

Coxeter–Dynkin–Diagramme einiger determinantieller Raumkurvensingularitäten

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -
genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Christian Alpert
geboren am 29.6.1970 in Alfeld (Leine)

2000

Referent:	Prof. Dr. W. Ebeling, Hannover
Korreferent:	Prof. Dr. D. van Straten, Mainz
Tag der Promotion:	5.5.2000
Datum der Veröffentlichung	Mai 2000

Zusammenfassung

Wir übertragen die von Ebeling für vollständige Durchschnitte gegebene Definition der Monodromiegruppe und der Coxeter–Dynkin–Diagramme auf reduzierte Kurvensingularitäten $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$.

Für Raumkurvensingularitäten $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$, deren Ideal (in geeigneten Koordinaten) von der Form $(f(x, y), xz, yz)$ ist, wobei f eine isolierte Kurvensingularität $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ mit $\mu(C) \geq 2$ definiert, beweisen wir einen Struktursatz für die Diskriminante der semi–universellen Deformation. Sodann zeigen wir, daß $(X, 0)$ μ –konstant in einen vollständigen Durchschnitt $(Y, 0)$ deformiert und daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von $(X, 0)$ aus einem ebensolchen von $(Y, 0)$ sowie aus einer isolierten Ecke besteht.

Anschließend berechnen wir für einige Raumkurvensingularitäten der Multiplizität drei Coxeter–Dynkin–Diagramme. Zu diesem Zweck verwenden wir die von A’Campo und Gusein–Zade entwickelte Methode der reellen Morsifikation, erweitert um den Tripelpunkt.

Schlagwörter: Singularitäten, Monodromiegruppen, Deformationen, Coxeter-Dynkin-Diagramme

Abstract

Based on Ebeling’s definition for isolated complete intersection singularities we define the monodromy group and Coxeter-Dynkin-diagrams for any reduced curve singularity $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$.

If in a suitable coordinate system the ideal defining $(X, 0)$ is of the form $(f(x, y), xz, yz)$, where f defines a plane curve singularity $(C, 0)$ with $\mu(C) \geq 2$, we prove a structure theorem for the discriminant of the semi-universal deformation. Furthermore we prove that $(X, 0)$ deforms μ –constantly into an isolated complete intersection singularity $(Y, 0)$ and that a Coxeter-Dynkin diagram of $(X, 0)$ consists of a Coxeter-Dynkin diagram of $(Y, 0)$ together with one additional vertex not connected with any other vertex.

We calculate Coxeter-Dynkin diagrams for some space curve singularities of multiplicity three. To this end we use the method of real morsification, introduced by A’Campo and Gusein-Zade in order to study plane curve singularities, extended to triple points.

Keywords: singularities, monodromy groups, deformations, Coxeter-Dynkin diagrams

Einleitung

Es sei $f : (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ein holomorpher Funktionskeim, der einen Keim einer Hyperfläche $(f^{-1}(0), 0)$ mit einem isolierten singulären Punkt im Ursprung definiert. Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ hinreichend klein gewählt, so ist $\bar{X}_\delta := f^{-1}(\delta) \cap \bar{B}_\varepsilon(0)$ für $\delta \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\delta| \ll \varepsilon$ eine $2n$ -dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand, die sogenannte *Milnorfaser*; dabei bezeichne $B_\varepsilon(0)$ eine offene Kugel in \mathbb{C}^{n+1} vom Radius ε und mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Es ist wohlbekannt (vgl. [Mi]), daß die Milnorfaser homotopieäquivalent zu einem Bouquet von μ n -Sphären ist – dabei ist μ die *Milnorzahl*. Die Milnorzahl gibt auch die Anzahl der quadratischen Singularitäten an, in die die Singularität von f im Ursprung nach einer generischen Deformation zerfällt. Die sogenannten *ausgezeichneten Basen* der Homologiegruppe $H_n(\bar{X}_\delta; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu$ erhält man durch die Wahl gewisser Wegesysteme, welche die μ verschiedenen kritischen Werte einer generischen Deformation mit dem nicht-kritischen Wert δ verbinden. Die Basiselemente einer ausgezeichneten Basis heißen *verschwindende Zykel*. Die Schnittzahlen dieser Zykel definieren auf $H_n(\bar{X}_\delta; \mathbb{Z})$ eine Bilinearform. Man nennt $H_n(\bar{X}_\delta; \mathbb{Z})$ versehen mit dieser Bilinearform das *Milnorgitter* der Singularität $(f^{-1}(0), 0)$. Ein *Coxeter–Dynkin–Diagramm* der Singularität $(f^{-1}(0), 0)$ ist im wesentlichen eine graphische Darstellung der Schnittzahlen der verschwindenden Zykeln. Solche Diagramme sind von besonderem Interesse beim Studium der Topologie isolierter Singularitäten.

Isolierte Hyperflächensingularitäten besitzen eine semi-universelle Deformation mit glattem Basisraum S . Die Diskriminante $D \subset S$, d.h. die Menge von Punkten in S , über denen singuläre Fasern liegen, ist eine irreduzible Hyperfläche. Das Bild der natürlichen Darstellung der Fundamentalgruppe von $S - D$ in der Automorphismengruppe des Milnorgitters heißt die *Monodromiegruppe* der Singularität $(f^{-1}(0), 0)$. Mit Hilfe eines Coxeter–Dynkin–Diagramms der Singularität $(f^{-1}(0), 0)$ läßt sich die Monodromiegruppe bestimmen.

Die Monodromiegruppen isolierter Hyperfächensingularitäten sind von A'Campo, Brieskorn, Ebeling, Gabrielov, Gusein-Zade und anderen ausführlich untersucht worden, vgl. [AGV], [A'C], [Br1], [Br2], [Eb1], [Ga], [G-Z2].

N. A'Campo ([A'C]) und S.M. Gusein-Zade ([G-Z1]) haben für ebene Kurvensingularitäten, die durch einen geeignet gewählten holomorphen Funktionskeim $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ gegeben werden, eine schöne anschauliche Methode entwickelt, die sogenannte *reelle Morsifikation*, mit deren Hilfe Coxeter-Dynkin-Diagramme berechnet werden können. Insbesondere gestattet diese Methode die Berechnung von Coxeter-Dynkin-Diagrammen für die *einfachen* ebenen Kurvensingularitäten A_k, D_k, E_6, E_7 und E_8 , siehe [Arn] oder Satz A.1.

Ebeling [Eb2] hat 1987 in seiner Habilitationsschrift das Studium dieser Invarianten auf vollständige Durchschnitte erweitert. Insbesondere werden in [Eb2] für alle einfachen Kurvensingularitäten in \mathbb{C}^3 , die ein vollständiger Durchschnitt sind (siehe Giusti, [Gi], oder Satz A.2), Coxeter-Dynkin-Diagramme angegeben, bis auf die Singularitäten Z_9 und Z_{10} . In [EG1] haben Ebeling und Gusein-Zade diese Lücke geschlossen und mit Methoden der reellen Morsifikation auch für Z_9 und Z_{10} Coxeter-Dynkin-Diagramme erstellt.

Ebenfalls von Ebeling und Gusein-Zade ([EG2]) stammt eine Berechnungsmöglichkeit für Coxeter-Dynkin-Diagramme von vollständigen Durchschnitten in \mathbb{C}^3 , die Stabilisierung von fetten Punkten in \mathbb{C}^2 sind. Die Konstruktion beruht auch hier auf Methoden der reellen Morsifikation.

Man kann das Milnorgitter, die Monodromiegruppe sowie Coxeter-Dynkin-Diagramme auch für beliebige (reduzierte) Kurvensingularitäten $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ definieren. Solche Singularitäten (allgemeiner: Cohen-Macaulay-Singularitäten der Kodimension 2) sind nach dem Satz von Hilbert und Burch (vgl. [Art2]) *determinantiell*, d.h. ihr Ideal wird von den maximalen Minoren einer $t \times (t+1)$ -Matrix holomorpher Funktionen erzeugt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, für einige ausgewählte Kurvensingularitäten in \mathbb{C}^3 , die keine vollständigen Durchschnitte sind, Coxeter-Dynkin-Diagramme zu berechnen.

A. Frühbis hat in ihrer Diplomarbeit gezeigt, daß es neben den Singularitäten aus Giustis Liste noch weitere einfache Kurvensingularitäten in \mathbb{C}^3 gibt, die keine vollständigen Durchschnitte sind. Diese Singularitäten sind in [Fr] aufgelistet (siehe auch Satz A.3); ihre Gleichungen werden durch die 2×2 -Minoren einer 2×3 -Matrix gegeben. Da sich unser spezielles Augenmerk auf ebendiese einfachen Singularitäten richtet, wollen wir uns in dieser Arbeit auf Kurvensingularitäten beschränken, deren Ideal von den maximalen Minoren einer 2×3 -Matrix erzeugt wird. Desweiteren sei an dieser Stelle erwähnt, daß das Ideal jedes Kurvenkeims $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ mit $\text{embdim}(X) = 3$ und $\text{mult}(X) = 3$ ebenfalls von den maximalen Minoren einer 2×3 -Matrix erzeugt wird, vgl. [JS1].

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt:

Das erste Kapitel ist den (numerischen) Invarianten einer reduzierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ gewidmet. Wir zitieren einige grundlegende Resultate, die den Arbeiten [BG] und [Gr1] entnommen sind.

Ferner stellen wir eine Berechnungsmöglichkeit für die δ -Invariante einer reduzierten Kurvensingularität $(X, 0)$ bereit; diese beruht auf der Idee, die Kurvensingularität $(X, 0)$ generisch in eine Ebene zu projizieren und dann $\delta(X)$ aus der δ -Invariante der (durch das Projizieren entstandenen) ebenen Kurvensingularität abzuleiten, vgl. [MP].

Im zweiten Kapitel werden wir für reduzierte Kurvensingularitäten in $(\mathbb{C}^3, 0)$ feinere Invarianten definieren.

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,0}$ einer isolierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ ist ein Cohen–Macaulay–Ring. Deswegen ist $(X, 0)$ im Fall $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension zwei. Wie bereits erwähnt, sind diese Singularitäten nach dem Satz von Hilbert und Burch determinantiell.

Die Strukturaussage, daß das Ideal von $(X, 0)$ von den maximalen Minoren einer $t \times (t + 1)$ -Matrix M erzeugt wird, gilt nicht nur für die Singularität selbst, sondern auch für jede ihrer Deformationen, d.h. jede Deformation von $(X, 0)$ erhält man durch Stören der Matrix M . Auf diese Weise erhält man auch die semi-universelle Deformation von $(X, 0)$, deren Basisraum glatt ist.

Nach Theorem 2 in [Sch] sind Cohen–Macaulay–Singularitäten der Kodimension zwei, deren Dimension kleiner als vier ist, glättbar. Aus diesem Grund besitzt $(X, 0)$ eine Milnorfaserung, d.h. die Faser X_s über einem allgemeinen Punkt eines Repräsentanten $p : \mathcal{X} \rightarrow S$ der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ ist glatt. Die Diskriminante $D \subset S$ der semi-universellen Deformation ist – wie bei den isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte – eine Hyperfläche (vgl. [Str]), die i. a. allerdings nicht mehr irreduzibel ist. Diese Tatsache gestattet es, die Definition der Monodromiegruppe und die der Coxeter–Dynkin–Diagramme, die Ebeling in [Eb2] für vollständige Durchschnitte gegeben hat, auf isolierte Raumkurvensingularitäten $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ auszudehnen. Außerdem definieren wir in Anlehnung an [Eb2] das Milnorgitter, verschwindende Zykel, stark- bzw. schwach ausgezeichnete Wegesysteme, sowie stark- bzw. schwach ausgezeichnete Systeme von verschwindenden Zykeln, die solchen Wegesystemen zugeordnet sind.

Abschließend wird im zweiten Kapitel die Frage diskutiert, wann ein stark- bzw. ein schwach ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln ein Erzeugendensystem des Milnorgitters bildet.

In Kapitel 3 studieren wir “Wedge–Singularitäten”. Unter diesem Begriff wollen wir Raumkurvensingularitäten $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ verstanden wissen, die aus einer isolierten Kurvensingularität $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ durch Vereinigung mit einer transversalen Geraden L hervorgehen. Wird die ebene Kurvensingularität $(C, 0)$ etwa durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, dann wird die Wedge–Singularität $X := C \vee L$ durch das Ideal $(f(x, y), xz, yz)$ beschrieben; hier identifizieren wir die (transversale) Gerade L mit der z –Achse.

Ist $(C, 0)$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt, der etwa durch die Gleichung $xy = 0$ gegeben wird, so ist $X = A_1 \vee L$ ein gewöhnlicher Tripelpunkt. In [BG] wurde bereits gezeigt, daß die Monodromiegruppe eines Tripelpunktes trivial ist; ein Coxeter–Dynkin–Diagramm besteht in diesem Fall aus drei isolierten Ecken.

In der allgemeinen Situation, in welcher $(C, 0)$ weder regulär noch quadratisch ist, beweisen wir zunächst einen Struktursatz für die Diskriminante der semi–universellen Deformation. Es zeigt sich, daß die Diskriminante aus zwei irreduziblen Komponenten besteht. Anschließend zeigen wir, daß $(X, 0)$ μ –konstant in einen vollständigen Durchschnitt $(Y, 0)$ deformiert. Wir beenden das dritte Kapitel mit dem Beweis der Behauptung, daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von $(X, 0)$ aus einem ebensolchen von $(Y, 0)$ sowie aus einer isolierten Ecke besteht (Satz 3.8). Am Beispiel der Wedge–Singularitäten zeigt sich, daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm einer isolierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ nicht mehr zusammenhängend zu sein braucht – im Gegensatz zu den isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte.

Das Kapitel 4 befaßt sich mit dem Tripelpunkt. Es dient als Vorbereitung für die Berechnung von Coxeter–Dynkin–Diagrammen mit Hilfe (einer geeigneten Version) der reellen Morsifikation. Wir betrachten reelle Milnorfasern des Tripelpunktes und beschreiben dessen (drei) verschwindende Zyklen. Man kann den Inhalt des vierten Kapitels als Verallgemeinerung der Behandlung der reellen Doppelpunkte (der Sattelpunkte) bei der reellen Morsifikation ebener Kurvensingularitäten auffassen, vgl. [A’C] und [G-Z1].

In Kapitel 5 berechnen wir für einige Raumkurvensingularitäten der Multiplizität drei Coxeter–Dynkin–Diagramme. Zu diesem Zweck bemühen wir die von N. A’Campo und S. M. Gusein–Zade entwickelte Methode der reellen Morsifikation, erweitert um den Tripelpunkt (Kapitel 4).

Der Abschnitt 5.1 befaßt sich mit Kurvensingularitäten, deren Ideal von den maximalen Minoren einer Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & g(x, y) & y \end{pmatrix} \text{ mit } g \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^2$$

erzeugt wird. Solchen Kurvensingularitäten ist gemein, daß in ihren Deformationen höchstens ein Tripelpunkt auftreten kann.

In Abschnitt 5.2 studieren wir eine Serie von Singularitäten, deren Präsentationsmatrix die folgende Bauart besitzt:

$$\begin{pmatrix} y & z & x^l \\ x^l - z & 0 & y \end{pmatrix} \text{ mit } l \geq 2.$$

Im Gegensatz zu den in 5.1 studierten Singularitäten tritt hier die Schwierigkeit auf, daß einige kritische Werte nicht reell sind und die dazu gehörigen verschwindenden Zykel nicht durch einen reellen Zykel repräsentiert werden können.

Das abschließende sechste Kapitel ist in zwei Abschnitte unterteilt. In Abschnitt 6.1 sollen am Beispiel der (einfachen) Singularitäten $J_{2,1}(2)$ und $E_{12}(2)$ (vgl. [Fr] oder Satz A.3) einige Schwierigkeiten aufgezeigt werden, die bei der Berechnung von Coxeter–Dynkin–Diagrammen auftreten können.

In Abschnitt 6.2 wollen wir Satz 3.8 anhand der Singularitäten $D_4 \vee L$ und $E_6 \vee L$ mit Methoden der reellen Morsifikation bestätigen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Gusein-Zade für fruchtbare Gespräche während seines Besuches in Hannover im Sommer 1997 bedanken. Herrn Prof. Dr. van Straten danke ich für die Bantwortung einiger wichtiger Fragen per e-mail.

Desweiteren bedanke ich mich bei Herrn Dipl.-Math. Michael Friedland, Herrn Dr. Michael Lönne und Herrn Dr. Jeroen Spandaw für viele nützliche Anregungen und Hinweise, mit denen sie zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Ebeling, der das Thema dieser Arbeit anregte und der mich während der Zeit ihrer Fertigstellung betreute und ermutigte. Auch für seine langjährige Unterstützung möchte ich ihm danken.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Einige Grundlagen	9
1.1 Invarianten reduzierter Kurvensingularitäten	9
1.2 Kurvensingularitäten in $(\mathbb{C}^3, 0)$	13
1.2.1 Deformationen	14
2 Die Monodromiegruppe und Coxeter–Dynkin–Diagramme	15
2.1 Die Milnorfaserung	15
2.2 Die grundlegende Konstruktion	17
2.2.1 Verschwindende Zykel und die Monodromiegruppe	18
2.2.2 Definition der Coxeter–Dynkin–Diagramme	21
2.2.3 Die Bedeutung der Gruppe $H_1(X_t; \mathbb{Z})$	23
3 Wedge–Singularitäten	25
3.1 Ein Satz über die Struktur der Diskriminante	26
3.1.1 Der Tripelpunkt	28
3.1.2 Der allgemeine Fall	29
3.2 Monodromiegruppen	34
4 Der Tripelpunkt	38
5 Raumkurven der Multiplizität drei	46
5.1 Die einfachste Situation: $n(X) = 1$	47
5.1.1 Die Berechnung der Schnittzahlen	52
5.1.2 Beispiele	56
5.2 Die Serie $J_{l,0}(l)$	60

6	Abschließende Bemerkungen	81
6.1	Kurvensingularitäten der Multiplizität drei	81
6.1.1	$J_{2,1}(2)$	81
6.1.2	$E_{12}(2)$	84
6.2	Wedge-Singularitäten: Zwei Beispiele	90
6.2.1	$D_4 \vee L$	90
6.2.2	$E_6 \vee L$	97
A	Einfache Kurvensingularitäten	102
	Literaturverzeichnis	104

Kapitel 1

Einige Grundlagen

1.1 Invarianten reduzierter Kurvensingularitäten

Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine reduzierte Kurvensingularität. Den lokalen Ring bezeichnen wir wie üblich mit $\mathcal{O}_{X,0}$. Es sei $r(X) = r(X, 0)$ die Anzahl der Zweige von $(X, 0)$, und $\mathfrak{n} : (\tilde{X}, \mathfrak{n}^{-1}(0)) \rightarrow (X, 0)$ sei die Normalisierung von $(X, 0)$. Ist $(X, 0) = \bigcup_{i=1}^r (X_i, 0)$ die Zerlegung von $(X, 0)$ in irreduzible Komponenten, so gilt $(\tilde{X}, \mathfrak{n}^{-1}(0)) = \bigsqcup_{i=1}^r (\mathbb{C}, 0)$ und $\mathfrak{n}_* \mathcal{O}_{\tilde{X}, \mathfrak{n}^{-1}(0)} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}\{t_i\}$. Die δ -Invariante von $(X, 0)$ ist

$$\delta(X) = \delta(X, 0) := \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{n}_* \mathcal{O}_{\tilde{X}, \mathfrak{n}^{-1}(0)} / \mathcal{O}_{X,0}.$$

In [BG] wird für eine beliebige reduzierte Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ die *Milnorzahl*

$$\mu(X) = \mu(X, 0) := \dim_{\mathbb{C}} (\omega_{X,0} / d\mathcal{O}_{X,0})$$

definiert. Dabei ist $\omega_{X,0} := \text{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}}^{n-1}(\mathcal{O}_{X,0}, \Omega_{\mathbb{C}^n,0}^n)$ der dualisierende Modul. Es wird gezeigt, daß für Kurvensingularitäten, die ein vollständiger Durchschnitt sind, die gegebene Definition mit der klassischen übereinstimmt. Insbesondere werden die in den nächsten zwei Sätzen aufgeführten fundamentalen Aussagen bewiesen, die die Bezeichnung *Milnorzahl* rechtfertigen.

Satz 1.1 (vgl. 1.2.1, 1.2.4 in [BG]) *Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine reduzierte Kurvensingularität. Dann gilt:*

1. $\mu(X) = 2\delta(X) - r(X) + 1$.
2. $\mu(X) = 0 \iff (X, 0)$ ist regulär.
3. $\mu(X) \geq \delta(X)$ und $\mu(X) \geq \text{embdim}(X) - 1$
4. Ist eine der unter 3. aufgeführten Ungleichungen eine Gleichung, dann auch die andere, und $(X, 0)$ ist ein gewöhnlicher n -fach-Punkt.

Satz 1.2 (vgl. 4.2.2, 4.2.4, 6.1.7 in [BG]) Es sei $p : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (D, 0)$ eine flache Familie reduzierter Kurven und $p : \mathfrak{X} \rightarrow D$ ein guter Repräsentant. Dann gilt mit $X_t := p^{-1}(t)$, $\mu(X_t) := \sum_{x \in X_t} \mu(X_t, x)$ und $\delta(X_t) := \sum_{x \in X_t} \delta(X_t, x)$ für alle $t \in D$:

1. X_t ist zusammenhängend
2. $\mu(X_0) - \mu(X_t) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X_t, \mathbb{C})$
3. Die Funktionen $D \ni t \mapsto \mu(X_t)$ und $D \ni t \mapsto \delta(X_t)$ sind oberhalbstetig.
4. Folgende Aussagen sind äquivalent:
 - (a) $\mu(X_t)$ ist konstant für alle t ,
 - (b) $\delta(X_t)$ und $\sum_{x \in X_t} (r(X_t, x) - 1)$ sind konstant für alle t ,
 - (c) $H^1(X_t, \mathbb{C}) = 0$ für alle t ,
 - (d) X_t ist zusammenziehbar für alle t .

In der Regel wird man die δ -Invariante einer *irreduziblen* Kurvensingularität direkt nach der Definition berechnen. Für *reduzible* Kurvensingularitäten liefert der folgende Satz bzw. das anschließende Korollar ein sehr nützliches Hilfsmittel zur Berechnung dieser Invariante.

Satz 1.3 Für eine *reduzible, reduzierte Kurvensingularität* $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ mit $(X, 0) = (X_1, 0) \cup (X_2, 0)$ und $(X_1, 0) \cap (X_2, 0) = 0$ gilt:

$$\delta(X) = \delta(X_1) + \delta(X_2) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (I(X_1) + I(X_2)).$$

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in [BG]. Als unmittelbare Folgerung erhält man – vgl. [BG] – das

Korollar 1.4 Sei $(\mathbb{C}^n, 0) \supset (X, 0) = \bigcup_{i=1}^r (X_i, 0)$ die Zerlegung der Kurve $(X, 0)$ in *irreduzible Komponenten*. Setze für $i \in \{1, \dots, r-1\}$: $(Y_i, 0) = \bigcup_{j=i+1}^r (X_j, 0)$. Dann gilt:

$$\delta(X) = \sum_{i=1}^r \delta(X_i) + \sum_{i=1}^{r-1} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (I(X_i) + I(Y_i))$$

und

$$\mu(X) = \sum_{i=1}^r \mu(X_i) - r + 1 + 2 \sum_{i=1}^{r-1} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / (I(X_i) + I(Y_i)).$$

Wir stellen noch eine weitere Berechnungsmöglichkeit für die δ -Invariante bzw. für die Milnorzahl einer reduzierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ bereit. Die zugrundeliegende Idee dabei ist, die Kurve $(X, 0)$ in eine geeignete Koordinatenebene zu projizieren und dann die Invarianten von $(X, 0)$ aus den Invarianten der ebenen Kurvensingularität herzuleiten.

Die folgenden Sätze (1.6 und 1.7) stammen von D. Mond und R. Pellikaan und sind der Arbeit [MP] entnommen. Bevor wir sie zitieren, wollen wir kurz an die Definition der *Fitting*-Ideale erinnern (eine ausführlichere Darstellung dieser Ideale findet sich in den Arbeiten [MP], [Te1] oder in [Loo]).

Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins und M ein endlich erzeugter R -Modul. Es sei

$$R^p \xrightarrow{\Phi} R^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

eine Auflösung von M .

Definition 1.5 Für $q > k \geq q - p$ definieren wir das k -te *Fitting*-Ideal von M (als R -Modul) als das Ideal in R , welches von den $(q - k) \times (q - k)$ -Minoren der Matrix Φ erzeugt wird. Falls es keine $(q - k) \times (q - k)$ -Minoren gibt, da k zu groß ($k \geq q$) bzw. zu klein ($k < q - p$) ist, definieren wir dieses Ideal als R bzw. als Null. Wir bezeichnen das k -te *Fitting*-Ideal (wie üblich) mit $F_k(M)$.

Daß die Definition von $F_k(M)$ nicht von der exakten Sequenz (1.1) abhängt und $F_k(M)$ infolgedessen eine Invariante des Moduls M ist, hat z.B. Looijenga in [Loo] ausgeführt.

Es sei nun $f : X \rightarrow Y$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen komplexen Räumen. Dann ist $f_* \mathcal{O}_X$ eine kohärente Garbe von \mathcal{O}_Y -Moduln, vgl. [GR]. Jetzt definieren wir die k -te *Fitting*-Ideal-Garbe $F_k(f_* \mathcal{O}_X)$ als die Garbe, die zu der Prägarbe gehört, welche einer offenen Menge $U \subset Y$ das k -te *Fitting*-Ideal des $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ -Moduls $\Gamma(U, f_* \mathcal{O}_X)$ zuordnet. Der Träger von $\mathcal{O}_Y / F_0(f_* \mathcal{O}_X)$ ist $f(X)$. Der folgende Satz besagt, daß $F_0(f_* \mathcal{O}_X)$ unter gewissen (naheliegenden) Voraussetzungen das reduzierte Bild definiert.

Satz 1.6 (vgl. Prop. 3.1 und Prop. 3.2 in [MP]) Es sei (\tilde{X}, \tilde{x}) der Keim einer n -dimensionalen Cohen-Macaulay-Varietät, $(\tilde{X}_1, \tilde{x}), \dots, (\tilde{X}_m, \tilde{x})$ deren irreduzible Komponenten und es sei $\pi : (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ ein endlicher Abbildungskeim. X_i sei das (reduzierte) Bild von \tilde{X}_i unter π , und $I(X_i)$ bezeichne das Ideal aller Funktionen in $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^{n+1}, 0}$, die auf X_i verschwinden. Ferner sei d_i der Grad der Abbildung $(\tilde{X}_i, \tilde{x}) \rightarrow (X_i, 0)$. Dann gilt

$$F_0(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = \prod_{i=1}^m I(X_i)^{d_i}. \quad (1.2)$$

Theorem 1.7 (Thm. 3.6 in [MP]) *Es sei (\tilde{C}, \tilde{x}) der Keim einer reduzierten Kurvensingularität, $(\tilde{C}_1, \tilde{x}), \dots, (\tilde{C}_r, \tilde{x})$ deren irreduzible Komponenten, und es sei $\pi : (\tilde{C}, \tilde{x}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ eine endliche Abbildung. C_i sei das (reduzierte) Bild von \tilde{C}_i unter π . Es gelte*

- $C_i \neq C_j$ für $i \neq j$
- Der Grad der Abbildung $(\tilde{C}_i, \tilde{x}) \rightarrow (C_i, 0)$ ist eins.

Dann ist $(C, 0) := \bigcup_{i=1}^r (C_i, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, versehen mit der Strukturgarbe $F_0(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}, \tilde{x}})$, nach Satz 1.6 eine reduzierte Kurvensingularität, und es gilt:

$$\delta(\tilde{C}) = \delta(C) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}})_0. \quad (1.3)$$

Beispiel 1.8 Die Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ werde durch das Ideal

$$I = (x_2^2 - x_1^3, x_2 x_3 - x_1 x_4, x_3^2 - x_1^2 x_2, x_2 x_4 - x_1^2 x_3, x_3 x_4 - x_1^4, x_4^2 - x_1^3 x_2)$$

definiert. Es gilt: $\delta(X) = 4$ (X kann durch $t \mapsto (t^4, t^6, t^7, t^9)$ parametrisiert werden). Wir wollen $\delta(X)$ nun mit Hilfe von (1.3) herleiten. Die Einschränkung π der Projektion $(\mathbb{C}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_3)$, auf $(X, 0)$ erfüllt die Voraussetzungen der Sätze 1.6 und 1.7. Wir wollen $F_0(\pi_* \mathcal{O}_X)$ bzw. $F_1(\pi_* \mathcal{O}_X)$ berechnen und berechnen zu diesem Zweck $F_0(\pi_* \mathcal{O}_X)_0$ (bzw. $F_1(\pi_* \mathcal{O}_X)_0$) als das 0-te (bzw. 1-te) Fitting-Ideal von $\mathcal{O}_{X,0}$ als $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ -Modul mittels der Abbildung $\pi^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0} \rightarrow \mathcal{O}_{X,0}$. Es sei $\epsilon_0 = 1$, $\epsilon_1 = x_2$ und $\epsilon_2 = x_4$. Es ist leicht einzusehen, daß $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{O}_{X,0}$ als $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2,0}$ -Modul darstellt. Die Relationen zwischen diesen Erzeugenden sind in den Zeilen der Matrix

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_1 \\ x_3^2 & -x_1^2 & 0 \\ -x_1^4 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

notiert. Nun gilt: $F_0(\pi_* \mathcal{O}_X)_0 = \det \Phi = x_1^7 - x_3^4$ und $F_1(\pi_* \mathcal{O}_X)_0 = (x_1^3, x_3^2, x_1^2 x_3)$. Mit $(C, 0) := (\{x_1^7 - x_3^4 = 0\}, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ folgt nun aus Theorem 1.7:

$$\delta(X) = \delta(C) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_X)_0 = 9 - 5 = 4.$$

Neben der δ -Invariante und der Milnorzahl sollen jetzt noch zwei andere Invarianten von reduzierten Kurvensingularitäten Erwähnung finden, nämlich die *Tjurina-Zahl* und der *Cohen-Macaulay-Typ*. Diese sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \text{Tjurina-Zahl } \tau = \tau(X) &:= \dim_{\mathbb{C}} T_{X,0}^1 \\ \text{Cohen-Macaulay-Typ } t = t(X) &:= \dim_{\mathbb{C}} (\omega_{X,0} / \mathfrak{m}_{X,0} \omega_{X,0}). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne $\mathfrak{m}_{X,0}$ das maximale Ideal des Rings $\mathcal{O}_{X,0}$. Wir wollen uns nun darauf beschränken, die Bedeutung der zuletzt eingeführten Größen für *glättbare* Kurvensingularitäten darzustellen:

Satz 1.9 (Greuel, [Gr1]) *Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine reduzierte, glättbare und quasihomogene Kurvensingularität. Dann gilt:*

$$\tau(X) \geq \mu(X) + t(X) - 1. \quad (1.4)$$

Weiterhin gilt: Der Basisraum der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ ist genau dann glatt, wenn (1.4) eine Gleichung ist.

Wir haben in diesem ersten Abschnitt die grundlegenden Invarianten für reduzierte Kurvensingularitäten vorgestellt. Für eine ausführliche Behandlung dieser und weiterer Invarianten sei auf die Artikel [Gr1] und [BG] verwiesen.

1.2 Kurvensingularitäten in $(\mathbb{C}^3, 0)$

Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,0}$ einer reduzierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ ist als reduzierter noetherscher Ring der Dimension 1 ein Cohen–Macaulay–Ring. Im Spezialfall $n = 3$ ist $(X, 0)$ also eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension 2. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,0} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}/I$ besitzt daher nach [Art2] eine $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}$ –freie Auflösung der Form

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}^{q-1} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0}^q \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3,0} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,0} \longrightarrow 0, \quad (1.5)$$

wobei Ψ eine $q \times (q-1)$ –Matrix und Φ eine $1 \times q$ –Matrix ist.

Satz 1.10 (Hilbert–Burch, [Bu]) *Es sei R ein noetherscher kommutativer Ring mit 1 und $I = (f_1, \dots, f_q) \subset R$ ein Ideal. Ferner sei $\Psi = (\Psi_1 \dots \Psi_q)$ eine $q \times (q-1)$ –Matrix und $\Phi = (f_1, \dots, f_q) \in \text{Mat}(1, q; R)$ so, daß*

$$0 \longrightarrow R^{q-1} \xrightarrow{\Psi} R^q \xrightarrow{\Phi} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

eine R –freie Auflösung von R/I ist. Mit $\Psi^{(i)}$ werde die Untermatrix von Ψ , die durch Streichen der i -ten Zeile von Ψ entsteht, bezeichnet und mit $u^{(i)} = \det \Psi^{(i)}$ die Determinante von $\Psi^{(i)}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Nichtnullteiler $a \in R$, so daß $f_i = a u^{(i)}$, $1 \leq i \leq q$, ist.

Aus dem Satz von Hilbert und Burch folgt, daß das Ideal einer reduzierten Kurvensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ von den maximalen Minoren einer Matrix $M \in \text{Mat}(q, q-1; \mathbb{C}\{x, y, z\})$ erzeugt wird; solche Kurvensingularitäten sind also *determinantiell*. Der Cohen–Macaulay–Typ $t = t(X)$ hat nun folgende Bedeutung: Der Rang des höchsten Syzygienmoduls in (1.5) ist gerade t , d.h. $t = q - 1$. Im Fall $t(X) = 1$ handelt es sich bei $(X, 0)$ um einen *vollständigen Durchschnitt*. Für vollständige Durchschnitte verwenden wir gelegentlich auch die Abkürzung *ICIS*.

1.2.1 Deformationen

Es sei $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^{n+m}, 0)$ eine n -dimensionale Singularität eines vollständigen Durchschnitts. Wird das Ideal von $(Y, 0)$ von den holomorphen Funktionskeimen $f_1, \dots, f_m \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^{n+m}, 0}^2$ erzeugt, so gibt es zwischen den f_i nur triviale Relationen. Infolgedessen liefert jede Störung der f_i eine Deformation von $(Y, 0)$.

Ist andererseits $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension zwei, die etwa von den maximalen Minoren f_1, \dots, f_{q+1} einer Matrix $M \in \text{Mat}(q, q+1; \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\})$ erzeugt wird, so gibt es im Fall $q \geq 2$ zwischen den Funktionskeimen f_1, \dots, f_{q+1} nichttriviale Relationen. Das bedeutet, daß nicht jede Störung der f_i auch eine Deformation von $(X, 0)$ liefert.

Satz 1.11 (Theorem 5.1, (3) in [Art2]) *Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension zwei, die von den maximalen Minoren einer Matrix $M \in \text{Mat}(q, q+1; \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\})$ erzeugt wird. Dann gilt:*

- (i) *Das Stören der Einträge von M (und anschließendes Minorenbildern) liefert eine Deformation von $(X, 0)$.*
- (ii) *Jede Deformation von $(X, 0)$ erhält man durch geeignetes Stören der Einträge der Matrix M .*

Insbesondere erhält man also durch geeignetes Stören der Einträge der definierenden Matrix auch die semi–universelle Deformation von $(X, 0)$. Der Basisraum der semi–universellen Deformation ist glatt ([Sch]).

Aus dem nächsten Satz folgt, daß jede reduzierte Kurvensingularität in $(\mathbb{C}^3, 0)$ glättbar ist.

Satz 1.12 (Schaps, [Sch]) *Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension zwei, und es gelte $n < 6$. Dann ist die Singularität $(X, 0)$ glättbar.*

Im zweiten Kapitel werden wir für reduzierte Kurvensingularitäten in $(\mathbb{C}^3, 0)$ (kurz: Raumkurvensingularitäten) weitere Invarianten definieren.

Kapitel 2

Die Monodromiegruppe und Coxeter–Dynkin–Diagramme

Sei $(X_0, 0)$ eine Raumkurvensingularität; damit meinen wir hier und im folgenden stets einen reduzierten Kurvenkeim in $(\mathbb{C}^3, 0)$. In diesem Abschnitt definieren wir weitere Invarianten für $(X_0, 0)$, nämlich das *Milnorgitter*, die *Monodromiegruppe* und *Coxeter–Dynkin–Diagramme*. Wir werden sehen, daß wir die in [Eb2] enthaltene Definition für vollständige Durchschnitte auf Raumkurvensingularitäten übertragen können.

Wir haben in Abschnitt 1.2 festgestellt, daß das Ideal von X_0 von den maximalen Minoren einer Matrix $M \in \text{Mat}(t, t+1; \mathbb{C}\{x, y, z\})$ erzeugt wird, wobei $t = t(X_0)$ den Cohen–Macaulay–Typ von $(X_0, 0)$ bezeichne. Desweiteren haben wir gesehen, daß man jede Deformation von $(X_0, 0)$ durch geeignetes Stören der Einträge von M erhält. Insbesondere erhält man auf diese Weise auch die semi–universelle Deformation, deren Matrix wir mit \mathfrak{M} bezeichnen wollen. Der analytische Mengenkeim $(\mathfrak{X}, 0) \subset (\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^\tau, 0)$, der von den maximalen Minoren F_1, \dots, F_{t+1} von \mathfrak{M} erzeugt wird, ist der Totalraum der semi–universellen Deformation. Den Basisraum bezeichnen wir mit $(S, 0)$.

2.1 Die Milnorfaserung

Aus Satz 1.12 folgt, daß die Faser über einem allgemeinen Punkt aus dem Basisraum der semi–universellen Deformation singularitätenfrei ist. Anders ausgedrückt bedeutet dies, daß die Kurvensingularität $(X_0, 0)$ eine *Milnorfaserung* besitzt. Diesen Sachverhalt wollen wir nun präzisieren.

Es sei $U \subset \mathbb{C}^{3+\tau}$ eine kleine und offene Umgebung von $0 \in \mathbb{C}^{3+\tau}$ derart, daß alle Funktionskeime $F_i : (\mathbb{C}^{3+\tau}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ auf U durch holomorphe Funktionen $F_i : U \rightarrow \mathbb{C}$ repräsentiert werden können. Ferner bezeichne $B_\varepsilon(0) \subset U$ eine offene Kugel vom Radius ε in $\mathbb{C}^{3+\tau}$ mit dem Ursprung als Mittelpunkt.

Wir wählen nun geeignete Repräsentanten von $(\mathfrak{X}, 0)$ und $(S, 0) \cong (\mathbb{C}^t, 0)$: Sei

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &:= \{(z, \lambda) \in U : F_1(z, \lambda) = \dots = F_{t+1}(z, \lambda) = 0, |\lambda| < \rho\} \cap B_\varepsilon(0), \\ S &:= \{\lambda \in \mathbb{C}^t : |\lambda| < \rho\}\end{aligned}$$

und sei

$$p : \mathfrak{X} \longrightarrow S$$

die Projektion auf λ .

Wir wählen ε so klein, daß $Y_0 := \{(z, 0) \in U : F_i(z, 0) = 0, 1 \leq i \leq t+1\}$ die Sphäre $S_\varepsilon := \partial B_\varepsilon(0) = \{(z, \lambda) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^t : |(z, \lambda)| = \varepsilon\}$ transversal schneidet. Dies ist möglich nach dem Kurvenauswahllemma, vgl. [Mil]. Nun kann man ein geeignetes $\rho \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho \ll \varepsilon$ finden, so daß auch alle benachbarten Fasern

$$Y_\lambda := \{(z, \lambda) \in U : F_1(z, \lambda) = \dots = F_{t+1}(z, \lambda) = 0\}$$

mit $|\lambda| < \rho$ die Sphäre S_ε transversal schneiden.

Die kritische Menge C der Abbildung $p : \mathfrak{X} \rightarrow S$, also die Menge aller Punkte von \mathfrak{X} , die singularär sind oder in denen p keine Submersion ist, wird durch die Gleichungen $F_1 = \dots = F_{t+1} = 0$ sowie durch die 2×2 -Minoren der Jacobi-Matrix $\frac{\partial(F_1, \dots, F_{t+1})}{\partial z}$ mit $z = (z_1, z_2, z_3)$ gegeben, vgl. [Loo, 4A].

Mit $D := p(C) \subset S$ bezeichnen wir die Diskriminante von p , d.h. die Menge der Punkte $s \in S$, über denen keine glatten Fasern liegen. Van Straten hat bewiesen, daß der Keim $(D, 0)$ – wie bei den isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte – eine Hyperfläche ist, vgl. [Str]. Wir geben $(D, 0)$ die reduzierte Struktur.

