Fasteuklidische Räume

Vom Fachbereich Mathematik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Frank Pioch

geboren am 18. Juni 1970 in Hannover

1999

Referent:	Prof. Dr. H. Hotje
Korreferent:	Prof. Dr. J. André
Tag der Promotion:	28.06.1999
Datum der Veröffentlichung:	November 1999

Zusammenfassung

Der Ausgangspunkt der Dissertation ist die Definition des Begriffs *fasteuklidischer Raum*. Zu diesem gelangt man, indem man spezielle nicht-kommutative Geometrien – die fastaffinen Räume – zusammen mit einer Kongruenzrelation betrachtet und analoge Axiome wie für euklidische Räume fordert.

Das Hauptergebnis ist die algebraische Darstellung desarguesscher fasteuklidischer Räume mittels regulärer Fastvektorräume mit einer nullteiligen symmetrischen Bilinearform.

Dieses Ergebnis wird in folgenden Schritten erzielt:

Es werden fastaffine Koordinatenräume über regulären Fastvektorräumen einer Dimension ≥ 2 betrachtet, wobei der zugrundeliegende Fastkörper eine Charakteristik $\neq 2$ besitzt und sein Kern mit seinem Zentrum übereinstimmt. Mit Hilfe einer nullteiligen symmetrischen Bilinearform wird eine Relation auf der Menge der Punktepaare (x, y) definert, für die die Verbindungslinien von x nach y und von y nach x übereinstimmen, d.h. x und y lassen sich durch eine Gerade verbinden. Die transitive Hülle dieser Relation ist eine Kongruenzrelation und der Koordinatenraum zusammen mit dieser Relation ist ein fasteuklidischer Raum.

Die Angabe eines Beispiels zeigt, daß fasteuklidische Ebenen nicht notwendig desarguessch sind. In einer fasteuklidischen Ebene besitzt jede Gerade ein Lot. Ferner existiert zu jedem Punkt p genau eine Punktspiegelung mit Zentrum p und zu jeder Geraden G genau eine Geradenspiegelung mit Achse G. Das Produkt dreier Geradenspiegelungen an kopunktalen Geraden ist wieder eine Geradenspiegelung. Es erweist sich, daß in fasteuklidischen Ebenen zueinander senkrechte Linien bereits Geraden sind.

Die Bewegungsgruppe einer fasteuklidischen Ebene wird von der Menge der Geradenspiegelungen erzeugt, insbesondere ist jede Bewegung das Produkt von höchstens vier Geradenspiegelungen.

Fordert man in fasteuklidischen Ebenen die desarguesschen Axiome, so lassen sich Drehstreckungen definieren. Für einen Punkt p bildet die Menge der Drehstreckungen mit Fixpunkt p eine kommutative Gruppe, mit deren Hilfe sich eine Variante der pappusschen Schließungsaussage beweisen läßt, welche für die algebraische Darstellung benötigt wird.

Fasteuklidische Räume einer Dimension ≥ 3 sind stets desarguesch. In desarguesschen fasteuklidischen Raum existiert zu jedem Punkt p und jeder Geraden G eine zu G senkrechte Hyperebene durch p. Ferner existiert zu jeder Geraden G genau eine Geradenspiegelung mit Achse G.

Mit Hilfe der Geradenspiegelungen werden in desarguesschen fastaffinen Räumen Linearformen definiert, die zu einer nullteiligen symmetrischen Bilinearform führen, welche die Kongruenz beschreibt.

Damit existiert zu jedem desarguesschen fasteuklidischen Raum ein Fastkörper einer Charakteristik $\neq 2$, dessen Kern und Zentrum übereinstimmen und ein regulärer Fastvektorraum einer Dimension ≥ 2 über diesem Fastkörper mit einer nullteiligen symmetrischen Bilinearform, so daß der fasteuklidische Raum isomorph zu der Koordinatengeometrie über diesem Fastvektorraum mit der durch die Bilinearform definierten Kongruenzrelation ist.

fastaffiner Raum, euklidischer Raum, Kongruenz

Abstract

The starting point of the dissertation is the definition of *neareuclidean spaces*. One is led to this definition by observation of special noncommutative geometries (nearaffine spaces) which are combined with a congruence relation for which analogous axioms like in euclidean spaces are holding.

The main result is the representation of desarguesian neareuclidean spaces by regular nearlinear spaces combined with an anisotropic symmetric bilinear form.

This result is achieved by taking the following steps:

Nearaffine coordinate spaces constructed out of nearlinear spaces with a dimension ≥ 2 are observed, where the corresponding nearfield is of characteristic $\neq 2$ and its kernel is equal to its center. A relation on the set of ordered pairs of points (x, y), where the line from x to y equals the one from y to x (that is x and y are connected by a straight line), is defined with the aid of an anisotropic symmetric bilinear form. The transitive hull of this relation is a congruence relation, which together with the coordinate space forms a neareuclidean space.

By giving an example the existence of neareuclidean spaces which are not desarguesian is proven. In a neareuclidean space to every straight line there is a perpendicular line. To every point p there is exactly one reflection with center p and to every straight line G there is exactly one reflection with axis G. The product of three reflections which axis' incide with one point is another mirror reflection. In neareuclidean planes a pair of orthogonal lines is already a pair of orthogonal straight lines.

The set of motions of a neareuclidean plane forms a group and this group is generated by the set of mirror reflections. In particular every motion is the product of at most four mirror reflections.

If the desarguesian axioms are postulated in a neareuclidean plane, the definition of stretching rotations is possible. For a point p the set of stretching rotation with center p forms a commutative group. With the aid of this group a variant of the theorem of Pappus is proven, which is neccessary for the representation of neareuclidean spaces.

Neareuclidean spaces of a dimension ≥ 3 are always desarguesian. In a desarguesian neareuclidean space there exists to every point p and every straight line G a hyperplane which incides with p and which is orthogonal to G. Moreover there exists to every straight line G exactly one reflection with axis G.

In desarguesian neareuclidean spaces linear forms are defined with the aid of mirror reflections, which describe the congruence relation.

To every desarguesian neareuclidean space there exists a nearfield of characteristic $\neq 2$, which kernel and center are equal, a regular nearlinear space of a dimension ≥ 2 constructed out of this nearfield and an anisotropic symmetric bilinear form, so that the neareuclidean space is isomorphic to the coordinate geometry constructed out of the nearlinear space together with the congruence relation, which is induced by the bilinear form.

nearaffine space, euclidean space, congruence

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die nicht-kommutative Geometrie befaßt sich mit Inzidenzstrukturen, in denen die Verbindungslinie von einem Punkt x zu einem zweiten Punkt y nicht notwendig gleich derjenigen von y nach x ist. 1973 hat J. André eine Klasse nicht-kommutativer Geometrien – die fastaffinen Räume – eingeführt. Zu diesen gelangt man durch Übertragung der Konstruktion affiner Räume aus Vektorräumen (kommutative Geometrie) auf Fastvektorräume (lineare Räume über Fastkörpern). Seit dieser Zeit sind viele weitere nicht-kommutative geometrische Strukturen untersucht worden (P-Räume, schiefaffine Räume, semiaffine Räume, schiefprojektive Räume), und es wurden Beziehungen zu anderen Teilen der Mathematik hergestellt, wie z.B. Graphentheorie (Pfalzgraf, André), Gruppentheorie (André) und Kreisgeometrie (Jakobowski).

Grundlage dieser Arbeit sind die Ergebnisse von J. André und H. Tecklenburg zur algebraischen Darstellung fastaffiner Räume und die Entwicklung der linearen Algebra über Fastkörpern von J. André und K. Müller.

In der euklidischen Geometrie betrachtet man in affinen Räumen zusätzlich Kongruenzrelationen. Fordert man gewisse Verträglichkeiten mit den Inzidenzaxiomen, erhält man euklidische Räume. Diese sind stets desarguessch, und die Kongruenzrelation läßt sich mittels einer nullteiligen quadratischen Form auf dem darstellenden Vektorraum beschreiben.

In der vorliegenden Arbeit werden fasteuklidische Räume eingeführt und untersucht. Diese entstehen durch Verallgemeinerung des Axiomsystems von H. Karzel ([7],[8]) aus fastaffinen Räumen mit einer Kongruenzrelation.

Das erste Kapitel stellt die Grundlagen zusammen: In 1.1 und 1.2 werden die Grundbegriffe definiert und Folgerungen angegeben. Teilraumeigenschaften und die Dimensionierung fastaffiner Räume sind in 1.3 zusammengefaßt. Abschnitt 1.4 enthält die benötige lineare Algebra über Fastkörpern, aus der insbesondere die Bilinearformen wichtig sind. Abschließend werden in 1.5 desarguessche fastaffine Räume algebraisch dargestellt.

Im zweiten Kapitel werden fasteuklidische Räume betrachtet.

Die Begriffe *fasteuklidische Ebene* und *fasteuklidischer* Raum werden in Abschnitt 2.1 definiert. Fasteuklidische Räume sind regulär und besitzen die Eigenschaft, daß die Diagonalen eines Parallelogramms nicht parallel sind. Ein fasteuklidischer Raum mit kommutativer Verbindung ist ein euklidischer Raum im Sinne von [7]. Das Axiomsystem für fasteuklidische Räume ist also eine Verallgemeinerung des Axiomsystems für nicht-fanosche euklidische Räume.

Beispiele fasteuklidischer Räume werden in 2.2 in Form von Koordinatengeometrien über regulären Fastvektorräumen mit nullteiliger symmetrischer Bilinearform angegeben. Dabei muß der Kern des zugrundeliegenden Fastkörpers mit dessen Zentrum übereinstimmen. Ferner muß die Charakteristik des Fastkörpers ungleich 2 sein.

Zur Konstruktion einer Kongruenzrelation auf einer fastaffinen Koordinatengeometrie wird mit Hilfe der Bilinearform eine reflexive symmetrische Relation $\equiv_Q$ definiert, welche die Kongruenz von Punktepaaren $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ beschreibt, für die die Verbindungslinie von $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ und $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ eine Gerade ist. Die transitive Hülle der Relation $\equiv_Q$ ist eine Kongruenzrelation, mit der die Koordinatengeometrie zu einem fasteuklidischen Raum wird. Der Beweis dieser Aussage bildet den Inhalt von Abschnitt 2.2.

In Abschnitt 2.3 werden Schließungsaussagen untersucht. Da fastaffine Räume einer Dimension ≥ 3 stets desarguessch sind, wird die Betrachtung auf fasteuklidische Ebenen beschränkt. Es gilt das kleine Axiom von Desargues und zwei weitere Schließungsausagen, mit deren Hilfe gezeigt wird, daß ein fasteuklidischer Raum eine regulär auf der Punktmenge operierende Translationsgruppe besitzt.

Fasteuklidische Ebenen sind i.a. nicht desarguessch. Dies wird durch Angabe eines Beispiels einer nicht-desarguesschen fasteuklidischen Ebene gezeigt. Dies ist ein deutlicher Unterschied zur kommutativen Geometrie, da euklidische Ebenen stets desarguessch sind.

Abschnitt 2.4 definiert den Begriff der *Bewegung* sowie den der *Spiegelung an einem Punkt* und *an einer Geraden*. Es wird gezeigt, daß zu jedem Punkt genau eine Spiegelung an diesem existiert.

Der wichtige Begriff der *Orthogonalität* zwischen Linien wird in Abschnitt 2.5 definiert. Anschließend wird gezeigt, daß sich die Definition vereinfachen läßt, wenn man sich auf Geraden beschränkt.

Mit Geradenspiegelungen in fasteuklidischen Ebenen und ihren Eigenschaften befaßt sich Abschnitt 2.6. Die Existenz eines Lots zu jeder Geraden wird bewiesen. Damit wird gezeigt, daß zu jeder Geraden genau eine Spiegelung an dieser existiert und daß je zwei verschiedene Punkte, welche sich durch eine Gerade verbinden lassen, einen Mittelpunkt besitzen. Es zeigt sich, daß aufeinander senkrecht stehende Linien in einer fasteuklidischen Ebene bereits Geraden sind (Diese Aussage gilt i.a. nicht in fasteuklidischen Räumen). Zum Schluß wird das Analogon zum (aus der kommutative Geometrie bekannten) Dreispiegelungssatz bewiesen und gezeigt, daß jede Bewegung einer fasteuklidischen Ebene das Produkt von höchstens vier (und i.a. nicht weniger) Geradenspiegelungen ist.

Unter Hinzunahme des Axioms von Desargues werden in Abschnitt 2.7 Drehstreckungen in fasteuklidischen Ebenen definiert. Diese bilden eine kommutative Gruppe. Mit Hilfe der Drehstreckungen wird eine Variante der pappusschen Schließungsaussage bewiesen, die für die algebraische Darstellung fasteuklidischer Räume wichtig ist.

Der Begriff der *Orthogonalität* von Teilräumen sowie dessen Eigenschaften sind der Inhalt von Abschnitt 2.8. Zu einer Geraden wird die Existenz einer Lothyperebene gezeigt.

Mit diesen Hilfsmitteln werden Geradenspiegelungen in fasteuklidischen Räumen in Abschnitt 2.9 definiert. Analog zur Situation in fasteuklidischen Ebenen existiert zu jeder Geraden genau eine Spiegelung an dieser Geraden.

Schließlich werden in Abschnitt 2.10 desarguessche fasteuklidische Räume algebraisch dargestellt. Es wird auf die algebraische Darstellung fastaffiner Räume (Abschnitt 1.5) aufgebaut, indem eine nullteilige symmetrische Bilinearform auf dem darstellenden Fastvektorraum konstruiert wird, welche die Kongruenz beschreibt. Außerdem wird gezeigt, daß in dem Fastkörper, welcher dem darstellenden Fastvektorraum zugrundeliegt, Kern und Zentrum übereinstimmen. Der Darstellungssatz für desarguessche fastaffine Räume ist somit auf desarguessche fasteuklidische Räume erweitert worden.

Frau Prof. Dr. H. Tecklenburg und Herrn Prof. Dr. H. Hotje möchte ich für die Betreuung dieser Arbeit danken.

Kapitel 1

Grundlagen

Die für diese Arbeit relevanten Begriffe und Sätze aus der Theorie der fastaffinen Räume und der Fastvektorräume werden in diesem Kapitel zusammengestellt. Sie können in [1], [2], [3], [10], [11], [14], [15], [17] nachgelesen werden.

1.1 Fastaffine Räume

Es existieren verschiedene Möglichkeiten, fastaffine Räume zu definieren. Die hier verwendete Variante benutzt ein Modell von J. Pfalzgraf [12].

Definition 1.1.1
Es seien X, D nichtleere Mengen, $X^{(2)} := \big\{(x,y) \in X^2 \;\big|\; x \neq y\big\}$ und

$$\langle\rangle : \begin{cases} X^{(2)} & \rightarrow & D \\ (x,y) & \mapsto & \langle x,y\rangle \end{cases}$$

eine surjektive Abbildung. Das Tripel $(X, D, \langle\rangle)$ heißt <u>P-Raum</u>.

a) Die Elemente von X heißen <u>Punkte</u>, die Elemente von D heißen <u>Richtungen</u> des Raumes. $\langle x,y\rangle$ heißt <u>Richtung von x nach y</u>.

b) Es wird folgende Verbindungsoperation definiert:

$$\sqcup : \begin{cases} X^{(2)} & \rightarrow & \mathfrak{P}(X) \\ (x,y) & \mapsto & x \sqcup y := \{x\} \cup \big\{z \in X \;\big|\; \langle x,z\rangle = \langle x,y\rangle\big\} \end{cases}$$

Die Menge $x \sqcup y$ heißt <u>Linie von x nach y</u>. $\mathfrak{L}$ bezeichne die Menge der Linien des Raumes.

c) $x \in X$ heißt <u>Aufpunkt</u> der Linie $L \in \mathfrak{L}$, wenn ein Punkt $y \in X \setminus \{x\}$ existiert, so daß gilt: $L = x \sqcup y$. Für $x \in X$ sei $\mathfrak{L}_x := \{L \in \mathfrak{L} \mid x \text{ ist Aufpunkt von } L\}$.

d) Eine Linie $L \in \mathfrak{L}$ heißt <u>Gerade</u>, wenn jeder Punkt $x \in L$ Aufpunkt von L ist. $\mathfrak{G}$ bezeichne die Menge der Geraden des Raumes. Für $x \in X$ sei $\mathfrak{G}_x := \mathfrak{L}_x \cap \mathfrak{G}$.

Definition 1.1.2
Ein P-Raum $(X, D, \langle\rangle)$ heißt fastaffiner Raum, wenn die folgenden Axiome gelten:

(T) $\forall\, x \in X \;\; \forall\, d \in D \;\; \exists\, y \in X \setminus \{x\} : \quad \langle x, y \rangle = d$

(Tam) $\forall\, x, y, z, x', y' \in X$ mit $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ und $z \neq x, y \;\; \exists\, z' \in X :$
$\langle x, z \rangle = \langle x', z' \rangle$ und $\langle y, z \rangle = \langle y', z' \rangle$

(S) $\forall\, (x, y) \in X^{(2)} : \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

(Z) $\forall\, (x, y) \in X^{(2)} \;\; \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; \exists\, x_0, \ldots, x_n \in X$ mit $x = x_0, x_n = y \;\; \forall\, i \in 1, \ldots, n :$
$x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$

(G) $\forall\, G \in \mathfrak{G} \;\; \forall\, L \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G} : \quad |G \cap L| \leq 1$

(R) $\exists\, x, y, z \in X$ paarweise verschieden $\forall\, G \in \mathfrak{G} : \quad \{x, y, z\} \not\subset G$

Ein fastaffiner Raum $(X, D, \langle\rangle)$ heißt regulär, wenn gilt:

$$\forall\, G, H \in \mathfrak{G} \text{ mit } |G \cap H| = 1 \;\; \exists\, g \in G \setminus H \;\; \exists\, h \in H \setminus G : \quad g \sqcup h \in \mathfrak{G}$$

Definition 1.1.3
In einem fastaffinen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ heißen zwei Linien $L, M \in \mathfrak{L}$ parallel zueinander in Zeichen $L \parallel M$, wenn Punkte $l, l', m, m' \in X$ existieren, so daß gilt:

$$L = l \sqcup l', \quad M = m \sqcup m', \quad \langle l, l' \rangle = \langle m, m' \rangle$$

Satz 1.1.4 ([1] II.§2/§4, III.§2/§4)
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum.

a) Jede Linie besitzt entweder genau einen Aufpunkt, oder sie ist eine Gerade.

b) Zu jeder Linie $L \in \mathfrak{L}$ existiert genau eine Richtung $d \in D$, so daß gilt:

$$\forall\, (x, y) \in X^{(2)} : \quad L = x \sqcup y \;\; \Rightarrow \;\; \langle x, y \rangle = d$$

c) Zu einem Punkt $x \in X$ und einer Linie $L \in \mathfrak{L}$ gibt es genau eine zu L parallele Linie mit Aufpunkt x. Diese wird mit $\{x \parallel L\}$ bezeichnet.

d) $\parallel$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{L}$.

e) Eine Parallele zu einer Geraden ist wieder eine Gerade.

f) Es gilt die Parallelogrammschließungsaussage:
(Pgm) $\forall\, x, y, z \in X$ mit $x \neq y, z \;\; \exists\, w \in X : \quad \langle x, y \rangle = \langle z, w \rangle, \; \langle x, z \rangle = \langle y, w \rangle$
Ist eine der Linien $x \sqcup y$, $x \sqcup z$ eine Gerade, so ist der Punkt w nach (G) eindeutig bestimmt, und es wird folgende Bezeichnung verwendet: $w =: \mathrm{Pgm}(x, y, z)$.
Für $x, y \in X$ sei $\mathrm{Pgm}(x, x, y) := \mathrm{Pgm}(x, y, x) := y$.

Bemerkung 1.1.5

a) Aus Satz 1.1.4 folgt, daß der Begriff *fastaffiner Raum* mit dem aus [14] und [2] übereinstimmt.

b) Ein fastaffiner Raum, in dem jede Linie eine Gerade ist, ist ein affiner Raum. ([2] III.§1)

Definition 1.1.6
Zwei fastaffine Räume $(X, D, \langle\rangle)$, $(X', D', \langle\rangle')$ heißen <u>isomorph</u> zueinander, wenn eine Bijektion $\alpha : X \to X'$ existiert, so daß gilt:

$$\forall\,(x,y),\,(u,v) \in X^{(2)} : \quad \langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \;\;\Leftrightarrow\;\; \big\langle \alpha(x),\alpha(y)\big\rangle' = \big\langle \alpha(u),\alpha(v)\big\rangle'$$

Die Abbildung α heißt dann <u>Isomorphismus</u>, und es wird die Schreibweise
$(X, D, \langle\rangle) \;\cong\; (X', D', \langle\rangle')$ verwendet.

α induziert eine Bijektion von D nach D', indem eine Richtung $d = \langle x,y\rangle \in D$ auf die Richtung $\big\langle \alpha(x),\alpha(y)\big\rangle' \in D'$ abgebildet wird.

Definition 1.1.7
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum.

a) Ein Isomorphismus von $(X, D, \langle\rangle)$ auf sich heißt <u>Automorphismus</u> oder <u>Kollineation</u>. Die Menge der Automorphismen von X wird mit $\mathrm{Aut}(X)$ bezeichnet.
Ein Punkt $x \in X$ heißt <u>Fixpunkt</u> einer Kollineation $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, falls $\alpha(x) = x$ gilt.

b) Eine Kollineation $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ heißt <u>Dilatation</u>, wenn gilt:

$$\forall\, L \in \mathfrak{L} : \quad L \parallel \delta(L)$$

Die Menge der Dilatationen von X wird mit $\mathrm{Dil}(X)$ bezeichnet. Für $x \in X$ bezeichne $\mathrm{Dil}_x(X)$ die Menge der Dilatationen von X mit Fixpunkt x.

c) Eine Dilatation $\tau \in \mathrm{Dil}(X)$ heißt <u>Translation</u>, wenn sie fixpunktfrei ist und wenn gilt:

$$\forall\, x,y \in X : \quad \big\langle x,\tau(x)\big\rangle = \big\langle y,\tau(y)\big\rangle,$$

oder wenn sie die Identität ist. Für $\tau \neq \mathrm{id}_X$ heißt $\big\langle x,\tau(x)\big\rangle$ die <u>Richtung</u> der Translation τ. Die Menge der Translationen wird mit $\mathrm{Tra}(X)$ bezeichnet. Für $G \in \mathfrak{G}$ sei

$$\mathrm{Tra}_G(X) := \big\{\tau \in \mathrm{Tra}(X)^* \;\big|\; \forall\, x \in X :\; x \sqcup \tau(x) \parallel G\big\} \cup \{\mathrm{id}_X\}$$

Satz 1.1.8 $\big($[2] III.§2, [14] II.§5$\big)$
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum.

a) Eine Kollineation erhält Aufpunkte und Parallelitäten:

$$\forall\,\alpha \in \mathrm{Aut}(X)\;\; \forall\, z \in X\;\; \forall\, L \in \mathfrak{L}_z : \quad \alpha(L) \in \mathfrak{L}_{\alpha(z)}$$
$$\forall\,\alpha \in \mathrm{Aut}(X)\;\; \forall\, L, M \in \mathfrak{L} : \quad L \parallel M \;\;\Leftrightarrow\;\; \alpha(L) \parallel \alpha(M)$$

Das Bild einer Geraden unter einer Kollineation ist also wieder eine Gerade.

b) Eine Dilatation mit zwei verschiedenen Fixpunkten ist die Identität.

c) $\mathrm{Aut}(X)$ ist bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

d) $\mathrm{Dil}(X)$ ist ein Normalteiler von $\mathrm{Aut}(X)$.

e) Für $G \in \mathfrak{G}$ ist $\mathrm{Tra}_G(X)$ ein Normalteiler von $\mathrm{Dil}(X)$.

f) Für $x \in X$ und $\tau \in \mathrm{Tra}(X)$ gilt: $\tau\ \mathrm{Dil}_x(X)\,\tau^{-1} = \mathrm{Dil}_{\tau(x)}(X)$.

1.2 Schließungsaussagen

Definition 1.2.1
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum. Die folgenden Schließungsaussagen werden definiert:

$$\mathrm{D}(z; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} z, a_1, a_2, a_3 \in X \text{ mit } z \neq a_1, a_2, a_3 \\ b_i \in z \sqcup a_i \setminus \{z, a_i\} \quad (i \in \{1,2,3\}) \\ z \sqcup a_1,\ z \sqcup a_2,\ z \sqcup a_3 \text{ paarweise verschieden} \\ z \sqcup a_1 \in \mathfrak{G} \\ \langle a_1, a_2\rangle = \langle b_1, b_2\rangle,\ \langle a_1, a_3\rangle = \langle b_1, b_3\rangle \end{cases}$$

$$\mathrm{d}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_1, a_2, a_3, b_1 \in X \text{ mit } a_1 \neq b_1 \\ b_i \in \{a_i \parallel a_1 \sqcup b_1\} \quad (i \in \{2,3\}) \\ a_1 \sqcup b_1,\ a_2 \sqcup b_2,\ a_3 \sqcup b_3 \text{ paarweise verschieden} \\ a_1 \sqcup b_1 \in \mathfrak{G} \\ \langle a_1, a_2\rangle = \langle b_1, b_2\rangle,\ \langle a_1, a_3\rangle = \langle b_1, b_3\rangle \end{cases}$$

$$\mathrm{d'}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} a_1, a_2, a_3, b_1 \in X \text{ mit } a_1 \neq b_1 \\ b_i \in \{a_i \parallel a_1 \sqcup b_1\} \quad (i \in \{2,3\}) \\ a_1 \sqcup b_1,\ a_2 \sqcup b_2,\ a_3 \sqcup b_3 \text{ paarweise verschieden} \\ a_1 \sqcup a_2,\ a_1 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G} \\ \langle a_1, a_2\rangle = \langle b_1, b_2\rangle,\ \langle a_1, a_3\rangle = \langle b_1, b_3\rangle \end{cases}$$

$$\mathrm{P'}(z; a_1, \ldots, a_6) \;:\Leftrightarrow\; \begin{cases} \exists\, G \in \mathfrak{G}_z :\ a_1, a_3, a_5 \in G \setminus \{z\} \\ \exists\, H \in \mathfrak{G}_z \setminus \{G\} :\ a_2, a_4, a_6 \in H \setminus \{z\} \\ a_1, a_3, a_5 \text{ paarweise verschieden} \\ a_1 \sqcup a_2,\ a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G} \\ \langle a_1, a_2\rangle = \langle a_5, a_6\rangle,\ \langle a_2, a_3\rangle = \langle a_4, a_5\rangle \end{cases}$$

(D) $\mathrm{D}(z; a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \langle a_2, a_3\rangle = \langle b_2, b_3\rangle$ (Axiom von Desargues)

(d) $\mathrm{d}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \langle a_2, a_3\rangle = \langle b_2, b_3\rangle$ (kleines Axiom von Desargues)

(d') $\mathrm{d'}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \langle a_2, a_3\rangle = \langle b_2, b_3\rangle$

(P') $\mathrm{P'}(z; a_1, \ldots, a_6) \Rightarrow \langle a_1, a_4\rangle = \langle a_3, a_6\rangle$

Der Raum $(X, D, \langle\rangle)$ heißt <u>desarguessch</u>, wenn er den beiden Axiomen von Desargues genügt.

Satz 1.2.2 $\big([14]$ II.§6, $[15]\big)$
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein desarguesscher fastaffiner Raum.

a) Für $G \in \mathfrak{G}$ operiert $\mathrm{Tra}_G(X)$ regulär auf G:
$$\forall\, x, y \in G \;\; \exists_1\, \tau_{x,y} \in \mathrm{Tra}_G(X): \quad \tau_{x,y}(x) = y$$

b) $\mathrm{Tra}(X)$ ist eine abelsche Gruppe, die regulär auf X operiert:
$$\forall\, x, y \in X \;\; \exists_1\, \tau_{x,y} \in \mathrm{Tra}(X): \quad \tau_{x,y}(x) = y$$

c) Für $z \in X$ und $L \in \mathfrak{L}_z$ operiert $\mathrm{Dil}_z(X)$ regulär auf $L\backslash\{z\}$:
$$\forall\, x, y \in L\backslash\{z\} \;\; \exists_1\, \delta \in \mathrm{Dil}_z(X): \quad \delta(x) = y$$

1.3 Basis, Dimension, Flateigenschaften

Da ein fastaffiner Raum mit $\exists\, L \in \mathfrak{L}: |L| = 2$ ein affiner Raum über GF(2) ist $\big([2]$ III.§1$\big)$, wird im folgenden $\forall\, L \in \mathfrak{L}: |L| \geq 3$ vorausgesetzt.

Definition 1.3.1
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum, $z \in X$ und $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z$. Zwei Punkte $x, y \in X$ heißen <u>verbindbar mittels $\mathfrak{H}$</u> in Zeichen $x \sim_{\mathfrak{H}} y$, wenn gilt:
$$\exists\, n \in \mathbb{N}_0 \;\; \exists\, x_0, \ldots, x_n \in X \text{ mit } x = x_0, x_n = y \;\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}: \quad \{z \parallel x_{i-1} \sqcup x_i\} \in \mathfrak{H}$$
Eine Teilmenge $T \subset X$ heißt <u>Teilraum</u> von X in Zeichen $T < X$, wenn gilt:

(T1) $\quad \forall\, x, y \in T: \quad x \sqcup y \subset T$

(T2) $\quad \forall\, x, y \in T \;\; \exists\, x_0, \ldots, x_n \in T \text{ mit } x = x_0, x_n = y \;\; \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}: \quad x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$

Die Menge der Teilräume von X wird mit $\mathfrak{T}(X)$ bezeichnet.
Für $T \in \mathfrak{T}(X)$ bezeichne $D(T) := \big\{\langle x, y\rangle \;\big|\; (x, y) \in T^{(2)}\big\}$ die Menge der Richtungen, $\mathfrak{L}(T) := \{L \in \mathfrak{L} \mid L \subset T\}$ die Menge der Linien und $\mathfrak{G}(T) := \mathfrak{G} \cap \mathfrak{L}(T)$ die Menge der Geraden des Teilraumes T.

Satz 1.3.2 $\big([10]$ §3$\big)$
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum.

a) Für $T < X$, $L \in \mathfrak{L}(T)$ und $x \in T$ gilt: $\{x \parallel L\} \subset T$.

b) Für einen Teilraum $T < X$ mit $|T| \geq 2$ ist $\big(T, D(T), \langle\rangle\big|_{T^{(2)}}\big)$ ein fastaffiner Raum.

c) Die Abbildung
$$\overline{}^{z}: \begin{cases} \mathfrak{P}(\mathfrak{G}_z) & \to \quad \mathfrak{T}(X) \\ \qquad \mathfrak{H} & \mapsto \quad \begin{cases} \{x \in X \mid z \sim_{\mathfrak{H}} x\} & \text{für } \mathfrak{H} \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{für } \mathfrak{H} = \emptyset \end{cases} \end{cases}$$
ist wohldefiniert und besitzt folgende Eigenschaften:

a) $\forall\, T \in \mathfrak{T}(X) \;\; \forall\, \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z(T): \quad \overline{\mathfrak{H}}^z < T$
b) $\forall\, \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z: \quad \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}\big(\overline{\mathfrak{H}}^z\big)$
c) $\forall\, \mathfrak{H}, \mathfrak{I} \subset \mathfrak{G}_z: \quad \mathfrak{H} \subset \mathfrak{I} \;\Rightarrow\; \overline{\mathfrak{H}}^z \subset \overline{\mathfrak{I}}^z$

Definition 1.3.3
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum und $z \in X$.

a) Eine Menge $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z$ heißt <u>Erzeugendensystem</u> von $T < X$, wenn gilt: $\overline{\mathfrak{H}}^z = T$.
b) Eine Menge $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z$ heißt <u>unabhängig</u>, wenn gilt: $\forall\, G \in \mathfrak{H} : G \not\subset \overline{\mathfrak{H} \setminus \{G\}}^z$.
c) Eine Menge $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z$ heißt <u>Basis</u> von $T < X$, wenn sie unabhängig und Erzeugendensystem von T ist.

Satz 1.3.4 ([10] §3)
In einem fastaffinen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ mit $z \in T < X$ und $|T| \geq 2$ läßt sich jede unabhängige Menge $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z(T)$ zu einer Basis von T ergänzen. Je zwei Basen von T sind gleichmächtig.

Definition 1.3.5
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum und $T < X$. Falls $|T| \geq 2$ gilt, sei $\mathfrak{H}$ eine Basis von T. Dann heißt die Kardinalzahl

$$\dim(T) := \begin{cases} |\mathfrak{H}| & \text{für } |T| \geq 2 \\ 0 & \text{für } |T| = 1 \\ -1 & \text{für } T = \emptyset \end{cases}$$

die <u>Dimension</u> von T. Ein fastaffiner Raum der Dimension 2 heißt <u>fastaffine Ebene</u>. $\mathfrak{T}_2(X) := \{E < X \mid \dim(E) = 2\}$ bezeichne die Menge der Ebenen in X.

Lemma 1.3.6 ([14] I.§2)
In einer fastaffinen Ebene $(E, D, \langle\rangle)$ gilt:

$$\forall\, G \in \mathfrak{G} \;\; \forall\, L \in \mathfrak{L}: \quad G \not\parallel L \;\Rightarrow\; |G \cap L| = 1$$

Satz 1.3.7 ([14] IV.§10)
Ein fastaffiner Raum $(X, D, \langle\rangle)$ mit $\dim(X) > 2$ ist desarguessch.

Satz 1.3.8 ([10] §4)
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum.

a) Für $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}(X)$ gilt: $\bigcap \mathfrak{S} \in \mathfrak{T}(X)$.
b) Die Abbildung

$$\overline{} : \begin{cases} \mathfrak{P}(X) & \to & \mathfrak{T}(X) \\ A & \mapsto & \bigcap\{T \in \mathfrak{T}(X) \mid A \subset T\} \end{cases}$$

ist ein Hüllenoperator, d.h. es gilt:

a) $\forall\, A \subset X: \quad A \subset \overline{A}$

b) $\forall\, A \subset X: \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$

c) $\forall\, A, B \subset X: \quad A \subset B \;\Rightarrow\; \overline{A} \subset \overline{B}$

c) Für endlichdimensionale Teilräume $S, T \in \mathfrak{T}(X)$ mit $S \cap T \neq \emptyset$ gilt:

$$\dim\big(\overline{S \cup T}\big) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$$

Definition 1.3.9
Ein Teilraum H eines fastaffinen Raumes $(X, D, \langle\rangle)$ heißt <u>Hyperebene</u>, wenn eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ existiert, so daß $X = \overline{G \cup H}$ gilt.

Lemma 1.3.10 $\big($[10] §4$\big)$
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum und $H \in \mathfrak{T}(X)$ eine Hyperebene. Dann gilt:

$$\forall\, L, M \in \mathfrak{L} \text{ mit } L \parallel M: \quad |L \cap H| = 1 \;\Rightarrow\; |M \cap H| = 1$$

Definition 1.3.11
Ein Teilraum T eines fastaffinen Raumes $(X, D, \langle\rangle)$ heißt <u>Flat</u>, wenn gilt:

(F1) $\quad \forall\, L \in \mathfrak{L}: \quad |L \cap T| > 1 \;\Rightarrow\; L \subset T$

(F2) $\quad \forall\, x, y \in T \;\; \forall\, L \in \mathfrak{L}_x \;\; \forall\, M \in \mathfrak{L}_y: \quad \big|L \cap M \cap (X \setminus T)\big| \geq 2 \;\Rightarrow\; x = y$

$\big($In [10] wird nur (F1) gefordert.$\big)$

Satz 1.3.12 $\big($[10] §4$\big)$
In einem fastaffinen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ mit $T \subset X$ gilt:

$$T \text{ erfüllt (T1)} \quad \Rightarrow \quad T \in \mathfrak{T}(X)$$

Satz 1.3.13 $\big($[14] I.§3, [10] §4, [4] §5$\big)$
In einem desarguesschen fastaffinen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ gilt:

$$T \in \mathfrak{T}(X) \quad \Rightarrow \quad T \text{ ist ein Flat}$$

1.4 Fastvektorräume

1.4.1 Fastkörper

Definition 1.4.1
Es sei F eine Menge mit zwei binären Operationen $+, \cdot : F \times F \to F$. Das Tripel $(F, +, \cdot)$ heißt <u>(Links-) Fastkörper</u>, wenn gilt:

a) $(F,+)$ ist eine Gruppe (mit neutralem Element 0).

b) $(F^*,\cdot)$ ist eine Gruppe (mit neutralem Element 1).

c) $\forall\, a \in F: \quad 0 \cdot a = 0$

d) $\forall\, a,b,c \in F: \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Die Menge $K(F) := \{a \in F \mid \forall\, b,c \in F:\ (b+c)\cdot a = b \cdot a + c \cdot a\}$ heißt Kern und die Menge $Z(F) := \{a \in F \mid \forall\, b \in F:\ a \cdot b = b \cdot a\}$ Zentrum des Fastkörpers F.

Satz 1.4.2 ([17] I.§2/§3)
Es sei $(F,+,\cdot)$ ein Fastkörper.

a) $\forall\, a \in F: \quad a \cdot 0 = 0$

b) $\forall\, a,b \in F: \quad -(a \cdot b) = (-a)\cdot b = a \cdot (-b)$

c) $(F,+)$ ist abelsch.

d) $\forall\, a \in F: \quad a^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \text{ oder } a = -1$

e) $K(F)$ ist ein Schiefkörper mit $Z(F) \subset K(F)$.

Definition 1.4.3
Es sei F ein Fastkörper. Die Charakteristik des Kerns $K(F)$ heißt auch Charakteristik des Fastkörpers F.

1.4.2 Fastvektorräume

Definition 1.4.4
Es sei $(V,+)$ eine Gruppe und $F \subset \operatorname{End}(V,+)$. Für $a \in F$ und $\mathbf{x} \in V$ wird das Bild von $\mathbf{x}$ unter a mit $a\mathbf{x}$ bezeichnet. Das Tripel $(V,+,F)$ heißt F-Gruppe, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

a) Die Abbildungen
$$0: \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{0} \end{array} \right. , \quad 1: \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{x} \end{array} \right. , \quad -1: \left\{ \begin{array}{ccc} V & \to & V \\ \mathbf{x} & \mapsto & -\mathbf{x} \end{array} \right.$$
gehören zu F.

b) F^* ist eine Untergruppe von $\operatorname{Aut}(V,+)$.

c) $\forall\, a,b \in F \ \ \forall\, \mathbf{x} \in V^*: \quad a\mathbf{x} = b\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad a = b$

Die Menge
$$Q(V) := \{\mathbf{x} \in V \mid \forall\, a,b \in F \ \ \exists\, c \in F:\ a\mathbf{x} + b\mathbf{x} = c\mathbf{x}\}$$
heißt Quasikern der F-Gruppe $(V,+,F)$.

Eine F-Gruppe heißt Fastvektorraum, wenn jedes Element $\mathbf{x} \in V$ als Summe von Quasikernelementen darstellbar ist.

Satz 1.4.5 $\big([1]\ \S1/\S2\big)$
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum.

a) $(V,+)$ ist abelsch.

b) $\forall\,\mathbf{q}\in Q(V)^*\ \ \forall\,a,b\in F\ \ \exists_1\ c\in F:\quad a\mathbf{q}+b\mathbf{q}=c\mathbf{q}$

c) Für $\mathbf{q}\in Q(V)^*$ sei

$$\oplus_{\mathbf{q}}:\left\{\begin{array}{ccl} F\times F & \to & F \\ (a,b) & \mapsto & c,\quad \text{wobei gilt: } a\mathbf{q}+b\mathbf{q}=c\mathbf{q}\end{array}\right.$$

Dann ist $(F,\oplus_{\mathbf{q}},\cdot)$ ein Fastkörper. Sein Kern wird mit $K_{\mathbf{q}}(F)$ bezeichnet.

d) $\forall\,\mathbf{q}\in Q(V)^*\ \ \forall\,a,b\in F\ \ \forall\,\lambda\in F^*:\quad (a\oplus_{\lambda\mathbf{q}}b)\lambda=a\lambda\oplus_{\mathbf{q}}b\lambda$

Für $a_1\oplus_{\mathbf{q}}a_2\oplus_{\mathbf{q}}\cdots\oplus_{\mathbf{q}}a_n$ wird die Schreibweise $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}{}^{\mathbf{q}}\,a_i$ verwendet $(a_1,\ldots,a_n\in F)$.

Definition 1.4.6
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum und $\mathbf{q}\in Q(V)^*$. Dann heißt die Menge

$$R_{\mathbf{q}}(V):=\{\mathbf{r}\in Q(V)^*\mid \oplus_{\mathbf{q}}=\oplus_{\mathbf{r}}\}\cup\{\mathbf{0}\}$$

<u>**q**-Kern</u> von $(V,+,F)$.

Satz 1.4.7 $\big([1]\ \S2\big)$
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum und $\mathbf{q}\in Q(V)^*$.

a) $R_{\mathbf{q}}(V)$ ist eine Untergruppe von $(V,+)$.

b) $R_{\mathbf{q}}(V)=\{\mathbf{x}\in V\mid \forall\,a,b\in F:\ a\mathbf{x}+b\mathbf{x}=(a\oplus_{\mathbf{q}}b)\,\mathbf{x}\}$

c) $\forall\,\lambda\in F^*:\quad R_{\lambda\mathbf{q}}(V)=\lambda R_{\mathbf{q}}(V)$.

d) $F\big(R_{\mathbf{q}}(V)\big)\subset Q(V)$.

e) $\forall\,\mathbf{x}\in R_{\mathbf{q}}(V)\ \ \forall\,\lambda\in F:\quad \lambda\mathbf{x}\in R_{\mathbf{q}}(V)\ \ \Rightarrow\ \ \lambda\in K_{\mathbf{q}}(F)$.

