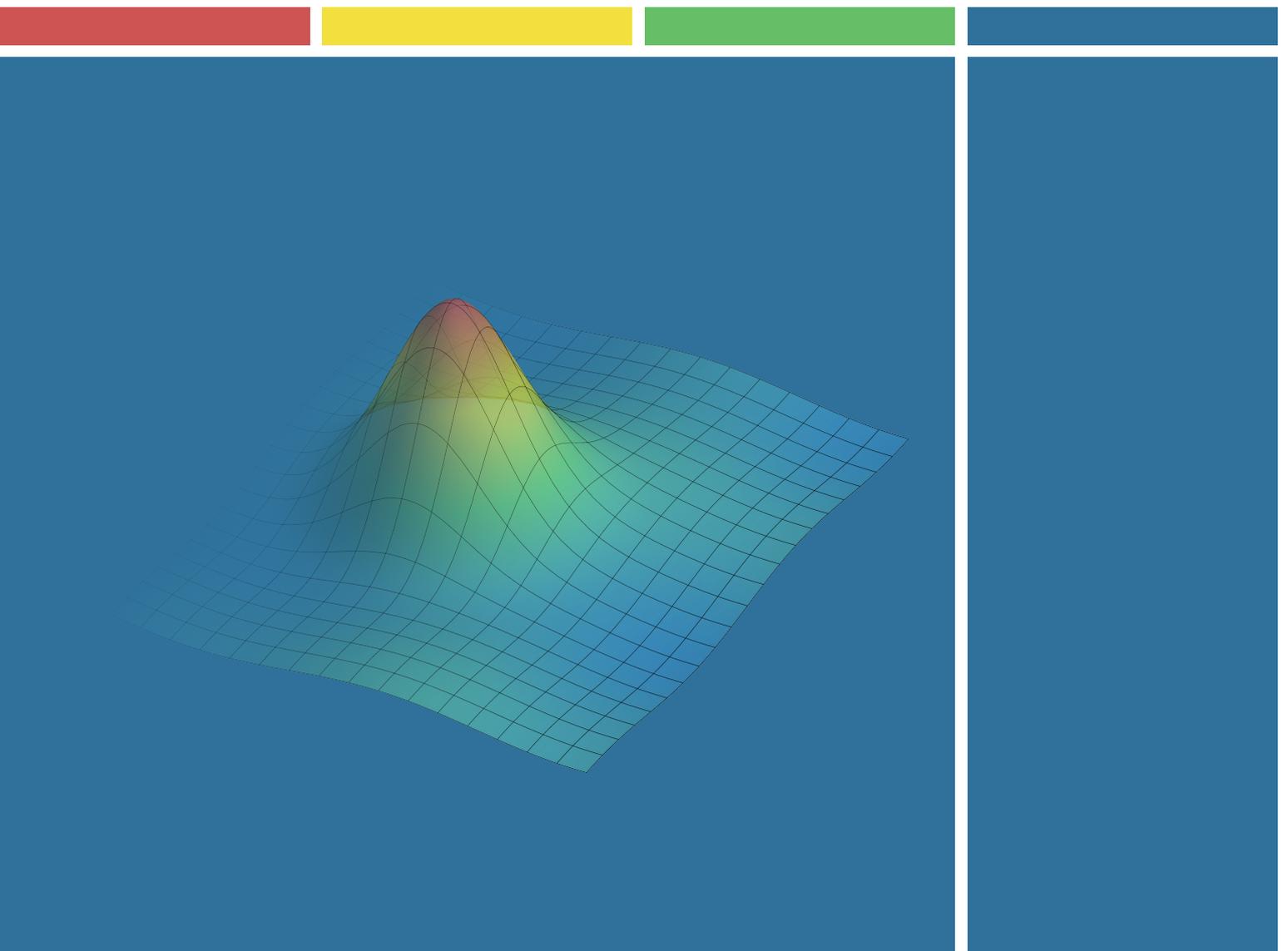


Daniel Stahl

Liouville Dynamik

Eine Anwendung auf Oszillatoren



Liouville Dynamik

Eine Anwendung auf Oszillatoren

Der Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
(abgekürzt: Dr.-Ing.)
genehmigte Dissertation

von
M. Sc. Daniel Stahl
geboren am 1. Oktober 1987
in Hannover

2017

Liouville Dynamik

Eine Anwendung auf Oszillatoren

Autor: M. Sc. Daniel Stahl

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Mathis

2. Referent: Dr. rer. nat. habil. Rainer Klages

Tag der Promotion: 19.12.2016

Vorwort

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Mathis danke ich für die Vergabe des interessanten Themengebiets und für die Möglichkeit diese Arbeit als Physiker am Institut für Theoretische Elektrotechnik der Leibniz Universität Hannover durchführen zu können. Insbesondere möchte ich mich bei ihm für die Freiheiten bedanken, die ich während des Findungsprozesses dieses Themas hatte und die es mir ermöglicht haben, etwas zu schaffen, was mich von der bisherigen Literatur differenziert. Ich danke Herrn Dr. rer. nat. habil. Rainer Klages für die Bereiterklärung als Korreferent dieser Arbeit. Darüber hinaus danke ich Herrn Prof. Dr. habil. Willi-Hans Steeb für die lohnenden Diskussionen über gekoppelte dynamische Systeme. Zudem möchte ich mich bei dem Wegbereiter des Themas zur verallgemeinerten Liouville-Gleichung bedanken, dem während dieser Arbeit verstorbenen Herrn Prof. Dr. Gerhard Gerlich. Mein Dank gilt zudem meinen Kollegen am Institut und insbesondere Herrn Dipl.-Ing. Marco Reit und M. Sc. Harry Weber für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen, sowie Herrn Dipl.-Ing. Yuanhao Wang, meinen Bürokollegen. Zuletzt möchte ich mich bedanken bei meiner Großmutter, Frau Waltraud Stahl, sowie Herrn. M. Sc. Andreas Voskrebenezv, die meine Dissertation Korrektur gelesen haben.

Hannover, im Juni 2017
Daniel Stahl

Kurzfassung

Elektrische Oszillatoren bilden eine Klasse von elektrischen Schaltungen, die ohne Eingangssignale ein periodisches Ausgangssignal erzeugen. Die Bewegungsgleichungen der Schaltungen, die in dieser Dissertation behandelt werden, sind autonome, nichtlineare Differentialgleichungen in Abhängigkeit eines Bifurkationsparameters. Das Phasenportrait besteht aus einem instabilen Gleichgewichtspunkt und einem stabilen Grenzzyklus, entsprungen aus einer Andronov-Hopf-Bifurkation.

Stabile Grenzzyklen stellen einen Attraktor dar und sind aufgrund dessen in der Lage, Amplitudenabweichungen zu kompensieren. Dementgegen lässt die Autonomie der Bewegungsgleichungen keine Kompensation einer Phasenabweichung zu. Trajektorien mit Anfangswerten innerhalb der Einzugsgebiete laufen in den Grenzzyklus asymptotisch ein (Transienz). Die Trajektorie auf dem Grenzzyklus entspricht einer periodischen Funktion, deren Funktionswert die Amplitude wiedergibt (Oszillation).

Jede elektrische Schaltung unterliegt unerwünschten Rauschprozessen. Gängige Theorien über das Amplituden- und Phasenrauschen, wie z.B. die von KÄRTNER, HAJIMIRI, LEE und HAM sowie DEMIR, erweitern daher in verschiedenen Spielarten die Bewegungsgleichungen um einen markovschen Rauschterm (Langevin-Ansatz). Die gewöhnlichen Differentialgleichungen werden zu stochastischen Differentialgleichungen und zu jeder Trajektorie existieren unendlich viele Realisierungen (Random-Walks).

Um statistische Aussagen über das Rauschverhalten von elektrischen Schaltungen zu ermöglichen, bedarf es einer Bewegungsgleichung, welche die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt und deren Funktionswert die Aufenthaltsdichte der sich überlagernden Realisierungen wiedergibt. Diese partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung wird Fokker-Planck-Gleichung genannt und setzt sich aus einem Drift- und Diffusionsterm zusammen. Während der Drift die deterministische Bewegung widerspiegelt, strebt der Diffusionsprozess ohne Berücksichtigung des Drifts eine Gleichverteilung im Phasenraum an. Dieses Bestreben gilt letztlich auch für die Phase auf dem Grenzzyklus und stellt einen Gegensatz dar: Während ein Oszillator unendlich viel Zeit benötigt, um den asymptotischen Prozess der Transienz zu durchlaufen, ist seine Phase währenddessen nicht mehr bestimmbar.

Auf Ebene der Schaltskizze werden Quellen virtuell hinzugefügt, die einem Wiener-Prozess unterliegen. Dieses heuristische Herangehen spiegelt nicht die in der Schaltung real ablaufenden physikalischen Prozesse wider. Da mit dem Entfernen dieser Quellen auch das Rauschen erliegt, handelt es sich um einen extrinsischen Ansatz. Während auf diese Weise zwar adäquate Simulationsergebnisse erzielt werden, werden die deterministischen, intrinsischen Abläufe durch den Diffusionsprozess kaschiert.

Mit dieser Motivation ist es Gegenstand dieser Arbeit, einen vertieften Einblick in die deterministischen Prozesse von Systemen mit Grenzzyklen zu geben und ein eigenständiges Themengebiet zu eröffnen, welches statistische Untersuchungen über die Bewegung von Dichten im Phasenraum erlaubt. Die dazu notwendige Bewegungsgleichung ist die verallgemeinerte Liouville-Gleichung nach den Arbeiten von GERLICH. Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte und entspricht einem gewichteten Fluss aller Trajektorien im Phasenraum. Sie ist eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und setzt sich ausschließlich aus dem Driftterm zusammen.

Diese Dissertation besteht aus einem Zusammenspiel von Vertiefungen und neuen Erweiterungen aus den Bereichen der klassischen Mechanik und Thermodynamik und beginnt mit einem intensiven, kritischen literarischen Einblick in den Stand der Forschung. Der Begriff der Dissipation wird um einen Antagonisten, der sogenannten Akkumulation, erweitert, um präzise Zusammenhänge mit Begriffen wie Divergenz, Energie, Entropie oder Phasenraumvolumen herzustellen. In Anwendung auf elektrische Oszillatoren wird eine inhärente Definition für den zeitlichen Beginn der Oszillation aus der Liouville-Dynamik hergeleitet. Ein Kerngegenstand dieser Arbeit ist die intensive Beschreibung eines intrinsischen Mechanismus, welcher zu einem periodischen Pumpen der Wahrscheinlichkeitsdichte führt und erst durch das Zusammenspiel mit einem Grenzzyklus zu beobachten ist (Pumpmechanismus).

Abstract

Electronic oscillators are a class of electronic circuits which generate a periodic output signal with no input signals. The equations of motion of the circuits that are discussed in this thesis are autonomous, non-linear differential equations depending on a bifurcation parameter. The phase portrait consists of an unstable equilibrium point and a stable limit cycle, generated from an Andronov-Hopf bifurcation.

Stable limit cycles represent an attractor and are able to compensate its amplitude. In contrast, the autonomy of the equations of motion does not allow a phase compensation. Trajectories with initial values within the basin of attraction run into the limit cycle asymptotically (transience). The trajectory on the limit cycle corresponds to a periodic function whose image is the amplitude (oscillation).

Each electronic circuit is subject to unwanted noise processes. Common theories about the amplitude and phase noise, such as of KÄRTNER, HAJMIRI, LEE and HAM as well as DEMIR, expand in different variations the equations of motion by a Markov noise term (Langevin approach). The ordinary differential equations become stochastic differential equations and to each trajectory exists an infinite number of realizations (Random Walks).

To allow statistical statements about the noise performance of electronic circuits, it requires a equation of motion which describes the time evolution of a probability density function and whose image reflects the density of overlapping realizations. This partial differential equation of second order is called Fokker-Planck equation and is composed of a drift and diffusion term. During the drift depict the deterministic movement, the diffusion process (excluding the drift) tends to a uniform distribution in the phase space. This mechanism applies also for the phase on the limit cycle and is in contrast with the expectation. While an oscillator needs infinite amount of time to reach the limit cycle, its phase is no longer determinable.

At the level of circuit diagrams sources are added virtually which subject to a Wiener process. This heuristic approach does not reflect real physical processes. Since the removal of these sources succumbs the noise, it is an extrinsic approach. While indeed adequate simulation results are obtained in this manner, the deterministic, intrinsic sequences are masked by the diffusion process.

With this motivation, it is object of this work to give a deeper insight into the deterministic processes of systems with limit cycles and to open a separate topic, which allows statistical studies on the movement of densities in phase space. The necessary movement equation is the generalized Liouville equation according to GERLICH. It describes the time evolution of a probability density and corresponds to a weighted flow of all trajectories in phase space. It is a first order partial differential equation and it is composed exclusively of the drift term.

This thesis consists of a combination of pits and new extensions in the fields of classical mechanics and thermodynamics and begins with an intensive, critical literary insight into the state of research. The term of dissipation is expanded to an antagonist, the so-called accumulation, to give precise correlations with known terms like divergence, energy, entropy, or phase space volume. In application to electronic oscillators an intrinsic definition of the temporal beginning of the oscillation from the Liouville dynamics is derived. A core subject of this work is the intense description of an intrinsic mechanism which leads to a periodic pumping of the probability density and is observed only by the interaction of a limit cycle (pumping mechanism).

Schlagworte: Liouville-Gleichung, Oszillatoren, Pumpmechanismus
Keywords: Liouville equation, Oscillators, Pumping mechanism

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Dynamische Systeme	19
2.1	Phasenraum, Integralkurven und Orbits	19
2.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen	21
2.3	Attraktoren und Einzugsgebiete	23
2.4	Begleitendes Dreibein	24
3	Deterministische Systeme	25
3.1	Hamilton-Systeme	25
3.1.1	Satz von Liouville	26
3.1.2	Kanonisch-dissipative Systeme	27
3.1.3	Nambu-Systeme	29
3.2	Von integralen zu nicht-integralen Systemen	31
3.3	Stabilitätsbegriffe	33
3.4	Poincaré-Abbildung	33
3.5	Andronov-Hopf-Bifurkation	34
3.6	Elektrische Oszillatoren	36
3.7	Von Einzelsystemen zu Mengen	38
3.8	Ergoden- und Maßtheorie	40
3.8.1	Ljapunov-Exponenten	42
3.9	Verallgemeinerte Liouville-Gleichung	44
3.9.1	Das Cauchy-Problem der verallgemeinerten Liouville-Gleichung	46
3.9.2	Volumenerhaltung	47
3.9.3	Anfangsverteilung	49
3.9.4	Unendlich scharfe Phasenraumdichte (δ -Distribution)	50
3.9.5	Frobenius-Perrón Operator	51
3.10	Dissipation und Entropie	53
4	Liouville Dynamik	57
4.1	Lineare Systeme	62
4.1.1	Harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung (<i>RLC</i> -Schwingkreis)	63
4.1.2	Wien-Filter (<i>RC</i> -Bandpassfilter) und Wien-Brücken-Oszillator	69
4.2	Systeme mit Grenzzyklen	73
4.2.1	Van der Pol-Oszillator	74
4.2.2	Van der Pol-Oszillator (einseitig gekoppelt)	80
4.2.3	Rayleigh-Oszillator	81
4.2.4	Rayleigh-Van der Pol-Oszillator	85
4.2.5	Colpitts-Oszillator	91
4.2.6	Lorenz-Oszillator	96
5	Zusammenfassung und Ausblick	103
A	Eigenräume, Zentrums- und Integralmannigfaltigkeiten	107
B	Stochastische Systeme	111
C	Fourieranalyse des Van der Pol-Systems	115

Literaturverzeichnis	117
Index	131
Abkürzungsverzeichnis	135
Symbolverzeichnis	137
Lebenslauf	141

1. Einleitung

Aktive elektrische Schaltungen, die für ihre Funktion eine Betriebsspannung benötigen, lassen sich in zwei Schaltungstypen klassifizieren: (i) Verstärkerschaltungen, zu denen auch aktive Filter gehören und (ii) elektrische Oszillatoren. Eine elektrische Schaltung ist ein aus realen, physischen Bauelementen bestehendes Netzwerk, welches sich aus Sicht der Physik als ein Streuexperiment eines Elektronenfluids durch ein Tunnelsystem mit den jeweiligen elektronischen Hindernissen, an denen eine spezifische Wechselwirkung stattfindet, beschreiben lässt. Ausgangspunkt für die Beschreibung der Dynamik einer elektrischen Schaltung sind mathematische Modelle, die die Eigenschaften der Dynamik zwar hinreichend repräsentieren können, aber zugleich die Möglichkeit bieten, unwesentliche oder störende Faktoren der Dynamik zu vernachlässigen. Der erste Schritt der Modellierung einer elektrischen Schaltung besteht in der Darstellung als Schaltskizze. Diese Skizze muss nicht zwangsläufig identisch mit der physisch realisierten Schaltung sein, so können parasitäre Elemente wie der elektrische Widerstand oder Kapazitäten der Leiterbahnen vernachlässigt werden. Allerdings ist für eine Schaltungssimulation mit entsprechender Software die Berücksichtigung dieser parasitären Elemente, insbesondere in einem Zeitalter, in dem immer kleinere und komplexere Schaltungen entwickelt werden, wesentlich. Auf Basis der Schaltskizze lassen sich anschließend aus den netzwerktheoretischen Arbeiten von OHM und KIRCHHOFF Knoten- und Maschengleichungen gewinnen, deren Zustandsgrößen in einem sogenannten *Ohmschen Raum* definiert sind. Neben Spannung und Strom können Ladung und magnetischer Fluss eine geeignete Wahl der Zustandsgrößen für Energiespeicher darstellen. Während lineare elektrische Widerstände mit dem Ohmschen Gesetz adäquat beschrieben werden, benötigen nichtlineare Widerstände, Transistoren oder allgemeinere n -Tore eigene Modelle. Die systemspezifischen Zwangsbedingungen legen den Phasenraum im Ohmschen Raum fest, auf dem die Dynamik des Systems stattfindet [95]. Die Bewegungsgleichungen sind im Allgemeinen differential-algebraische Gleichungssysteme und das System im Sinne der Mathematik ein dynamisches System.

Die Systemklasse der Verstärkerschaltungen befindet sich nach dem Einschaltvorgang in einem Arbeitspunkt, aus dem sich der Systemzustand aufgrund von zusätzlich zur Betriebsspannung anliegenden Eingangssignalen heraus bewegt. Erst nach Abschaltung der Eingangssignale läuft der Systemzustand wieder in den stabilen Arbeitspunkt ein. Ein Beispiel ist das in dieser Arbeit behandelte Wien-Filter. Die Bewegungsgleichung ist eine lineare *Differentialgleichung* mit Anregung. Der Arbeitspunkt dieser Schaltung ist im Sinne der dynamischen Systeme ein stabiler Gleichgewichtspunkt. Ein Eingangssignal als Anregung verschiebt diesen Gleichgewichtspunkt, sodass der Systemzustand dem Gleichgewichtspunkt hinterherläuft. Ebenso sind nichtlineare Verstärkerschaltungen wie beispielsweise Leistungsverstärker in Transistor- oder Röhrentechnik zur Verstärkung von Audiosignalen denkbar. Jedes dieser Schaltungen hat ein oder mehrere Eingangssignale gemein. Anders die Klasse der elektrischen Oszillatoren, die ohne Eingangssignal eine periodische Lösung erzeugen die im Sinne der dynamischen Systeme einem stabilen Grenzyklus entspricht und aufgrund der nötigen Rückkopplung für eine stabile Oszillation mit nichtlinearen Differentialgleichungen beschrieben werden.

Diese Art der Systembeschreibung spiegelt allerdings nur das deterministische Verhalten wieder. Demgegenüber steht das erste Joulesche Gesetz, das besagt, dass ein elektrischer Strom in einem Leiter bzw. an einem Widerstand durch fortwährende Dissipation von elektrischer Energie Wärmeenergie erzeugt. Schaltungen sind demzufolge stets an einem Wärmebad gekoppelt mit dem insbesondere für integrierte Schaltungen über temperaturabhängigen Parameter eine Rückwirkung stattfinden kann. Je nach Systemklasse und Art der Bewegungsgleichungen bedarf es daher erweiterte Konzepte um thermische Fluktuation und andere stochastische Einflüsse zu berücksichtigen. Im Sinne der statistischen Physik soll das deterministische Verhalten daher als ein Gleichgewichtsverhalten gedeutet werden.

Arbeitspunkte sind im Sinne der Thermodynamik an thermische Gleichgewichtspunkte gekoppelt. Der Ruhezustand einer Schaltung mit Betriebsspannung null entspricht dem thermischen Gleichgewicht, während das Einschalten den Systemzustand fernab vom Gleichgewicht bewegt. Lineare Verstärkerschaltungen im thermischen Gleichgewicht können unter Anderem mit Langevin-Ansätzen behandelt werden. Dabei wird die Schaltung auf Ebene der Schaltskizze mit Rauschquellen in Form von Spannungs- und

1. Einleitung

Stromquellen ergänzt, welche zufällige Fluktuationen einprägen. Die Charakteristik dieser Quellen (z.B. *weißes Rauschen*) und die Art der Anbindung (z.B. additiv oder multiplikativ) wird in der Regel entweder einem physikalischen Prozess zugeordnet oder rein heuristisch begründet. Letzteres spiegelt nicht den wahren Ablauf der physikalischen Prozesse wider, sondern ist durch das heuristische Hinzufügen von Quellen ein sogenannter *extrinsischer* Ansatz. Nichtlineare reziproke Schaltungen im thermischen Gleichgewicht können mit Hilfe der Brayton-Moser-Gleichungen behandelt werden (siehe WEISS und MATHIS [117–128]). Die Thermodynamik von Verstärkerschaltungen fernab vom Gleichgewicht sind selbst für lineare Bewegungsgleichungen nicht vollends verstanden.

Oszillatoren sind stets dynamische Systeme fernab vom Gleichgewicht und es existieren aus den Bereichen der Physik, Mathematik und Elektrotechnik häufig ineinander übergreifende Konzepte. In der Physik existieren Theorien beispielsweise aus den Bereichen der Lasersysteme oder physikalischen Chemie (siehe LAX [46] oder PRIGOGINE [220]) und in der Mathematik aus dem Bereich der stochastischen Differentialgleichungen und den damit verbundenen nichtlinearen Langevin- und Fokker-Planck-Gleichungen (siehe HÄNGGI [68–77] oder CHOW und ZHOU [254]). In der Elektrotechnik finden sich häufig heuristische Ansätze mit dem Ziel Designrichtlinien zu formulieren (siehe HAJMIRI und LEE [110–112], DEMIR [113–116] oder HAM und HAJMIRI [129–131]).

Um eine im Zeitbereich gegenüber Störungen stabile Oszillation zu erreichen, bedarf es im Phasenraum eines Grenzyklus. Dabei handelt es sich um einen geschlossenen Orbit, der zugleich einen Attraktor darstellt. Damit existiert für jeden Nichtgleichgewichtspunkt im Phasenraum, auch für Punkte fernab vom Gleichgewicht, eine Trajektorie die in den Grenzyklus einläuft. Auf diese Weise wird jede Störung, die die Dynamik und den Grenzyklus als solches nicht verändert, im Wesentlichen ausgeglichen. Allerdings ist mit diesem Mechanismus nur sichergestellt, dass eine Amplitudenstörung sich nicht auf die Zukunft der Oszillation auswirkt, mit Ausnahme für den benötigten Zeitraum, in dem der Systemzustand wieder in den Grenzyklus einläuft oder während dessen erneut gestört wird. D.h., eine einzelne Störung der *Amplitude* würde nach hinreichend langer Zeit verschwinden, das System hat diesbezüglich kein Gedächtnis. Anders sieht es für die Phase der Oszillation aus. Ist eine Störung aufgetreten und ist das System gegenüber eines ungestörten Systems nach dem Einlaufen des Systemzustands phasenverschoben, so bleibt diese Phasenverschiebung für alle Zeiten bestehen. Dies ist ein deterministischer Effekt, da kein Mechanismus existiert der die Phase auf gleiche Weise wie die Amplitude stabilisiert. Die heuristischen Modelle aus der Elektrotechnik nutzen zumeist Langevin-Ansätze, um das Rauschen in elektrischen Schaltungen zu simulieren. Dieser Ansatz ist dazu gedacht, zufällige Fluktuationen in die deterministische Bewegung einzuprägen. Dabei würde es ausreichen, nur eine einzelne Fluktuation einzuprägen, um die eben gemachten Aussagen über die Stabilität zu begründen. Ein Ensemble von Fluktuationen würde eine statistische Aussage über das *Amplituden-* und *Phasenrauschen* wiedergeben. Der Grund warum Oszillatoren gegenüber Phasenrauschen anfällig sind, bleibt jedoch ein deterministisches Problem und ist der *Autonomie* der Bewegungsgleichungen geschuldet.

Ein Langevin-Ansatz an einer bestehenden Bewegungsgleichung führt nur zu einer möglichen Realisierung, d.h., es wird nur eine mögliche Trajektorie gegenüber unendlichen vielen Trajektorien betrachtet. Erst der Fokker-Planck-Formalismus erlaubt es, statistische Aussagen über ein System zu treffen. Dabei werden unendlich viele Realisierungen mit sowohl identischen als auch unterschiedlichen Anfangsbedingungen betrachtet und anhand einer Häufigkeitsanalyse die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Phasenraum zu jedem Zeitpunkt bestimmt. Allerdings beinhalten diese Aussagen neben dem deterministischen System stets auch den heuristischen Ansatz (das weiße Rauschen) selbst. Eine Analyse über Rauschen in elektrischen Schaltungen aus Sicht der Schaltskizze bzw. der Bewegungsgleichungen benötigt stets eine von außen kommende Einprägung von elektrischen Ladungen, sodass die existierenden heuristischen Ansätze aus der Elektrotechnik diesbezüglich gerechtfertigt sind. Allerdings, wie in dieser Arbeit gezeigt, kann eine rein deterministische Betrachtung bereits aufzeigen, in welchen Bereichen des Phasenraums ein Oszillator gegenüber seiner Phase anfällig ist und durch welchen Mechanismus dies begünstigt wird.

Zur Elektrotechnik analoge Beispiele lassen sich in der klassischen Mechanik finden. Mit Berücksichtigung der nichtlinearen Reibung wird es beispielsweise Positionen einer Achterbahnfahrt geben, bei denen sich die Masse der Fahrgäste stärker auf die Reibung auswirkt, als an anderen Positionen. Die Fahrzeit wird im Bezug zur Sollzeit phasenverschoben sein. Ein Kind auf einer Schaukel, das durch den periodischen Wechsel des Schwerpunkts eine stabile, angetriebene Oszillation erzeugt, wird durch falsche Verlagerung an den Umkehrpunkten die Oszillation verstimmen und die Phase gravierender aus der Ruhe bringen, als eine falsche Verlagerung des Schwerpunkts am Wendepunkt. Beide Beispiele sind im Hinblick auf den jeweiligen Phasenraum und im Bezug zu elektrischen Oszillatoren ähnlich.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung des deterministischen Verhaltens von elektrischen Oszillatoren mit dem Ziel deterministische Effekte von stochastischen Effekten abgrenzen zu können. Da im deterministischen Fall zu einem Anfangswert nur eine Realisierung existiert, soll stattdessen ein Ensemble von Realisierungen mit nah beieinanderliegenden Anfangswerten untersucht werden. Das notwendige mathematische Werkzeug wird durch die verallgemeinerte Liouville-Gleichung gegeben, die aus der Fokker-Planck-Gleichung als Grenzwert für verschwindende Fluktuationen folgt und unter anderem 1973 von GERLICH hergeleitet wurde [59] (siehe auch die Weiteren Arbeiten zu diesem Themengebiet [59–67]).

Historische Entwicklung des Rauschens

1827 beobachtete BROWN unter dem Mikroskop die nach ihm benannte Brownsche Bewegung von Pollen einer großblütigen Godetie in einem Wassertropfen [1]. Dabei nahm er fälschlicherweise an, dass diese Bewegung lebender Materie zugrunde liegen würde, erkannte jedoch später seinen Irrtum durch die Beobachtung der unkorrelierten Bewegung von Staubpartikeln in einem Wasserbad. 1863 zeigte CH. WIENER qualitativ, dass diese Bewegung von Partikeln einer temperaturabhängigen, molekularen Ursache zugrunde liegen muss [2].

Während seiner Forschung über die Statistik von Zeitreihen, führte THIELE 1881 in einer mathematische Abhandlung diesen Prozess neben weiteren statistischen Problemstellungen aus [4], sodass darauf aufbauend neun Jahre später BACHELIER Aktienkursbewegungen mit wahrscheinlichkeitstheoretischen Ansätzen in seiner Dissertation unter seinem Doktorvater POINCARÉ beschrieb und somit einer der Mitbegründer über die Theorie von Diffusionsprozessen war [10].

EINSTEIN waren die vorherigen Publikationen über die Brownsche Bewegung zu ungenau, sodass er 1905 mit seiner Dissertation und der darauf folgenden Arbeit eine molekularkinetische Theorie der Wärme publizierte [11]. Sein Ansatz war nicht länger auf die kinetische Wärmebewegung eines einzelnen Partikels gebunden, sondern betrachtete die Brownsche Bewegung als eine sich bewegende Wahrscheinlichkeitsdichte, mit dem Vorteil, dass die Kenntnis der jeweiligen Partikelzustände durch eine Aussage über das Gesamtverhalten ersetzt werden konnte. EINSTEIN leitete die von FICK auf empirischen Untersuchungen basierenden *Fickschen Gesetze* aus der Thermodynamik her. Er zeigte, dass die Kraft, die die Teilchenfluktuation bewirkt, der Ursprung des Widerstands ist, gegen den Arbeit verrichtet (dissipiert) werden muss, um ein Teilchen durch das Fluid zu bewegen (Fluktuations-Dissipations-Theorem). Ein Jahr später und unabhängig, jedoch im Zuge der bereits bekannten Veröffentlichung durch EINSTEIN, unterstützte SMOLUCHOWSKI die Theorie mit eigenen Ansätzen und Herleitungen, insbesondere die Einstein-Smoluchowski-Beziehung [12], sodass einige Jahre später PERRIN 1908 EINSTEINS Theorie, ohne ihn zu zitieren, experimentell bestätigte [14]. Zeitgleich machte LANGEVIN einen wesentlich einfacheren Ansatz. Er leitete aus dem zweiten Newtonschen Gesetz eine Differentialgleichung ab, die durch weißes Rauschen angetrieben wurde, die sogenannte Langevin-Gleichung [13]. EINSTEINS partielle Differentialgleichung wurde 1914 durch FOKKER erweitert [17], sodass es sich PLANCK im Rahmen seiner Quantentheorie 1917 zur Aufgabe machte, diese zu beweisen [18]. Aus diesen Gründen wurde diese partielle Differentialgleichung später Fokker-Planck-Gleichung genannt.

Im Folgenden Jahr und unter Kenntnis EINSTEINS Theorie hat die Brownsche Bewegung SCHOTTKY 1918 in seiner zweiteiligen Arbeit dazu veranlasst, das Rauschen in elektronischen Schaltungen zu untersuchen [19]. In seinem ersten Teil beschrieb SCHOTTKY einen metallischen Leiter als Schwingkreis. Er merkte an, dass die mittlere Energie nicht auf null gesunken ist, sondern nach EINSTEIN den Wert $k_B T$ besitzt, nachdem alle möglichen Eigenschwingungen durch den Widerstand des Leiters entdämpft wurden. Er verglich dies mit einem Summen, falls die Eigenschwingungen im akustischen Bereich liegen und diese verstärkt würden. Er folgerte, dass je höher der elektrische Widerstand und damit die Dämpfung ist, desto verzerrter müsste das Summen sein, obwohl der Widerstand oder das Material die mittlere Energie nicht bestimmt. Darauf aufbauend berechnete er den notwendigen Störabstand als eine Leistungsgröße die in einer Verstärkerschaltung notwendig ist, um ein Signal derart zu verstärken, dass es nicht vom thermischen Rauschen überdeckt wird. NYQUIST erkannte dadurch, dass die Rauschleistung mit thermodynamischen Ansätzen und der statistischen Physik begründet werden kann [30]. Zeitgleich verifizierte JOHNSON dies 1928 experimentell, sodass das Wärmerauschen auch als Johnson-Nyquist-Rauschen bezeichnet wird [29]. Der zweite Teil von SCHOTTKYS Arbeit handelt über die Beschreibung des Schrotrauschens, welches auftritt wenn ein elektrischer Strom eine Potentialbarriere überwinden muss. SCHOTTKY machte dabei einen Fehler in seinen Berechnungen, der dazu führte, dass bei einem darauf

1. Einleitung

aufbauenden Experiment Ladungen gemessen wurden, deren Größe kleiner als die der Elementarladung war. Er überdachte daraufhin 1921 die Argumentationskette seiner vorherigen Arbeiten [21, 47].

Auf Basis der durch LEBESQUE und BOREL konstruierten Maßtheorie, bewies N. WIENER 1923 schließlich die Existenz des nach ihm benannten Wiener-Prozesses und insbesondere, dass die Pfade eines Wiener-Prozesses (fast sicher) an keiner Stelle differenzierbar und damit nicht rektifizierbar sind [23]. Letzteres war auch die Voraussetzung in EINSTEINS Theorie, wenngleich diese Voraussetzung zu einer Ablehnung seiner Theorie hätte führen können, war es doch sein eigentliches Ziel, die Existenz von Atomen und Molekülen zu beweisen sowie deren Größe unter der Berechnung der Avogadro-Konstante zu bestimmen. Diese streng mathematisch formulierte Theorie wurde anschließend 1934 durch LÉVY ausgebaut [33–35].

Währenddessen wurde SMOLUCHOWSKIS Arbeit 1928 von CHAPMAN und 1933 unabhängig von KOLMOGOROW erweitert [28, 32]. Ein Kern dieser Arbeiten war die nach ihnen heute benannte Chapman-Kolmogorow-Gleichung, eine *Mastergleichung* für die Übergangswahrscheinlichkeiten von Markov-Prozessen, zu denen auch die Wiener-Prozesse gehören und mit der bereits BACHELIER in seiner Dissertation arbeitete. Darauf aufbauend studierten BOGOLYUBOV und KRYLOV 1939 das Grenzverhalten dynamischer Systeme mit kleinen Störungen welche im Limes zu einem Wiener Prozess führten. Die Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung gelang den beiden ohne die Annahme über die Existenz von Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen zwei Zuständen eines dynamischen Systems [38].

Mit dem Beweis von N. WIENER begründete ITÔ 1944 mit der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen bzw. der stochastischen Integration einen neuen Zweig der Mathematik, sodass seine Ansätze dazu geführt haben, dass die Brownsche Bewegung in allen Bereichen der Physik Anwendung finden konnte [39] (siehe Anhang B).

MACDONALD stellte 1954 hervor, dass die bis dato aufgestellten Langevin-Gleichungen aus Gründen der Simplizität Dämpfungsterme enthielten die linear bezüglich der Partikelgeschwindigkeit waren, d.h. der Parameter, der die Reibung bestimmte, war eine Konstante. Zwar bemerkte KRAMER dies bereits 13 Jahre zuvor, konnte aber keine sinnvollen physikalischen Anwendungen für eine nichtlineare Reibung finden. MACDONALD gab daher als Beispiel den Kristallgleichrichter an, insbesondere aufgrund der Vorschläge thermisches Rauschen als ein elektrisches Thermometer zu nutzen. Er merkte jedoch an, dass nichtlineare Problemstellungen in der Regel zu unlösbaren Gleichungssystemen führen würden. Daher stellte er die Hypothese auf, dass der Mittelwert derselben dem thermischen Rauschen unterlegende Größe einer Vielzahl von identisch realisierten Schaltungen mit identischen Anfangsbedingungen der deterministischen Bewegungsgleichung einer einzelnen Schaltung, d.h. in Abwesenheit von spontanen Fluktuationen, folgt [40], wenngleich POLDER im anschließenden Paper desselben Journals und später auch MACDONALD selbst zeigten, dass diese Vermutung nicht selbst-konsistent ist [41, 42]. Dies wurde von VAN KAMPEN fünf Jahre später aufgegriffen, indem er dieselbe Schaltung aus einem spannungsabhängigen nichtlinearen Widerstand in einem Wärmebad und einem Kondensator betrachtete und die entsprechende Fokker-Planck-Gleichung unter Zuhilfenahme einer Störungsentwicklung löste [53, 54]. Seine Ergebnisse waren ähnlich, jedoch nicht identisch zu denen von MACDONALD. Dies veranlasste ALKEMADE im gleichen Jahr das Problem zu konkretisieren. Er betrachtete eine Elektronenröhre als Nichtlinearität und konnte somit auch die Kinetik des Rauschens beschreiben. Dies führte wiederum zu anderen jedoch ähnlichen Ergebnissen, die er mit den vorherigen verglich und diskutierte [43]. LANDAUER untersuchte in den darauf folgenden Jahren das Verhalten von bistabilen Systemen in Wärmebädern mit einem starken elektrotechnischen Bezug zur Informationstheorie, sodass er 1962 diskrete Mastergleichungen für Tunnelioden aufstellte und deren Gleichgewichtslösung sowie thermische Elektronensprünge diskutierte [51] (siehe auch HÄNGGIS Arbeiten zu dem Thema [76, 77]).

Bereits 1934 stellte VAN DER POL nach seinen vorausgehenden Arbeiten, unter Anderem mit VAN DER MARK [27], nichtlineare Differentialgleichungen zu Oszillatoren mit Vakuumröhren auf und konnte die Ausgangsleistung und Synchronisationseffekte beschreiben [36]. Zusammen lieferten sie grundlegende Erkenntnisse der sich damals entwickelnden *Chaostheorie*, einem mathematischen Teilgebiet der nichtlinearen dynamischen Systeme. Die mathematische Quantifizierung des Rauschens in Oszillatoren hatte jedoch erst in den 1960ern in der Elektrotechnik seinen ersten Höhepunkt.

Stand der Forschung (Motivation)

Die *Liouville-Gleichung* in ihrer ursprünglich Form, wie sie von LIOUVILLE 1838 hergeleitet wurde [135], war bereits allgemein gehalten und setzte keine energieerhaltende oder volumenerhaltende Systeme, wie

beispielsweise Hamilton-Systeme, voraus. 135 Jahre später wurde diese Gleichung durch GERLICH wiederentdeckt und von da an *verallgemeinerte Liouville-Gleichung* genannt. Diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad}(p(\mathbf{x}, t)) + \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.1)$$

bei der p einer Wahrscheinlichkeitsdichte und \mathbf{f} dem Vektorfeld eines dynamischen Systems entspricht, ist zu deuten, als ein Ensemble aus unendlich vielen Bewegungsgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.2)$$

mit unterschiedlichen Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ zur Anfangszeit t_0 und nachträglicher Gewichtung der Wahrscheinlichkeiten $p \, d\mathbf{x}$. D.h., eine Anfangsverteilung $p_0(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_0)$ bestimmt die zur Anfangszeit herrschende Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}, t_0) \, d\mathbf{x}$ für jeden Zustand \mathbf{x} im Phasenraum und die Entwicklung durch (1.1) beschreibt, wie sich jeder Zustand im Verlauf der Zeit t ändert. Für Systeme, wie beispielsweise Hamilton-Systeme, die ein Phasenraumvolumen unter einer solchen Wahrscheinlichkeitsdichte erhalten, fällt der Divergenzterm in (1.1) weg. Allerdings sind elektrische Oszillatoren stets Systeme die Reibung aufweisen und damit notwendigerweise nichtlinear um eine Kompensation der energetischen Verluste zu gewährleisten. Folglich kann sich die Wahrscheinlichkeit für jeden Zustand im Phasenraum signifikant ändern, wenn die Volumenerhaltung im Phasenraum, die zuvor die Dynamik einschränkte, nicht mehr gilt und nichtlineare Effekte hinzukommen.

Mit der Herleitung der *Fokker-Planck-Gleichung* und dem nun verfügbaren Gebiet der stochastischen Differentialgleichungen, waren sowohl Physiker als auch Ingenieure bestrebt, Rauschprozesse für verschiedenste Systeme zu modellieren. Die Fokker-Planck-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \operatorname{grad}(p(\mathbf{X}, t)) + \operatorname{div}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))p(\mathbf{X}, t) + \Delta(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t)p(\mathbf{X}, t)) = 0 \quad (1.3)$$

mit Δ als den verallgemeinerten Laplace-Operator für Matrizen und ist diesmal als ein Ensemble von unendlich vielen Realisierungen des Rauschens bezüglich der Langevin-Gleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\xi}(t) \quad (1.4)$$

mit identischen Anfangswerten und nachträglicher Gewichtung der Wahrscheinlichkeiten zu lesen. Sie ist darüber hinaus ein Ensemble solcher Ensemble, deren Anfangswerte sich unterscheiden, aber noch immer jeweils unendlich viele Realisierungen berücksichtigen. In der Darstellung (1.3) ist im Vergleich zu (1.1) auffällig, dass die verallgemeinerte Liouville-Gleichung, bis auf den Term zweiter Ordnung, mit der Fokker-Planck-Gleichung augenscheinlich identisch ist. Das Vektorfeld \mathbf{f} ist nun der *Drift* \mathbf{F} und ein zuvor deterministischer Zustand \mathbf{x} wurde durch sein stochastisches Analogon \mathbf{X} ersetzt. Beide Unterscheidungen sind wesentlich, denn zum einen hängt \mathbf{X} im Gegensatz zu \mathbf{x} von einem Abzählparameter $\omega \in \Omega$ ab, der mit jeder möglichen Realisierung identifiziert werden kann und zum anderen kann für jede Realisierung unter dem Einfluss des Langevin-Terms ein zeitlich transformiertes Vektorfeld gefunden werden, welches im Allgemeinen verschieden zu \mathbf{f} ist. Das weiße Rauschen $\boldsymbol{\xi}$ wird dabei mittels *Diffusion* $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$ skaliert. Allerdings kaschiert die Diffusion die deterministischen Effekte des Drifts, wenn beispielsweise stochastische Momente zur Charakterisierung eines Systems berechnet werden. Denn mit der Mittelung über ein Ensemble sind die deterministischen und stochastischen Anteile nicht voneinander trennbar, sondern überlagert. Ohne Berücksichtigung dieses Problems kann es daher zu Fehl- oder Überinterpretation des Einflusses von Rauschen kommen (eine ausführlichere Beschreibung über stochastische Systeme ist in Anhang B zu finden).

In Abb. 1.1 ist beispielhaft der schematische Lösungsweg einer zeitlich variierenden Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich der Liouville- und Fokker-Planck-Gleichung dargestellt. Zu sehen ist der Übergang einer Schar von Integralkurven in einen Grenzyklus. Je mehr Integralkurven sich annähern oder überlagern, desto größer ist die Wahrscheinlichkeitsdichte. Das räumliche Ausmaß der Verteilungen, ist hier zu verschiedenen Zeiten als konvexe Hülle aller Integralkurven dargestellt. Die Hüllen der Fokker-Planck-Abbildung sind im Gegensatz zu den Hüllen der Liouville-Abbildung durch den Diffusionsprozess vergrößert. Der deterministische Anteil der Hüllen durch den Drift kann nicht aus der Fokker-Planck-Abbildung ge-

1. Einleitung

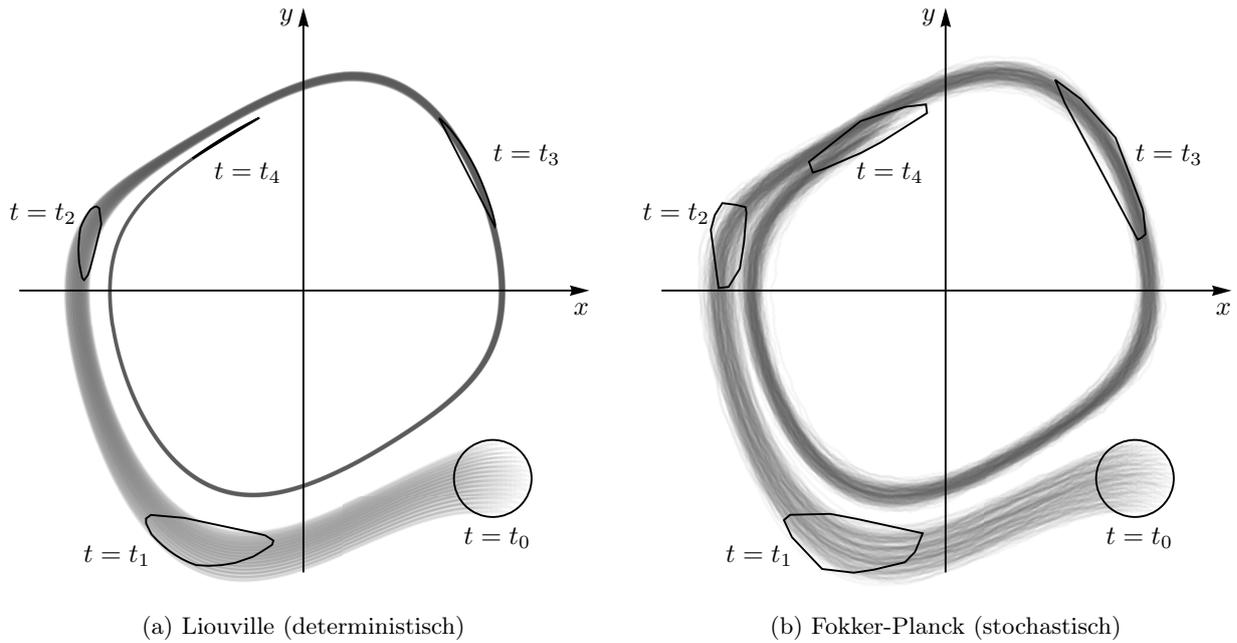


Abb. 1.1.: Vergleich einer Lösungsschar der Liouville- und der Fokker-Planck-Gleichung.

wonnen werden, da dieser durch den Diffusionsprozess überlagert wird. Wäre der Flächeninhalt dieser Hüllen ein Rauschmaß für Fokker-Planck-Systeme mit Grenzzyklen, dann würde die Auswirkung der Diffusion überbewertet werden, da der Flächeninhalt der Hüllen des Liouville-Systems nicht herausgerechnet würde. Da die Liouville-Dynamik zeigt, dass der Flächeninhalt dieser Hüllen für Systeme mit Grenzzyklen ggf. periodisch schwankt, würde ein solches Rauschmaß zudem fälschlicherweise periodische Anteile enthalten, die eigentlich dem intrinsischen Drift zuzuordnen sind.

Nichtsdestotrotz soll vor der Formulierung des Ziels dieser Arbeit der Stand der Forschung an einigen für die Liouville-Dynamik wesentlichen und bekannten Beispielen erfolgen, um die Notwendigkeit der Rückkehr zur Liouville-Gleichung, d.h. den Verzicht auf den Langevin-Ansatz, zu motivieren.

EDSON ging 1960 in seiner Veröffentlichung [44] davon aus, dass Rauschen einen elektrischen Oszillator im Wesentlichen in zwei verschiedenen Spielarten beeinflusst: (i) Während der Oszillation sorgt das Rauschen für eine Modulation der Amplitude $A(t)$ und der Phase $\phi(t)$. Die Amplitudenstörungen manifestieren sich im Frequenzbereich als ein schwaches, aber breites, kontinuierliches Spektrum gegenüber der Bandbreite des Resonators und werden durch Relaxationen in den Grenzzyklus mit der Zeit ausgeglichen. Die Phasenstörungen zerstreuen hingegen die Eigenfrequenz des Systems in ein starkes, dafür schmales, kontinuierliches Spektrum und es existiert kein Mechanismus der eine *Phasenabweichung* kompensiert. (ii) Zudem betrachtete EDSON eine Fluktuation zur Anfangszeit t_0 als notwendigen Anfangswert $x_0 = x(t_0)$, mit entsprechend zufällig benötigter Zeit des Einschwingvorgangs, bis die vorgeschriebene Amplitude erreicht wird. Da die bisherige Literatur nur Gleichgewichtssituationen in linearen Systemen beschreiben konnte, war es das Ziel von EDSON, zum einen das transiente Verhalten im Sinne einer Nichtgleichgewichtsdynamik als auch die Oszillation im Sinne von nichtlinearen dynamischen Systemen zu untersuchen. Um thermisches Rauschen entsprechend zu modellieren nutzte er weiße Rauschquellen.

Er setzte Oszillatoren voraus, die ein möglichst schmales Frequenzband um ihre Eigenfrequenz ω_0 aufweisen und beschränkte sich daher ebenso auf schmale Bandbreiten seiner Rauschquellen (Bandpassrauschen), sodass der Ausgang des Systems beschrieben werden konnte gemäß

$$x(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \phi(t)). \quad (1.5)$$

Die Erwartungswerte der Funktionen $A(t)$ und $\phi(t)$ wurden als Mittelwert eines Ensembles von identischen Oszillatoren mit dem instabilen Gleichgewichtspunkt als Anfangswert betrachtet, wovon jeder Oszillator des Ensembles mit einer Realisierung des Rauschens identifiziert werden konnte. Unter der Annahme, dass thermische Fluktuationen den Oszillator aus seinem instabilen Gleichgewichtspunkt an-

treiben, es aber keine Beziehung zwischen einer zufälligen Fluktuation und einer Phasenverschiebung gibt, ging EDSON von einer Gleichverteilung der Phasen des Ensembles im Intervall $[-\pi, \pi)$ und von einer Poissonverteilung der Amplituden nach hinreichend langer Beobachtungszeit aus. Insbesondere merkte er an, dass das transiente Verhalten eines Oszillators linear betrachtet werden kann, da im wesentlichen die Amplitude exponentiell wächst, bevor die Nichtlinearität diese begrenzt.

Zur Berechnung der spektralen Leistungsdichten des Amplituden und Phasenrauschens nutzte EDSON eine Methode die von einem Parallelschwingkreis mit Konduktanz G und einem von außen eingepprägten Strom am Knoten ausging, welcher die thermischen Fluktuationen simulieren sollte. Seine Herleitungen basieren auf statischen Argumenten, anstatt auf Langevin-Gleichungen, indem er die Effekte der Fluktuationen auf einzelne Zeitintervalle einer Periode betrachtete. Diese Methode folgt der Annahme, dass die Reaktionsgeschwindigkeit der Schaltung auf die zufälligen Fluktuationen durch das Energiereservoir des LC -Schwingkreises gemindert würde und ein entsprechendes statistisches Sammeln mehrerer Fluktuationen erlaubt sei. Als Parameter konnte er neben der Kapazität C , Konduktanz G und Eigenfrequenz ω_0 die Temperatur T , einen Sättigungsparameter s , die Güte Q und die Ausgangsleistung P berücksichtigen. Neben den *spektralen Rauschleistungsdichten*, die in seinen Ergebnissen Lorentzlinien (Cauchy-Verteilung) entsprachen, konnte er die Bandbreite des Rauschens und die Kohärenzlänge bestimmen für die die Standardabweichung der Phase um einen vorgegebenen Winkel abweicht und merkte zudem an, dass fernab der Eigenfrequenz eine Unterscheidung der Amplituden und Phasenfluktuationen nicht möglich sei.

Während seine Herangehensweise komplizierte statistische Analysen erforderte, erkannte EDSON, dass das transiente Verhalten eines Oszillators entscheidend für eine konsistente Theorie war. Allerdings ist die Beschränkung auf den instabilen Gleichgewichtspunkt als Anfangswert mit anschließend zufälliger Fluktuation als Anregung für eine rein deterministische Sichtweise, die in dieser Arbeit aufgebaut werden soll, nicht sinnvoll. Stattdessen soll von einem Arbeitspunkt fernab des Gleichgewichts ausgegangen werden, der beim Einschalten des Oszillators losgelassen wird. EDSONS Ansatz beschränkt sich zudem auf weißes Rauschen, dessen statistischen Eigenschaften auf physikalischen Erkenntnissen des Wärmerauschens basieren. Dabei wird das Rauschen eines Oszillators mit statistisch ermittelten Größen quantifiziert. Die Rückwirkungen der Oszillationen auf das Rauschen werden bei diesem Ansatz, was oft kritisiert wurde (z.B. bei KÄRTNER [107]), nicht berücksichtigt. Dabei wird jedoch nicht erwähnt, dass alle auf Langevin- oder Fokker-Planck-Ansätzen beruhenden Theorien keine Unterscheidung zwischen dem intrinsisch deterministischen Anteil einer Rückwirkung auf das Rauschen und dem extrinsisch stochastischen Anteil leisten können.

Mit Beginn der 1960er veröffentlichte LAX eine umfangreiche Puplikationsreihe über das Rauschen in klassischen wie auch quantenmechanischen Systemen. Während die Reihe über quantenmechanisches Rauschen insbesondere das Rauschen in Laser und Maser behandelte, baute LAX in seiner klassischen Reihe eine konsistente Theorie über Rauschen in nichtlinearen Systemen auf, mit Beginn von Fluktuationen in stationären Nichtgleichgewichtsprozessen bis hin zu nichtlinearen Markov-Prozessen. 1967 führte dies, immer im Hinblick auf die Erkenntnisse der Quantenmechanik, zur Beschreibung des Rauschens in elektrischen Oszillatoren [45, 46].

Sein Ziel war es eine klassische Beschreibung eines Oszillators mithilfe von Langevin-Rauschquellen herzuleiten, um im Grenzübergang das ebenso bestehende Problem einer nicht vorhandenen allgemeingültigen Theorie über das Rauschen in quantenmechanischen Oszillatoren zu lösen. Gleich zu Beginn machte er deutlich, dass die Nichtlinearität aufgrund der nötigen Rückkopplung zur Selbsterhaltung der Oszillation nicht als vernachlässigbar klein angesehen werden darf. Quasi-lineare Ansätze sind demzufolge ungültig, bis auf Fälle, bei denen Fluktuationen der Amplitude die Phase nicht beeinflussen. Ein Oszillator ohne Rauschenquellen, dessen Ausgang gemäß (1.5) beschrieben werden kann, nannte er einen idealen Oszillator. Dies war ein Oszillator, der im Frequenzspektrum nur an seiner Eigenfrequenz ω_0 eine Dirac-Distribution aufweisen würde. Unter der Voraussetzung, dass das Amplitudenrauschen im Frequenzspektrum ein additives Hintergrundrauschen darstellt, vernachlässigte er das Amplitudenrauschen und nutzte den Ansatz

$$\dot{\phi} = G(t) \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.6)$$

mit G als eine zufällige Funktion, die von einem Wiener-Prozess abhing, um das Phasenrauschen eines Oszillators zu beschreiben. Für lange Zeiten $t \gg \omega^{-1}$ kann der Cosinus-Term in (1.6) mit seinem Mittelwert ersetzt werden, sodass die Differentialgleichung des Phasenrauschens durch das reduzierte Modell

1. Einleitung

$\dot{\phi} = G(t)/\sqrt{2}$ ersetzt werden kann. Da nun das Phasenrauschen mit dem Wiener-Prozess im direkten Zusammenhang stand, konnte LAX durch die *Autokorrelation* zeigen, dass das Phasenrauschen sich im Leistungsdichtespektrum als Lorentz-Linie manifestiert.

Das allgemeine Oszillatorenmodell von LAX basiert auf einen LC -Schwingkreis mit der Annahme, dass die Nichtlinearität, je nach Auftreten der Zustandsvariablen \mathbf{x} , als eine nichtlineare Kapazität in Reihe zur Kapazität C oder als eine nichtlineare Induktivität parallel zu L betrachtet werden kann, welche die Eigenfrequenz um einen bestimmten Anteil verstimmt, sodass $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_v^2(\mathbf{x})$ mit $\omega_0^2 = 1/(LC)$ die resultierende Frequenz darstellt. Infolgedessen ersetzte LAX die Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (x, y)^\top$ durch komplexe Größen a und a^* und setzte ein ideales Spektrum gemäß (1.5) voraus, sodass mit

$$a = Ae^{-j\omega t} \quad \text{und} \quad a^* = A^*e^{j\omega t} \quad (1.7)$$

die Frequenz ω_v in Abhängigkeit der komplexen Zustandsvariablen geschrieben werden konnte. Die aufgrund der nichtlinearen Kopplung auftretenden Frequenzen höherer Ordnung wurden vernachlässigt, sodass die Nichtlinearität f_{nl} allgemein durch eine zustands- und frequenzabhängige Impedanz $Z = R + jX$ ersetzt werden kann, gemäß $f_{nl}(a, a^*, \omega) = Z(|a|^2, \omega)(a + a^*)/2$, für die die Impedanz bei einer Eintonanregung, im Vorbild von (1.7), einen Einton ausgibt. Ein stabile Oszillation ist dann, durch die Bedingungen

$$R(D_0, \omega) = 0 \quad \text{und} \quad X(D_0, \omega) = 0 \quad (1.8)$$

gegeben. Die erste Bedingung aus (1.8) ist erfüllt, falls der Arbeitspunkt D_0 erreicht wurde, während die zweite Bedingung der erreichten Arbeitsfrequenz ω entspricht. Dabei wird der Arbeitspunkt mit der Gleichgewichtslösung ($\dot{D} = 0$) einer stochastischen Differentialgleichung bestimmt, beispielsweise aus einer Hopf-Normalform mit Langevin-Ansatz gemäß

$$\dot{D} = (\mu + j\omega)D + s|D|^2 D + \xi \quad (1.9)$$

mit μ als *Bifurkationsparameter*, s als eine komplexe Variable und ξ als weißes Rauschen.

Problematisch an dieser Sichtweise ist, dass ein solches Modell sich nur auf eine Klasse von Oszillatoren beschränkt, die bei einer Eintonanregung einen Einton zurückgeben. Beispiele solcher Oszillatoren finden sich bei REIT [264]. Dennoch beschrieb LAX den Fall, dass das Amplitudenrauschen ebenso zu einem Phasenrauschen, aufgrund der nichtlinearen Momentenkopplung von Amplitude und Phase, führen kann und dass eine Phasenabweichung nicht nur vom Rauschen als solches abhängt, sondern die Position des Zustands im Phasenraum, bei dem die Abweichung auftritt, maßgeblich das Phasenrauschen beeinflusst, ohne jedoch im Detail zu beschreiben, was diesem deterministischen Effekt zugrunde liegt. In dieser Dissertation wird der durch LAX beschriebene Effekt im deterministischen Fall beschrieben.

KÄRTNER erarbeitete 1988 in seiner Dissertation einen störungstheoretischen Langevin-Ansatz, mit der Voraussetzung, dass das Rauschen auf kleine Fluktuationen, fern vom Bifurkationspunkt, beschränkt bleibt [107–109]. Für die Langevin-Gleichung (1.4) in autonomer Form folgt

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{D}(\mathbf{X})\xi(t) \quad (1.10)$$

wobei ξ einem mehrdimensionalen Rauschprozess entspricht. Die Eigenschaften des Rauschprozesses werden festgelegt mit $\langle \xi(t)^k \rangle = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = 2\Gamma_{ij}\delta(t-t')$ mit Γ als Korrelationsmatrix. Die Lösung dieser stochastischen Differentialgleichung

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(t + \phi(t)) + \Delta\mathbf{x}(t + \phi(t)) \quad (1.11)$$

besteht aus der ungestörten Lösung $\mathbf{x}(t + \phi(t))$ des deterministischen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \cdot)$ die auf einem stabilen Grenzzyklus läuft und aus der *Amplitudenabweichung* $\Delta\mathbf{x}(t + \phi(t))$ für die die Bedingung $\|\Delta\mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{x}\|$ gilt (siehe Abb. 1.2a). Die Funktion $\phi(t)$ beschreibt die Phase des Oszillators und soll darüber hinaus unabhängig des Koordinatensystems sein. Diese Zerlegung basiert auf der Idee, die Tangential- und Normalanteile der Bewegung (letztere auch Transversalanteile genannt) getrennt voneinander zu betrachten. Dabei gilt zu unterscheiden, dass der Tangentialanteil \mathbf{x} mit dem Tangentenvektor $\dot{\mathbf{x}}$ verschieden ist und der Normalanteil $\Delta\mathbf{x}$ senkrecht auf dem Grenzzyklus steht, d.h., einer Linearkombination aller Einheitsbinormalenvektoren entspricht (siehe Abschnitt 2.4).

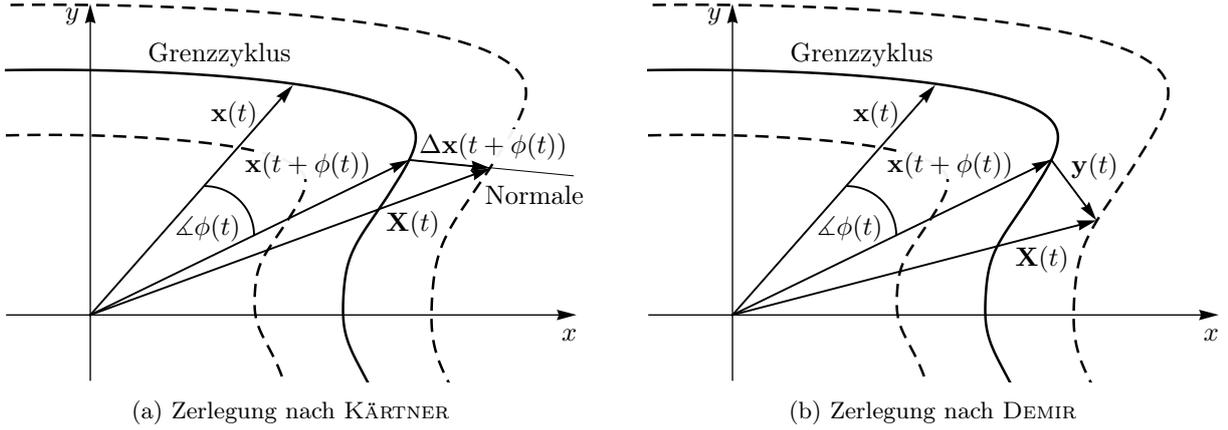


Abb. 1.2.: Verschiedene Zerlegungsarten der Lösung $\mathbf{X}(t)$ der Langevin-Gleichung (1.10). Links: Die Zerlegung nach KÄRTNER mit der ungestörten Lösung $\mathbf{x}(t)$, der Phasenabweichung $\phi(t)$ und der Amplitudenabweichung $\Delta\mathbf{x}(t+\phi(t))$ in Richtung der Normale. Rechts: Die Zerlegung nach DEMIR mit der ungestörten Lösung $\mathbf{x}(t)$, der Phasenabweichung $\phi(t)$ und der Orbitalabweichung $\mathbf{y}(t)$ (siehe die Diskussion von DEMIR über die Ungültigkeit einer orthogonalen Zerlegung [116]).

Mit dem Einsetzen der Lösung in die Langevin-Gleichung und anschließender Taylor-Entwicklung nach $\Delta\mathbf{x}$, $\dot{\phi}$ und den Rauschquellen $\boldsymbol{\xi}$ folgt in erster Ordnung

$$\mathbf{x}'(\tau)\dot{\phi} + \Delta\mathbf{x}'(\tau) = \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}(\tau))\Delta\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{D}(\mathbf{x}(\tau))\boldsymbol{\xi}(t(\tau)) + \mathcal{O}(\Gamma^2) \quad (1.12)$$

mit der Zeittransformation $\tau = t + \phi(t)$ und dem Strich ' als Ableitung nach dem Argument. Das Differentialgleichungssystem $\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$ mit der periodischen Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{F}$ lässt sich nach dem Satz von Floquet [177] lösen gemäß

$$\Delta\mathbf{x}(\tau) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\eta_i \tau} \mathbf{e}_i(t) \quad (1.13)$$

mit η_i als Floquet-Exponenten, $c_i = e^{-\eta_i t_0} \boldsymbol{\alpha}_i(t_0) \Delta\mathbf{x}(t_0)$ als Konstanten zur Anfangszeit t_0 und \mathbf{e}_i als periodische Basisvektoren mit der Orthogonalitätsrelation $\boldsymbol{\alpha}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ (siehe zur weiteren Erklärung auch (3.21)). Die Realteile der Floquet-Exponenten entsprechen den Ljapunov-Exponenten des Systems, sodass sich für einen stabilen Grenzzzyklus die Bedingungen $\eta_1 = 0$ und $\text{Re}(\eta_i) < 0$ für $2 < i \leq n$ ergeben (siehe Abschnitt 3.8.1). Wird die Amplitudenabweichung auf die Normalkomponente beschränkt, folgt mit (1.13) in Anwendung auf (1.12) in erster Ordnung, dass die Amplitudenabweichung $\Delta\mathbf{x}(\tau)$ keinen Einfluss auf die Phase $\phi(t)$ hat und die Phasenfunktion der Bewegungsgleichung

$$\dot{\phi} = \boldsymbol{\alpha}_1 \mathbf{D}(\mathbf{x}(\tau)) \boldsymbol{\xi}(t(\tau)) \quad (1.14)$$

folgt. Gl. (1.14) beschreibt einen Diffusionsprozess der durch Rauschquellen angetrieben wird und durch Integration berechnet werden kann. Mit der Projektion von (1.12) auf die Normalanteile kann ebenso eine Bewegungsgleichung für die Amplitudenabweichung $\Delta\mathbf{x}$ gefunden werden, welche unter der Floquet-Theorie ebenfalls durch Integration gelöst werden kann.

Aus der Korrelationsfunktion

$$\mathbf{K}(t') = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{X}(t+t') \mathbf{X}^\top(t) \rangle dt, \quad (1.15)$$

lassen sich dann Ausdrücke für das Phasen- und Amplitudenrauschen sowie deren Korrelation finden. Es ergibt sich für das Phasenrauschen eine Lorentzlinie im Leistungsdichtespektrum. KÄRTNERS Ansatz erweist sich gegenüber den bis dato bekannten Methoden als mathematisch anspruchsvoll und äußerst

1. Einleitung

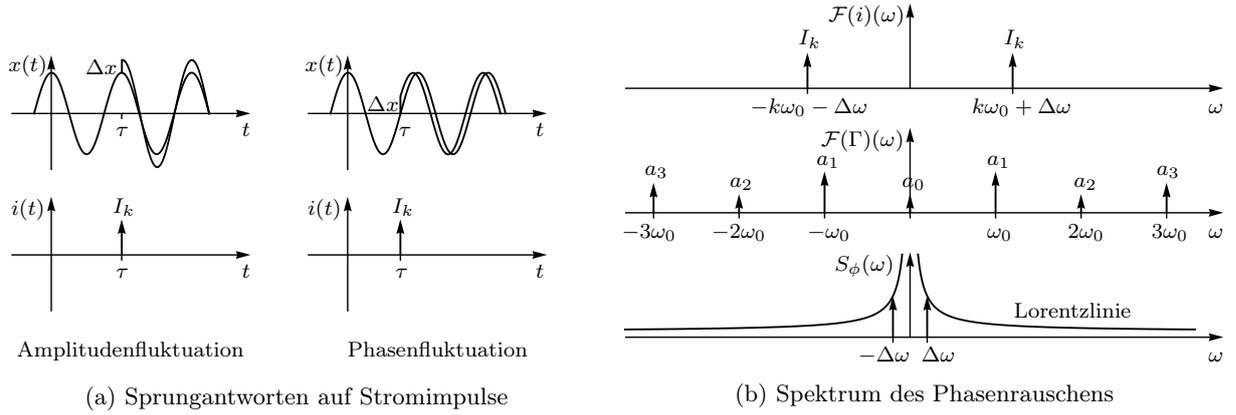


Abb. 1.3.: Entnommene Abbildungen zur Theorie nach HAJIMIRI und LEE [110]. Links: Die Sprungantworten eines idealen LC -Schwingkreises bei eingepprägten Stromimpulsen zu den Zeiten $t = \tau$. Rechts: Das Spektrum des Phasenrauschens, dass sich aus den einzelnen Seitenbändern ergibt.

komplex. Allerdings sind schwache Rauschquellen Voraussetzung, um eine Störungstheorie erster Ordnung zur Berechnung des vollständigen Korrelationsspektrums durchführen zu können. Es zeigt aber auch, dass in erster Ordnung die Phasenfunktion $\phi(t)$ ausschließlich durch einen stochastischen Diffusionsprozess angetrieben wird.

HAJIMIRI und LEE stellten 1998 eine deterministische Theorie vor, bei der das Amplituden- und Phasenrauschen in elektrischen Oszillatoren anhand von Impuls- bzw. Sprungantworten studiert wurde [110–112]. Ausgehend von einer Verallgemeinerung von (1.5), gemäß

$$x(t) = A(t)f(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (1.16)$$

mit f als eine 2π -periodische Funktion, wird ein Oszillator durch n Eingänge und den beiden Ausgängen $A(t)$ und $\phi(t)$ modelliert. Die Eingänge, die jeweils einem Systemzustand entsprechen, sind mit Impulsquellen versehen, die in Form von Stromquellen an Knoten oder Spannungsquellen in Maschen realisiert werden, sodass jede Eingangquelle als Eingrößensystem betrachtet werden kann.

Am Beispiel eines idealen LC -Schwingkreises, bei dem f eine Cosinus-Funktion darstellt, wird die Theorie der Impulsantworten motiviert (siehe Abb. 1.3a). Betrachtet wird die Spannung über L und C . Wird ein Stromimpuls zur Zeit $t = \tau$ eingepragt, bei dem die Spannung ihr Maximum oder Minimum aufweist, dann wird dieser Impuls nur eine dauerhafte Änderung der Amplitude, nicht aber eine Änderung der Phase, zur Folge haben. Umgekehrt, wenn ein Stromimpuls bei einem Nulldurchgang der Spannung eingepragt wird, entsteht eine dauerhafte Phasenverschiebung, aber keine Amplitudenänderung. Bei einer Einprägung an Zeiten zwischen diesen Spezialfällen findet sowohl eine Amplitudenänderung als auch Phasenverschiebung statt. Da Oszillatoren im Phasenraum Grenzzyklen aufweisen, ist die Sprungfunktion für die Amplitude $h_A(t, \tau)$, im Gegensatz zum harmonischen Oszillator, zeit-kontinuierlich, denn jede Änderung der Amplitude wird durch die daraus entstehende Transienz in den Grenzzyklus ausgeglichen. Die Sprungfunktion der Phase $h_\phi(t, \tau)$ ist in beiden Fällen zeitdiskret und darstellbar als Heaviside-Funktion, da aufgrund der autonomen Bewegungsgleichungen kein Mechanismus existiert der die Phase des Systems stabilisiert. Darüber hinaus existieren für nichtlineare Systeme Zeitpunkte, bei denen entsprechende Impulse nur die Amplitude oder die Phase ändern.

HAJIMIRI und LEE setzen nun anhand von diversen Messungen voraus, dass die Sprungantwort der Phase $\phi(t)$ ein lineares Verhalten in Abhängigkeit der eingepprägten elektrischen Ladungsmengen q aufzeigt, sodass die Sprungfunktionen $h_A(t, \tau)$ und $h_\phi(t, \tau)$ jeden Oszillator vollständig charakterisieren. Die Sprungfunktion der Phase wird in Abhängigkeit einer *Impulsempfindlichkeitsfunktion* Γ bestimmt zu

$$h_\phi(t, \tau) = \frac{1}{q} \Gamma(\omega_0 \tau) \theta(t - \tau) \quad (1.17)$$

mit $\theta(t-\tau)$ als Heaviside-Funktion. Die Impulsempfindlichkeitsfunktion steht im direkten Zusammenhang mit f und lässt sich aus der Fourierreihe des Frequenzspektrums bestimmen gemäß

$$\Gamma(\omega_0\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0\tau + \theta_k) \quad (1.18)$$

mit a_k und θ_k als Amplitude und Phase der k -ten Harmonischen bezüglich f . Diese Impulsempfindlichkeitsfunktion soll die zeitvarianten Schwankungen der Diffusion berücksichtigen, welche in den vorausgegangenen Experimenten bestätigt wurde. HAJIMIRI, LEE und später HAM (siehe [129]) beschreiben diesen Effekt als eine periodische Änderung der mittleren Phasenabweichung $\langle\phi(t)\rangle$ auf dem Grenzyklus als Folge einer nicht-sinusoidalen Oszillation. Mit dem nun zur Anwendung erlaubten Superpositionsprinzip, kann die Phase als Faltungsintegral

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\phi}(t, \tau) i(\tau) d\tau = \frac{1}{q} \int_{-\infty}^t \Gamma(\omega_0\tau) i(\tau) d\tau \quad (1.19)$$

dargestellt werden, wobei $i(t)$ dem eingepprägten Strom entspricht (Ladung und Strom können äquivalent auch durch den magnetischen Fluss und Spannung ersetzt werden). Zusammen mit der Impulsempfindlichkeitsfunktion zeigt sich, dass für einen periodischen Strom mit dem Scheitelwert I_k der Form $i(t) = I_k \cos((k\omega_0 + \Delta\omega)t)$ eine Vereinfachung von (1.19) existiert gemäß

$$\phi(t) \approx \frac{I_k c_k}{2q\Delta\omega} \sin(\Delta\omega t). \quad (1.20)$$

D.h., ein periodisch eingepprägter Strom in der Nähe der Eigenfrequenz ω_0 führt im Leistungsdichtespektrum der Phase $S_{\phi}(\omega)$ zu Seitenbändern an den Frequenzen $\pm\Delta\omega$ mit Amplituden, die mit $\Delta\omega^{-1}$ abfallen (siehe Abb. 1.3b). Ist $i(t)$ ein Rauschprozess, beispielsweise mit einem konstanten Leistungsdichtespektrum (weißes Rauschen), dann kann mit Hilfe der Näherung (1.20) das Phasenrauschen eines Oszillators berechnet werden.

Dieses Verfahren erklärt demnach, wie sich periodische Fluktuationen an verschiedenen Positionen im Phasenraum auswirken und welche Frequenzanteile sich daraus im Leistungsdichtespektrum ergeben. Eine stochastische Beschreibung ist nicht nötig, es können beliebige Störungen betrachtet werden. Die Gewichtung der Fluktuationen, d.h., die letztendliche Auswirkung auf das Leistungsdichtespektrum, ergibt sich auf intrinsischem Wege aus der Impulsempfindlichkeitsfunktion, die im wesentlichen die Form des Grenzyklus beschreibt. Dennoch ergibt sich aufgrund der Linearisierung eine unendliche Rauschleistung bei der Eigenfrequenz und deren Harmonischen.

Nicht weiter ausgeführt haben HAJIMIRI und LEE die theoretische Bedeutung der Impulsempfindlichkeitsfunktion. Dabei stellt der daraus sich ergebende Effekt, nämlich die periodische Änderung der mittleren Phasenabweichung auf dem Grenzyklus, sich als deterministisch und insbesondere intrinsisch dar. Dieser Zusammenhang wird in dieser Dissertation *Pumpmechanismus* genannt und folgt einzig aus der Divergenz der deterministischen Bewegungsgleichung (1.2) des jeweiligen Systems. Um diesen zeitvarianten Effekt zu beschreiben, ist ein Fokker-Planck-Ansatz demzufolge nicht nötig. Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung zeigt dies auf natürliche Weise als Folge der Volumenerhaltung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

In den Arbeiten von HAJIMIRI und LEE wird nicht darauf eingegangen, in welchen Bereichen eine Linearisierung dieser Art gültig ist. Ein LC -Schwingkreis nach dem Beispiel von HAJIMIRI und LEE ist ein lineares System, das vollständig durch seine Frequenz und Anfangsenergie bestimmt ist (siehe Abb. 1.4a sowie siehe Abschnitt 4.1.1). Der Phasenraum besteht aus unendlich vielen geschlossenen Trajektorien die keine Grenzyklen sind und deren Bewegung im Zeitbereich einer Schwingung mit derselben Frequenz entspricht. Diese Trajektorien unterscheiden sich ausschließlich durch die zur Bewegung notwendigen Energie aus der die Amplitude berechnet werden kann. Während die Zustände auf inneren Energieschalen in gleicher Zeit nur wenig Wegstrecke durchlaufen, muss die Bewegung auf den äußeren Schalen deutlich schneller vonstatten gehen, um dieselbe Kreisfrequenz ω_0 einzuhalten. Ein Impuls transversal zur Ausbreitungsrichtung hat zwangsläufig nur eine Änderung der Energie und nicht der Phase zur Folge. Für einen Impuls longitudinal zur Ausbreitungsrichtung verhält es sich genau umgekehrt. Allerdings lässt sich dieses Verhalten nicht auf Systeme mit Grenzyklen verallgemeinern, denn der Phasenraum

1. Einleitung

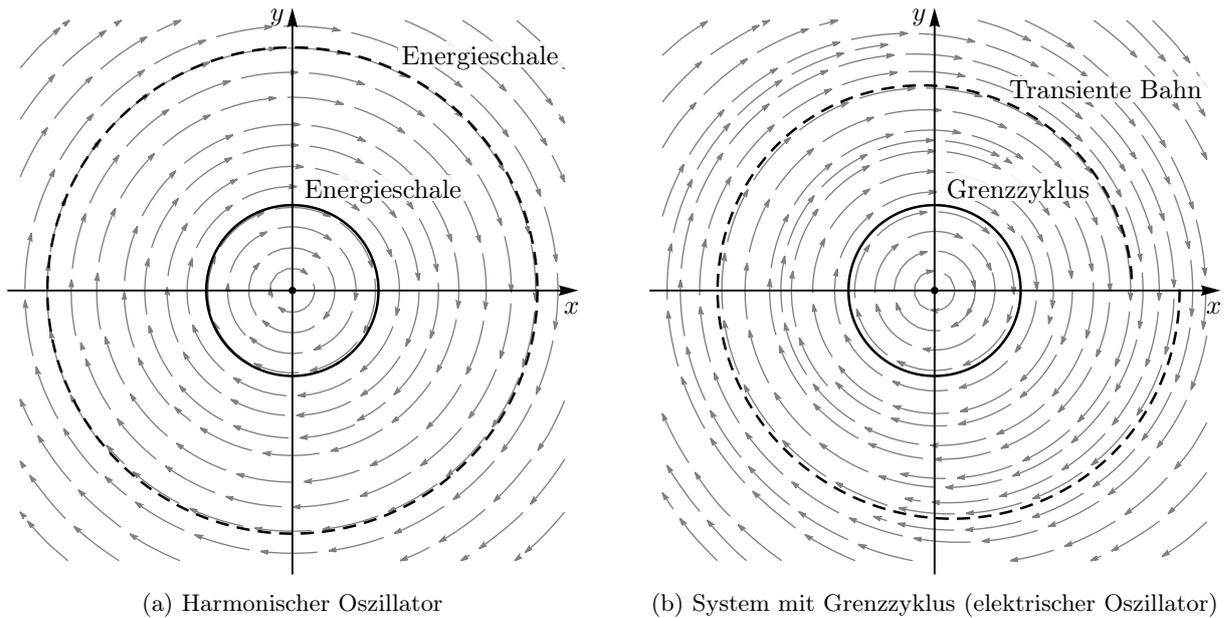


Abb. 1.4.: Vergleich zwischen dem Phasenportrait eines harmonischen Oszillators und eines Systems mit einem stabilen Grenzzyklus. Links: Der harmonische Oszillator besteht aus unendlich vielen, ineinander verschachtelten, geschlossenen Bahnen (Energieschalen). Die Anfangsenergie des Systems bestimmt die Anfangswerte und damit die entsprechende Energieschale. Da die Energie erhalten bleibt, verharrt das System auf dieser Energieschale. Rechts: Das System besitzt einen stabilen Grenzzyklus. Alle Bahnen, deren Anfangswerte sich außerhalb des instabilen Gleichgewichtspunktes im Ursprung befinden, laufen für $t \rightarrow \infty$ in den Grenzzyklus (Transienz). Die Anfangsenergie und Anfangsphase bestimmt den Anfangswert. Dabei wird solange Energie dissipiert oder akkumuliert, bis der Grenzzyklus erreicht ist. Die Topologie beider Systeme ist aufgrund der sehr hohen Güte des elektrischen Oszillators nur auf den ersten Blick identisch. Die gestrichelte Kurve zeigt, dass sich die Amplitude des elektrischen Oszillators nach einer Periode exponentiell ändert.

von nichtlinearen Systemen mit Grenzzyklen ist nicht topologisch homöomorph zum Phasenraum eines harmonischen Oszillators. Die Trajektorien die für $t \rightarrow \infty$ in einen Grenzzyklus *asymptotisch* einlaufen, nähern sich diesem gemäß dem Ljapunov-Formalismus [161, 167, 84] exponentiell (siehe Abb. 1.4b). D.h., dass benachbarte Trajektorien nur für kurze Zeiten einen ähnlichen Verlauf wie der entsprechende Grenzzyklus aufweisen, gänzlich anders als die ineinander verschachtelten Energieschalen eines harmonischen Oszillators. Aus diesem Grund ist die Unabhängigkeit gegenüber den Anfangswerten eine notwendige Bedingung eines elektrischen Oszillators. Die Linearität zwischen eingepprägter Ladungsmenge und resultierender Phasenverschiebung ist im Wesentlichen nur für Oszillatoren gültig, deren Topologie des Phasenraums in der Nähe des Grenzzyklus ähnlich der Topologie eines harmonischen Oszillators ist. Dies gilt nur für Oszillatoren mit einer sehr hohen Güte Q . Fernab vom Gleichgewicht ist eine Linearisierung ungültig, denn eine Abweichung vom Grenzzyklus hat im Allgemeinen eine Phasenverschiebung zur Folge, da ein gestörter Zustand Zeit benötigt um den Rückstand oder Vorsprung zu seiner Ausgangslage wieder aufzuholen.

1999 in einer Dissertation [124] und in den Jahren zuvor und danach [117–128] stellten WEISS und MATHIS einen thermodynamischen Zugang zur Rauschtheorie in nichtlinearen elektrischen Schaltungen und Bauelementen vor. Der Kern der Arbeiten war es, die in den bis dato bekannten Rauschtheorien gemachten Annahmen zu hinterfragen und eine Theorie über das intrinsische Rauschen in nichtlinearen elektrischen Schaltungen zu modellieren. Insbesondere wird deutlich gemacht, dass additives, weißes, gaußsches Rauschen (AWGR) als Rauschmodell nichtlinearer Widerstände ungeeignet ist. Als Beispiel sei das Brillouin-Paradoxon gegeben [136], bei dem ein paralleles Netzwerk aus einer Diode D und einem

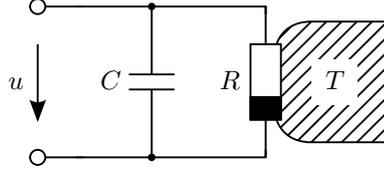


Abb. 1.5.: Netzwerk aus einer Diode D , dessen Kennlinie hier als nichtlinearer Widerstand R gekoppelt an einem Wärmebad der Temperatur T dargestellt ist, und einem Kondensator C .

