Stieltjes-Faltung von Distributionen und gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Thomas Schwartz
geboren am 11. August 1968 in Hannover

2000

Referent: Prof. Dr. U. Schmidt-Westphal
Korreferent: Prof. Dr. G. Mühlbach
Tag der Promotion: 28.6.2000
Datum der Veröffentlichung: August 2000

Abstract

This thesis provides an approach to fractional powers of closed linear operators via a functional calculus for Stieltjes transforms of distributions.

The functional calculus is based on a new algebraic operation for distributions, namely the Stieltjes convolution. Given distributions U and V, their Stieltjes convolution $U \circledast V$ is again a distribution satisfying the product formula

$$\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[U] \cdot \mathfrak{S}[V].$$

Stieltjes convolution is an associative, commutative, and bilinear operation. Suitable conditions guarantee that the Stieltjes convolution of integrable functions is an integrable function, too. These results are used to construct a $\circledast$-convolution algebra of distributions with unit.

The definition of the functional calculus is motivated by an operational calculus for Laplace transforms of distributions due to L. Schwartz. However, the problems concerning the Stieltjes convolution of integrable functions and the regularization of distributions require methods which are more involved than those of L. Schwartz. The principal feature of the functional calculus is the following: Stieltjes convolution of distributions carries over to composition of the corresponding operators. The functional calculus is used to introduce fractional powers and to prove the power rules.

Keywords: Stieltjes transform, convolution of distributions, fractional powers of operators.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden gebrochene Potenzen abgeschlossener linearer Operatoren im Rahmen eines Funktionalkalküls für Stieltjes-Transformierte von Distributionen konstruiert.

Der Kalkül verwendet eine neue algebraische Operation für Distributionen, die als Stieltjes-Faltung bezeichnet wird. Ist $U \circledast V$ die Stieltjes-Faltung der Distributionen U und V, und bezeichnet $\mathfrak{S}$ die Stieltjes-Transformation, so gilt der Produktsatz

$$\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[U] \cdot \mathfrak{S}[V].$$

Gezeigt wird, daß die Operation $\circledast$ die üblichen algebraischen Eigenschaften einer Faltung wie Bilinearität, Kommutativität und Assoziativität besitzt. Ferner werden hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Stieltjes-Faltung integrierbarer Funktionen wieder eine integrierbare Funktion ist. Dies ermöglicht dann die Konstruktion einer $\circledast$-Faltungsalgebra mit Einselement.

Die Definition des Funktionalkalküls für Stieltjes-Transformierte von Distributionen ist durch einen Funktionalkalkül von L. Schwartz motiviert. Die Probleme bei der Stieltjes-Faltung integrierbarer Funktionen und bei der Regularisierung von Distributionen erfordern jedoch andere, subtilere Methoden als bei L. Schwartz. Eine wesentliche Eigenschaft des Kalküls ist, daß er die Faltung zweier Distributionen in die Verkettung der zugehörigen Operatoren übersetzt. Als Anwendung des Funktionalkalküls werden gebrochene Potenzen eingeführt und Eigenschaften wie etwa die Potenzgesetze bewiesen.

Schlagwörter: Stieltjes-Transformation, Faltung von Distributionen, gebrochene Potenzen von Operatoren.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Ein Funktionalkalkül ist ein Homomorphismus, der auf einer Algebra skalarer Funktionen definiert ist und in eine Algebra linearer Operatoren abbildet. Insbesondere wird das Produkt zweier Funktionen auf die Verkettung der zugehörigen Operatoren abgebildet. In der Regel ist ein linearer Operator A gegeben, und jeder Funktion f der Funktionenalgebra soll ein linearer Operator $f(A)$ zugeordnet werden. Realisiert wurden derartige Kalküle zuerst unter der Voraussetzung, daß A ein beschränkter linearer Operator ist. Dies gilt beispielsweise für den Riesz-Dunford-Kalkül [7, Ch. VII.3], der auch gebrochene Potenzen des gegebenen stetigen linearen Operators liefert. Zu historischen Vorläufern dieses Kalküls siehe auch [7, Ch. VII.11].

Eine wichtige Erweiterung ist der Fall, daß der gegebene Operator A der infinitesimale Erzeuger einer Halbgruppe von Operatoren ist. Für diese Situation wurden Funktionalkalküle erstmals gegen Ende der 40er Jahre entwickelt. E. Hille [13] betrachtete in seinem Kalkül Laplace-Transformierte endlicher Borel-Maße. Erweitert wurde dieser Kalkül von R.S. Phillips [32, 33, 34], der damit Konstruktionen von N.P. Romanoff [36], S. Bochner [4] und W. Feller [10] verallgemeinert hat.

Der Kalkül von Hille-Phillips liefert ausschließlich stetige lineare Operatoren, insbesondere neue Halbgruppen von Operatoren, “untergeordnete Halbgruppen” in der Terminologie von S. Bochner. Gebrochene Potenzen des infinitesimalen Erzeugers der gegebenen Halbgruppe ergeben sich auf indirektem Wege, und zwar als Erzeuger untergeordneter Halbgruppen. Diese Methode eignet sich allerdings nur für Exponenten aus dem Intervall $(0, 1)$.

A.V. Balakrishnan [1] hat die Algebra aus Laplace-Transformierten von Hille-Phillips durch Verwendung von Multiplikatorfunktionen so erweitert, daß sein Kalkül auch eine direkte Konstruktion gebrochener Potenzen beinhaltet. Ungefähr gleichzeitig wurden Funktionalkalküle für die Laplace-Transformierten der Distributionen aus dem Raum $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ eingeführt. Dieser Distributionenraum wurde von L. Schwartz eingeführt und auf zwei verschiedene Weisen charakterisiert [40]. Beide Charakterisierungen wurden zum Aufbau von Funktionalkalkülen verwendet, die eine von L. Schwartz [39] selbst, die andere von E. Nelson [31], der auf diese Weise auch die gebrochenen Potenzen von infinitesimalen Erzeugern erhielt. J.L. Lions-J. Peetre [24] haben den Ansatz aus [39] zur Charakterisierung der ganzzahligen Potenzen von Halbgruppenerzeugern verwendet. Aufgegriffen wurde der Schwartz'sche Kalkül auch in einer Arbeit von J. Faraut [9], in der auch die Konstruktion gebrochener Potenzen gestreift wird. Umfassende Untersuchungen der gebrochenen Potenzen auf der Grundlage des Schwartz'schen Kalküls wurden von O.E. Lanford-D.W. Robinson [23] und U. Westphal [48] durchgeführt.

Die gebrochenen Potenzen von Halbgruppenerzeugern lassen sich aber auch mit Laplace-Transformierten von integrierbaren Funktionen behandeln, wie U. Westphal [45, 46] gezeigt hat.

Die Konstruktionsprinzipien lassen sich grob in zwei Kategorien einteilen. Bei der einen Methode wird zunächst eine Darstellung des zu konstruierenden Operators auf einer Teilmenge seines Definitionsbereiches angegeben. Anschließend wird gezeigt, daß der so definierte Operator abschließbar ist, und seine kleinste abgeschlossene Fortsetzung ist dann der gesuchte Operator. Diese Methode wird in [1, 31] verwendet. Die zweite Konstruktionsmethode beruht auf Approximationsprozessen. Sie besitzt gegenüber der erstgenannten Methode den Vorteil, daß der konstruierte Operator auf seinem gesamten Definitionsbereich dargestellt wird. Die gebrochenen Potenzen können auf unterschiedliche Weise approximiert werden: durch Marchaud-Integrale [45], durch gebrochene Differenzen [46] oder mit Hilfe der Regularisierungen von Distributionen aus dem Raum $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ [9, 23, 48].

Zu neueren Arbeiten über Halbgruppenerzeuger siehe [3, 38, 47]. Eine etwas allgemeinere Klasse von Operatoren wird in [5] betrachtet.

In dieser Arbeit ist gerade der Fall von Interesse, daß der gegebene lineare Operator A kein Halbgruppenerzeuger ist.

Einen Funktionalkalkül für abgeschlossene Operatoren mit unbeschränkter Resolventenmenge wurde 1950 von A.E. Taylor [44] entwickelt. Dieser Kalkül liefert wieder abgeschlossene Operatoren, darunter die ganzzahligen Potenzen des gegebenen Operators.

Gebrochene Potenzen wurden gegen Ende der 50er Jahre von M.A. Krasnosel'skiĭ-P.E. Sobolevskiĭ [21] für invertierbare, abgeschlossene Operatoren eingeführt. Ungefähr zu dieser Zeit hat A.V. Balakrishnan [2] gebrochene Potenzen für eine sehr allgemeine Klasse abgeschlossener Operatoren definiert. Seine Konstruktion wurde von verschiedenen Autoren aufgegriffen [22, 25, 26, 27, 28, 30]. H. Komatsu [20] hat die gebrochenen Potenzen von Operatoren aus derselben Klasse wie in [2] nach einer anderen Methode eingeführt und ihre Eigenschaften ausführlich studiert. Einen Funktionalkalkül, der auch gebrochene Potenzen enthält, wurde von F. Hirsch [14, 15, 16] eingeführt und in jüngerer Zeit von C. Martínez-M. Sanz [29] weiterentwickelt. Die Konstruktionen in [2, 20, 14, 15, 16, 25, 29] beruhen allesamt auf dem Prinzip der kleinsten abgeschlossenen Fortsetzung.

Dagegen haben H.W. Hövel-U. Westphal [17] gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren durch einen Grenzprozeß definiert. Diese Methode bietet, wie bereits erwähnt wurde, den Vorteil, daß die Potenzen auf ihrem gesamten Definitionsbereich dargestellt werden.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Konstruktion gebrochener Potenzen abgeschlossener linearer Operatoren im Rahmen eines Funktionalkalküls für Stieltjes-Transformierte von Distributionen aus einer Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

Als Vorbild im weiteren Sinne dient der Kalkül von L. Schwartz, der in seiner ursprünglichen Form [39] aber auf eine allgemeinere Darstellungstheorie von Halbgruppen in lokalkonvexen Räumen abzielt und nicht auf gebrochene Potenzen von Operatoren eingeht. Die Konstruktion der gebrochenen Potenzen ist durch eine Arbeit von U. Westphal [48] motiviert, in der ein Funktionalkalkül für Laplace-Transformierte von Distributionen entwickelt wurde, um hierdurch einen systematischen Zugang zu den gebrochenen Potenzen der infinitesimalen Erzeuger von gleichmäßig beschränkten Halbgruppen der Klasse (C_0) zu ermöglichen. Demgegenüber wird in dieser Arbeit eine allgemeinere Klasse abgeschlossener linearer Operatoren betrachtet.

Die Einführung des Funktionalkalküls in dieser Arbeit unterscheidet sich auch wesentlich von dem Ansatz, den F. Hirsch zur Definition seines Funktionalkalküls benutzt hat. Dies ermöglicht hier insbesondere die Konstruktion der gebrochenen Potenzen für beliebige positive Exponenten, während die Konstruktion in [14] nur Exponenten zwischen Null und Eins zuläßt.

Neu ist insbesondere die Stieltjes-Faltung von Distributionen, die hier die Rolle der Laplace'schen Faltung im Kalkül von L. Schwartz einnimmt. Da die Stieltjes-Faltung wesentlich "spröder" als die Laplace'sche Faltung zu handhaben ist, erfordert der Aufbau des Kalküls erheblich mehr Aufwand. Stieltjes'sche Faltungsprodukte wurden bisher ausschließlich für Funktionen konstruiert [17, 41, 28]. Die Faltung ermöglicht es, das Produkt der Transformierten zweier Distributionen wieder als Transformierte einer Distribution darzustellen. Mit Hilfe der Stieltjes-Transformation lassen sich Faltungsgleichungen von Distributionen herleiten, die durch den Kalkül in eine Verkettung von Operatoren übersetzt werden.

Die Stieltjes-Transformation bzw. -Faltung von Distributionen wird jeweils in zwei Varianten eingeführt. Ein wesentlicher Teil dieser Arbeit ist der Theorie der Stieltjes-Faltung gewidmet.

Das Kapitel 1 dieser Arbeit referiert einige Aussagen über Distributionen. Die Ausführungen konzentrieren sich auf eine spezielle Klasse von Distributionen, die sogenannten integrierbaren Distributionen.

In Kapitel 2 wird die Stieltjes-Transformation für Distributionen eingeführt. Als Vorbild dient die Definition der Laplace-Transformation von Distributionen, deren Träger nach unten beschränkt ist. Die klassische Stieltjes-Transformation wird derart modifiziert, daß die Potenzfunktion $(0, \infty) \ni s \mapsto s^\alpha$ für jedes $\alpha \geq 0$ als Transformierte einer geeigneten Distribution dargestellt werden kann.

Gegenstand des Kapitels 3 sind zwei algebraische Operationen für Distributionen, die verschiedene Varianten einer Stieltjes-Faltung sind. Jede dieser beiden Faltungsoperationen korrespondiert zu einer der beiden Stieltjes-Transformationen, die in Kapitel 2 eingeführt wurden. Gezeigt wird, daß die beiden Stieltjes-Faltungen ähnliche algebraische Eigenschaften besitzen, wie sie aus der Literatur von der Laplace'schen Faltung von Distributionen bekannt sind. Von besonderer Bedeutung sind die Faltungsprodukte integrierbarer Funktionen.

In Kapitel 4 wird schließlich der Funktionalkalkül für eine Klasse abgeschlossener linearer Operatoren entwickelt, mit dessen Hilfe die gebrochenen Potenzen derartiger Operatoren konstruiert und Eigenschaften wie die Potenzgesetze hergeleitet werden. Außerdem wird der Nachweis erbracht, daß die so definierten gebrochenen Potenzen zu den Konstruktionen in [2, 20, 17, 14] äquivalent sind.

An dieser Stelle möchte ich Frau Prof. Dr. U. Schmidt-Westphal für ihre Unterstützung und für die Betreuung dieser Arbeit ganz herzlich danken. Herrn Prof. Dr. G. Mühlbach danke ich für seine freundliche Bereitschaft, das Korreferat zu dieser Dissertation zu übernehmen.

Kapitel 1

Hilfsmittel aus der Distributionentheorie

Dieses Kapitel enthält einige speziellere Aussagen und Schreibweisen für Distributionen. Weitere Bezeichnungen sind im Symbolverzeichnis auf S. 71 erläutert. Für die allgemeine Theorie der Distributionen sei auf die Literatur verwiesen, z.B. auf die Bücher von L. Schwartz [40], I.M. Gelfand-G.E. Shilov [12] und J. Horváth [18].

Der Wert des linearen Funktionals U an der Stelle φ wird mit $\langle U, \varphi \rangle$ bezeichnet. Eine Funktion f, die zunächst nur auf einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ definiert ist, wird stets trivial auf den ganzen $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt, und die Fortsetzung wird dann wieder mit f bezeichnet. Die Aussage "f gehört zu $L^1(0,\infty)$" soll stets ausdrücken, daß f auf $(-\infty, 0)$ verschwindet. Eine lokal integrierbare Funktion wird mit der von ihr erzeugten regulären Distributionen identifiziert, und für die beiden Objekte wird dieselbe Bezeichnung verwendet.

Dagegen werden die Schreibweisen für gewöhnliche und distributionelle Ableitungen unterschieden. Ist $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein n-dimensionaler Multiindex der Ordnung $|\kappa| := \kappa_1 + \ldots + \kappa_n$, so bezeichnet $\partial^\kappa \varphi = \partial_1^{\kappa_1} \cdots \partial_n^{\kappa_n} \varphi$ die gewöhnliche Ableitung der $|\kappa|$-mal differenzierbaren Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Multiindex κ. Die distributionelle Ableitung von $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ zum Multiindex κ wird mit $D^\kappa U$ bezeichnet und ist wie üblich durch

$$\langle D^\kappa U, \varphi \rangle := \left\langle U, (-1)^{|\kappa|} \partial^\kappa \varphi \right\rangle, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$$

definiert.

Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit sind die Räume der *integrierbaren Distributionen* $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$, die wie in [40, Ch. VI, §8] und [18, Ch. 4, §5] als topologische Duale geeigneter Funktionenräume eingeführt werden (vgl. auch die Räume $K'\{M_p\}$ in [12] und [11]). Dafür sei zunächst

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\, \partial^\kappa \varphi \text{ ist beschränkt für alle } \kappa \in \mathbb{N}_0^n\}\,.$$

$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist mit der lokalkonvexen Topologie versehen, die von der abzählbaren Halbnormenschar $(p_\kappa)_{\kappa \in \mathbb{N}_0^n}$ erzeugt wird, wobei $p_\kappa : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ durch

$p_\kappa(\varphi) := \|\partial^\kappa\varphi\|_\infty$, definiert ist. $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ enthält den Vektorraum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, der aber nicht dicht in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ liegt. Die Abschließung von $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist der Raum

$$\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n) := \Big\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,;\ \lim_{\|u\|\to\infty} \partial^\kappa\varphi(u) = 0 \text{ für alle } \kappa \in \mathbb{N}_0^n\Big\}. \tag{1.1}$$

$\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ ist definiert als der topologische Duale des lokalkonvexen Raumes $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$, wenn dieser die von $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ induzierte Relativtopologie trägt. Ein lineares Funktional $U : \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$, wenn ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $C > 0$ derart existieren, daß für alle $\varphi \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$|\langle U,\, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\kappa|\leq m} \|\partial^\kappa\varphi\|_\infty\,. \tag{1.2}$$

Die Einschränkung eines linearen Funktionals $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ auf den Vektorraum $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist stetig bezüglich der Topologie von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, d.h. U ist eine Distribution. Ist umgekehrt $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ derart, daß (1.2) für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt, so besitzt U genau eine stetige Fortsetzung auf $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$. Somit kann $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ als ein Unterraum von $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ aufgefaßt werden.

Die von einer lokal integrierbaren Funktion f erzeugte reguläre Distribution ist genau dann in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$, wenn f eine integrierbare Funktion ist. Wie L. Schwartz [40, Ch. VI, §8, Th. XXV] gezeigt hat, gehört eine Distribution $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ genau dann zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$, wenn U eine endliche Summe von Ableitungen integrierbarer Funktionen ist, etwa

$$U = \sum_{|\kappa|\leq m} D^\kappa f_\kappa, \tag{1.3}$$

wobei $m \in \mathbb{N}_0$ und $f_\kappa \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für alle $\kappa \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\kappa| \leq m$. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $U * \varphi$ zu $L^1(\mathbb{R}^n)$ gehört. Zu beachten ist, daß die Darstellung (1.3) im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

Jede integrierbare Distribution besitzt gemäß dem Satz von Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung auf $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, die im allgemeinen aber nicht eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit der Fortsetzung ist garantiert, wenn der Raum $\mathscr{B}$ mit einer geeigneten Topologie versehen wird [40, p. 203]. Alternativ läßt sich eine eindeutige Fortsetzung auch mit Hilfe einer Approximation der Eins $(\varrho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ konstruieren (vgl. [6]). Eine Folge $(\varrho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt *Approximation der Eins*, wenn sie in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist und wenn zu jeder kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ein natürliche Zahl $\nu_0 \in \mathbb{N}$ derart existiert, daß $\varrho_\nu(u) = 1$ für alle $\nu \geq \nu_0$ und alle $u \in K$. Diese Eigenschaften von $(\varrho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ garantieren, daß für jedes $\varphi \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$ die Folge $(\varrho_\nu \cdot \varphi)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$

gegen φ konvergiert. Ist $\varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, so ist die Folge $(\varrho_\nu \cdot \varphi)_{\nu\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt, und sie konvergiert mit allen ihren Ableitungen punktweise gegen die entsprechende Ableitung von φ.

Stellt man $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ wie in (1.3) dar und ist $(\varrho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ eine Approximation der Eins aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, so wird durch

$$\begin{aligned}\langle \hat{U},\, \varphi\rangle &:= \lim_{\nu\to\infty} \langle U,\, \varrho_\nu \cdot \varphi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\kappa|\le m} (-1)^{|\kappa|} f_\kappa(u)\, \partial^\kappa \varphi(u)\, du, \qquad \varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n),\end{aligned} \tag{1.4}$$

ein stetiges lineares Funktional $\hat{U} : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ definiert. Die Definition von $\hat{U}$ ist unabhängig sowohl von der Wahl der Approximation der Eins als auch von der Darstellung (1.3). Die Konvergenzaussage $\lim_{\nu\to\infty}\langle \hat{U},\, \varphi_\nu\rangle = \langle \hat{U},\, \varphi\rangle$ gilt bereits, wenn die Folge (φ_ν) beschränkt in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist und mit allen ihren Ableitungen punktweise gegen die entsprechende Ableitung von $\varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ konvergiert. Im Folgenden wird jede integrierbare Distribution mit ihrer durch (1.4) definierten Fortsetzung identifiziert.

Der *Träger* einer Distribution U ist bekanntlich die kleinste abgeschlossene Menge $F \subset \mathbb{R}^n$ derart, daß $\langle U,\, \varphi\rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \cap \operatorname{supp}\varphi = \emptyset$. Für den Träger der Distribution U wird ebenfalls das Symbol $\operatorname{supp} U$ verwendet. Ist U eine integrierbare Distribution, so ist $\langle U,\, \varphi\rangle = 0$ sogar für jede Funktion $\varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, deren Träger in $\mathbb{R}^n \setminus \operatorname{supp} U$ enthalten ist. Wie in der Literatur üblich, bezeichnet $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ den Raum der n-dimensionalen Distributionen mit kompaktem Träger. $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ ist ein Unterraum von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$. Im Fall der Raumdimension $n = 1$ bezeichnet $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ die Menge aller Distributionen aus $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$, deren Träger in $\mathbb{R}_+$ enthalten ist, und entsprechend ist das Symbol $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ zu verstehen. Für alle $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ können die Funktionen f_κ in der Darstellung (1.3) aus $L^1(0,\infty)$ gewählt werden, also $f_\kappa(u) = 0$ für $u < 0$. Zum Beweis dieser Aussage vgl. [9, p. 298, Prop. 0.5].

Das Produkt $U \cdot \varrho$ einer integrierbaren Distribution $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ und einer Funktion $\varrho \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist die Distribution aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\langle U \cdot \varrho,\, \varphi\rangle := \langle U,\, \varrho \cdot \varphi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

Das *Tensorprodukt* $U \otimes V$ der Distributionen $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^m)$ und $V \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist die eindeutig bestimmte Distribution in $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$, welche die Bedingung

$$\langle U \otimes V,\, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle U,\, \varphi\rangle \cdot \langle V,\, \psi\rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^m),\ \psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n) \tag{1.5}$$

erfüllt. Dabei ist das Tensorprodukt $\varphi \otimes \psi : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ der Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\varphi \otimes \psi)(u, v) := \varphi(u) \cdot \psi(v) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}^m,\ v \in \mathbb{R}^n.$$

Das Tensorprodukt ist eine bilineare (d.h. eine bezüglich jeder Komponente lineare) Operation. Für Tensorprodukte mit drei Faktoren gilt das Assoziativgesetz. Für den Träger des Tensorproduktes gilt die Formel

$$\operatorname{supp}(U \otimes V) = \operatorname{supp} U \times \operatorname{supp} V.$$

Bei der Anwendung des Tensorproduktes $U \otimes V$ auf eine Testfunktion $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^{m+n})$ gilt der verallgemeinerte Satz von Fubini:

$$\langle U \otimes V, \, \Phi \rangle = \langle U(u), \, \langle V(v), \, \Phi(u,v) \rangle \rangle = \langle V(v), \, \langle U(u), \, \Phi(u,v) \rangle \rangle \,. \tag{1.6}$$

In dieser Gleichung wird implizit ausgedrückt, daß die Abbildungen $\mathbb{R}^m \ni u \mapsto \langle (V(v), \, \Phi(u,v) \rangle$ bzw. $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \langle (U(u), \, \Phi(u,v) \rangle$ Testfunktionen sind, auf die sich die Distribution U bzw. V anwenden läßt. Dabei bedeutet die Schreibweise $U(u)$, daß die Distribution U auf Funktionen der Variablen u wirkt, und entsprechend ist die Notation $V(v)$ zu interpretieren.

Wichtig ist hier wieder der Spezialfall, daß U zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^m)$ und V zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ gehört. Die Darstellung (1.3) liefert, daß $U \otimes V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{m+n})$. Die Beziehung (1.5) gilt dann sogar für alle $\varphi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^m)$ und alle $\psi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$, und die Gleichung (1.6) sowie die sich anschließenden Bemerkungen gelten ganz entsprechend für Funktionen aus $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^{m+n})$ bzw. aus $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{m+n})$.

Ein einfaches, aber wichtiges Beispiel einer integrierbaren Distribution ist das *Dirac-Maß* $\delta_{\{a\}}$ mit Träger im Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, das bekanntlich durch

$$\left\langle \delta_{\{a\}}, \, \varphi \right\rangle := \varphi(a), \qquad \varphi \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$$

definiert ist. Speziell setzt man $\delta := \delta_{\{0\}}$. Im Fall der Raumdimension $n = 1$ wird die k-te Ableitung $D^k\delta$ von δ ($k \in \mathbb{N}_0$) mit $\delta^{(k)}$ bezeichnet. $\delta^{(k)}$ gehört für alle $k \in \mathbb{N}_0$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$.

Kapitel 2

Stieltjes-Transformierte von Distributionen

2.1 Die gewöhnliche Stieltjes-Transformation

Stieltjes-Transformierte von Funktionen und Maßen sind ein klassisches Thema der Analysis (siehe z.B. [49]). Genügt ein signiertes Borel-Maß μ auf $\mathbb{R}_+$ der Bedingung

$$\int_0^\infty \frac{1}{s+u}\, d\,|\mu|\,(u) < \infty \qquad \forall\, s > 0, \tag{2.1}$$

so ist seine Stieltjes-Transformierte $S[\mu] : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$S[\mu](s) := \int_0^\infty \frac{1}{s+u}\, d\mu(u), \qquad s > 0. \tag{2.2}$$

Stieltjes-Transformierte von Distributionen haben demgegenüber eine erheblich geringere Beachtung erfahren. In [35] werden Stieltjes-Transformierte von solchen Distributionen betrachtet, die Ableitung einer lokal integrierbaren Funktion sind. Diese Klasse von Distributionen enthält aber nicht den Raum $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, der in dieser Arbeit von Bedeutung sein wird.

Der Definitionsbereich der Stieltjes-Transformation S wird in diesem Abschnitt auf eine Menge von Distributionen, die den Raum $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ enthält, ausgedehnt. Als Vorbild dient die Definition der Laplace-Transformation für temperierte Distributionen, deren Träger nach unten beschränkt ist (siehe z.B. [51, Ch. 8.3]). Der Definitionsbereich der Stieltjes-Transformation kann aber nicht so weit gefaßt werden wie derjenige der Laplace-Transformation. Der Grund dafür ist, daß der Kern der Laplace-Transformation $u \mapsto e^{-uz}$ eine viel schneller abfallende Funktion als der Kern der Stieltjes-Transformation $u \mapsto 1/(s+u)$ ist.