Nun ist die Abbildung

$$p|_{\mathfrak{X}-p^{-1}(D)} : \mathfrak{X} - p^{-1}(D) \longrightarrow S - D$$

die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels. Die dadurch beschriebene Faserung heißt *Milnorfaserung*. Die typische Faser

$$X_s := p^{-1}(s)$$

heißt *die Milnorfaser* der Singularität $(X_0, 0)$. Sie besitzt den Homotopietyp eines Bouquets von μ 1-Sphären. Aus der Morsetheorie (vgl. [AF]) folgt nämlich, daß die Milnorfaser den Homotopietyp eines endlichen CW-Komplexes der Dimension ≤ 1 und damit eines Bouquets von 1-Sphären hat. Daß die Anzahl dieser Sphären gerade die Milnorzahl ist, ergibt sich aus Satz 1.2.

Die Schnittform (\cdot, \cdot) definiert auf dem Modul $H_1(X_s; \mathbb{Z})$ eine schiefsymmetrische Bilinearform. Das Paar $(H_1(X_s; \mathbb{Z}), (\cdot, \cdot))$ ist somit ein schiefsymmetrisches Gitter, das sogenannte *Milnorgitter*.

2.2 Die grundlegende Konstruktion

Die Definition für die Coxeter–Dynkin–Diagramme basiert auf den folgenden Konstruktionen. Diese und auch spätere Definitionen und Methoden orientieren sich wesentlich an den Arbeiten [Eb1] und [Eb2], in denen die entsprechende Situation für Hyperflächen bzw. für vollständige Durchschnitte betrachtet wird. Ferner sei auf den Artikel [Br2] hingewiesen.

Wir betrachten eine allgemeine Gerade l durch $0 \in \mathbb{C}^\tau$, die die Diskriminante D in 0 transversal schneidet. Die Koordinaten des \mathbb{C}^τ seien so gewählt, daß l mit der letzten Koordinatenachse zusammenfällt. Dann definiert der Mengenkeim

$$(X_0, 0) = (\{(z, \lambda) \in U : F_i(z, \lambda) = 0, \lambda_j = 0, 1 \leq i \leq t+1, 1 \leq j \leq \tau-1\}, 0)$$

eine isolierte determinantielle Flächensingularität der Einbettungsdimension vier, also eine Cohen–Macaulay–Singularität.

Wir wählen nun S von der Form $S = T \times \mathbb{D}$ mit

$$\begin{aligned} T &:= \{t \in \mathbb{C}^{\tau-1} : |t| < \rho_1\} \\ \text{und } \bar{\mathbb{D}} &:= \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \leq \eta\}, \end{aligned}$$

wobei ρ_1 und η so klein und geeignet gewählt seien, daß folgendes gilt: Sei

$$\mathfrak{X}' := \{(z, \lambda) \in U : F_1(z, \lambda) = \dots = F_{t+1}(z, \lambda) = 0, (\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1}) \in T\} \cap B_\varepsilon(0)$$

und $p' : \mathfrak{X}' \rightarrow T$ die Projektion auf $(\lambda_1, \dots, \lambda_{\tau-1})$. Dann ist

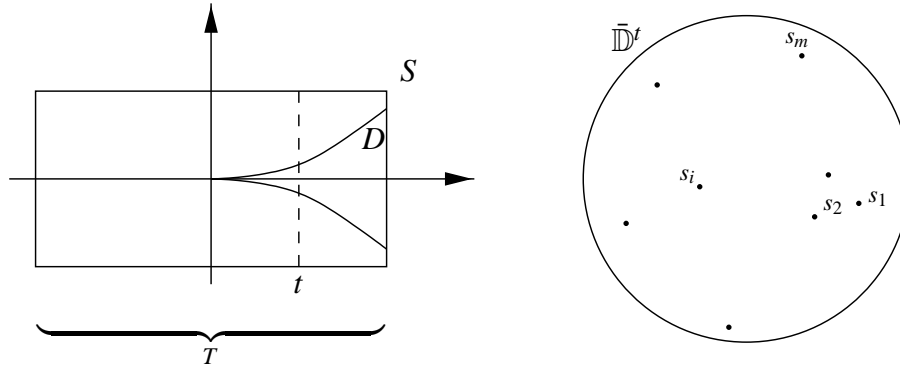
$$p'_{|\mathfrak{X}' - p'^{-1}(D_{p'})} : \mathfrak{X}' - p'^{-1}(D_{p'}) \rightarrow T - D_{p'}$$

die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels¹ ($D_{p'}$ ist hier die Diskriminante der Abbildung p'). Die typische Faser X'_t ist eine Milnorfaser der Singularität $(X_0, 0)$. Nach [Loo, Proposition 5.4] können ρ_1 und η darüber hinaus sogar so klein gewählt werden, daß die Komposition $\pi \circ p : \mathfrak{X} \rightarrow T$ topologisch äquivalent zu dem Repräsentanten $p' : \mathfrak{X}' \rightarrow T$ ist, wobei $\pi : S \rightarrow T$ die Projektion auf die ersten $\tau - 1$ Koordinaten bezeichne. Das bedeutet insbesondere, daß die Mannigfaltigkeiten X'_t und $X_t := (\pi \circ p)^{-1}(t)$ für $t \notin D_{p'}$ den gleichen Homotopietyp besitzen.

Die Einschränkung $\pi|_D$ der Abbildung $\pi : S \rightarrow T$ auf D ist endlich. Wir wählen nun einen Punkt $t \in T$, der nicht im Bild des Verzweigungsortes von $\pi|_D$ liegt. Sodann betrachten wir die Abbildung

$$P : \begin{cases} \mathbb{C}^3 \times T \times \bar{\mathbb{D}} \supset X'_t & \longrightarrow \bar{\mathbb{D}} \\ & (z, t, a) \longmapsto a. \end{cases}$$

¹Man beachte, daß die Singularität $(X_0, 0)$ nach Satz 1.12 eine Milnorfaserung besitzt.

Abbildung 2.1: Der Basisraum $S = T \times \mathbb{D}$ und die Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}^t$

Durch die spezielle Wahl von t schneidet die Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}^t := \{t\} \times \bar{\mathbb{D}}$ die Diskriminante D in genau $m = m(D)$ regulären Punkten s_1, \dots, s_m , siehe Abb. 2.1. Hierbei bezeichnet m die Multiplizität der Diskriminante im Nullpunkt. Jede Faser X_{s_i} enthält genau eine Singularität, nämlich eine quadratische; der singuläre Punkt von X_{s_i} sei x_i . Außerhalb dieser m singulären Fasern ist die Abbildung P die Projektion eines differenzierbaren Faserbündels.

2.2.1 Verschwindende Zykel und die Monodromiegruppe

Wir untersuchen nun die lokale Situation der Singularitäten (X_{s_i}, x_i) . Da diese Singularitäten allesamt gewöhnliche Doppelpunkte sind, gibt es nach dem komplexen Morse–Lemma für jedes $1 \leq i \leq m$ eine kleine Umgebung B_i von x_i in X_t und in diesen Umgebungen lokale Koordinaten (u_i, v_i) , so daß $P|_{B_i}$ in diesen Koordinaten in der Form

$$P(u_i, v_i) = u_i^2 + v_i^2 + s_i$$

geschrieben werden kann und B_i in diesen Koordinaten eine offene Kugel vom Radius ε_i ist.

Für jedes $1 \leq i \leq m$ sei nun $\bar{\mathbb{D}}_i$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt s_i und Radius η_i . Die Radien η_i seien so klein gewählt, daß die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- für alle $1 \leq i \leq m$ ist die Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}_i$ ganz in $\bar{\mathbb{D}}^t$ enthalten
- für $i \neq j$ gilt $\bar{\mathbb{D}}_i \cap \bar{\mathbb{D}}_j = \emptyset$
- für alle $1 \leq i \leq m$ ist

$$P|_{B_i \cap P^{-1}(\bar{\mathbb{D}}_i - \{s_i\})} : B_i \cap P^{-1}(\bar{\mathbb{D}}_i - \{s_i\}) \longrightarrow \bar{\mathbb{D}}_i - \{s_i\}$$

eine Milnorfaserung

Wegesysteme

Im weiteren werden wir bei $\bar{\mathbb{D}}^t = \{t\} \times \bar{\mathbb{D}}$ auf den Index “ t ” verzichten, $\bar{\mathbb{D}}^t$ wird also mit $\bar{\mathbb{D}}$ identifiziert werden.

Wir beginnen mit der Wahl eines nicht-kritischen Wertes s auf dem Rand der abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}$. Sodann betrachten wir geordnete Systeme von Wegen $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{D}}$, für $1 \leq i \leq m$, mit:

- $\gamma_i(0) = s_i$
- $\gamma_i(1) = s$
- $\gamma_i(\vartheta) \in \bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}$ für $\vartheta \in (0, 1)$
- γ_i schneidet den Rand der Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}_i$ genau einmal und zwar zum Zeitpunkt $\vartheta = \alpha_i$

Für jedes $1 \leq i \leq m$ und hinreichend kleines ϑ mit $0 < \vartheta$ enthalten die Fasern von $P_{|B_i \cap P^{-1}(\bar{\mathbb{D}}_i - \{s_i\})}$ über den Punkten $\gamma_i(\vartheta)$, also

$$(P_{|B_i \cap P^{-1}(\bar{\mathbb{D}}_i - \{s_i\})})^{-1}(\gamma_i(\vartheta)) = \{(u_i, v_i) \in B_i : u_i^2 + v_i^2 = \gamma_i(\vartheta) - s_i\},$$

in den jeweils gewählten Koordinatensystemen eine 1-Sphäre $\delta_i(\vartheta)$. Für $\vartheta \rightarrow 0$ ziehen sich diese Sphären auf einen Punkt zusammen. Durch Parallelverschiebung längs der Wege γ_i können wir für jedes $\vartheta \in (0, 1]$ m Sphären $\delta_i(\vartheta)$ konstruieren. Insbesondere können wir dadurch die Sphären in die Faser X_s transportieren. Nun wählen wir für $\delta_i(1)$ in der Faser X_s Orientierungen und erhalten schließlich Elemente der Homologiegruppe $H_1(X_s; \mathbb{Z})$:

Definition 2.1 Die Homologieklassse $\delta_i := \delta_i(1) \in H_1(X_s; \mathbb{Z})$ heißt ein längs γ_i verschwindender Zykel.

Bemerkung 2.2 (i) Wie bei den isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte definiert jeder Doppelpunkt (X_{s_i}, x_i) nicht nur einen verschwindenden Zykel $\delta_i \in H_1(X_s; \mathbb{Z})$, sondern auch eine verschwindende Zelle $\hat{\delta}_i \in H_2(X_t, X_s; \mathbb{Z})$. Da wir uns in dieser Arbeit auf die verschwindenden Zykel konzentrieren wollen, wurde auf eine Darstellung der verschwindenden Zellen verzichtet. Diese findet man z.B. in [Eb2], [La] oder [Di].

(ii) Für die Selbstschnittzahlen der verschwindenden Zykel gilt: $(\delta_i, \delta_i) = 0$.

Jedem Weg γ_i ordnen wir wie folgt einen Weg ω_i zu. Wir definieren:

$$\omega_i := \tilde{\gamma}_i^{-1} \tau_i \tilde{\gamma}_i.$$

Hierbei ist τ_i eine positiv orientierte Parametrisierung des Randes der Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}_i$ mit dem Anfangs- und Endpunkt α_i und für den Weg $\tilde{\gamma}_i$ gilt: $\tilde{\gamma}_i = \gamma_i|_{[\alpha_i, 1]}$. Damit ist der Weg ω_i ein geschlossener Weg in $\bar{\mathbb{D}}$ mit Anfangs- und Endpunkt s und heißt *einfache Schleife zu γ_i* .

Jede Schleife $\omega_i \in \Pi_1(\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}, s)$ definiert einen Automorphismus $h_i := h_{\omega_i^*} \in \text{Aut}(H_1(X_S; \mathbb{Z}))$. Dieser heißt *Picard-Lefschetz-Transformation* zum Weg γ_i und hängt nur von der Homotopieklasse von ω_i in $\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}$ ab. Nach der *Picard-Lefschetz-Formel* gilt für $\delta \in H_1(X_S; \mathbb{Z})$:

$$h_i(\delta) = \delta - (\delta, \delta_i) \cdot \delta_i.$$

Definition 2.3 Die Menge Γ aller Automorphismen $h_{\gamma^*} \in \text{Aut}(H_1(X_S; \mathbb{Z}))$, die durch die Homotopieklassen von Wegen $\{\gamma\} \in \Pi_1(\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}, s)$ induziert werden, also das Bild des Homomorphismus

$$\rho : \begin{cases} \Pi_1(\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}, s) & \rightarrow \text{Aut}(H_1(X_S; \mathbb{Z})) \\ \{\gamma\} & \mapsto h_{\gamma^*}, \end{cases}$$

heißt die *Monodromiegruppe der Singularität $(X_0, 0)$* .

Aus [Loo,7.1] folgt, daß die Inklusion $\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\} \hookrightarrow S - D$ eine Surjektion der Fundamentalgruppen $\Pi_1(\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}, s) \rightarrow \Pi_1(S - D, s)$ liefert. Infolgedessen ist die Monodromiegruppe wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl der Geraden l bzw. von der Wahl des Parameters t ab.

Wir nennen das Wegesystem $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ *stark ausgezeichnet*, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- Die Wege γ_i sind nicht selbstüberschneidend.
- Der einzige gemeinsame Punkt von γ_i und γ_j für $i \neq j$ ist der Punkt s .
- Die Wege γ_i seien in der Reihenfolge numeriert, in der sie den Punkt s erreichen. Hierbei zählt man vom Rand der Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}$ in s aus im Uhrzeigersinn.

Wir nennen das Wegesystem $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ *schwach ausgezeichnet*, falls das zu diesem Wegesystem gehörige System von einfachen Schleifen $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ die Gruppe $\Pi_1(\bar{\mathbb{D}} - \{s_1, \dots, s_m\}, s)$ frei erzeugt.

Bemerkung 2.4 (i) Es ist klar, daß ein stark ausgezeichnetes Wegesystem insbesondere auch schwach ausgezeichnet ist.

(ii) Die zu einem schwach ausgezeichneten Wegesystem $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ gehörenden Automorphismen (h_1, \dots, h_m) erzeugen die Monodromiegruppe Γ .

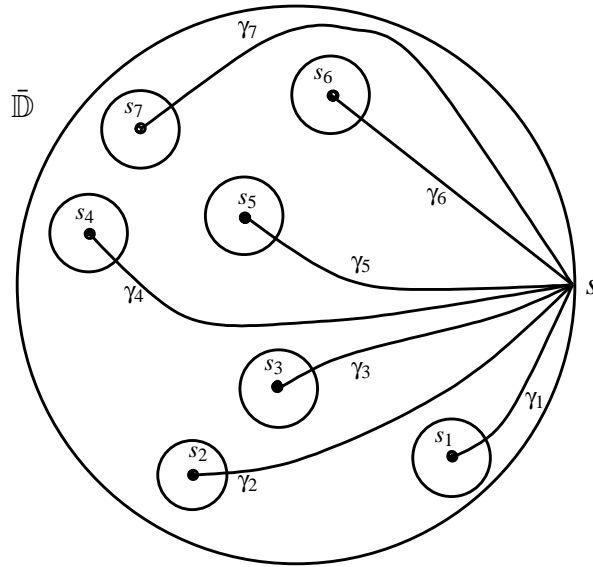


Abbildung 2.2: Beispiel eines stark ausgezeichneten Wegesystems für $m = 7$.

2.2.2 Definition der Coxeter–Dynkin–Diagramme

Ein geordnetes System $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ von Wegen, das die kritischen Werte s_i mit dem nicht-kritischen Wert s verbindet, definiert nach obigem ebenfalls ein System $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ von verschwindenden Zykeln. Wir nennen das System $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ *schwach ausgezeichnet* bzw. *stark ausgezeichnet*, falls $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ schwach ausgezeichnet bzw. stark ausgezeichnet ist.

Ein *Coxeter–Dynkin–Diagramm* der Singularität $(X_0, 0)$ ist im wesentlichen eine graphische Darstellung der Schnittmatrix $(\delta_i, \delta_j)_{1 \leq i, j \leq m}$ der verschwindenden Zykeln. Genauer:

- Die Ecken $\{e_1, \dots, e_m\}$ des Graphen werden mit den Zykeln $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ identifiziert: $e_i \leftrightarrow \delta_i$.
- Für $i < j$ werden die Ecken e_i und e_j mit einer Kante vom Gewicht (δ_i, δ_j) verbunden.

Ein so definiertes Diagramm ist natürlich noch keine Invariante der Singularität $(X_0, 0)$, denn verschiedene Wegesysteme werden i.a. auch verschiedene Coxeter–Dynkin–Diagramme liefern. Abschließend werden wir, Ebeling in [Eb2] folgend, begründen, daß die nachstehend definierten Mengen \mathfrak{D}^{wd} und \mathfrak{D}^{sd} tatsächlich Invarianten von $(X_0, 0)$ sind und somit nicht von der Wahl von l und t abhängen.

Definition 2.5 Die Menge aller Coxeter–Dynkin–Diagramme zu schwach (bzw. zu stark) ausgezeichneten Systemen von verschwindenden Zykeln bezeichnen wir mit \mathcal{D}^{wd} (bzw. mit \mathcal{D}^{sd}).

Die Wahl der Indices begründet sich durch die englische Bezeichnung der schwach bzw. stark ausgezeichneten Systeme, nämlich *weakly distinguished* bzw. *strongly distinguished*.

Es sei $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ ein schwach ausgezeichnetes Wegesystem und $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ das dazu gehörige System von verschwindenden Zykeln. Wir betrachten die folgenden Operationen auf dem m -Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_m)$:

A Operation von $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$, Orientierungswechsel

$$\kappa_j(\delta_1, \dots, \delta_m) = (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, -\delta_j, \delta_{j+1}, \dots, \delta_m) \text{ für } j \in \{1, \dots, m\}$$

B Operation der Zopfgruppe

B_m bezeichne die Zopfgruppe mit m Strängen und $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$ seien ihre Standarderzeugenden. Dann operiert α_j für $j \in \{1, \dots, m-1\}$ wie folgt:

$$\alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_m) = (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, h_j(\delta_{j+1}), \delta_j, \delta_{j+2}, \dots, \delta_m)$$

C Operation der symmetrischen Gruppe S_m

$$\sigma(\delta_1, \dots, \delta_m) = (\delta_{\sigma(1)}, \dots, \delta_{\sigma(m)}), \sigma \in S_m$$

D “Gabrielov–Transformationen”

$$\begin{aligned} \alpha_i(j)(\delta_1, \dots, \delta_m) &= (\delta_1, \dots, \delta_{j-1}, h_i(\delta_j), \delta_{j+1}, \dots, \delta_m) \\ \beta_i(j) &= (\alpha_i(j))^{-1}, i, j \in \{1, \dots, m\} \end{aligned}$$

Definition 2.6 Es seien $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ und $(\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$ zwei geordnete Wegesysteme und $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ bzw. $(\delta'_1, \dots, \delta'_m)$ die dazu gehörigen Systeme von verschwindenden Zykeln mit den Coxeter–Dynkin–Diagrammen D und D' . Wir nennen D und D' stark (bzw. schwach) äquivalent, wenn sie sich durch Iteration von Operationen vom Typ **A** und **B** (bzw. **A**, **B**, **C** und **D**) ineinander überführen lassen.

Satz 2.7 (Gabrielov) Zwei Coxeter–Dynkin–Diagramme $D, D' \in \mathcal{D}^{sd}$ sind stark äquivalent.

Satz 2.8 (Humphries) Je zwei Diagramme $D, D' \in \mathcal{D}^{wd}$ sind schwach äquivalent.

Die Beweise zu diesen Sätzen findet man in [Hu] bzw. [G-Z3].

Satz 2.9 Die Mengen \mathfrak{D}^{sd} und \mathfrak{D}^{wd} hängen nicht von der speziellen Wahl der generischen Geraden $l \subset S$ und des Parameters $t \in T$ ab, sind also Invarianten der Singularität $(X_0, 0)$.

Beweis Die in [Eb2] (für vollständige Durchschnitte) gegebene Begründung für diese Behauptung läßt sich auf die Situation von Raumkurvensingularitäten übertragen, da die Diskriminante der semi-universellen Deformation $p : \mathfrak{X} \rightarrow S$ einer solchen Singularität wie bei den isolierten Singularitäten vollständiger Durchschnitte eine Hyperfläche ist. \square

2.2.3 Die Bedeutung der Gruppe $H_1(X_t; \mathbb{Z})$

Wir betrachten die (reduzierte) exakte Homologiesequenz des Paares (X_t, X_s) . Diese Sequenz reduziert sich auf

$$0 \rightarrow H_2(X_t; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X_t, X_s; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} H_1(X_s; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_t; \mathbb{Z}) \quad (2.1)$$

Die relativen Homologiegruppen sind bekannt [La, §5]:

$$H_q(X_t, X_s; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^m, & \text{falls } q = 2 \\ 0, & \text{falls } q \neq 2 \end{cases} \quad (2.2)$$

Außerdem folgt aus [La, §5], daß die verschwindenden Zellen $\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_m$ eine Basis des \mathbb{Z} -Moduls $H_2(X_t, X_s; \mathbb{Z})$ bilden. Unter dem Verbindungshomomorphismus $\partial_* : H_2(X_t, X_s; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X_s; \mathbb{Z})$ werden die verschwindenden Zellen auf die verschwindenden Zyklen $\delta_1, \dots, \delta_m$ abgebildet. Eine naheliegende (und auch wichtige) Frage ist nun, ob die verschwindenden Zyklen $\delta_1, \dots, \delta_m$ ein Erzeugendensystem des \mathbb{Z} -Moduls $H_1(X_s; \mathbb{Z})$ bilden. Der exakten Sequenz (2.1) entnimmt man, daß dies genau dann der Fall ist, wenn $H_1(X_t; \mathbb{Z}) = 0$ bzw. $H_1(X'_t; \mathbb{Z}) = 0$ gilt. In diesem Fall ist die exakte Sequenz eine *kurze* exakte Sequenz freier \mathbb{Z} -Moduln:

$$0 \rightarrow H_2(X_t; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(X_t, X_s; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} H_1(X_s; \mathbb{Z}) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Aus der Sequenz (2.3) gewinnt man desweiteren eine Formel für die Multiplizität m der Diskriminante, also für die Anzahl der verschwindenden Zyklen:

$$m = \mu(X_0) + \text{rang}(H_2(X_t; \mathbb{Z})). \quad (2.4)$$

Damit haben wir zwei wichtige Konsequenzen dargelegt, die sich im Fall des Verschwindens von $H_1(X_t; \mathbb{Z})$ einstellen. Da $(X_0, 0)$ eine normale Flächensingularität ist, folgt aus [GS, Theorem 2], daß die erste Betti-Zahl von X_t verschwindet. Daher beschäftigen wir uns nun mit der Frage: *Wann ist $H_1(X_t; \mathbb{Z})$ torsionsfrei?*

Für $t(X_0) = 1$ ist nicht nur $(X_0, 0)$, sondern auch $(X_0, 0)$ eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts. Nach Hamm, [Ha], ist die Milnorfaser X'_t daher homotopieäquivalent zu einem Bouquet von $\mu(X_0)$ 2-Sphären. In diesem Fall gilt also $H_1(X_t; \mathbb{Z}) = H_1(X'_t; \mathbb{Z}) = 0$.

Im allgemeinen Fall, d.h. $t(X_0) \geq 2$, gibt es, abgesehen von der bereits erwähnten Tatsache, daß $b_1(X'_t) = 0$ ist, noch Formeln für die Eulercharakteristik und die Signatur der Milnorfaser (nach Wahl, [Wa3]). Aber die Frage nach der Torsionsfreiheit von $H_1(X_t; \mathbb{Z})$ bleibt unbeantwortet, falls von der Flächensingularität $(X_0, 0)$ lediglich bekannt ist, daß sie normal ist. Daher machen wir die zusätzliche Annahme, daß $(X_0, 0)$ eine *rationale* Flächensingularität ist.

Definition 2.10 (Artin, [Art1]) Sei $(X, 0)$ eine normale Flächensingularität und $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Auflösung von $(X, 0)$ mit $E = \pi^{-1}(0)$. $(X, 0)$ ist rational, falls $R^1\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = 0$ gilt.

Der folgende Satz zeigt, daß $(X_0, 0)$ für $t(X_0) \geq 3$ nicht rational sein kann.

Satz 2.11 (Wahl, [Wa1]) Es sei $(X, 0)$ eine determinantielle, rationale Flächensingularität der Einbettungsdimension $e = \text{embdim}(X, 0) \geq 4$. Dann wird das Ideal $I(X)$ durch die 2×2 -Minoren einer $2 \times (e - 1)$ -Matrix gegeben.

Der nächste Satz liefert ein hinreichendes Kriterium für das Verschwinden von $H_1(X_t; \mathbb{Z}) = H_1(X'_t; \mathbb{Z})$ und ist ein einfaches Korollar aus dem Beweis von Theorem 4.1 in [MS].

Satz 2.12 Es sei $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine isolierte Kurvensingularität, die von den maximalen Minoren einer 2×3 -Matrix erzeugt wird. Die Flächensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$, die man $(X_0, 0)$ wie beschrieben zuordnet, sei rational. Dann erzeugen die verschwindenden Zyklen $\delta_1, \dots, \delta_m$ die Gruppe $H_1(X_s; \mathbb{Z})$ und es gilt die Gleichung (2.4).

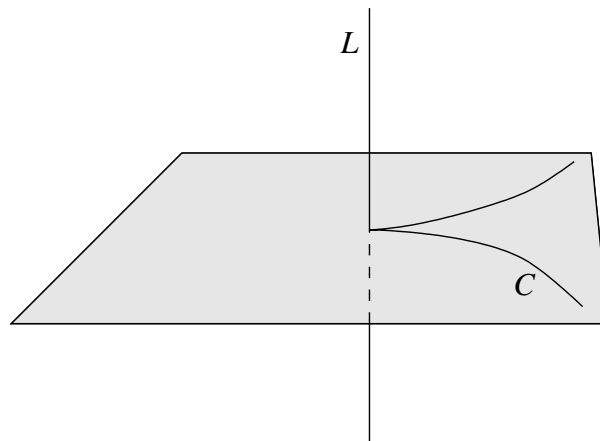
Beweis (vgl. Beweis von Theorem 4.1 in [MS]) Als rationale Singularität besitzt $(X_0, 0)$ eine simultane Auflösung über der Artin-Komponente, vgl. [Wa2]. Auf der anderen Seite ist $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ eine Cohen–Macaulay–Singularität der Kodimension 2, und der Basisraum der semi-universellen Deformation einer solchen Singularität ist glatt. Es folgt, daß die Artin-Komponente der ganze Basisraum der semi-universellen Deformation von $(X_0, 0)$ ist. Jede Milnorfaser X'_t ist also homotopieäquivalent zum exzeptionellen Divisor der minimalen Auflösung von X_0 , und das bedeutet insbesondere, daß $H_1(X'_t; \mathbb{Z})$ verschwindet. \square

Wir werden sehen, daß Satz 2.12 für alle Singularitäten, die wir in dieser Arbeit studieren wollen, anwendbar ist!

Kapitel 3

Wedge–Singularitäten

In diesem Abschnitt wollen wir Raumkurvensingularitäten X studieren, die man erhält, indem man durch die isolierte Singularität einer ebenen Kurve C in der xy -Ebene eine transversale Gerade L legt, die wir mit der z -Achse identifizieren werden. Die Klasse von Singularitäten, denen ein derartiges Bildungsgesetz zugrunde liegt, nennen wir *Wedge-Singularitäten*, und wir verwenden für sie die Notation $X = C \vee L$.



Es wird sich herausstellen, daß für die Wedge-Singularitäten eine relativ konkrete Aussage über die Struktur der Diskriminante der semi-universellen Deformation $p : \mathcal{X} \longrightarrow S$ möglich ist. Falls die ebene Kurvensingularität $(C, 0)$ ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist, nennen wir $X = A_1 \vee L$ einen *gewöhnlichen Tripelpunkt*. In diesem Fall setzt sich die Diskriminante D aus drei Hyperebenen zusammen. Das Coxeter–Dynkin–Diagramm des Tripelpunktes besteht aus drei Ecken, die untereinander nicht verbunden sind. Die Monodromiegruppe des Tripelpunktes ist trivial; diese Tatsache wurde bereits in [BG] von Buchweitz und Greuel bewiesen.

In der allgemeinen Situation, in der $(C, 0)$ weder regulär noch quadratisch ist, besteht die Diskriminante hingegen aus zwei irreduziblen Komponenten, wobei eine Komponente in geeigneten Koordinaten eine Hyperebene ist. Diese Strukturaussage wird es insbesondere ermöglichen, die Gestalt der Coxeter-Dynkin-Diagramme eingehend zu untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß die Coxeter-Dynkin-Diagramme aus zwei Komponenten bestehen, nämlich aus einer isolierten Ecke sowie aus einem Coxeter-Dynkin-Diagramm einer ausgezeichneten ICIS Y . Ferner wird gezeigt, daß X in Y deformiert und zwar μ -konstant. Infolgedessen kann man von einer gewissen Affinität der Singularität X zur ICIS Y sprechen.

3.1 Ein Satz über die Struktur der Diskriminante

Es sei $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ eine ebene, reduzierte Kurvensingularität, die durch einen holomorphen Funktionskeim $f \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^2$ definiert wird, und es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ die Vereinigung von $(C, 0)$ mit der z -Achse, d.h. $I(X) = (xz, yz, f(x, y))$. Wir beginnen mit einem einfachen Lemma.

Lemma 3.1 *Es gilt:*

$$\delta(X) = \delta(C) + 1 \quad \text{und} \quad \mu(X) = \mu(C) + 1 \quad (3.1)$$

Beweis Die Formel für $\delta(X)$ ist eine simple Konsequenz aus Satz 1.3. Danach gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \delta(X) &= \delta(C) + \delta(L) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0} / (I(L) + I(C)) \\ &= \delta(C) + 0 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0} / (x, y, z, f(x, y)) \\ &= \delta(C) + 1 \end{aligned}$$

und mithin wegen $r(X) = r(C) + 1$

$$\mu(X) = 2\delta(X) - r(X) + 1 = 2\delta(C) + 2 - (r(C) + 1) + 1 = \mu(C) + 1.$$

□

Es gibt Funktionen $g_1, g_2 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$, so daß sich f in der Form

$$f(x, y) = yg_1(x, y) - xg_2(x, y)$$

darstellen läßt. Eine solche Darstellung von f ist natürlich nicht eindeutig. Man überlegt sich jedoch schnell, daß die folgenden Ausführungen unabhängig von der

Wahl der Funktionen g_1 und g_2 sind. An späterer Stelle werden wir für g_1 und g_2 spezielle Wahlen treffen. Die 2×2 -Minoren der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} z & g_1(x,y) & g_2(x,y) \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$$

erzeugen das Ideal der Singularität $(X, 0)$.

Aus [Fr, Lemma 4.9] folgt, daß die Matrix \mathfrak{M} der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ die Gestalt

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} z & \tilde{g}_1(x,y,b) & \tilde{g}_2(x,y,c) \\ a & x & y \end{pmatrix}$$

besitzt, mit $a \in \mathbb{C}$, $(b, c) \in \mathbb{C}^{\tau-1}$, $\tilde{g}_1(x, y, 0) = g_1(x, y)$ und $\tilde{g}_2(x, y, 0) = g_2(x, y)$.

Wir wählen einen guten Repräsentanten $p : \mathfrak{X} \rightarrow S$ der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$. Die kritische Menge C der Abbildung $p : \mathfrak{X} \rightarrow S$ wird durch die Minoren M_1, M_2 und M_3 von \mathfrak{M} sowie von den 2×2 -Minoren der Matrix $\frac{\partial(M_1, M_2, M_3)}{\partial(x, y, z)}$ gegeben. Diese Matrix hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} z - a \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x}(x, y, b) & -a \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial y}(x, y, b) & x \\ -a \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x}(x, y, c) & z - a \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y}(x, y, c) & y \\ y \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial x}(x, y, b) - \tilde{g}_2(x, y, c) - x \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial x}(x, y, c) & y \frac{\partial \tilde{g}_1}{\partial y}(x, y, b) + \tilde{g}_1(x, y, c) - x \frac{\partial \tilde{g}_2}{\partial y}(x, y, c) & 0 \end{pmatrix}$$

Anhand dieser Beschreibung sieht man unmittelbar, daß die Diskriminante D die Hyperebene

$$H := \{(a, b, c) \in S : a = 0\}$$

enthält – für jedes $s \in H$ ist nämlich $(0, 0, 0) \in X_s$ singulär. Diese Tatsache ist aber auch anschaulich klar: Die Fasern über Punkten $s \in H$ sind Kurven, die aus der Vereinigung einer ebenen Kurve mit einer transversalen Geraden (der z -Achse) bestehen und daher im Ursprung “mindestens” eine quadratische Singularität besitzen.

Sei nun $a \in \mathbb{C}^*$ so klein gewählt, daß $a^* := (a, 0, \dots, 0)$ in S liegt. Die über dem Punkt $a^* \in S$ liegende Faser werde mit $Y = p^{-1}(a^*) \cap \mathfrak{X}$ bezeichnet; sie wird durch die Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} z & g_1(x,y) & g_2(x,y) \\ a & x & y \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

3.1.1 Der Tripelpunkt

In diesem Fall können wir annehmen, daß $f(x, y) = y^2 - x^2$ ist. Die $(X, 0)$ definierende Matrix ist also

$$M = \begin{pmatrix} z & y & x \\ 0 & x & y \end{pmatrix}.$$

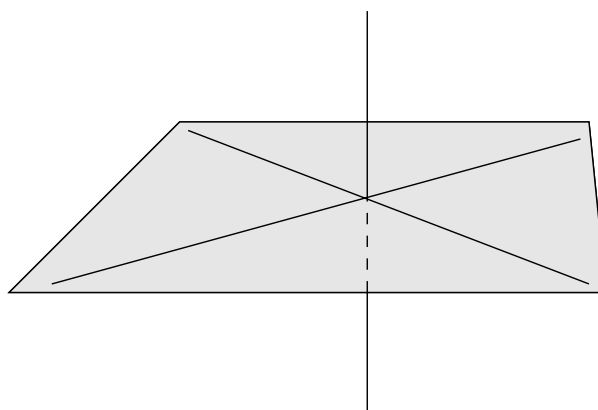


Abbildung 3.1: $A_1 \vee L$ – Der Tripelpunkt

Y wird durch die Gleichungen $xz - ay = 0$ und $yz - ax = 0$ beschrieben, denn die Gleichung $y^2 - x^2 = 0$ erhält man aus diesen beiden durch Elimination von z . Es ist leicht zu verifizieren, daß Y in den Punkten $(0, 0, a)$ und $(0, 0, -a)$ jeweils eine A_1 -Singularität besitzt.

Nach [Fr] hat die Matrix \mathfrak{M} der semi-universellen Deformation das Aussehen

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} z & y+b & x+c \\ a & x & y \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, daß die Faser über einem Punkt $(a, b, c) \in S$ mit $a \neq 0$ genau dann Singularitäten enthält, falls $b^2 - c^2 = 0$ gilt. Daraus ergibt sich nun als Gleichung für die Diskriminante der semi-universellen Deformation des Tripelpunktes:

$$D : a(b^2 - c^2) = 0.$$

Die Diskriminante besteht also aus drei Komponenten und die Multiplizität von D im Ursprung ist ebenfalls drei.

Seien B_1 und B_2 kleine, abgeschlossene Kugeln mit den Mittelpunkten $(0, 0, a)$ und $(0, 0, -a)$ und mit der Eigenschaft: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Ferner sei S' eine Umgebung von a^* in S , die so klein gewählt sei, daß $p : p^{-1}(S') \cap \mathfrak{X} \cap B_i \rightarrow S'$ für $i = 1, 2$ eine

Milnorfaserung ist. Sei $s \in S' - (S' \cap D)$ und sei $Y_1 = B_1 \cap X_s$ bzw. $Y_2 = B_2 \cap X_s$. Nun ergibt sich aus [Loo, Prop. 7.13] die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow H_1(Y_1; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(X_s; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(Y; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Da alle in dieser Sequenz beteiligten Moduln torsionsfrei sind - alle vorkommenden Fasern haben den Homotopietyp eines Bouquets von 1-Sphären - und da $\text{rang}(H_1(Y_1; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y_2; \mathbb{Z})) = \text{rang}(H_1(X_s; \mathbb{Z})) = 2$, folgt $H_1(Y; \mathbb{Z}) \cong 0$, und i_* ist ein Isomorphismus. Daher besitzt $H_1(X_s; \mathbb{Z})$ eine Basis aus zwei sich nicht schneidenden verschwindenden Zykeln δ_1 und δ_2 mit der Selbstschnittzahl 0. Der dritte verschwindende Zykel δ_3 läßt sich durch die übrigen beiden ausdrücken und man erhält: $(\delta_1, \delta_2) = (\delta_1, \delta_3) = (\delta_2, \delta_3) = 0$. Mithin besteht das Coxeter–Dynkin–Diagramm des Tripelpunktes aus drei isolierten Ecken



und die Monodromiegruppe Γ ist trivial.

3.1.2 Der allgemeine Fall

Wir wollen nun den allgemeinen Fall behandeln, in welchem $(C, 0)$ weder regulär noch quadratisch ist. Den Funktionskeim f können wir eindeutig in der Form

$$f(x, y) = x^2 h_1(x) + xy h_2(x, y) + y^2 h_3(y)$$

mit $h_1 \in \mathbb{C}\{x\} \subset \mathbb{C}\{x, y\}$, $h_2 \in \mathbb{C}\{x, y\}$ und $h_3 \in \mathbb{C}\{y\} \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ darstellen. Ferner können wir annehmen, daß

$$h_2 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$$

und $h_1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$ oder $h_3 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$

gilt.

Begründung Diese Annahme ist nur für den Fall $j^2 f \neq 0$ zu begründen. Da die Singularität von $(C, 0)$ weder regulär noch quadratisch ist, besitzt in diesem Fall die Hesse–Matrix von f im Nullpunkt den Rang 1. Deswegen gilt $j^2 f(x, y) = (\alpha x + \beta y)^2$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}$. Ist $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$, so gilt die obige Annahme. Im Fall $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$ führen wir die lineare Koordinatentransformation $x = \frac{\tilde{x} - \beta y}{\alpha}$ durch. Schreiben wir f nun in den neuen Koordinaten in der Form $\tilde{x}^2 \tilde{h}_1(\tilde{x}) + \tilde{x} y \tilde{h}_2(\tilde{x}, y) + y^2 \tilde{h}_3(y)$, so gilt $\tilde{h}_2 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$ und $\tilde{h}_3 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$.

Ohne Einschränkung behandeln wir nun den Fall $h_2, h_3 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$. Wir wählen die Funktionen g_1 und g_2 folgendermaßen:

$$g_1(x, y) := y h_3(y) + x h_2(x, y)$$

$$g_2(x, y) := -x h_1(x).$$

Dann gilt $g_1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^2$. Die Faser Y über dem Punkt $(a, 0, \dots, 0)$ wird durch die zwei folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}xz - a g_1(x, y) &= 0, \\yz - a g_2(x, y) &= 0,\end{aligned}$$

denn die Gleichung $f(x, y) = y g_1(x, y) - x g_2(x, y)$ erhält man wieder durch Elimination von z . Wir weisen im folgenden nach, daß Y in dieser Situation - im Gegensatz zum 1. Fall - genau eine Singularität besitzt, die darüber hinaus im Ursprung liegt.

Die singulären Punkte von Y müssen die beiden obigen Gleichungen sowie die maximalen Minoren der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} z - a \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & -a \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) & x \\ -a \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & z - a \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) & y \end{pmatrix}$$

annullieren. Durch geeignetes Kombinieren dieser fünf Gleichungen erhält man die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}y g_1(x, y) - x g_2(x, y) &= 0 \\y \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) - g_2(x, y) - x \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) &= 0 \\y \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) + g_1(x, y) - x \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) &= 0\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind aber äquivalent zu den drei Gleichungen $f(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ und beschreiben daher gerade die singulären Punkte der Kurve C . Das bedeutet: Ist (x_0, y_0, z_0) eine (echte) Singularität von Y , dann ist (x_0, y_0) ein singulärer Punkt von C . Nun haben wir aber vorausgesetzt, daß $0 \in \mathbb{C}^2$ eine isolierte Singularität von C ist. Somit haben mögliche Singularitäten von Y die Gestalt $(0, 0, z_0)$. In derartigen Punkten sieht die Jacobi-Matrix wie folgt aus (beachte $g_1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^2$ und $\frac{\partial g_2}{\partial y}(0, 0) = 0$):

$$\begin{pmatrix} z_0 & 0 & 0 \\ -a \frac{\partial g_2}{\partial x}(0, 0) & z_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun folgt durch Minorenbildung in der obigen Matrix, daß $z_0 = 0$ gelten muß. Damit haben wir nachgewiesen: Besitzt die ebene Kurve C eine isolierte Singularität in 0 , die weder regulär noch quadratisch ist, dann enthält die Faser Y genau eine (echte) Singularität, die überdies im Nullpunkt liegt.