Kondensator C an einem Wärmebad der Temperatur T gekoppelt ist (siehe Abb. 1.5). Die nichtlineare Kennlinie der Diode ist gegeben mit der Shockley-Gleichung

$$i_D(u) = I_S \left(e^{\frac{eu}{k_B T}} - 1 \right) \approx I_S \left(\frac{e}{k_B T} u + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{k_B T} \right)^2 u^2 \right) + \mathcal{O}(u^3), \quad (1.21)$$

wobei I_S der Sättigungsstrom, k_B die Boltzmann-Konstante und e die Elementarladung darstellt. Das thermische Rauschen wird gemäß der Nyquist-Formel durch eine additive weiße Rauschstromquelle mit gaußscher Verteilung modelliert, sodass ein Rauschstrom

$$i_R(u, t) = \sqrt{\frac{2k_B T}{C^2} \frac{di_D(u)}{du}} \xi(t) = \sqrt{\frac{2e}{C^2} (I_S + i_D(u))} \xi(t) \quad (1.22)$$

definiert werden kann. Die Bewegungsgleichung des Systems ergibt sich folglich aus der Knotengleichung $i_C = -i_D + i_R$ zu

$$C\dot{u} = -I_S \left(e^{\frac{eu}{k_B T}} - 1 \right) + \sqrt{\frac{2e}{C^2} (I_S + i_D(u))} \xi(t). \quad (1.23)$$

Der Mittelwert dieser Bewegungsgleichung lässt sich mit Hilfe der Taylorentwicklung in (1.21) angeben gemäß

$$C\langle \dot{u} \rangle \approx -I_S \left(\frac{e}{k_B T} \langle u \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{k_B T} \right)^2 \langle u^2 \rangle \right) + \mathcal{O}(\langle u^3 \rangle), \quad (1.24)$$

sodass im thermischen Gleichgewicht $\langle \dot{u} \rangle_{\text{eq}} = 0$, bei dem die Diffusion $\langle u^2 \rangle_{\text{eq}} = k_B T / C$ bekannt ist,

$$\langle u \rangle_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \frac{e}{C} + \mathcal{O}(\langle u^3 \rangle). \quad (1.25)$$

folgen würde. Dies stellt einen thermodynamischen Widerspruch dar, denn aus (1.25) ließe sich folgern, dass die Diode ihr eigenes Wärmerauschen gleichrichtet und somit, in Kontradiktion des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, aus der Wärmeenergie eine abgreifbare Spannung induziert. Dieses Paradoxon ist die Folge der Unvereinbarkeit von AWGRs mit nichtlinearen Kennlinien. Eine Auflösung des Paradoxons ist durch die thermodynamisch korrekte SDE gegeben

$$C\langle \dot{u} \rangle \approx -I_S \left(\frac{e}{k_B T} \langle u \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{k_B T} \right)^2 \langle u^2 - \langle u^2 \rangle_{\text{eq}} \rangle \right) + \mathcal{O}(\langle u^3 \rangle), \quad (1.26)$$

welche einen Korrekturterm $\langle u^2 \rangle \rightarrow \langle u^2 - \langle u^2 \rangle_{\text{eq}} \rangle$ enthält. Dieser Term stammt aus den höheren Momenten der Ordnung $\mathcal{O}(\langle u^3 \rangle)$ und wurde zuvor mit der Annahme einer Gaußverteilung vernachlässigt, da alle höheren Momente einer Gaußverteilung bis auf $\langle u \rangle$ und $\langle u^2 \rangle$ null sind. Allerdings ist es mit Anwendung dieser Korrekturterme nicht länger möglich, ein Ersatznetzwerk mit extrinsischen Rauschquellen anzugeben. Gl. (1.26) stellt daher eine intrinsische Kopplung des Rauschens mit den Netzwerkelementen dar. Dies ist der zweite wesentliche Kern der Arbeiten von WEISS und MATHIS.

1. Einleitung

Dabei zeigt sich, dass einzig die Klasse topologisch vollständiger Netzwerke, also reziproke Netzwerke mit impliziter Darstellung von Differentialgleichungen die die Casimir-Onsager-Relation erfüllen, für diese Theorie zulässig sind [48]. Solche Netzwerke bestehen aus *RLC*-Zweipolen und unabhängigen Quellen, deren Netzwerkgleichungen sich mit Hilfe eines gemischtes Potentials nach BRAYTON und MOSER beschreiben lassen [207, 208]. Der Zugang zu Rauschprozessen ist dann durch stochastische Differentialgleichungen bzw. der Fokker-Planck-Gleichung gegeben, welche die zeitliche Entwicklung von Phasenraumdichten und damit den auf das elektrische Netzwerk verteilten Effekt von Fluktuationen beschreiben. Allerdings ist die Gültigkeit dieser Theorie auf Systeme in der Nähe des Gleichgewichtspunktes beschränkt, welches elektrische Oszillatoren ausschließt.

DEMIR kritisierte in seiner vorgestellten Theorie zum Phasenrauschen in Oszillatoren aus dem Jahre 2000 die Theorie von HAJIMIRI und LEE [115]. Er zeigt, dass Störungsrechnungen mit Linearisierungen nicht gültig sind, wenn stochastische Terme, wie z.B. weißes Rauschen, an Bewegungsgleichungen gekoppelt werden und zwar auch dann nicht, wenn diese Störungen klein sind [113]. DEMIRs Theorie erweist sich aus diesen Gründen mathematisch als weit aus anspruchsvoller und stellt eine Erweiterung der Floquet-Theorie nach den Ideen von KÄRTNER dar [114].

Ausgangspunkt ist ein *autonomes* System mit einem Grenzyklus

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1.27)$$

dessen Grenzyklus durch die Lösung $\mathbf{x}(t)$ beschrieben wird. Dieses System wird um einen (deterministischen) Störungsterm $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{b}(t)$ derart erweitert, dass dieser Störungsterm wiederum in die Anteile $\mathbf{d}_1(\mathbf{x}, t)$ und $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t)$ aufgeteilt werden kann. Es folgt

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}, t) + \tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.28)$$

Der (beliebig große) Term \mathbf{d}_1 wird so gewählt, dass dieser ausschließlich eine Phasenabweichung $\phi(t)$ verursacht. D.h.

$$\dot{\mathbf{x}}_P = \mathbf{f}(\mathbf{x}_P) + \mathbf{d}_1(\mathbf{x}_P, t) \quad (1.29)$$

wird gelöst durch

$$\mathbf{x}_P(t) = \mathbf{x}(t + \phi(t)). \quad (1.30)$$

Der verbleibende Term $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t)$ sei nun eine kleine Störung bzgl. (1.29), sodass

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(t + \phi(t)) + \mathbf{y}(t) \quad (1.31)$$

die Lösung von (1.28) darstellt (siehe auch (1.10)). $\mathbf{y}(t)$ heißt Orbitalabweichung (siehe Abb. 1.2b). DEMIR zeigt, dass die Phasenabweichung mit der Zeit beliebig groß werden kann und zwar auch dann, wenn der Term \mathbf{b}_1 klein ist. Dies gilt jedoch nicht für die Orbitalabweichung. Diese bleibt für kleine $\tilde{\mathbf{d}}(\mathbf{x}, t)$ stets klein, sodass eine Linearisierung an dieser Stelle erlaubt ist. Infolgedessen, kann für die Phasenabweichung in Analogie zu KÄRTNER (siehe (1.14)) die Bewegungsgleichung

$$\dot{\phi} = \mathbf{e}_1 \mathbf{D}(\mathbf{x}(t + \phi)) \mathbf{d}(t) \quad (1.32)$$

aus der Floquet-Theorie hergeleitet werden. Mit dem Übergang einer deterministischen Störung zu stochastischen Termen, sodass $\mathbf{d}(t) = \boldsymbol{\xi}(t)$ weißes Rauschen darstellt und \mathbf{D} als Diffusionsmatrix, kann aus (1.32) eine äquivalente Fokker-Planck-Gleichung gewonnen werden, deren Lösung das Phasenrauschen beschreibt. Dabei zeigt sich, dass die Eigenfrequenz und deren harmonische Frequenzen unter dem Phasenrauschen zu Lorentzlinien im Leistungsdichtespektrum führen.

HAM und HAJIMIRI stellten 2002 das Konzept der virtuellen Dämpfung zur Beschreibung des Phasenrauschens in Oszillatoren auf [129–131]. Dabei handelt es sich um ein hypothetisches Experiment, bei dem ein Ensemble von identischen Oszillatoren mit denselben Anfangsbedingungen im Zeitbereich betrachtet wird und anhand dessen eine bessere physikalische Einsicht von Rauschprozessen in Oszillatoren gewonnen werden soll. Während das Ensemblemittel $\langle x(t) \rangle$ zur Anfangszeit $t = t_0$ identisch mit dem Ausgang $x(t)$ eines jeden Oszillators ist, werden aufgrund des Diffusionsprozesses der Phase die Ausgänge

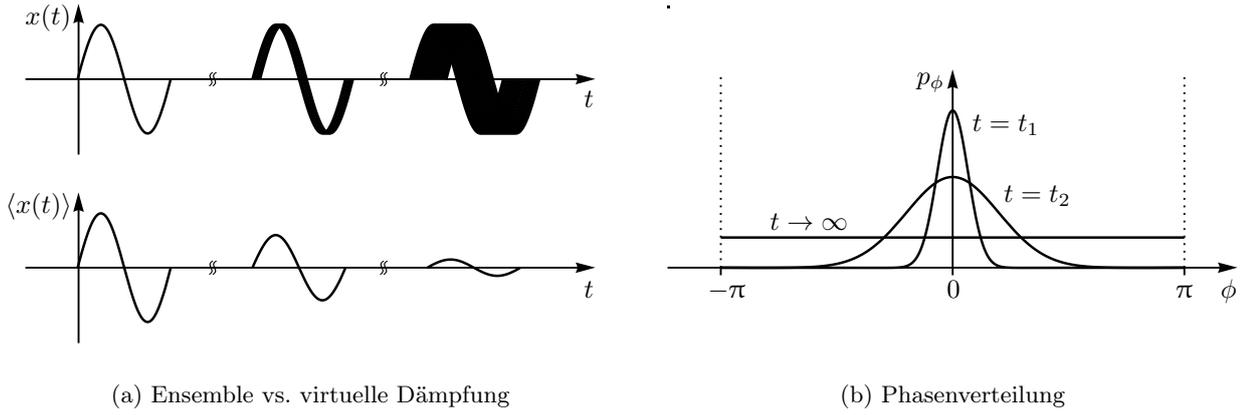


Abb. 1.6.: Entnommene Abbildungen zur Theorie nach HAM und HAJIMIRI [129]. Links: Darstellung des Ensembles einer Periode im Zeitbereich gegenüber der virtuellen Dämpfung $\langle x(t) \rangle$. Rechts: Zeitliche Entwicklung der Phasenverteilung.

der Oszillatoren zueinander inkohärent, sodass das Ensemblemittel gegen null strebt (siehe Abb. 1.6a). Dieser Prozess im Zeitbereich weist somit eine sogenannte virtuelle Dämpfung auf. Anhand zuvor durchgeführter Experimente, wird vorausgesetzt, dass jede virtuelle Dämpfung einen exponentiellen Charakter mit Dämpfungsrate (Abklingkonstante) D aufweist, welche in direktem Zusammenhang mit der Breite der Lorentzlinie korreliert. Die Phasenverteilung des Ensembles ist zu Beginn demnach kongruent, d.h., die Wahrscheinlichkeitsdichte p_ϕ entspricht zur Anfangszeit einer δ -Distribution. Je länger das Ensemble evolviert, desto weiter spaltet sich diese Dichte in weitere Phasenteile auf, sodass die Phasenverteilung einer Normalverteilung entspricht und letztendlich für $t \rightarrow \infty$ zu einem gleichverteilten Band, innerhalb des erlaubten Intervalls $\phi \in [-\pi, \pi)$, verschmiert (siehe Abb. 1.6b).

Allerdings merken HAM und HAJIMIRI an, dass reale Oszillatoren eine sehr geringe virtuelle Dämpfung, d.h. eine große Zeitkonstante, aufweisen, sodass es für experimentelle Versuche sich schwierig gestaltet, diese zuverlässig zu messen. Aus diesem Grund wurde ein Ring-Oszillator mit angekoppeltem weißem Rauschen behandelt. Die partielle Differentialgleichung die die zeitliche Entwicklung von p_ϕ beschreibt, ist demzufolge die Fokker-Planck-Gleichung mit vorgegebenen Rand- und Anfangsbedingungen ohne Drift. Der Ausgang des Oszillators wird mit

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi(t)) \quad (1.33)$$

und der Bedingung $\langle \phi^2(t) \rangle = 2Dt$ vorausgesetzt, sodass für den Erwartungswert des Ensembles

$$\langle x(t) \rangle = Ae^{-Dt} \cos(\omega_0 t) \quad (1.34)$$

und aus der Fouriertransformation der Autokorrelation $\langle x(t)x(t+t') \rangle$ die spektrale Leistungsdichte

$$S_{xx}(\omega) = A^2 \frac{D}{D^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (1.35)$$

in Form einer Lorentzlinie folgt. Die Dämpfungsrate, die nun gleichzusetzen ist mit der Diffusionskonstante in (1.4), wird mit der Einstein-Relation gemäß

$$D \propto k_B T \frac{\omega_0 \Gamma^2}{QA^2}, \quad (1.36)$$

definiert, wobei Q die Güte des Oszillators und Γ die Impulsempfindlichkeitsfunktion (1.18) nach HAJIMIRI und LEE als Korrekturterm zur Berücksichtigung von nicht-sinusoidalen Grenzyklen darstellt.

HAMS Konzept stellt daher eine Erweiterung der Theorie nach HAJIMIRI und LEE dar. Dabei ist eine nachträgliche Korrektur mittels Impulsempfindlichkeitsfunktion, um den zeit-varianten Diffusionsprozess zu berücksichtigen, fragwürdig. Ein allgemeinerer Ansatz gemäß (1.16) zeigt bereits, dass der Erwar-

1. Einleitung

tungswert des Ensembles nicht immer gegen null strebt. Dies folgt sofort, wenn f in (1.16) durch seine Fourierreihe ersetzt wird. Die Autokorrelation, geschweige denn die Fouriertransformierte zur Berechnung des spektralen Leistungsdichtespektrums, kann mit einer solchen allgemeinen Funktion nicht ohne weiteres angegeben werden. Die in [129] dargestellte Abbildung des exponentiellen Abfalls der virtuellen Dämpfung des Ring-Oszillators scheint diese Problematik sogar anzudeuten. Dieses Gegenargument ist jedoch keine Falsifikation der Theorie, da nur die Berechnung angepasst werden müsste, nicht aber die theoretische Herangehensweise. Allerdings würde sich das Phasenrauschen nicht in der dort angegebenen Form aus dem Leistungsdichtespektrum ergeben.

CHOW und ZHOU beschrieben 2007 einen alternativen, rein mathematischen Ansatz, welcher mittels eines begleitenden Dreibeins eine allgemeine Separierung zwischen Amplituden- und Phasenabweichung erlaubt [254]. Dabei wird das starre Bezugssystem der Parametrisierung durch ein sich mit dem begleitenden Dreibein drehendes Bezugssystem ersetzt. Aus dem Residuum der Radial- und Winkelkoordinaten des ungestörten Systems sowie eines durch weißes Rauschen gestörten Systems folgen die Amplitudenabweichung $A(t)$ und Phasenabweichung $\phi(t)$. Hieraus ergeben sich stochastische Differentialgleichungen in Anlehnung nach KÄRTNER und DEMIR aus deren Lösungen unter Anderem das Phasenrauschen abgeleitet werden kann.

Allerdings benötigt diese Herangehensweise zum einen eine bekannte Parametrisierung des jeweiligen Grenzzyklus und darüber hinaus Inverstransformierte von Funktionen die sich aus den notwendigen Koordinatentransformationen ergeben. Mit diesen Einschränkungen sind analytische Ausdrücke in der Regel nur unter bestimmten Voraussetzungen darstellbar und aufgrund notwendiger Taylor-Entwicklungen nur für bestimmte Parameterintervalle um den Entwicklungspunkt gültig. Die zur verallgemeinerten Liouville-Gleichung formal ähnlichen Lie-Reihen oder der im Anhang C dargestellte alternative Ansatz zur semi-analytischen Berechnung eines Grenzzyklus können dabei herangezogen werden.

Ziel dieser Arbeit und Problemstellung

In den zuvor vorgestellten Arbeiten als Stand der Forschung in den Bereichen der theoretischen Physik, Mathematik und Elektrotechnik war es unter Anwendung von stochastischen Prozessen das Ziel, Phasenrauschen in Oszillatoren zu beschreiben. Ziel dieser Dissertation ist es, deterministische Prozesse zu untersuchen, die in elektrischen Oszillatoren stattfinden, um die sich daraus ergebenden Effekte von stochastischen Effekten abgrenzen zu können und diese schwierigen Sachverhalte mit seinen mathematischen Begrifflichkeiten für Ingenieure näher zu bringen.

Die Problemstellung ist im wesentlichen in drei Bereiche einzugliedern: (i) Die Untersuchung der Transienz und Oszillation sowie deren Zusammenhang, (ii) der Problematik zwischen in- und extrinsischen Prozessen und (iii) dem Wechselspiel zwischen Dissipation und Akkumulation von Energie und Phasenraumvolumen.

- i. Bereits EDSON erkannte, dass der Einschwingvorgang eines Oszillators nicht vernachlässigt werden darf. Dies hat mehrere Gründe:

Zum einen ist für höher-dimensionale, nichtlineare Schaltungen nicht ohne Weiteres gewährleistet, dass ein stabiler Grenzzyklus aus allen möglichen Anfangswerten innerhalb des Phasenraums, mit Ausnahme der zugehörigen instabilen Gleichgewichtspunkte, erreicht werden kann. Neben z.B. Separatrizen (einer geschlossenen Kurve, die Gebiete des Phasenraums ähnlich wie ein Grenzzyklus trennt) können weitere stabile sowie instabile Grenzzyklen existieren. Es bedarf demnach einer klaren Unterteilung des Phasenraums in voneinander unabhängigen Einzugsgebieten aller Attraktoren. In Umkehrung bedarf es zur Vollständigkeit auch einen Gegenbegriff für Repelloren, den sogenannten Auszugsgebieten.

Zum anderen stellt das Erreichen des Grenzzyklus einen Gegensatz dar. Während ein idealer Oszillator seinen Einschwingvorgang erst nach unendlicher Zeit vollendet hat, ist in Folge die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Phase auf dem Grenzzyklus aufgrund der Autonomie der Bewegungsgleichungen eine Gleichverteilung. D.h., die Phase kann nicht länger bestimmt werden, da alle möglichen Phasen als gleich wahrscheinlich angesehen werden müssen. Im Falle eines realen Oszillators wird das System für längere Zeiten nie auf dem Grenzzyklus verlaufen, sondern nur innerhalb einer tolerierten Abweichung gemäß den Spezifikationen. Dennoch unterliegen solche Systeme dem selben Schicksal wie idealisierte Oszillatoren. Auch hier wird die Phasenverteilung für hinreichend große Zeiten einer Gleichverteilung entsprechen. Für Oszillatoren mit einer sehr hohen Güte und der damit einhergehenden langen Transienz, wie bei-

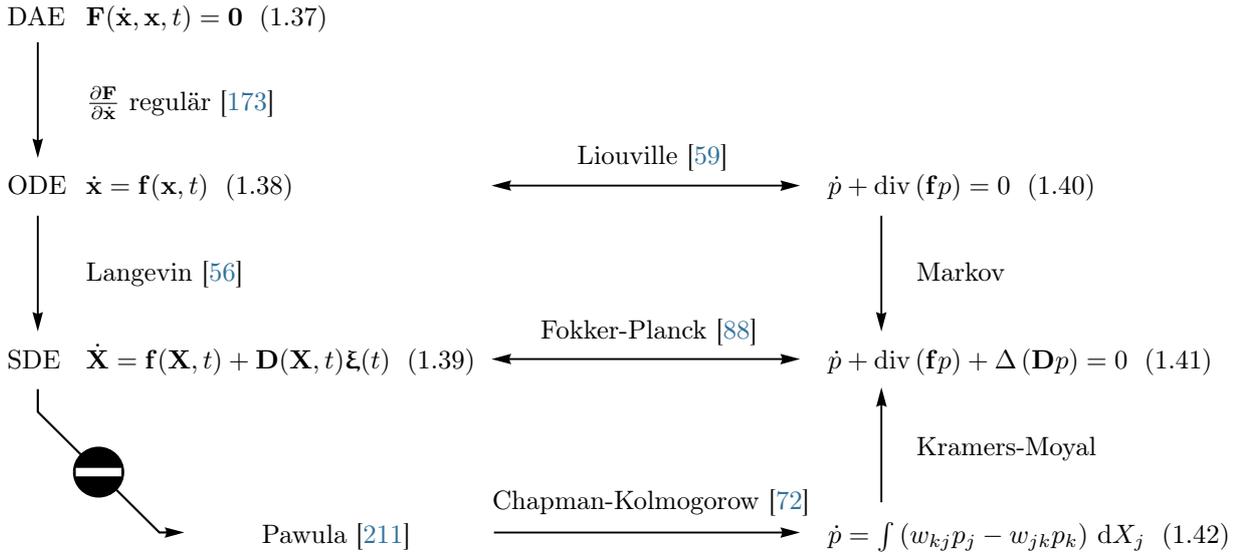


Abb. 1.7.: Übersicht von Einzel- und Mengensystemen. Die Bedeutungen der Akronyme finden sich im Abkürzungsverzeichnis.

spielsweise Quarz-Oszillatoren, ist es fraglich, wann der Übergang zwischen Transienz und Oszillation stattfindet.

Die Problemstellung ist es daher, zum einen die Einzugsgebiete eines Grenzzyklus sauber zu definieren und zum anderen eine inhärente Definition des Übergangs zwischen Transienz und Oszillation zu finden.

- ii. Rauschen ist in jeder elektrischen Schaltung evident und kann anhand seiner spektralen Leistungsdichte klassifiziert werden. So existieren neben dem thermischen Rauschen auch andere Formen des Rauschens, wie z.B. das Schrot- oder Funkelrauschen. Könnten alle sich *intrinsisch* (im Inneren) abspielenden physikalischen Prozesse, die zu einem Rauschen führen, aus einer Schaltung extrahiert werden, so könnten diese Mechanismen wiederum als Schaltungen dargestellt werden. Ein Entfernen dieser Schaltungen käme einer vollständigen Unterdrückung jeglicher Rauschprozesse gleich und ein Hinzufügen würde der realen Ausgangsschaltung entsprechen. Obwohl eine solche Extraktion aufgrund thermodynamischer Gesetze nicht möglich ist, werden in der Elektrotechnik Rauschersatznetzwerke modelliert und diese an Knoten und Maschen für Simulationszwecke *extrinsisch* (von Außen) verknüpft. VAN KAMPEN machte daher deutlich, dass es einer Unterscheidung zwischen intrinsischen und extrinsischen Rauschprozessen bedarf [55]. Ein intrinsischer Zugang käme einer vollständigen kinetischen Formulierung aller ablaufenden physikalischen Prozesse, unter exakten Kenntnissen aller Anfangswerte gleich. Dies ist aber allein aufgrund der immensen Zahl von Freiheitsgraden technisch nicht durchführbar. Ein extrinsischer Zugang geht von einer Hypothese aus, wie eine elektrische Schaltung sich unter Rauschen verhalten müsste. Diese Hypothese wird in Form von Rauschersatznetzwerken modelliert, die zu stochastischen Bewegungsgleichungen führen und mit einem vergleichsweise geringen technischen Aufwand adäquate Vorhersagen erlauben, falls die vorangegangene Hypothese korrekt war. Ob eine Hypothese korrekt ist, lässt sich nur durch anschließende Messungen an genau jener Schaltung zeigen.

Die Dynamik elektrischer Schaltungen ist dagegen vollständig durch die deterministischen Bewegungsgleichungen (Drift) beschrieben und eine intrinsische Eigenschaft. Grenzzyklen sind eine solche Eigenschaft. Langevin-Gleichungen verändert diese Dynamik, indem das entsprechende Vektorfeld zufällig fluktuiert. Der stochastische Anteil (Diffusion) stellt also auch hier einen extrinsischen Anteil dar.

Da für eine Vorhersage alle Realisierungen eines stochastischen Prozesses berücksichtigt werden müssen, bedarf es der Fokker-Planck-Gleichung, was im deterministischen Falle, aufgrund der Einzigartigkeit einer Trajektorie, nicht nötig scheint. Allerdings kann mit der Fokker-Planck-Gleichung nicht zwischen intrinsischen und extrinsischen dynamischen Effekten unterschieden werden. Da die oben genannte Hypothese sich nicht selbst bestätigen kann, können simulative Ergebnisse zu Fehlschlüssen zugunsten der Hypothese führen, obwohl diese Ergebnisse auch ohne einen extrinsischen Ansatz evident wären.

1. Einleitung

Die Problemstellung ist es somit, eine zur Fokker-Planck-Gleichung äquivalente Bewegungsgleichung aus deterministischen Überlegungen herzuleiten (siehe Abb. 1.7). Diese Bewegungsgleichung ist die verallgemeinerte Liouville-Gleichung. Mit ihr sollen die intrinsischen Effekte von Systemen mit Grenzzyklen ausgeleuchtet werden.

- iii. Dissipation (lat. für „Zerstreuung“) ist der physikalische Vorgang, bei dem die Bewegungsenergie in eine andere Energieform umgewandelt wird. Der lateinische Ursprung des Wortes bezieht sich dabei auf ein Phasenraumvolumen, dessen Volumen reziprok zu einer energetischen Größe steht und aufgrund des Vorgangs zerstreut wird. Das Fluktuations-Dissipations-Theorem stellt eine Beziehung zwischen der Reibung eines Systems im Gleichgewicht und dessen zufälligen Fluktuationen her. Dissipation durch Reibung und Fluktuationen haben somit denselben Ursprung. Fluktuations-Theoreme für nicht-stationäre Markov-Prozesse finden sich beispielsweise bei HÄNGGI [68]. Elektrische Oszillatoren, als Systeme fernab vom Gleichgewicht, weisen jedoch eine nichtlineare, zustandsabhängige Reibung auf. Dissipation kann in Teilen des Phasenraums einem Antagonisten, der Akkumulation (lat. für „anhäufen“), gegenüber stehen und aufgrund eines Grenzzykus mit diesem periodisch wechselwirken [170]. Auch können dem in Summe dissipativen Prozess mehrere akkumulative Prozesse übergeordnet sein (Bilanz). LAX erkannte, dass das Phasenrauschen ebenso abhängig von der Position im Phasenraum sein kann [46]. HÄNGGI merkte zudem an, dass der Drift durch nichtlineare Effekte ebenso in einem nichtlinearen Sinne von dem Rauschen beeinflusst wird und eine Vernachlässigung der Diffusion zu unterschiedlichen Ergebnissen des Drifts führen kann [70, 71]. Weitere Einzelheiten zu nichtlinearen Systemen fernab des Gleichgewichts finden sich bei EBELING und SOKOLOV [92].

Allerdings muss strikt zwischen Dissipation von Energie und Dissipation von Phasenraumvolumen unterschieden werden. Während ersteres zusammen mit einem Fluktuations-Dissipations-Theorem mit Rauschprozessen in Verbindung gebracht werden kann, ist letzteres eine mathematische Beschreibung eines Vorgangs der im Phasenraum stattfindet. Bevor deterministische oder stochastische Effekte dieser Formalismen einer physikalischen Bedeutung zugeordnet werden können, muss zuvor explizit für Systeme mit Grenzzyklen geklärt sein, unter welchen Bedingungen Dissipation von Energie und Dissipation von Phasenraumvolumen gleichbedeutend sind.

Zu diesem Zweck ist die Problemstellung gängige Begrifflichkeiten wie Dissipation, Akkumulation und Entropie aus der Physik zu redefinieren, um diese anschließend in die dynamischen Systeme der theoretischen Elektrotechnik übertragen zu können.

Kapitel 2 behandelt dynamische Systeme und erläutert die in dieser Arbeit notwendigen Begriffe und Konzepte. Kapitel 3 über deterministische Systeme definiert Dissipation und Akkumulation von Energie sowie Phasenraumvolumen bezüglich kanonisch-dissipativer Hamilton-Systeme und deren Erweiterung, den Nambu-Systemen [133, 105]. Weiterhin werden die Begriffe mit dem Ljapunov-Formalismus, in Anwendung auf Systeme mit Grenzzyklen, in Verbindung gebracht. Darüber hinaus wird die verallgemeinerte Liouville-Gleichung hergeleitet und eingehend untersucht. Kapitel 4 untersucht die Liouville-Dynamik von elektrischen Oszillatoren und deren deterministische Effekte. Eine Zusammenfassung und ein Ausblick ist in Kapitel 5 gegeben. Anhang A definiert die in dieser Arbeit genutzten Begriffe wie Zentrums- und Integralmannigfaltigkeiten. Anhang B definiert wichtige Begriffe für stochastische Systeme. Anhang C zeigt eine neue analytische Lösungsmethode für ein Van der Pol-System, welches in dieser Arbeit zur Berechnung der Liouville-Dynamik im Hintergrund seine Anwendung fand.

Bewegungsgleichungen zu elektrischen Schaltungen sind im Allgemeinen differential-algebraische Gleichungen (1.37) (DAEs). Ist das Gleichungssystem regulär, gehen die Bewegungsgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen (1.38) (ODEs) über. Der Langevin-Ansatz führt zu stochastischen Differentialgleichungen (1.39) (SDEs), zu denen eine äquivalente Fokker-Planck-Gleichung (1.41) existiert. Der in dieser Arbeit gedankliche Weg, geht über die Fokker-Planck-Gleichung zurück zur Liouville-Gleichung (1.40) bzw. ist als Kramers-Moyal-Entwicklung der 1. Ordnung eines stochastischen Systems zu betrachten (siehe Abb. 1.7).

Die Abschnitte dieser Arbeit sind stark miteinander verwoben. Es werden Grundlagen aus verschiedenen Bereichen der Physik und Elektrotechnik zu einem Gesamtwerk der Liouville-Dynamik, immer im Hinblick auf die verwandte Literatur, verknüpft. Inhaltliche Ergänzungen oder Abänderungen zu den Grundlagen über dynamische Systeme werden in Propositionen hervorgehoben.

2. Dynamische Systeme

Ein dynamisches System wird im Rahmen dieser Arbeit als ein mathematisches Modell definiert, das den Verlauf eines physikalischen Prozesses in Abhängigkeit der Zeit beschreibt und nach einer fest definierten mathematischen Regel entwickelt. Die Zeit ist eine *homogene* Größe, d.h., der physikalische Prozess ist unabhängig von seiner Startzeit (auch *Anfangszeit*) und ein mehrmaliges Ausführen desselben Prozesses zu gleichen Anfangsbedingungen führt stets zum selben Ergebnis, einem sogenannten *Zustand*. Folglich existiert zu jedem Zeitpunkt genau ein Zustand der sich neben anderen Zuständen in einem *Zustandsraum* (auch *Phasenraum*) befindet. Die mathematische Regel, meist in Form von Differentialgleichungen, gibt für alle Zustände im Zustandsraum den weiteren Verlauf vor, sodass für ein *Zeitintervall* ausschließlich ein Folgezustand aus einem Anfangszustand folgt. Dieser Zustandsraum ist für die in dieser Arbeit diskutierten Beispiele der euklidische Raum \mathbb{R}^n . Nichtsdestotrotz kann der Zustandsraum auch eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n oder ein Raum mit einer gänzlich anderen Topologie sein, sodass alle Herleitungen im Folgenden von einem allgemeineren Raum ausgehen.

Die Definition eines dynamischen Systems lässt sich zum einen in einer geometrisch motivierten Interpretation nach den Arbeiten von POINCARÉ aus dem Jahre 1890 verstehen, in denen auch der *Poincaré'sche Wiederkehersatz* veröffentlicht wurde [7]. Zum anderen lassen sich dynamische Systeme maßtheoretisch mittels der durch BIRKHOFF 1927 begründeten Ergodentheorie [25] definieren.

Im Folgenden wird das für diese Arbeit notwendige mathematische Werkzeug für dynamische Systeme im geometrischen Sinne kompakt definiert und erläutert.

2.1. Phasenraum, Integralkurven und Orbits

Geometrisch handelt es sich bei einem dynamischen System um einen Phasenfluss, d.h., die zur Anfangszeit fest definierten Zustände im Phasenraum werden unter der Einwirkung eines Flusses transportiert. Dazu sei M eine n -dimensionale, k -differenzierbare, *riemannsche Mannigfaltigkeit* mit $n, k > 0$, die den Phasen- bzw. Zustandsraum widerspiegelt, d.h. einem Raum, der lokal wie der euklidische Raum aussieht, auf dem notwendige Konzepte der Differentialrechnung übertragen werden können und auf dem Abstände definiert sind. Weiterhin sei $\mathbf{x} \in M$ ein Zustand des Phasenraums M , $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ ein Zeitintervall und $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow M$ eine differenzierbare Kurve für die gilt, dass $\gamma(t_0) = \mathbf{x}$ ist. Dann heißt $\dot{\gamma} = d\gamma/dt|_{t=t_0}$ mit $t, t_0 \in \mathbb{T}$ *Tangententialvektor*. Die Menge aller Tangentialvektoren bezüglich des Zustands \mathbf{x} bilden den *Tangententialraum* $T_{\mathbf{x}}M$. Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume bilden das *Tangententialbündel* TM . Ein C^k -*Vektorfeld* $\mathbf{f}: M \rightarrow TM$, wobei C^k die Menge der stetig-differenzierbaren Funktionen entspricht, ordnet demzufolge jedem Zustand \mathbf{x} im Phasenraum M einen Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}M$ zu, sofern die Verknüpfung der natürlichen Projektion $\pi: TM \rightarrow M$ mit dem Vektorfeld zur Identität $\pi \circ \mathbf{f} = \text{id}_M$ führt (siehe Abb. 2.1).

Eine Kurve γ , die sich aus der Integration aller Tangentialvektoren $\dot{\gamma}$ entlang des Vektorfeldes \mathbf{f} ergibt, heißt *Integralkurve*. Eine durch den Zustand \mathbf{x} laufende Integralkurve $\gamma_{\mathbf{x}}: \mathbb{T}_{\mathbf{x}} \rightarrow M$ heißt *maximal*, falls für jede andere Integralkurve γ gilt, dass $\mathbb{T} \subset \mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ und $\gamma_{\mathbf{x}}(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ ist. Demnach sind über ganz \mathbb{R} definierte Integralkurven immer maximal und zwei maximale Integralkurven $\gamma_{\mathbf{x}}$ und $\hat{\gamma}_{\mathbf{x}}$ die denselben Zustand beinhalten identisch, d.h. $\gamma_{\mathbf{x}} \equiv \hat{\gamma}_{\mathbf{x}}$. Folglich ist eine maximale Integralkurve $\gamma_{\mathbf{x}}$, die durch den Zustand $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}$ verläuft, identisch zur Integralkurve $\gamma_{\hat{\mathbf{x}}}$ bzw. $\hat{\gamma}_{\hat{\mathbf{x}}}$. Falls $\mathbf{s} \in M$ ein *singulärer* Punkt des Vektorfeldes \mathbf{f} ist, so ist die konstante Abbildung $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{s}$ eine maximale Integralkurve und demnach konstant (*stationär*). D.h. im Umkehrschluss, dass jede nicht-konstante Integralkurve alle Singularitäten umgeht und damit nicht-verschwindende Ableitungen zu jedem Zustand besitzt. Weiterhin gilt für einen kompakten Raum $K \subset M$, dass ein $\tau \in \mathbb{T}$ existiert, für das eine maximale Integralkurve das Kompaktum verlässt, d.h. $\gamma \notin K$ für alle $t \geq \tau$. Nur eine solche Integralkurve kann auf ein endliches Zeitintervall beschränkt sein.

Zusammenfassend lassen sich so drei Typen von Integralkurven definieren: (i) γ ist konstant und $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, (ii) γ ist injektiv und regulär, d.h. es gilt $\dot{\gamma} \neq \mathbf{0}$ im gesamten Definitionsgebiet $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ oder (iii)

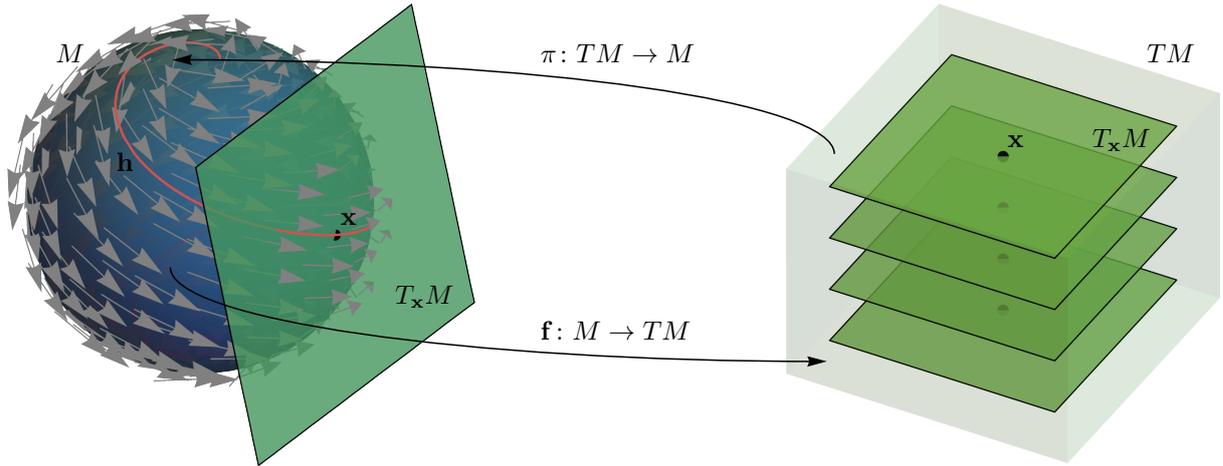


Abb. 2.1.: Beispiel einer Mannigfaltigkeit mit ihren angehefteten Räumen. Die Mannigfaltigkeit ist hier eine 2-Sphäre $M = S^2$. Zu jedem Zustand \mathbf{x} auf der Sphäre existiert ein Tangentialraum $T_{\mathbf{x}}M$, in dem alle Tangentialvektoren bezüglich \mathbf{x} existieren. Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume ergibt das Tangentialbündel TM (hier nur qualitativ dargestellt). Ein Vektorfeld \mathbf{f} ist dementsprechend die Abbildung aus der Mannigfaltigkeit in das Tangentialbündel. Die umgekehrte Abbildung entspricht der natürlichen Projektion π .

γ ist auf $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ periodisch, injektiv und regulär, sodass eine *Periodendauer* $T \in \mathbb{R}$ existiert für die gilt $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow |t_2 - t_1| = nT$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$. Eine periodische Integralkurve ist demnach ein Spezialfall des zweiten Typs und innerhalb eines Kompaktums $K \subset M$ beschränkt, wenngleich sich keine Aussage über das Rückkehrverhalten einer nicht-periodischen Integralkurve machen lässt, da diese ihrem Anfangswert beliebig nah kommen kann.

Sei W eine offene Teilmenge der disjunkten Vereinigung aller Zustände \mathbf{x} auf der Mannigfaltigkeit M mit ihren jeweiligen Zeitintervallen $\mathbb{T}_{\mathbf{x}}$, d.h.

$$W = \bigcup_{\mathbf{x} \in M} \{\mathbf{x}\} \times \mathbb{T}_{\mathbf{x}} \subseteq M \times \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

so ist die C^k -Abbildung $\Phi: W \rightarrow M$ für $k > 0$ der (maximale) *Fluss* und es gilt $\Phi(\mathbf{x}, t) = \gamma_{\mathbf{x}}(t)$. Der Fluss ist also die Gesamtheit aller maximalen Integralkurven. Zwei unterschiedliche Zustände \mathbf{x} und $\hat{\mathbf{x}}$ müssen demnach nicht mehr Zustände einer einzigen Integralkurve sein. Ist das Zeitintervall \mathbb{T} eine echte Teilmenge des \mathbb{R} , so handelt es sich dabei um einen lokalen Fluss. Für den Fall $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ist der Fluss global. Jeder Fluss hat zwei wesentliche Eigenschaften: (i) Es gilt die *Identitätseigenschaft* $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ und somit auch $0 \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}}$ und (ii) Φ gehorcht der *Halbgruppeneigenschaft* $\Phi(\Phi(\mathbf{x}, t_1), t_2) = \Phi(\mathbf{x}, t_1 + t_2)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{T}$.

Die Schar von Abbildungen $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T} \rightarrow M$ ist eine Familie von maximalen Integralkurven und wird *Lösung* bezüglich der Untermannigfaltigkeit $N \subseteq M$ genannt, sodass die Gesamtheit aller Lösungen den Fluss auf N bilden. Die Zustände dieser Untermannigfaltigkeit N heißen *Anfangswerte* $\mathbf{x}_0 \in N$. Anfangswerte zeichnen sich dadurch aus, dass eine Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{T}$ existiert, für die gilt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t_0)$. Die Bildmenge dieser Lösungen $O(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) | t \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_0}\}$ werden *Orbits* oder *Trajektorien* genannt [181]. Die Darstellung dieser Orbits für verschiedene Anfangswerte \mathbf{x}_0 bilden das *Phasenportrait* des Phasenraums M . Der positive Halborbit ist $O^+(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) | t \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_0} \cap \mathbb{R}^+\}$ und der negative Halborbit bzw. der Rückwärtsorbit ist $O^-(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) | -t \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_0} \cap \mathbb{R}^+\}$. Ein Orbit der nur aus dem Zustand \mathbf{x}_0 besteht, wird konstanter Orbit genannt bzw. *Fixobjekt* der Dimension null [167, 84]. Konstante Orbits sind demzufolge die Bildmenge eines *Gleichgewichtspunktes* $\tilde{\mathbf{x}}$. Ein nicht-konstanter Orbit heißt *geschlossen* oder *periodisch*, falls ein $T \in \mathbb{T}_{\mathbf{x}_0}$ existiert, sodass $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t + T)$ für alle $\mathbf{x}_0 \in O(\mathbf{x}_0)$. Ein solcher Orbit ist ein Fixobjekt n -ter Dimension und topologisch homöomorph zu einem n -Torus.

Ist $O(\mathbf{x})$ ein Orbit, so heißt ein Zustand $\mathbf{y} \in M$ ω -Limespunkt des Orbits, falls eine Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{y}$. Die Menge dieser Zustände heißt ω -Limesmenge

$$\omega(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in M \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \in \mathbb{T}, t_n \rightarrow \infty, \Phi(\mathbf{x}, t_n) \rightarrow \mathbf{y} \text{ für } n \rightarrow \infty\}. \quad (2.2)$$

Für $t_n \rightarrow -\infty$ heißt diese Menge, in umgekehrter Analogie zu (2.2), α -Limesmenge des Orbits $O(\mathbf{x})$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in M \mid \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n \in \mathbb{T}, t_n \rightarrow -\infty, \Phi(\mathbf{x}, t_n) \rightarrow \mathbf{y} \text{ für } n \rightarrow \infty\}. \quad (2.3)$$

Ist $A \subset M$ eine echte Teilmenge des Phasenraums, dann heißt diese Menge *invariant* unter dem Fluss Φ , falls für jedes $\mathbf{a} \in A$ und $t \geq t_0 \in \mathbb{T}$ gilt, dass $\Phi(\mathbf{a}, t) \in A$. Gilt diese Invarianz auch unter Zeitumkehrung bezüglich der Anfangszeit, d.h. auch für $t < t_0$, so heißt A *streng invariant* bezüglich Φ . Limesmengen sind daher stets invariant unter dem Phasenfluss.

Ist U die Umgebung eines Zustands $\mathbf{x} \in M$, sodass ein $\tau > t_0$ existiert, für das $(\cup_{\mathbf{u} \in U} \{\Phi(\mathbf{u}, t)\}) \cap U = \emptyset$ für alle $t > T$ gilt, dann ist \mathbf{x} ein *wandernder* Zustand. Ist diese Eigenschaft nicht erfüllt, so ist \mathbf{x} ein *nicht-wandernder* Zustand. Die Menge aller nicht-wandernden Zustände besteht daher aus allen Gleichgewichtspunkten, geschlossenen Orbits und anderen ω -Limespunkten und ist invariant sowie abgeschlossen [167].

Die *Metrik*, die den Abstand zweier Zustände $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$ misst, ist für riemannsche Mannigfaltigkeiten im allgemeinen nicht der euklidische Abstand. Die Metrik $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ ergibt sich stattdessen über ein Längenfunktional. Dazu sei $g_{\mathbf{p}}: T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}M \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $\mathbf{p} \in M$ eine positiv definite, symmetrische Bilinearform (riemannsche Metrik¹) mit der induzierten Norm $\|\cdot\| = \sqrt{g}$ und

$$L[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (2.4)$$

das Längenfunktional, dann ist mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{L[\gamma] \mid \mathbb{T} = [t_1, t_2], \gamma(t_1) = \mathbf{x}, \gamma(t_2) = \mathbf{y}\}$ eine Metrik auf M gegeben. Darüber hinaus sei der Abstand zwischen einem Zustand $\mathbf{x} \in M$ und einer Menge $A \subseteq M$ gegeben mit $\text{dist}(\mathbf{x}, A) = \inf_{\mathbf{a} \in A} \{d(\mathbf{x}, \mathbf{a})\}$.

Die bisherigen Definitionen und Strukturen erlauben nun die Definition eines dynamischen Systems.

Definition (Dynamisches System (geometrisch)) *Das Tripel (\mathbb{T}, M, Φ) mit dem Zeitintervall \mathbb{T} , der Mannigfaltigkeit M und dem Fluss Φ bildet ein dynamisches System im geometrischen Sinne.*

Bei dem Zeitintervall \mathbb{T} handelt es sich in aller Regel um Intervalle des \mathbb{R} , innerhalb der sich für die physikalische Fragestellung interessante Dynamik abspielt, beispielsweise derart, dass $\mathbb{T} = [t_0, \infty) \subset \mathbb{R}$ gilt. D.h. eine echte Teilmenge des \mathbb{R} ist in vielen Fällen eine restriktive Einschränkung, da die Dynamik oft für ganz \mathbb{R} gültig ist. Auch ist eine Unterscheidung zwischen diskreten und kontinuierlichen Zeitentwicklungen möglich, allerdings beschränkt sich diese Arbeit auf den kontinuierlichen Fall.

2.2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Während zeitdiskrete dynamische Systeme fest aufeinanderfolgenden Zeitsprüngen unterliegen, werden kontinuierliche dynamische Systeme in dieser Arbeit mit autonomen gewöhnlichen Differentialgleichungen beschrieben.

Definition (Gewöhnliche Differentialgleichung) *Sei $t \in \mathbb{T}$ eine unabhängige Variable sowie die Elemente des Vektors $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in M$ abhängige Variablen mit der Lösung $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T} \rightarrow M$ auf der differenzierbaren bzw. Riemannschen Mannigfaltigkeit M , sodass $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) \equiv \Phi^t \mathbf{x}_0$. Sei $\mathbf{f}: M \rightarrow TM$ ein n -dimensionales C^k -Vektorfeld. Das System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ heißt n -dimensionale, autonome, explizite, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit $\mathbf{x}_0 \in N \subseteq M$ als Anfangswert.*

Dabei sei angemerkt, dass jede explizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung sich in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung umwandeln lässt. Insbesondere kann auch ein nicht-autonomes System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ mit Lösungskurven des *erweiterten Phasenraums*

¹Bei der riemannschen Metrik handelt es sich nicht um eine Metrik im Sinne der metrischen Räume sondern um ein Skalarprodukt.

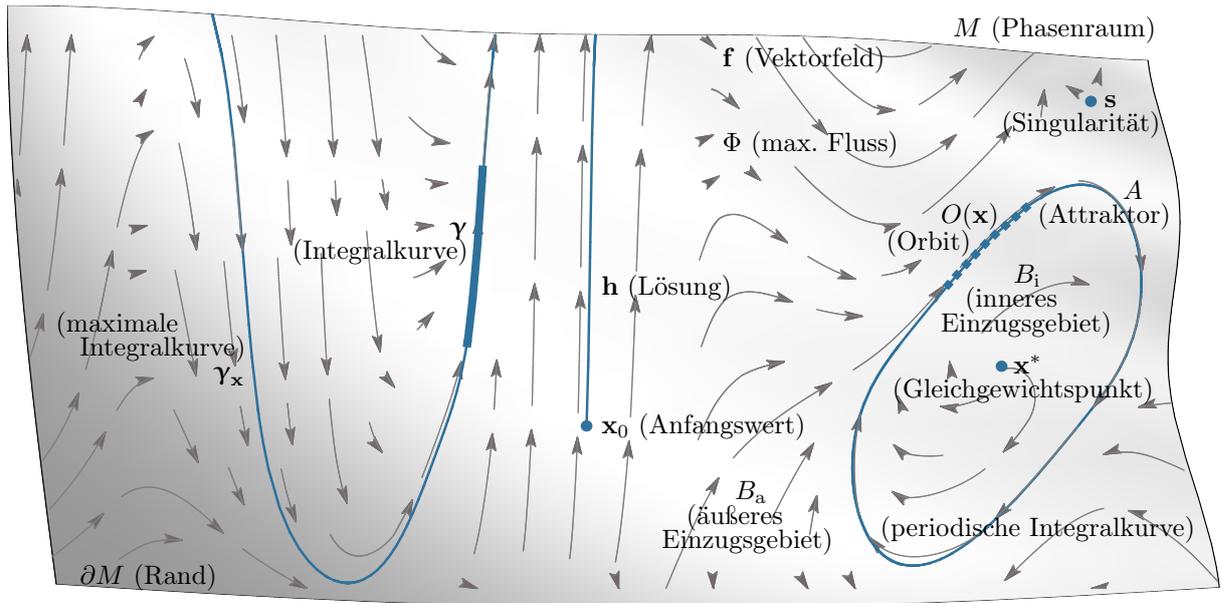


Abb. 2.2.: Beispiel eines dynamischen Systems. Der Phasenraum ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit M . Der Fluss zeigt ein sehr komplexes Verhalten. So existiert eine Singularität s , ein Gleichgewichtspunkt \bar{x} und ein Attraktor A mit seinen beiden Bassins B_i und B_a .

$\Omega = M \times \mathbb{T}$ in ein $(n+1)$ -dimensionales System erster Ordnung umgewandelt werden. Dies folgt sofort aus der geometrischen Betrachtung der expliziten Zeitabhängigkeit des Vektorfeldes eine eigene Raumrichtung zuzuweisen [178].

Die Divergenz (lat. „divergere“ für auseinanderstreben) eines Vektorfeldes f ist ein Skalarfeld C^0 , das für jeden Zustandsvektor x angibt, wie sehr die Zustandsvektoren in seiner Umgebung auseinanderstreben.

Definition (Divergenz eines Vektorfeldes) Sei ∇ der Nabla-Operator, dessen Komponenten die partiellen Ableitungsoperatoren des jeweiligen Koordinatensystems sind. Die Divergenz eines Vektorfeld f ist das Skalarfeld des Skalarprodukts

$$\nabla f \equiv \text{div}(f). \quad (2.5)$$

div ist das Operatorsymbol der Divergenz. Gilt $\text{div}(f) = 0$, so heißt das Skalarfeld divergenzfrei bzw. quellenfrei. Gilt $\text{div}(f) = g(x)$ mit $g \in C^1$ und $x \in M$, so heißt das Skalarfeld zustandsabhängig.

Nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichungen sind in den wenigsten Fällen analytisch lösbar; insbesondere solche, die geschlossene Orbits enthalten. So können Lösungen gefunden werden, die nur auf bestimmte Untermengen des Phasenraums beschränkt sind.

Die Anfangszeit kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit zu $t_0 = 0$ gesetzt werden, denn wenn $h(x_0, t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, so ist auch $h(x_0, t + \tau)$ mit $\tau = \text{const}$ eine Lösung. Diese bereits o.g. Homogenität der Zeit folgt aus der Halbgruppeneigenschaft des Flusses.

Die Existenz einer Lösung wird im wesentlichen durch zwei Sätze mit jeweils unterschiedlichen Voraussetzungen sichergestellt. Nach dem Satz von Peano folgt, dass zu einem stetigen Vektorfeld aus einem Anfangswertproblem mindestens eine lokale Lösung existiert, während der Satz von Picard-Lindelöf unter der Voraussetzung der Lipschitz-Stetigkeit zudem auch die Einzigartigkeit dieser Lösung beweist.

Satz (Satz von Picard-Lindelöf) Sei $f : M \rightarrow TM$ ein n -dimensionales C^k -Vektorfeld auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit M mit $k > 0$, so existiert zu dem Anfangswertproblem mit den Anfangswerten $x_0 \in N$ und der Anfangszeit $t_0 \in \mathbb{T}$ ein $\epsilon > 0$ und eine offene Umgebung $U \subset N$ um x_0 , sodass eine eindeutige Lösung $h : N \times [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \rightarrow U$ mit $x_0 = h(x_0, t_0)$ und $N \subseteq M$ existiert.

Da C^k -Vektorfelder auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten immer Lipschitz-Stetig sind, ist die Frage der Eindeutigkeit einer Lösung bereits geklärt, nicht aber die Fortsetzbarkeit einer Lösung für alle Zeiten.

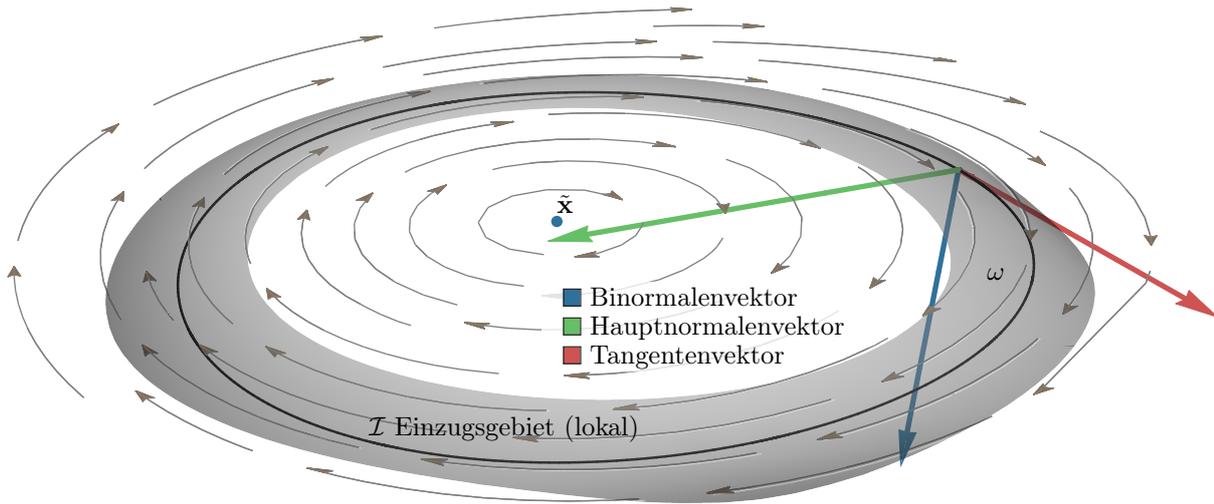


Abb. 2.3.: Darstellung eines geschlossenen Orbits ω (Attraktor) um seinem instabilen Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ mit einem begleitenden Dreibein. Die Integralmannigfaltigkeit \mathcal{I} ist das lokale Einzugsgebiet.

Eine *Fortsetzung* eines Anfangswertproblems ist gegeben, wenn die Lösung $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T} \rightarrow M$ auf ein Zeitintervall $\tilde{\mathbb{T}} \supset \mathbb{T}$ erweiterbar ist, sodass $\tilde{\mathbf{h}}: N \times \tilde{\mathbb{T}} \rightarrow M$ und $\tilde{\mathbf{h}}|_{\mathbb{T}} \equiv \mathbf{h}$ gilt. Demgemäß handelt es sich bei einer maximalen Fortsetzung, d.h. einer nicht-fortsetzbaren Lösung, um eine maximale Integralkurve. Im Folgenden sei daher $\mathbb{T} = [t_0, t_+)$ das maximale Zeitintervall, dann existieren drei mögliche Unterscheidungen von t_+ : (i) Die Lösung $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ existiert für alle Zeiten, sodass $t_+ = \infty$, (ii) die Lösung explodiert nach endlicher Zeit $t_+ < \infty$, sodass $\lim_{t \rightarrow t_+} \|\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)\| = \infty$ oder (iii) die Lösung kollabiert nach endlicher Zeit $t_+ < \infty$ und kommt dem Rand des erweiterten Phasenraums Ω beliebig nah, sodass $\lim_{t \rightarrow t_+} \text{dist}((\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), t), \partial\Omega) = 0$.

2.3. Attraktoren und Einzugsgebiete

Ist $A \subset M$ eine kompakte invariante Menge bezüglich Φ , so heißt diese Menge *anziehend* oder *Attraktor* (lat. „ad trahere“ für „zu sich hin ziehen“), falls eine Umgebung U von A existiert, für die der Abstand zwischen A und jedem unter der Einwirkung des Phasenflusses stehenden Zustands $\mathbf{x} \in V$ einer Menge $V \subset U$ mit positivem Lebesgue-Maß für $t \rightarrow \infty$ gegen null geht, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Phi(\mathbf{x}, t), A) = 0$ [167]. Gilt hingegen $\lim_{t \rightarrow -\infty} \text{dist}(\Phi(\mathbf{x}, t), A) = 0$ so heißt A *abweisend* oder *Repellor*. Ein *Einzugsgebiet* bzw. *Auszugsgebiet* von A ist eine offene Menge $B \subset U$, welche alle Zustände $\mathbf{x} \in M$ enthält die unter dem Phasenfluss für $t \rightarrow \infty$ bzw. $t \rightarrow -\infty$ der Menge A beliebig nah kommen und wegzusammenhängend sind. B wird auch als *Bassin* bezeichnet [84]. Es muss nicht zwingend zu jedem Attraktor oder Repellor genau ein Bassin existieren. So besitzt jeder anziehende geschlossene Orbit eines 2-dimensionalen Systems, der einen instabilen Gleichgewichtspunkt umschließt, zwei Einzugsgebiete², ein Inneres und ein Äußeres, während das innere Einzugsgebiet äquivalent mit dem Auszugsgebiet des Gleichgewichtspunktes ist (siehe Abb. 2.2).

Proposition (Einzugs- und Auszugsgebiete) *Attraktoren sind einem oder mehreren Einzugsgebieten zugehörig zu denen die Attraktorenmenge disjunkt ist. In Analogie sind Repelloren einem oder mehreren Auszugsgebieten zugehörig, zu denen die Repellorenmenge disjunkt ist. Das Einzugsgebiet eines Attraktors kann das Auszugsgebiet eines Repellors sein und umgekehrt.*

²Diese Definition des Einzugsgebiets unterscheidet sich von den üblichen Definitionen in der Literatur, die beispielsweise auf wandernden Mengen oder maßtheoretischen Ansätzen beruhen [154, 167].

2.4. Begleitendes Dreibein

Ist $\gamma: \mathbb{T} \rightarrow M$ eine Integralkurve, so kann nach den frenetschen Formeln eine Orthonormalbasis gefunden werden, die das lokale Verhalten der Integralkurve beschreibt. Statt die Integralkurve über die Zeit $t \in \mathbb{T}$ zu parametrisieren, kann die Bogenlänge $s \in \mathbb{T}'$ als Parametrisierung herangezogen werden. Dazu sei analog zu (2.4)

$$S(t) = \int \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (2.6)$$

die Bogenlängenfunktion $S: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit der Umkehrabbildung $t = S^{-1}(s)$. Dann ist $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(S^{-1}(s))$ die Parametrisierung der Integralkurve nach der Bogenlänge. Gemäß der Kettenregel gilt

$$\tilde{\gamma}'(s) = \left. \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right|_{t=S^{-1}(s)}, \quad (2.7)$$

dabei ist mit $\tilde{\gamma}'$ die Ableitung nach $s \in \tilde{\mathbb{T}}$ und mit $\dot{\gamma}$ die Ableitung nach $t \in \mathbb{T}$ gemeint. Folglich ist $\tilde{\gamma}'(s)$ ein Einheitsvektor, sodass $\mathbf{T}(s) = \tilde{\gamma}'(s)$ im 2- und 3-dimensionalen euklidischen Raum *Einheitstangentenvektor* bzw. im Folgenden nur *Tangentenvektor* genannt wird. Dieser Vektor zeigt in die selbe Richtung wie der *Geschwindigkeitsvektor* $\dot{\gamma}(t)$. Eine weitere Ableitung nach der Bogenlänge ergibt den *Hauptnormalenvektor* $\mathbf{N}(s) = \tilde{\gamma}''(s)/\|\tilde{\gamma}''(s)\|$ der wiederum in die selbe Richtung wie der *Beschleunigungsvektor* $\ddot{\gamma}(t)$ zeigt. $\kappa(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\|$ heißt *Krümmung* der Integralkurve an der Bogenlänge s . Dessen Kehrwert entspricht dem Radius eines Kreises, dessen Krümmung lokal der Krümmung der Integralkurve entspricht. Der Mittelpunkt des Kreises steht dabei auf dem Punkt $\tilde{\gamma}(s) + \mathbf{N}(s)/\kappa(s)$. Das Kreuzprodukt aus Tangential- und Hauptnormalenvektor entspricht dem *Binormalenvektor* $\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$. Auf weitere Definitionen für höher-dimensionale Systeme soll an dieser Stelle verzichtet werden. Zusammen bilden diese Vektoren das *begleitende Dreibein* einer Integralkurve (siehe Abb. 2.3).

Weiterführende Literatur

- ARNOLD et al. „Dynamical Systems III: Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics“ [176]
- LASOTA und MACKAY. „Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics“ [164]
- REITMANN „Reguläre und chaotische Dynamik“ [167]
- STOOP und STEEB „Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen“ [84]
- STROGATZ „Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology chemistry, and engineering“ [165]

3. Deterministische Systeme

Im Sprachgebrauch der dynamischen Systeme ist Determinismus (lat. „determinare“ für „bestimmen“) eine Eigenschaft derjenigen Systeme, die durch ihre *Anfangswerte* für alle Zeiten bestimmt sind (Reproduzierbarkeit). Dies wäre aber nur eine andere Lesart des *Satzes von Picard-Lindelöf*. Denn wenn von allen Zeiten gesprochen wird, dann muss sowohl die Vergangenheit als auch die Zukunft bezüglich der Anfangszeit teil dessen sein, was mit determiniert gemeint ist. Allerdings fallen Limesmengen aus diesem Schema. Ist ein Anfangswert ein Element einer Limesmenge, so sind alle zukünftigen und vergangenen Bilder der entsprechenden Lösung Elemente des geschlossenen Orbits. Demgegenüber stehen jedoch alle denkbaren Anfangswerte außerhalb des Orbits, die je nach Art der invarianten Menge (Attraktor oder Repellor) vorwärts oder rückwärts mit der Zeit $t \rightarrow \infty$ einlaufen und von da an für alle Zeiten in dieser invarianten Menge gefangen sind.

Die klassische Thermodynamik kennt aufgrund dessen eine weitere Spielart. Sie betrachtet Determinismus als diejenige Eigenschaft die es zwar prinzipiell ermöglicht jeden beliebigen Zustand eines Systems zu berechnen, muss jedoch aufgrund der Undurchführbarkeit darauf verzichten, da nie alle notwendigen Anfangswerte bekannt sind und nutzt stattdessen die probabilistische Annahme, dass das statistische Mittel einer Vielzahl von Realisierungen desselben Systems identisch zu einem zeitgemittelten System ist, dessen Anfangswerte bekannt waren und hinreichend lange im thermischen Gleichgewicht bestanden (Ergodenhypothese). Diese Annahme gleicht jedoch der Annahme die MACDONALD 1953 für stochastische Systeme traf [40]. Es stellt sich daher zwangsläufig die philosophische Frage, ob es prinzipiell in der Physik unmöglich ist Ereignisse beliebig genau vorherzusagen und zwar entweder aufgrund der Unbekanntheit aller Anfangswerte oder aufgrund unzulänglicher Theorien. Mögliche Interpretation dieses Problems wurden insbesondere durch die indeterministische Quantenmechanik formuliert: (i) Kopenhagener Interpretation, (ii) Viele-Welten-Interpretation sowie (iii) die De-Broglie-Bohm-Interpretation zu der auch die Thermodynamik gehört, da die Ergodenhypothese ein Teil dieser Interpretation ist.

3.1. Hamilton-Systeme

Die Hamilton-Mechanik erlaubt es die Bewegung im Phasenraum derjenigen Klasse von *konservativen*, d.h. energieerhaltenden, physikalischen Systemen zu beschreiben, welche dem *hamiltonschen Wirkungsprinzip* unterliegen. Die involvierten Teilchen oder Felder nehmen diesem Prinzip zu Folge einen extremalen Wert einer zugehörigen physikalischen Größe an. Der erweiterte Phasenraum Ω setzt sich aus dem euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^{2n} , bezüglich der verallgemeinerten Koordinaten \mathbf{q} und Impulsen \mathbf{p} sowie dem Zeitintervall $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$, zusammen. Ein Zustand im Phasenraum entspricht dabei dem Tupel $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^\top \in \mathbb{R}^{2n}$. Jedes Hamilton-System ist ein dynamisches System $(\mathbb{T}, \mathbb{R}^{2n}, \Phi_H)$ mit dem *hamiltonschen Fluss* Φ_H , welches über eine skalare Funktion $H : \Omega = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, der sogenannten *Hamilton-Funktion*, vollständig beschrieben ist.

Satz (Energiefunktion) *Lässt sich die Hamilton-Funktion in Funktionen, die ausschließlich von ihren zugehörigen Variablen abhängen, additiv separieren und ist das dynamische System autonom, dann spiegelt das Bild von H die Energie E des Systems mit n Freiheitsgraden wieder (hinreichendes Kriterium). Die separierten Funktionen heißen Energiefunktionen.*

Beispiele für eine solche Energiefunktion ist die kinetische Energie $T(\mathbf{p})$, die ausschließlich von den jeweiligen Impulsen \mathbf{p} abhängt. Weitere Energiefunktionen sind die potentielle Energie $V(\mathbf{q})$ (abhängig vom Ort \mathbf{q}), elektrische Energie (abhängig von Ladungen) oder magnetische Energie (abhängig von magnetischen Flüssen). D.h., ist $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$ so gilt $H = E$.

3. Deterministische Systeme

Die Bewegungsgleichungen werden durch Variationsrechnung unter dem hamiltonschen Wirkungsprinzip als *kanonische Gleichungen* bezeichnet¹

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \quad (3.1)$$

Es handelt sich dabei um einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung, zu deren Lösungen $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T}$ im Falle des o.g. Satzes über Energiefunktionen sich für jede Energie E *Energieniveaumengen*² $\mathbb{E} = \{\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) | H(\mathbf{h}) = E\}$ definieren lassen [190]. Die Energie $E = \text{const}$ wird durch die Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in N \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ festgelegt.

Seien $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ beliebige differenzierbare Funktionen, genannt *Observablen*, dann lässt sich ein bilinearer Differentialoperator definieren

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \quad (3.2)$$

welcher *Poisson-Klammer* genannt wird und mit diesem der Phasenraum eine *symplektische Mannigfaltigkeit* $(\Omega, \{\cdot, \cdot\})$ ist. Die Zeitentwicklung einer Observablen f , einer sogenannten *Phasenraumfunktion*, entspricht dann

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \quad (3.3)$$

Satz (Erhaltungsgröße) *Eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Erhaltungsgröße, falls die partielle zeitliche Ableitung von f in Summe mit der Poisson-Klammer bezüglich der Hamilton-Funktion H null wird, d.h. falls $\partial f / \partial t + \{f, H\} = 0$ [187].*

Sind f und g Erhaltungsgrößen, so sind auch alle Linearkombinationen Erhaltungsgrößen. Insbesondere ist dann auch die Poisson-Klammer $\{f, g\}$ eine (unabhängige) Erhaltungsgröße. Als Beispiel dient die Drehimpulserhaltung. Sind die Drehimpulse in zwei Raumrichtungen erhalten, so ist auch die dritte Raumkomponente des Drehimpulses, die sich aus der Poisson-Klammer ergibt, erhalten. Verschwindet die Poisson-Klammer zwischen zwei Phasenraumfunktionen, d.h. gilt $\{f, g\} = 0$, so stehen diese in *Involution*, einer selbstinversen Abbildung, zueinander [187].

Ein notwendiges Kriterium stellt die *Inkompressibilitätsbedingung* dar. Diese Bedingung fordert, dass ein Vektorfeld $\mathbf{f}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ aus den rechten Seiten von (3.1) divergenzfrei ist, sodass folgt

$$\text{div}(\mathbf{f}) = 0. \quad (3.4)$$

3.1.1. Satz von Liouville

Sei $N \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge des Phasenraums. Unter der Wirkung von Φ_H werden alle Zustände $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in N$ gemäß den Bewegungsgleichungen (3.1) längs ihrer Bahnen transportiert. Für jeden Zeitschritt $t \in \mathbb{T}$ existieren somit neue Teilmengen N_t des Phasenraums, die transportierte Zustände enthält. Die Menge N sei daher o.B.d.A. die *Anfangsmenge*, deren Elemente die Anfangswerte $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ sind, sodass gilt $N_t = \Phi_H^t N$ und $N_0 = N$. Das Lebesgue-Integral unter dem Lebesgue-Maß [175] dieser Mengen entspricht dem *Phasenraumvolumen*

$$V(t) = \int_N J(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0 \quad (3.5)$$

mit $J(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) = \det(\partial \mathbf{h} / \partial (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0))$ als *Jacobi-Determinante* zur Umkehrtransformation

$$d\mathbf{q} d\mathbf{p} = J(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0, t) d\mathbf{q}_0 d\mathbf{p}_0. \quad (3.6)$$

Aus der Inkompressibilitätsbedingung (3.4) folgt somit, dass das Phasenraumvolumen für Hamiltonssysteme für alle Zeiten erhalten bleibt, d.h. es ist inkompressibel und es gilt $\dot{V} = 0$. Insbesondere ist $\dot{J} = 0$

¹Es ist in der Literatur üblich, die Argumente von Funktion, die der Hamilton-Mechanik nahe stehen, wegzulassen. Diese Ungenauigkeit provoziert jedoch die Nichtunterscheidung zwischen einer Funktion und ihrem Bild. Es ist dem Leser überlassen, die korrekte Unterscheidung zu erkennen.

²In der Einleitung wurde von dem Synonym *Energieschalen* gesprochen.

identisch mit der Inkompressibilitätsbedingung (für den Beweis siehe auch (3.42) und (3.56) oder siehe [187]). Das bedeutet, dass eine Erhöhung aller kanonischen Impulse eine Komprimierung der Ortsvariablen zur Folge hat und eine Verringerung aller Impulse zu einer Expansion der Ortsvariablen führt.

Satz (Satz von Liouville) *Ist (\mathbb{T}, M, Φ_H) ein Hamilton-System, dann bleibt jedes Phasenraumvolumen einer Teilmenge N des Phasenraums M unter seiner Zeitentwicklung $\Phi_H^t N$ erhalten.*

Sei $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Dichteverteilung, genannt *Phasenraumdicke*, die die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten eines Ensembles von gleichartigen Teilchen wiedergibt, dann ist diese Dichte nach dem *Satz von Liouville* eine Erhaltungsgröße und es folgt nach Gleichung (3.3) die *Liouville-Gleichung*

$$0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \{p, H\} \quad \text{bzw.} \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{f} \operatorname{grad}(p). \quad (3.7)$$

Ist $p_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = p(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t_0)$ die Anfangsverteilung, so beschreibt die Liouville-Gleichung die zeitliche Entwicklung dieser Phasenraumdicke für ein Hamilton-System und ist als *Kontinuitätsgleichung* zu verstehen. In der Literatur wird häufig die Liouville-Gleichung über die Definition des Liouville-Operators $\hat{L} = \{\cdot, H\}$ formell umgeschrieben zu $\partial p / \partial t = -\hat{L}p$. Der Liouville-Operator wird auch Poisson-Operator genannt [184] und ist anti-hermitesch für divergenzfrie Systeme. Da die Eigenwerte des Liouville-Operators für Hamilton-Systeme folglich reell sind, können nur Oszillationen jedoch keine Relaxationseffekte beschrieben werden. Die Lösungen dieser Liouville-Gleichung sind stationär.

Der *Satz von Liouville* findet insbesondere bei dem *poincaréschen Wiederkehratz* Anwendung [190] und ist Voraussetzung für die BBGKY-Hierarchie, einer Integrodifferentialgleichungskette für Phasenraumdichten die aus der Liouville-Gleichung stammt [60]. Der genaue Zusammenhang der Mengen M und N wird im Abschnitt 3.7 detailliert behandelt. Ein differentialgeometrischer Beweis für den *Satz von Liouville* findet sich in [187] und in den Arbeiten von STEEB [79, 80].

Proposition (Konservative Systeme) *Nicht jede Hamilton-Funktion entspricht einer Energiefunktion, allerdings ist ein konservatives System dessen energetische Reservoirs (Energiefunktionen) nicht gekoppelt sind stets ein Hamilton-System (hinreichendes Kriterium). Die Divergenzfreiheit des Vektorfeldes ist hingegen ein notwendiges Kriterium für Hamilton-Systeme jedoch nicht hinreichend wie Gegenbeispiele zeigen (z.B. in Abschnitt 4.2.4).*

3.1.2. Kanonisch-dissipative Systeme

Dissipation (lat. „dissipatio“ für „Zerstreuung“) wird je nach Teilgebiet der Physik unterschiedlich definiert. So ist Dissipation in thermodynamischen Systemen meist gleichbedeutend mit dem Anstieg der thermodynamischen Entropie [220], und zwar auch für isolierte, energieerhaltende Systeme [186]. Gegenbeispiele finden sich bei KLAGES [132]. Dissipation und Energieerhaltung stehen demzufolge nicht zwangsläufig in einem Widerspruch. Die Entropie ist für dynamische Systeme nur in einigen Fällen definierbar [228] (siehe auch Abschnitt 3.10 zur dynamischen Entropie). Daher wird Dissipation in dynamischen Systemen unter anderem durch den Begriff der absorbierenden Mengen [167] oder über das zeitliche Mittel der Divergenz eines Vektorfeldes beschrieben [84].

Definition (Dissipation (Dynamische Systeme)) *Dissipation in dynamischen Systemen entspricht einer Kontraktion eines Phasenraumvolumens.*

Eine hamiltonsche Beschreibung von dissipativen Systemen ist aufgrund des *Satzes von Liouville* widersprüchlich, sodass es einer Anpassung der Mannigfaltigkeit, die den Phasenraum definiert und einer Anpassung der Bewegungsgleichungen sowie insbesondere der Abkehr vom Gedanken eines inkompressiblen Phasenraumvolumens bedarf. Letzteres ohne vorauszusetzen, dass Dissipation zur Kompression von Phasenraumvolumen führt. Der Phasenraum von nicht-konservativen Systemen kann beispielsweise mit der Kontaktgeometrie (dem Gegenstück der symplektischen Mannigfaltigkeit, siehe dazu Abschnitt 3.8 über Maßtheorie sowie [196]) oder mit einer metrischen Geometrie [186] ausgestattet sein.

Als ein mögliches Beispiel für die Anpassung der Bewegungsgleichungen werden im Folgenden kanonisch-dissipative Systeme behandelt, dessen Benennung *kanonisch-dissipativ* sich noch als ungünstig

3. Deterministische Systeme

herausstellen wird. Dies sind dynamische Systeme, die die kanonischen Bewegungsgleichungen der Hamilton-Mechanik mit kanonisch-dissipativen Termen erweitern

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad \text{und} \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - g(H) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}. \quad (3.8)$$

Dabei ist die *Dissipationsfunktion* g eine reellwertige Funktion, die ausschließlich von den Invarianten des hamiltonschen Flusses Φ_H abhängt. Eine Erweiterung beider Gleichungen wäre ebenso denkbar. Diese Idee geht auf HAKEN [215] und GRAHAM [224] zurück. Da diese Systeme nicht weiter energieerhaltend sein müssen, folgt aus

$$\frac{dH}{dt} = -g(H) \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 \neq 0, \quad (3.9)$$

dass in den Unterräumen des Phasenraums für die $g(H)$ positiv ist und falls H eine Energiefunktion darstellt, Energie dissipiert wird, während für den Fall, dass $g(H)$ negativ ist, Energie *akkumuliert* (lat. „accumulare“ für „anhäufen“) wird. Existiert für eine beliebige Dissipationsfunktion eine Nullstelle zu einer Energie E_0 , d.h. $g(E_0) = 0$, so wird die Energie für Zustände mit den Anfangsbedingungen $E > E_0$ solange dissipiert, bis das Energieniveau $E = E_0$ erreicht ist, während umgekehrt für Anfangsbedingungen $E < E_0$ entsprechend Energie akkumuliert wird. Demnach wirkt dieses Energieniveau als ein Attraktor. Existieren mehrere solcher Nullstellen so muss die gesamte Dynamik des Systems betrachtet werden. Diejenige Energie zu der sowohl eine Nullstelle der Dissipationsfunktion existiert als auch Minimal ist, wird *Grundzustand des Systems* genannt. Für Anfangsbedingungen $E = E_0$ verbleibt das System auf dem Energieniveau.

Daraus geht hervor, dass Attraktoren kanonisch-dissipativer Systeme keinen Energieaustausch zulassen und die Dynamik auf diesen Mengen konservative Systeme sind. Folglich können Systeme dieser Art in der Natur nicht existieren, da diese vollständige Entkopplung mit der Umgebung des Systems nach den Gesetzen der Thermodynamik nicht zulässig ist. Dennoch kann diese Systemklasse für dynamische Systeme mit einer sehr hohen Güte, wie beispielsweise einem Schwingquarz, d.h. einem Oszillator mit sehr geringer *Dämpfung*, in guter Näherung sinnvoll sein.

Auf der anderen Seite wird für $E < E_0$ Energie akkumuliert. Diese Energie wird demzufolge benötigt um einen Attraktor zu erreichen und nicht an die Systemumgebung abgegeben sondern in die Bewegungsenergie übergeben oder an das System gebunden. Kanonisch-Dissipative Systeme sind daher im Allgemeinen nicht ausschließlich dissipativ sondern in Teilen auch akkumulativ. Kanonisch-dissipative Systeme sollten demzufolge besser kanonisch-erweiterte Systeme heißen.

Definition (Akkumulation (Dynamische Systeme)) *Akkumulation in dynamischen Systemen entspricht einer Expansion eines Phasenraumvolumens.*

Die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, das sich aus den rechten Seiten von (3.8) ergibt, berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{f}) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \left(g(H) \frac{\partial H(\mathbf{q}, \mathbf{p})}{\partial p_i} \right) \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \left(g'(H) \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 + g(H) \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit $g'(H)$ als der nach ihrem Argument abgeleiteten Dissipationsfunktion. Daraus geht hervor, dass ein Phasenraumvolumen $V(t)$ aus (3.5) sich ggf. auch dann zeitlich ändert, wenn ein Energieniveau $g(E_0) = 0$ erreicht wurde.

Definition (Senken und Quellen) *Eine wegzusammenhängende Teilmenge des Phasenraums wird Senke genannt, sofern für alle Punkte dieser Teilmenge $\operatorname{div}(\mathbf{f}) < 0$ gilt. Gilt für alle Punkte hingegen $\operatorname{div}(\mathbf{f}) > 0$, so wird diese Teilmenge Quelle genannt.*

Senken und Quellen beeinflussen folglich ein Phasenraumvolumen, indem diese das Volumen stauchen oder strecken. Dieser Stauch- und Streckvorgang ist also die Folge der Dissipation und Akkumulation bezüglich des Phasenraumvolumens und nicht zwangsläufig bezüglich der Energie, denn $\operatorname{div}(\mathbf{f}) < 0$ ist

lokal kein hinreichendes Kriterium dafür, dass Energie dissipiert wird. Dies ist nur für Systeme möglich, bei denen Terme in (3.9) durch die Divergenz bzw. aus Termen in (3.10) ersetzt werden können und H einer Energie entspricht. Tatsächlich können Teilmengen des Phasenraums existieren auf denen Energie dissipiert wird und dennoch das Phasenraumvolumen akkumuliert oder erhalten bleibt. Diese Teilmengen werden durch das Nullstellenproblem³

$$\sum_{i=1}^n \left(\operatorname{sgn} \left(g(H) \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 \right) + \operatorname{sgn} \left(g'(H) \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 + g(H) \frac{\partial^2 H}{\partial p_i^2} \right) \right) = 0 \quad (3.11)$$

eingegrenzt, wobei $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \in \mathbb{Z}$ die Vorzeichenfunktion darstellt. Daraus resultiert, dass aus der Divergenz jedes kanonisch-dissipativen Hamilton-Systems nur dann ein Rückschluss auf die Dissipation von Energie erfolgen kann, wenn die Dissipationsfunktion konstant ist und die Hamilton-Funktion, als Energiefunktion, aus höchstens quadratischen Impulstermen besteht oder kein Nullstellenproblem gemäß (3.11) existiert.

