ; LEE, T.-S.: Output deadbeat control through an observer in nonlinear discrete-time systems. In: *Control-Theory and Advanced Technology* 10 (1995), Dez., Nr. 4, S. 2245–2259
- [44] CHARLET, B.: Robustness and stability for nonlinear systems decoupling and feedback linearization. In: THOMA, M. (Hrsg.) ; WYNER, A. (Hrsg.): *Proc. of the 7th Int. Conf. on Analysis and Optimization of Systems 1986*. Berlin : Springer-Verlag, Juni 1986 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 83), S. 314–324
- [45] CHEN, J. S. ; H., C. Y.: Robust control of nonlinear uncertain systems: A feedback linearization approach. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1991, S. 2515–2520
- [46] CHEN, S. ; BILLINGS, S. A.: Representations of non-linear systems: the NARMAX model. In: *Int. Journal of Control* 49 (1989), Nr. 3, S. 1013–1032
- [47] CHEN, S. ; BILLINGS, S. A. ; COWAN, C. F. N. ; GRANT, P. M.: Practical identification of NARMAX models using radial basis functions. In: *Int. Journal of Control* 52 (1990), Nr. 6, S. 1327–1350
- [48] CHENG, D. ; TARN, T.-J. ; ISIDORI, A.: Global external linearization of nonlinear systems via feedback. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 30 (1985), Aug., Nr. 8, S. 808–811
- [49] CHIA-CHI, T.: On robust observer compensator design. In: *Automatica* 24 (1988), Nr. 5, S. 687–692
- [50] CHUNG, S.-T.: *Digital Aspects of Nonlinear Synthesis Problems*. Michigan, University of Michigan, PhD-Thesis, 1990
- [51] CHUNG, S.-T. ; GRIZZLE, J. W.: Sampled-data observer error linearization. In: *Automatica* 26 (1990), Nr. 6, S. 997–1007
- [52] CHUNG, S.-T. ; GRIZZLE, J. W.: Internally exponentially stable non-linear discrete-time non-interacting control via static feedback. In: *Int. Journal of Control* 55 (1992), Nr. 5, S. 1071–1092
- [53] CICCARELLA, G. ; DALLA MORA, M. ; GERMANI, A.: A Luenberg-like observer for nonlinear systems. In: *Int. Journal of Control* 57 (1993), Nr. 3, S. 537–556
- [54] CICCARELLA, G. ; DALLA MORA, M. ; GERMANI, A.: Observers for discrete-time nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 20 (1993), S. 373–382
- [55] CICCARELLA, G. ; DALLA MORA, M. ; GERMANI, A.: A robust observer for discrete time nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 24 (1995), S. 291–300

- 
- [56] DAEMI-AVVAL, M.: *Herleitung und Realisierung eines nichtlinearen Beobachterkonzeptes für zeitdiskrete nichtlineare Systeme*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Diplomarbeit, Dez. 1992
- [57] DE JAGER, B.: The use of symbolic computation in nonlinear control: is it viable? In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), Jan., Nr. 1, S. 84–89
- [58] DE OLIVEIRA, P. M.: Approximate filters for a nonlinear discrete time filtering problem with small observation noise. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii, Dez. 1990, S. 778–783
- [59] DEGROAT, R. D. ; HUNT, L. R. ; LINEBARGER, D. A.: Discrete-time nonlinear system modeling. In: *Proc. of the 1990 Int. Conf. on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Albuquerque, Apr. 1990, S. 2587–2590
- [60] DEGROAT, R. D. ; HUNT, L. R. ; LINEBARGER, D. A.: Nonlinear state space modelling of sunspot data. In: *ACSSC* 24 (1990), Nr. 12, S. 603–607
- [61] DING, X. ; FRANK, P. M. ; GUO, L.: Nonlinear observer design via an extended observer canonical form. In: *Systems & Control Letters* 15 (1990), S. 313–322
- [62] DJEMAI, M. ; HERNANDEZ, J. ; BARBOT, J. P.: Nonlinear control with flux observer for a singularly perturbed induction motor. In: *Proc. of the 32nd Conf. on Decision and Control*. San Antonio, Texas, Dez. 1993, S. 3391–3396
- [63] DRAGER, L. ; MARTIN, C.: Global observability of a class of nonlinear discrete time systems. In: *Systems & Control Letters* 6 (1985), Juni, Nr. 1, S. 650–658
- [64] ENGELL, S. (Hrsg.): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. München : Oldenbourg Verlag, 1995