Eine formale Definition der Stieltjes-Transformierten $S[U]$ der Distribution U ist

$$S[U](s) := \langle U(u),\, 1/(s+u) \rangle\,.$$

Eine exakte Definition erfordert aber neben gewissen Bedingungen an U, daß der Kern der Stieltjes-Transformation als eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte, unendlich oft differenzierbare Funktion aufgefaßt werden kann. Dazu wählt man für jedes $s > 0$ eine Funktion χ_s aus $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ derart, daß

$$\chi_s(u) = \frac{1}{s+u} \qquad \forall\, u \in (-\varepsilon, \infty) \tag{2.3}$$

für ein $\varepsilon \in (0, s)$.

Definition 2.1. Ist $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ derart, daß $U \cdot \chi_s \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ für alle $s > 0$, so heißt U *Stieltjes-transformierbar*. Die Funktion $S[U] : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$S[U](s) := \langle U \cdot \chi_s,\, 1\rangle \qquad (s > 0)$$

heißt dann die *gewöhnliche Stieltjes-Transformierte* von U.

Hierbei ist die Anwendung der Distribution $U \cdot \chi_s$ auf die konstante Funktion $1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ im Sinne von (1.4) unter Verwendung einer Approximation der Eins erklärt. Das Ergebnis $\langle U \cdot \chi_s,\, 1\rangle$ hängt nicht von der Wahl der Funktion χ_s ab: Erfüllt auch $\psi_s \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ die Bedingung (2.3), so verschwindet die Differenz $\chi_s - \psi_s$ auf einer offenen Obermenge des Trägers von U, und es folgt $\langle U \cdot (\chi_s - \psi_s),\, 1\rangle = 0$, also $\langle U \cdot \chi_s,\, 1\rangle = \langle U \cdot \psi_s,\, 1\rangle$.

Jede Distribution $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ ist Stieltjes-transformierbar, und es gilt:

$$S[U](s) = \langle U,\, \chi_s\rangle \qquad \forall\, s > 0.$$

Offenbar bildet die Menge aller Stieltjes-transformierbaren Distributionen einen linearen Teilraum von $\mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$, und S ist eine lineare Abbildung.

Die Transformation S wird als *gewöhnliche* Stieltjes-Transformation bezeichnet, um sie von einer anderen Transformation zu unterscheiden, die im nächsten Abschnitt eingeführt wird. Der Bedarf für diese neue Transformation ergibt sich aus den Anwendungen im Kapitel 4 dieser Arbeit. Dort wird für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ eine Distribution aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ benötigt, deren Stieltjes-Transformierte die Potenzfunktion $(0, \infty) \ni s \mapsto s^k$ ist. Für die S-Transformation existieren jedoch keine Distributionen in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, die diese Forderung erfüllen. Dies ist eine Konsequenz daraus, daß die gewöhnliche Stieltjes-Transformierte $S[U]$ einer Distribution $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ die Grenzwerteigenschaft

$$\lim_{s \to \infty} S[U](s) = 0$$

besitzt, die mit Hilfe der Darstellung von U als endliche Summe von Ableitungen von Funktionen aus $L^1(0, \infty)$ leicht zu zeigen ist.

2.2 Die modifizierte Stieltjes-Transformation

Definition 2.2. Ist $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ eine Stieltjes-transformierbare Distribution, so heißt die Funktion $\mathfrak{S}[U] : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\mathfrak{S}[U](s) := 1/s\, S[U](1/s)$$

die *modifizierte Stieltjes-Transformierte* von U.

Der Wert von $\mathfrak{S}[U]$ an der Stelle $s > 0$ ergibt sich damit aus

$$\mathfrak{S}[U](s) = \langle U \cdot \psi_s,\, 1 \rangle\,,$$

wobei für jedes $s > 0$ eine Funktion $\chi_{1/s} \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ wie in (2.3) zu wählen und $\psi_s := 1/s\, \chi_{1/s}$ zu setzen ist. Die Funktion ψ_s gehört dann zu $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ und hat die Darstellung

$$\psi_s(u) = \frac{1}{1 + su} \tag{2.4}$$

für u aus einer offenen Obermenge von $\mathbb{R}_+$. Daher ist die $\mathfrak{S}$-Transformierte eines signierten Borel-Maßes μ auf $\mathbb{R}_+$, das die Bedingung (2.1) erfüllt, gegeben durch

$$\mathfrak{S}[\mu](s) = \int_0^\infty \frac{1}{1 + su}\, d\mu(u) \qquad \forall\, s > 0. \tag{2.5}$$

Ist $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion mit

$$\int_0^\infty \frac{|f(u)|}{u}\, du < \infty,$$

so läßt sich die gewöhnliche Stieltjes-Transformierte $S[f]$ auch als modifizierte Stieltjes-Transformierte $\mathfrak{S}[g]$ einer integrierbaren Funktion g darstellen. Ist nämlich $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(v) := 1/v\, f(1/v)$, so liefert die Substitution $v = 1/u$, daß

$$S[f](s) = \int_0^\infty \frac{f(u)}{s + u}\, du = \int_0^\infty \frac{1/v\, f(1/v)}{1 + sv}\, dv = \mathfrak{S}[g](s)$$

für alle $s \geq 0$. Dabei konvergieren die Integrale absolut, was für $s = 0$ gerade $g \in L^1(0, \infty)$ bedeutet.

Die gewöhnlichen Stieltjes-Transformierten zweier integrierbarer Distributionen sind genau dann gleich, wenn ihre modifizierten Stieltjes-Transformierten übereinstimmen. Daher ist jede Eindeutigkeitsaussage für die S-Transformation zu einer über die $\mathfrak{S}$-Transformation äquivalent. Zwei Funktionen $f, g \in L^1(0, \infty)$ stimmen überein, wenn sie dieselbe S-Transformierte besitzen, und dies ist genau dann der Fall, wenn f und g dieselbe $\mathfrak{S}$-Transformierte besitzen. In Kapitel 3.2.5 wird eine Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ angegeben, deren Elemente durch ihre Stieltjes-Transformierte eindeutig bestimmt sind.

Abschließend werden noch einige konkrete Stieltjes-Transformierte von Distributionen aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ berechnet. Diese Beispiele zeigen insbesondere, daß sich die Potenzfunktion $(0,\infty) \ni s \mapsto s^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ als $\mathfrak{S}$-Transformierte einer integrierbaren Distribution darstellen läßt.

Beispiel 2.3. Nach (2.5) ist $\mathfrak{S}[\delta_{\{\lambda\}}](s) = 1/(1+\lambda s)$ für alle $s > 0$.

Beispiel 2.4. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathfrak{S}\left[\frac{1}{k!}\,\delta^{(k)}\right](s) = s^k \qquad \forall\, s > 0. \tag{2.6}$$

Zum Beweis dieser Aussage sei $s > 0$ und sei $\psi_s \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ mit $\psi_s(u) = 1/(1+su)$ für alle $u \geq 0$. Dann ergibt sich die Gleichung (2.6) unmittelbar aus

$$\mathfrak{S}[\delta^{(k)}](s) = \left\langle \delta,\, (-1)^k \psi_s^{(k)} \right\rangle = \left.\frac{k!\, s^k}{(1+su)^{k+1}}\right|_{u=0} = k!\, s^k.$$

$\square$

Kapitel 3

Stieltjes-Faltung von Distributionen

In diesem Kapitel werden auf dem Raum $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ die beiden Operationen $\odot$ und $\circledast$ eingeführt, die den in Kapitel 2 eingeführten Stieltjes-Transformationen S bzw. $\mathfrak{S}$ angepaßt sind und die beide als Stieltjes-Faltung bezeichnet werden. Diese Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß das Produkt der Stieltjes-Transformierten zweier Distributionen als Transformierte ihrer Faltung dargestellt werden kann. Die Eigenschaften der $\circledast$-Faltung werden ausführlicher studiert, weil mit ihrer Hilfe in Kapitel 4 ein Funktionalkalkül für eine Klasse abgeschlossener Operatoren entwickelt wird.

3.1 Die gewöhnliche Stieltjes-Faltung

Dieser Abschnitt behandelt die Stieltjes-Faltung $\odot$, die je zwei Distributionen $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ eine Stieltjes-transformierbare Distribution $U \odot V$ zuordnet, so daß

$$S[U \odot V] = S[U] \cdot S[V]. \tag{3.1}$$

Eine Stieltjes-Faltung lokal integrierbarer, Stieltjes-transformierbarer Funktionen wurde bereits von H.W. Hövel-U. Westphal [17] definiert. Im Abschnitt 3.1.3 wird gezeigt, daß diese Faltung unter natürlichen Voraussetzungen mit der $\odot$-Faltung von Funktionen aus $L^1(0, \infty)$ übereinstimmt.

3.1.1 Definition der gewöhnlichen Stieltjes-Faltung

Die Definition der Stieltjes-Faltung von Distributionen orientiert sich an der Definition der klassischen Faltung von Distributionen. Das Analogon zur Gleichung (3.1) ist der Produktsatz für die Laplace-Transformation von Distributionen (vgl. [51, Ch. 8]): Besitzen $U, V \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ die Laplace-Transformierten $\mathscr{L}[U]$ bzw. $\mathscr{L}[V]$, so ergibt sich die Laplace-Transformierte $\mathscr{L}[U * V]$ der Distribution $U * V$ als das Produkt

$$\mathscr{L}[U * V] = \mathscr{L}[U] \cdot \mathscr{L}[V]. \tag{3.2}$$

Dabei ist $U * V$ definiert durch

$$\langle U * V,\, \chi\rangle := \big\langle U \otimes V,\, \chi^+\big\rangle \tag{3.3}$$

für alle $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$, wobei die Funktion $\chi^+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils durch $\chi^+(u,v) := \chi(u+v)$ gegeben ist. Aufgrund der Gültigkeit der Gleichung (3.2) wird $U * V$ auch als *Laplace'sche Faltung* von U und V bezeichnet. Die Definition der Operation $*$ verwendet neben dem Tensorprodukt von Distributionen auch die lineare Abbildung $\chi \mapsto \chi^+$, die jeder auf $\mathbb{R}$ definierten Testfunktion χ die auf dem $\mathbb{R}^2$ definierte, unendlich oft differenzierbare Funktion χ^+ zuordnet.

Zum Beweis der Gleichung (3.2) wählt man für χ den Kern der Laplace-Transformation, d.h. für festes $z > 0$ ist $\chi(u) = \exp(-uz)$, $u > 0$. Entscheidend ist dann, daß die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion eine Darstellung der Funktion χ^+ als Tensorprodukt $\chi \otimes \chi$ erlaubt, da

$$\chi^+(u,v) = \chi(u) \cdot \chi(v) \qquad \forall\, u, v \geq 0.$$

Analog zur Definition der Laplace'schen Faltung $*$ verwendet die Definition der Operation $\odot$ das Tensorprodukt von Distributionen und einen linearen Operator Δ, der $C_c^\infty(\mathbb{R})$ in $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ abbildet. Die Definition des Operators Δ muß so getroffen werden, daß die Gleichung (3.1) erfüllt wird. Dies ist der Fall, wenn Δ dem in (2.3) definierten Kern χ_s ($s > 0$) von S eine Funktion $\Delta[\chi_s]$ zuordnet, die sich durch das Tensorprodukt $\chi_s \otimes \chi_s$ darstellen läßt.

Um einen Ausdruck für $\Delta[\chi]$ zu erhalten, der linear von χ abhängt, wird die Multiplikation mit $-s$ als linearer Operator auf dem eindimensionalen Banachraum $\mathbb{R}$ aufgefaßt. $\chi_s(u)$ ist dann gerade der Wert der Resolvente $R(u;-s)$ von $-s$ an der Stelle $u > 0$. Mit Hilfe der Resolventengleichung ergibt sich die Beziehung

$$\begin{aligned} \chi_s(u) \cdot \chi_s(v) = R\big(u;-s\big)\, R\big(v;-s\big) &= -\frac{R\big(u;-s\big) - R\big(v;-s\big)}{u-v} \\ &= -\frac{\chi_s(u) - \chi_s(v)}{u-v} \end{aligned} \tag{3.4}$$

für alle $u, v > 0$ mit $u \neq v$. Die Definition des Operators Δ ergibt sich daraus, daß man im Differenzenquotienten in (3.4) die Funktion χ_s durch ein beliebiges $\chi \in C^1(\mathbb{R})$ ersetzt.

Definition 3.1. Für $\chi \in C^1(\mathbb{R})$ sei $\Delta[\chi] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\Delta[\chi](u,v) := \begin{cases} \dfrac{\chi(u) - \chi(v)}{u-v} & \text{für } u \neq v, \\ \chi'(u) & \text{für } u = v. \end{cases}$$

$\Delta[\chi](u,v)$ ist gerade die dividierte Differenz erster Ordnung der Funktion χ zu den Stützstellen $u, v \in \mathbb{R}$. Diese ist bekanntlich von der Reihenfolge der Argumente u und v unabhängig. Ferner sei festgehalten, daß der Operator $\Delta : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}^2)$ linear ist.

Der Operator Δ wurde bereits implizit in den Arbeiten [14, 29] verwendet. In [29] wurde der Fall betrachtet, daß das lineare Funktional

$$C^1(\mathbb{R}_+) \ni \chi \mapsto \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \Delta[\chi]\, d(\mu \otimes \nu) \tag{3.5}$$

ein Stieltjes-transformierbares Maß auf $\mathbb{R}_+$ ist, wenn μ und ν Stieltjes-transformierbare Maße auf $\mathbb{R}_+$ sind. Das durch (3.5) definierte Funktional wird im allgemeinen jedoch kein Maß, sondern eine Distribution sein, wie das folgende Beispiel zeigt. Ist $\mu := \nu := \delta_{\{\lambda\}}$, wobei $\lambda > 0$, so gilt für alle $\chi \in C^1(\mathbb{R})$:

$$\langle \mu \otimes \nu,\, \Delta[\chi] \rangle = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \Delta[\chi]\, d(\mu \otimes \nu) = \chi'(\lambda) = \left\langle -D\delta_{\{\lambda\}},\, \chi \right\rangle, \tag{3.6}$$

und $-D\delta_{\{\lambda\}}$ ist kein Maß.

Daß die Zuordnung $\chi \mapsto \langle U \otimes V,\, \Delta[\chi] \rangle$ für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ tatsächlich eine Distribution definiert, ergibt sich aus dem Abbildungsverhalten des Operators Δ, das nun untersucht wird.

Lemma 3.2. Ist χ in $C^\infty(\mathbb{R})$, so gehört $\Delta[\chi]$ zu $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, und für alle $k, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\partial_1^k \partial_2^m \Delta[\chi](u,v) = \int_0^1 (1-t)^k\, t^m\, \chi^{(k+m+1)}\big((1-t)u + tv\big)\, dt. \tag{3.7}$$

Beweis. Für $k = m = 0$ gilt die Gleichung (3.7) nach dem Hauptsatz der Analysis, und für beliebige $k, m \in \mathbb{N}_0$ ergibt sie sich durch Differentiation unter dem Integral. Aus der Darstellung (3.7) ergibt sich dann auch die Stetigkeit der partiellen Ableitungen von $\Delta[\chi]$. □

Satz 3.3. Δ ist eine stetige lineare Abbildung jeweils von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ und von $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ in $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^2)$.

Beweis. Für $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ folgt aus der Gleichung (3.7), daß

$$\left\| \partial_1^k \partial_2^m \Delta[\chi] \right\|_\infty \le \left\| \chi^{(k+m+1)} \right\|_\infty \qquad \forall\, k, m \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere ist $\Delta[\chi] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, und Δ ist als Abbildung von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ stetig. Somit ist auch die Restriktion von Δ auf den Unterraum $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ stetig, und zu zeigen bleibt die Grenzwerteigenschaft

$$\lim_{\|(u,v)\| \to \infty} \partial_1^k \partial_2^m \Delta[\chi](u,v) = 0 \tag{3.8}$$

für $\chi \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ und $k, m \in \mathbb{N}_0$.

Dafür sei $\varepsilon > 0$. Mit Hilfe der Leibnizregel zur Ableitung von Produkten ergibt sich die Existenz von Konstanten $C_0, C_1, \dots, C_{k+m} \geq 0$ derart, daß

$$\left|\partial_1^k \partial_2^m \Delta[\chi](u,v)\right| \leq \sum_{j=0}^{k+m} C_j \left\|\chi^{(j)}\right\|_\infty |u-v|^{j-k-m-1} \tag{3.9}$$

für alle $u, v \in \mathbb{R}$ mit $u \neq v$. Man wähle $R > 0$ so, daß die rechte Seite von (3.9) für $|u-v| > R$ kleiner als ε ist und daß $\left|\chi^{(k+m+1)}(w)\right| < \varepsilon$, falls $|w| > R$.

Dann gilt für alle $u, v \in \mathbb{R}$ mit $\max\{|u|, |v|\} > 2R$, daß

$$\left|\partial_1^k \partial_2^m \Delta[\chi](u,v)\right| < \varepsilon. \tag{3.10}$$

Ist nämlich $|u-v| > R$, so gilt diese Aussage gemäß der Wahl von R. Ist jedoch $|u-v| \leq R$, so ist $|(1-t)u + tv| > R$ für alle $t \in [0,1]$, und die Ungleichung (3.10) ergibt sich mit Hilfe der Darstellung (3.7). □

Definition 3.4. Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ setze $U \odot V : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\langle U \odot V, \chi\rangle := \langle U \otimes V, -\Delta[\chi]\rangle, \qquad \chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

$U \odot V$ heißt die *gewöhnliche Stieltjes-Faltung* von U und V.

Für alle $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ ist die Stieltjes-Faltung $U \odot V$ als Verkettung der stetigen linearen Abbildungen $-\Delta : \mathscr{B}(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ und $U \otimes V : \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ wieder in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$.

Ein einfaches Beispiel einer $\odot$-Faltung liefert die Gleichung (3.6). Sie besagt gerade, daß $\delta_{\{\lambda\}} \odot \delta_{\{\lambda\}} = D\delta_{\{\lambda\}}$, $\lambda > 0$.

3.1.2 Eigenschaften der gewöhnlichen Stieltjes-Faltung

Es wird nun gezeigt, daß die Operation $\odot$ ähnliche Eigenschaften wie die Laplace'sche Faltung von Distributionen besitzt und daß sie die Gleichung (3.1) erfüllt, was ja eine Zielsetzung dieses Abschnittes war. Zunächst wird der Träger der Distribution $U \odot V$ untersucht.

Lemma 3.5. Für $\chi \in C^1(\mathbb{R})$ gilt: $\operatorname{supp} \Delta[\chi] \subset (\operatorname{supp} \chi \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \operatorname{supp} \chi)$.

Beweis. Ist $\chi \in C^1(\mathbb{R})$, so verschwindet die Funktion $\Delta[\chi]$ auf der offenen Menge $(\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} \chi)^2$. Nach Definition des Trägers gilt dann: $\operatorname{supp} \Delta[\chi] \subset \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} \chi)^2 = (\operatorname{supp} \chi \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \operatorname{supp} \chi)$. □

Ist der Träger von χ kompakt, so ist nach Lemma 3.5 der Träger von $\Delta[\chi]$ in der Vereinigung zweier achsenparalleler Streifen im $\mathbb{R}^2$ enthalten. Im Unterschied hierzu ist der Träger der Funktion χ^+ aus der Definition der Laplace'schen Faltung [siehe (3.3)] in einem Streifen enthalten, der zur Nebendiagonalen des $\mathbb{R}^2$ parallel ist. Daher ergibt sich für den Träger der gewöhnlichen Stieltjes-Faltung $U \odot V$ eine andere Formel als für den Träger der Laplace'schen Faltung $U * V$, der gerade die Summe der Träger von U und V ist.

Satz 3.6. Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ ist der Träger der Distribution $U \odot V$ in der Vereinigung der Träger von U und V enthalten.

Beweis. Seien $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $F := \operatorname{supp} U \cup \operatorname{supp} V$. Dann ist F abgeschlossen, und der Träger der Distribution $U \otimes V$ ist in F^2 enthalten. Ist nun $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ derart, daß $\operatorname{supp} \chi \subset \mathbb{R} \setminus F$, so ist nach Lemma 3.5 der Träger der Funktion $\Delta[\chi]$ in $\mathbb{R}^2 \setminus F^2$ enthalten und daher $\langle U \odot V,\, \chi \rangle = \langle U \otimes V,\, -\Delta[\chi] \rangle = 0$. $\square$

Folgerung 3.7. $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ und $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ sind abgeschlossen bezüglich der $\odot$-Faltung.

Folgerung 3.7 zeigt, daß mit den Stieltjes-transformierbaren Distributionen $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ auch ihr Faltungsprodukt $U \odot V$ Stieltjes-transformierbar ist. Daß der Zusammenhang zwischen den gewöhnlichen Stieltjes-Transformierten von U, V und $U \odot V$ tatsächlich durch die Gleichung (3.1) gegeben wird, ist die Aussage des nächsten Satzes.

Satz 3.8. Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ gilt: $S[U \odot V] = S[U] \cdot S[V]$.

Beweis. Sei $s > 0$ und $\chi_s \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ derart, daß (2.3) gilt. Gemäß Satz 3.3 gehört die Funktion $-\Delta[\chi_s]$ zu $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^2)$. Für alle (u, v) aus einer offenen Obermenge des Trägers von $U \otimes V$ ist $-\Delta[\chi_s](u, v) = \chi_s(u) \otimes \chi_s(v)$. Aus der Definition des Trägers und den Eigenschaften des Tensorproduktes folgt dann, daß

$$\langle U \otimes V,\, -\Delta[\chi_s] \rangle = \langle U \otimes V,\, \chi_s \otimes \chi_s \rangle = \langle U,\, \chi_s \rangle \cdot \langle V,\, \chi_s \rangle\,.$$

Diese Gleichung bedeutet gerade, daß $S[U \odot V](s) = S[U](s) \cdot S[V](s)$. $\square$

Aus Satz 3.8 folgt, daß in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ kein Einselement der $\odot$-Faltung existiert. Wäre nämlich $e \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ ein Einselement, so müßte $S[e]$ die konstante Funktion 1 sein. Dies ist aber unmöglich, weil $S[e]$ im Unendlichen verschwindet, wie zum Ende des Abschnittes 2.1 dargelegt wurde.

Zum Beweis des Assoziativgesetzes für die $\odot$-Faltung ist es zweckmäßig, eine "Iterierte" Δ^2 des Operators Δ dadurch einzuführen, daß für jedes $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Abbildung $\Delta^2[\chi] : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\Delta^2[\chi](u,v,w) := \Delta[\Delta[\chi](\cdot,w)](u,v)$$

definiert wird. Dann ist $\Delta^2[\chi](u,v,w)$ die dividierte Differenz zweiter Ordnung von χ zu den Stützstellen $u,v,w \in \mathbb{R}$.

Die für den Beweis des Assoziativgesetzes benötigten Eigenschaften derartiger Funktionen $\Delta^2[\chi]$ gibt das folgende Lemma.

Lemma 3.9. Ist $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, so ist $\Delta^2[\chi] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$, und es gilt:

$$\Delta^2[\chi](u,v,w) = \Delta^2[\chi](v,w,u) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3. \tag{3.11}$$

Beweis. Analog zur Darstellung der partiellen Ableitungen der Funktion $\Delta[\chi]$ in (3.7) läßt sich der Wert der partiellen Ableitung $\partial_1^k \partial_2^l \partial_3^m \Delta^2[\chi](u,v,w)$ von $\Delta^2[\chi]$ darstellen als

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-t)^k\, t^l\, (1-\tau)^{k+l+1}\, \tau^m \cdot \\ \cdot\, \chi^{(k+l+m+2)}\big((1-\tau)[(1-t)u + tv] + \tau w\big)\, dt\, d\tau,$$

für alle $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ und alle $k,l,m \in \mathbb{N}_0$. Hieraus ergibt sich dann, daß die Funktion $\partial_1^k \partial_2^l \partial_3^m \Delta^2[\chi]$ stetig und beschränkt ist.

Die Gleichung (3.11) ist ein Spezialfall der bekannten Tatsache, daß die dividierten Differenzen unabhängig von der Reihenfolge der Stützstellen sind. $\square$

Die algebraischen Eigenschaften der $\odot$-Faltung sind im nächsten Satz zusammengestellt.

Satz 3.10. Die gewöhnliche Stieltjes-Faltung ist bilinear, kommutativ und assoziativ.

Beweis. Die Kommutativität ergibt sich daraus, daß $\Delta[\chi]$ für alle $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ eine symmetrische Funktion ihrer Argumente ist. Die Bilinearität folgt aus der entsprechenden Eigenschaft des Tensorproduktes, und zu zeigen bleibt noch das Assoziativgesetz. Dafür seien $U,V,W \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\langle (U \odot V) \odot W,\, \chi\rangle &= \langle W(w),\, \langle (U \odot V)(z),\, -\Delta[\chi](z,w)\rangle\rangle \\ &= \langle W(w),\, \langle U(u) \otimes V(v),\, \Delta[\Delta[\chi](\cdot,w)](u,v)\rangle\rangle\,,\end{aligned}$$

denn für jedes feste $w \in \mathbb{R}$ gehört die Funktion $-\Delta[\chi](\cdot, w)$ zu $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. Da $(U \otimes V) \otimes W \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^3)$ und da nach Lemma 3.9 $\Delta^2[\chi] \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$, folgt

$$\langle (U \odot V) \odot W, \chi \rangle = \big\langle (U \otimes V) \otimes W, \Delta^2[\chi] \big\rangle .$$

Wegen der Assoziativität des Tensorprodukts und wegen (3.11) ergibt sich derselbe Ausdruck auch für $\langle U \odot (V \odot W), \chi \rangle$. □

Hinsichtlich der Distributionenableitung verhält sich die $\odot$-Faltung anders als die Laplace'sche Faltung $*$. Während sich die Ableitung von $U * V$ auf einen der beiden Faktoren U und V "abwälzen" läßt, gilt für die Ableitung von $U \odot V$ die Formel

$$D(U \odot V) = DU \odot V + U \odot DV, \tag{3.12}$$

die der klassischen Poduktregel für Ableitungen von Funktionen ähnelt. Der Beweis von (3.12) beruht auf der Gleichung $\Delta[\chi'] = \partial_1 \Delta[\chi] + \partial_2 \Delta[\chi]$.