Definition 1.4.8
Existiert in einem Fastvektorraum $(V,+,F)$ zu je zwei Elementen $\mathbf{q},\mathbf{r}\in Q(V)^*$ mit $\mathbf{r}\notin F\mathbf{q}$ ein Element $a\in F^*$, so daß $\mathbf{q}+a\mathbf{r}\in Q(V)^*$ gilt, so heißt $(V,+,F)$ <u>regulär</u>.

Lemma 1.4.9 $\big([1]\ \S2\big)$
Ein Fastvektorraum $(V,+,F)$ ist genau dann regulär, wenn gilt:

$$\forall\,\mathbf{q},\mathbf{r}\in Q(V)^*\ \text{mit}\ \mathbf{r}\notin F\mathbf{q}\ \ \exists\,a\in F^*:\quad a\mathbf{r}\in R_{\mathbf{q}}(V)$$

Satz 1.4.10 $\big([1]\ \S4\big)$
Es seien F, I Mengen und

$$\cdot: F\times F\to F,\quad \oplus_i: F\times F\to F\ \ \text{für } i\in I$$

binäre Operationen, so daß für jedes $i \in I$ das Tripel $(F, \oplus_i, \cdot)$ ein Fastkörper ist.

$$F^{(I)} := \big\{ (x_i)_i \in F^I \;\big|\; \{ i \in I \mid x_i \neq 0 \} \text{ ist endlich} \big\}$$

$$\oplus : \begin{cases} F^{(I)} \times F^{(I)} & \to \quad F^{(I)} \\ \big((x_i)_i, (y_i)_i\big) & \mapsto \quad (x_i)_i \oplus (y_i)_i := (x_i \oplus_i y_i)_i \end{cases}$$

Dann ist $(F^{(I)}, \oplus, F)$ ein Fastvektorraum. Ein Element $a \in F$ wird dabei mit der Abbildung

$$a : \begin{cases} F^{(I)} & \to \quad F^{(I)} \\ (x_i)_i & \mapsto \quad (a \cdot x_i)_i \end{cases}$$

identifiziert. Es gilt:

$$Q\big(F^{(I)}\big) = F \big\{ (k_i)_i \in F^{(I)} \;\big|\; \forall\, i \in I :\; k_i \in K(F, \oplus_i, \cdot) \big\}$$

Stimmen alle Additionen $\oplus_i$ $(i \in I)$ überein, so ist $(F^{(I)}, \oplus, F)$ regulär.

Definition 1.4.11
Es sei $(V, +, F)$ ein Fastvektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Unterraum von V in Zeichen $U < V$, wenn U eine additive Untergruppe von V ist und wenn gilt:

$$\forall\, \lambda \in F \;\; \forall\, \mathbf{x} \in U : \quad \lambda \mathbf{x} \in U$$

Die Menge der Unterräume von V wird mit $\mathfrak{U}(V)$ bezeichnet.

Satz 1.4.12 $\big($[11] I.2$\big)$
Es sei $(V, +, F)$ ein Fastvektorraum.

a) Für $U \in \mathfrak{U}(V)$ ist $\big(U, +\big|_{U^2}, F\big)$ ein Fastvektorraum.

b) Für $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}(V)$ gilt: $\bigcap \mathfrak{V} \in \mathfrak{U}(V)$.

c) Die Abbildung

$$\widehat{\ } : \begin{cases} \mathfrak{P}(V) & \to \quad \mathfrak{U}(V) \\ A & \mapsto \quad \bigcap \{ U \in \mathfrak{U}(X) \mid A \subset U \} \end{cases}$$

ist ein Hüllenoperator, d.h. es gilt:

a) $\forall\, A \subset V : \quad A \subset \widehat{A}$

b) $\forall\, A \subset V : \quad \widehat{\widehat{A}} = \widehat{A}$

c) $\forall\, A, B \subset V : \quad A \subset B \;\Rightarrow\; \widehat{A} \subset \widehat{B}$

Definition 1.4.13
Es sei $(V, +, F)$ ein Fastvektorraum und $B = (\mathbf{b}_i)_i \in Q(V)^I$.

a) B heißt Erzeugendensystem von V, wenn gilt:

$$\forall\, x \in V \;\; \exists\, (x_i)_i \in F^{(I)} : \quad x = \sum_{i \in I} x_i \mathbf{b}_i$$

b) B heißt unabhängig, wenn gilt:

$$\forall\,(x_i)_i \in F^{(I)}: \quad \sum_{i\in I} x_i \mathbf{b}_i = \mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \forall\, i \in I:\ x_i = 0$$

c) B heißt Basis von V, wenn B unabhängig und ein Erzeugendensystem von V ist.

Satz 1.4.14 ([1] §3, [2] I.§3)
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum und $B = (\mathbf{b}_i)_i \in Q(V)^I$.

a) Ist B unabhängig, so kann B zu einer Basis von V ergänzt werden. Existiert ein Element $\mathbf{q} \in Q(V)^*$ mit $\forall\, i \in I:\ \mathbf{b}_i \in R_{\mathbf{q}}(V)$, so kann B zu einer Basis von V ergänzt werden, deren Komponenten in $R_{\mathbf{q}}(V)$ liegen.

b) Für je zwei Basen $B = (\mathbf{b}_i)_{i\in I}$ und $C = (\mathbf{c}_j)_{j\in J}$ gilt: $|I| = |J|$.

c) Ist B eine Basis von V, so gilt:

$$\forall\, \mathbf{x} \in V \ \ \exists_1\ \mathbf{x}_B = (x_i)_i \in F^{(I)}: \quad \mathbf{x} = \sum_{i\in I} x_i \mathbf{b}_i$$

Definition 1.4.15
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum und $B = (\mathbf{b}_i)_i \in Q(V)^I$ eine Basis von V. Dann heißt die Kardinalzahl $\dim(V) := |I|$ die Dimension von V.

Satz 1.4.16 ([11] I.2)
Für endlichdimensionale Unterräume $U, V \in \mathfrak{U}(V)$ gilt:

$$\dim \widehat{U \cup V} + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$$

1.4.3 Semilineare Abbildungen

Definition 1.4.17
Es seien $(V,+,F)$ und $(V',+',F')$ Fastvektorräume.
Ein Abbildungspaar $(\varphi : V \to V',\ \overline{\varphi} : F \to F')$ heißt semilinear, wenn gilt:

a) φ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(V,+)$ nach $(V',+')$.

b) $\overline{\varphi}$ ist bijektiv.

c) $\forall\, a \in F \ \ \forall\, \mathbf{x} \in V: \quad \varphi(a\mathbf{x}) = \overline{\varphi}(a)\big(\varphi(\mathbf{x})\big)$

$(\varphi, \overline{\varphi})$ heißt linear, wenn $F = F'$ und $\overline{\varphi} = \mathrm{id}_F$ gilt; es wird dann die Schreibweise φ statt (φ, id_F) verwendet.

Es sei $\mathbf{q} \in Q(V)^*$. Eine lineare Abbildung $l_{\mathbf{q}} : V \to F$ heißt $\mathbf{q}$-Linearform auf V. Der Fastkörper $(F, \oplus_{\mathbf{q}}, \cdot)$ wird in diesem Zusammenhang mit dem Fastvektorraum $(F^1, \oplus_{\mathbf{q}}, F)$ identifiziert.

Die Fastvektorräume $(V,+,F)$ und $(V',+',F')$ heißen isomorph zueinander, wenn es eine semilineare Abbildung $(\varphi, \overline{\varphi})$ zwischen ihnen gibt, so daß φ bijektiv ist. Das Paar $(\varphi, \overline{\varphi})$ heißt dann Isomorphismus, und es wird die Schreibweise $(V,+,F) \cong (V',+',F')$ verwendet.

Satz 1.4.18 $\big($[11] II.1/2$\big)$
Es seien $(V,+,F)$ und $(V',+',F')$ Fastvektorräume, $(\varphi : V \to V',\ \overline{\varphi} : F \to F')$ eine semilineare Abbildung und $\mathbf{q} \in Q(V)^*$ mit $\varphi(\mathbf{q}) \neq \mathbf{0}'$.

a) $\overline{\varphi}$ ist ein Fastkörperisomorphismus von $(F, \oplus_{\mathbf{q}}, \cdot)$ nach $(F', \oplus'_{\varphi(\mathbf{q})}, \cdot')$.

b) $\varphi\big(R_{\mathbf{q}}(V)\big) \subset R_{\varphi(\mathbf{q})}(V')$. Die Gleichheit gilt, wenn φ bijektiv ist.

c) Aus $U \in \mathfrak{U}(V)$ folgt $\varphi(U) \in \mathfrak{U}(V')$.

d) Ist φ bijektiv, so ist das Bild einer Basis von V eine Basis von V'.

Ist φ linear, so gilt:

e) φ ist durch die Werte auf einer Basis von V eindeutig bestimmt.

f) Stimmen $(V,+,F)$ und $(V',+',F')$ überein, so gilt: $\oplus_{\mathbf{q}} = \oplus_{\varphi(\mathbf{q})}$

Satz 1.4.19 $\big($vgl. [1] §5$\big)$
Zu einem Fastvektorraum $(V,+,F)$ gibt es eine Indexmenge I mit $|I| = \dim(V)$ und binäre Operationen $\cdot : F \times F \to F$ und $\oplus_i : F \times F \to F$ für $i \in I$, so daß für $i \in I$ das Tripel $(F, \oplus_i, \cdot)$ ein Fastkörper ist und

$$(V,+,F) \quad \cong \quad (F^{(I)}, \oplus, F)$$

gilt, wobei $\oplus$ wie in Satz 1.4.10 definiert ist.

Ist $(V,+,F)$ regulär, können die binären Operationen so gewählt werden, daß $\oplus_i = \oplus_j$ für alle $i, j \in I$ gilt.

Beweis: Es sei $B = (\mathbf{b}_i)_{i \in I}$ eine Basis von V und $\oplus_i := \oplus_{\mathbf{b}_i}$ für $i \in I$. Nach Satz 1.4.5.c) ist $(F, \oplus_i, \cdot)$ ein Fastkörper für $i \in I$. Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ mit $\mathbf{x}_B = (x_i)_i$, $\mathbf{y}_B = (y_i)_i$ und $\lambda \in F$ gilt:

$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})_B = \left(\sum_{i\in I} x_i \mathbf{b}_i + \sum_{i \in I} y_i \mathbf{b}_i\right)_B = \left(\sum_{i \in I} (x_i \oplus_i y_i)\mathbf{b}_i\right)_B = \mathbf{x}_B \oplus \mathbf{y}_B$$
$$(\lambda \mathbf{x})_B = \left(\lambda \sum_{i \in I} x_i \mathbf{b}_i\right)_B = \left(\sum_{i \in I} (\lambda x_i)\mathbf{b}_i\right)_B = \lambda\, \mathbf{x}_B$$

Damit ist das Abbildungspaar $(\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_B,\ \mathrm{id}_F)$ ein Isomorphismus.

Ist $(V,+,F)$ regulär, wird B mit Hilfe von Lemma 1.4.9 so gewählt, daß gilt:

$$\exists\, \mathbf{q} \in Q(V)^* \ \ \forall\, i \in I : \quad \mathbf{b}_i \in R_{\mathbf{q}}(V)$$

□

1.4.4 Bilinearformen

In diesem Abschnitt sei $(V,+,F)$ ein regulärer Fastvektorraum, $\mathbf{q} \in Q(V)^*$ und $B = (\mathbf{b}_i)_i \in R_{\mathbf{q}}(V)^I$ eine Basis von V. Damit ist B auch eine Basis des Rechtsvektorraumes $\big(R_{\mathbf{q}}(V), +, K_{\mathbf{q}}(F)\big)$.

Definition 1.4.20
Eine Abbildung $f_{\mathbf{q}} : V \times R_{\mathbf{q}}(V) \to F$ heißt <u>$\mathbf{q}$-Bilinearform</u> auf V, wenn gilt:

a) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \;\; \forall\, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \oplus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}', \mathbf{y})$

b) $\forall\, \mathbf{x} \in V \;\; \forall\, \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{y}') = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \oplus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}')$

c) $\forall\, a \in F \;\; \forall\, \mathbf{x} \in V \;\; \forall\, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

d) $\forall\, k \in K_{\mathbf{q}}(F) \;\; \forall\, \mathbf{x} \in V \;\; \forall\, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}k) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})k$

(In [11] V.1 wird der Begriff *Bilinearform* allgemeiner definiert.)
Eine $\mathbf{q}$-Bilinearform $f_{\mathbf{q}}$ heißt <u>symmetrisch</u>, wenn gilt:

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Mit $\mathrm{BLi}_{\mathbf{q}}(V)$ wird die Menge der $\mathbf{q}$-Bilinearformen auf V bezeichnet.

Lemma 1.4.21
Für $f_{\mathbf{q}} \in \mathrm{BLi}_{\mathbf{q}}(V)$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V)$ gilt: $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_{\mathbf{q}}(F)$.

Beweis: Die Abbildung

$$\left\{ \begin{array}{rcl} F\mathbf{x} & \to & F\mathbf{x} \\ \mathbf{z} & \mapsto & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\,\mathbf{x} \end{array} \right.$$

ist linear. Mit Satz 1.4.18.f) folgt $\oplus_{\mathbf{x}} = \oplus_{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{x}}$ und damit $R_{\mathbf{x}}(V) = R_{f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\,\mathbf{x}}(V)$. Satz 1.4.7.e) liefert $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K_{\mathbf{x}}(F) = K_{\mathbf{q}}(F)$. $\square$

Satz 1.4.22 $\big($[11] V.§1$\big)$
Zu $f_{\mathbf{q}} \in \mathrm{BLi}_{\mathbf{q}}(V)$ existiert genau eine Matrix $M_B(f_{\mathbf{q}}) := (m_{ij})_{ij} \in K_{\mathbf{q}}(F)^{I \times I}$, so daß

$$\forall\, i, j \in I : \quad m_{ij} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j)$$

gilt. Damit läßt sich $f_{\mathbf{q}}$ in der Form

$$\forall\, \mathbf{x} \in V \;\; \forall\, \mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V) : \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j \in I}^{\mathbf{q}} x_i\, m_{ij}\, y_j$$

darstellen. f_q ist genau dann symmetrisch, wenn gilt:

$$\forall\, i, j \in I : \quad m_{ij} = m_{ji}$$

Definition 1.4.23
Ein Paar $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times R_{\mathbf{q}}(V)$ heißt <u>$f_{\mathbf{q}}$-orthogonal</u> in Zeichen $\mathbf{x} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{y}$, wenn gilt:

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Für $\mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V)$ sei $\mathbf{y}^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}} := \{\mathbf{x} \in V \mid \mathbf{x} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{y}\}$.

Lemma 1.4.24 $\big($[11] V.§3$\big)$
Für $\mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V)$ gilt: $\mathbf{y}^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}} \in \mathfrak{U}(V)$.

Definition 1.4.25
Eine Bilinearform $f_{\mathbf{q}} \in \mathrm{BLi}_{\mathbf{q}}(V)$ heißt <u>nullteilig</u>, wenn gilt:

$$\forall\,\mathbf{x} \in R_{\mathbf{q}}(V): \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

1.5 Algebraische Darstellung desarguesscher fastaffiner Räume

Definition 1.5.1

a) Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum und

$$D_F := \{F\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in V^*\}, \qquad \langle\rangle_{+,F} : \left\{ \begin{array}{ccc} V^{(2)} & \to & D(V) \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & F(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

Dann heißt $(V, D_F, \langle\rangle_{+,F})$ die <u>Koordinatengeometrie über $(V,+,F)$</u>.

b) Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein desarguesscher fastaffiner Raum, $0 \in X$ und

$$0 : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & 0 \end{array} \right. , \quad +_0 : \left\{ \begin{array}{ccc} X \times X & \to & X \\ (x,y) & \mapsto & \tau_{0,x}(y) \end{array} \right. , \quad F_0 := \mathrm{Dil}_0(X) \cup \{0\}$$

Dann heißt $(X, +_0, F_0)$ der <u>0-Koordinatenraum über $(X, D, \langle\rangle)$</u>.

Satz 1.5.2
Es sei $(V,+,F)$ ein Fastvektorraum. Dann ist $(V, D_F, \langle\rangle_{+,F})$ ein desarguesscher fastaffiner Raum gleicher Dimension, und es gilt:

a) $\forall\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in V^{(2)}: \quad \mathbf{x} \sqcup \mathbf{y} = \mathbf{x} + F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$

b) $\mathfrak{L} = \{\mathbf{x} + F\mathbf{z} \mid \mathbf{x} \in V,\, \mathbf{z} \in V^*\}$

c) $\mathfrak{G} = \{\mathbf{x} + F\mathbf{q} \mid \mathbf{x} \in V,\, \mathbf{q} \in Q(V)^*\}$

d) $\forall\,\mathbf{x} \in V: \quad \tau_{\mathbf{0},\mathbf{x}} = (\mathbf{z} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{z})$

e) $\mathfrak{T}(V) = \{\mathbf{x} + U \mid \mathbf{x} \in V,\, U \in \mathfrak{U}(V)\}$

Beweis: [2] II.

a)-d) [2] II.

e) „$\supset$“: Es sei $U \in \mathfrak{U}(V)$, $\mathbf{x} \in V$ und $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$. Dann gilt mit b):

$$(\mathbf{x}+\mathbf{u}) \sqcup (\mathbf{x}+\mathbf{u}') = \mathbf{x} + \mathbf{u} + F(\mathbf{u}'-\mathbf{u}) \subset \mathbf{x} + U$$

woraus mit Satz 1.3.12 $\mathbf{x} + U \in \mathfrak{T}(V)$ folgt.

„$\subset$“: Es sei $T \in \mathfrak{T}(V)$ und $\mathbf{x} \in T$. Mit $U := \tau_{\mathbf{x},\mathbf{0}}(T) \in \mathfrak{T}$ gilt $T = \tau_{\mathbf{0},\mathbf{x}}(U) = \mathbf{x} + U$. Für $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in U$ und $a \in F$ gilt nach e) $\mathbf{y} + \mathbf{z} = \tau_{\mathbf{0},\mathbf{y}}(\mathbf{z}) \in U$ und nach b) $a\mathbf{y} \in \mathbf{0} \sqcup \mathbf{y} \subset U$, so daß $U \in \mathfrak{U}(V)$ folgt.

□

Satz 1.5.3
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein desarguesscher fastaffiner Raum mit $0 \in X$. Dann ist $(X, +_0, F_0)$ ein Fastvektorraum gleicher Dimension, und es gilt:

a) $Q(X) = \{x \in X \mid 0 \sqcup x \in \mathfrak{G}\} \cup \{0\}$

b) Für $q \in Q(X)^*$ gilt:
$R_q(X) = \left\{x \in Q(X) \backslash 0 \sqcup q \;\middle|\; x \sqcup q \in \mathfrak{G}\right\} \cup \left\{x \in 0 \sqcup q \;\middle|\; \exists\, y \in Q(X) \backslash 0 \sqcup q : \; q \sqcup y,\, y \sqcup x \in \mathfrak{G}\right\}$

c) $\mathfrak{U}(X) = \{T \in \mathfrak{T}(X) \mid 0 \in T\}$

Beweis: [15].

a) [15].

b) Dies folgt direkt aus b) und Lemma 1.4.9.

c) Es sei $U \in \mathfrak{U}(X)$. Dann gilt $0 \in U$. Für $x, y \in U$ ist $x \sqcup y = x +_0 \big(\mathrm{Dil}_0 \cup \{0\}\big)(y -_0 x) \in U$, also folgt mit Satz 1.3.12 $U \in \mathfrak{T}(X)$.
Es sei $T \in \mathfrak{T}(X)$ mit $0 \in T$. Dann gilt für $x, y \in T$ und $\delta \in F_0$: $x + y = \tau_{0,x}(y) \in T$ und $\delta(x) \in 0 \sqcup x \subset T$. Damit folgt $T \in \mathfrak{U}(X)$.

□

Satz 1.5.4

a) Ein desarguesscher fastaffiner Raum $(X, D, \langle\rangle)$ ist isomorph zu der Koordinatengeometrie jedes seiner Koordinatenräume $(X, +_0, F_0)$ für $0 \in X$. (id_X ist z.B. ein Isomorphismus.)

b) Ein Fastvektorraum $(V, +, F)$ ist identisch mit dem $\mathbf{0}$-Koordinatenraum über seiner Koordinatengeometrie $(V, D_F, \langle\rangle_{+,F})$.

Beweis:

a) Es seien $x, y, u, v \in X$. Mit Satz 1.5.2 a) folgt:

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle \quad &\Leftrightarrow \quad \big\langle 0, \tau_{x,0}(y)\big\rangle = \big\langle 0, \tau_{u,0}(v)\big\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle 0, y -_0 x\rangle = \langle 0, v -_0 u\rangle \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \sqcup (y -_0 x) = 0 \sqcup (v -_0 u) \quad \Leftrightarrow \quad F_0(y -_0 x) = F_0(v -_0 u) \\ &\Leftrightarrow \quad \langle x, y\rangle_{+_0, F_0} = \langle u, v\rangle_{+_0, F_0} \end{aligned}$$

b) $\mathrm{Dil}_{\mathbf{0}} = F^*$:
„$\supset$“: Es sei $a \in F^*$. Dann gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$:

$$\langle a\mathbf{x}, a\mathbf{y}\rangle_{+,F} = F(a\mathbf{y} - a\mathbf{x}) = Fa(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = F(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{+,F}$$

a ist also eine Dilatation.

„$\subset$“: Es sei $\delta \in \mathrm{Dil}_{\mathbf{0}}$ und $\mathbf{x} \in V^*$. Dann gilt $\delta(\mathbf{x}) \in \mathbf{0} \sqcup \mathbf{x} \setminus \{\mathbf{0}\} = F^*\mathbf{x}$, so daß ein Element $a \in F^*$ mit $\delta(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$ existiert. Da die Abbildung $\mathbf{z} \mapsto a\mathbf{z}$, $\mathbf{z} \in V$ trivialerweise eine Dilatation ist, folgt mit Satz 1.1.8.b) $\delta = a$.

$+ = +_{\mathbf{0}}$:
Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{x}$ ist trivialerweise eine Translation, die $\mathbf{0}$ auf $\mathbf{a}$ abbildet. Nach Satz 1.2.2.b) ist sie identisch mit $\tau_{\mathbf{0},\mathbf{a}}$. Es gilt: $\mathbf{a} +_{\mathbf{0}} \mathbf{b} = \tau_{\mathbf{0},\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

□

Satz 1.5.5 $\big($[14] IV.§10$\big)$
Ein desarguesscher fastaffiner Raum $(X, D, \langle\rangle)$ erfüllt die Diagonalenbedingung:

(Di) Für fünf paarweise verschiedene Geraden $x \sqcup y$, $x \sqcup z$, $x \sqcup w$, $y \sqcup z$, $y \sqcup w \in \mathfrak{G}$ mit $x, y, z, w \in X$ gilt: $z \sqcup w \in \mathfrak{G}$.

(In [14] wird (Di) schwächer formuliert.)

Beweis: Es sei $0 \in X$. Dann ist $(X, D, \langle\rangle)$ nach Satz 1.5.4.a) isomorph zur Koordinatengeometrie über $(X, +_0, F_0)$. Mit den Sätzen 1.4.7.a), 1.5.2, 1.5.3 und Lemma 1.4.9 folgt:

$$x \sqcup y,\ x \sqcup z,\ x \sqcup w,\ y \sqcup z,\ y \sqcup w \in \mathfrak{G} \quad \Rightarrow \quad y - x,\ z - x,\ w - x,\ z - y,\ w - y \in Q(X)$$
$$(z - x) - (y - x) = z - y \in Q(X), \quad (w - x) - (y - x) = w - y \in Q(X)$$
$$\Rightarrow \quad z - x,\ w - x \in R_{y-x}(X) \quad \Rightarrow \quad (w - x) - (z - x) = w - z \in R_{y-x}(X) \subset Q(X)$$

Also gilt $z \sqcup w \in \mathfrak{G}$. □

Kapitel 2

Kongruenz

2.1 Fasteuklidische Räume

Definition 2.1.1
Es sei X eine nicht-leere Menge. Eine Äquivalenzrelation $\equiv\ \subset (X^2)^2$ heißt Kongruenzrelation auf X, wenn gilt:

(K1) $\forall\, a,b \in X: \quad (a,a) \equiv (b,b)$

(K2) $\forall\, a,b \in X: \quad (a,b) \equiv (b,a)$

(K3) $\forall\, a,b,c \in X: \quad (a,b) \equiv (c,c) \quad\Rightarrow\quad a = b$

Definition 2.1.2
Es sei $(E, D, \langle\rangle)$ eine fastaffine Ebene und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf E. Das Quadrupel $(E, D, \langle\rangle, \equiv)$ heißt fasteuklidische Ebene, wenn die folgenden Axiome gelten:

(KP) $\forall\, a,b,c,d \in E$ mit $c \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G}$:
$(a,b) \equiv (c,d)$ und $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \quad\Leftrightarrow\quad d = \mathrm{Pgm}(a,b,c)$ oder $d = \mathrm{Pgm}(b,a,c)$

(KL) $\forall\, a,b,c,d \in E$ mit $c \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G}$:
$d = \mathrm{Pgm}(a,b,c) \quad\Rightarrow\quad (a,c) \equiv (b,d)$

(KG) $\forall\, a,b,c,d,d' \in E$ mit $c \in a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $d \notin a \sqcup b$:
$(a,d) \equiv (a,d')$ und $(b,d) \equiv (b,d') \quad\Rightarrow\quad (c,d) \equiv (c,d')$

(KZ) $\forall\, z,a,b \in E$ mit $z \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G}\ \ \forall\, c \in z \sqcup a\ \ \forall\, d \in z \sqcup b$:
$(z,a) \equiv (z,b)$ und $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \quad\Rightarrow\quad (z,c) \equiv (z,d)$

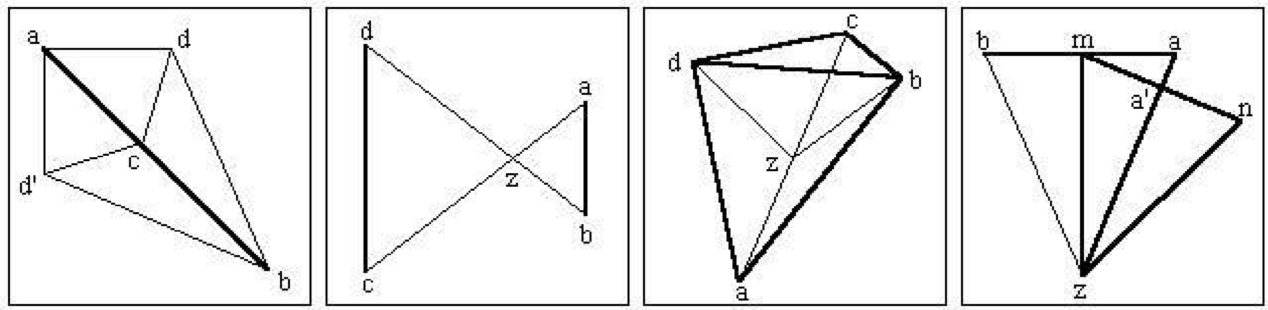
(KV) $\forall\, z,a,b,c,d \in E$ mit $a \sqcup b,\ b \sqcup c,\ c \sqcup d,\ d \sqcup a \in \mathfrak{G}$ und $c \in z \sqcup a$:
$(z,a) \equiv (z,b) \equiv (z,c) \equiv (z,d) \quad\Rightarrow\quad \big(a \sqcup c \in \mathfrak{G} \ \Leftrightarrow\ b \sqcup d \in \mathfrak{G}\big)$

(KT) $\forall\, z,a,b \in E$ mit $a \neq b$ und $(z,a) \equiv (z,b)\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, c_0,\dots,c_n \in E$ mit $a = c_0, c_n = b$
$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}: \quad c_{i-1} \sqcup c_i \in \mathfrak{G}$ und $(z,c_{i-1}) \equiv (z,c_i)$

(KR) $\exists\, z,a,b,m,m',a' \in E$ paarweise verschieden mit $z \sqcup a,\ z \sqcup m,\ a \sqcup b,\ m \sqcup m' \in \mathfrak{G}$ und
$z \notin a \sqcup b,\ m \in a \sqcup b,\ a' \in z \sqcup a \,\cap\, m \sqcup m'$:

$$(z,a) \equiv (z,b),\ (z,m) \equiv (z,m'),\ (a,m) \equiv (m,b),\ (m,a') \equiv (a',m')$$

Später wird gezeigt, daß in einer fasteuklidischen Ebene Axiom (KT) mit $n = 2$ gilt.



(KG) (KZ) (KV) (KR)

Abbildung 1

Definition 2.1.3
Es sei $(X, D, \langle\rangle)$ ein fastaffiner Raum und $\equiv$ eine Kongruenzrelation auf X. Das Quadrupel $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ heißt <u>fasteuklidischer Raum</u>, wenn gilt:

(KER) $\forall\, E \in \mathfrak{T}_2(X): \quad \big(E, D(E), \langle\rangle\big|_{E^{(2)}}, \equiv \cap (E^2)^2\big)$ ist eine fasteuklidische Ebene

(KLR) $\forall\, a,b,c,d \in X$ mit $c \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G}$:
$d = \mathrm{Pgm}(a,b,c) \quad \Rightarrow \quad (a,c) \equiv (b,d)$

(KGR) $\forall\, a,b,c,d,d' \in X$ mit $c \in a \sqcup b \in \mathfrak{G}$, $d \notin a \sqcup b$ und $d \sqcup d' \in \mathfrak{G}$:
$(a,d) \equiv (a,d')$ und $(b,d) \equiv (b,d') \quad \Rightarrow \quad (c,d) \equiv (c,d')$

Bemerkung 2.1.4

a) Eine fasteuklidische Ebene ist ein fasteuklidischer Raum.

b) In einer desarguesschen fasteuklidischen Ebene ist das Axiom (KV) beweisbar, da es ein Spezialfall der Diagonalenbedingung ist.

c) Das Axiom (KLR) folgt nicht aus Axiom (KL) für fasteuklidische Ebenen, da für Punkte $a,b,c,d \in X$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $d = \mathrm{Pgm}(a,b,c)$ der Fall $\dim\big(\overline{a \sqcup c}\big) \geq 3$ eintreten kann. Es gäbe dann keine Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(X)$ mit $a \sqcup c \subset E$.

d) Das Axiom (KGR) folgt bereits im kommutativen Fall (Alle Linien sind Geraden.) nicht aus dem Axiom (KG) für fasteuklidische Ebenen.

Im folgenden sei $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ ein fasteuklidischer Raum.

Lemma 2.1.5
In einem fasteuklidischen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ existieren in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(X)$ zu jedem Punkt $x \in E$ mindestens vier Geraden in $\mathfrak{G}_x(E)$.

Insbesondere ist jeder fasteuklidische Raum regulär.

Beweis: Es sei $x \in X$ und $E \in \mathfrak{T}_2(X)$ mit $x \in E$. Nach (KR) existieren sechs verschiedene Punkte $z, a, a', b, m, m' \in E$, so daß gilt:

$$z \sqcup a,\ z \sqcup m,\ a \sqcup b,\ m \sqcup m' \in \mathfrak{G}, \quad z \notin a \sqcup b, \quad m \in a \sqcup b, \quad a' \in z \sqcup a \cap m \sqcup m'$$
$$(z,a) \equiv (z,b), \quad (z,m) \equiv (z,m'), \quad (a,m) \equiv (m,b), \quad (m,a') \equiv (a',m').$$

Die vier Geraden $z \sqcup a$, $z \sqcup m$, $a \sqcup m$, $a' \sqcup m$ sind paarweise verschieden und je zwei besitzen einen Schnittpunkt.

Die Geraden $\{x \parallel z \sqcup a\}$, $\{x \parallel z \sqcup m\}$, $\{x \parallel m \sqcup a\}$, $\{x \parallel m \sqcup a'\}$ sind damit paarweise nicht-parallel.

Der Raum ist regulär, da zu $x \in X$ und $G, H \in \mathfrak{G}_x$ mit $G \neq H$ eine Gerade $I \in \mathfrak{G}$ existiert mit $I \nparallel G, H$. Es sei $g \in G \backslash \{x\}$ und $h := H \cap \{g \parallel I\}$. Wegen $H \nparallel I$ gilt $h \neq x$. $\square$

Bemerkung 2.1.6
Ein fasteuklidischer Raum, in dem jede Linie eine Gerade ist, ist ein euklidischer Raum im Sinne von [7]. Die Bedingung, daß jede Gerade mindestens vier Punkte enthält, folgt aus Lemma 2.1.5.

Da in einem fasteuklidischen Raum das Axiom (KR) gilt, sind euklidische Räume, die einen Koordinatenkörper der Charakteristik 2 besitzen, keine fasteuklidischen Räume.

Satz 2.1.7
In einem fasteuklidischen Raum $(X, D, \langle\rangle)$ gilt

(KPR) $\forall\, a,b,c,d \in X$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $c \notin a \sqcup b$:
$(a,b) \equiv (c,d)$ und $\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \quad \Leftrightarrow \quad d = \mathrm{Pgm}(a,b,c)$ oder $d = \mathrm{Pgm}(b,a,c)$

Beweis: Es sei $\dim(X) \geq 3$ (Sonst folgt die Behauptung aus (KP).) und $a,b,c,d \in X$ mit

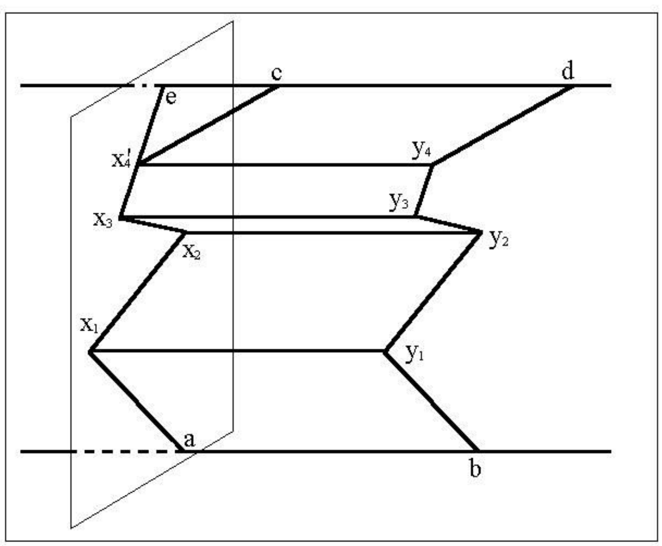


Abbildung 2: $n = 4$

$a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $c \notin a \sqcup b$. Es sei $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}_a$ eine Basis von X mit $a \sqcup b \in \mathfrak{B}$ (Deren Existenz sichert Satz 1.3.4.). Aufgrund von Lemma 1.3.10 ist $e := \{c \parallel a \sqcup b\} \cap \overline{\mathfrak{B} \backslash \{a \sqcup b\}}^{a}$ wohldefiniert.

Nach (Z) existieren Punkte $x_0, \dots, x_n \in X$ mit $a = x_0, x_n = e$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $a \sqcup b \not\subset \overline{\mathfrak{B} \setminus \{a \sqcup b\}}^a$ gilt $x_{i-1} \sqcup x_i \not\parallel a \sqcup b$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Gilt $e = c$ so wähle einen Punkt $x'_n \in x_{n-1} \sqcup x_n \setminus \{x_{n-1}, x_n\}$. Gilt $e \neq c$, so existiert in der Ebene $\overline{\{e \sqcup x_{n-1}, e \sqcup c\}}^e$ nach Lemma 2.1.5 eine Gerade G mit $G \not\parallel e \sqcup c,\ e \sqcup x_{n-1},\ c \sqcup x_{n-1}$, und es sei $x'_n := e \sqcup x_{n-1} \cap \{c \parallel G\}$.

Damit gilt für die Punkte $x'_0 := x_0, \dots, x'_{n-1} := x_{n-1}, x'_n, x'_{n+1} := c$ die Aussage $a \sqcup b \not\parallel x'_{i-1} \sqcup x'_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

$$y_0 := b, \quad y_i := \mathrm{Pgm}(x'_{i-1}, y_{i-1}, x'_i) \ \text{ für } i \in \{1, \dots, n+1\}$$

Mit dem kleinen Axiom von Desargues folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(x'_1, a, x'_2; y_1, b, y_2) \quad &\Rightarrow \quad \langle a, x'_2 \rangle = \langle b, y_2 \rangle \\ &\vdots \\ \mathrm{d}(x'_n, a, x'_{n+1}; y_n, b, y_{n+1}) \quad &\Rightarrow \quad \langle a, x'_{n+1} \rangle = \langle b, y_{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $y_{n+1} = \mathrm{Pgm}(a, b, x'_{n+1})$.

„$\Leftarrow$“: Es gelte O.B.d.A. $d = \mathrm{Pgm}(a, b, c) = y_{n+1}$. Dann folgt mit (KP):

$$(a, b) \equiv (x'_1, y_1) \equiv \cdots \equiv (x'_n, y_n) \equiv (c, d).$$

„$\Rightarrow$“: Es gelte $(a, b) \equiv (c, d)$, $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ und $d \neq \mathrm{Pgm}(b, a, c)$. Aus

$$(a, b) \equiv (x'_1, y_1) \equiv \cdots \equiv (x'_n, y_n)$$

folgt mit (KP): $d = \mathrm{Pgm}(x'_n, y_n, c)$ oder $d = \mathrm{Pgm}(y_n, x'_n, c)$.
Wäre $d = \mathrm{Pgm}(y_n, x'_n, c)$, so folgte:

$$\mathrm{d}(y_n, c, b; x'_n, d, a) \quad \Rightarrow \quad \langle c, b \rangle = \langle d, a \rangle.$$

Dies widerspräche aber $d \neq \mathrm{Pgm}(b, a, c)$. Folglich gilt $d = \mathrm{Pgm}(x'_n, y_n, c)$ und

$$\mathrm{d}(y_n, d, b; x'_n, c, a) \quad \Rightarrow \quad \langle d, b \rangle = \langle c, a \rangle.$$

Also ist $d = \mathrm{Pgm}(a, b, c)$. □

Lemma 2.1.8
In einem Parallelogramm sind gegenüberliegende Seiten kongruent:

$$\forall\, a, b, c, d \in X \text{ mit } c \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G} \text{ und } \langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle, \langle a, c \rangle = \langle b, d \rangle : \\ (a, b) \equiv (c, d) \text{ und } (a, c) \equiv (b, d).$$

Beweis: $(a, b) \equiv (c, d)$ folgt aus (KPR) und $(a, c) \equiv (b, d)$ aus (KLR). □

Lemma 2.1.9
Zu drei Punkten $a, b, c \in X$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ existieren höchstens zwei Punkte $d, d' \in \{c \parallel a \sqcup b\}$, so daß $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (c, d')$ gilt.

Beweis: Es sei $c \notin a \sqcup b$. Für $d \in \{c \parallel a \sqcup b\}$ mit $(a,b) \equiv (c,d)$ gilt nach (KPR):

$$d = \mathrm{Pgm}(a,b,c) \text{ oder } d = \mathrm{Pgm}(b,a,c).$$

Es sei nun $c \in a \sqcup b$. Zu $c' \in X \setminus a \sqcup b$ existiert nach (KPR) ein Punkt $d' \in \{c' \parallel a \sqcup b\}$ mit $(a,b) \equiv (c',d')$. Mit Hilfe des bereits Bewiesenen folgt für $d \in a \sqcup b$ mit $(a,b) \equiv (c,d)$:

$$d = \mathrm{Pgm}(c',d',c) \text{ oder } d = \mathrm{Pgm}(d',c',c).$$

$\square$

Satz 2.1.10
Für drei Punkte $a,b,c \in X$ mit $c \notin a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ gilt:

$$\mathrm{Pgm}(a,b,c) \neq \mathrm{Pgm}(b,a,c).$$

Beweis: Zuerst wird folgende Aussage bewiesen:
Für $p,q,r \in X$ mit $r \notin p \sqcup q \in \mathfrak{G}$ gilt:

(1) $\quad \mathrm{Pgm}(p,q,r) = \mathrm{Pgm}(q,p,r) \quad \Rightarrow \quad \forall\, x \in X \setminus p \sqcup q:\ \mathrm{Pgm}(p,q,x) = \mathrm{Pgm}(q,p,x)$

Es gelte $\mathrm{Pgm}(p,q,r) = \mathrm{Pgm}(q,p,r)$, und es sei $x \in X \setminus p \sqcup q$.

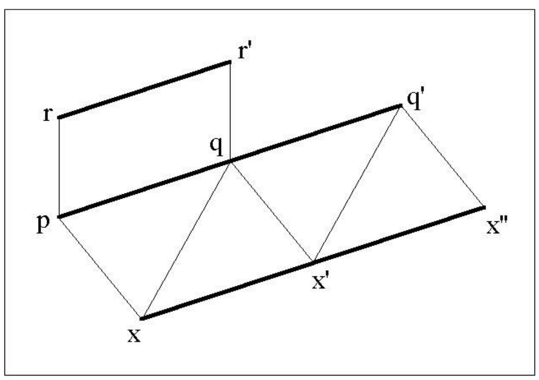


Abbildung 3

$$r' := \mathrm{Pgm}(p,q,r), \quad x' := \mathrm{Pgm}(p,q,x), \quad q' := \mathrm{Pgm}(x,x',q), \quad x'' := \mathrm{Pgm}(q,q',x')$$

Aus $\mathrm{Pgm}(p,q,r) = \mathrm{Pgm}(q,p,r)$ folgt $\langle p,r\rangle = \langle q,r'\rangle$ und $\langle p,r'\rangle = \langle q,r\rangle$. Ferner gilt mit (KPR):

$$(r,r') \equiv (p,q) \equiv (x,x') \equiv (q,q').$$

Mit (KPR) angewandt auf die Punkte q,q',r,r' folgt $\langle q,r\rangle = \langle q',r'\rangle$ oder $\langle q,r'\rangle = \langle q',r\rangle$ und somit

$$\langle q',r'\rangle = \langle q,r\rangle = \langle p,r'\rangle \;\Rightarrow\; \langle r',q'\rangle = \langle r',p\rangle \;\Rightarrow\; p \in r' \sqcup q' \overset{1.3.13}{\Rightarrow} p = q'$$
$$\text{oder}$$
$$\langle q',r\rangle = \langle q,r'\rangle = \langle p,r\rangle \;\Rightarrow\; \langle r,q'\rangle = \langle r,p\rangle \;\Rightarrow\; p \in r \sqcup q' \overset{1.3.13}{\Rightarrow} p = q'.$$

Insgesamt folgt $\mathrm{Pgm}(p,q,x) = \mathrm{Pgm}(q,q',x) = \mathrm{Pgm}(q,p,x)$ und damit (1).