Satz 3.2 *Es gilt*

$$\begin{aligned}\delta(Y) &= \delta(C) + 1, \\ \mu(Y) &= \mu(C) + 1,\end{aligned}$$

die Deformation $X \rightarrow Y$ ist also μ -konstant und δ -konstant.

Beweis Die Kurve Y wird nach der Koordinatentransformation $z \mapsto az$ durch die zwei folgenden Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}xz - g_1(x, y) &= xz - yh_3(y) - xh_2(x, y) = 0 \\ yz - g_2(x, y) &= yz + xh_1(x) = 0\end{aligned}$$

Das von den Funktionen $F_1(x, y, z) = xz - yh_3(y) - xh_2(x, y)$ und $F_2(x, y, z) = yz + xh_1(x)$ erzeugte Ideal bezeichnen wir mit J . Das Ideal I_1 werde von den maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} h_3(y) & z & x \\ z - h_2(x, y) & -h_1(x) & y \end{pmatrix}$$

erzeugt, d.h. $I_1 = (F_1, F_2, F_3)$, wobei $F_3(x, y, z) = z^2 - zh_2(x, y) + h_1(x)h_3(y)$ ist. Schließlich definieren wir noch das Ideal $I_2 := (x, y)$ und behaupten

$$I_1 \cap I_2 = J \tag{3.2}$$

Beweis der Behauptung: Es ist nur die Inklusion $I_1 \cap I_2 \subset J$ nachzuweisen. Sei dazu $G \in I_1 \cap I_2$. Wegen $G \in I_1$ gibt es Funktionen $G_1, G_2, G_3 \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$ mit $G = G_1F_1 + G_2F_2 + G_3F_3$. Es gilt $F_1, F_2 \in I_2$ und damit auch $G_1F_1 + G_2F_2 \in I_2$. Wegen $G \in I_2$ folgt daher auch $G_3F_3 \in I_2$. Desweiteren folgt aus $G_3zh_2(x, y) \in I_2$ und $G_3h_1(x)h_3(y) \in I_2$: $G_3z^2 \in I_2$. Daher ist G_3 notwendigerweise von der Form $G_3(x, y, z) = G_{3,1}(x, y, z)x + G_{3,2}(x, y, z)y$ für gewisse $G_{3,1}, G_{3,2} \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$. Nun folgt:

$$\begin{aligned}(G_3F_3)(x, y, z) &= (G_{3,1}(x, y, z)x + G_{3,2}(x, y, z)y) \cdot (z^2 - zh_2(x, y) + h_1(x)h_3(y)) \\ &= (zG_{3,1}(x, y, z) - G_{3,2}(x, y, z)h_1(x)) \cdot (xz - yh_3(y) - xh_2(x, y)) + \\ &\quad (h_3(y)G_{3,1}(x, y, z) + G_{3,2}(x, y, z)(z - h_2(x, y))) \cdot (yz + xh_1(x, y))\end{aligned}$$

Also gilt $G_3F_3 \in (F_1, F_2) = J$ und infolgedessen auch $G \in J$.

Den durch das Ideal I_1 definierten Kurvenkeim nennen wir \tilde{C} . Aus (3.2) folgt nun: $Y = V(J) = V(I_1 \cap I_2) = V(I_1) \cup V(I_2) = \tilde{C} \cup L$. Daher können wir wieder Satz 1.3 anwenden. Dieser liefert:

$$\delta(Y) = \delta(\tilde{C}) + \delta(L) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0} / (I_1 + I_2) = \delta(\tilde{C}) + 2.$$

Die Einschränkung der Projektion $\pi : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, auf den Keim $(\tilde{C}, 0)$ liefert eine endliche Abbildung vom Grad 1, deren Bild gerade

die ebene Kurve $(C, 0)$ ist. Deswegen können wir Satz 1.7 anwenden und erhalten $\delta(\tilde{C}) = \delta(C) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}, 0})$. $\mathcal{O}_{\tilde{C}, 0}$ wird als $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ -Modul von den Elementen $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_1 = z$ erzeugt. Die Relationen zwischen ϵ_0 und ϵ_1 werden durch die Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} xh_1(x) & y \\ -yh_3(y) - xh_2(x, y) & x \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Ideal $F_1(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}, 0})$ wird nun von den Einträgen dieser Matrix erzeugt, und man erkennt sofort: $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}, 0}) = 1$. Damit haben wir bewiesen, daß die Deformation $X \rightarrow Y$ δ -konstant ist. Wegen $r(Y) = r(C) + 1 = r(X)$ ist diese Deformation auch μ -konstant. \square

Beispiel 3.3 Die Gleichung $f(x, y) := x^4 + y^3 = 0$ beschreibt die ebene Kurvensingularität E_6 . Nach Lemma 3.1 gilt für die Wedge-Singularität $X = E_6 \vee L$: $\mu(X) = 7$ und $\delta(X) = 4$. Der vollständige Durchschnitt $(Y, 0)$ wird durch das Ideal $(xz - y^2, yz + x^3)$ beschrieben und ist eine einfache Singularität vom Typ U_7 . Auch hier gilt: $\mu(Y) = 7$ und $\delta(Y) = 4$.

Aus der Offenheits-Eigenschaft der Versalität [Pou] folgt, daß die verselle Deformation $p : (\mathfrak{X}, 0) \rightarrow (S, 0)$ von $(X, 0)$ einen Repräsentanten besitzt, so daß $p : (\mathfrak{X}, \zeta) \rightarrow (S, a^*)$ mit $\zeta = (0, 0, 0, a^*) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^{\tau}$ eine verselle Deformation von $(Y, 0)$ ist. Im folgenden gehen wir davon aus, daß der bereits gewählte Repräsentant diese Eigenschaft besitzt – dazu sind die Mengen S und \mathfrak{X} eventuell zu verkleinern.

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} S_a &:= \{a\} \times \{(b, c) \in \mathbb{C}^{\tau-1} : (a, b, c) \in S\} \\ \mathfrak{X}_a &:= p^{-1}(S_a) \cap \mathfrak{X} \\ p_a &:= p|_{\mathfrak{X}_a} \end{aligned}$$

behaupten wir: Der Abbildungskeim

$$p_a : (\mathfrak{X}_a, \zeta) \longrightarrow (S_a, a^*)$$

ist ebenfalls eine verselle Deformation von $(Y, 0)$. Die Begründung dafür ist, daß für $s_1, s_2 \in S$ mit $s_i = (a_i, b, c)$ mit $a_i \neq 0$ und $a_1 \neq a_2$ die Fasern X_{s_1} und X_{s_2} analytisch äquivalent sind. Diese Äquivalenz wird einfach durch die Abbildung $X_{s_1} \rightarrow X_{s_2}$, $(x, y, z) \mapsto (x, y, \frac{a_1}{a_2}z)$ gegeben. Wir bezeichnen die Diskriminante des Repräsentanten $p_a : \mathfrak{X}_a \rightarrow S_a$ von $p_a : (\mathfrak{X}_a, \zeta) \rightarrow (S_a, a^*)$ mit \tilde{D} . \tilde{D} ist irreduzibel.

Wir haben soeben den folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4 Sei $(C, 0)$ eine ebene Kurvensingularität, die weder regulär noch ein gewöhnlicher Doppelpunkt ist. Dann gilt mit den eingeführten Bezeichnungen die folgende Strukturaussage: Die Diskriminante D der semi-universellen Deformation der Wedge-Singularität $X = C \vee L$ besitzt eine Darstellung

$$(D, 0) \cong (H, 0) \cup (\mathbb{C}, 0) \times (\tilde{D}, 0).$$

Die Komponente $(\mathbb{C}, 0) \times (\tilde{D}, 0)$ ist irreduzibel, und es gilt $m(D) = m(\tilde{D}) + 1$.

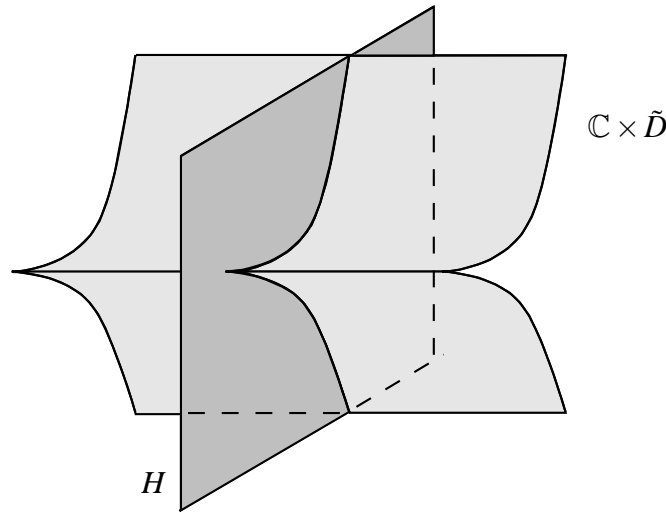


Abbildung 3.2: Die Struktur der Diskriminante

Bemerkung 3.5 (i) D. Mond und D. van Straten haben ebenfalls einen Satz über die Struktur der Diskriminante bewiesen (Theorem 1.1 in [MS]). Allerdings benutzt ihr Beweis andere Methoden als der Beweis, den wir hier gegeben haben. Im Gegensatz zu Satz 3.4 basiert ihre Beschreibung auf Invarianten der Kurve C , die ICIS Y wird nicht betrachtet.

(ii) Falls die ebene Kurvensingularität $(C, 0)$ quasihomogen ist, sind die Raumkurvensingularitäten $(X, 0)$ und $(Y, 0)$ ebenfalls quasihomogen. In diesem Fall können wir Satz 1.9 anwenden und erhalten: $\tau(Y) = \tau(X) - 1$. Dann ist die Deformation $p_a : (\mathfrak{X}_a, \zeta) \rightarrow (S_a, a^*)$ von $(Y, 0)$ wegen $\dim(S_a, a^*) = \tau(X) - 1 = \tau(Y)$ sogar semi-universell.

Mond und van Straten geben in [MS] ebenfalls eine Formel für die Multiplizität der Diskriminante der semi-universellen Deformation an:

Satz 3.6 (Theorem 4.1 in [MS]) Es gilt

$$m(D) = \text{mult}(C) + \mu(C).$$

Wie ergibt sich die Formel aus Satz 3.6? Der Beweis dieses Satzes besteht aus zwei Teilen, die zusammen die Behauptung des Satzes liefern. Den zweiten Teil des Beweises haben wir schon erwähnt und als Satz 2.12 formuliert. Im ersten Teil des Beweises betrachten Mond und van Straten eine 1-parametrische *generische* Deformation der Matrix M :

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} z & g_1(x,y) + au(x,y) & g_2(x,y) + av(x,y) \\ a & x & y \end{pmatrix}$$

mit $u, v \in \mathbb{C}\{x, y\}$ und $a \in \mathbb{C}$. Sodann zeigen sie, daß die isolierte Flächensingularität $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ (in den Variablen x, y, z und a), die durch die maximalen Minoren der Matrix \tilde{M} definiert wird, *rational* ist und daß ihr Auflösungsgraph aus $\text{mult}(C) - 1$ Komponenten besteht. Nun liefert Satz 2.12 wegen $\mu(X) = \mu(C) + 1$ die Behauptung des Satzes 3.6.

Bemerkung 3.7 (i) Aus den Sätzen 3.2, 3.4 und 3.6 folgt unmittelbar: Beschreibt die Gleichung $yg_1(x, y) - xg_2(x, y) = 0$ eine isolierte ebene Kurvensingularität $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$, die weder regulär noch quadratisch ist, dann beschreibt das Ideal $(xz - g_1(x, y), yz - g_2(x, y)) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^3, 0}$ eine ICIS $(Y, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$, für die gilt: $\mu(Y) = \mu(C) + 1$ und $m(\tilde{D}) = \text{mult}(C) + \mu(C) - 1$, wobei \tilde{D} die Diskriminante der semi-universellen Deformation von $(Y, 0)$ bezeichne.

(ii) Für die in Abschnitt 2.2 betrachtete Situation folgt desweiteren aus Satz 2.12: Ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln $\delta_1, \dots, \delta_{m(D)}$ der Singularität $X = C \vee L$ bildet ein Erzeugendensystem von $H_1(X_s; \mathbb{Z})$ (mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.2).

3.2 Monodromiegruppen

Die in Satz 3.4 angegebene spezielle Struktur der Diskriminante ermöglicht es, eine Aussage über die Coxeter–Dynkin–Diagramme der Wedge-Singularitäten zu machen. Wir wissen bereits aus der Deformationsbeziehung $X \rightarrow Y$, daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von X ein ebensolches von Y “enthält”.

Auf der anderen Seite wissen wir nach Satz 3.4, daß die Diskriminante D der semi-universellen Deformation aus *zwei* irreduziblen Komponenten besteht. Daher muß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von X auch nicht notwendigerweise zusammenhängend sein. Der folgende Satz zeigt, daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von X tatsächlich aus zwei disjunkten Graphen besteht.

Satz 3.8 Sei $(C, 0)$ eine ebene Kurvensingularität, die weder regulär noch quadratisch ist. Dann gilt: Ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $X = C \setminus L$ besteht aus zwei Komponenten, nämlich aus einem Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität Y sowie aus einer isolierten Ecke. Genauer gilt: Besitzt Y ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln $\delta_1, \dots, \delta_{m(\tilde{D})}$ mit dem Coxeter–Dynkin–Diagramm G , dann besitzt X ebenfalls ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln $\delta_1, \dots, \delta_{m(D)}$ mit dem Coxeter–Dynkin–Diagramm $G \cup e_{m(D)}$.

Beweis Wir verschieben die ebene Kurve C (längs einer beliebigen Komponente von C) ein wenig, so daß die dadurch neu entstehende Kurve X_s eine Singularität vom Typ $(C, 0)$ und eine vom Typ A_1 enthält, siehe Abb. 3.3.

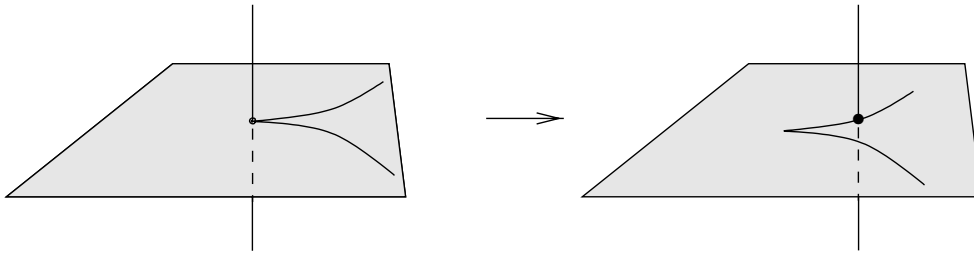


Abbildung 3.3: Die Deformation $X \rightarrow X_s$

Sicherlich kann man eine solche Translation durch eine Deformation der Parametrisierung erreichen. Diese Deformation der Parametrisierung ist aber wegen $\delta(X_s) = \delta(C) + \delta(A_1) = \delta(C) + 1 \stackrel{(3.1)}{=} \delta(X)$ auch δ -konstant und induziert folglich eine Deformation von X . Die X_s beschreibende Matrix ist von der Form:

$$\begin{pmatrix} z & \tilde{g}_1(x, y, b_0) & \tilde{g}_2(x, y, c_0) \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$$

mit gewissen $(b_0, c_0) \in S$.

Wir wählen nun eine komplexe Gerade l in \mathbb{C}^t , die die Diskriminante $D \subset S$ in Null transversal trifft. l_1 sei eine zu l parallele Gerade in \mathbb{C}^t , die durch den Punkt $s \in S$ verläuft.

B_1 und B_2 seien erneut hinreichend kleine, abgeschlossene Kugeln, zentriert um die zwei singulären Punkte von X_s und mit der Eigenschaft: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. S' sei eine Umgebung von s in S , die so klein gewählt sei, daß $p : p^{-1}(S') \cap \mathfrak{X} \cap B_i \rightarrow S'$ für $i = 1, 2$ eine Milnorfaserung ist. Jetzt verschieben wir die Gerade l_1 ein wenig und zwar so, daß die dadurch entstehende Gerade l_2 die Diskriminante in $m(D)$

regulären Punkten $t_1, \dots, t_{m(D)}$ schneidet, von denen $\mu(C) + 1 = m(D, s)$ in der kleinen Umgebung S' liegen. Ohne Einschränkung seien dies die Punkte $t_1, \dots, t_{\mu(X)}$. Sei $s_1 \in S' \cap l_2 - (S' \cap l_2 \cap D)$ und sei $Y_1 = B_1 \cap X_{s_1}$ bzw. $Y_2 = B_2 \cap X_{s_1}$. Nun liefert Proposition 7.13 in [Loo] die folgende exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow H_1(Y_1; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y_2; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_1(X_{s_1}; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X_s; \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Erneut sind alle auftretenden Fasern homotopieäquivalent zu einem Bouquet von 1-Sphären und die dazugehörigen Moduln somit torsionsfrei. Deswegen folgt $H_1(X_s; \mathbb{Z}) \cong 0$, und i_* ist ein Isomorphismus.

Wir wählen ein ausgezeichnetes System von Wegen $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq m(D)}$, das die Punkte t_i , $1 \leq i \leq m(D)$, mit dem nicht-kritischen Wert s_1 verbindet. Für $1 \leq i \leq m(D)$ sei δ_i ein längs γ_i verschwindender Zykel. Wir nehmen ohne Einschränkung an, daß das Paar (γ_1, δ_1) zu der A_1 -Singularität der Faser X_s gehört. Die Elemente $\{\delta_1, \dots, \delta_{\mu(X)}\}$ bilden eine Basis von $H_1(Y_1; \mathbb{Z}) \oplus H_1(Y_2; \mathbb{Z})$ bzw. von $H_1(X_{s_1}; \mathbb{Z})$, dabei ist der Zykel δ_1 ein erzeugendes Element von $H_1(Y_1; \mathbb{Z})$. Daher lassen sich alle Zykel $\{\delta_{\mu(X)+1}, \dots, \delta_{m(D)}\}$ durch diese Basiselemente ausdrücken:

$$\delta_j = \sum_{i=1}^{\mu(X)} \alpha_{ij} \delta_i \quad \text{für } \mu(X) + 1 \leq j \leq m(D) \text{ und gewisse } \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}. \quad (3.3)$$

Nun gilt:

$$(\delta_1, \delta_j) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq \mu(X)$$

und damit wegen (3.3)

$$(\delta_1, \delta_j) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j \leq m(D)$$

Man sieht: Die zu δ_1 gehörende Ecke e_1 ist im Coxeter–Dynkin–Diagramm mit keiner der übrigen Ecken verbunden, e_1 liegt also isoliert. Es ist klar, daß die Tatsache, daß eine Ecke des Coxeter–Dynkin–Diagramms mit keiner der übrigen Ecken verbunden ist, nicht von dem speziell gewählten Wegesystem abhängt.

Die Behauptung des Satzes ergibt sich nun aus der Deformationsbeziehung $X \rightarrow Y$, denn wir können, analog zu obigen Überlegungen, zu l parallele Geraden l_3 und l_4 in \mathbb{C}^r finden mit: l_3 verläuft durch den Punkt $a^* \in S$ und l_4 geht aus l_3 durch minimales Verschieben hervor und schneidet die Diskriminante in $m(D)$ Punkten, von denen $m(\tilde{D})$ in einer kleinen Umgebung des Punktes a^* liegen. \square

Korollar 3.9 *Die von den symplektischen Transvektionen $h_i(\delta) = \delta - (\delta, \delta_i) \cdot \delta_i$ erzeugte Monodromiegruppe Γ der Singularität X stimmt mit derjenigen der Singularität Y überein.*

Satz 3.10 Die folgende Tabelle gibt für jede einfache Kurvensingularität $(C, 0)$ das Tripel $(C, X = C \vee L, Y)$ an:

C	$yg_1(x,y) - xg_2(x,y)$	$C \vee L$	$\begin{pmatrix} z & g_1(x,y) & g_2(x,y) \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	Y	$(xz - g_1(x,y), yz - g_2(x,y))$
A_2	$y^3 - x^2$	$A_2 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^2 & x \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	A_3	$(xz - y^2, yz - x)$
$A_k, k \geq 3$	$y^{k+1} - x^2$	$A_k \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^k & x \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	D_{k+1}	$(xz - y^k, yz - x)$
$D_k, k \geq 4$	$y^{k-1} - x^2y$	$D_k \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^{k-2} & xy \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	S_{k+1}	$(xz - y^{k-2}, yz - xy)$
E_6	$y^4 - x^3$	$E_6 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^3 & x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	U_7	$(xz - y^3, yz - x^2)$
E_7	$xy^3 - x^3$	$E_7 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & xy^2 & x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	U_8	$(xz - xy^2, yz - x^2)$
E_8	$y^5 - x^3$	$E_8 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^4 & x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	U_9	$(xz - y^4, yz - x^2)$

Der **Beweis** folgt unmittelbar aus dem bisherigen und der Klassifikation der einfachen Singularitäten vollständiger Durchschnitte nach Giusti [Gi]. \square

Bemerkung 3.11 Nach [Fr] ist die Wedge-Singularität $X = C \vee L$ genau dann einfach, wenn C einfach ist.

Kapitel 4

Der Tripelpunkt

Dieser kurze Abschnitt über den Tripelpunkt spielt eine zentrale Rolle in der vorliegenden Arbeit. Es werden reelle Milnorfasern betrachtet, die verschwindenden Zykel des Tripelpunktes beschrieben, und es wird die (spätere) Berechnung von Schnittzahlen zwischen den Zykeln des Tripelpunktes und “angrenzenden” Zykeln vorbereitet. Bei der Berechnung von Coxeter-Dynkin-Diagrammen werden wir oft auf diesen Abschnitt zurückgreifen.

Der Tripelpunkt $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ werde durch die Matrix

$$M = M_{0,0,0} = \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

definiert, und der Totalraum $(\mathfrak{X}, 0)$ der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ werde durch die Matrix

$$M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} x & z+c & b \\ a & z & y \end{pmatrix}$$

beschrieben; den Basisraum bezeichnen wir wieder mit $(S, 0)$. Ferner wählen wir geeignete Repräsentanten

$$\mathfrak{X} = \{(x, y, z, a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 : \left. \begin{array}{l} xz - a(z+c) = 0 \\ xy - ab = 0 \\ y(z+c) - bz = 0 \end{array} \right\} \cap B_\varepsilon(0)$$

$$S = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} \cap B_\rho(0).$$

Hierbei sind $B_\varepsilon(0)$ und $B_\rho(0)$ offene Kugeln in \mathbb{C}^6 bzw. in \mathbb{C}^3 mit Radien ε bzw. ρ ($\rho \ll \varepsilon$) und Mittelpunkt 0 , wobei $\varepsilon > 0$ wie üblich hinreichend klein gewählt sei. Die Diskriminante D der Deformation $p : \mathfrak{X} \rightarrow S$ ist leicht zu berechnen: $D = \{(a, b, c) \in S : abc = 0\}$; sie besteht also aus den drei Koordinatenebenen

$\{a = 0\}$, $\{b = 0\}$ und $\{c = 0\}$. Für $abc \neq 0$ mit $(a, b, c) \in S$ ist die Faser

$$\bar{X}_{a,b,c} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : \begin{cases} xz - a(z+c) = 0 \\ xy - ab = 0 \\ y(z+c) - bz = 0 \end{cases}\} \cap \bar{B}_{\varepsilon'}(0)$$

glatt, wobei $\varepsilon' := \sqrt{\varepsilon^2 - (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c})}$ ist.

Sind die Störparameter a, b und c reell, so können, abhängig von deren Vorzeichen, acht verschiedene reelle Kurven $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ auftreten, die jeweils aus drei Komponenten bestehen. Für die Berechnung weiterer Dynkindiagramme ist es erforderlich, die Schnittzahlen der relativen Zykel – also der Komponenten der reellen Milnorfaser – und der verschwindenden Zykel zweier verschiedener Milnorfasern miteinander vergleichen zu können, analog zur Situation von ebenen Kurven, denn hier werden verschwindende Zykel, die zu einem Maximum bzw. zu einem Minimum gehören, in der Umgebung eines benachbarten Doppelpunktes durch geeignete relative Zykel repräsentiert.

Wir beginnen mit der Betrachtung einer Milnorfaser $\bar{X}_{a,b,c}$ mit $a, b, c > 0$. Um einen Eindruck vom qualitativen Aussehen der reellen Kurve $X_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ zu erhalten, betrachten wir zunächst die singuläre Faser $X_{a,b,0}$ (mit $a, b > 0$), die durch die Gleichungen $z(x - a) = 0$, $z(y - b) = 0$ und $xy = ab$ gegeben wird. Anhand dieser Gleichungen sieht man: Die Kurve $X_{a,b,0}$ besteht aus der Geraden $(x = a, y = b)$ sowie der Komponente $(z = 0, xy = ab)$. Diese beiden Komponenten bilden im Punkt $(a, b, 0)$ einen Doppelpunkt, den man glätten kann, indem man in der definierenden Matrix $c \neq 0$ wählt. Für $c \in \mathbb{R}^+$ sieht die reelle Kurve $X_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ dann wie in Abbildung 4.1 aus.

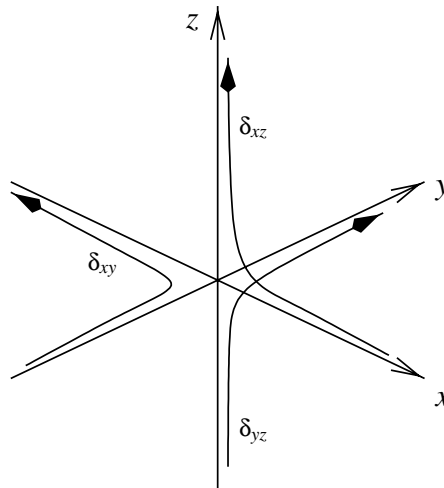


Abbildung 4.1: $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ mit $a, b, c > 0$

Es zeigt sich, daß jede der drei Komponenten von $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ annähernd in einer Koordinatenebene liegt - das gilt natürlich nicht nur für den Fall $a, b, c > 0$, sondern auch für die anderen sieben Situationen, in denen die Störparameter reell sind. Diese Eigenschaft führt zu der folgenden Bezeichnung: Die Komponente der reellen Raumkurve $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$, die näherungsweise in der xy -Ebene (bzw. xz -Ebene, yz -Ebene) liegt, definiert bis auf Orientierung einen relativen Zykel $\delta_{xy} \in H_1(\bar{X}_{a,b,c}, \partial\bar{X}_{a,b,c}; \mathbb{Z})$ (bzw. $\delta_{xz}, \delta_{yz} \in H_1(\bar{X}_{a,b,c}, \partial\bar{X}_{a,b,c}; \mathbb{Z})$). Die relativen Zyklen $\delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yz}$ seien wie in Abbildung 4.1 orientiert.

Wir kommen nun zu den drei verschwindenden Zykeln des Tripelpunktes. Grob gesagt ist jedem der drei Störparameter a, b und c ein verschwindender Zykel zugeordnet. Das soll jetzt anhand des Parameters a verdeutlicht werden. Zunächst seien a, b und c ungleich Null gewählt, etwa (wie oben) $a, b, c > 0$. Was passiert, wenn wir nun a gegen Null gehen lassen und dabei b und c nicht verändern? Dann werden zwei der drei Komponenten von $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ zusammengezogen, nämlich diejenigen, die annähernd in der xy -Ebene bzw. in der xz -Ebene liegen, siehe Abbildung 4.2.

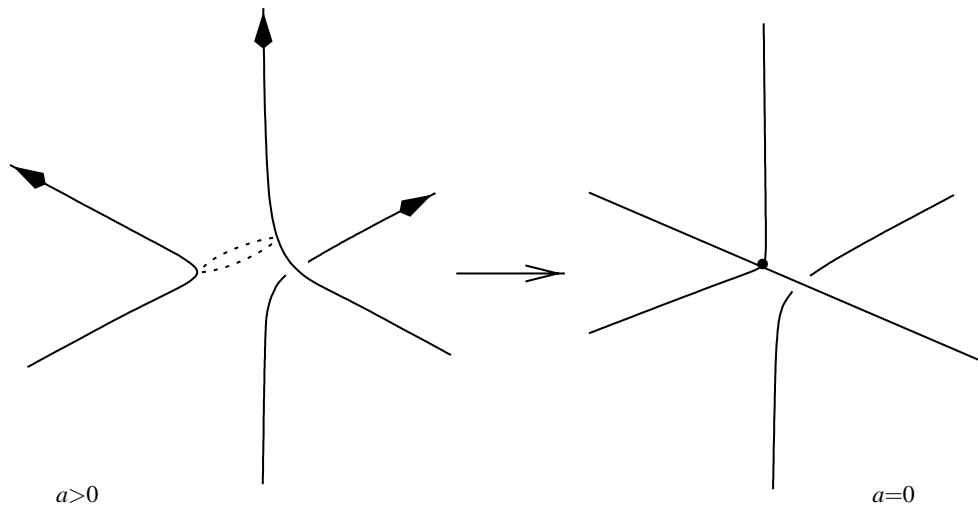


Abbildung 4.2: Das Kontrahieren des Zykels $\delta_x, \mathbb{R}^3 \ni a \rightarrow 0$

Die Kurve $\bar{X}_{0,b,c}$, die man schließlich für $a = 0$ erhält, wird durch die maximalen Minoren von $M_{0,b,c}$, also durch das Ideal $(xy, xz, y(z+c) - bz)$ beschrieben. Sie besteht aus den Komponenten $(x = 0, y(z+c) - bz = 0)$ und $(y = 0, z = 0)$ (also der x -Achse), die im Punkt $(0, 0, 0)$ einen gewöhnlichen Doppelpunkt bilden. Der verschwindende Zykel, der zu diesem Doppelpunkt gehört und der die Komponenten δ_{xy} und δ_{xz} zusammenzieht, soll mit $\delta_x \in H_1(\bar{X}_{a,b,c}; \mathbb{Z})$ bezeichnet werden.

Die beiden anderen verschwindenden Zykel des Tripelpunktes fungieren vollkommen analog: Ist $(a, b, c) \in S \cap \mathbb{R}^{*3}$ fest gewählt und lassen wir dann den Parameter b (bzw. c) gegen Null gehen, werden die Komponenten δ_{xy} und δ_{yz} (bzw. δ_{xz} und δ_{yz}) zusammengezogen und bilden schließlich für $b = 0$ (bzw. $c = 0$) einen gewöhnlichen Doppelpunkt. Diese beiden verschwindenden Zykel nennen wir entsprechend δ_y und δ_z .

Bemerkung 4.1 (i) Das Kontrahieren des Zyklus δ_x (also der Prozeß $a \rightarrow 0$) liefert, wie wir bereits gesehen haben, eine singuläre Kurve, die die x -Achse enthält. Entsprechend erhält man beim Kontrahieren des Zyklus δ_y (bzw. des Zyklus δ_z) eine singuläre Kurve, die als Komponente eine zur y -Achse (bzw. zur z -Achse) parallele Gerade besitzt. Ist daher $s \in D_{reg} = D - D_{sing}$, wobei $D_{sing} = \{(a, b, c) \in D : ab = 0, ac = 0, bc = 0\}$ ist, so enthält die Kurve X_s eine Gerade als Komponente, die entweder eine Koordinatenachse ist oder zumindest zu einer solchen parallel ist. Wenn man nun weiß, um welche Koordinatenachse es sich dabei handelt, weiß man daher auch, welcher der Zykel δ_x , δ_y und δ_z verschwindet, wenn man sich von einem regulären Wert $s' \in S - D$ dem kritischen Wert $s \in D_{reg}$ nähert. Diesen Zusammenhang werden wir in einem späteren Abschnitt verwenden.

(ii) Aus der soeben gegebenen Beschreibung der verschwindenden Zykel wird ferner deutlich, daß sie jeweils genau zwei Komponenten der reellen Milnorfaser schneiden. Umgekehrt schneidet jede Komponente einer reellen Milnorfaser genau zwei verschwindende Zykel. Daß sich die verschwindenden Zykel δ_x , δ_y und δ_z untereinander nicht schneiden, haben wir bereits in dem Abschnitt über die Wedge-Singularitäten gesehen.

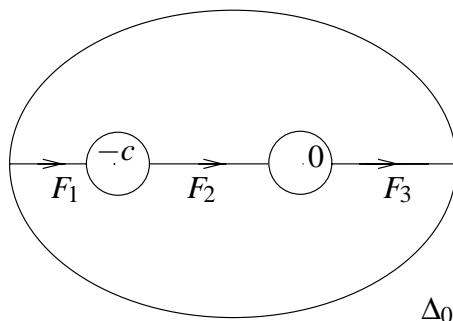
Unser Ziel ist im folgenden, einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\Phi : \bar{X}_{a,b,c} \rightarrow \bar{X}_{-a,b,c}$ zu konstruieren, der es gestattet, die Komponenten der reellen Milnorfasern $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ bzw. $\bar{X}_{-a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ miteinander zu identifizieren. Wenn wir diesen Diffeomorphismus zur Verfügung haben, können wir dann auch die Schnittzahlen der verschwindenden Zykel δ_x , δ_y und δ_z und der relativen Zykel δ_{yz} , δ_{xy} und δ_{xz} auf $H_1(\bar{X}_{a,b,c}, \partial\bar{X}_{a,b,c}; \mathbb{Z})$ bzw. auf $H_1(\bar{X}_{-a,b,c}, \partial\bar{X}_{-a,b,c}; \mathbb{Z})$ miteinander vergleichen.

Zunächst betrachten wir die Menge

$$\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C} : a^2 \cdot \left| \frac{z+c}{z} \right|^2 + b^2 \cdot \left| \frac{z}{z+c} \right|^2 + |z|^2 \leq \epsilon'^2\}$$

Δ_0 ist diffeomorph zu einer Kreisscheibe mit zwei Löchern, siehe Abb. 4.3. Wir haben nun den folgenden Diffeomorphismus:

$$\varphi_0 : \begin{cases} \Delta_0 & \rightarrow \bar{X}_{a,b,c} \\ z & \mapsto \left(\frac{a(z+c)}{z}, \frac{bz}{z+c}, z \right) \end{cases}$$

Abbildung 4.3: Δ_0

Die Menge $\Delta_0 \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ besitzt drei Komponenten, die wir mit F_1 , F_2 und F_3 bezeichnen, siehe Abb. 4.3. Diese versehen wir mit der induzierten Standardorientierung von \mathbb{R} . Dann werden F_1 , F_2 und F_3 mittels φ_0 auf δ_{yz} , δ_{xy} und δ_{xz} abgebildet und zwar so, daß sich die gewählten Orientierungen entsprechen.

Nun benutzen wir den Weg

$$\gamma: \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & S - D \\ t & \mapsto & (a \cdot e^{\pi i t}, b, c) \end{cases},$$

der die Punkte (a, b, c) und $(-a, b, c)$ miteinander in S verbindet. Der Weg γ liefert für jedes $t \in [0, 1]$ einen Diffeomorphismus

$$\varphi_t: \begin{cases} \Delta_t & \rightarrow & \bar{X}_{\gamma(t), b, c} \\ z & \mapsto & \left(\frac{\gamma(t)(z+c)}{z}, \frac{bz}{z+c}, z \right) \end{cases}$$

mit

$$\Delta_t = \{z \in \mathbb{C} : |\gamma(t)|^2 \cdot \left| \frac{z+c}{z} \right|^2 + b^2 \cdot \left| \frac{z}{z+c} \right|^2 + |z|^2 \leq \varepsilon'^2\}.$$

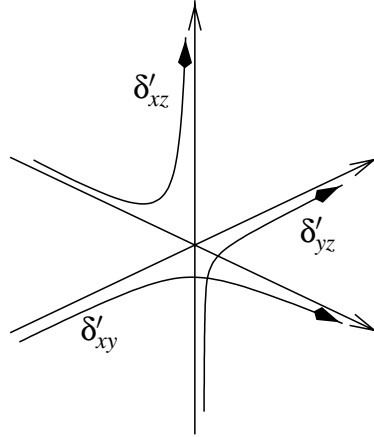
Aber ganz offensichtlich gilt wegen $|\gamma(t)| = a$ für alle $t \in [0, 1]$: $\Delta_0 = \Delta_t$, d.h. für jedes $t \in [0, 1]$ haben wir einen Diffeomorphismus

$$\varphi_t: \Delta_0 \rightarrow \bar{X}_{\gamma(t), b, c}.$$

Die φ_t definieren die folgende 1-parametrische Familie von Diffeomorphismen:

$$\Phi_t := \varphi_t \circ \varphi_0^{-1}: \bar{X}_{a, b, c} \rightarrow \bar{X}_{\gamma(t), b, c}.$$

Der Realteil der Faser $\bar{X}_{\gamma(1), b, c} = \bar{X}_{-a, b, c}$ sieht qualitativ folgendermaßen aus:



Wir übertragen die Orientierungen von F_1, F_2 und F_3 mittels φ_1 auf $\delta'_{yz}, \delta'_{xy}$ und δ'_{xz} . Es ist klar, daß der Diffeomorphismus $\Phi_1 : \bar{X}_{a,b,c} \rightarrow \bar{X}_{-a,b,c}$ die relativen Zykel $\delta_{xy}, \delta_{xz}, \delta_{yz} \in H_1(\bar{X}_{a,b,c}, \partial\bar{X}_{a,b,c}; \mathbb{Z})$ auf $\delta'_{xy}, \delta'_{xz}, \delta'_{yz} \in H_1(\bar{X}_{-a,b,c}, \partial\bar{X}_{-a,b,c}; \mathbb{Z})$ abbildet. Ferner ist der Diffeomorphismus Φ_1 orientierungserhaltend, so daß wir $\delta'_x := \Phi_{1*}(\delta_x), \delta'_y := \Phi_{1*}(\delta_y)$ und $\delta'_z := \Phi_{1*}(\delta_z)$ mit δ_x, δ_y und δ_z identifizieren können. Damit haben wir also für $i \in \{xy, xz, yz\}$ und $j \in \{x, y, z\}$:

$$(\delta'_i, \delta'_j) = (\Phi_{1*}(\delta_i), \Phi_{1*}(\delta_j)) = (\delta_i, \delta_j).$$

Wir können also nun die Schnitzzahlen der Komponenten der reellen Milnorfasern mit den verschwindenden Zykeln in den Fasern $\bar{X}_{a,b,c}$ und $\bar{X}_{-a,b,c}$ miteinander vergleichen.

Natürlich kann man einerseits vollkommen analoge Überlegungen auch für die Fälle $(b > 0, c < 0)$, $(b < 0, c > 0)$ und $(b < 0, c < 0)$ anstellen und andererseits auf die gleiche Art und Weise auch geeignete Diffeomorphismen $\bar{X}_{a,b,c} \rightarrow \bar{X}_{a,-b,c}$ bzw. $\bar{X}_{a,b,c} \rightarrow \bar{X}_{a,b,-c}$ konstruieren, die es ermöglichen, die Objekte in diesen Fasern miteinander zu identifizieren.

Zusammenfassend bedeutet dies: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ vom Betrag hinreichend klein gewählt; ferner sei $a_1 \in \{a, -a\}$, $b_1 \in \{b, -b\}$, $c_1 \in \{c, -c\}$. Dann gibt es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $\bar{X}_{a,b,c} \xrightarrow{\sim} \bar{X}_{a_1,b_1,c_1}$, der die drei Komponenten der reellen Milnorfaser $\bar{X}_{a,b,c} \cap \mathbb{R}^3$ auf diejenigen der reellen Milnorfaser $\bar{X}_{a_1,b_1,c_1} \cap \mathbb{R}^3$ abbildet und zwar so, daß die Komponenten, die annähernd in der xy -Ebene (bzw. xz - bzw. yz -Ebene) liegen, unter diesem Diffeomorphismus miteinander identifiziert werden können.

