

Theoretische und experimentelle Untersuchung der parasitären Modenkopplung an Ultraschallwerkzeugen

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte

Dissertation

von
François Brouet

2017

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel
3. Referent: Prof. Dr.-Ing. Bernd-Arno Behrens

Tag der Promotion: 12. Januar 2017

Vorwort

Diese Arbeit wurde von der Firma Herrmann Ultraschall GmbH & Co. KG finanziell gefördert und am Institut für Dynamik und Schwingungen (IDS) der Leibniz Universität Hannover bearbeitet. An dieser Stelle möchte ich mich bei allen Menschen bedanken, die mir die Erstellung meiner Dissertation ermöglicht haben.

Zuerst geht mein Dank an die Geschäftsleitung der Firma Herrmann Ultraschall und an Herrn Dipl.-Ing. Ulrich Vogler, Leiter der Entwicklungsabteilung, ohne die diese Arbeit nicht entstanden wäre.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek möchte ich mich für die sehr freundliche Betreuung am Institut für Dynamik und Schwingungen bedanken. Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattel danke ich für die Anfertigung des Koreferats.

Mein besonderer Dank geht an Herrn Dr.-Ing. Jens Twiefel. Als Leiter der Arbeitsgruppe Piezo- und Ultraschalltechnik hat er mich stets mit seinen Anregungen und seinen wissenschaftlichen Hinweisen ausgiebig unterstützt.

Ich danke auch ganz herzlich meinen wissenschaftlichen Kollegen am IDS und meinen Arbeitskollegen der Entwicklungsabteilung für die zielführenden Diskussionen und die freundschaftliche Arbeitsatmosphäre. Nicht zuletzt die Herren Dr.-Ing. Wiebold Wurpts, Dipl.-Ing. Gabriel Ertz und Dr.-Ing. Dieter Jurzitza standen mir jederzeit für konstruktive Gespräche zur Verfügung.

*Je dédie cet évènement marquant de ma vie à ma marraine Jo et à ma mère Ginette,
toutes deux disparues trop tôt,*

Inhaltsverzeichnis

Formelverzeichnis	IX
Kurzfassung	XIV
Abstract	XV
Resumé	XVI
1 Motivation	1
2 Stand des Wissens	5
2.1 Modellierung von piezoelektrischen Schwingern	5
2.1.1 Ersatzmodell mit einem Freiheitsgrad	6
2.1.2 Ersatzmodell mit mehreren Freiheitsgraden	8
2.1.3 Experimentelle Identifikation der Ersatzparameter	9
2.1.4 Regelung der Erregerfrequenz	10
2.2 Modale Interaktionen bei Ultraschallwerkzeugen	11
2.2.1 Nachbarresonanzen	11
2.2.2 Kombinationsresonanzen	12
2.3 Modale Degeneration	14
2.3.1 Eigenwertkurven	15
2.3.2 Konservative und nicht-konservative Kopplungen	16
2.3.3 Modellierung anhand eines Systems mit zwei Freiheitsgraden	17
2.3.4 Experimente zum Nachweis der modalen Degeneration	20
2.3.5 Modale Degeneration bei Ultraschallwerkzeugen	21
2.4 Verstimmung eines dynamischen Systems	23
2.4.1 Einleitung	23
2.4.2 Turbomaschinen und Schaufelkränze	23
2.4.3 Fremderregung einer verstimmten Struktur	26
2.4.4 Sensitivität der Eigenwerte und Eigenvektoren	27
2.4.5 Basis von nominalen Moden	29
2.4.6 Dämpfung	32
2.4.7 Zusammenfassung	33
2.5 Kriterien zur Beurteilung der modalen Degeneration	34
2.5.1 Matrix der modalen Kopplungen	34

2.5.2	Rotation der Eigenvektoren	34
2.5.3	Cross Sensitivity Quotient (CSQ)	35
2.5.4	Modal Dependence Factor (MDF)	36
2.6	Sonotrodenmaterial	37
2.6.1	Herstellungsverfahren Walzen	37
2.6.2	Schallgeschwindigkeit	38
2.6.3	Simulation von zufälligen Materialheterogenitäten	38
3	Aufgabenstellung	40
3.1	Analyse des Standes der Technik	40
3.1.1	Nachbarmoden, Modale Überlagerung	40
3.1.2	Interne Moden, Kombinationsresonanzen	41
3.1.3	Modale Degeneration und Frequenzabdrehung	41
3.1.4	Homogenität der Materialeigenschaften der Titan-Legierung	42
3.2	Voruntersuchung und experimenteller Nachweis der modalen Degeneration (Pilotprojekt)	42
3.2.1	Eingangsmessung	43
3.2.2	FE-Simulation	44
3.2.3	Zusammenfassung	46
3.3	Ziele der Arbeit	46
3.4	Lösungsweg	48
4	Modale Überlagerung	49
4.1	Ersatzmodell eines multimodalen Schwingers	49
4.1.1	Multimodale Schreibweise einer piezoelektrischen Erregung	49
4.1.2	Bewertung des parasitären Anteils einer Störmode in der Schwingungsantwort	51
4.1.3	Parameteruntersuchung	52
4.1.4	Zusammenfassung	53
4.2	20 kHz Schwinggebilde mit zahlreichen antwortenden Moden	54
4.2.1	Schwinggebilde	55
4.2.2	Messung des Schwinggebildes	56
4.2.3	FE-Simulation	56
4.2.4	Ergebnisse	60
4.2.5	Zusammenfassung	62
5	Modale Degeneration	63
5.1	Ableitung eines verstimmungs-basierten Kopplungskriteriums	63
5.1.1	Verstimmungsvariation	63
5.1.2	Sensitivitätsrechnung	64
5.1.3	Steifigkeitsvariation als Sonderfall	66
5.1.4	Rotationswinkel als Auswirkung der modalen Interaktion	67
5.1.5	Erweiterung auf mehrere Moden	69

5.1.6	Zusammenfassung	70
5.2	Modellbildung	71
5.2.1	Zyklische Struktur	72
5.2.2	Verlust der zyklischen Symmetrie	72
5.3	Modale Analyse eines elementaren Schwingers	74
5.3.1	Modellaufbau	74
5.3.2	Frequenzkurven	75
5.3.3	Einführung einer Verstimmung	78
5.3.4	Untersuchung der Randverstimmung	87
5.4	Optimierung	94
5.4.1	Das <i>Design Of Experiments</i> Verfahren (DOE)	96
5.4.2	Automatisches Minimierungsverfahren (AMV)	97
5.4.3	Minimierung der Anfälligkeit bezüglich einer materialbedingten Verstimmung	99
5.4.4	Minimierung der Anfälligkeit zur Randverstimmung	104
6	Experimentelle Validierung	110
6.1	FE-Modell eines Sonotrodensegments	110
6.1.1	Geometrische Parameter	110
6.1.2	Nutzung der Symmetrie	111
6.1.3	Modellvernetzung	113
6.2	Versuchsmuster zur Klärung der Randverstimmung	114
6.2.1	Auslegung des Prototyps mittels FE-Simulation	115
6.2.2	Messungen am Prototyp	118
6.2.3	Zusammenfassung	120
6.3	Versuchsmuster zur Klärung der Materialverstimmung	120
6.3.1	Probestück	121
6.3.2	Untersuchung der kritischen Sonotrodenbreite	122
6.3.3	Auslegung der ersten Sonotrodengeometrie	124
6.3.4	Auslegung der zweiten Sonotrodengeometrie	124
6.3.5	Definition der Nebenbedingung	125
6.3.6	Definition der Verstimmung	125
6.3.7	Messung der Prototypen	128
6.3.8	Zusammenfassung	130
7	Diskussion der Ergebnisse	131
8	Anhang	136
8.1	Lineare Fremderregung	136
8.1.1	Erzwungene Schwingungen	136
8.1.2	Modaltransformation	136
8.1.3	Harmonische Anregung	137
8.2	20 kHz Schwinggebilde mit zahlreichen antwortenden Moden	140

8.2.1	Materialdaten	140
8.2.2	Parameteridentifikation	142
8.3	Dynamik der zyklischen Strukturen	143
8.3.1	Eigenformen	143
8.3.2	Modellierung mit Mehrmassenschwinger	144
8.4	Klassifizierung der Moden des elementaren Schwingers	145
8.4.1	Moden des idealen Schwingers	145
8.4.2	Moden des physikalischen Schwingers	148
8.5	Optimierungslösungen	149
8.5.1	Minimierung der Anfälligkeit zur Materialverstimmung	149
8.5.2	Minimierung der Anfälligkeit zur Randverstimmung	151
8.6	Experimentelle Validierung	153
8.6.1	Randverstimmung	153
8.6.2	Materialverstimmung	154
8.7	Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Materialkonstanten	160
8.7.1	Orthotropie	160
8.7.2	Transversale Isotropie	161
8.7.3	Isotropie	161
8.8	Korrelationskriterien	162
8.8.1	Das MAC-Kriterium	162
8.8.2	Das NCO-Kriterium	162
8.9	Bijektive Funktion für die Koordinatentransformation der geometrischen Parameter	163
8.10	Zeichnungen der Sonotrodenprototypen	164
8.10.1	Versuchsmuster zur Klärung der Randverstimmung	164
8.10.2	Versuchsmuster zur Klärung der materialbedingten Verstimmung	165

Formelverzeichnis

Lateinische Notation

A	Amplitude
Ad	Ausgangsdicke
b	Segmentbreite des Schwingers
br	Rechte halbe Schlitzbreite des Schwingers
bl	Linke halbe Schlitzbreite des Schwingers
B	Schwinger- und Sonotrodenbreite
c	Geschwindigkeit der Longitudinalwelle
C	Elektrische Kapazität
C_0	Piezoelektrische Kapazität
d	Modale Dämpfung
D	Lehrsches mechanische Dämpfungsmaß, modale Kopplung
E	E-Modul
Ed	Eingangsdicke
f	Frequenz, Zielfunktion
F	Kraft
g	Dichtefunktion einer Zufallsvariable
G	Vergrößerungsfunktion, Schubmodul
h	Dichtefunktion einer Zufallsvariable
i	Elektrischer Gesamtstrom
i_A	Elektrischer Strom im RLC-Ast
i_C	Elektrischer Strom in der parallelen Kapazität
j	Imaginäre Einheit
k	Modale Steifigkeit, Zufallsvariable, Zählindex
k_c	Steifigkeit der Kopplungsfeder
ΔK	Verstimmung der Steifigkeit
k_{eff}^2	Piezoelektrischer Kopplungsfaktor
km	Anpassung des Knotenmaßes
K	Mechanische Steifigkeit
L	Elektrische Induktivität, Schwinglänge
L_0	Nominales Knotenmaß
Lu	Endlänge
m	Modale Masse

M	Masse, Anzahl von Stützwerten
N	Anzahl von Freiheitsgraden, Anzahl von Schaufeln
ND	Anzahl von Knotendurchmessern
p	Variationsparameter, geometrischer Parameter
q	Zeitabhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten
Q_m	Mechanische Güte
Q	Elektrische Ladung
R	Elektrischer Widerstand, Verhältnis der modalen Koordinaten
S	Anzahl von Segmenten des Schwingers
sr	Rechte Schlitzlänge des Schwingers
sor	Rechte Schlitzlänge des Schwingers nach oben
sur	Rechte Schlitzlänge des Schwingers nach unten
sl	Linke Schlitzlänge des Schwingers
sol	Linke Schlitzlänge des Schwingers nach oben
sul	Linke Schlitzlänge des Schwingers nach unten
v	Verstimmungsfunktion
V	Elektrische Spannung
V_α	Verhältnis der elektromechanischen Kopplungen
x	Mechanische Auslenkung, Dickenrichtung einer Messersonotrode
Δx	Exzentrizität
y	Modale Koordinate, Longitudinale Richtung einer Messersonotrode
Y	Elektrische Gesamtadmittanz
z	Breitenrichtung einer Messersonotrode

Griechische Notation

α	Elektromechanische Kopplung, Verstimmungsparameter
α_E	Verstimmungsbetrag des E-Moduls
α_ρ	Verstimmungsbetrag der Dichte
α_G	Verstimmungsbetrag der Geometrie
β	Kopplungsparameter, Mittelwert der Schlitzbreiten
γ	Drehwinkel eines Eigenvektors, Verhältnis der Eigenfrequenzen
δ	Drehwinkel der Eigenvektorenableitung, Relativer Eigenwertabstand
η	Verhältnis der Erregerfrequenz zur Eigenfrequenz
φ	Phase, Eigenvektor, Zufallsvariable
$\Delta\varphi$	Phasenverschiebung zwischen zwei Segmenten / Schaufeln
κ	Skalierungsfaktor zur Normierung der Eigenvektoren
ω	Eigenkreisfrequenz
ω_S	Serielle Kreisfrequenz
ω_P	Parallele Kreisfrequenz
Ω	Erregerkreisfrequenz
λ	Eigenwert

λ_0	Wellenlänge
μ	Faktor zur Berechnung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit
ν	Querkontraktionszahl
ρ	Dichte
σ	Gewichtungsfaktor, Standardabweichung
θ	Drehwinkel eines Eigenvektors
χ	Kopplungskriterium bzw. Eigenvektorendifferenz
ψ	Kopplungskriterium bzw. Tangenswert des Drehwinkels
τ	Gewichtungsfaktor für die Optimierung
ν	Gleichmäßigkeitskriterium für die Amplitudenverteilung
ξ	Faktor zur Berechnung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit
ζ	Verhältnis der Eigenvektorenkomponenten im zweidimensionalen Fall

Vektoren und Matrizen

C	Transformationsmatrix
Γ	Reduzierte Transformationsmatrix
D	Dämpfungsmatrix, Matrix der Variationen bei HIGH's Methode
ϵ	Dehnungstensor
f	Vektor der modalen Kräfte
F	Konstante Matrix bei HIGH's Methode
Φ	Reduzierte Modalmatrix
H	Frequenzganzmatrix
$\Delta \mathbf{I}_k$	Spektral normierte Variation der modalen Steifigkeitsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
$\Delta \mathbf{K}$	Variation der Steifigkeitsmatrix
$\Delta \hat{\mathbf{K}}$	Variation der modalen Steifigkeitsmatrix
$\Delta \mathbf{K}_s$	Variation der Steifigkeitsmatrix eines Segmentes
L	Linearer Operator des speziellen Eigenwertproblems
Λ	Spektralmatrix
$\Delta \Lambda$	Variation der Spektralmatrix
M	Massenmatrix
N	Normierungsmatrix
$\Delta \mathbf{M}$	Variation der Massenmatrix
$\Delta \hat{\mathbf{M}}$	Variation der modalen Massenmatrix
S	Nachgiebigkeitsmatrix
σ	Spannungstensor
Σ	Matrix der modalen Kopplungen
T	Transformationsmatrix
u	Eigenvektor
$\Delta \mathbf{u}$	Variation des Eigenvektors
U	Modalmatrix

\mathbf{U}^*	Reduzierte Modalmatrix
\mathbf{v}	Eigenvektor
\mathbf{w}	Eigenvektor
\mathbf{x}	Vektor der physikalischen Koordinaten
\mathbf{X}	Matrix der Koeffizienten bei HIGH's Methode
\mathbf{Y}	Elastizitätsmatrix

Indices und Operatoren

$\det()$	Determinante
$(\dot{}), (\ddot{})$	Erste und zweite Ableitung nach der Zeit
$\operatorname{Re}\{ \}$	Realteil einer komplexen Größe
$\operatorname{Im}\{ \}$	Imaginärteil einer komplexen Größe
$ $	Betrag einer komplexen Größe
$\arg()$	Polarwinkel einer komplexen Größe
$\ \cdot \ _2$	l^2 -Norm
$()^T$	Transponierte Matrix
$()^{(0)}$	Nennkonfiguration bzw. unverstimmter Zustand
$()^{(1)}$	Verstimmter Zustand

Abkürzungen

FE	Finite-Elemente
FHG	Freiheitsgrade
LDV	Laser-Doppler-Vibrometer
MCS	Monte Carlo Simulation
SNM	Methode Subset of Nominal Modes
FMM	Fundamental Mistuning Model
IMM	Iterative Modal Method
CSQ	Cross Sensitivity Quotient
MDF	Modal Dependence Factor
VI	Veering Index
NCO	Normalized Cross Orthogonality
AMV	Automatisches Minimierungsverfahren
DOE	Design of Experiments
MAC	Modal Assurance Criterion
TiAl6V4	Titan-Aluminium-Legierung

Kurzfassung

Sonotroden werden in vielen Hochleistungs-Ultraschallsystemen zum Schweißen oder Schneiden verwendet. Sie übertragen die Schwingungsenergie vom piezoelektrischen Wandler auf ein Werkstück. In den meisten Fällen werden diese Schwinger in einer longitudinalen Schwingungsmoden und im niedrigen Ultraschallfrequenzbereich 20 bis 40 kHz betrieben. Häufig sind auch andere Moden überlagert und an der Gesamtantwort beteiligt.

Die Anwesenheit dieser zusätzlichen Moden (hier als Störmoden bezeichnet) bereitet den Herstellern von Ultraschallwerkzeugen oft erhebliche Schwierigkeiten. Bisher kann die Beteiligung der Störmoden erst nach der Fertigung der Sonotroden empirisch vermieden werden, indem die Geometrie iterativ geändert wird, bis ein zufriedenstellendes Schwingungsverhalten erreicht ist. Diese Geometrieänderung basiert auf der Korrelation einer experimentellen Modalanalyse und einer Finite-Elemente (FE) Analyse. Weil die Ultraschallsonotroden oft geometrisch komplex sind, ist eine vollständige Trennung der Betriebsmoden von den anderen Moden nur selten möglich.

Des Weiteren ist die Wiederholbarkeit der Fertigung häufig problematisch, weil das Sonotrodenmaterial eine gewisse Heterogenität besitzt. Sogar eine leicht ungleiche Verteilung der Materialeigenschaften hat einen deutlichen Einfluss auf die Schwingungsmoden.

In dieser Arbeit werden zunächst die bekannten Kopplungsmechanismen untersucht und die potentielle Interaktion der Nachbarmoden in Abhängigkeit ihres Typs und ihrer Frequenzlage bewertet. Danach wird der Einfluss der Materialheterogenität auf das Schwingverhalten der Sonotroden und auf die Simulationsergebnisse der FE-Analysen untersucht. Die entwickelten Methoden ermöglichen bessere und verlässlichere Simulationsergebnisse bei der Auslegung von Sonotroden und reduzieren den Aufwand für die nachträgliche empirische Optimierung deutlich.

Schlagwörter: Ultraschall, Sonotrode, Modenkopplung, Modale Interaktion, Modale Degeneration, Verstimmung, Frequency veering, Mistuning

Abstract

Ultrasonic horns are used in a wide range of industrial applications, such as welding and cutting. They transfer oscillation energy from a piezoelectric transducer to a workpiece. These oscillators are commonly designed to vibrate in the first longitudinal mode, operating at the low end of the ultrasonic frequency spectrum between 20 and 40 kHz. The excitation of the system can lead to mutual interactions between the longitudinal and non-tuned modes.

The occurrence of non-tuned modes (called spurious modes) causes difficulties in the design of ultrasonic welding tools. The participation of additional modes can be empirically minimized by tuning the geometry iteratively until a good operating performance is reached. Geometry tuning is based on the correlation between experimental modal analysis and finite element (FE) simulations. Due to the complex geometries of horns, a frequency isolation of the operating mode from nearby modes is not always practical.

Replication of the same horn geometry in manufacturing is often problematic, since the horn material can exhibit heterogeneities. Even small irregularities in the material properties can drastically influence the additional modes and the oscillatory behaviour.

In the present work, the well-known coupling mechanisms of the vibrating modes are investigated first. Potential modal interactions between the longitudinal mode and nearby modes are evaluated depending on their eigenshape and natural frequency position. In the next step, the influence of material heterogeneities on the oscillation performance is calculated, using FE analysis. The new methods proposed facilitate the design of robust ultrasonic horns and allow for an efficient optimization of manufactured horns with more reliable FE simulations.

Key words: Ultrasonic, Sonotrode, Horn, Mode coupling, Modal interaction, Modal degeneration, Mistuning, Frequency veering

Resumé

Les sonotrodes sont utilisées dans un large champ d'applications, tel le soudage et la découpe par ultrasons. Elles transfèrent l'énergie vibratoire du convertisseur piézo-électrique à un élément à appliquer. Ces résonateurs sont généralement conçus de telle sorte que leur premier mode longitudinal entre en résonance à une basse fréquence ultrasonore entre 20 et 40 kHz. Mais il arrive que d'autres modes de vibration participent involontairement à la réponse de vibration.

La présence de ces modes supplémentaires (appelés ici modes parasites) posent problème lors de la conception de ces outils vibrants. A ce jour la participation de ces autres modes peut être atténuée en modifiant itérativement la géométrie jusqu'à obtenir un fonctionnement satisfaisant. Cette modification de la géométrie repose sur la corrélation entre une analyse modale expérimentale et une simulation numérique par éléments-finis. Mais en raison de la complexité de la géométrie des sonotrodes, le mode longitudinal ne peut pas toujours être isolé des autres modes de vibration.

De plus la production en série de sonotrodes identiques peut s'avérer problématique lorsque leur matériau présente des hétérogénéités. Même de petites irrégularités dans les propriétés du matériau peuvent avoir une grande influence sur le comportement vibratoire.

Cet ouvrage se consacre dans un premier temps aux couplages de modes de vibrations connus à ce jour et à la quantification des interactions potentielles en fonction des types de modes et des fréquences propres. Ensuite il aborde l'influence des hétérogénéités présentes dans le matériau sur le comportement vibratoire des sonotrodes et les résultats des simulations numériques. Les méthodes développées ici permettent d'améliorer plus efficacement les sonotrodes déjà existantes et de simuler plus fidèlement leurs propriétés acoustiques.