3.1.3 Faltungsprodukte regulärer Distributionen

Während die Laplace'sche Faltung zweier integrierbarer Funktionen stets eine integrierbare Funktion ist, muß dies für ihre $\odot$-Faltung nicht gelten. D.V. Widder hat zwei integrierbare Funktionen $f_1, f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ angegeben, für die das Produkt $S[f_1] \cdot S[f_2]$ nicht als S-Transformierte einer integrierbaren Funktion dargestellt werden kann [17]. Dies bedeutet insbesondere, daß die Distribution $f_1 \odot f_2$ keine integrierbare Funktion ist.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen an die zu faltenden Funktionen f_1, f_2 läßt sich dennoch zeigen, daß $f_1 \odot f_2$ eine integrierbare Funktion ist. In diesem Fall stimmt $f_1 \odot f_2$ mit der von H.W. Hövel-U. Westphal [17] eingeführten Stieltjes-Faltung überein. Diese Faltung ist durch ein Integral definiert, dessen Integrand eine spezifische Struktur besitzt. Es ist zweckmäßig, hierfür eine abkürzende Bezeichnung einzuführen.

Für $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei der Kern $K[f] : (0,1) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$K[f](t,u) := \frac{t^{-1} f(t^{-1}u) - f(tu)}{t-1}, \qquad 0 < t < 1,\ u > 0. \tag{3.13}$$

In [17] wird die Stieltjes-Faltung $f_1 \overset{*}{*} f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ der lokal integrierbaren, Stieltjes-transformierbaren Funktionen $f_1, f_2 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f_1 \overset{*}{*} f_2)(u) := -f_1(u) \int_0^1 K[f_2](t,u)\, dt - f_2(u) \int_0^1 K[f_1](t,u)\, dt \tag{3.14}$$

für fast alle $u \in (0,\infty)$. Die Funktion $f_1 \overset{*}{*} f_2$ ist wohldefiniert und erfüllt die Produktformel

$$S[f_1 \overset{*}{*} f_2] = S[f_1] \cdot S[f_2],$$

wenn f_1 und f_2 für alle $s > 0$ folgende Bedingungen erfüllen [17, Th. 1.1]:

$$\int_0^\infty \int_0^1 \frac{1}{s+u} \, |f_i(u) \, K[f_j](t,u)| \, dt \, du < \infty \quad \text{für } i,j = 1,2 \text{ und } i \neq j. \tag{3.15}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{s+tu} \, |f_1(tu) f_2(u) + f_1(u) f_2(tu)| \, du < \infty \quad \text{f.ü. auf } (0,1). \tag{3.16}$$

Werden die Voraussetzungen (3.15) und (3.16) durch ähnliche, aber stärkere Bedingungen an f_1 und f_2 ersetzt, so läßt sich die oben angekündigte Aussage über $f_1 \odot f_2$ zeigen.

Satz 3.11. Genügen die Funktionen $f_1, f_2 \in L^1(0,\infty)$ den Bedingungen

$$\int_0^\infty \int_0^1 |f_i(u) \, K[f_j](t,u)| \, dt \, du < \infty \quad \text{für } i,j = 1,2 \text{ und } i \neq j, \tag{3.17}$$

$$\int_0^\infty |f_1(tu) f_2(u) + f_1(u) f_2(tu)| \, du < \infty \quad \text{für fast alle } t \in (0,1), \tag{3.18}$$

so ist $f_1 \odot f_2$ wieder in $L^1(0,\infty)$, und $f_1 \odot f_2 = f_1 \overset{*}{*} f_2$.

Der Beweis ist völlig analog zu dem von [17, Th. 1.1] und wird daher nicht ausgeführt.

Eine Stieltjes-Faltung von holomorphen Funktionen, die noch gewisse Grenzwert- und Integrabilitätsbedingungen erfüllen, wurde von C. Martínez-M. Sanz [28] implizit verwendet (siehe dort Lemma 2.12 und Lemma 2.13). Unter geeigneten Voraussetzungen stimmt diese Faltung - bis auf das Vorzeichen - mit der Stieltjes-Faltung von Hövel-Westphal überein. Für eine Stieltjes-Faltung von Funktionen aus $L^p(0,\infty)$ mit $p > 1$ siehe [41].

3.2 Die modifizierte Stieltjes-Faltung

3.2.1 Definition der modifizierten Stieltjes-Faltung

Ziel dieses Abschnittes ist es, mittels der Operation $\circledast$ je zwei Stieltjes-transformierbaren Distributionen $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ eine Stieltjes-transformierbare Distribution $U \circledast V$ zuzuordnen, so daß

$$\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[U] \cdot \mathfrak{S}[V]. \tag{3.19}$$

Zielsetzung und Vorgehensweise sind also ähnlich denen bei der Einführung der $\odot$-Faltung. In diesem Abschnitt bedarf es eines linearen Operators $\mathfrak{q} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}^2)$ mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes positive s ordnet $\mathfrak{q}$ dem in (2.4) definierten Kern ψ_s von $\mathfrak{S}$ eine Funktion $\mathfrak{q}[\psi_s]$ zu, die sich durch das Tensorprodukt $\psi_s \otimes \psi_s$ darstellen läßt.

Definition 3.12. Es sei $\mathfrak{m} : C^1(\mathbb{R}) \to C^1(\mathbb{R})$ definiert durch $\mathfrak{m}[\chi](u) := u \cdot \chi(u)$ für $u \in \mathbb{R}$, $\chi \in C^1(\mathbb{R})$. Ferner sei der Operator $\mathfrak{q} : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $\mathfrak{q} := \Delta \circ \mathfrak{m}$.

Für jedes $\chi \in C^1(\mathbb{R})$ läßt sich die stetige Funktion $\mathfrak{q}[\chi] : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ darstellen durch

$$\mathfrak{q}[\chi](u,v) := \begin{cases} \dfrac{u \cdot \chi(u) - v \cdot \chi(v)}{u - v} & \text{falls } u \neq v, \\ \chi(u) + u \cdot \chi'(u) & \text{falls } u = v. \end{cases}$$

Zwischen den Abbildungen Δ und $\mathfrak{q}$ besteht auch der Zusammenhang

$$\mathfrak{q}[\chi](u,v) = \chi(u) + v \cdot \Delta[\chi](u,v) = \chi(v) + u \cdot \Delta[\chi](u,v) \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}.$$

Für die Anwendung des Operators $\mathfrak{m}$ auf das Produkt $\chi \cdot \psi$ mit $\chi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ gilt offensichtlich die Beziehung $\mathfrak{m}[\chi \cdot \psi] = \chi \cdot \mathfrak{m}[\psi]$. Die Ableitungen der Funktion $\mathfrak{m}[\chi]$ ergeben sich für $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ nach der Leibnizregel zu $\mathfrak{m}[\chi]^{(k)} = \mathfrak{m}[\chi^{(k)}] + k \cdot \chi^{(k-1)}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ soll das lineare Funktional $U \circledast V$, ähnlich wie die Distribution $U \odot V$, als Verkettung des Tensorproduktes $U \otimes V$ mit einem linearen Operator, nämlich $\mathfrak{q}$, definiert werden. Dabei muß $\mathfrak{q}$ auf einen Teilraum von $C^\infty(\mathbb{R})$ eingeschränkt werden, so daß der Wertebereich dieser Restriktion im Definitionsbereich von $U \otimes V$, also in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$, enthalten ist. Anders als der Operator Δ bildet jedoch $\mathfrak{q}$ den Raum $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ nicht in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ ab. Diese Tatsache führt, im Vergleich zur $\odot$-Faltung, zu gewissen Einschränkungen bei den Aussagen über die $\circledast$-Faltung.

Eine denkbare Wahl für den Definitionsbereich von $U \circledast V$ wäre der Raum $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, da mit χ auch $\mathfrak{m}[\chi]$ eine Testfunktion ist. Um die Produktformel (3.19) zu zeigen, muß $U \circledast V$ aber auf einem Funktionenraum definiert sein, der den Kern der Stieltjes-Transformation enthält. Diese Forderung wird nicht von $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ erfüllt, sondern vom Urbild des Raumes $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ unter der Abbildung $\mathfrak{m}$. Für diesen Funktionenraum soll eine eigene Bezeichnung verwendet werden.

Definition 3.13. Sei $\mathscr{B}_1(\mathbb{R}) := \{\chi \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})\,;\, \mathfrak{m}[\chi] \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$. Der Vektorraum $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ trage die lokalkonvexe Topologie, die von den Halbnormen

$p_k, q_k : \mathscr{B}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $p_k(\chi) := \left\|\chi^{(k)}\right\|_\infty$ bzw. $q_k(\chi) := \left\|\mathfrak{m}[\chi]^{(k)}\right\|_\infty$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ erzeugt wird.

Eine Funktion $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ gehört genau dann zu $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$, wenn sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Bedingung $\sup_{u\in\mathbb{R}} \left|u \cdot \chi^{(k)}(u)\right| < \infty$ erfüllt. Die Topologie von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ ist die gröbste lokalkonvexe Topologie, bezüglich der sowohl die natürliche Einbettung von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ in $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ als auch die Abbildung $\mathfrak{m} : \mathscr{B}_1(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(\mathbb{R})$ stetig sind. $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ läßt sich für eine geeignete Wahl der Funktionen M_p, $p \in \mathbb{N}_0$, auch als ein Raum $K\{M_p\}$ im Sinne von Gelfand-Shilov [12, II, Ch. II] auffassen.

Es bezeichne $\mathscr{B}_1'(\mathbb{R})$ den topologischen Dualraum von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$. Dann ist die Restriktion jedes linearen Funktionals $U \in \mathscr{B}_1'(\mathbb{R})$ auf $C_c^\infty(\mathbb{R})$ eine Distribution, und die Einschränkung jeder integrierbaren Distribution auf den Raum $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ gehört zu $\mathscr{B}_1'(\mathbb{R})$.

Die Definition des lokalkonvexen Raumes $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ und des Operators $\mathfrak{q}$ sind gerade so getroffen worden, daß $\mathfrak{q}$ eine stetige, lineare Abbildung von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ ist. Sind $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, so ist die Verkettung der stetigen, linearen Abbildungen $U \otimes V : \mathscr{B}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ und $\mathfrak{q} : \mathscr{B}_1(\mathbb{R}) \to \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$ ein Element von $\mathscr{B}_1'(\mathbb{R})$ und damit insbesondere eine Distribution. Dieses lineare Funktional ist dann das Faltungsprodukt $U \circledast V$ von U und V.

Definition 3.14. Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ setze $U \circledast V : \mathscr{B}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\langle U \circledast V,\, \chi\rangle := \langle U \otimes V,\, \mathfrak{q}[\chi]\rangle\,, \qquad \chi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{R}).$$

$U \circledast V$ heißt die *modifizierte Stieltjes-Faltung* von U und V.

Das Funktional $U \circledast V$ ist durch seine Restriktion auf den Unterraum $C_c^\infty(\mathbb{R})$ von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ eindeutig bestimmt. Zwischen den Faltungsprodukten $U \circledast V$ und $U \odot V$ besteht offensichtlich der Zusammenhang

$$\langle U \circledast V,\, \chi\rangle = \langle U \odot V,\, -\mathfrak{m}[\chi]\rangle \qquad \forall\, \chi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{R}). \tag{3.20}$$

Die Distribution $U \circledast V$ wird sich als Stieltjes-transformierbar erweisen, aber sie ist im allgemeinen nicht integrierbar. Daher wird in Abschnitt 3.2.4 eine Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ konstruiert, die abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung ist.

Ein einfaches Beispiel zu Definition 3.14 ist die $\circledast$-Faltung von ganzzahligen Ableitungen des Dirac-Maßes δ.

Beispiel 3.15. Sind $k, l \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$\frac{1}{k!}\,\delta^{(k)} \circledast \frac{1}{l!}\,\delta^{(l)} = \frac{1}{(k+l)!}\,\delta^{(k+l)},$$

denn für alle $\chi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}\left\langle \delta^{(k)} \circledast \delta^{(l)},\, \chi \right\rangle &= (-1)^{k+l} \partial_1^k \partial_2^l \Delta[\mathfrak{m}[\chi]](0,0) \\ &\underset{(3.7)}{=} (-1)^{k+l} \int_0^1 (1-t)^k\, t^l\, \mathfrak{m}[\chi]^{(k+l+1)}(0)\, dt \\ &= (-1)^{k+l} \cdot \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(l+1)}{\Gamma(k+l+2)} \cdot (k+l+1) \cdot \chi^{(k+l)}(0) \\ &= \frac{k!\, l!}{(k+l)!} \left\langle \delta^{(k+l)},\, \chi \right\rangle .\end{aligned}$$

□

3.2.2 Eigenschaften der modifizierten Stieltjes-Faltung

Für den Träger der modifizierten Stieltjes-Faltung $U \circledast V$ von $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gilt eine ähnliche Formel wie für den Träger der gewöhnlichen Stieltjes-Faltung von U und V (siehe Satz 3.6).

Satz 3.16. Sind $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, so ist $\operatorname{supp}(U \circledast V) \subset \operatorname{supp} U \cup \operatorname{supp} V$.

Auf einen Beweis wird verzichtet, da die Argumentation aus dem Beweis von Satz 3.6 weitgehend übernommen werden kann.

Folgerung 3.17. $\mathscr{E}'(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung.

Gezeigt wird nun, daß die $\circledast$-Faltung mit Distributionen, deren Träger kompakt ist, nicht aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ herausführt.

Proposition 3.18. Ist $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $V \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$, so ist $U \circledast V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$.

Beweis. Sei $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $V \in \mathscr{E}'(\mathbb{R})$. Es bezeichne 1 die konstante Funktion mit Wert 1. Da $1 \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, ist $\langle V,\, 1\rangle$ wohldefiniert. Ferner bezeichne ι die Identitätsabbildung auf $\mathbb{R}$. Dann ist $V \cdot \iota$ eine Distribution mit kompakten Träger, die insbesondere zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehört. Daher existiert die gewöhnliche Stieltjes-Faltung $U \odot (V \cdot \iota)$ und ist wieder in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$. Gezeigt wird nun, daß

$$U \circledast V = \langle V,\, 1\rangle\, U - U \odot (V \cdot \iota). \tag{3.21}$$

Für alle $\chi \in C_c^\infty \mathbb{R}$ gilt nämlich:

$$\begin{aligned}\langle U \circledast V,\, \varphi\rangle &= \langle U(u) \otimes V(v),\, \chi(u) + \iota(v)\, \Delta[\chi](u,v)\rangle \\ &= \langle U(u) \otimes V(v),\, \chi(u) \otimes 1(v)\rangle + \langle U(u) \otimes \big(V(v)\iota(v)\big),\, \Delta[\chi](u,v)\rangle \\ &= \langle U,\, \chi\rangle\, \langle V,\, 1\rangle - \langle U \odot (V \cdot \iota),\, \chi\rangle\, .\end{aligned}$$

Der Blick auf (3.21) zeigt, daß $U \circledast V$ die Linearkombination zweier Distributionen aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ ist und damit selbst zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehört. $\square$

Ein Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der Produktformel (3.19). Voraussetzung für die Gültigkeit dieser Gleichung ist aber, daß die Distribution $U \circledast V$ Stieltjes-transformierbar ist, wenn U und V in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ sind. Das nächste Lemma liefert hierfür eine hinreichende Bedingung.

Lemma 3.19. Ist $U \in \mathscr{B}'_1(\mathbb{R})$ und $\operatorname{supp} U \subset \mathbb{R}_+$, so ist U Stieltjes-transformierbar (im Sinne von Definition 2.1).

Beweis. Sei $s > 0$ und $\chi_s \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$ derart, daß (2.3) erfüllt ist. Zu zeigen ist, daß die Distribution $U \cdot \chi_s$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehört.

Aus der Stetigkeit von U bezüglich der Topologie von $\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ folgt die Existenz eines $C > 0$ und eines $m \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt:

$$|\langle U,\, \chi_s \cdot \varphi\rangle| \leq C \left(\sum_{k=0}^{m} \left\| (\chi_s \cdot \varphi)^{(k)} \right\|_\infty + \sum_{k=0}^{m} \left\| \mathfrak{m}[\chi_s \cdot \varphi]^{(k)} \right\|_\infty \right).$$

Mit der Leibnizregel für Ableitungen von Produkten folgt weiter, daß

$$|\langle U,\, \chi_s \cdot \varphi\rangle| \leq C \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\left\| \chi_s^{(k-j)} \right\|_\infty + \left\| \mathfrak{m}[\chi_s]^{(k-j)} \right\|_\infty \right) \cdot \left\| \varphi^{(j)} \right\|_\infty .$$

Diese Ungleichung bedeutet gerade, daß die Distribution $U \cdot \chi_s$ stetig bezüglich der Topologie von $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ ist, d.h. $U \cdot \chi_s \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$. $\square$

Satz 3.20. Für $U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ gilt: $\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[U] \cdot \mathfrak{S}[V]$.

Beweis. Nach Satz 3.16 ist $\operatorname{supp}(U \circledast V) \subset \mathbb{R}_+$, und nach Lemma 3.19 ist $U \circledast V$ als Element von $\mathscr{B}'_1(\mathbb{R})$ Stieltjes-transformierbar.

Sei also $s > 0$. Ferner sei $\psi_s \in \mathscr{B}_1(\mathbb{R})$ so gewählt, daß (2.4) gilt. Nach Satz 3.3 gehört $\mathfrak{q}[\psi_s] = \Delta[\mathfrak{m}[\psi_s]]$ zu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$. Da $\mathfrak{q}[\psi_s]$ auf einer offenen Obermenge des Trägers von $U \otimes V$ mit der Funktion $\psi_s \otimes \psi_s$ aus $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^2)$ übereinstimmt, folgt

$$\langle U \otimes V,\, \mathfrak{q}[\psi_s]\rangle = \langle U \otimes V,\, \psi_s \otimes \psi_s\rangle = \langle U,\, \psi_s\rangle \cdot \langle V,\, \psi_s\rangle\,,$$

also $\mathfrak{S}[U \circledast V](s) = \mathfrak{S}[U](s) \cdot \mathfrak{S}[V](s)$. $\square$

In algebraischer Hinsicht wird sich zeigen, daß die $\circledast$-Faltung im Vergleich mit der $\odot$-Faltung je einen Vor- bzw. Nachteil aufweist. Der Vorteil ist die

Existenz eines Einselementes, der Nachteil sind Einschränkungen beim Assoziativgesetz, da $\circledast$-Faltungsprodukte integrierbarer Distributionen im allgemeinen nicht zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehören.

Ähnlich wie für den Operator Δ wird eine "Iterierte" $\mathfrak{q}^2$ des Operators $\mathfrak{q}$ eingeführt. Definiere für jedes $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ die Abbildung $\mathfrak{q}^2[\chi] : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w) := \mathfrak{q}[\mathfrak{q}[\chi](\cdot,w)](u,v), \qquad (u,v,w) \in \mathbb{R}^3.$$

Die für den Beweis des Assoziativgesetzes benötigten Eigenschaften derartiger Funktionen $\mathfrak{q}^2[\chi]$ ($\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$) nennt das nächste Lemma.

Lemma 3.21. Für $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gehört die Funktion $\mathfrak{q}^2[\chi]$ zu $\mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$, und $\mathfrak{q}^2[\chi]$ ist symmetrisch in dem Sinne, daß der Funktionswert $\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w)$ unabhängig von der Reihenfolge der Argumente $u,v,w \in \mathbb{R}$ ist.

Beweis. Sei $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ und $\psi := \mathfrak{m}[\chi]$. Für alle $u,v,w \in \mathbb{R}$ läßt sich der Wert $\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w) = \Delta[\mathfrak{m}[\Delta[\psi](\cdot,w)]](u,v)$ durch zweimalige Anwendung von (3.7) darstellen als

$$\int_0^1\int_0^1 \psi'\big((1-\tau)(1-t)u + (1-\tau)tv + \tau w\big)\, d\tau\, dt \;+$$
$$+\int_0^1\int_0^1 \big((1-t)u+tv\big)\,(1-\tau)\,\psi''\big((1-\tau)(1-t)u+(1-\tau)tv+\tau w\big)\, d\tau\, dt.$$

Differentiation "unter dem Integral" liefert Darstellungen für die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{q}^2[\chi]$, aus denen ihre Stetigkeit folgt. Somit ist $\mathfrak{q}^2[\chi] \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Daß der Funktionswert $\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w)$ unabhängig von der Reihenfolge von $u,v,w \in \mathbb{R}$ ist, läßt sich für paarweise verschiedene Argumente aus der Darstellung

$$\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w) = \frac{u^2\,\chi(u)}{(u-v)(u-w)} + \frac{v^2\,\chi(v)}{(v-u)(v-w)} + \frac{w^2\,\chi(w)}{(w-u)(w-v)}, \tag{3.22}$$

entnehmen. Da $\mathfrak{q}^2[\chi]$ stetig ist, gilt diese Symmetrieeigenschaft sogar für alle $u,v,w \in \mathbb{R}$.

Zu zeigen bleibt, daß alle partiellen Ableitungen von $\mathfrak{q}^2[\chi]$ beschränkt sind. Angenommen, es existierten $k,l,m \in \mathbb{N}_0$ derart, daß die partielle Ableitung $\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\mathfrak{q}^2[\chi]$ nicht beschränkt ist. Dann gibt es eine Folge $(u_\nu,v_\nu,w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\lim_{\nu\to\infty} \|(u_\nu,v_\nu,w_\nu)\| = \infty \text{ und } \lim_{\nu\to\infty} \big|\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\mathfrak{q}^2[\chi](u_\nu,v_\nu,w_\nu)\big| = \infty. \tag{3.23}$$

Da der Träger von χ kompakt ist, folgt aus der Darstellung (3.22), daß eine der Koordinatenfolgen (u_ν), (v_ν) oder (w_ν) eine beschränkte Teilfolge enthält. O.B.d.A. sei dies die Folge (w_ν), und (w_ν) selbst sei beschränkt. Eine weitere Darstellung von $\mathfrak{q}^2[\chi]$ ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w) &= \mathfrak{q}[\mathfrak{q}[\chi](\cdot,v)](u,w)\\ &= \mathfrak{q}[\chi](u,v) + w\cdot\Delta[\mathfrak{q}[\chi](\cdot,v)](u,w)\\ &= \mathfrak{q}[\chi](u,v) + w\cdot\Delta^2[\mathfrak{m}[\chi]](u,v,w) \qquad \forall\,(u,v,w)\in\mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Funktion $\mathbb{R}^3 \ni (u,v,w) \mapsto \mathfrak{q}[\chi](u,v)$ in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$. Da mit χ auch $\mathfrak{m}[\chi]$ zu $C_c^\infty(\mathbb{R})$ gehört, ist nach Lemma 3.9 die Funktion $\Delta^2[\mathfrak{m}[\chi]]$ ebenfalls in $\mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$. Für die partielle Ableitung $\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\mathfrak{q}^2[\chi]$ gilt daher die Abschätzung

$$\begin{aligned}\left|\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\mathfrak{q}^2[\chi](u,v,w)\right| \le \left\|\partial_1^k\partial_2^l\mathfrak{q}[\chi]\right\|_\infty + |w|\cdot\left\|\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\Delta^2[\mathfrak{m}[\chi]]\right\|_\infty +&\\ + m\cdot\left\|\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^{m-1}\Delta^2[\mathfrak{m}[\chi]]\right\|_\infty .&\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung und der Beschränktheit der Folge (w_ν) ergibt sich, daß auch die Folge $\big(\partial_1^k\partial_2^l\partial_3^m\mathfrak{q}^2[\chi](u_\nu,v_\nu,w_\nu)\big)$ beschränkt ist, im Widerspruch zu (3.23). □

Satz 3.22. Die modifizierte Stieltjes-Faltung ist eine bilineare, kommutative Operation mit dem Dirac-Maß δ als Einselement. Sie ist im folgenden Sinne assoziativ: Sind $U,V,W \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ derart, daß $U \circledast V$ und $V \circledast W$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehören, so ist $(U \circledast V) \circledast W = U \circledast (V \circledast W)$.

Beweis. Die Bilinearität der $\circledast$-Faltung folgt aus der Bilinearität des Tensorproduktes. Die Kommutativität der Faltung ergibt sich aus der Tatsache, daß die Funktion $\mathfrak{q}[\chi]$ für jedes χ unabhängig von der Reihenfolge ihrer Argumente ist. Das Einselement der $\circledast$-Faltung ist δ, denn für alle $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und alle $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt:

$$\langle U \circledast \delta,\, \chi\rangle = \langle U(u),\, \mathfrak{q}[\chi](u,0)\rangle = \langle U,\, \chi\rangle\,.$$

Zum Beweis der Assoziativität reicht es zu zeigen, daß

$$\langle (U \circledast V) \circledast W,\, \chi\rangle = \big\langle U \otimes V \otimes W,\, \mathfrak{q}^2[\chi]\big\rangle = \langle U \circledast (V \circledast W),\, \chi\rangle \tag{3.24}$$

für alle Testfunktionen $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Der Beweis dieser Gleichung benutzt Lemma 3.21 und verläuft völlig analog zum Beweis des Assoziativgesetzes für die $\odot$-Faltung (vgl. Satz 3.10). □

Ein $\circledast$-Faltungsprodukt von drei Faktoren $U, V, W \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ läßt sich auch dann sinnvoll definieren, wenn $U \circledast V$ und $V \circledast W$ nicht zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehören. Setzt man $U \circledast V \circledast W : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\langle U \circledast V \circledast W,\, \chi\rangle := \big\langle U \otimes V \otimes W,\, \mathfrak{q}^2[\chi]\big\rangle\,, \qquad \chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$$

so ist $U \circledast V \circledast W$ eine Distribution. Existiert eines der "geklammerten" Faltungsprodukte $(U \circledast V) \circledast W$ bzw. $U \circledast (V \circledast W)$, so stimmt es mit $U \circledast V \circledast W$ überein [siehe (3.24)].

Was die Stetigkeit der $\circledast$-Faltung betrifft, reicht die folgende, relativ schwache Aussage für die Zwecke dieser Arbeit aus.

Proposition 3.23. Für $V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ ist die Abbildung

$$\begin{cases} (\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}), \sigma_1) & \to (\mathscr{D}'(\mathbb{R}), \sigma_2) \\ U & \mapsto U \circledast V \end{cases}$$

stetig, wenn $\sigma_1 := \sigma(\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}), \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}))$ und $\sigma_2 := \sigma(\mathscr{D}'(\mathbb{R}), \mathscr{D}(\mathbb{R}))$ gesetzt wird.