Das folgende Lemma wird sich als sehr nützlich erweisen:

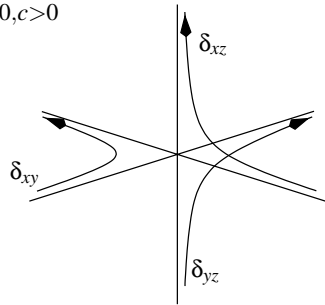
Lemma 4.2 *Es sei $(a, b, c) \in S \cap \mathbb{R}^{*3}$. Dann bestehen in der Faser $\bar{X}_{a,b,c}$ unter den Schnittzahlen der verschwinden Zykel δ_x , δ_y und δ_z mit den Komponenten δ_{xy} , δ_{xz} und δ_{yz} folgende Beziehungen:*

$$\begin{aligned}(\delta_{xy}, \delta_x) &= -(\delta_{xz}, \delta_x) \\(\delta_{xy}, \delta_y) &= -(\delta_{yz}, \delta_y) \\(\delta_{xz}, \delta_z) &= -(\delta_{yz}, \delta_z)\end{aligned}$$

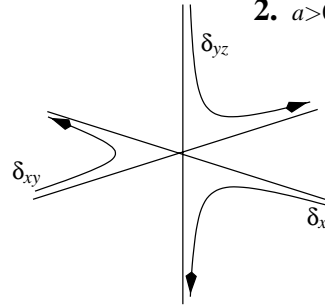
Beweis Es genügt, das Lemma für den Fall $a, b, c > 0$ zu beweisen. Da die Begründung für alle drei Gleichungen die gleiche ist, beschränken wir uns außerdem auf den Nachweis der ersten Gleichung. Dazu betrachten wir die Faser $\bar{X}_{0,b,c}$ (mit $b, c > 0$), die im Nullpunkt einen Doppelpunkt besitzt. Dieser Doppelpunkt kann geglättet werden, indem man in der definierenden Matrix $a \neq 0$ setzt. Für klein gewähltes $a \in \mathbb{R}^+$ repräsentieren dann δ_{xy} und δ_{xz} in einer kleinen Umgebung des Ursprungs die zwei Komponenten der reellen Milnorfaser des Doppelpunktes $\bar{X}_{0,b,c}$. Nun sind δ_{xy} und δ_{xz} als solche nicht kohärent orientiert, so daß sie den Zykel δ_x mit verschiedenem Vorzeichen schneiden. \square

Auf der nächsten Seite findet man eine Tafel, in der schematisch alle acht verschiedenen Milnorfasern dargestellt sind. Dieser Tafel entnimmt man insbesondere, wie sich die Orientierungen der relativen Zykel mittels der soeben beschriebenen Diffeomorphismen aufeinander übertragen. An dieser Stelle sind wir etwas ungenau, da wir in der Tafel die Bilder von δ_{xy} , δ_{xz} und δ_{yz} (suggestiverweise) wieder mit δ_{xy} , δ_{xz} und δ_{yz} bezeichnen werden. Die Koordinatenachsen in den folgenden Bildern seien so bezeichnet, wie in Abbildung 4.1.

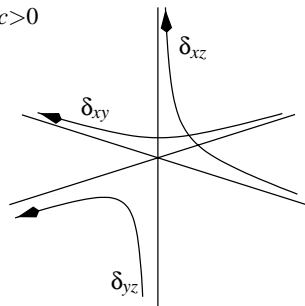
1. $a > 0, b > 0, c > 0$



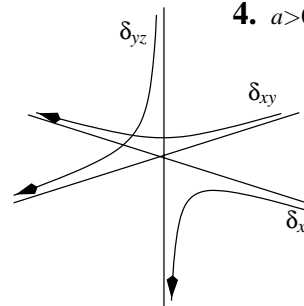
2. $a > 0, b > 0, c < 0$



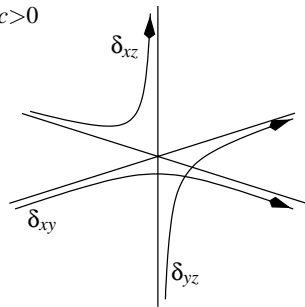
3. $a > 0, b < 0, c > 0$



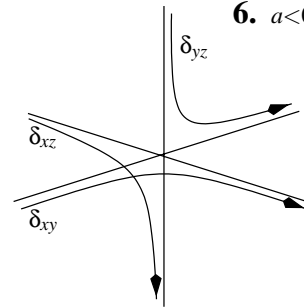
4. $a > 0, b < 0, c < 0$



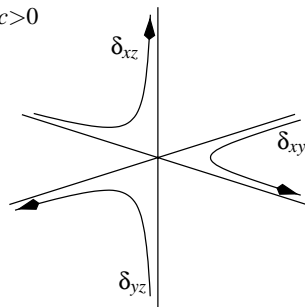
5. $a < 0, b > 0, c > 0$



6. $a < 0, b > 0, c < 0$



7. $a < 0, b < 0, c > 0$



8. $a < 0, b < 0, c < 0$

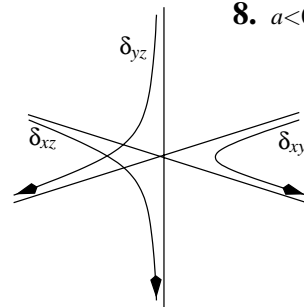


Abbildung 4.4: Die reellen Milnorfasern des Tripelpunktes

Kapitel 5

Raumkurven der Multiplizität drei

Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine isolierte Kurvensingularität der Einbettungsdimension $\text{embdim}(X) = 3$ und der Multiplizität $\text{mult}(X) = 3$. Durch die erste Bedingung werden solche Singularitäten ausgeschlossen, die isomorph zu ebenen Kurvensingularitäten sind. Nach Lemma/Definition 1.4 in [JS1] wird $(X, 0)$ durch die maximalen Minoren einer 2×3 -Matrix M gegeben, wobei M die folgende Form besitzt:

$$M = \begin{pmatrix} y & z + c(x) & b(x) \\ z & a(x) & y + d(x) \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}\{x\}.$$

Die n -Invariante einer solchen Kurve ist wie folgt definiert (vgl. Theorem 4.2 in [MS] oder Lemma/Definition 1.4 in [JS1]):

$$n(X) := \min\{\text{ord}(a), \text{ord}(b), \text{ord}(c), \text{ord}(d)\}.$$

Die spezielle Bauart der Matrix M haben D. Mond und D. van Straten in [MS] genutzt, um durch iteriertes Aufblasen eine Formel für die Multiplizität der Diskriminante von $(X, 0)$ zu erhalten:

Satz 5.1 (Theorem 4.2 in [MS]) *Es sei Y eine Raumkurve, die kein vollständiger Durchschnitt ist, und es sei \mathfrak{Y} der Totalraum einer generischen 1-parametrischen Glättung von Y . Gilt nun $\text{mult}(Y) = 3$, dann ist \mathfrak{Y} ein rationaler Tripelpunkt, dessen Auflösungsgraph aus einer zentralen (-3) -Kurve und drei Ketten von (-2) -Kurven der Länge $n(Y) - 1$ besteht.*

Als Folgerung aus diesem Satz erhält man (vgl. Satz 2.12):

Korollar 5.2 (Corollary 4.4 in [MS]) *Die Milnorzahl der Fläche \mathfrak{Y} ergibt sich als Anzahl der exzeptionellen Kurven in der minimalen Auflösung von \mathfrak{Y} , nämlich $1 + 3(n(Y) - 1)$. Für die Multiplizität der Diskriminante der semi-universellen Deformation von Y gilt daher:*

$$m = \mu(Y) + 1 + 3 \cdot (n(Y) - 1).$$

Man sieht, daß die Situation für $n(X) = 1$ am einfachsten ist, denn in diesem Fall hat man $m = \mu(X) + 1$.

5.1 Die einfachste Situation: $n(X) = 1$.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt auf solche Raumkurvensingularitäten konzentrieren, deren Präsentationsmatrix von einer einfachen Bauart ist. Im folgenden bezeichne $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine isolierte Raumkurvensingularität, die durch die maximalen Minoren einer Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} y & z & x \\ z & g(x, y) & y \end{pmatrix} \text{ mit } g \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}^2$$

definiert wird. Dann gilt $\text{mult}(X) = 3$, $\text{embdim}(X) = 3$ und $n(X) = 1$. Insbesondere lassen sich die nach [Fr] einfachen Singularitäten $E_6(1)$, $E_7(1)$ und $E_8(1)$ durch eine solche Matrix definieren.

Die Einschränkung der Projektion $\pi : (\mathbb{C}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$, auf den Kurvenkeim $(X, 0)$ liefert eine endliche Abbildung vom Grad 1, deren Bild eine ebene Kurvensingularität $(C, 0)$ ist. Den $(C, 0)$ definierenden Funktionskeim f erhalten wir wie folgt (vgl. Satz 1.6 und Beispiel 1.8): $\mathcal{O}_{X, 0}$ wird als $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$ -Modul von den Elementen $\epsilon_0 = 1$ und $\epsilon_1 = z$ erzeugt. Die Relationen zwischen ϵ_0 und ϵ_1 werden durch die Zeilen der Matrix

$$\begin{pmatrix} -y^2 & x \\ -xg(x, y) & y \end{pmatrix}$$

gegeben. Der Funktionskeim f berechnet sich als Determinante dieser Matrix, d.h.

$$f(x, y) = x^2 g(x, y) - y^3.$$

Nun liefert Satz 1.7: $\delta(X) = \delta(C) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_{X, 0})$. Das Fitting-Ideal $F_1(\pi_* \mathcal{O}_{X, 0})$ wird von den Einträgen der obigen Matrix erzeugt, und man erkennt sofort: $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0} / F_1(\pi_* \mathcal{O}_{X, 0}) = 1$. Es ist klar, daß X und C die gleiche Anzahl von Zweigen haben. Wir halten das Ergebnis in einem Lemma fest.

Lemma 5.3 *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:*

$$\delta(X) = \delta(C) - 1 \quad \text{und} \quad \mu(X) = \mu(C) - 2$$

□

Bemerkung 5.4 Ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $(X, 0)$ besteht aus $m = \mu(X) + 1 = \mu(C) - 1$ Ecken und besitzt daher eine Ecke weniger als ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Hyperflächensingularität $(C, 0)$.

Im folgenden setzen wir wie bei der reellen Morsifikation ebener Kurven voraus, daß sich das Polynom f in ein Produkt

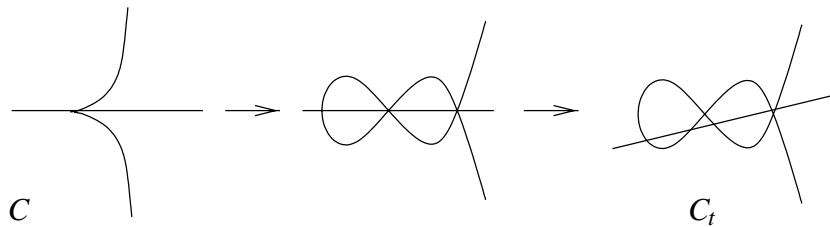
$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdot \dots \cdot f_r(x, y)$$

zerlegen läßt mit reellen Polynomen f_1, \dots, f_r , wobei $r = r(C) = r(X)$ die Anzahl der Zweige von C bzw. X angibt. Unter Zuhilfenahme der Arbeiten [A'C] oder [G-Z2] erlaubt diese Voraussetzung den folgenden Schluß: Man kann die ebene Kurve C in eine Kurve deformieren, die ausschließlich quadratische und D_4 -Singularitäten besitzt, die überdies alle reell sind. Durch eine anschließende Translation der Koordinaten kann man erreichen, daß eine D_4 -Singularität im Ursprung liegt. Danach werden alle anderen D_4 -Singularitäten entfaltet, d.h. man bringt die drei Komponenten einer solchen Singularität in allgemeine Lage und erhält drei (reelle) Doppelpunkte. Die dadurch entstehende Kurve C_t wird durch ein Polynom f_t definiert, das von der Form

$$f_t(x, y) = x^2 g(x, y) - y^3 + x^2 A_t(x, y) - xy B_t(x, y),$$

mit $A_t, B_t \in \mathfrak{m}_{\mathbb{C}^2, 0}$, ist.

Beispiel 5.5 $g(x, y) = x^3 y \Rightarrow f(x, y) = x^5 y - y^3$ (E_{13})



In diesem Beispiel ist etwa $f_t(x, y) = (y - \frac{1}{5}t^3 x)((x + 2t^2)(x + t^2)^2 x^2 - y^2)$.

Die Deformation $C \rightarrow C_t$ von C können wir zu einer Deformation von X "liften". Zu diesem Zweck wird die X definierende Matrix M wie folgt gestört:

$$M_t = \begin{pmatrix} y & z & x \\ z - B_t(x, y) & g(x, y) + A_t(x, y) & y \end{pmatrix}.$$

Wenn man die durch diese Matrix beschriebene Kurve X_t in die Ebene projiziert, erhält man gerade C_t .

Lemma 5.6 Die Kurve X_t besitzt im Ursprung eine Singularität vom Typ $A_1 \vee L$ (also einen Tripelpunkt) und sonst nur Doppelpunkte als Singularitäten, die in 1:1-Korrespondenz zu den Doppelpunkten von C_t stehen. Ferner ist die Deformation $X \rightarrow X_t$ δ -konstant.

Beweis Zunächst überzeugt man sich davon, daß über jedem Punkt von C_t *genau* ein Punkt von X_t liegt:

- Über $(0, 0) \in C_t$ liegt der Punkt $(0, 0, 0) \in X_t$
- Ist $(0, 0) \neq (x, y) \in C_t$, so kann man die X_t definierenden Gleichungen nach z auflösen:

$$- y \neq 0 : z = \frac{x(g(x,y)+A_t(x,y))}{y}$$

$$- x \neq 0 : z = \frac{y^2}{x} + B_t(x,y)$$

Insbesondere folgt daraus, daß über Doppelpunkten von C_t auch Doppelpunkte von X_t liegen.

Nun behandeln wir die Singularität von X_t im Ursprung, die wir mit $(Y, 0)$ bezeichnen wollen. Aus der Oberhalbstetigkeit von δ und Lemma 5.3 folgt:

$$\delta(X_t) \leq \delta(X) = \delta(C) - 1.$$

Nun besitzt die Kurve X_t $\delta(C) - 3$ Doppelpunkte, da C_t so viele Doppelpunkte besitzt. Daraus folgt:

$$\delta(X_t) = \delta(C) - 3 + \delta(Y) \leq \delta(C) - 1,$$

also

$$\delta(Y) \leq 2.$$

Wegen $\mu(Y) = 2\delta(Y) - r(Y) + 1 \leq 4 - 3 + 1 = 2$ und $\text{embdim}(Y) = 3$ folgt jetzt aus Satz 1.1: $(Y, 0)$ ist ein Tripelpunkt. Also gilt $\mu(Y) = 2$ und die Deformation $X \rightarrow X_t$ ist δ -konstant. \square

Bei der reellen Morsifikation ebener Kurven wählt man als generische Gerade im Basisraum der Deformation die Koordinatenachse des Parameters, der die Funktion in konstanter Richtung stört - dieser Parameter heiße etwa λ . Eine reelle Morsifikation definiert dann eine zu dieser Koordinatenachse parallele Gerade. Für hinreichend klein gewähltes λ enthalten die entsprechenden Kurven für $\lambda > 0$ (bzw. $\lambda < 0$) in den \oplus -Regionen (bzw. \ominus -Regionen) Zyklen, die zu einem Maximum (bzw. Minimum) gehören. Insbesondere verschwinden diese Zyklen, wenn sich der Parameter λ den kritischen Werten der jeweiligen Maxima bzw. Minima nähert. Die Faser über dem Wert $\lambda = 0$ enthält alle reellen Doppelpunkte (also alle Sattelpunkte) der definierenden Funktion.

Wir werden sehen, daß sich diese grundlegende Idee bei der reellen Morsifikation von ebenen Kurven auch auf die hier betrachteten Raumkurvensingularitäten übertragen läßt. Wesentlich ist dabei die richtige Wahl der generischen Geraden

im Basisraum. Wir werden nun nachweisen, daß die Koordinatenachse des Parameters a , der den $(2,2)$ -Eintrag der definierenden Matrix in konstanter Richtung stört, das Gewünschte leistet.

Die Kurve $X_{t,a}$ werde durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{t,a} = \begin{pmatrix} & y & & z & & x \\ z - B_t(x,y) & & g(x,y) + A_t(x,y) - a & & y & \end{pmatrix}$$

definiert. Die Projektion von $X_{t,a}$ in die xy -Ebene liefert die ebene Kurve $C_{t,a}$, die durch das Polynom

$$f_{t,a}(x,y) = x^2g(x,y) + x^2A_t(x,y) - ax^2 - y^3 - xyB_t(x,y)$$

definiert wird.

Lemma 5.7 *Die a -Achse schneidet die Diskriminante D der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ in 0 transversal.*

Beweis Wir fassen nun a nicht als Störparameter, sondern als neue Variable auf. Dann definieren die Minoren der Matrix

$$N_1 = \begin{pmatrix} y & z & x \\ z & g(x,y) - a & y \end{pmatrix}$$

eine isolierte Flächensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$. Aus dem in [MS] gegebenen Beweis für Satz 5.1 folgt sofort: $(X_0, 0)$ ist ein rationaler Tripelpunkt, dessen Auflösungsgraph aus einer (-3) -Kurve besteht. Diese Aussage kann auch wie folgt begründet werden: In [Tju, §2] wird gezeigt, daß die maximalen Minoren der Matrix

$$N_2 = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_3 \\ z_3 & z_1 + z_3 & z_2 \end{pmatrix}$$

einen rationalen Tripelpunkt in $(\mathbb{C}^4, 0)$ definieren, dessen Auflösungsgraph aus einer (-3) -Kurve besteht. Nun zeigt die Koordinatentransformation $z_0 = y - x$, $z_1 = y$, $z_2 = -a - z + g(x,y)$, $z_3 = z - y$, daß die durch N_2 definierte Flächensingularität zu $(X_0, 0)$ isomorph ist.

Es folgt, daß die Milnorzahl von $(X_0, 0)$, d.h. die zweite Bettizahl einer Milnorfaser von X_0 , eins ist. Infolgedessen ist die a -Achse nicht im Tangentialkegel von $(D, 0)$ enthalten. \square

Mit l_t bezeichnen wir die zur a -Achse parallele Gerade im Basisraum, die durch den Störparameter t definiert wird (für $t = 0$ fällt l_0 mit der a -Achse zusammen). Für hinreichend klein gewähltes t schneidet l_t die Diskriminante in der Nähe des Ursprungs nur in $m = \mu(X) + 1$ Punkten (mit Vielfachheiten gezählt).

Daher kann $a \in \mathbb{R}^*$ so klein gewählt werden, daß die Faser $X_{t,a}$ glatt ist. Auf der anderen Seite ist die ebene Kurve $C_{t,a}$ nicht glatt; sie besitzt im Ursprung eine A_2 -Singularität, deren Tangentialkegel die y -Achse ist. Abgesehen von dieser Kuppe ist die Kurve $C_{t,a}$ jedoch glatt. Ihr Realteil $C_{t,a} \cap \mathbb{R}^2$ besitzt für $a > 0$ (bzw. $a < 0$) Zykel, die innerhalb der \oplus -Regionen (bzw. \ominus -Regionen) von $C_t \cap \mathbb{R}^2$ liegen. Dies sind gerade die Komponenten der Niveaulinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f_t(x,y)}{x^2} = a\}$. Da die Kurve $C_{t,a}$ außerhalb des Ursprungs lokal isomorph zur singularitätenfreien Kurve $X_{t,a}$ ist, stehen diese Zykel in 1 : 1-Korrespondenz zu gewissen Zykeln von $X_{t,a}$.

Für $a \rightarrow 0$, $a \neq 0$, schmiegen sich die Zykel von $C_{t,a}$ an die Ränder der jeweiligen \oplus - bzw. \ominus -Regionen von C_t an.

Falls man hingegen a betragsmäßig wachsen läßt, verschwinden diese Zykel. Das soll nun kurz verdeutlicht werden: Sei etwa R eine \oplus -Region von $C_t \cap \mathbb{R}^2$, die nicht an den Ursprung im \mathbb{R}^2 angrenzt. Die Funktion $a : (x,y) \mapsto \frac{f_t(x,y)}{x^2}$ besitzt dann auf der kompakten Menge R ein Maximum mit dem kritischen Wert a^* . Sei R' nun eine an den Ursprung angrenzende \oplus -Region und sei $a \in \mathbb{R}^+$ vom Betrag her hinreichend klein gewählt. Sei \mathfrak{J} die in R liegende Komponente der Niveaulinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f_t(x,y)}{x^2} = a\}$ und sei R' das von \mathfrak{J} berandete kompakte Gebiet. Nun können wir wie oben argumentieren: Die Funktion $a : (x,y) \mapsto \frac{f_t(x,y)}{x^2}$ nimmt auf R' ihr Maximum an.

Zwei Bemerkungen sind an dieser Stelle angebracht. Zum einen sei erwähnt, daß sich alle kritischen Werte von a um den Ursprung herum konzentrieren. Um diesen Bestand einzusehen, untersucht man die drei Gleichungen, die $X_{t,a}$ definieren, sowie die neun Gleichungen, die man als 2×2 -Minoren der Jacobi-Matrix erhält, und überlegt sich dann schnell, daß für jeden dieser kritischen Werte $a^*(t)$ gilt: $\lim_{t \rightarrow 0} a^*(t) = 0$.

Außerdem sei darauf hingewiesen, daß $\frac{f_t(x,y)}{x^2}$ im Inneren der Regionen R von C_t exakt einen kritischen Punkt besitzt. Andernfalls würde die a -Achse die Diskriminante nämlich nicht transversal und l_t diese folglich nicht in m (mit Multiplizität gezählten) Punkten nahe Null schneiden.

Zusammenfassend erhalten wir:

- Die Kurve $X_{t,0} = X_t$ besitzt im Ursprung einen Tripelpunkt und sonst genau $\delta(C) - 3$ Doppelpunkte, die aufgrund der lokalen Isomorphie zwischen X_t und C_t (außerhalb des Ursprungs) den Doppelpunkten von C_t entsprechen.
- Die Kurve $X_{t,a}$ besitzt für hinreichend klein gewähltes $a > 0$ (bzw. $a < 0$) reelle Zykel, die in 1 : 1-Korrespondenz zu den \oplus -Regionen (bzw. zu den \ominus -Regionen) der $X_t \cap \mathbb{R}^3$ zugrunde liegenden Kurve $C_t \cap \mathbb{R}^2$ stehen. Alle diese Zykel ziehen sich auf einen Punkt zusammen, falls man a betragsmäßig wachsen und gegen bestimmte (kritische) Werte gehen läßt; sie repräsentieren also *verschwindende Zykel*.

5.1.1 Die Berechnung der Schnittzahlen

Der nun folgende Abschnitt basiert auf der Arbeit [A'C] und ist durch den ("Baustein") Tripelpunkt ergänzt worden.

Wir kommen nun zu den Fasern $X_{t,a}$ zurück. Wir haben bereits gesehen, daß die (kritischen) Werte a_1, \dots, a_m , über denen singuläre Fasern liegen, reell sind und sich in einer kleinen Kreisscheibe \mathbb{D} befinden.

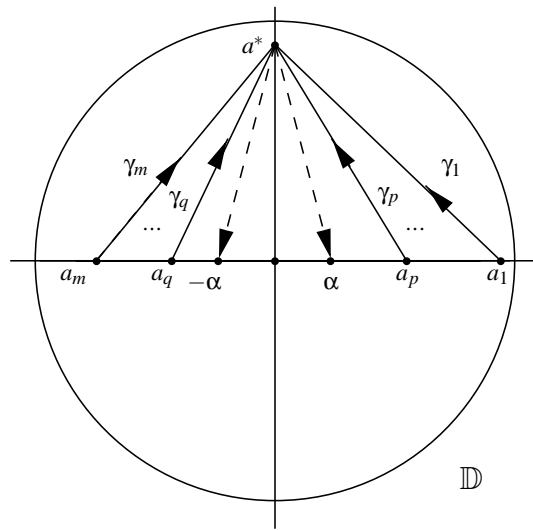


Abbildung 5.1: Die Kreisscheibe \mathbb{D}

Die kritischen Werte a_1, \dots, a_m seien der Größe nach angeordnet ($a_m \leq \dots \leq a_1$); a_p sei der kleinste positive und a_q sei der größte negative kritische Wert. Für $p < i < q$ ist $a_i = 0$.

Als ausgezeichneten nicht-kritischen Wert wählen wir einen Punkt a^* auf dem positiven Abschnitt der imaginären Achse. Für $1 \leq i \leq m$ verbinden die Wege $\gamma_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ die kritischen Werte a_1, \dots, a_m mit dem nicht-kritischen Wert a^* , siehe Abb. 5.1.

Die Zahl $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sei so beschaffen, daß das abgeschlossene Intervall $[-\alpha, \alpha]$ nur 0 als kritischen Wert enthält. Die Wege $\gamma_{-\alpha}$ bzw. γ_α seien Parametrisierungen der Strecken von a^* nach $-\alpha$ bzw. α .

Durch Parallelverschiebung längs der Wege $\gamma_{-\alpha}$ bzw. γ_α können wir die verschwindenden Zyklen $\delta_1, \dots, \delta_m \in H_1(X_{t,a^*}; \mathbb{Z})$ in $H_1(X_{t,-\alpha}; \mathbb{Z})$ bzw. $H_1(X_{t,\alpha}; \mathbb{Z})$ transportieren:

$$\begin{aligned} \delta_i'' &:= h_{\gamma_{-\alpha^*}}(\delta_i) \\ \delta_i' &:= h_{\gamma_{\alpha^*}}(\delta_i) \end{aligned}$$

Es wird sich im weiteren als nützlich erweisen, die folgenden Indexmengen zu verwenden:

$$\begin{aligned} I_+ &= \{1, \dots, p\} \\ I_D &= \{p+1, \dots, p+\delta(C)-3\} \\ I_T &= \{p+\delta(C)-2, p+\delta(C)-1, p+\delta(C)\} = \{l_1, l_2, l_3\} \\ I_\bullet &= I_D \cup I_T \\ I_- &= \{q = p+\delta(C)+1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Wir orientieren die Zykel δ'_i für $i \in I_+$ und δ''_i für $i \in I_-$ wie folgt: Die Bilder der Zykel unter der Projektion in die xy -Ebene repräsentieren - wie wir bereits gesehen haben - die Komponenten der Niveaulinie $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f_i(x, y)}{x^2} = \alpha\}$ bzw. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{f_i(x, y)}{x^2} = -\alpha\}$. Die Zykel in der rechten Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ orientieren wir entgegen des Uhrzeigersinns; die Zykel in der linken Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\}$ werden dagegen im Uhrzeigersinn orientiert, siehe Abb. 5.2¹. Anschließend übertragen wir diese Orientierungen auf die Zykel δ'_i ($i \in I_+$) und δ''_i ($i \in I_-$), die ihrerseits (mittels der Abbildungen $h_{\gamma_{\alpha^*}}^{-1}$ bzw. $h_{\gamma_{-\alpha^*}}^{-1}$) die Orientierungen der Zykel $\delta_i \in H_1(X_{t, \alpha^*}; \mathbb{Z})$, $i \in I_+ \cup I_-$, festlegen.

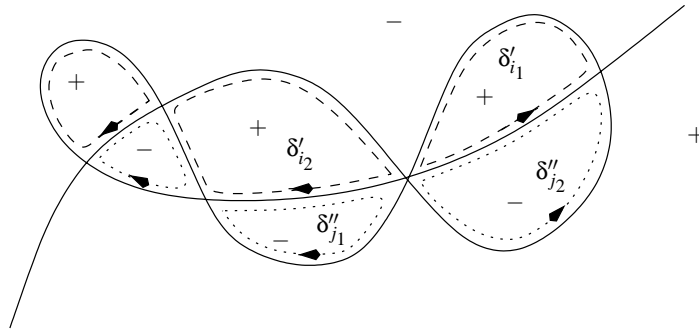


Abbildung 5.2: Die Kurve X_t (bzw. C_t)

Die verschwindenden Zykel $\delta_{p+1}, \dots, \delta_{p+\delta(C)-3} \in H_1(X_{t, \alpha^*}; \mathbb{Z})$, die zu unseren $\delta(C) - 3$ Doppelpunkten gehören, orientieren wir so, daß

$$(\delta_i, \delta_j) = 1 \text{ für } \begin{cases} i \in I_+ & \text{und} & j \in I_D \\ i \in I_D & \text{und} & j \in I_-, \end{cases}$$

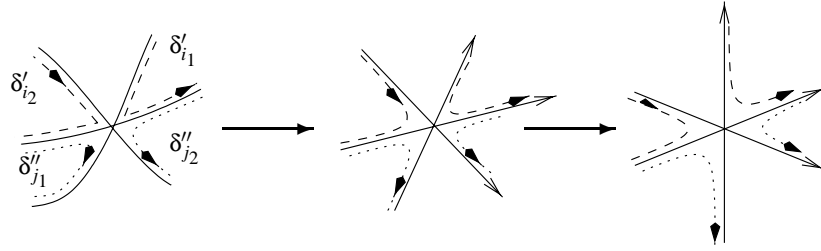
falls die zu i (bzw. j) gehörende Region an den zu j (bzw. i) gehörenden Doppelpunkt angrenzt. Andernfalls schneiden sich die Träger dieser Zykel nicht und wir haben $(\delta_i, \delta_j) = 0$.

¹Man beachte, daß die durch f_i definierte Kurve C_t die y -Achse nur im Ursprung schneidet.

Schließlich müssen wir noch die drei Zykeln $\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \delta_{l_3}$ des Tripelpunktes orientieren. Jeder der an den Tripelpunkt angrenzenden Zykeln $\delta_{i_1}, \delta_{i_2}, \delta_{j_1}$ und δ_{j_2} schneidet genau zwei Zykeln des Tripelpunktes. Dabei schneiden δ_{i_1} und δ_{j_1} bzw. δ_{i_2} und δ_{j_2} jeweils die gleichen Zykeln, dies seien δ_{l_2} und δ_{l_3} bzw. δ_{l_1} und δ_{l_3} . Aus der Tafel aus dem letzten Abschnitt (Abb. 4.4) folgt:

$$\begin{aligned} (\delta_{i_1}, \delta_{l_2}) &= (\delta_{l_2}, \delta_{j_1}) \\ (\delta_{i_1}, \delta_{l_3}) &= (\delta_{l_3}, \delta_{j_1}) \\ (\delta_{i_2}, \delta_{l_1}) &= (\delta_{l_1}, \delta_{j_2}) \\ (\delta_{i_2}, \delta_{l_3}) &= (\delta_{l_3}, \delta_{j_2}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

Begründung Wir begründen exemplarisch die Gleichung $(\delta_{i_1}, \delta_{l_2}) = (\delta_{l_2}, \delta_{j_1})$. Die Kurve X_t besitzt im Ursprung drei Komponenten, die sich dort zu einer $A_1 \vee L$ -Singularität zusammensetzen. Wir betrachten lokal die Situation um diesen Tripelpunkt und identifizieren dort lokal jede Komponente mit einer Koordinatenachse, etwa wie folgt:



Unter dieser Identifikation repräsentiert der Träger des Zykels δ'_{i_1} einen relativen Zykel δ_{yz} im Bild 2 (oder Bild 6) von Abb. 4.4. Entsprechend repräsentiert der Träger des Zykels $-\delta''_{j_1}$ einen Zykel δ'_{yz} im Bild 3 (oder Bild 7). In Kapitel 4 haben wir gesehen, daß es einen orientierungserhaltenden Diffeomorphismus gibt, der δ_{yz} und δ'_{yz} miteinander identifiziert. Daraus folgt: $(\delta'_{i_1}, \delta'_{l_2}) = (-\delta''_{j_1}, \delta''_{l_2})$, also $(\delta_{i_1}, \delta_{l_2}) = (\delta_{l_2}, \delta_{j_1})$.

Wir orientieren $\delta_{l_1}, \delta_{l_2}, \delta_{l_3}$ so, daß sich folgende Schnittzahlen ergeben:

$$\begin{aligned} (\delta_{i_1}, \delta_{l_2}) &= (\delta_{l_2}, \delta_{j_1}) = 1 \\ (\delta_{i_1}, \delta_{l_3}) &= (\delta_{l_3}, \delta_{j_1}) = 1 \\ (\delta_{i_2}, \delta_{l_1}) &= (\delta_{l_1}, \delta_{j_2}) = 1 \end{aligned}$$

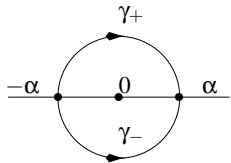
Aus Lemma 4.2 folgt $(-\delta_{i_2}, \delta_{l_3}) = -(\delta_{i_1}, \delta_{l_3}) \Leftrightarrow (\delta_{i_2}, \delta_{l_3}) = (\delta_{i_1}, \delta_{l_3})$ und daher wegen (5.1):

$$(\delta_{i_2}, \delta_{l_3}) = (\delta_{l_3}, \delta_{j_2}) = 1.$$

Falls der Zykel δ_i , $i \in I_+ \cup I_-$, nicht an den Tripelpunkt angrenzt, hat man natürlich $(\delta_i, \delta_{l_1}) = (\delta_i, \delta_{l_2}) = (\delta_i, \delta_{l_3}) = 0$, da sich die Träger der Zykel nicht schneiden. Das gleiche Argument liefert außerdem:

$$(\delta_i, \delta_j) = 0 \text{ für } (i, j) \in (I_\bullet \times I_\bullet) \cup (I_- \times I_-) \cup (I_+ \times I_+).$$

Nachdem alle Zykel mit einer Orientierung versehen und alle offensichtlichen Schnittzahlen angegeben wurden, können wir nun dazu übergehen, die Schnittzahlen zwischen Zykeln aus den Mengen I_+ und I_- zu berechnen. Zu diesem Zweck benötigen wir die Wege γ_+ und γ_- , die jeweils einen Halbkreis mit Anfangspunkt $-\alpha$ und Endpunkt α parametrisieren:

$$\gamma_+ : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \Delta \\ t & \mapsto & -\alpha \cdot e^{-\pi i t} \end{cases} \quad \gamma_- : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow & \Delta \\ t & \mapsto & \alpha \cdot e^{-\pi i t} \end{cases}$$


Wir können die Zykel $\delta'_j \in H_1(X_{t, -\alpha}; \mathbb{Z})$, $j \in I_-$, sowohl mittels h_{γ_+*} als auch h_{γ_-*} in $H_1(X_{t, \alpha}; \mathbb{Z})$ abbilden. Aus Symmetriegründen (vgl. [A'C]) haben wir:

$$(\delta'_i, h_{\gamma_+*}(\delta'_j)) = -(\delta'_i, h_{\gamma_-*}(\delta'_j)) \quad (5.2)$$

Die Picard-Lefschetz-Formel liefert für den Weg $\gamma_+^{-1}\gamma_-$:

$$(h_{\gamma_-*} \circ h_{\gamma_+}^{-1})(h_{\gamma_+*}(\delta'_j)) = h_{\gamma_+*}(\delta'_j) + \sum_{\substack{k \in I_\bullet \\ (\delta_k, \delta_j)=1}} \delta'_k \quad (5.3)$$

Damit erhalten wir für $i \in I_+$ und $j \in I_-$:

$$\begin{aligned} (\delta_i, \delta_j) &= \frac{1}{2} 2(\delta'_i, \delta'_j) \\ &= \frac{1}{2} 2(\delta'_i, h_{\gamma_+*}(\delta'_j)) \\ &\stackrel{(5.2)}{=} \frac{1}{2} ((\delta'_i, h_{\gamma_+*}(\delta'_j)) - (\delta'_i, h_{\gamma_-*}(\delta'_j))) \\ &\stackrel{(5.3)}{=} \frac{1}{2} ((\delta'_i, (h_{\gamma_-*} \circ h_{\gamma_+}^{-1})(h_{\gamma_+*}(\delta'_j))) - \sum_{\substack{k \in I_\bullet \\ (\delta_k, \delta_j)=1}} \delta'_k - (\delta'_i, h_{\gamma_-*}(\delta'_j))) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\substack{k \in I_\bullet \\ (\delta_k, \delta_j)=1}} (\delta'_i, \delta'_k) \end{aligned}$$

Diese Schnittzahl ist 0, falls die zu δ_i bzw. δ_j gehörenden \oplus -Regionen bzw. \ominus -Regionen nicht benachbart sind und nicht beide an den Tripelpunkt angrenzen. Es bleiben nun noch drei Fälle zu diskutieren:

1. δ_i und δ_j schneiden nur die Zykel des Tripelpunktes (und keinen der Doppelpunkte) gemeinsam.

Mit den Bezeichnungen aus Abbildung 5.2 sind das die Fälle $(\delta_{i_1}, \delta_{j_1})$ und $(\delta_{i_2}, \delta_{j_2})$. Unter Berücksichtigung der für δ_{l_1} , δ_{l_2} und δ_{l_3} gewählten Orientierungen berechnen sich beide Schnittzahlen zu -1 .

2. δ_i und δ_j schneiden einen Zykel des Tripelpunktes und einen Zykel eines Doppelpunktes gemeinsam.

Die zu diesen Zykeln gehörenden Regionen sind also benachbart und grenzen beide an den Tripelpunkt. Dies sind die beiden Fälle $(\delta_{i_1}, \delta_{j_2})$ und $(\delta_{i_2}, \delta_{j_1})$ und wir erhalten erneut: $(\delta_i, \delta_j) = -1$.

3. Die zu δ_i bzw. δ_j gehörenden \oplus - bzw. \ominus -Regionen sind benachbart und grenzen nicht beide an den Tripelpunkt an.

Dieser Fall ist bereits von A'Campo behandelt worden. Auch hier stellt sich die Schnittzahl -1 ein.

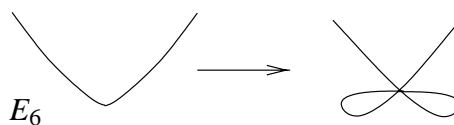
5.1.2 Beispiele

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, daß die Schnittzahl (δ_i, δ_j) Null ist, falls $(i, j) \in (I_+ \times I_+) \cup (I_- \times I_-) \cup (I_\bullet \times I_\bullet)$. Daher können wir bei den nachstehenden Coxeter–Dynkin–Diagrammen auf eine Numerierung der Ecken verzichten. Es genügt anzugeben, zu welcher der Mengen I_+ , I_- oder I_\bullet die Ecke (genauer der Index der Ecke) gehört. Zum besseren Verständnis werden die Ecken, die Zykeln repräsentieren, die zum Tripelpunkt gehören oder an den Tripelpunkt angrenzen, mit den Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt versehen.