1 Motivation

Ein Ultraschallschweißwerkzeug besteht aus einer Kombination von elektrischen und mechanischen Teilen, wie in Abb. 1.1 dargestellt. Die wichtigsten Komponenten sind der Generator, der piezoelektrische Wandler (engl. *Transducer*), das Amplitudentransformationsstück (engl. *Booster*) sowie die Sonotrode (engl. *Horn* bezeichnet). Der Generator stellt eine Wechselspannung für den Wandler zur Verfügung und beinhaltet die Leistungselektronik. Die elektrische Energie wird durch die piezoelektrischen Elemente der Wandler in mechanische Energie umgewandelt. Sie werden in einem vorgespannten Stapel mit wechselnder Polarisierungsrichtung angeordnet. Die einzelnen Schwingkomponenten werden geometrisch so ausgelegt, dass die Frequenz ihrer ersten longitudinalen Schwingmode der gewünschten Betriebsfrequenz entspricht. Um eine möglichst hohe Amplitude zu erreichen kann ein Amplitudentransformationsstück eingesetzt werden. Dieses vergrößert proportional zur Verjüngung des Durchmessers die Ausgangsamplitude.



Abb. 1.1: 20 kHz Ultraschallschweißwerkzeug [2].

Die Sonotrode ist der wesentliche Bestandteil des Schwinggebildes und wird spezifisch zur Anwendung ausgelegt. Je nach Anwendung unterscheidet sich ihre Geometrie, da die Sonotrode das einzige Bauteil des Ultraschallwerkzeugs ist, das in Kontakt mit dem Schweißgut steht und die Schwingungsenergie in die zu verbindenden Materialien überträgt. Abb. 1.2 zeigt eine Auswahl von Sonotroden in unterschiedlichen Ausführungen: Block-, Rund- und Messersonotroden.

Da die Messersonotroden in der Praxis am meisten Anwendung finden und eine relativ einfache Geometrie aufweisen, werden sie besonders in dieser Arbeit untersucht. Die größte Abmessung quer zu Betriebsschwingung wird *Sonotrodenbreite* bezeichnet und ist



Abb. 1.2: Ultraschall-Sonotroden in unterschiedlichen Formen [2].

deutlich größer als die *Sonotrodendicke* oder *Eingangsdicke*. Die Schwinglänge ist das Maß längs zur Betriebsschwingung und wird von der gewünschten Betriebsfrequenz vorgegeben. Wie in Abb. 1.3 dargestellt, wird die Sonotrodenbreite längs geschlitzt, was zu einer Segmentierung führt. Diese dient dazu, die Verzerrung der Längsmode aufgrund der Querkontraktion zu reduzieren.

Das andere wesentliche Ziel der Messersonotroden ist die Schwingungsamplitude zu vergrößern. Diese Übersetzung ist eine wichtige Kenngröße der Sonotroden und wird durch eine Querschnittänderung in der Nähe des Schwingungsknoten erreicht. Bei Messersonotroden ergibt sich das Übersetzungsmaß nahezu aus dem Verhältnis der Eingangsdicke zur Ausgangsdicke. Das *Knotenmaß* wird als der Abstand zwischen der Koppelfläche und dem Übergangsradius bezeichnet und entspricht in etwa der Position des Schwingungsknotens. In der Praxis wird die Anpassung des Knotenmaßes auch genutzt, um die Frequenz der Längsmode zu senken.

Die in der industriellen Praxis am häufigsten auftretenden negativen Effekte während des Ultraschallschweißprozesses sind eine ungleichmäßige Schweißung, ein verfrühter Ausfall oder eine Lärmentwicklung. Nach der Fertigung werden die Schwingeneigenschaften der Sonotroden nach zwei Qualitätskriterien bewertet: die Amplitudenverteilung der Schweißfläche und die Eingangsleistung im freischwingenden Zustand. Der optimale Schweißprozess sieht eine gleichmäßige Amplitudenverteilung für einen gleichmäßigen Energieeintrag vor:

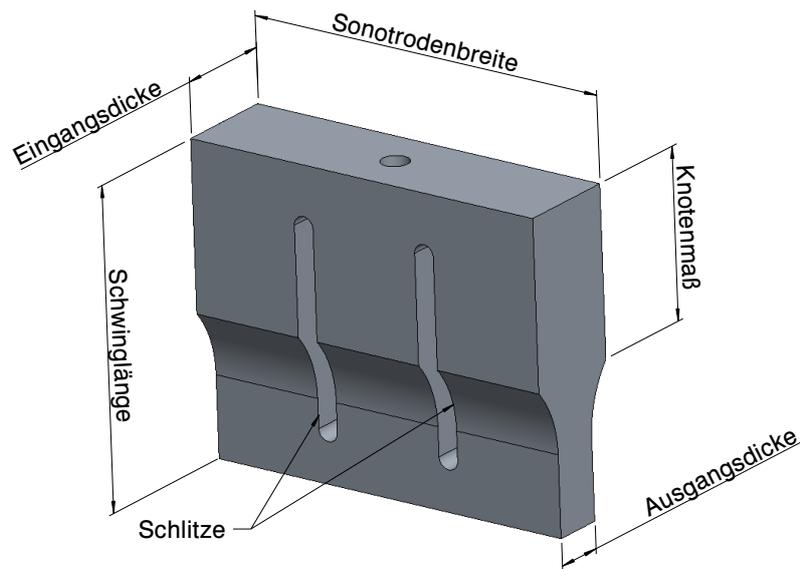


Abb. 1.3: Wichtigste Abmessungen einer Messersonotrode.

- Die maximale Auslenkung entlang der Schweißfläche bildet das Amplitudenprofil und seine Gleichmäßigkeit ist entscheidend für die Festigkeit der Schweißung. Weicht diese Auslenkung zum Schweißteil zu stark ab, entstehen entweder zu schwache oder überschweißte Schweißstellen.
- Die Eingangsleistung der freischwingenden Sonotrode stellt ein weiteres Qualitätskriterium für das Schwingungsverhalten dar. Sie hängt von der Schwinggüte und der kinetischen Energie ab. Für die Beurteilung des Schwingverhaltens wird die zum Erreichen einer bestimmten Schwingungsamplitude benötigte elektrische Eingangsleistung betrachtet. Sie wird auch als Leerlauf-Eingangsleistung bezeichnet. Eine zu hohe Eingangsleistung deutet unter anderem darauf hin, dass die longitudinale Bewegung mit weiteren Anteilen überlagert ist. Die Schwingungsform kann z.B. einen Biegungsanteil aufweisen, der zusätzliche hohe mechanische Belastungen an ungewünschten Stellen verursacht. Auch kommt es in den Verbindungsstellen zwischen Wandler, Amplitudentransformationsstück und Sonotrode zur Energiedissipation. Diese Effekte führen oft zu einem Versagen der Schwingerkomponenten (Sonotrode, Koppelschrauben, Wandler) sowie zu erhöhter Erwärmung.

Überschreitet eine der seitlichen Sonotrodenabmessungen ein Drittel der Wellenlänge, können zusätzliche Moden im Bereich der Betriebsfrequenz auftreten [27]. Die unerwünschte Beteiligung dieser parasitären Moden führt zu einer Veränderung des Amplitudenprofils in der Schweißfläche und zu einer Erhöhung der Leerlauf-Eingangsleistung.

Die relativen Frequenzabstände der Nachbarmoden werden heutzutage durch eine iterative und erfahrungsbasierte Anpassung der Geometrie verschoben. Die Auswirkung der Geometrieänderung auf die modalen Eigenschaften wird im Vorfeld mit einem FE-Programm abgeschätzt:

- Zum Abgleich der Amplitudenverteilung entlang der Sonotrodenbreite wird oft das Knotenmaß der einzelnen Segmenten angepasst.
- Zum Verschieben der Frequenz der Störmoden werden oft die Schlitze verlängert. Diese Maßnahmen haben den Vorteil, die Lage der Störmoden zu beeinflussen, ohne die Frequenz und die Schwingungsform der Betriebsmode großzügig zu ändern.

Zudem werden Frequenzgangmessungen durchgeführt (engl. FRF *Frequency Response Function*), indem das Schwinggebilde an verschiedenen Stellen angeregt und die Antwort der Schweißfläche in den jeweiligen Resonanzen gemessen wird. Die Messdaten werden mit der Simulation verglichen und im Frequenzbereich von Interesse werden alle Moden dann identifiziert. Aufgrund der genannten Herausforderungen und Probleme bei breiten Ultraschallschwinggebilden werden mögliche Ursachen insbesondere in Bezug auf Kopplung benachbarter Moden untersucht:

- Die Simulation des Schwinggebildes erfolgt unter der Annahme homogener Materialdaten und mit einer vereinfachten Modellierung der Kontaktstellen, was zu Ungenauigkeiten der Ergebnisse führt. Deswegen können die gemessenen Eigenformen nicht immer den simulierten Eigenformen zugeordnet werden und die Abstände zwischen den Eigenfrequenzen der Moden sind zum Teil ungenau. Die Moden um die Betriebsmode liegen oft im Fokus der Analyse und ihre relative Position ist wichtig für die Bewertung der modalen Eigenschaften.
- Eine unzureichende oder asymmetrische Diskretisierung der Sonotrodengeometrie kann zu einer fehlerhaften Modenkopplung in der Modalanalyse führen. Daraus folgen Fragestellungen bezüglich der Simulationsergebnisse, ob diese parasitären Interaktionen aus der Modellierung stammen oder in der Realität vorhanden sind.
- Die dritte Herausforderung ist die Bewertung der Interaktionsanfälligkeit der Nachbarmoden, die zu einer Kopplung mit der Betriebsmode führen kann und wird in dieser Arbeit im Besonderen untersucht. Die Geometrie und die Materialeigenschaften der Sonotroden besitzen in der Realität immer eine gewisse Asymmetrie. Diese bildet eine zusätzliche Unbekannte, die in der FE-Simulation bis dato nicht berücksichtigt wird.

2 Stand des Wissens

Dieses Kapitel setzt sich mit den Grundlagen hinsichtlich der Modenkopplung im Bereich von tiefen Frequenzen bis hin zu Frequenzen im Bereich des Ultraschalls auseinander. In einem ersten Schritt erfolgt die Einführung unterschiedlicher Ersatzmodelle piezoelektrischer Systeme. Daran anschließend folgt eine ausführliche Liste von Veröffentlichungen, die sich mit modalen Interaktionen beim Betrieb von Ultraschallwerkzeugen auseinandersetzen. Der dritte und vierte Abschnitt geht auf weitere Interaktionsmechanismen in dem für Ultraschallwerkzeuge relevanten Frequenzbereich ein. Nach einem kurzen Überblick über die bisher bekannten Kopplungskriterien wird der Einfluss der Homogenität des Sonotrodenmaterials diskutiert.

2.1 Modellierung von piezoelektrischen Schwingern

Ersatzmodelle von piezoelektrischen Schwingern werden oft verwendet, um das Schwingverhalten um die Resonanz einer Schwingungsmode abzubilden. Sie ermöglichen u.a. die Bestimmung der frequenzabhängigen Antwort auf eine harmonische elektrische Spannung und sind sowohl für die Untersuchung grundsätzlicher Zusammenhänge, wie auch für die Auslegung der Leistungselektronik und der Ansteuerung hilfreich.

Da die elektrischen Ersatzmodelle keinen direkten Zusammenhang zur Geometrie des Schwingers aufweisen, stellen sie zunächst nur die dynamischen Eigenschaften an den elektrischen Klemmen nach. Im Abschnitt 2.1.1.2 wird auf die Gleichungen zur Beschreibung des piezoelektrischen Verhaltens eingegangen. Soll die Geometrie mit berücksichtigt werden, kann die Modellierung beispielweise auf ein FE-Modell mit Implementierung der piezoelektrischen Materialien zurückgreifen, bei denen der Schwingkörper in einzelne kleine Elemente diskretisiert wird. Beispielhaft sei hier der Beitrag von ALLIK UND HUGHES [13] genannt.

2.1.1 Ersatzmodell mit einem Freiheitsgrad

2.1.1.1 BUTTERWORTH - VAN DYKE's Modell

Zur Beschreibung von piezoelektrischen Schwingern gibt es eine Vielzahl von mathematischen Modellen. Das klassische Ersatzmodell von BUTTERWORTH-VAN DYKE [30] in Abb. 2.1 findet Verwendung, um einen freischwingenden piezoelektrischen Wandler in der Nähe einer Resonanzfrequenz zu beschreiben. Es besteht aus einer Kapazität C_0 und einem parallel angeordneten RLC-Serienschwingkreis, der die Eigenfrequenz bestimmt. Die elektrische Eingangsadmittanz des Modells bestimmt sich aus dem komplexen Amplitudenverhältnis von Gesamtstrom \hat{i} zu anliegender Spannung \hat{V} bei harmonischen Schwingungen mit der Kreisfrequenz Ω im eingeschwungenen Zustand¹, siehe Gl. 2.1.

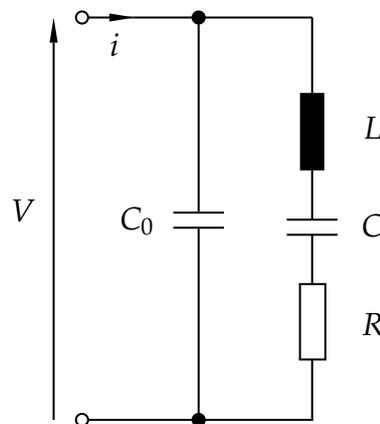


Abb. 2.1: Klassisches Ersatzmodell von BUTTERWORTH-VAN DYKE.

- Der Ast mit dem Kondensator C_0 repräsentiert die piezoelektrische Kapazität.
- Der Ast mit dem RLC-Serienschwingkreis bildet eine mechanische Schwingungsmode ab. Die zugehörige Ladung ist proportional zur mechanischen Modalkoordinate.

Die folgende Gleichung beschreibt die elektrische Gesamtadmittanz dieses Modells:

$$Y_{\text{el}}(j\Omega) = j\Omega \frac{\hat{Q}}{\hat{V}} = j\Omega \left(C_0 + \frac{1}{-L\Omega^2 + j\Omega R + \frac{1}{C}} \right) = j\Omega \left(C_0 + GC \right) \quad (2.1)$$

So lässt sich die elektrische Admittanz mit Hilfe der dimensionslosen Vergrößerungsfunktion² $G(j\Omega)$ schreiben:

$$G(j\Omega) = \frac{1}{1 - \eta^2 + j \frac{1}{Q_m} \eta} \quad \text{mit} \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.2)$$

¹Die Notation der elektrischen Spannung als U wird absichtlich nicht verwendet, um eine spätere Verwechslung mit den Eigenvektoren zu vermeiden.

²In Analogie zur mechanischen Übertragungsfunktion, in Gl. 8.10 des Anhangs ausführlich beschrieben.

Hierin bezeichnen $\omega = 1/\sqrt{LC}$ die Eigenkreisfrequenz des Systems mit kurzgeschlossenen Elektroden und η das Verhältnis der Erregerkreisfrequenz Ω zur Eigenkreisfrequenz ω . Die mechanische Güte Q_m ist ein wichtiger dimensionslose Parameter für piezoelektrische Systeme und bezieht sich auf das Lehrsche mechanische Dämpfungsmaß D ¹:

$$Q_m = \frac{1}{2D} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (2.3)$$

2.1.1.2 Ersatzmodell mit Übertrager

Typischerweise nimmt die Modellierung eines piezoelektrischen Systems eine Proportionalität zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen an, die durch lineare Gleichungen miteinander verknüpft sind. Zu diesem Zweck führt MASON [61] einen idealen Transformator für eine explizite Beschreibung der elektromechanischen Kopplung ein. Das elektrische Modell des Schwingers in Abwesenheit von mechanischen Kräften ist in Abb. 2.2a (links) dargestellt. Aufgrund der mechanisch-elektrischen Analogie [56], ist es zum in Abb. 2.2b (rechts) dargestellten mechanischen Modell von KROME UND WALLASCHEK [53] äquivalent. Hierin entspricht C_0 der piezoelektrischen Kapazität des mechanisch freien Systems, m der modalen Masse, d der modalen Dämpfung und k der modalen Steifigkeit bei kurzgeschlossenen Elektroden. Die Variablen V , Q und y entsprechen der elektrischen Spannung, der Ladung und der mechanischen modalen Koordinate. Die Konstante α (mit der Einheit $\frac{N}{V}$ bzw. $\frac{As}{m}$) stellt die elektromechanische Kopplung dar. Das System besteht dann aus zwei Federn (die eine repräsentiert die mechanische Steifigkeit, die andere das kapazitive Verhalten des piezoelektrischen Materials). Unter Berücksichtigung des elektromechanischen Kopplungsfaktors wird die mechanische modale Koordinate direkt mit dem fließenden elektrischen Strom i_A verknüpft.

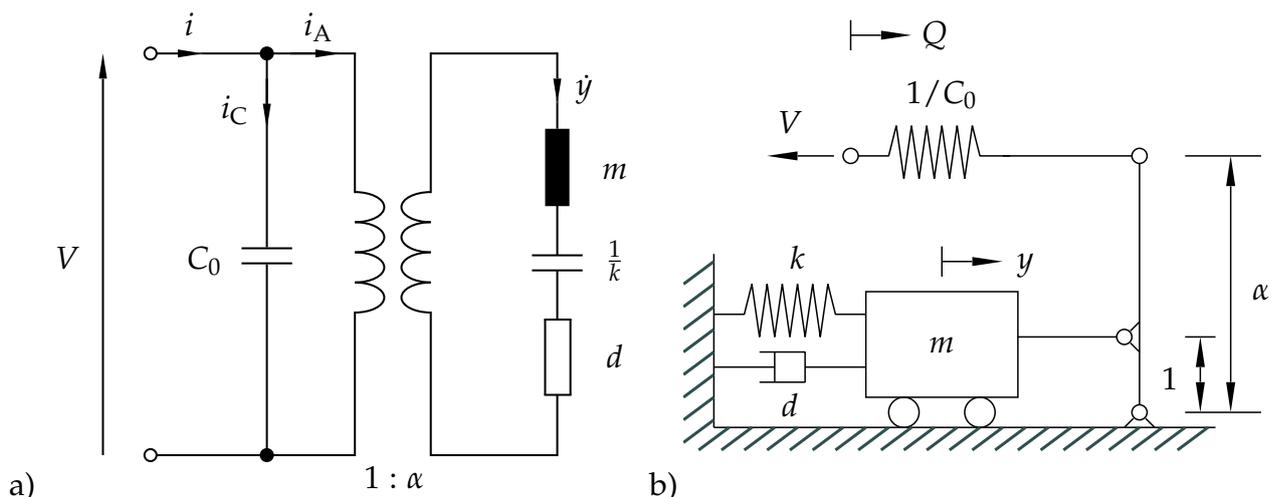


Abb. 2.2: Ersatzmodell eines piezoelektrischen Schwingers in Abwesenheit von mechanischen Kräften nach KROME UND WALLASCHEK [53]: elektrische (a) und mechanische (b) Darstellung.

¹Siehe auch Gl. 8.5 im Anhang.

Mit Hilfe des Kopplungsfaktors α werden die elektrischen Parameter in mechanische Größen überführt:

$$m = L\alpha^2 \quad d = R\alpha^2 \quad k = \frac{1}{C}\alpha^2 \quad (2.4)$$

Als mechanische Kernadmittanz bezeichnet man die Größe Y_{mech} . Sie gibt das Verhältnis der komplexen Amplituden von Geschwindigkeit \hat{y} und Spannung \hat{V} an, sofern keine externe Kraft wirksam ist [73]:

$$Y_{\text{mech}}(j\Omega) = j\Omega \frac{\hat{y}}{\hat{V}} = \frac{\alpha}{j\Omega m + d + \frac{k}{j\Omega}} \quad (2.5)$$

2.1.1.3 Sonderfall der quasistatischen Bewegung

Das folgende Modell gilt für den Sonderfall der quasistatischen Systeme, bei welchem die Erregerfrequenz deutlich unter der Eigenfrequenz liegt ($\Omega \ll \omega$). Dabei kann die häufig verwendete Aktorgleichung verwendet werden [73]:

$$\begin{aligned} F &= ky - \alpha V \\ Q &= \alpha y + C_0 V \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.1.1.4 Effektiver piezoelektrische Kopplungsfaktor

Das Quadrat des effektiven piezoelektrischen Kopplungsfaktors k_{eff}^2 ist ein Maß für die Umsetzung von elektrischer in mechanische Energie und umgekehrt [49]. Es beschreibt das Verhältnis der zur Verfügung stehenden mechanischen Energie zur gesamten gespeicherten elektrischen Energie in einem Zyklus der harmonischen Schwingung. Dadurch verknüpft k_{eff}^2 die seriellen und parallelen Kreisfrequenzen und die Kapazitäten:

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{C}{C_0 + C} = \frac{\omega_{\text{P}}^2 - \omega_{\text{S}}^2}{\omega_{\text{P}}^2} \quad \frac{C}{C_0} = \frac{\omega_{\text{P}}^2}{\omega_{\text{S}}^2} - 1 \quad (2.7)$$

2.1.2 Ersatzmodell mit mehreren Freiheitsgraden

Um die Bewegung des piezoelektrischen Systems mit mehreren Eigenformen zu beschreiben, müssen zusätzliche Freiheitsgrade (FHG) berücksichtigen werden. Diese können durch zusätzliche Feder-Massen-Dämpfer-Systeme dargestellt werden [73] oder durch die Erweiterung des elektrischen Modells um weitere parallel geschaltete Äste (Serienschwingkreise). Jeder Ast beschreibt dabei die Modale Koordinate einer Schwingungs-mode, siehe Abb. 2.3.