- [65] FÖLLINGER, O.: *Nichtlineare Regelungen*. Bd. I+II. 7. Aufl. München : Oldenbourg Verlag, 1993
- [66] FÖLLINGER, O.: *Regelungstechnik*. 8. Aufl. Heidelberg : Hüthig Buch Verlag, 1994
- [67] GAUTHIER, J.-P. ; BORNARD, G.: Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 26 (1981), Aug., Nr. 4, S. 922–926
- [68] GERMUNDSSON, R. ; FORSMAN, K.: A constructive approach to algebraic observability. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1991, S. 451–452
- [69] GLAD, S. T.: Observability and nonlinear dead beat observers. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 22nd IEEE Conf. on Decision and Control*. San Antonio, Texas, USA, Dez. 1983, S. 800–802
- [70] GRIZZLE, J. W.: Controlled invariance for discrete-time nonlinear systems with an application to the disturbance decoupling problem. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 30 (1985), Sept., Nr. 9, S. 868–873

- [71] GRIZZLE, J. W.: Feedback linearization of discrete-time systems. In: THOMA, M. (Hrsg.) ; WYNER, A. (Hrsg.): *Proc. of the 7th Int. Conf. on Analysis and Optimization of Systems 1986*. Berlin : Springer-Verlag, Juni 1986 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 83), S. 273–281
- [72] GRIZZLE, J. W.: A linear algebraic framework for the analysis of discrete-time nonlinear systems. In: *Siam Journal on Control and Optimization* 31 (1993), Juli, Nr. 4, S. 1026–1044
- [73] GRIZZLE, J. W. ; KOKOTOVIC, P. V.: Feedback linearization of sampled-data systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 33 (1988), Sept., Nr. 9, S. 857–859
- [74] GRIZZLE, J. W. ; MORAAL, P. E.: Newton, observers and nonlinear discrete-time control. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii, Dez. 1990, S. 760–767
- [75] GRIZZLE, J. W. ; MORAAL, P. E.: On observers for smooth nonlinear digital systems. In: THOMA, M. (Hrsg.) ; WYNER, A. (Hrsg.): *Proc. of the 9th Int. Conf. on Analysis and Optimization of Systems 1990*. Berlin : Springer-Verlag, Juni 1990 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 144), S. 401–410
- [76] GUARDABASSI, G. O.: Robust stability against mismatched linearizing compensation of a class of SISO control systems. In: *Proc. of the 3rd European Control Conf.* Rome, Sept. 1995, S. 2292–2297
- [77] HAN, Q.-L. ; WU, Q.-B.: Stability robustness analysis of discrete linear systems. In: *Int. Journal of System Science* 22 (1991), Nr. 1, S. 165–172
- [78] HÄNSLER, E.: *Grundlagen der Theorie statistischer Signale*. Berlin : Springer-Verlag, 1983 (Nachrichtentechnik 10)
- [79] HARTMANN, I. ; LANDGRAF, C.: Nichtlineare Zustandsbeobachtung und Schätzung. In: *Automatisierungstechnik* 37 (1989), Nr. 11, S. 410–414
- [80] HAUKSDOTTIR, A. S. ; FENTON, R. E.: State observer and state-feedback controllers for a class of non-linear systems. In: *Int. Journal of Control* 48 (1988), Nr. 3, S. 833–855
- [81] HEISE, M.: *Programmierung und Test einer Simulationsumgebung unter einem symbolverarbeitenden Programmiersystem*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Studienarbeit, März 1997
- [82] HERMANN, R. ; KRENER, A. J.: Nonlinear controllability and observability. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 22 (1977), Okt., Nr. 5, S. 728–740
- [83] HESSE, T.: *Erarbeitung und Verifizierung eines Konzeptes für ein Programmpaket zum Regelungsentwurf mit symbolverarbeitenden Programmen*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Studienarbeit, Dez. 1993
- [84] HU, X.: On state observers for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 17 (1991), S. 650–658

- 
- [85] INGENBLEEK, R.: *Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf für zeitdiskrete nichtlineare Systeme*. Duisburg : Universität Duisburg, 1993 (Forschungsberichte 03/93)
- [86] INGENBLEEK, R.: Transformation of nonlinear discrete-time systems into observer canonical form. In: GOODWIN, G. (Hrsg.) ; EVANS, R. (Hrsg.): *Proc. of the 12th Triennial World Congress of the Int. Federation of Automatic Control*. Sydney, Australia, 1993, S. 35–38