Beispiel 5.8 Das einfachste Beispiel in dieser Sektion ist die Singularität $E_6(1)$, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & x^2 & y \end{pmatrix}$$

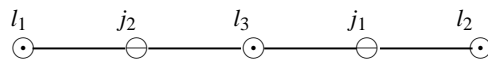
gegeben wird oder auch durch $t \mapsto (t^3, t^4, t^5)$ parametrisiert werden kann. In diesem Fall ist also $g(x, y) = x^2$ und $f(x, y) = x^4 - y^3$ definiert eine ebene Kurvensingularität vom Typ E_6 . Wir deformieren diese Singularität wie skizziert



Diese Deformation wird durch $f_t(x,y) = x^4 - y^3 + tx^2y$ gegeben. Die ‘‘geliftete’’ Deformation von $E_6(1)$ wird durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & x^2 + ty & y \end{pmatrix}$$

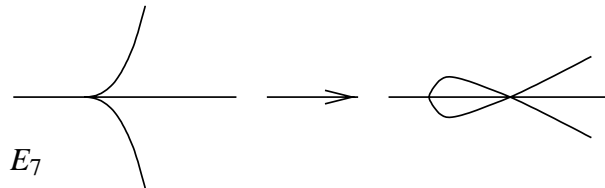
repräsentiert. Wir erhalten folgendes Coxeter–Dynkin–Diagramm:



Beispiel 5.9 Die Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & xy & y \end{pmatrix}$$

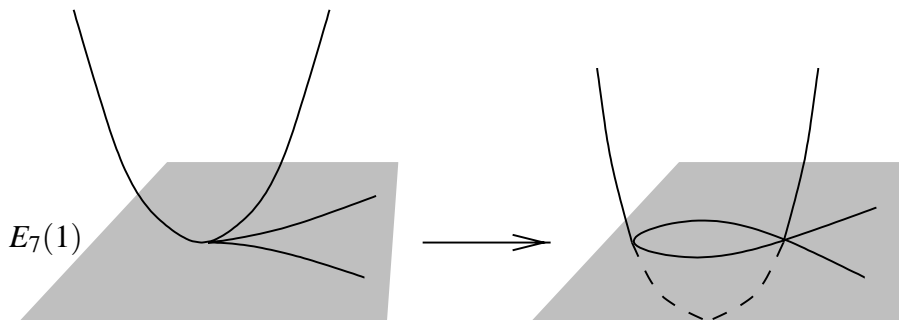
definiert eine Singularität vom Typ $E_7(1)$. Sie besteht aus zwei Komponenten, nämlich aus der Spitze (t^2, t^3, t^4) und aus der Geraden $(t, 0, 0)$. Man kann die zugrunde liegende ebene Kurve E_7 wie folgt deformieren



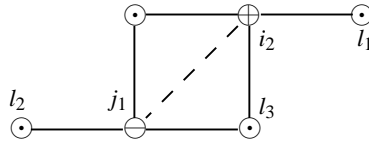
und erhält dadurch eine Deformation für $E_7(1)$

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & xy & y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y & z & x \\ z & xy + ty & y \end{pmatrix}.$$

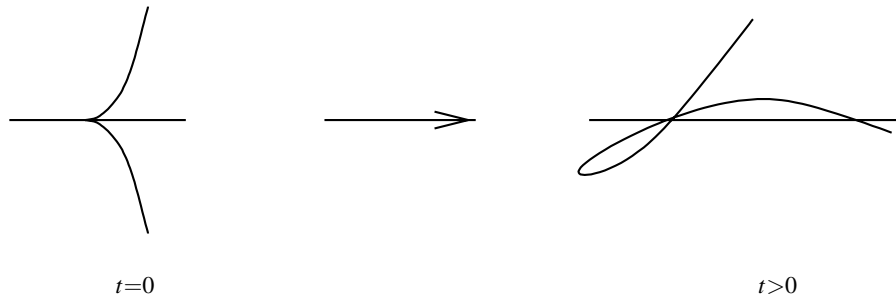
Die Koordinatentransformation $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z + x^2 + tx)$ liefert nun das folgende reelle Bild:



Dieser Deformation ist nachstehendes Coxeter–Dynkin–Diagramm zuzuordnen:



Beispiel 5.10 Wir wollen noch einmal die Singularität $E_7(1)$ behandeln, allerdings gehen wir jetzt von einer anderen reellen Morsifikation von E_7 aus. Diesmal betrachten wir die Deformation $f_t(x, y) = x^3y - y^3 - \frac{t^2}{2}x^2y + 2txy^2$, die qualitativ das folgende bewirkt:



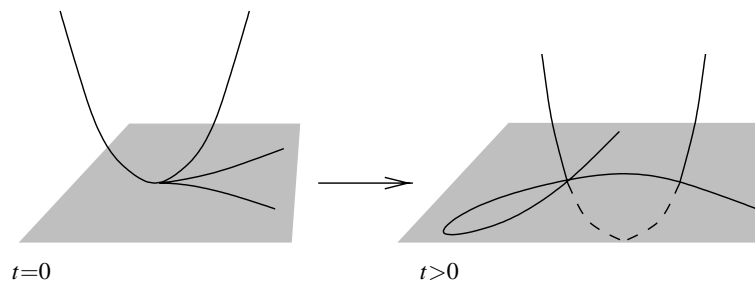
Die $E_7(1)$ definierende Matrix wird also wie folgt gestört:

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & xy & y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} y & z & x \\ z + 2ty & xy - \frac{t^2}{2}y & y \end{pmatrix},$$

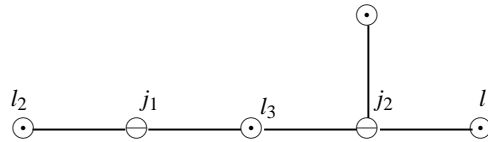
Um die dazugehörige reelle Morsifikation von $E_7(1)$ zu veranschaulichen, führen wir wieder eine geeignete Koordinatentransformation durch: $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z + x^2 - \frac{t^2}{2}x) =: (x, y, z')$. Die maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z' & x \\ z' - x^2 + \frac{t^2}{2}x + 2ty & 0 & y \end{pmatrix}$$

liefern die folgenden Bilder:



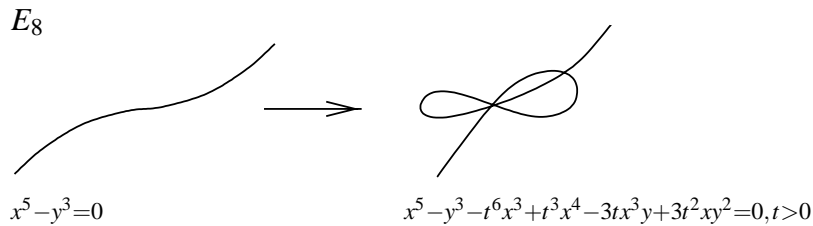
Diese Morsifikation führt auf das folgende Coxeter–Dynkin–Diagramm:



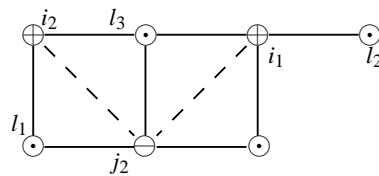
Beispiel 5.11 Die Singularität $E_8(1)$ kann man durch $t \mapsto (t^3, t^5, t^7)$ parametrisieren. Die dazu gehörigen Gleichungen sind die (maximalen) Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & x^3 & y \end{pmatrix}.$$

Wir konzentrieren uns erneut auf die zugrunde liegende ebene Kurvensingularität, also $E_8 : x^5 - y^3 = 0$. Diese können wir etwa wie folgt deformieren:



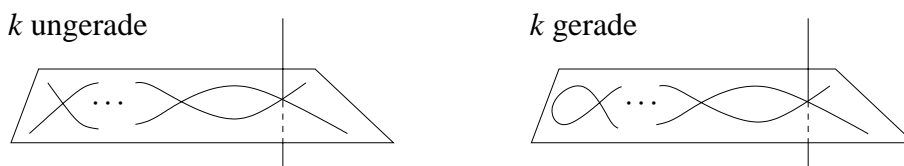
Zu dieser Deformation gehört das Coxeter–Dynkin–Diagramm



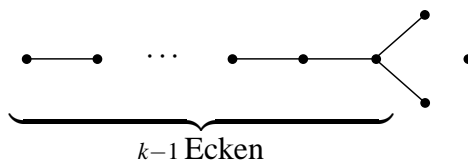
Bemerkung 5.12 Mit sehr ähnlichen Methoden kann man auch für die Wedge–Singularitäten $A_k \vee L$ mit $k \geq 2$ Coxeter–Dynkin–Diagramme erstellen. Hier bietet sich folgende generische Deformation der Präsentationsmatrix an:

$$\begin{pmatrix} z & x^k & y \\ 0 & y & x \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z & x^k + a & y \\ a & y & x \end{pmatrix}.$$

Man kann die Wedge–Singularität wie folgt deformieren



und erhält dann als Coxeter–Dynkin–Diagramm:



Damit haben wir das Ergebnis aus Kapitel 3 (vgl. Satz 3.8), nämlich daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $A_k \vee L$ aus einem Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität D_{k+1} (A_3 für $A_2 \vee L$) und einer isolierten Ecke besteht, mit Methoden der reellen Morsifikation bestätigt.

5.2 Die Serie $J_{l,0}(l)$

Mit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ bezeichnen wir die Raumkurvensingularität, die durch die Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} y & z & x^l \\ x^l - z & 0 & y \end{pmatrix}$$

definiert wird.

Die Kurve X_0 besteht für jedes $l \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ aus drei Komponenten, nämlich aus einer A_{2l-1} -Singularität in der xy -Ebene ($x^{2l} - y^2 = 0, z = 0$) und aus der Komponente ($z = x^l, y = 0$). Für $l = 1$ handelt es sich um einen Tripelpunkt, den wir bereits eingehend untersucht haben. Daher wollen wir $l \geq 2$ annehmen.

Mit Hilfe von Satz 1.3 berechnet man

$$\begin{aligned} \delta(X_0) &= 2l \\ \text{und} \quad \mu(X_0) &= 4l - 2. \end{aligned}$$

Außerdem entnimmt man den Einträgen von M_0 : $n(X_0) = l$. Daraus ergibt sich nach Korollar 5.2 für die Multiplizität der Diskriminante der semiuniversellen Deformation

$$m(D, 0) = 7l - 4.$$

Es seien $\beta_1 < \dots < \beta_l$ fest gewählte reelle Zahlen. Diesen Zahlen ordnen wir das Polynom $p_s(x) = \prod_{j=1}^l (x - s\beta_j)$ zu. Für $s \neq 0$ bezeichnen wir die l Nullstellen von p_s mit $x_j = s\beta_j$.

Das Polynom p_s definiert eine – durch s parametrisierte – Deformation von X_0 , nämlich durch die Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} y & z & p_s(x) \\ p_s(x) - z & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Die Raumkurve X_s werde durch die maximalen Minoren der Matrix M_s definiert. Diese Kurve besteht für $s \neq 0$ aus den drei Komponenten $(y = p_s(x), z = 0)$, $(y = -p_s(x), z = 0)$ und $(z = p_s(x), y = 0)$, und es ist unschwer einzusehen, daß X_s in den Punkten $(x_j, 0, 0)$ einen Tripelpunkt besitzt. Die Abbildung 5.3 vermittelt einen Eindruck der reellen Kurve $X_s \cap \mathbb{R}^3$ für $s \in \mathbb{R}^+$.

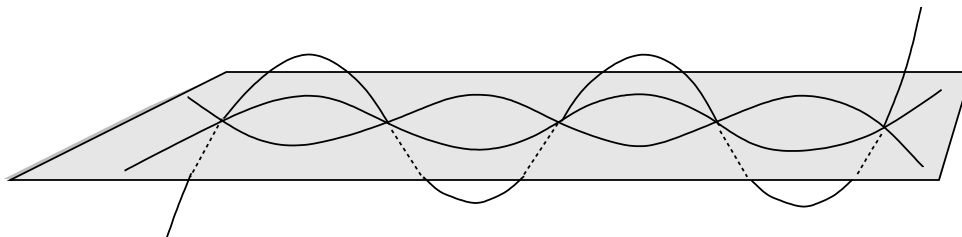


Abbildung 5.3: Die Kurve $X_s \cap \mathbb{R}^3$ mit $s \in \mathbb{R}^+$ und $l = 5$

Für unsere Konstruktion benötigen wir im Basisraum S der semi-universellen Deformation eine Gerade L , die die Diskriminante D in 0 transversal trifft. Zu diesem Zweck untersuchen wir eine einparametrische Störung von M_0 , die mit einer Geraden im Basisraum korrespondiert. Wir verwenden die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{0,a} = \begin{pmatrix} y+a & z & x^l \\ x^l - z & a & y \end{pmatrix}.$$

Die Gerade im Basisraum S , die mit dieser einparametrischen Störung von M_0 verbunden ist, bezeichnen wir mit L .

Lemma 5.13 *Die Gerade L schneidet die Diskriminante D der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ in 0 transversal.*

Beweis Für fest gewähltes $a \neq 0$ definiert die Matrix $M_{0,a}$ eine glatte Kurve (diese Behauptung kann leicht verifiziert werden; sie folgt auch aus Lemma 5.14, das wir anschließend beweisen werden). Damit ist $M_{0,a}$ die Präsentationsmatrix einer isolierten Flächensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$, wenn wir a nicht mehr als (fest gewählten) Störparameter ansehen, sondern als zusätzliche Veränderliche. Das bedeutet, daß L nicht in der Diskriminante D enthalten ist.

Es bleibt zu zeigen, daß L darüber hinaus auch nicht im Tangentialkegel von $(D, 0)$ enthalten ist. Dies folgt aus dem in [MS] gegebenen Beweis für Satz 5.1. Da wir den Beweis dieses Satzes in dieser Arbeit nicht aufgeführt haben, wollen wir es an dieser Stelle nicht dabei belassen, auf [MS] zu verweisen, sondern wir werden den von Mond und van Straten gegebenen Beweis, übertragen auf unsere hier betrachtete spezielle Situation, kurz wiedergeben.

Wir blasen die Flächensingularität X_0 im Nullpunkt auf und ersetzen zu diesem Zweck in der Matrix $M_{0,a}$ die Variablen (x, y, z, a) durch (x, xy, xz, xa) . In der so entstandenen Matrix sind alle Einträge durch x teilbar. Nachdem wir alle Einträge durch x geteilt haben, erhalten wir eine Matrix folgender Gestalt

$$M_{0,a}^* = \begin{pmatrix} y+a & z & x^{l-1} \\ x^{l-1}-z & a & y \end{pmatrix}.$$

Die exzeptionelle Menge, die wir durch das Einsetzen von $x = 0$ in $M_{0,a}^*$ erhalten, ist isomorph zu einem Tripelpunkt; sie besteht also aus drei exzeptionellen Kurven, die sich im singulären Punkt der durch $M_{0,a}^*$ definierten Flächensingularität treffen.

Den soeben beschriebenen Prozeß können wir $l - 2$ -mal wiederholen. Dabei kommen jedesmal drei neue exzeptionelle Kurven hinzu. Schließlich erhalten wir eine Matrix der Gestalt

$$M_{0,a}^{**} = \begin{pmatrix} y+a & z & x \\ x-z & a & y \end{pmatrix}.$$

Die durch $M_{0,a}^{**}$ definierte Flächensingularität läßt sich durch erneutes Aufblasen auflösen. Die dazugehörige exzeptionelle Kurve ist eine glatte, getwistete Kubik. Damit besteht der Auflösungsgraph der Flächensingularität $(X_0, 0)$ aus einer zentralen (-3) -Kurve und drei Ketten von (-2) -Kurven der Länge $l - 1 = n(X_0) - 1$; die Rationalität von $(X_0, 0)$ folgt z.B. aus Characterisation (1.4) in [JS2]. Für die Kurvensingularität X_0 bedeutet das: Verschiebt man die Gerade L ein wenig, so schneidet die daraus resultierende Gerade \tilde{L} die Diskriminante D in $\mu(X_0) + 1 + 3(l - 1) = 7l - 4 = m(D, 0)$ Punkten (mit Vielfachheiten gezählt). Somit ist L nicht im Tangentialkegel von $(D, 0)$ enthalten. \square

Die Gerade L schneidet die Diskriminante D der semi-universellen Deformation von $(X, 0)$ in 0 also transversal. Jede Gerade in S , die aus L durch minimales Verschieben hervorgeht, schneidet D in $m(D, 0)$ Punkten (mit Vielfachheiten gezählt). Eine solche Gerade wollen wir im folgenden studieren. Dazu wählen wir $s \in \mathbb{R}^+$ hinreichend klein und fest. Die Kurve $X_{s,a}$ werde durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{s,a} = \begin{pmatrix} y+a & z & p_s(x) \\ p_s(x)-z & a & y \end{pmatrix}$$

definiert.

Wir wollen jetzt erwähnen, für welche Werte von a die Kurve $X_{s,a}$ Singularitäten besitzt, in welchen Punkten $(x, y, z) \in X_{s,a}$ diese liegen und von welchem Typ sie sind. Es wurde bereits herausgestellt, daß über dem kritischen Wert $a = 0$ eine Faser mit l Tripelpunkten liegt. Mit Hilfe des folgenden Lemmas lassen sich sämtliche kritischen Werte bestimmen.

Lemma 5.14 Die Kurve Y_a^c werde durch die maximalen Minoren der Matrix

$$N = \begin{pmatrix} y+a & z & q(x)+c \\ q(x)-z-c & a & y \end{pmatrix}, \quad \text{mit } q \in \mathbb{R}[x], \deg(q) \geq 1 \quad \text{und } c \in \mathbb{R},$$

definiert. Mit ζ_1, \dots, ζ_k bezeichnen wir die (paarweise verschiedenen) Lösungen der Gleichung $q'(x) = 0$. Falls $c \neq 0$ ist, gelte $|q(\zeta_j)| > |c|$ für $1 \leq j \leq k$. Dann besitzt die Kurve Y_a^c genau dann Singularitäten, falls $a \in \{-c, 0, c\}$ ist oder falls a eine der k Gleichungen

$$a^4 + (2c^2 + 14cq(\zeta_j) + 11q^2(\zeta_j))a^2 + c^4 - 2c^3q(\zeta_j) + 2cq^3(\zeta_j) - q^4(\zeta_j) = 0$$

annulliert mit $j \in \{1, \dots, k\}$.

Beweis Die Kurve Y_a^c besitzt im Punkt (x, y, z) genau dann eine Singularität, wenn das Quadrupel (x, y, z, a) die folgenden zwölf Gleichungen löst:

$$a(y+a) - z(q(x) - z - c) = 0 \quad \text{(A)}$$

$$y(y+a) - (q(x) + c)(q(x) - z - c) = 0 \quad \text{(B)}$$

$$yz - a(q(x) + c) = 0 \quad \text{(C)}$$

$$q'(x)(z(2y+a) + a(-2q(x) + z)) = 0 \quad \text{(1)}$$

$$q'(x)(z(q(x) + c) + (-q(x) + 2z + c)(-2q(x) + z)) = 0 \quad \text{(2)}$$

$$a(q(x) + c) - (2y+a)(-q(x) + 2z + c) = 0 \quad \text{(3)}$$

$$q'(x)(z^2 - a^2) = 0 \quad \text{(4)}$$

$$q'(x)(-yz + a(-q(x) + 2z + c)) = 0 \quad \text{(5)}$$

$$ay - z(-q(x) + 2z + c) = 0 \quad \text{(6)}$$

$$q'(x)(z(-2q(x) + z) + a(2y+a)) = 0 \quad \text{(7)}$$

$$q'(x)(y(-2q(x) + z) + a(q(x) + c)) = 0 \quad \text{(8)}$$

$$(2y+a)y - z(q(x) + c) = 0 \quad \text{(9)}$$

Dabei definieren die Gleichungen (A), (B) und (C) gerade die Kurve $X_{s,a}^c$, und die Gleichungen (1) – (9) entstehen aus den 2×2 -Minoren der Jacobi-Matrix der Abbildung

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^3, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^3, 0) \\ (x, y, z) &\mapsto \begin{cases} a(y+a) - z(q(x) - z - c) \\ y(y+a) - (q(x) + c)(q(x) - z - c) \\ yz - a(q(x) + c) \end{cases} \end{aligned}$$

Wir unterscheiden mehrere Fälle:

- $y = 0$: Die Gleichungen **(B)**, **(C)** und **(9)** liefern: $z(q(x) + c) = 0$, $a(q(x) + c) = 0$ und $(q(x) + c)(q(x) - z - c) = 0$.
 - $q(x) + c = 0$: Aus den Gleichungen **(3)** und **(6)** folgt: $(z + c)z = 0$ und $(z + c)a = 0$.
 - $z = -c$: $\stackrel{(A)}{\Rightarrow} a^2 - c^2 = 0$. Man überzeugt sich leicht davon, daß für das Quadrupel $(x, 0, -c, a)$ mit $q(x) = -c$ und $a^2 = c^2$ alle Gleichungen erfüllt sind, d.h. $-c$ und c sind kritische Werte.
 - $z = 0$: Aus **(2)** bzw. **(A)** folgt: $q'(x)c^2 = 0$ und $a = 0$.
 - $c = 0$: $\Rightarrow q(x) = 0$. In diesem Fall ist $(x, 0, 0) \in Y_0^0$ mit $q(x) = 0$ ein singulärer Punkt vom Typ $J_{m,0}(m)$, wobei m die Vielfachheit der Nullstelle x von q ist.
 - $c \neq 0$: $\Rightarrow q'(x) = 0$, also $x \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$. Nun führt unsere eingangs gemachte Annahme $|c| < |q(\zeta_j)|$ wegen $q(\zeta_j) + c = 0$ zu einem Widerspruch.
 - $q(x) + c \neq 0$: Dann gilt $z = 0$, $a = 0$ und $q(x) = c$. Es folgt: Die Faser $X_{s,0}^c$ besitzt in den Punkten $(x, 0, 0)$ mit $q(x) = c$ eine Singularität.
- $y \neq 0$: In diesem Fall gilt auch $a \neq 0$ (die Annahme $a = 0$ wird durch die Gleichungen **(C)** und **(9)** zu einem Widerspruch geführt). Desweiteren gilt $q(x) + c \neq 0$ (wäre nämlich das Gegenteil der Fall, so würden die Gleichungen **(B)** und **(9)** $y + a = 0$ und $2y + a = 0$ ergeben, also einen Widerspruch zur Annahme $y \neq 0$).
 - $q'(x) \neq 0$: Aus Gleichung **(1)** erhält man dann $yz + az - aq(x) = 0$. Diese Gleichung liefert zusammen mit der Gleichung **(C)**: $z = -c$. Durch das Einsetzen von $z = -c$ in die Gleichung **(2)** erhält man $q(x)(q(x) + c) = 0$, also (wegen $q(x) + c \neq 0$): $q(x) = 0$. Damit folgt wegen $a \neq 0$ aus **(A)**: $a = -y$. Nun liefert das Einsetzen von $a = -y$, $q(x) = 0$ und $z = -c$ in die Gleichungen **(7)** und **(9)**: $c^2 - y^2 = 0$ und $y^2 + c^2 = 0$, also einen Widerspruch.
 - $q'(x) = 0$: Es gilt also $x \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$. In diesem Fall erhalten wir aus den Gleichungen **(B)** und **(9)** bzw. **(B)** und **(C)** die Gleichungen:

$$3y^2 + 2ay - (q^2(\zeta_j) - c^2) = 0 \quad (\text{a})$$

$$(y + a)y^2 - (q^2(\zeta_j) - c^2)y + a(q(\zeta_j) + c)^2 = 0 \quad (\text{b})$$

$$\text{und } z = \frac{a(q(\zeta_j) + c)}{y} = 0 \quad (\text{c})$$

Diese Gleichungen liefern

$$y = a \frac{5q^2(\zeta_j) + 9q(\zeta_j)c + 4c^2}{a^2 + 3q^2(\zeta_j) - 3c^2} \quad (\mathbf{d})$$

In diesem Ausdruck kann der Nenner nicht Null werden, denn andernfalls würde aus (a) und (b) folgen: $5q^2(\zeta_j) + 9cq(\zeta_j) + 4c^2 = 0 \Leftrightarrow (q(\zeta_j) + c)(5q(\zeta_j) + 4c) = 0 \Rightarrow 5q(\zeta_j) + 4c = 0$, da $q(\zeta_j) + c \neq 0$. Wäre $c = 0$, würden wir auch $q(\zeta_j) = 0$ erhalten, was aber wegen $q(\zeta_j) + c \neq 0$ nicht sein kann. Im Fall $c \neq 0$ liefert $5q(\zeta_j) + 4c = 0$ einen Widerspruch zur Voraussetzung $|c| < |q(\zeta_j)|$.

Unter Berücksichtigung von $q(\zeta_j) + c \neq 0$ liefert das Einsetzen von $y = a \frac{5q^2(\zeta_j) + 9q(\zeta_j)c + 4c^2}{a^2 + 3q^2(\zeta_j) - 3c^2}$ in (a) nun:

$$a^4 + (2c^2 + 14cq(\zeta_j) + 11q^2(\zeta_j))a^2 + c^4 - 2c^3q(\zeta_j) + 2cq^3(\zeta_j) - q^4(\zeta_j) = 0.$$

Bei den Nullstellen dieser $l - 1$ Gleichungen handelt es sich tatsächlich um kritische Werte, denn wegen $y \neq 0$ läßt sich Y_a^c lokal durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{s,a}^c(x,y) &:= (y+a)y^2 - (q^2(x) - c^2)y + a(q(x) + c)^2 = 0 \\ \text{und } z &= \frac{a(q(x) + c)}{y} \end{aligned}$$

beschreiben. Man braucht also nicht alle Gleichungen (A), (B), (C), (1) – (9) auf ihre Gültigkeit zu überprüfen; es genügt, dies für die Gleichungen $f_{s,a}^c(\zeta_j, y) = 0$, $\frac{\partial f_{s,a}^c}{\partial x}(\zeta_j, y) = 0$ und $\frac{\partial f_{s,a}^c}{\partial y}(\zeta_j, y) = 0$ zu tun. Diese Gleichungen sind aber wegen $x \in \{\zeta_1, \dots, \zeta_k\}$ erfüllt, wenn (a) und (b) erfüllt sind. \square

Korollar 5.15 *Es bezeichne ξ_j die im Intervall (x_j, x_{j+1}) ($1 \leq j \leq l - 1$) liegende Nullstelle von p'_s . Dann gilt: Die Kurve $X_{s,0}$ besitzt in den Punkten $(x_j, 0, 0)$ Tripelpunkte. Für $a \neq 0$ ist $(x, y, z) \in X_{s,a}$ genau in den folgenden Fällen ein singulärer Punkt ($1 \leq j \leq l - 1$):*

$$\begin{aligned} x = \xi_j, \quad a_j^+ &= \sqrt{\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}} |p_s(\xi_j)|, \quad y = \sqrt{-2+\sqrt{5}} |p_s(\xi_j)|, \quad z = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j) \\ x = \xi_j, \quad a_j^- &= -\sqrt{\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}} |p_s(\xi_j)|, \quad y = -\sqrt{-2+\sqrt{5}} |p_s(\xi_j)|, \quad z = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j) \\ x = \xi_j, \quad \bullet a_j^+ &= \sqrt{\frac{-11-5\sqrt{5}}{2}} |p_s(\xi_j)|, \quad y = -\sqrt{-2-\sqrt{5}} |p_s(\xi_j)|, \quad z = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j) \\ x = \xi_j, \quad \bullet a_j^- &= -\sqrt{\frac{-11-5\sqrt{5}}{2}} |p_s(\xi_j)|, \quad y = \sqrt{-2-\sqrt{5}} |p_s(\xi_j)|, \quad z = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j) \end{aligned}$$

Beweis Die erste Aussage ist klar. Im Fall $a \neq 0$ folgt aus Lemma 5.14, daß a eine der $l - 1$ Gleichungen

$$a^4 + 11p_s^2(\xi_j)a^2 - p_s^4(\xi_j) = 0$$

annulliert, d.h. $a = \pm \sqrt{\frac{\pm 11 + 5\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j)$ für ein $j \in \{1, \dots, l - 1\}$. Aus den Gleichungen (d) und (c) (aus dem Beweis von Lemma 5.14) lassen sich nun die singulären Punkte $(x, y, z) \in X_{s,a}$ mit $a = \pm \sqrt{\frac{\pm 11 + 5\sqrt{5}}{2}} p_s(\xi_j)$ ermitteln. \square

Außerhalb des Nullpunktes liegen also $2l - 2$ reelle und $2l - 2$ rein imaginäre kritische Werte. Da die Faser $X_{s,0}$ genau l Tripelpunkte besitzt und da die Multiplizität der Diskriminante $m(D, 0) = 7l - 4$ ist, liegen über jedem der kritischen Werte $a_j^+, a_j^-, \bullet a_j^+$ und $\bullet a_j^-$ Fasern mit genau einem gewöhnlichen Doppelpunkt. Durch geeignete Wahl der β_1, \dots, β_l kann man erreichen, daß diese $(4l - 4)$ kritischen Werte paarweise verschieden sind.

Wir wählen einen nichtkritischen Wert a^* in der rechten oberen Halbebene. Ferner wählen wir wie in Abbildung 5.4 skizziert ein stark ausgezeichnetes Wegesystem

$$W = \{\gamma_j^+ \mid 1 \leq j \leq l-1, \bullet \gamma_j^- \mid 1 \leq j \leq l-1, \gamma_0, \gamma_j^- \mid 1 \leq j \leq l-1, \bullet \gamma_j^+ \mid 1 \leq j \leq l-1\},$$

das die kritischen Werte mit dem nichtkritischen verbindet.

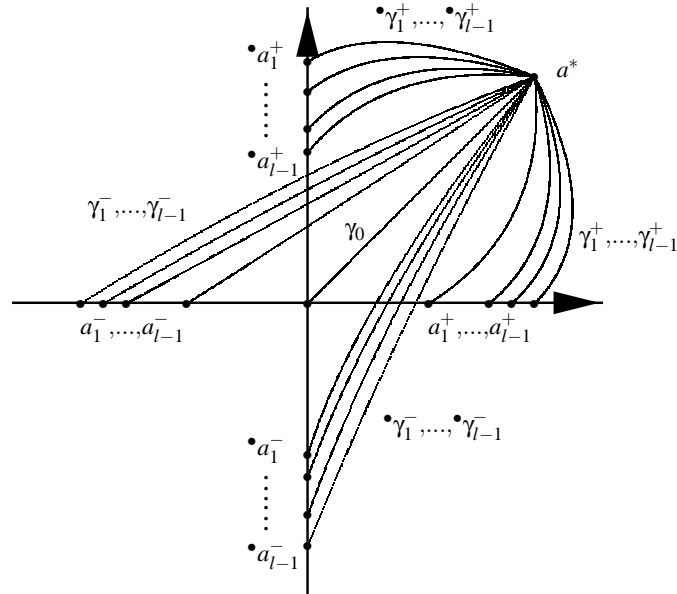


Abbildung 5.4: Die Verteilung der kritischen Werte

Die zu den reellen kritischen Werten gehörenden Zyklen $\delta_j^+, \delta_j^- \in H_1(X_{s,a^*}; \mathbb{Z})$ transportieren wir wie üblich längs geradliniger Wege γ_α bzw. $\gamma_{-\alpha}$ in Fasern $X_{s,\alpha}$ bzw. $X_{s,-\alpha}$ mit $0 < \alpha < \min\{a_1^+, \dots, a_{j-1}^+\}$. Sodann betrachten wir die zugrundeliegenden ebenen Kurven $C_{s,\alpha}$ bzw. $C_{s,-\alpha}$, wobei die Kurve $C_{s,\alpha}$ aus $X_{s,\alpha}$ durch Projektion in die xy -Ebene entsteht, d.h. $C_{s,\alpha}$ wird durch die Gleichung

$$y^3 - p_s^2(x)y + a(p_s^2(x) + y^2) = 0$$

gegeben.

In den reellen Kurven $C_{s,\alpha} \cap \mathbb{R}^2$ bzw. $C_{s,-\alpha} \cap \mathbb{R}^2$ finden wir die Zyklen δ_j^+ bzw. δ_j^- wieder (etwas genauer: die Bilder der Träger von $h_{\gamma_{\alpha^*}}(\delta_j^+)$ bzw. $h_{\gamma_{-\alpha^*}}(\delta_j^-)$ unter der Projektion in die xy -Ebene). Sie entsprechen nämlich gerade den geschlossenen Komponenten der Niveaulinie $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y(p_s^2(x)-y^2)}{p_s^2(x)+y^2} = \alpha\}$ bzw. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y(p_s^2(x)-y^2)}{p_s^2(x)+y^2} = -\alpha\}$, die in den \oplus - bzw. \ominus -Regionen von $C_{s,0}$ liegen.

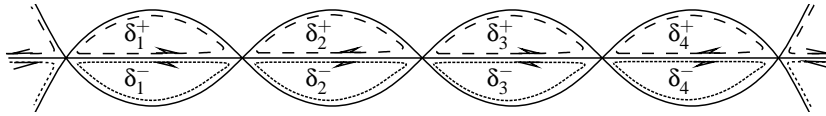
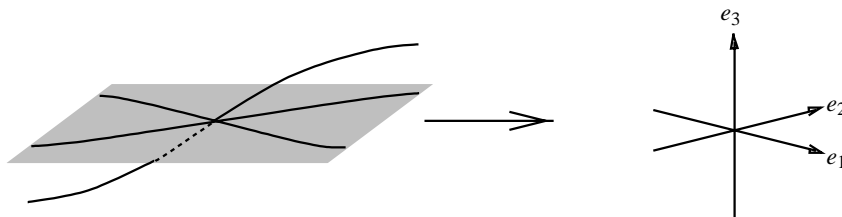


Abbildung 5.5: Die ebene Kurve $C_{s,0}$ für $l = 5$

Wir machen von dieser Darstellung der Zyklen Gebrauch, um sie mit einer Orientierung zu versehen: Der Zyklus δ_j^+ (bzw. $-\delta_j^-$) werde für gerades j im Uhrzeigersinn und für ungerades j entgegen des Uhrzeigersinns orientiert.

Nun kommen wir zu den verschwindenden Zykeln der l Tripelpunkte, für die wir die Notation δ_j^1, δ_j^2 und δ_j^3 für $1 \leq j \leq l$ vereinbaren. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich wie folgt: Wir wählen um den j -ten Tripelpunkt ein lokales Koordinatensystem, das die Komponente $(y = -\text{sgn}(p'_s(x_j))p_s(x), z = 0)$ mit der e_1 -Achse, die Komponente $(y = \text{sgn}(p'_s(x_j))p_s(x), z = 0)$ mit der e_2 -Achse und die Komponente $(z = p_s(x), y = 0)$ mit der e_3 -Achse identifiziert (in einem späteren Lemma werden wir die Koordinatentransformation, die diese Identifikation ermöglicht, explizit angeben).



In Bemerkung 4.1 wurde erläutert, wie jedem verschwindenden Zykel eines Tripelpunktes eineindeutig eine Koordinatenachse zugeordnet werden kann. Auf dieser Zuordnung beruht die Bezeichnung der Zykel δ_j^1 , δ_j^2 und δ_j^3 .

Aus dem Abschnitt 5.1, in welchem wir die Situation lokal um *einen* Tripelpunkt betrachtet haben, folgt, daß sich bei geeigneter Orientierung dieser Zykel folgende Schnitzzahlen einstellen:

$$\begin{aligned} (\delta_j^+, \delta_j^2) &= (\delta_j^+, \delta_j^3) &= (\delta_j^+, \delta_{j+1}^1) &= (\delta_j^+, \delta_{j+1}^3) = 1, \\ (\delta_j^1, \delta_j^-) &= (\delta_j^3, \delta_j^-) &= (\delta_{j+1}^2, \delta_j^-) &= (\delta_{j+1}^3, \delta_j^-) = 1, \\ (\delta_j^+, \delta_j^1) &= (\delta_j^+, \delta_{j+1}^2) &= (\delta_j^2, \delta_j^-) &= (\delta_{j+1}^1, \delta_j^-) = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Es ist klar, daß sich die Zykel δ_j^+ und δ_k^+ bzw. δ_j^- und δ_k^- für $j \neq k$ nicht schneiden, da die Träger dieser Zykel disjunkt sind. Aus dem gleichen Grund ist $(\delta_j^+, \delta_k^-) = (\delta_j^-, \delta_k^+) = 0$ für $1 \leq j \leq l-1$, $k \in \{1, \dots, j-1, j+2, \dots, l\}$ und $1 \leq n \leq 3$. Desweiteren gilt: $(\delta_j^{i_1}, \delta_k^{i_2}) = 0$ für alle $1 \leq j, k \leq l$, $1 \leq i_1, i_2 \leq 3$.

Aus der verallgemeinerten A'Campo-Methode folgt:

$$\begin{aligned} (\delta_{j_1}^+, \delta_{j_2}^-) &= -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq k \leq l} ((\delta_{j_1}^+, \delta_k^1) \cdot (\delta_k^1, \delta_{j_2}^-) + (\delta_{j_1}^+, \delta_k^2) \cdot (\delta_k^2, \delta_{j_2}^-) + (\delta_{j_1}^+, \delta_k^3) \cdot (\delta_k^3, \delta_{j_2}^-)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } |j_1 - j_2| \geq 2, \\ -1, & \text{falls } |j_1 - j_2| \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu den imaginären kritischen Werten. Es ist zweckmäßig, die Koordinatentransformationen $y = i\eta$ und $a = ia$ mit $i = \sqrt{-1}$ durchzuführen.

$$M_{s,a} = \begin{pmatrix} i\eta + ia & z & p_s(x) \\ p_s(x) - z & ia & i\eta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \eta + a & z & p_s(x) \\ p_s(x) - z & -a & -\eta \end{pmatrix}$$

Die Kurve $C_{s,a} = C_{s,ia}$ wird in diesen Koordinaten durch die Gleichung

$$\eta^3 + a\eta^2 + p_s^2(x)\eta - ap_s^2(x) = 0$$

beschrieben. $a \in \mathbb{R}^+$ sei so klein gewählt, daß das Intervall $[-ia, ia]$ nur Null als kritischen Wert besitzt. Dann gilt:

$$a^2 = |ia|^2 < \left| \frac{-11 - 5\sqrt{5}}{2} \right| p_s^2(\xi_j) = \frac{11 + 5\sqrt{5}}{2} p_s^2(\xi_j)$$

bzw.

$$\frac{-11 + 5\sqrt{5}}{2} a^2 < p_s^2(\xi_j) \quad \text{für } 1 \leq j \leq l-1.$$

Das bedeutet, daß die Gleichung $p_s^2(x) = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$ genau $2l$ reelle Lösungen für x besitzt. In jedem der Intervalle (x_j, x_{j+1}) ($1 \leq j \leq l-1$) liegen jeweils zwei dieser Lösungen, die wir mit η_j^+ und η_{j+1}^- bezeichnen, siehe Abb. 5.6. Ferner nennen wir die kleinste Lösung η_1^- und die größte η_l^+ .

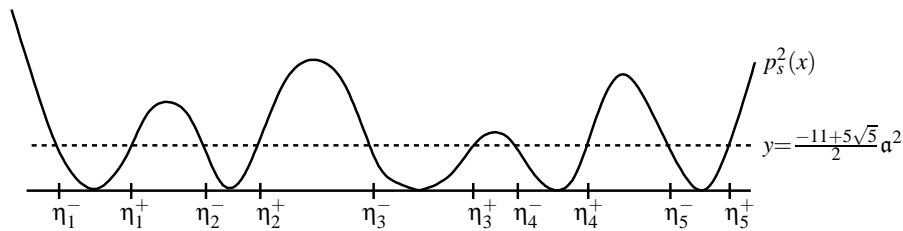


Abbildung 5.6: Die Lösungen der Gleichung $p_s^2(x) = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$ für $l = 5$

Mit diesen Bezeichnungen überzeugt man sich schnell davon, daß $C_{s,ia} \cap \mathbb{R}^2$ in den Punkten $(\eta_j^-, \frac{1-\sqrt{5}}{2}a)$ bzw. $(\eta_j^+, \frac{1-\sqrt{5}}{2}a)$ vertikale Tangenten, an den Stellen ξ_j bzw. in den Punkten $(x_j, -a)$ horizontale Tangenten und in den Punkten $(x_j, 0)$ Doppelpunkte besitzt. Aus diesen Informationen leitet man ab, daß die reelle Kurve $C_{s,ia} \cap \mathbb{R}^2$ qualitativ so aussieht, wie in Abbildung 5.7 skizziert.

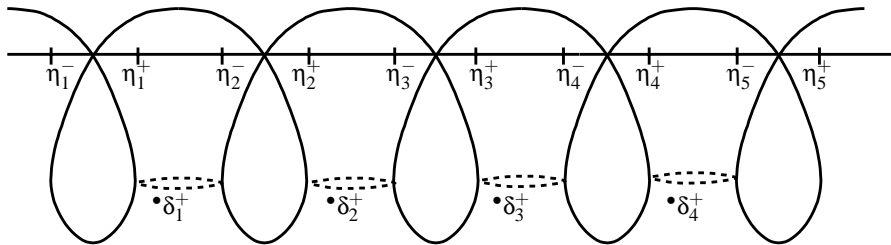


Abbildung 5.7: Die Kurve $C_{s,ia} \cap \mathbb{R}^2$ für $l = 5$

Wir betrachten im folgenden das kubische Polynom

$$q_{s,a,x}(\eta) = \eta^3 + a\eta^2 + p_s^2(x)\eta - ap_s^2(x).$$

Die Diskriminante dieses Polynoms ist: $D_{s,a,x} = 4(a^4 p_s^2(x) - 11a^2 p_s^4(x) - p_s^6(x))$. Hier entnimmt man, daß $q_{s,a,x}$ für $0 < p_s^2(x) < \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$ drei reelle Nullstellen und für $p_s^2(x) > \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$ eine reelle $\eta_1(x)$ und ein Paar $(\eta_2(x), \eta_3(x))$ komplex-konjugierter Nullstellen besitzt. Diese Feststellung ergänzt die bereits vorhandenen Informationen über $C_{s,ia}$.

Wir konzentrieren uns auf den Fall $p_s^2(x) \geq \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$. Die Lösungen dieser (Un)-Gleichung liegen in $\mathbb{R} - \bigcup_{j=1}^l (\eta_j^-, \eta_j^+)$. Wir wählen ein $x \in [\eta_j^+, \eta_{j+1}^-]$ und betrachten auf diesem Intervall die komplexen Lösungen $\eta_2(x)$ und $\eta_3(x)$ der Gleichung $\eta^3 + a\eta^2 + p_s^2(x)\eta - ap_s^2(x) = 0$. Wir haben bereits festgestellt, daß für $\eta_j^+ < x < \eta_{j+1}^-$ die zwei Lösungen $\eta_2(x)$ und $\eta_3(x)$ verschieden sind und daß sie für $x \rightarrow \eta_j^+$ bzw. $x \rightarrow \eta_{j+1}^-$ zusammenfallen. Daher beschreiben $\eta_2(x)$ und $\eta_3(x)$ für jedes Intervall $[\eta_j^+, \eta_{j+1}^-]$ bis auf Orientierung einen Zykel aus $H_1(C_{s,ia}; \mathbb{Z}) = H_1(C_{s,a}; \mathbb{Z})$. Dieser wiederum definiert einen Zykel $\bullet\delta_j^+ \in H_1(X_{s,ia}; \mathbb{Z})$. Dies gilt für beliebige $a = ia$ mit $0 < a < \min\{|\bullet a_1^+|, \dots, |\bullet a_{l-1}^+|\}$.