Aus Übersichtlichkeitsgründen wird in Folge auf die Darstellung der modenabhängigen elektromechanischen Kopplungen verzichtet. Das folgende Modell dient zur Abbildung der Wechselwirkung zwischen den Moden. Die Gesamtadmittanz wird gemäß Gl. 2.8 berechnet:

$$Y_{\text{ges}} = j\Omega \left(C_0 + \sum_{n=1}^N G_n C_n \right) \quad \text{mit} \quad G_n C_n = \frac{\hat{Q}_n}{\hat{V}} = \frac{1}{-L_n \Omega^2 + j\Omega R_n + \frac{1}{C_n}} \quad (2.8)$$

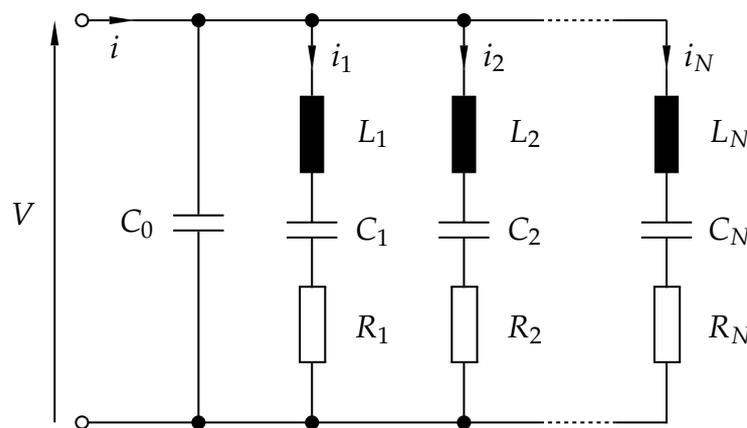


Abb. 2.3: Elektrisches Ersatzmodell mit mehreren Freiheitsgraden.

2.1.3 Experimentelle Identifikation der Ersatzparameter

Für die Untersuchung eines vorhandenen Systems ist es sinnvoll, die Ersatzparameter experimentell zu bestimmen. Zu diesem Zweck wird das System elektrisch angeregt und seine Antwort gemessen. Die Identifikation der Parameter einer isolierten Schwingungs-mode findet sich bei vielen Autoren beschrieben. Die folgende Prozedur von RICHTER, TWIEFEL UND WALLASCHEK [73] basiert auf der Anpassung eines Kreises auf die Ortskurve der Admittanz in der komplexen Ebene:

- Für schwach gedämpfte Systeme kompensieren sich bei Anregung in Resonanz ω_S die Induktivität und die Kapazität. Nur der elektrische Widerstand ist wirksam und dieser kann im Kehrwert des Realteils der Admittanz ausgelesen werden:

$$R = \frac{1}{\text{Re}\{Y(\omega_S)\}} \quad (2.9)$$

- Die mechanische Güte Q_m wird bei den -3 dB Grenzfrequenzen ω_a und ω_b um die Resonanz ω_S gemessen (siehe Abb. 2.4a). Daraus kann die Induktivität L ermittelt werden:

$$Q_m = \frac{\omega_S}{\omega_b - \omega_a} \quad L = Q_m \frac{R}{\omega_S} \quad (2.10)$$

- Die Kapazität C wird mit Hilfe der Resonanzfrequenz bestimmt:

$$C = \frac{1}{L\omega_S^2} \quad (2.11)$$

- Der in Abb. 2.4b dargestellte Versatz des Admittanzkreises entlang der imaginären Achse wird direkt mit der piezoelektrischen Kapazität verknüpft und beträgt bei der Resonanzkreisfrequenz $\omega_S C_0$:

$$C_0 = \frac{\max(\text{Im}\{Y\}) + \min(\text{Im}\{Y\})}{2\omega_S} \quad (2.12)$$

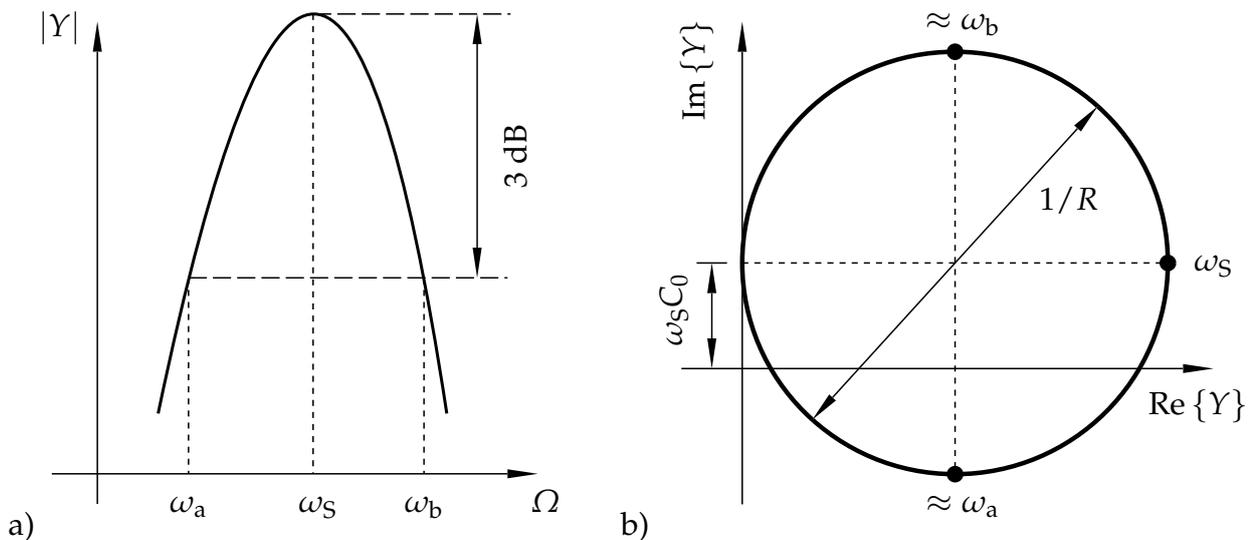


Abb. 2.4: (a) Darstellung der 3 dB-Bandbreite zur Bestimmung der mechanischen Güte in der Nähe einer Resonanz. (b) Admittanzkreis für eine Schwingungsmode.

2.1.4 Regelung der Erregerfrequenz

Die Resonanzfrequenz der Ultraschallschwinggebilde ist sehr empfindlich in Bezug auf Temperaturschwankungen. Darüber hinaus sinkt die Schwingungsamplitude der Ultraschallschwinggebilde mit steigender Last. Daher muss der Generator die Eingangsgrößen ständig regeln, um die Amplitude konstant zu halten. Zwei Regelungstechniken werden seit vielen Jahren weltweit im Markt eingesetzt:

- Die Regelung in der parallelen Kreisfrequenz (elektrische Antiresonanz) ω_P führt zum Betrieb mit minimalen Strom [70] und fordert eine genaue Messung der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom. Die Lastkompensation erfolgt durch die Skalierung der Ausgangsspannung. Somit ist die Regelung von zwei Messgrößen erforderlich.
- Die Frequenzregelung legt die Erregerfrequenz leicht oberhalb der seriellen Kreisfrequenz ω_S . Im Unterschied zu der anderen Technik ist keine Phasenbestimmung notwendig, da die mechanische Auslenkung mit Hilfe einer Frequenzanpassung

konstant gehalten wird. Diese Technik kommt bei Herrmann Ultraschall Generatoren zum Einsatz. Darüber hinaus wird das Schwinggebilde mit erheblich geringerer Anregungsspannung als bei der anderen Technik betrieben.

2.2 Modale Interaktionen bei Ultraschallwerkzeugen

Die Suche nach dem englischen Begriff *modal interaction* bei Ultraschallwerkzeugen ergibt zahlreiche Arbeiten aus der Fachliteratur. Die meisten Veröffentlichungen diskutieren Kopplungsmechanismen zwischen Moden, die bei Ultraschallschwingensystemen beobachtet werden. Die untersuchten Systeme bestehen alle aus einem piezoelektrischen Wandler und einer Sonotrode (Block- und Trägersonotroden mit Schneidzapfen). Sie werden in der ersten oder zweiten longitudinalen Mode betrieben, die als Betriebsmode bezeichnet wird (engl. *tuned mode* oder *driving mode*). Aufgrund der komplexen Geometrie sind zusätzliche Moden im unteren Frequenzbereich vorhanden. Sie werden als *non-tuned*, *responsive* oder *spurious modes* bezeichnet und führen zu den sogenannten modalen Interaktionen.

Die Sonotroden (engl. *horn*) werden mit Hilfe von FE-Analysen entworfen, die modalen Eigenschaften experimentell verifiziert. Mit der Technologie des 3D Laser-Doppler-Vibrometers (LDV) können die Eigenformen der Moden gemessen werden. Durch die Kombination beider Werkzeuge lassen sich heute nahezu alle modalen Eigenschaften theoretisch und experimentell erfassen. Diejenigen Moden, die mit der gewünschten longitudinalen Mode interagieren, lassen sich basierend auf der vorliegenden Literaturrecherche aufgrund ihrer Frequenzlage in zwei Hauptkategorien unterteilen:

- **Nachbarresonanzen:** wird die Betriebsmode in spektraler Nähe der Resonanzfrequenz der Nachbarmoden angeregt, so besteht die Antwort des Gesamtsystems aus einer Überlagerung der Antwort aller benachbarten Moden auf die Anregung.
- **Kombinationsresonanzen:** andere tieffrequente Moden werden durch einen komplexen Kopplungsmechanismus angeregt, z.B. durch eine nichtlineare Federsteifigkeit [21].

2.2.1 Nachbarresonanzen

Bei der Untersuchung von Block- und Rundschwingern, hat DERKS [27] bereits im Jahr 1984 in Erfahrung gebracht, dass die Frequenz der longitudinalen Schwingmode von den Nachbarmoden isoliert werden muss. Die parasitären Moden, meistens Biegemoden, können erheblich zur Gesamtantwort beitragen. Sie beeinflussen die Gleichmäßigkeit der mechanischen Auslenkung der Ausgangsfläche oder führen zum Antrieb der falschen Mode im Betrieb [64]. Die Anregung der Biegemoden ist unerwünscht, da sie aufgrund

der entstehenden hohen mechanischen Belastung zum Versagen der Koppelschrauben führen kann.

Die gezielte Anpassung der Geometrie (häufig das Abtragen von Material) ermöglicht ein Verschieben der Nachbarresonanzen, um die Betriebsmode optimal zu isolieren. Für einen möglichst in seiner longitudinalen Reinform schwingenden 20 kHz Schwinger wird gemäß DERKS [27] und O'SHEA [64] ein spektraler Mindestabstand von 1 kHz zu jeglicher Nachbarresonanz empfohlen. Der Einfluss der komplexen Geometrieänderung auf die Lage der Frequenzen ist mit den rudimentären FE-Modellen häufig schwer vorhersehbar und in der Praxis mit vielen Versuchen verbunden.

CARDONI UND LUCAS [19] untersuchten eine 35 kHz Blocksonotrode, deren ungleichmäßige Amplitudenverteilung direkt dem geringen Frequenzabstand zwischen der Betriebsfrequenz und der Resonanzfrequenz der parasitären Moden zuzuschreiben ist. Die Amplitudenverteilung wird üblicherweise als gut bewertet, wenn die Abweichungen auf der ganzen Schweißfläche kleiner als 20% sind. Das Anbringen von zwei Schlitzen in Schwingrichtung unterdrückt die Querkontraktion und führt zu einer gleichmäßigeren Antwort der Schweißfläche. Der kritische Frequenzabstand wächst nach der geometrischen Änderung um 2 kHz.

Der Frequenzabstand ist nicht zwangsläufig das einzige Bewertungskriterium. Die Eigenform der Nachbarmoden und die Position der Anregung stellen ebenfalls wichtige Faktoren dar. CARDONI ET AL. [20] präsentieren eine Trägersonotrode mit Einschraubzapfen (später in Abb. 2.6 abgebildet) mit vier unproblematischen Nachbarmoden. Diese Moden tragen zur Gesamtantwort aufgrund des geringen Frequenzabstands bei. Ihre modale Beteiligung ist jedoch trotzdem vernachlässigbar, da ihre Antworten auf die axiale Anregung des Wandlers sehr schwach sind.

Der modale Beitrag eines linear gedämpften Systems auf eine harmonische Fremderregung lässt sich mit Hilfe der entkoppelten Bewegungsgleichungen gut beschreiben. Die modale Antwort wird von der Kombination der folgenden drei Faktoren beeinflusst¹:

- der Frequenzabstand zwischen der Erregerfrequenz und der Resonanzfrequenz der Mode,
- die räumliche Verteilung der Erregerkräfte,
- die Verschiebung der Eigenform am Messpunkt.

2.2.2 Kombinationsresonanzen

Diese Art von Interaktion zeichnet sich durch einen Energieaustausch zwischen der gewünschten Betriebsmode und anderen tieffrequenten Moden aus, den sogenannten *inter-*

¹Zur detaillierten Herleitung siehe IRRETIER [48] sowie die Zusammenfassung in Abschnitt 8.1 des Anhangs.

nen Moden. Sie führen zu starker Lärmentwicklung und zu hoher mechanischer Belastung bis hin zum Versagen der Ultraschallkomponenten. Die Energie fließt ungünstigerweise in die internen Moden, die im Regelfall kaum durch den Wandler anregbar sind [20]. Im Gegensatz zur linearen Fremderregung ist die Antwort nicht nur von der relativen Position zu den Resonanzfrequenzen abhängig. Solche Systeme werden als *autoparametrisch* bezeichnet, da die Antwort der gewünschten Moden als Anregung für die sekundären internen Moden dient [59].

Die Schwingung eines autoparametrischen Systems kann eine Bewegung in einer Ebene senkrecht zur Anregungsrichtung aufweisen, wie z.B. die Biegebewegungen gemäß CARDONI ET AL. [20]. Die Torsionsmoden können im Regelfall nicht axial von einem Wandler angeregt werden, es sei denn, der Schwinger wird auf eine andere Trägeresonotrode mit ungleichmäßiger Amplitudenverteilung aufgeschraubt [60].

Die Bedingung für eine Interaktion mit einer oder zwei internen Moden ist eine bestimmte Beziehung zwischen ihren Frequenzen und der Erregerfrequenz (Ω). Während das System in der Nähe der Frequenz seiner longitudinalen Mode angeregt wird, steht die Erregerfrequenz auch in Beziehung zu den Frequenzen der internen Moden (ω_1 und ω_2), so dass $\Omega \approx 2\omega_1$ oder $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ gilt. In einem autoparametrischen System können die internen Moden weitere Moden durch denselben Mechanismus mit anderen Frequenzkombinationen erregen, was zu einem Aufschaukeleffekt führen kann [21].

In Abb. 2.5 ist der Fall von CARDONI, LUCAS, CARTMELL UND LIM [20] zu sehen, bei dem eine Kombinationsresonanz auftritt. Die Schwingungsantwort der Trägeresonotrode mit den drei Einschraubzapfen besteht aus drei Frequenzen: $\omega_1 = 35463$ Hz, $\omega_2 = 10794$ Hz und $\omega_3 = 24537$ Hz, so dass $\omega_1 \approx \omega_2 + \omega_3$. Die Frequenz ω_1 gehört zur in Abb. 2.6a dargestellten Betriebsmode und entspricht nahezu der Summe der beiden Frequenzen der anderen Moden in Abb. 2.6b und Abb. 2.6c.

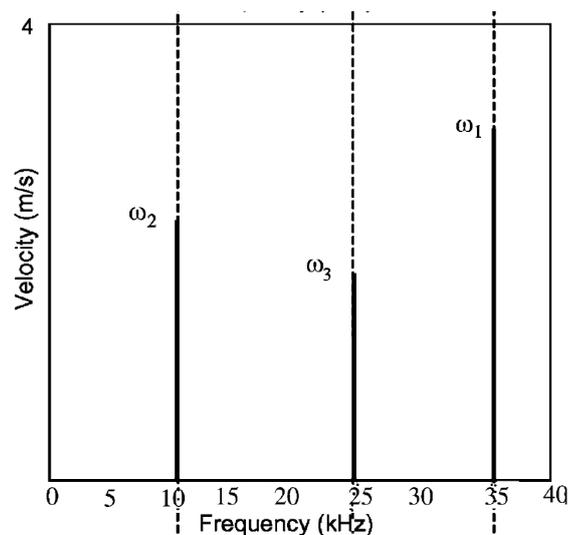


Abb. 2.5: Schwingungsantwort der Trägeresonotrode mit Einschraubzapfen von CARDONI ET AL. [20].

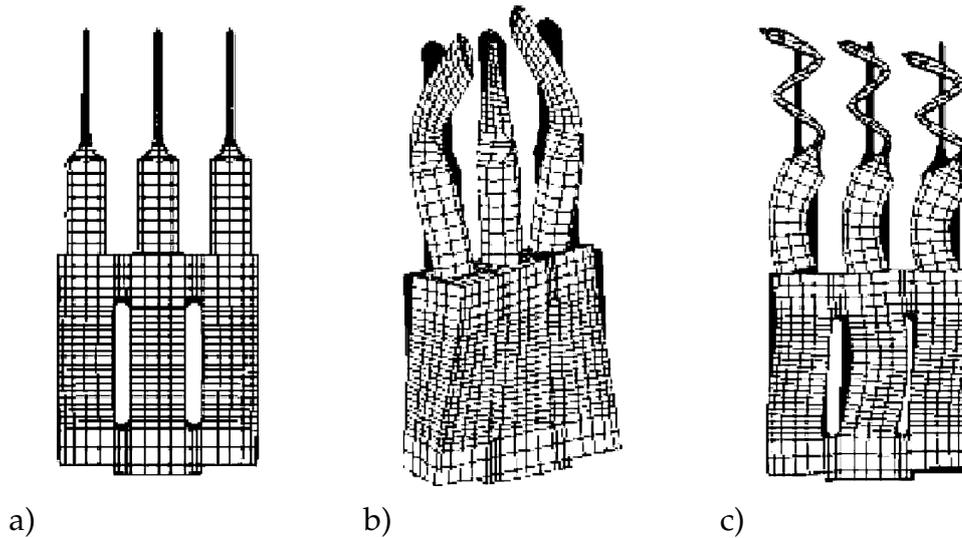


Abb. 2.6: Darstellung der Betriebsmode (a) und der beiden internen Moden (b) und (c) beim Beispiel von CARDONI ET AL. [20], die eine Kombinationsresonanz bilden.

Die Auskopplung von Energie in andere Moden ist von den nichtlinearen Eigenschaften des Systems abhängig. Bei Hochleistungsanwendungen überschreiten die piezoelektrischen Wandler die Grenze des linearen Bereichs [16]. Dies ist der Grund für das instabile Schwingverhalten. Die Auswirkungen von Nichtlinearitäten lassen sich in der Entwurfsphase nur schwer berücksichtigen. LUCAS ET AL. [21] beschreiben die Ultraschalleinheit mit einem DUFFING Ersatzmodell, um den nichtlinearen Effekt durch zwei Maßnahmen zu unterdrücken. Zum einen kann durch geeignete Wahl und Positionierung der Koppungsschraube, die zum Vorspannen der Ultraschallkomponenten dient, der nichtlineare Anteil reduziert werden [16]. Zum anderen lässt sich die Geometrie des Schwingers so vereinfachen, dass nur eine geringe Anzahl von Moden vorhanden ist [21].

2.3 Modale Degeneration

Während Kombinationsresonanzen nur in nichtlinearen Systemen beobachtet werden, tritt die modale Degeneration in den linearen dynamischen Strukturen auf. In der Arbeit von ALOLABI [8], in der beide Begriffe *modal interaction* und *degeneration* erstmals zusammen verwendet und miteinander in Verbindung gebracht werden. So versteht man unter modaler Degeneration eine sich ändernde Schwingungsmode, die bereits durch geringfügige Parametervariation hervorgerufen werden kann. Ein degeneriertes Objekt zeigt bereits nach einer kleinen Parameteränderung ein qualitativ anderes Verhalten. Das führt zu einer *Instabilität* der modalen Eigenschaften. Die Degeneration der Schwingungsformen ist bei periodischen Strukturen unter dem Begriff Modenlokalisierung (engl. *mode localization*) bekannt, da sich die Schwingungsenergie an einigen wenigen Stellen konzentriert. Am Ende dieses Abschnittes wird noch gezeigt, dass die Schwingungsmoden der Ultraschallschwinger unter bestimmten Bedingungen ebenfalls von der Degeneration betroffen sind.

2.3.1 Eigenwertkurven

Die modale Lokalisierung bzw. Degeneration ist eng mit dem Abdrehungseffekt der Eigenwerte (engl. *frequency veering*) verbunden. Der unmittelbare Zusammenhang beider Phänomene wird von PIERRE [67] beschrieben. In vielen Problemen der Strukturmechanik sind die modalen Eigenschaften der Struktur von einem charakteristischen Parameter abhängig. Dies gilt beispielsweise für die Drehzahl bei einem rotierenden System, die Verstimmung bei einem periodischen System oder die Strömungsgeschwindigkeit bei einem Fluid [8]. Werden die Positionen der Eigenwerte in der komplexen Zahlenebene als Funktion dieser Parameter aufgezeichnet, so lassen sich drei charakteristische Verläufe der Wurzelortskurven beobachten (siehe Abb. 2.7):

- Die Eigenwerte nähern sich einander an und schneiden sich (*eigenvalue crossing*). Daraus resultiert ein Wechsel der Eigenwerte und der Eigenvektoren. Dabei bleiben die Eigenvektoren jederzeit zueinander orthogonal und alle Eigenwerte voneinander klar abgegrenzt.
- Die Eigenwertkurven nähern sich einander an und drehen an einem bestimmten Punkt plötzlich ab, wie eine Gabelung (*eigenvalue veering*). Die Eigenformen erfahren im Abdrehungsbereich der Eigenwerte eine starke Änderung. Die Moden tauschen ihre zugehörigen Eigenschaften: Dämpfungsfaktoren, Sensitivitäten und Eigenvektoren. Da die Reihenfolge der Eigenwerte weiterhin erhalten bleibt, sind die Moden vor und nach dem Übergangsbereich eindeutig.
- Die Kurven der Eigenwerte nähern sich aneinander an, kollidieren (*eigenvalue collision*) und verschmelzen. Nach dem Kollisionspunkt tritt ein Schwebungsbereich mit Instabilitäten auf, wo sich die Eigenwerte überdecken.