- [87] INGENBLEEK, R.: *Zustandsbeobachter für zeitdiskrete nichtlineare Systeme - Geometrische Analyse und Synthese*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1996 (VDI-Fortschrittberichte 527 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Duisburg
- [88] ISERMANN, R.: *Digitale Regelsysteme*. Bd. I + II. 2. Aufl. Berlin : Springer-Verlag, 1987
- [89] ISIDORI, A.: *Nonlinear Control Systems*. 3. Aufl. London : Springer Verlag, 1995
- [90] ISIDORI, A. ; BYRNES, C. I.: Output regulation of nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 35 (1990), Feb., Nr. 2, S. 131–140
- [91] ISIDORI, A. ; KRENER, A. J. ; GORI-GIORGI, C. ; MONACO, S.: Nonlinear decoupling via feedback: a differential geometric approach. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 26 (1981), Apr., Nr. 2, S. 331–345
- [92] JAKUBCZYK, B.: Feedback linearization of discrete-time systems. In: *Systems & Control Letters* 9 (1987), S. 411–416
- [93] JAKUBCZYK, B. ; RESPONDEK, W.: On linearization of control systems. In: *Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences* 28 (1980), Nr. 9-10, S. 517–522
- [94] JAKUBCZYK, B. ; SONTAG, E. D.: Controllability of nonlinear discrete-time systems: A lie-algebraic approach. In: *SIAM Journal of Control and Optimization* 28 (1990), Jan., Nr. 1, S. 1–33
- [95] KAZAKOS, D. J.: Canonical form observability for discrete-time affine non-linear systems. In: *Int. Journal of System Sciences* 24 (1993), Nr. 4, S. 769–776
- [96] KELLER, H.: *Entwurf nichtlinearer Beobachter mittels Normalformen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1986 (VDI-Fortschrittberichte 124 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Karlsruhe
- [97] KELLER, H.: Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation (Teil 1+2). In: *Automatisierungstechnik* 34 (1986), Nr. 7 und 8, S. 271–274 (Teil 1), 326–331 (Teil 2)
- [98] KELLER, H.: Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. In: *Int. Journal of Control* 46 (1987), Nr. 6, S. 1915–1930
- [99] KHAYATIAN, A. ; TAYLOR, G. T.: Block input-output modeling and control methods for nonlinear discrete-time systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1994 American Control Conf. Baltimore*. Baltimore, MD, Juni 1994, S. 1334–1338

- [100] KLEIN, B. ; OLBROT, A.: Observers for state-affine systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 31 (1986), Nr. 3, S. 271–274
- [101] KLUGE, M. ; THOMA, M.: Aufschwingen eines Pendels mit strukturvariablem Regler. In: *Automatisierungstechnik* 38 (1990), Nr. 3, S. 114–117
- [102] KOKOTOVIC, P. V.: Recent trends in feedback design: An overview. In: *Automatica* 21 (1985), Mai, Nr. 3, S. 225–236
- [103] KOPMANN, A.: *Codierung von Entwurfsverfahren für Zustandsrückführungen nichtlinearer zeitdiskreter Systeme*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Diplomarbeit, Jan. 1994
- [104] KORN, G. A. ; KORN, M. K.: *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York : McGraw-Hill, 1961
- [105] KOTTA, Ü. ; NIJMEIJER, H.: On dynamic input-output linearization of discrete-time nonlinear systems. In: *Int. Journal of Control* 60 (1994), Nr. 6, S. 1319–1337
- [106] KOTTA, Ü. ; NIJMEIJER, H.: Immersion of discrete-time nonlinear system by regular dynamic state feedback into a linear system. In: *Int. Journal of Control* 64 (1996), Nr. 3, S. 361–376
- [107] KOTTA, Y. R.: Designing nonlinear discrete-time systems which are invariant under disturbances. In: *Automation and Remote Control* 51 (1990), Nr. 3, S. 294–300
- [108] KRENER, A. J.: On the equivalence of control systems and the linearization of nonlinear systems. In: *SIAM Journal on Control* 11 (1973), Nov., Nr. 4, S. 670–676
- [109] KRENER, A. J.: Approximate linearization by state feedback and coordinate change. In: *Systems & Control Letters* 5 (1984), Dez., Nr. 3, S. 181–185
