

DYNAMIK
VON BOSE-EINSTEIN-KONDENSATEN
IN UNGEORDNETEN GITTERPOTENTIALEN

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation von

Dipl.-Phys. Sascha Drenkelforth,
geboren am 05.02.1978 in Warburg

2008

Referent: Prof. Dr. W. Ertmer
Korreferent: JProf. Dr. J.J. Arlt
Tag der Promotion: 30. April 2008

ZUSAMMENFASSUNG

Seit der erstmaligen Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation in atomaren Gasen im Jahr 1995 hat sich die Untersuchung dieser einzigartigen Quantenphase zu einem aktiven Forschungsschwerpunkt der modernen Physik entwickelt.

Insbesondere dient die Kombination der Bose-Einstein-Kondensation mit optischen Gittern als Modellsystem für die Festkörperphysik, da das stationäre Lichtfeld zu einem perfekten periodischen Potential ohne Störstellen führt. Einer der spektakulärsten dynamischen Effekte periodischer Potentiale ist das Auftreten so genannter Bloch-Oszillationen. Während sie in Festkörpern aufgrund der starken Dämpfung nur schwer erzeugbar und nur indirekt detektierbar sind, ermöglichen optische Gitter ihre direkte zeitlich aufgelöste Beobachtung. Der Vergleich dieser beiden Systeme führt zu der Frage, wie eine kontrollierte Störung des optischen Gitters durch künstlich hinzugefügte Unordnung die Dynamik quantenentarteter Gase beeinflusst. Um dieser Fragestellung nachzugehen, wurden die dynamischen Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten optischen Gittern experimentell untersucht [1]. Die Voraussetzungen zur Erzeugung von Bloch-Oszillationen wurden geschaffen, indem der experimentelle Aufbau um einen magnetischen Potentialgradienten erweitert und das optische Gitter neu aufgebaut wurde. Zudem wurde die Fallengeometrie modifiziert, um die wechselwirkungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen innerhalb der experimentell relevanten Zeitskalen zu unterdrücken [2]. Dies ermöglichte die experimentelle Beobachtung von Bloch-Oszillationen und die Untersuchung des Einflusses eines zusätzlichen optischen Unordnungspotentials auf die Dynamik.

Die Dämpfung der Schwerpunktsbewegung der Bose-Einstein-Kondensate wurde in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe charakterisiert und ergab eine gute Übereinstimmung mit den durchgeführten numerischen Simulationen. Zudem konnte die zugrunde liegende Verbreiterung seines Quasiimpulsspektrums detailliert quantitativ analysiert werden.

Die experimentelle Beobachtung der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in inhomogenen Kraftfeldern, sowie die gute Übereinstimmung mit den numerischen Berechnungen ist insbesondere für mögliche Anwendungen als Quantensensor zur Messung kleinster Kräfte von großer Bedeutung.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit konnten die Untersuchungen zur Lokalisierung von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potentialen [3, 4, 5] mit der Erforschung der Dynamik in ungeordneten optischen Gittern bedeutend erweitert werden [1].

Schlagwörter: Bloch-Oszillation, Bose-Einstein-Kondensation, ungeordnete optische Gitter

ABSTRACT

Since the first experimental realisation of the Bose-Einstein condensation in ultra-cold gases in 1995 the investigation of this unique quantum phase has become a major research area of modern physics.

Especially the combination of the Bose-Einstein condensation with optical lattices can serve as a model system for solid state physics, since the light field constitutes a perfect periodic potential without any defects. One of the most spectacular effects in periodic potentials are the so called Bloch oscillations. In solid state systems strong damping due to disorder renders their realization difficult and they can only be observed indirectly. Optical lattices however enable their time resolved observation. A comparison of these systems gives rise to the question how the controlled addition of disorder to an optical lattice will affect the dynamics of particles in such a periodic potential.

To address this issue the dynamical properties of Bose-Einstein condensates in disordered optical lattices were experimentally studied [1]. The experimental requirements were met by implementing a magnetic potential gradient and rebuilding the optical lattice. Furthermore the trap geometry was changed in order to suppress interaction induced damping within the experimentally relevant timescale [2]. This enabled the experimental observation of Bloch oscillations and the investigation of the effects of an additional disorder on the dynamics.

The dependence of the damping of the centre-of-mass motion on the disorder depth was characterized and good agreement with the performed numerical simulations was observable. In addition the broadening of the quasimomentum spectrum, which is the underlying mechanism of the damping was analysed quantitatively.

The experimental observation of disorder induced damping of the Bloch oscillations of Bose-Einstein condensates in spatially inhomogeneous potential gradients and the good agreement with the numerical estimation is of special interest for possible applications of Bloch oscillations as quantum sensor for the measurement of very small forces.

Within this work the investigation of the ground state properties of Bose-Einstein condensates in disordered potentials [3, 4, 5] were significantly extended to the investigation of dynamical phenomena in disordered optical lattices [1].

Keywords: Bloch oscillation, Bose-Einstein condensation,
disordered optical lattices

INHALTSVERZEICHNIS

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 1 |
| 2 | Bose-Einstein-Kondensation | 7 |
| 2.1 | Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation | 7 |
| 2.1.1 | Ideales Bose Gas | 8 |
| 2.1.2 | Wechselwirkende Bose-Einstein-Kondensate | 13 |
| 2.2 | Experimentelle Erzeugung | 20 |
| 2.2.1 | Laserkühlung | 21 |
| 2.2.2 | Magnetfalle und evaporatives Kühlen | 26 |
| 2.3 | Modifikationen des experimentellen Aufbaus | 30 |
| 3 | Quantenentartete Gittergase | 33 |
| 3.1 | Optische Potentiale | 33 |
| 3.1.1 | Grundlagen | 33 |
| 3.1.2 | Potential eines gaußförmigen Laserprofils | 36 |
| 3.1.3 | Potential des optischen Gitters | 37 |
| 3.2 | Theorie quantenentarteter Gittergase | 39 |
| 3.2.1 | Einteilchen-Effekte | 40 |
| 3.2.2 | Vielteilchen-Wellenfunktion | 49 |
| 3.3 | Experimentelle Realisierung | 56 |
| 3.3.1 | Aufbau | 56 |
| 3.3.2 | Justage des optischen Gitters | 60 |
| 3.3.3 | Eichung des Gitters | 62 |
| 3.3.4 | Einschaltsequenz | 69 |
| 4 | Bloch-Oszillationen | 75 |
| 4.1 | Theoretische Grundlagen | 76 |
| 4.1.1 | Bloch-Oszillationen nicht wechselwirkender Teilchen | 76 |
| 4.1.2 | Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten | 87 |
| 4.2 | Experimentelle Realisierung | 97 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.1 | Transformation der Fallengeometrie | 97 |
| 4.2.2 | Beschleunigung der Bose-Einstein-Kondensate | 105 |
| 4.3 | Ergebnisse | 109 |
| 5 | Bloch-Oszillationen in ungeordneten Potentialen | 115 |
| 5.1 | Unordnungsinduzierte Dämpfung | 115 |
| 5.2 | Experimentelle Realisierung | 119 |
| 5.2.1 | Unordnungspotential | 119 |
| 5.2.2 | Experimentelle Sequenz | 121 |
| 5.3 | Ergebnisse | 122 |
| 5.3.1 | Dämpfung der Schwerpunktsbewegung | 122 |
| 5.3.2 | Verbreiterung des Impulsspektrums | 128 |
| 5.3.3 | Vollständige Dephasierung über die erste Brillouin-Zone . . . | 132 |
| 6 | Ausblick | 135 |
| A | Anhang | 139 |
| A.1 | Zusammenfassung wichtiger Konstanten | 139 |
| A.2 | Modifikation des Laseraufbaus | 140 |

EINLEITUNG

Das Forschungsgebiet ultrakalter Quantengase stellt eine faszinierende Kombination verschiedener Zweige der modernen Physik dar. Die Anwendung von Methoden der Quantenoptik zur Manipulation der inneren und äußeren Freiheitsgrade gasförmiger atomarer Ensembles ermöglicht die Speicherung und Kühlung atomarer Wolken in dissipativen Fallen. Mittels verschiedener Methoden ist es so möglich, die Temperatur um ca. 9 Größenordnungen von 400K auf einige 100nK zu senken, um in Regime vorzudringen, die nicht länger der Maxwell-Boltzmann Verteilung klassischer Vielteilchen-Systeme folgen und in denen die Ununterscheidbarkeit der Atome zu fundamentalen Forderungen an die Symmetrie der Vielteilchen-Wellenfunktion führt. Für quantenentartete bosonische Ensemble folgt daraus die so genannte Bose-Einstein Verteilungsfunktion, anhand der 1925 A. Einstein die Bose-Einstein-Kondensation nicht wechselwirkender Vielteilchen-Systeme vorher sagte [6, 7, 8]. Dabei handelt es sich um einen rein quantenstatistischen Effekt bosonischer Teilchen, der auf der höheren Gewichtung mehrfach besetzter Zustände beruht. Für ausreichend hohe Phasenraumdichten führt dies zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustands der Falle.

Reine Bose-Einstein-Kondensation konnte erstmalig 70 Jahre nach ihrer theoretischen Vorhersage in atomaren Gasen geringer Dichte realisiert werden [9, 10, 11]. Der entscheidende Vorteil ultrakalter Quantengase, der die Erzeugung nahezu purer Bose-Einstein-Kondensate und damit die direkte Untersuchung dieser einzigartigen Quantenphase ermöglicht, liegt in der schwachen Wechselwirkung zwischen den Atomen. Zudem ist es aufgrund der geringen Dichte möglich, die notwendige Phasenraumdichte zu erreichen, ohne das das Ensemble in die kristalline Phase übergeht. Die Lebensdauer der Kondensate liegt im Bereich weniger Minuten und ist somit ausreichend, um dieses einzigartige Quantenobjekt zu studieren. Bei der Bose-Einstein-Kondensation ultrakalter Gase handelt es sich dementsprechend um eine metastabile Phase.

Die makroskopische Besetzung des Vielteilchen-Grundzustands ($\approx 5 \times 10^5$ Atome) hat eine Ausdehnung der atomaren Wolke von einigen $10\mu\text{m}$ zur Folge. Da sich nahezu alle Teilchen im selben Zustand befinden, ist es möglich, die makroskopische Wellenfunktion dieses quantenmechanischen Objektes mittels optischer Methoden direkt abzubilden, und einzigartige Einblicke in fundamentale Theorien der Quantenphysik zu erhalten.

Von besonderem Interesse ist in diesem Zusammenhang die Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten in so genannten optischen Gittern. Dabei handelt es sich um optische Stehwellen, deren stationäres Lichtfeld zu einem perfekten periodischen Potential, ohne jegliche Störstellen führt. Die Realisierung von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern stellt somit ein Modellsystem dar, das die Untersuchung verschiedenster grundlegender Theorien der Festkörperphysik erlaubt, und belegt zudem die ausgeprägte Interdisziplinarität des Forschungsfeldes ultrakalter Quantengase, das mit der Quantenoptik, der Atomoptik und der Festkörperphysik verschiedene Forschungsgebiete der modernen Physik miteinander verknüpft.

Insbesondere handelt es sich bei Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern um eine direkte Realisierung des berühmten Bose-Hubbard Modells [12] der Festkörperphysik. Durch Variation der Gittertiefe und der Gitterkonstante können zudem die entscheidenden Parameter des optischen Kristalls verändert werden. So hat z.B. eine Erhöhung der Gittertiefe eine Verringerung der Tunnelrate zwischen den einzelnen Gitterplätzen zur Folge. Daher ist es mittels quantenentarteter Gittergase möglich, stark korrelierte Systeme zu untersuchen. Eine starke Unterdrückung der kinetischen Energie führt bei Erreichen einer kritischen Gittertiefe zu einem Übergang aus der superfluiden Phase, die sich durch ihre Phasenkohärenz sowie Teilchenzahl-Fluktuationen auf den einzelnen Gitterplätzen auszeichnet, in die so genannte Mott-Isolator Phase mit einer festen Teilchenzahl pro Gitterplatz [13, 14]. Darüber hinaus eignen sich optischen Gitter zur Untersuchung weiterer spektakulärer Vielteilchen-Effekte, wie z.B. der Bose-Glass Phase [15, 16] aber auch bedeutender Einteilchen-Effekte, wie der so genannten Anderson-Lokalisation [3, 17, 18, 19, 20].

Im Gegensatz zur Festkörperphysik beschränkt sich die Untersuchung solcher grundlegender Phänomene nicht auf indirekte Messungen. Die herausragende Stellung quantenentarteter Gittergase resultiert insbesondere aus der direkten Beobachtbarkeit des Impulsspektrums des Vielteilchen-Systems mittels des so genannten Flugzeitverfahrens. Dabei wird die atomare Wolke nach einer freien Expansion von einigen Millisekunden, in denen sie sich entsprechend ihrer Impulsverteilung ausdehnt, durch Absorptionenaufnahmen abgebildet.

Die Analogie zur Festkörperphysik wirft insbesondere die Frage auf, wie Unordnung die Eigenschaften des perfekten optischen Kristalls beeinflusst. Daher beschäftigt sich unsere Arbeitsgruppe seit einiger Zeit mit der Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten optischen Gittern. Dazu stehen prin-

ziell verschiedene Möglichkeiten zur Verfügung. Ungeordnete Strukturen können mittels zusätzlicher Fremdatome in der atomaren Wolke [21, 22, 23], durch die Rauigkeit des Fallenpotentials von Atom-Chips [21, 22, 23] sowie zusätzlicher optischer Dipolpotentiale realisiert werden. Letzteres kann beispielsweise mittels so genannter nicht kommensurabler Übergitter [24, 16, 25, 26] geschehen. Sie ermöglichen es, durch die Interferenz mehrerer zusätzlicher optischer Stehwellen, Strukturen auf das Gitter aufzuprägen, deren Periodizitätslänge größer als die Ausdehnung des Kondensats ist und dementsprechend als quasi ungeordnet angesehen werden kann. In unserer Arbeitsgruppe wurde jedoch eine alternative Möglichkeit gewählt [3, 27], die auf der Abbildung einer ungeordneten Struktur auf die Position der Atome beruht. Ähnliche Strukturen zur Erzeugung ungeordneter Potentiale wurden in Arbeiten aus Florenz und Paris verwendet [28, 29, 30, 31]. Dies ermöglichte die erstmalige experimentelle Realisierung von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten optischen Gittern, sowie die Untersuchung des Grundzustands dieses Systems [3]. Es konnte gezeigt werden, dass das Unordnungspotential zu einer Streifenbildung im Dichteprofil des Kondensats während der freien Expansion führt [32]. Ziel dieser Untersuchungen war die so genannte Anderson Lokalisierung. Dabei handelt es sich um einen faszinierenden Einteilchen-Effekt der Festkörperphysik, der im Jahre 1958 von P.W. Anderson vorhergesagt wurde [17]. Die Interferenz der an den Unordnungsstrukturen reflektierten Teilwellen führt dabei zu einer Lokalisierung der energetisch ungebundenen Wellenfunktion, deren Energie deutlich größer als das schwache Unordnungspotential ist. Mittels numerischer Simulationen der Gross-Pitaevskii Gleichung konnte gezeigt werden, dass die Wechselwirkung zwischen den Atomen der Lokalisierung entgegenwirkt, da sie das Unordnungspotential abschirmt [33, 34, 35, 36]. Zudem zeigte sich, dass eine kurze Korrelationslänge notwendig ist, um eine Lokalisierungslänge zu realisieren, die kleiner als die Ausdehnung des Ensembles ist. Diese hohen Anforderungen verhinderten bisher eine experimentelle Realisierung der Anderson Lokalisierung in ultrakalten Quantengasen.

Die Untersuchungen zu den Grundzustandseigenschaften wurden im Rahmen dieser Arbeit in Analogie zu Transportphänomenen in kristallinen Strukturen auf die Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern erweitert. Einer der spektakulärsten Effekte quantenmechanischer Teilchen in periodischen Potentialen sind die so genannten Bloch-Oszillationen. Dabei führt die Beschleunigung durch einen externen Potentialgradienten zu einer oszillatorischen Bewegung der Atome, anstatt zu der intuitiv zu erwartenden linearen Beschleunigung. Dieser rein quantenmechanische Effekt wurde 1929 von F. Bloch [37] für die Bewegung von Elektronen in Kristallen vorhergesagt. Bloch-Oszillationen können dort aufgrund der Streuung an Störstellen in der Struktur kristalliner Gitter nicht direkt beobachtet werden, da sie auf Zeitskalen deutlich unterhalb einer Oszillationsperiode gedämpft werden. So beträgt die Dephasierungszeit lediglich einige Femtosekunden [38], während die Oszillationszeit in der Größenordnung einiger Mikrosekunden

liegt. Die Beobachtung von Bloch-Oszillationen in Festkörpern erfordert daher die Herstellung so genannter Übergitter, die auf einer sukzessiven Folge verschiedener Halbleiter-Strukturen beruhen. Die resultierende große Periodizitätslänge führt zu Oszillationszeiten von einigen Picosekunden, die mittels indirekter Messungen des Emissionsspektrums der Elektronen gemessen werden können [39].

Optische Gitter hingegen weisen keinerlei Verunreinigungen auf, daher sind für nicht wechselwirkende Teilchen in einem solchen Potential ungedämpfte Bloch-Oszillationen zu erwarten. So konnten bereits Bloch-Oszillationen thermischer Ensembles [40, 41, 42, 38, 43, 44, 45, 46], fermionischer Systeme [47] und von Bose-Einstein-Kondensaten [48, 49, 50, 51, 52] realisiert werden.

Thermische und fermionische Systeme weisen ein vergleichsweise breites Impulsspektrum auf. Dies hat eine starke Reduktion des Kontrasts der Bloch-Oszillationen zur Folge. Die große Ausdehnung dieser Ensemble stellt zudem einen Nachteil bei der hoch aufgelösten Messung kleinster räumlicher Variationen ortsabhängiger Kräfte dar [52]. Sie weisen jedoch den Vorteil auf, dass aufgrund der geringen Dichte bzw. des Pauliprinzips die Wechselwirkung zwischen den Atomen unterdrückt ist [47].

Bose-Einstein-Kondensate zeichnen sich im Gegensatz dazu durch ihr äußerst schmales Impulsspektrum sowie eine geringe räumliche Ausdehnung aus. Bei wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensaten führt die so genannte dynamische Instabilität (Abschnitt 4.1.2) allerdings zu einer Dephasierung der Quasiimpulse und daher zu einer Dämpfung der Bloch-Oszillationen [53]. Es konnte jedoch experimentell gezeigt werden, dass mittels so genannter Feshbach Resonanzen die Wechselwirkung weitgehend ausgeschaltet werden kann [54]. Mittels dieser Technik konnten kürzlich äußerst langlebige Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten realisiert [51, 52] und so die Vorteile des schmalen Impulsspektrums mit einer Unterdrückung der Wechselwirkung kombiniert werden.

Der Vergleich quantenentarteter Gittergase mit der Festkörperphysik, wirft in diesen Systemen die Frage auf, wie sich eine Störung der perfekten Periodizität durch ein zusätzliches Unordnungspotential auf die Dynamik von Bose-Einstein-Kondensate auswirkt.

Um dieser Fragestellung nachgehen zu können, war zunächst die experimentelle Realisierung von Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten notwendig. Dies erforderte die Implementierung zusätzlicher Magnetspulen zur Erzeugung eines magnetischen Gradienten zur Beschleunigung der Atome sowie eine Verringerung der Wechselwirkungsenergie durch die Reduktion der Dichte der Kondensate. Der so zugängliche Parameterbereich ermöglichte die experimentelle Beobachtung von Bloch-Oszillationen in optischen Gittern für verschiedene Gittertiefen.

In Analogie zur Dämpfung in Festkörpern wurde das bestehende ungeordnete Dipolpotential verwendet, um die Auswirkungen der Störung der Gitterstruktur auf die Bloch-Oszillationen zu untersuchen. Dies ermöglichte die erstmalige experimentelle Beobachtung einer unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-

Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten.

Parallel zur Untersuchung der Dämpfung der Schwerpunktsbewegung wurde die Dephasierung und Verbreiterung des Quasiimpulsspektrums experimentell untersucht. Die Zeitkonstanten der Dephasierung belegen, dass die Verbreiterung des Impulsspektrums die Ursache der Dämpfung der Schwerpunktsbewegung ist, da verschiedene Teile des Kondensats simultan unterschiedliche Phasen der Oszillation durchlaufen.

Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten sind über das grundlegende Interesse an der Dynamik kohärenter atomarer Ensembles in ungeordneten Potentialen hinaus von großer Relevanz. So wurde vorgeschlagen, Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für Präzisionsmessungen kleinster Kräfte zu nutzen [47, 55, 45, 46, 52]. Dieses Konzept basiert auf der Abhängigkeit der Periodizität der Oszillation von der beschleunigenden Kraft, die eine Messung kleinster Kräfte durch die Bestimmung der Oszillationsfrequenz erlaubt. Für eine hohe Sensitivität und Präzision ist somit die Beobachtung einer großen Anzahl von Oszillationsperioden unabdingbar. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zu Bloch-Oszillationen in ungeordneten Potentialen zeigen, dass bereits kleine Inhomogenitäten in der beschleunigenden Kraft zu einer Dephasierung des Quasiimpulsspektrums und somit zu einer Dämpfung der Oszillation führen. Daher ist für Anwendungen von Bloch-Oszillationen als Quantensensor in inhomogenen Kraftfeldern eine quantitative Bestimmung der Dämpfungskonstanten notwendig. Die gute Übereinstimmung der numerischen Berechnungen mit den experimentellen Daten belegt insbesondere die Nutzbarkeit der numerischen Methoden zur Abschätzung der Größe etwaiger Inhomogenitäten.

Die Beschreibung der im Rahmen dieser Doktorarbeit durchgeführten experimentellen und numerischen Untersuchungen, sowie der zugrunde liegenden theoretischen Zusammenhänge gliedert sich wie folgt:

- **Kapitel 2** behandelt sowohl die Theorie, als auch die experimentelle Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation quantenentarteter Gase. Zur Erläuterung der grundlegenden Zusammenhänge wird zunächst detailliert die Theorie der Bose-Einstein-Kondensation idealer Gase beschrieben. Es folgt die Verallgemeinerung auf den experimentell relevanten Fall eines schwach wechselwirkenden Vielteilchen Systems. In diesem Kontext wird die Gross-Pitaevskii Gleichung ausführlich diskutiert, da sie für die quantitative Analyse der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern unerlässlich ist. Abschließend werden die experimentellen Methoden zur Erzeugung der Bose-Einstein-Kondensation, sowie die verwendete Apparatur und die erforderlichen Änderungen des Lasersystems, der magneto-optischen Falle sowie des Vakuumsystems beschrieben.

- **Kapitel 3** erläutert die theoretischen Grundlagen quantenentarteter Gittergase sowie die experimentelle Realisierung des verwendeten eindimensionalen optischen Gitters. Zunächst wird die Realisierung optischer Potentiale mittels optischer Lichtfelder beschrieben. Es folgt eine ausführliche Einführung in die physikalischen Eigenschaften quantenmechanischer Teilchen in periodischen Potentialen sowie die Erweiterung dieser Zusammenhänge auf wechselwirkende Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gittern. Anschließend wird die experimentelle Realisierung des optischen Gitters vorgestellt. Dabei gilt das besondere Augenmerk den umfangreichen notwendigen Umbauten des Aufbaus sowie dem neu implementierten hochpräzisen Justageschema.
- **Kapitel 4** beschreibt die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern. Zunächst wird das Verhalten eines einzelnen beschleunigten Teilchens im periodischen Potential analysiert. Die Ursachen der oszillatorischen Bewegung werden ausführlich qualitativ beschrieben und auch quantitativ berechnet. Anschließend werden die so gewonnenen Erkenntnisse auf Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gittern erweitert. Der entscheidende Unterschied zum Einteilchen-Bild, die wechselwirkungsinduzierte dynamische Instabilität, wird erläutert und ihre Stärke in Abhängigkeit von den experimentellen Parametern untersucht. Es folgt die Beschreibung der zur Realisierung der Bloch-Oszillationen erforderlichen apparativen Maßnahmen. Im letzten Abschnitt des Kapitels werden die experimentell beobachteten Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten vorgestellt und detailliert charakterisiert.
- **Kapitel 5** präsentiert die erstmalig experimentell beobachtete Dämpfung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potentialen. Dazu werden zunächst die zugrunde liegenden physikalischen Zusammenhänge erläutert und die zeitliche Entwicklung der Bloch-Oszillationen in inhomogenen Kraftfeldern quantitativ abgeschätzt. Nach der Beschreibung des ungeordneten Potentials und der experimentellen Sequenz erfolgt die Präsentation der experimentell beobachteten unordnungsinduzierten Dämpfung der Schwerpunktsbewegung der Bloch-Oszillationen sowie der Verbreiterung des Impulsspektrums. Die Dämpfungskonstanten werden mit den durchgeführten Simulationen verglichen.
- **Kapitel 6** weist Perspektiven auf für die weitere Entwicklung der experimentellen Untersuchungen zur Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potentialen als auch zur Fortführung der Untersuchungen zu Lokalisierungsphänomenen in ungeordneten Gittergasen.

BOSE-EINSTEIN-KONDENSATION

Bose-Einstein-Kondensate (BEC) atomarer Gase bilden die Basis sämtlicher im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Arbeiten. Daher wird in diesem Kapitel zunächst ihre theoretische Beschreibung behandelt. Anschließend werden die verwendeten Methoden zur experimentellen Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten sowie die Änderungen am Aufbau der Apparatur erläutert, die zur Realisierung einer hohen Stabilität erforderlich waren.

2.1 Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation

Die Bose-Einstein-Kondensation ist ein rein quantenstatistischer Effekt, der bereits 1925 von A. Einstein [7, 8] basierend auf Arbeiten von S. N. Bose [6] vorhergesagt wurde, und 1995 erstmalig in atomaren Gasen geringer Dichte realisiert werden konnte [9, 10, 11]. Sie bezeichnet die makroskopische Besetzung eines einzelnen Quantenzustandes für Temperaturen deutlich oberhalb der Energiedifferenz zwischen Grundzustand und erstem angeregtem Zustand $k_B T_c \gg E_1 - E_0$. Während für Temperaturen am absoluten Nullpunkt trivialerweise eine makroskopische Besetzung des Grundzustandes zu erwarten ist, liegt die Ursache der Bose-Einstein-Kondensation in der Ununterscheidbarkeit der Teilchen und der daraus resultierenden Symmetrieeigenschaften der Vielteilchen-Wellenfunktion bosonischer Ensembles, und tritt bereits für deutlich höhere Temperaturen auf. In fermionischen Systemen hingegen tritt keine Kondensatphase auf. Das Pauli Prinzip verhindert hier eine mehrfache Besetzung einzelner Zustände.

Ultrakalte atomare Gase eignen sich hervorragend zur Untersuchung der Bose-Einstein-Kondensation. Aufgrund ihrer geringen Dichte und der daraus resultierenden geringen Wechselwirkung befinden sich nahezu alle Atome im gemeinsamen Quantenzustand. Im Gegensatz dazu liegt der Kondensatanteil bei superfluidem ^4He aufgrund der starken Wechselwirkung bei nur ca. 10% [56]. Aufgrund der

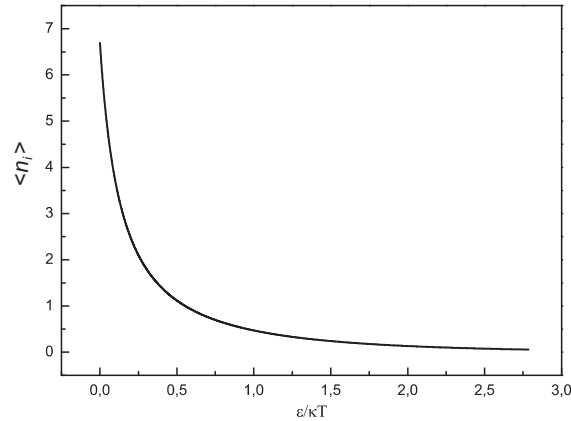


Abbildung 2.1: Mittlere Besetzungszahl der Bose-Einstein Verteilungsfunktion als Funktion der Zustandsenergie ϵ für $T=100nK$, $\mu = -10\hbar\omega_\rho$ eine Fallenfrequenz von $\nu = 29Hz$.

geringen Dichten sind sehr tiefe Temperaturen zum Erreichen der Kondensatphase notwendig, denn der Übergang erfordert mittlere Teilchenabstände $n^{-1/3}$ in der Größenordnung der de Broglie Wellenlänge (siehe Gleichung 2.20). Für Alkali-Gase liegt diese Temperatur typischerweise bei einigen 100nK. Bei der Bose-Einstein-Kondensation quantenentarteter Gase handelt es sich somit um eine metastabile Phase. Das atomare Ensemble ist bei diesen Temperaturen im thermodynamischen Gleichgewicht nicht mehr gasförmig, sondern bildet einen Festkörper. Aufgrund der Energie- und Impulserhaltung führen jedoch nur 3-Körper Stöße zur Entstehung von Molekülen. Daher bedingt die geringe Dichte eine ausreichend langen Lebensdauer Untersuchung der Bose-Einstein-Kondensate [57, 58]. Sie zeichnen sich somit durch eine geringe Dichte und somit vergleichsweise schwache Wechselwirkung bei sehr geringen Temperaturen aus. Die Besetzung eines einzigen Zustands führt zu der Ausbildung eines makroskopischen Quantenobjekts das mit optischen Methoden direkt beobachtet werden kann und somit detaillierte Studien grundlegender quantenmechanischer Zusammenhänge auf makroskopischen Längenskalen und Zeitskalen ermöglicht.

2.1.1 Ideales Bose Gas

Die aus der Ununterscheidbarkeit der Teilchen folgenden Symmetriebedingungen führen für Bosonen zur so genannten Bose-Einstein Verteilungsfunktion [7, 8, 6]

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_i - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (2.1)$$

welche die mittlere Besetzungszahl $\langle n_i \rangle$ eines Zustandes bestimmt und in Abbildung 2.1 gezeigt ist. Sie hängt von der Energie ϵ_i des jeweiligen Zustandes und der Temperatur T ab. Das chemische Potential μ dient der Teilchenzahlerhaltung

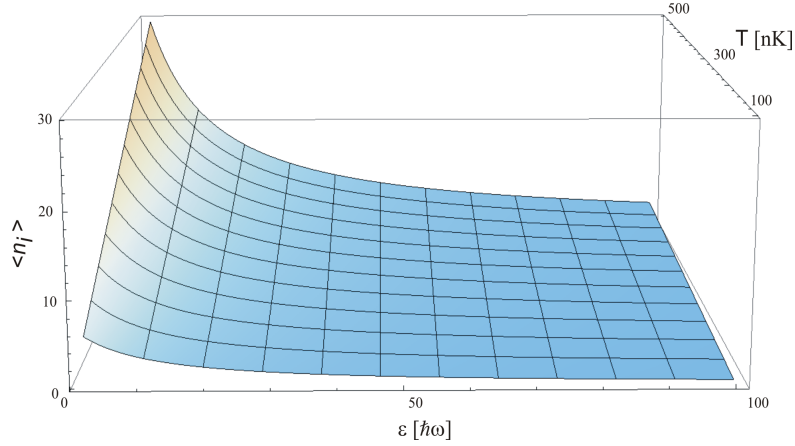


Abbildung 2.2: Bose-Einstein Verteilungsfunktion als Funktion der Temperatur T und der Zustandsenergie ϵ für $\mu = -10\hbar\omega_\rho$ und $\nu = 29Hz$.

und wird im Verlauf dieses Kapitels ausführlich diskutiert. Zur Betrachtung verschiedener Grenzfälle ist die Einführung der so genannten Fugazität z hilfreich

$$z = e^{\mu/k_B T}. \quad (2.2)$$

Da die Ausdehnung der atomaren Wellenpakete immer geringer wird, geht die Bose-Einstein Verteilungsfunktion im klassischen Grenzfall hoher Temperaturen $z \ll 1$ in die Maxwell-Boltzmann Verteilungsfunktion unterscheidbarer Teilchen über

$$\langle n_i \rangle_B = e^{-(\epsilon_i - \mu)/k_B T}, \quad (2.3)$$

da die Wahrscheinlichkeit von Doppelbesetzungen der Energieniveaus äußerst gering ist und die Notwendigkeit der Symmetrisierung der Wellenfunktion entfällt.

Abbildung 2.2 zeigt die mittlere Besetzungszahl in Abhängigkeit von der Temperatur und der Zustandsenergie. Es ist klar zu erkennen, dass die mittlere Besetzungszahl mit abnehmender Temperatur für alle Zustandsenergien sinkt. Da die Summe der Besetzungszahlen der Gesamtteilchenzahl entspricht,

$$N_{ges} = \sum_{i=0}^{\infty} \langle n_i \rangle, \quad (2.4)$$

würde dies bei konstantem μ zu einer Abnahme der Atomzahl führen. Dies ist jedoch für atomare Ensembles im Gegensatz zu Photonen nicht möglich. Daher steigt das chemische Potential bei sinkender Temperatur und gewährleistet so entsprechend Gleichung 2.4 die Teilchenzahl-Erhaltung, da eine Zunahme des chemischen Potentials, wie in Abbildung 2.3 gezeigt wird, zu einer Verschiebung der

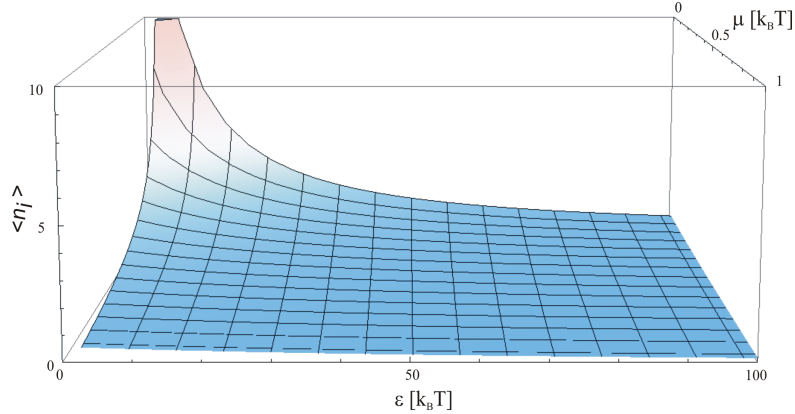


Abbildung 2.3: Bose-Einstein Verteilungsfunktion als Funktion der Zustandsenergie ϵ und des chemischen Potentials für $T = 100nK$ und $\nu = 29Hz$.

Verteilungsfunktion entlang der Energieachse und somit zu einer Vergrößerung der Fläche unter der Funktion $\langle n_i \rangle (\epsilon)$ führt.

Das chemische Potential muss dabei allerdings kleiner bleiben als die Grundzustandsenergie $\mu < \epsilon_0$, da sonst in Gleichung 2.1 negative Besetzungswahrscheinlichkeiten auftreten würden. Der Übergang zur Bose-Einstein-Kondensation erfolgt, wenn die Teilchenzahlerhaltung erfordert, dass μ gegen ϵ_0 strebt, und die Besetzung des niedrigsten Zustandes somit makroskopische Werte annimmt (Abbildung 2.4).

Zur Berechnung der Kondensationstemperatur und der thermodynamischen Eigenschaften des BEC wird Gleichung 2.4 als Integral über die mit der Besetzungswahrscheinlichkeit 2.1 gewichtete Zustandsdichte $g(\epsilon)$ dargestellt

$$\begin{aligned} N_{ges} &= \sum_{i=0}^{\infty} \langle n_i \rangle \\ &= n_0 + \int_0^{\infty} n(\epsilon)g(\epsilon)d\epsilon + n_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Dabei entspricht n_0 der Besetzung des energetisch niedrigsten Zustandes, und ist separat zu berücksichtigen, da die Zustandsdichte für $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet und der Grundzustand somit selbst bei makroskopischer Besetzung nicht berücksichtigt würde [59]. Gleichung 2.6 entspricht der Summe thermischer N_{therm} und kondensierter n_0 Atome

$$N_{ges} = N_{therm} + n_0. \quad (2.6)$$

Die Intergraldarstellung 2.6 ist jedoch nur für thermische Energien zulässig, die sehr viel größer sind als der Abstand der Energieniveaus $k_B T \gg \epsilon(i+1) - \epsilon(i)$.

Während die vorangegangenen Betrachtungen ganz allgemein für das ideale bosonische Gas gelten, beschränkt sich die folgende Behandlung auf dreidimensionale

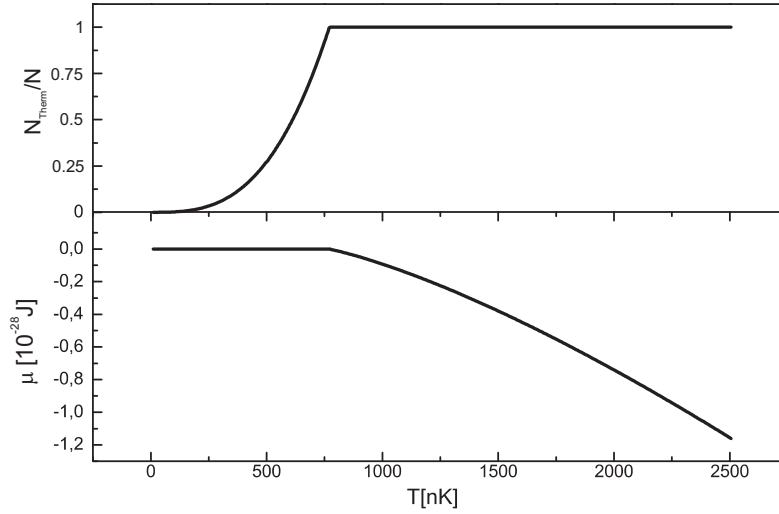


Abbildung 2.4: Das obere Bild zeigt die Abnahme des Anteils der thermischen Atome im Ensemble und das untere den Verlauf des chemischen Potentials jeweils in Abhängigkeit von der Temperatur beim Einsetzen der Bose-Einstein-Kondensation für eine Fallenfrequenz von $\nu = 292\text{Hz}$ und eine Atomzahl von $N=2 \times 10^5$.

harmonische Potentiale der Form

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (2.7)$$

Sämtliche Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wurden in einer radialsymmetrischen Falle durchgeführt. Eine Verallgemeinerung auf zwei- und dreidimensionale Fallen, sowie Kasten Potentiale und ungefangene homogene Ensembles findet sich z.B. in [56, 60, 61]. Die zur Berechnung der Zustandsdichte notwendige Bestimmung der Energieniveaus harmonischer Oszillatoren

$$E = \hbar\omega_x\left(\frac{1}{2} + n_x\right) + \hbar\omega_y\left(\frac{1}{2} + n_y\right) + \hbar\omega_z\left(\frac{1}{2} + n_z\right) \quad (2.8)$$

ist ein Standardproblem der Quantenmechanik und wird ausführlich in verschiedenen Lehrbüchern [62, 63, 59] beschrieben. Zur Berechnung der Zustandsdichte ist zunächst die Gesamtzahl der Zustände $G(\epsilon)$ mit Energien kleiner als ϵ zu ermitteln, indem das Volumen unter der Fläche mit konstanter Energie ϵ bestimmt wird.

$$\begin{aligned} G(\epsilon) &= \frac{1}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^\epsilon d\epsilon_x \int_0^{\epsilon - \epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon - \epsilon_x - \epsilon_y} d\epsilon_z \\ &= \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Der Vorfaktor $1/(\hbar^3 \omega_1 \omega_2 \omega_3)$ entspricht der Anzahl der Zustände pro Energievolumen. Er ergibt sich direkt aus Gleichung 2.8. Die Zustandsdichte entspricht der

Anzahl der Zustände pro Energieintervall und ist somit durch die Änderung von 2.10 unter Variation der Energie ϵ gegeben

$$g(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon}G(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z}. \quad (2.10)$$

Mit 2.6 ergibt sich für die Anzahl der thermischen, nicht kondensierten Atome

$$N_{therm} = \frac{1}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (2.11)$$

Eine Verringerung der Temperatur führt zu einem Ansteigen des (negativen) chemischen Potentials. Da es aber niemals größer werden kann als die Grundzustandsenergie gibt es für $\mu \rightarrow \epsilon_0$ eine kritische Temperatur T_c , bei der N_{therm} der Gesamtteilchenzahl N noch entsprechen kann

$$N_{therm} = N = \frac{1}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T_c} - 1}. \quad (2.12)$$

Eine Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion führt auf

$$N_{therm} = \frac{1}{2\hbar^3\omega_x\omega_y\omega_z} \Gamma(3)\zeta(3)(k_B T_c)^3, \quad (2.13)$$

mit der Riemanschen Zeta Funktion $\zeta(3)$ und der Gamma Funktion $\Gamma(3)$ [64].

Für Temperaturen unter T_c gilt $N_{therm} < N$, da μ nicht weiter ansteigen kann. Die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl (Gleichung 2.6) führt daher zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustandes. Aus Gleichung 2.13 folgt mit $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)$ für die Kondensationstemperatur

$$\begin{aligned} k_b T_c &= \frac{\hbar\bar{\omega} N^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}} \\ &\approx 0.94 \hbar\bar{\omega} N^{1/3}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

und für die Teilchenzahl im Kondensat

$$N_0 = N - N_{therm} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \right]. \quad (2.15)$$

Anhand dieser Gleichungen ist unschwer zu erkennen, dass die mit der Kondensation verknüpfte thermische Energie $k_b T_c$ um ungefähr einen Faktor $N^{1/3}$ größer ist als die Separation der Energieniveaus des harmonischen Oszillators, und dass die Bedingungen für Gleichung 2.6 somit erfüllt sind.

Die Dichteverteilung der thermischen Atome in der Falle lässt sich in einer klassischen Betrachtung mit Hilfe der Verteilungsfunktion f_{klass} bestimmen

$$f_{klass} = \frac{1}{e^{(\epsilon_p(\mathbf{r})-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (2.16)$$

Sie entspricht der Besetzungswahrscheinlichkeit pro Phasenraumvolumen. Die Positionsabhängigkeit der Energie $\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r})$ ist durch die Falle $V(\mathbf{r})$ gegeben. Dies hat zur Folge, dass die Wahrscheinlichkeit Teilchen mit hoher kinetischer Energie bei hohen potentiellen Energien zu finden, gering ist. Die Dichteverteilung ergibt sich aus Gleichung (2.16), indem die Bewegungsfreiheitsgrade durch Integration über die Impulse eliminiert werden. Schließlich ist es für die Dichteverteilung unerheblich, welche Geschwindigkeitsverteilung an den jeweiligen Positionen vorliegt

$$n_{therm} = \int d\mathbf{p} \frac{1}{e^{(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) - \mu)/k_B T} - 1}. \quad (2.17)$$

Analog zu Gleichung 2.13 führt eine Reihenentwicklung der Verteilungsfunktion für die Phasenraumdichte mit

$$z(\mathbf{r}) = e^{(\mu - V(\mathbf{r}))/k_B T} \quad (2.18)$$

zu [61]

$$n_{therm} \lambda_T^3 = g_{3/2}(z(\mathbf{r})). \quad (2.19)$$

Da beim Übergang in die Kondensatphase $z(0)$ gegen 1 strebt ($\mu \rightarrow \epsilon_0$), gilt für die Phasenraumdichte

$$n(0) \lambda^3 = g_{3/2}(1) = 2.612. \quad (2.20)$$

Die Kondensation setzt dementsprechend ein, wenn der mittlere Abstand der Atome der de Broglie Wellenlänge entspricht, und die einzelnen atomaren Wellenpakete anfangen, zu überlappen.

2.1.2 Wechselwirkende Bose-Einstein-Kondensate

Da die Hamiltonfunktion nicht wechselwirkender Gase die Summe von Einteilchen-Hamiltonoperatoren $H = \sum_i^N H_i$ ist, lässt sich die Wellenfunktion eines derartigen Systems als Produkt der Einteilchen-Wellenfunktionen des Grundzustandes schreiben $\Phi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i^N \phi_0(\mathbf{r}_i)$. Das Quadrat der Wellenfunktion $|\Phi_N(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|^2$ entspricht der Wahrscheinlichkeit jeweils gleichzeitig ein Teilchen bei den Koordinaten $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ zu finden.

Im Falle wechselwirkender Vielteilchen-Systeme ist die Beschreibung des Systems ungleich komplizierter, da die Vielteilchen-Wellenfunktion $\Psi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ nicht ohne weiteres faktorisiert ist. Zur vollständigen Lösung des Problems müsste daher das Problem in Abhängigkeit von $3N$ Ortsvariablen gelöst werden. Aufgrund der geringen Dichte des gasförmigen Ensembles ist aber eine signifikante Vereinfachung durch die Beschränkung auf Zwei-Körper-Wechselwirkungen möglich, da die mittlere freie Weglänge $d = 1/n^{1/3}$ deutlich größer ist als die charakteristische Länge der interatomaren Wechselwirkungen r_0 . Stoßprozesse mit mehr als zwei Partnern sind somit extrem unwahrscheinlich und können vernachlässigt werden.

Eine zusätzliche Komplikation ergibt sich aus der Statistik bosonischer Teilchen und der daraus resultierenden Notwendigkeit symmetrischer Vielteilchen-Wellenfunktionen. Daher beschreibt man Vielteilchen-Systeme im allgemeinen im Rahmen der zweiten Quantisierung, in der die Observablen durch die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$ und $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$) dargestellt werden [65]. Sie erzeugen bzw. vernichten jeweils ein Teilchen am Ort \mathbf{r} . Diese Operatoren haben den Vorteil, dass die Wellenfunktionen nicht mehr symmetrisiert werden müssen, da sich die Statistik bosonischer Teilchen in den Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren widerspiegelt [65]

$$\left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \left[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \right] = 0. \quad (2.21)$$

Zur Beschreibung quantenmechanischer Systeme mit statistischer Besetzung der einzelnen Energieniveaus empfiehlt sich die Darstellung der Wellenfunktion durch Dichtematrizen [60, 62]. Die Beschränkung auf Zwei-Körper-Wechselwirkungen bedeutet in diesem Zusammenhang, dass anstelle der N-Teilchen Dichtematrix

$$n^{(N)}(\mathbf{r}'_1, \dots, \mathbf{r}'_N, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_2) \dots \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}'_N) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \hat{\Psi}(\mathbf{r}_2) \dots \hat{\Psi}(\mathbf{r}_N) \rangle \quad (2.22)$$

zur Beschreibung des Systems die reduzierte Dichtematrix

$$n^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \rangle \quad (2.23)$$

verwendet werden kann [60, 66, 67]. Die Eigenwerte n_i der Gleichung

$$\int d\mathbf{r}' n^{(1)}(\mathbf{r}\mathbf{r}') \phi_i(\mathbf{r}') = n_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (2.24)$$

entsprechen der Besetzungszahl der jeweiligen Eigenfunktionen $\phi_i(\mathbf{r})$. Daher manifestiert sich die Bose-Einstein-Kondensation in dieser Darstellung durch einen makroskopischen Wert von n_0 . Die zugehörige Einteilchen-Wellenfunktion $\phi_0(\mathbf{r})$ wird als Kondensat-Wellenfunktion bezeichnet und hat die Dichteverteilung $n_{BEC} = |\phi_0|^2$.

Die Feldoperatoren lassen sich als Linearkombination der Wellenfunktionen $\phi_i(\mathbf{r})$ und der zugehörigen Operatoren a_i darstellen [65]

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) \hat{a}_0 + \sum_{i \neq 0} \phi_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i. \quad (2.25)$$

Dabei spiegelt die gewählte Darstellung die Bedeutung des makroskopisch besetzten Grundzustandes wider. Die Operatoren a_i^\dagger und a_i erzeugen oder vernichten jeweils ein Teilchen im Zustand $\phi_i(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} a_i^\dagger |n_0 n_1, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i + 1} |n_0 n_1, \dots, n_{i+1}, \dots\rangle \\ a_i |n_0 n_1, \dots, n_i, \dots\rangle &= \sqrt{n_i} |n_0 n_1, \dots, n_{i-1}, \dots\rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

und folgen den Standard Kommutator Regeln

$$\left[a_\alpha, a_\beta^\dagger \right] = \delta_{\alpha,\beta} , \quad \left[a_\alpha, a_\beta \right] = 0 , \quad \left[a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger \right] = 0 \quad . \quad (2.27)$$

Diese Grundlagen der Vielteilchen-Theorie finden Verwendung bei der Herleitung der so genannten Gross-Pitaevskii Gleichung [68, 69], die die Grundlage der quantitativen Beschreibung der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen darstellt.

Gross-Pitaevskii Gleichung

Da der Hamiltonoperator des betrachteten Systems aus Einteilchen und Zweiteilchen Operatoren besteht, erhält man in zweiter Quantisierung [60, 65]

$$\hat{H} = \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.28)$$

$$+ \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}' d\mathbf{r}. \quad (2.29)$$

Dabei bezeichnen $V_{ext}(\mathbf{r})$ äußere Potentiale, wie z.B. die Magnetfalle und $V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ das interatomare Wechselwirkungspotential. Mit der Heisenbergschen Darstellung für die Zeitentwicklung von Operatoren

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[\hat{\Psi}, \hat{H} \right], \quad (2.30)$$

ergibt sich folgende Operatorgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{MF}(\mathbf{r}) + \int \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}' \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.31)$$

Der mittlere Abstand zwischen den Atomen ist deutlich größer als die Reichweite des Wechselwirkungspotentials $r_0 \ll d$. Die Betrachtung der Stoßprozesse zwischen zwei Atomen kann daher auf den langreichweitigen Teil der entsprechenden Streuwellenfunktion beschränkt und Korrelationen auf kurzen Längenskalen können vernachlässigt werden.

Da das Wechselwirkungspotential $V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ausschließlich eine Funktion der Relativkoordinaten $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ der beiden Teilchen ist, handelt es sich um ein zentralsymmetrisches Problem. Folglich ist der Drehimpuls \mathbf{L} eine Konstante der Bewegung. Da seine Eigenzustände somit auch Eigenfunktionen des Hamiltonoperators sind, erfolgt die Beschreibung der Streuwellenfunktion sinnvollerweise mittels sphärischer Wellenfunktionen $\Phi_{k,l,m}(\mathbf{r}) = \sqrt{2k^2/\pi} j_l(kr) Y_l^m(\Theta, \varphi)$ [62]. Sie haben die Eigenschaft, dass ihr Betragsquadrat für Abstände von $\rho < \sqrt{l(l+1)}/k$

nahezu null ist. Da Bose-Einstein-Kondensate eine sehr schmale Impulsbreite aufweisen

$$\frac{pr_0}{\hbar} \ll 1, \quad (2.32)$$

tragen lediglich s-Wellen zur Streuwellenfunktion bei, da Partialwellen mit höherem Drehimpuls nicht in den Bereich der Wechselwirkung eindringen. Die Streuung ultrakalter Teilchen ist somit räumlich isotrop und wird durch den s-Wellen Streuquerschnitt a_s bestimmt. Negative Werte für a_s bedeuten attraktive und positive repulsive Wechselwirkungen.

Daher kann zur Berechnung der Kondensat-Wellenfunktion das komplizierte Wechselwirkungspotential $V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ durch ein effektives Potential ersetzt werden, das die gleiche asymptotische Streuwellenfunktion hat [56]

$$V_{eff}(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Die Kopplungskonstante

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \quad (2.34)$$

stellt sicher, dass sie die Streulänge a_s des Original-Wechselwirkungspotentials hat.

In der so genannten Bogoliubov Näherung [70] werden die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des Grundzustandes durch die Besetzungszahl des Kondensats ersetzt

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) &= \sqrt{N_0}\varphi_0(\mathbf{r}) + \sum_{i \neq 0} \phi_i(\mathbf{r})\hat{a}_i \\ &= \Psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

da bei makroskopischer Besetzung des Zustandes $N_0 \gg 1$ die Kommutatoreigenschaften von \hat{a}_0^\dagger und \hat{a}_0 2.27 unerheblich werden. Für den Fall eines reinen Kondensats ohne Anregungen folgt so aus der Operatorgleichung die Gross-Pitaevskii Gleichung (GPE) [68, 69]

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.36)$$

die die Grundlage vielfältiger Untersuchungen zur Physik der Bose-Einstein-Kondensate darstellt [60].

Im Folgenden werden einige allgemeine Folgerungen aus der Gross-Pitaevskii Gleichung vorgestellt.

Multiplikation von Gleichung 2.35 mit Ψ^*_0 und anschließender Subtraktion der entsprechenden komplex konjugierten Gleichung führt zur so genannten Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.37)$$

Die Stromdichte

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi] \quad (2.38)$$

kann mittels des Ansatzes für die Wellenfunktion

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)| e^{iS(\mathbf{r}, t)} \quad (2.39)$$

als Gradient der Phase $S(\mathbf{r}, t)$ des Kondensats dargestellt werden

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t). \quad (2.40)$$

Für das Geschwindigkeitsfeld des Kondensats

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \nabla S(\mathbf{r}, t) \quad (2.41)$$

folgt mit $\nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = 0$ das die Strömung rotationsfrei ist, und somit die Charakteristika einer Superflüssigkeit aufweist.

Grundzustand wechselwirkender Bose-Einstein-Kondensate

Mit dem Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t}. \quad (2.42)$$

für die Zeitabhängigkeit der Kondensat-Wellenfunktion ergibt sich aus Gleichung 2.36 die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = \mu \Psi(\mathbf{r}). \quad (2.43)$$

Der Ansatz 2.42 folgt in der Bogoliubov Näherung 2.35 aus der Darstellung der Kondensat-Wellenfunktion als Erwartungswert des Feldoperators $\Psi_0 = \langle \hat{\psi} \rangle$ [60, 67, 71]. Dies setzt voraus, dass aufgrund der makroskopischen Besetzung die Grundzustände Ψ_0^N und Ψ_0^{N+1} mit Teilchenzahlen N und $N+1$ identisch sind und der Erwartungswert des Feldoperators zwischen diesen beiden Zuständen gebildet werden kann. Aufgrund des allgemeinen Zusammenhangs für die Zeitentwicklung stationärer Zustände $\Psi_0^N(t) = \Psi_0^N(0) e^{-iE_N t/\hbar}$ folgt für die Zeitabhängigkeit des Feldoperators $\Psi_0(t) \propto e^{-i(E_N - E_{N-1})t/\hbar}$. Mit dem im weiteren Verlauf des Abschnitts näher begründeten Zusammenhang $\mu = \frac{\delta E}{\delta N}$ ergibt sich Gleichung 2.42.

Alternativ kann die Gross-Pitaevskii Gleichung auch durch einen Variationsansatz bestimmt werden. Da dabei insbesondere die Funktion des chemischen Potentials verdeutlicht wird, folgt eine kurze Beschreibung dieser Methode.

Ausgangspunkt der Variationsrechnung ist das Energiefunktional [60]

$$\delta E = \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) |\Psi|^2 + \frac{1}{2} g |\Psi|^4 \right). \quad (2.44)$$

Zur Bestimmung des Grundzustands ist diejenige Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r})$ zu finden, die dieses Funktional minimiert [72]. Dazu wird die Variation $\Psi^*(\mathbf{r}) \rightarrow \Psi^*(\mathbf{r}) + \epsilon \delta\Psi^*(\mathbf{r})$ mit willkürlichen Abweichungsfunktionen $\delta\Psi^*(\mathbf{r})$ gebildet. Für die gesuchte Wellenfunktion führt diese Transformation in linearer Ordnung von $\delta\Psi^*(\mathbf{r})$ zu einem Verschwinden des Energiefunktionals, da dessen Wert quadratisch mit $\delta\Psi^*(\mathbf{r})$ ansteigen muss, damit $\Psi(\mathbf{r})$ Gleichung 2.44 minimiert.

Die Teilchenzahlerhaltung

$$N = \int |\Psi(\mathbf{r})|^2 \quad (2.45)$$

kann im Rahmen der Variationsrechnung elegant durch die Einführung des chemischen Potentials als Lagrange Multiplikator berücksichtigt werden [72]. Dies führt auf das zu minimierende Funktional

$$\delta E - \mu \delta N = 0. \quad (2.46)$$

Da Lagrange Multiplikatoren ein Maß für die Änderung des Funktionals unter Variation der Randbedingung sind, entspricht das chemische Potential der Zunahme der Gesamtenergie des Kondensats, wenn ein Teilchen hinzugefügt wird

$$\mu = \frac{\partial E}{\partial N}. \quad (2.47)$$

Insbesondere übernimmt das chemische Potential die Rolle des Energieeigenwertes in der Gross-Pitaevskii Gleichung und ersetzt die Energie pro Teilchen, die den Eigenwert der entsprechenden Schrödingergleichung ohne interatomare Wechselwirkung darstellt. Ohne Wechselwirkung sind chemisches Potential und Energie pro Teilchen identisch, da die Zunahme der Energie in diesem Fall linear in der Teilchenzahl ist. Die einzelnen Terme des Variationsintegrals 2.46 berechnen sich in linearer Ordnung wie folgt:

- **Kinetische Energie**

$$\delta \left[\int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 \right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla[\Psi^* + \epsilon\delta\Psi^*]) (\nabla\Psi) \quad (2.48)$$

$$= \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla\delta\Psi^*) (\nabla\Psi) \quad (2.49)$$

$$= \int d^3r \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla(\delta\Psi^* \nabla\Psi) - \delta\Psi^* \nabla^2\Psi \right) \quad (2.50)$$

$$= - \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} \delta\Psi^* \nabla^2\Psi \quad (2.51)$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass das Integral über den ersten Term nach dem Gaußschen Integralsatz in ein Oberflächenintegral über $\delta\Psi \nabla\Psi$ transformiert

werden kann. Des Weiteren unterliegen die Abweichungsfunktionen auf den Grenzflächen der Randbedingung $\delta\Psi^* = 0$.

- **Potentielle Energie**

$$\begin{aligned}\delta \left[\int d^3r V_{ext}(\mathbf{r}) |\Psi|^2 \right] &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int d^3r V_{ext}(\mathbf{r}) (\Psi^* + \epsilon \delta\Psi^*) \Psi \\ &= \int d^3r V_{ext}(\mathbf{r}) \delta\Psi^* \Psi\end{aligned}\quad (2.52)$$

- **Wechselwirkungsenergie**

$$\begin{aligned}\delta \left[\int d^3r \frac{1}{2} g |\Psi|^4 \right] &= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int d^3r \frac{1}{2} g [(\Psi^* + \epsilon \delta\Psi^*) \Psi][(\Psi^* + \epsilon \delta\Psi^*) \Psi] \\ &= \int d^3r g |\Psi|^2 \Psi \delta\Psi^*\end{aligned}\quad (2.53)$$

- **Teilchenzahlerhaltung**

$$\begin{aligned}\mu \delta \left[\int d^3r |\Psi|^2 \right] &= \mu \frac{\partial}{\partial \epsilon} \int d^3r (\Psi^* + \epsilon \delta\Psi^*) \Psi \\ &= \mu \int d^3r \delta\Psi^* \Psi\end{aligned}\quad (2.54)$$

Insgesamt führt dies auf die Gleichung

$$\int d^3r \left[-\mu \delta\Psi^* \Psi - \frac{\hbar^2}{2m} \delta\Psi^* \nabla^2 \Psi + V_{ext}(\mathbf{r}) \delta\Psi^* \Psi + g |\Psi|^2 \Psi \delta\Psi^* \right] = 0. \quad (2.55)$$

Da die Abweichungsfunktionen $\delta\Psi^*$ unter Berücksichtigung der Randbedingungen willkürlich gewählt werden können, muss der Integrand unabhängig von ihnen identisch null sein und es folgt die Gross-Pitaevskii Gleichung.

Sie stellt die Grundlage für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen dar. Während häufig numerische Verfahren zur Lösung der GPE herangezogen werden müssen, gibt es insbesondere für den Fall starker repulsiver Wechselwirkung eine einfache analytische Lösung. Da die kinetische Energie vom Gradienten der Wellenfunktion abhängt

$$E_{kin} = \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.56)$$

ist ihr Beitrag zur Gesamtenergie um so geringer, je größer die Ausdehnung des Kondensats ist. Eine repulsive Wechselwirkung zwischen den Atomen hat eine Verbreiterung der Kondensat-Wellenfunktion zur Folge, daher kann der Beitrag der kinetischen Energie zur Gross-Pitaevskii Gleichung für $Na/a_{osc} \gg 1$ vernachlässigt

werden [73, 74, 60]. Dies führt auf die so genannte Thomas-Fermi Näherung für den Grundzustand

$$n(\mathbf{r}) = |\Psi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} \frac{1}{g} (\mu - V_{MF}(\mathbf{r})) & \text{für } \mu \geq V_{MF}(\mathbf{r}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.57)$$

Mit Gleichung 2.7 und $\omega_x = \omega_y = \omega_\rho$) ergibt sich für die Ausdehnung der Kondensat-Wellenfunktion die so genannten Thomas-Fermi Radien

$$R_i = \frac{2\mu}{m\omega_i}, \quad i = \rho, z. \quad (2.58)$$

Mit der Gleichung für die Teilchenzahlerhaltung 2.45 folgt für das chemische Potential in Abhängigkeit von der Teilchenzahl, der Fallengeometrie und der Streulänge

$$\mu = \frac{\hbar^2}{2m} (15Na_s l_\rho^{-4} l_z^{-2})^{2/5}. \quad (2.59)$$

Somit kann bei bekannter Teilchenzahl und Fallengeometrie das chemische Potential bestimmt werden.