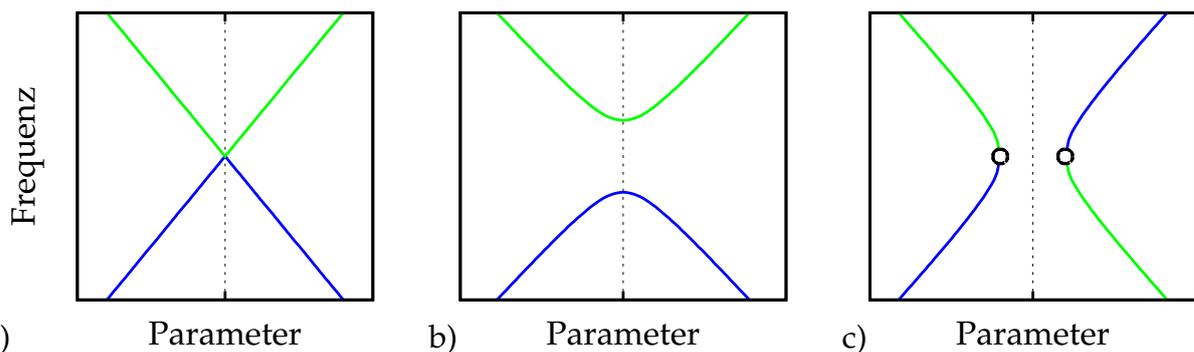


Abb. 2.7: Typische Verläufe der Wurzelortskurven: (a) Schnittpunkt, (b) Abdrehung, (c) Kollision und Verschmelzung.

Die Fälle (a) und (b) bilden den Kern der vorliegenden Untersuchungen. Der Abdrehungseffekt der Eigenwerte findet sich zum ersten Mal im Jahr 1974 bei LEISSA [55]. Er bestätigt die Degeneration der Eigenformen bei einer leichten Änderung eines Systemparameters und beschreibt die Mischung der Schwingungsformen in einer kontinuierlichen Weise. PERKINS UND MOTE [66] entwickeln 1986 einen Kopplungsfaktor zur mathematischen Beschreibung des unterschiedlichen Verhaltens der konvergierten Frequenzkur-

ven. Sie weisen nach, dass die aus selbstadjungierten Eigenwertproblemen bestimmten Eigenmoden immer abdrehen können, mit Ausnahme des Sonderfalls, bei dem sich die Moden ohne Interaktion treffen. GOTTLIEB [41] nutzt das elementare Ersatzmodell von zwei gekoppelten Pendeln. Hierbei ist die Kopplungsfeder für die Lokalisierung der Moden verantwortlich. Das Phänomen der Frequenzabdrehung findet sich häufig in der Literatur, wie beispielsweise bei Brücken mit aeroelastischen Anregungskräften [25] oder bei einfach gelagerten Balken [84]. Die Modendegeneration wird auch für die Messung der Querkontraktionszahlen von orthotropen Materialien ausgenutzt [62, 74].

2.3.2 Konservative und nicht-konservative Kopplungen

Gemäß PIERRE [67] ist die Frequenzabdrehung direkt mit zwei verschiedenen Arten von Kopplungen verbunden: der physikalischen Kopplung und der modalen Kopplung:

- Die physikalische Kopplung bildet die Verbindung zwischen den identischen Komponenten einer periodischen Struktur ab (beispielsweise bei gekoppelten Pendeln oder bei Turbinenschaufeln). Da die Substrukturen identisch sind und somit übereinstimmende modale Eigenschaften besitzen, führt die Kopplung zu einer Trennung der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren aller Substrukturen.
- Die modale Kopplung koppelt die Eigenformen durch eine Parameterversimmung und kleine strukturelle Unregelmäßigkeiten. Die Modenlokalisierung tritt auf, sobald die modale Kopplung in die Größenordnung der physikalischen Kopplung kommt. Im Abschnitt 2.5 wird auf das Maß zur Bewertung dieser beiden Größen eingegangen. In diesem Zusammenhang ist interessant zu erwähnen, dass eine nicht verstimmte Struktur keine Modenlokalisierung aufweisen kann.

Schwingende Systeme, deren Annäherung der Eigenwerte zum Fall (b) (Abdrehung) führt, besitzen laut Definition von CRANDALL UND MROSZCZYK [26] eine *konservative* Kopplung. Im Unterschied dazu zeigen die Systeme mit sich anziehenden Eigenwerten (Fall (c): Verschmelzung) eine *nicht-konservative* Kopplung. AFOLABI [8] verknüpft die konservative sowie die nicht-konservative Kopplung mit der strukturellen Stabilität. Einem degenerierten System fehlt die strukturelle Stabilität, wenn es bei kleinen Parameteränderungen ein signifikant anderes Verhalten aufweist. Der Autor unterscheidet zwischen geometrischen und elastischen Instabilitäten: die geometrische Instabilität betrifft die Änderung der Eigenvektoren, wohingegen sich die elastische Instabilität auf die Eigenwerte bezieht.

- Eine konservative Kopplung führt zur Abdrehung der Eigenwerte und verursacht lediglich eine geometrische Instabilität. In der Physik wird sie mit dem englischen Begriff *avoided crossing* beschrieben. Die Steifigkeitsmatrix des gekoppelten Systems ist reell und symmetrisch.

- Bei der nicht-konservativen Kopplung ziehen sich die Eigenwerte weiter an und kollidieren schließlich. Ab einem kritischen Parameterwert kommt es zu einer Verschmelzung der Eigenwerte. Wird der Parameter weiter modifiziert, tauchen beide Eigenwerte wieder auf. Innerhalb des Kollisionsbereichs ist Flattern erkennbar, es treten sowohl geometrische als auch elastische Instabilitäten auf (in der Physik *frequency coalescence* genannt).

Die nicht-konservative Kopplung lässt sich in rotierenden Systemen beobachten, dabei entstehen aufgrund der Zentrifugalkräfte zirkulatorische und gyroskopische Terme. Typische Anwendungen sind z.B. Festplatten oder Kreissägen. CHEN UND BOGY [24] untersuchen die mathematische Struktur einer drehenden Kreisscheibe, die mit einer stationären Last in Kontakt ist. Dabei wird die modale Degeneration als Funktion der Rotationsgeschwindigkeit beschrieben. Bei bestimmten Konstellationen kann entweder eine Verschmelzung oder eine Abdrehung der Frequenzen beobachtet werden. KUNG, DUNLAP UND BALLINGER [54] untersuchen das niederfrequente Quietschen eines Scheibenbremsensystems. Bleibt der Reibungskoeffizient unterhalb eines Grenzwerts, sind zwei Nachbarmoden mit zwei unterschiedlichen Frequenzen zu erkennen. Instabilität tritt auf, sobald der Reibungskoeffizient einen kritischen Grenzwert überschreitet. Dementsprechend kommt es zu einer Kopplung zwischen den beteiligten Moden und letztlich zu einem chaotischen Zustand.

Die Dynamik nicht rotierender Systeme (wie speziell die Ultraschallschwinger) wird anhand von symmetrischen Strukturmatrizen (Massen-, Steifigkeits- und Dämpfungsmatrizen) beschrieben [66, 29]. Daraus folgt, dass nur die Fälle (a) und (b) verbreitet sind. Der Fall (a) weist einen klar definierten Schnittpunkt der Eigenwertkurven auf und lässt sich nur theoretisch nachweisen. Da in der Realität niemals ideale Bedingungen herrschen, führt ein geringer Frequenzabstand immer zu einer Abdrehung der Eigenwerte [29].

2.3.3 Modellierung anhand eines Systems mit zwei Freiheitsgraden

Zur Illustration der modalen Degeneration wird das folgende Ersatzmodell in Abb. 2.8 mit zwei Freiheitsgraden verwendet. Es dient dazu, das bemerkenswerte Verhalten der Eigenwerte und Eigenvektoren zu beschreiben. Die an den beiden Einheitsmassen angekoppelten Federn weisen bis auf eine kleine Verstimmung ΔK die gleiche Steifigkeit auf. Eine zusätzliche Kopplungsfeder k_c koppelt beide Massenschwinger.

Bringt man die Systemmatrizen in eine dimensionslose Form, so lassen sich dieselben Parameter wie bei AFOLABI [8] verwenden: α für die normierte Verstimmung und β für die normierte Kopplung. Für $M = 1$, stellt die Gleichung $\mathbf{L}u = \lambda u$ das spezielle Eigenwertproblem dar. Dabei deutet der lineare Operator \mathbf{L} auf eine konservative Kopplung hin:

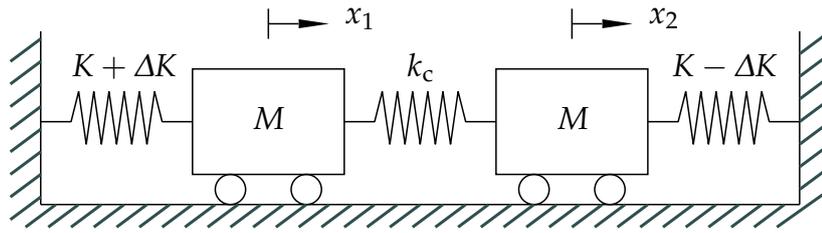


Abb. 2.8: Minimales Ersatzmodell mit zwei Freiheitsgraden.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & -\beta \\ -\beta & 1 + \alpha \end{bmatrix} \quad \alpha = \frac{\Delta K}{K + k_c} \quad \beta = \frac{k_c}{K + k_c} \quad (2.13)$$

Daraus lassen sich die folgenden Eigenwerte:

$$\lambda_1(\alpha, \beta) = 1 - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2(\alpha, \beta) = 1 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (2.14)$$

in Abhängigkeit der beiden Parameter α und β in Abb. 2.10a schreiben. Der Abstand zwischen den Eigenwerten beträgt $2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Ein doppelter Eigenwert kann nur beim entkoppelten und nicht verstimmten Sonderfall auftreten, bei dem α und β gleichzeitig Null sind. Die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\mathbf{u}_1(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} - \varepsilon} \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \varepsilon} \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} + \varepsilon} \\ -\sqrt{\frac{1}{2} - \varepsilon} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad (2.15)$$

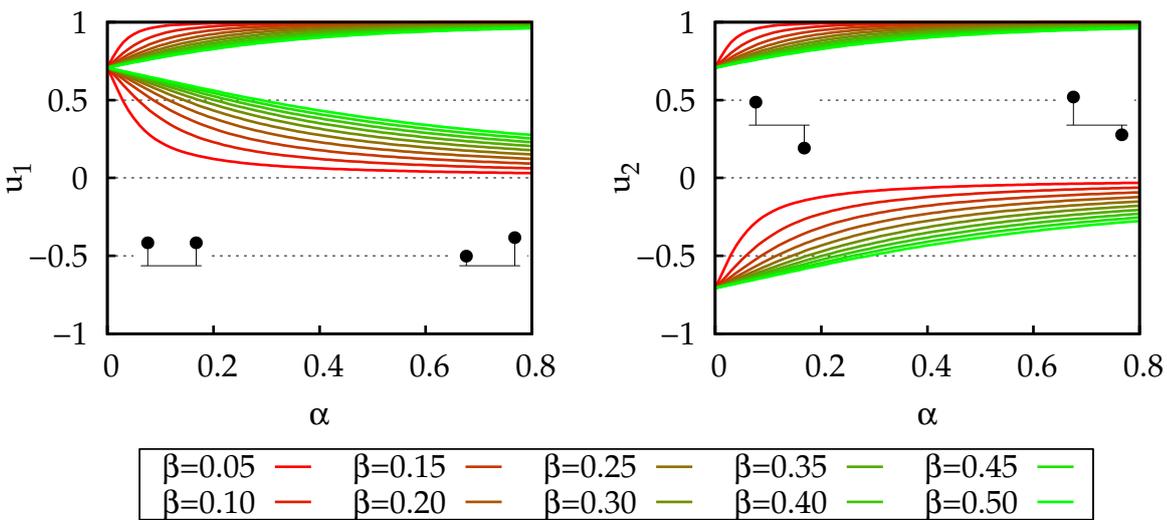


Abb. 2.9: Komponenten der beiden Eigenvektoren in Abhängigkeit von α und β .

erfahren eine erhebliche Änderung in Abhängigkeit von α und β . In Abb. 2.9 stehen die beiden Linien jeweils für die Verschiebungen x_1 und x_2 der beiden Massen M . Ohne Ver-

stimmung ($\alpha = 0$) haben alle Eigenvektorenkomponenten den gleichem Betrag (gleichphasig bei u_1 und gegenphasig bei u_2). Mit zunehmender Verstimmung α bewegt sich eine Masse immer mehr als die andere und die Eigenvektoren tauschen kontinuierlich ihre Komponenten. Bei der Untersuchung eines ähnlichen Ersatzmodells beschreibt BALMÈS [17] diesen Austausch als eine *Rotation* der Eigenvektoren in einem festen Untervektorraum. Die Eigenvektoren lassen sich stets als eine Linearkombination eines einzigen Vektorenpaars beschreiben und bleiben somit in derselben Ebene. Diese Rotation wird anhand eines Drehwinkels ϑ beschrieben. Zu diesem Zweck wird die Orientierung eines Eigenvektorenpaars im Unterraum bezüglich einer Referenzbasis definiert. Wie noch genauer ausgeführt wird, ist es zweckmäßig, das Eigenvektorenpaar $\mathbf{U}^{(0)}$ des unverstimmten Zustands als Referenz zu wählen ($\alpha = 0$). Dadurch gilt der Drehwinkel ϑ in Abb. 2.10b als Verstimmungsgrad:

$$\mathbf{U}(\alpha) = \mathbf{U}^{(0)}\mathbf{T}(\alpha) \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Wie in Abb. 2.10b erkennbar ist, kann der Rotationswinkel ϑ maximal 45° betragen. Zwei Extremwerte lassen sich den Gleichungen bzw. den Diagrammen entnehmen:

- Die Kopplung überwiegt die Verstimmung ($\beta \gg \alpha$). Das entspricht nahezu dem unverstimmten Fall ($\alpha \approx 0$). Die Eigenwerte werden durch die Kopplung getrennt und die beiden Massen zeigen eine gegenphasige Bewegung. Aus diesem Grund kann ein unverstimmtes System unabhängig von der Größe der Kopplung keine Modenlokalisierung aufweisen.

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \mathbf{u}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.17)$$

- Die Verstimmung überwiegt die Kopplung ($\alpha \gg \beta$), dies entspricht nahezu dem entkoppelten Fall ($\beta \approx 0$). Das System zeigt immer eine klare Trennung der Moden, da kein Mechanismus für den Energieaustausch zwischen ihnen vorhanden ist. Die Moden eines entkoppelten Systems erfahren eine *vollständige* Degeneration und die Verdrehung der Eigenvektoren im Vergleich zum unverstimmten Fall nimmt den maximalen Wert von 45° an.

$$\mathbf{u}_1^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2^{(\infty)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

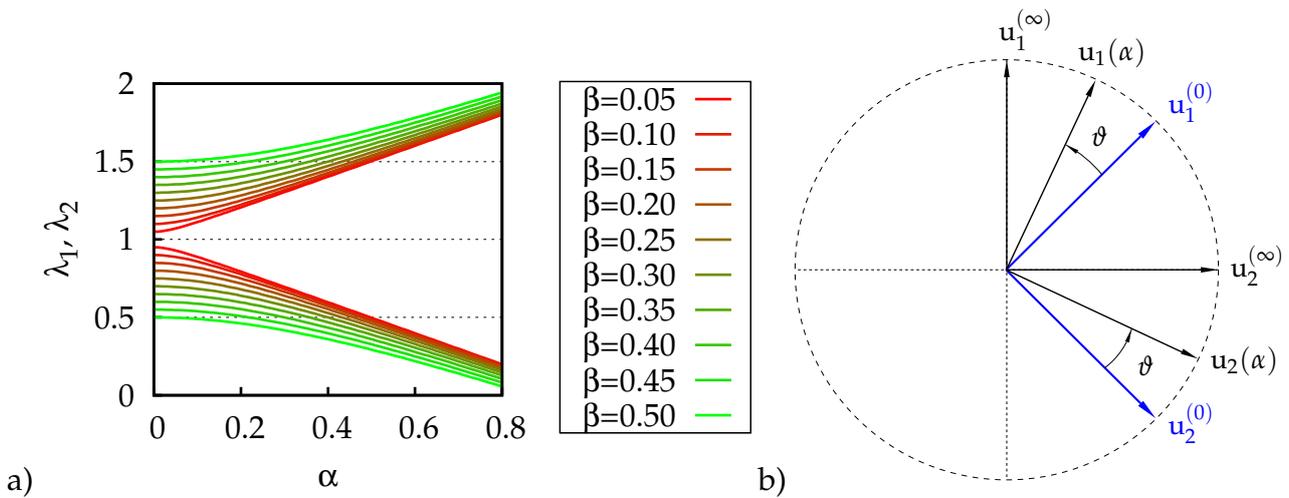


Abb. 2.10: (a) Eigenwerte und Rotationswinkel in Abhängigkeit von α und β . (b) Darstellung der Eigenvektoren und des Rotationswinkels.

2.3.4 Experimente zum Nachweis der modalen Degeneration

Die Untersuchung der modalen Degeneration ist nicht auf die theoretische Betrachtung beschränkt. Viele Veröffentlichungen zielen darauf ab, sie in praktischen Fällen nachzuweisen. Im Unterschied zur vorliegenden Arbeit ist die modale Degeneration bei manchen Anwendungen erwünscht. DUBOIS, ADHIKARI UND LIEVEN [28] untersuchen die dynamischen Eigenschaften einer Fachwerkstruktur aus Stahl mit unterschiedlichen Vorspannungswerten. Die Verstimmung wird als Schwächung einer einseitigen Verbindungsstelle eingeführt. Die im vorherigen Abschnitt beschriebene Rotation der Eigenformen zwischen einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Mode lässt sich anhand der eingeführten Asymmetrie nachweisen.

BONISOLI ET AL. [18] bieten ebenfalls einen experimentellen Beweis der Eigenwertabdrückung an. Der Versuchsaufbau besteht aus einer drehbaren Schaufel, deren Orientierungswinkel als einstellbarer physikalischer Parameter herangezogen wird, um die Eigenfrequenzen des Systems zu variieren. Interaktionen zwischen Biege- und Torsionsmoden sowie zwischen Biege- und Biegemoden werden simuliert und experimentell bestätigt.

Wie erwähnt wird die modale Degeneration ebenfalls verwendet, um die Querkontraktionszahlen dünner anisotroper Platten zu ermitteln, siehe z.B. MCINTYRE UND WOODHOUSE [62] und SATO, HUTCHINGS UND WOODHOUSE [74]. Das geometrische Verhältnis Breite zu Länge einer dünnen plattenförmigen Materialprobe wird schrittweise modifiziert, bis der Punkt erreicht ist, an dem der Austausch der Moden nur noch bis zur Hälfte erfolgt (volle Degeneration der Moden). Dabei sind die Eigenformen miteinander vermischt. Die Eigenfrequenzen haben den geringsten spektralen Abstand, anhand ihrer Messung lassen sich die unbekanntes Materialparameter ermitteln.

2.3.5 Modale Degeneration bei Ultraschallwerkzeugen

Bei Ultraschallwerkzeugen wird die modale Degeneration bewusst verwendet, um beispielweise torsionale Bewegungen mit einem Wandler vom Typ Langevin (Längsschwinger) zu erzeugen. Die Umsetzung der Schwingrichtung von longitudinal zu torsional hat den großen Vorteil, unter Verwendung der bisherigen longitudinalen Schwingkomponenten, beide Schwingrichtungen nutzen zu können. Diese Technologie kommt neuerdings verstärkt für Bohr- und Schweißanwendungen zum Einsatz, siehe z.B. [71].

Die im Rahmen der vorliegenden Untersuchung verwendeten Begriffe *modale Degeneration* und *modale Kopplung* sind mit den Ausführungen von HARKNESS, LUCAS UND CARDONI [44] und den dort verwendeten Begrifflichkeiten nicht konsistent, weshalb eine Klärung notwendig ist. Bei HARKNESS, LUCAS UND CARDONI [44] werden zwei unterschiedliche kreisförmige Schwinger in $\lambda/2$ -Ausführung und mit einer Übersetzung der mechanischen Auslenkung von einem longitudinalen Wandler angetrieben. Ihre Eigenfrequenzen und ihre Längs- und Torsionsanteile werden als Funktion eines charakteristischen Parameters untersucht.