Annahme: Es existieren Punkte $p,q,r \in X$ mit $r \notin p \sqcup q \in \mathfrak{G}$, so daß gilt:

$$\mathrm{Pgm}(p,q,r) = \mathrm{Pgm}(q,p,r)$$

Unter dieser Annahme gilt für je drei Punkte $x,y,z \in X$ mit $z \notin x \sqcup y \in \mathfrak{G}$:

$$\mathrm{Pgm}(x,y,z) = \mathrm{Pgm}(y,x,z) \tag{2}$$

Der Beweis von (2) erfolgt in mehreren Schritten.

a) Ist $\langle x,y\rangle \neq \langle p,q\rangle$ und $x \notin p \sqcup q$, so gilt nach (1):

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pgm}(p,q,x) = \mathrm{Pgm}(q,p,x) =: x' \notin x \sqcup y \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pgm}(x,x',p) = \mathrm{Pgm}(x',x,p) = q \\ \Rightarrow \quad &\mathrm{Pgm}(x,x',y) = \mathrm{Pgm}(x',x,y) =: y' \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Pgm}(x,y,x') = \mathrm{Pgm}(y,x,x') = y' \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{Pgm}(x,y,z) = \mathrm{Pgm}(y,x,z). \end{aligned}$$

b) Ist $\langle x,y\rangle \neq \langle p,q\rangle$ und $x \in p \sqcup q$, so gilt mit $s := \mathrm{Pgm}(p,q,r)$: $\mathrm{Pgm}(r,s,p) = \mathrm{Pgm}(s,r,p) = q$. Der Beweis ist analog zu a), wobei r,s die Rollen von p,q übernehmen.

c) Ist $\langle x,y\rangle = \langle p,q\rangle$, so gilt mit $s := \mathrm{Pgm}(p,q,r)$: $\mathrm{Pgm}(p,r,q) = \mathrm{Pgm}(r,p,q) = s$. Der Beweis ist analog zu a) bzw. b), wobei r und q die Rollen tauschen.

Damit ist die Aussage (2) gewiesen.

Axiom (KR) liefert die Existenz dreier verschiedener Punkte $a,m,b \in X$, so daß $m \in a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $(a,m) \equiv (m,b)$ gilt. Es sei $c \in X \setminus a \sqcup b$. Dann gilt für $m' := \mathrm{Pgm}(a,m,c)$ nach Axiom (KPR) und (2):

$$m' = \mathrm{Pgm}(m,b,c) = \mathrm{Pgm}(b,m,c).$$

Damit folgt $\langle a,c\rangle = \langle m,m'\rangle = \langle b,c\rangle$. Mit (F1) erhält man $a = b$ im Widerspruch zu (KR). Die obige Annahme ist also falsch, womit der Satz bewiesen ist. $\square$

Lemma 2.1.11
Zu drei Punkten $a,b,c \in X$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ existieren genau zwei Punkte $d,d' \in \{c \parallel a \sqcup b\}$, so daß $(a,b) \equiv (c,d) \equiv (c,d')$ gilt.

Beweis: Nach Lemma 2.1.9 existieren höchstens zwei Punkte mit der geforderten Eigenschaft.

Es sei $c \notin a \sqcup b$. Für $d := \mathrm{Pgm}(a,b,c)$ und $d' := \mathrm{Pgm}(b,a,c)$ gilt $d \neq d'$ wegen 2.1.10. Mit (KPR) folgt die Kongruenz $(c,d) \equiv (c,d') \equiv (a,b)$.

Es sei nun $c \in a \sqcup b$. Mit Hilfe des bereits Bewiesenen existiert zu $p \in X \setminus a \sqcup b$ ein Punkt $q \in \{p \parallel a \sqcup b\}$ mit $(a,b) \equiv (p,q)$. Analog zum vorigen Beweisschritt folgen für $d := \mathrm{Pgm}(p,q,c)$ und $d' := \mathrm{Pgm}(q,p,c)$ die Aussagen $d \neq d'$ und $(c,d) \equiv (c,d') \equiv (p,q) \equiv (a,b)$. $\square$

Definition 2.1.12
Ein Punkt $m \in X$ heißt <u>Mittelpunkt</u> von $(a,b) \in X^{(2)}$, wenn $\langle a,m\rangle = \langle m,b\rangle$ und $(a,m) \equiv (m,b)$ gilt.

Satz 2.1.13
In einem fasteuklidischen Raum besitzen alle Paare $(a, b) \in X^{(2)}$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ höchstens einen Mittelpunkt. Existiert dieser, so wird er mit $\mathrm{Mp}(a, b)$ bezeichnet. Offensichtlich gilt: $\mathrm{Mp}(a, b) = \mathrm{Mp}(b, a)$.

In Abschnitt 2.6 wird die Existenz des Mittelpunktes bewiesen.

Beweis: Es seien $m, m' \in a \sqcup b$ Mittelpunkte von $(a, b) \in X^{(2)}$. Da der Raum regulär ist, existiert ein Punkt $c \in X \setminus a \sqcup b$ mit $a \sqcup c$, $c \sqcup m \in \mathfrak{G}$.

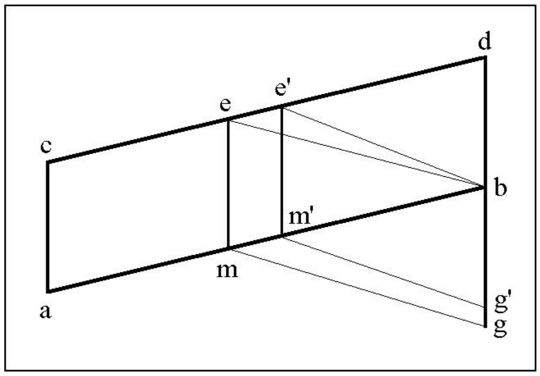


Abbildung 4

$$d := \mathrm{Pgm}(a, b, c), \quad e := \mathrm{Pgm}(a, c, m), \quad e' := \mathrm{Pgm}(a, c, m')$$
$$g := \mathrm{Pgm}(e, m, b), \quad g' := \mathrm{Pgm}(e', m', b)$$

Es gilt $b \neq e, d, g', g$, und mit (KPR) folgt:

$$(d, b) \equiv (e, m) \equiv (e', m') \equiv (g, b) \equiv (g', b).$$

Nach Satz 2.1.10 gilt $d \neq g$ und $d \neq g'$, woraus mit Lemma 2.1.9 $g = g'$ folgt. (KPR) liefert:

$$(m, b) \equiv (a, m) \equiv (c, e) \quad \Rightarrow \quad \langle c, m\rangle = \langle e, b\rangle = \langle m, g\rangle$$
$$(m', b) \equiv (a, m') \equiv (c, e') \quad \Rightarrow \quad \langle c, m'\rangle = \langle e', b\rangle = \langle m', g\rangle.$$

Mit Satz 2.1.10 erhält man: $c = \mathrm{Pgm}(b, e, m) \neq \mathrm{Pgm}(e, b, m) = g$. Aus $c, g \in m' \sqcup c$, $m \sqcup c$ folgt mit $m \sqcup m' \in \mathfrak{G}$ und (F2) die Aussage $m' = m$. $\square$

2.2 Fasteuklidische Koordinatenräume

Lemma 2.2.1
In einem regulären Fastvektorraum $(V,+,F)$ gilt:

$$\exists\,\mathbf{q}\in Q(V)^*:\ K_{\mathbf{q}}(F)=Z(F)\quad\Rightarrow\quad\forall\,\mathbf{r}\in Q(V)^*:\ K_{\mathbf{r}}(F)=Z(F).$$

Beweis: Es sei $\lambda\in F^*$ und $a,b\in F$, und es gelte $K_{\mathbf{q}}(F)=Z(F)$ für ein Element $\mathbf{q}\in Q(V)^*$. Für $\kappa\in K_{\lambda\mathbf{q}}(F)$ gilt mit Satz 1.4.5.d):

$$\begin{aligned}(a\oplus_{\mathbf{q}}b)\lambda^{-1}\kappa\lambda&=(a\lambda^{-1}\lambda\oplus_{\mathbf{q}}b\lambda^{-1}\lambda)\lambda^{-1}\kappa\lambda=(a\lambda^{-1}\oplus_{\lambda\mathbf{q}}b\lambda^{-1})\lambda\lambda^{-1}\kappa\lambda\\&=(a\lambda^{-1}\oplus_{\lambda\mathbf{q}}b\lambda^{-1})\kappa\lambda=(a\lambda^{-1}\kappa\oplus_{\lambda\mathbf{q}}b\lambda^{-1}\kappa)\lambda\\&=a\lambda^{-1}\kappa\lambda\oplus_{\mathbf{q}}b\lambda^{-1}\kappa\lambda.\end{aligned}$$

Damit folgt $\lambda^{-1}K_{\lambda\mathbf{q}}(F)\,\lambda\subset K_{\mathbf{q}}(F)=Z(F)$ und $K_{\lambda\mathbf{q}}(F)\subset Z(F)$. Die andere Inklusion gilt in jedem Fastkörper.

Da nach Lemma 1.4.9 zu $\mathbf{r}$ ein Element $\lambda\in F^*$ mit $\oplus_{\mathbf{r}}=\oplus_{\lambda\mathbf{q}}$ existiert, folgt $K_{\mathbf{r}}(F)=K_{\mathbf{q}}(F)=Z(F)$. □

Bis zum Ende dieses Abschnitts sei $(F,+,\cdot)$ ein Fastkörper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und $(V,+,F)$ ein regulärer Fastvektorraum mit $\mathbf{q}\in Q(V)^*$. Mit $\mathfrak{U}_2(V)$ wird die Menge seiner zweidimensionalen Unterräume bezeichnet.

Außerdem wird vorausgesetzt, daß eine nullteilige symmetrische $\mathbf{q}$-Bilinearform auf V existiert, die im folgenden mit $f_{\mathbf{q}}$ bezeichnet wird, und daß $K_{\mathbf{q}}(F)=Z(F)$ gilt.

Definition und Satz 2.2.2
Für $\mathbf{z}\in Q(V)$ sei $\mathbf{z}^{\perp f_{\mathbf{q}}}:=\mathbf{y}^{\perp f_{\mathbf{q}}}$, wobei $\mathbf{y}\in R_{\mathbf{q}}(V)$ mit $F\mathbf{z}=F\mathbf{y}$ gilt.

$\mathbf{z}^{\perp f_{\mathbf{q}}}$ ist wohldefiniert:
Nach Lemma 1.4.9 existiert zu $\mathbf{q}$ und $\mathbf{z}$ ein Element $\lambda\in F^*$ mit $\mathbf{y}=\lambda\mathbf{z}\in R_{\mathbf{q}}(V)$. Es sei $\mu\in F^*$ ein weiteres Element mit der Eigenschaft $\mathbf{y}':=\mu\mathbf{z}\in R_{\mathbf{q}}(V)$. Dann gilt $\mathbf{y}'=\mu\lambda^{-1}\mathbf{y}$, woraus mit Satz 1.4.7.e) $\mu\lambda^{-1}\in K_{\mathbf{q}}(F)$ folgt.

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}')=0\quad\Leftrightarrow\quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mu\lambda^{-1}\mathbf{y})=f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}\mu\lambda^{-1})=f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})\mu\lambda^{-1}=0\quad\Leftrightarrow\quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$$

Definition und Satz 2.2.3
Für $\mathbf{g}\in R_{\mathbf{q}}(V)^*$, $G:=F\mathbf{g}$ und $\mathbf{x}\in V$ sei $\mathbf{x}_G:=f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})^{-1}f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g})\,\mathbf{g}$.

$\mathbf{x}_G$ ist wohldefiniert:
Da $f_{\mathbf{q}}$ nullteilig ist, gilt $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})\neq 0$. Zu $\mathbf{g}'\in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $F\mathbf{g}'=F\mathbf{g}$ existiert ein Element $\kappa\in F^*$ mit $\mathbf{g}'=\kappa\mathbf{g}$, welches nach Satz 1.4.7.e) in $K_{\mathbf{q}}(F)^*$ liegt.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_G&=f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}',\mathbf{g}')^{-1}f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g}')\,\mathbf{g}'=f_{\mathbf{q}}(\kappa\mathbf{g},\kappa\mathbf{g})^{-1}f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\kappa\mathbf{g})\,\kappa\mathbf{g}\\&=\big(\kappa f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})\kappa\big)^{-1}f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g})\,\kappa^2\mathbf{g}=f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})^{-1}f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g})\,\mathbf{g}\end{aligned}$$

Lemma 2.2.4
Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ und $G := F\mathbf{g}$.

a) $\forall\, \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{x} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}_G = \mathbf{0}$

b) $\forall\, \mathbf{x} \in V: \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_G \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{g}$

c) $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ \ \forall\, \lambda, \mu \in F: \quad (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})_G = \lambda\mathbf{x}_G + \mu\mathbf{y}_G$

d) $\forall\, E \in \mathfrak{U}_2(V)$ mit $\mathbf{g} \in E \ \ \forall\, \mathbf{x} \in E: \quad \mathbf{x} - \mathbf{x}_G \in Q(V)$

Beweis: Aus Lemma 1.4.21 folgt $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \in K_{\mathbf{q}}(F)$.

a)
$$\mathbf{x}_G = \mathbf{0} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, \mathbf{g} \quad \Leftrightarrow \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) = 0$$

b)
$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_G, \mathbf{g}) &= f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x} - f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, \mathbf{g}\,,\ \mathbf{g}\big) \\ &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, \mathbf{g}\,,\ \mathbf{g}\big) \\ &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})_G &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}, \mathbf{g})\, \mathbf{g} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} \big(\lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}) \oplus_q \mu\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{g})\big)\, \mathbf{g} \\ &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, \mathbf{g} + f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1} \mu\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{g})\, \mathbf{g} = \lambda\mathbf{x}_G + \mu\mathbf{y}_G \end{aligned}$$

d) Nach b) gilt $\mathbf{x} - \mathbf{x}_G \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{g}$. Satz 1.4.24 liefert $\mathbf{g}^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}} \in \mathfrak{U}(V)$. Da $f_{\mathbf{q}}$ nullteilig ist, gilt $\mathbf{g} \not\perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{g}$ und damit $\mathbf{g}^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}} \subsetneq E$. Es folgt $\dim(\mathbf{g}^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}) = 1$ und $\mathbf{x} - \mathbf{x}_G \in Q(V)$.

$\square$

Definition 2.2.5
In der Koordinatengeometrie $(V, D_F, \langle\rangle_{+,F})$ werden die folgenden Relationen eingeführt:

$$\begin{aligned} \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} \ :=\ & \Big\{ \big((\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) \in (V^2)^2 \ \Big|\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \in Q(V)^* \text{ und } f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{g}), \\ & \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{g}) \neq 0 \text{ und } f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \Big\} \\ & \cup \Big\{ \big((\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) \in (V^2)^2 \ \Big|\ (\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{0} \Big\}, \\ & \quad \text{wobei } \mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^* \text{ mit } F\mathbf{g} = F\big((\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{v} - \mathbf{u})\big) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \equiv^{f_{\mathbf{q}}} \ :=\ & \Big\{ \big((\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{u}, \mathbf{v})\big) \in (V^2)^2 \ \Big|\ \exists\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in V: \\ & \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} \cdots \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \Big\} \end{aligned}$$

Die Relation $\equiv^{f_{\mathbf{q}}}$ ist die transitive Hülle von $\equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}}$. Die Relation $\equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}}$ ist wohldefiniert, da zu

$\mathbf{g}, \mathbf{g}' \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $F\mathbf{g} = F\mathbf{g}'$ ein Element $\kappa \in K_{\mathbf{q}}(F)^*$ mit $\mathbf{g}' = \kappa\mathbf{g}$ existiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g}')\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g}')^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g}')\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g}')^{-1} \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\kappa\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\kappa\mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\kappa\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\kappa\mathbf{g})^{-1} \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})\kappa \left(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})\kappa\right)^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})\kappa \left(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})\kappa\right)^{-1} \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})^{-1}. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \in V$ die Kongruenz $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}} (\mathbf{x}+\mathbf{a}, \mathbf{y}+\mathbf{a})$.

Im folgenden werden meist die Schreibweisen $\equiv_Q$ und $\equiv$ statt $\equiv_Q^{f_{\mathbf{q}}}$ und $\equiv^{f_{\mathbf{q}}}$ verwendet, wenn $\mathbf{q}$ und $f_{\mathbf{q}}$ fest vorgegeben sind.

Satz 2.2.6
Ist V ein Vektorraum, so gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^*$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}).$$

Die Definition der Relation $\equiv$ fällt also mit der aus der euklidischen Geometrie bekannten $\big([7]\big)$ zusammen.

Beweis: Es sei $\mathbf{q} \in V^*$. Dann gilt $R_{\mathbf{q}}(V) = Q(V) = V$. Folglich ist $(F, \oplus_{\mathbf{q}}, \cdot)$ ein Schiefkörper. Aus $F = K_{\mathbf{q}}(F) = Z(F)$ folgt, daß $(F, \oplus_{\mathbf{q}}, \cdot)$ sogar ein Körper ist. Wegen $Q(V) = V$ stimmen $\equiv_Q$ und $\equiv$ überein.

Unter der Bedingung $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}-\mathbf{x}), f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}-\mathbf{x}) \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})^{-1} \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x}, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y}, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x}, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = \\ & f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y}, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x})\,(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} + \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} - \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} + \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x},(\mathbf{x}-\mathbf{y})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} + \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) = f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y},(\mathbf{y}-\mathbf{x})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} + \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}+\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = \\ & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \ominus_{\mathbf{q}} 0 = \\ & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})},\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) \ominus_{\mathbf{q}} 0 \\ \Leftrightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Aus $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y})$ folgt:

$$\begin{aligned}
& f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{x}) \\
\Rightarrow\quad & f_{\mathbf{q}}(-\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\
\Rightarrow\quad & \begin{cases} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = \frac{1}{2} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \neq 0 \\ f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{y}-\mathbf{x}) = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}-\mathbf{x}) \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.7
Die Relation $\equiv$ ist eine Kongruenzrelation.

Beweis: Nach Definition ist $\equiv$ reflexiv, symmetrisch und transitiv. Für $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ gilt:

(K1) $(\mathbf{x}-\mathbf{x}) - (\mathbf{y}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{y},\mathbf{y})$

(K2) Für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ folgt die Behauptung aus (K1). Für $\mathbf{y}-\mathbf{x} \in Q(V)^*$ gilt:

$$(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - (\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in Q(V)^*.$$

Es existiert ein Element $\lambda \in F^*$, so daß $\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in R_{\mathbf{q}}(V)$ gilt.

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) &= \lambda^{-1} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \neq 0 \\
f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x}-\mathbf{y},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) &= -\lambda^{-1} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \neq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)\, f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x}-\mathbf{y},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)^{-1} \\
={}& f_{\mathbf{q}}\big(-(\mathbf{x}-\mathbf{y}),\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)\, f_{\mathbf{q}}\big(-(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)^{-1} \\
={}& f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{x}-\mathbf{y},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)\, f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)^{-1}
\end{aligned}$$

Damit folgt $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{y}-\mathbf{x} \notin Q(V)$, so gilt mit Axiom (Z): $n := \dim\big(\overline{\{\mathbf{y}-\mathbf{x}\}}\big) \in \mathbb{N}$. Es sei $(\mathbf{b}_i)_i \in R_{\mathbf{q}}(V)^n$ eine Basis von $\overline{\{\mathbf{y}-\mathbf{x}\}}$.

$$\mathbf{c}_i := \mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{b}_i)_{F\mathbf{c}_j} \quad \text{für } i \in \{1,\ldots,n\}$$

Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt $\mathbf{c}_i \neq \mathbf{0}$, da $(\mathbf{b}_i)_i$ eine Basis ist, und $\mathbf{c}_i \in R_{\mathbf{q}}(V)$, da $(\mathbf{b}_i)_i \in R_{\mathbf{q}}(V)^n$ ist.

Es gilt für $k,l \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k > l$: $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_k,\mathbf{c}_l) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_l,\mathbf{c}_k) = 0$, was durch Induktion über k gezeigt wird:

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_1) &= f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{b}_2 - (\mathbf{b}_2)_{F\mathbf{c}_1},\mathbf{c}_1\big) = 0 \\
f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_k,\mathbf{c}_l) &= f_{\mathbf{q}}\Big(\mathbf{b}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{b}_k)_{F\mathbf{c}_j},\mathbf{c}_l\Big) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_l) \ominus_{\mathbf{q}} \sum_{j=1}^{k-1}{}^{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big((\mathbf{b}_k)_{F\mathbf{c}_j},\mathbf{c}_l\big) \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_k,\mathbf{c}_l) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big((\mathbf{b}_k)_{F\mathbf{c}_l},\mathbf{c}_l\big) = f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{b}_k - (\mathbf{b}_k)_{F\mathbf{c}_l},\mathbf{c}_l\big) = 0
\end{aligned}$$

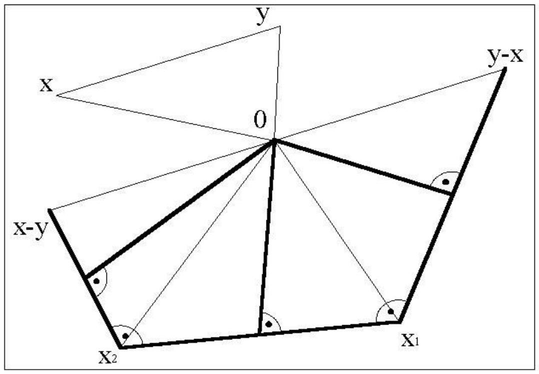


Abbildung 5: $n = 3$

Es existieren Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ mit $2(\mathbf{y}-\mathbf{x}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\, \mathbf{c}_i$. Wegen $\dim\big(\overline{\{\mathbf{y}-\mathbf{x}\}}\big) = n$ gilt $\lambda_i \neq 0$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\mathbf{x}_i := \mathbf{y} - \mathbf{x} - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j\, \mathbf{c}_j \quad \text{für } i \in \{0, \ldots, n\}$$

Damit gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1} = -\lambda_i\, \mathbf{c}_i \in Q(V)^*.$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{i-1})_{F\mathbf{c}_i} &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} f_{\mathbf{q}}\Big(\mathbf{y} - \mathbf{x} - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j\, \mathbf{c}_j\,,\; \mathbf{c}_i\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} \Big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \ominus_{\mathbf{q}} \sum_{j=1}^{i-1}{}^{\mathbf{q}} \lambda_j\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i)\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}_i)\, \mathbf{c}_i = (\mathbf{y}-\mathbf{x})_{F\mathbf{c}_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_{i})_{F\mathbf{c}_i} &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} f_{\mathbf{q}}\Big(\mathbf{y} - \mathbf{x} - \sum_{j=1}^{i} \lambda_j\, \mathbf{c}_j\,,\; \mathbf{c}_i\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} \Big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \ominus_{\mathbf{q}} \sum_{j=1}^{i}{}^{\mathbf{q}} \lambda_j\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) \ominus_{\mathbf{q}} \sum_{j=i+1}^{n}{}^{\mathbf{q}} \lambda_j\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i)\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} \Big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, \mathbf{c}_j\,,\; \mathbf{c}_i\Big)\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} \Big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(2(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \mathbf{c}_i\big)\Big)\, \mathbf{c}_i \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{c}_i)\, \mathbf{c}_i = (\mathbf{x}-\mathbf{y})_{F\mathbf{c}_i}
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)\, \mathbf{c}_i = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)(\mathbf{x}_i)_{F\mathbf{c}_i} = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i)(\mathbf{x}_{i-1})_{F\mathbf{c}_i} = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{c}_i)\, \mathbf{c}_i \\
\Rightarrow \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i) = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{c}_i)
\end{gathered}$$

Es gilt $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i) \neq 0$, da ansonsten $\dim\bigl(\overline{\mathbf{y}-\mathbf{x}}\bigr) < n$ wäre.

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{c}_i)^{-1} = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{c}_i)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_i, \mathbf{c}_i)^{-1}$$

Insgesamt ergibt sich:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_1) \equiv_Q \cdots \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{x}, \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}) \equiv_Q \cdots \\ &\cdots \equiv_Q (\mathbf{x}, \mathbf{x}_n + \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{y}, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

(K3) Es gelte $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{z}, \mathbf{z})$. Da für $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ stets $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{z} - \mathbf{z}, \mathbf{g}) = 0$ ist, folgt aus der Definition von $\equiv_Q$: $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - (\mathbf{z} - \mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Also gilt $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Es gelte nun $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (\mathbf{z}, \mathbf{z})$. Dann existieren Elemente $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n \in V$ mit $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \equiv_Q \cdots \equiv_Q (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \equiv_Q (\mathbf{z}, \mathbf{z})$. Aus dem vorigen Beweisschritt folgt:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{y}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{y}_{n-1} \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

□

Lemma 2.2.8
Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ mit $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y})$ gilt:

a) $\forall\, \lambda \in F: \quad (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{y})$

b) $\mathbf{y} \in F\mathbf{x} \setminus \{\mathbf{x}\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = -\mathbf{x} \in Q(V)$

c) $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} = -\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}$

d) $\frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}$

e) $\forall\, \lambda, \mu \in F: \quad (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{x} - \mu\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{y} - \mu\mathbf{y})$

Beweis: Da für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ alle Aussagen trivial sind, sei im folgenden $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

a) Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $F\mathbf{g} = F(\mathbf{y} - \mathbf{x})$, und es gelte $\lambda \neq 0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (Sonst ist nichts zu zeigen.).

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g}),\ f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{g}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{g}),\ f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{g}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{g})^{-1} &= \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{g})^{-1} \lambda^{-1} \\ &= \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \lambda^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \end{aligned}$$

b) Es sei $\lambda \in F^*$ mit $\mathbf{y} = \lambda\mathbf{x}$. Aus $\mathbf{0}, \mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \in \mathbf{x} + F\mathbf{x}$ und $\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \in Q(V)^*$ folgt mit Satz 1.3.13 $\mathbf{x} \in F(\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x})$, so daß $\mathbf{x} \in Q(V)$ gilt. Für $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ und $\mu \in F^*$ mit $\mathbf{x} = \mu\mathbf{g}$ gilt:

$$\begin{aligned} & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \\ \Rightarrow\ & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1}\lambda^{-1} = \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \\ \Rightarrow\ & f_{\mathbf{q}}(\mu\mu^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mu\mu^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1}\lambda^{-1} = \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mu\mu^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mu\mu^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{g})^{-1} \\ \Rightarrow\ & \mu\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1}\mu^{-1}\lambda^{-1} = \lambda\mu\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g}, \mathbf{g})^{-1}\mu^{-1} \\ \Rightarrow\ & \mu\mu^{-1}\lambda^{-1} = \lambda\mu\mu^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda^{-1} = \lambda \quad \Rightarrow \quad 1 = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1. \end{aligned}$$

c) Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $G := F\mathbf{g} = F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Dann gilt:

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_G,\mathbf{g}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g}) \neq 0$$
$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}_G,\mathbf{g}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{g}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_G,\mathbf{g}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{g}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}_G,\mathbf{g})^{-1} &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{g})^{-1} \\ &= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}_G,\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g})^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathbf{0},\mathbf{x}_G) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y}_G)$, so daß mit b) die Behauptung folgt.

d) Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $G := F\mathbf{g} = F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Mit c) folgt:

$$\mathbf{x}-\mathbf{y} = (\mathbf{x}-\mathbf{y})_G = \mathbf{x}_G - \mathbf{y}_G \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}-\mathbf{x}_G = \mathbf{y}-\mathbf{y}_G$$
$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_G+\mathbf{y}-\mathbf{y}_G) = \mathbf{x}-\mathbf{x}_G.$$

e) Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $G := F\mathbf{g} = F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$, und es gelte $\lambda \neq \mu$ (Sonst ist nichts zu zeigen.). Aus $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\mathbf{g}), f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{g}) \neq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x},\mathbf{g}) &= f_{\mathbf{q}}\big((\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x})_G + (\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x}) - (\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x})_G\,,\,\mathbf{g}\big) \\ &= f_{\mathbf{q}}\big((\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x})_G\,,\,\mathbf{g}\big) \oplus_q f_{\mathbf{q}}\big((\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x}) - (\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x})_G\,,\,\mathbf{g}\big) \\ &= f_{\mathbf{q}}\big((\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x})_G\,,\,\mathbf{g}\big) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}_G-\mu\mathbf{x}_G\,,\,\mathbf{g}) \\ &= f_{\mathbf{q}}\big((\lambda \ominus_{\mathbf{x}_G} \mu)\mathbf{x}_G\,,\,\mathbf{g}\big) = (\lambda \ominus_{\mathbf{x}_G} \mu)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g}) \neq 0. \end{aligned}$$

Analog erhält man $f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}-\mu\mathbf{y},\mathbf{g}) = (\lambda \ominus_{\mathbf{y}_G} \mu)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}_G,\mathbf{g}) \neq 0$.
Nach c) gilt $\mathbf{x}_G = -\mathbf{y}_G$, woraus $\oplus_{\mathbf{x}_G} = \oplus_{\mathbf{y}_G}$ folgt.

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}-\mu\mathbf{y},\mathbf{g})^{-1} &= (\lambda \ominus_{\mathbf{x}_G} \mu)\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(-\mathbf{x}_G,\mathbf{g})^{-1}\, (\lambda \ominus_{\mathbf{y}_G} \mu)^{-1} \\ &= (\lambda \ominus_{\mathbf{y}_G} \mu)\, f_{\mathbf{q}}(-\mathbf{x}_G,\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}_G,\mathbf{g})^{-1}\, (\lambda \ominus_{\mathbf{x}_G} \mu)^{-1} \\ &= f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y}-\mu\mathbf{y},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{x},\mathbf{g})^{-1} \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.9
Für $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{y} \in R_{\mathbf{q}}(V)$ und $\lambda,\mu \in F^*$ gilt:

$$\mathbf{x} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{y} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y}).$$

Beweis: Es gelte $\mathbf{x},\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, da ansonsten nichts zu zeigen wäre.

Es gilt: $(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}) - (\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y}) = 2\mu\mathbf{y} \in Q(V)^*$.

„$\Rightarrow$“:

$$f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) \oplus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = \mu f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \neq 0$$
$$f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) \oplus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}(-\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(-\mu\mathbf{y},\mathbf{y}) = -\mu f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\mathbf{y}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y},\mathbf{y})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y},\mathbf{y})^{-1} &= f_{\mathbf{q}}(\mu\mathbf{y},\mathbf{y})\, f_{\mathbf{q}}(-\mu\mathbf{y},\mathbf{y})^{-1} \\ &= f_{\mathbf{q}}(-\mu\mathbf{y},\mathbf{y})\, f_{\mathbf{q}}(\mu\mathbf{y},\mathbf{y})^{-1} \\ &= f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y},\mathbf{y})\, f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y},\mathbf{y})^{-1} \end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Mit Lemma 2.2.8.c) folgt:

$$\begin{aligned} (\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y})_{F\mathbf{y}} = -(\lambda\mathbf{x}-\mu\mathbf{y})_{F\mathbf{y}} \quad &\Rightarrow \quad \lambda\mathbf{x}_{F\mathbf{y}} + \mu\mathbf{y}_{F\mathbf{y}} = -\lambda\mathbf{x}_{F\mathbf{y}} + \mu\mathbf{y}_{F\mathbf{y}} \\ &\Rightarrow \quad \lambda\mathbf{x}_{F\mathbf{y}} = -\lambda\mathbf{x}_{F\mathbf{y}} \quad \Rightarrow \quad \lambda\mathbf{x}_{F\mathbf{y}} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{x}_{F\mathbf{y}} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{y}. \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 2.2.10
In einer Ebene $E \in \mathfrak{U}_2(V)$ gilt für $\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$:

$$(\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},-\mathbf{y}).$$

Beweis: Es sei $\mathbf{y} \notin F\mathbf{x}$ (Sonst folgt die Behauptung aus Lemma 2.2.8.b).).
Aus $(\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y})$ folgt mit Lemma 2.2.4.b) und d) $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in Q(V)$ und $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in (\mathbf{x}-\mathbf{y})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}$.
Damit gilt nach Lemma 2.2.9:

$$\left(\mathbf{0},\, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - \tfrac{1}{2}(-\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) \equiv \left(\mathbf{0},\, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \tfrac{1}{2}(-\mathbf{x}-\mathbf{y})\right) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},-\mathbf{y}).$$

$\square$

Lemma 2.2.11
Für $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ gilt:

$$(\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y}) \ \text{ und } \ \mathbf{x} \in Q(V) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} \in Q(V).$$

Beweis: Es gelte $\mathbf{y} \notin F\mathbf{x}$, da sonst die Behauptung mit Lemma 2.2.8.b) folgt. Es sei $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $G := F\mathbf{g} = F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Nach Lemma 2.2.8.c) und d) gilt:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_G + \mathbf{y}_G = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathbf{x}_G.$$

Wegen $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in \overline{\{\mathbf{0},\mathbf{x},\mathbf{x}_G\}} \in \mathfrak{U}_2(V)$ folgt mit Lemma 2.2.4.d): $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \in Q(V)$. Nach Lemma 1.4.9 gilt: $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \mathbf{x}, \mathbf{x}_G \in R_{\mathbf{x}}(V)$. Mit Satz 1.4.7.a) folgt:

$$\mathbf{y} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) - \mathbf{x}_G \in R_{\mathbf{x}}(V) \subset Q(V).$$

$\square$

Satz 2.2.12
Die Relation $\equiv$ erfüllt die Axiome (KLR), (KPR) und damit in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ die Axiome (KP), (KL).

Beweis:
Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$ mit $\mathbf{b}-\mathbf{a} \in Q(V)^*$ und $\mathbf{c} \notin \mathbf{a}+F(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Dann folgt mit Lemma 2.2.8.b) und (K2):

$$\begin{aligned} & \mathbf{d} = \mathrm{Pgm}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \text{ oder } \mathbf{d} = \mathrm{Pgm}(\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{b}-\mathbf{a} = \mathbf{d}-\mathbf{c} \text{ oder } \mathbf{b}-\mathbf{a} = -(\mathbf{d}-\mathbf{c}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{d}-\mathbf{c} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \text{ und } (\mathbf{0},\mathbf{b}-\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{d}-\mathbf{c}) \\ \Leftrightarrow\ & \mathbf{d}-\mathbf{c} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \text{ und } (\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv_Q (\mathbf{c},\mathbf{d}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = \mathrm{Pgm}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) \quad & \Rightarrow \quad \mathbf{c}-\mathbf{a} = \mathbf{d}-\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0},\mathbf{c}-\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{d}-\mathbf{b}) \\ & \Rightarrow \quad (\mathbf{a},\mathbf{c}) \equiv_Q (\mathbf{d},\mathbf{b}) \end{aligned}$$

□

Satz 2.2.13
Die Relation $\equiv$ erfüllt in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ das Axiom (KR).

Beweis: Nach Satz 1.5.2.e) existieren Elemente $\mathbf{x} \in V$ und $U \in \mathfrak{U}(V)$ mit $E = \mathbf{x} + U$. Da V regulär ist, existiert ein Element $\mathbf{u} \in R_{\mathbf{q}}(V)^* \cap U$. Es sei $\mathbf{v} \in Q(V)^* \cap U$ mit $\mathbf{v} \notin F\mathbf{u}$. Dann gilt nach Lemma 2.2.4.b): $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}} \perp_{f_{\mathbf{q}}} \mathbf{u}$. Da U offensichtlich zweidimensional ist, folgt mit Lemma 2.2.4.d): $\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}} \in \mathfrak{G}$. Aufgrund der Regularität von V existiert ein Element $\lambda \in F^*$ mit $\lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}}) \in R_{\mathbf{q}}(V)$.

$$\begin{gathered} \mathbf{z} := \mathbf{x}, \quad \mathbf{a} := \mathbf{x} + \mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}}), \quad \mathbf{b} := \mathbf{x} + \mathbf{u} - \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}}) \\ \mathbf{m} := \mathbf{x} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{a}' := \mathbf{x} + \mathbf{u}_{F(\mathbf{a}-\mathbf{z})}, \quad \mathbf{m}' := \mathbf{x} + 2\mathbf{u}_{F(\mathbf{a}-\mathbf{z})} - \mathbf{u} \end{gathered}$$

Es gilt nach Satz 1.4.7a) und Lemma 2.2.4.d):

$$\begin{gathered} \mathbf{a} - \mathbf{z} = \mathbf{u} + \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}}) \in Q(V), \quad \mathbf{m} - \mathbf{z} = \mathbf{u} \in Q(V) \\ \mathbf{b} - \mathbf{a} = -2\lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{F\mathbf{u}}) \in Q(V), \quad \mathbf{m}' - \mathbf{m} = 2(\mathbf{u}_{F(\mathbf{a}-\mathbf{z})} - \mathbf{u}) \in Q(V). \end{gathered}$$

Mit Lemma 2.2.9 folgt:

$$(\mathbf{z},\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{z},\mathbf{b}), \quad (\mathbf{z},\mathbf{m}) \equiv_Q (\mathbf{z},\mathbf{m}'), \quad (\mathbf{a},\mathbf{m}) \equiv_Q (\mathbf{m},\mathbf{b}), \quad (\mathbf{m},\mathbf{a}') \equiv_Q (\mathbf{a}',\mathbf{m}').$$

□

Satz 2.2.14
Die Relation $\equiv$ erfüllt in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ folgende Bedingung:

$$\begin{gathered} \forall\, \mathbf{z},\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d} \in E \text{ mit } \mathbf{z} \notin \mathbf{a} + F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \mathfrak{G},\ \mathbf{c}-\mathbf{z} \in F(\mathbf{a}-\mathbf{z}),\ \mathbf{d}-\mathbf{z} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{z}) : \\ (\mathbf{z},\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{z},\mathbf{b}) \text{ und } \mathbf{d}-\mathbf{c} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{z},\mathbf{c}) \equiv_Q (\mathbf{z},\mathbf{d}). \end{gathered}$$

Beweis: Aus $\mathbf{z} \notin \mathbf{a}+F(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ folgt $\mathbf{b}-\mathbf{z}$, $\mathbf{d}-\mathbf{z} \neq 0$ und $F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \neq F(\mathbf{b}-\mathbf{z})$. Es existiert ein Element $\lambda \in F^*$ mit $\mathbf{c}-\mathbf{z} = \lambda(\mathbf{a}-\mathbf{z})$. Es gilt:

$$\begin{gathered} -(\mathbf{c}-\mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{z}) = \lambda(-\mathbf{a}+\mathbf{z}+\mathbf{b}-\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \\ -(\mathbf{c}-\mathbf{z}) + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{z}) \ \in\ -(\mathbf{c}-\mathbf{z}) + F(\mathbf{b}-\mathbf{z}). \end{gathered}$$

Aus den Vorraussetzungen folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}-\mathbf{z} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{z}) \quad &\Rightarrow \quad -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+(\mathbf{d}-\mathbf{z}) \in -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+F(\mathbf{b}-\mathbf{z}) \\
\mathbf{d}-\mathbf{c} \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \quad &\Rightarrow \quad -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+(\mathbf{d}-\mathbf{z}) \in F(\mathbf{b}-\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

Wegen $\left|\big(-(\mathbf{c}-\mathbf{z})+F(\mathbf{b}-\mathbf{z})\big) \cap F(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right| = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
-(\mathbf{c}-\mathbf{z})+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{z}),\ -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+(\mathbf{d}-\mathbf{z}) &\in \big(-(\mathbf{c}-\mathbf{z})+F(\mathbf{b}-\mathbf{z})\big) \cap F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \\
\Rightarrow \quad -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{z}) &= -(\mathbf{c}-\mathbf{z})+(\mathbf{d}-\mathbf{z}).
\end{aligned}$$

Damit gilt $\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{z}) = \mathbf{d}-\mathbf{z}$. Mit Lemma 2.2.8.a) folgt $(\mathbf{z},\mathbf{c}) \equiv_Q (\mathbf{z},\mathbf{d})$. □

Satz 2.2.15
Die Relation $\equiv$ erfüllt folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}
\forall\, \mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{d}' \in V \text{ mit } \mathbf{c} \in \mathbf{a}+F(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \neq \{\mathbf{a}\},\ \mathbf{d} \notin \mathbf{a}+F(\mathbf{b}-\mathbf{a}),\ \mathbf{d}-\mathbf{d}' \in Q(V): \\
(\mathbf{a},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{a},\mathbf{d}'),\ (\mathbf{b},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{b},\mathbf{d}') \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{c},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{c},\mathbf{d}').
\end{aligned}$$

Beweis: Es sei $\mathbf{d} \neq \mathbf{d}'$ (Sonst ist nichts zu zeigen.) und $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $G := F\mathbf{g} = F(\mathbf{d}-\mathbf{d}')$. Aus $(\mathbf{a},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{a},\mathbf{d}')$ und $(\mathbf{b},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{b},\mathbf{d}')$ folgt mit Lemma 2.2.8.c):

$$(\mathbf{d}-\mathbf{a})_G = -(\mathbf{d}'-\mathbf{a})_G, \quad (\mathbf{d}-\mathbf{b})_G = -(\mathbf{d}'-\mathbf{b})_G.$$

Es sei $\mathbf{e} := \frac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{d}')$.