2.2 Experimentelle Erzeugung

Dieser Abschnitt stellt die experimentelle Realisierung der Bose-Einstein-Kondensate vor. Die verwendete Apparatur wurde bereits ausführlich in den Doktorarbeiten von K. Bongs [76] und D. Hellweg [75], sowie in den Diplomarbeiten von T. Südmeyer und M. Römer [77, 78] erläutert. Einen umfassenden Überblick über verschiedenste Kühlverfahren und die zugrunde liegenden physikalischen Prinzipien finden sich in [58, 79].

Die zum Erreichen der Kondensatphase nötige Phasenraumdichte von $n\lambda^3 \approx 1$ (Gleichung ist um ca. 15 Größenordnungen größer als die Phasenraumdichte des gasförmigen Rubidium-Reservoirs. Die notwendige Erhöhung wird mittels einer mehrstufigen Kühlprozedur erzielt, die sowohl die Temperatur um viele Größenordnungen senkt, als auch die Dichte des Ensembles vergrößert.

Abbildung 2.5 zeigt die verschiedenen Kühlstufen in einer schematischen Darstellung der Apparatur. Sie besteht aus zwei mit einer differentiellen Pumpstufe voneinander getrennten Vakuumkammern. Die obere Kammer enthält das Rubidium Reservoir (Atomofen). Da Rubidium bei Raumtemperatur fest ist, wird der Ofen zur Erzeugung einer gasförmigen Quelle bei einer Temperatur von ca. 420K betrieben. Mittels einer kleinen Öffnung im Ofen wird ein gerichteter Atomstrahl erzeugt, der durch die differentielle Pumpstufe in die Hauptkammer gelangt. Das Zwei-Kammer-Design ist notwendig, da zur Erzeugung eines Bose-Einstein-Kondensats ein extrem niedriger Druck in der Größenordnung von wenigen 10^{-11} mBar notwendig ist, um die Verluste durch Stöße mit dem Hintergrundgas

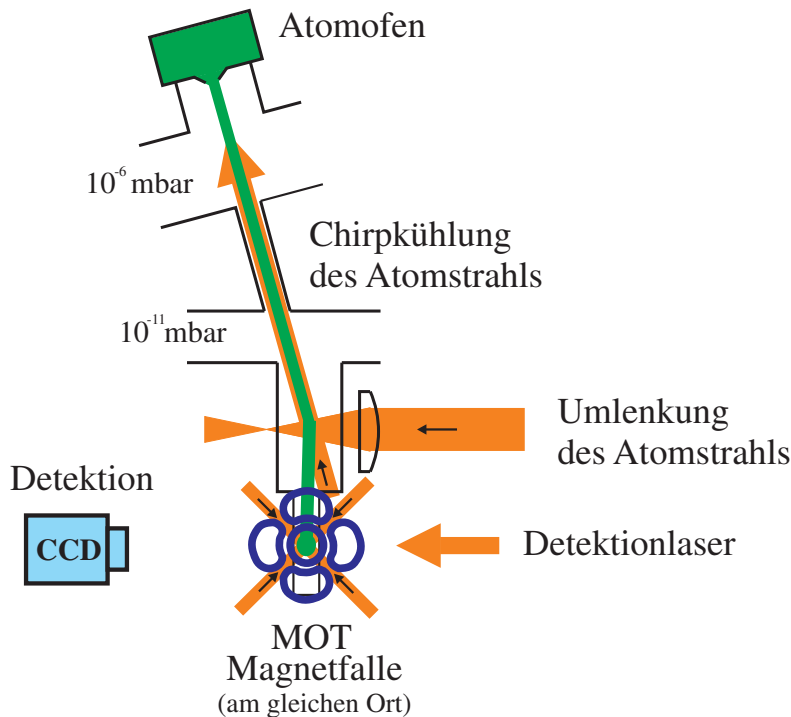


Abbildung 2.5: Schematische Zeichnung des Aufbaus der Apparatur [75].

zu minimieren. Eine ausführliche Behandlung der verschiedenen Verlustprozesse findet sich in [57]).

In den folgenden Abschnitten werden die verschiedenen Kühlstufen erläutert. Sie ermöglichen es innerhalb von ca. 45 Sekunden Bose-Einstein-Kondensate mit bis zu 4×10^5 Atomen zu realisieren. Dazu wird der Atomstrahl zunächst durch den so genannten Chirplaser abgebremst, und anschließend mit einem weiteren Laserstrahl (Umlenker) in die magneto-optische Falle (MOT) umgelenkt. Nach dem Beladen der MOT innerhalb von 25 Sekunden wird nach einer kurzen Melassenphase das atomare Ensemble in die Magnetfalle umgeladen und mittels evaporativer Kühlung innerhalb von 20 s kondensiert.

2.2.1 Laserkühlung

Das Prinzip der Laserkühlung beruht auf der gerichteten Absorption und isotropen Emission einzelner Photonen. Durch die Wahl geeigneter Strahlgeometrien und Laserfrequenzen führt dies zu einer dissipativen Kraft, die die einzelnen Atome abbremst. Da die Temperatur eines gasförmigen Ensembles von der Breite seiner Geschwindigkeitsverteilung abhängt, führt deren Reduktion zu einer entsprechenden Temperaturverringerng. Eine ausführliche Diskussion der konzeptionellen Schwierigkeiten dieser Definition, die streng genommen nur für Systeme im

thermodynamischen Gleichgewicht gilt, findet sich in [79].

Grundlagen

Die Absorption einzelner Photonen führt zu einem Übertrag des Photonenimpulses $\hbar k$ auf die Atome. Die resultierende Kraft F_{Sp} entspricht der Änderung des atomaren Impulses pro Zeiteinheit

$$F_{Sp} = \hbar k \gamma. \quad (2.60)$$

Mit der Linienbreite des atomaren Übergangs Γ , der Lichtgeschwindigkeit c , der Wellenlänge des Laserfeldes λ und der Sättigungsintensität

$$I_{sat} = \frac{\pi \hbar c \Gamma}{3 \lambda^3} \quad (2.61)$$

folgt für die Streurrate

$$\gamma = \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{sat}}{1 + I/I_{sat} + 4(\Delta)^2/\Gamma^2}. \quad (2.62)$$

Sie kann mittels der optischen Bloch-Gleichungen sowie der Kopplung der atomaren Niveaus durch das Laserfeld berechnet werden (siehe Kapitel 3.1.1) und gibt die Anzahl absorbierter Photonen pro Zeiteinheit an [79, 80]. Die Verstimmung zwischen der Frequenz des Laserstrahls ω_L und dem atomaren Übergang ω_{eg} wird durch $\Delta = \omega_L - \omega_{eg} - \mathbf{v}\mathbf{k} - \delta\omega_{Zeeman}$ charakterisiert. Dabei berücksichtigt $\delta\omega_{Zeeman}$ die Verschiebung der atomaren Niveaus durch den Zeeman Effekt (Gleichung 2.65) und $\mathbf{v}\mathbf{k}$ die Dopplerverschiebung des Laserfeldes für Atome mit einer Geschwindigkeit \mathbf{v} . Für sehr große Laserintensitäten $I \gg I_{sat}$ strebt die Streurrate gegen $\gamma/2$, da die Besetzungswahrscheinlichkeit des angeregten Niveaus der des Grundzustandes entspricht und somit stimulierte Emissions- und Absorptionsraten identisch sind.

Da die Emission räumlich isotrop ist, verschwindet der so auf das Atom übertragene Gesamtimpuls im Mittel. Die Absorption einer großer Zahl an Photonen aus dem Laserstrahl und die anschließende isotrope Emission hat daher eine Kraft in Richtung des Laserstrahls und ein Heizen senkrecht zur Strahlrichtung zur Folge.

Kühlung des Atomstrahls

Aufgrund ihrer Temperatur von 420K haben die Atome nach Austritt aus der Düse im Mittel eine Geschwindigkeit von $380m/s$ und eine Phasenraumdicke von 1×10^{15} . Um die Atome einzufangen, wird der Atomstrahl mittels eines ihm entgegen gerichteten Laserstrahls (Chirpaser) abgebremst [81], dessen Intensität deutlich größer ist als I_{sat} . Gemäß der Gleichungen 2.60 und 2.62 ist zur Maximierung der Spontankraft eine Kompensation des Dopplereffekts notwendig. Daher wird

die Frequenz des Chirplasers zunächst um ca 500 MHz rot verstimmt. Die Spontankraft

$$\vec{F} = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \quad (2.63)$$

wird so maximiert. Die aus der Bremsbeschleunigung von ca. 10^5 m/s^2 resultierende Geschwindigkeitsverringerng reduziert jedoch die Dopplerverschiebung. Um die Atome weiterhin abbremsen zu können, muss die Laserfrequenz der sich verändernden Dopplerverschiebung angepasst werden, indem die Verstimmung kontinuierlich innerhalb von 4 ms auf ca 50MHz verringert wird. Die hohe Repetitionsrate von 270Hz führt zu einem gepulsten Atomfluss von ca. 10^8 Teilchen pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von ungefähr 40 m/s .

Um zu vermeiden, dass die Experimentierzone permanent von dem Atomstrahl getroffen wird, wird dieser unter einem Winkel zur Falle eingestrahlt. Mittels eines Umlenkerstrahls, dessen Propagationsrichtung senkrecht zum Atomstrahl verläuft, wird er um ca 14° ins Fallenzentrum abgelenkt. Der Umlenkstrahl dient zudem der Geschwindigkeitssektion, da nur die gekühlten Teile des Atomstrahls ausreichend stark abgelenkt werden, um die MOT zu treffen.

Magneto-optische Falle und Melassenkühlen

Die magneto-optische Falle beruht auf der Kombination sechs gegenläufiger Laserstrahlen mit einem magnetischen Quadrupolfeld. Sie ermöglicht im Gegensatz zu konservativen Fallen, wie z.B. Magnetfallen oder Dipolfallen, nicht nur einen räumlichen Einschluss, sondern gleichzeitig auch die Kühlung des atomaren Ensembles. Es handelt sich somit um eine dissipative Falle die aufgrund der Geschwindigkeitsselektivität nach dem Satz von Liouville eine Erhöhung der Phasenraumdicke des Ensembles ermöglicht, während geschwindigkeitsunabhängige Kräfte (z.B. Rückstellkräfte) lediglich zu einem Fluss der Phasenraumdicke innerhalb des Phasenraums führen, jedoch keine Kompression ermöglichen [82].

Die Geschwindigkeitsselektivität der Kraft und dementsprechend die Kühlung der Atome wird durch rotverstimmte gegenläufige Laserstrahlen realisiert. Zur Vereinfachung beschränkt sich die folgende Diskussion auf eine 1D-Konfiguration mit nur einem Strahlenpaar. Auf ein Atom in Ruhe wird in einem solchen Laserfeld im Mittel allerdings keine Kraft ausgeübt, da es mit gleicher Wahrscheinlichkeit Photonen aus beiden (gegenläufigen) Laserstrahlen absorbiert. Bewegt sich das Atom gegen die Propagationsrichtung eines der beiden Laserstrahlen, so erscheint dieser Laserstrahl aufgrund des Dopplereffekts weniger rot verschoben. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon aus diesem Strahl zu absorbieren steigt also, während gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit sinkt, ein Photon aus dem Strahl in Propagationsrichtung zu absorbieren, da dieser stärker rot verschoben erscheint. Dies resultiert in einer der Bewegung des Atoms entgegengerichteten Kraft, die mit steigender Geschwindigkeit des Atoms zunächst zunimmt, da der gegenläufige Laserstrahl immer weniger rot verschoben erscheint. Quantitativ ergibt sich die resultierende Kraft,

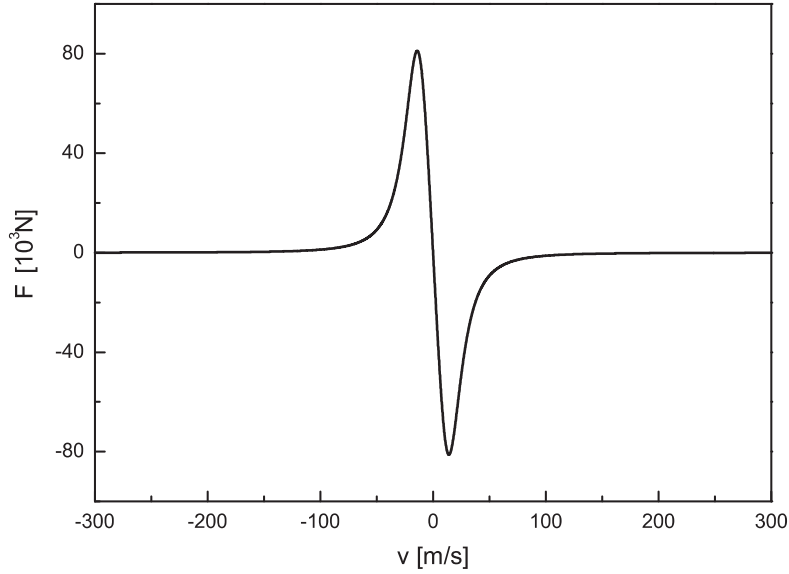


Abbildung 2.6: Geschwindigkeitsabhängigkeit der Spontankraft für typische experimentelle Parameter.

indem die jeweiligen Spontankräfte 2.60 der beiden Laserstrahlen F_{hin} und F_{rueck} addiert werden

$$F_{ges} = F_{hin} + F_{rueck} = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{sat}}{1 + I/I_{sat} + 4\Delta^2/\Gamma^2}. \quad (2.64)$$

Abbildung 2.6 zeigt die resultierende geschwindigkeitsabhängige Kraft für die experimentell verwendeten Parameter. Durch die Nutzung dreier zueinander senkrechter gegenläufiger Strahlpaare erfolgt eine räumlich isotrope Abbremsung der atomaren Bewegung. Diese Konfiguration wird optische Melasse genannt und wurde 1985 erstmals experimentell realisiert [83].

Der fehlende räumliche Einschluss durch die Ortsunabhängigkeit der Kraft kann mittels zusätzlicher ortsabhängiger Magnetfelder realisiert werden, da die Verstimmung gemäß Gleichung 2.62 von der Zeeman-Verschiebung der atomaren Niveaus abhängt [84]

$$\hbar \delta \omega_{Zeeman} = g_F m_F \mu_{Bohr} |\mathbf{B}| / \hbar. \quad (2.65)$$

Abbildung 2.7 zeigt das Prinzip dieser Konfiguration, die magneto-optische Falle (MOT) genannt wird. Auf der linken Seite ist die Strahlgeometrie der drei Strahlpaare sowie die Anordnung der Magnetspulen in Anti-Helmholtz Konfiguration gezeigt. Die resultierende lineare Variation des Magnetfeldes im Fallenzentrum führt zu einer entsprechenden Verschiebung der atomaren Energieniveaus. Die Energie der rotverstimmten Laserstrahlen entspricht der unteren gestrichelten Linie. Da die Verschiebung der Energieniveaus gemäß Gleichung 2.65 von dem jeweiligen $m_{F'}$ Zustand abhängt, verschiebt das lineare Magnetfeld den $m_{F'} = +1$ Zustand

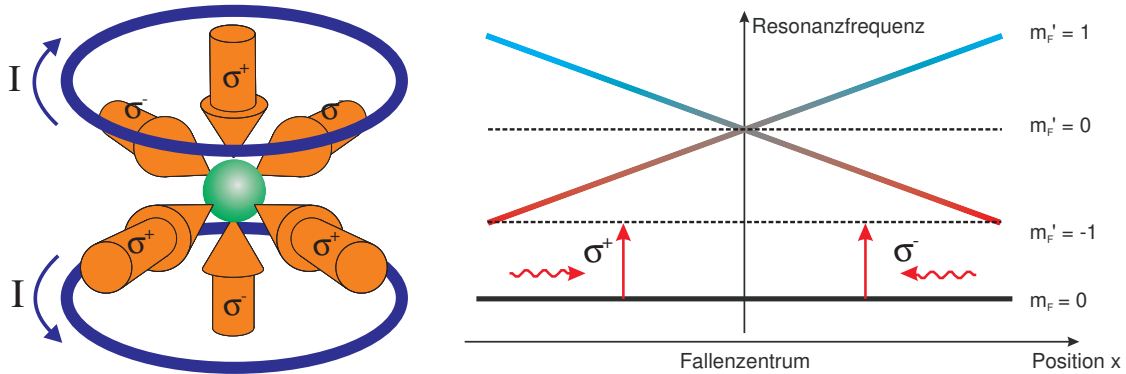


Abbildung 2.7: Schematische Darstellung des Prinzips der magneto-optischen Falle (rechtes Bild [76]) sowie der Magnetspulenkonfiguration und der räumlichen Anordnung der Laserstrahlen (linkes Bild).

für einen positiven Versatz des Teilchens verglichen mit dem Fallenzentrum zu höheren Energien und den $m_{F'} = -1$ Zustand zu niedrigeren Energien. Die gezeigte Wahl der Polarisierungen der Kühllaser führt zu einer Ortsabhängigkeit der Spontankraft, die jeweils zum Fallenzentrum gerichtet ist, und somit als Rückstellkraft fungiert. Sie resultiert aus der Rotverschiebung der Laserstrahlen und der Absenkung des $m_{F'} = -1$ Niveaus für positive Auslenkungen, da die Wahrscheinlichkeit ein in Richtung des Fallenzentrums gerichtetes σ^+ Photon zu absorbieren aufgrund der geringeren Verstimmung sehr viel höher ist, als die entsprechende Wahrscheinlichkeit für ein σ^- Photon. Für negative Auslenkungen vertauschen die Rollen der jeweiligen Energieniveaus und Polarisierungen und die resultierende Kraft zeigt wiederum zum Fallenzentrum. Zusätzlich bleibt die im Rahmen der optischen Melasse (Gleichung 2.64) erläuterten Kühlung erhalten. Bei der MOT handelt es sich somit um eine dissipative Falle, die erstmalig 1987 realisiert wurde [85, 86].

In realen Systemen sind jedoch im Allgemeinen zusätzlich so genannte Rückpump-Laser erforderlich, um ungewollte Verlustkanäle zu kompensieren. Bei ^{87}Rb erfolgt der Kühlübergang zwischen den in Abbildung A.1 gezeigten Niveaus $F = 2 \rightarrow F' = 3$. Dieser Übergang hat einen geschlossenen Kühlkreislauf zur Folge, da aufgrund der Dipolwahlregeln nur der Zerfall in das $F = 2$ Niveau erlaubt ist. Aufgrund der geringen energetischen Separation der angeregten Niveaus gibt es aber eine endliche Anregungswahrscheinlichkeit für den Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 2$. Dieser Zustand kann in den $F = 1$ Zustand zerfallen. Daher muss ein zusätzlicher Laserstrahl den Übergang $F = 1 \rightarrow F' = 2$ treiben, um den Kühlkreislauf zu schließen.

Eine untere Grenze für die erreichbare Temperatur in einer MOT ist die so genannte Doppler-Temperatur. Sie resultiert aus der isotropen spontanen Emission und dem entstehenden "random walk", und liegt für ^{87}Rb bei ca $100\mu\text{K}$ [79, 87]. Die experimentell verwirklichte Temperatur der MOT liegt bei ca $120\mu\text{K}$ und die

erreichte Atomzahl bei 1×10^9 . Die Phasenraumdichte beträgt somit ca 10^{-8} .

Die anschließende Kompression der Wolke durch die Erhöhung der Magnetfeldgradienten sowie die nach dem Abschalten der Magnetfelder erfolgende Melassenphase erzielt eine Temperaturverringerung auf ca $20\mu K$ bei gleichzeitiger Dichteerhöhung und führt zu einer Phasenraumdichte von ca. 10^{-6} . Die durch die Melassenphase erreichte Temperatur liegt somit deutlich unter der Dopplertemperatur [87]. Die Ursache liegt in der Berücksichtigung der Aufspaltung der magnetischen Sub-Zustände in der Beschreibung der Absorptions- und Emissionsprozesse und wird in [88] detailliert beschrieben.

2.2.2 Magnetfalle und evaporatives Kühlen

Die mittels optischer Kühlmethoden erreichte Phasenraumdichte ist trotz der beeindruckenden Vergrößerung um ca. neun Größenordnungen bei weitem nicht ausreichend um den Übergang in die Kondensatphase zu erreichen. Zu diesem Zweck werden die Atome im Anschluss an die Melassenphase in eine pure Magnetfalle umgeladen. Die zur Erhöhung der Phasenraumdichte notwendige Temperaturreduktion erfolgt in dieser konservativen Falle mittels so genannten evaporativen Kühlung.

Grundlagen

Die Speicherung der Atome in einer Magnetfalle beruht auf dem so genannten Zeeman-Effekt, der die Magnetfeldabhängigkeit der atomaren Niveaus beschreibt. Diese werden aufgrund der Kopplung des atomaren Spins an das äußere Magnetfeld verschoben [84]. Für räumlich variierende Felder hat das ein ebenfalls ortsabhängiges Potential zur Folge

$$V_{MF} = \mu B. \quad (2.66)$$

Unter der Voraussetzung kleiner Magnetfelder ergibt die Projektion des atomaren Spins auf die Magnetfeldrichtung das Potential für ein Atom im magnetischen Quantenzustand m_F

$$V_{MF}(\mathbf{r}) = \frac{g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})|}{\hbar}. \quad (2.67)$$

Die Quantisierungsachse entspricht dabei der ortsabhängigen Magnetfeldrichtung. Aufgrund der Bewegung der Atome ist eine Erhaltung der magnetischen Quantenzahl nur gegeben, wenn ihr Spin der sich ändernden Magnetfeldrichtung adiabatisch folgen kann. Daher muss die relative Änderung des Magnetfeldes

$$\omega_L \gg \frac{\dot{B}}{B} \quad (2.68)$$

deutlich geringer sein als die so genannte Lamorfrequenz $\omega_L = g_F \mu_B |B|/\hbar$. Sie entspricht der Frequenz, mit der der atomare Spin um die lokale Magnetfeldrichtung

präzediert. Ist Bedingung 2.68 erfüllt, kann der Spin dem sich verändernden Magnetfeld folgen, und die magnetische Quantenzahl m_F ist erhalten. Anderenfalls führt die Magnetfeldänderung dazu, dass es zu Übergängen in andere, möglicherweise nicht gefangene, magnetische Quantenzustände kommt. Diesen Effekt nennt man Majorana-Flip [58]. Eine detaillierte Erläuterung adiabatischer Transformationen von Fallenpotentialen erfolgt im Rahmen von Kapitel 3.3.4.

In Abhängigkeit vom Vorzeichen des Landrésche Faktors ($g_{F=1} = -g_{F=2} = -0.5$) und des gewählten magnetischen m_F Zustandes führt ein Magnetfeld-Minimum¹ gemäß Gleichung 2.67 zu einem Potential Minimum bzw. Maximum (Abbildung A.1 zeigt die Magnetfeldabhängigkeit der jeweiligen Zustände). Zur Speicherung der Atome eignen sich daher für $F = 2$ nur die positiven m_F und für $F = 1$ nur die negativen m_F Zustände. Alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurden mit ^{87}Rb Atomen im Zustand $F = 2, m_F = 2$ durchgeführt.

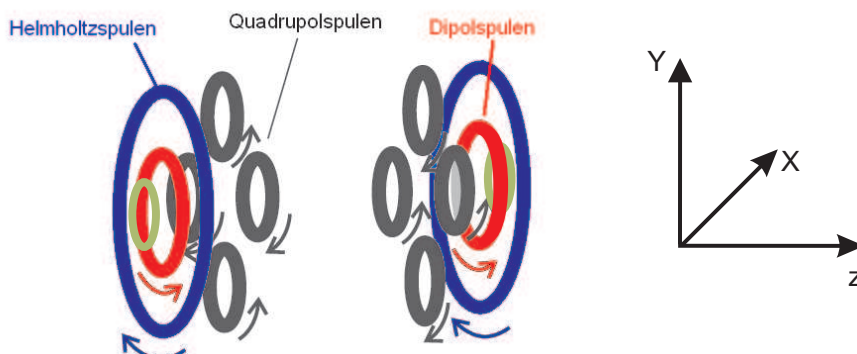
Magnetfalle

Die verwendete Magnetfalle sowie die Feldverläufe der einzelnen Spulen sind in Abbildung 2.8 gezeigt. Es handelt sich um eine so genannte Ioffe-Pritchard Falle [89] im Kleeblatt-Design [90]. Der radiale Einschluss wird durch ein Quadrupolfeld mit linearem Feldverlauf realisiert. Der axiale harmonische Einschluss erfolgt durch die so genannten Dipolspulen. Die Helmholtzspulen kompensieren das hohe Offsetfeld der Dipolspulen, indem sie ein entgegen gerichtetes homogenes Magnetfeld erzeugen. Zur Vermeidung von Majorana Flips muss jedoch gemäß Gleichung 2.68 ein Nulldurchgang der Feldstärke vermieden werden. Daher ist ein Offsetfeld von mindestens 0.5 Gauß nötig, das durch eine nicht vollständige Kompensation des Dipolfeldes erzeugt wird. Dieses Feld transformiert zudem den für $B_0 = 0$ in Abbildung 2.8 gezeigten linearen Feldverlauf des radialen Einschlusses in eine mit stärker werdendem Offsetmagnetfeld immer schwächer werdendes harmonisches Fallenpotential. Der Betrag des Feldes im Ursprung der Falle, in dem die Beiträge der radialen Feldkomponenten verschwinden, entspricht dem des Offsetfeldes. Von diesem Wert des Feldes ausgehend, geht der radiale Feldverlauf asymptotisch in den linearen Feldverlauf der Quadrupolspulen über. Daraus folgt das in der Abbildung gestrichelt gezeichnete harmonische Fallenpotential in radialer Richtung, dessen Frequenz mit steigendem Offsetfeld sinkt. Das Magnetfeld im Zentralbereich dieser Spulenkonfiguration

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{B''}{2} \begin{pmatrix} -xy \\ -yz \\ z^2 - 0.5(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

¹Aufgrund der Maxwell Gleichungen sind keine statischen Magnetfeld-Maxima möglich.

Spulengeometrie



Feldverläufe der einzelnen Spulen

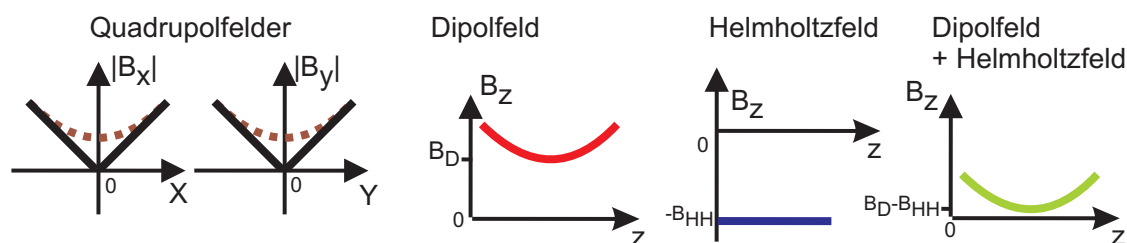


Abbildung 2.8: Spulengeometrie und Feldverläufe der magnetischen Falle [76]. Die grün eingezeichneten Spulen stellen die zusätzlich implementierten so genannten Bloch-Spulen dar (Kapitel 4.2.2).

führt für kleine Ausdehnungen des atomaren Ensembles zu einem anisotropen harmonischen Fallenpotential

$$V_{MF} = \frac{\mu_b}{2} (B''_{\rho} \rho^2 + B''_{ax} z^2). \quad (2.70)$$

Die Krümmung in radialer Richtung ist durch

$$B''_{\rho} = \frac{B_{\rho}^{\prime 2}}{B_0} - \frac{B''_{ax}}{2} \quad (2.71)$$

gegeben. Die Krümmung von $B'' = 1200000 \text{G}/\text{m}^2$ hat gemäß

$$f_{ax} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_B B''_{ax}}{m}} \quad (2.72)$$

eine axiale Fallenfrequenz von 14Hz zur Folge. Die radiale Fallenfrequenz

$$f_{rad} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_B B''_{\rho}}{m}} \quad (2.73)$$

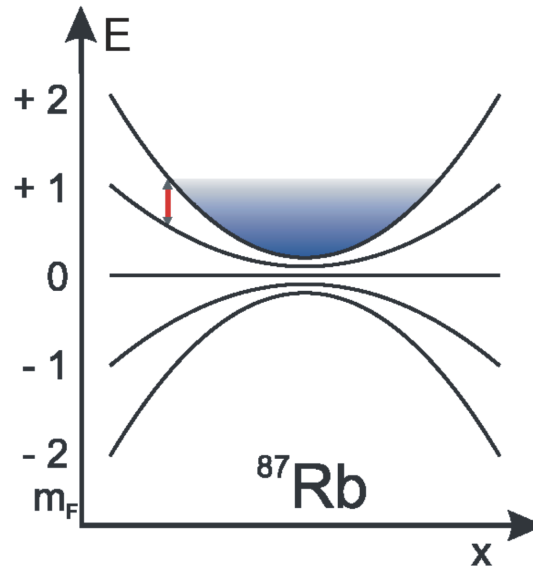


Abbildung 2.9: Schemazeichnung der Magnetfeldabhängigkeit der atomaren Energieniveaus [76]. Der rote Pfeil entspricht der Radiofrequenz und der blau schattierte Bereich dem resultierenden Fallenvolumen.

hängt nach Gleichung 2.71 vom Gradienten $B' = 22500G/m$ und vom Offsetmagnetfeld B_0 ab. Sie kann dementsprechend durch Variation von B_0 ohne Beeinflussung der axialen Fallenfrequenz eingestellt werden. Dies geschieht mittels der Variation des Helmholtz-Feldes, da B_0 aus der Kombination des Dipol- und des entgegen gerichtetem Helmholtz-Feld resultiert. Für die Evaporation wird sie durch ein Feld von $B_0 = 1G$ auf eine Frequenz von 290Hz eingestellt, da für die im folgenden Abschnitt beschriebene evaporative Kühlung eine hohe elastische Stoßrate essentiell ist.

Evaporative Kühlung

Der finale Kühlschritt zur Erhöhung der Phasenraumdicke ist die so genannte evaporative Kühlung [57]. Abbildung 2.9 zeigt den Verlauf der atomaren Energieniveaus für einen harmonischen Potentialverlauf. Durch das Einstrahlen einer Radiofrequenz (rote Pfeile in der Abbildung) mit

$$\omega_{RF} = \frac{|g_F \mu_B B(\mathbf{r})|}{\hbar} \quad (2.74)$$

werden nur an Positionen mit dem passenden Magnetfeld Übergänge in nicht gefangene m_F Zustände getrieben. Diese Reduktion der Fallentiefe hat zur Folge, dass alle Atome, die in diesen Bereich gelangen, aus der Falle entfernt werden. Bei der evaporativen Kühlung wird dieser Effekt ausgenutzt, um die Fallentiefe kontinuierlich zu verringern, indem die eingestrahelte Radiofrequenz sukzessive

zu niedrigeren Frequenzen verschoben wird. Dadurch werden jeweils die heißesten Atome entfernt, da diese über ausreichend kinetische Energie verfügen, um in die äußeren Bereiche der Falle vorzudringen. Dies entspricht einem Abschneiden der Maxwell-Boltzmann Verteilung (Gleichung 2.3) bei hohen Energien. Eine ausreichend langsame Radiofrequenz-Rampe (Evaporationsrampe) führt zu einer kontinuierlichen Rethermalisierung des verbleibenden atomaren Ensembles. Da lediglich die heißesten Atome mit einer überdurchschnittlich hohen kinetischen Energie entfernt werden, sinkt die mittlere Energie und damit gemäß Gleichung 2.3 die Temperatur.

Die kontinuierliche Reduktion der Radiofrequenz hat neben einer kontinuierlichen Verringerung der Temperatur des Ensembles auch einen ständigen Teilchenzahlverlust zur Folge. Die notwendige Erhöhung der Phasenraumdicke um ca. sechs Größenordnungen verringert die Atomzahl während der Evaporativen Kühlung um einen Faktor 1000.

Mit den in Abschnitt 2.2.1 angegebenen Teilchenzahlen und Phasenraumdichten konnten dementsprechend nahezu pure Bose-Einstein-Kondensate mit Teilchenzahlen von bis zu 4×10^5 Atomen realisiert werden.

2.3 Modifikationen des experimentellen Aufbaus

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten umfangreichen Meßserien erforderten eine hohe Reproduzierbarkeit und Stabilität, die mit dem ursprünglichen Aufbau des Experiments nicht gewährleistet war. Daher waren diverse Modifikationen und Erweiterungen der Apparatur notwendig. Die Details dieser Umbauten finden sich in der Diplomarbeit von G. Kleine Büning [91]. Daher beschränke ich mich an dieser Stelle auf eine kurze Zusammenfassung der durchgeführten Arbeiten.

Vakuumsystem Aufgrund verschiedener Probleme mit dem Vakuumsystem betrug die Lebensdauer des atomaren Ensembles nur ca. 13s. Daher wurde die Vakuumapparatur mit einer Kombination aus einer Titansublimationspumpe und einer kryogenen Falle mit flüssigem Stickstoff erweitert. Der so erreichte Druck in der Hauptkammer von unter 3×10^{-11} mBar hat eine Lebensdauer von mehr als 20s zur Folge. Die Teilchenzahlverluste konnten so signifikant verringert werden. Die gesteigerte Effizienz der evaporativen Kühlung führt zu einer verringerten Sensitivität gegenüber Schwankungen in den Startbedingungen der Evaporationsrampe.

Lasersystem Das ursprüngliche Lasersystem zur Erzeugung der MOT-Strahlen, sowie des Chirp- und des Umlenkerstrahls bestand aus der Kombination eines Titan-Saphir Laser mit einem Argon-Ionen Laser als Pumpquelle. Die hohe Wartungsanfälligkeit und langen Aufwärmzeiten des Argon-Ionen Lasers, die endliche Lebensdauer der Argonröhre und insbesondere die Schwankungen der Strahlage des Titan-Saphir Lasers erforderten einen hohen Justageaufwand. Zusätzlich führ-

ten die intrinsischen Leistungs- und Frequenzfluktuationen des Titan-Saphir Lasers zu Schwankungen in den erreichten Temperaturen und Teilchenzahlen. Daher wurde im Rahmen dieser Arbeit das gesamte Lasersystem durch ein Halbleiter-Lasersystem ersetzt. Es zeichnet sich durch geringe Linienbreiten, eine hohe Intensitätsstabilität und äußerst geringe Justageanfälligkeit aus. Des Weiteren konnte die zur Verfügung stehende Leistung um ca. 25% erhöht werden. Der aufgebaute optische Strahlengang des neuen Lasersystems findet sich in Abbildung A.3.

Frequenzstabilisierung des Lasersystems Zur Verbesserung der Langzeitstabilität wurde das bestehende Stabilisierungsverfahren des Rückpump-Lasers durch einen so genannten Trombone-Lock ersetzt [92]. Die Beschreibung findet sich im Anhang (Abbildung A.2). Für die Regelungselektronik wurde ein kommerzielles System (Firma TEM, Typ LaseLock) gewählt. Es zeichnet sich insbesondere durch ein automatisches Einfangverfahren aus.

QUANTENENTARTETE GITTERGASE

Dieses Kapitel beschreibt die Eigenschaften ultra-kalter Quantengase in so genannten optischen Gittern. Dabei handelt es sich um optische Stehwellen, deren stationäres Lichtfeld aufgrund der Kopplung an die atomaren Energieniveaus zu einem periodischen Potential führt. Im Gegensatz zu Festkörpergittern handelt es sich bei einem optischen Gitter um eine perfekte Kristallstruktur ohne jegliche Störstellen. Die Kombination aus der Bose-Einstein-Kondensation mit Methoden der Quantenoptik ermöglicht somit die Untersuchung fundamentaler Theorien der Festkörperphysik, die dort nicht ohne weiteres beobachtet werden können.

3.1 Optische Potentiale

3.1.1 Grundlagen

Die Nutzung von Lichtfeldern als konservative Fallen beruht auf dem so genannten AC-Stark Effekt [80, 93, 94]. Die Kopplung der atomaren Niveaus $|g\rangle$ und $|e\rangle$ durch einen um $\Delta = \omega_0 - \omega_L$ gegen die atomare Resonanz $\omega_0 = \hbar\omega_e - \hbar\omega_g$ verstimmt Laserstrahl mit der Frequenz ω_L führt zu einer intensitätsabhängigen Verschiebung der atomaren Energieniveaus.

Dieser Effekt ist qualitativ anhand des klassischen getriebenen harmonischen Oszillators zu verstehen [95]. Das elektrische Wechselfeld des Laserstrahls

$$\mathbf{E} = \vec{E}_0 \cos \omega_L t \quad (3.1)$$

induziert ein atomares Dipolmoment \vec{p} . Für rot verstimmt Laserfrequenzen $\omega_L \ll \omega_0$ sind treibendes und induziertes Feld in Phase, für blau verstimmt Laserfrequenzen $\omega_L \gg \omega_0$ sind sie um 180° außer Phase. Da die Energie eines Dipols im äußeren Feld $W_{Pot} = \vec{p}\vec{E}$ von der Orientierung der beiden Dipole zueinander abhängt, führt die Wechselwirkung des induzierten Dipols mit dem treibenden Feld

für rot verstimte Laserstrahlen zu einer Verringerung und für blauverstimte Laserstrahlen zu einer Erhöhung dieser Energie.

Zwei-Niveau System

Die quantitative Berechnung der Verschiebung der Energieniveaus durch weit verstimte Laserfelder lässt sich elegant im Rahmen der Störungstheorie durchführen [62]. Die nicht-diagonale Störung H_{WW} führt dazu, dass die ungestörten Eigenzustände $|i\rangle$ mit der Energie E_i nicht länger Eigenzustände des Systems sind. Diese bestehen aufgrund der Kopplung der atomaren Niveaus aus einer linear Kombination der ungestörten Zustände. Die Verschiebung ihrer Energie ΔE_i im Vergleich zu den Niveaus der ungestörten Zustände berechnet sich gemäß der Störungstheorie zweiter Ordnung zu

$$\Delta E_i = \sum_{i \neq j} \frac{|\langle j | e \mathbf{r} \mathbf{E} | i \rangle|^2}{E_i - E_j}. \quad (3.2)$$

Da die Kopplung der atomaren Niveaus mit einer Veränderung der Photonenzahl einhergeht, ist diese Gleichung im so genannten dressed state Bild zu lösen [80]. Die einzelnen Zustände entsprechen dabei einer Kombination aus atomaren Zuständen und der Anzahl an Photonen im Laserfeld. Ist das Atom z.B. im Grundzustand ($E_0 = 0$), entspricht die Gesamtenergie dieses Zustandes der Anzahl (n) der Photonen $E_g = n\hbar\omega_L$. Die Absorption eines Photons hat einen Übergang in den Zustand mit der Energie

$$E_a = \hbar\omega_0 + (n - 1)\hbar\omega_L = -\hbar(\omega_L - \omega_0) + n\hbar\omega_L \quad (3.3)$$

zur Folge. Mit der Energiedifferenz der beiden ungestörten dressed states des Grund- und des Angeregten Zustandes

$$\Delta = E_g - E_a = -\hbar(\omega_L - \omega_0) \quad (3.4)$$

folgt für ein Zwei-Niveau Atom in der so genannten rotating wave Näherung, die mit der Frequenz $\omega_0 + \omega_L$ oszillierende Terme vernachlässigt,

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle e | e \mathbf{r} | g \rangle|^2}{\Delta} |E_0|^2. \quad (3.5)$$

Da sich das Übergangsmatrix-Element zwischen den atomaren Niveaus durch die Lebensdauer des Angeregten Zustandes

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\langle e | e \mathbf{r} | g \rangle|^2 \quad (3.6)$$

ausdrücken lässt, folgt mit der Intensität $I = 2\epsilon_0 c |E^2|$ des Laserfeldes für die schematisch in Abbildung 3.1 dargestellte Energieverschiebung des Grund (-) und

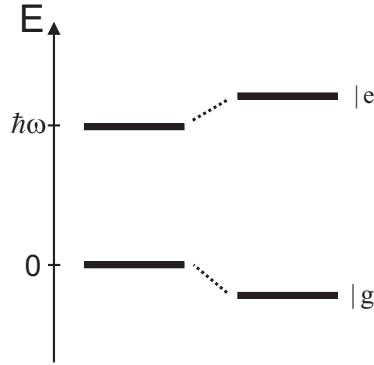


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung der Verschiebung der atomaren Energieniveaus durch den AC-Stark-Effekt.

des Angeregten Zustandes (+)

$$\Delta E = \pm \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I. \quad (3.7)$$

Für die Streurrate ergibt sich aus den Gleichungen (2.62) und (2.61) für stark verstimmt Laserfrequenzen $\omega_L \ll \omega_0$

$$\Gamma_{Str}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (3.8)$$

Da die Potentialtiefe proportional zu $1/\Delta$ ist, während die Streurrate mit $1/\Delta^2$ skaliert, kann bei großer Verstimmung der Laserfrequenz die Streuung vernachlässigt werden. Die Dipolkräfte können somit mittels ortsabhängiger Lichtfelder zur Realisierung nicht-dissipativer Fallen genutzt werden.

Mehr-Niveau System

Im vorherigen Abschnitt wurde die Berechnung des AC-Stark Effekts zunächst für den stark vereinfachten Fall eines Zwei-Niveau Atoms durchgeführt. Die Erweiterung auf Mehr-Niveau Atomen erfolgt gemäß Gleichung 3.2 durch Summation der einzelnen Energie-Verschiebungen des atomaren Niveaus, die aus der Kopplung an sämtliche angeregte Zustände resultiert

$$\Delta E_i = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} I(\mathbf{r}) \sum_j \frac{c_{ij}^2}{\Delta_{ij}}. \quad (3.9)$$

Die Übergangs-Matrix Elemente $c_{ij} = \langle j | e\vec{r}\vec{E} | i \rangle$ hängen sowohl von der jeweiligen atomaren Wellenfunktion als auch von der Polarisierung und der Wellenlänge der Laserstrahls ab. Wie in Abschnitt 3.3.1 näher erläutert wird, liegt die Wellenlänge des Gitterlasers bei 825nm. Zur Berechnung der Energieverschiebung des

Grundzustandes von $^{87}\text{Rb } 5S_{1/2}$ ist somit lediglich die Kopplung an die angeregten Zustände $5P_{1/2}$ und $5P_{3/2}$ zu berücksichtigen, da die entsprechende Kopplung an andere Niveaus vernachlässigbar ist. Mit den in [96] angegebenen Werten für die Übergangs-Matrix Elemente c_{ij} , folgt für das Dipolpotential

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = - \underbrace{\frac{\pi c^2}{2} \left[\frac{1}{\omega_{5P_{1/2}}^3} \left(\frac{\Gamma_{5P_{1/2}}}{\omega_{5P_{1/2}} - \omega_L} \right) + \frac{2}{\omega_{5P_{3/2}}^3} \left(\frac{\Gamma_{5P_{3/2}}}{\omega_{5P_{3/2}} - \omega_L} \right) \right]}_{V_0} I(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Die Verschiebung der atomaren Niveaus ist direkt proportional zur Intensität des Lichtfeldes (Gleichung 3.10). Durch räumlich variierende Lichtfelder können so ortsabhängige Potentiale generiert werden. Derartige Potential können unter anderem zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Fallen [97], zur Realisierung verschiedenster Atom-Optischer Elemente [98, 99] zur Manipulationen und Führung atomarer Ensembles [100, 101], sowie zur Erzeugung optischer Gitter genutzt werden.

3.1.2 Potential eines gaußförmigen Laserprofils

Das gaußförmige Intensitätsprofil eines Laserstrahls

$$I(r) = I_0(z) e^{-\frac{2r^2}{\omega^2(z)}} \quad (3.11)$$

mit dem Strahlradius

$$\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + (z/z_R)^2}, \quad (3.12)$$

und der Rayleigh Länge $z_R = \omega_0^2 \pi / \lambda_L$, sowie der positionsabhängigen Maximalintensität $I_0(z) = \frac{2P}{\pi \omega_z^2}$ führt nach Gleichung (3.10) zu einem ebenfalls gaußförmigen Potentialverlauf

$$V_{Gauss} = -V_0 e^{-\frac{2r^2}{\omega^2(z)}} I_0(z). \quad (3.13)$$

Für rotverstimmes Licht entspricht dies einem Potentialminimum (Abbildung 3.2) und somit einer konservativen optischen Falle für Atome, während blauverstimmes Licht ein Potentialmaximum erzeugt.

Eine signifikante Vereinfachung ergibt sich aus dem Vergleich der relevanten Längenskalen des Strahls und des Kondensats. So ist die Rayleigh Länge des Gitterlasers mit $z_R = 5.67$ cm (siehe Abschnitt 3.3.1) deutlich größer als die Ausdehnung des Kondensats von $R_{ax} \approx 20 \mu\text{m}$ (siehe Kapitel 4.2.1). Der Strahlradius beträgt mit $143.5 \mu\text{m}$ zudem ein Vielfaches der Ausdehnung des Kondensats von $R_\rho \leq 9 \mu\text{m}$. Daher kann das gaußförmige Potential am Ort der Atome durch ein zylindersymmetrisches harmonisches Potential genähert werden. In quadratischer

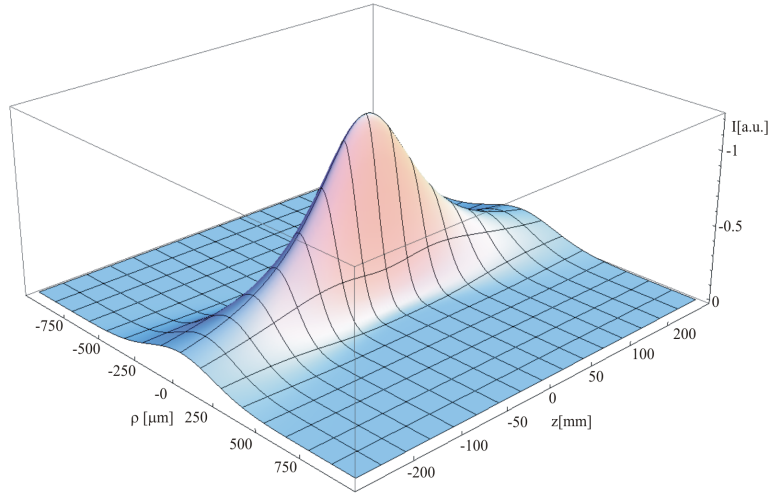


Abbildung 3.2: Optische Dipolpotential eines gaußförmigen Laserprofils mit einem Strahlradius von $140\mu\text{m}$ und einer Wellenlänge von 825nm . Die z -Achse wurde zur besseren Sichtbarkeit des Potentialsverlaufs invertiert.

Näherung folgt mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion aus Gleichung 3.13

$$V_{Gauss}(\rho, z) \approx -V_0 \left[1 - 2 \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \frac{2P}{\pi w_0^2}. \quad (3.14)$$

Für die radialen bzw. axialen Fallenfrequenzen des gaußförmigen Dipolpotentials ergibt sich somit

$$\omega_{rad} = \sqrt{\frac{8V_0 P}{\pi m \omega_0^4}} \quad \text{und} \quad \omega_{ax} = \sqrt{\frac{4V_0 P}{\pi m z_R^2 \omega_0^2}}. \quad (3.15)$$

3.1.3 Potential des optischen Gitters

Die Periodizität optischer Gitterpotentiale resultiert aus der Interferenz zweier kohärenter gegenläufiger Laserstrahlen, die zur Ausbildung einer optischen Stehwelle führen. Die Vielseitigkeit optischer Gitter resultiert insbesondere auch aus der Kombinierbarkeit mehrerer solcher Strahlenpaare. Sie kann zur Realisierung mehrdimensionaler Gitter bzw. verschiedenster nicht-kubischer Geometrien wie z.B. Kagomee- und Dreiecksgittern verwendet werden [102, 103, 104, 105]. Die theoretische Beschreibung beschränkt sich jedoch auf den Fall eindimensionaler Gitter, da sie die Grundlage für sämtliche im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen zu Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten bilden. Zur Erweiterung auf kompliziertere Geometrien sind lediglich die entsprechenden Potentiale aller Strahlengänge vektoriel zu addieren. Eine gute Darstellung dieser Zusammenhänge findet sich in [106].

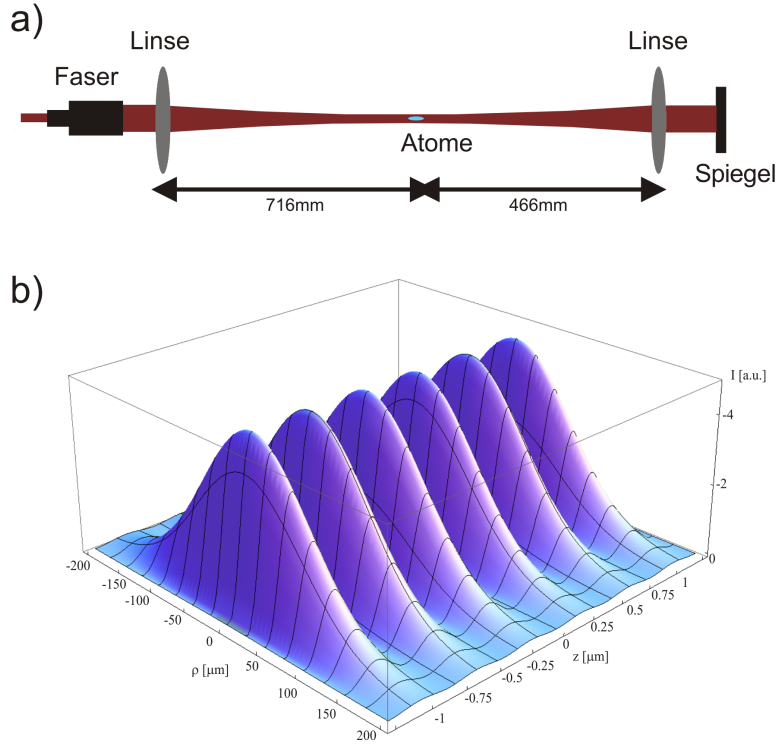


Abbildung 3.3: Das obere Bild zeigt eine Schemazeichnung des Aufbaus des eindimensionalen optischen Gitters und das untere das resultierende Dipolpotential für eine Wellenlänge von 825nm und einen Strahlradius von 140μ . Die z -Achse wurde zur besseren Sichtbarkeit des Potentialsverlaufs invertiert.

Die verwendete Methode zur Erzeugung der gegenläufigen Strahlen des optischen Gitters bedient sich der Retroreflexion eines Laserstrahls mittels eines Planspiegels. Dieses Schema, sowie das resultierende optische Potential ist in Abbildung 3.3 gezeigt. Da die Reflexion der linear polarisierten elektromagnetischen Welle ein Potentialminimum in der Spiegelebene zur Folge hat [95], ist keine aufwendige Phasenstabilisierung gegenläufiger Laserstrahlen notwendig [107]. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Kohärenzlänge des Laserstrahls deutlich länger als die optische Weglänge ist. Dies ist für die Parameter des verwendeten Aufbaus sicher erfüllt. Das aus der Kombination der axialen optischen Stehwelle sowie des radialen Dipolpotentials des Gaußförmigen Laserprofils resultierende optische Potential

$$V_{\text{Gitter}}(\rho, z) = -4 V_0 \frac{2P}{\pi w_z^2} e^{-2\rho^2/w(z)^2} \sin^2(kz), \quad (3.16)$$

kann analog zu Gleichung 3.14 mittels einer Reihenentwicklung in harmonischer

Näherung dargestellt werden

$$V_{Gitter}(\rho, z) \approx -4 V_0 \frac{2P}{\pi w_0^2} \left[1 - 2 \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \sin^2(kz). \quad (3.17)$$

Die Potentialtiefe ist aufgrund der Interferenz der gegenläufigen Strahlen um einen Faktor 4 höher als die entsprechende Tiefe des gaußförmigen Dipolpotentials 3.14. Aus Gleichung 3.17 folgt mit der Reihenentwicklung der Sinus-Funktion für die Fallenfrequenzen der einzelnen Gittertöpfe in harmonischer Näherung

$$\hbar \omega_{Gitter} = 2 \sqrt{V_G[E_r]} E_r. \quad (3.18)$$

Dabei wird das Gitterpotential

$$V_G = 4 V_0 \frac{2P}{\pi w_0^2} \quad (3.19)$$

in Einheiten der Rückstoßenergie

$$E_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.20)$$

angegeben. Die Untersuchungen zu gedämpften Bloch-Oszillationen (Kapitel 5) wurden bei einer Gittertiefe von $2E_r$ durchgeführt. Dies entspricht einer Fallenfrequenz von $\omega_{Gitter} = 2\pi \times 60\text{kHz}$. Die entsprechenden Fallenfrequenzen des reinen Dipolpotentials betragen bei dieser Gittertiefe $\omega_\rho = 2\pi \times 6.3\text{Hz}$ und $\omega_{ax} = 2\pi \times 0.01\text{Hz}$. Verglichen mit den Fallenfrequenzen der Magnetfalle von $\omega_\rho = 2\pi \times 29\text{Hz}$ und $\omega_{ax} = 2\pi \times 14\text{Hz}$ können sie dementsprechend bei der Interpretation der Bloch-Oszillationen vernachlässigt werden. Da zudem die Variation der Gittertiefe entlang der Ausdehnung des Kondensats (ca $40\mu\text{m}$) gemäß Gleichung 3.16 unter 0.1 Prozent beträgt, kann das optische Potential 3.17 stark vereinfacht werden

$$V_{Gitter}(z) = -V_G \sin^2(kz). \quad (3.21)$$

3.2 Theorie quantenentarteter Gittergase

Die Eigenschaften quantenmechanischer Teilchen in periodischen Potentialen weichen stark von denen freier Teilchen ab. Daher werden in diesem Kapitel sowohl der Formalismus zur Beschreibung derartiger Systeme entwickelt und die grundlegenden Phänomene erläutert.

Zunächst geschieht dies im Einteilchen-Bild, das sich hervorragend eignet, um die Physik quantenentarteter Gittergase qualitativ zu beschreiben. Die Entstehung der so genannten Bloch-Bänder sowie die Eigenschaften der delokalisierten Eigenzustände (Bloch-Zustände) des periodischen Systems werden detailliert behandelt.

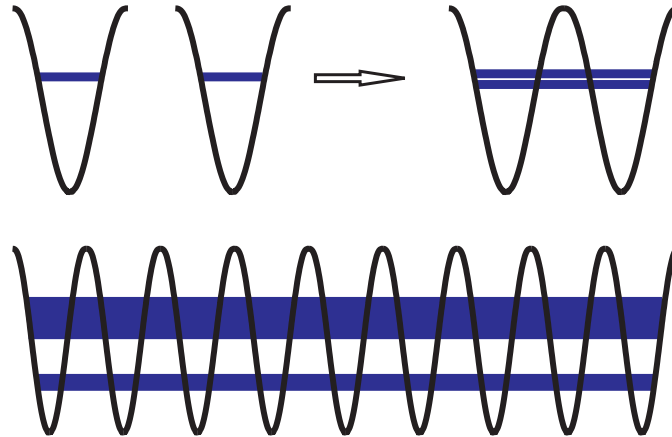


Abbildung 3.4: Schematische Darstellung des Entstehens der Bandstruktur. Das linke obere Bild zeigt die Energieniveaus zweier vollständig voneinander separierter Potentialmulden, während das rechte die Aufspaltung der ehemals entarteten Energieniveaus durch den Tunneleffekt skizziert. Das untere Bild zeigt die aus der Kombination vieler Potentialmulden entstehende Bandstruktur.

Anschließend erfolgt eine Beschreibung der Wellenfunktion in der Basis lokalisierter Wannier-Zustände.

Zum Schluss wird die Beschreibung des Systems auf den experimentell relevanten Fall wechselwirkender Bose-Einstein-Kondensate in 1D optischen Gittern erweitert.

3.2.1 Einteilchen-Effekte

Zur Einführung in die komplexe Physik periodischer Systeme wird zunächst ein Teilchen in einem Doppelmuldenpotential betrachtet (Abbildung 3.4). Der Grundzustand des Systems ist zweifach entartet, da sich das Teilchen sowohl im rechten (Ψ_r), als auch im linken (Ψ_l) Potentialminimum befinden kann. Aufgrund des Tunneleffektes [62], der einen Übergang zwischen den Potentialmulden ermöglicht, besteht jedoch eine Kopplung zwischen diesen beiden Zuständen. Dies hat zur Folge, dass die ursprünglichen Grundzustände Ψ_r und Ψ_l nicht länger die Eigenzustände des gekoppelten Systems sind [62], sondern als eine Superposition der ursprünglichen Zustände darstellt werden können. Ihre Energien sind dadurch nicht länger entartet, sondern im Vergleich mit den ursprünglichen Energieniveaus verschoben (Abbildung 3.4). Der energetisch niedrigere (höhere) Zustand wird in der Atomphysik als das bindende (anti-bindende) Niveau bezeichnet.

Die Erweiterung des Doppelmuldenpotentials auf Gitterpotentiale mit N Potentialminima hat die Ausbildung von N energetisch aufgespaltenen Energieniveaus zur Folge. Für sehr große Systeme liegen die jeweiligen Zustände sehr dicht beieinander und es kommt zur Ausbildung eines quasikontinuierlichen Energiebandes.

Da dies für jedes Oszillatorniveau der einzelnen Töpfchen geschieht, ergibt sich die in Abbildung 3.5 gezeigte Bandstruktur mit Energiebereichen in denen keine Zustände existieren, den so genannten Bandlücken.

In diesem Abschnitt werden die soeben qualitativ beschriebenen Eigenzustände eines periodischen Systems sowie die zugehörigen Eigenenergien berechnet. Zunächst werden jedoch einige allgemeine aus der Periodizität folgende Zusammenhänge erläutert. Die Darstellung in diesem Abschnitt folgt der Notation in [108, 109].

Bloch-Zustände

Aufgrund der Periodizität des Potentials mit der Gitterkonstante d

$$V(z) = V(z + d) \quad (3.22)$$

vertauscht der zugehörige Translationsoperator

$$T_d f(z) = f(z + d), \quad (3.23)$$

der den Zustand am Ort z in den entsprechenden Zustand am Ort $z + d$ transformiert, mit dem Hamiltonoperator

$$H\Psi(z) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + V(z) \right) \Psi(z) = E\Psi(z). \quad (3.24)$$

des Systems

$$[T_d, H] = 0. \quad (3.25)$$

Dies hat zur Folge, dass eine Basis gemeinsamer Eigenzustände $\Psi(z)$ mit den Eigenwertgleichungen

$$H\Psi(z) = E\Psi(z) \quad \text{und} \quad T_d \Psi(z) = c(d) \Psi(z) \quad (3.26)$$

gefunden werden kann. Aus der Normierung der Wellenfunktion $\Psi(z)$ folgt mit

$$1 = \int dz |\Psi(z + d)|^2 = \int dz |c(d)|^2 |\Psi(z)|^2 = |c(d)|^2, \quad (3.27)$$

dass sich die Eigenwerte des Translationsoperators als komplexe Zahlen mit dem Betrag $|c(d)|^2 = 1$ darstellen lassen

$$c(d) = e^{iqd}. \quad (3.28)$$

Daher gilt für die Wellenfunktion des Teilchens unter Translation um eine Gitterkonstante

$$\Psi(z + d) = T_d \Psi(z) = e^{iqd} \Psi(z). \quad (3.29)$$

Die Eigenfunktionen des periodischen Systems (3.24) sind dementsprechend nicht gitterperiodisch, sondern unterscheiden sich durch einen Phasenfaktor q von Gitterplatz zu Gitterplatz. Diese Quantenzahl ist eine Erhaltungsgröße des Systems und wird Quasiimpuls genannt. Aufgrund der Kommutativität (Gleichung 3.25) kann der Quasiimpuls q zur Klassifizierung der Zustände verwendet werden. Mit den gitterperiodischen Funktionen

$$u_{q,n}(z+d) = u_{q,n}(z) \quad (3.30)$$

ergibt sich aus dem Zusammenhang 3.29 mit folgender Ansatz für die Eigenzustände des Systems

$$\Psi_{q,n}(z) = e^{iqz} u_{q,n}(z). \quad (3.31)$$

Dieser Ansatz beruht auf Arbeiten von F. Bloch und wird dementsprechend Bloch-Zustand genannt [37], der so genannte Bandindex (n) dient der Adressierung der verschiedenen sich ausbildenden Bänder. Die Gleichungen 3.22, 3.29 und 3.31 deuten bereits an, dass sowohl die Eigenzustände $\Psi_{q,n}$ als auch die Eigenenergien $E_{q,n}$ periodisch in q sind

$$\Psi_{q,n}(z) = \Psi_{q+2\pi l/d,n}(z), \quad (3.32)$$

$$E_{q,n} = E_{q+2\pi l/d,n} \quad l = 1, 2, 3, \dots \quad (3.33)$$

Daher kann die Beschreibung der Zustände auf die erste Brillouin-Zone $[-q_B, \dots, q_B]$ mit den reziproken Gittervektoren $q_B = \frac{\pi}{d}$ beschränkt werden. Der Beweis dieser Aussage erfolgt im Verlaufe dieses Abschnitts im Zusammenhang mit Gleichung 3.40. Verglichen mit dem Grenzfall freier Teilchen bedeutet diese Einschränkung jedoch eine signifikante Reduktion des Zustandsraums. Die Klassifizierung der einzelnen Zustände mittels des Quasiimpulses reicht somit nicht zur eindeutigen Bestimmung eines Eigenzustandes aus, sondern eine vollständige Beschreibung erfordert die Angabe des Bandindexes. Berücksichtigung der endlichen Ausdehnung des Systems sowie der Normierbarkeit der Wellenfunktionen, bieten sich periodische Randbedingungen für die Wellenfunktion 3.31 an

$$q = \frac{\pi}{d} \frac{\nu}{N} \nu, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots N. \quad (3.34)$$

Die Quasiimpulse sind dementsprechend quantisiert, können aber für große Systeme mit vielen Gitterplätzen N als quasikontinuierlich angesehen werden.

