

# **Modellierung und Analyse von Wanderwellen in Hohlzylindern beim Ultraschall-Wanderwellentransport von Schüttgütern**

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte

**Dissertation**

von  
**Dipl.-Ing. Andreas Renner**

2017

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel

Tag der Promotion: 01. November 2016

## Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Dynamik und Schwingungen der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover in der Arbeitsgruppe Adaptronische Systeme.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek für seine Unterstützung bei der Themenfindung, seine Tipps und Anregungen sowie die Freiheiten, die ich während meiner Zeit am Institut genießen durfte.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel (Technische Universität Ilmenau) danke ich für die Übernahme des Korreferats und die damit verbundene kritische Durchsicht meiner Arbeit. Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Ludger Overmeyer für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Allen Kollegen, mit denen ich in meiner Zeit am Institut zusammenarbeiten durfte, danke ich für ihre Unterstützung und die schöne gemeinsame Zeit. Meinem Arbeitsgruppenleiter Herrn Dr.-Ing. Marcus Neubauer und den Kollegen der Arbeitsgruppe danke ich für die fachliche Unterstützung und dafür, dass sie immer für Diskussionen zur Verfügung standen.

Herrn Dr. Udo Zimmermann danke ich für die kritische Durchsicht meiner Arbeit und die vielen damit verbundenen Tipps und Hinweise.

Meinem langjährigen Bürokollegen Herrn Dr.-Ing. Jens Twiefel danke ich für seine Unterstützung sowie die vielen wertvollen Anregungen und Diskussionen. Weiterhin danke ich ihm für die Einführung in das Thema Piezotechnik und die gründliche Durchsicht meiner Arbeit.

Meiner Schwester Christina danke ich für die Korrektur von sprachlichen und Rechtschreibfehlern.

Ein besonderer Dank gilt meiner Frau Tina für ihre Unterstützung über all die Jahre, in denen ich mit dieser Arbeit beschäftigt war. Wenn es von Nöten war, hat sie mir den Rücken freigehalten und mich ermuntert weiterzumachen.

# Kurzfassung

## Modellierung und Analyse von Wanderwellen in Hohlzylindern beim Ultraschall-Wanderwellentransport von Schüttgütern

Das Prinzip der Schüttgutförderung mittels Ultraschall-Wanderwellen ist bereits seit Anfang der 1990er-Jahre bekannt. Trotz allem sind einige Fragestellungen, die in diesem Zusammenhang bezüglich der Anregung und Ausbreitung von Wanderwellen auftreten, nicht abschließend beantwortet. In der vorliegenden Arbeit werden basierend auf Schalentheorien nach FLÜGGE und MIRSKY-HERRMANN mathematisch-mechanische Modelle entwickelt, mit denen sich für radialsymmetrische Wellen die Anregung und Ausbreitung in axialer Richtung auf einem hohlzylindrischen Wellenleiter abbilden und analysieren lassen. Die anhand der entwickelten Modelle durchgeführten Analysen erklären erstmals viele bereits früher dokumentierte, aber nicht näher untersuchte, Phänomene. Ein wesentlicher Zwischenschritt besteht in der Berechnung der komplexen Wellenzahlen in Abhängigkeit der Frequenz. Aus den komplexen Wellenzahlen sowie ihrer grafischen Darstellung, den sogenannten Dispersionsdiagrammen, lassen sich wichtige Informationen hinsichtlich der Ausbreitungsrichtung sowie der Dämpfung der zugehörigen Wellenanteile gewinnen. Durch Übertragung des aus der experimentellen Modalanalyse stammenden *Complex-Exponential*-Algorithmus auf die im Versuch gemessenen Schwingungsformen, werden die berechneten Dispersionskurven validiert. Mit Hilfe dieses Algorithmus konnten zusätzlich zu den Wanderwellenanteilen erstmals sogar die extrem stark gedämpften Nahfeldanteile identifiziert und die gute Übereinstimmung von Modell und Versuch gezeigt werden.

Basierend auf den entwickelten Modellen und den berechneten Dispersionskurven werden das Auftreten des schon früher beobachteten Amplitudenminimums und des Stehwellenanteils in der Nähe des anregenden Piezowandlers erklärt. Beide resultieren aus der Überlagerung der gewünschten Wanderwellen mit den ebenfalls angeregten, nicht ausbreitungsfähigen Nahfeldanteilen. Abschließend werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit die stark frequenzabhängigen Schwingungsformen von Hohlzylindern bei radialsymmetrischer Anregung und die dabei entstehenden elliptischen Oberflächenpunktbahnen betrachtet. Die Eignung der verwendeten Modelle, die Schwingungsformen bei radialsymmetrischer Anregung sowie die sich einstellenden Oberflächenpunktbahnen zu beschreiben, wird anhand mehrerer Messreihen an verschiedenen, prototypisch aufgebauten Systemen nachgewiesen. Im Gegensatz zu früheren Arbeiten lassen sich mit den im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Modellen nun auch die



ortsabhängigen, elliptischen Oberflächenpunktbahnen mit guter Genauigkeit berechnen.

Für den Aufbau eines Ultraschall-Wanderwellentransport-Systems ergibt sich aus den gewonnen Erkenntnissen der vorliegenden Arbeit ein optimaler Betriebsfrequenzbereich auf den das System ausgelegt werden sollte. Dieser Frequenzbereich resultiert aus der hier möglichen Kombination von gleichmäßigen, elliptischen Oberflächenpunktbahnen entlang der Zylinderachse bei gleichzeitig geringer Dämpfung, die eine große Förderstrecke ermöglicht.

**Schlagwörter:** Wanderwellen, Hohlzylinder, Wanderwellentransport

## Abstract

### **Modelling and Analysis of travelling waves in hollow cylinders for ultrasonic travelling wave transport of bulk goods**

The principle of bulk transport using ultrasonic travelling waves has been known since the beginning of the 1990s. In spite of everything, some questions arising from this context related to the excitation and propagation of travelling waves have not been conclusively answered. In the present thesis based on shell theories after FLÜGGE and MIRSKY-HERRMANN mathematical-mechanical models are developed which are suited to describe and analyze the excitation of radially symmetric waves and their propagation in an axial direction on a hollow cylindrical waveguide. The analyses carried out on the basis of the derived models explain for the first time many previously documented but not further investigated phenomena. An important intermediate step is the calculation of the complex wave numbers in dependence of frequency. From the complex wave numbers as well as their graphical representation, the so-called dispersion curves, important information regarding the direction of propagation and the attenuation of the associated wave components can be gained. By transferring the *complex exponential* algorithm originating from the field of experimental modal analysis to the measured vibration shapes from the conducted tests, the calculated dispersion curves are validated. Using this algorithm it is possible to identify, in addition to the travelling wave components, for the first time even the extremely high damped near field components and to show the good agreement of model and experiment.

Based on the developed models and the calculated dispersion curves, the occurrence of the earlier observed amplitude minimum and the standing wave component in the vicinity of the exciting piezotransducer are explained. Both result from the superposition of the desired travelling waves with the also excited not propagating near field components. Finally the present thesis looks at the highly frequency-dependent vibration shapes of hollow cylinders due to radially symmetrical excitation and the resulting elliptical surface point paths. The suitability of the derived models to describe the vibrations and the elliptical surface point paths generated by radially symmetrical excitation is demonstrated through several series of measurements at different, prototypically built systems. Unlike previous work in this field, the models developed in the present thesis now also allow the calculation of the location-dependent, elliptical surface point paths with good accuracy.

From the obtained findings of the present thesis, an optimum operating frequency range to which the system should be constructed can be determined for the design of an ultra-

sonic travelling wave transport system. This frequency range is due to the potential of uniform, elliptical surface point paths along the cylinder axis in combination with low damping, which allows large transportation distances.

**Key words:** travelling waves, hollow cylinder, travelling wave transport

*Meinen Kindern.*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kurzfassung</b>	<b>IV</b>
<b>Abstract</b>	<b>VI</b>
<b>Formelzeichen</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1 Pulvertransport mittels Ultraschall-Wanderwellen . . . . .	5
2.1.1 Grundlagen des Ultraschall-Wanderwellentransports in Hohlzylindern . . . . .	5
2.1.2 Veröffentlichungen zu angrenzenden Themengebieten . . . . .	15
2.2 Wanderwellen . . . . .	18
2.2.1 Beschreibung von Wanderwellen . . . . .	19
2.2.2 Erzeugung elliptischer Oberflächenpunktbahnen . . . . .	22
2.3 Schwingungen von Hohlzylindern . . . . .	28
2.3.1 Schalentheorien für dünnwandige Schalen . . . . .	29
2.3.1.1 Schalentheorie nach FLÜGGE . . . . .	31
2.3.1.2 Schalentheorie nach DONNELL . . . . .	35
2.3.1.3 Vereinheitlichte Darstellung zur Theorie dünnwandiger Schalen . . . . .	37
2.3.2 Schalentheorien für dickwandige Schalen . . . . .	38
2.3.2.1 FLÜGGE-Schalentheorie mit Berücksichtigung der Drehträgheiten . . . . .	39
2.3.2.2 Schalentheorie nach NAGHDI-COOPER . . . . .	39
2.3.2.3 Schalentheorie nach MIRSKY-HERRMANN . . . . .	40
2.3.2.4 Vereinheitlichte Darstellung zur Theorie dickwandiger Schalen . . . . .	42
2.3.3 Eigenschwingungsformen . . . . .	43
2.4 Piezoelektrische Wandler . . . . .	45
2.4.1 Bauformen von Piezowandlern . . . . .	45
2.4.2 Schwingungsformen ringförmiger Piezowandlern . . . . .	46

<b>3</b>	<b>Gegenstand der Arbeit</b>	<b>48</b>
3.1	Analyse des Stands der Technik . . . . .	48
3.2	Ziele der Arbeit . . . . .	49
3.3	Aufgabenstellung . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Modellierung der Wanderwellenausbreitung</b>	<b>53</b>
4.1	Dünnwandige Schalen nach FLÜGGE . . . . .	54
4.1.1	Lösung der Bewegungsgleichung für Wanderwellen . . . . .	54
4.1.2	Rotationssymmetrische Schwingungen . . . . .	56
4.1.3	Energietransport von Wanderwellen- und Nahfeldanteilen . . . . .	65
4.1.3.1	Reelle Wellenzahlen . . . . .	68
4.1.3.2	Imaginäre Wellenzahlen . . . . .	69
4.1.3.3	Komplexe Wellenzahlen . . . . .	70
4.1.4	Schwingungsformen . . . . .	71
4.1.5	Synthese der elliptischen Oberflächenpunktbahnen . . . . .	73
4.1.6	Einfluss der Dämpfung . . . . .	80
4.1.7	Lösungen höherer Ordnung . . . . .	81
4.2	Dickwandige Schalen nach MIRSKY-HERRMANN . . . . .	83
4.2.1	Lösung der Bewegungsgleichung für sich ausbreitende Wellen . . . . .	83
4.2.2	Schwingungsformen . . . . .	86
4.2.3	Synthese der elliptischen Oberflächenpunktbahnen . . . . .	88
4.2.4	Einfluss der Dämpfung . . . . .	89
4.2.5	Lösungen höherer Ordnung . . . . .	90
4.3	Zusammenfassung . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>93</b>
5.1	Nachweis des radialsymmetrischen Verschiebungsfeldes . . . . .	93
5.2	Piezo-Schwingungsanregung . . . . .	101
5.3	Variation der Anregungsfrequenz . . . . .	107
5.4	Untersuchungen zur Reflexion und Absorption der Wanderwellen . . . . .	109
5.5	Messreihen als Basis der Parameteridentifikation und Modellvalidierung . . . . .	112
5.6	Messung der Oberflächenpunktbahnen . . . . .	115
5.7	Systeme mit Aluminium-Hohlzylinder . . . . .	116
5.8	Zusammenfassung . . . . .	119
<b>6</b>	<b>Modellvalidierung</b>	<b>120</b>
6.1	Identifikation der frequenzabhängigen Wellenzahlen . . . . .	120
6.1.1	Analyse mittels diskreter FOURIER-Transformation . . . . .	120
6.1.2	Ortsbereichs-Analyse mittels <i>Complex-Exponential-Algorithmus</i> . . . . .	123
6.1.3	Automatisierte Pol-Auswahl . . . . .	126
6.1.4	Ergebnisse der Identifikation . . . . .	128
6.2	Synthese und Analyse der Schwingungsformen . . . . .	133

---

6.3	Trajektorien der Oberflächenpunkte . . . . .	144
6.4	Zusammenfassung . . . . .	149
<b>7</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse</b>	<b>151</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>156</b>
	<b>Anhang</b>	<b>160</b>
<b>A</b>	<b>Verwendete Hohlzylinder-Wandler-Einheiten</b>	<b>160</b>
<b>B</b>	<b>Verwendete Geräte</b>	<b>161</b>
<b>C</b>	<b>Herleitung Flüge Schalentheorie</b>	<b>162</b>
C.1	Dehnungs-Verformungs-Beziehungen . . . . .	162
C.2	Berechnung der Schnittgrößen . . . . .	163
C.3	Bestimmen der Bewegungsgleichung . . . . .	165
<b>D</b>	<b><i>Least-Squares-Complex-Exponential- Algorithmus</i></b>	<b>167</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>170</b>

## Formelzeichen

Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert. Vektorielle Größen werden im Allgemeinen durch fette Kleinbuchstaben, matrizielle Größen durch fette Großbuchstaben gekennzeichnet.

### Lateinische Notation

$A$	Amplitude der axialen Verschiebung
$B$	Amplitude der tangentialen Verschiebung
$C$	Amplitude der radialen Verschiebung
$D$	Dämpfungsgrad
$E$	Elastizitätsmodul
$E'$	komplexer Elastizitätsmodul
$G$	Schubmodul
$K$	dimensionsloser Dickenparameter
$K_B$	Biegesteifigkeit
$K_D$	Dehnsteifigkeit
$a$	mittlerer Radius des Hohlzylinders
$c$	Wellengeschwindigkeit
$c_G$	Gruppengeschwindigkeit
$c_\varphi$	Phasengeschwindigkeit
$e$	EULER'sche Zahl
$f$	Frequenz
$f_0$	Eigenfrequenz
$h$	Wandstärke
$i$	Index der komplexen Wellenzahlen oder entsprechender zugehöriger Größen
$j$	imaginäre Einheit
$k$	komplexe (Kreis-)Wellenzahl
$k_s$	axiale (Kreis-)Wellenzahl bei Verwendung der normierten axialen Koordinate $s$
$k_x$	axiale (Kreis-)Wellenzahl $k_x = \frac{2\pi}{\lambda_x}$
$n$	Anzahl der Wellen entlang des Umfangs des Hohlzylinders $n = \frac{2a\pi}{\lambda_\varphi}$
$r$	radiale Koordinate
$s$	auf mittleren Radius normierte axiale Koordinate $\frac{x}{a}$



$t$	Zeit
$u$	axiale Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche P ( $x, \varphi, 0$ )
$v$	tangentiale Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche P ( $x, \varphi, 0$ )
$w$	radiale Verschiebung eines Punktes der Mittelfläche P ( $x, \varphi, 0$ )
$u_z, v_z, w_z$	Verschiebungen des Punktes P ( $x, \varphi, z$ )
$x$	axiale Koordinate
$z$	radiale Koordinate bezogen auf die Mittelebene ( $z = r - a$ )

## Griechische Notation

$\frac{1}{\gamma}$	charakteristische Frequenz
$\delta_v$	Verlustwinkel
$\lambda$	komplexer Eigenwert
$\lambda_s$	auf den mittleren Radius normierte Wellenlänge $\lambda_s = \frac{\lambda_x}{a}$
$\lambda_x$	axiale Wellenlänge $\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$
$\lambda_\varphi$	Wellenlänge in Umfangsrichtung
$\lambda_L$	erste LAMÉ-Konstante
$\mu_L$	zweite LAMÉ-Konstante
$\mu$	flächenbezogene Masse $\mu = \rho h$
$\nu$	Poisson-Zahl
$\varphi$	radiale Koordinate
$\rho$	Dichte
$\omega$	Kreisfrequenz
$\omega_0$	Eigenkreisfrequenz
$\tau$	mit $\gamma$ normierte Zeit $t$ ( $\tau = \frac{t}{\gamma}$ )
$\Phi$	Verhältnis von axialer zu radialer Amplitude ( $\Phi = \frac{A}{C}$ )
$\Psi_x$	Scherung in axialer Richtung
$\Psi_\varphi$	Scherung in Umfangsrichtung
$\Psi_z$	Dehnung in z-Richtung
$\Omega$	auf die charakteristische Frequenz $\frac{1}{\gamma}$ normierte Frequenz $\omega$ ( $\Omega = \gamma\omega$ )

## Indices und weitere Formelzeichen

( )<sub>P</sub> Piezo-( )

( )<sub>HZ</sub> Hohlzylinder-( )

( )<sub>a</sub> Außen-( )

( )<sub>i</sub> Innen-( )

Re { } Realteil

Im { } Imaginärteil

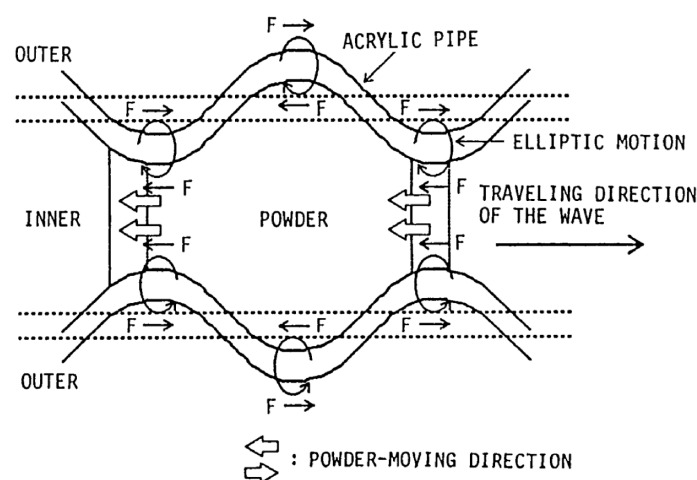
( )', ( )'' erste und zweite Ableitung nach der normierten axialen Koordinate  $s = \frac{x}{a}$

( )', ( )'' erste und zweite Ableitung nach der tangentialen Koordinate  $\varphi$

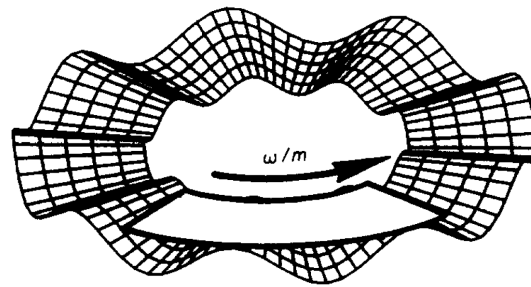
# 1 Einleitung

Das Fördern von Schüttgütern ist eine Aufgabe, die es in den verschiedensten Industrien im Rahmen von automatisierten Prozessen zu lösen gilt. Dabei werden neben Pulvern und Granulaten auch kleine Stückgüter, wie z. B. Schrauben oder andere Kleinteile, die in großen Mengen unsortiert vorliegen und einem Prozess zugeführt werden sollen, oftmals als Schüttgüter bezeichnet. Zur Förderung von Schüttgütern lassen sich abhängig von Fördergut, benötigtem Förderstrom und sonstigen Randbedingungen verschiedenste Arten von Stetigförderern einsetzen: Band- und Gliederbandförderer, Becher- und Taschenförderer, Steg- und Trogkettenförderer, Schnecken-, Schwing-, Schubstangen- und Drehtellerförderer (siehe KURTH [74]).

Anfang der 1990er Jahre, als Ultraschall-Antriebe wie z. B. Wanderwellenmotoren zunehmend in den Fokus der Forschung rückten und in praktischen Anwendungen realisiert wurden, kam in Japan die Idee auf, Ultraschall-Wanderwellen in einem Hohlzylinder zum Transport und zur Dosierung kleiner Mengen pulverförmiger Stoffe einzusetzen (TAKANO ET AL. [96]). Die Autoren nutzten einen Hohlzylinder aus Acrylglas, auf dem sie mittels eines ringförmigen Piezowandlers Ultraschall-Wanderwellen erzeugten, um das Prinzip des Ultraschall-Wanderwellentransports zu untersuchen. Das grundlegende Prinzip lässt sich anhand von **Abb. 1.1** nachvollziehen. Mit den sich in axialer Richtung ausbreitenden Wellen bewegen sich sowohl transversale als auch axiale Verschiebungsanteile entlang der Zylinderwand. Die Überlagerung dieser beiden Anteile in Verbind-



**Abbildung 1.1:** Schematische Darstellung des Prinzips des Ultraschall-Wanderwellentransports (TAKANO ET AL. [96])

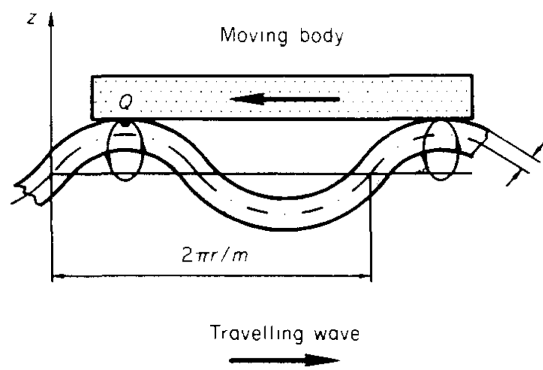


**Abbildung 1.2:** Wanderwelle auf einer Kreis-Platte nach HAGEDORN ET AL. [28]

dung mit der aus den Transversalwellen resultierenden Verkipfung der Querschnittsfläche, führt zu einer elliptischen Bewegung der Oberflächenpunkte des Hohlzylinders. Durch die mit der elliptischen Bewegung einhergehende vertikale Beschleunigung der Oberflächenpunkte kommt es zu einer Veränderung der Normalkraft zwischen dem im Hohlzylinder befindlichen Fördergut und der Wand des Hohlzylinders. Für kleine Beschleunigungen variiert die Normalkraft um den statischen, durch die Erdbeschleunigung bestimmten Wert der Gewichtskraft. Übersteigt die Beschleunigung den Wert der Erdbeschleunigung kommt es bei der Abwärtsbewegung zur Separation, da das Fördergut aufgrund seiner geringeren Beschleunigung der Zylinderwand nicht folgen kann. Durch die Kombination mit der Verschiebung in Richtung der Zylinderachse wird das im Zylinder befindliche Fördergut mit jedem Ellipsenumlauf weiter gefördert.

Das wohl bekannteste Einsatzgebiet von Ultraschall sind die Bildgebungsverfahren aus dem Bereich der Medizintechnik. Diese arbeiten allerdings ebenso wie medizinische Therapieverfahren (HAAR [27]) oder Ultraschall-Abstandssensoren im Automobil typischerweise im MHz-Bereich, da sie auf der Ausbreitung von Longitudinalwellen in Gewebe oder Luft basieren und eine hinreichend kleine Wellenlänge benötigt wird. Andere Anwendungen sind dagegen deutlich näher mit der beschriebenen Anwendung zur Förderung von Schüttgütern verbunden. Hier sind unter anderem die Ultraschall-Motoren, wie sie zum Beispiel in Kameraobjektiven und für die Mikropositionierung eingesetzt werden (UEHA ET AL. [110], HAGEDORN ET AL. [28, 29], WALLASCHEK [114] und UCHINO [107]), zu nennen. Daher ist es auch nicht weiter verwunderlich, dass das Verfahren des Ultraschall-Wanderwellentransports von einer Arbeitsgruppe entwickelt wurde, die sich ansonsten mit Ultraschallmotoren beschäftigte. Die **Abb. 1.2** und **1.3** verdeutlichen die Funktionsweise von Ultraschallwanderwellenmotoren. **Abb. 1.2** zeigt die auf dem Stator eines rotatorischen Wanderwellenmotors umlaufende transversale Wanderwelle, mit einem Element des Rotors, der jeweils im Abstand der Wellenlänge linienförmig mit dem Stator in Kontakt tritt. Die entsprechende Schnittdarstellung (siehe **1.3**) erklärt die Funktionsweise von rotatorischen und linearen Wanderwellenmotoren. Mit der sich auf dem Stator ausbreitenden Wanderwelle bewegen sich die Oberflächenpunkte auf elliptischen Oberflächenpunktbahnen und versetzen so den mittels einer Feder angepressten Rotor in Bewegung.

Obwohl bei Wanderwellenmotoren sehr ähnliche Fragestellungen wie beim Ultraschall-



**Abbildung 1.3:** Wanderwelle im Stator eines Ultraschall-Wanderwellenmotors mit Bewegung des Rotors und schematischen Trajektorien der Oberflächenpunkte nach HAGEDORN ET AL. [28]

Wanderwellentransport auftreten, gibt es im Bereich des Pulvertransports in Hohlzylindern einige offene Fragestellungen, die im Wesentlichen aus der Geometrie des Wellenleiters herrühren und sich nicht von den Wanderwellenmotoren auf die beim Ultraschall-Wanderwellentransport verwendeten Hohlzylinder übertragen lassen. So sind zum Beispiel die bei der Beschreibung von Wanderwellenmotoren häufig genutzten Balkentheorien nicht ausreichend, wenn das Schwingungsverhalten der Hohlzylinder mathematisch modelliert werden soll. Im Gegensatz zu den zahlreichen Veröffentlichungen zu Ultraschall-Motoren, die ein weites Spektrum von grundlegenden Untersuchungen bis hin zu detaillierten prototypischen Anwendungen abdecken, gibt es zur Thematik des Ultraschall-Wanderwellentransports von Schüttgütern nur eine relativ überschaubare Anzahl von Veröffentlichungen. Die überwiegende Zahl der Arbeiten zum Thema nutzen für die Untersuchung des Schwingungsverhaltens modale Beschreibungen unter der Annahme idealisierter Randbedingungen. Oftmals wird eine Lagerung über Membranen (Englisch: shear diaphragms) verwendet, die in radialer Richtung als ideal steif aber hinsichtlich der Biegung bzw. einer axialen Verschiebung als ideal nachgiebig angenommen werden und eine analytische Berechnung der Eigenfrequenzen und -formen erlauben. Eine Modellierung der Wellenausbreitung findet sich nur selten, und wenn, dann wird zur Vereinfachung die Annahme harmonischer Wellen auf unendlichen Wellenleitern getroffen.

Die vorliegende Arbeit setzt an dieser Stelle an und nutzt bekannte Schalentheorien als Grundlage zur Beschreibung der Zylinderschwingungen und zur Modellierung der Wanderwellenausbreitung. Die Arbeit beginnt in Kapitel 2 mit einem Überblick über den Stand der Technik zum Thema Ultraschall-Wanderwellentransport und der Modellierung von Schalenschwingungen, die für den weiteren Verlauf der Arbeit von entscheidender Bedeutung ist.

Basierend auf verschiedenen Theorien zur Beschreibung von Zylinderschwingungen werden dann in Kapitel 4 Modelle zur Beschreibung von Wanderwellen in Hohlzylindern hergeleitet. Nach einigen grundlegenden, theoretischen Untersuchungen zu den verschiedenen radialsymmetrischen Wellentypen hinsichtlich deren Anregung und Aus-

breitung werden in Kapitel 5 die experimentellen Untersuchungen zur Validierung der Modelle beschrieben. Anhand der Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen werden dann in Kapitel 6 die Modelle validiert. Dabei steht zunächst die Validierung der anhand des Modells ermittelten Dispersionskurven im Mittelpunkt der Untersuchungen, die von entscheidender Bedeutung für die weitere Modellierung der Schwingungsformen ist. Anschließend folgt die Analyse und messtechnische Validierung der sich einstellenden Betriebsschwingungsformen sowie der zugehörigen frequenz- und teilweise auch ortsabhängigen elliptischen Oberflächenpunktbahnen.

Abschließend werden die im Rahmen der Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zusammengefasst und hinsichtlich der Aufgabenstellung der Arbeit diskutiert.

## 2 Stand der Technik

Einer Erklärung des Prinzips des Pulvertransports mittels Ultraschall-Wanderwellen, folgt in diesem Kapitel eine Übersicht der wichtigsten Veröffentlichungen zum Thema Ultraschall-Wanderwellentransport und einiger angrenzender Bereiche, sofern sie für die vorliegende Arbeit von Relevanz sind. Im Weiteren geht das Kapitel auf die Beschreibung und Erzeugung von Wanderwellen in kontinuierlichen Wellenleitern ein, wobei besonders die Ultraschall-Wanderwellenmotoren, sowohl in der linearen als auch in der rotatorischen Ausführung, im Mittelpunkt stehen. Den Schwerpunkt dieses Kapitels bildet die Beschreibung der Schwingungen von Hohlzylindern. Hierbei werden ausgewählte Theorien zur Beschreibung der Schwingungen dünnwandiger und dickwandiger Hohlzylinder betrachtet, wie sie vor allem in der Zeit von 1930 und 1970 in großer Zahl entwickelt und veröffentlicht wurden. Das Kapitel schließt mit jeweils einem Abschnitt zu Eigenschwingungsformen von Hohlzylindern und zu piezoelektrischen Wandlern.

### 2.1 Pulvertransport mittels Ultraschall-Wanderwellen

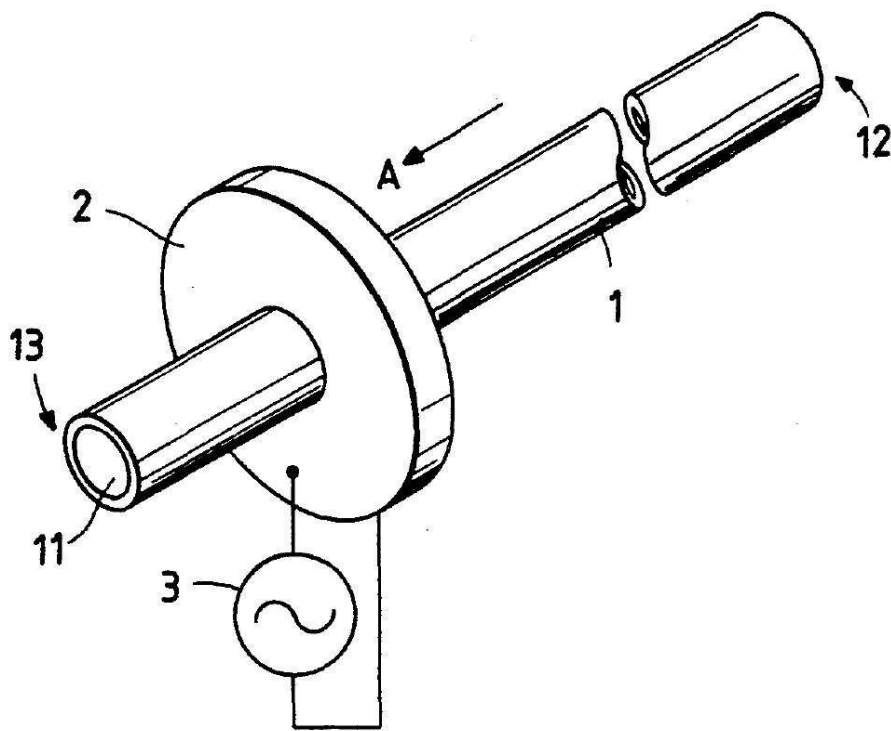
Die Idee, Ultraschall-Wanderwellen in Hohlzylindern zu erzeugen und diese zum Transport von pulverförmigen Stoffen zu nutzen, wurde Anfang der 1990er Jahre von einer Gruppe um die Japaner TOMIKAWA und TAKANO aufgebracht und erstmals veröffentlicht (TAKANO ET AL. [96]). Sowohl in Japan (TOMIKAWA ET AL. [103, 100]) als auch in den Vereinigten Staaten von Amerika (TSUCHIYA ET AL. [106, 105]) meldeten sie ihre Pulver-Transport-Methode für den Einsatz in Fotokopierern zum Patent an.

#### 2.1.1 Grundlagen des Ultraschall-Wanderwellentransports in Hohlzylindern

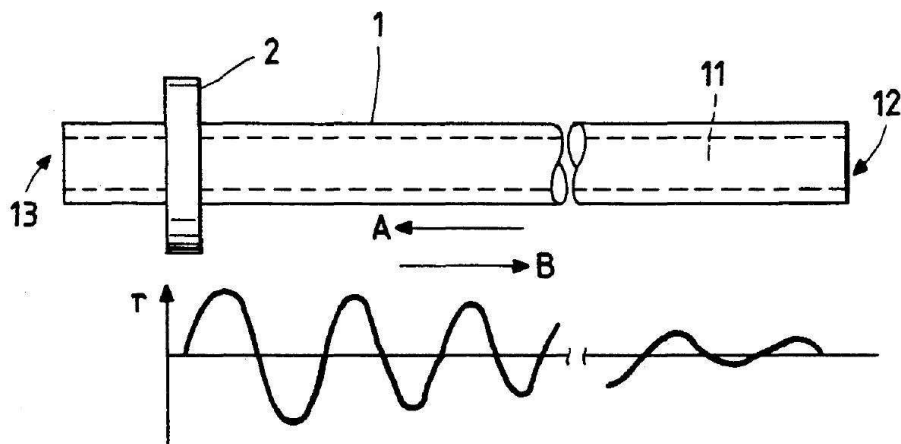
Das in den **Abb. 2.1** und **2.2** dargestellte System, dessen grundlegender Aufbau auch für die grundlegenden Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, besteht aus einem ringförmigen Piezowandler und einem Hohlzylinder aus Acrylglas<sup>1</sup>. Der Piezowandler ist auf den Hohlzylinder aufgeschoben und mit ihm verklebt. Bei entsprechender Anregung mit einer sinusförmigen Wechselspannung führt der Wandler Radial-

---

<sup>1</sup>Polymethylmethacrylat (PMMA), besser bekannt als Plexiglas<sup>®</sup>, eingetragener Markenname der Evonik Röhm GmbH.



**Abbildung 2.1:** Systemskizze eines Ultraschall-Wanderwellen-Fördersystems: 1 Hohlzylinder aus Acrylglas, 2 Piezowandler, 3 Spannungsversorgung (TSUCHIYA ET AL. [106])

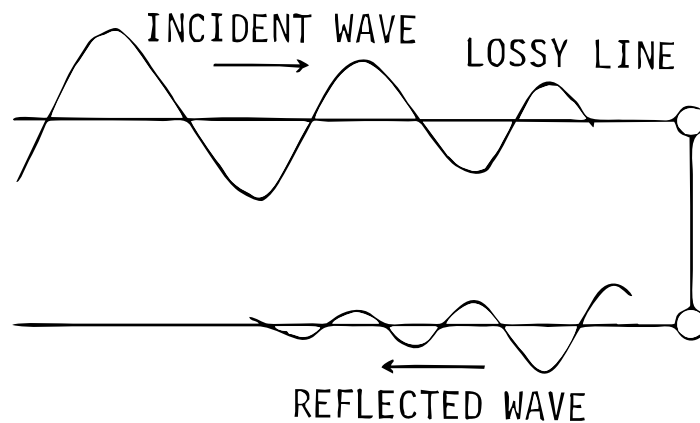


**Abbildung 2.2:** Prinzipskizze eines Ultraschall-Wanderwellen-Fördersystems: A Förderrichtung, B Ausbreitungsrichtung der Wanderwellen (TSUCHIYA ET AL. [106])

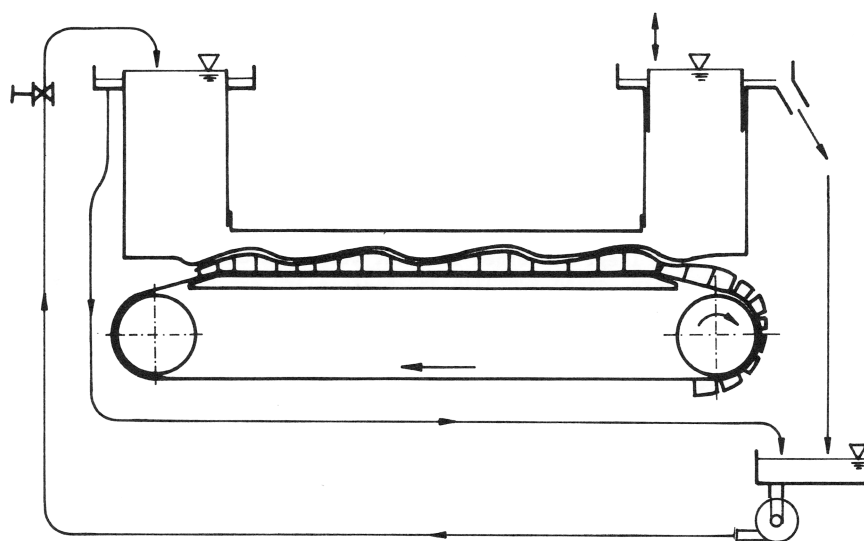
schwingungen aus, die auf den Hohlzylinder übertragen werden und sich auf diesem in axialer Richtung ausbreiten. TOMIKAWA und TAKANO nutzten beim Aufbau ihres Systems ein Hohlzylinder aus Acrylglas, da es sich gegenüber anderen Materialien wie z. B. Stahl oder Glas durch eine verhältnismäßig hohe Materialdämpfung auszeichnet. Diese hohe Materialdämpfung hat zur Folge, dass die Amplituden der sich im Hohlzylinder ausbreitenden Wellen während der Ausbreitung deutlich reduziert werden (siehe



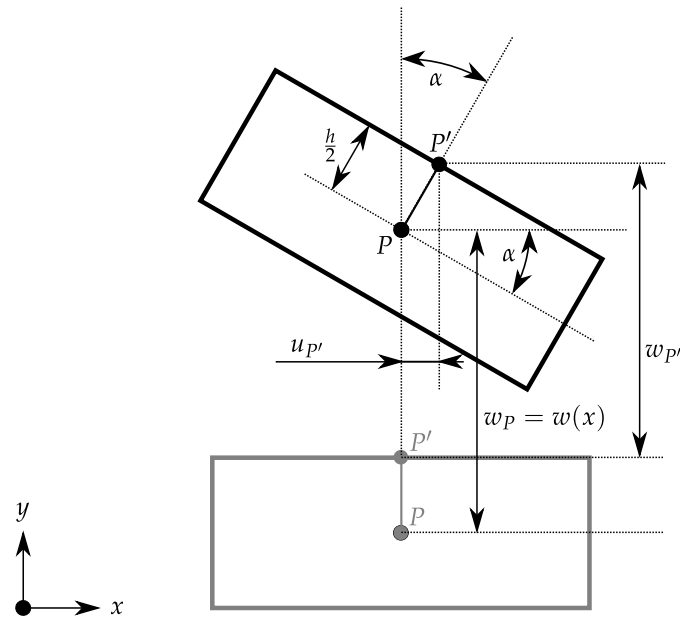
**Abb. 2.2).** Diese Abnahme der Amplituden soll die Ausbildung der zum Pulvertransport notwendigen Wanderwellen begünstigen und den Stehwellenanteil soweit wie möglich reduzieren. Trifft nämlich eine vom Piezoaktor erzeugte Welle auf das freie Ende des Hohlzylinders, wird sie dort ohne Phasensprung reflektiert und läuft entgegen ihrer ursprünglichen Ausbreitungsrichtung durch den Hohlzylinder zurück in Richtung des Piezowandlers. Dabei interferieren die reflektierten Wellen mit den nachfolgenden, vom Piezowandler kommenden Wellen. Aufgrund der hohen Dämpfung sind die Amplituden der reflektierten Wellen im Allgemeinen deutlich kleiner als die der direkt vom Piezowandler kommenden Wellen (siehe **Abb. 2.3**), die daher die Schwingungsform des Hohlzylinders dominieren. Lediglich in unmittelbarer Nähe des freien Hohlzylinderendes sind die Amplituden von einfallenden und reflektierten Wellen nahezu gleich groß und bilden in der Überlagerung eine stehende Welle.



**Abbildung 2.3:** Wellenausbreitung auf einem gedämpften Wellenleiter endlicher Länge nach TAKANO ET AL. [96]



**Abbildung 2.4:** Schematische Darstellung des Peristaltik-Versuchsstandes (ZIMMERMANN [121])



**Abbildung 2.5:** Verschiebungen zweier Punkte eines nach EULER-BERNOULLI modellierten Balkenelementes

Der eigentliche Transportprozess lässt sich mit der Ausbreitung von Wanderwellen allein allerdings nicht erklären, denn der Transport des Pulvers erfolgt nicht in Richtung der Wanderwellen, wie es zu erwarten wäre und z. B. bei der peristaltischen Strömung (siehe **Abb. 2.4** und ZIMMERMANN [121]) oder der Bewegung des menschlichen Darms der Fall ist. Das Pulver läuft vielmehr, wie in **Abb. 2.2** angedeutet, den sich ausbreitenden Wellen entgegengesetzt auf den Piezoaktor zu. Dies entspricht dem Prinzip der Wanderwellenmotoren, bei denen sich der Rotor ebenfalls entgegen der Ausbreitungsrichtung der Wanderwellen bewegt. Ein Unterschied besteht jedoch darin, dass der Rotor des Wanderwellenmotors mit einer Feder gegen den Stator gepresst wird, während der Pulvertransport lediglich die auf das Fördergut wirkende Gravitation nutzt. Die Förderung entgegen der Wellenausbreitungsrichtung lässt sich grundlegend anhand der klassische Balkentheorie nach EULER-BERNOULLI erklären (siehe z. B. MRACEK [68]). Sie soll hier, da sie von grundlegender Bedeutung für den Fördermechanismus ist, aufgegriffen und anhand von **Abb. 2.5** veranschaulicht werden. Die Bewegung des Oberflächenpunktes  $P'(x_P, y_P + \frac{h}{2})$  des dargestellten Balkenelementes ist eng mit der Bewegung des Punktes  $P(x_P, y_P)$  verbunden und lässt sich aus dessen Querverschiebung  $w_P = w(x)$  und der Verkippung des Balkenelementes  $w'(x)$  berechnen. Die Querverschiebung  $w_{P'}$  des Punktes  $P'$  setzt sich zusammen aus der Verschiebung des Punktes  $P$  vermindert um einen Anteil, der sich aus der Verdrehung des Querschnitts und dem Abstand  $\frac{h}{2}$  des Punktes  $P'$  von der neutralen Faser bzw. vom Punkt  $P$  ergibt.

$$w_{P'} = w_P - \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \cos(\alpha) = w_P - \frac{h}{2} (1 - \cos(\alpha)) \quad (2.1)$$

Die Verschiebung  $u_{P'}$  in  $x$ -Richtung resultiert vollständig aus dem Verkappen des Balken-

elementes, da P in dieser Richtung keine Verschiebung erfährt.

$$u_{P'} = \frac{h}{2} \sin(\alpha) \quad (2.2)$$

Für kleine Verschiebungen und kleine Verkippen des Querschnitts bzw. kleine Winkel

$$\alpha = \arctan \left( -\frac{dw(x)}{dx} \right) = -\arctan \left( w'(x) \right) \quad (2.3)$$

können die bekannten Näherungen für die Winkelfunktionen

$$\sin(\alpha) \approx \alpha \quad \cos(\alpha) \approx 1 \quad \tan(\alpha) \approx \alpha \quad (2.4)$$

genutzt werden.

Verwendet man die klassische Darstellung einer Wanderwelle mit der Kreisfrequenz  $\omega$  und der Kreiswellenzahl in axialer Richtung  $k_x$

$$w(x) = \hat{w} \cos(\omega t - k_x x), \quad (2.5)$$

wie sie in Abschnitt 2.2.1 noch näher erläutert wird, und führt damit die bisher unberücksichtigte Zeitabhängigkeit ein, ergibt sich durch Differentiation nach  $x$

$$w'(x) = k_x \hat{w} \sin(\omega t - k_x x). \quad (2.6)$$

Mit der Näherung

$$\alpha \approx -w'(x) \quad (2.7)$$

ergeben sich die Verschiebungen von P' aus Gln. (2.1) und (2.2) zu

$$w_{P'} = w(x) - \frac{h}{2} (1 - 1) = w(x) = \hat{w} \cos(\omega t - k_x x) \quad (2.8)$$

$$u_{P'} = -\frac{h}{2} w'(x) = -\frac{h}{2} k_x \hat{w} \sin(\omega t - k_x x) \quad (2.9)$$

Werden diese beiden Gleichungen nach den trigonometrischen Funktionen auf der rechten Seite aufgelöst, quadriert und addiert ergibt sich

$$\left( \frac{w_{P'}}{\hat{w}} \right)^2 + \left( \frac{u_{P'}}{\frac{h}{2} k_x \hat{w}} \right)^2 = 1. \quad (2.10)$$

Der Punkt P' bewegt sich also auf der durch Gl. (2.10) beschriebenen elliptischen Bahn, wie sie ganz ähnlich auch bei den Ultraschall-Wanderwellenmotoren auftritt. Anhand der Gln. (2.8) und (2.9) lässt sich der Umlaufsinn der Ellipse bestimmen. Im vorliegenden Fall mit einer angenommenen Wellenausbreitung in positiver  $x$ -Richtung ergibt sich ein Umlaufsinn entgegen dem Uhrzeigersinn. Die Ellipse besitzt die Halbachsen  $\hat{w}$  in  $y$ - und  $\frac{h}{2} k_x \hat{w}$  in  $x$ -Richtung. Sie wird also bei identischer Wellenamplitude  $\hat{w}$  umso breiter, je dicker der Balken und je kürzer die Wellenlänge ( $\lambda = \frac{2\pi}{k_x}$ ) wird. **Abb. 2.6** zeigt die Entstehung der elliptischen Bahn beim Durchlauf einer Welle durch ein Balkenelement für diskrete Zeitschritte. Dargestellt sind jeweils Momentaufnahmen, die den aktuellen

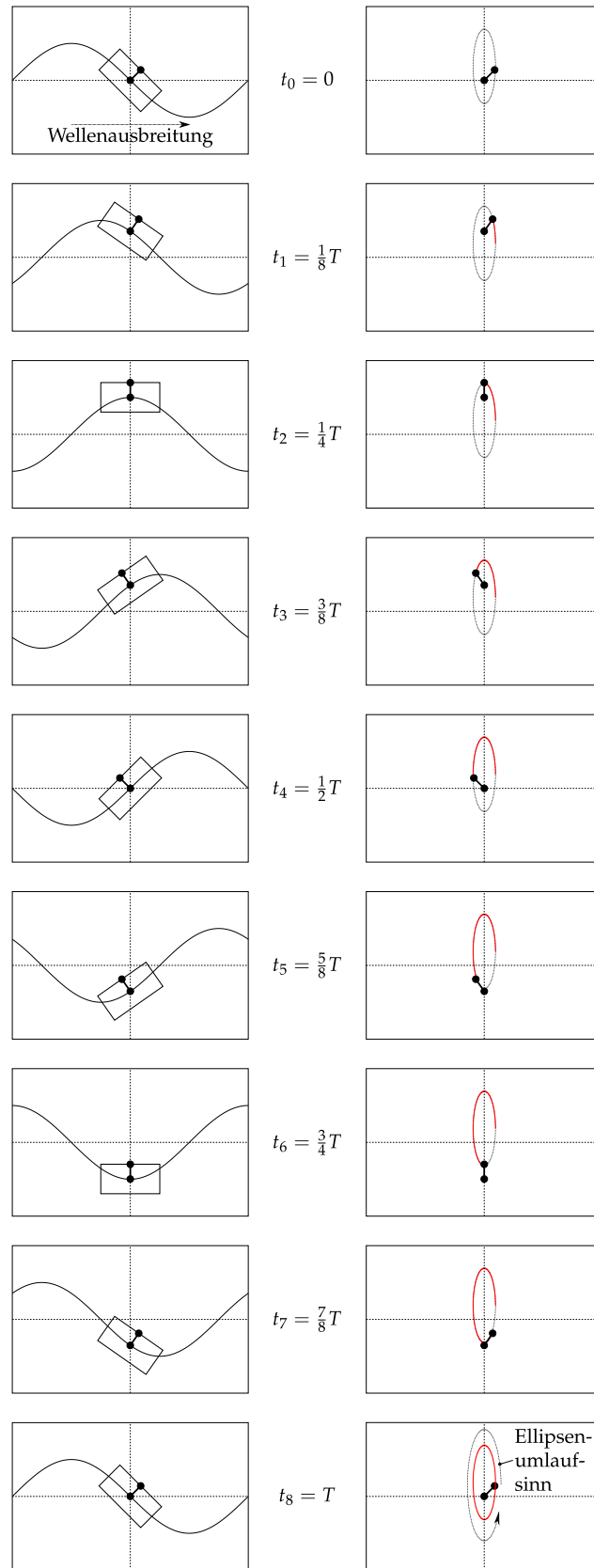
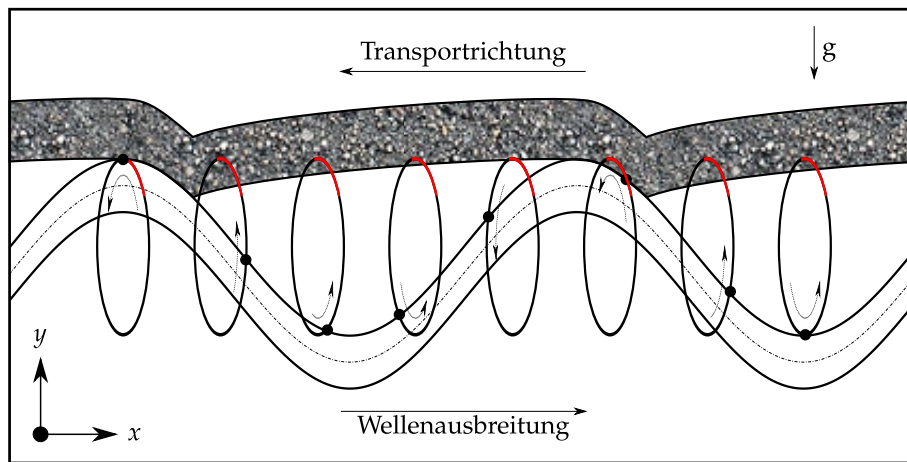


Abbildung 2.6: Entstehung der elliptischen Bahn eines Oberflächenpunktes bei Durchlauf einer Wanderwelle durch ein Balkenelement



**Abbildung 2.7:** Schematische Darstellung des Förderprinzips (Amplitude in  $y$ -Richtung um den Faktor 1.000.000 überhöht dargestellt): Lediglich im roten Bereich der Ellipsen herrscht Kontakt zwischen Wellenleiter und Fördergut.

Zustand nach jeweils einem Achtel der Periodendauer bzw. dem Fortschreiten der Welle um ein Achtel der Wellenlänge darstellen.

Der aus der elliptischen Bahn resultierende Fördermechanismus lässt sich anhand von **Abb. 2.7** nachvollziehen. Die Wanderwellen laufen in positiver  $x$ -Richtung durch den Wellenleiter, wobei dessen Oberflächenpunkte sich auf den zuvor beschriebenen elliptischen Bahnen bewegen. Während eines solchen Ellipsenumlaufs treten Wellenleiter und Fördergut aber nur kurz, in dem in **Abb. 2.7** rot markierten Teil der Ellipse, in Kontakt. Der Kontakt endet, wenn die Beschleunigung eines Oberflächenpunktes in negativer  $x$ -Richtung  $1\text{ g}$  übersteigt<sup>2</sup> und das Fördergut, das im Schwerfeld der Erde mit maximal  $1\text{ g}$  beschleunigt wird, dem Oberflächenpunkt nicht mehr folgen kann. Zum erneuten Kontakt kommt es dann, wenn der sich aufwärtsbewegende Oberflächenpunkt auf das im freien Fall befindliche Pulver trifft. Da während der gesamten Kontaktphase die Geschwindigkeit des Oberflächenpunktes in horizontaler Richtung negativ ist, wird das Fördergut in diese Richtung gefördert. MRACEK [68] vermutete daher einen Zusammenhang zwischen Fördergeschwindigkeit und longitudinaler Oberflächenpunktgeschwindigkeit, den er allerdings nicht weiter untersuchte. Bei Betrachtung von **Abb. 2.7** wird auch der Unterschied zur peristaltischen Förderung deutlich, bei der es nicht zu einer Kontaktunterbrechungen zwischen Fördergut und Fördereinheit kommt. Die Unterschiede liegen im Wesentlichen in den deutlich niedrigeren Frequenzen der Wellen und den damit einhergehenden kleineren Beschleunigungen. Aber auch die Tatsache, dass das Fördergut bei der peristaltischen Förderung den kompletten Querschnitt ausfüllt, sowie die Beschaffenheit des Fördergutes, verhindern eine Unterbrechung des Kontakts.

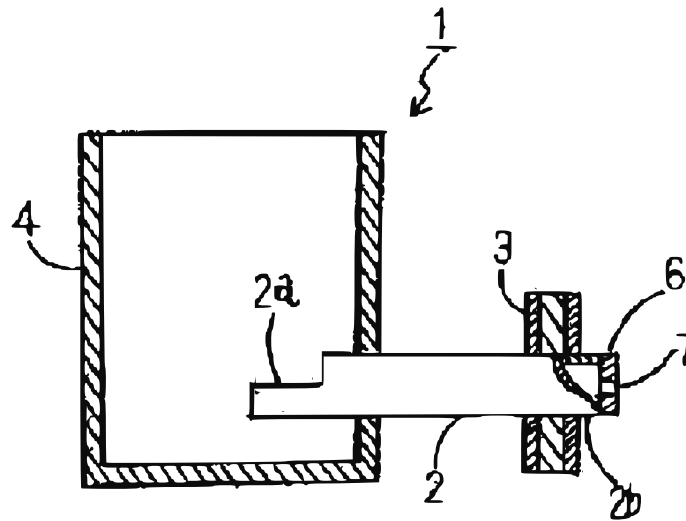
Im Laufe der Zeit erschienen einige Veröffentlichungen zum Thema Ultraschall-Wander-

<sup>2</sup>Bei harmonischen Bewegung mit einer Frequenz von  $30\text{ kHz}$  entspricht der Beschleunigungswert von  $1\text{ g}$  einer Wegamplitude von etwa  $276 \cdot 10^{-12}\text{ m}$ , d. h. weniger als  $0,3$  Tausendstel Mikrometern, so dass bei Bewegungen mit einer Amplitude von  $1\mu\text{m}$  Beschleunigungen von mehr als  $3000\text{ g}$  erreicht werden.

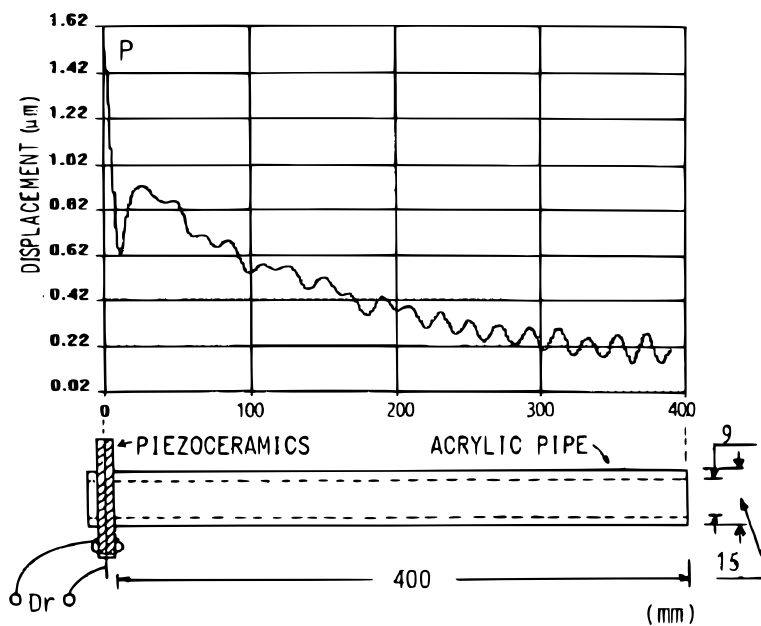
wellentransport, die sich mit verschiedenen Fragestellungen beschäftigten. Um trotz der vorhandenen Dämpfung im System längere Förderstrecken realisieren zu können, ließen sich TOMIKAWA ET AL. [100] die Verkettung mehrerer Hohlzylinder-Wandler-Elemente patentieren. In dieser Kette aus mehreren Ultraschall-Fördersystemen wurden an den Verbindungsstellen Absorberelemente eingesetzt, um an den Stoßstellen die ankommenden Wanderwellen zu absorbieren. In ihrem Patent nannten TSUCHIYA ET AL. [106] neben den üblicherweise genutzten geschlossenen Hohlzylindern auch andere Wellenleiter-Querschnittsgeometrien, wie zum Beispiel einen geschlitzten und einen der Länge nach halbierten Hohlzylinder. Verschiedene Elektrodenkonfigurationen der Piezoringe, die jeweils unterschiedliche Schwingungsformen und damit andere Wellentypen in dem Hohlzylinder anregen, wurden hier ebenfalls gezeigt. Als alternative Materialien zu Acryl sind Nylon, allgemein synthetische Harze und im speziellen Acrylnitril-Butadien-Styrol, Polypropylen, Polystyren oder Polyoxymethylen angeführt worden, die ebenfalls eine hohe Materialdämpfung besitzen. In der detaillierten Systembeschreibung sind einige Hinweise zur Auslegung zu finden. Danach sollte für eine gute Förderleistung die Wellenamplitude am freien Ende maximal der halben Anregungsamplitude entsprechen, um den Einfluss der reflektierten Wellen so gering wie möglich zu halten. Erstmals wurde in diesem Patent auch die Möglichkeit des Anschlusses an einen Vorratsbehälter erwähnt, allerdings ohne auf konstruktive Details einzugehen. Auch der negative Einfluss eines sich in der Nähe des Piezowandlers ausbildenden Stehwellenanteils wurde hier genannt, mit dem Hinweis, er werde durch die Massenträgheit des Pulvers überbrückt.

Auch bei Verwendung eines Hohlzylinders als Wellenleiter anstelle eines Balkens entstehen elliptische Oberflächenpunkttrajektorien. Allerdings hat dabei die in Hohlzylindern auftretende Kopplung von radialem und axialem Verschiebungsfeld einen wesentlichen Einfluss auf die Ellipsenform. Die Beschreibung ist entsprechend komplexer als in den vorangegangenen Betrachtungen auf Basis der Balkentheorie und lässt sich nur anhand von Modellen untersuchen, die in der Lage sind, das Schwingungsverhalten von Hohlzylindern zu beschreiben. KANBE ET AL. [41] wählten einen solchen Ansatz und analysierten das Schwingungsverhalten eines Rohrförderers. Allerdings gingen sie von einem unendlich langen Wellenleiter aus, so dass Randeffekte in den Betrachtungen keinerlei Berücksichtigung fanden. Es wurden elliptische Bahnen von Oberflächenpunkten für ausgewählte Punkte eines zuvor berechneten Dispersionsdiagramms unter der Annahme betrachtet, dass jeweils nur eine Wellenart angeregt wird. Die Autoren zeigten, dass bei der Anregung mit verschiedenen Frequenzen in der Theorie auch der Umlaufsinn der Ellipsen variiert werden kann, eine experimentelle Validierung dieser Ergebnisse wurde jedoch nicht vorgenommen.

Die bisher genannten Veröffentlichungen beschränkten sich zumeist auf die Beschreibung des Prinzips des Ultraschall-Wanderwellentransports als solches, eine konkrete Realisierung wurde jedoch nicht gezeigt. Eine erste Umsetzung eines kompletten Systems zum Ultraschall-Wanderwellentransport meldeten TOMIKAWA ET AL. [101] zum Patent an. Das System (siehe **Abb. 2.8**) ist mit einem Vorratsbehälter kombiniert, aus dem im Be-



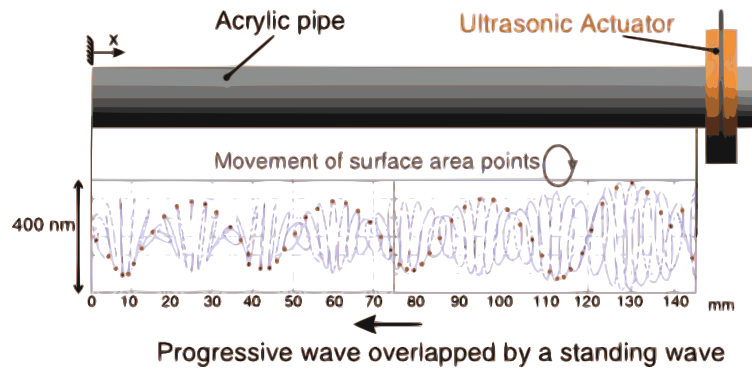
**Abbildung 2.8:** Von TOMIKAWA ET AL. [101] patentiertes Komplettsystem zum Ultraschall-Wanderwellentransport



**Abbildung 2.9:** Amplitudenverlauf entlang der Förderstrecke nach TAKANO UND TOMIKAWA [97]

trieb Pulver entlang der Förderstrecke gefördert wird, die wie bereits bekannt aus einem Acryl-Hohlzylinder mit Piezoaktor besteht. Von TAKANO UND TOMIKAWA [97] wurde das genannte System näher untersucht. Neben der Analyse verschiedener Elektrodenkonfigurationen und den erreichbaren Förderleistungen ermittelten sie die Amplitudenverteilung (siehe **Abb. 2.9**) entlang der Förderstrecke mit einem Scanning-Laser-Dopplervibrometer. Über die Annäherung der Kurve mit einer Exponentialfunktion bestimmten sie aus dem Amplitudenverlauf einen frequenzabhängigen Dämpfungsfaktor in der Einheit<sup>3</sup> Np/m, dessen Wert mit der Frequenz ansteigt. Da die Wellenlänge der vorliegenden

<sup>3</sup>1 Np = 1 Neper  $\approx$  8.685889 dB



**Abbildung 2.10:** Ergebnisse der 3D-Vibrometer-Messung zur Bestimmung der elliptischen Bahnen der Oberflächenpunkte (MRACEK UND WALLASCHEK [69])

Schwingung keine Berücksichtigung fand, kann der Anstieg des Dämpfungsfaktors mit der Frequenz als Konsequenz einer konstanten, frequenzunabhängigen Materialdämpfung angesehen werden. Auffällig bei der Betrachtung des in **Abb. 2.9** dargestellten Amplitudenverlaufs ist das etwa 10 mm vom Piezowandler entfernt auftretende Minimum, welches von den Autoren nicht weiter betrachtet oder kommentiert wurde, sich mit der beschriebenen kontinuierlichen Amplitudenabnahme bei der Ausbreitung einer Wanderwelle aber nicht erklären lässt.

BARALIC [2] nutzte das von TAKANO und TOMIKAWA aufgebaute System und untersuchte es in Bezug auf seine Förderleistung unter Variation einzelner Konstruktionsparameter und der Elektrodenkonfiguration des Piezowandlers. Er zeigte, dass aufgrund der starken Dämpfung mit zunehmender Hohlzylinderlänge die Förderleistung immer weiter abnimmt. Bezüglich der Anregung und der zum Transport genutzten Wellen ermittelte er eine höhere Förderleistung bei radialsymmetrischen Schwingungen als bei der Nutzung anderer Schwingungsformen des Acryl-Hohlzylinders. In ihrer am Heinz Nixdorf Institut der Universität Paderborn durchgeführten Arbeit befassten sich MRACEK UND WALLASCHEK [68, 69] mit dem Aufbau eines Demonstrator-Systems zum Ultraschall-Wanderwellentransport. An dem aufgebauten System wurde mittels 3D-Laser-Vibrometer-Messungen gezeigt, dass sich über der Hohlzylinderlänge die von der Theorie vorhergesagten elliptischen Bahnen ausbilden. Allerdings ist in den in **Abb. 2.10** gezeigten Ergebnissen eine deutliche Ortsabhängigkeit der Ellipsenform zu erkennen, die mit der Überlagerung von Querverschiebung und der aus der Querschnittsverkipfung resultierenden Longitudinalverschiebung bei Verwendung der Balkentheorie nicht erklärt werden kann. Aus diesem Grund regten die Autoren an, für weitergehende Untersuchungen Schalenmodelle zu verwenden, in der Hoffnung so die nicht abschließend erklärten Phänomene besser beschreiben und analysieren zu können.

Aufbauend auf den Ergebnissen von MRACEK untersuchte BISTRY [3] die Förderung von Waschpulvern mit Ultraschall-Wanderwellentransportsystemen. Es wurden dabei neben den bisher verwendeten geraden Hohlzylindern auch gekrümmte Hohlzylinder sowohl mittels FEM simuliert als auch messtechnisch hinsichtlich der Förderleistung und der



Schwingungsform untersucht. Dabei konnte in den verschiedenen Messungen immer wieder das bereits in **Abb. 2.9** gezeigte Amplitudenminimum gepaart mit einem Stehwellenanteil in der Nähe des Piezowandlers festgestellt werden. BISTRY stellte fest, dass die Existenz dieser beiden Phänomene die Förderleistung negativ beeinflusst. Ausgehend von dem bekannten Aufbau mit einem Hohlzylinder aus Acrylglas stellte er dann noch einen Aufbau mit einem Metall-Hohlzylinder vor. Bei diesem System kam ein zweiter Piezowandler zum Einsatz, der mit einem einstellbaren Widerstand zur Impedanzanpassung verbunden wurde und so am Ende des Hohlzylinders die Schwingungen wieder absorbieren sollte. Allerdings bildete sich aufgrund des hohen Impedanzunterschiedes zwischen Hohlzylinder und Piezokeramik eine Stehwelle mit kaum feststellbarem Wanderwellenanteil zwischen den beiden Wandlern aus. Die von MRACEK UND WALLASCHKEK gegebene Anregung der Anwendung einer Schalentheorie zur weiteren Analyse wurde von BISTRY ebenfalls kurz aufgegriffen. Er verwendete die Schalentheorie nach DONNELL [12], um anhand von Eigenschwingungsformen die Kopplung von axialen und radialen Verschiebungsanteilen grundlegend zu betrachten.

Parallel zu den Arbeiten an der Universität Paderborn nutzten KÜHNE ET AL. [47, 48, 46] erstmalig einen Hohlzylinder aus einer Aluminiumlegierung (AlMgSi 0,5) anstelle des bisher verwendeten, stark dämpfenden Acrylglases. Die Ankopplung der ringförmigen Piezoelemente realisierten sie über zwei Spannringe, die auf den Hohlzylinder geschraubt wurden und so die Piezoelemente vorspannten. Der Vorteil dieser Anordnung liegt darin, dass sowohl in radialer als auch in axialer Richtung Verschiebungen auf den Hohlzylinder übertragen werden können. Im Vergleich zeigte sich mit dem Aluminium-Hohlzylinder eine höhere Förderleistung als bei Verwendung eines Plexiglas-Hohlzylinders. Wie schon bei BARALIC wurde auch hier die Abnahme der Förderleistung mit zunehmender Hohlzylinderlänge beobachtet.

## 2.1.2 Veröffentlichungen zu angrenzenden Themengebieten

Neben dem Ultraschall-Wanderwellentransport in Hohlzylindern wurden zahlreiche andere Systeme entwickelt, veröffentlicht und patentiert, die Ultraschallschwingungen in den unterschiedlichsten Formen zum Transport von Pulvern oder Flüssigkeiten nutzen. Die wichtigsten Veröffentlichungen, in denen solche Systeme beschrieben sind oder die bestimmte damit in Verbindung stehende Aspekte näher untersuchten, sind in diesem Abschnitt zusammengestellt.

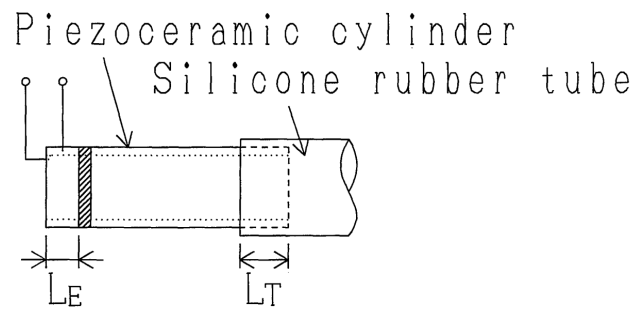
Bereits 1984 meldete YOUNG [120] sein Transportsystem für Pulver oder pulverähnliche Stoffe, wie Kakao, Instant-Kaffee oder -Tee, zum Patent an. Das System wurde mittels klassischer Halbwellensynthese ausgelegt und basiert auf der speziell abgestimmten Schwingungsform eines rohrförmigen Förderkanals. Die Schwingungsform ist so abgestimmt, dass sich in der Nähe des Materialeinlasses ein Schwingungsmaximum und in der Nähe des Auslasses der benachbarte Schwingungsknoten befindet. Aufgrund der Abstimmung der Schwingungsform und der Bedingung, dass das Schwingungsmaximum

am Einlass und das Schwingungsminimum am Auslass direkt benachbart sein müssen, ist die erreichbare Transportstrecke allerdings beschränkt, so dass das System eher zum Dosieren denn zum Transportieren eingesetzt werden kann. Ein ähnliches Prinzip zum Toner-Transport wurde von CONNORS ET AL. [10] in ihrem Patent beschrieben. Ein balkenförmiges Element wurde dort so angeregt, dass es am einen Ende ein Schwingungsknoten und am anderen ein Schwingungsmaximum ausbildet. Der Toner soll sich durch die Schwingungen vom Schwingungsbauch im Vorratsbehälter zum Schwingungsknoten bewegen, wo er auf ein Band übertragen wird. Eine genaue Beschreibung wie diese Schwingungsform erzeugt werden kann findet sich in dem Patent allerdings nicht.

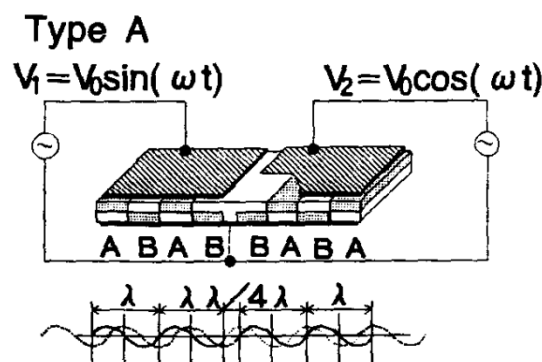
Neben dem bereits im vorangegangenen Abschnitt 2.1.1 beschriebenen System wurden in TAKANO ET AL. [96] noch zwei weitere Systeme zum Ultraschall-Pulvertransport vorgestellt, die allerdings auf einem anderen Transportmechanismus basieren. Beide Systeme bestehen aus je zwei parallel angeordneten Balkenstrukturen mit einem kleinen Luftspalt dazwischen. Mit jeweils mehreren aufgeklebten Piezowandlern werden auf den Platten Stehwellen erzeugt, die einen Luftstrom zwischen den Platten erzeugen und so für den Transport des Pulvers sorgen. Ein ähnliches, ebenfalls auf balkenförmigen Schwingern basierendes System wurde in YAMADA ET AL. [119] vorgestellt. Allerdings sind dort die beiden identischen balkenförmigen Schwinger so axial versetzt angeordnet, dass die Schwingungsknoten des einen mit den Schwingungsmaxima des anderen zusammenfallen. Bei zeitlichem Phasenversatz der Anregung von  $90^\circ$  wird so eine wandernde Druckwelle zwischen den beiden Schwingern erzeugt, die einen Luftstrom hervorruft und so das Pulver transportiert. Die mit diesen Systemen erreichten Förderleistungen waren allerdings allesamt deutlich geringer als mit dem System, das die Wanderwellen im Hohlzylinder nutzt. Dementsprechend finden sich zu diesen Systemen in der Folge auch keine weiteren nennenswerten Veröffentlichungen.

Ein im Vergleich zum original Hohlzylinder-Fördersystem leicht abgewandeltes System stellten KANBE ET AL. [42] vor. Sie integrierten die Aktorik in den Hohlzylinder, indem sie einen Hohlzylinder aus Piezokeramik nutzen, auf den sie Elektroden aufbrachten. Das freie, nicht angeregte Ende des Hohlzylinders überzogen sie mit einem Silikonschlauch, um die geringe Materialdämpfung der Keramik künstlich zu erhöhen und damit die Ausbildung von Stehwellen zu unterbinden (siehe **Abb. 2.11**).

Das Prinzip der Wanderwelle nutzten MIYAZAKI ET AL. [66] in ihrer Arbeit, um damit eine Micro-Pumpe aufzubauen. Die Erzeugung der Wanderwellen wurde, wie in **Abb. 2.12** dargestellt, mittels eines Arrays aus piezokeramischen Plättchen realisiert, die so polarisiert und angeordnet wurden, dass sich auf der Gesamtstruktur zwei sowohl örtlich als auch zeitlich  $90^\circ$ -phasenverschobene Wellen anregen ließen. Die Überlagerung dieser beiden Wellen ergab dann die zum Transport nötigen Wanderwellen (siehe auch Abschnitt 2.2). Die so erzeugten Wanderwellen wurden schließlich auf ein angeklebtes, abgeflachtes und im Vergleich zum Aktorarray deutlich kleineres Rohr übertragen, in dem so eine Flüssigkeit gefördert werden konnte.



**Abbildung 2.11:** Piezo-Hohlzylinder-System mit übergezogenem Silikon Schlauch zur Absorption der Wanderwellen  
(KANBE ET AL. [42])



**Abbildung 2.12:** Erzeugung einer Wanderwelle auf einer Piezoplatte mit abwechselnd polarisierten Bereichen  
(MIYAZAKI ET AL. [66])

Die Positionierung von Mikropartikeln in Fluiden realisierten HAAKE UND DUAL [25] über die Verschiebung der Schwingungsknoten einer Stehwelle in einem Fluid. Dafür wurden zwei Piezowandler so ausgerichtet und angesteuert, dass sich in dem zwischen ihnen befindlichen Fluid eine stehende Druckwelle ausbildete. Über die Anpassung von Phase und Frequenz der elektrischen Anregung konnte die Position der sich ausbildenden Schwingungsknoten und damit auch die Position der sich in den Knoten sammelnden Partikel eingestellt werden. HAAKE ET AL. [26] wandelten diese Methode derart ab, dass zwischen einer zu Eigenschwingungen angeregten Glasplatte und einem Reflektor ein Fluid in Schwingung versetzt wird. Durch ein Verschieben der Glasplatte ist dann ein gezieltes Platzieren der sich in den Schwingungsknoten sammelnden Partikel möglich. Ferner stellten sie eine Methode vor, bei der, durch mehrfaches Sweepen der Frequenz und die damit einhergehende wiederholte Verschiebung der Schwingungsknoten, Partikel gefördert werden können.

Obwohl im Rahmen der vorliegenden Arbeit der Schwerpunkt auf der Modellierung der sich im Hohlzylinder ausbreitenden Wanderwellen liegt und der Kontakt zwischen Zylinderinnenwand und Fördergut nicht näher betrachtet wird, soll an dieser Stelle trotzdem kurz auf die wichtigsten Literaturstellen zu diesem Thema hingewiesen werden. Zur

Beschreibung der Kontaktprozesse, die in Ultraschall-Wanderwellenmotoren eine wichtige Rolle bei der Umwandlung der hochfrequenten Schwingungen in die makroskopische Bewegung spielen, gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen. Ein guter Überblick zu diesem Thema findet sich in WALLASCHEK [115]. Den Transport eines einzelnen, als Punktmasse angenommenen, Partikels durch sich ausbreitende Wellen modellierten RAGULSKIS ET AL. [79, 78] mittels eines implizit formulierten Bouncing-Ball-Modells, während RAGULSKIS UND SAKYTE [77] später eine explizite Formulierung des Problems angaben. Die Autoren nannten für beide Modelle einen weiten Bereich von möglichen Anwendungen, der sich von im Meer schwimmenden Bojen bis zum Ultraschall-Pulvertransport erstrecken soll. Ob die beim Ultraschall-Wanderwellentransport von Pulver auftretenden Effekte mit diesem Modell tatsächlich abgebildet werden können bleibt allerdings offen, nicht zuletzt, weil zum Beispiel der Einfluss der anderen ebenfalls geförderten Partikel in den Modellen nicht abgebildet wurde. Von LIU ET AL. [54, 55] wurden verschiedene Untersuchungen zur Optimierung des Antriebsverhaltens von Stehwellen-Ultraschall-Motoren durchgeführt. Analysiert wurde die Orientierung und Form der Ellipse hinsichtlich eines guten Antriebsverhaltens anhand eines Bouncing-Disk-Modells. Die Autoren bedienten sich dabei der Analogie zum Werfen eines Pizzateigfladens und der vom Pizzabäcker ausgeführten Handbewegungen. Anhand vereinfachender Annahmen bezüglich der Bewegung und des Kontakts ergab sich eine zur Linie entartete Ellipse mit etwa gleichen Amplituden in beide Bewegungsrichtungen als optimal bezüglich der gewählten Gütekriterien. Allerdings steht dieses Ergebnis im Widerspruch zu der verbreiteten Annahme, dass bei etwa kreisförmiger Bewegung der Oberflächenpunkte des Stators ein Ultraschall-Wanderwellenmotor optimal läuft. Als Begründung gaben die Autoren die unterschiedlichen Belastungen an, denn während der Pizzateigfladen nur durch die Schwerkraft belastet wird nutzen Ultraschall-Motoren in aller Regel eine Federbelastung um den Kontakt zwischen Rotor und Stator zu gewährleisten.

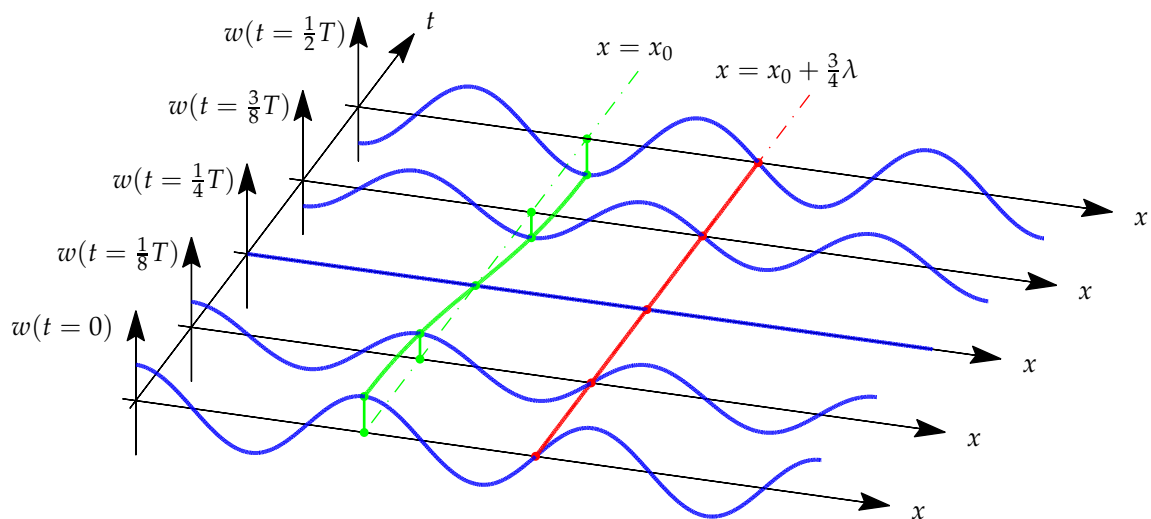
## 2.2 Wanderwellen

Dieser Abschnitt geht zunächst auf die Besonderheiten und die mathematische Beschreibung von Wanderwellen sowie deren Darstellung ein. Anschließend werden die in der Literatur genannten Möglichkeiten der Erzeugung von Wanderwellen, speziell im Hinblick auf die zugrundeliegenden Modellvorstellungen, näher betrachtet. Hierbei bilden Veröffentlichungen zum Thema Ultraschall-Wanderwellenmotoren den Schwerpunkt, da bei ihnen sehr ähnliche Fragestellungen wie beim Ultraschall-Pulvertransport auftreten. Auch wenn sich Ultraschall-Wanderwellenmotoren hinsichtlich der verwendeten Wellenleiter-Geometrien, wie z. B. Kreisscheiben oder Balken, vom Ultraschall-Wanderwellentransport unterscheiden, finden sich hier dennoch Konzepte und Ansätze, die auch bei hohlzylindrischen Wellenleitern anwendbar sind.