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{e},\mathbf{g})\,\mathbf{g} &= f_{\mathbf{q}}\big(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{d})+\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{d}')\,,\,\mathbf{g}\big)\,\mathbf{g} \\
&= f_{\mathbf{q}}\big(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{d})\,,\,\mathbf{g}\big)\,\mathbf{g} + f_{\mathbf{q}}\big(\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{d}')\,,\,\mathbf{g}\big)\,\mathbf{g} \\
&= \tfrac{1}{2} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})\,\big(f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{d},\mathbf{g})\,\mathbf{g} + f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})^{-1} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{d}',\mathbf{g})\,\mathbf{g}\big) \\
&= \tfrac{1}{2} f_{\mathbf{q}}(\mathbf{g},\mathbf{g})\,\big((\mathbf{a}-\mathbf{d})_G + (\mathbf{a}-\mathbf{d}')_G\big) \\
&= \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{e},\mathbf{g}) &= 0
\end{aligned}$$

Analog erhält man $f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}-\mathbf{e},\mathbf{g}) = 0$. Es existiert ein Element $\lambda \in F$ mit $\mathbf{c} = \mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})$.

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{q}}(\mathbf{c}-\mathbf{e},\mathbf{g}) &= f_{\mathbf{q}}\big(\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a})-\mathbf{e},\mathbf{g}\big) \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{e},\mathbf{g}) \oplus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda(\mathbf{b}-\mathbf{e})-\lambda(\mathbf{a}-\mathbf{e})\,,\,\mathbf{g}\big) \\
&= f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{e},\mathbf{g}) \oplus_{\mathbf{q}} \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}-\mathbf{e},\mathbf{g}) \ominus_{\mathbf{q}} \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{a}-\mathbf{e},\mathbf{g}) = 0
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.9 folgt:

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{0},(\mathbf{c}-\mathbf{e})+(\mathbf{d}-\mathbf{e})\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0},(\mathbf{c}-\mathbf{e})-(\mathbf{d}-\mathbf{e})\big) \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathbf{0},\mathbf{c}-\mathbf{d}') \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{c}-\mathbf{d}) \\
&\Leftrightarrow \quad (\mathbf{c},\mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{c},\mathbf{d}').
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.16
In einer Ebene $E \in \mathfrak{U}_2(V)$ gilt:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E \text{ paarweise verschieden mit } (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}),\ (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{z}) :$$
$$\mathbf{x} - \mathbf{z} \in Q(V) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in Q(V) \text{ und } (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{z}).$$

Beweis: Es gelte $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} = -\mathbf{z}$. O.B.d.A. wird nur der Fall $\mathbf{x} = -\mathbf{y}$ betrachtet. Aus Lemma 2.2.8.b) folgt $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q(V)$ und aus Lemma 2.2.11 $\mathbf{z} \in Q(V)$.

Aus $(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{z})$ folgt mit Lemma 2.2.8.d) und c): $\frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})}$ und $\mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} = -\mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})}$.

$$\mathbf{x} = -\mathbf{y} = -\mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} + \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} - \mathbf{y} = \mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} - \tfrac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z})$$
$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} + \mathbf{z} - \mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} = \mathbf{z}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z})$$

Mit Lemma 2.2.4.b) und Lemma 2.2.9 folgt $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{z})$.

Es gelte nun $\mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$ und $\mathbf{y} \neq -\mathbf{z}$. Die Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{y}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})}$ sind paarweise verschieden, und es gilt: $\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} \in Q(V)$. Mit Lemma 2.2.4.d) folgt: $\mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})} \in Q(V)$.

$$(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) - (\mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \in Q(V)$$

Mit (Di) angewandt auf die Punkte $\mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}, \mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{z}-\mathbf{y})}, \mathbf{0}, \mathbf{y}$ folgt $\mathbf{y} \in Q(V)$, woraus mit Lemma 2.2.11 $\mathbf{x}, \mathbf{z} \in Q(V)$ folgt.

Nach Lemma 1.4.9 existiert ein Element $\lambda \in F^*$ mit $\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{y}, \lambda\mathbf{z} \in R_\mathbf{q}(V)$. Mit Lemma 1.4.21 folgt: $f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big),\ f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big) \in K_\mathbf{q}(F)$.

$$
\begin{aligned}
& (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} = f_\mathbf{q}\big(\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^{-1} f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} \lambda = \\
& \lambda^{-1} f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} \lambda \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)\, f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^2 = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\,\lambda\mathbf{x}\,,\ f_\mathbf{q}(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\,\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,\big) = f_\mathbf{q}\big(\,\lambda\mathbf{y}\,,\ f_\mathbf{q}(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\,\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,\big) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\,\lambda\mathbf{x}\,,\ f_\mathbf{q}(\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))^{-1} f_\mathbf{q}(\lambda\mathbf{x}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\,\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,\big) = \\
& f_\mathbf{q}\big(\,\lambda\mathbf{y}\,,\ f_\mathbf{q}(\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))^{-1} f_\mathbf{q}(\lambda\mathbf{y}, \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}))\,\lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x})\,\big) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}, (\lambda\mathbf{x})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}, (\lambda\mathbf{y})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}\,,\ \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}\,,\ \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x} + \mathbf{x})_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}\,,\ \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \lambda\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}\,,\ \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\big) \\
\Leftrightarrow\quad & f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{x}\,,\ \lambda\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{y} - \mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) = f_\mathbf{q}\big(\lambda\mathbf{y}\,,\ \lambda\mathbf{y} - \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{x}\,,\,\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \ominus_{\mathbf{q}} 0 = \\
& f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{y}\,,\,\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \ominus_{\mathbf{q}} 0 \\
\Leftrightarrow \quad & f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{x}\,,\,\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\,,\,\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) = \\
& f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{y}\,,\,\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\,,\,\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \\
\Leftrightarrow \quad & f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\,,\,\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) = \\
& f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y}) \ominus_{\mathbf{q}} f_{\mathbf{q}}\big(\lambda(\mathbf{y}-\mathbf{y}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\,,\,\lambda(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{F(\mathbf{y}-\mathbf{x})})\big) \\
\Leftrightarrow \quad & f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Analog folgt $f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{y},\lambda\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{z},\lambda\mathbf{z})$. Damit gilt $f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x},\lambda\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{z},\lambda\mathbf{z})$, so daß sich mit einer analogen Rechnung die Behauptung ergibt. □

Satz 2.2.17
In jeder Ebene $E \in \mathfrak{U}_2(V)$ gilt:

$$\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w} \in E \text{ paarw. verschieden mit } (\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y}),\ (\mathbf{0},\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{z}),\ (\mathbf{0},\mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}) : \\ (\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}).$$

Beweis: Liegt einer der Punkte $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w}$ in $Q(V)$, so liegen nach Lemma 2.2.11 alle vier in $Q(V)$ und die Behauptung folgt aus (Di) und Satz 2.2.16.

Es seien $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{w} \in E \setminus Q(V)$. Aufgrund von Lemma 2.2.8.b) gilt $F\mathbf{x} \neq F\mathbf{y} \neq F\mathbf{z} \neq F\mathbf{w}$.

Es gelte $\mathbf{x} = -\mathbf{z}$. Für $\mathbf{c} := \frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w})$ folgt $\mathbf{c} \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}$ und damit $\mathbf{c} \in Q(V)$. Mit Lemma 2.2.9 folgt:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{c}+\mathbf{x}) - \mathbf{c} = (\mathbf{c}-\mathbf{z}) - \mathbf{c}, \quad \mathbf{w} = (\mathbf{w}-\mathbf{c}) + \mathbf{c} = (\mathbf{c}-\mathbf{z}) + \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}).$$

Der Fall $\mathbf{y} = -\mathbf{w}$ wird analog behandelt.

Gilt $\mathbf{x} = -\mathbf{w}$, so folgt $\frac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{x}) \in Q(V)$. Mit (Di) angewandt auf die Punkte $\frac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{z}),\ \frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}), \mathbf{0}, \mathbf{z}$ folgt $\mathbf{z} \in Q(V)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es seien nun $F\mathbf{x}, F\mathbf{y}, F\mathbf{z}, F\mathbf{w}$ paarweise verschieden.

$$\mathbf{a} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \quad \mathbf{b} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{z}), \quad \mathbf{c} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) \\ \mathbf{r} := \big(\mathbf{x} + F(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) \cap F\mathbf{b}$$

Die Existenz von $\mathbf{r}$ folgt aus $F\mathbf{x} \neq F\mathbf{z}$.

a) $\mathbf{z}-\mathbf{r} \notin F(\mathbf{w}-\mathbf{z})$ und $\mathbf{z}-\mathbf{r} \notin (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}$:
Es sei $\mathbf{s} := \big(\mathbf{r} + F(\mathbf{z}-\mathbf{r})\big) \cap F\mathbf{c}$. Mit Lemma 2.2.9 gilt

$$\mathbf{a} \in (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}, \quad \mathbf{b} \in (\mathbf{z}-\mathbf{y})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}, \quad \mathbf{c} \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp_{f_{\mathbf{q}}}}$$

und damit folgt $(\mathbf{r},\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{r},\mathbf{z})$ und $(\mathbf{s},\mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{s},\mathbf{w})$.

$$\mathbf{z}' := \big(\mathbf{r} + F(\mathbf{z}-\mathbf{r})\big) \cap \big(\mathbf{a} + F(\mathbf{z}-\mathbf{y})\big), \quad \mathbf{w}' := \big(\mathbf{s} + F(\mathbf{w}-\mathbf{s})\big) \cap \big(\mathbf{z}' + F(\mathbf{w}-\mathbf{z})\big)$$

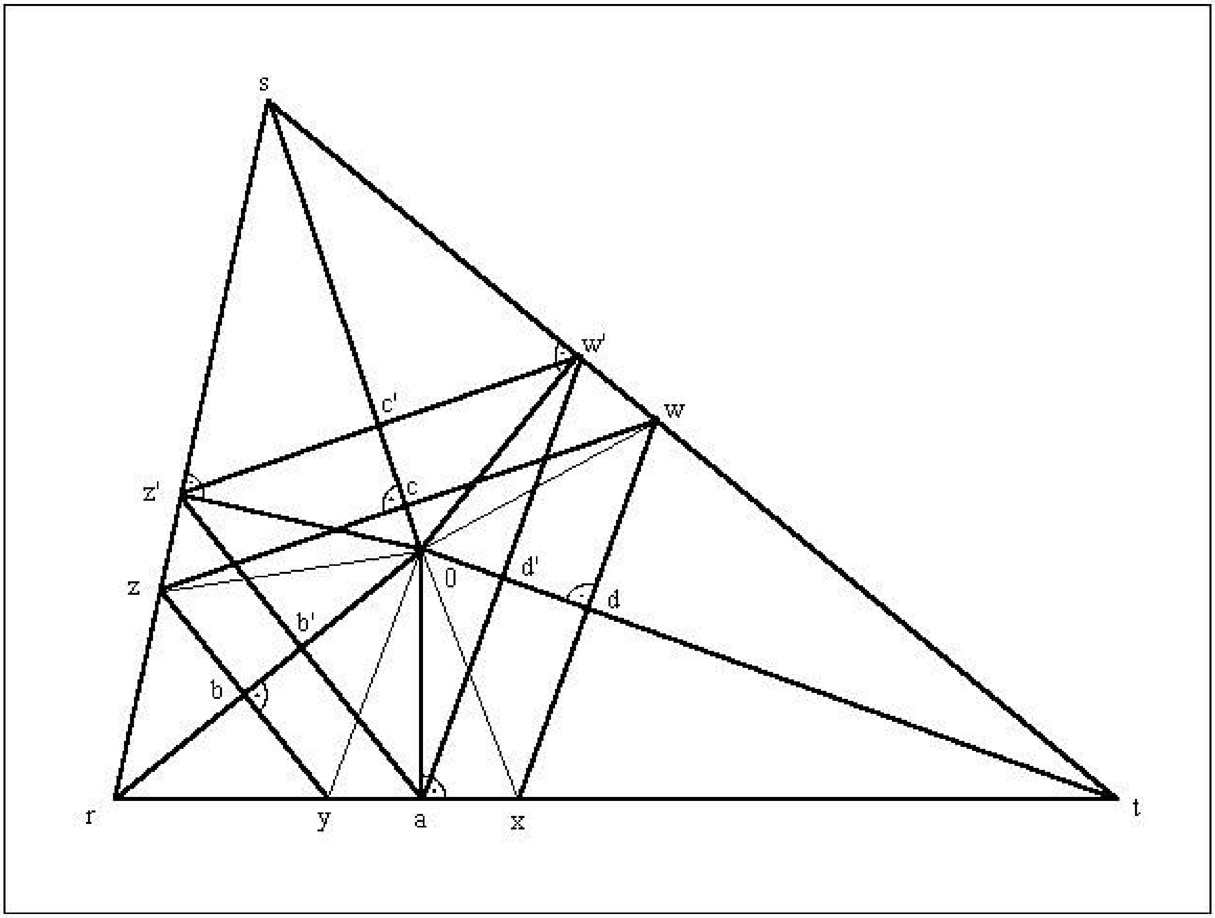


Abbildung 6

Mit Satz 2.2.14 folgt $(\mathbf{r},\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{r},\mathbf{z}')$ und $(\mathbf{s},\mathbf{z}') \equiv_Q (\mathbf{s},\mathbf{w}')$.

$$\mathbf{b}' := \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{z}'), \quad \mathbf{c}' := \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}'+\mathbf{w}')$$

Es gilt mit Lemma 2.2.9:

$$\mathbf{b}' \in (\mathbf{z}'-\mathbf{a})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{c}' \in (\mathbf{w}'-\mathbf{z}')^{\perp_{f_\mathbf{q}}}, \quad \mathbf{b}' \in F\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' \in F\mathbf{c}.$$

und es folgt $(\mathbf{0},\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{z}')$ und $(\mathbf{0},\mathbf{z}') \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}')$. Wendet man (Di) auf $\mathbf{0},\mathbf{z}',\mathbf{a},\mathbf{w}'$ an, ergibt sich $\mathbf{w}'-\mathbf{a} \in Q(V)$. Mit Satz 2.2.16 folgt $(\mathbf{0},\mathbf{a}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}')$.

$$\mathbf{d}' := \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{w}'), \quad \mathbf{t} := F\mathbf{d}' \cap \big(\mathbf{s}+F(\mathbf{w}'-\mathbf{s})\big)$$

Die Existenz von $\mathbf{t}$ folgt aus $F\mathbf{y} \neq F\mathbf{w}$. Es gilt $\mathbf{d}' \in (\mathbf{w}'-\mathbf{a})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$. Mit Lemma 2.2.9 und

Satz 2.2.15 folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \in (\mathbf{r}-\mathbf{a})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \quad &\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{a}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{a}) - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\big)\\
&\Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{r}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{a}) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{r}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{r}, \mathbf{z}')\\
&\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{z}') + \tfrac{1}{2}\mathbf{z}'\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}-\mathbf{z}') - \tfrac{1}{2}\mathbf{z}'\big)\\
&\Rightarrow \quad \mathbf{z}' \in (\mathbf{r}-\mathbf{z}')^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{z}' \in (\mathbf{s}-\mathbf{z}')^{\perp_{f_\mathbf{q}}}\\
&\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{z}') + \tfrac{1}{2}\mathbf{z}'\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{z}') - \tfrac{1}{2}\mathbf{z}'\big)\\
&\Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{s}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{s}, \mathbf{z}') \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{s}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{s}, \mathbf{w}')\\
&\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{w}') + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}'\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{s}-\mathbf{w}') - \tfrac{1}{2}\mathbf{w}'\big)\\
&\Rightarrow \quad \mathbf{w}' \in (\mathbf{s}-\mathbf{w}')^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{w}' \in (\mathbf{t}-\mathbf{w}')^{\perp_{f_\mathbf{q}}}\\
&\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{t}-\mathbf{w}') + \tfrac{1}{2}\mathbf{w}'\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{t}-\mathbf{w}') - \tfrac{1}{2}\mathbf{w}'\big)\\
&\Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{t}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{t}, \mathbf{w}') \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}\mathbf{t}) \equiv_Q (\tfrac{1}{2}\mathbf{t}, \mathbf{a})\\
&\Rightarrow \quad \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{t}-\mathbf{a}) + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{t}-\mathbf{a}) - \tfrac{1}{2}\mathbf{a}\big)\\
&\Rightarrow \quad \mathbf{a} \in (\mathbf{t}-\mathbf{a})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}.
\end{aligned}$$

Damit folgt $\mathbf{t} \in \mathbf{x} + F(\mathbf{y}-\mathbf{x})$. Die Betrachtung der Punkte $\mathbf{0}, \mathbf{d}', \mathbf{t}, \mathbf{a}, \mathbf{w}'$ liefert mit Satz 2.2.15 $(\mathbf{t}, \mathbf{w}') \equiv_Q (\mathbf{t}, \mathbf{a})$. Es existieren Elemente $\mu, \nu \in F^*$ mit $\mu(\mathbf{z}-\mathbf{y}) = \mathbf{z}' - \mathbf{a}$ und $\nu(\mathbf{w}-\mathbf{z}) = \mathbf{w}' - \mathbf{z}'$. Mit Lemma 2.2.8.e) und Satz 2.2.16 folgt:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{z}', \mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{w}', \mathbf{w}) \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{w}', \mathbf{w})\\
&\Rightarrow \quad (\mathbf{a}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{w}', \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

Es sei $\mathbf{x}' := \big(\mathbf{a} + F(\mathbf{t}-\mathbf{a})\big) \cap \big(\mathbf{w} + F(\mathbf{a}-\mathbf{w}')\big)$. Nach Satz 2.2.14 gilt $(\mathbf{a}, \mathbf{x}') \equiv_Q (\mathbf{w}', \mathbf{w})$ und damit $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ oder $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$ (Lemma 2.2.8.b)).

Annahme: Es gilt $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$ und damit $\mathbf{y} - \mathbf{w} \in Q(V)$. Mit Satz 2.2.16 bezogen auf die Punkte $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ folgt $\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \in Q(V)$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Somit gilt $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$.

Zu $\mathbf{d} := F\mathbf{t} \cap \big(\mathbf{x} + F(\mathbf{w}-\mathbf{x})\big)$ existiert ein Element $\lambda \in F^*$ mit $\mathbf{d} - \mathbf{t} = \lambda(\mathbf{d}' - \mathbf{t})$. Wegen $F(\mathbf{w}' - \mathbf{a}) = F(\mathbf{w} - \mathbf{x})$ gilt $\mathbf{w} - \mathbf{t} = \lambda(\mathbf{w}' - \mathbf{t})$ und $\mathbf{x} - \mathbf{t} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{t})$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} - \mathbf{x} &= (\mathbf{d} - \mathbf{t}) - (\mathbf{x} - \mathbf{t}) = \lambda(\mathbf{d}' - \mathbf{t}) - \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{t}) = \lambda(\mathbf{d}' - \mathbf{a})\\
&= \lambda(\mathbf{w}' - \mathbf{d}') = \lambda(\mathbf{w}' - \mathbf{t}) - \lambda(\mathbf{d}' - \mathbf{t}) = (\mathbf{w} - \mathbf{t}) - (\mathbf{d} - \mathbf{t}) = \mathbf{w} - \mathbf{d}
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.9 folgt:

$$\big(\mathbf{0}, \mathbf{d} - (\mathbf{d} - \mathbf{x})\big) \equiv_Q \big(\mathbf{0}, \mathbf{d} + (\mathbf{d} - \mathbf{x})\big) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{w}).$$

b) $\mathbf{z} - \mathbf{r} \in F(\mathbf{w} - \mathbf{z})$:

Der Beweis verläuft analog zu a), wobei die Punkte $\mathbf{t}$, $\mathbf{w}'$ und $\mathbf{d}'$ abweichend zu a) wie folgt gesetzt werden:

$$\mathbf{t} := \mathbf{r}, \quad \mathbf{w}' := \mathbf{z}', \quad \mathbf{d}' := \mathbf{b}'.$$

c) $\mathbf{z}-\mathbf{r} \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$:
Damit gilt $\mathbf{z}-\mathbf{r} \in F\big(\frac{1}{2}(\mathbf{w}+\mathbf{z})\big) = F(-\mathbf{w}-\mathbf{z})$. Ersetzt man $\mathbf{w}$ durch $-\mathbf{w}$ so folgt mit b) unter Verwendung von Lemma 2.2.10 die Behauptung.

□

Lemma 2.2.18
Für $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ paarweise verschieden mit $(\mathbf{0},\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{z})$ ist

$$\mathbf{0}' := \overline{\{\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\}} \;\cap\; (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \;\cap\; (\mathbf{z}-\mathbf{y})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$$

wohldefiniert, und es gilt:

$$(\mathbf{0}',\mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}',\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0}',\mathbf{z}).$$

Für $\mathbf{w} \in \overline{\{\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\}}$ gilt:

$$(\mathbf{0},\mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0},\mathbf{w}) \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{0}',\mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0}',\mathbf{w}).$$

Beweis: O.B.d.A. sei V endlichdimensional. Ansonsten kann man sich auf den Teilraum $\overline{\{\mathbf{0},\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\}}$ beschränken.

Da $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ paarweise verschieden sind, gilt $F(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\ F(\mathbf{z}-\mathbf{y}) \in \mathfrak{G}$ und $F(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \nparallel F(\mathbf{z}-\mathbf{y})$. Wegen $F(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \not\subset F(\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$ und $F(\mathbf{z}-\mathbf{y}) \not\subset F(\mathbf{z}-\mathbf{y})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$ folgt mit Satz 1.3.8.c):

$$\overline{\{\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\}} \;\cap\; (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\perp_{f_\mathbf{q}}},\; \overline{\{\mathbf{x},\,\mathbf{y},\,\mathbf{z}\}} \;\cap\; (\mathbf{z}-\mathbf{y})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \in \mathfrak{G}.$$

Da $F(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \nparallel F(\mathbf{z}-\mathbf{y})$ ist, besitzen diese Geraden einen Schnittpunkt. Damit ist $\mathbf{0}'$ wohldefiniert.

Mit Lemma 2.2.4.b) und Lemma 2.2.8.d) folgt $\frac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{0}' \in (\mathbf{y}-\mathbf{x})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$. Unter Verwendung von Lemma 2.2.9 erhält man:

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}',\mathbf{x}) = (\mathbf{0},\mathbf{x}-\mathbf{0}') = \;& \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{0}'-\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big)\\ \equiv_Q\;& \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}+\mathbf{y})-\mathbf{0}'+\tfrac{1}{2}(\mathbf{y}-\mathbf{x})\big) = (\mathbf{0},\mathbf{y}-\mathbf{0}') = (\mathbf{0}',\mathbf{y}).\end{aligned}$$

Analog folgt $(\mathbf{0}',\mathbf{y}) \equiv_Q (\mathbf{0}',\mathbf{z})$, womit der erste Teil des Satzes bewiesen ist.

Da V regulär ist, existieren $\mathbf{r},\mathbf{s},\mathbf{t} \in R_\mathbf{q}(V)$ mit

$$F\mathbf{r} = F(\mathbf{y}-\mathbf{x}), \quad F\mathbf{s} = F(\mathbf{z}-\mathbf{y}), \quad F\mathbf{t} = F(\mathbf{w}-\mathbf{z}), \quad \mathbf{r}+\mathbf{s} = \mathbf{t}.$$

Damit folgt

$$f_\mathbf{q}(\mathbf{0}',\mathbf{t}) = f_\mathbf{q}(\mathbf{0}',\mathbf{r}) \oplus_\mathbf{q} f_\mathbf{q}(\mathbf{0}',\mathbf{s}) = 0$$

und somit $\mathbf{0}' \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp_{f_\mathbf{q}}}$.

„$\Leftarrow$“:
Aus $(\mathbf{0}', \mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{w})$ folgt $\frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) - \mathbf{0}' \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp f_\mathbf{q}}$ und damit $\frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp f_\mathbf{q}}$. Mit Lemma 2.2.9 erhält man:

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}, \mathbf{z}) = & \ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) - \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{z})\big) \\ \equiv_Q & \ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) + \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{z})\big) = (\mathbf{0}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

„$\Rightarrow$“:
Aus $(\mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{w})$ folgt $\frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp f_\mathbf{q}}$ und damit $\frac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) - \mathbf{0}' \in (\mathbf{w}-\mathbf{z})^{\perp f_\mathbf{q}}$. Mit Lemma 2.2.9 erhält man:

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}', \mathbf{z}) = & \ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) - \mathbf{0}' - \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{z})\big) \\ \equiv_Q & \ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{z}+\mathbf{w}) - \mathbf{0}' + \tfrac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{z})\big) = (\mathbf{0}', \mathbf{w}).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.19
Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V^*$ mit $(0, \mathbf{x}) \equiv (0, \mathbf{y})$ gilt nach Definition:

$$\exists\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \in V: \quad (0, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (0, \mathbf{x}_1) \equiv_Q \ldots \equiv_Q (0, \mathbf{x}_n).$$

Ist n minimal mit dieser Eigenschaft, so gilt:

$$\begin{gathered}\forall\, \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n = \mathbf{y} \in V \text{ mit } (0, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (0, \mathbf{x}_1) \equiv_Q \cdots \equiv_Q (0, \mathbf{x}_n): \\ \dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}} = n.\end{gathered}$$

Beweis: Für $n = 1$ und $n = 2$ ist die Aussage trivial.

Es sei $n = 3$.

Annahme: Es gilt $\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}} < 3$.

Da $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \nparallel \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ist, gilt dann $\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}} = 2$. Mit Lemma 2.2.18 folgt für

$$\mathbf{0}' := \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}} \ \cap\ (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_\mathbf{q}} \ \cap\ (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{\perp f_\mathbf{q}}$$

die Kongruenz

$$(\mathbf{0}', \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_1) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_2).$$

Wegen $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_2) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_3)$ gilt $(\mathbf{0}', \mathbf{x}_2) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_3)$. Nach Satz 2.2.17 gilt damit $(\mathbf{0}', \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_3)$, woraus mit Lemma 2.2.18 die Kongruenz $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_3)$ folgt. Das ergibt einen Widerspruch zur Minimalität von n.

Es sei nun $n \geq 4$.

Annahme: Es gilt $\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}} < n$.

Dann gibt es einen Index $k_0 \in \{4, \ldots, n\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, x_{k_0-2}\}} = k_0 - 2, \quad \dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, x_{k_0}\}} < k_0.$$

Die folgenden Teilräume werden definiert:

$$E_{k_0} := \overline{\{\mathbf{x}_{k_0-2}, \mathbf{x}_{k_0-1}, \mathbf{x}_{k_0}\}}, \quad T_{k_0} := \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k_0-2}\}}.$$

Die Punkte $\mathbf{x}_{k_0-2}, \mathbf{x}_{k_0-1}, \mathbf{x}_{k_0}$ sind paarweise verschieden, da ansonsten k_0 nicht minimal wäre. Aus $F(\mathbf{x}_{k_0-1} - \mathbf{x}_{k_0-2}) \neq F(\mathbf{x}_{k_0} - \mathbf{x}_{k_0-1})$ folgt, daß E_{k_0} zwei verschiedene Geraden enthält und somit eine Ebene ist.

Wegen obiger Annahme und der Wahl von k_0 folgt mit Satz 1.3.8.c): $\dim(T_{k_0} \cap E_{k_0}) \geq 1$.

Es sei $\mathbf{0}' := (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{x}_{k_0-1})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \cap (\mathbf{x}_{k_0-1} - \mathbf{x}_{k_0})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \cap E_{k_0}$. Mit Lemma 2.2.18 folgt:

$$(\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0}).$$

Es existiert also eine Gerade $G_{k_0} \in \mathfrak{G}_{\mathbf{x}_{k_0-2}}$ mit $G_{k_0} \subset T_{k_0} \cap E_{k_0}$. Es gilt $G_{k_0} \notin \mathfrak{G}_{\mathbf{0}'}$, denn sonst wäre nach Lemma 2.2.11 $\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}'$, $\mathbf{x}_{k_0-1} - \mathbf{0}'$, $\mathbf{x}_{k_0} - \mathbf{0}' \in Q(V)$, was nach Satz 2.2.16 $(\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0})$ ergäbe. Analog zum Fall $n = 3$ folgte $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k_0-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k_0})$, was ein Widerspruch zur Minimalität von n wäre.

Es sei $\mathbf{x}'_{k_0-1} := (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}') - 2(\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_{k_0}} \in E_{k_0}$. Lemma 2.2.9 liefert

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}') &= \big(\mathbf{0}\,,\, (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}') - (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_{k_0}} + (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_{k_0}}\big) \\ &\equiv_Q \big(\mathbf{0}\,,\, (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}') - (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_{k_0}} - (\mathbf{x}_{k_0-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_{k_0}}\big) \\ &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}'_{k_0-1} - \mathbf{0}') \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}'_{k_0-1})\end{aligned}$$

woraus mit Satz 2.2.17 $(\mathbf{0}', \mathbf{x}'_{k_0-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{k_0})$ folgt. Analog zum Fall $n = 3$ erhält man $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k_0-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}'_{k_0-1})$ und $(\mathbf{0}, \mathbf{x}'_{k_0-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_{k_0})$.

Es gilt $\mathbf{x}'_{k_0-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k_0-2}\}}$.

Ist $k_0 = 4$, so ergibt sich wie im Fall $n = 3$ ein Widerspruch zur Minimalität von n.

Ist $k_0 > 4$, wird $\mathbf{x}_{k-1}$ durch $\mathbf{x}'_{k-1}$ ersetzt.

Es gibt einen Index $k_1 \in \{4, \ldots, n\}$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, x_{k_1-2}\}} = k_1 - 2, \quad \dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, x_{k_1}\}} < k_1$$

Wegen $\mathbf{x}'_{k_0-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{k_0-2}\}}$ kann $k_1 < k_0$ gewählt werden.

Analog erhält man Indizes $k_2, \ldots, k_m$ mit $k_1 > k_2 > \cdots > k_m$ und $k_m = 4$. Man erhält so wie bereits gezeigt einen Widerspruch zur Minimalität von n. □

Satz 2.2.20
Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ gilt:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \text{ und } \mathbf{y} - \mathbf{x} \in Q(V) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

Beweis: Für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ist die Behauptung trivial. Für den weiteren Beweis wird eine Fallunterscheidung gemacht.

$\mathbf{x} = -\mathbf{y}$:

Es gilt $\mathbf{x} = -\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in Q(V)$. Es sei $\lambda \in F^*$ mit $\lambda\mathbf{x} \in R_{\mathbf{q}}(F)$.

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) = \lambda^{-1} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}, \quad f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}) = -\lambda^{-1} f_{\mathbf{q}}(\lambda\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$$
$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x})^{-1} = -f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}, \lambda\mathbf{x})^{-1}$$

Damit folgt $(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y})$.

$\mathbf{x} \neq \mathbf{y},\ \mathbf{x} \neq -\mathbf{y}$:

Es existieren Punkte $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{z}_{n-1} \in V$ mit

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) \equiv_Q \ldots \equiv_Q (\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{z}_{n-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

O.B.d.A. sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Für $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n := \mathbf{y}$ und $\mathbf{x}_i := \mathbf{z}_i - \mathbf{y}_i$ ($i \in \{1, \ldots, n-1\}$) gilt $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{i-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$n = 2$:

Es sei $E := \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \in \mathfrak{T}_2(V)$. O.B.d.A. sei V endlichdimensional (Sonst kann man sich auf den Teilraum $\overline{\{\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}}$ beschränken.). Nach Satz 1.3.8.c) gilt:

$$E \cap (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \in \mathfrak{G}, \quad E \cap (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \in \mathfrak{G}.$$

Da n minimal ist, sind die Punkte $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ paarweise verschieden, und es gilt: $F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \neq F(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$. Damit ist

$$\mathbf{0}' := (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \cap (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \cap E$$

wohldefiniert. Mit Lemma 2.2.9 folgt aus $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) - \mathbf{0}' \in (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}}$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{0}', \mathbf{x}_0) = (\mathbf{0}, \mathbf{x}_0 - \mathbf{0}') = &\ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) - \mathbf{0}' - \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\big) \\ \equiv_Q &\ \big(\mathbf{0}, \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) - \mathbf{0}' + \tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\big) = (\mathbf{0}, \mathbf{x}_1 - \mathbf{0}') = (\mathbf{0}', \mathbf{x}_1).\end{aligned}$$

Analog folgt $(\mathbf{0}', \mathbf{x}_1) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_2)$, so daß man mit Satz 2.2.16 $(\mathbf{0}', \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_2)$ erhält.

Lemma 1.4.9 impliziert die Existenz eines Elementes $\lambda \in F^*$ mit $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 \in R_{\lambda\mathbf{q}}(V)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{0}' \in (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \cap (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^{\perp f_{\mathbf{q}}} \quad &\Rightarrow \quad f_q\big(\mathbf{0}', \lambda^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\big) = f_q\big(\mathbf{0}', \lambda^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)\big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad f_q\big(\mathbf{0}', \lambda^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\big) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{0}' \in (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}}\end{aligned}$$

Lemma 2.2.4.b) und 2.2.8.d) liefern:

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2) - \mathbf{0}' = \tfrac{1}{2}\big((\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}') + (\mathbf{x}_2 - \mathbf{0}')\big) = (\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}') - (\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}')_{F(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)} \in (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}}.$$

Insgesamt folgt $\frac{1}{2}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_2) \in (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0)^{\perp f_{\mathbf{q}}}$, so daß sich mit Lemma 2.2.9 die Behauptung ergibt.

$n \geq 3$:

Nach Lemma 2.2.19 gilt $\dim \overline{\{x_0, \ldots, x_n\}} = n$. Für $i \in \{2, \ldots, n-1\}$ gilt mit Satz 1.3.8.c):

$$\begin{aligned} &\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_i\}} = i, \quad \dim \overline{\{\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0\}} = n - i + 1 \\ \Rightarrow \quad &\dim\big(\overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_i\}} \cap \overline{\{\mathbf{x}_i, \ldots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0\}}\big) = 1. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0 \in Q(V)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Mit dem vorigen Beweisschritt folgt:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_1) \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_2) \quad \Rightarrow \quad \cdots \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}_0) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_n).$$

□

Satz 2.2.21
Die Relation $\equiv$ erfüllt in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ das Axiom (KZ).

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.2.14 und 2.2.20. □

Satz 2.2.22
Die Relation $\equiv$ erfüllt das Axiom (KGR).

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.2.15 und 2.2.20. □

Satz 2.2.23
In jeder Ebene $E \in \mathfrak{U}_2(V)$ gilt für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv (\mathbf{0}, \mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad \exists\, \mathbf{z} \in E: \ (\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

Beweis: Es sei $\mathbf{y} - \mathbf{x} \notin Q(V)$, da die Behauptung sonst aus Satz 2.2.20 folgt. Es existieren Punkte $\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{z}_{n-1} \in V$ mit

$$(\mathbf{0}, \mathbf{x}) \equiv_Q (\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1) \equiv_Q \cdots \equiv_Q (\mathbf{y}_{n-1}, \mathbf{z}_{n-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{y}).$$

O.B.d.A. sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit dieser Eigenschaft. Für $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_n := \mathbf{y}$ und $\mathbf{x}_i := \mathbf{z}_i - \mathbf{y}_i$ ($i \in \{1, \ldots, n-1\}$) gilt $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{i-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$n = 2$:

Gilt $\mathbf{x}_1 \in E$ so folgt die Behauptung. Aus $\mathbf{x}_1 \notin E$ folgt $E' := \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \neq E$. Es gilt $\dim \overline{\{\mathbf{0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} = 3$, so daß mit Satz 1.3.8.c) folgt:

$$\dim(E \cap E') = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0 \in Q(V).$$

Mit $\mathbf{z} := \mathbf{x}$ und Satz 2.2.20 folgt die Behauptung.

$n \geq 3$:

Es gelte $\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}} = n$, sonst wird wie im Beweis von Satz 2.2.20 ein Widerspruch zur Minimalität von n hergeleitet. Aus $F(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$ und $F(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \subset E$ folgt $\overline{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}} = E$.

Gilt $\mathbf{x}_1 \in E$, so folgt:

$$E \subset \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}}, \quad \dim \overline{\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}} = n-1, \quad \mathbf{x}_0 \notin \overline{\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}}$$
$$\Rightarrow \quad \dim\big(E \cap \overline{\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}}\big) = 1.$$

Damit gilt $\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1 \in Q(V)$, woraus mit Satz 2.2.20 $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_1) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_n)$ im Widerspruch zur Minimalität von n folgt.

Gilt $\mathbf{x}_1 \notin E$, so sei $G \in G_{\mathbf{x}_0}(E)$ mit $G = \mathbf{x}_0 + F\mathbf{g}$ und $\mathbf{g} \in Q^*(V)$. Dann gilt $G \subset \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}}$. Für $\mathbf{x}_{-1} := \mathbf{x}_0 - 2(\mathbf{x}_0)_{F\mathbf{g}} \in E$ folgt mit Lemma 2.2.9: $(\mathbf{0}, \mathbf{x}_{-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_0)$.

Es gelte zunächst $G \not\subset \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\}}$.

$$E_n := \overline{\{\mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_n\}}, \quad G_n := \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} \cap E_n$$

Mit Satz 1.3.8.c) folgt:

$$\dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_n\}} = n, \quad \dim(E_n) = 2, \quad \dim \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} = n-1$$
$$\Rightarrow \quad \dim\big(E_n \cap \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}}\big) = 1 \quad \Rightarrow \quad G_n \in \mathfrak{G}.$$

Es sei $\mathbf{g}_n \in Q(V)^*$ mit $G_n = \mathbf{x}_{n-2} + F\mathbf{g}_n$.

Analog zum Beweis von Satz 2.2.20 (Fall $n = 2$) sei $\mathbf{0}' := (\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \cap (\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}_{n-2})^{\perp_{f_\mathbf{q}}} \cap E_n$.

Für $\mathbf{x}'_{n-1} := (\mathbf{x}_{n-2} - \mathbf{0}') - 2(\mathbf{x}_{n-2} - \mathbf{0}')_{F\mathbf{g}_n} \in E_n$ gilt mit Lemma 2.2.9 und dem Beweis von Satz 2.2.20:

$$(\mathbf{0}', \mathbf{x}_n) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{n-1}), \quad (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{n-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{n-2}), \quad (\mathbf{0}', \mathbf{x}_{n-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}'_{n-1})$$
$$\Rightarrow \quad (\mathbf{0}', \mathbf{x}_n) \equiv_Q (\mathbf{0}', \mathbf{x}'_{n-1})$$
$$\Rightarrow \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}_{n-2}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}'_{n-1}), \quad (\mathbf{0}, \mathbf{x}'_{n-1}) \equiv_Q (\mathbf{0}, \mathbf{x}_n).$$

Mit der Minimalität von n folgt:

$$\dim \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} = \dim \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}'_{n-1}\}} = n-1$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_{n-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} \quad &\Rightarrow \quad \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}'_{n-1}\}} \subset \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} \\ &\Rightarrow \quad \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}'_{n-1}\}} = \overline{\{\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}\}} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{x}_{-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}'_{n-1}\}} \end{aligned}$$

Gilt $G \subset \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\}}$, so folgt für $\mathbf{x}'_{n-1} := \mathbf{x}_{n-1}$: $\quad \mathbf{x}_{-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-2}, \mathbf{x}'_{n-1}\}}$.

Analog werden Punkte $\mathbf{x}'_{n-2}, \ldots, \mathbf{x}'_1 \in V$ konstruiert, so daß gilt:

$$\mathbf{x}_{-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{n-3}, \mathbf{x}'_{n-2}\}}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_{-1} \in \overline{\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_1\}}.$$

Damit folgt $\mathbf{x}'_1 \in E$, so daß sich analog zum oben betrachteten Fall ($\mathbf{x}_1 \in E$) ein Widerspruch zur Minimalität von n ergibt. □

Satz 2.2.24
Die Relation $\equiv$ erfüllt in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ das Axiom (KT).

Beweis: Die Behauptung folgt aus Satz 2.2.23. □

Satz 2.2.25
Die Relation $\equiv$ erfüllt in jeder Ebene $E \in \mathfrak{T}_2(V)$ das Axiom (KG).

Beweis: Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{d}' \in E$ mit $\mathbf{c} \in \mathbf{a} - \mathbf{b} \in Q(V)^*$, $\mathbf{d} \notin F(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ und $(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{d}')$, $(\mathbf{b}, \mathbf{d}) \equiv (\mathbf{b}, \mathbf{d}')$. Für $\mathbf{d}' - \mathbf{d} \in Q(V)$ folgt die Behauptung aus den Sätzen 2.2.20 und 2.2.22.