Beweis. Sei $\{U_i\,;\, i \in I\}$ ein Filter auf $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, der bezüglich σ_1 gegen $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ konvergiert, und sei $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Dann ist auch $\mathfrak{m}[\chi]$ in $\mathscr{D}(\mathbb{R})$, und nach Satz 3.3 gehört $\mathfrak{q}[\chi] = \Delta[\mathfrak{m}[\chi]]$ zu $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^2)$. Daher ist die Funktion $\langle V(v),\, \mathfrak{q}[\chi](\cdot, v)\rangle$ in $\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$. Man erhält

$$\begin{aligned} \lim\, \langle U_i \circledast V,\, \chi\rangle &= \lim\, \langle U_i(u),\, \langle V(v),\, \mathfrak{q}[\chi](u,v)\rangle\rangle \\ &= \langle U(u),\, \langle V(v),\, \mathfrak{q}[\chi](u,v)\rangle\rangle \\ &= \langle U \circledast V,\, \chi\rangle\,. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Filterbasis $\{U_i \circledast V\,;\, i \in I\}$ bezüglich σ_2 gegen $U \circledast V$. □

Im Spezialfall, daß $V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und (φ_n) eine Folge aus $C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist, die bezüglich $\sigma(\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}), \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}))$ gegen das Dirac-Maß δ konvergiert, liefert Proposition 3.23, daß die Folge $(V \circledast \varphi_n)$ gegen $V \circledast \delta = V$ konvergiert. Um eine derartige Folge (φ_n) zu erhalten, reicht es, ein $\varphi \in C_c^\infty(0, \infty)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\int_0^\infty \varphi(u)\,du = 1$ zu wählen und $\varphi_n(u) := n\,\varphi(nu)$ für $u \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ zu setzen.

Die Ableitung der Distribution $U \circledast V$ $(U, V \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}))$ läßt sich nach der Formel

$$D(U \circledast V) = DU \circledast V + (U \circledast DV) + U \odot V \tag{3.25}$$

berechnen, die aus der Gleichung $\mathfrak{q}[\chi'] = \partial_1\mathfrak{q}[\chi] + \partial_2\mathfrak{q}[\chi] - \Delta[\chi]$ ($\chi \in \mathscr{B}_1(\mathbb{R})$) folgt. Anders als die entsprechende Formel (3.12) für die Ableitung eines $\odot$-Faltungsproduktes weist die rechte Seite von (3.25) einen dritten Summanden auf. Auffallend ist, daß in (3.25) die $\odot$-Faltung zur Darstellung der Ableitung eines $\circledast$-Faltungsproduktes benötigt wird.

3.2.3 Faltungsprodukte regulärer Distributionen

Dieser Abschnitt gibt hinreichende Bedingungen an, unter denen die $\circledast$-Faltung zweier Funktionen aus $L^1(0,\infty)$ wieder eine $L^1(0,\infty)$-Funktion ist, analog zu den Aussagen des Abschnittes 3.1.3

Der folgende Satz ist das Gegenstück zum Satz 3.11 über die $\odot$-Faltung. Sein Beweis entspricht weitgehend dem Beweis von [17, Th. 1.1], wird hier aber dennoch wiedergegeben, da das Beweisprinzip später noch zur Anwendung kommen wird.

Satz 3.24. Genügen $f_1, f_2 \in L^1(0,\infty)$ der Bedingung

$$\int_0^\infty \int_0^1 |f_i(u)\, u\, K[f_j](t,u)|\, dt\, du < \infty \qquad \text{für } i,j = 1,2 \text{ und } i \neq j, \tag{3.26}$$

so gehört $f_1 \circledast f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wieder zu $L^1(0,\infty)$, und für fast alle $u > 0$ gilt:

$$(f_1 \circledast f_2)(u) = f_1(u)\, u \int_0^1 K[f_2](t,u)\, dt + f_2(u)\, u \int_0^1 K[f_1](t,u)\, dt. \tag{3.27}$$

Dabei sind die Funktionen $K[f_1]$ und $K[f_2]$ wieder durch (3.13) definiert.

Beweis. Die Funktion $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei f.ü. auf $(0,\infty)$ durch die rechte Seite der Gleichung (3.27) definiert. Wegen (3.26) ist $f \in L^1(0,\infty)$.

Es sei $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Gezeigt wird, daß

$$\langle f_1 \otimes f_2,\, \mathfrak{q}[\chi]\rangle = \int_0^1 \int_0^\infty \big(f_1(u)\, K[f_2](t,u) + f_2(u)\, K[f_1](t,u)\big)\, u\chi(u)\, du\, dt. \tag{3.28}$$

Die Funktion $(u,v) \mapsto f_1(u)\, f_2(v)\, \mathfrak{q}[\chi](u,v)$ ist nach dem Satz von Tonelli auf $(0,\infty)\times(0,\infty)$ integrierbar. Für das Integral

$$\langle f_1 \otimes f_2,\, \mathfrak{q}[\chi]\rangle = \int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f_1(u)\, f_2(v)\, \mathfrak{q}[\chi](u,v)\, d(u,v) \tag{3.29}$$

erhält man durch Zerlegung des Integrationsbereiches $(0,\infty)\times(0,\infty)$ in die Mengen $\{(tw,w)\,;\,0<t<1,\ w>0\}$ und $\{(w,tw)\,;\,0<t<1,\ w>0\}$ und anschließende Anwendung der Substitutionsregel und des Satzes von Fubini

$$\int_0^1\int_0^\infty \big(f_1(tw)f_2(w)+f_1(w)f_2(tw)\big)\,\frac{tw\,\chi(tw)-w\,\chi(w)}{t-1}\,dw\,dt. \tag{3.30}$$

Mit der gleichen Argumentation, angewandt auf $\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f_1(u)f_2(v)\,d(u,v)$, ergibt sich die Konvergenz des iterierten Integrales

$$\int_0^1\int_0^\infty \big(f_1(tw)f_2(w)+f_1(w)f_2(tw)\big)\,w\,dw\,dt.$$

Daher existiert für fast alle $t\in(0,1)$ auch das Integral

$$\int_0^\infty \big(f_1(tw)f_2(w)+f_1(w)f_2(tw)\big)\chi(tw)\,tw\,dw,$$

das sich durch Anwendung der Substitutionsregel in die Form

$$\int_0^\infty \big(f_1(u)f_2(t^{-1}u)+f_1(t^{-1}u)f_2(u)\big)\,u\,\chi(u)\,t^{-1}\,du \tag{3.31}$$

transformieren läßt. Einsetzen des Integrals (3.31) in (3.30) liefert, daß $\langle f_1\otimes f_2,\,\mathfrak{q}[\chi]\rangle$ tatsächlich durch (3.28) gegeben ist.

Aus der Voraussetzung (3.26) und der Beschränktheit von χ folgt die absolute Konvergenz der iterierten Integrale

$$\int_0^\infty\int_0^1 |f_i(u)\;u\,K[f_j](t,u)\,\chi(u)|\;dt\,du \qquad (i,j=1,2 \text{ und } i\neq j).$$

Daher ist auch das iterierte Integral (3.28) absolut konvergent, und nach dem Satz von Tonelli kann die Integrationsreihenfolge in (3.28) vertauscht werden. Dies ergibt die Gleichung $\langle f,\,\chi\rangle=\langle f_1\otimes f_2,\,\mathfrak{q}[\chi]\rangle=\langle f_1\circledast f_2,\,\chi\rangle$. □

Ein Vergleich der Voraussetzungen von Satz 3.24 mit denen von Satz 3.11 zeigt: (3.26) ergibt sich daraus, daß der Integrand auf der linken Seite von (3.17) mit dem Faktor u multipliziert wird. Dagegen benötigt der Beweis von Satz 3.24 keine Entsprechung für die Bedingung (3.18) in Satz 3.11.

Erfüllen die Funktionen f_1, f_2 die Voraussetzungen der beiden Sätze 3.11 und 3.24, so besteht zwischen den integrierbaren Funktionen $f_1\circledast f_2$ und $f_1\odot f_2$ der Zusammenhang

$$(f_1\circledast f_2)(u)=(-u)\cdot(f_1\odot f_2)(u) \qquad \text{f.ü. auf } \mathbb{R},$$

der sich auch aus der allgemeineren Beziehung (3.20) folgern läßt.

Aus dem einfachen Prinzip, daß das Produkt einer integrierbaren Funktion und einer beschränkten, meßbaren Funktion integrierbar ist, ergibt sich eine Folgerung aus Satz 3.24, von der noch häufig Gebrauch gemacht wird.

Folgerung 3.25. Sind $f_1, f_2 \in L^1(0,\infty)$ derart, daß

$$\sup_{u>0}\left\{u\int_0^1 |K[f_i](t,u)|\,dt\right\} < \infty \qquad \text{für } i = 1,2, \tag{3.32}$$

so ist $f_1 \circledast f_2$ die Funktion aus $L^1(0,\infty)$ mit der Darstellung (3.27).

Es stellt sich die Frage, welche elementaren Eigenschaften der Funktionen f_1 und f_2 hinreichend für die Gültigkeit von (3.32) sind. Derartige Kriterien sollen im Rest dieses Abschnittes erarbeitet werden.

Gesucht sind also Eigenschaften der Funktionen f_i, die Abschätzungen für das Integral auf der linken Seite von (3.32) liefern. Ist $f \in L^1(0,\infty)$, so gilt für das Teilintegral $\int_0^\eta dt$ die Ungleichung (vgl. auch [17, p. 182])

$$\sup_{u>0}\left\{u\int_0^\eta |K[f](t,u)|\,dt\right\} \le \frac{1+\eta}{1-\eta}\,\|f\|_{L^1}\,. \tag{3.33}$$

Um das Teilintegral $\int_\eta^1 dt$ in (3.32) zu majorisieren, wird der Integrand als Differenzenquotient der Funktion $t \mapsto t^{-1} f(t^{-1}u) - f(tu)$ aufgefaßt und mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung abgeschätzt. Daher werden in diesem Abschnitt nur noch differenzierbare Funktionen betrachtet.

Proposition 3.26. Sei $f \in C^1(0,\infty) \cap L^1(0,\infty)$ derart, daß

$$\sup_{u>0}|u\,f(u)| < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{u>0}\left|u^2\,f'(u)\right| < \infty.$$

Dann gilt:

$$\sup_{u>0}\left\{u\int_0^1 |K[f](t,u)|\,dt\right\} < \infty. \tag{3.34}$$

Beweis. Sei $M^{(k)} := \sup_{u>0}|u^{k+1}\,f^{(k)}(u)|$ für $k = 0,1$. Ferner sei $\eta \in (0,1)$ gewählt. Dann gilt für alle $u > 0$:

$$\begin{aligned}
&u\int_\eta^1 |K[f](t,u)|\,dt\\
\le&(1-\eta)\sup_{\eta<\tau<1}\left|\tau^{-2}u\,f(\tau^{-1}u) + \tau^{-3}u^2\,f'(\tau^{-1}u) + u^2\,f'(\tau u)\right|\\
\le&(1-\eta)\Big(\eta^{-1}\,M^{(0)} + \eta^{-1}\,M^{(1)} + \eta^{-2}M^{(1)}\Big).
\end{aligned}$$

Diese Abschätzung impliziert, in Verbindung mit der Ungleichung (3.33), die Gültigkeit von (3.34). □

Bekanntlich ist die Laplace'sche Faltung von beliebig vielen integrierbaren Funktionen wieder eine integrierbare Funktion. Satz 3.24 und Proposition 3.26 liefern hinreichende Bedingungen dafür, daß die $\circledast$-Faltung der beiden Funktionen $f_1, f_2 \in L^1(0,\infty)$ eine integrierbare Funktion ist. Im allgemeinen wird allerdings das Faltungsprodukt $f_1 \circledast f_2$ den Voraussetzungen von Proposition 3.26 nicht genügen.

Es sollen nun hinreichende Bedingungen dafür angegeben werden, daß das Faltungsprodukt $(\ldots(f_1 \circledast f_2) \circledast \ldots) \circledast f_n$ von n Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L^1(0,\infty)$ wohldefiniert ist und eine $L^1(0,\infty)$-Funktion ist. Die Proposition 3.26 wird dahingehend verallgemeinert, daß die Bedingungen an die erste und zweite Ableitung von f durch Bedingungen an alle Ableitungen ersetzt werden. Insbesondere müssen die zu faltenden Funktionen unendlich oft differenzierbar sein.

Definition 3.27. $\Lambda(0,\infty)$ sei die Menge aller Funktionen $f \in C^\infty(0,\infty)$, die der folgenden Bedingung genügen:

$$\int_0^\infty \left|u^k f^{(k)}(u)\right| du < \infty \quad \text{und} \quad \sup_{u>0} \left|u^{k+1} f^{(k)}(u)\right| < \infty \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Eine Funktion $f \in C^\infty(0,\infty)$ gehört genau dann zu $\Lambda(0,\infty)$, wenn sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Bedingungen $\int_0^\infty |u^k f^{(k)}(u)|\, du < \infty$ und

$$\lim_{u\to 0+} u^{k+1} f^{(k)}(u) = \lim_{u\to\infty} u^{k+1} f^{(k)}(u) = 0 \tag{3.35}$$

erfüllt. Daß die Bedingung (3.35) notwendig ist, zeigt man mit partieller Integration.

Es ist klar, daß der Raum $C_c^\infty(0,\infty)$ in $\Lambda(0,\infty)$ enthalten ist. Offensichtlich ist $\Lambda(0,\infty)$ ein linearer Teilraum von $L^1(0,\infty)$. Es soll nun gezeigt werden, daß $\Lambda(0,\infty)$ abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung ist.

Lemma 3.28. Ist $f \in \Lambda(0,\infty)$, so ist die Funktion $\int_0^1 K[f](t,\cdot)\, dt$ unendlich oft differenzierbar auf $(0,\infty)$. Ihre k-te Ableitung, $k \in \mathbb{N}_0$, ergibt sich aus $\partial_u^k \int_0^1 K[f](t,u)\, dt = \int_0^1 \partial_u^k K[f](t,u)\, dt$ und erfüllt

$$\sup_{u>0} \left\{ u^{k+1} \left| \partial_u^k \int_0^1 K[f](t,u)\, dt \right| \right\} < \infty. \tag{3.36}$$

Beweis. Zunächst sei zur Abkürzung $M^{(k)} := \sup_{u>0} \left|u^{k+1} f^{(k)}(u)\right|$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für die partielle Ableitung $\partial_u^k K[f]$ der Funktion $K[f]$ für $0 < t < 1$, $u > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\partial_u^k K[f](t,u) = \frac{t^{-k-1} f^{(k)}(t^{-1}u) - t^k f^{(k)}(tu)}{t-1}. \tag{3.37}$$

Seien nun $k \in \mathbb{N}_0$ und $\eta \in (0,1)$ gewählt. Gezeigt wird, daß

$$\partial_u \int_a^b \partial_u^k K[f](t,u)\, dt = \int_a^b \partial_u^{k+1} K[f](t,u)\, dt \qquad \forall\, u > 0 \tag{3.38}$$

in den beiden Fällen $a = 0$, $b = \eta$ und $a = \eta$, $b = 1$.

Sei also $a = 0$ und $b = \eta$ in (3.38). Es ist zweckmäßig, den Integranden auf der linken Seite als Summe

$$\partial_u^k K[f](t,u) = \frac{t^{-k-1} f^{(k)}(t^{-1}u) - t^{k+1} f^{(k)}(tu)}{t-1} + t^k f^{(k)}(tu) \tag{3.39}$$

darzustellen und beide Summanden getrennt zu untersuchen.

Sei $\varepsilon > 0$. Um für $u \in (\varepsilon, \infty)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} &\partial_u \int_0^\eta \frac{t^{-k-1} f^{(k)}(t^{-1}u) - t^{k+1} f^{(k)}(tu)}{t-1}\, dt \\ &= \int_0^\eta \frac{t^{-k-2} f^{(k+1)}(t^{-1}u) - t^{k+2} f^{(k+1)}(tu)}{t-1}\, dt \end{aligned} \tag{3.40}$$

zu erhalten, benutzt man den Satz von der majorisierten Konvergenz. Der betreffende Differenzenquotient ist für alle $t \in (0,\eta)$ gleichmäßig beschränkt durch $2\, M^{(k+1)}(1-\eta)^{-1}\varepsilon^{-k-2}$. Dies zeigen der Mittelwertsatz und die Ungleichung

$$\frac{\left|t^{-m-1} f^{(m)}(t^{-1}u) - t^{m+1} f^{(m)}(tu)\right|}{1-t} \leq \frac{2\, M^{(m)}}{(1-\eta)\, u^{-m-1}} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}_0, \tag{3.41}$$

in der man $m := k+1$ setzt.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt (3.40) sogar für alle $u \in (0, \infty)$.

Das Integral $\int_0^\eta t^k f^{(k)}(tu)\, dt = u^{-k-1} \int_0^{\eta u} v^k f^{(k)}(v)\, dv$ des zweiten Summanden in (3.39) ist ebenfalls eine differenzierbare Funktion der Variablen u. Für die Ableitung an der Stelle $u > 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_u \int_0^\eta t^k f^{(k)}(tu)\, dt =& u^{-k-2}\Big((\eta u)^{k+1} f^{(k)}(\eta u) - \int_0^{\eta u} (k+1)\, v^k f^{(k)}(v)\, dv\Big) \\ =& \int_0^\eta t^{k+1} f^{(k+1)}(tu)\, dt, \end{aligned}$$

wobei partielle Integration und die Beziehung $\lim_{u\to 0+} v^{k+1} f^{(k)}(v) = 0$ benutzt wurden. Kombiniert man diese Gleichung mit (3.40) und (3.39), so erhält man die Gleichung (3.38) im Fall $a = 0$, $b = \eta$.

Aus (3.39) und aus (3.41) für $m := k$ folgt außerdem die Abschätzung

$$\sup_{u>0}\left\{u^{k+1}\int_0^\eta \left|\partial_u^k K[f](t,u)\right|\,dt\right\} \le \frac{2\,\eta\,M^{(k)}}{(1-\eta)} + \int_0^\infty \left|v^k\, f^{(k)}(v)\right|\,dv. \tag{3.42}$$

Der Beweis von (3.38) im Fall $a = \eta$, $b = 1$ ist dem Beweis der Gleichung (3.40) ähnlich. Man wählt ein positives ε und zeigt die Differenzierbarkeitsaussage zunächst nur für $u > \varepsilon$. Der zu untersuchende Differenzenquotient ist für $t \in (\eta, 1)$ gleichmäßig beschränkt durch $\sup\{|\partial_u^{k+1} K[f](t,u)|\,;\ \eta < t < 1,\ u > \varepsilon\}$, wie der Mittelwertsatz zeigt. Das Supremum ist endlich, denn für $m \in \mathbb{N}_0$, $t \in (\eta, 1)$ und $u \in (\varepsilon, \infty)$ gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\partial_u^m K[f](t,u)| &\le \sup_{\eta<\tau<1} \left|\partial_\tau\big(\tau^{-m-1}\, f^{(m)}(\tau^{-1}u) - \tau^m\, f^{(m)}(\tau u)\big)\right| \\ &\le u^{-m-1}\left(\frac{(m+1)\eta + m}{\eta^2} M^{(m)} + \frac{\eta+1}{\eta^2} M^{(m+1)}\right), \end{aligned} \tag{3.43}$$

in der $m := k + 1$ zu setzen ist. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt (3.38) für alle $u > 0$.

Aus (3.43) folgt im Fall $m := k$ weiter, daß

$$\sup_{u>0}\left\{u^{k+1}\int_\eta^1 \left|\partial_u^k K[f](t,u)\right|\,dt\right\} < \infty. \tag{3.44}$$

Aus den Ungleichungen (3.44) und (3.42) ergibt sich schließlich auch (3.36). □

Satz 3.29. $\Lambda(0,\infty)$ ist abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung.

Beweis. Seien $f_1, f_2 \in \Lambda(0,\infty)$. Nach Proposition 3.26 erfüllen f_1 und f_2 die Voraussetzungen der Folgerung 3.25, und daher ist $f_1 \circledast f_2$ die Funktion mit der Darstellung (3.27). Mit Lemma 3.28 folgt, daß $f_1 \circledast f_2$ unendlich oft differenzierbar auf $(0,\infty)$ ist. Die m-te Ableitung ($m \in \mathbb{N}_0$) läßt sich mit Hilfe der Leibnizregel als Summe darstellen, deren Summanden von der Form

$$\binom{m}{k}\, u\, f_i^{(m-k)}(u)\, \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\,dt \qquad (k = 0, \dots, m) \tag{3.45}$$

beziehungsweise

$$\binom{m-1}{k}\, m\, f_i^{(m-1-k)}(u)\, \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\,dt \qquad (k = 0, \dots, m-1) \tag{3.46}$$

sind, wobei $i, j = 1, 2$ und $i \neq j$. Für den k-ten Summanden in (3.45) gilt nach Lemma 3.28, daß

$$\sup_{u>0} \left| u^{m+1}\, u\, f_i^{(m-k)}(u)\, \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\, dt \right| \leq$$
$$\leq \sup_{u>0} \left| u^{m-k+1} f_i^{(m-k)}(u) \right| \cdot \sup_{u>0} \left| u^{k+1} \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\, dt \right| < \infty$$

und

$$\int_0^\infty \left| u^m\, u\, f_i^{(m-k)}(u)\, \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\, dt \right| du \leq$$
$$\leq \int_0^\infty \left| u^{m-k} f_i^{(m-k)}(u) \right| du \cdot \sup_{u>0} \left| u^{k+1} \partial_u^k \int_0^1 K[f_j](t,u)\, dt \right| < \infty.$$

Die Summanden in (3.46) lassen sich entsprechend abschätzen. Somit ist $f_1 \circledast f_2$ in $\Lambda(0,\infty)$. $\square$

Folgerung 3.30. $C_c^\infty(0,\infty)$ ist abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung.

Beweis. Seien $\varphi_1, \varphi_2 \in C_c^\infty(0,\infty)$. Dann gehören φ_1 und φ_2 zu $\Lambda(0,\infty)$, und nach Satz 3.29 gilt dies auch für $\varphi_1 \circledast \varphi_2$. Somit ist $\varphi_1 \circledast \varphi_2$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion. Daß der Träger von $\varphi_1 \circledast \varphi_2$ kompakt ist, ergibt sich aus Folgerung 3.17 oder aus der Darstellung (3.27). $\square$

3.2.4 Die Faltungsalgebra $\mathscr{A}$

In diesem Abschnitt wird eine Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ betrachtet, die eine $\circledast$-Faltungsalgebra ist und damit als Analogon zur $*$-Faltungsalgebra $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ angesehen werden kann.

Um die Definition dieser Menge zu motivieren, sei daran erinnert, daß jede integrierbare Distribution $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ eine endliche Summe von Ableitungen integrierbarer Funktionen ist. Dabei läßt sich die Distributionenableitung $D^k f$ der Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ auch als Laplace'sche Faltung von f mit der k-ten Ableitung des Dirac-Maßes $\delta^{(k)}$ ausdrücken:

$$D^k f = \delta^{(k)} * f, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \tag{3.47}$$

Es ist naheliegend, die Laplace'sche Faltung $*$ in (3.47) durch die modifizierte Stieltjes-Faltung $\circledast$ zu ersetzen und die entstehenden Faltungsprodukte zu untersuchen.

Lemma 3.31. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\delta^{(k)} \circledast f$ in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$.

Beweis. Ist $k = 0$, so gehört $\delta^{(k)} \circledast f = f$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$. Sei also $k \geq 1$ und sei $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Die partielle Ableitung $\partial_1^k \mathfrak{q}[\chi](0,v)$ berechnet man für $v \neq 0$ mit der Leibnizregel:

$$\begin{aligned}
\partial_1^k \mathfrak{q}[\chi](0,v) &= \partial_u^k \left(\chi(v) + u\, \frac{\chi(u) - \chi(v)}{u - v} \right) \Bigg|_{u=0} \\
&= k \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-1)!\, \chi^{(j)}(0)}{j!\, (-1)\, v^{k-j}} + \frac{k!\, (\chi(0) - \chi(v))}{(-1)\, v^k} \\
&= \frac{k!}{v^k} \left(\chi(v) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\chi^{(j)}(0)}{j!}\, v^j \right),
\end{aligned} \tag{3.48}$$

wobei der Ausdruck in den Klammern das Restglied zum Taylorpolynom von χ der Ordnung $k-1$ mit Entwicklungspunkt 0 ist. Daher existiert zu jedem $v \neq 0$ ein ξ_v derart, daß $\partial_1^k \mathfrak{q}[\chi](0,v) = \chi^{(k)}(\xi_v)$. Hieraus folgt

$$\left| \left\langle \delta^{(k)} \otimes f,\, \mathfrak{q}[\chi] \right\rangle \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| f(v)\, \partial_1^k \mathfrak{q}[\chi](0,v) \right| \, dv \leq \|f\|_{L^1} \, \left\| \chi^{(k)} \right\|_\infty ,$$

wobei $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ beliebig war. Also gehört $\delta^{(k)} \circledast f$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$. □

Jede endliche Summe von Faltungsprodukten $\delta^{(k)} \circledast f_k$, $f_k \in L^1(\mathbb{R})$, ist nach Lemma 3.31 eine Distribution aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$. Damit die Gesamtheit aller derartigen Summen eine $\circledast$-Faltungsalgebra bildet, werden ausschließlich Funktionen f_k aus dem Raum $\Lambda(0,\infty)$ zugelassen, der abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung ist (siehe Abschnitt 3.2.3).

Definition 3.32. Es bezeichne $\mathscr{A}$ die folgende Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$:

$$\Big\{ U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)\, ;\, \exists\, m \in \mathbb{N}\; \exists\, f_0, f_1, \dots f_m \in \Lambda(0,\infty) : \, U = \sum_{k=0}^{m} \delta^{(k)} \circledast f_k \Big\}.$$

Der nächste Satz erbringt den Nachweis, daß $\mathscr{A}$ die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Satz 3.33. $\mathscr{A}$ ist eine $\circledast$-Faltungsalgebra, die in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ enthalten ist.

Beweis. Die Inklusion $\mathscr{A} \subset \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ ist klar. Daß $\mathscr{A}$ ein Vektorraum ist ergibt sich daraus, daß $\Lambda(0,\infty)$ dieselbe Eigenschaft besitzt.

Es wird nun gezeigt, daß $\mathscr{A}$ abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung ist. Hierfür reicht es nachzuweisen, daß für $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $f, g \in \Lambda(0,\infty)$ gilt:

$$(\delta^{(k)} \circledast f) \circledast (\delta^{(l)} \circledast g) \in \mathscr{A}. \tag{3.49}$$

Seien also $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $f, g \in \Lambda(0,\infty)$. Nach Beispiel 3.15 ist $\delta^{(k)} \circledast \delta^{(l)} = k!\,l!\,(k+l)!^{-1}\,\delta^{(k+l)}$, und nach Satz 3.29 gehört $f \circledast g$ zu $\Lambda(0,\infty)$. Die Aussage (3.49) folgt dann aus der Gleichung

$$(\delta^{(k)} \circledast f) \circledast (\delta^{(l)} \circledast g) = \big((\delta^{(k)} \circledast f) \circledast \delta^{(l)}\big) \circledast g = \frac{k!\,l!}{(k+l)!}\delta^{(k+l)} \circledast (f \circledast g).$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Anwendung des Assoziativgesetzes (Satz 3.22) zulässig ist, weil nach Lemma 3.31 alle geklammerten Faltungsprodukte zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehören. $\square$

Beispiel 3.34. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gehört die k-te Ableitung $\delta^{(k)}$ des Dirac-Maßes δ zu $\mathscr{A}$.