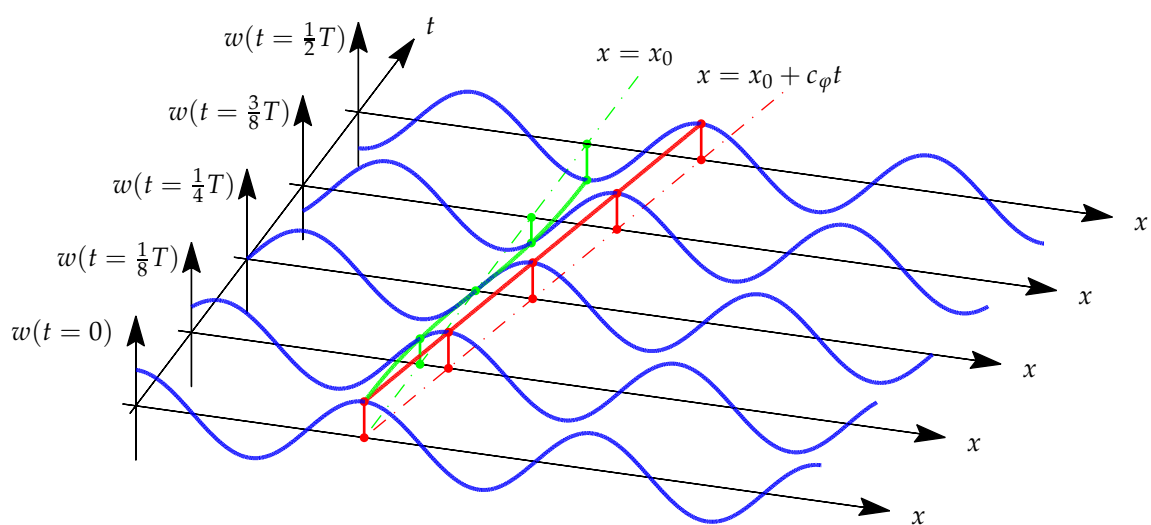
### 2.2.1 Beschreibung von Wanderwellen

Im Gegensatz zu stehenden Wellen bzw. Eigenschwingungen (**Abb. 2.13**), die durch ihre ortsabhängige Amplitudenverteilung mit Schwingungsknoten (rote Linie) und Schwingungsbäuchen (grüne Linie) charakterisiert sind, weisen Wanderwellen (**Abb. 2.14**) keine derartige Ortsabhängigkeit auf. Jeder Punkt erfährt, sofern die Dämpfung vernachlässigt wird, die gleiche Verschiebung, jedoch mit unterschiedlicher Phasenlage. In **Abb. 2.14** sind die Auslenkungen des grün markierten Punktes zwar identisch mit denen in **Abb. 2.13**, der Unterschied besteht jedoch darin, dass sich die Welle mit der Geschwindigkeit  $c_\varphi$  ausbreitet (rote Linie) und keine Schwingungsknoten existieren. Bei verschwindender Dämpfung erfahren vielmehr alle Punkte während einer kompletten Periode die gleiche Auslenkung, wenn auch mit einem bestimmten zeitlichen Versatz.

Wanderwellen lassen sich gut in komplexer Schreibweise mittels komplexer Exponenti-



**Abbildung 2.13:** Schwingung einer Stehwelle



**Abbildung 2.14:** Ausbreitung einer Wanderwelle

alfunktionen beschreiben:

$$w(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{\hat{A} e^{-jkx}}_{\hat{A}(x)} e^{j\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{A} e^{j\omega t - jkx} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{A} e^{j(\omega t - kx)} \right\}. \quad (2.11)$$

Gl. (2.11) enthält einen zeitabhängigen Anteil  $e^{j\omega t}$  mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f, \quad (2.12)$$

einen ortsabhängigen Anteil  $e^{-jkx}$  mit der Kreiswellenzahl

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}, \quad (2.13)$$

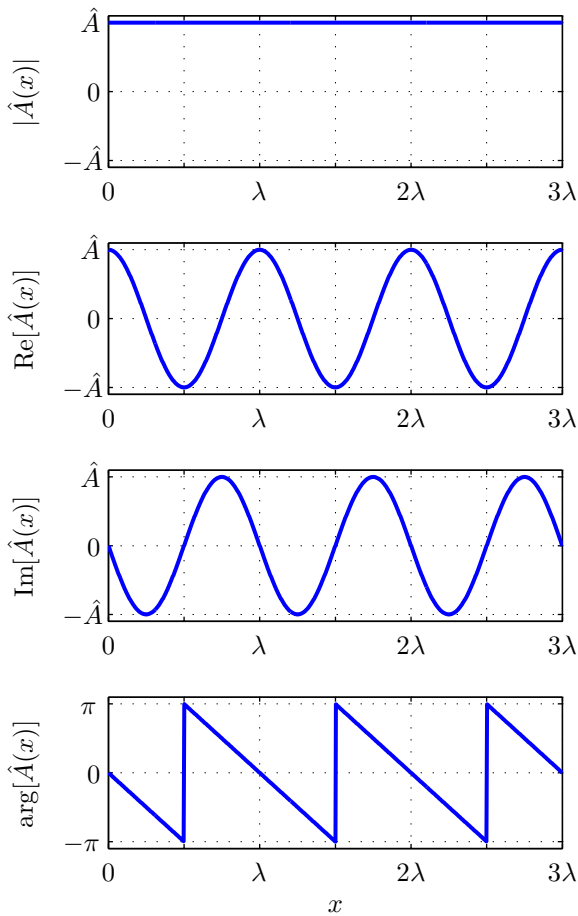
die oftmals auch kurz als Wellenzahl bezeichnet wird, sowie die Amplitude  $\hat{A}$ , die im Allgemeinen komplexwertig sein kann. Der ortsabhängige Anteil und die Amplitude können dabei auch als eine ortsabhängige Amplitude  $\hat{A}(x)$  aufgefasst werden. Die Wellenzahl beschreibt dabei die Anzahl von Wellen bezogen auf den Weg. Der Zusammenhang zwischen (Kreis-)Wellenzahl und Wellenlänge entspricht also der Übertragung des Zusammenhanges zwischen Kreisfrequenz und Periodendauer in den Ortsbereich, wie sich beim Vergleich von Gl. (2.12) und Gl. (2.13) gut erkennen lässt. Die ortsabhängige Amplitude ist im ungedämpften Fall für alle Punkte dem Betrage nach gleich, lediglich die Phase steigt oder fällt kontinuierlich, in Abhängigkeit der Ausbreitungsrichtung. Je nachdem ob sich eine Welle in positiver oder negativer Koordinatenrichtung ausbreitet spricht man auch von rechts- oder linkslaufenden Wellen. Dabei bezeichnet die Ausbreitungsrichtung die Richtung in der sich eine bestimmte Phasenlage  $\varphi_0 = \text{const.}$ , d. h. also z. B. ein Maximum oder ein Nulldurchgang, ausbreitet. Zur Analyse der Phasenlage wird die Phase von Gl. (2.11) betrachtet:

$$\varphi = \arg(\hat{A} e^{j(\omega t - kx)}). \quad (2.14)$$

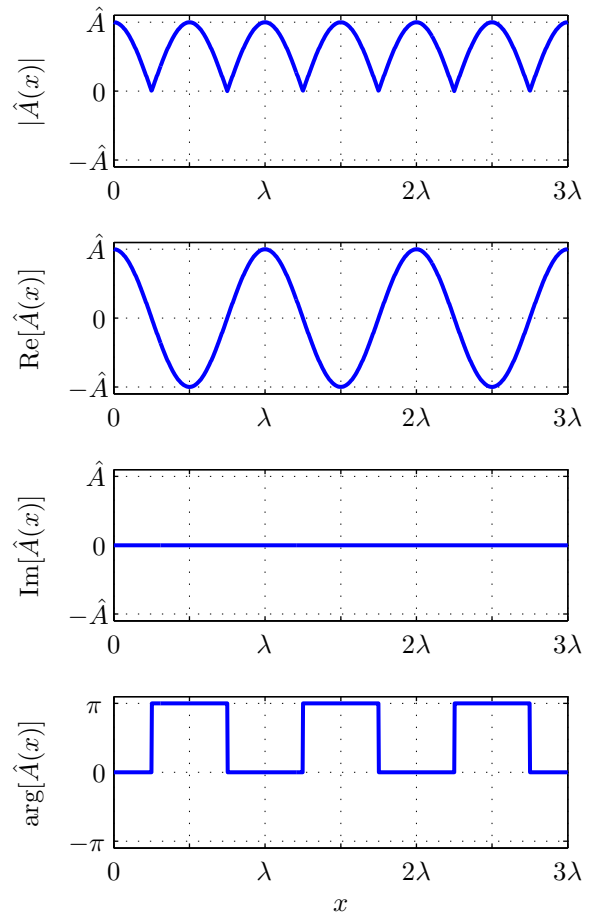
Da die Phase von  $\hat{A}$  konstant ist, ergibt sich die für die Ausbreitungsrichtung relevante Phasenlage aus dem Exponenten der komplexen Exponentialfunktion. Durch

$$\varphi_0 = \omega t - kx \quad (2.15)$$

wird so die Position  $x$  beschrieben, an der sich zum Zeitpunkt  $t$  die Phase  $\varphi_0$  befindet. Die Ausbreitungsrichtung der durch Gl. (2.11) beschriebenen Wanderwelle ergibt sich also aus dem Vorzeichen von  $k$ . Bei positivem Vorzeichen von  $k$  muss mit voranschreitender Zeit  $t$  auch  $x$  größer werden, damit Gl. (2.15) weiterhin erfüllt ist. Die Punkte einer bestimmten Phase wandern also in positiver Richtung von  $x$ . Bei negativem Vorzeichen von  $k$  handelt es sich entsprechend um eine Welle, die sich in negativer  $x$ -Richtung ausbreitet.



**Abbildung 2.15:** Amplitudenverteilung einer nach rechts laufenden Wanderwelle



**Abbildung 2.16:** Amplitudenverteilung einer Stehwelle

Wie bei einer Wanderwelle ist auch bei einer Stehwelle die Amplitude eine Funktion des Ortes, allerdings mit dem Unterschied, dass die komplexen Amplituden bei der Stehwelle alle identische oder entgegengesetzte Phasen besitzen und ihr Betrag zwischen Null und der maximalen Amplitude variiert. Die typischen Verläufe von Amplitude und Phase sind für eine Wander- und eine Stehwelle in den **Abb. 2.15** und **2.16** dargestellt. Auf die unterschiedlichen Amplitudenverteilungen und die charakteristischen Phasenverläufe soll an dieser Stelle nochmals explizit hingewiesen werden. Sie werden im weiteren Verlauf der Arbeit, speziell bei der Auswertung der experimentellen Untersuchungen, von entscheidender Bedeutung sein, wenn es darum geht Steh- und Wanderwellenanteile zu identifizieren und zu unterscheiden.

Breiten sich zwei Wanderwellen gleicher Amplitude und Frequenz in entgegengesetzter Richtung aus, lässt sich ihre Überlagerung durch

$$\begin{aligned}
 w(x, t) &= |\hat{A}| \operatorname{Re} \left\{ e^{j\varphi_A} e^{j(\omega t - kx)} \right\} + |\hat{A}| \operatorname{Re} \left\{ e^{j\varphi_A} e^{j(\omega t + kx)} \right\} \\
 &= |\hat{A}| \left( \cos(\omega t + \varphi_A - kx) + \cos(\omega t + \varphi_A + kx) \right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

beschreiben. Nach Anwendung von Additionstheoremen ergibt sich daraus mit

$$w(x, t) = |\hat{A}| \left( 2 \cos(\omega t + \varphi_A) \cos(kx) \right) = \underbrace{2|\hat{A}| \cos(kx)}_{\hat{A}(x)} \cos(\omega t + \varphi_A) \quad (2.17)$$

eine ortsabhängige Amplitude und ein zeitabhängiger Anteil. Es lässt sich leicht erkennen, dass die ortsabhängige Amplitude im Betrag variabel ist und für alle Punkte identische oder entgegengesetzte Phasen besitzt. Es handelt sich also entsprechend den vorangegangenen Betrachtungen um eine stehende Welle.

Um eine erzeugte Wanderwelle hinsichtlich ihres Gehalts an stehenden Wellenanteilen zu analysieren, wurde von HASHIMOTO [31] die ursprünglich aus der Telekommunikationstechnik stammende Standing-Wave-Ratio (SWR) herangezogen. Die Standing-Wave-Ratio liefert ein Maß für die Reinheit einer Wanderwelle indem sie die maximale Schwingungsamplitude zur minimalen Schwingungsamplitude ins Verhältnis setzt

$$\text{SWR} = \frac{A_{\max}}{A_{\min}}. \quad (2.18)$$

So ergibt sich bei einer reinen Wanderwelle mit konstanter Amplitudenverteilung ein Wert von eins, der für eine reine Stehwelle über alle Grenzen wächst. Da der Wert aus dem Maximum und dem Minimum über den gesamten Wellenleiter ermittelt wird, lässt er sich allerdings nur im ungedämpften Fall oder bei sehr geringer Dämpfung sinnvoll anwenden, wenn die Amplituden der Wanderwelle nicht oder nur marginal abnehmen.

Neben der Phasengeschwindigkeit aus **Abb. 2.14**

$$c_\varphi = \frac{\omega}{k} = \lambda f, \quad (2.19)$$

die die Ausbreitung einer einzelnen Wanderwelle beschreibt, lässt sich noch die Gruppengeschwindigkeit (siehe DEMTRÖDER [11])

$$c_G = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_\varphi + k \frac{\partial c_\varphi}{\partial k} \quad (2.20)$$

bestimmen. Diese gibt an, mit welcher Geschwindigkeit sich ein aus mehreren Wellen unterschiedlicher Frequenz bestehendes Wellenpaket ausbreitet. Im dispersionsfreien Fall gilt  $c_\varphi = c_G$ , d. h. einzelne Wellen breiten sich mit der gleichen Geschwindigkeit aus wie das Wellenpaket. Da dies für alle in dem Wellenpaket enthaltenen Anteile gilt, bleibt die Form des Wellenpakets unverändert. Liegt dagegen Dispersion vor, breiten sich alle Wellenanteile mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aus, was schließlich zu einer Veränderung der Form des Wellenpaketes führt.

## 2.2.2 Erzeugung elliptischer Oberflächenpunktbahnen

Um die zum Beispiel beim Betrieb von Ultraschall-Wanderwellenmotoren benötigten elliptischen Oberflächenpunktbahnen zu erzeugen gibt es eine Reihe verschiedener Ansätze. Meist laufen diese Ansätze auf die Erzeugung einer Wanderwelle hinaus, aus der dann



wiederum die gewünschte elliptische Oberflächenpunktbahn resultiert. Im Laufe der Zeit wurden verschiedenste Prinzipien vorgeschlagen um die Oberflächenpunktbahnen zu erzeugen (SASHIDA [43], UEHA UND TOMIKAWA [110], UCHINO [107], UCHINO [108], WALLASCHEK [114] und HEMSEL UND WALLASCHEK [34]). Rotatorische Wanderwellenmotoren, die heute weit verbreitet sind, bilden aufgrund der rotationssymmetrischen Form von Rotor und Stator einen Sonderfall (HAGEDORN UND WALLASCHEK [28, 29]), dessen Prinzipien sich nicht ohne weiteres auf den linearen Fall übertragen lassen, aber dennoch interessante Ansatzpunkte bieten.

Die Fragestellungen, welche die lineare Wanderwellenmotoren betreffen, sind sehr eng mit denen beim Ultraschall-Wanderwellentransport verwandt. Dabei gibt es verschiedene Prinzipideen bzw. Modellvorstellungen, die bei der Erzeugung von Wanderwellen zum Einsatz kommen und im Folgenden näher betrachtet werden. Oftmals sind die auf den ersten Blick verschieden erscheinenden Prinzipien allerdings eng verbunden und lassen sich nicht immer strikt trennen.

### **Verwendung dämpfender Materialien**

Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, lassen sich Wellenleiter aus stark dämpfenden Materialien gut zur Erzeugung von Wanderwellen nutzen. Ist der Wellenleiter lang genug, haben die am freien Ende reflektierten Wellen so kleine Amplituden, dass sie die von der Quelle kommenden Wellen kaum beeinflussen und sich eine Wanderwelle ausbildet. Lediglich in der Nähe der Reflektionsstelle sind hin- und rücklaufende Wellen annähernd gleich groß und bilden in der Überlagerung eine stehende Welle.

### **Anregung und Absorption / Impedanzanpassung**

Eine theoretische Möglichkeit, bei nicht vorhandener oder geringer Materialdämpfung eine Wanderwelle zu erzeugen, besteht darin, einen unendlich langen Wellenleiter zu verwenden. Da die Wellen das Ende nie erreichen, werden Sie nicht reflektiert und entfernen sich stets von der Quelle. In der Praxis kann der gleiche Effekt durch eine Impedanzanpassung erzeugt werden, wie es zum Beispiel in der Elektrotechnik beim Abschluss von Leitungen üblich ist. Der Wellenleiter wird so terminiert, dass die Impedanz des Abschlusses der des unendlich fortgesetzten Wellenleiters entspricht und die Wellen ohne Reflektionen absorbiert werden. KURIBAYASHI ET AL. [49] verwendeten das beschriebene Prinzip um einen linearen Wanderwellenmotor aufzubauen. Sie erzeugten mittels zweier Longitudinalschwinger, von denen einer als Aktor und der andere als Absorber betrieben wurde, Biege-Wanderwellen auf einem Balken. Die Impedanzanpassung des Absorbers wurde dabei über ein an seinen Klemmen angeschlossene Induktivität mit parallel geschaltetem, einstellbarem Widerstand realisiert. Eine Optimierung der Kopplung zwischen den Longitudinal-Schwingern und dem Balken eines ganz ähnlich aufgebauten Systems erreichten KUROSAWA UND UEHA [50] durch die Lagerung des Balkens zwischen jeweils zwei vorgespannten Longitudinalschwingern.

Eine Abwandlung des beschriebenen Prinzips wurde von HASHIMOTO ET AL. [31, 111]

verwendet, um ein berührungsloses Transportsystem aufzubauen. Der wesentliche Unterschied zu Linearmotoren besteht darin, dass der Transport in Richtung der sich ausbreitenden Wanderwellen geschieht und nicht entgegengesetzt. Dies lässt sich damit begründen, dass das Fördergut, welches in diesem Fall ein Festkörper ist, nicht wie die Schlitten der Linearmotoren gegen den Stator gedrückt wird sondern über ihm schwebt und durch den sich bildenden Luftstrom mitgenommen wird.

Ultraschall-Wanderwellen in einem Hohlzylinder wurden von SUN ET AL. [95] durch Anregung und Absorption am anderen Ende erzeugt, um einen Mikro-Linearmotor aufzubauen. Zwei Rohre aus Piezokeramik wurden dafür in ein metallisches Rohr eingebracht und in ihrer Längsmode zu Schwingungen angeregt. Die Schwingungen übertragen sich auf das Rohr und werden nachdem sie es durchlaufen haben vom zweiten Aktor wieder absorbiert. Durch die so erzeugten Wanderwellen lässt sich ein auf das Stator-Rohr mit dem integrierten Piezowandler aufgestecktes Rohr verschieben.

Das Problem beim Aufbau eines Systems, das mittels eines zweiten Aktors die sich ausbreitenden Wellen wieder absorbiert, ist die exakte Abstimmung des Absorbers. Geschieht die Impedanzanpassung passiv, müssen die verwendeten Induktivitäten und Widerstände exakt abgestimmt sein, um eine vollständige Absorption zu gewährleisten, was spätestens dann zu Problemen führt, wenn sich die Systemeigenschaften durch Belastung oder Alterung verändern. Ähnlich verhält es sich, wenn der Absorber aktiv angesteuert wird. Dann müssen sowohl die Amplitude als auch die Phase der elektrischen Absorberspannung durch einen Regler genau angepasst werden, da sonst Wellen erzeugt oder reflektiert, nicht aber wie gewünscht vollständig absorbiert werden. Der hierfür nötige Aufwand ist sowohl hinsichtlich des Aufbaus als auch der Abstimmung nochmals höher als bei der passiven Lösung.

## Überlagerung von Eigenschwingungen

Das Prinzip, die Überlagerung von Eigenschwingungen zur Erzeugung einer Wanderwelle zu nutzen, wird typischerweise in rotatorischen Ultraschall-Wanderwellenmotoren genutzt (HAGEDORN UND WALLASCHEK [28, 29]). Sie besitzen einen rotationssymmetrischen Stator auf dem sich zwei um eine Viertelwellenlänge verschobene Biegeeigenformen anregen lassen, so dass jeweils die Schwingungsknoten der einen Schwingungsform mit den Schwingungsmaxima der anderen Schwingungsform zusammenfallen. Wird neben dem örtlichen Versatz von  $90^\circ$ , durch die Platzierung der anregenden Piezowandler, auch ein zeitlicher Versatz von  $90^\circ$ , durch die Phasenlage der Anregespannung vorgegeben, ergibt sich in der Überlagerung eine Wanderwelle. Dies lässt sich leicht zeigen, wenn die Darstellung einer Wanderwelle aus Gl. (2.11) mittels der EULER'schen Formel

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (2.21)$$

in folgende Form überführt wird

$$\operatorname{Re} \left\{ \hat{A} e^{j(\omega t - kx)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{A} \left[ \cos(\omega t - kx) + j \sin(\omega t - kx) \right] \right\}. \quad (2.22)$$

Unter der Annahme, dass  $\hat{A}$  reell ist, lässt sich der Realteil von Gl. (2.22) unter Zuhilfenahme des entsprechenden Additionstheorems als eine Überlagerung zweier sowohl örtlich als auch zeitlich um  $90^\circ$  gegeneinander phasenverschobener Stehwellen beschreiben

$$\hat{A} \left[ \cos(\omega t - kx) \right] = \hat{A} \left( \cos(\omega t) \cos(kx) + \sin(\omega t) \sin(kx) \right). \quad (2.23)$$

Eine solche Überlagerung von örtlich verschobenen Eigenformen setzt allerdings voraus, dass diese Eigenformen überhaupt existieren, wie es bei rotationssymmetrischen Strukturen der Fall ist. Bei den meisten typischen mechanischen Strukturen existieren die nötigen örtlich verschobenen Eigenformen gleicher Frequenz allerdings nicht, so dass die örtlich verschobenen Wellen auf andere Art und Weise angeregt werden müssen. Hierzu finden sich in der Literatur zahlreiche Beispiele, die die Problemstellung auf verschiedenste Art und Weise zu lösen versuchen.

Da sich bei Frequenzen im Ultraschallbereich die Impedanzanpassung schwierig gestaltet, wurde von TOMIKAWA ET AL. [99] die Überlagerung zweier Eigenformen zur Wanderwellenerzeugung vorgeschlagen. Sie überlagerten auf einem Balken zwei benachbarte Biegemoden höherer Ordnung mit einem zeitlichen Phasenversatz von  $\frac{\pi}{2}$ . Die Anregung wurde mit zwei Aktoren, die jeweils so platziert waren, dass sie genau auf eine der beiden Moden wirken, bei einer Frequenz zwischen den beiden zugehörigen Eigenfrequenzen realisiert. Die entstehende Wanderwelle ist allerdings nur in der Nähe der Balkenmitte gut ausgeprägt, an den Enden bilden sich stehende Wellen. Das selbe Prinzip wird von LOH UND RO [57, 56] angewandt, wobei sie allerdings zwei Langevin-Transducer verwendeten, um einen höheren Energieeintrag in das System zu erreichen. Dies war nötig, da sich bei dieser Methode im Betrieb zwischen zwei Resonanzfrequenzen nicht die in den Eigenfrequenzen auftretenden Resonanzüberhöhungen nutzen lassen.

SEEMANN UND HAGEDORN [91] ordneten vier Balkenelemente so an, dass eine geschlossene Kontur entstand, die doppelte Eigenfrequenzen mit orthogonalen Eigenformen besitzt. Dadurch war es ihnen möglich, das beim rotatorischen Wanderwellenmotor verwendete Prinzip der modalen Superposition auch für Linearmotoren anzuwenden. Später entwickelte SEEMANN [90] und HERMANN [35] diese Idee weiter und nutzten eine Struktur aus zwei geraden und zwei halbkreisförmigen Balken, die so abgestimmt wurden, dass zwei Eigenformen, die auf den geraden Teilstücken orthogonal zueinander sind, die gleiche Eigenfrequenz besitzen. So konnten sie auf den geraden Elementen zwei verschobene Biegeformen erzeugen, die in der Überlagerung eine Wanderwelle ergaben.

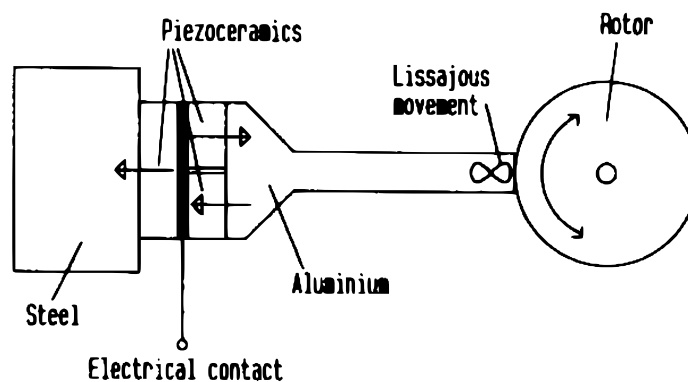
Eine Möglichkeit zur Erzeugung von Wanderwellen durch Überlagerung zweier Eigenschwingungsformen einer Platte wird in MANCEAU ET AL. [60] beschrieben. Auf einer Siliziumplatte wurden zwei benachbarte Eigenformen bei einer Frequenz zwischen den zugehörigen Eigenfrequenzen so angeregt, dass ihre Amplituden etwa gleich groß waren

und die Überlagerung in einem Teil der Platte zur Ausbildung einer Wanderwelle führten. Auch für rotationssymmetrische Scheiben soll diese Technik anwendbar sein, wenn gezielt kleine Asymmetrien erzeugt werden.

ROH ET AL. [88, 87] erzeugten eine über den gesamten Wellenleiter laufende Wanderwelle auf einem beidseitig mit Piezoplättchen wechselnder Polarisation beklebten Balken. Dabei waren die Plättchen auf Ober- und Unterseite um eine Viertelwellenlänge versetzt und ermöglichten so das Aufprägen zweier Wellen, die jeweils an einem Ende des Balkens einen Knoten und am anderen einen Schwingungsbauch aufweisen. Bei phasenversetzter Anregung ergab sich so die gewünschte Wanderwelle. Die genutzten Schwingungsformen sind allerdings keine Eigenformen der Struktur, sondern vielmehr in ihrer Form direkt durch die applizierten Piezokeramiken vorgegeben. Somit ist es nicht möglich Resonanzüberhöhungen auszunutzen, um große Amplituden und damit hohe Antriebsleistungen zu erzielen.

Während für den Aufbau eines linearen Wanderwellenmotors ebenso wie beim Ultraschall-Wanderwellentransport eine Wanderwelle und damit eine elliptische Bewegung in großen Bereichen des Wellenleiters, im Idealfall über seine gesamte Länge, erzeugt werden, gibt es andere Anwendungen, bei denen eine elliptische Bewegung nur an einzelnen Punkten der Struktur benötigt wird. Hierfür wurden eine Vielzahl verschiedener Kombinationen von Eigenschwingungen mit verschiedenen Schwingergeometrien untersucht. So überlagerten FLEISCHER ET AL. [15] eine Längs- und eine Biegeschwingung eines Balkenelementes mit dem Frequenzverhältnis von 1 : 2. Mit dieser Schwingungsform beschreibt die Spitze des Stators eine achtförmige Lissajous-Figur und kann so einen Rotor antreiben (siehe **Abb. 2.17**).

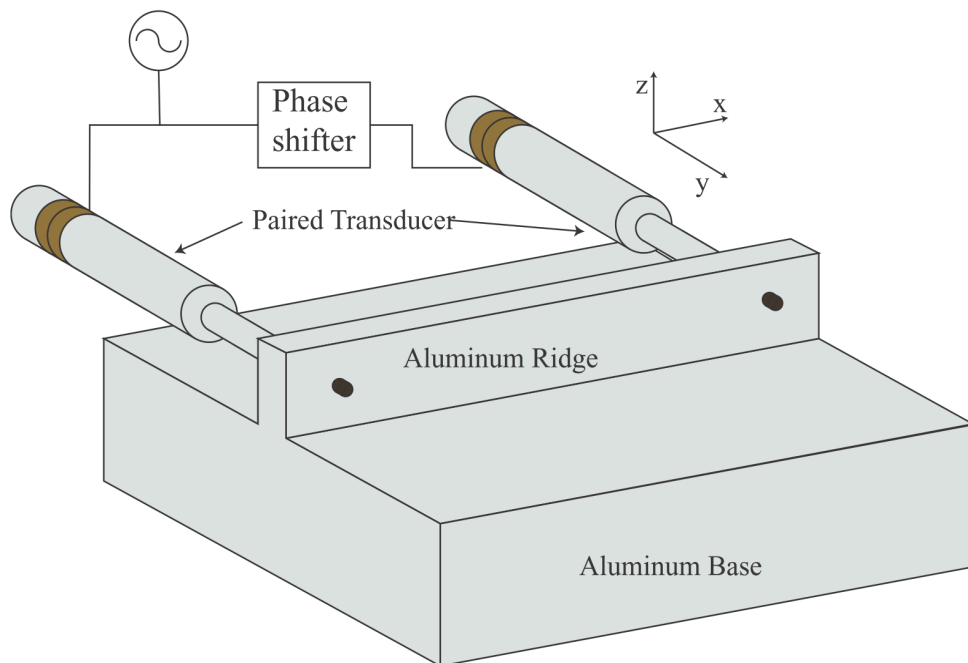
TODA UND KAMO [98] gingen sehr ähnlich vor, indem sie in einem Zylinder durch Abstimmung der geometrischen Abmessungen eine Biege- und eine Längsschwingung überlagerten, um an den Zylinderenden eine elliptische Bewegung zu erzeugen. Über die so erzeugte Bewegung trieben sie dann einen gegen den Zylinder gepressten Rotor eines Motor an.



**Abbildung 2.17:** Aufbau des Piezomotors nach FLEISCHER ET AL. [15]. Durch Überlagerung einer Longitudinal- und einer Biegeschwingung entsteht die Lissajous-Figur an der Spitze des Stators.

Für die Anwendung beim Schleifen erzeugten WU ET AL. [118] an der Spitze eines Balkens eine elliptische Bewegung durch Überlagerung einer Längs- und einer Biegemode. Sie nutzen die erste Längsschwingung und die vierte Biegemode, deren Eigenfrequenzen durch das Abstimmen des Verhältnisses von Dicke zu Länge übereinander geschoben wurden. TOMIKAWA ET AL. [102] nutzten die erste Längs- und die zweite Biegemode eines Balkens, um damit einen Rotor anzutreiben und realisierten durch Integration des Schwingers in einen Schlitten einen Linearmotor. Zur Lagerung konnte in beiden Fällen die Balkenmitte genutzt werden, da hier jeweils die beiden verwendeten Moden eine Knotenlinie aufwiesen. Über die phasenversetzte Anregung der Längsschwingung zweier identischer, über ein Verbindungselement gekoppelter Stäbe erzeugten HEMSEL ET AL. [33] eine elliptische Bahn, die sie zur Erzeugung einer linearen Bewegung für einen Motor nutzen.

In TOMINAGA ET AL. [104] wird die Ähnlichkeit der einzelnen genannten Prinzipien zur Wanderwellenerzeugung sehr deutlich. Hier wurden alle soeben beschriebenen Prinzipien an ein und demselben Aufbau eines linearen Wanderwellenmotors verwendet. Ein aus einem Trägerblock herausstehender Steg wurde dabei mit einem Langevin-Transducer in Querrichtung angeregt, so dass sich Wanderwellen auf ihm ausbreiteten und so den aufgesetzten Schlitten des Motors verschoben. Zunächst wurde dabei ein Stator aus stark dämpfendem Material verwendet, dann kam ein Aluminium-Stator mit einem eingesetzten Gummiabsorber zum Einsatz bevor, wie in **Abb. 2.18** dargestellt, zuletzt ein zweiter Langevin-Transducer mit gegenphasiger Ansteuerung zum ersten eingesetzt wurde.



**Abbildung 2.18:** Prinzipaufbau des Wanderwellenmotors mit Verwendung von zwei Ultraschall-Transducern zur Erzeugung der Wanderwellen. Der Schlitten des Motors ist nicht dargestellt. (TOMINAGA ET AL. [104])

Vergleicht man abschließend exemplarisch das System von LOH UND RO [57, 56] (modale Superposition) mit dem von KUROSAWA UND UEHA [50] (Impedanzanpassung) ist der einzige wesentliche Unterschied die aktive Ansteuerung des zweiten Transducers, der bei KUROSAWA noch mit einem passiven elektrischen Netzwerk beschaltet war. Es fällt nicht schwer, die Wirkung des zweiten Aktors als eine aktive Impedanzanpassung des Balkenendes zu interpretieren und damit die Ähnlichkeit der modalen Superposition und der Impedanzanpassung zu verdeutlichen. Grundsätzlich lassen sich alle beschriebenen Ansätze zur Erzeugung von Wanderwellen auch bei Hohlzylindern einsetzen. Da der Einsatz eines stark dämpfenden Wellenleitermaterials am einfachsten umsetzbar ist, soll dieser in der vorliegenden Arbeit zur Analyse der grundsätzlichen Phänomene eingesetzt werden.

## 2.3 Schwingungen von Hohlzylindern

Die ersten Veröffentlichungen zu Verformungen und Schwingungen von zylindrischen Schalen bzw. dünnwandigen Zylinder erschienen bereits in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Zu den bedeutendsten und meist zitiertesten Arbeiten zählen die von LOVE [58, 59] und RAYLEIGH [80, 81, 82]. Während diese ersten Arbeiten hauptsächlich auf die Berechnung der Eigenfrequenzen von Glocken ausgerichtet waren, erfuhr das Thema um Mitte des 20. Jahrhunderts wieder höhere Aufmerksamkeit bei der Untersuchung und Auslegung von Behältern, Turbomaschinen, unstarren Luftschiffen, weittragenden Dachkonstruktionen, Flugzeugrümpfen, Raumfahrt-Strukturen und vielem mehr, siehe u. a. FLÜGGE [16] und FORSBERG [20]. Aufbauend auf den Arbeiten von DONNELL [12, 13], MUSHTARI [71] und FLÜGGE [16] entstand in der Folgezeit eine Vielzahl verschiedener Theorien zur Beschreibung der Statik und Dynamik von Schalen. Hauptsächlich wurden die verschiedenen Schalentheorien dazu genutzt, unter der Annahme spezieller, idealisierter Randbedingungen, Eigenformen und Eigenfrequenzen der verschiedensten Strukturen zu bestimmen.

Analog zu den Balken- und Platten-Theorien lassen sich auch die Schalentheorien in zwei wesentliche Gruppen unterteilen. Die erste Gruppe (siehe Abschnitt 2.3.1) umfasst die dünnwandigen Schalen ohne Berücksichtigung von Schubverformungen. Sie entspricht der EULER-BERNOULLI-Theorie für dünne Balken und der KIRCHHOFF-Theorie (KIRCHHOFF [44]) für dünne Platten, die jeweils auf der ersten BERNOULLI'schen-Hypothese (Querschnitte bleiben eben) und der zweiten BERNOULLI'schen-Hypothese (Querschnitte stehen stets senkrecht auf der Mittelebene), auch KIRCHHOFF'sche-Normalenhypothese genannt, aufbauen. Es bleiben also alle Normalen zur Schalenmittelebene im verformten Zustand gerade und senkrecht zur Schalenmittelebene. Obwohl die im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten Hohlzylinder strenggenommen nicht alle Annahmen der dünnen Schalen erfüllen (siehe unten z. B.  $\frac{h}{a} \leq 0,1$ ) können diese Theorien dennoch betrachtet werden, um grundlegende Phänomene zu verstehen und zu erklären. Die zweite Gruppe der Schalentheorien (siehe Abschnitt 2.3.2) berücksichtigt, ana-

log zur Timoshenko-Balken-Theorie und den Platten-Theorien nach REISSNER [85] und MINDLIN [63], auch die auftretenden Schubverformungen und Drehträgheiten der Schalelemente.

In beiden Gruppen der Schalentheorien gibt es gegenüber der geringen Anzahl von Balken- und Platten-Theorien eine fast unüberschaubare Zahl verschiedener Theorien, die sich oftmals nur in einzelnen Annahmen, die während der Herleitung getroffen wurden, oder darin, zu welchem Zeitpunkt diese angewendet wurden, unterscheiden. Die Modellierung mittels dreidimensionaler linearer Elastizitätstheorie wurde im Gegensatz zu den Schalentheorien eher selten verwendet. GAZIS [21, 22] beschreibt zwar die Berechnung der Dispersionskurven bzw. Wellenlängen der sich in einem Hohlzylinder ausbreitenden Wellen, allerdings nur für den Fall des unendlichen Hohlzylinders und daher ohne die Berücksichtigung von Randeckten.

Die folgenden Abschnitte erläutern ausgewählte Schalentheorien von FLÜGGE, DONNELL, NAGHDI-COOPER und MIRSKY-HERRMANN. Dabei werden die Herleitungen der Bewegungsgleichungen näher betrachtet, wobei speziell auf die während der Herleitungen getroffenen Annahmen und die Unterschiede zu den anderen genannten Theorien eingegangen wird.

### 2.3.1 Schalentheorien für dünnwandige Schalen

Die bekanntesten Schalentheorien für dünnwandige Schalen sind diejenigen von LOVE [58, 59], DONNELL [12, 13], MUSHTARI [71, 70], FLÜGGE [16, 17, 18], REISSNER [84] und SANDERS [89]. Während die Theorien von DONNELL und MUSHTARI die einfachsten sind, werden die von FLÜGGE und SANDERS als sehr genau angesehen (BLEVINS [4]). Ein sehr umfangreicher Überblick zu Schwingungen von Schalen und den verschiedenen hier genannten und vielen weiteren Theorien ist in LEISSA [51] zu finden.

Die Herleitungen der verschiedenen Schalentheorien basieren alle auf den Dehnungs-Verformungs-Beziehungen in Zylinderkoordinaten (siehe z. B. GRAFF [23], S. 465)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{du_z}{dx} & \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{dw_z}{d\varphi} + \frac{dv_z}{dz} - \frac{v_z}{r} \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{dv_z}{d\varphi} + \frac{w_z}{r} & \gamma_{xz} &= \frac{du_z}{dz} + \frac{dw_z}{dx} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{dw_z}{dz} & \gamma_{x\varphi} &= \frac{dv_z}{dx} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{d\varphi}
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

mit den folgenden Beziehungen zwischen Formänderung und Scherung

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \gamma_{\varphi z} \quad \varepsilon_{x\varphi} = \frac{1}{2} \gamma_{x\varphi} \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \gamma_{xz},$$

wobei  $u$ ,  $v$  und  $w$  die im Formelverzeichnis definierten Verschiebungen in axialer ( $x$ -), tangentialer ( $\varphi$ -) und radialer ( $z$ -) Richtung sind.

Darüber hinaus liegen allen genannten Theorien dieses Abschnitts die bereits von LOVE getroffenen Annahmen zugrunde (siehe LEISSA [51], S. 6):

- Die Wandstärke der Schale ist klein gegenüber dem Radius ( $\frac{h}{a} \leq 0,1$ ), so dass höhere Potenzen von  $\frac{h}{a}$  als klein angenommen und im weiteren Verlauf der Herleitung vernachlässigt werden können.
- Dehnungen und Verschiebungen sind so klein, dass Terme zweiter und höherer Ordnung vernachlässigbar sind.
- Die in Dickenrichtung auftretenden Normalspannungen sind klein und können gegenüber den anderen Normalspannungen vernachlässigt werden, d. h. es findet keine Dehnung in Dickenrichtung statt ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) (BERNOULLI'sche-Hypothese).
- Für die Normalen zur unverformten Mittelebene wird angenommen, dass sie bei der Verformung normal zur Mittelebene und gerade bleiben ( $\gamma_{\varphi z} = 0$  und  $\gamma_{xz} = 0$ ) (zweite BERNOULLI'sche-Hypothese).

Mit diesen Annahmen ( $\varepsilon_{zz} = \gamma_{\varphi z} = \gamma_{xz} = 0$ ) folgt aus dem HOOKE'schen Gesetz in der dreidimensionalen Form (GROSS ET. AL. [24], S. 79)

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz})] & \gamma_{\varphi z} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\varphi z} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G} \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \gamma_{xz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{\varphi\varphi})] & \gamma_{x\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{x\varphi} = \frac{\tau_{x\varphi}}{G}
 \end{aligned}
 \tag{2.25}$$

für die Schubspannungen direkt

$$\tau_{\varphi z} = \tau_{xz} = 0. \tag{2.26}$$

Da die Normalspannung in radialer Richtung klein gegenüber den Normalspannungen in axialer Richtung und in Umfangsrichtung ist, kann sie vernachlässigt werden

$$\sigma_{zz} \approx 0. \tag{2.27}$$

Dies in das HOOKE'sche Gesetz (Gl. (2.25)) eingesetzt vereinfacht dieses zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}] \\
 \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{E} [\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{xx}] \\
 \gamma_{x\varphi} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{x\varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$



Die Invertierung dieser Gleichung liefert die Spannungen in Abhängigkeit der Dehnungen

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}] \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{xx}] \\ \tau_{x\varphi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi}.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Trotz des eigentlich nicht möglichen gleichzeitigen Vorliegens eines ebenen Spannungszustandes ( $\sigma_{zz} = 0$ ) und eines ebenen Dehnungszustandes ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) ergeben sich mit den getroffenen Annahmen sinnvolle Bewegungsgleichungen zur Beschreibung der Schalen-schwingungen.

Da die Schalentheorie nach FLÜGGE zum einen relativ verbreitet und zum anderen für ihre relativ guten Ergebnisse bekannt ist, soll im folgenden Abschnitt die Herleitung der Bewegungsgleichungen nach FLÜGGE [16, 17] detailliert nachvollzogen werden. Anschließend wird zum Vergleich die einfachere Theorie nach DONNELL betrachtet, die aufgrund ihrer Einfachheit als Basis aller anderen Schalentheorien angesehen werden kann.

### 2.3.1.1 Schalentheorie nach FLÜGGE

Ausgehend von den in **Abb. 2.19** und **2.20** dargestellten Schalenelementen nach FLÜGGE [18] mit angetragenen Schnittkräften und Schnittmomenten lassen sich die Kräfte- und Momentengleichgewichte für die drei Koordinatenrichtungen bestimmen. Dabei wird hier, wie bei FLÜGGE, anstelle der Koordinate  $x$  die auf den mittleren Radius  $a$  normierte Koordinate  $\frac{x}{a}$ , die im späteren Verlauf dieser Arbeit mit  $s$  bezeichnet wird, verwendet. Entsprechend gilt dann:  $\frac{d}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d}{ds}$ . Zusätzlich werden entgegen den sonst in der Mechanik gebräuchlichen Schreibweisen die Bezeichnungen  $(\ )' = \frac{d}{ds}(\ )$  und  $(\ )^\cdot = \frac{d}{d\varphi}(\ )$  verwendet.

Aus **Abb. 2.19** lassen sich, unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte, die Kräftegleichgewichte aufstellen

$$\begin{aligned}N'_x d\frac{x}{a} a d\varphi + \dot{N}_{\varphi x} d\varphi a d\frac{x}{a} &= \mu a d\varphi a d\frac{x}{a} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \dot{N}_{\varphi} d\varphi a d\frac{x}{a} + N'_{x\varphi} d\frac{x}{a} a d\varphi + Q_{\varphi} d\varphi a d\frac{x}{a} &= \mu a d\varphi a d\frac{x}{a} \frac{d^2 v}{dt^2} \\ \dot{Q}_{\varphi} d\varphi a d\frac{x}{a} + Q'_x d\frac{x}{a} a d\varphi - N_{\varphi} d\varphi a d\frac{x}{a} &= \mu a d\varphi a d\frac{x}{a} \frac{d^2 w}{dt^2},\end{aligned}\quad (2.30)$$

die sich nach Division durch  $a d\frac{x}{a} d\varphi$  zu

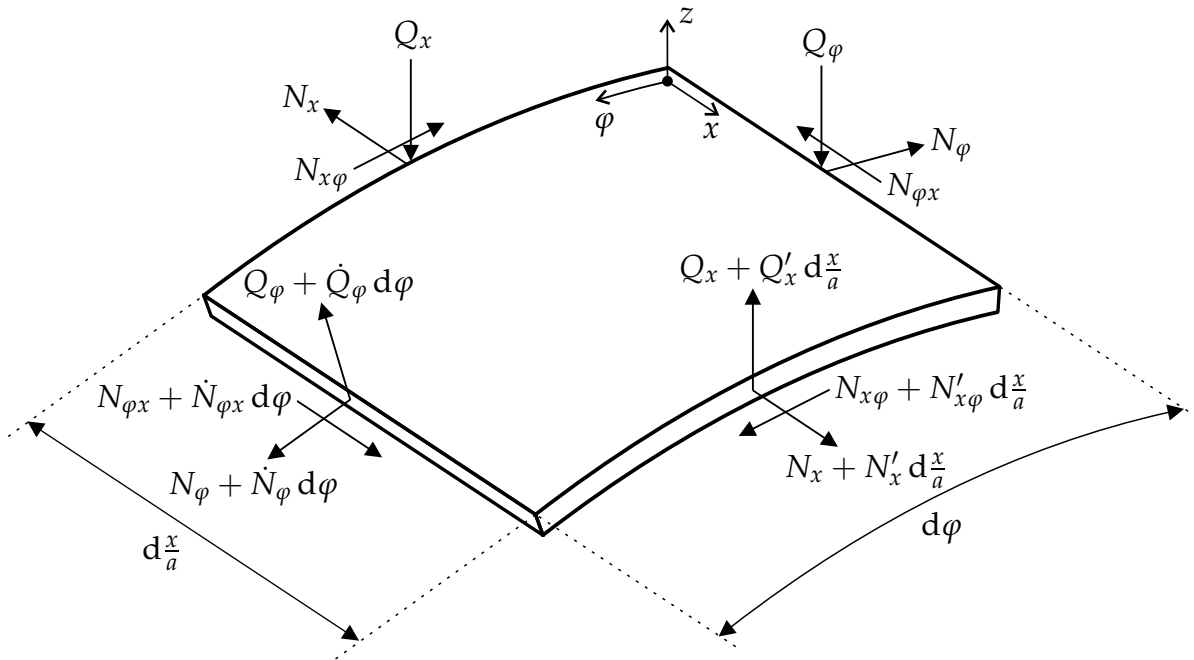


Abbildung 2.19: Schnittkräfte an einem Zylinderschalenelement

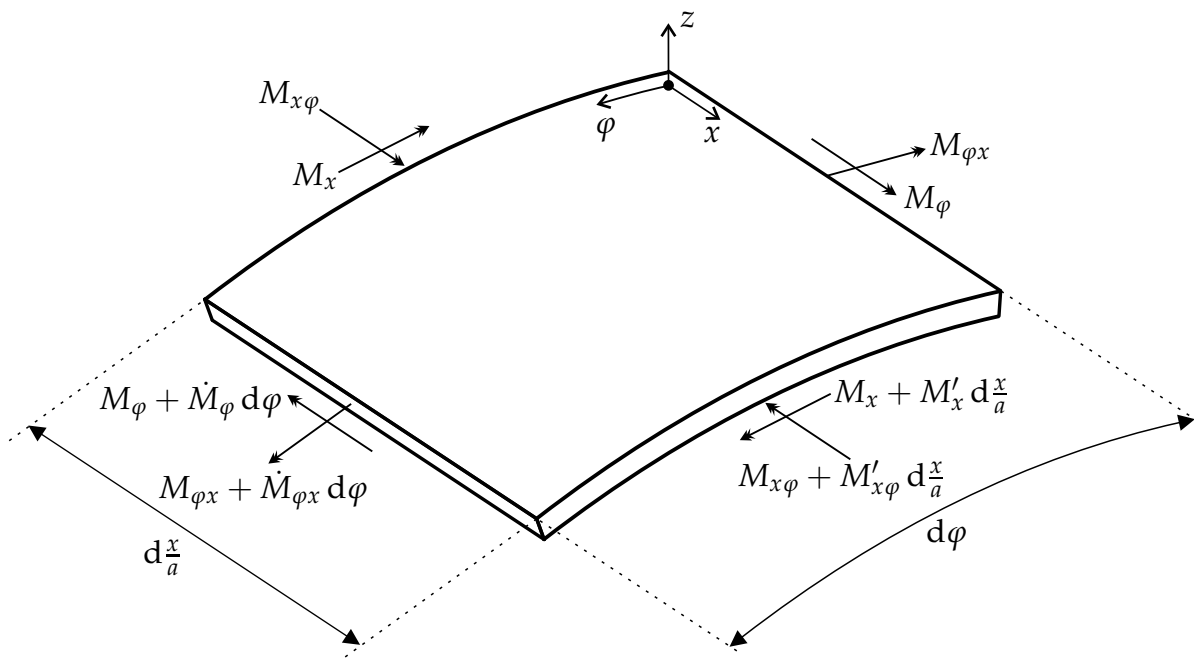


Abbildung 2.20: Schnittmomente an einem Zylinderschalenelement

$$\begin{aligned}
 N'_x + \dot{N}_{\phi x} &= \mu a \frac{d^2 u}{dt^2} \\
 \dot{N}_\phi + N'_{x\phi} + Q_\phi &= \mu a \frac{d^2 v}{dt^2} \\
 \dot{Q}_\phi + Q'_x - N_\phi &= \mu a \frac{d^2 w}{dt^2}
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

vereinfachen.

Aus **Abb. 2.20** ergibt sich analog, unter Vernachlässigung von Drehträgheiten, für die Momentengleichgewichte

$$\begin{aligned} \dot{M}_\varphi d\varphi a d\frac{x}{a} + M'_{x\varphi} d\frac{x}{a} a d\varphi + Q_\varphi a d\varphi a d\frac{x}{a} &= 0 \\ M'_x d\frac{x}{a} a d\varphi + \dot{M}_{\varphi x} d\varphi a d\frac{x}{a} + Q_x a d\frac{x}{a} a d\varphi &= 0 \\ -N_{x\varphi} a d\frac{x}{a} a d\varphi + N_{\varphi x} a d\varphi a d\frac{x}{a} - M_{\varphi x} d\varphi a d\frac{x}{a} &= 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

und wiederum vereinfacht nach Division durch  $a d\frac{x}{a} d\varphi$ :

$$\begin{aligned} \dot{M}_\varphi + M'_{x\varphi} + aQ_\varphi &= 0 \\ M'_x + \dot{M}_{\varphi x} + aQ_x &= 0 \\ -aN_{x\varphi} + aN_{\varphi x} - M_{\varphi x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Die in den Gln. (2.31) und (2.33) enthaltenen Schnittkräfte pro Einheitslänge an einem Zylinderschalenelement lassen sich jeweils durch Integration der Normal- bzw. Schubspannungen über die Schalendicke bestimmen (FLÜGGE [17] und LEISSA [51])

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz & N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{r}\right) dz \\ N_{\varphi x} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\varphi} dz & N_{x\varphi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{r}\right) dz \\ Q_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{\varphi z} dz & Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{r}\right) dz. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Anhand der zweiten Zeile lässt sich erkennen, dass trotz der Symmetrie des Spannungstensors die resultierenden Schnittkräfte nicht identisch sind. Analog lassen sich auch die Schnittmomente aus Gl. (2.33) durch Multiplikation der Schnittspannungen mit dem Abstand zur Mittelebene und anschließender Integration über die Schalendicke bestimmen

$$\begin{aligned} M_\varphi &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} z dz & M_x &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{r}\right) z dz \\ M_{\varphi x} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\varphi} z dz & M_{x\varphi} &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{r}\right) z dz. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Als nächstes werden die in den Dehnungs-Verformungs-Beziehungen (Gl. (2.24)) enthal-

tenen allgemeinen Verschiebungen ( $u_z(x, \varphi, z), v_z(x, \varphi, z), w_z(x, \varphi, z)$ ) durch die Verschiebungen der Schalenmittelebene ( $u(x, \varphi, 0), v(x, \varphi, 0), w(x, \varphi, 0)$ ) und deren Ableitungen ausgedrückt (siehe Anhang C.1)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{u'}{a} - z \frac{w''}{a^2} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\dot{v}}{a} - \frac{z}{a} \frac{\ddot{w}}{a+z} + \frac{w}{a+z} \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\dot{u}}{a+z} + \frac{a+z}{a^2} v' - \frac{\dot{w}'}{a} \left( \frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right).\end{aligned}\quad (2.36)$$

Diese Gleichungen mittels des invertierten HOOKE'schen-Gesetzes (Gln. (2.29)) in die Gln. (2.34) und (2.35) eingesetzt, ermöglichen die Bestimmung der Schnittkräfte und -momente. Das Ausführen der Integrationen (siehe Anhang C.2) liefert für die Schnittkräfte und -momente

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \frac{K_D}{a} [\dot{v} + \nu u' + w] + \frac{K_B}{a^3} [\ddot{w} + w] \\ N_x &= \frac{K_D}{a} [u' + \nu \dot{v} + \nu w] - \frac{K_B}{a^3} w'' \\ N_{\varphi x} &= \frac{K_D}{a} \frac{1-\nu}{2} [\dot{u} + v'] + \frac{K_B}{a^3} \frac{1-\nu}{2} [\dot{u} + \dot{w}'] \\ N_{x\varphi} &= \frac{K_D}{a} \frac{1-\nu}{2} [\dot{u} + v'] + \frac{K_B}{a^3} \frac{1-\nu}{2} [v' - \dot{w}'] \\ M_\varphi &= \frac{K_B}{a^2} [w + \ddot{w} + \nu w''] \\ M_x &= \frac{K_B}{a^2} [w'' + \nu \ddot{w} - u' - \nu \dot{v}] \\ M_{\varphi x} &= \frac{K_B}{a^2} (1-\nu) \left[ \dot{w}' + \frac{\dot{u}}{2} - \frac{v'}{2} \right] \\ M_{x\varphi} &= \frac{K_B}{a^2} (1-\nu) [\dot{w}' - v']\end{aligned}\quad (2.37)$$

mit der Dehnsteifigkeit

$$K_D = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \quad (2.38)$$

und der Biegesteifigkeit<sup>4</sup>

$$K_B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (2.39)$$

Die insgesamt 14 Gleichungen (Gln. (2.31), (2.33) und (2.37)) enthalten mit den zehn Schnittgrößen und den drei Verschiebungen der Schalenmitte insgesamt 13 Unbekannte. Diese Überbestimmtheit wird allerdings dadurch behoben, dass Gl. (2.33) c) beim Einsetzen der Schnittgrößen aus Gln. (2.37) auf die Identität  $0 = 0$  führt. Durch Auflösen

<sup>4</sup>Setzt man in den Gln. (2.37) die Biegesteifigkeit  $K_B$  zu null, erhält man eine Membrantheorie für dünnwandige Schalen. In diesem Fall verschwinden alle Schnittmomente und es treten nur noch Normal- und Schubkräfte auf.

der verbleibenden Gln. (2.33) a) und b) nach den Querkräften und Einsetzen dieser Ausdrücke sowie der Schnittgrößen aus Gln. (2.37) in Gln. (2.31) ergeben sich dann die Bewegungsgleichungen für Zylinderschalen nach FLÜGGE (siehe Anhang C.3):

$$\begin{aligned}
u'' + \frac{1-\nu}{2}(1+K)\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' - Kw''' + \frac{1-\nu}{2}K\ddot{w}' + \nu w' &= \gamma_F^2 \frac{d^2u}{dt^2} \\
\frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}(1+3K)v'' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{w}'' + \dot{w} &= \gamma_F^2 \frac{d^2v}{dt^2} \\
-Ku''' + \frac{1-\nu}{2}K\ddot{u}' + \nu u' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{v}'' + \dot{v} + w + \\
K \left[ w'''' + 2\ddot{w}'' + \ddot{\dot{w}} + 2\dot{w} + w \right] &= -\gamma_F^2 \frac{d^2w}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

mit dem dimensionslosen Parameter

$$K = \frac{h^2}{12a^2} \tag{2.41}$$

und dem Parameter

$$\gamma^2 = \gamma_F^2 = \frac{\rho a^2(1-\nu^2)}{E}, \tag{2.42}$$

der die Dimension einer quadrierten Zeit besitzt. Sein Kehrwert  $\frac{1}{\gamma_F}$  entspricht also der Dimension nach einer quadrierten Frequenz, so dass  $\frac{1}{\gamma_F}$  im weiteren Verlauf als charakteristische Frequenz bezeichnet werden soll.<sup>5</sup>

### 2.3.1.2 Schalentheorie nach DONNELL

Basierend auf anderen Arbeiten zur Beschreibung von Zylinderschalen leitet DONNELL [12] eine Theorie her, die gegenüber FLÜGGE noch weitere Vereinfachungen nutzt. Die der Einfachheit halber von DONNELL in der Herleitung verwendete Umfangskoordinate  $s_D$ , wird im Folgenden im Sinne einer einheitlichen Notation mit den anderen Schalentheorien durch eine Winkelkoordinate  $\varphi = \frac{s_D}{a}$  ersetzt.

Ausgehend von Gl. (2.24) beginnt DONNELL mit den Dehnungs-Verformungs-Beziehungen in Zylinderkoordinaten für die Mittelebene des Zylinders

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{du}{dx} = \frac{u'}{a} \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{dv}{ds_D} + \frac{w}{a} = \frac{1}{a} \frac{dv}{d\varphi} + \frac{w}{a} = \frac{\dot{v}}{a} + \frac{w}{a} \\
\varepsilon_{x\varphi} &= \frac{du}{ds_D} + \frac{dv}{dx} = \frac{1}{a} \frac{du}{d\varphi} + \frac{dv}{dx} = \frac{\dot{u}}{a} + \frac{v'}{a}
\end{aligned} \tag{2.43}$$

<sup>5</sup>Der Index F (FLÜGGE) wird an dieser Stelle eingeführt, um Verwechslungen mit dem Scherwinkel  $\gamma$  zu vermeiden.

und den zugehörigen Krümmungen

$$\begin{aligned}\kappa_{xx} &= \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{w''}{a^2} \\ \kappa_{\varphi\varphi} &= \frac{d^2w}{ds^2} = \frac{1}{a^2} \frac{d^2w}{d\varphi^2} = \frac{\ddot{w}}{a^2} \\ \kappa_{x\varphi} &= \frac{d^2w}{dx ds} = \frac{\dot{w}'}{a^2}.\end{aligned}\tag{2.44}$$

Zur Bestimmung der Schnittkräfte und Momente pro Einheitslänge verwendet DONNELL die Spannungs-Verschiebungs- und Spannungs-Momenten-Beziehungen wie sie auch für Platten verwendet werden (siehe HAKE UND MESKOURIS [30])

$$\begin{aligned}N_\varphi &= K_D \left[ \varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{xx} \right] = \frac{K_D}{a} \left[ \dot{v} + \nu u' + w \right] \\ N_x &= K_D \left[ \varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi} \right] = \frac{K_D}{a} \left[ u' + \nu \dot{v} + \nu w \right] \\ N_{\varphi x} = N_{x\varphi} &= K_D \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{x\varphi} = \frac{K_D}{a} \frac{1-\nu}{2} \left[ \dot{u} + v' \right] \\ M_\varphi &= K_B \left[ \kappa_{\varphi\varphi} + \nu \kappa_{xx} \right] = \frac{K_B}{a^2} \left[ \ddot{w} + \nu w'' \right] \\ M_x &= K_B \left[ \kappa_{xx} + \nu \kappa_{\varphi\varphi} \right] = \frac{K_B}{a^2} \left[ w'' + \nu \ddot{w} \right] \\ M_{\varphi x} = M_{x\varphi} &= K_B (1-\nu) \kappa_{x\varphi} = \frac{K_B}{a^2} (1-\nu) \dot{w}'.\end{aligned}\tag{2.45}$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den von FLÜGGE verwendeten (Gl. (2.37)) dadurch, dass hier in den Gleichungen für die Schnittkräfte jeweils die Summanden mit  $K_B$  fehlen und in den Momentengleichungen keine von  $w$ ,  $u'$ ,  $\dot{u}$ ,  $v'$  und  $\dot{v}$  abhängigen Terme vorkommen. Analog zu den von Flüge verwendeten Kräfte- und Momentengleichgewichten Gln. (2.31) und (2.33) ergeben sich unter Zuhilfenahme der **Abb. 2.19** und **2.20** die folgenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}N'_x + \dot{N}_{\varphi x} &= \mu a \frac{d^2u}{dt^2} \\ \dot{N}_\varphi + N'_{x\varphi} &= \mu a \frac{d^2v}{dt^2} \\ \dot{Q}_\varphi + Q'_x - N_\varphi &= \mu a \frac{d^2w}{dt^2}\end{aligned}\tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\dot{M}_\varphi + M'_{x\varphi} + aQ_\varphi &= 0 \\ M'_x + \dot{M}_{\varphi x} + aQ_x &= 0.\end{aligned}\tag{2.47}$$

Die dritte Momentengleichung wurde hier unter dem Hinweis, dass sie die Identität  $N_{\varphi x} = N_{x\varphi}$  liefert, direkt weggelassen.

Auflösen von Gl. (2.47) nach den Querkräften, Einsetzen in Gl. (2.46) und erneutes Einsetzen der Schnittgrößen aus Gl. (2.45) führt auf die Bewegungsgleichungen für Zylind-

derschalen nach DONNELL

$$\begin{aligned}
 u'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' + \nu w' &= \gamma_D^2 \frac{d^2 u}{dt^2} \\
 \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}v'' + \dot{w} &= \gamma_D^2 \frac{d^2 v}{dt^2} \\
 \nu u' + \dot{v} + w + K \left[ w'''' + 2\ddot{w}'' + \ddot{\dot{w}} \right] &= -\gamma_D^2 \frac{d^2 w}{dt^2}.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

mit den bereits zuvor verwendeten Abkürzungen

$$K = \frac{h^2}{12a^2} \tag{2.49}$$

und

$$\gamma_D^2 = \gamma_F^2 = \frac{\rho a^2 (1-\nu^2)}{E}. \tag{2.50}$$

Diese Bewegungsgleichungen zur Beschreibung von Zylinderschwingungen sind die einfachsten und übersichtlichsten, die in der Literatur zu finden sind. Sie sind zwar von gleicher Ordnung wie die Bewegungsgleichungen aus Abschnitt 2.3.1.1, besitzen aber insgesamt deutlich weniger Terme. Die Unterschiede resultieren aus dem gewählten Ansatz, der bei der Aufstellung des Impulssatzes die Biegesteifigkeit und die Krümmung der Schale vernachlässigt.

Alle anderen Schalentheorien ergeben sich, wie im folgenden Abschnitt dargestellt, aufbauend auf Gl. (2.48) durch Ergänzung verschiedener Terme in den einzelnen Gleichungen.

### 2.3.1.3 Vereinheitlichte Darstellung zur Theorie dünnwandiger Schalen

Um die verschiedenen Schalentheorien vergleichen und Unterschiede analysieren zu können, ist es sinnvoll eine einheitliche Darstellung für die unterschiedlichen Theorien zu verwenden. LEISSA [52] verwendete die Matrix-Operator-Schreibweise zur einfachen und übersichtlichen Darstellung der vielzähligen Bewegungsgleichungen. Die Bewegungsgleichungen wurden dabei in Matrizenform mittels der Differential-Operator-Matrix  $\mathfrak{L}$  und des Verschiebungsvektors

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

als

$$\mathfrak{L}\mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{2.52}$$

geschrieben. Da die DONNELL-Schalentheorie die größtmöglichen Vereinfachungen enthält, teilte LEISSA die allgemeine Operator-Matrix  $\mathfrak{L}$  in die DONNELL-Operator-Matrix  $\mathfrak{L}_{\text{DON}}$  und eine modifizierende theorie-spezifische Operator-Matrix  $\mathfrak{L}_{\text{mod}}$

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\text{DON}} + K\mathfrak{L}_{\text{mod}} \tag{2.53}$$

mit

$$K = \frac{h^2}{12a^2} \quad (2.54)$$

auf. So war es möglich alle aus den verschiedenen Schalentheorien resultierenden Bewegungsgleichungen aufbauend auf der DONNELL-Schalentheorie darzustellen. Mit dieser Darstellungsform lassen sich Unterschiede der einzelnen Schalentheorien zur DONNELL-Schalentheorie, sowie der Schalentheorien untereinander, sehr einfach überblicken.

Die DONNELL-Operator-Matrix folgt direkt aus Gl. (2.48) und lautet

$$\mathfrak{L}_{\text{DON}} = \begin{bmatrix} \frac{d^2}{ds^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} - \gamma_F^2 \frac{d^2}{dt^2} & \frac{1+\nu}{2} \frac{d^2}{ds d\varphi} & \nu \frac{d}{ds} \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{d^2}{ds d\varphi} & \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{d\varphi^2} - \gamma_F^2 \frac{d^2}{dt^2} & \frac{d}{d\varphi} \\ \nu \frac{d}{ds} & \frac{d}{d\varphi} & 1 + K\nabla^4 + \gamma_F^2 \frac{d^2}{dt^2} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

mit dem Nabla-Operator  $\nabla$  und

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2 \quad (2.56)$$

sowie

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{ds^2} + \frac{d^2}{d\varphi^2}. \quad (2.57)$$

Die modifizierende FLÜGGE-Operator-Matrix ergibt sich aus Gl. (2.40) zusammen mit Gl. (2.55) zu

$$\mathfrak{L}_{\text{mod,FLÜGGE}} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2}{d\varphi^2} & 0 & -\frac{d^3}{ds^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^3}{ds d\varphi^2} \\ 0 & \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{d^2}{ds^2} & -\frac{3-\nu}{2} \frac{d^3}{ds^2 d\varphi} \\ -\frac{d^3}{ds^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^3}{ds d\varphi^2} & -\frac{3-\nu}{2} \frac{d^3}{ds^2 d\varphi} & 1 + 2 \frac{d^2}{d\varphi^2} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Sie enthält hauptsächlich Terme höherer Ordnung, die in der DONNELL-Theorie keine Berücksichtigung finden. Bedingt durch den Vorfaktor  $K$  in Gl. (2.53) kommen diese Unterschiede mit zunehmender Wanddicke  $h$  stärker zum Tragen, während beide Theorien für sehr dünnwandige Hohlzylinder nahezu identische Ergebnisse liefern.

Weitere modifizierende Operator-Matrizen für andere Schalentheorien finden sich in LEISSA [52], und sollen hier nicht angegeben werden.

### 2.3.2 Schalentheorien für dickwandige Schalen

Wenn die Wandstärke der Schalen zunimmt bzw. das Verhältnis  $\frac{h}{a}$  steigt, gewinnen Drehträgheiten der Schalelemente und Schubverformungen zunehmend an Bedeutung. Ein erster Ansatz zur Berücksichtigung von Drehträgheiten wurde von FLÜGGE [16] gemacht. In der Folge entstanden vielfältigste Theorien zur Beschreibung der Schwingungen dickwandiger Schalen. NAGHDI-COOPER [72] analysierten die Wellenausbreitung in Zylinderschalen unter Berücksichtigung von Drehträgheiten und Scherung in



Umfangsrichtung und axialer Richtung aber ohne Dehnung in radialer Richtung. MIRSKY UND HERRMANN berücksichtigten in MIRSKY UND HERRMANN [38] vorerst nur Scherung in der Verschiebung  $u$  unter der Annahme axialsymmetrischer Schwingungen ( $v(x, \varphi, z) = 0$ ). In MIRSKY UND HERRMANN [64] wurde diese Theorie dann für nicht-axialsymmetrische Schwingungen mit Scheranteil in der Umfangsverschiebung  $v$  ausgebaut. Im Folgenden wurden andere Erweiterungen vorgenommen, die für nicht-axialsymmetrische Schwingungen die Berücksichtigung einer statischen Vorlast (HERRMANN-ARMENAKAS [36, 37]) ermöglichten oder für radialsymmetrische Verformungen dickwandige Zylinder die Dehnung in radialer Richtung mit einbeziehen MIRSKY UND HERRMANN [65].

Der vorliegende Abschnitt betrachtet einige der genannten Theorien genauer, um ein Verständnis von den getroffenen Annahmen und den resultierenden Anwendungsmöglichkeiten zu vermitteln.

### 2.3.2.1 FLÜGGE-Schalentheorie mit Berücksichtigung der Drehträgheiten

In FLÜGGE [16] wurde auch die Möglichkeit beschrieben, die Drehträgheiten in die Schalentheorie aus Abschnitt 2.3.1.1 zu integrieren. Dies geschieht durch Hinzunahme von Trägheitstermen in den Momentengleichgewichten nach Gl. (2.33), die dann

$$\begin{aligned} \dot{M}_\varphi + M'_{x\varphi} + aQ_\varphi &= \mu \frac{K_B}{K_D} \frac{d^2}{dt^2} (\dot{w} - v) \\ M'_x + \dot{M}_{\varphi x} + aQ_x &= \mu \frac{K_B}{K_D} \frac{d^2 w'}{dt^2} \\ -aN_{x\varphi} + aN_{\varphi x} - M_{\varphi x} &= 0 \end{aligned} \quad (2.59)$$

lauten. Mit Hinweis auf den geringen Einfluss dieser Terme werden diese aber in den folgenden Betrachtungen von FLÜGGE nicht weiter berücksichtigt.

### 2.3.2.2 Schalentheorie nach NAGHDI-COOPER

Für die allgemeine Verformung eines dickwandigen Hohlzylinders mit Scherungseffekten und Verschiebungen in Umfangsrichtung, aber ohne Dehnung in radialer Richtung, wird in NAGHDI-COOPER [72] die Ausbreitung von Wellen in einem Hohlzylinder untersucht.

Die Bewegungsgleichungen wurden dazu unter der Annahme, dass sich die Verformung des Zylinders durch

$$u_z = u(x, \varphi, 0) + z\Psi_x(x, \varphi, 0) \quad (2.60)$$

$$v_z = v(x, \varphi, 0) + z\Psi_\varphi(x, \varphi, 0) \quad (2.61)$$

$$w_z = w(x, \varphi, 0) \quad (2.62)$$

beschreiben lässt, hergeleitet. Ähnlich wie in FLÜGGE [16] wurden die Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der Koordinaten  $x$ ,  $s = \varphi a$  und  $z$  aus den Kräftegleichgewichten und den Spannungs-Dehnungs-Beziehungen hergeleitet. Die resultierenden Be-

wegungsgleichungen überführt auf die Koordinaten  $s = \frac{x}{a}$ ,  $\varphi$  und  $z$  lauten (vergleiche NAGHDI-COOPER [72], Gl. I)

$$\begin{aligned}
u'' + \frac{1-\nu}{2}(1+K)\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' + \nu w' + Ka \left( \Psi_x'' - \frac{1-\nu}{2}\ddot{\Psi}_x \right) &= \gamma_F^2 \frac{d^2}{dt^2} (u + aK\Psi_x) \\
\ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}v'' + \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \dot{w} + \kappa_1 (a\Psi_\varphi - v + \dot{w}) - K \left( a\ddot{\Psi}_\varphi - \frac{1-\nu}{2}\Psi_\varphi'' \right) &= \gamma_F^2 \frac{d^2}{dt^2} (v + aK\Psi_\varphi) \\
\kappa_1 (w'' + \ddot{w} + a\Psi_x' + a\dot{\Psi}_\varphi - \dot{v}) - (\dot{v} + w + \nu u') + Ka\dot{\Psi}_\varphi &= \gamma_F^2 \frac{d^2 w}{dt^2} \\
K \left( \Psi_x'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{\Psi}_x + \frac{1+\nu}{2}\dot{\Psi}_\varphi' \right) - \kappa_1 (w' + \Psi_x) + \frac{K}{a} \left( u'' - \frac{1-\nu}{2}\ddot{u} \right) &= \gamma_F^2 K \frac{d^2}{dt^2} (\Psi_x + \frac{u}{a}) \\
K \left( \ddot{\Psi}_\varphi + \frac{1-\nu}{2}\Psi_\varphi'' + \frac{1+\nu}{2}\dot{\Psi}_x' \right) - \kappa_1 \left( \dot{w} + \Psi_\varphi - \frac{v}{a} \right) - & \\
\frac{K}{a} \left( \ddot{v} - \frac{1-\nu}{2}v'' + \frac{\dot{w}}{a} \right) &= \gamma_F^2 K \frac{d^2}{dt^2} (\Psi_\varphi + \frac{v}{a}),
\end{aligned} \tag{2.63}$$

mit

$$\kappa_1 = \frac{1-\nu}{2}\kappa_{\text{NC}} = \frac{1-\nu}{2}\kappa^2 \tag{2.64}$$

und

$$\kappa_{\text{NC}} = \kappa^2 = \frac{5}{6}. \tag{2.65}$$

Anhand der hergeleiteten Bewegungsgleichung sowie einem weiteren, aus diesen durch Vereinfachungen abgeleiteten, System, werden die axialsymmetrischen Schwingungsmoden eines unendlichen Hohlzylinders untersucht. Dabei werden die Veränderung der Phasengeschwindigkeit und der Amplitudenverhältnisse zwischen den radialen, axialen und Verkippungs-Anteilen in Abhängigkeit des Verhältnisses von Wandstärke zu Wellenlänge  $\frac{h}{\lambda}$  mit den sich aus der DONNELL-Theorie (siehe Abschnitt 2.3.1.2) ergebenden Werten verglichen. Es zeigt sich ein signifikanter Einfluss der Scherung und der Drehträgheiten, der zu deutlichen Abweichungen im Bereich kleiner Wellenlängen führt.

### 2.3.2.3 Schalentheorie nach MIRSKY-HERRMANN

Da im Rahmen dieser Arbeit die radial-symmetrischen Schwingungen im Fokus stehen, ist es naheliegend, den speziell für diesen Fall ausgelegten Ansatz nach MIRSKY UND HERRMANN [65] zu betrachten. Die Autoren leiten dort eine Theorie für dickwandige Schalen unter der Annahme axialsymmetrischer Verformungen  $\frac{d}{d\varphi} = 0$  ohne Verschiebungsanteile in Umfangsrichtung  $v(x, \varphi, z) = 0$  her. Dabei werden die Drehträgheit der Schale, Scherverformungen und zusätzlich zu den Betrachtungen des vorangegangenen Abschnitts auch noch die Dehnung in radialer Richtung berücksichtigt.

Die Verschiebung  $u_z$  eines Punktes  $P(x, z)$  in axialer Richtung entsteht bei dem gewählten Ansatz aus der Überlagerung der Verschiebung  $u$  des Punktes  $P(x, 0)$  in axialer Richtung und der Verkipfung  $\Psi_x$  multipliziert mit dem Abstand  $z$  zur Mittelebene.

$$u_z = u(x, 0) + z\Psi_x(x, 0) \quad (2.66)$$

Analog dazu gehen die Verschiebung  $w$  des Punktes  $P(x, 0)$  in radialer Richtung sowie die Dehnung  $\Psi_z$  in radialer Richtung in die radiale Verschiebung  $w_z$  des Punktes  $P(x, z)$  ein.

$$w_z = w(x, 0) + z\Psi_z(x, 0) \quad (2.67)$$

Unter der getroffenen Annahme der radialsymmetrischen Verformung folgt aus Gl. (2.24) für die Dehnungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{du_z}{dx} & \gamma_{z\varphi} &= 0 \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{w_z}{a+z} & \gamma_{xz} &= \frac{dw_z}{dx} + \frac{du_z}{dz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{dw_z}{dz} & \gamma_{x\varphi} &= 0, \end{aligned} \quad (2.68)$$

woraus sich durch einsetzen von Gln. (2.66) und (2.67)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{du}{dx} + z \frac{d\Psi_x}{dx} & \gamma_{\varphi z} &= 0 \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{w}{a+z} + \frac{z}{a+z} \Psi_z & \gamma_{xz} &= \frac{dw}{dx} + z \frac{d\Psi_z}{dx} + \Psi_x \\ \varepsilon_{zz} &= \Psi_z & \gamma_{x\varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.69)$$

ergibt.

Den weiteren Schritten in MIRSKY UND HERRMANN [65] folgend, ergeben sich schließlich die dort in tabellarischer Form angegebenen Bewegungsgleichungen (siehe MIRSKY UND HERRMANN [65] S.100, Tabelle 1 / Gleichung 22). Sie enthalten anstelle des Elastizitätsmoduls  $E$  und der Querkontraktionszahl  $\nu$  die LAMÉ-Konstanten  $\lambda_L$  und  $\mu_L$ . Werden diese durch  $E$  und  $\nu$  ausgedrückt

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.70)$$

$$\mu_L = \frac{E}{1(1+\nu)} \quad (2.71)$$

$$\lambda_L + 2\mu_L = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.72)$$

und die Ableitungen nach der axialen Koordinate  $x$  durch die Ableitungen nach der normierten axialen Koordinate  $s$  ersetzt

$$\frac{d(\quad)}{dx} = \frac{1}{a} \frac{d(\quad)}{ds}, \quad (2.73)$$

ergeben sich die Bewegungsgleichungen in einer zu Gl. (2.40) ähnlichen Darstellungsform

$$\begin{aligned} u'' + aK\Psi_x'' + \frac{\nu}{1-\nu}w' + \frac{\nu}{1-\nu}a\psi_z' &= \gamma_{\text{MH}}^2 \frac{d^2}{dt^2} (u + aK\Psi_x) \\ aKu'' + a^2K\Psi_x'' - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}a^2\kappa^2\Psi_x & \\ - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}a\kappa^2w' + \left(2\frac{\nu}{1-\nu} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2\right) a^2K\Psi_z' &= aK\gamma_{\text{MH}}^2 \frac{d^2}{dt^2} (u + a\Psi_x) \\ - \frac{\nu}{1-\nu}u' + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}a\kappa^2\Psi_x' + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2w'' - \frac{\alpha a}{h}w & \\ + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2aK\Psi_z'' - \frac{\beta a}{h}\Psi_z - \frac{\nu}{1-\nu}a\Psi_z &= \gamma_{\text{MH}}^2 \frac{d^2}{dt^2} (w + aK\Psi_z) \\ - \frac{\nu}{1-\nu}au' - \left(2\frac{\nu}{1-\nu} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2\right) a^2K\Psi_x' + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2aKw'' & \\ - \frac{a\beta}{h}w - \frac{\nu}{1-\nu}aw + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa^2a^2K\Psi_z'' - \left(a^2 + \frac{a\eta}{h}\right) \Psi_z &= aK\gamma_{\text{MH}}^2 \frac{d^2}{dt^2} (w + a\Psi_z) \end{aligned} \quad (2.74)$$

mit

$$\alpha = \ln \frac{1 + \frac{h}{2a}}{1 - \frac{h}{2a}} \approx \frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3} \quad (2.75)$$

$$\beta = h - a\alpha \quad (2.76)$$

$$\eta = \alpha a^2 - ah \quad (2.77)$$

$$\gamma_{\text{MH}}^2 = \gamma_{\text{F}}^2 \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \quad (2.78)$$

und der Konstante  $\kappa$ , die nach HERRMANN UND MIRSKY [38] für die später durchzuführenden Berechnungen zu  $\kappa^2 = 0.86$  gesetzt wird.

### 2.3.2.4 Vereinheitlichte Darstellung zur Theorie dickwandiger Schalen

Analog zu der in Abschnitt 2.3.1.3 dargestellten Schreibweise verwendet LEISSA [52] für die Matrix-Operator-Beschreibung der dickwandigen Schalen mit Scherung

$$\mathfrak{L}q = 0 \quad (2.79)$$

mit

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\text{DON}} + K\mathfrak{L}_{\text{mod}} \quad (2.80)$$

und dem erweiterten Verschiebungsvektor

$$\mathbf{q} = \left[ u \quad v \quad w \quad R\Psi_x \quad R\Psi_\varphi \right]^T. \quad (2.81)$$

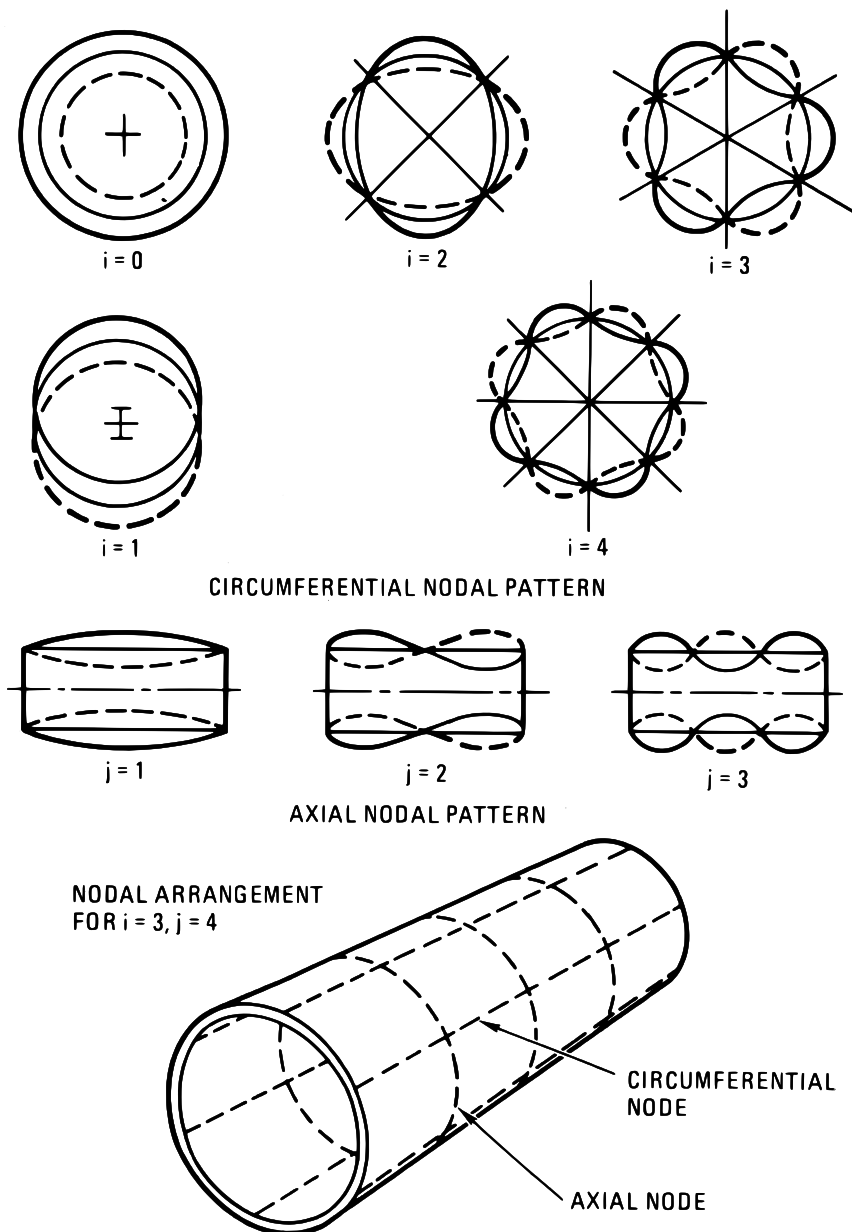
Da diese Form die Dehnung in Normalenrichtung  $\Psi_z$ , wie sie in den Bewegungsgleichungen nach Abschnitt 2.3.2.3 verwendet wird, nicht erhält, müsste der Verschiebungsvektor für eine allgemeine Darstellung um eine weitere Komponente erweitert werden

$$\mathbf{q} = \left[ u \quad v \quad w \quad R\Psi_x \quad R\Psi_\varphi \quad R\Psi_z \right]^T. \quad (2.82)$$

Da es kaum weitere Ansätze gibt, welche die radiale Dehnung berücksichtigen, soll auf eine explizite Angabe der entsprechenden Operator-Matrizen verzichtet werden. Stattdessen sei auf LEISSA [52] (S. 292) für die Operator-Matrizen unter Verwendung von Gl. (2.81) verwiesen.