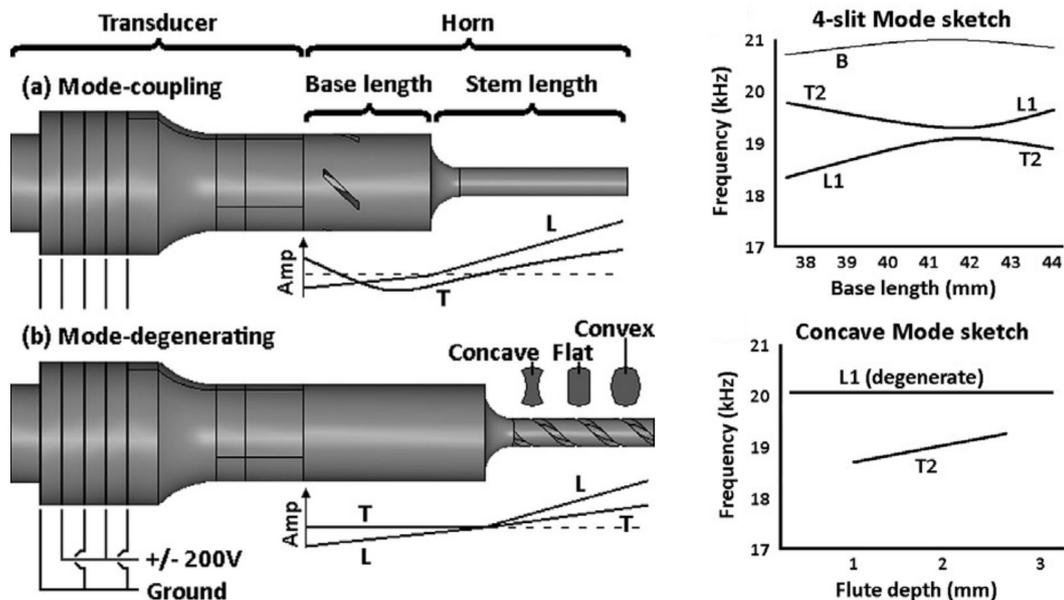


Abb. 2.11: Zwei kreisförmige Schwinger nach HARKNESS, LUCAS UND CARDONI [44] mit den zugehörigen Parameterstudien. Beim *mode coupling horn* (oben) mit schrägen Schlitzen wird das Knotenmaß (*base length*) als Parameter verwendet. Im Unterschied dazu wird beim *mode degenerating horn* (unten) mit schrägen Wendeln die Wendeltiefe als Variationsparameter herangezogen.

- Die Eigenfrequenzen des ersten Schwingers (in Abb. 2.11 oben dargestellt und als *mode coupling horn* bezeichnet) sind als Funktion des Knotenmaßes dargestellt. Der Kurvenverlauf zeigt die bekannte Abdrehung zwischen den Frequenzen der Längs- und der Torsionsmode. Zwischen beiden Moden findet eine starke Modenkopplung statt. Die Eigenformen tauschen ihre longitudinalen und torsionalen An-

teile. Das Verhältnis der torsionalen zu den longitudinalen Komponenten (0° Spiralwinkel erzeugt keinen Torsionsanteil) definiert die *Torsionalität*.

- Der Frequenzabstand zwischen den Moden bei dem zweiten Schwinger (in Abb. 2.11 unten dargestellt und als *mode degenerating horn* bezeichnet) ist größer als bei dem ersten Schwinger. Die Frequenzkurven sind in diesem Fall als Funktion der Wendeltiefe dargestellt. Mit zunehmender Wendeltiefe ändern sich die Frequenzen der Längs- und Torsionsmoden kaum. Dafür wächst der torsionale Anteil der ursprünglich longitudinalen Mode erheblich an. Diese Mode wird von den Autoren als *degeneriert* bezeichnet, da sie von den anderen Nachbarmoden unbeeinflusst zu bleiben scheint.

Da die Variationsparameter nicht übereinstimmen, ist ein direkter Vergleich der Kurvenverläufe in Abb. 2.11 problematisch. Der Hauptunterschied zwischen beiden Schwingern ist folgender: während der erste Schwinger instabile modale Eigenschaften bei einem bestimmten Knotenmaß aufweist, zeigt der zweite Schwinger ein stabiles Verhältnis der longitudinalen und torsionalen Auslenkungen mit steigender Wendeltiefe. An dieser Stelle sollen daher die von den Autoren verwendeten Begriffe für die vorliegende Arbeit angepasst werden: beide Schwinger zeigen keine Grundmode (longitudinale, torsionale) wie bei einem rotationssymmetrischen Schwinger. Ihre Moden sind aufgrund der starken Veränderung der Geometrie degeneriert und die Degeneration ist einer Modenkopplung geschuldet.

AL-BUDAIRI, LUCAS UND HARKNESS [11, 10] haben den zweiten Schwinger mit schrägen Wendeln weiterentwickelt, indem die Wendel direkt am Umfang des Unterteils eines Wandlers angebracht werden. Das Oberteil mit den axialen polarisierten Piezokeramikscheiben bleibt unverändert. Verschiedene Sensitivitätsstudien des Spiralwinkels liefern die Frequenzlage von drei relevanten Eigenmoden (Longitudinale, Torsions- und Biegemoden) sowie die Torsionalität. Mit wachsendem Spiralwinkel steigt die Torsionalität der ursprünglich longitudinalen Eigenform bis zu einem Maximum, um dann wieder abzunehmen. AL-BUDAIRI, LUCAS UND HARKNESS [4] beschreiben eine weitere Optimierung der Torsionalität des Wandlers, indem der Querschnitt mit einem exponentiellen Verlauf versehen wird.

Zwar wird die Lage der Eigenfrequenzen von den Autoren genau untersucht, die Abdrehung der Eigenfrequenzen jedoch nicht erwähnt. Gemäß den Autoren ist die drastische Frequenzabsenkung der longitudinalen Mode mit wachsendem Spiralwinkel auf die fallende Steifigkeit des Unterteils zurückzuführen. Die Eigenfrequenz der Betriebsmode fällt, während die Frequenz der Torsionsmode leicht steigt. Der zunehmende Frequenzabstand zwischen den beiden degenerierten Moden deutet darauf hin, dass eine Abdrehung der Frequenzen vorhanden ist.

2.4 Verstimmung eines dynamischen Systems

2.4.1 Einleitung

Ist wie im vorhergehenden Abschnitt 2.3.3 beschrieben, die Verstimmung und die innere Kopplung der Struktur von ähnlicher Größenordnung, so hat dies Eigenwertabdrehungen und die Degeneration bzw. Lokalisierung der Moden zur Folge. Eine verstimmte Struktur kann sich aufgrund der unstablen Natur der modalen Eigenschaften deutlich anders verhalten als im unverstimmten Zustand. In diesem Kapitel werden verschiedene Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe die Änderung der Eigenschaften eines verstimmten Systems bewertet werden können.

Diese Verfahren basieren entweder auf der Störungsrechnung oder auf der Sensitivitätsrechnung. Die Störungstheorie bestimmt, ausgehend von den modalen Eigenschaften des ungestörten Systems, eine Näherungslösung der modalen Eigenschaften des gestörten Systems. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Störungen klein sind. Im Unterschied dazu wird mit Hilfe der Sensitivitätsrechnung die Variation der modalen Eigenschaften bei infinitesimalen Parameteränderungen bestimmt. Diese Verfahren werden bereits für ähnliche Phänomene im Bereich der Turbomaschinen angewendet und sollen im Folgenden kurz erläutert werden.

2.4.2 Turbomaschinen und Schaufelkränze

Da ein Schaufelkranz in Turbomaschinen rotiert, erfahren die Schaufeln schwankende Kräfte aufgrund von Störungen im Strömungsfeld. Diese externe Anregung (engl. *engine order excitation*) wird u.a. von Statoren oder Klappen verursacht. Die Erregerordnung *EO* steht für die Anzahl der Störungen mit gleichen Abständen, die auf der Schaufelkranz wirken.

2.4.2.1 Abdrehung der Frequenzkurven

Trotz der physikalischen Kopplung der Schaufeln auf der Scheibe sind Rotoren von Turbomaschinen und Schaufelkränzen sehr anfällig gegenüber Schwingungen. Typischerweise werden die Moden von kreisförmigen Strukturen u.a. durch die Anzahl der Knotenlinien oder Knotendurchmesser (engl. *nodal diameter*) charakterisiert, die die auf dem Durchmesser liegenden Nulllinien sind. Die zyklische Symmetrie wird genutzt, um alle Schwingungsformen aus einer Schwingungsfamilie durch einen einzigen komplexen Eigenvektor zu beschreiben¹. Wie für den industriellen Schaufelkranz mit 30 Schaufeln in Abb. 2.12 dargestellt, werden die Eigenfrequenzen über die Anzahl von Knotendurchmesser visualisiert. Die horizontalen Kurven sind die Frequenzen der schaufeldominier-

¹Siehe [78], die Vorgehensweise wird Abschnitt 8.3 im Anhang beschrieben.

ten Moden (z.B. 1F) und werden typischerweise in Schwingungsfamilie unterteilt (Biegung, Torsion). Die Kurven mit einer starken Zunahme der Eigenfrequenz bei steigender Anzahl von Knotendurchmesser gehören zu den Scheibenmoden (z.B. 1E).

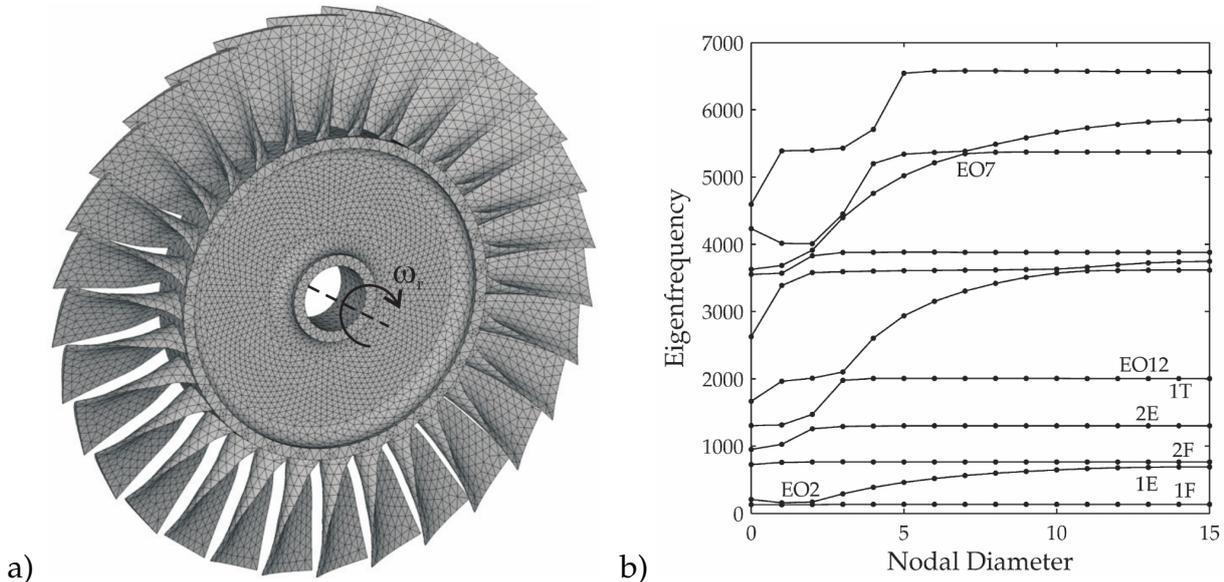


Abb. 2.12: (a) Finite-Element Vollmodell eines Schaufelkranzes und (b) Frequenzkurven in Abhängigkeit vom Knotendurchmesser nach HOHL, KRIEGESMANN, WALLASCHEK UND PANNING [46].

In manchen Bereichen zeigen die Frequenzen der Scheiben- und Schaufelmoden eine Abdringung und die dort auftretenden Schwingungsformen bestehen aus einer Mischung von Schaufel- und Scheibenschwingungen. Die Antwortamplitude der einzelnen Schaufeln kann bei einer kleinen Änderung der Systemparameter stark schwanken und ist gemäß AFOLABI UND ALABI [9] auf die *Instabilität* der Eigenvektoren in diesen Abdringungsbereichen zurückzuführen.

2.4.2.2 Verstimmung

Obwohl ein Schaufelkranz typischerweise mit identischen Schaufeln ausgelegt wird, sind immer zufällige Abweichungen innerhalb der Struktur aufgrund von Fertigungstoleranzen vorhanden. Diese geometrischen Abweichungen sowie die inhomogenen Massen- oder Steifigkeitsverteilungen führen zu einer Asymmetrie und einer sogenannten *Verstimmung* (engl. *mistuning*). Die angewendete Methodik zur Untersuchung dieser Verstimmung wird im Rahmen dieser Arbeit genutzt, um die zufälligen Verteilungen der Inhomogenitäten des Materials von Ultraschallsonotroden zu simulieren.

Die Verstimmung der Schaufeleigenschaften verursacht einen Verlust der zyklischen Symmetrie. Die Schwingungsformen des ganzen Schaufelkranzes können nicht mehr durch ein Segment mit zyklischen Randbedingungen berechnet werden, siehe u.a. HOHL [45]. Die Eigenfrequenzen der Doppelmoden trennen sich (engl. *frequency splitting*) gemäß EWINS [32] auf und die Eigenvektoren führen zu den unten beschriebenen lokalisierten Moden. Dabei werden zusätzliche Moden mit anderen Knotendurchmessern von

einer Erregerordnung angeregt, wie für den Sonderfall der harmonischen Verstimmung in POHLE, PANNING UND WALLASCHEK [68] gezeigt.

2.4.2.3 Amplitudenüberhöhung

Die Schwingungsamplituden der Schaufeln sind gegenüber Störungen der zyklischen Symmetrie empfindlich und werden an bestimmten Stellen deutlich höher als im unverstimmten Fall. Dadurch vergrößert sich die dynamische Belastung signifikant und es besteht das Risiko des Versagens. Die Lokalisierung der Mode zeichnet sich mit einem Amplitudenanstieg einer Schaufel aus. WHITEHEAD [81] berechnete den maximalen möglichen Skalierungsfaktor der Amplitude, der nur von der Anzahl der Schaufeln N abhängig ist:

$$\frac{A_{\max}}{A_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{2}} \right) \quad (2.19)$$

In einem verstimmten Schaufelkranz haben die Doppelmoden leicht unterschiedliche Eigenfrequenzen und ihre beiden Antworten zur Erregerordnung EO überlagern sich. Durch diese Überlagerung entsteht ein Schwingungsmaximum einzelner Schaufeln. Mit steigender Verstimmung wird dieses Maximum gemäß CASTANIER UND PIERRE [23] schnell erreicht. Wie bei Schaufeln in Turbomaschinen können ungleichmäßige und lokale Schwingungsüberhöhungen auch entlang der Schweißfläche von Ultraschallsonotroden auftreten.

2.4.2.4 Bewusste Verstimmung

Da zyklische Systeme sehr empfindlich gegenüber einer zufälligen kleinen Verstimmung sind, wird gelegentlich eine bewusste Verstimmung (*intentional mistuning*) der Schaufeln eingeführt [22]. Der Verstimmungsgrad ist gezielt vergrößert, wodurch ein positiver Effekt beobachtet wird. In der Praxis wird die bewusste Verstimmung eingeführt, indem unterschiedliche Schaufeltypen oder Schaufeln nach Eigenfrequenzen bzw. ihren Gewichten in einer harmonischen, rechteckigen oder alternierenden Anordnung zur Anwendung kommen.

2.4.2.5 Monte Carlo Simulationen

Um die statistische Anfälligkeit der Frequenzantwort gegenüber stochastischen Verstimmungsverteilungen in den Schaufeln zu simulieren, kommen Monte-Carlo Simulationen (MCS) zum Einsatz. Im ersten Schritt werden die Elastizitätsmodule der Schaufeln mit normalverteilten Zufallszahlen verstimmt. Anschließend wird die Frequenzantwort berechnet, um die größte Antwortamplitude auf dem Schaufelkranz zu finden. Diese Antwortamplitude wird mit der Antwortamplitude im unverstimmten Fall ins Verhältnis gesetzt. Diese Prozedur wird für eine große Zahl von Simulationen wiederholt. Die MCS

kommt im Rahmen dieser Arbeit zur Verwendung, um zufällige Verstimmungsverteilungen im Sonotrodenmaterial zu simulieren.

2.4.3 Fremderregung einer verstimzten Struktur

In einigen Veröffentlichungen, die im Folgenden näher beschrieben werden, wird über die harmonische Anregung von dynamischen Systemen mit degenerierten Moden berichtet. An dieser Stelle stellt sich die Frage, wie sich die beiden vorgestellten modalen Interaktionen im Fall einer Fremderregung kombinieren. Im Bereich der Lokalisierung zwischen zwei Moden sind beide Eigenwerte dicht beieinander. Die Gesamtantwort besteht nach wie vor aus einer gewichteten Summe der Antworten der beiden Moden und die Degeneration spielt keine wesentliche Rolle [17].

IGUSA [47] stellt Ausnahmen fest, bei welchen die Gesamtbewegung des Systems im instabilen Abdrehungsbereich der Eigenfrequenzen von der Degeneration betroffen sein kann. Dabei kann die Überlagerung der modalen Antwort sowohl zur einer Verstärkung wie auch zu einer Auflösung der gesamten Antwort führen. Dieses Ergebnis wird von DUBOIS, ADHIKARI UND LIEVEN [28] experimentell bei der Anregung der Fachwerkstruktur bestätigt. Die Einführung einer Asymmetrie hebt die Degeneration einer symmetrischen und einer antisymmetrischen Mode hervor und führt zu einer Verminderung der Antwortamplitude der Struktur in der Nähe der beiden Resonanzfrequenzen. Die Degeneration der Moden wirkt in diesem Fall als eine erhöhte modale Dämpfung.

KENYON, GRIFFIN UND KIM [51] beobachten die hohe Empfindlichkeit der modalen Antwort gegenüber Störungen, indem sie einen Schaufelkranz mit gekoppelten Feder-Massen-Schwingern modellieren. Die schaufel- und scheibendominanten Moden erfahren eine Lokalisierung bei bestimmten Knotendurchmessern, wenn die Frequenzabstände gering sind. Die zugehörigen Erregerordnungen führen zwar zu kleineren modalen Antworten beider Moden, diese sind jedoch sehr empfindlich gegenüber von Parameterstörungen. Eine Verstimmung von Schaufelkränzen kann in den Lokalisierungsbereichen sowohl einen instabilen Anstieg wie auch einen Abfall der Schaufelantwortamplitude verursachen.

JONES UND CROSS [50] untersuchen die Antiresonanzen (Amplitudenminima) der Frequenzantwort eines verstimzten Schaufelkranzes, um die Verstärkung der Antwortamplitude zu bewerten. Mit der Abwechslung der Pole (Resonanzen) und Nullstellen (Antiresonanzen) der Übertragungsfunktion kann die maximale Antwortamplitude sogar unter das Niveau des unverstimzten Falls reduziert werden. Dafür ist eine gezielte besondere Anordnung der Schaufel erforderlich, da die Lage der Frequenzen der Antiresonanzen lediglich von den dynamischen Eigenschaften der Nachbarschaufeln bestimmt wird.

2.4.4 Sensitivität der Eigenwerte und Eigenvektoren

2.4.4.1 Allgemeines Eigenwertproblem

Zur Berechnung von schwingungsfähigen Systemen wird eine kontinuierliche Struktur mit komplexer Geometrie (wie im vorliegenden Fall die Ultraschallsonotroden) typischerweise in vielen Freiheitsgraden diskretisiert. Die Bewegungsgleichungen werden an einer beschränkten Zahl von Punkten gelöst.

Die Bewegung der diskretisierten Struktur ist im Vektor \mathbf{x} der physikalischen Koordinaten zusammengefasst. Jede Komponente des Vektors beschreibt die Verschiebung eines Freiheitsgrades (FHG) in Abhängigkeit der Zeit:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

2.4.4.2 Freie und ungedämpfte Schwingungen

Die Bewegungsgleichungen des Systems lauten:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = 0 \quad (2.21)$$

\mathbf{M} beschreibt die Massenmatrix und \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix. Die Differentialgleichungen werden unter der Annahme gelöst, dass alle verallgemeinerten Koordinaten die gleiche Zeitabhängigkeit besitzen:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}q(t) \quad (2.22)$$

Daraus folgt die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$\ddot{q}(t) + \lambda q(t) = 0 \quad (2.23)$$

Der Exponentialansatz $q(t) = Ae^{st}$ führt zu den Lösungen $s_1 = +j\omega$ und $s_2 = -j\omega$ mit $\omega^2 = \lambda$, die eine harmonische Schwingung darstellen. Durch Einsetzen der Lösungen in die Ausgangsgleichung, erhält man das algebraische Eigenwertproblem:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_i = \omega_i^2 \mathbf{M}\mathbf{u}_i \quad (2.24)$$

bei welchem ω_i die i -te Eigenkreisfrequenz ist. Der unbekannte Eigenvektor \mathbf{u}_i bildet die i -te Eigenform. Dabei handelt es sich um ein homogenes lineares Gleichungssystem. Die nicht-triviale Lösung ergibt sich aus dieser charakteristischen Gleichung:

$$\det[\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}] = 0 \quad (2.25)$$

Die Eigenwerte sind meistens einfach, d.h. die algebraische Vielfachheit der entsprechenden Nullstelle ist 1. Sogenannte mehrfache Eigenwerte treten nur in Sonderfällen wie z.B. bei zyklischen Systemen auf. Da die Eigenvektoren die Lösung eines homogenes Gleichungssystem sind, sind sie nicht eindeutig bestimmt. Deshalb werden die Eigenvektoren üblicherweise bezüglich der Massenmatrix normiert. Mit dieser Normierungsforderung und der Orthogonalitätseigenschaft gelten die folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad \mathbf{u}_i^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i & i = j \end{cases} \quad (2.26)$$

2.4.4.3 Sensitivitätsgleichungen

Die Empfindlichkeit der Eigenfrequenzen und Eigenformen bezüglich der geometrischen Parameter spielt eine wichtige Rolle im Entwurfsprozess einer Struktur. Die Abhängigkeit der Eigenwerte und Eigenvektoren eines linearen dynamischen Systems von einem Parameter sind von großer praktischer Bedeutung. Dadurch können die Strukturen effektiv ausgelegt werden, ohne eine große Zahl von dynamischen Analysen durchführen zu müssen. FOX UND KAPOOR [37] formulieren den genauen Ausdruck der Änderungsrate von Eigenwerten und Eigenvektoren in Abhängigkeit von einem beliebigen als Variable betrachteten Systemparameter. Für das Eigenwertproblem der frei ungedämpften Schwingungen bestimmt sich die Sensitivität des Eigenwerts λ_i bezüglich eines Parameters p [37]:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = \mathbf{u}_i^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) \mathbf{u}_i \quad (2.27)$$

und die Sensitivität des zugehörigen Eigenvektors \mathbf{u}_i :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial p} = -\frac{\mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{u}_i}{2} \mathbf{u}_i + \sum_{k \neq i}^N \frac{\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) \mathbf{u}_i}{\lambda_i - \lambda_k} \mathbf{u}_k \quad (2.28)$$

Gl. 2.28 ist zu entnehmen, dass die Eigenvektorensensitivität vom Summanden mit dicht beieinander liegenden Moden dominiert wird. Dieser ist aufgrund der Struktur seines Nenners für die Modenlokalisierung verantwortlich. Wie noch ausgeführt wird, enthalten die Zähler der Summanden die modalen Kopplungen. Die Kurvenkrümmung der Eigenwertkurven wird aus Gl. 2.27 abgeleitet [29]. Liegen die Eigenwerte zweier benachbarter Moden eng beieinander, so überwiegt ebenfalls der letzte Term in Gl. 2.29 und ist für die schlagartige Abdringung der Eigenwerte verantwortlich:

$$\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial p^2} = \mathbf{u}_i^T \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial p^2} - \lambda_i \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial p^2} - 2 \frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) \mathbf{u}_i + 2 \sum_{k \neq i}^N \frac{\left(\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) \mathbf{u}_i \right)^2}{\lambda_i - \lambda_k} \quad (2.29)$$

Die Strukturmatrizen der Bewegungsgleichungen sind mit reellen und symmetrischen Termen belegt. Aus diesem Grund kann das Quadrieren des Zählers im zweiten überwiegenden Term von Gl. 2.29 lediglich zu einer Eigenwertabdrehung führen. Aus diesem Grund liegt eine konservative Kopplung vor [8, 29].