Zur Bestimmung der Eigenfunktionen des periodischen Systems ist zunächst der Ansatz 3.31 in die Schrödingergleichung 3.24 einzusetzen

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 + V(z) \right) e^{iqz} u_{q,n}(z) = E_q e^{iqz} u_{q,n}(z). \quad (3.35)$$

Ausführen der Differentiation und Multiplikation mit e^{-iqz} führt auf folgende Gleichung für die Bloch-Faktoren

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2iq\partial_z - \partial_z^2 + V(z)) \right) u_{q,n}(z) = E_q u_{q,n}(z). \quad (3.36)$$

Zur Lösung wird die Periodizität der Wellenfunktion 3.30 sowie des Potentials 3.22 ausgenutzt. Sie erlaubt eine Entwicklung der jeweiligen Funktionen in Fourierreihen [64] mit der Periodizitätskonstante q_B und den Entwicklungskoeffizienten $c_l^{q,n}$. Für die Bloch-Faktoren ergibt sich somit

$$u_{q,n}(z) = \sum_l c_l^{q,n} e^{2ilq_B z}. \quad (3.37)$$

Anhand dieser Darstellung lässt sich zudem die im Zusammenhang mit der Einführung des Quasiimpulses 3.33 aufgestellte Behauptung belegen, dass sowohl die Eigenzustände als auch die Energieeigenwerte periodisch in q sind und somit auf die erste Brillouin-Zone beschränkt werden können. Da jeder Quasiimpuls q' außerhalb der ersten Brillouin-Zone durch eine Linearkombination eines Quasiimpulses innerhalb der ersten Zone q und einer entsprechenden Anzahl reziproker Gittervektoren q_B dargestellt werden kann $q' = q + 2l'q_B$, folgt für die Wellenfunktion

$$\Psi_{q',n}(z) = \Psi_{q+2l'q_B,n}(z) = e^{i(q+2l'q_B)z} \sum_l c_l^{q+2l'q_B} e^{2ilq_B z}. \quad (3.38)$$

Da über Vielfache von $2q_B$ summiert wird, ergibt sich mit $c_l^{q+2l'q_B} = c_{l+l'}^q$

$$\Psi_{q',n}(z) = e^{i(q+2l'q_B)z} \sum_l c_{l+l'}^q e^{2i(q+(l+l')q_B)z} e^{-2il'q_B z}. \quad (3.39)$$

Das Umbenennen der Summationskonstante $l \rightarrow \rho = l + l'$ belegt schließlich die Periodizität der Wellenfunktion

$$\Psi_{q+2l'q_B,n}(z) = e^{i(q)z} \sum_\rho c_\rho^q e^{2i(q+\rho q_B)z} = \Psi_{q,n}(z). \quad (3.40)$$

Das Potential lässt sich analog zu Gleichung 3.37 darstellen als

$$V(z) = \sum_l V_l e^{2ilq_B z}. \quad (3.41)$$

Für optische Gitterpotentiale ist jedoch eine signifikante Vereinfachung möglich, da aus der Exponentialdarstellung des optischen Potentials 3.21

$$V(z) = V_G \sin^2 q_B z = -1/4 V_G (e^{2iq_B z} + e^{-2iq_B z} - 2) \quad (3.42)$$

die Entwicklungskoeffizienten der Reihendarstellung

$$V_l = \begin{cases} V_1 & = -1/4 V_G \\ V_{-1} & = -1/4 V_G \\ V_0 & = 1/2 V_G \\ V_l & = 0 \quad l \neq 0, \pm 1 \end{cases} \quad (3.43)$$

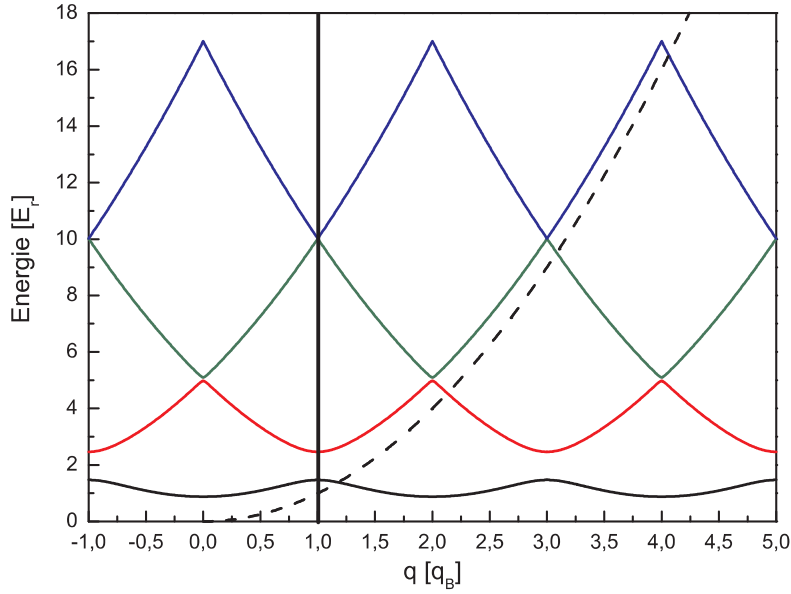


Abbildung 3.5: Bandstruktur des periodischen Potentials für eine Gittertiefe von $2E_r$. Der schwarze Balken repräsentiert die Grenze der ersten Brillouin-Zone und die gestrichelte Linie die Dispersionsrelation eines freien Teilchens.

folgen. Einsetzen der Fourierreihen in Gleichung 3.35 führt zu der Bestimmungsgleichung für die Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hbar^2}{2m} (q^2 + 2iq\partial_z - \partial_z^2) + V_1 e^{2iq_B z} + V_{-1} e^{-2iq_B z} - 2V_0 \right] \sum_l c_l^{q,n} e^{2ilq_B z} \quad (3.44) \\ = E_q \sum_l c_l^{q,n} e^{2ilq_B z}. \end{aligned}$$

Ausführen der Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} \sum_l c_l^{q,n} (q + 2lq_B)^2 e^{2ilq_B z} + \sum_l c_l^{q,n} (V_{-1} e^{2i(l-1)q_B z} + \dots \quad (3.45) \\ \dots V_1 e^{2i(l+1)q_B z} + V_0 e^{2ilq_B z}) = E_q \sum_l c_l^{q,n} e^{2ilq_B z}. \end{aligned}$$

und Sortieren nach den orthogonalen, und damit voneinander unabhängigen Exponentialfunktionen, ergibt das Gleichungssystem

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} (q + 2lq_B)^2 + V_0 \right) c_l^{q,n} + V_{-1} c_{l+1}^{q,n} + V_1 c_{l-1}^{q,n} = E_q c_l^{q,n}. \quad (3.46)$$

Eine elegante Lösungsmethode ergibt sich durch die Umformulierung in eine Matrixgleichung

$$H \cdot \vec{c}^{(q,n)} = E_{q,n} \vec{c}^{(q,n)}, \quad (3.47)$$

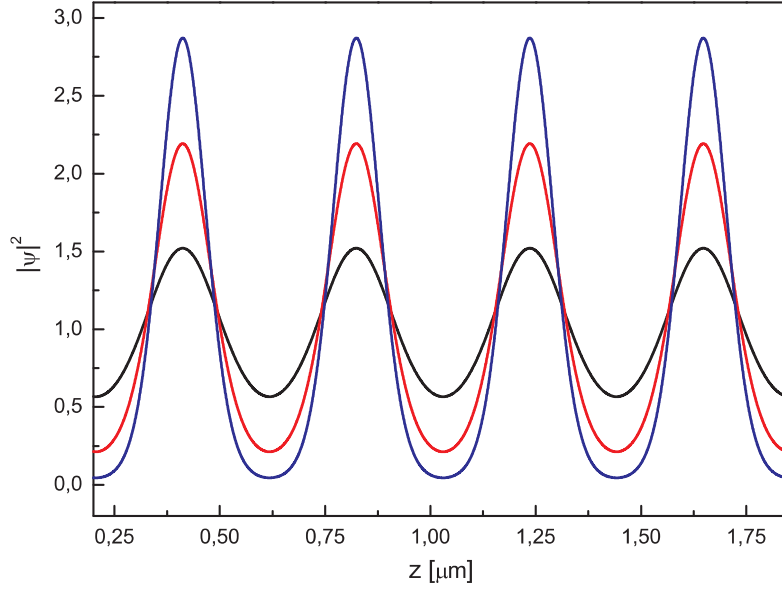


Abbildung 3.6: Ortsraumdarstellung der Bloch-Funktionen für Gittertiefen von $10E_r$ (blau), $5E_r$ (rot) und $2E_r$ (schwarz).

mit den Matrixelementen

$$H_{l,l'} = \begin{cases} (2l + q/q_B)^2 E_r + \frac{1}{2} V_G & \text{für } l = l' \\ \frac{1}{4} V_G & \text{für } l - l' = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.48)$$

Die Eigenwerte $E_{q,n}$ und Eigenvektoren $\vec{c}^{(n,q)}$ sind für jeden Quasiimpuls separat zu bestimmen und ergeben jeweils ein diskretes Spektrum an Energieeigenwerten, deren Aneinanderreihung im Quasiimpulsraum zur Ausbildung der in Abbildung 3.5 gezeigten Bandstruktur führt. Das periodische Gitterpotential bedingt somit eine drastische Modifikation der ebenfalls gezeigten Dispersionsrelation eines freien Teilchens. Die periodische Dispersionsrelation $E_n(q)$ belegt zudem die Beschränkbarkeit auf die markierte erste Brillouin-Zone. Die resultierenden dramatischen Folgen für die Dynamik quantenentarteter Gittergase wird detailliert in Kapitel 4 beschrieben. Die Dichteverteilung der Wellenfunktion $|\Psi_{q,n}(z)|^2$ ist in Abbildung 3.6 für verschiedene Gittertiefen gezeigt. Sie folgt mit Gleichung 3.37 direkt aus den Eigenzuständen $\vec{c}^{(n,q)}$, durch die Summation ebener Wellen mit der Besetzungswahrscheinlichkeit $|c_i^{n,q}|^2$. Es ist klar zu erkennen, dass schon kleine Gittertiefen von $2E_r$ zu einer starken Modulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit führen. Dieser Effekt verstärkt sich mit zunehmender Gittertiefe, so dass die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens zwischen den Gittertöpfen für eine Gittertiefe von $10E_r$ verschwindend gering ist.

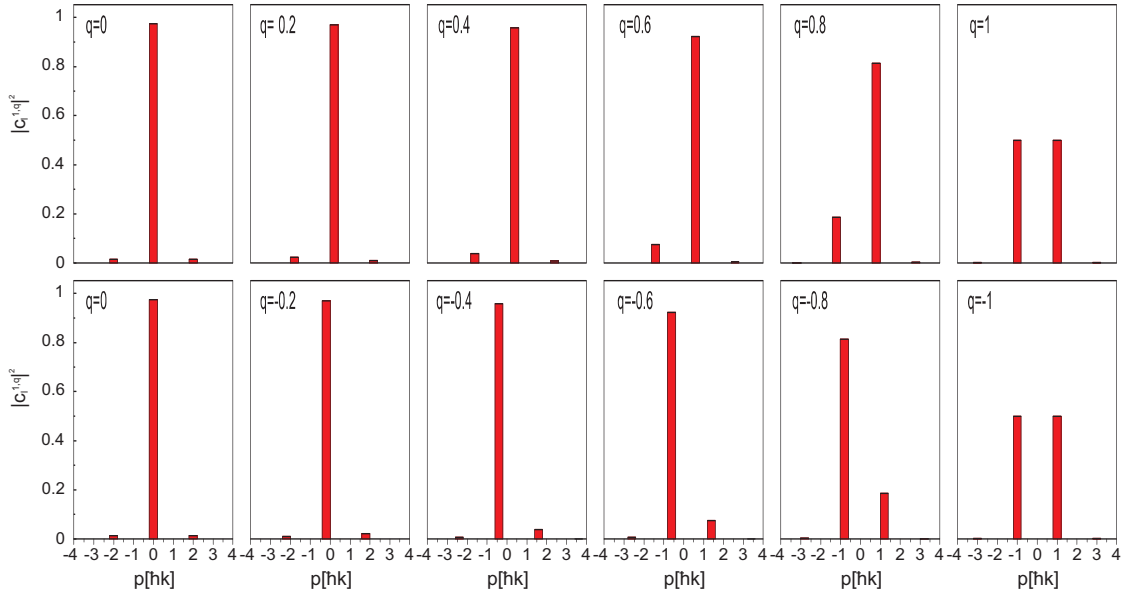


Abbildung 3.7: Relative Besetzung der verschiedenen Impulskomponenten eines Teilchens im periodischen Potential für verschiedene Quasiimpulse.

Abbildung 3.7 zeigt die relative Besetzung der Vorfaktoren $|c_l^q|^2$ der Fourierreihenentwicklung 3.37 für verschiedene Werte des Quasiimpulses innerhalb des ersten Bandes. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Projektion des Zustandes Ψ_q auf ebenen Wellen im Gegensatz zu der Dichteverteilung stark vom jeweiligen Quasiimpuls abhängt. Diese Zerlegung des Eigenzustandes des Bose-Einstein-Kondensats im optischen Gitter nach den Eigenfunktionen freier Teilchen ist die Grundlage für die im Abschnitt 3.2.2 beschriebene Entstehung von weiteren Impulskomponenten während der freien Expansion, da durch das instantane Ausschalten aller Potentiale der Eigenzustand Ψ_q auf die Basis freier Teilchen 3.37 projiziert wird. Die folgende freie Expansion führt zur Abspaltung der von null verschiedenen Impulskomponenten $p = \hbar(q + 2lq_B)$ mit signifikanter Besetzung c_l^q .

Wannier-Zustände

Die starke Lokalisierung der Teilchen auf den jeweiligen Gitterplätzen legt eine alternative Beschreibung der Wellenfunktionen durch die Superposition ebenfalls lokalisierter Zustände nahe. Da sie eine Orthonormalbasis bilden, bieten sich insbesondere die so genannten Wannier-Zustände [108] an

$$w_n(z - z_0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{-iqz_0} \Psi_{q,n}(z). \quad (3.49)$$

Die Summation über die Quasiimpulse der ersten Brillouin-Zone hat zur Folge, dass sie sich nicht über das gesamte Gitter erstrecken, sondern um den Ort z_0 zentriert

sind. Die Orthonormalität der Wannier-Zustände folgt mit der entsprechenden Orthonormalitätsbedingung der Bloch-Funktionen direkt

$$\int dz w_n^*(z - z_j) w_m^*(z - z_t) = \frac{1}{N} \sum_q e^{iq(z_j - z_t)} \delta_{qq'} \delta_{nm} = \delta_{jt} \delta_{nm}. \quad (3.50)$$

Analog zur Konstruktion der Wannier-Zustände, können die Bloch-Funktionen durch Summation über sämtliche Gitterplätze z_0 aus den Wannier-Funktionen gewonnen werden

$$\Psi_{q,n}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{iqz} w_n^*(z - z_j). \quad (3.51)$$

Die Nutzung der Wannier-Basis bietet Vorteile bei der Beschreibung verschiedener physikalischer Prozesse, von denen im Folgenden einige kurz vorgestellt werden:

- **Bloch-Oszillationen**

Die Wannier-Funktionen eignen sich hervorragend zur Erklärung der aus der relative Verschiebung der Energieniveaus der einzelnen Gittertöpfe zueinander resultierenden Bloch-Oszillationen (Kapitel 4), da sich die Eigenzustände dieses verkippten Gitters direkt aus ihnen konstruieren lassen.

- **Vielteilchen-Prozesse**

Mit Hilfe der Darstellung der Feldoperatoren in der Basis der Wannier-Zustände des nullten Bandes

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_i \hat{a}_i w(r - r_0) \quad (3.52)$$

folgt aus dem Hamiltonoperator des Systems in zweiter Quantisierung (Gleichung 2.29) mit $V_{ext}(\mathbf{r}) = V_{MF}(\mathbf{r}) + V_G \sin(kz)^2$ der so genannte in der Festkörper-Physik als Modellsystem genutzte Bose-Hubbard Operator [16, 12]

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_j + \sum_i (\epsilon_i - \mu) + \sum_i \frac{1}{2} U \hat{n}_i (\hat{n}_i - 1). \quad (3.53)$$

Dabei erfolgt die erste Summation lediglich über nächste Nachbarn. Der Operator \hat{n}_i bestimmt die Teilchenzahl am i -ten Gitterplatz. Das Tunnelmatrix-Element

$$J = - \int d^3r w(r - r_0) \left(-\hbar^2 \nabla^2 / 2m + V_G \sin(kz)^2 \right) w(r - r_0) \quad (3.54)$$

stellt den mit dem Tunneln von Gitterplatz zu Gitterplatz verbundenen Energiegewinn dar, und übernimmt in optischen Gittern die Rolle der kinetischen Energie.

Der zweite Term berücksichtigt zum einen das externe Fallenpotential, das für die einzelnen Gitterplätze zu einem Energieoffset $\epsilon_i = V_{MF}(r_i)$ führt, und stellt

zum anderen durch die Einführung des chemischen Potentials μ die Teilchenzahlerhaltung sicher (siehe auch Abschnitt 2.1.2).

Der letzte Term bestimmt die Wechselwirkungsenergie an den einzelnen Gitterplätzen. Pro Atom-Paar beträgt sie $U = (4\pi\hbar^2 a_s/m) \int |w(r)|^4 d^3r$. Da pro Gitterplatz n_i Atome mit den übrigen $n_i - 1$ Atomen wechselwirken, beträgt die Wechselwirkungsenergie des i -ten Gitterplatzes insgesamt $\frac{1}{2}U\hat{n}_i(\hat{n}_i - 1)$.¹

Der Bose-Hubbard Hamilton Operator stellt die Grundlage zur Untersuchung verschiedenster Phänomene quantenentarteter Gittergase dar. Er eignet sich insbesondere zur Untersuchung des Zusammenspiels von Tunnelenergie, Wechselwirkungsenergie und Energieoffset pro Gitterplatz durch Magnetfallen oder ungeordnete Potentiale. Je nach Gewicht der jeweiligen Energie kommt es zur Ausbildung verschiedenster Phasen [36, 110, 111, 16], wie z.B. superfluider Phasen [60], isolierender Glass-Phasen [17, 18, 3, 19, 20, 15], oder dem Mott-Isolator [13, 14].

• Tight-Binding Regime

Die Bedeutung der Wannier-Funktionen zeigt sich insbesondere im so genannten Tight-Binding Regime tiefer Gitter, in dem aufgrund der starken Lokalisierung nur der Überlapp der Wannier-Funktionen mit den nächsten Nachbarn relevant ist ($V_G > 5E_r$) und Tunnelprozesse zwischen weiter entfernten Gitterplätzen vernachlässigt werden können. Für dieses Regime ist eine analytische Darstellung der Dispersionsrelation (Gleichung 3.47) möglich [112, 113]. Dazu wird das entsprechende Band $E_n(q)$ analog zu Gleichung (3.41) in eine Fourierreihe entwickelt

$$E_n(q) = \sum_l e^{2iqld} \epsilon_n(ld). \quad (3.55)$$

Dabei entspricht die Position der jeweiligen Wannier-Funktionen dem l -fachen Abstand der Gitterplätze ld und die Entwicklungsfaktoren der Fourierreihe des entsprechenden Bandes werden mit $\epsilon_n(ld)$ bezeichnet (im Folgenden wird die Darstellung auf das niedrigste Band $E_0(q)$ beschränkt). Sie können mit Hilfe der Wannier-Funktionen als Erwartungswert des Hamiltonoperators (Gleichung 3.24) berechnet werden [114]

$$\langle w(r - ld) | \hat{H} | w(r - l'd) \rangle = \int d^3r w(r - ld) H w(r - l'd) \quad (3.56)$$

$$= \epsilon_0((l' - l)d). \quad (3.57)$$

Da für hinreichend tiefe Gitter nur die Wannier-Funktionen benachbarter Gitterplätze überlappen, sind folglich nur die Koeffizienten in Gleichung 3.55 mit $l = 0, \pm 1$ von null verschieden. Aufgrund der Symmetrie der Dispersionsrelation

¹Der Faktor $\frac{1}{2}$ kompensiert die doppelte Abzählung der Paare

gilt $\epsilon_0(l) = \epsilon_0(-l)$. Zudem zeigt der Vergleich mit Gleichung 3.54, dass $-2\epsilon_0(l)$ der Tunnelrate entspricht. Daher folgt für die Dispersionsrelation tiefer Gitter

$$\begin{aligned} E_0(q) &= \epsilon_0(0) - 2J(e^{2iqld} + e^{-2iqld}) \\ &= \epsilon_0(0) - 2J \cos(qd). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Tunnelrate in diesem Regime ist somit direkt aus der Breite des jeweiligen Bandes ΔE bestimmbar

$$J = -\frac{\Delta E}{4}. \quad (3.59)$$

Typische Breiten der Bandstruktur eines $5E_r$ tiefen Gitters liegen in der Größenordnung von 6×10^{-31} J. Daraus folgt eine Tunnelenergie von 1.510^{-31} J.

3.2.2 Vielteilchen-Wellenfunktion

In diesem Abschnitt wird die bisher vorgestellte Theorie nicht-wechselwirkender atomarer Ensemble in periodischen Potentialen auf Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gittern erweitert. Dies erlaubt die Untersuchungen verschiedenster Vielteilchen-Effekte. Die Beschreibung sämtlicher durchgeführten Experimente ist im Rahmen der Gross-Pitaevskii Gleichung möglich, die im folgenden auf die Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten im kombinierten Potential aus Magnetfalle und optischer Stehwelle erweitert wird. Dazu wird zunächst eine allgemeine Abschätzung der Impulsbreite eines Kondensats durchgeführt. Anschließend erfolgt die Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten in periodischen Potentialen. Der letzte Abschnitt erläutert die freie Expansion eines Kondensats nach gleichzeitigem Ausschalten aller Fallenpotentiale.

Impulsbreite eines Bose-Einstein-Kondensats

Die Abschätzung der Impulsbreite eines Kondensats basiert auf dem Heisenbergschen Unschärfeprinzips [115], das einen Zusammenhang mit der Ausdehnung eines quantenmechanischen Wellenpaketes herstellt

$$\delta x \delta(\hbar k) \approx \frac{\hbar}{2} \quad (3.60)$$

$$\delta k \approx \frac{1}{2\delta x}. \quad (3.61)$$

Für die experimentell verwendeten Parameter ($\omega_{ax} = 14Hz$, $N = 5 \times 10^4$) beträgt die axiale Ausdehnung des Kondensats $\delta x \approx 40\mu m$. In dem optischen Gitter mit einer Wellenlänge von $825nm$ sind somit ca. 80 Gitterplätze besetzt. Für die Impulsbreite folgt

$$\delta k \approx 0.0125[1/\mu m]. \quad (3.62)$$

Mittels der in Abschnitt 3.3.4 beschriebenen adiabatischen Rampe wird diese Impulsverteilung direkt in eine entsprechende Quasiimpulsverteilung transformiert. Die Ausdehnung des Wellenpaketes ist daher verglichen mit der Breite der Brillouin-Zone gering

$$\delta k/q_B \approx 0.001. \quad (3.63)$$

Somit kann der Impuls des Bose-Einstein-Kondensats kann direkt nach dem Umladen als deltaförmig angesehen werden. Die dynamische Entwicklung des Kondensats hat jedoch eine Verbreiterung dieses Spektrums zur Folge, wenn das Kondensat im optischen Gitter durch eine zusätzliche externe Kraft beschleunigt wird. Dieser Fall wird in den folgenden Abschnitten ausführlich untersucht werden.

Bose-Einstein-Kondensate im 1D optischen Gitter

Analog zu Kapitel 2.1.2 erfolgt die Beschreibung der Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in periodischen Gitterpotentialen im Rahmen der Gross-Pitaevskii Gleichung. Die Beschreibung wird zunächst auf den Fall eines 1D optischen Gitters ohne zusätzliche Fallenpotentiale beschränkt. Eine Erweiterung auf den experimentell relevanten Fall der Kombination aus magnetischem Einschluss und zusätzlichem optischen Potential erfolgt im Anschluss.

Ausgangspunkt der theoretischen Beschreibung ist die mit dem Potential der optischen Stehwelle (Gleichung 3.21) erweiterte Gross-Pitaevskii Gleichung (2.36). Mit der mittleren dreidimensionalen Dichte (n) ergibt sich [116]

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + sE_r \sin^2(kz) + gnd |\phi(z)|^2 \right) \phi(z) = \mu \phi(z). \quad (3.64)$$

Dabei wurden die radialen Freiheitsgrade mittels eines Separationsansatzes eliminiert. Das Kondensat weist in dieser Betrachtung des eindimensionalen Potentials ohne radialen Einschluss eine gleichmäßige Dichte in radialer Richtung auf [114]. Da die Wellenfunktionen auch trotz Wechselwirkung periodisch sind, ist gemäß dem Bloch-Theorem (Gleichung 3.31) ein gitterperiodischer Ansatz der Form

$$\phi_{q,n}(z) = e^{iqz} \tilde{u}_{q,n}(z) \quad (3.65)$$

möglich². Die Tilde dient der Unterscheidung der gitterperiodischen Funktionen $\tilde{u}_{q,n}(z)$ eines Bose-Einstein-Kondensats von der entsprechenden Funktion eines einzelnen Teilchens. In Kombination mit Gleichung 3.64 führt dieser Ansatz zur Bestimmungsgleichung der Bloch-Faktoren des Kondensats

$$\left[-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + q)^2 + s E_r \sin^2(kz) + gnd |\tilde{u}_{q,n}(z)|^2 \right] \tilde{u}_{q,n}(z) = \mu(q,n) \tilde{u}_{q,n}(z). \quad (3.66)$$

²Dieser Ansatz repräsentiert jedoch nicht alle Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung. Weitere stationäre Lösungen sind in unter anderem in [117] beschrieben.

Wie im Falle von Gleichung 2.43 übernimmt das chemische Potential, das der Teilchenzahlerhaltung dient, die Rolle der Eigenenergie in diesen nichtlinearen Schrödingergleichungen. Aufgrund der Nichtlinearität sind die Energie pro Teilchen, die sich analog zum Energiefunktional 2.44 berechnet

$$\epsilon_n(q) = \int_{-d/2}^{d/2} dz \tilde{u}_{q,n}^*(z) \left[-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + q)^2 + sE_r \sin^2(kz) + \frac{gnd}{2} |\tilde{u}_{q,n}(z)|^2 \right] \tilde{u}_{q,n}(z), \quad (3.67)$$

und das chemische Potential das sich aus der Gross-Pitaevskii Gleichung durch Multiplikation mit $\tilde{u}_{q,n}^*(z)$ und anschließender Integration ergibt, nicht identisch

$$\mu_n(q) = \int_{-d/2}^{d/2} dz \tilde{u}_{q,n}^*(z) \left[-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + q)^2 + sE_r \sin^2(kz) + gnd |\tilde{u}_{q,n}(z)|^2 \right] \tilde{u}_{q,n}(z). \quad (3.68)$$

Aus Gleichung (2.47) folgt für den Zusammenhang zwischen Energie pro Teilchen und chemischem Potential

$$\mu_n(q) = \frac{\partial[n\epsilon_n(q)]}{\partial n}. \quad (3.69)$$

Die Periodizität des chemischen Potentials, dessen Verlauf dem der Energiedispersion freier Teilchen stark ähnelt [114], ist die Ursache dafür, dass das Verhalten von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern in vielerlei Hinsicht dem eines einzelnen Teilchens entspricht.

Modifikationen ergeben sich jedoch insbesondere aus der abschirmenden Wirkung der Wechselwirkung zwischen den Atomen, die eine Reduktion der Gittertiefe zur Folge hat. Das Gesamtpotential aus optischem und Wechselwirkungspotential ist somit geringer als das reine Gitterpotential. Eine erste Abschätzung dieses Effektes ergibt [118]

$$V_{eff} = \frac{V_G}{1 + 4C}. \quad (3.70)$$

Dabei ist $C = \pi n_0 a_s / k^2$ ein Maß für die Wechselwirkungsstärke, mit der Dichte im Fallenzentrum n_0 , der s-Wellen-Streulänge a_s und der Wellenzahl des Laserstrahls k . Diese Gleichung stellt allerdings lediglich für Gittertiefen $V_{eff} \ll 1$ eine gute Näherung dar, und gibt daher die Reduktion der Gittertiefe für die experimentell relevanten Parameter (siehe Kapitel 4) nicht korrekt wieder, sondern dient lediglich einer Abschätzung der Größenordnung des Effektes. Für eine Gittertiefe von $2E_r$ und eine Dichte von ca. $3 \times 10^{19} [1/m^3]$ folgt eine effektive Gittertiefe von $1.93E_r$. Eine fundierte Abschätzung der Relevanz der abschirmenden Wirkung der Wechselwirkung ermöglicht der Vergleich der in Kapitel 4 berechneten Amplitude der Bloch-Oszillationen eines einzelnen Teilchens mit der numerischen bestimmten Amplitude eines wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensats, da diese direkt von der Gittertiefe abhängt. Für ein $2E_r$ tiefes Gitter ergibt sich

eine Abweichung von lediglich 1.1% in der maximalen Gruppengeschwindigkeit ($v_{g,BEC} \approx 2.71\mu\text{m}/\text{ms}$ und $v_{g,Ein-Teilchen} \approx 2.68\mu\text{m}/\text{ms}$). Dies entspricht einer effektiven Gittertiefe von $1.96E_r$ und bestätigt somit die äußerst geringe Abschirmung des Gitterpotentials für die experimentell realisierten Parameter.

Diese geringe Abweichung der effektiven von der tatsächlichen Gittertiefe, die geringe Impulsbreite, der periodische Verlauf des chemischen Potentials und der Energie des Kondensats, sowie die mit der Ausbildung der Bandstruktur verbundenen Beschränkbarkeit auf die erste Brillouin-Zone zeigen, dass viele Phänomene von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern sehr gut qualitativ im Rahmen der Einteilchen-Theorie interpretiert werden können.

Bose-Einstein-Kondensate im 3D externen Potential

Die Analyse von Bose-Einstein-Kondensaten in periodischen Potentialen erfordert jedoch eine Berücksichtigung der interatomaren Wechselwirkung. Daher wurde die Experimente zur Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten mit numerisch bestimmten Lösungen der 3D Gross-Pitaevskii Gleichung verglichen. Dies wird ausführlich in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, während dieser Abschnitt der Zusammenfassung der Eigenschaften des Grundzustandes von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern dient.

Die 3D Gross-Pitaevskii Gleichung zur Beschreibung des experimentell realisierten Systems ergibt sich aus der Erweiterung der Gleichung 2.36 mit dem Potential der optischen Stehwelle (Gleichung 3.21)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} (m\omega_\rho^2 \rho^2 + m\omega_z^2 z^2) + s E_r \sin^2(kz) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.71)$$

Die numerische Lösung dieser zeitabhängigen Gleichung beruhen auf Algorithmen die im Rahmen der Doktorarbeit von T. Schulte entwickelt wurden [27]. Sie basieren auf der Implementation eines so genannten Crank-Nicholson Algorithmus zur Lösung der zylindersymmetrischen Gleichung.

Abbildung 3.8 zeigt den numerisch bestimmten Grundzustand eines Bose-Einstein-Kondensats für verschiedene Gittertiefen, sowie die Abhängigkeit der Ausdehnung des Kondensats und der Wechselwirkungsenergie von der Gittertiefe. Eine starke Modulation der Dichteverteilung aufgrund des optischen Gitters ist zu erkennen. Mit zunehmender Gittertiefe nimmt sowohl diese Modulation als auch die Ausdehnung des Kondensats und damit die Anzahl der besetzten Gitterplätze zu. Der stärkere Einschluss der Atome auf den einzelnen Gitterplätzen führt zu einer größeren Wechselwirkungsenergie pro Gitterplatz. Eine Minimierung der Gesamtenergie ist somit durch eine Verbreiterung des Bose-Einstein-Kondensats möglich. Änderungen der Gittertiefe müssen daher ausreichend langsam erfolgen, um zu gewährleisten, dass die Dichteverteilung der sich ändernden Grundzustandsverteilung folgen kann.

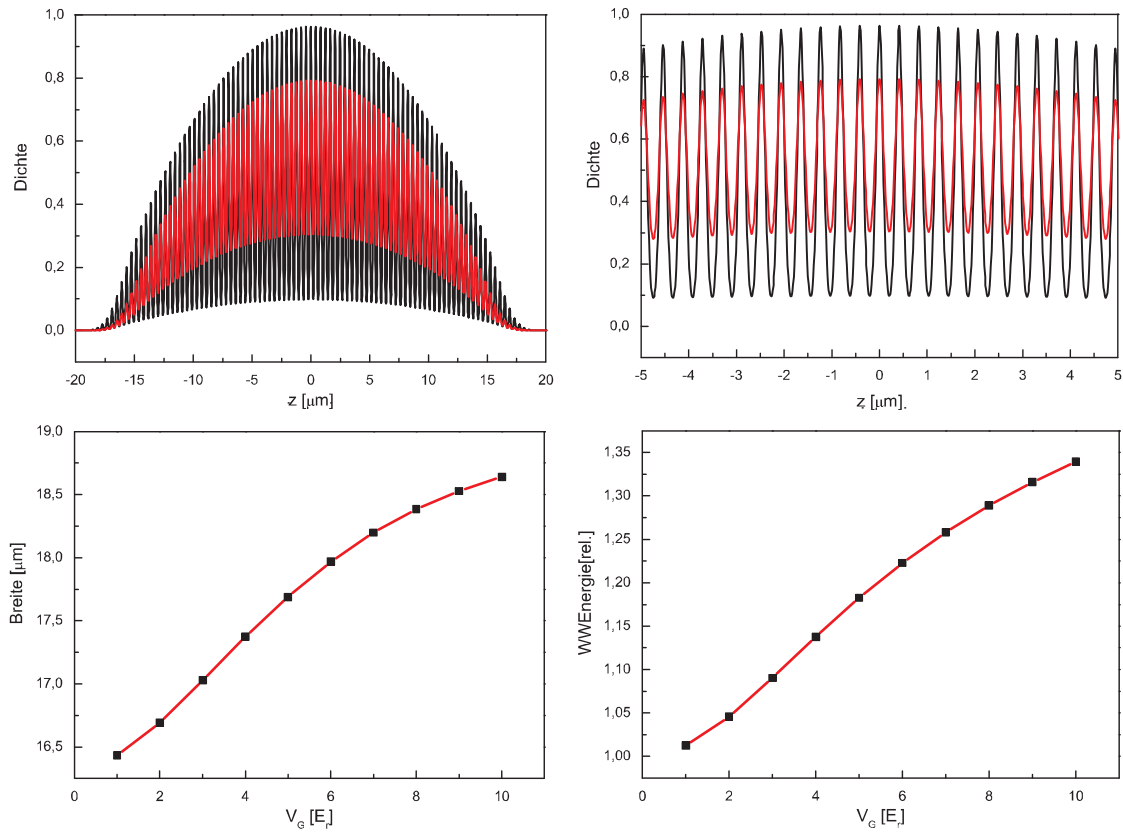


Abbildung 3.8: Grundzustand des optischen Gitters für verschiedene Gittertiefen. Das linke obere Bild zeigt die axiale Dichteverteilung eines Bose-Einstein-Kondensats in relativen Einheiten für $N=5 \times 10^4$, $\nu_\rho = 29\text{Hz}$ und $\nu_{ax} = 14\text{Hz}$ über die gesamte Ausdehnung des Kondensats, während im rechten der zentrale Bereich gezeigt wird. Die rote (schwarze) Kurve zeigt eine Gittertiefe von $2E_r$ ($5E_r$). Das Bild links unten zeigt den Radius des Kondensats und das rechte die Wechselwirkungsenergie als Funktion der Gittertiefe.

Eine umfangreiche Darstellung der Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in periodischen Potentialen findet sich in [53, 116, 114, 119]. Eine Beschreibung des Anregungsspektrums im Rahmen der Gleichung 3.71 und der Bogoliubov-Näherung erfolgt im Zusammenhang mit der Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten im optischen Gitter (Kapitel 4.1.2)

Freie Expansion

Da die räumliche Periodizität des optischen Gitters lediglich $0.5\mu\text{m}$ beträgt, ist eine direkte Untersuchung der Eigenschaften quantenentarteter Gittergase durch Absorptionaufnahmen der Dichteverteilung des Kondensats im optischem Gitter nur schwer möglich. Daher wird typischerweise mittels der Flugzeit-Methode das Impulsspektrum des Gittergases analysiert. Nach einer freien Expansion von ei-

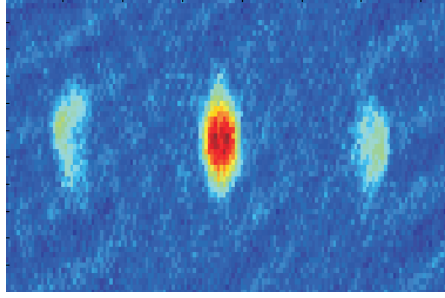


Abbildung 3.9: Absorptionsbild eines expandierten Bose-Einstein-Kondensats für eine Gittertiefe von $6.5E_r$ und eine Flugzeit von 20ms.

nigen ms entspricht die ortsabhängige Dichteverteilung der Impulsverteilung der atomaren Wolke zum Zeitpunkt des Ausschaltens, da die zurückgelegte Strecke vom jeweiligen Impuls abhängt [58]. Die quantitative Analyse des Impulsspektrums eines Bose-Einstein-Kondensats im optischen Gitter basiert auf der Analyse der entsprechenden Impulsverteilung eines einzelnen Teilchens im periodischen Potential (Abschnitt 3.2.1).

Allgemein gilt, dass das Impulsspektrum quantenmechanischer Teilchen der Fouriertransformierten ihrer Ortsverteilung entspricht [62]. Daher bedingt die periodische Ortsverteilung eines Gittergases ein diskretes Impulsspektrum. Die Besetzung der einzelnen Impulskomponenten hängt dabei von der Fouriertransformierten der Wellenfunktion eines Gitterplatzes ab, während die Impulsbreite der einzelnen Komponenten durch die Ausdehnung der Magnetfalle bestimmt wird. Die Ursache liegt in der unabhängigen Expansion der phasenkohärenten Wellenfunktionen der einzelnen Gitterplätze. Die Superposition der Teilwellen der einzelnen Gitterplätze führt nur für Impulse mit $p_z = n2\pi/d$ und ganzzahligem n zu einer konstruktiven Interferenz

$$\Psi(z) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(p_z z + np_z d)}, \quad (3.72)$$

da die Phasendifferenz der Teilwellen von benachbarten Gitterplätzen $\delta\phi = p_z d\hbar$ beträgt, und sich für $p_z = n2\pi/d$ somit nur um Vielfache von 2π unterscheiden. Die Besetzung der jeweiligen Impulskomponenten hängt von der Impulsverteilung der Wellenfunktion der einzelnen Gitterplätze ab, da selbstverständlich nur Impulse konstruktiv miteinander interferieren können, die überhaupt in der Expansion der Wellenfunktionen der einzelnen Gitterplätze vorkommen. Diese Interpretation zeigt die starke Analogie der Materiewellen-Interferenz und der Interferenz einer kohärenten Lichtwelle. Die Breite der Impulsverteilung der jeweiligen Maxima ist für nicht wechselwirkende Gittergase durch die Impulsbreite des Kondensats gegeben. Die Wechselwirkung zwischen den Atomen bedingt jedoch eine Verbreiterung der einzelnen Impulskomponenten. Diese so genannte selbstähnliche Expansion wird in [120, 60] ausführlich beschrieben. Die Separation der Impulskomponenten mit

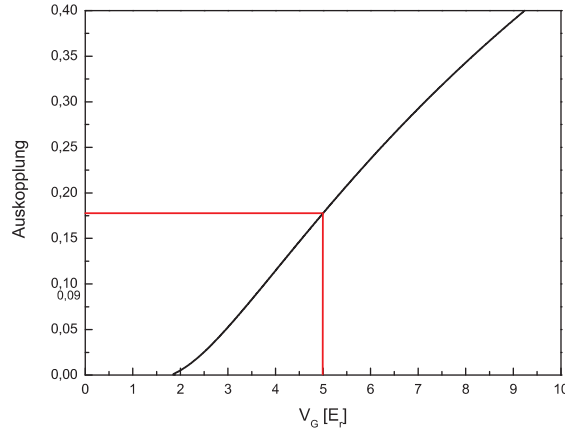


Abbildung 3.10: Relative Atomzahl in den ersten beiden Nebenmaxima in Abhängigkeit von der Gittertiefe. Die rote Markierung entspricht den Parametern der in Kapitel 3.3.4 beschriebenen experimentellen Untersuchung der Auskopplung.

$p = \pm 2\hbar k$ ist klar in Abbildung 3.9 zu erkennen, die ein typisches Absorptionssbild eines Bose-Einstein-Kondensats nach einer Flugzeit von 20ms zeigt.

Zur quantitativen Bestimmung der Besetzung der einzelnen Impulskomponenten ist die Beschreibung des Impulsspektrums eines einzelnen Teilchens in einem definierten Bloch-Zustand (Kapitel 3.2.1) auf ein atomares Ensemble mit endlicher Breite des Quasiimpulsspektrums zu verallgemeinern [121, 60].

Der Ansatz für die Wellenfunktion des Kondensats

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f(z - ld), \quad (3.73)$$

der auf der Summation der auf den einzelnen Gitterplätzen lokalisierten Funktionen $f(z - ld)$ beruht, kann aufgrund seiner Periodizität in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$\Psi(\mathbf{p}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{i2lq_B z}. \quad (3.74)$$

Dabei stellt das Quadrat der Koeffizienten c_l analog zu Gleichung 3.37 die relative Besetzung der entsprechenden Komponenten dar. Sie entsprechen der Fouriertransformierten der Ortsverteilung zum jeweiligen Impuls [72]

$$c_l = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} f(z) e^{-i2lq_B z}. \quad (3.75)$$

Für tiefe Gitter ($V_G > 20E_r$) kann die Ortsverteilung $f(z)$ näherungsweise mittels einer Gaußfunktion dargestellt werden [121], da sie der funktionalen Ortsabhängigkeit des harmonischen Grundzustandes entspricht

$$f(z) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sigma^{1/4}} e^{-z^2/2\sigma^2}. \quad (3.76)$$

Damit kann das Integral (3.75) explizit ausgerechnet werden, und es folgt für die einzelnen Fourierkoeffizienten

$$c_l \propto e^{-4l^2 q_B^2 \sigma^2}. \quad (3.77)$$

Für die relative Besetzung $P_{\pm 1}$ der ersten Beugungsordnungen ergibt sich somit

$$P_{\pm 1} = \frac{c_{\pm 1}}{c_0} = e^{-4l^2 q_B^2 \sigma^2}. \quad (3.78)$$

Dieses Modell wurde in [122] mittels eines Variationsansatzes zur Bestimmung der Breite des Gaußförmigen Potentials auf Gittertiefen $V_G > 5E_r$ erweitert. Damit ergibt sich der Zusammenhang zwischen der Gittertiefe und der Besetzung der ersten und minus ersten Beugungsordnung

$$V_G[E_r] = \frac{16}{[\ln(P_{\pm 1})]^2} P_{\pm 1}^{-1/4}. \quad (3.79)$$

Abbildung 3.10 zeigt die Abhängigkeit der Auskopplung ($P_{+1} + P_{-1}$) von der Gittertiefe.

3.3 Experimentelle Realisierung

Dieser Abschnitt erläutert die experimentelle Realisierung des 1D optischen Gitters, das im Rahmen dieser Arbeit neu konzipiert wurde. Dazu wird zunächst der optische Aufbau sowie die experimentelle Prozedur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern detailliert erläutert. Nach der anschließenden Beschreibung des erweiterten Justageschemas des optischen Gitters folgen Abschnitte zur Eichung der Gittertiefe und zur Adiabaticität der Gitterrampe.

3.3.1 Aufbau

Der Aufbau des optischen Gitters ist schematisch in der Abbildung 3.3 gezeigt. Das Gitter wird durch die Rückreflektion eines fernresonanten Laserstrahls realisiert. Die Interferenz des einlaufenden und des reflektierten Strahls führt zur Ausbildung eines periodischen Potentials. Zur Erzeugung hoher Intensitäten und somit tiefer Gitter werden beide Strahlen jeweils auf den Ort der Atomwolke fokussiert. Die Überlagerung des Gitterlasers mit den entlang dieser Achse verlaufenden Laserstrahlen der magneto-optischen Falle erfolgt mittels der Manipulation ihrer Polarisationen (Abbildung 3.11). Durch das pneumatische Einfahren bzw. Entfernen von Verzögerungsplättchen werden die Polarisationen der Laserstrahlen in den verschiedenen Phasen des Experiments so eingestellt, dass sie nach Propagation durch die Strahlteilerwürfel die Atome mit der benötigten Polarisation erreichen (σ_+ bzw. σ_- Licht für die Mot und linear polarisiertes Licht für das optische Gitter).

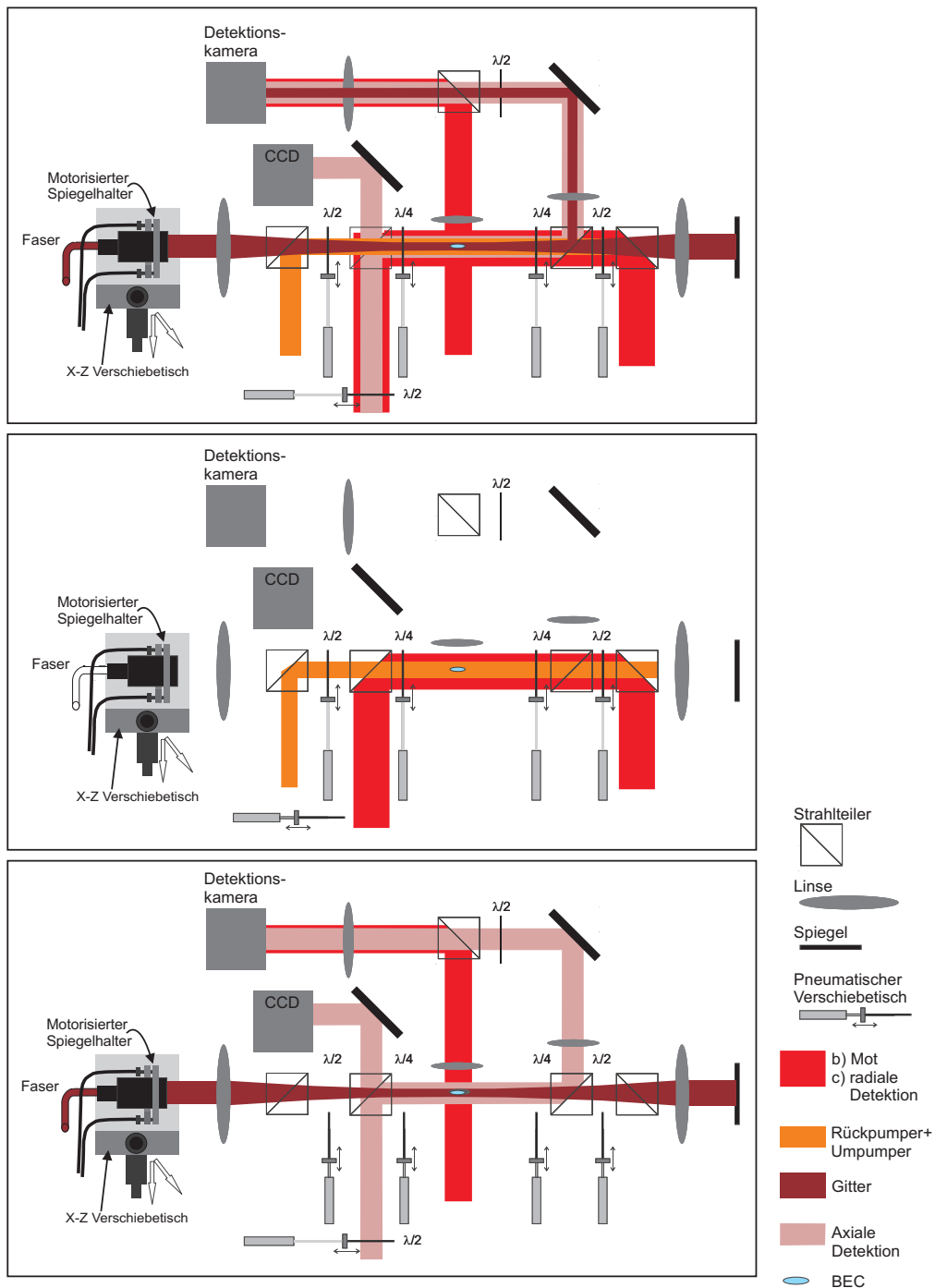


Abbildung 3.11: Strahlengang des optischen Gitters. Das obere Bild zeigt den kompletten Aufbau. Das mittlere Bild zeigt die Konfiguration während der MOT-Phase. Sämtliche Verzögerungsplättchen der MOT- und Rückpumper-Strahlen befinden sich im Strahlengang, und nur diese Laserstrahlen sind eingeschaltet. Das untere Bild entspricht der Konfiguration nach der Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats. Die Verzögerungsplättchen der MOT Strahlen wurden aus dem Strahlengang entfernt, und das $\lambda/4$ Plättchen der axialen Detektion in den Strahlengang bewegt.

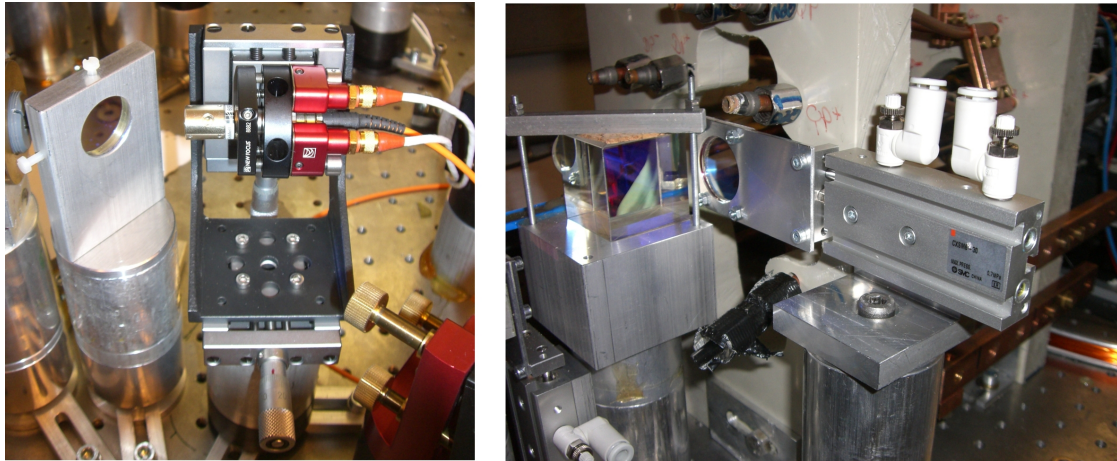


Abbildung 3.12: Photo des motorisierten Spiegelhalters (links) und der pneumatischen Verschiebemeik (rechts).

Da leichte Variationen in der Position der Verzögerungsplättchen aufgrund ihrer sehr geringen Dicke zu keiner signifikanten Änderung der Strahlage der Laserstrahlen führen, ist die Strahlage ausschließlich durch unbewegliche Strahlteiler und äußerst stabile Spiegel definiert. Der Laserstrahl wird zur Gewährleistung eines perfekten gaußförmigen Profils in eine polarisationserhaltende Faser eingekoppelt. Der zur Kollimation des Laserstrahls nach der Faser verwendete Auskoppler befindet sich in einem motorisierten Spiegelhalter, der auf zwei μm Verschiebetisch montiert ist (Abbildung 3.12). Er zeichnet sich durch eine äußerst präzise Einstellbarkeit (siehe Abschnitt 3.3.2) sowie sehr geringe Drifts aus, und ist für die Winkeleinstellung des Strahls verantwortlich, während die Verschiebetische der x-z Translation dienen. Die so erzielte Trennung dieser Freiheitsgrade vereinfacht die Justage der Strahlage erheblich, bei gleichzeitig geringer Anzahl an potentiell instabilen optischen Elementen. Der Einbau einer weiteren CCD Kamera der Firma IDS-Imaging Development Systems (Model UI-1210-MM) zur Aufnahme des Gitter- und Detektionsstrahls erleichtert zudem das in Abschnitt 3.3.2 beschriebene Schema zur Vorjustage des Gitters.

Die resultierende hohe Stabilität hat zur Folge, dass eine Justage des Gitters nur alle fünf Wochen notwendig ist, während die MOT, die unempfindlicher gegen Strahlage-Variationen ist, keinerlei Justage erfordert.

Die Komponenten und Parameter des 1D optischen Gitters sowie der axialen Detektion wurden wie folgt gewählt:

- **Laser:** Als Laserquelle dient ein Titan-Saphir Laser der Firma Tecknoscan (Model TIS-SF-07e), der durch einen frequenzverdoppelten Neodym-Vanadat-Laser (Firma Coherent, Model Verdi V10) gepumpt wird. Zur Realisierung eines fernresonanten optischen Gitters mit einer vernachlässigbaren

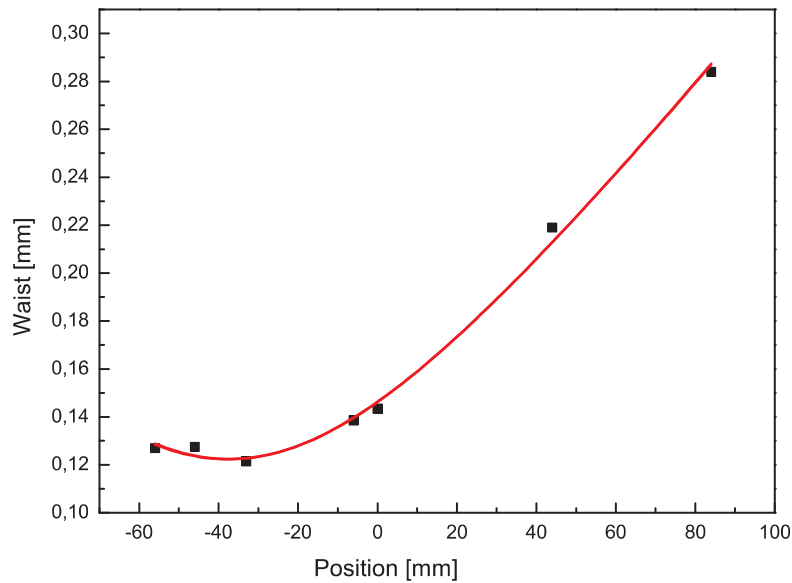


Abbildung 3.13: Bestimmung des Strahlradius am Ort der Atome.

Streurate von unter $0.05s^{-1}$ (Gleichung 3.8) wurde die Wellenlänge mittels interner frequenzselektiver Stellelemente auf 825nm eingestellt. In Kombination mit dem gewählten Strahlradius und der maximal zur Verfügung stehenden Leistung von 200mW am Ort der Atome hat dies eine maximalen Gittertiefe von ca. $60E_r$ zur Folge.

- Strahlradius:** Die Kombination der Faser (Schäfter+Kirchhoff, Typ PMC85-5.2-NA011-3-APC-300P) mit dem verwendeten Auskoppler (Typ 60FC-4-A15-02) erzeugt einen kollimierten Strahl mit einem $1/e^2$ Radius von 1,4 mm. Die Brennweite des ersten Achromaten, der den einlaufenden Strahl auf den Ort der Atomwolke fokussiert, beträgt $f=700$ mm und hat einen berechneten Strahlradius von ca $138\mu m$ am Ort der Atome zur Folge. Zur experimentellen Überprüfung wurde er in verschiedenen Abständen zum Achromaten mittels einer hoch auflösenden Kamera (Dataray WimCamD) vermessen. Durch einen Fit des funktionalen Zusammenhangs aus Gleichung 3.12 an die Messdaten (Abbildung 3.13) ergab sich in guter Übereinstimmung mit dem theoretisch erwarteten Wert ein Strahlradius von $143,5\mu m$. Der divergente Strahl wird im Abstand von 46,6cm zu den Atomen durch einen Achromaten der Brennweite $f=500$ mm kollimiert und nach Reflektion an einem Planspiegel durch denselben Achromaten wieder fokussiert. Der resultierende Strahlradius am Ort der Atome beträgt $145\mu m$ und ist somit nahezu identisch zum Radius des einlaufenden Strahls.
- motorisierter Spiegelhalter** Die verwendeten motorisierten Spiegelhalter zeichnen sich neben äußerst geringen Langzeitdrifts durch eine hohe Positio-

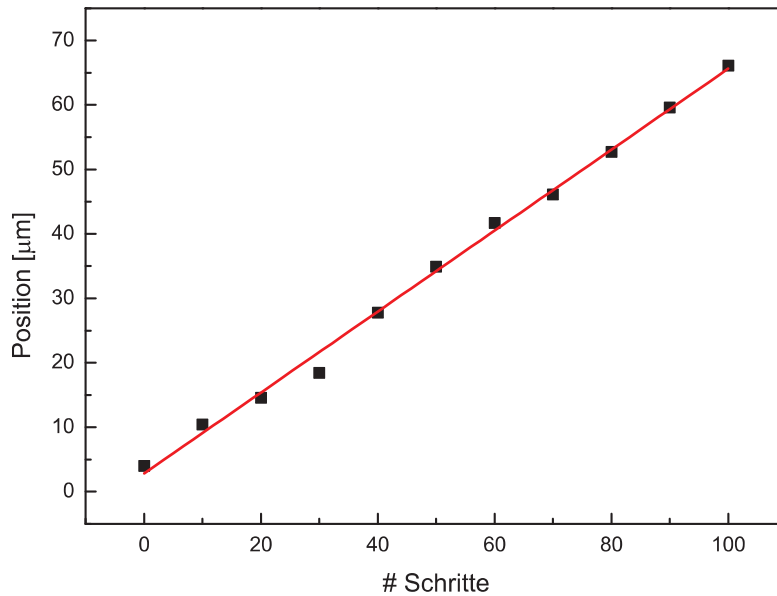


Abbildung 3.14: Eichung des Versatzes des Gitterlasers am Ort der Atome in Abhängigkeit von der Schrittzahl des motorisierten Spiegelhalters.

niergenauigkeit aus. Zur Eichung wurde der Versatz des Gitterlasers am Ort der Atome unter Variation der Piezoposition anhand eines Testaufbaus bestimmt, indem jeweils die Position des gaußförmigen Strahls mit einer hochauflösenden Kamera (Dataray WimCamD) gemessen wurde. Dies ergab einen Versatz von $0,62 \mu\text{m}$ für die geringste wählbare Schrittgröße des motorisierten Spiegelhalters (Abbildung 3.14), der verglichen mit der radialen Größe des Kondensats von ca $20 \mu\text{m}$ (Abschnitt 4.2.1) und der Größe der Gitterstrahls äußerst gering ist.

- **Intensitätsstabilisierung** Zur Kontrolle der Gittertiefe wird die Laserleistung mittels eines Regelkreises stabilisiert. Dazu wird ein kleiner Teil der Laserleistung ($< 1\%$) durch ein Anti-Reflex beschichtetes Glasplättchen direkt nach der optischen Faser aus dem Strahlengang abgezweigt, und mit einer Photodiode detektiert. Durch Variation des Referenzsignals können beliebige Gitterrampen erzeugt werden.

3.3.2 Justage des optischen Gitters

Die Justage des Gitterstrahls erfolgt mittels einer zweistufigen Prozedur. Die erste Stufe beruht auf der Überlagerung des Gitterlasers mit dem axialen Detektionsstrahl und wurde [27] entwickelt. Anschließend erfolgt eine ausführliche Beschreibung der Feinjustage des Gitterstrahls anhand der Dipolkräfte gaußförmiger Strahlen.

Vorjustage

Die Vorjustage des optischen Gitters beruht auf der Überlagerung des Gitterstrahls ($\omega_0 \approx 144\mu m$) mit dem deutlich größeren axialen Detektionsstrahl ($\omega_0 = 20mm$), der die Atome auf die Detektions-Kamera abbildet (Abbildung 3.11). Die Größe dieses Strahls ist ausreichend, um die Atome nach rein geometrischer Vorjustage zu treffen. Anhand des Absorptionssignals kann er in einem iterativen Verfahren mittig auf die Position der Atome eingestellt werden. Anschließend wird der Gitterstrahl dem Verlauf des Detektionsstrahls an zwei Stellen überlagert und somit ebenfalls auf die Position der Atome justiert. Um eine ausreichende Genauigkeit der Überlagerung sicherzustellen, beruht sie auf der Verwendung der Detektions-Kamera sowie einer zusätzlich vor der Position der Atome montierten Kamera der Firma IDS. Dabei wird das Maximum des Gitterlasers jeweils auf die zuvor bestimmten Positionen des Detektionslasers justiert.