### 2.3.3 Eigenschwingungsformen

Exakte, analytische Lösungen der Bewegungsgleichungen eines dünnwandigen Zylinders zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen lassen sich nur für spezielle Sonderfälle angeben. Ein solcher Sonderfall ist beispielsweise die Lagerung über Membranen (*engl. shear diaphragms*) an beiden Enden, die in radialer und Umfangsrichtung als starr aber bezüglich einer Verdrehung und einer Verschiebung in axialer Richtung als ideal nachgiebig angenommen werden. In vielen Tabellenwerken wie z. B. BLEVINS [4] werden daher auch nur für diesen Fall die Formeln zur Bestimmung der Eigenfrequenzen und -formen direkt angegeben. In **Abb. 2.21** sind die sich hierbei ergebenden Eigenschwingungsformen schematisch dargestellt. Sie sind gekennzeichnet durch die Anzahl der Knotendurchmesser  $i$  und die Anzahl  $j$  der Halbwellen in axialer Richtung. Alternativ werden bei der Berechnung von Eigenschwingungsformen oftmals unendlich lange Zylinder betrachtet, bei denen Lagerungs- bzw. Randeffekte keine Rolle spielen, und für diese die sich ergebenden Wellenlängen bestimmter Schwingungsformen angegeben. Auch in der praktischen Anwendung, wie z. B. bei LITTMANN [53] zur Analyse der Eigenschwingungsformen einer hohlzylindrischen Bohrkronen zum ultraschallunterstützten Bohren, werden oftmals diese vereinfachten Randbedingungen genutzt, um die Eigenfrequenzen eines Systems mit hinreichender Genauigkeit abzuschätzen. LITTMANN nutzte die so bestimmten Moden und das zugehörige Verhältnis  $\gamma$  der axialen Amplitude  $C_1$  zur radialen Amplitude  $C_2$  um zwischen axial- und radialdominanten Moden zu unterscheiden und sein System so abzustimmen, dass es zu einer Axialschwingung angeregt werden sollte. Trotz dieser Abstimmung konnte er in seinen Messungen feststellen, dass der gewünschten axialen Schwingungsform eine zweite radiale Schwingungsform mit deutlich geringerer Wellenlänge überlagert war, deren Eigenfrequenz nahezu identisch mit derjenigen der Longitudinalmode war.



**Abbildung 2.21:** Eigenschwingungsformen eines Hohlzylinders mit Membranlagerung an beiden Enden (BLEVINS [4]).  $i$  gibt die Anzahl der Knotendurchmesser und  $j$  die Anzahl der Halbwellen in axialer Richtung an.

Eine ausführliche Diskussion der Einflüsse anderer Randbedingungen sowie deren Auswirkungen auf die Eigenschwingungsformen findet sich z. B. bei FORSBERG [19] und LEISSA [52]. Hierbei sei angemerkt, dass diese Betrachtungen nicht mehr analytisch sondern nur numerisch durchführbar sind. So untersuchte z. B. FORSBERG den Einfluss verschiedener Randbedingungen, indem er bei gegebener Geometrie die Anzahl der Knotendurchmesser und der axialen Halbwellen vorgab und dann numerisch die jeweils zugehörige Eigenfrequenz bestimmte.

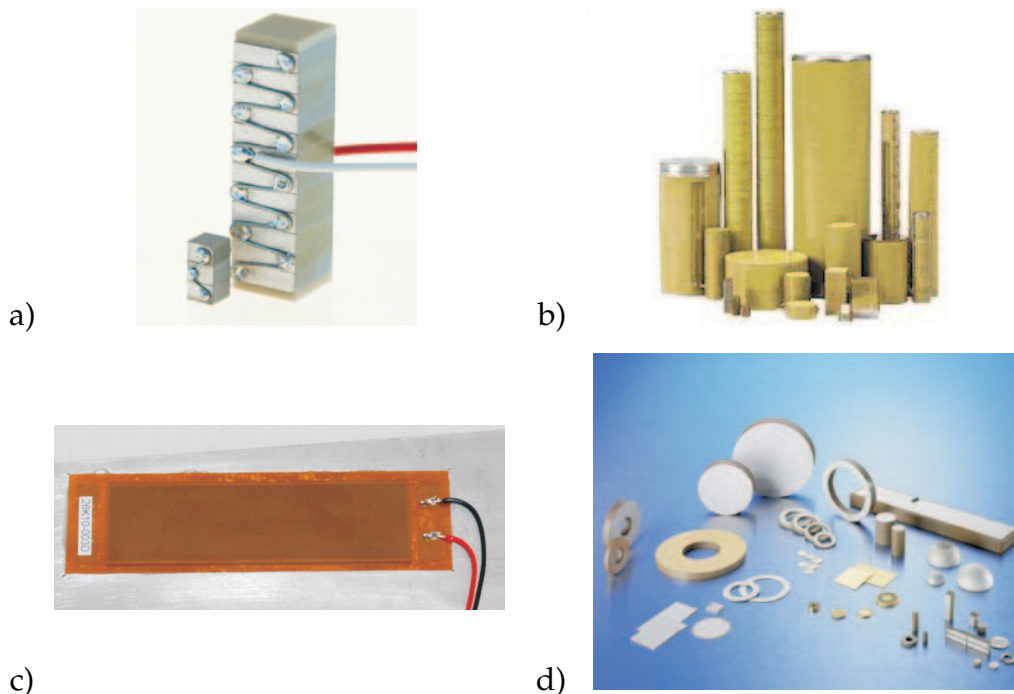
## 2.4 Piezoelektrische Wandler

Piezoelektrische Wandler<sup>6</sup> sind heute in den verschiedensten am Markt erhältlichen Produkten zu finden. Exemplarisch seien hier piezoelektrische Zünder in Feuerzeugen und Gasherden sowie auf piezoelektrischen Wandlern basierende Kraft- und Beschleunigungssensoren genannt. Zunehmend finden sie aber auch in der Aktorik zum Beispiel in Mikropositioniersystemen oder in Form von rotatorischen Wanderwellenmotoren z. B. in Objektiven von Digitalkameras Anwendung.

### 2.4.1 Bauformen von Piezowandlern

Die Bauformen und Bauarten piezoelektrischer Wandler sind sehr vielfältig und stark auf die typischen Applikationen angepasst (PHYSIK INSTRUMENTE [75], NOLIAC [73], CERAMTEC [8], SMART MATERIAL [92]). Die wichtigsten und am häufigsten verwendeten Wandlertypen sind Multilayer-Wandler für dynamische Anwendungen, Stellmechanismen und Nanopositionierung (**Abb. 2.22 a**), Stapel-Wandler für Stellmechanismen

<sup>6</sup>Im allgemeinen Sprachgebrauch wird fälschlicherweise oftmals der Begriff *Aktor* verwendet, wenn eigentlich nur der Wandler gemeint ist. Streng genommen bilden aber erst der Energiewandler mit einem passenden Energiesteller (z. B. einer Leistungselektronik) und eventuell noch einem Energieumformer zusammen einen Aktor (DUBBEL [14] und WALLASCHEK [116]).



**Abbildung 2.22:** Verschiedene Piezo-Wandler-Bauformen a) Gestapelter Multilayer-Wandler (NOLIAC [73]) b) Stapel-Wandler (PHYSIK INSTRUMENTE [75]) c) Flächiger Macrofiber-Composite-Wandler d) Verschiedene Bulk-Keramiken (CERAMTEC [8])

mit hohen Belastungen (**Abb. 2.22 b**), Flächen- oder Patch-Wandler für adaptive Systeme (**Abb. 2.22 c**) und Bulk-Keramiken, die in verschiedensten Formen (Ring, Zylinder, Scheibe, Platte,...) erhältlich sind, für den Einsatz in Hochleistungs-Ultraschallwandlern und Spezialapplikationen (**Abb. 2.22 d**).

Da sich ringförmige Bulk-Piezowandler für die in der vorliegenden Arbeit nötige Erzeugung von radialsymmetrischen Wellen in Hohlzylindern am Besten eignen, sollen nur diese im Folgenden näher betrachtet werden. Im Fokus stehen dabei die dynamischen Eigenschaften der Wandler, speziell die Eigenfrequenzen und die zugehörigen Eigenformen. Für das piezoelektrische Verhalten und dessen Modellierung, die hier nicht näher beschrieben wird, sei auf die einschlägige Fachliteratur (CADY [7], IKEDA [40], MASON [61], UCHINO [109] u. a.) sowie die entsprechenden Homepages der Hersteller (z. B. MORGAN ELECTROCERAMICS [67], PHYSIK INSTRUMENTE [75]) verwiesen.

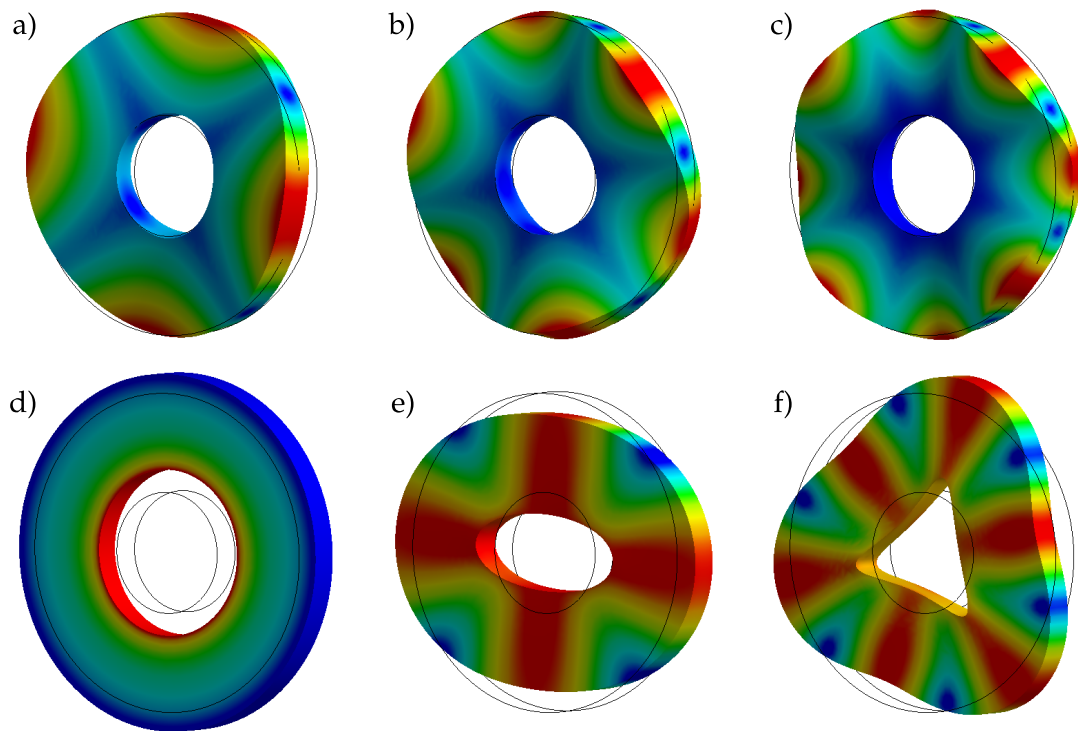
## 2.4.2 Schwingungsformen ringförmiger Piezowandlern

Die Eigenschwingungsformen von ringförmigen Piezowandlern lassen sich im Wesentlichen in drei Gruppen unterteilen, die sich durch die Hauptschwingungsrichtung und die Art der Schwingung unterscheiden: Schwingungen mit dominierendem Anteil in radialer Richtung (In-Plane) oder in axialer Richtung (Out-Of-Plane), wobei sich die axialdominanten Schwingungen weiter in Biegeschwingungen und Dickenschwingungen unterteilen lassen.

**Abb. 2.23** zeigt exemplarisch einige Eigenschwingungsformen eines Piezoringwandlers<sup>7</sup>, wie er auch im weiteren Verlauf der Arbeit noch zum Einsatz kommt. In **Abb. 2.23 a) - c)** sind die ersten drei Out-of-Plane-Biegeeigenformen dargestellt während **Abb. 2.23 e) - f)** die In-Plane-Biegeeigenformen zeigen. Die in **Abb. 2.23 d)** dargestellte radiale Dehnungs-mode, ist diejenige welche sich hervorragend zur Anregung von axialsymmetrischen Wellen eignet. Darüber hinaus existiert eine Vielzahl von weiteren Eigenschwingungsformen, die aber in der vorliegenden Arbeit nicht relevant sind und daher auch nicht weiter betrachtet werden. Hierzu zählen zum Beispiel die Dickenresonanzen, deren zugehörige Wellenlängen in der Größenordnung der Wandlerdicke liegen und die daher erst bei deutlich höheren Frequenzen auftreten. Für die in **Abb. 2.23** verwendete Geometrie beispielsweise liegen die ersten beiden Dickenresonanzen bei etwa 185 kHz und 374 kHz.

<sup>7</sup>Abmessungen  $D = 50 \text{ mm}$ ,  $d = 19,7 \text{ mm}$ ,  $h = 5 \text{ mm}$ ,  $\frac{D}{h} = 10$ ,  $\frac{d}{h} = 3,94$





**Abbildung 2.23:** Eigenschwingungsformen eines ringförmigen Piezowandlers:

Out-of-Plane-Biegung: **a)**  $n = 2$ ;  $f = 5,693$  kHz

**b)**  $n = 3$ ;  $f = 14,137$  kHz

**c)**  $n = 4$ ;  $f = 24,237$  kHz

Radialmode: **d)**  $n = 0$ ;  $f = 32,761$  kHz

In-Plane-Biegung: **e)**  $n = 2$ ;  $f = 16,529$  kHz

**f)**  $n = 3$ ;  $f = 36,478$  kHz

## 3 Gegenstand der Arbeit

Im aktuellen Stand der Technik zum Thema Ultraschall-Wanderwellentransport von Schüttgütern finden sich einige nicht abschließend geklärte Fragestellungen, speziell zur Anregung und Ausbreitung der Wanderwellen in Hohlzylindern, die den Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit bilden. Das vorliegende Kapitel gibt einen Überblick über die offenen Punkte und Fragen, um anschließend die Ziele der vorliegenden Arbeit zu definieren. Die daraus resultierende Aufgabenstellung und das weitere, detaillierte Vorgehen bilden den Abschluss des Kapitels.

### 3.1 Analyse des Stands der Technik

Aus der Analyse der Veröffentlichungen aus dem Bereich des Ultraschall-Wanderwellentransports lässt sich eine oftmals sehr pragmatische Herangehensweise erkennen. Dem Aufbau erster Prototypen folgen verschiedene Ansätze zur Untersuchung des Förderverhaltens. Diese beschränken sich allerdings im Wesentlichen auf die Untersuchung verschiedener Fördergüter und dem bei vorgegebener Fördereinheit erreichbaren Förderstrom. Neben der Frage nach der optimalen elektrischen Anregespannung standen die Förderbarkeit verschiedener Materialien wie z. B. Waschpulver (BISTRY [3]) und verschiedener Metallpulver (KÜHNE ET AL. [47]) und der Einfluss verschiedener Korngrößen (TAKANO UND TOMIKAWA [97]) im Fokus der Untersuchungen.

Eine systematische Beschreibung und Untersuchung der Wellenanregung und -ausbreitung mit dem Ziel, verschiedene auftretende Effekte zu erklären und dadurch eine Optimierung des System zu ermöglichen, hat dagegen bisher noch nicht stattgefunden. In fast allen Veröffentlichungen, die die Schwingungsformen der Hohlzylinder näher betrachten, wurden Finite-Elemente-Modelle verwendet, um die Schwingungsformen zu analysieren. Sie beschränken sich im Wesentlichen auf numerische Modalanalysen und die Vorhersage der Betriebsschwingungsform anhand harmonischer Analysen. Die für den Wanderwellentransport wichtige Dämpfung wurde dabei in den harmonischen Analysen derart berücksichtigt, dass sie zur Anpassung der Simulationsergebnisse an gemessene Schwingungsformen angepasst wurde. Lediglich von KANBE ET AL. [41] wird ein Ansatz nach POCHHAMMER [76] und CHREE [9] (siehe auch REDWOOD [83]) verwendet, um die Oberflächenpunktbahnen zu untersuchen. Ausgehend von der Frequenzgleichung werden die sich einstellenden elliptischen Oberflächenpunktbahnen bei bestimm-

ten Frequenzen und für jede Wellenart separat aus dem Verhältnis der axialen und radialen Verschiebungen bestimmt, ohne dabei jedoch die mögliche Überlagerung anderer Wellenarten zu beachten.

MRACEK [68] beschreibt die Entstehung der elliptischen Bahnen beim Durchlauf einer Wanderwelle anhand der Balkentheorie und zeigt Messungen der elliptischen Bahnen entlang der Achse des Hohlzylinders. Die genaue Entstehung der Ellipsen bei der Ausbreitung von Wanderwellen in Hohlzylindern mit axialem und radialem Verschiebungsfeld wurde von ihm allerdings nicht näher betrachtet sondern als noch zu untersuchender Aspekt genannt. BISTRY [3] greift diese Anregung kurz auf und nutzt die Schalentheorie nach DONNELL um die Resonanzfrequenzen eines Metall-Hohlzylinders zu bestimmen, verfolgt diesen Ansatz dann aber nicht weiter.

Ein Phänomen, das immer wieder auftaucht, ist das Minimum des Amplitudenverlaufs in der Nähe des Piezowandlers, wie es auch in **Abb. 2.9** erkennbar ist. Dieses Minimum zeigte sich immer wieder sowohl in Messungen als auch in den durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen. Durch das Amplitudenminimum und den mit ihm einhergehenden Stehwellenanteil kommt es im Bereich des Piezowandlers zu einem Abbremsen bzw. Stocken des Fördergutstroms. Der Fördergutstrom kommt zwar nicht vollständig zum Erliegen, wird aber in seinem Fluss beeinträchtigt. Mit der Ausbreitung einer gedämpften Wanderwelle, deren Amplitude kontinuierlich abnimmt, kann die Entstehung des Amplitudenminimums nicht erklärt werden. Folglich wurde schon von BISTRY [3] die Analyse der Entstehung dieses Amplitudenminimums bzw. des Stehwellenanteils am Zylinderanfang im Bereich des Piezowandlers als offener, noch näher zu analysierender Punkt genannt.

## 3.2 Ziele der Arbeit

Auf Basis des aktuellen Standes der Technik mit den offenen Punkten und nicht abschließend beantworteten Fragestellungen ergeben sich die Ziele der vorliegenden Arbeit. Erklärtes Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines Simulationsmodells zur Untersuchung der Anregung und Ausbreitung von Wanderwellen in Hohlzylindern. Der wesentliche Aspekt ist dabei eine geeignete Abbildung der für die Anregung und Ausbreitung von radialsymmetrischen Wellen essenziellen Effekte. Gegenüber dem Stand der Technik sollen folgende Punkte tiefergehend analysiert werden.

**Modellbildung** Basierend auf verschiedenen Schalentheorien sollen Simulationsmodelle entwickelt werden, die in der Lage sind, die Wellenausbreitung auf hohlzylindrischen Wellenleitern grundlegend zu beschreiben. Dabei ist zu berücksichtigen, dass verschiedene Phänomene im Zusammenhang mit der Anregung und Ausbreitung dieser Wanderwellen anhand des Modells betrachtet werden sollen. Speziell für die Analyse der am Wandler auftretenden Stehwellenanteile und des Amplitudenminimums ist es wichtig, dass das Modell eine Bestimmung des Verschiebungsfeldes bei Anregung durch

den Piezowandler gestattet. Weiterhin soll das Modell geeignet sein, die gegenseitige Beeinflussung der im Hohlzylinder angeregten Wanderwellen zu analysieren.

Das entwickelte Modell bildet die Basis für alle weiteren im Rahmen der Arbeit durchzuführenden Untersuchungen.

**Amplitudenminimum und Stehwellenanteil** Anhand der entwickelten Modelle sollen anschließend Analysen der verschiedenen auftretenden Phänomene durchgeführt werden. Speziell das charakteristische Amplitudenminimum und der Stehwellenanteil in der Nähe des Piezowandlers, die vielfach in der Literatur beschrieben werden und den Fluss des Schüttgutes erheblich beeinflussen, sollen in diesem Zusammenhang besondere Aufmerksamkeit erfahren.

**Frequenzabhängigkeit der Schwingungsformen** Unter der Annahme einer durch den Piezowandler eingepprägten radialsymmetrischen Verschiebung sollen die Modelle genutzt werden, um die sich im Betrieb einstellenden Schwingungsformen des Hohlzylinders zu bestimmen und zu analysieren. Zur Modellvalidierung sind Messungen an verschiedenen Systemen erforderlich, anhand derer sich auch die Modell- bzw. Materialparameter identifizieren lassen.

**Ausbildung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen** Auch zur Bestimmung der sich einstellenden elliptischen Oberflächenpunktbahnen sollen die Modelle herangezogen werden, wobei der Schwerpunkt hier auf der Kopplung der radialen und axialen Verschiebungsanteile und der daraus resultierenden Trajektorien der Oberflächenpunkte liegt. Idealerweise lassen sich dabei die bereits von MRACEK UND WALLASCHEK [69] in der Messung beobachteten, stark ortsabhängigen elliptischen Oberflächenpunktbahnen auch anhand des Modells bestimmen.

Zusammenfassend lässt sich die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit mit der Beantwortung der folgenden Fragen beschreiben:

- Wie sieht ein geeignetes Modell aus, anhand dessen es möglich ist, die Wanderwellenanregung und -ausbreitung in Hohlzylindern zu beschreiben?
- Wie lassen sich das Amplitudenminimum und der Stehwellenanteil in der Nähe des Piezowandlers erklären?
- Können die frequenzabhängigen Schwingungsformen anhand des Modells bestimmt werden?
- Lässt sich die Ausprägung des Amplitudenminimums reduzieren oder gar vollständig verhindern?
- Wie tragen die angeregten Wellen mit ihren radialen und axialen Verschiebungsanteilen zur Ausbildung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen bei?
- Gibt es, unter Berücksichtigung der zuvor genannten Punkte, einen optimalen Frequenzbereich für den Betrieb eines Ultraschall-Wanderwellentransport-Systems?

## 3.3 Aufgabenstellung

Zur Erreichung der genannten Ziele werden die erforderlichen Aufgaben systematisch in kleinere Teilaufgaben gegliedert, die dann im Verlauf der Arbeit nacheinander abgearbeitet werden:

### Modellierung der Wanderwellenausbreitung in Hohlzylindern

Die bisher verwendeten Ansätze zur Modellierung des Ultraschall-Wanderwellentransports mittels modaler Superposition anhand von Finite-Elemente-Simulationen sind nur stark eingeschränkt geeignet, die im Zusammenhang mit der Wellenausbreitung auftretenden Phänomene zu analysieren. Auf Schalentheorien basierende Modellierungsansätze erscheinen in diesem Zusammenhang geeigneter um die verschiedenen Einflussfaktoren detailliert zu untersuchen. Da sich mit ihnen sowohl die Wanderwellen als auch die Nahfeldanteile analytisch beschreiben lassen, ist es mit ihnen möglich, die im Zusammenhang mit der Wellenausbreitung auftretenden Effekte genauer zu analysieren.

Basierend auf bereits bekannten Theorien zur Beschreibung von Schalenschwingungen sollen daher zunächst geeignete Modelle zur Beschreibung der Wanderwellenausbreitung in Hohlzylindern abgeleitet werden. Dabei sind geeignete Schalentheorien auszuwählen und dann entsprechend der vorliegenden Problemstellung anzupassen. Zu Beginn soll die FLÜGGE-Theorie zur grundlegenden Analyse der Wellenausbreitung in Hohlzylindern genutzt werden, da sie weit verbreitet bei der Analyse schwingender Hohlzylinder ist und bei vertretbarer Komplexität und handhabbarem Aufwand relativ gute Ergebnisse liefert (LEISSA [52]). Später werden auch andere Ansätze betrachtet und auf ihre Eignung für den vorliegenden Anwendungsfall hin untersucht.

### Experimentelle Untersuchungen

Zur Validierung der Modelle sind verschiedene Messreihen durchzuführen, die den Abgleich mit den Simulationsergebnissen zulassen. Zu diesem Zweck soll im Rahmen der Arbeit zunächst ein Demonstratorsystem zum Ultraschall-Wanderwellentransport mit verschiedenen Hohlzylinder-Wandler-Einheiten aufgebaut werden. Sowohl dreidimensionale Messungen des radialen Verschiebungsfeldes als auch Messungen der radialen Verschiebung entlang einer zur Zylinderachse parallelen Geraden bei verschiedenen Anregungsfrequenzen sollen an diesen durchgeführt werden. Zum Abschluss der experimentellen Untersuchungen sollen auch die Bahnen der Oberflächenpunkte messtechnisch erfasst und ausgewertet werden, um beurteilen zu können, wie gut sich diese mit den entwickelten Modellen vorhersagen lassen.

### Modellvalidierung

Im ersten Schritt der Modellvalidierung müssen anhand der zuvor messtechnisch aufgenommenen Schwingungsformen die Annahmen, die während der Modellbildung getrof-

fen wurden, verifiziert werden. Im Anschluss können dann Modell- bzw. Materialparameter durch den Abgleich der Messungen mit entsprechenden Simulationen identifiziert werden. Mit den so bestimmten Parametern ist es möglich, Analysen der Schwingungsform z. B. bei variabler Anregungsfrequenz durchzuführen und mit den entsprechenden experimentellen Ergebnissen zu vergleichen, um schließlich eine Aussage über die Güte der verwendeten Berechnungsmodelle zu treffen.

### **Analyse der sich einstellenden Trajektorien bei verschiedenen Frequenzen**

Die bereits von MRACEK UND WALLASCHEK messtechnisch bestimmten, ortsabhängigen elliptischen Oberflächenpunktbahnen sollen im Vergleich von Messung und Simulation betrachtet werden. Anhand von Messungen am Prototypsystem und anhand des zuvor validierten Modells sowie der damit durchgeführten Simulationen soll die Eignung des Modells, die Ortsabhängigkeit der Ellipsenformen zu beschreiben, gezeigt werden.

Am Ende der Arbeit soll ein validiertes Berechnungsmodell zur Verfügung stehen, anhand dessen die Anregung und Ausbreitung von Wanderwellen in einem Hohlzylinder beschrieben werden können. Dabei sind sowohl die Abbildung der wesentlichen Phänomene als auch eine hinreichende Genauigkeit der Lösung von Bedeutung. Idealerweise steht somit ein allgemeingültiges Berechnungsverfahren zur Verfügung, das für einen Hohlzylinder beliebigen Materials und frei wählbarer Geometrie, eine Analyse des Schwingungsverhaltens ermöglicht und für die Beschreibung, Analyse und Optimierung von Systemen zum Ultraschall-Wanderwellentransport eingesetzt werden kann.

## 4 Modellierung der Wanderwellenausbreitung

Um das Schwingungsverhalten der Hohlzylinder beim Ultraschall-Wanderwellentransport effektiv analysieren und die auftretenden Effekte erklären zu können, ist es nicht ausreichend diese mittels der Finite-Elemente-Methode zu modellieren. Zwar liefert diese Methode Ergebnisse, die sehr gut mit experimentellen Daten übereinstimmen, eine systematische Optimierung und Analyse ist jedoch nur schwer möglich, weil die einzelnen auftretenden Wellentypen nicht separat betrachtet werden können. Es ergibt sich vielmehr stets eine Gesamtschwingungsform, über deren Entstehung und Zusammensetzung aus den einzelnen Wellenanteilen keine Aussage möglich ist. Daher wird in dieser Arbeit der Ansatz verfolgt, die Wellenausbreitung mittels verschiedener Schalentheorien zu beschreiben und zu analysieren, um ein grundlegendes Verständnis von den auftretenden Effekten zu erlangen.

In diesem Kapitel wird die Modellierung der für den Ultraschall-Wanderwellentransport wichtigen Wellenausbreitung in Hohlzylindern anhand von Schalentheorien beschrieben. Im ersten Abschnitt werden anhand des auf der FLÜGGE-Schalentheorie basierenden Modells allgemeine Untersuchungen zur Wellenausbreitung in Hohlzylindern bei rotationssymmetrischer Anregung durchgeführt. Ausgehend von den Bewegungsgleichungen werden die komplexen Wellenzahlen in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt, was schließlich zu den sogenannten Dispersionsdiagrammen führt. Auf der FLÜGGE-Schalentheorie basierende Teilergebnisse dieses Kapitels wurden bereits von WALLASCHEK UND RENNER [117] im Rahmen der GAMM-Tagung 2011<sup>1</sup> veröffentlicht. Darüber hinaus folgen nähere Betrachtungen der möglichen Wellentypen, ihrer individuellen Charakteristiken, der zugehörigen elliptischen Oberflächenpunktbahnen sowie des Einflusses der Materialdämpfung.

Im zweite Abschnitt werden ähnliche Betrachtungen anhand des auf der Schalentheorie nach MIRSKY UND HERRMANN basierenden Modells für dickwandige Schalen durchgeführt. Dabei wird auf die wesentlichen Unterschiede und Gemeinsamkeiten sowie deren Konsequenzen für das resultierende Schwingungsverhalten eingegangen. Sofern erforderlich, werden im gesamten Kapitel für die grafische Darstellung der Ergebnisse die Geometrie- und Materialparameter eines typischen, im Rahmen dieser Arbeit verwendeten, Hohlzylinders verwendet (siehe **Tabelle A.1**, System II).

---

<sup>1</sup>Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik

## 4.1 Dünnwandige Schalen nach FLÜGGE

Die Ansätze für dünnwandige Schalen sind aufgrund der Vernachlässigung von Trägheitstermen und Scherungseffekten deutlich einfacher als die Theorien für dickwandige Schalen, die diese Effekte nicht vernachlässigen und entsprechend deutlich komplexer sind. Die FLÜGGE-Theorie wird in der Literatur als sehr genau beschrieben (LEISSA [52]) und soll daher an dieser Stelle die Grundlage bilden, um ein grundlegendes Verständnis von den bei der Wellenausbreitung in Hohlzylindern auftretenden Effekten zu gewinnen.

Für die Modellierung der Wellenausbreitung wird in dieser Arbeit durchgängig und unabhängig vom verwendeten Ansatz stetes das in **Abb. 4.1** dargestellte Zylinderkoordinatensystem mit der axialen Koordinate  $x$ , dem Winkel  $\varphi$  sowie der radialen Koordinate  $z = r - a$  verwendet. Die zugehörigen Verschiebungskomponenten werden wie bereits in Kapitel 2 mit  $u$  (axial),  $v$  (tangential) und  $w$  (radial) bezeichnet.

### 4.1.1 Lösung der Bewegungsgleichung für Wanderwellen

Die Grundlage der folgenden Betrachtungen sind die Bewegungsgleichungen nach FLÜGGE (siehe Gl. (2.40))

$$\begin{aligned}
 u'' + \frac{1-\nu}{2}(1+K)\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' - K\tau''' + \frac{1-\nu}{2}K\ddot{w}' + \nu w' &= \gamma_{\text{F}}^2 \frac{d^2 u}{dt^2} \\
 \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}(1+3K)v'' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{w}'' + \dot{w} &= \gamma_{\text{F}}^2 \frac{d^2 v}{dt^2} \\
 -Ku''' + \frac{1-\nu}{2}K\ddot{u}' + \nu u' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{v}'' + \dot{v} + w + & \\
 K[w'''' + 2\dot{w}'' + \ddot{w} + 2\dot{w} + w] &= -\gamma_{\text{F}}^2 \frac{d^2 w}{dt^2},
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

bzw. in der Operatorschreibweise nach Gl. (2.53) mit den bereits eingeführten Abkürzungen:

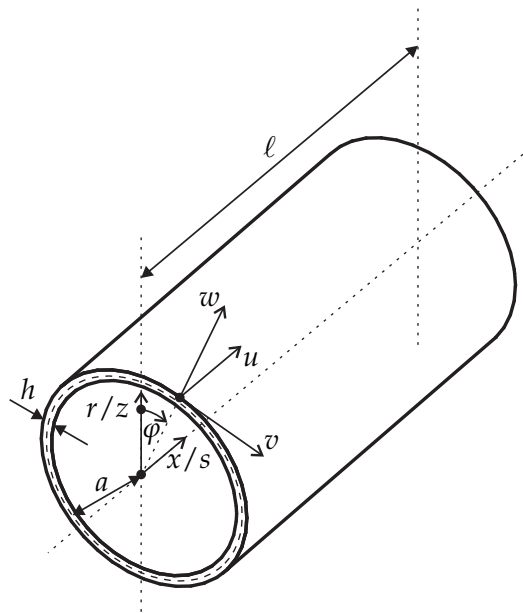
$$K = \frac{h^2}{12a^2}$$

$$\gamma_{\text{F}}^2 = \frac{\varrho a^2(1-\nu^2)}{E}.$$

$$(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{d\varphi}$$

$$(\phantom{x})' = \frac{d(\phantom{x})}{ds} = \frac{d(\phantom{x})}{d\frac{x}{a}}.$$





**Abbildung 4.1:** Koordinatensystem  $(x, \varphi, r)$  zur Beschreibung der Zylinderschwingungen mit den zugehörigen Verschiebungskomponenten  $u, v, w$

Zur Beschreibung der Wanderwellen wird der Exponentialansatz

$$\begin{aligned} u(x, \varphi, t) &= A e^{(jn\varphi)} e^{j(\omega t - k_s x)} \\ v(x, \varphi, t) &= B e^{(jn\varphi)} e^{j(\omega t - k_s x)} \\ w(x, \varphi, t) &= C e^{(jn\varphi)} e^{j(\omega t - k_s x)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

verwendet, der sich gut zur Beschreibung von Wanderwellen eignet und wie er bereits, bis auf die Winkelabhängigkeit<sup>2</sup>, in Abschnitt 2.2.1 verwendet wurde. Gl. (4.2) ist komplexwertig, wobei aber nur der Realteil die Lösung beschreibt. Der besseren Lesbarkeit halber wird im Folgenden weitestgehend auf die explizite Angabe des Realteils verzichtet.

Nach Einsetzen des Ansatzes für die Verschiebungen in Gl. (4.1), Ausführen aller Differentiationen und anschließender Division aller Gleichungen durch  $e^{(jn\varphi)} e^{j(\omega t - k_s x)}$  ergibt sich das folgende in Matrixschreibweise dargestellte Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{M_{\text{FLÜGGE}}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

<sup>2</sup> $n$  beschreibt die Anzahl von Wellen entlang des Umfangs des Hohlzylinders

mit den sechs Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -2k_s^2 - (1 + K)n^2(1 - \nu) + 2\Omega^2 \\
 a_{12} &= nk_s(1 + \nu) \\
 a_{13} &= -j2Kk_s^3 + jKk_s n^2(1 - \nu) - j2k_s \nu \\
 a_{22} &= -2n^2 - k_s^2(1 - \nu)(1 + 3K) + 2\Omega^2 \\
 a_{23} &= j2n + jKk_s^2 n(3 - \nu) \\
 a_{33} &= 2(1 + K) - 4Kn^2 + 2K(k_s^2 + n^2)^2 - 2\Omega^2.
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde eine Normierung der (Kreis-)Frequenz  $\omega$  auf  $\frac{1}{\gamma_F}$  (siehe Gl. (2.42)) durchgeführt, so dass im Weiteren die normierte Frequenz  $\Omega = \frac{\omega}{1/\gamma_F} = \gamma_F \omega$  verwendet wird. Diese Gleichung lässt sich auch einfach aus den Operatormatrizen (siehe Gln. (2.55) und (2.58)) gewinnen, indem die Ableitungen nach  $\varphi$ ,  $k_s$  und  $t$  durch den entsprechenden, aus ihrer Ausführung resultierenden, Faktor  $jn$ ,  $-jk_s$  bzw.  $j\omega$  ersetzt werden.

Gl. (4.3) ist ein homogenes Gleichungssystem und hat daher immer die triviale Lösung. Wenn aber  $M_{\text{Flügge}}$  einen Rangabfall hat, d.h. für ihre Determinante  $\det[M_{\text{Flügge}}] = 0$  gilt, gibt es weitere nicht triviale Lösungen mit  $(A, B, C)^T \neq \mathbf{0}$ , welche allerdings nicht mehr eindeutig sind, weil mehr Unbekannte als unabhängige Gleichungen vorliegen. Ein oder zwei Elemente des Lösungsvektors können bzw. müssen dann vorgegeben werden. Das Bilden der Determinante führt nach einigen Rechenschritten auf eine biquadratische Gleichung folgender Form:

$$P_4 k_s^8 + P_3 k_s^6 + P_2 k_s^4 + P_1 k_s^2 + P_0 = 0. \quad (4.4)$$

Die Koeffizienten  $P_4$  bis  $P_0$  dieser Gleichung hängen ausschließlich von den Koeffizienten  $a_{11} - a_{33}$  nach Gl. (4.4) ab. Sofern alle Geometrie- ( $a, h$ ) und Materialparameter ( $E, \nu, \rho$ ) bekannt sind, können auch  $K$  und  $\gamma_F$  bestimmt werden, so dass lediglich  $k_s$ ,  $n$  und  $\Omega$  als Unbekannte verbleiben. Wird die Zahl der Knotendurchmesser  $n$  vorgegeben (siehe auch **Abb. 2.21**), ist Gl. (4.4) lösbar. Hierfür wird die Kreisfrequenz  $\Omega$  vorgegeben und die Gleichung anschließend nach  $k_s$  aufgelöst, wobei auch der umgekehrte Weg mit einer Vorgabe von  $k_s$  zur Bestimmung des zugehörigen  $\Omega$  möglich wäre. Aufgrund der biquadratischen Form von Gl. (4.4) treten die Lösungen jeweils paarweise symmetrisch zum Ursprung der komplexen Ebene auf.

## 4.1.2 Rotationssymmetrische Schwingungen

Für den in dieser Arbeit relevanten Fall der rotationssymmetrischen Schwingungen ( $n = 0$ ) vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen, da  $a_{12} = a_{23} = 0$ . Entsprechend

vereinfacht sich Gl. (4.3) zu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

mit jetzt nur noch vier Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2k_s^2 + 2\Omega^2 \\ a_{13} &= -j2Kk_s^3 - j2k_s\nu \\ a_{22} &= -k_s^2(1 - \nu)(1 + 3K) + 2\Omega^2 \\ a_{33} &= 2(1 + K) + 2Kk_s^4 - 2\Omega^2. \end{aligned}$$

Aus der Form der Matrix lässt sich erkennen, dass die Verschiebungen  $\nu$  in Umfangsrichtung, also die Torsionsbewegung, von den Verschiebungen in radialer und axialer Richtung entkoppelt ist. Letztere wiederum sind über den Term  $a_{13}$  gekoppelt. Die Abhängigkeit dieser Kopplung von  $k_s$  und damit auch von der Frequenz lässt sich aus der entsprechenden Gleichung leicht ersehen. Aus

$$a_{13} = 0 = -j2Kk_s^3 - j2k_s\nu = (-j2Kk_s^2 - j2\nu)k_s$$

lassen sich die Werte  $k_s$ , für die die Kopplung vollständig verschwindet, zu

$$\begin{aligned} k_{s,1} &= 0 \\ k_{s,2} &= \pm j\sqrt{\frac{\nu}{K}} = \pm j\sqrt{\frac{12a^2\nu}{h^2}} \end{aligned} \quad (4.6)$$

bestimmen. Durch Einsetzen in Gl. (4.5) mit  $a_{13} = 0$  ergeben sich die zugehörigen Frequenzen zu

$$\begin{aligned} \Omega_{1,1} &= 0 \\ \Omega_{1,2} &= \sqrt{1 + K} \\ \Omega_{2,1} &= \sqrt{1 + K + \frac{\nu^2}{K}} \\ \Omega_{2,2} &= j\sqrt{\frac{\nu}{K}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für alle anderen Frequenzen besteht für  $n = 0$  eine mehr oder weniger starke Kopplung der Verschiebungen in radialer und longitudinaler Richtung, so dass stets beide Verschiebungsanteile auftreten. Bevor diese Kopplung näher betrachtet wird, soll zunächst die Lösung von Gl. (4.5) und das daraus resultierende Dispersionsdiagramm näher betrachtet werden. Durch die Entkopplung der Torsions- von der Axial- und Radialbewegung kann Gl. (4.5) in die beiden Gleichungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}_{\text{Flügge,red}}} \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

und

$$a_{22}B = 0 \quad (4.9)$$

aufgespalten werden. Zur Berechnung der Dispersionskurven werden die nicht trivialen Lösungen von Gl. (4.8) und (4.9) durch Nullsetzen der Determinante der Koeffizientmatrix

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \det[\mathbf{M}_{\text{Flügge,red}}] \\ &= a_{11} \cdot a_{33} - a_{13}^2 \\ &= 4(K-1)Kk_s^6 + (8K\nu + 4K\Omega^2)k_s^4 + (-4 - 4K + 4\nu^2 + 4K\Omega^2)k_s^2 \\ &\quad - 4\Omega^4 + 4(1+K)\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

bzw. des Koeffizienten

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} a_{22} \\ &= -k_s^2(1-\nu)(1+3K) + 2\Omega^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

bestimmt. Für die Torsionskomponente lässt sich die Lösung von Gl. (4.11) analytisch sehr einfach zu

$$k_s = \pm \Omega \sqrt{\frac{2}{(1-\nu)(1+3K)}} \quad (4.12)$$

bestimmen. Die Wellenzahl  $k_s$  ist also in diesem Fall stets reell und proportional zur normierten Frequenz. Demnach sind sowohl der Quotient aus (Kreis-)Frequenz und Wellenzahl als auch das Produkt Wellenlänge mal Frequenz konstant und identisch zur Phasengeschwindigkeit, die daher ebenfalls konstant und frequenzunabhängig ist.

Gl. (4.10) ist kubisch in  $k_s^2$  und ließe sich zwar mit Hilfe der CARDANO'schen Formeln<sup>3</sup> (siehe STÖCKER [94]) lösen, diese analytische Lösung ist aber so komplex, dass sie keinen weiteren Nutzen mit sich bringt und deshalb auch nicht angegeben werden soll. Stattdessen werden die Nullstellen in Abhängigkeit der Frequenz numerisch mit Hilfe des Programms Wolfram Mathematica<sup>®</sup> berechnet. Dabei werden hier, wie für alle numerischen Berechnungen dieses Kapitels, die Geometrie- und Materialparameter von System II aus Kapitel 5 bzw. **Tabelle A.1** verwendet:

- $\gamma_F^2 = 1,338 \cdot 10^{-11} \text{ s}^2$
- $K = 1,03 \cdot 10^{-2}$
- $\nu = 0,3$

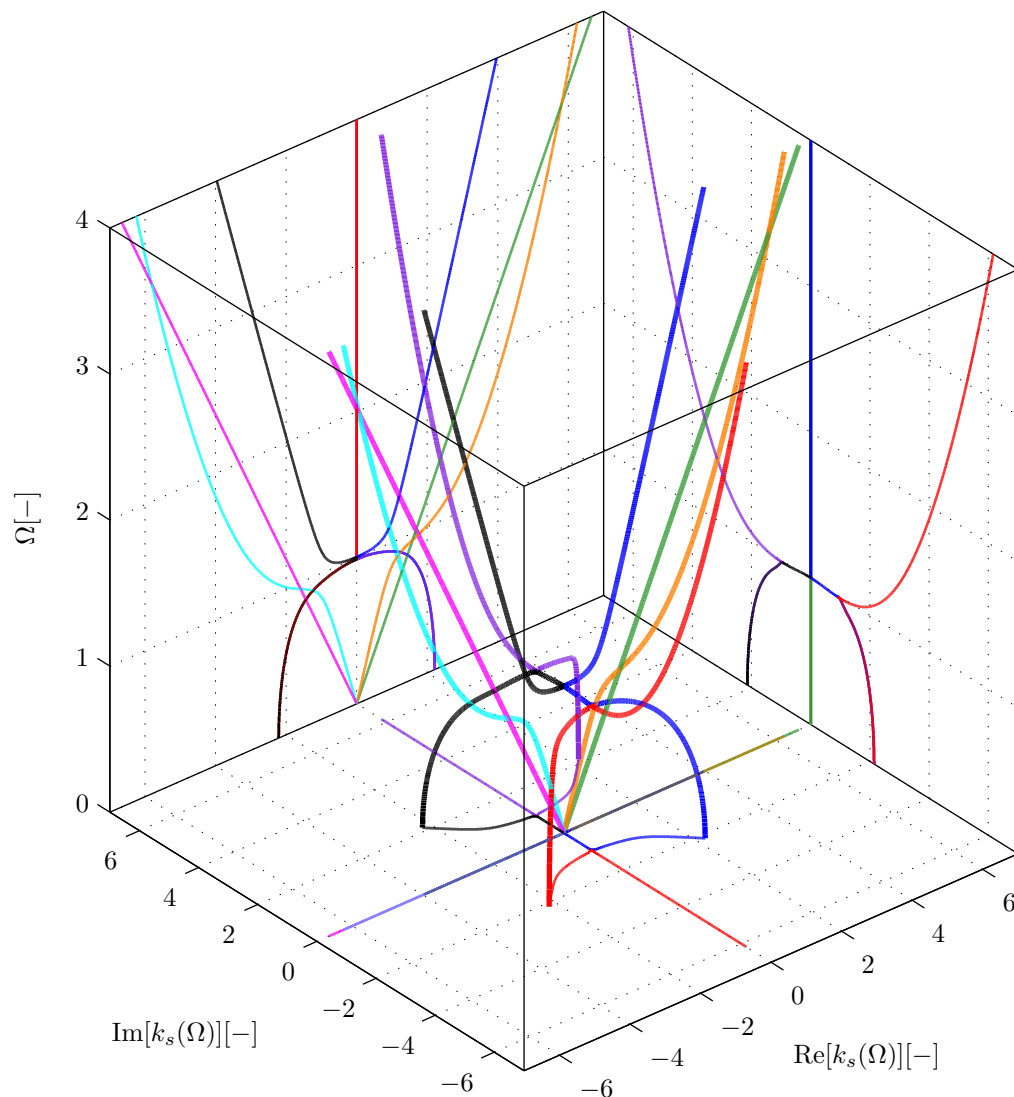
Aus der zur Normierung von  $\omega$  verwendeten Gleichung und dem Wert von  $\gamma_F$  ergibt sich die zu  $\Omega = 1$  gehörige Frequenz zu

$$f_{\Omega=1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega}{\gamma_F} = 43.516,45 \text{ Hz.} \quad (4.13)$$

<sup>3</sup>oft auch CARDAN'sche Formeln genannt

Die Lösungen  $k_{s,i}$  der Gln. (4.10) und (4.11) lassen sich gut in einem Dispersionsdiagramm in Abhängigkeit der normierten Frequenz  $\Omega$  darstellen. Im vorliegenden Fall bietet sich die dreidimensionale Darstellung an, da so Real- und Imaginärteil der komplexwertigen Wellenzahlen gemeinsam betrachtet werden können. **Abb. 4.2** zeigt die frequenzabhängige Lösung für radialsymmetrische Verschiebungen ( $n = 0$ ) in Form eines solchen Dispersionsdiagramms. Die beiden in magenta und grün dargestellten Geraden repräsentieren dabei die zu den Torsionswellen gehörende in Gl. (4.12) angegebenen, rein reellen Lösungen von Gl. (4.11). Die übrigen sechs Kurven stellen die Lösungen von Gl. (4.10) dar. Um die Verläufe der einzelnen Kurven besser wiederzugeben sind zusätzlich zu den dreidimensionalen Verläufen auch die Projektionen auf die drei Koordinatenebenen dargestellt. Der Verlauf der Kurven ist sowohl symmetrisch zur Achse  $k_s = 0$  als auch zu den Ebenen  $\text{Re}\{k_s\} = 0$  und  $\text{Im}\{k_s\} = 0$ .

Zur Interpretation dieser Kurven und der zugehörigen Wellenformen wird der verwen-

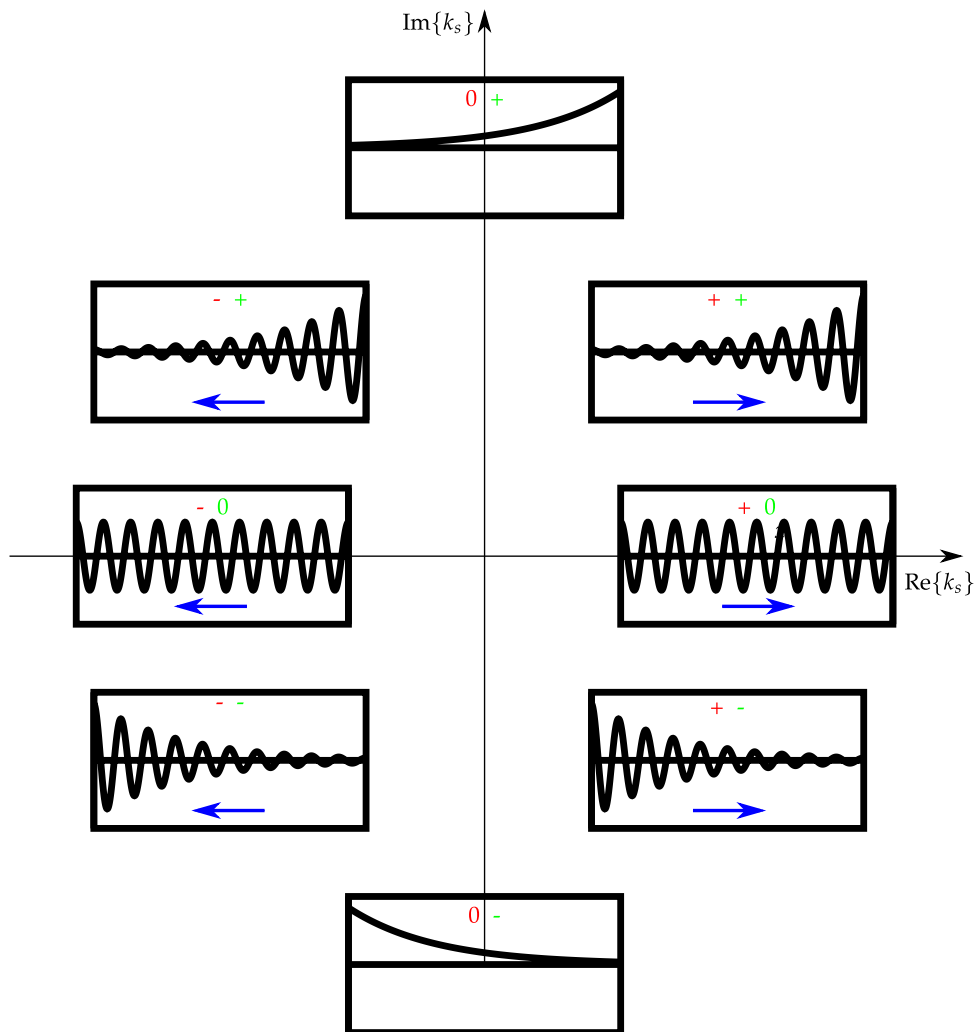


**Abbildung 4.2:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung bei Verwendung der FLÜGGE-Theorie für axialsymmetrische Schwingungen ( $n=0$ )

dete Ansatz aus Gl. (4.2) für  $n = 0$  betrachtet. Wird  $k_s$  in seinen Real- und Imaginärteil aufgeteilt, ergibt sich die folgende Darstellung

$$\hat{A}e^{j(\Omega\tau - k_s s)} = \hat{A}e^{j\Omega\tau} e^{-jk_s s} = \hat{A}e^{j\Omega\tau} e^{-j\operatorname{Re}\{k_s\}s} e^{\operatorname{Im}\{k_s\}s}. \quad (4.14)$$

Für die einzelnen Wurzelortskurven, d. h. die Projektionen auf die Ebene  $\Omega = 0$ , lässt sich diese Gleichung weiter analysieren. Der Faktor  $e^{\operatorname{Im}\{k_s\}s}$  beschreibt, je nach Vorzeichen von  $\operatorname{Im}\{k_s\}$  ein exponentielles Auf- oder Abklingen der Amplitude, während der Faktor  $e^{-j\operatorname{Re}\{k_s\}s}$  einen sich periodisch mit  $s$  ändernden Amplitudenverlauf darstellt. Aus dem Vorzeichen von  $\operatorname{Re}\{k_s\}$  ergibt sich analog zu Gl. (2.15) die Ausbreitungsrichtung. Abhängig vom Wert von  $k_s$  (reell, imaginär oder komplex) und den jeweiligen Vorzeichen ergeben sich also verschiedene Wellentypen. **Abb. 4.3** stellt die zu den komplexwertigen Wellenzahlen  $k_s$  gehörigen Wellentypen schematisch dar.



**Abbildung 4.3:** Darstellung der zu den komplexwertigen  $k_s$  gehörigen Wellentypen in Abhängigkeit der Vorzeichen von  $\operatorname{Re}\{k_s\}$  und  $\operatorname{Im}\{k_s\}$ . Die Pfeile geben die Richtung der Phasengeschwindigkeit an.

Rein reelle Wellenzahlen ergeben perfekt harmonische Wanderwellen, die sich je nach Vorzeichen in positive oder negative Richtung ausbreiten. Imaginäre Wellenzahlen ergeben exponentiell abklingende Verschiebungsfelder, sogenannte Nahfelder. Während beim Balken bei vernachlässigter Dämpfung die Wellenzahlen nur rein reell oder rein imaginär sind (siehe SEEMANN UND HAGEDORN [91]), existieren bei Hohlzylindern bzw. Schalen auch im ungedämpften Fall komplexwertige Wellenzahlen. Die zugehörigen Wellen sind dann eine Überlagerung exponentiell auf- oder abklingender Nahfelder und sich mit bestimmter Phasengeschwindigkeit ausbreitender Wellen. Eine genaue Betrachtung dieses Wellentypus und seiner Besonderheiten folgt in Abschnitt 4.1.3.

Das Verhältnis der axialen und radialen Verschiebungsanteile der aus Gl. (4.10) und (4.11) bestimmten Wellenzahlen  $k_{s,i}$  lässt sich anhand des Quotienten

$$\Phi_i(\Omega) = \frac{A_i}{C_i} = -\frac{a_{13}}{a_{11}} = \frac{jKk_{s,i}^3 + jk_{s,i}\nu}{-k_{s,i}^2 + \Omega^2} = -\frac{a_{33}}{a_{13}} = \frac{1 + K + Kk_{s,i}^4 - \Omega^2}{jKk_{s,i}^3 + jk_{s,i}\nu} \quad (4.15)$$

beschreiben, der sich aus der ersten oder der zweiten Zeile von Gl. (4.8) bestimmen lässt. Die nicht offensichtliche Identität der beiden Terme folgt dabei direkt aus der Erfüllung von Gl. (4.10). Für die verschiedenen  $k_{s,i}$ , das heißt für rein reelle  $k_{s,Re}$ , rein imaginäre  $k_{s,Im}$  und komplexe  $k_{s,Komp}$ , wird Gl. (4.15) näher betrachtet. Für reelle  $k_{s,Re}$  lässt sich Gl. (4.15) schreiben als

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Re}) = \frac{jKk_{s,Re}^3 + jk_{s,Re}\nu}{-k_{s,Re}^2 + \Omega^2} = j \frac{k_{s,Re}(Kk_{s,Re}^2 + \nu)}{-k_{s,Re}^2 + \Omega^2}. \quad (4.16)$$

Da alle Größen reellwertig sind, ist  $\Phi_i(\Omega, k_{s,Re})$  rein imaginär. Das Vorzeichen von  $\Phi_i(\Omega, k_{s,Re})$  ergibt sich aus den Vorzeichen von  $k_{s,Re}$  sowie dem Term  $(-k_{s,Re}^2 + \Omega^2)$

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Re}) = +j|\Phi_i(\Omega, k_{s,Re})| \quad \text{für } k_{s,Re} < -\Omega \text{ oder } 0 < k_{s,Re} < \Omega \quad (4.17)$$

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Re}) = -j|\Phi_i(\Omega, k_{s,Re})| \quad \text{für } -\Omega < k_{s,Re} < 0 \text{ oder } k_{s,Re} > \Omega. \quad (4.18)$$

Analog ergibt sich für imaginäre  $k_{s,Im}$

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Im}) = \frac{jKk_{s,Im}^3 + jk_{s,Im}\nu}{-k_{s,Im}^2 + \Omega^2} = \frac{jk_{s,Im}(-K|k_{s,Im}|^2 + \nu)}{|k_{s,Im}|^2 + \Omega^2} = \frac{\text{Im}\{k_{s,Im}\}(K|k_{s,Im}|^2 - \nu)}{|k_{s,Im}|^2 + \Omega^2}. \quad (4.19)$$

In diesem Fall ist  $\Phi_i(\Omega, k_{s,Im})$  reellwertig und sein Vorzeichen von den Vorzeichen von  $\text{Im}\{k_{s,Im}\}$  sowie dem Term  $(K|k_{s,Im}|^2 - \nu)$  abhängig. Es gilt

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Im}) = +|\Phi_i(\Omega, k_{s,Im})| \quad \text{für } |k_{s,Im}^-|^2 < \frac{\nu}{K} \text{ oder } |k_{s,Im}^+|^2 > \frac{\nu}{K} \quad (4.20)$$

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,Im}) = -|\Phi_i(\Omega, k_{s,Im})| \quad \text{für } |k_{s,Im}^-|^2 > \frac{\nu}{K} \text{ oder } |k_{s,Im}^+|^2 < \frac{\nu}{K}, \quad (4.21)$$

wobei  $k_{s,Im}^+$  positive und  $k_{s,Im}^-$  negative Imaginärteile beschreiben.

Für komplexwertige  $k_{s,\text{Komp}} = a + jb$  mit  $a, b \in \Re$

$$\Phi_i(\Omega, k_{s,\text{Komp}}) = \frac{jk_{s,\text{Re}}^3 + jk_{s,\text{Re}}\nu}{-k_{s,\text{Re}}^2 + \Omega^2} \quad (4.22)$$

lassen sich der Realteil

$$\text{Re} \left\{ \Phi_i(\Omega, k_{s,\text{Komp}}) \right\} = \frac{b(Ka^4 + 2Ka^2b^2 - va^2 + Kb^4 - vb^2) - \Omega^2b(3Ka^2 - Kb^2 + \nu)}{\Omega^4 - 2\Omega^2a^2 + 2\Omega^2b^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \quad (4.23)$$

und der Imaginärteil

$$\text{Im} \left\{ \Phi_i(\Omega, k_{s,\text{Komp}}) \right\} = -\frac{a(Ka^4 + 2Ka^2b^2 - va^2 + Kb^4 - vb^2) - \Omega^2a(Ka^2 - 3Kb^2 + \nu)}{\Omega^4 - 2\Omega^2a^2 + 2\Omega^2b^2 + a^4 + 2a^2b^2 + b^4} \quad (4.24)$$

angeben. Da im Nenner der beiden Gleichungen nur quadratische Terme vorkommen, sind diese unabhängig von den Vorzeichen von  $a$  und  $b$ . Gleiches gilt für die in Klammern stehenden Terme im Zähler. Werden die möglichen Vorzeichenkombinationen von  $a$  und  $b$  bei gleichen Beträgen betrachtet, so bestimmt das Vorzeichen von  $b$  das Vorzeichen des Realteils und das Vorzeichen von  $a$  das des Imaginärteils.

Die grafische Darstellung des Verhältnisses aus Gl. (4.15) nach Amplitude und Phase für System II zeigt **Abb. 4.4**, wobei die gleichen Farben wie in **Abb. 4.2** verwendet wurden, um die Zusammengehörigkeit der Kurven zu verdeutlichen.

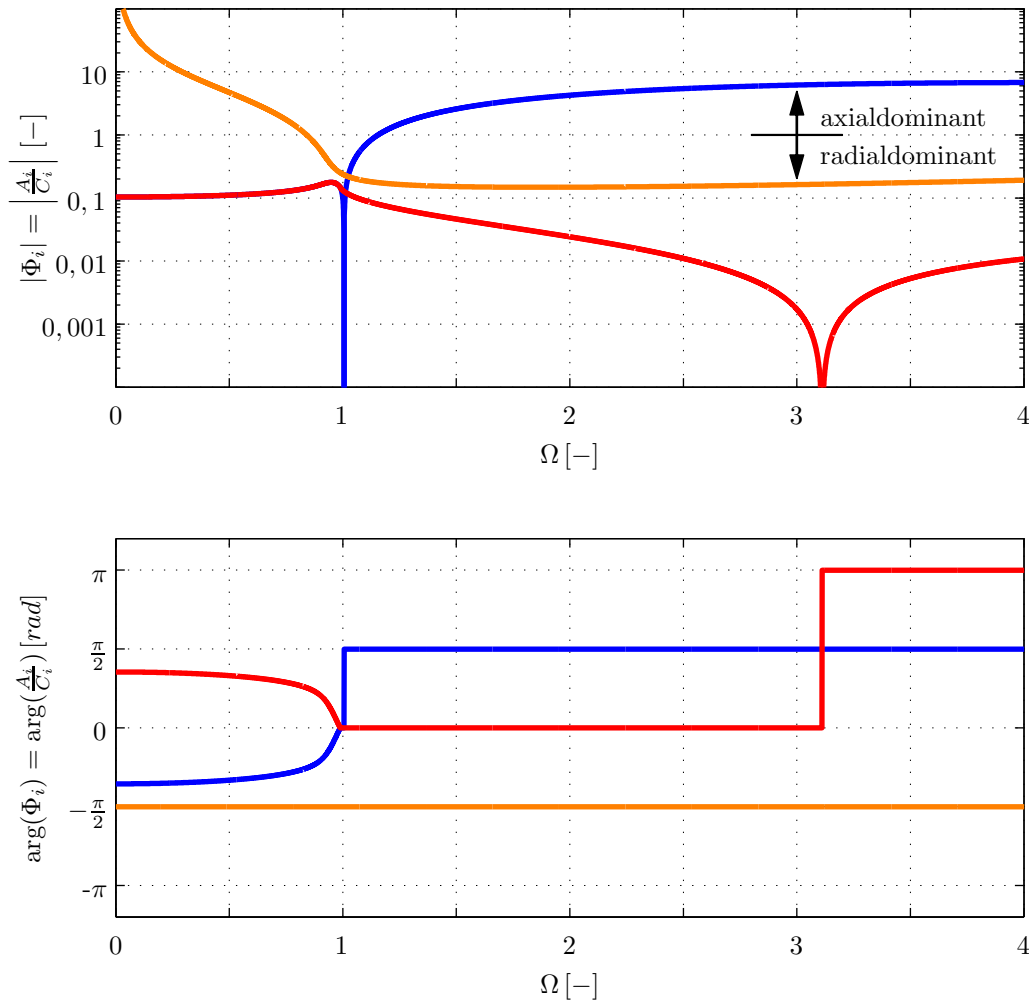
Die orange Kurve beschreibt im unteren Frequenzbereich eine nahezu reine axiale Schwingung ( $\Omega = \Omega_{1,1} = 0$ , siehe Gl. (4.7)) und geht im Bereich von  $\Omega \approx 0,8$  in eine radial dominierte Schwingung über. Gleiches gilt für die in **Abb. 4.2** in cyan dargestellte symmetrische Kurve, allerdings bei entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung. Die blau und rot dargestellten Kurven verlaufen deckungsgleich, bis zu dem Punkt an dem die Kurven auf die Ebene  $\text{Re} \{k_s\} = 0$  treffen. Anschließend beschreibt die rote Kurve ein Nahfeld mit hauptsächlich radialer Verschiebung, deren axialer Anteil bei  $\Omega = \Omega_{2,1} = \sqrt{1 + K + \frac{\nu^2}{K}} \approx 3,122$  vollständig verschwindet. Währenddessen wandelt sich die zur blauen Kurve gehörende Welle bei  $\Omega = \Omega_{1,2} = \sqrt{1 + K} \approx 1,005$  sprunghaft in eine zunächst rein radiale ausbreitungsfähige Welle, deren axialer Anteil mit der Frequenz ansteigt und schließlich ab  $\Omega \approx 1,2$  dominierend wird.

Ein weiterer Zusammenhang, der sich direkt aus den komplexen Wellenzahlen in **Abb. 4.2** bestimmen lässt, ist die Abhängigkeit zwischen normierter Wellenlänge  $\lambda_{s,i}$  und der normierten Frequenz  $\Omega$ . Sie ergibt sich mit Gl. (2.13) zu

$$\lambda_{s,i} = \frac{2\pi}{\text{Re} \left\{ k_{s,i}(\Omega) \right\}} \quad (4.25)$$

und ist in **Abb. 4.5** mit gleicher Farbgebung wie zuvor dargestellt. Tendenziell nehmen für alle Wellentypen die Wellenlängen mit steigender Frequenz ab. Lediglich für die kom-

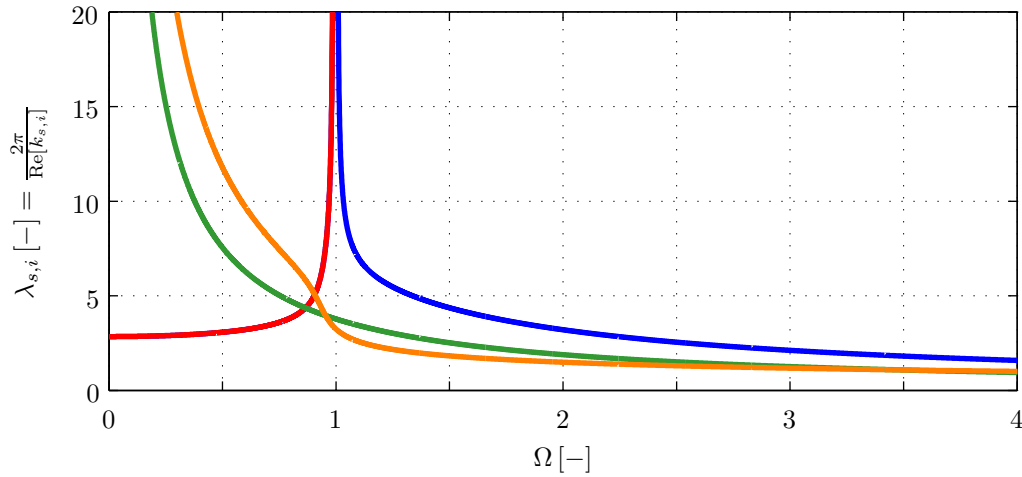




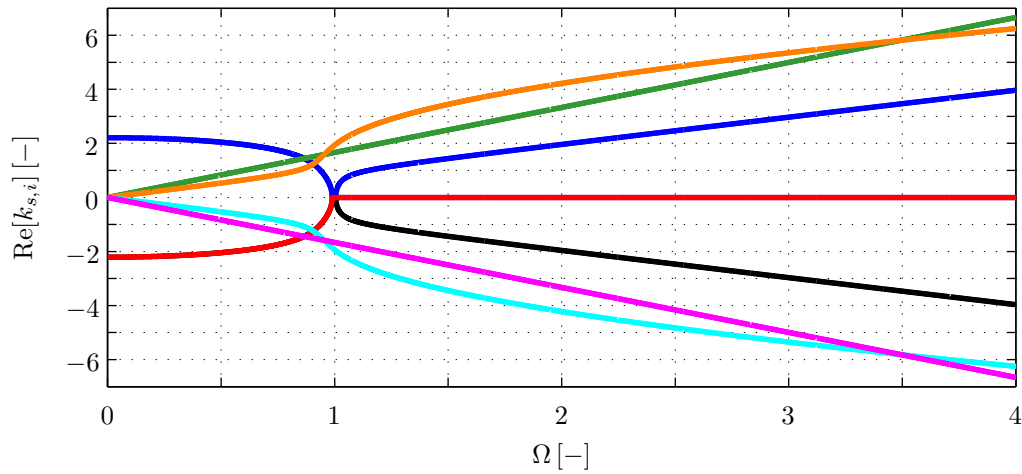
**Abbildung 4.4:** Verhältnis der axialen zur radialen Verschiebung für die verschiedenen Äste aus **Abb. 4.2**

plexwertigen Wellenzahlen nimmt die Wellenlänge des enthaltenen harmonischen Anteils zunächst zu und strebt für  $\Omega = \Omega_{1,2} = \sqrt{1 + K}$  gegen unendlich. Für die darüber auftretenden Radialschwingungen nimmt die Wellenlänge dann wieder mit steigender Frequenz ab.

Anhand von **Abb. 4.6** lassen sich gut die Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten nach Gln. (2.19) und (2.20) der einzelnen Wellen analysieren. Für die grün und magenta dargestellten Kurven stimmen Phasengeschwindigkeit  $c_P$  und Gruppengeschwindigkeit  $c_G$  im gesamten Frequenzbereich überein. Dies gilt auch in guter Näherung für die axialdominanten Wellen, die im unteren Frequenzbereich durch die orange bzw. cyanfarbene und im oberen Frequenzbereich durch die blaue bzw. schwarze Kurve repräsentiert werden und zusammen auf einer gedachten Ursprungsgeraden liegen. Für den radialdominanten Teil der orange dargestellten Kurve ab etwa  $\Omega = 0,8$  ist die Phasengeschwindigkeit  $\left(\frac{\omega_0}{k_{s,i,0}}\right)$  zunächst niedriger und dann höher als die Gruppengeschwindigkeit  $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)$ . Für die komplexen Äste im Bereich  $0 \leq \Omega \leq 1$  haben Phasen- und Gruppengeschwindigkeit unterschiedliche Vorzeichen und sind damit einander entgegengesetzt. Was dies für die Aus-



**Abbildung 4.5:** Aus dem Realteil von  $k_s$  berechnete, normierte Wellenlänge in Abhängigkeit der Frequenz



**Abbildung 4.6:** Realteil von  $k_s$  in Abhängigkeit der Frequenz

breitung der Wanderwellen bedeutet, soll in Abschnitt 4.1.3 näher betrachtet werden.

Aus der Kombination der **Abb. 4.2** bis **4.6** lassen sich folgende Aussagen über die verschiedenen Wellen treffen. Für  $\Omega \rightarrow \Omega_{1,1} = 0$  führt ein unendlich langer Hohlzylinder reine Axialschwingungen aus. Analog hierzu führt er bei  $\Omega = \Omega_{\text{grenz,F}} = \Omega_{1,2}$  reine Radialschwingungen aus<sup>4</sup>. Oberhalb dieser Frequenzen nimmt der Anteil der axialen Verschiebungskomponente zu, bis dieser schließlich die Schwingung dominiert. Mit Gl. (4.7)

$$\Omega_{\text{grenz,F}} = \Omega_{1,2} = \sqrt{1 + K} \quad (4.26)$$

und

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2}{1/\gamma_{\text{F}}^2} \quad (4.27)$$

<sup>4</sup>Da diese Grenzfrequenz für das Auftreten rein radialer Schwingungen  $\Omega_{1,2}$  später noch häufiger auftreten wird, soll sie zukünftig mit  $\Omega_{\text{grenz,F}}$  bezeichnet werden.

in Verbindung mit Gl. (2.42) ergibt sich die zugehörige Frequenz zu

$$f_{\text{grenz,F}} = f_{1,2} = f_{\Omega=1} \sqrt{1+K} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E(1+K)}{\rho a^2(1-\nu^2)}}. \quad (4.28)$$

Für das hier verwendete System II ergibt sich nach einsetzen aller Werte

$$f_{\text{grenz,F}} = 43.742 \text{ Hz}. \quad (4.29)$$

Im Verlauf der rot dargestellten Kurve, die einen Nahfeldanteil beschreibt, ist die Frequenz  $\Omega = \Omega_{2,1}$  signifikant. Dort kommt es zu einem vollständigen verschwinden der longitudinalen Schwingungsanteile. Gl. (4.13) eingesetzt in

$$\Omega_{2,1} = \sqrt{1+K+\frac{\nu^2}{K}} \quad (4.30)$$

ergibt die Frequenz

$$f_{2,1} = f_{\Omega=1} \sqrt{1+K+\frac{\nu^2}{K}} = 135.858 \text{ Hz}. \quad (4.31)$$

Die in den Abbildungen **Abb. 4.2**, **4.5** und **4.6** grün dargestellten Kurven repräsentieren die Torsionswellen mit rein tangentialen Verschiebungen, die sich anhand von Gl. (4.9) bestimmen lassen und völlig unabhängig von den übrigen Wellentypen existieren und sich ausbreiten.

### 4.1.3 Energietransport von Wanderwellen- und Nahfeldanteilen

Bevor eine Synthese der Schwingungsformen aus den einzelnen Wanderwellen erfolgen kann, muss die Frage geklärt werden, welche der zu den einzelnen Wellenzahlen  $k_{s,i}$  gehörigen Wellen hierbei berücksichtigt werden müssen und welche ggf. vernachlässigt werden dürfen. Dabei soll im nächsten Schritt ein halbunendlicher Wellenleiter angenommen werden, mit dem sich die Wellenausbreitung ohne reflektierte Wellenanteile analysieren lässt. Auf einem solchen Hohlzylinder, der sich entlang der positiven  $s$ -Achse ausdehnt und bei  $s = 0$  zu Schwingungen angeregt wird, können negative reelle  $k_{s,i}$  ausgeschlossen werden, da sie zur Quelle hinlaufende Wanderwellen repräsentieren würden. SEEMANN UND HAGEDORN [91] schließen bei ihren Betrachtungen darüber hinaus die zu den imaginären Wellenzahlen mit positivem Vorzeichen gehörigen Nahfeldanteile aus, die zum freien Ende hin exponentiell ansteigende Amplituden liefern würden. Im vorliegenden Fall des Hohlzylinders existieren allerdings auch komplexwertige Wellenzahlen

$$k_{s,1} = a + jb \quad k_{s,2} = -a + jb \quad k_{s,3} = a - jb \quad k_{s,4} = -a - jb, \quad (4.32)$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , so dass diese Argumentationen nicht ohne weiteres übertragen werden können. So ergeben  $k_{s,1}$  und  $k_{s,2}$  ( $\text{Im}\{k\} > 0$ ) Wellen, deren Amplituden mit  $s$  exponentiell ansteigen und  $k_{s,3}$  und  $k_{s,4}$  ( $\text{Re}\{k\} < 0$ ) Wellen, die auf die Quelle zulaufen. Die Amplituden der zu  $k_{s,2}$  gehörenden Welle nehmen dabei für zunehmendes  $s$  zu während die

Amplituden der zu  $k_{s,4}$  gehörenden Welle für zunehmendes  $s$  abnehmen (siehe **Abb. 4.3**). Demnach bliebe lediglich die zu  $k_{s,3}$  gehörige Welle neben den beiden reellwertigen Wellenzahlen übrig. Da bisher aber stets das ungedämpfte System betrachtet wurde, ist das Auftreten einer gedämpften Welle, wie sie durch  $k_{s,3}$  beschrieben wird, nicht schlüssig.

Zur weiteren Analyse, welche der Wellentypen im Folgenden zu berücksichtigen sind wenn die Schwingungsformen bestimmt werden sollen, wird die mit den Wellen transportierte Energie betrachtet. Die durch einen bestimmten Querschnitt tretende Leistung  $p$  lässt sich aus dem Produkt von Geschwindigkeit und wirkender Kraft in der entsprechenden Richtung bestimmen, wobei sich die Kraft wiederum aus den im Material auftretenden Spannungen bestimmen lässt. In den Gln. (2.29) finden sich die Ausdrücke für die in der FLÜGGE-Theorie von Null verschiedenen Spannungskomponenten. Die darin enthaltenen Dehnungen ergeben sich nach Gl. (2.24) aus den Verschiebungsanteilen in axialer, tangentialer und radialer Richtung. Da die Torsionsbewegung entkoppelt ist und nicht betrachtet wird gilt  $v = \dot{v} = 0$  und für den Fall axialsymmetrischer Schwingungen  $n = 0$  bzw.  $\frac{d}{d\varphi}(\dots) = 0$ . Damit verschwindet die Schubspannung  $\gamma_{x\varphi}$ .  $\sigma_{\varphi\varphi}$  muss für die Leistungsberechnung aufgrund der nicht vorhandenen zugehörigen Geschwindigkeit  $\dot{v} = 0$  ebenfalls nicht weiter berücksichtigt werden. Die durch einen Querschnitt transportierte Leistung ergibt sich somit durch Integration des Produkts aus axialer Normalspannung  $\sigma_{xx}$  und axialer Geschwindigkeit  $\frac{du_z}{dt}$  über die Querschnittsfläche

$$p(s) = - \int_A \sigma_{xx} \frac{du_z}{dt} dA. \quad (4.33)$$

Das negative Vorzeichen resultiert aus der Definition der Spannung, die als Zugspannung positiv angenommen wird, während in der Leistungsberechnung die Kraft/Spannung in positiver Koordinaten-Richtung auftreten. Die Integration des Produktes aus axialer Verschiebung

$$u_z = u - \frac{z}{a} w' \quad (4.34)$$

abgeleitet nach der Zeit und der Normalspannung in axialer Richtung (siehe Gl. (2.36))

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{\varphi\varphi}] = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{u'}{a} - \frac{z}{a^2} w'' + \nu \frac{w}{a+z} \right] \quad (4.35)$$

über der Querschnittsfläche kann für den Fall der radialsymmetrischen Schwingungen durch eine Integration über die radialen Koordinate  $z$  ersetzt werden, da die Integration über den Winkel  $\varphi$  für die qualitative Betrachtung keinen Einfluss hat. So ergibt sich aus Gl. (4.33)

$$p'(s) = - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} r \frac{du_z}{dt} dz \quad (4.36)$$

mit Gl. (4.34) und Gl. (4.35) eingesetzt

$$\begin{aligned}
p'(s) &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \frac{u'}{a} - \frac{z}{a^2} w'' + \nu \frac{w}{a+z} \right] (a+z) \frac{d}{dt} \left( u - \frac{z}{a} w' \right) dz \\
&= - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ u' + \frac{u'z}{a} - \frac{z}{a} w'' - \frac{z^2}{a^2} w'' + \nu w \right] \left( \frac{du}{dt} - \frac{z}{a} \frac{dw'}{dt} \right) dz \\
&= - \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ u' \frac{du}{dt} - \frac{u'z}{a} \frac{dw'}{dt} + \frac{u'z}{a} \frac{du}{dt} - \frac{u'z^2}{a^2} \frac{dw'}{dt} - \frac{z}{a} w'' \frac{du}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{z^2}{a^2} w'' \frac{dw'}{dt} - \frac{z^2}{a^2} w'' \frac{du}{dt} + \frac{z^3}{a^3} w'' \frac{dw'}{dt} + \nu w \frac{du}{dt} - \nu w \frac{z}{a} \frac{dw'}{dt} \right] dz \\
&= - \frac{E}{1-\nu^2} \left[ u'z \frac{du}{dt} - \frac{u'z^2}{2a} \frac{dw'}{dt} + \frac{u'z^2}{2a} \frac{du}{dt} - \frac{u'z^3}{3a^2} \frac{dw'}{dt} - \frac{z^2}{2a} w'' \frac{du}{dt} \right. \\
&\quad \left. + \frac{z^3}{3a^2} w'' \frac{dw'}{dt} - \frac{z^3}{3a^2} w'' \frac{du}{dt} + \frac{z^4}{4a^3} w'' \frac{dw'}{dt} + \nu wz \frac{du}{dt} - \nu w \frac{z^2}{2a} \frac{dw'}{dt} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
&\quad \text{Terme mit geraden Potenzen von } z \text{ fallen weg wegen Symmetrie der Grenzen} \\
&= - \frac{E}{1-\nu^2} \left[ u'z \frac{du}{dt} - \frac{u'z^3}{3a^2} \frac{dw'}{dt} + \frac{z^3}{3a^2} w'' \frac{dw'}{dt} - \frac{z^3}{3a^2} w'' \frac{du}{dt} + \nu wz \frac{du}{dt} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \\
&= - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u' \frac{du}{dt} - \frac{u'h^2}{12a^2} \frac{dw'}{dt} + \frac{h^2}{12a^2} w'' \frac{dw'}{dt} - \frac{h^2}{12a^2} w'' \frac{du}{dt} + \nu w \frac{du}{dt} \right] \\
&\approx - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u' \frac{du}{dt} + \nu w \frac{du}{dt} \right].
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Wobei im letzten Schritt die mittleren Terme aufgrund des Faktors  $\frac{h^2}{a^2} \ll 1$  für kleine  $\frac{h}{a}$  gegenüber den beiden anderen Termen vernachlässigt werden können. Mit dem Ansatz nach Gl. (4.2) folgt weiter

$$\begin{aligned}
p'(s) &= - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ u' + \nu w \right] \frac{du}{dt} \\
&= - \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[ (-jk_{s,i} A_i e^{j(\Omega\tau - k_s s)}) + \nu C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i} s)} \right] j\omega A_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i} s)}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Unter Verwendung des Quotienten  $\Phi_i(\Omega) = \frac{A_i}{C_i}$  aus Gl. (4.15) lässt sich die Amplitude  $A_i$

vor die Klammer ziehen

$$p'(s) = -\frac{EhA_i^2}{1-\nu^2} \left[ (-jk_{s,i} e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}) + v \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \right] j\omega e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}. \quad (4.39)$$

Um zu bestimmen wie groß der Energiefluss durch einen Querschnitt  $s = s_0$  während des Durchlaufs einer Welle ist, muss der vorliegende Ausdruck über die Periodendauer  $T$  integriert werden

$$E(s) = \int_T p'(s) dt. \quad (4.40)$$

Da die Wellenzahlen  $k_{s,i}$  numerisch berechnet wurden und Gl. (4.39) sowohl  $k_{s,i}$  als auch  $\Phi_i = \Phi_i(k_{s,i})$  enthält, kann die Integration nicht analytisch durchgeführt werden. Betrachtet man allerdings Gl. (4.39) in Verbindung mit **Abb. 4.4** lassen sich trotzdem einige Schlüsse ziehen, auf die im Folgenden näher eingegangen wird.