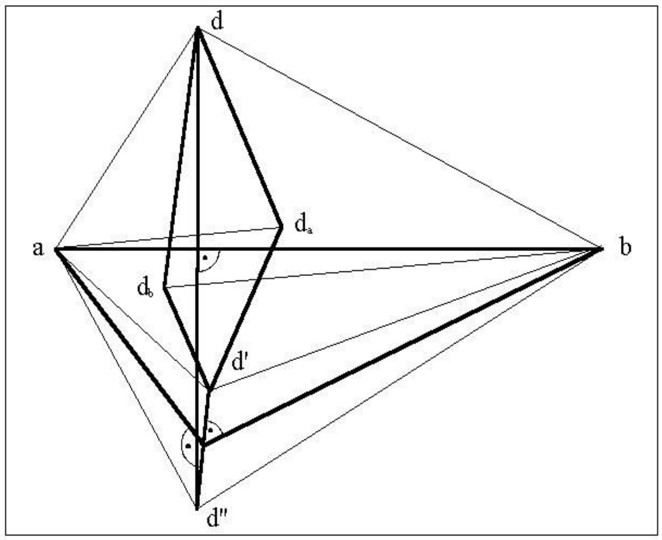


Abbildung 7

Es gelte $\mathbf{d}' - \mathbf{d} \notin Q(V)$. Nach Satz 2.2.23 existieren Punkte $\mathbf{d_a}, \mathbf{d_b} \in E$ mit

$$(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{a}, \mathbf{d_a}) \equiv_Q (\mathbf{a}, \mathbf{d}'), \quad (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{b}, \mathbf{d_b}) \equiv_Q (\mathbf{b}, \mathbf{d}').$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}'' &:= 2(\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + 2\mathbf{a} - \mathbf{d} \\
&= 2(\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + 2(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + 2\mathbf{b} - \mathbf{d} \\
&= 2(\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + 2(\mathbf{a} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + 2\mathbf{b} - \mathbf{d} \\
&= 2(\mathbf{d} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + 2\mathbf{b} - \mathbf{d}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} - \mathbf{a} &= (\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + \big((\mathbf{d} - \mathbf{a}) - (\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})}\big) \\
\mathbf{d}'' - \mathbf{a} &= (\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} - \big((\mathbf{d} - \mathbf{a}) - (\mathbf{d} - \mathbf{a})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})}\big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d} - \mathbf{b} &= (\mathbf{d} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} + \big((\mathbf{d} - \mathbf{b}) - (\mathbf{d} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})}\big) \\
\mathbf{d}'' - \mathbf{b} &= (\mathbf{d} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})} - \big((\mathbf{d} - \mathbf{b}) - (\mathbf{d} - \mathbf{b})_{F(\mathbf{b}-\mathbf{a})}\big).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.2.4.b) und 2.2.9 folgt $(\mathbf{a}, \mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{a}, \mathbf{d}'')$ und $(\mathbf{b}, \mathbf{d}) \equiv_Q (\mathbf{b}, \mathbf{d}'')$.

Aus $\mathbf{d}'' = \mathbf{d_a}$ folgt $(\mathbf{a}, \mathbf{d}') \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{d}'')$. Für $\mathbf{d}'' \neq \mathbf{d_a}$ liefert Satz 2.2.17 $(\mathbf{a}, \mathbf{d}') \equiv_Q (\mathbf{a}, \mathbf{d}'')$. Analog erhält man $(\mathbf{b}, \mathbf{d}') \equiv_Q (\mathbf{b}, \mathbf{d}'')$.

Es gilt mit Lemma 2.2.4.b) und 2.2.8.d):

$$\tfrac{1}{2}\big((\mathbf{d}''-\mathbf{a})+(\mathbf{d}'-\mathbf{a})\big) \in \big((\mathbf{d}''-\mathbf{a})-(\mathbf{d}'-\mathbf{a})\big)^{\perp f_{\mathbf{q}}} = (\mathbf{d}''-\mathbf{d}')^{\perp f_{\mathbf{q}}}$$
$$\tfrac{1}{2}\big((\mathbf{d}''-\mathbf{b})+(\mathbf{d}'-\mathbf{b})\big) \in \big((\mathbf{d}''-\mathbf{b})-(\mathbf{d}'-\mathbf{b})\big)^{\perp f_{\mathbf{q}}} = (\mathbf{d}''-\mathbf{d}')^{\perp f_{\mathbf{q}}}$$
$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\big((\mathbf{d}''-\mathbf{a})+(\mathbf{d}'-\mathbf{a})\big) - \tfrac{1}{2}\big((\mathbf{d}''-\mathbf{b})+(\mathbf{d}'-\mathbf{b})\big) = \mathbf{b}-\mathbf{a} \in (\mathbf{d}''-\mathbf{d}')^{\perp f_{\mathbf{q}}}.$$

Nach Voraussetzung gilt $\mathbf{b}-\mathbf{a} \in (\mathbf{d}''-\mathbf{d})^{\perp f_{\mathbf{q}}}$, so daß $(\mathbf{d}''-\mathbf{d}')^{\perp f_{\mathbf{q}}} = (\mathbf{d}''-\mathbf{d})^{\perp f_{\mathbf{q}}}$ folgt. Damit gilt $\mathbf{d}'-\mathbf{d} \in Q(V)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Satz 2.2.26
Die Relation $\equiv$ erfüllt das Axiom (KER).

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.2.12, 2.2.13, 2.2.21, 2.2.24, 2.2.25 und Bemerkung 2.1.4.b). □

Satz 2.2.27
$(V, D(V), \langle\rangle_V, \equiv)$ ist ein fasteuklidischer Raum.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.2.12, 2.2.22 und 2.2.26. □

Satz 2.2.28
Es sei $\lambda \in F^*$.

a) Die Abbildung

$$f_{\mathbf{q}}^{\lambda} : \begin{cases} V \times R_{\lambda\mathbf{q}}(V) & \to & F \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\lambda^{-1}\mathbf{y}) \end{cases}$$

ist eine nullteilige symmetrische $(\lambda\mathbf{q})$-Bilinearform.

b) Es sei $B = (\mathbf{b}_i)_i \in R_{\mathbf{q}}(V)^I$ eine Basis von V. Dann gilt $\lambda B := (\lambda\mathbf{b}_i)_i \in R_{\lambda\mathbf{q}}(V)^I$ und $M_{\lambda B}(f_{\mathbf{q}}^{\lambda}) = \lambda\, M_B(f_{\mathbf{q}})$.

c) Die Abbildungen $f_{\mathbf{q}}$ und $f_{\mathbf{q}}^{\lambda}$ führen zu identischen Kongruenzrelationen $\equiv^{f_{\mathbf{q}}}$ und $\equiv^{f_{\mathbf{q}}^{\lambda}}$ auf V.

Beweis:

a) Nach Satz 1.4.7.c) ist $f_{\mathbf{q}}^{\lambda}$ wohldefiniert. Die Bilinearität folgt direkt aus den entsprechenden Eigenschaften von $f_{\mathbf{q}}$. Es seien $\mathbf{x},\mathbf{y} \in R_{\lambda\mathbf{q}}(V)$.

$$f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{x},\lambda^{-1}\mathbf{y}) = \lambda f_{\mathbf{q}}(\lambda^{-1}\mathbf{x},\lambda^{-1}\mathbf{y}) = \lambda f_{\mathbf{q}}(\lambda^{-1}\mathbf{y},\lambda^{-1}\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y},\lambda^{-1}\mathbf{x}) = f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{y},\mathbf{x})$$

$$f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda f_{\mathbf{q}}(\lambda^{-1}\mathbf{x},\lambda^{-1}\mathbf{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

b) Es sei $M_B(f_{\mathbf{q}}) = (m_{ij})$ und $i,j \in I$.

$$\lambda\, m_{ij} = \lambda\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{b}_i,\mathbf{b}_j) = f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\lambda\mathbf{b}_i,\lambda\mathbf{b}_j)$$

c) Es seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ mit $(\mathbf{y}-\mathbf{x})-(\mathbf{v}-\mathbf{u}) \in Q(V)^*$ und $\mathbf{g} \in R_{\mathbf{q}}(V)^*$ mit $F\mathbf{g} = F\big((\mathbf{y}-\mathbf{x})-(\mathbf{v}-\mathbf{u})\big)$. Dann gilt $\lambda\mathbf{g} \in R_{\lambda\mathbf{q}}(V)^*$.

$$f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g}), f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g}) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda\mathbf{g}), f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\lambda\mathbf{g}) \neq 0$$

$$\begin{aligned} & f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\mathbf{g})^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\lambda\mathbf{g})^{-1} = f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{v}-\mathbf{u},\lambda\mathbf{g})\, f_{\mathbf{q}}^{\lambda}(\mathbf{y}-\mathbf{x},\lambda\mathbf{g})^{-1} \end{aligned}$$

□

2.3 Schließungsaussagen in fasteuklidischen Ebenen

Da fastaffine Räume einer Dimension ≥ 3 desarguessch sind, beschränkt sich dieser Abschnitt auf Ebenen. Im folgenden sei $(E, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene.

Satz 2.3.1
Eine fasteuklidische Ebene genügt dem kleinen Axiom von Desargues.

Beweis: Es gelte $\mathrm{d}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3)$.
Ist $a_1 \in a_2 \sqcup a_3$ so folgt die Behauptung aus der Parallelogrammschließungsaussage. Es sei also im folgenden $a_1 \notin a_2 \sqcup a_3$.

Zunächst sei $a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G}$.

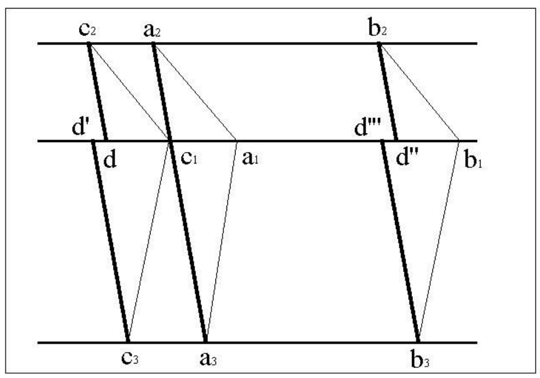


Abbildung 8

$$c_1 := a_1 \sqcup b_1 \cap a_2 \sqcup a_3 \quad c_2 := \mathrm{Pgm}(a_1, a_2, c_1), \quad c_3 := \mathrm{Pgm}(a_1, a_3, c_1)$$
$$d := a_1 \sqcup b_1 \cap \{c_2 \parallel a_2 \sqcup a_3\}, \quad d' := a_1 \sqcup b_1 \cap \{c_3 \parallel a_2 \sqcup a_3\}$$

Nach Satz 2.1.10 ist $a_1 \neq d, d'$ und $c_1 \neq d, d'$, so daß gilt:

$$\left.\begin{array}{l}(c_1, a_1) \equiv (c_2, a_2) \equiv (d, c_1) \\ (c_1, a_1) \equiv (c_3, a_3) \equiv (d', c_1)\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d = d' \quad \Rightarrow \quad \langle a_2, a_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle.$$

Es sei $d'' := a_1 \sqcup b_1 \cap \{b_2 \parallel a_2 \sqcup a_3\}$ und $d''' := a_1 \sqcup b_1 \cap \{b_3 \parallel a_2 \sqcup a_3\}$. Unter der Annahme $d'' \neq d'''$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l}(b_1, a_1) \equiv (b_2, a_2) \equiv (c_1, d'') \\ (b_1, a_1) \equiv (b_3, a_3) \equiv (c_1, d''')\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \mathrm{Mp}(d'', d''')$$

$$\left.\begin{array}{l}(c_1, b_1) \equiv (c_2, b_2) \equiv (d, d'') \\ (c_1, b_1) \equiv (c_3, b_3) \equiv (d, d''')\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad d = \mathrm{Mp}(d'', d''').$$

Damit hätte das Paar (d'', d''') zwei Mittelpunkte. Es gilt also $d'' = d'''$ und damit $\langle a_2, a_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle$.

Es sei $a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$ und $a_1 \sqcup a_2 \in \mathfrak{G}$.
Mit Hilfe des bereits Bewiesenen und $b_2' := a_2 \sqcup b_2 \cap \{b_3 \parallel a_3 \sqcup a_2\}$ folgt:

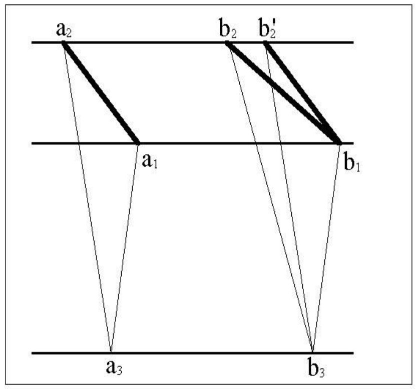


Abbildung 9

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(a_3, a_1, a_2; b_3, b_1, b_2') & \Rightarrow & \langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2' \rangle \\ \langle b_1, b_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2' \rangle \quad \Rightarrow \quad b_2 = b_2' & \Rightarrow & \langle a_2, a_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle. \end{array}$$

Analog behandelt man den Fall $a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$ und $a_1 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G}$.

Es sei nun $a_1 \sqcup a_2,\ a_1 \sqcup a_3,\ a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$.
Da die Ebene E regulär ist, existiert ein Punkt $a_4 \in E$ mit $a_2 \sqcup a_4,\ a_4 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G}$, so daß $a_2 \sqcup a_4$, $a_4 \sqcup a_3 \nparallel a_1 \sqcup b_1$ gilt. Mit $b_4 := \mathrm{Pgm}(a_2, b_2, a_4)$ und dem bereits Bewiesenen folgt:

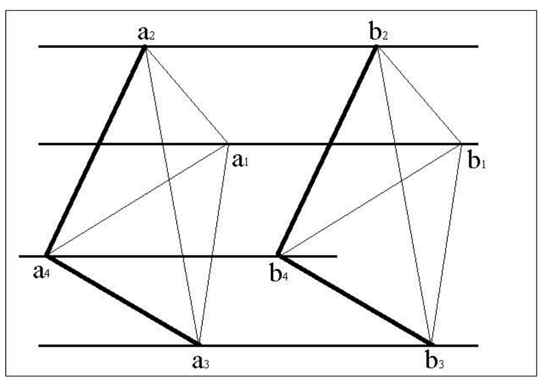


Abbildung 10

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{d}(a_2, a_1, a_4; b_2, b_1, b_4) & \Rightarrow & \langle a_1, a_4 \rangle = \langle b_1, b_4 \rangle \\ \mathrm{d}(a_1, a_3, a_4; b_1, b_3, b_4) & \Rightarrow & \langle a_3, a_4 \rangle = \langle b_3, b_4 \rangle \\ \mathrm{d}(a_4, a_2, a_3; b_4, b_2, b_3) & \Rightarrow & \langle a_2, a_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle. \end{array}$$

$\square$

Satz 2.3.2 (vgl. [5] II.§7)
Eine fasteuklidische Ebene genügt dem Axiom (d').

Beweis: Es gelte d'$(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3)$ und $a_1 \sqcup b_1 \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$, da die Behauptung sonst aus (d) folgt.

Es sei $a_2 \sqcup a_3 \notin \mathfrak{G}$.
Nach Lemma 2.1.5 existieren Geraden $G, H \in \mathfrak{G}$, so daß G, H, $a_1 \sqcup a_2$, $a_1 \sqcup a_3$ paarweise nicht-parallel sind.

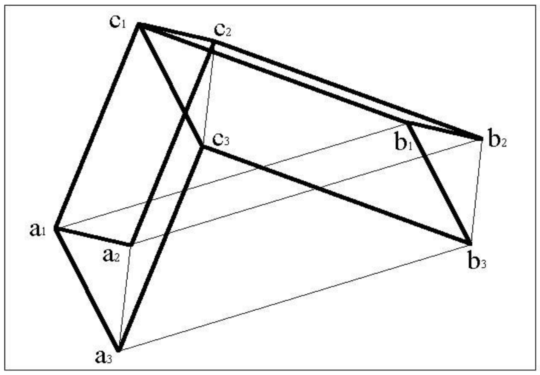


Abbildung 11

$$c_1 := \{a_1 \parallel G\} \cap \{b_1 \parallel H\}, \quad c_2 := \mathrm{Pgm}(a_1, c_1, a_2), \quad c_3 := \mathrm{Pgm}(a_1, c_1, a_3)$$

Mit (d) folgt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2) \quad &\Rightarrow \quad \langle b_1, c_1 \rangle = \langle b_2, c_2 \rangle \\
\mathrm{d}(a_1, b_1, c_1; a_3, b_3, c_3) \quad &\Rightarrow \quad \langle b_1, c_1 \rangle = \langle b_3, c_3 \rangle \\
\mathrm{d}(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2, c_3) \quad &\Rightarrow \quad \langle a_2, a_3 \rangle = \langle c_2, c_3 \rangle \\
\mathrm{d}(c_1, c_2, c_3; b_1, b_2, b_3) \quad &\Rightarrow \quad \langle c_2, c_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\langle a_2, a_3 \rangle = \langle b_2, b_3 \rangle$.

Es sei nun $a_2 \sqcup a_3 \in \mathfrak{G}$.
Nach Lemma 2.1.5 existiert eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$, so daß G, $a_1 \sqcup a_2$, $a_1 \sqcup a_3$, $a_2 \sqcup a_3$ paarweise nicht-parallel sind.

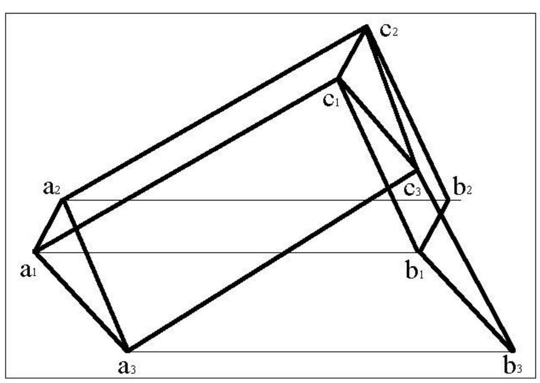


Abbildung 12

$$c_1 := \{a_1 \parallel G\} \cap \{b_1 \parallel a_2 \sqcup a_3\}, \quad c_2 := \mathrm{Pgm}(a_1, c_1, a_2), \quad c_3 := \mathrm{Pgm}(a_1, c_1, a_3)$$

Nach (d) gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2) \quad &\Rightarrow \quad \langle b_1, c_1\rangle = \langle b_2, c_2\rangle \\
\mathrm{d}(a_1, b_1, c_1; a_3, b_3, c_3) \quad &\Rightarrow \quad \langle b_1, c_1\rangle = \langle b_3, c_3\rangle \\
\mathrm{d}(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2, c_3) \quad &\Rightarrow \quad \langle a_2, a_3\rangle = \langle c_2, c_3\rangle.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\langle c_2, c_3\rangle = \langle a_2, a_3\rangle = \langle b_1, c_1\rangle = \langle b_2, c_2\rangle \quad \Rightarrow \quad c_3 \in b_2 \sqcup c_2$$
$$\langle b_3, c_3\rangle = \langle b_1, c_1\rangle = \langle b_2, c_2\rangle \quad \Rightarrow \quad b_3 \in b_2 \sqcup c_2$$
$$\langle b_2, b_3\rangle = \langle b_2, c_2\rangle = \langle b_1, c_1\rangle = \langle a_2, a_3\rangle.$$

□

Satz 2.3.3
Die Menge $\mathrm{Tra}(E)$ der Translationen ist eine abelsche Gruppe, die regulär auf E operiert.

Beweis: Im Beweis von Satz 1 in [15] wird unter Verwendung von Satz 8.3 in [5] gezeigt, daß ein fastaffiner Raum, welcher den Axiomen (d) und (d') genügt, eine abelsche Translationsgruppe besitzt, die regulär auf der Punktmenge operiert. Das in den Voraussetzungen von Satz 1 in [15] geforderte Axiom (D) wird für diesen Teil des Beweises nicht verwendet. □

Beispiel 2.3.4
Eine fasteuklidische Ebene ist i.a. nicht desarguessch (im Gegensatz zum kommutativen Fall) wie das folgende Beispiel zeigt:

Es sei $E := \mathbb{R}^2$, $D := \{-1, 1\} \times \big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}\big)$ und

$$\langle\rangle : \left\{ \begin{array}{rcl} E^{(2)} & \rightarrow & D \\ \big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (+1, \infty) & \text{für} \quad x_1 = y_1 \\ (+1, 0) & \text{für} \quad y_2 - x_2 = y_1 - x_1 \\ \multicolumn{2}{l}{\big(+1, \big((y_2 - x_2) - (y_1 - x_1)\big)(y_1 - x_1)^{-3}\big)} \\ & \text{für} \quad |y_2 - x_2| > |y_1 - x_1| \\ (-1, \infty) & \text{für} \quad x_2 = y_2 \\ (-1, 0) & \text{für} \quad y_2 - x_2 = -(y_1 - x_2) \\ \multicolumn{2}{l}{\big(-1, \big((x_2 - y_2) - (x_1 + y_1)\big)(x_1 - y_1)^{-3}\big)} \\ & \text{für} \quad |y_2 - x_2| < |y_1 - x_1| \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$(E, D, \langle\rangle)$ ist eine fastaffine Ebene mit

$$\mathfrak{G}_{(0,0)} = \big\{\mathbb{R}(1, 0), \mathbb{R}(0, 1), \mathbb{R}(1, 1), \mathbb{R}(1, -1)\big\}.$$

Anschaulich gesprochen ist eine echte Linie L mit Aufpunkt $(0, 0)$ eine kubische Parabel, die im Aufpunkt die Tangente $\mathbb{R}(1, 1)$ oder $\mathbb{R}(1, -1)$ besitzt. Sie genügt für $l \in L \setminus \{(0, 0)\}$ einer der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} L &= \big\{(x,y) \in E \;\big|\; y = ax^3 + x\big\} \quad \text{mit} \quad (1,a) = \big\langle (0,0), l \big\rangle \\ L &= \big\{(x,y) \in E \;\big|\; x = ay^3 + y\big\} \quad \text{mit} \quad (-1,a) = \big\langle (0,0), l \big\rangle. \end{aligned}$$

Die Ebene ist nicht desarguessch, da sie nicht die Diagonalenbedingung erfüllt, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$\begin{gathered} a := (0,0), \quad b := (1,0), \quad c := (1,1), \quad d := (0,-1) \\ b-a,\; c-a,\; d-a,\; c-b,\; d-b \in Q(E), \quad \text{aber} \quad d-c \notin Q(E). \end{gathered}$$

Es sei G die von den Spiegelungen in der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ an den Geraden $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$, $\mathbb{R}(1,1)$, $\mathbb{R}(1,-1)$ erzeugten Gruppe. Damit wird folgende Relation definiert:

$$\begin{aligned} \equiv \;:=\; \Big\{ \Big(\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big), \big((u_1,u_2),(v_1,v_2)\big) \Big) \in (E^2)^2 \;\Big| \\ \exists\, g \in G: \; g\big((y_1-x_1, y_2-x_2)\big) = (v_1-u_1, v_2-u_2) \Big\}. \end{aligned}$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß $\equiv$ eine Kongruenzrelation ist, welche die Axiome (KP), (KL), (KG), (KZ), (KT) erfüllt.

Die Betrachtung der Punkte

$$z := (0,0), \quad a := (1,1), \quad b := (-1,1), \quad m := (0,1), \quad a' := \big(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big), \quad m' := (1,0)$$

liefert die Gültigkeit von (KR).

Es seien $a, b, c, d \in E$, so daß die Voraussetzungen von (KV) erfüllt sind. Dann sind die Punkte a, b, c, d Eckpunkte eines Quadrates, dessen Kanten parallel zu $\mathbb{R}(1,0)$, $\mathbb{R}(0,1)$ oder $\mathbb{R}(1,1)$, $\mathbb{R}(1,-1)$ sind. Beide Diagonalen des Quadrates sind also Geraden der Ebene E. Folglich ist das Axiom (KV) erfüllt.

Damit ist $(E, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene.

2.4 Bewegungen

Im folgenden werden spezielle Kollineationen, die *Bewegungen* betrachtet. Es sei $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ ein fasteuklidischer Raum.

Definition 2.4.1
Eine Kollineation $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ heißt Bewegung, wenn für je zwei Punkte $a, b \in X$ gilt:

$$(a, b) \equiv \big(\alpha(a), \alpha(b)\big).$$

Die Menge der Bewegungen wird mit $\mathrm{Bew}(X)$ bezeichnet.

Satz 2.4.2
Bezüglich der Komposition ist $\mathrm{Bew}(X)$ eine Gruppe, die die Gruppe $\mathrm{Tra}(X)$ enthält.

Beweis: Da $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist, ist $\mathrm{Bew}(X)$ eine Gruppe.
Es sei $\tau \in \mathrm{Tra}(X)^*$ und $a, b \in X$.

$a = b$: Mit (K1) folgt $(a, a) \equiv \big(\tau(a), \tau(a)\big)$.

$a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $\tau(a) \notin a \sqcup b$:
Es gilt $\langle a, b\rangle = \big\langle \tau(a), \tau(b)\big\rangle$ und $\big\langle a, \tau(a)\big\rangle = \big\langle b, \tau(b)\big\rangle$. Mit (KPR) folgt $(a, b) \equiv \big(\tau(a), \tau(b)\big)$.

$a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $\tau(a) \in a \sqcup b$:
Für $a' \in X \setminus a \sqcup b$ gilt $\tau = \tau_{a', \tau(a)}\tau_{a, a'}$ und damit $(a, b) \equiv \big(a', \tau_{a,a'}(b)\big) \equiv \big(\tau(a), \tau(b)\big)$.

$a \sqcup b \notin \mathfrak{G}$ und $a \sqcup \tau(a) \in \mathfrak{G}$:
Es gilt $\langle a, b\rangle = \big\langle \tau(a), \tau(b)\big\rangle$ und $\big\langle a, \tau(a)\big\rangle = \big\langle b, \tau(b)\big\rangle$. Mit (KLR) folgt $(a, b) \equiv \big(\tau(a), \tau(b)\big)$.

$a \sqcup b \notin \mathfrak{G}$ und $a \sqcup \tau(a) \notin \mathfrak{G}$:
Nach (Z) existieren Punkte $x_0, \ldots, x_n$ mit $a = x_0$, $x_n = \tau(a)$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$\begin{aligned}(a, b) &\equiv \big(\tau_{x_0,x_1}(a), \tau_{x_0,x_1}(b)\big) \equiv \big(\tau_{x_1,x_2}\tau_{x_0,x_1}(a), \tau_{x_1,x_2}\tau_{x_0,x_1}(b)\big) \equiv \cdots \\ \cdots &\equiv \big(\tau_{x_{n-1},x_n} \cdots \tau_{x_0,x_1}(a), \tau_{x_{n-1},x_n} \cdots \tau_{x_0,x_1}(b)\big) = \big(\tau(a), \tau(b)\big)\end{aligned}$$

□

Definition 2.4.3
Eine Bewegung $\sigma \in \mathrm{Bew}(X)^*$ heißt Spiegelung am Punkt $z \in X$, wenn für jede Linie $L \in \mathfrak{L}_z$ gilt: $\sigma(L) = L$. Der Punkt z heißt Zentrum der Spiegelung σ.

Eine Bewegung $\sigma \in \mathrm{Bew}(X)^*$ heißt Spiegelung an der Geraden $G \in \mathfrak{G}$, wenn die Punkte auf G genau die Fixpunkte von σ sind und wenn gilt:

$$\forall\, x \in X: \quad \sigma(x) \in \overline{\{x\} \cup G}.$$

Die Gerade G heißt Achse der Spiegelung σ.

Satz 2.4.4
An jedem Punkt $z \in X$ gibt es genau eine Spiegelung σ_z. Diese ist eine involutorische Dilatation.

Beweis: Es sei σ_z die folgende Abbildung:

$$\sigma_z : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & \tau_{x,z}(z) \end{cases}$$

Für $a, b \in X$ mit $a \neq b$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle a,b\rangle &= \big\langle \tau_{z,a}\,\tau_{b,z}(b), \tau_{z,b}\,\tau_{a,z}(a)\big\rangle = \big\langle \tau_{b,z}^2(b), \tau_{a,z}^2(a)\big\rangle = \big\langle \tau_{a,z}(z), \tau_{b,z}(z)\big\rangle = \big\langle \sigma_z(a), \sigma_z(b)\big\rangle \\ (a,b) &\equiv \big(\tau_{z,a}\,\tau_{b,z}(b), \tau_{z,b}\,\tau_{a,z}(a)\big) \equiv \big(\tau_{b,z}^2(b), \tau_{a,z}^2(a)\big) \equiv \big(\tau_{a,z}(z), \tau_{b,z}(z)\big) \equiv \big(\sigma_z(a), \sigma_z(b)\big). \end{aligned}$$

Für $x \in X$ gilt:

$$\sigma_z\,\sigma_z(x) = \sigma_z\,\tau_{x,z}(z) = \tau_{\tau_{x,z}(z),\,z}(z) = \tau_{z,\,\tau_{z,x}(z)}(z) = \tau_{z,x}(z) = x.$$

Damit ist σ_z eine Bewegung und eine involutorische Dilatation.

Es sei $L \in \mathfrak{L}_z$ mit $l \in L \setminus \{z\}$. Dann gilt $\langle z,l\rangle = \big\langle \sigma_z(z), \sigma_z(l)\big\rangle = \big\langle z, \sigma_z(l)\big\rangle$, woraus $L = z \sqcup l = z \sqcup \sigma_z(l) = \sigma_z(L)$ folgt. Also ist σ_z eine Spiegelung an z.

Es sei $\sigma \in \mathrm{Bew}(X)^*$ eine weitere Spiegelung an z. Dann gilt für $x \in X \setminus \{z\}$ mit $z \sqcup x \in \mathfrak{G}$:

$$\langle z,x\rangle = \big\langle z, \sigma_z(x)\big\rangle = \big\langle z, \sigma(x)\big\rangle, \quad (z,x) \equiv \big(z, \sigma_z(x)\big) \equiv \big(z, \sigma(x)\big).$$

Nach Satz 1.1.8.a) ist σ eine Dilatation. Mit Satz 1.1.8.b) folgt $x \neq \sigma_z(x)$ und $x \neq \sigma(x)$. Schließlich liefert Lemma 2.1.9: $\sigma_z(x) = \sigma(x)$.

Die Dilatation $\sigma_z\,\sigma^{-1}$ besitzt somit mindestens zwei Fixpunkte und ist nach Satz 1.1.8.b) die Identität. Es gilt also $\sigma_z = \sigma$. $\square$

2.5 Orthogonalität

In diesem Abschnitt wird eine Relation $\perp$ auf der Menge der Linien $\mathfrak{L}$ eingeführt. Es sei wieder $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ ein fasteuklidischer Raum.

Definition 2.5.1
Zwei Linien $L, M \in \mathfrak{L}$ heißen <u>orthogonal</u> zueinander in Zeichen $L \perp M$, wenn ein Punkt $z \in X$ mit $L, M \in \mathfrak{L}_z$ existiert und wenn gilt:

$$\forall\, l, l' \in L\backslash\{z\} \text{ mit } (z, l) \equiv (z, l') \;\; \forall\, m \in M : \quad (m, l) \equiv (m, l').$$

Lemma 2.5.2
Für $L, M \in \mathfrak{L}$ gilt:

a) $L \perp M \quad \Rightarrow \quad L \neq M$

b) $L \perp M \quad \Rightarrow \quad M \perp L$

c) $\forall\, \sigma \in \mathrm{Bew}(X) : \quad L \perp M \quad \Rightarrow \quad \sigma(L) \perp \sigma(M)$

Beweis:

a) Es gelte $L \perp L$. Für $z \in X$ mit $L \in \mathfrak{L}_z$, $l \in L\backslash\{z\}$ und $l' := \sigma_z(l)$ folgt dann $(z, l) \equiv (z, l')$ und $(l, l) \equiv (l, l')$ im Widerspruch zu (K3).

b) Es sei $z \in X$ mit $L, M \in \mathfrak{L}_z$ und $L \perp M$. Ferner seien $m, m' \in M\backslash\{z\}$ mit $(z, m) \equiv (z, m')$ und $l \in L\backslash\{z\}$.
   Mit Lemma 2.1.9 und Satz 2.4.4 folgt $\sigma_z(m) = m'$. Aus $L \perp M$ folgt für $l' := \sigma_z(l)$: $(m', l) \equiv (m', l')$. Da σ_z eine Bewegung ist, gilt $(m, l) \equiv (m', l')$ und somit $(m, l) \equiv (m', l)$.

c) Da σ eine Bewegung ist, bleiben Kongruenzen und Aufpunkte erhalten.

$\square$

Lemma 2.5.3
Es sei $z \in X$ und $G, H \in \mathfrak{G}_z$. Existieren Punkte $g_0 \in G \setminus \{z\}$ und $h_0, h_0' \in H \setminus \{z\}$ mit $h_0 \neq h_0'$ und $(z, h_0) \equiv (z, h_0')$, $(g_0, h_0) \equiv (g_0, h_0')$, so gilt: $G \perp H$.

Beweis: $\overline{G \cup H}$ ist eine Ebene. Für $g \in G \setminus \{z\}$ gilt nach Axiom (KG): $(g, h_0) \equiv (g, h_0')$. Es sei $h \in H \setminus \{z\}$ und $g' := \sigma_z(g)$, $h' := \sigma_z(h)$. Dann gilt:

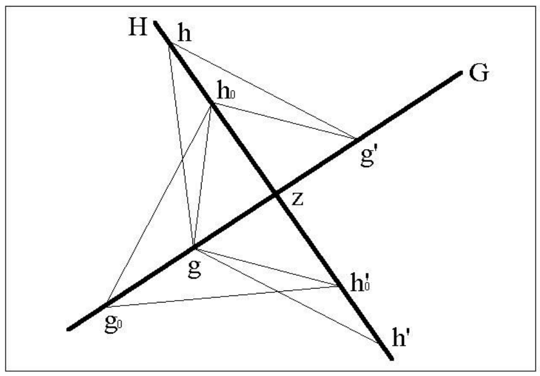


Abbildung 13

$$(z, h) \equiv (z, h'), \quad (g', h_0) \equiv (g, h_0') \equiv (g, h_0).$$

Mit Axiom (KG) folgt $(g, h) \equiv (g', h) \equiv (g, h')$. $\square$

2.6 Geradenspiegelungen in fasteuklidischen Ebenen

Im folgenden sei $(E, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene.

Lemma 2.6.1

a) $\forall\, G \in \mathfrak{G}\ \ \forall\, x \in G\ \ \exists$ höchstens eine Linie $L \in \mathfrak{L}$: $\quad G \perp L$ und $x \in L$

b) $\forall\, G, H, I \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp H$: $\quad G \perp I \quad \Leftrightarrow \quad H \parallel I$

Beweis:

a) Annahme: Es existieren $L, L' \in \mathfrak{L}_x$, so daß gilt: $L, L' \perp G$ und $L \neq L'$. Es sei $l \in L \setminus \{x\}$. Nach Lemma 2.1.5 existiert eine Gerade $H \in \mathfrak{G}$ mit $G, L, L' \nparallel H$.

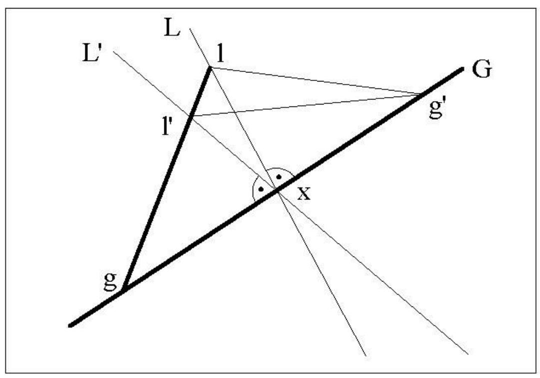


Abbildung 14

$$g := G \cap \{l \parallel H\}, \quad g' := \sigma_x(g), \quad l' := L' \cap \{l \parallel H\}$$

Es gilt:

$$g \in l \sqcup l' \in \mathfrak{G}, \quad g' \notin l \sqcup l', \quad (g, l) \equiv (g', l), \quad (g, l') \equiv (g', l').$$

Nach Axiom (KG) folgt $(g, g') \equiv (g, g)$ im Widerspruch zu (K3).

b) Es sei $z := G \cap H$, $g \in G \setminus \{z\}$ und $h, h' \in H$ mit $h \neq h'$ und $(z, h) \equiv (z, h')$. Dann gilt $(g, h) \equiv (g, h')$.

„$\Leftarrow$“: Es sei $H \parallel I$. Dann gilt $G \nparallel I$, und somit existiert nach Lemma 1.3.6 ein Punkt $z' \in G \cap I$. Es gilt

$$\big(\tau_{z,z'}(g), \tau_{z,z'}(h)\big) \equiv \big(\tau_{z,z'}(g), \tau_{z,z'}(h')\big), \quad \big(z', \tau_{z,z'}(h)\big) \equiv \big(z', \tau_{z,z'}(h')\big)$$

woraus mit Lemma 2.5.3 $G \perp I$ folgt.

„$\Rightarrow$“: Es sei $G \perp I$. Für $I' := \{z \parallel I\}$ folgt analog zum vorigen Beweisschritt $G \perp I'$. Nach a) gilt $I' = H$, woraus $H \parallel I$ folgt. $\square$

Definition 2.6.2
Existiert zu $G \in \mathfrak{G}$ eine Gerade $H \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp H$, so heißt H ein Lot von G.

Satz 2.6.3
Existiert zu $G \in \mathfrak{G}$ ein Lot, so gilt:

$$\forall\, x \in E \;\; \exists_1\, H \in \mathfrak{G}: \quad G \perp H \text{ und } x \in H.$$

Es wird die Schreibweise $H =: \{x \perp G\}_E$ verwendet, wobei der Index E weggelassen wird, wenn keine Verwechselungen zu befürchten sind.

Beweis: Es sei I ein Lot von G. Für $H := \{x \parallel I\}$ gilt nach Lemma 2.6.1 $H \perp G$ und $x \in H$. Ist $H' \in \mathfrak{G}$ eine weitere Gerade mit dieser Eigenschaft, so gilt mit $z := G \cap H$ nach Lemma 2.6.1 $H = \{z \perp G\}$ und $\{z \parallel H'\} \perp G$, woraus $H \parallel H'$ und damit $H = H'$ folgt. □

Definition 2.6.4
Es sei $x \in E$ und $G \in \mathfrak{G}$. Existiert zu G ein Lot, so heißt

$$x_G := G \cap \{x \perp G\}_E$$

Lotfußpunkt von x auf G.

Lemma 2.6.5
Es sei $G \in \mathfrak{G}$, $x \in X \setminus G$ und $z, g, g' \in G$ paarweise verschiedene Punkte mit $(z, g) \equiv (z, g')$. Existiert zu G ein Lot, so gilt:

$$(x, g) \equiv (x, g') \quad \Rightarrow \quad x \sqcup z \perp G.$$

Beweis: Es sei $z' := x_G$ und $g'' := \sigma_{z'}(g), x' := \sigma_{z'}(x)$. Es gilt:

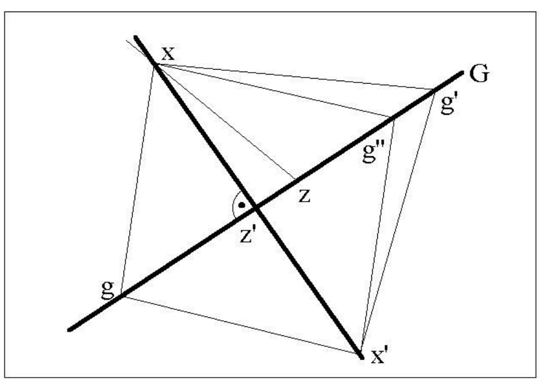


Abbildung 15

$$(x, g') \equiv (x, g) \equiv (x', g'') \equiv (x, g''), \quad (x', g') \equiv (x, g') \equiv (x, g) \equiv (x', g'').$$

Aus $z' \in x \sqcup x'$ folgt mit (KG): $(z', g') \equiv (z', g'')$. Wegen $g \neq g', g''$ ist $g' = g''$ und damit $z = z'$. □

Satz 2.6.6
An jeder Geraden $G \in \mathfrak{G}$, zu der ein Lot existiert, gibt es genau eine Spiegelung:

$$\sigma_G : \begin{cases} X & \to & X \\ x & \mapsto & \tau_{x,x_G}(x_G) \end{cases}$$

Diese ist involutorisch.

Die Menge der Geradenspiegelungen wird mit $\mathrm{Spi}(E)$ bezeichnet.

Beweis:
σ_G ist bijektiv und involutorisch:
Für $x \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_G\, \sigma_G(x) &= \sigma_G\, \tau_{x,x_G}(x_G) = \tau_{\tau_{x,x_G}(x_G)\,,\,(\tau_{x,x_G}(x_G))_G}\big((\tau_{x,x_G}(x_G))_G\big) \\ &= \tau_{\tau_{x,x_G}(x_G)\,,\,x_G}(x_G) = \tau_{\tau_{x,x_G}(x_G)\,,\,\tau_{x,x_G}(x)}(x_G) \\ &= \tau_{x_G,x}(x_G) = x. \end{aligned}$$

Damit ist $\sigma_G\, \sigma_G = \mathrm{id}_E$.

σ_G erhält Kongruenzen:
Es seien $x, y \in E$ und $y' := \mathrm{Pgm}(x, x_G, y)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \big(\sigma_G(x), \sigma_G(y)\big) &= \big(\tau_{x,x_G}(x_G), \tau_{y,y_G}(y_G)\big) \equiv \big(\tau_{x,x_G}(x_G), \tau_{y',y_G}\, \tau_{y,y'}(y_G)\big) \\ &\equiv \big(x_G, \tau_{y',y_G}(y_G)\big) = \big(x_G, \sigma_G(y')\big) \equiv (x_G, y') \equiv (x, y). \end{aligned}$$

σ_G ist eine Kollineation:
Es seien $x, y, z \in E$ mit $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$ und $x \in G$. Ist $x \sqcup y = G$ oder $x \sqcup y \perp G$, so gilt nach Definition von σ_G:

$$\big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle = \big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(z)\big\rangle.$$

Es sei $x \sqcup y \neq G$ und $x \sqcup y \not\perp G$.

$$y' := \sigma_G(y), \quad z' := \sigma_G(z), \quad z'' := x \sqcup y' \cap \{z \parallel y \sqcup y'\}, \quad x' := \sigma_{z_G}(x)$$

Nach Axiom (KZ) gilt $(x, z) \equiv (x, z'')$ und mit Hilfe des bereits Bewiesenen folgt $(x, z) \equiv (x, z')$. Aus $z \sqcup z' = z \sqcup z'' \perp G$ folgt mit Lemma 2.5.3 $(x, z') \equiv (x', z')$ und $(x, z'') \equiv (x', z'')$. Axiom (KG) angewandt auf die Punkte x, x', z_G, z', z'' liefert $(z_G, z') \equiv (z_G, z'')$. Aus $z \neq z', z''$ und $(z_G, z) \equiv (z_G, z')$ folgt mit Lemma 2.1.9 $z' = z''$ und damit $\langle x, y'\rangle = \langle x, z'\rangle$.