2.4.5 Basis von nominalen Moden

Als nominale Systemmoden (engl. *nominal system modes*) werden die Eigenmoden einer unverstimmten und ungestörten Struktur definiert [83]. Bei Schaufelkränzen besteht die nominale Konfiguration aus exakt identischen Schaufeln und Scheibensektoren. Wie erwähnt können sich die Eigenvektoren einer verstimmten Struktur in Bezug auf die Lokalisierung deutlich von denen der nominalen Konfiguration unterscheiden. In PERKINS UND MOTE [66] und YANG UND GRIFFIN [82] werden die verstimmten Moden $\mathbf{u}_i^{(1)}$ als Linearkombination der N nominalen Moden $\mathbf{u}_k^{(0)}$ dargestellt, da sowohl die nominalen Moden wie auch die verstimmten Moden eine vollständige Vektorenbasis bilden:

$$\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(0)} \mathbf{C} \quad \text{oder} \quad \mathbf{u}_i^{(1)} = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}_k^{(0)} C_{ki} \quad (2.30)$$

Die Terme C_{ki} bilden die Anteile des k -ten nominalen Eigenvektors am i -ten verstimmten Eigenvektor. Im Allgemeinen ist die Matrix \mathbf{C} keine Diagonalmatrix. Sie bildet die Rotations- und Transformationsmatrix der Eigenvektoren zwischen beiden Basen. Dementsprechend enthält der Beteiligungsvektor C_i in der folgenden Gleichung die Komponenten aller nominalen Moden im i -ten verstimmten Eigenvektor. Wird eine Massennormierung vorausgesetzt und darüber hinaus $\Delta \mathbf{K}$ und $\Delta \mathbf{M}$ als die Variationen der Steifigkeits- und Massenmatrix:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)} + \Delta \mathbf{K} \quad \text{und} \quad \mathbf{M}^{(1)} = \mathbf{M}^{(0)} + \Delta \mathbf{M} \quad (2.31)$$

so liefert das folgende gestörte Eigenwertproblem:

$$(\mathbf{\Lambda}^{(0)} + \Delta \hat{\mathbf{K}}) C_i = \lambda_i (\mathbf{I} + \Delta \hat{\mathbf{M}}) C_i \quad (2.32)$$

die verstimmten Eigenwerte λ_i sowie die Beteiligungsvektoren C_i . Die diagonale Spektralmatrix $\mathbf{\Lambda}^{(0)} = \text{diag}[\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}]$ enthält die Eigenwerte in der nominalen Kon-

figuration. Die Variationen der modalen Steifigkeits- und Massenmatrizen sind hierbei folgendermaßen definiert:

$$\Delta \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{U}^{(0)\top} \Delta \mathbf{K} \mathbf{U}^{(0)} \quad \text{und} \quad \Delta \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^{(0)\top} \Delta \mathbf{M} \mathbf{U}^{(0)} \quad (2.33)$$

Zur Berechnung der Beteiligungsmatrix wird in Gl. 2.30 die gesamte Basis nominaler Moden verwendet. Dies ist für komplexe Strukturen mit einem großen Aufwand verbunden. YANG UND GRIFFIN [83] zeigen, dass unter der Voraussetzung, dass sich die Systemeigenschaften lediglich geringfügig ändern, nur wenige nominale Moden für die Berechnung der Matrix benötigt werden. Das Reduktionsverfahren, *Subset of Nominal Modes* (SNM) genannt, beschreibt die verstimmteten Eigenformen als eine Linearkombination eines begrenzten Satz von nominalen Moden innerhalb eines Frequenzbereichs. Aufgrund der Vernachlässigung weit entfernter Moden steigt deren Fehlerbeitrag umgekehrt proportional zu ihrem Frequenzabstand. Die Genauigkeit der Reduktionsmethode konvergiert schnell mit zunehmender Anzahl von Basisvektoren.

Im Falle der Schaufelkränze befindet sich der größte Teil der beteiligten Moden in einem Frequenzbereich von $\pm 5\%$ um die nominale Eigenfrequenz des unverstimmteten Systems herum. Es ist zumeist völlig ausreichend, in Gl. 2.30 etwa doppelt so viele Basisvektoren wie Schaufeln zu verwenden. Die Reduktionsmethode bietet den zusätzlichen Vorteil, statistischen Analysen der Verstimmungen zu erlauben. Sie bietet sich für die Berechnung von Schaufelkränzen an, da beschauelte Scheiben alle Moden einer Schwingungsfamilie isoliert in einem engen Frequenzbereich aufweisen.

Das *Fundamental Mistuning Model* (FMM) Verfahren von FEINER UND GRIFFIN [34] erweitert das zuvor vorgestellte Verfahren und ist für die Berechnung der verstimmteten Schaufelkränze geeignet. Die Voraussetzung für die Anwendung dieser weiteren Reduktionsmethode ist die Verwendung von Moden aus derselben Schwingungsfamilie für die nominale Basis (z.B. alle Moden der ersten Schaufelbiegung). Die verstimmteten Moden lassen sich anhand der nominalen Frequenzen der einzelnen Schaufeln und deren Abweichungen beschreiben.

2.4.5.1 Größe der modalen Basis und Annäherungsverfahren

Im Unterschied zur Eigenwertsensitivität hängt die Eigenvektorsensitivität von allen anderen Eigenvektoren und Eigenwerten ab. Der große Nachteil ist der Mangel an Genauigkeit, wenn ein unvollständiger Satz von Basisvektoren in Gl. 2.30 und Gl. 2.28 verwendet wird. In der Praxis haben die diskretisierten Modelle eine hohe Anzahl von FHG und die Berücksichtigung aller Basisvektoren (es gibt so viele Vektoren wie FHG) ist numerisch nicht praktikabel.

NELSON [63] umging dieses Genauigkeitsproblem und lieferte die exakte Sensitivität eines Eigenvektors mit einer auf die wichtigsten Anteile reduzierten Basis. Bei diesem Verfahren wird die ursprünglich nicht vollrangige $N \times N$ Matrix des Eigenwertproblems in

eine vollrangige $(N - 1) \times (N - 1)$ Matrix umgeschrieben. Die Sensitivität des relevanten Eigenvektors kann somit exakt berechnet werden. Dieses Verfahren war ein deutlicher Fortschritt und reduziert den Rechenaufwand, da es die Berechnung der vollständigen modalen Basis nicht mehr voraussetzt.

Das *Iterative Modal Method* (IMM) Verfahren von HIGH [69] bestimmt die Sensitivität der Eigenvektoren mit noch weniger Rechenaufwand als das Verfahren von NELSON. Die Ableitungen werden mit Hilfe von kleinen Variationen eines Parameters p abgeschätzt:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} \approx \frac{\Delta \lambda_i}{\Delta p} \quad \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial p} \approx \frac{\Delta \mathbf{u}_i}{\Delta p} \quad (2.34)$$

Mit dem gleichen Ansatz wie in Gl. 2.30 werden die verstimmteten Eigenvektoren als Linearkombinationen der nominalen Eigenvektoren dargestellt. Die von HIGH definierte Matrix \mathbf{X} der Koeffizienten ist direkt in Verbindung mit der Beteiligungsmatrix:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{(0)} \mathbf{X} \quad \mathbf{X} = \mathbf{C} - \mathbf{I} \quad (2.35)$$

wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix ist. Unter Vernachlässigung der höheren Terme liefert die Störung des originalen Eigenwertproblems in Übereinstimmung mit [37] die Eigenvektordifferenzen:

$$\mathbf{K}^{(0)} \Delta \mathbf{U} = \mathbf{M}^{(0)} \Delta \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{(0)} + \underbrace{\mathbf{M}^{(0)} \mathbf{U}^{(0)} \Delta \mathbf{\Lambda} + \Delta \mathbf{M} \mathbf{U}^{(0)} \mathbf{\Lambda}^{(0)} - \Delta \mathbf{K} \mathbf{U}^{(0)}}_{\mathbf{F}} \quad (2.36)$$

Mit der folgenden Definition der Matrix \mathbf{D} in Termen der modalen Steifigkeits- und Massenmatrizen aus Gl. 2.33:

$$\mathbf{D} = \Delta \hat{\mathbf{K}} - \Delta \hat{\mathbf{M}} \mathbf{\Lambda}^{(0)} \quad (2.37)$$

werden die Variationen der Eigenwerte $\Delta \mathbf{\Lambda}$ auf der Diagonale ausgelesen. Die Terme außerhalb der Hauptdiagonale werden für die Berechnung der Matrix \mathbf{X} verwendet:

$$\Delta \lambda_i = D_{ii} \quad (2.38)$$

$$X_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \Delta \hat{M}_{ii} & (i = j) \\ \frac{D_{ij}}{\lambda_j - \lambda_i} & (i \neq j) \end{cases} \quad (2.39)$$

Die Berechnung von Gl. 2.36 unter Verwendung einer reduzierten modalen Basis \mathbf{U}^* ist fehlerhaft. Wird sie jedoch als Anfangslösung in die Gleichung ($\mathbf{U}^{(0)} \stackrel{!}{=} \mathbf{U}^*$) eingesetzt, kann das gestörte Eigenwertproblem iterativ gelöst werden:

$$\Delta \mathbf{U}^{(i+1)} = \mathbf{K}^{(0)-1} \left(\mathbf{M}^{(0)} \Delta \mathbf{U}^{(i)} \mathbf{\Lambda}^0 + \mathbf{F} \right) \quad (2.40)$$

Bei jeder Iteration muss die Eigenvektordifferenz $\Delta \mathbf{U}^{(i)}$ mit einem Skalierungsfaktor κ_i multipliziert werden, damit die Eigenvektoren eine neue Normierung erhalten:

$$\kappa_i = - \frac{\mathbf{u}_i^{(0)\top} \Delta \mathbf{M} \mathbf{u}_i^{(0)}}{2 \mathbf{u}_i^{(0)\top} \mathbf{M}^{(0)} \Delta \mathbf{u}_i} \quad (2.41)$$

Der Vorteil dieses iterativen Verfahrens liegt in der Nutzung der von FOX UND KAPOOR entwickelten Technik, womit eine hohe Genauigkeit erzielt wird, obwohl nur eine reduzierte modale Basis zur Anwendung kommt. Sie stellt damit eine gute Alternative zum Verfahren von NELSON für komplexe Modelle dar. ELFRED, LERNER UND ANDERON [31] erweitern das Normierungsverfahren durch die Anpassung der Skalierungsfaktoren κ_i mit einem Polynom zweiten Grades. Die Annäherungsgenauigkeit wird dadurch deutlich erhöht.

2.4.6 Dämpfung

Die bisherigen Betrachtungen sind auf frei ungedämpfte Schwingungen beschränkt. Im Fall von gedämpften Schwingungen werden die Bewegungsgleichungen mit Dämpfungstermen erweitert und die Entkopplung der Gleichungen mit Hilfe des modalen Raums ist nur in speziellen Fällen möglich.

Die Diagonalisierung der Dämpfungsmatrix durch die Modaltransformation erfolgt unter der Annahme einer modalen Dämpfung. Sie beschreibt das Abklingen jeder einzelnen Eigenmode durch eine modale Dämpfungskraft, die proportional zur modalen Geschwindigkeit ist. Der Sonderfall einer RAYLEIGH-Dämpfung oder *proportionalen* Dämpfung liefert einen mathematischen Ansatz, bei dem die symmetrische Dämpfungsmatrix als Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix formuliert wird.

Ohne diese Voraussetzungen sind die Eigenvektoren und die Eigenwerte im Allgemeinen komplex. Der Einfluss einer nichtlinearen viskosen Dämpfung auf die modale Degeneration untersucht ADHIKARI [6, 7]. Die Berechnung der Eigenvektorenableitungen ohne Berücksichtigung der Dämpfung kann zu falschen Ergebnissen führen, obwohl die Moden hohe Güten aufweisen. Das gleiche Ersatzmodell mit zwei Freiheitsgraden in Abb. 2.8 kommt zur Anwendung und wird um ein Dämpferelement erweitert. Bei der Parameteruntersuchung wird die Degeneration der Moden durch dieses zusätzliche Dämpfer-

element stark vermindert. FRISWELL UND ADHIKARI [38] erweitern das zuvor erwähnte Verfahren von NELSON [63] auf dynamische Problemen mit nichtlinearer Dämpfung, um die Eigenvektorsensitivitäten anhand einer reduzierten modalen Basis zu bestimmen.

2.4.7 Zusammenfassung

Die Verstimmung dynamischer Systeme wird hauptsächlich im Bereich von Turbomaschinen untersucht. Die Verstimmung einer periodischen Struktur führt zu einer Lokalisierung der Schwingungsformen. Die Erregung solcher Strukturen kann zu einer lokalen Überhöhung der modalen Antwort und der dynamischen Belastung führen. Im Unterschied dazu wird die Degeneration bei Ultraschallwerkzeugen dazu verwendet, torsionale Bewegungen mit longitudinalen Schwingkomponenten zu generieren. Die gewünschte Betriebsmode ist dadurch verzerrt und ihre Verformung ist nicht mehr ausschließlich longitudinal. Diese Verzerrung kann wiederum problematisch werden, wenn sie nicht erwünscht ist. In Abschnitt 3.2 wird die modale Degeneration im Rahmen eines Beispiels bei einer Ultraschallsonotrode nachgewiesen.

Das Kapitel stellt unterschiedliche Verfahren zur Abschätzung der modalen Größen der Verstimmten Struktur in Abhängigkeit von den Eigenschaften der nominalen Struktur bei vorhandener innerer Kopplung vor. Mechanische Systeme mit konservativer Kopplung weisen nur eine geometrische Instabilität auf. Die Eigenwertortskurven können sich nur abstoßen und ihr Verhalten kann analytisch mit Hilfe der Störungsrechnung oder der Ableitung des Eigenwertproblems gut beschrieben werden. Der Degenerationseffekt der Moden ist bei maximaler Krümmung der Eigenwertortskurven am stärksten ausgeprägt.

Da die Eigenvektoren eine Basis bilden, wird die Sensitivität eines Eigenvektors in Richtung aller anderen Eigenvektoren bestimmt. Die Eigenvektoren der verstimmten Struktur lassen sich auf diese Weise als eine gewichtete Summe der Eigenvektoren des ungestörten Systems darstellen. Zur Bestimmung jedes Koeffizienten dieser Linearkombination wird die modale Kopplung mit dem Eigenwertabstand ins Verhältnis gesetzt.

Wird eine reduzierte Modalmatrix oder eine verringerte Anzahl von Basisvektoren für die Linearkombination verwendet, ist aus Genauigkeitsgründen ein iteratives Vorgehen notwendig. Für zyklische Strukturen kann die Lokalisierung jedoch oft zwischen Moden der gleichen Familie beschrieben werden und der komplette Satz von Eigenmoden ist nicht notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit kommt das SNM Reduktionsverfahren zur Anwendung. Dabei werden die degenerierten Eigenformen der Ultraschallsonotroden aufgrund der Verstimmung der Materialeigenschaften in einer reduzierten Basis von nominalen Moden beschrieben.

2.5 Kriterien zur Beurteilung der modalen Degeneration

Das vorliegende Kapitel fasst die verschiedenen für die modale Degeneration und die Frequenzabdringung verantwortlichen Einflussfaktoren zusammen. Ein besonders auffälliges Merkmal ist die Kurvenkrümmung, die anhand der zweiten Ableitung der Eigenwerte berechenbar ist. LIU [58] schlägt Grenzwerte bezüglich dieser Kurvenkrümmung vor, um die Anfälligkeit einer Mode zur Degeneration zu ermitteln. PERKINS UND MOTE [66] definieren einen qualitativen Kopplungsfaktor zwischen den Eigenvektoren. Der ausführlichste Beitrag aus jüngerer Zeit ist die Arbeit von DU BOIS, ADHIKARI UND LIEVEN [29], wo verschiedene Kriterien eingeführt werden, anhand der die Frequenzabdringung quantitativ erfasst werden soll.

2.5.1 Matrix der modalen Kopplungen

Basierend auf einer Erweiterung des Kopplungsfaktors von PERKINS UND MOTE [66], führen DU BOIS ET AL. [29] eine Matrix von modalen Kopplungen zwischen den Eigenvektoren ein. Diese Matrix Σ enthält die von PIERRE [67] definierten modalen Kopplungen zwischen allen Eigenvektoren der modalen Basis als Funktion der Verstimmung:

$$\Sigma = \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{U} \Lambda \quad (2.42)$$

Im Gegensatz zu Gl. 2.37 wird die Matrix Σ für eine infinitesimale Änderung eines Parameters p geschrieben. Ihre Diagonalterme beinhalten die Eigenwertsensitivitäten und die Terme außerhalb der Diagonalen bilden die modalen Kopplungsfaktoren (engl. *cross-sensitivity coupling factors*). Das Gitter beschreibt eine Palette von Wechselwirkungen und bewertet die Beteiligung der jeweiligen Moden an ihren Sensitivitäten. Der Kopplungsterm zwischen zwei Moden wird durch die Symmetrieeigenschaften der beiden Moden beeinflusst [66]. Nur im Sonderfall bei dem die modale Kopplung Null ist, findet keine Interaktion zwischen diesen beiden Moden statt. In der Praxis werden die Bedingungen (ideale Geometrie und ideal homogenes Grundmaterial) für einen Schnittpunkt der Frequenzkurven nie exakt getroffen [14].

2.5.2 Rotation der Eigenvektoren

Liegen zwei Eigenwerte λ_k und λ_j eng beieinander, so dominiert der Summand ($k = j$) in der Gleichung der Eigenvektorsensitivität aus Gl. 2.28. Daraus folgt, dass beide transformierten Eigenvektoren \mathbf{u}_k und \mathbf{u}_j immer als Linearkombination eines einzigen Vektorpaares darstellbar sind. Die beiden Eigenvektoren definieren einen *Untervektorraum* bzw. eine Ebene, in welcher sie immer bleiben und in der sie in Abhängigkeit von dem Parameter p rotieren.

Aufgrund ihrer Normierung bezüglich einer konstanten festgelegten Matrix ist ihre Orientierung und ihr Betrag durch einen einzigen Winkel bezüglich eines Referenzeigenvektorpaars eindeutig definiert. Die reduzierten modalen Basen mit den beiden Eigenvektoren verknüpfen die aus zwei festgelegten Werten $p^{(1)}$ und $p^{(2)}$ des Parameters p definierten Zustände mit einer zweidimensionalen rotativen Transformation:

$$\mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(1)}\mathbf{T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Beziehen sich die beiden Zustände jeweils auf die nominale bzw. die verstimmte Konfiguration in Gl. 2.30, so entspricht \mathbf{T} der Beteiligungsmatrix \mathbf{C} zwischen den reduzierten Basen der beiden Eigenvektoren.

2.5.3 Cross Sensitivity Quotient (CSQ)

Für ein bestehendes System mit vorhandenem Abdrehungseffekt muss die Verstimmungsmenge nicht bekannt sein. Der Ursprung für die Orientierung der drehenden modalen Basis bezüglich der nominalen Basis fehlt. DU BOIS ET AL. [29] haben aufgrund dessen die Referenz am Punkt ⁽¹⁾ festgelegt, bei dem die Abdrehung der Eigenwerte am stärksten ausgeprägt ist. Dieser Referenzpunkt befindet sich demnach am Punkt der vollständigen Degeneration, gemäß Gl. 2.18.