Feinjustage mit Dipolkräften

Die Feinjustage des optischen Gitters beruht auf der Dipolkraft des gaußförmigen Gitterstrahls. Daher wird der rücklaufende Strahl während dieses Verfahrens blockiert. Ist der Strahl nicht exakt mit der Falle überlagert, verschiebt der Gradient des Dipolpotentials die atomare Wolke jeweils in Richtung des Zentrums des Strahls. Die Stärke dieser Auslenkung ist proportional zur Kraft und somit zum Potentialgradienten des Intensitätsprofils (Gleichung 3.14)

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -\nabla V_{Gauss}(\mathbf{r}) = \nabla \left[V_0 e^{\left(-\frac{2\mathbf{r}^2}{w^2(z_A)}\right)} \right] I_0(z_A). \quad (3.80)$$

Dabei wird der Ort der Atome mit z_A bezeichnet. Für die Kraftkomponente in x-Richtung folgt

$$F_x = V_0 \frac{\partial}{\partial x} e^{\left(-\frac{2\mathbf{r}^2}{w^2(z_A)}\right)} I_0(z_A) \quad (3.81)$$

$$= -\frac{4x}{\omega^2} V_0 e^{\left(-\frac{2\mathbf{r}^2}{w^2(z_A)}\right)}. \quad (3.82)$$

Sie ist proportional zur Intensität $I_0(z_A)$. Somit führt eine hohe Leistung im Strahl zu einer großen Auslenkung der Wolke in der Falle. Die Feinjustage des Gitters wird daher mit einer Leistung von 150mW im Strahl durchgeführt. Nach der Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats in der runden Falle wird das optische Potential für 2.5ms eingeschaltet. Anschließend werden Magnetfalle und optisches Potential simultan ausgeschaltet und die Position der Atome nach 16ms TOF detektiert.

Zur Justage des Gitterstrahls sind in einem iterativen Verfahren jeweils der Versatz zur Referenzposition in x und y Richtung zu bestimmen, und der Strahl mittels

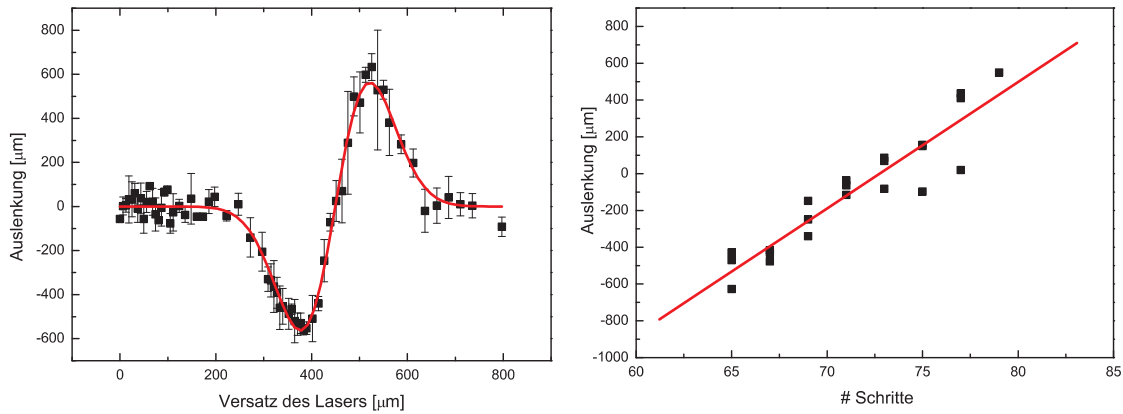


Abbildung 3.15: Justageschema des Optischen Gitters. Die linke Bild zeigt die Auslenkung der atomaren Wolke in Abhängigkeit vom Versatz des Laserstrahls am Ort der Atome nach einer Flugzeit von 16ms. Das rechte Bild zeigt den zentralen Bereich des linken Bildes in Abhängigkeit von der kleinsten ansteuerbaren Schrittgröße des motorisierten Spiegelhalters.

des Piezospiegels in die entgegengesetzte Richtung zu bewegen. Mehrfaches Wiederholen dieses Zyklus führt schließlich zu einem Verschwinden des Versatzes und somit zu einer perfekten Überlagerung des Dipolpotentials mit der Magnetfalle.

Die Sensitivität dieser Methode zeigt sich deutlich in der Abbildung 3.15. Der linke Graph zeigt die Auslenkung der Atomwolke in vertikaler Richtung als Funktion der Verschiebung des Laserstrahls am Ort der Atome, die durch die Eichkurve (Abbildung 3.14) berechnet wurde. Die rote Linie entspricht einem Fit mit Gleichung 3.82, der einen Strahlradius von $\omega_A = 145,3\mu m$ am Ort der Atom ergab. Die hervorragende Übereinstimmung mit der direkten Messung des Strahlradius (Abbildung 3.13) zeigt die Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Methode. Der rechte Graph zeigt den zentralen Bereich des Auslenkprofils als Funktion der Verschiebung der Spiegelposition in Einheiten der kleinsten ansteuerbaren Schrittgröße des Piezos. Er verdeutlicht die Sensitivität der Methode und die Präzession mit der die motorisierte Spiegelhalter angesteuert werden. Für die zur Messung der Kurve verwendete Leistung von 150mW führt bereits ein Versatz des Laserstrahls von $0,62\mu m$ relativ zur Position des Magnetfallenzentrums (ein Schritt des motorisierten Spiegelhalters) zu einer Veränderung der Position der atomaren Wolke von $11,1\mu m$. Dies ergibt eine Justage-Genauigkeit des Gitterlasers von ca $2\mu m$. Sie beträgt somit weniger als 2 Prozent des Strahlradius.

3.3.3 Eichung des Gitters

Die Eichung des Gitters beruht auf der in Kapitel 3.2.1 beschriebenen Entstehung von weiteren Dichtemaxima während der freien Expansion des Kondensats nach gleichzeitigem Ausschalten des Gitter- und Magnetfallenpotentials. Dort wur-

de vorausgesetzt, dass sich das Kondensat beim Ausschalten in einem einzigen Bloch-Zustand, also einem Eigenzustand des Systems befindet, dessen Präparation wird in Abschnitt 3.3.4 beschrieben. Aus dem Verhältnis der Atomzahlen in den jeweiligen Maxima kann prinzipiell direkt auf die Gittertiefe geschlossen werden [121, 123]. Da die Besetzung der Seitenbänder bei einer Expansion aus dem Eigenzustand des Systems jedoch für typische Gittertiefen weniger als 20% Prozent beträgt, und die Teilchenzahlbestimmung aufgrund verschiedenster Rauschbeiträge in den Absorptionenaufnahmen einer großen Unsicherheit unterliegt, wurde ein anderes Verfahren gewählt³. Dabei wird das Gitter abrupt eingeschaltet. Das Kondensat befindet sich somit nicht im Grundzustand dieses periodischen Systems, dies führt zu einer Oszillation der Besetzung des zentralen Maximum, aus der die Gittertiefe extrahiert werden kann. Die Bestimmung dieser Oszillationsfrequenz ist aufgrund der größeren Teilchenzahlen im zentralen Maximums und der mittelnden Eigenschaften der sinusförmigen Fit-Routine deutlich unempfindlicher gegenüber Fehlern in der Bestimmung der Absolutzahl der ausgekoppelten Atome.

Das Gitters wird eine Millisekunde nach dem Ausschalten des Magnetfallenpotential, also während des freien Falls, abrupt eingeschaltet und nach einer variablen Pulsdauer τ von einigen μs wieder ausgeschaltet. Beschreibungen dieses Verfahrens finden sich unter anderem in [124, 125, 122]. Die Messung erfolgt im freien Fall, um Einflüsse durch die Magnetfalle auszuschließen und die Dichte und somit die Stoßrate zwischen den Atomen zu reduzieren [27]. Ansonsten würde die Trennung der Impulskomponenten zu einer starken radialen Streuung, dem so genannten s-Wellen-Halo führen [126, 127], und die Bestimmung der Gewichtung der einzelnen Maxima beeinträchtigen.

Das radiale Profil des Gitterlasers (Strahlradius $142\mu m$) führt für den freien Fall der Atome von $4,9\mu m$ lediglich zu einer Reduktion der Gittertiefe von 0.2 Prozent ($I(4,9\mu m)/I(0) = 0,998$) verglichen mit der Intensität im Strahlmittelpunkt, und kann daher vernachlässigt werden.

Erläuterung des Eichverfahrens

Das schlagartige Einschalten des Gitters hat zur Folge, dass die Eigenfunktionen freier Teilchen nicht länger die Eigenzustände des Systems sind. Zur Berechnung der Zeitentwicklung während des Pulses ist daher der Zustand des Kondensats zum Zeitpunkt des Einschaltens $|\Psi(t=0)\rangle$ auf die neue Eigenbasis (Gleichung 3.31) zu projizieren. Da die Impulsbreite des Kondensats verglichen mit der Ausdehnung der Brillouin-Zone als scharf angesehen werden kann (Gleichung 3.61), entspricht der Eigenzustand zu diesem Zeitpunkt einer ebenen Welle

$$|\Phi(k_{A_0})\rangle = e^{ik_{A_0}z} \quad (3.83)$$

³Einen Vergleich der Eichmessung mit der direkten Bestimmung der Gittertiefe aus dem Impulsspektrum eines Kondensats im Grundzustand erfolgt in Kapitel 3.3.4.

mit dem Wellenvektor⁴ $k_{A_0} = p/\hbar$. Die Projektion auf die neue Eigenbasis bedeutet, dass der Zustand durch eine Superposition von Bloch-Zuständen zu beschreiben ist. Beim Wechsel des Bezugssystems wird jedoch kein Impuls übertragen, daher sind bei der Projektion nur Bloch-Zustände relevant, deren Quasiimpuls dem Wellenvektor $q = k_{A_0}$ entspricht, und die somit zu verschiedenen Bändern gehören. Während des Pulses entwickeln sich die Phasen der einzelnen Komponenten der Superposition in Abhängigkeit ihrer Energie $E_n(q)$ gemäß [62]

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(q)t}. \quad (3.84)$$

Das Ausschalten des Gitters entspricht der Rück-Projektion des Zustandes auf die Basis freier Teilchen und ist somit durch eine Superposition aus ebenen Wellen zu beschreiben. Durch die unterschiedliche Zeitentwicklung der einzelnen Komponenten der Superposition im Gitter hängt die Besetzungswahrscheinlichkeit der einzelnen Komponenten während der freien Expansion von der Pulsdauer ab. Daher entsteht ein vom Energieabstand der Bänder abhängendes oszillatorisches Verhalten der Gewichtung dieser Komponenten, die sich im TOF als zusätzliche Impulskomponenten vom zentralen Maximum abspalten. Die Messung der Oszillationsfrequenz erlaubt somit Rückschlüsse auf die Gittertiefe.

Theoretische Beschreibung

Zur Berechnung der Abhängigkeit der Oszillationsfrequenz von der Gittertiefe ist insbesondere die Darstellung der Bloch-Eigenzustände $|\Psi_{q,n}\rangle$ in der Basis freier Teilchen $|\Phi(k_A)\rangle$ hilfreich [124]. Aus Gleichung 3.31 und der Umformung

$$\Psi_{q,n}(z) = e^{iqz}u_{q,n}(z) \quad (3.85)$$

$$= \sum_l c_l^{q,n} e^{i(q+2lq_B)z}, \quad (3.86)$$

folgt

$$|\Psi_{q,n}\rangle = \sum_l c_l^{q,n} |\Phi(q + 2lq_B)\rangle. \quad (3.87)$$

Mit dem Zustandsvektor beim Einschaltens des Gitters ($t = 0$)

$$|\Psi(t = 0)\rangle = |\Phi(k_{A_0})\rangle \quad (3.88)$$

und der Definition $k_{A_0} = k_A(t = 0)$ für den Wellenvektor des Ensembles zu diesem Zeitpunkt ergibt sich folgende Darstellung der ebenen Welle im Eigensystem des Gitters

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \sum_n \langle \Psi_{q,n} | \Phi(k_{A_0}) \rangle |\Psi_{q,n}\rangle. \quad (3.89)$$

⁴Zur Vermeidung von Verwechslungen mit der Wellenzahl des Gitterlasers k werden die Wellenvektoren des freien Teilchens in diesem Kapitel mit k_A bezeichnet

Da sämtliche Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit mit Impulsen $\hbar k_{A_0} < q_B$ durchgeführt wurden, kann die Betrachtung auf Werte von k_{A_0} innerhalb der ersten Brillouin-Zone beschränkt werden. Damit folgt für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{q,n} | \Phi(k_{A_0}) \rangle &= \sum_l c_l^{q,n} \langle \Phi(q + 2lq_B) | \Phi(k_{A_0}) \rangle \\ &= c_0^{k_{A_0},n}. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Bei der Projektion auf die Basis der Bloch-Zustände sind daher jeweils nur die Zustände der verschiedenen Bänder zu berücksichtigen, deren Quasiimpuls dem Impuls der ebenen Welle k_{A_0} entspricht. Mit der Darstellung von Gleichung (3.91) folgt für den Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$

$$|\Psi(t=0)\rangle = \sum_n c_{l=0}^{k_{A_0},n} |\Psi_{q,n}\rangle. \quad (3.91)$$

Mit dem Zusammenhang (3.84) erhält man für die Zeitentwicklung des Zustands

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(q)t} c_{l=0}^{k_{A_0},n} |\Psi_{k_{A_0},n}\rangle. \quad (3.92)$$

Das Ausschalten des Gitters zum Zeitpunkt τ projiziert diesen zeitabhängigen Zustand wiederum auf die Basis freier Teilchen

$$\langle \Phi(k_A) | \Psi(\tau) \rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(q)t} c_{l=0}^{K_{A_0},n} \langle \Phi(k_A) | \Psi_{k_{A_0},n} \rangle, \quad (3.93)$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \Phi(k_A) | \Psi_{k_{A_0},n} \rangle = \sum_l c_l^{k_{A_0},n} \langle \Phi(k_A) | \Phi(k_{A_0}) \rangle \quad (3.94)$$

$$= \sum_l c_l^{k_{A_0},n} \delta_{k_A, k_{A_0} + 2lq_B}. \quad (3.95)$$

Aus dem Kronecker-Delta $\delta_{k_A, k_{A_0} + 2lq_B}$ folgt, dass das Impulsspektrum nach dem Ausschalten des Gitters nur Impulse mit $\hbar k_A = \hbar k_{A_0} + 2\hbar l q_B$ beinhaltet. Dies ist anschaulich direkt zu verstehen, da im fernresonanten, dissipationsfreien optischen Gitter ein Übertrag von Impulsen auf die Atome nur durch die Absorption von Photonen aus dem einen Strahl und stimulierte Emission in den jeweils anderen Strahl erfolgen kann. Es können daher in der Zeitentwicklung nur Impulskomponenten entstehen, die um ein vielfaches von $2\hbar k$ vom Ursprungsimpuls abweichen. Mit der von der Pulsdauer abhängigen Besetzungswahrscheinlichkeit (Gleichung 3.93) dieser Komponenten ergibt sich für den Zustand

$$|\Psi(\tau)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(K_{A_0})t} c_0^{K_{A_0},n} c_m^{K_{A_0},n} |\Phi(k_{A_0} + 2mq_B)\rangle. \quad (3.96)$$

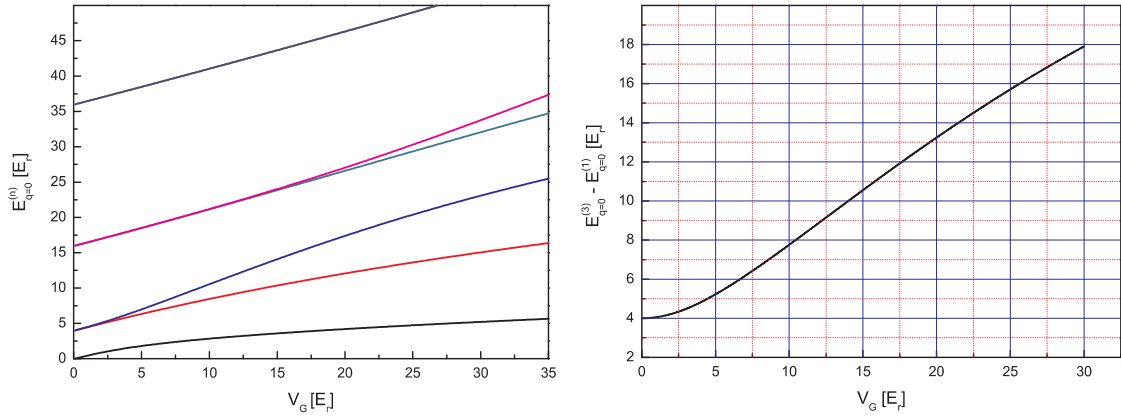


Abbildung 3.16: Energie der niedrigsten Bänder (links) und die Energiedifferenz des nullten und des zweiten Bandes (rechts) als Funktion der Gittertiefe für $q = 0$.

Dieses Ergebnis wird im folgenden in Hinblick auf die Parameter der experimentellen Sequenz stark vereinfacht. Da alle durchgeführten Experimente zur Eichung des Gitters mit Bose-Einstein-Kondensaten im Grundzustand der Magnetfalle durchgeführt wurden, gilt $k_{A_0} = 0$. Des Weiteren werden bei der Projektion (Gleichung 3.91) des symmetrischen Grundzustandes auf die Eigenbasis des periodischen Systems nur symmetrische Eigenfunktionen besetzt [124], also Bänder mit geraden Indizes 0,2,4..., da das Skalarprodukt zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Zuständen verschwindet [62]. Die verwendeten verhältnismäßig geringen Gittertiefen führen zudem nur zu einer signifikanten Besetzung der beiden niedrigsten symmetrischen Bänder. Insgesamt folgt daher aus dem Zustandsvektor

$$|\Psi(\tau)\rangle = \sum_{1,2} c_0^{0,n} \underbrace{c_m^{0,n}}_{a_m^n} e^{-\frac{i}{\hbar} E_n(0)t} |\Phi(k_{2mq_B})\rangle \quad (3.97)$$

für die Besetzungswahrscheinlichkeit $|b(0)|^2$ des zentralen Dichtemaximums

$$|b(0)|^2 = |a_0^1|^4 + |a_0^3|^4 + |a_0^1|^2 |a_0^3|^2 \times (e^{-i(E_1(0)-E_3(0))\tau/\hbar} + e^{+i(E_1(0)-E_3(0))\tau/\hbar}). \quad (3.98)$$

Mit der Exponentialdarstellung der trigonometrischen Funktionen ergibt dies eine sinusförmige Oszillation der Besetzungswahrscheinlichkeiten mit der Zeitkonstante

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_3(0) - E_1(0)}. \quad (3.99)$$

Sie hängt direkt vom Energieabstand des nullten und des zweiten Bandes und somit von der Gittertiefe ab. In Abbildung 3.16 ist sowohl die Energie der einzelnen der Bänder für $q = 0$ als auch die Energiedifferenz zwischen dem nullten und dem zweiten Band in Abhängigkeit von der Gittertiefe gezeigt.

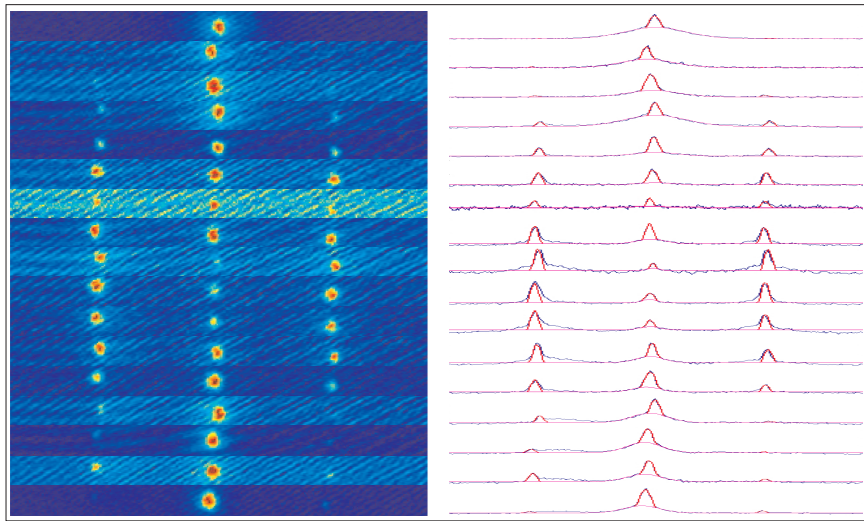


Abbildung 3.17: Absorptionaufnahmen der atomaren Wolke für eine Leistung des Laserstrahls von 43mW. Die Dauer des Laserpulses erhöht sich von oben nach unten jeweils um $2\mu\text{s}$.

Experimentelle Ergebnisse

Nach einem freien Fall von 1ms erfolgt ein Puls variabler Länge von einigen μs . Nach einer zusätzlichen Fallzeit von 29ms wird das Bose-Einstein-Kondensat radial mittels einer Absorptionaufnahme detektiert. Da das Dichteprofil im Flugzeitverfahren dem Impulsspektrum des Kondensats entspricht, trennen sich die Seitenbänder vom zentralen Dichtemaximum ab, und es ergibt sich das für Absorptionaufnahmen expandierender Gittergase typische Bild mehrerer atomarer Maxima. Zur Eichung des 1D Gitters wurde die Atomzahl im zentralen Maximum für verschie-

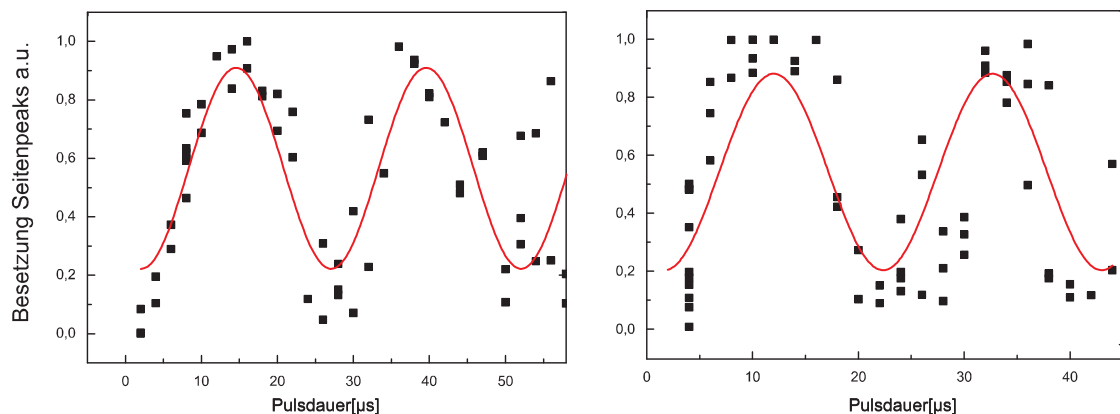


Abbildung 3.18: Relative Atomzahl im zentralen Maximum in Abhängigkeit von der Oszillationszeit für verschiedene Gittertiefen (Linkes Bild: 62mW, rechtes Bild: 72mW).

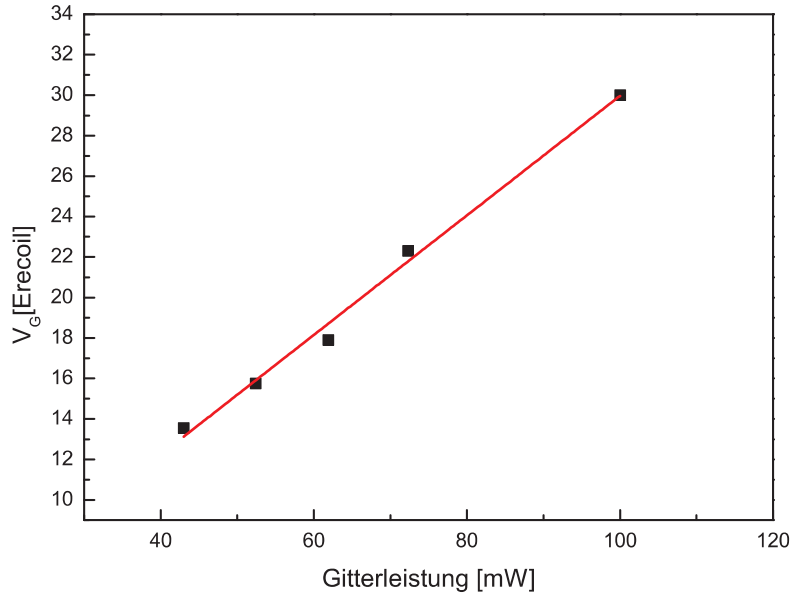


Abbildung 3.19: Eichung der Gittertiefe in Abhängigkeit von der Laserleistung

dene Leistungen des Gitterstrahls durch einen Fit mit dem Thomas-Fermi Profil (Gleichung 2.57) an die einzelnen Maximums bestimmt. Abbildung 3.17 zeigt Absorptionenaufnahmen, sowie das zugehörige Dichteprofil einer Oszillationsperiode für Leistungen im Gitterstrahl von 43mW. Die Oszillationen der Teilchenzahl in Abhängigkeit von der Pulsdauer ist in Abbildung 3.18 für verschiedene Leistungen gezeigt. Die resultierende Eichkurve der Gittertiefe in Abhängigkeit von der Laserleistung findet sich in Abbildung 3.19. Ein linearer Fit an die Daten ergibt eine Gittertiefe von $0.3E_r/mW$ bei einer Unsicherheit von 5%. Die Abweichung zur theoretischen Vorhersage von $0.58E_r/mW$ resultiert zu einem bedeutenden Teil aus Leistungsverlusten an den verschiedenen optischen Elementen. Insgesamt befinden sich 6 optische Strahlteiler (Transmission: 0.97% pro Strahlteiler), 3 Linsen (T:0.93;0.99;0.99), und 3 Glasflächen der Vakuumkammer (T:0.97/Fläche) im Strahlengang (Hin- und Rückreflex). Insgesamt ergibt dies einen Verlust von 31% und führt auf einen korrigierten theoretischen Wert von $0.4E_r/mW$. Die verbleibende Abweichung von 25% kann Unregelmäßigkeiten im Strahlprofil und der Polarisation des Laserstrahls angelastet werden.

3.3.4 Einschaltsequenz

Aus der beschriebenen Eichprozedur ist unmittelbar ersichtlich, dass das optische Gitter zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten im Grundzustand des kombinierten Potentials nicht instantan eingeschaltet werden kann, da so auch höhere Bänder besetzt würden. Stattdessen wird die Gitterintensität langsam erhöht, um sicherzustellen, dass das Kondensat dem sich verändernden System folgen kann und somit jederzeit im sich anpassenden Grundzustand bleibt. Bei der Wahl der Zeitskala dieser adiabatischen Rampe sind sowohl die Änderung der Bandstruktur (Einteilchen-Effekt) als auch die Modifikation des Vielteilchen-Grundzustandes zu beachten.

Adiabatizität bezüglich der Bandstruktur

Die Veränderung der Potentialtiefe während der Gitterrampe führt zu einem zeitabhängigen Hamiltonoperator ($H(t)$) des Systems. Daher sind die Eigenzustände des Systems ebenfalls nicht konstant, sondern im Prinzip zu jedem Zeitpunkt separat zu bestimmen. Für sehr langsame Änderungen des Hamiltonoperators kann der Zustand der einzelnen Teilchen dieser Änderung folgen und bleibt folglich zu jedem Zeitpunkt im Grundzustand des Systems. Eine zu schnelle Rampe hingegen hat zur Folge, dass der unveränderte Zustand des Teilchens in der sich verändernden Eigenbasis des Systems dargestellt werden muss, und somit aus einer Superposition der neuen Eigenzustände besteht (Im Grenzfall einer stufenförmigen Änderung ergibt sich die in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Situation). Da die Veränderung der Gittertiefe aber keinen Impulsübertrag auf die Atome zur Folge hat, ist der Quasiimpuls eine Erhaltungsgröße. Daher wird im Verlaufe dieses Kapitels auf den entsprechenden Index verzichtet. Für langsame Änderungen des Hamiltonoperators kann die Eigenwertgleichung zu jedem einzelnen Zeitpunkt separat gelöst werden [128, 62]

$$H(t) |u_n(t)\rangle = E_n(t) |u_n(t)\rangle. \quad (3.100)$$

Mit den zeitabhängigen Eigenzuständen $|u_n(t)\rangle$ und den Eigenwerten $E_n(t)$ des optischen Gitters ergibt sich für die Darstellung eines beliebigen Zustandes $|\Psi(t)\rangle$ in der Eigenbasis des optischen Gitters

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) u_n(t) e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} |u_n(t)\rangle. \quad (3.101)$$

Zur Bestimmung der Zeitentwicklung der Vorfaktoren $a_n(t)$ ist die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = H(t) |\Psi(t)\rangle \quad (3.102)$$

zu lösen. Durch das Einsetzen von Gleichung (3.101) ergibt sich unter Verwendung der Eigenwertgleichung (3.100) folgendes Gleichungssystem für die zeitabhängigen

Vorfaktoren der Eigenzustände

$$\sum_n \left[\dot{a}_n |u_n(t)\rangle + a_n \frac{\partial}{\partial t} |u_n(t)\rangle \right] e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t E_n(t') dt'} = 0. \quad (3.103)$$

Nach der Multiplikation mit einem beliebigen Zustand $\langle u_m(t)|$ von links und anschließender Division durch die Zeitentwicklung des m -ten Zustandes ergibt sich mit der Orthogonalität der Eigenzustände $\langle u_m(t) | u_n(t) \rangle = \delta_{mn}$

$$\dot{a}_m(t) = \sum_n a_n \langle u_m(t) | \dot{u}_n(t) \rangle e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^t (E_n(t') - E_m(t')) dt'}. \quad (3.104)$$

Zur Berechnung des Erwartungswertes

$$\langle m | \dot{n} \rangle = \int d^3r \langle u_m(t) | \frac{\partial}{\partial t} |u_n(t)\rangle \quad (3.105)$$

ist zunächst die Eigenwertgleichung 3.100 zu differenzieren

$$\frac{\partial H(t)}{\partial t} |u_n(t)\rangle + H \frac{\partial}{\partial t} |u_n(t)\rangle = \frac{\partial E_n(t)}{\partial t} |u_n(t)\rangle + E_n(t) \frac{\partial}{\partial t} |u_n(t)\rangle. \quad (3.106)$$

Multiplikation mit $\langle u_m(t)|$ führt unter Ausnutzung der Eigenwertgleichung (3.100) auf

$$\langle u_m(t) | \frac{\partial H}{\partial t} |u_n(t)\rangle = (E_n - E_m) \langle u_m(t) | \dot{u}_n(t) \rangle. \quad (3.107)$$

Setzt man dies in das Gleichungssystem (3.104) ein, folgt schließlich mit $\Delta E_{mn} = E_m - E_n$

$$\dot{a}_m(t) = \sum_n \frac{a_n}{\Delta E_{mn}(t)} \langle u_m(t) | \frac{\partial H}{\partial t} |u_n(t)\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \Delta E(t)t}. \quad (3.108)$$

Da die Teilchen zum Startzeitpunkt der Gitterrampe ($t = 0$) im Grundzustand ($a_n = \delta_{n0}$) sind, folgt für langsame Variationen der Bandstruktur ($\Delta E \approx \text{const}$) [128]

$$\dot{a}_m \approx \frac{1}{\hbar \Delta E_{mn}} \langle u_m(t) | \frac{\partial H}{\partial t} |u_n(t)\rangle e^{\frac{i}{\hbar} \Delta E_{mn} t}. \quad (3.109)$$

Die Integration der Gleichung führt schließlich auf ein Gleichungssystem für die Besetzungswahrscheinlichkeiten sämtlicher von $|u_0(t)\rangle$ verschiedener Zustände

$$a_m(t) \approx \frac{1}{i \Delta E_{mn}^2} \langle m | \frac{\partial H}{\partial t} |n\rangle \left(e^{\frac{i}{\hbar} \Delta E_{mn} t} - 1 \right). \quad (3.110)$$

Die ausschließliche Besetzung des zeitabhängigen Grundzustandes während der Rampe ist nur dann gewährleistet, wenn die Besetzungszahlen sämtlicher Zustände $a_m(z)$, $m \neq 0$ zu jedem Zeitpunkt gering sind. Daher folgt als Bedingung für die Adiabaticität

$$\left| \langle m | \frac{\partial H}{\partial t} |0\rangle \right| \ll \Delta E_{m0}^2(t)/\hbar. \quad (3.111)$$

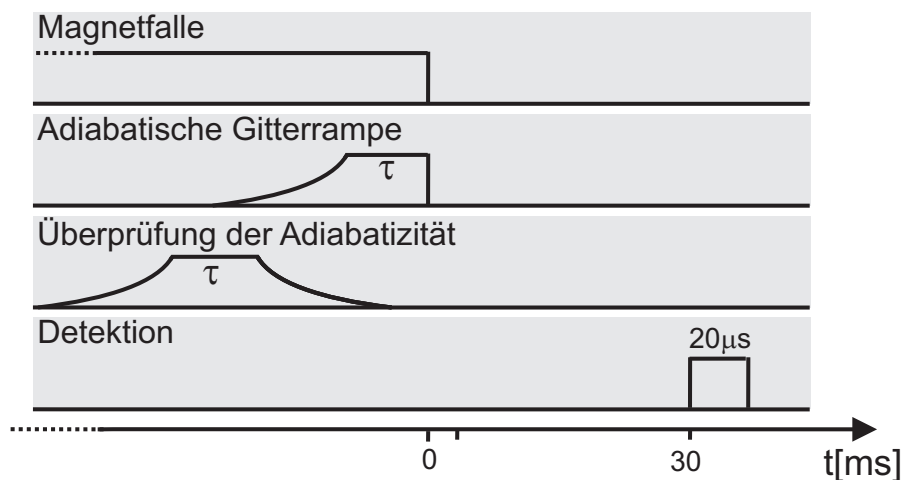


Abbildung 3.20: Zeitverlauf der adiabatischen Gitterrampe und der experimentellen Sequenz des Adiabazitäts-Test

Da die linke Seite der Gleichung zwingend kleiner ist als die Variation des Potentials $\partial V_G/\partial t$, folgt für $q = 0$ die hinreichende Bedingung [124]

$$\frac{\partial V_G[E_r](t)}{\partial t} \ll 16E_r/\hbar. \quad (3.112)$$

Aus Abbildung 3.5 ist ferner zu entnehmen, dass der Energieabstand zwischen den ersten beiden Bändern mit steigendem q geringer wird. Daher ist diese Abschätzung nur für $q = 0$ gültig. Für höhere Quasiimpulse sind die nötigen Zeitskalen zur Realisierung einer adiabatischen Rampe deutlich größer. Für die experimentell verwendeten Gitterparameter folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} V_G[E_r] \ll 0.4[1\mu\text{s}]. \quad (3.113)$$

Daher sind für die verwendeten Gittertiefen von bis zu $5E_r$ Zeitskalen von wenigen ms zur Vermeidung einer Besetzung höhere Bänder vollkommenen ausreichend.

Adiabazität bezüglich Änderungen der Vielteilchen-Wellenfunktion

Sehr viel längere Zeitskalen sind jedoch notwendig, um im Vielteilchen- Grundzustand des Systems zu bleiben, da jede Veränderung des Potentials hat eine andere Dichteverteilung bedingt. Diese Änderungen müssen daher langsam genug erfolgen, um eine Umverteilung der Atome in den neuen Gleichgewichtszustand zu ermöglichen. Aufgrund der Mobilitätseinschränkung der Atome durch das Gitterpotential ist die bestimmende Zeitskala für diesen Prozess die Tunnelrate 3.54. Mit den im Rahmen der Gleichung 3.59 angegebenen Tunnelenergien folgt eine Zeit von ca. $h/J = 4\text{ms}$ pro Ereignis für ein $5E_r$ tiefes Gitter. Da zur Anpassung der Dichteverteilung viele sukzessive Tunnelereignisse notwendig sind, kann diese Zahl nur

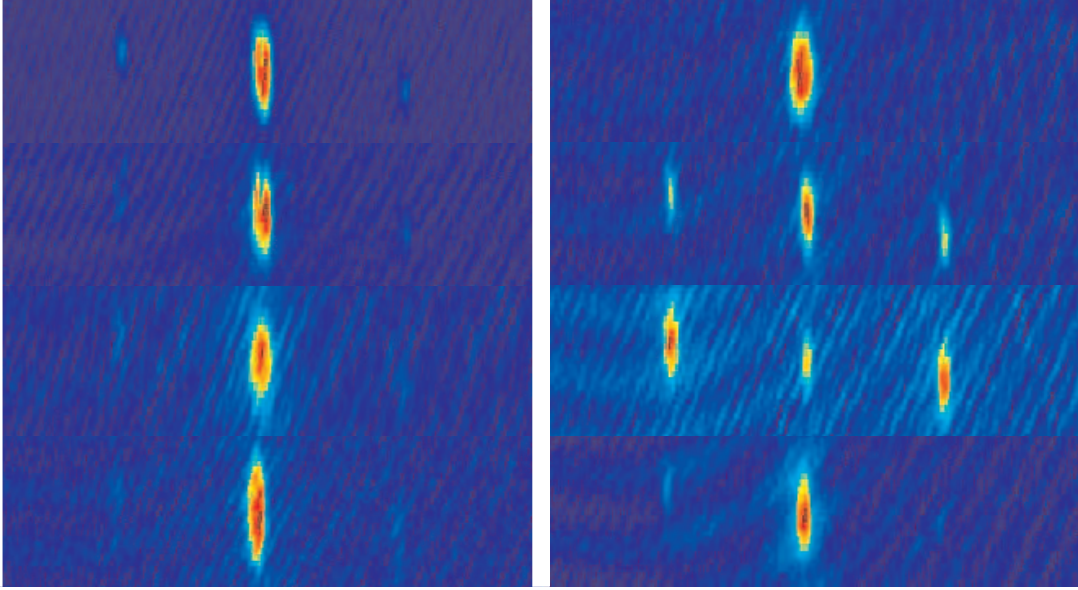


Abbildung 3.21: Vergleich der Absorptionsoptionen einer adiabatischen (links) und einer nicht adiabatischen Rampe (rechts) nach einer Flugzeit von 30ms für Haltezeiten von 0, 10, 20 und 30ms (von oben nach unten).

als Anhaltspunkt für eine Größenordnung von vielen ms dienen. Die notwendige Zeit zur Realisierung einer adiabatischen Rampe für ein $5E_r$ tiefes Gitter wurde in [27] mittels numerischer Integration der Gross-Pitaevskii Gleichung für eine exponentielle Rampe zu 60ms bestimmt. Die entsprechende experimentell realisierte Rampe sowie die verwendeten Rampen zur Überprüfung der Adiabaticität sind in Abbildung 3.20 gezeigt.

Experimentelle Überprüfung der Adiabaticität

Zur Überprüfung der Adiabaticität der realisierten Rampe wurden zwei verschiedene experimentelle Methoden eingesetzt. Sie beruhen auf der Messung des Impulsspektrums der Bose-Einstein-Kondensate. Bei der ersten Methode wurde das Gitter adiabatisch eingeschaltet, und nach einer variablen Haltezeit τ_A zusammen mit der Magnetfalle instantan ausgeschaltet. Eine nicht-adiabatische Rampe hätte analog zur Eichung der Gittertiefe zur Folge, dass die Besetzung höherer Bänder zu einer Oszillation der Atomzahlen in den einzelnen Dichtemaxima führen würde. Für eine adiabatische Rampe hingegen ist die Besetzung der Seitenbänder unabhängig von der Haltezeit, da sich das Kondensat in einem Eigenzustand des Gitters befindet. Abbildung 3.21 zeigt einen Vergleich der Absorptionsoptionen dieser beiden Fälle. Auf dem rechten Bild ist die Oszillation der Besetzung der Seitenbänder für unterschiedliche Haltezeiten bei einer nicht adiabatischen Rampe zu sehen, während das linke Bild die entsprechenden Bilder mit konstanter Besetzung für die

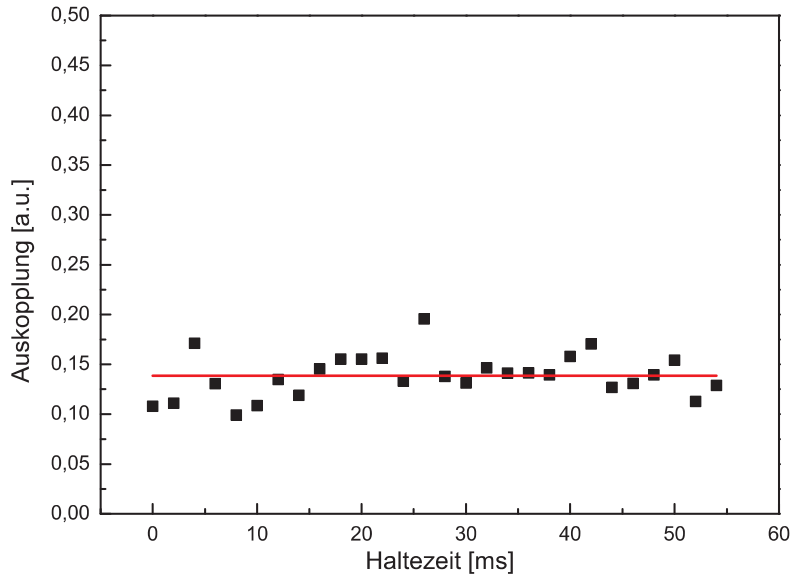


Abbildung 3.22: Besetzung der Nebenmaxima in Abhängigkeit von der Haltezeit für eine adiabatische Rampe und eine Gittertiefe von $5E_r$.

adiabatische Rampe zeigt. Die quantitative Analyse der Besetzung der Seitenbänder ist in Abbildung 3.22 gezeigt. Die starke Streuung ist detektionsbedingt und resultiert aus der geringen Atomzahl in den Seitenmaxima von ca. 3×10^4 Atomen. Das daraus resultierende schwache Absorptionssignal wird durch Interferenzstreifen⁵ auf den Bildern überlagert. Dies resultiert in einer relativen Ungenauigkeit in der Bestimmung der Atomzahl von 20 bis 30 Prozent. Ein Vergleich mit Abbildung 3.18 zeigt aber deutlich, dass außer einer statistischen Streuung keine Oszillation der Auskopplung zu erkennen ist, und belegt die Adiabatizität der Rampe. Die Auskopplung von ca. 14% stimmt im Rahmen der Messgenauigkeit gut mit dem mit Gleichung 3.78 theoretisch berechneten Wert von 17,5% überein und bestätigt somit die Ergebnisse der Eichung des optischen Gitters (Kapitel 3.3.3).

Bei der zweiten Methode zur Überprüfung der Adiabatizität wurde das Gitter nach einer variablen Haltezeit mit einer zeitumgekehrten aber ansonsten identischen Rampe wieder ausgeschaltet (Abbildung 3.20). Für eine adiabatische Rampe bleibt das Kondensat immer im sich verändernden Grundzustand und befindet sich nach der Prozedur somit im Grundzustand der Falle. Nach einem TOF von 30ms ist somit nur das erwartete Thomas Fermi Profil eines aus der puren Magnetfalle expandierenden BEC ohne Seitenbänder vorhanden. Eine nicht-adiabatische Rampe hätte hingegen zur Folge, dass das Kondensat nach dem Ausschalten des Gitters von null verschiedene Komponenten im Impulsspektrum aufweist, und es zur Ausbildung entsprechender Seitenbänder im TOF kommt. Abbildung 3.23 zeigt

⁵Durch Schwankungen in der Frequenz sowie der Strahllage ergibt sich ein leicht unterschiedliches Intensitätsprofil der zwei voneinander abgezogenen Aufnahmen des Detektionslasers.

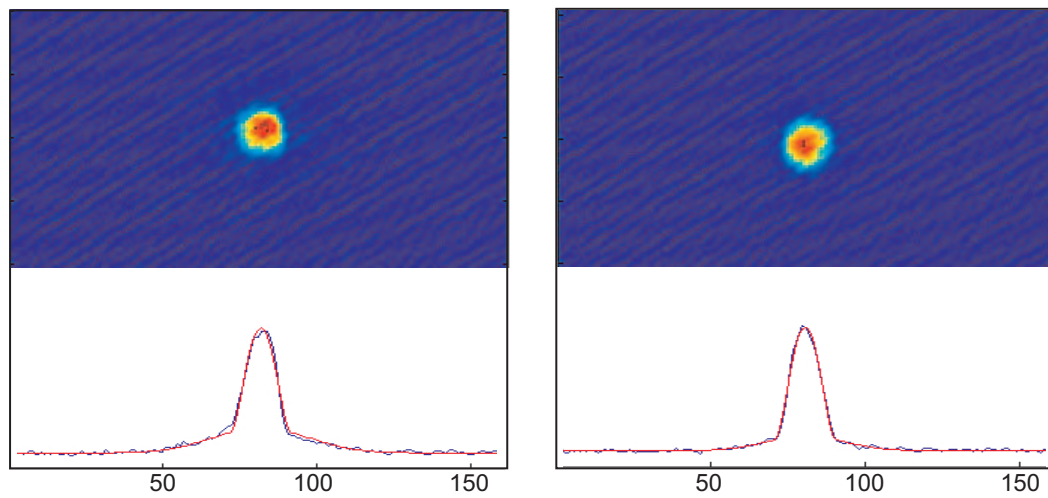


Abbildung 3.23: Adiabazitätstest der Gitterrampe. Das linke Bild zeigt das Absorptionsspektrum nach adiabatischem Ein- und Ausschalten des Gitters und das rechte Bild ein Vergleichsbild ohne Gitterrampen aber mit einer der Dauer der Rampen entsprechenden Haltezeit.

den Vergleich typischer Absorptionsspektren mit und ohne Gitterrampe für ansonsten identische Parameter. Da keinerlei Auskopplung auf dem Bild mit Gitter zu erkennen ist, folgt auch aus dieser Messung die Adiabazität der Rampe.

BLOCH-OSZILLATIONEN

Die Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern entspricht in vielen Aspekten den entsprechenden Effekten der Festkörperphysik. Insbesondere führt die Beschleunigung des atomaren Ensembles im periodischen Gitterpotential zu einer räumlichen Oszillation der Atome anstatt zu der intuitiv zu erwartenden linearen Bewegung in Richtung der Kraft, die im Falle freier Teilchen in einem konstanten Kraftfeld auftritt. Dieser spektakuläre, rein quantenmechanische Effekt beruht auf der Periodizität der Eigenzustände des Gitters, und wurde 1929 von F. Bloch für die Bewegung von Elektronen in Kristallen vorhergesagt [37]. Die Realisierung dieser so genannten Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten stellt eines der zentralen experimentellen Ergebnisse dieser Arbeit dar und bildet die Grundlage für die in Kapitel 5 beschriebenen Experimente zu den Auswirkungen einer zusätzlichen räumlich inhomogenen Kraft auf die Bloch-Oszillationen.

Als Grundlage der folgenden Darstellung dienen die Veröffentlichungen [129, 119, 130, 131, 113], sowie die Lehrbücher [109, 108, 132].

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden zunächst die Bloch-Oszillationen nicht wechselwirkender Teilchen im Bandstruktur-Bild erklärt. Die folgende Erweiterung dieser Zusammenhänge auf ausgedehnte Wellenpakete bildet die Grundlage für die Interpretation der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen. Der zweite Teil dieses Kapitels beschreibt die zur experimentellen Erzeugung der Bloch-Oszillationen notwendigen umfangreichen Modifikationen der Apparatur. Anschließend werden die experimentell gemessenen Bloch-Oszillationen für Gittertiefen von $2E_r$ und $4.5E_r$ analysiert.

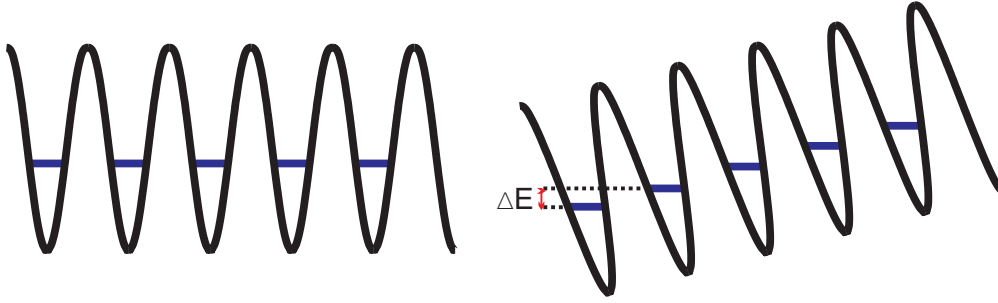


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung des optischen Gitters mit (rechts) und ohne (links) zusätzlichen linearen magnetischen Gradienten.

4.1 Theoretische Grundlagen

4.1.1 Bloch-Oszillationen nicht wechselwirkender Teilchen

Die Oszillation beschleunigter Teilchen in periodischen Potentialen resultiert aus der unterschiedlichen Phasenentwicklung der Wellenfunktionen auf den einzelnen energetisch gegeneinander verschobenen Gitterplätzen. Abbildung 4.1 zeigt eine schematische Darstellung des Potentials eines ungestörten optischen Gitters und die Überlagerung mit einem linearen Gradienten, der einer konstanten äußeren Kraft entspricht. Im ungestörten Fall sind die Energieniveaus der einzelnen Gitterplätze entartet, während das zusätzliche lineare Potential eine konstante Energiedifferenz ΔE zwischen den einzelnen Gitterplätzen hervorruft. Da die Zeitentwicklung konservativer Potentiale durch den Zeitentwicklungsoperator

$$U(t, l) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} = e^{-\frac{i}{\hbar} E_l t} \quad (4.1)$$

gegeben ist [62], entwickeln sich die Phasen der einzelnen Gittertöpfe für das verkippte Gitter unterschiedlich schnell. Dabei entspricht E_l der Energie des l -ten Gitterplatzes. Aus Gleichung 4.1 folgt, dass die Phasendifferenz zwischen den Gitterplätzen linear mit der Zeit zunimmt. Da aufgrund der Periodizität der Wellenfunktion die Phasendifferenz zwischen den Gitterplätzen dem Quasiimpuls q entspricht, ist dies gleichbedeutend mit einer Vergrößerung des Quasiimpulses. Für ein lineares Potential folgt eine gleichförmige Entwicklung des Quasiimpulses in der Zeit. Dies drückt sich im so genannten Beschleunigungstheorem aus [133, 134, 135]

$$q(t) = q_0 + \frac{F}{\hbar} t, \quad (4.2)$$

das im Verlaufe des nächsten Abschnitts näher begründet wird. Da die Eigenfunktionen periodisch in q sind und daher auf die erste Brillouin-Zone beschränkt werden können, folgt eine periodische Zeitentwicklung des beschleunigten Teilchens. Die Periodizitätskonstante

$$T = \frac{2\pi\hbar}{Fd} \quad (4.3)$$

hängt ausschließlich vom Abstand der Gitterplätze $d = \lambda/2$ und der beschleunigenden Kraft F ab, da sich der Quasiimpuls entsprechend Gleichung 4.2 nach dieser Zeit genau einmal durch die Brillouin-Zone bewegt hat

$$q(T) = q_0 + \frac{F}{\hbar} T = q_0 + \frac{2\pi}{d} = q_0 + 2q_B. \quad (4.4)$$

Da die Geschwindigkeit eines Teilchens durch die Ableitung der Dispersionsrelation gegeben ist¹, wird seine Trajektorie durch die Form der Bandstruktur (Kapitel 3.2.1) bestimmt

$$v_G = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E_n(q)}{\partial q}, \quad (4.5)$$

und ist somit ebenfalls periodisch in q . Die Dispersionsrelation des erweiterten Zonenschemas und die sich daraus in Abhängigkeit vom Quasiimpuls ergebende Gruppengeschwindigkeit, sowie die Abhängigkeit der maximalen Gruppengeschwindigkeit von der Gittertiefe ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Ihre Periodizität, und damit die der Bewegung ist klar zu erkennen. Ein Teilchen, dessen Quasiimpuls ausgehend von $q_0 = 0$ aufgrund einer äußeren Kraft durch die Brillouin-Zone wandert, propagiert zunächst entsprechend der zunehmenden positiven Steigung der Dispersionsrelation mit immer größerer Geschwindigkeit in positiver Richtung. Sobald der Quasiimpuls den Wendepunkt der Dispersionsrelation erreicht, verringert sich die Steigung und die Geschwindigkeit nimmt ab, bis sie am Rand der Brillouin-Zone verschwindet, da die Dispersionsrelation ein Maximum aufweist. Da die Wellenfunktion periodisch in q ist, und die Wellenfunktionen $\Psi(q)$ und $\Psi(q + 2q_B)$ somit identisch sind, führt eine weitere Zunahme des Quasiimpulses dazu, dass das Teilchen an der linken Grenze der Brillouin-Zone wieder „auftaucht“ (siehe Abbildung). Aufgrund der negativen Steigung propagiert es mit zunehmender Geschwindigkeit in negativer Richtung, bis es bei $q = 0$ eine volle Oszillationsperiode durchlaufen hat. Die Asymmetrie der Gruppengeschwindigkeit mit einem unterschiedlich steilen Verlauf der Gruppengeschwindigkeit im inneren und äußeren Teil der Brillouin-Zone resultiert aus der Form der Dispersionsrelation.

Die beiden Wendepunkte als Punkte größter Steigung und somit höchster Geschwindigkeit befinden sich nicht bei $q_B/2$ sondern in den äußeren Bereichen der Brillouin-Zone. Mit zunehmender Gittertiefe flacht die Bandstruktur ab.

¹Dies wird im Abschnitt 4.1.1 im Rahmen der theoretischen Betrachtungen der Dynamik von Wellenpaketen belegt.

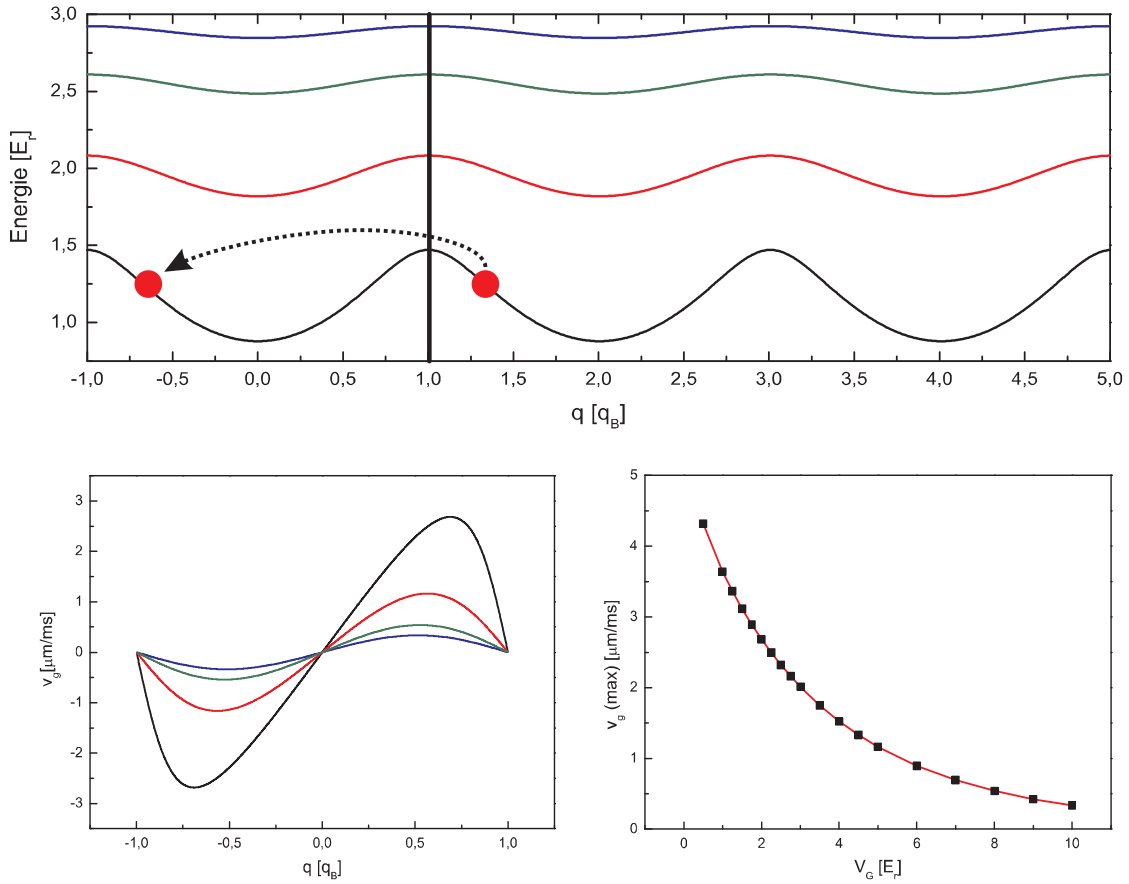


Abbildung 4.2: Erweitertes Zonenschema und Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Quasiimpuls. Das obere Bild zeigt den Verlauf des ersten Bandes für Gittertiefen von $2E_r$ (schwarz), $5E_r$ (rot), $8E_r$ (grün) und $10E_r$ (blau). Der Balken bei $q = q_B$ repräsentiert die Grenze der ersten Brillouin-Zone. Auf dem Bild unten links ist die Gruppengeschwindigkeit für diese vier Gittertiefen in Abhängigkeit vom Quasiimpuls gezeigt, während im rechten die maximale Gruppengeschwindigkeit als Funktion der Gittertiefe zu sehen ist.

Daher verringert sich zum einen die maximale Gruppengeschwindigkeit, zum anderen wird sowohl das Band als auch die Geschwindigkeit der Teilchen symmetrisch bezüglich der Brillouin-Zone. Im Grenzfall sehr tiefer Gitter ergibt sich eine cosinusförmige Dispersionsrelation (Gleichung 3.59) und Bewegung der Teilchen.

Die Begrenzung der Trajektorie der Teilchen auf einen kleinen Raumbereich lässt sich anschaulich anhand von Abbildung 4.3 verstehen. Die Verkippung der Bandstruktur durch das externe lineare Potential führt dazu, dass von Punkt 1 ausgehende Teilchen, die sich in Richtung der Kraft bewegen, bei Punkt 2 die Bandlücke erreichen. Da dort keine Zustände existieren, kann das Teilchen nicht weiter beschleunigt werden, sondern kehrt seine Bewegungsrichtung um. Mit dem

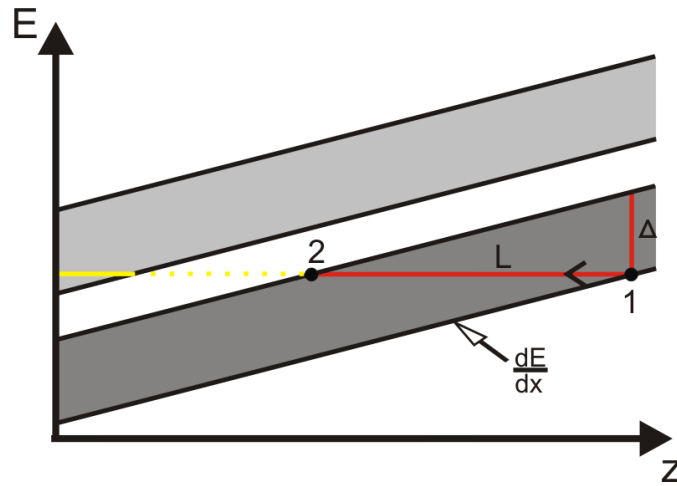


Abbildung 4.3: Schemazeichnung der Ortsabhängigkeit der Bandstruktur bei Überlagerung mit einem linearen Potentialgradienten. Die roten Linien kennzeichnen die Beschränkung der räumlichen Bewegung des Teilchens sowie die Breite des Bandes. Die gelbe Linie stellt das Landau-Zener-Tunneln dar.

Zusammenhang

$$F = -\frac{dE}{dx} = -\frac{\Delta}{2z_{BO}} \quad (4.6)$$

folgt mit der Breite des Bandes Δ und der beschleunigenden Kraft F für die Amplitude der Bloch-Oszillation

$$z_{BO} = \Delta/2|F|. \quad (4.7)$$

Sie beträgt für typische experimentelle Parameter lediglich einige μm . Daher werden Bloch-Oszillationen gewöhnlich mittels der Flugzeit Methode detektiert, da hier das Impulsspektrum und somit die Gruppengeschwindigkeit zum Zeitpunkt des Ausschaltens der Falle aufgenommen wird.

Die Reflektion an der Bandkante kann in Analogie zur Reflektion von Lichtwellen an periodischen Strukturen kristalliner Körper als Bragg-Beugung interpretiert werden. Diese Interpretation ist allerdings nur für sehr kleine Gittertiefen geeignet, da die atomare Wellenfunktion (Gleichung 3.31) in diesem Fall als ebene Welle angesehen werden kann, und dem vereinfachten Bild des Einfalls einer ebenen Lichtwelle auf die Kristallstruktur entspricht. Insbesondere können zwar die stark asymmetrischen Geschwindigkeitsprofile sehr niedriger Gitter in dem Sinne einer Reflektion interpretiert werden, die für tiefe Gitter typischen symmetrischen Oszillationen hingegen nicht.