Es ist klar, daß der Zykel $\bullet\delta_j^+$ verschwindet, wenn wir a längs der imaginären Achse in den kritischen Wert $\bullet a_j^+ = \sqrt{\frac{-11-5\sqrt{5}}{2}}|p_s(\xi_j)| = i\sqrt{\frac{11+5\sqrt{5}}{2}}|p_s(\xi_j)|$ laufen lassen, denn dann nähern sich die im Intervall $[x_j, x_{j+1}]$ liegenden Lösungen η_j^+ und η_{j+1}^- der Gleichung $p_s^2(x) = \frac{-11+5\sqrt{5}}{2}a^2$ immer mehr dem Wert ξ_j an. Das bedeutet, daß sich die Intervalle $[\eta_j^-, \eta_j^+]$ – und damit auch die “über” ihnen liegenden Zykel $\bullet\delta_j^+$ – für $a \rightarrow \bullet a_j^+$ auf einen Punkt zusammenziehen.

Falls wir a gegen Null gehen lassen, wachsen die Intervalle $[\eta_j^+, \eta_{j+1}^-]$ und nähern sich den Intervallen $[x_j, x_{j+1}]$ an. Gleichzeitig schrumpfen die Realteile $\Re(\eta_2(x))$ und $\Re(\eta_3(x))$ der Lösungen $\eta_2(x)$ und $\eta_3(x)$ für $x \in (\eta_j^+, \eta_{j+1}^-)$, wovon man sich etwa mit Hilfe der Formeln von Cardano ([vdW]) überzeugt:

$$\begin{aligned}\eta_2(x) &= \frac{-(w_{s,a,x}^+ + w_{s,a,x}^-) + \sqrt{-3}(w_{s,a,x}^- - w_{s,a,x}^+) - 2a}{6} \\ \eta_3(x) &= \frac{-(w_{s,a,x}^+ + w_{s,a,x}^-) + \sqrt{-3}(w_{s,a,x}^+ - w_{s,a,x}^-) - 2a}{6} \\ \text{mit } w_{s,a,x}^+ &= \sqrt[3]{-a^3 + 18ap_s^2(x) + 3\sqrt{3}p_s(x)\sqrt{p_s^4(x) + 11a^2p_s^2(x) - a^4}} \\ \text{und } w_{s,a,x}^- &= \sqrt[3]{-a^3 + 18ap_s^2(x) - 3\sqrt{3}p_s(x)\sqrt{p_s^4(x) + 11a^2p_s^2(x) - a^4}}.\end{aligned}$$

Wegen $x \in (\eta_j^+, \eta_{j+1}^-)$ ist $D_{s,a,x} < 0$, d.h. $p_s^4(x) + 11a^2p_s^2(x) - a^4 > 0$. Daher können die Zahlen $w_{s,a,x}^+$ und $w_{s,a,x}^-$ reell gewählt werden, was wir nun auch annehmen wollen. Man sieht: $\lim_{a \rightarrow 0} (w_{s,a,x}^+ + w_{s,a,x}^-) = 0$. Daraus ergibt sich sofort, daß für $a \rightarrow 0$ die Realteile $\Re(\eta_2(x))$ und $\Re(\eta_3(x))$ der Lösungen $\eta_2(x)$ und $\eta_3(x)$ schrumpfen.

Nun folgt auch, daß die Imaginärteile $\Im(y_2(x))$ und $\Im(y_3(x))$ der Lösungen $y_2(x) = i\eta_2(x)$ und $y_3(x) = i\eta_3(x)$ für $a \rightarrow 0$ ebenfalls schrumpfen. Vollzieht man den Grenzübergang zu $a = 0$, so ergibt sich, daß der Zykel $\bullet\delta_j^+$ mit dem Rand der j . Region der Kurve $(z = 0, p_s^2(x) - y^2 = 0)$ zusammenfällt.

Bemerkung 5.16 (i) Aus der Beschreibung der Zykel $\bullet\delta_j^+$ für $1 \leq j \leq l-1$ folgt unmittelbar: $(\bullet\delta_{j_1}^+, \bullet\delta_{j_2}^+) = 0$ für $j_1 \neq j_2$.

(ii) Völlig analog zur Behandlung der Zykel $\bullet\delta_j^+$, die längs der *positiven* imaginären Achse verschwinden, können wir auch die Zykel $\bullet\delta_j^-$ für $1 \leq j \leq l-1$ beschreiben, die längs der *negativen* imaginären Achse verschwinden. Man erhält für $a > 0$ die Kurve $C_{s,-ia} \cap \mathbb{R}^2$ aus $C_{s,ia} \cap \mathbb{R}^2$ einfach durch Spiegelung an der x -Achse. Auch hier haben wir infolgedessen die Schnitzzahlen $(\bullet\delta_{j_1}^-, \bullet\delta_{j_2}^-) = 0$ für $j_1 \neq j_2$.

(iii) Es sei außerdem bemerkt, daß der j . Region der Kurve $(z=0, p_s^2(x) - y^2 = 0)$ “zwei” verschwindende Zykel entspringen, nämlich $\bullet\delta_j^+$ und $\bullet\delta_j^-$.

Wir haben soeben einen Eindruck von den Zykeln $\bullet\delta_j^+$ und $\bullet\delta_j^-$ erhalten. Allerdings ist die gegebene Beschreibung der Zykel für die Berechnung der noch fehlenden Schnitzzahlen ungeeignet, da die Träger der Zykel (in den betrachteten Fasern) weder reelle noch rein imaginäre Werte besitzen. Um die Zykel dennoch in geeigneten Fasern “sichtbar zu machen”, modifizieren wir unsere Konstruktion ein wenig:

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < |\varepsilon| \ll \min_{1 \leq j \leq l-1} \{a_j^+\}$ definieren wir die Matrix

$$M_{s,a}^\varepsilon = \begin{pmatrix} y+a & z & p_s(x) + (-1)^l \varepsilon \\ p_s(x) - z - (-1)^l \varepsilon & a & y \end{pmatrix},$$

deren maximale Minoren die Kurve $X_{s,a}^\varepsilon$ definieren.

Wie wirkt sich diese Modifikation auf die Lage der kritischen Werte aus? Die Antwort gibt Lemma 5.14: Für $a \in \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$ besitzt $X_{s,a}^\varepsilon$ jeweils l quadratische Singularitäten. Diese sind aus dem kritischen Wert 0 entstanden, über dem eine Faser mit l Tripelpunkten lag.

Die Lage der übrigen kritischen Werte $a_j^+, a_j^-, \bullet a_j^+$ und $\bullet a_j^-$ wird nur unerheblich verändert; sie sind nach wie vor reell bzw. rein imaginär. Das Lemma 5.14 liefert: Ist $(x, y, z) \in X_{s,a}^\varepsilon$ ein singulärer Punkt mit $a \notin \{-\varepsilon, 0, \varepsilon\}$, so gilt $x \in \{\xi_1, \dots, \xi_{l-1}\}$ und a muß eine der Gleichungen

$$a^4 + U_{s,j}(\varepsilon)a^2 + V_{s,j}(\varepsilon) = 0$$

annullieren mit $j \in \{1, \dots, l-1\}$, $U_{s,j}(\varepsilon) = 2\varepsilon^2 + 14(-1)^l \varepsilon p_s(\xi_j) + 11p_s^2(\xi_j)$ und $V_{s,j}(\varepsilon) = \varepsilon^4 - 2(-1)^l \varepsilon^3 p_s(\xi_j) + 2(-1)^l \varepsilon p_s^3(\xi_j) - p_s^4(\xi_j)$. Diese Gleichungen besitzen für hinreichend klein und fest gewähltes $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ausschließlich reelle bzw. rein imaginäre Lösungen für a ; ihre Lösungen wollen wir im folgenden mit $a_{j,\varepsilon}^+$ und $a_{j,\varepsilon}^-$ (reelle Lösungen) bzw. mit $\bullet a_{j,\varepsilon}^+$ und $\bullet a_{j,\varepsilon}^-$ (rein imaginäre Lösungen) bezeichnen.

Wir müssen die Fälle $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$ getrennt behandeln. Da sich die Bearbeitung beider Fälle völlig analog gestaltet, wollen wir uns lediglich auf den Fall $\varepsilon > 0$ konzentrieren. Die Ergebnisse, die wir hier erzielen werden, gelten genauso auch für den Fall $\varepsilon < 0$.

Die beschriebene Modifikation ($M_{s,a} \rightarrow M_{s,a}^\varepsilon$) ermöglicht es, “mehr” Fasern zu betrachten, da wir nicht nur die über $\mathbb{D} = \{a \in \mathbb{C} : |a| \leq \rho\}$ liegenden Fasern $X_{s,a}$ zur Verfügung haben, sondern (allgemeiner) die über $Z = \mathbb{D} \times [0, \varepsilon]$ liegenden Fasern $X_{s,a}^\beta$ mit $(a, \beta) \in Z$ betrachten wollen. Mit D bezeichnen wir die Teilmenge von Z , über deren Punkte singuläre Fasern liegen, das Komplement von D in Z nennen wir Z^* .

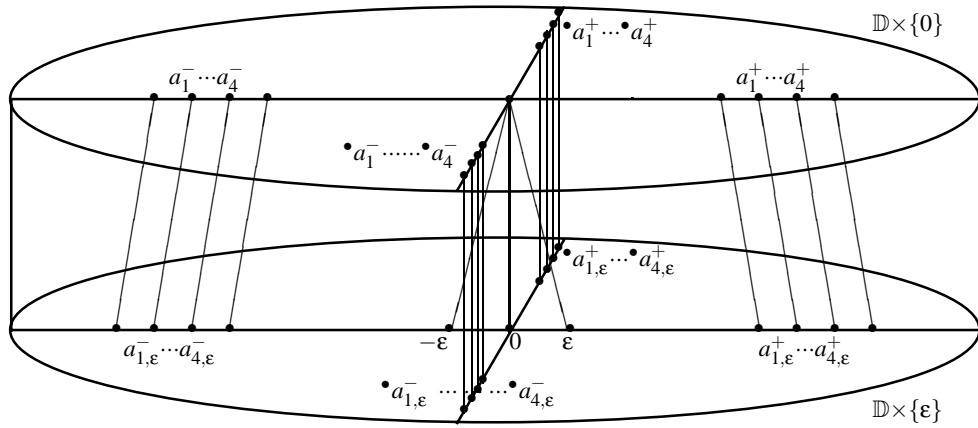


Abbildung 5.8: Der Zylinder Z für $l = 5$

Mit $\psi_a : [0, 1] \rightarrow Z$ bezeichnen wir einen Weg in Z mit Anfangspunkt (a, ε) und Endpunkt $(a, 0)$, der diese Punkte geradlinig verbindet. Ferner wählen wir in der Kreisscheibe $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\} \subset Z$ ein stark ausgezeichnetes Wegesystem

$$W(\varepsilon) = \{\gamma_{j,\varepsilon}^+, 1 \leq j \leq l-1, \bullet \gamma_{j,\varepsilon}^-, 1 \leq j \leq l-1, \gamma_\varepsilon^+, \gamma_{0,\varepsilon}, \gamma_\varepsilon^-, \gamma_{j,\varepsilon}^-, 1 \leq j \leq l-1, \bullet \gamma_{j,\varepsilon}^+, 1 \leq j \leq l-1\},$$

das die kritischen Werte mit dem nicht-kritischen Wert $a_\varepsilon^* = (a^*, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ verbindet und das die folgende Forderung erfüllt:

Ist $\psi : [0, 1] \rightarrow D$ ein Weg, der den kritischen Wert $(a_\varepsilon, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ mit dem kritischen Wert $(a, 0) \in \mathbb{D} \times \{0\}$, aus welchem er durch die Modifikation $M_{s,a} \rightarrow M_{s,a}^\varepsilon$ hervorgegangen ist, verbindet und sind $\gamma \in W$ bzw. $\gamma_\varepsilon \in W(\varepsilon)$ die Wege der stark ausgezeichneten Wegesysteme, die die beiden kritischen Werte $(a, 0)$ bzw. $(a_\varepsilon, \varepsilon)$ mit den jeweiligen nicht-kritischen Werten $(a^*, 0) \in \mathbb{D} \times \{0\}$ bzw. $(a^*, \varepsilon) \in \mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ verbinden, dann sind die Wege $\gamma\psi\gamma_\varepsilon^{-1}$ und ψ_{a^*} homotop in $Z^* \cup \text{Bild}(\psi)$. (5.5)

Aufgrund der Bedingung (5.5) gibt es einen Weg $\varphi : [0, 1] \rightarrow Z^*$ mit Anfangspunkt (a^*, ε) und Endpunkt $(a^*, 0)$, der aus dem Weg $\gamma\psi\gamma_\varepsilon^{-1}$ durch minimales Stören hervorgeht und der in Z^* homotop zu ψ_{a^*} ist. Falls δ_ε in $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ verschwindet, so gibt es genau einen in $\mathbb{D} \times \{0\}$ längs γ verschwindenden Zykel δ mit

$$h_{\psi_{a^*}}(\delta_\varepsilon) = h_{\varphi^*}(\delta_\varepsilon) = \pm\delta.$$

Nun orientieren wir δ_ε so, daß in dieser Gleichung “+” steht. Dann können wir $\delta_\varepsilon \in H_1(X_{s,a^*}^\varepsilon; \mathbb{Z})$ mittels $h_{\psi_{a^*}}$ mit $\delta \in H_1(X_{s,a^*}; \mathbb{Z})$ identifizieren.

Diese Identifikation gestattet es, die Kreisscheibe $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$, das auf $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ gewählte Wegesystem $W(\varepsilon)$ sowie die Menge der verschwindenden Zykel, die längs der Wege aus $W(\varepsilon)$ verschwinden, für die Berechnung weiterer Schnitzzahlen zu verwenden.

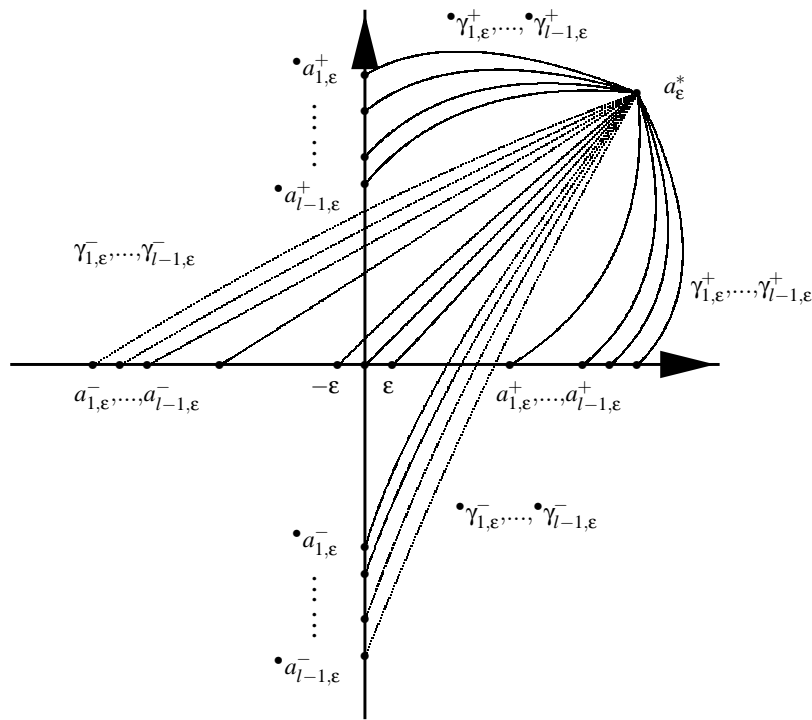


Abbildung 5.9: Die Verteilung der kritischen Werte in $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$

Unser Interesse gilt in erster Linie den Fasern $X_{s,-\alpha}^\varepsilon$, $X_{s,0}^\varepsilon$ und $X_{s,\alpha}^\varepsilon$ für ein fest gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}^*$ mit $0 < \alpha < \varepsilon$. Um einen Eindruck von der Gestalt der reellen Fasern $X_{s,\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ bzw. $X_{s,-\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ zu bekommen, betrachten wir zunächst die Faser $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$. Diese Kurve besitzt in der xy -Ebene $l - 1$ Zyklen; diese können wir

mit den geschlossenen Komponenten der Niveaulinie $p_s^2(x) - y^2 = \varepsilon^2$ identifizieren. Die Komponente in der xz -Ebene wird durch das Einführen von ε nach oben (l ungerade) bzw. nach unten (l gerade) verschoben. Daher folgt, daß nur jede zweite geschlossene Komponente von $(z = 0, p_s^2(x) - y^2 = \varepsilon^2)$ die Komponente $(y = 0, z = p_s(x) - (-1)^l \varepsilon)$ schneidet, siehe Abb. 5.10. Die anderen (geschlosse-

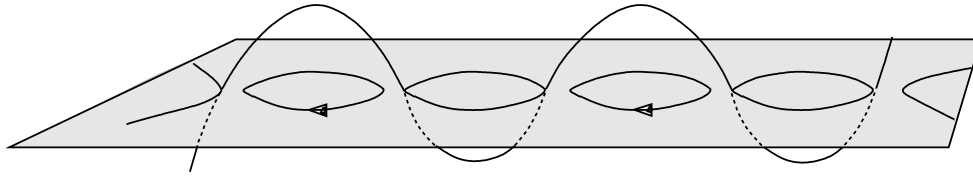


Abbildung 5.10: Die Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ für $l = 5$ und $\varepsilon > 0$

nen) Komponenten von $(z = 0, p_s^2(x) - y^2 = \varepsilon^2)$ schneiden die Komponente in der xz -Ebene nicht; sie liegen für ungerades j zwischen dem j -ten und dem $j + 1$ -ten Tripelpunkt und definieren Zykel. Diese Zykel sind gerade die Bilder der Zykel $\bullet \delta_{j,\varepsilon}^+$, wenn wir diese längs des Weges $\gamma_{0,\varepsilon}^{-1}$ in die Faser $X_{s,0}^\varepsilon$ transportieren.

Bemerkung 5.17 An dieser Stelle wird der Grund für die vorgenommene Fallunterscheidung $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$ deutlich, denn im Fall $\varepsilon < 0$ wird die in der xz -Ebene liegende Komponente $z = p_s(x)$ entlang der z -Achse in die *entgegengesetzte* Richtung verschoben, was dazu führt, daß nun die geschlossenen Komponenten von $(z = 0, p_s^2(x) - y^2 = \varepsilon^2)$ mit *geradem* Index isoliert liegen und gewisse Zykel definieren, siehe Abb. 5.11.

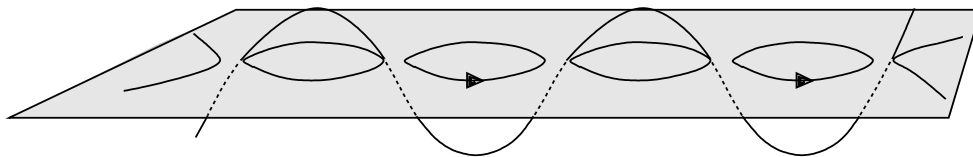


Abbildung 5.11: Die Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ für $l = 5$ und $\varepsilon < 0$

Es sei nun $\varepsilon \neq 0$ fest gewählt. Wir müssen wissen, welche verschwindenden Zykel der Tripelpunkte kontrahiert werden, wenn wir den Parameter a in der Kreisscheibe $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ in die kritischen Werte 0 , ε oder $-\varepsilon$ laufen lassen. Die Antwort liefert das folgende Lemma.

Lemma 5.18 Sei $j \in \{1, \dots, l\}$. Dann gilt:

$$\text{Für } \mathbb{D} \times \{\varepsilon\} \ni a \rightarrow \begin{cases} 0 \\ (-1)^j \varepsilon \\ -(-1)^j \varepsilon \end{cases} \text{ verschwindet der Zykel } \begin{cases} \delta_{j,\varepsilon}^3 \\ \delta_{j,\varepsilon}^1 \\ \delta_{j,\varepsilon}^2 \end{cases}.$$

Beweis Wir führen für hinreichend klein gewählte Parameter a und ε in einer kleinen Umgebung um den j . Tripelpunkt folgende Koordinatentransformation durch:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_j &= -y + \tau_j(p_s(x) - z) \\ \tilde{y}_j &= y + \tau_j(p_s(x) - z) \\ \tilde{z}_j &= z \end{aligned}$$

Hierbei ist $\tau_j := \text{sgn}(p'_s(x_j))$. Es gilt

$$p'_s(x_j) = \prod_{n=1, n \neq j}^l (x_j - x_n) \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow l - j \equiv 0 \pmod{2} \\ < 0 & \Leftrightarrow l - j \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

und daher $\tau_j = \text{sgn}(p'_s(x_j)) = (-1)^{l-j}$.

Diese Koordinatentransformationen identifizieren jeden der drei Zweige, die sich lokal in der Kurve X_s zu einem Tripelpunkt zusammensetzen, mit einer Koordinatenachse. In den Koordinaten \tilde{x}_j, \tilde{y}_j und \tilde{z}_j wird $X_{s,a}^\varepsilon$ lokal, d.h. in einer kleinen Umgebung des j . Tripelpunktes, durch die maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}_j & \tilde{z}_j + (-1)^{l-j} a & (-1)^j \varepsilon - a \\ (-1)^j \varepsilon + a & \tilde{z}_j - (-1)^{l-j} a & \tilde{x}_j \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

beschrieben.

Begründung In den neuen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} M_{s,a}^\varepsilon &= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{y}_j - \tilde{x}_j}{2} + a & \tilde{z}_j & \tau_j \frac{\tilde{y}_j + \tilde{x}_j}{2} + \tilde{z}_j + (-1)^l \varepsilon \\ \tau_j \frac{\tilde{y}_j + \tilde{x}_j}{2} - (-1)^j \varepsilon & a & \frac{\tilde{y}_j - \tilde{x}_j}{2} \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} \tilde{y}_j - \tilde{x}_j + 2a & 2\tilde{z}_j & \tau_j(\tilde{x}_j + \tilde{y}_j) + 2\tilde{z}_j + 2(-1)^l \varepsilon \\ \tilde{y}_j + \tilde{x}_j - 2\tau_j(-1)^l \varepsilon & 2\tau_j a & \tau_j(\tilde{y}_j - \tilde{x}_j) \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow & \begin{pmatrix} \tilde{y}_j - \tilde{x}_j + 2a & 2\tilde{z}_j & \tilde{x}_j + \tilde{y}_j + 2\tau_j \tilde{z}_j + 2\tau_j(-1)^l \varepsilon \\ \tilde{y}_j + \tilde{x}_j - 2\tau_j(-1)^l \varepsilon & 2\tau_j a & \tilde{y}_j - \tilde{x}_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j - \tilde{x}_j + 2a & \tilde{z}_j & \tilde{x}_j + \tilde{y}_j + 2\tau_j(-1)^l \epsilon \\ \tilde{y}_j + \tilde{x}_j - 2\tau_j(-1)^l \epsilon & \tau_j a & \tilde{y}_j - \tilde{x}_j - 2a \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2\tilde{y}_j + 2a + 2\tau_j(-1)^l \epsilon & \tilde{z}_j & \tilde{x}_j + \tilde{y}_j + 2\tau_j(-1)^l \epsilon \\ 2\tilde{y}_j - 2\tau_j(-1)^l \epsilon - 2a & \tau_j a & \tilde{y}_j - \tilde{x}_j - 2a \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j + a + \tau_j(-1)^l \epsilon & \tilde{z}_j & \tilde{x}_j + \tilde{y}_j + 2\tau_j(-1)^l \epsilon \\ \tilde{y}_j - \tau_j(-1)^l \epsilon - a & \tau_j a & \tilde{y}_j - \tilde{x}_j - 2a \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j + a + \tau_j(-1)^l \epsilon & \tilde{z}_j & \tilde{x}_j + \tau_j(-1)^l \epsilon - a \\ \tilde{y}_j - \tau_j(-1)^l \epsilon - a & \tau_j a & -\tilde{x}_j - a + \tau_j(-1)^l \epsilon \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2\tilde{y}_j & \tilde{z}_j + \tau_j a & 2\tau_j(-1)^l \epsilon - 2a \\ \tilde{y}_j - \tau_j(-1)^l \epsilon - a & \tau_j a & -\tilde{x}_j - a + \tau_j(-1)^l \epsilon \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j & \frac{\tilde{z}_j + \tau_j a}{2} & \tau_j(-1)^l \epsilon - a \\ \tilde{y}_j - \tau_j(-1)^l \epsilon - a & \tau_j a & -\tilde{x}_j - a + \tau_j(-1)^l \epsilon \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j & \tilde{z}_j + \tau_j a & \tau_j(-1)^l \epsilon - a \\ \tilde{y}_j - \tau_j(-1)^l \epsilon - a & 2\tau_j a & -\tilde{x}_j - a + \tau_j(-1)^l \epsilon \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j & \tilde{z}_j + \tau_j a & \tau_j(-1)^l \epsilon - a \\ -\tau_j(-1)^l \epsilon - a & -\tilde{z}_j + \tau_j a & -\tilde{x}_j \end{pmatrix} \\
&\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \tilde{y}_j & \tilde{z}_j + (-1)^{l-j} a & (-1)^j \epsilon - a \\ (-1)^j \epsilon + a & \tilde{z}_j - (-1)^{l-j} a & \tilde{x}_j \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir Bemerkung 4.1 aus dem Abschnitt über den Tripelpunkt, in der erwähnt wurde, daß (und wie) jedem verschwindenden Zykel eines Tripelpunktes eineindeutig eine Koordinatenachse zugeordnet werden kann. Setzen wir in der Matrix in (5.6) für a die Werte 0 , $(-1)^j \epsilon$ und $-(-1)^j \epsilon$ ein, so erhalten wir singuläre Kurven, die eine zur \tilde{z}_j -Achse, eine zur \tilde{x}_j -Achse bzw. eine zur \tilde{y}_j -Achse parallele Gerade enthalten. Das bedeutet: Für $a \rightarrow 0$ verschwindet der Zykel $\delta_{j,\epsilon}^3$, für $a \rightarrow (-1)^j \epsilon$ der Zykel $\delta_{j,\epsilon}^1$ und für $a \rightarrow -(-1)^j \epsilon$ der Zykel $\delta_{j,\epsilon}^2$. \square

Bemerkung 5.19 Die Tatsache, daß für $a \rightarrow 0$ die Zykel $\delta_{j,\epsilon}^3$, mit $1 \leq j \leq l$, verschwinden, kann man auch schon den Abbildungen 5.10 und 5.11 entnehmen. Ferner ergeben sich aus diesen beiden Abbildungen die folgenden Schnittzahlen:

- $(\bullet \delta_{j,\epsilon}^+, \delta_{k,\epsilon}^3) = 0$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $1 \leq k \leq l$
- $(\bullet \delta_{j,\epsilon}^+, \delta_{k,\epsilon}^1) = 0$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $k \in \{1, \dots, j-1, j+2, \dots, l\}$
- $(\bullet \delta_{j,\epsilon}^+, \delta_{k,\epsilon}^2) = 0$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $k \in \{1, \dots, j-1, j+2, \dots, l\}$

Für das soeben bewiesene Lemma war es nicht nötig, zwischen $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon < 0$ zu unterscheiden. Im folgenden konzentrieren wir uns wieder auf den Fall $\varepsilon > 0$. Wir betrachten zunächst die reelle Kurve $X_{s,\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$, siehe Abb. 5.12. In

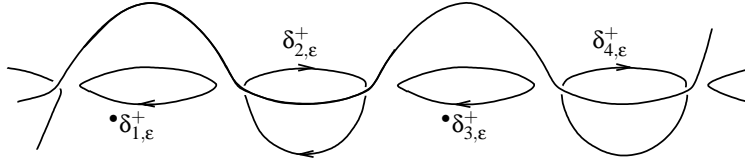


Abbildung 5.12: Die Kurve $X_{s,\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ für $l = 5$ und $\varepsilon > 0$

ihr finden wir die aus den verschwindenden Zykeln $\delta_2^+, \delta_4^+, \dots$ hervorgegangenen Zykel $\delta_{2,\varepsilon}^+, \delta_{4,\varepsilon}^+, \dots$ wieder. Wir kennen bereits die Schnittzahlen dieser Zykeln mit den verschwindenden Zykeln der Tripelpunkte; diese sind unter (5.4) notiert. Davon wollen wir Gebrauch machen, um für ungerades j die Schnittzahlen $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^1)$, $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^2)$, $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^1)$, $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^2)$ zu berechnen. Aus Abbildung 4.4 (Bild 8 und Bild 1) sowie aus Lemma 4.2 folgt:

$$\begin{aligned} (-\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^1) &= -(\delta_{j-1,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^1) \Rightarrow (\delta_{j,\varepsilon}^1, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) = -1 \\ (-\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^2) &= -(\delta_{j+1,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^2) \Rightarrow (\delta_{j+1,\varepsilon}^2, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) = -1 \end{aligned}$$

In der Faser $X_{s,-\alpha}^\varepsilon$ berechnen wir in entsprechender Weise die Schnittzahlen

$$\begin{aligned} (-\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^2) &= -(\delta_{j-1,\varepsilon}^-, \delta_{j,\varepsilon}^2) \Rightarrow (\delta_{j,\varepsilon}^2, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) = 1 \\ (-\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^1) &= -(\delta_{j+1,\varepsilon}^-, \delta_{j+1,\varepsilon}^1) \Rightarrow (\delta_{j+1,\varepsilon}^1, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) = 1 \end{aligned}$$

Bemerkung 5.20 (i) Für $j = 1$ bzw. $j = l - 1$ können wir dieses Argument streng genommen nicht anwenden, da wir keine Zykeln δ_0^+, δ_0^- bzw. δ_l^+, δ_l^- definiert haben. Unter Verwendung der in Kapitel 4 eingeführten orientierungserhaltenden Diffeomorphismen kann man die obigen Gleichungen aber auch für $j = 1$ bzw. $j = l - 1$ verifizieren.

(ii) Die Verbindung zu den Bildern der Abbildung 4.4 wird gerade durch die in Lemma 5.18 angegebene Koordinatentransformation hergestellt.

Nun können die Schnittzahlen $(\delta_{k,\varepsilon}^+, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+)$ und $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{k,\varepsilon}^-)$ für $1 \leq k \leq l - 1$ und ungerades $1 \leq j \leq l - 1$ berechnet werden. Dazu können wir die A'Campo-Methode anwenden, da die Träger der Zykeln

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{k,\varepsilon}^- \\ \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+ \\ \delta_{k,\varepsilon}^+ \end{array} \right\} \text{ in den Fasern } X_{s,\alpha}^\varepsilon \text{ mit } \left\{ \begin{array}{l} \max_{1 \leq k \leq l-1} \{a_{k,\varepsilon}^-\} < \alpha < -\varepsilon \\ -\varepsilon < \alpha < \varepsilon \\ \varepsilon < \alpha < \min_{1 \leq k \leq l-1} \{a_{k,\varepsilon}^+\} \end{array} \right\} \text{ reell sind.}$$

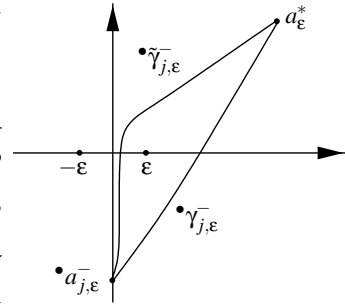
Wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} (\delta_{k,\varepsilon}^-, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) &= -(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{k,\varepsilon}^-) \\ &= \frac{1}{2} \left((\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^1) \cdot (\delta_{j,\varepsilon}^1, \delta_{k,\varepsilon}^-) + (\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^2) \cdot (\delta_{j+1,\varepsilon}^2, \delta_{k,\varepsilon}^-) \right) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j, \\ 0, & \text{falls } k \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} (\delta_{k,\varepsilon}^+, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) &= -\frac{1}{2} \left((\delta_{k,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^2) \cdot (\delta_{j,\varepsilon}^2, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) + (\delta_{k,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^1) \cdot (\delta_{j+1,\varepsilon}^1, \bullet\delta_{j,\varepsilon}^+) \right) \\ &= \begin{cases} -1, & \text{falls } k = j, \\ 0, & \text{falls } k \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Die bisherigen Berechnungen des Falls $\varepsilon > 0$ bezogen sich ausschließlich auf Schnittzahlen, die (für ungerades j) den Zykel $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+$ enthielten. Wir können die erzielten Ergebnisse nun zur Berechnung entsprechender Schnittzahlen benutzen, die (für ungerades j) den Zykel $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-$ enthalten, nämlich unter Verwendung folgender Identität: $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^- = \pm h_{\varphi^*}(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+)$; φ bezeichne hierbei eine einfache Schleife in $\mathbb{D} \times \{\varepsilon\}$ um den Punkt ε mit Anfangs- und Endpunkt a_{ε}^* . Wie ergibt sich diese Identität? Dazu betrachten wir den Zykel $\bullet\tilde{\delta}_{j,\varepsilon}^-$, der längs des Weges $\bullet\tilde{\gamma}_{j,\varepsilon}^-$ verschwinde, siehe rechte Abbildung. Da der Zykel $\bullet\tilde{\delta}_{j,\varepsilon}^-$ (bis auf Orientierung) mit dem Zykel $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+$ übereinstimmt, gilt nun $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^- = \pm h_{\varphi^*}(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+)$. In dieser Gleichung steht “ \pm ”, da wir die Zykel $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-$ bzw. $\bullet\tilde{\delta}_{j,\varepsilon}^-$ noch nicht orientiert haben. Das tun wir an dieser Stelle: Der Zykel $\bullet\tilde{\delta}_{j,\varepsilon}^-$ sei so orientiert, daß $\bullet\delta_{j,\varepsilon}^- = -h_{\varphi^*}(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+)$ gilt. Die Picard-Lefschetz-Formel liefert:



$$\begin{aligned} \bullet\delta_{j,\varepsilon}^- &= -\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+ + (\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j,\varepsilon}^2) \delta_{j,\varepsilon}^2 + (\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{j+1,\varepsilon}^1) \delta_{j+1,\varepsilon}^1 \\ &= -\bullet\delta_{j,\varepsilon}^+ - \delta_{j,\varepsilon}^2 - \delta_{j+1,\varepsilon}^1. \end{aligned}$$

Durch Verwendung dieser Relation lassen sich für ungerades $j \in \{1, \dots, l-1\}$ und $1 \leq k \leq l$ folgende Schnittzahlen berechnen:

$$\begin{aligned} \bullet(\delta_{j,\varepsilon}^+, \delta_{k,\varepsilon}^-) &= \begin{cases} -1, & \text{falls } k = j, \\ 0, & \text{falls } k \neq j \end{cases} \\ \bullet(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-, \delta_{k,\varepsilon}^-) &= \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j, \\ -1, & \text{falls } k \in \{j-1, j+1\}, \\ 0, & \text{falls } k \notin \{j-1, j, j+1\} \end{cases} \end{aligned}$$

- $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-, \delta_{k,\varepsilon}^1) = (\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-, \delta_{k,\varepsilon}^2) = \begin{cases} -1, & \text{falls } k = j, \\ 1, & \text{falls } k = j + 1, \\ 0, & \text{falls } k \notin \{j, j + 1\} \end{cases}$
- $(\bullet\delta_{j,\varepsilon}^-, \delta_{k,\varepsilon}^3) = 0.$

Damit ist der Fall $\varepsilon > 0$ abgeschlossen. Wie bereits bemerkt, erhalten wir für den Fall $\varepsilon < 0$ (in diesem Fall ist der Index j gerade) die gleichen Schnittzahlen.

Abschließend berechnen wir: $(\bullet\delta_j^-, \bullet\delta_k^+) = \begin{cases} -2, & \text{falls } k = j, \\ 1, & \text{falls } k \in \{j - 1, j + 1\}, \\ 0, & \text{falls } k \notin \{j - 1, j, j + 1\}. \end{cases}$

Nun sind alle Schnittzahlen bekannt, und wir haben folgenden Satz bewiesen:

Satz 5.21 *Die durch die maximalen Minoren der Matrix M_0 definierte Kurvensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ besitzt ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln $\{\delta_j^+; 1 \leq j \leq l - 1\}$, $\{\bullet\delta_j^-; 1 \leq j \leq l - 1\}$, $\{\delta_j^i; 1 \leq j \leq l, 1 \leq i \leq 3\}$, $\{\delta_j^-; 1 \leq j \leq l - 1\}$, $\{\bullet\delta_j^+; 1 \leq j \leq l - 1\}$ (dabei ist die Reihenfolge der Zykeln innerhalb der Klammern nicht von Bedeutung) mit folgenden Schnittzahlen:*

- $(\delta_j^+, \delta_k^+) = (\delta_j^-, \delta_k^-) = (\bullet\delta_j^+, \bullet\delta_k^+) = (\bullet\delta_j^-, \bullet\delta_k^-) = 0$
- $(\delta_j^{i_1}, \delta_k^{i_2}) = (\bullet\delta_j^-, \delta_k^3) = (\delta_k^3, \bullet\delta_j^+) = 0$
- $(\delta_j^+, \delta_k^1) = (\delta_k^2, \delta_j^-) = \begin{cases} 1, & k = j + 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\delta_j^+, \delta_k^3) = (\delta_k^3, \delta_j^-) = \begin{cases} 1, & k \in \{j, j + 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\delta_j^+, \delta_k^2) = (\delta_k^1, \delta_j^-) = (\delta_j^-, \bullet\delta_k^+) = -(\delta_j^+, \bullet\delta_k^\pm) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\delta_j^+, \delta_k^-) = \begin{cases} -1, & k \in \{j - 1, j, j + 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\bullet\delta_j^-, \delta_k^1) = (\delta_k^1, \bullet\delta_j^+) = -(\bullet\delta_j^-, \delta_k^2) = -(\delta_k^2, \bullet\delta_j^+) = \begin{cases} -1, & k = j, \\ 1, & k = j + 1, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\bullet\delta_j^-, \delta_k^-) = \begin{cases} 1, & k = j, \\ -1, & k \in \{j - 1, j + 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
- $(\bullet\delta_j^-, \bullet\delta_k^+) = \begin{cases} -2, & k = j, \\ 1, & k \in \{j - 1, j + 1\}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

□

Beispiel 5.22 Für die Singularität $J_{2,0}(2)$, also für $l = 2$, erhalten wir folgendes Coxeter-Dynkin-Diagramm (mit $e_1 \hat{=} \delta_1^+$, $e_2 \hat{=} \bullet \delta_1^-$, $e_3 \hat{=} \delta_1^2$, $e_4 \hat{=} \delta_2^1$, $e_5 \hat{=} \delta_1^3$, $e_6 \hat{=} \delta_2^3$, $e_7 \hat{=} \delta_1^1$, $e_8 \hat{=} \delta_2^2$, $e_9 \hat{=} \delta_1^-$, $e_{10} \hat{=} \bullet \delta_1^+$):

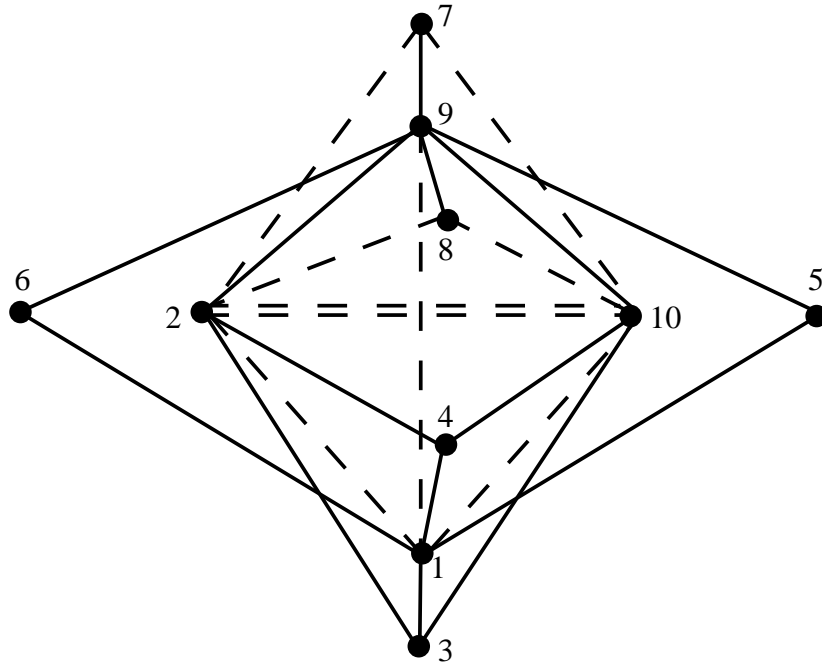


Abbildung 5.13: Ein Coxeter-Dynkin-Diagramm der Singularität $J_{2,0}(2)$

Kapitel 6

Abschließende Bemerkungen

6.1 Kurvensingularitäten der Multiplizität drei

Im fünften Kapitel haben wir für einige Raumkurvensingularitäten der Multiplizität drei Coxeter–Dynkin–Diagramme angegeben. Wir haben gesehen, daß sich Kurvensingularitäten, deren n –Invariante eins ist, leichter behandeln lassen, als Kurvensingularitäten mit einer größeren n –Invariante. Anhand der Singularitäten $J_{2,1}(2)$ und $E_{12}(2)$ wollen wir einige Probleme und Schwierigkeiten aufzeigen, die im Fall $n = 2$ auftreten können. Insbesondere soll dadurch verdeutlicht werden, daß sich dieser Fall nicht so allgemein behandeln läßt, wie der Fall $n = 1$.