#### 4.1.3.1 Reelle Wellenzahlen

Zuerst wird der Fall einer positiven reellen Wellenzahl  $k_{s,\text{Re}}^+$  betrachtet, die einer in positiver  $s$ -Richtung laufenden Wanderwelle entspricht. Dafür werden an dieser Stelle explizit die Realteile der in Gl. (4.39) enthaltenen Normalspannung und der Geschwindigkeit betrachtet

$$p'(s) = -\frac{EhA_i^2}{1-\nu^2} \left[ \text{Re} \left\{ (-jk_{s,i} e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}) \right\} + \text{Re} \left\{ v \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \right\} \right] \text{Re} \left\{ j\omega e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \right\}. \quad (4.41)$$

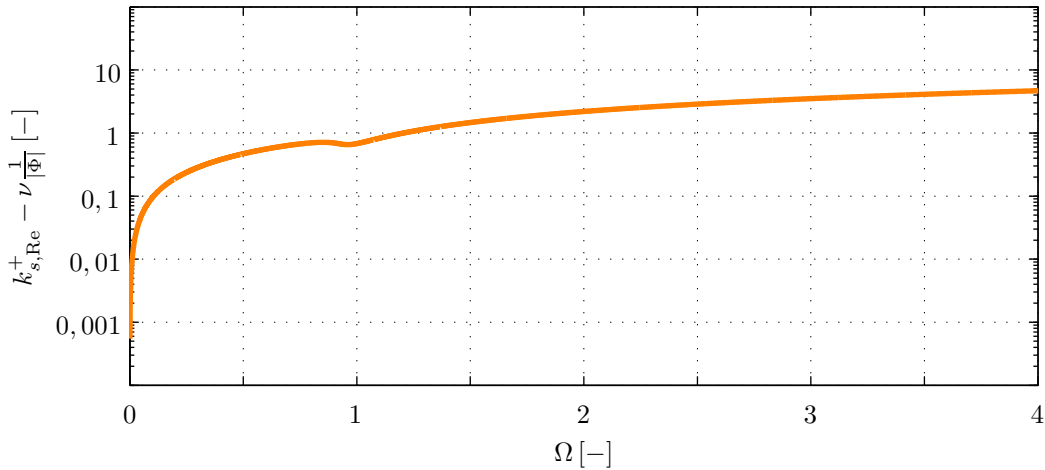
Für den Fall der positiven reellen Wellenzahl ergibt er sich zu

$$p'(s) = \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \sin(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s) \left[ \text{Re} \left\{ -jk_{s,\text{Re}}^+ e^{j(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s)} \right\} + \text{Re} \left\{ v \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s)} \right\} \right]. \quad (4.42)$$

Aus **Abb. 4.4** lässt sich der Phasenwinkel von  $\Phi_i$  zu  $-\frac{\pi}{2}$  aus der orangefarbenen Kurve ablesen. Das bedeutet der Phasenwinkel von  $\frac{1}{\Phi_i}$  ist entsprechend  $+\frac{\pi}{2}$ , so dass sich beide Realteile als Sinus-Funktionen schreiben lassen.

$$\begin{aligned} p'(s) &= \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \sin(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s) \left[ k_{s,\text{Re}}^+ \sin(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s) - v \frac{1}{|\Phi_i|} \sin(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s) \right] \\ &= \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \left[ k_{s,\text{Re}}^+ - v \frac{1}{|\Phi_i|} \right] \left( \sin(\Omega\tau - k_{s,\text{Re}}^+ s) \right)^2. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da sowohl der Vorfaktor als auch die  $\sin^2$ -Funktion stets positiv sind, wird das Vorzeichen durch den Wert des Ausdrucks in den eckigen Klammern bestimmt. Wie sich aus



**Abbildung 4.7:** Grafische Darstellung der Differenz  $k_{s,Re}^+ - \nu \frac{1}{|\Phi_i|}$  aus Gl. (4.43)

Abb. 4.7 ablesen lässt, ist dieser stets positiv und es gilt:

$$p'(s, k_{s,Re}^+) \geq 0 \quad \forall t. \quad (4.44)$$

Analog erhält man für negative reelle Wellenzahlen  $k_{Re}^-$

$$p'(s, k_{Re}^-) \leq 0 \quad \forall t, \quad (4.45)$$

da sich hier die Vorzeichen beider in der Klammer enthaltenen Ausdrücke umkehren. Die zugehörigen Energieflüsse, die sich durch Integration über eine Schwingungsperiode ergeben sind entsprechend positiv bzw. negativ. Die sich ausbreitenden Wellen konstanter Amplitude transportieren also wie erwartet Energie in Richtung ihrer Ausbreitung.

#### 4.1.3.2 Imaginäre Wellenzahlen

Wird die zu einem exponentiell abklingenden Nahfeldanteil gehörige, rein imaginäre Wellenzahl  $k_{s,Im}$  in Gl. (4.39) eingesetzt und der Realteil gebildet, ergibt sich

$$\begin{aligned} p'(s) &= -\frac{EhA_i^2}{1-\nu^2} \left[ \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Im} \{k_{s,Im}\} e^{j\Omega\tau} e^{\operatorname{Im}\{k_{s,Im}\}s} \right\} + \nu \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\Phi_i} e^{j\Omega\tau} e^{\operatorname{Im}\{k_{s,Im}\}s} \right\} \right] \\ &\quad \cdot \operatorname{Re} \left\{ j\omega e^{j\Omega\tau} e^{\operatorname{Im}\{k_{s,Im}\}s} \right\} \\ &= \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \sin(\Omega\tau) e^{2\operatorname{Im}\{k_{s,Im}\}s} \left[ \operatorname{Im} \{k_{s,Im}\} \cos(\Omega\tau) + \nu \frac{1}{\Phi_i} \cos(\Omega\tau) \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Für rein imaginäre  $k_{s,i}$  ist  $\Phi_i$  stets reell (siehe Gl. (4.19)), d. h. von seinem Vorzeichen hängt lediglich das Vorzeichen des zweiten Summanden in der Klammer ab. In diesem Fall lässt sich zwar nicht ohne weiteres von den Vorzeichen der einzelnen Terme auf das Vorzeichen von  $p'(s)$  schließen, aber die Integration über eine Schwingungsperiode  $T =$

$\frac{2\pi}{\omega}$  liefert aufgrund der Orthogonalität von Sinus- und Kosinusfunktion

$$E(s) = \int_0^T p'(s) = 0. \quad (4.47)$$

Es wird also zwar während einer Schwingungsperiode Energie transportiert, allerdings pendelt diese in Form von Blindleistung im Wellenleiter hin und her und breitet sich nicht durch den Wellenleiter aus.

### 4.1.3.3 Komplexe Wellenzahlen

Zum Abschluss werden die vier quadranten-symmetrischen, komplexen Wellenzahlen  $k_{s,\text{Komp}} = a_k + jb_k$  mit  $a_k, b_k \in \Re$  betrachtet. Diese in Gl. (4.39) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned} p'(s) &= -\frac{EhA_i^2}{1-\nu^2} \left[ \text{Re} \left\{ -j(a_k + jb_k)e^{j(\Omega\tau - (a_k + jb_k)s)} \right\} + \text{Re} \left\{ \nu \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - (a_k + jb_k)s)} \right\} \right] \\ &\quad \cdot \text{Re} \left\{ j\omega e^{j(\Omega\tau - (a_k + jb_k)s)} \right\} \\ &= \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \sin(\Omega\tau - a_k s) e^{2b_k s} \left[ \text{Re} \left\{ (-ja_k + b_k) e^{j(\Omega\tau - a_k s)} \right\} + \text{Re} \left\{ \nu \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - a_k s)} \right\} \right] \\ &= \frac{Eh\omega A_i^2}{1-\nu^2} \sin(\Omega\tau - a_k s) e^{2b_k s} \left[ a_k \sin(\Omega\tau - a_k s) + b_k \cos(\Omega\tau - a_k s) \right. \\ &\quad \left. + \text{Re} \left\{ \nu \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - a_k s)} \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Auf die beiden ersten Terme in der Klammer lassen sich die Argumentationen für reelle und imaginäre  $k_{s,i}$  direkt übertragen.  $\Phi_i$  im letzten Term ist jetzt allerdings komplex (siehe Gln. (4.23) und (4.24)):

$$\begin{aligned} \text{Re} \left\{ \nu \frac{1}{\Phi_i} e^{j(\Omega\tau - a_k s)} \right\} &= \nu \frac{1}{|\Phi_i|} \text{Re} \left\{ e^{-j \arg(\Phi_i)} e^{j(\Omega\tau - a_k s)} \right\} \\ &= \nu \frac{1}{|\Phi_i|} \cos(\Omega\tau - a_k s - \arg(\Phi_i)). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Für  $\arg(\Phi_i) = 0$  bzw.  $\pm\pi$  handelt es sich um eine Kosinus-Funktion des Argumentes  $(\Omega\tau - a_k s)$ , die keinen Beitrag zum Energiefluss liefert. Ist  $\arg(\Phi_i)$  allerdings verschieden von Null, wird der Kosinus phasenverschoben. Für  $\arg(\Phi_i) > 0$  nähert sich der Kosinus dem Sinus (Energiefluss in positiver Richtung) und für  $\arg(\Phi_i) < 0$  dem negativen Sinus (Energiefluss in negativer Richtung).

Die Analyse von Gl. (4.48) lässt einige Schlüsse bezüglich der möglichen Wellentypen zu. Der Exponentialanteil  $e^{2b_k s}$  bedeutet für positives  $b_k$  ein Ansteigen der durch einen Quer-



schnitt transportierten Energiemenge mit zunehmendem  $s$ , was nur für eine Energiequelle rechts des betrachteten Querschnitts sinnvoll ist. Für negative  $b_k$  dagegen nimmt die Energiemenge exponentiell ab. Die beiden zugehörigen Realteile  $\pm a_k$  bestimmen mit ihren Vorzeichen den Energiefluss, der jeweils aus dem ersten und dem dritten Term der Klammer resultiert. Wie sich anhand von Gl. (4.24) zeigen lässt, sind die Imaginärteile der beiden zugehörigen  $\Phi_i$  stets betragsgleich mit unterschiedlichen Vorzeichen. Es liegen also je ein Energiefluss in positiver und einer in negativer Richtung vor. Da in dem hier als dämpfungsfrei angenommenen System keine Energie dissipiert wird und keine Energie an die Umgebung abgegeben wird, muss die während einer Periode durch einen Querschnitt tretende Energie auch durch jeden anderen Querschnitt, also für beliebige  $s$ , treten. Da außer dem exponentiell abklingenden Anteil alle Terme für variables  $s$  konstant sind lässt sich diese Forderung für keine der vier komplexen Wellenzahlen erfüllen. Wenn allerdings die beiden zu  $k_{s,i} = \pm a_k - j b_k$  gehörenden Wellen mit gleicher Amplitude auftreten, haben die entsprechenden ersten und dritten Terme der Klammer von Gl. (4.48) identische Beträge aber entgegengesetzte Vorzeichen. Die Energie, die von einer der Wellen in positiver Richtung transportiert wird, wird also von der jeweils anderen zurück transportiert. Die beiden Wellen gleichen somit ihren Energiefluss untereinander aus. Gleiches gilt entsprechend für die beiden komplexen Wellenzahlen mit positivem Imaginärteil, allerdings wachsen ihre Amplituden für steigende  $s$  über alle Grenzen.

Aus den vorangegangenen Betrachtungen lassen sich folgende Schlüsse bezüglich der Existenz der unterschiedlichen Wellenanteile ziehen. Die Wellenanteile mit positivem Imaginärteil, egal ob imaginäre oder komplexe Wellenzahl, würden zu über alle Grenzen wachsenden Amplituden mit wachsender Koordinate  $s$  führen und können auf einem halbusendlichen Wellenleiter mit einer Schwingungsanregung bei  $s = 0$  nicht auftreten. Anteile mit negativ reellwertigen Wellenzahlen laufen auf die Quelle zu und würden Energie zur Quelle hin transportieren, so dass ihre Existenz bei der Annahme eines halbusendlichen Wellenleiters ebenfalls ausgeschlossen werden kann. Aus den acht Lösungen  $k_{s,i}$  von Gl. (4.4) verbleiben so lediglich vier, die bei der Synthese der Schwingungsformen eines halbusendlichen Rohres berücksichtigt werden müssen.

#### 4.1.4 Schwingungsformen

Um die bei der Anregung durch einen Piezowandler entstehenden Wellen zu untersuchen, ist es günstig anstelle eines endlichen Hohlzylinders zunächst, wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten geschehen, einen halbusendlichen Hohlzylinder ( $0 \leq s \leq \infty$ ) zu betrachten, da bei diesem keine der vom Aktor erzeugten Wellen jemals wieder zu ihm zurückkehren. Dieses Modell beschreibt also den idealen Zustand ohne Reflexionen am freien Ende. Welche Wellen unter diesen Annahmen existieren können und für die Bestimmung der Schwingungsform berücksichtigt werden müssen, wurde bereits im vorangegangenen Kapitel gezeigt. Für alle beteiligten Wellen lässt sich das Verhältnis von axialer zu radialer Amplitude bei vorgegebener Frequenz mit Gl. (4.15) aus der zugehö-

**Tabelle 4.1:** Mögliche Randbedingungen zur Bestimmung der Schwingungsform

Vorgabe einer eingepprägten Verschiebung in radialer Richtung	$w = A_z$
Keine Querschnittsverkippung	$w' = 0$
Vorgabe einer eingepprägten Verschiebung in axialer Richtung	$u = A_x$
Vorgabe einer eingepprägten Verschiebung in tangentialer Richtung	$v = A_\varphi$
Keine Momenteneinleitung	$M_x = 0$
Keine Radialkrafteinleitung	$S_x = Q_x + \frac{\dot{M}_{x\varphi}}{a} = 0$
Keine Tangentialkrafteinleitung	$T_x = N_{x\varphi} - \frac{M_{x\varphi}}{a} = 0$
Keine Axialkrafteinleitung	$N_x = 0$

rigen Wellenzahl bestimmen und es gilt:

$$A_i = \Phi_i(\Omega)C_i. \quad (4.50)$$

Die richtungsabhängige Gesamtverschiebung ergibt sich als Summe der zu den einzelnen Wellenzahlen  $k_{s,i}$  gehörenden Verschiebungsanteile

$$\begin{aligned} u(s, \Omega, \tau) &= \sum_i \Phi_i(\Omega)C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ v(s, \Omega, \tau) &= \sum_i B_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ w(s, \Omega, \tau) &= \sum_i C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Aufgrund der Entkopplung der Radial- und Longitudinalschwingungen von den Torsionsschwingungen kann eine separate Betrachtung der beiden Anteile erfolgen. Für die relevanten Wellenanteile mit radialen und longitudinalen Verschiebungsanteilen verbleiben nur die Amplituden  $C_i$  als Unbekannte, deren Anzahl identisch mit der Anzahl der berücksichtigten Einzelwellen ist. Sie lassen sich durch Anpassung der Verschiebungsansätze an die Randbedingungen (siehe **Tabelle 4.1**<sup>5</sup>) bestimmen und es ergibt sich die Partizipation der einzelnen Wellentypen an der Gesamtschwingung.

Bei drei signifikanten Wellenanteilen, die in die Betrachtungen einbezogen werden müssen, werden entsprechend drei Randbedingungen benötigt, um aus Gl. (4.51) die drei  $C_i$  zu bestimmen. Anhand der Dispersionskurven bzw. der für eine bestimmte Frequenz ermittelten Wellenzahlen kann so die sich einstellende Schwingungsform bestimmt werden.

<sup>5</sup>siehe hierzu FLÜGGE [18], S.147 ff.

### 4.1.5 Synthese der elliptischen Oberflächenpunktbahnen

Anhand der nun bestimmbaren Schwingungsform können im Weiteren auch die elliptischen Bahnen der Oberflächenpunkte bestimmt werden. Bereits in Abschnitt 2.1 wurde anhand eines balkenförmigen Wellenleiters auf die Entstehung der elliptischen Bahnkurven eingegangen. Die sich einstellenden Ellipsenformen in Abhängigkeit der Amplituden und Phasenlagen zweier überlagerter Stehwellen auf einem Balkenelement, die in der Überlagerung eine Wanderwelle ergeben, wurde von SEEMANN [90] grafisch dargestellt. Während sich allerdings beim Balken die elliptischen Bahnen aus der Querverschiebung  $w$  und dem aus der Verkipfung sowie dem Abstand zur Balkenmittelebene resultierenden Anteil  $u = f(w')$  ergeben, hat beim Hohlzylinder bedingt durch die Kopplung der Verschiebungskomponenten auch die axiale Verschiebung einen direkten Einfluss auf die Ellipsenform. Theoretisch wäre damit sogar bei einem Hohlzylinder mit verschwindender Wandstärke eine elliptische Oberflächenpunktbahn denkbar. Die sich bei der Wanderwellenausbreitung im Hohlzylinder ergebende elliptische Bahnkurve eines Punktes auf der Zylinder-Mittelebene lässt sich direkt mit Gl. (4.15) bestimmen. Sie gibt das Verhältnis der komplexe Amplituden in axialer und radialer Richtung eines Punktes auf der Zylinder-Mittelebene an. Sowohl der Betrag des Amplitudenverhältnisses  $\Phi$  als auch sein Winkel bestimmen die Form der Ellipse, die der zugehörige Punkt beschreibt.

Mit

$$\Phi_i = \frac{A_i}{C_i} \quad (4.52)$$

und bei Normierung von Gl. (4.51) auf die radiale Amplitude  $C_i$  ergeben sich die radiale und axiale Verschiebung in reeler Schreibweise zu

$$u = \Phi_i^* \cos(\Omega\tau + \delta_i) \quad (4.53)$$

$$w = \cos(\Omega\tau), \quad (4.54)$$

wobei

$$\Phi_i^* = |\Phi_i| \quad \text{und} \quad \delta_i = \arg(\Phi_i) \quad (4.55)$$

gilt. Die aus  $e^{-jk_s i s}$  resultierende Ortsabhängigkeit kann dabei unberücksichtigt bleiben, da sie als identischer Faktor in beiden Gleichungen das Amplitudenverhältnis nicht beeinflusst. **Abb. 4.8** zeigt die Entstehung der Ellipse grafisch zusammen mit den resultierenden Hauptachsen und der Verdrehung der Ellipse gegenüber den Koordinatenachsen.

Die Orientierung, d. h. die Lage der Hauptachsen, der durch Gln. (4.53) und (4.54) beschriebene Ellipse lässt sich mittels der Hauptachsentransformation (siehe STÖCKER [94]) bestimmen. Dafür müssen die Gln. (4.53) und (4.54) zunächst in die allgemeine Form einer Kurve zweiter Ordnung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (4.56)$$

gebracht werden. Anwenden eines Additionstheorems und auflösen nach  $\sin(\Omega\tau)$  liefert

$$\frac{\frac{u}{\Phi_i^*} - \cos(\Omega\tau) \cos(\delta_i)}{-\sin(\delta_i)} = \sin(\Omega\tau). \quad (4.57)$$

Einsetzen von Gl. (4.57) und Gl. (4.54) in die Identität

$$\sin(\Omega\tau)^2 + \cos(\Omega\tau)^2 = 1 \quad (4.58)$$

liefert wiederum

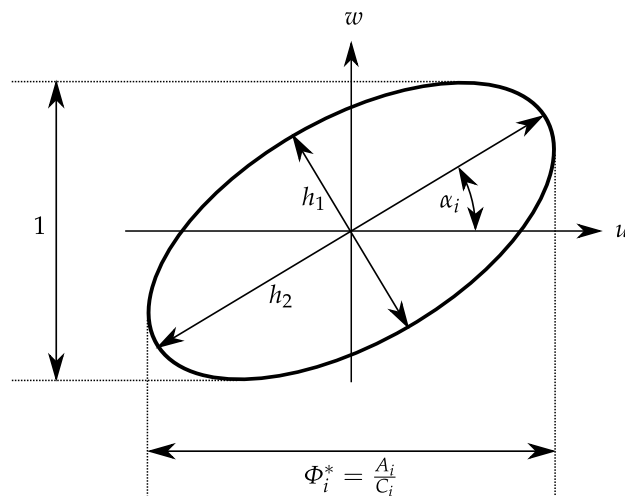
$$\left( \frac{\frac{u}{\Phi_i^*} - \cos(\Omega\tau) \cos(\delta_i)}{-\sin(\delta_i)} \right)^2 + w^2 = \frac{u^2}{\Phi_i^{*2} \sin(\delta_i)^2} - 2 \frac{u}{\Phi_i^*} \frac{w}{\sin(\delta_i) \tan(\delta_i)} + \frac{w^2}{\tan(\delta_i)^2} + w^2 = 1. \quad (4.59)$$

Durch Koeffizientvergleich mit Gl. (4.56) lassen sich

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\Phi_i^{*2} \sin(\delta_i)^2} \\ b &= -\frac{1}{\Phi_i^* \sin(\delta_i) \tan(\delta_i)} \\ c &= 1 + \frac{1}{\tan(\delta_i)^2} \\ d &= 0 \\ e &= 0 \\ f &= -1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

bestimmen. Der Winkel zwischen den Hauptachsen der Ellipse und den Koordinatenachsen ergibt sich damit zu

$$\tan(2\alpha_i) = \frac{2b}{a-c} = \frac{-2}{\Phi_i^* \sin(\delta_i) \tan(\delta_i)} \frac{1}{\frac{1}{\Phi_i^{*2} \sin(\delta_i)^2} - 1 - \frac{1}{\tan(\delta_i)^2}}. \quad (4.61)$$



**Abbildung 4.8:** Entstehung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen durch Überlagerung der komplexen Amplituden

Nach einigen Umformungen ergibt sich der Hauptachsenwinkel

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{2\Phi_i^*}{\Phi_i^{*2} - 1} \cos \delta_i \right). \quad (4.62)$$

Für die drei Fälle  $\Phi_i^* \rightarrow 0$ ,  $\Phi_i^* \rightarrow 1$  und  $\Phi_i^* \rightarrow \infty$  lassen sich die Grenzwerte der Hauptachsenwinkel nach Gl. (4.62) einfach bestimmen. Für  $\Phi_i^* \rightarrow 1$  wächst das Argument des Arcus-Tangens über alle Grenzen und es gilt

$$\alpha_{i\Phi_i^* \rightarrow 1} = \pm \frac{\pi}{4}, \quad (4.63)$$

wobei das Vorzeichen durch die Vorzeichen der Terme  $\Phi_i^{*2} - 1$  und  $\cos(\delta_i)$  bestimmt wird. Für den Fall  $\Phi_i^* \rightarrow 0$  kann im Nenner des von  $\Phi_i^*$  abhängigen Terms  $\Phi_i^{*2}$  gegen 1 vernachlässigt werden und es ergibt sich

$$\alpha_{i\Phi_i^* \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \arctan \left( -2\Phi_i^* \cos \delta_i \right) \quad (4.64)$$

und schließlich, da für kleine Winkel  $\vartheta = \tan(\vartheta)$  gilt,

$$\alpha_{i\Phi_i^* \rightarrow 0} = -\Phi_i^* \cos \delta_i. \quad (4.65)$$

Der Hauptachsenwinkel pendelt also für kleine  $\Phi_i^*$  mit sich veränderndem  $\delta_i$  zwischen  $-\Phi_i^*$  und  $\Phi_i^*$ . Analog zu dem beschriebenen Vorgehen ergibt sich für  $\Phi_i^* \rightarrow \infty$  mit

$$\alpha_{i\Phi_i^* \rightarrow \infty} = \frac{1}{\Phi_i^*} \cos \delta_i \quad (4.66)$$

ein Hauptachsenwinkel zwischen  $\frac{1}{\Phi_i^*}$  und  $-\frac{1}{\Phi_i^*}$ .

**Abb. 4.9** zeigt einen Kontur-Plot des Hauptachsenwinkels  $\alpha_i$  (siehe **Abb. 4.8**) über dem Betrag  $\Phi_i^*$  und dem Argument  $\delta_i$  von  $\Phi$ . Wie sich erkennen lässt, sind für  $\delta_i = \frac{\pi}{2}$  und  $\delta_i = \frac{3}{2}\pi$  die sich ergebenden Ellipsen unabhängig von  $\Phi_i^*$  exakt an den Koordinatenachsen ausgerichtet. Bei  $\Phi_i^* = 1$  ergibt sich abhängig von  $\delta_i$  stets ein Sprung von  $-\frac{\pi}{4}$  auf  $\frac{\pi}{4}$  oder umgekehrt. Dieser Sprung resultiert direkt aus Gl. (4.62), die den Hauptachsenwinkel auf den Bereich zwischen  $-\frac{\pi}{4}$  und  $\frac{\pi}{4}$  limitiert. Daher führt ein Anstieg über die Intervallgrenzen jeweils zu einem Sprung an das andere Ende des Intervalls ohne dass sich dabei jedoch die Ausrichtung der Ellipse sprunghaft ändert.

Anhand der in Form von Gl. (4.56) vorliegenden Ellipsengleichung lassen sich auch die Längen der beiden Hauptachsen bestimmen. Denn erst wenn die Länge bzw. das Verhältnis der Hauptachsen bekannt ist, kann eine Aussage über die Form der Ellipse getroffen werden. Dazu wird die hauptachsentransformierte Form der Ellipsengleichung

$$a'x'^2 + c'y'^2 + \frac{A}{B} = 0 \quad (4.67)$$

verwendet, mit

$$A = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \stackrel{d=e=0}{=} f(ac - b^2) \quad B = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = (ac - b^2) \quad \frac{A}{B} = f = -1 \quad (4.68)$$

und

$$a' = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2} \quad c' = \frac{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + 4b^2}}{2}. \quad (4.69)$$

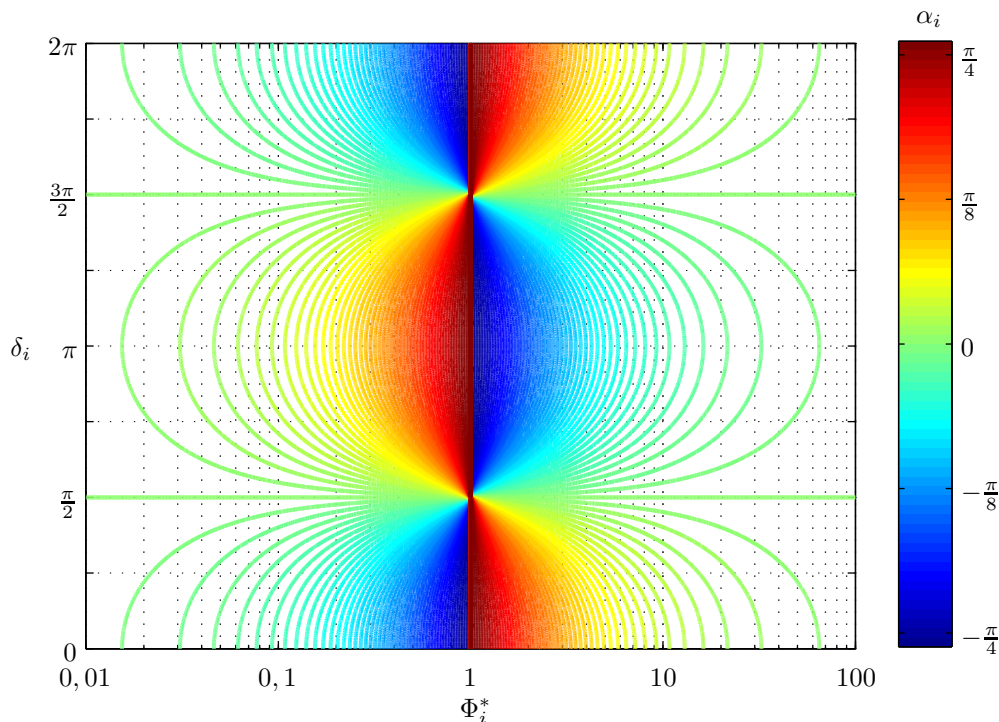
Daraus ergeben sich direkt die Ellipsen-Halbachsen

$$\frac{h_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{a'}} \quad \frac{h_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{c'}} \quad (4.70)$$

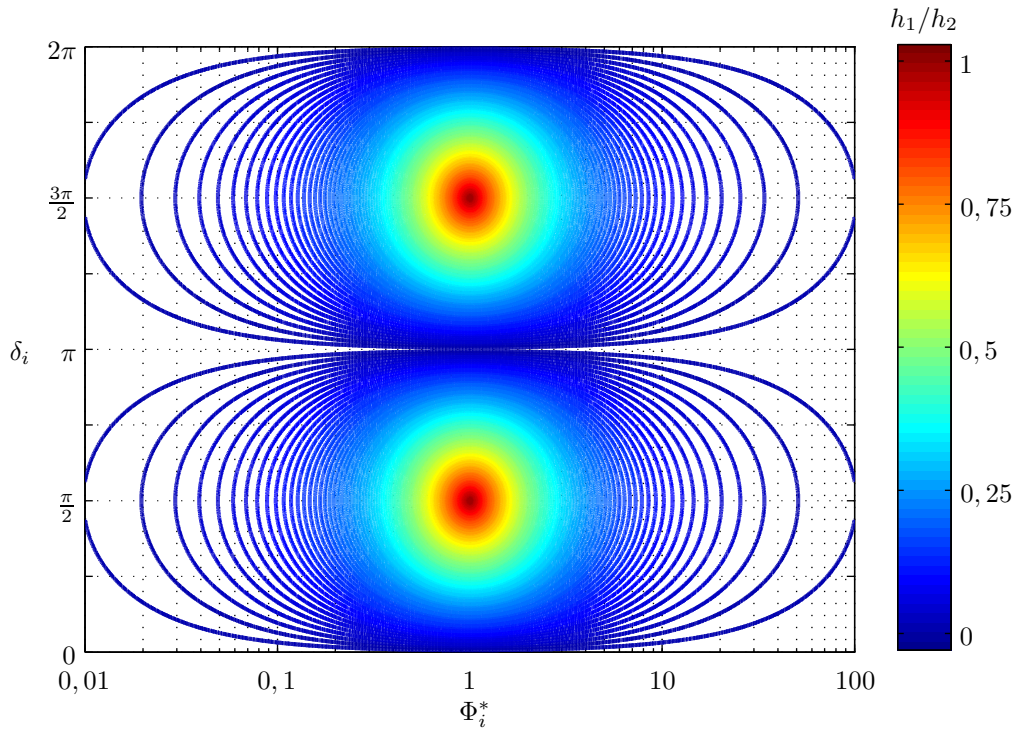
und das Verhältnis der Hauptachsen

$$\frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{c'}{a'}}. \quad (4.71)$$

**Abb. 4.10** zeigt das Verhältnis der Hauptachsen der sich einstellenden elliptischen Oberflächenpunktsbahn (siehe **Abb. 4.8**) nach Gl. (4.71) in Abhängigkeit des Betrages  $\Phi_i^*$  und des Phasenwinkels  $\delta_i$  von  $\Phi_i$  als Kontur-Plot. Für  $\Phi_i^* = 1$  können sich in Abhängigkeit des Phasenwinkels  $\delta$  sowohl eine linienförmige Trajektorie als auch ein perfekter Kreis sowie verschiedenst ausgerichtete Ellipsen ergeben. Für  $\Phi_i^* \gg 1$  ( $A_i \gg C_i$ ) ergibt sich eine in radialer Richtung lang gestreckte Ellipse wohingegen sich für  $\Phi_i^* \ll 1$  eine in axialer Richtung gestreckte Ellipse ergibt.



**Abbildung 4.9:** Hauptachsenwinkel  $\alpha_i$  in Abhängigkeit von Betrag  $\Phi_i^*$  und Phase  $\delta_i$  des Verhältnisses von axialer zu radialer Verschiebung  $\Phi_i$



**Abbildung 4.10:** Hauptachsenverhältnis  $\frac{h_1}{h_2}$  in Abhängigkeit von Betrag  $\Phi_i^*$  und Phase  $\delta_i$  des Verhältnisses von axialer zu radialer Verschiebung  $\Phi_i$

Bei gemeinsamer Betrachtung der beiden **Abb. 4.9** und **4.10** lassen sich folgende Aussagen treffen. Sind die beiden Anteile, wie es bei den Nahfeldanteilen der Fall ist, gleich- oder gegenphasig ( $\Phi_i$  ist reell bzw.  $k_{s,i}$  imaginär), entartet die Ellipse zu einer Linie. Phasenwinkel von  $\pm \frac{\pi}{2}$  ( $\Phi_i$  ist rein imaginär bzw.  $k_{s,i}$  reell), wie sie bei den Wanderwellenanteilen auftreten, führen zu einer Ellipse deren Hauptachsen mit den Koordinaten-Achsen zusammen fallen. Andere Phasenwinkel, wie sie für die Wellenanteile mit komplexem  $k_{s,i}$  auftreten, führen bei der Überlagerung von axialem und radialem Anteil zu einer um den Winkel  $\alpha_i$  gegenüber der Zylinderachse verdrehten Ellipse.

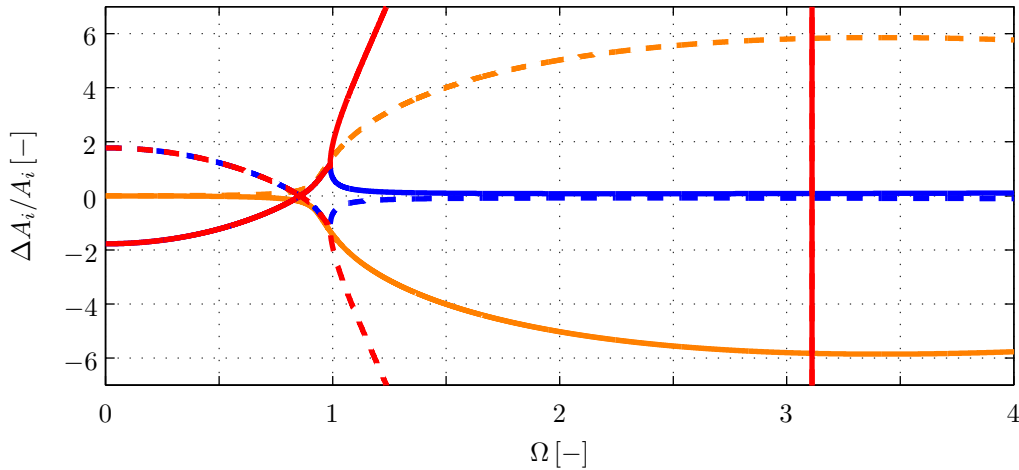
Die beschriebene Überlagerung der Amplituden gilt so allerdings nur für die Punkte auf der Mittelebene des Zylinders. Für alle anderen Punkte ( $z \neq 0$ ) muss zu der axialen Verschiebung noch der aus der Verkippung resultierende Anteil  $\Delta A_i = -\frac{z}{a}w'$  (siehe Gl. (C.1)) addiert werden. Dabei gilt für die Punkte an der Zylinderaußenfläche  $z = +\frac{h}{2}$  und an der Zylinderinnenfläche  $z = -\frac{h}{2}$ . Der Einfluss dieses Anteils lässt sich also mit

$$w' = \frac{dw}{ds} = -jk_{s,i}C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \quad (4.72)$$

als Amplitude

$$\Delta A_i = \pm j \frac{h}{2a} k_{s,i} \frac{1}{\Phi_i} A_i \quad (4.73)$$

für die Zylinderaußen- und Zylinderinnenfläche beschreiben. Die Gesamtamplitude in



**Abbildung 4.11:** Verhältnis der aus der Querschnittsverkippung resultierenden Amplitude  $\Delta A_i$  zur axialen Amplitude  $A_i$  an der Zylinderaußenseite (durchgezogen) und der Zylinderinnenseite (gestrichelt)

axialer Richtung lautet also entsprechend

$$A'_i = A_i + \Delta A_i = A_i \left( 1 + \frac{\Delta A_i}{A_i} \right) = A_i \left( 1 \pm j \frac{h}{2a} k_{s,i} \frac{1}{\Phi_i} \right) \quad (4.74)$$

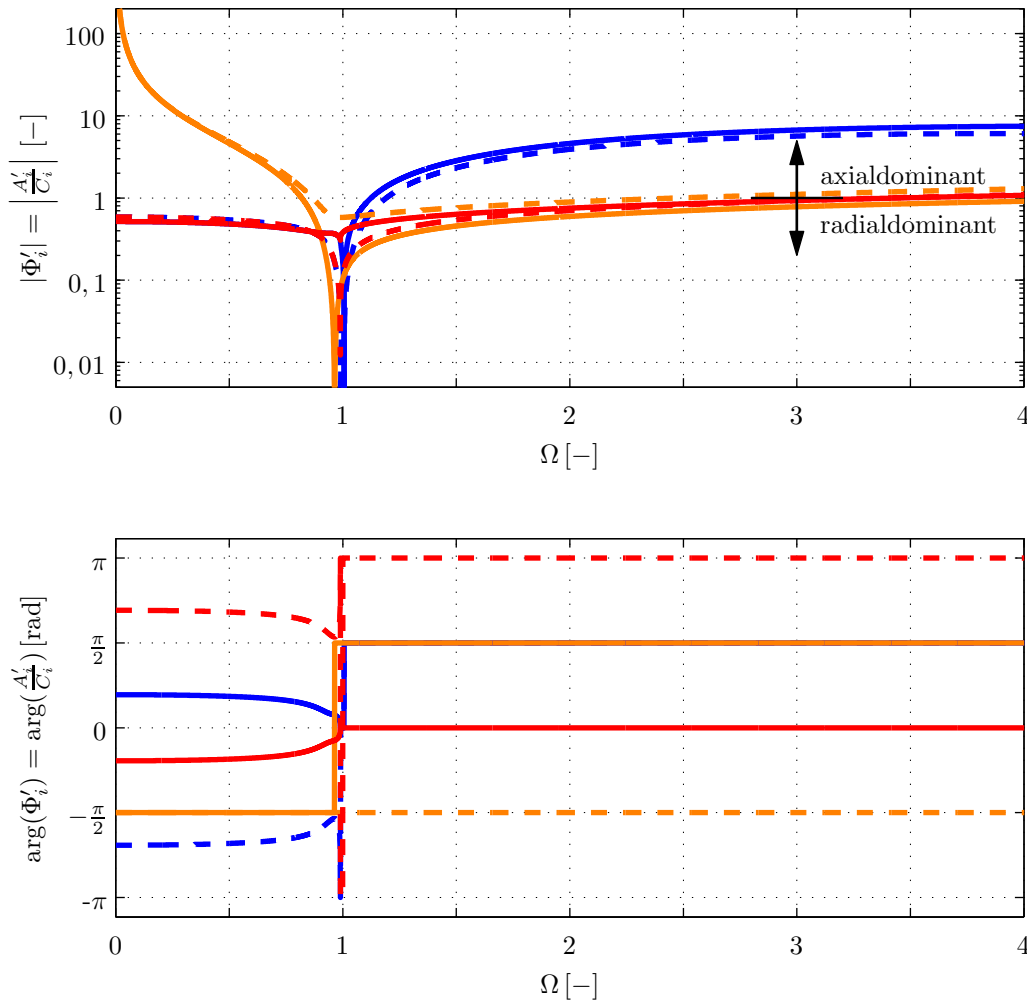
Für die in diesem Kapitel verwendeten Material- und Geometrieparameter ist das Verhältnis  $\frac{\Delta A_i}{A_i}$  grafisch in **Abb. 4.11** dargestellt. Deutlich erkennbar ist der geringe Einfluss des aus der Querschnittsverkippung resultierenden Anteils  $\Delta A_i$  bei den axialdominanten Schwingungen (siehe **Abb. 4.4**), wohingegen er bei den radialdominanten Schwingungen einen deutlich größeren Einfluss hat als die axiale Amplitude  $A_i$ . Besonders bei den oberhalb von  $\Omega_{1,1} = \Omega_{\text{grenz},F}$  auftretenden, in rot dargestellten Nahfeldanteilen sind die aus der Querschnittsverkippung resultierenden Anteile erheblich größer als  $A_i$ . Die bei  $\Omega_{2,1}$  auftretende vertikale, rote Linie lässt sich durch Heranziehen von **Abb. 4.4** erklären. Bei dieser Frequenz hat der Verlauf von  $\Phi_i$  einen Nulldurchgang. Durch die Abhängigkeit des Verhältnisses  $\frac{\Delta A_i}{A_i}$  von  $\Phi_i$  resultiert der mit diesem Nulldurchgang einhergehende Vorzeichenwechsel auch in einem Vorzeichenwechsel des dargestellten Verhältnisses  $\frac{\Delta A_i}{A_i}$ .

Analog zu **Abb. 4.11** ist in **Abb. 4.12** das Verhältnis der resultierenden axialen Amplitude zur radialen Amplitude

$$\Phi' = \frac{A'_i}{C_i} = \frac{A_i + \Delta A_i}{C_i} = (\Phi_i \pm j \frac{h}{2a} k) \quad (4.75)$$

in Form von Amplitude und Phase dargestellt. Für die Wanderwellenanteile ergibt sich ein Phasenwinkel von  $\delta_i = \pm \frac{\pi}{2}$ , so dass die Hauptachsen der Ellipse mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Für die zu den imaginären Wellenzahlen gehörenden Schwingungsformen dagegen verschwindet der Imaginärteil von  $\Phi'$  oberhalb der Grenzfrequenz ( $\delta_i = 0$  bzw.  $\delta_i = \pi$ ), was nach **Abb. 4.10** auf eine linienförmige Oberflächenpunktbahn führt. Da  $\Delta A_i$  nach Gl. (4.73) an der Zylinderaußen- und Zylinderinnenfläche





**Abbildung 4.12:** Verhältnis der effektiven Amplitude  $A'_i$  zur radialen Amplitude  $C_i$  an der Zylinderaußenseite (durchgezogen) und der Zylinderinnenseite (gestrichelt)

verschieden ist, sind auch die resultierenden Verhältnisse von Axial- zu Radialverschiebung und damit auch die sich ausbildenden Ellipsen unterschiedlich.

Eine weitere Eigenschaft der sich ausbildenden elliptischen Bahn der Oberflächenpunkte, die bisher noch nicht betrachtet wurde, ist ihr Umlaufsinn. Er ergibt sich direkt aus dem Vorzeichen des Phasenwinkels von  $\Phi'$ . Ein negatives Vorzeichen ergibt einen Umlaufsinn mit dem Uhrzeigersinn bzw. mathematisch negativ im  $u$ - $w$ -Koordinatensystem (siehe **Abb. 4.1**). Eine solche Ellipse verläuft also an der Zylinderinnenseite so, dass sie zur Förderung entgegen der Wellenausbreitungsrichtung genutzt werden kann. Entsprechend wäre es bei positivem Phasenwinkel von  $\Phi'$  möglich, das Fördergut in Wellenausbreitungsrichtung zu transportieren. Die Nulldurchgänge des Phasenwinkels gehen also mit einem Wechsel des Umlaufsinn einher. Wie sich aus **Abb. 4.10** erkennen lässt sind dies gerade die Werte für die die Ellipse zu einer Linie entartet. Weiter lässt sich aus **Abb. 4.12** ein anderes Phänomen erkennen, dass bei der in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen Modellierung mit einem Balkenelement nicht auftritt. Wie sich anhand von **Abb. 2.6** nach-

vollziehen lässt, haben beim Balkenelement die beiden Ellipsen auf der Balkenober- und Balkenunterseite entgegengesetzte Umlaufrichtungen. Beim Hohlzylinder ist der Umlaufsinn identisch, wenn der Einfluss des aus der Verkippung resultierende Anteils  $\Delta A_i$  klein ist und die Bewegung im Wesentlichen durch  $A_i$  und  $C_i$  bestimmt wird. Erst wenn der Verkippungsanteil an Einfluss gewinnt, bilden sich Ellipsen mit entgegengesetztem Umlaufsinn an der Zylinderinnen- und Zylinderaußenseite.

Da die Amplitudenverhältnisse  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$  frequenzabhängige Eigenschaften eines jeden Wellentypus sind, die sich bei der Ausbreitung der Welle nicht ändern, sind Form und Ausrichtung der sich einstellenden elliptischen Oberflächenpunktbahnen nicht ortsabhängig. Weil aber im Betrieb in der Regel stets mehrere Wellentypen angeregt werden und sich überlagern (siehe Abschnitt 4.1.4), müssen diese auch bei der Bestimmung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen berücksichtigt werden. Da aber alle Wellenanteile mit gleicher Frequenz angeregt werden, beschreibt die Oberflächentrajektorie auch hier eine Ellipse. Bedingt durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der verschiedenen Wellentypen können sich aber teilweise stark ortsabhängige Überlagerungen bzw. Ellipsenformen und -ausrichtungen ergeben.

#### 4.1.6 Einfluss der Dämpfung

Bisher wurde stets das ungedämpfte System mit der Annahme eines halbumendlichen Wellenleiters betrachtet, um die Wellenausbreitung ohne Reflexionen analysieren zu können. Wenn jedoch ein Abgleich zwischen Modell und Experiment erfolgen soll, muss auch im Modell die Dämpfung berücksichtigt werden. Dies kann durch die Einführung eines komplexen Elastizitätsmoduls

$$E = E' + jE'' = E(1 + j\delta_v) \quad (4.76)$$

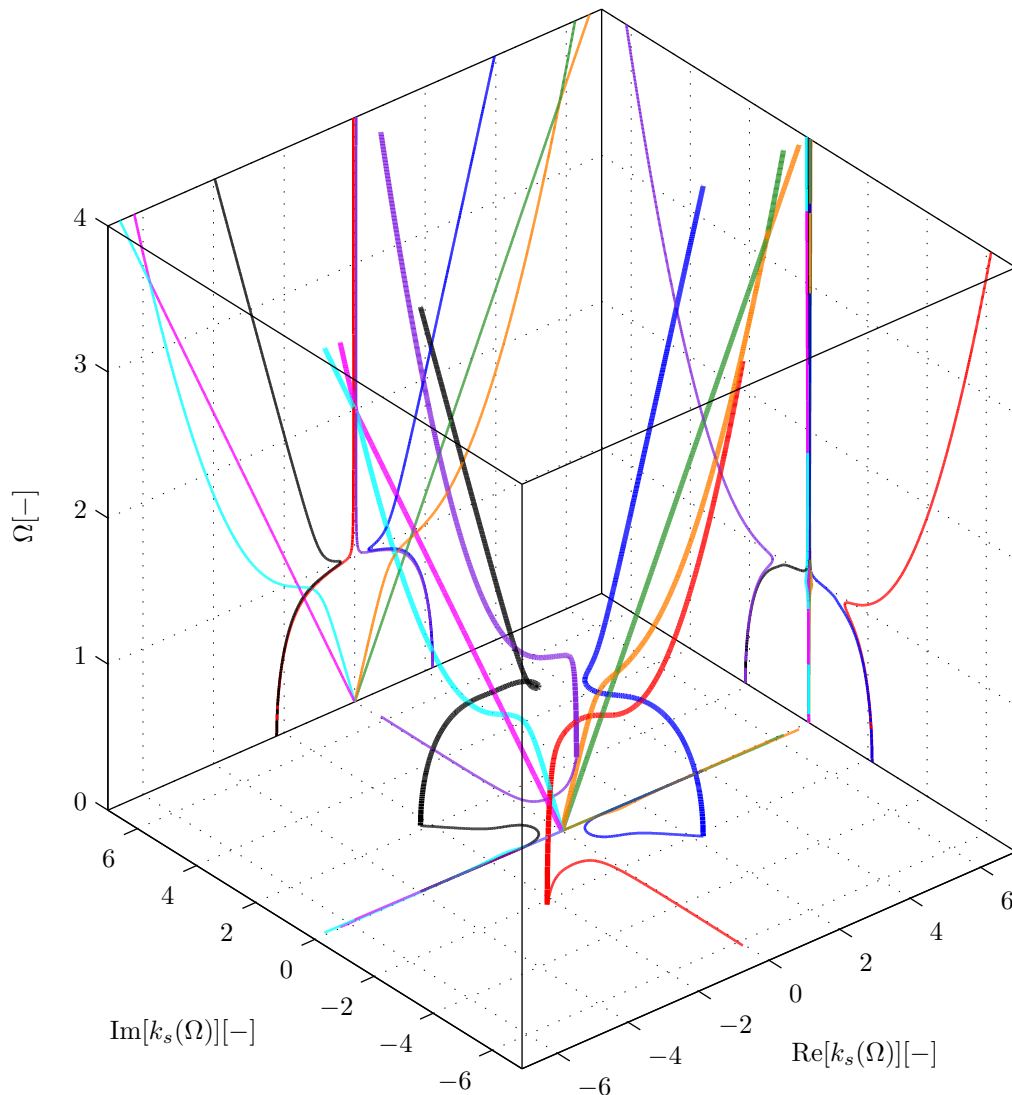
in Gl. (4.1) erreicht werden. Er setzt sich aus dem elastischen Anteil  $E' = E$  sowie dem viskosen Anteil  $E'' = \delta_v E$  zusammen, der die Dämpfung des Materials repräsentiert.

Zur Lösungssynthese kann nun wie im ungedämpften Fall vorgegangen werden. Die Lösung von Gl. (4.4) liefert erneut bei vorgegebener Frequenz die zugehörigen Wellenzahlen, wobei aber die zuvor paarweise reellen Wellenzahlen durch die nun vorhandene Dämpfung zu einem zum Ursprung symmetrischen komplexen Wellenzahlpaar werden und die in Vier-Quadranten-Symmetrie auftretenden Wellenzahlen in zwei Paare zum Ursprung symmetrischer Wellenzahlen zerfallen. Die Symmetrie zu den Ebenen  $\text{Re}\{k_s\} = 0$  und  $\text{Im}\{k_s\} = 0$  wird damit zu einer Symmetrie bezüglich der Frequenzachse ( $\text{Re}\{k_s\} = \text{Im}\{k_s\} = 0$ ). Ein zugehöriges dreidimensionales Dispersionsdiagramm, das sich mit den zuvor verwendeten Parametern und  $\delta_v = 0,025$  ergibt, ist in **Abb. 4.13** dargestellt. Die Kurven haben nun im Gegensatz zu **Abb. 4.2** einen abgerundeteren Verlauf. Die im ungedämpften Fall auftretenden markanten Punkte, an denen sich die Kurven treffen und sprunghaft ihre Richtung ändern, existieren in dieser Form nicht.

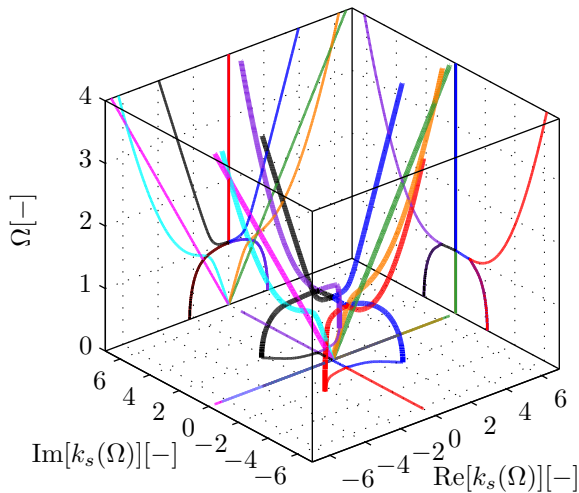
Die Ausführungen aus den Abschnitten 4.1.1 bis 4.1.5 lassen sich entsprechend auf das gedämpfte System übertragen. Ohne an dieser Stelle all diese Betrachtungen erneut durchzuführen soll in den Kapiteln 5 und 6 ein gedämpftes System verwendet werden, wenn es darum geht, die Modelle anhand von experimentell gewonnenen Daten zu validieren.

### 4.1.7 Lösungen höherer Ordnung

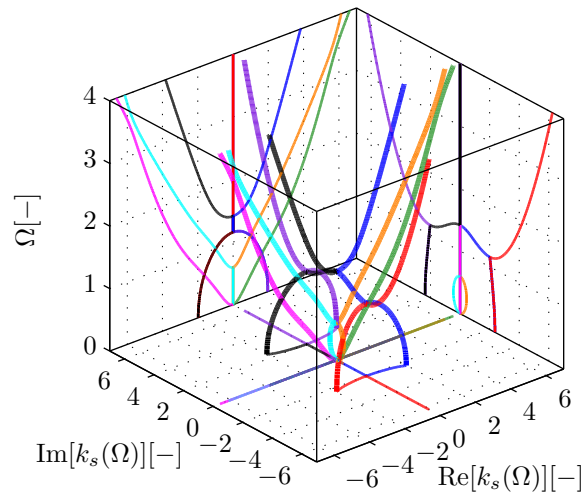
Neben den bisher ausschließlich betrachteten rotationssymmetrischen Schwingungen ( $n = 0$ ) existiert noch eine Vielzahl weiterer möglicher Lösungen ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) für Gl. (4.1). Während für ( $n = 0$ ) alle Punkte eines Querschnittes ( $s = s_0$ ) identische Verschiebungen erfahren, ist dies für  $n \geq 1$  nicht mehr der Fall, da die Verschiebungen nun von der Koordinate  $\varphi$  abhängig sind (siehe **Abb. 2.21**).



**Abbildung 4.13:** Dispersionsdiagramm mit Dämpfung bei Verwendung der FLÜGGE-Theorie für axialsymmetrische Schwingungen ( $n=0$ )

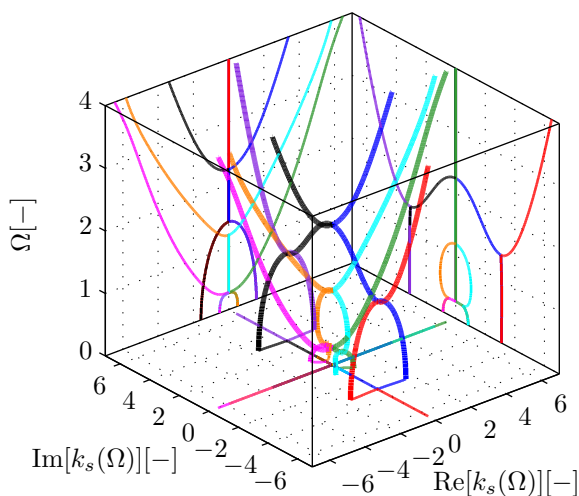


**Abbildung 4.14:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung ( $n=0$ )

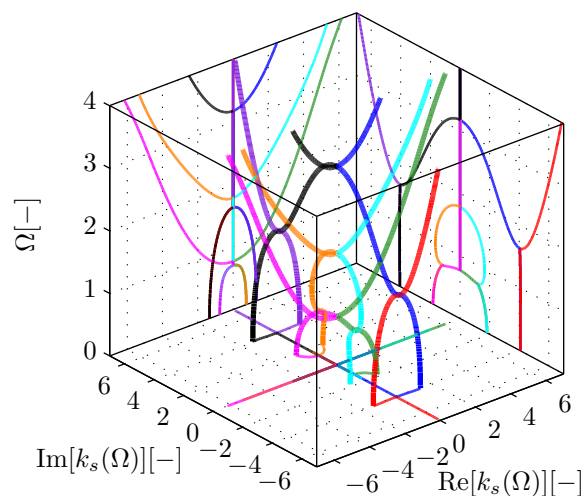


**Abbildung 4.15:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung ( $n=1$ )

Auch für diese Wellen höherer Ordnungen lässt sich eine biquadratische Gleichung vierter Ordnung analog zu Gl. (4.4) angeben und daraus nach Vorgabe der Frequenz die zugehörigen Wellenzahlen berechnen. Die sich ergebenden Dispersionsdiagramme sind in den **Abb. 4.15 bis 4.17** für ( $n = 1, 2, 3$ ) dem bereits bekannten Dispersionsdiagramm für  $n = 0$  (siehe auch **Abb. 4.14**) gegenübergestellt. Auf den ersten Blick ist eine große Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Darstellungen zu erkennen. Allerdings gibt es ein paar auffällige Unterschiede. Für  $n > 0$  gibt es keine Kurvenäste, die wie die beiden Torsionsäste bei  $n = 0$  linear ansteigen und nicht mit den anderen Ästen gekoppelt sind. Die Unterschiede der einzelnen Diagramme werden am deutlichsten, wenn man die Projektionen auf die Koordinatenebenen genau betrachtet. Die wesentlichen Unterschiede bilden dabei die relativen Lagen der Verzweigungspunkte zueinander, während sich der generelle Verlauf für  $n = 1, 2, 3$  kaum unterscheidet.



**Abbildung 4.16:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung ( $n=2$ )



**Abbildung 4.17:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung ( $n=3$ )

Da sich bei der Anregung mit dem verwendeten piezoelektrischen Ringwandler und

Ausnutzung der Eigenschwingungsform nach **Abb. 2.23 d)** nur rotationssymmetrische Wellen anregen lassen, soll eine detailliertere Betrachtung der Wellen höherer Ordnung an dieser Stelle nicht erfolgen. Alle wesentlichen Erkenntnisse dieses Kapitels lassen sich aber ohne größere Schwierigkeiten auch auf die Wellen höherer Ordnung übertragen.

## 4.2 Dickwandige Schalen nach MIRSKY-HERRMANN

Aus der Vielzahl von Schalentheorien für dickwandige Schalen (siehe Abschnitt 2.3.2) wird in diesem Abschnitt die Schalentheorie nach MIRSKY UND HERRMANN [65] näher betrachtet. Da die Autoren ihre Theorie mit der von ihnen getroffenen Annahme radial-symmetrischer Verschiebungen mit ausschließlich radialen und axialen Verschiebungen herleiten, kann sie ohne Weiteres auf die hier vorliegende Problemstellung angewandt werden. Tangentiale Verschiebungen treten ebenso wie Veränderungen der Verschiebungen über der Winkelkoordinate  $\varphi$  in dieser Theorie nicht auf ( $v = 0, \frac{d}{d\varphi} = 0$ ).

### 4.2.1 Lösung der Bewegungsgleichung für sich ausbreitende Wellen

Analog zum in Abschnitt 4.1 beschriebenen Vorgehen, kann auch in Gl. (2.74) ein Exponentialansatz der Form von Gl. (4.2)

$$\begin{aligned} u(s, \Omega, \tau) &= Ae^{j(\Omega\tau - k_s s)} \\ w(s, \Omega, \tau) &= Ce^{j(\Omega\tau - k_s s)} \\ \Psi_x(s, \Omega, \tau) &= De^{j(\Omega\tau - k_s s)} \\ \Psi_z(s, \Omega, \tau) &= Fe^{j(\Omega\tau - k_s s)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

für die Verschiebungskomponenten verwendet werden. Nach Durchführung aller Differentiationen und einigen Umformungen ergibt sich in Matrixschreibweise die folgende Darstellung der Bewegungsgleichungen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}}_{M_{\text{Mirsky-Herrmann}}} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

mit den zehn Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_{11} &= -k_s^2 + \Omega_{MH}^2 \\
a_{12} &= \frac{jk_s \nu}{-1 + \nu} \\
a_{13} &= -k_s^2 aK + aK\Omega_{MH}^2 \\
a_{14} &= \frac{jak_s \nu}{-1 + \nu} \\
a_{22} &= -k_s^2 \kappa^2 \frac{1 - 2\nu}{2(-1 + \nu)} + \frac{a\alpha}{h} - \Omega_{MH}^2 \\
a_{23} &= -jak_s \kappa^2 \frac{1 - 2\nu}{2(-1 + \nu)} \\
a_{24} &= -aKk_s^2 \kappa^2 \frac{1 - 2\nu}{2(-1 + \nu)} + \frac{a\beta}{h} + \frac{\nu a}{1 - \nu} - aK\Omega_{MH}^2 \\
a_{33} &= -a^2 Kk_s^2 - a^2 \kappa^2 \frac{(-1 + 2\nu)}{2(-1 + \nu)} + a^2 K\Omega_{MH}^2 \\
a_{34} &= -ja^2 Kk_s \left( \frac{2\nu}{1 - \nu} - \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \kappa^2 \right) \\
a_{44} &= \frac{a\eta}{h} + a^2 Kk_s^2 \kappa^2 \frac{-1 + 2\nu}{2(-1 + \nu)} + a^2 - a^2 K\Omega_{MH}^2.
\end{aligned}$$

Vergleicht man Gl. (4.78) mit ihrem Pendant der FLÜGGE-Theorie Gl. (4.3) bzw. die für  $n = 0$  vereinfachten Gln. (4.5) oder (4.8), erkennt man leicht den Nutzen der FLÜGGE-Theorie für die Betrachtungen aus Abschnitt 4.1. Diese sind aufgrund der deutlich höheren Komplexität von Gl. (4.78) hier in solcher Form nicht durchführbar.

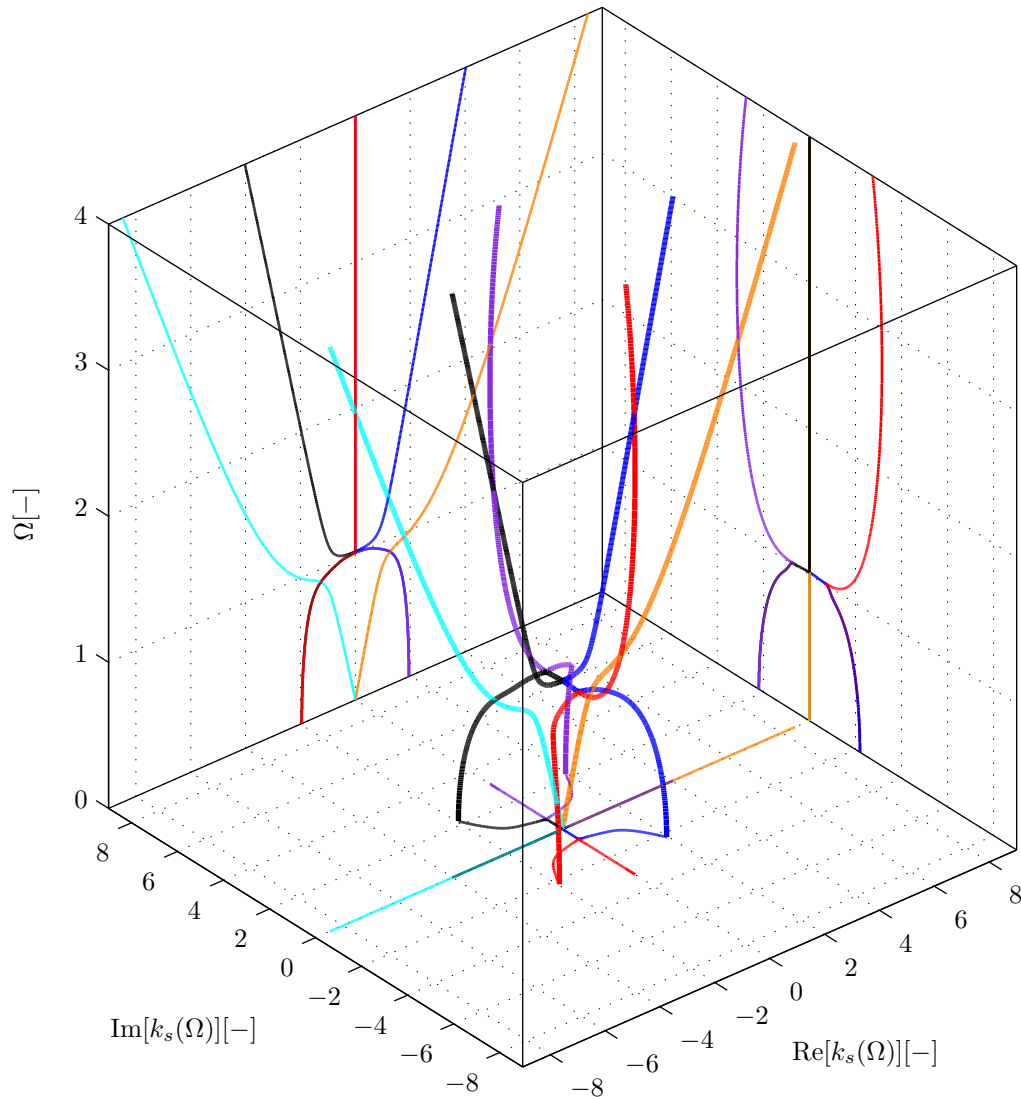
Die nicht trivialen Lösungen der Bewegungsgleichung werden durch Nullsetzen der Determinante von  $M_{\text{Mirsky-Herrmann}}$  ermittelt

$$\det[M_{\text{Mirsky-Herrmann}}] = 0. \quad (4.79)$$

Das Auflösen der Determinante liefert dabei wie schon zuvor bei der FLÜGGE-Theorie eine biquadratische Gleichung achten Grades in  $k_s$ . Die Überlegungen zur Lage der Lösungen in der komplexen Ebene aus Abschnitt 4.1.3 gelten demnach hier entsprechend. Die Darstellung der numerischen Lösung von Gl. (4.79) ist in **Abb. 4.18** für den ungedämpften Fall dargestellt. Zu erkennen sind lediglich sechs der acht Lösungsäste. Zwei weitere Äste verlaufen im dargestellten Frequenzbereich bei  $\pm 20j$  nahezu parallel zur Frequenzachse und sind der Übersichtlichkeit halber nicht dargestellt. Die von diesen beiden Ästen beschriebene Schwingungsform ist jeweils ein sehr schnell zu- bzw. abnehmendes Nahfeld, dessen Einfluss nur in unmittelbarer Nähe des Zylinderendes erkennbar ist.

Im Vergleich der **Abb. 4.2** und **4.18** ist die Ähnlichkeit der beiden Darstellungen, speziell im unteren Frequenzbereich ( $\Omega < 1$ ) sofort erkennbar. In der zur MIRSKY-HERRMANN-Theorie gehörigen Abbildung fehlen allerdings, aufgrund der bei der Herleitung getroffenen Annahme ( $\nu = 0$ ), die beiden zur Torsionsbewegung gehörigen Äste (magentafar-

bene und grüne Kurve). Ein weiterer Unterschied liegt im Verlauf der beiden in rot und lila dargestellten Kurven, die sich bei der Betrachtung nach MIRSKY UND HERRMANN für steigende Frequenzen wieder annähern und sich oberhalb des dargestellten Frequenzbereichs wieder treffen um dann in zwei rein reelle Äste überzugehen.



**Abbildung 4.18:** Dispersionsdiagramm ohne Dämpfung bei Verwendung der MIRSKY-HERRMANN-Theorie für axialsymmetrische Schwingungen

Auch bei der Verwendung des Ansatzes nach MIRSKY-HERRMANN ergeben sich charakteristische Frequenzen, bei denen Wellen mit unendlicher Wellenlänge bzw. verschwindender Wellenzahl existieren. Die zugehörigen Frequenzen lassen sich aus dem Dispersionsdiagramm erkennen. Neben  $\Omega = 0$  ist die Existenz der genannten Wellen auch bei  $\Omega \approx 1$  möglich, wenn die beiden zuvor komplexwertigen Kurvenäste (blau und schwarz) rein reell werden und somit sich ausbreitende Wanderwellen beschreiben. Wird  $k_s = 0$  in Gl. (4.78) mit den entsprechenden Koeffizienten eingesetzt, nimmt die Gleichung folgen-

de Form an

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{13} & 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & a_{24} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}}_{M_{\text{Mirsky-Herrmann}, k_s=0}} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Es sind also jeweils die radialen Verschiebungskomponenten ( $u$  und  $\Psi_x$ ) von den axialen Verschiebungskomponenten ( $w$  und  $\Psi_z$ ) entkoppelt. Die zugehörigen Grenzfrequenzen lassen sich zwar aus Gl. (4.78) analytisch bestimmen, das Ergebnis ist aber im Gegensatz zu dem aus dem Ansatz nach FLÜGGE so lang und komplex, dass es keine weiteren Folgerungen zulässt und darum hier auch nicht angegeben werden soll. Die Grenzfrequenzen werden, sofern diese im Rahmen der Arbeit benötigt werden, numerisch bestimmt.

Analog zu den Betrachtungen aus Abschnitt 4.1.2 lassen sich aus der nicht-trivialen Lösung von Gl. (4.78) die zu den einzelnen Dispersionskurven gehörigen Verschiebungsfelder mit ihren axialen und radialen Anteilen bestimmen. Die nicht triviale Lösung kann entweder aus dem Nullraum<sup>6</sup> oder mittels Eigenwertanalyse von  $M_{\text{Mirsky-Herrmann}}$  aus dem zum Eigenwert Null gehörigen Eigenvektor ermittelt werden. Der Eigenvektor beschreibt in Abhängigkeit der Frequenz für jeden Ast  $i$  des Dispersionsdiagramms das Verhältnis der Amplituden  $A_i, C_i, D_i$  und  $F_i$  untereinander. Das Verhältnis der axialen Amplitude  $A_i$  zur radialen Amplitude  $C_i$  für die Zylindermittelsebene ist in **Abb. 4.19** dargestellt. Neben zahlreichen Ähnlichkeiten zu **Abb. 4.4** sind auch einige Unterschiede wie der Verlauf der orangen und blauen Kurve für hohe Frequenzen sowie die Position der Nullstelle der roten Kurve erkennbar.

Bei der Darstellung der Wellenlängen in **Abb. 4.20** fallen die Unterschiede zu **Abb. 4.5** deutlich kleiner aus und sind auf den ersten Blick kaum auszumachen.

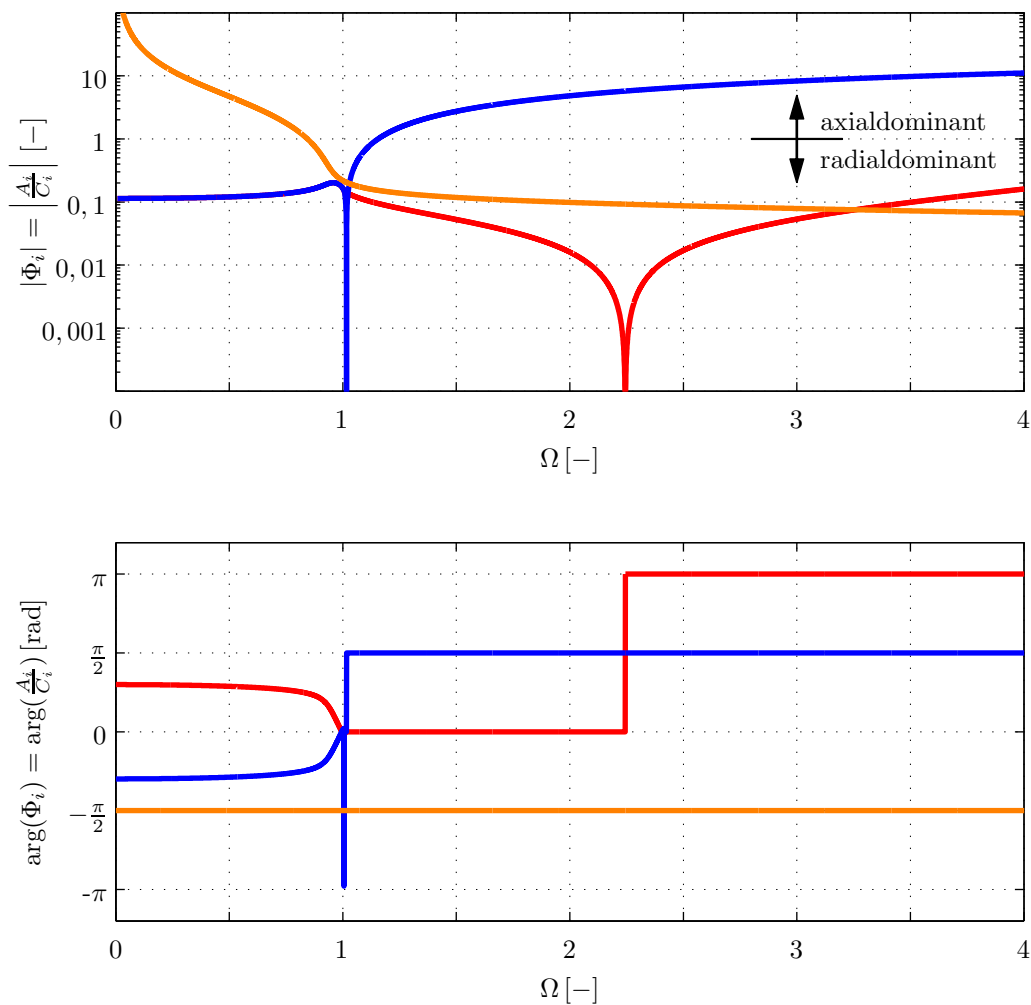
## 4.2.2 Schwingungsformen

Analog zu den Ausführungen von Abschnitt 4.1.4 lassen sich die Schwingungsformen nach der Theorie von MIRSKY UND HERRMANN durch anpassen des Ansatzes

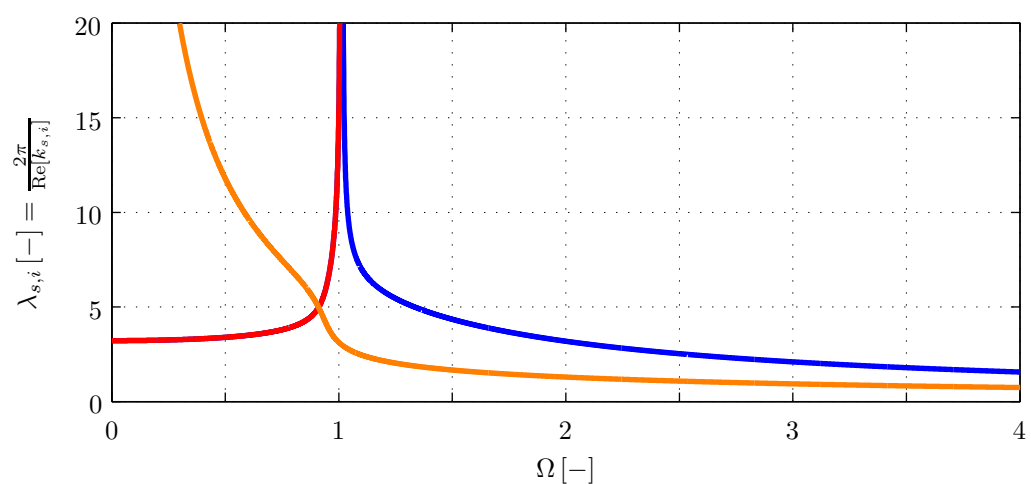
$$\begin{aligned} u(s, \Omega, \tau) &= \sum_i A_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ w(s, \Omega, \tau) &= \sum_i C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ \Psi_x(s, \Omega, \tau) &= \sum_i D_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ \Psi_z(s, \Omega, \tau) &= \sum_i F_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

<sup>6</sup>z. B. mit der Matlab<sup>®</sup>-Funktion null()





**Abbildung 4.19:** Verhältnis der axialen zur radialen Verschiebung für die verschiedenen Äste aus **Abb. 4.18**



**Abbildung 4.20:** Aus dem Realteil von  $k_s$  berechnete, normierte Wellenlänge in Abhängigkeit der Frequenz

an die vorgegebenen Randbedingungen (siehe **Tabelle 4.1**) ermitteln.

An dieser Stelle ist dabei allerdings zu beachten, dass die vom Piezoelement aufgeprägte Verschiebung in radialer Richtung nicht wie bei der FLÜGGE-Theorie allein durch  $w$  beschrieben wird. Durch die Berücksichtigung der Dehnung in radialer Richtung entspricht die Auslenkung des Piezos der Summe aus radialer Verschiebung  $w$  und einem aus der radialen Dehnung resultierenden Anteil an der Zylinderaußenseite  $\frac{h}{2}\Psi_z$

$$w_{\text{Piezo}} = w(z = \frac{h}{2}) = w(s_{\text{Piezo}}) + \frac{h}{2}\Psi_z(s_{\text{Piezo}}). \quad (4.82)$$

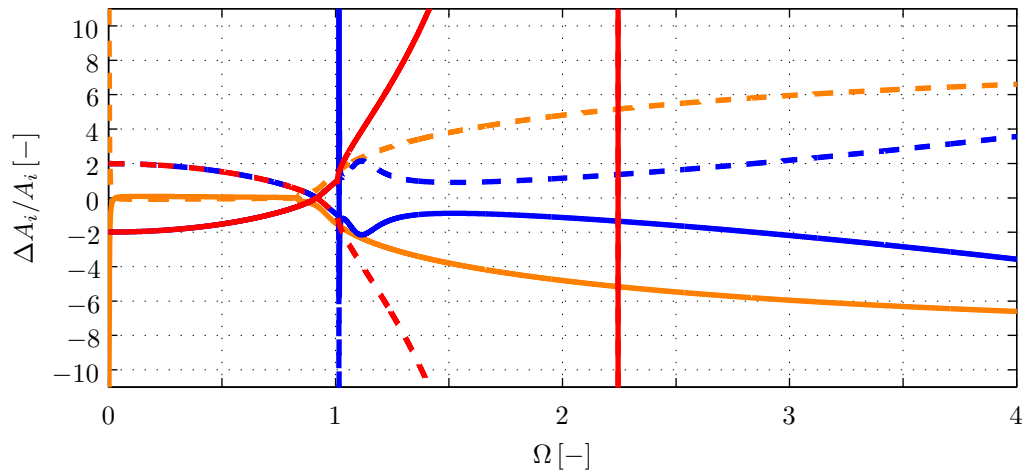
### 4.2.3 Synthese der elliptischen Oberflächenpunktbahnen

Um die Form der elliptischen Oberflächenpunktbahnen zu bestimmen müssen die Gesamtverschiebungen in radialer und axialer Richtung (siehe Gln. (2.66) und (2.67)) im Verhältnis zueinander betrachtet werden. Die Überlegungen aus Abschnitt 4.1.5 gelten hier ganz analog. Das Verhältnis der Beträge sowie dessen Phasenwinkel bestimmen Form und Umlaufsinn der Ellipse. Die Verschiebung der Oberflächenpunkte resultiert sowohl für die axiale als auch für die radiale Richtung aus der Verschiebung der Zylindermittlebene und dem aus der Scherung bzw. Dehnung resultierenden Anteil

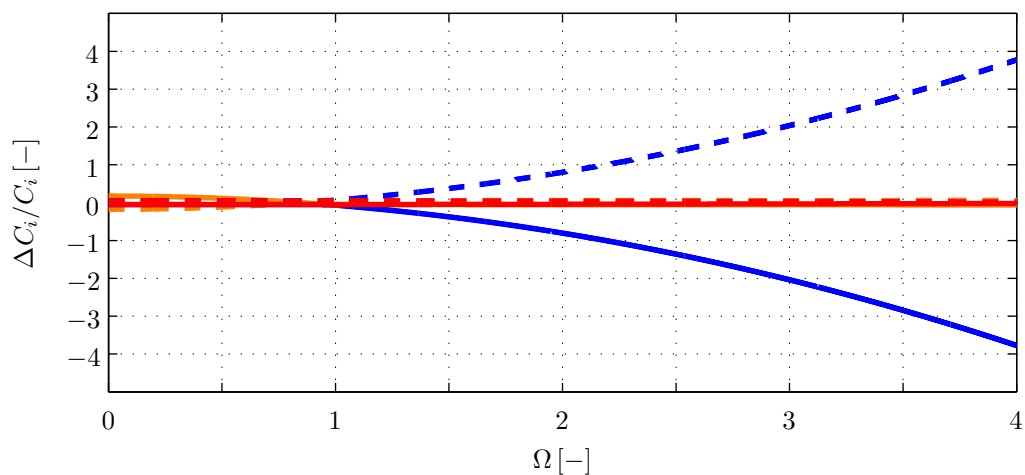
$$u(s, \pm \frac{h}{2}) = \underbrace{u(s)}_{A_i} \pm \underbrace{\frac{h}{2}\Psi_x(s)}_{\Delta A_i} \quad (4.83)$$

$$w(s, \pm \frac{h}{2}) = \underbrace{w(s)}_{C_i} \pm \underbrace{\frac{h}{2}\Psi_z(s)}_{\Delta C_i}. \quad (4.84)$$

**Abb. 4.21** und **4.22** zeigen das Verhältnis des aus der Scherung respektive Dehnung resultierenden Anteils zu den Verschiebungen der Zylindermittelfläche. **Abb. 4.23** zeigt das für die Ellipsenform maßgebliche Verhältnis der axialen Gesamtamplitude ( $A'_i = A_i + \Delta A_i$ ) zur radialen Gesamtamplitude ( $C'_i = C_i + \Delta C_i$ ) jeweils für die Innen- und Außenseite des Hohlzylinders.