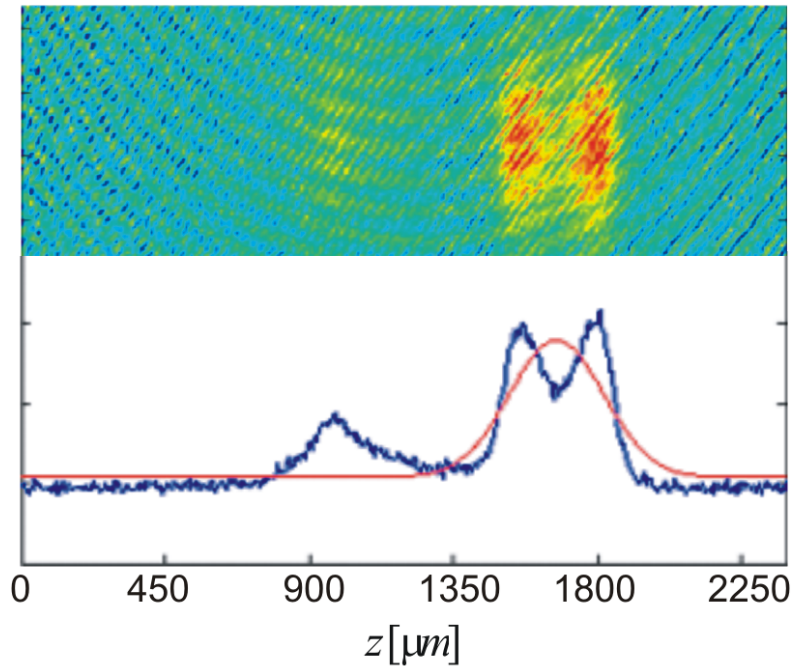


Abbildung 4.4: Landau-Zener-Tunneln eines atomaren Ensembles für eine Gittertiefe von $0.7E_r$ und eine Oszillationszeit von 1.5 Bloch-Perioden nach einer Flugzeit von 30ms. Das obere Bild zeigt die Absorptionssaufnahme der Wolke und das untere das zugehörige Dichteprofil.

Tunnelprozess

Aus Abbildung 4.2 ist ersichtlich, dass niedrigere Gittertiefen zu größeren Gruppengeschwindigkeiten führen. Dementsprechend ist auch die räumliche Oszillationsamplitude nach einer freien Expansion größer. Da die Bloch-Oszillationen somit leichter detektiert werden können, empfiehlt es sich, möglichst kleine Gittertiefen zu wählen. Mit kleiner werdender Gittertiefe wird jedoch der Bandabstand zwischen dem nullten und dem ersten angeregten Band geringer und die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs in das angeregte Band steigt. Diesen Effekt nennt man Landau-Zener-Tunneln [136]. Er ist schematisch in Abbildung 4.3 dargestellt. Erreicht das beschleunigte Teilchen die Bandkante an Punkt 2 kann es durch die Potentialbarriere tunneln, und in das höhere Band übergehen. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Prozess ist für Teilchen an der Bandkante am höchsten, da die energetische Separation der Bänder dort am geringsten ist. Nach Übergang in das höhere Band propagiert das Teilchen weiter in die ursprüngliche Richtung und unterliegt keiner Reflektion, da die Steigung des angeregten Bandes umgekehrt zu der des nullten Bandes ist. Der Anteil eines beschleunigten atomaren Ensembles, der in das höhere Band übergeht, trennt sich somit vom reflektierten Teil ab. Dies ist auf der Absorptionssaufnahme in Abbildung 4.4 zu erkennen. Sie zeigt eine ther-

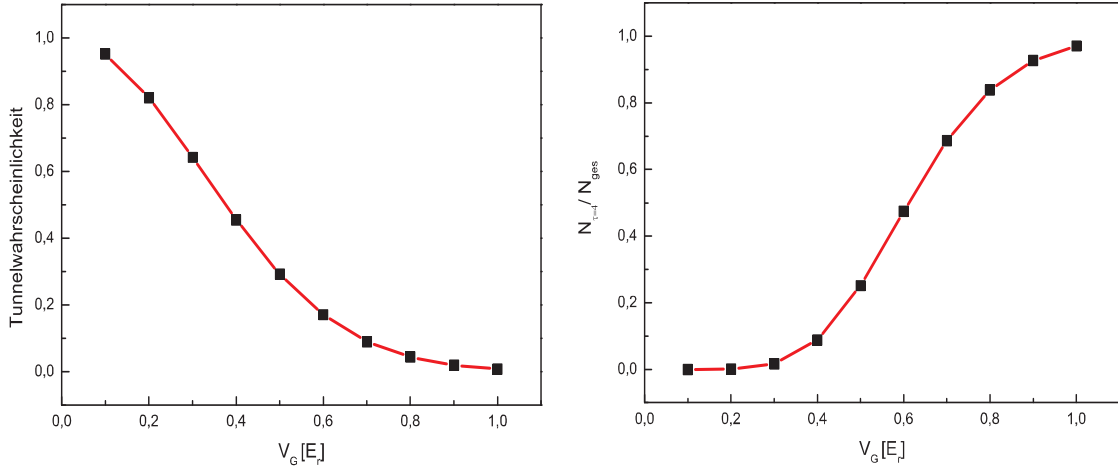


Abbildung 4.5: Tunnelwahrscheinlichkeit (links) und der nach vier Tunnelereignissen im ersten Band verbleibender Anteil des atomaren Ensembles (rechts) als Funktion der Gittertiefe.

mische Wolke nach 1,5 Bloch-Oszillationsperioden für eine Gittertiefe von $0,7E_r$. Während der Großteil der Atome (rechte Wolke) die Bewegungsrichtung bei dem erstmaligen Erreichen der Bandkante umgekehrt hat, und sich nun das zweite Mal an der Bandkante befindet, ist ein kleiner Teil in das höhere Band übergegangen und oszilliert frei in der Magnetfalle. Nach Ausschalten aller Potentiale separiert er sich entsprechend seiner Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt vom Rest des Ensembles ab. Mit der Energiedifferenz zwischen den Bändern an der Bandkante ΔE und der kritischen Beschleunigung

$$a_c = \frac{d \Delta E^2}{4\hbar^2} \quad (4.8)$$

ergibt sich für die Tunnelwahrscheinlichkeit pro Ereignis [129, 122]

$$T = e^{-a_c/a}. \quad (4.9)$$

Sie nimmt mit zunehmender Beschleunigung und geringeren Gittertiefe zu, und ist in Abbildung 4.5 für verschiedene Gittertiefen und eine Beschleunigung von $a = 2.34m/s^2$ gezeigt. Außerdem ist der nach vier Oszillationsperioden im nullten Band verbleibende Anteil der Atome dargestellt. Die anfänglich sehr hohe Transmissionswahrscheinlichkeit fällt mit zunehmender Gittertiefe stark ab, und ist für Gittertiefen größer als $1E_r$ irrelevant. Daher wurde für die experimentellen Untersuchung der Bloch-Oszillationen eine Gittertiefe von $2E_r$ gewählt, die sich durch eine große Oszillationsamplitude bei vernachlässigbarer Tunnelwahrscheinlichkeit auszeichnet.

Wellenpakete endlicher Breite

Dieser Abschnitt dient der Erweiterung der in den letzten Abschnitten beschriebenen Theorie auf nicht wechselwirkende Vielteilchen-Systeme. Dazu wird der Formalismus zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung eines beschleunigten atomaren Wellenpaketes endlicher Breite in einem periodischen Potential entwickelt [62, 113, 129, 130, 137, 119]. Er ist von grundlegender Bedeutung für das qualitative Verständnis der in Kapitel 5 beschriebenen unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen.

Zur Vereinfachung wird die Beschreibung zunächst auf ein gaußförmiges Wellenpaket im nullten Band des periodischen Potentials ohne zusätzliches Gradientenfeld beschränkt. Ein solches Wellenpaket lässt sich als Integral über die mit der Verteilungsfunktion $g(q)$ gewichtete Bloch-Funktionen (Gleichung 3.31) darstellen [62]

$$\Phi(z) = \int_{-q_B}^{q_B} dq g(q) \Psi_{q,0}(z). \quad (4.10)$$

Ohne zusätzliche Potentiale entwickeln sich die Phasen der einzelnen Bestandteile dieses Wellenpaketes entsprechend dem quantenmechanischen Zeitentwicklungsoperator und es folgt

$$\Phi(z,t) = \int_{-q_B}^{q_B} dq g(q) e^{(i/\hbar)E(q)t} \Psi_{q,0}(z). \quad (4.11)$$

Diese Ortsraumdarstellung ist zeitabhängig, da sich die Phasendifferenz zwischen den einzelnen Bestandteilen ändert. Für Wellenpakete mit einer Impulsbreite, die deutlich kleiner ist als die Brillouin-Zone, kann die Dispersionsrelation durch eine Taylorreihe genähert werden [113]

$$E(q) = E(q_0) + (q - q_0) \left. \frac{\partial E(q)}{\partial q} \right|_{q_0} + \frac{(q - q_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} \right|_{q_0} + \dots \quad (4.12)$$

Diese Näherung ist für Bose-Einstein-Kondensate aufgrund ihrer äußerst geringen Impulsbreite (Gleichung 3.61) sicher erfüllt. Vernachlässigt man Variationen des Wellenpaketes in der Größenordnung der Periodizität können sämtliche beitragenden Bloch-Funktionen durch die zentrale Bloch-Funktion genähert werden [113]

$$\Psi_{q,0}(z) \approx e^{iq_0 z} u_{q_0,0}(z). \quad (4.13)$$

Damit folgt für die Darstellung des Wellenpaketes

$$\Phi(z,t) = u_{q_0,0}(z) e^{(i/\hbar)E(q_0)t} \int_{-q_B}^{q_B} dq g(q) e^{i(q-q_0)(x-v_g(q_0)t) - i[\hbar(q-q_0)^2/(2m_{eff}(q_0))]t}. \quad (4.14)$$

Die Gruppengeschwindigkeit des atomaren Ensembles

$$v_g(q_0) = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E(q)}{\partial q} \right|_{q_0} \quad (4.15)$$

ist somit proportional zur Ableitung der Dispersionsrelation. Die effektive Masse

$$m_{eff}(q_0) = \hbar^2 \left(\left. \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} \right|_{q_0} \right)^{-1} \quad (4.16)$$

bestimmt die Rate, mit der das Wellenpaket aufgrund der unterschiedlichen Phasengeschwindigkeit seiner Bestandteile zerfließt.

Zur Bestimmung der Zeitentwicklung eines Wellenpaketes in einem externen Gradienten wird zunächst Beschleunigungstheorem näher betrachtet. Es besagt, dass der Quasiimpuls unter dem Einfluss einer externen Kraft linear mit der Zeit zunimmt, und geht zurück auf [133, 134, 135]. Es lässt sich mit Hilfe des Hamiltonoperators des verkippten Gitters

$$H = H_0 + Fz \quad (4.17)$$

verstehen [138]. Dabei stellt H_0 das ungestörte Gitter (Gleichung 3.24) dar. Aufgrund der gebrochenen Translationssymmetrie durch den linearen Gradienten Fz sind die Bloch-Zustände (Gleichung 3.31) keine Eigenzustände des Systems mehr. Folglich vertauschen der Translationsoperator T_d (Gleichung 3.23) und der Hamiltonoperator nicht, und es folgt für den Kommutator der beiden Operatoren

$$\begin{aligned} [H, T_d]\Psi(z) &= [Fz, T_d]\Psi(z) = (FzT_d - T_dFz)\Psi(z) \\ &= FzT_d\Psi(z) - [z+d]F\Psi(z+d) \\ &= -FdT_d. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Daraus ergibt sich mit der Reihenentwicklung des Zeitentwicklungsoperators [62]

$$e^{iHt/\hbar}T_d e^{-iHt/\hbar} = e^{-iFdt/\hbar}T_d e^{iHt/\hbar} e^{-iHt/\hbar} = e^{-iFdt/\hbar}T_d. \quad (4.19)$$

Mittels der Zeitentwicklung $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$ des Bloch-Zustand $|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_{q'_0,0}(z)\rangle$, folgt für die Eigenwertgleichung des Translationsoperators

$$\begin{aligned} T_d |\Psi(t)\rangle &= T_d e^{-iHt/\hbar} |\Psi_{q'_0,0}(z)\rangle \\ &= e^{-idFt/\hbar} e^{-iHt/\hbar} T_d |\Psi_{q'_0,0}(z)\rangle \\ &= e^{id(q_0 + Ft/\hbar)} |\Psi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Der Vergleich mit Gleichung 3.29 zeigt, dass $|\Psi(t)\rangle$ ein Eigenvektor des Translationsoperators mit dem zeitabhängigen Quasiimpuls $q(t) = q'_0 + Ft/\hbar$ ist, und somit

dem Bloch-Zustand $\Psi_{q(t),0}(z)$ entspricht. Für ein Wellenpaket der Form 4.10 folgt, das sich die einzelnen Komponenten $\Psi_{q,0}(z)$ gemäß

$$\Psi_{q(t),0}(z) = \Psi_{q+ Ft/\hbar,0}(z) \quad (4.21)$$

durch die Brillouin-Zone bewegen. Dementsprechend ergibt sich für die Zeitabhängigkeit der Impulsverteilung $g(t,q) = g(q + Ft/\hbar)$. Das Zentrum des Impulsspektrums bewegt sich somit analog zu der im letzten Abschnitt beschriebenen Entwicklung des Quasiimpulses eines einzelnen Teilchens mit $q_0 + Ft/\hbar$ durch die Brillouin-Zone. Die einzelnen Komponenten des Wellenpaketes durchlaufen jedoch unterschiedliche Phasenentwicklungen² während einer Oszillationsperiode, und die Form des Wellenpakets kann sich somit während dieser Entwicklung ändern. Da jedoch alle Komponenten nach einer vollen Oszillationsperiode genau einmal die gesamte Brillouin-Zone durchlaufen haben, entspricht ihre Phasenbeziehung zu diesem Zeitpunkt wieder derjenigen zum Zeitpunkt $t=0$. Mögliche Oszillationen der Breite des Wellenpaketes sind daher ebenfalls periodisch und weisen die gleiche Zeitkonstante wie die Oszillation der Gruppengeschwindigkeit auf. Für Heisenberg limitierte gaußförmige Wellenpakete (Abschnitt 3.2.2), mit der Impulsbreite der Bose-Einstein-Kondensats, tritt jedoch keine signifikante Oszillation in der Breite des Wellenpaketes auf.

Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen der Impulsbreite eines Wellenpaketes und dem Verlauf der Bloch-Oszillationen wird im Folgenden ein Wellenpaket klassischer Teilchen in einem periodischen System in der Tight Binding Näherung betrachtet, da diese einen analytischen Ausdruck für die Dispersionsrelation ermöglicht (Gleichung 3.59). Die so abgeleiteten Bewegungsgleichungen geben daher Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für den Fall schwacher Gitter nicht korrekt wieder. Insbesondere wird die Asymmetrie der Oszillation nicht berücksichtigt. Sie ermöglichen jedoch einen hervorragenden qualitativen Einblick in die grundlegenden Zusammenhänge zwischen der Breite des Impulsspektrums und der Oszillationsamplitude.

Die Hamiltonfunktion (Gleichung 3.59) entspricht in klassischer Näherung ($q \rightarrow p/\hbar$)

$$H = -2J \cos\left(\frac{p}{\hbar}d\right) + Fz. \quad (4.22)$$

Zunächst wird die Trajektorie eines einzelnen Teilchens in einem solchen System mit Hilfe der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen berechnet [139]

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{2Jd}{\hbar} \sin\left(\frac{p}{\hbar}d\right) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial z} = -F. \end{aligned} \quad (4.23)$$

²Die einzelnen Komponenten haben für Zeiten, die keine Vielfache der Periodizitätskonstante sind, jeweils unterschiedliche Teile der Dispersionsrelation durchlaufen, und somit unterschiedliche Phasen angesammelt.

Für die Anfangsbedingungen des Impulses und der Position des Teilchens

$$z(t=0) = z_0 \quad \text{und} \quad p(t=0) = p_0 \quad (4.24)$$

ergibt sich mit der Bloch-Oszillationsfrequenz $\omega_B = \frac{Fd}{\hbar}$ durch Integration der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} p(t) &= -Ft + p_0 \\ z(t) &= \frac{2J}{F} \cos\left(\omega_B t - \frac{p_0 d}{\hbar}\right) + z_0. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die Verallgemeinerung auf ein atomares Ensemble mit einem gaußförmigen Impulsspektrum der Breite Δp_0 und einer Ortsverteilung mit der Ausdehnung Δz_0 , das sich zum Zeitpunkt $t=0$ am Ort $z_0 = 0$ befindet, beruht auf der Verteilungsfunktion

$$W(z', p) = \frac{1}{2\pi\Delta z_0\Delta p_0} e^{-\frac{z'^2}{2\Delta z_0^2} - \frac{p^2}{2\Delta p_0^2}}. \quad (4.26)$$

Dabei entspricht $W(z', p)$ der Wahrscheinlichkeit ein Teilchen mit Impuls p am Ort z' an zu finden. Da sich jedes Teilchen des Ensembles gemäß Gleichung 4.25 bewegt, folgt z.B. für die zeitabhängige Position $z_p(t)$ eines dieser Teilchen mit dem Impuls p und der Position z' zum Zeitpunkt $t=0$

$$z_p(t) - z' = \frac{2J}{F} \cos\left(\omega_B t - \frac{pd}{\hbar}\right). \quad (4.27)$$

Die Schwerpunktbewegung des Wellenpaketes folgt aus der Summation sämtlicher mit $W(z', p)$ gewichteter Trajektorien

$$\langle z(t) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} dz' dp W(z', p) [z_p(t) - z']. \quad (4.28)$$

Einsetzen der Gleichungen 4.27 und 4.26 ergibt

$$\langle z(t) \rangle = \frac{1}{2\pi\Delta z_0\Delta p_0} \frac{2J}{F} \iint_{-\infty}^{\infty} dz' dp e^{-\frac{z'^2}{2\Delta z_0^2} - \frac{p^2}{2\Delta p_0^2}} \cos\left(\omega_B t - \frac{pd}{\hbar}\right). \quad (4.29)$$

Mit den Integralen [64]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta p_0} e^{p^2/(2\Delta p_0^2)} \cos\left(\frac{\omega_B t}{2} - \frac{pd}{\hbar}\right) = e^{-d^2\Delta p_0^2/(2\hbar^2)} \cos\left(\frac{\omega_B t}{2}\right) \quad (4.30)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta z_0} e^{z^2/(2\Delta z_0^2)} = 1 \quad (4.31)$$

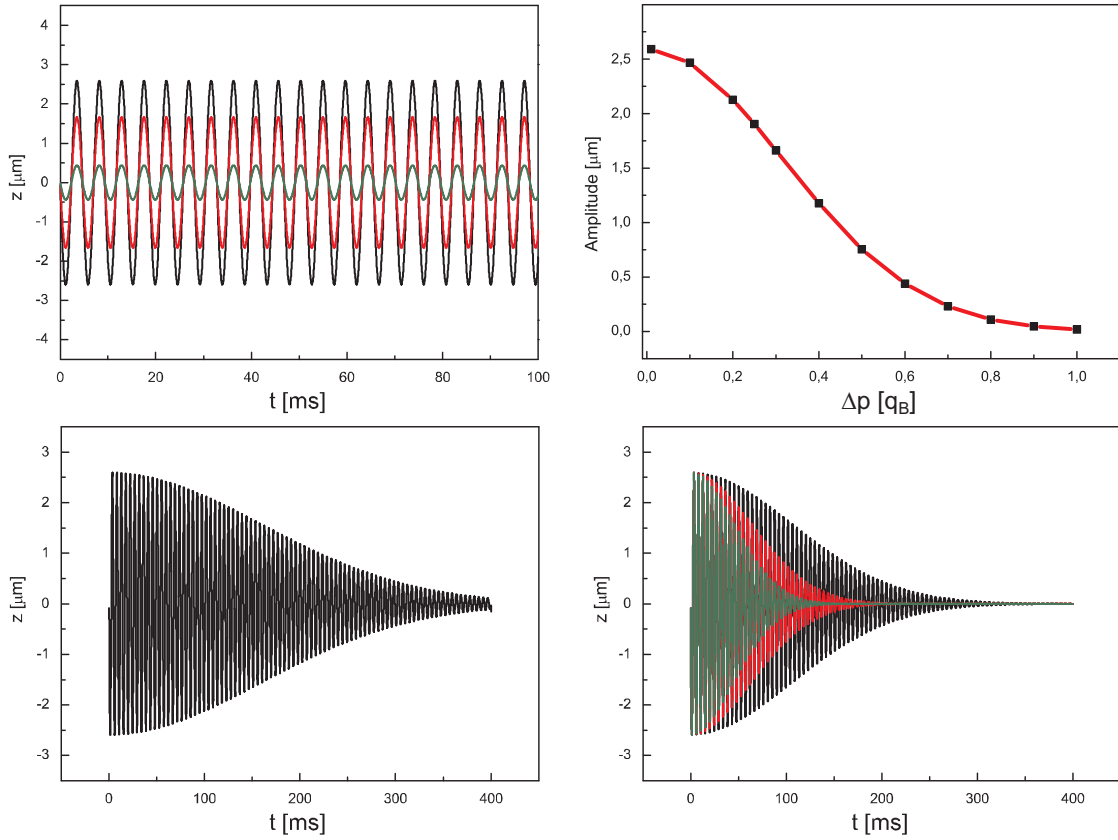


Abbildung 4.6: Bloch-Oszillationen eines klassischen Wellenpakets. Das Bild oben links zeigt den Verlauf der Oszillation für drei verschiedene Breiten des Wellenpakets. Die einzelnen Kurven entsprechen Impulsbreiten von $0.001q_B$ (schwarz), $0.3q_B$ (rot) und $0.6q_B$ (grün). Der Graph oben rechts zeigt die Oszillationsamplituden des Wellenpakets als Funktion der Impulsbreite Δp . Die unteren Graphen zeigen jeweils den Verlauf der Oszillationen für eine zeitlich linear zunehmende Breite des Impulses für drei unterschiedliche Verbreiterungsraten. Für den linken Graph gilt $\gamma = 2$. Der rechte Graph zeigt die entsprechenden Kurven für $\gamma = 3$ (schwarz), $\gamma = 5$ (rot) und $\gamma = 7$ (grün).

folgt

$$\langle z(t) \rangle = \frac{2J}{F} e^{-d^2 \Delta p_0^2 / (2\hbar^2)} \cos\left(\frac{\omega_B t}{2}\right). \quad (4.32)$$

Die Breite des Impulsspektrums Δp führt somit zu einer Reduktion der Oszillationsamplitude um einen Faktor $e^{-d^2 \Delta p_0^2 / (2\hbar^2)}$. Dieses in Abbildung 4.6 für verschiedene Δp gezeigte Verhalten lässt sich in dem in diesem Kapitel beschriebenen klassischen Bild sehr gut anschaulich verstehen. Da die Impulsverteilung des Wellenpaketes in dieser Beschreibung der Quasiimpulsverteilung entspricht, hat die gleichmäßige Bewegung des Wellenpaketes durch die Brillouin-Zone zur Folge, dass der äußere Teil der gaußförmigen Impulsverteilung die Bandkante zuerst erreicht, und somit seine Bewegungsrichtung bereits umkehrt, während das Zentrum

sich noch in Richtung der Bandkante bewegt. Da dieser Anteil des Wellenpaketes den Schwerpunkt des Ensembles in Richtung der Ursprungsposition $z_0 = 0$ „zieht“, obwohl das Zentrum des Wellenpaketes die Bandkante noch nicht erreicht hat, folgt eine Verringerung der Oszillationsamplitude des Schwerpunktes. Dieser Effekt und damit die Reduktion der Oszillationsamplitude ist umso ausgeprägter, je breiter die Impulsverteilung des Wellenpakets ist. Eine Verbreiterung der Impulsbreite während der Oszillation z.B. durch den Einfluss eines zusätzlichen Unordnungspotentials hat somit eine kontinuierliche Abnahme der Oszillationsbreite zur Folge. Abbildung (4.6) zeigt die Zeitabhängigkeit dieser Dämpfung der Bloch-Oszillationen für verschiedene Verbreiterungsraten γ

$$\Delta p = \gamma q_B t. \quad (4.33)$$

Da das Impulsspektrum eines Bose-Einstein-Kondensats zunächst extrem schmal ist (entsprechend der in Kapitel 3.2.2 erfolgten Abschätzung gilt $\Delta p \approx 0.001 q_B$) entspricht seine Trajektorie der eines einzelnen quantenmechanischen Teilchens im periodischen Potential. Die Wechselwirkung zwischen den Atomen führt jedoch zu Instabilitäten, die die Ausbildung verschiedener Anregungsmoden und eine Verbreiterung des Impulsspektrums zur Folge haben. Diese mit der Zeit zunehmende Verbreiterung des Impulsspektrums hat eine kontinuierliche Verringerung der Oszillationsamplitude, und somit eine Dämpfung der Bloch-Oszillationen zur Folge.

4.1.2 Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten

Viele der Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern erlauben eine Interpretation im Rahmen des Einteilchen-Bildes. So kann z.B. die Kondensat-Wellenfunktion als Bloch-Funktion dargestellt werden. Dies führt völlig analog zum Einteilchenbild zu einer periodischen Verlauf des chemischen Potentials und der Energie des Kondensats, sowie zur Ausbildung von Bandlücken zwischen den einzelnen Bändern. Somit ist auch für Bose-Einstein-Kondensate eine Beschränkung auf die erste Brillouin-Zone möglich. Zudem ermöglicht die äußerst geringe Breite des Impulsspektrums eine Interpretation des Zustandes als reinen Bloch-Zustand, ohne die Notwendigkeit die Zeitentwicklung eines Wellenpakets zu betrachten. Dies gilt jedoch aufgrund der Wechselwirkung nur für unbeschleunigte Kondensate in periodischen Potentialen. Erreicht der Quasiimpuls den äußeren Bereich der Brillouin-Zone $|q| > q_B/2$ führt die Wechselwirkung zu einem exponentiellen Anwachsen kleiner Anregungen, der so genannten dynamischen Instabilität, die eine Dephasierung der Kondensat-Wellenfunktion und durch die damit einhergehende Verbreiterung des Impulsspektrums eine Dämpfung der Bloch-Oszillation zur Folge hat. Daher ist zur experimentellen Beobachtung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten eine möglichst geringe Wechselwirkung notwendig. Dies ist prinzipiell mittels Feshbach Resonanzen möglich. Aufgrund des magnetischen Einschlusses durch die Magnetfalle und der im Falle von ^{87}Rb technisch sehr

aufwendigen Realisierung konnte diese Technik jedoch in der bestehenden Apparatur nicht eingesetzt werden. Daher wurde zur Unterdrückung der Dämpfung die Wechselwirkung mittels einer Verringerung der Dichte des Kondensats durch die Reduktion der Teilchenzahl und der Fallenfrequenzen minimiert. Dies ermöglichte die experimentelle Beobachtung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten.

Dieser Abschnitt dient der Beschreibung der numerischen Untersuchungen der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten. Insbesondere wird die Abhängigkeit der Dämpfung von der Teilchenzahl und der Fallenfrequenz untersucht. Diese Untersuchungen erweitern die theoretischen Arbeiten von T. Schulte [27, 2], und analysieren die Parameterbereiche, die eine Beobachtung der Bloch-Oszillationen mit der bestehenden Apparatur erlauben. Dazu werden zunächst die auftretenden Instabilitätsprozesse sowie ihre experimentelle Relevanz erläutert. Anschließend werden die numerischen Ergebnisse zur dynamischen Instabilität präsentiert.

Dynamische und energetische Instabilität

Bei der Beschleunigung von Bose-Einstein-Kondensaten können zwei verschiedene Prozesse zu Instabilitäten führen. So kann die auch ohne Gitter auftretende energetische Instabilität die Entstehung von Phononen verursachen. Zudem existiert in optischen Gittern ein zusätzlicher Dephasierungsprozess, die so genannte dynamische Instabilität, die in translationsinvarianten Systemen nicht auftritt [53, 119, 140, 141, 142, 131]. Zunächst erfolgt eine Abschätzung der instabilen Bereiche der Brillouin-Zone mittels der 1D Gross-Pitaevskii Gleichung 3.64, obwohl dabei der Einfluss radialer Anregungsmoden in der Analyse vernachlässigt wird. Dies dient daher lediglich der Erläuterung der zugrunde liegenden Prozesse. Die quantitative Analyse der zeitlichen Entwicklung der Bloch-Oszillationen hingegen beruht auf numerischen Lösungen der 3D Gross-Pitaevskii Gleichung 3.71, die radiale Anregungen beinhaltet und die Entwicklung der Wellenfunktion somit korrekt wieder gibt. Die Darstellung ist auf das niedrigste Band beschränkt, in dem sämtliche experimentellen Untersuchungen durchgeführt wurden. Die Quasiimpulse der Wellenfunktionen des Kondensats werden im Folgenden mit p bezeichnet

$$\phi_p(z) = e^{ipz} \tilde{u}_p(z), \quad (4.34)$$

um eine Verwechslung mit den Anregungsmoden zu vermeiden, deren Quasiimpulse in diesem Abschnitt mit q bezeichnet werden. Die energetische Instabilität wird auch als Landau-Instabilität bezeichnet. Sie wurde das erste Mal im Kontext der Geschwindigkeit einer Superflüssigkeit berechnet [143]. Überschreitet diese eine kritische Geschwindigkeit, befindet sich das System nicht mehr im energetisch niedrigsten Zustand. Völlig analog kann sich auch ein Bose-Einstein-Kondensat im periodischen Potential durch die Beschleunigung des Quasiimpulses in Zustände entwickeln, die nicht mehr dem energetisch niedrigsten Zustand entsprechen.

Durch Dissipation der Differenzenergie kann es somit in den neuen Grundzustand übergehen. Die Analyse der energetischen Instabilität beruht auf dem Energiefunktional

$$E[\phi_p(z)] = \int dz \left[\phi_p^*(z) H_0 \phi_p(z) + \frac{g}{2} |\phi_p(z)|^4 \right], \quad (4.35)$$

mit dem Operator

$$H_0 = \left(-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + p)^2 + s \sin^2(kz) - \mu \right). \quad (4.36)$$

Zur Beurteilung, ob Zustände niedrigerer Energie existieren, und der Zustand $\phi_p(z)$ somit keinem Minimum sondern lediglich einem Sattelpunkt der Energieflächen entspricht, ist die Energie des Systems unter kleinen Variationen

$$\phi(z,t) = [\phi_p(z) + \delta\phi(z,t)] e^{-i\mu t/\hbar} \quad (4.37)$$

mit den in z periodischen Störfunktionen

$$\delta\phi(z,t) = a_p(z,q)e^{iqz} + b_p^*(z,q)e^{-iqz} \quad (4.38)$$

zu bestimmen. Für das Energiefunktional folgt

$$E[\phi_p(z)] = E[\phi_p(z)] + \int dz (a_p, b_p) M \begin{pmatrix} a_p \\ b_p^* \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

Die zu negativen Eigenwerten der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} H_0 + 2gn|\phi_p|^2 & gn\phi_p^2 \\ gn\phi_p^{*2} & H_0 + 2gn|\phi_p|^2 \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

gehörenden Eigenfunktionen, stellen Variationen des Zustandes dar, die zu einer Verringerung der Systemenergie führen. Diese wurden numerisch bzw. analytisch in der Tight-Binding Näherung gelöst [53, 119, 140, 141, 142, 131]. Dies führte auf Stabilitätsdiagramme für das Auftreten der energetischen Instabilität in Abhängigkeit vom Quasiimpuls p und der Gittertiefe. Der Verlauf ist in Abbildung 4.7 skizziert. Bereits für eine Gittertiefe von $2E_r$ sind große Bereiche der Brillouin-Zone energetisch instabil. Da jedoch der Übergang in einen energetisch niedrigeren Zustand die Dissipation der Differenzenergie voraussetzt, ist diese Instabilität ohne entsprechende Dissipationskanäle unterdrückt. Daher wurden sämtliche experimentellen Untersuchungen zu Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten mit sehr geringen Temperaturen durchgeführt. Dies stellt sicher, dass nahezu pure Kondensate ohne signifikanten thermischen Untergrund vorliegen, und somit die Energie nicht in die thermische Wolke dissipiert werden kann. Da die Gross-Pitaevskii Gleichung Effekte der thermischen Wolke nicht berücksichtigt, bleibt die energetische Instabilität in der numerischen Analyse der Bloch-Oszillationen unberücksichtigt.

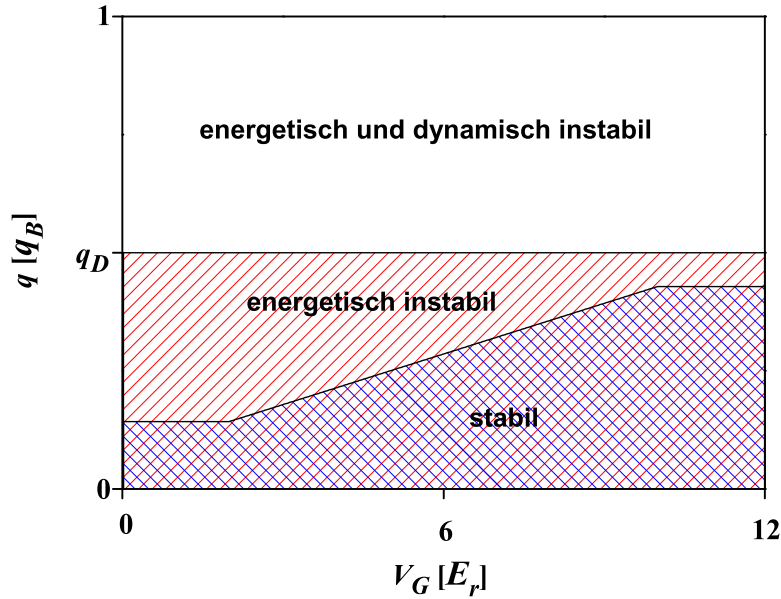


Abbildung 4.7: Stabilitätsdiagramm der dynamischen und energetischen Instabilität als Funktion des Quasiimpuls und der Gittertiefe [27].

Aufgrund der Ergebnisse in [144] ist jedoch zu erwarten, dass sie für pure Kondensate auf den Zeitskalen der durchgeführten Experimente keine Rolle spielt. Dies konnte für die relevante Oszillationszeit der experimentellen Untersuchung durch die experimentelle Beobachtung ungedämpfter Bloch-Oszillationen bestätigt werden.

Die Analyse der dynamischen Instabilität beruht auf der so genannten Bogoliubov Näherung. Dazu wird der Ansatz 4.37 in die Gross-Pitaevskii Gleichung 3.64 eingesetzt. In linearer Ordnung folgt für die Quasiteilchen-Amplituden das Gleichungssystem

$$\sigma_z M \begin{pmatrix} a_p \\ b_p^* \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} a_p \\ b_p^* \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Dabei entspricht

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

der Pauli Matrix. Wiederum bestimmen die Eigenwerte dieser Matrixgleichung das Verhalten der Anregungsmoden. Für reale Eigenwerte $\hbar\omega$ ist das System stabil. Imaginäre Lösungen der Gleichung haben jedoch ein exponentielles Anwachsen der entsprechenden Moden zur Folge, da die Zeitentwicklung des Zustandes durch $e^{i\omega t}$ gegeben ist, und der Exponent somit für imaginäre Frequenzen real ist. Es konnte gezeigt werden, dass die dynamische Instabilität nur für Quasiimpulse $q > 0.5q_B$ auftritt [53, 142]. Die Ursache liegt in der Veränderung des Anregungsspektrums mit zunehmendem Quasiimpuls p . Beim Erreichen der Instabili-

tätsgrenze führt die Periodizität der Dispersionsrelation zu einer Entartung der Energieniveaus der Phononen und Antiphononen-Anregungen ($a_p(q)$ und $b_p(q)$) an der Grenze der Brillouin-Zone. Die Kopplung durch die Wechselwirkung bedingt das Entstehen imaginärer Frequenzen. Daher ist die Stärke der dynamischen Instabilität umso größer, je größer die interatomare Wechselwirkung ist. Dies ist auch unmittelbar an der Matrix 4.40 zu erkennen, da die nichtdiagonal Elemente ohne Wechselwirkung verschwinden, und somit keine imaginären Lösungen zu Gleichung 4.41 existieren. Die dynamische Instabilität hat eine Dephasierung des scharfen Quasiimpulsspektrums [119] des Kondensats und dementsprechend gemäß der Überlegungen zu klassischen Wellenpaketen (Gleichung 4.32) eine Dämpfung der Bloch-Oszillationen zur Folge. Die Entwicklung des Quasiimpuls-Spektrums mit zunehmender Oszillationszeit wird im Rahmen der numerischen Lösungen des nächsten Abschnitts gezeigt.

Eine ergänzende Interpretation der Bedingung $q > 0.5q_B$ findet sich in [145]. Nur für Impulse die diese Bedingung erfüllen, kann die Impuls und Energieerhaltung unter Streuung in die entsprechenden Anregungsmoden gewährleistet werden. Experimentelle Untersuchungen der dynamischen Instabilität von Bose-Einstein-Kondensaten in periodischen Potentialen finden sich unter anderem in [122, 50, 144].

Numerischen Lösung der Gross-Pitaevskii Gleichung

Dieser Abschnitt dient der quantitativen Analyse der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für experimentell mit der bestehenden Apparatur realisierbare Parameter. Dazu wurde die 3D Gross-Pitaevskii Gleichung um ein zusätzliches lineares Potential erweitert

$$V_{grad}(z) = Fz. \quad (4.43)$$

Damit folgt

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{Gitter}(z) + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_{grad}(z) + g |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}). \quad (4.44)$$

Abbildung 4.8 zeigt die so numerisch bestimmte Zeitentwicklung des Schwerpunkts eines Bose-Einstein-Kondensats sowie den Vergleich mit der Trajektorie eines einzelnen Teilchens gemäß Abbildung 4.2. Die hervorragende Übereinstimmung während der ersten fünf Oszillationsperioden belegt klar, dass viele Aspekte der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern im Rahmen der Einteilchen-Theorie interpretiert werden können. Insbesondere zeigt der identische Verlauf der asymmetrischen Oszillation, dass die Dispersionsrelationen des Bose-Einstein-Kondensats und die eines einzelnen Teilchens im periodischen Gitterpotential nahezu identisch sind. Die äußerst geringen Abweichungen in den Oszillationsamplituden nach einer Flugzeit von 30ms belegen, dass die Abschirmung des periodischen Potentials durch die Wechselwirkung äußerst gering ist (siehe

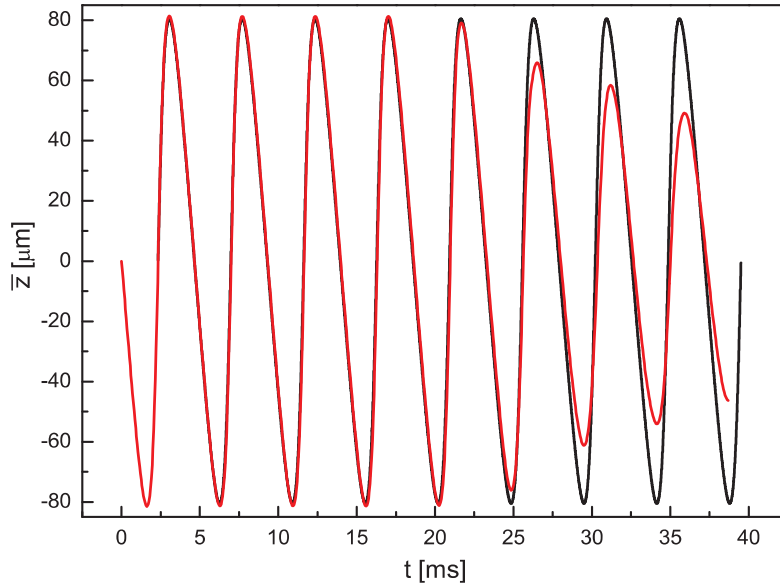


Abbildung 4.8: Vergleich der Schwerpunktsbewegung eines einzelnen Teilchens (schwarz) mit der eines wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensats (rot) für folgende Parameter: $a = 2.34 \text{ m/s}^2$, $v_G = 2E_r$, $\nu_\rho = 29 \text{ Hz}$, $\nu_{ax} = 14 \text{ Hz}$, und $N_{atom} = 5 \times 10^4$.

Diskussion im Zusammenhang mit Gleichung 3.70). Da zudem die Zeitentwicklung entsprechend des Beschleunigungstheorems durch die Phasenentwicklung der einzelnen Gitterplätze bestimmt wird (Kapitel 4.1.1), folgt aus der identischen Oszillationsperiode eine vergleichbare Entwicklung der Phasendifferenz zwischen den Gitterplätzen. Signifikante Abweichungen zwischen den beiden Trajektorien sind erst nach ca. 5 Oszillationen zu erkennen. Die Dämpfung der Oszillationsamplitude des Kondensats durch die Dephasierung des Quasiimpulses aufgrund der dynamische Instabilität ist klar zu erkennen, und macht deutlich, dass ein quantitativer Vergleich der Experimentellen Daten mit der Theorie eine vollständige Lösung der Gross-Pitaevskii Gleichung voraussetzt.

Die in der Abbildung 4.8 verwendeten Fallenparameter und Teilchenzahlen für die numerische Simulation entsprechen den experimentell verwendeten Parametern. Die mit diesen Parametern beobachtbaren vier ungedämpften Oszillationsperioden ermöglichen die Untersuchung der Auswirkungen eines zusätzlichen ungeordneten Potentials auf die Bloch-Oszillationen. Sie konnten durch die im Verlauf dieses Abschnitts beschriebenen Simulation der Gross-Pitaevskii Gleichung für verschiedenste Fallengeometrien und Teilchenzahlen identifiziert werden. Abbildung 4.9 zeigt exemplarisch eine der durchgeführten Simulation. Zur Bestimmung der Stärke der Dämpfung und insbesondere zum Vergleich der Simulationen mit den experimentellen Daten ist eine quantitative Bestimmung der Dämpfungskonstanten unabdingbar. Sie wurden jeweils durch den ebenfalls gezeigten Fit mit einem gedämpften Oszillationsverlauf bestimmt. Die dazu verwendete Funktion

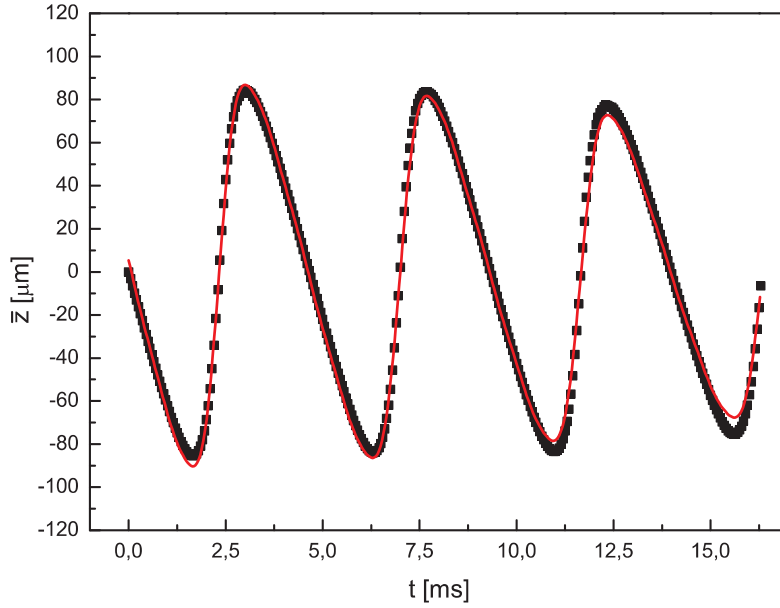


Abbildung 4.9: Numerisch bestimmte Oszillation des Schwerpunkts eines Bose-Einstein-Kondensats (schwarze Punkte) für $\nu_\rho = 29\text{Hz}$, $\nu_{ax} = 14\text{Hz}$ und $N=5 \times 10^4$. Die rote Linie repräsentiert einen Fit mit Gleichung 4.45..

$$z_{gBO}(t) = A_0 e^{-t^2/\sigma^2} z_{BO}(t). \quad (4.45)$$

beruht auf der ungedämpften Oszillation $z_{BO}(t)$ und einer gaußförmigen Einhüllenden mit dem Dämpfungskoeffizienten σ . Die ungedämpfte Zeitentwicklung $z_{BO}(t)$ wurde aus der Form der Gruppengeschwindigkeit eines einzelnen Teilchens (Abbildung 4.2) generiert. Dazu wurden die Abhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit vom Quasiimpuls anhand des Bloch-Theorems in eine von der Zeit abhängende räumliche Oszillation transformiert. Anschließend wurde diese nicht durch einen einfachen analytischen Zusammenhang ausdrückbare Funktion durch eine Fourierreihe mit 10 Elementen genähert. Die so gewonnene analytische Funktion dient als Fit-Funktion und besteht ausschließlich aus trigonometrischen Funktionen mit Oszillationsfrequenzen, die einem vielfachen der Bloch-Frequenz entsprechen. Als freie Parameter der Fit-Routine (Gleichung 4.45) fungierten die in der Fourierreihendarstellung von $z_{BO}(t)$ enthaltenen Oszillationsfrequenzen und die Gesamtamplitude A_0 der Oszillation, sowie der Dämpfungskoeffizient σ . Abbildung 4.9 zeigt einen solchen Fit an die numerisch bestimmte Schwerpunktsbewegung des Kondensats für eine Teilchenzahl von 5×10^4 und eine radiale Fallenfrequenz von 153Hz.

Die Wahl der Einhüllenden wurde aufgrund der starken Analogie der Oszillation eines Bose-Einstein-Kondensats und der eines klassischen Wellenpaketes endlicher Breite gewählt. In Abschnitt 4.1.1 wurde gezeigt, dass eine verschwindende Breite des Impulsspektrums des Wellenpaketes eine Bewegung des Schwerpunktes zur Folge hat, die der Trajektorie des ungedämpften Teilchens entspricht. Eine

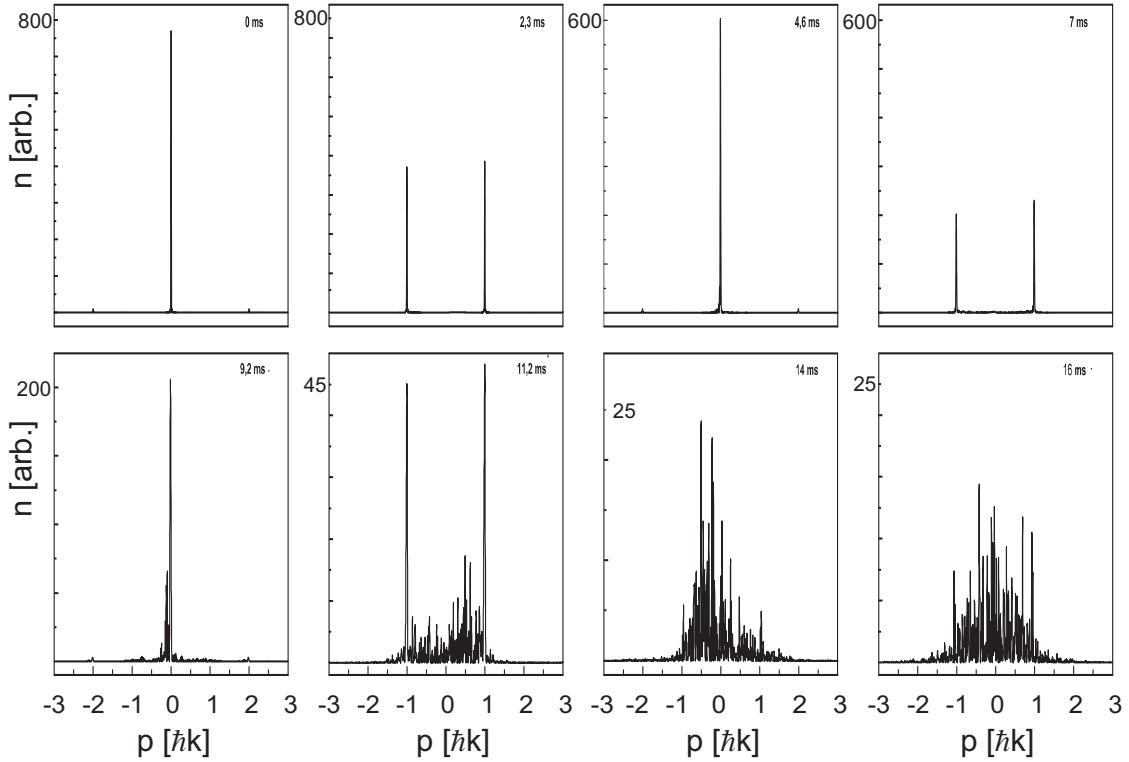


Abbildung 4.10: Zeitliche Entwicklung des Quasiimpulsspektrums für 4 Bloch-Perioden von jeweils 4.66ms, einer Fallenfrequenz von 292Hz und einer Teilchenzahl von 5×10^4 . Die Dephasierung des Quasiimpulsspektrums durch die dynamische Instabilität und das damit verbundene Auftreten zusätzlicher Quasiimpulse ist klar zu erkennen.

Verbreiterung des Impulsspektrums bedingt jedoch eine Reduktion der Oszillationsamplitude. Mit Gleichung 4.32 ergibt sich unter der Annahme einer linearen Zunahme der Breite des Quasiimpulses in der Zeit ($\Delta p/\hbar = \sigma^{-1}t$) eine gaußförmige Einhüllende [131]. Diese Form der Einhüllenden erklärt auch die zunächst langsam gedämpfte Oszillation, und die anschließende schnelle Reduktion der Oszillationsamplitude, da eine signifikante Verbreiterung des Impulsspektrums notwendig ist, um eine Verringerung der Amplitude zu verursachen. Die Annahme einer linearen Zunahme des Quasiimpuls-Spektrums stellt zwar eine Vereinfachung der in Abbildung 4.10 gezeigten, numerisch bestimmten äußerst komplexen Entwicklung des Quasiimpuls-Spektrums dar, ermöglicht aber die Bestimmung der Stärke der Dämpfung und gibt die Form der Einhüllenden für die experimentell realisierten Beobachtungszeiten gut wieder. Die Abhängigkeit der Dämpfung der Bloch-Oszillationen von der radialen Fallenfrequenz ist in Abbildung 4.11 gezeigt. Die linke Hälfte zeigt exemplarisch den Verlauf der Zeitentwicklung für verschiedene Fallenfrequenzen. Eine mit zunehmender Fallenfrequenz steigende Dämpfung ist klar zu erkennen. Die Ursache liegt in der mit der Dichteverteilung einhergehen-

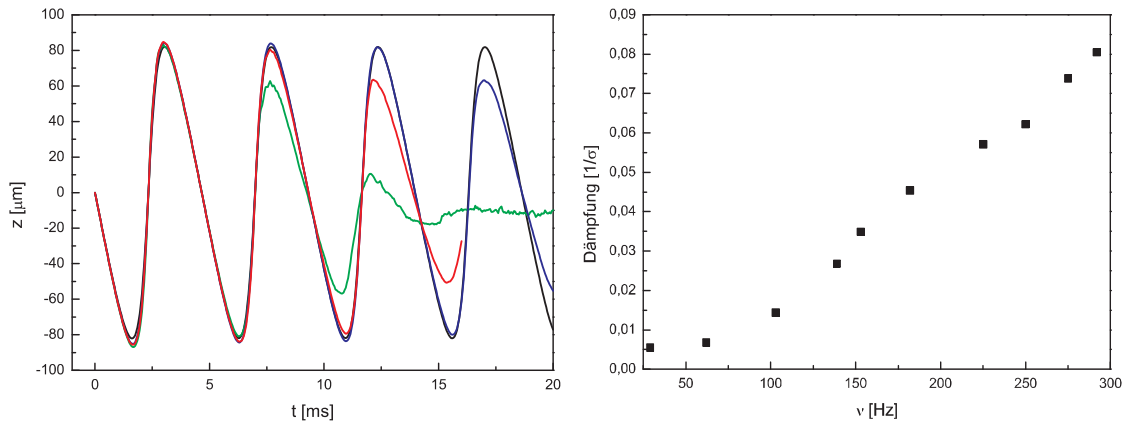


Abbildung 4.11: Dämpfung der Bloch-Oszillationen in Abhängigkeit von der radialen Fallenfrequenz. Die linke Abbildung zeigt den zeitlichen Verlauf der Bloch-Oszillationen für Fallenfrequenzen von 29Hz (schwarz), 139Hz (blau), 182Hz (rot) und 292Hz (grün) und Teilchenzahlen von 5×10^4 , während in der rechten die Dämpfungskonstanten in Abhängigkeit von der radialen Fallenfrequenz aufgetragen sind.

den Erhöhung der Wechselwirkungsenergie. Die rechte Hälfte der Abbildung zeigt die Abhängigkeit Dämpfungskonstanten von der radialen Fallenfrequenz. Ihre Verringerung von 290Hz auf ca. 29Hz hat demnach eine Reduktion der Dämpfung um einen Faktor von 14 zur Folge. Des Weiteren ist zu erkennen, dass eine weitergehende Senkung der Fallenfrequenz für die experimentell relevante Zeitskala keine bedeutende Veränderung der Dämpfungskonstante mehr nach sich zieht. Da eine Fallenfrequenz von 29Hz zudem ausreichend ist, um die Atome trotz Gravitation in der Falle zu halten, wurden sämtliche Experimente bei dieser Frequenz durchgeführt. Die radiale Fallenfrequenz von 290Hz entspricht der Standardkonfiguration der Magnetfalle (Abschnitt 2.2.2) und resultiert aus bei dem zur Evaporation verwendeten Offset Magnetfeld von $B_0 = 1G$. Die apparativen Maßnahmen zur Senkung dieser Frequenz werden detailliert im Abschnitt 4.2.1 beschrieben. In diesem Zusammenhang erfolgt auch eine Berechnung der Wechselwirkungsenergien der jeweiligen Fallengeometrien, die die Behauptung belegt, dass die Erhöhung der Fallenfrequenz zu einer Erhöhung der Wechselwirkung führt.

Abbildung 4.12 zeigt Abhängigkeit der Dämpfung von der Teilchenzahl für die gewählte Fallenfrequenz von 29Hz. Eine Reduktion der Atomzahl von 3×10^5 auf 5×10^4 hat demnach eine Verringerung der Dämpfung um einen Faktor von 5 zur Folge. Diese Atomzahl stellt daher einen guten Kompromiss zwischen der Reduktion der Dämpfung und dem Kontrast der Absorptionenaufnahmen dar. Die Dämpfung kann zwar durch eine darüber hinausgehende Verringerung der Teilchenzahl weiter reduziert werden, jedoch sind Teilchenzahlen unter 1×10^4 nach einer Flugzeit von 30ms nur noch schlecht detektierbar. Zudem ist eine Teilchenzahl deutlich unter 5×10^4 experimentell nicht zuverlässig realisierbar. Die schwache Abhängig-

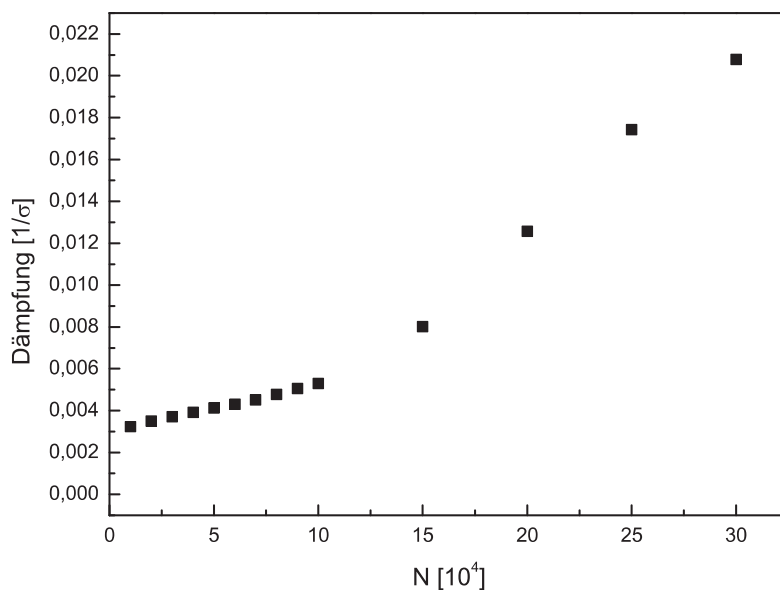


Abbildung 4.12: Dämpfung der Bloch-Oszillationen in Abhängigkeit von der Teilchenzahl für eine radiale Fallenfrequenz von 29Hz

keit der Dämpfungskonstante bei dieser Teilchenzahl hat zudem den Vorteil, dass leichte Schwankungen in der Teilchenzahl, die experimentell nicht vermieden werden können, die Beobachtung der Bloch-Oszillation nicht signifikant beeinflussen.

Aufgrund dieser Untersuchungen wurde eine Fallengeometrie mit Frequenzen von 29Hz radial und 14 Hz axial, sowie einer Teilchenzahl von 5×10^4 für die Experimente zu Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten gewählt.

4.2 Experimentelle Realisierung

Dieser Abschnitt erläutert die apparativen Maßnahmen zur experimentellen Erzeugung von Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten. Insbesondere ist eine starke Reduktion der Wechselwirkungsenergie notwendig, um die Dämpfung der Oszillationsamplitude durch die dynamische Instabilität soweit zu senken, dass ungedämpfte Oszillationen beobachtet werden können. Dies wurde durch die Verringerung der Fallenfrequenzen sowie die Realisierung kleiner Teilchenzahlen erreicht und wird im ersten Teil dieses Abschnitts beschrieben. Im weiteren Verlauf folgt die Beschreibung der Implementierung und Eichung eines magnetischen Gradientenfeldes zur Beschleunigung des atomaren Ensembles.