- [110] KRENER, A. J.: Nonlinear controller design via approximate normal forms. In: GRÜNBAUM, F. A. (Hrsg.) ; HELTON, J. W. (Hrsg.) ; KHARGONEKAR, P. (Hrsg.): *Control Theory and Applications*. New York : Springer-Verlag, 1988 (Signal Processing. II), S. 139–154
- [111] KRENER, A. J. ; ISIDORI, A.: Linearization by output injection and nonlinear observers. In: *Systems & Control Letters* 3 (1983), Juni, S. 47–52
- [112] KRENER, A. J. ; RESPONDEK, W.: Nonlinear observers with linearizable error dynamics. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 23 (1985), März, Nr. 2, S. 197–216
- [113] LEE, H.-G.: *Linearization of Nonlinear Discrete Time Control Systems*. Austin, University of Texas, PhD-Thesis, 1986
- [114] LEE, H.-G. ; ARAPOSTATHIS, A. ; MARCUS, S. I.: Linearization of discrete-time systems. In: *Int. Journal of Control* 45 (1987), Nr. 5, S. 1803–1822

- 
- [115] LEE, H.-G. ; ARAPOSTATHIS, A. ; MARCUS, S. I.: Remarks on discretization and linear equivalence of continuous time nonlinear systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 26th IEEE Conf. on Decision and Control*, 1987, S. 1783
- [116] LEE, H.-G. ; ARAPOSTATHIS, A. ; MARCUS, S. I.: Linearization of discrete and discretized nonlinear systems. In: THOMA, M. (Hrsg.) ; WYNER, A. (Hrsg.): *New Trends in Nonlinear Control Theory*. Berlin : Springer-Verlag, Juni 1988 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 122), S. 91–101
- [117] LEE, H.-G. ; MARCUS, S. I.: Approximate and local linearizability of non-linear discrete-time systems. In: *Int. Journal of Control* 44 (1986), Nr. 4, S. 1103–1124
- [118] LEE, H.-G. ; MARCUS, S. I.: On input-output linearization of discrete-time nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 8 (1987), S. 249–259
- [119] LEE, H.-G. ; MARCUS, S. I.: On the immersion of a discrete time nonlinear system into a linear system. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 26th IEEE Conf. on Decision and Control*. Los Angeles, CA, Dez. 1987, S. 1746–1751
- [120] LEE, H.-G. ; MARCUS, S. I.: Immersion and immersion by nonsingular feedback of a discrete-time nonlinear system into a linear system. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 33 (1988), Mai, Nr. 5, S. 479–483
- [121] LEE, W. ; NAM, K.: Observer design for nonlinear discrete-time systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii, Dez. 1990, S. 768–769
- [122] LEE, W. ; NAM, K.: Observer design for autonomous discrete-time nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 17 (1991), S. 49–58
- [123] LEVINE, J. ; MARINO, R.: On fault-tolerant observers. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 35 (1990), Mai, Nr. 5, S. 623–627
- [124] LI, C. W. ; TAO, L. W.: Observing non-linear time-variable systems through a canonical form observer. In: *Int. Journal of Control* 44 (1986), Nr. 6, S. 1703–1713
- [125] LILGE, T.: Discrete-time observers for nonlinear systems. In: ISIDORI, A. (Hrsg.) ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.): *Proc. of the 1997 COSY Workshop on Control of Nonlinear and Uncertain Systems*. ETH Zürich, Jan 17-19 1997, S. 202–210
- [126] LILGE, T.: On observer design for nonlinear discrete-time systems. In: *European Journal of Control* 4 (1998), Nr. 4, S. 306–319
- [127] LILGE, T.: Zeitdiskrete Beobachter für nichtlineare Systeme. In: *32. Regelungstechnisches Kolloquium – Kurzfassung der Beiträge*. Boppard, Feb. 1998. – (Nicht veröffentlicht), S. 15–16
- [128] LIN, W.: Further results on global stabilization of discrete nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 29 (1996), Nr. 1, S. 51–59

- [129] LIN, W. ; BYRNES, C. I.: Design of discrete-time nonlinear control systems via smooth feedback. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 39 (1994), Nov., Nr. 11, S. 2340–2346
- [130] LIN, W. ; BYRNES, C. I.: Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems. In: *Automatica* 31 (1995), Nr. 2, S. 263–267