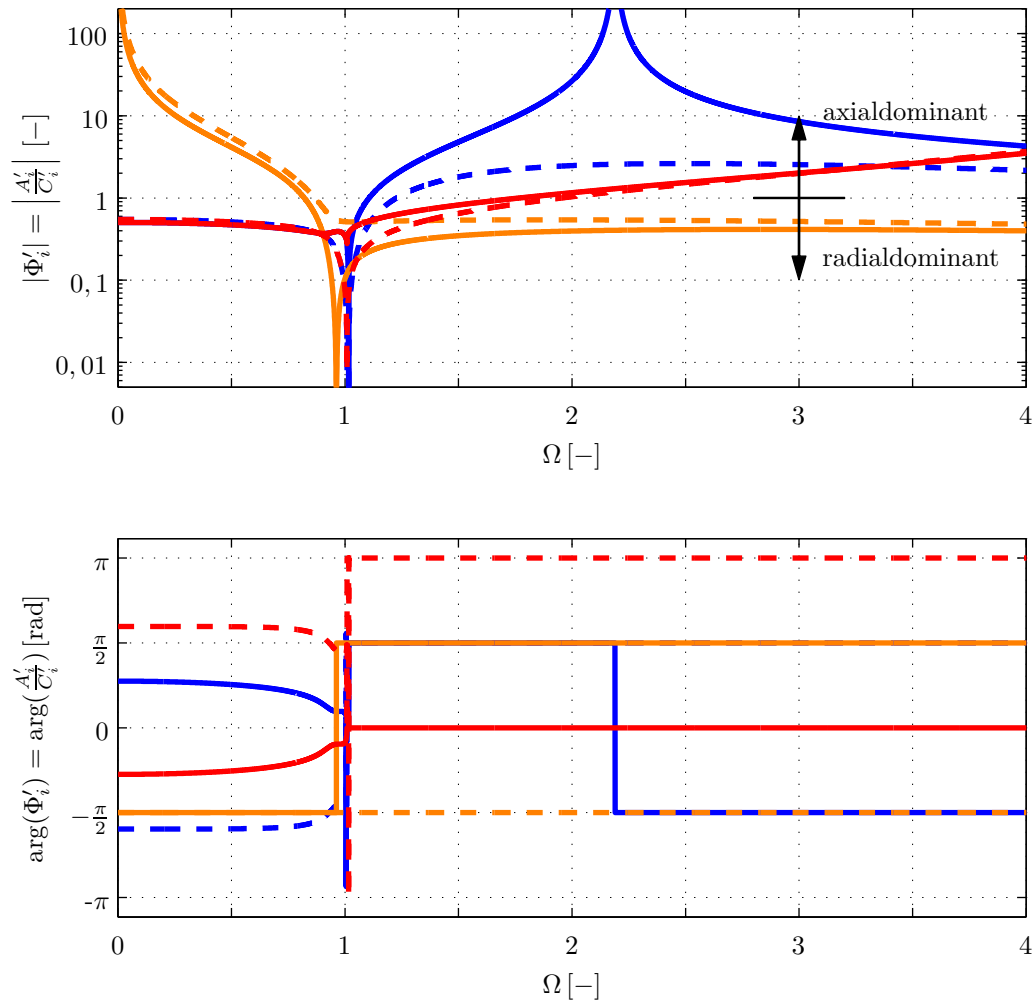
**Abbildung 4.21:** Verhältnis der aus der Querschnittsverkippung resultierenden Amplitude  $\Delta A_i$  zur axialen Amplitude  $A_i$  an der Zylinderaußenseite (durchgezogen) und der Zylinderinnenseite (gestrichelt)



**Abbildung 4.22:** Verhältnis des aus der radialen Dehnung resultierenden Amplitude  $\Delta C_i$  zur radialen Amplitude  $C_i$  an der Zylinderaußenseite (durchgezogen) und der Zylinderinnenseite (gestrichelt)

#### 4.2.4 Einfluss der Dämpfung

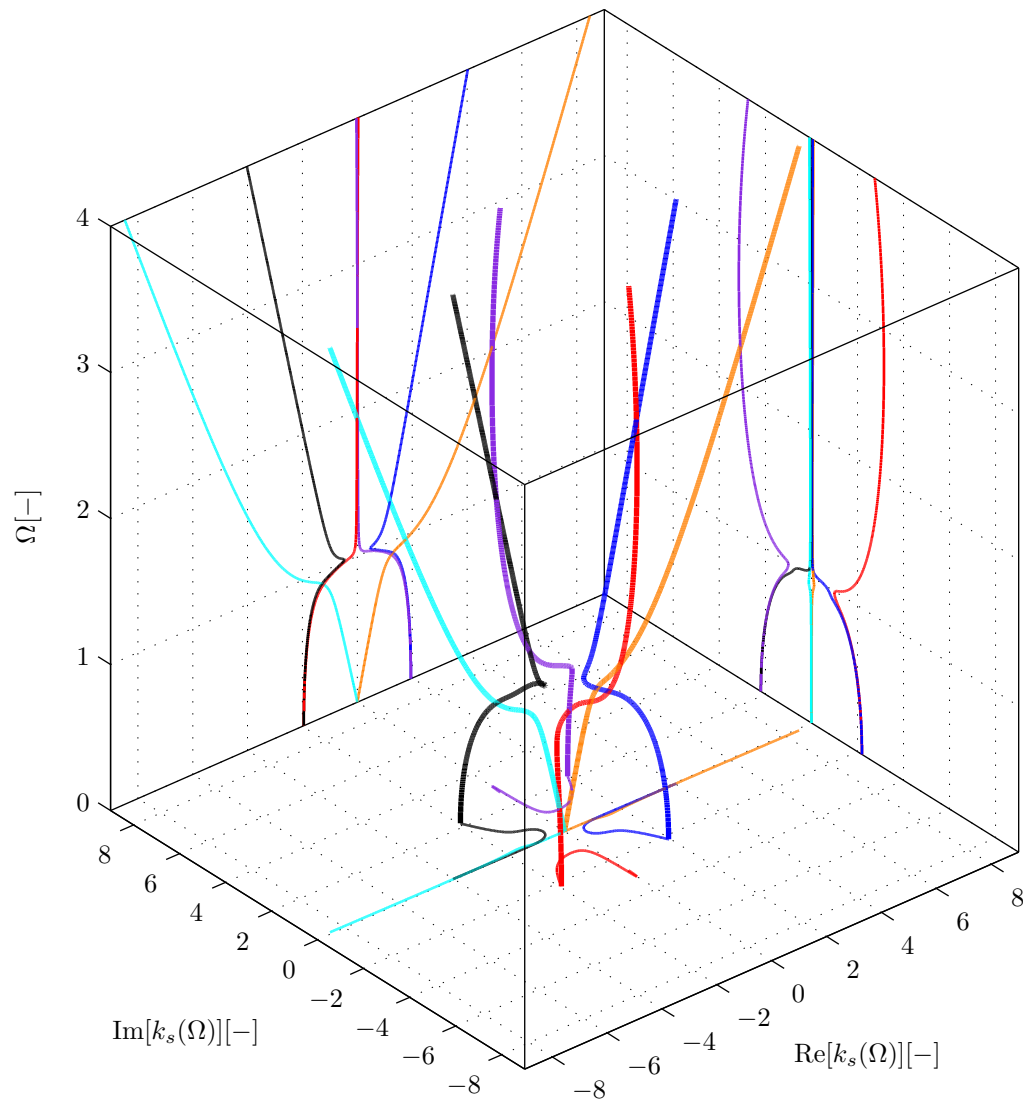
Auch für die Theorie nach MIRSKY-HERRMANN lässt sich die Dämpfung des Systems über einen komplexen Elastizitätsmodul abbilden. Das sich dabei ergebende Dispersionsdiagramm ist in **Abb. 4.24** grafisch dargestellt. Auch hier ist im Vergleich zum ungedämpften Fall erkennbar, dass die markanten Punkt an denen sich jeweils zwei Kurven treffen und dann wieder auseinander laufen, nicht mehr existieren.



**Abbildung 4.23:** Verhältnis der effektiven Amplitude  $A'_i$  zur radialen Amplitude  $C'_i$  an der Zylinderaußenseite (durchgezogen) und der Zylinderinnenseite (gestrichelt)

### 4.2.5 Lösungen höherer Ordnung

Lösungen höherer Ordnung ( $n > 0$ ) können mit der vorliegenden Theorie nicht abgebildet und analysiert werden, da diese aufgrund der getroffenen Annahmen bei der Herleitung auf axialsymmetrische Verformungen beschränkt sind. Da in der vorliegenden Arbeit aber stets von einer radialsymmetrischen Anregung ausgegangen wird, ist der beschriebene Ansatz hier ausreichend. Sollen nicht axialsymmetrische Verformungen untersucht werden, muss auf andere Schalentheorien (siehe Abschnitt 2.3.2) zurückgegriffen werden.



**Abbildung 4.24:** Dispersionsdiagramm mit Dämpfung bei Verwendung der MIRSKY-HERRMANN-Theorie für axialsymmetrische Schwingungen

### 4.3 Zusammenfassung

Aus den Bewegungsgleichungen für die Schwingungen von Hohlzylindern lassen sich unter Verwendung eines Exponentialansatzes die Dispersionskurven als grafische Darstellung der komplexen Wellenzahl über der Frequenz bestimmen. Dabei ist das grundsätzliche Vorgehen unabhängig von der zugrundeliegenden Schalentheorie. Je nachdem welche Annahmen bei deren Herleitung getroffen wurden und welche Verschiebungsanteile evtl. nicht berücksichtigt wurden, ergeben sich jedoch leicht unterschiedliche Ergebnisse, primär resultierend aus der unterschiedlichen Berücksichtigung von Termen höherer Ordnung oder Lösungsanteilen, die sich mit anderen Ansätzen nicht abbilden lassen.

Sowohl mit dem Ansatz nach FLÜGGE als auch mit dem nach MIRSKY-HERRMANN lassen sich verschiedene Wellentypen identifizieren, deren Existenz jedoch teilweise auf be-

stimmte Frequenzbereiche beschränkt ist. Neben den für den Wanderwellentransport entscheidenden reinen Wanderwellen existieren Nahfeldanteile mit vom Ende des Wellenleiters exponentiell abklingender Amplitude und gemischte Anteile, die resultierend aus den zugehörigen komplexwertigen Wellenzahlen exponentielles Abklingen und ausbreitungsfähige Wanderwellen in sich vereinen. Anhand des auf der Theorie nach FLÜGGE basierenden Ansatzes lassen sich die bei der Anregung und Ausbreitung dieser unterschiedlichen Wellenanteile auftretenden Phänomene gut untersuchen.

Die grafische Darstellung der komplexen Wellenzahlen in den Dispersionsdiagrammen (siehe z. B. **Abb. 4.2** und **Abb. 4.13**) gibt einen guten Überblick über die verschiedenen in Abhängigkeit der Frequenz möglichen Wellentypen. Der Realteil der Wellenzahl beschreibt die Phasenausbreitungsrichtung der Wellen, wobei ein positives Vorzeichen eine Ausbreitung in positiver  $s$ - bzw.  $x$ -Richtung beschreibt. Ist die Wellenzahl rein reell handelt es sich bei dem Wellenanteil um eine ungedämpfte Wanderwelle, deren Ausbreitungsrichtung durch das Vorzeichen bestimmt wird. Das Vorzeichen des Imaginärteils gibt Aufschluss über die Auf- bzw. Abnahme der Amplituden. Bei positivem Vorzeichen steigen die Amplituden mit zunehmendem  $s$  bei negativem Vorzeichen klingen die Amplituden ab. Rein imaginäre Wellenzahlen repräsentieren nicht ausbreitungsfähige, exponentiell abklingende Nahfeldanteile.

Mittels Betrachtungen zum Energietransport wurden die zu den komplexwertigen, paarweise auftretenden Wellenzahlen gehörenden Wellen näher analysiert. So konnten schließlich die Wellenanteile bestimmt werden, die bei der radialsymmetrischen Anregung eines halbumendlichen Hohlzylinders an einem Ende angeregt werden und für die Synthese der Schwingungsform berücksichtigt werden müssen.

Für die unterschiedlichen Wellenanteilen konnten aus dem frequenzabhängigen Amplitudenverhältnis  $\Phi$  der axialen und radialen Verschiebungen die Trajektorien der Oberflächenpunkte ermittelt werden. Ihre Analyse zeigte eine starke Frequenzabhängigkeit und je nach Wellentypus sehr unterschiedliche oder nahezu identische Bahnkurven an der Innen- und Außenseite des Hohlzylinders.

Unterschiede zwischen den beiden in diesem Kapitel betrachteten Ansätzen ergeben sich aus der Vernachlässigung der Scherverformung durch FLÜGGE im Gegensatz zu dem Ansatz nach MIRSKY-HERRMANN, der sowohl Scherung als auch die Dehnung in radialer Richtung berücksichtigt. Aufgrund der Beschränkung auf radialsymmetrische Schwingungen lassen sich mit ihrem Ansatz allerdings keine Wellentypen höherer Ordnung mit winkelabhängiger Amplitudenverteilung abbilden.

## 5 Experimentelle Untersuchungen

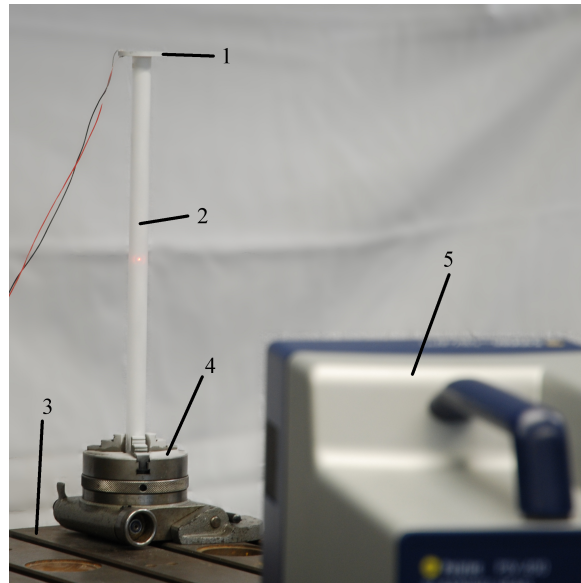
Das vorliegenden Kapitel beschreibt die zur Modellvalidierung benötigten experimentellen Untersuchungen, anhand derer im folgenden Kapitel eine Validierung der Modelle durchgeführt werden soll. Das Kapitel beginnt mit der dreidimensionalen Bestimmung des radialen Verschiebungsfeldes an verschiedenen prototypisch aufgebauten Systemen und der messtechnischen Analyse der Schwingungsformen von Piezowandlern verschiedener Größen. Den wesentlichen Teil des Kapitels bildet die messtechnische Erfassung der Betriebsschwingungsformen verschiedener Systeme bei unterschiedlichen Betriebsfrequenzen.

Dort wo es innerhalb des Kapitels sinnvoll ist wird bereits eine erste Interpretation der Ergebnisse vorgenommen. Eine systematische Validierung der Modelle aus Kapitel 4 soll jedoch erst in Kapitel 6 erfolgen.

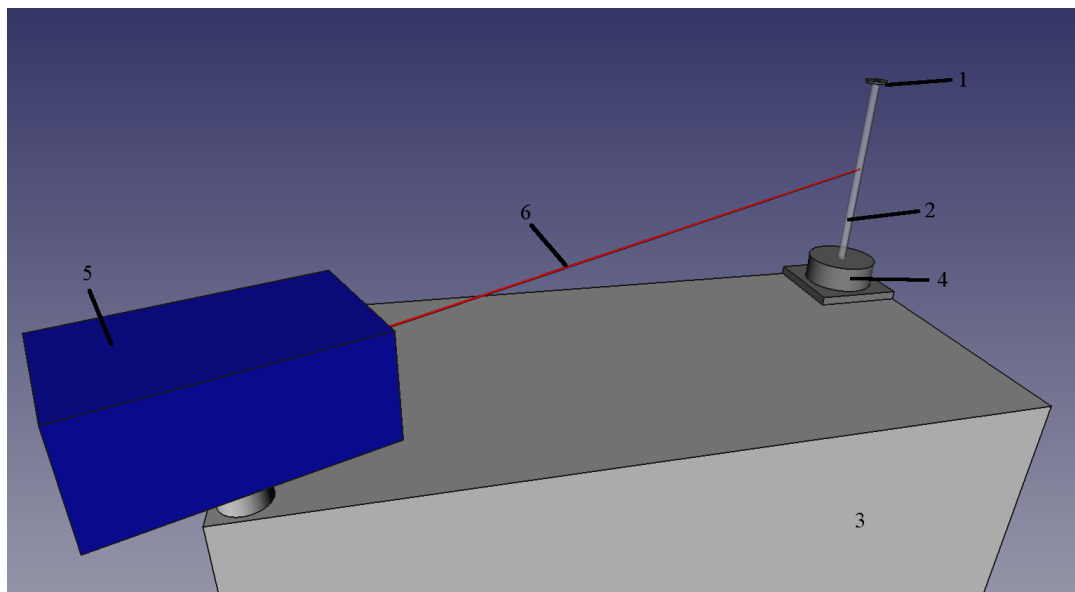
### 5.1 Nachweis des radialsymmetrischen Verschiebungsfeldes

Zur Überprüfung der Annahme eines rein radialsymmetrischen Verschiebungsfeldes werden die Systeme I und II aus **Tabelle A.1** experimentell untersucht. Zur Analyse der Betriebsschwingungsform werden die Systeme jeweils über den gesamten Umfang sowie in axialer Richtung mit einem Scanning-Laser-Vibrometer abgescannt. Dafür wird der Acryl-Hohlzylinder mit dem Piezowandler am oberen, freien Ende vertikal in einen Teilkopf gespannt, so dass die freie Länge (Anfang des Hohlzylinders/Piezowandlers bis Teilkopf) 400 mm beträgt. Diese Einspannung wird gewählt, um den Einfluss der Lagerstelle auf die Schwingungsform bzw. die sich ausbreitenden Wanderwellen so gering wie möglich zu halten. Sie gewährleistet eine ungestörte Ausbreitung der Wanderwellen über den gesamten Bereich des freien Hohlzylinderabschnitts ohne störende Einflüsse zusätzlicher Lagerstellen. Darüber hinaus bietet der verwendete Teilkopf die Möglichkeit der Winkelverstellung, so dass eine einfache und zugleich genaue Möglichkeit besteht, die Schwingungen des Hohlzylinders in definierten Winkelschritten zu vermessen. **Abb. 5.1** zeigt ein Foto des Aufbaus mit Hohlzylinder-Wandler-Einheit und deren Lagerung im Teilkopf. **Abb. 5.2** zeigt eine Übersichtszeichnung des gesamten Aufbaus.

Angeregt werden die Systeme jeweils harmonisch in der Resonanzfrequenz des Piezowandlers. Diese beträgt bei System I etwa 48.450 Hz und 32.520 Hz bei System II, wobei



**Abbildung 5.1:** Foto des Versuchsaufbaus mit Teilkopf: Piezowandler (1), Acryl-Hohlzylinder (2), Schwingungsfundament (3), Teilkopf (4), Scankopf des Laser-Vibrometers (5)



**Abbildung 5.2:** Skizze des Versuchsaufbaus: Piezowandler (1), Acryl-Hohlzylinder (2), Schwingungsfundament (3), Teilkopf (4), Scankopf des Laser-Vibrometers (5), Laserstrahl (6)

**Tabelle 5.1:** Lage der Messpunkte auf den Hohlzylinder-Wandler-Einheiten

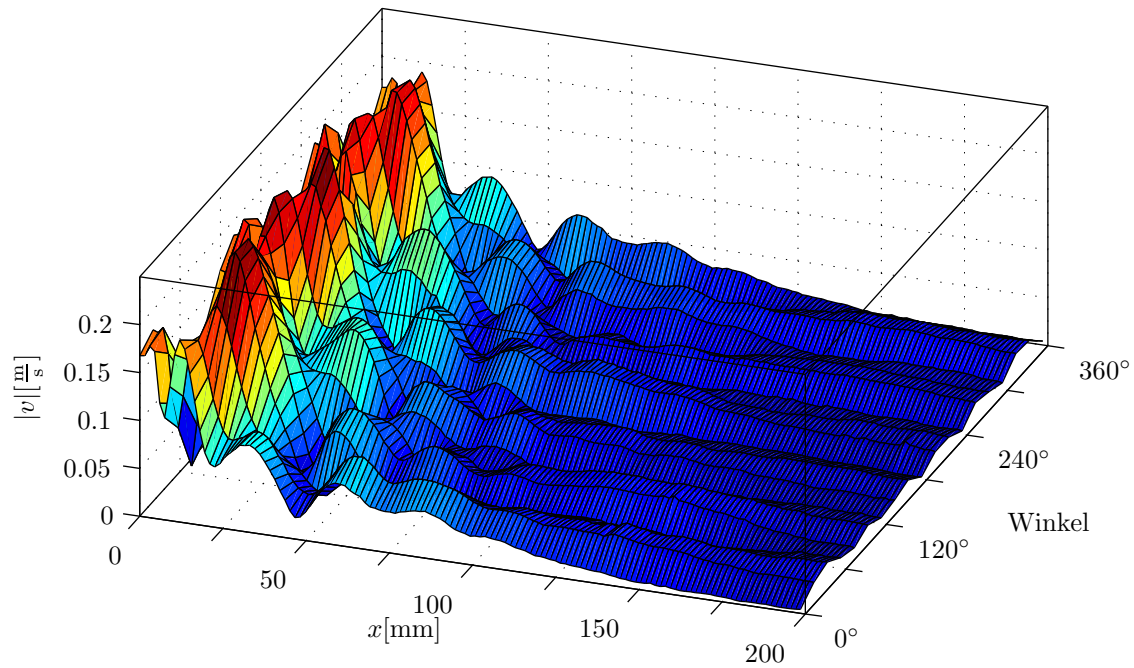
Position	System I	System II
Piezowandler (Umfang)	1-2	1-3
Piezowandler (Seite)	3	4-5
Rand Piezowandler-Hohlzylinder	4	6
Hohlzylinder	5-133	7-133



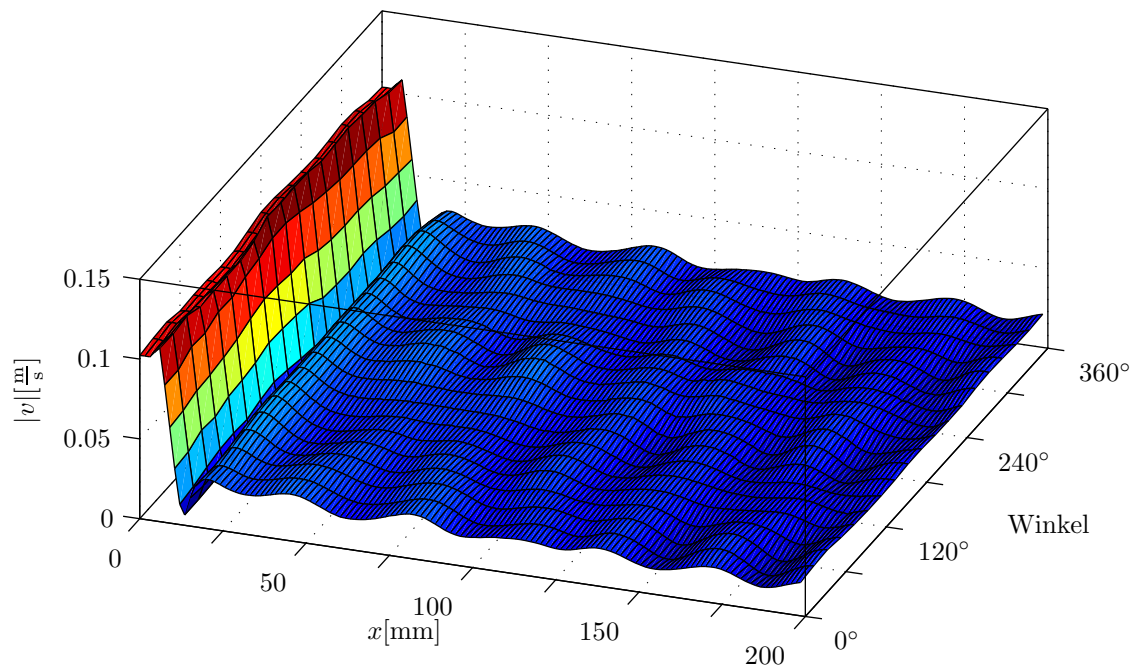
sich durch Alterungs- und Temperatureinflüsse Abweichungen ergeben können. Einge- stellt wird die Resonanzfrequenz über die Phasenlage zwischen Strom und Spannung am Piezowandler, sie beträgt in der Resonanz genau  $0^\circ$ , d.h. es liegt reine Wirkleistung und keine Blindleistung vor. Zwischen dem Einschalten des Systems und der Messung ist das Erreichen eines stationären Zustands abzuwarten, da die Resonanzfrequenz durch die betriebsbedingte Erwärmung des Systems anfangs noch etwas driftet. Zur Erfassung der Schwingungen des Hohlzylinders kommt ein Scanning-Laser-Vibrometer zum Ein- satz. Beginnend am Piezowandler wird so an je 133 Punkten auf einer Länge von 200 mm in vertikaler Richtung entlang der Zylinderachse gemessen. Entsprechend ergab sich ein Abstand der Messpunkte von jeweils 1,51 mm  $\left(= \frac{200 \text{ mm}}{133-1}\right)$ . Der übrige Bereich des Hohl- zylinders in der Nähe des Teilkopfes wurde nicht messtechnisch erfasst, da in diesem Bereich der Einfluss der an der Lagerung reflektierten Wellenanteile zunimmt und die Wanderwelle mehr und mehr zu einer stehenden Welle wird. Die Lage der einzelnen Punkte auf dem Hohlzylinder bzw. Piezowandler ist **Tabelle 5.1** zu entnehmen. Eine de- taillierte Beschreibung der für die Messung verwendeten Geräte findet sich in Anhang B.

Um eine Messung mit guter Signalqualität zu ermöglichen wurde der transparente Acryl- Hohlzylinder vor der Messung mit einer deckenden Schicht Nassentwickler-Spray aus der Rissprüfung überzogen (siehe **Abb. 5.1**), die für eine diffuse Reflexion des Laser- strahls sorgt, dabei aber zugleich so dünn ist, dass sie die dynamischen Eigenschaften des Hohlzylinders nicht signifikant verändert. Zur weiteren Reduzierung von Störungen werden je Punkt zehn Messdatenblöcke aufgezeichnet und gemittelt. Als Phasenreferenz- signal dient dabei das Synchronisations-Signal des verwendeten Frequenzgenerators. Um die Systeme vollständig von allen Seiten vermessen zu können, wird die Winkelver- stellung des Teilkopfes genutzt. Diese gestattet es nach einem Scandurchlauf des Laser- Vibrometers entlang der Zylinderachse über alle 133 Messpunkte, das Hohlzylinder- Wandler-System um einen bestimmten Winkel weiterzudrehen und die nächste Messung durchzuführen, ohne die Einspannbedingungen und damit eventuell die dynamischen Eigenschaften des Systems zu verändern. Bei Winkelschritten von  $20^\circ$  sind also jeweils 18 Einzelmessungen notwendig, die separat gespeichert und später in Matlab<sup>®</sup> für die wei- tere Analyse zu einer Gesamtschwingungsform zusammengefügt werden. Eine direkte Messung bei der alle Messpunkte mit dem Vibrometer abgescannt werden ist aufgrund der Tatsache, dass über den gesamten Umfang gemessen werden soll nicht möglich. Die Aufteilung der Oberfläche in mehrere Segmente wäre zwar möglich, hätte aber eine Win- kelkorrektur benötigt, um die radialen Geschwindigkeitsamplituden zu bestimmen.

**Abb. 5.3** und **5.4** zeigen die Amplitudenverteilung der gemessenen Schwingungsformen der beiden Systeme I und II. System II zeigt eine sehr konstante Amplitudenverteilung in Umfangsrichtung mit nur kleinen Schwankungen, während bei System I eine deutliche Wellenform in Umfangsrichtung erkennbar ist. An beiden Systemen ist eine Abnahme der Amplituden für steigende  $x$  zu erkennen, die aus der Dämpfung der sich ausbreitenden Wanderwellen sowie dem Abklingen der Nahfeldanteile resultiert. Auffällig ist das be- reits in TAKANO UND TOMIKAWA [97] und BISTRY [3] beobachtete Amplitudenminimum

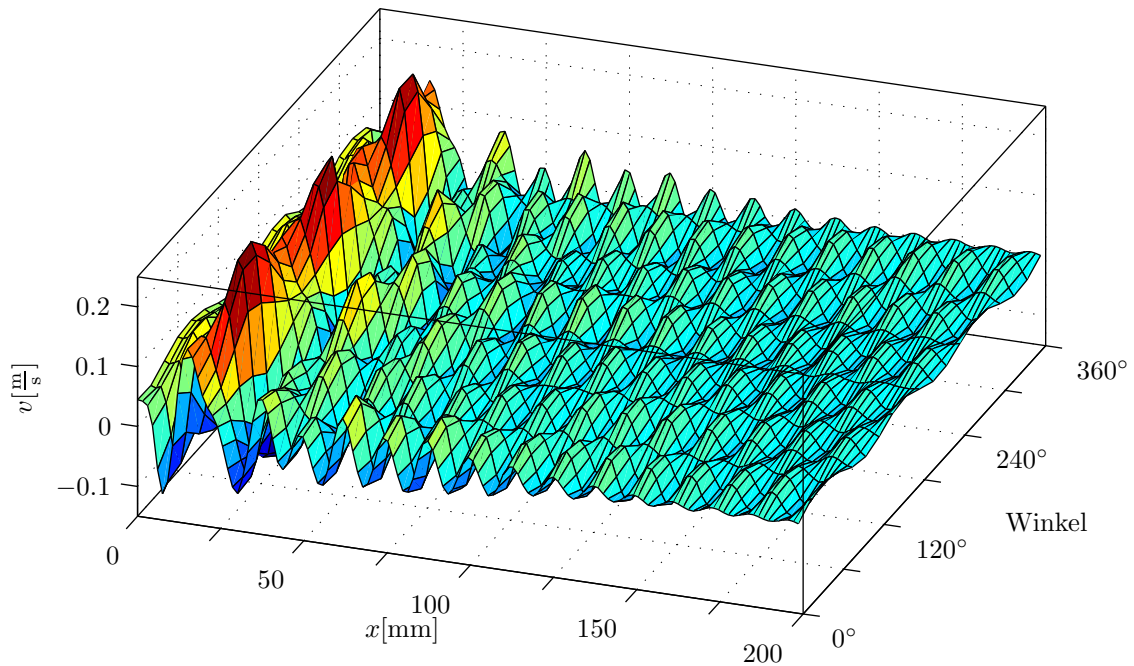


**Abbildung 5.3:** Betrag der Amplitudenverteilung von System I bei Betrieb in Resonanz ( $f = 48450$  Hz)

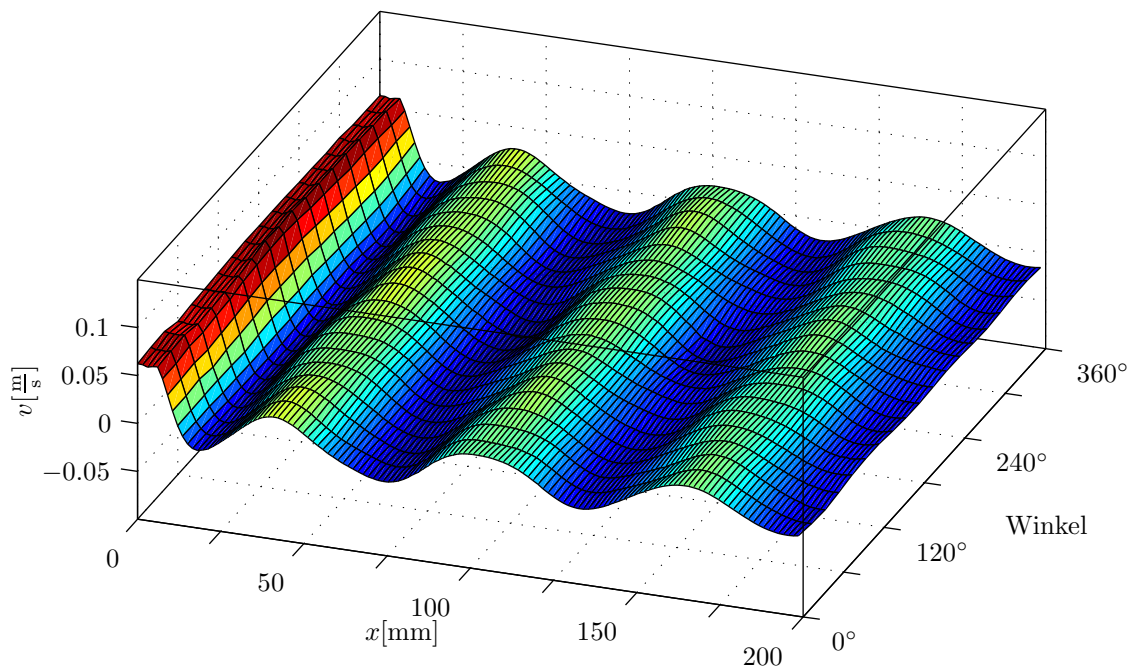


**Abbildung 5.4:** Betrag der Amplitudenverteilung von System II bei Betrieb in Resonanz ( $f = 32520$  Hz)

(siehe auch **Abb. 2.9**), das bei System II an der Stelle  $x \approx 15$  mm auftritt und auf den ersten Blick nicht zur Ausbreitung einer Wanderwelle passen will. Auch bei System I sind Winkelpositionen erkennbar, bei denen die Amplitudenverteilung entlang der  $x$ -Achse nicht kontinuierlich abnimmt, sondern nach dem Erreichen eines Minimums wieder ansteigt.



**Abbildung 5.5:** Schwingungsform von System I bei Betrieb in Resonanz ( $f = 48450$  Hz)



**Abbildung 5.6:** Schwingungsform von System II bei Betrieb in Resonanz ( $f = 32520$  Hz)

Wird anstelle der Amplitudenverteilung die Schwingungsform als Momentaufnahme der radialen Geschwindigkeiten, wie in **Abb. 5.5** und **5.6** geschehen, dargestellt, sind die Unterschiede im Schwingungsverhalten der beiden Systemen noch deutlicher zu erkennen. Dargestellt ist jeweils der Realteil der gemessenen, komplexen Geschwindigkeitsamplituden. Da die Schwingungsform hauptsächlich aus Wanderwellen besteht, lassen sich in einer solchen Momentaufnahme, im Gegensatz zur Darstellung der Amplituden, die dominierenden Wellenlängen deutlich besser erkennen. System II (**Abb. 5.6**) zeigt nahezu

perfekt radialsymmetrische Wellen. Bei System I sind dagegen deutliche Anteile höherer Wellenordnungen erkennbar (**Abb. 5.5**), wobei die dritte Wellenordnung die dominierende ist. Die Partizipation der einzelnen Wellenordnungen an der Gesamtschwingung soll im Folgenden quantifiziert werden. Hierbei bietet sich die Anwendung der Diskreten Fourier-Transformation (DFT, siehe z. B. BUTZ [6]) an, um die einzelnen Wellenanteile zu isolieren. Betrachtet werden jeweils für eine Position  $x$  die entlang des Umfangs gemessenen komplexen Schwingungsamplituden. Aufgrund der durch die Geometrie garantierten Periodizität in Umfangsrichtung kann dabei auf die Anwendung einer Fensterfunktion verzichtet werden. Dennoch kann die DFT der Geschwindigkeitssignale aus den **Abb. 5.5** und **5.6** nicht direkt berechnet werden. Da die Signale komplexwertig sind müssen sowohl Real- als auch Imaginärteil betrachtet werden, um Aussagen über die Amplituden und deren örtliche Verteilung treffen zu können. Da die Anwendung der DFT auf ein komplexwertiges Signal ein eher seltener Fall im Bereich der Schwingungsanalyse ist, soll das genaue Vorgehen hier detaillierter beschrieben werden.

Der erste wesentliche Unterschied zur typischen Anwendung der Fourier-Transformation vom Zeit- in den Frequenzbereich und umgekehrt ist, dass sie im vorliegenden Fall zur Transformation zwischen Ortsbereich (hier Winkel  $\varphi$ ) und Wellenzahlbereich verwendet wird. Darüber hinaus sind Zeitsignale reellwertig, während die hier vorliegenden, gemessenen Amplituden komplexwertig sind. Die Art des Eingangssignals hat aber entscheidenden Einfluss auf das resultierende Fourier-Spektrum. Wird ein reellwertiges Eingangssignal  $f$  verwendet und mit

$$F_m = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} f_r W_N^{-rm} \quad \text{mit } W_N^n = e^{\frac{2j\pi n}{N}} \quad (5.1)$$

fourier-transformiert (siehe BUTZ [6]<sup>1</sup>), ergibt sich stets ein konjugiert komplexes Spektrum

$$F_m = \text{Conj}[F_{N-m}]. \quad (5.2)$$

Bei komplexwertigen Eingangssignalen dagegen existiert einen solcher Zusammenhang zwischen  $F_m$  und  $F_{N-m}$  nicht. Im vorliegenden Fall werden als Eingangssignal für die DFT die gemessenen, komplexen Geschwindigkeitsamplituden eines Punktes  $i$  ( $x = \text{const.}$ )

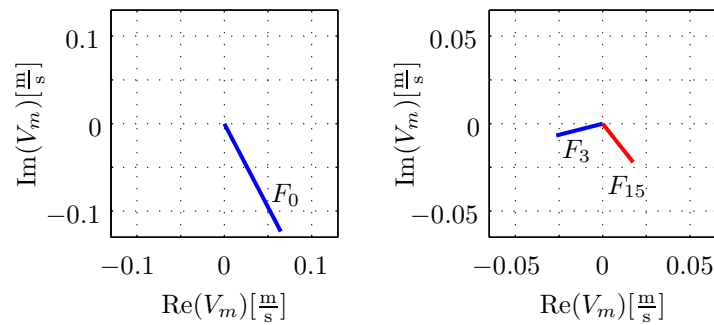
$$\mathbf{v}_i = [v_{i,0}, v_{i,20}, v_{i,40}, \dots, v_{i,340}] \quad (5.3)$$

in Abhängigkeit der Winkelposition

$$\boldsymbol{\varphi}_r = [\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{17}] = [0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, \dots, 340^\circ] \quad (5.4)$$

verwendet. Das Fourier-Spektrum enthält also für jedes  $m$  mit  $0 < m < \frac{N}{2}$  zwei unabhängige komplexe Werte, die zusammen die Amplitude der zugehörigen Wellenordnung beschreiben. Dabei entspricht  $m$  gerade der Wellenordnung, d. h. der Anzahl von Sinuswellen auf dem Umfang. Im Gegensatz zur DFT eines reellwertigen Eingangssignals, bei

<sup>1</sup>Im Gegensatz zu der in Matlab<sup>®</sup> üblichen 1-basierten Indexierung wird hier die anschaulichere Form mit Startindex null verwendet.



**Abbildung 5.7:** Darstellung ausgewählter Komponenten des komplexen Spektrums der gemessenen Schwingungsamplituden von System I an Position 1

dem zur Bestimmung der Amplitude des Ursprungssignals  $|2F_m| = 2|F_m|$  für  $0 < m < \frac{N}{2}$  verwendet wird, ist dies bei komplexwertigen Eingangssignalen nicht möglich. Es müssen sowohl  $F_m$  als auch  $F_{N-m}$  bei der Rekonstruktion des Ursprungssignals betrachtet und mit

$$f_r = \sum_{m=0}^{N-1} F_m W_N^{rm} \quad (5.5)$$

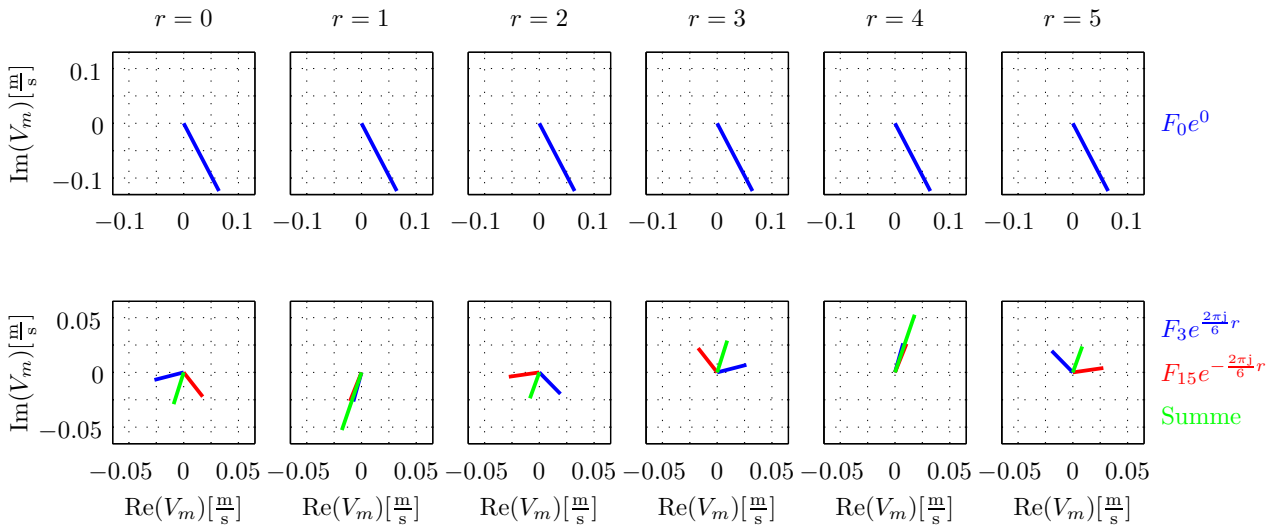
rücktransformiert werden. Ist man nur an der Amplitudenverteilung einer bestimmten Wellenordnung  $m$  interessiert, werden anstelle der Summenbildung nur die Terme für  $m$  und  $N - m$  berücksichtigt

$$f_{r,m} = F_m e^{\frac{2\pi j}{N} r m} + F_{N-m} e^{\frac{2\pi j}{N} r (N-m)}. \quad (5.6)$$

Gl. (5.6) liefert also für jeden Winkelindex  $r$  die zur jeweiligen Wellenordnung  $m$  gehörige komplexe Amplitude des Ursprungssignals. Durch Multiplikation dieser komplexen Amplitude mit  $e^{j\omega t}$  ergibt sich schließlich die zeitabhängige Verschiebung des entsprechenden Punktes.

**Abb. 5.7** zeigt die nach Gl. (5.1) bestimmten Fourier-Koeffizienten in der komplexen Ebene für die 0. Wellenordnung (Gleichanteil) und die 3. Wellenordnung. Der Koeffizienten  $F_0$  repräsentiert die komplexe Amplitude für die radialsymmetrische Schwingung. Durch Addition der beiden komplexen Koeffizienten  $F_3$  und  $F_{15}$  ergibt sich die zur 3. Wellenordnung gehörige komplexe Amplitude für den Winkel  $\varphi_0 = 0^\circ$  ( $r = 0$ ). Die Summe der beiden Koeffizienten ist in **Abb. 5.8** links unten in grün dargestellt. Die komplexe Amplitude ist abhängig von der betrachteten Winkelposition und muss jeweils aus der Summe der beiden mit  $e^{\frac{2\pi j}{N} r m}$  bzw.  $e^{\frac{2\pi j}{N} r (N-m)} = e^{-\frac{2\pi j}{N} r m}$  multiplizierten Koeffizienten bestimmt werden. Dies ist anschaulich in **Abb. 5.8** für  $r = 0..5$  dargestellt. Für  $m = 3$  setzt sich für alle weiteren  $r = 6..17$  die Reihe entsprechend periodisch fort. Durch weitere Multiplikation dieser komplexen Amplituden mit  $e^{j\omega t_1}$  ergibt sich aus dem Realteil die Auslenkung zum Zeitpunkt  $t_1$ . Soll die Partizipation der einzelnen Wellentypen an der Gesamtschwingung bestimmt werden, muss die Summe der Beträge von  $F_m$  und  $F_{N-m}$  herangezogen werden.

Die sich in Abhängigkeit der Wellenordnungen ergebenden Amplituden für beide Systeme



**Abbildung 5.8:** Darstellung der aus dem gemessenen, komplexen Spektrum der Schwingungsamplituden bestimmten, komplexen Amplituden von System I am Rand des Piezowandlers für die Winkel  $\varphi_r = r \cdot 20^\circ$  (oben:  $m = 0$  unten:  $m = 3$ )

me zeigen die **Abb. 5.9** und **5.10**. Dargestellt sind jeweils die aus den Messungen identifizierten Geschwindigkeitsamplituden am Piezowandler (links) und am Hohlzylinder (rechts). Die Amplituden der transformierten Schwingungsform wurden dabei jeweils über die Messpunkte auf dem Rand des Piezowandlers (siehe **Tabelle 5.1**) bzw. die ersten zehn Messpunkte auf dem Hohlzylinderelement gemittelt, um den Einfluss von Störungen und Messfehlern zu reduzieren.

Es lässt sich gut erkennen, dass System II nahezu perfekt radialsymmetrische Schwingungen ausführt. Die Wellen der Ordnung 0 dominieren klar die Schwingungsform. Alle höheren Ordnungen weisen deutlich niedrigere Amplituden auf und tragen nicht signifikant zur Gesamtschwingungsform bei. Bei System I dagegen ist neben den radialsymmetrischen Wellen der Ordnung 0 auch ein erheblicher Anteil anderer Ordnungen in der Schwingungsform des Piezowandlers enthalten, wobei die dritte Ordnung die dominierende dieser nicht gewünschten Wellenordnungen ist. Die Ursache des stark von den Erwartungen abweichenden Verhaltens von System I soll im folgenden Abschnitt näher untersucht werden, denn der Theorie nach können mit der vorliegenden Elektrodenkonfiguration des Piezowandlers nur dessen radialsymmetrische Schwingungsformen angeregt werden. Es gilt zu klären, ob die Wellen höherer Ordnung direkt vom Piezo erzeugt werden oder aus der Kombination von Hohlzylinder und Piezowandler resultieren.



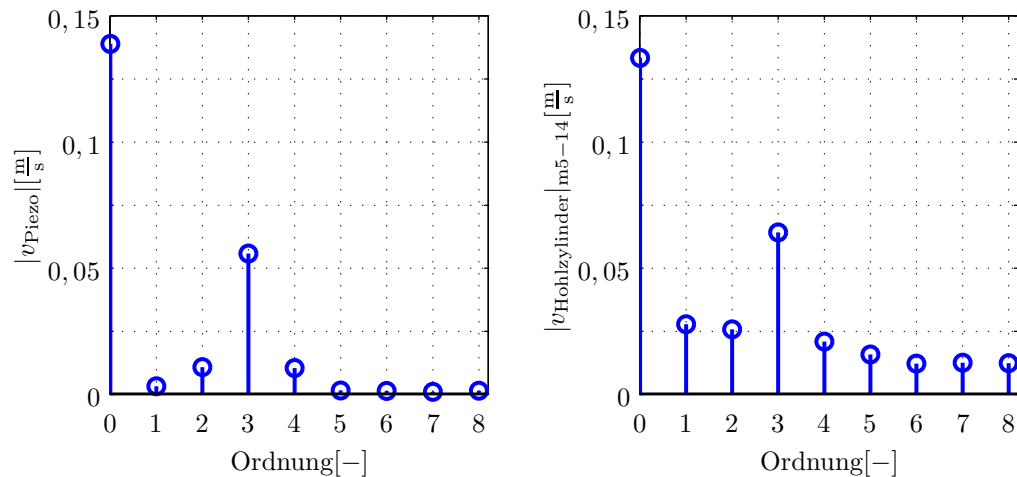


Abbildung 5.9: Schwingungsform von System I bei Betrieb in Resonanz

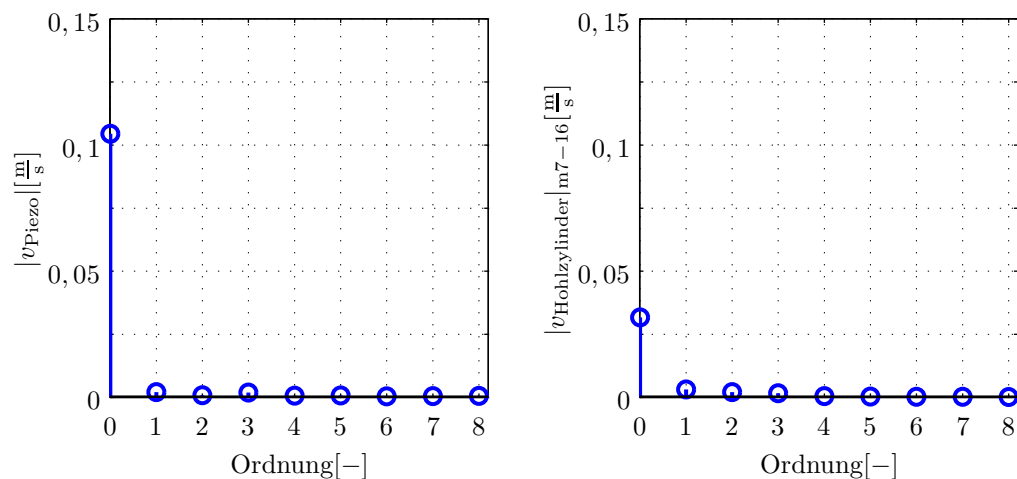


Abbildung 5.10: Schwingungsform von System II bei Betrieb in Resonanz

## 5.2 Piezo-Schwingungsanregung

Um die Abweichung der an System I gemessenen Piezo-Schwingungsform von der radialsymmetrischen Schwingungsform des Piezoringwandlers (siehe **Abb. 2.23 d**) zu untersuchen, sollen im folgenden Piezoringwandler verschiedener Abmessungen (siehe **Tabelle 5.2**) näher analysiert werden. Um sicherzustellen, dass die Ursache für die Anregung der höheren Wellenordnungen vom Piezo herrührt und nicht aus der Kombination Piezowandler und Hohlzylinder resultiert, werden die Wandler jeweils ohne Hohlzylinder in ihrer Resonanzfrequenz angeregt und die radialen Schwingungen messtechnisch untersucht.

Tabelle 5.2: Abmessungen und Geometrieparameter der verwendeten Piezoringwandler

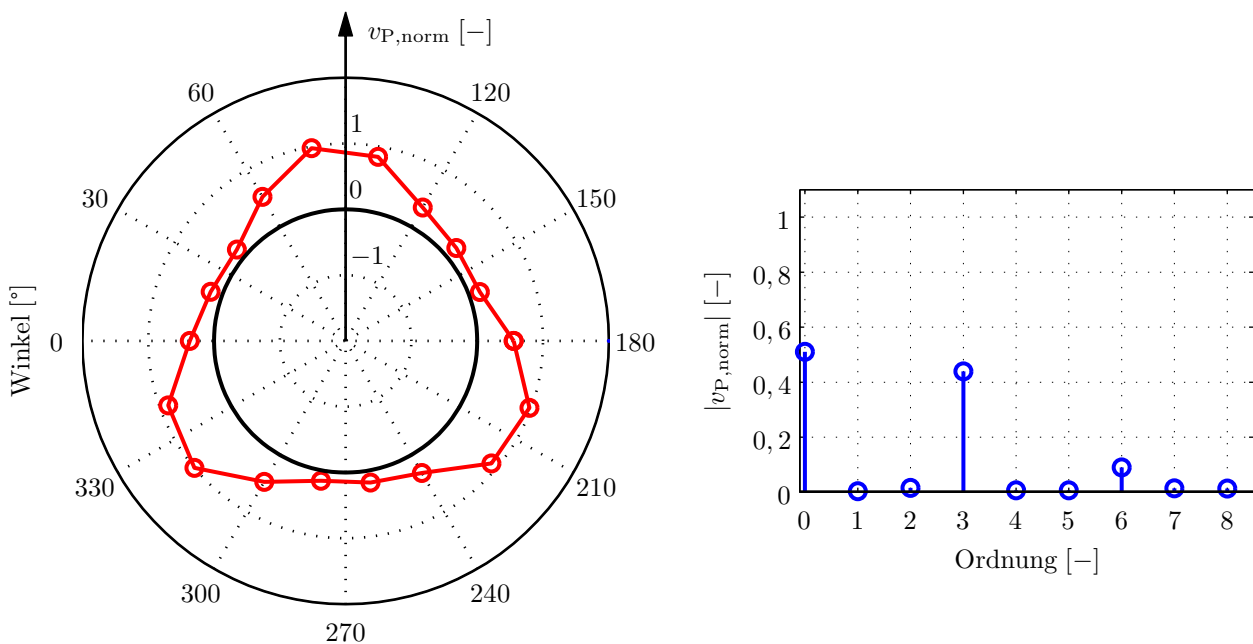
Piezo #	$d_a$ [mm]	$d_i$ [mm]	$b$ [mm]	$h$ [mm]	$a$ [mm]	$\frac{d_a}{d_i}$ [-]	$\frac{h}{a}$ [-]
1	30	15	3	7,5	11,25	2	0,667
2	50	19,7	5	15,15	17,425	2,538	0,869
3	20	8	2,5	6	7	2,5	0,857

Vor der Messung wird die Resonanzfrequenz der unterschiedlichen Piezowandler zunächst mittels FE-Analyse berechnet und im Versuch anhand der Phasenlage zwischen elektrischem Strom und Betriebsspannung exakt bestimmt. Für die Messung werden die gleichen Geräte wie im vorangehenden Abschnitt verwendet (siehe Anhang B). Die resultierenden Schwingungsformen sind, ermittelt aus den Amplituden und den auf die Anregespannung bezogenen Phasenlagen, in **Abb. 5.11** bis **5.13** dargestellt. Dabei wurde eine Normierung vorgenommen, die das jeweils betragsgrößte Element auf eins normiert. Im rechten Teil der Abbildungen sind jeweils die mittels Diskreter Fourier-Transformation der komplexen Amplitudenverteilung ermittelten Beträge der verschiedenen Wellenordnungen dargestellt.

Aus **Abb. 5.11** wird deutlich, dass der Piezoringwandler bezüglich seiner dritten ebenen Biegemode (siehe **Abb. 2.23 f**) und der achssymmetrischen Radialmode (siehe **Abb. 2.23 d**) etwa gleich große Amplituden aufweist. Die beiden anderen Wandler (siehe **Abb. 5.12** und **5.13**) zeigen dieses Verhalten nicht und führen radialsymmetrische Schwingungen der Ordnung 0 aus.

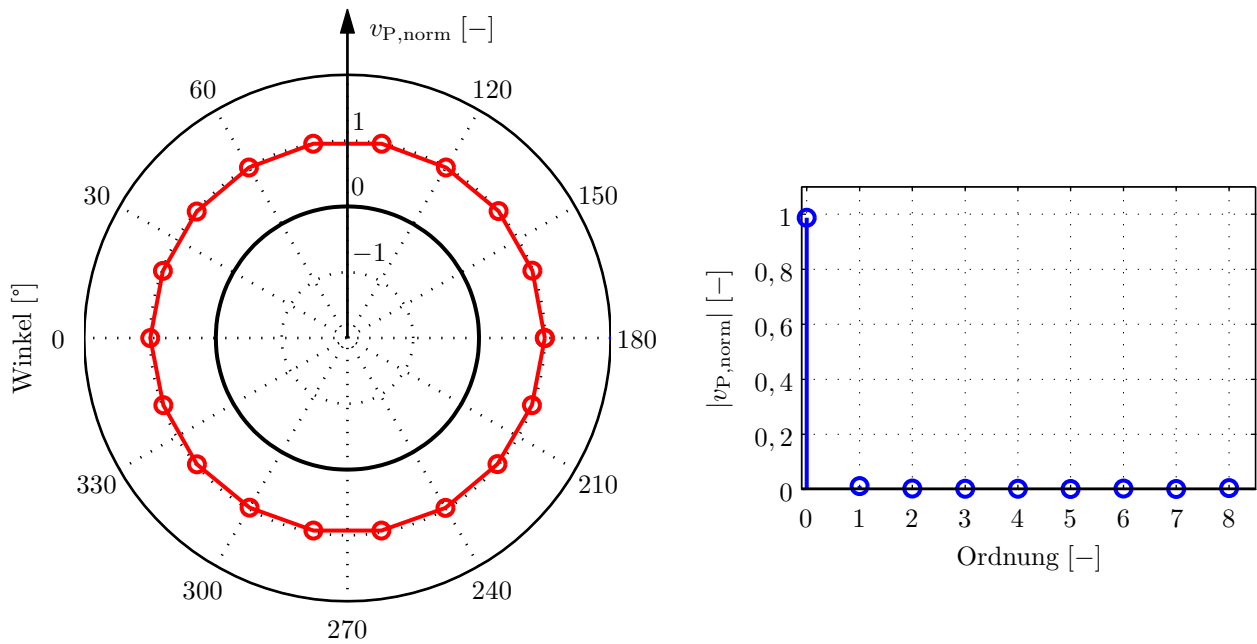
Zur weiteren Analyse sollen die Eigenschwingungen der ringförmigen Piezokeramiken näher betrachtet werden. In den bekannten Tabellenwerken (siehe z. B. BLEVINS [4]) finden sich für die betreffenden Eigenfrequenzen folgende Gleichungen für die sogenannten Dehnungsschwingungen, die den Längsschwingungen eines aufgewickelten und an den Enden verbundenen Balkens entsprechen,

$$\omega_{\text{radial},n,\text{dünn}} = \frac{\sqrt{1+n^2}}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.7)$$

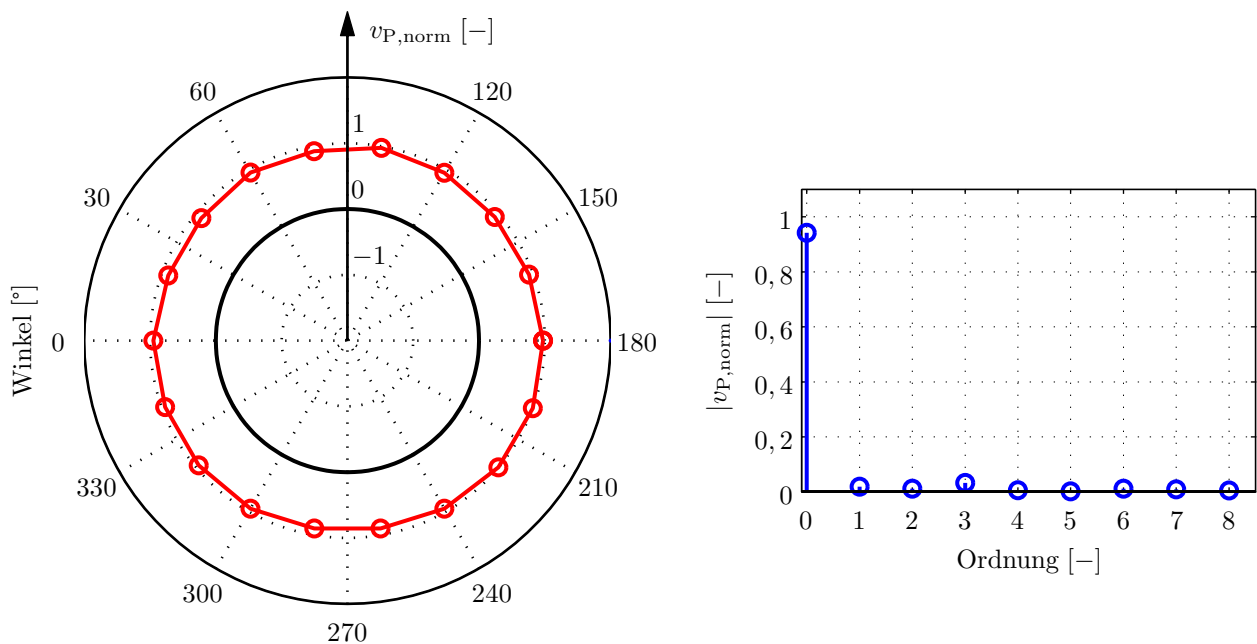


**Abbildung 5.11:** Normierte Schwingungsform des Piezos Nr. 1 bei 48.320 Hz





**Abbildung 5.12:** Normierte Schwingungsform des Piezos Nr. 2 bei 32.230 Hz



**Abbildung 5.13:** Normierte Schwingungsform des Piezos Nr. 3 bei 79.900 Hz

und für die In-Plane-Biegung des Kreisrings

$$\omega_{\text{Biegung},n,\text{dünn}} = \frac{n(n^2 - 1)}{a^2 \sqrt{n^2 + 1}} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (5.8)$$

Diese gelten aber nur für dünne Kreisringe, d. h. für kleine Verhältnisse von Dicke zu mittlerem Radius  $\frac{h}{a}$ . Zu den In-Plane-Biegeschwingungen dicker Kreisringe finden sich zahlreiche Veröffentlichungen aus den 1960er und 70er Jahren. Als wesentlicher, stabilitätsgebender Bestandteil vieler Konstruktionen aus der Luft- und Raumfahrttechnik wa-

ren kreisringförmige Bauteile entscheidend für deren dynamisches Verhalten und wurden daher intensiv analysiert. Von KIRKHOPE [45] wurde eine Gleichung zur Berechnung der In-Plane-Eigenschwingungen angegeben, die auf der klassischen Form nach Gl. (5.7) basiert, aber noch einen zusätzlichen Korrekturterm

$$\omega_{\text{Kirkhope},1} = \omega_{\text{Biegung},n,\text{dünn}} \frac{1}{(1 + n^2\alpha) + \left(\frac{I}{Aa^2} \frac{(n^2-1)^2}{(n^2+1)} \frac{1}{(1+n^2\alpha)}\right)} \quad (5.9)$$

enthält, der sich weiter zu

$$\omega_{\text{Kirkhope},2} = \omega_{\text{Biegung},n,\text{dünn}} \frac{1}{1 + n^2\alpha} \quad (5.10)$$

vereinfacht, wenn Drehträgheiten und Scherung vernachlässigt werden. Das enthaltene  $\alpha$  ergibt sich aus Geometrie- und Materialparametern

$$\alpha = \frac{I}{Aa^2} \frac{E}{G} \frac{1}{k'} \quad (5.11)$$

wobei der Scherparameter  $k'$  für rechteckige Querschnitte zu  $k' = \frac{5}{6}$  gesetzt wird.

Die Gln. (5.7) bis (5.10) lassen sich mit den für rechteckige Querschnitte gültigen Ersetzungen

$$A = bh \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad \frac{I}{A} = \frac{h^2}{12} \quad \text{und} \quad \frac{E}{G} = 2(1 + \nu)$$

weiter umformen. So ergibt sich aus Gl. (5.10)

$$\omega_{\text{Kirkhope}} = \underbrace{\frac{h}{a} \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}\sqrt{12}}}_{\omega_{\text{Biegung},n,\text{dünn}} a \sqrt{\frac{G}{E}} \sim \frac{h}{a}} \frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \underbrace{\frac{1}{1 + n^2 \frac{h^2}{12a^2} 2(1+\nu) \frac{6}{5}}}_{\frac{1}{1+n^2\alpha} \sim \frac{1}{(\frac{h}{a})^2}}. \quad (5.12)$$

Werden diese Eigenfrequenzen auf  $\frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  normiert, sind sie nur noch von der Knotenzahl  $n$ , der Querkontraktionszahl  $\nu$  sowie dem Verhältnis von radialer Dicke zu mittlerem Radius  $\frac{h}{a}$  abhängig. Gl. (5.12) lässt die lineare Abhängigkeit der normierten Eigenfrequenz für dünne Kreisringe von  $\frac{h}{a}$  sowie die Abhängigkeit des KIRKHOPE'schen Korrekturterms von  $\frac{1}{(\frac{h}{a})^2}$  erkennen.

Da das Verhältnis  $\frac{h}{a}$  wenig anschaulich ist, soll es durch das wesentlich anschaulichere Verhältnis von Außen- zu Innendurchmesser ausgedrückt werden:

$$\frac{h}{a} = \frac{\frac{1}{2}(d_a - d_i)}{\frac{1}{2}d_i + \frac{1}{4}(d_a - d_i)} = \frac{\frac{1}{2}(d_a - d_i)}{\frac{1}{4}(d_a + d_i)} = 2 \frac{\frac{d_a}{d_i} - 1}{\frac{d_a}{d_i} + 1}. \quad (5.13)$$

In **Tabelle 5.3** sind die zugehörigen Werte einander gegenübergestellt.

**Tabelle 5.3:** Geometrieparameter  $\frac{h}{a}$  in Abhängigkeit des Durchmesserverhältnisses

$\frac{d_a}{d_i}$	1	1,2	1,5	2	2,5	5	10
$\frac{h}{a}$	0	0,182	0,400	0,667	0,857	1,334	1,636

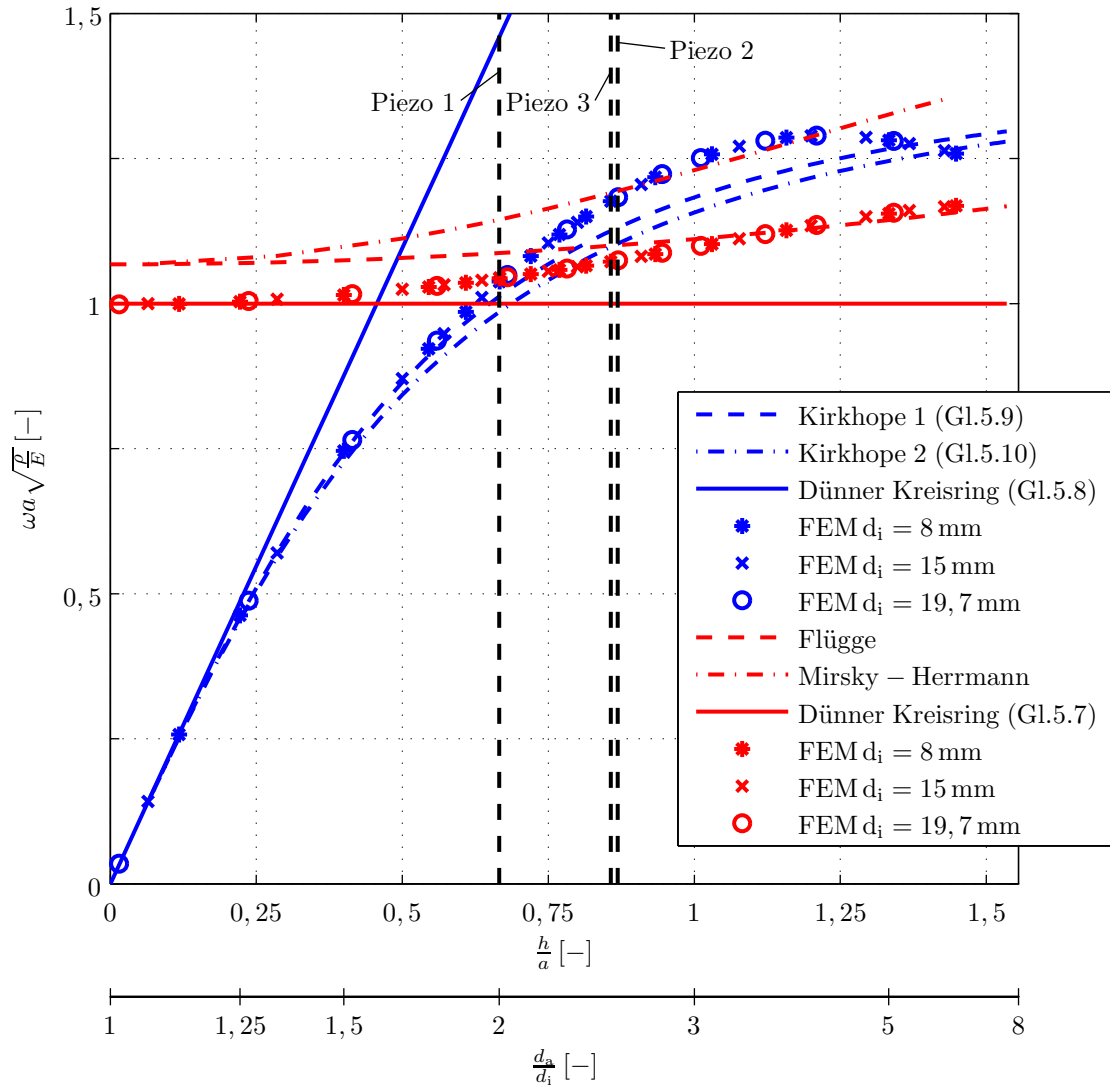
Zu den Dehnungsschwingungen von Kreisringen gibt es kaum Untersuchungen, da die zugehörigen Eigenfrequenzen für  $\frac{h}{a} \ll 1$  deutlich höher als die der In-Plane-Biegeschwingungen liegen und daher für die Strukturodynamik weniger relevant sind. Entsprechend finden sich für die Radialschwingungsmoden in der Literatur keine Pendanten zu Gl. (5.9). Da diese Schwingungsformen aber sehr den Radialmoden von Hohlzylindern ähneln liegt es nahe, die Eigenfrequenzen mittels einer Schalentheorie zu berechnen. Die erste Möglichkeit besteht darin, nach der FLÜGGE-Theorie (siehe Abschnitt 2.3.1.1) aus Gl. (4.28) die Grenzfrequenz der Radialschwingung zu bestimmen

$$\omega_{\text{FLÜGGE}} = \sqrt{\frac{E(1+K)}{\rho a^2(1-\nu^2)}}, \quad (5.14)$$

also diejenige Frequenz, bei der ein unendlich langer Hohlzylinder nur in radialer Richtung axialsymmetrische Schwingungen ausführen würde. Dabei ist allerdings zu beachten, dass der Ring nicht die Bedingung des dünnen Hohlzylinders erfüllt und in axialer Richtung eine sehr geringe Ausdehnung besitzt. Eine weitere Möglichkeit stellt die Berechnung mittels der Theorie nach MIRSKY-HERRMANN (siehe Abschnitt 2.3.2.3) für dickwandige Hohlzylinder dar. Allerdings lässt sich für diesen Ansatz die Grenzfrequenz nicht so einfach wie in Gl. (5.14) darstellen. Vielmehr ist es sinnvoller diese Gleichung wie in Abschnitt 4.2.1 numerisch zu lösen.

In **Abb. 5.14** sind die auf  $\frac{1}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  normierten Eigenfrequenzen der Radialmoden und 3. In-Plane-Biegemoden in Abhängigkeit des Verhältnisses  $\frac{h}{a}$ , wie sie sich aus den Gln. (5.8), (5.9) und (5.10) für die In-Plane-Biegung sowie aus Gl. (5.7) und den FLÜGGE- und MIRSKY-HERRMANN-Theorien für die Radialmode ergeben, einander gegenübergestellt. Zusätzlich sind FE-Ergebnisse für Piezoringe dreier verschiedener Innendurchmesser (analog zu **Tabelle 5.2**) und variablem Verhältnis  $\frac{h}{a}$  und unterschiedlicher Dicke  $b$  dargestellt. Für die analytischen Modelle, die isotropes Material voraussetzen, wurde dabei in der Berechnung ein Elastizitätsmodul von  $E_{\text{Piezo}} = 85 \text{ MPa}$ , eine Querkontraktion von  $\nu = 0.35$  und eine Dichte von  $\rho = 7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  verwendet. Diese Werte wurden mittels einer FE-Vergleichs-Simulation zwischen anisotropem Piezo-Material und isotropem Material so angepasst, dass sich eine möglichst gute Übereinstimmung der Ergebnisse bezüglich der Eigenfrequenzen ergab.

Im Bereich  $\frac{h}{a} < 0,2$  stimmen die klassischen Ergebnisse für dünne Kreisringe sehr gut mit den FE-Simulationen überein. Für die In-Plane-Biegung liefern die Ergebnisse von Kirchhoff gute Näherungen, wobei das Ergebnis nach Gl. (5.9) dichter an den FE-Ergebnissen liegt als deren vereinfachte Form nach Gl. (5.10). Bei der Dehnungs-Eigenfrequenz überschätzen beide Schalentheorien die Eigenfrequenz um etwa 10% für dünne Ringe. Diese Abweichung lässt sich damit erklären, dass bei der berechneten Grenzfrequenz der Hohlzylinder rein radial schwingt, während die Schwingung des Piezorings eine erhebliche axiale Dehnung enthält. Mit zunehmendem Verhältnis  $\frac{h}{a}$  beschreiben beide Schalentheorien einen Anstieg der normierten Eigenfrequenz, wobei die MIRSKY-HERRMANN-Theorie mit einem Offset nahezu parallel zu den Ergebnissen der FE-Simulation verläuft. Ten-



**Abbildung 5.14:** Normierte Eigenfrequenzen der Radialmoden (rot) und der 3. In-Plane-Biegemoden (blau)

denziell lässt sich aus allen Kurven, speziell aber aus den Ergebnissen der FE-Simulation, ein Zusammenfallen der beiden Eigenfrequenzen etwa bei  $\frac{h}{a} = \frac{2}{3}$  und  $\omega a \sqrt{\frac{\rho}{E}} \approx 1,05$  erkennen. Wie sich **Tabelle 5.3** entnehmen lässt entspricht  $\frac{h}{a} = \frac{2}{3}$  gerade  $\frac{d_a}{d_i} = 2$ , d. h. der Außendurchmesser beträgt das Doppelte des Innendurchmessers, wie es bei Piezo 1 aus **Tabelle 5.2** der Fall ist. Das Zusammenfallen der beiden Eigenfrequenzen bewirkt also bei diesen Abmessungen offensichtlich eine Kopplung der beiden Eigenschwingungsformen. Diese Kopplung wiederum führt dazu, dass sich die Dehnungsmode nicht einzeln anregen lässt, sondern auch die bei perfekter Symmetrie theoretisch gar nicht anregbare, dritte In-Plane-Biegung angeregt wird.

Wenn also wie hier beim Ultraschall-Wanderwellentransport möglichst reine radialsymmetrische Schwingungen angeregt werden sollen, ist der Bereich des Durchmesserverhältnisses nahe  $\frac{d_a}{d_i} = 2$  zu vermeiden. Anderenfalls werden durch die Modenkopplung auch Wellen dritter Ordnung auf dem Wellenleiter angeregt, die das gewünschte axial-

symmetrische Schwingungsverhalten stören. Für die Modellbildung aus Kapitel 4 bedeutet dies, dass an der Annahme der axialsymmetrischen Verschiebungsfelder festgehalten werden kann, da der in Abschnitt 5.1 beobachtete Effekt aus dem ungünstigen Verhältnis von Außen- zu Innendurchmesser des Piezowandlers resultiert. Für weitere zu untersuchende Systeme soll daher das genannte Durchmesser Verhältnis vermieden werden, um sicherzugehen, dass die Messergebnisse nur marginale Anteile von nicht modellierten Wellenanteilen enthalten.

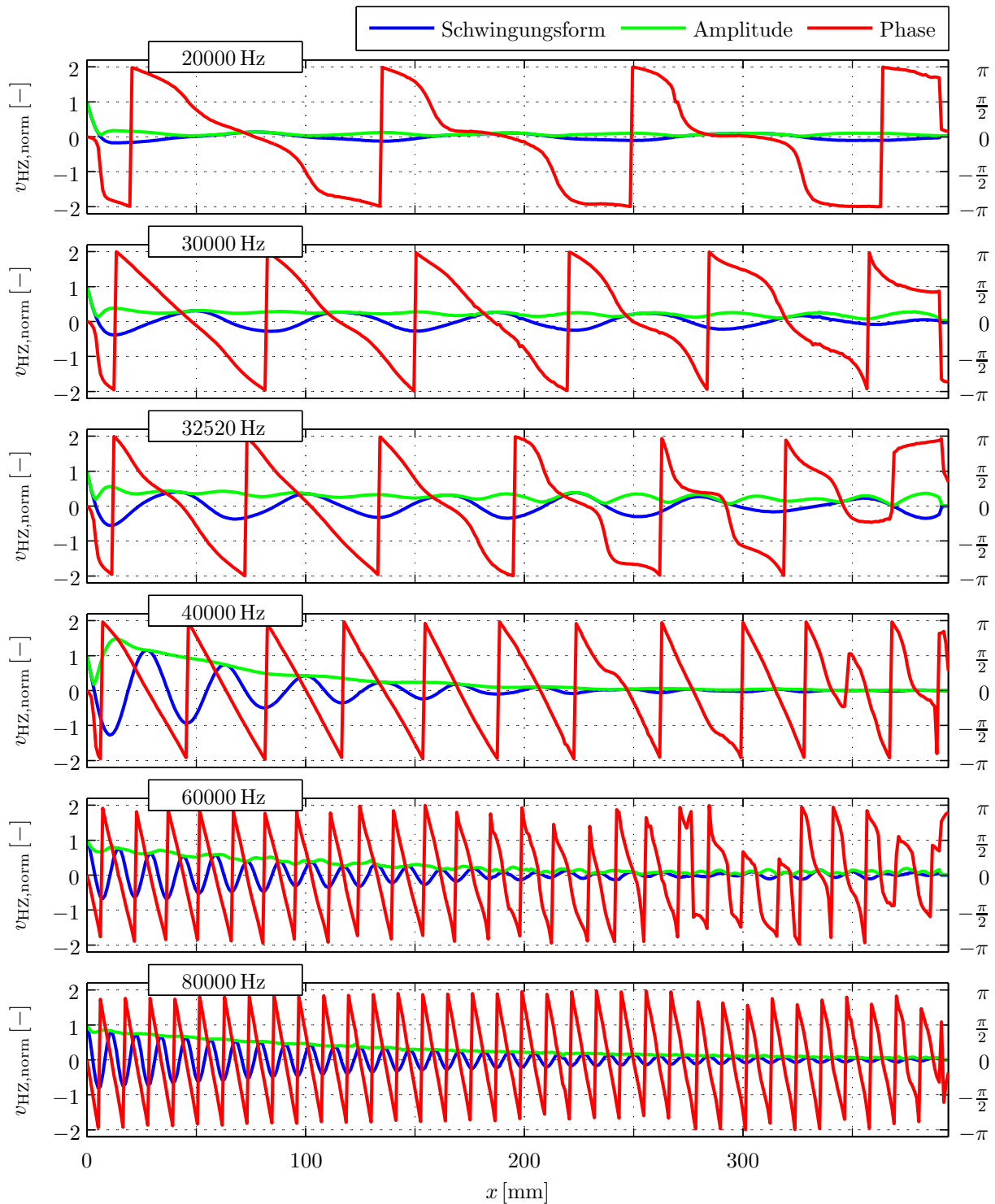
### 5.3 Variation der Anregungsfrequenz

Nachdem die Effekte für das Auftreten der nicht achssymmetrischen Schwingungen beim Betrieb von System I erklärt sind, soll im nächsten Schritt das frequenzabhängige Schwingungsverhalten der verschiedenen Systeme näher untersucht werden. Dazu werden an den Systemen II und III Messungen durchgeführt, um anschließend die Modelle aus Kapitel 4 validieren und deren Parameter identifizieren zu können.