4.2.1 Transformation der Fallengeometrie

Um möglichst hohe elastische Stoßraten während der evaporativen Kühlung zu gewährleisten, wurde die Magnetfalle so konzipiert [76], dass sie über einen hohen radialen Einschluss von ca. 290Hz verfügt. Die zur Reduktion der Wechselwirkung notwendige Verringerung der radialen Fallenfrequenz nach der Evaporation erfolgt mittels einer 340ms langen adiabatischen Rampe, während der das Offsetmagnetfeld $B_0(t)$ kontinuierlich erhöht wird. In Kapitel 2.2.2 wurde detailliert erläutert, dass die radiale Fallenfrequenz von der Stärke des Offsetfeldes abhängt

$$f_\rho = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_B}{m} \left(\frac{B_\rho'^2}{B_0} - \frac{B_{ax}''}{2} \right)}. \quad (4.46)$$

Experimentelle Realisierung

Um radiale Fallenfrequenzen von 29Hz zu erreichen ist gemäß Gleichung (4.46) ein Offset-Magnetfeld von ungefähr 90G notwendig. Dies wurde durch eine alternative Beschaltung der Spulen der eigentlichen Magnetfalle realisiert. In Abschnitt 2.2.2 wurde beschrieben, dass das Offsetmagnetfeld durch Subtraktion des Helmholtzfeldes von dem Dipolfeld festgelegt, und somit durch eine Verringerung des Helmholtzfeldes vergrößert wird. Experimentell wurde dies durch die Absenkung des Stroms in den Helmholtzspulen realisiert, indem parallel zu ihnen ein variabler Widerstand eingebaut wurde. Dies ist schematisch in Abbildung 4.13 anhand des Schaltplans der Magnetfalle gezeigt. Der zusätzliche zur Verringerung des Stromflusses in den Helmholtzspulen eingebaute Zweig ist in rot gekennzeichnet. Durch eine Veränderung seines Widerstands ist selektiv eine Änderung der Stromstärke in den Helmholtzspulen möglich. Da dieser Zweig somit die radiale Fallenfrequenz festlegt, ist eine hohe Stabilität seines Widerstandes unabdingbar. Gleichzeitig ist zur adiabatischen Veränderung der Fallenfrequenzen aber auch seine kontinuierliche Einstellbarkeit notwendig. Zur Erfüllung beider Kriterien wurde eine Rei-

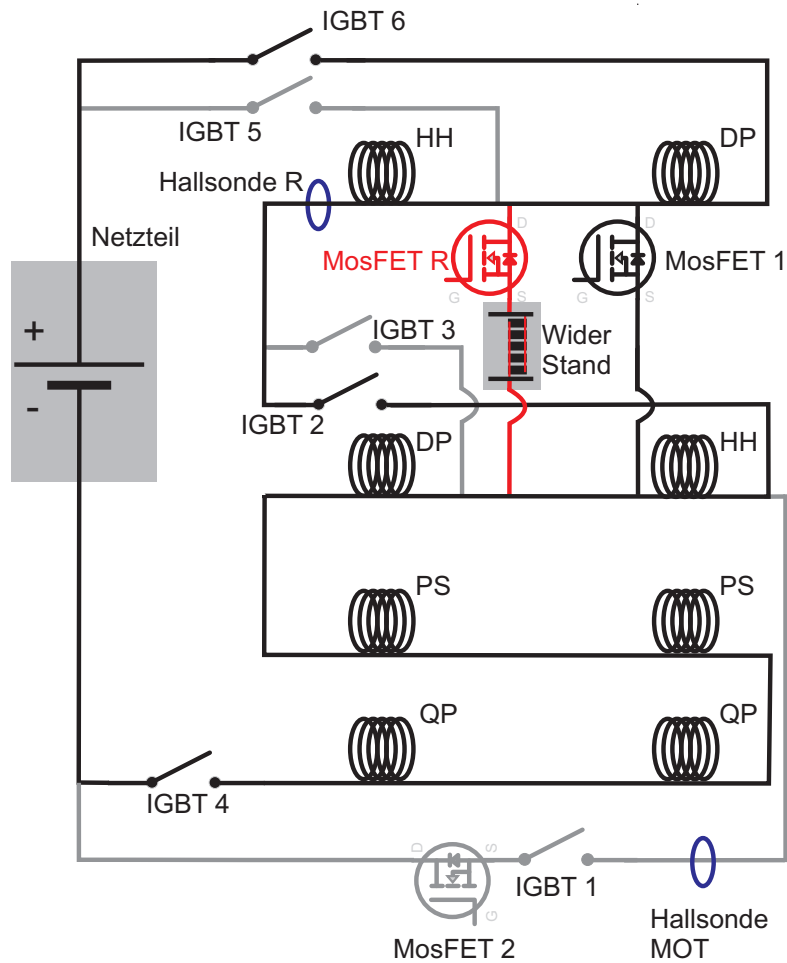


Abbildung 4.13: Schaltplan der Magnetfalle. Der zusätzlich implementierte Pfad ist in rot gekennzeichnet. Die schwarzen Linien entsprechen der Magnetfallen Konfiguration, während die grauen Linien die MOT Phase repräsentieren, in der die Helmholtz Spulen in Anti-Helmholtz Konfiguration durchflossen werden. Die verschiedenen IGBTs dienen dem Umschalten der Spulenkonfiguration zwischen MOT und Magnetfallen Phase. Die Spulenbezeichnungen entsprechen: Helmholtzspulen (HH), Dipolspulen (DP), Quadrupolspulen (QP) und Posaunenspulen (PS).

henschaltung bestehend aus vier parallel geschalteten Hochleistungs Mosfets³ der Firma Advanced Power Technology (Typ 10M07JVR) und einem manuell einstellbarem Endwiderstand gewählt. Die Mosfets dienen der kontinuierlichen Veränderung des Widerstandes während der Transformation der Falle. Am Ende dieser Transformation ist ihr Widerstand nahezu null, und die Fallenfrequenz wird ausschließlich durch den äußerst temperaturstabilen Endwiderstand festgelegt. Zur

³eine Parallelschaltung mehrerer Mosfets ist notwendig, um den Innenwiderstand und die pro Mosfet abfallende Leistung zu verringern

| $\Omega[mOhm]$ | $I[A]$ | $B_0[G]$ | $\nu_\rho[Hz]$ (Theorie) | $\nu_\rho[Hz]$ (Messwerte) |
|----------------|--------|----------|--------------------------|----------------------------|
| 103 | 62 | 90,3 | 29,08 | 29 |
| 596 | 13,25 | 21,31 | 62,4 | 62,2 |
| 1480 | 5,5 | 10,36 | 90,1 | 91 |
| 2160 | 3,82 | 7,96 | 102,4 | 102,7 |
| 4000 | 2,05 | 5,47 | 124,5 | 119,3 |
| 6666 | 1,22 | 4,29 | 139,4 | 138,9 |
| 10000 | 0,8 | 3,7 | 152,2 | 152,7 |
| ∞ | 0 | 1 | 292 | 292,2 |

Tabelle 4.1: Berechnete und gemessene radiale Fallenfrequenzen in Abhängigkeit vom Widerstand des externen Zweiges, dem Offsetmagnetfeld und dem Strom.

Realisierung verschiedener Fallengeometrien kann dieser Widerstand in diskreten Schritten variiert werden, da er aus einer Reihen und Parallel Schaltung diverser hochstabiler Widerstände der Firma Vishay Sfernice (Serie LTO) besteht. Dies stellt zudem sicher, dass der Leistungsabfall pro Widerstand gering ist und Temperatureffekte somit keine Rolle spielen. Für das Offset Feld folgt in Abhängigkeit vom Widerstand des zusätzlichen Zweiges R_{ext} mit den Feldern der Helmholtz Spulen $B_{HH} = 393G$ und der Dipolspulen $B_{Dip} = 397G$, sowie dem Innenwiderstand der Helmholtzspulen ($R_{HH} = 30mOhm$) [77]

$$B_0 = B_{Dip} - \frac{R_{ext}}{R_{ext} + R_{HH}} B_{HH} \quad (4.47)$$

Die zur Bestimmung der resultierenden radialen Fallenfrequenzen notwendigen Werte der axialen Krümmung ($B''_x = 127G/cm^2$) und des radialen Gradienten ($B'_\rho = 229G/cm$) wurden durch die Messung der entsprechenden Schwingungsfrequenzen im Vorfeld der Berechnungen bestimmt und stimmen hervorragend mit den in der Arbeit [77] angegebenen Werten ($B''_x = 120G/m^2$ und $B'_\rho = 225G/m$) überein. Durch die Wahl des Endwiderstands sind radialen Fallenfrequenzen von 292Hz bis 29Hz möglich. Zusammen mit den zugehörigen Werte der Widerstände, Ströme und Offsetfelder sind sie in Tabelle 4.1 aufgelistet.

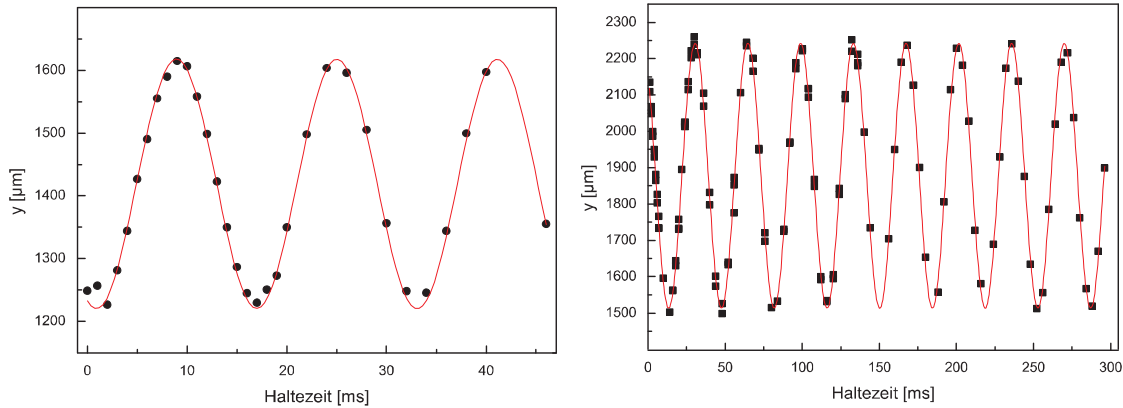


Abbildung 4.14: Messung der radialen Fallenfrequenzen. Die durch den Fit mit einer harmonischen Oszillation bestimmten Fallenfrequenzen betragen: 292Hz (oben links), 91Hz (oben rechts), 62Hz (unten links) und 29Hz (unten rechts). Die zugehörigen Werte des externen Widerstandes finden sich in Tabelle 4.1.

Messung der Fallenfrequenzen

Die berechneten Fallenfrequenzen wurden durch Frequenzmessungen der entsprechenden Dipolschwingungen überprüft [58], indem die atomare Wolke nach der kontrollierten Anregung der Schwingung für eine variablen Zeit in der Falle gehalten wird, bevor diese instantan ausgeschaltet wird. Abhängig von der jeweiligen Haltezeit durchläuft die Wolke zum Zeitpunkt des Ausschaltens unterschiedliche Phasen der Oszillation. Die resultierende Variation der Position der Wolke nach einer festen Flugzeit spiegelt die Oszillation in der Falle wieder und erlaubt die direkte Messung der Oszillationsfrequenz. Die Schwingungen wurden durch einen Versatz der Atomwolke respektive des Fallenzentrums angeregt. Dies wurde in axialer Richtung durch kurzfristiges Einschalten des im nächsten Abschnitt beschriebenen Gradientenfeldes realisiert. In radialer Richtung erfolgte die Anregung mittels einer leichten Verschiebung der Position des Potentialminimums, die aus einer abrupten Änderung des Offsetmagnetfeldes resultiert. Abbildung 4.14 zeigt exemplarisch radiale Schwingungsmessungen für zwei verschiedene Widerstände. Die hervorragende Übereinstimmung mit den theoretischen Berechnungen kann Tabelle 4.1 entnommen werden, und ist zusätzlich graphisch in Abbildung 4.15 gezeigt. Die axiale Fallenfrequenz ist gemäß Gleichung 2.72 unabhängig vom Offsetfeld und wird daher ausschließlich durch die axiale Krümmung der Dipolspulen bestimmt. Dies konnte Messungen der axialen Fallenfrequenz bei radialen Fallenfrequenzen von 29 bzw. 292 Hz bestätigt werden.

Die Fallenfrequenzen der für die weiteren Untersuchungen verwendeten Fallen-geometrie betragen somit 292Hz radial und 14Hz axial.

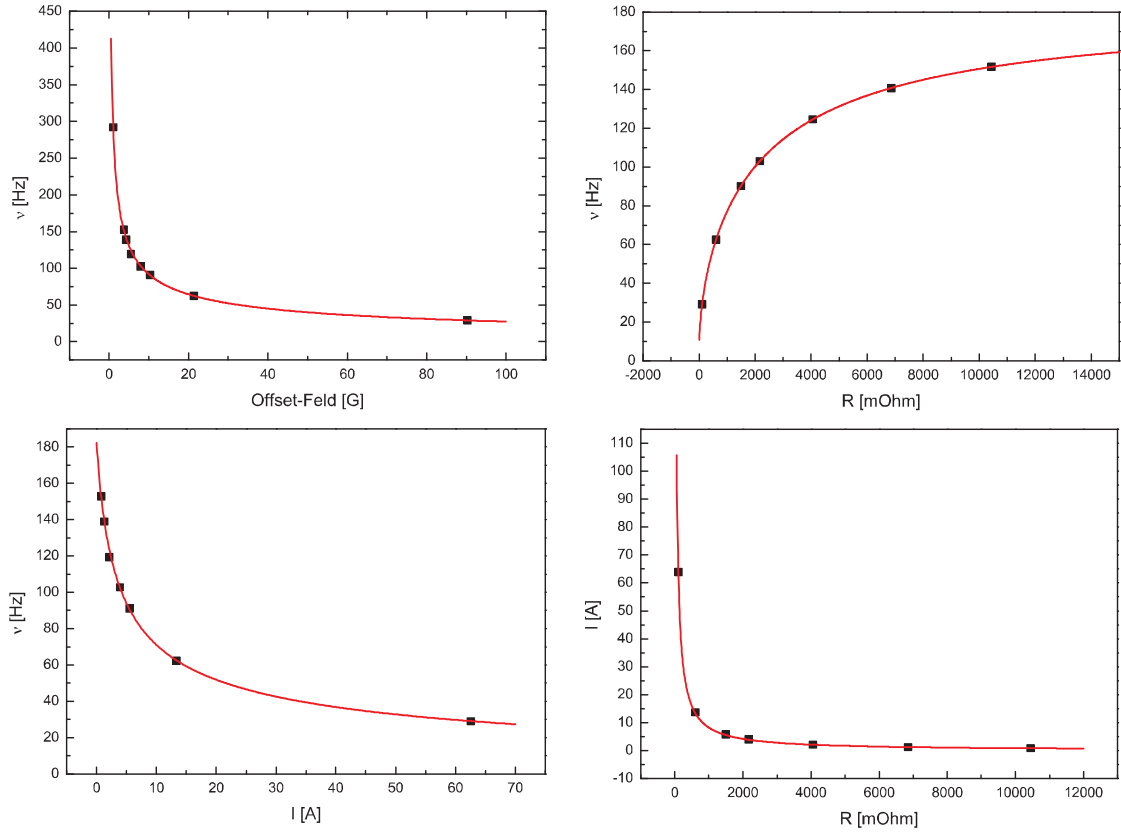


Abbildung 4.15: Die Kurven entsprechen jeweils der berechneten Abhängigkeit der radialen Fallenfrequenzen vom Offsetmagnetfeld (oben links), dem Widerstand des externen Zweigs (oben rechts), sowie dem zugehörigen Strom (unten links), die Punkte den experimentell ermittelten Schwingungsfrequenzen.

Adiabatizität der Transformation

Die Adiabatizität der Transformation der Fallengeometrie lässt sich entsprechend Kapitel 3.3.4 mittels der Bedingung

$$\left| \langle n | \frac{\partial H}{\partial t} | 0 \rangle \right| \ll \frac{\Delta E^2}{\hbar}. \quad (4.48)$$

abschätzen. Sie stellt sicher, dass ein Teilchen im zeitabhängigen Grundzustand des sich verändernden Potentials bleibt und keine Übergänge in angeregte Niveaus stattfinden. Die in diesem Abschnitt folgende Diskussion berücksichtigt nicht die durch die Wechselwirkungsenergie des Bose-Einstein-Kondensats bedingte Besetzung vieler Eigenzustände des harmonischen Potentials, die zu der Thomas-Fermi Verteilung (Gleichung 2.57) führt. Zudem wird auch die Verschiebung des Potentialminimums durch die Veränderung des Offset-Feldes nicht berücksichtigt, die ebenfalls zur Anregung radialer Dipolschwingungen führen kann. Die berechnete

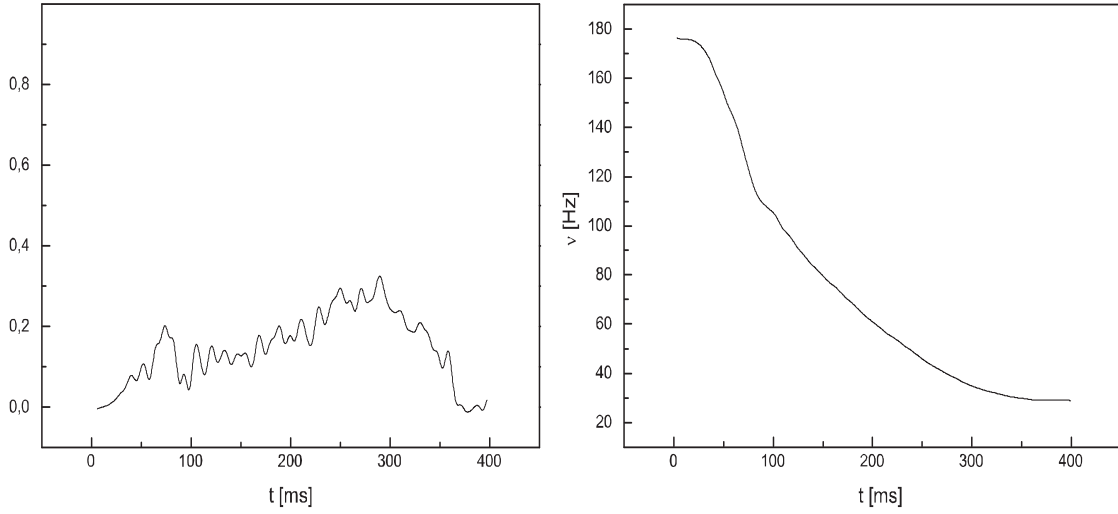


Abbildung 4.16: Adiabaticität der Rampe zur Verringerung der radialen Fallenfrequenz. Das rechte Bild zeigt den zeitabhängigen Verlauf der radialen Fallenfrequenz für die experimentell verwendete Rampe und das linke Bild den jeweils berechneten Wert der Adiabaticitätsbedingung gemäß Gleichung 4.55.

Form der adiabatischen Rampe dient daher lediglich als Anhaltspunkt für die experimentelle Optimierung, die am Ende dieses Abschnitts erläutert wird. Mit dem zeitabhängigen Potential

$$V(\rho, t) = m\omega(t)^2 \rho^2 \quad (4.49)$$

folgt aus Gleichung (4.48)

$$\frac{\partial V(\rho, t)}{\partial t} \ll \frac{\Delta E^2}{\hbar}. \quad (4.50)$$

Die Separation der harmonischen Oszillatorzustände $\Delta E = \hbar\omega$ führt auf

$$\frac{\partial V(\rho, t)}{\partial t} \ll \hbar\omega^2. \quad (4.51)$$

Mit der Ableitung des Potentials

$$\frac{\partial V(\rho, t)}{\partial t} = 2m\omega(t)\dot{\omega}(t)\rho^2 \quad (4.52)$$

lässt sich Gleichung (4.48) schließlich durch

$$2m\omega(t)\dot{\omega}(t)\rho^2 \ll \hbar\omega^2 \quad (4.53)$$

ausdrücken. Da die Veränderung des Potentials in den äußeren Bereichen der Falle ($\rho = l_{rad}$) am stärksten ist, folgt mit der radialen Ausdehnung des zeitabhängigen Grundzustandes

$$l_{rad}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_{rad}(t)}} \quad (4.54)$$

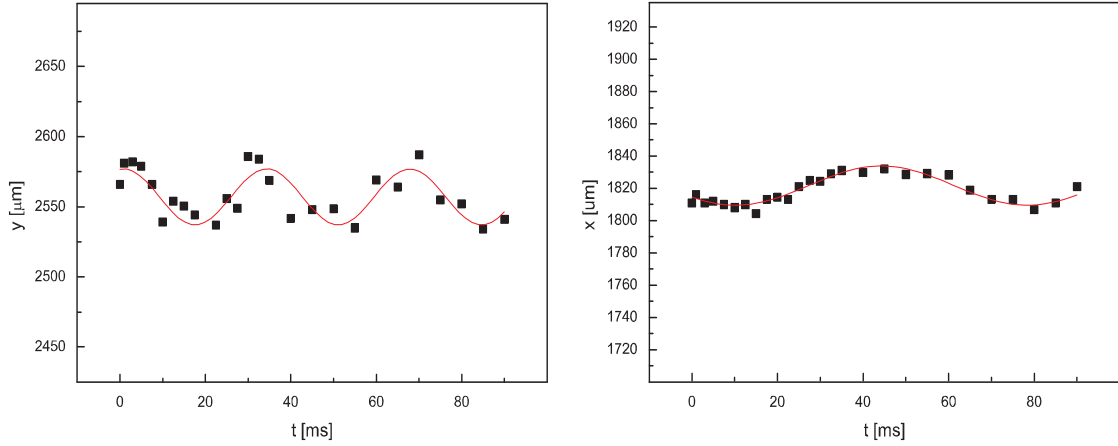


Abbildung 4.17: Test der Adiabaticität der experimentell zur Verringerung der radialen Fallenfrequenz verwendeten Rampe. Das linke (rechte) Bild zeigt die verbleibende Oszillation in y-Richtung (x-Richtung).

schließlich die Adiabaticitätsbedingung

$$\frac{2m\dot{\omega}(t)l_{rad}^2(t)}{\hbar\omega_{rad}(t)} \ll 1. \quad (4.55)$$

Die berechnete Form der zeitlichen Entwicklung der Fallenfrequenz wurde in den zugehörigen Zeitverlauf des Offsetmagnetfeldes umgerechnet. Mit Gleichung 4.47 konnte dies in den zu realisierende Zeitverlauf des Widerstandes des externen Zweiges umgerechnet werden. Die so gewonnene Rampe wurde sukzessive experimentell optimiert, indem sie in viele Teilschritte unterteilt, und die Schwingungsamplituden nach jedem Teilschritt minimiert wurden. Die so bestimmte insgesamt 340ms lange adiabatische Rampe sowie den sich daraus ergebenden Verlauf der Adiabaticitätsbedingung ist in Abbildung 4.16 gezeigt. Die verbleibenden Restschwingungen in radialer sowie axialer Richtung nach einer Flugzeit von 30ms sind in Abbildung 4.17 gezeigt und betragen $20\mu\text{m}$ in radialer und $12\mu\text{m}$ in axialer Richtung. Dies entspricht einer maximalen Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Ausschaltens von $v_{g,\rho} = 0,8\text{m/s}$ bzw. $v_{g,ax} = 0,48\text{m/s}$. Mit dem Zusammenhang

$$a(t) = \frac{d}{dt}v_G \sin(2\pi t/T) \quad (4.56)$$

folgen maximale Beschleunigungen von $0,074\mu\text{m}/\text{ms}^2$ und $0,044\mu\text{m}/\text{ms}^2$. Verglichen mit der im nächsten Abschnitt beschriebenen Beschleunigung zur Erzeugung der Bloch-Oszillationen von $2,34\text{m}/\text{s}^2$ folgt eine relative Beschleunigung von

$$a_{max,x} = \frac{0,044}{2,34} = 0,02 \quad a_{max,y} = \frac{0,074}{2,34} = 0,03. \quad (4.57)$$

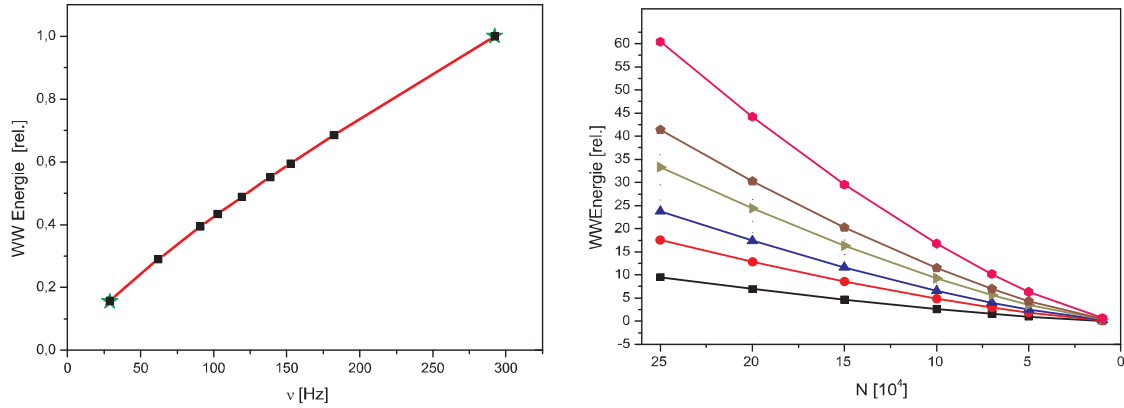


Abbildung 4.18: Wechselwirkungsenergie in Abhängigkeit von der Fallenfrequenz (links, $N = 5 \times 10^4$) und der Teilchenzahl (rechts) für radiale Fallenfrequenzen von 29,62,91,139,182 und 292Hz (von unten nach oben).

Dies bewirkt in axialer Richtung eine Modulation der Bloch-Beschleunigung im Prozentbereich, während die resultierende radiale Oszillationsamplitude in der Falle mit $4\mu\text{m}$ äußerst gering ist. Aufgrund des Strahlradius von $\approx 140\mu\text{m}$ führt dies zu keiner signifikanten Änderung der Gittertiefe während einer Oszillationsperiode. Diese Restschwingungen können somit bei der Analyse der Bloch-Oszillationen vernachlässigt werden.

Reduktion der Wechselwirkungsenergie

Dieser Abschnitt dient der Berechnung der Wechselwirkungsenergie der verschiedenen experimentell einstellbaren Fallenfrequenzen (Tabelle 4.1), und belegt somit die in Abschnitt 4.1.2 geführte Argumentation, dass die Reduktion der Fallenfrequenzen mit einer Reduktion der Wechselwirkungsenergie einhergeht.

Die Berechnung der Wechselwirkungsenergie in Abhängigkeit von der Fallenfrequenz beruht auf dem Energiefunktional (Gleichung 2.53)

$$WW = \int_V d^3\mathbf{r} g |n(\mathbf{r})|^2. \quad (4.58)$$

Dabei wird das Integrationsvolumen durch die Thomas-Fermi Radien (Gleichung 2.58) bestimmt, während die Dichteverteilung durch die Thomas-Fermi Verteilung (Gleichung 2.57) gegeben ist. Die Berechnung basiert auf dem Potential der reinen Magnetfalle ohne optische Potentiale. Da die Auswirkung des optischen Gitters auf die Wechselwirkungsenergie und die Breite des Kondensats für eine Potentialtiefe von $2E_r$ jedoch sehr gering sind (Abbildung 3.8), wurde auf eine numerische Berechnung der Änderung der Wechselwirkungsenergie im kombinierten optischen und magnetischen Potential verzichtet. Abbildung (4.18) zeigt die berechneten Wechselwirkungsenergien für verschiedene Teilchenzahlen und Fallenfrequenzen.

Auf dem linken Bild ist zu erkennen, dass die Reduktion der Fallenfrequenz von 292 Hz auf 29 Hz eine Verringerung der Wechselwirkungsenergie um einen Faktor 6.4 erzielt. Die Punkte entsprechen der Berechnung mittels der Gleichung (4.58), die auf der Thomas-Fermi Näherung beruht, während die Sterne die numerische Lösung der Gross-Pitaevskii Gleichung 2.43 kennzeichnen. Die hervorragende Übereinstimmung belegt die Anwendbarkeit der Näherung, und diente zudem als Kontrolle der numerischen Berechnungen. Der rechte Graph zeigt die Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie von der Teilchenzahl für verschiedene Fallenfrequenzen. Neben der Reduktion der Wechselwirkungsenergie mit abnehmender Teilchenzahl ist insbesondere zu erkennen, dass die Abhängigkeit der Wechselwirkungsenergie von der Teilchenzahl um so geringer wird, je geringer die Fallenfrequenz ist. Der flache Verlauf dieser Kurve im Bereich des experimentell realisierten Falls von 29 Hz Falle und 5×10^4 Teilchen zeigt, dass experimentell bedingte Schwankungen der Teilchenzahl nur geringe Auswirkungen auf die Wechselwirkungsenergie und somit auf die Dephasierung durch die dynamische Instabilität haben (siehe Diskussion im Zusammenhang mit Abbildung 4.12).

Ein weiterer Vorteil der geringen Wechselwirkungsenergie ist die deutlich höhere Dichte und geringere Ausdehnung der atomaren Wolke nach einer Flugzeit von 30 ms, da der Abbau der Wechselwirkungsenergie nach dem Ausschalten der Magnetfallenpotentiale eine so genannte selbstähnliche Expansion zur Folge hat [120]. Eine Verringerung der Wechselwirkungsenergie führt demnach zu einer geringeren Expansion des Kondensats. Dies bedingt eine gute Detektierbarkeit kleiner Atomzahlen und ein hohes Kontrast zu Rausch Verhältnis, dass für eine zuverlässige Auswertung der experimentellen Daten unabdingbar ist. Die lange Flugzeit wurde gewählt, um eine große Amplitude und somit gute Sichtbarkeit der Bloch-Oszillationen zu gewährleisten.

4.2.2 Beschleunigung der Bose-Einstein-Kondensate

Die zur Beobachtung der Bloch-Oszillationen notwendige Beschleunigung der Atome kann durch zwei verschiedene Möglichkeiten realisiert werden. Zum einen kann mittels eines bewegten Gitters eine Beschleunigung der Atome im Bezugssystem des Gitters erreicht werden [113, 48, 122, 41]. Diese Methode beruht auf der Verwendung zweier gegenläufiger Laserstrahlen zur Erzeugung des Gitters die eine Frequenzdifferenz aufweisen und so zu einer Translation der optischen Stehwelle führen. Mit einer in der Zeit zunehmenden Frequenzdifferenz ist daher ein beschleunigtes Gitter realisierbar. Diese Methode hat den Vorteil, dass der Quasiimpuls des Bloch-Zustandes des Bose-Einstein-Kondensats kontrolliert eingestellt werden kann, indem das Gitter bis zum Erreichen des gewünschten Quasiimpulses beschleunigt, und anschließend die Frequenzdifferenz konstant gehalten wird. Nachteilhaft ist jedoch, dass eine aufwendige Ansteuerung und Stabilisierung der Frequenz der Laserstrahlen notwendig ist. Des Weiteren ist eine Beobachtung der

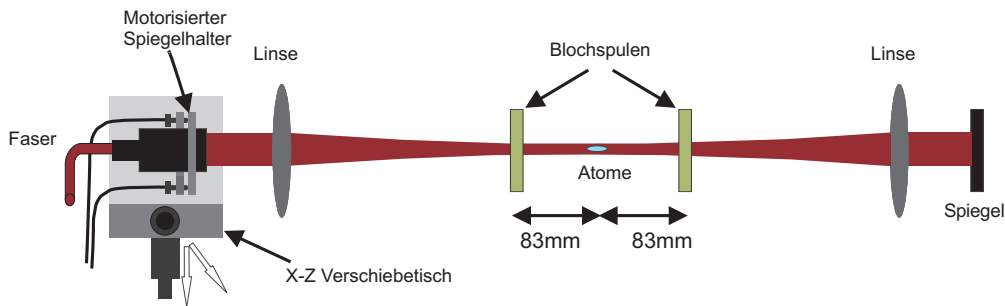


Abbildung 4.19: Schematische Darstellung des optischen Gitters und der Bloch-Spulen

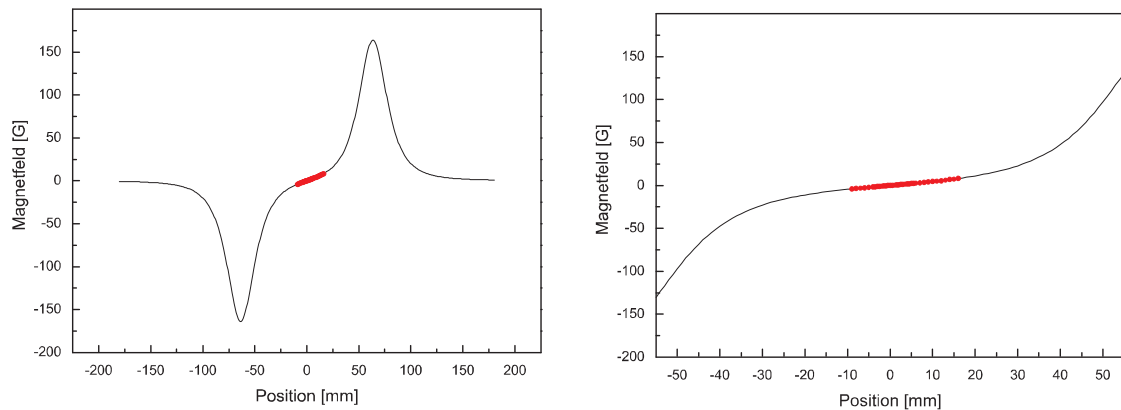


Abbildung 4.20: Vergleich des gemessenen Magnetfeldverlaufs (rote Punkte) mit der theoretischen Berechnung (schwarze Linie). Die rechte Abbildung zeigt den zentralen Bereich des im linken Bild dargestellten Magnetfeldverlaufs.

Bloch-Oszillationen im Bezugssystem des Gitters nicht möglich, sondern die mittels der Absorptionaufnahmen bestimmten Positionen des Schwerpunktes der atomaren Wolke, müssen im nachhinein in die Bewegung in diesem Bezugssystem umgerechnet werden. Dies stellt erschwert die anschauliche Interpretation der Daten. Insbesondere im Hinblick auf die Realisierung des ungeordneten Potentialgradienten wurde eine direkte Beschleunigung der Atome mittels magnetischer Gradienten gewählt, da die Kombination dieses Gradienten mit dem zusätzlichen ungeordneten Potential als inhomogenes Kraftfeld interpretiert werden kann. Dies ermöglichtes die Auswirkungen eines solchen ungeordneten Potentials auf die Bloch-Oszillationen zu untersuchen (Kapitel 5). Der magnetische Gradient wird durch zusätzlich implementierte Magnetspulen erzeugt, die im folgenden als Bloch-Spulen bezeichnet werden. Ihre Anordnung ist schematisch in Abbildung 4.19 gezeigt. Sie sind entlang der elongierten Achse des Kondensats in einem Abstand von jeweils ca. 83 mm zu der Position der Atome angebracht. Ihr Radius beträgt 18,5mm. Sie werden in Anti-Helmholtz Konfiguration betrieben, und haben jeweils 55 Drahtwicklungen. Aufgrund des Verhältnisses von Abstand zu Radius ergibt sich nicht der

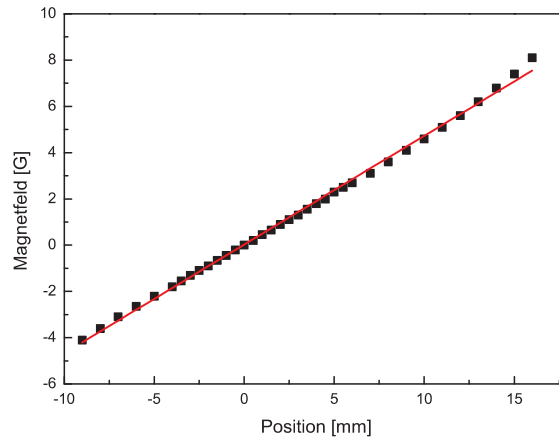


Abbildung 4.21: Magnetfeldgradient der Bloch-Spulen

Feldverlauf eines optimalen Anti-Helmholtz Paares [95], sondern der in Abbildung 4.20 gezeigte Verlauf. Die Realisierung einer echten Anti-Helmholtz Konfiguration war aufgrund räumlicher Einschränkungen durch die Spulen der Magnetfalle nicht möglich, die weder einen kleineren Abstand noch einen größeren Radius gestatten. Das realisierte Bloch-Spulenpaar stellt somit unter den durch die bestehende Apparatur gegebenen Randbedingungen die optimale Lösung dar. Zur Charakterisierung der Bloch-Spulen wurde ihr berechneter Feldverlauf mit dem in einem Testaufbau vermessenen Verlauf verglichen (Abstand der Spulen 127mm, Strom 10A, Magnetfeldsensor: Firma SIGNALTEC, Typ 867-400I). Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 4.20 und zeigen eine hervorragende Übereinstimmung. Der aus dem zentralen Bereich dieser Messung (Abbildung 4.21) bestimmte Gradient beträgt $0,47G/mm$. Die Parameter des Messaufbaus entsprechen jedoch nicht den Parametern des tatsächlichen Aufbaus, da der tatsächliche Abstand der Spulen mit 166mm signifikant von den verwendeten 127mm abweicht. Aufgrund des schlechten Zugangs und vielfältiger räumlicher Randbedingungen konnte der realisierbare Abstand im Vorfeld der Implementierung der Spulen nur abgeschätzt werden. Die gute Übereinstimmung der Messergebnisse des Testaufbaus mit der theoretischen Berechnung ermöglicht jedoch die Berechnung des Feldverlaufs für die experimentell realisierten Parameter. Für einen Abstand der Spulen von 166mm, einen Radius von 18,5 mm im Mittelpunkt der 55 Wicklungen pro Spule, sowie den maximal möglichen Strom von 30A ergibt dies einen Magnetfeldgradienten am Ort der Atome von $0,397G/mm$. Daraus ergibt sich mit

$$a = \frac{\mu_B}{m} \delta B \quad (4.59)$$

eine maximale Beschleunigung von $2,55m/s^2$.

Die endgültige Eichung der Spulen erfolgte mittels der auf das atomare Ensemble ausgeübten Kraft. Dazu wurde das inhomogene Kraftfeld nach dem Ausschalt-

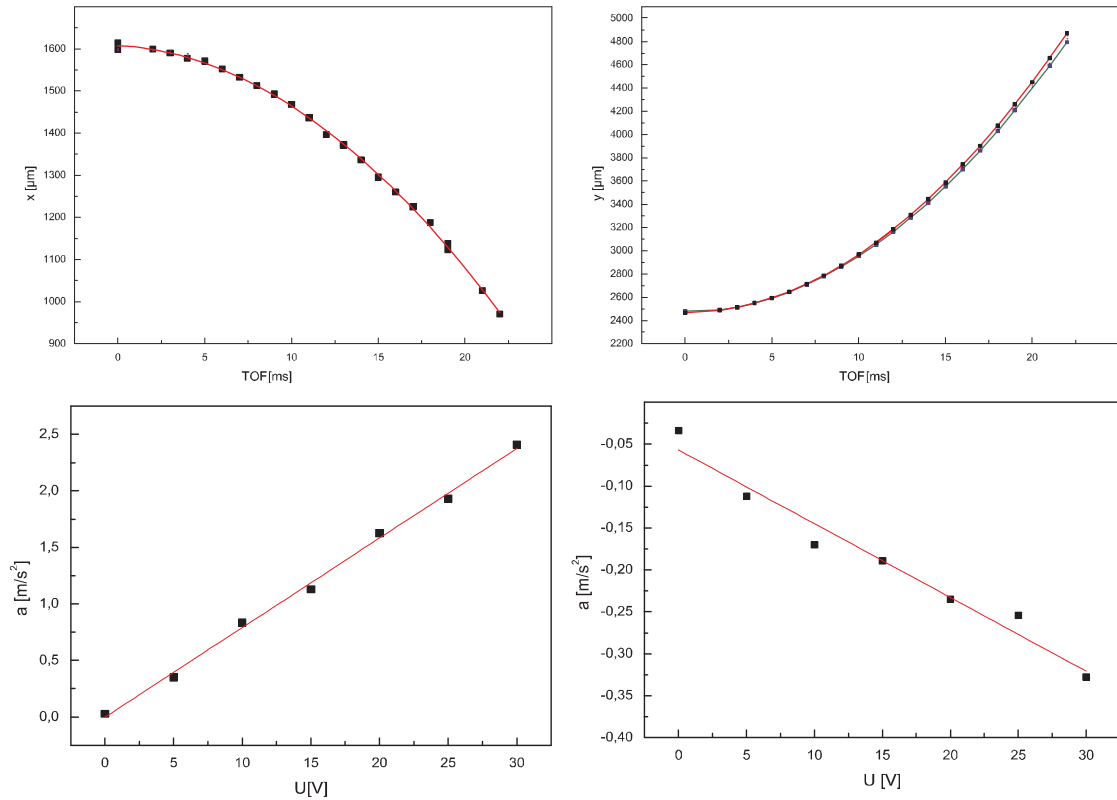


Abbildung 4.22: Eichung der Beschleunigung durch die Bloch-Spulen. Das Bild oben links (rechts) zeigt die axiale (radiale) Position des atomaren Ensembles in Abhängigkeit von der Beschleunigungszeit. Die unteren Bilder zeigen die mit dieser Methode bestimmten Eichkurven der axialen (links) bzw. radialen (rechts) Beschleunigung in Abhängigkeit von der an die Bloch-Spulen angelegten Spannung. Die Fits mit dem in rot eingezeichneten Linearem Zusammenhang ergibt $a = 0.08U$ (axial) und $a = 0.009U$ radial.

ten der Magnetfalle, also während des freien Falls der Atome, für eine variable Zeit eingeschaltet. Direkt nach Beendigung der Beschleunigung durch das Ausschalten des Feldes wurde jeweils die Position der Atome mittels einer Absorptionaufnahme bestimmt. Die Bewegung der Atome senkrecht zur Fallrichtung folgt daher dem allgemeinen Zusammenhang einer beschleunigten Bewegung

$$z(t) = z_0 + v_z t + \frac{1}{2} m t^2. \quad (4.60)$$

Abbildung 4.22 zeigt die so gewonnenen Messkurven für verschiedene Stärken des Magnetfeldgradienten in Abhängigkeit von der Beschleunigungszeit, sowie einen Fit mit dem funktionalen Zusammenhang 4.60. Die Messungen ergaben eine maximale Beschleunigung von $2,38m/s^2$ in Richtung des Gitters sowie geringe Beschleunigung von $0,26m/s^2$ senkrecht zum Gitter. Die Abweichungen zum erwarteten Wert erklären sich in axialer Richtung aus der Unkenntnis des exakten Abstandes

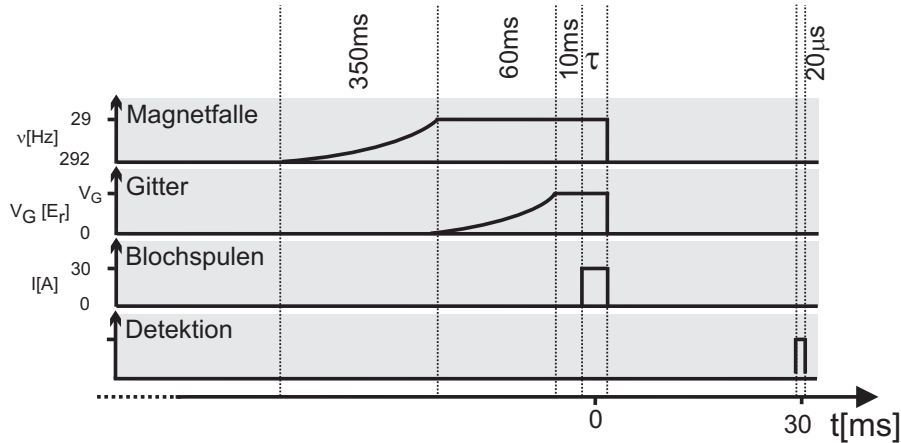


Abbildung 4.23: Experimentelle Sequenz zur Erzeugung der Bloch-Oszillationen

der Spulen zu der Position der Atome. Die unbeabsichtigte Beschleunigung in radialer Richtung resultiert aus einer leichten Diskrepanz zwischen der Spulenachse und der Symmetrieachse der Magnetfalle. Da diese Verkippung des Fallenpotentials einen maximalen Versatz der Atome respektive des Fallenzentrums von lediglich $4\mu\text{m}$ zur Folge hat, kann diese geringe Auslenkung analog zur entsprechenden Diskussion im Zusammenhang mit Gleichung 4.56 vernachlässigt werden.

Die realisierte maximale Beschleunigung von $2.38\text{m}/\text{s}^2$ ist entsprechend der numerischen Untersuchungen aus Abschnitt 4.1.2 ausreichend, um in Kombination mit der Reduktion der Wechselwirkung die Beobachtung von Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten zu ermöglichen, da eine hohe Beschleunigung gemäß Gleichung 4.3 eine hohe Oszillationsfrequenz erzeugt, und so die Zeit im dynamisch instabilen äußeren Bereich der Brillouin-Zone reduziert. In [49] konnte gezeigt werden, dass für vergleichbare Experimentelle Parameter eine Beschleunigung von über $1\text{m}/\text{s}^2$ bereits zu einer deutlichen Reduktion der Dephasierung des Kondensats führt.

4.3 Ergebnisse

Dieser Abschnitt stellt mit der experimentelle Beobachtung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für Gittertiefen von $2E_r$ und $4,5E_r$ eines der zentralen Ergebnisse dieser Arbeit vor. Im Einklang mit den theoretischen Ergebnissen des Abschnitts 4.1.2 konnten jeweils vier ungedämpfte Oszillationsperioden beobachtet werden.

Die experimentelle Sequenz zur Realisierung der Bloch-Oszillationen ist in Abbildung 4.23 gezeigt. Nach der Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats wird der radiale Einschluss innerhalb einer 340ms langen adiabatischen Rampe auf eine Fallenfrequenz von 29Hz verringert. Anschließend wird das optische Gitter mittels

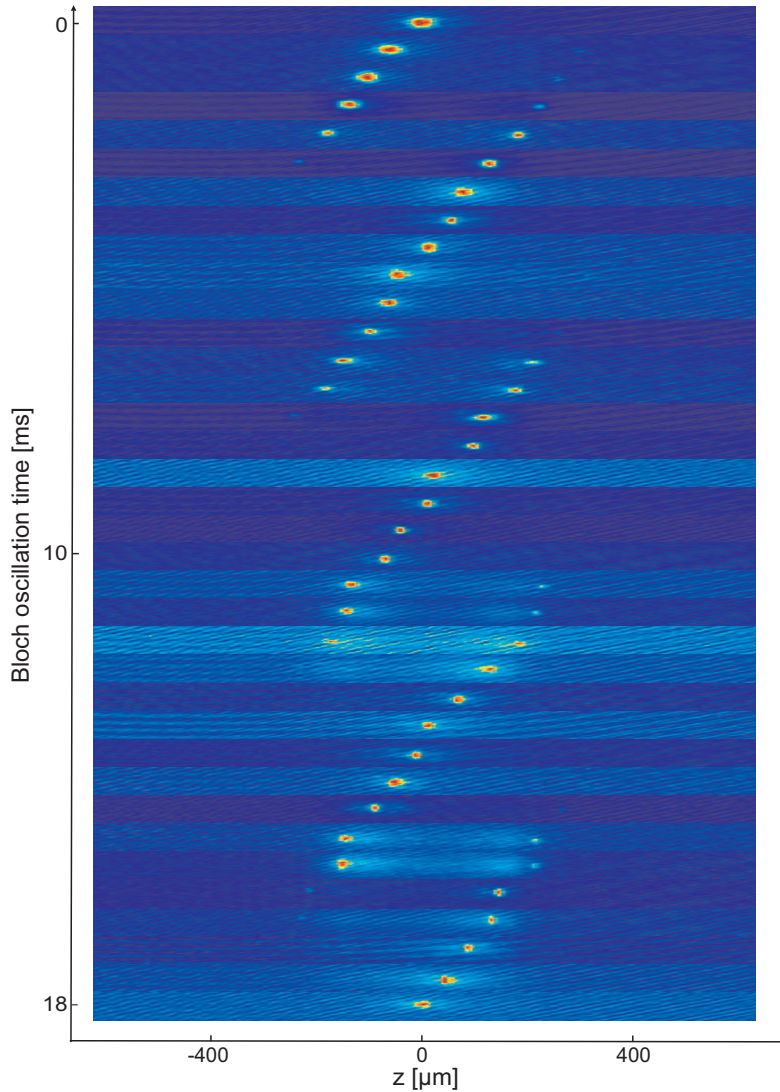


Abbildung 4.24: Absorptionen der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für eine Gittertiefe von $2E_r$ mit einer Fallenfrequenz $\nu_\rho = 29\text{Hz}$, Teilchenzahlen von $N=5 \times 10^4$ und einer Beschleunigung von $a=2,38\text{m/s}^2$. Die Oszillationszeit erhöht sich zwischen den einzelnen Absorptionen jeweils um $0,5\text{ms}$.

einer ebenfalls adiabatischen Rampe auf die jeweilige Gittertiefe V_G eingestellt. Nach einer Haltezeit von 10ms werden die Atome für eine variable Zeit τ mittels der Bloch-Spulen beschleunigt. Schließlich werden alle Potentiale gleichzeitig abrupt ausgeschaltet und das atomare Ensemble nach einer Flugzeit von 30ms detektiert.

Die beobachteten Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten sind in Abbildung 4.24 für eine Gittertiefe von $2E_r$ als Serie von Absorptionen ge-

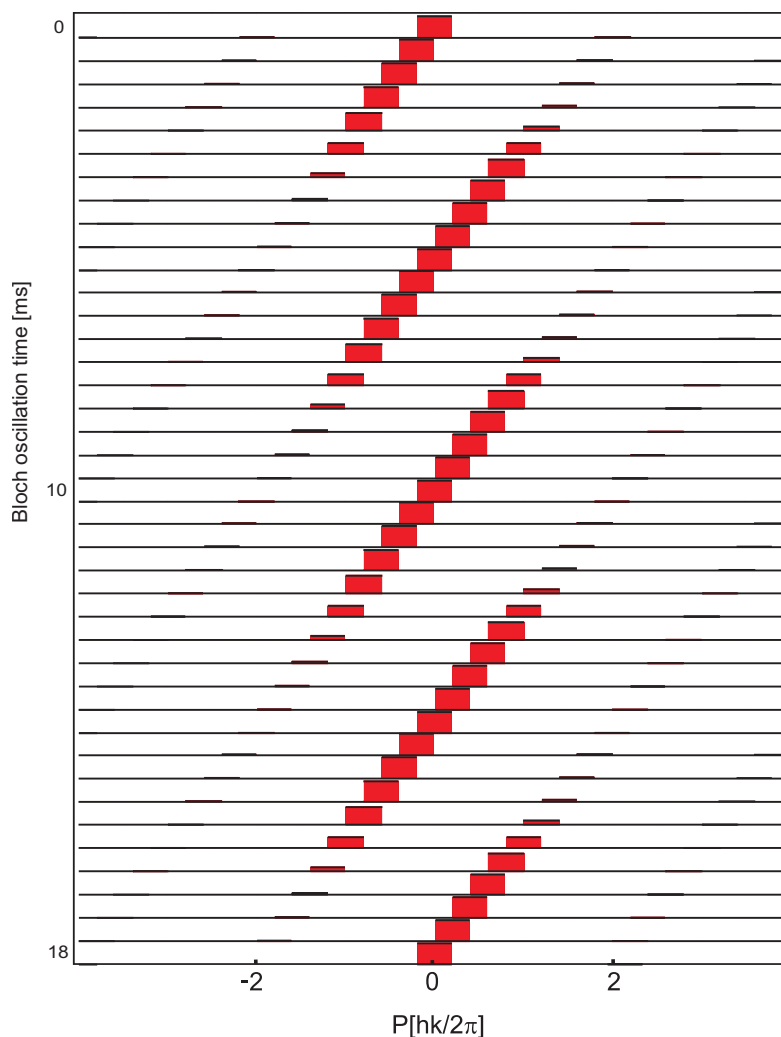


Abbildung 4.25: Numerisch berechnete Besetzung der einzelnen Impulskomponenten während der Bloch-Oszillation. Gittertiefe und Beschleunigung sind identisch zu Abbildung 4.24.

zeigt. Es sind vier ungedämpfte Oszillationsperioden zu erkennen. In der vertikalen Richtung wurde die Oszillationszeit in Schritten von 0,5ms erhöht. Die Oszillation ist klar als eine Bewegung des zentralen Maximums nach links und dem periodischen Auftreten eines zweiten Maximums am rechten Rand zu erkennen, das sich ebenfalls nach links bewegt. Während der Zeitentwicklung nimmt die Gewichtung des ursprünglichen Hauptmaximums ab, während die dies neu entstandenen Maximums zunimmt. Nach einer vollen Oszillationsperiode ist das ursprüngliche Hauptmaximum verschwunden, und wurde durch das neu entstandene ersetzt. Die Zeitentwicklung der Impulse und ihrer Gewichtung ist in hervorragender Übereinstimmung mit der in Abbildung 4.25 gezeigten Berechnung der

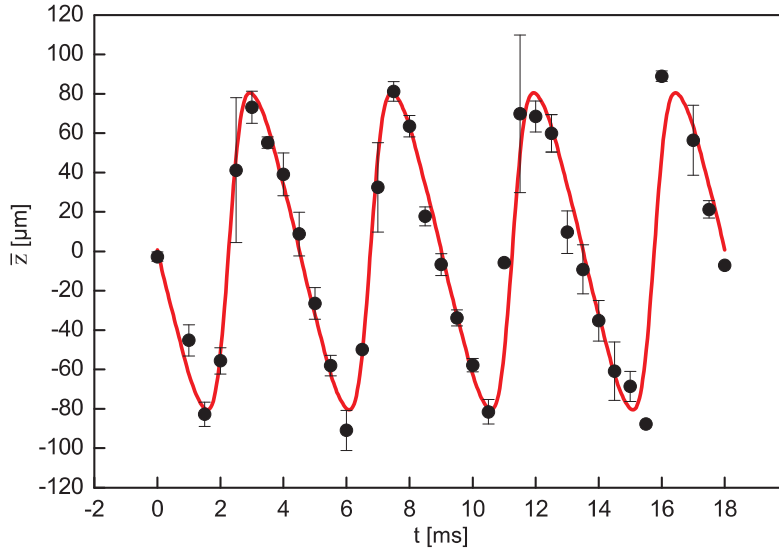


Abbildung 4.26: Schwerpunktsbewegung der in Abbildung 4.24 gezeigten Bloch-Oszillationen. Die schwarzen Punkte entsprechen den experimentellen Messwerten, während die rote Kurve einen Fit mit Gleichung 4.45 für das $2E_r$ tiefe Gitter darstellt.

Besetzungswahrscheinlichkeit der jeweiligen ebenen Wellen (Kapitel 3.2.1).

Die periodische Bewegung zeigt sich ebenfalls in der in Abbildung 4.26 gezeigten Oszillation des Schwerpunktes z_{exp} , der durch die mit der relativen Teilchenzahl $N(z)/N_{\text{Total}}$ gewichtete Summation der axialen Positionen berechnet wurde

$$z_{\text{exp}} = \sum_z \frac{N(z)}{N_{\text{total}}} z. \quad (4.61)$$

Die gemessene Oszillationsamplitude von $73\mu\text{m}$ sowie die Periodizitätslänge von $4,5\text{ms}$ stimmen sehr gut mit den theoretischen Vorhersagen von $80\mu\text{m}$ und $4,66\text{ms}$ überein. Zudem erlaubt die Fit-Routine zwar Variationen in der Amplitude und der Periodizität, jedoch keine Veränderung der Form der Oszillation. Diese Form hängt sowohl von der Beschleunigung, als auch von der Gittertiefe ab, die die Asymmetrie bestimmt (Abbildung 4.2). Daher belegen sowohl die Amplitude und Periodizität als auch die gute Übereinstimmung in der Oszillationsform die hervorragende Kontrolle über die Bloch-Oszillationen, sowie die zuvor durchgeführten Eichmessungen der Gittertiefe und der Beschleunigung durch die Bloch-Spulen (Abbildungen 3.19 und 4.20). Die Beobachtung von vier ungedämpften Oszillationsperioden bestätigt zudem die theoretischen Vorarbeiten aus Kapitel 4.1.2 zu den Auswirkungen der dynamischen Instabilität für die experimentell realisierten Parameter. Eine identische Meßserie wurde für eine Gittertiefe von $4,5\text{ms}$ durchgeführt. Abbildung 4.27 zeigt die entsprechende Schwerpunktsbewegung. Die Periodizität von $4,44\text{ms}$ sowie die Oszillationsamplitude von $45\mu\text{m}$ stimmen gut mit den entsprechenden theoretischen Werten von $4,66\text{ms}$ und $39,9\mu\text{m}$ überein. Die Oszillationsamplitu-

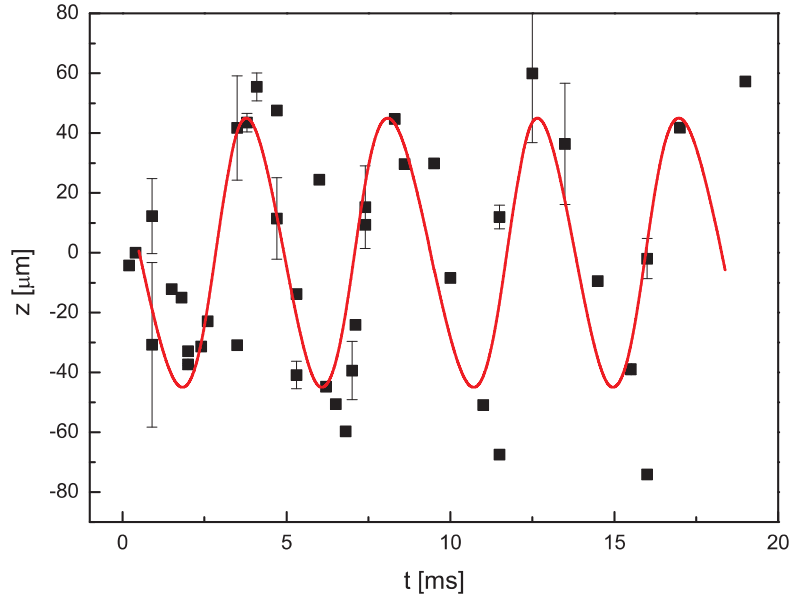


Abbildung 4.27: Schwerpunktsbewegung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für eine Gittertiefe von $4,5E_r$ und ansonsten zu der Abbildung 4.26 identischen Parametern. Die schwarzen Punkte entsprechen den aus den Absorptionsbildern bestimmten Schwerpunkten, während die rote Kurve einen Fit mit Gleichung 4.45 für das $4,5E_r$ tiefe Gitter darstellt.

de des $4,5E_r$ tiefen Gitters ist somit um ca. 40% geringer als die des $2E_r$ tiefen Gitters. Daher wurden die Untersuchungen zur unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten bei einer Gittertiefe von $2E_r$ durchgeführt. Dies minimiert die Effekte experimentell bedingter Schwankungen in der Position des Kondensats nach einer Flugzeit von 30ms. Sie betragen für ein $2E_r$ tiefes Gitter lediglich 12% der Gesamtoszillation, und erlauben eine sichere Bestimmung der Schwerpunktsbewegung mittels eines Fits des entsprechenden aus der Bandstrukturanalyse gewonnen funktionalen Zusammenhangs an die Messdaten. Für ein $4,5E_r$ tiefes Gitter hingegen entsprechen sie bereits 22% der Gesamtamplitude. Prinzipiell würde eine weitere Reduktion der Gittertiefe eine größere Oszillationsamplitude nach sich ziehen, und wäre dementsprechend noch unempfindlicher gegen Schwankungen in der Position des Kondensates. Die verwendbare Gittertiefe ist jedoch durch den Tunneleffekt (Abschnitt 4.1.1) nach unten beschränkt, der für zu niedrige Gitter bei dem Erreichen der Bandkante einen Übergang eines Teils des atomaren Ensembles in ein höheres Band ermöglicht. Daher wurde für die weiteren experimentellen Untersuchungen eine Gittertiefe von $2E_r$ gewählt.

BLOCH-OSZILLATIONEN IN UNGEORDNETEN POTENTIALEN

Dieses Kapitel behandelt die Auswirkungen eines zusätzlichen ungeordneten Potentials auf die Dynamik der Bose-Einstein-Kondensate in periodischen Potentialen.

Im ersten Teil wird aufbauend auf den Betrachtungen in Abschnitt 4.1 die Dämpfung von Bloch-Oszillationen in ungeordneten Potentialen eingehend erläutert. Im Anschluss werden der zur Erzeugung des Unordnungspotentials verwendete Aufbau und die experimentelle Sequenz beschrieben. Es folgt eine ausführliche Beschreibung der experimentellen sowie der numerischen Ergebnisse.

Die erstmalig experimentell beobachtete unordnungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen sowie der Vergleich mit den numerischen Untersuchungen stellen eines der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit dar [1].

5.1 Unordnungsinduzierte Dämpfung

In diesem Abschnitt werden zunächst die grundlegenden Auswirkungen ungeordneter Potentiale auf Bloch-Oszillationen qualitativ diskutiert, bevor die Form der zeitlichen Entwicklung der Dämpfung abgeschätzt wird. Diese Betrachtungen dienen ausschließlich dem grundlegenden Verständnis des Ursprungs der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen. Der quantitative Vergleich der experimentellen Daten mit der Theorie (Abschnitt 5.3) beruht auf numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung.

Der Ursprung der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen liegt in der Ortsabhängigkeit der zeitlichen Entwicklung der Quasiimpulse. Das zusätzliche Unordnungspotential verschiebt die Energieniveaus der einzelnen Gittertöpfe gegeneinander, so dass die Energiedifferenz zwischen den Töpfen im Gegensatz zu einem ungestörten linearen Potentialgradienten nicht länger konstant ist

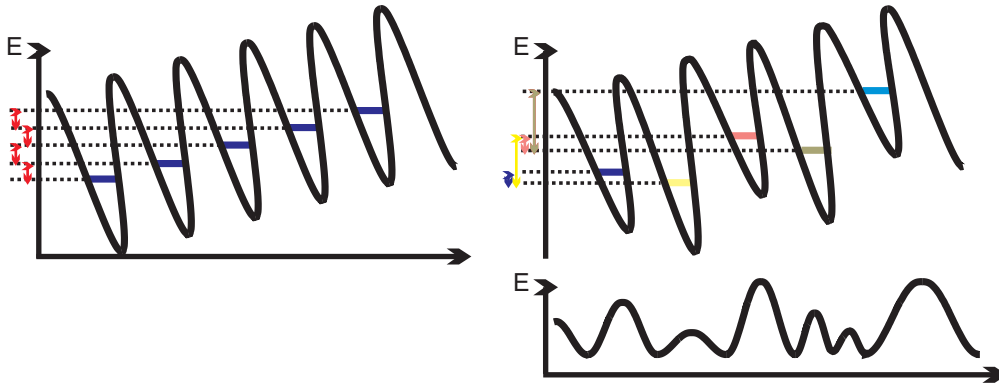


Abbildung 5.1: Potentialverlauf der Kombination aus Gitter-, Gradienten- und Unordnungspotential. Das linke Bild zeigt den Potentialverlauf des optischen Gitters mit magnetischem Gradienten, das untere den des Unordnungspotentials und das rechte Bild die Kombination der drei Potentiale. Sie kann insbesondere auch als die Kombination des periodischen Potentials mit einem inhomogenen in der Steigung variierenden Gradientenfeld interpretiert werden.