- [131] LIN, W. ; BYRNES, C. I.: Remarks on linearization of discrete-time autonomous systems and nonlinear observer design. In: *Systems & Control Letters* 25 (1995), S. 31–40
- [132] LIN, W. ; BYRNES, C. I.: Some new results on observability and stability of discrete-time autonomous systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1995 American Control Conf. Seattle*. Seattle, Washington, USA, Juni 1995, S. 4214–4218
- [133] LIN, W. ; BYRNES, C. I.: Zero-state observability and stability of discrete-time nonlinear systems. In: *Automatica* 31 (1995), Nr. 2, S. 269–274
- [134] LUDYK, G.: Nichtlineare zeitdiskrete Systeme. In: *Automatisierungstechnik* 36 (1988), Nr. 9, S. 321–330
- [135] LUENBERGER, D. G.: Canonical forms for linear multivariable systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 12 (1967), Juni, Nr. 3, S. 290–293
- [136] MAGANA, M. E. ; ZAK, S. H.: Robust output feedback stabilization of discrete-time uncertain dynamical systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 33 (1988), Nr. 11, S. 1082–1085
- [137] MARINO, R.: Adaptive observers for single output nonlinear systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 35 (1990), Sept., Nr. 9, S. 1054–1058
- [138] MARTIN, G. A. ; TAYLOR, D. G.: Observation of sampled-data nonlinear systems with delayed measurements and control. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1995 American Control Conf. Seattle*. Seattle, Washington, USA, Juni 1995, S. 280–284
- [139] MESCHKOWSKI, H.: *Mathematisches Begriffswörterbuch*. 2. Aufl. Mannheim : Bibliographisches Institut, 1966
- [140] MISAWA, E. A. ; HEDRICK, J. K.: Nonlinear observers – a state-of-the-art survey. In: *Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 111 (1989), Sept., Nr. 3, S. 344–352
- [141] MISAWA, E.: Robust nonlinear control system design: An overview. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1992 American Control Conf. Chicago*. Chicago, Illinois, Juni 1992, S. 1819–1823
- [142] MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D.: The immersion under feedback of a multidimensional discrete time nonlinear system into a linear system. In: *Int. Journal of Control* 38 (1983), S. 245–261
- [143] MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D.: On the immersion of a discrete-time polynomial analytic system into a polynomial affine one. In: *Systems & Control Letters* 3 (1983), S. 83–90

- 
- [144] MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D.: Invariant distributions for discrete-time nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 5 (1984), S. 191–196
- [145] MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D.: Zero dynamics of sampled data systems. In: *Systems & Control Letters* 11 (1988), S. 229–234
- [146] MONACO, S. ; NORMAND-CYROT, D. ; ISOLA, T.: Nonlinear decoupling in discrete time. In: *Nonlinear Control Systems Design, Selected Papers of the IFAC Symposium*. Capri, Italien, 1989, S. 99–106
- [147] MORAAL, P. E.: *Nonlinear Observer Design: Theory and Applications to Automotive Control*, University of Michigan, PhD-Thesis, 1994
- [148] MORAAL, P. E. ; GRIZZLE, J. W.: Asymptotic observers for detectable and poorly observers systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 34th IEEE Conf. on Decision and Control*. New Orleans, LA, USA, Dez. 1995, S. 108–114
- [149] MORAAL, P. E. ; GRIZZLE, J. W.: Observer design for nonlinear systems with discrete-time measurements. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), März, Nr. 3, S. 395–404
- [150] MORAAL, P. E. ; GRIZZLE, J. W. ; COOK, J. A.: An observer design for single-sensor individual cylinder pressure control. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 32nd IEEE Conf. on Decision and Control*. San Antonio, Texas, Dez. 1993, S. 2955–2961