6.1.1 $J_{2,1}(2)$

In Abschnitt 5.2 haben wir für die einfache Kurvensingularität vom Typ $J_{2,0}(2)$ ein Coxeter–Dynkin–Diagramm erstellt. Die nächste einfache Singularität in der Liste von A. Frühbis, siehe [Fr] oder Satz A.3, ist die Singularität $J_{2,1}(2)$. Die Präsentationsmatrizen der Singularitäten $J_{2,0}(2)$ und $J_{2,1}(2)$ sind von sehr ähnlicher Bauart: Für $k \in \{0, 1\}$ beschreibt die Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x^{2+k} \\ x^2 - z & 0 & y \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

eine Singularität vom Typ $J_{2,k}(2)$. Aufgrund dieser Tatsache ist es naheliegend anzunehmen, daß die in 5.2 benutzten Methoden auch für die einfache Singularität $J_{2,1}(2)$ ein Coxeter–Dynkin–Diagramm liefern.

In Abb. 6.1 sind die reellen Kurven, die für festes $s \in \mathbb{R}^+$ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & (x + 2s)^k(x^2 - s^2) \\ x^2 - s^2 - z & 0 & y \end{pmatrix}$$

definiert werden, gegenübergestellt.

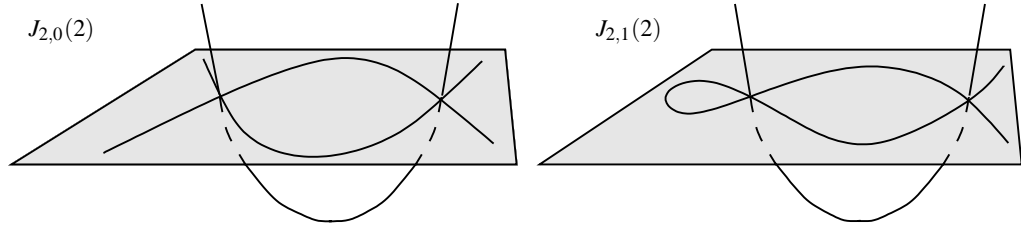


Abbildung 6.1: Reelle Deformationen der Singularitäten $J_{2,0}(2)$ und $J_{2,1}(2)$

Diese Bilder stützen die Vermutung, daß man ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $J_{2,1}(2)$ erhält, indem man die in 5.2 angestellten Überlegungen lediglich um die zusätzliche Schleife (im rechten Bild von Abb. 6.1) “ergänzt”, zumal nach Korollar 5.2 für die Multiplizität m der Diskriminante der semi–universellen Deformation $m = 11$ gilt.

Tatsächlich ist es *nicht* möglich, die Methoden aus 5.2 auch für die Singularität $J_{2,1}(2)$ anzuwenden. Das Scheitern des Ansatzes begründet sich dadurch, daß die in 5.2 betrachtete generische Störung (durch den Parameter a) im Fall der Singularität $J_{2,1}(2)$ nicht mehr generisch ist: Die Gerade im Basisraum der semi–universellen Deformation, die mit der Störung

$$\begin{pmatrix} y+a & z & x^3 \\ x^2-z & a & y \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

der Präsentationsmatrix korrespondiert, schneidet die Diskriminante in Null nicht transversal, vgl. nachstehende Bemerkung 6.1.

Es zeigt sich also, daß man die Einträge der definierenden Matrix anders stören muß als in (6.2). Man kann sich davon überzeugen, daß die Störung

$$\begin{pmatrix} y & z & x^3+a \\ x^2-z & a & y \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

generisch ist. Stört man auf der anderen Seite die Einträge der Präsentationsmatrix der Singularität $J_{2,0}(2)$ so wie in (6.3), erhält man *keine* generische Störung, denn für jedes fest gewählte $a \in \mathbb{C}$ besitzt die durch die maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} y & z & x^2+a \\ x^2-z & a & y \end{pmatrix}$$

definierte Kurve in den Punkten $(\pm i\sqrt{\frac{3}{2}a}, \frac{1}{2}a, -a)$ eine Singularität.

Bemerkung 6.1 Um den soeben angesprochenen Sachverhalt zu verdeutlichen, geben wir auf der nächsten Seite die (mit SINGULAR, [GPS], berechneten) Gleichungen der Diskriminanten folgender Deformation an:

$$\begin{pmatrix} y+a & z & x^{2+k}+b \\ x^2-z & c+dx & y \end{pmatrix}, k \in \{0, 1\}.$$

• $k = 0$:

$$\begin{aligned}
 & 4096a^7c^3 - 8192a^5b^2c^3 + 4096a^3b^4c^3 + 16384a^6c^4 + 11264a^4b^2c^4 - \\
 & 55296a^2b^4c^4 + 27648b^6c^4 + 24576a^5c^5 + 102400a^3b^2c^5 - 110592ab^4c^5 + \\
 & 16384a^4c^6 + 165888a^2b^2c^6 - 55296b^4c^6 + 4096a^3c^7 + 110592ab^2c^7 + \\
 & 27648b^2c^8 + 1536a^6bc^2d^2 - 3072a^4b^3c^2d^2 + 1536a^2b^5c^2d^2 - 1536a^5bc^3d^2 + \\
 & 14336a^3b^3c^3d^2 - 4608ab^5c^3d^2 + 8704a^4bc^4d^2 - 26880a^2b^3c^4d^2 + \\
 & 89856b^5c^4d^2 + 11776a^3bc^5d^2 + 46080ab^3c^5d^2 + 76032b^3c^6d^2 + 1728a^8d^4 - \\
 & 3456a^6b^2d^4 + 1728a^4b^4d^4 + 5760a^7cd^4 + 7680a^5b^2cd^4 - 25728a^3b^4cd^4 + \\
 & 12288ab^6cd^4 + 6080a^6c^2d^4 + 39296a^4b^2c^2d^4 - 26176a^2b^4c^2d^4 - 9216b^6c^2d^4 - \\
 & 6080a^5c^3d^4 + 55424a^3b^2c^3d^4 - 3456ab^4c^3d^4 - 5760a^4c^4d^4 - 41040a^2b^2c^4d^4 + \\
 & 86400b^4c^4d^4 - 1728a^3c^5d^4 - 38880ab^2c^5d^4 - 11664b^2c^6d^4 - 3600a^6bd^6 + \\
 & 5264a^4b^3d^6 + 5888a^2b^5d^6 - 4096b^7d^6 + 800a^5bcd^6 - 31808a^3b^3cd^6 + \\
 & 57600ab^5cd^6 - 1800a^4bc^2d^6 + 9072a^2b^3c^2d^6 - 22464b^5c^2d^6 - 5400a^3bc^3d^6 - \\
 & 7776ab^3c^3d^6 - 34992b^3c^4d^6 - 3125a^6d^8 + 4500a^4b^2d^8 - 432a^2b^4d^8 - \\
 & 13824b^6d^8 - 27000a^3b^2cd^8 + 31104ab^4cd^8 - 34992b^4c^2d^8 - 11664b^5d^{10} = 0
 \end{aligned}$$

• $k = 1$:

$$\begin{aligned}
 & 442368a^3b^5c^3 + 2985984b^7c^4 + 200000a^9c^3 + 3078000a^6b^2c^4 + \\
 & 13903488a^3b^4c^5 + 15116544b^6c^6 + 1658880a^4b^4c^3d + 11197440ab^6c^4d + \\
 & 165888a^2b^6c^2d^2 + 583200a^6bc^6 + 7715736a^3b^3c^7 + 25509168b^5c^8 - \\
 & 648000a^7bc^4d - 8852976a^4b^3c^5d - 30233088ab^5c^6d + 75000a^8bc^2d^2 + \\
 & 1062720a^5b^3c^3d^2 + 3639168a^2b^5c^4d^2 + 787968a^3b^5c^2d^3 + 1492992b^7c^3d^3 + \\
 & 186624a^4b^5d^4 + 1327104ab^7cd^4 + 314928a^6c^8 + 4251528a^3b^2c^9 + \\
 & 14348907b^4c^{10} - 1749600a^7c^6d - 24091992a^4b^2c^7d - 82904796ab^4c^8d + \\
 & 2187000a^8c^4d^2 + 31987062a^5b^2c^5d^2 + 116208432a^2b^4c^6d^2 + 75000a^9c^2d^3 + \\
 & 1088640a^6b^2c^3d^3 + 22219920a^3b^4c^4d^3 + 123451776b^6c^5d^3 + 84375a^{10}d^4 + \\
 & 1329000a^7b^2cd^4 + 6906384a^4b^4c^2d^4 + 12037248ab^6c^3d^4 + 699840a^5b^4d^5 + \\
 & 5018112a^2b^6cd^5 - 442368b^8d^6 - 405324a^6bc^5d^3 - 5412825a^3b^3c^6d^3 - \\
 & 17006112b^5c^7d^3 + 246240a^7bc^3d^4 + 3680721a^4b^3c^4d^4 + 8030664ab^5c^5d^4 - \\
 & 254625a^8bcd^5 - 3512808a^5b^3c^2d^5 - 6158592a^2b^5c^3d^5 - 25040a^6b^3d^6 - \\
 & 377568a^3b^5cd^6 - 2519424b^7c^2d^6 - 1492992ab^7d^7 + 314928a^6c^7d^3 + \\
 & 4251528a^3b^2c^8d^3 + 14348907b^4c^9d^3 - 1714608a^7c^5d^4 - 23619600a^4b^2c^6d^4 - \\
 & 81310473ab^4c^7d^4 + 2000376a^8c^3d^5 + 29415150a^5b^2c^4d^5 + \\
 & 107351082a^2b^4c^5d^5 + 900375a^9cd^6 + 13190121a^6b^2c^2d^6 + \\
 & 70565742a^3b^4c^3d^6 + 148803480b^6c^4d^6 + 78645a^7b^2d^7 + 8419464a^4b^4cd^7 + \\
 & 55742256ab^6c^2d^7 + 69984a^2b^6d^8 - 1000188a^6bc^4d^6 - 13286025a^3b^3c^5d^6 - \\
 & 43046721b^5c^6d^6 + 777924a^7bc^2d^7 + 11022480a^4b^3c^3d^7 + 33480783ab^5c^4d^7 - \\
 & 252105a^8bd^8 - 3536379a^5b^3cd^8 - 6908733a^2b^5c^2d^8 - 218700a^3b^5d^9 - \\
 & 17006112b^7cd^9 + 823543a^9d^9 + 12252303a^6b^2cd^9 + 52081218a^3b^4c^2d^9 + \\
 & 43046721b^6c^3d^9 + 6751269a^4b^4d^{10} + 47829690ab^6cd^{10} - 14348907b^7d^{12} = 0
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist der "Tangentialanteil" fett gedruckt.

6.1.2 $E_{12}(2)$

Mit $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ bezeichnen wir die isolierte Kurvensingularität mit Präsentationsmatrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} y & z & x^2 \\ z & x^3 & y \end{pmatrix}.$$

Wie üblich führen wir zunächst eine geeignete reelle Deformation durch. Dazu betrachten wir für festes und hinreichend klein gewähltes $s \in \mathbb{R}^+$ die Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} y & z & x^2 - s^3 \\ z & x(x^2 - s^3) + 3sy & y \end{pmatrix},$$

die die Kurve X_s definiert. Diese Kurve besitzt in den Punkten $(\pm s^{\frac{3}{2}}, 0, 0)$ einen Tripelpunkt. In Abbildung 6.2 ist die reelle Kurve $X_s \cap \mathbb{R}^3$ skizziert.

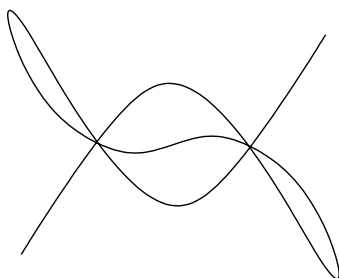


Abbildung 6.2: Die Kurve $X_s \cap \mathbb{R}^3$

Nun benötigen wir im Basisraum S der semi-universellen Deformation eine Gerade L , die die Diskriminante D in 0 transversal trifft. Zu diesem Zweck verwenden wir die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{0,a} = \begin{pmatrix} y+a & z & x^2 \\ z & x^3 - a & y \end{pmatrix}.$$

Wie in Abschnitt 5.2 überzeugt man sich davon, daß $M_{0,a}$ tatsächlich eine *generische* Störung von X_0 definiert. Verschiebt man die damit verbundene Gerade L etwas, so schneidet die daraus resultierende Gerade \tilde{L} die Diskriminante D in $m = m(D, 0) = \mu(X_0) + 1 + 3(n(X_0) - 1) = 8 + 1 + 3 = 12$ Punkten (mit Vielfachheiten gezählt).

Die Kurve $X_{s,a}$ werde durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{s,a} = \begin{pmatrix} y+a & z & x^2 - s^3 \\ z & x(x^2 - s^3) + 3sy - a & y \end{pmatrix}$$

definiert.

Wir haben bereits erwähnt, daß die Kurve $X_s = X_{s,0}$ zwei Tripelpunkte besitzt. Wie verändert sich diese Kurve, wenn wir den Parameter a längs der reellen Achse aus dem Ursprung herauslaufen lassen? Man überlegt sich, daß für hinreichend klein gewähltes $\alpha \in \mathbb{R}^+$ die reellen Kurven $X_{s,\alpha} \cap \mathbb{R}^3$ bzw. $X_{s,-\alpha} \cap \mathbb{R}^3$ qualitativ wie folgt aussehen:

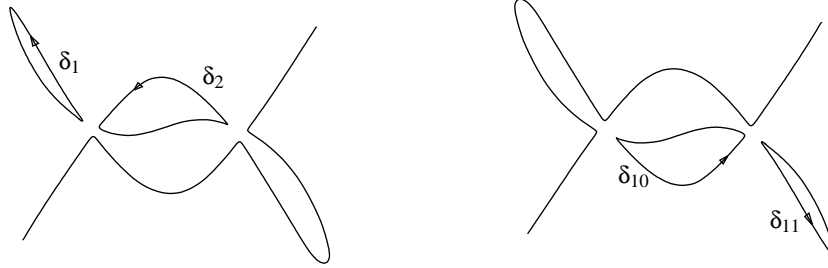


Abbildung 6.3: Die reellen Kurven $X_{s,\alpha} \cap \mathbb{R}^3$ und $X_{s,-\alpha} \cap \mathbb{R}^3$

Die in diesen beiden Bildern auftretenden reellen Zyklen repräsentieren *verschwindende* Zyklen, da sie sich auf einen Punkt zusammenziehen, wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ vergrößert wird. Diese Zyklen seien wie in Abb. 6.3 orientiert.

Die verbleibenden zwei kritischen Werte sind rein imaginär; den Einträgen der Matrix $M_{s,a}$ entnimmt man nämlich: Ist $(x_0, y_0, z_0) \in X_{s,a}$ ein singulärer Punkt, so auch $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0) \in X_{s,\bar{a}}$ und $(-x_0, -y_0, z_0) \in X_{s,-a}$. Wegen $m(D, 0) = 12$ müssen die zwei noch nicht betrachteten kritischen Werte daher rein imaginär sein.

Bemerkung 6.2 Mit Hilfe des Computeralgebra-Programms SINGULAR, [GPS], erhält man: Für hinreichend klein gewähltes $s \in \mathbb{R}^+$ ist die Faser $X_{s,a}$ genau dann singulär, wenn a eine Nullstelle des Polynoms

$$\begin{aligned}
 &688747536a^2s^{30} + 12397455648a^2s^{29} + 64053520848a^2s^{28} + \\
 &75762228960a^2s^{27} + 37192366944a^2s^{26} - 1112483160a^4s^{23} + \\
 &8264970432a^2s^{25} - 23814225504a^4s^{22} + 688747536a^2s^{24} - \\
 &177121490832a^4s^{21} - 510985481616a^4s^{20} - 651412034280a^4s^{19} - \\
 &137319543a^6s^{16} - 424271316528a^4s^{18} - 2568869154a^6s^{15} - \\
 &148042456488a^4s^{17} - 6924045645a^6s^{14} - 26367976656a^4s^{16} + \\
 &33507798282a^6s^{13} - 1883426904a^4s^{15} + 193274221581a^6s^{12} - \\
 &3294172a^8s^9 + 339312022110a^6s^{11} - 44471322a^8s^8 + \\
 &296908410330a^6s^{10} + 876876678a^8s^7 + 146114900298a^6s^9 + \\
 &5401971162a^8s^6 + 41152665276a^6s^8 + 15458232132a^8s^5 + \\
 &6198727824a^6s^7 + 19777084740a^8s^4 + 387420489a^6s^6 + \\
 &12905395146a^8s^3 + 22235661a^{10} + 4508745444a^8s^2 + \\
 &803538792a^8s + 57395628a^8
 \end{aligned}$$

ist, die in einer kleinen Umgebung des Ursprungs liegt.

Wir wählen einen nichtkritischen Wert a^* in der rechten oberen Halbebene. Ferner wählen wir wie in Abbildung 6.4 skizziert ein stark ausgezeichnetes Wegesystem.

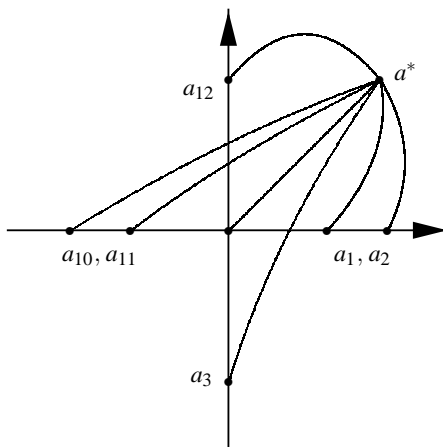


Abbildung 6.4: Die Verteilung der kritischen Werte

Wir kommen jetzt zu den verschwindenden Zykeln der Tripelpunkte. Für diese wählen wir, Abschnitt 5.2 folgend, die Bezeichnung δ_j^1, δ_j^2 und δ_j^3 für $1 \leq j \leq 2$. Wir wählen um beide Tripelpunkte lokale Koordinatensysteme, welche die drei Komponenten der Tripelpunkte jeweils mit einer Koordinatenachse identifizieren, siehe Abb. 6.5. Die Bezeichnung der verschwindenden Zykeln erklärt sich wie in Abschnitt 5.2 durch die Bemerkung 4.1.

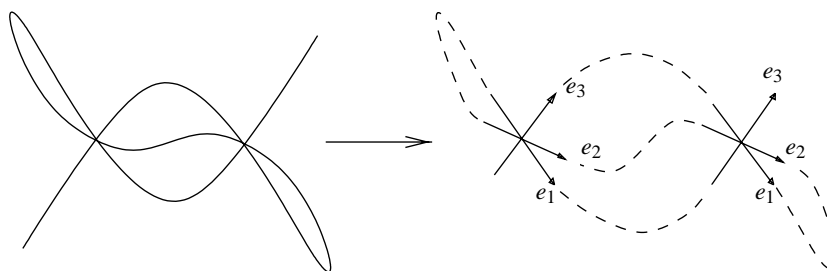


Abbildung 6.5: Lokale Koordinatensysteme

Wie in Abschnitt 5.1.1 überlegt man sich, daß die Zykeln δ_j^1, δ_j^2 und δ_j^3 für $1 \leq j \leq 2$ so orientiert werden können, daß sich folgende Schnitzzahlen ergeben:

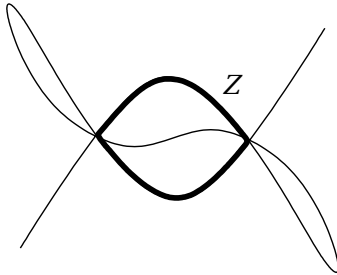
$$\begin{aligned}
 (\delta_1, \delta_1^1) &= (\delta_1, \delta_1^2) = -1, \\
 (\delta_2, \delta_1^2) &= (\delta_1^1, \delta_{10}) = (\delta_1^2, \delta_{10}) = (\delta_2, \delta_1^3) = 1, \\
 (\delta_2^1, \delta_{11}) &= (\delta_2^2, \delta_{11}) = -1, \\
 (\delta_2^2, \delta_{10}) &= (\delta_2, \delta_2^1) = (\delta_2, \delta_2^2) = (\delta_2^3, \delta_{10}) = 1.
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Alle nicht unter (6.3) aufgeführten Schnitzzahlen der Form (δ_j^i, δ_k) mit $j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$ und $k \in \{1, 2, 10, 11\}$ oder $(\delta_{j_1}^{i_1}, \delta_{j_2}^{i_2})$ mit $j_1, j_2 \in \{1, 2\}$ und $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$ sind Null. Desweiteren gilt $(\delta_1, \delta_2) = (\delta_{10}, \delta_{11}) = 0$, da sich die Träger der Zykeln nicht schneiden. Zur Berechnung der übrigen Schnitzzahlen unter diesen Zykeln bemühen wir wieder den A'Campo-Ansatz. Dieser liefert:

$$(\delta_1, \delta_{10}) = 1, (\delta_1, \delta_{11}) = 0, (\delta_2, \delta_{10}) = -1, (\delta_2, \delta_{11}) = 1.$$

Damit kennen wir alle Schnitzzahlen unter den verschwindenden Zykeln, die zu den reellen kritischen Werten gehören.

Die bisherige Vorgehensweise unterscheidet sich nicht von derjenigen, die wir in 5.2 benutzt haben. Allerdings ergeben sich bei dem Versuch, auch die übrigen Ideen aus 5.2 zu übertragen, Schwierigkeiten. Im Gegensatz zur in 5.2 studierten Serie $J_{l,0}(l)$ ist es nicht möglich, die verschwindenden Zykeln, die zu den beiden imaginären kritischen Werten gehören, mit Hilfe einer einfachen Koordinatentransformation zu beschreiben. Trotzdem besteht die Vermutung, daß sich diese beiden Zykeln ähnlich verhalten, wie die entsprechenden Zykeln in 5.2. Es ist anzunehmen,

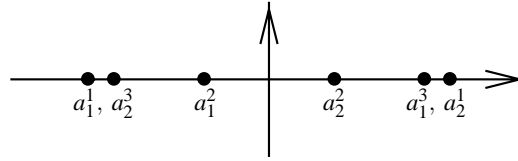


anzunehmen, daß der geschlossene 1-Zyklus $Z \subset X_{s,0} \cap \mathbb{R}^3$, der durch die e_1 - und e_3 -Komponenten der beiden Tripelpunkte definiert wird, zwei verschwindende Zykeln festlegt, die längs der imaginären Achse verschwinden. Wie in Abschnitt 5.2 können wir diese Zykeln in geeigneten Fasern "sichtbar zu machen", indem wir unseren Basisraum vergrößern: Für hinreichend klein gewähltes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ definieren wir die Matrix

$$M_{s,a}^\varepsilon = \begin{pmatrix} y+a & z & x^2-s^3 \\ z-\varepsilon & x(x^2-s^3)+3sy-a & y \end{pmatrix}.$$

Die maximalen Minoren von $M_{s,a}^\varepsilon$ definieren die Kurve $X_{s,a}^\varepsilon$.

Zunächst interessiert uns, welche Auswirkung der neue Parameter ε auf die Verteilung der kritischen Werte hat. Es ist klar, daß sich die Lage der Werte $a_1, a_2, a_3, a_{10}, a_{11}$ und a_{12} nur unerheblich verändert; diese Werte sind immer noch reell bzw. rein imaginär. Explizite Berechnungen mit Computeralgebra-Programmen führen zu der Annahme, daß aus dem kritischen Wert Null *sechs verschiedene reelle* kritische Werte $a_1^i, a_2^i, 1 \leq i \leq 3$, entstehen, wobei sich die Bezeichnung dieser kritischen Werte von der Bezeichnung der dazugehörigen verschwindenden Zykeln ableitet. Desweiteren ist anzunehmen, daß sich diese Werte wie folgt verteilen:

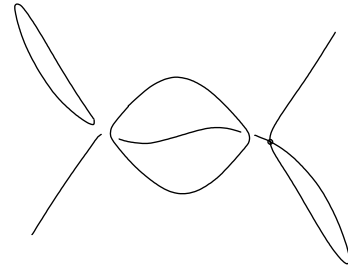


Auch die letzte Annahme läßt sich durch explizite Berechnungen motivieren. Mit Hilfe eines Computers berechnet man beispielsweise für $s = 0.5$ die folgenden kritischen Werte (wir machen keine Aussagen über Fehlerabschätzungen):

$$\varepsilon = 0: a \in \{0, \pm 0.01890699371, \pm 0.06726640170, \pm 0.4539583608i\}$$

$$\varepsilon = 0.001: a \in \{\pm 0.0002322093223, \pm 0.0004804400500, \pm 0.0004984029433, \pm 0.01844421556, \pm 0.067685880311, \pm 0.4545337768i\}$$

Ebenfalls mit Hilfe geeigneter Computer-Programme lassen sich die zu den kritischen Werten gehörenden singulären Kurven zeichnen. Beispielsweise sieht die reelle Kurve, die zu dem kritischen Wert $a = 0.0002322093223$ gehört, qualitativ wie nebenstehend skizziert aus. Man sieht, daß zu diesem kritischen Wert der verschwindende Zykel δ_2^2 gehört.



Die über die Lage der kritischen Werte a_i^j gemachten Vermutungen lassen sich auch durch die Gegenüberstellung der reellen Kurven $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ und $X_{s,\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ untermauern.

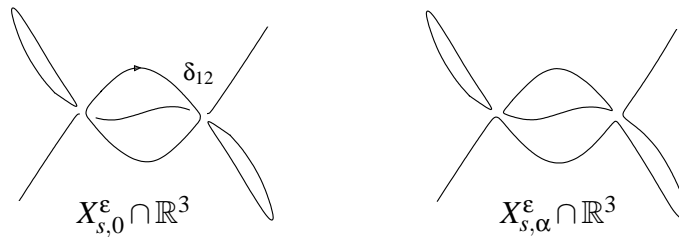


Abbildung 6.6: Die reellen Kurven $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ und $X_{s,\alpha}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$

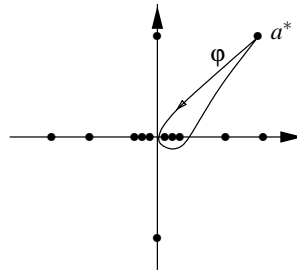
Man sieht, daß sich die beiden Kurven in kleinen Umgebungen der Tripelpunkte unterscheiden. Das bedeutet: Läßt man den Parameter a , beginnend im Ursprung, längs der reellen Achse in den Punkt α laufen, so werden dabei gewisse kritische Werte überschritten.

Unserer Annahme zufolge repräsentiert der Zykel δ_{12} im linken Bild von Abb. 6.6 einen – längs der imaginären Achse – verschwindenden Zykel. Der Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ entnimmt man sofort: $(\delta_1, \delta_{12}) = (\delta_{11}, \delta_{12}) = 0$.

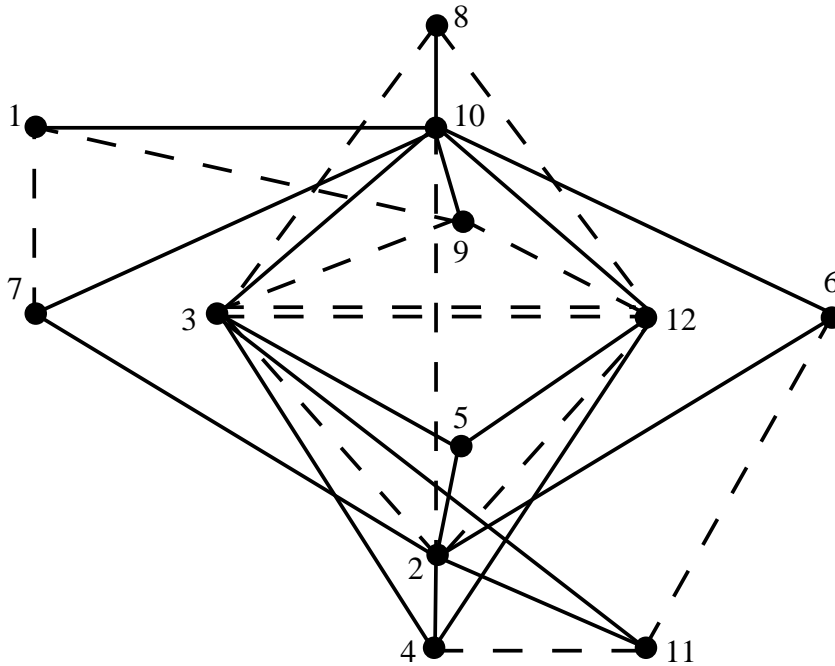
Wie in Kapitel 5 lassen sich die Schnitzzahlen des Zyklus δ_{12} mit den verschwindenden Zykeln der Tripelpunkte ermitteln; man erhält:

$$(\delta_2^1, \delta_{12}) = (\delta_1^3, \delta_{12}) = 1, (\delta_1^1, \delta_{12}) = (\delta_2^3, \delta_{12}) = -1, (\delta_1^2, \delta_{12}) = (\delta_2^2, \delta_{12}) = 0.$$

Die A'Campo-Methode liefert nun $(\delta_2, \delta_{12}) = -1$ und $(\delta_{10}, \delta_{12}) = 1$. Wie in Abschnitt 5.1 berechnen wir die Schnitzzahlen, die den Zykel δ_3 enthalten, unter Verwendung der Picard-Lefschetz-Formel. φ bezeichne eine einfache Schleife mit Anfangs- und Endpunkt a^* , die die kritischen Werte a_2^2, a_1^3 und a_2^1 umläuft. Jetzt orientieren wir den Zykel δ_3 so, daß $\delta_3 = -h_{\varphi^*}(\delta_{12})$ gilt. Die Picard-Lefschetz-Formel liefert die Relation $\delta_3 = -\delta_{12} - \delta_1^3 - \delta_2^1$, aus welcher sich alle noch fehlenden Schnitzzahlen berechnen lassen: $(\delta_1, \delta_3) = 0, (\delta_2, \delta_3) = -1,$
 $(\delta_3, \delta_i^j) = (\delta_i^j, \delta_{12}), (\delta_3, \delta_{10}) = (\delta_3, \delta_{11}) = 1$ und $(\delta_3, \delta_{12}) = -2$. Schließlich erhalten wir (unter der Identifikation $e_i \hat{=} \delta_i$, für $i \in \{1, 2, 3, 10, 11, 12\}, e_4 \hat{=} \delta_2^1, e_5 \hat{=} \delta_1^3,$
 $e_6 \hat{=} \delta_2^2, e_7 \hat{=} \delta_1^2, e_8 \hat{=} \delta_2^3$ und $e_9 \hat{=} \delta_1^1$) folgende



Vermutung 6.3 Die Singularität $E_{12}(2)$ besitzt ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln mit folgendem Coxeter-Dynkin-Diagramm:



6.2 Wedge–Singularitäten: Zwei Beispiele

Sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine isolierte Singularität, die durch das Ideal $(xz, yz, f(x, y))$ gegeben wird, wobei f eine ebene Kurvensingularität $(C, 0) \subset (\mathbb{C}^2, 0)$ definiert. In Kapitel drei (Satz 3.2) haben wir gesehen, daß $(X, 0)$ μ -konstant in eine isolierte Singularität eines vollständigen Durchschnitts, $(Y, 0)$, deformiert. Insbesondere haben wir gesehen, wie die Coxeter–Dynkin–Diagramme von $(X, 0)$ aussehen: Sie bestehen aus einem Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $(Y, 0)$ und einer zusätzlichen Ecke, die mit keiner der übrigen Ecken verbunden ist (Satz 3.8). Wir wollen in diesem Abschnitt für zwei einfache Wedge–Singularitäten, nämlich für die Singularitäten $D_4 \vee L$ und $E_6 \vee L$, mit Hilfe geeigneter reeller Morsifikationen Satz 3.6 verifizieren. Wir erinnern daran, daß diese Singularitäten (μ -konstant) in die Singularitäten S_5 bzw. U_7 deformieren.

6.2.1 $D_4 \vee L$

Die Singularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ vom Typ $D_4 \vee L$ werde durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} z & xy & y^2 \\ 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

gegeben. Wir “verschieben” zunächst die Gerade $\{y = z = 0\}$ in der xy -Ebene; die daraus resultierende Kurve X_s besitzt die Präsentationsmatrix

$$M_s = \begin{pmatrix} z & xy + sx & y^2 + sy \\ 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

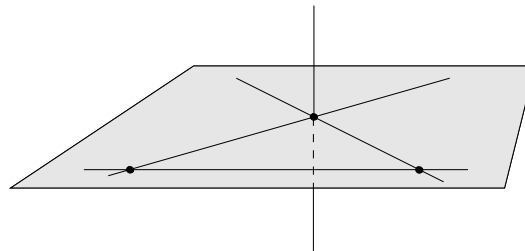


Abbildung 6.7: Die reelle Kurve $X_s \cap \mathbb{R}^3$ mit $s \in \mathbb{R}^+$

Wir benötigen eine einparametrische Störung von M_0 , die mit einer (generischen) Geraden im Basisraum korrespondiert. Nach Satz 3.6 trifft diese Gerade die Diskriminante der semiuniversellen Deformation in (mit Multiplizität gezählten) 7 Punkten.

Als generische Störung betrachten wir die Minoren der Matrix

$$M_{s,a} = \begin{pmatrix} z & xy + sx + a & y^2 + sy \\ a & y & x \end{pmatrix},$$

die die Kurve $X_{s,a}$ definieren.

Es ist klar, daß $X_s = X_{s,0}$ singularär ist, denn diese Kurve besitzt einen Tripelpunkt und zwei Doppelpunkte (in den Punkten $(x, y, z) = (\pm s, s, 0)$). Darüber hinaus wird die Kurve $X_{s,a}$ genau für $a = \pm \frac{1}{2}is$ singularär (dies folgt aus dem nachstehenden Lemma 6.4).

Auch bei der Behandlung dieser Singularität vom Typ $D_4 \vee L$ führen wir eine Modifikation durch: Für $\beta \in \mathbb{R}$ werde die Kurve $X_{s,a}^\beta$ durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_{s,a}^\beta = \begin{pmatrix} z & xy + sx + a & y^2 + sy + \beta \\ a & y & x \end{pmatrix}$$

definiert.

Lemma 6.4 Für $s \in \mathbb{R}^*$ und $0 \leq \varepsilon < \frac{s^2}{4}$ besitzt die Kurve $X_{s,a}^\varepsilon$ genau dann Singularitäten, falls a die Gleichung

$$a(a - \varepsilon)(a + \varepsilon)\left(a + i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s\right)\left(a - i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s\right) = 0$$

annulliert. Für $\varepsilon \neq 0$ besitzen die Kurven $X_{s,\varepsilon}^\varepsilon$ und $X_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$ zwei Doppelpunkte als Singularitäten, nämlich für $X_{s,\varepsilon}^\varepsilon$: $(x, y, z) \in \{(\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon\alpha_2), (\alpha_2, \alpha_2, \varepsilon\alpha_1)\}$ und für $X_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$: $(x, y, z) \in \{(-\alpha_1, \alpha_1, \varepsilon\alpha_2), (-\alpha_2, \alpha_2, \varepsilon\alpha_1)\}$, wobei α_1 und α_2 Lösungen der Gleichung $\alpha^2 + s\alpha + \frac{\varepsilon}{2} = 0$ sind. Die Kurve $X_{s,0}^\varepsilon$ ist im Nullpunkt singularär; dabei handelt es sich für $\varepsilon = 0$ um einen Tripelpunkt und für $\varepsilon \neq 0$ um einen Doppelpunkt. Desweiteren besitzt die Kurve $X_{s,0}^0 = X_s$ in den Punkten $(\pm s, s, 0)$ Doppelpunkte. Die über den kritischen Werten $-i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s$ und $i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s$ liegenden Kurven enthalten genau einen singularären Punkt, nämlich einen Doppelpunkt.

Beweis Wie im Beweis von Lemma 5.14 ist ein Gleichungssystem mit 12 Gleichungen zu lösen, wobei drei dieser Gleichungen durch die maximalen Minoren der Matrix $M_{s,a}^\varepsilon$ gegeben werden, also

$$yz - a(xy + sx + a) = 0 \quad (\mathbf{A})$$

$$xz - a(y^2 + sy + \varepsilon) = 0 \quad (\mathbf{B})$$

$$(x^2 - y^2)(y + s) + ax - \varepsilon y = 0, \quad (\mathbf{C})$$

und die übrigen neun Gleichungen durch die 2×2 -Minoren der Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} -a(y + s) & z - ax & y \\ z & -a(2y + s) & x \\ 2x(y + s) + a & -3y^2 - 2sy - \varepsilon + x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden wieder mehrere Fälle. Mit $M(i, j)$, $1 \leq i, j \leq 3$, wollen wir den 2×2 -Minor der Jacobi-Matrix bezeichnen, der durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht und mit $m(i, j)$ die Gleichung $M(i, j) = 0$.

- $a = 0$: $m(3, 3) \Rightarrow z = 0$, $m(1, 2) \Rightarrow x(y + s) = 0$.
- $x = 0$: Die Gleichungen (C) und $m(2, 1)$ liefern: $-y^2(y + s) - \varepsilon y = 0$ und $3y^3 + 2sy^2 + \varepsilon y = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt wiederum: $y^2(2y + s) = 0$.
 - $y = 0$: In diesem Fall ist $(0, 0, 0) \in X_{s,0}^\varepsilon$ ein singulärer Punkt. Für $\varepsilon \neq 0$ handelt es sich dabei um einen Doppelpunkt und für $\varepsilon = 0$ um einen Tripelpunkt.
 - $y \neq 0$: Also gilt $s = -2y$. Aus $-y^2(y + s) - \varepsilon y = 0$ folgt dann $y(y^2 - \varepsilon) = 0$, also $y^2 = \varepsilon$ und $\frac{s^2}{4} = \varepsilon$. Die letzte Gleichung steht im Widerspruch zur Annahme $\varepsilon < \frac{s^2}{4}$.
- $x \neq 0$: Dann gilt $s = -y$ und damit auch $\varepsilon y = 0$ (wegen (C)). Die Annahme $\varepsilon \neq 0$ würde $y = 0$, also auch $s = 0$, liefern und damit einen Widerspruch zur Voraussetzung $s \in \mathbb{R}^*$. Also gilt $\varepsilon = 0$. Es folgt: Die Kurve $X_{s,0}^0$ besitzt in den Punkten $(\pm s, s, 0)$ einen Doppelpunkt.
- $a \neq 0$: In diesem Fall gilt dann auch $y \neq 0$ (aus den Gleichungen (A) und $m(3, 2)$ erhält man $2yz = a^2$). Wegen $y \neq 0$ wird $X_{s,a}^\varepsilon$ dann lokal durch die Gleichungen $(x^2 - y^2)(y + s) - \varepsilon y + ax = 0$ und $z = \frac{xy + sx + a}{y}$ beschrieben. Gesucht sind also Lösungen des Gleichungssystems

$$(x^2 - y^2)(y + s) - \varepsilon y + ax = 0 \quad (1)$$

$$2x(y + s) + a = 0 \quad (2)$$

$$-3y^2 - 2sy + x^2 - \varepsilon = 0 \quad (3).$$

Nun gilt: “(1) - x(2) - y(3)” $\Leftrightarrow (x - y)(x + y)(2y + s) = 0$.