Der Übergang eines dissipativen Systems in ein konservatives System nach dem Erreichen eines Energieniveaus E_0 für das gilt $g(E_0) = 0$, zeigt, dass die Energie auf einem Attraktor erhalten bleibt, jedoch nicht zwangsläufig die Inkompressibilitätsbedingung $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0$ vorausgesetzt werden kann. Ist beispielsweise die Hamilton-Funktion in der Dissipationsfunktion linear vertreten, so folgt $g'(H) = \operatorname{const}$ und somit auch $g'(E_0) = \operatorname{const}$, obwohl $g(E_0) = 0$ gilt. Da die Inkompressibilitätsbedingung eine notwendige Bedingung für Hamilton-Systeme darstellt, ist die Dynamik auf einem Attraktor eines kanonisch-dissipativen Systems nur dann ein Hamilton-System wenn $g(E_0)$ ein Sattelpunkt ist. D.h. im Umkehrschluss, dass zwar eindeutige Lösungen eines dynamischen Systems gemäß dem *Satz von Picard-Lindelöf* existieren, diese jedoch im Allgemeinen nicht eindeutig einem physikalischen System zugeordnet werden können. In Abschnitt 4.2.4 wird dieses Verhalten anhand des 2-dimensionalen Rayleigh-Van der Pol-Systems gezeigt, dessen Lösungsmenge des Attraktors identisch zur Lösungsmenge eines harmonischen Oszillators ist und dennoch kein Hamilton-System darstellt.

Proposition (Konservative Teilmengen) *Es existieren dynamische Systeme die auf Teilmengen des Phasenraums konservativ (energieerhaltend) sind und dennoch Phasenraumvolumen strecken und stauchen. Demzufolge ist nicht jedes konservative System ein Hamilton-System. Das Nullstellenproblem (3.11) stellt einen Zugang dar, in welchem Zusammenhang Dissipation von Energie und Dissipation (Kontraktion) eines Phasenraumvolumens stehen.*

Weiterführende Literatur

- EBELING et al. „Statistical Mechanics of Canonical-Dissipative Systems and Applications to Swarm Dynamics“ [91]
- EBELING et al. „Statistical distributions for Hamiltonian systems coupled to energy reservoirs and applications to molecular energy conversion“ [93]
- EBELING & SOKOLOV „Statistical Thermodynamics and Stochastic Theory of Nonlinear Systems Far from Equilibrium“ [92]
- KLAGES „Microscopic Chaos, Fractals, and Transport in Nonequilibrium Steady States“ [132]
- STEEB „Nonlinear systems of differential equations involving limit cycles and conservative Hamiltonian systems“ [78]

3.1.3. Nambu-Systeme

In der Hamiltonmechanik kann jeder Punkt im Phasenraum durch einen Vektor $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})^\top$ beschrieben werden, sodass die Bewegungsgleichungen (3.1) gelten. Im Allgemeinen lassen sich somit die kanonischen Gleichungen umschreiben zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{P} \operatorname{grad}(H), \quad (3.12)$$

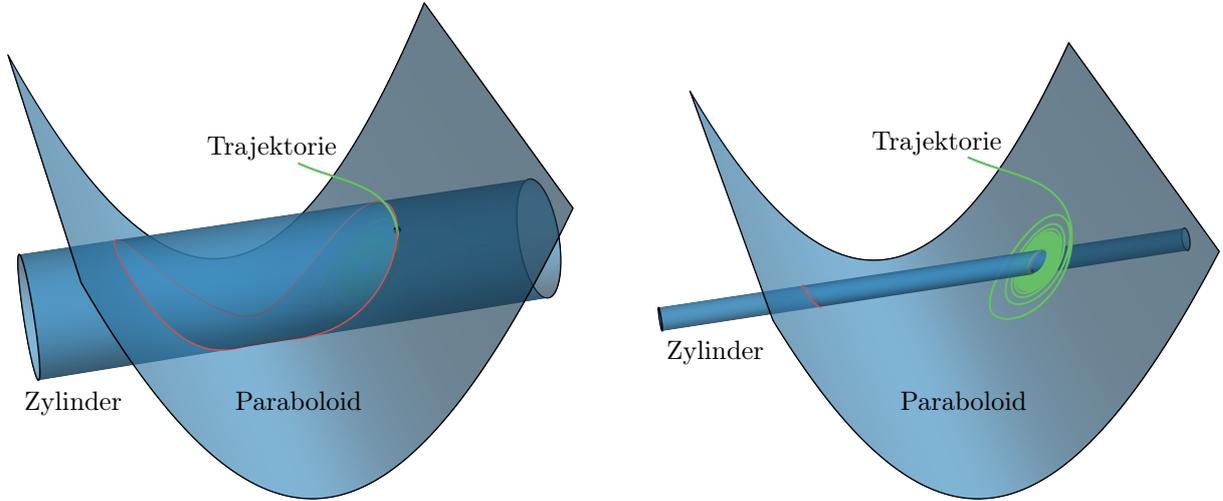
wobei \mathcal{P} eine symplektische Matrix darstellt und das System für $\det(\mathcal{P}) \neq 0$ kanonisch ist. Allerdings ist die Regularität kein notwendiges Kriterium, sodass für eine singuläre *Poisson-Matrix*, d.h. $\det(\mathcal{P}) =$

³Es sei angemerkt, dass das *Nullstellenproblem* zwei physikalische Größen mit unterschiedlicher Dimension vergleicht und nur deshalb ausführbar ist, weil die Vorzeichenfunktion auf dimensionslose Zahlen abbildet.

3. Deterministische Systeme

0, nicht verschwindende Eigenvektoren zum Eigenwert null existieren. Diese Eigenvektoren können als Gradienten von skalaren Funktionen $C_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, genannt *Casimir-Funktionen*, ausgedrückt werden

$$\mathcal{P} \text{grad}(C_i) = 0. \quad (3.13)$$



(a) $t \gtrsim t_0$: Die Schnittmenge ist noch zusammenhängend, der Durchmesser des Zylinders wird mit der Zeit kleiner, sodass die Schnittmenge anschließend aus zwei geschlossenen Kurven besteht.

(b) $t \gg t_0$: Das Nambu-System hat sich auf einen stabilen Grenzyklus eingeschwungen. Die Anfangswerte bestimmen dabei auf welchen der beiden Grenzyklen das System zulieft.

Abb. 3.1.: Geometrisch anschauliches Beispiel eines Nambu-Systems: Die Schnittmenge des Zylinders ($H_1 = (y^2 + (z - r)^2)/2$) und des parabolischen Zylinders ($H_2 = \sigma z - x^2/2$) bestimmt den dynamischen Verlauf des Systems (siehe Abschnitt 4.2.6).

Für eine beliebige Observable $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ folgt $\{f, C_i\} = 0$ und insbesondere $\{H, C_i\} = 0$. Damit sind Casimir-Funktionen *Invarianten der Bewegung*, welche das dynamische Verhalten des Systems beeinflussen. Die offensichtliche Schwäche der Hamilton-Mechanik ist es also, dass diese Invarianten zwar bekannt und ableitbar sind, jedoch nicht in die Beschreibung der Dynamik eingehen. NAMBU [185] erweiterte aus diesem Grund die bilineare Poisson-Klammer zu einer multilinearen Nambu-Klammer. In dieser erweiterten Theorie werden die Bewegungsgleichungen als ein n -dimensionales Kreuzprodukt der Gradienten der Invarianten beschrieben

$$\dot{x}_i = \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=1}^n \varepsilon_{i, j_1, \dots, j_{n-1}} \frac{\partial H_1}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_{j_{n-1}}} = f_i, \quad (3.14)$$

wobei $\varepsilon_{i, j_1, \dots, j_{n-1}}$ der Levi-Civita-Tensor n -ter Ordnung und $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^\top$ das Vektorfeld ist. Für eine beliebige differenzierbare Funktion $\mathbf{x} \mapsto F$ gilt dann die Definition der Nambu-Klammer

$$\dot{F}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(F, H_1, \dots, H_{n-1})}{\partial(x_1, \dots, x_{n-1})} =: \{F, H_1, \dots, H_{n-1}\}. \quad (3.15)$$

Die Nambu-Klammer ist antisymmetrisch unter Vertauschung und erfüllt die verallgemeinerte Jacobi-Identität. Aus der Divergenzfreiheit des Vektorfeldes, d.h. $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$, folgt, dass der *Satz von Liouville* seine Gültigkeit behält.

Eine Eigenschaft des Formalismus ist die einfache geometrische Interpretation des dynamischen Verhaltens. Die Dynamik eines Nambu-Systems findet an den Schnittmengen der Invarianten statt. Ist \mathbf{h} eine Lösung des Nambu-Systems, so gilt

$$H_i|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} = c_i = \text{const} \quad (3.16)$$

und demnach ist die Lösung eindeutig durch die Anfangsbedingungen gegeben. In den einfachsten Fällen handelt es sich bei den Hyperflächen der Invarianten um Sphären, Zylinder oder Paraboloiden.

Analog zu kanonisch-dissipativen Hamilton-Systemen lassen sich Nambu-Systeme um einen dissipativen Term erweitern (siehe [193–195, 133]). Daraus resultiert, dass die Konstanten c_i nun zu zeitabhängigen Funktionen werden $\tilde{c}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, die die geometrische Form der ehemals Invarianten verändern. Die Topologie der geometrischen Form bleibt in aller Regel erhalten, so variiert eine Kugel oder ein Zylinder im Radius und ein Paraboloid in seiner Stauchung.

Proposition (Generierung von geschlossenen Orbits) *Mit einer geeigneten Dissipationsfunktion lassen sich mit der Nambu-Mechanik in geometrisch anschaulicher Weise dynamische Systeme erstellen, die einen geschlossenen oder mehrere geschlossene Orbits aufweisen.*

In Abschnitt 4.2.6 wird die Liouville-Dynamik des in Abb. 3.1 dargestellten 3-dimensionalen kanonisch-dissipativen Nambu-Systems als Schnittmenge eines Zylinders und Paraboloids untersucht.

Weiterführende Literatur

- MATHIS & STAHL „Oscillator synthesis based on Nambu mechanics with canonical dissipative damping“ [133]
- MATHIS & MATHIS „Dissipative Nambu systems and oscillator circuit design“ [105]
- MATHIS & MATHIS „4-Dimensional Polynomial Dynamical Systems with Prescribed Algebraic Limit Cycles using Nambu Brackets“ [106]
- NAMBU „Generalized Hamiltonian Dynamics“ [185]

3.2. Von integren zu nicht-integren Systemen

Transformationen der Form

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \text{und} \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (3.17)$$

werden kanonische Transformationen genannt, wenn diese die kanonischen Bewegungsgleichungen (3.1) forminvariant lassen. Ziel ist es dabei, die Hamilton-Funktion zu vereinfachen und von einer oder mehreren Variablen unabhängig zu machen. Eine notwendige wie auch hinreichende Bedingung für eine kanonische Transformation ist, dass die entsprechende Jacobi-Matrix $\mathbf{J}_{\mathbf{X}} = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}$ mit $\mathbf{X} = (\mathbf{Q}, \mathbf{P})^\top$ symplektisch ist [184]. Das Volumenelement ist gegenüber einer kanonischen Transformation invariant, da die Jacobi-Determinante eins ist. Der Satz von Liouville bleibt weiterhin gültig. Allerdings ändern sich im Allgemeinen die Randbedingungen.

Die neue Hamilton-Funktion $\tilde{H} = H + \partial F / \partial t$ ist durch eine erzeugende Funktion F festgelegt. Insbesondere ist H gegenüber der von F erzeugten Transformation invariant oder in Umkehrung, F invariant gegenüber der von H erzeugten Bewegung [184]. Dabei ist die Erzeugende stets von n alten und n neuen Koordinaten sowie ggf. der Zeit abhängig, sodass entweder die vier Grundtypen $F_1(q, \mathbf{Q}, t)$, $F_2(q, \mathbf{P}, t)$, $F_3(p, \mathbf{Q}, t)$ und $F_4(p, \mathbf{P}, t)$ oder Mischformen auftreten können. Zu jeder Erzeugenden gehört ein Satz von kanonischen Bewegungsgleichungen die sich im Vorzeichen unterscheiden. Beispiele für kanonische Transformationen sind die identische Transformation, die Punkttransformation oder die mechanische Eichtransformation [189].

Im Hamilton-Jacobi-Formalismus wird nun eine kanonische Transformation gesucht, die zu zeitlich konstanten Variablen α_i führt. Dieses Ziel wird erreicht, falls die neue Hamilton-Funktion für alle Zeiten null ist, d.h. $\tilde{H} = 0$, was durch Integration der neuen kanonischen Bewegungsgleichungen sofort ersichtlich wird.

Definition (Integren Systeme) *Ein Hamilton-System mit n Freiheitsgraden heißt integren, wenn n unabhängige zueinander in Involution stehende Erhaltungsgrößen α_i existieren.*

Die zu dieser nichtlinearen partiellen Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung erster Ordnung gehörenden Erzeugende ist die hamiltonsche Wirkungsfunktion S für ein System, dass zur Startzeit die Anfangswerte erfüllt. Handelt es sich um ein konservatives System, ist die Energie $H = E$ des Systems bereits eine dieser Erhaltungsgrößen, sodass folglich jedes 1-dimensionale konservative System integren ist. Zudem ist jedes separierbare System integren, sodass $\alpha_i = E_i$ und $E = \sum_i E_i$ die Gesamtenergie darstellt.

3. Deterministische Systeme

Die Mannigfaltigkeit auf der die gebundene Bewegung eines integrablen Systems stattfindet, ist eine zum Phasenraum n -dimensionale kompakte Untermannigfaltigkeit $U \subset M$, die diffeomorph zu einem n -Torus ist. Auf dem Tangentialbündel dieses *invarianten Torus* existieren n unabhängige, global stetige zu den Erhaltungsgrößen α_i gehörende Vektorfelder $\mathbf{f}_i = (\partial_{p_1}, \dots, \partial_{p_n}, -\partial_{q_1}, \dots, -\partial_{q_n})^\top \alpha_i$. Auf dieser Mannigfaltigkeit existieren n nicht ineinander überführbare elementare Schleifen \mathcal{C}_i . Deren Parametrisierung sind die auf Kreise abbildbaren Winkelvariablen ϕ_i und haben den jeweiligen kanonisch konjugierten Impuls, d.h. die jeweilige Wirkungsvariable J_i , als Radius.

Definition (Integrable Systeme (periodisch)) *Ein Hamilton-System heißt integrabel, wenn eine kanonische Transformation existiert, die zu einer ausschließlich von den Wirkungsvariablen J_i abhängigen Hamilton-Funktion $\tilde{H}(J_i)$ führt.*

Mit dieser Definition wird also die Bedingung, dass die neue Hamiltonfunktion null sei, abgeschwächt. Es reicht aus, wenn die neue Hamiltonfunktion konstant ist. Da die Wirkungsvariablen als Funktion der Erhaltungsgrößen α ebenfalls Erhaltungsgrößen darstellen, folgt aus den kanonischen Gleichungen durch Integration die Lösung der Winkelvariablen zu $\phi_i(t) = \omega_i t + \phi_i(0)$ mit ω_i als Kreisfrequenz der *Libration* bzw. *Rotation* und $\phi_i(0)$ als Anfangswert. Diese triviale Integration ist der Grund für die Benennung von integrablen Systemen. Die dazu notwendige kanonische Transformation wird durch die Erzeugende $F_2 = S$ sichergestellt.

Stellt das Hamilton-System ein *Integral der Bewegung* dar, d.h., ist die Hamilton-Funktion nicht explizit zeitabhängig, so verbleibt die zeitliche Dynamik in der Wirkungsfunktion $S: \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ und aus der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung folgt die charakteristische Wirkung $W(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = S(\mathbf{q}, \mathbf{P}, t) + E(\alpha)t$ (auch *verkürzte Wirkung* genannt) mit E als Energie bzw. als Funktion der Erhaltungsgrößen.

Mit der Darstellung in Winkel- und Wirkungsvariablen ist die Aufteilung in kinetischer und potentieller Energie verschwunden. Dies stellt den enormen Vorteil der integrablen Systeme dar, da nun von einer Gesamtenergie E gesprochen und zu jeder separierten Gleichung eine wohldefinierte Teilenergie E_i zugeordnet werden kann. Zudem sind alle Frequenzen des Systems bekannt und müssen nicht explizit berechnet werden. Allerdings ist der gesamte dynamische Verlauf ausschließlich vom Anfangszustand abhängig und somit auch der Endzustand. In der Tat decken die integrablen Systeme nur einen Teil der für die Physik interessanten dynamischen Systeme ab [220]. So konnte erst BRUNS [6], später POINCARÉ [8] zeigen, dass das Drei-Körper-Problem nicht zu dieser Systemklasse gehört [16].

Proposition (Energie von integrablen Systemen) *Integrable Systeme erlauben eine Einteilung der Energie bezüglich der separierten Bewegungsgleichungen. Mit (3.5) lässt sich zu jeder Teilenergie ebenso ein Teilvolumen des Phasenraumvolumens zur Anfangszeit zuordnen. Auf diese Weise kann die Bewegung des Phasenraumvolumens differenziert den separierten Bewegungsgleichungen zugeordnet werden.*

POINCARÉ zerlegte ein dynamisches System in einen integrablen Anteil mit der freien Hamilton-Funktion $H_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und in einen Wechselwirkungsanteil $V(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{J})$ zu $H = H_0 + \lambda V$ mit λ als Kopplungskonstante. Er zeigte mit Hilfe dieses Störungsansatzes, indem er nach einer neuen Wirkungsvariablen als Funktion von $\boldsymbol{\phi}$ und \mathbf{J} suchte und welche als Potenzreihe in λ ausgedrückt werden kann, dass im Allgemeinen keine kanonische Transformation existiert, die zu zyklischen Variablen führt. Dieses Ergebnis ist wenig überraschend, hätte es doch bedeutet, dass jede Bewegung wechselwirkender Teilchen in freie Bewegungen transformiert werden könnte. Selbstorganisierende Systeme, wie das *Bénard-Experiment* (siehe Abb. 3.9) oder das Leben könnte es nicht geben. Weiterhin zeigte POINCARÉ, dass die Erweiterung eines integrablen Systems mit den ungestörten Frequenzen $\boldsymbol{\omega}$ zu unerwünschten Resonanzen $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ mit $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ führt. Eine Weiterführung dessen ist durch das KAM-Theorem beschrieben. Es sagt aus, dass für kleine Störungen die meisten von den Anfangswerten abhängigen, invarianten Tori deformiert werden und die quasiperiodischen Trajektorien sich auf diesen Tori dicht im Sinne der Ergodentheorie gemäß Abschnitt 3.8 wickeln (siehe Abb. 3.2a). Siehe für weiterführende Begriff bei ARNOLD [187].

Aus diesen Überlegungen folgt, dass elektrische Oszillatoren keine integrablen Systeme darstellen, da elektrische Oszillatoren weder energieerhaltend noch von den Anfangsbedingung abhängen dürfen, da (fast) jeder Anfangswert zu einer stabilen Oszillation führen soll (siehe Abschnitt 3.6).

Proposition (Energie von nicht-integrablen Systemen) *Elektrische Oszillatoren sind nicht-integrabel. Im Allgemeinen existiert keine Einteilung der Gesamtenergie bezüglich der Bewegungsgleichungen. Zwar kann die Dynamik eines Phasenraumvolumens den Bewegungsgleichungen zugeordnet werden, jedoch kann im Sinne der integrablen Systeme kein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen Energie und Phasenraumvolumen gefunden werden.*

3.3. Stabilitätsbegriffe

Im Folgenden sollen verschiedene Stabilitätsbegriffe aus der Literatur wiederholt werden.

Sei ein n -dimensionales, *autonomes* System gegeben, dass über die explizite, gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3.18)$$

mit glattem Vektorfeld \mathbf{f} und $\mathbf{x} \in M$ beschrieben wird. Ein *Gleichgewichtspunkt* $\tilde{\mathbf{x}}$ ist ein Fixobjekt der Dimension 0 für das gilt $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$. Es handelt sich also um eine zeitunabhängige Lösung der Differentialgleichung. Um die Stabilität von Gleichgewichtspunkten zu untersuchen, nutzte LJAPUNOV [161] eine differenzierbare Funktion, welche entlang der Integralkurven streng monoton fällt.

Definition (Ljapunov-Funktion) *Sei $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $\Phi(\mathbf{x}, t)$ der (lokale) Fluss eines dynamischen Systems, sodass L die Richtungsableitung entlang eines Orbits ist, d.h. $\dot{L}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}L(\Phi(\mathbf{x}, t))\big|_{t=0}$, dann heißt L Ljapunov-Funktion.*

Für einen Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} \in U \subset M$ in einer offenen Umgebung U sei daher $L(\tilde{\mathbf{x}}) = 0$ und für alle $\mathbf{x} \in U \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ sei $L(\mathbf{x}) > 0$. Dann ergeben sich drei Stabilitätsfälle: (i) $\tilde{\mathbf{x}}$ ist *stabil*, falls $\dot{L}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U$, (ii) $\tilde{\mathbf{x}}$ ist *asymptotisch stabil*, falls $\dot{L}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ oder (iii) $\tilde{\mathbf{x}}$ ist *instabil*, falls $\dot{L}(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in U \setminus \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ [166, 173].

Da \mathbf{f} im Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ differenzierbar ist, d.h. eine lineare Abbildung $\mathbf{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $\mathbf{f}(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{f}_{\text{nl}}: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\| = \mathbf{0}$, kann das System (3.18) o.B.d.A. im Punkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ linearisiert werden zu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Ist $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \hat{D}\mathbf{f}$ die *Jacobi-Matrix* oder *Funktionalmatrix*, dann gilt $\mathbf{A} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$. Haben alle Eigenwerte der $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} nicht-verschwindende Realteile, dann heißt dieser Gleichgewichtspunkt *hyperbolisch* oder *nicht-degeneriert*, andernfalls *nicht-hyperbolisch*, *elliptisch* oder *degeneriert*.

Satz (Satz von Hartman-Grobman) *Das dynamische Verhalten in der Umgebung eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes, gleicht dem dynamischen Verhalten des linearisierten Systems [138, 139].*

Seien die Glieder der Taylorentwicklung des nichtlinearen Vektorfeldes um den Gleichgewichtspunkt

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{6}\mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, \mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^4) \quad (3.19)$$

multilineare Funktionen der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} (x_k - \tilde{x}_k)(y_l - \tilde{x}_l) \\ \mathbf{c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \sum_{k,l,m=1}^n \frac{\partial^3 \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})}{\partial \xi_k \partial \xi_l \partial \xi_m} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}} (x_k - \tilde{x}_k)(y_l - \tilde{x}_l)(z_m - \tilde{x}_m), \end{aligned} \quad (3.20)$$

dann existiert zur linearen Abbildung \mathbf{A} ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte $\lambda_{\pm} = \pm j\omega_0$ mit den Eigenvektoren \mathbf{e} und $\bar{\mathbf{e}}$. Seien \mathfrak{a} sowie $\bar{\mathfrak{a}}$ die Eigenvektoren der Transposition \mathbf{A}^{\top} mit der Normierungsbedingung $\mathbf{e}\bar{\mathfrak{a}} = 1$, dann heißt

$$l_1 = \frac{1}{2\omega_0} \operatorname{Re} \left\{ \bar{\mathfrak{a}}^{\top} (\mathbf{c}(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}}) - 2\mathbf{b}(\mathbf{e}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{e}, \bar{\mathbf{e}})) + \mathbf{b}(\bar{\mathbf{e}}, (2j\omega_0\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}(\mathbf{e}, \mathbf{e}))) \right\} \quad (3.21)$$

erster Ljapunov-Koeffizient [174]. \mathbf{I}_n ist hier die n -dimensionale Einheitsmatrix. Diese Koeffizienten sind zu den später definierten Ljapunov-Exponenten strikt zu unterscheiden (siehe Abschnitt 3.8.1)!

3.4. Poincaré-Abbildung

Die Dynamik von eingeschwingenen elektrischen Oszillatoren im Phasenraum entspricht einer periodischen Lösung. Unter Zuhilfenahme einer Schnittebene im Phasenraum studierte POINCARÉ die Existenz, die Stabilität und das Verhalten von periodischen Lösungen $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t + T)$ mit Periodendauer $T \in \mathbb{T}$ [5].

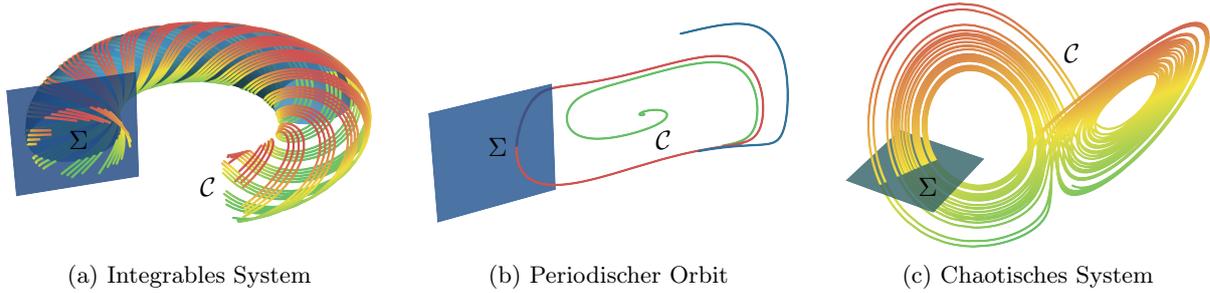


Abb. 3.2.: Poincaré-Abbildungen.

Dazu sei $\xi \in O$ ein Punkt eines periodischen Orbits O und $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, sodass $g(\xi) = 0$. Dann heißt

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in M | g(\mathbf{x}) = 0\} \tag{3.22}$$

Poincaré-Schnitt, wenn die Kurve C die $(n-1)$ -dimensionale Hyperfläche transversal schneidet, d.h., falls das Skalarprodukt aus dem Gradienten von g und dem Vektorfeld \mathbf{f} am Punkt ξ nicht verschwindet bzw. $\nabla g \cdot \mathbf{f}|_{\mathbf{x}=\xi} \neq 0$. Hieraus lässt sich sofort die lineare-Funktion $g(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\xi) \cdot (\mathbf{x} - \xi)$ definieren [174].

Definition (Poincaré-Abbildung) Sei $\mathbf{h}(\xi, t)$ eine periodische Lösung und U eine offene Umgebung von ξ . Die Abbildung $P: U \cap \Sigma \rightarrow \Sigma$, $P(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \tau(\mathbf{x}))$ heißt (lokale) Poincaré-Abbildung mit $\mathbf{x} \in U \cap \Sigma$ und Periode $T = \tau(\xi)$ [166].

Mit diesem sogenannten stroboskopischen C^1 -Diffeomorphismus können nun ganze Klassen von dynamischen Systemen unterschieden werden: (i) Periodische Orbits, welche sich als Fixpunkte der Poincaré-Abbildung $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ darstellen, (ii) integrable Systeme, die sich als Schnitt des invarianten Hypertorus mit der Hyperfläche Σ ergeben (im 2-dimensionalen wäre dieser Schnitt isomorph zu S^1), (iii) ergodische Systeme die die gesamte energetisch zulässige Hyperfläche $\Sigma \cap \mathbb{E}$ ausfüllen oder (iv) allgemeinere Systeme, die zu unendlich vielen Schnittpunkten führen. Handelt es sich bei den allgemeineren Systemen um chaotische Systeme, so werden in aller Regel zwei Schnittpunkte innerhalb einer Periode weit auseinander liegen [192].

Bilden ψ lokale Koordinaten auf Σ , sodass $\psi = 0$ dem Punkt $\xi \in \Sigma$ entspricht, so ist ein periodischer Orbit genau dann stabil, wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $dP/d\psi|_{\psi=0}$ innerhalb des Einheitskreises liegen. Die Wahl der Koordinaten des Punktes ξ oder der Hyperfläche Σ ist davon unabhängig [174]. Insbesondere muss die Hyperfläche nicht notwendigerweise planar sein [166].

3.5. Andronov-Hopf-Bifurkation

Bei einer Bifurkation oder Verzweigung handelt es sich um eine topologische Veränderung des Phasenportraits in nichtlinearen Systemen unter Einfluss eines oder mehrerer Parameter.

Sei $\Lambda = M \times \Pi$ der mit dem Parameterraum $\Pi \subseteq \mathbb{R}^m$ erweiterte Phasenraum und $\mathbf{f}: M \rightarrow TM$ ein n -dimensionales Vektorfeld, welches von reellen, hinreichend k -differenzierbaren Parametern $\mu \in C^k(\Pi)$ abhängt, sodass $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$. In diesem Raum können Parameterfamilien des dynamischen Systems anhand ihrer Topologie klassifiziert werden (siehe MANDELSTAM und PAPALEXI [31]).

Ist die Topologie jedes Phasenraums M auf einem Pfad zwischen zwei beliebigen Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Pi$ homöomorph, so handelt es sich um eine 1-parametrisierbare Familie von dynamischen Systemen. Topologisch äquivalente und m -parametrisierbare Familien von dynamischen Systemen sind daher m -dimensionale Unterräume des Parameterraums. Ändert sich die Topologie auf dem Weg des Pfades so findet eine Bifurkation an einer $(m-1)$ -dimensionalen Hyperfläche statt, die einen weiteren m -dimensionalen Unterraum trennt. Mehrere unterschiedliche Bifurkationen können daher Schnitte ihrer Hyperflächen im Parameterraum aufweisen. Im Folgenden ist $m = 1$.

Ist $\tilde{\mathbf{x}}$ ein Gleichgewichtspunkt von \mathbf{f} , so gilt nach dem *Satz von Hartman-Grobman*, dass im Falle eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes das Vektorfeld in einer Umgebung zu $\tilde{\mathbf{x}}$ topologisch äquivalent bleibt. Demzufolge ist eine Bifurkation nur dann möglich, wenn mindestens ein Eigenwert des linearisier-

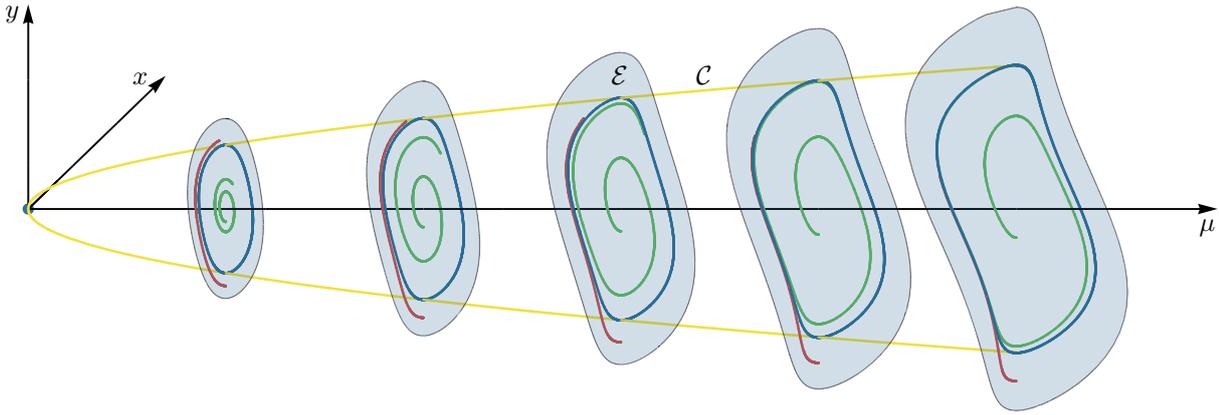


Abb. 3.3.: Hopf-Bifurkation im parameter-erweiterten Phasenraum $\Lambda = M \times \Pi$ mit einem 1-dimensionalen Parameterraum Π . Es gilt $\mu = \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Für $0 < \mu \ll 1$ entspricht der Grenzzyklus in guter Näherung einem Kreis mit Radius $\sqrt{\mu}$. Diese Näherung ist für größere Werte von μ im Allgemeinen nicht mehr annehmbar.

ten Systems im parameter-erweiterten Phasenraum Λ auf der imaginären Achse liegt, d.h. degeneriert ist.

Definition (Hopf-Punkt) Das Tupel $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu}) \in \Lambda$ heißt Hopf-Punkt, wenn zu einer Kurve $C \in \Lambda$ eine Parametrisierung $\epsilon \mapsto C(\epsilon)$ existiert, die die folgenden Eigenschaften hat: (i) $C(0) = (\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu})$ ist asymptotisch stabil, (ii) zu dem linearisierten System existiert ein komplex-konjugiertes Eigenwertpaar $\lambda_{\pm}(\epsilon) = \alpha(\epsilon) \pm j\beta(\epsilon)$ mit $\alpha(0) = 0$ (nicht hyperbolisch), $\alpha'(0) \neq 0$ (transversal) und $\beta(0) = \omega_0 \neq 0$ sowie (iii) alle übrigen Eigenwerte haben nicht-verschwindende Realteile [177]. $\tilde{\mu}$ heißt Bifurkationspunkt.

Mittels Hopf-Punkt kann nun die Definition der Andronov-Hopf-Bifurkation formuliert werden.

Definition (Hopf-Bifurkation) Ist $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu}) \in \Lambda$ ein Hopf-Punkt, l_1 der erste Ljapunov-Koeffizient und $l_1 d < 0$, dann entsteht für jedes $\epsilon > 0$ eine superkritische Hopf-Bifurkation, respektiv für $l_1 d > 0$ und jedes $\epsilon < 0$ eine subkritische Hopf-Bifurkation.

In der Nähe des durch das Eigenwertpaar $\lambda_{\pm}(\epsilon)$ aufgespannten Eigenraums \mathcal{E}_{ϵ} , genauer auf der Integralmannigfaltigkeit [144, 147, 148], existiert für $|\epsilon| > 0$ ein geschlossener Orbit.

Definition (Grenzzyklus) Ein isolierter (geschlossener), periodischer Orbit eines dynamischen Systems (\mathbb{T}, M, Φ) heißt Grenzzyklus mit Periode $T \in \mathbb{T}$, falls alle benachbarten Integralkurven auf ihn zulaufen (stabil, Attraktor) oder sich entfernen (instabil, Repellor).

Für den superkritischen Fall ist der Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ instabil und der Grenzzyklus stabil und für den subkritischen Fall ist der Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ stabil und der Grenzzyklus instabil. Insbesondere ist der zu einem stabilen Grenzzyklus gehörende Gleichgewichtspunkt im Bifurkationspunkt, d.h. für $\epsilon = 0$, asymptotisch stabil, da der erste Ljapunov-Koeffizient negativ ist [145]! Bei dem Bild von benachbarten, zulaufenden bzw. sich entfernende Integralkurven eines dynamisches Systems (\mathbb{T}, M, Φ) handelt es sich demnach um ω -Limesmengen der Form $\omega(\mathbf{x}, \Phi) = \{\mathbf{y} \in M \mid \exists t \in \mathbb{T}, \Phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \mathbf{y}\}$.

Satz (Satz von Poincaré-Bendixson) Ist ein dynamisches System in einer Ebene definiert, d.h. $M \subset \mathbb{R}^2$, so ist jede kompakte ω -Limesmenge, die nicht aus Gleichgewichtspunkten besteht, ein Grenzzyklus [232, 166].

Darüber hinaus existieren dynamische Systeme, die für $|\epsilon| > 0$ mehrere Grenzzyklen ineinander verschachtelt aufweisen. Die Stabilität dieser Grenzzyklen wechselt sich zyklisch ab, d.h., in einem solchen System ist ein instabiler Gleichgewichtspunkt stets von einem stabilen Grenzzyklus umgeben, welcher wiederum von einem instabilen Grenzzyklus eingeschlossen wird. Solche Systeme machen deutlich, dass es einer strikten Unterscheidung zwischen dissipativen, konservativen und akkumulativen Unterräumen des Phasenraums bedarf [170]. Die Dynamik auf diesen Unterräumen gehorchen eigenständigen Subsystemen.

Die spiralförmige Bewegung in unmittelbarer Nähe des Gleichgewichtspunktes (d.h. $\epsilon \lll 1$) ist auf die linearen Terme einer Potenzreihenentwicklung in ϵ zurückzuführen. Das Bifurkationsverhalten eines dynamischen Systems um einen Hopf-Punkt wird allerdings durch die Nichtlinearität des Vektorfeldes beschrieben. Daher wird ϵ gerade groß genug gewählt, sodass der Bifurkationsparameter μ den Dämpfungs- bzw. Verstärkungseffekt in Balance hält und ein Grenzzyklus entspringt. ϵ steht damit im direkten Bezug zu μ . Da die ersten quadratischen nichtlinearen Terme keine Resonanzen (d.h. keine periodischen Lösungen) erzeugen, sondern diese auf die kubischen und höheren Terme zurückzuführen sind, muss $\mu = \mathcal{O}(\epsilon^2)$ gelten. ϵ ist damit in erster Näherung (d.h. $\epsilon \ll 1$) ein Maß für den Radius eines kreisförmigen Grenzzyklus zur Periodendauer $T(\epsilon) = 2\pi/\omega(\sqrt{\epsilon})$. Für stabile Grenzzyklen handelt es sich demzufolge um eine Größe die die Amplitude im Zeitbereich einer Lösung beschreibt. Wie in Abb. 3.3 zu sehen, wird diese Definition für $\epsilon < 1$ aufgrund des sich immer stärker verformenden Grenzzyklus obsolet, weil höhere Ordnungen von ϵ dominant werden. Da es sich bei der Hopf-Bifurkation nur um eine lokale Theorie handelt, kann ohne weitere Analyse keine Aussage gemacht werden, wie sich ein dynamisches System für große ϵ verhält. So tritt beispielsweise bei der logistischen Gleichung durch Periodenverdopplung ein komplexes chaotisches Verhalten auf. Die Hopf-Bifurkation ist somit nur eine lokale Existenzaussage zur Entstehung von stabilen oder instabilen Grenzzyklen.

Dieser Bifurkationstyp wurde bereits durch POINCARÉ bekannt. ANDRONOV und später HOPF bewiesen bzw. beschrieben diese dynamischen Systeme. In der Literatur ist daher auch die Bezeichnung Poincaré-Andronov-Hopf-Bifurkation üblich [173].

Weiterführende Literatur

- ANDRONOV „Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane“ [142]
- HASSARD „Theory and Applications of Hopf Bifurcation“ [149]
- GUCKENHEIMER & HOLMES „Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields“ [166]
- KUZNETSOV „Elements of Applied Bifurcation Theory“ [174]

3.6. Elektrische Oszillatoren

Ein Oszillator ist eine elektronische Schaltung mit periodischen Wechselströmen und Wechselspannungen und folgenden vier Eigenschaften: (i) es existiert eine vorgeschriebene Frequenz $\omega = 2\pi f$, (ii) es existiert eine vorgeschriebene Amplitude, (iii) die Amplitude ist unabhängig von den Anfangsbedingungen, d.h. nicht intrinsisch und (iv) das qualitative Verhalten, d.h. die Oszillation, ändert sich nicht bei hinreichend kleinen parasitären Elementen [37]. Die beiden letzten Eigenschaften unterscheidet einen elektrischen Oszillator von einem linear zeitinvarianten System (LTI), wie dem harmonischen Oszillator aus der Physik bzw. das Analogon, dem *LC-Schwingkreis*, aus der Elektrotechnik. Insbesondere ist es die dritte Bedingung, die einen stabilen Grenzzyklus voraussetzt, dessen Einzugsgebiete den Phasenraum mit Ausnahme des instabilen Gleichgewichtspunktes bildet. Damit ist sichergestellt, dass keine weiteren Attraktoren, Repellen oder anders artige Mengen, wie z.B. Separatrizen, existieren.

Jeder sinusförmige Oszillator besteht aus einer schwingenden Baugruppe, wie beispielsweise einem *LC-Glied* oder einem Schwingquarz, in Verbindung mit dissipativen Elementen (elektrischen Widerständen R) und geeigneter Rückkopplung. Aufgrund der Rückkopplung ist jeder Oszillator ein nichtlineares dynamisches System. Die Energie, die dem Oszillator zugeführt wird, führt zur Schwingung, die aufgrund von Dissipation Verlusten unterliegt und ohne Rückkopplung letztendlich erliegen würde. Die Rückkopplung sorgt somit für eine Entdämpfung und ist in der Nähe der geregelten Frequenz idealerweise so stark, dass *Dämpfungsverluste* instantan ausgeglichen werden. Oszillatoren sind demzufolge dadurch gekennzeichnet, dass im Mittel einer Periode ein Energiefluss durch das dynamische System stattfindet. Dieser Energiefluss ist ein Zusammenspiel von Dissipation und Akkumulation von Energie.

Ein elektrisches Netzwerk kann in einen b -Port aus ρ Widerständen, γ Kapazitäten, λ Induktivitäten und ν unabhängigen Quellen mit $b = \rho + \gamma + \lambda + \nu$ zerlegt werden [212]. Dazu seien $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^\lambda$, $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^\gamma$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^b$ und $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^b$ die entsprechenden Ladungen, magnetischen Flüsse, Spannungen und Ströme. Das Quadrupel $(\mathbf{q}, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}, \mathbf{i}) \in \mathbb{O} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ mit⁴ $\mathbb{X} = \mathbb{R}^\gamma \times \mathbb{R}^\lambda$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^b \times \mathbb{R}^b$ und den Ohmschen Zwangsbedingungen bildet

⁴Aufgrund der unterschiedlichen physikalischen Dimension, müssten hier Bilinearformen verwendet werden.

den *Ohmschen Raum* \mathbb{O} . Gesteuerte Quellen seien hierbei durch gekoppelte Widerstände realisiert. Γ ist damit eine $(2b - \rho)$ -dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Seien \mathbf{A} und \mathbf{B}^\top die $b \times b$ Knoten- bzw. Mascheninzenzmatrizen, sodass die Kirchhoffschen Zwangsbedingungen mit den Maschengleichungen $\mathbf{B}^\top \mathbf{u} = \mathbf{0}$ und Knotengleichungen $\mathbf{A} \mathbf{i} = \mathbf{0}$ beschrieben werden und sei das Matrizenpaar (\mathbf{A}, \mathbf{B}) exakt, d.h. $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ und $\text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{B}) = b$, dann bildet das Tupel $(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \in \mathbb{K} \subset \mathbb{Y}$ zusammen mit diesen Zwangsbedingungen den *Kirchhoffraum* \mathbb{K} .

Definition (Phasenraum (elektrisches Netzwerk)) *Der Phasenraum M eines elektrischen Netzwerks setzt sich aus dem Schnitt des Ohmschen Raums \mathbb{O} und des Kirchhoffraums \mathbb{K} zusammen, d.h. $M = \mathbb{O} \cap (\mathbb{X} \times \mathbb{K})$, wenn (i) dieser Schnitt nicht leer ist und (ii) \mathbb{O} transversal zu $\mathbb{X} \times \mathbb{K}$ ist [217, 95, 96].*

Die gesamte Dynamik des elektrischen Netzwerks findet damit auf der $C^\infty(\mathbb{R}^{\lambda+\gamma+\nu})$ -Mannigfaltigkeit M statt. (\mathbb{T}, M, Φ) bildet somit ein dynamisches System. Die Dimension des Phasenraums ergibt sich als Summe aller dynamischen Elemente (Kapazitäten, Induktivitäten) und unabhängigen Quellen.

Ladungen und magnetische Flüsse sind in Ströme und Spannungen mit den Maxwell'schen Beziehungen transformierbar, sodass ein Zustand \mathbf{x} im Phasenraum aus Strömen und Spannungen besteht. Im Allgemeinen handelt es sich bei den Bewegungsgleichungen von elektronischen Schaltungen um Differential-algebraische Gleichungen (DAE), d.h., gewöhnlichen Differentialgleichungen mit algebraischen Nebenbedingungen der Form $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{2(\lambda+\gamma+\nu)} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda+\gamma+\nu}$. Ist die partielle Ableitung $\partial \mathbf{F} / \partial \dot{\mathbf{x}}$ regulär, so können gemäß dem *Satz über implizite Funktionen* die Bewegungsgleichungen in ODEs umgeformt werden.

Gemäß der Andronov-Hopf-Bifurkation steht der Bifurkationsparameter μ im direkten Bezug zur Amplitude und Frequenz des Grenzzyklus, welcher im Zeitbereich für kleine Werte von μ sinusförmig ist. Damit sind die ersten beiden Bedingungen für einen sinusförmigen elektrischen Oszillator erfüllt. Da innerhalb des Einzugsgebiets der Grenzzyklus als ein Attraktor wirkt und dieser autonom ist, ist die Amplitude nicht intrinsisch vom Anfangswert abhängig. Die Bifurkation setzt als notwendige Bedingung ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte voraus. Ob ein Grenzzyklus stabil ist, d.h. inwieweit parasitäre Elemente den Grenzzyklus nicht qualitativ beeinflussen, hängt von dem ersten Ljapunov-Koeffizienten ab.

Definition (Sinusförmiger elektrischer Oszillator) *Ein sinusförmiger elektrischer Oszillator ist ein dynamisches System (\mathbb{T}, M, Φ) mit dem Bildungsgesetz $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ und den Eigenschaften: (i) es existiert ein Hopf-Punkt $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu})$ der im Bifurkationspunkt $\tilde{\mu}$ asymptotisch stabil ist und (ii) der erste Ljapunov-Koeffizient ist kleiner null, d.h. $l_1 < 0$.*

BARKHAUSEN formulierte ein notwendiges Stabilitätskriterium für linear rückgekoppelte Verstärker die eigenständig und stabil schwingen [203]. Dazu nutzte er das Modell eines Vierpols mit Verstärkungsfaktor $V \in \mathbb{C}$ und dem Rückkopplungsfaktor $K \in \mathbb{C}$. Die Gesamtverstärkung der Schaltung ergibt sich zu $V/(1 - KV)$. Je nach Vorzeichen der Schleifenverstärkung KV , wird zwischen Mit- und Gegenkopplung unterschieden. Für $KV = 1$ ergibt sich der harmonische Oszillator. Das eigenständige Anklingen des Oszillators wird in diesem Modell als Folge von am Eingang anliegendem Rauschen mit breitem Frequenzspektrum gewährleistet. Eine stabile Schwingung ist gegeben, falls (i) der Betrag der Schleifenverstärkung eins ist, d.h. $|KV| = 1$ und (ii) die Phasenverschiebung bei der Frequenz ω eine positive Rückkopplung aufweist, d.h. $\arg(KV) = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Bei der Betragsbedingung handelt es sich nicht um eine Amplitudenbedingung. CHUA zeigte bereits, dass diese zwar notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung äquivalent im Hopf-Theorem zu finden ist [225].

Die dissipativen Verluste, denen jede reale elektrische Schaltung unterliegt, müssen durch Energiezufuhr kompensiert werden. Widerstände und passive Bauelemente mit einer monoton-steigenden Strom-Spannungs-Kennlinie, wie gewöhnliche Dioden, weisen gemäß dem Ohmschen Gesetz grundsätzlich einen positiven statischen Widerstand auf. Gemäß dem ersten Jouleschen Gesetz wird in diesen Bauelementen elektrische Energie in Wärme dissipiert. Supraleiter bilden eine untere Grenze dieses Vorgangs, da diese keine Leistung aufnehmen und folglich konservativ sind. Energiequellen hingegen haben aufgrund ihres unterschiedlichen Vorzeichens zwischen Strom und Spannung einen negativen statischen Widerstand. Bei einem elektrischen Generator wird durch das Verrichten von mechanischer Arbeit Bewegungsenergie in elektrische Energie umgewandelt. Die Aussagen „es wird Bewegungsenergie in elektrische Energie dissipiert“ bzw. „es wird elektrische Energie aus Bewegungsenergie akkumuliert“ sind demnach äquivalent.

In dynamischen Systemen sind allerdings im Allgemeinen diese statischen Energiequellen von der eigentlichen dynamischen Beschreibung durch gewöhnliche Differentialgleichungen getrennt. Stattdessen wird die zuvor akkumulierte Energie durch Anfangswerte wiedergegeben.

Dem statischen Widerstand steht der differentielle Widerstand, der Ableitung der Spannung nach dem Strom, gegenüber. Bauelemente, die einen nicht monotonen Verlauf in ihrer Strom-Spannungs-Kennlinie aufweisen, wie beispielsweise Tunnel- oder Gunnedioden, weisen demzufolge Bereiche auf, bei dem der differentielle Widerstand negativ ist. Ist der statische Widerstand in diesen Bereichen weiterhin positiv, so wird in der Bilanz zwar Energie dissipiert, allerdings existiert zugleich ein akkumulativer Prozess der dem entgegen wirkt [51]. Ist der statische Widerstand in diesen Bereichen negativ, so muss es sich um aktive Bauelemente handeln, z.B. negative Impedanzkonverter, die ihre Energie aus unabhängigen Quellen akkumulieren und dem dynamischen System zur Verfügung stellen.

Weitere Literatur zu dem Thema findet sich bei MATHIS [101–104].

Weiterführende Literatur

- DESOER et al. „Trajectories of nonlinear RLC networks: A geometric approach“ [214]
- KURZ & MATHIS „Oszillatoren. Schaltungstechnik, Analyse, Eigenschaften“ [97]
- MATHIS „Theorie nichtlinearer Netzwerke“ [95]
- MATHIS „Nonlinear Electronic Circuits - An Overview“ [99]
- MATHIS & RUSSE „Oscillator Design“ [100]
- MEES & CHUA „The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems“ [146]

3.7. Von Einzelsystemen zu Mengen

In der bisherigen Betrachtung wurde \mathbf{x} als ein n -dimensionaler Zustand angesehen, der in der Elektrotechnik den Spannungen und Strömen einer Schaltung oder eines elektrischen Oszillators entspricht. In der klassischen Mechanik ist für gewöhnlich \mathbf{x} eine Komposition aus Orts- und Impulsvektoren \mathbf{q} bzw. \mathbf{p} , welche, anders als in der Quantenmechanik, mit klar definierten Teilchen identifiziert werden. Dieser nun $2n$ -dimensionale Zustand gibt den Systemzustand aus n -Teilchen wieder. Während der mathematische Apparat für beide Beispiele derselbe ist, so ist die physikalische Interpretation eine Andere. Zwar handelt es sich, sowohl in der Elektrotechnik als auch in der klassischen Physik, um einen Systemzustand, jedoch können Spannungen und Ströme nicht als ein Teilchensystem interpretiert werden, ohne das System in seiner molekularen Größenordnung als kinetische Bewegungsgleichungen von Ladungsträgern aufzufassen. Zudem können aus diesen Größen nicht ohne weiteres Energien abgeleitet werden. Während die kinetische und potentielle Energie eines Masseteilchens über den Ort und Impuls leicht zu bestimmen ist, kann von einer Energie eines elektrischen Widerstands, welcher über das ohmsche Gesetz mit den Zustandsvariablen Spannung und Strom in Zusammenhang steht, nicht gesprochen werden. Stattdessen ist hier die Energieänderung (Leistung) wesentlich. Dies führt jedoch dazu, dass eine Formulierung der Bewegungsgleichung, die im Zusammenhang mit einer Energiefunktion (z.B. der Hamilton-Funktion) steht, ungleich schwieriger ist, falls aus dem resultierenden Vektorfeld anhand der Divergenz Rückschlüsse über die Dissipation von Energie gemacht werden sollen, insbesondere da gezeigt wurde, dass dies nicht immer möglich ist (siehe Abschnitt 3.1.2). Von der Dissipation eines Phasenraumvolumens kann dann nicht mehr auf die Dissipation von Energie geschlossen werden.

Diese Problematik könnte durch das Lösen der in der Regel simpel gehaltenen Bewegungsgleichungen für jedes Teilchen im Prinzip umgangen werden. Allerdings ist mit Hilfe der *statistischen Physik* eine makroskopische Formulierung möglich. Zum einen geschieht dies, da die Teilchenzahl für ein makroskopisches Objekt im Bereich der Avogadro-Konstante $N_A \approx 6 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ liegt und diese Größenordnung für eine Berechnung in kürzerer Zeit im Allgemeinen nicht durchführbar ist. Zum anderen führen die Wechselwirkungen der Teilchen untereinander zu einem n -Körperproblem, welches sich nur für $n \leq 2$ analytisch lösen lässt. Dieses aus der Himmelsmechanik bekannte Kepler-Problem begründet den in dieser Arbeit verwendeten Liouville-Formalismus: Die Ungewissheit der *Anfangswerte* aller Teilchen, die jeder physikalischen Messung zugrunde liegt, führt zu einem streng monotonen Fortschreiten des Fehlers für Kepler-Systeme. Selbst für beliebig genaue Anfangswerte kann das deterministische Verhalten des dynamischen Systems nur für eine endliche Zeit mit einer akzeptablen Fehlertoleranz vorhergesagt werden.

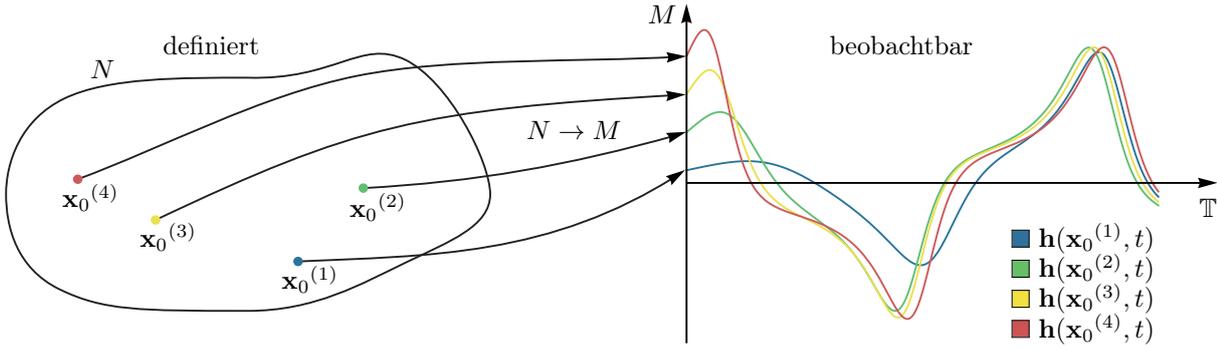


Abb. 3.4.: Interpretation der Lösungen $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T} \rightarrow M$ eines dynamischen Systems (\mathbb{T}, M, Φ) als Schar von Abbildungen $\mathbf{h}_t: N \rightarrow M$, $t \mapsto \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_0)$ im Wahrscheinlichkeitsraum (N, \mathcal{A}, P) mit angeheftetem Messraum (M, \mathcal{B}) . Die Ergebnismenge $N \subseteq M$ besteht aus Anfangswerten und ist über einen Schwellenwert ε gemäß $P(\{\mathbf{x}_0\}) < \varepsilon$ definiert. Siehe zum Vergleich Abb. B.1 für stochastische Systeme.

Es sind unendlich genaue, d.h. exakte, Anfangswerte nötig um den Verlauf für alle Zeiten zu berechnen und um Aussagen über die Stabilität des Systems machen zu können, auch dann wenn das System kein *Chaos* zeigt [220].

Definition (Wahrscheinlichkeitsraum) Sei M der Phasenraum eines dynamischen Systems (topologischer Ergebnisraum), $\mathcal{B}(M)$ die borelsche σ -Algebra (Ereignisalgebra) auf M und $P: \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann heißt das Tripel (M, \mathcal{B}, P) Wahrscheinlichkeitsraum. Das Tupel (M, \mathcal{B}) wird Messraum genannt.

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ die Lösung des dynamischen Systems (\mathbb{T}, M, Φ) mit dem Anfangswertproblem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ und dem Vektorfeld $\mathbf{f}: M \rightarrow TM$, dann kann $\mathbf{h}: N \times \mathbb{T} \rightarrow M$ in Parameterabhängigkeit zu den Anfangswerten $\mathbf{x}_0 \in N \subseteq M$ als Schar von Abbildungen $\mathbf{h}_t: N \rightarrow M$, $t \mapsto \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_0)$ betrachtet werden. \mathbf{h} ist also eine Familie von maximalen Integralkurven die zur *Anfangszeit* t_0 durch einen jeweils unterschiedlichen Anfangswert verlaufen. Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum ist (N, \mathcal{A}, P) der mit einem Messraum (M, \mathcal{B}) versehen wird. Die Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in N$ sind demzufolge Elemente der Ergebnismenge N , welche nur aus Gründen der Praktikabilität als Teilmenge des Phasenraums M aufgefasst werden sollen, da im Allgemeinen unwahrscheinliche Anfangswerte vernachlässigt werden, d.h. solche, deren Wahrscheinlichkeit unter einem zuvor fest definierten Schwellenwert $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ liegen, sodass $P(\{\mathbf{x}_0\}) < \varepsilon$.

Satz (Satz von Radon-Nikodým) Sei μ ein σ -endliches Maß auf dem Messraum (M, \mathcal{B}) und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß, dann existiert eine \mathcal{B} -messbare Funktion $\rho: M \rightarrow \mathbb{R}^+$, sodass für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass

$$P(B) = \int_B \rho d\mu. \quad (3.23)$$

ρ heißt Wahrscheinlichkeitsdichte [260]. $F_\mu(\mathbf{x}) = \mu((-\infty, \mathbf{x}])$ heißt Verteilungsfunktion.

Sei $\rho(\mathbf{x}_0)$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte und $d\mathbf{x}_0$ das Lebesgue-Maß bezüglich \mathbf{x}_0 . Eine Umkehrtransformation $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ ist dann möglich, wenn die zugehörige Jacobi-Determinante

$$J(\mathbf{x}_0, t) = \det(\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0, t)) = \det(\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x}_0) \quad (3.24)$$

für jeden Punkt \mathbf{x}_0 ungleich null ist. Die zu dieser Umkehrtransformation gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte sei $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t))$ mit der Jacobi-Determinante $\tilde{J}(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$. Die Transformation von $d\mathbf{x}_0$ in ein Lebesgue-Maß $d\mathbf{x}$ bezüglich der Zustände \mathbf{x} erfolgt gemäß $\rho(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0 = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t)\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$. Die rechte Seite entspricht demnach einer Funktion, die zu jedem Tupel (\mathbf{x}, t) im erweiterten Phasenraum $\Omega = M \times \mathbb{T}$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit wiedergibt, sodass die *Phasenraumdichte* $p: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ge-

3. Deterministische Systeme

mäß $p(\mathbf{x}, t) = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t)\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ definiert werden kann [59]. Der Erwartungswert einer Observable \mathbf{x} kann demzufolge, sowohl durch $\rho(\mathbf{x}_0)$ als auch durch $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ angegeben werden, gemäß

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \int_N \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)\rho(\mathbf{x}_0)d\mathbf{x}_0 = \int_M \mathbf{x}\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x} \quad (3.25)$$

und steht in Analogie zur Heisenberg- bzw. Schrödingerdarstellung der Quantenmechanik [184].

Für Hamilton-Systeme bleibt der Transport eines Volumens gemäß dem *Satz von Liouville* erhalten, sodass aus der Koordinatentransformation $d\mathbf{x} = \tilde{J}d\mathbf{x}_0$ die Gleichung $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_0$ folgt und damit $\tilde{J} = J = 1$. Die Differentialgleichung, mit der eine Anfangsverteilung $p_0(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t_0)$ im Phasenraum transportiert wird, entspricht dann der Liouville-Gleichung (3.7).

In diesem Zusammenhang formulierte POINCARÉ [7] den poincaréschen Wiederkehrsatze der später maßtheoretisch verschärft wurde.

Satz (Poincaréscher Wiederkehrsatze) *Sei H eine autonome Hamilton-Funktion. Dann bilden diejenigen Punkte innerhalb einer offenen Menge $U \subset M$ des Phasenraums M deren Trajektorie U nicht beliebig oft durchlaufen, eine Nullmenge [199].*

Physikalisch bedeutet dies, dass ein konservatives System, wie beispielsweise das Zweikörper-Problem oder der harmonische Oszillator, seinen Anfangswerten beliebig oft nahe kommt und die Unsicherheit der Anfangswerte erhalten bleibt.

3.8. Ergoden- und Maßtheorie

Noch vor dem poincaréschen Wiederkehrsatze wurde von MAXWELL [3] und BOLTZMANN [9] die Annahme getroffen, dass ein sich selbst überlassendes thermodynamisches System im Laufe der Dynamik alle energetisch verträglichen Punkte im Phasenraum erreicht. EHRENFEST [15] schwächte diese Annahme ab und forderte stattdessen nur noch eine beliebige Annäherung aller möglichen Energiezustände. FERMI gelang es, eine Klasse von Systemen, die sogenannten *kanonischen Normalsysteme*, dieser Quasi-Hypothese zuzuordnen [22, 24]. Die entscheidende Schlussfolgerung dieser Annahme ist, dass eine mikroskopisch abgeleitete makroskopische, zeitgemittelte Größe identisch zu dem Ensemblemittelwert zu einem festen Zeitpunkt ist.

Satz (Ergodenhypothese) *Sei B eine Observable. Der Ensemblemittelwert $\langle B(t) \rangle$ und das zeitliche Mittel \bar{B} sind gleichwertig, d.h. $\langle B(t) \rangle = \bar{B}$.*

Für die von GIBBS formulierte *statistische Physik* ist diese Hypothese grundlegend, wengleich MISES [20] zeigte, dass diese dazu nicht notwendig ist [26]. Beispielsweise kann eine spontane Symmetriebrechung bei einem Phasenübergang die Ergodenhypothese verletzen.

Die aus diesen Überlegungen entstandene Ergodentheorie, ein fundamentaler Teil der Theorie dynamischer Systeme, beschäftigt sich mit dem Studium von maßerhaltenden dynamischen Systemen und wie sich in den folgenden Abschnitten zeigen wird, ist dieser Sachverhalt zusammen mit der Ergodenhypothese das Bindeglied zwischen den in dieser Arbeit diskutierten Formalismen.

Definition (Maßerhaltende Abbildung und invariantes Maß) *Sei (M, \mathcal{B}, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T: M \rightarrow M$ eine messbare Abbildung, dann heißt T maßerhaltende Abbildung, falls $P(T^{-1}B) = P(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$. Ist T invertierbar, dann ist diese Bedingung äquivalent zu $P(TB) = P(B)$. Umgekehrt ist P invariant unter T , sodass P ein invariantes Maß ist.*

Beispielsweise stellt für energieerhaltende Hamilton-Systeme das Gibbs-Maß ein invariantes Maß dar, welches Zustände niedrigerer Energie exponentiell wahrscheinlicher bewertet als Zustände höherer Energie. Auch zu dissipativen Systemen kann ein invariantes Maß gefunden werden, das letztendlich einer Verallgemeinerung des Gibbs-Maßes entspricht und für den konservativen Fall wieder in das Gibbs-Maß übergeht [196]. Für die in dieser Arbeit aufgezeigten Beispielsysteme ist demzufolge die Existenz eines geeigneten Maßes, welches invariant unter dem Fluss des jeweiligen dynamischen Systems ist, gegeben.

Der Begriff ergodisches System geht auf BOLTZMANN'S Annahme⁵ zurück, dass die Mittelung entlang eines Pfades (griech. *odos*) und die Mittelung aller Zustände gleicher Energie (griech. *ergos*) äquivalent ist.

⁵Diese Definition ist streng genommen nicht die etymologisch korrekte Antwort (siehe BOLTZMANN 1884).

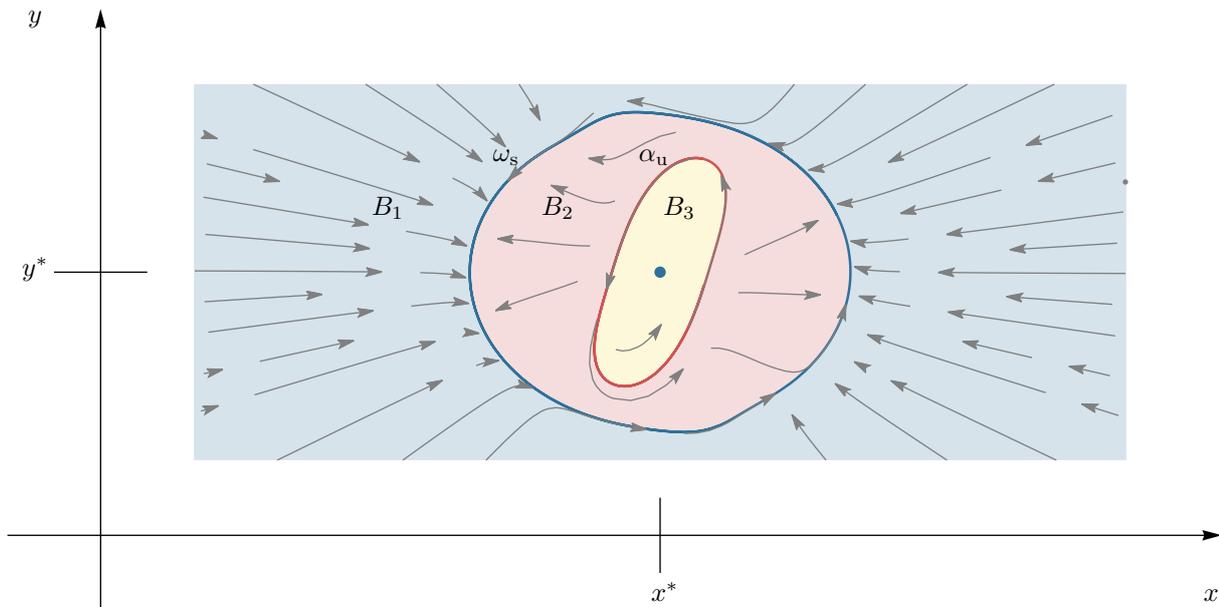


Abb. 3.5.: Beispiel für ein dynamisches System mit drei inneren Subsystemen. Subsystem 1 setzt sich aus dem stabilen äußeren Grenzzyklus ω_s und den blauen und roten Einzugsgebieten B_1 und B_2 zusammen. Subsystem 2 setzt sich aus dem instabilen inneren Grenzzyklus α_u und den roten und gelben Einzugsgebieten B_2 und B_3 zusammen. Subsystem 3 setzt sich aus dem stabilen Gleichgewichtspunkt $\bar{\mathbf{x}}$ und dem gelben Einzugsgebiet B_3 zusammen.

Definition (Ergodizität) Sei T maßerhaltend, dann heißt T ergodisch bezüglich P , falls für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt, dass $P(B) = 0$ oder $P(B) = 1$.

BIRKHOFF stellte maßtheoretisch einen der ersten Ergodensätze auf und bewies die Existenz von Mittelwerten für messbare Funktionen.

Satz (Birkhoffscher Ergodensatz) Sei T maßerhaltend bezüglich des Maßes μ und $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare L^1 -Funktion sowie $t \in \mathbb{T}$, dann existiert für μ -fast alle $\mathbf{x} \in M$ der Grenzwert

$$\tilde{f}(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} f(T^i \mathbf{x}). \quad (3.26)$$

Ist f ergodisch, so ist \tilde{f} μ -fast überall unabhängig von \mathbf{x} , d.h.

$$\tilde{f} = \int_M f \, d\mu. \quad (3.27)$$

Dieser Satz bedeutet zudem, dass selbst wenn nichts über die Funktion f , noch über das System selbst sowie seinen Orbits etwas bekannt ist, dennoch ein physikalisch messbarer Wert \tilde{f} existiert und vorhersagbar ist. Insbesondere ist für ein ergodisches System das Messergebnis unabhängig von dem Anfangswert \mathbf{x}_0 .

Weiterführende Literatur

- ECKMANN & RUELLE „Ergodic theory of chaos and strange attractors“ [201]
- FARQUHAR „Ergodic Theory in Statistical Mechanics“ [197]
- KLAGES „Microscopic Chaos, Fractals, and Transport in Nonequilibrium Steady States“ [132]

3.8.1. Ljapunov-Exponenten

Die Stabilität eines dynamischen Systems kann über den sich zeitlich exponentiell ändernden Abstand zweier ursprünglich infinitesimaler Punkte im Phasenraum bestimmt werden. Sei dazu $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ die Lösung der Differentialgleichung (3.18) und $\delta\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}_f(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t))\delta\mathbf{y}$ das System der Variationsgleichungen, dann ist $\delta\mathbf{y} = \mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t)\delta\mathbf{y}_0$ die Lösung der Variation mit der Fundamentalmatrix

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t) = e^{\int \mathbf{J}_f(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)) dt} \quad (3.28)$$

und der Eigenschaft $\mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t + \tau) = \mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{U}(\mathbf{x}_0, \tau)$. Das *asymptotische* Verhalten einer kleinen Variation ist demnach durch die Fundamentalmatrix für $t \rightarrow \infty$ bestimmt, sodass dieses Verhalten sich als zeitgemittelte Betrachtung des Volumens eines Parallelepipeds im k -dimensionalen Unterraum W des Tangentialraums $T_{\mathbf{x}}M$ entlang der Integralkurve charakterisieren lässt.

Definition (Ljapunov-Exponent) Sei $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ eine Basis von $W \subset T_{\mathbf{x}}M$ mit $k \leq n$, \wedge das äußere Produkt der Graßmann-Algebra⁶ und $\|\cdot\|$ eine riemannsche Metrik, dann heißt

$$\lambda_k^{(i)}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{\|\mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{U}(\mathbf{x}_0, t)\mathbf{e}_k\|}{\|\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k\|} \right) \quad (3.29)$$

k -dimensionaler Ljapunov-Exponent der i -ten Permutation [200].

Es existieren also

$$i_{\max} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (3.30)$$

k -dimensionale Ljapunov-Exponenten und demzufolge höchstens n 1-dimensionale Ljapunov-Exponenten [84] bzw. ein n -dimensionaler Ljapunov-Exponent. Die Permutation der Basisvektoren lassen sich daher durch das Intervall $i \in [0, i_{\max}]$ abzählen und die Menge aller 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten wird *Ljapunov-Spektrum* genannt [162, 182].

Satz (Divergenzsatz) Sei $\text{div}(\mathbf{f})$ die Divergenz eines Vektorfeldes \mathbf{f} , $\text{tr}(\mathbf{J}_f)$ die Spur der Jacobi-Matrix und

$$\langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle_t = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt \quad (3.31)$$

dann gilt

$$\langle \text{tr}(\mathbf{J}_f) \rangle_t = \langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle_t = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \lambda_1^{(i)} = \lambda_n. \quad (3.32)$$

Die Existenz des Grenzwerts eines Ljapunov-Exponenten ist gemäß dem *Satz von Oseledets*, einem weiteren Ergodensatz, für maßerhaltende Systeme und μ -fast allen Anfangswerten \mathbf{x}_0 gewährleistet [198]. Allerdings sind nicht alle Anfangswerte \mathbf{x}_0 , wie beispielsweise Gleichgewichtspunkte, zur Berechnung der Ljapunov-Exponenten sinnvoll.

Proposition (Ljapunov-Exponenten mehrerer Attraktoren) *Existieren ein oder mehrere Attraktoren mit ihren jeweiligen Einzugsgebieten, so sind in aller Regel die Ljapunov-Exponenten dieser Attraktoren unterschiedlich.*

Systeme dieser Art sind daher Abhängig von ihren Anfangswerten. Es ist daher zweckmäßig, den Phasenraum eines dynamischen Systems in Unterphasenräume zu untergliedern.

Definition (inneres Subsystem) *Existieren in einem dynamischen System (\mathbb{T}, M, Φ) k kompakte invariante Mengen $A_i \subset M$ bezüglich des Flusses Φ mit $i \in [1, \dots, k]$, dann heißt das dynamische System (\mathbb{T}, N_i, Φ) inneres Subsystem falls gilt: (i) $N_i \subseteq M$ ist ein Unterphasenraum von M , (ii) die invariante Menge ist nur in N_i enthalten, d.h. $(M \setminus N_i) \cup A_i = \emptyset$ und (iii) alle Einzugs- und Auszugsgebiete von A_i sind in N_i enthalten, d.h. für jedes Bassin $B \subset A_i$ gilt $B \subset N_i$.*

⁶ $\|\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_k\|$ beschreibt das Volumen des durch die Basisvektoren aufgespannten Parallelepipeds.

Dimension	Asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkt	Grenzzzyklus 1-Torus	Grenzzzyklus 2-Torus	Chaos	Hyperchaos	Hamilton-Systeme
1	(-)					
2	(-, -)	(-, 0)				(-, +)
3	(-, -, -)	(-, -, 0)	(-, 0, 0)	(-, 0, +)		
4	(-, -, -, -)	(-, -, -, 0)	(-, -, 0, 0)	(-, -, 0, +)	(-, 0, +, +)	(-, -, +, +)

Tab. 3.1.: Beispiele verschiedener Vorzeichen der 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten. Mit Ausnahme von Hamilton-Systemen, bei denen die Ljapunov-Exponenten paarweise mit unterschiedlichen Vorzeichen auftreten und deren Summe null ist, gelten für alle anderen (dissipativen) Systeme, dass der n -dimensionale Ljapunov-Exponent stets negativ ist. Freie Felder bedeuten, dass das jeweilige System in dieser Dimension nicht existieren kann [162].

Ist B das Einzugsgebiet eines Attraktors $A \subset M$, so ermöglicht das Vorzeichen des n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten die Klassifizierung dieser inneren Subsysteme in drei Gruppen: (i) $\lambda_n > 0$ (akkumulative Systeme), (ii) $\lambda_n = 0$ (konservative Systeme) und (iii) $\lambda_n < 0$ (dissipative Systeme) [170]. Demzufolge kann das Einzugsgebiet eines dissipativen Subsystems, dem *Auszugsgebiet* eines akkumulativen Subsystems entsprechen. Die Frage, ob ein dynamisches System, das sich aus mehreren inneren Subsystemen zusammensetzt, dissipativ bezüglich eines Phasenraumvolumens ist, kann daher allein aus der globalen Betrachtung der Divergenz nicht ohne weiteres beantwortet werden. So kann beispielsweise ein System mit zwei Grenzzyklen, wobei der eine Grenzzzyklus den anderen einschließt, bestenfalls als global dissipativ angesehen werden, wenn der äußere Grenzzzyklus stabil ist (siehe Abb. 3.5). Wäre der äußere Grenzzzyklus instabil, so ist das System nur für Anfangswerte dissipativ, die innerhalb des äußeren Grenzzykus, genauer im Bassin des stabilen Grenzzykus, liegen.

Auch kann ein dissipatives System derart mit einem akkumulativen System einseitig gekoppelt werden, sodass das neue Vektorfeld divergenzfrei ist (siehe Abschnitt 4.2.2). Das sich hieraus ergebende Gesamtsystem setzt sich also aus zwei sogenannten *äußeren Subsystemen* zusammen (einem dissipativen und einem akkumulativen Subsystem). Im Allgemeinen findet zwischen solchen Subsystemen ein Energieaustausch statt. Die Menge Energie, die das stabile System dissipiert, wird von dem instabilen System aufgenommen (akkumuliert). Bestimmte Projektionen von dynamischen Systemen erlauben es daher unter Umständen ein System in äußere Subsysteme zu unterteilen. Das dazugekommene äußere Subsystem wird in der Literatur auch als *Spiegelsystem* bezeichnet [183, 188, 191].

In der Literatur werden die Ljapunov-Exponenten als Stabilitätsindikatoren verwendet ohne zu betonen, dass es sich dabei um eine Mittelungsmethode handelt. Mag dies für lineare dynamische Systeme sinnvoll sein, so geht auf diese Weise für Systeme mit Grenzzyklen Information über die lokale Stabilität im Phasenraum verloren. Anhand von Ljapunov-Exponenten ist nicht darstellbar wie sich das System während einer Periode verhält, sondern nur, ob das System für alle Zeiten, d.h. gemittelt über alle Perioden, im entsprechenden inneren Subsystem stabil ist.

Da anziehende Fixobjekte n -ter Dimension mit $n \geq 1$ einen Parallelepiped $\mathbf{e}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n$ gemäß (3.29) für $t \rightarrow \infty$ in n Raumrichtung einschränken, folgt, dass n 1-dimensionale Ljapunov-Exponenten existieren, die null sind. Sind alle weiteren 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten negativ, so handelt es sich bei diesem Attraktor um einen Grenzzzyklus, der topologisch homöomorph zu einem n -Torus ist.

Hamilton-Systeme haben aufgrund ihrer symplektischen Struktur Paare von Ljapunov-Exponenten, bei denen beide Elemente eines Paares betragsgleich sind, jedoch jeweils ein unterschiedliches Vorzeichen tragen, sodass sich deren Summe zu null ergibt. Kanonisch-dissipative Hamilton-Systeme, die auf einem stabilen Grenzzzyklus konservativ werden, haben diese Eigenschaft ohne weiteres nicht (siehe Abschnitt 4.2.4).

Chaotische Systeme sind dissipative Systeme, deren Ljapunov-Spektrum neben den negativen und trivialen Ljapunov-Exponenten aus einem bzw. für hyperchaotische Systeme aus mehreren positiven Ljapunov-Exponenten bestehen. Tab. 3.1 fasst die hier diskutierten Fälle zusammen.

3.9. Verallgemeinerte Liouville-Gleichung

Die im Abschnitt 3.1.1 hergeleitete *Liouville-Gleichung* (3.7) setzt nach dem *Satz von Liouville* voraus, dass ein Phasenraumvolumen erhalten bleibt. Die notwendige Bedingung ist die Divergenzfreiheit des betrachteten Vektorfeldes. GERLICH leitete in seiner Veröffentlichung von 1978 [59] die *verallgemeinerte Liouville-Gleichung* her, die die Liouville-Gleichung um einen Divergenz-Term erweitert und somit allgemein⁷ auf dissipative und akkumulative Systeme anwendbar ist.

Betrachtet wird das im Abschnitt 2.1 definierte dynamische System (\mathbb{T}, M, Φ) mit $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ als *Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t_0) \quad (3.33)$$

und den darauf aufbauenden Wahrscheinlichkeitsraum (N, \mathcal{A}, P) mit seinem angehefteten Messraum (M, \mathcal{B}) gemäß Abschnitt 3.7. Das Vektorfeld genüge zudem der Differenzierbarkeitsanforderung $\mathbf{f} \in C^2(M)$. Sei $g: M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ eine \mathcal{B} -messbare Funktion, sodass ein $\tilde{g}: M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert werden kann für das $\tilde{g}(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$ und $\tilde{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), t) = g(\mathbf{x}_0, t)$ gilt, dann erfolgt die totale Ableitung von g nach der Zeit unter Berücksichtigung der Kettenregel gemäß

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} g(\mathbf{x}_0, t) \right|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)} &= \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \bigg|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)}}_{= f_i(\mathbf{x}, t)} \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{g}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$. $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ ist die *Inverstransformierte* zur Lösungsfunktion \mathbf{h} . Da die nach dem *Satz von Radon-Nikodým* [260] sichergestellte und zur Umkehrtransformation $J(\mathbf{x}_0, t) = \det(\partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x}_0)$ gehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t))$ zeitunabhängig ist, d.h. $\dot{\rho}(\mathbf{x}_0) = 0$, ist die linke Seite aus (3.34) null, sodass

$$0 = \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}. \quad (3.35)$$

Die Division dieser Dichtegleichung durch die *Jacobi-Determinante* $\tilde{J}(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \right) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &\quad - \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Für eine beliebige Funktion $K(y): M \rightarrow \mathbb{R}^+$ gilt die Logarithmusbeziehung

$$\frac{d}{dy} \frac{1}{K(y)} = -\frac{1}{K(y)} \frac{K'(y)}{K(y)} = -\frac{1}{K(y)} \frac{d}{dy} (\ln(K(y))), \quad (3.37)$$

⁷Die von LIOUVILLE ursprünglich hergeleitete Gleichung war bereits allgemein gehalten, sodass korrekterweise von der Liouville-Gleichung anstatt von einer verallgemeinerten Liouville-Gleichung gesprochen werden müsste [135, 155, 132].

sodass (3.36) mit $p(\mathbf{x}, t) = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t)\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}^+$ umgeschrieben werden kann zu

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} p(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t) \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln(\tilde{J}(\mathbf{x}, t)) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(\tilde{J}(\mathbf{x}, t)) \right). \quad (3.38)$$

Mithilfe der Kettenregel (3.34) können die partiellen Ableitungen des letzten Terms zu einer totalen Ableitung an den Stellen der Anfangswerte umgewandelt werden

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} p(\mathbf{x}, t) + p(\mathbf{x}, t) \frac{d}{dt} \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) \Big|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)}. \quad (3.39)$$

Ein wiederholtes Anwenden der Logarithmusbeziehung (3.37) ergibt

$$\frac{d}{dt} \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) = J^{-1}(\mathbf{x}_0, t) \frac{d}{dt} J(\mathbf{x}_0, t), \quad (3.40)$$

sodass die Auswertung der Ableitung der invertierbaren Jacobi-Determinante im letzten Term von (3.39) mit (3.40) und der *Jacobi-Formel*

$$\frac{d}{dt} \det \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \det \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \quad (3.41)$$

erfolgen kann. Da das Vektorfeld zweifach stetig differenzierbar ist, können die partiellen Ableitungen der rechten Seiten von (3.41) nach dem *Satz von Schwarz* [84] vertauscht werden, es folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) &= \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), t)}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \\ &= \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \right) \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \end{aligned} \quad (3.42)$$

bzw. in der üblicheren Darstellungsform

$$J(\mathbf{x}_0, t) = e^{-\int \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) \Big|_{\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt}. \quad (3.43)$$

Aus (3.39) und (3.42) folgt die verallgemeinerte Liouville-Gleichung als eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad}(p(\mathbf{x}, t)) + \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) p(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.44)$$

Dabei ist $p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System im Zustand \mathbf{x} zur Zeit t befindet.

Die Differentialgleichung ist linear in ihrer höchsten Ableitung und geht für divergenzfreie Systeme in (3.7) über. Des weiteren hängt das Vektorfeld \mathbf{f} bzw. dessen Divergenz nicht von der unbekanntem Funktion p oder ihren Ableitungen ab. Der Anfangswert für das Intervall $\mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ sei

$$p(\mathbf{x}, t_0) =: p_0(\mathbf{x}) \quad (3.45)$$

3. Deterministische Systeme

mit $p_0 \in C^1(M)$ und $t_0 \in \mathbb{T}$ als *Anfangszeit*.

Eine differentialgeometrische Herleitung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung wurde von STEEB [79, 80] mittels Lie-Ableitungen ausgearbeitet. Es existiert zudem eine zu (3.44) modifizierte Liouville-Gleichung von TUCKERMAN unter der Prämisse die verallgemeinerte Liouville-Gleichung nach GERLICH sei nicht korrekt [243]. Die sich daraus ergebende Diskrepanz wurde von RAMSHAW aufgelöst, indem er anmerkte, dass (3.44) nicht kovariant sei [228]. EZRA präziserte die Herleitung später zu einer kovarianten Darstellung der Liouville-Gleichung, insbesondere im Bezug auf zeitabhängige Metriken und Volumenformen sowie unabhängig der zugrunde liegenden Phasenraummannigfaltigkeit [251].