- [151] MORAAL, P. ; GRIZZLE, J.: Nonlinear discrete-time observers using Newton’s and Broyden’s method. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1992 American Control Conf. Chicago*. Chicago, Illinois, Juni 1992, S. 3087–3090
- [152] MORICI, R. ; ROSSI, C. ; TONIELLI, A.: Discrete-time nonlinear controller for induction motor. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the IECON '93, Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*. Maui, HI, Nov. 1993, S. 1134–1139
- [153] MÜLLER, P. C.: *Stabilität und Matrizen*. Berlin Heidelberg New York : Springer-Verlag, 1977
- [154] MÜLLER, W. ; SCHNEIDER, K. R.: *Feedback stabilization of nonlinear discrete-time systems*. Berlin : Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, 1994 (Preprint 85)
- [155] NAM, K.: Linearization of discrete-time nonlinear systems and a canonical structure. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 34 (1989), Jan., Nr. 1, S. 119–122
- [156] NARENDRA, K. S. ; CABRERA, J. B. D.: Input-output representation of discrete-time dynamical systems - nonlinear ARMA models. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 33rd IEEE Conf. on Decision and Control*. Lake Buena Vista, FL, Dez. 1994, S. 1118–1119
- [157] NIJMEIJER, H.: Observability of a class of nonlinear systems: a geometric approach. In: *Ricerche di Automatica* 12 (1981), Juni, Nr. 1, S. 50–68
- [158] NIJMEIJER, H.: Observability of autonomous discrete time nonlinear systems: A geometric approach. In: *Int. Journal of Control* 36 (1982), Nov., Nr. 5, S. 867–74

- [159] NIJMEIJER, H. ; MAREELS, I.: An observers look to synchronization. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 44 (1997), Nr. 10, S. 882–890
- [160] NIJMEIJER, H. ; VAN DER SCHAFT, A. J.: *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York : Springer-Verlag, 1990
- [161] PEARSON, R. K.: Homogeneous, positive-homogeneous, and static-linear dynamic models. In: ISIDORI, A. (Hrsg.) ; ALLGÖWER, F. (Hrsg.): *Proc. of the 1997 COSY Workshop on Control of Nonlinear and Uncertain Systems*. ETH Zürich, Jan. 1997. – (Nicht veröffentlicht), S. 168–194
- [162] PHELPS, A. ; KRENER, A.: Computation of observer normal form using Macsyma. In: BYRNES, C. (Hrsg.) ; MARTIN, C. (Hrsg.) ; SAEKS, R. (Hrsg.): *Analysis and Control of Nonlinear Systems*. Amsterdam : North-Holland, 1988, S. 475–482
- [163] PROYCHEV, T. P. ; MISHKOV, R. L.: Transformation of nonlinear systems in observer canonical form with reduced dependency on derivatives of the input. In: *Automatica* 29 (1993), Nr. 2, S. 495–498
- [164] VON RAUMER, T. ; DION, J. M. ; DUGARD, L.: Combined nonlinear controller and full order observer design for induction motors. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the IECON '94, 20th Int. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation*. Bologna, Italien, 5.-9. Sept. 1994, S. 2103–2108
- [165] REBOULET, C. ; CHAMPETIER, C.: A new method for linearizing non-linear systems: The pseudolinearization. In: *Int. Journal of Control* 40 (1984), Nr. 4, S. 631–638
- [166] RONGE, P.: *Regelungsentwurf für nichtlineare Systeme mittels Zustandsraummethoden*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1987 (VDI-Fortschrittberichte 132 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Hannover
- [167] SAGLE, A. ; WALDE, E.: *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*. New York : Academic Press, 1973
- [168] SCHAFFNER, J.: *Zum Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme mit mehreren Meßgrößen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1997 (VDI-Fortschrittberichte 620 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Stuttgart
- [169] SCHAFFNER, J. ; ZEITZ, M.: Entwurf nichtlinearer beobachter. In: ENGELL, S. (Hrsg.): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. München : Oldenbourg Verlag, 1995, S. 53–76
- [170] VAN DER SCHAFT, A.: Linearization and input-output decoupling for general nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 5 (1984), Okt., Nr. 1, S. 27–33