Gezeigt wird zunächst, daß im Fall $k = 0$ für geeignete Testfunktionen $\psi_0, \psi_1 \in C_c^\infty(0,\infty)$ gilt:

$$\delta = \psi_0 + \delta' \circledast \psi_1. \tag{3.50}$$

Hierfür wähle man ein $\psi \in C_c^\infty(0,\infty)$ derart, daß $\psi \geq 0$ und $\int_0^\infty \psi(u)\,du = 1$. Dann sind $\psi_0 := \psi$ und $\psi_1 := \mathfrak{m}[\psi]$ in $C_c^\infty(0,\infty)$. Für alle $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ gilt:

$$\begin{aligned}\langle \psi_0 + \delta' \circledast \psi_1,\, \chi\rangle &= \int_0^\infty \psi(u)\,\chi(u)\,du + \int_0^\infty u\,\psi(u)\,\frac{\chi(0)-\chi(u)}{u}\,du \\ &= \int_0^\infty \psi(u)\,du \cdot \chi(0) = \langle \delta,\, \chi\rangle\,,\end{aligned}$$

und dies ist gerade die Aussage von (3.50). Ist nun $k \geq 1$, so folgt aus (3.50) und Beispiel 3.15, daß $\delta^{(k)} = \delta^{(k)} \circledast \delta = \delta^{(k)} \circledast \psi_0 + \delta^{(k+1)} \circledast (k+1)^{-1}\psi_1$. $\square$

Jede Distribution $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ kann mit Hilfe der Laplace'schen Faltung regularisiert werden: für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ist das Faltungsprodukt $U * \varphi$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion und damit eine reguläre Distribution. Ist speziell U aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, so ist die Funktion $U * \varphi$ integrierbar.

Für die modifizierte Stieltjes-Faltung gilt nach Proposition 3.18 die relativ schwache Aussage, daß $U \circledast \varphi \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$, falls $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Eine stärkere Aussage wird nun für Distributionen aus der kleineren Menge $\mathscr{A}$ gezeigt: das $\circledast$-Faltungsprodukt jeder Distribution aus $\mathscr{A}$ mit genügend vielen Testfunktionen ist eine Funktion aus $\Lambda(0,\infty)$. Dabei ist wesentlich, daß die Träger der Testfunktionen im offenen Intervall $(0,\infty)$ enthalten sind.

Satz 3.35. Zu jedem $U \in \mathscr{A}$ existiert eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq m$ und alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(0,\infty)$ gilt:

$$U \circledast \varphi_1 \circledast \ldots \circledast \varphi_n \in \Lambda(0,\infty).$$

Beweis. Es genügt, die Aussage des Satzes für $U = \delta^{(k)} \circledast f$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $f \in \Lambda(0,\infty)$ zu beweisen. Da $\Lambda(0,\infty)$ abgeschlossen bezüglich der $\circledast$-Faltung ist, reicht es zu zeigen, daß für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > k$ gilt:

$$\delta^{(k)} \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_n \in \Lambda(0,\infty) \qquad \forall\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(0,\infty). \tag{3.51}$$

Für $k = 0$ ist diese Aussage richtig, weil δ das neutrale Element der $\circledast$-Faltung ist und weil $C_c^\infty(0,\infty)$ eine Teilmenge von $\Lambda(0,\infty)$ ist.

Sei nun $k \geq 1$. Für alle $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt wegen (3.48), daß

$$\begin{aligned}\left\langle \delta^{(k)} \circledast \varphi,\, \chi \right\rangle = (-1)^k\, k! \int_0^\infty v^{-k}\, \varphi(v)\, \chi(v)\, dv \; + \\ + (-1)^{k+1}\, k! \sum_{j=0}^{k-1} \int_0^\infty v^{j-k}\, \varphi(v)\, dv \cdot \frac{\chi^{(j)}(0)}{j!}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Setzt man $C_j := (-1)^{k-j+1}\, k!/j! \int_0^\infty v^{j-k}\, \varphi(v)\, dv$ für $j = 0, \ldots, k-1$ und $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(v) := (-1)^k\, k!\, v^{-k}\, \varphi(v)$, so läßt sich die Gleichung (3.52) auch in der Form

$$\delta^{(k)} \circledast \varphi = \psi + \sum_{j=0}^{k-1} C_j\, \delta^{(j)} \tag{3.53}$$

schreiben. Dabei ist $\psi \in C_c^\infty(0,\infty)$, und die reellen Zahlen C_j sind für $j = 0, \ldots, k-1$ wohldefiniert, weil die Testfunktion φ in einer Umgebung der Null verschwindet.

Durch Induktion erhält man aus (3.53), daß (3.51) für alle $k \in \mathbb{N}$ und für $n = k+1$ gilt. Ist dann $n > k+1$ und sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_c^\infty(0,\infty)$, so ist

$$\delta^{(k)} \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_n = \left(\delta^{(k)} \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_{k+1}\right) \circledast \left(\varphi_{k+2} \circledast \cdots \circledast \varphi_n\right)$$

das Faltungsprodukt zweier Funktionen aus $\Lambda(0,\infty)$ und daher in $\Lambda(0,\infty)$. $\square$

3.2.5 Eindeutigkeitssaussagen für die modifizierte Stieltjes-Transformation

Die Stieltjes-Transformation soll zur Herleitung von Faltungsgleichungen verwendet werden, d.h. aus einer Gleichung der Form $\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[W]$ soll die Identität $U \circledast V = W$ gefolgert werden können. Dieser Schluß ist aber nur zulässig, wenn die beteiligten Distributionen durch ihre Stieltjes-Transformierte eindeutig bestimmt sind. In diesem Abschnitt werden die erforderlichen Eindeutigkeitsaussagen über die Stieltjes-Transformation bereitgestellt. Dabei wird folgendes Prinzip angewendet: die Distributionen werden durch $\circledast$-Faltung mit Testfunktionen regularisiert, um dann die Eindeutigkeit der Stieltjes-Transformation von Funktionen zu benutzen.

Es sei noch bemerkt, daß Faltungsprodukte der Form $U \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_k$ mit $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ und $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ unabhängig von der Reihenfolge der Klammersetzung sind: Das Assoziativgesetz (Satz 3.22) läßt sich anwenden, da alle geklammerten Faltungsprodukte wegen Proposition 3.18 zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehören. Daher wird - wie auch sonst üblich - auf Klammersetzung verzichtet.

Satz 3.36. Seien $U_1, U_2 \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ derart, daß ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$U_i \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m \in L^1(0, \infty)$$

für alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c^\infty(0, \infty)$ und $i = 1, 2$. Stimmen die Stieltjes-Transformierten von U_1 und U_2 überein, so ist $U_1 = U_2$.

Beweis. Für $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c^\infty(0, \infty)$ sind $U_1 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m$ und $U_2 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m$ Funktionen aus $L^1(0, \infty)$ mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}[U_1 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m] &= \mathfrak{S}[U_1] \cdot \mathfrak{S}[\varphi_1] \cdot \ldots \cdot \mathfrak{S}[\varphi_m] \\ &= \mathfrak{S}[U_2] \cdot \mathfrak{S}[\varphi_1] \cdot \ldots \cdot \mathfrak{S}[\varphi_m] \\ &= \mathfrak{S}[U_2 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m]. \end{aligned}$$

Da integrierbare Funktionen durch ihre Stieltjes-Transformierte eindeutig bestimmt sind, gilt für alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in C_c^\infty(0, \infty)$, daß

$$U_1 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m = U_2 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_m.$$

Wählt man eine Folge $(\varphi_{m,\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus $C_c^\infty(0, \infty)$, die bezüglich $\sigma(\mathscr{D}'_{L^1}, \dot{\mathscr{B}})$ gegen das Dirac-Maß δ konvergiert, so folgt mit Proposition 3.23 die Gleichung

$$U_1 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_{m-1} = U_2 \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_{m-1}$$

für alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1} \in C_c^\infty(0, \infty)$. Werden nacheinander die Grenzübergänge $\varphi_{m-1} \to \delta, \ldots, \varphi_1 \to \delta$ vollzogen, so liefert wiederholte Anwendung von Proposition 3.23 die gewünschte Identität $U_1 = U_2$. $\square$

Folgerung 3.37. Sind $U, V, W \in \mathscr{A}$ derart, daß $\mathfrak{S}[U \circledast V] = \mathfrak{S}[W]$, so ist $U \circledast V = W$.

Kapitel 4

Gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird ein Funktionalkalkül für die modifizierten Stieltjes-Transformierten der Distributionen aus einer Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, die die Faltungsalgebra $\mathscr{A}$ enthält, entwickelt. Als Vorbild dient der Kalkül von L. Schwartz [39], der auf der Laplace-Transformation und der Laplace'schen Faltung von Distributionen beruht. Die im Abschnitt 3.2 festgestellten Unterschiede zwischen der Laplace'schen und der Stieltjes-Faltung machen jedoch eine andere Vorgehensweise als bei L. Schwartz erforderlich.

Der Funktionalkalkül wird im zweiten Abschnitt dieses Kapitels dazu verwendet, gebrochene Potenzen abgeschlossener linearer Operatoren zu konstruieren. Hierbei wird ausgenutzt, daß sich für jedes $\alpha \geq 0$ die Potenzfunktion $(0, \infty) \ni s \mapsto s^\alpha$ als modifizierte Stieltjes-Transformierte einer Distribution aus $\mathscr{A}$ darstellen läßt. Die Potenzgesetze $\big((-A)^\alpha\big)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$ und $(-A)^\alpha\,(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}$ werden durch Anwendung des Kalküls bewiesen. Gezeigt wird, daß die Definition der gebrochenen Potenzen zu früheren Konstruktionen äquivalent ist. Engere Beziehungen werden insbesondere zur Definition der gebrochenen Potenzen von H.W. Hövel-U. Westphal [17] hergestellt.

4.1 Ein Funktionalkalkül für Stieltjes-Transformierte integrierbarer Distributionen

Es bezeichne $\mathscr{K}$ die Klasse aller abgeschlossenen linearen Operatoren A, die auf einem Teilraum $D(A)$ eines Banachraumes X definiert sind, in X abbilden und deren Resolvente $R(\lambda; A) := (\lambda I - A)^{-1}$ als stetiger linearer Operator auf X für alle positiven λ existiert. Ferner möge eine (von A abhängige) Konstante $M > 0$ existieren, so daß

$$\|\lambda\, R(\lambda; A)\| \leq M \qquad \forall\, \lambda > 0. \tag{4.1}$$

Betrachtet werden hier ausschließlich solche Operatoren aus $\mathscr{K}$, deren Definitionsbereich in X dicht liegt. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Familie von Operatoren $\{\lambda R(\lambda; A)\,;\, \lambda > 0\}$ folgt mit dem Satz von Banach-Steinhaus die Grenzwertaussage

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda; A)x = x \qquad \forall\, x \in X. \tag{4.2}$$

Die einfachsten Beispiele von Operatoren aus $\mathscr{K}$ sind für jedes $s > 0$ die Abbildungen $A_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$A_s\, x := -sx, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Die Klasse aller dicht definierten Operatoren aus $\mathscr{K}$ ist eine echte Erweiterung der Klasse aller infinitesimalen Erzeuger gleichmäßig beschränkter Halbgruppen [13]. Ein Funktionalkalkül für infinitesimale Erzeuger wurde in [48] wie folgt eingeführt: Es sei $\{T(t)\,;\, t \in \mathbb{R}_+\}$ eine gleichmäßig beschränkte Halbgruppe der Klasse (C_0) von stetigen linearen Operatoren eines Banachraumes X in sich. Ferner sei $U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Wie schon in Kapitel 1 beschrieben wurde, ist die Laplace'sche Faltung $U * \varphi$ von U mit jeder Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ eine Funktion aus $L^1(0, \infty)$. Daher läßt sich der lineare Operator $G(U) : D\big(G(U)\big) \to X$ durch den Limes

$$G(U)x := \lim_{\varphi} \int_0^\infty (U * \varphi)(t)\, T(t)x\, dt, \qquad x \in D\big(G(U)\big) \tag{4.4}$$

definieren, wobei φ einen bestimmten Filter auf $C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ durchläuft. Der Definitionsbereich $D\big(G(U)\big)$ besteht gerade aus allen $x \in X$, für die der Grenzwert in (4.4) existiert.

Die Definition (4.4) soll nun auf Operatoren der Klasse $\mathscr{K}$ übertragen werden. Dafür sei im folgenden $A : D(A) \to X$ aus $\mathscr{K}$ fest, und $D(A)$ sei dicht in X. Für die Resolvente von A wird meist nur abkürzend $R(\lambda)$ statt $R(\lambda; A)$ geschrieben.

Da der Operator A im allgemeinen kein Halbgruppenerzeuger ist, muß an die Stelle der Halbgruppe $\{T(t)\,;\, t \in \mathbb{R}_+\}$ in der Gleichung (4.4) eine andere operatorwertige Funktion treten. Dabei wird natürlich von der Resolventenfunktion $(0, \infty) \ni \lambda \mapsto R(\lambda; A)$ Gebrauch gemacht. Diese Funktion kann als eine Verallgemeinerung des Kernes der gewöhnlichen Stieltjes-Transformation angesehen werden, weil im Spezialfall der Abbildung A_s aus (4.3) gerade $R(\lambda; A_s) = (\lambda + s)^{-1}$ für $\lambda, s > 0$ ist. Daher ist auch plausibel, daß der Kalkül eine Funktionenalgebra von Stieltjes-Transformierten verwenden wird.

Der Funktionalkalkül soll den Stieltjes-Transformierten der Distributionen aus einer Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ jeweils einen abgeschlossenen, dicht definierten, linearen Operator auf X zuordnen. Dabei soll das Produkt zweier Stieltjes-Transformierten auf die Verkettung der zugehörigen Operatoren abgebildet werden. Da das Produkt der Stieltjes-Transformierten zweier Distributionen die Transformierte ihrer Faltung ist, liefert der Kalkül eine Übersetzung von Faltungsgleichungen in Operatorgleichungen. Dies entspricht der Tatsache, daß der Kalkül von L. Schwartz die Laplace'sche Faltung von Distributionen in die Verkettung der zugehörigen Operatoren übersetzt.

Da in dieser Arbeit zwei Varianten der Stieltjes-Transformation bzw. -Faltung eingeführt wurden, ist zu klären, welche davon verwendet werden soll. Ein zentrales Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion der gebrochenen Potenzen $(-A)^\alpha$ von $-A$ für $\alpha > 0$. Diese umfassen auch die ganzzahligen Potenzen $(-A)^k$ $(k \in \mathbb{N})$. Im Spezialfall des in (4.3) definierten Operators A_s kann $-A_s$ mit der positiven, reellen Zahl s identifiziert werden, und daher entspricht $(-A_s)^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ der reellen Zahl s^k. Wie in Kapitel 2 ausgeführt wurde, kann die Potenzfunktion $(0,\infty) \ni s \mapsto s^k$ zwar als modifizierte Stieltjes-Transformierte, aber nicht als gewöhnliche Stieltjes-Transformierte einer Distribution aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ dargestellt werden. Daher fällt die Wahl zwangsläufig auf die modifizierte Stieltjes-Transformation $\mathfrak{S}$.

Als Verallgemeinerung des Kerns der $\mathfrak{S}$-Transformation, also der skalaren Funktion $(0,\infty) \ni u \mapsto (1+su)^{-1}$, wird man die operatorwertige Funktion

$$(0,\infty) \ni u \mapsto (I - uA)^{-1} = u^{-1}R(u^{-1})$$

ansehen. Die Zahl $s > 0$ entspricht dem Operator $-A$, und daher wird für gewisse Distributionen U aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ formal

$$\mathfrak{S}[U](-A) := \langle U(u),\, u^{-1}R(u^{-1})\rangle \tag{4.5}$$

gesetzt. Daß die Stieltjes-Transformierte von U gewissermaßen an der Stelle $-A$ ausgewertet wird (und nicht an der Stelle A), ist auch dadurch motiviert, daß wesentliche Informationen über einen linearen Operator in seinem Spektrum enthalten sind. Der "Integrationsbereich" auf der rechten Seite von (4.5) ist die Menge $\mathbb{R}_+$, und diese enthält den reellen Teil des Spektrums von $-A$.

Die formale Gleichung (4.5) liefert eine exakte Definition im Fall, daß U eine integrierbare Funktion ist. In einer zweiten Stufe wird der Kalkül auf eine Menge integrierbarer Distributionen, die noch spezifiziert werden muß, ausgedehnt. Um die relativ komplizierte Bezeichnung $\mathfrak{S}[U](-A)$ zu vermeiden, wird stattdessen die Bezeichnung $\mathfrak{R}(U)$ benutzt.

Definition 4.1. Sei $f \in L^1(0,\infty)$ derart, daß

$$\int_0^\infty \int_0^1 |\varphi(u)\, u\, K[f](t,u)|\, dt\, du < \infty \qquad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(0,\infty). \tag{4.6}$$

Dann ist der Operator $\mathfrak{R}(f) : X \to X$ definiert durch

$$\mathfrak{R}(f)x := \int_0^\infty f(u)\, u^{-1} R(u^{-1}) x \, du, \qquad x \in X. \tag{4.7}$$

Die Wohldefiniertheit des Operators $\mathfrak{R}(f)$ ergibt sich daraus, daß für jedes $x \in X$ die Funktion $(0, \infty) \ni x \mapsto u^{-1} R(u^{-1}) x$ stetig und wegen (4.1) auch beschränkt ist. Daher konvergiert das Integral in (4.7) absolut:

$$\int_0^\infty |f(u)| \, \|u^{-1} R(u^{-1}) x\| \, du \leq M \int_0^\infty |f(u)| \, du \, \|x\| \, .$$

Aus dieser Ungleichung folgt weiter, daß der lineare Operator $\mathfrak{R}(f)$ beschränkt ist mit

$$\|\mathfrak{R}(f)\| \leq M \, \|f\|_{L^1} \, . \tag{4.8}$$

Die Bedingung (4.6) in der Definition 4.1 ist im Hinblick auf die beabsichtigte Erweiterung des Kalküls erforderlich. (4.6) gewährleistet, daß durch die Gleichung (4.7) derselbe Operator definiert wird wie im Fall, daß die integrierbare Funktion f als Element von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ aufgefaßt wird. Die Bedingung (4.6) ist sicher erfüllt, falls

$$\sup_{u>0} \Big\{ u \int_0^1 |K[f](t,u)| \, dt \Big\} < \infty. \tag{4.9}$$

Offensichtlich ist die Zuordnung $f \mapsto \mathfrak{R}(f)$ linear. Gezeigt wird nun, daß der $\circledast$-Faltung zweier $L^1(0,\infty)$-Funktionen die Verkettung der zugehörigen Operatoren zugeordnet wird, wenn die beteiligten Funktionen die Voraussetzungen der Folgerung 3.25 oder des Faltungssatzes 3.24 erfüllen. Das nächste Lemma ist so formuliert, daß die beteiligten Funktionen aus $L^1(0,\infty)$ die einschränkende Bedingung (4.6) nicht erfüllen müssen.

Lemma 4.2. Genügen $f_1, f_2 \in L^1(0,\infty)$ der Bedingung

$$\sup_{u>0} \left\{ u \int_0^1 |K[f_j](t,u)| \, dt \right\} < \infty \qquad \text{für } j = 1,2$$

oder der schwächeren Bedingung

$$\int_0^\infty \int_0^1 |f_i(u) \, u \, K[f_j](t,u)| \, dt \, du < \infty \qquad \text{für } i,j = 1,2 \text{ und } i \neq j,$$

so gilt für alle $x \in X$:

$$\int_0^\infty f_1(u)\, u^{-1} R(u^{-1}) \int_0^\infty f_2(v)\, v^{-1} R(v^{-1}) x \, dv \, du =$$

$$= \int_0^\infty (f_1 \circledast f_2)(u)\, u^{-1} R(u^{-1}) x \, du. \tag{4.10}$$

Beweis. Sei $x \in X$. Mit Hilfe der Resolventengleichung und dem Satz von Tonelli läßt sich die linke Seite der Gleichung (4.10) in der Form

$$\int_{(0,\infty)\times(0,\infty)} f_1(u)\, f_2(v)\, \frac{R(u^{-1})x - R(v^{-1})x}{u-v}\, d(u,v) \tag{4.11}$$

schreiben. Setzt man $\chi : (0,\infty) \to X$, $\chi(u) := u^{-1}R(u^{-1})x$, so entspricht der Quotient in (4.11) formal der Funktion $\mathfrak{q}[\chi]$. Da χ stetig und beschränkt ist, läßt sich das Integral in (4.11) mit denselben Begründungen wie im Beweis von Satz 3.24 [vgl. dort die Gleichungen (3.29)und (3.28)] in die Gestalt

$$\int_0^\infty \left(f_1(u)\, u \int_0^1 K[f_2](t,u)\, dt + f_2(u)\, u \int_0^1 K[f_1](t,u)\, dt \right) u^{-1}R(u^{-1})x\, du$$

bringen, und nach Satz 3.24 ist dies gerade $\int_0^\infty (f_1 \circledast f_2)(u)\, u^{-1}R(u^{-1})x\, du$. $\square$

Um den Operator $\mathfrak{R}(U)$ auch für Distributionen aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ zu definieren, wird jede Distribution U durch Funktionen aus $L^1(0,\infty)$ approximiert. Für solche Funktionen liefert die Definition 4.1 einen auf dem ganzen Raum X definierten Operator, und wie in (4.4) ergibt sich der Operator $\mathfrak{R}(U)$ durch einen Grenzprozeß.

Die Approximationen von U aus dem Raum $L^1(0,\infty)$ sollen durch $\circledast$-Faltung von U mit Testfunktionen gebildet werden. Im Gegensatz zur Laplace'schen Faltung ist dies bei der modifizierten Stieltjes Faltung nur für Distributionen aus einer Teilmenge von $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ möglich. Der Kalkül beschränkt sich daher auf solche Distributionen aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, die sich mit Hilfe der Stieltjes-Faltung auf ähnliche Weise regularisieren lassen wie die Elemente der Faltungsalgebra $\mathscr{A}$ (vgl. Satz 3.35). Die $\circledast$-Faltung jeder Distribution U mit genügend vielen Testfunktionen aus $C_c^\infty(0,\infty)$ muß eine $L^1(0,\infty)$-Funktion ergeben, die die Ungleichung (4.9) erfüllt.

Definition 4.3. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathscr{C}_n := \Big\{ U \in \mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)\,;\, \forall\, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^\infty(0,\infty)\ \exists\, f \in L^1(0,\infty) : \\ f = U \circledast \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_n \text{ und } \sup_{u>0} \Big\{ u \int_0^1 |K[f](t,u)|\, dt \Big\} < \infty \Big\}.$$

Ferner sei $\mathscr{C} := \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{C}_n$.

Die Folge $(\mathscr{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wachsend bezüglich der Mengeninklusion, und zu jedem $U \in \mathscr{C}$ existiert ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $U \in \mathscr{C}_m$. Für $U \in \mathscr{C}_n$

und $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$ ist das Faltungsprodukt $U \circledast \varphi$ wegen Proposition 3.18 in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Ist $n > 1$, so gehört $U \circledast \varphi$ offensichtlich zu $\mathscr{C}_{n-1}$.

Satz 3.35 und Proposition 3.26 zeigen, daß die Faltungsalgebra $\mathscr{A}$ in der Menge $\mathscr{C}$ enthalten ist.

Um den Operator $\mathfrak{R}(U)$ wie angekündigt durch einen Grenzprozeß einzuführen, wird die Filterbasis $\mathfrak{F} := \{F_\varepsilon\,;\, \varepsilon > 0\}$ auf $C_c^\infty(0,\infty)$ durch

$$F_\varepsilon := \left\{\varphi \in C_c^\infty(0,\varepsilon)\,;\, \varphi \geq 0,\, \left|\int_0^\infty \varphi(u)\,du - 1\right| \leq \varepsilon\right\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

definiert. Im Unterschied zu den Filterdefinitionen in [39, 48] werden hier nur solche Testfunktionen zugelassen, deren Träger im offenen Intervall $(0,\varepsilon)$ enthalten ist. Diese Änderung gewährleistet, daß die Testfunktionen die Voraussetzungen von Satz 3.35 erfüllen.

Im Hinblick auf die $\circledast$-Faltungsprodukte aus n Testfunktionen in der Definition der Mengen $\mathscr{C}_n$ ist es sinnvoll, für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Filterbasis $\mathfrak{F}^{\circledast n} := \{F_\varepsilon^{\circledast n}\,;\, \varepsilon > 0\}$ mit

$$F_\varepsilon^{\circledast n} := \{\varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_n\,;\, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in F_\varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

zu betrachten. Ist nun $U \in \mathscr{C}_n$, $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$, so existiert der Operator $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)$ im Sinne von Definition 4.1. Für jedes $x \in X$ bildet das System der Mengen

$$\{\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x\,;\, \varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}\} \qquad (\varepsilon > 0)$$

eine Filterbasis auf X. Ist diese konvergent, so definiert ihr Grenzwert $\lim_{\mathfrak{F}^{\circledast n}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x$ den Wert eines Operators an der Stelle x.

Definition 4.4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathscr{C}_n$. Dann ist $\mathfrak{R}_n(U) : D(\mathfrak{R}_n(U)) \to X$ der Operator mit Definitionsbereich

$$D(\mathfrak{R}_n(U)) := \{x \in X\,;\, \lim_{\mathfrak{F}^{\circledast n}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x \text{ existiert}\},$$

definiert durch

$$\mathfrak{R}_n(U)x := \lim_{\mathfrak{F}^{\circledast n}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x, \qquad x \in D(\mathfrak{R}_n(U)).$$

Die Verwendung der Filterbasis $\mathfrak{F}^{\circledast n}$ zur Definition des Operators $\mathfrak{R}_n(U)$ bedeutet, daß gleichzeitig n Grenzübergänge bezüglich der Filterbasis $\mathfrak{F}$ vollzogen werden. Denkbar wäre auch, diese Grenzübergänge nacheinander auszuführen. Es läßt sich aber zeigen, daß der hierdurch definierte Operator mit $\mathfrak{R}_n(U)$ übereinstimmt.