Bei der Durchführung der Messungen werden erneut der Aufbau und das Equipment aus Abschnitt 5.1 verwendet. Für die verschiedenen Messungen wird das System jeweils am Piezowandler mit einer elektrischen Spannung vorgegebener Frequenz und fester Amplitude angeregt und die sich einstellende Schwingungsform mit dem Laser-Vibrometer erfasst und aufgezeichnet. Zunächst werden die Messungen für verschiedene Anregungsfrequenzen durchgeführt, wobei jeweils ein Scan entlang der Zylinderachse ausgeführt wird. Auf eine Variation der Winkelposition wird dabei nach den Erkenntnissen der vorangegangenen Abschnitte verzichtet, da aufgrund der radialsymmetrischen Schwingungsformen keine zusätzlichen Erkenntnisse aus einer Messung entlang des Umfangs zu erwarten sind. Die Systeme II und III werden für die Messungen jeweils bei einer festen Frequenz angeregt und die sich einstellende Schwingungsform aufgezeichnet. Anschließend wird die Frequenz variiert und die nächste Messung durchgeführt. Insgesamt werden für jedes System Messungen im Frequenzbereich von 10 bis 100 kHz durchgeführt, wobei im Bereich der Grenzfrequenz der radialsymmetrischen Schwingungen die Schrittweite reduziert wird, um die am Modell gezeigten Effekte hinreichend genau beobachten zu können.

In **Abb. 5.15** sind jeweils Amplitude und Phase der Schwingungsform des Hohlzylinders in Abhängigkeit der axialen Koordinate  $x$  zwischen Piezowandler und der Einspannstelle für ausgewählte Frequenzen dargestellt. Für die Lagerung wurde zunächst wieder der Teilkopf verwendet, um den Einfluss von Lagerstellen auf die Wellenausbreitung weitestgehend zu reduzieren. Die Schwingungen des Piezoelementes selbst werden an dieser Stelle nicht weiter betrachtet. Zur übersichtlicheren Darstellung wurde eine Normierung auf die gemessene Geschwindigkeit des Hohlzylinders in unmittelbarer Nähe des Piezowandlers durchgeführt. Die Normierung ermöglicht einen besseren Vergleich der Schwingungsformen, deren Amplituden sich in der Resonanz um bis zu vier Größenord-

nungen von den übrigen Messungen bei anderen Anregungsfrequenzen unterscheiden. Denn je näher die Anregungsfrequenz an der Eigenfrequenz liegt, desto höher werden die Amplituden der sich ausbreitenden Wellen im Hohlzylinder. Für die Auslegung eines Systems bedeutet dies, dass der Piezowandler entsprechend der gewählten Betriebsfre-



**Abbildung 5.15:** Gemessene Schwingungsform des Acryl-Hohlzylinders von System II bei geklemmter Lagerung mittels Teilkopf

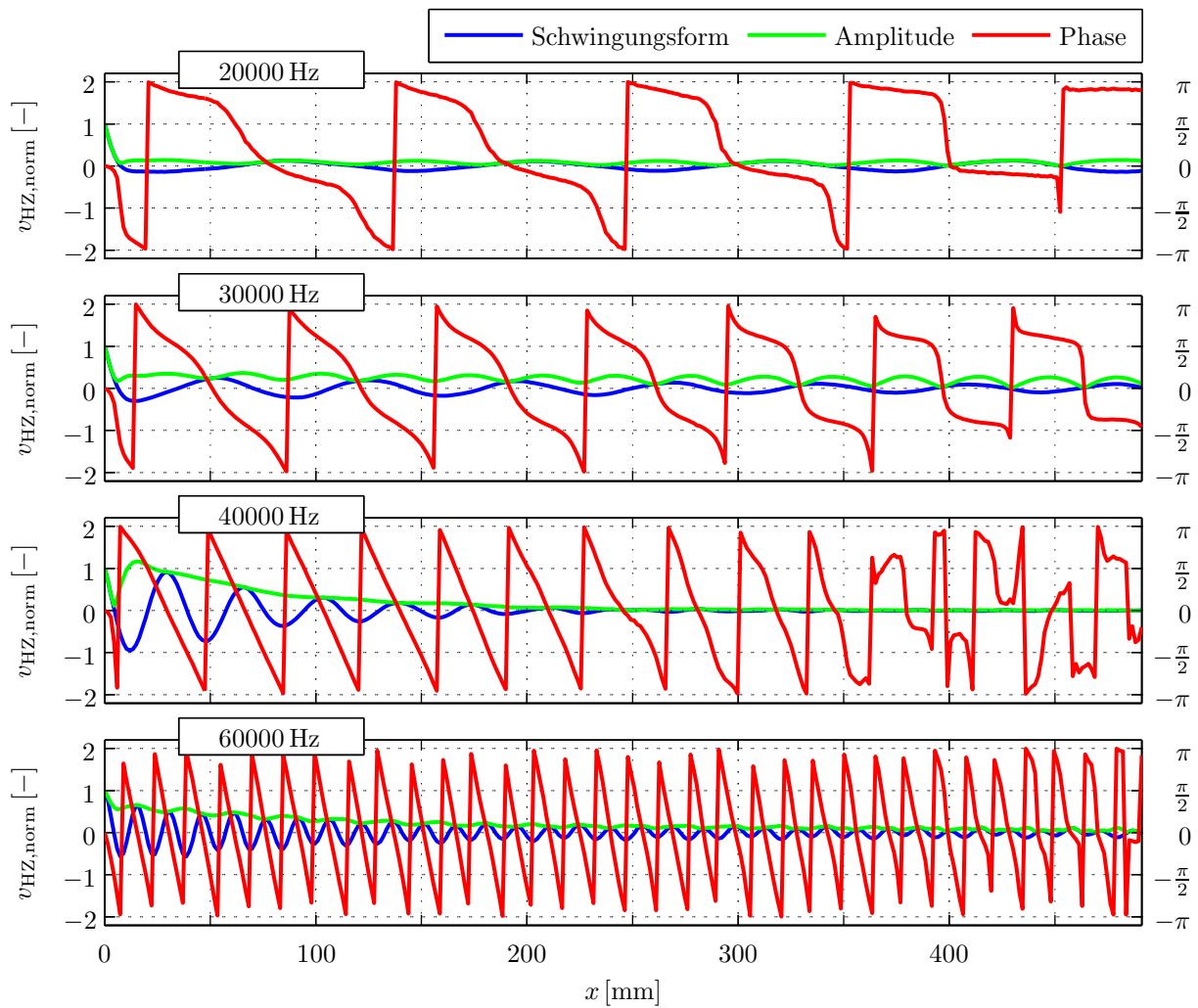
quenz dimensioniert werden muss, um ihn in Resonanz ansteuern und die auftretenden Amplitudenüberhöhung nutzen zu können. Es gilt also die Resonanzfrequenz der Radialmode so einzustellen, dass sie möglichst genau der Betriebsfrequenz entspricht. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz, bei gegebenem System lediglich die Anregungsfrequenz zu variieren, ist dann nicht zielführend, da sich so nicht die zum Transport notwendigen Amplituden erreichen lassen.

Betrachtet man die Phasenverläufe, so lässt sich für alle Anregungsfrequenzen ein deutlicher Wandel der Kurvenform mit steigender Koordinate  $x$  beobachten (siehe **Abb. 5.15**). Ausgehend vom Piezowandler fällt die Phase zunächst nahezu linear ab, wie es für eine Wanderwelle typisch ist (siehe **Abb. 2.15**). In der Nähe zum Wandler treten speziell bei den niedrigeren Frequenzen und großen Wellenlängen Abschnitte mit ansatzweise konstanter Phase und Sprüngen von  $-\pi$  bzw.  $-180^\circ$  auf. Mit zunehmender Nähe zur Einspannstelle werden diese für Stehwellen typischen Phasensprünge immer deutlicher. Allerdings sind sie aufgrund des immer noch in geringen Maßen existierenden Wanderwellenanteils nicht so perfekt ausgeprägt wie in **Abb. 2.16**. Auffällig ist der deutlich unterschiedliche Einflussbereich der Stehwellen. Sind bei 20 kHz auf mehr als der halben Zylinderlänge deutliche Phasensprünge sichtbar, so sind sie bei einer Anregungsfrequenz von 80 kHz nur marginal in unmittelbarer Nähe der Lagerung zu erkennen. Diese Abnahme des Stehwellenanteils bei steigender Frequenz lässt sich mit den verhältnismäßig kleinen Wellenlängen der sich ausbreitenden Wellen erklären. So lässt sich im Vergleich erkennen, dass bei 20 kHz die Zylinderlänge etwa 4,5 Wellenlängen entspricht, während es bei 80 kHz schon etwa 33 sind. Bei gleicher Dämpfung folgt so entsprechend eine deutlich schnellere Amplitudenreduktion bezogen auf die von der sich ausbreitenden Welle zurückgelegte Strecke.

## 5.4 Untersuchungen zur Reflexion und Absorption der Wanderwellen

Dieser Abschnitt widmet sich der Analyse der Absorption und Reflexion, wenn die Wanderwellen nach dem Durchlaufen des Hohlzylinders auf die Einspannung treffen. Um den Einfluss der klemmenden Lagerung im Teilkopf und die Reflektionen am Zylinderende näher zu untersuchen, werden die Messungen mit einer Lagerung auf zwei weichen Schaumstoffblöcken bei  $x = 50$  mm und  $x = 330$  mm wiederholt. Bei Verwendung dieser Lagerung kann die Reflektion der Wanderwellen am freien Ende analysiert werden, wobei allerdings eine mögliche Beeinflussung der Wanderwellen durch die Lagerung in Kauf genommen werden muss.

Die Ergebnisse einer solchen Messung sind in **Abb. 5.16** dargestellt. Die vom freien Ende ausgehenden Bereiche, in denen die Phase um jeweils  $180^\circ$  springt, sind deutlich größer und die Phasensprünge merklich schärfer als im vorherigen Versuch mit der klemmenden Lagerung (siehe **Abb. 5.15**). Der befürchtete Einfluss der Lagerung auf die Schwin-

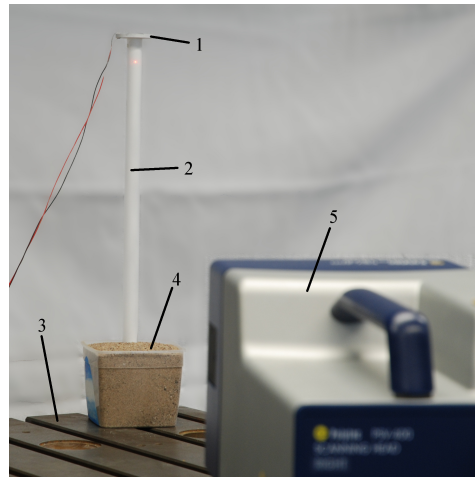


**Abbildung 5.16:** Gemessene Schwingungsform des Acryl-Hohlzylinders von System II bei frei-freier Lagerung mittels Schaumstoffblöcken

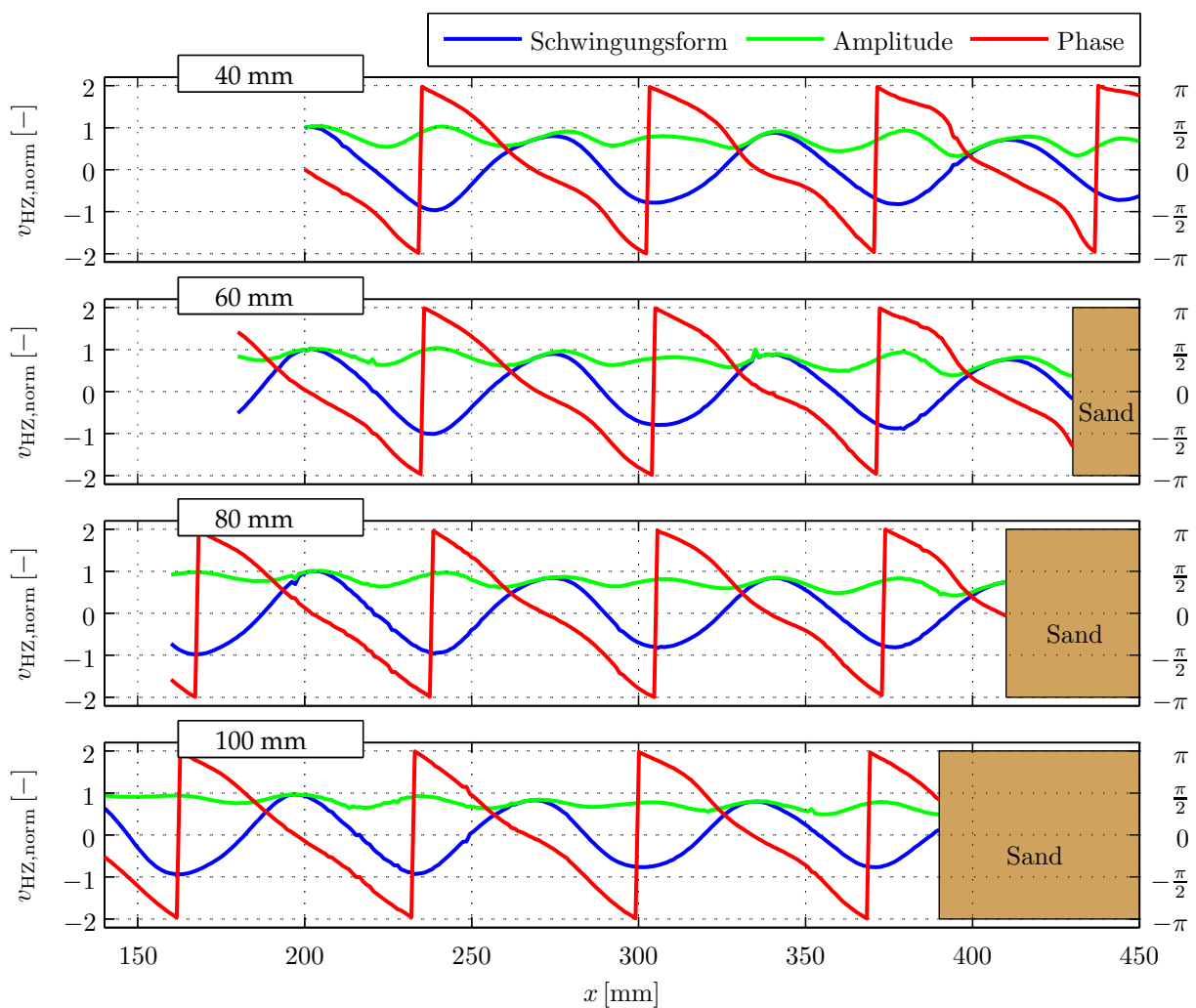
gungsform bzw. die sich ausbreitenden Wanderwellen, in Form von Unstetigkeiten im Amplituden- oder Phasenverlauf an den Positionen der Lagerungen, ist dagegen nicht auszumachen.

Sowohl bei der geklemmten Lagerung im Teilkopf als auch bei der annähernd freien Lagerung auf Schaumstoff ist eine Überlagerung von Wanderwellen und Stehwellen beobachtbar. Abhängig von der Art der Lagerung und der Anregefrequenz ist der Bereich in dem zumindest nahezu reine Wanderwellen vorliegen unter Umständen stark beschränkt. Wenn aber die Dämpfung der sich ausbreitenden Wellen möglichst genau identifiziert werden soll, muss der Einfluss der reflektierten Wellen so weit wie möglich reduziert werden. Um dies zu realisieren, müssen die Wanderwellen nach Durchlaufen der Beobachtungsstrecke möglichst vollständig absorbiert werden. Da die Anbringung diskreter Dämpfer bzw. Dämpfungselemente für den kontinuierlichen Hohlzylinder nicht ohne weiteres möglich ist, wird im Folgenden die Absorptionswirkung einer Lagerung in Sand messtechnisch untersucht. Dazu wird System 2, wie in **Abb. 5.17** dargestellt, in einem mit Sand gefüllten Behälter gelagert. Die Eintauchtiefe wird dabei zwischen 40 mm





**Abbildung 5.17:** Foto des Versuchsaufbaus mit sandgefülltem Behälter: Piezowandler (1), Acryl-Hohlzylinder (2), Schwingungsfundament (3), sandgefüllter Behälter (4), Scankopf des Laser-Vibrometers (5)



**Abbildung 5.18:** Gemessene Schwingungsformen des Acryl-Hohlzylinders von System II bei Lagerung in sandgefülltem Behälter und variabler Eintauchtiefe

(System steht gerade stabil im Sand) und 100 mm (Hohlzylinder berührt noch nicht den Behälterboden) schrittweise variiert. Gemessen wird die Geschwindigkeit jeweils über eine Länge von 250 mm beginnend 10 mm über der Sandoberfläche. Wird zur Normierung für alle Messreihen der gleiche komplexe Geschwindigkeitswert, hier bei 40 mm Eintauchtiefe an der Stelle  $x = 200$  mm gemessen, verwendet, ergibt sich **Abb. 5.18**.

Die minimale Verschiebung der einzelnen Wellen gegeneinander resultiert aus der Positioniergenauigkeit beim Variieren der Eintauchtiefe.

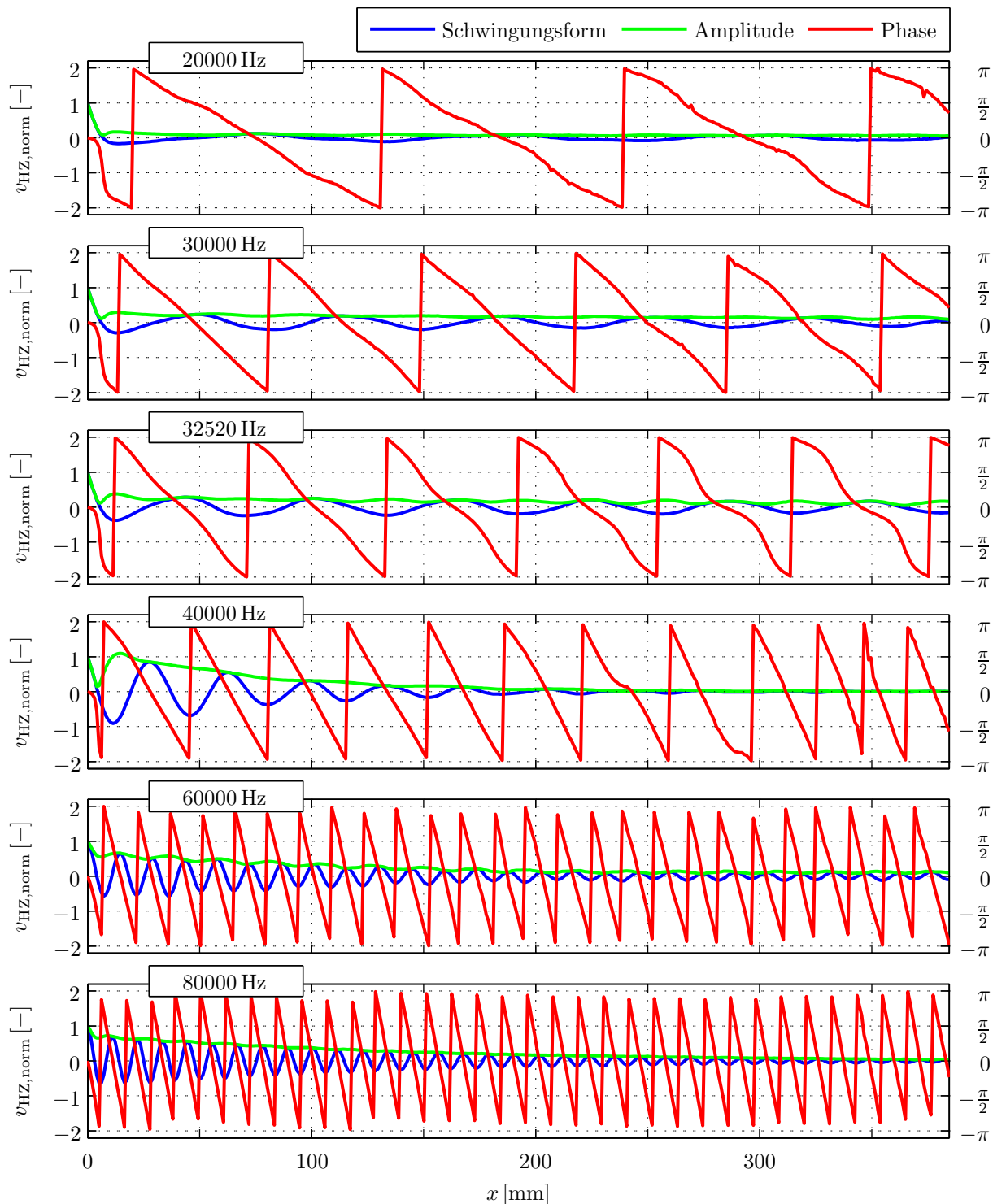
Es lässt sich deutlich erkennen, wie die dargestellten Phasenverläufe mit zunehmender Eintauchtiefe glatter werden, was sich zum Beispiel beim Vergleich der Verläufe im Bereich  $300 \text{ mm} < x < 360 \text{ mm}$  gut erkennen lässt. Damit einhergehend wird auch die Einhüllende der Amplituden mit zunehmender Eintauchtiefe deutlich glatter, was auf eine Abnahme des Stehwellenanteils hindeutet. Insgesamt zeigen aber alle Messungen eine gut ausgeprägte Wanderwelle mit nur kleinem Stehwellenanteil in der Nähe der Lagerung, wobei dessen Einfluss mit zunehmender Eintauchtiefe abnimmt.

## 5.5 Messreihen als Basis der Parameteridentifikation und Modellvalidierung

Der vorliegende Abschnitt beschreibt die abschließende Messreihe zur Analyse der sich im Acryl-Hohlzylinder ausbreitenden Wellen, deren Ergebnisse die Grundlage für die im folgenden Kapitel durchzuführende Identifikation und Validierung darstellen. Die Messungen aus Abschnitt 5.3 werden dafür mit einer Lagerung in Sand bei einer Eintauchtiefe von 100 mm wiederholt, da bei diesem Aufbau der Stehwellenanteil einen geringen Einfluss auf die Gesamtschwingungsform hat und damit eine Identifikation der Wanderwellenanteile mit ihrer zugehörigen Wellenlänge und Dämpfung ermöglicht wird.

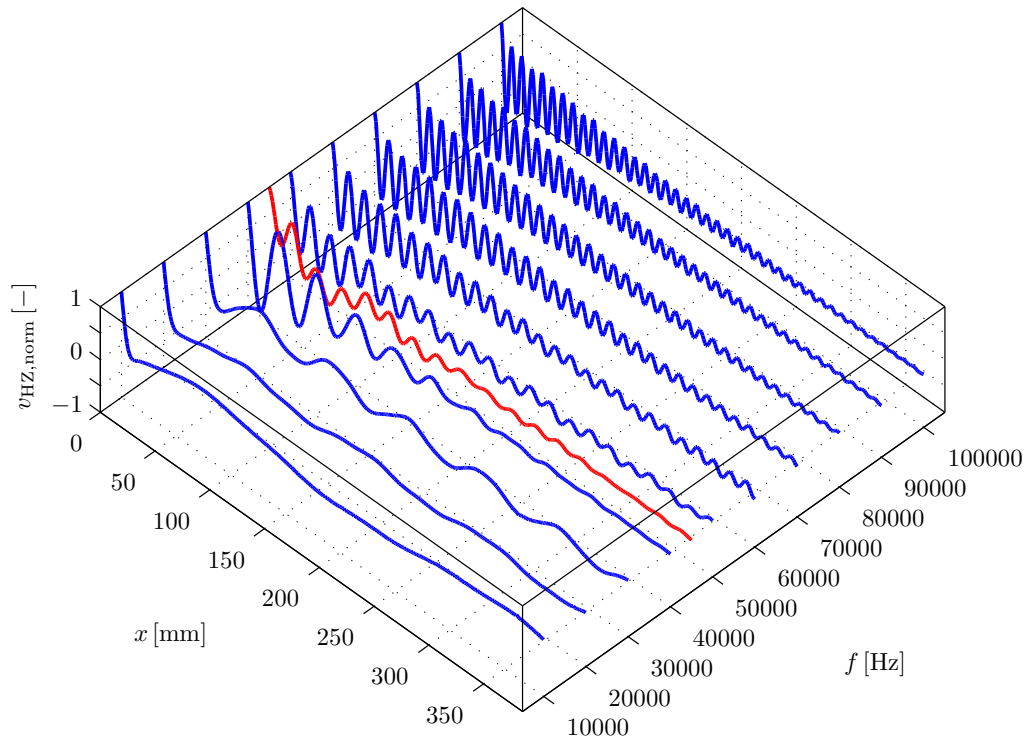
In **Abb. 5.19** sind ausgewählte Ergebnisse der Messungen für verschiedene Anregungsfrequenzen dargestellt. Nahezu unabhängig von der Frequenz zeigen alle Messungen einen sehr homogen abfallenden Phasenverlauf mit nahezu nicht vorhandenem Stehwellenanteil. Gerade die in den **Abb. 5.15** und **5.16** deutlich erkennbaren Phasensprünge in der Nähe des Teilkopfes bzw. des freien Endes sind nahezu vollständig verschwunden. Die vorliegenden Ergebnissen sollten somit die Analyse der Wanderwellenanteile und die Identifikation der Wellenlängen und Dämpfungen ermöglichen.

Bei der Betrachtung der Messungen aus diesem sowie aus den vorangegangenen Abschnitten ist zu erkennen, dass sich die Schwingungsformen und Wellenlängen der Wanderwellen in Abhängigkeit der Frequenz stark ändern. Im Modell findet sich diese Abhängigkeit in den Kurven der Dispersionsdiagramme wieder (siehe Kapitel 4). Während die in **Abb. 5.20** blau dargestellten Kurven eine relativ kontinuierliche Veränderung der Schwingungsform mit steigender Frequenz suggerieren, stört die rot dargestellte Schwingungsform bei 45 kHz dieses Bild. Betrachtet man den in **Abb. 5.21** dargestellten Bereich

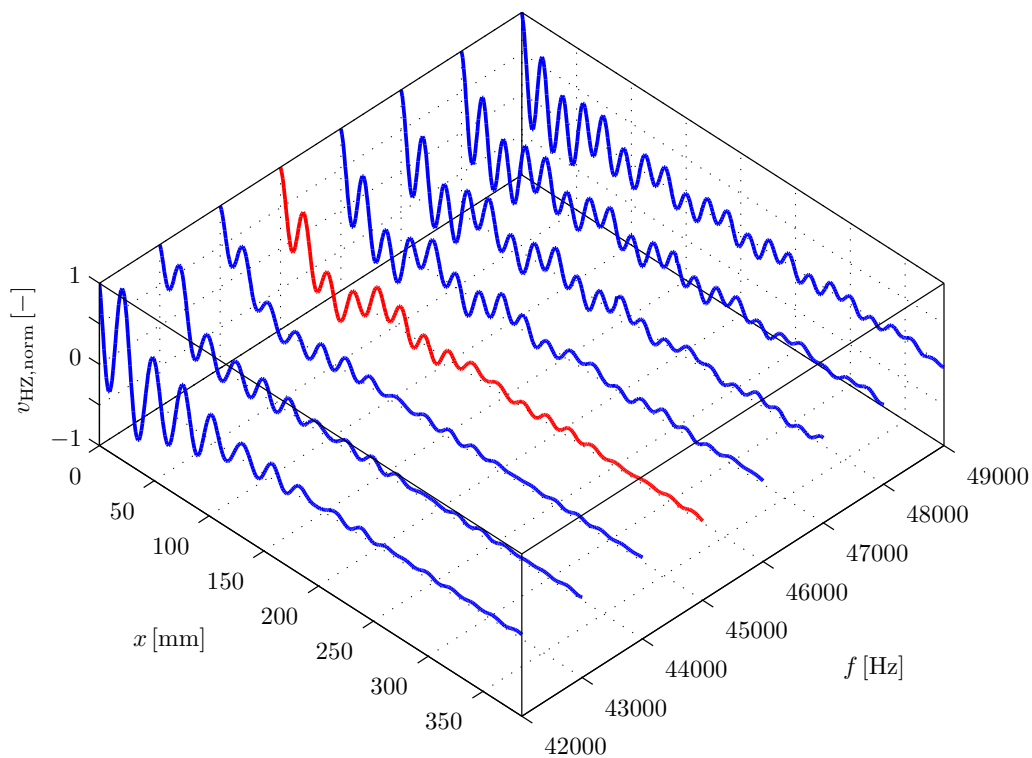


**Abbildung 5.19:** Gemessene Schwingungsformen des Acryl-Hohlzylinders von System II bei Lagerung in sandgefülltem Behälter

zwischen 42 kHz und 49 kHz genauer, sind in diesem Bereich je zwei Anteile unterschiedlicher Wellenlängen in der Schwingungsform erkennbar. Weiterhin fällt bei der näheren Betrachtung von **Abb. 5.20** auf, dass im unteren Frequenzbereich die Amplitude der sich ausbreitenden Wellen deutlich geringer ist, als die Amplitude an der Anregestelle, die das



**Abbildung 5.20:** Gemessene Schwingungsformen des Acryl-Hohlzylinders von System II bei Lagerung in sandgefülltem Behälter



**Abbildung 5.21:** Gemessene Schwingungsformen des Acryl-Hohlzylinders von System II bei Lagerung in sandgefülltem Behälter (vergrößerter Ausschnitt aus **Abb. 5.20**)

Erscheinungsbild der zugehörigen Schwingungsformen dominiert und auf einer Länge von wenigen Millimetern stark abfällt.

Basierend auf den in diesem Kapitel dargestellten Ergebnissen, sowie weiteren hier nicht näher dargestellten Messungen kann nun im kommenden Kapitel die Validierung der Modelle aus Kapitel 4 erfolgen.

## 5.6 Messung der Oberflächenpunktbahnen

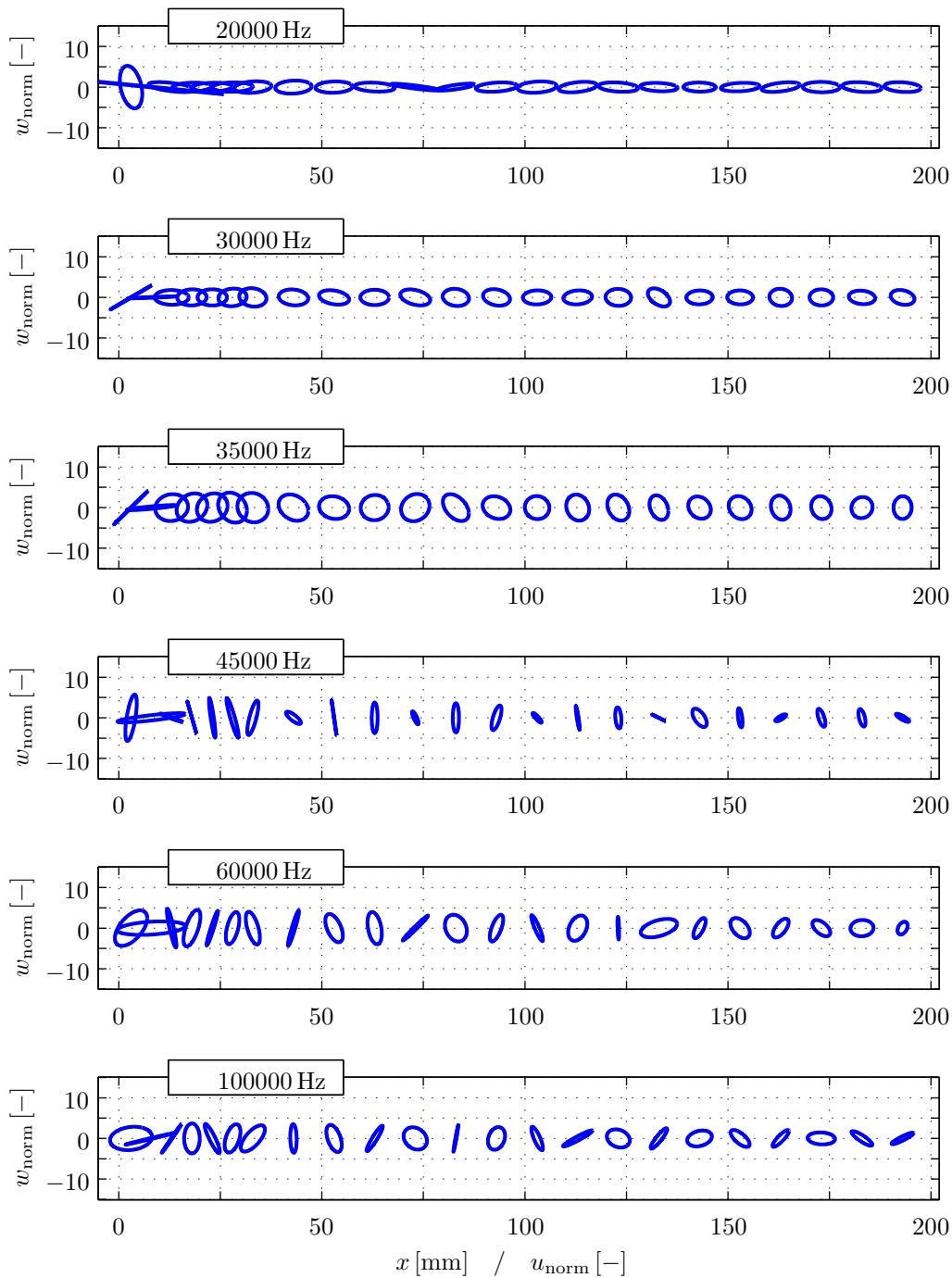
Der zuvor verwendete Aufbau wurde anschließend dahingehend verändert, dass das Scanning-Laser-Vibrometer durch ein 3D-Einpunkt-Vibrometer (*Polytec CLV 3000*) ersetzt wird. Über einen Spindeltrieb mit Skala kann das Vibrometer auf 0,1 mm genau entlang der Hohlzylinderachse verfahren werden, um an verschiedenen Punkten die Oberflächenpunktbahnen zu erfassen. Aufgrund der hierbei aufwändigeren Verstellung der Laserposition wird für diese Messreihen ein anders Vorgehen als zuvor gewählt. Unter Verwendung eines am Institut für Dynamik und Schwingungen entwickelten Frequenzgang-Messprogramms wird für jede Position ein Frequenzgang im Bereich von 5 kHz bis 100 kHz aufgenommen, bevor der Laser auf den nächsten Messpunkt verfahren wird. Zur Messung der Frequenzgänge wird eine Schrittsinusanregung verwendet, um ein gutes Signal-Rausch-Verhältnis zu erreichen. Dabei wird nach dem Umschalten der Frequenz zunächst abgewartet, bis ein eingeschwungener Zustand erreicht ist und erst dann die Messwerteaufzeichnung gestartet.

**Abb. 5.22** zeigt exemplarisch die an System II gemessenen Oberflächenpunkttrajektorien für verschiedene Anregungsfrequenzen in Abhängigkeit der Position, die jeweils dem Mittelpunkt der Ellipsen entspricht. Zur übersichtlichen Darstellung wurden die Amplituden derart normiert, dass

$$\hat{u}_{\text{norm}}(x)^2 + \hat{w}_{\text{norm}}(x)^2 = \text{const.} \quad (5.15)$$

gilt. Deutlich zu erkennen sind die zunächst sehr flachen Ellipsen, deren radialer Anteil mit steigender Frequenz zunimmt. Während die Messungen im unteren Frequenzbereich noch eine sehr gleichmäßige Ellipsenform mit nur leicht abnehmenden Amplituden zeigen, sind die Formen der Ellipsen bei den höheren Frequenzen stark ortsabhängig und ihre Amplituden nehmen deutlich schneller ab. In den Messungen bei 30 kHz und 35 kHz, welche etwa dem Auslegungsbereich des Systems entsprechen, ist eine sehr gleichmäßige Ellipsenform mit etwa gleichen Anteilen in radialer und axialer Richtung zu erkennen. Mit dieser Ellipsenform weist das System bei Betrieb in der Resonanzfrequenz von 32.520 Hz eine sehr gute Fördercharakteristik auf.

Bezüglich weiterer Ergebnisse der hier beschriebenen Messungen sei auf den Abschnitt 6.3 verwiesen, der diese den Simulationsergebnissen vergleichend gegenüberstellt.



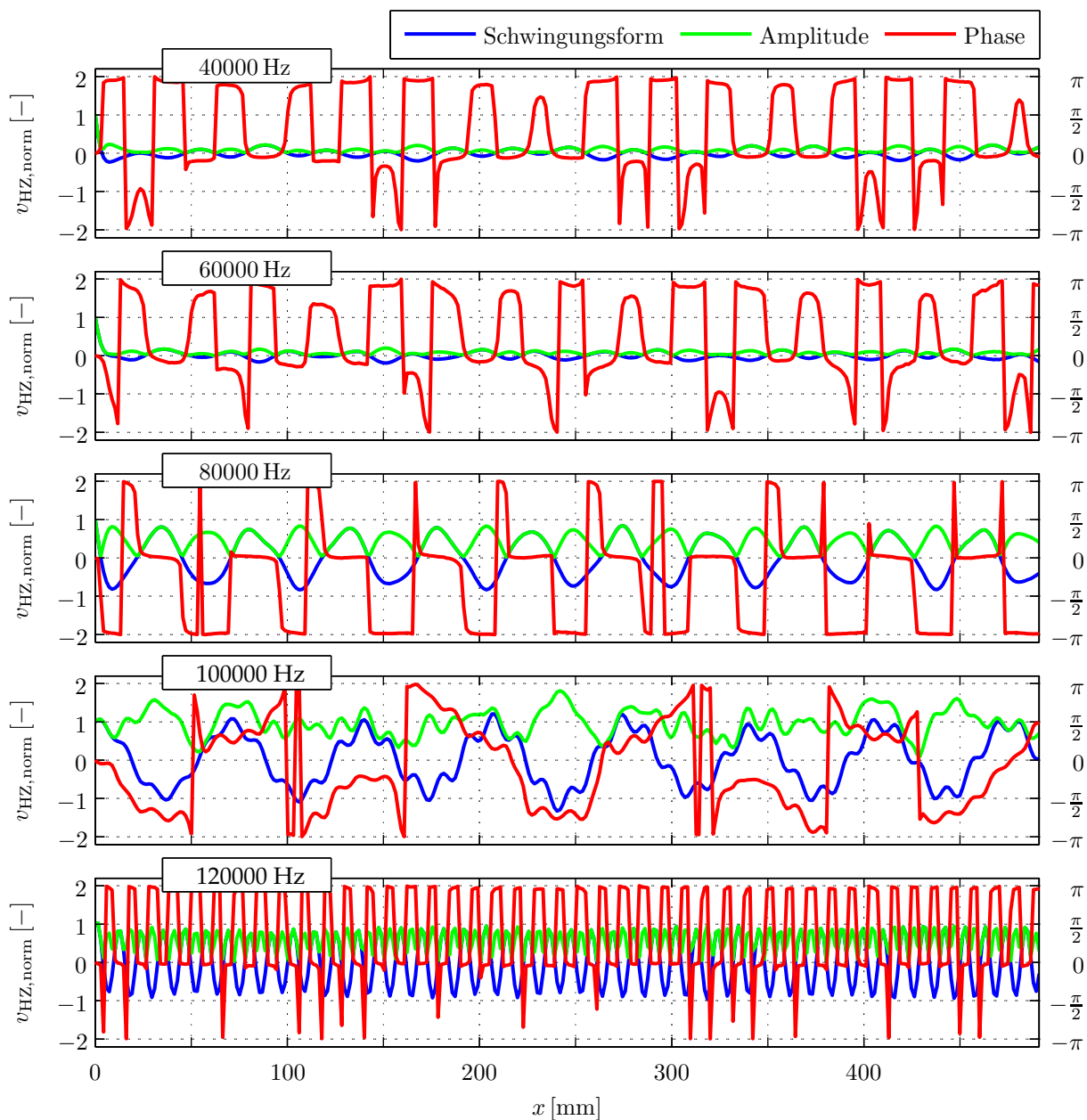
**Abbildung 5.22:** Gemessene Trajektorien der Oberflächenpunkte (Außenseite) von System II

## 5.7 Systeme mit Aluminium-Hohlzylinder

Viele der bisherigen Veröffentlichungen beschreiben die hohe Materialdämpfung des Acryls als eine wesentliche Voraussetzung, um Wanderwellen zum Ultraschall-Pulvertransport erzeugen zu können. Allerdings verwendeten KÜHNE ET. AL [47, 48, 46] Hohlzylinder aus Aluminium alternativ zu Acryl, und konnten auch mit diesem Aufbau Wanderwellen erzeugen und zum Transport nutzen. Diese Tatsache zusammen mit den

soeben gewonnenen Ergebnissen legen die Vermutung nahe, dass nicht nur die Dämpfung des Wellenleiters selbst, sondern auch die Dämpfung durch den Abschluss im Vorratsbehälter essentiell für die Funktion des Systems sind. Demnach wäre ein Ultraschall-Wanderwellentransport-System grundsätzlich mit Hohlzylindern aus beliebigen Materialien realisierbar. Um dies zu überprüfen, werden im folgenden Messungen an System IV (siehe **Tabelle A.1**) analog zu Abschnitt 5.4 durchgeführt, anhand derer die Reflexion und Absorption bei Verwendung eines Aluminium-Hohlzylinders näher betrachtet werden.

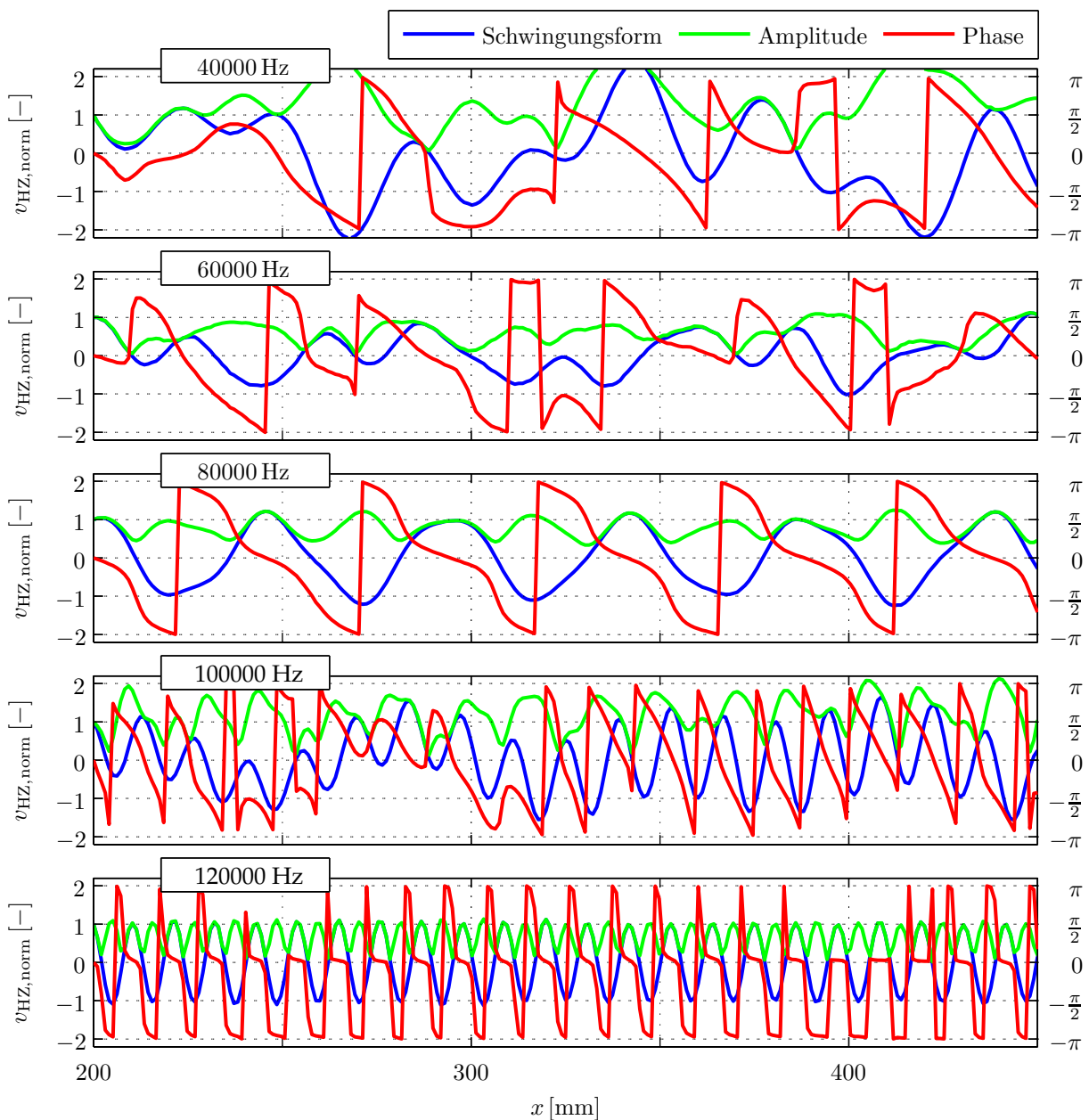
Am frei-frei gelagerten Aluminium-Hohlzylinder (siehe **Abb. 5.23**) ist erwartungsgemäß



**Abbildung 5.23:** Gemessene Schwingungsform des Aluminium-Hohlzylinders bei freier Lagerung mittels Schaumstoffblöcken

kein Wanderwellenanteil erkennbar, die Phase springt in  $180^\circ$ -Schritten. Eine Ausnahme bildet die Anregung mit 100 kHz, die knapp oberhalb der Grenzfrequenz für das Auftreten der Radialschwingungen liegt. Hier sind in der Schwingungsform offensichtlich zwei verschiedene Wellenanteile unterschiedlicher Wellenlängen ( $\lambda_1 \approx 14$  mm und  $\lambda_2 \approx 70$  mm) enthalten. Diese Überlagerung der Wellen macht die Auswertung des Phasensignals nahezu unmöglich. Nur mit Mühe lassen sich einzelne, allerdings sehr unscharfe,  $180^\circ$ -Phasensprünge erahnen.

Bei der Lagerung des Zylinders im sandgefüllten Behälter ist eine deutliche Glättung der Phasenverläufe erkennbar. Am deutlichsten wird diese in der Messung bei 80 kHz. Aus



**Abbildung 5.24:** Gemessene Schwingungsform des Aluminium-Hohlzylinders bei Lagerung in sandgefülltem Behälter



**Tabelle A.1** ergibt sich die Grenzfrequenz für dieses System zu  $f_{\text{grenz,F}} = 93,260$  kHz, d. h. 80 kHz entspricht etwa  $0,86 \cdot f_{\text{grenz,F}}$  und liegt damit im optimalen Arbeitsbereich, in dem sich radiale Wanderwellen optimal anregen lassen. Bei niedrigeren Frequenzen treten sehr unregelmäßige Schwingungsformen auf, die aus der Kombination von radialer Anregung bei nur minimaler Radialverschiebung der in diesem Frequenzbereich anregbaren Wellen resultiert. Im höheren Frequenzbereich dagegen zeigen sich sehr gleichmäßige Schwingungsformen mit erkennbaren Wanderwellen- und Stehwellenanteilen.

## 5.8 Zusammenfassung

Bei der dreidimensionalen Messung des radialen Verschiebungsfeldes verschiedener Prototypsysteme zeigte sich in einem Fall, dass neben den erwarteten radialsymmetrischen Wellen auch Wellen dritter Ordnung, d. h. mit drei Wellen auf dem Umfang, angeregt wurden. Mittels Messungen an den verwendeten Piezowandlern und entsprechender Analysen konnte gezeigt werden, dass diese Wellen auf das besondere Durchmesser-Verhältnis des Piezowandlers von System I ( $\frac{d_a}{d_i} = 2$ ) zurückzuführen sind. Bei diesem Durchmesser-Verhältnis fallen gerade die Eigenfrequenzen der Radialmode und der dritten In-Plane-Biegung des Piezowandlers zusammen. Durch eine auftretende Kopplung zwischen den beiden Moden wird daher neben der Radialmode auch die In-Plane-Biegemode angeregt.

Im weiteren Verlauf werden die Messungen der frequenzabhängigen Schwingungsformen beschrieben und deren Ergebnisse dargestellt. Als Konsequenz der ersten Messungen mit einem Teilkopf, bei dem sich noch relativ deutlich die Reflexion der Wanderwellen an der Einspannung zeigte, wurden die abschließenden Messungen mit einer Lagerung in einem sandgefüllten Behälter durchgeführt. Somit stehen Messungen zur Verfügung, anhand derer im Folgenden die Validierung der Modelle durchgeführt werden kann.

Auch bei den abschließend durchgeführten Messungen am System mit Aluminium-Hohlzylinder konnte eine gute Dämpfungswirkung der Lagerung in Sand beobachtet werden. So ließen sich trotz der geringen Materialdämpfung des Aluminiums Wanderwellen mit kontinuierlich abfallendem Phasenverlauf anregen.

## 6 Modellvalidierung

Im vorliegenden Kapitel soll die Validierung der Modelle aus Kapitel 4 anhand der in Kapitel 5 beschriebenen Messungen durchgeführt werden. Dafür werden zunächst die anhand der Modelle bestimmten Zusammenhänge zwischen Anregungsfrequenz, Wellenzahl bzw. Wellenlänge und Dämpfung betrachtet, die allen weiteren Simulationen zugrunde liegen und deren grafische Darstellung sich in den Dispersionsdiagrammen wiederfindet. Anschließend wird das im Versuch ermittelte Schwingungsverhalten der Hohlzylinder bei radialsymmetrischer Anregung näher analysiert und mit den Ergebnissen der modellbasierten Simulationen verglichen. Hierbei bilden zunächst die Schwingungsformen an sich und später die elliptischen Oberflächenpunktbahnen die Schwerpunkte.

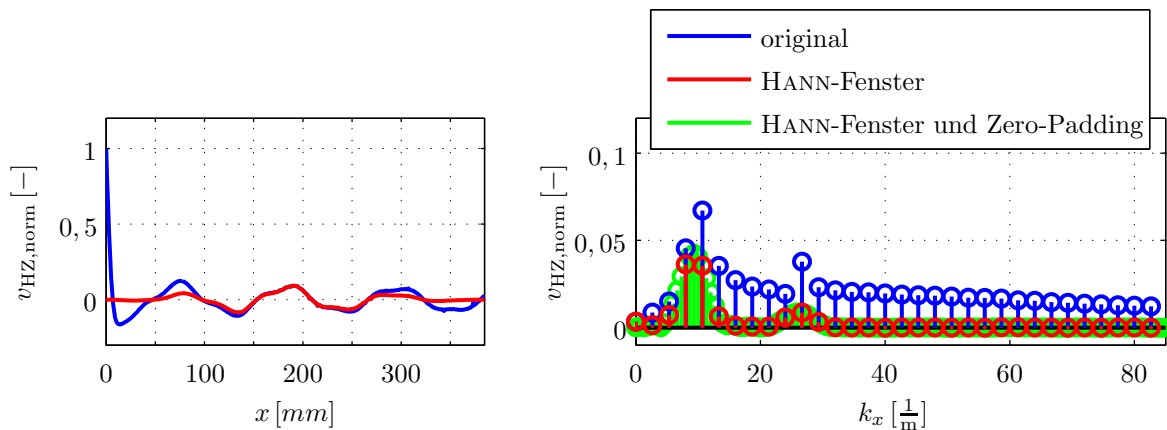
### 6.1 Identifikation der frequenzabhängigen Wellenzahlen

Zunächst sollen aus den Ergebnissen der Messungen von Abschnitt 5.5 in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz die Wellenlängen der einzelnen Wellenanteile sowie die zugehörigen Dämpfungswerte identifiziert werden. Da diese Werte direkt mit der im Dispersionsdiagramm enthaltenen komplexen Wellenzahl zusammenhängen, wird so eine erste grundlegende Modellvalidierung und die Bestimmung der Materialparameter möglich.

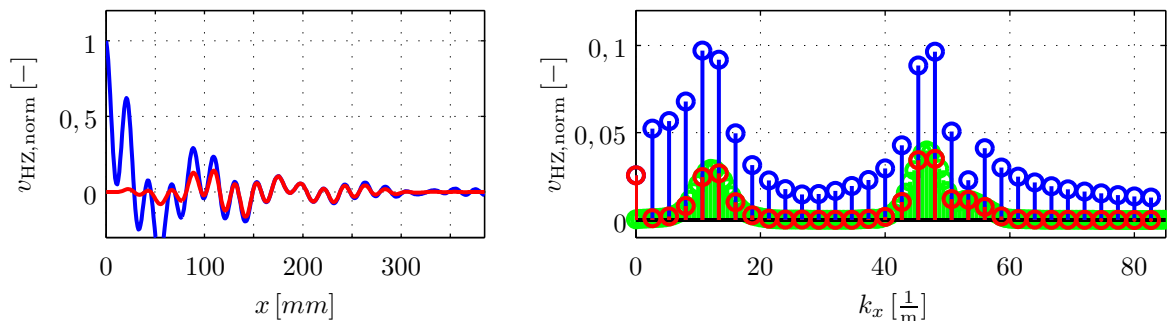
Als erster Ansatz wird die naheliegende Analyse basierend auf der diskreten FOURIER-Transformation verwendet, um aus der Schwingungsform die Wellenlängen und die Dämpfungen der verschiedenen Wellenanteile zu identifizieren. Alternativ wird der aus der experimentellen Modalanalyse bekannte *Complex-Exponential-Algorithmus* (siehe SPITZNOGLE UND QUAZI [93]) in einer an die vorliegenden Randbedingungen angepassten Form zum Einsatz kommen. Ein Vergleich der Identifikations-Ergebnisse mit den nach Kapitel 4 berechneten Dispersionskurven bildet den Abschluss dieses Abschnittes.

#### 6.1.1 Analyse mittels diskreter FOURIER-Transformation

Um aus den gemessenen Schwingungsformen, wie sie in **Abb. 5.20** und **5.21** dargestellt sind, die Wellenlängen der enthaltenen Wellenanteile zu ermitteln, liegt es nahe wie in Abschnitt 5.1 die FOURIER-Transformation zwischen Orts- und Wellenzahlbereich anzuwenden, allerdings hier mit der axialen Koordinate  $x$  und nicht wie zuvor mit dem Winkel  $\varphi$  als Basiskoordinate.



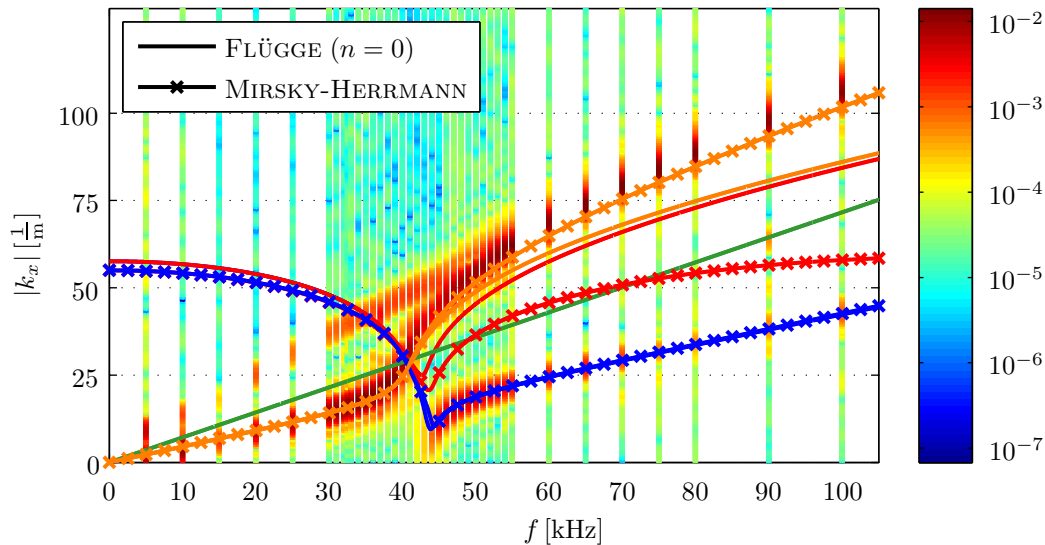
**Abbildung 6.1:** Schwingungsform des Acryl-Hohlzylinders von System II bei 20 kHz Ortsbereich (links) und Wellenzahlbereich (rechts)



**Abbildung 6.2:** Schwingungsform des Acryl-Hohlzylinders von System II bei 45 kHz Ortsbereich (links) und Wellenzahlbereich (rechts)

Die Anwendung der FOURIER-Transformation auf die gemessenen Schwingungsformen bringt allerdings einige Probleme mit sich. Die Amplitudenabnahme für steigendes  $x$  und die damit einhergehende Aperiodizität führen zu starken Leakage-Effekten, wie sie sich in den beiden blau dargestellten Spektren in den **Abb. 6.1** und **6.2** erkennen lassen. Es sind zwar Überhöhungen sichtbar, ihre Form ist allerdings sehr unscharf und macht die Zuordnung zu einer bestimmten Wellenzahl extrem schwierig. Die Bestimmung der zugehörigen Dämpfung aus diesen Spektren scheint nahezu unmöglich. Durch Fensterung mit einem HANN-Fenster<sup>1</sup> lassen sich die Leakage-Effekte zwar deutlich reduzieren, allerdings gehen dadurch die wichtigen Anteile der Schwingungsform in der Nähe der Anregerstelle verloren. Wie sich unschwer an den roten Kurven im Ortsbereich erkennen lässt, werden die Nahfeldanteile im Bereich kleiner  $x$  fast vollständig eliminiert und können demnach mit der folgenden Analyse auch nicht aufgelöst werden. Die Anwendung eines Exponentialfensters wie es beim Impact-Testing in der Modalanalyse verwendet wird ist an dieser Stelle ebenfalls nicht zielführend. Die gemessenen Schwingungsformen ähneln zwar den Impulsantworten schwingungsfähiger Systeme, erfüllen aber nicht die für das Exponentialfenster notwendige Bedingung  $v(x = 0) = 0$ .

<sup>1</sup>Benannt nach dem Österreicher Julius von HANN. Oftmals wird hier der Name HANNING-Fenster verwendet, der aus dem englischsprachigen stammt. Wobei mit HANN-ING ursprünglich die Anwendung des HANN-Fenster bezeichnet wurde.



**Abbildung 6.3:** FFT der frequenzabhängigen Schwingungsformen des in Sand gelagerten Acryl-Hohlzylinders mit HANN-Fenster und Zero-Padding

Trotz der genannten Einschränkungen soll die FOURIER-Transformation eingesetzt werden, um eine erste Analyse der gemessenen Schwingungsformen durchzuführen. Um die Auflösung der Wellenzahlen zu erhöhen wird zusätzlich zum HANN-Fenster ein Zero-Padding mit der dreifachen Messlänge durchgeführt. Dadurch ergibt sich eine viermal so hohe Wellenzahl-Auflösung, die auch eine Dämpfungsbestimmung, z. B. mit der Methode der Halbwertsbreiten, erlauben würde. Die vollständige Darstellung der mittels FFT in den Wellenzahlbereich transformierten, an System II gemessenen Schwingungsformen, zeigt **Abb. 6.3**. Ihr gegenübergestellt sind die anhand der beiden in Kapitel 4 beschriebenen Schalentheorie-Ansätze berechneten Dispersionskurven für axialsymmetrische Schwingungen ( $n = 0$ ). Diese Darstellung entspricht der Darstellung der normierten Wellenzahl aus **Abb. 4.6**. Die orange und blau dargestellten Kurven nach FLÜGGE und MIRSKY-HERRMANN lassen sich klar den Messergebnissen zuordnen. Dabei sind allerdings im Bereich hoher Frequenzen und hoher Wellenzahlen Abweichungen zu erkennen. Während die Kurve nach MIRSKY-HERRMANN nur einen leichten Versatz zur Messung aufweist, sind die Abweichungen der FLÜGGE-Kurve deutlich. Der für niedrige Frequenzen linear ansteigende Kurvenast in den Ergebnissen der FFT-Analyse ist in den Simulationsergebnissen nicht wiederzufinden, auf ihn soll im folgenden Abschnitt kurz eingegangen werden. Anteile des in **Abb. 4.6** rot dargestellten, die Nahfelder beschreibenden, Kurvenasts und die grün dargestellten Torsionswellen, lassen sich aus der FOURIER-Transformation der Messungen nicht erkennen. Da aber, wie es bereits in **Abb. 5.20** deutlich zu sehen war, gerade diese Nahfeldanteile im Bereich unterhalb der Grenzfrequenz entscheidend für die sich einstellende Schwingungsform sind und diese maßgeblich prägen, muss ein anderes Verfahren genutzt werden, um diese Anteile identifizieren zu können. Die nächsten Abschnitte beschreiben ein solches Verfahren und zeigen dessen Anwendung auf die gemessenen Schwingungsformen.

### 6.1.2 Ortsbereichs-Analyse mittels *Complex-Exponential-Algorithmus*

Bei der Suche nach einer geeigneten Methode zur Identifikation der einzelnen Wellenanteile mit zugehöriger Wellenlänge und Dämpfung hilft ein genauerer Blick auf die Schwingungsformen. Betrachtet man diese genauer, fällt ihre starke Ähnlichkeit zu Impulsantwortfunktionen auf. Die Identifikation solcher messtechnisch ermittelten Systemantworten ist eine typische Aufgabe aus dem Gebiet der experimentellen Modalanalyse. Dort mit dem Ziel, die strukturdynamischen Eigenschaften in Form der Parameter Eigenfrequenz, modale Dämpfungen und Eigenvektor zu identifizieren. Es liegt daher nah, sich unter den bei der experimentellen Modalanalyse verwendeten Identifikationsverfahren umzusehen, um einen geeigneten Identifikations-Algorithmus zu finden und auf den vorliegenden Anwendungsfall zu übertragen. Unter den Zeitbereichs-Algorithmus der experimentellen Modalanalyse finden sich verschiedenartigste Algorithmen, die entweder direkt die gemessenen Zeitsignale oder die Impulsantwortfunktion nutzen um die modalen Parameter zu identifizieren. Der *Complex-Exponential-Algorithmus* (CEA, siehe SPITZNOGLE UND QUAZI [93] sowie Anhang D) ist ein solcher Algorithmus, der die Parameter aus der Impulsantwortfunktion bestimmt, welche typischerweise aus der zuvor im Frequenzbereich ermittelten Frequenzgangfunktion bestimmt wird. Die Übertragung des CEA auf die in der vorliegenden Arbeit gemessenen Schwingungsformen scheint aufgrund der Ähnlichkeit zu Impulsantwortfunktionen ein vielversprechend Ansatz zu sein, der im folgenden näher untersucht werden soll. Impulsantwortfunktionen und die hier vorliegenden Schwingungsformen sind sich in ihrer mathematischen Struktur sehr ähnlich, bestehen sie doch beide im wesentlichen aus einer Überlagerung abklingender (Sinus-)Wellenanteile.

Zuerst veröffentlicht wurde der *Complex-Exponential-Algorithmus* zur Analyse von Zeitsignalen von SPITZNOGLE UND QUAZI [93]. Die Autoren zeigen in ihrer Veröffentlichung, dass sie mit dem Algorithmus deutlich höhere Frequenzauflösungen als mit einer herkömmlichen FOURIER-Transformation, wie sie auch im vorangegangenen Abschnitt dieser Arbeit verwendet wurde, erreichen können. Somit können in einem Signal enthaltene Frequenzanteile deutlich genauer bestimmt werden, was sich im vorliegenden Fall positiv auf die Bestimmung der in der Schwingungsform enthaltenen Wellenlängen auswirken sollte.

Im Lauf der Zeit wurden verschiedene Erweiterungen des CEA veröffentlicht, die zeitgleich mehrere Impulsantwortfunktionen bei identischer Referenz (*Least-Squares-Complex-Exponential-Algorithmus* / LSCE, siehe BROWN ET AL. [5]) und mit mehreren Referenzen (*Polyreference-Time-Domain* / PTD oder *polyreference-Least-Squares-Complex-Exponential* / *p-LSCE*, siehe VOLD ET AL. [112], VOLD UND ROCKLIN [113] sowie MERGEAY [62]) identifizieren. Durch die gleichzeitige Identifikation vieler Impulsantwortfunktionen liefern diese Verfahren eine globale Schätzung von Eigenfrequenz und Dämpfung, was die Qualität der Ergebnisse gegenüber einer separaten Identifikation erhöht. Aus diesem Grund fand die Polyreference-Version (PTD / *p-LSCE*) in den 1980er Jahren große Verbreitung

und ist seit dieser Zeit einer der Standard-Algorithmen der experimentellen Modalanalyse und in zahlreichen kommerziellen Softwaresystemen implementiert.

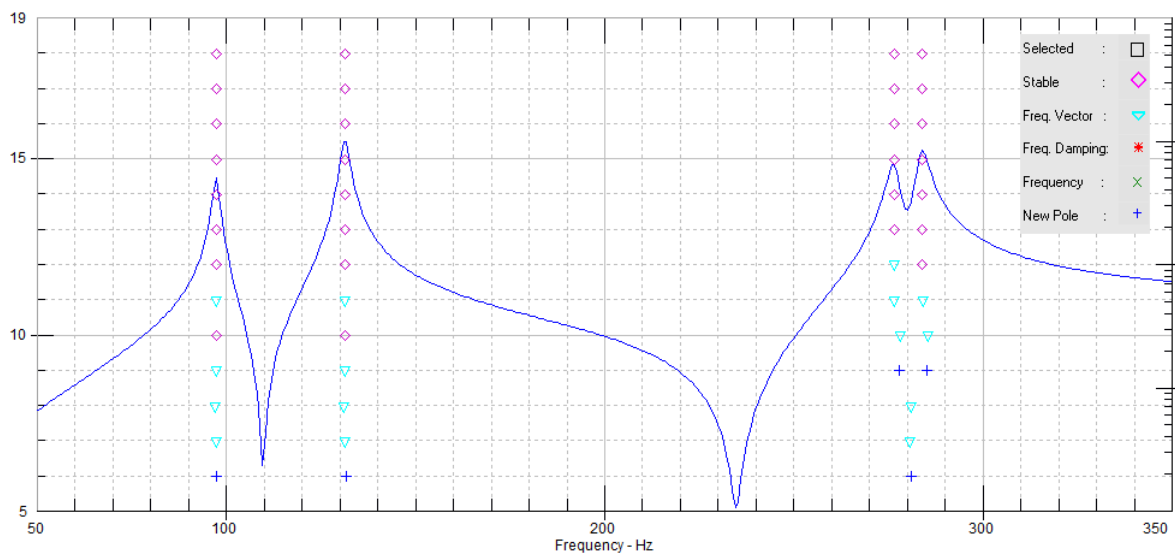
Im vorliegenden Fall der Identifikation von Wellenlängen aus Schwingungsformen ist allerdings die SISO-Version, also die ursprüngliche Version des *CEA*, vollkommen ausreichend, da für jede Frequenz nur jeweils eine Schwingungsform vorliegt und zu analysieren ist. Dabei wird, wie zuvor bei der FFT-Analyse, der Ortsbereich anstelle des Zeitbereichs verwendet und die komplexe Wellenzahl  $k$  tritt an die Stelle der in der experimentellen Modalanalyse verwendeten Pole  $\lambda$ .

Ein wichtiger Punkt bei der Anwendung des *CE*-Algorithmus ist die Wahl der Modellordnung<sup>2</sup> $n$ , die die Ergebnisse entscheidend beeinflusst. Die Modellordnung muss in der Regel deutlich größer als die Anzahl der zu identifizierenden Pole gewählt werden, um die in den Messungen enthaltenen Störungen mit abbilden zu können. Auf der anderen Seite führen hohe Modellordnungen wiederum zu einer Vielzahl von numerischen Polen, die physikalisch bedeutungslos sind. Als Hilfsmittel zur Bestimmung der physikalischen Pole wird bei der Modalanalyse das Stabilitätsdiagramm eingesetzt. Die Grundidee hinter der Verwendung des Stabilitätsdiagramms besteht darin, dass bei einer Variation der Modellordnung diejenigen Pole, die das gemessene physikalische Verhalten der Struktur wiedergeben, unabhängig von der Modellordnung stets gleich, oder zumindest sehr ähnlich, identifiziert werden. Im Gegensatz dazu verändern sich numerische Pole mit der Modellordnung hinsichtlich Frequenz und Dämpfung und können so von den relevanten Polen unterschieden werden. Die Auswertung des Stabilitätsdiagramms erfolgt zumeist durch den Benutzer, der aus der grafischen Darstellung die von ihm als relevant eingestuften Pole auszuwählen hat. Nach der Auswahl der Pole, die im Weiteren verwendet werden sollen, sind die charakteristischen Größen des Systems, d. h. Eigen(kreis)frequenzen und modale Dämpfungen, bestimmt. Um die Auswahl der Pole zu erleichtern, werden diese in Abhängigkeit der Frequenz (Abszisse) und der Modellordnung (Ordinate) mit verschiedenfarbigen Symbolen dargestellt, die die Stabilität der Pole repräsentieren (siehe **Abb. 6.4**). Stabilität meint dabei, ob sich Frequenz, Dämpfung und zugehöriger Eigenvektor des Pols mit steigender Modellordnung nicht oder nur in vorgegebenen Grenzen verändern. Die typischerweise für die Frequenzen zulässigen Abweichungen liegen bei 1 %, für die Eigenvektoren bei 2 % und für die Dämpfungen bei bis zu 5 %, jeweils angegeben als prozentuale Veränderung bezogen auf den Absolutwert (siehe z. B. VAN DER AUWERAER UND PETERS [1]). Da im vorliegenden Fall die örtliche Abtastung an die Stelle der Zeit tritt und jede Messung separat analysiert wird, können im vorliegenden Fall keine Eigenvektoren identifiziert werden. An ihrer Stelle lässt sich aber die Amplitude des zu dem jeweiligen Pol gehörigen Wellenanteils verwenden und auf Stabilität überprüfen.

Um den *CEA*-Algorithmus auf in Abhängigkeit des Ortes gemessene Schwingungsformen anwenden zu können und die komplexen Kreiswellenzahlen  $k$  sowie daraus die

---

<sup>2</sup>Die Modellordnung  $n$  bestimmt die Zahl der verwendeten Pole im Modell. Es werden jeweils  $2n$  Pole im Ansatz verwendet, so dass sich maximal  $n$  konjugiert komplexe Polpaare bestimmen lassen.



**Abbildung 6.4:** Darstellung eines Stabilitätsdiagramms aus dem kommerziellen Modalanalyse-Paket m+p international SO Analyzer®

Wellenlänge und zugehörige Dämpfung zu identifizieren, sind einige Anpassungen notwendig. Bei der experimentellen Modalanalyse wird ein Ansatz der Form

$$w(t) = \hat{A}e^{\lambda t} \quad (6.1)$$

mit dem komplexen Eigenwert

$$\lambda = -D\omega_0 \pm j\omega_D = -D\omega_0 \pm j\sqrt{1 - D^2}\omega_0 \quad (6.2)$$

verwendet. Während des Identifikationsprozesses werden dann aus diesen Eigenwerten die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = |\lambda| \quad (6.3)$$

und die Dämpfung  $D$

$$D = -\frac{\operatorname{Re}\{\lambda\}}{\omega_0} = -\frac{\operatorname{Re}\{\lambda\}}{|\lambda|} \quad (6.4)$$

bestimmt (siehe auch Anhang D).

Im Rahmen dieser Arbeit wurde zum Lösen der Bewegungsgleichungen der Ansatz

$$w(x, t) = \hat{A}e^{j(\omega t - kx)}, \quad (6.5)$$

(siehe Abschnitte 4.1.1 und 4.2.1) mit dem komplexen Eigenwert

$$k = k_x + jDk_0 \quad (6.6)$$

verwendet, wie er bei der Beschreibung von Wellen gebräuchlich ist. Die Wellenlänge der sich ausbreitenden Wellen ergibt sich zu

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\operatorname{Re}\{k\}} = \frac{2\pi}{k_x}, \quad (6.7)$$

was im Zeitbereich der Periodendauer der gedämpften Schwingung entspräche. Die zugehörige Dämpfung wird entsprechend zu Gl. (6.4) aus Imaginärteil und Betrag der komplexen Wellenzahl berechnet

$$D = -\frac{\operatorname{Im}\{k\}}{|k|}. \quad (6.8)$$

### 6.1.3 Automatisierte Pol-Auswahl

Für eine vollständige Identifikation der in **Abb. 5.20** und **5.21** dargestellten Schwingungsformen, müssen für jede Frequenz ein Stabilitätsdiagramm berechnet und daraus die entsprechenden Pole ausgewählt werden. Da dieses Vorgehen sehr mühsam und vor allem zeitaufwendig ist, wurde ein Verfahren entwickelt, das aus dem Stabilitätsdiagramm automatisiert die stabilen Pole selektiert.

Im ersten Schritt wird für einen vorgegebenen Bereich von Modellordnungen das Stabilitätsdiagramm berechnet. Ausgehend von den bei der höchsten Modellordnung identifizierten Polstellen werden die zugehörigen Polstellen aus niedrigeren Modellordnungen gesucht und eine Mittelung vorgenommen. Um ähnliche Pole zu finden, wird die normierte Differenz

$$d(k_i, k_j) = \frac{|k_i - k_j|}{\max(|k_i|, |k_j|)}, \quad (6.9)$$

der komplexen Wellenzahlen  $k_i$  und  $k_j$  berechnet, wie sie schon von REYNDERS ET AL. [86] verwendet wurde. Da in  $k$  nur die Wellenlänge und die Dämpfung des Pols enthalten sind, wird ein weiterer Kennwert für den Unterschied der zugehörigen Amplituden analog zum häufig bei der experimentellen Modalanalyse verwendeten MAC-Kriterium (siehe z. B. HEYLEN ET AL. [39]) benötigt. Seine direkte Übertragung auf skalare Größen liefert allerdings stets den Wert eins und besitzt daher keine Aussagekraft. Aus diesem Grund wird ein Amplituden-MAC-Kriterium

$$AMAC(A_i, A_j) = 1 - \frac{|A_i - A_j|}{\max(|A_i|, |A_j|)} \quad (6.10)$$

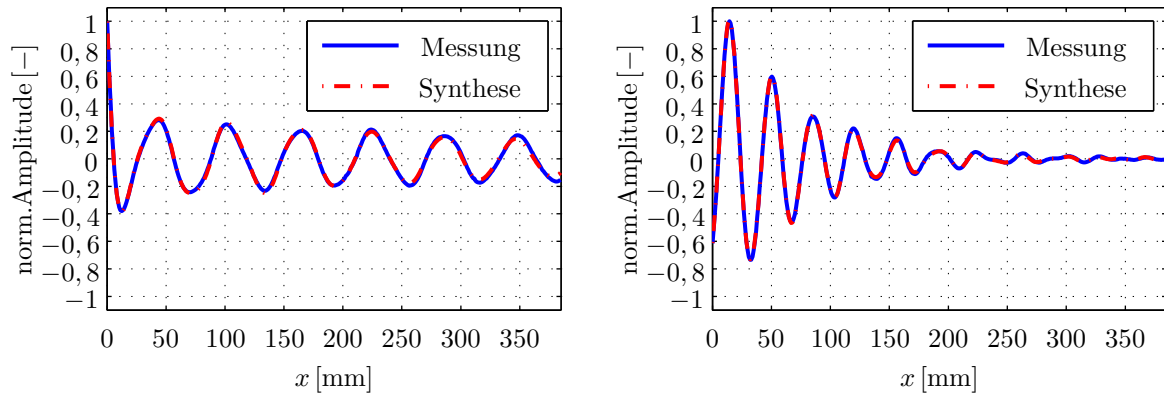
definiert, das die Übereinstimmung der Amplituden bei verschiedenen Modellordnungen beschreibt. Je dichter der AMAC-Wert an Eins liegt, desto weniger unterscheiden sich die Amplituden der beiden Pole.

Die berechneten Werte für die normierte Poldifferenz  $d$  und den AMAC-Wert lassen sich zu einem normierten Gesamtfehler

$$e(i, j) = d(k_i, k_j) - (AMAC(A_i, A_j) - 1) \quad (6.11)$$

zusammenfassen. Über den maximal zulässigen Gesamtfehler lässt sich festlegen, wie exakt ein Pol mit dem Referenzpol übereinstimmen muss, um in die Mittelwertbildung mit einbezogen zu werden. Für die vorliegende Auswertung wurde der maximale Fehler





**Abbildung 6.5:** Vergleich der aus 5 Wellenzahlen synthetisierten mit der gemessenen Schwingungsform bei 32,52 kHz (links) und bei 40 kHz (rechts)

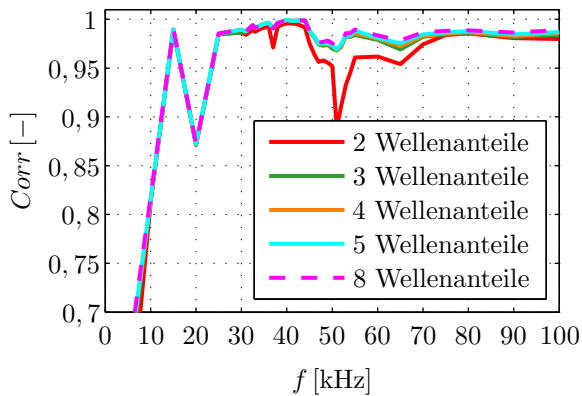
auf  $e_{\max} = 0,3$  festgelegt, da er mit den vorliegenden Daten gute Ergebnisse für die zu identifizierenden komplexen Wellenzahlen liefert. D. h. alle relevanten Äste des Dispersionsdiagramms werden gut abgebildet, ohne zu viele physikalisch nicht sinnvolle Werte zu liefern.

Zur Überprüfung der Qualität der mit dem CE-Algorithmus identifizierten und wie zuvor beschrieben gemittelten Wellenzahlen und Amplituden, werden synthetisierte und gemessene Schwingungsform miteinander verglichen. Um die Schwingungsform zu synthetisieren wird das dem Identifikationsalgorithmus zugrunde liegende Modell verwendet. Durch Einsetzen der identifizierten Wellenzahlen und Amplituden einer bestimmten Anzahl von Wellenanteilen ergeben sich die zugehörigen synthetisierten Schwingungsformen. Diese lassen sich grafisch oder quantitativ anhand eines wie folgt definierten Korrelationskoeffizienten

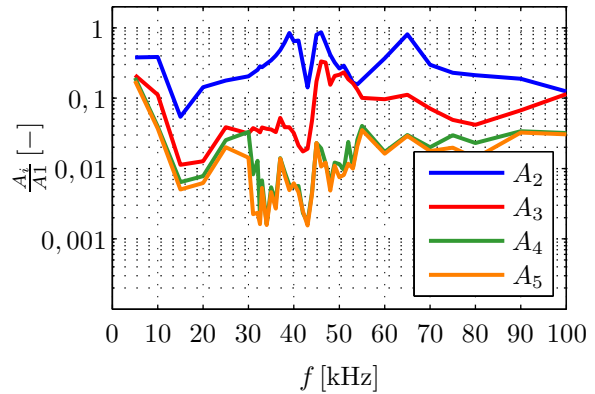
$$Corr = \frac{\sum_i |w_{\text{syn},i} w_{\text{mess},i}|}{\sum_i w_{\text{mess},i}^2}, \quad (6.12)$$

der einen skalaren Wert zur Beurteilung der Übereinstimmung liefert, mit den gemessenen Schwingungsformen vergleichen.

In **Abb. 6.5** sind jeweils die gemessene und die aus den fünf amplitudengrößten Wellenanteilen synthetisierte Schwingungsform bei 32,52 kHz und 40 kHz einander gegenüber gestellt. Das Berücksichtigen weiterer Wellenanteile bringt nur marginale Verbesserungen der Korrelation, wie sich anhand von **Abb. 6.6** erkennen lässt. Bereits bei drei Wellenanteilen erreicht die Korrelation sehr gute Werte, die auch bei der Verwendung von acht Wellenanteilen nur marginal übertroffen werden. Dies liegt nicht zuletzt daran, dass die Amplituden der zusätzlichen Wellenanteile gegenüber denen der ersten zwei bis drei Wellenanteilen sehr klein sind und damit keinen signifikanten Einfluss auf die Schwingungsform haben (siehe **Abb. 6.7**).