- [171] SCHERM, N.: *Entwicklung eines nichtlinearen zeitdiskreten Beobachters auf Basis des 'Extended Luenberger Observer' Ansatzes*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Diplomarbeit, Jan. 1993
- [172] SCHMITENDORF, W.: Design of observer-based robust stabilizing controllers. In: *Automatica* 24 (1988), Nr. 5, S. 693–696

- 
- [173] SCHOENWALD, D. ; ÖZGÜNER, Ü.: Robust feedback linearization of uncertain nonlinear systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1992 American Control Conf. Chicago*. Chicago, Illinois, Juni 1992, S. 2545–2546
- [174] SCHULZE, K.: *Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme mittels Approximationen*. Düsseldorf : VDI-Verlag, 1993 (VDI-Fortschrittberichte 342 der Reihe 8). – Dissertation, Universität Hannover
- [175] SCHWARZ, H.: *Zeitdiskrete Analytisch-Lineare-Systeme*. Duisburg : Universität Duisburg, 1990 (Forschungsberichte 01/90)
- [176] SCHWARZ, H.: *Nichtlineare Regelungssysteme*. München : Oldenbourg Verlag, 1991
- [177] SEPULCHRE, R. ; JANKOVIC, M. ; KOKOTOVIC, P.: *Constructive Nonlinear Control*. London : Springer Verlag, 1997
- [178] SHOUSE, K. R. ; TAYLOR, D. G.: Discrete-time observers for singularly perturbed continuous-time systems: Part i, autonomous systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1993 American Control Conf. San Francisco*. San Francisco, Juni 1993, S. 2611–2615
- [179] SHOUSE, K. R. ; TAYLOR, D. G.: Discrete-time observers for singularly perturbed continuous-time systems: Part ii, nonautonomous systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1993 American Control Conf. San Francisco*. San Francisco, Juni 1993, S. 2616–2620
- [180] SHOUSE, K. R. ; TAYLOR, D. G.: Discrete-time observers for singularly perturbed continuous-time systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (1995), Feb., Nr. 2, S. 224–235
- [181] SIMÕES, C. ; NIJMEIJER, H.: Stability and stabilizability of implicit discrete-time nonlinear systems. In: *Proc. of the 3rd European Control Conf.* Rome, Sept. 1995, S. 307–312
- [182] SKOWRONSKI, J.: Strongly nonlinear observer which stabilizes under uncertainty. In: *Trans. of the Society for Computer Simulation* 3 (1987), Nr. 3, S. 231–251
- [183] SOMMER, R.: Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. In: *Automatisierungstechnik* 27 (1979), Nr. 12, S. 393–399
- [184] SOMMER, R.: Control design for multivariable non-linear time-varying systems. In: *Int. Journal of Control* 31 (1980), Nr. 5, S. 883–891
- [185] SOMMER, R.: Entwurf nichtlinearer Systeme auf endliche Einstellzeit. In: *Regelungstechnik* 31 (1983), Nr. 7, S. 223–230
- [186] SONG, Y. ; GRIZZLE, J. W.: The Extended Kalman Filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1992 American Control Conf. Chicago*. Chicago, Illinois, Juni 1992, S. 3365–3369
- [187] SU, R.: On the linear equivalents of nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 2 (1982), Juli, Nr. 1, S. 48–52

- [188] THAU, F. E.: Observing the state of non-linear dynamic systems. In: *Int. Journal of Control* 17 (1973), Nr. 3, S. 471–479
- [189] THAU, F. ; MOSCHNER, A.: Application of nonlinear observer-controllers as regulators of nonlinear systems. In: PARKER, S. R. (Hrsg.): *8th Asilomar Conf. on Circuits, Systems and Computers*. Pacific Grove, CA, 1975, S. 56–60
- [190] THOMA, M.: *Theorie linearer Regelsysteme*. Braunschweig : Vieweg Verlag, 1973
- [191] TSAO, T.-C.: Simple stability criteria for nonlinear time-varying discrete systems. In: *Systems & Control Letters* 22 (1994), März, Nr. 3, S. 223–225
- [192] TSINIAS, J. ; KALOUPSIDIS, N.: Output feedback stabilization of discrete-time control systems. In: *IMA Journal of Mathematics, Control and Information* 7 (1990), Nr. 3, S. 257–268
- [193] UNBEHAUEN, H.: *Regelungstechnik*. Bd. 2. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 1983