Das eingeführte Wechselwirkungsverhältnis *Cross Sensitivity Quotient* (CSQ) definiert die relative Position der modalen Basis in der Modeninteraktion, indem es die aktuelle modale Kopplung aus Gl. 2.42 zur maximalen modalen Kopplung ins Verhältnis setzt:

$$\text{CSQ}_{ij} = \cos^2(2\gamma) = \left(\frac{\Sigma_{ij}^{(2)}}{\Sigma_{ij}^{(1)}} \right)^2 \quad (2.44)$$

Für den Sonderfall einer konstanten Massenmatrix befindet sich der Referenzpunkt gleichzeitig beim minimalen Eigenwertabstand und bei der maximalen Krümmung der Eigenwertkurven. Die zugehörigen Eigenvektoren gelten als Referenzsatz und jedes andere Eigenvektorpaar kann durch den Rotationswinkel γ referenziert werden. Wie in Abb. 2.13a dargestellt, nimmt der CSQ ab und tendiert gegen Null, je mehr sich der Parameter p vom Abdrehungsbereich entfernt. Daraus folgt, dass der Rotationswinkel γ zwischen -45° und $+45^\circ$ variieren kann und somit den Grad der modalen Degeneration für einen bestimmten Parameter p angibt.

2.5.4 Modal Dependence Factor (MDF)

In [29] wird ein weiteres Kriterium eingeführt, das die modale Interaktion auf die anderen Moden erweitert. Indem die l^2 -Normen der Eigenvektorsensitivitäten im zweidimensionalen Fall zum allgemeinen Fall ins Verhältnis gesetzt werden, erhält man den Faktor der modalen Abhängigkeiten *Modal Dependence Factor* (MDF):

$$\text{MDF}_{ij} = \cos \delta_i = \frac{\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{u}_i\right)^2 + \left(\frac{\Sigma_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}\right)^2}{\left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \mathbf{u}_i\right)^2 + \sum_{k \neq i}^N \left(\frac{\Sigma_{ik}}{\lambda_i - \lambda_k}\right)^2} \quad (2.45)$$

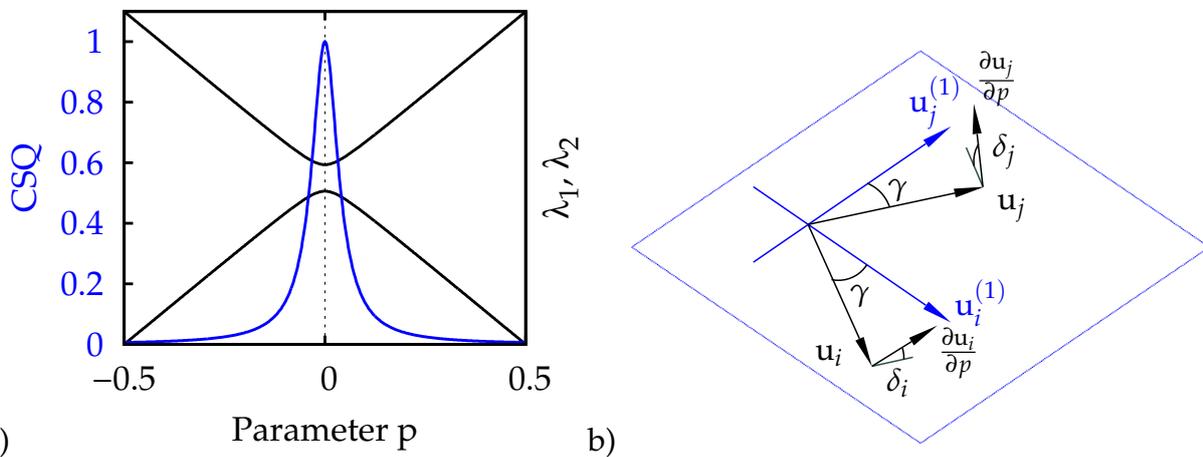


Abb. 2.13: Darstellung der Bewertungskriterien aus [29]: (a) Cross-Sensitivity Quotient (CSQ) und (b) Modal Dependence Factor (MDF).

Die modalen Kopplungen Σ_{ij} sind Gl. 2.42 entnommen. Findet die modale Interaktion mit weiteren Moden statt, bleibt das Eigenvektorpaar nicht mehr in seinem Untervektorraum, siehe Gl. 2.43. Der Winkel δ_i in Abb. 2.13b zwischen der Ebene $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ und der Eigenvektorableitung $\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial p}$ bewertet den Anteil der j -ten Mode in der Ableitung des i -ten Eigenvektors. Im Gegensatz zur Matrix der CSQ-Faktoren, ist die MDF-Matrix nicht symmetrisch. Die Terme auf der i -ten Reihe dienen als Verteilung der Sensitivität über den Satz von Eigenvektoren. Beträgt der Faktor $\text{MDF}_{ij} = 1$, wechselt die i -te Mode ihre Eigenschaften ausschließlich mit der j -ten Mode.

Werden die CSQ- und die MDF-Faktoren für zwei Moden i und j kombiniert, erhält man den in [29] definierten *Veering Index* (VI) für die globale Interaktion zwischen den beiden Moden. Die Rotation der Eigenvektoren ist somit eindeutig beschrieben.

$$\text{VI}_{ij} = \text{MDF}_{ij} \times \text{CSQ}_{ij} \times \text{MDF}_{ji} \quad (2.46)$$

2.6 Sonotrodenmaterial

In Strukturen mit großen Abmessungen, wie beispielsweise in langen Ultraschallschwingern oder Schaufelkränzen sind immer statistische Unregelmäßigkeiten der Materialeigenschaften aufgrund der Heterogenität des Materials vorhanden. In diesem Abschnitt werden das Herstellungsverfahren sowie einige Eigenschaften der Titan-Legierung TiAl6V4 vorgestellt, aus der die meisten Sonotroden produziert werden. Für die Fertigung von Block- und Messersonotroden wird oft Rohmaterial in der Form von gewalzten Platten verwendet. Diese können bis ca. 1.5 m lang und breit und bis ca. 120 mm dick sein.

Die Titan-Legierung TiAl6V4 ist ein silberweißes, gut dehnbares und schmiedbares Metall, das sich leicht zu Blechen, Platten und Rohren walzen lässt. Das Material wird in einem breiten Anwendungsbereich eingesetzt, z.B. für Bauteile für die Luft- und Raumfahrt, für medizinische Anwendungen und in der chemischen Industrie. Vorteile liegen in der hohen mechanischen Festigkeit, der guten Umformbarkeit und der biologischen Kompatibilität. Titanlegierungen zählen aufgrund ihrer geringen Dichte (4400 kg/m^3) zu den Leichtmetallen. TiAl6V4 weist zwei Kristallstrukturen auf (siehe ABKOWITZ [5]): α -Ti liegt als hexagonal dichteste Kugelpackung vor und geht bei einer Temperatur von 882°C in β -Ti über, das eine kubisch raumzentrierte Kristallstruktur besitzt.

2.6.1 Herstellungsverfahren Walzen

In der industriellen Produktion werden die Titan-Platten und Stangen in Warm- und Kaltwalzwerken umgeformt, um die notwendigen Dickenreduzierung und die gewünschte Form zu erzielen. Das Walzen bezeichnet die Querschnittsreduzierung durch die von Walzrollen eingeleiteten Druckkräfte. Findet die Umformung oberhalb der Rekristallisationstemperatur des Werkstoffs statt, wird sie Warmwalzen genannt, sonst Kaltwalzen [3]. Die meistens gewalzten Titan-Platten werden mit dem Warmwalzverfahren produziert.

Da Titan eine vergleichsweise geringe Wärmeleitfähigkeit aufweist, verursacht eine schnelle Abkühlung der peripheren Schichten einen Verlust der Plastizität der Fasern und eine signifikante Ungleichmäßigkeit der Querschnittsverformung des gewalzten Blechs. Da es schwer ist, zuverlässige Informationen über die Orientierung und Gleichmäßigkeit der Materialeigenschaften von Titan zu finden, stammen die meisten Hinweise aus Internetrecherchen bzw. von Webseiten. Beispielhaft sei hier die Homepage von Electrovek Steel [1] genannt. Laut ZHU ET AL. [85] kann das Gefüge in gewalzten Titan-Blechen und Platten zu stark anisotropen mechanischen Eigenschaften führen und auch die Dauerfestigkeit negativ beeinflussen.

2.6.2 Schallgeschwindigkeit

Gemäß KNEZEVIC ET AL. [52] können die elastischen Eigenschaften der TiAl6V4-Platten in guter Näherung mit einem linearen elastischen orthotropen Modell beschrieben werden. Die longitudinalen Schallgeschwindigkeiten in alle drei Richtungen hängen von der Dichte, den E-Moduli in der Messrichtung und den drei Querkontraktionszahlen ab ¹. Typische Werte für TiAl6V4 liegen zwischen 6050 und 6250 m/s.

Trotz der komplexen Beziehung zwischen den orthotropen Materialdaten und der Schallgeschwindigkeit ist die Messung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit ein gutes Hilfsmittel, um die Homogenität des Materials zu bewerten. Bei Herrmann Ultraschall wird die longitudinale Schallgeschwindigkeit in der Walzrichtung vor der Fertigung der Sonotroden gemessen. Dadurch kann die Homogenität der Materialeigenschaften innerhalb des Probestücks überprüft werden. Gleichzeitig erlaubt die Kenntnis des genauen Wertes für die Schallgeschwindigkeit eine Abschätzung der zu einer gegebenen Betriebsfrequenz gehörenden Wellenlänge. Da die Frequenz der longitudinalen Betriebsmode mit zunehmender Schallgeschwindigkeit steigt, muss die Sonotrodengeometrie dementsprechend angepasst werden (Länge, Schlitzverbreiterung, Knotenmaß, ...), um die Abweichung ggf. zu kompensieren.

2.6.3 Simulation von zufälligen Materialheterogenitäten

Seit dem Jahr 1971 beschäftigen sich SHINOZUKA ET AL. mit der Modellierung der Anregung von Strukturen mit zufälligen Eigenschaften. Das Wellenausbreitungsproblem in Medien mit einer statistischen räumlichen Verteilung der mechanischen Eigenschaften ist sehr schwer analytisch zu lösen. Das einzige bekannte praktische Vorgehen ist die Anwendung der computerunterstützten Monte-Carlo Simulationen in der FE-Methode. Mit dieser Methode werden sehr häufig virtuelle Zufallsexperimente dargestellt, um Probleme numerisch zu lösen.

Die Publikationen von SHINOZUKA [76, 75] beschreiben einen zeitlichen Zufallprozess durch eine Serie von Cosinus Funktionen mit zufälligen Frequenzen. In ASTILL, IMOSS-EIR UND SHINOZUKA [15] wird die Methode für ein zweidimensionales Zufallsfeld im Raum erweitert. Das Monte-Carlo Verfahren wird für die Simulation von im Raum verteilten zufälligen Materialparametern bei einem Zylinder angewandt.

In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode für die Erzeugung zufälliger statistischer Schwankungen eines Materialparameters entlang einer Richtung x genutzt (z.B. E-Modul, Dichte, Querkontraktionszahl, ...). Der folgende Ansatz beschreibt den E-Modul:

¹Die Berechnung der Schallgeschwindigkeiten im orthotropen Medium ist in Abschnitt 8.7 im Anhang erläutert.

$$E(x) = E_0 \left(1 + v(x) \right) \quad (2.47)$$

als Produkt eines konstanten Anteils E_0 und eines variablen Anteils. Die homogene Zufallsfunktion $v(x)$ lässt sich in [15] mit Hilfe von M zahlreichen Zufallsvariablen berechnen:

$$v(x) = \sigma \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{i=1}^M \cos(k_i x + \varphi_i) \quad (2.48)$$

- σ ist die statistische Standardabweichung des Zufallsprozesses.
- Die Zufallsvariablen k_i werden entsprechend der Dichtefunktion $g(k)$ in Abb. 2.14a zufällig generiert. Ein Generierungsverfahren von Zufallsvariablen nach einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wird in [42] vorgestellt. Dabei wird k_m aus einem sogenannten Korrelationsabstand hergeleitet, der für die Simulation empirisch festgelegt wird.
- Die Zufallsvariablen φ_i werden basierend auf einer gleichverteilten Dichte $\frac{1}{2\pi}$ zwischen 0 und 2π zufällig generiert, siehe Abb. 2.14b.

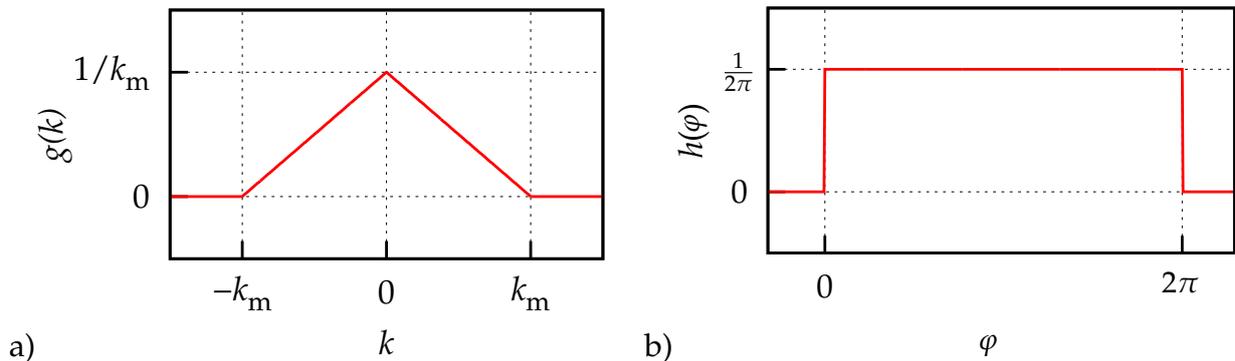


Abb. 2.14: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $g(k)$ und $h(\varphi)$ der Zufallsvariablen k_i und φ_i .

3 Aufgabenstellung

3.1 Analyse des Standes der Technik

In der Fachliteratur wurden zahlreiche Veröffentlichungen über modale Interaktionen bei Ultraschallschwingern gefunden. Mögliche Konsequenzen einer schlechten Auslegung, wie Lärmentwicklung und Versagen der Schwingkomponenten, sind dort explizit beschrieben. Zur Bewertung wird die Gleichmäßigkeit der Schwingungsamplitude (in Betrag und Phase) an der Schweißfläche betrachtet, wenn das Schwinggebilde in seiner longitudinalen Betriebsmode angeregt wird. Die Verteilung der Schwingungsamplitude entlang der Fläche ist ein Bewertungskriterium für die Schwingeeigenschaften des Werkzeugs. Eine Abweichung von mehr als 20% wird als kritisch eingestuft. Im Rahmen dieser Arbeit werden die in der Literatur erwähnten modale Interaktionen in drei Hauptkategorien unterteilt, die ein breites Spektrum der bekannten Effekte abdecken:

- Der erste Typ von Interaktion wird von den parasitären **Nachbarmoden** verursacht, deren Frequenzabstände zur Betriebsmode gering sind. Ihre Antworten überlagern sich in der Gesamtantwort des Systems.
- Die zweite Kategorie betrifft die Anregung von **internen Moden**. Die modale Interaktion tritt auf, wenn ungünstige Beziehungen (Mehrfache oder Summe) zwischen der Erregerfrequenz und den Eigenfrequenzen von tieffrequenten Moden vorhanden sind.
- Bei der **modalen Degeneration** ändern sich die Eigenformen. Die Entstehung dieser modalen Interaktion ist unabhängig von der Anregung und geht mit einer Abdriftung der Eigenfrequenzen einher.

3.1.1 Nachbarmoden, Modale Überlagerung

Für einen zuverlässigen Betrieb einer Sonotrode ist es notwendig, dass die longitudinale Arbeitsmode von anderen Moden isoliert ist. Ist der Frequenzabstand zu gering, wird er üblicherweise mit einer geometrischen Anpassung vergrößert. Dadurch ergibt sich eine gleichmäßigere Amplitudenverteilung und eine bessere Schweißqualität. Die Beteiligung der anderen Moden in der Gesamtantwort wird mit den modalen Koordinaten beschrie-

ben¹. Im modalen Raum werden die zur modalen Kraftamplitude proportionale Antworten mit Vergrößerungsfunktionen gewichtet, die die Verhältnisse zwischen der Erregerfrequenz und den Eigenfrequenzen und die Dämpfungsfaktoren bzw. die mechanischen Güten enthalten. Die Entstehung der modalen Überlagerung wird bei Ultraschallwerkzeugen dadurch begünstigt, dass die harmonische Anregung in der Regel außerhalb der Resonanzfrequenz erfolgt, so dass die Antwort der gewünschten Mode nicht in allen Fällen deutlich überwiegt.

3.1.2 Interne Moden, Kombinationsresonanzen

Bei diesem zweiten Typ ist eine unerwünschte Kopplung der Betriebsmode mit tieferen Moden vorhanden. Die Konsequenzen sind zum Beispiel Lärmentwicklung oder parasitäre Querschwingungen, die zu Komponentenversagen führen können. Die Interaktionen mit den tieffrequenten Moden sind sehr schwer in der Auslegungsphase zu berücksichtigen, da sie auf nichtlineares Verhalten zurückzuführen sind. Mit den folgenden Maßnahmen können die unerwünschten nichtlinearen Effekte in der Praxis aber reduziert werden: Verkleinern der modale Dichte (Anzahl der Moden) unterhalb der Erregerfrequenz und Anpassung der Komponenten des Wandlers.

3.1.3 Modale Degeneration und Frequenzabdrrehung

Die modale Degeneration ist ein weiterer Typ von modaler Interaktion, der in der Literatur erwähnt wird und unabhängig vom Frequenzbereich auftreten kann. Von modaler Degeneration spricht man, wenn die Moden ihre zugehörigen Eigenvektoren mit anderen tauschen. Sie ist nicht mit der Anregung verbunden, sondern betrifft direkt die modalen Eigenschaften der Struktur. Eine modale Degeneration bei Ultraschallwerkzeugen wird im derzeitigen Stand der Technik nur sehr selten erwähnt (siehe Abschnitt 2.3.5), obwohl sie sich in der gemessenen Antwort ähnlich auswirkt, wie die beiden zuvor genannten Interaktionstypen. In diesen Fällen verliert die longitudinale Mode ihre gleichmäßige Auslenkung und ist für die Ultraschallanwendung nicht mehr geeignet. Der zugehörige Effekt geht zwar immer mit einer Frequenzverschiebung der Eigenfrequenzen einher, dieser ist allerdings im Vergleich zur Verzerrung der Schwingungsform zu vernachlässigen.

Die Verzerrung der Eigenformen und die Frequenzabdrrehung wurden jedoch in manchen Veröffentlichungen erwähnt. DERKS [27] beschreibt die typischen problematischen Abmessungen von Sonotroden, die sich mit der Erfahrung von Ultraschallherstellern decken. So ist zum Beispiel die Längsmode von 20 kHz von Blocksonotroden bei Breiten zwischen 130 und 150 mm nicht mehr isoliert anregbar. Eine Kopplung der Querschwin-

¹Die Antwort eines Systems auf eine lineare Fremderregung wird mit Gl. 8.12 im Anhang ausführlich beschrieben.

gung mit der Längsschwingung findet statt, wie auch bei einigen geometrischen Sonderverhältnissen von Rundsonotroden.

Der dünnwandige Ultraschallhohlzylinder mit konstanter Wandstärke der von LITTMANN [57] untersucht wurde, weist viele gekoppelte Schwingungsmoden auf. Zwei interagierende Moden besitzen dieselbe Anzahl von Schwingungsknoten, haben jedoch unterschiedliche Radial- und Axialanteile. Wird das geometrische Aspektverhältnis von Länge / Durchmesser variiert, verlaufen und stoßen sich die Frequenzen beider Moden in einem charakteristischen Schrägkreuz ab. Zwischen den asymptotischen Bereichen sind die Radial- und Axialanteile etwa gleich groß und die beiden Moden können nicht eindeutig zugeordnet werden und sind somit degeneriert.

3.1.4 Homogenität der Materialeigenschaften der Titan-Legierung

Die meisten Ultraschallkomponenten von Herrmann Ultraschall werden aus einer bestimmten Titan-Legierung hergestellt. Aus dem Stand der Technik ist bekannt, dass beim Herstellprozess von z.B. TiAl6V4-Platten eine starke Anisotropie der Materialeigenschaften verursacht werden kann. Bisher werden Sonotroden mittels der FE-Methode als eine homogene schwingende Struktur mit einer orthotropen Orientierung modelliert. Der Einfluss der Heterogenität bei den TiAl6V4-Platten auf die akustischen Eigenschaften wird derzeit nicht beachtet. Nun könnte aber die Inhomogenität der Materialeigenschaften zu einer Verstimmung der symmetrisch hergestellten Ultraschallwerkzeuge führen, die ihrerseits Ursache einer modalen Degeneration sein könnte. Deshalb soll hier systematisch untersucht werden, in welcher Weise sich Materialinhomogenitäten auf die Modenstruktur auswirken. Im nächsten Abschnitt wird es durch einen experimentellen Nachweis gezeigt, wie weit die modale Degeneration in der Praxis relevant ist.

3.2 Voruntersuchung und experimenteller Nachweis der modalen Degeneration (Pilotprojekt)

Bevor die Ziele der Arbeit definiert werden können, soll die bisher in der Literatur kaum untersuchte modale Degeneration an einem bestimmten System experimentell nachgewiesen und untersucht werden. Diese Art von modaler Interaktion bei Ultraschall-Schwingkomponenten in der Literatur bereits erwähnt, jedoch ausschließlich mit dem Ziel, damit eine zusätzliche torsionale Schwingrichtung mit einem Wandler vom Typ Langevin auszunutzen [11, 10, 4, 44]. In diesem Abschnitt wird eine völlig anders aufgebaute Sonotrode vorgestellt, die diese charakterische Wechselwirkung zwischen zwei Moden ebenfalls zeigt. Es wird nachgewiesen, dass modale Degeneration vorliegt und es sich nicht um eine Überlagerung der modalen Antworten und auch nicht um eine Resonanzkombination von internen Moden handelt. Dieses Kapitel dient dazu, die Grund-

hypothese dieser Arbeit zu veranschaulichen, nämlich dass die Modenkopplung für den Betrieb von Ultraschallwerkzeugen berücksichtigt werden muss.