3.9.1. Das Cauchy-Problem der verallgemeinerten Liouville-Gleichung

Sei $p(\mathbf{x}, t)$ eine differenzierbare Lösung der Liouville-Gleichung welche durch die $(n + 1)$ -dimensionale Hyperfläche $\zeta = p(\mathbf{x}, t)$ representiert werden soll. Weiterhin sei $\mathbf{n} = (\partial p / \partial x_1, \dots, \partial p / \partial x_n, \partial p / \partial t, -1)$ der Normalenvektor an einem jedem Punkt von ζ . Dann folgt, dass der Vektor $\mathbf{k} = (\mathbf{f}, 1, -\text{div}(\mathbf{f}))$, welcher aus den Koeffizienten der linearen partiellen Differentialgleichung besteht, orthogonal zu \mathbf{n} steht, sodass $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$. Damit ist ζ die *Tangentialebene* zu \mathbf{k} und es können durch Lösen des Anfangswertproblems Kurven gefunden werden die ebenfalls tangential zu \mathbf{k} stehen.

Unter der Annahme, dass eine solche Lösung von (3.44) existiert, folgt aus dem totalen Differential und unter Anwendung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \text{grad}(p(\mathbf{x}, t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \text{grad}(p(\mathbf{x}, t)) = -\text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) p(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Ist das Vektorfeld \mathbf{f} divergenzfrei, so folgt, dass $p(x, t)$ entlang jeder Lösung \mathbf{h} für alle $t \in \mathbb{T}$ konstant und eindeutig ist. Eine solche Lösung heißt *Charakteristik* von (3.44). Insbesondere gilt gemäß (3.45) für $t = t_0$, dass $p(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t_0), t_0) = p(\mathbf{x}_0, t_0) = p_0(\mathbf{x}_0)$. p_0 heißt *Anfangsverteilung* und wird so normiert, dass das gesamte Volumen unter der Hyperfläche ζ zu jedem Zeitpunkt t dem sicheren Ergebnis $P(M) = 1$ entspricht [20] (siehe Abschnitt 3.9.2). Dieses Volumen heißt im folgenden *Liouville-Volumen* und ist in dem sogenannten *Liouville-Raum* $\mathbb{P} = M \times \mathbb{R}^+$ eingebettet.

Gilt $\text{div}(\mathbf{f}) \neq 0$, so sind die Lösungen $p(x, t)$ zwar nicht mehr konstant entlang der Charakteristiken, können aber dennoch gemäß der daraus resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichung (3.46) gelöst werden zu

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t) e^{-\int \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt}|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad (3.47)$$

mit $p_0: M \supseteq N \rightarrow \mathbb{R}^+$ als Funktional der Umkehrtransformation. \mathbf{x} ist hier als ein Punkt im Phasenraum zu verstehen auf den die zeitabhängige Lösung $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ zeigt, also ein Element der Bildmenge. Daher hängt die Auswertung des Integrals entscheidend von dem korrekten Einsetzen der Lösung \mathbf{h} bzw. dessen Invertransformierten \mathbf{h}^{-1} ab! Der Exponentialterm entspricht dem *Zeitentwicklungsoperator* [62] bzw. dem *Dyson-Operator* [253] der Schrödingergleichung in der Quantenmechanik.

Zusammenfassend kann das Anfangswertproblem (3.33) sowie (3.46) in die *Lagrange-Charpit-Darstellung* [168] umgeformt werden

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(\mathbf{x}, t)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(\mathbf{x}, t)} = -\frac{dp}{\text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))p}. \quad (3.48)$$

Die Lösung der partiellen Differentialgleichung ist geometrisch die Vereinigung einer Schar von charakteristischen Kurven, die für $t = t_0$ die Anfangsverteilung p_0 überdecken, sodass gilt

$$p(\mathbf{x}_0, t_0) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}_0, t_0) e^{-\int \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt}|_{t=t_0} = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}_0, t_0) = p_0(\mathbf{x}_0). \quad (3.49)$$

In der Darstellung (3.48) wird deutlich, dass (3.44) nur dann analytisch lösbar sein kann, wenn das Differentialgleichungssystem (3.33) und das Integral der Divergenz in (3.47) analytisch lösbar sind. Der *Satz von Cauchy-Kowalewskaja* [241] setzt daher als hinreichende Bedingung voraus, dass nur dann eine analytische Lösung der partiellen Differentialgleichung existiert, falls jedes Element von \mathbf{k} eine analytische Funktion ist. Dies hat allerdings auch die Einschränkung zur Folge, dass nur lokal in einer Umgebung

eines Punktes im Phasenraum die Existenz einer Lösung sichergestellt ist. Die Bedingung, dass diese Funktionen nicht-analytisch aber zumindest glatt sind, reicht nicht aus wie das *Beispiel von Lewy* zeigt [137].

Im 1-dimensionalen und autonomen Fall, d.h. für $f: x \mapsto f(x)$ mit $n = 1$, ist die verallgemeinerte Liouville-Gleichung ohne Anfangs- oder Randbedingungen eindeutig lösbar, es folgt

$$p(x, t) = \frac{c[f](x, t)}{f(x, t)} \quad \text{mit } c[f](x, t) = t - \int \frac{1}{f(x)} dx \quad (3.50)$$

mit $c: f \mapsto c[f]$ als ein Funktional. Nur für wohlwollende Anfangs- oder Randbedingungen kann das Funktional c in die Anfangsverteilung p_0 transformiert werden. Im stationären Fall, d.h. für $\partial p / \partial t = 0$, kann (3.50) überführt werden in

$$p_s(x, t) = \frac{c(t)}{f(x, t)} \quad (3.51)$$

mit $c: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ als nunmehr zeitabhängige Funktion. Für höher-dimensionale Fälle ist (3.47) die allgemeine Lösung.

Weiterführende Literatur

- BHUTANI et al. „On the generalized forms of exact solutions to the liouville equation via direct approach“ [234]
- GERLICH „Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung“ [59]
- KLAGES „Microscopic Chaos, Fractals, and Transport in Nonequilibrium Steady States“ [132]
- LIOUVILLE „Sur la théorie de la variation des constantes arbitraires“ [135]
- STEEB „Nonlinear systems of differential equations involving limit cycles and conservative Hamiltonian systems“ [78]
- STEEB „Generalized liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles“ [79]
- STEEB „A comment on the generalized Liouville equation“ [80]
- ZHENGLU „On the Liouville equation“ [244]

3.9.2. Volumenerhaltung

Die durch das Funktional p_0 gebildete und normierte Anfangsverteilung schließt das im Liouville-Raum $\mathbb{P} = M \times \mathbb{R}^+$ eingebettete Liouville-Volumen ein, da p_0 aus dem Phasenraum (oder einem Unterraum) in \mathbb{R}^+ abbildet. Nach dem *Satz von Liouville* ist jedes Phasenraumvolumen für Hamilton-Systeme für alle Zeiten erhalten und folglich auch jedes Liouville-Volumen, d.h. es gilt gemäß (3.47) die Beziehung $\text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = 0 \Leftrightarrow p(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t)$. Ist $d\mathbf{x}_0$ das initiale Volumenelement, so wird das Phasenraumvolumen über die Transformation $d\mathbf{x} = J(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0$ mit dem Fluss transportiert.

Unter der Verwendung der Transformationen, die zur Herleitung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung genutzt wurden, kann gezeigt werden, dass ein Liouville-Volumen auch für Nicht-Hamilton-Systeme unter Zeitentwicklung konstant ist

$$\begin{aligned} \int_M p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} &= \int_M \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \\ &= \int_{N \subseteq M} \rho(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \\ &= \text{const.} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Dies ist insofern wesentlich, als dass die Wahrscheinlichkeitsdichte p auch als solche unter Zeitentwicklung interpretiert werden kann. Es kann somit eine Verallgemeinerung des *Satzes von Liouville* formuliert werden, unter der Berücksichtigung, dass hier das Liouville-Volumen und nicht das dazu in Bezug stehende Phasenraumvolumen gemeint ist.

Definition (Liouville-Volumen) *Das unter der Hyperfläche ζ eingeschlossene Volumen im Liouville-Raum \mathbb{P} ist erhalten und wird Liouville-Volumen genannt.*

3. Deterministische Systeme

Gemäß (3.42) steht die zeitliche Änderung der Transformation $d\mathbf{x} = J(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0$ im direkten Bezug zur Divergenz des Vektorfeldes. Es können somit fünf verschiedene Fälle betrachtet werden: (i) das Vektorfeld ist *divergenzfrei* und es gilt der *Satz von Liouville*, (ii) die Divergenz ist konstant (und ungleich null), (iii) die Divergenz ist rein zeitabhängig, sodass eine Funktion $c: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert werden kann, für die gilt, dass $c(t) = \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))$, (iv) die Divergenz ist eine Funktion der Zustandsvariablen \mathbf{x} oder (v) die Divergenz ist sowohl eine Funktion der Zustandsvariablen \mathbf{x} als auch der Zeit t .

Der erste Fall ist bereits im Kapitel über Hamilton-Systeme abgehandelt worden (siehe Abschnitt 3.1.1). Insbesondere sind Lösungen der Liouville-Gleichung für konservative Systeme stets stationäre Lösungen, d.h. zeitunabhängig [251], wenngleich nicht jedes System das divergenzfrei ist auch ein Hamilton-System sein muss. Der zweite Fall ermöglicht eine weitere Unterscheidung im Vorzeichen der Konstanten. Gemäß der Lösung (3.47) der verallgemeinerten Liouville-Gleichung wird klar was dies bedeutet. Sei $c = \text{div}(\mathbf{f}) = \text{const}$, so folgt $p(\mathbf{x}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t)e^{-ct}$. Ist c positiv, so muss die Phasenraumdicke p über dem gesamten Phasenraum um einen instabilen Gleichgewichtspunkt zerfließen. Ist c negativ, so geht p gegen unendlich während die Phasenraumdicke in einen stabilen Gleichgewichtspunkt einläuft. Da das Liouville-Volumen erhalten sein muss, folgt weiterhin, dass jede Phasenraumdicke, die im Einzugsgebiet eines stabilen Gleichgewichtspunktes liegt, für $t \rightarrow \infty$ gegen die δ -Distribution strebt (siehe Abschnitt 3.9.4 und 4.1.1).

Der dritte Fall wurde bereits von GERLICH als ein Spezialfall erkannt [59]. Ist c eine Funktion der Zeit, so kann (3.42) integriert werden und es folgt

$$\ln(J(\mathbf{x}_0, t)) = \int c(t)dt + \ln(g(\mathbf{x}_0)) \quad (3.53)$$

mit einer Funktion $g: M \supseteq N \rightarrow \mathbb{R}^+$. Da $\ln(J)$ für $t \rightarrow t_0$ null ergeben muss, folgt $\ln(g(\mathbf{x}_0)) = 0$. Die Jacobideterminante ist somit ebenfalls nur eine Funktion der Zeit

$$J(t) = \tilde{J}(t) = e^{\int c(t)dt} \quad (3.54)$$

und für jedes endliche t ungleich null. Allerdings muss es sich bei diesem Fall und um den fünften Fall um nicht-autonome Systeme handeln, die sich immer in ein höherdimensionales autonomes System und damit in einen anderen hier diskutierten Fall umwandeln lassen.

Ist die Divergenz eine Funktion der Zustandsvariablen $c(\mathbf{x})$ (vierter Fall), so folgt aus (3.42), dass die Änderung des Phasenraumvolumens ebenfalls eine Funktion der Zustandsvariablen sein muss. Sei $V: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ein Phasenraumvolumen, sodass mit der Umkehrtransformation $J(\mathbf{x}_0, t)$ gilt

$$V(t) = \int_M d\mathbf{x} = \int_{N \subseteq M} J(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0. \quad (3.55)$$

Dann folgt für die Volumenänderung unter Anwendung von (3.40) und (3.42), dass

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \int_{N \subseteq M} \dot{J}(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0 \\ &= \int_{N \subseteq M} \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} J(\mathbf{x}_0, t)d\mathbf{x}_0 \\ &= \int_M \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Daraus folgt, dass die Divergenz einer *Volumenänderungsratendichte* mit der physikalischen Dimension einer Frequenz entspricht und das Phasenraumvolumen eines allgemeinen dynamischen Systems maßgebend beeinflusst. Schließt die zum Phasenraumvolumen zugeordnete Menge N sowohl in Teilen eine Quelle als auch eine Senke im Phasenraum ein, dann wird das Phasenraumvolumen sowohl gestreckt als auch gestaucht. Für jeden infinitesimalen Zeitschritt dt findet folglich sowohl eine Dissipation als auch Akkumulation des Phasenraumvolumens statt. Ist N eine echte Teilmenge eines inneren Subsystems bezüglich eines stabilen Grenzzyklus, so werden diese Divergenzunterschiede zu einem mit der Periodenlänge im Bezug stehenden pulsierenden bzw. pumpenden Verhalten des Phasenraumvolumens führen. Gleiches gilt

für instabile Grenzyklen unter Zeitumkehr. Dieser Mechanismus wird im Folgenden *Pumpmechanismus* genannt.

Ob ein Phasenraumvolumen in Summe gestreckt oder gestaucht wird, ist demnach eine Frage, ob die Beiträge positiver Divergenz denen der negativen Divergenz überwiegen (Bilanz). Ein Pumpmechanismus muss keiner Nullstelle $c(\mathbf{x}) = 0$ zu Grunde liegen, die den Übergang zwischen Dissipation und Akkumulation beschreibt, sondern kann auch die Manifestation von Extrema $d^i c(\mathbf{x})/dt^i = 0$ mit $i \in \mathbb{N}^+$ sein, sodass beispielsweise Anteile des Volumens schneller gestreckt werden als Andere. Zugleich führt eine Änderung des Phasenraumvolumens zu einer Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte im Liouville-Raum. Dafür verantwortlich ist der letzte Term von (3.47) der die Erhaltung des Liouville-Volumens gewährleistet. Wird ein Phasenraumvolumen gleichmäßig gestreckt, so sinkt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten Zustands und umgekehrt.

Gemäß dem Divergenzsatz (3.32) entspricht die über die Zeit gemittelte Divergenz der Summe aller 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten.

Proposition (Informationsverlust durch Zeitmittelung) *Eine Zeitmittelung führt zu dem vollständigen Informationsverlust über den Pumpmechanismus, da dieser Mechanismus sich auf Grenzyklen periodisch wiederholt.*

Dieser Unterschied macht die Liouville-Dynamik im Gegensatz zum Ljapunov-Formalismus so mächtig. Mit dem Divergenzsatz als Bindeglied können zudem alle Aussagen des Ljapunov-Formalismus übernommen werden.

3.9.3. Anfangsverteilung

Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden durch reellwertige Dichtefunktionen bezüglich des Lebesgue-Maßes beschrieben. Die Integration dieser Dichtefunktionen über ein Intervall im Phasenraum gibt die Wahrscheinlichkeit wieder, dass sich der Systemzustand zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{T}$ innerhalb des Intervalls eingestellt hat. Die Wahl der Anfangsverteilung p_0 ist beschränkt auf diejenige Klasse von kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, deren Dichtefunktion die Bildmenge der Lösungen \mathbf{h} abdeckt. Damit ist gewährleistet, dass zu jedem möglichen Zustand im Phasenraum eine Wahrscheinlichkeit $p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$ angegeben werden kann. Mögliche Dichtefunktionen sind unter anderem die Cauchy-Verteilung, Laplace-

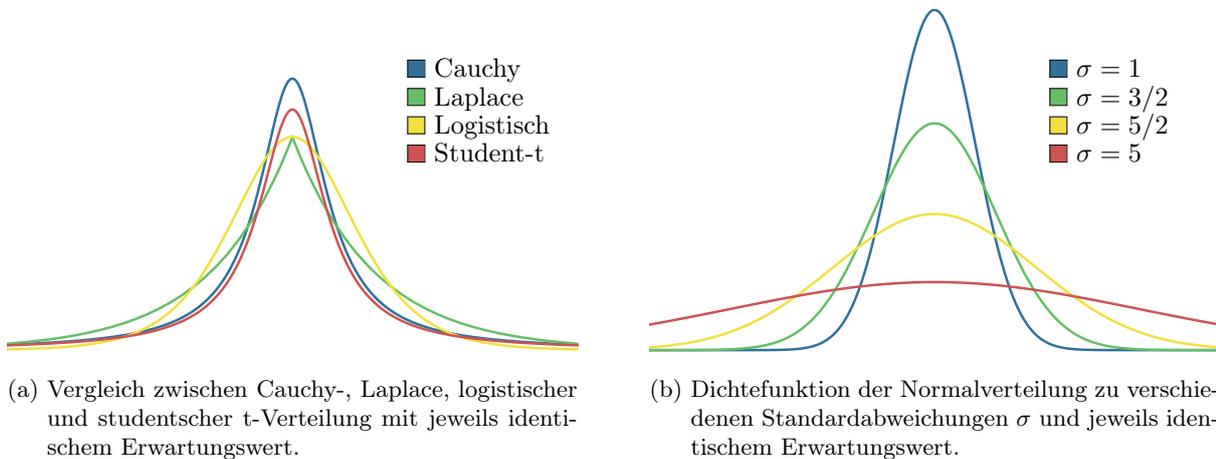


Abb. 3.6.: Beispiele kontinuierlicher 1-dimensionaler Dichtefunktionen.

ce-Verteilung, logistische Verteilung, Normalverteilung oder studentsche t-Verteilung (siehe Abb. 3.6). Letztlich ist die Normalverteilung aufgrund ihrer Nähe zum *zentralen Grenzwertsatz* [167] von entscheidender Bedeutung. Dieser Satz sagt aus, dass eine Folge von unabhängigen Zuständen $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in M$ in einem Wahrscheinlichkeitsraum (M, \mathcal{B}, P) alle dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung aufweisen. Nach dem *Gesetz der großen Zahlen* konvergiert jedes empirische Mittel einer solchen Folge fast-sicher gegen den Erwartungswert dieser Verteilung für $k \rightarrow \infty$, sodass die z-Transformation, d.h., diejenige Transformation von Zuständen, deren Erwartungswert null und deren Varianz eins ergibt, im Kontinuum $k \rightarrow \infty$ gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

3. Deterministische Systeme

Die n -dimensionale (multivariate) Normalverteilung wird beschrieben durch die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{K})}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}. \quad (3.57)$$

Dabei ist \mathbf{x} ein Zustand im Phasenraum zu den Erwartungswerten $\boldsymbol{\mu}$. Die positiv semidefinite Kovarianzmatrix \mathbf{K} enthält alle Informationen über die Varianzen σ_i^2 (Hauptdiagonale) und Korrelationen jeder Komponente des Zustands \mathbf{x} . Sie ist aufgrund ihrer Diagonalisierbarkeit als Ellipsoid darstellbar.

In der Liouville-Dynamik dienen diese Dichtefunktionen als Funktional $f[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t)$, sodass ggf. zeitabhängige Funktionen existieren, deren Bild einem Erwartungswert, einer Varianz oder einer Korrelation zugeordnet werden können. Auch höhere Momente sind nicht auszuschließen, sodass die Normalverteilung im zeitlichen Verlauf verzerrt wird. In allen Fällen müssen diese Funktionen jedoch zur *Anfangszeit* t_0 die jeweiligen Startparameter wiedergeben. Dazu gehören der Startzustand $\mathbf{x}_S = \boldsymbol{\mu}$ und die Kovarianzmatrix. Der Startzustand ist nicht zu verwechseln mit den Anfangszuständen \mathbf{x}_0 . Letztere sind die Bilder der Inverstransformierten \mathbf{h}^{-1} !

Bei den Komponenten eines Zustands handelt es sich um physikalisch messbare und präparierbare Größen. Diese Größen sind in der Elektrodynamik in der Regel Ströme und Spannungen sowie Ladungen und magnetische Flüsse. Jedoch sind aufgrund von Rauschen, Messfehlern oder Abweichungen in der Präparation keine exakten Größen definierbar. So sind die Anfangsbedingungen jeder elektronischen Schaltung nach jedem Neueinschalten unterschiedlich. Die Anfangsverteilung ist daher die Beschreibung der empirisch ermittelbaren Häufigkeitsverteilung von Startparametern der Schaltung. Die Liouville-Dynamik von elektronischen Schaltungen kann daher Aufschluss über das deterministische Verhalten für unsichere Anfangsbedingungen geben. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung als Anfangsverteilung letztlich herangezogen wird, ist abhängig von dem Verhalten der Schaltung beim Einschalten. Eine starke Nichtlinearität (z.B. die Kennlinie einer Diode) wird in der Regel für unsichere Anfangsbedingungen zu einer um den Erwartungswert asymmetrischen Verteilungsfunktion führen. Zudem erschwert das intrinsische und damit nicht extrahierbare Rauschen jeder Schaltung die empirische Bestimmung einer sinnvollen Wahrscheinlichkeitsverteilung. Nichtsdestotrotz kann, wie in Kapitel 4 gezeigt wird, auch ohne die Kenntnis der korrekten Anfangsverteilung Information über das deterministische Verhalten gegenüber unsicheren *Anfangswerten* einer Schaltung gewonnen werden.

3.9.4. Unendlich scharfe Phasenraumdichte (δ -Distribution)

Die δ -Distribution ist ein lineares Funktional, das für $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t))$ in der Liouville-Dynamik einem Zustand und dessen weiterem zeitlichen Verlauf im Phasenraum das sichere Ergebnis $P(M) = 1$ zuordnet. Mit diesem Formalismus lässt sich die verallgemeinerte Liouville-Gleichung aus einem anderen Blickwinkel herleiten [59, 226, 232]. Dazu sei

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t) &= \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_M \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}', t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tilde{\rho}(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \\ &= \int_{N \subseteq M} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)) \rho(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

die aus der ursprünglichen Herleitung bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte und $\delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) = \delta(x - \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t))$ die Delta-Distribution bezüglich $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$, sodass für die partielle Ableitung nach der Zeit des Integrals über den gesamten Phasenraum mit (3.34) folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_M \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0), t) \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \\
 &= \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \\
 &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (f_i(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x})) - \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \\
 &= - \int_M \tilde{\rho}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \left(f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) \right) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Demgemäß kann für $\delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x})$ die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \left(f_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial f_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) \right) = 0 \tag{3.60}$$

aufgestellt werden, sodass mit der Multiplikation mit $\rho(\mathbf{x}_0)$ und der Integration nach $d\mathbf{x}_0$ die verallgemeinerte Liouville-Gleichung folgt (siehe auch (3.44))

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{N \subseteq M} \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x}_0}_{\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{N \subseteq M} f_i(\mathbf{x}, t) \delta_{\tilde{\rho}}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x}_0}_{\nabla(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)p(\mathbf{x}, t))} = 0. \tag{3.61}$$

Folglich kann das gewöhnliche Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ als Grenzfall angesehen werden, das sich aus der verallgemeinerten Liouville-Gleichung ergibt, wenn die Anfangsverteilung einer Dirac-Distribution entspricht oder die Phasenraumdichte sich im Langzeitverhalten auf einen singulären Punkt staucht. In diesen Fällen wird demzufolge nur eine (diskrete) Integralkurve betrachtet, deren Wahrscheinlichkeitsdichte p für alle Zeiten eins ist.

3.9.5. Frobenius-Perrón Operator

Nichtlineare Systeme, und insbesondere solche mit Grenzzyklen, sind im Allgemeinen analytisch nicht lösbar. Die darauf aufbauenden numerischen Lösungsverfahren haben alle eine diskrete Schrittweite des Zeitparameters gemeinsam. Die Lösungen der verallgemeinerten Liouville-Gleichung können demnach als endliche Menge von diskretisierten Integralkurven betrachtet werden

$$\mathcal{P}(t) = \left\{ \left(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), p_0(\mathbf{x}_0) e^{-\int \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt} \Big|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)} \right) \Big| \mathbf{x}_0 \in N \subseteq M \right\}, \tag{3.62}$$

die allesamt zur Startzeit t_0 aus der Menge N ihre Anfangswerte beziehen. Jedes $(n+1)$ -Tupel von \mathcal{P} ergibt dann für alle $t \in \mathbb{T} \subset \mathbb{Q}$ einen Punkt im Liouville-Raum $\mathbb{P} = M \times \mathbb{R}^+$ zurück, sodass das dadurch entstehende Polygonnetz der Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht. Das darin eingeschlossene $(n+1)$ -dimensionale Volumen entspricht dem Liouville-Volumen mit dem sicheren Ergebnis $P(M) = 1$ bezüglich des Wahrscheinlichkeitsraums (M, \mathcal{B}, P) .

Der zu dem dynamischen System (\mathbb{T}, M, Φ) gehörige Fluss Φ bildet jede Anfangsbedingung $\mathbf{x}_0 \in N \subseteq M$ zur Zeit t auf den Punkt $\mathbf{h}_t = \Phi^t \mathbf{x}_0$ im Phasenraum ab, sodass für jedes $\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x}_{01}, \dots, \mathbf{x}_{0i}, \dots, \mathbf{x}_{0j}\} =$

3. Deterministische Systeme

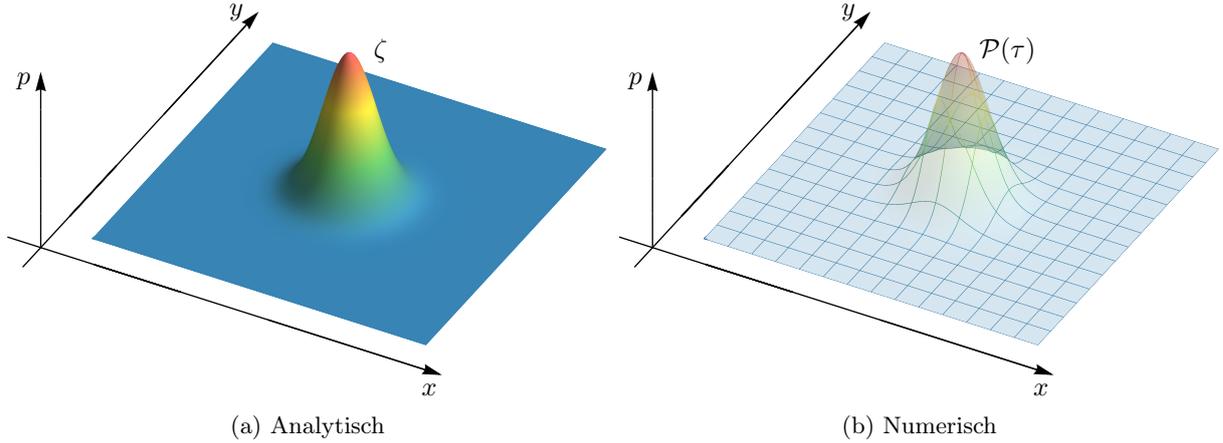


Abb. 3.7.: Beispiellösungen derselben Liouville-Gleichung zum Zeitpunkt $t = \tau$. Links die analytische Lösung als Hyperfläche $\zeta = p(\mathbf{x}, \tau)$ (siehe 3.9.1), rechts die numerische Lösung als Polygonnetz der Menge $\mathcal{P}(\tau)$.

N mit $j \rightarrow \infty$ eine δ -Distribution als Anfangsverteilung gemäß (3.58) angenommen werden kann und für die Summe eine glatte Phasenraumdichte folgt

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_0[\Phi^{-t}\mathbf{x}](\mathbf{x}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{0i}) \quad (3.63)$$

mit $\int_M p(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = 1$ und $p_0[\Phi^{-t}\mathbf{x}](\mathbf{x})$ als Funktional bezüglich des inversen Flusses $\mathbf{h}^{-1}_t = \Phi^{-t}\mathbf{x}$. Zusammen mit dem *Birkhoff'schen Ergodensatz* (3.26) ist der Erwartungswert einer Observable $B \in \mathcal{B}$ (siehe Abschnitt 3.1 bzw. 3.8) als Einzelmessung vieler Mittelwerte zu verstehen. Der Mittelwert dieser Observable zum Zeitpunkt t einer durch den Fluss transportierten Anfangsverteilung ist somit

$$\langle B \rangle_t = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^N B(\Phi^t \mathbf{x}_{0i}) = \int_M B(\Phi^t \mathbf{x}) p_0[\Phi^{-t}\mathbf{x}](\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_M B(\mathbf{x}) p_t(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.64)$$

mit $p_t(\mathbf{x}) \equiv p(\mathbf{x}, t)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte. Für die in Abschnitt 3.9.4 definierte Dirac-Distribution folgt daher

$$p_t(\mathbf{x}) = \int_N \delta(\mathbf{x} - \Phi^t \mathbf{x}_0) p_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 = |\hat{D}\Phi^{-t}| p_0[\Phi^{-t}\mathbf{x}](\mathbf{x}) =: (\hat{P}^t p_0)(\mathbf{x}). \quad (3.65)$$

Dabei wurde aus Gründen der Konsistenz \hat{D} als Differentialoperator bezüglich \mathbf{x} gewählt, welcher auf den inversen Fluss Φ^{-t} wirkt. \hat{P} heißt *Frobenius-Perrón-Operator*, ist linear und transportiert global eine Dichte für einen finiten Zeitschritt unter Erhaltung der L^1 -Integrabilität nach dem *Satz von Radon-Nikodým* [260]. Der Erwartungswert einer Observable ist infolgedessen durch das Skalarprodukt

$$\langle B \rangle_t = \langle B | \hat{P}^t p_0 \rangle \quad (3.66)$$

gegeben. Für den in Abschnitt 3.1 definierten *Liouville-Operator* \hat{L} gilt der Zusammenhang $\hat{P}^t = e^{\hat{L}t}$. Demzufolge definiert die Erzeugende des *Frobenius-Perrón-Operators* den *Liouville-Operator* und die Menge \mathcal{P} kann schrittweise erzeugt werden [160, 171].

Entspricht der Liouville-Raum dem Raum der quadratintegriblen Funktionen, d.h., ist dieser mit der Struktur eines Hilbertraums versehen, dann können diese Operatoren spektral zerlegt werden. Diese Zerlegung gibt über die zeitliche Entwicklung und über die Stabilität von Phasenraumdichten Aufschluss. Die Liouville-Dynamik der Pitchfork und Hopf-Bifurkation wurde in diesem Zusammenhang durch GASPARD und TASAKI untersucht [171]. Für mischende Systeme ist das Spektrum des Frobenius-Perrón-Operators kontinuierlich, während integrable Systeme ein diskretes Spektrum aufweisen.

Weiterführende Literatur

- BECK „From the Perron-Frobenius equation to the Fokker-Planck equation“ [235]
- DUTTA et al. „Uncertainty Quantification for Stochastic Nonlinear Systems using Perron-Frobenius Operator and Karhunen-Loève Expansion“ [261]

3.10. Dissipation und Entropie

Dissipation bezeichnet im Allgemeinen den Austausch einer physikalischen Größe (wie beispielsweise der Energie) mit der äußeren Umgebung eines dynamischen Systems [179]. Dissipative Systeme sind somit stets offene Subsysteme die mit ihrer Umgebung (beispielsweise einem Wärmebad) wechselwirken, sodass strenggenommen jedes nicht-idealisierte physikalische System aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik zu einem dissipativen System gehört. Die Beschreibung dieser thermodynamischen Prozesse geschieht über die Entropie S ; beispielsweise steigt die Entropie monoton bei jedem irreversiblen Prozess, bei dem Arbeit aufgrund von Reibung in thermische Energie (innere Energie) umgewandelt wird (Energieentwertung).

Der Austausch von Energie muss nicht zwangsläufig in eine Richtung erfolgen. Je nach Lage im Phasenraum kann Energie dissipiert oder auch akkumuliert werden. Als Beispiel dienen dynamische Systeme mit einem stabilen Grenzzyklus, die dissipative Verluste nicht instantan, sondern nur in bestimmten Bereichen durch Energiezufuhr ausgleichen (z.B. das Van der Pol-System im Abschnitt 4.2.1). D.h. der Austausch von Energie ist wegababhängig und die Anfangswerte, die das Einzugsgebiet bestimmen, beeinflussen entscheidend die Dissipation (für kleine Zeiten).

Thermodynamische Entropie lässt sich nicht ohne weiteres auf dynamische Systeme übertragen. Aus Sicht der Maßtheorie wäre es naheliegend, die Kolmogorow-Sinai-Entropie als Maß des Informationsgehalts zu definieren, die das System im Laufe seiner Dynamik generiert (analog zur Informationstheorie nach SHANNON bzw. zur Pesin-Entropie [219, 156]). Dieser Entropiebegriff vergleicht zwei Parallelepipede mit ihren Phasenraumvolumen. Der erste Parallelepipede W_0 ist um den Anfangswert \mathbf{x}_0 zur Anfangszeit $t = t_0$ zentriert und wird gemäß dem Fluss $\Phi^\tau W_0$ transportiert. Der zweite Parallelepipede W_1 startet zentriert um $\mathbf{x}_1 = \Phi^\tau \mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = \tau$ und wird rückwärts mit der Zeit gemäß $\Phi^{-\tau} W_1$ transportiert. Ist die abgeschlossene Menge des ersten Parallelepipeds zur Anfangszeit eine Teilmenge des zweiten Parallelepipeds zur Zeit $t = -\tau$, dann wurde Information verloren, andernfalls gewonnen (siehe Abb. 3.8). Fixobjekte wie Fixpunkte oder Grenzzyklen sind jedoch statische Objekte im Sinne dieser Theorie und generieren oder verlieren nur auf dem transienten Weg Information. Da Entropie im Sinne des zweiten Hauptsatzes für dissipative Systeme nur steigen kann, ist die Kolmogorow-Sinai-Entropie demzufolge ein Chaosindikator, deren Trajektorien im Laufe der Zeit immer weiter divergieren bzw. deren größter Ljapunov-Exponent positiv ist (siehe [162, 182] und im Bezug auf chemische Systeme [231, 257, 259]).

Gemäß (3.56) wird sich ein Phasenraumvolumen bei einer zustandsabhängigen Divergenz kontinuierlich ändern, sodass es in transversaler Richtung auf einem Grenzzyklus zu einem periodischen Wechsel von Streck- und Stauchvorgängen kommen kann (Pumpmechanismus). Sei $S_{\text{dyn}}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine zeitabhängige Funktion ähnlich zur Entropie der Phasenraumdicke $p(\mathbf{x}, t)$ mit k als Konstante (analog zur Boltzmann-Konstante k_B), die auch die physikalische Einheit von S setzt [59, 152], sodass

$$S_{\text{dyn}}(t) = -k \int_M p(\mathbf{x}, t) \ln(p(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x}, \quad (3.67)$$

dann folgt mit $p(\mathbf{x}, t) = \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)$ und der Transformation wie in (3.52)

$$\begin{aligned} S_{\text{dyn}}(t) &= -k \int_M \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \ln(\tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \\ &= -k \left(\int_M \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \ln(\tilde{\rho}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} + \int_M \tilde{J}^{-1}(\mathbf{x}, t) \tilde{\rho}(\mathbf{x}, t) \ln(\tilde{J}(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} \right) \\ &= -k \left(\int_{N \subseteq M} \rho(\mathbf{x}_0) \ln(\rho(\mathbf{x}_0)) \, d\mathbf{x}_0 + \int_{N \subseteq M} \rho(\mathbf{x}_0) \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) \, d\mathbf{x}_0 \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

3. Deterministische Systeme

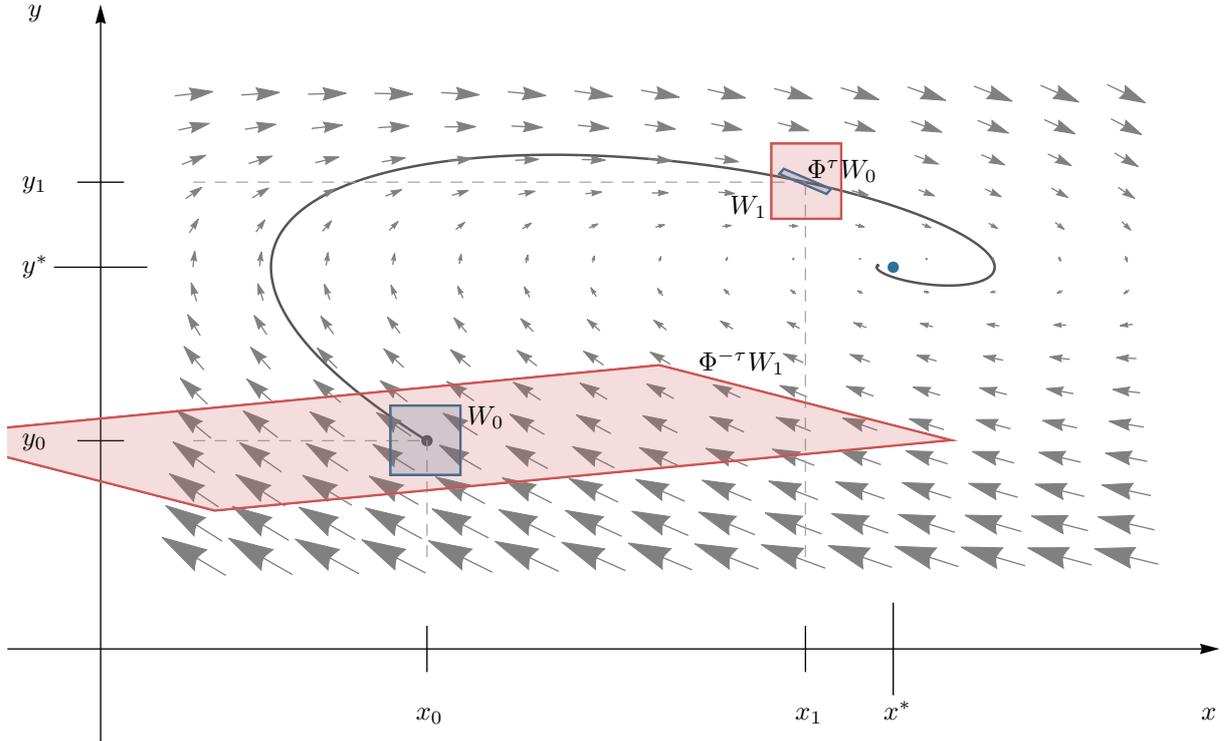


Abb. 3.8.: Kolmogorow-Sinai-Entropie-Beispiel eines harmonischen Oszillators mit linearer Dämpfung. Da die Menge W_0 eine Teilmenge der Menge $\Phi^{-\tau}W_1$ ist, sinkt der Informationsgehalt mit jedem Zeitschritt in diesem System [182].

Der linke Term in (3.68) ist zeitunabhängig und damit konstant. Der rechte Term entspricht dem Erwartungswert der Funktion $\ln(\tilde{J}(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), t))$, sodass S umgeschrieben werden kann zu

$$S_{\text{dyn}}(t) = S_0 + k \langle \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) \rangle_{\mathbf{x}_0}. \quad (3.69)$$

Die zeitliche Änderung von S ist somit ausschließlich durch die zeitliche Änderung des Erwartungswertes in (3.69) gegeben. Gemäß (3.42) kann diese Änderung aber mit der Divergenz identifiziert werden, sodass folgt

$$\dot{S}_{\text{dyn}}(t) = k \frac{d}{dt} \langle \ln(J(\mathbf{x}_0, t)) \rangle_{\mathbf{x}_0} = k \langle \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) |_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} \rangle_{\mathbf{x}_0}. \quad (3.70)$$

Gl. (3.70) kann ebenso umgeschrieben werden gemäß

$$\begin{aligned} \dot{S}_{\text{dyn}}(t) &= k \int_N \rho(\mathbf{x}_0) \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) |_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} d\mathbf{x}_0 \\ &= k \int_N p(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)) J(\mathbf{x}_0, t) \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) |_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} d\mathbf{x}_0 \\ &= k \int_M p(\mathbf{x}, t) \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} \\ &= k \langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle_{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

und mit dem Divergenzssatz (3.32) unter der Bedingung der Ergodenhypothese (die für thermodynamische Systeme gilt) verbunden werden. Daraus folgt, dass die Funktion \dot{S}_{dyn} , bis auf eine Konstante k und für autonome Systeme, der Summe aller 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten entspricht und folglich konstant sein muss, d.h. $\dot{S}_{\text{dyn}} = k\lambda_n = \text{const}$. Die Änderung der Kolmogorow-Sinai-Entropie ist hingegen die Summe aller positiven 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten λ_n^+ bezüglich einer Konstanten $k_{\text{KS}} = 1/\ln(2)JK^{-1}$ (Pesin-Theorem), d.h. $\dot{S}_{\text{KS}} = k_{\text{KS}}\lambda_n^+$ [169, 248]. Da λ_n für nicht chaotische dissipative

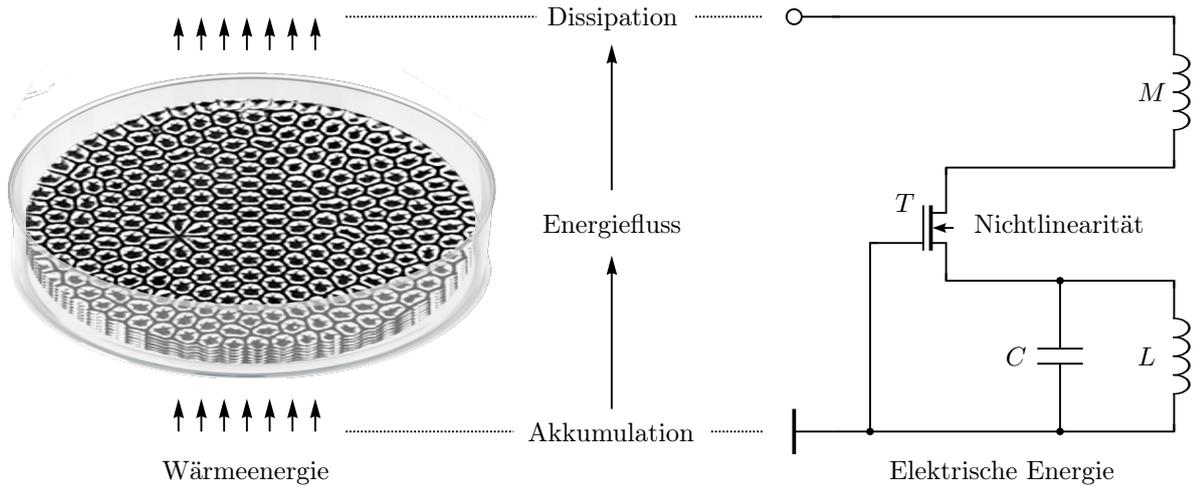


Abb. 3.9.: Beispiele für Phänomene fernab vom Gleichgewicht. Links eine dissipative Struktur durch das Erwärmen eines Fluids (Rayleigh-Bénard-Konvektion) [220], rechts ein Meissner-Oszillator, der Aufgrund seiner Nichtlinearität eine stabile Oszillation erzeugt. Beide Systeme stellen offene Nichtgleichgewichtssysteme dar, durch die ein Energiefluss strömt.

tive Systeme negativ ist, würde (3.70) als Interpretation einer Entropieänderung dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik widersprechen. Dies könnte durch eine Betragsbildung vermieden werden, indem (3.70) mit Entropieerhaltung im Bezug auf die Systemumgebung interpretiert wird. D.h., die Menge an Entropieabnahme eines dynamischen Systems entspricht der Menge an Entropiezunahme seiner thermodynamischen Umgebung in Form von Joulescher Wärme, sodass beide Größen sich aufheben [132]. Allerdings lassen sich kanonisch-dissipative Systeme finden, bei denen klar ist, in welchen Bereichen des Phasenraums Energie dissipiert wird. In diesen Bereichen findet jedoch nicht immer eine Akkumulation des Phasenraumvolumens statt, sondern auch Dissipation, was im Sinne der eben genannten Entropieerhaltung konträr wäre. Zudem gehen durch die Mittelung $\langle \cdot \rangle$ alle lokal relevanten Informationen über den Pumpmechanismus verloren. Die eingangs erwähnte Wegabhängigkeit der dissipierten Energiemenge und die damit verbundene Abhängigkeit der Anfangswerte ist damit obsolet. Mit der Mittelung können nur noch Aussagen über große Zeiten gemacht werden. Allerdings stellt die Entropie gemäß (3.67) auch nicht den Anspruch eine thermodynamische Entropie zu sein. Sie impliziert stattdessen nur die Information über den zeitlichen Verlauf eines Volumens im Phasenraum und ist entweder nur ein Teil einer thermodynamischen Entropie, die auch ihre Umgebung berücksichtigt, oder (3.67) ist das Analogon einer thermodynamischen Entropie für dynamische Systeme, der in dieser Arbeit sogenannten *dynamischen Entropie* [49, 228].

Handelt es sich bei dem System um ein konservatives System mit mischender Eigenschaft, so kann entgegen der Volumenerhaltung eine positive Entropieänderung angegeben werden. D.h., trotz des deterministischen Charakters kann das System zu einem irreversiblen statistischen Gleichgewicht transformieren.

Würde die Rückkopplung eines elektrischen Oszillators unterbrochen werden, würde die dem System durch die Anfangsbedingung zugeführte Energie stetig dissipiert und an die Umgebung des Systems abgegeben werden. Unabhängig von den dissipativen Verlusten zum Betrieb einer geeigneten Energiequelle muss die notwendige Energiemenge der Entdämpfung, bezogen auf eine Periode T , genauso groß sein, wie die in dieser Zeit dissipierte Energie. In seiner Summe verrichtet das System demzufolge genau die Menge an Arbeit, die zum Erhalt der Schwingung notwendig ist.

Handelt es sich bei dem dynamischen System um ein kanonisch-dissipatives Hamilton-System, so können die Bereiche im Phasenraum, zu denen Energie dissipiert oder akkumuliert wird, über die Dissipationsfunktion als ein Nullstellenproblem bestimmt werden. Für ein allgemeineres dissipatives System, zu dem ohne weiteres keine Energiefunktion aufgestellt werden kann, können diese Bereiche bestenfalls durch

eine Analogiebetrachtung der Bewegungsgleichung zu bereits bekannten Hamilton-Systemen bestimmt werden, also der Identifizierung von *Dämpfungstermen* in den Bewegungsgleichungen.

Ein dissipatives System mit einem stabilen Grenzyklus zeichnet sich folglich nicht allein dadurch aus, Energie an die Umgebung abzugeben, sondern dass ein Energiefluss für jede Periode von einer Energiequelle durch das System an die Umgebung stattfindet; schließlich können Bereiche des Phasenraums existieren in denen mehr Energie akkumuliert als dissipiert wird (siehe Abb. 3.9). Ist (3.69) nur ein Teil der thermodynamischen Entropie, dann kann auch die Divergenz nur eine Teilantwort auf die Frage sein, wann Energie dissipiert wird und ob die Richtung des Energieflusses mit dem Pumpmechanismus korreliert.

Als Beispiel eines dissipativen Systems im thermodynamischen Sinne sei ein ideales Gas in einem isolierten Behälter gegeben, welches sich als Ganzes in einem isoliertem Behälter, umgeben von einem Vakuum mit endlichem Volumen, befindet. Die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls des Gases ist erhalten. Hat der innere Behälter eine Öffnung, steigt die Entropie des thermodynamischen Systems an, bis das Phasenraumvolumen des Gases dem Volumen des äußeren Behälters entspricht. Die Gesamtenergie und der Gesamtimpuls bleiben jedoch weiterhin erhalten. Dieses System ist demzufolge konservativ bezüglich seiner Energie, aber dissipativ bezüglich der thermodynamischen Entropie und auch dissipativ bezüglich des Phasenraumvolumens [186]. Dieser Vorgang ist ohne Verrichtung von Arbeit nicht reversibel. Das Gas wird sich nicht wieder in den inneren Behälter ordnen. Demzufolge existieren keine akkumulativen thermodynamischen Systeme. Wird das System dahingehend verändert, dass die Öffnung durch eine Vakuumpumpe ersetzt wird, welche in beiden Richtungen Arbeit verrichten kann, dann kann das Gas beliebig umgefüllt werden. Die Beschreibung dieses Systems ist nun nicht mehr thermodynamisch abgeschlossen, da die notwendige Energie zum Umfüllen des Gases aus der Systemumgebung akkumuliert werden muss. Die Beschreibung als ein dynamisches System ist jedoch legitim und je nach Wirkrichtung der Vakuumpumpe ist das System akkumulativ oder dissipativ bezüglich seines Phasenraumvolumens. Außerdem wird klar, wieso die Entropieänderung negativ werden kann. Aus Sicht des Gesamtsystems, stellt das Umfüllen des Gases aus dem äußeren in den inneren Behälter eine Ordnung dar.

Im übertragenen Sinn kann die Vakuumpumpe durch eine Energiepumpe ersetzt werden. Die Dämpfung bzw. Verstärkung eines dynamischen Systems ist demzufolge abhängig von dem Pumpmechanismus der Energiepumpe. Dieser Mechanismus kann mittels einer Bilanzgleichung, beispielsweise

$$\dot{e}(t) = G - R e(t) - M(\mathbf{x}) e(t), \quad (3.72)$$

modelliert werden [90]. Dabei ist $e: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Energiefunktion die ein internes Energiedepot beschreibt, G die Rate mit der Energie aus der Systemumgebung in das Depot akkumuliert wird, R die Rate mit der Depotenergie dissipiert wird und M die zustandsabhängige Rate mit der Depotenergie in kinetische Energie des dynamischen Systems umgewandelt wird. Die Zustandsabhängigkeit von M modelliert den Pumpmechanismus als solches.

Weiterführende Literatur

- ANDREY „The rate of entropy change in non-hamiltonian systems“ [152]
- BECK & SCHLÖGL „Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction“ [233]
- HOOVER „Remarks on non-Hamiltonian statistical mechanics: Lyapunov exponents and phase-space dimensionality loss“ [248]
- KLAGES „Microscopic Chaos, Fractals, and Transport in Nonequilibrium Steady States“ [132]
- LANDAUER „Stability and entropy production in electrical circuits“ [52]
- LASOTA & MACKAY „Probabilistic Properties of Deterministic Systems“ [153]
- MEIXNER „Entropie im Nichtgleichgewicht“ [49]
- MEIXNER „Thermodynamik der Vorgänge in einfachen fluiden Medien und die Charakterisierung der Thermodynamik irreversibler Prozesse“ [50]
- PRIGOGINE „Time, Structure, and Fluctuations“ [220]
- RAMSHAW „Remarks on entropy and irreversibility in non-hamiltonian systems“ [228]
- REIF „Fundamentals of Statistical and Thermal Physics“ [209]
- SERGI „Non-Hamiltonian equilibrium statistical mechanics“ [250]

4. Liouville Dynamik

Die Liouville Dynamik ist die Beschreibung der deterministischen Bewegung einer gewichteten Schar von *Integralkurven* $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$. Gewöhnliche Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

mit $\mathbf{f}: M \rightarrow TM$ als C^k -Vektorfeld stellen die Bewegungsgleichungen dieser Integralkurven auf dem Phasenraum M dar. Die *Anfangswerte* \mathbf{x}_0 ergeben sich aus dem Bild der *Lösungsfunktionen* $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$ zur *Anfangszeit* $t = t_0$ gemäß $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t_0)$ und sind Elemente einer *Anfangsmenge* $N \subseteq M$. Eine *Phasenraumdichte* $p: M \rightarrow \mathbb{R}^+$ wird durch eine *Anfangsverteilung* $p_0: N \rightarrow \mathbb{R}^+$ in Form eines Funktionals $p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t)$ bestimmt. Die Bewegung dieser Wahrscheinlichkeitsdichte folgt der *verallgemeinerten Liouville-Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \operatorname{grad}(p(\mathbf{x}, t)) + \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) p(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.2)$$

Diese Gleichung stellt eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung dar, dessen nicht konstante Koeffizienten aus dem Vektorfeld \mathbf{f} und der Divergenz des Vektorfeldes $\operatorname{div}(\mathbf{f})$ bestehen. Die Funktionsabhängigkeit der Divergenz weist für kontinuierliche Vektorfelder fünf unterschiedliche Fälle auf und ist auf drei Fälle für *autonome* Systeme reduzierbar: (i) $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0$ (divergenzfrei), (ii) $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \text{const} \neq 0$ (konstant) und (iii) $\operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = c(\mathbf{x})$ (zustandsabhängig). Die Lösung der Liouville-Gleichung ist gegeben durch

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t) e^{-\int \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt}|_{\mathbf{x}_0=\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)} \quad (4.3)$$

mit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)$ als Umkehrtransformation zu $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)$.

Der Exponentialterm entspricht einer *Phasenraumvolumendichte*, sodass das *Phasenraumvolumen* gegeben ist mit

$$V(t) = \int_N e^{-\int \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt} d\mathbf{x}_0. \quad (4.4)$$

Ist das Vektorfeld divergenzfrei, d.h. gilt $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0$, sodass der letzte Term der verallgemeinerten Liouville-Gleichung verschwindet, dann ist das Phasenraumvolumen erhalten. Da die Integration der Wahrscheinlichkeitsdichte über dem gesamten Phasenraum gemäß

$$P(M) = \int_M p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1 \quad (4.5)$$

auch unter Zeitentwicklung erhalten bleibt, handelt es sich bei dem Exponentialterm um einen Volumenerhaltungsterm bezüglich des durch (4.5) eingeschlossenen Volumens (Liouville-Volumen), welches im *Liouville-Raum* $\mathbb{P} = M \times \mathbb{R}^+$ eingebettet ist¹. Das eingeschlossene Phasenraumvolumen ist unabhängig von der Phasenraumdichte. Phasenraum- und Liouville-Volumen müssen daher strikt voneinander unterschieden werden. Während ersteres nur für divergenzfreie Systeme erhalten ist (wie z.B. Hamilton-Systeme), ist letzteres als das sichere Ergebnis, d.h. als Aufenthaltswahrscheinlichkeit P innerhalb des Phasenraums, zu interpretieren.

Die Änderung des Phasenraumvolumens entspricht

$$\dot{V}(t) = \int_M \operatorname{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}, \quad (4.6)$$

¹Der Begriff des Liouville-Volumens stellt nur ein Gedankenkonstrukt zur Veranschaulichung dar. Tatsächlich gibt es keinen Mehrwert gegenüber Begriff der Phasenraumdichte. Die Phasenraumdichte ist demnach als eine orthogonale Projektion vom Liouville-Raum in den Phasenraum zu verstehen

4. Liouville Dynamik

sodass die Divergenz als eine *Volumenänderungsratendichte* mit der physikalischen Dimension einer Frequenz zu interpretieren ist. Hieraus folgt, dass für die Bewegung einer Phasenraumdicke die Divergenz des Vektorfeldes $\text{div}(\mathbf{f})$ entscheidend ist und diese die Wahrscheinlichkeitsdichte p maßgeblich beeinflusst. Die Änderung eines Phasenraumvolumens wird zu Änderungen der Phasenraumdicke führen, während eine Änderung der Phasenraumdicke nicht einer Änderung des Phasenraumvolumens zu Grunde liegen muss. Die Ursache für Änderungen des Phasenraumvolumens sind Quellen oder Senken, die Ursache für Änderungen der Phasenraumdicke sind Beschleunigungen. Ein Fluid, welches eine Senke überquert, verliert sein Volumen und ändert seine Dichte, ein Fluid, welches in einem konstanten Volumen beschleunigt wird, ändert nur seine Dichte.

Ein elektrischer Oszillator ist ein dynamisches System, das der autonomen Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (4.7)$$

mit μ als *Bifurkationsparameter* gehorcht und zu der ein Hopf-Punkt $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu})$ existiert, zu dem für Bifurkationswerte $|\epsilon|$ größer null stabile Grenzzyklen entspringen. Da alle Integralkurven mit Anfangswerten innerhalb der Einzugsgebiete in einen Grenzzyklus laufen, unterliegen diesem Vorgang in gleicher Weise auch Phasenraumdichten, deren Anfangsverteilung vollständig in einem der Einzugsgebiete lagen. Da die Bewegung auf dem Grenzzyklus einer 2π -periodischen Funktion $\mathbf{h}_G(\phi, t) = \mathbf{h}_G(\phi, t + T)$ folgt, mit ϕ als Phase und $T(\epsilon) = \mathcal{O}(\epsilon^{-1/2})$ als Periodendauer, ist eine Phasenraumdicke mit zustandsabhängiger Divergenz einem periodischen Mechanismus unterlegen, der das Phasenraumvolumen fortwährend streckt und staucht.

Definition (Pumpmechanismus) *Sei (\mathbb{T}, M, Φ) ein autonomes dynamisches System mit zustandsabhängiger Divergenz und einem Grenzzyklus. Dann unterliegt jede Phasenraumdicke (4.3) auf dem Grenzzyklus einem periodischen Mechanismus, der das Phasenraumvolumen gemäß (4.6) streckt und staucht. Dieser Mechanismus wird Pumpmechanismus genannt.*

Der Phasenraum von dynamischen Systemen mit mehreren Grenzzyklen lässt sich in Untermengen, sogenannte *innere Subsysteme*, aufteilen. Innere Subsysteme bezüglich Grenzzyklen sind die Vereinigung aller *Bassins* sowie die geschlossenen Orbits selbst. Da ein Einzugsgebiet eines stabilen Grenzzyklus zugleich das *Auszugsgebiet* eines instabilen Grenzzyklus oder eines instabilen Gleichgewichtspunktes sein kann, ist der Durchschnitt zweier inneren Subsysteme nicht zwangsläufig leer.

Die n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten λ_n gemäß (3.29) bestimmen die Stabilität dieser inneren Subsysteme. Ein inneres Subsystem ist stabil bzw. instabil, wenn der Ljapunov-Exponent in positiver bzw. negativer Zeitrichtung negativ ist. Die Werte der Ljapunov-Exponenten unterscheiden sich in der Regel für verschiedene innere Subsysteme. Als Folge des Divergenzsatzes

$$\langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle_t = \lambda_n, \quad (4.8)$$

gibt der zeitliche Verlauf der Ljapunov-Exponenten (Ljapunov-Spektrum) Aufschluss über die exponentielle Verdichtung eines Phasenraumvolumens innerhalb eines inneren Subsystems, analog zur Volumenänderungsratendichte (4.4). Der Pumpmechanismus manifestiert sich demzufolge im Ljapunov-Spektrum als eine periodische Funktion. Da dieser mit der eigentlichen Oszillation korreliert, stellt die erste Lösung des *Nullstellenproblems* zu (4.8) eine inhärente Definition für den zeitlichen Beginn der Oszillation dar. Dies lässt sich verallgemeinern.

Definition (Zeitintervall des Einschwingvorgangs) *Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ die Anfangszeit eines dynamischen Systems (\mathbb{T}, M, Φ) mit zustandsabhängiger Divergenz und einem stabilen Grenzzyklus. Sei weiterhin t_n die n -te zeitliche Lösung des Nullstellenproblems (4.8), sodass $t_0 < t_{n-1} < t_n < t_{n+1}$. Für eine geeignete Wahl von n gilt ein elektrischer Oszillator als eingeschwingen, wenn $t = t_n$. Das Intervall $[t_0, t_n)$ ist das Zeitintervall des Einschwingvorgangs und $n - 1$ zählt die erfolgten Umläufe ab. Dabei gilt, je höher n gewählt wird, desto schärfer ist die Trennung zwischen Transienz und Oszillation.*

Eine *Verteilungsfunktion*

$$F_\mu(t) = \int p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (4.9)$$

mit μ als σ -endliches Maß gemäß den Definitionen des *Satzes von Radon-Nikodým* (siehe Gl. (3.23)) ist durch Angabe aller stochastischen zentralen Momente μ_n bestimmt², falls die Momente existieren und die Reihe der momenterzeugenden Funktion konvergiert. Da sich die Verteilungsfunktion mit dem Pumpmechanismus periodisch ändert, ist im zeitlichen Verlauf der zentralen Momente dieser Mechanismus wie im Ljapunov-Spektrum wiederzuerkennen.

Die Anfangsverteilung eines deterministischen Prozesses ist ein Ensemble von verschiedenen Anfangswerten \mathbf{x}_0 mit zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(\mathbf{x}_0)$ und die Bewegung dieses Ensembles entspricht der Bewegung einer Schar von Trajektorien die derselben deterministischen Bewegungsgleichung (4.1) folgen. Ein stochastischer Prozess erweitert dieses Konzept um ein weiteres Ensemble zu jedem Anfangswert \mathbf{x}_0 . Diese Ensemble setzen sich jeweils aus einer Schar von unendlichen Realisierungen zusammen, die der stochastischen Bewegungsgleichung (Langevin-Gleichung)

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{X}, t)\xi(t) \quad (4.10)$$

folgen. Das Analogon zur verallgemeinerten Liouville-Gleichung für stochastische Systeme ist die *Fokker-Planck-Gleichung*, eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial}{\partial t}p(\mathbf{X}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \text{grad}(p(\mathbf{X}, t)) + \text{div}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t))p(\mathbf{X}, t) + \Delta(\sigma(\mathbf{X}, t)p(\mathbf{X}, t)) = 0 \quad (4.11)$$

mit Δ als den verallgemeinerten Laplace-Operator für Matrizen. Das Vektorfeld \mathbf{f} ist hierbei der *Drift* \mathbf{F} und ein zuvor deterministischer Zustand \mathbf{x} wurde durch sein stochastisches Analogon \mathbf{X} ersetzt. Beide Unterscheidungen sind wesentlich, denn zum einen hängt \mathbf{X} im Gegensatz zu \mathbf{x} von einem Abzählparameter ab, der mit jeder möglichen Realisierung identifiziert werden kann und zum anderen kann für jede Realisierung unter dem Einfluss des Langevin-Terms ein zeitlich transformiertes Vektorfeld gefunden werden, welches im Allgemeinen verschieden zu \mathbf{f} ist. Das *weiße Rauschen* ξ wird dabei mittels *Diffusion* $\sigma = \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$ skaliert, welches einen weiteren nicht konstanten Koeffizienten darstellt.

Gängige Methoden um das Rauschen in elektrischen Oszillatoren zu beschreiben, basieren auf einer Separation

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}(t + \phi(t)) + \Delta\mathbf{x}(t + \phi(t)) \quad (4.12)$$

der ungestörten periodischen Lösung³ $\mathbf{x}(t + \phi(t))$ des deterministischen Systems (4.7) mit $\phi(t)$ als Phasenfunktion und aus der *Amplitudenabweichung* $\Delta\mathbf{x}(t + \phi(t))$ für die die Bedingung $\|\Delta\mathbf{x}\| \ll \|\mathbf{x}\|$ gilt. Mit dem Einsetzen dieser Lösung (4.12) in die Langevin-Gleichung (4.10) und anschließender Linearisierung durch eine Taylor-Entwicklung erster Ordnung lässt sich ein Differentialgleichungssystem der Amplitudenabweichung und Phase gewinnen, welches unter Zuhilfenahme der Floquet-Theorie gelöst werden kann (siehe Gl. (1.10) bis (1.14)). Gemäß dem *Wiener-Chintschin-Theorem* [202] ist die *spektrale Rauschleistungsdichte* die Fourier-Transformierte der korrespondierenden *Autokorrelationsfunktion*

$$\mathbf{r}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \langle \mathbf{X}(t + \tau)\mathbf{X}^\top(t) \rangle dt = \langle \langle \mathbf{X}(t + \tau)\mathbf{X}^\top(t) \rangle_{\mathbf{x}} \rangle_t. \quad (4.13)$$

Das Integral in (4.13) entspricht der *charakteristischen Funktion*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t') = \int_M e^{jt\mathbf{X}} dF_{\mu}(\mathbf{X}) = \int_M p(\mathbf{X}, t) e^{jt\mathbf{X}} d\mathbf{X}, \quad (4.14)$$

welche aufgrund der aufkommenden *Verteilungsfunktion* $F_{\mu}(\mathbf{X})$ dem Pumpmechanismus unterliegt. Erst durch das zeitliche Mittel $\langle \cdot \rangle_t$ geht diese Information verloren. Mit dieser Herangehensweise lassen sich Aussagen über das *Amplituden-* und *Phasenrauschen* machen. Allerdings werden damit nur lineare statistische Zusammenhänge beschrieben. Auf welche Weise der Pumpmechanismus das Amplituden- und Phasenrauschen für höhere Ordnungen einer Störungsentwicklung beeinflusst, bleibt unbeantwortet. Be-

²Es gilt zu beachten, dass das Symbol μ aus literarischen Gründen für drei verschiedene Definitionen herangezogen wird: (i) für den Bifurkationsparameter μ , (ii) für das Maß μ auf dem Messraum (M, \mathcal{B}) und (iii) für die stochastischen zentralen Momente μ_n .

³Das Symbol für Lösungen war zuvor stets h . Aufgrund literarischer Gründe wurde dieses nun durch x ersetzt und die Anfangswerte vernachlässigt. Es gilt $\mathbf{h}(\cdot, t) = \mathbf{x}(t)$.

rechnungsergebnisse der zentralen Momente für verschiedene elektrische Oszillatoren zeigen aber, dass der Pumpmechanismus mit den Rauschprozessen wechselwirkt und dieser, zusätzlich zum deterministischen Fall, ausgelöst wird.

Phasenrauschen, das sich letztlich erst mit dem Langevin-Zugang (4.10) und der entsprechenden Fokker-Planck-Gleichung (4.11) beschreiben lässt, wird demnach maßgeblich vom Drift \mathbf{F} beeinflusst. Während der additive Wiener-Prozess stetig eine instantane Bewegungsänderung entgegen dem sonst deterministischen Fluss verursacht, ist es der Drift, der diese Änderung bei einem elektrischen Oszillator auszugleichen versucht, indem die Abweichung $\Delta\mathbf{x}$ vom Grenzyklus als Anfangswert einer neuen Integralkurve $\mathbf{X}(\Delta\mathbf{x}, t)$ zu interpretieren ist, die transient in den Grenzyklus einläuft und aufgrund des Zeitunterschieds zu einer Phasenverschiebung $\Delta\phi$ führt. Ein Oszillator mit zustandsabhängiger Divergenz, würde demzufolge eine größere Varianz des Phasenrauschens (zweites zentrales Moment μ_2) aufweisen, als ein Oszillator mit konstanter Divergenz, da auch die Fluktuationen des Wiener-Prozesses dem Pumpmechanismus unterliegen. Je härter und häufiger die Übergänge zwischen den Stauch- und Streckvorgängen einer Phasenraumdicke p sind, desto stärker manifestiert sich der Pumpmechanismus und desto anfälliger ist dieser Oszillator gegenüber dem Phasenrauschen bzw. desto aufwendiger wird eine Phasenregelung zur Unterdrückung des Phasenrauschens. Die Umkehrung gilt nicht. Eine konstante Divergenz $\text{div}(\mathbf{F}) = \text{div}_0 = \text{const}$ lässt das Phasenrauschen nicht verschwinden, da die Diffusion σ kausal mit dem Rauschen zusammenhängt⁴. Allerdings ist jede Fluktuation $\Delta\mathbf{x}$ unabhängig vom jeweiligen Zustand im Phasenraum und die entsprechende Abweichung vom Grenzyklus wird stets mit derselben Abklingkonstante div_0 exponentiell ausgeglichen, sodass die Varianz des Phasenrauschens nicht durch den Drift beeinflusst wird, sondern ausschließlich durch die Varianz des Diffusionsprozesses.

Dissipation ist ein Begriff dynamischer als auch thermodynamischer Systeme, welcher ohne seinem Antagonisten, der sogenannten *Akkumulation*, nicht sinnvoll definiert werden kann. Dissipation und Akkumulation sind zudem durch den Begriff der *Erhaltung* voneinander getrennt. Dies macht deutlich, dass eine Bezugsgröße nötig ist. Erhaltung als alleiniger Begriff sagt nicht aus was erhalten sein soll. Gleiches gilt für Dissipation und Akkumulation. Dissipation bezüglich der Energie ist im Allgemeinen nicht identisch mit der Dissipation eines Phasenraumvolumens.

Im Falle dynamischer Systeme müssen diese Begrifflichkeiten lokal und global unterschieden werden⁵. Lokal akkumulative Zustände sind in einem als global dissipativ definierten inneren Subsystem nicht ausgeschlossen. Genau dieser wie auch der umgekehrte Fall sind der Grund für den Pumpmechanismus. Unter der Annahme autonomer Bewegungsgleichungen heißt ein Zustand \mathbf{x} im Phasenraum M

$$\begin{aligned} & \text{(lokal) dissipativ,} & \text{falls } \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0, \\ & \text{(lokal) konservativ,} & \text{falls } \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0, \\ & \text{(lokal) akkumulativ,} & \text{falls } \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) > 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Über die Stabilität solcher Punkte, kann im Allgemeinen keine Aussage gemacht werden (siehe Abschnitt 3.3 über Ljapunov-Stabilität). Beispielsweise existieren stabile oder instabile Gleichgewichtspunkte, die lokal konservativ sind⁶. Da die Divergenz zugleich die Volumenänderungsratendichte eines Phasenraumvolumens darstellt, ist ein Phasenraumvolumen $V(t)$ zum Zeitpunkt t

$$\begin{aligned} & \text{dissipativ bzw. komprimierend,} & \text{falls } \dot{V}(t) < 0, \\ & \text{konservativ}^7 \text{ oder inkompressibel,} & \text{falls } \dot{V}(t) = 0, \\ & \text{akkumulativ bzw. expandierend,} & \text{falls } \dot{V}(t) > 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

⁴Es sei angemerkt, dass diese Argumentationsweise die Gültigkeit des Langevin-Zugangs für Rauschprozesse voraussetzt.

⁵WUNSCH führte den Zusammenhang zwischen Dissipation und Akkumulation in seiner Arbeit über die Grundlagen der Prozesstheorie [170] aus, welcher jedoch nicht die Beachtung fand die es verdient. Allerdings unterschied WUNSCH nicht zwischen Lokalität und Globalität.

⁶Als Beispiel sei ein nichtlineares Pendel mit der Bewegungsgleichung $\ddot{x} + \sin(x) = 0$ genannt. Wegen $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$ ist jeder Zustand konservativ. Dennoch ist $(0, 0)$ ein stabiler und $(0, \pi)$ ein instabiler Gleichgewichtspunkt.

Da innere Subsysteme *invariante Mengen* darstellen, können diese nur über einen Grenzwert, dem n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten λ_n , klassifiziert werden. Ein inneres Subsystem bzw. ein darin befindliches Phasenraumvolumen⁸ heißt

$$\begin{aligned} & \text{(global) dissipativ oder stabil,} & \text{falls } \lambda_n < 0, \\ & \text{(global) konservativ,} & \text{falls } \lambda_n = 0, \\ & \text{(global) akkumulativ oder instabil,} & \text{falls } \lambda_n > 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Hamilton-Systeme sind konservative Systeme bezüglich ihrer Hamilton-Funktion $H: \Omega = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$, wenn diese zeitunabhängig ist. Zudem ist jedes Phasenraumvolumen inkompressibel (*Satz von Liouville*). Ist die Hamilton-Funktion eine autonome *Energiefunktion*, dann ist das System energie- und volumenerhaltend. Da Hamilton-Systeme dynamische Systeme darstellen, ist die Verleitung groß, Energie und Phasenraumvolumen auch für dissipative Systeme gleichzusetzen. Die Definitionen (4.15) bis (4.17) sprechen allerdings nur von Zuständen, Volumen und Mengen, nicht aber von Energie oder anderen physikalischen Erhaltungsgrößen, die dem *Noether-Theorem* zugrunde liegen. Um einen Zusammenhang zwischen Energie und Phasenraumvolumen herzustellen, bedarf es einer Theorie, die beide Begriffe kennt. Ein Beispiel stellen *kanonisch-dissipative* Systeme dar. Anhand der *Dissipationsfunktion*, mit der die kanonischen Bewegungsgleichungen erweitert werden, und der Divergenz des Vektorfeldes, lässt sich eine Gleichung finden die aufzeigt in welchen Bereichen des Phasenraums Dissipation von Energie und Phasenraumvolumen gleichzusetzen ist (siehe Gl. (3.11)). Anhand dieser Gleichung lassen sich Systeme finden, bei denen Energie lokal dissipiert wird, während das Phasenraumvolumen expandiert (siehe Abschnitt 4.2.4).

Im Falle thermodynamischer Systeme wird zu deren Klassifikation die Entropie S herangezogen. Ein thermodynamischer Prozess in einem isolierten System heißt

$$\begin{aligned} & \text{dissipativ oder irreversibel,} & \text{falls } \dot{S} > 0, \\ & \text{isentrop oder reversibel,} & \text{falls } \dot{S} = 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Der Fall $\dot{S} < 0$ ist nach dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik für isolierte Systeme ausgeschlossen, nicht aber für offene Systeme. Da die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Liouville-Dynamik einem Ensemble entspricht, kann eine Funktion $S_{\text{dyn}}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ähnlich zur Entropie gemäß

$$S_{\text{dyn}}(t) = -k \int_M p(\mathbf{x}, t) \ln(p(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x}, \tag{4.19}$$

definiert werden. Es zeigt sich, dass der räumliche Erwartungswert der Divergenz der zeitlichen Ableitung dieser Funktion entspricht, d.h.

$$\dot{S}_{\text{dyn}}(t) = k \langle \text{div}(\mathbf{f}) \rangle_{\mathbf{x}}. \tag{4.20}$$

Da thermodynamische Systeme ergodische Systeme sind, stellt die Ergodenhypothese ein legitimes Bindeglied dar, d.h., der zeitliche und räumliche Erwartungswert zwischen dem *Divergenzsatz* (4.8) und S_{dyn} können verbunden werden. Allerdings widerspricht das Vorzeichen der Ableitung \dot{S}_{dyn} den Gesetzen der Thermodynamik. Ein dynamisches System wäre demzufolge akkumulativ, wenn der entsprechende thermodynamische Prozess dissipativ ist. Dies zeigt, dass die Definition der thermodynamischen Dissipation auf dynamische Systeme nicht ohne weiteres übertragbar ist und nach dem Vorbild der Thermodynamik Energie und Phasenraumvolumen nicht ohne weiteres verknüpfbar sind. \dot{S}_{dyn} heißt daher *dynamische Entropie*. Ein dissipatives dynamisches System ist demzufolge ein (dissipativer) thermodynamischer Prozess, dessen Bewegungsgleichung einem Ljapunov-stabilen System entspricht (siehe Abschnitt 4.1.1). Analog dazu existieren akkumulative dynamische Systeme, denen ein (dissipativer) thermodynamischer Prozess zugehörig ist und dessen Bewegungsgleichung einem Ljapunov-instabilen System entspricht (siehe Abschnitt 4.1.2). In beiden Fällen sind die ablaufenden physikalischen Prozesse auf thermodynamischer Ebene dissipativ, während das Phasenportrait eine stabile bzw. instabile Bewegung zeigt.

⁷Gültig ist in diesem Zusammenhang auch der Begriff *volumenerhaltend*.

⁸Da der Definitionsbereich einer Anfangsverteilung p_0 auf ein inneres Subsystem beschränkt ist und aus (4.6) und dem Divergenzsatz (4.8) die Beziehung $\langle \dot{V}(t) \rangle_t \propto \lambda_n$ folgt, ist die Definition (4.17) auch für Phasenraumvolumen gültig.

4. Liouville Dynamik

Jedes dissipative System, bezüglich seiner inneren Subsysteme, kann darüber hinaus durch geeignete akkumulative Erweiterungen mit einem *äußeren Subsystem* in ein konservatives Gesamtsystem überführt werden. Die dissipativen Verluste sind dann die akkumulativen Gewinne der neuen Freiheitsgrade. Allerdings müssen diese Systeme nicht zwangsläufig Hamilton-Systeme sein, beispielsweise wenn das neue System eine ungerade Dimension aufweist. Für die Entwicklung von elektrischen Oszillatoren auf Basis von Grenzzyklen sind jedoch nur Systeme mit konstanter oder zustandsabhängiger Divergenz von Relevanz.

Im Folgenden werden zwei Klassen von dynamischen Systemen behandelt: (i) Lineare Systeme im autonomen als auch im nicht-autonomen Fall in Abschnitt 4.1 und (ii) nichtlineare Systeme mit Grenzzyklen in Anwendung auf elektrische Oszillatoren, einschließlich der Untersuchung des Pumpmechanismus in Abschnitt 4.2.

4.1. Lineare Systeme

Lineare Systeme geben aufgrund ihrer Lösbarkeit einen tieferen Einblick in die Liouville-Dynamik. Zu diesem Zweck wird in Abschnitt 4.1.1 ein harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung in Form eines parallelen *RLC*-Schwingkreises untersucht, bei dem analytisch gezeigt werden kann, welche Rolle die Divergenz auf die Volumenerhaltung einer Phasenraumdicke hat. In Abschnitt 4.1.2 wird ein Wien-Filter als *RC*-Bandpassfilter untersucht. Dieses nicht-autonome Netzwerk kann mit einer nicht-invertierenden Verstärkerschaltung, zu einem elektrischen Oszillator erweitert werden. Die Besonderheit dieses Oszillators ist, dass seine Bewegungsgleichung stückweise linear ist und eine stabile Oszillation nur durch die Begrenzung des Phasenraums möglich wird (akkumulatives System).

4.1.1. Harmonischer Oszillator mit linearer Dämpfung (RLC -Schwingkreis)

Ein *harmonischer Oszillator* ist ein dynamisches System, dessen Trajektorien für jeden Anfangswert außerhalb der Ruhelage geschlossene Ellipsen im Phasenraum darstellen und ausschließlich durch die *Eigenfrequenz* ω_0 beschrieben ist. Ein mechanisches System, wie beispielsweise das Federpendel, wandelt dabei periodisch die potentielle Energie der ausgedehnten Feder und die kinetische Bewegungsenergie der Pendelmasse ineinander um. Mit zunehmender Auslenkung wirkt dabei eine dazu proportional anwachsende Kraft entgegen, sodass aufgrund dieser *linearen Rückstellkraft* eine anfängliche Auslenkung des Pendels zu einer harmonischen, d.h. sinusförmigen, Schwingung mit derselben Kreisfrequenz ω_0 führt.

Die Bewegungsgleichungen dieses energieerhaltenden Systems lassen sich aus einer Hamilton-Funktion mit dem harmonischen Potential bestimmen. Infolgedessen unterliegt dieses System dem *poincaréschen Wiederkehrrsatz* und folgt dem *Satz von Liouville*, sodass der hamiltonsche Fluss im Phasenraum volumenhaltend ist. Als ein konservatives (reibungsfreies) System ist der harmonische Oszillator ein wichtiges Modell der theoretischen Physik jedoch nur unter Berücksichtigung einer *Dämpfung* (oder Verstärkung), aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, physikalisch realisierbar. Diese Dämpfung führt zu einem Abklingen der in der Regel nicht mehr harmonischen Schwingung und schließlich zum Stillstand im Gleichgewichtspunkt des Phasenraums. Nichtsdestotrotz kann das Potential einiger physikalischer Systeme lokal und für kleine Auslenkungen durch das Modell eines harmonischen Oszillators sinnvoll ersetzt werden.

Die Dämpfung der Schwingung entspricht physikalisch der Dissipation von Energie in eine andere nicht mehr dem System zur Verfügung stehenden Energieform. Der Fluss des dynamischen Systems ist daher nicht mehr *hamiltonsch* und der *Satz von Liouville* nicht mehr anwendbar. Erwartungsgemäß wird ein Phasenraumvolumen für eine lineare Dämpfung streng monoton gestaucht.

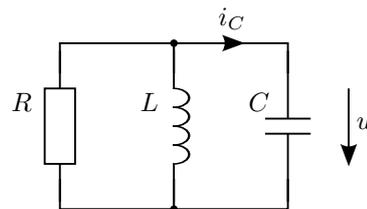


Abb. 4.1.: Paralleler RLC -Schwingkreis. Die dissipativen Verluste der nicht idealen Induktivität und Kapazität, sowie die Leitungsverluste werden durch den Widerstand R modelliert.

In der Elektrodynamik ist der harmonische Oszillator mit linearer Dämpfung unter anderem durch einen parallelen RLC -Schwingkreis modellierbar. Da der Schwingkreis aus zwei dynamischen Elementen besteht, handelt es sich um ein 2-dimensionales dynamisches System. Dabei findet ein periodischer Austausch zwischen der in der Spule L gespeicherten magnetischen Energie und der im Kondensator C gespeicherten elektrischen Energie statt. Unabhängig davon wird am Widerstand R kontinuierlich Energie in Form von Wärme dissipiert. Die Bewegungsgleichung dieses Systems ergibt sich durch das erste Kirchhoffsche Gesetz $0 = i_R + i_L + i_C$, den Bewegungsgleichungen der dynamischen Elemente (Spule und Kondensator) $u = L\dot{i}_L$ und $i_C = C\dot{u}$ sowie dem ohmschen Gesetz $u = Ri_R$ zu

$$0 = \ddot{u} + 2d\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u \quad (4.21)$$

mit $u \in \mathbb{R}$ als Spannung des parallelen Schwingkreises und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \in \mathbb{R}^+$ als Eigenfrequenz. Der dimensionslose *Dämpfungsgrad* (auch *Lehrsches Dämpfungsmaß*)

$$d = \frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.22)$$

ist reziprok proportional zur Güte $Q = 1/(2d)$ und bestimmt zusammen mit der Eigenfrequenz das dynamische System vollständig. Dabei können fünf Fälle unterschieden werden: (i) $d < 0$, sodass das System instabil ist und über alle Grenzen wächst, (ii) $d = 0$, sodass das System energieerhaltend ist und

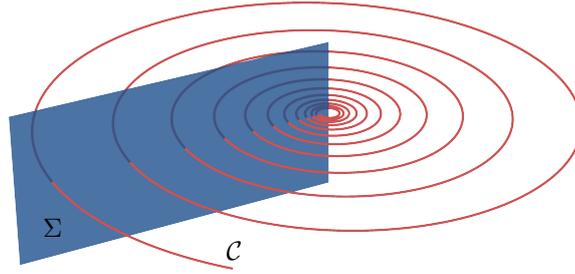


Abb. 4.2.: Poincaré-Abbildung für den Schwingfall $0 < d < 1$. Die Schnittpunkte ergeben sich aus dem ersten Term der Lösung \mathbf{h} gemäß $e^{-d\omega_0 n\pi}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

es sich um den in der Einführung genannten harmonischen Oszillator handelt, (iii) $0 < d < 1$, sodass die Dämpfung schwach genug ist und eine gedämpfte Schwingung entsteht bei der das System stabil ist, (iv) $d = 1$, dem aperiodischen Grenzfall, als kleinstmögliche Dämpfung bei der das System ohne Überschwingung im Zeitbereich auf den Gleichgewichtspunkt zustrebt sowie (v) dem Kriechfall für $d > 1$ bei dem das System monoton wie im aperiodischen Grenzfall jedoch mit längerer Zeitkonstante auf den Gleichgewichtspunkt zustrebt.