Gezeigt wird, daß die Definitionen 4.1 und 4.4 konsistent sind: Erfüllt die integrierbare Funktion f die Bedingung (4.6) und gehört sie gleichzeitig zu $\mathscr{C}$, so ist $\mathfrak{R}_n(f) = \mathfrak{R}(f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Distributionen aus $\mathscr{C}$ soll eine ähnliche Aussage gezeigt werden, daß nämlich der Operator $\mathfrak{R}_n(U)$ nur von der Distribution U, aber nicht von der natürlichen Zahl n mit $U \in \mathscr{C}_n$ abhängt. Dies wird zunächst für das Dirac-Maß δ nachgewiesen.

Lemma 4.5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in X$ ist $\lim_{\mathfrak{F}^{\circledast n}} \mathfrak{R}(\varphi)x = x$, also

$$\mathfrak{R}_n(\delta) = I.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und $\eta > 0$. Aus der Grenzwertaussage (4.2) folgt die Existenz einer positiven Zahl ε derart, daß für alle $\varphi_1 \in F_\varepsilon$ gilt:

$$\|\mathfrak{R}(\varphi_1)x - x\| \leq \eta. \tag{4.12}$$

Im Fall $n = 1$ ist das Lemma damit bewiesen. Sei nun $n > 1$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$, etwa $\varphi = \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_n$ mit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in F_\varepsilon$. Ferner sei $\psi_k := \varphi_1 \circledast \cdots \circledast \varphi_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 4.2 ist dann $\mathfrak{R}(\psi_k) = \mathfrak{R}(\psi_{k-1})\,\mathfrak{R}(\varphi_k)$, wobei wegen (4.8) die Abschätzung $\|\mathfrak{R}(\psi_{k-1})\| \leq M(1+\varepsilon)^n$ gilt $(k = 2, \ldots, n)$. Mit (4.12) folgt, daß

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{R}(\varphi)x - x\| &\leq \sum_{k=2}^{n} \|\mathfrak{R}(\psi_k)x - \mathfrak{R}(\psi_{k-1})x\| + \|\mathfrak{R}(\psi_1)x - x\| \\ &\leq (n-1)\, M(1+\varepsilon)^n\, \eta + \eta.\end{aligned}$$

□

Es sei nun f eine Funktion aus $L^1(0,\infty)$, die der Bedingung (4.6) genügt und die zu $\mathscr{C}_n$ gehört $(n \in \mathbb{N})$. Ferner sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$. Dann sind die Funktionen $f \circledast \varphi$ und φ ebenfalls in $L^1(0,\infty)$. Beide Funktionen erfüllen die Bedingung (4.9) und damit auch (4.6). Daher sind die Operatoren $\mathfrak{R}(f \circledast \varphi)$, $\mathfrak{R}(f)$ und $\mathfrak{R}(\varphi)$ wohldefiniert, und nach Lemma 4.2 gilt:

$$\mathfrak{R}(f \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(f)x \qquad \forall\, x \in X.$$

Nach Lemma 4.5 folgt dann, daß $\mathfrak{R}_n(f) = \mathfrak{R}(f)$.

Im nächsten Satz wird der Nachweis erbracht, daß auch die Operatoren $\mathfrak{R}_n(U)$ von der natürlichen Zahl n mit $U \in \mathscr{C}_n$ unabhängig sind. Hierfür wird gezeigt, daß diese Operatoren abgeschlossen sind und daß ihr Definitionsbereich in X dicht liegt.

Satz 4.6. Sei $U \in \mathscr{C}$.

(i) Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $U \in \mathscr{C}_n$. Ferner seien $\psi_1, \dots, \psi_n \in C_c^\infty(0,\infty)$ und $\psi := \psi_1 \circledast \cdots \circledast \psi_n$. Dann gilt für jedes $x \in X$, daß $\mathfrak{R}(\psi)x$ zu $D(\mathfrak{R}_n(U))$ gehört und daß

$$\mathfrak{R}_n(U)\,\mathfrak{R}(\psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \psi)x. \tag{4.13}$$

Für alle $x \in D(\mathfrak{R}_n(U))$ gilt:

$$\mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}_n(U)x = \mathfrak{R}(U \circledast \psi)x. \tag{4.14}$$

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $U \in \mathscr{C}_n$ ist $\mathfrak{R}_n(U)$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator auf X.

(iii) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $U \in \mathscr{C}_m \cap \mathscr{C}_n$, so ist $\mathfrak{R}_m(U) = \mathfrak{R}_n(U)$.

Beweis. Zu (i). Sei $x \in X$. Ferner seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$. Dann sind $U \circledast \varphi$, ψ und $(U \circledast \varphi) \circledast \psi = U \circledast (\varphi \circledast \psi)$ Funktionen aus $L^1(0,\infty)$, die jeweils die Bedingung (4.9) erfüllen. Daher sind die Operatoren $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)$, $\mathfrak{R}(\psi)$ und $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)$ wohldefiniert, und nach Lemma 4.2 gilt:

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)\,\mathfrak{R}(\psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)x. \tag{4.15}$$

Analog erhält man die Gleichung

$$\mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)x. \tag{4.16}$$

Kombination der Gleichungen (4.15) und (4.16) und Anwendung des Lemmas 4.5 liefern die Grenzwertaussage

$$\lim_{\varphi, \mathfrak{F}^{\circledast n}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)\,\mathfrak{R}(\psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \psi)x.$$

Dies bedeutet, daß $\mathfrak{R}(\psi)x$ in $D(\mathfrak{R}_n(U))$ ist und daß (4.13) gilt.

Sei nun $x \in D(\mathfrak{R}_n(U))$, $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$. Mit derselben Begründung wie bei der Gleichung (4.15) erhält man

$$\mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x.$$

Bildet man nun auf beiden Seiten dieser Gleichung den Grenzwert bezüglich φ gemäß der Filterbasis $\mathfrak{F}^{\circledast n}$, so konvergiert die linke Seite gegen $\mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}_n(U)x$, da der Operator $\mathfrak{R}(\psi)$ stetig ist. Die rechte Seite strebt nach Lemma 4.5 gegen $\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x$. Dies zeigt die Gültigkeit der Gleichung (4.14).

Zu (ii). Sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $U \in \mathscr{C}_n$. Wegen Teil (i) und Lemma 4.5 ist der Definitionsbereich $D(\mathfrak{R}_n(U))$ dicht in X.

Gezeigt wird nun, daß Operator $\mathfrak{R}_n(U)$ abgeschlossen ist. Dafür sei (x_ν) eine Folge aus $D(\mathfrak{R}_n(U))$ derart, daß die Grenzwerte $x = \lim_{\nu\to\infty} x_\nu$ und $y = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{R}_n(U)x_\nu$ existieren. Für alle $\varepsilon > 0$, $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast n}$ und $\nu \in \mathbb{N}$ gilt wegen Teil (i), daß

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x_\nu = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}_n(U)x_\nu.$$

Da die Operatoren $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)$ und $\mathfrak{R}(\varphi)$ stetig sind, liefert der Grenzübergang $\nu \to \infty$ die Gleichung

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)y.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung konvergiert wegen Lemma 4.5 beim Grenzübergang bezüglich φ gegen y. Daher konvergiert auch die linke Seite gegen y, und dies bedeutet, daß $x \in D(\mathfrak{R}_n(U))$ und $\mathfrak{R}_n(U)y = y$.

Zu (iii). Es sei $x \in D(\mathfrak{R}_n(U))$. Ferner seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$. Gezeigt wird zunächst, daß

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}_n(U)x. \tag{4.17}$$

Hierfür seien $\eta > 0$ und $\psi \in F_\eta^{\circledast n}$. Nach Teil (i) gilt:

$$\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}_n(U)x.$$

Mit Lemma 4.2 folgt

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x &= \mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)x\\ &= \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}_n(U)x.\end{aligned}$$

Durch Grenzübergang bezüglich ψ ergibt sich hieraus die Beziehung (4.17). Aus (4.17) folgt durch Grenzübergang bezüglich φ, daß $x \in D(\mathfrak{R}_m(U))$ und daß $\mathfrak{R}_m(U)x = \mathfrak{R}_n(U)x$.

Da die Voraussetzungen an m und n symmetrisch waren, ist damit auch Teil (iii) bewiesen. □

Der Teil (iii) von Satz 4.6 erlaubt es, den Operator $\mathfrak{R}(U)$ jetzt auch für $U \in \mathscr{C}$ zu definieren.

Definition 4.7. Ist $U \in \mathscr{C}$ und n eine natürliche Zahl mit $U \in \mathscr{C}_n$, dann sei

$$\mathfrak{R}(U) := \mathfrak{R}_n(U).$$

Es sei daran erinnert, daß $n \in \mathbb{N}$ die zur Definition des Operators $\mathfrak{R}_n(U)$ verwendete Filterbasis $\mathfrak{F}^{\circledast n}$ angibt. Die Forderung an $n \in \mathbb{N}$, daß U zu $\mathscr{C}_n$ gehört, ist aber nicht notwendig, um den Operator $\mathfrak{R}(U)$ zu charakterisieren, wie das nächste Lemma zeigt.

Lemma 4.8. Sei $U \in \mathscr{C}$ und $x, y \in X$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $x \in D(\mathfrak{R}(U))$ und $\mathfrak{R}(U)x = y$.

(ii) $\exists m \in \mathbb{N}\, \forall \varepsilon > 0\, \forall \varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$: $x \in D(\mathfrak{R}(U \circledast \varphi))$, und $\lim\limits_{\varphi, \mathfrak{F}^{\circledast m}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = y$.

Ist dies der Fall, so gilt die Aussage (ii) sogar für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. "(i) $\Longrightarrow$ (ii)": Gezeigt wird, daß (ii) für jede natürliche Zahl m gilt. Hierfür sei $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$. Zu zeigen ist: $x \in D(\mathfrak{R}(U \circledast \varphi))$ und $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)y$. Hieraus folgt dann, daß $\lim\limits_{\varphi, \mathfrak{F}^{\circledast m}} \mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = y$.

Sei also $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $U \in \mathscr{C}_n$. Dann ist auch $U \circledast \varphi \in \mathscr{C}_n$. Sind $\eta > 0$ und $\psi \in F_\eta^{\circledast n}$, so gilt nach Satz 4.6, Teil (i) und Lemma 4.2:

$$\mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(\psi)\mathfrak{R}(U)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)x.$$

Der Grenzübergang bezüglich ψ ergibt, daß die linke Seite der Gleichung gegen $\mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U)x$ konvergiert. Bezogen auf die rechte Seite der Gleichung bedeutet diese Konvergenzaussage, daß $x \in D(\mathfrak{R}(U \circledast \varphi))$ und $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U)x = \mathfrak{R}(\varphi)y$.

"(ii) $\Longrightarrow$ (i)": Die Aussage (ii) gelte für ein $m \in \mathbb{N}$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $U \in \mathscr{C}_n$. Ferner seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$ sowie $\eta > 0$ und $\psi \in F_\eta^{\circledast n}$. Da $U \circledast \varphi$ in $\mathscr{C}_n$ ist, gilt nach Lemma 4.2 und Satz 4.6, Teil (i), daß

$$\mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(U \circledast \varphi \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(\psi)\,\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)x.$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang bezüglich φ für jedes feste ψ die Gleichung $\mathfrak{R}(U \circledast \psi)x = \mathfrak{R}(\psi)y$. Der Grenzübergang bezüglich ψ liefert dann die Aussage (i). $\square$

Satz 4.9. Seien $U, V \in \mathscr{C}$ derart, daß $U \circledast V \in \mathscr{C}$, und sei $x \in D(\mathfrak{R}(V))$. Es gehört x genau dann zu $D(\mathfrak{R}(U \circledast V))$, wenn $\mathfrak{R}(V)x$ in $D(\mathfrak{R}(U))$ ist. Ist dies der Fall, so gilt:

$$\mathfrak{R}(U \circledast V)x = \mathfrak{R}(U)\,\mathfrak{R}(V)x.$$

Beweis. Man wähle $m, n \in \mathbb{N}$ derart, daß $U \in \mathscr{C}_m$, $V \in \mathscr{C}_n$ und $U \circledast V \in \mathscr{C}_{m+n}$. Sind $\varepsilon, \eta > 0$, $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$ und $\psi \in F_\eta^{\circledast n}$, so erfüllen die Funktionen $U \circledast \varphi$ und $V \circledast \psi$ die Voraussetzungen von Lemma 4.2, und es gilt:

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)\,\mathfrak{R}(V \circledast \psi)x = \mathfrak{R}((U \circledast \varphi) \circledast (V \circledast \psi))x = \mathfrak{R}((U \circledast V \circledast \varphi) \circledast \psi)x.$$

Die linke Seite dieser Gleichung konvergiert beim Grenzübergang bezüglich ψ gegen $\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)\,\mathfrak{R}(V)x$. Aus der Konvergenz der rechten Seite folgt mit Lemma 4.8, daß $x \in D\big(\mathfrak{R}((U \circledast V) \circledast \varphi)\big)$ und

$$\mathfrak{R}(U \circledast \varphi)\,\mathfrak{R}(V)x = \mathfrak{R}((U \circledast V) \circledast \varphi)x.$$

Durch Grenzübergang bezüglich φ folgt mit Lemma 4.8 die Aussage des Satzes. $\square$

Satz 4.9 läßt sich insbesondere auf Distributionen $U, V \in \mathscr{A}$ anwenden, weil ihr Faltungsprodukt $U \circledast V$ zu $\mathscr{A}$ gehört und weil $\mathscr{A}$ in $\mathscr{C}$ enthalten ist.

Folgerung 4.10. Seien $U, V \in \mathscr{A}$ und $x \in D(\mathfrak{R}(V))$. Es gehört x genau dann zu $D(\mathfrak{R}(U \circledast V))$, wenn $\mathfrak{R}(V)x$ in $D(\mathfrak{R}(U))$ ist. Ist dies der Fall, so gilt: $\mathfrak{R}(U \circledast V)x = \mathfrak{R}(U)\,\mathfrak{R}(V)x$.

4.2 Gebrochene Potenzen

4.2.1 Einführung der gebrochenen Potenzen

In diesem Abschnitt sei A wieder ein fester Operator aus der Klasse $\mathscr{K}$, mit dichtem Definitionsbereich und Wertebereich im Banachraum X.

Der Gegenstand dieses Abschnittes sind die gebrochenen Potenzen $(-A)^\alpha$ von $-A$. Die Konstruktion der gebrochenen Potenzen und die Herleitung ihrer Eigenschaften soll mit Hilfe des in Abschnitt 4.1 eingeführten Funktionalkalküls erfolgen. Hierfür bedarf es zuerst geeigneter Distributionen aus $\mathscr{C}$, denen der Kalkül die gebrochenen Potenzen zuordnet.

Zur Konstruktion der ganzzahligen Potenzen $(-A_s)^k = s^k$ der Operatoren $-A_s$ für $s > 0$ und $k \in \mathbb{N}_0$ sind die Distributionen $1/k!\,\delta^{(k)}$ geeignet, wie das Beispiel 2.4 zeigt. Diese Distributionen gehören nach Beispiel 3.34 zu $\mathscr{A}$ und damit auch zu $\mathscr{C}$. Die ganzzahligen Potenzen des allgemeinen Operators $-A$ behandelt der nächste Satz.

Satz 4.11. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist $\mathfrak{R}(1/k!\,\delta^{(k)}) = (-A)^k$.

Beweis. Für $k = 0$ gilt die Aussage des Satzes nach Lemma 4.5. Für $k \geq 1$ wird sie durch vollständige Induktion bewiesen. Gezeigt wird zunächst, daß

$$\mathfrak{R}(\delta') = -A. \tag{4.18}$$

Sei $x \in X$ und $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$. Für die reelle Zahl $C := \int_0^\infty \varphi(u)\, u^{-1}\, du$ und die Testfunktion $\psi \in C_c^\infty(0,\infty)$ mit $\psi(u) = \varphi(u)\, u^{-1}$ gilt nach (3.53):

$$\delta' \circledast \varphi = C\,\delta - \psi.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\delta' \circledast \varphi)x &= \int_0^\infty \varphi(u)\, u^{-1}\big(I - u^{-1}R(u^{-1})\big)x\, du \\ &= \int_0^\infty \varphi(u)\,(-A)\,u^{-1}R(u^{-1})x\, du \end{aligned} \tag{4.19}$$

Da der Operator $-A$ abgeschlossen ist, folgt weiter

$$\mathfrak{R}(\delta' \circledast \varphi)x = (-A)\,\mathfrak{R}(\varphi)x. \tag{4.20}$$

Sei nun $x \in D(\mathfrak{R}(\delta'))$. Nach Lemma 4.8 konvergiert die linke Seite von (4.20) beim Grenzübergang bezüglich φ gegen $\mathfrak{R}(\delta')x$. Die entsprechende Konvergenzaussage für die rechte Seite liefert zusammen mit der Abgeschlossenheit von $-A$, daß $x \in D(-A)$ und $-Ax = \mathfrak{R}(\delta')x$.

Es sei umgekehrt $x \in D(-A)$. Dann folgt aus der Gleichung (4.19), daß

$$\mathfrak{R}(\delta' \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,(-A)x.$$

Durch Grenzübergang bezüglich φ folgt mit Lemma 4.8, daß $x \in D(\mathfrak{R}(\delta'))$ und $\mathfrak{R}(\delta')x = -Ax$. Damit ist (4.18) gezeigt.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und $\mathfrak{R}\big(k!^{-1}\,\delta^{(k)}\big) = (-A)^k$. Zu zeigen ist:

$$\mathfrak{R}\big((k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)}\big) = (-A)^{k+1}. \tag{4.21}$$

Ausgangspunkt ist die Faltungsgleichung (siehe Beispiel 3.15)

$$(k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)} = k!^{-1}\,\delta^{(k)} \circledast \delta'. \tag{4.22}$$

Für $x \in D(\mathfrak{R}(\delta')) = D(-A)$ gilt nach Folgerung 4.10: x gehört genau dann zu $D\big(\mathfrak{R}\big(\delta^{(k+1)}\big)\big)$, wenn $\mathfrak{R}(\delta')x$ in $D\big(\mathfrak{R}\big(\delta^{(k)}\big)\big) = D((-A)^k)$ ist. Ist dies der Fall, so gilt

$$\mathfrak{R}\big((k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)}\big)x = \mathfrak{R}\big(k!^{-1}\,\delta^{(k)}\big)\,\mathfrak{R}\big(\delta'\big)x = (-A)^{k+1}x. \tag{4.23}$$

Diese Gleichung gilt insbesondere für alle $x \in D((-A)^{k+1})$.

Umgekehrt sei nun $x \in D\big(\mathfrak{R}\big(\delta^{(k+1)}\big)\big)$. Wegen (3.51) sind die beiden Distributionen $\delta^{(k+1)}$ und δ' Elemente der Menge $\mathscr{C}_{k+2}$. Seien also $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast k+2}$. Nach Satz 4.6 (i) gehört $\mathfrak{R}(\varphi)x$ sowohl zu $D(\mathfrak{R}(\delta')) = D(-A)$ als auch zu $D\big(\mathfrak{R}\big(\delta^{(k+1)}\big)\big)$. Wie vor der Gleichung (4.23) ausgeführt wurde, ist $(-A)\,\mathfrak{R}(\varphi)x$ in $D((-A)^k)$ und

$$\mathfrak{R}\big((k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)}\big)\,\mathfrak{R}(\varphi)x = (-A)^k\,(-A)\,\mathfrak{R}(\varphi)x.$$

Nochmalige Anwendung von Satz 4.6 (i) liefert

$$\mathfrak{R}(\varphi)\,\mathfrak{R}\big((k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)}\big)x = (-A)^{k+1}\,\mathfrak{R}(\varphi)x.$$

Da der Operator $(-A)^{k+1}$ abgeschlossen ist, folgt durch Grenzübergang bezüglich φ, daß $x \in D((-A)^{k+1})$ und $\mathfrak{R}\big((k+1)!^{-1}\,\delta^{(k+1)}\big)x = (-A)^{k+1}x$. $\square$

Satz 4.11 läßt sich dahingehend interpretieren, daß die k-te Ableitung der Funktion $(0,\infty) \ni u \mapsto u^{-1}R(u^{-1})$ im Punkt $u = 0$ gerade durch den Operator $k!\,A^k$ gegeben ist, und diese Aussage läßt sich exakt beweisen. Als Ausgangspunkt dient die Tatsache, daß die Funktion $\lambda \mapsto R(\lambda)$ auf der Resolventenmenge von A eine analytische Funktion ist. Durch Induktion zeigt man, daß für jedes $x \in X$ die Funktion $(0,\infty) \ni u \mapsto u^{-1}R(u^{-1})x$ unendlich oft differenzierbar auf $(0,\infty)$ ist mit der j-ten Ableitung

$$\partial_u^j\big(u^{-1}R(u^{-1})x\big) = j!\,u^{-j-1}\,R(u^{-1})\,\big(u^{-1}R(u^{-1}) - I\big)^j x, \qquad u > 0,\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Für $x \in D(A^k)$ und $j = 0, \ldots, k$ ist $\lim_{u\to 0+} \partial_u^j\big(u^{-1}R(u^{-1})x\big) = j!\,A^j x$ und daher

$$\partial_u^j\big(u^{-1}R(u^{-1})x\big)\big|_{u=0} = j!\,A^j x \qquad \text{für } j = 0, \ldots, k.$$

Satz 4.11 regt dazu an, die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ von $-A$ mit Hilfe der gebrochenen Ableitung $\delta^{(\alpha)}$ des Dirac-Maßes δ der Ordnung $\alpha \geq 0$ zu konstruieren. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ setzt man $\delta^{(\alpha)} := D^\alpha\delta$. Ist $m - 1 < \alpha < m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so ist die Distribution $\delta^{(\alpha)}$ wie in [23, 48] durch

$$\langle \delta^{(\alpha)}, \chi\rangle := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty u^{-\alpha-1}\left[\chi(u) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\chi^{(k)}(0)}{k!} u^k\right] du, \qquad \chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \tag{4.24}$$

definiert (vgl. [40, Ch. II, §2] oder [12, I, Ch. I, §3.3]).

Die gebrochene Ableitung der Ordnung α von $U \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}_+)$ wird in [40, Ch. VI, §5] und [12, I, Ch. I, §5.5] als Laplace'sche Faltung $U * \delta^{(\alpha)}$ definiert.

In [23, 48] werden die gebrochenen Ableitungen $\delta^{(\alpha)}$ des Dirac-Maßes benutzt, um gebrochene Potenzen von Halbgruppenerzeugern zu definieren. Auf ähnliche Weise lassen sich nun die gebrochenen Potenzen von $-A$ einführen. Damit dies im Rahmen des in Abschnitt 4.1 entwickelten Kalküls geschehen kann, wird zunächst gezeigt, daß die Distributionen $\delta^{(\alpha)}$, $\alpha \geq 0$, zur Faltungsalgebra $\mathscr{A}$ gehören.

Lemma 4.12. Für alle $\alpha \geq 0$ ist $\delta^{(\alpha)} \in \mathscr{A}$.

Beweis. Der Fall, daß α eine natürliche Zahl oder Null ist, wurde bereits im Beispiel 3.34 behandelt.

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m-1 < \alpha < m$. Gezeigt wird: Es existieren Funktionen $f, g \in \Lambda(0,\infty)$ und reelle Zahlen $C_0, \dots, C_{m-1}$ derart, daß

$$\delta^{(\alpha)} = f + \sum_{k=0}^{m-1} C_k \frac{\delta^{(k)}}{k!} + g \circledast \frac{\delta^{(m)}}{m!}. \tag{4.25}$$

Hierfür wähle man eine Testfunktion $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, die in einer Umgebung der Null konstant 1 ist. Dann gilt für alle $\chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$, daß

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(-\alpha)\, \delta^{(\alpha)}, \chi \rangle = \int_0^\infty \frac{1-\psi(u)}{u^{\alpha+1}} \chi(u)\, du - \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^\infty \frac{1-\psi(u)}{u^{\alpha+1-k}}\, du \cdot \frac{\chi^{(k)}(0)}{k!} + \\ + \int_0^\infty \frac{\psi(u)}{u^{\alpha+1-m}} \cdot \frac{1}{u^m} \left[\chi(u) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\chi^{(k)}(0)}{k!} u^k \right] du.\end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(u) &:= \frac{1-\psi(u)}{\Gamma(-\alpha)\, u^{\alpha+1}}, \\ g : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ g(u) &:= \frac{(-1)^m \psi(u)}{\Gamma(-\alpha)\, u^{\alpha-m+1}}, \\ C_k := \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1-\psi(u)}{u^{\alpha+1-k}}\, du & \qquad \text{für } k = 0, \dots, m-1 \end{aligned} \tag{4.26}$$

gilt dann die Beziehung (4.25) [man benutze hierfür die Gleichung (3.48)]. Es ist offensichtlich, daß f und g zu $\Lambda(0,\infty)$ gehören. □

Definition 4.13. Für $\alpha > 0$ sei $(-A)^\alpha := \mathfrak{R}\big(\Gamma(\alpha+1)^{-1}\, \delta^{(\alpha)}\big)$.

Es ist naheliegend, die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha x$ für $x \in D((-A)^\alpha)$ dadurch zu berechnen, daß in der Gleichung (4.24) die skalare Funktion χ durch die vektorwertige Funktion $\mathbb{R}_+ \ni u \mapsto u^{-1}R(u^{-1})x$ ersetzt wird. Dies ist zwar nicht für alle x aus dem Definitionsbereich von $(-A)^\alpha$ zulässig, aber auf einer Teilmenge von $D((-A)^\alpha)$ erhält man auf diese Weise eine exakte Darstellung der gebrochenen Potenz.

Proposition 4.14. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $m-1 < \alpha < m$. Dann ist $D(A^m)$ in $D((-A)^\alpha)$ enthalten, und für alle $x \in D(A^m)$ gilt:

$$\begin{aligned}(-A)^\alpha x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty u^{-\alpha-1}\Big[u^{-1}R(u^{-1})x - \sum_{k=0}^{m-1} u^k A^k x\Big]\,du \\ &= \frac{\sin\big((\alpha-m+1)\pi\big)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{\alpha-m} R(\lambda)\,(-A)^m x\,d\lambda.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Beweis. Es sei $x \in D(A^m)$. Aus (4.25) ergibt sich zunächst, daß x zu $D((-A)^\alpha)$ gehört. Wie im Beweis der Gleichung (4.25) sei $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, so daß in einer Umgebung der Null $\psi \equiv 1$ ist. Wendet man den Kalkül $\mathfrak{R}$ auf (4.25) an, so erhält man wegen (4.26), daß

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(-\alpha)(-A)^\alpha x = &\int_0^\infty \frac{1-\psi(u)}{u^{\alpha+1}}\,u^{-1}R(u^{-1})x\,du\ - \\ &-\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^\infty \frac{1-\psi(u)}{u^{\alpha+1-k}}\,A^k x\,du\ + \\ &+\int_0^\infty \frac{\psi(u)}{u^{\alpha+1-m}}\,u^{-1}R(u^{-1})\,A^m x\,du,\end{aligned} \tag{4.28}$$

und hieraus folgt mit Hilfe der Identität

$$u^{-1}R(u^{-1})x - \sum_{k=0}^{m-1}(uA)^k x = u^{-1}R(u^{-1})\,(uA)^m x$$

die Gültigkeit des ersten Gleichheitszeichens in (4.27). Aus (4.28) folgt auch, daß

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin\big((\alpha-m+1)\pi\big)}{\pi}\int_0^\infty u^{-\alpha+m-2}\,R(u^{-1})\,(-A)^m x\,du.$$

Mit der Substitution $\lambda = u^{-1}$ erhält man hieraus die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens in (4.27). $\square$

Die Integraldarstellung (4.27) wurde von A.V. Balakrishnan [2] zur Definition der gebrochenen Potenz $(-A)^\alpha x$ für $x \in D(A^m)$ benutzt. Hierauf soll noch im Abschnitt 4.2.3 eingegangen werden.