**Abbildung 6.6:** Korrelation von synthetisierten und gemessenen Schwingungsformen



**Abbildung 6.7:** Amplitudenverhältnis bezogen auf den dominierenden Wellenanteil

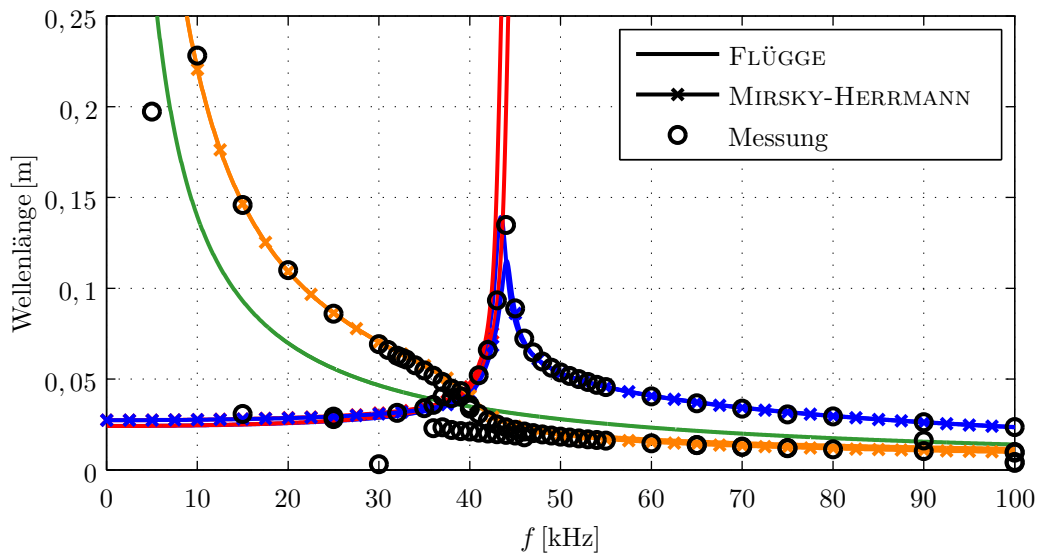
### 6.1.4 Ergebnisse der Identifikation

Die **Abb. 6.8** und **6.9** zeigen eine erste Gegenüberstellung der aus den Messungen an System II identifizierten Werte von Wellenlänge und Dämpfung mit den Simulationsergebnissen, die sich bei Anwendung der auf den Schalentheorien von FLÜGGE und MIRSKY-HERRMANN basierenden Modelle ergeben. Die dabei verwendeten Werte der Materialparameter

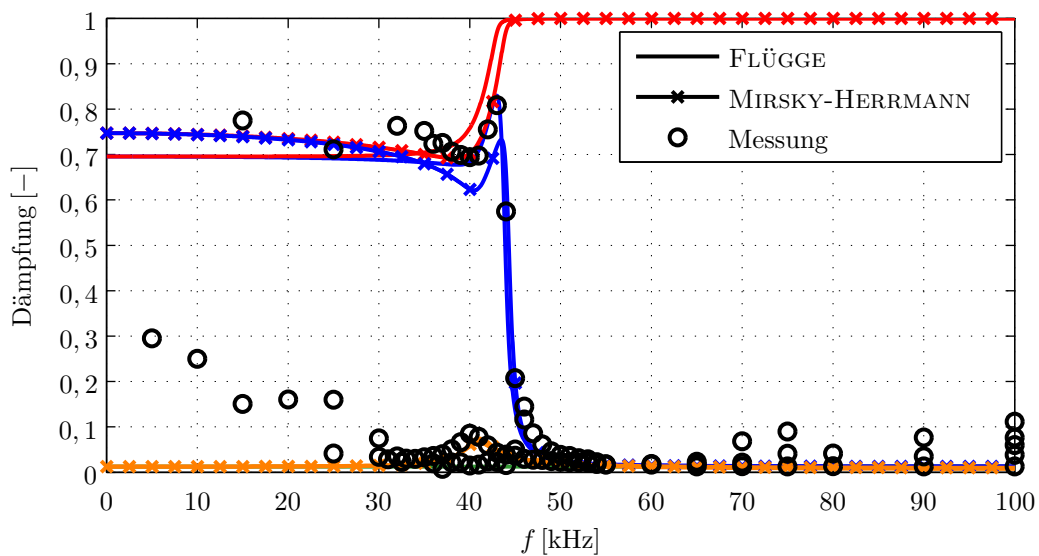
- $E = 5800 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- $\rho = 1180 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
- $\nu = 0,3$
- $\delta_v = 0,025$

wurden durch eine parallele Anpassung der beiden Simulationsmodelle an die Identifikationsergebnisse gefunden und werden im weiteren Verlauf der Arbeit zur numerischen Simulation verwendet. Dabei entsprechen die Werte für  $E$  und  $\rho$  exakt denen, wie sie auch schon von BISTRY [3] durch den Abgleich von FE-Simulationen mit Messungen bestimmt wurden.

Bei Betrachtung der **Abb. 6.8** und **6.9** ist eine gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den aus den Messungen identifizierten Werten zu erkennen. Sowohl die Verläufe der Wellenlänge als auch diejenigen der Dämpfung werden sehr gut wiedergegeben. Lediglich zwei Ausreißer, die sich keiner der dargestellten Kurven aus der Simulation auf Antrieb zuordnen lassen, sind erkennbar. Im Gegensatz zur Analyse mittels FOURIER-Transformation lassen sich bei Anwendung des *Complex Exponential*-Algorithmus auch die Nahfelder identifizieren. Auch die signifikanten Änderungen der Dämpfung, die von beiden Modellen vorhergesagt werden, finden sich in den Messungen wieder. Hier sei speziell auf den stark lokalisierten Anstieg im Bereich um 40 kHz sowie den mit fast aperiodischer Dämpfung ( $D \approx 0,7$ ) beginnenden und in der Nähe der Grenzfrequenz

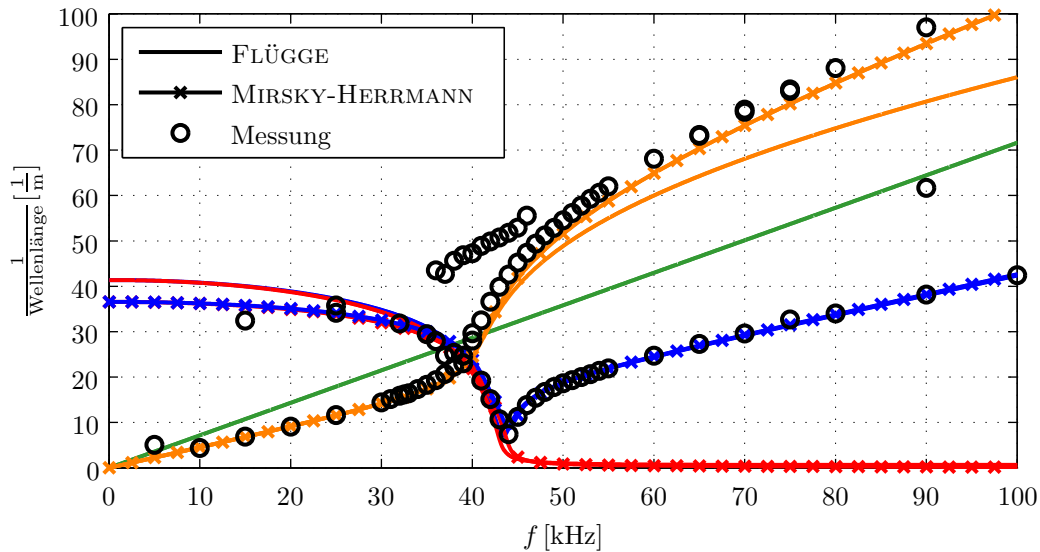


**Abbildung 6.8:** Vergleich der Wellenlängen aus Simulation und Messung in Abhängigkeit der Frequenz (System II)



**Abbildung 6.9:** Vergleich der Dämpfungen aus Simulation und Messung in Abhängigkeit der Frequenz (System II)

nach kurzem Anstieg stark abfallenden Dämpfungsverlauf der Nahfeldanteile hingewiesen. Für niedrige Frequenzen weichen die identifizierten Dämpfungswerte allerdings von der Simulation ab. Als Ursache hierfür lassen sich die geringen Schwingungsamplituden der zugehörigen Wellenanteile und dem somit zunehmenden Einfluss von Störungen nennen, die die ohnehin schwierige Bestimmung genauer Dämpfungswerte zusätzlich verkomplizieren. Auch der Einfluss der Stehwellenanteile, die sich aufgrund der großen Wellenlänge und der daraus resultierenden geringen Amplitudenreduktion beim Durchlaufen des Hohlzylinders ergeben, wirkt sich negativ auf die Identifikationsergebnisse aus.

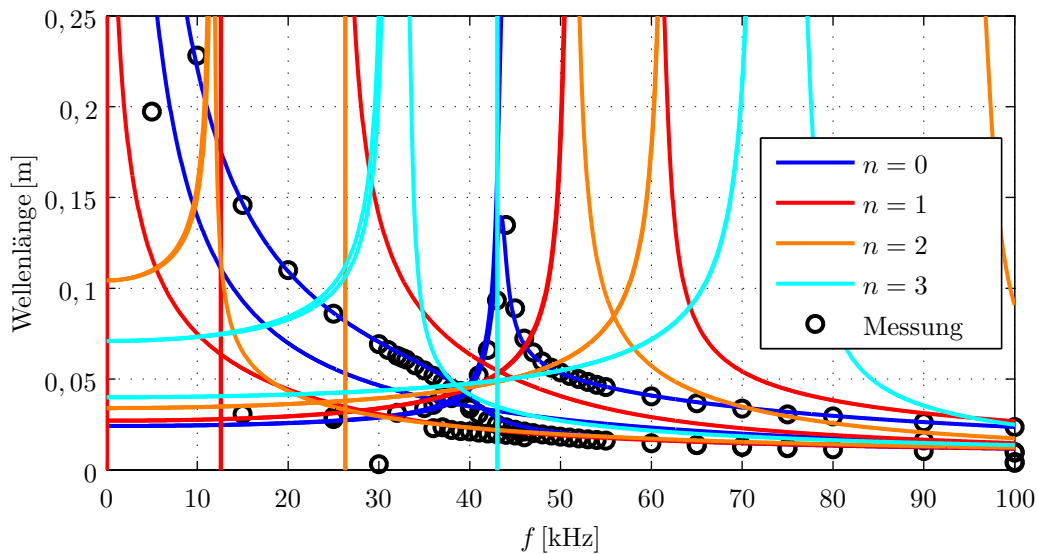


**Abbildung 6.10:** Vergleich der Wellenzahlen aus Simulation und Messung in Abhängigkeit der Frequenz (System II)

Werden die Daten aus **Abb. 6.8**, wie in **Abb. 6.10** geschehen, als Wellenzahl in Form des Kehrwertes der Wellenlänge über der Frequenz dargestellt, zeigen sich die Unterschiede zwischen den beiden Modellierungsansätzen deutlicher. Beide Modelle stimmen im Bereich niedriger Frequenzen und großer Wellenlängen gut überein. Auch die charakteristischen Verläufe im Bereich von 40 bis 50 kHz werden von beiden Simulations-Ansätzen gut wiedergegeben. Mit steigender Wellenzahl und damit abnehmender Wellenlänge zeigen sich allerdings deutliche Unterschiede. Der Ansatz nach MIRSKY UND HERRMANN beschreibt auch die Wellen hoher Wellenzahl noch mit guter Genauigkeit, wohingegen sich beim Ansatz für dünnwandige Schalen nach FLÜGGE Abweichungen von bis zu 20 % ergeben, die mit steigender Frequenz noch weiter zunehmen.

Bei abschließender Betrachtung der **Abb. 6.8** bis **6.10** lässt sich festhalten, dass die betrachteten Simulationsergebnisse und Messungen insgesamt gut übereinstimmen. Lediglich für niedrige Frequenzen und entsprechend große Wellenlängen ergeben sich deutliche Abweichungen zwischen den Dämpfungswerten aus Modell und Messung, die sich auf die geringe Anzahl an zur Identifikation verfügbaren Wellenlängen und dem starken Einfluss überlagerter Störungen zurückführen lassen. Insgesamt zeigen aber alle Zusammenhänge zwischen Wellenlängen, Frequenz und Dämpfung eine gute Übereinstimmung der aus der Messung identifizierten Werte mit den Ergebnissen der Simulationsmodelle.

Zwei Details wurden bisher noch nicht näher betrachtet und sollen an dieser Stelle noch Erwähnung finden. Aus den Darstellungen der Identifikationsergebnisse ist erkennbar, dass die Torsionswellen, die mit dem Ansatz nach FLÜGGE berechnet werden können, nicht angeregt werden, wie es bei der radialen Anregung durch den Piezoringwandler zu erwarten war. Da die Theorie nach MIRSKY-HERRMANN Verschiebungen in Umfangsrichtung bereits von vornherein ausschließt, kann auch sie zu den Torsionsschwingun-



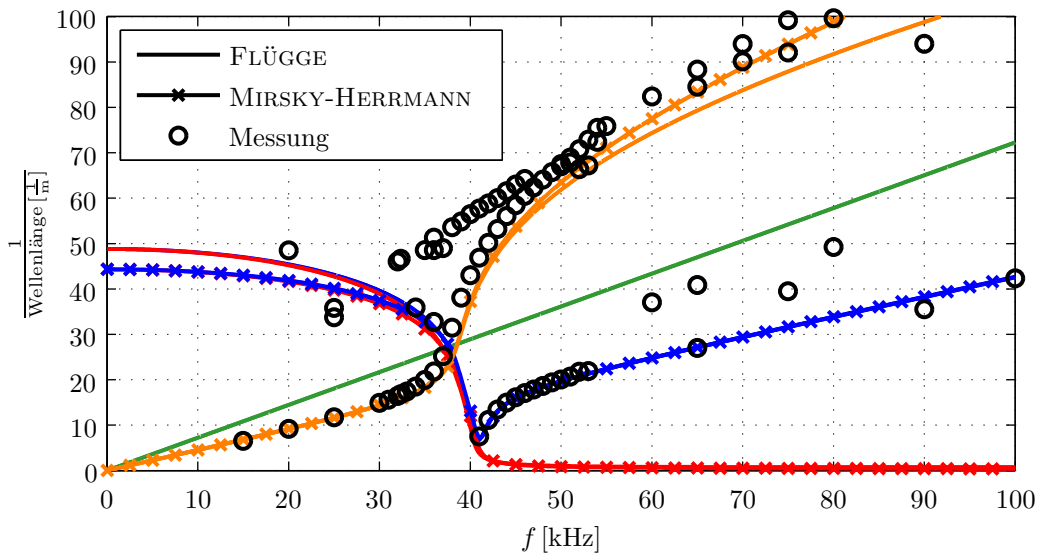
**Abbildung 6.11:** Wellenlänge und Frequenz für verschiedene Wellenordnungen  $n$

gen keine Ergebnisse liefern. Über die von beiden Simulationsmodellen vorhergesagten und anhand der Messung bestätigten Kurvenäste hinaus ist in den **Abb. 6.8** und **6.10** eine Punkteschar im Bereich um 40 kHz erkennbar, die sich so nicht zuordnen lässt. Sie ist weder in den Simulationsergebnissen nach FLÜGGE (für  $n = 0$ ) noch in denen nach MIRSKY UND HERRMANN enthalten. Um ihr Auftreten zu erklären, sind in **Abb. 6.11** die Messergebnisse den Simulationsergebnissen nach dem FLÜGGE-Ansatz für die Ordnungen  $n = 0$  bis  $n = 3$  gegenübergestellt. Die fraglichen Messungen decken sich mit dem Verlauf der Kurven zu den Wellenordnungen  $n = 1$  und  $n = 2$ . Eine genaue Aussage lässt sich auf Basis der vorliegenden Daten nicht treffen. Da diese Anteile aber aufgrund der kleinen Amplituden (siehe **Abb. 6.7**) nur eine untergeordnete Rolle für die Dynamik des Systems spielen, soll auf eine tiefere Analyse verzichtet werden. Genauere Erkenntnisse ließen sich z. B. anhand einer Messung auf der Rückseite des Hohlzylinders gewinnen. Für Wellen der Ordnung  $n = 1$  würde sich eine entgegengesetzt gleichgroße und für Wellen der Ordnung  $n = 2$  eine identische Amplitude ergeben.

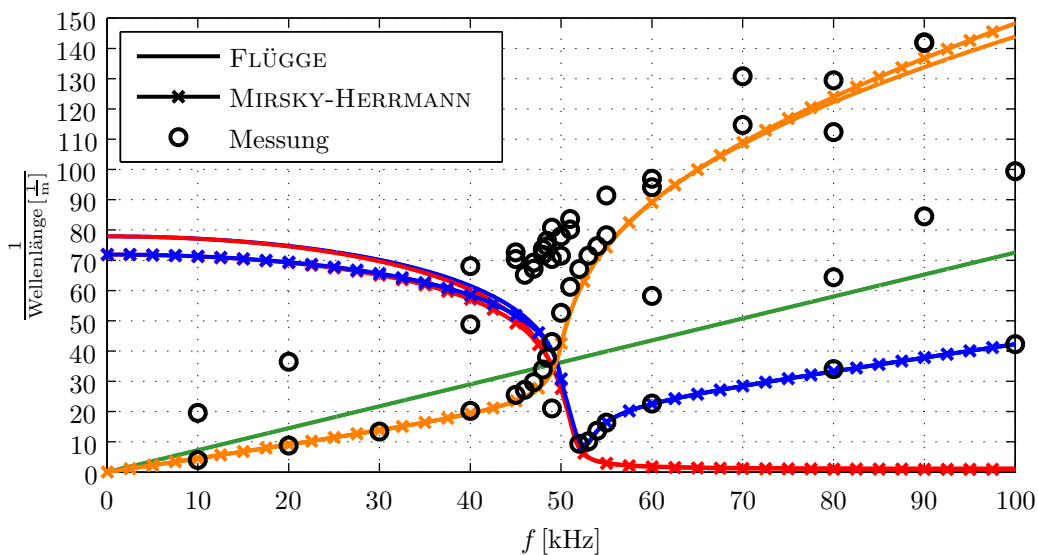
Für die Systeme I und III aus **Tabelle A.1** zeigen **Abb. 6.12** und **6.13** die Gegenüberstellung der Simulationsergebnisse und der Ergebnisse der beschriebenen Messungen mit anschließender Parameteridentifikation. Die bereits zuvor verwendeten Materialparameter wurden auch hier wieder in der Simulation verwendet.

Im Vergleich über alle Systeme ist gut zu erkennen wie sich die Simulations-Ergebnisse für große Wellenzahlen und hohe Frequenzen nach FLÜGGE und MIRSKY-HERRMANN mit sinkendem Verhältnis  $\frac{h}{a}$  von System II über System III zu System I einander annähern, wohingegen bei den Nahfeldern eine Abweichung von etwa 10% unabhängig vom Wandstärken-Radius-Verhältnis bestehen bleibt.

Bereits anhand der Darstellungen der gemessenen Schwingungsformen in Abschnitt 5.4 war erkennbar, welcher entscheidenden Einfluss die Grenzfrequenz für reine Radial-schwingungen auf die sich einstellende Schwingungsform hat. Anhand der über die Pa-



**Abbildung 6.12:** Vergleich der Wellenzahlen aus Simulation und Messung in Abhängigkeit der Frequenz (System III)



**Abbildung 6.13:** Vergleich der Wellenzahlen aus Simulation und Messung in Abhängigkeit der Frequenz (System I)

parameteranpassung gefundenen Materialkennwerte, zusammen mit der Geometrie, lassen sich die Grenzfrequenzen nun konkret bestimmen. Entsprechend der Betrachtungen aus den Abschnitten 4.1.2 und 4.2.1 ergibt sich nach Gl. (4.7)

$$f_{GR,Flügge} = \frac{\omega_{GR}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega_{GR}}{\gamma_F} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(1+K)E}{\rho a^2(1-\nu^2)}} \quad (6.13)$$

mit

- Dickenparameter  $K = \frac{h^2}{12a^2}$
- $\gamma_F^2 = \frac{\rho a^2(1-\nu^2)}{E}$ .

**Tabelle 6.1:** Grenzfrequenzen der verwendeten Hohlzylinder-Wandler-Einheiten

	System I	System II	System III	System IV
$f_{\text{grenz,FLÜGGE}} [\text{Hz}]$	52.886	43.742	41.183	93.260
$f_{\text{grenz,MIRSKY-HERRMANN}} [\text{Hz}]$	52.983	44.222	41.366	93.554

$f_{\text{GR,Mirsky-Herrmann}}$  ergibt sich durch numerisches Lösen von Gl. (4.80). Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Systeme (siehe **Tabelle A.1**) sind die entsprechenden Grenzfrequenzen in **Tabelle 6.1** angegeben.

## 6.2 Synthese und Analyse der Schwingungsformen

Da es offenbar mit beiden Simulationsmodellen möglich ist, die Dispersionskurven in guter Übereinstimmung mit dem Versuch zu ermitteln, besteht der nächste logische Schritt darin, die frequenzabhängigen Schwingungsformen zu berechnen. Denn nur wenn diese vorliegen bzw. bestimmt werden können, sind eine Analyse des Systems und die Auswahl günstiger Betriebspunkte möglich. Es wurden zwar schon synthetisierte Schwingungsformen bestimmt, wie sie z. B. in **Abb. 6.5** zu sehen sind, diese basieren jedoch direkt auf den Ergebnissen der zuvor durchgeführten Identifikation und verwenden das der Identifikation zugrunde liegende Modell. An dieser Stelle sollen allerdings aufbauend auf den Überlegungen aus Abschnitt 4.1.4 unter Verwendung der berechneten Dispersionsdiagramme und der entsprechenden Wellentypen die Schwingungsformen in Abhängigkeit der Frequenz bestimmt werden. Dazu werden zunächst die Verschiebungsansätze aus Gl. (4.51) an die dem Versuchsaufbau entsprechenden Randbedingungen angepasst. Für die verwendeten Prototypen, deren Schwingungsformen bereits vermessen wurden und nun anhand des Modells berechnet werden sollen, lassen sich folgende idealisierte Randbedingungen annehmen:

- Die Anregung wirkt nur radial und nicht axial

$$u(0) = 0$$

- Durch die Ankopplung des Piezoaktors wird ein Verkippen der Zylinderwand in der Verbindungsstelle verhindert

$$w'(0) = 0$$

- Die Anregung prägt eine radiale Verschiebung auf den Hohlzylinder auf

$$w(0) = A_{z,\text{Piezo}}$$

Da die Torsionsschwingungen bei dem Ansatz nach FLÜGGE von den Radial- und Axialschwingungen entkoppelt sind, verbleiben für die weitergehenden Betrachtungen nur

die beiden Gleichungen für die axiale und die radiale Verschiebung

$$\begin{aligned} u(s, \Omega, \tau) &= \sum_{i=1}^8 A_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} = \sum_{i=1}^8 \Phi_i(\Omega) C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\ w(s, \Omega, \tau) &= \sum_{i=1}^8 C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Durch die Entkopplung verschwinden darüber hinaus die beiden zu den Torsionswellen gehörenden  $A_i$  bzw.  $C_i$  in den Gleichungen für die axiale und die radiale Verschiebung. Die axialen Amplituden  $A_i$  lassen sich, wie bereits gezeigt, durch  $\Phi_i(\Omega)C_i$  ausdrücken, wobei  $\Phi_i(\Omega)$  abhängig von den Wellenzahlen  $k_i$ , dem Geometrie-Parameter  $K$ , der Querkontraktion  $\nu$  und der Anregefrequenz  $\Omega$  ist und direkt bestimmt werden kann. Somit verbleiben noch sechs  $C_i$  als Unbekannte in Gl. (6.14). Weil aber durch die oben getroffenen Annahmen nur drei Gleichungen für die Anregeposition ( $x = 0$ ) vorliegen, müssen weitere Annahmen getroffen werden, um die Amplituden der Wellenanteile bestimmen zu können. Die Randbedingungen am zweiten Ende des Hohlzylinders, an dem er in dem mit Sand gefüllten Behälter steckt, sind nicht klar bestimmt und können nicht zur Definition von Randbedingungen und damit zur Bestimmung der Schwingungsform genutzt werden. Da die Schwingungsform im Wesentlichen durch die vom Piezoringwandler ausgehenden Wellen geprägt wird und die Wellen im sandgefüllten Behälter gut absorbiert, d. h. kaum reflektiert, werden, kommen hier die Betrachtungen aus Abschnitt 4.1.3 zum tragen. Durch die Absorption der Wanderwellen liegen in dem untersuchten System nahezu identische Bedingungen wie in einem halbunendlichen Wellenleiter ( $0 \leq x \leq \infty$ ) vor. Alle vom Piezowandler an der Stelle  $x = 0$  angeregten Wellen breiten sich in positiver  $x$ -Richtung aus und kehren niemals zurück. Aus dieser Annahme ergeben sich direkt weitere Folgerungen, die helfen, die Zahl der Unbekannten in Gl. (6.14) weiter zu reduzieren. Es können nur Wanderwellen existieren, die sich in positiver  $x$ -Richtung ausbreiten ( $\text{Re} \{k_i\} > 0$ ), da eine Wanderwelle mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung eine Anregung im Unendlichen erfordern würde. Einen Sonderfall bilden in diesem Zusammenhang die Nahfeldwellen, die, wie in Abschnitt 4.1.3 gezeigt, durch ihr paarweises Auftreten keine Energie entlang des Hohlzylinders transportieren. Für diese Nahfelder greift eine Betrachtung der Amplituden. So können in dem Hohlzylinder lediglich Wellen existieren, deren Amplitude mit steigendem  $x$  abnimmt ( $\text{Im} \{k_i\} \leq 0$ ), denn anderenfalls würde die Amplitude für  $x \rightarrow \infty$  über alle Grenzen wachsen. Bedingt durch die Symmetrie des Dispersionsdiagramms reduziert sich also die Zahl der zu berücksichtigenden Wellenanteile auf die Hälfte und die verbleibenden drei Amplituden lassen sich anhand der aus den drei Randbedingungen resultierenden Gleichungen berechnen.



Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
 u(s, \Omega, \tau) = 0 &= \sum_{i=1}^3 \Phi_i(\Omega) C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\
 w'(s, \Omega, \tau) = 0 &= \sum_{i=1}^3 -k_{s,i} C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)} \\
 w(s, \Omega, \tau) = A_{z,\text{Piezo}} e^{j\Omega\tau} &= \sum_{i=1}^3 C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

ergibt sich durch einsetzen von  $s = 0$  und nach Division durch  $e^{j\Omega\tau}$

$$\begin{aligned}
 u(s = 0) = 0 &= \sum_{i=1}^3 \Phi_i(\Omega) C_i \\
 w'(s = 0) = 0 &= \sum_{i=1}^3 -k_{s,i} C_i \\
 w(s = 0) = A_{z,\text{Piezo}} &= \sum_{i=1}^3 C_i
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{z,\text{Piezo}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1(\Omega) & \Phi_2(\Omega) & \Phi_3(\Omega) \\ -k_{s,1}(\Omega) & -k_{s,2}(\Omega) & -k_{s,3}(\Omega) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}. \tag{6.17}$$

Invertieren der Matrix  $\mathbf{M}$  liefert die gesuchten Amplituden  $C_1$ ,  $C_2$  und  $C_3$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{z,\text{Piezo}} \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

und damit die frequenzabhängige Schwingungsform

$$W_{\text{syn}}(s) = C_1 e^{-jk_{s,1}s} + C_2 e^{-jk_{s,2}s} + C_3 e^{-jk_{s,3}s}. \tag{6.19}$$

Diese Berechnungen lassen sich aus verschiedenen Gründen nicht eins zu eins auf das Modell nach dem Ansatz von MIRSKY-HERRMANN übertragen. Hier gehören zu jedem Wellenanteil vier Amplituden, deren Verhältnis durch den zum Eigenwert Null gehörigen Eigenvektor  $(A_{EV,i}, C_{EV,i}, D_{EV,i}, F_{EV,i})^T$  der Matrix aus Gl. (4.78) beschrieben wird. Da das Modell insgesamt acht Wellenanteile liefert, von denen aufgrund der vorangegangenen Überlegungen vier bei der Synthese der Schwingungsform Berücksichtigung finden müssen, fehlt eine vierte Randbedingung, um das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
u(s = 0, z = \frac{h}{2}) &= 0 = \sum_{i=1}^4 \eta_i (A_{EV,i} + \frac{h}{2} D_{EV,i}) \\
w'(s = 0, z = \frac{h}{2}) &= 0 = \sum_{i=1}^4 -\eta_i k_{s,i} (C_{EV,i} + \frac{h}{2} F_{EV,i}) \\
w(s = 0, z = \frac{h}{2}) &= A_{z,Piezo} = \sum_{i=1}^4 \eta_i (C_{EV,i} + \frac{h}{2} F_{EV,i})
\end{aligned} \tag{6.20}$$

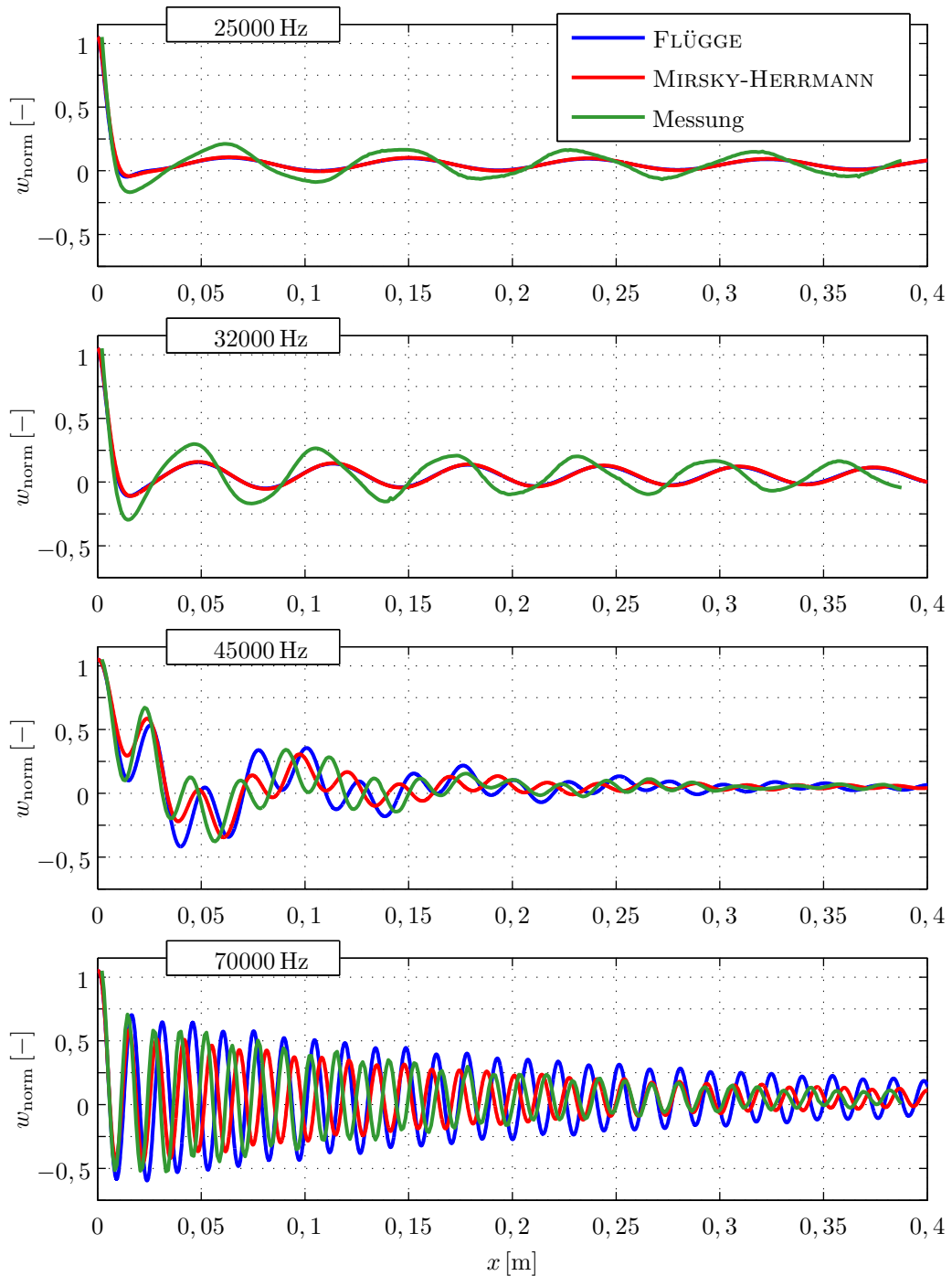
lösen zu können.

Wie sich im vorangegangenen Kapitel gezeigt hat, lassen sich die Dispersionskurven mit dem Ansatz nach MIRSKY-HERRMANN für dickwandige Schalen besser beschreiben, als mit dem Ansatz nach FLÜGGE. Daher ist für diesen Ansatz auch eine bessere Übereinstimmung der gemessenen und berechneten Schwingungsformen zu erwarten. Als Kompromiss, der Lösbarkeit des Gleichungssystems und genauere Werte der Wellenzahlen nach MIRSKY-HERRMANN vereint, wird wie folgt vorgegangen. In dem zum Ansatz nach FLÜGGE gehörigen Verschiebungsansatz (siehe Gl. (6.15)) werden die nach dem Ansatz von MIRSKY-HERRMANN berechneten Wellenzahlen verwendet, um die Schwingungsform zu bestimmen. Die Vermischung der beiden Ansätze ist insofern zulässig, als dass die komplexen Wellenzahlen nur die Wellenlänge und die Dämpfung der zugehörigen Wellen beschreiben und daher, bis auf die aus den getroffenen Annahmen resultierenden Abweichungen, unabhängig vom gewählten Modellierungsansatz sind. Es dürfen allerdings verständlicherweise nur diejenigen Wellenzahlen zwischen den verschiedenen Ansätzen ausgetauscht werden, die sich mit beiden auch tatsächlich berechnen lassen.

**Abb. 6.14** zeigt für verschiedene Anregefrequenzen die Gegenüberstellung der gemessenen und synthetisierten Schwingungen in radialer Richtung. Die beiden synthetisierten Kurven stimmen für niedrige Frequenzen untereinander gut überein, weisen allerdings Abweichungen zur gemessenen Schwingungsform hinsichtlich der Amplituden auf. Für Frequenzen im Bereich der Grenzfrequenz und darüber sind ebenfalls Abweichungen zwischen den Vorhersagen der Modelle und den Messungen zu erkennen. Allerdings wird die grundsätzliche Form der Schwingung von beiden Ansätzen wiedergegeben, wobei die mit den Wellenzahlen nach MIRSKY-HERRMANN berechneten Schwingungsformen, die gemessenen Schwingungsformen besser beschreiben. Um die Übereinstimmung zu quantifizieren wird die Korrelation der komplexen Schwingungsformen berechnet

$$Corr_{\text{komp}} = \frac{|W_{\text{syn}} W_{\text{mess}}^*|^2}{|W_{\text{syn}} W_{\text{syn}}^*| |W_{\text{mess}} W_{\text{mess}}^*|} . \tag{6.21}$$

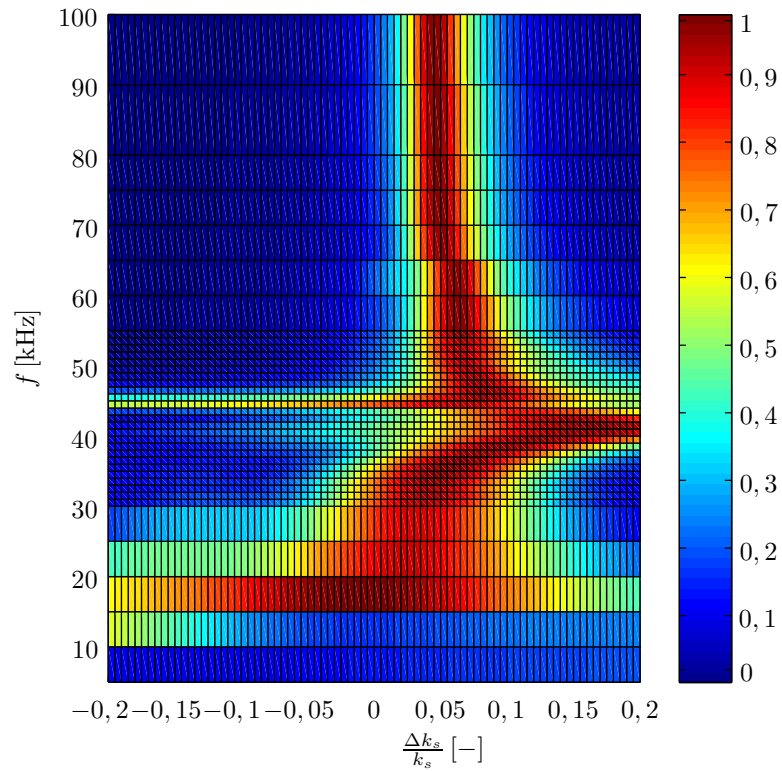
Ihre Werte sind für die dargestellten Schwingungsformen in **Tabelle 6.2** angegeben. Man erkennt, dass für beide Modellierungsansätze die Korrelation mit steigender Frequenz sinkt. Die sehr geringen Korrelationswerte resultieren aus den Abweichungen der aus den Dispersionskurven bestimmten Wellenlängen. Denn schon kleine Abweichungen der



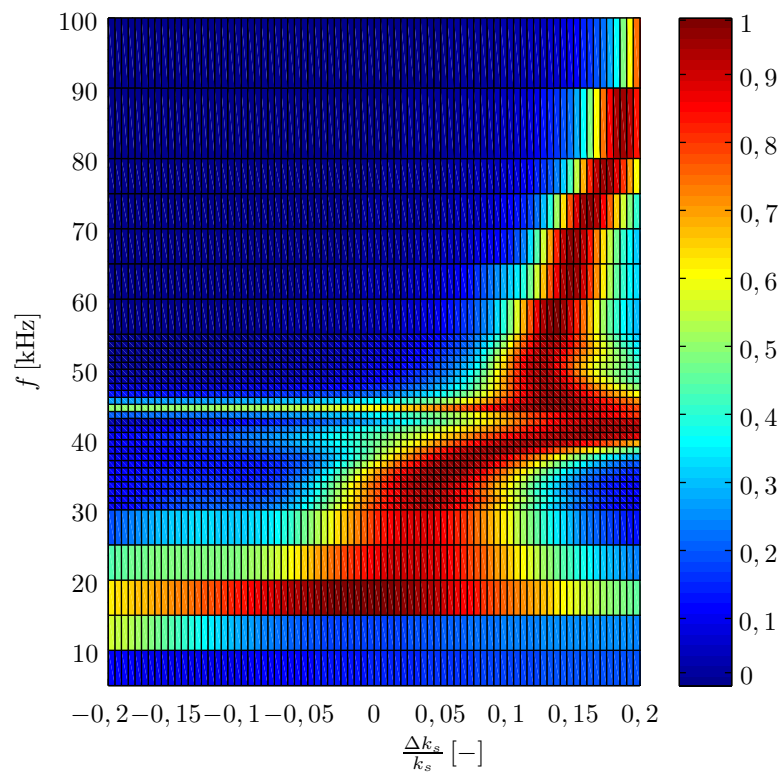
**Abbildung 6.14:** Berechnete und gemessene Schwingungsformen System II

**Tabelle 6.2:** Korrelation zwischen gemessenen und berechneten Schwingungsformen

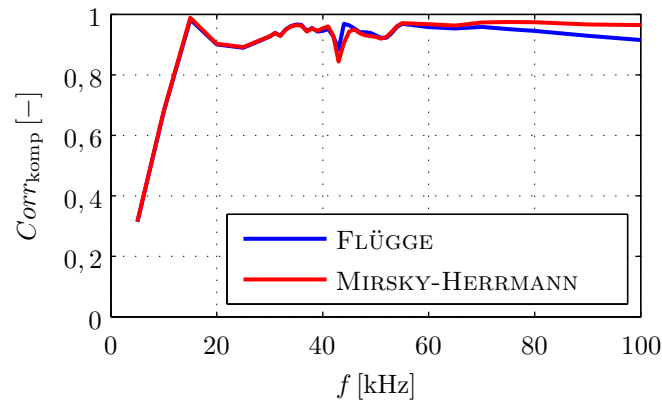
Frequenz [kHz]	$Corr_{\text{Fl}}$	$Corr_{\text{MH}}$
25	0,790	0,794
32	0,738	0,724
45	0,356	0,601
70	0,017	0,144



**Abbildung 6.15:** Korrelation der komplexen Schwingungsformen von System II bei Modellierung nach MIRSKY-HERRMANN



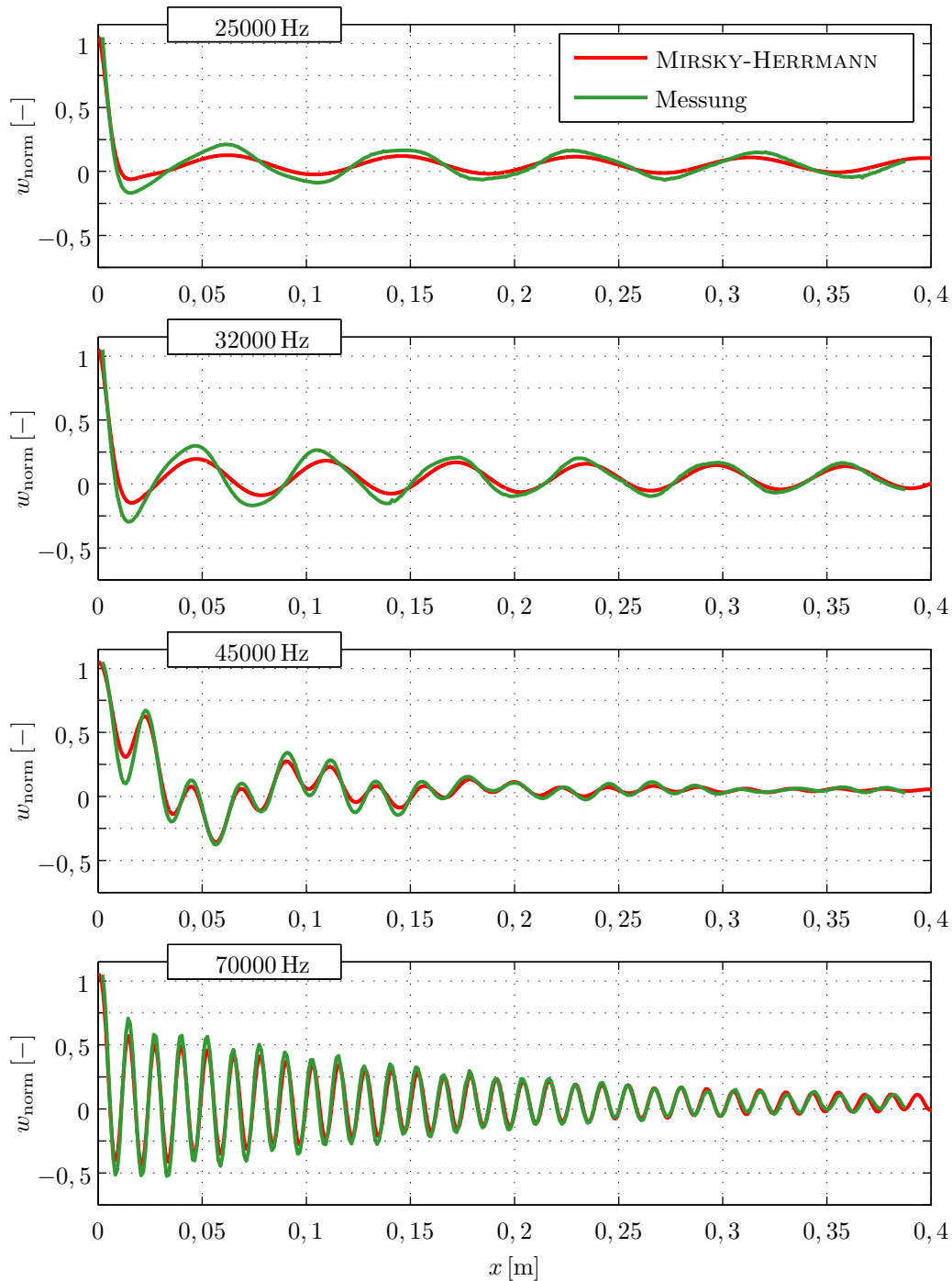
**Abbildung 6.16:** Korrelation der komplexen Schwingungsformen von System II bei Modellierung nach FLÜGGE



**Abbildung 6.17:** Maximale Korrelation der komplexen Schwingungsform bei Variation der komplexen Wellenzahl

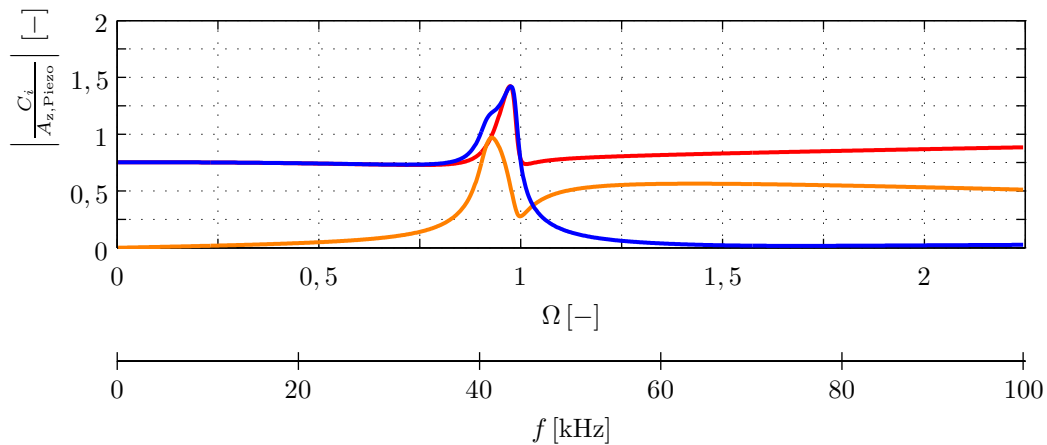
Wellenlänge führen über die gesamte Zylinderlänge betrachtet zu erheblichen Abweichungen in der Schwingungsform und so zu sehr niedrigen Korrelationswerten. Allerdings greift die Betrachtung der Korrelation zu kurz, wenn es darum geht, die Qualität der Modelle zu beurteilen. Speziell in den beiden unteren Grafiken von **Abb. 6.14** fällt auf, dass die Kurven durch eine Dehnung bzw. Stauchung in  $x$ -Richtung sehr gut zur Deckung gebracht werden könnten. Um zu zeigen, wie sich durch Variation der Wellenzahl die Korrelation signifikant verbessern lässt, werden die zugrundeliegenden komplexen Wellenzahlen variiert und die neuen Schwingungsformen bestimmt. Variiert werden dabei lediglich die Werte der Wellenzahlen, die zu dem in **Abb. 6.10** orangefarbenen Kurvenast gehören, der im oberen Frequenzbereich deutliche Unterschiede zwischen Berechnung und Identifikation zeigt. In den **Abb. 6.15** und **6.16** ist die Korrelation der gemessenen mit der synthetisierten Schwingungsform in Abhängigkeit der variierten Wellenzahl dargestellt. Bereits geringfügige Variationen der Wellenzahl können die Korrelation erheblich steigern. **Abb. 6.17** zeigt die maximal erreichbare Korrelation bei Variation der Wellenzahlen in Schritten von 0,5 %. Der Vergleich der beiden **Abb. 6.15** und **6.16** macht deutlich, dass die Abweichungen nach FLÜGGE mit steigender Frequenz erheblich zunehmen, während sich bei MIRSKY-HERRMANN eine konstante Abweichung von in diesem Fall etwa 5 % ergibt.

Um einen Eindruck der sich ergebenden optimierten, synthetisierten Schwingungsformen zu vermitteln sind diese in **Abb. 6.18** zusammen mit den gemessenen Schwingungsformen dargestellt. Die synthetisierten Schwingungsformen geben alle Charakteristika der gemessenen Schwingungsformen wieder und stimmen nun auch hinsichtlich der Wellenlänge nahezu perfekt überein. Lediglich für die niedrigen Frequenzen ergeben sich geringfügige Amplitudenabweichungen. Da diese Abweichungen über die gesamte Länge auftreten und speziell auch am ersten Minimum der dargestellten Schwingungsform, ist davon auszugehen, dass sie aus den getroffenen Annahmen bezüglich der Anregung und der Ankopplung des Piezowandlers resultieren. Bei der starken Verformung in der Nähe des Wandlers scheint es durchaus wahrscheinlich, dass die Verkipfung durch den angeklebten Wandler nicht wie angenommen vollständig unterdrückt wird.



**Abbildung 6.18:** Mit angepasster Wellenzahl berechnete und gemessene Schwingungsformen von System II

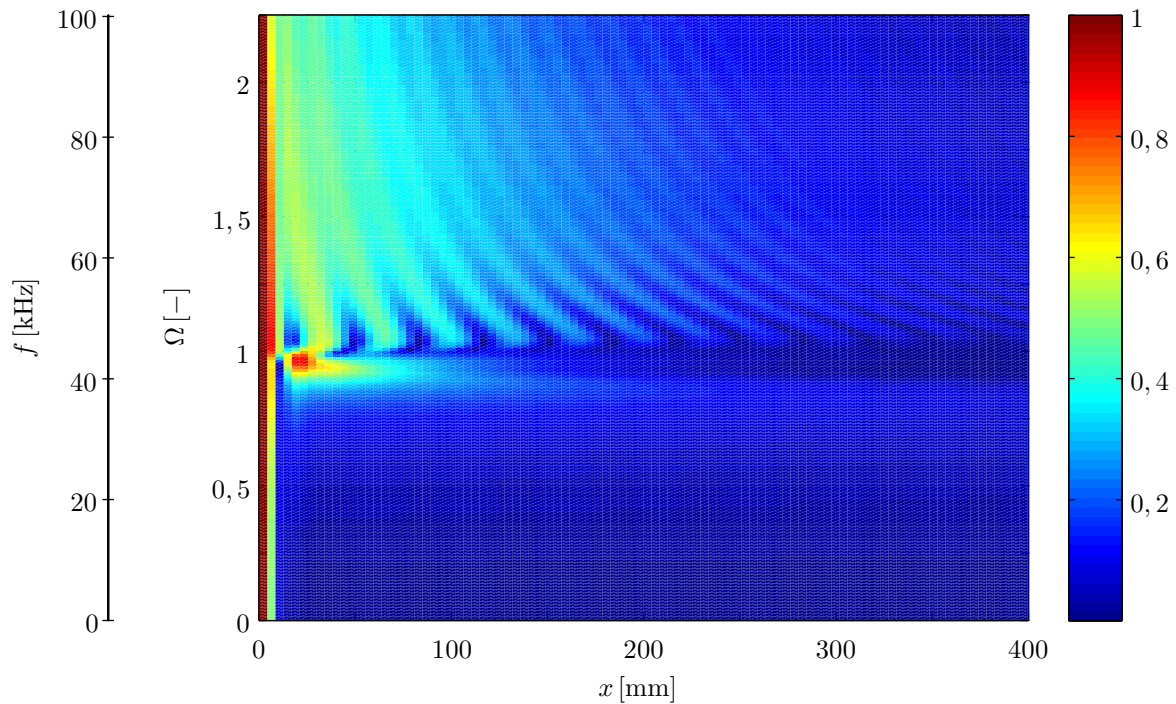
Wie die durchgeführten Analysen gezeigt haben, lässt sich mit einer Änderung der Materialparameter zwar für einzelne Frequenzen die Übereinstimmung verbessern, allerdings nicht gleichzeitig über den gesamten Frequenzbereich. Höchstwahrscheinlich ist eine Ursache dafür das anisotrope Materialverhalten des Acryls, das durch den Urformprozess des Extrudierens und die dabei entstehende Ausrichtung der Polymerketten hervorgerufen wird. Bereits unterschiedliche Elastizitätsmoduln in radialer und axialer Richtung würden, durch die Kopplung der beiden Verschiebungsrichtungen bei frequenzabhängig,



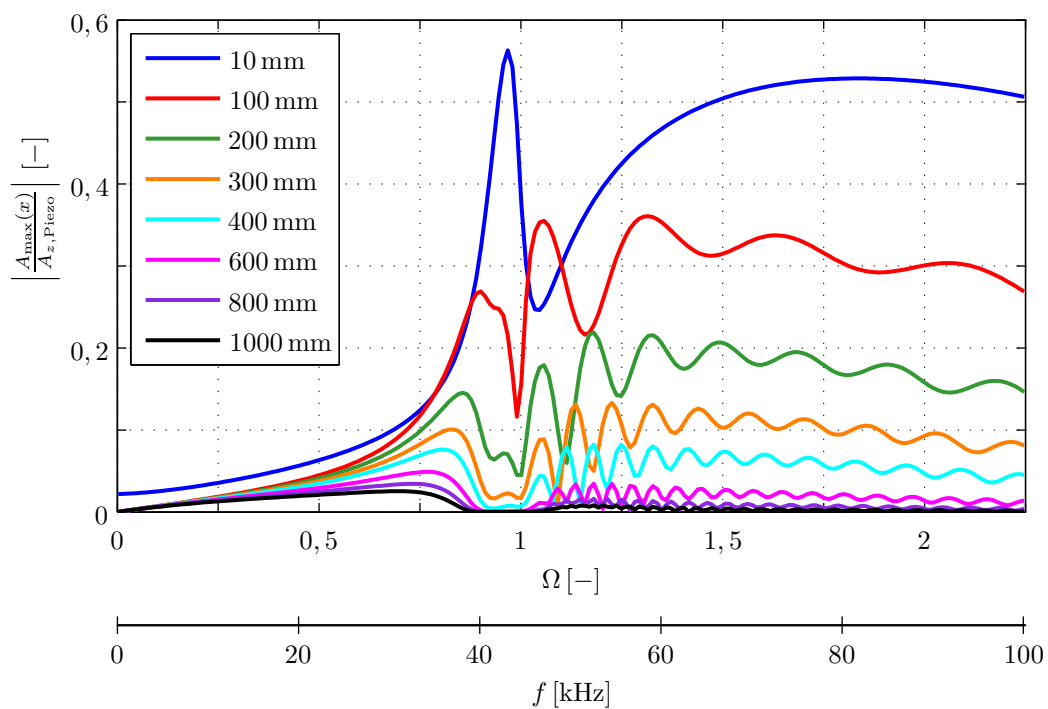
**Abbildung 6.19:** Amplituden der einzelnen Wanderwellenanteile nach Gl. (6.18) bei Verwendung der Dispersionskurven nach MIRSKY-HERRMANN (System II)

unterschiedlich starker Partizipation der beiden Anteile an der Schwingung, nach außen wie ein frequenzabhängiger Elastizitätsmodul wirken. Aber auch ein Frequenzabhängigkeit des Elastizitätsmodul des Acryls wie er bei Kunststoffen oftmals anzutreffen ist wäre eine mögliche Erklärung. Da die Schalenmodelle isotropes Materialverhalten verwenden und wie sich gezeigt hat auch mit dieser Annahme das Schwingungsverhalten der Hohlzylinder mit allen wesentlichen Effekten nachgebildet werden kann, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit darauf verzichtet, das anisotrope Verhalten der Acryl-Hohlzylinder näher zu untersuchen. Stattdessen wird im folgenden Abschnitt das vorliegende Modell genutzt, um die sich aus den Schwingungsformen ergebenden Oberflächenpunkttrajektorien zu analysieren.

Mit der Vielzahl der bei der Ausbildung der Schwingungsform auftretenden Effekte und ihrer Kombination ist die optimale Auslegung der Piezoaktor-Hohlzylinder-Einheit eines Wanderwellen-Transportsystems keinesfalls eine triviale Aufgabe. Ein Effekt, der sich in allen in diesem Kapitel dargestellten Schwingungsformen beobachten lässt, ist der starke Einfluss der Nahfeldanteile in der Nähe des Piezowandlers. Dieser führt gerade bei niedrigen Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz der Radialschwingungen dazu, dass die Amplitude der sich ausbreitenden Wanderwellen sehr viel kleiner ist als die Amplitude, die durch die Schwingungsanregung des Piezowandlers am Ende des Hohlzylinders eingepreßt wird. Der Großteil der Piezoamplitude wird auf die Nahfeldanteile übertragen und steht damit nicht als nutzbare Amplitude für den Wanderwellentransport zur Verfügung. Dieser Effekt ist in **Abb. 6.19** anhand der Amplituden der einzelnen Wellenanteile dargestellt, wie sie sich aus Gl. (6.18) ergeben. Es ist deutlich zu erkennen, dass im unteren Frequenzbereich die beiden Nahfeldanteile dominieren. Im Bereich der normierten Frequenz von etwa  $\Omega = 0,7$  bis  $\Omega = 1,2$  kommt es dann zu einer dynamischen Wandlung der Amplitudenverhältnisse, bevor im oberen Frequenzbereich wieder der rot dargestellte Nahfeldanteil dominierend wird, wobei jetzt jedoch auch die radialdominanten Wellen relativ große Amplituden aufweisen. Die axialdominanten Wellen, im unteren Frequenzbereich orange und im oberen Frequenzbereich blau dargestellt, werden bei der



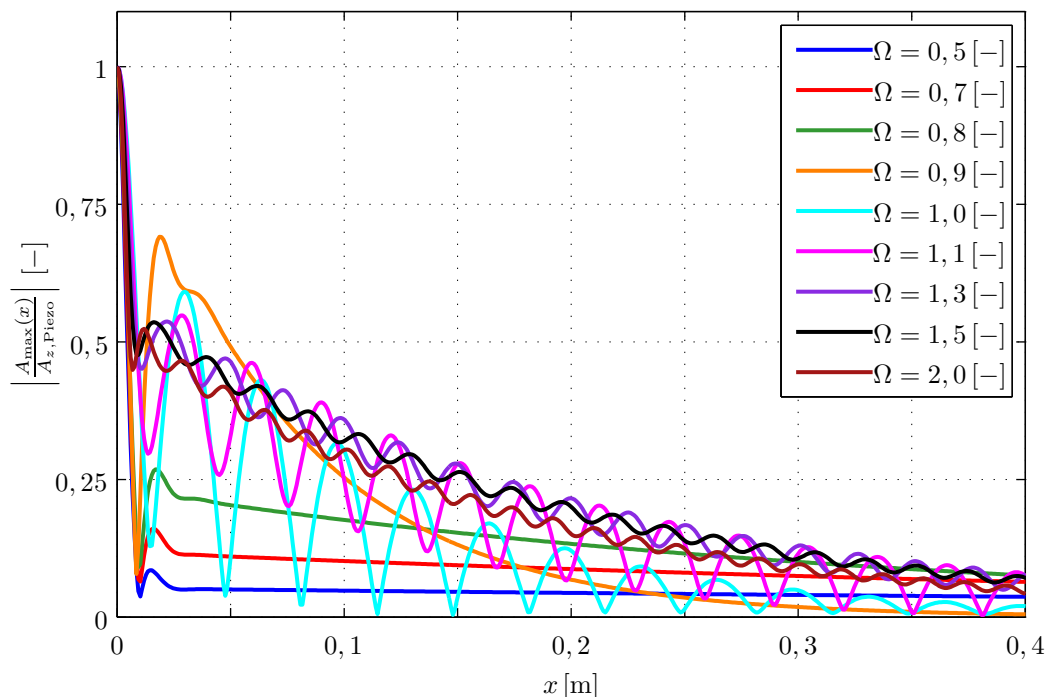
**Abbildung 6.20:** Frequenzabhängige Amplitudenverteilung entlang der Achse des Hohlzylinders



**Abbildung 6.21:** Frequenzabhängige Amplituden für bestimmte Positionen entlang der Achse des Hohlzylinders

vorliegenden Anregungsart jeweils am schwächsten angeregt. In dem angesprochenen Übergangsbereich ( $0,7 < \Omega < 1,2$ ) steigen die Amplituden aller Wellenanteile an, wobei die Amplitude des zunächst axialdominanten Anteils, der gerade in diesem Frequenzbe-





**Abbildung 6.22:** Amplitudenverteilung entlang der Achse des Hohlzylinders für verschiedene Anregungsfrequenzen

reich zu einem radialdominanten Anteil wird, überproportional stark anwachsen. Durch das gleichzeitige anwachsen aller Anteile verliert die Dominanz der Nahfelder an Bedeutung. Die Verteilung der sich aus dem Modell ergebenden maximalen Auslenkungen entlang der Achse des Hohlzylinders sind in **Abb. 6.20** dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass im unteren Frequenzbereich nur Wanderwellen mit sehr kleinen Amplituden angeregt werden. Im oberen Frequenzbereich dagegen zeigt sich sehr gut die ungleichmäßige Amplitudenverteilung, die aus der Überlagerung der beiden ausbreitungsfähigen Wellenanteile entsteht. Bei Betrachtung von **Abb. 6.19** wäre es nun naheliegend, den Betriebspunkt bei etwa  $\Omega = 0,9$  zu wählen, da hier die Amplitude der Wanderwellen besonders groß ist. Da aber in diesem Bereich auch die Dämpfung ansteigt, wie sich z. B. aus **Abb. 6.9** erkennen lässt, ist die Reichweite dieser Wanderwellen sehr beschränkt. Um diesen Punkt näher zu beleuchten soll **Abb. 6.20** herangezogen werden. Dargestellt ist die Amplitudenverteilung entlang des Hohlzylinders in Abhängigkeit der Frequenz. Deutlich erkennbar sind die großen Wanderwellenamplituden im Bereich  $0,8 < \Omega < 1$ , die allerdings oberhalb von  $x \approx 200$  mm schon fast vollständig verschwunden sind. Im darunter liegenden Frequenzbereich sind die Amplituden in der Nähe der Anregung zwar kleiner nehmen aber deutlich langsamer ab. Für den Frequenzbereich  $\Omega > 1$  ist deutlich die aus der Überlagerung der verschiedenen Wanderwellenanteile resultierende Modulation erkennbar. Um die Details besser betrachten zu können, sind in **Abb. 6.21** und **6.22** verschiedene Schnitte von **Abb. 6.20** dargestellt. Die Abbildungen verdeutlichen die unterschiedlich starke Abnahme der Amplituden entlang der Zylinderachse. Während die Amplituden im unteren Frequenzbereich nur leicht abnehmen, ist im oberen Frequenzbereich eine deutlich stärkere Abnahme der Amplituden erkennbar (**Abb. 6.21**).

Das Amplitudenminimum in der Nähe der Anregung wird ebenfalls durch die Wahl der Anregefrequenz beeinflusst. Mit steigender Frequenz wird die minimale Amplitude und die Amplitude der sich ausbreitenden Wanderwellen größer, allerdings bei gleichzeitig ansteigender Dämpfung. Oberhalb der Grenzfrequenz verschwindet das Minimum fast vollständig, dafür treten hier Überlagerungen verschiedener Wanderwellen auf, die zu einer Modulation der Amplitudenverteilung führen. Anhand dieser Betrachtungen lassen sich einige Aussagen zum optimalen Betriebspunkt treffen. So wäre für das Erreichen großer Förderreichweiten eine Anregung im Bereich  $0,5 < \Omega < 0,8$  sinnvoll, da hier in großer Entfernung von der Anregung die größten Amplituden erreicht werden. Ist die Förderstrecke kürzer kann dagegen eine etwas höhere Frequenz  $0,8 < \Omega < 0,9$  sinnvoller sein, da sich hier größere Wanderwellenamplituden erreichen lassen, die allerdings schneller abnehmen.

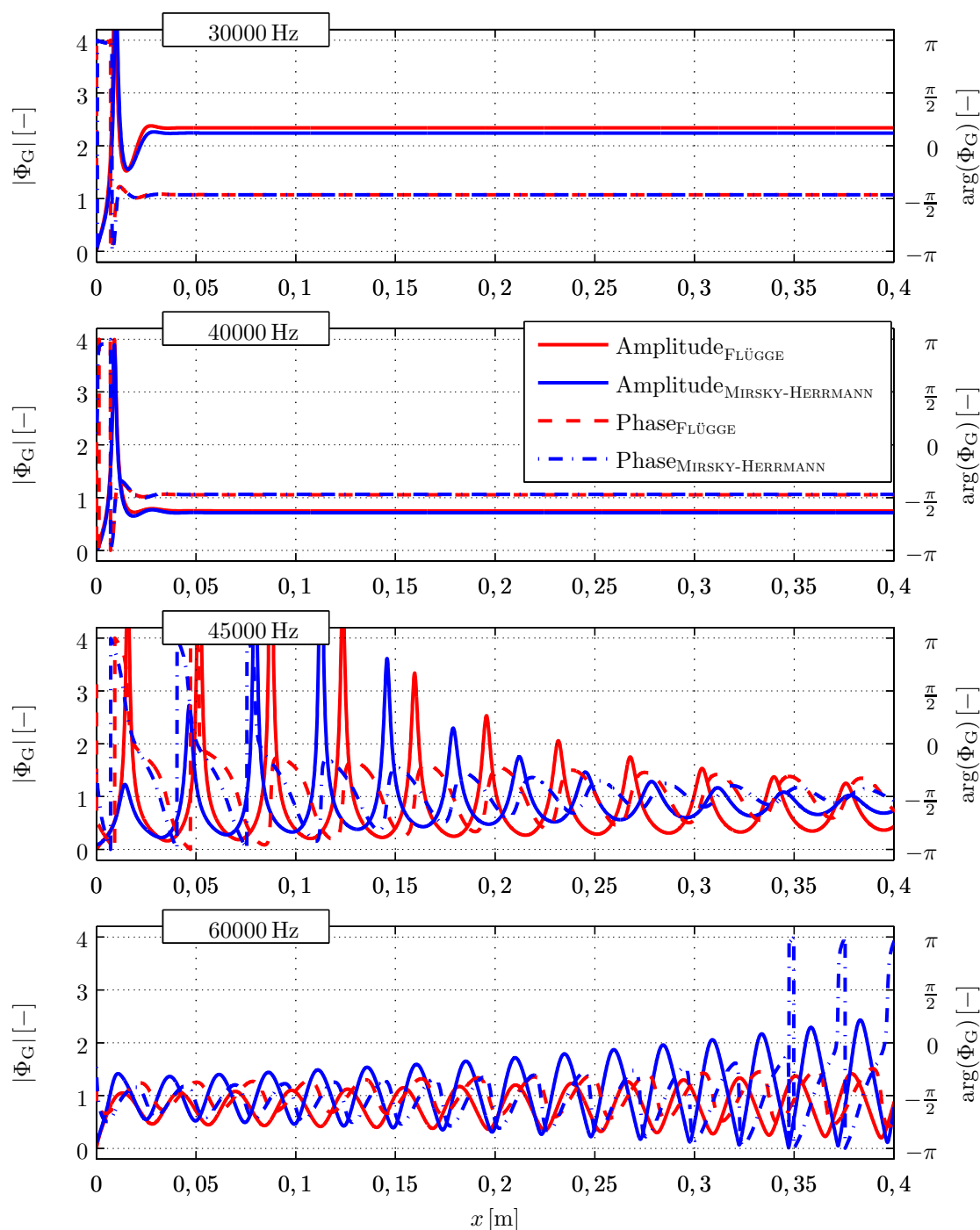
### 6.3 Trajektorien der Oberflächenpunkte

Abschließend sollen in diesem Abschnitt noch die sich einstellenden Oberflächenpunktbahnen für ausgewählte Betriebszustände zwischen Modell und Messung verglichen werden. Zu diesem Zweck werden anhand der Modelle die Oberflächenpunkttrajektorien bestimmt und den Messungen gegenübergestellt. Wie bereits in Abschnitt 4.1.5 gezeigt, ist die Entstehung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen beim hohlzylindrischen Wellenleiter komplexer als beim Balken aus Abschnitt 2.1.1. Bedingt durch die starke Kopplung zwischen axialen und radialen Verschiebungsanteilen müssen bei der Bestimmung der elliptischen Bahnen auch die axialen Verschiebungskomponenten berücksichtigt werden. Erst nach Überlagerung von Axialverschiebung, Radialverschiebung sowie dem aus der Querschnittsverkippung resultierenden Anteil für alle angeregten Wellenanteile ergibt sich die vollständige elliptische Bahnkurve. Die Betrachtungen aus Abschnitt 4.1.5 müssen an dieser Stelle also noch dahingehend erweitert werden, dass Gl. (4.52) über alle Wellenanteile aufsummiert wird, wobei allerdings aufgrund der verschiedenen Wellenlängen die Ortsabhängigkeit berücksichtigt werden muss. Bei Verwendung des FLÜGGE-Ansatzes unter Berücksichtigung der Querschnittsverkippung ergibt sich somit

$$\Phi_G(s, z) = \frac{\sum_i u_i(s) - \frac{z}{a} w'_i(s)}{\sum_i w_i(s)} = \frac{\sum_{i=1}^3 (\Phi_i(\Omega) + j k_{s,i} \frac{z}{a}) C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}}{\sum_{i=1}^3 C_i e^{j(\Omega\tau - k_{s,i}s)}}, \quad (6.22)$$

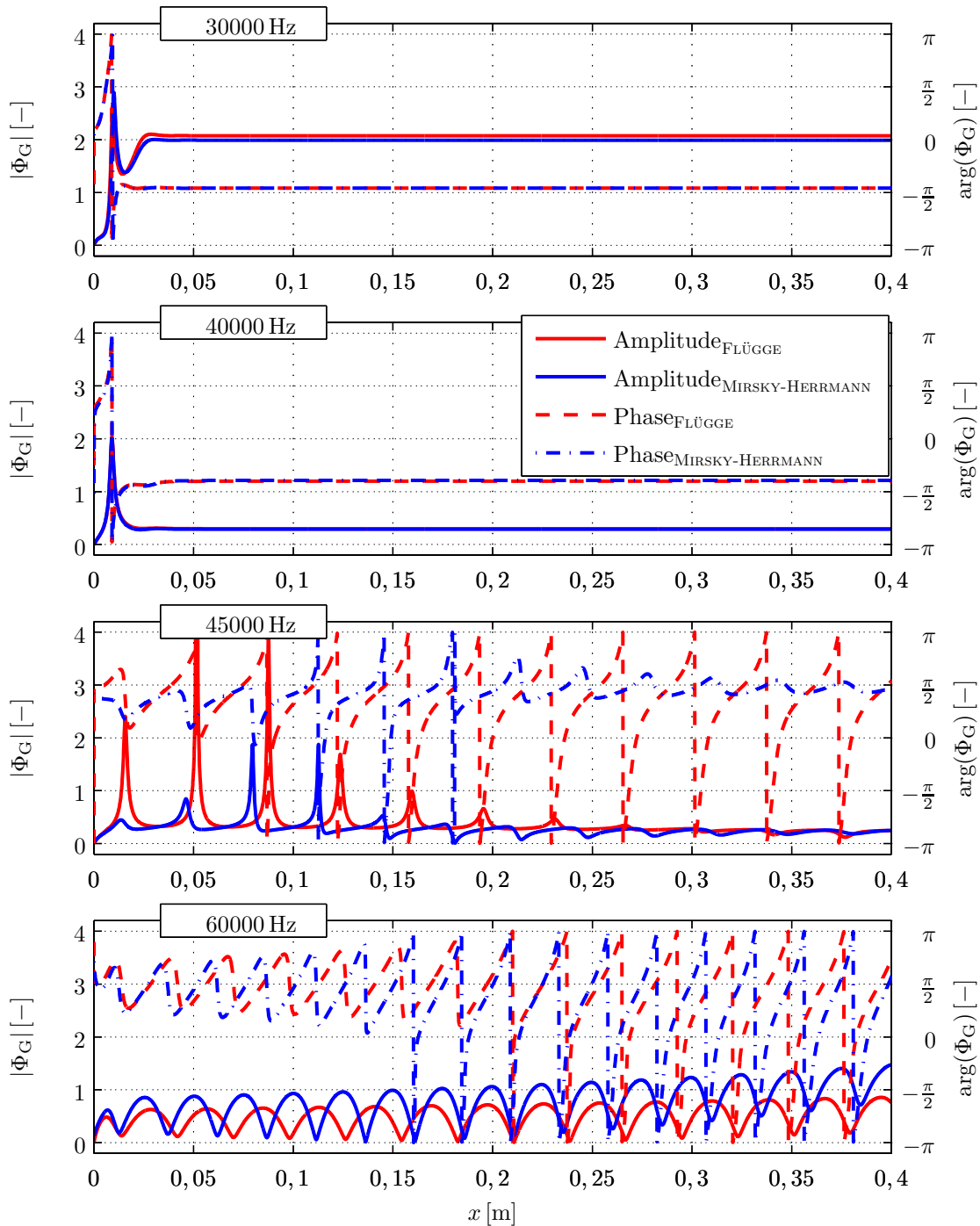
wobei jetzt gilt

$$\Phi_G^*(s) = |\Phi_G(s)| \quad \text{und} \quad \delta_G(s) = \arg(\Phi_G(s)). \quad (6.23)$$



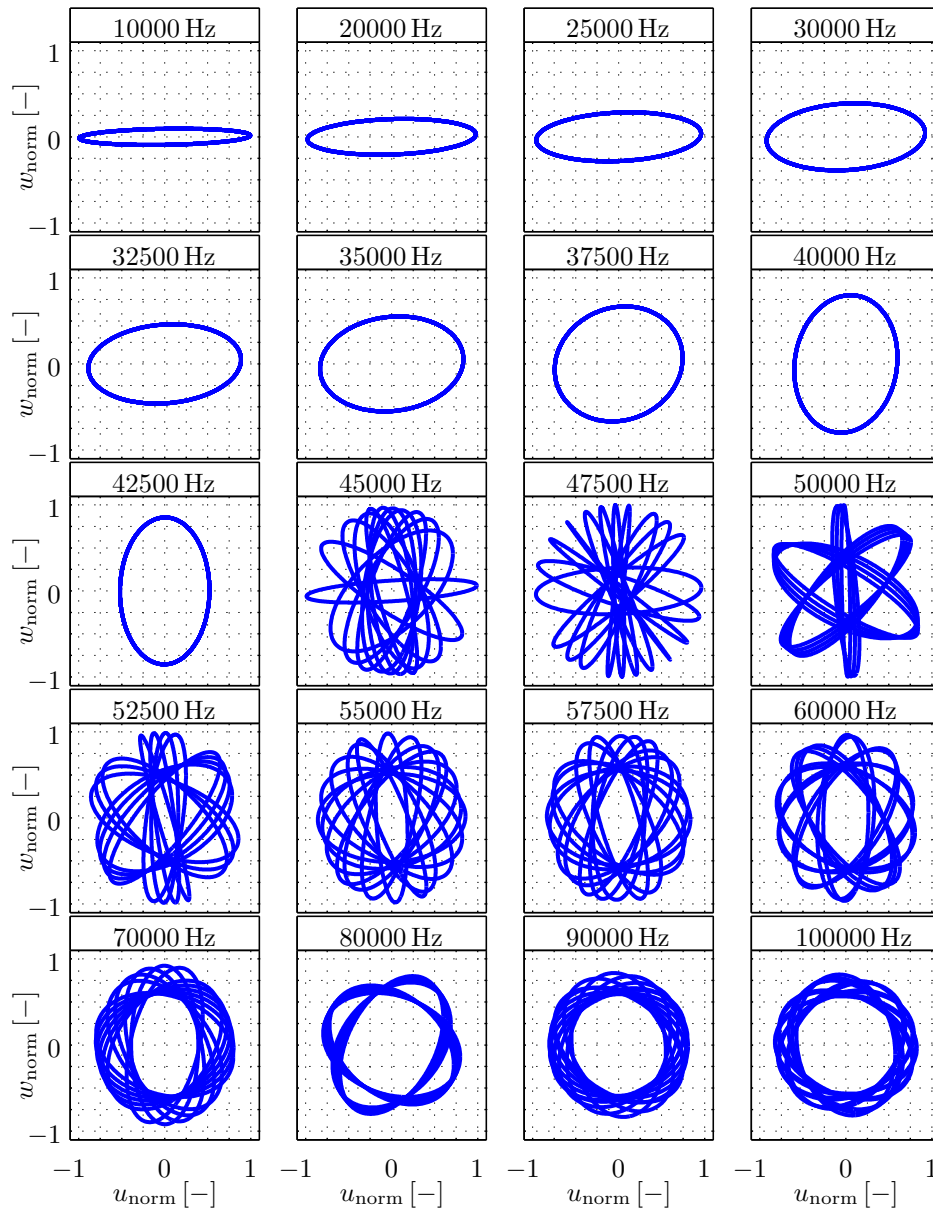
**Abbildung 6.23:** Amplitudenverhältnis  $\Phi_G$  der Gesamtschwingungsform für System II an der Zylinderinnenseite (Simulation)

**Abb. 6.23** und **6.24** zeigen für ausgewählte Betriebsfrequenzen das sich einstellende komplexe Amplitudenverhältnis an der Zylinderinnen- und Zylinderaussenseite von System II nach Betrag und Phase, wie es sich aus Gl. (6.22) ergibt. Es sind jeweils die Ergebnisse bei Verwendung der Dispersionskurven nach FLÜGGE und MIRSKY-HERRMANN einander gegenübergestellt, wobei bei den Berechnungen der Schwingungsform jeweils das Modell nach FLÜGGE verwendet wurde. Durch die unterschiedlich starke Dämpfung der partizipierenden Wanderwellenanteile bzw. die Amplitudenabnahme der Nahfelder



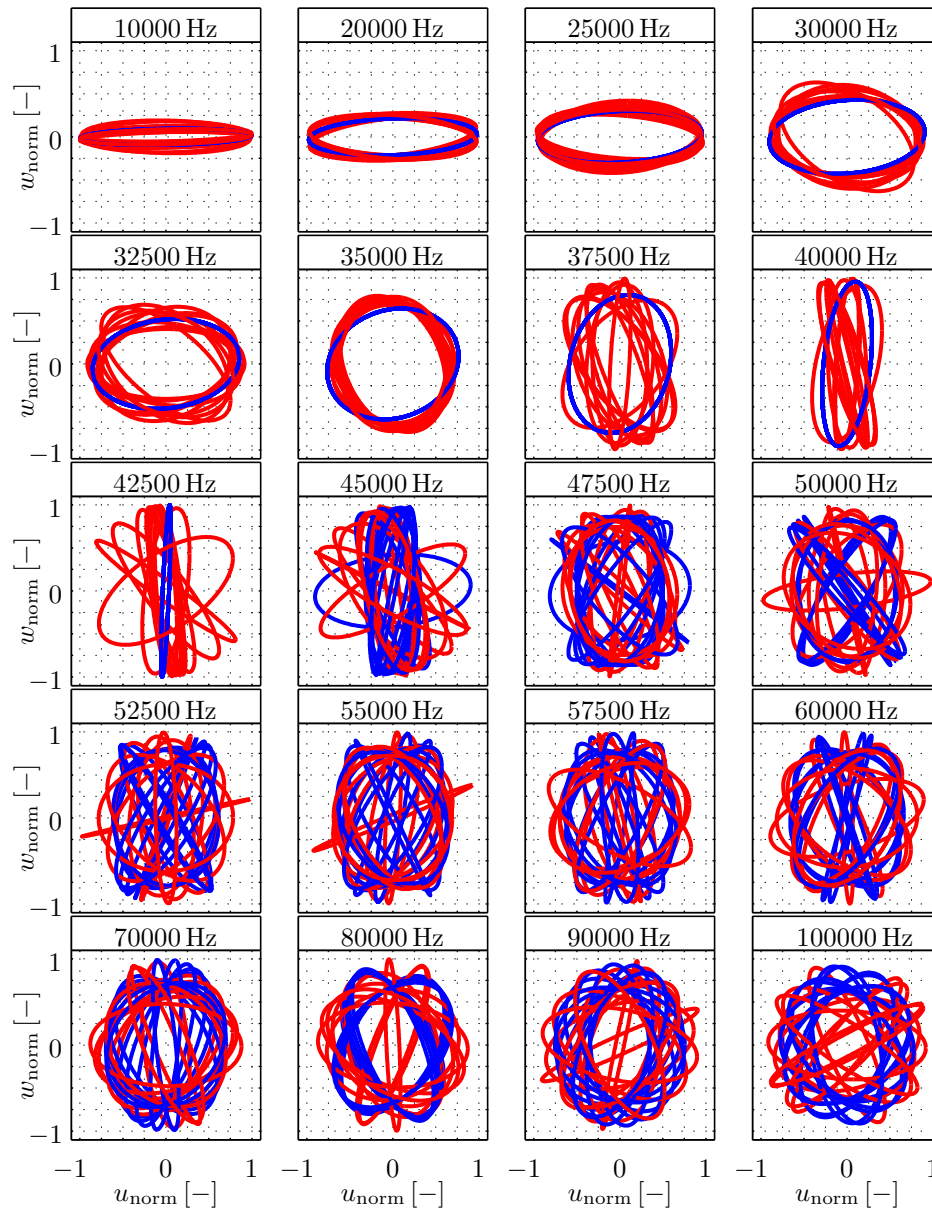
**Abbildung 6.24:** Amplitudenverhältnis  $\Phi_G$  der Gesamtschwingungsform für System II an der Zylinderaußenseite (Simulation)

ist der Einfluss der einzelnen Wellenanteile teilweise sehr stark ortsabhängig, so dass sich die resultierenden Axial- und Radialverschiebungen und damit auch die Ellipsenformen mit der axialen Koordinate  $x$  bzw.  $s$  verändern. Bei Betrieb unterhalb der Grenzfrequenz haben Amplitude und Phase des Amplitudenverhältnisses  $\Phi_G$ , abgesehen von einem kleinen Bereich in der Nähe der Piezoanregung, konstante Werte. Nur in unmittelbarer Nähe der Anregung ist ein Einfluss der Nahfeldanteile erkennbar, der jedoch mit zunehmendem Abstand zum Piezowandler kaum noch erkennbar ist. Ab einem ge-



**Abbildung 6.25:** Ellipsenformen der Gesamtschwingungsform an der Zylinderinnen-seite bei Verwendung des Ansatzes nach MIRSKY-HERRMANN für System II - Simulation

wissen Abstand ist nur noch der Einfluss der Wanderwellenanteile beobachtbar, deren Amplitudenverhältnis sich durch einen konstanten Amplituden- und Phasenverlauf auszeichnet. Die im Modell vorhandene Dämpfung wird an dieser Stelle nicht sichtbar, da zwar die Amplitude der sich ausbreitenden Wellen abnimmt, das Verhältnis der axialen zur radialen Verschiebung aber nicht von der Wellenamplitude sondern nur vom Wellentyp abhängig ist. Oberhalb der Grenzfrequenz zeigt sich ein vollständig anderes Bild. Sowohl der Amplituden- als auch der Phasenverlauf zeigen stark veränderliches Verhalten, das von leichten Veränderungen abgesehen als periodisch über der Ortskoordinate beschrieben werden kann.