Bei der Bewegungsgleichung (4.21) handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, welche in ein System zweier linearer Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt werden kann

$$\begin{aligned} \dot{u} &= i, \\ \dot{i} &= -2d\omega_0 i - \omega_0^2 u. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Die Zustandsvariable $i \in \mathbb{R}$ ist proportional zum Strom $i_C = Ci$ und entspricht strenggenommen physikalisch keinem elektrischen Strom, sondern einer Spannungsänderung. Diese Wahl als zweite Zustandsvariable erweist sich dennoch als günstig, da so keine weitere physikalische Größe, wie in diesem Fall die Kapazität C , vorkommt. Der Phasenraum ist der euklidische Vektorraum $M = \mathbb{R}^2$. Das Vektorfeld des harmonischen Oszillators mit linearer Dämpfung ist demzufolge $\mathbf{f} = (i, -2d\omega_0 i - \omega_0^2 u)$ mit $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodass für die Divergenz $\text{div}(\mathbf{f}) = -2d\omega_0 = \text{const}$ folgt. Da im Allgemeinen der Widerstand R positiv und damit die Divergenz stets negativ ist, folgt, dass das System *asymptotisch* gegen den Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ strebt. Die Lösungen der Differentialgleichungen lauten

$$\begin{aligned} h_u(u_0, i_0, t) &= e^{-d\omega_0 t} \left(u_0 \left(\frac{d\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) + \frac{i_0}{\omega} \sin(\omega t) \right), \\ h_i(u_0, i_0, t) &= e^{-d\omega_0 t} \left(u_0 \left(-\frac{d^2\omega_0^2}{\omega} - \omega \right) \sin(\omega t) + i_0 \left(-\frac{d\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.24)$$

mit $\omega = \sqrt{1 - d^2}\omega_0$ und $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = (h_u, h_i)^\top$, $\mathbf{h}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ als Lösungsvektor zu den Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = (u_0, i_0)$. Da die *Jacobideterminante* $J(t) = \det(\partial\mathbf{h}/\partial\mathbf{x}_0) = e^{-2d\omega_0 t}$ für alle endlichen $t \in \mathbb{T}$ ungleich null ist, existiert eine *Inverstransformierte* $\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{h}^{-1}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit den Bildwerten $\mathbf{x} = (u, i)$, sodass

$$\begin{aligned} h_u^{-1}(u, i, t) &= e^{d\omega_0 t} \left(u \left(-\frac{d\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) - \frac{i}{\omega} \sin(\omega t) \right), \\ h_i^{-1}(u, i, t) &= e^{d\omega_0 t} \left(u \left(\frac{d^2\omega_0^2}{\omega} + \omega \right) \sin(\omega t) + i \left(\frac{d\omega_0}{\omega} \sin(\omega t) + \cos(\omega t) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aus der Jacobideterminante lassen sich zudem zwei Schlussfolgerungen ziehen. Zum einen ist eine inverse Transformation nur für $t < \infty$ möglich, sodass für $t \rightarrow \infty$ nur der Systemzustand $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$ erlaubt ist. Zum anderen ist das System für $d = 0$ *volumenerhaltend*, für $d > 0$ dissipativ und für $d < 0$ akkumulativ (instabil), da die Jacobideterminante unabhängig von den Zustandsvariablen ist und mit

$$J^{-1}(t) = e^{-\int \text{div}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, t))|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t)} dt} \quad (4.26)$$

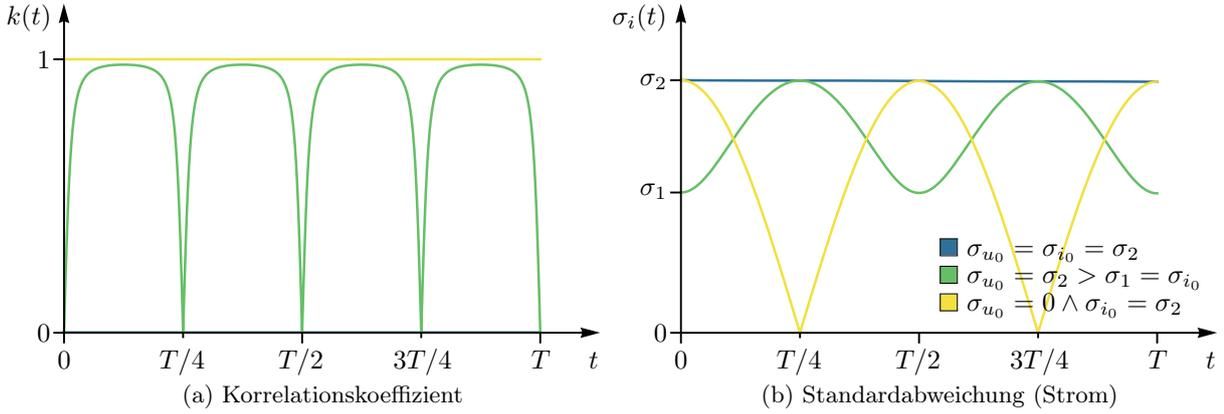


Abb. 4.3.: Ungedämpfter harmonischer Oszillator mit rotationssymmetrischem Vektorfeld. Eine anfänglich rotationssymmetrische Anfangsverteilung bleibt für alle Zeiten rotationssymmetrisch und unkorreliert.

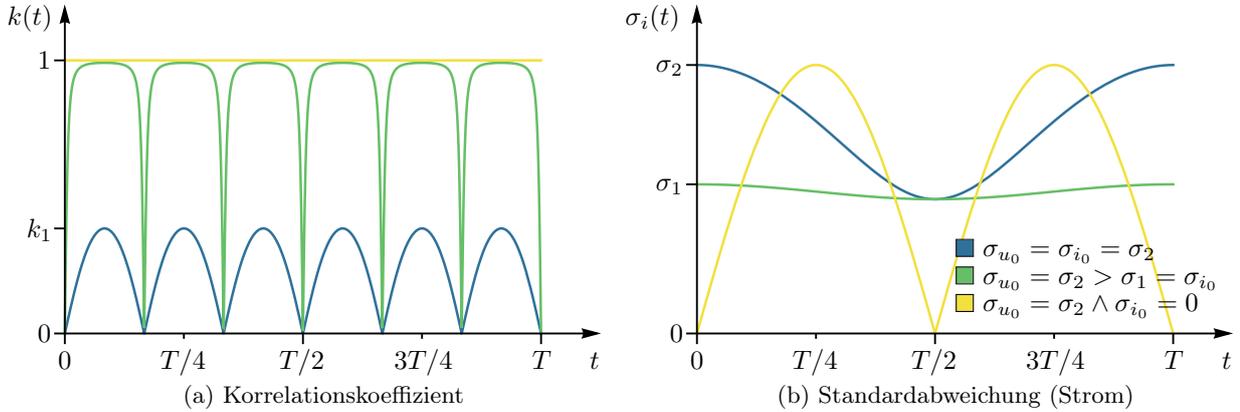


Abb. 4.4.: Ungedämpfter harmonischer Oszillator mit asymmetrischem Vektorfeld. Jede symmetrische Phasenraumdicke wird unter dem Phasenfluss asymmetrisch. Die maximale Korrelation für die rotationssymmetrische Anfangsverteilung ergibt sich aus der Eigenfrequenz gemäß $k_1 = |\omega_0^2 - 1| / (\omega_0^2 + 1)$.

sowie dem Divergenzansatz folgt, dass das Vorzeichen des nicht-trivialen Ljapunov-Exponenten $\lambda = -2d\omega_0$ ausschließlich durch den Dämpfungsgrad bestimmt wird. Weiterhin folgt, dass die Eigenfrequenz ω_0 unabhängig von dem Vorzeichen des Dämpfungsgrades verstimmt wird und im Schwingfall stets $\omega < \omega_0$ gilt.

Da dieses dynamische System analytisch lösbar und gemäß (4.26) auch die Divergenz unabhängig von den Zustandsvariablen ist, kann die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung angegeben werden zu

$$p(u, i, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](u, i, t) e^{2d\omega_0 t} \quad (4.27)$$

mit $p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ und $p(u, i, t_0) = p_0(u, i)$ als Anfangsverteilung.

Die Anfangsverteilung ist letztlich unter den bekannten kontinuierlichen multivariaten Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit unbeschränktem Intervallen frei wählbar. Ein unbeschränktes Intervall ist in diesem Falle notwendig, da der Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ und die darauf existierenden Integrialkurven \mathbf{h} ebenfalls unbeschränkt sind. Sei

$$p_0[h_u^{-1}, h_i^{-1}] = \frac{1}{2\pi\sigma_{u_0}\sigma_{i_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(h_u^{-1} - u_S)^2}{\sigma_{u_0}^2} + \frac{(h_i^{-1} - i_S)^2}{\sigma_{i_0}^2} \right)} \quad (4.28)$$

4. Liouville Dynamik

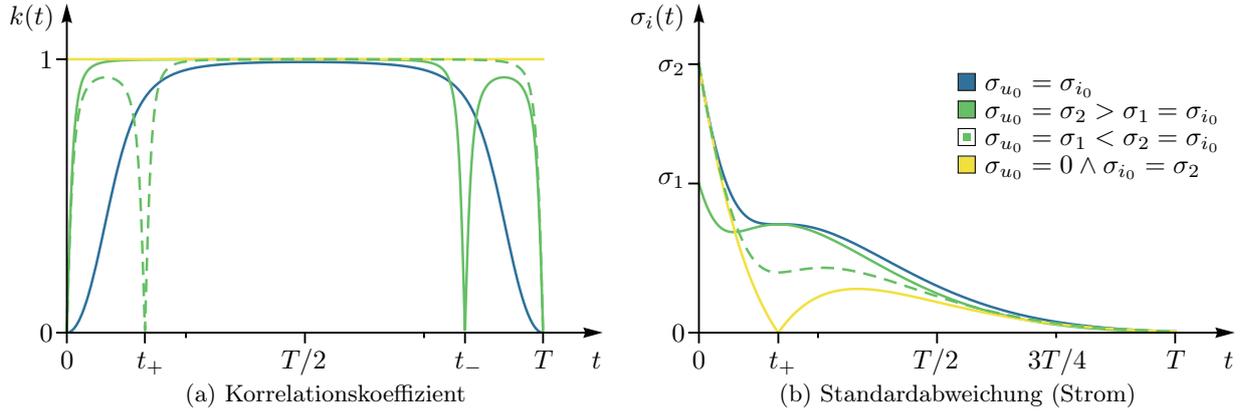


Abb. 4.5.: Gedämpfter harmonischer Oszillator im Schwingfall $0 < d < 1$. Die nicht trivialen Nullstellen befinden sich bei $t_{\pm} = \arccos(\pm d)/\omega$.

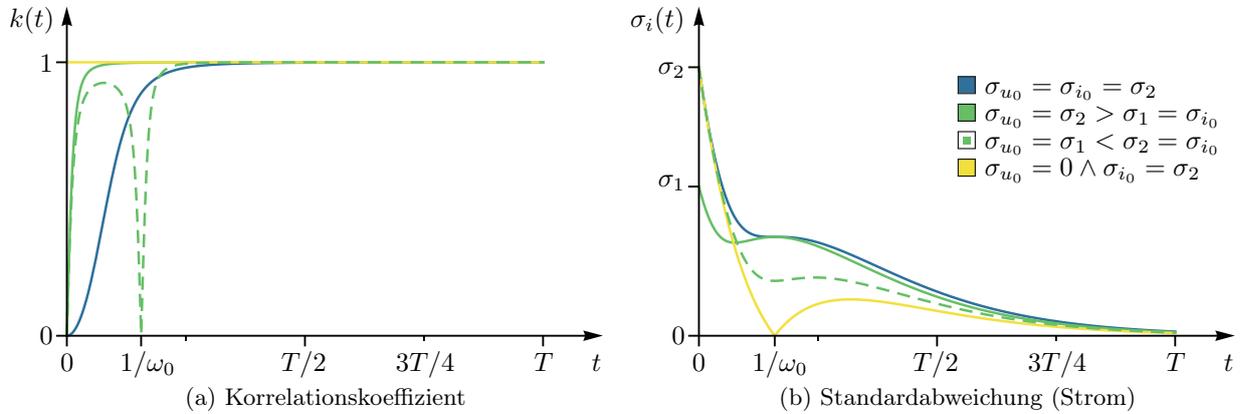


Abb. 4.6.: Gedämpfter harmonischer Oszillator im aperiodischen Grenzfall $d = 1$. Der Verlauf der Standardabweichung ist nahezu identisch zum Schwingfall, dennoch ist die Korrelation eine Andere.

die normalverteilte Anfangsverteilung mit σ_{u_0} und σ_{i_0} als unkorrelierte Standardabweichungen zur Startzeit $t_0 = 0$ sowie u_S und i_S als Startwerte. Da die Spannung u und der Strom i in der Inverstransformierten \mathbf{h}^{-1} nur linear auftreten, ist die normalverteilte Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung für alle Zeiten erhalten. Es existiert demzufolge eine zeitabhängige Kovarianzmatrix \mathbf{K}

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_u^2(t) & k(t)\sigma_u(t)\sigma_i(t) \\ k(t)\sigma_u(t)\sigma_i(t) & \sigma_i^2(t) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

mit $k(t)$ als Korrelationskoeffizient und $\sigma_u(t_0) = \sigma_{u_0}$ sowie $\sigma_i(t_0) = \sigma_{i_0}$. Unter Berücksichtigung der Startwerte $\mathbf{x}_S = (u_S, i_S)$ folgt für (4.27) die umgeformte Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_{u_0}\sigma_{i_0}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}^\top \mathbf{K}(t)^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}_S^\top \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{x}_S) + \mathbf{x}_S^\top (\mathbf{H}(t) \circ (\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_0^R))^\top \mathbf{x} + 2d\omega_0 t} \quad (4.30)$$

mit $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(0)$ und $\mathbf{H}(t)$ als Koeffizientenmatrix der Rücktransformation \mathbf{h}^{-1} zu den Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (u, i)$ sowie \circ als Hadamard-Produkt und R als Reverse-Operation (d.h. der Vertauschung aller Zeilen einer Matrix). Befinden sich die Startwerte im Gleichgewichtspunkt, d.h. falls $\mathbf{x}_S = \tilde{\mathbf{x}}$, so folgt aus (4.30) die Normalform gemäß (3.57).

Die analytischen Ausdrücke für den Korrelationskoeffizienten und die Standardabweichungen als Funktionen der Zeit sind durch Symbolmanipulatoren berechenbar, jedoch im Allgemeinen nicht sinnvoll darstellbar. Daher soll im Folgenden der dynamische Verlauf dieser Funktionen grafisch und qualitativ

(jedoch nicht vollständig) anhand von vier Fallunterscheidungen dargestellt werden: (i) der ungedämpfte harmonische Oszillator mit einem rotationssymmetrischen Vektorfeld ($d = 0$, $\omega_0 = 1$), (ii) der ungedämpfte harmonische Oszillator mit einem asymmetrischen Vektorfeld ($d = 0$, $\omega_0 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0, 1\}$), (iii) der Schwingfall für $0 < d < 1$ und (iv) der aperiodische Grenzfall für $d = 1$. Der Kriechfall ($d > 1$) sei nicht weiter betrachtet, da er dem aperiodischen Grenzfall gleicht. Zudem sei darauf verzichtet, die Rotationssymmetrie des Vektorfeldes als Folge unterschiedlicher Werte der Eigenfrequenz ω_0 im Schwing- und aperiodischen Grenzfall weiter zu unterscheiden, da die dazugehörigen Vektorfelder aufgrund der Dämpfung bereits asymmetrisch sind. Darüber hinaus soll unterschieden werden zwischen einer Anfangsverteilung mit (i) rotationssymmetrischen Varianzen, d.h. $\sigma_{u_0} = \sigma_{i_0}$, (ii) asymmetrischen Varianzen, d.h. $\sigma_{u_0} \neq \sigma_{i_0}$ und (iii) verschwindender Varianz, d.h. $\sigma_{u_u} = 0$, $\sigma_{i_0} \neq 0$ oder $\sigma_{u_u} \neq 0$, $\sigma_{i_0} = 0$.

Im rotationssymmetrischen Vektorfeld eines ungedämpften harmonischen Oszillators (siehe Abb. 4.3) bleibt eine anfängliche rotationssymmetrische Anfangsverteilung für alle Zeiten rotationssymmetrisch und unkorreliert. Da die Phasenraumdichte im zeitlichen Verlauf immer um ihre eigene Achse rotiert, schwingen für eine asymmetrische Anfangsverteilung die Standardabweichungen zwischen ihren Anfangswerten, sodass während diesen Übergängen die Zustandsvariablen fast vollständig korrelieren. Dies ist dem starren Koordinatensystem geschuldet. In einem Koordinatensystem, das der Eigenrotation der Phasenraumdichte folgt, wären die Standardabweichungen zeitlich konstant. Im Grenzfall einer verschwindenden Varianz, sind die Zustandsvariablen für alle Zeiten vollständig korreliert⁹, sodass aufgrund der Eigenrotation die Standardabweichungen zwischen dem anfänglichen Wert und null schwankt. Dieser Grenzfall entspricht am ehesten einer anwendungsorientierten Analyse von elektronischen Schaltungen. So sind die Ströme beim Einschalten in der Regel null, während zumindest eine Spannung der Betriebsspannung folgt. Der statistische Einstellfehler dieser Betriebsspannung entspricht einer Anfangsverteilung mit verschwindenden Varianzen. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung als Anfangsverteilung die sinnvollste Wahl ist, ergibt sich somit erst durch eine Versuchsreihe. Wie dieses Beispiel zeigt, würde ein Einstellfehler der Spannung einen Fehler auf den Strom periodisch übertragen.

In einem asymmetrischen Vektorfeld (siehe Abb. 4.4) ist eine Unterscheidung von rotationssymmetrischer oder asymmetrischer Anfangsverteilung qualitativ unwesentlich. Die maximale Korrelation einer anfänglich rotationssymmetrischen Phasenraumdichte eines ungedämpften Systems wird ausschließlich durch die Eigenfrequenz bestimmt gemäß $k_1 = |\omega_0^2 - 1| / (\omega_0^2 + 1)$. Daher wird auch jede rotationssymmetrische Phasenraumdichte unter dem Phasenfluss periodisch asymmetrisch. Obendrein ist der Grenzfall verschwindender Varianzen analog zum rotationssymmetrischen Vektorfeld und für den Strom entsprechend phasenverschoben.

Die Frequenz des gedämpften harmonischen Oszillators ist im Schwingfall stets kleiner als die Eigenfrequenz. In Abb. 4.5 ist diese nur halb so hoch wie in den Abbildungen zuvor. Der Verlauf der Korrelationen ist darüber hinaus analog zum ungedämpften harmonischen Oszillator im asymmetrischen Vektorfeld. Lediglich die Standardabweichungen konvergieren für $t \rightarrow \infty$ entsprechend dem ersten Term der Lösung \mathbf{h} gemäß $e^{-2d\omega_0 t}$ gegen null.

Für den aperiodischen Grenzfall geht die Korrelation für $t \rightarrow \infty$ stets gegen eins. Dies unterscheidet sich daher grundlegend zum Schwingfall obwohl die Phasenraumdichte für $t \rightarrow \infty$ in den Gleichgewichtspunkt läuft und beide Fälle nahezu einen identischen Verlauf der Standardabweichungen vorweisen.

Die Liouville-Dynamik für den Schwingfall ist in der Abbildung 4.7 für verschiedene Zeiten dargestellt. Eine anfänglich rotationssymmetrische Anfangsverteilung läuft spiralförmig im Uhrzeigersinn in den Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$, während diese sich um ihre eigene Achse dreht. Der letzte Term im Exponenten von 4.30 sorgt für die Volumenerhaltung. Allerdings muss die normalverteilte Wahrscheinlichkeitsverteilung sich selbst erhalten können, falls die Normierung der Anfangsverteilung in (4.28) von den zeitabhängigen Funktionen der Korrelation und den Standardabweichungen gemäß (3.57) abhängt. Es folgt daher

$$e^{2d\omega_0 t} = \frac{\sigma_{u_0} \sigma_{i_0}}{\sigma_u(t) \sigma_i(t) \sqrt{1 - k(t)^2}}. \quad (4.31)$$

Die Standardabweichungen und die Korrelationsfunktion werden demnach durch die Divergenz bestimmt. Für $t \rightarrow \infty$ strebt diese Normierung und die Varianzen im Exponenten gegen unendlich. Per Definition der δ -Distribution als normalverteilte Funktion folgt daher, dass jede Anfangsverteilung eines gedämpften harmonischen Oszillators gegen die δ -Distribution im Gleichgewichtspunkt strebt.

⁹Strenggenommen darf für diejenigen Zeitpunkte an der eine Varianz null ist keine Korrelation angegeben werden.

4. Liouville Dynamik

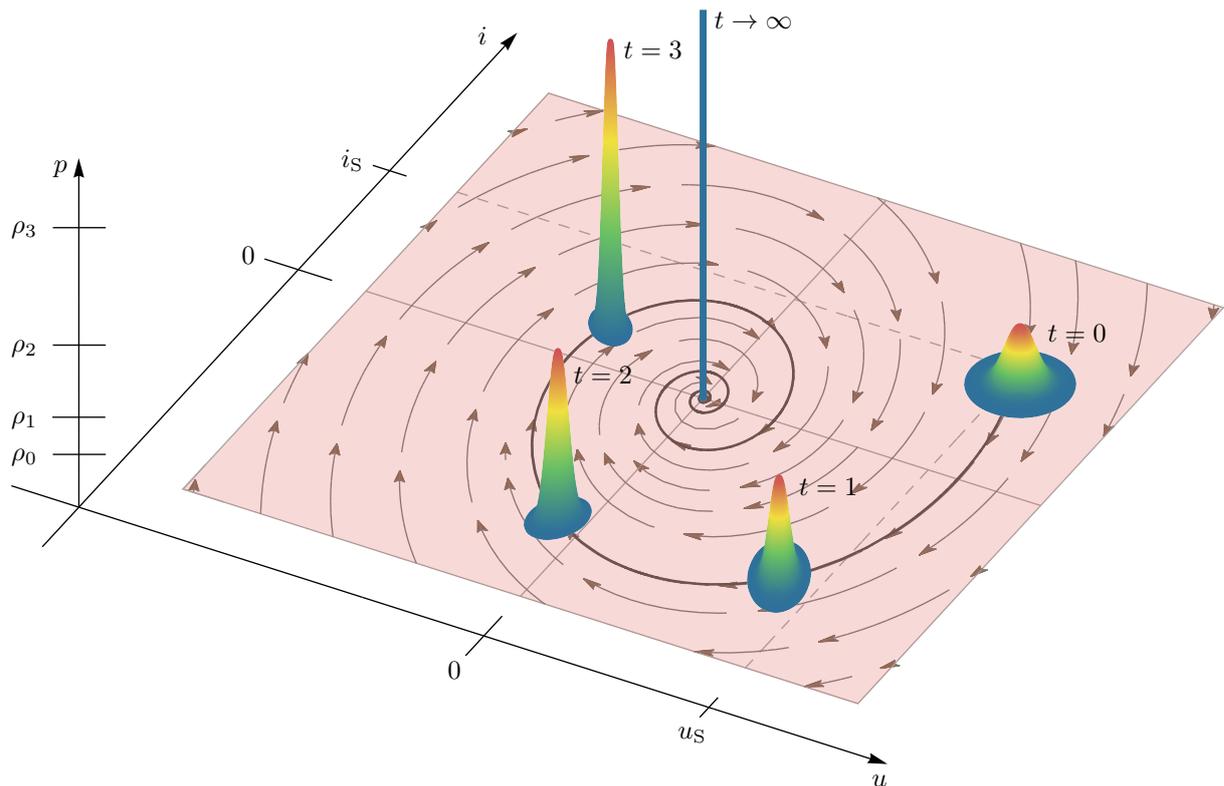


Abb. 4.7.: Gedämpfter harmonischer Oszillator mit $\omega_0 = 4/3$ Hz, $d = 1/5$, den Startwerten $u_S = 4$ V, $i_S = 3$ V s⁻¹ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{u_0} = 300$ mV, $\sigma_{i_0} = 300$ mV s⁻¹ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Skaleneinteilung der p -Achse (Applikate) gibt das Maximum der Phasenraumdichte zu gegebener Zeit wieder und zeigt identisch zur Poincaré-Abbildung einen exponentiellen Anstieg der Wahrscheinlichkeitsdichte. Für $t \rightarrow \infty$ geht die Phasenraumdichte gegen die δ -Distribution.

Proposition (Übergang einer Normalverteilung zur δ -Distribution) *Die analytische Lösung des harmonischen Oszillators erlaubt es, die Divergenz, über den Umweg der verallgemeinerten Liouville-Gleichung, mit statistischen Momenten in Verbindung zu bringen und zu beweisen, dass für $t \rightarrow \infty$ ein Übergang einer Normalverteilung in die δ -Distribution im Sinne der Liouville-Dynamik existiert.*

Die Liouville-Dynamik aus Abb. 4.7 macht deutlich wie Fluktuationen sich auswirken würden. Ein Diffusionsprozess würde der Stauchung der Phasenraumdichte zwar entgegen wirken, allerdings ist es nicht von Belang, zu welchem Zeitpunkt bzw. an welchem Ort im Phasenraum eine Fluktuation auftritt. Jede Abweichung von dem Erwartungswert wird exponentiell ausgeglichen. Erst ein Diffusionsprozess der stärker als der deterministische Drift ist, führt zu einem divergenten Verhalten und letztlich zu einem stetigen, gleichverteilten Band aller Phasen im Intervall $[-\pi, \pi)$.

Weiterführende Literatur

- GERLICH „Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung“ [59]

4.1.2. Wien-Filter (RC -Bandpassfilter) und Wien-Brücken-Oszillator

Das Wien-Filter ist ein RC -Bandpassfilter durch Zusammenschalten eines RC -Tief- und Hochpasses (siehe Abb. 4.8). Dabei werden tiefe Frequenzen im Spektrum der externen Spannung $u_{\text{ext}}(t)$ durch C_1 sowie hohe Frequenzen durch C_2 gedämpft, sodass die *Resonanzfrequenz* bei

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \quad (4.32)$$

liegt. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich aus den Knoten- und Maschengleichungen sowie der dynamischen Gleichung der Kondensatoren zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{1}{R_1 C_1} (u_{\text{ext}}(t) - u_1 - u_2), \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{R_1 C_2} (u_{\text{ext}}(t) - u_1 - u_2) - \frac{u_2}{R_2 C_2} \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit dem Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ und den Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (u_1, u_2)^\top \in M$. Das sich aus den rechten Seiten ergebende Vektorfeld $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist aufgrund der Zeitabhängigkeit der externen Spannung $u_{\text{ext}}(t)$ ebenfalls zeitabhängig. Die Divergenz des Vektorfeldes ist konstant negativ und setzt sich aus drei verschiedenen Zeitkonstanten zusammen

$$\text{div}(\mathbf{f}) = -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_1 C_2} - \frac{1}{R_2 C_2} < 0. \quad (4.34)$$

Es handelt sich somit um ein lineares, nicht-autonomes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

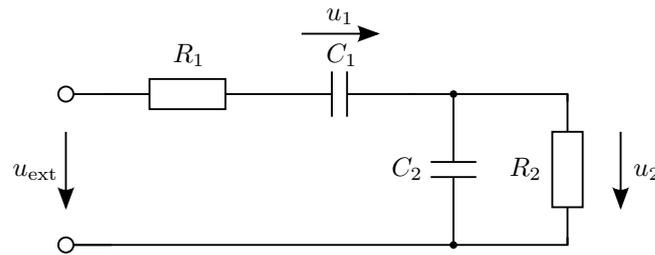


Abb. 4.8.: RC -Bandpass (Wien-Filter) durch Zusammenschaltung eines RC -Tief- und Hochpasses.

Da die Divergenz stets negativ ist, folgt, dass das System gegen den zeitabhängigen Gleichgewichtspunkt $\bar{\mathbf{x}}(t) = (u_{\text{ext}}(t), 0)$ strebt und es sich um ein dissipatives dynamisches System handelt. Die externe Spannung ist im Folgenden zur Vereinfachung ein Signal mit kontinuierlichem Spektrum der Form

$$S(\omega) = \mathcal{F}[u_{\text{ext}}](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{\text{ext}}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.35)$$

mit ω als *Eigenfrequenz*. Die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\mathbf{h}(u_{1,0}, u_{2,0}, t) = \begin{pmatrix} h_{u_1}(u_{1,0}, u_{2,0}, t) \\ h_{u_2}(u_{1,0}, u_{2,0}, t) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

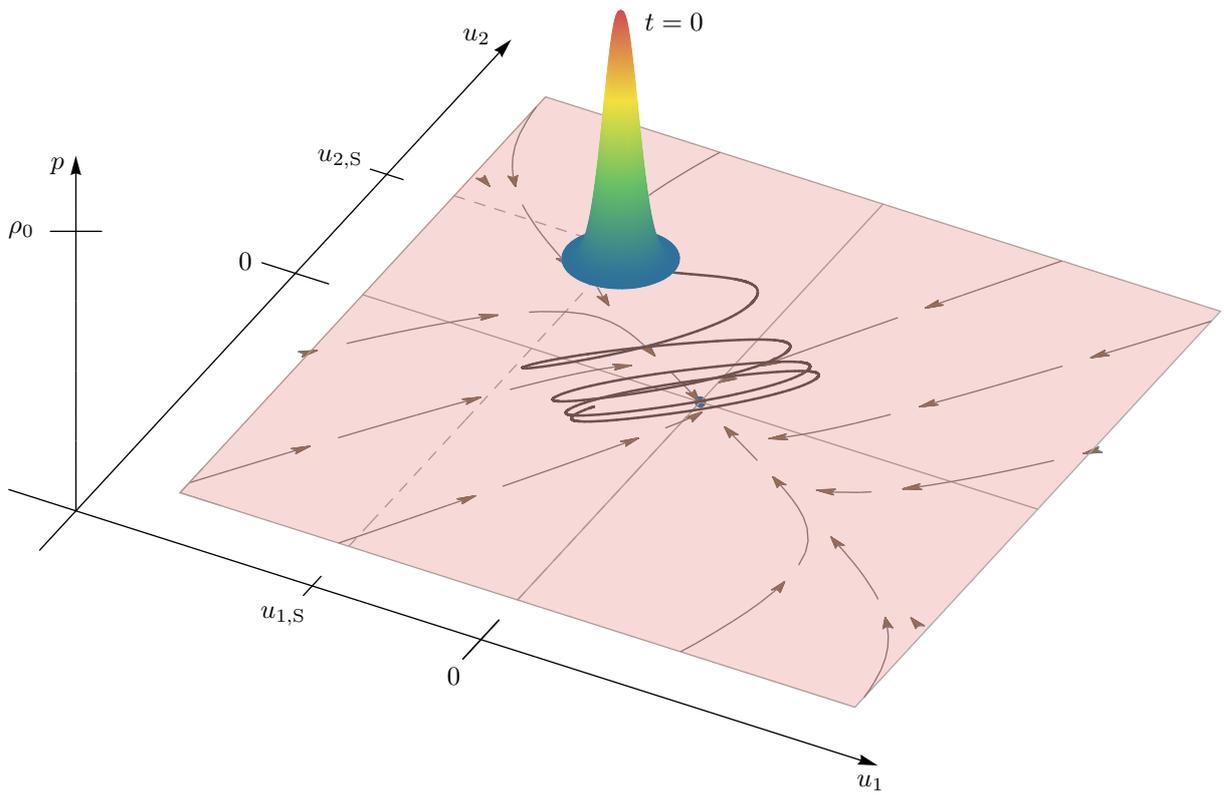
mit den Anfangswerten $u_{1,0}$ und $u_{2,0}$ sind durch Symbolmanipulatoren berechenbar und gemäß (3.43) und (4.34) für $t < \infty$ invertierbar, allerdings nicht sinnvoll darstellbar.

Die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung kann damit angegeben werden zu

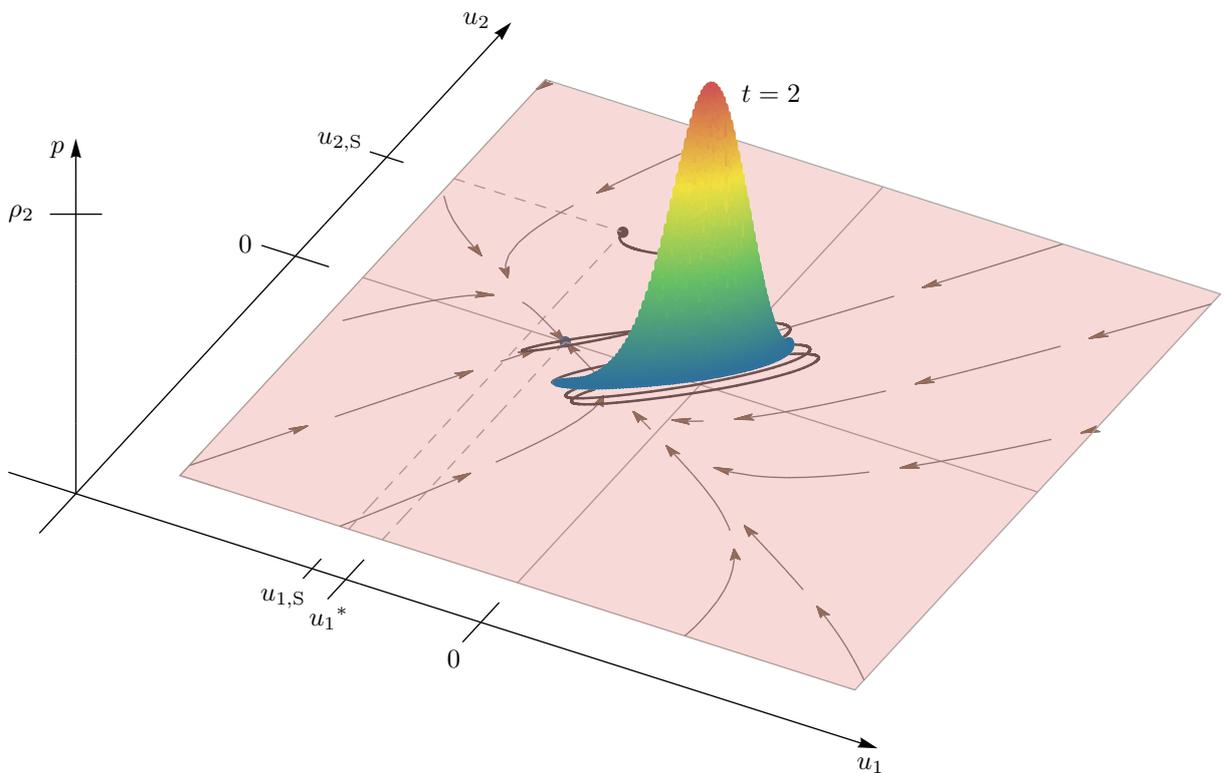
$$p(u_1, u_2, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}(u_1, u_2, t)] e^{-\text{div}(\mathbf{f})t} \quad (4.37)$$

mit $p: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^+$ und $p(u_1, u_2, t_0) = p_0(u_1, u_2)$ als normalverteilte Anfangsverteilung gemäß (3.57) mit den Standardabweichungen σ_{u_1} und σ_{u_2} zur Anfangszeit $t_0 = 0$ sowie $u_{1,S}$ und $u_{2,S}$ als Startwerte.

4. Liouville Dynamik



(a) Einschwingvorgang



(b) Oszillation aufgrund des zeitabhängigen Vektorfeldes

Abb. 4.9.: RC -Bandpass mit $R_1 = R_2 = 0.75 \Omega$, $C_1 = C_2 = 0.75 \text{ F}$ und $\hat{u} = 2 \text{ V}$, den Startwerten $u_{1,S} = -1 \text{ V}$, $u_{2,S} = 1 \text{ V}$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{u_1} = 300 \text{ mV}$, $\sigma_{u_2} = 300 \text{ mV}$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Skaleneinteilung der p -Achse (Applikate) ist für beide Phasenraumdichten neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

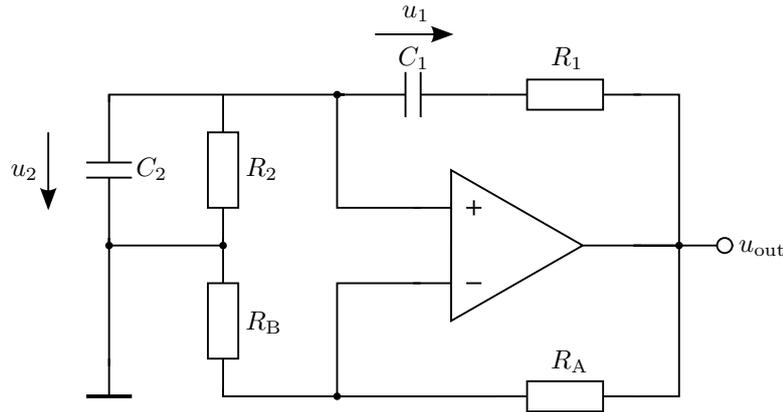


Abb. 4.10.: Wien-Brücken-Oszillator ohne Amplitudenregelung.

Als Beispiel sei hier ein periodisches Signal gegeben, dessen Spektrum $S(\omega)$ der Fourier-Näherung einer Dreiecksfunktion $\text{tri}(t)$ mit der *Amplitude* \hat{u} und der Anfangsbedingung $u(0) = 0$ entspricht. Da das dynamische System gegen den zeitabhängigen Gleichgewichtspunkt strebt, existiert im Phasenraum für $t \rightarrow \infty$ ein *geschlossener Orbit*, dessen Elemente ω -Limespunkte darstellen. Jede Anfangsverteilung wird während des Einschwingvorgangs *longitudinal* (entlang der Bewegungsrichtung) in die Länge gezogen, bevor diese aufgrund der exponentiellen Stauchung in eine Dirac-Verteilung übergeht und in den geschlossenen Orbit einläuft. Daher vergisst ein Wien-Filter im Laufe seiner Dynamik die Anfangswerte. Es manifestiert sich hierbei kein Pumpmechanismus, da die Divergenz nicht zustandsabhängig ist.

Eine Anwendung des Wien-Filters findet sich beim *Wien-Brücken-Oszillator*. Eine nicht-invertierende Verstärkerschaltung gleicht die dissipativen Verluste des *RC*-Bandpasses phasengleich aus (siehe Abb. 4.10). Die beim *RC*-Bandpass extern definierte Anregungsspannung u_{ext} entspricht hier der durch den Operationsverstärker verstärkten Spannung u_2 . Die Bewegungsgleichungen ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \frac{1}{R_1 C_1} (v u_2 - u_1 - u_2), \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{R_1 C_2} (v u_2 - u_1 - u_2) - \frac{u_2}{R_2 C_2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

mit dem *Verstärkungsfaktor* $v = 1 + R_A/R_B$ [239]. Die Divergenz des dynamischen Systems ändert sich dementsprechend zu

$$\text{div}(\mathbf{f}) = -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{v-1}{R_1 C_2} - \frac{1}{R_2 C_2}, \quad (4.39)$$

sodass für $v = 1 + R_1/R_2 + C_2/C_1$ das Vektorfeld divergenzfrei ist. Unter der Annahme $R_1 = R_2$ und $C_1 = C_2$, sowie $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$ folgt für den Verstärkungsfaktor $v = 3$. Dies ist, neben der phasengleichen Verstärkung, das zweite *Stabilitätskriterium nach Barkhausen*, das eine stabile Oszillation ermöglichen soll. Dabei wird jedoch nicht berücksichtigt, dass es sich hier um einen harmonischen und nicht um einen elektrischen Oszillator gemäß Abschnitt 3.6 handelt. Das dynamische System ist dissipativ für $v < 3$, konservativ für $v = 3$ und akkumulativ für $v > 3$. Eine reale Schaltung gemäß 4.10 würde demzufolge nur dann fortwährend schwingen, wenn das System akkumulativ ist. Die Akkumulation führt jedoch zu einem unbegrenzten Wachstum der Zustandsvariablen. Erst die positive und negative Versorgungsspannung u_+ bzw. u_- des Operationsverstärkers begrenzt das akkumulative System und insbesondere die Ausgangsspannung $u_{\text{out}} = v u_2$. Es bedarf folglich einer Modellierung des Verstärkungsverhaltens, beispielsweise stückweise linear gemäß

$$v(u_2) = \begin{cases} v_0 u_2 & \text{für } u_- \leq u_2 \leq u_+ \\ u_+ & \text{für } u_2 > u_+ \\ u_- & \text{für } u_2 < u_- \end{cases} \quad (4.40)$$

4. Liouville Dynamik

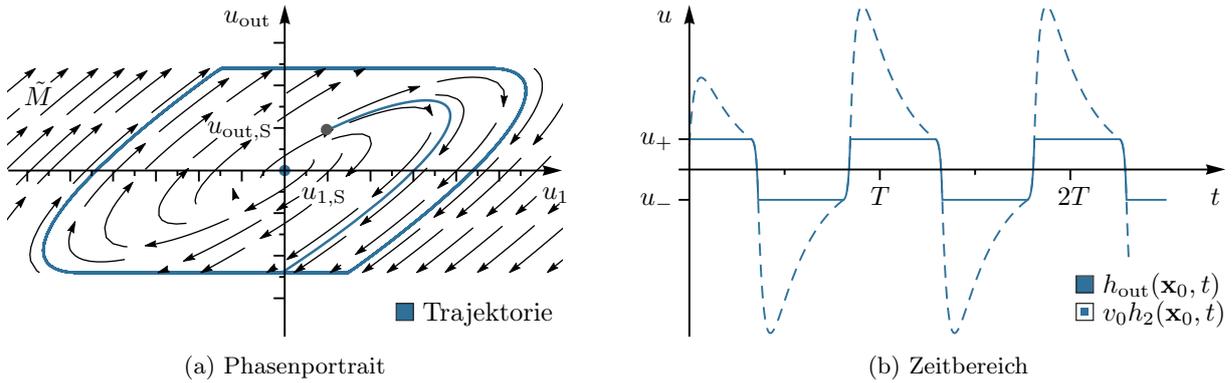


Abb. 4.11.: Das Phasenportrait des Phasenraums \tilde{M} ist homöomorph zum Phasenportrait von M , allerdings durch das Versorgungsspannungsintervall begrenzt. Dies führt zu einem nicht-sinusoidalen Verlauf der Ausgangsspannung u_{out} . D.h. die Lösung h_{out} könnte auch dann nicht dem Verlauf der Lösung $v_0 h_2$ folgen, wenn die Versorgungsspannung erhöht würde, da die Begrenzung des Phasenraums das dynamische System $(\mathbb{T}, \tilde{M}, \Phi)$ nichtlinear erscheinen lässt.

mit $v_0 = 1 + R_A/R_A$ [146, 157]. Wird u_2 nach Berechnung der Lösung von (4.38) unter Berücksichtigung von (4.40) als Zustandsvariable durch u_{out} ersetzt, so ist der neue Phasenraum durch das Versorgungsspannungsintervall eingeschränkt, sodass $\tilde{M} = \mathbb{R} \times [u_-, u_+]$ für $\tilde{\mathbf{x}} = (u_1, u_{\text{out}})^\top \in \tilde{M}$ folgt. D.h., der Lösungsverlauf im Vergleich zwischen der mit v_0 skalierten Spannung u_2 und der Ausgangsspannung u_{out} ist nur identisch, falls $v_0 u_2$ sich im Versorgungsspannungsintervall befindet¹⁰ (siehe Abb. 4.11). Die Einschränkung des Phasenraums \tilde{M} führt somit zu einer stabilen, wenn auch stark übersteuerten und damit nicht mehr sinusoidalen Schwingung. Im Sinne des dynamischen Systems $(\mathbb{T}, \tilde{M}, \Phi)$ ist der Wien-Brücken-Oszillator folglich ein stabiles, akkumulatives, lineares System. Darüber hinaus werden die Zustandsvariablen \mathbf{x} aufgrund von (4.40) beschränkt, sodass ein stabiler Grenzzyklus im Phasenraum M existiert.

Proposition (Begrenzung des Phasenraums) *Die Begrenzung des Phasenraums erlaubt es stabile Oszillationen für lineare Systeme zu erzeugen. Die Liouville-Dynamik solcher Systeme folgt der Dynamik des harmonischen Oszillators gemäß Abschnitt 4.1.1.*

Um die Verzerrung am Ausgang zu kompensieren, bedarf es einer zusätzlichen Amplitudenregelung, beispielsweise durch zwei antiparallel geschaltete Dioden in Reihe zu R_A . Aufgrund der Rückkopplung sind die resultierenden Bewegungsgleichungen jedoch nichtlinear.

Weiterführende Literatur

- CHUA et al. „The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems“ [146]
- KURZ & MATHIS „Oszillatoren. Schaltungstechnik, Analyse, Eigenschaften“ [97]
- MATHIS & RUSSER „Oscillator Design“ [100]
- PONCE „Bifurcations in piecewise linear systems: case studies“ [263]

¹⁰Tatsächlich ist u_2 stets kleiner als u_{out} . Erst die Skalierung mit v_0 zeigt den übereinstimmenden Lösungsverlauf.

4.2. Systeme mit Grenzzyklen

Ein elektrischer Oszillator ist aufgrund der nötigen Rückkopplung immer ein nichtlineares dynamisches System und die Oszillationen oder Schwingungen entsprechen im Phasenraum stabilen Grenzzyklen. Ausnahmen sind akkumulative Systeme mit einer Begrenzung des Phasenraums, wie z.B. der Wien-Brücken-Oszillator. Zwar sind andere Bifurkationstypen oder Mechanismen, die zu einem sich selbst erhaltenden schwingenden System führen, denkbar, jedoch soll sich im Folgenden auf Grenzzyklen beschränkt werden, die generisch aus der Andronov-Hopf-Bifurkation gemäß Abschnitt 3.5 entspringen und nur von einem Bifurkationsparameter abhängen.

Die Liouville-Dynamik kann im Allgemeinen dazu beitragen bereits realisierte Schaltungen von verschiedenen Oszillatoren besser zu verstehen. Aus Sicht des Ingenieurwesens ist das Barkhausen-Kriterium als Stabilitätskriterium ausreichend, was wie CHUA zeigte, äquivalent zum Hopf-Theorem ist [225]. Jedoch wird mit dieser Sichtweise das dynamische System mit seinem komplexen Verhalten im Phasenraum zugunsten der Zweck erfüllenden Funktionalität in den Hintergrund geschoben.

Eine mögliche Typisierung von Oszillatorschaltungen erfolgt in der Elektrotechnik nach der Funktionsweise und Art der Schaltungen. Im Gegensatz dazu sei hier jeder Oszillator durch seine Differentialgleichung als ein dynamisches System typisiert. Dies hat den Vorteil, dass die Resultate der Liouville-Dynamik sich auf alle realisierbaren Schaltungen desselben Typs von Differentialgleichung übertragen lassen.

Ein Zusammenspiel verschiedener Nichtlinearitäten in 2-dimensionalen Oszillatoren wurde beispielsweise von DAFFERTSHOFER untersucht [245]. Die nichtlinearen Terme eines Rayleigh-, Van der Pol- und Duffing-Oszillators werden in einer Nichtlinearität mit μ als Bifurkationsparameter

$$n(x, y) = \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} y^2 - \gamma x^2 \right) \omega_0 y - \frac{\omega_0^2 \eta}{3} x^3 \quad (4.41)$$

zusammengefasst und mit β als *Rayleigh-Parameter*, γ als *Van der Pol-Parameter* und η als *Duffing-Parameter* skaliert. Darüber hinaus wird im Folgenden der Einfluss dieser Nichtlinearität mit dem *Stellparameter* α geregelt.

In den Abschnitten 4.2.1 werden der Van der Pol-, in 4.2.3 der Rayleigh- und in 4.2.4 der Rayleigh-Van der Pol-Oszillator als 2-dimensionale Systeme behandelt. 3-dimensionale Systeme sind in den Abschnitten 4.2.5 mit dem Colpitts-Oszillator und 4.2.6 mit einem kanonisch-dissipativen Nambu-System zu finden. Das Verhalten von höher-dimensionalen Oszillatoren soll anhand eines gekoppelten Van der Pol-Systems in Abschnitt 4.2.2 betrachtet werden.

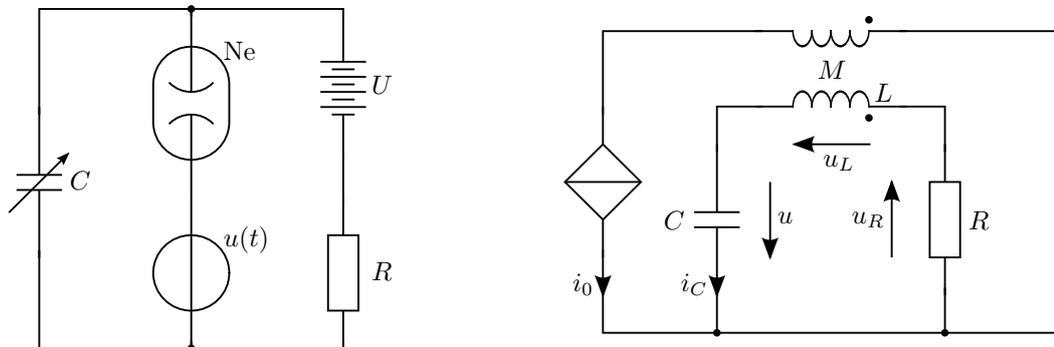
4.2.1. Van der Pol-Oszillator

Der Van der Pol-Oszillator ist das Ergebnis früher Experimente mit röhren-basierten Schaltungen unter der Führung von VAN DER POL. Zusammen mit VAN DER MARK entdeckten beide bei bestimmten Erregerfrequenzen eines angetriebenen *Relaxations-Oszillators* (siehe Abb. 4.12a) ein irreguläres Rauschen [27, 36, 262] (für weitere historische Details siehe MATHIS [98]). Dies war eines der ersten Beschreibungen von deterministischem Chaos. Im autonomen Fall, d.h. wenn die Anregung $u(t)$ null ist, wird die Kapazität C über die Spannungsquelle U bis zu einem Schwellwert geladen ab dem die Neon-Glühlampe zündet und die im Kondensator gespeicherte elektrische Energie in Wärme und Licht umgewandelt wird. Die Oszillation der Spannung über dem Kondensator ist demzufolge ein periodischer Wechsel zwischen einer akkumulativen Phase bei dem der Kondensator geladen wird und einer dissipativen Phase bei dem die gleiche Energiemenge (nach dem Einschwingvorgang) an die Umgebung abgegeben wird [249].

Die Bewegungsgleichung des Van der Pol-Oszillators besteht aus zwei Freiheitsgraden, folglich handelt es sich um ein 2-dimensionales System. Die nichtlineare Dämpfung der Differentialgleichung

$$\ddot{x} - \alpha (\mu - \gamma x^2) \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{4.42}$$

mit $x, \dot{x} \in \mathbb{R}$ als Zustandsvariablen im Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ ist für kleine $x \ll 1$ vernachlässigbar klein, sodass das dynamische System am ehesten dem eines verstärkenden harmonischen Oszillators entspricht, falls alle Parameter größer null sind. Erst für größere Werte von x überwiegt die Nichtlinearität und begrenzt die Verstärkung um den instabilen Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Das Van der Pol-System ist für positive μ ein superkritisches Hopf-System, sodass aus dem Gleichgewichtspunkt ein stabiler Grenzzyklus entspringt. μ ist reziprok proportional zur Dämpfung und bestimmt gleichzeitig den Bereich zwischen dem die lineare Verstärkung und die Dämpfung durch die Nichtlinearität im Gleichgewicht stehen. Zusammen mit dem *Van der Pol-Parameter* $\gamma \in \mathbb{R}^+$, der die Stärke der Nichtlinearität bestimmt, ist μ somit ein Stellparameter der Amplitude von x .



(a) Angeregter Relaxations-Oszillator mit Neon-Glühlampe und Gleichspannungsquelle. (b) Autonome Van der Pol-Oszillator mit Übertrager und gesteuerter Quelle.

Abb. 4.12.: Schaltbeispiele für Van der Pol-Oszillatoren.

Die Van der Pol-Gleichung (4.42) ist für $\alpha \neq 0$ analytisch nicht lösbar und der Grenzzyklus entspricht zudem keiner algebraischen Kurve [240]. Es existieren jedoch eine Vielzahl analytischer Näherungsmethoden wie zum Beispiel die Lie-Reihen-Methode [206, 213, 83], die Methode nach KRYLOW und BOGOLIUVOB [73] oder die Poincaré-Lindstedt-Methode [242]. Mit Hilfe einer Fourieranalyse zur Bestimmung der Frequenzanteile ist der Grenzzyklus ebenfalls analytisch approximierbar (siehe Anhang C).

Ein Schaltungsbeispiel des Van der Pol-Oszillators ist in Abb. 4.12b mit einem *RLC*-Reihenschwingkreis, einem Übertrager und einer spannungsgesteuerten Stromquelle dargestellt [229]. Die Spannung u und der Strom i_C sind die entsprechenden Zustandsvariablen im Phasenraum. Die nötige quadratische Nichtlinea-

rität, wie sie in (4.42) vorkommt, ist durch die spannungsgesteuerte Stromquelle gegeben und entspricht der Kleinsignalkennlinie einer Triode

$$i_0(u) = Su \left(1 - \frac{u^2}{3u_0^2} \right) \quad (4.43)$$

mit dem Leitwert S (Steilheit), gemäß der *Barkhausenschen Röhrenformel*, und der Gleichspannung u_0 als *Streckfaktor* der Kennlinie. Die Bewegungsgleichung der Schaltung folgt aus der Masche des *RLC*-Schwingkreises unter Berücksichtigung der entgegen gerichteten Spannung des Übertragers und der Strom-Spannungs-Beziehung des Kondensators zu

$$\ddot{u} - \omega_0 \left(MS - RC - \frac{MS}{u_0^2} u^2 \right) \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (4.44)$$

mit $M > 0$ als Gegeninduktivität und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ als *Eigenfrequenz* [255]. Der dimensionslose Bifurkationsparameter $\mu = \omega_0(MS - RC)$ setzt sich aus den Zeitkonstanten des Übertragers $\tau_L = MS$ und des Kondensators $\tau_C = RC$ sowie aus der Eigenfrequenz zusammen. M wirkt als variable Kopplungsgröße der Nichtlinearität, sodass für den Van der Pol-Parameter $\gamma = \omega_0 MS/u_0^2$ (Einheit: V^{-2}) folgt. Der dimensionslose Stellparameter ist für dieses Schaltungsbeispiel mit $\alpha = 1$ fest vorgegeben. Mit $i_C = Ci$ und den neuen Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (u, i)^\top \in M$ sowie $M = \mathbb{R}^2$ folgt ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{u} &= i, \\ \dot{i} &= \alpha(\mu - \gamma u^2)\omega_0 i - \omega_0^2 u. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ergibt $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \alpha(\mu - \gamma u^2)\omega_0$ und ist folglich abhängig von der Spannung u , sodass für $u = \pm\sqrt{\mu/\gamma}$ Nulldurchgänge der Divergenz auftreten. Im Gegensatz zum harmonischen Oszillator ist aufgrund der Zustandsabhängigkeit die Unterscheidung des *Dämpfungsterms* $\alpha(\mu - \gamma u^2)\omega_0 i$ von der Divergenz wesentlich, wenngleich die Nullstelle des Dämpfungsterms mit der Nullstelle der Divergenz für die Spannung identisch ist. Ist $\mathbf{r}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung des Grenzzyklus, dann führt ein Nulldurchgang des Dämpfungsterms an den Stellen $u = \pm\sqrt{\mu/\gamma}$ und $i = 0$ lediglich dazu, dass der *Hauptnormalenvektor* $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{r}}/\|\dot{\mathbf{r}}\|$ des *begleitenden Dreibeins* in dieselbe Richtung wie \mathbf{r} zeigt. Die Orientierung kann dabei je nach Lage entgegengesetzt sein. Dies folgt unmittelbar aus der Äquivalenz zum harmonischen Oszillator für diesen einen Punkt und entspricht lediglich dem Zentralanteil der *Momentanbeschleunigung*. Da gemäß (3.56) die Divergenz des Vektorfeldes jedes infinitesimale Flächenelement $d\mathbf{x} = dudt$ unter dem Fluss Φ streckt oder staucht und \mathbf{N} das normierte *Gradientenfeld* derjenigen Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, deren Nullstellenmenge den Grenzzyklus abbildet, sodass für die ω -Limesmenge $\omega = f^{-1}(\mathbf{0})$ gilt (siehe auch (2.2)), folgt aus Abschnitt 2.4, dass die negative Divergenz von \mathbf{N} der *Krümmung* des Grenzzyklus mit Vorzeichen entspricht, d.h. $\kappa(t) = -\operatorname{div}(\mathbf{N}(t))$.

Das Van der Pol-System kann mit diesen Überlegungen in zwei *innere Subsysteme* unterteilt werden: (i) Das erste Subsystem ist ein akkumulatives System bezüglich des instabilen Gleichgewichtspunktes mit seinem Auszugsgebiet bis hin zum Grenzzyklus. Die Bewegungsgleichung dieses Subsystems in der Nähe des Gleichgewichtspunktes entspricht annähernd der Bewegungsgleichung eines instabilen harmonischen Oszillators mit dem Verstärkungsterm $\alpha\mu\omega_0 i$. Die sich ergebende Divergenz, also die Ableitung des Verstärkungsterms nach dem Strom, ist folglich konstant positiv, sodass in der Nähe des Gleichgewichtspunktes eine von den Zustandsvariablen nahezu unabhängige Streckung eines jeden Phasenraumvolumens stattfindet. (ii) Das zweite Subsystem setzt sich aus den inneren und äußeren Einzugsgebieten sowie dem Grenzzyklus selbst zusammen, sodass der entsprechende Phasenraum dem Raum $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ entspricht. Das *Ljapunov-Spektrum* setzt sich aus dem Vorzeichentupel $(-, 0)$ gemäß Tab. 3.1 zusammen. Da es sich hierbei um ein dissipatives Subsystem handelt und die Divergenz zustandsabhängig ist, wird ein jedes Phasenraumvolumen je nach Lage im Phasenraum gestreckt oder gestaucht werden. Da das Auszugsgebiet des ersten Subsystems, dem inneren Einzugsgebiet des zweiten Subsystems entspricht und folglich das akkumulative Verhalten für das Gesamtsystem nicht über alle Grenzen wachsen kann, handelt es sich bei dem Van der Pol-System um ein dissipatives System. Es sei angemerkt, dass die Unterteilung in zwei innere Subsysteme keiner möglichen, physikalisch trennbaren Unterteilung entspricht, wohl aber eine Unterteilung in zwei unabhängige dissipative Bauelemente existiert. Zum einen der Dissipation am Wider-

4. Liouville Dynamik

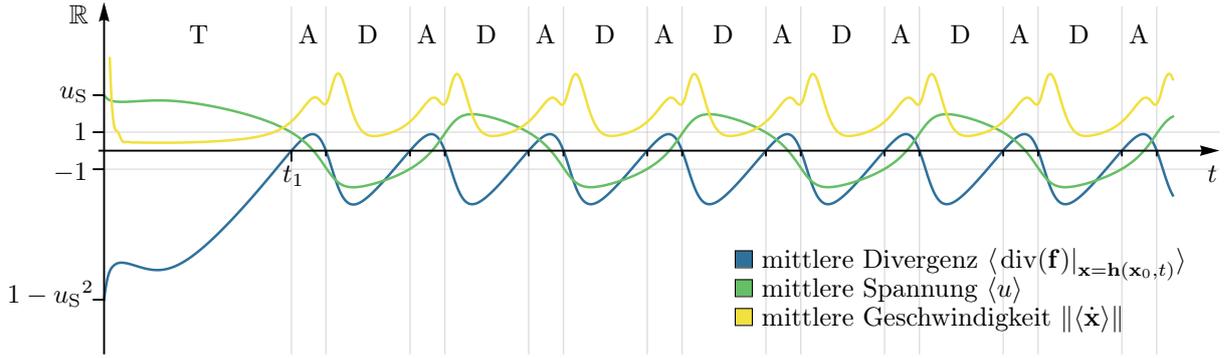


Abb. 4.13.: Die mittlere Divergenz des Van der Pol-Oszillators hat periodische Nullstellen für $\langle u \rangle = \pm 1$ V, sobald die Phasenraumdichte den transienten Weg (T), d.h. für $t \gg t_1$, überquert hat. Das Phasenraumvolumen folgt der mittleren Divergenzfunktion, sodass ein Streckvorgang im akkumulativen Unterraum (A) und ein Stauchvorgang im dissipativen Unterraum (D) stattfindet. Die mittlere Geschwindigkeit der Phasenraumdichte folgt dieser Dynamik. Die Ordinate ist für Vergleichszwecke dimensionslos.

stand R , zum anderen der Dissipation an der spannungsgesteuerten Stromquelle durch den Widerstand $1/S$. Letzterer ist wesentlich, wie im nachfolgenden Beispiel gezeigt.

Sei $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = (h_u(\mathbf{x}_0, t), h_i(\mathbf{x}_0, t))^T$ eine zweiparametrische Schar von Lösungen der Differentialgleichung (4.45) zu gegebenen Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = (u_0, i_0)^T \in N \subseteq M$ und

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t) e^{-\alpha\omega_0 \left(\mu t - \gamma \int h_u^2(\mathbf{x}_0, t) dt \right) \Big|_{\mathbf{x}_0 = \mathbf{h}^{-1}(\mathbf{x}, t)}} \quad (4.46)$$

die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung (3.47) mit $p_0[\mathbf{h}^{-1}]$ als normalverteilte Anfangsverteilung gemäß (4.28), so wird sofort ersichtlich, dass zwar das Integral von (4.46) numerisch auswertbar, jedoch die Inverstransformierte \mathbf{h}^{-1} und damit p schwer zu bestimmen sind.

Allerdings ist die anfängliche Gewichtung jeder involvierten Integralkurve mit $p_0(\mathbf{x}_0)$ als Funktion der Anfangswerte für alle Zeiten erhalten und wird nur durch den zweiten Term der Lösung (4.46) zeitlich transformiert. Diskret kann so die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung als endliche Menge von numerisch berechneten Integralkurven angenähert werden. Sei

$$\mathcal{P}(t) = \left\{ \left(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t), p_0(\mathbf{x}_0) e^{-\alpha\omega_0 (\mu t - \gamma \int h_u^2(\mathbf{x}_0, t) dt)} \right) \Big| \mathbf{x}_0 \in N \subseteq M \right\}, \quad (4.47)$$

dann gibt jedes Tripel von \mathcal{P} zu jedem Zeitpunkt t einen Punkt im Liouville-Raum $\mathbb{P} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ zurück und das dadurch entstehende Polygonnetz die Wahrscheinlichkeitsverteilung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung. Darüber hinaus entspricht das durch das Polygonnetz eingeschlossene 3-dimensionale *Liouville-Volumen* dem sicheren Ergebnis $P(\mathbb{R}^2) = 1$ des Wahrscheinlichkeitsraums $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}, P)$.

Startet eine Anfangsverteilung fernab vom Gleichgewicht, d.h. weit außerhalb des äußeren Einzugsgebiets, so wird diese auf ihrem transienten Weg in den Grenzyklus stark deformiert werden. Ein zu Beginn 2-dimensionales Phasenraumvolumen wird soweit gestaucht und in die Länge gezogen, dass letztendlich für $t \rightarrow \infty$ auf dem Grenzyklus ein 1-dimensionales Phasenraumvolumen vorliegt und dieses sich für das Van der Pol-System nicht algebraisch formulieren lässt. In der Nähe des Grenzyklus, d.h. nach der Transienz im Einzugsgebiet, findet eine Formänderung im wesentlichen nur in longitudinaler Richtung statt, da alle Integralkurven mit Anfangswerten im Einzugsgebiet eines Grenzyklus sich exponentiell mit der Zeit verdichten. Eine periodische longitudinale Änderung in der Nähe des Grenzyklus ist daher die Folge einer ungleichförmigen, beschleunigten Bewegung und wird als ein *Pumpmechanismus* im Liouville-Raum beobachtet. Jedes Volumenelement hat demgemäß eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und überlagert sich mit den nächst gelegenen Volumenelementen. Um den Pumpmechanismus des Van der Pol-Systems mit der Divergenz des Vektorfeldes in Verbindung zu bringen, reicht es daher nicht aus, eine einzelne Integralkurve mit dem Verlauf der Divergenz zu korrelieren.

Die Liouville-Dynamik des Van der Pol-Systems soll im Folgenden mit den Parametern $\mu = 1$ und $\gamma = 1 \text{ V}^{-2}$, dem Stellparameter $\alpha = 1$ und der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$ untersucht werden. Da für $u_0 = 1 \text{ V}$ auch $R = 0$ gelten müsste, dies aber dem Sinn der eigentlichen Rückkopplung zur Kompensation von dissipativen Verlusten widerspricht, sei dieser Fall o.B.d.A. ausgeschlossen. Die dimensionslose Divergenz des Vektorfeldes ist $1 - u^2$, sodass daraus Nullstellen für $u = \pm 1 \text{ V}$ resultieren.

Die Anfangserteilung ist identisch zur Anfangsverteilung des harmonischen Oszillators mit Dämpfung gemäß (4.28). Als transienter Weg ist im folgenden der Weg gemeint, den die Phasenraumdichte in der Zeit $t = t_1$ zurücklegt für die zum ersten Mal die mittlere Divergenz null ist, d.h. für $\langle \text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0,t)} \rangle = 0$. Das Zeitintervall $0 \leq t < t_1$ zeigt demzufolge den Einschwingvorgang des Oszillators. Während des Vorgangs wird die anfänglich symmetrische Anfangsverteilung stark gestaucht, sodass bereits hier ein nahezu 2-dimensionales Liouville-Volumen zu beobachten ist (siehe Abb. 4.15a). Nach dem Einschwingen, d.h. für $t \gg t_1$, verläuft die Phasenraumdichte in guter Näherung (gemäß dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$) auf dem Grenzzyklus.

Zwischen den Zeiten $t = t_D$ und $t = t_A$ ist ein periodischer Pumpmechanismus der Phasenraumdichte zu beobachten, der gemäß (3.56) über den Verlauf der mittleren Divergenz darstellbar ist. Im dissipativen Unterraum des Phasenraums, d.h. für $|u| > 1 \text{ V}$, nimmt das Phasenraumvolumen ab, sodass die Phasenraumdichte gestaucht wird, während im akkumulativen Unterraum, d.h. für $|u| < 1 \text{ V}$, das Phasenraumvolumen zunimmt und damit die Phasenraumdichte gestreckt wird (siehe Abb. 4.13 und Abb. 4.15b).

Proposition (Pumpmechanismus) *In Systemen mit Grenzzyklen existiert bei zustandsabhängiger Divergenz stets ein periodischer Pumpmechanismus, der die Ursache von Streck- und Stauchvorgängen eines Phasenraumvolumens darstellt. Nach einem idealen Einschwingvorgang findet dieser Mechanismus ausschließlich in longitudinaler Richtung statt und beeinflusst daher die Phasenlage eines Zustands auf dem Grenzzyklus. Fluktuationen die im dissipativen bzw. akkumulativen Unterraum stattfinden, werden auf diese Weise abgeschwächt bzw. verstärkt. Ein Ausgleich im Sinne der Superposition ist aufgrund des nichtlinearen Verhaltens nicht gegeben, sodass die zustandsabhängige Divergenz ein Indikator der Phasenstabilität gegenüber Fluktuationen darstellt.*

Das Produkt beider Zustandsvariablen entspricht einer Leistung P unter der Berücksichtigung der Normierung $i_C = Ci$ und kann in direkten Bezug zur Divergenz gebracht werden, sodass folgt

$$P \propto u \cdot i = -\frac{1}{2\alpha\gamma\omega_0} \frac{d}{dt} \text{div}(\mathbf{f}). \quad (4.48)$$

Die nach außen hin verrichtete Arbeit bezüglich u und i ist im akkumulativen Unterraum demzufolge negativ und im dissipativen Unterraum positiv. Gl. (4.48) stellt kein allgemeingültigen Zusammenhang dar, sondern ist eine Besonderheit des Van der Pol-Systems.

Proposition (Divergenz und Energie) *Die Divergenz kann unter Umständen mit Energie- oder Leistungsgrößen in Verbindung gebracht werden, sodass mit diesem Zusammenhang nicht nur von einer Dissipation oder Akkumulation eines Phasenraumvolumens, sondern auch von Dissipation oder Akkumulation von Energie bzw. Energieänderung gesprochen werden kann. Oszillatoren die Schubweise Energie in das System pumpen, um die Bewegung aufrecht zu erhalten, können sich daher als ungünstig gegenüber der Phasenstabilität erweisen, da somit mehrere oder besonders harte Übergänge zwischen Dissipation und Akkumulation auftreten.*

Eine Rauschankopplung durch Strom- und Spannungsquellen führt auf den *Langevin-Ansatz*

$$\begin{aligned} \dot{U} &= I + D_{11}\xi_1(t), \\ \dot{I} &= \alpha(\mu - \gamma U^2)\omega_0 I - \omega_0^2 U + D_{22}\xi_2(t) \end{aligned} \quad (4.49)$$

mit der 2×2 -Diffusionsmatrix \mathbf{D} , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ als weißes gaußsches Rauschen und $\mathbf{X} = (U, I)^\top$ als nunmehr stochastische Zustandsvariablen. Die Lösung der dazu äquivalenten Fokker-Planck-Gleichung (B.12) unterliegt demselben Drift wie die Lösung der Liouville-Gleichung zu (4.45). Einzig aufgrund der Diffusion \mathbf{D} unterscheiden sich die stochastischen Momente der Wahrscheinlichkeitsdichten $p(\mathbf{x}, t)$ und $p(\mathbf{X}, t)$. Der Pumpmechanismus im deterministischen Fall ist im zweiten stochastischen Moment μ_2 als eine periodische Funktion sichtbar (siehe Abb. 4.14). Die Diffusion des stochastischen Systems führt zu

4. Liouville Dynamik

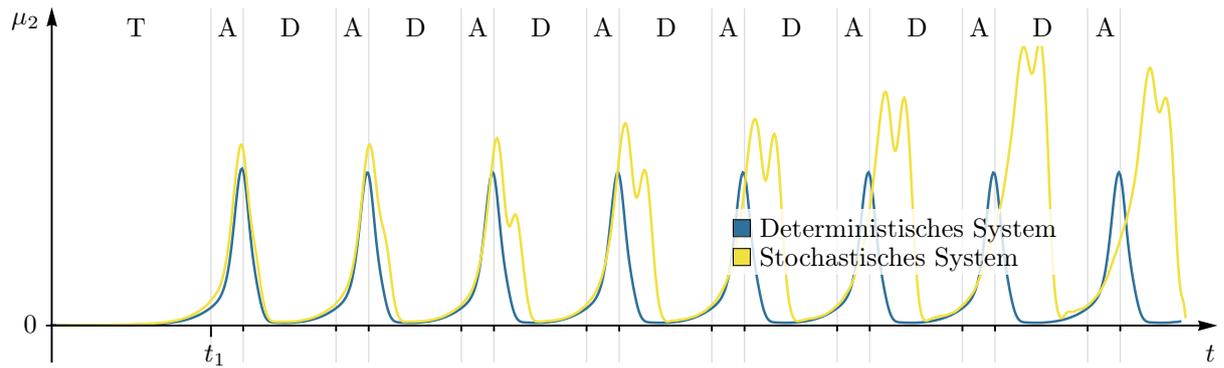
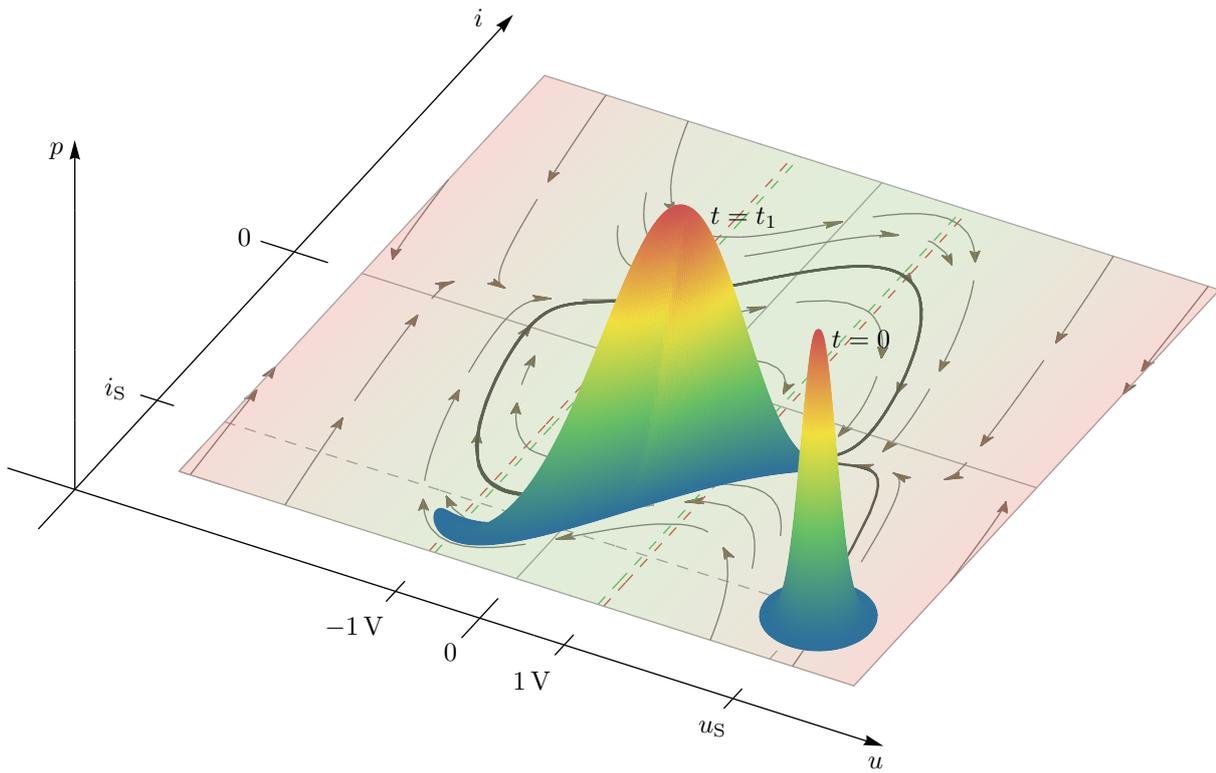


Abb. 4.14.: Zweites zentrales Moment (Varianz) μ_2 des Van der Pol-Systems. Die Rauschquellen des stochastischen Systems wurden mit den Diffusionselementen $D_{11} = 225 \mu\text{A F}^{-1}$ und $D_{22} = 225 \mu\text{V}$ angenommen.

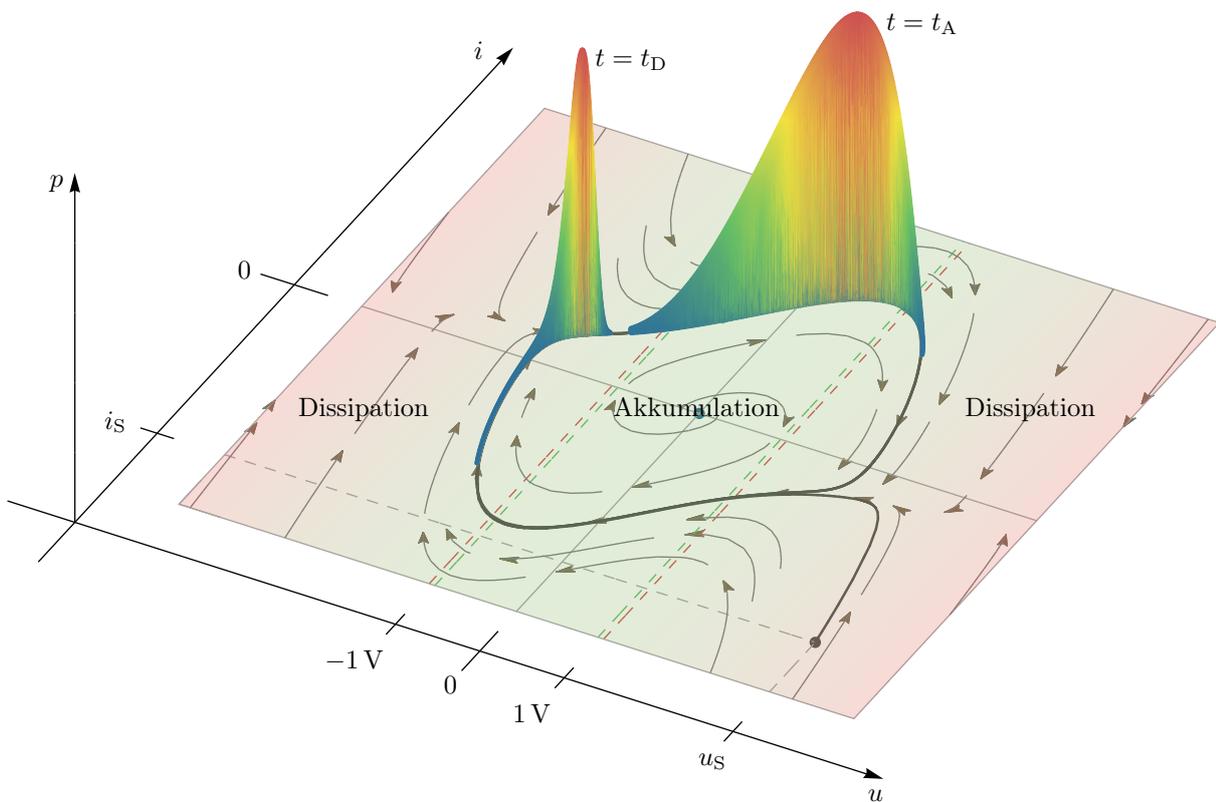
einer Phasenverschiebung aufgrund der sich daraus ergebenden *Relaxationen*. Zudem steigt μ_2 aufgrund des sich fortwährenden Verschmierens der Phasenraumdicke auf dem Grenzzyklus immer weiter an, bis eine Gleichverteilung erreicht ist. Das stochastische System unterliegt dem Pumpmechanismus als Folge dessen häufiger, was sich als zusätzliche Nebenmaxima einer Periode manifestiert.

Weiterführende Literatur

- GINOX et al. „Van der Pol and the history of relaxation oscillations: toward the emergence of a concept“ [262]
- GUCKENHEIMER „Dynamics of the Van der Pol Equation“ [222]
- HÄNGGI „Rate of Phase Slips of a Driven Van der Pol Oscillator at Low Noise“ [74]
- VAN DER POL „The Nonlinear Theory of Electric Oscillations“ [36]
- VAN DER POL & VAN DER MARK „Frequency Demultiplication“ [27]



(a) Einschwingvorgang



(b) Oszillation mit Pumpmechanismus

Abb. 4.15.: Van der Pol-System mit $\mu = 1$, $\gamma = 1 \text{ V}^{-2}$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$, den Startwerten $u_S = 2 \text{ V}$, $i_S = -2 \text{ V s}^{-1}$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{u_0} = 200 \text{ mV}$, $\sigma_{i_0} = 200 \text{ mV s}^{-1}$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Skaleneinteilung der p -Achse (Applikate) ist für jede Phasenraumdichte neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

4.2.2. Van der Pol-Oszillator (einseitig gekoppelt)

Ausgehend von der Bewegungsgleichung (4.42) können zwei Van der Pol-Systeme miteinander gekoppelt werden. Dabei sind verschiedene Arten der Kopplung denkbar. Beispielsweise eine gegenseitige Anregung der Art [81, 82]

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \alpha(\mu - \gamma x^2)\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= \dot{u} \\ \ddot{u} - \alpha(\mu - \gamma u^2)\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u &= \dot{x}\end{aligned}\tag{4.50}$$

die zu einem 4-dimensionalen Zustandsraum mit zustandsabhängiger Divergenz und entsprechendem Pumpmechanismus führt oder eine alternative Erweiterung mit einem instabilen, *äußeren Subsystem*, die einer einseitigen Kopplung entspricht [180]

$$\begin{aligned}\ddot{x} - \alpha(\mu - \gamma x^2)\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= 0 \\ \ddot{u} + \alpha(\mu - \gamma u^2)\omega_0\dot{u} + \omega_0^2u &= 0.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Das System nach (4.51) ist divergenzfrei und demzufolge konservativ bezüglich des Phasenraumvolumens, jedoch kein Hamilton-System.

Proposition (Konservative Systeme (Beispiel)) *Die Divergenzfreiheit eines Vektorfeldes ist keine hinreichende, sondern eine notwendige Bedingung für ein Hamilton-System, denn es existieren konservative Systeme die sich nicht als ein Hamilton-System beschreiben lassen. Das einseitig gekoppelte Van der Pol-System nach (4.51) ist ein solches Beispiel.*

Im Bezug mit den Definitionen aus Abschnitt 3.8.1 folgt, dass das einseitig gekoppelte Van der Pol-System aus zwei 2-dimensionalen, äußeren Subsystemen besteht, welche jeweils durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschrieben werden. Im akkumulativen Unterraum des ersten Subsystems, ist das zweite Subsystem dissipativ und umgekehrt. Dies bedeutet, dass das jeweilig dissipierte bzw. akkumulierte Phasenraumvolumen dem jeweils anderen Subsystem zugeschrieben werden kann, d.h., es findet ein stetiger Austausch des Phasenraumvolumens statt, welcher in seiner Gesamtheit konservativ ist.

Proposition (Erweiterung mit äußeren Subsystemen) *Jedes System, dass dem Pumpmechanismus unterliegt, kann mit einem äußeren Subsystem derart erweitert werden, dass der Pumpmechanismus kompensiert wird. Das hinzugefügte äußere Subsystem dient als eine Art Reservoir für überschüssiges oder benötigtes Phasenraumvolumen. Dabei kann chaotisches Verhalten auftreten.*

Weiterführende Literatur

- STEEB et al. „Coupled chaotic oscillators“ [81]
- STEEB et al. „Transition to hyperchaos in coupled generalized van der Pol equations“ [82]
- GHOSH et al. „One-way coupled Van der Pol system“ [180]

4.2.3. Rayleigh-Oszillator

Der Rayleigh-Oszillator ist das Ergebnis der akustischen Beschreibung einer Klarinette des Nobelpreisträgers für Physik Lord RAYLEIGH [204, 266].