Es seien $x, y, u, v \in E$ mit $\langle x, y\rangle = \langle u, v\rangle$.

$$y' := \mathrm{Pgm}(x, y, x_G), \quad v' := \mathrm{Pgm}(u, v, u_G), \quad v'' := \mathrm{Pgm}(x_G, y', u_G)$$

Mit Hilfe des bereits Bewiesenen gilt:

$$\begin{aligned}
\big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(y)\big\rangle &= \big\langle \tau_{x,x_G}(x_G), \tau_{y,y_G}(y_G)\big\rangle \\
&= \big\langle x_G, \tau_{x_G,x}\,\tau_{y,y_G}(y_G)\big\rangle = \big\langle x_G, \tau_{y',y}\,\tau_{y,y_G}(y_G)\big\rangle \\
&= \big\langle x_G, \tau_{y',y_G}(y_G)\big\rangle = \big\langle \tau_{x_G,u_G}(x_G), \tau_{x_G,u_G}\,\tau_{y',y_G}(y_G)\big\rangle \\
&= \big\langle u_G, \tau_{y',v''}\,\tau_{y',y_G}(y_G)\big\rangle = \big\langle u_G, \tau_{y'_G,v''_G}\,\tau_{y',y_G}(y_G)\big\rangle \\
&= \big\langle u_G, \tau_{y_G,v''_G}\,\tau_{y',y_G}(y_G)\big\rangle = \big\langle u_G, \tau_{y',y_G}(v''_G)\big\rangle \\
&= \big\langle u_G, \tau_{v'',v''_G}(v''_G)\big\rangle = \big\langle u_G, \sigma_G(v'')\big\rangle \\
&= \big\langle u_G, \sigma_G(v')\big\rangle = \big\langle u_G, \tau_{v',v'_G}(v'_G)\big\rangle \\
&= \big\langle \tau_{u,u_G}(u_G), \tau_{u,u_G}\,\tau_{v',v'_G}(v'_G)\big\rangle = \big\langle \sigma_G(u), \tau_{v,v'}\,\tau_{v',v'_G}(v'_G)\big\rangle \\
&= \big\langle \sigma_G(u), \tau_{v,v'_G}(v'_G)\big\rangle = \big\langle \sigma_G(u), \tau_{v,v_G}(v_G)\big\rangle \\
&= \big\langle \sigma_G(u), \sigma_G(v)\big\rangle.
\end{aligned}$$

Eindeutigkeit:
Es sei $x \in E\backslash G$ und $z \in G\backslash\{x_G\}$. Dann gilt für $x' := \sigma_G(x)$:

$$x' \in x \sqcup x_G, \quad (x, x_G) \equiv (x', x_G), \quad (x, z) \equiv (x', z).$$

Ist σ eine Spiegelung an G, so gilt:

$$\sigma(x') \in \sigma(x \sqcup x_G) = \sigma(x) \sqcup x_G, \quad \big(\sigma(x), x_G\big) \equiv \big(\sigma(x'), x_G\big), \quad \big(\sigma(x), z\big) \equiv \big(\sigma(x'), z\big).$$

Damit folgt $\sigma(x \sqcup x') = \sigma(x) \sqcup \sigma(x') \in \mathfrak{G}$ und $\sigma(x) \sqcup x_G \in \mathfrak{G}$. Mit Lemma 2.5.3 folgt $\sigma(x \sqcup x') \perp G$. Also gilt $\sigma(x \sqcup x') \parallel x \sqcup x'$ und $x_G \in x \sqcup x', \sigma(x \sqcup x')$, woraus $\sigma(x \sqcup x') = x \sqcup x'$ und $\sigma(x) = \sigma_G(x) = x'$ folgt. $\square$

Lemma 2.6.7
Es seien $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp H$. Dann gilt:

a) $\forall\, \tau \in \mathrm{Tra}_G(E): \quad \sigma_G = \tau^{-1}\sigma_G\,\tau$

b) $\forall\, \tau \in \mathrm{Tra}_H(E): \quad \sigma_G = \tau\,\sigma_G\,\tau$

Beweis: Es sei $x \in E$.

a) Für $\tau \in \mathrm{Tra}_G(E)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tau^{-1}\sigma_G\,\tau(x) &= \tau^{-1}\,\tau_{\tau(x),\tau(x)_G}\big(\tau(x)_G\big) = \tau^{-1}\,\tau_{\tau(x),\tau(x_G)}\,\tau(x_G) \\
&= \tau_{\tau(x),\tau(x_G)}(x_G) = \tau_{x,x_G}(x_G) = \sigma_G(x).
\end{aligned}$$

b) Für $\tau \in \mathrm{Tra}_H(E)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\tau\,\sigma_G\,\tau(x) &= \tau\,\tau_{\tau(x),\tau(x)_G}\big(\tau(x)_G\big) = \tau\,\tau_{\tau(x),x_G}(x_G) \\
&= \tau_{x,\tau(x)}\,\tau_{\tau(x),x_G}(x_G) = \tau_{x,x_G}(x_G) = \sigma_G(x).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.8
Für zwei aufeinander senkrecht stehende Geraden gilt die Diagonalenbedingung (siehe 1.5.5):

$$\forall\, a,b,c,d \in E \text{ mit } a \sqcup b,\ a \sqcup c,\ b \sqcup c \in \mathfrak{G}: \quad a \sqcup b \perp a \sqcup c \ \Rightarrow\ a \sqcup \mathrm{Pgm}(a,b,c) \in \mathfrak{G}.$$

Beweis: Es gilt $\sigma_{a \sqcup c}\, \tau_{b,a}(b \sqcup c) \in \mathfrak{G}$. Mit Lemma 2.6.7.b) folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_{a \sqcup c}\, \tau_{b,a}(b \sqcup c) &= \sigma_{a \sqcup c}\big(\tau_{b,a}(b) \sqcup \tau_{b,a}(c)\big) = \sigma_{a \sqcup c}\big(a \sqcup \tau_{b,a}(c)\big) = \sigma_{a \sqcup c}(a) \sqcup \big(\sigma_{a \sqcup c}\, \tau_{b,a}(c)\big)\\ &= a \sqcup \big(\sigma_{a \sqcup c}\, \tau_{b,a}(c)\big) = a \sqcup \big(\tau_{b,a}^{-1}\, \sigma_{a \sqcup c}(c)\big) = a \sqcup \tau_{a,b}(c) = a \sqcup \mathrm{Pgm}(a,b,c).\end{aligned}$$

□

Satz 2.6.9
Die Komposition zweier Spiegelungen an zueinander orthogonalen Geraden ist die Spiegelung an ihrem Schnittpunkt.

Beweis: Für $z, x \in E$ und $G, H \in \mathfrak{G}_z$ mit $G \perp H$ gilt mit Lemma 2.6.7.a):

$$\begin{aligned}\sigma_H\, \sigma_G(x) &= \sigma_H\, \tau_{x,x_G}(x_G) = \tau_{x,x_G}\, \sigma_H(x_G) = \tau_{x,x_G}\, \tau_{x_G,(x_G)_H}\big((x_G)_H\big)\\ &= \tau_{x,x_G}\, \tau_{x_G,z}(z) = \tau_{x_G,z}\, \tau_{x,x_G}(z) = \tau_{x,z}(z) = \sigma_z(x).\end{aligned}$$

□

Lemma 2.6.10
Besitzen die Geraden $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \nparallel H$ Lote, so besitzt auch $\sigma_H(G)$ ein Lot, und es gilt:

$$\sigma_{\sigma_H(G)} = \sigma_H\, \sigma_G\, \sigma_H.$$

Beweis: Es sei $I \in \mathfrak{G}$ mit $G \perp I$. Da σ_H eine Bewegung ist, gilt $\sigma_H(I) \perp \sigma_H(G)$. Für $x \in \sigma_H(G)$ gilt $\sigma_H(x) \in G$ und

$$\sigma_H\, \sigma_G\, \sigma_H(x) = \sigma_H\, \sigma_H(x) = x.$$

Wegen $\sigma_G\, \sigma_H \neq \sigma_H$ gilt $\sigma_H\, \sigma_G\, \sigma_H \neq \mathrm{id}_E$. Damit ist $\sigma_H\, \sigma_G\, \sigma_H$ die Spiegelung an der Achse $\sigma_H(G)$. □

Satz 2.6.11
Ein Paar $(a,b) \in E^{(2)}$ mit $a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ besitzt einen Mittelpunkt, falls zu $a \sqcup b$ ein Lot existiert.

Beweis: Da die Ebene E regulär ist, existiert ein Punkt $c \in \{a \perp a \sqcup b\} \setminus \{a\}$ mit $b \sqcup c \in \mathfrak{G}$.

$$\begin{gathered} c' := \sigma_a(c), \quad d := \mathrm{Pgm}(a,b,c), \quad d' := \mathrm{Pgm}(a,b,c') \\ e := a \sqcup d \cap b \sqcup c, \quad e' := a \sqcup d' \cap b \sqcup c', \quad m := e \sqcup e' \cap a \sqcup b \end{gathered}$$

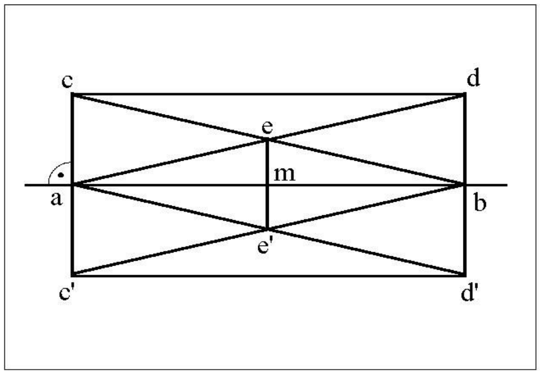


Abbildung 16

Es gilt:

$$\sigma_{a\sqcup b}(e) = \sigma_{a\sqcup b}(a \sqcup d \,\cap\, b \sqcup c) = \sigma_{a\sqcup b}(a \sqcup d) \,\cap\, \sigma_{a\sqcup b}(b \sqcup c) = a \sqcup d' \,\cap\, b \sqcup c' = e'.$$

Also ist $e \sqcup e' \parallel a \sqcup c$.

$$\begin{array}{lcl} (c,a) \equiv (a,c') \text{ und } a \sqcup b \perp a \sqcup c & \Rightarrow & (b,c) \equiv (b,c') \\ (d,b) \equiv (b,d') \text{ und } a \sqcup b \perp b \sqcup d & \Rightarrow & (a,d) \equiv (a,d') \end{array}$$

Mit Axiom (KZ) folgt $(a,e) \equiv (a,e')$ und $(b,e) \equiv (b,e')$.

$$\langle a,e\rangle = \langle a,d\rangle = \langle c',b\rangle = \langle b,e'\rangle \text{ und } \langle b,e\rangle = \langle b,c\rangle = \langle d',a\rangle = \langle a,e'\rangle$$

Axiom (KP) liefert $(a,e) \equiv (b,e')$ und $(a,e') \equiv (b,e)$. Insgesamt folgt $(a,e) \equiv (b,e)$. Aus $e \sqcup e' \perp a \sqcup b$ folgt die Behauptung. □

Lemma 2.6.12
Zu drei Punkten $a,b,c \in X$ mit $a \sqcup b, a \sqcup c \in \mathfrak{G}$ und $a \sqcup b \perp a \sqcup c$ existiert ein Punkt $m \in X$, so daß gilt:

$$(a,m) \equiv (b,m) \equiv (c,m), \quad \langle b,m\rangle = \langle c,m\rangle.$$

Der Punkt m ist durch b und c eindeutig bestimmt. Damit ist m der Mittelpunkt des Paares (b,c).

Beweis: Aus $a \sqcup b \perp a \sqcup c$ folgt mit Satz 2.6.11 die Existenz der Punkte $m_b := \mathrm{Mp}(a,b)$ und $m_c := \mathrm{Mp}(a,c)$. Es sei $m := \{m_b \perp a \sqcup b\} \cap \{m_c \perp a \sqcup c\}$. Mit (KP), (KL) und Satz 2.1.10 folgt:

$$\left\{ \begin{array}{l} (b,m_b) \equiv (m,m_c) \text{ und } \langle b,m_b\rangle = \langle m,m_c\rangle \\ (c,m_c) \equiv (m,m_b) \text{ und } \langle c,m_c\rangle = \langle m,m_b\rangle \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (b,m) \equiv (m_b,m_c) \text{ und } \langle b,m\rangle = \langle m_b,m_c\rangle \\ (c,m) \equiv (m_c,m_b) \text{ und } \langle c,m\rangle = \langle m_c,m_b\rangle \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad (b,m) \equiv (c,m) \text{ und } \langle b,m\rangle = \langle c,m\rangle.$$

Aus $m_b = \mathrm{Mp}(a,b)$ und $m \sqcup m_b \perp a \sqcup b$ folgt $(a,m) \equiv (b,m)$.

Es sei $a' \in E$ mit $a' \sqcup b, a' \sqcup c \in \mathfrak{G}$ und $a' \sqcup b \perp a' \sqcup c$. Die Punkte $m'_b, m'_c, m' \in X$ werden analog zum ersten Teil des Beweises konstruiert. Es gilt:

$$\tau^2_{b,m} = \left(\tau_{m_b,m}\,\tau_{b,m_b}\right)^2 = \tau^2_{m_b,m}\,\tau^2_{b,m_b} = \tau_{a,c}\,\tau_{b,a} = \tau_{b,c}$$
$$\tau^2_{b,m'} = \left(\tau_{m'_b,m'}\,\tau_{b,m'_b}\right)^2 = \tau^2_{m'_b,m}\,\tau^2_{b,m'_b} = \tau_{a',c}\,\tau_{b,a'} = \tau_{b,c}.$$

Damit folgt für $\tau := \tau^{-1}_{b,m'}\,\tau_{b,m}$ die Aussage $\tau^2 = \mathrm{id}_E$.

Annahme: Es existiert eine Gerade $G \in \mathfrak{G}$ mit $\tau(G) \neq G$.
Für $x, y \in G$ mit $x \neq y$ gilt

$$\begin{aligned} \tau(y) = \mathrm{Pgm}\big(x, \tau(x), y\big), \quad y = \tau^2(y) = \mathrm{Pgm}\big(x, \tau(x), \tau(y)\big) \\ \Rightarrow \quad \mathrm{Pgm}\big(x, \tau(x), y\big) = \tau(y) = \mathrm{Pgm}\big(\tau(x), x, y\big) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu Satz 2.1.10. Damit folgt $\tau = \mathrm{id}_E$ und $m = m'$. □

Satz 2.6.13
Jede Gerade besitzt ein Lot.

Beweis: Es sei $G \in \mathfrak{G}$. Nach Axiom (KR) existieren Punkte $z, a, b, m, m', a' \in E$ mit

$$\begin{gathered} z \sqcup a,\ z \sqcup m,\ a \sqcup b,\ m \sqcup m' \in \mathfrak{G}, \quad z \notin a \sqcup b, \quad m \in a \sqcup b, \quad a' \in z \sqcup a \,\cap\, m \sqcup m' \\ (z,a) \equiv (z,b), \quad (z,m) \equiv (z,m'), \quad (a,m) \equiv (m,b), \quad (m,a') \equiv (a',m'). \end{gathered}$$

Im Beweis von Lemma 2.1.5 wurde gezeigt, daß die Geraden $z \sqcup a$, $z \sqcup m$, $a \sqcup m$, $a' \sqcup m$ paarweise nicht-parallel sind. Aus den obigen Kongruenzen folgt mit Lemma 2.5.3:

$$z \sqcup m \perp a \sqcup m, \quad z \sqcup a' \perp m \sqcup a'.$$

Es sei $H := z \sqcup m$ und $I := z \sqcup a'$ für $G \notin \mathfrak{G}_z$ bzw. $I := m \sqcup a'$ für $G \in \mathfrak{G}_z$. Damit besitzen H und I Lote, und es gilt $G \cap H \cap I = \emptyset$.

Es gelte $G \nparallel H, I$ und $G \not\perp H, I$ (Ansonsten besitzt G ein Lot nach Lemma 2.6.1.). Folgende Punkte werden definiert:

$$\begin{gathered} g := H \cap I, \quad h := I \cap G, \quad i := G \cap H \\ g' := \{h \parallel H\} \cap \{i \parallel I\}, \quad h' := \{i \parallel I\} \cap \{g \parallel G\}, \quad i' := \{g \parallel G\} \cap \{h \parallel H\} \\ h'' := \{h \perp H\} \cap H, \quad i'' := \{i \perp I\} \cap I, \quad m := h \sqcup h'' \cap i \sqcup i''. \end{gathered}$$

Es gilt nach Axiom (KP):

$$(h',g) \equiv (i,h) \equiv (g,i'), \quad (i',h) \equiv (g,i) \equiv (h,g'), \quad (g',i) \equiv (h,g) \equiv (i,h').$$

Nach Lemma 2.6.12 existiert ein Punkt $m_g \in E$, so daß gilt:

$$(m_g, h'') \equiv (m_g, h) \equiv (m_g, i), \quad (m_g, i'') \equiv (m_g, h) \equiv (m_g, i), \quad \langle m_g, h\rangle = \langle m_g, i\rangle.$$

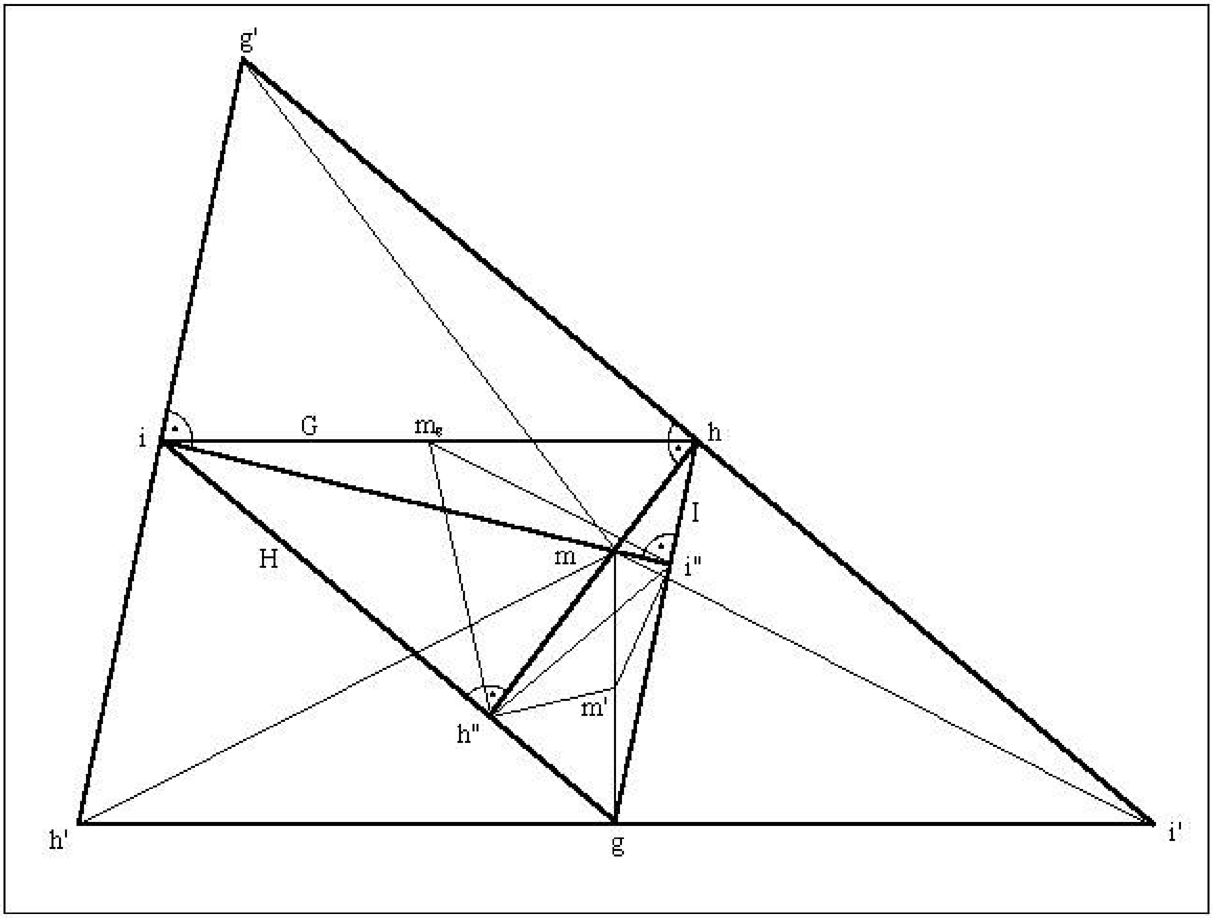


Abbildung 17

Wendet man Axiom (KV) auf die Punkte m_g, h, h'', i, i'' an, so folgt $h'' \sqcup i'' \in \mathfrak{G}$.
Nach Lemma 2.6.12 existiert ein Punkt $m' \in E$, so daß gilt:

$$(m', h'') \equiv (m', g) \equiv (m', m), \quad (m', i'') \equiv (m', g) \equiv (m', m), \quad \langle m', g \rangle = \langle m', m \rangle.$$

Axiom (KV) auf die Punkte m', m, h'', g, i'' angewandt, ergibt $m \sqcup g \in \mathfrak{G}$. Mit Lemma 2.5.3 folgt:

$$(m, h') \equiv (m, g') \equiv (m, i') \quad \Rightarrow \quad m \sqcup g \perp i' \sqcup h'.$$

Nach Lemma 2.6.1 besitzt G somit ein Lot.

Lemma 2.6.14
Für $x, y, u, v \in X$ mit $(x, y) \equiv (u, v)$ gilt:

$$x \sqcup y \in \mathfrak{G} \quad \Rightarrow \quad u \sqcup v \in \mathfrak{G}.$$

Beweis: Es sei $w := \tau_{u,x}(v)$. Nach (KT) existieren Punkte $y_0, \ldots, y_n \in X$ mit $y = y_0, y_n = w$, so daß für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $y_{i-1} \sqcup y_i \in \mathfrak{G}$ und $(x, y_{i-1}) \equiv (x, y_i)$.

Mit Lemma 2.6.5 folgt für $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$x \sqcup \mathrm{Mp}(y_{i-1}, y_i) \in \mathfrak{G},\ x \sqcup \mathrm{Mp}(y_{i-1}, y_i) \perp y_{i-1} \sqcup y_i \quad \Rightarrow \quad y_i = \sigma_{x \sqcup \mathrm{Mp}(y_{i-1}, y_i)}(y_{i-1}).$$

Damit folgt $(x, y_0) \in \mathfrak{G} \ \Rightarrow \ (x, y_1) \in \mathfrak{G} \ \Rightarrow \ \cdots \ \Rightarrow \ (x, y_n) \in \mathfrak{G}$ und $u \sqcup v = \tau_{x,u}(x \sqcup y_n) \in \mathfrak{G}$.

□

Lemma 2.6.15
In einer fasteuklidischen Ebene sind zwei Linien, die aufeinander senkrecht stehen, bereits Geraden.

Beweis: Es sei $z \in X$ und $L, M \in \mathfrak{L}_z$ mit $L \perp M$. Nach Lemma 2.1.5 existiert eine Gerade $G \in \mathfrak{G} \setminus \mathfrak{G}_z$ mit $G \nparallel L, M$, so daß nach Lemma 1.3.6 die Punkte $l := G \cap L$ und $m := G \cap M$ existieren. Damit gilt für $l' := \sigma_z(l)$: $(m, l) \equiv (m, l')$.

Analog zum Beweis von Lemma 2.6.14 existieren Punkte $x_0, \dots, x_n \in X$ mit $l = x_0, x_n = l'$, so daß für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $m_i := \mathrm{Mp}(x_{i-1}, x_i)$ gilt:

$$x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}, \quad (m, x_{i-1}) \equiv (m, x_i), \quad m \sqcup m_i \in \mathfrak{G}, \quad m \sqcup x_i \in \mathfrak{G}.$$

Es sei $n_1 := \mathrm{Mp}(m, x_1)$. Mit Lemma 2.6.12 folgt $(n_1, m) \equiv (n_1, m_1) \equiv (n_1, x_1) \equiv (n_1, m_2)$, so daß mit Axiom (KV) aus $m \sqcup x_1 \in \mathfrak{G}$ die Aussage $m_1 \sqcup m_2 \in \mathfrak{G}$ folgt.

$$\begin{gathered} x_2 = \tau_{x_1,x_2}\, \tau_{x_0,x_1}(x_0) = \tau^2_{x_1,m_2} \tau^2_{m_1,x_1}(x_0) = \big(\tau_{x_1,m_2}\, \tau_{m_1,x_1}\big)^2(x_0) = \tau^2_{m_1,m_2}(x_0) \\ \Rightarrow \quad x_0 \sqcup x_2 \in \mathfrak{G} \end{gathered}$$

Analog erhält man $x_0 \sqcup x_3 \in \mathfrak{G}, \dots, x_0 \sqcup x_n \in \mathfrak{G}$. Mit (F1) folgt $L \in \mathfrak{G}$, woraus mit Satz 2.6.13 und Lemma 2.6.1 $M \in \mathfrak{G}$ folgt. □

Satz 2.6.16
Die Höhen eines Dreiecks aus Geraden schneiden sich in einem Punkt:

$$\begin{gathered} \forall\, a, b, c \in E \text{ mit } a \sqcup b, b \sqcup c, c \sqcup a \in \mathfrak{G} \text{ und } c \notin a \sqcup b \ \exists\, m \in E : \\ m \ = \ a \sqcup a_{b \sqcup c} \ \cap \ b \sqcup b_{c \sqcup a} \ \cap \ c \sqcup c_{a \sqcup b}. \end{gathered}$$

Beweis (analog zum Beweis des Satzes 2.6.13):
Gilt $a \sqcup b \ \perp \ b \sqcup c$ oder $b \sqcup c \ \perp \ c \sqcup a$ oder $c \sqcup a \ \perp \ a \sqcup b$, so schneiden sich die Höhen in einem Eckpunkt des Dreiecks. Im folgenden seien deshalb $a \sqcup b$, $b \sqcup c$, $c \sqcup a$ paarweise nicht-orthogonal zueinander.

$$\begin{gathered} m := a \sqcup a_{b \sqcup c} \cap b \sqcup b_{c \sqcup a} \\ A := \{a \parallel b \sqcup c\}, \quad B := \{b \parallel c \sqcup a\}, \quad C := \{c \parallel a \sqcup b\} \\ a' := B \cap C, \quad b' := C \cap A, \quad c' := A \cap B \end{gathered}$$

Es gilt nach Axiom (KP):

$$(b', a) \equiv (c, b) \equiv (a, c'), \quad (c', b) \equiv (a, c) \equiv (b, a'), \quad (a', c) \equiv (b, a) \equiv (c, b').$$

Mit Lemma 2.5.3 folgt:

$$(a', m) \equiv (c', m) \equiv (b', m) \quad \Rightarrow \quad c \sqcup m = \{c \perp a \sqcup b\}.$$

□

Lemma 2.6.17
Es sei $z \in E$ und $G, H \in \mathfrak{G}_z$ mit $G \neq H$. Dann ist z der einzige Fixpunkt der Bewegung $\sigma_G\, \sigma_H$.

Beweis: Für $x \in E$ mit $\sigma_G\, \sigma_H(x) = x$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_G(x) = \sigma_H(x) \in \{x \perp G\} \cap \{x \perp H\} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_G(x) = \sigma_H(x) = x \\ \Rightarrow \quad x \in G \cap H \quad &\Rightarrow \quad x = z. \end{aligned}$$

□

Satz 2.6.18
Es sei $z \in E$ und $G, H, I \in \mathfrak{G}_z$. Dann gilt:

$$\exists\, J \in \mathfrak{G}_z : \quad \sigma_J = \sigma_G\, \sigma_H\, \sigma_I.$$

Beweis: Es sei $\varphi := \sigma_G\, \sigma_H\, \sigma_I$, und es gelte $G \neq H$ und $H \neq I$ (Sonst wird $J := I$ bzw. $J := G$ gewählt.). Nach Lemma 2.6.17 gilt:

$$\forall\, x \in I \setminus \{z\} : \quad \varphi(x) = \sigma_G\, \sigma_H\, \sigma_I(x) = \sigma_G\, \sigma_H(x) \neq x.$$

Wähle $x \in I \setminus \{z\}$. Gilt $\sigma_H(x) \in G$, so ist $x \sqcup \varphi(x) = x \sqcup \sigma_H(x) \in \mathfrak{G}$.

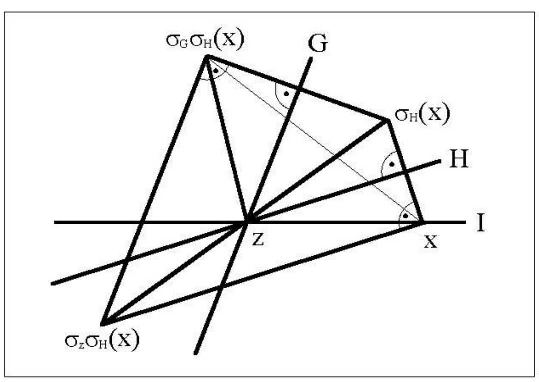


Abbildung 18

Gilt $\sigma_H(x) \notin G$, so werden die Punkte z, $\sigma_H(x)$, $\sigma_G\, \sigma_H(x)$, $\sigma_z\, \sigma_H(x)$, x betrachtet. Es gilt:

$$\begin{gathered} \big(z, \sigma_H(x)\big) \equiv \big(z, \sigma_G\, \sigma_H(x)\big) \equiv \big(z, \sigma_z\, \sigma_H(x)\big) \equiv (z, x) \\ \sigma_H(x) \sqcup \big(\sigma_G\, \sigma_H(x)\big),\ \big(\sigma_G\, \sigma_H(x)\big) \sqcup \big(\sigma_z\, \sigma_H(x)\big),\ \big(\sigma_z\, \sigma_H(x)\big) \sqcup x,\ x \sqcup \sigma_H(x) \in \mathfrak{G}. \end{gathered}$$

Aus $\sigma_H(x) \sqcup \big(\sigma_z\, \sigma_H(x)\big) \in \mathfrak{G}$ folgt mit (KV): $x \sqcup \varphi(x) \in \mathfrak{G}$.

Es sei $J := \{z \perp x \sqcup \varphi(x)\}$. Offensichtlich gilt $\sigma_J\,\varphi(z) = z$.

$$(z, x) \equiv \big(z, \varphi(x)\big) \quad \Rightarrow \quad x \sqcup \varphi(x) \perp z \sqcup \mathrm{Mp}\big(x, \varphi(x)\big) = J \quad \Rightarrow \quad \sigma_J(x) = \varphi(x)$$

Damit gilt $\sigma_J\,\varphi(x) = x$. Es sei $i \in I \setminus \{z, x\}$.

$$i \in x \sqcup z \quad \Rightarrow \quad \sigma_J\,\varphi(i) \in \big(\sigma_J\,\varphi(x)\big) \sqcup \big(\sigma_J\,\varphi(z)\big) = x \sqcup z$$

Da $\sigma_J\,\varphi$ eine Bewegung ist, folgt mit Lemma 2.1.13:

$$(x, i) \equiv \big(x, \sigma_J\,\varphi(i)\big) \text{ und } (z, i) \equiv \big(z, \sigma_J\,\varphi(i)\big) \quad \Rightarrow \quad i = \sigma_J\,\varphi(i).$$

Es gilt also $\sigma_J\,\varphi = \mathrm{id}_E$ oder $\sigma_J\,\varphi = \sigma_I$. Letzteres würde zu $\sigma_J = \sigma_I\,\varphi^{-1} = \sigma_H\,\sigma_G$ führen, was ein Widerspruch zu Lemma 2.6.17 wäre. Folglich gilt $\sigma_J = \varphi$. □

Lemma 2.6.19
Für $z \in E$ ist die Menge

$$\mathrm{Dre}_z(E) := \{\sigma_G\,\sigma_H \mid G, H \in \mathfrak{G}_z\}$$

eine kommutative Untergruppe vom Index 2 der von den Spiegelungen σ_I mit $I \in \mathfrak{G}_z$ erzeugten Gruppe.

Beweis: Daß $\mathrm{Dre}_x(E)$ eine Untergruppe vom Index 2 ist, folgt sofort aus Satz 2.6.18. Es seien $\sigma_G\,\sigma_H$, $\sigma_{G'}\,\sigma_{H'} \in \mathrm{Dre}_z(E)$. Da Spiegelungen involutorisch sind, gilt mit Satz 2.6.18:

$$\begin{aligned}(\sigma_G\,\sigma_H)(\sigma_{G'}\,\sigma_{H'}) &= \sigma_G(\sigma_H\,\sigma_{G'}\,\sigma_{H'}) = \sigma_G(\sigma_{H'}\,\sigma_{G'}\,\sigma_H)\\ &= (\sigma_G\,\sigma_{H'}\,\sigma_{G'})\sigma_H = (\sigma_{G'}\,\sigma_{H'}\,\sigma_G)\sigma_H = (\sigma_{G'}\,\sigma_{H'})(\sigma_G\,\sigma_H).\end{aligned}$$

□

Satz 2.6.20
Jede Bewegung $\alpha \in \mathrm{Bew}(E)$ ist das Produkt von höchstens vier Geradenspiegelungen.

Beweis:
α besitze einen Fixpunkt:

Es seien $z, x \in E$ mit $\alpha(z) = z$ und $x \neq z$.

Gilt $x = \alpha(x)$ und $z \sqcup x \in \mathfrak{G}$, so folgt für $y \in z \sqcup x$:

$$(z, y) \equiv \big(z, \alpha(y)\big), \quad (x, y) \equiv \big(x, \alpha(y)\big).$$

Mit Satz 2.1.13 folgt $y = \alpha(y)$, so daß $\alpha = \sigma_{z \sqcup x}$ oder $\alpha = \mathrm{id}_E$ ist.

Gilt $x = \alpha(x)$ und $z \sqcup x \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$, so existiert nach (Z) ein Punkt $x' \in E$ mit $z \sqcup x'$, $x' \sqcup x \in \mathfrak{G}$. Ist $x' \sqcup \alpha(x') \in \mathfrak{G}$, so folgt mit Lemma 2.6.5:

$$\begin{gathered}(z, x') \equiv \big(z, \alpha(x')\big), \quad (x, x') \equiv \big(x, \alpha(x')\big)\\ \Rightarrow \quad z \sqcup \mathrm{Mp}\big(x', \alpha(x')\big),\ x \sqcup \mathrm{Mp}\big(x', \alpha(x')\big) \ \perp\ x' \sqcup \alpha(x') \quad \Rightarrow \quad z \sqcup x \in \mathfrak{G}.\end{gathered}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.
Ist $x' \sqcup \alpha(x') \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$, so existiert nach (KT) und Satz 2.6.18 ein Punkt $x'' \in E$ mit $x' \sqcup x''$, $x'' \sqcup \alpha(x') \in \mathfrak{G}$ und $(z, x') \equiv (z, x'') \equiv \big(z, \alpha(x')\big)$. Nach Lemma 2.6.14 gilt $z \sqcup x'' \in \mathfrak{G}$. Mit Lemma 2.6.5 folgt:

$$\alpha(x') = \sigma_{\{z \perp x'' \sqcup \alpha(x')\}} \, \sigma_{\{z \perp x' \sqcup x''\}} \, \sigma_{z \sqcup x'}(x').$$

Nach Satz 2.6.18 existiert eine Spiegelung $\sigma \in \mathrm{Spi}(E)$ mit $\alpha(x') = \sigma(x')$, woraus $x' \sqcup \alpha(x') \in \mathfrak{G}$ im Widerspruch zur Voraussetzung folgt.

Gilt $x \sqcup \alpha(x) \in \mathfrak{G}$, so sei $m := \mathrm{Mp}\big(x, \alpha(x)\big)$. Damit ist $x \sqcup \alpha(x) \perp z \sqcup m$, also besitzt die Bewegung $\sigma_{z \sqcup m}\, \alpha$ die Fixpunkte z und x. Mit Hilfe des ersten Beweisschritts ist α das Produkt von höchstens zwei Geradenspiegelungen.

Gilt $x \sqcup \alpha(x) \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$, so existiert nach Axiom (KT) unter mehrfacher Anwendung von Satz 2.6.18 ein Punkt $x' \in E$ mit $x \sqcup x'$, $x' \sqcup \alpha(x) \in \mathfrak{G}$ und $(z, x) \equiv (z, x') \equiv \big(z, \alpha(x)\big)$. Es sei $m := \mathrm{Mp}(x, x')$ und $n := \mathrm{Mp}\big(x', \alpha(x)\big)$. Dann besitzt die Bewegung $\sigma_{z \sqcup m}\, \sigma_{z \sqcup n}\, \alpha$ die Fixpunkte z und x. Aus dem ersten Beweisschritt folgt, daß α das Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen ist. Mit Satz 2.6.18 reduziert sich die Anzahl der Faktoren auf zwei.

α besitze keinen Fixpunkt:

Es sei $G \in \mathfrak{G}$.

Gilt $\alpha(G) \parallel G$, so sei $x \in G$ und $x' := \{x \perp G\} \cap \alpha(G)$, $m := \mathrm{Mp}(x, x')$ und $n := x'$, falls $x' = \alpha(x)$ ist, bzw. $n := \mathrm{Mp}\big(x', \alpha(x)\big)$, falls $x' \neq \alpha(x)$ ist. Für $I := \{m \parallel G\}$ und $H := \{n \perp G\}$ folgt, daß die Bewegung $\sigma_I\, \sigma_H\, \alpha$ einen Fixpunkt besitzt, welcher x ist. Mit Hilfe des bereits Bewiesenen existieren Geraden $J, K \in \mathfrak{G}$, so daß $\sigma_I\, \sigma_H\, \alpha = \sigma_J\, \sigma_K$ gilt. Damit folgt: $\alpha = \sigma_H\, \sigma_I\, \sigma_J\, \sigma_K$.

Gilt $\alpha(G) \nparallel G$, so sei $z := G \cap \alpha(G)$. Damit ist $z \sqcup \alpha(z) \in \mathfrak{G}$. Es sei $m := \mathrm{Mp}\big(z, \alpha(z)\big)$ und $H := \big\{m \perp z \sqcup \alpha(z)\big\}$. Die Bewegung $\sigma_H\, \alpha$ besitzt einen Fixpunkt, so daß die Behauptung analog wie im Fall $\alpha(G) \parallel G$ folgt. □

Bemerkung 2.6.21
Es existieren Bewegungen, die nicht Produkt von höchstens drei Geradenspiegelungen sind.

Beweis: Es sei $x \in E$ und $\tau \in \mathrm{Tra}(E)^*$ mit $x \sqcup \tau(x) \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$. Satz 2.3.3 garantiert die Existenz von τ.

Aus der Fixpunktfreiheit von τ folgt mit Lemma 2.6.17: $\tau \neq \sigma_G\, \sigma_H$ für $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \nparallel H$.

Wäre $\tau = \sigma_G\, \sigma_H$ für $G, H \in \mathfrak{G}$ mit $G \parallel H$, so folgte $x \sqcup \tau(x) \perp G$ und damit $x \sqcup \tau(x) \in \mathfrak{G}$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Es gelte $\tau = \sigma_G\, \sigma_H\, \sigma_I$ für $G, H, I \in \mathfrak{G}$. Ist $G \parallel H \parallel I$, so folgt $G \perp x \sqcup \tau(x) \in \mathfrak{G}$. Andernfalls besitzt H einen Schnittpunkt mit G oder I. Existiert ein Punkt $y \in G \cap H$, so gilt $\sigma_I(y) \sqcup \big(\sigma_H\, \sigma_G(y)\big) = \sigma_I(y) \sqcup y \in \mathfrak{G}$ und damit $\tau(y) \sqcup y \in \mathfrak{G}$. Existiert ein Punkt $y \in H \cap I$, so gilt $y \sqcup \tau(y) = y \sqcup \sigma_G(y) \in \mathfrak{G}$. In allen Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu $x \sqcup \tau(x) \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$.
□

2.7 Drehstreckungen in desarguesschen fasteuklidischen Ebenen

Im folgenden sei $(E, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine desarguessche fasteuklidische Ebene mit $z \in E$ und

$$+_z : \begin{cases} E \times E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & \tau_{z,x}(y) \end{cases}$$

Dann sind die Gruppen $\mathrm{Tra}(E)$ und $(E, +_z)$ isomorph. Die Abbildung $\tau \mapsto \tau(z)$ ist z.B. ein Isomorphismus.

Da keine Verwechselungen zu befürchten sind, wird statt $+_z$ das Zeichen $+$ verwendet.

Lemma 2.7.1
Für $\delta \in \mathrm{Dre}_z(E)^*$ gilt:

$$\forall\, x, y \in E\backslash\{z\} \text{ mit } y \in z \sqcup x : \quad \big\langle x, \delta(x)\big\rangle = \big\langle y, \delta(y)\big\rangle.$$

Beweis: Es existieren Geraden $G, H \in \mathfrak{G}_z$ mit $G \neq H$ und $\delta = \sigma_G\, \sigma_H$. Für $x \in H$ gilt

$$\big\langle x, \delta(x)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_G\, \sigma_H(x)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_G(x)\big\rangle = \big\langle y, \sigma_G(y)\big\rangle = \big\langle y, \delta(y)\big\rangle,$$

und für $x \in \sigma_H(G)$ gilt

$$\big\langle x, \delta(x)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_G \sigma_H(x)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_H(x)\big\rangle = \big\langle y, \sigma_H(y)\big\rangle = \big\langle y, \delta(y)\big\rangle.$$

Es sei $x \notin H$ und $x \notin \sigma_H(G)$. Dann gilt für $x' := \sigma_H(x)$ und $y' := \sigma_H(y)$:

$$\langle x_H, x'\rangle = \langle y_H, y'\rangle, \quad \big\langle x', \delta(x)\big\rangle = \big\langle y', \delta(y)\big\rangle, \quad \langle x_H, x\rangle = \langle y_H, y\rangle.$$

Es sei $y'' := \{y_H \parallel x_H \sqcup \delta(x)\} \cap z \sqcup \delta(x)$. Nach (Tam) und (F2) ist y'' wohldefiniert. Mit dem Axiom von Desargues folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{D}\big(z; x_H, x', \delta(x); y_H, y', y''\big) & \Rightarrow & \big\langle x', \delta(x)\big\rangle = \langle y', y''\rangle \quad \Rightarrow \quad y'' = \delta(y) \\ \mathrm{D}\big(z; x_H, x, \delta(x); y_H, y, \delta(y)\big) & \Rightarrow & \big\langle x, \delta(x)\big\rangle = \big\langle y, \delta(y)\big\rangle. \end{array}$$

□

Lemma 2.7.2
Die Mengen $\mathrm{Dre}_z(E)$ und $\mathrm{Spi}_z(E) := \{\sigma_G \in \mathrm{Spi}(E) \mid G \in \mathfrak{G}_z\}$ sind Teilmengen von $\mathrm{Aut}(E, +)$.