4.2.2 Die Potenzgesetze

Gegenstand dieses Abschnittes sind die Potenzgesetze der Multiplikativität der Exponenten

$$((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta} \tag{4.29}$$

und der Additivität der Exponenten

$$(-A)^\alpha\,(-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta}.$$

Abweichend von anderen Darstellungen wird in dieser Arbeit zunächst die Multiplikativität der Exponenten gezeigt. Mit Hilfe dieses Potenzgesetzes läßt sich für $0 < \beta < \alpha$ die Inklusion

$$D\big((-A)^\alpha\big) \subset D\big((-A)^\beta\big)$$

auf relativ einfache Weise herleiten. Diese Inklusion wird dann zum Beweis der Additivität der Exponenten benutzt.

Bei allen Beweisen wird die modifizierte Stieltjes-Transformierte von $\delta^{(\alpha)}$ benötigt. Der Wert der $\mathfrak{S}$-Transformierten der Distribution $\Gamma(\alpha+1)^{-1}\,\delta^{(\alpha)}$ an der Stelle s ist die gebrochene Potenz $(-A_s)^\alpha$ des in (4.3) definierten Operators $-A_s$ $(s > 0)$. Man wird daher erwarten, daß $\mathfrak{S}\big[\Gamma(\alpha+1)^{-1}\,\delta^{(\alpha)}\big](s)$ gerade s^α ist, und das nächste Lemma zeigt, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Lemma 4.15. Für $\alpha \geq 0$ gilt:

$$\mathfrak{S}\big[\Gamma(\alpha+1)^{-1}\,\delta^{(\alpha)}\big](s) = s^\alpha \qquad \forall\, s > 0. \tag{4.30}$$

Beweis. Wegen Beispiel 2.4 ist nur der Fall zu untersuchen, daß $\alpha \notin \mathbb{N}_0$. Sei also $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $m-1 < \alpha < m$. Ferner sei $s > 0$ und $\psi_s \in \dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R})$, so daß $\psi_s(u) = 1/(1+su)$ für alle $u \geq 0$. Dann gilt nach (4.24):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{S}[\delta^{(\alpha)}](s) = \big\langle \delta^{(\alpha)},\, \psi_s \big\rangle &= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty u^{-\alpha-1} \left[\frac{1}{1+su} - \sum_{k=0}^{m-1} (-su)^k\right] du \\
&= \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty u^{-\alpha-1} \frac{(-su)^m}{1+su}\, du \\
&= \frac{(-1)^m}{\Gamma(-\alpha)}\, s^\alpha \int_0^\infty \frac{u^{m-\alpha-1}}{1+u}\, du \\
&= \Gamma(\alpha+1)\, s^\alpha.
\end{aligned}$$

□

Damit die in der Gleichung (4.29) auftretenden Operatoren sinnvoll definiert sind, muß der Operator $-(-A)^\alpha$ wieder zur Klasse $\mathscr{K}$ gehören. Bekanntlich ist dies für $0 < \alpha < 1$ der Fall [1, 17, 25, 28], und diese Tatsache soll im Rahmen des in Kapitel 4.1 entwickelten Funktionalkalküls gezeigt werden. Nach Satz 4.6 ist $-(-A)^\alpha$ ein abgeschlossener, dicht definierter Operator. Um den Nachweis zu erbringen, daß $-(-A)^\alpha$ zu $\mathscr{K}$ gehört, ist es erforderlich, für alle $\lambda > 0$ die Existenz einer stetigen Inversen des Operators $I + \lambda(-A)^\alpha$ zu zeigen. Ferner ist nachzuweisen, daß

$$\sup_{\lambda>0} \left\|(I + \lambda(-A)^\alpha)^{-1}\right\| < \infty.$$

Aus der Theorie der gebrochenen Potenzen ist bekannt, daß die Resolvente $R(\lambda; (-A)^\alpha)$ $(0 < \alpha < 1,\ \lambda > 0)$ mit Hilfe der Funktion $f_{\alpha,\lambda} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_{\alpha,\lambda}(u) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{u^\alpha}{u^{2\alpha} + 2\lambda\cos(\alpha\pi)\, u^\alpha + \lambda^2}, \qquad u > 0$$

dargestellt werden kann. Das Integral $\int_0^\infty u^{-1} f_{\alpha,\lambda}(u)$ konvergiert (absolut) und hat den Wert λ. $f_{\alpha,\lambda}$ ist Stieltjes-transformierbar mit der Transformierten

$$S[f_{\alpha,\lambda}](s) = (\lambda + s^\alpha)^{-1} \qquad \forall\, s > 0.$$

Diese S-Transformierte wird nun als $\mathfrak{S}$-Transformierte einer integrierbaren Funktion dargestellt (vgl. Kap. 2, S. 14). Für $0 < \alpha < 1$ und $\lambda > 0$ sei $r_{\alpha,\lambda} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$r_{\alpha,\lambda}(u) := (\lambda u)^{-1} f_{\alpha,1/\lambda}(u^{-1}), \qquad u > 0.$$

Dann ist $r_{\alpha,\lambda} \in L^1(0,\infty)$ mit $\int_0^\infty r_{\alpha,\lambda}(u)\,du = 1$, und es gilt:

$$\mathfrak{S}[r_{\alpha,\lambda}](s) = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^{-1} + s^\alpha} = \frac{1}{1 + \lambda s^\alpha} \qquad \forall\, s > 0. \tag{4.31}$$

Damit der in Kapitel 4.1 entwickelte Kalkül auf die Funktionen $r_{\alpha,\lambda}$ angewendet werden kann, wird gezeigt, daß sie zum Funktionenraum $\Lambda(0,\infty)$ gehören.

Lemma 4.16. Für $0 < \alpha < 1$ und $\lambda > 0$ ist $r_{\alpha,\lambda} \in \Lambda(0,\infty)$.

Beweis. Durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ zeigt man zunächst, daß sich die k-te Ableitung von $r_{\alpha,\lambda}$ in der Form

$$r^{(k)}_{\alpha,\lambda}(u) = u^{\alpha-k-1} \cdot \frac{P_k(u^\alpha)}{Q_k(u^\alpha)} \qquad (u > 0) \tag{4.32}$$

darstellen läßt, wobei P_k und Q_k Polynome sind mit $\operatorname{grad} P_k + 2 \leq \operatorname{grad} Q_k$ und $Q_k(u) \geq Q_k(0) > 0$ für alle $u \in \mathbb{R}_+$.

Sei nun $k \in \mathbb{N}_0$ fest. Aus der Gleichung (4.32) und aus den Eigenschaften von P_k und Q_k ergeben sich die Abschätzungen

$$u^k r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u) = \begin{cases} O(u^{\alpha-1}) & (u \to 0+), \\ O(u^{-\alpha-1}) & (u \to \infty), \end{cases}$$

aus denen die (absolute) Konvergenz des Integrals $\int_0^\infty u^k r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u)\,du$ und die Grenzwertaussagen $\lim\limits_{u \to 0+} u^{k+1}\, r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u) = \lim\limits_{u \to \infty} u^{k+1}\, r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u) = 0$ folgen. □

Satz 4.17. Sei $0 < \alpha < 1$. Dann gehört der Operator $-(-A)^\alpha$ zur Klasse $\mathscr{K}$, und für alle $\lambda > 0$ gilt:

$$\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda}) = \big(I + \lambda(-A)^\alpha\big)^{-1} = \lambda^{-1} R\big(\lambda^{-1}; -(-A)^\alpha\big). \tag{4.33}$$

Beweis. Sei $\lambda > 0$. Zunächst wird die Gleichung (4.33) gezeigt. Gemäß Lemma 4.15 und der Gleichung (4.31) gilt die Beziehung

$$\mathfrak{S}\left[r_{\alpha,\lambda} \circledast \left(\delta + \lambda \frac{\delta^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right] = \mathfrak{S}[r_{\alpha,\lambda}] \cdot \mathfrak{S}\left[\delta + \lambda \frac{\delta^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] = 1 = \mathfrak{S}[\delta].$$

Alle Distributionen in dieser Gleichung gehören zu $\mathscr{A}$, wie Lemma 4.12 und Lemma 4.16 zeigen. Die Eindeutigkeit der $\mathfrak{S}$-Transformation auf $\mathscr{A}$ (Folgerung 3.37) liefert die Faltungsgleichungen

$$\left(\delta + \lambda \frac{\delta^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \circledast r_{\alpha,\lambda} = r_{\alpha,\lambda} \circledast \left(\delta + \lambda \frac{\delta^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)}\right) = \delta.$$

Nach Folgerung 4.10 bildet der Operator $\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})$ den Raum X in $D\big((-A)^\alpha\big)$ ab, und es gilt:

$$(I + \lambda(-A)^\alpha)\, \mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})x = x \qquad \forall\, x \in X. \tag{4.34}$$

Aus Folgerung 4.10 ergibt sich außerdem, daß

$$\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})\, \big(I + \lambda(-A)^\alpha\big)x = x \qquad \forall\, x \in D\big((-A)^\alpha\big). \tag{4.35}$$

Die Gleichungen (4.34) und (4.35) zeigen, daß der Operator $I + \lambda(-A)^\alpha$ die stetige Inverse $\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})$ besitzt. Dies bedeutet, daß λ^{-1} zur Resolventenmenge von $-(-A)^\alpha$ gehört und daß (4.33) gilt.

Für die Norm des Operators $\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})$ erhält man aus der Ungleichung (4.8) und der Gleichung $\|r_{\alpha,\lambda}\|_{L^1} = 1$ die Abschätzung

$$\|\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})\| \leq M,$$

wobei M die Konstante aus (4.1) ist. Daher ist $\sup_{\lambda>0} \|\mathfrak{R}(r_{\alpha,\lambda})\| \leq M$, und $-(-A)^\alpha$ gehört zur Klasse $\mathscr{K}$. □

Es sei nun $\alpha \in (0,1)$ fest. Zum Beweis des Potenzgesetzes (4.29) wird nach dem Vorbild von [48] ein Zusammenhang zwischen den Funktionalkalkülen, die von den beiden Operatoren A und $-(-A)^\alpha$ erzeugt werden, hergestellt. Dabei wird weiterhin die Bezeichnung $\mathfrak{R}$ für den Kalkül zum Operator A verwendet, während $\mathfrak{R}^\alpha$ den Kalkül zum Operator $-(-A)^\alpha$ bezeichnet.

Jeder Funktion f aus $L^1(0,\infty)$ soll eine Funktion f_α zugeordnet werden, so daß die Beziehung $\mathfrak{R}^\alpha(f) = \mathfrak{R}(f_\alpha)$ gilt. Dies geschieht unter Verwendung der Funktionen $r_{\alpha,\lambda}$, deren Rolle derjenigen der aus der Stochastik bekannten stabilen Lévy-Dichten in [48] entspricht.

Für $f \in L^1(0,\infty)$ sei die Funktion $f_\alpha : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_\alpha(u) := \int_0^\infty f(\lambda)\, r_{\alpha,\lambda}(u)\, d\lambda. \tag{4.36}$$

Lemma 4.18. Für alle $f \in L^1(0,\infty)$ gilt:

(i) $f_\alpha \in \Lambda(0,\infty)$.

(ii) $\mathfrak{S}[f_\alpha](s) = \mathfrak{S}[f](s^\alpha)$ für alle $s > 0$.

(iii) $\mathfrak{R}(f_\alpha) = \mathfrak{R}^\alpha(f)$.

Beweis. Zur Vorbereitung des eigentlichen Beweises sei festgehalten, daß

$$r^{(k)}_{\alpha,\lambda}(u) = (\lambda^{-1/\alpha})^{k+1}\, r^{(k)}_{\alpha,1}(\lambda^{-1/\alpha}u) \qquad \forall\, u > 0,\ k \in \mathbb{N}_0,\ \lambda > 0. \tag{4.37}$$

Diese Gleichung erhält man für $k = 0$ durch eine einfache Rechnung, und durch k-malige Differentiation ergibt sie sich auch für $k \geq 1$. Aus (4.37) folgt jeweils mit der Substitution $v = \lambda^{-1/\alpha}u$, daß

$$\sup_{u>0}\bigl\{u^{k+1}\, r^{(k)}_{\alpha,\lambda}(u)\bigr\} = \sup_{v>0}\bigl\{v^{k+1}\, r^{(k)}_{\alpha,1}(v)\bigr\} =: M_k \tag{4.38}$$

und

$$\int_0^\infty u^k\, r^{(k)}_{\alpha,\lambda}(u)\, du = \int_0^\infty v^k\, r^{(k)}_{\alpha,1}(u)\, dv =: I_k \tag{4.39}$$

für alle $\lambda > 0$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dies bedeutet, daß das Supremum bzw. das Integral auf der linken Seite von (4.38) bzw. (4.39) vom Parameter $\lambda > 0$ unabhängig ist.

Nun zum Beweis von Teil (i). Es sei $f \in L^1(0,\infty)$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz zeigt man, daß die Funktion f_α unendlich oft differenzierbar auf $(0,\infty)$ ist und daß sich ihre k-te Ableitung ($k \in \mathbb{N}_0$) durch

$$f^{(k)}_\alpha(u) = \int_0^\infty f(\lambda)\, r^{(k)}_{\alpha,\lambda}(u)\, d\lambda \qquad (u > 0)$$

darstellen läßt. Hieraus ergibt sich mit (4.38) die Abschätzung

$$\sup_{u>0} |u^{k+1} f_\alpha^{(k)}(u)| \le \sup_{u>0} \left\{ \int_0^\infty |u^{k+1} r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u)| \, |f(\lambda)| \, d\lambda \right\} \le M_k \, \|f\|_{L^1} \, ,$$

und mit (4.39) folgt die Abschätzung

$$\int_0^\infty |u^k f_\alpha^{(k)}(u)| \, du \le \int_0^\infty \int_0^\infty |u^k r_{\alpha,\lambda}^{(k)}(u)| \, |f(\lambda)| \, du \, d\lambda = I_k \, \|f\|_{L^1} \, .$$

Für den Beweis von (ii) sei $s > 0$. Dann gilt:

$$\mathfrak{S}[f_\alpha](s) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(\lambda) \, r_{\alpha,\lambda}(u)}{1+su} \, d\lambda \, du,$$

wobei das iterierte Integral absolut konvergiert. Daher kann die Integrationsreihenfolge vertauscht werden, und mit (4.31) folgt, daß

$$\mathfrak{S}[f_\alpha](s) = \int_0^\infty f(\lambda) \, \mathfrak{S}[r_{\alpha,\lambda}](s) \, d\lambda = \int_0^\infty \frac{f(\lambda)}{1+s^\alpha \lambda} \, d\lambda = \mathfrak{S}[f](s^\alpha).$$

Der Beweis von Teil (iii) benutzt die Gleichung (4.33) und ist ansonsten analog zu dem von Teil (ii). □

Nach diesen Vorbereitungen kann nun das Potenzgesetz von der Multiplikativität der Exponenten bewiesen werden.

Satz 4.19. Für $0 < \alpha < 1$ und $\beta > 0$ gilt: $\big((-A)^\alpha\big)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$.

Beweis. Sei $0 < \alpha < 1$ und $\beta > 0$. Ferner sei $m \in \mathbb{N}$, so daß $\delta^{(\beta)} \in \mathscr{C}_m$, und seien $\varepsilon > 0$, $\varphi \in F_\varepsilon^{\circledast m}$. Gezeigt wird zunächst, daß

$$\mathfrak{R}^\alpha\big(\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big)x = \begin{cases} (-A)^{\alpha\beta}\, \mathfrak{R}^\alpha(\varphi)x & \text{für } x \in X, \\ \mathfrak{R}^\alpha(\varphi)\,(-A)^{\alpha\beta}x & \text{für } x \in D\big((-A)^{\alpha\beta}\big). \end{cases} \tag{4.40}$$

Nach Lemma 4.15 und Lemma 4.18, (ii) gilt für alle $s > 0$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}\Big[\big(\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big)_\alpha\Big](s) &= \mathfrak{S}\big[\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big](s^\alpha) \\ &= (s^\alpha)^\beta \, \mathfrak{S}[\varphi](s^\alpha) = s^{\alpha\beta} \, \mathfrak{S}[\varphi_\alpha](s) \\ &= \mathfrak{S}\big[\Gamma(\alpha\beta+1)^{-1}\delta^{(\alpha\beta)} \circledast \varphi_\alpha\big](s). \end{aligned}$$

Da alle Distributionen in dieser Gleichung zu $\mathscr{A}$ gehören, liefert die Eindeutigkeit der Stieltjes-Transformation derartiger Distributionen die Faltungsgleichung

$$\big(\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big)_\alpha = \Gamma(\alpha\beta+1)^{-1}\delta^{(\alpha\beta)} \circledast \varphi_\alpha.$$

Mit Lemma 4.18, Teil (iii) erhält man

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^\alpha\big(\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big) &= \mathfrak{R}\big((\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi)_\alpha\big)\\ &= \mathfrak{R}\big(\Gamma(\alpha\beta+1)^{-1}\delta^{(\alpha\beta)} \circledast \varphi_\alpha\big).\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Folgerung 4.10, daß

$$\mathfrak{R}^\alpha\big(\Gamma(\beta+1)^{-1}\delta^{(\beta)} \circledast \varphi\big)x = \begin{cases}(-A)^{\alpha\beta}\,\mathfrak{R}(\varphi_\alpha)x & \text{für } x \in X,\\ \mathfrak{R}(\varphi_\alpha)\,(-A)^{\alpha\beta}x & \text{für } x \in D\big((-A)^{\alpha\beta}\big),\end{cases}$$

und mit der Gleichung $\mathfrak{R}(\varphi_\alpha) = \mathfrak{R}^\alpha(\varphi)$ ergibt sich dann die Aussage (4.40).

Aus (4.40) folgt durch Grenzübergang bezüglich φ, daß x genau dann zum Definitionsbereich von $(-A)^{\alpha\beta}$ gehört, wenn x im Definitionsbereich von $((-A)^\alpha)^\beta$ ist, und in diesem Fall gilt: $\big((-A)^\alpha\big)^\beta x = (-A)^{\alpha\beta}x$. □

Aus der Multiplikativität der Exponenten läßt sich die angekündigte Inklusionsaussage über die Definitionsbereiche der gebrochenen Potenzen folgern.

Satz 4.20. Für $0 < \beta < \alpha$ gilt die Inklusion

$$D\big((-A)^\alpha\big) \subset D\big((-A)^\beta\big). \tag{4.41}$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$ derart, daß $\alpha < m$. Zunächst sei $m = 1$. Um die Aussage des Satzes in diesem Fall zu zeigen, setze man $B := -(-A)^\alpha$. Da $\alpha < 1$, gehört B zur Klasse $\mathscr{K}$, und nach Satz 4.19 gilt:

$$(-B)^{\beta/\alpha} = \big((-A)^\alpha\big)^{\beta/\alpha} = (-A)^\beta. \tag{4.42}$$

Da $\beta/\alpha < 1$, liefert Proposition 4.14 die Inklusion $D(-B) \subset D\big((-B)^{\beta/\alpha}\big)$, und wegen (4.42) bedeutet dies gerade, daß $D\big((-A)^\alpha\big) \subset D\big((-A)^\beta\big)$.

Nun zum Fall, daß m eine beliebige natürliche Zahl ist. Da $\alpha/m < 1$, folgt wieder nach Satz 4.19, daß

$$\big((-A)^{\alpha/m}\big)^k = (-A)^{k\alpha/m} \qquad (k = 0, \dots, m).$$

Hieraus folgt weiter, daß

$$D\big((-A)^\alpha\big) \subset D\big((-A)^{k\alpha/m}\big) \qquad \text{für } k = 0, \dots, m. \tag{4.43}$$

Aus der skalaren Gleichung

$$s^\beta = \left(\frac{s^{\beta/m}}{1 + s^{\alpha/m}}\right)^m \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} s^{k\alpha/m} \qquad \forall\, s > 0$$

ergibt sich die Faltungsgleichung

$$\frac{\delta^{(\beta)}}{\Gamma(\beta+1)} = \left(\frac{\delta^{(\beta/m)}}{\Gamma(\beta/m+1)} \circledast r_{\alpha/m,1} \right)^{\circledast m} \circledast \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{\delta^{(k\alpha/m)}}{\Gamma(k\alpha/m+1)}, \tag{4.44}$$

wobei ${}^{\circledast m}$ für ein $\circledast$-Faltungsprodukt aus m identischen Faktoren steht. Bei Anwendung des Funktionalkalküls auf $\Gamma(\beta/m+1)^{-1}\delta^{(\beta/m)} \circledast r_{\alpha/m,1}$ ergibt sich der Operator

$$(-A)^{\beta/m}\,\mathfrak{R}(r_{\alpha/m,1}).$$

Der Operator $\mathfrak{R}(r_{\alpha/m,1}) = R(1; -(-A)^{\alpha/m})$ bildet den Raum X in den Definitionsbereich von $(-A)^{\alpha/m}$ ab, und wegen $0 < \beta/m < \alpha/m < 1$ ist dieser in $D\big((-A)^{\beta/m}\big)$ enthalten. Somit ist $(-A)^{\beta/m}\,\mathfrak{R}(r_{\alpha/m,1})$ auf ganz X definiert. Mit dieser Tatsache und mit (4.43) folgt, daß der Kalkül die Faltungsgleichung (4.44) für jedes $x \in D\big((-A)^{\alpha}\big)$ in die Operatorgleichung

$$(-A)^{\beta}x = \big((-A)^{\beta/m}\,\mathfrak{R}(r_{\alpha/m,1})\big)^{m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-A)^{k\alpha/m}x \tag{4.45}$$

übersetzt. Folgerung 4.10 zeigt insbesondere, daß $D\big((-A)^{\alpha}\big) \subset D\big((-A)^{\beta}\big)$. □

Aus Folgerung 4.10 und aus Satz 4.20 folgt schließlich die Additivität der Exponenten.

Satz 4.21. Seien $\alpha, \beta > 0$ und $x \in X$. Es gehört x genau dann zu $D\big((-A)^{\alpha+\beta}\big)$, wenn $x \in D\big((-A)^{\beta}\big)$ und $(-A)^{\beta}x \in D\big((-A)^{\alpha}\big)$. Ist dies der Fall, so gilt:

$$(-A)^{\alpha+\beta}x = (-A)^{\alpha}\,(-A)^{\beta}x. \tag{4.46}$$

Beweis. Seien $\alpha, \beta > 0$. Aus Lemma 4.15 und der Eindeutigkeit der $\mathfrak{S}$-Transformation für Distributionen aus $\mathscr{A}$ ergibt sich die Faltungsgleichung

$$\frac{\delta^{(\alpha)}}{\Gamma(\alpha+1)} \circledast \frac{\delta^{(\beta)}}{\Gamma(\beta+1)} = \frac{\delta^{(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}.$$

Hieraus ergibt sich mit Folgerung 4.10 die Gültigkeit der Gleichung (4.46) im Fall, daß beide Seiten wohldefiniert sind.

Ist $x \in D\big((-A)^{\beta}\big)$ und $(-A)^{\beta}x \in D\big((-A)^{\alpha}\big)$, so zeigt Folgerung 4.10, daß x in $D\big((-A)^{\alpha+\beta}\big)$ ist und daß die Gleichung (4.46) gilt.

Ist umgekehrt $x \in D\big((-A)^{\alpha+\beta}\big)$, so zeigt Satz 4.20, daß $x \in D\big((-A)^{\beta}\big)$. Wieder mit Folgerung 4.10 folgt, daß $(-A)^{\beta}x \in D\big((-A)^{\alpha}\big)$. □

4.2.3 Äquivalente Konstruktionen gebrochener Potenzen

Die Definition der gebrochenen Potenzen nach dem Vorbild des Schwartz'schen Funktionalkalküls ist durch die Verwendung der Filterkonvergenz relativ abstrakt formuliert. Andere Autoren benutzen konkretere Approximationen der gebrochenen Potenzen. So definieren H.W. Hövel-U. Westphal [17] die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, durch den Limes

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{C_\alpha} \int_0^N \lambda^{\alpha-1}\big(I - \lambda R(\lambda)\big)x\, d\lambda \tag{4.47}$$

für diejenigen $x \in X$, für die der Grenzwert existiert. Dabei ist $C_\alpha := \Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)$.