Die Bewegungsgleichung des Rayleigh-Oszillators lautet

$$\ddot{y} - \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} \dot{y}^2 \right) \omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad (4.52)$$

mit $y, \dot{y} \in \mathbb{R}$ als Zustandsvariablen im Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ und folgt direkt aus der Integration der Van der Pol-Gleichung (4.42) mit anschließender Substitution $\dot{y} = x$ und der Definition des Rayleigh-Parameters $\beta = \omega_0^2 \gamma$ [245]. Das daraus resultierende dynamische System geht demzufolge ebenso in einen harmonischen Oszillator über, falls der Stellparameter α verschwindet und es können dieselben Analogien für den Bifurkationsparameter μ und Rayleigh-Parameter β bezüglich des Van der Pol-Systems getroffen werden.

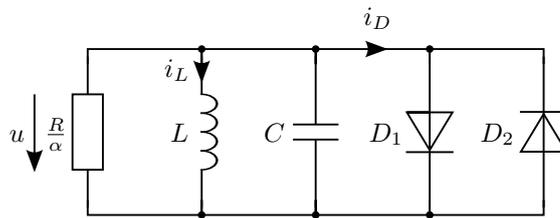


Abb. 4.16.: Paralleler RLC -Schwingkreis mit Diodenpaar D_1, D_2 . Um eine stabile Oszillation zu gewährleisten, müssen die linearen Anteile der dissipativen Verluste durch die Dioden mittels des negativen Widerstands R/α kompensiert werden.

Ein Schaltungsbeispiel des Rayleigh-Oszillators ist in Abb. 4.16 mit einem RLC -Parallelschwingkreis und einem Diodenpaar D_1, D_2 dargestellt. Die Spannung u und der Strom i_L sind die entsprechenden Zustandsvariablen im Phasenraum. Die nötige quadratische Nichtlinearität, wie sie in (4.52) vorkommt, ist durch das Diodenpaar gegeben und entspricht der Kleinsignalkennlinie des Diodenstroms

$$i_D(u) = \alpha \left(g_1 u + \frac{g_3^3}{i_0^2} u^3 \right) \quad (4.53)$$

mit den Leitwerten g_1 und g_3 , einem Ruhestrom i_0 sowie einem dimensionslosen Stellparameter α . Die Bewegungsgleichung der Schaltung folgt aus der Knotengleichung gemäß

$$\ddot{i} - \alpha \left(-2d - \frac{g_3^3}{\omega_0 i_0^2 C} \dot{i}^2 \right) \omega_0 \dot{i} + \omega_0^2 i = 0 \quad (4.54)$$

mit $i_L = i/L$ als renormierte Zustandsvariable, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ als *Eigenfrequenz* und

$$d = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \left(\frac{1}{R} + g_1 \right) \quad (4.55)$$

als dimensionsloser *Dämpfungsgrad*. Der Bifurkationsparameter ist reziprok und negativ zur *Güte* $Q = 1/(2d)$ des Systems, gemäß $\mu = -2d$. Der *Rayleigh-Parameter* kann durch einen Vergleich mit (4.52) zu $\beta = 3g_3^2 \omega_0 / (i_0^2 C)$ (Einheit: Wb^{-2}) bestimmt werden. Mit den Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (i, u)^\top \in M = \mathbb{R}^2$ folgt die umgeformte Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{i} &= u, \\ \dot{u} &= \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} u^2 \right) \omega_0 u - \omega_0^2 i. \end{aligned} \quad (4.56)$$

4. Liouville Dynamik

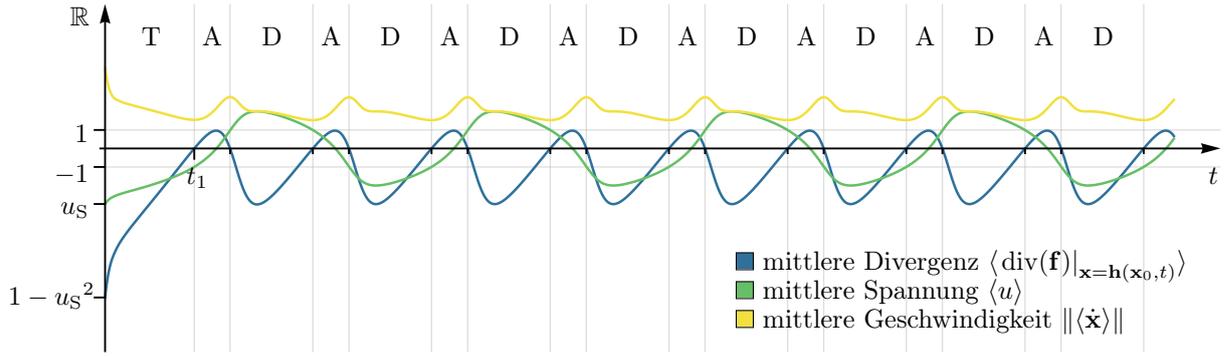


Abb. 4.17.: Die mittlere Divergenz des Rayleigh-Oszillators hat periodische Nullstellen für $\langle u \rangle = \pm 1$, sobald die Phasenraumdichte den transienten Weg (T), d.h. für $t \gg t_1$, überquert hat. Das Phasenraumvolumen folgt der mittleren Divergenzfunktion, sodass ein Streckvorgang im akkumulativen Unterraum (A) und ein Stauchvorgang im dissipativen Unterraum (D) stattfindet. Die mittlere Geschwindigkeit der Phasenraumdichte folgt dieser Dynamik.

Die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ergibt $\text{div}(\mathbf{f}) = \alpha (\mu - \beta u^2 / \omega_0^2) \omega_0$ und ist folglich abhängig von der Spannung u , sodass für $u = \pm \omega_0 \sqrt{\mu / \beta}$ Nulldurchgänge der Divergenz auftreten. Im Gegensatz zum Van der Pol-System ist die Divergenz und der *Dämpfungsterm* beim Rayleigh-System unterschiedlich. Aus dem Vorzeichen des Bifurkationsparameters und der Hopf-Bifurkation gemäß Abschnitt 3.5 folgt, dass $d < 0$ gelten muss, um einen stabilen Grenzzyklus zu gewährleisten. Der Widerstand im Schaltungsbeispiel muss demzufolge negativ sein

$$R < -\frac{1}{g_1}. \quad (4.57)$$

Das Rayleigh-System kann mit diesen Überlegungen in zwei *innere Subsysteme* unterteilt werden: (i) Das erste Subsystem ist ein akkumulatives System bezüglich des instabilen Gleichgewichtspunktes mit seinem Auszugsgebiet bis hin zum Grenzzyklus. Die Bewegungsgleichung dieses Subsystems in der Nähe des Gleichgewichtspunktes entspricht annähernd, aufgrund des negativen Widerstands R , der Bewegungsgleichung eines instabilen harmonischen Oszillators mit dem Verstärkungsterm $\alpha \mu \omega_0 u$. Die sich ergebende Divergenz, also die Ableitung des Verstärkungsterms nach der Spannung, ist folglich konstant positiv, sodass in der Nähe des Gleichgewichtspunktes eine von den Zustandsvariablen nahezu unabhängige Streckung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung stattfindet. (ii) Das zweite Subsystem setzt sich aus den inneren und äußeren Einzugsgebieten sowie dem Grenzzyklus selbst zusammen, sodass der entsprechende Phasenraum dem Raum $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ entspricht. Das *Ljapunov-Spektrum* setzt sich aus dem Vorzeichen-tupel $(-, 0)$ gemäß Tab. 3.1 zusammen. Da es sich hierbei um ein dissipatives Subsystem handelt und die Divergenz zustandsabhängig ist, wird ein jedes Phasenraumvolumen je nach Lage im Phasenraum gestreckt oder gestaucht werden. Da das Auszugsgebiet des ersten Subsystems, dem inneren Einzugsgebiet des zweiten Subsystems entspricht und folglich das akkumulative Verhalten für das Gesamtsystem nicht über alle Grenzen wachsen kann, handelt es sich bei dem Rayleigh-System um ein dissipatives System. Die dissipativen Verluste aufgrund des Diodenstroms i_D können in zwei Anteile aufgeteilt werden. Zum einen der Verlust durch den Leitwert g_1 bezüglich der linearen Spannungsabhängigkeit und zum anderen der Verlust durch den Leitwert g_3 bezüglich der kubischen Spannungsabhängigkeit. Der negative Widerstand akkumuliert, gemäß (4.57), nur die dissipativen Verluste des Linearanteils von i_D ! Die Dissipation durch den kubischen Anteil ermöglicht erst die superkritische Hopf-Bifurkation.

Startet eine Anfangsverteilung fernab vom Gleichgewicht, d.h., weit außerhalb des äußeren Einzugsgebiets, so wird diese auf ihrem transienten Weg in den Grenzzyklus stark deformiert werden. Ein zu Beginn 2-dimensionales Phasenraumvolumen wird soweit gestaucht und in die Länge gezogen, dass letztendlich für $t \rightarrow \infty$ auf dem Grenzzyklus ein 1-dimensionales Phasenraumvolumen vorliegt und dieses sich für das Rayleigh-System nicht algebraisch formulieren lässt. In der Nähe des Grenzzyklus, d.h. nach der Transienz im Einzugsgebiet, findet eine Formänderung im wesentlichen nur in longitudinaler Richtung statt, da alle Integralkurven mit Anfangswerten im Einzugsgebiets eines Grenzzyklus sich exponentiell mit der Zeit verdichten. Eine periodische longitudinale Änderung in der Nähe des Grenzzyklus ist daher die Folge

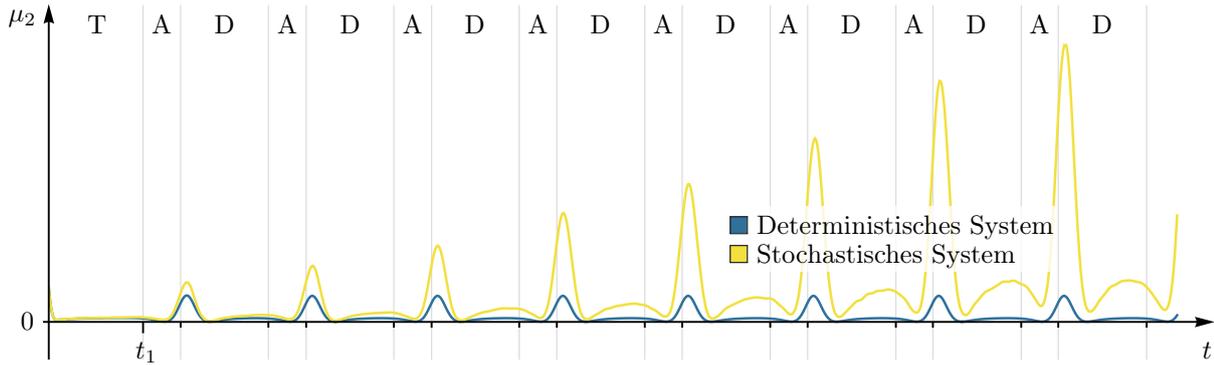


Abb. 4.18.: Zweites zentrales Moment (Varianz) μ_2 des Rayleigh-Systems. Die Rauschquellen des stochastischen Systems wurden mit den Diffusionselementen $D_{11} = 225 \mu\text{V}$ und $D_{22} = 225 \mu\text{V s}^{-1}$ angenommen.

einer ungleichförmigen, beschleunigten Bewegung und wird als ein *Pumpmechanismus* im *Liouville-Raum* beobachtet. Jedes Volumenelement hat demgemäß eine unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeit und überlagert sich mit den nächst gelegenen Volumenelementen.

Die Liouville-Dynamik des Rayleigh-Systems soll im Folgenden mit den Parametern $\mu = 1$ und $\beta = 1 \text{ s}^{-2}$, dem Stellparameter $\alpha = 1$ und der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$ untersucht werden. Die dimensionslose Divergenz des Vektorfeldes ist demzufolge $1 - u^2$, sodass daraus Nullstellen für $u = \pm 1 \text{ V}$ resultieren.

Die Anfangsverteilung ist identisch zur Anfangsverteilung des harmonischen Oszillators mit Dämpfung gemäß (4.28). Als transienter Weg ist im Folgenden der Weg gemeint, den die Phasenraumdichte in der Zeit $t = t_1$ zurücklegt für die zum ersten Mal die mittlere Divergenz null ist, d.h. für $\langle \text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0,t)} \rangle = 0$. Das Zeitintervall $0 \leq t < t_1$ zeigt demzufolge den Einschwingvorgang des Oszillators. Während des Vorgangs wird die anfänglich symmetrische Anfangsverteilung stark gestaucht, sodass bereits hier ein nahezu 2-dimensionales Liouville-Volumen zu beobachten ist (siehe Abb. 4.19a). Nach dem Einschwingen, d.h. für $t \gg t_1$, verläuft die Phasenraumdichte in guter Näherung (gemäß dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$) auf dem Grenzzyklus.

Zwischen den Zeiten $t = t_D$ und $t = t_A$ ist ein periodischer Pumpmechanismus der Phasenraumdichte zu beobachten, der gemäß (3.56) über den Verlauf der mittleren Divergenz darstellbar ist. Im dissipativen Unterraum des Phasenraums, d.h. für $|u| > 1 \text{ V}$, nimmt das Phasenraumvolumen ab, sodass die Phasenraumdichte gestaucht wird, während im akkumulativen Unterraum, d.h. für $|u| < 1 \text{ V}$, das Phasenraumvolumen zunimmt und damit die Phasenraumdichte gestreckt wird (siehe Abb. 4.17 und Abb. 4.19b).

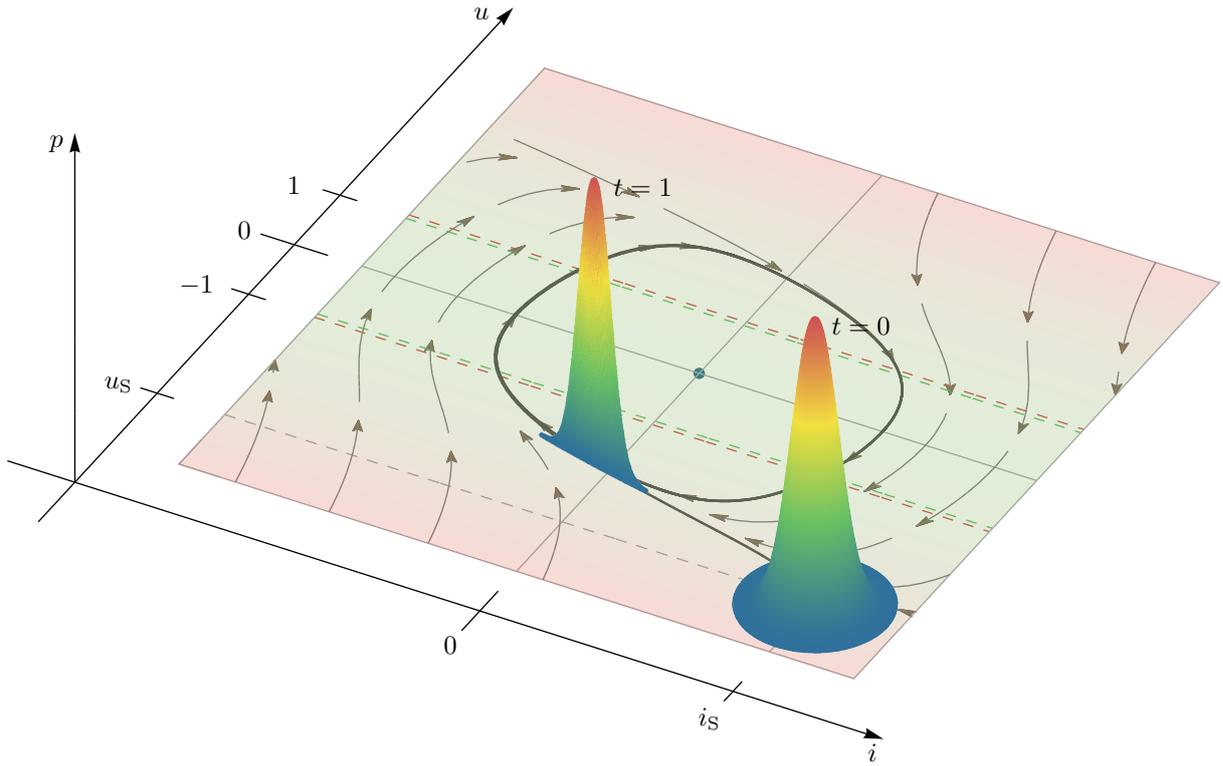
Eine Rauschankopplung durch Strom- und Spannungsquellen führt auf den *Langevin-Ansatz*

$$\begin{aligned} \dot{I} &= U + D_{11}\xi_1(t), \\ \dot{U} &= \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} U^2 \right) \omega_0 U - \omega_0^2 I + D_{22}\xi_2(t) \end{aligned} \quad (4.58)$$

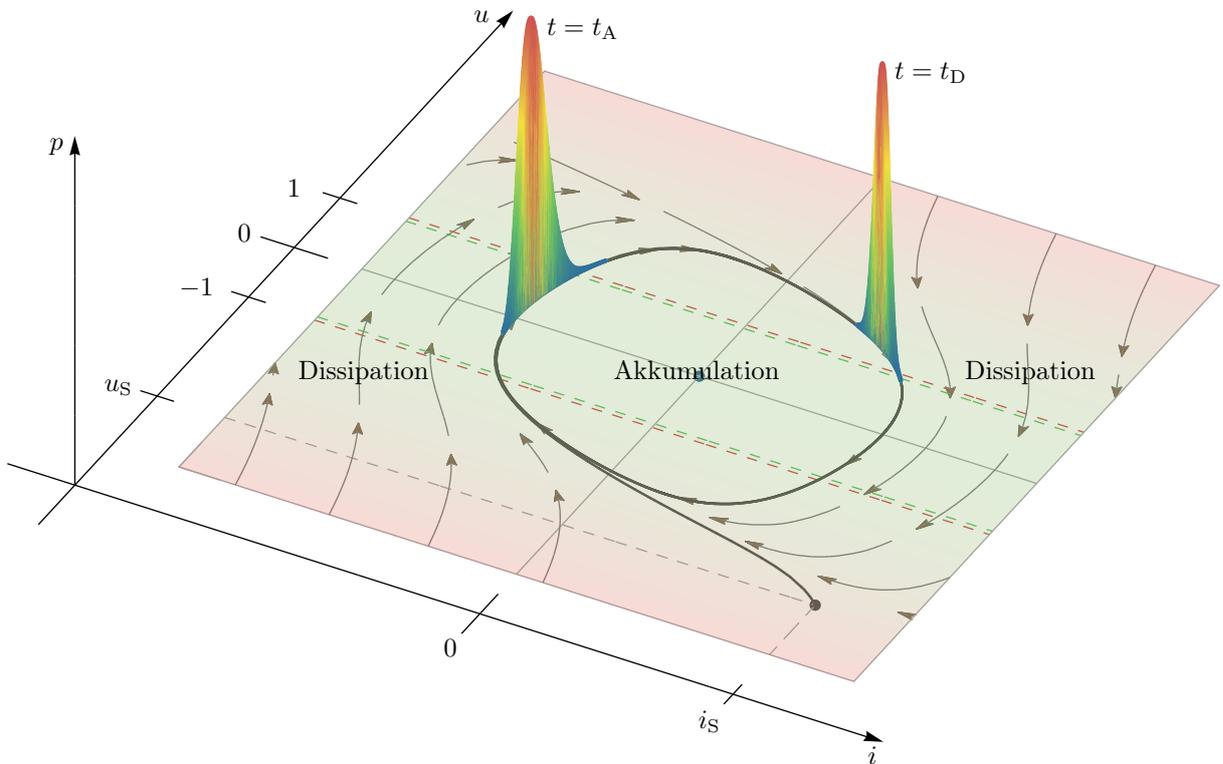
mit der 2×2 -Diffusionsmatrix \mathbf{D} , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ als weißes gaußsches Rauschen und $\mathbf{X} = (I, U)^\top$ als nunmehr stochastische Zustandsvariablen. Das Rayleigh-System zeigt bei den stochastischen Momenten ein äquivalentes Verhalten wie das Van der Pol-System (siehe Abb. 4.18). Auch hier ist der Pumpmechanismus im deterministischen Fall im zweiten stochastischen Moment μ_2 als eine periodische Funktion sichtbar und die Diffusion des stochastischen Systems führt wieder zu einer Phasenverschiebung aufgrund der sich daraus ergebenden *Relaxationen*.

Weiterführende Literatur

- CVETICANIN „Lord Rayleigh and Rayleigh Oscillator: An Overview“ [266]
- STRUTT „The theory of sound“ [204]



(a) Einschwingvorgang



(b) Oszillation mit Pumpmechanismus

Abb. 4.19.: Rayleigh System mit $\mu = 1$, $\beta = 1 \text{ s}^{-2}$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1 \text{ Hz}$, den Startwerten $u_S = 3 \text{ V}$, $i_S = -3 \text{ V s}^{-1}$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{u_0} = 300 \text{ mV}$, $\sigma_{i_0} = 300 \text{ mV s}^{-1}$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Skaleneinteilung der p -Achse (Applikate) ist für jede Phasenraumdicke neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

4.2.4. Rayleigh-Van der Pol-Oszillator

Die Bewegungsgleichung des Rayleigh-Van der Pol-Oszillators lautet

$$\ddot{x} - \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} \dot{x}^2 - \gamma x^2 \right) \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.59)$$

mit $x, \dot{x} \in \mathbb{R}$ als Zustandsvariablen im Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ und stellt den Zusammenschluss der Nichtlinearitäten des Van der Pol- und des Rayleigh-Oszillators dar. Das daraus resultierende dynamische System geht demzufolge ebenso in einen harmonischen Oszillator über, falls der *Stellparameter* α verschwindet. Die Besonderheit dieser Bewegungsgleichung ist, dass für

$$\beta = 3\gamma \quad (4.60)$$

eine analytische Lösung existiert, die den Grenzzyklus beschreibt

$$\mathbf{h}_G(\phi_0, t) = \sqrt{\frac{\mu}{\delta}} \begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t + \phi_0) \\ \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

mit $\delta = \gamma = \beta/3$ als *Rayleigh-Van der Pol-Parameter* und ϕ_0 als Anfangswert (Anfangsphase). Gilt (4.60) und $\omega_0 = 1$, so ist der Grenzzyklus ein Kreis mit Radius $\sqrt{\mu}$. Für $\omega_0 \neq 1$ wird der Kreis zu einer Ellipse gestaucht, sodass $\omega_0 \sqrt{\mu}$ für $\omega_0 > 1$ der Radius der großen Halbachse und für $\omega_0 < 1$ der Radius der kleinen Halbachse ist. Der Radius der jeweils anderen Achse ist weiterhin mit $\sqrt{\mu}$ beschrieben. Ist $\beta \neq 3\gamma$, so existiert für $\alpha \neq 0$ keine analytische Lösung der Bewegungsgleichung mit Ausnahme der Trivillösung zum Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

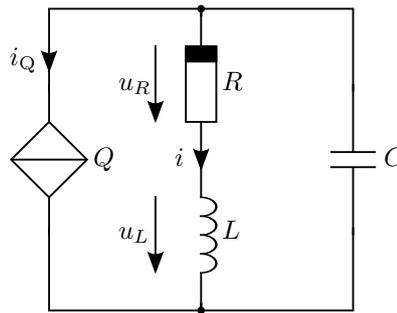


Abb. 4.20.: Schaltungsbeispiel eines Rayleigh-Van der Pol-Oszillators. Die Kennlinie des nichtlinearen Widerstands R ist abhängig vom Strom i während die spannungsgesteuerte Stromquelle Q abhängig von u_L ist.

Ein Schaltungsbeispiel des Rayleigh-Van der Pol-Oszillators ist in Abb. 4.20 mit einem RLC-Schwingkreis, einer spannungsgesteuerten Stromquelle Q mit der kubischen Kennlinie

$$i_Q(u_L) = -\frac{\alpha}{\omega_0} \left(\mu \frac{u_L}{L} + \frac{\beta}{3\omega_0^2} \frac{u_L^3}{L^3} \right) \quad (4.62)$$

und dem nichtlinearen Widerstand R dargestellt. Die Spannung über R folgt ebenfalls einer kubischen Funktion in Abhängigkeit des Stromes i gemäß

$$u_R(i) = \frac{\alpha\gamma}{3} \sqrt{\frac{L}{C}} i^3. \quad (4.63)$$

Aus der Knoten- und Maschenbeziehung sowie den dynamischen Gleichungen für Spule und Kondensator folgt die identische Bewegungsgleichung des Oszillators wie (4.59), wobei x durch den Strom i zu ersetzen ist. Der Bifurkationsparameter μ bleibt dimensionslos, β und γ haben die Einheit A^{-2} . Mit dem Strom i und der normierten Spannung $u = u_L/L$ als Zustandsvariablen im Phasenraum $M = \mathbb{R}^2$ kann die

4. Liouville Dynamik

Bewegungsgleichung (4.59) mit $\mathbf{x} = (i, u)^\top \in M$ in ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben werden

$$\begin{aligned} \dot{i} &= u, \\ \dot{u} &= \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} u^2 - \gamma i^2 \right) \omega_0 u - \omega_0^2 i. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Die Divergenz des Vektorfeldes $\mathbf{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ergibt

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{\omega_0^2} u^2 - \gamma i^2 \right) \omega_0 \quad (4.65)$$

und ist folglich abhängig von dem Strom i und der normierten Spannung u . Der dimensionslose *Dämpfungsgrad* dieser Bewegungsgleichung lautet

$$d = -\frac{1}{2} \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} u^2 - \gamma i^2 \right). \quad (4.66)$$

Das Rayleigh-Van der Pol-System kann mit diesen Überlegungen in zwei *innere Subsysteme* unterteilt werden: (i) Das erste Subsystem ist ein akkumulatives System bezüglich des instabilen Gleichgewichtspunktes mit seinem Auszugsgebiet bis hin zum Grenzzyklus. Die Bewegungsgleichung dieses Subsystems in der Nähe des Gleichgewichtspunktes entspricht annähernd der Bewegungsgleichung eines instabilen harmonischen Oszillators mit dem Verstärkungsterm $\alpha\mu\omega_0 u$. Die sich ergebende Divergenz, also die Ableitung des Verstärkungsterms nach der Spannung, ist folglich konstant positiv, sodass in der Nähe des Gleichgewichtspunktes eine von den Zustandsvariablen nahezu unabhängige Streckung eines jeden Phasenraumvolumens stattfindet. (ii) Das zweite Subsystem setzt sich aus den inneren und äußeren Einzugsgebieten sowie dem Grenzzyklus selbst zusammen, sodass der entsprechende Phasenraum dem Raum $M \setminus \{\mathbf{0}\}$ entspricht. Das *Ljapunov-Spektrum* setzt sich aus dem Vorzeichen-tupel $(-, 0)$ gemäß Tab. 3.1 zusammen. Da es sich hierbei um ein dissipatives Subsystem handelt und die Divergenz zustandsabhängig ist, wird ein jedes Phasenraumvolumen je nach Lage im Phasenraum gestreckt oder gestaucht werden. Da das Auszugsgebiet des ersten Subsystems, dem inneren Einzugsgebiet des zweiten Subsystems entspricht und folglich das akkumulative Verhalten für das Gesamtsystem nicht über alle Grenzen wachsen kann, handelt es sich bei dem Rayleigh-Van der Pol-System um ein dissipatives System.

Sei $\mathbf{r}: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Parametrisierung des Grenzzyklus und $\mathbf{N} = \dot{\mathbf{r}} / \|\dot{\mathbf{r}}\|$ der *Hauptnormalenvektor* des *begleitenden Dreibeins*, sodass \mathbf{N} das normierte *Gradientenfeld* derjenigen Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist, deren Nullstellenmenge den Grenzzyklus abbildet, sodass eine ω -Limesmenge $\omega = f^{-1}(\mathbf{0})$ angegeben werden kann. Weiterhin seien $\mathcal{C}_{\operatorname{div}}$ und \mathcal{C}_d die Lösungsmengen des Nullstellenproblems bezüglich der Divergenz $\operatorname{div}(\mathbf{f})$ und der Dämpfung d , dann folgt, dass diese Lösungsmengen geometrisch Ellipsen darstellen

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\operatorname{div}} &= \{\mathbf{x} \mid \operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M\}, \\ \mathcal{C}_d &= \{\mathbf{x} \mid d = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M\}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

während die Menge ω nur für $\beta = 3\gamma$ die Lösungsmenge einer Ellipse darstellt. Die Halbachsen der Lösungsmengen $\mathcal{C}_{\operatorname{div}}$ und \mathcal{C}_d können angegeben werden zu

$$\begin{aligned} r_{i,\operatorname{div}} &= \sqrt{\mu/\gamma} \quad \text{und} \quad r_{u,\operatorname{div}} = \sqrt{\mu/\beta}\omega_0, \quad \text{bzw.} \\ r_{i,d} &= \sqrt{\mu/\gamma} \quad \text{und} \quad r_{u,d} = \sqrt{3\mu/\beta}\omega_0. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Der Rayleigh-Van der Pol-Oszillator ist unter der Bedingung (4.60) ein *kanonisch-dissipatives* System mit der *Hamilton-Funktion* $H: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(u, i) = \frac{1}{2} u^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 i^2 \quad (4.69)$$

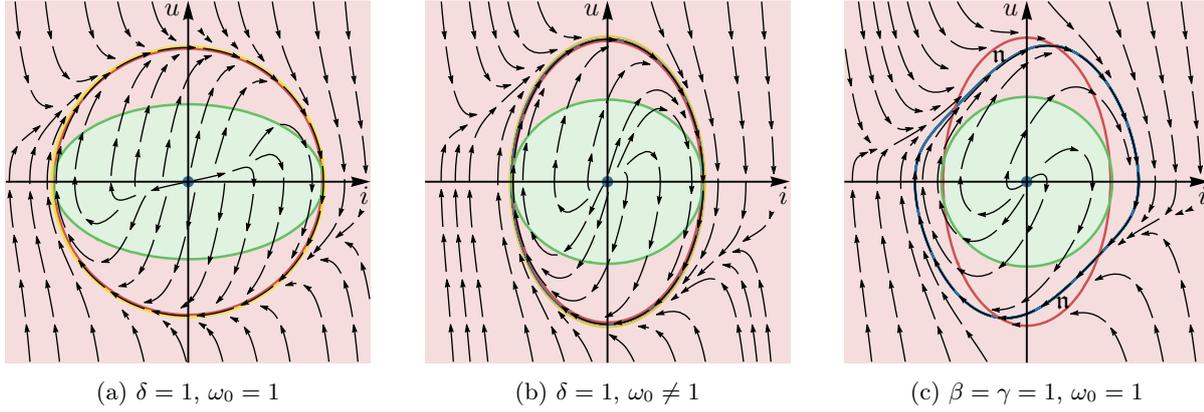


Abb. 4.21.: ■ ω (Grenzzyklus)
 ■ \mathcal{C}_{div} (Nullstellenmenge der Divergenz, d.h. $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$)
 ■ $\mathcal{C}_{\text{Diss}}$ (Nullstellenmenge der Dissipationsfunktion, d.h. $g(H) = 0$)
 ■ \mathcal{C}_{D} (Nullstellenmenge der Dämpfung)

Beispiele verschiedener Rayleigh-Van der Pol-Systeme. Die ersten beiden Systeme 4.21a und 4.21b sind kanonisch dissipativ, d.h. es gilt $\delta = \gamma = \beta/3$. Die ω -Limesmenge des Grenzzyklus für diese Systemklasse ist identisch zur Nullstellenmenge der Dämpfung und der Dissipationsfunktion. Im grünen Bereich des Phasenraums findet eine Akkumulation des Phasenraumvolumens statt, während im roten Bereich Volumen dissipiert wird. Auffällig ist, dass in jedem Rayleigh-Van der Pol-System ein Bereich existiert, bei dem Volumen in einem akkumulativen Subsystem dissipiert wird. Weiterhin muss nicht jedes dissipative Subsystem eine positive Dämpfung aufweisen, wie im letzten System 4.21c in den eingeschlossenen Bereichen \mathbf{n} gezeigt. In allen Systemen ist ein Pumpmechanismus zu beobachten, da die Bewegung auf dem Grenzzyklus nicht divergenzfrei ist.

und der *Dissipationsfunktion*

$$g(H) = -\alpha \left(\mu - \frac{2\delta}{\omega_0^2} H \right). \quad (4.70)$$

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich gemäß (3.8) zu

$$\begin{aligned} \dot{i} &= u, \\ \dot{u} &= \alpha \left(\mu - \frac{\delta}{\omega_0^2} u^2 - \delta i^2 \right) \omega_0 u - \omega_0^2 i. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Bei der Hamilton-Funktion handelt es sich in dieser Darstellung nicht um eine *Energiefunktion* [210]. Die Nullstellenmenge

$$\mathcal{C}_{\text{Diss}} = \{ \mathbf{x} \mid g(H) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in M \} \quad (4.72)$$

entspricht demzufolge keinen *Energieniveaus* und ist identisch mit der ω -Limesmenge des Grenzzyklus. Um eine Energiefunktion zu erhalten, müssen die Zustandsvariablen von Strom und Spannung in Ladung und magnetischen Fluss transformiert werden, d.h. $(i, u) \rightarrow (q, \phi)$. Das dynamische Verhalten, wie es in 4.21 dargestellt ist, bleibt jedoch nach einer solchen Transformation erhalten, sodass in den Bereichen $g(H) > 0$ Energie dissipiert und für $g(H) < 0$ akkumuliert wird. Da für die Halbachsen $r_{u,\text{div}} \neq r_{u,d}$ gilt, folgt, dass stets zwei Teilmengen des Phasenraums existieren, für die zwar Energie akkumuliert, aber Phasenraumvolumen dissipiert wird (siehe Abb. 4.21).

Die mittlere Geschwindigkeit eines Phasenraumvolumens ist auf dem Grenzzyklus für den Fall eines kanonisch-dissipativen Systems und für $\omega_0 = 1$ konstant (siehe. Abb. 4.22). D.h., in longitudinaler Richtung findet keine Änderung der Ausbreitungsgeschwindigkeit statt. Allerdings unterliegt das Phasenraumvolu-

4. Liouville Dynamik

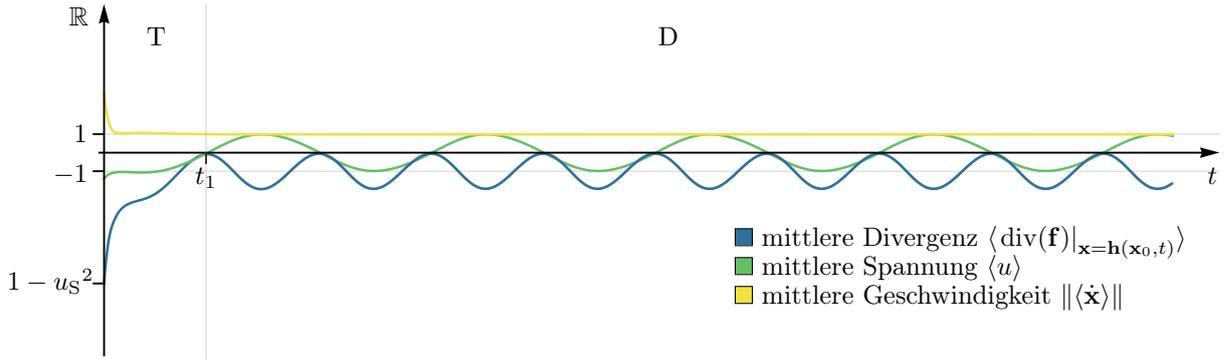


Abb. 4.22.: Die mittlere Divergenz des Rayleigh-Van der Pol Oszillators hat keine Nulldurchgänge. Das Phasenraumvolumen und die mittlere Geschwindigkeit der Phasenraumdicke bleibt auf dem Grenzzyklus erhalten.

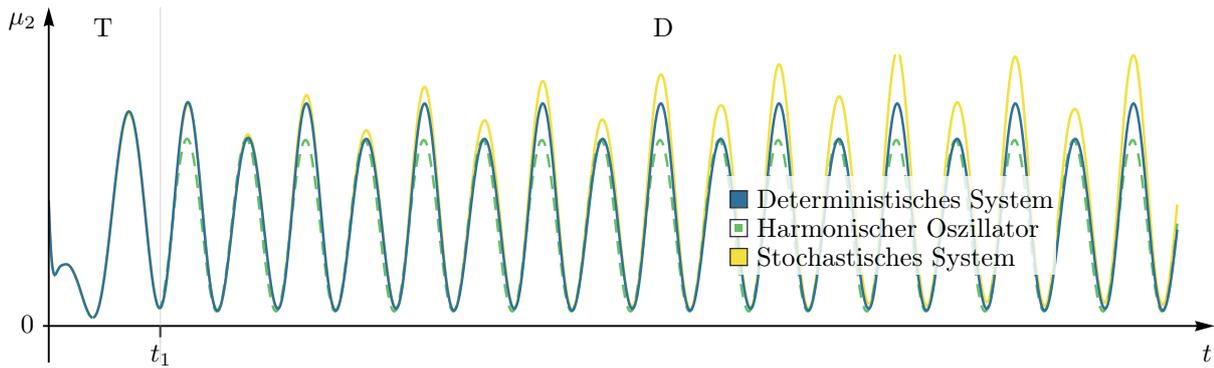
men aufgrund der nicht verschwindenden Divergenz einer Volumenänderung. Diese Volumenänderung ist die Folge der zum Grenzzyklus unmittelbar benachbarten Flächenelemente $d\mathbf{x}$ die unter dem Fluss Φ in den Grenzzyklus eintreten und das bereits auf dem Grenzzyklus befindliche Phasenraumvolumen ändern. Die Definition eines *Attraktors* gemäß Abschnitt 2.3 kann demzufolge konkretisiert werden. Zwar existiert zu dem Grenzzyklus eine Umgebung U von ω für die der Abstand zwischen ω und jeden unter der Einwirkung des Phasenflusses stehenden Zustands $\mathbf{x} \in V \subset U$ gegen null geht, d.h. $\text{dist}(\Phi(\mathbf{x}, t), A) = 0$, aber es ist damit nicht geklärt wie stark anziehend der Attraktor ist. Sei $\Upsilon = \omega \setminus \mathcal{C}_{\text{div}}$ diejenige Mengendifferenz, deren Elemente ω -Limespunkte des Grenzzyklus entsprechen, die eine nicht-verschwindende Divergenz aufweisen und B das *Bassin* des Grenzzyklus, dann ist die Divergenz $\text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{v}}$ der Punkte $\mathbf{v} \in \Upsilon$ ein Maß für die Verdichtung eines Phasenraumvolumens in seiner Umgebung $U(\mathbf{v}) \in B$. Die Trajektorien im Phasenportrait zeigen daher umso stärker auf den Grenzzyklus je größer die Divergenz ist und umgehen die beiden Punkten $(\pm r_{i,\text{div}}, 0)^\top$ des Grenzzyklus die divergenzfrei sind. Das Rayleigh-Van der Pol-System ist folglich auf dem Grenzzyklus kein Hamilton-System. Zwar ist die Dämpfung auf dem Grenzzyklus null und damit eine konservative Bewegung gewährleistet, jedoch ist der Phasenraum $M \cap \omega$ kompressibel, weil $\Upsilon \neq \emptyset$.

Proposition (Konservative Teilmengen (Beispiel)) *Kanonisch-dissipative Systeme mit Grenzzyklen sind im Allgemeinen keine Hamilton-Systeme auf ihren energetischen Grundzuständen, da zwar die Energie, nicht aber das Phasenraumvolumen erhalten ist. Zudem existieren Untermengen des Phasenraums, in dem Energie dissipiert wird, während ein Phasenraumvolumen akkumuliert.*

Die Liouville-Dynamik des Rayleigh-Van der Pol-Systems soll im Folgenden mit den Parametern $\delta = 1$, dem Stellparameter $\alpha = 1$ und der Eigenfrequenz $\omega_0 = 1$ untersucht werden. Die dimensionslose Divergenz des Vektorfeldes ist demzufolge $1 - 3u^2 - i^2$, sodass eine Nullstellenmenge in Form einer Ellipse mit den Halbachsen $r_{i,\text{div}} = 1$ und $r_{u,\text{div}} = 1/\sqrt{3}$ resultiert.

Die Anfangsverteilung ist identisch zur Anfangsverteilung des harmonischen Oszillators mit Dämpfung gemäß (4.28). Als transienter Weg ist im Folgenden der Weg gemeint, den die Phasenraumdicke in der Zeit $t = t_1$ zurücklegt für die zum ersten Mal die mittlere Divergenz null ist, d.h. für $\langle \text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0,t)} \rangle = 0$. Der Zeitbereich $0 \leq t < t_1$ zeigt demzufolge den Einschwingvorgang des Oszillators. Während des Vorgangs wird die anfänglich symmetrische Anfangsverteilung stark gestaucht, sodass bereits hier ein nahezu 2-dimensionales Liouville-Volumen zu beobachten ist (siehe Abb. 4.24a). Nach dem Einschwingen, d.h. für $t \gg t_1$, verläuft die Phasenraumdicke in guter Näherung (gemäß dem Schwellenwert $\mathfrak{s} = 1\%$) auf dem Grenzzyklus.

Zwischen den Zeiten $t = t_D$ und $t = t_A$ ist ein periodischer *Pumpmechanismus* der Phasenraumdicke zu beobachten, der gemäß (3.56) über den Verlauf der mittleren Divergenz darstellbar ist. Im dissipativen Unterraum des Phasenraums, d.h. außerhalb der Ellipse, nimmt das Phasenraumvolumen ab, sodass die Phasenraumdicke gestaucht wird, während im akkumulativen Unterraum, d.h. innerhalb der Ellipse, das Phasenraumvolumen zunimmt und damit die Phasenraumdicke gestreckt wird (siehe Abb. 4.22 und Abb. 4.24b).

Abb. 4.23.: Zweites zentrales Moment (Varianz) μ_2 des Rayleigh-Van der Pol-Systems.

Proposition (Sinusoidaler Grenzzyklus) *Die Bewegung des Rayleigh-Van der Pol-Systems auf dem Grenzzyklus ist für $\beta = 3\gamma$ von der Bewegung eines harmonischen Oszillators nicht zu unterscheiden. Dennoch findet aufgrund der zustandsabhängigen Divergenz eine Volumenänderung statt, die nur dadurch erklärt werden kann, dass infinitesimale Volumenelemente aus der Umgebung des Grenzzyklus in diesen einlaufen und auf dem Grenzzyklus die Renormierung des Volumens im Sinne der Volumenerhaltung sich als Pumpmechanismus manifestiert. Die Divergenz ist folglich ein Indikator für die Menge von einlaufenden Volumenelementen aus den Einzugsgebieten des Grenzzyklus, da die geradlinige Bewegung auf dem Grenzzyklus gleichmäßig beschleunigt ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass eine Formulierung einer Anfangsverteilung auf dem Grenzzyklus, ohne zumindest einem stetigen Übergang an dessen Einlaufstellen, im Sinne der Liouville-Dynamik nicht sinnvoll ist.*

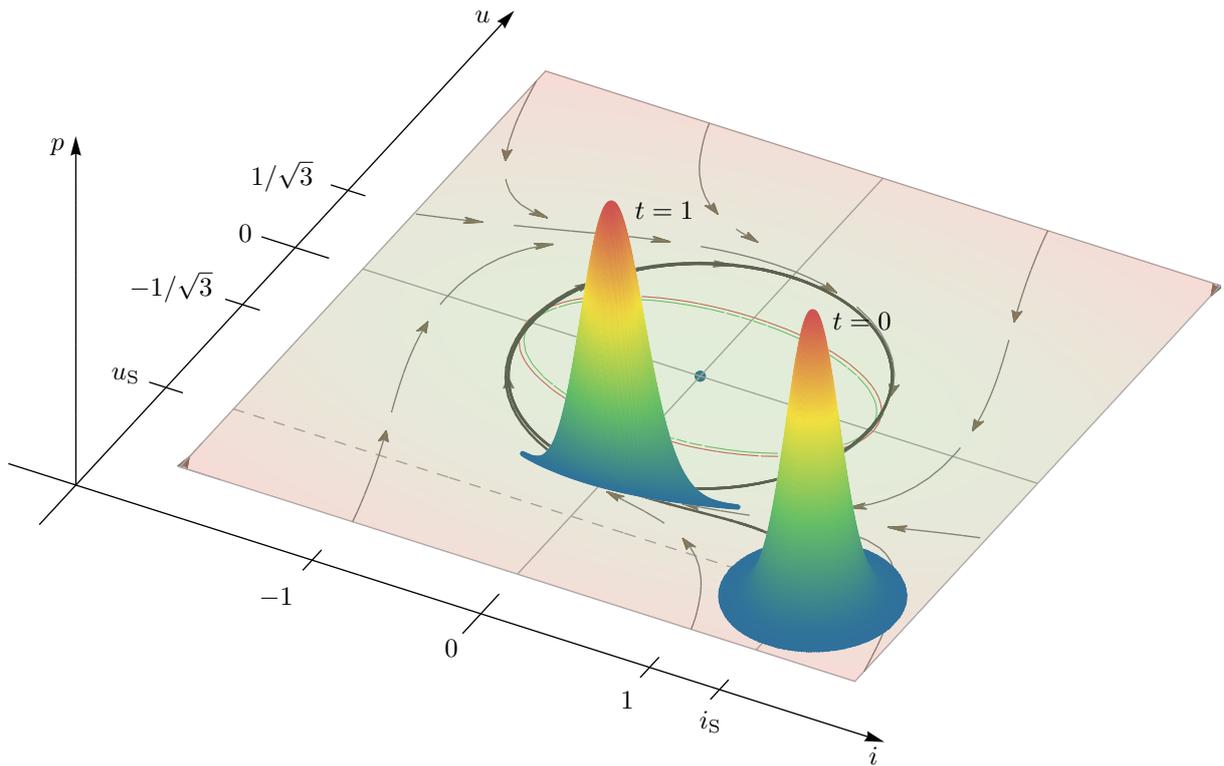
Eine Rauschankopplung durch Strom- und Spannungsquellen führt auf den *Langevin-Ansatz*

$$\begin{aligned} \dot{I} &= U + D_{11}\xi_1(t), \\ \dot{U} &= \alpha \left(\mu - \frac{\delta}{\omega_0^2} U^2 - \delta I^2 \right) \omega_0 U - \omega_0^2 I + D_{22}\xi_2(t) \end{aligned} \quad (4.73)$$

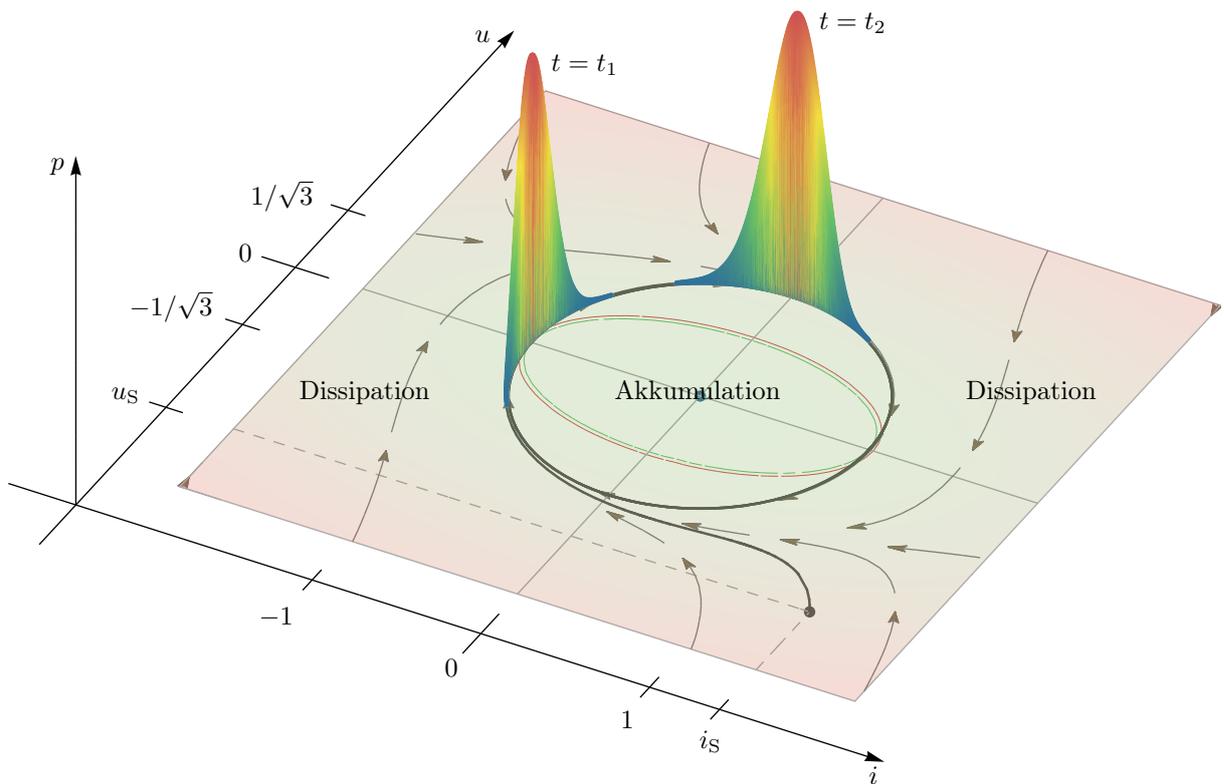
mit der 2×2 -Diffusionsmatrix \mathbf{D} , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ als weißes gaußsches Rauschen und $\mathbf{X} = (I, U)^\top$ als nunmehr stochastische Zustandsvariablen. Das Rayleigh-Van der Pol-System zeigt bei den stochastischen Momenten ein äquivalentes Verhalten wie das Van der Pol-System (siehe Abb. 4.23).

Weiterführende Literatur

- BENGURIA & DEPASSIER „Variational principle for limit cycles of the Rayleigh–van der Pol equation“ [246]
- NATHAN „The Rayleigh-van der Pol harmonic oscillator“ [218]
- REIT, MATHIS & STOOP „Analysis of Cascaded Canonical Dissipative Systems and LTI Filter Sections“ [265]



(a) Einschwingvorgang

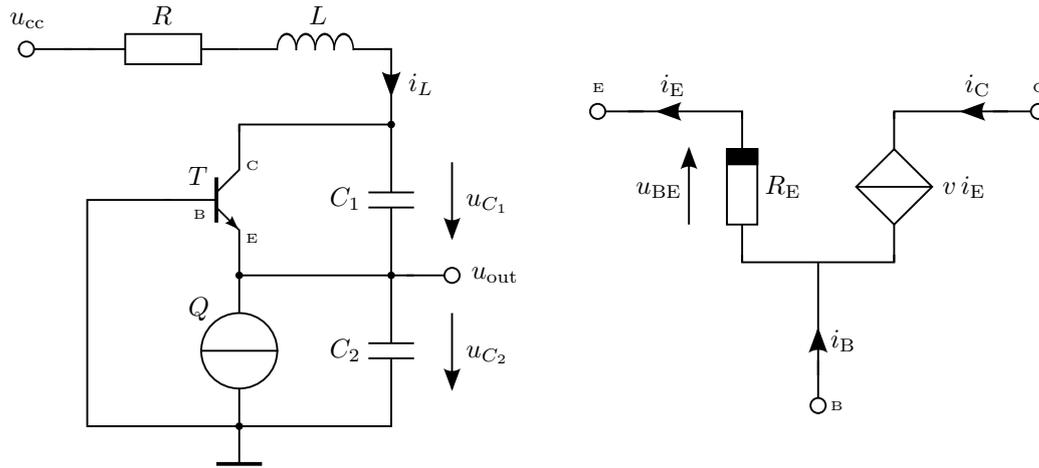


(b) Oszillation mit Pumpmechanismus

Abb. 4.24.: Rayleigh-Van der Pol-System mit $\mu = 1$, $\delta = 1$, $\alpha = 1$, $\omega_0 = 1$, den Startwerten $u_S = \sqrt{2}$, $i_S = -\sqrt{2}$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{u_0} = 0.2$, $\sigma_{i_0} = 0.2$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Skaleneinteilung der p -Achse (Applikate) ist für jede Phasenraumdicke neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

4.2.5. Colpitts-Oszillator

Der Colpitts-Oszillator ist eine von COLPITTS zum Patent angemeldete Schaltung und wird heute als Synonym für Oszillatoren mit einer kapazitiven Dreipunktschaltung verwendet. D.h., die Eigenfrequenz wird sowohl durch ein RC -Glied, als auch durch ein LC -Glied bestimmt, sodass es sich im Sinne dynamischer Systeme um ein 3-dimensionales System handelt. Das Pendant mit induktiver Dreipunktschaltung ist der *Hartley-Oszillator*. Erweiterungen der noch ursprünglich mit Elektronenröhren entworfenen Colpitts-Schaltung stellen die teils höherdimensionalen *Clapp*-, *Seiler*- und *Vackář*-Oszillatoren dar.



(a) Colpitts-Oszillator nach MAGGIO [247].

(b) Transistorersatzschaltbild.

Abb. 4.25.: Schaltungsbeispiel des Colpitts-Oszillators.

Ein Schaltungsbeispiel des Colpitts-Oszillators ist in Abb. 4.25a mit einem NPN-Transistor T , dem dissipativen Element R und der kapazitiven Dreipunktschaltung durch L sowie C_1 und C_2 gegeben. Die ideale Gleichstromquelle Q sorgt für einen konstanten Ruhestrom I_0 des Emitters. Der Strom i_L sowie die Spannungen u_{C_1} und u_{C_2} sind die entsprechenden Zustandsvariablen im Phasenraum. Das Transistormodell gemäß Abb. 4.25b ist ein idealisiertes Modell ohne parasitäre Kapazitäten oder Induktivitäten, dass von einem Verstärkungsfaktor $v = 1$ der linear stromgesteuerten Stromquelle, einem verschwindenden Basis-Strom $i_B = 0$ und von einem nichtlinearen über u_{BE} spannungsgesteuerten Widerstand R_E ausgeht, sodass

$$i_E = I_S e^{\frac{u_{BE}}{u_T}} \quad \text{für } u_{BE} \gg u_T \quad (4.74)$$

mit I_S als Sättigungsstrom und $u_T = k_B T / e$ als Temperaturspannung (bei Raumtemperatur $T = 300$ K gilt $u_T \approx 26$ mV) [247, 252]. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu diesen idealisierten Bedingungen zu

$$\begin{aligned} C_1 \dot{u}_{C_1} &= -I_S e^{\frac{u_{C_2}}{u_T}} + i_L, \\ C_2 \dot{u}_{C_2} &= i_L - I_0, \\ L \dot{i}_L &= -u_{C_1} - u_{C_2} - R i_L + u_{cc}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Für die Analyse dieser Bewegungsgleichung ist es zweckmäßig den Gleichgewichtspunkt des sich aus (4.75) ergebenden Vektorfeldes auf den Koordinatenursprung zu legen und die Zeit gemäß der Eigenfrequenz

4. Liouville Dynamik

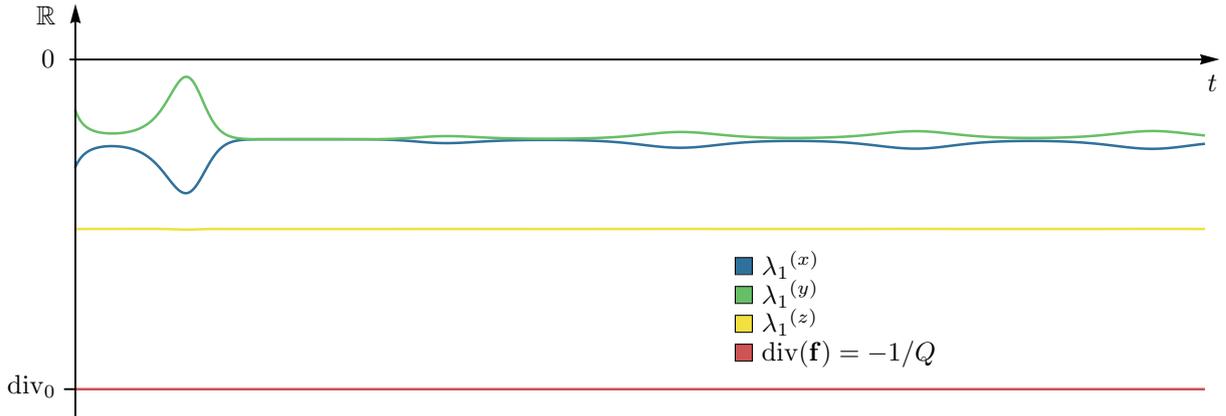


Abb. 4.26.: Ljapunov-Spektrum des Colpitts-Systems. Dargestellt sind die 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten des ursprünglichen Systems (4.76). Das periodische Verhalten der ersten beiden Ljapunov-Exponenten ist der asymmetrischen Verteilungsfunktion und dem starren Bezugssystem geschuldet. Ein Ljapunov-Spektrum welches der Rotation um den Koordinatenursprung folgt, würde demzufolge konstante Ljapunov-Exponenten zeigen.

sowie Spannungen gemäß der Temperaturspannung und Ströme gemäß des Ruhestroms zu normalisieren. Die Bewegungsgleichung kann somit umgeschrieben werden in

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\mu}{Q(1-k)}(1 - e^{-y} + z), \\ \dot{y} &= \frac{\mu}{Qk}z, \\ \dot{z} &= -\frac{Qk(1-k)}{\mu}(x + y) - \frac{1}{Q}z\end{aligned}\quad (4.76)$$

mit den dimensionslosen Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ im Phasenraum $M = \mathbb{R}^3$, dem dimensionslosen Bifurkationsparameter μ , dem Skalierungsfaktor $k = C_2/(C_1 + C_2)$, der Güte $Q = \omega_0 L/R$ und der Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{LC_1C_2}}. \quad (4.77)$$

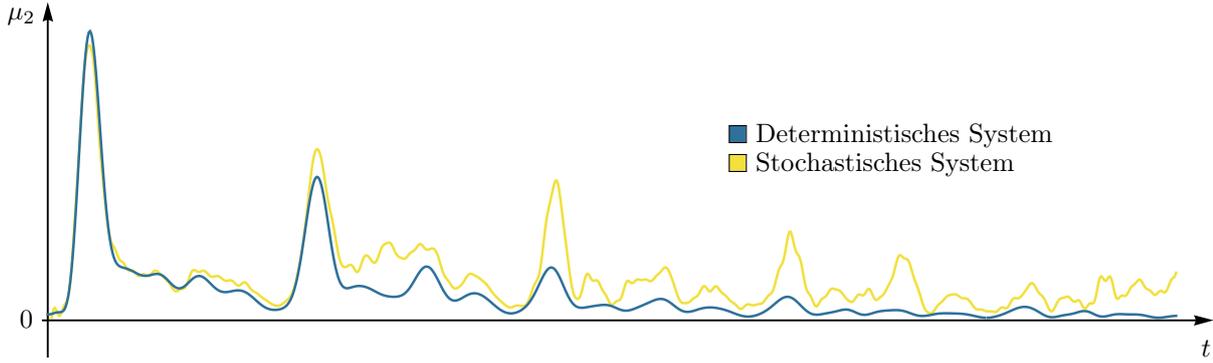
Der Hopf-Punkt $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mu})$ setzt sich aus dem Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ und dem Bifurkationspunkt $\tilde{\mu} = 1$ zusammen, wobei $\mu = \tilde{\mu} + \Delta\mu$ gilt mit $\Delta\mu \geq 0$ als Bifurkationsdifferenz. Die Divergenz des C^ω -Vektorfeldes $\mathbf{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ergibt

$$\operatorname{div}(\mathbf{f}) = -\frac{1}{Q} \quad (4.78)$$

und ist folglich konstant negativ, sodass kein Pumpmechanismus erwartet wird.

Proposition (Parasitäre Effekte) *Als ein idealisierter Oszillator zeigt der Colpitts-Oszillator keinen direkten Pumpmechanismus. Dies ändert sich, sobald parasitäre Effekte in die Bewegungsgleichung aufgenommen werden. Die parasitären Kapazitäten und Induktivitäten würden dann zu Lade- und Enladevorgängen führen, die äquivalent mit der Akkumulation und Dissipation von Energie sind. Die Divergenz dieses Oszillators bestimmt zudem die Dauer des Einschwingvorgangs.*

Sei $\mathbf{f}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) = \mathbf{j}_0 \mathbf{f}(\mathbf{x})$ das lineare, Jet-Transformierte Vektorfeld. Unter der Voraussetzung eines stabilen Systems, d.h. für $\mu > 0$, folgen die Eigenwerte der entsprechenden Jacobi-Matrix zu $(\lambda_s, \lambda_+, \lambda_-)$ wobei $\lambda_s < 0$ und λ_\pm ein Paar komplex konjugierter Eigenwerte darstellt. Aus dem resultierenden Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}_{\text{lin}}(\mathbf{x})$ folgen wiederum die Eigenräume \mathcal{E}_s bezüglich des Eigenvektors \mathbf{e}_s zum Eigenwert λ_s und \mathcal{E}_c bezüglich der Eigenvektoren \mathbf{e} und $\bar{\mathbf{e}}$ zu den Eigenwerten λ_\pm gemäß Abschnitt A.

Abb. 4.27.: Zweites zentrales Moment (Varianz) μ_2 des Colpitts-Systems.

Tangential zu diesen Eigenräumen existieren lokal invariante C^ω -Mannigfaltigkeiten \mathcal{W}_s und \mathcal{W}_c [252]. Damit lässt sich der Grenzyklus des Colpitts-Oszillators einer von der Bifurkationsdifferenz abhängigen *Integralmannigfaltigkeit* $\mathcal{I}_{\Delta\mu}$ zuordnen, welche für $\Delta\mu = 0$ identisch zur *Zentrumsmannigfaltigkeit* \mathcal{W}_c ist. Einhergehend mit der Berechnung der invarianten Mannigfaltigkeiten ist ein Koordinatenwechsel $\mathbf{x} = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}$ mit $\hat{\mathbf{x}} = (x_s, y_c, z_c)^\top$ als neue Zustandsvariablen und der Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2$ gemäß (A.2). Da $\text{div}(\mathbf{f}) = \text{const}$ folgt mit diesem Koordinatenwechsel auch $\text{div}(\hat{\mathbf{f}}) = \text{const}$ mit $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}})$ und \mathbf{J} als *Jordan-Matrix* sowie $\text{j}_0^\infty \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$.

Ist $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}_0, t) = (h_{x_s}(\hat{\mathbf{x}}_0, t), h_{y_c}(\hat{\mathbf{x}}_0, t), h_{z_c}(\hat{\mathbf{x}}_0, t))^\top$ eine Lösung der transformierten Differentialgleichung (A.6) zu gegebenen Anfangswerten $\hat{\mathbf{x}}_0 = (x_{s,0}, y_{c,0}, z_{c,0})^\top \in N \subseteq M$, dann ist

$$p(\hat{\mathbf{x}}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\hat{\mathbf{x}}, t) e^{\frac{t}{Q}} \quad (4.79)$$

die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung (3.47) mit $p_0[\mathbf{h}^{-1}]$ als Anfangsverteilung, welche gemäß (4.28) einer 3-dimensionalen Normalverteilung entsprechen soll, sodass folgt

$$p_0[h_{x_s}^{-1}, h_{y_c}^{-1}, h_{z_c}^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{x_s,0} \sigma_{y_c,0} \sigma_{z_c,0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(h_{x_s}^{-1} - x_{s,S})^2}{\sigma_{x_s,0}^2} + \frac{(h_{y_c}^{-1} - y_{c,S})^2}{\sigma_{y_c,0}^2} + \frac{(h_{z_c}^{-1} - z_{c,S})^2}{\sigma_{z_c,0}^2} \right)} \quad (4.80)$$

mit $\sigma_{x_s,0}$, $\sigma_{y_c,0}$ und $\sigma_{z_c,0}$ als unkorrelierte Standardabweichungen zur Startzeit $t_0 = 0$ sowie $x_{s,S}$, $y_{c,S}$ und $z_{c,S}$ als Startwerte.

Die Liouville-Dynamik des Colpitts-Systems soll im Folgenden mit dem Skalierungsfaktor $k = 1/2$, der Güte $Q = 2$ und der Bifurkationsdifferenz $\Delta\mu = 1/10$ untersucht werden.

Startet die Anfangsverteilung fernab vom Gleichgewicht, so wird diese auf ihrem transienten Weg in den Grenzyklus aufgrund der konstanten Divergenz stark gestaucht. Die Anfangsverteilung bewegt sich zuerst in Richtung der 2-dimensionalen Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{I}_{\Delta\mu}$ und wird dementsprechend zu einer Scheibe verformt.

Proposition (Integralmannigfaltigkeiten und Attraktoren) *Die Integralmannigfaltigkeit des Grenzyklus wirkt lokal als ein Attraktor der Wahrscheinlichkeitsdichte.*

Demzufolge hat eine konstante Divergenz nicht zwangsläufig eine konstante Stauchung in alle Raumrichtungen zur Folge. Das *Ljapunov-Spektrum* der 1-dimensionalen Ljapunov-Exponenten jeder Raumrichtung gibt in diesem Falle Aufschluss über die Stauchung (siehe Abb. 4.26). Im Langzeitverhalten, d.h. für $t \rightarrow \infty$ geht der Volumenerhaltungsterm in (4.79) gegen unendlich. Da aber das Liouville-Volumen im Liouville-Raum erhalten sein muss und die Phasenraumdicke stets der Stauchung unterliegt, folgt, dass sich die Phasenraumdicke auf einen singulären Punkt zusammenziehen wird und anschließend über die δ -Distribution gemäß Abschnitt 3.9.4 beschrieben werden kann.

4. Liouville Dynamik

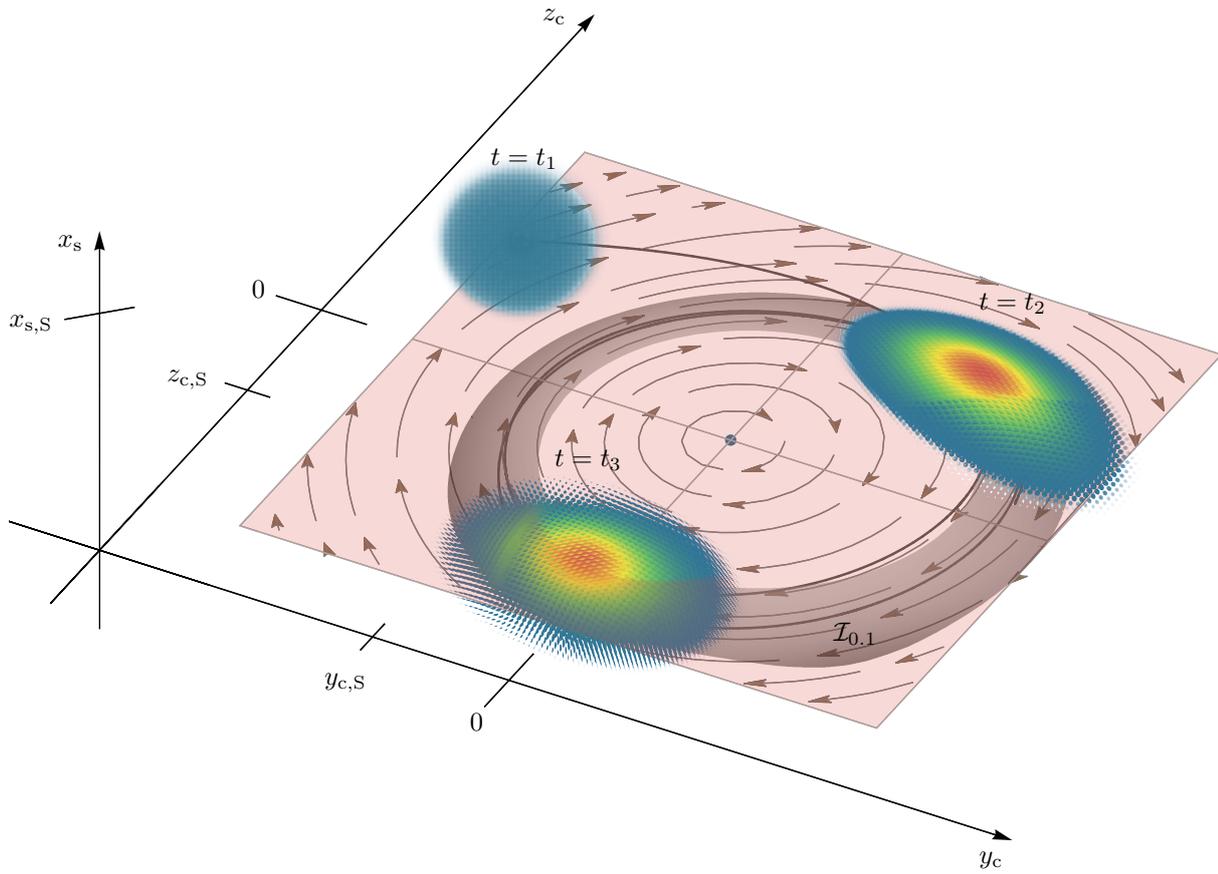
Eine Rauschankopplung durch Strom- und Spannungsquellen führt auf den *Langevin-Ansatz*

$$\begin{aligned} \dot{I} &= U + D_{11}\xi_1(t), \\ \dot{U} &= \alpha \left(\mu - \frac{\beta}{3\omega_0^2} U^2 \right) \omega_0 U - \omega_0^2 I + D_{22}\xi_2(t) \end{aligned} \quad (4.81)$$

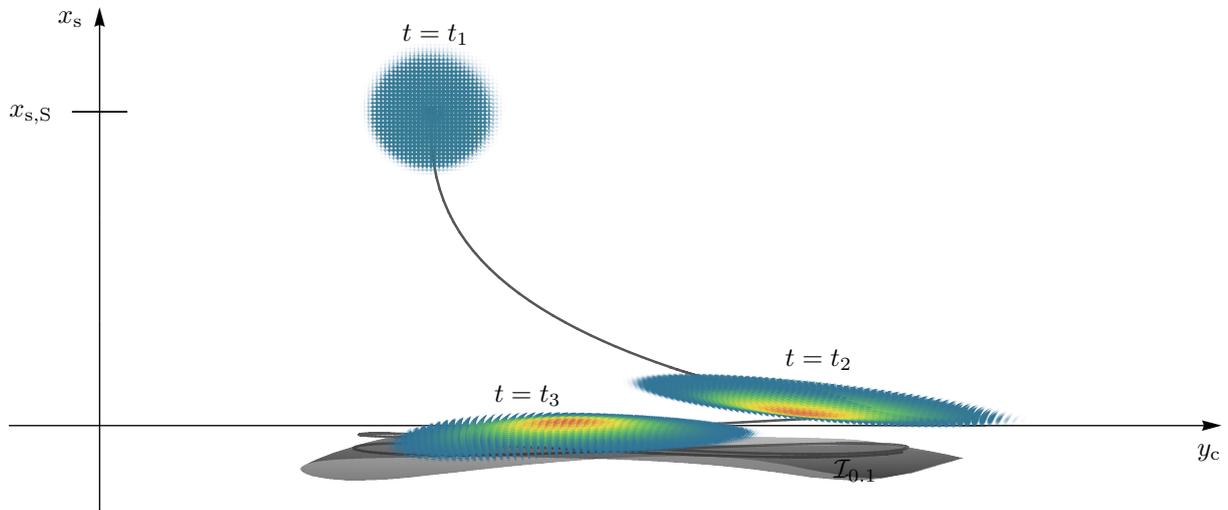
mit der 2×2 -Diffusionsmatrix \mathbf{D} , $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$ als weißes gaußsches Rauschen und $\mathbf{X} = (I, U)^\top$ als nunmehr stochastische Zustandsvariablen. Die Varianz des Colpitts-Systems geht im deterministischen Fall gegen null, sodass im stochastischen Fall ausschließlich ein extrinsischer Diffusionsprozess zu beobachten ist (siehe Abb. 4.27).

Weiterführende Literatur

- KENNEDY „On the relationship between the chaotic Colpitts oscillator and Chua’s oscillator“ [238]
- KRIEGSMANN „Bifurcation in Classical Bipolar Transistor Oscillator Circuits“ [158]



(a) Einschwingvorgang



(b) Einschwingvorgang (Seitenansicht)

Abb. 4.28.: Colpitts-System mit $k = 1/2$, $Q = 2$, $\Delta\mu = 1/10$, den Startwerten $x_{s,S} = 1$, $y_{c,S} = -1/2$, $z_{c,S} = -1/2$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{x_{s,0}} = \sigma_{y_{c,0}} = \sigma_{z_{c,0}} = 0.1$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Farbskalierung der Wahrscheinlichkeitsdichte p ist für jede Phasenraumdichte neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

4.2.6. Lorenz-Oszillator

Das Lorenz-System wurde 1963 vom Meteorologen LORENZ basierend auf den Arbeiten von SALZMAN modelliert [140, 141] und stellt ursprünglich einen idealisierten Ansatz zur Vorhersage von atmosphärischen Prozessen der Erde dar. Die Bewegungsgleichungen des Lorenz-Systems lauten

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= x(r - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}\tag{4.82}$$

mit σ als *Prandtl-Nummer*, r als *Rayleigh-Nummer* und b als einen geometrischen Parameter sowie den Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$, wobei x ursprünglich einer Konvektionsintensität, y der Temperaturdifferenz zwischen ab- und aufsteigender Strömung und z dem atmosphärischen Temperaturgradienten entspricht. Das Lorenz-System weist für bestimmte Parameterwerte *deterministisches Chaos* auf.

Dieses System kann mit Hilfe von drei Invarianten $H_1, H_2, D: M \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}H_1(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(y^2 + (z - r)^2), & (\text{Zylinder}) \\ H_2(\mathbf{x}) &= \sigma z - \frac{1}{2}x^2, & (\text{parabolischer Zylinder}) \\ D(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + bz^2) & (\text{Ellipsoid})\end{aligned}\tag{4.83}$$

umgeschrieben werden in

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{grad}(H_1(\mathbf{x})) \times \text{grad}(H_2(\mathbf{x})) - \text{grad}(D(\mathbf{x})).\tag{4.84}$$

Die rechte Seite von (4.84) würde der Nambu-Darstellung (3.14) entsprechen, falls $\text{grad} D(\mathbf{x}) = 0$ wäre. Die Divergenz des Lorenz-Systems mit $\text{div}(\mathbf{f}) = -2 - b$ ist zustandsabhängig und für $b \in \mathbb{R}^+$ negativ, sodass folgt: (i) das Lorenz-System ist für $b < 2$ dissipativ und (ii) der Gradient der Invarianten D entspricht einer *Dissipationsfunktion*, allerdings nicht im Sinne der *kanonisch-dissipativen* Funktion aus Abschnitt 3.1.3. Eine kanonisch-dissipative Erweiterung des Lorenz-Nambu-Systems ist gegeben mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \text{grad}(H_1(\mathbf{x})) \times \text{grad}(H_2(\mathbf{x})) - \alpha(\text{grad}(H_1(\mathbf{x}))(H_1(\mathbf{x}) - E_1) + \text{grad}(H_2(\mathbf{x}))(H_2(\mathbf{x}) - E_2)).\tag{4.85}$$

E_1 und E_2 entspricht den beiden *Grundzuständen* des Systems, genauer einem bestimmten Radius für H_1 und einer Stauchung für H_2 [133]. Werden beide Grundzustände des Systems zeitgleich erreicht, ist die Dämpfung des Systems aufgehoben. Der kanonisch-dissipative Term lässt sich wiederum als Gradient einer Invarianten

$$\tilde{D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8}((x^2 - 2\sigma z)(4E_2 + x^2 - 2\sigma z) - (z(z - 2r) + y^2)(4E_1 - 2r^2 + 2rz - y^2 - z^2))\tag{4.86}$$

darstellen und entspricht einer algebraischen Fläche vierter Ordnung (Quartik) die für wohlwollende Parameter einem verformten Ellipsoid ähnlich sieht.

Proposition (Bewegung eines Nambu-Systems) *Die Bewegung eines Nambu-Systems findet auf den Schnittmengen der Invarianten statt. Die Invarianten¹¹ ändern ihre geometrische Gestalt (indirekt) in Abhängigkeit der Dissipationsfunktion \tilde{D} , sodass sich die Schnittmengen ergeben zu*

$$\bigcap_{i \in [0, k]} H_i(\mathbf{x}) - \tilde{c}_i(t)\tag{4.87}$$

mit $\tilde{c}(t) = (H_i \circ \mathbf{h})(t)$ und k als Anzahl der Invarianten.

¹¹Der Begriff *Invariante* ist für kanonisch-dissipative Nambu-Systeme widersprüchlich, da diese nicht länger invariant sind. Aus Gründen der Einfachheit, soll aber weiterhin von Invarianten gesprochen werden.

Die ausgeschriebenen Bewegungsgleichungen des kanonisch-dissipativen Nambu-Systems (4.85) lauten

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\alpha \left(-\frac{x^2}{2} + \sigma z - E_2 \right) + \sigma y, \\ \dot{y} &= -y\alpha \left(\frac{1}{2} ((z-r)^2 + y^2) - E_1 \right) + rx - xz, \\ \dot{z} &= -\alpha \left((z-r) \left(\frac{1}{2} ((z-r)^2 + y^2) - E_1 \right) + \sigma \left(-\frac{x^2}{2} + \sigma z - E_2 \right) \right) + xy \end{aligned} \quad (4.88)$$

mit den dimensionslosen Zustandsvariablen $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ im Phasenraum $M = \mathbb{R}^3$. Das daraus resultierende dynamische System geht demzufolge in ein Hamilton-System über, falls der *Stellparameter* α verschwindet.

Die zustandsabhängige Divergenz des Vektorfeldes $\tilde{\mathbf{f}}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ folgt gemäß

$$\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{f}}) = \frac{1}{2}\alpha (4E_1 - 2E_2 - 4(r-z)^2 - 2\sigma^2 - 3x^2 - 4y^2 + 2\sigma z) \quad (4.89)$$

und entspricht geometrisch einem um $r + \sigma/4$ in z -Richtung verschobenen Ellipsoid. Unter der Bedingung $\operatorname{div}(\mathbf{f}) = 0$ folgt eine Ellipse mit den Halbachsen

$$r_x = \sqrt{\frac{2a}{3}} \quad \text{und} \quad r_y = r_z = \sqrt{\frac{a}{2}} \quad (4.90)$$

mit $a = 2E_1 - E_2 + r\sigma - 7/8\sigma^2$.

Es existieren für $\sigma \neq 0$ drei instabile Gleichgewichtspunkte. Der mittlere Gleichgewichtspunkt liegt bei $\tilde{\mathbf{x}}_0 = (0, 0, \tilde{z})^\top$. \tilde{z} ergibt sich aus der reellen Lösung des Nullstellenproblems¹²

$$0 = E_1(r - \tilde{z}) - \frac{1}{2}(r - \tilde{z})^3 - E_2\sigma + \tilde{z}\sigma^2. \quad (4.91)$$

Die beiden anderen Gleichgewichtspunkte ergeben sich aus dem Nullstellenproblem $H_2(x, 0, r) = E_2$ zu $\tilde{\mathbf{x}}_\pm = \pm\sqrt{2r\sigma - 2E_2}$. Die Gerade $x = y = 0$, unter Ausschluss des instabilen Gleichgewichtspunktes $\tilde{\mathbf{x}}_0$, ist ein stabiler *Eigenraum*, d.h., jede Integralkurve mit Startwert auf diesem stabilen Eigenraum läuft in den Gleichgewichtspunkt. Das System besitzt für $\sigma \neq 0$ zwei stabile Grenzzyklen, welche den beiden Schnittmengen zwischen H_1 und H_2 für $t \rightarrow \infty$ entsprechen.

Ist $\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, t) = (h_x(\mathbf{x}_0, t), h_y(\mathbf{x}_0, t), h_z(\mathbf{x}_0, t))^\top$ eine Lösung der Differentialgleichung (4.88) zu gegebenen Anfangswerten $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^\top \in N \subseteq M$, dann ist

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0[\mathbf{h}^{-1}](\mathbf{x}, t) e^{-\frac{1}{2}\alpha \int (4E_1 - 2E_2 - 4(r-z)^2 - 2\sigma^2 - 3x^2 - 4y^2 + 2\sigma z) dt} \quad (4.92)$$

die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung (3.47) mit $p_0[\mathbf{h}^{-1}]$ als Anfangsverteilung, welche einer 3-dimensionalen Normalverteilung entsprechen soll, sodass folgt

$$p_0[h_x^{-1}, h_y^{-1}, h_z^{-1}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3 \sigma_{x_0} \sigma_{y_0} \sigma_{z_0}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{(h_x^{-1} - x_S)^2}{\sigma_{x_0}^2} + \frac{(h_y^{-1} - y_S)^2}{\sigma_{y_0}^2} + \frac{(h_z^{-1} - z_S)^2}{\sigma_{z_0}^2} \right)} \quad (4.93)$$

mit σ_{x_0} , σ_{y_0} und σ_{z_0} als unkorrelierte Standardabweichungen zur Startzeit $t_0 = 0$ sowie x_S , y_S und z_S als Startwerte.

Das System ist bezüglich seines Phasenraumvolumens dissipativ, falls die Bewegung außerhalb des Ellipsoids gemäß (4.90) verläuft und akkumulativ, falls die Bewegung innerhalb des Ellipsoids stattfindet. Allerdings führen alle Integralkurven, deren Startwerte innerhalb des Ellipsoids beginnen und nicht auf dem stabilen Eigenraum oder einem instabilen Gleichgewichtspunkt liegen, in einem der beiden stabilen Grenzzyklen. Das System ist folglich im gesamten Phasenraum stabil, obwohl die Divergenz nicht in jeder Teilmenge des Phasenraums positiv ist.