Beweis: Es sei $G \in \mathfrak{G}_z$ und $x, y \in E$. Dann gilt mit Lemma 2.6.7:

$$\begin{aligned} \sigma_G(x + y) &= \sigma_G\, \tau_{z,x}(y) = \sigma_G\, \tau_{z,x_G}\, \tau_{x_G,x}(y) = \tau_{z,x_G}\, \sigma_G\, \tau_{x_G,x}(y) = \tau_{z,x_G}\, \tau^{-1}_{x_G,x}\, \sigma_G(y) \\ &= \tau_{z,x_G}\, \tau_{x,x_G}\, \sigma_G(y) = \tau_{z,x_G}\, \tau_{\tau_{x,x_G}(x),\tau_{x,x_G}(x_G)}\, \sigma_G(y) = \tau_{z,x_G}\, \tau_{x_G,\sigma_G(x)}\, \sigma_G(y) \\ &= \tau_{z,\sigma_G(x)}\, \sigma_G(y) = \sigma_G(x) + \sigma_G(y). \end{aligned}$$

Da $\mathrm{Dre}_z(E)$ durch die Menge $\mathrm{Spi}_z(E)$ erzeugt wird, folgt die Behauptung. □

Satz 2.7.3
Für $\delta \in \mathrm{Dre}_z(E)^*$ gilt:

$$\delta - \mathrm{id}_E \in \mathrm{Aut}(E) \cap \mathrm{Aut}(E,+).$$

Beweis:
Homomorphie: Für $x, y \in E$ gilt:

$$\begin{aligned}(\delta - \mathrm{id}_E)(x+y) &= \delta(x+y) - (x+y) = \delta(x) - x + \delta(y) - y \\ &= (\delta - \mathrm{id}_E)(x) + (\delta - \mathrm{id}_E)(y).\end{aligned}$$

Injektivität: Für $x, y \in E$ gilt mit Lemma 2.6.17:

$$\delta(x) - x = \delta(y) - y \quad \Rightarrow \quad \delta(x-y) = x - y \quad \Rightarrow \quad x - y = z \quad \Rightarrow \quad x = y.$$

Kollinearität: Es sei $L \in \mathfrak{L}_z$ und $x, y \in L \backslash \{z\}$. Dann gilt nach Satz 2.7.1:

$$\big\langle x, \delta(x) \big\rangle = \big\langle y, \delta(y) \big\rangle \quad \Rightarrow \quad \big\langle z, \delta(x) - x \big\rangle = \big\langle z, \delta(y) - y \big\rangle.$$

Es seien $x, y, u, v \in E$ mit $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$. Mit Hilfe des bereits Bewiesenen gilt:

$$\begin{aligned}\big\langle \delta(x) - x, \delta(y) - y \big\rangle &= \big\langle z, \delta(y) - \delta(x) - y + x \big\rangle = \big\langle z, \delta(y-x) - (y-x) \big\rangle \\ &= \big\langle z, \delta(v-u) - (v-u) \big\rangle = \big\langle z, \delta(v) - \delta(u) - v + u \big\rangle \\ &= \big\langle \delta(u) - u, \delta(v) - v \big\rangle.\end{aligned}$$

Surjektivität: Ist δ involutorisch, so gilt für $x \in E$:

$$\delta\big(\delta(x) + x\big) = x + \delta(x) \quad \Rightarrow \quad \delta(x) + x = z \quad \Rightarrow \quad \delta(x) - x = -x - x.$$

Es sei $y \in E$ mit $z \sqcup y \in \mathfrak{G}$. Dann gilt:

$$(\delta - \mathrm{id}_E)\big(-\mathrm{Mp}(z,y)\big) = \mathrm{Mp}(z,y) + \mathrm{Mp}(z,y) = y.$$

Ist δ nicht involutorisch, so existieren Geraden $G, H \in \mathfrak{G}_z$ mit $G \neq H$ und $G \not\perp H$, so daß $\delta = \sigma_G\, \sigma_H$ gilt. (Wäre $G \perp H$, so folgte mit Lemma 2.6.10: $\delta^2 = \sigma_G\, \sigma_H\, \sigma_G\, \sigma_H = \sigma_{\sigma_G(H)}\, \sigma_H = \sigma_H\, \sigma_H = \mathrm{id}_E$.)

Es sei $y \in E$ mit $A := z \sqcup y \in \mathfrak{G}$ (Abbildung 19).
Zu $A' := \{z \perp A\}$ existiert nach Satz 2.6.18 eine Gerade $B \in \mathfrak{G}_z$ mit $\sigma_{A'}\, \sigma_G\, \sigma_H = \sigma_B$. Da δ nicht involutorisch ist, folgt $A' \not\perp B$. Mit $x' := \sigma_{A'}(B) \cap \{y \parallel B\}$ und $x := \sigma_{A'}(x') \in B$ gilt:

$$\delta(x) - x = \sigma_{A'}\, \sigma_B(x) - x = \sigma_{A'}(x) - x = \sigma_{A'}\, \sigma_{A'}(x') - x = x' - x = y.$$

Es sei $y \in E$ mit $z \sqcup y \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$.
Dann existiert ein Punkt $a \in E$ mit $z \sqcup a$, $a \sqcup y \in \mathfrak{G}$. Zu a und $y - a$ existieren Urbilder x, x' bezüglich $\delta - \mathrm{id}_E$.

$$\delta(x + x') - (x + x') = \delta(x) - x + \delta(x') - x' = a + y - a = y$$

□

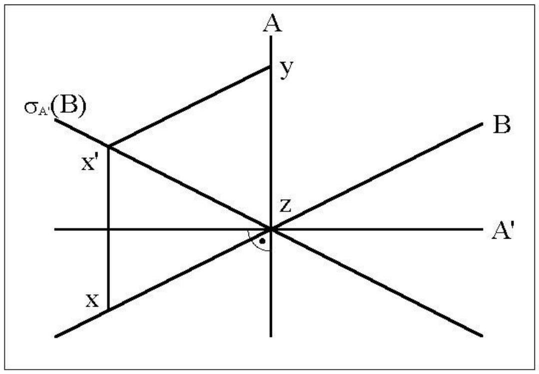


Abbildung 19

Definition 2.7.4
Die von der Menge $\mathrm{Dre}_z(E) \cup \{\delta - \mathrm{id}_E \mid \delta \in \mathrm{Dre}_z(E)^*\}$ erzeugte Gruppe heißt Gruppe der Drehstreckungen um den Punkt z und wird mit $\mathrm{Dst}_z(E)$ bezeichnet.

Lemma 2.7.5
Die Gruppe $\mathrm{Dst}_z(E)$ ist eine kommutative Untergruppe von $\mathrm{Aut}(E)$ und $\mathrm{Aut}(E,+)$.

Beweis: Die Automorphismeneigenschaften folgen direkt aus Lemma 2.7.2 und Satz 2.7.3. Es seien $\delta, \varepsilon \in \mathrm{Dre}_z(E)^*$. Dann gilt für $x \in E$:

$$\begin{aligned}
(\delta - \mathrm{id}_E)(\varepsilon - \mathrm{id}_E)(x) &= \delta\big(\varepsilon(x) - x\big) - \varepsilon(x) + x \\
&= \delta\,\varepsilon(x) - \delta(x) - \varepsilon(x) + x \\
&= \varepsilon\,\delta(x) - \delta(x) - \varepsilon(x) + x \\
&= (\varepsilon - \mathrm{id}_E)(\delta - \mathrm{id}_E)(x) \\
\delta(\varepsilon - \mathrm{id}_E)(x) &= \delta\,\varepsilon(x) - \delta(x) \\
&= \varepsilon\,\delta(x) - \delta(x) \\
&= (\varepsilon - \mathrm{id}_E)\,\delta(x).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.6.19 folgt die Kommutativität der Gruppe $\mathrm{Dst}_z(E)$. □

Lemma 2.7.6
Für $\alpha \in \mathrm{Dst}_z(E)^*$ gilt:

$$\forall\, x, y \in E\backslash\{z\} \text{ mit } y \in z \sqcup x : \quad \big\langle x, \alpha(x)\big\rangle = \big\langle y, \alpha(y)\big\rangle.$$

Beweis: Es sei $z \sqcup x \in \mathfrak{G}$. Für $\alpha \in \mathrm{Dre}_z(E)^*$ folgt die Behauptung aus Lemma 2.7.1.
Es sei $\alpha = \delta - \mathrm{id}_E$ für $\delta \in \mathrm{Dre}_z(E)^*$ und $\delta = \sigma_G\,\sigma_H$ für $G, H \in \mathfrak{G}_z$. Dann gilt mit Lemma 2.7.1:

$$\big\langle \delta(x), \alpha(x)\big\rangle = \langle z, -x\rangle = \langle z, x\rangle = \langle z, y\rangle = \langle z, -y\rangle = \big\langle \delta(y), \alpha(y)\big\rangle, \quad \big\langle x, \delta(x)\big\rangle = \big\langle y, \delta(y)\big\rangle.$$

Mit (D) folgt:

$$\mathrm{D}\big(z; \delta(x), x, \alpha(x); \delta(y), y, \alpha(y)\big) \quad \Rightarrow \quad \big\langle x, \alpha(x)\big\rangle = \big\langle y, \alpha(y)\big\rangle.$$

Es sei $\alpha = \alpha_n \cdots \alpha_0$ mit $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Dre}_z(E)^* \cup \{\delta - \mathrm{id}_E \mid \delta \in \mathrm{Dre}_z(E)^*\}$. Für $i \in \{0, \ldots, n\}$ gilt $\langle x, \alpha_i \cdots \alpha_0(x) \rangle = \langle y, \alpha_i \cdots \alpha_0(y) \rangle$ was mit Induktion über i gezeigt wird:

Wie bereits bewiesen gilt $\langle x, \alpha_0(x) \rangle = \langle y, \alpha_0(y) \rangle$.

Die Behauptung gelte für $j - 1 \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ist $z \sqcup (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_0(x)) = z \sqcup (\alpha_j \cdots \alpha_0(x))$, so folgt die Behauptung für j aus Satz 1.1.8.a). Für $z \sqcup (\alpha_{j-1} \cdots \alpha_0(x)) \neq z \sqcup (\alpha_j \cdots \alpha_0(x))$ gilt:

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}\big(z;\ \alpha_{j-1} \cdots \alpha_0(x),\ x,\ \alpha_j \cdots \alpha_0(x);\ \alpha_{j-1} \cdots \alpha_0(y),\ y,\ \alpha_j \cdots \alpha_0(y)\big) \\ &\qquad \Rightarrow \quad \big\langle x, \alpha_j \cdots \alpha_0(x) \big\rangle = \big\langle y, \alpha_j \cdots \alpha_0(y) \big\rangle. \end{aligned}$$

Damit erhält man $\langle x, \alpha(x) \rangle = \langle y, \alpha(y) \rangle$.

Es sei nun $z \sqcup x \in \mathfrak{L} \backslash \mathfrak{G}$.

Es existiert ein Punkt $a \in E$ mit $z \sqcup a, a \sqcup x \in \mathfrak{G}$. Nach Satz 1.2.2.c) existiert eine Dilatation $\lambda \in \mathrm{Dil}_z(E)$ mit $\lambda(x) = y$, und es gilt $\langle a, x \rangle = \langle \lambda(a), y \rangle$. Aus Satz 1.1.8.a) folgt $\alpha(z \sqcup a) = z \sqcup \alpha(a) \in \mathfrak{G}$ und aus dem bisherigen Beweis $\langle a, \alpha(a) \rangle = \langle \lambda(a), \alpha\,\lambda(a) \rangle$. Mit (D) folgt:

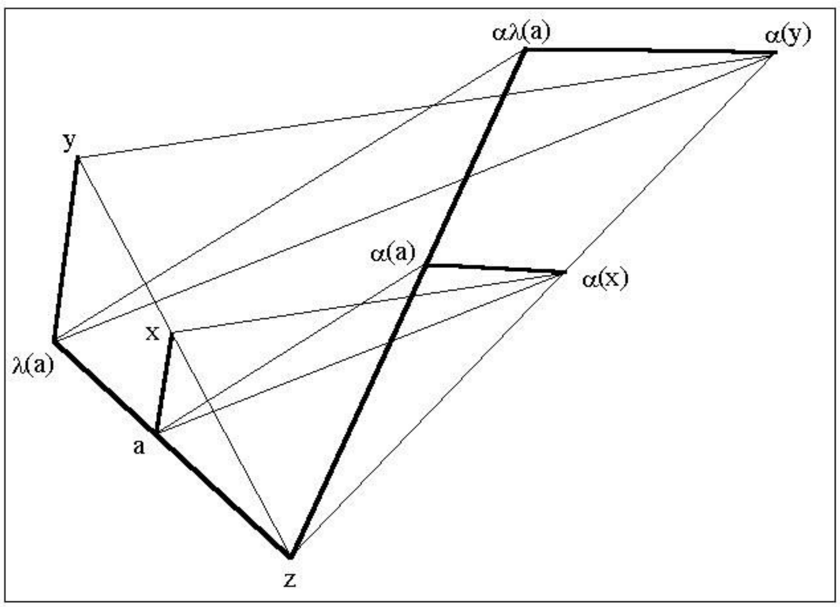


Abbildung 20

$$\begin{aligned} \mathrm{D}\big(z; \alpha(a), a, \alpha(x); \alpha\,\lambda(a), \lambda(a), \alpha(y)\big) \quad &\Rightarrow \quad \big\langle a, \alpha(x) \big\rangle = \big\langle \lambda(a), \alpha(y) \big\rangle \\ \mathrm{D}\big(z; a, x, \alpha(x); \lambda(a), y, \alpha(y)\big) \quad &\Rightarrow \quad \big\langle x, \alpha(x) \big\rangle = \big\langle y, \alpha(y) \big\rangle. \end{aligned}$$

□

Satz 2.7.7
Zu je zwei Punkten $a, b \in E \backslash \{z\}$ mit $z \sqcup a,\ z \sqcup b,\ a \sqcup b \in \mathfrak{G}$ und $z \notin a \sqcup b$ gibt es genau eine Drehstreckung $\alpha \in \mathrm{Dst}_z(E)$, die den Punkt a auf den Punkt b abbildet.

Beweis: Mit $A := z \sqcup a$, $B := z \sqcup b$ und $C := \{z \parallel a \sqcup b\} = z \sqcup (a - b) \in \mathfrak{G}$ gilt:

$$\sigma_C(a-b) = a - b \quad\Rightarrow\quad \sigma_C(a) - a = \sigma_C(b) - b \quad\Rightarrow\quad \sigma_C\,\sigma_A(a) - a = \sigma_C\,\sigma_B(b) - b$$
$$\Rightarrow\quad (\sigma_C\,\sigma_B - \mathrm{id}_E)^{-1}(\sigma_C\,\sigma_A - \mathrm{id}_E)(a) = b.$$

Die Eindeutigkeit folgt aus der Tatsache, daß abelsche transitiv operierende Gruppen bereits scharf transitiv operieren. □

Satz 2.7.8
Eine desarguessche fasteuklidische Ebene genügt dem Axiom (P').

Beweis: Es gelte P'$(z; a_1, \ldots, a_6)$. Dann existieren Drehstreckungen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Dst}_z$ mit $a_2 = \alpha_1(a_1)$ und $a_3 = \alpha_2(a_2)$. Mit Lemma 2.7.6 folgt:

$$\big\langle a_1, \alpha_1(a_1)\big\rangle = \big\langle a_5, \alpha_1(a_5)\big\rangle, \quad \big\langle a_2, \alpha_2(a_2)\big\rangle = \big\langle a_4, \alpha_2(a_4)\big\rangle$$

$$\alpha_1(a_5) = \alpha(z \sqcup a_5) \cap \{a_5 \parallel a_1 \sqcup a_2\} = a_6, \quad \alpha_2(a_4) = \alpha(z \sqcup a_4) \cap \{a_4 \parallel a_2 \sqcup a_3\} = a_5$$

$$\big\langle a_1, a_4\big\rangle = \big\langle \alpha_2\,\alpha_1(a_1), \alpha_2\,\alpha_1(a_4)\big\rangle = \big\langle \alpha_2\,\alpha_1(a_1), \alpha_1\,\alpha_2(a_4)\big\rangle = \langle a_3, a_6\rangle.$$

□

Satz 2.7.9
Für einen Punkt $z \in E$ und drei verschiedene paarweise nicht-orthogonale Geraden $G, H, I \in \mathfrak{G}_z$ mit $i \in I \setminus \{z\}$ gilt:

$$\Big(\big(i_G\big)_H\Big)_I = \Big(\big(i_H\big)_G\Big)_I$$

Beweis: Es seien $g := i_G$, $h := i_H$, $g' := h_G$, $h' := g_H$, $g'' := G \cap h \sqcup i$, $h'' := H \cap g \sqcup i$. Dann gilt:

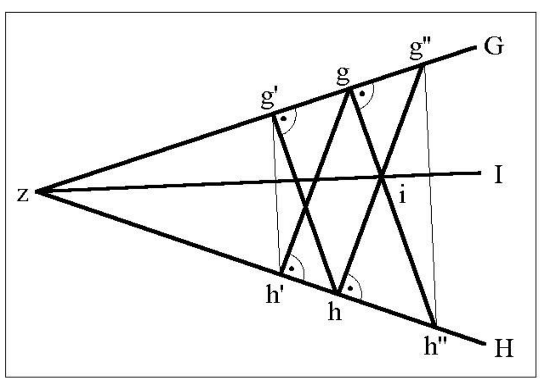


Abbildung 21

$$\text{P'}(z; g', h, g'', h', g, h'') \quad\Rightarrow\quad \langle g', h'\rangle = \langle g'', h''\rangle.$$

Mit (Di) angewandt auf die Punkte z, i, g'', h'' folgt $g'' \sqcup h'' \in \mathfrak{G}$. Nach Satz 2.6.16 schneiden sich die Höhen des Dreiecks z, g'', h'' in einem Punkt, also gilt $I \perp g'' \sqcup h''$ und damit $I \perp g' \sqcup h'$, woraus die Behauptung folgt. □

2.8 Orthogonale Teilräume

Im folgenden sei $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ ein fasteuklidischer Raum.

Definition 2.8.1
Zwei Teilräume $S, T \in \mathfrak{T}(X)$ mit $\dim(S), \dim(T) > 0$ heißen orthogonal zueinander in Zeichen $S \perp T$, wenn sie einen Schnittpunkt $z \in X$ mit $\{z\} = S \cap T$ besitzen und wenn gilt:

$$\forall\, s \in S \setminus \{z\} \;\; \forall\, t \in T \setminus \{z\} : \quad z \sqcup s \perp z \sqcup t.$$

Definition 2.8.2
Für $G \in \mathfrak{G}$ und $x \in G$ sei

$$\{x \perp G\} := \bigcup \big\{ x \sqcup y \;\big|\; y \in X \setminus \{x\} \text{ und } x \sqcup y \perp G \big\}.$$

Ist $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene, so fällt diese Definition mit der aus Satz 2.6.3 zusammen.

Satz 2.8.3
Für $G \in \mathfrak{G}$ und $x \in G$ ist $\{x \perp G\}$ eine Hyperebene, die zu G orthogonal ist.

Beweis: Zunächst werden die folgenden Aussagen gezeigt.

a) Für $g \in G \setminus \{x\}$ und $g' := \sigma_x(g)$ gilt:

$$\forall\, x_0, \ldots, x_n \in X \text{ mit } x = x_0 \text{ und } x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G},\; \{x \parallel x_{i-1} \sqcup x_i\} \perp G \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\} : \\ (g, x_n) \equiv (g', x_n).$$

Induktion über n:
Es gilt $x_0 \sqcup x_1 \perp G$, woraus die Behauptung für $n = 1$ folgt. Gilt die Behauptung für $n-1$, so wähle $x_n' \in x_{n-1} \sqcup x_n$, so daß $x_{n-2} \sqcup x_n' \in \mathfrak{G}$ ist. Dies ist möglich, da der Raum regulär ist. Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

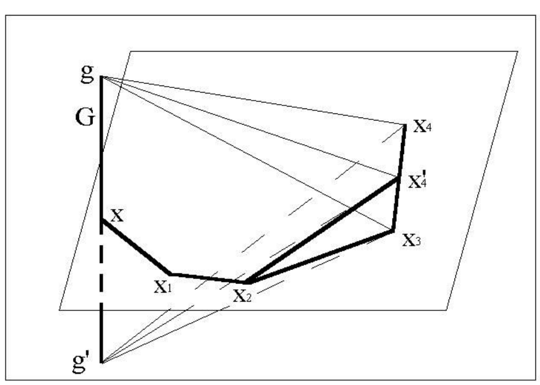


Abbildung 22: $n = 4$

$$(g, x_{n-1}) \equiv (g', x_{n-1}), \quad (g, x'_n) \equiv (g', x'_n).$$

Mit (KGR) folgt $(g, x_n) \equiv (g', x_n)$.

b) $T := \overline{\{H \in \mathfrak{G}_x \mid H \perp G\}}^x \subset \{x \perp G\}$.

Es sei $t \in T \setminus \{x\}$. Zu $t' \in x \sqcup t$ existieren Punkte $x_0, \ldots, x_n \in T$ mit $x = x_0, x_n = t'$ und $\{x \parallel x_{i-1} \sqcup x_i\} \perp G$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach a) gilt für $g \in G \setminus \{x\}$ und $g' = \sigma_x(g)$ die Aussage $(g, t') \equiv (g', t')$. Also gilt $x \sqcup t \perp G$ und somit $t \in \{x \perp G\}$.

c) T ist eine Hyperebene.

Es sei $y \in X \setminus (G \cup T)$. Es existieren Punkte $x_0, \ldots, x_n \in X$ mit $x = x_0, x_n = y$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

$$G_i := \{x_i \parallel G\} \ \text{ für } i \in \{0, \ldots, n\}, \quad E_i := \overline{\{x_{i-1}\} \cup G_i} \ \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}$$
$$y_0 := x_0, \quad y_i := G_i \cap \{x_{i-1} \perp G_i\}_{E_i} \ \text{ für } i \in \{1, \ldots, n\}$$

Die Punkte $y_0, \ldots, y_n$ liegen nach b) in $\{x \perp G\}$ und damit gilt $y \in \overline{G \cup \{x \perp G\}}$. Aus $G \not\perp G$ folgt mit a) $G \not\subset \{x \perp G\}$ $\big($Sonst wäre jeder Punkt auf G Mittelpunkt des Paares (g, g') für $g \in G \setminus \{x\}$ und $g' := \sigma_x(g)$.$\big)$ und mit b) $G \not\subset T$. Damit ist T eine Hyperebene.

d) $\{x \perp G\} \subset T$ (Abbildung 23).

Es existiere eine Linie $L \in \mathfrak{G}_x$ mit $L \perp G$ und $L \not\subset T$. Wähle $y \in L \setminus \{x\}$. Dann gilt für $g \in G \setminus \{x\}$ und $g' := \sigma_x(g)$: $(g, y) \equiv (g', y)$.

Nach Lemma 1.3.10 ist $y' := T \cap \{y \parallel G\}$ wohldefiniert. Es seien $x_0, \ldots, x_n \in T$ mit $x = x_0, x_n = y'$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es wird $y_n := y$ definiert und rekursiv ein Punkt $y_i \in \{x_i \parallel G\} \setminus \{x_i\}$ gewählt, so daß $\underline{y_{i+1} \sqcup y_i \in \mathfrak{G}} \setminus \{y_{i+1} \parallel x_{i+1} \sqcup x_i\}$ gilt ($i \in \{n-1, \ldots, 1\}$). Dies ist möglich, da die Ebene $\overline{\{y_{i+1}, x_{i+1}, x_i\}}$ nach Lemma 2.1.5 eine Gerade durch y_{i+1} enthält, die nicht parallel zu G, $x_{i+1} \sqcup x_i$, $y_{i+1} \sqcup x_i$ ist. Es existieren Schnittpunkte

$$y'_i := y_{i+1} \sqcup y_i \cap x_{i+1} \sqcup x_i \in T \ \text{ für } i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Nach Voraussetzung gilt $(g, y'_i) \equiv (g', y'_i)$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Mit (KGR) folgt:

$$\begin{aligned}
(g, y_n) \equiv (g', y_n),\ (g, y'_{n-1}) \equiv (g', y'_{n-1}) \quad &\Rightarrow \quad (g, y_{n-1}) \equiv (g', y_{n-1}) \\
&\vdots \\
(g, y_2) \equiv (g', y_2),\ (g, y'_1) \equiv (g', y'_1) \quad &\Rightarrow \quad (g, y_1) \equiv (g', y_1).
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.6.1 und 2.6.5 folgt in der Ebene $\overline{G \cup \{x_1\}}$:

$$(g, y_1) \equiv (g', y_1) \ \Rightarrow \ x \sqcup y_1 \in \mathfrak{G} \text{ und } x \sqcup y_1 \perp G \ \Rightarrow \ y_1 = x_1.$$

im Widerspruch zur Wahl von y_1.

Aus b), c) und d) folgt, daß $\{x \perp G\}$ eine Hyperebene ist.
Da zu jedem Punkt $y \in \{x \perp G\}$ Punkte $x_0, \ldots, x_n \in T$ mit $x = x_0, x_n = y$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, folgt mit a):

$$\forall\, g \in G \setminus \{x\} \ \ \forall\, y \in \{x \perp G\} : \quad (g, y) \equiv \big(\sigma_x(g), y\big).$$

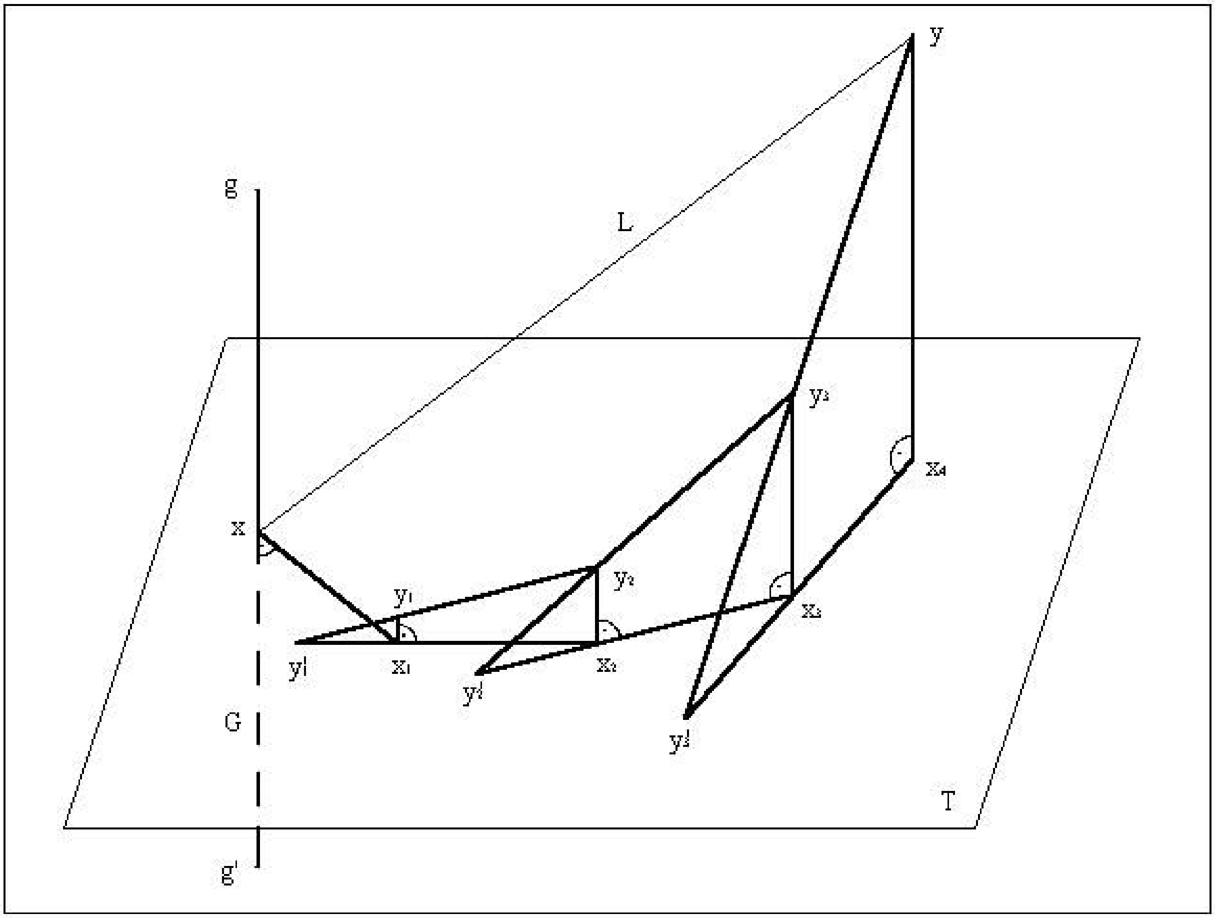


Abbildung 23: $n = 4$

Damit gilt für jede Linie $L \in \mathfrak{G}_x$ mit $L \subset \{x \perp G\}$ die Aussage $L \perp G$. Also ist $G \perp \{x \perp G\}$. $\Box$

Satz 2.8.4
Zu $G \in \mathfrak{G}$ und $x \in X$ existiert genau eine Hyperebene $H \in \mathfrak{T}(X)$, so daß gilt:

$$G \perp H \text{ und } x \in H.$$

Es wird die Schreibweise $H =: \{x \perp G\}$ verwendet.

Beweis: Es sei $g \in G$. Nach Lemma 1.3.10 ist $x' := \{g \perp G\} \cap \{x \parallel G\}$ wohldefiniert. Dann ist $H := \tau_{x',x}\big(\{g \perp G\}\big)$ eine Hyperebene, die x enthält und orthogonal zu G ist.

Existiert eine weitere Hyperebene H' mit $G \perp H'$ und $x \in H'$, so sei $h := H \cap G$, $h' := H' \cap G$ und $H'' := \tau_{h',h}(H')$. Aus $H, H'' \perp G$ folgt $H, H'' \subset \{h \perp G\}$. Nach Satz 2.8.3 ist damit $H = H''$. Also gilt $x \in H' \cap \tau_{h',h}(H')$, woraus $\tau_{h',h} = \mathrm{id}_X$ und $H = H'$ folgt. $\Box$

Lemma 2.8.5
Für $z \in X$, $G \in \mathfrak{G}_z$ und $\emptyset \neq \mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}_z$ gilt:

$$\forall\, H \in \mathfrak{H}:\ G \perp H \quad \Rightarrow \quad G \perp \overline{\mathfrak{H}}^z.$$

Beweis: Für jede Gerade $H \in \mathfrak{H}$ gilt $H \perp G$ und damit $H \subset \{z \perp G\}$. Da $\{z \perp G\}$ ein Teilraum ist, folgt $\overline{\mathfrak{H}}^z \subset \{z \perp G\}$, so daß sich die Behauptung aus $G \perp \{z \perp G\}$ ergibt. □

Definition 2.8.6
Es sei $x \in X$ und $G \in \mathfrak{G}$. Dann heißt

$$x_G := G \cap \{x \perp G\}.$$

Lotfußpunkt von x auf G. Ist $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene, so fällt Definition 2.6.4 mit dieser zusammen.

Satz 2.8.7
Für einen Punkt $z \in X$ und drei verschiedene paarweise nicht-orthogonale Geraden $G, H, I \in \mathfrak{G}_z$ mit $i \in I \setminus \{z\}$ gilt:

$$\Big((i_G)_H\Big)_I = \Big((i_H)_G\Big)_I$$

Beweis: Es gelte $I \not\subset \overline{G \cup H}$, da sonst die Behauptung aus Satz 2.7.9 folgt.

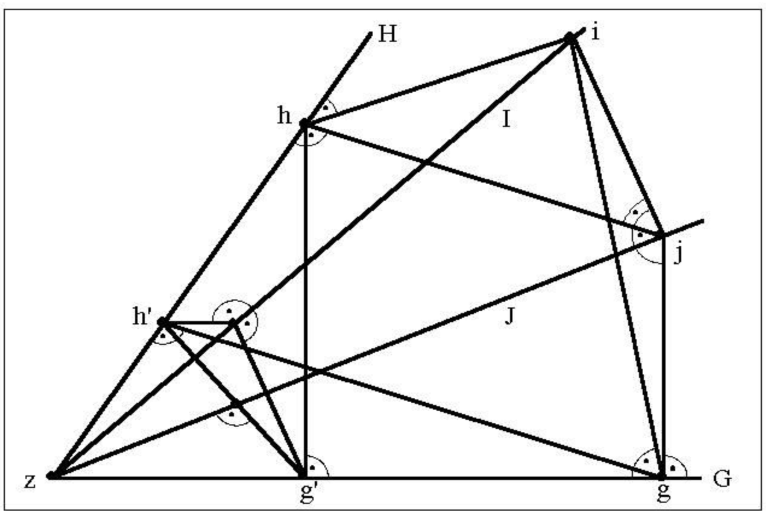


Abbildung 24

$$g := i_G, \quad h := i_H, \quad g' := h_G, \quad h' := g_H, \quad j := \{g \perp G\}_{\overline{G \cup H}} \cap \{h \perp H\}_{\overline{G \cup H}}$$

Wegen $G \nparallel H$ ist j wohldefiniert. (Di) angewandt auf die Punkte z, i, g, h und g, h, z, j liefert $g \sqcup h \in \mathfrak{G}$ und $J := z \sqcup j \in \mathfrak{G}$. Mit Satz 2.7.9 folgt $\big((j_G)_H\big)_J = \big((j_H)_G\big)_J$ und damit $J \perp g' \sqcup h'$.

Nach Lemma 2.8.5 gilt $\overline{\{g \sqcup i, g \sqcup j\}}^g \perp G$ und $\overline{\{h \sqcup i, h \sqcup j\}}^h \perp H$.

$$i \sqcup j \perp \{j \parallel G\}, \{j \parallel H\} \quad \Rightarrow \quad i \sqcup j \perp J \in \overline{\big\{\{j \parallel G\}, \{j \parallel H\}\big\}}^j$$

Aus $\{j \parallel g' \sqcup h'\} \perp J$ und $\{j \parallel g' \sqcup h'\} \perp i \sqcup j$ folgt $\{j \parallel g' \sqcup h'\} \perp \overline{\{j \sqcup i, j \sqcup z\}}^{j}$ und damit $I \perp \{g'_I \parallel g' \sqcup h'\}$.

$$I \not\subset \overline{G \cup H} \quad \Rightarrow \quad g' \sqcup h' \nparallel g' \sqcup g'_I \quad \Rightarrow \quad I \perp \overline{\big\{\{g'_I \parallel g' \sqcup h'\},\, g'_I \sqcup g'\big\}}^{g'_I}$$

Damit gilt $h' \sqcup g'_I \perp I$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

2.9 Geradenspiegelungen in fasteuklidischen Räumen

Satz 2.9.1
An jeder Geraden $G \in \mathfrak{G}$ gibt es genau eine Spiegelung:

$$\sigma_G : \begin{cases} X & \rightarrow & X \\ x & \mapsto & \tau_{x,x_G}(x_G) \end{cases}$$

Diese ist involutorisch.

Ist $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ eine fasteuklidische Ebene, so ist dieser Satz identisch mit Satz 2.6.6.

Beweis:
σ_G ist bijektiv, involutorisch und erhält Kongruenzen:
Der Beweis verläuft analog zum ebenen Fall (Satz 2.6.6).

σ_G ist eine Kollineation (Abbildung 25):
Es seien $x, y, z \in X$ mit $x \in G$ und $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$. Für $y, z \in G$ ist die Behauptung trivial. Für $x \sqcup y \perp G$ gilt:

$$\big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(y)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_x(y)\big\rangle = \big\langle x, \sigma_x(z)\big\rangle = \big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(z)\big\rangle.$$

Es sei $x \sqcup y \neq G$, $x \sqcup y \not\perp G$ und $z' := \sigma_G(z)$. Dann existieren Punkte $z_0, \ldots, z_n \in \{z_G \perp G\}$ mit $z_G = z_0, z_n = z$, so daß $z_{i-1} \sqcup z_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt. Die nachfolgenden Punkte werden für $i \in \{0, \ldots, n\}$ definiert:

$$z_i' := \sigma_{z_G}(z_i), \quad y_i := \{y_G \perp G\} \cap x \sqcup z_i, \quad y_i' := \{y_G \perp G\} \cap x \sqcup z_i'.$$

Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ werden die folgenden Punkte definiert:

$$w_i := \operatorname{Pgm}(z_{i-1}, z_i, z_G), \quad w_i' := \sigma_{z_G}(w_i)$$
$$v_i := \{y_G \perp G\} \cap x \sqcup w_i, \quad v_i' := \{y_G \perp G\} \cap x \sqcup w_i'.$$

Nach (F1) gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\big|\{y_G \perp G\} \cap x \sqcup z_i\big| = \big|\{y_G \perp G\} \cap x \sqcup z_i'\big| = \big|\{y_G \perp G\} \cap x \sqcup w_i\big| = \big|\{y_G \perp G\} \cap x \sqcup w_i'\big| = 1.$$

Mit (Tam) und (F1) folgt für $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$\langle y_G, v_i\rangle = \langle z_G, w_i\rangle = \langle z_G, w_i'\rangle = \langle y_G, v_i'\rangle$$
$$\langle y_{i-1}, y_i\rangle = \langle z_{i-1}, z_i\rangle = \langle z_G, w_i\rangle = \langle y_G, v_i\rangle, \quad \langle y_{i-1}', y_i'\rangle = \langle z_{i-1}', z_i'\rangle = \langle z_G, w_i'\rangle = \langle y_G, v_i'\rangle,$$

und für $i \in \{2, \ldots, n\}$

$$\langle y_{i-1}, y_G\rangle = \langle z_{i-1}, z_G\rangle = \langle z_i, w_i\rangle = \langle y_i, v_i\rangle, \quad \langle y_{i-1}', y_G\rangle = \langle z_{i-1}', z_G\rangle = \langle z_i', w_i'\rangle = \langle y_i', v_i'\rangle.$$

Es sei $i \in \{1, \ldots, n\}$. Da σ_z eine Bewegung ist, gilt $(z_G, w_i) \equiv (z_G, w_i')$ und damit $(x, w_i) \equiv (x, w_i')$. Mit Axiom (KZ) in der Ebene $\overline{\{x, z_G, w_i\}}$ folgt $(x, v_i) \equiv (x, v_i')$. Lemma 2.5.3 liefert

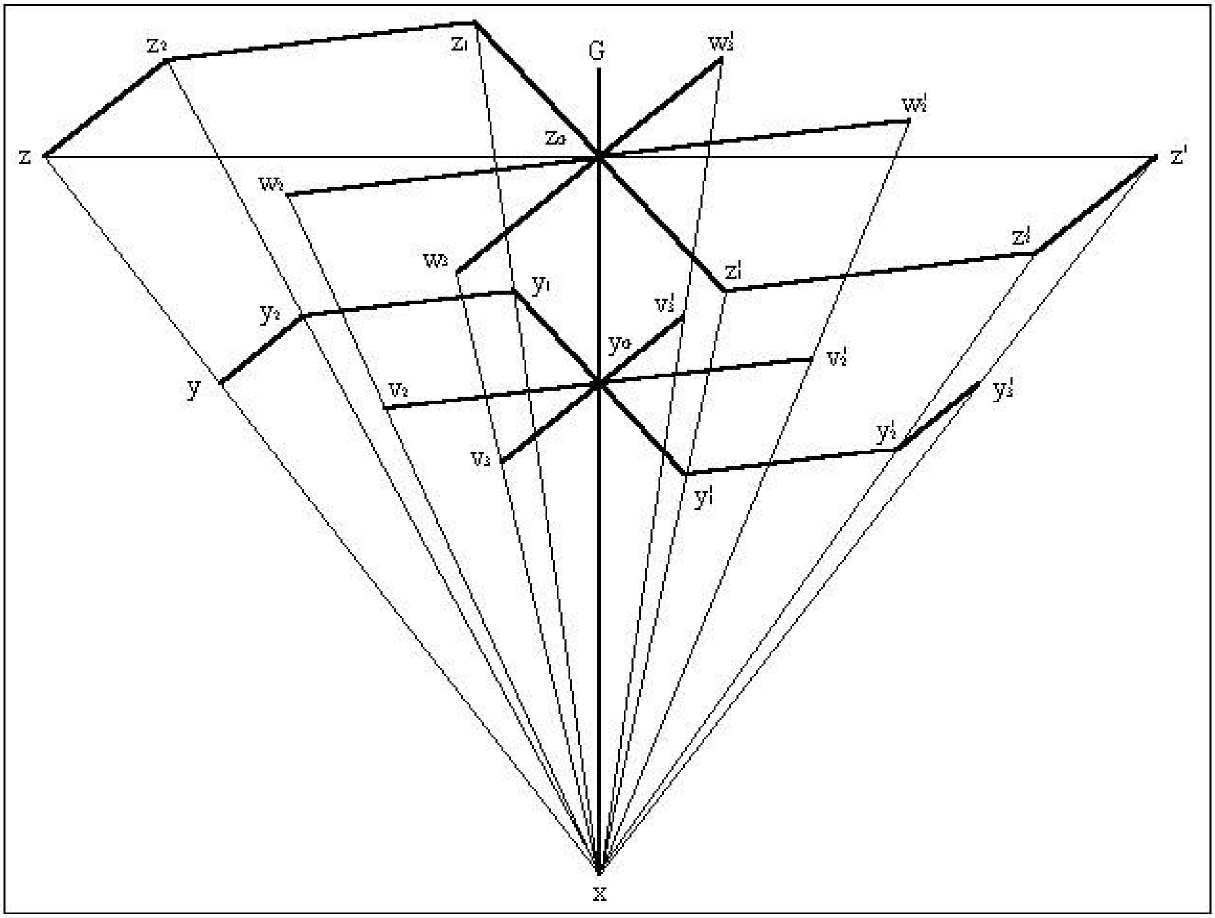


Abbildung 25: $n = 3$

$x \sqcup \mathrm{Mp}(v_i, v_i') \perp v_i \sqcup v_i'$, so daß mit Lemma 2.6.1.a) in der Ebene $\overline{\{x, y_G, v_i\}}$ die Aussagen $y_G = \mathrm{Mp}(v_i, v_i')$ und $(y_G, v_i) \equiv (y_G, v_i')$ folgen.