**Abbildung 6.26:** Ellipsenformen der Gesamtschwingungsform an der Zylinderaußenseite bei Verwendung des Ansatzes nach MIRSKY-HERRMANN für System II - Simulation (blau) - Messung (rot)

Die sich aus den Simulationen ergebenden Ellipsenformen zu **Abb. 6.23** und **6.24** sind in **Abb. 6.25** und **Abb. 6.26** in Abhängigkeit der Betriebsfrequenz jeweils in blau dargestellt. Um auch eine eventuell vorhandene Ortsabhängigkeit zu erfassen sind jeweils zehn Ellipsen dargestellt, wie sie anhand des Modells für die Positionen  $x = 103, 113, \dots, 193$  mm bestimmt werden können. Analog zu den Ergebnissen der Simulation sind für die Zylinderaußenseite ebenfalls die gemessenen Ellipsenformen an den gleichen Stellen in rot dargestellt.

Sowohl Simulation als auch Messung zeigen im Bereich bis einschließlich 42,5 kHz eine sehr gleichmäßige, positionsunabhängige Ellipsenform. Dabei lässt sich zunächst ei-

ne Dominanz des axialen Verschiebungsanteils feststellen, die sich langsam reduziert bis schließlich ab etwa 39 kHz der radiale Anteil dominierend wird. Zwar zeigen sich leichte Abweichungen zwischen Modell und Messung, je mehr sich die Frequenz der Grenzfrequenz nähert, im Allgemeinen jedoch stimmen Modell und Messung, von einigen Ausreißern in den Messungen abgesehen, sehr gut überein. Für den Bereich oberhalb der Grenzfrequenz lässt sich eine starke Ortsabhängigkeit feststellen. Deutlich zu erkennen ist die Modulation der Ellipsenform, die aus der Überlagerung der Wanderwellenanteile mit unterschiedlichen Wellenlängen und der damit einhergehenden, periodischen Änderung des komplexen Amplitudenverhältnisses oberhalb der Grenzfrequenz resultiert.

## 6.4 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde eine Validierung der in Kapitel 4 hergeleiteten Modelle anhand der in Kapitel 5 beschriebenen Messungen durchgeführt. Sowohl das auf der Schalentheorie nach FLÜGGE basierende Modell, als auch das auf der Schalentheorie nach MIRSKY-HERRMANN sind in der Lage, das Schwingungsverhalten der Hohlzylinder beim Ultraschall-Wanderwellentransport zu beschreiben. Allerdings liefert das Modell nach MIRSKY-HERRMANN aufgrund der Berücksichtigung von Scher- und Dehnungsanteilen eine bessere Übereinstimmung hinsichtlich der komplexen Wellenzahlen.

Die Beschreibung der Schwingungsformen in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz ist mit beiden Modellen möglich. Da die komplexen Wellenzahlen von entscheidender Bedeutung sind, schneidet der Ansatz nach MIRSKY-HERRMANN besser ab und liefert eine höhere Korrelation der berechneten mit den gemessenen Schwingungsformen.

Eine nähere Betrachtung der synthetisierten Schwingungsformen lieferte einige Erkenntnisse bezüglich der Anregbarkeit und Ausbreitung der verschiedenen Wellentypen. So gibt es Frequenzbereiche in denen sich bestimmte Wellentypen mit der radialen Anregung durch den Piezowandler gut anregen lassen und andere Bereiche in denen sie weniger gut angeregt werden. Nicht zu vernachlässigen ist in diesem Zusammenhang die stark frequenz- und wellentypabhängige Dämpfung, da diese die Ausbreitung einer gut angeregten Wanderwelle stark beschränken kann. So zeigte sich, dass wenn es darum geht sich weit ausbreitende Wanderwellen anzuregen, Frequenzbereiche mit geringer Anregung aufgrund der niedrigeren Dämpfung besser geeignet sein können als Frequenzbereiche mit einer besseren Anregung aber höherer Dämpfung der Wanderwellen.

Abschließend ließ sich im letzten Abschnitt eine hohe Übereinstimmung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen zwischen Simulationsmodell und Messung zeigen. Die ebenfalls gezeigte starke Positionsabhängigkeit der Ellipsenform für Betriebsfrequenzen oberhalb der Grenzfrequenz lässt einige Folgerungen für die Wahl der optimalen Betriebsfrequenz zu. Wenn, unabhängig von der nach wie vor offenen Frage nach der optimalen Ellipsenform, eine gleichmäßige Ellipsenform entlang der Förderstrecke gewünscht ist, so ist klar, dass das System unterhalb der Grenzfrequenz betrieben werden muss. Nur so

lässt sich eine gleichmäßige und kontinuierliche Förderung realisieren, bei der das Fördergut unabhängig von seiner Position stets den gleich Vortrieb erfährt.



## 7 Diskussion der Ergebnisse

Anhand der in den vorangegangenen Kapiteln gewonnenen Erkenntnisse diskutiert das vorliegende Kapitel die Ergebnisse dieser Arbeit. Zu diesem Zweck werden die in Kapitel 3 formulierten Fragen wieder aufgegriffen.

### **Wie sieht ein geeignetes Modell aus, anhand dessen es möglich ist, die Wanderwellen-anregung und -ausbreitung in Hohlzylindern zu beschreiben?**

Grundsätzlich sind sowohl das Modell basierend auf dem Ansatz nach FLÜGGE als auch das nach MIRSKY-HERRMANN geeignet, die Wanderwellenausbreitung in Hohlzylindern zu beschreiben. Dabei haben allerdings beide sowohl ihre Vor- als auch ihre Nachteile. Beiden Modellen ist gemein, dass zunächst die Dispersionskurven numerisch berechnet werden müssen, da sich die entsprechenden Gleichungen dritter bzw. vierter Ordnung in  $k^2$  nicht analytisch lösen lassen. Aufgrund der von FLÜGGE getroffenen, vereinfachenden Annahmen bei der Herleitung zeigen sich bei diesem Modell im Bereich großer Wellenzahlen bzw. kleiner Wellenlängen deutliche Abweichungen der Dispersionskurven von den Ergebnissen nach MIRSKY-HERRMANN, die deutlich besser die aus den Messungen identifizierten Dispersionskurven wiedergeben. Dafür bietet aber das Modell nach dem Ansatz von FLÜGGE, aufgrund seiner noch verhältnismäßig einfachen und überschaubaren Struktur, die Möglichkeit analytischer Betrachtungen. Darüber hinaus lassen sich mit diesem Modell auch die Schwingungsformen bei vorgegebener Anregung, durch Anpassung eines Lösungsansatzes an vorgegebene Randbedingungen, bestimmen. Für den deutlich komplexeren Ansatz nach MIRSKY-HERRMANN sind diese Betrachtungen so nicht durchführbar. Um die Möglichkeit der Berechnung von Schwingungsformen und der Analyse der dabei auftretenden Effekte mit den genaueren Dispersionskurven modellübergreifend zu verbinden, lassen sich die Modelle kombinieren. So lassen sich die entsprechenden Äste aus dem nach MIRSKY-HERRMANN berechneten Dispersionsdiagramm in dem Modell nach FLÜGGE verwenden, um weitergehende Analysen durchzuführen.

Während der Durchführung der Messungen zeigte sich, dass die getroffene Annahme der radialsymmetrischen Anregung nicht immer erfüllt war. Vielmehr traten in einzelnen Messungen in radialer Richtung Wellen dritter Ordnung stark hervor, obwohl dies theoretisch gar nicht möglich sein sollte. Eine eingehende Analyse zeigte, dass dieser Effekt maßgeblich von der Geometrie des verwendeten Piezowandlers beeinflusst wird. Wenn das Durchmesser Verhältnis des Wandlers  $\frac{d_a}{d_i} = 2$  beträgt, fallen die Eigenfrequenzen der radialsymmetrischen Mode und der dritten In-Plane-Biegung zusammen, was zu einer Kopplung der beiden Eigenformen und damit zur Anregung der nicht radialsym-

metrischen Wellen führt. Wird aber der Bereich dieses Durchmesserhältnisses bei der Auswahl des Piezowandlers gemieden, ist die getroffene Annahme der radialsymmetrischen Anregung zutreffend. Sollen die nicht radialsymmetrischen Wellen, d. h. Wellen höherer Ordnung, betrachtet werden, kann das Modell nach MIRSKY-HERRMANN nicht verwendet werden, da dieses durch den verwendeten Ansatz nicht radialsymmetrische Verschiebungen von vornherein ausschließt.

### **Können die frequenzabhängigen Schwingungsformen anhand des Modells bestimmt werden?**

Basierend auf beiden in der vorliegenden Arbeit entwickelten Modellen zur Beschreibung der Wanderwellenausbreitung in hohlzylindrischen Wellenleitern lassen sich über die Dispersionskurven und die daraus entnommenen frequenzabhängigen Wellenzahlen die Schwingungsformen bei radialsymmetrischer Anregung bestimmen. Aufgrund der höheren Komplexität des auf MIRSKY-HERRMANN basierenden Modells lassen sich für dieses Modell allerdings nicht genügend sinnvolle Randbedingungen angeben, um die Schwingungsform direkt zu bestimmen. Bei dem etwas einfacheren Modell nach FLÜGGE dagegen lassen sich die Amplituden der Wanderwellenanteile so bestimmen, dass die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt werden. Da sich beide Modellierungsansätze zu einem gewissen Grad ähneln bietet sich eine interessante Möglichkeit, die Vorzüge beider Modelle miteinander zu verknüpfen. So lassen sich die genaueren, mit dem Ansatz nach MIRSKY-HERRMANN ermittelten, Wellenzahlen in das Modell nach FLÜGGE einsetzen, um die Schwingungsformen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu bestimmen. Zwar werden die Schwingungsformen nicht exakt bis ins letzte Detail vom Modell vorhergesagt, aber alle wesentlichen Effekte wie der Stehwellenanteil und das Amplitudenminimum in der Nähe der Anregung sowie die sich stark mit der Frequenz ändernde Schwingungsform werden von dem Modell wiedergegeben. Dies gilt auch für die aufbauend auf den berechneten Schwingungsformen bestimmten elliptischen Bahnen der Oberflächenpunkte, die eine sehr gute Übereinstimmung mit den im Versuch gemessenen Ellipsen zeigten. Die Unterschiede zwischen Modell und Messung resultieren im Wesentlichen aus kleinen Abweichungen der Wellenzahlen, die sich in Form von kleinen Wellenlängendifferenzen über die Länge des Hohlzylinders aufsummieren und so zu nur scheinbar stark von den Messungen abweichenden Schwingungsformen führen.

### **Wie lassen sich das Amplitudenminimum und der Stehwellenanteil in der Nähe des Piezowandlers erklären?**

Das Amplitudenminimum und der Stehwellenanteil in der Nähe des Piezowandlers haben eine gemeinsame Ursache. Bei der Anregung durch den Piezowandler werden nicht nur die gewünschten Wanderwellenanteile, sondern auch nicht ausbreitungsfähige Nahfelder angeregt, deren Amplitude fast im gesamten Frequenzbereich größer ist, als die des am stärksten angeregten Wanderwellenanteils (siehe **Abb. 6.19**). Die Nahfelder und die Wanderwellen werden mit unterschiedlicher Phase angeregt, da die sich einstellende Schwingungsform sonst die vorgegebenen Randbedingungen nicht erfüllen würde. In der Überlagerung führen die Nahfeld- und Wanderwellenanteile zur Ausprägung des

Amplitudenminimums.

Da die Nahfelder in der Nähe der Anregung die Schwingungsform dominieren und sich die Strukturpunkte dort nahezu in Phase bewegen, entsteht der Eindruck eines Stehwellenanteils. Er entsteht allerdings durch die Anregung von Nahfeldern und nicht wie bei der Reflexion von Wellen am Ende eines Wellenleiters durch die Überlagerung von einlaufenden und reflektierten Wellen.

### **Lässt sich die Ausprägung des Amplitudenminimums reduziert oder gar vollständig verhindern?**

Die starke Dominanz des Nahfeldanteils ist im unteren Frequenzbereich ursächlich für das Auftreten des stark ausgeprägten Amplitudenminimums. Bei Erhöhung der Anregungsfrequenz bis zur Grenzfrequenz steigt die Amplitude im Minimum leicht an, während die Amplituden der sich ausbreitenden Wanderwellen deutlich zunehmen (siehe **Abb. 6.22**). Weil die Dämpfung der Wanderwellen in diesem Bereich aber ebenfalls ansteigt (siehe **Abb. 6.21**), nehmen die Amplituden bei der Ausbreitung entsprechend schneller ab. Oberhalb der Grenzfrequenz verschwindet das Amplitudenminimum fast vollständig. Da in diesem Bereich zwei Typen von Wanderwellen angeregt werden, deren Wellenlängen im Allgemeinen verschieden sind, kommt es hier allerdings zu einer Amplitudenmodulation (siehe **Abb. 6.22**), die eine sehr ungleichmäßige Amplitudenverteilung bei ebenfalls schnell abklingenden Amplituden mit sich bringt. Die Reduzierung der Ausprägung des Amplitudenminimums geht also mit einer Reduzierung der Wanderwellenamplituden für lange Förderstrecken und damit der erreichbaren Förderstrecke einher.

### **Wie tragen die angeregten Wellen mit ihren radialen und axialen Verschiebungsanteilen zur Ausbildung der elliptischen Oberflächenpunktbahnen bei?**

Durch die Kopplung der radialen und axialen Verschiebungen in den einzelnen Wellentypen ist bereits ohne die Berücksichtigung der Verkipfung eine elliptische Oberflächenpunktbahn denkbar. Die Ellipse wird aber dennoch hinsichtlich ihrer Form und Lage unter Umständen sehr erheblich vom Verkipfungsanteil beeinflusst. Die Ellipse lässt sich aus dem komplexen Verhältnis  $\Phi'_i = \frac{A_i + \Delta A_i}{C_i}$  des axialen zum radialen Verschiebungsanteil des Oberflächenpunktes bestimmen. Je nach Art des betrachteten Wellenanteils ist der aus der Querschnittsverkipfung resultierende Anteil  $\Delta A_i$  manchmal kaum von Bedeutung und in anderen Fällen wiederum der dominierende Anteil. Festzuhalten ist, dass  $\Phi'_i$  eine Eigenschaft des Wellenanteils ist und sich selbst bei vorhandener Dämpfung während der Wellenausbreitung nicht ändert. Alle Oberflächenpunkte entlang des Hohlzylinders durch den eine solche Welle läuft beschreiben also die gleiche elliptische Bahn, d. h. gleiche Orientierung und identisches Hauptachsenverhältnis. Lediglich ein zeitlicher Versatz beim Durchlaufen der Ellipse und eine Abnahme der Amplituden bei vorhandener Dämpfung unterscheiden die einzelnen Punkte. Überlagern sich allerdings zwei oder mehr Wellen mit verschiedenen Wellenlängen, so muss die Summe über die verschiedenen  $\Phi'_i$  betrachtet werden. Bedingt durch die unterschiedlichen Wellenlängen ergibt sich dann eine Modulation der Ellipsenformen entlang der Zylinderachse.

Da im unteren Frequenzbereich bis zur Grenzfrequenz der Radialschwingungen nur ein

Wanderwellenanteil neben den zwei Nahfeldanteilen angeregt wird, ergeben sich hier gleichmäßige elliptische Bahnen, die sich in Abhängigkeit der Position kaum verändern. Lediglich in dem von den Nahfeldern dominierten Bereich ergeben sich abweichende Oberflächenpunktbahnen. Oberhalb der Grenzfrequenz ändert sich das Bild und die Oberflächenpunktbahnen verändern sich in Abhängigkeit des Ortes, da hier nur ein Nahfeldanteil, dafür aber zwei Wanderwellenanteile angeregt werden.

**Gibt es, unter Berücksichtigung der zuvor genannten Punkte, einen optimalen Frequenzbereich für den Betrieb eines Ultraschall-Wanderwellentransport-Systems?**

Der Frequenzbereich, in dem ein Ultraschall-Wanderwellentransport-System gut arbeitet, sollte eine große Wanderwellenamplitude bei gleichzeitig geringer Dämpfung der Wanderwellen mit einem wenn überhaupt nur schwach ausgeprägtem Amplitudenminimum ermöglichen. Zusätzlich sind gleichmäßige Oberflächenpunktbahnen für einen kontinuierlichen, gleichförmigen Transport wichtig.

Da oberhalb der Grenzfrequenz (siehe Gl. (4.28)) stets zwei Wanderwellenanteile angeregt werden und in ihrer Überlagerung zu einer Modulation der Ellipsenformen führen, erscheint dieser Frequenzbereich eher ungeeignet für den Betrieb eines Ultraschall-Wanderwellentransport-Systems zu sein. Unterhalb der Grenzfrequenz dagegen wird nur ein Wanderwellenanteil angeregt, so dass sich eine kontinuierliche Form der Oberflächenpunktbahnen ergibt. Direkt unterhalb der Grenzfrequenz ( $\Omega \approx 0,9$ ) lassen sich zwar hohe Amplituden der Wanderwellen erreichen (siehe **Abb. 6.22**), welche aber bedingt durch den lokalen Dämpfungsanstieg in diesem Frequenzbereich (siehe **Abb. 6.9**) schnell abnehmen. Im Bereich von ( $\Omega \approx 0,7 - 0,8$ ) sind die Amplituden im Hohlzylinder zwar nicht ganz so groß, lassen aber in Kombination mit einer geringeren Dämpfung höhere Reichweiten zu. Obwohl im Gegenzug die Existenz des Amplitudenminimums in Kauf genommen werden muss, das den Fluss des Fördergutes im Bereich des Piezowandlers abbremst, scheint dieser Frequenzbereich derjenige zu sein, der die beste Förderleistung ermöglicht, wenn längere Förderstrecken realisiert werden sollen.

Obwohl in vielen Veröffentlichungen auf die Notwendigkeit der hohen Materialdämpfung hingewiesen wurde, gab es auch Veröffentlichungen, in denen ein Metall-Hohlzylinder als Wellenleiter eingesetzt wurde. Durch Messungen im Rahmen dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass sich durch den Dämpfungseffekt des im Vorratsbehälters befindlichen Materials auch auf Wellenleitern aus nur schwach dämpfenden Materialien Wanderwellen erzeugen lassen. Durch den Einsatz solcher Materialien bietet sich damit die Möglichkeit größere Förderstrecken zu realisieren als bei Verwendung stark dämpfender Hohlzylindermaterialien, da die Amplitude der Wanderwellen während der Ausbreitung deutlich weniger stark reduziert wird.

## Fazit

Die Anregung und Ausbreitung von radialsymmetrischen Wanderwellen auf einem hohlzylindrischen Wellenleiter können anhand der hergeleiteten Modelle beschrieben und alle wichtigen Effekte analysiert werden. Für den Fall der radialen Anregung können sowohl die Schwingungsformen als auch die daraus resultierenden Bahnen der Oberflä-

chenpunkte in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Untersuchungen bestimmt werden. Auch die bisher noch nicht erklärten Phänomene des Stehwellenanteils und des Amplitudenminimums in der Nähe der Anregung können anhand der Modelle beschrieben und erklärt werden.

Bei der Analyse der Dispersionsdiagramme zeigte sich ein weiteres interessantes Phänomen, das für die Erreichung großer Förderstrecken von entscheidender Bedeutung ist. So ergibt sich trotz der Annahme eines konstanten Verlustfaktors eine in Abhängigkeit der Frequenz stark veränderliche Dämpfung der unterschiedlichen Wanderwellenanteile. Als Konsequenz hieraus ist nicht unbedingt die Frequenz bei der die Wanderwellen am Besten angeregt werden die geeignetste sondern diejenige, die eine gute Anregung der Wanderwellen mit einer geringen Abnahme der Amplituden kombiniert.

Bei der in der vorliegenden Arbeit ausschließlich verwendeten radialen Anregung durch einen Piezoringwandler können bestimmte Durchmesserhältnisse des Piezowandlers zu Problemen führen. So fallen, wenn der Außendurchmesser das Doppelte des Innendurchmessers beträgt ( $\frac{d_a}{d_i} = 2$  bzw.  $\frac{h}{a} = \frac{2}{3}$ ), die beiden Eigenfrequenzen der Radial-Mode und der dritten In-Plane-Mode zusammen. Hierdurch kommt es zu einer Kopplung der beiden Moden und statt der gewünschten radialsymmetrischen Wellen werden auch Wellen dritter Ordnung auf dem Hohlzylinder angeregt. Um dies zu vermeiden, ist bei der Auslegung des Systems ein von dem oben genannten Verhältnis abweichendes Durchmesser Verhältnis für die Piezoanregung zu wählen.

Anhand der in dieser Arbeit hergeleiteten Modelle ist es jetzt möglich, das Schwingungsverhalten und die Wanderwellenausbreitung auf hohlzylindrischen Wellenleitern unter radialsymmetrischer Anregung an einem Ende zu beschreiben. Auf Grundlage der vorliegenden Berechnungsmodelle können die grundsätzlichen Phänomene erklärt und Ultraschall-Wanderwellentransport-Systeme ausgelegt und optimiert werden.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Modellierung der Anregung und Ausbreitung von Wanderwellen auf hohlzylindrischen Wellenleitern im Kontext des Ultraschall-Wanderwellentransports. Ziel der Arbeit ist die Modellierung und darauf aufbauende Analyse des Schwingungsverhaltens von Hohlzylindern bei radialer, symmetrischer Anregung durch einen Piezoringwandler. Eine Analyse des Standes der Technik zu den Themen Ultraschall-Wanderwellentransport, Modellierung von Wanderwellen sowie zur Erzeugung von Wanderwellen bildet den Einstieg in die Arbeit. Hieraus ergeben sich einige noch offene Fragestellungen, die in der vorliegenden Arbeit beantwortet werden sollen. Zunächst werden Modellierungsansätze ausgewählt, die geeignet sind, alle wesentlichen Aspekte zu beschreiben und damit eine tiefergehende Analyse ermöglichen. Im Verlauf der Arbeit werden dann das Amplitudenminimum und der Stehwellenanteil, die in der Nähe der Piezoanregung auftreten und bereits in früheren Veröffentlichungen beschrieben, aber nicht erklärt wurden, weitergehend untersucht. Darüber hinaus werden die sich in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz einstellenden Schwingungsformen anhand des Modells bestimmt und mit experimentell ermittelten Daten validiert. Anschließend folgt, basierend auf den zuvor bestimmten Schwingungsformen, die Analyse der Bahnkurven der Oberflächenpunkte des Hohlzylinders. Besonderes Augenmerk liegt dabei auf dem Einfluss der Kopplung der radialen und axialen Verschiebungen der verschiedenen Wellenanteile sowie deren Überlagerung, die in dieser Form in bisherigen Veröffentlichungen nicht zu finden ist. Abschließend werden Hinweise zur Wahl der optimalen Betriebsfrequenz hinsichtlich hoher Förderströme bei möglichst großen Förderstrecken gegeben.

Zur Modellierung des Schwingungsverhaltens der Hohlzylinder werden im Rahmen der Arbeit zwei auf verschiedenen, bereits existierenden Schalentheorien basierende Ansätze verfolgt. Der erste Ansatz basiert auf der Schalentheorie nach FLÜGGE und liefert bedingt durch die darin enthaltenen Vereinfachungen ein überschaubares Modell, das sich gut für die weitere Analyse des Systems eignet. Der zweite auf einer Schalentheorie nach MIRSKY-HERRMANN basierende Ansatz berücksichtigt im Gegensatz zum ersten auch radiale Dehnungen in der Zylinderwand sowie Scherungsanteile. Allerdings ist dieser Ansatz auf radialsymmetrische Verschiebungen beschränkt und eignet sich aufgrund seiner deutlich höheren Komplexität nur eingeschränkt für tiefergehende Analysen. Nach dem Einsetzen geeigneter Lösungsansätze in die Bewegungsgleichungen lassen sich für beide Ansätze die entsprechenden Dispersionskurven, die den Zusammenhang zwischen komplexer Wellenzahl und Frequenz beschreiben, berechnen. Diese Kurven repräsentieren jeweils einen Wellentyp, der entweder ein Nahfeld- oder ein Wanderwellenanteil sein

kann, und bilden die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen und Simulationen. Die Analyse der anhand des Modells bestimmten Schwingungsformen gibt Aufschluss über die Entstehung des Amplitudenminimums und des Stehwellenanteils in der Nähe des Piezowandlers. Sie resultieren aus der stets auftretenden Überlagerung mehrerer Wellentypen, deren Amplitudenverhältnisse und Phasenlagen sich mit variierender Anregefrequenz ändern und so die Gesamtschwingungsform prägen. Bedingt durch die vom Piezowandler und seiner Fixierung am Hohlzylinder vorgegebenen Randbedingungen werden neben den gewünschten Wanderwellen auch immer Nahfeldanteile angeregt. Diese erscheinen bei Betrachtung des Phasenverlaufs der Gesamtschwingungsform wie eine Stehwelle, ohne dass die Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen vorliegt.

Bei der experimentellen Untersuchung der Schwingungsformen zeigte sich an einer der prototypisch aufgebauten Aktoreinheiten zunächst ein unerwartetes Bild. Die angeregten Schwingungen waren nicht wie erwartet radialsymmetrisch, sondern dritter Ordnung, d. h. die Verformung beschreibt drei Wellen auf dem Umfang des Hohlzylinders. Eine genauere Analyse konnte zeigen, dass die Ursache in dem für die Anregung genutzten Piezoringwandler lag, dessen Verhältnis von Außen- zu Innendurchmesser genau  $\frac{d_a}{d_i} = 2$  betrug. Bei diesem Durchmesser Verhältnis fällt die Eigenfrequenz der Radialmode mit der Eigenfrequenz der dritten In-Plane-Biegemode zusammen und es kommt zu einer Kopplung zwischen den beiden Moden. Es wird also nicht nur die Radialmode sondern auch zu einem nicht unerheblichen Teil die dritte In-Plane-Biegung angeregt und auf den Hohlzylinder übertragen. Um dies zu vermeiden sollten bei der Systemauslegung entsprechend andere Durchmesser Verhältnisse für die zur Anregung verwendeten Piezoringwandler gewählt werden.

Bei entsprechender Wahl der Piezowandler konnte anhand der durchgeführten experimentellen Untersuchungen die Validität der Modelle gezeigt werden. Es ergab sich eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Dispersionskurven mit den aus den Messungen identifizierten Werten. Die Problematik bei der Identifikation bestand in der genauen Bestimmung der Wellenlängen und der zugehörigen Dämpfungswerte aus den aufgenommenen Schwingungsformen. Aufgrund des relativ kleinen zur Verfügung stehenden Messbereiches entlang des Hohlzylinders war die erreichbare Auflösung der DFT bezüglich der Wellenlänge stark limitiert. Diese Beschränkung ließ sich zwar mit Zero-Padding reduzieren, ein weiteres Problem blieb jedoch bestehen. Bei der Anwendung des für die DFT benötigten HANN-Fensters wurden die in unmittelbarer Nähe zum Piezowandler auftretenden, teils stark dominierenden Nahfeldanteile derart reduziert, dass sie nicht mehr identifiziert werden konnten. Abhilfe schaffen konnte hier die Anwendung des aus dem Gebiet der experimentellen Modalanalyse stammenden *Complex-Exponential-Algorithmus*. Der für die Identifikation von Eigenfrequenzen und modalen Dämpfungen aus Impulsantwortfunktionen entworfene Algorithmus lässt sich mit einigen Anpassungen auf die hier vorliegenden Schwingungsformen anwenden, die von der Form her den Impulsantwortfunktionen sehr ähneln. Mit diesem Vorgehen war es schließlich sogar möglich, die in den Dispersionsdiagrammen auftretenden Nahfeldanteile mit ihren sehr hohen Dämpfungen ( $D \approx 0,7$ ) zu identifizieren.

Im Vergleich der beiden Modellierungsansätze zeigte sich, dass das komplexere, auf der Theorie von MIRSKY-HERRMANN basierende Modell speziell im Bereich kleiner Wellenlängen genauere Ergebnisse liefert. Im Bereich großer Wellenlängen dagegen sind die Ergebnisse beider Ansätze nahezu identisch. Für beide Ansätze ergeben sich aus den Dispersionskurven, trotz eines als frequenzunabhängig angenommenen Verlustfaktors des Materials des Hohlzylinders, stark frequenzabhängige Dämpfungswerte. Diese in Zusammenhang mit den ebenfalls stark frequenzabhängigen Wellenlängen führen zu sehr unterschiedlichen Amplitudenabnahmen bezogen auf die Ausbreitungsstrecke. Dies wiederum hat zur Folge, dass in Abhängigkeit der benötigten Förderstrecke unterschiedliche Anregfrequenzen ideal sein können, wenn von einer möglichst großen Amplitude am freien Ende als Zielgröße ausgegangen wird. Nicht zuletzt ist aber auch die Form der sich einstellenden Oberflächenpunktbahn von Bedeutung für die Auswahl der Anregfrequenz. Diese lassen sich anhand der Modelle in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen der durchgeführten experimentellen Untersuchungen bestimmen. Ein Betrieb unterhalb der Grenzfrequenz der Radialschwingung scheint von daher sinnvoll, dass in diesem Bereich nur ein Typ ausbreitungsfähiger, radialsymmetrischer Wellen existiert und sich entsprechend ein sehr gleichmäßiges Bild der Oberflächenpunkttrajektorien ergibt. Oberhalb der Grenzfrequenz dagegen ist die Form der Oberflächenpunktbahnen bedingt durch die stets vorliegende Überlagerung verschiedener Wellentypen mit unterschiedlichen Wellenlängen stark ortsabhängig.

Bei der Wahl der Anregungsfrequenz gilt es allerdings folgendes zu beachten. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Anregungsart ist nicht jede Anregungsfrequenz tatsächlich realisierbar. Die Grenzfrequenz der Radialschwingungen ist bei gegebenen Materialparametern durch die Geometrie des Wellenleiters bestimmt. Der Außendurchmesser des Wellenleiters wiederum beschränkt den Innendurchmesser des Piezowandlers und damit die maximal erreichbare Resonanzfrequenz, die für den Betrieb des Systems genutzt werden muss, um ausreichend große Amplituden zu erreichen. Für Wellenleiter aus Acrylglas mit einer im Vergleich zu Piezokeramik verhältnismäßig geringen Steifigkeit kommt dies nicht so stark zum Tragen, bei Wellenleitern aus anderen Materialien mit höherem Elastizitätsmodul wird diese Grenze dagegen unter Umständen schon sehr schnell bei kleinen  $\Omega$  erreicht.

Ein Punkt der in dieser Arbeit nicht näher betrachtet wurde ist die Variation der Anregung hinsichtlich der optimalen Positionierung des Piezowandlers auf dem Hohlzylinder. Zwar finden sich im Bereich der Ultraschall-Wanderwellenmotoren in der Literatur einige Quellen, die diese Thematik behandeln (KURIBAYASHI ET AL. [49], HASHIMOTO ET AL. [31], UEHA ET AL. [111], LOH UND RO [57]), jedoch gehen diese zu meist von stehenden Wellen aus oder vernachlässigen Randeffekte. Für den Ultraschall-Wanderwellentransport in Hohlzylindern finden sich in der Literatur keine Untersuchungen zur optimalen Platzierung der Piezowandler.

Grundsätzlich lassen sich die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse zur Anregung und Ausbreitung von Wanderwellen auch auf andere Strukturen bzw. Wellenleitergeo-



metrien übertragen. Zur detaillierten Analyse ist allerdings der hier gewählte, auf Schalentheorien basierende Ansatz entsprechend zu modifizieren bzw. zu ersetzen, um das Schwingungsverhalten der gewählten Struktur wiedergeben zu können.

## Anhang

### A Verwendete Hohlzylinder-Wandler-Einheiten

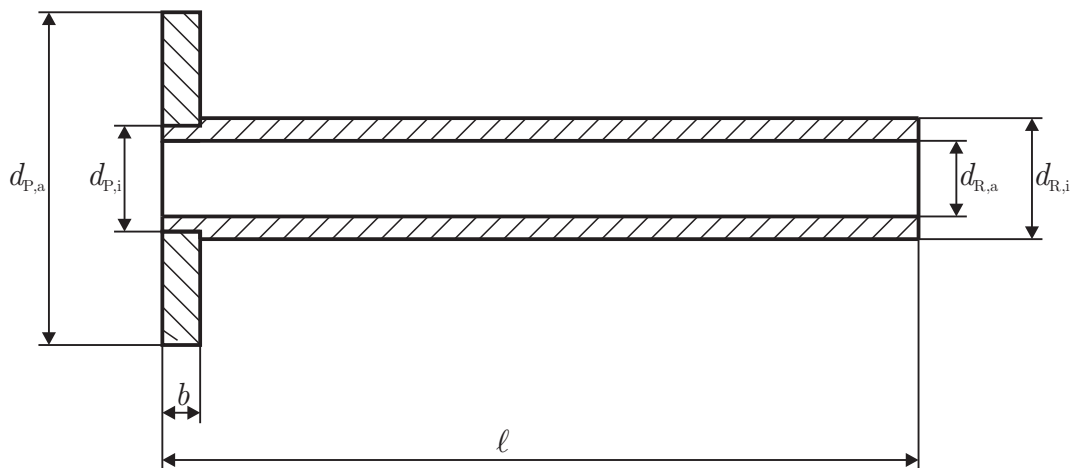


Abbildung A.1: Zeichnung der Hohlzylinder-Wandler-Einheit mit Abmessungen

Für die Bestimmung der in **Tabelle A.1** angegebenen Grenzfrequenzen wurden die aus den experimentellen Untersuchungen identifizierten Werte der Materialparameter verwendet. Aus diesen identifizierten Werten ergeben sich mit den Betrachtungen aus Abschnitt 4.1.2 und der entsprechenden Geometrie (siehe **Tabelle A.1**) die Grenzfrequenzen für reine Radialschwingungen.

**Tabelle A.1:** Abmessungen der verwendeten Hohlzylinder-Wandler-Einheiten

	System I	System II	System III	System IV
$d_{P,a}$ [mm]	30	50	50	50
$d_{P,i}$ [mm]	15	197	197	197
$b$ [mm]	3	5	5	5
$d_{R,a}$ [mm]	15	20	20	20
$d_{R,i}$ [mm]	13	14	16	17
$a$ [mm]	7	8,5	9	9,25
$h$ [mm]	1	3	2	1,5
$h/a$ [–]	0,143	0,353	0,222	0,162
$K$ [–]	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$4,11 \cdot 10^{-3}$	$2,19 \cdot 10^{-3}$
$\ell$ [mm]	500	500	500	500
Hohlzylinder – Material	Acryl	Acryl	Acryl	Aluminium
$f_{\text{Res,Piezo}}$ [Hz]	48.450	32.520	32.360	33.710
$\gamma_F$ [s <sup>2</sup> ]	$9,072 \cdot 10^{-12}$	$1,338 \cdot 10^{-11}$	$1,500 \cdot 10^{-11}$	$2,919 \cdot 10^{-12}$
$f_{\text{grenz,F}}$ [Hz]	52.886	43.742	41.183	93.260
$f_{\text{grenz,MH}}$ [Hz]	52.983	44.222	41.366	93.554

## B Verwendete Geräte

Die im folgenden genannten Geräte wurde für die in Kapitel 5 durchgeführten experimentellen Untersuchungen verwendet.

- *Brüel & Kjær* Power Amplifier Type 2713
- *Polytec* Scanning-Laser-Vibrometer  
*PSV-400* Scannkopf  
*OFV-5000* Vibrometer Controller  
*Datamanagement System*
- *TTi* Arbitrary Waveform Generator TGA 12102
- *Tektronix* Digital Phosphor Oscilloscope DPO 3014  
mit *Tektronix* AC Current Probe P 6021

Lediglich für die Messungen der Oberflächenpunktbahnen kamen abweichend davon die folgenden Geräte zum Einsatz.

- *Brüel & Kjær* Power Amplifier Type 2713
- *Polytec* CLV 3000 3D-Einpunkt-Laser-Vibrometer
- NI PXI Mainframe  
     NI-PXI 6133 Data-Aquisition-Karte  
     NI-PXI 5402 Signal-Generator-Karte

## C Herleitung Flügge Schalentheorie

### C.1 Dehnungs-Verformungs-Beziehungen

Die Verschiebungen  $(u_z, v_z, w_z)$  am Punkt  $P(x, \varphi, z)$  lassen sich durch die Verschiebungen  $(u, v, w)$  des zugehörigen Punktes der Schalenmitte  $P_m(x, \varphi, 0)$  wie folgt ausdrücken.

Die axiale Verschiebung  $u_z$  setzt sich zusammen aus der axialen Verschiebung von  $P_m$  vermindert um den aus der Verkippung in der  $x$ - $z$ -Ebene resultierenden Anteil. Der Verkippungsanteil ergibt sich aus dem Kippwinkel  $\frac{w'}{a}$  multipliziert mit dem Abstand  $z$  zur Mittelebene und es folgt

$$u_z = u - \frac{z}{a}w'. \quad (\text{C.1})$$

Analog ergibt sich die Verschiebung in Umfangsrichtung  $v_z$  als Differenz des aus der Verschiebung von  $P_m$  resultierenden Anteils und der Verkippung in der  $\varphi$ - $z$ -Ebene. Bedingt durch den größeren Abstand zur Mittelachse muss hier allerdings die Verschiebung  $v$  mit dem Faktor  $\frac{a+z}{a}$  multipliziert werden, bevor der Verkippungsanteil subtrahiert wird.

$$v_z = \frac{a+z}{a}v - \frac{z}{a}\dot{w}. \quad (\text{C.2})$$

Die radialen Verschiebungen von  $P$  und  $P_m$  unterscheiden sich nur durch Terme höherer Ordnung voneinander, und werden von FLÜGGE daher direkt vernachlässigt

$$w_z = w. \quad (\text{C.3})$$

Damit lauten die drei verbliebenen Dehnungs-Verformungs-Beziehungen aus Gl. (2.24)

mit  $r = a + z$  ausgedrückt durch die Verschiebungen der Schalenmittelebene

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{u'}{a} - z \frac{w''}{a^2} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{\dot{v}}{a} - \frac{z}{a} \frac{\ddot{w}}{a+z} + \frac{w}{a+z} \\ \gamma_{x\varphi} &= \frac{\dot{u}}{a+z} + \frac{a+z}{a^2} v' - \frac{\dot{w}'}{a} \left( \frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right)\end{aligned}\quad (\text{C.4})$$

## C.2 Berechnung der Schnittgrößen

Dies eingesetzt in die Gleichungen zur Berechnung der Kräfte und Momente Gln. (2.34) und (2.35) liefert z. B. für die Normalkraft in  $\varphi$ -Richtung

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\varphi\varphi} dz \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{\varphi\varphi} + \nu \varepsilon_{xx}) dz \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{\dot{v}}{a} - \frac{z}{a} \frac{\ddot{w}}{a+z} + \frac{w}{a+z} + \nu \left( \frac{u'}{a} - z \frac{w''}{a^2} \right) \right) dz\end{aligned}\quad (\text{C.5})$$

Aufteilen des Integranden und anschließendes Ausführen der Integration liefert

$$\begin{aligned}N_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\dot{v}}{a} + \nu \frac{u'}{a} dz - \frac{\ddot{w}}{a} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{z}{a+z} dz + w \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{a+z} dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \nu \frac{w''}{a^2} z dz \right] \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left[ \left( \frac{\dot{v}}{a} + \nu \frac{u'}{a} \right) z \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} - \frac{\ddot{w}}{a} \left[ z - a \ln(x+a) \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right. \\ &\quad \left. + w \left[ \ln(x+a) \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} - \nu \frac{w''}{a^2} \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \right].\end{aligned}\quad (\text{C.6})$$

Werden der natürliche Logarithmus durch seine nach dem vierten Glied abgebrochene Taylor-Reihenentwicklung

$$\ln(x+a) = \ln(a) + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \frac{x^5}{5a^5} - \dots \quad (\text{C.7})$$

$$\approx \ln(a) + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} \quad (\text{C.8})$$

ersetzt, die Integrationsgrenzen eingesetzt und die einzelnen Terme zusammengefasst, ergibt sich

$$\begin{aligned}
N_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \left[ \left( \frac{\dot{v}}{a} + \nu \frac{u'}{a} \right) \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) \right] \right. \\
&\quad - \frac{\ddot{w}}{a} \left[ \frac{h}{2} - a \left( \ln(a) + \frac{(\frac{h}{2})}{a} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2a^2} + \frac{(\frac{h}{2})^3}{3a^3} \right) + \frac{h}{2} + a \left( \ln(a) - \frac{(\frac{h}{2})}{a} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2a^2} - \frac{(\frac{h}{2})^3}{3a^3} \right) \right] \\
&\quad + w \left[ \left( \ln(a) + \frac{(\frac{h}{2})}{a} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2a^2} + \frac{(\frac{h}{2})^3}{3a^3} \right) - \left( \ln(a) - \frac{(\frac{h}{2})}{a} - \frac{(\frac{h}{2})^2}{2a^2} - \frac{(\frac{h}{2})^3}{3a^3} \right) \right] \\
&\quad \left. - \frac{\nu w''}{2a^2} \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \right] \\
&= \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[ \left( \dot{v} + \nu u' \right) \frac{h}{a} + \ddot{w} \left( \frac{h^3}{12a^3} \right) + w \left( \frac{h}{a} + \frac{h^3}{12a^3} \right) \right] \\
&= \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} [\dot{v} + \nu u' + w] + \frac{Eh^3}{12a^3(1-\nu^2)} [\ddot{w} + w] \\
&= \frac{K_D}{a} [\dot{v} + \nu u' + w] + \frac{K_B}{a^3} [\ddot{w} + w]
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Mit der von Flügge verwendeten Dehnsteifigkeit  $D$ , hier, um Verwechslungen mit dem Dämpfungsgrad  $D$  auszuschließen, mit  $K_D$  bezeichnet,

$$K_D = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \tag{C.10}$$

und der hier anstelle von  $K$  mit  $K_B$  bezeichneten Biegesteifigkeit

$$K_B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{C.11}$$

Weitere analog verlaufende Rechnungen führen auf die Ergebnisse in Gl. (2.37) für die anderen Schnittgrößen aus Gln. (2.34) und (2.35).

### C.3 Bestimmen der Bewegungsgleichung

Umstellen von Gln. (2.33) a) und b) liefert

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= -\frac{\dot{M}_\varphi}{a} - \frac{M'_{x\varphi}}{a} \\ Q_x &= -\frac{M'_x}{a} - \frac{\dot{M}_{\varphi x}}{a}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Eingesetzt in Gln. (2.31) ergibt sich

$$\begin{aligned} N'_x + \dot{N}_{\varphi x} &= \mu a \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \dot{N}_\varphi + N'_{x\varphi} - \frac{\dot{M}_\varphi}{a} - \frac{M'_{x\varphi}}{a} &= \mu a \frac{d^2 v}{dt^2} \\ -\frac{\ddot{M}_\varphi}{a} - \frac{\dot{M}'_{x\varphi}}{a} - \frac{M''_x}{a} - \frac{\dot{M}'_{\varphi x}}{a} - N_\varphi &= \mu a \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Nun werden die Schnittgrößen nach Gln. (2.37) eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{K_D}{a} [u'' + v\dot{v}' + v\dot{w}'] - \frac{K_B}{a^3} w'''' + \frac{K_D}{a} \frac{1-\nu}{2} [\ddot{u} + \dot{v}'] + \frac{K_B}{a^3} \frac{1-\nu}{2} [\ddot{u} + \ddot{v}'] &= \mu a \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{K_D}{a} [\ddot{v} + v\dot{u}' + \dot{w}] + \frac{K_B}{a^3} [\ddot{w} + \dot{w}] + \frac{K_D}{a} \frac{1-\nu}{2} [\dot{u}' + v''] + \frac{K_B}{a^3} \frac{1-\nu}{2} [v'' - \dot{w}'''] \\ -\frac{K_B}{a^3} [\dot{w} + \ddot{w} + v\dot{w}'''] - \frac{K_B}{a^3} (1-\nu) [\dot{w}'' - v''] &= \mu a \frac{d^2 v}{dt^2} \\ -\frac{K_B}{a^3} [\ddot{w} + \ddot{\ddot{w}} + v\dot{w}'''] - \frac{K_B}{a^3} (1-\nu) [\dot{w}'' - \dot{v}'''] - \frac{K_B}{a^3} [w'''' + v\dot{w}'' - u'''' - v\dot{v}'''] \\ -\frac{K_B}{a^3} (1-\nu) \left[ \ddot{w}'' + \frac{\dot{u}'}{2} - \frac{\dot{v}''}{2} \right] - \frac{K_D}{a} [\dot{v} + v\dot{u}' + \dot{w}] - \frac{K_B}{a^3} [\ddot{w} + \dot{w}] &= \mu a \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Division durch  $\frac{K_D}{a}$  ergibt

$$\begin{aligned} u'' + v\dot{v}' + v\dot{w}' - Kw'''' + \frac{1-\nu}{2} [\ddot{u} + \dot{v}'] + K \frac{1-\nu}{2} [\ddot{u} + \ddot{v}'] &= \frac{\mu a^2 (1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ [\ddot{v} + v\dot{u}' + \dot{w}] + K [\ddot{w} + \dot{w}] + \frac{1-\nu}{2} [\dot{u}' + v''] + K \frac{1-\nu}{2} [v'' - \dot{w}'''] \\ -K [\dot{w} + \ddot{w} + v\dot{w}'''] - K(1-\nu) [\dot{w}'' - v''] &= \frac{\mu a^2 (1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 v}{dt^2} \\ K [\ddot{w} + \ddot{\ddot{w}} + v\dot{w}'''] + K(1-\nu) [\dot{w}'' - \dot{v}'''] + K [w'''' + v\dot{w}'' - u'''' - v\dot{v}'''] \\ +K(1-\nu) \left[ \ddot{w}'' + \frac{\dot{u}'}{2} - \frac{\dot{v}''}{2} \right] + [\dot{v} + v\dot{u}' + \dot{w}] + K [\ddot{w} + \dot{w}] &= -\frac{\mu a^2 (1-\nu^2)}{Eh} \frac{d^2 w}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

mit

$$K = \frac{K_B}{K_D a^2} = \frac{h^2}{12a^2} \quad (\text{C.16})$$

und

$$\gamma^2 = \frac{\mu a^2(1-\nu^2)}{Eh} = \frac{\varrho h a^2(1-\nu^2)}{Eh} = \frac{\varrho a^2(1-\nu^2)}{E}. \quad (\text{C.17})$$

Was sich weiter zusammenfassen lässt zu

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' + \nu w' + K \left[ \frac{1-\nu}{2}\ddot{u} - w''' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{w}' \right] &= \gamma^2 \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}v'' + \dot{w} + K \left[ \frac{3(1-\nu)}{2}v'' - \frac{3-\nu}{2}\dot{w}'' \right] &= \gamma^2 \frac{d^2v}{dt^2} \\ \nu u' + \dot{v} + w + K \left[ \frac{1-\nu}{2}\dot{u}' - u''' - \frac{3-\nu}{2}v'' + 2\ddot{w} + \ddot{w} + w'''' + 2\dot{w}'' + w \right] &= -\gamma^2 \frac{d^2w}{dt^2} \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

und zu

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' + \nu w' + K \left[ -w''' + \frac{1-\nu}{2}\ddot{w}' \right] &= \gamma^2 \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}v'' + \dot{w} + K \left[ \frac{3(1-\nu)}{2}v'' - \frac{3-\nu}{2}\dot{w}'' \right] &= \gamma^2 \frac{d^2v}{dt^2} \\ \nu u' + \dot{v} + w + K \left[ \frac{1-\nu}{2}\dot{u}' - u''' - \frac{3-\nu}{2}v'' + 2\ddot{w} + \ddot{w} + w'''' + 2\dot{w}'' + w \right] &= -\gamma^2 \frac{d^2w}{dt^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

und nach umsortieren die in FLÜGGE [17] angegebenen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2}(1+K)\ddot{u} + \frac{1+\nu}{2}\dot{v}' - K w''' + \frac{1-\nu}{2}K\ddot{w}' + \nu w' &= \gamma^2 \frac{d^2u}{dt^2} \\ \frac{1+\nu}{2}\dot{u}' + \ddot{v} + \frac{1-\nu}{2}(1+3K)v'' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{w}'' + \dot{w} &= \gamma^2 \frac{d^2v}{dt^2} \\ -K u''' + \frac{1-\nu}{2}K\dot{u}' + \nu u' - \frac{3-\nu}{2}K\dot{v}'' + \dot{v} + w + K \left[ w'''' + 2\dot{w}'' + \ddot{w} + 2\ddot{w} + w \right] &= -\gamma^2 \frac{d^2w}{dt^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$



liefert.

## D Least-Squares-Complex-Exponential-Algorithmus

Der *Least-Squares-Complex-Exponential-Algorithmus* SPITZNOGLE UND QUAZI [93] wurde konzipiert, um im Rahmen einer experimentellen Modalanalyse die strukturdynamischen Parameter Eigenfrequenz, modale Dämpfung und Eigenform aus einer messtechnisch ermittelten Impulsantwortfunktion

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2n} A_r e^{\lambda_r t} \quad (\text{D.1})$$

zu bestimmen. Da die Bestimmung der Impulsantwortfunktion im Zeitbereich relativ aufwändig ist, wird im Allgemeinen der Frequenzgang

$$H(j\omega) = \sum_{r=1}^{2n} \frac{A_r}{j\omega - \lambda_r} \left( = \frac{\sum_{r=0}^q \beta_r s^r}{\sum_{r=0}^{2n} \alpha_r s^r} \right) \quad (\text{D.2})$$

im Frequenzbereich aus den Kreuz- und Autoleistungsspektren der Strukturantworten und Erregerkräfte ermittelt und mittels der inversen Diskreten FOURIER-Transformation in den Zeitbereich transformiert

$$h(t) = \text{ifft} \left( H(j\omega) \right) . \quad (\text{D.3})$$

Der LSCE-Algorithmus basiert auf der Annahme, dass sich das Systemverhalten durch ein autoregressives Modell (AR-Modell) der Ordnung  $p$  beschreiben lässt, d. h. das sich die Ausgangsgröße zu einem bestimmten Zeitpunkt aus den  $p$  vorangegangenen Ausgangswerten bestimmen lässt.

$$h(t_k) = \alpha_1 h(t_{k-1}) + \alpha_2 h(t_{k-2}) + \dots + \alpha_p h(t_{k-p}) \quad (\text{D.4})$$

Pole des AR-Modells sind identisch mit den Polen der FRF (Lösung nach Prony)

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_p z^p = 0 \quad (\text{D.5})$$

Die Modell-Koeffizienten  $\alpha$  lassen sich mit Hilfe der Gleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} h_{2n+1} \\ h_{2n+2} \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{2n} & h_{2n-1} & \cdots & h_1 \\ h_{2n+1} & h_{2n} & \cdots & h_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N-1} & h_{N-2} & \cdots & h_{N-2n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{2n} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{D.6})$$

bestimmen, indem beide Seiten der Gleichung mit der Pseudo-Inversen von  $\mathbf{Y}$  multipliziert werden.

$$\boldsymbol{\alpha} = \text{pinv}(\mathbf{Y})\mathbf{y} = (\mathbf{Y}^T\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^T\mathbf{y} \quad (\text{D.7})$$

Aus den Nullstellen  $z_{N,r}$  der charakteristischen Gleichung

$$1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \cdots - \alpha_{2n} z^{2n} = 0 \quad (\text{D.8})$$

lassen sich die komplexen Pole der Übertragungsfunktion (siehe Gl. (D.10)) ermitteln.

$$z_{N,r} = e^{\lambda_r \Delta t} \quad (\text{D.9})$$

Aus den Polen

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \frac{1}{\Delta t} \ln(z_{N,r}) = -D\omega_0 + j\omega_d \\ &= -D\omega_0 + j\sqrt{1 - D^2}\omega_0 \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

wiederum lassen sich die zugehörigen Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = |\lambda_r| \quad (\text{D.11})$$

und modalen Dämpfungen direkt berechnen

$$D = -\frac{\text{Re}(\lambda_r)}{|\lambda_r|}. \quad (\text{D.12})$$

Zur Bestimmung der Anfangswerte bzw. im Fall der Modalanalyse der Eigenvektoren wird die homogene Lösung als Summe über alle Moden betrachtet. Sie lässt sich mit Hilfe der Anfangswerte  $A_r$  und Eigenwerten  $\lambda_r$  wie folgt in Summenform

$$h(t_k) = \sum_{r=1}^{2n} A_r e^{\lambda_r t_{k-r}}. \quad (\text{D.13})$$

oder in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t_1} & e^{\lambda_2 t_1} & \cdots & e^{\lambda_{2n} t_1} \\ e^{\lambda_1 t_2} & e^{\lambda_2 t_2} & \cdots & e^{\lambda_{2n} t_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\lambda_1 t_N} & e^{\lambda_2 t_N} & \cdots & e^{\lambda_{2n} t_N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_F} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{2n} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.14})$$

darstellen. Durch Bilden der Pseudo-Inversen der Fundamentalmatrix  $\mathbf{M}_F$  (HEIMAN ET AL. [32]) lassen sich so die Anfangswerte im Sinne eines Least-Squares-Fits aus der gemessenen Impulsantwort  $h$  und den Eigenwerten  $\lambda$  ermitteln.

## Literaturverzeichnis

- [1] AUWERAER, H. Van d. ; PEETERS, B.: Discriminating physical poles from mathematical poles in high order systems: use and automation of the stabilization diagram. In: *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2004. IMTC 04. Proceedings of the 21st IEEE Bd. 3 IEEE*, 2004, S. 2193–2198
- [2] BARALIC, N. ; TAKANO, T. ; HEMSEL, T.: *Experimental investigations of a progressive wave in an acrylic pipe and its application for an Powder Feeding device*, Tohoku Institute of Technology, Japan, Studienarbeit, 2001
- [3] BISTRY, S.: *Untersuchungen zum Waschpulvertransport mittels Ultraschallschwingungen*, Universität Paderborn, Diplomarbeit, 2005
- [4] BLEVINS, R. D.: *Formulas for natural frequency and mode shape*. Reprint Edition. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 2001. – ISBN 0442207107
- [5] BROWN, D. L. ; ALLEMANG, R. J. ; ZIMMERMAN, R. ; MERGEAY, M.: *Parameter estimation techniques for modal analysis*. SAE paper 790221, 1979
- [6] BUTZ, T.: *Fouriertransformation für Fußgänger*. 7. Auflage. Vieweg & Teubner, 2011
- [7] CADY, W. G.: *Piezoelectricity : An introduction to the theory and applications of electro-mechanical phenomena in crystals*. New. rev. ed. Dover, 1964
- [8] CERAMTEC GROUP: <http://www.ceramtec.com>, 05/2011
- [9] CHREE, C: The Equations of an Isotropic Elastic Solid in Polar and Cylindrical Co-ordinates their Solution and Application. In: *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 14 (1889), S. 250
- [10] CONNORS, E. W. ; JULIEN, C.: *Ultrasonic Traveling Wave for Toner Transport*. Xerox Corp.; United States Patent 4794878, 03.08.1987
- [11] DEMTRÖDER, W.: *Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme*. 6. Auflage. Springer-Verlag, 2012
- [12] DONNELL, L. H.: Stability of thin-walled tubes under torsion / NASA Report No. 479. 1933. – Forschungsbericht
- [13] DONNELL, L. H.: A Discussion of Thin Shell Theorie. In: *Proc. Fith Intern. Congr. Appl. Mech.*, 1938
- [14] DUBBEL ; GROTE, K.-H. (Hrsg.) ; FELDHUSEN, J. (Hrsg.): *Taschenbuch für den Maschinenbau*. 22. Berlin : Springer, 2007. – ISBN 978-3-540-49714-1

- [15] FLEISCHER, M. ; STEIN, D. ; MEIXNER, H.: Ultrasonic Piezomotor with Longitudinally Oscillating Amplitude-Transforming Resonator. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 36 (1989), November, Nr. 6, S. 607–613. – ISSN 0885–3010
- [16] FLÜGGE, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*. 1. Auflage. Berlin : Springer, 1934
- [17] FLÜGGE, W.: *Statik und Dynamik der Schalen*. 3. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 1962
- [18] FLÜGGE, W.: *Stresses in Shells*. 2nd Edition. Berlin : Springer-Verlag, 1962
- [19] FORSBERG, K.: Influence of Boundary Conditions on the Modal Characteristics of Thin Cylindrical Shells. In: *AIAA Journal* 2 (1964), Dezember, S. 2150–2157
- [20] FORSBERG, K.: A Review of Analytical Methods Used to Determine the Modal Characteristics of Cylindrical Shells / NASA. 1966 ( 19660027012). – Forschungsbericht
- [21] GAZIS, D. C.: Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. I. Analytical Foundation. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 31 (1959), Nr. 5, S. 568–573
- [22] GAZIS, D. C.: Three-Dimensional Investigation of the Propagation of Waves in Hollow Circular Cylinders. II. Numerical Results. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 31 (1959), Nr. 5, S. 573–578
- [23] GRAFF, K. F.: *Wave motion in elastic solids*. Reprint. Ohio State University Press [Columbus], 1991. – ISBN 0814202322
- [24] GROSS, D. ; HAUGER, W. ; SCHRÖDER, J. ; WALL, W. A.: *Technische Mechanik 2: Elastostatik (Springer-Lehrbuch)*. 10. vollst. neu bearb. Aufl. Springer, Berlin, 2009. – ISBN 9783642005640
- [25] HAAKE, A. ; DUAL, J.: Micro-manipulation of small particles by node position control of an ultrasonic standing wave. In: *Ultrasonics* 40 (2002), Nr. 1, S. 317–322
- [26] HAAKE, A. ; NEILD, A. ; RADZIWILL, G. ; DUAL, J.: Positioning, displacement, and localization of cells using ultrasonic forces. In: *Biotechnology and bioengineering* 92 (2005), Nr. 1, S. 8–14
- [27] HAAR, G. ter: Therapeutic applications of ultrasound. In: *Progress in Biophysics and Molecular Biology* 93 (2007), Nr. 1-3, S. 111 – 129. – Effects of ultrasound and infrasound relevant to human health. – ISSN 0079–6107
- [28] HAGEDORN, P. ; WALLASCHEK, J.: Travelling Wave Ultrasonic Motors, Part I: Working Principle and Mathematical Modelling of the Stator. In: *Journal of Sound and Vibration* 155 (1992), Nr. 1, S. 31 – 46. – ISSN 0022–460X
- [29] HAGEDORN, P. ; WALLASCHEK, J. ; KONRAD, W.: Travelling Wave Ultrasonic Motors, Part II: A Numerical Method for the Flexural Vibrations of the Stator. In: *Journal of Sound and Vibration* 168 (1993), Nr. 1, S. 115 – 122. – ISSN 0022–460X

- [30] HAKE, E. ; MESKOURIS, K.: *Statik der Flächentragwerke: Einführung mit vielen durchgerechneten Beispielen*. 2. Springer Verlag, 2007
- [31] HASHIMOTO, Y. ; KOIKE, Y. ; UEHA, S.: Transporting Objects without Contact Using Flexural Traveling Waves. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 103 (1998), Nr. 6, S. 3230–3233
- [32] HEIMANN, B. ; GERTH, W. ; POPP, K.: *Mechatronik*. 3. Auflage. Hanser Verlag, 2006
- [33] HEMSEL, T. ; MRACEK, M. ; WALLASCHEK, J. ; VASILJEV, P.: A Novel Approach for High Power Ultrasonic Linear Motors. In: *Ultrasonics Symposium, 2004 IEEE Bd. 2, 2004*. – ISSN 1051–0117, S. 1161 – 1164 Vol.2
- [34] HEMSEL, T. ; WALLASCHEK, J.: Survey of the present state of the art of piezoelectric linear motors. In: *Ultrasonics* 38 (2000), Nr. 1-8, S. 37 – 40. – ISSN 0041–624X
- [35] HERMANN, M.: *Entwicklung und Untersuchung piezoelektrisch erregter Wanderwellenmotoren für lineare Bewegungen*, Universität Stuttgart, Diss., 1998
- [36] HERRMANN, A. E.: Dynamic Behavior of Cylindrical Shells under Initial Stress. (1960)
- [37] HERRMANN, A. E.: Dynamic Behavior of Cylindrical Shells under Initial Stress. In: *Proceedings of the 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics held at the University of California, Berkeley, California, June 18 - 21, 1962*, S. S.203–213
- [38] HERRMANN, G. ; MIRSKY, I.: Three-Dimensional and Shell Theory Analysis of Axially-Symmetric Motion of Cylinders. In: *Journal of applied mechanics* 23 (1956), S. 563–568. – ISSN 00218936
- [39] HEYLEN, W. ; LAMMENS, S. ; SAS, P.: *Modal analysis theory and testing*. 2nd Edition. Heverlee : Katholieke Universiteit Leuven Department Werktuigkunde, 2007
- [40] IKEDA, T.: *Fundamentals of Piezoelectricity*. 1. Ausgabe im Paperback mit Korrekturen. Oxford Science Publications, 1996
- [41] KANBE, N. ; TOMIKAWA, Y. ; ADACHI, K. ; TAKANO, T.: Analysis of Axisymmetric Waves Propagating Along a Hollow Cylindrical Ultrasonic Transmission Line. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 93 (1993), Nr. 6, S. 3235–3241
- [42] KANBE, N. ; TOMIKAWA, Y. ; TAKANO, T.: Powder-Feeding Device Using Hollow Cylindrical Piezoelectric Ceramics. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 32 (1993), Nr. Part 1, No. 5B, S. 2405–2407
- [43] KENJO, T. ; SASHIDA, T.: Introduction to Ultrasonic Motors. In: *Clarendon, Oxford, UK* (1993)
- [44] KIRCHHOFF, G. R.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 40 (1850), S. 51–88
- [45] KIRKHOPE, J.: Simple Frequency Expression for the In-Plane Vibration of Thick Circular Rings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 59 (1976), S. 86

- [46] KÜHNE, U. ; FRITSCHING, U.: Dosage of Highly Disperse Powders by Ultrasound Agitated Tube Modules. In: *Powder Technology* 155 (2005), Nr. 2, S. 117 – 124. – ISSN 0032–5910
- [47] KÜHNE, U. ; FRITSCHING, U. ; BAUCKHAGE, K.: Förderung feindisperser Metallpulver. In: BATHEN, D. (Hrsg.) ; SCHMIDT-TRAUB, H. (Hrsg.): *Innovative Energieträger in der Verfahrenstechnik II*, 2001. – Dortmund, S. 145 – 158
- [48] KÜHNE, U. ; FRITSCHING, U. ; BAUCKHAGE, K.: Förderung feindisperser Pulver in ultraschallangeregten Rohrmodulen. In: *Schüttgut*. Clausthal-Zellerfeld : Trans Tech Publications, 2002, S. 480 – 484
- [49] KURIBAYASHI, M. ; UEHA, S. ; MORI, E.: Excitation Conditions of Flexural Traveling Waves for a Reversible Ultrasonic Linear Motor. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 77 (1985), Nr. 4, S. 1431–1435
- [50] KUROSAWA, M. ; UEHA, S.: High Speed Ultrasonic Linear Motor with High Transmission Efficiency. In: *Ultrasonics* 27 (1989), Nr. 1, S. 39 – 44. – ISSN 0041–624X
- [51] LEISSA, A. W. ; NORDGREN, R. P.: Vibration of Shells. In: *Journal of Applied Mechanics* 41 (1973), Nr. 2, S. 544–544
- [52] LEISSA, A. W. ; NORDGREN, R. P.: *Vibration of Shells*. NASA-SP-288, LC-77-186367, 1973
- [53] LITTMANN, W.: *Piezoelektrische, resonant betriebene Ultraschall-Leistungswandler mit nichtlinearen mechanischen Randbedingungen*. HNI-Verlagsschriftenreihe, Paderborn, Band 124 2003, Universität Paderborn, Heinz Nixdorf Institut, Mechatronik und Dynamik, Diss., 2003
- [54] LIU, K.-C. ; FRIEND, J. ; YEO, L.: The Dynamics of Pizza Tossing. In: *XXII International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Adelaide, Australien : ICTAM, 2008
- [55] LIU, K.-C. ; FRIEND, J. ; YEO, L.: The Behavior of Bouncing Disks and Pizza Tossing. In: *EPL (Europhysics Letters)* 85 (2009), Nr. 6, S. 60002
- [56] LOH, B.-G. ; RO, P. I.: Changing the Propagation Direction of Flexural Ultrasonic Progressive Waves by Modulating Excitation Frequency. In: *Journal of Sound and Vibration* 238 (2000), Nr. 1, S. 171 – 178. – ISSN 0022–460X
- [57] LOH, B.-G. ; RO, P. I.: An object transport system using flexural ultrasonic progressive waves generated by two-mode excitation. In: *Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control, IEEE Transactions on* 47 (2000), jul, Nr. 4, S. 994 –999. – ISSN 0885–3010
- [58] LOVE, A. E. H.: The Small Free Vibrations and Deformation of a Thin Elastic Shell. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A* 179 (1888), S. pp. 491–546. – ISSN 02643820

- [59] LOVE, A. E. H.: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. First Ed. Cambridge Univ. Press, 1892
- [60] MANCEAU, J.F. ; BASTIEN, F.: Production of a Quasi-Traveling Wave in a Silicon Rectangular Plate Using Single Phase Drive. In: *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 42 (1995), Jan., Nr. 1, S. 59–65. – ISSN 0885–3010
- [61] MASON, W. P.: *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. 5. Ausgabe. Van Nostrand, New York, 1960 (The Bell Telephone Laboratories Series)
- [62] MERGEAY, M.: Least-Squares Complex Exponential Method and Global System Parameter Estimation Used by Modal Analysis. In: *Proceedings of the 8th International Seminar on Modal Analysis* Bd. 3, 1983, S. 15–17
- [63] MINDLIN, R. D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. In: *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), Nr. 1, S. 31–38
- [64] MIRSKY, I. ; HERRMANN, G.: Nonaxially-Symmetric Motions of Cylindrical Shells. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 29 (1957), S. 772
- [65] MIRSKY, I. ; HERRMANN, G.: Axially Symmetric Motions of Thick Cylindrical Shells. In: *Journal of applied mechanics* 25 (1958), S. 97–102
- [66] MIYAZAKI, S. ; KAWAI, T. ; ARARAGI, M.: A Piezo-Electric Pump Driven by a Flexural Progressive Wave. In: *Micro Electro Mechanical Systems, 1991, MEMS '91, Proceedings. An Investigation of Micro Structures, Sensors, Actuators, Machines and Robots. IEEE*, 1991, S. 283–288
- [67] MORGAN ELECTROCERAMICS: *Guide to Piezoelectric & Dielectric Ceramic*. <http://www.morganelectroceramics.com/resources/guide-to-piezoelectric-dielectric-ceramic/>, 07 2013
- [68] MRACEK, M.: *Entwicklung und Aufbau eines Technologiedemonstrators zur Pulverförderung mit Ultraschall*, Universität Paderborn, Diplomarbeit, 2002
- [69] MRACEK, M. ; WALLASCHEK, J.: A System for Powder Transport Based on Piezoelectrically Excited Ultrasonic Progressive Waves. In: *Materials Chemistry and Physics* 90 (2005), Nr. 2-3, S. 378–380. – ISSN 0254–0584
- [70] MUSHTARI, K. M.: *Certain Generalizations of the Theory of Thin Shells*. Bd. 11. 8. Izv. Fiz. Mat. ob-va. pri Kaz. un-te., 1938. – In Russisch
- [71] MUSHTARI, K. M.: On the Stability of Cylindrical Shells Subjected to Torsion. In: *Trudy Kazanskego aviatsionnogo inatituta* 2 (1938). – In Russisch
- [72] NAGHDI, P. M. ; COOPER, R. M.: Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Shells, Including the Effects of Transverse Shear and Rotatory Inertia. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 28 (1956), Nr. 1, S. 56–63
- [73] NOLIAC GROUP: <http://www.noliac.com>, 05/2011



- [74] PAJER, G. ; KUHNT, F. ; KURTH, F. (Hrsg.): *Stetigförderer*. 5. Auflage. Berlin : VEB Verlag, 1988 (Fördertechnik)
- [75] PHYSIK INSTRUMENTE (PI) GMBH & CO. KG: *www.pi.ws*, 05 2011
- [76] POCHHAMMER, L.: Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. In: *Journal fuer die reine und angewandte Mathematik* 81 (1876), S. 324–336. – ISSN 00754102
- [77] RAGULSKIS, M. ; SAKYTE, E.: An Explicit Equation for the Dynamics of a Particle Conveyed by a propagating Wave. In: *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems: Methods, Tools and Applications in Engineering and Related Sciences* 15 (4) (2009), S. 395 – 405
- [78] RAGULSKIS, M. ; SAKYTE, E. ; SEOANE, J. M. ; SANJUÁN, M. A. F.: A New Mechanical Model for Particle Transport by Surface Waves and Applications. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2009 (2009), Nr. 731358
- [79] RAGULSKIS, M. ; SANJUÁN, M. A. F.: Transport of Particles by Surface Waves: A Modification of the Classical Bouncer Model. In: *New Journal of Physics* 10 (2008), Nr. 8, S. 083017
- [80] RAYLEIGH, J. W. S.: *The Theory of Sound*. 1st Edition. Macmillan and Co. (London), 1877 (The theory of sound)
- [81] RAYLEIGH, Lord: On the Bending and Vibration of Thin Elastic Shells, Especially of Cylindrical Form. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 45 (1888), S. 105–123. – ISSN 03701662
- [82] RAYLEIGH, Lord: Note on the Free Vibrations of an Infinitely Long Cylindrical Shell. In: *Proceedings of the Royal Society of London* 45 (1889), S. 443–448. – ISSN 03701662
- [83] REDWOOD, Martin: *Mechanical Waveguides: The propagation of acoustic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries*. Pergamon Press, 1960
- [84] REISSNER, E.: A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells. In: *American Journal of Mathematics* 63 (1941), Nr. 1, S. pp. 177–184. – ISSN 00029327
- [85] REISSNER, E.: The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. In: *J. appl. Mech* 12 (1945), Nr. 2, S. 69–77
- [86] REYNDERS, E. ; HOUBRECHTS, J. ; DE ROECK, G.: Fully Automated (Operational) Modal Analysis. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* (2012)
- [87] ROH, Y. ; KWON, J.: Development of a New Standing Wave Type Ultrasonic Linear Motor. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 112 (2004), Nr. 2-3, S. 196–202. – ISSN 0924–4247

- [88] ROH, Y. ; LEE, S. ; HAN, W.: Design and Fabrication of a New Traveling Wave-Type Ultrasonic Linear Motor. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 94 (2001), Nr. 3, S. 205–210. – ISSN 0924–4247
- [89] SANDERS, J. L. j.: *An Improved First-Approximation Theory for Thin Shells*. NASA TR-R24, 1959
- [90] SEEMANN, W.: A Linear Ultrasonic Traveling Wave Motor of the Ring Type. In: *Smart Materials and Structures* 5 (1996), Nr. 3, S. 361
- [91] SEEMANN, W. ; HAGEDORN, P.: On the Realizability of a Travelling Wave Linear Motor. In: *International Modal Analysis Conference Proceedings, 1995*, S. 1778–1784
- [92] SMART MATERIAL CORPORATION: <http://www.smart-material.com/>, 05 2011
- [93] SPITZNOGLE, F. R. ; QUAZI, A. H.: Representation and Analysis of Time-Limited Signals Using a Complex Exponential Algorithm. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 47 (1970), Nr. 5A, S. 1150–1155
- [94] STÖCKER, H.: *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren*. 4., korrigierte Auflage. Thun, Frankfurt am Main, Deutschland : Verlag Harri Deutsch, 1999
- [95] SUN, D. ; WANG, S. ; SAKURAI, J. ; HATA, S. ; CHOI, K.-B. ; SHIMOKOHBE, A.: A Traveling Wave Type of Piezoelectric Ultrasonic Bidirectional Linear Microactuator. In: *Applied Physics Express* 2 (2009), Nr. 4, S. 046503
- [96] TAKANO, T. ; SUZUKI, T. ; ADACHI, K. ; TOMIKAWA, Y.: Basic Studies on Powder-Sending Devices Using Ultrasonic Vibration. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 30S1 (1991), Nr. Supplement 30-1, S. 200–202
- [97] TAKANO, T. ; TOMIKAWA, Y.: Excitation of a Progressive Wave in a Lossy Ultrasonic Transmission Line and an Application to a Powder-Feeding Device. In: *Smart Materials and Structures* 7 (1998), Nr. 3, S. 417–421
- [98] TODA, K. ; KAMO, A.: Ultrasonic Motor Operation Using the Unidirectional Surface Displacement of a Cylindrical Piezoelectric Vibrator. In: *Journal of Applied Physics* 67 (1990), Nr. 6, S. 3148–3151
- [99] TOMIKAWA, Y. ; ADACHI, K. ; HIRATA, H. ; SUZUKI, T. ; TAKANO, T.: Excitation of a Progressive Wave in a Flexurally Vibrating Transmission Medium. In: *Japanese Journal of Applied Physics Supplement* 29 (1990), S. 179–181
- [100] TOMIKAWA, Y. ; T., Takano ; OSAWA, T. et a.: *Powder Transport Method*. Canon Inc.; Japanese Patent 04125215, 14.09.1990
- [101] TOMIKAWA, Y. ; T., Takano ; SATO, T. et a.: *Powder Feeding Device*. Canon Inc.; Japanese Patent 10329925, 27.05.1997
- [102] TOMIKAWA, Y. ; TAKANO, T. ; UMEDA, H.: Thin Rotary and Linear Ultrasonic Motors Using a Double-Mode Piezoelectric Vibrator of the First Longitudinal and Se-

- cond Bending Modes. In: *Japanese Journal of Applied Physics* 31 (1992), Nr. Part 1, No. 9B, S. 3073–3076
- [103] TOMIKAWA, Y. ; TAKANO, T. ; WAKI, K. et a.: *Powder Transport Method*. Canon Inc.; Japanese Patent 04125214, 14.09.1990
- [104] TOMINAGA, M. ; KAMINAGA, R. ; FRIEND, J.R. ; NAKAMURA, K. ; UEHA, S.: An Ultrasonic Linear Motor Using Ridge Mode Traveling Waves. In: *IEEE Ultrasonics Symposium* Bd. 2, 2004. – ISSN 1051–0117, S. 1165 – 1168 Vol.2
- [105] TSUCHIYA, H. ; SAKEMI, K. et a.: *Powder Conveying Device*. Canon Inc.; United States Patent 5414497, 21.10.1993
- [106] TSUCHIYA, H. ; SAKEMI, Y. ; WAKI, K. et a.: *Powder Conveying Device*. Canon Inc.; United States Patent 5270484, 11.11.1991
- [107] UCHINO, K.: *Piezoelectric Actuators and Ultrasonic Motors*. Bd. 1. Springer, 1997
- [108] UCHINO, K.: Piezoelectric Ultrasonic Motors: Overview. In: *Smart Materials and Structures* 7 (1998), Nr. 3, S. 273
- [109] UCHINO, K.: *Advanced Piezoelectric Materials: Science and Technology*. Woodhead Publications, 2010 (Woodhead Publishing in materials)
- [110] UEHA, S. ; TOMIKAWA, Y. ; KUROSAWA, M. ; NAKAMURA, N.: *Ultrasonic motors: Theory and Applications*. Clarendon Press Oxford, 1993
- [111] UEHA, Sadayuki ; HASHIMOTO, Yoshiki ; KOIKE, Yoshikazu: Non-contact transportation using near-field acoustic levitation. In: *Ultrasonics* 38 (2000), Nr. 1-8, S. 26 – 32. – ISSN 0041–624X
- [112] VOLD, H. ; KUNDRAT, J. ; ROCKLIN, G. ; RUSSELL, R.: *A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers*. SAE Technical Paper 820194, 1982
- [113] VOLD, H. ; ROCKLIN, G. T.: The Numerical Implementation of a Multi-Input Modal Estimation Method for Mini-Computers. In: *International Modal Analysis Conference Proceedings*, 1982, S. 542–548
- [114] WALLASCHEK, J.: Piezoelectric Ultrasonic Motors. In: *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* 6 (1995), Nr. 1, S. 71–83
- [115] WALLASCHEK, J.: Contact mechanics of piezoelectric ultrasonic motors. In: *Smart Materials and Structures* 7 (1998), Nr. 3, S. 369
- [116] WALLASCHEK, J.: Sensoren und Aktoren. In: STEINHILPER, Waldemar (Hrsg.) ; SAUER, Bernd (Hrsg.): *Konstruktionselemente des Maschinenbaus 2*. Springer Berlin Heidelberg, 2008 (Springer-Lehrbuch). – 10.1007/978-3-540-76654-4\_9. – ISBN 978–3–540–76654–4, S. 665–706
- [117] WALLASCHEK, Jörg ; RENNER, Andreas: Theoretical and Experimental Investigations of Piezoelectrically Excited Travelling Waves in Cylindrical Tubes. In: *PAMM* 11 (2011), Nr. 1, S. 641–642

- [118] WU, Y. ; FAN, Y. ; KATO, M. ; KURIYAGAWA, T. ; SYOJI, K. ; TACHIBANA, T.: Development of an Ultrasonic Elliptic-Vibration Shoe Centerless Grinding Technique. In: *Journal of Materials Processing Technology* 155 (2004), S. 1780–1787
- [119] YAMADA, K. ; NAKAGAWA, T. ; NAKAMURA, K.: Powder Transportation by Unidirectional Ultrasound Radiated from a Pair of Phase-Shifted Bending Vibrators. In: *IEEE Ultrasonics Symposium*, 1993, S. 457 –461 Vol.1
- [120] YOUNG, M. J. R.: *Transport System for Material in Powder or like Form*. General Dispensing Systems Ltd.; United States Patent 4648557, 04.10.1984
- [121] ZIMMERMANN, R. U.: *Untersuchungen zur peristaltischen Strömung*, Universität Hannover, Diss., 1982

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Andreas Renner  
geboren am 23.09.1981  
in Hannover  
Staatsangehörigkeit deutsch  
Familienstand verheiratet, 2 Kinder

Email renner-andreas@gmx.de

## Schulbildung

1988-1992 Grundschule Haste  
1992-1994 Orientierungsstufe Bad Nenndorf  
1994-2001 Gymnasium Bad Nenndorf  
2001 Allgemeine Hochschulreife

## Zivildienst

08/2001-05/2002 Landeskrankenhaus Wunstorf

## Studium

10/2002-09/2007 Studium des Maschinenbaus, Leibniz Universität Hannover  
10/2004 Vordiplom, Auszeichnung mit dem *Dr. Jürgen Ulderup Preis 2005*  
09/2006-11/2006 Fachpraktikum, Continental ContiTech Antriebssysteme GmbH, Prüftechnik, Hannover  
12/2006-02/2007 Fachpraktikum, WABCO Development GmbH, Technologie Center Software und Systeme, Hannover  
09/2007 Diplom, Auszeichnung mit dem *Dr. Jürgen Ulderup Preis 2008*

## Berufstätigkeit

10/2007-09/2013 Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Institut für Dynamik und Schwingungen, Leibniz Universität Hannover  
seit 10/2013 Entwicklungsingenieur, m+p international Mess- und Rechner-technik GmbH, Hannover

Hannover, im Januar 2017