(Abbildung 5.1) sondern räumlich variiert $\delta E = \delta E(z)$. Da die Zeitentwicklung der Wellenfunktionen der einzelnen Gittertöpfe durch ihre jeweilige Energie bestimmt wird, führt die ortsabhängige Energiedifferenz zu einer ebenfalls ortsabhängigen Entwicklung der Phasendifferenz $\Delta\phi(t, z)$ zwischen den einzelnen Gitterplätzen.

$$\Delta\phi(t, z) = \frac{\delta E(z)}{\hbar} t. \quad (5.1)$$

Da die Phasendifferenz dem Quasiimpuls entspricht (Gleichung 3.31), erzeugt ihre räumlich nicht konstante Entwicklung zusätzliche Komponenten im Quasiimpulsspektrum des Bose-Einstein-Kondensats. Dies hat eine Reduktion der Oszillationsamplitude der Bloch-Oszillationen zur Folge, da unterschiedliche Teile des Quasiimpulsspektrums zeitgleich unterschiedliche Phasen der Oszillation durchlaufen (Abschnitt 4.1.1). Schließlich weist jeder Quasiimpuls gemäß Abbildung 4.2 eine von der Ableitung der Energiedispersion abhängende Gruppengeschwindigkeit auf. Eine zeitlich lineare Verbreiterung des Quasiimpulsspektrums hat gemäß der Diskussion in Abschnitt 4.1.1 eine gaußförmige Einhüllende der Oszillationsamplitude zur Folge [130, 131]. Diese Form der zeitlichen Entwicklung der Oszillationsamplitude ergibt sich für das in Abbildung 5.1 gezeigte kombinierte Potential auch unmittelbar aus der Interpretation des magnetischen Gradienten mit Unordnung als inhomogenes, räumlich variierendes Gradientenfeld (Kraftfeld). Da die Frequenz der Bloch-Oszillationen direkt von der beschleunigenden Kraft abhängt (Gleichung 4.3), haben variierende Kräfte entlang der Ausdehnung des Kondensats das Auftreten verschiedener Oszillationsfrequenzen, und somit die Dämpfung der Oszillation zur Folge. Dieser Prozess steht in enger Analogie zu der von angeregten Atomen emittierten elektromagnetischer Strahlung, die aufgrund der natürlichen Linien-

breite der atomaren Übergänge ebenfalls gedämpft wird. Unter der Annahme, dass die zusätzlichen Oszillationsfrequenzen in einem Bereich $\Delta\omega$ um die Oszillationsfrequenz der ungestörten Bloch-Oszillation ω_0 gleichverteilt sind

$$F(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega < -\Delta\omega \\ 1/\Delta\omega & \text{für } -\Delta\omega \leq \omega \leq \Delta\omega \\ 0 & \text{für } \omega > \Delta\omega \end{cases}, \quad (5.2)$$

ergibt sich aus dem Fourierspektrum der Oszillationsfrequenzen

$$F'(\omega) = \pi[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] \quad (5.3)$$

durch eine Fouriertransformation die zeitliche Entwicklung der Trajektorie des atomaren Ensembles [146]

$$\begin{aligned} z(t) &= \int d\omega F'(\omega) e^{i\omega t} \\ &= \int d\omega [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)] e^{i\omega t} \\ &= \frac{1}{\Delta\omega} \frac{e^{i\omega_0 t/2}}{2it} [e^{i\Delta\omega t/2} - e^{-i\Delta\omega t/2}] + \frac{1}{\Delta\omega} \frac{e^{-i\omega_0 t/2}}{2it} [e^{i\Delta\omega t/2} - e^{-i\Delta\omega t/2}] \\ &= \frac{1}{\Delta\omega} \frac{1}{2it} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) (e^{i\Delta\omega t} - e^{-i\Delta\omega t}). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Mit dem Zusammenhang

$$(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) = 2\cos(\omega_0 t) \quad (5.5)$$

folgt unter der Voraussetzung einer geringen Verbreiterung des Impulsspektrums $(\Delta\omega/2)t \ll 1$ aus der Reihentwicklung der Sinc- und Exponentialfunktion

$$z(t) = \cos(\omega_0 t) \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta\omega t}{2} \right)^2 \right] \approx e^{(1/6)(\Delta\omega t/2)^2} \cos(\omega_0 t). \quad (5.6)$$

Die gaußförmige Form der Einhüllenden begründet die Verwendung der Fit-Funktion

$$z_{gBO}(t) = A_0 e^{-t^2/\sigma^2} z_{BO}(t). \quad (5.7)$$

zur Analyse der unordnungsinduzierten Dämpfung. Sie wurde bereits zur quantitativen Bestimmung der Stärke der wechselwirkungsinduzierten Dämpfung genutzt. Sowohl die Betrachtungen in Abschnitt 4.1.1 als auch die so eben durchgeführte Abschätzung stellen jedoch ausschließlich qualitative Analysen dar, die lediglich der Begründung der gewählten Fit-Funktion dienen. Sie beruhen auf einer angenommenen linearen zeitlichen Verbreiterung des Impulsspektrums bzw. einer stufenförmigen Verbreiterung des Spektrums der Oszillationsfrequenzen (Gleichung 5.2). Die

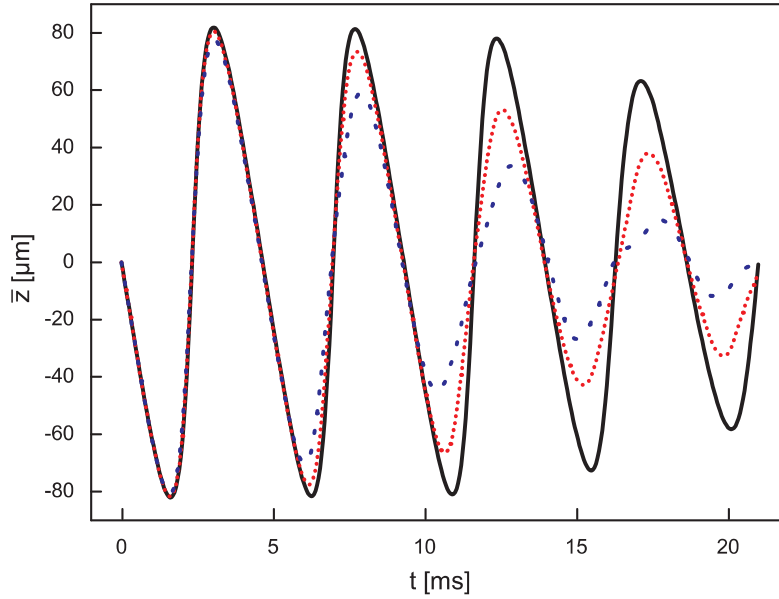


Abbildung 5.2: Schwerpunktsbewegung des Bose-Einstein-Kondensats für eine Gittertiefe von $2E_r$, eine Beschleunigung von $2,34m/s^2$ und Unordnungstiefen von 0 (schwarz), 70 und $130 \times 10^{-3}E_r$.

tatsächliche Entwicklung des Quasiimpulsspektrums ist jedoch deutlich komplexer als diese vereinfachenden Annahmen (Abbildung 4.10). Der so gewonnene funktionale Zusammenhang gibt jedoch die Entwicklung der experimentell beobachteten Dämpfung sowie der numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung für die betrachteten Zeitskalen gut wieder und eignet sich somit hervorragend zur quantitativen Bestimmung der Dämpfungskoeffizienten, sowie dem Vergleich der experimentellen und numerischen Daten.

Die quantitative Berechnung der dynamischen Entwicklung des Bose-Einstein-Kondensats in einem periodischen Gitterpotential unter Beschleunigung durch das inhomogene Gradientenfeld beruht auf numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung 4.44. Dazu wird sie analog zu den Betrachtungen in Abschnitt 4.1.2 um ein zusätzliches ungeordnetes Potential $V_U(z)$ erweitert

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_L(z) + V_U(z) + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_{grad}(z) + g |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = i\hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}). \quad (5.8)$$

Abbildung 5.2 zeigt exemplarisch die damit numerisch bestimmte Schwerpunktsbewegung des Kondensats für verschiedene Tiefen des im nächsten Abschnitt beschriebenen Unordnungspotentials [27]. Eine mit der Unordnungstiefe zunehmende Dämpfung ist klar zu erkennen. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen dienen der Analyse und Interpretation der experimentellen Daten und werden dementsprechend im Zusammenhang mit ihnen

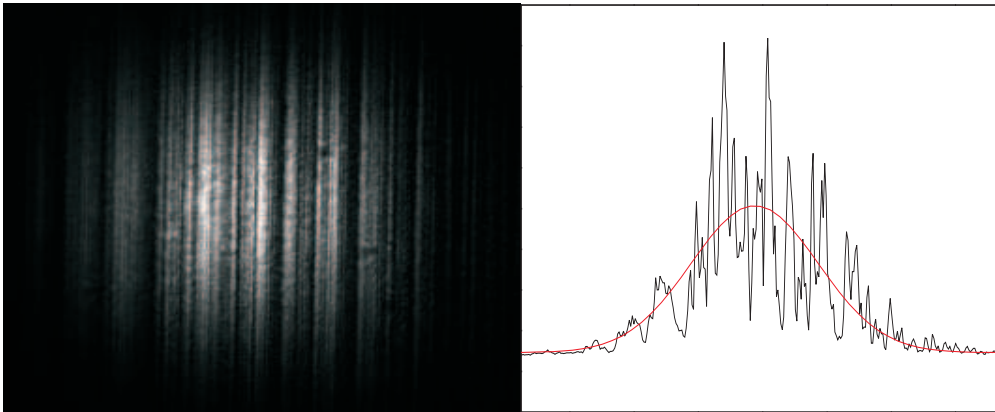


Abbildung 5.3: Intensitätsprofil des UnordnungsLasers. Der im rechten Bild gezeigte Ausschnitt entspricht dem Verlauf des Intensitätsprofils auf der Höhe der atomaren Wolke.

in Abschnitt 5.3 erläutert. Detaillierte theoretische Untersuchungen gedämpfter Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in verschiedenen von der Unordnungsstärke abhängenden Regimen wurden in einer kürzlich in Zusammenarbeit mit T. Schulte, M. Lewenstein und L. Santos erfolgten Veröffentlichung präsentiert [2].

5.2 Experimentelle Realisierung

Dieser Abschnitt erläutert die experimentellen Methoden zur Beobachtung der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen. Er baut auf Abschnitt 4.2 auf und beschreibt die Erzeugung der Unordnungsstruktur, ihre Charakterisierung und beschreibt die verwendete experimentelle Sequenz.

5.2.1 Unordnungspotential

Das Unordnungspotential wird durch ein entlang der Symmetrieachse der Falle räumlich variierendes Intensitätsprofil (Abbildung 5.3) eines senkrecht zur Achse verlaufenden Laserstrahls realisiert. Der entsprechende Strahlengang ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Die Intensitätsmodulation wird durch ein Chromsubstrat mit räumlich variierender Transmission im Strahlengang des Laserstrahls erzeugt, das mittels eines verkleinernden Teleskops auf die Position der Atome abgebildet wird. Abbildung 5.5 zeigt sowohl einen $400\mu\text{m}$ großen Ausschnitt des verwendeten Unordnungspotentials, als auch seine Tiefe in Abhängigkeit von der Position der Wolke im ungeordneten Potential. Diese Tiefe wird analog zu [29, 3] als die doppelte Standardabweichung des Potentials in einem Ausschnitt in der Größenordnung des Bose-Einstein-Kondensats definiert. Diese Definition hat jedoch leichte Variationen der Unordnungstiefe für unterschiedliche Ausschnitte der Unordnung zur

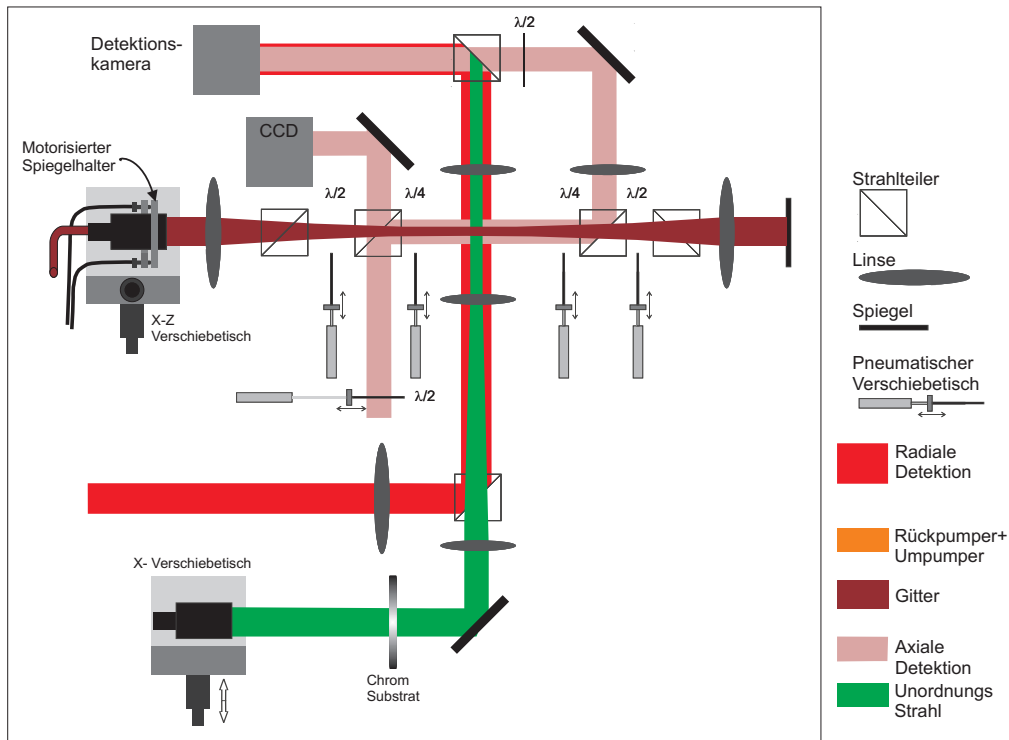


Abbildung 5.4: Strahlengang des ungeordneten optischen Gitters.

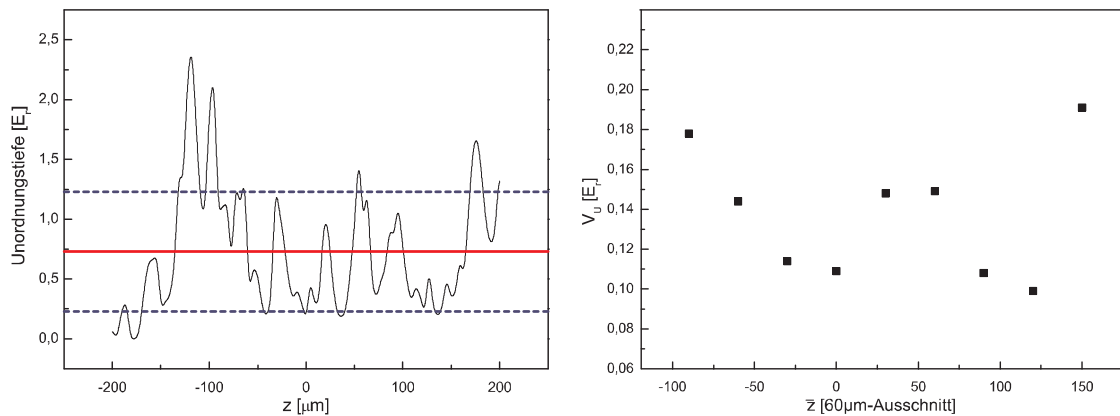


Abbildung 5.5: Zur Messung der unordnungsinduzierten Dämpfung verwendetes Unordnungspotential. Die linke Abbildung zeigt den Potentialverlauf auf Höhe der atomaren Wolke, sowie den Mittelwert (rot) und die zur Definition der Unordnungstiefe verwendete Standardabweichung (blau). Das rechte Bild zeigt die Unordnungstiefe in Abhängigkeit von der Position des jeweiligen Ausschnitts von $60\mu\text{m}$. Die durchschnittliche Unordnungstiefe beträgt $0.0138 \times 10^{-3} E_r$ für die verwendete Laserleistung und die Standardabweichung in der Unordnungstiefe $0.033 \times 10^{-3} E_r$.

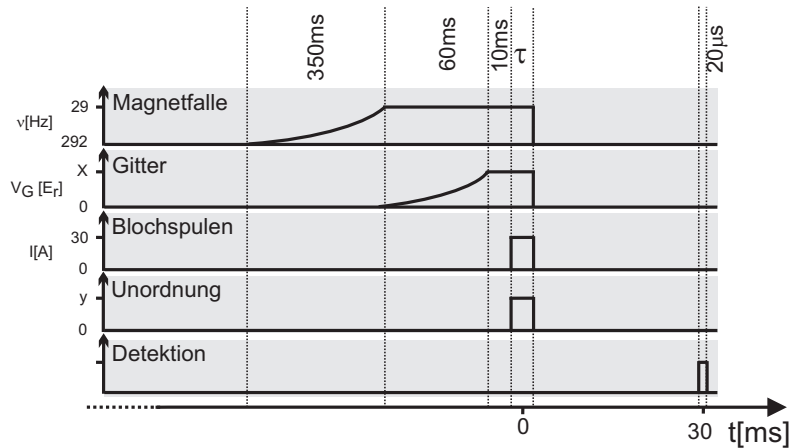


Abbildung 5.6: Experimentelle Sequenz der Untersuchungen zur unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen

Folge. Sie wurden mittels der in Abbildung 5.5 gezeigten Abhängigkeit der Unordnungstiefe von der Wahl des Ausschnittes quantitativ zu ca 20% bestimmt. Die Korrelationslänge des gezeigten Unordnungsprofils beträgt $8\mu\text{m}$ und ist aufgrund der numerischen Apertur der Abbildungsoptik beugungslimitiert.

Die maximal mit der verfügbaren Laserleistung erzeugbaren Unordnungstiefen betragen ca. $1E_r$ und sind damit mehr als ausreichend, um eine signifikante Störung der perfekten Periodizität des optischen Gitters zu erzeugen. Die maximale im Rahmen dieser Arbeit verwendete Unordnungstiefe betrug lediglich $135 \times 10^{-3} E_r$ und führte bereits zu einer drastischen Dämpfung der Bloch-Oszillationen.

5.2.2 Experimentelle Sequenz

Die verwendete experimentelle Sequenz zur Beobachtung der unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen ist in Abbildung 5.6 gezeigt. Nach der Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats wird zur Reduktion der dynamischen Instabilität die radiale Fallenfrequenz in 350ms von 292Hz auf 29Hz gesenkt. Entsprechend der in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen experimentellen und numerischen Untersuchungen ermöglicht dies in Kombination mit einer Teilchenzahl von 5×10^4 Atomen im Bose-Einstein-Kondensat ohne zusätzliche Unordnung die Beobachtung von vier ungedämpften Bloch-Oszillationsperioden. Nach der Verringerung der Fallenfrequenzen wird das Gitterpotential innerhalb von 60ms adiabatisch auf eine Gittertiefe von $2E_r$ erhöht (Abschnitt 3.3.4). Diese Gittertiefe stellt entsprechend der Ergebnisse in Abschnitt 4.1 einen guten Kompromiss zwischen der Unterdrückung des Landau-Zener-Tunnelns und einer großen Oszillationsamplitude der Bloch-Oszillationen dar. Nach einer zusätzlichen Haltezeit von 10ms wird für eine variable Zeit τ sowohl das lineare Gradientenfeld als auch das Unordnungspotential instantan eingeschaltet und das Kondensat so einer räumlich inhomogenen

Beschleunigung unterworfen. Anschließend werden sämtliche Potentiale gleichzeitig ausgeschaltet und die atomare Wolke nach einer Flugzeit von 30ms mittels eines $20\mu\text{s}$ langen Laserpulses durch eine Absorptionaufnahme detektiert.

5.3 Ergebnisse

Dieser Abschnitt präsentiert mit der experimentell beobachteten Dämpfung der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Gitterpotentialen das zentrale Ergebnis dieser Arbeit. Zusätzlich werden umfangreiche numerische Untersuchungen zur Interpretation der Daten vorgestellt. Es folgt eine Analyse der experimentell beobachteten Verbreiterung des Quasiimpulsspektrums des Kondensats, sowie die für weitgehend dephasierter Kondensate beobachtete vollständige Besetzung der ersten Brillouin-Zone.

5.3.1 Dämpfung der Schwerpunktsbewegung

In diesem Abschnitt erfolgt zunächst eine Beschreibung der beobachteten Dämpfung der Schwerpunktsbewegung, sowie der Vergleich mit den entsprechenden numerischen Simulationen für die experimentellen Parameter. Im Anschluss werden zur Unterscheidung der unordnungsinduzierten Dämpfung von einer denkbaren Verstärkung der wechselwirkungsinduzierten Dämpfung umfangreiche numerische Untersuchungen durchgeführt.

Experimentelle Ergebnisse und Vergleich mit den Simulationen

Die experimentell beobachtete unordnungsinduzierte Dämpfung der Schwerpunktsbewegung ist in Abbildung 5.7 für verschiedene Werte der Unordnungstiefe gezeigt. Gittertiefe und Beschleunigung sind identisch zu den Parametern der experimentell beobachteten ungedämpften Bloch-Oszillationen im ungestörten optischen Gitter (Abbildung 4.26). Die mit der Unordnungstiefe zunehmende Dämpfung ist klar zu erkennen. Die entsprechenden Dämpfungskonstanten sind in Abbildung 5.8 zusammen mit den numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii Gleichung 5.8 als Funktion der Unordnungstiefe aufgetragen. Die Parameter der Simulation entsprechen den experimentellen Parametern der Tiefe des optischen Gitters, der Fallenfrequenzen und der Unordnungstiefe für einen typischen Verlauf des Unordnungspotentials. Die in Abschnitt 5.2.1 bestimmte Unsicherheit in der exakten Tiefe des Unordnungspotentials wird durch die Fehlerbalken an den experimentellen Daten repräsentiert. Der grau unterlegte Bereich entspricht einer detektionsbedingten Unsicherheit in der Atomzahl von 30%, die in den numerischen Simulationen berücksichtigt wurde. Die leichte systematische Abweichung zwischen den numerischen und den experimentellen Daten resultiert aus der Abhängigkeit der Dämpfung von der exakten Form des Unordnungspotentials.

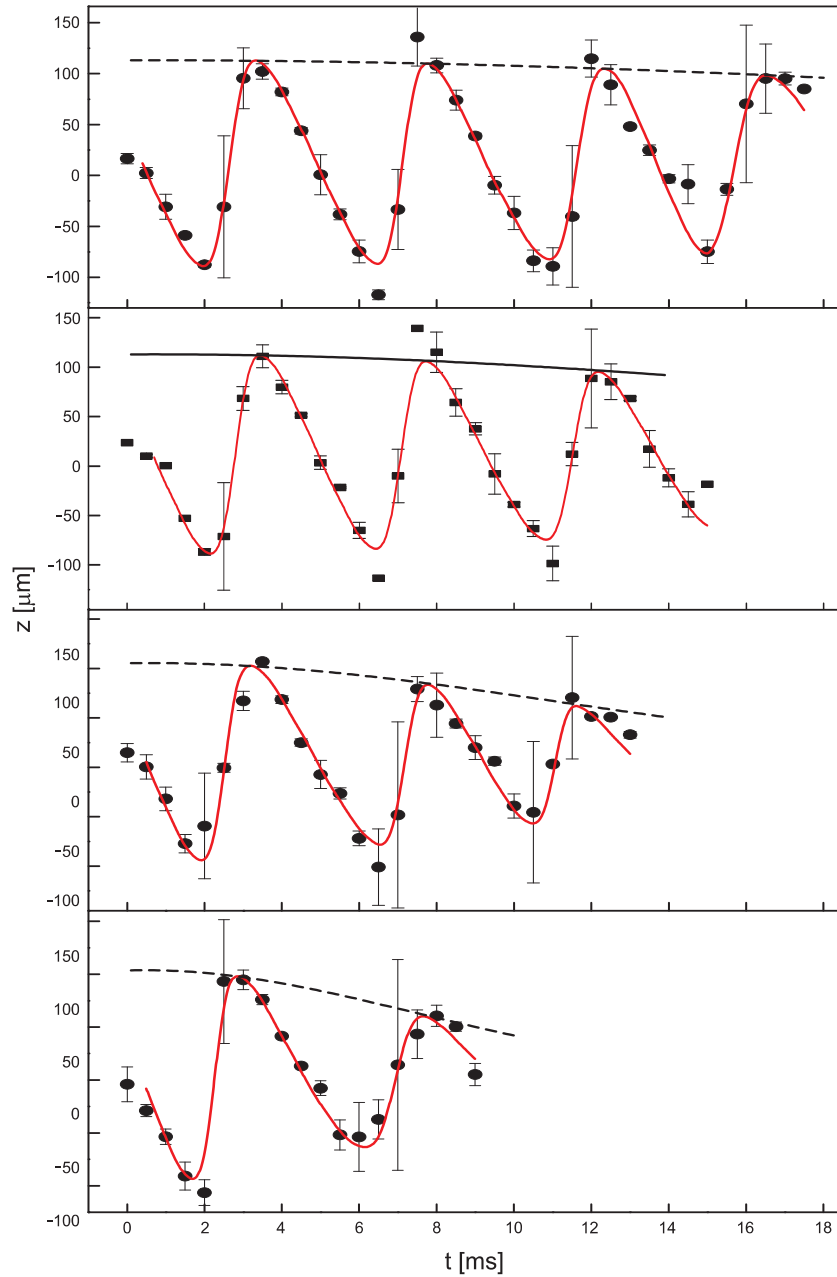


Abbildung 5.7: Unordnungsinduzierte Dämpfung der Schwerpunktsbewegung von Bose-Einstein-Kondensaten für eine Gittertiefe von $(2E_r)$, eine Beschleunigung von $(2,34m/s^2)$ und Teilchenzahlen von 5×10^4 . Die Unordnungstiefen betragen von oben nach unten $35,70,105$ und $135 \times 10^{-3} E_r$. Die Punkte entsprechen den Meßdaten, während die Kurven einen Fit mit Gleichung 5.7 darstellen. Die beobachtete Oszillationszeit wurde mit zunehmender Unordnung verringert, da die Dephasierung des Quasiimpulsspektrums eine starke Reduktion des Kontrastes und daher eine Verringerung des Signal-zu-Rausch-Verhältnisses zur Folge hat.

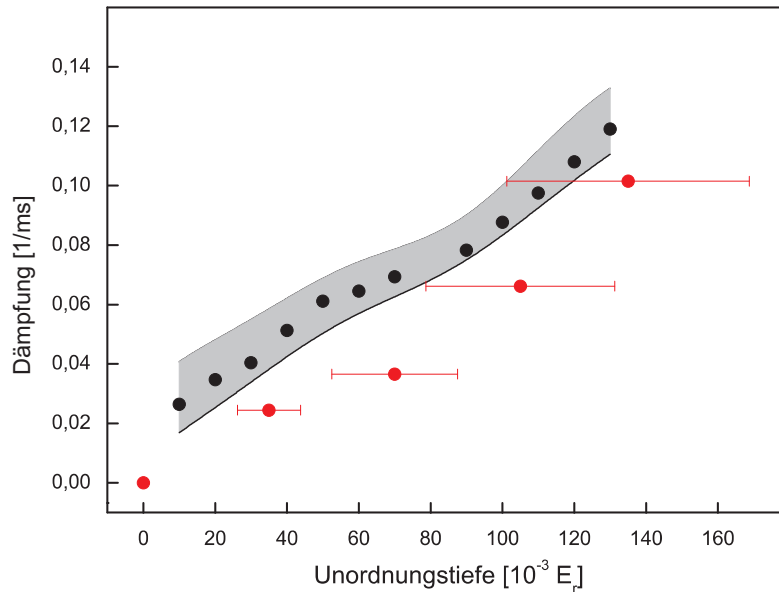


Abbildung 5.8: Dämpfungskonstanten $1/\sigma$ der Einhüllenden aus Abbildung 5.7 (rot) sowie der zugehörigen numerischen Berechnungen (schwarze Punkte, sowie grau schattierter Bereich) für ein typisches Unordnungspotential. Entsprechend der experimentellen Daten wurde die Anzahl der verwendeten Bloch-Perioden in der Bestimmung der numerischen Dämpfungskonstanten mit zunehmender Unordnungstiefe verringert.

Die in Abschnitt 5.2.1 beschriebene Definition des Unordnungspotentials berücksichtigt nicht den tatsächlichen Potentialverlauf, sondern nur das Ausmaß der gemittelten Abweichung vom Durchschnittswert des optischen Potentials. Daher kann der Potentialverlauf für identische Unordnungstiefen variieren. Eine genaue numerische Bestimmung der Dämpfungskonstanten setzt daher seine exakte Kenntnis voraus. Abbildung 5.9 zeigt den Vergleich der experimentellen Dämpfungskonstanten mit der numerisch für verschiedene Positionen des Kondensats im experimentell verwendeten Unordnungspotential (Abb. 5.5) bestimmten Dämpfung. Die Dämpfungskonstanten wurden für jeweils um $10\mu m$ voneinander abweichende Positionen des Kondensats bestimmt. Die so für die einzelnen Unordnungstiefen bestimmten minimalen und maximalen Dämpfungskonstanten entsprechen der Ausdehnung des grauen Bereichs. Die Position der Atome respektive des Unordnungspotentials kann mit dem bestehenden Aufbau in der relaxierten Magnetfalle nicht exakt bestimmt werden, da das Offsetmagnetfeld ungefähr $90G$ beträgt, die Frequenz des Detektionslasers aber auf die magnetfeldfreie Übergangsfrequenz eingestellt ist.

Im Rahmen dieser Unkenntnis der exakten Position der atomaren Wolke im Unordnungspotential ist eine gute Übereinstimmung der berechneten mit den gemessenen Dämpfungskonstanten zu erkennen. Dies belegt, dass eine Vorhersage der zu erwartenden Dämpfung die Kenntnis des genauen Verlaufs des Unordnungspo-

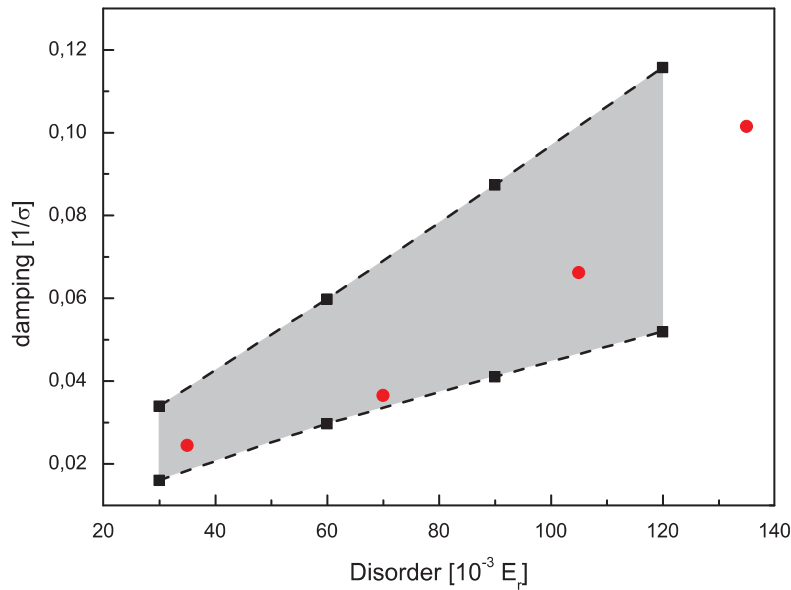


Abbildung 5.9: Unordnungsinduzierte Dämpfung für verschiedene Ausschnitte des experimentell verwendeten Unordnungspotentials. Die roten Punkte entsprechen den experimentellen Daten und die schwarzen Quadrate die extremalen Dämpfungskonstanten zu den jeweiligen Unordnungstiefen. Der grau unterlegte Bereich repräsentiert die Variation der Dämpfung für die verschiedenen Ausschnitte.

tentials voraussetzt. Bereits Variationen in der Position der atomaren Wolke in der Größenordnung von $10\mu\text{m}$ beeinflussen die Dämpfung nachhaltig.

Die in diesem Abschnitt präsentierte erstmalige experimentelle Beobachtung der Dämpfung von Bloch-Oszillationen in ungeordneten Potentialen, sowie die gute Übereinstimmung mit den durchgeführten numerischen Untersuchungen sind über das Grundlegende Interesse an der Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potentialen hinaus von hoher Relevanz für die Anwendung von Bloch-Oszillationen als Quantensensor zur Messung kleinster Kräfte [47, 55, 45, 46, 52].

Numerische Untersuchungen zur Interpretation der Dämpfung

Die Interpretation der experimentell beobachteten Dämpfung der Bloch-Oszillationen im ungeordneten Potential als eine unordnungsinduzierte Dämpfung im Sinne der in Abschnitt 5.1 beschriebenen Dephasierung des Quasiimpulses erfordert weiterführende numerische Untersuchungen. Prinzipiell ist auch eine Erhöhung der Wechselwirkungsenergie durch das zusätzliche Unordnungspotential und somit eine Verstärkung der dynamischen Instabilität denkbar. Bereits rein qualitative Vergleiche der relevanten Energien lassen diese These allerdings unwahrscheinlich erscheinen. So beträgt die Unordnungstiefe mit maximal $135 \times 10^{-3} E_r$ lediglich 7% der Gittertiefe, und führt daher nur zu einer leichten Variation des Gitterpotentials.

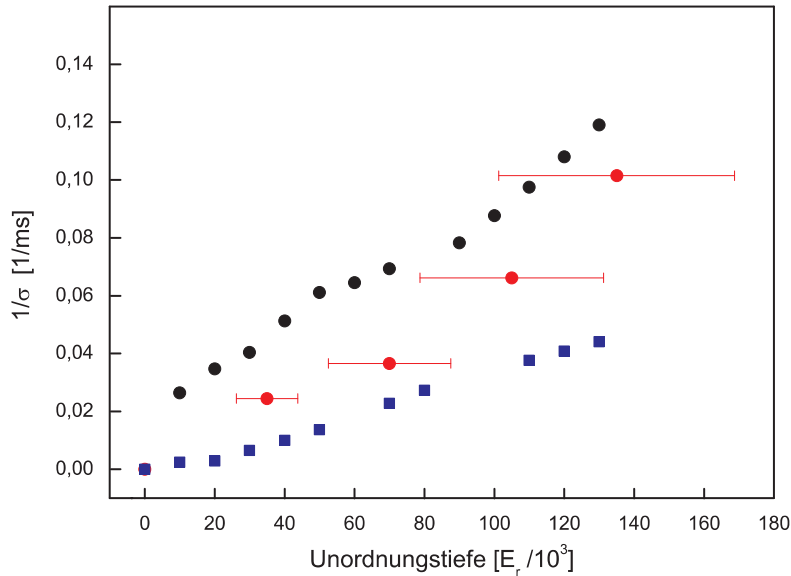


Abbildung 5.10: Unordnungsinduzierte Dämpfung ohne Wechselwirkung. Die roten Punkte mit Fehlerbalken entsprechen den experimentellen Daten, die schwarze Punkte den Simulationen der Abbildung 5.8 und die blauen Rechtecke wechselwirkungsfreien Kondensaten, bei ansonsten identischen Parametern.

Zur quantitativen Untersuchung dieser These wurden verschiedene numerische Untersuchungen durchgeführt. Abbildung 5.10 zeigt einen Vergleich der experimentellen Daten mit den numerischen Simulationen aus Abbildung 5.8 sowie dem numerisch bestimmten Verlauf der Dämpfung für wechselwirkungsfreie Bose-Einstein-Kondensate. Es ist klar zu erkennen, dass auch die Bloch-Oszillationen wechselwirkungsfreier Kondensate stark durch die Unordnung gedämpft werden, wenn auch etwas geringer. Dies ist vermutlich in der geringeren Ausdehnung nicht wechselwirkender Kondensate begründet. Die geringere Variation des Unordnungspotentials über die Ausdehnung des Kondensats bedingt ein kleineres Spektrum an Energiedifferenzen zwischen den einzelnen Gitterplätzen und führt somit zu einer geringeren Dämpfung. Die numerisch beobachtete Dämpfung der Bloch-Oszillationen nicht wechselwirkender Kondensate belegt, dass es sich bei der Dämpfung durch das Unordnungspotential eine unordnungsinduzierte Dämpfung vorliegt. Eine Unterscheidung zwischen der Stärke der unordnungs- und wechselwirkungsinduzierten Dämpfung erfordert jedoch eine quantitative Abschätzung der Verstärkung der dynamischen Instabilität durch die größere Dichte. Dazu wird zunächst für verschiedene Tiefen des in Abbildung 5.5 gezeigten Unordnungspotentials die Wechselwirkungsenergie bestimmt (Abbildung 5.11). Die Erhöhung der Wechselwirkungsenergie aufgrund der größeren Dichte im Unordnungspotential wird dabei auf die Energie des Kondensats im ungestörten Gitter normiert. Ihre Berechnung beruht auf der numerischen Integration des Dichteprofiles des Kondensats entsprechend

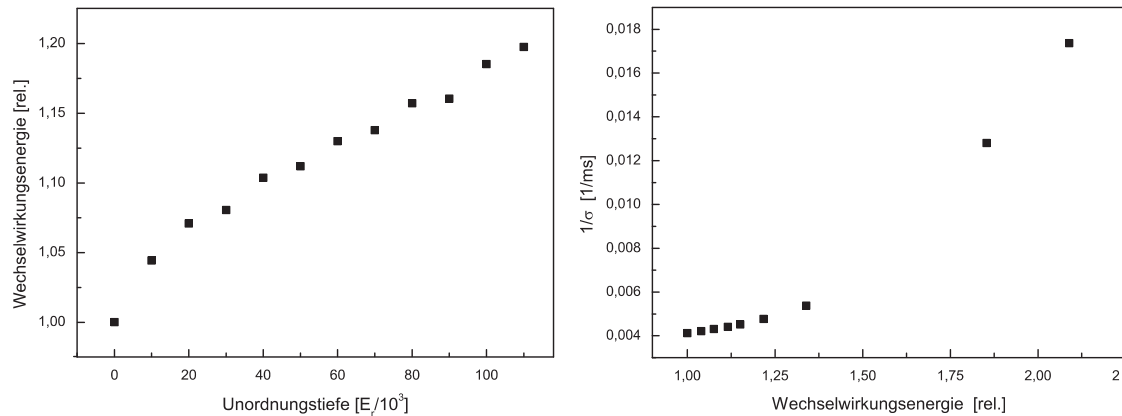


Abbildung 5.11: Die linke Abbildung zeigt die auf die Energie des ungestörten Kondensates im optischen Gitter normierte Erhöhung der Wechselwirkungsenergie in Abhängigkeit von der Unordnungsstärke. Die rechte Abbildung zeigt die Abhängigkeit der Dämpfungskonstanten von dieser relativen Erhöhung der Wechselwirkungsenergie.

Gleichung 4.58 zu verschiedenen Zeiten der Oszillation. Da sich das Profil durch die Zeitentwicklung des Quasiimpulses während der Bloch-Oszillationen leicht ändert, ist in der Abbildung jeweils der Mittelwert der Wechselwirkungsenergie über die experimentell relevante Zeitskala von 20ms aufgetragen. Eine Zunahme der Wechselwirkungsenergie durch die Unordnung ist zu erkennen, sie beträgt allerdings für die maximale experimentell verwirklichte Unordnungstiefe lediglich 20%. Zur Abschätzung der Auswirkungen auf die Bloch-Oszillationen ist in Abbildung 5.11 die Dämpfung als Funktion dieser Erhöhung der Wechselwirkungsenergie gezeigt. Sie wurde künstlich durch die Vergrößerung der s-Wellen-Streulänge erhöht, und analog zur Bestimmung der Zunahme der Wechselwirkungsenergie im Unordnungspotential durch die Integration des Dichteprofiles des Kondensates bestimmt. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass selbst eine Erhöhung um einen Faktor 2,1 lediglich zu einer Dämpfungskonstante von 0,017 führt, die im Vergleich mit der unordnungsinduzierten Dämpfungskonstante von 0,12 gering ist. Die leichte Erhöhung der Wechselwirkungsenergie kann daher nicht für die beobachtete starke Dämpfung verantwortlich sein.

Zur Überprüfung, ob die künstliche Erhöhung der Wechselwirkungsenergie zu realistischen Ergebnissen führt, sind in Abbildung 5.12 die Wechselwirkungsenergie und Dämpfungskonstanten als Funktion der Teilchenzahl im Kondensat gezeigt. Die für 25×10^4 Atome bestimmte relative Wechselwirkungsenergie von ungefähr 2,25 und die Dämpfungskonstante von 0,018 sind konsistent mit den entsprechenden Werten in Abbildung 5.11, und belegen die Aussagekraft dieser numerischen Untersuchungen.

Die Untersuchungen berücksichtigen zwar lediglich die Vergrößerung der Gesamtwechselwirkungsenergie. Die minimale Strukturgröße $8\mu\text{m}$ hat jedoch einen glatten

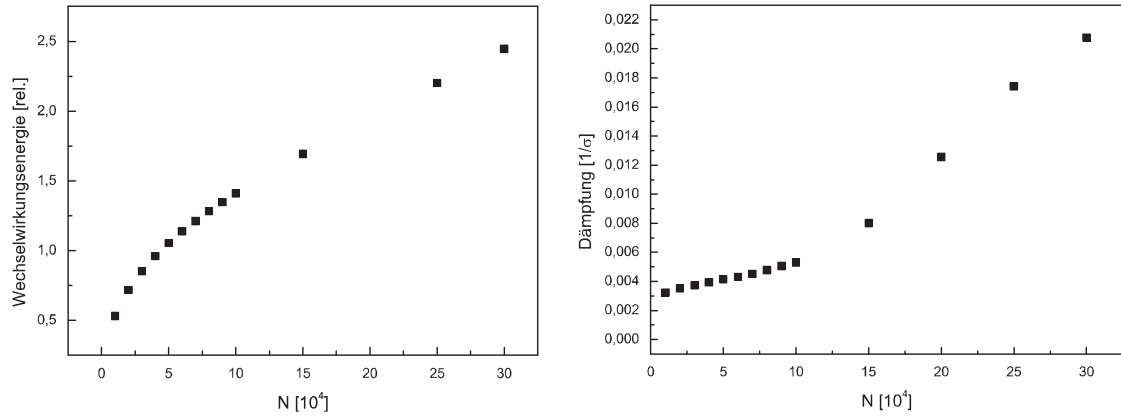


Abbildung 5.12: Wechselwirkungsenergien (links) und die resultierende Dämpfung der Bloch-Oszillationen (rechts) in Abhängigkeit von der Teilchenzahl. Die Dämpfungskonstanten sind der Abbildung 4.12 entnommen.

Verlauf des Unordnungspotentials ohne hohe lokale Einschlüsse zur Folge. Zudem führt die Kombination des linearen Gradienten und des Unordnungspotentials zu einem räumlich inhomogenen Kraftfeld, nicht aber zu einem zusätzlichen statischen räumlichen Einschluss, der stärkere lokale Dichtevergrößerungen ermöglichen würde. Daher stellt die Betrachtung der Gesamtenergie ein geeignetes Maß zur Bestimmung der Wechselwirkungseffekte dar. Die beobachtete Zunahme der Dämpfung der Bloch-Oszillationen durch das Unordnungspotential beruht daher auf der Störung der Periodizität des Potentials und nicht auf einer möglichen Dichteerhöhung. Es handelt sich somit um eine unordnungsinduzierte Dämpfung, die auch für nicht wechselwirkende Bose-Einstein-Kondensate auftritt. Daher sind diese Untersuchungen von hoher Relevanz für die Anwendung von Bloch-Oszillationen als Quantensensor zur Messung kleinster Kräfte. Schon Inhomogenitäten auf Längenskalen der Ausdehnung der Kondensate führen zu einer signifikanten Dämpfung der Oszillationen.

5.3.2 Verbreiterung des Impulsspektrums

Die Ursache der Dämpfung liegt gemäß der Betrachtungen in Abschnitt 5.1 in der Verbreiterung des Quasiimpulsspektrums durch das Entstehen zusätzlicher Impulskomponenten während der Zeitentwicklung der Wellenfunktion. Dies ist in Abbildung 5.13 für eine Unordnungstiefe von $135 \times 10^{-3} E_r$ über eine volle Bloch-Oszillationsperiode gezeigt. Die Verbreiterung der ursprünglich scharfen Impulskomponenten durch die Dephasierung des Quasiimpulsspektrums ist klar zu erkennen und wird besonders im Vergleich mit experimentell gemessenen ungestörten Bloch-Oszillationen deutlich (Abbildung 4.24). Die numerisch bestimmte Verbreiterung des Quasiimpulsspektrums ist konsistent mit der experimentell beobachteten Verbreiterung des Impulsspektrums

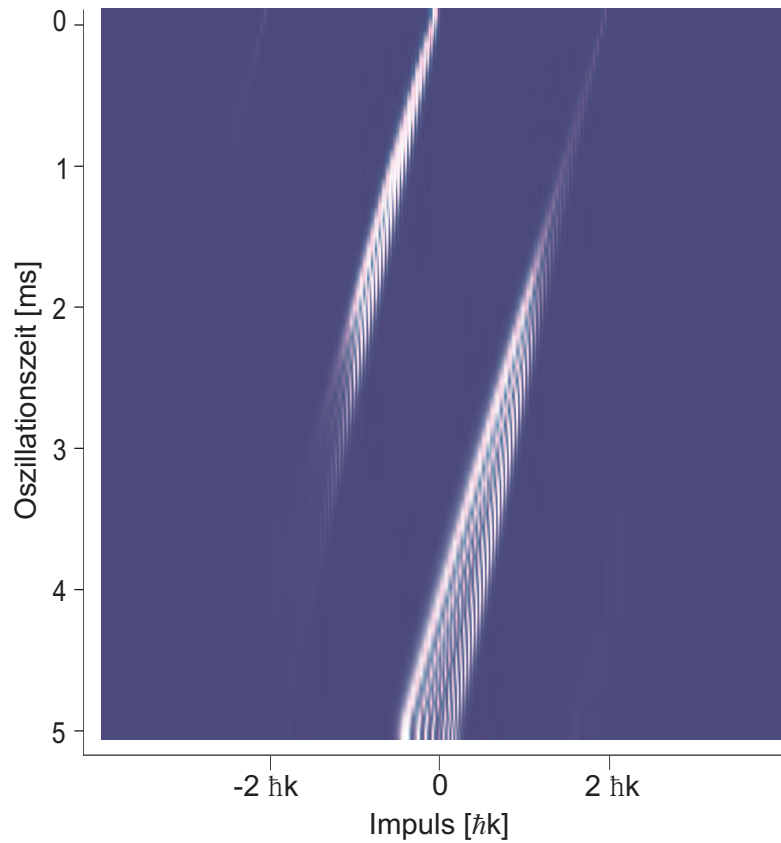


Abbildung 5.13: Falschfarbenbild der Quasiimpulsentwicklung während einer Bloch-Oszillationsperiode für eine Unordnungstiefe von $105 \times 10^{-3} E_r$. Die Gittertiefe, Fallenparameter und die Beschleunigung sind identisch zu den in Abbildung 5.7 präsentierten experimentellen Untersuchungen

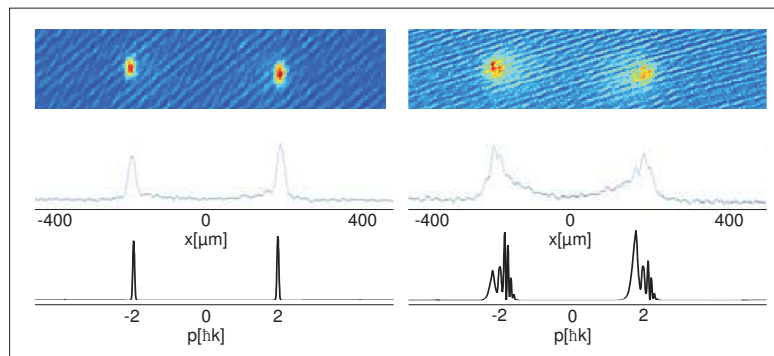


Abbildung 5.14: Absorptionsbilder des Bose-Einstein-Kondensats für eine Oszillationszeit von 0.5 Bloch-Perioden mit einer Beschleunigung von 2.4 m/s^2 , einer Gittertiefe von $2 E_r$ nach einer Flugzeit von 30ms für Unordnungstiefen von $0 \times 10^{-3} E_r$ (linke Spalte) und $105 \times 10^{-3} E_r$ (rechte Spalte). Die mittlere Reihe zeigt die zugehörigen Dichteprofile und die untere Reihe die mittels der numerischen Simulationen bestimmten Quasiimpulsverteilungen.

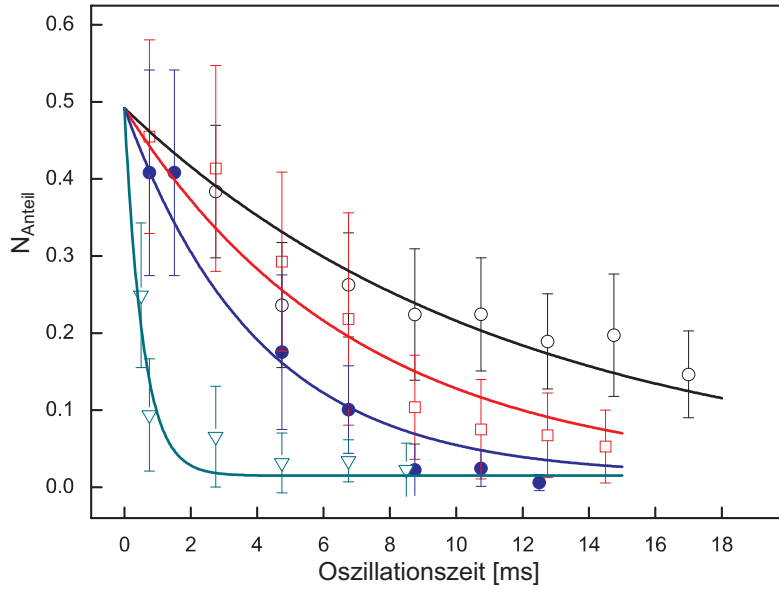


Abbildung 5.15: Anteil der Atome im Dichtemaximum des Kondensats nach einer Flugzeit von 30ms in Abhängigkeit von der Bloch-Oszillationszeit. Die Symbole repräsentieren vier verschiedene Unordnungstiefen von $0E_r$ (schwarze Kreise), $35 \times 10^{-3}E_r$ (rote Quadrate), $70 \times 10^{-3}E_r$ (blaue Punkte), und $135 \times 10^{-3}E_r$ (grüne Dreiecke). Die Linien entsprechen jeweils einem Fit mit einer exponentiellen Abhängigkeit. Die in Abbildung 5.14 zu erkennenden Interferenzstreifen verursachen eine Überschätzung der Gesamtteilchenzahl, die durch numerische Summation bestimmt wird, während die Teilchenzahl in den BEC-Maxima durch einen Fit mit einer Thomas-Fermi Verteilung berechnet wird. Daher ist N_{frac} selbst für pure Kondensate ohne erkennbaren thermischen Hintergrund nur 0,5.

in ungeordneten Potentialen. Abbildung 5.14 zeigt einen Vergleich der numerischen und experimentellen Dichteprofile sowie die zugehörigen Absorptionbilder der Bose-Einstein-Kondensate für Unordnungstiefen von $0 \times 10^{-3}E_r$ und $105 \times 10^{-3}E_r$ nach einer halben Bloch-Oszillationsperiode. Im ungestörten Fall liegen scharfe Dichtemaxima vor, während im ungeordneten Fall sowohl in den experimentellen Daten, als auch in den Simulationen eine Verbreiterung des Impulsspektrums sowie ein signifikanter Hintergrund durch das Entstehen zusätzlicher Quasiimpulse erkennbar ist. Um diesen Effekt quantitativ zu untersuchen, wurde der in den Dichte-Maxima des Kondensats N_{BEC} verbleibende Anteil N_{frac} der Atome bestimmt, indem das Verhältnis

$$N_{frac} = N_{BEC} / N_{Gesamt} \quad (5.9)$$

zur Gesamtteilchenzahl N_{Gesamt} gebildet wurde. Dies entspricht der Vorgehensweise der Veröffentlichung [49], in der die Auswirkung der dynamischen Instabilität untersucht wurde. Abbildung 5.15 zeigt N_{frac} in Abhängigkeit von der Bloch-Oszillationszeit für verschiedene Unordnungstiefen. Die Punkte entsprechen den

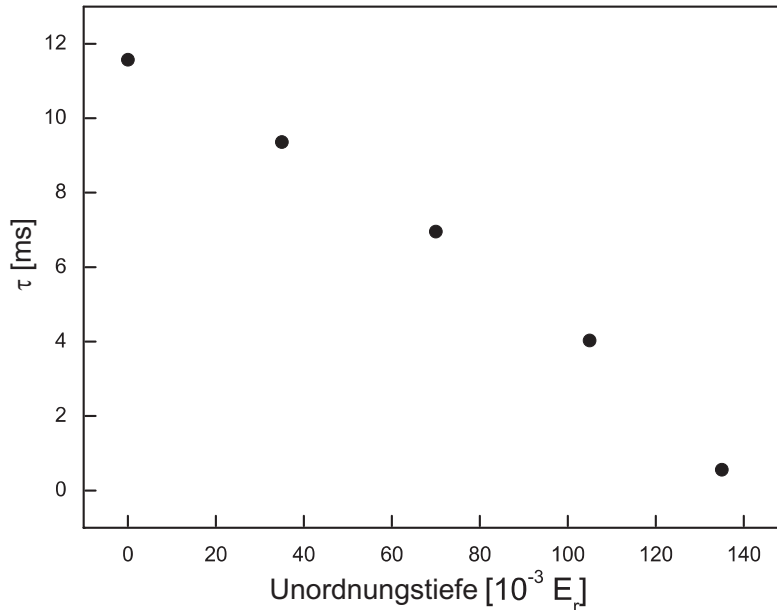


Abbildung 5.16: Zerfallskonstanten τ der Abbildung 5.15 in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe.

experimentellen Daten, während die Linien eine Fit-Funktion mit einer exponentiellen Abhängigkeit zeigen. Eine Abnahme von N_{frac} mit fortschreitender Oszillationszeit ist klar erkennbar. Insbesondere zeigt der Vergleich mit der ungestörten Zeitentwicklung der Bloch-Oszillationen (Abbildung 4.26), dass diese Dephasierung der Dämpfung der Schwerpunktsbewegung vorausgeht. Besonders deutlich wird dies für eine Unordnungstiefe von $0E_r$. Sie zeigt bereits eine deutliche Reduktion von N_{frac} , während die Oszillation des Schwerpunktes innerhalb der experimentellen Beobachtungszeit ungedämpft ist. Diese belegt in Kombination mit der guten Übereinstimmung der gaußförmigen Fit-Funktion mit den experimentellen Daten (Abbildung 5.7), dass die Verbreiterung des Impulsspektrums der Dämpfung zugrunde liegt. Erst eine signifikante Verbreiterung führt zu einer beobachtbaren Verringerung der Oszillationsamplitude.

Die Zerfallskonstanten τ aus Abbildung 5.15 sind in Abbildung 5.16 als Funktion der Unordnungstiefe aufgetragen. Die Abnahme des Anteils der Atome in den Dichtemaxima mit zunehmender Unordnungsstärke zeigt, dass eine stärkere Unordnung eine schnellere Dephasierung des Quasiimpulsspektrums zur Folge hat. Dies steht im Einklang zu der beobachteten stärkeren Dämpfung der Schwerpunktsbewegung (Abbildung 5.7).

5.3.3 Vollständige Dephasierung über die erste Brillouin-Zone

Die Dephasierung des Quasiimpulses während der Bloch-Oszillation führt für ausreichend lange Oszillationszeiten zu einer gleichmäßigen Besetzung der ersten Brillouin-Zone. Die aus der Periodizität folgende Bandlücke verhindert jedoch Übergänge in höhere Bänder. Eine direkte Übertragung dieser Quasiimpulsverteilung auf die entsprechende Impulsverteilung des Kondensats in der reinen Magnetfalle kann mittels einer adiabatischen Reduktion der Gitterleistung erzielt werden (Abschnitt 3.3.4). Nach dem Ausschalten des magnetischen Einschlusses führt dies für vollständig dephasierter Kondensate zu einer Expansion, die ein rechteckiges Dichteprofil aufweist, da sie die gleichmäßige Besetzung der Brillouin-Zone widerspiegelt, und somit durch die Impulse der reziproken Gittervektoren begrenzt wird. Entsprechende Absorptionenaufnahmen sind in Abbildung 5.17 für unterschiedliche Teilchenzahlen gezeigt. Die nahezu vollständige Dephasierung wurde unter Ausnutzung der dynamischen Instabilität durch sehr lange Oszillationszeiten und hohe Teilchenzahlen erreicht. Dazu wurde das optische Gitter zunächst adiabatisch eingeschaltet. Anschließend folgte eine 80ms lange Beschleunigungsphase. Nach dem adiabatischen Ausschalten des Gitters wurde die Magnetfalle ausgeschaltet und das atomare Ensemble nach einer Flugzeit von 30ms detektiert. Das rechteckige Dichteprofil, sowie die Begrenzung auf die durch die roten Markierungen gekennzeichnete erste Brillouin-Zone ist klar zu erkennen. Die rechte Hälfte der Abbildung zeigt jeweils Vergleichsmessungen zu ähnlichen Teilchenzahlen ohne Beschleunigung, die mit einer identischen experimentellen Gitter-Sequenz erzeugt wurden. Sie weisen die typischen scharfen Maxima nicht dephasierter Kondensate, sowie einen mit der Teilchenzahl zunehmenden thermischen Untergrund auf. Das fehlen höherer Impulskomponenten zeigt, dass die Vergleichsbilder unbeeinflusst sind durch das adiabatische Ein- und Ausschalten des Gitters, während die beschleunigten Kondensate die gesamte Brillouin-Zone ausfüllen. Die Verbreiterung der dephasierter Kondensate in der radialen Richtung, resultiert aus der Anregung radialer Moden durch die dynamische Instabilität [142, 27].

Die Begrenzung des Dichteprofiles der dephasierter Kondensate auf die erste Brillouin-Zone belegt zudem die Adiabaticität der Gitterrampe (Abschnitt 3.3.4), da eine nicht-adiabatische Rampe die Besetzung höherer Bänder zur Folge hätte. Bei dem adiabatischen Ausschalten des Gitters würden sie aufgrund der Impuls- und Energieerhaltung

$$p = q + \hbar q_b \quad \text{und} \quad E = \frac{(\hbar(q + q_b))^2}{2m} = E(q) \quad (5.10)$$

in Impulse transformiert werden, die höheren Brillouin-Zonen entsprechen. Bei der Transformation der periodischen Bandstruktur $E(q)$ in die Dispersionsrelation freier Teilchen werden z.B. die Quasiimpulse des ersten angeregten Bandes auf Impulse

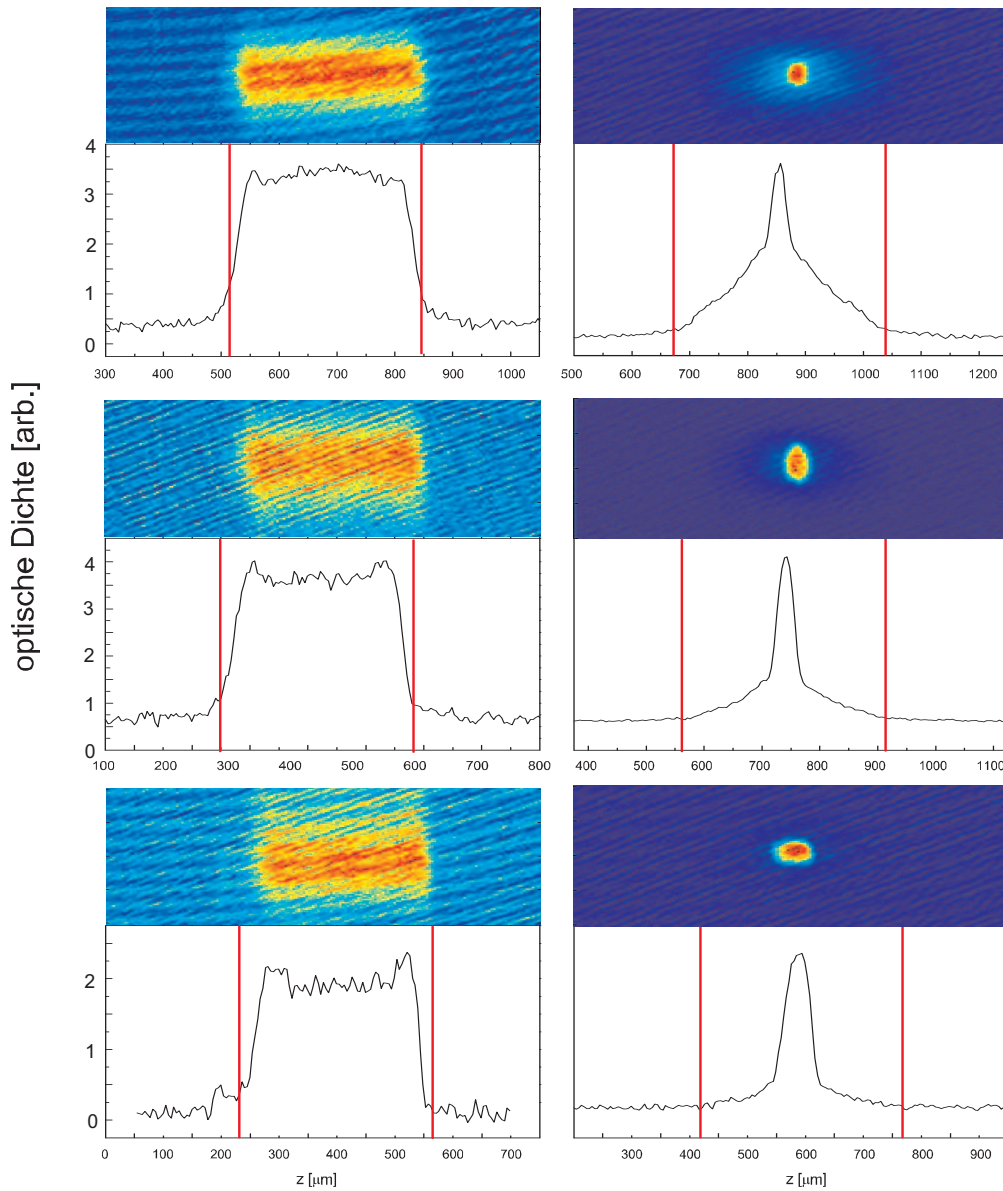


Abbildung 5.17: Vollständige Besetzung der ersten Brillouin-Zone für eine Gittertiefe von $6.5E_r$ und Teilchenzahlen von 5×10^5 (Oben), 3×10^5 (Mitte) und 1.5×10^5 nach einer Flugzeit von 30ms. Die obere Hälfte der sechs Bilder zeigt jeweils die Absorptionenaufnahmen, während die untere dem radial aufsummierten Dichteprofil entspricht. Die linke Spalte zeigt die dephasierten Kondensate und die rechte die Vergleichsbilder ohne Beschleunigung der Atome. Die rote Markierung entspricht der Ausdehnung der ersten Brillouin-Zone.

in der zweiten Brillouin-Zone übertragen. Nur so können gleichzeitig Energie- und Impulserhaltung erfüllt werden.