Es sei nun $\alpha \in (0,1)$ fest. Gezeigt werden soll, daß der durch (4.47) definierte lineare Operator mit der gebrochenen Potenz $(-A)^\alpha$, die durch Definition 4.13 gegeben ist, übereinstimmt. Dafür wird zunächst, analog zu [17, Prop. 2.5], eine Darstellung der gebrochenen Potenz bewiesen:

$$(-A)^\alpha \int_0^\infty u^{-1}\, p_\alpha\big(\varepsilon\, u^{-1}\big)\, u^{-1} R(u^{-1})x\, du = \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du. \tag{4.48}$$

Dabei sind $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ beliebig, und p_α ist die skalare Funktion, die in [17] als das Riemann-Liouville-Integral [37] der Funktion $(0,\infty) \ni w \mapsto \Gamma(\alpha)^{-1}(1-w)_+^{\alpha-1}$ von der Ordnung $1-\alpha$ definiert wurde, also

$$p_\alpha(u) := \frac{1}{C_\alpha} \int_0^u (u-w)^{-\alpha}\,(1-w)_+^{\alpha-1}\, dw, \qquad u > 0.$$

Nach [17, Lemma 2.2] ist die Funktion p_α Stieltjes-transformierbar, weil das Integral $\int_0^\infty u^{-1} p_\alpha(u)\, du$ (absolut) konvergiert, und für ihre gewöhnliche Stieltjes-Transformierte gilt:

$$s^\alpha\, S[p_\alpha](s) = s \int_0^1 \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda + s}\, d\lambda \qquad \forall\, s > 0. \tag{4.49}$$

Gemäß dem im Abschnitt 2.2 beschriebenen Prinzip wird in dieser Arbeit an Stelle der Funktion p_α die Funktion $(0,\infty) \ni u \mapsto u^{-1}\, p_\alpha(u^{-1})$ benutzt. Für den Beweis der Gleichung (4.48) ist es zweckmäßig, für jedes positive ε die Funktion $q_{\alpha,\varepsilon} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$q_{\alpha,\varepsilon}(u) := u^{-1}\, p_\alpha(\varepsilon\, u^{-1}) \qquad (u > 0)$$

einzuführen. Für die modifizierte Stieltjes-Transformierte der integrierbaren Funktion $q_{\alpha,\varepsilon}$ ergibt sich durch Substitution aus (4.49) die Beziehung

$$s^\alpha\,\mathfrak{S}[q_{\alpha,\varepsilon}](s) = \int_\varepsilon^\infty u^{-\alpha-1}\left(1-\frac{1}{1+su}\right)du \qquad \forall\, s>0. \tag{4.50}$$

Definiert man für jedes $\varepsilon > 0$ das Maß $\mu_{\alpha,\varepsilon}$ aus $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ durch

$$\langle \mu_{\alpha,\varepsilon},\, \chi\rangle := \int_\varepsilon^\infty u^{-\alpha-1}\big(\chi(0)-\chi(u)\big)\,du, \qquad \chi\in\mathscr{B}(\mathbb{R}),$$

so besagt die Gleichung (4.50) gerade, daß

$$\mathfrak{S}[\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{(\alpha)}]\cdot\mathfrak{S}[q_{\alpha,\varepsilon}] = \mathfrak{S}[\mu_{\alpha,\varepsilon}]. \tag{4.51}$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz für $\mathfrak{S}$ (Satz 3.36) soll hieraus die Faltungsgleichung

$$\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon} = \mu_{\alpha,\varepsilon} \tag{4.52}$$

gefolgert werden, und durch Anwendung des Funktionalkalküls soll schließlich (4.48) bewiesen werden. Dafür muß gezeigt werden, daß die Distributionen auf beiden Seiten der Gleichung (4.52) den Voraussetzungen von Satz 3.36 genügen.

Zunächst wird die Funktion $q_{\alpha,\varepsilon}$ auf der linken Seite von (4.52) untersucht. Das nächste Lemma zeigt insbesondere, daß $q_{\alpha,\varepsilon}$ die Bedingung (4.6) erfüllt und daß der Operator $\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})$ wohldefiniert ist.

Lemma 4.22. Sei $g\in\Lambda(0,\infty)$ und $\varepsilon>0$. Dann gilt:

$$\int_0^\infty\int_0^1 |g(u)\,u\,K[q_{\alpha,\varepsilon}](t,u)|\,dt\,du < \infty. \tag{4.53}$$

Das Faltungsprodukt $g\circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ ist eine Funktion aus $L^1(0,\infty)$, und für alle $x\in X$ gilt:

$$\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})\,\mathfrak{R}(g)x = \mathfrak{R}(g)\,\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})x = \int_0^\infty (g\circledast q_{\alpha,\varepsilon})(u)\,u^{-1}R(u^{-1})x\,du. \tag{4.54}$$

Beweis. Nach [17, Eq. (2.10)] besitzt die Funktion p_α die Darstellung

$$p_\alpha(u) = \begin{cases} C_\alpha^{-1}\int_0^u w^{-\alpha}(1-w)^{-1}\,dw & \text{falls } 0<u<1,\\ C_\alpha^{-1}\int_u^\infty w^{-\alpha}(w-1)^{-1}\,dw & \text{falls } u>1.\end{cases}$$

Dieser Darstellung entnimmt man, daß $\lim_{u\to 0+} p_\alpha(u) = \lim_{u\to\infty} p_\alpha(u) = 0$. Ferner ist p_α auf $(0,\infty)\setminus\{1\}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$p_\alpha{}'(u) = C_\alpha^{-1} u^{-\alpha}(1-u)^{-1} \qquad \forall\, u>0,\ u\neq 1.$$

Daher ist $q_{\alpha,\varepsilon}$ auf $(0,\infty)\setminus\{\varepsilon\}$ stetig differenzierbar, und für jedes $\eta\in(0,\varepsilon)$ gilt, daß

$$\sup\{u\,|q_{\alpha,\varepsilon}(u)|\ ;\ u>0,\ |u-\varepsilon|>\eta\}<\infty \tag{4.55}$$

und

$$\sup\left\{u^2\,|q_{\alpha,\varepsilon}{}'(u)|\ ;\ u>0,\ |u-\varepsilon|>\eta\right\}<\infty. \tag{4.56}$$

Aus (4.55) und (4.56) folgt für $0<\eta<\varepsilon/2$ die Ungleichung

$$\sup\left\{u\int_0^1 |K[q_{\alpha,\varepsilon}](t,u)|\,dt\,;\ u>0,\ |u-\varepsilon|\geq 2\eta\right\}<\infty. \tag{4.57}$$

Ist nun $g\in\Lambda(0,\infty)$, so ist g auf $(0,\infty)$ stetig und integrierbar. Wegen (4.57) ist die Aussage (4.53) bereits bewiesen, wenn gezeigt ist, daß

$$\int_{\varepsilon/2}^{2\varepsilon}\int_0^1 |K[q_{\alpha,\varepsilon}](t,u)|\,dt\,du<\infty. \tag{4.58}$$

Mit den beiden Substitutionen $v=u/\varepsilon$ und $w=v^{-1}$ folgt

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon/2}^{2\varepsilon}\int_0^1 |K[q_{\alpha,\varepsilon}](t,u)|\,dt\,du &= \int_{1/2}^2\int_0^1\left|\frac{p_\alpha(t\,v^{-1})-t^{-1}\,p_\alpha(t^{-1}v^{-1})}{t-1}\right| v^{-1}\,dt\,dv\\ &= \int_{1/2}^2\int_0^1 |K[p_\alpha](t,w)|\ w^{-1}\,dt\,dw,\end{aligned}$$

und das resultierende Integral konvergiert nach [17] (siehe dort die Ausführungen vor der Gleichung (2.12)).

Wegen (4.53) folgt aus Satz 3.24, daß $g\circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ eine Funktion aus $L^1(0,\infty)$ ist, und die Gleichung (4.54) ergibt sich aus Lemma 4.2. □

Lemma 4.23. Sei $\varepsilon>0$ und $\varphi\in C_c^\infty(0,\infty)$. Dann ist $\mu_{\alpha,\varepsilon}\circledast\varphi$ eine Funktion aus $L^1(0,\infty)$, und für alle $x\in X$ gilt:

$$\int_0^\infty(\mu_{\alpha,\varepsilon}\circledast\varphi)(u)\,u^{-1}R(u^{-1})x\,du=\mathfrak{R}(\varphi)\int_\varepsilon^\infty\frac{I-u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}}x\,du \tag{4.59}$$

Beweis. Es ist zweckmäßig, zunächst die Funktion $f_{\alpha,\varepsilon} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f_{\alpha,\varepsilon}(u) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < u \leq \varepsilon, \\ u^{-\alpha} & \text{für } u > \varepsilon \end{cases}$$

einzuführen. Mit ihrer Hilfe läßt sich das Maß $\mu_{\alpha,\varepsilon}$ darstellen durch

$$\langle \mu_{\alpha,\varepsilon},\, \chi\rangle = \int_0^\infty f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, \frac{\chi(0) - \chi(u)}{u}\, du \qquad \forall\, \chi \in \mathscr{B}(\mathbb{R}).$$

Es sei nun $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ fest. Der Wert der Faltung $\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi$ an der Stelle χ ist gegeben durch das absolut konvergente Doppelintegral

$$\begin{aligned}\langle \mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi,\, \chi\rangle &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, \varphi(v)\, \frac{\mathfrak{q}[\chi](0,v) - \mathfrak{q}[\chi](u,v)}{u}\, du\, dv \\ &= -\int_0^\infty \int_0^\infty f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, \varphi(v)\, \Delta[\chi](u,v)\, du\, dv,\end{aligned}$$

und diese Gleichung läßt sich dahingehend interpretieren, daß $\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi$ die $\odot$-Faltung von $f_{\alpha,\varepsilon}$ und φ ist. Dies gilt aber nur formal, weil $f_{\alpha,\varepsilon}$ nicht zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ gehört. Dennoch läßt sich mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 3.11 (vgl. auch den ausführlichen Beweis von Satz 3.24) die Beziehung

$$\langle \mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi,\, \chi\rangle = -\int_0^1 \int_0^\infty \big(f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, K[\varphi](t,u) + \varphi(u)\, K[f_{\alpha,\varepsilon}](t,u)\big)\chi(u)\, du\, dt \tag{4.60}$$

herleiten. Da die iterierten Integrale

$$\int_0^\infty \int_0^1 |f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, K[\varphi](t,u)|\; dt\, du$$

und

$$\int_0^\infty \int_0^1 |\varphi(u)\, K[f_{\alpha,\varepsilon}](t,u)|\; dt\, du$$

konvergieren, kann die Integrationsreihenfolge in (4.60) nach dem Satz von Tonelli vertauscht werden. Es folgt, daß $\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi$ eine Funktion aus $L^1(0,\infty)$ ist, die fast überall auf $(0,\infty)$ die Darstellung

$$(\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi)(u) = -f_{\alpha,\varepsilon}(u) \int_0^1 K[\varphi](t,u)\, dt - \varphi(u) \int_0^1 K[f_{\alpha,\varepsilon}](t,u)\, dt \tag{4.61}$$

besitzt. Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen.

Für den Beweis der Gleichung (4.59) sei $x \in X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}(\varphi) \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du = \\ = -\int_0^\infty \int_0^\infty f_{\alpha,\varepsilon}(u)\, \varphi(v)\, \frac{u^{-1}R(u^{-1}) - v^{-1}R(v^{-1})}{u - v} x\, du\, dv.\end{aligned}$$

Hieraus erhält man mit derselben Argumentation beim Beweis von (4.61) den Ausdruck

$$-\int_0^\infty \int_0^1 \big(f_{\alpha,\varepsilon}(u) K[\varphi](t,u) + \varphi(u)\, K[f_{\alpha,\varepsilon}](t,u)\big)\, u^{-1}R(u^{-1})x\, dt\, du,$$

und wegen (4.61) ist dies gerade $\int_0^\infty \big(\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi\big)(u)\, u^{-1}R(u^{-1})x\, du.$ □

Die Gleichung (4.48) wird in der folgenden Proposition, das als Analogon zum Teil (i) von Satz 4.6 angesehen werden kann, präzisiert. An die Stelle der Testfunktion ψ in Satz 4.6 tritt hier die integrierbare Funktion $q_{\alpha,\varepsilon}$.

Proposition 4.24. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in X$. Dann gilt:

(i) $\mathfrak{R}\big(q_{\alpha,\varepsilon}\big)x$ ist in $D\big((-A)^\alpha\big)$, und

$$(-A)^\alpha\, \mathfrak{R}\big(q_{\alpha,\varepsilon}\big)x = \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du. \tag{4.62}$$

(ii) Gehört x zu $D\big((-A)^\alpha\big)$, so gilt:

$$\mathfrak{R}\big(q_{\alpha,\varepsilon}\big)\, (-A)^\alpha x = \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du. \tag{4.63}$$

Beweis. Zunächst wird, wie bereits angekündigt, die Faltungsgleichung (4.52) gezeigt.

Nach (4.25) existieren ein $C_0 \in \mathbb{R}$ und Funktionen $f, g \in \Lambda(0,\infty)$, so daß

$$\delta^{(\alpha)} = f + C_0\, \delta + \delta' \circledast g.$$

Hieraus folgt, daß für jedes $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$ das Faltungsprodukt $\delta^{(\alpha)} \circledast \varphi$ eine Funktion aus $\Lambda(0,\infty)$ ist. Außerdem folgt die Gleichung

$$\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon} = f \circledast q_{\alpha,\varepsilon} + C_0\, q_{\alpha,\varepsilon} + \delta' \circledast (g \circledast q_{\alpha,\varepsilon}), \tag{4.64}$$

wobei die Faltungsprodukte $f \circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ und $g \circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ nach Lemma 4.22 Funktionen aus $L^1(0,\infty)$ sind. Lemma 3.31 zeigt, daß die Distribution $\delta' \circledast (g \circledast q_{\alpha,\varepsilon})$ zu $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ gehört, und damit ist auch $\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ in $\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Ist nun $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$, so folgt aus (4.64), daß

$$(\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon}) \circledast \varphi = (f \circledast \varphi) \circledast q_{\alpha,\varepsilon} + C_0\, \varphi \circledast q_{\alpha,\varepsilon} + \big((\delta' \circledast \varphi) \circledast g\big) \circledast q_{\alpha,\varepsilon}, \tag{4.65}$$

wobei $f \circledast \varphi$ und $(\delta' \circledast \varphi) \circledast g$ Funktionen aus $\Lambda(0,\infty)$ sind. Wieder mit Lemma 4.22 folgt, daß $(\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon}) \circledast \varphi$ in $L^1(0,\infty)$ ist.

Somit genügen die Distributionen $\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon}$ und $\mu_{\alpha,\varepsilon}$ den Voraussetzungen von Satz 3.36, und aus (4.51) folgt die Faltungsgleichung (4.52).

Nun zum Beweis von Teil (i) der Proposition. Dafür sei $x \in X$ und $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$. Nach Lemma 4.22 und Lemma 4.23 gilt dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}\big(\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{(\alpha)} \circledast \varphi\big)\,\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})x &= \mathfrak{R}\big(\Gamma(\alpha+1)^{-1}\delta^{(\alpha)} \circledast q_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi\big)x \\
&= \int_0^\infty \big(\mu_{\alpha,\varepsilon} \circledast \varphi\big)(u)\, u^{-1}R(u^{-1})x\, du \\
&= \mathfrak{R}(\varphi) \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du.
\end{aligned}$$

Der Grenzübergang bezüglich φ zeigt, daß $\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})x$ in $D\big((-A)^\alpha\big)$ ist und daß (4.62) gilt.

Zu (ii). Ist $x \in D\big((-A)^\alpha\big)$ und $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$, so gilt:

$$\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})\,\mathfrak{R}(\delta^{(\alpha)} \circledast \varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi) \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du.$$

Da der Operator $\mathfrak{R}(q_{\alpha,\varepsilon})$ stetig ist, ergibt sich hieraus durch Grenzübergang bezüglich φ die Gleichung (4.63). □

Wie zu Beginn dieses Abschnittes angekündigt wurde, erweist sich die Definition 4.13 als äquivalent zur Definition der gebrochenen Potenzen von H.W. Hövel-U. Westphal [17].

Satz 4.25. Sei $0 < \alpha < 1$ und $x \in X$. Es gehört x genau dann zu $D\big((-A)^\alpha\big)$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_\alpha} \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du$$

existiert, und in diesem Fall gilt:

$$(-A)^\alpha x = \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{C_\alpha} \int_\varepsilon^\infty \frac{I - u^{-1}R(u^{-1})}{u^{\alpha+1}} x\, du.$$

Beweis. Die Aussage des Satzes ergibt sich aus Proposition 4.24 und aus der Grenzwertaussage

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \mathfrak{R}\big(q_{\alpha,\varepsilon}\big)x = C_\alpha x \qquad \forall\, x \in X,$$

deren Beweis dem von [17, Eq. (2.15)] weitgehend entspricht. □

A.V. Balakrishnan konstruiert in [2] die gebrochenen Potenzen eines Operators $-A$, wobei A aus der Klasse $\mathscr{K}$ ist, wie folgt: Ist $m-1 \leq \alpha < m$ für eine natürliche Zahl m, dann ist $J^\alpha : D(A^m) \to X$ definiert durch

$$J^\alpha x := \begin{cases} -\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \lambda^{\alpha-m} R(\lambda)\, A^m x \, d\lambda & \text{falls } m-1 < \alpha < m, \\ (-A)^{m-1}x & \text{falls } \alpha = m-1. \end{cases}$$

Es läßt sich zeigen, daß J^α abschließbar ist, und Balakrishnan definiert die gebrochene Potenz von $-A$ als kleinste abgeschlossene Fortsetzung von J^α. Der resultierende Operator soll hier mit $\overline{J^\alpha}$ bezeichnet werden.

Es wird nun der Nachweis erbracht, daß die von Balakrishnan konstruierte gebrochene Potenz eines Operators $-A$ aus $\mathscr{K}$ mit der gebrochenen Potenz $(-A)^\alpha$ im Sinn der Definition 4.13 übereinstimmt, wenn $D(A)$ dicht in X ist.

Hierfür sei $m \in \mathbb{N}$ und $m-1 < \alpha < m$. Nach Proposition 4.14 stimmen $\overline{J^\alpha}$ und $(-A)^\alpha$ auf $D(A^m)$ überein. Somit ist $(-A)^\alpha$ eine abgeschlossene Fortsetzung von J^α, und die Minimalität von $\overline{J^\alpha}$ ergibt, daß $D\big(\overline{J^\alpha}\big) \subset D\big((-A)^\alpha\big)$ und $(-A)^\alpha x = \overline{J^\alpha} x$ für alle $x \in D\big(\overline{J^\alpha}\big)$.

Sei nun $x \in D\big((-A)^\alpha\big)$ und $\varphi \in C_c^\infty(0,\infty)$. Dann gehört $\mathfrak{R}(\varphi)x$ zu $D\big((-A)^{\alpha+1}\big)$ und damit auch zu $D(A^m)$. Da $(-A)^\alpha$ und $\overline{J^\alpha}$ auf $D(A^m)$ überstimmen, gilt dann:

$$\overline{J^\alpha}\, \mathfrak{R}(\varphi)x = (-A)^\alpha\, \mathfrak{R}(\varphi)x = \mathfrak{R}(\varphi)\,(-A)^\alpha x.$$

Da der Operator $\overline{J^\alpha}$ abgeschlossen ist, zeigt der Grenzübergang bezüglich φ, daß $x \in D\big(\overline{J^\alpha}\big)$ und $\overline{J^\alpha} x = (-A)^\alpha x$. Somit ist gezeigt, daß $\overline{J^\alpha} = (-A)^\alpha$.

Da Balakrishnans Definition der gebrochenen Potenzen äquivalent zu den Konstruktionen der gebrochenen Potenzen von H. Komatsu [20] und F. Hirsch [14] ist, sind alle genannten Konstruktionen äquivalent zur Definition 4.13. Ist A der infinitesimale Erzeuger einer gleichmäßig beschränkten Halbgruppe der Klasse (C_0), so bestehen weitere Äquivalenzen zu den Konstruktionen der gebrochenen Potenzen von U. Westphal [45, 46].

Symbolverzeichnis

Symbol	Seite	Erläuterung
$\mathscr{A}$	38	
$\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$	8	
$\dot{\mathscr{B}}(\mathbb{R}^n)$	9	
$\mathscr{B}_1(\mathbb{R})$	24	
$C^\infty(G)$		die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit Träger in $G \subset \mathbb{R}^n$
$C_c^\infty(G)$		die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $G \subset \mathbb{R}^n$
$\mathscr{C}$	46	
$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$		$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der üblichen Topologie
$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$		der topologische Dualraum von $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$
$\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$	9	
$\mathscr{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$	10	
δ	11	das Dirac-Maß mit Träger $\{0\}$
$\delta^{(\alpha)}$	54	
Δ	17	
Δ^2	21	
$\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$		$C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit der üblichen Topologie
$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$		der topologische Dualraum von $\mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$
$\mathfrak{F}^{\circledast n}$	47	
I		der Identitätsoperator
K	22	
$\mathscr{K}$	42	
$L^1(G)$		die Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^n$, die außerhalb G verschwinden
$\Lambda(0,\infty)$	34	
$\mathfrak{m}$	24	
$\mu_{\alpha,\varepsilon}$	65	
$\mathbb{N}$		$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Literaturverzeichnis

[1] A.V. Balakrishnan, *An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **91** (1959), 330–353.

[2] A.V. Balakrishnan, *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*, Pacific J. Math. **10** (1960), 419–437.

[3] C. Berg, K. Boyadzhiev and R. deLaubenfels, *Generation of generators of holomorphic semigroups*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **55** (1993), 246–269.

[4] S. Bochner, *Diffusion equation and stochastic processes*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **35** (1949), 368–370.

[5] R. deLaubenfels, *Functional calculi, semigroups of operators, and Hille-Yosida operators*, Houston Journal of Mathematics **22** (1996), no. 4, 787–805.

[6] P. Dierolf and J. Voigt, *Convolution and S'-convolution of distributions*, Collect. Math. **29** (1978), 185–196.

[7] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear Operators*, Vol. I, John Wiley and Sons, New York 1958.

[8] R. deLaubenfels, F. Yao and S. Wang, *Fractional powers of operators of regularized type*, J. Math. Anal. Appl. **199** (1996), 910–933.

[9] J. Faraut, *Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitesimaux de semi-groupes d'opérateurs*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **20** (1970), 235–301.

[10] W. Feller, *On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them*, Comm. Sém. Math. Univ. Lund, (1952), Tome Supplémentaire, 72–81.

[11] A. Friedman, *Generalized Functions and Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1963.

[12] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen)* I, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960; II, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.

[13] E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 31, Providence, R.I., 1957.

[14] F. Hirsch, *Intégrales de résolvantes et calcul symbolique*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **22**, 4 (1972), 239–264.

[15] F. Hirsch, *Extension des propriétés des puissances fractionnaires*, Seminaire de théorie du potentiel Univ. Paris, Lecture Notes 563, Springer, Berlin, 1976.

[16] F. Hirsch, *Domaines d'Opérateurs Représentés comme Intégrales de Résolvantes*, J. Funct. Anal. **23** (1976), 199–217.

[17] H.W. Hövel and U. Westphal, *Fractional powers of closed operators*, Studia Math. **42** (1972), 177–194.

[18] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions Vol. I*, Addison-Wesley, Reading, 1966.

[19] T. Kato, *Fractional powers of dissipative operators*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 246–274; II, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 242–248.

[20] H. Komatsu, *Fractional powers of operators*, Pacific J. Math. **19** (1966), 285–346, II: *Interpolation spaces*, Pacific J. Math.**21** (1967), 89–111, III: *Negative powers*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 205–220, IV: *Potential operators*, J. Math. Soc. Japan **21** (1969), 221–228, V: *Dual operators*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I A, **17**(1970), 373–396, VI: *Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **19** (1972), 1–63.

[21] M.A. Krasnosel'skiĭ and P.E. Sobolevskiĭ, *Fractional powers of operators acting in Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **129** (1959), 499–502 (Russian).

[22] W. Lamb, *Fractional powers of operators defined on a Fréchet space*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **27** (1984), 165–180.

[23] O.E. Lanford and D.W. Robinson, *Fractional powers of generators of equicontinuous semigroups and fractional derivatives*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **46** (1989), 473–504.

[24] J.L. Lions et J. Peetre, *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **19** (1964), 5–68.

[25] C. Martínez, M. Sanz and L. Marco, *Fractional powers of operators*, J. Math. Soc. Japan **40** (1988), no. 2, 331–347.

[26] C. Martínez, M. Sanz and V. Calvo, *Fractional powers of non-negative operators in Fréchet spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci. **12** (1989), 309–320.

[27] C. Martínez and M. Sanz, *Fractional Powers of Non-densely Defined Operators*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **18** (1991), no. 2, 443–454.

[28] C. Martínez and M. Sanz, *Spectral Mapping Theorem for Fractional Powers in Locally Convex Spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **24** (1997), no. 4, 685–702.

[29] C. Martínez and M. Sanz, *An Extension of the Hirsch Symbolic Calculus*, Potential Analysis **9** (1998), no. 4, 301–319.

[30] C. Martínez, M. Sanz and F. Periago, *Distributional fractional powers of the Laplacian. Riesz potentials.* Studia Math. **135** (1999), no. 3, 253–271.

[31] E. Nelson, *A functional calculus using singular Laplace integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958), 400–413.

[32] R.S. Phillips, *Spectral theory for semi-groups of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 393–415.

[33] R.S. Phillips, *On the generation of semi-groups of linear operators*, Pacific J. Math. **2** (1952), 343–369.

[34] R.S. Phillips, *Semi-groups of operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 16–33.

[35] S. Pilipović, B. Stanković and A. Takači, *Asymptotic behaviour and Stieltjes transformation of distributions*, Teubner-Texte zur Mathematik 116, Teubner, Leipzig, 1990.

[36] N.P. Romanoff, *On one parameter groups of linear transformations I*, Ann. of Math. **48**, (1947), 216-233.

[37] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[38] R.L. Schilling, *Subordination in the sense of Bochner and a related functional calculus*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A **64** (1998), 368–396.

[39] L. Schwartz, *Lectures on Mixed Problems in Partial Differential Equations and Representations of Semi-Groups*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1958.

[40] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[41] H.M. Srivastava and V.K. Tuan, *A new convolution theorem for the Stieltjes transform and its application to a class of singular integral equations*, Arch. Math. **64** (1995), 144–149.

[42] J.D. Stafney, *Integral representations of fractional powers of infinitesimal generators*, Illinois J. Math. **20** (1976), 124–133.

[43] B. Straub, *Fractional powers of operators with polynomially bounded resolvent and the semigroups generated by them*, Hiroshima Math. J. **24** (1994), 529–548.

[44] A.E. Taylor *Spectral theory of closed distributive operators*, Acta Math. **84** (1950), 189–224.

[45] U. Westphal, *Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger*, Compositio Math. **22** (1970), 67–103; *Teil II: Gruppenerzeuger*, Compositio Math. **22** (1970), 104–136.

[46] U. Westphal, *An approach to fractional powers of operators via fractional differences*, Proc. London Math. Soc. **(3)29** (1974), 557–576.

[47] U. Westphal, *A generalized version of the Abelian mean ergodic theorem with rates for semigroup operators and fractional powers of infinitesimal generators*, Results Math. **34** (1998), no. 3/4, 381–394.

[48] U. Westphal, *Fractional powers of infinitesimal generators of semigroups*, in: *Applications of fractional calculus in physics*, ed. by R. Hilfer, World Scientific, Singapore, 2000.

[49] D.V. Widder, *The Laplace Transform*, Princeton. Math. Ser. 6, 1941.

[50] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin, ^{6}1980.

[51] A.H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis, An Introduction to Generalized Functions, with Applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.

Lebenslauf

Name	Thomas Schwartz
Geburtsdatum	11.8.1968
Geburtsort	Hannover
Vater	Gottfried Schwartz
Mutter	Helga Schwartz, geb. Hicken
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig

10/1987–3/1988	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Hannover
4/1988–11/1989	Zivildienst an der Medizinischen Hochschule Hannover, Beurlaubung vom Studium
11/1989–12/1995	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Hannover
12/1995	Diplom
4/1996–6/2000	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Universität Hannover
6/2000	Promotion

Hannover, im Juli 2000