- [194] WALCOTT, B. L. ; CORLESS, M. J. ; ZAK, S. H.: Comparative study of non-linear state-observation techniques. In: *Int. Journal of Control* 45 (1987), Nr. 6, S. 2109–2132
- [195] WALCOTT, B. L. ; ZAK, S. H.: Combined observer-controller synthesis for nonlinear/uncertain systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1987 American Control Conf. Minneapolis*. Minneapolis, MN, Juni 1987, S. 868–873
- [196] WANG, W.-J. ; CHIOU, J.-S.: Non-linear control design and robustness of discrete-time bilinear system. In: *Int. Journal of System Sciences* 22 (1991), Nr. 10, S. 1977–1984
- [197] WEINMANN, A.: *Uncertain Models and Robust Control*. Wien : Springer-Verlag, 1991
- [198] WEISS, L.: Controllability, realization and stability of discrete-time systems. In: *SIAM Journal on Control* 10 (1972), Mai, Nr. 2, S. 230–51
- [199] WEISS, L. ; LAM, L.: Stability of non-linear discrete-time systems. In: *Int. Journal of Control* 17 (1973), Nr. 3, S. 465–470
- [200] VON WISSEL, D.: *Approximation des Systemverhaltens von abgetasteten nichtlinearen Systemen durch nichtlineare zeitdiskrete Beschreibungen*, Institut für Regelungstechnik, Universität Hannover, Diplomarbeit, Okt. 1992
- [201] WOLFRAM, S.: *The Mathematica Book*. 3. Aufl. Champaign : Wolfram Media, 1996
- [202] XIA, X. ; ZEITZ, M.: Nonlinear continuous observers. In: *7th German-Japanese Seminar on Nonlinear Problems in Dynamical Systems – Theory and Applications*. Schloß Reisenburg, Sept. 1996
- [203] XIA, X.-H. ; GAO, W.-B.: Non-linear observer design by observer canonical forms. In: *Int. Journal of Control* 47 (1988), Nr. 4, S. 1081–1100
- [204] XIA, X.-H. ; GAO, W.-B.: On exponential observers for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 11 (1988), S. 319–325
- [205] XIA, X.-H. ; GAO, W.-B.: Nonlinear observer design by observer error linearization. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 27 (1989), Jan., Nr. 1, S. 199–216

- 
- [206] YANG, W.-C. ; TOMIZUKA, M.: Discrete time robust control via state feedback for single input systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 35 (1990), Nr. 5, S. 590–598
- [207] YAZ, E.: On the stabilizing control of a class of nonlinear stochastic systems. In: *IEEE Trans. on Automatic Control* 36 (1991), Jan., Nr. 1, S. 121–123
- [208] YAZ, E.: Robust reduced-order compensation of some discrete-time nonlinear systems. In: AACC (Hrsg.): *Proc. of the 1991 American Control Conf. Boston*. Boston, Massachusetts, USA, Juni 1991, S. 548–549
- [209] YAZ, E. ; AZEMI, A.: Lyapunov-based nonlinear observer design for stochastic systems. In: IEEE (Hrsg.): *Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control*. Honolulu, Hawaii, Dez. 1990, S. 218–219
- [210] YAZ, E. ; AZEMI, A.: Observer design for discrete and continuous non-linear stochastic systems. In: *Int. Journal of System Sciences* 24 (1993), Nr. 12, S. 2289–2302
- [211] ZEITZ, M.: Nichtlineare beobachter. In: *Regelungstechnik* 27 (1979), Nr. 8, S. 241–249
- [212] ZEITZ, M.: Controllability canonical (phase-variable) form for non-linear time-variable systems. In: *Int. Journal of control* 37 (1983), Nr. 6, S. 1449–1457
- [213] ZEITZ, M.: Observability canonical (phase-variable) form for non-linear time-variable systems. In: *Int. Journal of Systems Science* 15 (1984), Nr. 9, S. 949–958
- [214] ZEITZ, M.: Comments on 'Comparative study of non-linear state-observation techniques'. In: *Int. Journal of Control* 46 (1987), Nr. 5, S. 1861–1863
- [215] ZEITZ, M.: The extended Luenberger observer for nonlinear systems. In: *Systems & Control Letters* 9 (1987), Nr. 2, S. 149–156
- [216] ZHIRABOK, A. N.: Algebraic observability criterion for nonlinear discrete systems. In: *Cybernetics and Computing Technology* (1992), Nr. 95, S. 5–11
- [217] ZHIRABOK, A. N. ; SHLIKHT, A. G.: An algebraic approach to the analysis of the observability of discrete systems. In: *Journal of Computer and System Sciences Int.* 31 (1993), Nr. 6, S. 70–76