AUSBLICK

Ultrakalte Ensembles in optischen Gittern eröffnen die Möglichkeit, Theorien die im Kontext der Festkörperphysik erstmalig entwickelt wurden, in einem System der Atomphysik zu untersuchen. Dies zeigt die hohe Interdisziplinarität dieses Feldes. Insbesondere die Fähigkeit, die Parameter der optischen Felder kontrolliert zu manipulieren, begünstigt die Untersuchung der Auswirkungen zusätzlicher Unordnungspotentiale auf die statischen und dynamischen Eigenschaften von Vielteilchen-Systemen in periodischen Potentialen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden die Untersuchungen der Grundzustandseigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Gitterpotentialen auf die dynamische Entwicklung der Kondensate in optischen Gittern unter dem Einfluss einer konstanten Kraft erweitert. So konnten die aus der Festkörperphysik bekannten Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten experimentell beobachtet werden. Durch den Einsatz einer zusätzlichen Unordnungsstruktur konnte zudem erstmalig experimentell eine unordnungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen beobachtet werden, die in enger Analogie zur Dephasierung der Bloch-Oszillationen von Elektronen in Festkörpern steht. Dieses Ergebnis steht in guter Übereinstimmung mit den durchgeführten umfangreichen Simulationen zur Dämpfung der Bloch-Oszillationen, die auf der Gross-Pitaevskii Gleichung basieren.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind von großer Bedeutung für die Anwendung von Bloch-Oszillationen als Quantensensor zur Messung kleinster Kräfte, da sich die Unordnung als Inhomogenität in den beschleunigenden Kraftfeldern interpretieren lässt. Sie können somit als Ausgangspunkt für weiterführende detaillierte Untersuchungen der Eignung von Bloch-Oszillationen als Quantensensor dienen. Dies setzt jedoch eine signifikante Reduktion der Wechselwirkungsenergie voraus, da die dynamische Instabilität für die mit der aktuellen Apparatur erreichbaren experimentellen Parameter zu einer Dämpfung der Bloch-Oszillationen führt. Eine nahezu

vollständige Unterdrückung der Wechselwirkung kann mittels so genannter Feshbach Resonanzen erfolgen [54], mit deren Hilfe kürzlich nahezu ungedämpfte Bloch-Oszillationen mit vielen tausend Oszillationsperioden beobachtet wurden [52]. Die Realisierung der für ^{87}Rb notwendigen homogenen Magnetfelder von 1007G [147] stellen jedoch aufgrund der hohen Feldstärken eine große technische Herausforderung dar. Da zudem der eingeschränkte optische Zugang keine Erweiterung des bestehenden optischen Gitters erlaubt und die Magnetfalle des Kleeblatt-Designs aufgrund intrinsischer Schwankungen des Offset-Magnetfeldes die kontinuierliche Produktion von Bose-Einstein-Kondensaten mit konstanter Teilchenzahl erschwert, werden derzeit ein neues Vakuumsystem sowie eine neue Magnetfalle aufgebaut. Aufbauend auf den Erfahrungen dieser Arbeit gilt dabei ein besonderes Augenmerk der Realisierung eines guten optischen Zugangs. Dies ermöglicht die Erweiterung der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen auf ein großes Spektrum interessanter Experimente.

Bloch-Oszillationen nicht wechselwirkender Ensemble

Im Rahmen der derzeitigen Umbauten ist insbesondere geplant, die Untersuchungen quantenentarteter Gase auf mehratomige Ensembles bestehend aus Rubidium, Kalium und Cäsium zu erweitern. Die Fähigkeit neben ^{87}Rb z.B. auch das bosonische ^{39}K zu kondensieren, eröffnet die Möglichkeit, Feshbach-Resonanzen zu nutzen [148], um die Wechselwirkung auszuschalten. Dies gestattet die Weiterführung der Untersuchungen zur Anwendbarkeit der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten als Quantensensor zur hochpräzisen Messung kleinster Kräfte [52, 51]. Die mit dem Verschwinden der dynamischen Instabilität einhergehende Beobachtbarkeit extrem vieler Oszillationsperioden ermöglicht es, die Auswirkungen sehr viel kleinerer Unordnungstiefen zu untersuchen, da diese erst nach vielen Oszillationsperioden zu einer signifikanten Reduktion der Oszillationsamplitude führen.

Zusätzlich können Bloch-Oszillationen quantenentarteter fermionischer Ensembles untersucht werden, die effektiv nicht wechselwirkend sind und daher die Beobachtung ungedämpfter Bloch-Oszillationen erlauben. Das Pauliprinzip bedingt jedoch eine große Breite ihres Quasiimpulsspektrums [47] und eine starke Reduktion der Oszillationsamplitude. Zudem stellt die im Vergleich mit Bose-Einstein-Kondensaten große räumliche Ausdehnung quantenentarteter fermionischer Systeme einen signifikanten Nachteil bei der hoch aufgelösten räumlichen Messung kleinster Kräfte dar. Daher sind insbesondere nicht wechselwirkende Bose-Einstein-Kondensate die geeignete Wahl zur Fortführung der Untersuchungen zu unordnungsinduzierter Dämpfung von Bloch-Oszillationen.

Transport in ungeordneten Strukturen

Von großem Interesse sind zudem Experimente zur Expansion ultrakalter Gase in zwei bzw. dreidimensionalen ungeordneten Systemen [149, 150]. Dabei hat die In-

terferenz der gestreuten Teilwellen der atomaren Wellenfunktion eine Verringerung der Mobilität der expandierenden Wolke zur Folge. Die resultierenden Abweichungen von der ballistischen Expansion drücken sich in einer Reduktion der Diffusionskonstante des Ensembles aus und beruhen ausschließlich auf Einteilchen-Effekten. Die Beobachtung dieser Lokalisierungseffekte setzt daher analog zur Anderson Lokalisierung eine Reduktion der Wechselwirkung voraus [150], die mittels einer Feshbach Resonanz elegant realisiert werden kann. Untersuchungen der Transporteigenschaften zweidimensionaler Systeme sind z.B. in tiefen eindimensionalen optischen Gittern möglich, die zur Ausbildung einzelner voneinander unabhängiger scheibenartiger Bose-Einstein-Kondensate führen. Die notwendigen Unordnungsstrukturen lassen sich mittels der so genannten Laserspeckle-Strahlung [151] erzeugen.

Grundzustand ungeordneter Gittergase

Die Möglichkeit die Wechselwirkung der Atome mittels einer Feshbach Resonanz zu unterdrücken, gestattet zudem die Weiterführung der Untersuchungen zu nicht klassischer Lokalisierung des Grundzustandes eines Bose-Einstein-Kondensats in ungeordneten optischen Gittern. In unseren Arbeiten zur Anderson-Lokalisierung konnte gezeigt werden [3], dass eine Reduktion der Abschirmung des Unordnungspotentials durch die Wechselwirkung unabdingbar ist, um Lokalisierungseffekte zu beobachten. Zudem ist die Verwendung von Unordnungsstrukturen mit kürzerer Korrelationslänge notwendig, da die Anderson Lokalisierung auf der Interferenz der gestreuten Teilwellen beruht. Dies kann durch die Verwendung eines so genannten Übergitters realisiert werden. Es beruht auf der Interferenz zusätzlicher stehender Wellen und erzeugt so Strukturen in der Größenordnung der Gitterkonstante. Die Periodizität eines solchen Übergitters kann länger als die Ausdehnung des Kondensats gewählt werden und stellt so ein quasi ungeordnetes Potential zur Verfügung [24]. Es wurde kürzlich eingesetzt, um Unordnungseffekte im wechselwirkungsdominierten Regime zu untersuchen [36, 16, 25]. Die Reduktion der Wechselwirkung in Kombination mit Unordnungsstrukturen in der Größenordnung des Abstandes der Gittertöpfe lässt die experimentelle Realisierbarkeit einer Anderson-artigen Lokalisierung in ungeordneten Gittergasen erwarten [3].

Mehrdimensionale Gitter

Der gute optische Zugang der neuen Apparatur wird insbesondere die Implementierung komplexer Gittergeometrien erlauben. So ist nicht nur die Realisierung eines 3D kubischen Gitters möglich [14], sondern auch komplizierterer Geometrien, wie z.B. so genannter Kagomé- [102, 103, 104] oder Dreiecksgitter [105]. Sie gestatten die Erweiterung der Untersuchungen von Transporteigenschaften quantenentarteter Gase auf komplexere Gitterstrukturen, die dreidimensionale reale Festkörper reflektieren.

Sowohl der in Kapitel 3.3 beschriebene Gitteraufbau, der sich durch eine äußerst hohe Langzeitstabilität und präzise Kontrolle der Strahlage auszeichnet, als auch das neue Justageschema, erfüllen die hohen Anforderungen an die Stabilität und Justage solch komplexer Strahlgeometrien und können daher als Grundlage für die experimentelle Implementierung dieser Gitterstrukturen dienen.

Moleküle in optischen Gittern

Eine weitere hoch interessante Entwicklung im Themenfeld quantenentarteter Ensembles ist die Untersuchung ultrakalter Moleküle. Basierend auf den vorhandenen langjährigen Erfahrungen bei der Manipulation mehratomiger Ensembles, und der kürzlich erfolgten Realisierung heteromolekularer Moleküle in einer gekreuzten Dipolfalle, ist eine Erweiterung der Untersuchungen auf die Produktion von Molekülen in 3D optischen Gittern sehr gut möglich. Der Einsatz eines optischen Gitters bietet in diesem Zusammenhang den großen Vorteil einer Separation der Moleküle. Die Fähigkeit exakt ein Molekül pro Gitterplatz zu realisieren, führt zu einer signifikanten Verringerung der inelastischen Streuraten und daher zu einer Verlängerung der Lebensdauer der Moleküle [152, 153, 154].

Die experimentelle Untersuchung der dynamischen sowie der statischen Eigenschaften quantenentarteter Gittergase stellt ein aufstrebendes Forschungsgebiet dar. Die Fähigkeit immer komplexere Gitterstrukturen und Unordnungspotentiale sowie ultrakalte Moleküle herstellen zu können, lassen für die Zukunft viele interessante experimentelle und theoretische Entwicklungen erwarten, die zu einem grundlegenden Verständnis der modernen Physik beitragen werden.

ANHANG

Dieses Kapitel dient der Zusammenstellung der in dieser Arbeiten für die verschiedensten Berechnungen und Simulationen verwendeten atomaren Daten von Rubidium und einiger allgemeiner Konstanten, sowie der Dokumentation der zur Realisierung einer stabilen und reproduzierbaren Erzeugung der Bose-Einstein Kondensate notwendigen Umbauten des Lasersystems der magneto-optischen Falle.

A.1 Zusammenfassung wichtiger Konstanten

Das Termschema von ^{87}Rb und insbesondere die in Abschnitt 2.2 beschriebenen von den verschiedenen Lasern getriebenen Übergänge sind in Tabelle A.1 gezeigt. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Konstanten und atomaren Werte von ^{87}Rb finden sich in Tabelle A.1.

| | |
|-------------------------------------|---------------------------|
| Streulänge | 5.77×10^{-9} |
| Masse | 1.443×10^{-25} |
| Linienbreite D1 | $2\pi 6.065 \times 10^6$ |
| Linienbreite D2 | $2\pi 5.746 \times 10^6$ |
| Wellenlänge D1 | 794.98×10^{-9} |
| Wellenlänge D2 | 780.25×10^{-9} |
| $E_r(825\text{nm}, ^{87}\text{Rb})$ | 2.22987×10^{-30} |
| \hbar | 1.0546×10^{-34} |

Tabelle A.1: Zusammenfassung wichtiger Konstanten

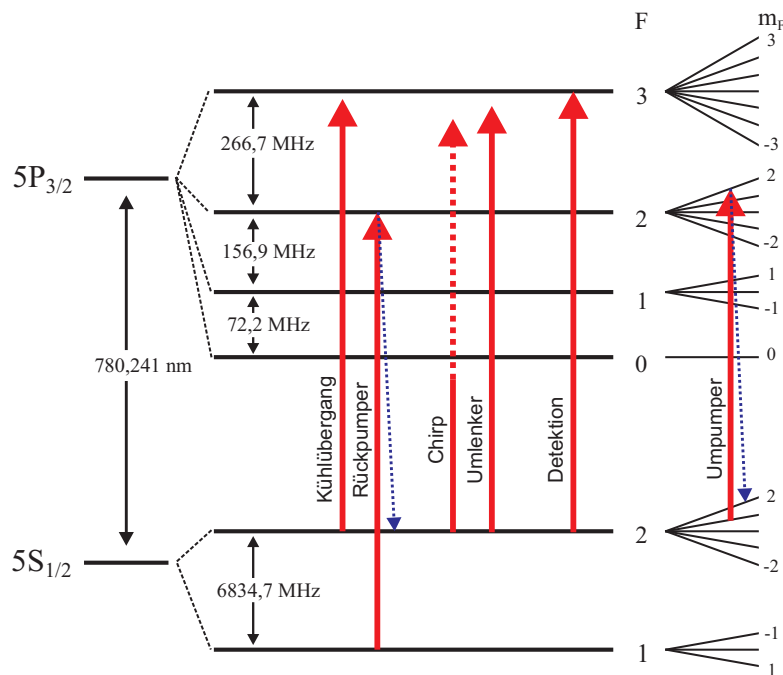


Abbildung A.1: Termschema von Rubidium

A.2 Modifikation des Laseraufbaus

Den Aufbau des im Rahmen dieser Arbeit vollständig neu aufgebauten Lasersystems findet sich in Abbildung A.3. Aufgrund diverser in Abschnitt 2.3 beschriebener Probleme war es notwendig, den bestehenden Laseraufbau, der auf einem mit einem Argon-Ionen Laser gepumpten Titan Saphier Lasers basierte, durch eine Diodenlasersystem zu ersetzen. Es zeichnet sich durch eine Hohe Stabilität, einfache Handhabung, hohe Laserleistung und geringe Linienbreite bei geringen Platzbedarf aus. Zudem wurde das Verfahren zur Frequenzstabilisierung des Rückpumpasers, das auf der Dopplerfreien Sättigungsspektroskopie beruhte [155], durch einen so genannten Trombone-Lock ersetzt, der schematisch in Abbildung A.2 gezeigt ist. Er beruht auf der Detektion des Schwebungssignals des zu stabilisierenden Lasers mit einem im folgenden als Masterlaser bezeichneten Referenzlaser. Dazu dient im realisierten optischen Aufbau der ebenfalls neu implementierte Kühllaser der magneto-optischen Falle. Der zur Stabilisierung [156] notwendige Nulldurchgang des Fehlersignals bei der gewünschten Laserfrequenz wird durch die Selbstinterferenz des Schwebungssignals erreicht. Dieses wird durch eine schnelle Photodiode detektiert und nach verschiedenen Verstärkerstufen in einem Leistungsaufteiler in zwei gleichhohe Signale aufgeteilt. Eines dieser beiden Signale wird über eine Verzögerungsstrecke geleitet, und anschließend mit dem anderen Signal in einem Frequenzmischer überlagert. In Abhängigkeit von der Länge der Verzögerungsstrecke

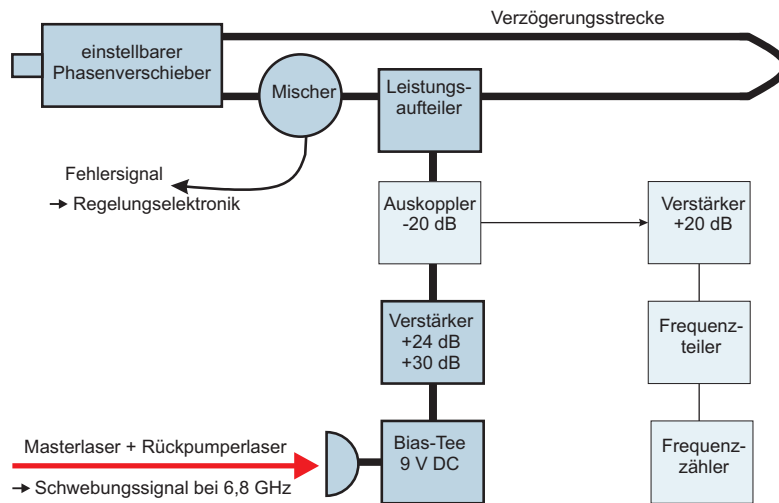


Abbildung A.2: Trombone-Lock

cke führt die Überlagerung der beiden Radiofrequenzsignale für eine einstellbare Differenzfrequenzen zwischen dem Master- und Rückpumpelaser zu einem Null-durchgang, auf den der Rückpumpelaser stabilisiert werden kann. Sie beträgt für die Kombination von Rückpumpelaser und Kühllaser 6,835 MHz. Neben dem konzeptionell einfachen und dem technisch äußerst robusten und zudem preisgünstigen Aufbau zeichnet sich dieses System durch eine hohe Flexibilität aus. Durch Variation der Länge der Verzögerungsstrecke sind sehr leicht verschiedenste Laserfrequenzen des Rückpumpelasers einstellbar.

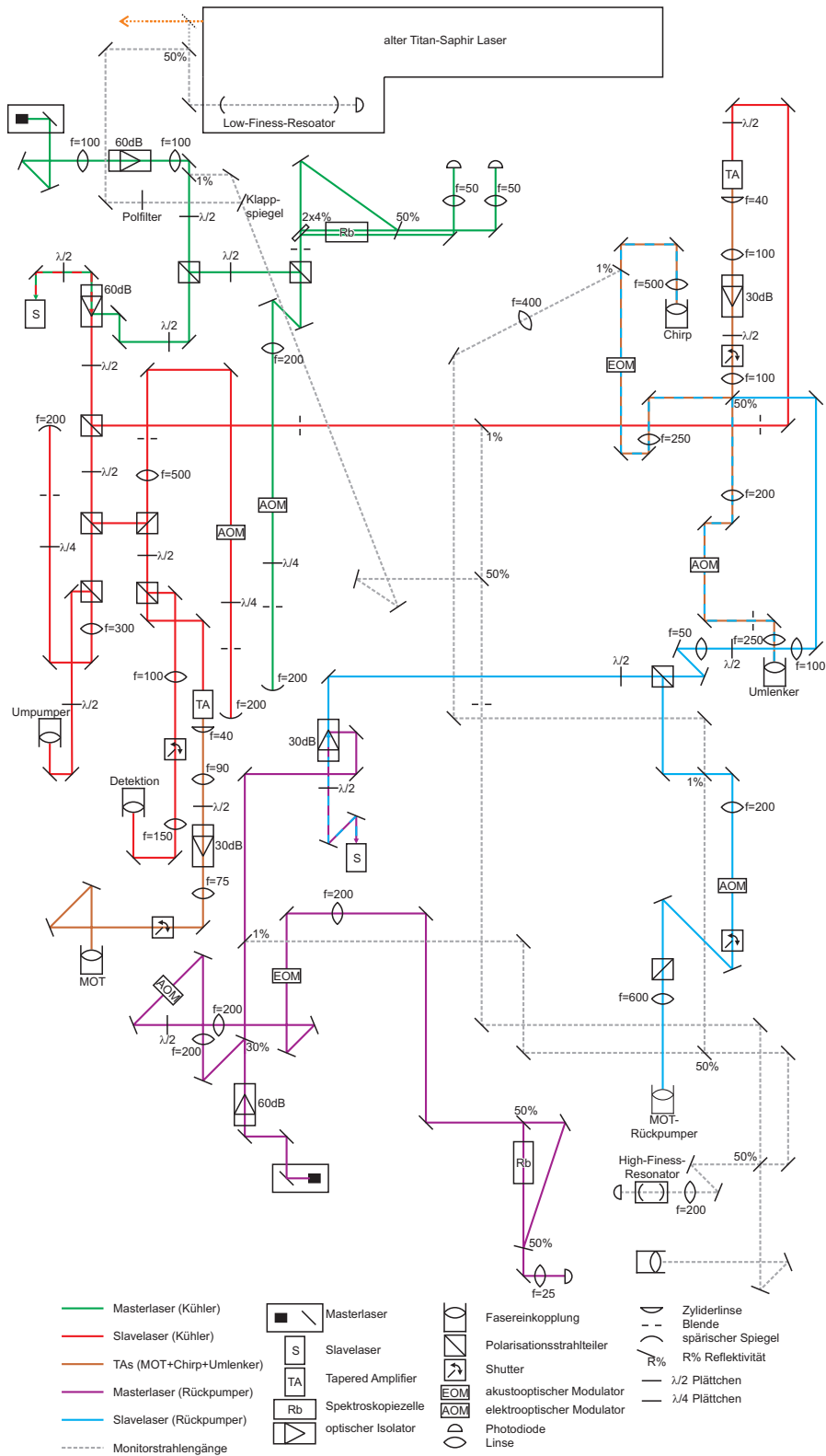


Abbildung A.3: Strahlengang des optischen Tisch

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. Drenkelforth, G. Kleine Büning, J. Will, T. Schulte, N. Murray, W. Ertmer, L. Santos, and J.J. Arlt.
Damped bloch oscillations of bose-einstein condensates in disordered potential gradients.
New J. Phys., wird veröffentlicht in NJP, cond-mat:0801.3437v1, 2007.
- [2] T. Schulte, S. Drenkelforth, G. Kleine Büning, W. Ertmer, J. Arlt, M. Lewenstein, and L. Santos.
Dynamics of bloch oscillations in disordered lattice potentials.
Phys. Rev. A, 77:023610, 2008.
- [3] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein.
Routes towards anderson-like localization of bose-einstein condensates in disordered optical lattices.
Physical Review Letters, 95:170411, 2005.
- [4] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, R. Tiemeyer, K. Sacha, J. Zakrzewski, M. Lewenstein, W. Ertmer, and J. J. Arlt.
Analysis of localization phenomena in weakly interacting disordered lattice gases.
New J. Phys., 8:230, 2006.
- [5] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J.J. Arlt, A. Kantian, L. Sanchez-Palencia, L. Santos, A. Sanpera, K. Sacha, P. Zoller, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski.
Cold atomic gases in optical lattices with disorder.
In S. Bauch L. Sirko, editor, *Acta Physica Polonica A, Proceedings of the 2nd Workshop on Quantum Chaos and Localisation Phenomena, Warsaw*, volume 109, page 89. 2006.
- [6] S. Bose.
Plancks gesetz und lichtquantenhypothese.
Z. Phys., 26(1):178–181, 1924.

- [7] A. Einstein.
Quantentheorie des idealen einatomigen gases.
Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. Bericht, 22:261, 1924.
- [8] A. Einstein.
Quantentheorie des idealen einatomigen gases ii.
Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. Bericht, 3:18, 1925.
- [9] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell.
Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor.
Science, 269(5221):198, 1995.
- [10] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle.
Bose-einstein condensation in a gas of sodium atoms.
Phys. Rev. Lett., 75(22):3969–3973, 1995.
- [11] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet.
Evidence of bose-einstein condensation in an atomic gas with attractive interactions.
Phys. Rev. Lett., 75(9):1687–1690, 1995.
- [12] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller.
Cold bosonic atoms in optical lattices.
Physical Review Letters, 81:3108, 1998.
- [13] M. Greiner, T. Mandel, O. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch.
Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms.
Nature, 451:39, 2002.
- [14] M. Greiner.
Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials.
PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2003.
- [15] L. Fallani, J. Lye, V. E. Guarrera, C. Fort, and M. Inguscio.
Onset of a bose-glass of ultracold atoms in a disordered crystal of light.
cond-mat, page 0603655, 2006.
- [16] B. Damski, J. Zakrzewski, L. Santos, P. Zoller, and M. Lewenstein.
Atomic bose and anderson glasses in optical lattices.
Physical Review Letters, 91:080403, 2003.
- [17] P. W. Anderson.
Absence of diffusion in certain random lattices.
Phys. Rev., 109:1492, 1958.
- [18] Y. Nagaoka and H. Fukuyama.
Anderson Localization, volume 39.

- Springer Series in Solid State Sciences (Springer, Heidelberg), 1982.
- [19] L. Sanchez-Palencia, D. Clement, P. Lugan, P. Bouyer, G.V. Shlyapnikov, and A. Aspect.
Anderson localization of expanding bose-einstein condensates in random potentials.
Phys. Rev. Lett., 98:210401, 2007.
- [20] P. Lugan, D. Clément, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia.
Anderson localization of bogolyubov quasiparticles in interacting bose-einstein condensates.
cond-mat, page 0707.2918v2, 2007.
- [21] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, and C. Henkel.
Microscopic atom optics: From wires to an atom chip.
Adv. At. Mol. Opt. Phys., 48:263, 2002.
- [22] C. Henkel, P. Krüger, P. Folman, and J. Schmiedmayer.
Fundamental limits for coherent manipulation on atom chips.
Appl. Phys. B, 76:173, 2003.
- [23] M.D. Wang, D.W. amd Lukin and E. Demler.
Disordered bose-einstein condensates in quasi-one-dimensional magnetic microtraps.
Phys. Rev. Lett., 92:076802, 2004.
- [24] R.B. Diener, A. Georgakis, J. Zhong, M. Raizen, and Q. Niu.
Transition between extended and localized states in a one-dimensional incommensurate optical lattice.
Phys. Rev. A, 64:033416, 2001.
- [25] L. Fallani, J.E. Lye, V. Guarrera, C. Fort, and M. Inguscio.
Ultracold atoms in a disordered crystal of light: Towards a bose glass.
Phys. Rev. Lett., 98:130404, 2007.
- [26] J.E. Lye, L. Fallani, C. Fort, V. Guarrera, M. Modugno, D.S. Wiersma, and M. Inguscio.
Effect of interactions on the localization of a bose-einstein condensate in a quasiperiodic lattice.
Phys. Rev. A, 75:061603(R), 2007.
- [27] T Schulte.
Bose-Einstein-Kondensate in ungeordneten Potentialen.
PhD thesis, Universität Hannover, Institut für Quantenoptik, 2006.
- [28] P. Horak, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg.
Atom cooling and trapping by disorder.
Phys. Rev. A, 58:3953, 1998.

-
- [29] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D.S. Wiersma, C. Fort, and M. Inguscio. Bose-einstein condensate in a random potential. *Physical Review Letters*, 95:070401, 2005.
- [30] Y.P. Chen, J. Hitchcock, D. Dries, M. Junker, C. Welford, and R.G. Hulet. Phase coherence and superfluid-insulator transition in a disordered bose-einstein condensate. *cond-mat*, page 0710.5187v3, 2008.
- [31] D. Clément, A.F. Varón, M. Hugbart, J.A. Retter, P. Bouyer, L. Sanchez-Palencia, D.M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect. Suppression of transport of an interacting elongated bose-einstein condensate in a random potential. *Physical Review Letters*, 95:170409, 2005.
- [32] D. Clement, P. Bouyer, A. Aspect, and L. Sanchez-Palencia. Density modulations in an elongated bec released from a disordered potential: What can we learn ? *cond-mat*, page 0710.1984v2, 2008.
- [33] G.K. Singh and D.S. Rokhsar. Disordered bosons: Condensate and excitations. *Phys. Rev. B*, 49:9013, 1994.
- [34] K. Rasmussen, D. Cai, A.R. Bishop, and N. Gronbech-Jensen. Localization in a nonlinear disordere system. *Europhys. Lett.*, 47:421, 1999.
- [35] D. K. K. Lee and J. M. F. Gunn. Bosons in a random potential: cond-matensation and screening in a dense limit. *J. Phys. C*, 2:7753, 1990.
- [36] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher. Boson localization and the superfluid-insulator transition. *Phys. Rev. B*, 40:546, 1989.
- [37] F. Bloch. Über die quantenmechanik der elektronen in kristallgittern. *Z. Phys.*, 52:555, 1928.
- [38] E. Peik, M.B. Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oszillations and an accelerator for cold atoms. *Appl. Phys. B.*, 65:685, 1997.
- [39] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler. Coherent submillimeter-wave emission from bloch oscillations in a semiconductor superlattice. *Physical Review Letters*, 70:3319, 1993.

-
- [40] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen. Observation of atomic wannier-stark ladders in an accelerating optical potential. *Physical Review Letters*, 76:4512, 1996.
- [41] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms in an optical potential. *Physical Review Letters*, 76:4508, 1996.
- [42] C.F. Bharucha, K.W. Madison, P.R. Morrow, S.R. Wilkinson, B. Sundaram, and M.G. Raizen. Observation of atomic tunneling from an accelerating optical potential. *Phys. Rev. A*, 55:857, 1997.
- [43] E. Peik, M.B. Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, and C. Salomon. Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams. *Phys. Rev. A*, 55:2989, 1997.
- [44] P. Clade, S. Guellati-Khelifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben. A promising method for the measurement of the local acceleration of gravity using bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical standing wave. *Europhys. Lett.*, 71:730, 2005.
- [45] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. M. Tino. Long-lived bloch oscillations with bosonic sr atoms and application to gravity measurement at the micrometer scale. *Phys. Rev. Lett.*, 97:060402, 2006.
- [46] P. Clade, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khelifa, C. Schwob, F. Nez, L. Julien, and F. Biraben. Determination of the fine structure constant based on bloch oscillations of ultracold atoms in a vertical optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 96:033001, 2006.
- [47] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio. Atom interferometry with trapped fermi gases. *Physical Review Letters*, 92:230402, 2004.
- [48] O. Morsch, J.H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo. Bloch oscillations and mean-field effects of bose-einstein condensates in 1d optical lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 87:140402, 2001.
- [49] M. Cristiani, O. Morsch, N. Malossi, M. Jona-Lasinio, M. Anderlini, E. Courtade, and E. Arimondo. Instabilities of a bose-einstein condensate in a periodic potential: an experimental investigation.

- Opt. Express*, 12:5, 2003.
- [50] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio.
Observation of dynamical instability for a bose-einstein condensate in a moving 1d optical lattice.
Physical Review Letters, 93:140406, 2004.
- [51] M. Gustavsson, E. Haller, M.J. Mark, J.G. Danzl, G. Rojas-Kopeinig, and H.-C. Nägerl.
Control of interaction-induced dephasing of bloch oscillations.
cond-mat, page 0710.5083v1, 2007.
- [52] M. Fattori, C. D Errico, G. Roati, M. Zaccanti, M. Jona-Lasinio, M. Modugno, M. Inguscio, and G. Modugno.
Atom interferometry with a weakly-interacting bose einstein condensate.
cond-mat, page 0710.5131v1, 2007.
- [53] B. Wu and Q. Niu.
Superfluidity of bose-einstein condensate in an optical lattice: Landau-zener tunneling and dynamical instability.
New J. Phys., 5:104, 2003.
- [54] S. Inouye, MR Andrews, J. Stenger, HJ Miesner, DM Stamper-Kurn, and W. Ketterle.
Observation of feshbach resonances in a bose-einstein condensate.
Nature, 392(6672):151–154, 1998.
- [55] I. Carusotto, L. Pitaevskii, S. Stringari, G. Modugno, and M. Inguscio.
Sensitive measurement of forces at the micron scale using bloch oscillations of ultracold atoms.
Phys. Rev. Lett., 95:093202, 2005.
- [56] C. J. Pethick and H. Smith.
Bose-Einstein Condensation in Dilute Bose Gases.
camb, 2002.
- [57] W. Ketterle and N.J Van Druten.
Evaporative cooling of trapped atoms.
Adv. At. Mol. Opt. Phys., 37:181–236, 1996.
- [58] W. Ketterle, DS Durfee, and DM Stamper-Kurn.
Making, probing and understanding bose-einstein condensates.
Int. School of Physics, 'Enrico Fermi' Course CXL, pages 67–359, 1999.
- [59] W. Nolting.
Grundkurs Theoretische Physik Quantenmechanik.
vieweg, 1997.

-
- [60] L. Pitaevskii and S. Stringari.
Bose-Einstein Condensation.
Oxford University Press, 2003.
- [61] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari.
Theory of bose-einstein condensation in trapped gases.
Rev. Mod. Phys., 71(3):463–512, 1999.
- [62] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and Laloë.
Quantenmechanik.
de Gruyter, 1999.
- [63] F. Schwabel.
Quantenmechanik.
Springer, 1998.
- [64] I.N. Bronstein and A. Konstantin.
Taschenbuch der Mathematik.
Deutsch, 2005.
- [65] W. Nolting.
Grundkurs Theoretische Physik, Viel-Teilchen-Theorie.
Springer, 2002.
- [66] Nicole Helbig.
Orbitalfunktionale in Dichte-Matrix- und Strom-Dichte Funktionaltheorie.
PhD thesis, Freie Universität Berlin, 2006.
- [67] A. J. Leggett.
Bose-einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts.
Rev. Mod. Phys., 73:307, 2001.
- [68] E. P. Gross.
Structure of a quantized vortex in boson systems.
Ann. Phys., 20:454, 1961.
- [69] L. P. Pitaevskii.
Vortex lines in an imperfect bose gas.
Soviet Phys. JETP, 13:451, 1961.
- [70] N. N. Bogoliubov.
On the theory of superfluidity.
J. Phys. USSR, 11:23, 1947.
- [71] A. Griffin.
Bec and the new world of coherent matter waves.
cond-mat, page 9911419v1, 1999.
- [72] H. Schulz.
Physik mit Bleistift.
Harri Deutsch, 1999.

- [73] A. L. Fetter.
Theory of a dilute low-temperature trapped bose condensate.
Int. School of Physics, 'Enrico Fermi' Course CXL, pages 201–263, 1998.
- [74] G. Baym and C.J. Pethik.
Ground-state properties of magnetically trapped bose-condensed rubidium gas.
Phys. Rev. Lett., 76:6, 1996.
- [75] D. Hellweg.
Phasenfluktuationen in Bose-Einstein-Kondensaten.
PhD thesis, Universität Hannover, 2003.
- [76] K. Bongs.
Atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten.
PhD thesis, Universität Hannover, 1999.
- [77] T. Südmeyer.
Präparation kalter atomarer ensembles für die bose-einstein-kondensatei.
Master's thesis, Institut für Quantenoptik, Universität Hannover, 1998.
- [78] M. Roemer.
Konzeption und aufbau einer magnetischen falle für die erzeugung eines kohärenten ensembles von rubidiumatomen.
Master's thesis, Universität Hannover, Institut für Quantenoptik, 1997.
- [79] H. J. Metcalf and P. van der Straten.
Laser Cooling and Trapping.
Springer, 1999.
- [80] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg.
Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications.
Wiley, 1992.
- [81] W. Ertmer, R. Blatt, J. L. Hall, and M. Zhu.
Laser manipulation of atomic beam velocities: Demonstration of stopped atoms and velocity reversal.
Phys. Rev. Lett., 54(10):996–999, 1985.
- [82] W. Nolting.
Grundkurs Theoretische Physik , Statistische Physik.
Springer, 2002.
- [83] S. Chu, L. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin.
Thre-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure.
Phys. Rev. Lett., 55:48, 1985.
- [84] T. Mayer-Kuckuk.
Atomphysik.

- Teubner, 1997.
- [85] D. E. Pritchard, E. L. Raab, V. Bagnato, C. E. Wieman, and R. N. Watts.
Light traps using spontaneous forces.
Phys. Rev. Lett., 57:310–313, 1986.
- [86] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard.
Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure.
Phys. Rev. Lett., 59:2631–2634, 1987.
- [87] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, and
H. J. Metcalf.
Observation of atoms laser cooled below the doppler limit.
Phys. Rev. Lett., 61(2):169–172, 1988.
- [88] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji.
Laser cooling below the doppler limit by polarization gradients: simple theo-
retical models.
J. Opt. Soc. Am. B., 6:2023, 1989.
- [89] D.E. Pritchard.
Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy.
Phys. Rev. Lett., 51:1336, 1983.
- [90] M.O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee,
and W. Ketterle.
Bose-einstein condensation in a tightly confining dc magnetic trap.
Phys. Rev. Lett., 77:416 – 419, 1996.
- [91] G. Kleine Büning.
Lasersystem zum fangen und kühlen von ^{87}Rb .
Master’s thesis, Universität Hannover, Institut für Quantenoptik, 2006.
- [92] private communication, b. phillips group.
- [93] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg.
Photons & Atoms Introduction to Quantum Electrodynamics.
Wiley, 1997.
- [94] B. Young, M. Kasevich, and S. Chu.
Atom Interferometry.
Academic Press, 1997.
- [95] W. Demtröder.
Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik.
Springer, 1999.
- [96] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov.
Optical dipole traps for neutral atoms.
Adv. At. Mol. Opt. Phys., 42:95, 2000.

-
- [97] M. D. Barrett, J. A. Sauer, and M. S. Chapman.
All-optical formation of an atomic bose-einstein condensate.
Phys. Rev. Lett., 87(1):010404, 2001.
- [98] K. Bongs, S. Burger, G. Birkl, K. Sengstock, W. Ertmer, K. Rzazewski, A. Sanpera, and M. Lewenstein.
Coherent evolution of bouncing bose-einstein condensates.
Phys. Rev. Lett., 83:3577, 1999.
- [99] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer, and K. Sengstock.
Waveguide for bose-einstein condensates.
Phys. Rev. A, 63:031602(R), 2001.
- [100] S. Schmid, G. Thalhammer, K. Winkler, F. Lang, and J.H. Denschlag.
Long distance transport of ultracold atoms using a 1d optical lattice.
New J. Phys., 8:159, 2006.
- [101] T.L. Gustavson, A.P. Chikkatur, A.E. Leanhardt, A. Görlitz, S. Gupta, D.E. Pritchard, and W. Ketterle.
Transport of bose-einstein condensates with optical tweezers.
Phys. Rev. Lett., 88:020401, 2002.
- [102] L. Santos, M.A. Baranov, J.I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann, and M. Lewenstein.
Atomic quantum gases in kagomé lattices.
Physical Review Letters, 93:030601, 2004.
- [103] B. Damski, H.-U. Everts, A. Honecker, H. Fehrmann, L. Santos, and M. Lewenstein.
Atomic fermi gas in the trimerized kagome´ lattice at $2=3$ filling.
Phys. Rev. Lett., 95:060403, 2005.
- [104] B. Damski, H. Fehrmann, H.-U. Everts, B. Baranov, L. Santos, and M. Lewenstein.
Quantum gases in trimerized kagomé lattices.
Phys. Rev. A, 72:053612, 2005.
- [105] C. Becker, P. Soltan-Panahi, J. Kronjäger, S. Stellmer, K. Bongs, and K. Sengstock.
Spinor bec in triangular optical lattices.
IEEE Conference Proceedings, page 1, 2007.
- [106] L. Guidoni and P. Verkerk.
Optical lattices: cold atoms ordered by light.
J. Opt. B, 1:23, 1999.
- [107] T. A. Savard, K. M. O’Hara, and J. E. Thomas.
Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps.

- Phys. Rev. A*, 56:1095, 1997.
- [108] G. Czycholl.
Theoretische Festkörperphysik.
vieweg, 2000.
- [109] N.W. Ashcroft and N.D. Mermin.
Solid State Physics.
Saunders College Publishing, 1976.
- [110] R. Roth and K. Burnett.
Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices.
Phys. Rev. A, 68:023604, 2003.
- [111] R. Roth and K. Burnett.
Ultracold bosonic atoms in two-colour superlattices.
J. Opt. B, 5:50, 2003.
- [112] W. Zwerger.
Mott-hubbard transition of cold gases in an optical lattice.
J. Opt. B, 5:9, 2003.
- [113] O. Morsch and M. Oberthaler.
Dynamics of bose-einstein condensates in optical lattices.
Rev. Mod. Phys., 78:179, 2006.
- [114] M. Krämer.
Bose-Einstein Condensates in Rotating Traps and Optical Lattices.
PhD thesis, Università degli Studi di Trento, 2004.
- [115] H. Heisenberg.
Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und me-
chanik.
Z. Phys., 43:172, 1927.
- [116] M. Krämer, C. Menotti, L. Pitaevskii, and S. Stringari.
Bose-einstein condensates in 1d optical lattices compressibility, bloch bands
and elementary excitations.
Eur. Phys. J. D, 27:247, 2003.
- [117] M. Machholm, A. Nicolin, C. J. Pethick, and H. Smith.
Spatial period doubling in bose-einstein condensates in an optical lattice.
Phys. Rev. A, 69:043604, 2004.
- [118] D.I. Choi and Q. Niu.
Bose-einstein condensates in an optical lattice.
Phys. Rev. Lett., 82:2022, 1999.
- [119] C. Menotti, A. Smerzi, and A. Trombettoni.
Superfluid dynamics of a bose-einstein condensate in a periodic potential.
New J. Phys., 5:112, 2003.

-
- [120] Y. Castin and R. Dum.
Bose-einstein condensates in time dependent traps.
Physical Review Letters, 77:5315, 1996.
- [121] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi, and Inguscio M.
Expansion of a coherent array of bose-einstein condensates.
Physical Review Letters, 87:220401, 2001.
- [122] M. Cristiani, O. Morsch, J. H. Müller, D. Ciampini, and E. Arimondo.
Experimental properties of bose-einstein condensates in one-dimensional optical lattices: Bloch oscillations, Landau-Zener tunneling, and mean-field effects.
Phys. Rev. A, 65:063612, 2002.
- [123] L. Fallani, C. Fort, J.E. Lye, and M. Inguscio.
Bose-einstein condensate in an optical lattice with tunable spacing: transport and static properties.
OPTICS EXPRESS, 11:4303, 2005.
- [124] J. H. Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips.
A bose-einstein condensate in an optical lattice.
J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 35:3095, 2002.
- [125] Y. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenbregt, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips.
Diffraction of a released bose-einstein condensate by a pulsed standing light wave.
Physical Review Letters, 83:284, 1999.
- [126] Y.B. Band, M. Trippenbach, J. P. Burke, and P. S. Julienne.
Elastic scattering loss of atoms from colliding bose-einstein condensate wave packets.
Physical Review Letters, 84:5462, 2000.
- [127] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta, and W. Ketterle.
Suppression and enhancement of impurity scattering in a bose-einstein condensate.
Physical Review Letters, 85:483, 2000.
- [128] L.I. Schiff.
Quantum Mechanics.
McGraw-Hill Education, 1968.
- [129] M. Holthaus.
Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice.

- J. Opt. B*, 2:589, 2000.
- [130] T. Hartmann, F. Keck, H.J. Korsch, and S. Mossman.
Dynamics of bloch oscillations.
New J. Phys., 6:2, 2004.
- [131] D. Witthaut, M. Werder, S. Mossmann, and H.J. Korsch.
Bloch oscillations of bose-einstein condensates: Breakdown and revival.
Phys. Rev. E, 71:036625, 2005.
- [132] C. Kittel.
Einführung in die Festkörperphysik.
Oldenbourg, 2002.
- [133] H. Jones and C. Zener.
A general proof of certain fundamental equations in the theory of metallic
conduction.
Proc. R. Soc. A, 144:101, 1934.
- [134] W.V. Houston.
Acceleration of electrons in a crystal lattice.
Phys. Rev., 57:184, 1940.
- [135] S. Grecchi, V. und Sacchetti.
Acceleration theorem for bloch oscillators.
Phys. Rev. B, 63:212303, 2001.
- [136] C. Zener.
A theory of the electrical breakdown of solid dielectrics.
Proc. R. Soc. A, 145:523, 1934.
- [137] M. Glück, H.J. Kolovsky, A.R. Korsch, and N. Moiseyev.
Calculation of wannier-bloch and wannier-stark states.
Eur. Phys. J. D, 4:239, 1998.
- [138] G. Nienhuis.
Dynamics of atoms in optical lattices.
Physica Scripta, 95:43, 2001.
- [139] W. Nolting.
Grundkurs Theoretische Physik Analytische Mechanik.
Vieweg, 1999.
- [140] A. Smerzi and A. Trombettoni.
Nonlinear tight-binding approximation for bose-einstein condensates in a lat-
tice.
Phys. Rev. A, 68:023613, 2003.
- [141] M. Machholm, C. J. Pethick, and H. Smith.

- Band structure, elementary excitations, and stability of a bose-einstein condensate in a periodic potential.
Phys. Rev. A, 67:053613, 2003.
- [142] M. Modugno, C. Tozzo, and F. Dalfovo.
Role of transverse excitations in the instability of bose-einstein condensates moving in optical lattices.
Phys. Rev. A, 70:043625, 2004.
- [143] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii.
Statistical Physics, Part 2.
perg, 1980.
- [144] L.De Sarlo, L. Fallani, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio.
Unstable regimes for a bose-einstein condensate in an optical lattice.
Phys. Rev. A, 72:013603, 2005.
- [145] G.K. Campbell, J. Mun, E.W. Boyd, M. andk Streed, W. Ketterle, and D.E. Pritchard.
Parametric amplification of scattered atom pairs.
Phys. Rev. Lett., 96:020406, 2006.
- [146] L. Santos.
private communications.
- [147] S. Dürr, T. Volz, A. Marte, and G. Rempe.
Observation of molecules produced from a bose-einstein condensate.
Physical Review Letters, 92:020406, 2004.
- [148] G. Roati, M. Zaccanti, C. D’Errico, J. Catani, M. Modugno, A. Simoni, M. Inguscio, and G. Modugno.
39-k bose-einstein condensate with tunable interactions.
cond-mat/0703714, 2007.
- [149] R. C. Kuhn, C. Miniatura, D. Delande, O. Sigwarth, and C. A. Müller.
Localization of matter waves in two-dimensional disordered optical potentials.
Physical Review Letters, 95:250403, 2005.
- [150] R.C. Kuhn, O. Sigwarth, C. Miniatura, D. Delande, and C.A. Müller.
Coherent matter wave transport in speckle potentials.
New J. Phys., 9:161, 2007.
- [151] D. Clément, A.F. Varón, J.A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer.
Experimental study of the transport of coherent interacting matter-waves in a 1d random potential induced by laser speckle.
New J. Phys., 8:165, 2006.

-
- [152] C. Ospelkaus, S. Ospelkaus, L. Humbert, P. Ernst, K. Sengstock, and K. Bongs.
Ultracold heteronuclear molecules in a 3d optical lattice.
Phys. Rev. Lett., 97(12):120402, 2006.
- [153] G. Thalhammer, K. Winkler, F. Lang, S. Schmid, R. Grimm, and J. Hecker Denschlag.
Long-lived feshbach molecules in a three-dimensional optical lattice.
Phys. Rev. Lett., 96(5):050402, 2006.
- [154] T. Volz, N. Syassen, D.M. Bauer, E. Hansis, S. Dürr, and G. Rempe.
Preparation of a quantumstate with one molecule at each site of an optical lattice.
nature physics, 2:692, 2006.
- [155] W. Demtröder.
Laser Spektroskopie.
Springer.
- [156] S. Drenkelforth.
Aufbau und charakterisierung raman-laser-systems für ^{87}rb .
Master's thesis, Universität Hannover, Institut für Quantenoptik, 2003.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Bose-Einstein Verteilungsfunktion | 8 |
| 2.2 | Bose-Einstein Verteilungsfunktion versus Temperatur und chemischem Potential | 9 |
| 2.3 | Bose-Einstein Verteilungsfunktion als Funktion der Zustandsdichte und chemischem Potential | 10 |
| 2.4 | Thermischer Anteil am atomaren Ensembles und Verlauf des chemischen Potentials | 11 |
| 2.5 | Aufbau der Apparatur | 21 |
| 2.6 | Spontankraft | 24 |
| 2.7 | Magnetooptische Falle | 25 |
| 2.8 | Ioffe-Pritchard-Falle | 28 |
| 2.9 | Evaporationsschema | 29 |
| | | |
| 3.1 | Ac-Stark-Effekt | 35 |
| 3.2 | Optisches Dipolpotential eines gaußförmigen Laserprofils | 37 |
| 3.3 | Dipolpotential des optischen Gitters | 38 |
| 3.4 | Entstehung der Bandstruktur | 40 |
| 3.5 | Bandstruktur | 44 |
| 3.6 | Ortsraumdarstellung der Bloch-Funktionen | 45 |
| 3.7 | Relative Besetzung der Impulskomponenten | 46 |
| 3.8 | Grundzustand des optischen Gitters | 53 |
| 3.9 | Absorptionsbild eines expandierten Bose-Einstein-Kondensats | 54 |
| 3.10 | Relative Auskopplung | 55 |
| 3.11 | Vollständiger Strahlengang des optischen Gitters | 57 |
| 3.12 | Photo der pneumatischen Verschiebemimik und des motorisierten Spiegelhalters | 58 |
| 3.13 | Bestimmung des Strahlradius | 59 |
| 3.14 | Eichung des Piezospiegelhalters | 60 |
| 3.15 | Justageschema des Optischen Gitters | 62 |
| 3.16 | Energie der Bänder als Funktion der Gittertiefe | 66 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.17 | Absorptionsaufnahmen der atomaren Wolke für eine Leistung des Laserpulses von 43mW | 67 |
| 3.18 | Relative Atomzahl im zentralen Maximum in Abhängigkeit von der Oszillationszeit | 67 |
| 3.19 | Eichung der Gittertiefe | 68 |
| 3.20 | Giterrampe | 71 |
| 3.21 | Adiabatizitätstest | 72 |
| 3.22 | Besetzung der Nebenmaxima in Abhängigkeit von der Haltezeit | 73 |
| 3.23 | Adiabatizitätstest | 74 |
| | | |
| 4.1 | Schematische Darstellung des optisches Gitters mit linearem Gradienten | 76 |
| 4.2 | Erweitertes Zonenschema und Gruppengeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Quasiimpuls | 78 |
| 4.3 | Schemazeichnung der Ortsabhängigkeit der Bandstruktur | 79 |
| 4.4 | Landau-Zener-Tunneln | 80 |
| 4.5 | Tunnelwahrscheinlichkeit als Funktion der Gittertiefe | 81 |
| 4.6 | Bloch-Oszillationen eines klassischen Wellenpakets | 86 |
| 4.7 | Stabilitätsdiagramm der dynamischen und energetischen Instabilität | 90 |
| 4.8 | Vergleich der Trajektorien eines einzelnen Teilchens mit der eines wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensats | 92 |
| 4.9 | Simulation der Bloch-Oszillation | 93 |
| 4.10 | Zeitliche Entwicklung des Quasiimpulsspektrums | 94 |
| 4.11 | Dämpfung der Bloch-Oszillationen in Abhängigkeit von der radialen Fallenfrequenz | 95 |
| 4.12 | Dämpfung der Bloch-Oszillationen in Abhängigkeit von der radialen Fallenfrequenz | 96 |
| 4.13 | Schaltplan der Magnetfalle | 98 |
| 4.14 | Messung der radialen Fallenfrequenzen | 100 |
| 4.15 | Radialen Fallenfrequenzen in Abhängigkeit vom externen Widerstand | 101 |
| 4.16 | Adiabatizität der Rampe zur Verringerung der radialen Fallenfrequenz | 102 |
| 4.17 | Test der Adiabatizität | 103 |
| 4.18 | Wechselwirkungsenergie in Abhängigkeit von der Teilchenzahl und der Fallenfrequenz | 104 |
| 4.19 | Schematische Darstellung des optischen Gitters und der Bloch-Spulen | 106 |
| 4.20 | Vergleich des Magnetfeldverlauf | 106 |
| 4.21 | Magnetfeldgradient | 107 |
| 4.22 | Eichung der Beschleunigung durch die Bloch-Spulen | 108 |
| 4.23 | Experimentelle Sequenz | 109 |
| 4.24 | Absorptionsbilder der Bloch-Oszillationen | 110 |
| 4.25 | Numerisch berechnete Besetzung der einzelnen Impulskomponenten während der Bloch-Oszillation | 111 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.26 | Schwerpunktsbewegung der Bloch-Oszillationen | 112 |
| 4.27 | Schwerpunktsbewegung der Bloch-Oszillationen | 113 |
| 5.1 | Potentialverlauf der Kombination aus Gitter-, Gradienten- und Unordnungspotential | 116 |
| 5.2 | Schwerpunktsbewegung des Bose-Einstein-Kondensats für verschiedene Unordnungstiefen | 118 |
| 5.3 | Intensitätsprofil des UnordnungsLasers | 119 |
| 5.4 | Strahlengang des ungeordneten optischen Gitters | 120 |
| 5.5 | Experimentell verwendete Realisierung des Unordnungspotentials | 120 |
| 5.6 | Experimentelle Sequenz der Untersuchungen zur unordnungsinduzierten Dämpfung der Bloch-Oszillationen | 121 |
| 5.7 | Unordnungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen | 123 |
| 5.8 | Unordnungsinduzierte Dämpfung | 124 |
| 5.9 | Unordnungsinduzierte Dämpfung für verschiedene Ausschnitte | 125 |
| 5.10 | Unordnungsinduzierte Dämpfung ohne Wechselwirkung | 126 |
| 5.11 | Dämpfung der Bloch-Oszillationen für künstlich erhöhte Wechselwirkung | 127 |
| 5.12 | Wechselwirkungsenergien und die Dämpfung der Bloch-Oszillationen in Abhängigkeit von der Teilchenzahl | 128 |
| 5.13 | Falschfarbenbild der Quasiimpulsentwicklung | 129 |
| 5.14 | Vergleich der Absorptionen mit und ohne Unordnung | 129 |
| 5.15 | Anteil der Atome im Kondensat in Abhängigkeit von der Atomzahl | 130 |
| 5.16 | Zerfallskonstanten in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe. | 131 |
| 5.17 | Vollständige Besetzung der ersten Brillouin-Zone | 133 |
| A.1 | Termschema von Rubidium | 140 |
| A.2 | Trombone-Lock | 141 |
| A.3 | Strahlengang des optischen Tisch | 142 |

DANKSAGUNG

An dieser Stelle möchte ich all jenen meinen Dank aussprechen, die mich bei der Durchführung dieser Arbeit unterstützt haben.

Herrn Prof. Dr. Wolfgang Ertmer danke ich dafür, dass er es mir ermöglicht hat, meine Doktorarbeit unter ausgezeichneten Bedingungen in diesem interessanten Forschungsgebiet der modernen Physik anzufertigen und für die fortwährende Unterstützung während der Promotion. Deine ansteckende Begeisterung für die wissenschaftliche Arbeit, sowie das hohe Engagement, das du deiner Arbeitsgruppe entgegen bringst, sind ein Hauptgrund für die sehr kollegiale Atmosphäre am Institut für Quantenoptik. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jan Arlt für die persönliche Betreuung und den tatkräftigen Beistand auch in schwierigen Situationen, sowie für die gute und fruchtbare Zusammenarbeit im Labor. Herrn Prof. Dr. Luis Santos danke ich für die Übernahme des Vorsitzes meiner Disputation, für die vielen lehrreichen Diskussionen und die engagierte Unterstützung bei der Ausarbeitung der Veröffentlichung.

Insbesondere möchte ich dem gesamten RbBEC-Team meinen Dank für die äußerst angenehme und motivierende Arbeitsatmosphäre aussprechen. Thomas Schulte danke ich für die Unterstützung die er mir insbesondere am Anfang meiner Promotion hat zukommen lassen. Du warst mit ein Grund dafür, dass ich meine Doktorarbeit an diesem Experiment begonnen habe. Georg Kleine Büning und Johannes Will sei gedankt für die unermüdliche Arbeit und Geduld mit der sie mich von Anfang an auch bis tief in die Nacht hinein unterstützt haben. Bei Nils Murray möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit im Labor und die großartige Zeit in unserem gemeinsamen Studium bedanken. Ich bin froh, so kompetente und angenehme Kollegen in den vielen Stunden im Labor an meiner Seite gehabt zu haben. Ich freue mich sehr, dass wir alle über die Arbeit hinaus gute Freunde geworden sind!

Ich möchte mich auch ganz besonders bei Tim van Zoest, Carsten Klempt, Thorsten Henninger und Oliver Topic bedanken. Das wir den Großteil unserer Zeit am Institut zusammen verbringen durften und eure Freundschaft habe ich immer als großes Privileg empfunden!

Der gesamten Arbeitsgruppe von Prof. Ertmer möchte ich für das angenehme Arbeitsklima und die einzigartige Kultur gegenseitiger Unterstützung danken.

Herrn Rudolf Gaul, Frau Gunhild Faber, Frau Katrin Pfennig und Frau Elke Hünitzsch gilt mein Dank für die engagierte und äußerst kompetente Unterstützung bei vielfältigsten organisatorischen Problemen. Den Mitarbeitern der Werkstatt, die immer ein offenes Ohr für kurzfristig zu lösende technische Probleme haben, danke ich für die gute und unkomplizierte Zusammenarbeit.

Danken möchte ich insbesondere auch meinen Eltern, für die vielfältige Unterstützung die sie mir haben zukommen lassen. Ihr habt mir dies alles erst ermöglicht.

Publikationsliste

- *Damped Bloch Oscillations of Bose-Einstein Condensates in Disordered Potential Gradients*
S. Drenkelforth, G. Kleine Büning, J. Will, T. Schulte, N. Murray, W. Ertmer, L. Santos und J.J. Arlt,
New J. Phys. **to be published**, cond-mat: 0801.3437v2 (2008).
- *Dynamics of Bloch oscillations in disordered lattice potentials*
T. Schulte, S. Drenkelforth, G. Kleine Büning, W. Ertmer, J. Arlt, M. Lewenstein, und L. Santos,
Phys. Rev. A **77**, 023610 (2008).
- *Routes Towards Anderson-Like Localization of Bose-Einstein Condensates in Disordered Optical Lattices*
T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, R. Tiemeyer, K. Sacha, J. Zakrzewski, M. Lewenstein, W. Ertmer und J. Arlt
New J. Phys. **8**, 230 (2006).
- *Cold Atomic Gases in Optical Lattices with Disorder*
T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. J. Arlt, A. Kantian, L. Sanchez-Palencia, L. Santos, A. Sanpera, K. Sacha, P. Zoller , M. Lewenstein, and J. Zakrzewski,
Acta Physica Polonica A **109**, 89 (2006).
- *Routes Towards Anderson-Like Localization of Bose-Einstein Condensates in Disordered Optical Lattices*
T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein,
Phys. Rev. Lett. **95**, 170411 (2005).
- *Collective excitation of Bose-Einstein condensates in the transition region between three and one dimensions*
M. Kottke, T. Schulte, L. Cacciapuoti, D. Hellweg, S. Drenkelforth, W. Ertmer, and J. J. Arlt
Phys. Rev. A **72**, 053631 (2005).
- *Aufbau und Charakterisierung eines phasenstabilisierten Raman-Laser-Systems für ^{87}Rb*
S. Drenkelforth
Diplomarbeit (2003).

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name Sascha Drenkelforth
Geburtstag 05.02.1978 in Warburg, Deutschland
Familienstand Ledig

Promotions-Studium

seit 15. November 2003 *Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik*
in der Arbeitsgruppe von
Prof. Dr. Wolfgang Ertmer
Thema: „Dynamik von Bose-Einstein-Kondensaten
in ungeordneten Gitterpotentialen“

Studium

7. November 2003 *Diplom in Physik*
an der Leibniz Universität Hannover

10/2002 - 10/2003 *Diplomarbeit*
Thema: „Aufbau und Charakterisierung eines
Raman-Laser-Systems für ^{87}Rb “

9. Oktober 2000 *Vordiplom in Physik*
an der Leibniz Universität Hannover

10/1998 - 11/2003 *Studium der Physik*
an der Leibniz Universität Hannover

Wehrdienst

11/1997 - 08/1998 6. Instandsetzungsbataillon 141 in 31535 Neustadt

Schulabschluss

11. Juni 1997 Abitur am Hölty-Gymnasium Wunstorf