¹²Die Lösung ist analytisch berechenbar, jedoch nicht sinnvoll darstellbar.

4. Liouville Dynamik

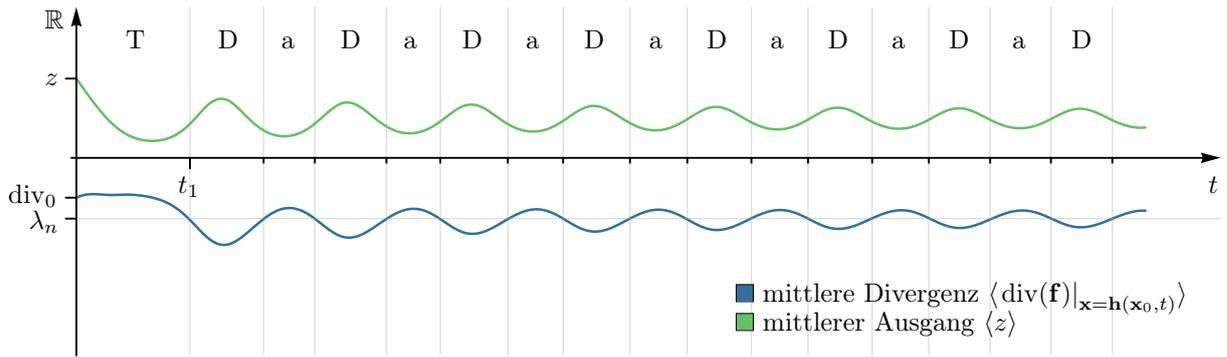


Abb. 4.29.: Die mittlere Divergenz des Lorenz-Oszillators hat keine periodische Nullstellen. Darüber hinaus ist die Divergenz für Anfangswerte außerhalb der Ellipse gemäß (4.90) stets negativ. Dennoch können zum Nullstellenproblem (4.94) Unterräume definiert werden, in denen Streck- und Stauchvorgänge des Phasenraumvolumens stattfinden. Der transiente Weg sei daher durch das Zeitintervall gegeben für das die mittlere Divergenz zum ersten Mal den Wert des n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten λ_n erreicht. Das Phasenraumvolumen folgt der mittleren Divergenzfunktion, sodass ein Streckvorgang im dissipativ-akkumulativen Unterraum (a) und ein Stauchvorgang im dissipativen Unterraum (D) stattfindet. Es gilt $\text{div}_0 = \langle \text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \rangle$.

Proposition (Divergenz als Stabilitätsindikator (Gegenbeispiel)) *Das Vorzeichen der Divergenz ist lokal kein hinreichendes Kriterium für die globale Stabilität eines dynamischen Systems. Im Falle des kanonisch-dissipativen Lorenz-Systems kann auch nicht von einer lokalen Instabilität innerhalb des Ellipsoids gesprochen werden, da dies kein gültiges Subsystem im Sinne von Abschnitt 3.8.1 darstellt.*

Die Liouville-Dynamik des Lorenz-Systems soll im Folgenden mit der Prandtl-Nummer $\sigma = 10$, der Rayleigh-Nummer $r = 10$, den Grundzuständen $E_1 = E_2 = 1$ und dem Stellparameter $\alpha = 0.05$ untersucht werden. Die Isolinien der dimensionslosen Divergenz des Vektorfeldes sind demzufolge Ellipsen um den Punkt $(0, 0, 12.5)$. Für $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$ folgen die Halbachsen zu $r_x = 3$ und $r_y = r_z = 3\sqrt{3}/2$.

Als transienter Weg ist im Folgenden der Weg gemeint, den die Phasenraumdicke in der Zeit $t = t_1$ zurücklegt für die zum ersten Mal die mittlere Divergenz den n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten erreicht, d.h. für

$$\langle \text{div}(\mathbf{f})|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{x}_0,t)} \rangle = \lambda_n. \quad (4.94)$$

Das Zeitintervall $0 \leq t < t_1$ zeigt demzufolge den Einschwingvorgang des Oszillators. Während des Vorgangs wird die anfänglich symmetrische Anfangsverteilung stark gestaucht, sodass bereits hier ein nahezu 1-dimensionales Phasenraumvolumen zu beobachten ist (siehe Abb. 4.30).

Proposition (Zeitintervall des Einschwingvorgangs (Beispiel)) *Das Intervall aus der Anfangszeit t_0 und der ersten Lösung des Nullstellenproblems (4.94) erweist sich als sinnvolles Zeitintervall für den Einschwingvorgang eines Oszillators, da die Lösungen des Nullstellenproblems ein Abzählen der erfolgten Umläufe um den Grenzzyklus ermöglichen.*

Da die Divergenz stets negativ ist, findet eine fortwährende Stauchung des Phasenraumvolumens statt. Dennoch ist in Abb. 4.29 ein periodischer *Pumpmechanismus* der Phasenraumdicke zu beobachten, der gemäß (3.56) über den Verlauf der mittleren Divergenz darstellbar ist. Aufgrund der zustandsabhängigen Divergenz weist die Intensität des Stauchvorgangs einen periodischen Verlauf auf. Mit dem Nullstellenproblem (4.94) können Unterräume definiert werden, in denen die Streck- und Stauchvorgänge des Phasenraumvolumens stattfinden. Der dissipative Raum, in dem der Stauchvorgang stagniert, d.h. mit einem akkumulativen Prozess überlagert, heißt *dissipativ-akkumulativer* Unterraum.

Proposition (Dissipativ-akkumulativer Unterraum) *Akkumulative Prozesse können von übergeordneten dissipativen Prozessen überdeckt werden. Dies ist der Fall, wenn die Bewegung eines Systems mit zustandsabhängiger Divergenz außerhalb der Nullstellen $\text{div}(\mathbf{f}) = 0$ stattfindet. Das System ist für diese*

Bewegung zwar lokal und global dissipativ, dennoch weist die Intensität des Stauchvorgangs einen periodischen Verlauf auf, dem ein akkumulativer Prozess und eine entsprechender Unterraum des Phasenraums zugeordnet werden kann. Dieser Unterraum heißt dissipativ-akkumulativer Unterraum.

Sowohl H_1 als auch H_2 entsprechen für $t \rightarrow \infty$ Integralmannigfaltigkeiten beider Grenzzyklen. Ein Nambu-System zeigt daher in inhärenter Weise die Ursache von anziehenden Integralmannigfaltigkeiten.

Proposition (Integralmannigfaltigkeiten und Invarianten) *Bezüglich kanonisch-dissipativer Nambu-Systeme entsprechen die Invarianten H_i den Integralmannigfaltigkeiten der resultierenden Grenzzyklen unter der Bedingung*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H_i - \tilde{c}_i(t) = 0 \quad (4.95)$$

mit $\tilde{c}(t) = (H_i \circ \mathbf{h})(t)$ (siehe Abschnitt 3.1.3). Da die Bewegung dieser Systeme auf den Schnittmengen der Invarianten verläuft, wirken die Invarianten für spätere Zeiten und insbesondere die resultierenden Integralmannigfaltigkeiten anziehend bzw. unter Zeitumkehr abstoßend. Diese Überlegung kann auf das ursprüngliche Lorenz-System mit der Dissipationsfunktion D übertragen werden.

Proposition (Chaotisches Verhalten) *Das chaotische Verhalten des ursprünglichen Lorenz-Systems ist die Folge einer periodischen Funktion \tilde{c}_i , die den Radius des Zylinders H_1 und die Stauchung des parabolischen Zylinders H_2 derart ändert, dass sich die resultierenden Schnittmengen dieser Invarianten zu kritischen Werten von \tilde{c}_i zu einer Schnittmenge vereinen bzw. sich zu zwei Schnittmengen ablösen.*

Weiterführende Literatur

- MATHIS und STAHL „Oscillator synthesis based on Nambu mechanics with canonical dissipative damping“ [133]
- MATHIS und MATHIS „Dissipative Nambu systems and oscillator circuit design“ [105]

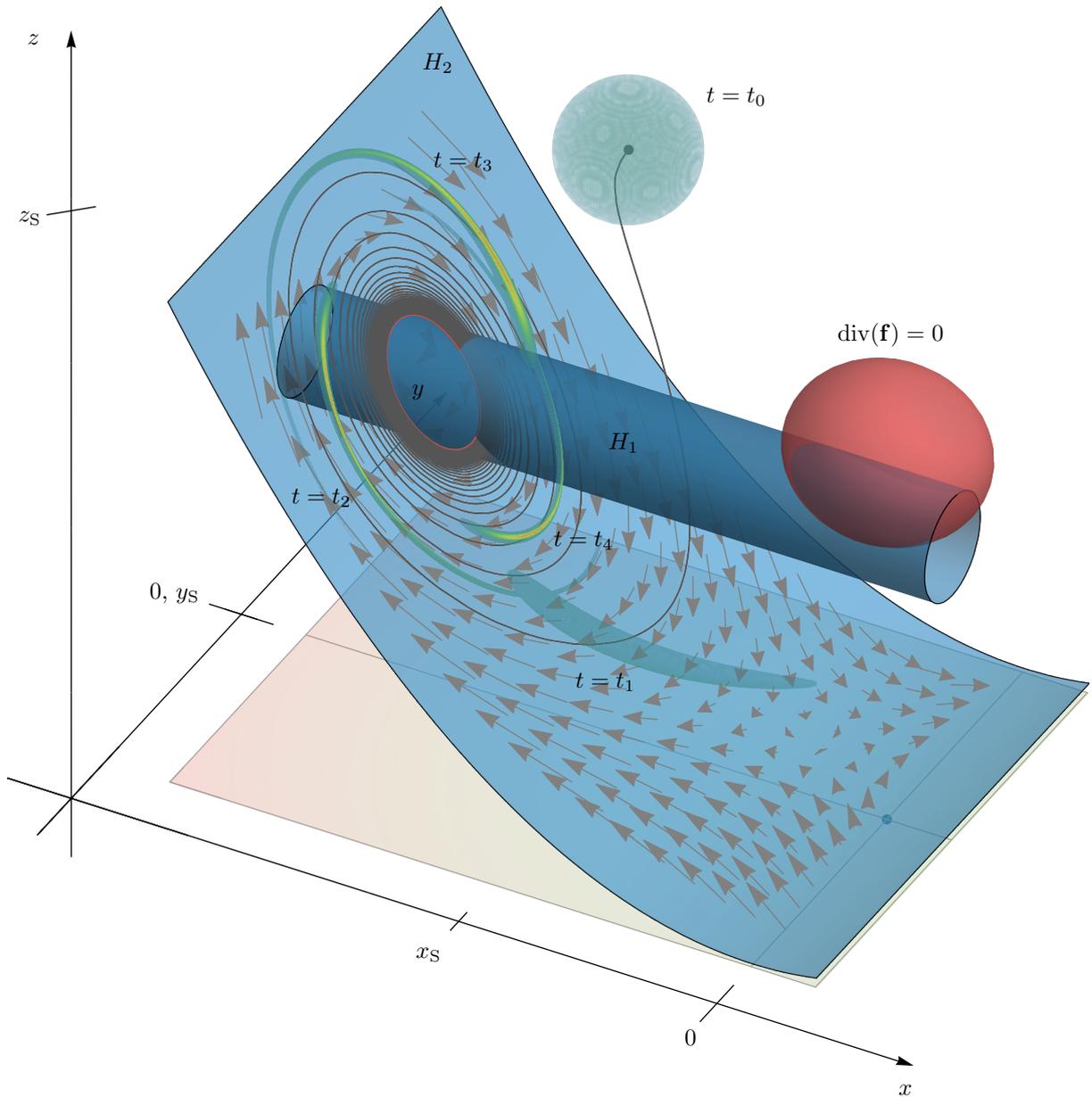


Abb. 4.30.: Einschwingvorgang des Lorenz-Systems mit $\sigma = 10$, $r = 10$, $E_1 = E_2 = 1$, den Startwerten $x_S = -8$, $y_S = 0$, $z_S = 20$ sowie den Standardabweichungen $\sigma_{x_S,0} = \sigma_{y_S,0} = \sigma_{z_S,0} = 0.8$ und dem Schwellenwert $\varepsilon = 1\%$. Die Farbskalierung der Wahrscheinlichkeitsdichte p ist für jede Phasenraumdicke neu normiert, da der exponentielle Anstieg aufgrund der Dissipation keinen direkten Vergleich für verschiedene Zeiten erlauben würde.

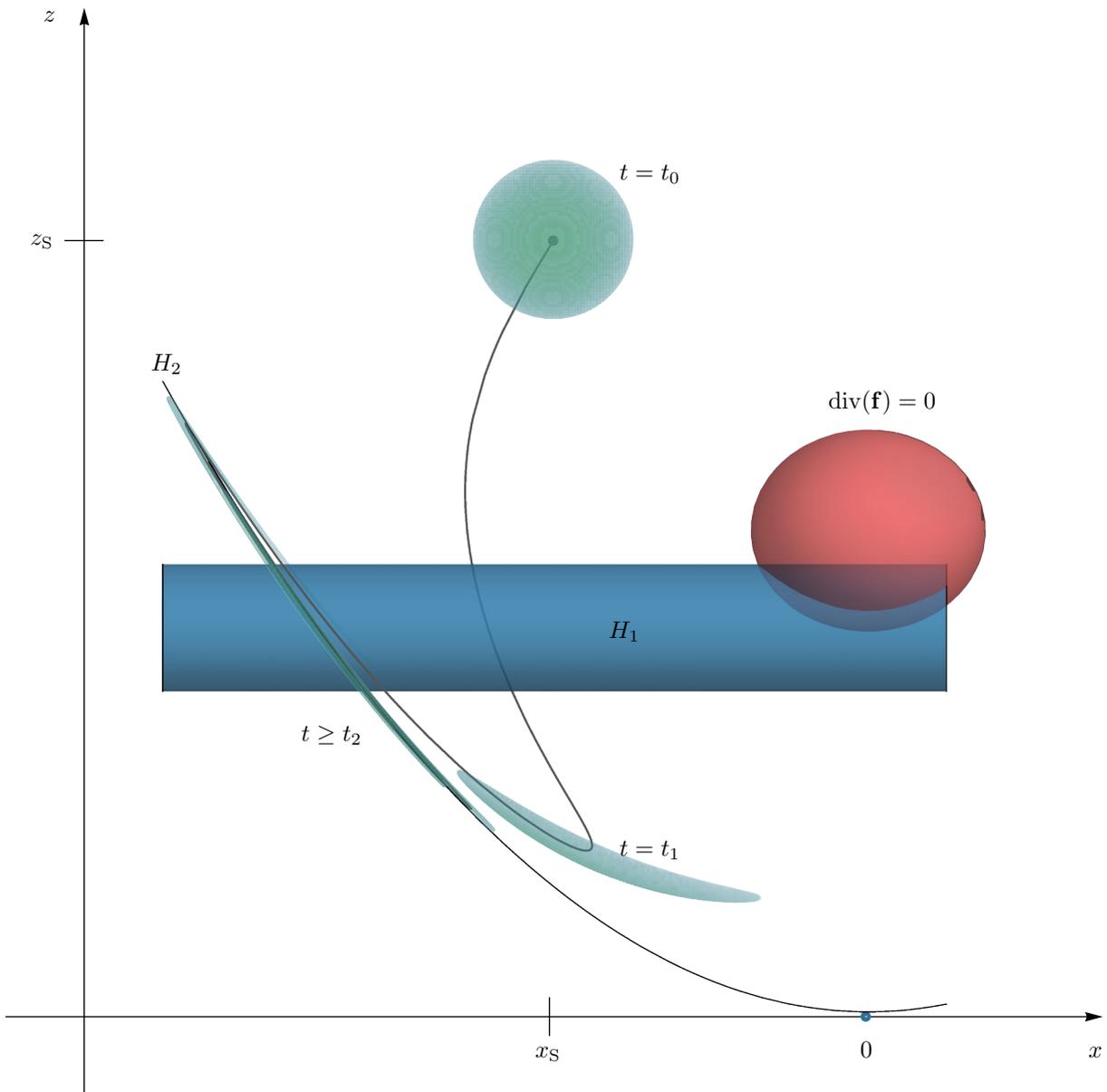


Abb. 4.31.: Einschwingvorgang des Lorenz-Systems (Seitenansicht)

5. Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde das deterministische Verhalten von elektrischen Oszillatoren untersucht. Die Motivation ergab sich aus dem Stand der Forschung über das Rauschen in Oszillatoren als Themengebiet. Daher wurde eingangs ein intensiver und kritischer Überblick über die bestehende Literatur gegeben. Die Liouville-Dynamik in Anwendung auf elektrische Oszillatoren wurde von anderen Themengebieten der Physik, wie der Hamilton-Mechanik und der Mechanik integrierbarer Systeme, abgegrenzt und mit den Stabilitätsbegriffen nach Ljapunov und weiteren Begriffen der dynamischen Systeme aufgebaut. Dazu wurden bekannte Definitionen der Analysis wiederholt, stellenweise angepasst oder erweitert und für Ingenieure zugreifbar dargestellt. So wurden Attraktoren und deren Einzugsgebiete, sowie Repellenen und deren Auszugsgebiete geometrisch und anschaulich redefiniert.

Elektrische Oszillatoren sind dynamische Systeme mit stabilen Grenzzyklen als Folge einer Andronov-Hopf-Bifurkation. Die Bildmenge der Grenzzyklen sind geschlossene Orbits und wirken innerhalb ihrer Einzugsgebiete als ein Attraktor. Da elektrische Oszillatoren die energetischen Verluste aufgrund von Reibung kompensieren müssen, sind die Bewegungsgleichungen nichtlinear. Die Divergenz dieser Vektorfelder ist infolge dessen entweder konstant negativ, zustandsabhängig oder konstant positiv mit Beschränkung des Phasenraums. Neben bekannten Systemen aus der Literatur wurde gezeigt, wie sich mit Hilfe der Nambu-Mechanik in geometrisch anschaulicher Weise dynamische Systeme erstellen lassen, die einen stabilen Grenzzyklus aufweisen.

Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten und die Bewegungsgleichung einer Wahrscheinlichkeitsdichte über einem Phasenraum. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist zu interpretieren als eine Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Zustands. Die Integration dieser Dichte über ein Phasenraumintervall ergibt demnach die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Systemzustands innerhalb des Intervalls. Sie setzt sich aus einer gewichteten Schar von Integralkurven der ursprünglichen Bewegungsgleichungen zusammen. Die Lösung der verallgemeinerten Liouville-Gleichung kann allgemein mit Hilfe der Methode der Charakteristiken angegeben werden. Es wurde gezeigt, dass diese Lösung sich aus einem Volumenerhaltungsterm und einem Funktional der Umkehrtransformationen zusammensetzt, welches zur Anfangszeit der Anfangsverteilung entspricht. Der Volumenerhaltungsterm ist abhängig von der Divergenz des Vektorfeldes. Für zustandsabhängige Divergenzen ergibt sich hieraus ein sogenannter Pumpmechanismus auf dem Grenzzyklus. Dieser Mechanismus führt zu fortwährenden Streck- und Stauchvorgängen der Wahrscheinlichkeitsdichte und war Kerngegenstand der Untersuchungen dieser Arbeit.

Die Problemstellung wurde eingangs in drei Bereiche gegliedert: (i) Die Untersuchung der Transienz und Oszillation sowie deren Zusammenhang, (ii) der Problematik zwischen in- und extrinsischen Prozessen und (iii) dem Wechselspiel zwischen Dissipation und Akkumulation von Energie und Phasenraumvolumen.

- i. Der Einschwingvorgang (Transienz) in einen stabilen Gleichgewichtspunkt oder Grenzzyklus verläuft asymptotisch. Als Konsequenz kann dieser Vorgang für deterministische Systeme und endliche Zeiträume nie als abgeschlossen gelten. Dies führt zu einer Übergangsproblematik zwischen Transienz und Oszillation, da es die eigentliche Aufgabe eines elektrischen Oszillators ist, ein voreingestelltes, oszillierendes Ausgangssignal ohne transiente Anteile zu erzeugen.

Grenzzyklen sind geschlossene Lösungen und sind unabhängig von den transienten Lösungen der Bewegungsgleichungen. Sowohl die transienten Lösungen, als auch die Grenzzyklen sind in der Regel nicht durch einen analytischen Ausdruck, beispielsweise in Form einer Polynomgleichung, darstellbar. Folglich sind Metriken zwischen einer transienten Lösung und eines geschlossenen Orbits nicht auswertbar, sodass ein Über- oder Unterschreiten eines Schwellenwerts nicht verifizierbar ist. Es bedürfte einer Approximation des Grenzzyklus mit einer Genauigkeit unterhalb des Schwellenwerts. Adäquate Herangehensweisen zu einer solchen Approximation stellen ein schwer zu lösendes numerisches Problem dar.

Eine native Lösung dieser Übergangsproblematik ist mit der Liouville-Dynamik gegeben. Eine zu Beginn n -dimensionale Anfangsverteilung in dem n -dimensionalen Einzugsgebiet des Grenzzyklus ist einem

5. Zusammenfassung und Ausblick

Stauchvorgang unterlegen, bis diese Verteilung für $t \rightarrow \infty$ auf dem 1-dimensionalen Grenzzyklus verläuft. Die Volumenänderungsrate dieser Kompression ist aufgrund des periodischen Charakters für Systeme mit zustandsabhängiger Divergenz selbst eine periodische Funktion, welche gegen den n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten λ_n konvergiert. Folglich können mit dem daraus resultierenden Nullstellenproblem die erfolgten Umläufe um den Grenzzyklus abgezählt werden. Die Zeitpunkte, denen eine Lösung des Nullstellenproblems zugeordnet werden kann, sind demzufolge Zeitpunkte bei denen die Volumenänderungsrate der Verteilung die Volumenänderungsrate des n -dimensionalen Ljapunov-Exponenten erreicht hat. Zu jedem dieser Zeitpunkte entspricht die Dynamik der nächsten Periode, der Dynamik aller Perioden. Der Oszillator gilt demnach als eingeschwungen sobald ein solcher Zeitpunkt erreicht wurde.

- ii. Rauschersatznetzwerke stellen einen extrinsischen Ansatz dar. Mit dem darauf aufbauenden Fokker-Planck-Formalismus können die intrinsischen Effekte des deterministischen Anteils nicht von den extrinsischen Effekten der Rauschprozesse unterschieden werden.

Die Liouville-Dynamik zeigt, dass diese Problematik evident ist. Systeme mit zustandsabhängiger Divergenz führen auf den Pumpmechanismus. Dieser intrinsische Effekt sorgt für ein periodisches Pumpen des Phasenraumvolumens, welcher sich in den stochastischen Momenten als eine periodische Funktion widerspiegelt. Die Umkehrung gilt nicht. Nicht jede periodische Funktion in den stochastischen Momenten ist die Folge des Pumpmechanismus.

HAJIMIRI, LEE und später HAM beschrieben eine periodische Änderung der mittleren Phasenabweichung auf dem Grenzzyklus als Folge einer nicht-sinusoidalen Oszillation. Mit einer sogenannten *Impuls-empfindlichkeitsfunktion* sollten die zeit-varianten Schwankungen der Diffusion im Fokker-Planck-Ansatz, ohne ein tieferes Verständnis dafür, berücksichtigt werden. In dieser Dissertation wurde gezeigt, dass dieser Mechanismus ein deterministischer und insbesondere intrinsischer Mechanismus vieler Oszillatoren ist, welcher einzig aus der Divergenz der deterministischen Bewegungsgleichung folgt. Der Pumpmechanismus ist nicht nur eine Folge nicht-sinusoidaler Grenzzyklen, sondern eine Folge der zustandsabhängigen Divergenz. Die Zeitvarianz ergibt sich aus den Lösungen der Bewegungsgleichung, welche in die zustandsabhängige Divergenz eingesetzt werden. Um diesen Mechanismus zu beschreiben, ist ein Fokker-Planck-Ansatz demzufolge nicht nötig. Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung zeigt den Pumpmechanismus in inhärenter Weise als Folge der Volumenerhaltung einer Wahrscheinlichkeitsdichte.

- iii. Ein idealer Schwingkreis, welcher selbst nur ein Teil einer sonst dissipativen Schaltung ist, tauscht einen Teil der anfangs zugeführten Energie zwischen zwei Reservoirien periodisch wechselnd aus, während die dissipativen Elemente der Schaltung kontinuierlich die ihnen zugeführte Energie in Wärme dissipieren oder anderweitig Arbeit verrichten und die Quellen kontinuierlich Energie zum Erhalt der Schaltung akkumulieren. Folglich bedarf es neben dem Begriff der Dissipation auch dem Begriff der Akkumulation von Energie.

Integrable Systeme erlauben eine Einteilung der Energie bezüglich der separierten Bewegungsgleichungen. Mit der Definition des Phasenraumvolumens lässt sich zu jedem Energiereservoir ein Volumen zur Anfangszeit zuordnen. Auf diese Weise kann die Bewegung eines Phasenraumvolumens den separierten Bewegungsgleichungen zugeordnet werden. Allerdings sind elektrische Oszillatoren nicht-integrabel. D.h. es existiert im Allgemeinen keine Einteilung der Gesamtenergie bezüglich der Bewegungsgleichungen. Zwar kann die Dynamik eines Phasenraumvolumens den Bewegungsgleichungen zugeordnet werden, jedoch kann im Sinne der integrablen Systeme kein allgemeingültiger Zusammenhang zwischen Energie und Phasenraumvolumen gefunden werden.

Hamilton-Systeme sind energieerhaltende Systeme falls die Hamilton-Funktion eine autonome Energiefunktion ist. In Umkehrung ist jedes energieerhaltende System, dessen energetische Reservoirie nicht gekoppelt sind (ausgedrückt durch entkoppelte Energiefunktionen), stets ein Hamilton-System (hinreichendes Kriterium). Diese Systeme erhalten zugleich ihr Phasenraumvolumen aufgrund der Divergenzfreiheit der Vektorfelder (notwendiges Kriterium). Es wäre naheliegend, beide Begriffe miteinander für dissipative Systeme vereinen zu wollen. Allerdings zeigt sich, dass kanonisch-dissipative Systeme existieren, die ihr Phasenraumvolumen akkumulieren, während Energie dissipiert wird und umgekehrt. Zudem sind diese Systeme auf den Grenzzyklen energieerhaltend und unterliegen dennoch dem Pumpmechanismus. Daraus folgt, dass zwischen einer Dissipation von Energie und einer Dissipation von Phasenraumvolumen unterschieden werden muss und kanonisch-dissipative Systeme auf ihren Grenzzyklen nicht zwangsläufig Hamilton-Systeme sind. Das Nullstellenproblem aus der Divergenz des Vektorfeldes unter Forderung der Divergenzfreiheit stellt daher einen Zugang für kanonisch-dissipative Systeme dar, welches den Zusammenhang zwischen Dissipation von Energie und Phasenraumvolumen klärt. Umgekehrt ergibt sich

hieraus ein Axiom: Beschreibt der kanonisch-dissipative Ansatz ein System vollständig und ergibt das Nullstellenproblem keine Lösung, dann wird keine andere Beschreibung dieses Systems Aufschluss über den Zusammenhang zwischen Energie und Phasenraumvolumen geben können.

Ljapunov-Exponenten bestimmen mit ihrem Vorzeichen, ob ein inneres Subsystem eines dynamischen Systems dissipativ ist. Allerdings sind diese Exponenten nur Grenzwerte, welche sich aus einer Mittelung der Divergenz des jeweiligen Vektorfeldes unter Annahme diverser Ergodensätze ergibt. Die Divergenz entspricht zugleich einer Volumenänderungsratendichte und ist verantwortlich für die Streckung und Stauchung eines Phasenraumvolumens. Nur unter Anwendung der Ergodentheorie können Ljapunov-Exponenten bestimmen, ob dynamische Systeme global dissipativ bezüglich der Energie sind. Der lokale Wert eines Ljapunov-Exponenten entspricht der Volumenänderungsratendichte des jeweiligen Punktes im Phasenraum und ist Teil des Ljapunov-Spektrums. Dieser Wert erlaubt keine Aussage über die lokale oder globale Dissipation oder Akkumulation von Energie, sondern beschreibt nur die lokale Volumenänderungsrate für ein Phasenraumvolumen. Dafür gehen mit der Betrachtung mehrerer lokaler Werte nicht die Informationen über deterministische Effekte wie dem Pumpmechanismus verloren. Darüber hinaus verlieren die Ljapunov-Exponenten außerhalb der Einzugsgebiete eines Grenzzyklus ihre Gültigkeit. Existieren mehrere Attraktoren, so sind in aller Regel die Ljapunov-Exponenten dieser Attraktoren unterschiedlich. Als Folge dessen kann ein dynamisches System in Unterräumen des Phasenraums akkumulativ oder konservativ sein, während der für die eigentliche Funktion des elektrischen Oszillators entsprechende Unterraum dissipativ ist.

Streng genommen ist im Sinne dynamischer Systeme nicht jede oszillierende Schaltung dissipativ. Ein akkumulatives System, wie der harmonische Oszillator mit linearer Verstärkung erzeugt Schwingungen von wachsender Amplitude. Eine Begrenzung des Phasenraums, beispielsweise durch stückweise lineare Quellen als Energieversorgung, erlaubt eine stabile Schwingung mit konstanter Amplitude.

Die Liouville-Dynamik scheint aufgrund ihrer Kompatibilität mit der statistischen Physik eine für dynamische Systeme analoge Definition der thermodynamischen Entropie zu bieten. Allerdings zeigt sich entgegen der intuitiven Erwartung, dass eine solche Entropiefunktion das falsche Vorzeichen hat. Die zeitliche Änderung dieser Funktion entspricht (bis auf eine Konstante) dem Ljapunov-Exponenten, sodass dissipative dynamische Systeme sogenannte dynamische Entropie vernichten, statt thermodynamische Entropie zu erzeugen. Da die Gesetze der Thermodynamik keine Gültigkeit für die dynamische Entropie haben, ist der zweite Hauptsatz der Thermodynamik nicht verletzt. Vielmehr ist kein Zusammenhang zwischen thermodynamischer und dynamischer Entropie zu finden.

Mit der Theorie über Integralmannigfaltigkeiten in Verbindung der kanonisch-dissipativen Nambu-Mechanik konnten zudem zwei weitere Erkenntnisse aus den Betrachtungen der Liouville-Dynamik gewonnen werden. Zum einen, stellen die Invarianten eines Nambu-Systems für $t \rightarrow \infty$ Integralmannigfaltigkeiten dar, deren Schnittmenge der Grenzzyklus ist. Zum anderen ist auf intuitive Weise klar, was deterministisches Chaos bedeutet. Da die Bewegung von Nambu-Systemen auf den Schnittmengen der Invarianten stattfindet, die geometrische Gestalt der Invarianten sich aber mit der Dissipationsfunktion ändert, ist chaotisches Verhalten das Resultat der sich ändernden Topologie der Schnittmengen.

Abschließend seien zwei Ausblicke gegeben: (i) Mit den in der Literatur existierenden differentialgeometrischen Formulierungen der Liouville-Gleichung können die in dieser Arbeit gemachten Aussagen (koordinatenfrei) verallgemeinert werden. (ii) Lie-Reihen sind formal ähnlich zur verallgemeinerten Liouville-Gleichung [206]. Eine Verknüpfung beider Gebiete kann für analytische Approximationen von deterministischen Effekten ein mächtiges Werkzeug darstellen.

A. Eigenräume, Zentrums- und Integralmannigfaltigkeiten

Während sich in 2-dimensionalen dynamischen Systemen die Dynamik im Langzeitverhalten immer einer Ebene zuordnen lässt, können höher-dimensionale Systeme Grenzzyklen aufweisen deren ω -Limesmenge auf einer Hyperfläche liegen. Im einfachsten Fall handelt es sich dabei wieder um Hyperebenen, den sogenannten *Eigenräumen*. Allerdings müssen für gekrümmte Flächen und insbesondere im Bezug zur Hopf-Bifurkation weiterführende Begriffe der Zentrums- und Integralmannigfaltigkeit betrachtet werden.

Definition (Eigenraum) *Der Eigenraum \mathcal{E}_λ ist die Menge aller Vielfachen der Eigenvektoren zu ihrem Eigenwert λ .*

DESOER beschreibt diese Eigenwerte als Moden die in linearen Netzwerken die natürliche Frequenz einer Schaltung wiedergeben [205]. Unter der Annahme, dass die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwerts eins ist, ist der zugehörige Eigenraum 1-dimensional. Die Dynamik eines linearisierten und diagonalisierten Systems der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ mit $\tilde{\mathbf{x}} = 0$ als Gleichgewichtspunkt, unterliegt der Dynamik des Flusses $\Phi(\mathbf{x}, t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}$. Folglich existieren drei verschiedene Verhalten: (i) für die Lösungsanteile zu Eigenwerten kleiner null ist das System exponentiell abfallend und stabil, (ii) für die Lösungsanteile zu Eigenwerten größer null klingt das System exponentiell auf und ist instabil, sowie (iii) für alle Lösungsanteile mit null als Eigenwert, ist das System konstant. Ist der zugrunde liegende Raum eines n -dimensionalen linearen Systems der euklidische Raum \mathbb{R}^n , so kann dieser als direkte Summe von Eigenräumen geschrieben werden, die sich aus den stabilen (*stable*), instabilen (*unstable*) und konstanten bzw. zentralen Lösungsanteilen (*center*) zusammensetzen $\mathbb{R}^n = \mathcal{E}_s \oplus \mathcal{E}_u \oplus \mathcal{E}_c$ [143]. Sind die Eigenwerte und damit die Eigenvektoren bezüglich der Matrix \mathbf{A} komplex, so existiert eine *Ähnlichkeitstransformation* die zu einer reellen Darstellung führt.

Definition (Reelle Jordansche Normalform) *Eine quadratische Matrix \mathbf{A} ist ähnlich zu ihrer reellen Jordanschen Normalform mit der Gestalt*

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{J}_n \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}. \quad (\text{A.1})$$

Dabei ist $\mathbf{T} = \mathbf{T}_1\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle Matrix, mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_i^{\mathbf{A}} \in \mathbb{C}^n$ der Matrix \mathbf{A} und $\mathbf{e}_i^{\mathbf{J}} \in \mathbb{C}^n$ der Matrix \mathbf{J} , sowie

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1^{\mathbf{A}} & \cdots & \mathbf{e}_n^{\mathbf{A}} \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_2^{-1} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \mathbf{e}_1^{\mathbf{J}} & \cdots & \mathbf{e}_n^{\mathbf{J}} \\ | & & | \end{pmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Die Position der Eigenvektoren \mathbf{e}_i stehen dabei im direkten Zusammenhang mit der Position der jeweiligen Eigenwerte. Die Untermatrizen \mathbf{J}_i werden *Jordanblöcke* genannt [230, 256].

Ein Jordanblock zu einem reellen Eigenwert besteht in seiner Hauptdiagonalen aus dem zugehörigen Eigenwert, der gemäß der algebraischen Vielfachheit wiederholt wird. Die erste Nebendiagonale ist durchgehend eins. Für den Fall eines komplex-konjugierten Eigenwertpaares $a \pm jb$ ergibt sich als Jordanblock

$$\mathbf{J}_i = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Da es sich bei den Eigenräumen \mathcal{E}_s , \mathcal{E}_u und \mathcal{E}_c um invariante Räume handelt, verbleiben alle Trajektorien, die in diesen Eigenräumen starten, auch für alle Zeiten darin. Startet eine Trajektorie im Eigenraum \mathcal{E}_s

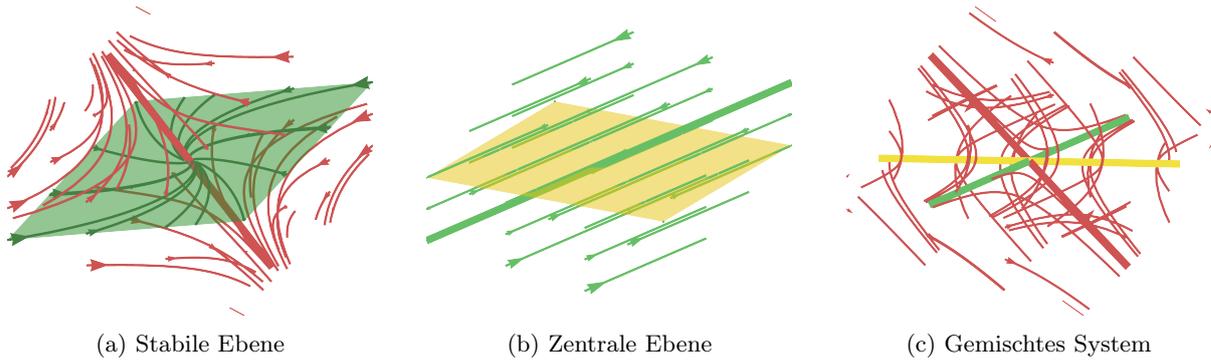


Abb. A.1.: Beispiele der Eigenräume linearer Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Die Eigenräume entsprechen den Ebenen bzw. den fett gedruckten Achsen. Eine Umkehrung des Vorzeichens der quadratischen Matrix \mathbf{A} führt zwar zu einer Vertauschung der stabilen und instabilen Eigenräume, in der Regel jedoch nicht zu einer Änderung instabiler Trajektorien. Solche Trajektorien, die aus dem Unendlichen kommen und ins Unendliche gehen, bleiben unter Vertauschung des Vorzeichens instabil. Translationen in Richtung des zentralen Eigenraums lassen die Dynamik des Systems invariant.

bzw. \mathcal{E}_u , so verläuft diese für $t \rightarrow \infty$ bzw. für $t \rightarrow -\infty$ *asymptotisch* gegen den Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ [143, 172]. Die stabilen und instabilen Eigenräume eines hyperbolischen Gleichgewichtspunktes, ohne den Gleichgewichtspunkt selbst, sind daher die Vereinigung aller Einzugs- bzw. Auszugsgebiete! Um auf eine Verallgemeinerung für nichtlineare Systeme zu gelangen, muss zuerst die in 3.3 erwähnte Linearisierung des Vektorfeldes konkretisiert werden.

Definition (Jet-Transformation) Sei $\mathbf{f}: U \rightarrow TM$ in der Umgebung $U \subset M$ vom Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$ k -fach stetig differenzierbar, dann heißt die auf das k -te Glied abgebrochene, mehrdimensionale Taylorreihe

$$j_{\tilde{\mathbf{x}}}^k \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} \mathbf{f}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}} \Big|_{\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^\alpha \quad (\text{A.4})$$

k -Jet von \mathbf{f} mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ als Multiindex¹ und $|\alpha|$ als dessen Ordnung [236].

Mit Hilfe der Jordantransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ und der Jet-Transformation kann nun ein nichtlineares System der Form $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und dem in einen linearen und nichtlinearen Anteil separierten Jet-Vektorfeld $j_0^\infty \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\text{lin}}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x})$ in ein nichtlineares Jordan-System

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{A.5})$$

überführt werden [237]. Mit diesen Transformationen ist es möglich, die Begriffe von stabilen, instabilen und zentralen Unterräumen für nichtlineare Systeme auf Mannigfaltigkeiten zu erweitern [159].

Definition (Zentrumsmannigfaltigkeit) Sei \mathbf{f} mit $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ein C^k -Vektorfeld mit den Eigenräumen \mathcal{E}_s , \mathcal{E}_u und \mathcal{E}_c aus $\dot{\mathbf{x}} = j_0^k \mathbf{f}(\mathbf{x})$, dann existieren tangential zu den stabilen und instabilen Eigenräumen am Gleichgewichtspunkt lokal invariante C^k -Mannigfaltigkeiten \mathcal{W}_s , \mathcal{W}_u und zum zentralen Eigenraum lokal die invariante C^{k-1} -Mannigfaltigkeit \mathcal{W}_c (Zentrumsmannigfaltigkeit) [166].

Lokal bedeutet hierbei, dass diese Mannigfaltigkeiten nur in der Nähe des Gleichgewichtspunktes definiert und dementsprechend beschränkt sind [172]. Da es sich um invariante Mannigfaltigkeiten handelt, ist der Fluss des dynamischen Systems auf diesen erhalten. Handelt es sich bei $\tilde{\mathbf{x}}$ um einen asymptotisch stabilen Gleichgewichtspunkt, so ist \mathcal{W}_s das Einzugsgebiet und \mathcal{W}_u der Punkt selbst. Die Dimension dieser Mannigfaltigkeiten ist gleich der Dimension der zugehörigen Eigenräume, die am Gleichgewichtspunkt tangiert werden.

¹Es gilt $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_k^{\alpha_k}$, somit handelt es sich dabei nicht um einen Vektor. Die entsprechenden Regeln dieser Schreibweise finden sich in [236].

Schnittmengen von stabilen mit der zu demselben Gleichgewichtspunkt zugehörigen instabilen Mannigfaltigkeiten werden *homokline Orbits* genannt. Schneiden sich eine stabile und instabile Mannigfaltigkeit zu zwei unterschiedlichen Gleichgewichtspunkten, so werden diese Schnittmengen *heterokline Orbits* genannt.

Aus dieser Definition lassen sich nun die Jordanblöcke \mathbf{J}_i aufgrund der freien Reihenfolge der Eigenwerte innerhalb der Jordanschen Normalform den zugehörigen gekrümmten Unterräumen [163, 258] sortieren und zu den Jordanblöcken \mathbf{J}_s , \mathbf{J}_u und \mathbf{J}_c zusammenfassen, sodass letztlich Gl. (A.5) umgeformt werden kann zu²

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_s &= \mathbf{J}_s \mathbf{x}_s + \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \dot{\mathbf{x}}_u &= \mathbf{J}_u \mathbf{x}_u + \mathbf{f}_u(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c) \\ \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{J}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_c).\end{aligned}\tag{A.6}$$

Sei im Folgenden das C^k -Vektorfeld abhängig von einem *Bifurkationsparameter* $\mu \in C^k(\mathbb{R})$, sodass $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ (siehe Abschnitt 3.5) und weiterhin das System frei von instabilen Eigenwerten. Ist $\mathbf{x}_s = \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)$ eine Lösung von (A.6) so muss gelten $\mathbf{h}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und damit auch $\dot{\mathbf{h}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Aus dem *Satz über implizite Funktionen* kann die Zentrumsmannigfaltigkeit lokal als Graph dieser Lösung aufgefasst werden

$$\mathcal{W}_c^{\text{loc}} = \{(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_c) \mid \mathbf{x}_s = \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h}(\mathbf{0}) = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)}{\partial \mathbf{x}_c} \right|_{\mathbf{x}_c=\mathbf{0}} = \mathbf{0}.\tag{A.7}$$

Trajektorien, die in einer lokalen Umgebung des Gleichgewichtspunktes starten, laufen zunächst auf die Zentrumsmannigfaltigkeit [150, 159, 258]. Die Zentrumsmannigfaltigkeit wirkt damit als ein Attraktor und als Einzugsgebiet!

Wird \mathbf{h} eingesetzt in (A.6), so folgt eine nichtlineare partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)}{\partial \mathbf{x}_c} (\mathbf{J}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{f}_c(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}(\mathbf{x}_c))) - \mathbf{J}_s \mathbf{h}(\mathbf{x}_c) - \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_c, \mathbf{h}(\mathbf{x}_c)) = \mathbf{0},\tag{A.8}$$

die nur analytisch gelöst werden kann, wenn die analytische Lösung des Ausgangssystems bekannt ist.

Definition (Approximationstheorem) *Eine Funktion $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ kann durch eine Funktion $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \in C^1$ mit $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{0}) = \partial \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} |_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} = \mathbf{0}$ beliebig genau approximiert werden, wenn zu dem Nullstellenproblem $\mathcal{N}(\mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ gilt, dass $\mathcal{N}(\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})) = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^l)$ für $l > 1$ und unter dem Limes $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ ist, sodass $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^l)$ falls $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ [150, 151, 166].*

Damit ist eine beliebig genaue Approximation von (A.8) möglich, jedoch nicht eindeutig. Eine approximierter Graph der Ordnung $\mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^l)$ stellt demnach ein Repräsentant einer Klasse von Zentrumsmannigfaltigkeiten dar [258].

Für Hopf-bifurkierende Systeme existiert eine zur Zentrumsmannigfaltigkeit analoge Integralmannigfaltigkeit auf die das dynamische System reduziert werden kann [148].

Definition (Integralmannigfaltigkeit) *Sei \mathbf{f} ein Vektorfeld mit $(\mathbf{x}, \mu) \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu)$ und dem Bifurkationsparameter $\mu \in C^k(\mathbb{R})$, sowie $(\mathbf{0}, \tilde{\mu})$ ein Hopfpunkt mit $\mu = \tilde{\mu} + \Delta\mu$, dann existiert analog zu (A.6) und $\dot{\Delta\mu} = 0$ mit parameterabhängigen Jordanmatrizen $\mathbf{J}_i(\Delta\mu)$, $i \in \{s, u, c\}$ eine im Bezug zur Bifurkationsdifferenz $\Delta\mu \geq 0$ abhängige Integralmannigfaltigkeit $\mathcal{I}_{\Delta\mu}$ auf dem der Gleichgewichtspunkt bzw. Grenzzyklus liegt [166].*

Die Bestimmung einer Integralmannigfaltigkeit erfolgt parameterabhängig gemäß (A.7) und (A.8). Die Jet-Transformation zur Approximation einer Lösung hat demnach auch nach dem Bifurkationsparameter μ zu erfolgen, welcher äquivalent wie jede Koordinate \mathbf{x} zu behandeln ist. Die Integralmannigfaltigkeit wirkt daher als Einzugsgebiet für stabile Grenzzyklen und als Auszugsgebiet für instabile Grenzzyklen. Da diese Dynamik unabhängig von den Anfangswerten ist, stellt die Integralmannigfaltigkeit auch das Einzugs- bzw. Auszugsgebiet einer Schar von Integralkurven dar. Eine Wahrscheinlichkeitsdichte als Folge einer Gewichtung jeder Integralkurve dieser Schar, wird sich dementsprechend asymptotisch gegen die Integralmannigfaltigkeit verformen.

²Hierbei wurde \mathbf{y} in (A.5) wieder als \mathbf{x} benannt.

B. Stochastische Systeme

Ein stochastisches System ist dadurch gekennzeichnet, dass es zusätzlich zu der deterministischen Beschreibung zufällige Prozesse einbringt, über deren Zukunft nur mittels Wahrscheinlichkeiten gemutmaßet werden kann und die Vergangenheit nur durch eine bereits aufgenommene (endliche) Zustandstabelle innerhalb der Messungenauigkeit bekannt ist. Letztere Bedingung ist gleichbedeutend mit der Irreversibilität von thermodynamischen Prozessen, d.h., der in Zeitrichtung umgekehrte Prozess folgt nicht demselben Pfad, der zuvor beschritten wurde.

Aufgrund einer Vielzahl von mikroskopischen Freiheitsgraden weicht jede Messung von dem gewünschten makroskopischen, deterministischen Verhalten ab. Es entstehen zufällige Funktionen der Zeit $\mathbf{X} = \mathbf{H}(\omega, t)$, welche einer zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\mathbf{X}, t)$, also einem Ensemble von Prozessen, unterliegen. Im Folgenden wird der 1-dimensionale Fall betrachtet.

Definition (Stochastischer Prozess) *Ein stochastischer Prozess $H = (H_t)_{t \in \mathbb{T}}$ ist eine Familie von Zufallsvariablen¹ $H_t: \mathfrak{W} \rightarrow M$ innerhalb eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathfrak{W}, \mathcal{A}, P)$ mit dem dazugehörigen Messraum (M, \mathcal{B}) und dem Zeitintervall \mathbb{T} , sodass für jedes Ergebnis (Elementarereignis) $\omega \in \mathfrak{W}$ ein Pfad (auch Trajektorie oder Realisierung genannt) $H(\omega, \cdot): \mathbb{T} \rightarrow Z, t \mapsto H(\omega, t) = H_t(\omega)$ existiert, welcher die zugehörige Entwicklung des Prozesses beschreibt [64, 67].*

Die Ergebnismenge \mathfrak{W} unterscheidet sich im Gegensatz zu deterministischen Systemen vom Phasenraum M . Zwar bestehen sowohl \mathfrak{W} als auch $N \subseteq M$ aus Elementen, die jeden möglichen Pfad im Phasenraum eindeutig identifizieren, jedoch ist N eine Menge von Anfangswerten x_0 eines deterministischen Systems, während \mathfrak{W} eine Menge von Ergebnissen ω ist und in der Regel unendlich viele Ergebnisse existieren, denen derselbe Anfangswert $X_0 = H(\omega, t_0)$ zugewiesen werden kann. Diese Zuweisung lässt sich in Untermengen der Form $\Omega \subset \mathfrak{W}$ (Gruppierungsmengen) ausdrücken. Im deterministischen Fall ist die Anfangsmenge N stets bekannt, während dies für stochastische Systeme in der Regel nur auf Gruppierungsmengen zutrifft (siehe Abb. B.1). Die Ergebnisse selbst sind verborgene Variablen [62], allerdings lässt sich ein stochastisches System lösen, indem für jeden Pfad das korrespondierende deterministische System (\mathbb{T}, M, Φ) gelöst wird [221].

Spielt für die zukünftige Entwicklung eines stochastischen Prozesses die Vergangenheit keine Rolle, d.h., gilt für alle Zeiten $t_0 < t_{n+1} \in \mathbb{T}$ und Werte $X_0, \dots, X_{n+1} \in M$ mit $n \in \mathbb{N}^+$ die *Markov-Bedingung*

$$P(X_{t_{n+1}} = H_{t_{n+1}} | X_{t_0} = H_{t_0}, \dots, X_{t_n} = H_{t_n}) = P(X_{t_{n+1}} = H_{t_{n+1}} | X_{t_n} = H_{t_n}), \quad (\text{B.1})$$

so wird dieser Prozess *Markov-Prozess* genannt. Überquert ein Pfad mit den Anfangswerten $(X_i, t_i) \in M \times \mathbb{T}$ und dem Ziel (X_k, t_k) einen Zwischenzustand X_j des Phasenraums M zur Zeit $t_j \in \mathbb{T}$, so ergibt die Integration über alle Zwischenzustände für $t_i < t_j < t_k$ die *Chapman-Kolmogorow-Gleichung*

$$p_{ki}(t_k, t_i) = \int p_{kj}(t_k, t_j) p_{ji}(t_j, t_i) dX_j \quad (\text{B.2})$$

mit $p_{ji}(t, s) := P(X_j = H_t | X_i = H_s)$. Für $t_k = t_j + \tau$ mit $\tau \rightarrow 0$ und den momentanen Übergangsraten

$$w_{ji}(s) := \left. \frac{\partial}{\partial t} p_{ji}(t, s) \right|_{t=s} \quad (\text{B.3})$$

folgt die *Chapman-Kolmogorow-Mastergleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t_k} p_{ki}(t_k, t_i) = \int (w_{kj}(t_k) p_{ji}(t_k, t_i) - w_{jk}(t_k) p_{ki}(t_k, t_i)) dX_j. \quad (\text{B.4})$$

¹Die Zustände $X \in M$ werden im Allgemeinen für stochastische Systeme in Majuskeln geschrieben.

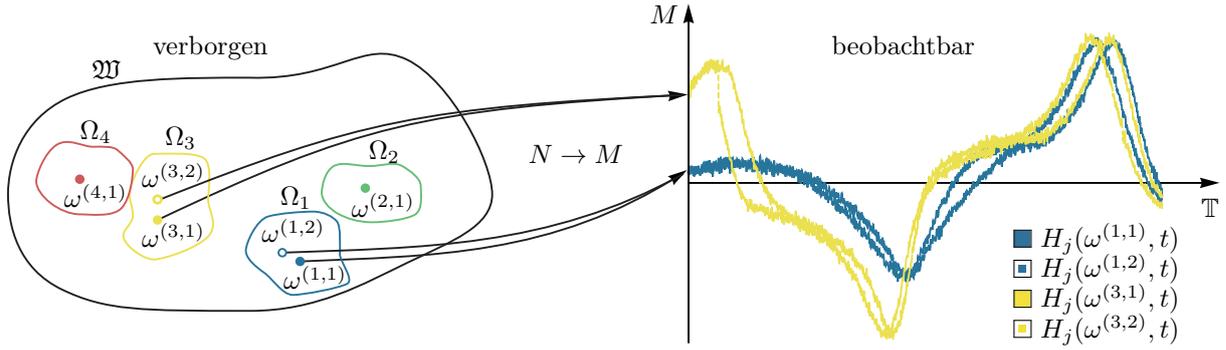


Abb. B.1.: Interpretation eines stochastischen Prozesses $H: \mathfrak{W} \times \mathbb{T} \rightarrow M$, $(\omega, t) \mapsto H_t(\omega)$ als Schar von Abbildungen $H_t: \mathfrak{W} \rightarrow M$, $t \mapsto H(\omega, t) = H_t(\omega)$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathfrak{W}, \mathcal{A}, P)$ mit angeheftetem Messraum (M, \mathcal{B}) . Die Ergebnismenge \mathfrak{W} besteht aus allen Ergebnissen ω . Die Ergebnisse können wiederum anhand der Anfangswerte $X_0 = H(\omega, t)$ im Phasenraum M in Mengen $\Omega \subset \mathfrak{W}$ gruppiert werden. Während in deterministischen Systemen zwischen einem Ergebnis ω und einem Anfangswert X_0 die Identitätsbeziehung steht, existieren in stochastischen Systemen in der Regel zu Anfangswerten überabzählbare Mengen von Ergebnissen. D.h. die Gruppierungsmengen Ω können zwar benannt werden, deren Elemente sind jedoch verborgen. Siehe zum Vergleich Abb. 3.4 für deterministische Systeme.

D.h. die zeitliche Änderung der Übergangswahrscheinlichkeit ist gegeben durch die Bilanz zwischen dem Gewinn und Verlust aller Pfade auf dem Weg vom Zustand X_i nach X_k . Auf diese Weise werden Einzel-elektronensysteme wie z.B. der Single-Electron-Transistor (SET) modelliert. Sei $\mathbf{W}(t)$ eine zeitabhängige $n \times n$ -Matrix (auch \mathbb{W} -Matrix genannt [58]) mit den Matrixelementen

$$\hat{w}_{ki}(t) = w_{ki}(t) - \delta(X_k - X_i) \int w_{jk}(t) dX_j, \quad (\text{B.5})$$

so kann die lineare Mastergleichung (B.4) umgeschrieben werden zu

$$\frac{\partial}{\partial t_k} p_{ki}(t_k, t_i) = \int \hat{w}_{kj}(t_k) p_{ji}(t_k, t_i) dX_j. \quad (\text{B.6})$$

Für einen Anfangszustand X_0 zur Startzeit t_0 , dem Vektor der Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{p} = (p_i)$ und dem Vektor der Anfangswerte $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(X_0, t_0)$ folgt ein lineares Differentialgleichungssystem $\partial \mathbf{p} / \partial t = \mathbf{W}(t) \mathbf{p}$. Für die lineare Abbildung $\hat{W}: p_{ki} \mapsto \int \hat{w}_{kj} p_{ji} dX_j$ folgt somit eine zur Liouville- oder Schrödinger-Gleichung analoge Gleichung $\partial p / \partial t = \hat{W} p$ die die zeitliche Entwicklung einer Phasenraum-dichte p beschreibt. Ist der Operator \hat{W} zeitinvariant so folgt $p = e^{\hat{W}t} p_0$ als Lösung (siehe zum Vergleich Abschnitte 3.1.1 und 3.9.1).

Wird eine Taylor-Entwicklung (*Kramers-Moyal-Entwicklung*) der Chapman-Kolmogorow-Mastergleichung gemäß

$$\frac{\partial}{\partial t} p(X, t) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial X^n} (a_n(X, t) p(X, t)) \quad (\text{B.7})$$

mit der Schrittweite ΔX und den Sprungmomenten

$$a_n(x, t) := \int (\Delta X)^n w_{\Delta X X}(t) d(\Delta X) \quad (\text{B.8})$$

durchgeführt, so folgt aus dem Abbruch der Reihe für $N = 2$ die *Fokker-Planck-Gleichung* (auch *Kolmogorow-Vorwärtsgleichung* genannt)

$$\frac{\partial}{\partial t} p(X, t) = -\frac{\partial}{\partial X} (a_1(X, t) p(X, t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} (a_2(X, t) p(X, t)). \quad (\text{B.9})$$

Während der erste Term den *Drift*, d.h. die Bewegung des Ensembles beschreibt und somit der Driftkoeffizient a_1 die mittlere Zustandsänderung je Zeiteinheit ist, handelt es sich bei dem zweiten Term um einen Diffusionsprozess der mit dem Drift überlagert. Der *Diffusionskoeffizient* a_2 ist demnach die mittlere quadratische Zustandsänderung je Zeiteinheit.

Der Vorteil der Fokker-Planck-Gleichung ist offensichtlich. Während die Chapman-Kolmogorow-Mastergleichung die Kenntnis aller Übergangsraten $w_{ji}(s)$ benötigt und diese zudem eine schwer zu lösende Integro-Differentialgleichung darstellt, können Drift und Diffusion anhand von bekannten makroskopischen Gesetzmäßigkeiten bestimmt werden.

Die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung, d.h. für $\partial p/\partial t = 0$, lautet

$$p_s(X, t) = \frac{2c}{a_2(X)} e^{2 \int_{x_0}^X \frac{a_1(\bar{x})}{a_2(\bar{x})} d\bar{x}} \quad (\text{B.10})$$

mit $c \in \mathbb{R}$ als Normierungskonstante die sich aus der Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} p_s(X, t) dX = 1$ ergibt [85]. Eine stochastische Theorie zu kanonisch-dissipativen Systemen in Bezug auf stationäre Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung findet sich für verschiedene Dissipationsfunktionen in [89].

Der Übergang von einer Dimension zu einem n -dimensionalen stochastischen Prozess \mathbf{X} führt zu einem Driftvektor $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)$ und einer Diffusionsmatrix $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$ über die aufsummiert wird

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{X}, t) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial X_i} (\mu_i(\mathbf{X}, t) p(\mathbf{X}, t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_{ik} \sigma_{jk} p(\mathbf{X}, t) \right). \quad (\text{B.11})$$

Es existiert keine allgemeine stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung für $n > 1$.

Eine andere Darstellung dieser partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ergibt

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\mathbf{X}, t) + \boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, t) \text{grad}(p(\mathbf{X}, t)) + \text{div}(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{X}, t)) p(\mathbf{X}, t) + \Delta(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{X}, t) p(\mathbf{X}, t)) = 0 \quad (\text{B.12})$$

mit Δ als den verallgemeinerten Laplace-Operator für Matrizen. Der Vergleich zwischen (3.44) und (B.12) zeigt, dass der Driftvektor $\boldsymbol{\mu}$ als ein deterministisches Vektorfeld zu interpretieren ist und alle bekannten Effekte eines deterministischen Systems, insbesondere der *Pumpmechanismus*, auf ein stochastisches System übertragbar sind. Die *verallgemeinerte Liouville-Gleichung* ergibt sich somit als Kramers-Moyal-Entwicklung erster Ordnung der Chapman-Kolmogorow-Mastergleichung. Allerdings ist \mathbf{x} in (3.44) eine deterministische Größe während \mathbf{X} in (B.12) eine stochastische Größe ist. D.h., (B.12) geht nur dann in (3.44) über, wenn die Diffusion und alle höheren Momente null sind, sodass jede Gruppierungsmenge $\Omega \subset \mathfrak{W}$ genau ein Ergebnis ω enthält, dessen Pfad ungestört ist, sodass jedes $\omega \in \mathfrak{W}$ eindeutig auf einen Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{X}_0$ verweist [56].

Die Kramers-Moyal-Entwicklung kann bei beliebiger Ordnung abgebrochen werden, allerdings sind für jede höhere Ordnung weitere Randbedingungen nötig um die partielle Differentialgleichung zu lösen. Darüber hinaus ist nicht immer gewährleistet, dass die Phasenraumdichte im gesamten Phasenraum positiv ist, was eine Voraussetzung in der klassischen Mechanik darstellt.

Satz (Pawula-Theorem) *Sei a_n das n -te Sprungelement gemäß (B.8). Existiert ein $i \in \mathbb{N}^+$ sodass $a_i = 0$, dann ist $a_n = 0$ für alle $n \geq 3$ [211].*

Dieses Theorem wird auch Truncation-Lemma genannt. Daraus folgt, dass entweder (i) nur der Drift, (ii) Drift- und Diffusion oder (iii) alle Momente betrachtet werden müssen, um eine positive Phasenraumdichte zu gewährleisten. Es bedeutet nicht, dass die Fokker-Planck-Gleichung eine gute Approximation der Kramers-Moyal-Mastergleichung sein muss. Höhere Momente können hinsichtlich der *Methode der kleinsten Quadrate* gegenüber der exakten Lösung von (B.4) zu einem genaueren Ergebnis führen, als es die Fokker-Planck-Gleichung leistet [86, 87].

Definition (Wiener-Prozess) *Ein stochastischer Prozess $(W_t)_{t \in \mathbb{T}}$ wird Wiener-Prozess genannt, falls (1) dieser zur Startzeit null ist, d.h. $W_0 = 0$, (2) alle Änderungen zwischen zwei Zeiten stochastisch unabhängig sind und (3) für alle $0 \leq s \leq t \in \mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^+$ die Änderungen stationär und normalverteilt sind, d.h., wenn $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ mit dem Erwartungswert null und der Varianz $t - s$ gilt.*

Der n -dimensionale Fall ist gegeben durch $\mathbf{W}_t = (W_{1,t}, \dots, W_{n,t})^\top$ mit den unabhängigen Wiener-Prozessen $(W_{i,t})_{t \in \mathbb{T}}$ für $i = \{1, \dots, n\}$.

B. Stochastische Systeme

Die Liouville-Gleichung beschreibt die Bewegung von einem gewichteten Ensemble aus Trajektorien zu verschiedenen Anfangswerten einer gewöhnlichen Differentialgleichung. In Analogie dazu existiert eine zur Fokker-Planck-Gleichung äquivalente stochastische Differentialgleichung, die an einen Wiener-Prozess koppelt.

Definition (Stochastische Differentialgleichung) Sei $\mathbf{F}: M \times \mathbb{T} \rightarrow M$ ein Vektorfeld (Drift) und $\mathbf{D}: M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine $n \times n$ -Matrix (Diffusion), dann heißt

$$d\mathbf{X}_t = \mathbf{F}(\mathbf{X}_t, t) dt + \mathbf{D}(\mathbf{X}_t, t) d\mathbf{W}_t \quad (\text{B.13})$$

stochastische Differentialgleichung [56].

Zu Drift und Diffusion der Fokker-Planck-Gleichung (B.12) gelten die Beziehungen $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{F}$ und $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\mathbf{D}^\top$. Im autonomen Fall und mit einem Darstellungswechsel, kann (B.13) überführt werden in die Langevin-Gleichung

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{D}(\mathbf{X}, t)\boldsymbol{\xi}(t) \quad (\text{B.14})$$

mit $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)^\top$ als weißes gaußsches Rauschen für das gilt: (i) die Fluktuationen heben sich im Mittel auf, d.h. $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$ und (ii) es existiert keine Korrelation zu verschiedenen Zeiten, d.h. $\langle \xi_i(t)\xi_i(t') \rangle = 2\Gamma\delta(t-t')$ mit Γ als Normierungskonstante für alle $t, t' \in \mathbb{T}$ und $i = \{1, \dots, n\}$ [86].

Weiterführende Literatur

- EBELING et al. „On bifurcations in complex ecological systems with diffusion and noise“ [94]
- HABERLANDT „Verallgemeinerte Mastergleichungen und Fokker-Planck-Gleichungen für Prozesse in inhomogenen Systemen weitab vom Gleichgewicht“ [227]
- HÄNGGI „Correlation functions and masterequations of generalized (non-Markovian) Langevin equations“ [69]
- HÄNGGI „On the Relations between Markovian Master Equations and Stochastic Differential Equations“ [72]
- RISKEN „The Fokker-Planck Equation“ [88]
- SAN MIGUEL & CHATURVEDI „Limit cycles and detailed balance in Fokker-Planck equations“ [223]
- VAN KAMPEN „Stochastic differential equations“ [56]
- VAN KAMPEN „Itô versus Stratonovich“ [57]
- VAN KAMPEN „Stochastic Processes in Physics and Chemistry“ [58]
- ZWANZIG „Nonlinear generalized Langevin equations“ [216]

C. Fourieranalyse des Van der Pol-Systems

Während das transiente Verhalten des Van der Pol-Systems

$$\ddot{x} - \alpha (\mu - \gamma x^2) \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\text{C.1})$$

mit nacheinander fortgesetzten Lie-Reihen analytisch genähert werden kann, muss aufgrund der Periodizität des Grenzzyklus ein geschlossener Lösungsansatz verwendet werden. Dabei erweist sich für bestimmte Parameter des Van der Pol-Systems (Bifurkationsparameter μ , Van der Pol-Parameter γ , Stellparameter α und Eigenfrequenz ω_0) die diskrete Fourier-Transformation (DFT) als nützliches Werkzeug.

Im Folgenden seien alle Parameter eins und $\mathbf{l}(t) = (l_x(t), l_y(t))$ eine über das Runge-Kutta-Verfahren (RK) berechnete Trajektorie des Grenzzyklus mit den abgeschätzten Anfangswerten und der Periodendauer

$$x_0 = 2.008619861(2), \quad y_0 = 0 \quad \text{und} \quad T = 6.663286860(2). \quad (\text{C.2})$$

Das sich hieraus ergebene Amplitudenspektrum für x ist in Abb. C.1a dargestellt. Da das Spektrum einen exponentiellen Abfall zeigt und die Spektralfrequenzen einen konstanten Frequenzabstand von

$$\Delta f = 1.88587(5) \text{ Hz} \quad (\text{C.3})$$

aufweisen, lassen sich diese mit Hilfe einer Regressionsfunktion approximieren

$$R(f) = \varrho_1 e^{-\varrho_2 f + \varrho_3 e^{-\varrho_4 f}}. \quad (\text{C.4})$$

Die Regressionsparameter ergeben sich zu

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= 1.79277(10), \\ \varrho_2 &= 0.7820(1), \\ \varrho_3 &= 1.8493(1), \\ \varrho_4 &= 0.8204(1). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

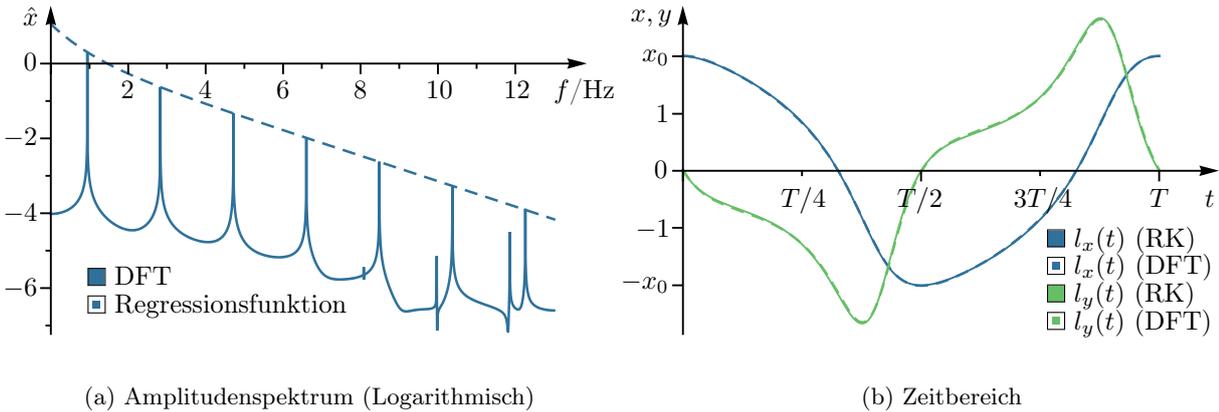


Abb. C.1.: Das Amplitudenspektrum des Van der Pol-Systems mit $\hat{x} = \text{ld}(|x|)/(2\sqrt{n})$ (Magnitude) und $n = 30 \times 10^3$ Samples sowie der Abtastfrequenz $f_s = 26$ Hz weist in logarithmischer Skalierung einen nahezu linearen Abfall mit einem konstanten Frequenzabstand von $\Delta f = 1.88587(5)$ Hz auf. Mit Hilfe einer Regressionsfunktion kann dieser Zusammenhang genutzt werden, um den Grenzzyklus analytisch zu approximieren. Das Ergebnis im Zeitbereich ist verglichen mit der sehr viel genaueren Runge-Kutta-Integration nahezu deckungsgleich.

C. Fourieranalyse des Van der Pol-Systems

Eine Approximation des Phasenverlaufs ist aufgrund des deutlich komplizierteren Funktionszusammenhangs nicht ohne weiteres möglich. Allerdings reicht es aus jede Spektralfrequenz um die selbe Phase $\Delta\nu$ im Zeitbereich zu verschieben und anschließend die Zeitachse zu jeder Frequenz gemäß $t \rightarrow t + \Delta t$ zu skalieren. Der Grenzzyklus kann damit analytisch als Fourierreihe approximiert werden gemäß

$$\begin{aligned}
 l_x(t) &= + \sum_{\substack{f=f_1 \\ f_{i+1}-f_i=\Delta f}}^{\infty} R(f) \cos(f \cdot (t + \Delta t) - \Delta\nu), \\
 l_y(t) &= - \sum_{\substack{f=f_1 \\ f_{i+1}-f_i=\Delta f}}^{\infty} R(f) f \sin(f \cdot (t + \Delta t) - \Delta\nu).
 \end{aligned}
 \tag{C.6}$$

Die erste Spektralfrequenz und die beiden Phasenparameter ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 0.94293(10) \\
 \Delta\nu &= 4.089(1), \\
 \Delta t &= 3.9501(9).
 \end{aligned}
 \tag{C.7}$$

Diese Methode ist jedoch insofern beschränkt, als dass das Van der Pol-System für beliebige Parameter im Allgemeinen kein trivial approximierbares Fourierspektrum besitzt.

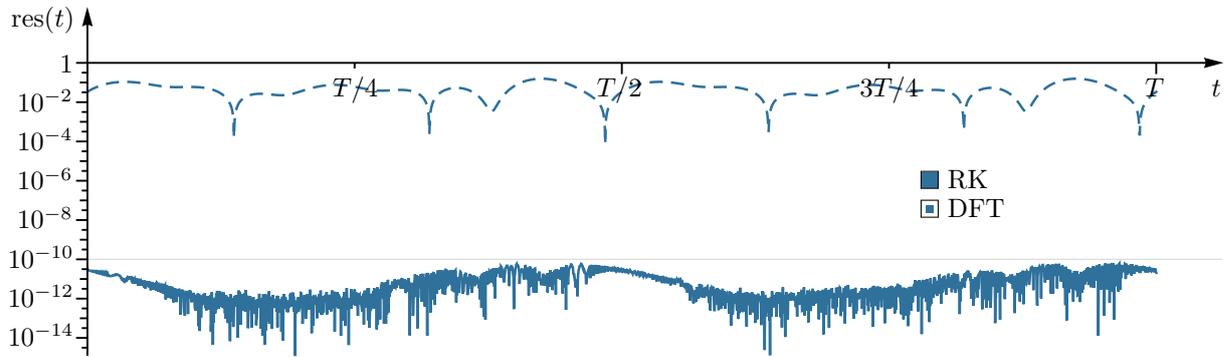


Abb. C.2.: Residuumsvergleich zwischen der numerischen Integration nach dem dreistufigen Runge-Kutta-Verfahren mit 30×10^3 Stützstellen und der analytischen Näherung nach der diskreten Fourier-Transformation. Das Runge-Kutta-Verfahren hatte das Ziel ein Residuum von 10×10^{-10} zu erreichen. Das Residuum der Fourierreihe ist mit knapp unter 10×10^{-1} deutlich schlechter, dafür jedoch analytisch.

Literaturverzeichnis

Historisches

- [1] R. Brown. „A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies“. *Philos. Mag.* **4** 21 (Sep. 1828), S. 161–173. DOI: [10.1080/14786442808674769](https://doi.org/10.1080/14786442808674769).
- [2] Ch. Wiener. „Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar flüssigen Körperzustandes und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molekularbewegungen“. *Ann. Phys.* **194** 1 (1863), S. 79–94. DOI: [10.1002/andp.18631940105](https://doi.org/10.1002/andp.18631940105).
- [3] J. C. Maxwell. „On the Dynamical Theory of Gases“. *Phil. Trans.* **157** (1867), S. 49–88. DOI: [10.1098/rstl.1867.0004](https://doi.org/10.1098/rstl.1867.0004).
- [4] T. N. Thiele. „Sur la compensation de quelques erreurs quasi-systématiques par la méthodes de moindre carrés“. *Vidensk. Selsk. Skr.* **12** (1880), S. 381–408.
- [5] H. Poincaré. „Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle“. *Résal J.* **7** (1881), S. 375–422.
- [6] H. Bruns. „Über die Integrale des Vielkörper-Problems“. *Acta Math.* **11** 1-4 (Nov. 1887), S. 22–96. DOI: [10.1007/BF02612319](https://doi.org/10.1007/BF02612319).
- [7] H. Poincaré. „Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique (Zum Dreikörperproblem und den dynamischen Gleichungen)“. *Acta Math.* **13** 1 (Dez. 1890). (Französisch), S. 1–270. DOI: [10.1007/BF02392510](https://doi.org/10.1007/BF02392510).
- [8] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Neue Methoden der Himmelsmechanik)*. 1. (Französisch). Paris: Gauthier-Villars et fils, 1892. ARK: [/13960/t9m33h838](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5:1-13960-t9m33h838).
- [9] L. Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie*. Leipzig, J. A. Barth, 1896. ARK: [13960/t18k7bb6k](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5:1-13960-t18k7bb6k).
- [10] L. Bachelier. „Théorie de la Spéculation“. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **17** 3 (1900).
- [11] A. Einstein. „Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen“. *Ann. Phys.* **322** 8 (Mai 1905), S. 549–560. DOI: [10.1002/andp.19053220806](https://doi.org/10.1002/andp.19053220806).
- [12] M. von Smoluchowski. „Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen“. *Ann. Phys.* **326** 14 (1906), S. 756–780. DOI: [10.1002/andp.19063261405](https://doi.org/10.1002/andp.19063261405).
- [13] P. Langevin. „Sur la théorie du mouvement brownien“. *C. R. Acad. Sci.* **146** (1908), S. 530–533. DOI: [10.1119/1.18725](https://doi.org/10.1119/1.18725).
- [14] J. Perrin. „L'agitation moléculaire et le mouvement brownien“. *C. R. Acad. Sci.* **146** (1908), S. 967–970. ARK: [12148/cb343481087](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5:1-12148-cb343481087).
- [15] P. Ehrenfest und T. Ehrenfest. „Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik“. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*. **4**. 32. Leipzig: Teubner, 1911.
- [16] W. D. Macmillan. „On Poincaré's correction to Bruns' theorem“. *Bull. Amer. Math. Soc.* **19** 7 (Apr. 1913), S. 349–355. URL: <http://projecteuclid.org/euclid.bams/1183422208>.
- [17] A. D. Fokker. „Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld“. *Ann. Phys.* **348** 5 (1914), S. 810–820. DOI: [10.1002/andp.19143480507](https://doi.org/10.1002/andp.19143480507).
- [18] M. Planck. „Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie“. *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss.* (Mai 1917), S. 324–341.

- [19] W. Schottky. „Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern“. *Ann. Phys.* **362** 23 (1918), S. 541–567. DOI: [10.1002/andp.19183622304](https://doi.org/10.1002/andp.19183622304).
- [20] R. v. Mises. „Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik“. *Physik. Z.* **21** (1920), S. 225–232, 256–264.
- [21] W. Schottky. „Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit“. *Ann. Phys.* **370** 9 (1921), S. 79–81. DOI: [10.1002/andp.19213700906](https://doi.org/10.1002/andp.19213700906).
- [22] E. Fermi. „Beweis, daß ein mechanisches Normalsystem im allgemeinen quasi-ergodisch ist“. *Physik. Z.* **24** (1923), S. 261–264.
- [23] N. Wiener. „Differential-Space“. *J. Math. Phys.* **2** 1 (Okt. 1923), S. 131–174. DOI: [10.1002/sapm192321131](https://doi.org/10.1002/sapm192321131).
- [24] E. Fermi. „Über die Existenz quasi-ergodischer Systeme“. *Physik. Z.* **25** (1924), S. 166–167.
- [25] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems*. **9**. Colloquium Publications. New York: AMS, Nov. 1927. ARK: [13960/t9q24d239](https://arxiv.org/abs/13960/t9q24d239).
- [26] P. Höflich. „Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Ergodenhypothese“. *Z. Phys.* **41** 5 (Nov. 1927), S. 636–673. DOI: [10.1007/BF01390493](https://doi.org/10.1007/BF01390493).
- [27] B. van der Pol und J. van der Mark. „Frequency Demultiplication“. *Nature* **120** 3019 (Sep. 1927), S. 363–364. DOI: [10.1038/120363a0](https://doi.org/10.1038/120363a0).
- [28] S. Chapman. „On the Brownian Displacements and Thermal Diffusion of Grains Suspended in a Non-Uniform Fluid“. *Proc. R. Soc. A* **119** 781 (Mai 1928), S. 34–54. DOI: [10.1098/rspa.1928.0082](https://doi.org/10.1098/rspa.1928.0082).
- [29] J. B. Johnson. „Thermal Agitation of Electricity in Conductors“. *Phys. Rev.* **32** 1 (Juli 1928), S. 97–109. DOI: [10.1103/PhysRev.32.97](https://doi.org/10.1103/PhysRev.32.97).
- [30] H. Nyquist. „Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors“. *Phys. Rev.* **32** 1 (Juli 1928), S. 110–113. DOI: [10.1103/PhysRev.32.110](https://doi.org/10.1103/PhysRev.32.110).
- [31] L. Mandelstam und N. Papalexi. „Über Resonanzerscheinungen bei Frequenzteilung“. *Z. Phys.* **73** 3-4 (März 1931), S. 223–248. DOI: [10.1007/BF01351217](https://doi.org/10.1007/BF01351217).
- [32] A. Kolmogoroff. „Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse“. *Math. Ann.* **108** 1 (Dez. 1933), S. 149–160. DOI: [10.1007/BF01452829](https://doi.org/10.1007/BF01452829).
- [33] P. Lévy. „Complément à l'étude des espaces V et W.“ *C. R. Acad. Sci.* **198** (Mai 1934), S. 1661–1662. ARK: [12148/bpt6k31506](https://arxiv.org/abs/12148/bpt6k31506).
- [34] P. Lévy. „Les généralisations de l'espace différentiel de N. Wiener“. *C. R. Acad. Sci.* **198** (Feb. 1934), S. 786–788. ARK: [12148/bpt6k31506](https://arxiv.org/abs/12148/bpt6k31506).
- [35] P. Lévy. „Sur les espaces V et W“. *C. R. Acad. Sci.* **198** (März 1934), S. 1203–1205. ARK: [12148/bpt6k31506](https://arxiv.org/abs/12148/bpt6k31506).
- [36] B. van der Pol. „The Nonlinear Theory of Electric Oscillations“. *Proc. IRE* **22** 9 (Sep. 1934), S. 1051–1086. DOI: [10.1109/JRPROC.1934.226781](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1934.226781).
- [37] L. Mandelstam und N. Papalexi. „Expose Des Recherches Recentes Sur Les Oscillations Non Lineaires (Report on Recent Research on Nonlinear Oscillations)“. *Technical Physics of the U.S.S.R.* **2** 2-3 (1935), S. 81–134. ARK: [13960/t9n30jq45](https://arxiv.org/abs/13960/t9n30jq45).
- [38] N. N. Bogolyubov und N. M. Krylov. „Fokker-Planck equations generated in perturbation theory by a method based on the spectral properties of a perturbed Hamiltonian“. *Zap. Kaf. Fiz. Akad. Nauk Ukr. SSR* **4** (1939), S. 81–157.
- [39] K. Itō. „Stochastic integral“. *Proc. Imp. Acad.* **20** 8 (Okt. 1944), S. 519–524. DOI: [10.3792/pia/1195572786](https://doi.org/10.3792/pia/1195572786).
- [40] D. K. C. MacDonald. „VIII. The Brownian movement of linear and non-linear systems“. *Philos. Mag.* **45** 360 (1954), S. 63–68. DOI: [10.1080/14786440108520421](https://doi.org/10.1080/14786440108520421).
- [41] D. Polder. „Note on the theory of Brownian motion in non-linear systems“. *Philos. Mag.* **45** 360 (1954), S. 69–72. DOI: [10.1080/14786440108520422](https://doi.org/10.1080/14786440108520422).

- [42] D. K. C. MacDonald. „Brownian Movement“. *Phys. Rev.* **108** 3 (Nov. 1957), S. 541–545. DOI: [10.1103/PhysRev.108.541](https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.541).
- [43] C. T. J. Alkemade. „On the problem of brownian motion of non-linear systems“. *Physica* **24** 6-10 (Aug. 1958), S. 1029–1034. DOI: [10.1016/S0031-8914\(58\)80121-4](https://doi.org/10.1016/S0031-8914(58)80121-4).
- [44] W. A. Edson. „Noise in Oscillators“. *Proc. IRE* **48** 8 (Aug. 1960), S. 1454–1466. DOI: [10.1109/JRPROC.1960.287573](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1960.287573).
- [45] R. D. Hempstead und M. Lax. „Classical Noise. VI. Noise in Self-Sustained Oscillators near Threshold“. *Phys. Rev.* **161** 2 (Sep. 1967), S. 350–366. DOI: [10.1103/PhysRev.161.350](https://doi.org/10.1103/PhysRev.161.350).
- [46] M. Lax. „Classical Noise. V. Noise in Self-Sustained Oscillators“. *Phys. Rev.* **160** 2 (Aug. 1967), S. 290–307. DOI: [10.1103/PhysRev.160.290](https://doi.org/10.1103/PhysRev.160.290).
- [47] G. Dörfel. „The early history of thermal noise: The long way to paradigm change“. *Ann. Phys.* **524** 8 (Aug. 2012), S. 117–121. DOI: [10.1002/andp.201200736](https://doi.org/10.1002/andp.201200736).