- $x = y$: Aus (2) und (3) folgt: $2y(y + s) + a = 0$ und $-2y(y + s) - \varepsilon = 0$, also $a = \varepsilon$ und $y^2 + sy + \frac{\varepsilon}{2} = 0$.
- $x = -y$: (2) und (3) liefern: $-2y(y + s) + a = 0$ und $-2y(y + s) - \varepsilon = 0$, also $a = -\varepsilon$ und $y^2 + sy + \frac{\varepsilon}{2} = 0$.
- $2y + s = 0$: Hier ergeben (2) und (3): $xs + a = 0$ und $x = \pm i \frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}$, also $a = \mp i \frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2} s$.

□

Die folgende Abbildung vermittelt einen Eindruck von den ebenen Kurven $C_{s,\varepsilon}^\varepsilon$ und $C_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$; dabei entsteht die Kurve $C_{s,a}^\varepsilon$ aus $X_{s,a}^\varepsilon$ durch Projektion in die xy -Ebene, d.h. $C_{s,a}^\varepsilon$ wird durch die Gleichung

$$(x^2 - y^2)(y + s) - \varepsilon y + ax = 0$$

definiert.



Abbildung 6.8: Die reellen Kurven $C_{s,\varepsilon}^\varepsilon$ und $C_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$

Man sieht: das Stören der Gleichungen durch den neuen Parameter ε bewirkt, daß der Tripelpunkt der Faser X_s “entfaltet” wird, d.h. aus diesem Tripelpunkt entstehen drei Doppelpunkte, die sich auf die Kurven $X_{s,0}^\varepsilon$, $X_{s,\varepsilon}^\varepsilon$ und $X_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$ verteilen. Ferner werden die zwei Doppelpunkte der Kurve X_s in verschiedene Fasern, nämlich $X_{s,\varepsilon}^\varepsilon$ und $X_{s,-\varepsilon}^\varepsilon$, “verschoben”.

Wie üblich sei der Parameter a in einer hinreichend kleinen, abgeschlossenen Kreisscheibe \mathbb{D} enthalten. In dieser Kreisscheibe betrachten wir das folgende stark ausgezeichnete Wegesystem:

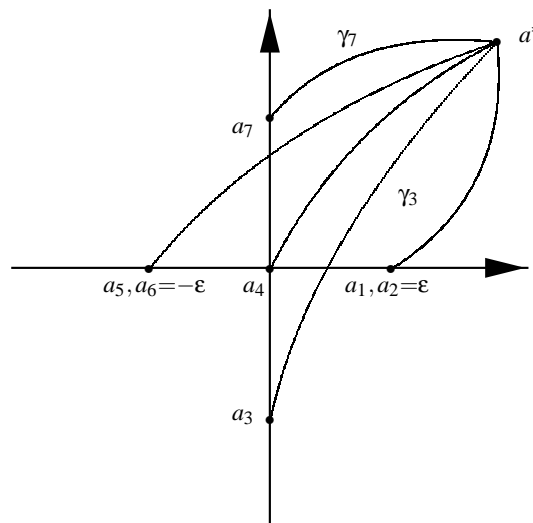


Abbildung 6.9: Die Verteilung der kritischen Werte

Nun betrachten wir die reelle Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$:

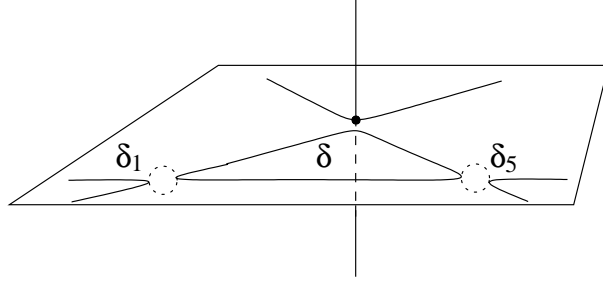


Abbildung 6.10: Die reelle Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ mit $s \in \mathbb{R}^+$

Es ist klar, daß sich die verschwindenden Zyklen $\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_5$ und δ_6 , die zu den kritischen Werten $a_1 = a_2 = \varepsilon, a_4 = 0$ und $a_5 = a_6 = -\varepsilon$ gehören, untereinander nicht schneiden, da die Träger dieser Zyklen (für hinreichend klein gewähltes ε) in kleinen (disjunkten) Umgebungen der Punkte $(0,0,0), (s,-s,0)$ und $(-s,-s,0)$ liegen. Zudem wissen wir bereits, daß sich die aus dem Tripelpunkt hervorgegangenen verschwindenden Zyklen δ_2, δ_4 und δ_6 untereinander nicht schneiden.

Wir zeigen nun, daß der Zyklus $\delta \in H_1(X_{s,0}^\varepsilon; \mathbb{Z})$ aus Abb. 6.10 zwei verschwindende Zyklen repräsentiert:

Lemma 6.5 *Der Zyklus $\delta \in H_1(X_{s,0}^\varepsilon; \mathbb{Z})$ verschwindet, falls a , von Null ausgehend, entlang der imaginären Achse in die kritischen Werte $a_3 = -i\frac{\sqrt{s^2-4\varepsilon}}{2}s$ bzw. $a_7 = i\frac{\sqrt{s^2-4\varepsilon}}{2}s$ läuft.*

Beweis Wir definieren folgende Mengen:

$$\begin{aligned} Z &:= \mathbb{D} \times [\varepsilon, \frac{s^2}{4}] \\ D &:= \{(a, \beta) \in Z : X_{s,a}^\beta \text{ ist nicht glatt}\} \\ Z^* &:= Z - D \cup \{(0, \varepsilon), (i\frac{\sqrt{s^2-4\varepsilon}}{2}s, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

In Z betrachten wir die Wege:

$$\begin{aligned} \varphi : [\varepsilon, \frac{s^2}{4}] &\rightarrow D, \quad t \mapsto (0, t) \\ \psi_+ : [\varepsilon, \frac{s^2}{4}] &\rightarrow D, \quad t \mapsto (i\frac{\sqrt{s^2-4t}}{2}s, t) \\ \gamma_+ : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{D} \cong \mathbb{D} \times \{\varepsilon\} \subset Z, \quad t \mapsto (i\frac{\sqrt{s^2-4\varepsilon}}{2}st, \varepsilon) \end{aligned}$$

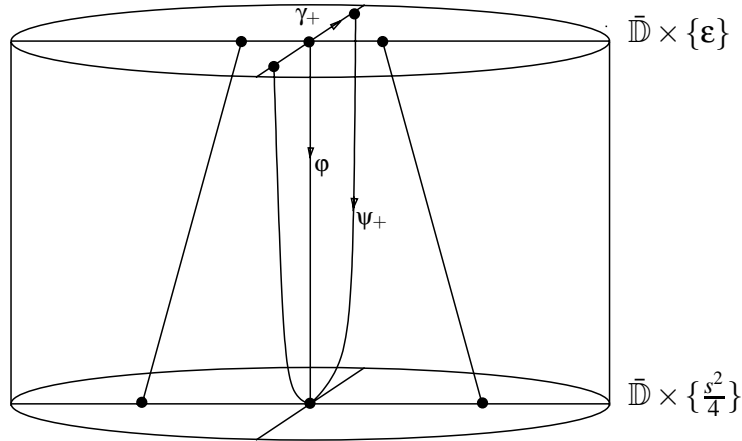
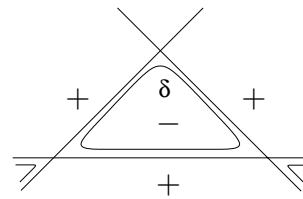


Abbildung 6.11: Der Zylinder Z

Wir zeigen: $\delta \in H_1(X_{s,0}^\epsilon; \mathbb{Z})$ verschwindet längs γ_+ . Dazu machen wir uns zunächst klar, daß δ längs des Weges ϕ verschwindet. Wir untersuchen der Einfachheit halber anstelle der Raumkurve $X_{s,0}^\beta$ die ebene Kurve $C_{s,0}^\beta$, die durch die Gleichung $(x^2 - y^2)(y + s) = \beta y$ gegeben wird. In der reellen ebenen Kurve $C_{s,0}^\epsilon \cap \mathbb{R}^2$ finden wir den Zykel δ wieder, siehe rechte Abbildung. Die reelle Funktion $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)(y + s)$ nimmt innerhalb des Gebietes $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -s, x > y, x < -y\} \subset \mathbb{R}^2$ negative Werte an. Daraus folgt, daß die in G liegenden Lösungen der Gleichung $(x^2 - y^2)(y + s) = \beta y$ für hinreichend kleines $\beta > 0$ einen Zykel bilden, der sich für wachsendes β zusammenzieht. Wenn jetzt β den (kritischen) Wert $\frac{s^2}{4}$ annimmt, wird dieser reelle Zykel auf den Punkt $(0, -\frac{s}{2})$ kontrahiert.



Sei ϕ_+ ein Weg in Z^* mit Anfangspunkt $(0, \epsilon)$ und Endpunkt $(i\frac{\sqrt{s^2-4\epsilon}}{2}s, \epsilon)$, der aus $\psi_+^{-1} \circ \phi$ durch minimales Stören hervorgeht und der in Z^* homotop zu γ_+ ist. Dann gilt: $\delta \in H_1(X_{s,0}^\epsilon; \mathbb{Z})$ verschwindet längs γ_+ .

Vollkommen analog beweist man, daß $\delta \in H_1(X_{s,0}^\epsilon; \mathbb{Z})$ auch längs

$$\gamma_- : [0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{D}} \cong \bar{\mathbb{D}} \times \{\epsilon\} \subset Z, \quad t \mapsto \left(-i\frac{\sqrt{s^2-4\epsilon}}{2}st, \epsilon\right)$$

verschwindet.

□

Auf Grund des Lemmas bezeichnen wir den Zykel δ zukünftig mit δ_3 bzw. δ_7 . Wir geben diesem Zykel eine feste Orientierung. Aus Abb. 6.10 folgt, daß sich δ_1 und δ_5 dann so orientieren lassen, daß sich folgende Schnittzahlen ergeben:

$$(\delta_1, \delta_3) = (\delta_1, \delta_7) = (\delta_3, \delta_5) = (\delta_7, \delta_5) = 1$$

Ferner ist uns aus Kapitel 4 bekannt, daß der Zykel $\delta_3 (= \delta_7)$ genau zwei verschwindende Zykel des Tripelpunktes mit Schnittzahl ± 1 schneidet. Dies sind die Zykel δ_2 und δ_6 , deren Orientierung wir durch die Forderung

$$(\delta_2, \delta_3) = (\delta_2, \delta_7) = (\delta_3, \delta_6) = (\delta_7, \delta_6) = 1$$

festlegen. Schließlich erhalten wir

Satz 6.6 Die durch die maximalen Minoren der Matrix M_0 definierte isolierte Kurvensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ besitzt ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln mit folgendem Coxeter–Dynkin–Diagramm:

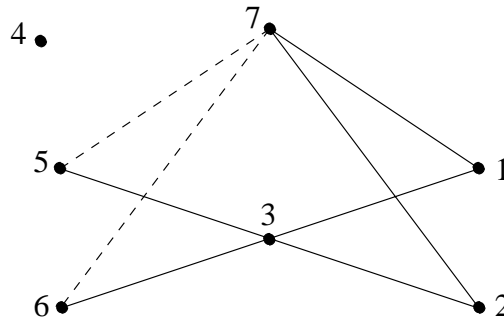


Abbildung 6.12: Ein Coxeter–Dynkin–Diagramm der Singularität $D_4 \vee L$

Bemerkung 6.7 Wir haben soeben nicht nur für die Singularität X_0 vom Typ $D_4 \vee L$ ein Coxeter–Dynkin–Diagramm erstellt, sondern “gleichzeitig” auch für die isolierte Raumkurvensingularität $(Y_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ vom Typ S_5 , die durch die maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} z & xy & y^2 \\ 1 & y & x \end{pmatrix},$$

also durch das Ideal $I = (yz - xy, xz - y^2)$ gegeben wird. Die durch die Gleichungen $yz - xy - sx - a = 0$ und $xz - y^2 - sy - \varepsilon = 0$ definierte Kurve $Y_{s,a}^\varepsilon$ ist (wieder für fest gewählte s und ε) genau dann singular, wenn a die Gleichung

$$(a - \varepsilon)(a + \varepsilon)\left(a + i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s\right)\left(a - i\frac{\sqrt{s^2 - 4\varepsilon}}{2}s\right) = 0$$

erfüllt; man erhält also bis auf $a = 0$ die gleichen kritischen Werte wie zuvor.

6.2.2 $E_6 \vee L$

Mit den gleichen Methoden wie im vorangegangenen Abschnitt behandeln wir jetzt die Singularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ vom Typ $E_6 \vee L$, die durch die maximalen Minoren der Matrix

$$M_0 = \begin{pmatrix} z & x^3 & y^2 \\ 0 & y & x \end{pmatrix}.$$

gegeben wird. Die Entfaltung

$$f_s(x, y) = x^4 - y^3 + 36s^3x^2 + 8sx^2y - 5s^2y^2$$

der Funktion $f_0(x, y) = x^4 - y^3$ definiere die ebene Kurve C_s , d.h. $C_s := f_s^{-1}(0)$; diese Kurve besitzt für festes $s \in \mathbb{C}^*$ in den Punkten $(0, 0)$, $(-\sqrt{6s^3}, -6s^2)$ und $(\sqrt{6s^3}, -6s^2)$ Doppelpunkte, siehe Abb. 6.13. Die Entfaltung f_s des Funktionskeims f führt unmittelbar zu einer Deformation der Singularität $X_0 = C_0 \vee L$, nämlich durch die Matrix

$$M_s = \begin{pmatrix} z & x^3 + 36s^3x + 8sxy & y^2 + 5s^2y \\ 0 & y & x \end{pmatrix},$$

deren maximale Minoren die Kurve X_s definieren.

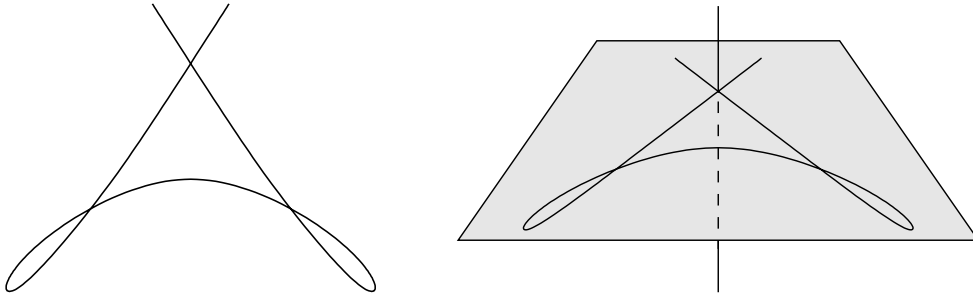


Abbildung 6.13: Die reellen Kurven $C_s \cap \mathbb{R}^2$ und $X_s \cap \mathbb{R}^3$ mit $s \in \mathbb{R}^+$

Im folgenden sei $s \in \mathbb{R}^+$ fest gewählt. Als generische Störung verwenden wir die Minoren der Matrix

$$M_{s,a} = \begin{pmatrix} z & x^3 + 36s^3x + 8sxy + a & y^2 + 5s^2y \\ a & y & x \end{pmatrix},$$

die die Kurve $X_{s,a}$ definieren.

Nach Satz 3.6 gilt für die Multiplizität m der Diskriminante der semi-universellen Deformation der Singularität $(X_0, 0)$: $m = \mu(C_0) + \text{mult}(C_0) = 9$.

Über $a = 0$ liegt eine singuläre Faser, denn die Kurve $X_{s,0} = X_s$ besitzt einen Tripelpunkt und zwei Doppelpunkte. Für $a \neq 0$ wird die Kurve $X_{s,a}$ genau dann singulär, falls a die Gleichung

$$14348907a^4 + 13681053952a^2s^9 - 15925248000s^{18} = 0$$

annulliert. Diese Gleichung wurde mit SINGULAR, [GPS], berechnet. Man erkennt: Neben dem kritischen Wert $a = 0$ gibt es noch zwei reelle und zwei rein imaginäre kritische Werte.

Erneut führen wir mit ε einen weiteren Störparameter ein: $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ sei hinreichend klein und fest gewählt. Die Kurve $X_{s,a}^\varepsilon$ werde durch die Matrix

$$M_{s,a}^\varepsilon = \begin{pmatrix} z & x^3 + 36s^3x + 8sxy + a & y^2 + 5s^2y + \varepsilon \\ a & & y & & x \end{pmatrix}$$

definiert.

Mit SINGULAR lassen sich auch hier die kritischen Werte berechnen; es sind die Nullstellen des Polynoms in a

$$\begin{aligned} &14348907a^9 + 13681053952a^7s^9 - 15925248000a^5s^{18} - 2021977728a^7s^5\varepsilon + \\ &65881866240a^5s^{14}\varepsilon - 272097792a^7s\varepsilon^2 - 253647492096a^5s^{10}\varepsilon^2 + \\ &210213273600a^3s^{19}\varepsilon^2 + 36323092992a^5s^6\varepsilon^3 - 869231886336a^3s^{15}\varepsilon^3 + \\ &1778153472a^5s^2\varepsilon^4 + 1553676926976a^3s^{11}\varepsilon^4 - 687970713600as^{20}\varepsilon^4 - \\ &214416228352a^3s^7\varepsilon^5 + 2842847870976as^{16}\varepsilon^5 - 4437049344a^3s^3\varepsilon^6 - \\ &3142545113088as^{12}\varepsilon^6 + 415979274240as^8\varepsilon^7 + 2672820224as^4\varepsilon^8 + \\ &4194304a\varepsilon^9. \end{aligned}$$

Man entnimmt diesem Polynom (oder auch der Matrix $M_{s,0}^\varepsilon$): Die Kurve $X_{s,0}^\varepsilon$ besitzt im Ursprung einen Doppelpunkt. Die reelle Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$ sieht qualitativ wie folgt aus:

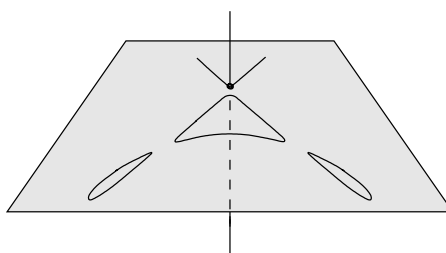


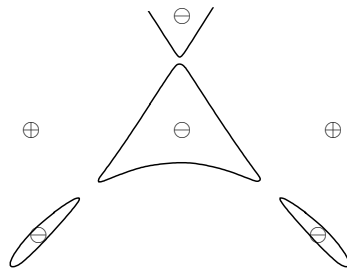
Abbildung 6.14: Die reelle Kurve $X_{s,0}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^3$

Um zu erfahren, welche Auswirkung der neue (reelle) Parameter ε auf die Lage der kritischen Werte hat, wollen wir untersuchen, wie sich die Kurve $X_{s,0}^\varepsilon$

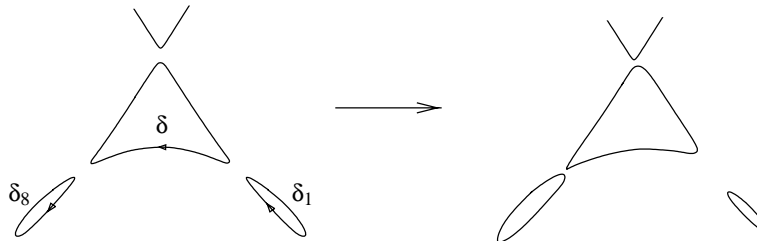
verändert, wenn man den Parameter a längs der reellen Achse bewegt. Aus Symmetriegründen $((x, y, z) \in X_{s,a}^\varepsilon \Leftrightarrow (-x, y, z) \in X_{s,-a}^\varepsilon)$ beschränken wir uns darauf, den Fall $a \in \mathbb{R}^+$ zu untersuchen. Desweiteren genügt es, die durch die Gleichung

$$x^4 - y^3 + 36s^3x^2 + 8sx^2y - 5s^2y^2 - \varepsilon y + ax = 0$$

definierte ebene Kurve $C_{s,a}^\varepsilon$ zu betrachten. In der folgenden Abbildung ist eingetragen, wo die reelle Funktion $f_s^\varepsilon(x, y) = x^4 - y^3 + 36s^3x^2 + 8sx^2y - 5s^2y^2 - \varepsilon y$ positive bzw. negative Werte annimmt:

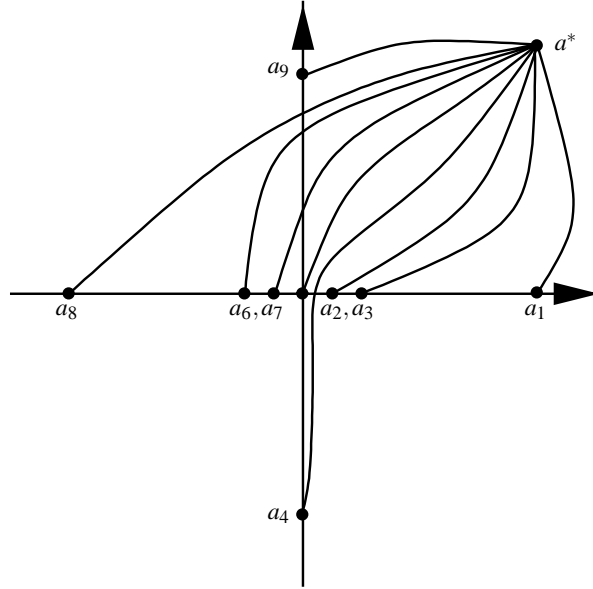


Wegen $(x, y) \in C_{s,a}^\varepsilon \Leftrightarrow f_s^\varepsilon(x, y) = -ax$ werden für wachsendes a die Komponenten der reellen Kurve $C_{s,a}^\varepsilon \cap \mathbb{R}^2$ in der linken Halbebene aneinandergezogen, während sie sich in der rechten Halbebene voneinander entfernen:



Schließlich entstehen in der linken Halbebene zwei (reelle) Doppelpunkte. Die dazugehörigen kritischen Werte bezeichnen wir mit a_2 und a_3 . Man überlegt sich schnell, daß die zu diesen Werten gehörenden Raumkurven X_{s,a_2}^ε und X_{s,a_3}^ε ebenfalls Doppelpunkte enthalten; einer davon ist aus dem Tripelpunkt entstanden und der andere aus dem Doppelpunkt $(-\sqrt{6s^3}, -6s^2, 0)$ der Faser $X_{s,0}$. Es ist klar, daß es sich bei $a_6 := -a_3$ und $a_7 := -a_2$ ebenfalls um kritische Werte handelt, über denen jeweils ein Doppelpunkt liegt. Auch hier ist einer der Doppelpunkte aus dem Tripelpunkt entstanden und der andere aus dem Doppelpunkt $(\sqrt{6s^3}, -6s^2, 0)$ der Faser $X_{s,0}$. Desweiteren zeigt sich, daß die mit δ_1 und δ_8 bezeichneten Komponenten der reellen Kurve $C_{s,0}^\varepsilon$ verschwinden, falls man $a \in \mathbb{R}^+$ vergrößert bzw. $a \in \mathbb{R}^-$ verkleinert. Die übrigen zwei kritischen Werte a_4 und a_9 sind rein imaginär. Wie in Lemma 6.2.2 kann man zeigen, daß der Zykel $\delta \in H_1(X_{s,0}^\varepsilon; \mathbb{Z})$ verschwindet, falls a , von Null ausgehend, entlang der imaginären Achse in die kritischen Werte a_3 oder a_9 läuft.

Der Störparameter a sei in einer kleinen, abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{\mathbb{D}}$ enthalten. In $\bar{\mathbb{D}}$ wählen wir ein stark ausgezeichnetes Wegesystem:



Der Zykel δ_1 schneidet nur einen der anderen verschwindenden Zykel, nämlich denjenigen, der unter der Modifikation $(M_{s,a} \rightarrow M_{s,a}^\varepsilon)$ aus dem reellen Doppelpunkt $(\sqrt{6s^3}, -6s^2, 0)$ der Faser $X_{s,0}$ hervorgegangen ist. Dieser Zykel gehört zu dem kritischen Wert a_6 oder a_7 . Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß es sich dabei um den zu dem kritischen Wert a_6 gehörenden Zykel δ_6 handelt (andernfalls kann man auf das 9-Tupel $(\delta_1, \dots, \delta_9)$ bzw. auf das gewählte Wegesystem die Zopfgruppenoperation α_6 anwenden; dabei werden δ_6 und δ_7 "vertauscht"). Entsprechend begründet sich die Annahme, daß δ_8 nur den Zykel δ_3 schneidet. Wir orientieren die Zykel δ_3 und δ_6 nun so, daß sich folgende Schnittzahlen ergeben: $(\delta_1, \delta_6) = (\delta_3, \delta_8) = 1$. Desweiteren erhält man: $(\delta_4, \delta_6) = -(\delta_6, \delta_9) = (\delta_3, \delta_4) = (\delta_3, \delta_9) = 1$.

Der Zykel δ_4 (bzw. δ_9) schneidet neben δ_3 und δ_6 noch zwei verschwindende Zykel, die zu dem Tripelpunkt gehören. Dies sind die Zykel δ_2 und δ_7 , die wir so orientieren können, daß $(\delta_2, \delta_4) = (\delta_2, \delta_9) = (\delta_4, \delta_7) = -(\delta_7, \delta_9) = 1$ gilt.

Es ist klar, daß sich die verschwindenden Zykel $\delta_2, \delta_3, \delta_5, \delta_6$ und δ_7 untereinander nicht schneiden, da die Träger dieser Zykel (für hinreichend klein gewähltes ε) in kleinen (disjunkten) Umgebungen der Punkte $(0, 0, 0)$, $(-\sqrt{6s^3}, -6s^2, 0)$ und $(\sqrt{6s^3}, -6s^2, 0)$ liegen. Zudem wissen wir bereits, daß sich die aus dem Tripelpunkt hervorgegangenen verschwindenden Zykel δ_2, δ_5 und δ_7 untereinander nicht schneiden.

Damit sind alle Schnittzahlen berechnet, und wir haben den folgenden Satz bewiesen:

Satz 6.8 Die durch die maximalen Minoren der Matrix M_0 definierte isolierte Kurvensingularität $(X_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ besitzt ein stark ausgezeichnetes System von verschwindenden Zykeln mit folgendem Coxeter–Dynkin–Diagramm:

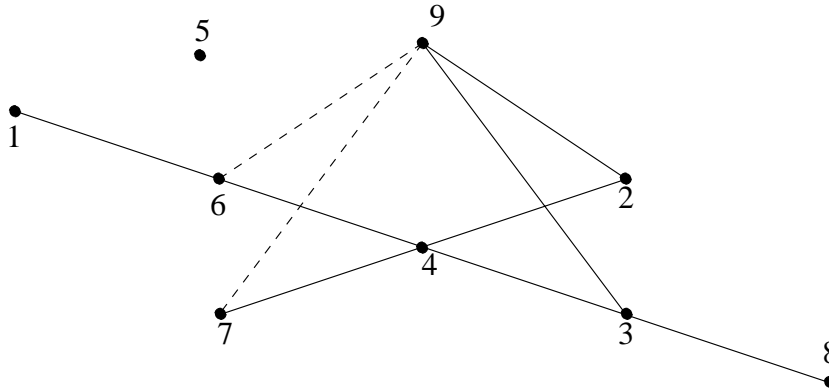


Abbildung 6.15: Ein Coxeter–Dynkin Diagramm der Singularität $E_6 \vee L$

Auch an dieser Stelle sei erwähnt, daß die hier angestellten Überlegungen auch für die isolierte Raumkurvensingularität $(Y_0, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ vom Typ U_7 , die durch die maximalen Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} z & x^3 & y^2 \\ 1 & y & x \end{pmatrix},$$

also durch das Ideal $(yz - x^3, xz - y^2)$ gegeben wird, ein Coxeter–Dynkin–Diagramm liefern.

Das in Satz 3.8 angegebene Resultat bezüglich der Gestalt der Coxeter–Dynkin–Diagramme von Wedge–Singularitäten gibt desweiteren Anlaß zu folgender Vermutung: Es sei $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ eine isolierte Kurvensingularität, und es sei $p: (\mathcal{X}, 0) \rightarrow (S, 0)$ die semi–universelle Deformation von $(X, 0)$. Mit $(D, 0)$ werde wie üblich die Diskriminante der semi–universellen Deformation bezeichnet, der wir die reduzierte Struktur geben. $(D, 0)$ werde durch einen holomorphen Funktionskeim $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^r, 0}$ beschrieben, und $\alpha = \alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_n$ sei die Zerlegung von α in irreduzible Faktoren. Es ist wohlbekannt, daß ein Coxeter–Dynkin–Diagramm von $(X, 0)$ ein zusammenhängender Graph ist, falls die Diskriminante irreduzibel ist (vgl. [Loo]; der dort für vollständige Durchschnitte aufgeführte Beweis läßt sich auf die Situation von Kurvensingularitäten in $(\mathbb{C}^3, 0)$ übertragen).

Vermutung 6.9 Ein (und damit jedes) Coxeter–Dynkin–Diagramm von $(X, 0)$ besteht aus n disjunkten Teilgraphen.

Anhang A

Einfache Kurvensingularitäten

Satz A.1 (Arnol'd, [Arn]) Jeder Keim einer einfachen ebenen Kurvensingularität ist R -äquivalent zu einer der folgenden Normalformen:

Bezeichnung	Normalform
$A_k, k \geq 1$	$x^{k+1} + y^2$
$D_k, k \geq 4$	$x^2y + y^{k-1}$
E_6	$x^3 + y^4$
E_7	$x^3 + xy^3$
E_8	$x^3 + y^5$

Satz A.2 (Giusti, [Gi]) Jeder Keim einer einfachen Kurvensingularität in \mathbb{C}^3 , der ein vollständiger Durchschnitt ist, ist K -äquivalent zu einer der folgenden Normalformen:

Bezeichnung	Normalform
$S_k, k \geq 5$	$(x^2 + y^2 + z^{k-3}, yz)$
T_7	$(x^2 + y^3 + z^3, yz)$
T_8	$(x^2 + y^3 + z^4, yz)$
T_9	$(x^2 + y^3 + z^5, yz)$
U_7	$(x^2 + yz, xy + z^3)$
U_8	$(x^2 + yz + z^3, xy)$
U_9	$(x^2 + yz, xy + z^4)$
W_8	$(x^2 + z^3, y^2 + xz)$
W_9	$(x^2 + yz^2, y^2 + xz)$
Z_9	$(x^2 + z^3, y^2 + z^3)$
Z_{10}	$(x^2 + yz^2, y^2 + z^3)$

Satz A.3 (Frühbis, [Fr]) Jeder Keim einer einfachen Kurvensingularität in \mathbb{C}^3 , der kein vollständiger Durchschnitt ist, ist K -äquivalent zu einer der folgenden Normalformen:

Bezeichnung	Normalform	Milnorzahl	Multiplizität
$A_k \vee L, k \geq 1$	$\begin{pmatrix} z & y & x^k \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	$k+1$	3
$E_6(1)$	$\begin{pmatrix} z & y & x^2 \\ x & z & y \end{pmatrix}$	4	3
$E_7(1)$	$\begin{pmatrix} z+x^2 & y & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$	5	3
$E_8(1)$	$\begin{pmatrix} z & y & x^3 \\ x & z & y \end{pmatrix}$	6	3
$J_{2,0}(2)$	$\begin{pmatrix} z+x^2 & y & x^2 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$	6	3
$J_{2,1}(2)$	$\begin{pmatrix} z+x^2 & y & x^3 \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$	7	3
$E_{12}(2)$	$\begin{pmatrix} z & y & x^3 \\ x^2 & z & y \end{pmatrix}$	8	3
$D_k \vee L, k \geq 4$	$\begin{pmatrix} z & 0 & x^{k-2} - y^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	$k+1$	4
$E_6 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^3 & -x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	7	4
$E_7 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & 0 & -x^2 - y^3 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	8	4
$E_8 \vee L$	$\begin{pmatrix} z & y^4 & -x^2 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$	9	4
S_6^*	$\begin{pmatrix} z & x & y \\ 0 & y & x^2 - z^2 \end{pmatrix}$	6	4
T_7^*	$\begin{pmatrix} z & x & y \\ 0 & y & x^2 - z^3 \end{pmatrix}$	7	4
U_7^*	$\begin{pmatrix} z & xy & x^2 \\ x & z & y \end{pmatrix}$	7	4
W_8^*	$\begin{pmatrix} z & y^2 & x^2 \\ x & z & y \end{pmatrix}$	8	4

Literaturverzeichnis

- [A'C] A' Campo, N.: *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*. Math. Ann. **213** (1975), 1-32.
- [AF] Andreotti, A., Frankel, T.: *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*. Annals of Math., **69** (1959), 713-717.
- [AGV] Arnold, V.I., Gusein-Zade, S.M., Varchenko, A.N.: *Singularities of Differentiable Maps I, II*. Birkhäuser Verlag (1985, 1988).
- [Arn] Arnol'd, V.I.: *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities*. Functional Anal. Appl. **6** (1972), 254-272. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Prilozhen. **6**(4) (1972), 3-25).
- [Art1] Artin, M.: *On isolated rational singularities of surfaces*. Am. J. Math. **88** (1966), 129-136.
- [Art2] Artin, M.: *Deformations of Singularities*. Tata Lecture Notes **54**, Bombay (1976).
- [BG] Buchweitz, R.-O., Greuel, G.-M.: *The Milnor number and deformations of complex curve singularities*. Invent. math. **587** (1980), 241-281.
- [Br1] Brieskorn, E.: *Special singularities - resolution, deformation and monodromy*. Vervielfältigtes Manuskript zu einer Reihe von Übersichtsvorträgen zum AMS Summer Research Institute Algebraic Geometry, Arcata 1974.
- [Br2] Brieskorn, E.: *Milnor lattices and Dynkin diagrams*. Proc. of Symp. in Pure Math. **40**(1) (1983), 153-165.
- [Br3] Brieskorn, E.: *Automorphic sets and braids and singularities*. Contemp. Math **78** (1988), 45-115.
- [Bu] Burch L.: *On ideals of finite homological dimension in local rings*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **64** (1968), 941-948.

- [Di] Dimca, A.: *Monodromy of functions on isolated singularities of complete intersections*. Comp. Math. **54** (1985), 105-119.
- [Eb1] Ebeling, W.: *On the monodromy groups of singularities*. Proc. of Symp. in Pure Math. **40**(1) (1983), 327-336.
- [Eb2] Ebeling, W.: *The Monodromy Groups of Isolated Singularities of Complete Intersections*. Springer Lecture Notes in Mathematics **1293** (1987).
- [EG1] Ebeling, W., Gusein-Zade, S.M.: *Coxeter-Dynkin diagrams of the complete intersection singularities Z_9 and Z_{10}* . Math. Z. **218** (1995), 549-562.
- [EG2] Ebeling, W., Gusein-Zade, S.M.: *Coxeter-Dynkin diagrams of fat points in \mathbb{C}^2 and of their stabilizations*. Math. Ann. **306** (1996), no. 3, 487-512.
- [Fr] Frühbis-Krüger, A.: *Klassifikation der einfachen Raumkurvensingularitäten*. Diplomarbeit, Universität Kaiserslautern (1996).
- [Ga] Gabriélov, A.M.: *Dynkin diagrams for unimodal singularities*. Functional Anal. Appl. **8** (1974), 192-196. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Pri-lozhen. **8**(3) (1974), 1-6).
- [Gi] Giusti, M.: *Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes*. Proc. of Symp. in Pure Math. **40**(1) (1983), 457-494.
- [GPS] Greuel, G.-M., Pfister, G. and Schönemann, H.: *Singular version 1.2 User Manual*. In: *Reports On Computer Algebra, number 21. Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, June 1998*. <http://www.mathematik.uni-kl.de/~zca/Singular>
- [Gr1] Greuel, G.-M.: *On deformations of curves and a formula of Deligne*. In Algebraic Geometry, La Rábida 1981, Springer Lecture Notes in Mathematics **961** (1983), 141-168.
- [Gr2] Greuel, G.-M.: *Deformation und Klassifikation von Singularitäten und Moduln*. JBer. d. Dt. Math.-Verein., Jubiläumstagung 1990, Teubner, Stuttgart (1992), 177-238.
- [GR] Grauert, H., Remmert, R.: *Theorie der Steinschen Räume*. Grundlehren Math. Wiss. Bd. **227**, Springer-Verlag (1977).
- [GS] Greuel, G.-M., Steenbrink, J.H.M.: *On the topology of smoothable singularities*. Proc. of Symp. in Pure Math. **40**(1) (1983), 535-545.

- [G-Z1] Gusein-Zade, S.M.: *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*. Functional Anal. Appl. **8** (1974), 10-13. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Prilozhen. **8**(1) (1974), 11-15).
- [G-Z2] Gusein-Zade, S.M.: *Dynkin Diagrams for singularities of functions of two variables*. Functional Anal. Appl. **8** (1974), 295-300. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Prilozhen. **8**(4) (1974), 23-30).
- [G-Z3] Gusein-Zade, S.M.: *Monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*. Russ. Math. Surv. **32** (2) (1977), 23-69. (Übersetzung von: Uspehi Mat. Nauk. **32**(2) (1977), 23-65).
- [Ha] Hamm, H.: *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume*. Math. Ann. **191** (1971), 235-252.
- [Hu] Humphries, S.P.: *On weakly distinguished bases and free generating sets of free groups*. Quart. J. Math. Oxford **36**(2) (1985), 215-219.
- [JS1] de Jong, T., van Straten, D.: *On the base space of a semi-universal deformation of rational quadruple points*. Ann. of Math. **134** (1991), 653-678.
- [JS2] de Jong, T., van Straten, D.: *On the deformation theory of rational surface singularities with reduced fundamental cycle*. J. Alg. Geom. **3** (1994), 117-172.
- [La] Lamotke, K.: *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz*. Topology **20** (1981), 15-51.
- [Lê] Lê Dũng Tráng: *Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection*. Functional Anal. Appl. **8** (1974), 127-131. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Prilozhen. **8**(2) (1974), 45-49).
- [Loo] Looijenga, E.J.N.: *Isolated Singular Points of Complete Intersections*. LMS Lecture Note series **77**, Cambridge University Press (1984).
- [Mil] Milnor, J.: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Ann. of. Math. Stud. **61**, Princeton University Press (1968).
- [MP] Mond, D., Pellikaan, R.: *Fitting ideals and multiple points of analytic maps*. Algebraic geometry and complex analysis, Pátzcuaro 1987, Springer Lecture Notes in Mathematics **1414** (1990).
- [MS] Mond, D., van Straten, D.: *The structure of the discriminant of some space curve singularities*. Preprint, Johannes Gutenberg-Universität Mainz Nr. **4** (1998).

-
- [Pou] Pourcin, G.: *Déformation de singularités isolées*. C. R. Acad. Paris, Série A **276** (1973), 1217-1220.
- [Sch] Schaps, M.: *Deformations of Cohen-Macaulay schemes of codimension 2 and non-singular deformations of space curves*. Amer. J. Math. **99** (1977), 669-685.
- [Str] van Straten, D.: *A note on the discriminant of a space curve*. Manus. Math. **87** (1995), 167-177.
- [Te] Teissier, B.: *The hunting of invariants in the geometry of discriminants*. Real and Complex Singularities, Oslo 1976, Proceedings, Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff (1977), 565-677.
- [vdW] van der Waerden, B.L.: *Algebra I*. Heidelberger Taschenbücher, Springer-Verlag (1971).
- [Tju] Tjurina, G.N.: *Absolute isolatedness of rational singularities and rational triple points*. Functional Anal. Appl **2** (1968), 324-333. (Übersetzung von: Funktsional. Anal. i. Prilozhen. **2**(4) (1968), 70-81).
- [Wa1] Wahl, J.: *Equations defining rational singularities*. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **10** (1977), 231-264.
- [Wa2] Wahl, J.: *Simultaneous resolution of rational singularities*. Comp. Math. **38** (1979), 43-54.
- [Wa3] Wahl, J.: *Smoothings of normal surface singularities*. Topology **20** (1981), 219-246.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Christian Alpert
Geburtsdatum: 29.06.1970
Geburtsort: Alfeld (Leine)
Eltern: Ingrid und Günter Alpert
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Ausbildung:

08 / 76 - 07 / 80 Grundschule Freden (Leine)
08 / 80 - 07 / 82 Orientierungsstufe Alfeld (Leine)
08 / 82 - 05 / 89 Gymnasium Alfeld
Abschluß: Abitur
06 / 89 - 08 / 90 Wehrdienst beim Sanitätsbataillon 1 (Hildesheim)
10 / 90 - 02 / 96 Studium an der Universität Hannover
Studiengang: Mathematik mit Nebenfach Informatik
Vordiplom im Oktober 1992
Diplom im Februar 1996

Tätigkeit:

seit **04 / 97** Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der
Universität Hannover