Mit (KPR) auf die Punkte y_{i-1}, y_i, y_G, v_i und $y_{i-1}', y_i', y_G, v_i'$ angewandt folgt:

$$(y_{i-1}, y_i) \equiv (y_G, v_i) \equiv (y_G, v_i') \equiv (y_{i-1}', y_i').$$

Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned} y_n' &= \tau_{y_{n-1}', y_n'} \cdots \tau_{y_0', y_1'}(y_G) = \tau_{y_n, y_{n-1}} \cdots \tau_{y_1, y_0}(y_G) \\ &= \tau_{y_1, y_0} \cdots \tau_{y_n, y_{n-1}}(y_G) = \tau_{y_n, y_0}(y_G) = \tau_{y, y_G}(y_G) = \sigma_G(y). \end{aligned}$$

Es seien $x, y, u, v \in E$ mit $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$. Analog zum Beweis von Satz 2.6.6 folgt:

$$\big\langle \sigma_G(x), \sigma_G(y) \big\rangle = \big\langle \sigma_G(u), \sigma_G(v) \big\rangle.$$

Eindeutigkeit:
Es sei σ eine weitere Spiegelung an G. Für $x \in X \setminus G$ mit $x \sqcup x_G \in \mathfrak{G}$ und $x' := \sigma_G(x)$ folgt analog zum Beweis des Satzes 2.6.6: $x_G \in \sigma(x \sqcup x') \perp G$. Aus $\sigma(x) \in \overline{\{x\} \cup G}$ folgt $\sigma(x \sqcup x') = x \sqcup x'$ und damit $\sigma(x) = \sigma_G(x)$.

Zu $x \in X \setminus G$ mit $x \sqcup x_G \in \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{G}$ existieren Punkte $x_0, \ldots, x_n \in \{x \perp G\}$ mit $x_G = x_0, x_n = x$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. Für $y_1 := \mathrm{Pgm}(x_1, x_G, x_2)$ gilt:

$$\begin{aligned}\sigma(x_2) &= \sigma\big(\mathrm{Pgm}(x_G, x_1, y_1)\big) = \mathrm{Pgm}\big(x_G, \sigma(x_1), \sigma(y_1)\big) = \mathrm{Pgm}\big(x_G, \sigma_G(x_1), \sigma_G(y_1)\big) \\ &= \sigma_G\big(\mathrm{Pgm}(x_G, x_1, y_1)\big) = x_2.\end{aligned}$$

Analog erhält man $\sigma(x_3) = x_3, \ldots, \sigma(x_n) = x_n$. Damit gilt $\sigma = \sigma_G$. □

Lemma 2.9.2
Es sei $G \in \mathfrak{G}$ und $g \in G$. Dann gilt:

a) $\forall\, \tau \in \mathrm{Tra}_G(X): \quad \sigma_G = \tau^{-1} \sigma_G \, \tau$

b) $\forall\, \tau \in \mathrm{Tra}(X)$ mit $g \sqcup \tau(g) \perp G: \quad \sigma_G = \tau\, \sigma_G\, \tau$

Beweis: Der Beweis ist analog zum ebenen Fall (Lemma 2.6.7). □

2.10 Algebraisierung desarguesscher fasteuklidischer Räume

Es sei $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ ein desarguesscher fasteuklidischer Raum mit $0 \in X$ und $F := \mathrm{Dil}_0(X) \cup \{0\}$, sowie $+ = +_0$ wie zu Beginn des Abschnitts 2.7 definiert.

Dann ist $(X, +, F)$ ein regulärer Fastvektorraum, dessen Koordinatengeometrie isomorph zu $(X, D, \langle\rangle)$ ist (siehe Satz 1.5.4).

Im folgenden wird gezeigt, daß sich die Relation $\equiv$ durch eine nullteilige symmetrische Bilinearform beschreiben läßt.

Satz 2.10.1
Für $q \in Q(X)^*$ gilt: $K_q(F) = Z(F)$.

Da $Z(F)$ nicht von der Operation $\oplus_q$ abhängt, wird die Schreibweise $K(F) := K_q(F)$ verwendet.

Beweis: Da in jedem Fastkörper F die Inklusion $Z(F) \subset K(F)$ gilt, muß nur die andere Inklusion gezeigt werden. Es sei $\kappa \in K_q(F)^*$, $\lambda \in F^*$ und $q' \in Q(X) \setminus Fq$.

$$r := \kappa q, \quad r' := Fq' \cap \{r \parallel q \sqcup q'\}, \quad s := \lambda q, \quad s' := Fq' \cap \{s \parallel q \sqcup q'\}$$

$$\langle r, q' \rangle = \langle \lambda r, \lambda q' \rangle = \langle \lambda\kappa q, s' \rangle, \quad \langle s, q' \rangle = \langle \kappa s, \kappa q' \rangle = \langle \kappa\lambda q, r' \rangle$$

Für $\kappa, \lambda \neq 1$ und $\kappa \neq \lambda, \lambda^{-1}$ folgt mit (P'):

$$P'(0; q', r, r', s, s', \lambda\kappa q) \quad \Rightarrow \quad \langle q', s \rangle = \langle r', \lambda\kappa q \rangle$$

$$\langle r', \kappa\lambda q \rangle = \langle \kappa q', \kappa s \rangle = \langle q', s \rangle = \langle r', \lambda\kappa q \rangle \quad \Rightarrow \quad \kappa\lambda = \lambda\kappa.$$

In allen anderen Fällen folgt trivialerweise $\kappa\lambda = \lambda\kappa$. Also gilt $\kappa \in Z(F)$. □

Satz 2.10.2
Für $q \in Q(X)^*$ ist die Abbildung σ_{Fq} linear.

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 2.7.2 zeigt man mit Lemma 2.9.2, daß σ_{Fq} additiv ist. Es sei $\lambda \in F$ und $x \in X$.

$x \in Fq$:
Es gilt $\lambda x \in Fq$ und $\sigma_{Fq}(\lambda x) = \lambda x = \lambda\, \sigma_{Fq}(x)$.

$x \in \{0 \perp Fq\}$:
Es gilt $\lambda x \in \{0 \perp Fq\}$ und

$$\sigma_{Fq}(\lambda x) = \tau_{\lambda x,0}(0) = -\lambda x = \lambda(-x) = \lambda\, \tau_{x,0}(0) = \lambda\, \sigma_{Fq}(x).$$

$x \notin Fq, \{0 \perp Fq\}$:

Es gilt $\lambda x \notin Fq, \{0 \perp Fq\}$ und $\lambda\, \sigma_{Fq}(x) \in 0 \sqcup \sigma_{Fq}(x)$.

$$\begin{aligned}\sigma_{Fq}(\lambda x) &= \sigma_{Fq}\big(0 \sqcup x \,\cap\, \{\lambda x \perp Fq\}\big) = \sigma_{Fq}(0 \sqcup x) \,\cap\, \sigma_{Fq}\big(\{\lambda x \perp Fq\}\big)\\ &= 0 \sqcup \sigma_{Fq}(x) \,\cap\, \{\lambda x \perp Fq\}\end{aligned}$$

$$(\lambda x) \sqcup \big(\lambda\, \sigma_{Fq}(x)\big) = \lambda\big(x \sqcup \sigma_{Fq}(x)\big) \perp Fq \quad \Rightarrow \quad \lambda\, \sigma_{Fq}(x) \in \{\lambda x \perp Fq\}$$

Also gilt: $\lambda\, \sigma_{Fq}(x) = \sigma_{Fq}(\lambda x)$. □

Satz 2.10.3
Für $q \in Q(X)^*$ ist die Abbildung

$$l_q : \begin{cases} X & \rightarrow \quad F \\ x & \mapsto \quad l_q(x), \quad \text{wobei gilt: } \sigma_{Fq}(x) + x = l_q(x)\, q \end{cases}$$

eine q-Linearform, und es gilt:

a) $l_q(q) = 2$

b) $l_{\lambda q}(x)\, \lambda = l_q(x)$

c) $l_q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Fx \perp Fq$

d) $\forall\, x \in R_q(X): \quad l_q(x) \in K(F)$

Beweis: l_q ist wohldefiniert, da $\sigma_{Fq}\big(\sigma_{Fq}(x) + x\big) = x + \sigma_{Fq}(x)$ und damit $\sigma_{Fq}(x) + x \in Fq$ gilt. Mit Satz 2.10.2 folgt:

$$l_q(\lambda x)\, q = \sigma_{Fq}(\lambda x) + \lambda x = \lambda(\sigma_{Fq}(x) + x) = \lambda\, l_q(x)\, q \quad \Rightarrow \quad l_q(\lambda x) = \lambda\, l_q(x)$$

$$\begin{aligned} l_q(x+y)\, q &= \sigma_{Fq}(x+y) + (x+y) = \sigma_{Fq}(x) + x + \sigma_{Fq}(y) + y = l_q(x)\, q + l_q(y)\, q \\ &= \big(l_q(x) \oplus_q l_q(y)\big)\, q \\ &\qquad\qquad \Rightarrow \quad l_q(x+y) = l_q(x) \oplus_q l_q(y). \end{aligned}$$

a) $$l_q(q)\, q = \sigma_{Fq}(q) + q = q + q = 2q \quad \Rightarrow \quad l_q(q) = 2$$

b) $$\big(l_{\lambda q}(x)\, \lambda\big)\, q = l_{\lambda q}(x)\, (\lambda q) = \sigma_{F(\lambda q)}(x) + x = \sigma_{Fq}(x) + x = l_q(x)\, q \quad \Rightarrow \quad l_{\lambda q}(x)\, \lambda = l_q(x)$$

c) $$\begin{aligned} l_q(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sigma_{Fq}(x) + x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{Fq}(x) = -x \quad \Leftrightarrow \quad \tau_{x, x_{Fq}}(x_{Fq}) = \tau_{x,0}(0) \\ &\Leftrightarrow \quad \tau_{0,x}\tau_{x,x_{Fq}}(x_{Fq}) = \tau_{0,x_{Fq}}(x_{Fq}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{Fq} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{0 \perp Fq\} \\ &\Leftrightarrow \quad Fx \perp Fq \end{aligned}$$

d) Aus $x \in R_q(X)$ folgt mit Satz 1.4.18.b) $\sigma_{Fq}(x) \in R_q(X)$ und damit $\sigma_{Fq}(x) + x \in R_q(X)$.

$$\oplus_q = \oplus_{\sigma_{Fq}(x)+x} = \oplus_{l_q(x)\, q}$$

Mit Satz 1.4.7.e) folgt $l_q(x) \in K(F)$.

□

Lemma 2.10.4
Es sei $q \in Q(X)^*$ und $r, s \in R_q(X)^*$. Dann gilt:

$$l_s(r)\, l_q(s)\, l_r(q) = l_r(s)\, l_s(q)\, l_q(r).$$

Beweis: Mit Satz 2.10.3.d) folgt $l_s(r)$, $l_q(s)$, $l_r(q) \in K(F)$.
Gilt $Fq \perp Fr$, $Fr \perp Fs$ oder $Fs \perp Fq$, so sind beide Seiten der Gleichung 0.

Gilt $q = \mu r$, so folgt $\mu \in K(F)$ und

$$\begin{aligned} l_s(r)\, l_{\mu r}(s)\, l_r(\mu r) &= l_s(r)\, l_r(s)\, \mu^{-1}\mu\, l_r(r) = \mu\, l_s(r)\, l_r(s)\, l_r(r)\, \mu^{-1} \\ &= l_s(\mu r)\, l_r(s)\, l_{\mu r}(r) = l_s(q)\, l_r(s)\, l_q(r). \end{aligned}$$

Analog werden die Fälle $r = \mu s$ und $s = \mu q$ behandelt.

Es seien nun Fq, Fr, Fs unabhängig und paarweise nicht-orthogonal. Dann existieren $\alpha, \beta \in K(F)^*$ mit $q' := s_{Fq} = \alpha q$ und $r' := s_{Fr} = \beta r$. Mit Satz 2.10.3 folgt:

$$\begin{aligned} 0 = l_{q'}(s - q') = l_{q'}(s) - l_{q'}(q') = l_{q'}(s) - 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_{q'}(s) = 2 \\ 0 = l_{r'}(s - r') = l_{r'}(s) - l_{r'}(r') = l_{r'}(s) - 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_{r'}(s) = 2. \end{aligned}$$

Es existieren $\alpha', \beta' \in F^*$ mit $q'' := r'_{Fq} = \alpha' q'$ und $r'' := q'_{Fr} = \beta' r'$.

$$\begin{aligned} 0 = l_{q'}(r' - q'') = l_{q'}(r') - \alpha'\, l_{q'}(q') = l_{q'}(r') - \alpha' \cdot 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_{q'}(r') = \alpha' \cdot 2 \\ 0 = l_{r'}(q' - r'') = l_{r'}(q') - \beta'\, l_{r'}(r') = l_{r'}(q') - \beta' \cdot 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_{r'}(q') = \beta' \cdot 2 \end{aligned}$$

Nach Satz 2.8.7 gilt:

$$s'' := q''_{Fs} = (r'_{Fq})_{Fs} = \big((s_{Fr})_{Fq}\big)_{Fs} = \big((s_{Fq})_{Fr}\big)_{Fs} = (q'_{Fr})_{Fs} = r''_{Fs}.$$

Es existiert $\gamma \in F^*$ mit $s'' = \gamma s$.

$$\begin{aligned} 0 = l_s(q'' - s'') = \alpha'\, l_s(q') - \gamma\, l_s(s) = \alpha'\, l_s(q') - \gamma \cdot 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_s(q') = {\alpha'}^{-1} \cdot \gamma \cdot 2 \\ 0 = l_s(r'' - s'') = \beta'\, l_s(r') - \gamma\, l_s(s) = \beta'\, l_s(r') - \gamma \cdot 2 \quad &\Leftrightarrow \quad l_s(r') = {\beta'}^{-1} \cdot \gamma \cdot 2 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} & l_s(r)\, l_q(s)\, l_r(q) = \beta\, l_s(r)\, l_q(s)\, \alpha^{-1}\alpha\, l_r(q)\, \beta^{-1} = l_s(\beta r)\, l_{\alpha q}(s)\, l_{\beta r}(\alpha q) \\ &= l_s(r')\, l_{q'}(s)\, l_{r'}(q') = {\beta'}^{-1}\gamma \cdot 2 \cdot 2 \cdot \beta' \cdot 2 = {\alpha'}^{-1}\gamma \cdot 2 \cdot 2 \cdot \alpha' \cdot 2 \\ &= l_s(q')\, l_{r'}(s)\, l_{q'}(r') = l_s(\alpha q)\, l_{\beta r}(s)\, l_{\alpha q}(\beta r) = \alpha\, l_s(q)\, l_r(s)\, \beta^{-1}\beta\, l_q(r)\, \alpha^{-1} \\ &= l_s(q)\, l_r(s)\, l_q(r) = l_r(s)\, l_s(q)\, l_q(r). \end{aligned}$$

□

Satz 2.10.5
Für $q \in Q(X)^*$ ist die Abbildung

$$f_q : \begin{cases} X \times R_q(X) & \to \quad F \\ (x, y) & \mapsto \quad \begin{cases} l_y(x)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} & \text{für } y \notin \{0 \perp Fq\} \\ f_q(x, y+q) \ominus_q f_q(x, q) & \text{für } y \in \{0 \perp Fq\} \end{cases} \end{cases}$$

eine symmetrische nullteilige q-Bilinearform, und es gilt:

$$\forall\, x \in X^* \;\; \forall\, y \in R_q(X)^* : \quad Fx \perp Fy \;\;\Leftrightarrow\;\; f_q(x,y) = 0.$$

Beweis: f_q ist wohldefiniert, da für $y \in \{0 \perp Fq\}$ gilt: $y + q \notin \{0 \perp Fq\}$. Mit Satz 2.10.3.d) folgt $l_q(y), l_y(q) \in K(F)$ für $y \in R_q(X)$.

Linearität im ersten Argument:
Es seien $x_1, x_2 \in X$, $y \in R_q(X)$ und $\lambda \in F$. Für $y \notin \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_q(x_1 + x_2, y) &= l_y(x_1 + x_2)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = \big(l_y(x_1) \oplus_q l_y(x_2)\big)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} \\ &= l_y(x_1)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} \oplus_q l_y(x_2)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = f_q(x_1, y) \oplus_q f_q(x_2, y) \end{aligned}$$

$$f_q(\lambda x, y) = l_y(\lambda x)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = \lambda\, l_y(x)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = \lambda\, f_q(x, y).$$

Für $y \in \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_q(x_1 + x_2, y) &= f_q(x_1 + x_2, y + q) \ominus_q f_q(x_1 + x_2, q) \\ &= f_q(x_1, y + q) \oplus_q f_q(x_2, y + q) \ominus_q f_q(x_1, q) \ominus_q f_q(x_2, q) \\ &= f_q(x_1, y) \oplus_q f_q(x_2, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_q(\lambda x, y) &= f_q(\lambda x, y + q) \ominus_q f_q(\lambda x, q) = \lambda\, f_q(x, y + q) \ominus_q \lambda\, f_q(x, q) \\ &= \lambda\big(f_q(x, y + q) \ominus_q f_q(x, q)\big) = \lambda\, f_q(x, y). \end{aligned}$$

Symmetrie:
Für $x, y \in R_q(X) \backslash \{0 \perp Fq\}$ gilt mit Lemma 2.10.4:

$$\begin{aligned} f_q(x, y) &= l_y(x)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = l_y(x)\, l_q(y)\, l_x(q)\, l_x(q)^{-1}\, l_y(q)^{-1} = l_x(y)\, l_y(q)\, l_q(x)\, l_x(q)^{-1}\, l_y(q)^{-1} \\ &= l_x(y)\, l_q(x)\, l_x(q)^{-1} = f_q(y, x). \end{aligned}$$

Für $x \in R_q(X) \backslash \{0 \perp Fq\}$ und $y \in R_q(X) \cap \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$f_q(x, y) = f_q(x, y + q) \ominus_q f_q(x, q) \overset{a)}{=} f_q(y + q, x) \ominus_q f_q(q, x) = f_q(y, x).$$

Für $x, y \in R_q(X) \cap \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$f_q(x, y) = f_q(x, y + q) \ominus_q f_q(x, q) \overset{b)}{=} f_q(y + q, x) \ominus_q f_q(q, x) = f_q(y, x).$$

Linearität im zweiten Argument:
Es sei $B = (b_i)_{i \in I} \in R_q(X)^I$ eine Basis von X und $(x_i)_i := x_B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_q(x, y_1 + y_2) &= f_q\Big(\sum_{i \in I} x_i b_i\,,\; y_1 + y_2\Big) = \sum_{i \in I}^{q} x_i\, f_q(b_i, y_1 + y_2) \\ &= \sum_{i \in I}^{q} x_i\, f_q(y_1 + y_2, b_i) = \sum_{i \in I}^{q} x_i\big(f_q(y_1, b_i) \oplus_q f_q(y_2, b_i)\big) \\ &= \sum_{i \in I}^{q} x_i\big(f_q(b_i, y_1) \oplus_q f_q(b_i, y_2)\big) = \sum_{i \in I}^{q}\big(x_i\, f_q(b_i, y_1) \oplus_q x_i\, f_q(b_i, y_2)\big) \\ &= \sum_{i \in I}^{q} x_i\, f_q(b_i, y_1) \oplus_q \sum_{i \in I}^{q} x_i\, f_q(b_i, y_2) \\ &= f_q\Big(\sum_{i \in I} x_i b_i\,,\; y_1\Big) \oplus_q f_q\Big(\sum_{i \in I} x_i b_i\,,\; y_2\Big) = f_q(x, y_1) \oplus_q f_q(x, y_2). \end{aligned}$$

Für $x \in X^*$ und $y \in R_q(X)^*$ gilt $Fx \perp Fy \;\Leftrightarrow\; f_q(x,y) = 0$:
Es sei $x \in X^*$ und $y \in R_q(X) \setminus \{0 \perp Fq\}$. Dann gilt $l_q(y), l_y(q) \neq 0$ und

$$f_q(x,y) = l_y(x)\, l_q(y)\, l_y(q)^{-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_y(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Fx \perp Fy.$$

Es sei $x \in X^*$ und $y \in R_q(X)^* \cap \{0 \perp Fq\}$. Dann gilt $y+q \in R_q(X)$ und damit $l_{y+q}(q) \in K(F)$. Mit Lemma 2.8.5 folgt:

$$\begin{aligned}
& 0 = f_q(x,y) = f_q(x, y+q) \ominus_q f_q(x,q) \\
& \quad = l_{y+q}(x)\, l_q(y+q)\, l_{y+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x)\, l_q(q)\, l_q(q)^{-1} \\
& \quad = l_{y+q}(x)\, \big(l_q(y) \oplus_q l_q(q)\big)\, l_{y+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x) \\
& \quad = l_{y+q}(x) \cdot 2 \cdot l_{y+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = 2l_{y+q}(x) \ominus_q l_q(x)\, l_{y+q}(q) = l_{y+q}(2x) \ominus_q l_{y+q}(l_q(x)\, q) \\
& \quad = l_{y+q}\big(2x - l_q(x)\, q\big) = l_{y+q}\big(2x - \sigma_{Fq}(x) - x\big) \\
& \quad = l_{y+q}\big(x - \sigma_{Fq}(x)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & x - \sigma_{Fq}(x) = 0 \quad \text{oder} \quad F\big(x - \sigma_{Fq}(x)\big) \perp F(y+q) \\
\Leftrightarrow \quad & \sigma_{Fq}(x) = x \quad \text{oder} \quad F\big(x - \sigma_{Fq}(x)\big) \perp F(y+q), Fq \\
\Leftrightarrow \quad & x \in Fq \quad \text{oder} \quad F\big(x - \sigma_{Fq}(x)\big) \perp Fy, Fq \\
\Leftrightarrow \quad & x \in Fq \quad \text{oder} \quad F\big(x - \sigma_{Fq}(x)\big), Fq \perp Fy \\
\Leftrightarrow \quad & Fx \perp Fy.
\end{aligned}$$

f_q ist nullteilig:
Es sei $x \in R_q(X)^*$. Für $x \notin \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$f_q(x,x) = l_x(x)\, l_q(x)\, l_x(q)^{-1} = 2\, l_q(x)\, l_x(q)^{-1} \neq 0.$$

Für $x \in \{0 \perp Fq\}$ gilt $x + q \in R_q(X)$ und $l_q(x+q), l_{x+q}(x) \in K(F)$.

$$\begin{aligned}
f_q(x,x) &= f_q(x, x+q) \ominus_q f_q(x,q) \\
&= l_{x+q}(x)\, l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x)\, l_q(q)\, l_q(q)^{-1} \\
&= l_{x+q}(x+q-q)\, l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \\
&= \big(l_{x+q}(x+q) \ominus_q l_{x+q}(q)\big) l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \\
&= l_{x+q}(x+q)\, l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \ominus_q l_{x+q}(q)\, l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \\
&= 2\, l_q(x+q)\, l_{x+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x+q) \\
&= 2\, \big(l_q(x) \oplus_q l_q(q)\big)\, l_{x+q}(q)^{-1} \ominus_q l_q(x) \ominus_q l_q(q) \\
&= 4\, l_{x+q}(q)^{-1} \ominus_q 2
\end{aligned}$$

Unter der Annahme $f_q(x,x) = 0$ gilt:

$$l_{x+q}(q) = 2 = l_{x+q}(x+q) = l_{x+q}(x) \oplus_q l_{x+q}(q) \quad \Rightarrow \quad l_{x+q}(x) = 0.$$

Die letzte Aussage ist falsch wegen $F(x+q) \not\perp F(x)$. Folglich gilt $f_q(x,x) \neq 0$. $\square$

Lemma 2.10.6
Es sei $q \in Q(X)^*$.

a) Zu $r \in R_q(X)^*$ existiert ein Element $\lambda \in K(F)^*$, so daß gilt:

$$\forall\, x \in X \ \ \forall\, y \in R_q(X): \quad f_q(x,y) = f_r(x,y)\,\lambda.$$

b) Für $r \in R_q(X)^*$ mit $(0,q) \equiv (0,r)$ gilt $f_q = f_r$.

c) Für $\lambda \in F^*$ gilt:

$$\forall\, x \in X \ \ \forall\, y \in R_q(X): \quad f_{\lambda q}(x, \lambda y) = f_q(x,y)\,\lambda^{-1}.$$

d) Für $g \in R_q(X)^*$ und $x \in X$ gilt:

$$x_{Fg} = f_q(g,g)^{-1} f_q(x,g)\,g.$$

Beweis:

a) Es sei zunächst $r \notin \{0 \perp Fq\}$.
$y \notin \{0 \perp Fq\}$, $\{0 \perp Fr\}$:
Es sei $\lambda := l_q(r)\,l_r(q)^{-1} \in K(F)$. Dann folgt mit Lemma 2.10.4:

$$\begin{aligned} f_q(x,y) &= l_y(x)\,l_q(y)\,l_y(q)^{-1} \\ &= l_y(x)\,l_r(y)\,l_r(y)^{-1}\,l_y(r)\,l_y(r)^{-1}\,l_r(q)\,l_r(q)^{-1}\,l_q(y)\,l_y(q)^{-1} \\ &= l_y(x)\,l_r(y)\,l_y(r)^{-1}\,l_y(r)\,l_r(q)\,l_q(y)\,l_r(y)^{-1}\,l_r(q)^{-1}\,l_y(q)^{-1} \\ &= f_r(x,y)\,l_r(y)\,l_q(r)\,l_y(q)\,l_r(y)^{-1}\,l_r(q)^{-1}\,l_y(q)^{-1} \\ &= f_r(x,y)\,l_q(r)\,l_r(q)^{-1} \\ &= f_r(x,y)\,\lambda. \end{aligned}$$

$y \in \{0 \perp Fq\}$, $y \notin \{0 \perp Fr\}$:
Es existiert ein Element $\mu \in F^*$ mit $y + \mu q \notin \{0 \perp Fr\}$.

$$f_q(x,y) = f_q(x, y+\mu q) \ominus_q f_q(x, \mu q) \overset{a)}{=} f_r(x, y+\mu q)\,\lambda \ominus_q f_r(x,\mu q)\,\lambda = f_r(x,y)\,\lambda$$

$y \notin \{0 \perp Fq\}$, $y \in \{0 \perp Fr\}$:
Es existiert ein Element $\nu \in F^*$ mit $y + \nu r \notin \{0 \perp Fq\}$.

$$f_q(x,y) = f_q(x, y+\nu r) \ominus_q f_q(x, \nu r) \overset{a)}{=} f_r(x, y+\nu r)\,\lambda \ominus_q f_r(x,\nu r)\,\lambda = f_r(x,y)\,\lambda$$

Es sei nun $r \in \{0 \perp Fq\}$. Für $s \in R_q(X)$ mit $s \notin \{0 \perp Fq\}$, $\{0 \perp Fr\}$ gilt:

$$f_q(x,y) = f_s(x,y)\,l_q(s)\,l_s(q)^{-1} = f_r(x,y)\,l_s(r)\,l_r(s)^{-1} l_q(s)\,l_s(q)^{-1}.$$

b) Aus $\mathrm{Mp}(q,r) = \frac{1}{2}(q+r)$ folgt mit Lemma 2.6.5 $q \sqcup r \perp F(q+r)$. Es wird die Ebene $\overline{\{0,q,r\}}$ betrachtet. Für $G := F(q+r)$ gilt $r = \sigma_G(q)$. Mit Lemma 2.6.10 folgt: $\sigma_G\,\sigma_{Fq}\,\sigma_G = \sigma_{\sigma_G(Fq)} = \sigma_{Fr}$.

$$\begin{aligned} l_r(q)\,r &= \sigma_{Fr}(q) + q = \sigma_G\,\sigma_{Fq}\,\sigma_G(q) + \sigma_G(r) = \sigma_G\big(\sigma_{Fq}\,\sigma_G(q) + r\big) \\ &= \sigma_G\big(\sigma_{Fq}(r) + r\big) = \sigma_G\big(l_q(r)\,q\big) = l_q(r)\,\sigma_G(q) = l_q(r)\,r \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad l_r(q) = l_q(r)$$

Aus dem Beweis von a) folgt die Behauptung.

c) Für $y \notin \{0 \perp Fq\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{\lambda q}(x, \lambda y) &= l_{\lambda y}(x)\, l_{\lambda q}(\lambda y)\, l_{\lambda y}(\lambda q)^{-1} = l_y(x)\, \lambda^{-1} \lambda\, l_q(y)\, \lambda^{-1} \big(\lambda\, l_y(q)\, \lambda^{-1}\big)^{-1} \\ &= l_y(x)\, l_q(y)\, \lambda^{-1} \lambda\, l_y(q)^{-1}\, \lambda^{-1} = f_q(x, y)\, \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Für $y \in \{0 \perp Fq\}$ gilt mit Satz 1.4.5.d):

$$\begin{aligned} f_{\lambda q}(x, \lambda y) &= f_{\lambda q}(x, \lambda y + \lambda q) \ominus_{\lambda q} f_{\lambda q}(x, \lambda q) = f_q(x, y + q)\, \lambda^{-1} \ominus_{\lambda q} f_q(x, q)\, \lambda^{-1} \\ &= \big(f_q(x, y + q) \ominus_q f_q(x, q)\big)\lambda^{-1} = f_q(x, y)\, \lambda^{-1}. \end{aligned}$$

d) Nach Satz 2.8.4 ist x_G der einzige Punkt auf Fg mit der Eigenschaft $x_{Fg} \sqcup x \perp Fg$. Gilt $g \notin \{0 \perp Fq\}$, so folgt:

$$\begin{aligned} f_q(g, g)^{-1} f_q(x, g)\, g &= \big(l_g(g)\, l_q(g)\, l_g(q)^{-1}\big)^{-1}\, l_g(x)\, l_q(g)\, l_g(q)^{-1}\, g \\ &= l_g(q)\, l_q(g)^{-1}\, l_g(g)^{-1}\, l_g(x)\, l_q(g)\, l_g(q)^{-1}\, g \\ &= 2^{-1}\, l_g(x)\, g = 2^{-1}\, (\sigma_{Fg}(x) + x). \end{aligned}$$

Gilt $g \in \{0 \perp Fq\}$, so sei $r \in R_q(V)$ mit $(0, q) \equiv (0, r)$ und $g \notin \{0 \perp Fr\}$. Mit c) und dem vorigen Beweisschritt folgt:

$$f_q(g, g)^{-1} f_q(x, g)\, g = f_r(g, g)^{-1} f_r(x, g)\, g = 2^{-1}\, (\sigma_{Fg}(x) + x).$$

Insgesamt gilt:

$$(0, x) \equiv \big(0, \sigma_{Fg}(x)\big) \equiv \big(x, \sigma_{Fg}(x) + x\big) \equiv \big(x, 2\, f_q(g, g)^{-1} f_q(x, g)\, g\big).$$

Mit Lemma 2.5.3 folgt $x \sqcup \big(f_q(g, g)^{-1} f_q(x, g)\, g\big) \perp Fg$ und damit $x_{Fg} = f_q(g, g)^{-1} f_q(x, g)\, g$.

□

Satz 2.10.7
Für $x, y \in X^*$ und $g \in R_q(X)$ mit $x \sqcup y \in \mathfrak{G}$ und $\langle 0, g\rangle = \langle x, y\rangle$ gilt:

$$(0, x) \equiv (0, y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_q(x, g), f_q(y, g) \neq 0 \\ f_q(x, g)\, f_q(y, g)^{-1} = f_q(y, g)\, f_q(x, g)^{-1} \end{cases}$$

Beweis:
„$\Rightarrow$“: Lemma 2.6.5 liefert $0 \sqcup \mathrm{Mp}(x, y) \perp x \sqcup y$, woraus mit Lemma 2.6.1.a) $0 \sqcup x, 0 \sqcup y \not\perp x \sqcup y$ folgt. Damit gilt $f_q(x, g) \neq 0$ und $f_q(y, g) \neq 0$.

Es sei $m := \mathrm{Mp}(x, y)$. Aus $\langle x, y\rangle = \langle 0, g\rangle$ folgt $x_{Fg} = \tau_{m,0}(x)$ und $y_{Fg} = \tau_{m,0}(y)$.

$$\begin{aligned} y_{Fg} &= \tau_{m,0}(y) = \tau_{m,0}\, \tau_{x,y}(x) = \tau_{x,y}\, \tau_{m,0}(x) = \tau^2_{x,m}(x_{Fg}) = \tau^2_{\tau_{m,0}(x), \tau_{m,0}(m)}(x_{Fg}) \\ &= \tau^2_{x_{Fg},0}(x_{Fg}) = -x_{Fg} \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.10.6.d) folgt:

$$f_q(x, g)\, g = f_q(g, g)\, x_{Fg} = -f_q(g, g)\, y_{Fg} = -f_q(y, g)\, g \quad \Rightarrow \quad f_q(x, g) = -f_q(y, g)$$

$$f_q(x, g)\, f_q(y, g)^{-1} = -f_q(x, g)\, f_q(x, g)^{-1} = f_q(y, g)\, f_q(x, g)^{-1}.$$

„$\Leftarrow$“: Aus $\langle 0,g\rangle = \langle x,y\rangle$ folgt $Fg = F(y-x)$ und damit $0 \neq f_q(y-x,g)$.

$$\begin{aligned}
& f_q(x,g)\, f_q(y,g)^{-1} = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} \\
\Leftrightarrow\quad & f_q(x,g) = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y,g) \\
& \qquad = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y-x+x,g) \\
& \qquad = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y-x,g) \oplus_q f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(x,g) \\
& \qquad = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y-x,g) \oplus_q f_q(y,g) \\
\Leftrightarrow\quad & f_q(x,g) \ominus_q f_q(y,g) = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y-x,g) \\
\Leftrightarrow\quad & f_q(x-y,g) = f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} f_q(y-x,g) \\
\Leftrightarrow\quad & f_q(y,g)\, f_q(x,g)^{-1} = -1 \\
\Leftrightarrow\quad & f_q(y,g) = -f_q(x,g)
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
& f_q(x+y,g) = f_q(x,g) \oplus_q f_q(y,g) = f_q(x,g) \ominus_q f_q(x,g) = 0 \\
& \qquad \Rightarrow \quad F(x+y) \perp Fg \quad \Rightarrow \quad 0 \sqcup \tfrac{1}{2}(x+y) \perp x \sqcup y.
\end{aligned}$$

Aus $\big(x, \frac{1}{2}(x+y)\big) \equiv \big(\frac{1}{2}(x+y), y\big)$ und $\big\langle x, \frac{1}{2}(x+y)\big\rangle = \big\langle \frac{1}{2}(x+y), y\big\rangle$ folgt $(0,x) \equiv (0,y)$. □

Satz 2.10.8
Zu einem desarguesschen fasteuklidischen Raum $(X, D, \langle\rangle, \equiv)$ und $0, q \in X$ mit $0 \sqcup q \in \mathfrak{G}$ existiert eine nullteilige symmetrische Bilinearform f_q auf dem 0-Koordinatenraum über $(X, D, \langle\rangle)$, so daß die von f_q induzierte Kongruenzrelation $\equiv^{f_q}$ mit der Relation $\equiv$ übereinstimmt.

Beweis: Es sei f_q wie in Satz 2.10.5 definiert. Für $x, y, u, v \in X$ ist die folgende Aussage zu zeigen:

$$(x,y) \equiv (u,v) \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) \equiv^{f_q} (u,v).$$

Es sei $y - x \neq v - u$ (Sonst ist die Aussage trivial.).

„$\Rightarrow$“: Nach (KT) existieren Punkte $x_0, \dots, x_n \in X$ mit $y -_0 x = x_0, x_n = v -_0 u$ und $x_{i-1} \sqcup x_i \in \mathfrak{G}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß gilt:

$$(0, y -_0 x) \equiv (0, x_1) \equiv \ \cdots \ \equiv (0, x_{n-1}) \equiv (0, v -_0 u).$$

Mit Satz 2.10.7 folgt:

$$(0, y -_0 x) \equiv_Q^{f_q} (0, x_1) \equiv_Q^{f_q} \ \cdots \ \equiv_Q^{f_q} (0, x_{n-1}) \equiv_Q^{f_q} (0, v -_0 u).$$

Also gilt: $(x,y) \equiv^{f_q} (u,v)$.

„$\Leftarrow$“: Es existieren Punkte $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n \in X$ mit

$$(x,y) \equiv_Q^{f_q} (x_1, y_1) \equiv_Q^{f_q} \ \cdots \ \equiv_Q^{f_q} (x_n, y_n) \equiv_Q^{f_q} (u,v).$$

O.B.d.A. seien die Punkte $y -_0 x,\ y_1 -_0 x_1, \dots,\ y_n -_0 x_n,\ v -_0 u$ paarweise verschieden. Mit Satz 2.10.7 folgt

$$(0, y -_0 x) \equiv (0, y_1 -_0 x_1) \equiv \ \cdots \ \equiv (0, y_n -_0 x_n) \equiv (0, v -_0 u),$$

so daß sich aus der Transitität von $\equiv$ die Behauptung ergibt. □

Verzeichnis der Axiome

Literaturverzeichnis

[1] André, J.: *Lineare Algebra über Fastkörpern.* Mathematische Zeitschrift, Vol. 136 (1974), S. 295-313.

[2] André, J.: *Affine Geometrien über Fastkörpern.* Mitt. Math. Seminar Gießen, Vol. 114 (1975), S. 1-99.

[3] André, J.: *Nichtkommutative Geometrie.* Vorlesungsausarbeitung, Saarbrücken 1980.

[4] Hafner, B.: *Beziehungen zwischen Räumen mit nichtkommutativer Verbindung – semiaffine und fastaffine Räume.* Diplomarbeit, Saarbrücken, 1979.

[5] Hischer, D.: *Schließungsaussagen in fastaffinen Räumen.* (Dissertation, Saarbrücken) Mitt. Math. Seminar Gießen, Vol. 131 (1978), S. 1-95.

[6] Jakóbowski, J.: *A New Construction for Minkowski Planes.* Geometriae Dedicata, Vol. 69 (1998), S. 179-188.

[7] Karzel, H.: *Zur Begründung euklidischer Räume.* Mitt. Math. Ges. Hamburg, Band XI, Heft 3 (1985), S. 355-368.

[8] Karzel, H., Stanik, R.: *Metrische affine Ebenen.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 49 (1979), S. 237-243.

[9] Karzel, H., Sörensen, K., Windelberg, D.: *Einführung in die Geometrie.* UTB Vandenhoeck, Göttingen, 1973.

[10] Misfeld, J., Tecklenburg, H.: *Dimension of nearaffine spaces.* Proceedings of the Conference of Geometry and Differential Geometry, Haifa 1979, S. 97-109.

[11] Müller, K.: *Lineare Algebra über Fastkörpern.* Diplomarbeit, Saarbrücken, 1984.

[12] Pfalzgraf, J.: *Über ein Modell für nichtkommutative geometrische Räume.* Dissertation, Saarbrücken, 1984.

[13] Stanik, R.: *Ein Beitrag zur Axiomatik metrisch-affiner Ebenen von Charakteristik* $\neq 2$. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 50 (1980), S. 18-19.

[14] Tecklenburg, H.: *Algebraische Darstellung fastaffiner Räume.* Dissertation, Hannover, 1981.

[15] Tecklenburg, H.: *Zur algebraischen Darstellung fastaffiner Räume.* Journal of Geometry, Vol. 19 (1982), S. 94-99.

[16] Tecklenburg, H.: *Stufen der Anordnung in Geometrie und Algebra.* DUV, Wiesbaden, 1992.

[17] Wähling, H.: *Theorie der Fastkörper.* THALES Verlag, Essen, 1987.

[18] Wilbrink, H.A.: *Nearaffine Planes.* Geometriae Dedicata, Vol. 12 (1982), S. 53-62.

Lebenslauf

18. Juni 1970	geboren in Hannover Eltern: Alfred Pioch, Gisela Pioch geb. Atzrodt
August 1976 - Mai 1982	Besuch der Grundschule und Orientierungsstufe in Hannover
Juli 1982 - Mai 1989	Besuch der Goetheschule, Gymnasium in Hannover
Mai 1989	Abiturprüfung
Oktober 1989 - Juni 1995	Studium der Mathematik an der Universität Hannover
Juni 1995	Diplomprüfung
Mai 1996 - Juli 1996 Oktober 1996 - Januar 1997 Mai 1997 - Oktober 1997	Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mathematik der Universität Hannover
August 1996 - July 1998	Stipendiat nach dem GradFöG