Meixner (1960er)

- [48] J. Meixner. „Thermodynamics of Electrical Networks and the Onsager-Casimir Reciprocal Relations“. *J. Math. Phys.* **4** 2 (Feb. 1963), S. 154–159. DOI: [10.1063/1.1703938](https://doi.org/10.1063/1.1703938).
- [49] J. Meixner. „Entropie im Nichtgleichgewicht“. *Rheol. Acta* **7** 1 (Feb. 1968), S. 8–13. DOI: [10.1007/BF01970310](https://doi.org/10.1007/BF01970310).
- [50] J. Meixner. „Thermodynamik der Vorgänge in einfachen fluiden Medien und die Charakterisierung der Thermodynamik irreversibler Prozesse“. *Z. Phys.* **219** 1 (Feb. 1969), S. 79–104. DOI: [10.1007/BF01392753](https://doi.org/10.1007/BF01392753).

Landauer (1960er-1970er)

- [51] R. Landauer. „Fluctuations in Bistable Tunnel Diode Circuits“. *J. Appl. Phys.* **33** 7 (Juli 1962), S. 2209–2216. DOI: [10.1063/1.1728929](https://doi.org/10.1063/1.1728929).
- [52] R. Landauer. „Stability and entropy production in electrical circuits“. *J. Stat. Phys.* **13** 1 (Juli 1975), S. 1–16. DOI: [10.1007/BF01012596](https://doi.org/10.1007/BF01012596).

van Kampen (1960er-2000er)

- [53] N. G. van Kampen. „Thermal Fluctuations in a Nonlinear System“. *Phys. Rev.* **110** 2 (Apr. 1958). DOI: [10.1103/PhysRev.110.319](https://doi.org/10.1103/PhysRev.110.319).
- [54] N. G. van Kampen. „Non-linear thermal fluctuations in a diode“. *Physica* **26** 8 (Aug. 1960), S. 585–604. DOI: [10.1016/0031-8914\(60\)90121-X](https://doi.org/10.1016/0031-8914(60)90121-X).
- [55] N. G. van Kampen. „Fluctuations and noise in physical theory“. *Phys. B+C* **83** 1 (Mai 1976), S. 1–5. DOI: [10.1016/0378-4363\(76\)90087-5](https://doi.org/10.1016/0378-4363(76)90087-5).
- [56] N. G. van Kampen. „Stochastic differential equations“. *Phys. Rep.* **24** 3 (März 1976), S. 171–228. DOI: [10.1016/0370-1573\(76\)90029-6](https://doi.org/10.1016/0370-1573(76)90029-6).
- [57] N. G. van Kampen. „Itô versus Stratonovich“. *J. Stat. Phys.* **24** 1 (Jan. 1981), S. 175–187. DOI: [10.1007/BF01007642](https://doi.org/10.1007/BF01007642).
- [58] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3. Aufl. North Holland, März 2007. ISBN: 0444529659.

Gerlich (1970er)

- [59] G. Gerlich. „Die verallgemeinerte Liouville-Gleichung“. *Physica* **69** 2 (Nov. 1973), S. 458–466. DOI: [10.1016/0031-8914\(73\)90083-9](https://doi.org/10.1016/0031-8914(73)90083-9).
- [60] G. Gerlich. „Zur Herleitung der n-Zeiten BBGKY-Hierarchie“. *Physica* **68** 1 (Aug. 1973), S. 107–122. DOI: [10.1016/0031-8914\(73\)90133-X](https://doi.org/10.1016/0031-8914(73)90133-X).
- [61] G. Gerlich. „Eine Verallgemeinerung des Stratonovich-Verfahrens für Anwendungen in der statistischen Mechanik“. *Phys. A* **82** 4 (1976), S. 477–499. DOI: [10.1016/0378-4371\(76\)90077-7](https://doi.org/10.1016/0378-4371(76)90077-7).

- [62] G. Gerlich. *Eine neue Einführung in die statistischen und mathematischen Methoden der Quantentheorie*. Vieweg+Teubner, 1977. DOI: [10.1007/978-3-322-85338-7](https://doi.org/10.1007/978-3-322-85338-7).
- [63] G. Gerlich und H. Kagermann. „Herleitung kinetischer Gleichungen mit dem verallgemeinerten Stratonovich-Verfahren“. *Phys. A* **88** 2 (Aug. 1977), S. 283–304. DOI: [10.1016/0378-4371\(77\)90005-X](https://doi.org/10.1016/0378-4371(77)90005-X).
- [64] A. Emmerich, G. Gerlich und H. Kagermann. „Particle motion in stochastic force fields“. *Phys. A* **92** 3 (Juli 1978), S. 362–378. DOI: [10.1016/0378-4371\(78\)90137-1](https://doi.org/10.1016/0378-4371(78)90137-1).
- [65] G. Gerlich und W. Wulbrand. „Kinetische Gleichungen für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden“. *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* **29** (1978), S. 97–105. URL: <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00052207>.
- [66] G. Gerlich, H. Kagermann und E. W. Richter. „Anomalous plasma diffusion across a strong magnetic field“. *Phys B+C* **96** 3 (Mai 1979), S. 347–366. DOI: [10.1016/0378-4363\(79\)90021-4](https://doi.org/10.1016/0378-4363(79)90021-4).
- [67] G. Gerlich und H. Kagermann. „Über kinetische Gleichungen für stochastische Prozesse mit entstehenden und vergehenden Pfaden“. *Phys. A* **115** 1 (Sep. 1982), S. 247–258. DOI: [10.1016/0378-4371\(82\)90139-X](https://doi.org/10.1016/0378-4371(82)90139-X).

 Hänggi (seit 1970er)

- [68] P. Hänggi und H. Thomas. „Linear response and fluctuation theorems for nonstationary stochastic processes“. *Z. Phys. B* **22** 3 (Sep. 1975), S. 295–300. DOI: [10.1007/BF01362253](https://doi.org/10.1007/BF01362253).
- [69] P. Hänggi. „Correlation functions and master equations of generalized (non-Markovian) Langevin equations“. *Z. Phys. B* **31** 4 (Dez. 1978), S. 407–416. DOI: [10.1007/BF01351552](https://doi.org/10.1007/BF01351552).
- [70] P. Hänggi. „Connection between deterministic and stochastic descriptions of nonlinear systems“. *Helv. Phys. Acta* **53** 4 (Nov. 1980), S. 491–496. DOI: [10.5169/seals-115133](https://doi.org/10.5169/seals-115133).
- [71] P. Hänggi. „Dynamics of nonlinear oscillators with fluctuating parameters“. *Phys. Lett. A* **78** 4 (Aug. 1980), S. 304–306. DOI: [10.1016/0375-9601\(80\)90377-1](https://doi.org/10.1016/0375-9601(80)90377-1).
- [72] P. Hänggi, K. E. Shuler und I. Oppenheim. „On the relations between Markovian master equations and stochastic differential equations“. *Phys. A* **107** 1 (Mai 1981), S. 143–157. DOI: [10.1016/0378-4371\(81\)90028-5](https://doi.org/10.1016/0378-4371(81)90028-5).
- [73] P. Hänggi und P. Riseborough. „Dynamics of nonlinear dissipative oscillators“. *Am. J. Phys.* **51** 4 (Apr. 1983), S. 347–352. DOI: [10.1119/1.13246](https://doi.org/10.1119/1.13246).
- [74] D. Ryter, P. Talkner und P. Hänggi. „Rate of phase slips of a driven Van der Pol oscillator at low noise“. *Phys. Lett. A* **93** 9 (Feb. 1983), S. 447–450. DOI: [10.1016/0375-9601\(83\)90627-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90627-8).
- [75] P. Talkner und P. Hänggi. „Activation rates in dispersive optical bistability with amplitude and phase fluctuations: A case without detailed balance“. *Phys. Rev. A* **29** 2 (Feb. 1984), S. 768–773. DOI: [10.1103/PhysRevA.29.768](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.29.768).
- [76] L. Fronzoni u. a. „Bistable oscillator dynamics driven by nonwhite noise“. *Phys. Rev. A* **33** 5 (Mai 1986), S. 3320–3327. DOI: [10.1103/PhysRevA.33.3320](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.3320).
- [77] P. Hänggi und P. Jung. „Bistability in active circuits: Application of a novel Fokker-Planck approach“. *IBM J. Res. Dev.* **32** 1 (Jan. 1988), S. 119–126. DOI: [10.1147/rd.321.0119](https://doi.org/10.1147/rd.321.0119).

 Steeb (seit 1970er)

- [78] W.-H. Steeb. „Nonlinear systems of differential equations involving limit cycles and conservative Hamiltonian systems“. *Phys. Lett. A* **62** 4 (Aug. 1977), S. 211–213. DOI: [10.1016/0375-9601\(77\)90773-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(77)90773-3).
- [79] W.-H. Steeb. „Generalized Liouville equation, entropy, and dynamic systems containing limit cycles“. *Phys. A* **95** 1 (Jan. 1979), S. 181–190. DOI: [10.1016/0378-4371\(79\)90050-5](https://doi.org/10.1016/0378-4371(79)90050-5).
- [80] W.-H. Steeb. „A comment on the generalized Liouville equation“. *Found. Phys.* **10** 5-6 (Juni 1980), S. 485–493. DOI: [10.1007/BF00708744](https://doi.org/10.1007/BF00708744).
- [81] A. Kunick und W.-H. Steeb. „Coupled chaotic oscillators“. *J. Phys. Soc.* **54** 4 (Apr. 1985), S. 1220–1223. DOI: [10.1143/JPSJ.54.1220](https://doi.org/10.1143/JPSJ.54.1220).

- [82] T. Kapitaniak und W.-H. Steeb. „Transition to hyperchaos in coupled generalized van der Pol equations“. *Phys. Lett. A* **152** 1-2 (Jan. 1991), S. 33–36. DOI: [10.1016/0375-9601\(91\)90624-H](https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90624-H).
- [83] W.-H. Steeb. „Lie Series Technique, Ordinary Differential Equations and Dynamical Integration“. *Z. Naturforsch.* **59a** 6 (2004), S. 349–352. URL: <http://znaturforsch.com/aa/v59a/s59a0349.pdf>.
- [84] R. Stoop und W.-H. Steeb. *Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen*. Basel: Birkhäuser, 2006. DOI: [10.1007/3-7643-7551-5](https://doi.org/10.1007/3-7643-7551-5).

Riskén (1970er-1990er)

- [85] H. Riskén. „Solutions of the Fokker-Planck equation in detailed balance“. *Z. Phys.* **251** 3 (Juni 1972), S. 231–243. DOI: [10.1007/BF01379601](https://doi.org/10.1007/BF01379601).
- [86] H. Riskén und H. D. Vollmer. „On the application of truncated generalized Fokker-Planck equations“. *Z. Phys. B* **35** 3 (Sep. 1979), S. 313–315. DOI: [10.1007/BF01319854](https://doi.org/10.1007/BF01319854).
- [87] H. Riskén und H. D. Vollmer. „On solutions of truncated Kramers-Moyal expansions; continuum approximations to the Poisson process“. *Z. Phys. B* **66** 2 (Juni 1987), S. 257–262. DOI: [10.1007/BF01311663](https://doi.org/10.1007/BF01311663).
- [88] H. Riskén und T. Frank. *The Fokker-Planck Equation*. Hrsg. von H. Haken. 2. Aufl. **18**. Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer, 1996. ISBN: 354061530X. DOI: [10.1007/978-3-642-61544-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61544-3).

Ebeling et al. (seit 1980er)

- [89] W. Ebeling. „Problems of a Statistical Ensemble Theory for Systems Far from Equilibrium“. *Stochastic Processes in Physics, Chemistry, and Biology*. Hrsg. von J. A. Freund und T. Pöschel. **557**. Lecture Notes in Physics. Springer, Jan. 2000, S. 390–399. DOI: [10.1007/3-540-45396-2_35](https://doi.org/10.1007/3-540-45396-2_35).
- [90] U. Erdmann u. a. „Brownian particles far from equilibrium“. *Eur. Phys. J. B* **15** 1 (Mai 2000), S. 105–113. DOI: [10.1007/s100510051104](https://doi.org/10.1007/s100510051104).
- [91] F. Schweitzer, W. Ebeling und B. Tilch. „Statistical Mechanics of Canonical-Dissipative Systems and Applications to Swarm Dynamics“. *Phys. Rev. E* **64** 2 (Sep. 2001), S. 021110. DOI: [10.1103/PhysRevE.64.021110](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.021110).
- [92] W. Ebeling und I. M. Sokolov. *Statistical Thermodynamics and Stochastic Theory of Nonlinear Systems Far from Equilibrium*. World Scientific Publishing Company, 2005. ISBN: 978-9810213824.
- [93] W. Ebeling, E. Gudowska-Nowak und A. Fiasconaro. „Statistical distributions for Hamiltonian systems coupled to energy reservoirs and applications to molecular energy conversion“. *Acta. Phys. Pol. B* **39** 5 (Mai 2008), S. 1251–1272. PACS: [05.20.Dd](https://arxiv.org/abs/05.20.Dd), [05.40.Jc](https://arxiv.org/abs/05.40.Jc), [05.45.-a](https://arxiv.org/abs/05.45.-a).
- [94] W. Ebeling, R. Feistel und S. Feistel. „On bifurcations in complex ecological systems with diffusion and noise“. *Ecological Complexity* **14** (Juni 2013). Special Issue on the occasion of Horst Malchow’s 60th birthday, S. 2–7. DOI: [10.1016/j.ecocom.2012.09.007](https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2012.09.007).

Mathis (seit 1980er)

- [95] W. Mathis. *Theorie nichtlinearer Netzwerke*. Berlin: Springer, 1987. DOI: [10.1007/978-3-642-83227-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-83227-7).
- [96] W. Mathis. „Geometric theory of nonlinear dynamical networks“. *Computer Aided Systems Theory — EUROCAST '91*. Hrsg. von F. Pichler und R. Moreno-Díaz. **585**. Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, Apr. 1992, S. 52–65. DOI: [10.1007/BFb0021004](https://doi.org/10.1007/BFb0021004).
- [97] G. Kurz und W. Mathis. *Oszillatoren. Schaltungstechnik, Analyse, Eigenschaften*. Hüthig, 1994. ISBN: 9783778522516.
- [98] W. Mathis. „Historical remarks to the history of electrical oscillators“. *Proc. MTNS*. **13**. Padova (Italien), Juli 1998.
- [99] W. Mathis. „Nonlinear Electronic Circuits - An Overview“. *Proc. MIXDES*. **7**. Gdynia (Polen), Juni 2000, S. 15–17.

- [100] W. Mathis und P. Russer. *Oscillator Design*. John Wiley & Sons, Inc., Apr. 2005. DOI: [10.1002/0471654507.eme301](https://doi.org/10.1002/0471654507.eme301).
- [101] M. Prochaska, K. Bohle und W. Mathis. „A design approach for integrated CMOS LC-tank oscillators using bifurcation analysis“. *ARS* **4** (Sep. 2006), S. 143–148. URL: www.adv-radio-sci.net/4/143/2006/.
- [102] W. Mathis und J. Bremer. „Modelling and Design Concepts for Electronic Oscillators and its Synchronization“. *TOCSJ* **3** (Okt. 2009), S. 47–60. DOI: [10.2174/1874110X00903010047](https://doi.org/10.2174/1874110X00903010047).
- [103] W. Mathis und T. Thiessen. „On noise analysis of oscillators based on statistical mechanics“. *Proc. MIXDES*. **16**. Lodz (Polen), Juni 2009, S. 472–477.
- [104] W. Mathis, F. Richter und R. Mathis. „Stochastic Behavior of Dissipative Hamiltonian Systems with Limit Cycles“. *Proc. MATHMOD*. **7**. Wien, Feb. 2012.
- [105] W. Mathis und R. Mathis. „Dissipative Nambu systems and oscillator circuit design“. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE* **5** 3 (Juli 2014), S. 259–271. DOI: [10.1587/nolta.5.259](https://doi.org/10.1587/nolta.5.259).
- [106] W. Mathis und R. Mathis. „4-Dimensional Polynomial Dynamical Systems with Prescribed Algebraic Limit Cycles using Nambu Brackets“. *Proc. INDS*. **4**. Klagenfurt, Juli 2015.
-
- Kaertner (seit 1990er)
- [107] F. X. Kärtner. „Untersuchung des Rauschverhaltens von Oszillatoren“. Diss. München: Technische Universität München, Okt. 1988.
- [108] F. X. Kärtner. „Determination of the correlation spectrum of oscillators with low noise“. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **37** 1 (Jan. 1989), S. 90–101. DOI: [10.1109/22.20024](https://doi.org/10.1109/22.20024).
- [109] F. X. Kärtner. „Analysis of white and $f^{-\alpha}$ noise in oscillators“. *Int. J. Circ. Theor. App.* **18** 5 (Sep. 1990), S. 485–519. DOI: [10.1002/cta.4490180505](https://doi.org/10.1002/cta.4490180505).
-
- Hajimiri (seit 1990er)
- [110] A. Hajimiri und T. H. Lee. „A General Theory of Phase Noise in Electrical Oscillators“. *IEEE J. Solid-State Circuits* **33** 2 (Feb. 1998), S. 179–194. DOI: [10.1109/4.658619](https://doi.org/10.1109/4.658619).
- [111] A. Hajimiri, S. Limotyrakis und T. H. Lee. „Jitter and phase noise in ring oscillators“. *IEEE J. Solid-State Circuits* **34** 6 (Juni 1999), S. 790–804. DOI: [10.1109/4.766813](https://doi.org/10.1109/4.766813).
- [112] T. H. Lee und A. Hajimiri. „Oscillator Phase Noise: A Tutorial“. *IEEE J. Solid-State Circuits* **35** 3 (März 2000), S. 326–336. DOI: [10.1109/4.826814](https://doi.org/10.1109/4.826814).
-
- Demir (seit 1990er)
- [113] A. Demir und J. Roychowdhury. *On the Validity of Orthogonally Decomposed Perturbations in Phase Noise Analysis*. Techn. Ber. Murray Hill: Bell Laboratories, 1997.
- [114] A. Demir. „Floquet theory and non-linear perturbation analysis for oscillators with differential-algebraic equations“. *Int. J. Circ. Theor. App.* **28** 2 (März 2000), S. 163–185. DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-007X\(200003/04\)28:2<163::AID-CTA101>3.0.CO;2-K](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-007X(200003/04)28:2<163::AID-CTA101>3.0.CO;2-K).
- [115] A. Demir, A. Mehrotra und J. Roychowdhury. „Phase Noise in Oscillators: A Unifying Theory and Numerical Methods for Characterization“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **47** 5 (Mai 2000), S. 655–674. DOI: [10.1109/81.847872](https://doi.org/10.1109/81.847872).
- [116] A. Demir. „Fully nonlinear oscillator noise analysis: an oscillator with no asymptotic phase“. *Int. J. Circ. Theor. App.* **35** 2 (März 2007), S. 175–203. DOI: [10.1002/cta.387](https://doi.org/10.1002/cta.387).
-
- Weiss & Mathis (1990er-2000er)
- [117] L. Weiss und W. Mathis. „A Hamiltonian formulation for complete nonlinear RLC-networks“. *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **44** 9 (Sep. 1997), S. 843–846. DOI: [10.1109/81.622990](https://doi.org/10.1109/81.622990).
- [118] L. Weiss und W. Mathis. „Nonlinear nonequilibrium thermodynamics of nonlinear electrical networks“. *Proc. ECCTD*. **1**. Ungarn, Aug. 1997, S. 185–190.

- [119] L. Weiss und W. Mathis. „The Langevin equation and a more general approach to internal noise in nonlinear networks“. *Proc. IEEE ISCAS*. **2**. 1997, S. 885–888. DOI: [10.1109/ISCAS.1997.621855](https://doi.org/10.1109/ISCAS.1997.621855).
- [120] L. Weiss und W. Mathis. „A thermodynamical approach to noise in non-linear networks“. *Int. J. Circ. Theor. App.* **26** 2 (März 1998), S. 147–165. DOI: [10.1002/\(SICI\)1097-007X\(199803/04\)26:2<147::AID-CTA998>3.0.CO;2-E](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-007X(199803/04)26:2<147::AID-CTA998>3.0.CO;2-E).
- [121] L. Weiss und W. Mathis. „Irreversible thermodynamics and thermal noise of non-linear networks“. *COMPEL* **17** 5 (1998), S. 635–648. DOI: [10.1108/03321649810220964](https://doi.org/10.1108/03321649810220964).
- [122] L. Weiss und W. Mathis. „N-port reciprocity and irreversible thermodynamics“. *Proc. IEEE ISCAS*. **3**. Mai 1998, S. 407–410. DOI: [10.1109/ISCAS.1998.704036](https://doi.org/10.1109/ISCAS.1998.704036).
- [123] L. Weiss, W. Mathis und L. Trajkovic. „A generalization of Brayton-Moser’s mixed potential function“. *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **45** 4 (Apr. 1998), S. 423–427. DOI: [10.1109/81.669065](https://doi.org/10.1109/81.669065).
- [124] L. Weiss. „Rauschen in nichtlinearen elektronischen Schaltungen und Bauelementen - ein thermodynamischer Zugang“. Diss. Magdeburg: Universität Magdeburg, Juni 1999. ISBN: 3-8007-2497-9.
- [125] L. Weiss und W. Mathis. „A thermodynamic noise model for nonlinear resistors“. *IEEE Electron Device Letters* **20** 8 (Aug. 1999), S. 402–404. DOI: [10.1109/55.778157](https://doi.org/10.1109/55.778157).
- [126] L. Weiss und W. Mathis. „Noise equivalent circuit for nonlinear resistors“. *Proc. IEEE ISCAS*. **5**. USA, Mai 1999, S. 314–317. DOI: [10.1109/ISCAS.1999.777572](https://doi.org/10.1109/ISCAS.1999.777572).
- [127] L. Weiss und W. Mathis. „A unified description of thermal noise and shot noise in nonlinear resistors“. *AIP Conference Proceedings* **511** 1 (Juli 2000), S. 89–100. DOI: [10.1063/1.60016](https://doi.org/10.1063/1.60016).
- [128] W. Mathis und L. Weiss. „Noise Analysis of Nonlinear Electrical Circuits and Devices“. *Modeling, Simulation, and Optimization of Integrated Circuits*. Hrsg. von K. Antreich u. a. **146**. ISNM International Series of Numerical Mathematics. Basel: Birkhäuser, 2003, S. 269–282. DOI: [10.1007/978-3-0348-8065-7_17](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8065-7_17).

— Ham (seit 2000er) —

- [129] D. Ham und A. Hajimiri. „Virtual Damping in Oscillators“. *Proc. IEEE CICC*. Mai 2002, S. 213–216. DOI: [10.1109/CICC.2002.1012799](https://doi.org/10.1109/CICC.2002.1012799).
- [130] D. Ham und A. Hajimiri. „Virtual damping and Einstein relation in oscillators“. *IEEE J. Solid-State Circuits* **38** 3 (März 2003), S. 407–418. DOI: [10.1109/JSSC.2002.808283](https://doi.org/10.1109/JSSC.2002.808283).
- [131] D. Ham, W. Andress und D. Ricketts. „Phase noise in oscillators“. *Proceedings of the International Workshop on SiP/ SoC Integration of MEMS and Passive Components with RF-ICs*. Japan, März 2004, S. 57–68.

— Klages (seit 2000er) —

- [132] R. Klages. *Microscopic Chaos, Fractals, and Transport in Nonequilibrium Steady States*. 2004. URL: <http://www.maths.qmul.ac.uk/~klages/publ/hthesist1.pdf>.

— Stahl (2010er) —

- [133] W. Mathis, D. Stahl und R. Mathis. „Oscillator synthesis based on Nambu mechanics with canonical dissipative damping“. *Proc. ECCTD*. Dresden, Sep. 2013, S. 1–4. DOI: [10.1109/ECCTD.2013.6662248](https://doi.org/10.1109/ECCTD.2013.6662248).
- [134] D. Stahl und W. Mathis. „Coupling aspects between two coils in arbitrary position“. *International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. Sep. 2013, S. 1020–1023. DOI: [10.1109/ICEAA.2013.6632396](https://doi.org/10.1109/ICEAA.2013.6632396).

— Dynamische Systeme —

- [135] J. Liouville. „Sur la théorie de la variation des constantes arbitraires“. *J. Math. Pures Appl.* **3** (1838), S. 342–349.
- [136] L. Brillouin. „Can the Rectifier Become a Thermodynamical Demon?“ *Phys. Rev.* **78** 5 (Apr. 1950), S. 627. DOI: [10.1103/PhysRev.78.627.2](https://doi.org/10.1103/PhysRev.78.627.2).

- [137] H. Lewy. „An example of a smooth linear partial differential equation without solution“. *Ann. Math.* **66** 1 (Juli 1957), S. 155–158. DOI: [10.2307/1970121](https://doi.org/10.2307/1970121).
- [138] D. M. Grobman. „Ein Homöomorphismus der Systeme von Differentialgleichungen“. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **128** (1959). (Russisch), S. 880–881.
- [139] P. Hartman. „A lemma in the theory of structural stability of differential equations“. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), S. 610–620. DOI: [10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1960-0121542-7).
- [140] B. Saltzman. „Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem I“. *J. Atmos. Sci.* **19** 4 (Juli 1962), S. 329–341. DOI: [10.1175/1520-0469\(1962\)019<0329:FAFCAA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1962)019<0329:FAFCAA>2.0.CO;2).
- [141] E. N. Lorenz. „Deterministic Nonperiodic Flow“. *J. Atmos. Sci.* **20** 2 (März 1963), S. 130–141. DOI: [10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2).
- [142] A. A. Andronov u. a. *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*. 1967, übersetzt 1971. ARK: [13960/t94753b4g](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:5:1-39660-p0111-9).
- [143] M. W. Hirsch und S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. **60**. Pure and Applied Mathematics. New York: Academic Press, 1974. DOI: [10.1016/S0079-8169\(08\)60657-1](https://doi.org/10.1016/S0079-8169(08)60657-1).
- [144] K. R. Schneider. „Über eine Integralgleichungsmethode in der Theorie autonomer Schwingungen und ihre Anwendung auf Bifurkationsprobleme“. *Math. Nachr.* **69** 1 (1975), S. 191–204. DOI: [10.1002/mana.19750690118](https://doi.org/10.1002/mana.19750690118).
- [145] J. E. Marsden und M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Hrsg. von F. John u. a. **19**. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1976. DOI: [10.1007/978-1-4612-6374-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6374-6).
- [146] A. Mees und L.O. Chua. „The Hopf bifurcation theorem and its applications to nonlinear oscillations in circuits and systems“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **26** 4 (Apr. 1979), S. 235–254. DOI: [10.1109/TCS.1979.1084636](https://doi.org/10.1109/TCS.1979.1084636).
- [147] K. R. Schneider. „Andronov-Hopf-Bifurkation im Falle stetiger Parameterabhängigkeit“. *ZAMM* **60** 1 (1980), S. 19–24. DOI: [10.1002/zamm.19800600104](https://doi.org/10.1002/zamm.19800600104).
- [148] K. R. Schneider. „On the Application of Integral Manifolds to Hopf Bifurcation“. *Math. Nachr.* **97** 1 (1980), S. 313–323. DOI: [10.1002/mana.19800970127](https://doi.org/10.1002/mana.19800970127).
- [149] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff und Y.-H. Wan. *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*. **41**. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge, Feb. 1981. ISBN: 9780521231589.
- [150] D. Henry. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Hrsg. von J.-M. Morel und B. Teissier. **840**. Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer, 1981. DOI: [10.1007/BFb0089647](https://doi.org/10.1007/BFb0089647).
- [151] J. Carr. *Applications of Centre Manifold Theory*. Hrsg. von J. E. Marsden und L. Sirovich. **35**. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, 1982. DOI: [10.1007/978-1-4612-5929-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5929-9).
- [152] L. Andrey. „The rate of entropy change in non-hamiltonian systems“. *Phys. Lett. A* **111** 1-2 (Aug. 1985), S. 45–46. DOI: [10.1016/0375-9601\(85\)90799-6](https://doi.org/10.1016/0375-9601(85)90799-6).
- [153] A. Lasota und M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. Cambridge, 1985. ISBN: 9780511897474. DOI: [10.1017/CB09780511897474](https://doi.org/10.1017/CB09780511897474).
- [154] J. Milnor. „On the concept of attractor“. *Commun. Math. Phys.* **99** 2 (Juni 1985), S. 177–195. DOI: [10.1007/BF01212280](https://doi.org/10.1007/BF01212280).
- [155] L. Andrey. „Note concerning the paper “the rate of entropy change in non-hamiltonian systems”“. *Phys. Lett. A* **114** 4 (Feb. 1986), S. 183–184. DOI: [10.1016/0375-9601\(86\)90201-X](https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90201-X).
- [156] A. Katok u. a. *Invariant Manifolds, Entropy and Billiards; Smooth Maps with Singularities*. Hrsg. von A. Dold und B. Eckmann. Lecture Notes in Mathematics 1222. Berlin: Springer, 1986. DOI: [10.1007/BFb0099031](https://doi.org/10.1007/BFb0099031).
- [157] G. A. Kriegsmann. „The rapid bifurcation of the Wien bridge oscillator“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **34** 9 (Sep. 1987), S. 1093–1096. DOI: [10.1109/TCS.1987.1086245](https://doi.org/10.1109/TCS.1987.1086245).
- [158] G. A. Kriegsmann. „Bifurcation in Classical Bipolar Transistor Oscillator Circuits“. *SIAM J. Appl. Math.* **49** 2 (Apr. 1989), S. 390–403. DOI: [10.1137/0149024](https://doi.org/10.1137/0149024).

- [159] J. D. Crawford. „Introduction to bifurcation theory“. *Rev. Mod. Phys.* **63** 4 (Okt. 1991), S. 997–1037. DOI: [10.1103/RevModPhys.63.991](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.63.991).
- [160] P. Cvitanović und B. Eckhardt. „Periodic orbit expansions for classical smooth flows“. *J. Phys. A* **24** 5 (März 1991), S. L237–L241. DOI: [10.1088/0305-4470/24/5/005](https://doi.org/10.1088/0305-4470/24/5/005).
- [161] A. M. Ljapunov. *The general problem of the stability of motion*. Hrsg. von A. T. Fuller. London: Taylor & Francis, 1992. ISBN: 978-0-7484-0062-1.
- [162] H.-W. Lorenz. *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion*. 2. Aufl. Berlin: Springer, Feb. 1993. DOI: [10.1007/978-3-642-78324-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-78324-1).
- [163] D. K. Arrowsmith und C. M. Place. *Dynamische Systeme*. Heidelberg: Spektrum, 1994. ISBN: 3860253085.
- [164] A. Lasota und M. C. Mackey. *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics*. 2. Aufl. Applied Mathematical Sciences 97. Springer, 1994. DOI: [10.1007/978-1-4612-4286-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4286-4).
- [165] S. H. Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: With applications to physics, biology chemistry, and engineering*. Addison-Wesley, 1994. ISBN: 9780813349114.
- [166] J. Guckenheimer und P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Hrsg. von J. E. Marsden, L. Sirovich und F. John. 5. Aufl. **42**. Applied Mathematical Sciences. Berlin: Springer, 1996. ISBN: 3540908196. DOI: [10.1007/978-1-4612-1140-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2).
- [167] V. Reitmann. *Reguläre und chaotische Dynamik*. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Leipzig: Teubner, Juni 1996. DOI: [10.1007/978-3-663-12341-5](https://doi.org/10.1007/978-3-663-12341-5).
- [168] M. Delgado. „The Lagrange-Charpit Method“. *SIAM Rev.* **39** 2 (Juli 1997), S. 298–304. DOI: [10.1137/S0036144595293534](https://doi.org/10.1137/S0036144595293534).
- [169] P. Gaspard. *Chaos, scattering, and statistical mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. ISBN: 978-0521018258.
- [170] G. Wunsch. *Grundlagen der Prozesstheorie - Struktur und Verhalten dynamischer Systeme in Technik und Naturwissenschaft*. Teubner, Okt. 2000. DOI: [10.1007/978-3-663-08050-3](https://doi.org/10.1007/978-3-663-08050-3).
- [171] P. Gaspard und S. Tasaki. „Liouvillian dynamics of the Hopf bifurcation“. *Phys. Rev. E* **64** 5 (Okt. 2001), S. 056232–056248. DOI: [10.1103/PhysRevE.64.056232](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.64.056232).
- [172] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Hrsg. von J. E. Marsden, L. Sirovich und S. S. Antman. 2. Aufl. **2**. Texts in Applied Mathematics. New York: Springer, 2003. DOI: [10.1007/b97481](https://doi.org/10.1007/b97481).
- [173] B. Aulbach. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, Feb. 2004. ISBN: 978-3-8274-1492-2.
- [174] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Hrsg. von S. S. Antman, J. E. Marsden und L. Sirovich. 3. Aufl. **112**. Applied Mathematical Sciences. New York: Springer, Apr. 2004. DOI: [10.1007/978-1-4757-3978-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7).
- [175] M. Denker. *Einführung in die Analysis dynamischer Systeme*. Berlin: Springer, 2005. DOI: [10.1007/b137966](https://doi.org/10.1007/b137966).
- [176] V. I. Arnold, V. V. Kozlov und A. I. Neishtadt. *Dynamical Systems III: Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*. Hrsg. von R. V. Gamkrelidze. 3. Aufl. **3**. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Berlin: Springer, 2006. ISBN: 3540282467. DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9).
- [177] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Hrsg. von J. E. Marsden, L. Sirovich und S. S. Antman. 2. Aufl. **34**. Texts in Applied Mathematics. New York: Springer, 2006. DOI: [10.1007/0-387-35794-7](https://doi.org/10.1007/0-387-35794-7).
- [178] V. S. Anishchenko u. a. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems: Tutorial and Modern Developments*. Hrsg. von H. Haken. 2. Aufl. **16**. Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer, 2007. DOI: [10.1007/978-3-540-38168-6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-38168-6).
- [179] J. C. Willems. „Dissipative dynamical systems“. *Eur. J. Control* **13** 2-3 (Jan. 2007), S. 134–151. DOI: [10.3166/ejc.13.134-151](https://doi.org/10.3166/ejc.13.134-151).

- [180] S. Ghosh, B. Talukdar und U. Das. „One-way coupled Van der Pol system“ (Okt. 2009). ARXIV: [0910.1700](https://arxiv.org/abs/0910.1700).
- [181] H. Fischer und H. Kaul. *Mathematik für Physiker - Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. 4. Aufl. **2**. Wiesbaden: Springer, Mai 2014. DOI: [10.1007/978-3-658-00477-4](https://doi.org/10.1007/978-3-658-00477-4).
- [182] J. H. Argyris u. a. *An Exploration of Dynamical Systems and Chaos*. Berlin: Springer, 2015. DOI: [10.1007/978-3-662-46042-9](https://doi.org/10.1007/978-3-662-46042-9).

 Hamilton-, Kanonisch Dissipative und Nambu-Systeme

- [183] P. M. Morse und H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics I*. New York: McGraw-Hill, Mai 1953. ISBN: 978-0070433168.
- [184] P. Mittelstaedt. *Klassische Mechanik*. Die Taschenbücher der reinen Wissenschaft 500. Mannheim: B. I. Hochschultaschenbücher, 1970.
- [185] Y. Nambu. „Generalized Hamiltonian Dynamics“. *Phys. Rev. D* **7** 8 (Apr. 1973), S. 2405–2412. DOI: [10.1103/PhysRevD.7.2405](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2405).
- [186] P. J. Morrison. „A Paradigm for Joined Hamiltonian and Dissipative Systems“. *Physica D* **18** 1-3 (Jan. 1986), S. 410–419. DOI: [10.1016/0167-2789\(86\)90209-5](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90209-5).
- [187] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. 2. Aufl. New York: Springer, 1989. DOI: [10.1007/978-1-4757-2063-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2063-1).
- [188] A. Figotin und J. H. Schenker. „Spectral Theory of Time Dispersive and Dissipative Systems“. *J. Stat. Phys.* **118** 1 (Jan. 2005), S. 199–263. DOI: [10.1007/s10955-004-8783-7](https://doi.org/10.1007/s10955-004-8783-7).
- [189] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 2 - Analytische Mechanik*. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Springer, Feb. 2006. DOI: [10.1007/3-540-33605-2](https://doi.org/10.1007/3-540-33605-2).
- [190] N. Dragon. „Hamiltonsche Mechanik“. Nov. 2007. URL: <https://www.itp.uni-hannover.de/~dragon/hamilton.pdf>.
- [191] A. Figotin und J. H. Schenker. „Hamiltonian Structure for Dispersive and Dissipative Dynamical Systems“. *J. Stat. Phys.* **128** 4 (Aug. 2007), S. 969–1056. DOI: [10.1007/s10955-007-9321-1](https://doi.org/10.1007/s10955-007-9321-1).
- [192] M. Brack. „Nichtlineare Dynamik“. Aug. 2008. URL: <http://homepages.uni-regensburg.de/~brm04014/notes/nlindyn.html>.
- [193] T. D. Frank. „Active systems with Nambu dynamics: with applications to rod welding for haptic length perception and self-propagating systems on two-spheres“. *Eur. Phys. J. B* **74** 2 (März 2010), S. 195–203. DOI: [10.1140/epjb/e2010-00083-8](https://doi.org/10.1140/epjb/e2010-00083-8).
- [194] T. D. Frank. „On a Moment-Based Bata Analysis Method for Canonical-Dissipative Oscillatory Systems“. *Fluct. Noise Lett.* **9** 1 (März 2010), S. 69–87. DOI: [10.1142/S0219477510000083](https://doi.org/10.1142/S0219477510000083).
- [195] S. Mongkolsakulvong, P. Chaikhan und T. D. Frank. „Oscillatory nonequilibrium Nambu systems: the canonical-dissipative Yamaleev oscillator“. *Eur. Phys. J. B* **85** 3 (März 2012), 90:1–10. DOI: [10.1140/epjb/e2012-20720-4](https://doi.org/10.1140/epjb/e2012-20720-4).
- [196] A. Bravetti und D. Tapias. „Liouville’s Theorem and the canonical measure for nonconservative systems from contact geometry“. *J. Phys. A* **48** 24 (Juni 2015), S. 245001. DOI: [10.1088/1751-8113/48/24/245001](https://doi.org/10.1088/1751-8113/48/24/245001).

 Ergodentheorie

- [197] I. E. Farquhar. *Ergodic Theory in Statistical Mechanics*. London: Wiley, 1964. ISBN: 9780470255209.
- [198] V. I. Oseledets. „A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems“. *Trans. Moscow Math. Soc.* **19** (1968), S. 197–231.
- [199] J. C. Oxtoby. *Maß und Kategorie*. Berlin: Springer, 1971. DOI: [10.1007/978-3-642-96074-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-96074-1).
- [200] I. Shimada und T. Nagashima. „A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems“. *Prog. Theor. Phys.* **61** 6 (Juni 1979), S. 1605–1616. DOI: [10.1143/PTP.61.1605](https://doi.org/10.1143/PTP.61.1605).
- [201] J.-P. Eckmann und D. Ruelle. „Ergodic theory of chaos and strange attractors“. *Rev. Mod. Phys.* **57** 3 (Juli 1985), S. 617–656. DOI: [10.1103/RevModPhys.57.617](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.57.617).

- [202] A. Khintchine. „Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse“. *Math. Ann.* **109** (1934), S. 604–615.
- [203] H. Barkhausen. *Lehrbuch der Elektronenröhren, Elektronenröhren und ihre technischen Anwendungen: Rückkopplung*. 3. Aufl. **3**. Leipzig: Hirzel, 1941.
- [204] J. W. Strutt. *The theory of sound*. **1-2**. New York: Dover, 1945. ISBN: 0-486-60292-3/0-486-60293-1.
- [205] C. Desoer. „Modes in Linear Circuits“. *IRE Trans. Circuit Theory* **7** 3 (Sep. 1960), S. 211–223. DOI: [10.1109/TCT.1960.1086666](https://doi.org/10.1109/TCT.1960.1086666).
- [206] W. Gröbner. *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*. Hrsg. von W. Blaschke. Berlin: VEB, Feb. 1960.
- [207] R. K. Brayton und J. K. Moser. „A theory of nonlinear networks I“. *Q. Appl. Math.* **22** 1 (Apr. 1964), S. 1–33.
- [208] R. K. Brayton und J. K. Moser. „A theory of nonlinear networks II“. *Q. Appl. Math.* **22** 2 (Juli 1964), S. 81–104.
- [209] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Auckland: McGraw-Hill, 1965. ISBN: 978-1577666127.
- [210] T. E. Stern. *Theory of Nonlinear Networks and Systems: An Introduction*. Series in Electrical Engineering. Addison-Wesley, 1965.
- [211] R. F. Pawula. „Approximation of the Linear Boltzmann Equation by the Fokker-Planck Equation“. *Phys. Rev.* **162** 1 (Okt. 1967), S. 186–188. DOI: [10.1103/PhysRev.162.186](https://doi.org/10.1103/PhysRev.162.186).
- [212] V. Belevitch. *Classical Network Theory*. San Francisco: Holden-Day, 1968. ISBN: 0816204233.
- [213] S. Filippi. „Neue Lie-Reihen-Methode“. *Numerische Mathematik Differentialgleichungen Approximationstheorie*. Hrsg. von L. Collatz, G. Meinardus und H. Unger. **9**. Internationale Schriftenreihe zur Numerischen Mathematik. Birkhäuser Basel, 1968, S. 49–67. DOI: [10.1007/978-3-0348-5881-6_6](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-5881-6_6).
- [214] C. Desoer und F. Wu. „Trajectories of nonlinear RLC networks: A geometric approach“. *IEEE Trans. Circuit Theory* **19** 6 (Nov. 1972), S. 562–571. DOI: [10.1109/TCT.1972.1083549](https://doi.org/10.1109/TCT.1972.1083549).
- [215] H. Haken. „Distribution function for classical and quantum systems far from thermal equilibrium“. *Z. Phys.* **263** 4 (Aug. 1973), S. 267–282. DOI: [10.1007/BF01391586](https://doi.org/10.1007/BF01391586).
- [216] R. Zwanzig. „Nonlinear generalized Langevin equations“. *J. Stat. Phys.* **9** 3 (Nov. 1973), S. 215–220. DOI: [10.1007/BF01008729](https://doi.org/10.1007/BF01008729).
- [217] T. Matsumoto. „On several geometric aspects of nonlinear networks“. *J. Franklin Inst.* **301** 1-2 (Jan. 1976), S. 203–225. DOI: [10.1016/0016-0032\(76\)90140-X](https://doi.org/10.1016/0016-0032(76)90140-X).
- [218] A. Nathan. „The Rayleigh-van der Pol harmonic oscillator“. *Int. J. Electronoics* **43** 6 (1977), S. 609–614. DOI: [10.1080/00207217708900770](https://doi.org/10.1080/00207217708900770).
- [219] J. B. Pesin. „Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory“. *Russ. Math. Surv.* **32** 4 (1977), S. 55–114. DOI: [10.1070/RM1977v032n04ABEH001639](https://doi.org/10.1070/RM1977v032n04ABEH001639).
- [220] I. Prigogine. „Time, Structure, and Fluctuations“. *Science* **201** 4358 (Sep. 1978). Nobel Lecture, S. 777–785. DOI: [10.1126/science.201.4358.777](https://doi.org/10.1126/science.201.4358.777).
- [221] H. J. Sussmann. „On the Gap Between Deterministic and Stochastic Ordinary Differential Equations“. *Ann. Probab.* **6** 1 (Feb. 1978), S. 19–41. DOI: [10.1214/aop/1176995608](https://doi.org/10.1214/aop/1176995608).
- [222] J. Guckenheimer. „Dynamics of the Van der Pol Equation“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **27** 11 (Nov. 1980), S. 983–989. DOI: [10.1109/TCS.1980.1084738](https://doi.org/10.1109/TCS.1980.1084738).
- [223] M. San Miguel und S. Chaturvedi. „Limit cycles and detailed balance in Fokker-Planck equations“. *Z. Phys. B* **40** 1 (März 1980), S. 167–174. DOI: [10.1007/BF01295086](https://doi.org/10.1007/BF01295086).
- [224] R. Graham. „Onset of cooperative behavior in nonequilibrium steady states“. *Order and Fluctuations in nonequilibrium statistical mechanics: XVIIth International Solway Conference on Physics*. Hrsg. von G. Nicolis, G. Dewel und J. W. Turner. New York: Wiley, Feb. 1981. ISBN: 0471059277.

- [225] L. O. Chua. „Nonlinear circuits“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **31** 1 (Jan. 1984), S. 69–87. DOI: [10.1109/TCS.1984.1085420](https://doi.org/10.1109/TCS.1984.1085420).
- [226] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods: For Physics, Chemistry and Natural Sciences*. Hrsg. von H. Haken. 2. Aufl. **13**. Springer Series in Synergetics. Berlin: Springer, März 1985. ISBN: 3-540-61634-9.
- [227] R. Haberlandt. „Verallgemeinerte Mastergleichungen und Fokker-Planck-Gleichungen für Prozesse in inhomogenen Systemen weitab vom Gleichgewicht“. *Ann. Phys.* **498** 3-5 (1986), S. 213–224. DOI: [10.1002/andp.19864980313](https://doi.org/10.1002/andp.19864980313).
- [228] J. D. Ramshaw. „Remarks on entropy and irreversibility in non-hamiltonian systems“. *Phys. Lett. A* **116** 3 (Juni 1986), S. 110–114. DOI: [10.1016/0375-9601\(86\)90294-X](https://doi.org/10.1016/0375-9601(86)90294-X).
- [229] K. Tomita. „Periodically forced nonlinear oscillators“. *Chaos*. Hrsg. von V. A. Holden. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1986, S. 213–214. ISBN: 0-691-08423-8.
- [230] L. O. Chua und H. Kokubu. „Normal forms for nonlinear vector fields“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **35** 7 (Juli 1988), S. 863–880. DOI: [10.1109/31.1833](https://doi.org/10.1109/31.1833).
- [231] A. Dutt, Bhattacharya D. K. und Byung Chan Eu. „Limit cycles and discontinuous entropy production changes in the reversible Oregonator“. *J. Chem. Phys.* **93** 11 (Dez. 1990), S. 7929–7935. DOI: [10.1063/1.459322](https://doi.org/10.1063/1.459322).
- [232] H. Haken. *Synergetik: Eine Einführung. Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge und Selbstorganisation in Physik, Chemie und Biologie*. 2. Aufl. Berlin: Springer, 1990. ISBN: 3662101874. DOI: [10.1007/978-3-662-10186-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10186-5).
- [233] C. Beck und F. Schlögl. *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993. ISBN: 978-0521484510.
- [234] O.P. Bhutani, M. H. M. Moussa und K. Vijayakumar. „On the generalized forms of exact solutions to the liouville equation via direct approach“. *Int. J. Eng. Sci.* **32** 12 (Dez. 1994), S. 1965–1969. DOI: [10.1016/0020-7225\(94\)90092-2](https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90092-2).
- [235] C. Beck. „From the Perron-Frobenius equation to the Fokker-Planck equation“. *J. Stat. Phys.* **79** 5-6 (Juni 1995), S. 875–894. DOI: [10.1007/BF02181207](https://doi.org/10.1007/BF02181207).
- [236] Th. Bröcker. *Analysis II*. 2. Aufl. Spektrum, 1995. ISBN: 9783860254189.
- [237] C. Keidies. „Klassifikation nichtlinearer dynamischer Netzwerke und deren Nutzung beim Oszillatorenentwurf“. Diss. Aachen: Bergische Universität Wuppertal, 1995. ISBN: 3-89653-085-2.
- [238] M. P. Kennedy. „On the relationship between the chaotic Colpitts oscillator and Chua’s oscillator“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **42** 6 (Juni 1995), S. 376–379. DOI: [10.1109/81.390276](https://doi.org/10.1109/81.390276).
- [239] A. Namažunas und A. Tamasevicius. „Modified Wien-bridge oscillator for chaos“. *Electronics Letters* **31** 5 (März 1995), S. 335–336. DOI: [10.1049/e1:19950250](https://doi.org/10.1049/e1:19950250).
- [240] K. Odani. „The Limit Cycle of the van der Pol Equation Is Not Algebraic“. *J. Differ. Equations* **115** 1 (Jan. 1995), S. 146–152. DOI: [10.1006/jdeq.1995.1008](https://doi.org/10.1006/jdeq.1995.1008).
- [241] G. B. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. 2. Aufl. Princeton University Press, 1996. ISBN: 978-0691043616.
- [242] F. Verhulst. „The Poincaré-Lindstedt method“. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universitext. Springer, 1996, S. 122–135. DOI: [10.1007/978-3-642-61453-8_10](https://doi.org/10.1007/978-3-642-61453-8_10).
- [243] M. E. Tuckerman, C. J. Mundy und M. L. Klein. „Toward a Statistical Thermodynamics of Steady States“. *Phys. Rev. Lett.* **78** 11 (März 1997), S. 2042–2045. DOI: [10.1103/PhysRevLett.78.2042](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.78.2042).
- [244] J. Zhenglu. „On the Liouville equation“. *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* **2** 3 (Sep. 1997), S. 273–275. DOI: [10.1007/BF02829903](https://doi.org/10.1007/BF02829903).
- [245] A. Daffertshofer. „Effects of noise on the phase dynamics of nonlinear oscillators“. *Phys. Rev. E* **58** 1 (Juli 1998), S. 327–338. DOI: [10.1103/PhysRevE.58.327](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.58.327).
- [246] R. D. Benguria und M. C. Depassier. „Variational principle for limit cycles of the Rayleigh–van der Pol equation“. *Phys. Rev. E* **59** 5 (Mai 1999), S. 4889–4893. DOI: [10.1103/PhysRevE.59.4889](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.59.4889).

- [247] G. M. Maggio. „Nonlinear analysis of the Colpitts oscillator and applications to design“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **46** 9 (Sep. 1999), S. 1118–1130. DOI: [10.1109/81.788813](https://doi.org/10.1109/81.788813).
- [248] W. G. Hoover u. a. „Remarks on non-Hamiltonian statistical mechanics: Lyapunov exponents and phase-space dimensionality loss“. *EPL* **60** 3 (Nov. 2002), S. 337–341. DOI: [10.1209/epl/i2002-00269-3](https://doi.org/10.1209/epl/i2002-00269-3).
- [249] A. Pikovsky, M. Rosenblum und J. Kurths. *Synchronization - A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Hrsg. von B. Chirikov u. a. Cambridge Nonlinear Science Series 12. Cambridge, Mai 2003. ISBN: 9780521533522.
- [250] A. Sergi. „Non-Hamiltonian equilibrium statistical mechanics“. *Phys. Rev. E* **67** 2 (Feb. 2003), S. 021101. DOI: [10.1103/PhysRevE.67.021101](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.021101).
- [251] G. S. Ezra. „On the Statistical Mechanics of Non-Hamiltonian Systems: The Generalized Liouville Equation, Entropy, and Time-Dependent Metrics“. *J. Math. Chem.* **35** 1 (Jan. 2004), S. 29–53. DOI: [10.1023/B:JOMC.0000007811.79716.4d](https://doi.org/10.1023/B:JOMC.0000007811.79716.4d).
- [252] G. M. Maggio. „A General Method to Predict the Amplitude of Oscillation in Nearly Sinusoidal Oscillators“. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **51** 8 (Aug. 2004), S. 1586–1595. DOI: [10.1109/TCSI.2004.832793](https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.832793).
- [253] E. Zeidler. *Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics*. Berlin: Springer, 2006. DOI: [10.1007/978-3-540-34764-4](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34764-4).
- [254] S.-N. Chow und H.-M. Zhou. „An analysis of phase noise and Fokker-Planck equations“. *J. Differ. Equations* **234** 2 (März 2007), S. 391–411. DOI: [10.1016/j.jde.2006.11.015](https://doi.org/10.1016/j.jde.2006.11.015).
- [255] A. Grebennikov. *RF and Microwave Transistor Oscillator Design*. Wiley, 2007. ISBN: 978-0-470-02535-2.
- [256] G. Michler und Kowalski H.-J. *Linear Algebra*. Berlin: de Gruyter, 2008. DOI: [10.1515/9783110200041](https://doi.org/10.1515/9783110200041).
- [257] Tie Jun Xiao, Zhonghuai Hou und Houwen Xin. „Entropy production and fluctuation theorem along a stochastic limit cycle“. *J. Chem. Phys.* **129** (2008), S. 114506. DOI: [10.1063/1.2978179](https://doi.org/10.1063/1.2978179).
- [258] M. Reit. „Reduktion von höherdimensionalen nichtlinearen Oszillator-Modellen im Hinblick auf den Entwurf von CMOS VCOs im GHz-Bereich“. Magisterarb. Hannover: Leibniz Universität Hannover, Dez. 2009.
- [259] B. Andrae u. a. „Entropy Production of Cyclic Population Dynamics“. *Phys. Rev. Lett.* **104** (Mai 2010), S. 218102. DOI: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.104.218102>.
- [260] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. 7. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer, 2011. DOI: [10.1007/978-3-642-17905-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-17905-1).
- [261] P. Dutta, A. Halder und R. Bhattacharya. „Uncertainty Quantification for Stochastic Nonlinear Systems using Perron-Frobenius Operator and Karhunen-Loève Expansion“. *IEEE Intl. Conf. Control.* Okt. 2012, S. 1449–1454. DOI: [10.1109/CCA.2012.6402455](https://doi.org/10.1109/CCA.2012.6402455).
- [262] J.-M. Ginoux und C. Letellier. „Van der Pol and the history of relaxation oscillations: toward the emergence of a concept“. *Chaos* **22** (2012), S. 023120. DOI: [10.1063/1.3670008](https://doi.org/10.1063/1.3670008). ARXIV: [1408.4890](https://arxiv.org/abs/1408.4890).
- [263] E. Ponce. *Bifurcations in piecewise linear systems: case studies*. Mai 2014. URL: www.ime.unicamp.br/~rmiranda/mat70.
- [264] M. Reit. „A Class of Sinusoidal Driven Nonlinear Input-Output Systems with Sinusoidal Response“. *International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA)*. Switzerland, Sep. 2014, S. 292–295.
- [265] M. Reit, W. Mathis und R. Stoop. „Analysis of Cascaded Canonical Dissipative Systems and LTI Filter Sections“. *Acta Technica* **59** (2014), S. 79–96.
- [266] L. Cveticanin. „Lord Rayleigh and Rayleigh Oscillator: An Overview“. *The 14th IFToMM World Congress*. Taipei, Okt. 2015. DOI: [10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS20.012](https://doi.org/10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS20.012).

Index

- abweisend, 23
- Ähnlichkeitstransformation, 107
- äußeres Subsystem, 43, 62, 80
- Akkumulation, 28, 43, 60
- algebraische Vielfachheit, 107
- Amplitude, 2, 36, 71
- Amplituden
 - abweichung, 8, 59
 - rauschen, 2, 59
- Anfangs
 - menge, 26, 57
 - verteilung, 27, 46, 49, 57
 - wert, 20, 25, 38, 50, 57
 - wertproblem, 22, 44
 - zeit, 22, 39, 46, 50, 57
- anziehend, 23
- aperiodischer Grenzfall, 63
- Approximationstheorem, 109
- asymptotisch, 12, 42, 64, 108
- asymptotisch stabil, 33
- Attraktor, 23, 28, 35, 88, 93
- Auszugsgebiet, 23, 43, 58, 108
- Autokorrelation, 8, 59
- autonom, 2, 25, 33, 47, 57

- Bénard-Experiment, 32
- Barkhausen
 - kriterium, 37, 71
 - Röhrenformel, 75
- Bassin, 23, 42, 58, 88
- begleitendes Dreibein, 24, 75, 86
- Beschleunigung, 24, 58, 75
- Bifurkations
 - differenz, 92, 109
 - parameter, 8, 36, 58, 73, 109
 - punkt, 35, 92
- Binormalenvektor, 24

- Casimir-Funktion, 30
- Chaos, 4, 39, 43, 96
- Chapman-Kolmogorow
 - Gleichung, 4, 111
- Charakteristik, 46
- charakteristische Funktion, 59
- Clapp-Oszillator, 91
- Colpitts-Oszillator, 91

- Dämpfung, 28, 36, 56, 63, 75, 82
- Dämpfungsgrad, 63, 81, 86

- degeneriert, 33
- Dichte, 39
 - verteilung, 27
- Differentialgleichung, 1, 57
 - Definition (gewöhnliche), 21
 - partiell, 5, 45
- Diffusion, 5, 59, 113
- Dissipation, 27, 43, 60
- Dissipationsfunktion, 28, 61, 87, 96, 113
- dissipativ-akkumulativ, 98
- Divergenz, 22, 42
 - frei, 22, 26, 48, 57
 - satz, 42, 61, 65
- Drei-Körper-Problem, 32
- Drift, 5, 59, 113
- Duffing-Oszillator, 73
- dynamische Entropie, 55, 61
- Dynamisches System, 37
 - Definition (geometrisch), 21
- Dyson-Operator, 46

- Eigenfrequenz, 63, 69, 75, 81, 92
- Eigenraum, 35, 92, 97, 107
- Einheitstangentenvektor, 24
- Einzugsgebiet, 23, 109
- elliptisch, 33
- Energie
 - funktion, 25, 61, 87
 - niveau, 28, 87, 96
 - niveaumenge, 26
 - schale, 26
- Erhaltung, 60
- Erhaltungsgröße, 26
- Erzeugende, 31
- Expansion, 27, 60
- extrinsisch, 2, 17

- Fixobjekt, 20
- Fluss, 20
- Fokker-Planck-Gleichung, 5, 59, 112
- Fortsetzung, 23
- Frequenz, 36
- Funktionalmatrix, 33

- Güte, 81, 92
- geschlossener Orbit, 20, 71
- Geschwindigkeitsvektor, 24
- Gleichgewichtspunkt, 20, 33
- Gradientenfeld, 75, 86

Index

- Grenzyklus, 35, 73
- Grupperungsmenge, 111

- Halbgruppeneigenschaft, 20
- Hamilton
 - Fluss, 25
 - Funktion, 25, 86
 - Jacobi-System, 31
 - System, 25, 61
- hamiltonsch, 63
- harmonischer Oszillator, 36
 - mit linearer Dämpfung, 63
- Hartley-Oszillator, 91
- Hauptnormalenvektor, 24, 75, 86
- heteroklin, 109
- Historische Entwicklung, 3
- Homogenität der Zeit, 22
- homoklin, 109
- Hopf
 - Bifurkation, 35
 - Punkt, 35, 92
- hyperbolisch, 33
- Hyperchaos, 43

- Identitätseigenschaft, 20
- Impulsempfindlichkeitsfunktion, 10
- inkompressibel, 26, 60
- Inkompressibilitätsbedingung, 26
- inneres Subsystem, 42, 75, 82, 86
- instabil, 33
- integrabel, 31
- Integral der Bewegung, 32
- Integralkurve, 19, 57
- Integralmannigfaltigkeit, 35, 93, 99
- intrinsisch, 17, 36
- invariante
 - Menge, 21, 61
 - Tori, 32
- Inverstransformation, 44, 64
- Involution, 26

- Jacobi
 - Formel, 45
 - Identität, 30
 - Matrix, 33, 92
 - System, 31
 - determinante, 26, 44, 64
- Jet-Transformation, 92, 108
- Jordan-Matrix, 93, 107

- kanonisch-dissipativ, 61, 86, 96, 113
- kanonische
 - Gleichungen, 26
 - Transformation, 31
- Kirchhoffraum, 37
- Kolmogorow-Vorwärtsgleichung, 112

- Kompression, 27, 60
- konservativ, 25, 31, 43, 61
- Kontinuitätsgleichung, 27
- Kopplung, 80
- Krümmung, 24, 75
- Kramers-Moyal-Entwicklung, 112
- Kriechfall, 63

- Lösung, 21, 44, 57, 64
- Lagrange-Charpit-Darstellung, 46
- Langevin-Gleichung, 77, 83, 89, 94, 114
- Lehrsches Dämpfungsmaß, 63
- Levi-Civita-Tensor, 30
- Libration, 32
- Limespunkt, 21
- lineare Rückstellkraft, 63
- linearisiertes System, 33
- Liouville
 - Gleichung, 4, 27, 44
 - Gleichung (verallgemeinert), 5, 44, 57, 113
 - Operator, 27
 - Raum, 83
 - Volumen, 76
 - Satz (Hamilton), 27
- Lipschitz-Stetigkeit, 22
- Ljapunov
 - Exponent, 42
 - Funktion, 33
 - Koeffizient, 33
 - Spektrum, 42, 75, 82, 86, 93
- longitudinal, 71
- Lorenz-Oszillator, 96

- Mannigfaltigkeit
 - invariante, 108
 - riemannsche, 19
 - symplektische, 26
 - Zentrums-, 108
- Markov
 - Bedingung, 111
 - Prozess, 111
- Mastergleichung, 4, 111
- Meissner-Oszillator, 55
- Metrik, 21
- Moden, 107
- Momentanbeschleunigung, 75
- Multiindex, 108

- Nabla-Operator, 22
- Nambu
 - Klammer, 30
 - Oszillator (Lorenz), 96
 - System, 29
- nicht-hyperbolisch, 33
- nicht-wandernd, 21
- Noether-Theorem, 61

Normalform (Jordan), 107
 Normierung, 113
 Nullstellenproblem, 29, 58, 109
 Observable, 26
 Ohmscher Raum, 1, 37
 Orbit, 20
 Oszillator, 36
 Clapp-, 91
 Colpitts-, 91
 Duffing-, 73
 Hartley-, 91
 Lorenz-, 96
 Meissner-, 55
 Nambu- (Lorenz), 96
 Rayleigh-, 81
 Rayleigh-Van der Pol-, 85
 Seiler-, 91
 Vackář-, 91
 Van der Pol-, 74
 Van der Pol- (gekoppelt), 80
 Wien-Brücken-, 71
 Parameter
 Duffing-, 73
 Rayleigh-, 73, 81
 Rayleigh-Van der Pol-, 85
 Van der Pol-, 73, 74
 parasitäre Elemente, 36
 Pawula-Theorem, 17, 113
 Periodendauer, 20, 36
 periodischer Orbit, 20
 Pfad, 111
 Phasen
 abweichung, 6
 portrait, 20
 raum, 19, 37
 raum (erweitert), 21
 raumdichte, 27, 39, 112
 raumfunktion, 26
 rauschen, 2, 59
 Poincaré
 -Abbildung, 34
 -Schnitt, 34
 poincaréscher Wiederkehrsatz, 63
 Poisson
 -Klammer, 26
 -Matrix, 29
 Potenzreihenentwicklung, 36
 Prandtl-Nummer, 96
 Problemstellung, 16
 Pumpmechanismus, 76, 83, 88, 92, 98, 113
 Quelle, 28
 quellenfrei, 22
 Rückkopplung, 36
 Rauschleistungsdichte, 7, 59
 Rayleigh-Nummer, 96
 Rayleigh-Oszillator, 81
 Rayleigh-Van der Pol-Oszillator, 85
 Realisierung, 111
 Relaxation, 27, 78, 83
 Relaxations-Oszillator, 74
 Repellor, 23, 35
 Resonanzfrequenz, 69
 Rotation, 32
 Satz
 über implizite Funktionen, 109
 von Hartman-Grobman, 33
 von Liouville, 27, 44, 61, 63
 von Oseledets, 42
 von Peano, 22
 von Picard-Lindelöf, 22
 von Radon-Nikodým, 39, 59
 Schleifenverstärkung, 37
 Schwing
 fall, 63
 kreis, 36, 63
 Seiler-Oszillator, 91
 Selbstorganisation, 32
 Senke, 28
 Singularität, 19
 sinusförmig, 37
 Skalarfeld, 22
 Skalierungsfaktor, 92
 Spiegelsystem, 43
 Sprungmoment, 112
 Störungsansatz, 32
 stabil, 33
 Stand der Forschung, 4
 stationär, 19
 stationäre Lösung
 der Fokker-Planck-Gleichung, 113
 der Liouville-Gleichung, 47
 Stellparameter, 73, 85, 97
 stochastische Differentialgleichung, 114
 stochastischer Prozess, 111
 Streckfaktor, 75
 stroboskopische Abbildung, 34
 subkritisch, 35
 Subsystem
 äußeres, 43, 62, 80
 inneres, 42, 58, 75, 82, 86
 super
 kritisch, 35
 symplektisch, 29
 Tangentenvektor, 24
 Tangential
 bündel, 19
 raum, 19

Index

- vektor, 19
- Tangentialebene, 46
- Trajektorie, 20, 111
- transversal, 35
- Truncation-Lemma, 113
- Übergangswahrscheinlichkeit, 112
- Vackář-Oszillator, 91
- Van der Pol-Oszillator, 74
- Van der Pol-Oszillator (gekoppelt), 80
- Variationsgleichung, 42
- Vektorfeld, 19
- verkürzte Wirkung, 32
- Verstärkungsfaktor, 71
- Verstimmung, 65
- Verteilungsfunktion, 39, 58, 59
- Volumenänderungsratendichte, 48, 58
- volumenerhaltend, 64
- W-Matrix, 112
- Wahrscheinlichkeits
 - dichte, 39
 - raum, 39
- wandernd, 21
- wegzusammenhängend, 23
- weißes Rauschen, 2, 59, 114
- Wien-Brücken-Oszillator, 71
- Wiener-Chintschin-Theorem, 59
- Wiener-Prozess, 113
- Winkel- und Wirkungsvariable, 32
- Wirkungs
 - funktion, 31
 - prinzip, 25
- Zeit, 20
- Zeitentwicklungsoperator, 46
- Zentrumsmannigfaltigkeit, 93
- Ziel dieser Arbeit, 16
- zustandsabhängig, 22
- Zustandsraum, 19

Abkürzungsverzeichnis

- DAE Differenzial-algebraische Gleichung (engl. differential-algebraic equation)
- LTI linear zeitinvariant (engl. linear time-invariant)
- NIC Negativer Impedanzkonverter (engl. negative impedance converter)
- ODE gewöhnliche Differentialgleichung (engl. ordinary differential equation)
- PDE partielle Differentialgleichung (engl. partial differential equation)

Symbolverzeichnis

A	Menge (allgemein), invariante Menge, Element einer σ -Algebra \mathcal{A}
A	Akkumulation
\mathcal{A}	borelsche σ -Algebra (Ereignisalgebra)
\mathbf{A}	linearisierte Matrix (Jacobi-Matrix), Knoteninzidenzmatrix
α	Limesmenge, instabiler Grenzzyklus, Energie (Integrable Systeme), Multiindex
a	Realteil eines komplex-konjugierten Eigenwertpaares
B	Menge (allgemein), Bassin, Element einer σ -Algebra \mathcal{B} , Observable
B	Basis
\mathcal{B}	borelsche σ -Algebra (Ereignisalgebra)
\mathbf{B}	Binormalenvektor, transponierte Mascheninzidenzmatrix
β	Rayleigh-Parameter
\mathbf{b}	bilineare Funktion zur Berechnung von l_1
b	Imaginärteil eines komplex-konjugierten Eigenwertpaares
C	Kondensator, Kapazität
C	Kollektor
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
\mathcal{C}	Kurve
C_i	i -te Casimir-Funktion
C^k	Differentiationsklasse, k -mal stetig differenzierbar
C^ω	Klasse der analytischen Funktionen
γ	Anzahl der im el. Netzwerk befindlichen Kapazitäten, Van der Pol-Parameter
\mathbf{c}	trilineare Funktion zur Berechnung von l_1
c	Divergenzfunktion bzw. Divergenzkonstante
\hat{D}	Differentialoperator
D	Dissipation
δ	Delta-Distribution
d	Metrik, Dimension des dynamischen Systems (Ersatz für n), Lehrsches Dämpfungsmaß
E	Energie
E_0	Grundzustand
E	Emitter
\mathbb{E}	Energieniveaumenge
\mathcal{E}	Eigenraum
ϵ	Epsilontik, Radius eines Grenzzyklus in 1. Ordnung
$\epsilon_{i,j,k}$	Levi-Civita-Tensor
η	Duffing-Parameter
\mathbf{e}	Eigenvektor
e	eulersche Zahl, $e = 2.71828182845 \dots$
\mathcal{F}	Fouriertransformationsoperator
\mathbf{F}	Funktion einer algebraischen Nebenbedingung
F	Nambu-Funktion, Erzeugende
f	Funktion (allgemein), Observable, Frequenz
f_0	Resonanzfrequenz
f_s	Abtastfrequenz

Symbolverzeichnis

\mathbf{f}	C^k -Vektorfeld
\mathbf{f}_{nl}	nichtlinearer Anteil eines Vektorfelds \mathbf{f}
Γ	Katzen-Abbildung
γ	Integralkurve
$\gamma_{\mathbf{x}}$	maximale Integralkurve
γ	Anzahl der im el. Netzwerk befindlichen Kapazitäten
$g_{\mathbb{P}}$	riemannsche Metrik (Skalarprodukt)
g	Funktion (allgemein), Observable (Ersatz für f), Dissipationsfunktion, Leitwert
\mathbf{H}	Koeffizientenmatrix zur Rücktransformation
H	Hamilton-Funktion
\mathbf{h}	Lösung
$\mathcal{I}_{\Delta\mu}$	Integralmannigfaltigkeit für eine feste Bifurkationsdifferenz $\Delta\mu$
I_S	Sättigungsstrom
\mathbf{I}_n	n -dimensionale Einheitsmatrix
\mathbf{i}	Stromvektor
i	Strom
J	Jacobi-Determinante, Wirkungsvariable
\tilde{J}	Jacobi-Determinante zur Umkehrtransformation
\mathbf{J}	Jordan-Matrix, Jordanblock
$\mathbf{J}_{\mathbf{f}}$	Jacobi-Matrix bezüglich \mathbf{f}
$j_{\tilde{\mathbf{x}}}^k$	k -te Jet-Transformation zum Gleichgewichtspunkt $\tilde{\mathbf{x}}$
j	imaginäre Einheit, $j = \sqrt{-1}$
\mathbb{K}	Kirchhoffraum
\mathbf{K}	Kovarianzmatrix
\mathbf{K}_0	Kovarianzmatrix der Anfangswerte
K	Kompaktum, Rückkopplungsfaktor, Funktion (allgemein)
k	laufende Variable, Element der natürlichen Zahlen, Entropiekonstante, Korrelationsfunktion
k_{B}	Boltzmann-Konstante, $k_{\text{B}} = 1.380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
k_{KS}	Kolmogorov-Sinai-Entropiekonstante, $k_{\text{KS}} = 1/\ln(2) \text{ J K}^{-1}$
κ	Krümmung
\mathbf{k}	orthogonaler Vektor zu \mathbf{n}
\mathcal{L}	Lagrange-Funktion
Λ	erweiterter Phasenraum (Hopf-Bifurkation)
\hat{L}	Liouville-Operator
L^p	Lebesgue-Raum der p -fach integrierbaren Funktionen
L	Längenfunktional, Ljapunov-Funktion, Spule, Induktivität
l	Ordnung des Approximationstheorems
l_1	erster Ljapunov-Koeffizient
λ	Eigenwert, Kopplungskonstante, Anzahl der im el. Netzwerk befindlichen Induktivitäten
$\lambda_k^{(i)}$	k -dimensionaler Ljapunov-Exponent der i -ten Permutation
λ_n	n -dimensionaler Ljapunov-Exponent (Ljapunov-Summe)
M	(riemannsche) Mannigfaltigkeit, Phasenraum, Zustandsraum, Gegeninduktivität
μ_2	Zweites zentrales Moment (Varianz)
μ	Bifurkationsparameter, Maß
$\tilde{\mu}$	Bifurkationspunkt
$\Delta\mu$	Bifurkationsdifferenz
$\boldsymbol{\mu}$	Bifurkationsparameter (Vektor), Erwartungswert einer Verteilung
m	Dimension des Unterraums zum Parameterraum Π , $m = 1$

N_A	Avogadro-Konstante, $N_A = 6.022\,140\,857(74) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
\mathbb{N}^+	Menge der natürlichen Zahlen ohne Null
\mathcal{N}	Nullstellenoperator
Ne	Neon-Glühlampe
\mathbf{N}	Hauptnormalenvektor
n	Samplerate
ν	Anzahl der im el. Netzwerk befindlichen unabhängigen Quellen
\mathbf{n}	Normalenvektor zur Hyperfläche ζ
n	Dimension des dynamischen Systems, Nichtlinearität (Funktion)
\textcircled{O}	Ohmscher Raum
\mathcal{O}	Landau-Symbol (wächst nicht wesentlich schneller als)
Ω	erweiterter Phasenraum
O	Orbit, Trajektorie
ω	Kreisfrequenz, Limesmenge, stabiler Grenzyklus
ω_0	Eigenkreisfrequenz
$\boldsymbol{\omega}$	ungestörte Frequenzen eines integrablen Systems
\mathbb{P}	Liouville-Raum, $\mathbb{P} = M \times \mathbb{R}^+$
\mathcal{P}	symplektische Matrix, Polygonnetz
Π	Parameterraum (Hopf-Bifurkation)
$\hat{\mathbf{P}}$	Frobenius-Perrón-Operator, $\hat{\mathbf{P}}^t = e^{\hat{\mathbf{L}}t}$
Φ	(maximaler) Fluss eines dynamischen Systems
$\Phi_{\mathbf{H}}$	hamiltonscher Fluss
\mathbf{P}	kanonischer Impulsvektor
P	Poincaré-Abbildung, Wahrscheinlichkeitsmaß, Energiedichte (Leistung)
p	Phasenraumdichte
p_0	Anfangsverteilung (Funktional)
π	Kreiszahl, $\pi = 3.14159265359 \dots$
π	natürliche Projektion
Φ	mag. Flussvektor
ϕ	Winkelvariable
ψ	Approximationsfunktion
\mathbf{p}	Impulsvektor
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen
\mathbf{Q}	kanonischer Ortsvektor
Q	Güte, Quelle
\mathbf{q}	Ortsvektor, Ladungsvektor
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen, euklidischer Raum
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen mit Null
R	Widerstand, Regressionsfunktion
ρ	Anzahl der im el. Netzwerk befindlichen Widerstände, Wahrscheinlichkeitsdichte
$\tilde{\rho}$	Wahrscheinlichkeitsdichte zur Umkehrtransformation
ϱ	Regressionsparameter
r	Radius
S	Sphäre, Bogenlängenfunktion, Wirkungsfunktion, Entropie, Spektrum, Steilheit
S_0	konstanter Anteil der Entropie
S_{KS}	Kolmogorov-Sinai-Entropie
Σ	Poincaré-Schnitt
\mathbf{s}	Schwellenwert einer Anfangsverteilung

Symbolverzeichnis

σ	Sigmakörper
\mathbf{s}	singulärer Punkt im Phasenraum
s	Bogenlänge
T	Periodendauer, maßerhaltende Abbildung, Transistor
\mathbb{T}	transienter Weg
$T_x M$	Tangentialraum zur Mannigfaltigkeit M
TM	Tangentialbündel der Mannigfaltigkeit M
\mathbb{T}	Zeitmenge, Zeitintervall
\mathbb{T}_x	maximales Zeitintervall
\mathbf{T}	Einheitstangentenvektor, Transformationsmatrix
t	Zeit
t_0	Anfangszeit
τ	Zeit (Ersatz für t), Zeitkonstante
\mathbf{U}	Fundamentalmatrix
U	(offene) Umgebung einer Menge, DC-Spannung
u	Spannung
u_T	Temperaturspannung, bei $T = 300\text{ K}$ folgt $u_T \approx 26\text{ mV}$
\mathbf{u}	Spannungsvektor
V	Phasenraumvolumen, Teilmenge von U , Wechselwirkungsfunktion
\mathbf{v}	Spannungsvektor
v	Verstärkungsfaktor
\mathbb{W}	stochastischer Liouville-Operator in Matrixdarstellung
\mathcal{W}	invariante Mannigfaltigkeit
\mathfrak{W}	Ergebnismenge des Wahrscheinlichkeitsraumes $(\mathfrak{W}, \mathcal{A}, P)$
\hat{W}	stochastischer Liouville-Operator
W	Hesse-Matrix, verkürzte Wirkung, Parallelepipid
\mathbb{X}	Raum der Kapazitäten und Induktivitäten (dimensionslos)
ξ	Zustand (Ersatz für \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z})
\mathbf{x}	Zustand, Punkt im Phasenraum
$\tilde{\mathbf{x}}$	Gleichgewichtspunkt
\mathbf{x}_0	Anfangswert
\mathbf{x}_S	Startwert (Erwartungswert für $t = t_0$)
\mathbb{Y}	Raum der Spannungen und Ströme (dimensionslos)
Υ	Mengendifferenz
\mathbf{y}	Zustand (Ersatz für \mathbf{x})
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
ζ	$(n + 1)$ -dimensionale Hyperfläche der Phasenraumdichte p
\mathbf{z}	Zustand (Ersatz für \mathbf{x} und \mathbf{y})

Lebenslauf

Angaben zur Person

Name Daniel Malte Stahl
Nationalität deutsch
Geburtsdatum und -ort 1. Oktober 1987 in Hannover
Familienstand ledig

Beruflicher Werdegang

Nov. 2012 – Sep. 2015 **Wissenschaftlicher Mitarbeiter**, Lehre (30%), Forschung (40%) und Promotion (30%), Übungsleitung der Vorlesungen: *Nano- und Quantenengineering*, *Theoretische Elektrotechnik*, *Halbleiterschaltungstechnik*, Studentenbetreuung, Institut für Theoretische Elektrotechnik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Jul. 2010 – Jun. 2012 **Wissenschaftliche Hilfskraft**, Versuchsbetreuung des Physik Praktikums, Institut für Quantenoptik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Hochschulausbildung

seit Nov. 2012 **Promotion**, Institut für Theoretische Elektrotechnik, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Okt. 2007 – Okt. 2012 **Studium der Physik**, Nebenfächer: *Informatik*, *Chemie* und *Meteorologie*, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Schulbildung

Aug. 2004 – Jun. 2007 **Fachgymnasium Technik**, bbs|me Otto-Brenner-Schule, Hannover

Aug. 2000 – Aug. 2004 **Realschule**, Scharnhorst Realschule Wunstorf

Sep. 1994 – Aug. 2000 **Grundschule und Orientierungsstufe**, Hannover, später Wunstorf

Abschlüsse

Okt. 2012 **Master of Science (M. Sc.)**, Masterarbeit am Institut für Theoretische Physik, *Gravitationswellen in WKB-Näherung*, Note: 1,6

Jan. 2010 **Bachelor of Science (B. Sc.)**, Bachelorarbeit am Institut für Theoretische Physik, *Beeinflussung quantenmechanischer Ankunftszeiten durch nachfolgende Potentiale*, Note: 2,6

Jun. 2007 **Allgemeine Hochschulreife**, Abschlussarbeit am Institut für Theoretische Elektrotechnik, *Klasse-D Audioverstärker*, Note: 2,0

Jun. 2004 **Erweiterter Sekundarabschluss I Realschulabschluss**, Note: 2,2

Veröffentlichungen

2015 **D. Stahl, W. Mathis**, *Energy Transitions in Electrical Oscillators studied by the Generalized Liouville Equation*, XVIII International Symposium on Theoretical Electrical Engineering (ISTET), Kolberg Polen

2014 **D. Stahl, W. Mathis**, *Ensembles of Nonlinear Networks and the Liouville Equation*, International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA), Circuits and Systems, Luzern Schweiz

- 2013 **K. Küpfmüller, W. Mathis, A. Reibiger**, *Theoretische Elektrotechnik – Eine Einführung*, Mitwirken an der 19. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Deutschland
- 2013 **W. Mathis, D. Stahl, R. Mathis**, *Oscillator Synthesis based on Nambu Mechanics with Canonical Dissipative Damping*, 21st European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD), Dresden Deutschland [133]
- 2013 **D. Stahl, W. Mathis**, *Coupling aspects between two coils in arbitrary position*, International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), Fields and Waves, Turin Italien [134]

Internationale Konferenzen

- 2015 **U.R.S.I., Kleinheubacher Tagung**, Radio Communication Systems and Signal Processing, Miltenberg Deutschland
- 2015 **International Symposium on Theoretical Electrical Engineering**, Kolberg Polen
- 2014 **U.R.S.I., Kleinheubacher Tagung**, Radio Communication Systems and Signal Processing, Miltenberg Deutschland
- 2014 **International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications**, Circuits and Systems, Luzern Schweiz
- 2013 **International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications**, Fields and Waves, Turin Italien

Sprachkenntnisse

- Deutsch Muttersprache
Englisch fließend
Spanisch Grundkenntnisse

Elektrische Oszillatoren bilden eine Klasse von elektrischen Schaltungen, die ohne Eingangssignale ein periodisches Ausgangssignal erzeugen. Die Bewegungsgleichungen der Schaltungen, die in dieser Dissertation behandelt werden, sind autonome, nichtlineare Differentialgleichungen in Abhängigkeit eines Bifurkationsparameters.

Gegenstand dieser Arbeit ist es, einen vertieften Einblick in die deterministischen Prozesse von Systemen mit Grenzzyklen zu geben und ein eigenständiges Themengebiet, die sogenannte Liouville Dynamik, zu eröffnen, welches statistische Untersuchungen über die Bewegung von Dichten im Phasenraum erlaubt. Die dazu notwendige Bewegungsgleichung ist die verallgemeinerte Liouville-Gleichung nach den Arbeiten von GERLICH. Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung einer Wahrscheinlichkeitsdichte und entspricht einem gewichteten Fluss aller Trajektorien im Phasenraum.

Diese Dissertation tangiert Bereiche aus der klassischen Mechanik und Thermodynamik und beginnt mit einem intensiven, kritischen literarischen Einblick in den Stand der Forschung wie z.B. von WEISS und MATHIS, KÄRTNER, HAJIMIRI, LEE und HAM sowie DEMIR. Der Begriff der Dissipation wird um einen Antagonisten, der sogenannten Akkumulation, erweitert, um präzise Zusammenhänge mit Begriffen wie Divergenz, Energie, Entropie oder Phasenraumvolumen herzustellen. In Anwendung auf elektrische Oszillatoren wird eine inhärente Definition für den zeitlichen Beginn der Oszillation aus der Liouville-Dynamik hergeleitet. Ein Kerngegenstand dieser Arbeit ist die intensive Beschreibung eines intrinsischen Mechanismus, welcher zu einem periodischen Pumpen der Wahrscheinlichkeitsdichte führt und erst durch das Zusammenspiel mit einem Grenzzyklus zu beobachten ist (Pumpmechanismus).