Das Schwingverhalten einer 30 kHz-Messersonotrode wird ohne Wandler untersucht. Die für die Voruntersuchungen ausgewählte Sonotrode weist ein stark asymmetrisches Amplitudenprofil auf¹. Sonotroden mit identischer Geometrie sind bei Herrmann Ultraschall bereits seit langem in Produktion, ohne dass dabei vergleichbare Asymmetrien beobachtet wurden. Da sich das Schwingverhalten der ausgewählten Sonotrode drastisch von dem der anderen Sonotroden unterscheidet, ohne dass es dafür einen leicht ersichtlichen Grund gibt, erfolgt eine genauere Untersuchung der technischen Eigenschaften dieser speziellen Sonotrode (siehe Abb. 3.1a).

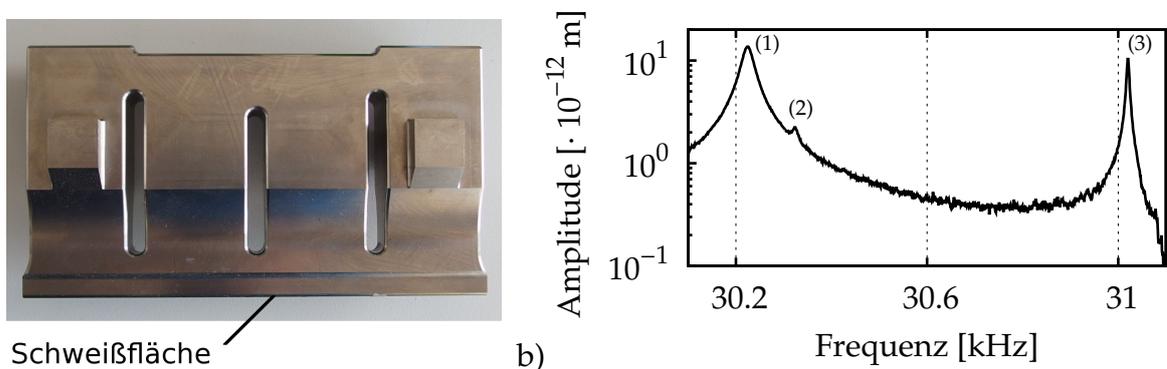


Abb. 3.1: (a) Die untersuchte 30 kHz-Messersonotrode weist eine Breite von 165 mm auf. (b) Frequenzganzmessung in der Mitte der Sonotrodenschweißfläche.

3.2.1 Eingangsmessung

Die Sonotrode wird mit Hilfe eines Piezostabs in der longitudinalen Richtung in der Nähe des Koppelgewindes (Mitte der Eingangsfläche) angeregt. Bei der niedrigen und multi-frequenten Anregungsspannung wird die Bewegungsantwort entlang einer Linie auf der Schweißfläche mit einem Laser-Doppler-Vibrometer (LDV) gemessen. Der in Abb. 3.1b dargestellte Frequenzgang zeigt am Mittenpunkt der Schweißfläche zwei signifikante Resonanzen im untersuchten Frequenzbereich bei 30.2 kHz und 31 kHz.

Die Messung der Amplituden- und Phasenantworten erfolgt bei den ersten beiden Resonanzen (Abb. 3.2). Die zusätzliche Mode bei 30.3 kHz gehört zu einer Schwingung in einer Ebene senkrecht zur Anregungsrichtung. Da ihre modale Beteiligung im Vergleich zu der der beiden anderen Moden vernachlässigbar ist, wird sie im Rahmen der folgenden Analyse nicht berücksichtigt.

¹Das Amplitudenprofil wird später in Abb. 3.2a beschrieben

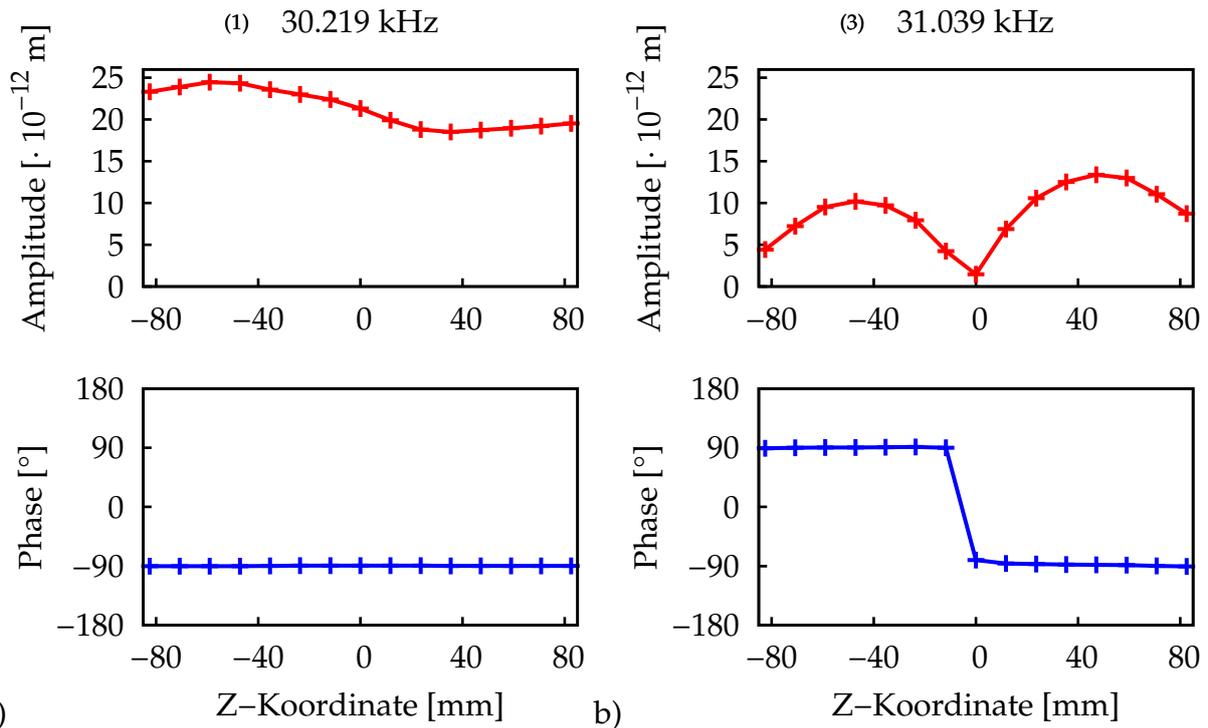


Abb. 3.2: Amplituden- und Phasenantwort in den beiden Hauptresonanzen: (a) 30219 Hz und (b) 31039 Hz.

3.2.2 FE-Simulation

Die Modalanalyse im FE-Programm Ansys liefert die beiden Eigenformen in Abb. 3.3. Die Schwingungsformen in beiden Resonanzen lassen sich mit Hilfe der Amplituden- und Phasenverläufe zuordnen. Die bei 30.2 kHz gemessene Mode entspricht der longitudinalen Betriebsmode mit einer symmetrischen Auslenkung in Schwingungsrichtung. Die Mode mit der Frequenz um 31 kHz entspricht einer Scheibenmode, da ihre Auslenkung hauptsächlich in der Ebene erfolgt. Zusätzlich ist diese Auslenkung antisymmetrisch bezüglich der longitudinalen Richtung.

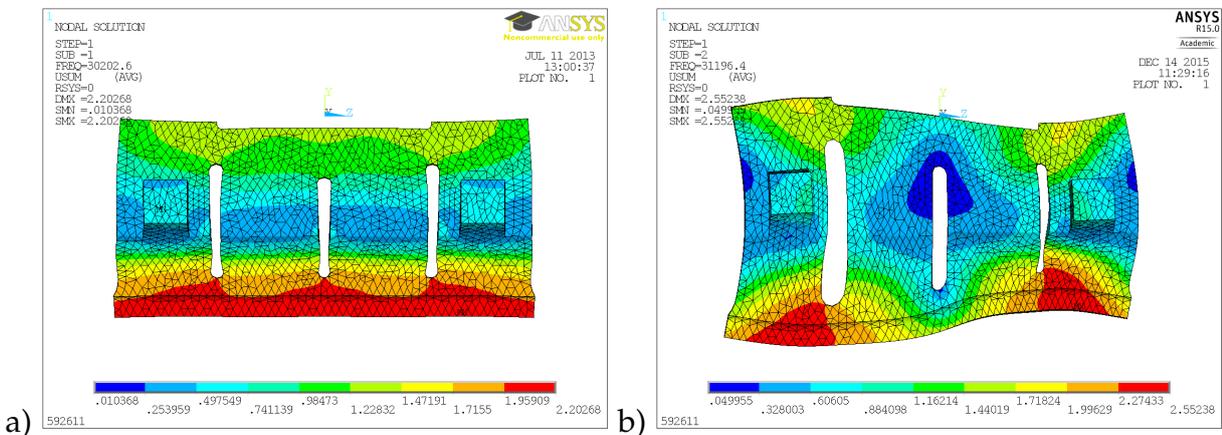


Abb. 3.3: Die Modalanalyse liefert (a) Mode 1 bei 30203 Hz und (b) Mode 2 bei 31196 Hz.

Das in der ersten Resonanz bei 30.2 kHz gemessene, ungleichmäßige Amplitudenprofil stimmt nicht vollständig mit den Ergebnissen aus der Simulation überein. Der asymmetrische Anteil der Auslenkung lässt sich nicht als Überlagerung der beiden modalen Antworten erklären. Dazu ist der Frequenzabstand (ca. 800 Hz) zu groß und die Güten der Moden sind zu hoch, siehe Abb. 3.1b. Darüber hinaus weisen die Messpunkte entlang der Schweißfläche keinen Phasenversatz zueinander auf. Diese beiden Sachverhalte deuten darauf hin, dass die in der ersten Resonanz gemessene Antwort nahezu der Eigenform der Betriebsmode entspricht.

Allerdings wurden in der Simulation homogene Materialeigenschaften vorausgesetzt. Es wurde eine Messung der Schallgeschwindigkeit in Auslenkungsrichtung durchgeführt. Dabei zeigten sich signifikante Unterschiede entlang der Sonotrodenbreite von 6116 m/s bis hin zu 6193 m/s (1.2% Abweichung). Um zu überprüfen, ob diese Materialinhomogenität die Ursache einer modalen Degeneration sein könnte, wurde gezielt eine Ortsabhängigkeit der Materialeigenschaften in die Simulation eingebracht, und das Amplitudenprofil der Längsmode berechnet. Das E-Modul wird dazu linear entlang der Sonotrodenbreite verändert. Das Maximum der Verstimmung α wird jeweils an den äußeren Begrenzungen der Sonotrode erreicht und wird schrittweise von 0 bis 10% hochskaliert.

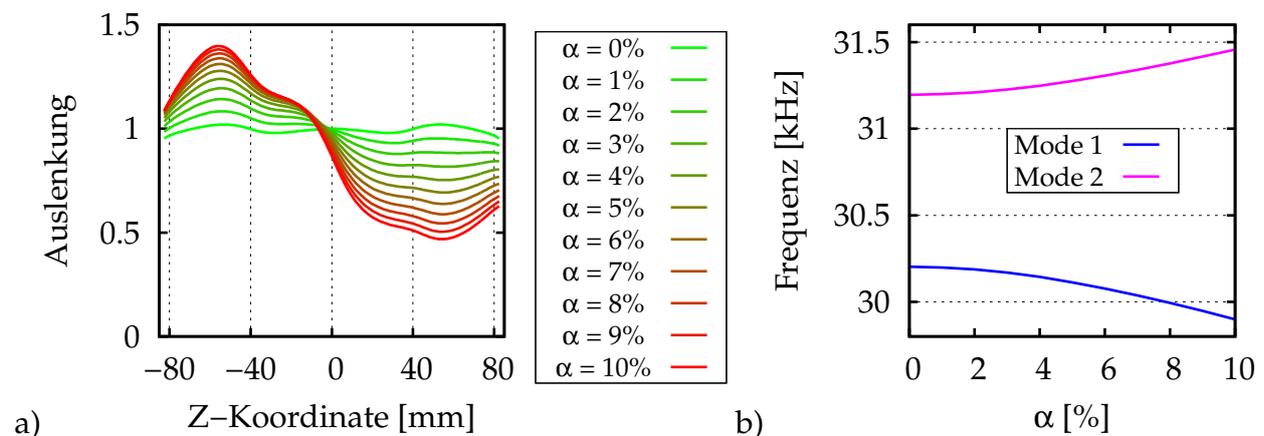


Abb. 3.4: Ergebnis der Modalanalysen mit zunehmender Verstimmung des E-Moduls: (a) Amplitudenprofil der ersten Eigenform entlang der Schweißfläche, (b) Eigenfrequenzen über dem Verstimmungsbetrag.

Mit zunehmendem Verstimmungsbetrag α (siehe Abb. 3.4a) tauschen die beiden Moden bezüglich des Amplitudenprofils näherungsweise ihre Eigenschaften aus. Dies stimmt gut mit den Messergebnissen bei den einzelnen Resonanzfrequenzen überein. Der asymmetrische Anteil der ersten longitudinalen Mode ist auf die Anwesenheit der Scheibenmode zurückzuführen, obwohl deren modale Antwort bei der ersten Resonanzfrequenz vernachlässigbar ist. Andererseits reagiert die zweite Mode immer mehr auf die longitudinale Anregung, da eben dieser longitudinale Anteil der zweiten Mode mit wachsendem Verstimmungsbetrag zunimmt. Die Frequenzkurven in Abb. 3.4b zeigen zugleich einen eindeutigen Abdrehschritt mit zunehmendem Verstimmungsgrad, obwohl der ursprüngliche Frequenzabstand schon relativ groß ist.

3.2.3 Zusammenfassung

Die gemessenen Eigenformen der Sonotrode stimmen nicht mit denen der Simulation überein, wenn von isotropen Materialdaten ausgegangen wird. Die longitudinale Mode zeigt im Unterschied zu den Simulationsergebnissen bei der Messung eine asymmetrische Verteilung der Auslenkungsamplitude. Dieses Verhalten lässt sich bei der Simulation qualitativ nachbilden, wenn eine lineare Ortsabhängigkeit des E-Moduls entlang der Sonotrodenbreite eingeführt wird. Die Eigenschaften der modalen Eigenformen beim Experiment und bei der Simulation nähern sich dadurch einander an.

Anhand der Simulation lässt sich ein Rotationseffekt zwischen der Längsmode und einer antisymmetrischen Mode sowie die Frequenzabdrehung mit zunehmendem Verstimmungsbetrag nachweisen. Aufgrund der Rotation geht sowohl die Symmetrie wie auch die Antisymmetrie der beiden beteiligten Moden verloren. Die Längsmode zeigt aufgrund der Verstimmung eine asymmetrische Auslenkung während die ursprüngliche antisymmetrische Mode aufgrund des zusätzlichen Longitudinalanteils verstärkt eine symmetrische Auslenkung zeigt. Durch dieses Einführungsbeispiel konnte der Fall einer modalen Degeneration bei einer Ultraschallsonotrode nachgewiesen werden. Die Veränderung des Amplitudenprofils ist auf einer Rotation der Eigenformen zurückzuführen, die von den heterogenen Materialeigenschaften verursacht wird.

3.3 Ziele der Arbeit

Anhand der Voruntersuchungen wurde das praktische Vorkommen der modalen Degeneration offensichtlich. Daher wird die Untersuchung der Effekte zentraler Teil der Arbeit. Basierend auf den diskutierten Mechanismen der Modeninteraktion sind beide, modale Überlagerung und Degeneration von größter Relevanz für Ultraschallsonotroden. Die modale Überlagerung lässt sich mit den allgemeinen Bewegungsgleichungen bewerten, während die modale Degeneration anhand der Sensitivität der Eigenvektoren beurteilt wird. Die praktischen Erfahrungen sowie die Ergebnisse der Voruntersuchungen zeigen, dass die von den Kombinationsresonanzen hervorgerufene Interaktionen zumindest in den linear betrachteten Beispielen keine Rolle spielen.

Laut Literatur über Ultraschallwerkzeuge, soll die Längsmode von den anderen Störmoden isoliert sein, um jegliche Kopplung zu vermeiden. Die komplexen Geometrien haben aber eine hohe modale Dichte. Zudem können in der Praxis nicht alle Moden gleichzeitig eliminiert werden. Oft verschiebt eine bestimmte Maßnahme die Moden einer Familie in einer Richtung, wobei auch die anderen Moden beeinflusst werden. Eine absolute Isolierung der Längsmode ist praktisch nicht möglich. Ebenso ist nach dem heutigen Kenntnisstand nicht klar, ob ein Mindestfrequenzabstand für alle Störmoden zur Longitudinalmode ausreicht, um ein gutes Schwingverhalten zu erhalten. In der Praxis kann der in der Literatur empfohlene Frequenzabstand von 1 kHz zwischen allen Moden nicht immer

gewährleistet werden. Mit dem Aufbau verschiedener Kopplungskriterien soll diese Fragestellung näher untersucht werden. Daher soll für den Fall der modalen Überlagerung und der modalen Degeneration ein Bewertungskriterium für die Größe der Wechselwirkung entwickelt werden. Messbare Kenngrößen sind für den Aufbau eines Kriteriums natürlich bevorzugt.

Die hergestellten Sonotroden haben immer eine gewisse Asymmetrie, in der Geometrie und in den Materialeigenschaften. Weil die FE-Simulation meistens von homogenen Materialdaten ausgeht, können Nebeneffekte nicht nachgestellt werden. Aus der Fachliteratur für Turbomaschinen ist bekannt, dass eine kleine Verstimmung in der Struktur eine erhebliche Auswirkung haben kann. Die Verstimmung von Ultraschallwerkzeugen wird in der Fachliteratur allerdings bisher kaum untersucht. Diese Lücke soll in dieser Arbeit geschlossen werden.

Die Herausforderung und das Fernziel ist es, über möglichst zuverlässige FE-Simulationen (trotz numerischer Fehler und Diskretisierungsfehler) zu verfügen, um ohne empirische Versuche zielgerichtete Anpassungen der Werkzeuge in der Produktion vornehmen zu können.

Die potentiellen Interaktionen zwischen den Moden sollen bereits in der Entwurfsphase erkennbar sein. Anhand der entwickelten Kriterien soll eine Methode entworfen werden, um die Ultraschallschwinger bezüglich der Nebenresonanzen und der Materialverstimmungen sicherer auszulegen.

Die folgenden Fragen sollen im Rahmen dieser Arbeit beantwortet werden:

- Mit welchen Kopplungsmechanismen können die modalen Interaktionen bei Ultraschallwerkzeugen beschrieben werden?
- Wie groß muss der Frequenzabstand zwischen der longitudinalen Betriebsmode und den zusätzlichen Moden sein, um eine zufriedene Entkopplung zu erzielen?
- Welchen Einfluss hat eine Asymmetrie bezüglich der longitudinalen Richtung auf die modalen Eigenschaften der Ultraschallschwinger?
- Welche Modellierungsgüte muss ein FE-Modell aufweisen, damit die Modenkopplungen korrekt abgebildet werden?
- Wie muss man systematisch vorgehen, um die Geometrie eines Ultraschallschwingers so auszulegen, dass sich möglichst robuste Schwingungseigenschaften ergeben, d.h. insbesondere keine modale Degeneration auftritt?

3.4 Lösungsweg

Die Arbeit ist wie folgt untergliedert: Kapitel 4 beschreibt die Antwort eines Ultraschall-schwinggebildes auf eine nichtresonante Anregung in Abhängigkeit von den verschiedenen Moden. In Kapitel 5 werden die Bedingungen für die Degeneration der Längs-mode unter Verwendung von unterschiedlichen Kopplungskriterien untersucht. Daran anschließend erfolgt die Entwicklung von Verfahren zur Minimierung dieser Degenerati-on, um die Betriebsmode der Sonotrode wieder herzustellen bzw. zu erhalten. Als letzter Schritt werden die Ergebnisse anhand von unterschiedlichen Sonotrodenprototypen va-lidiert. Die wesentlichen Zwischenziele sind:

Verhältnis der modalen Koordinaten Ein piezoelektrisches Ersatzmodell mit zwei Frei-heitsgraden wird entwickelt, um ein Schwinggebilde mit zwei Nachbarmoden abzubilden, z.B. der Betriebsmode und einer Störmode. Die Anteile dieser beiden Moden werden mit Hilfe der modalen Koordinaten einander gegenübergestellt. Der Einfluss der moda-len Größen (Frequenzen, mechanische Güten und elektromechanische Kopplungen) wird mathematisch beschrieben.

Erstellen eines erweiterten Ersatzmodells Eine Sonotrode wird als System von fünf ge-koppelten Feder-Massen-Schwingern modelliert und ihre modalen Eigenschaften unter-sucht. In einem weiteren Schritt wird eine zusätzliche Kopplungsrandbedingung zwis-chen den äußeren Schwingern definiert, in ähnlicher Weise wie das bei zyklischen Struk-turen der Fall ist.

Untersuchung eines elementaren zweidimensionalen Ersatzmodells Die modalen Ei-genschaften eines rechteckigen Schwingers werden in Abhängigkeit von seiner geometri-schen Daten (Höhe/Breite) berechnet. Die Frequenzkurven weisen mehrere Kollisionen für bestimmte Breiten auf, bei denen die Längsmode ggf. degeneriert ist. Die Ursache für die Entstehung der modalen Degeneration bei diesen kritischen Breiten wird untersucht. Basierend auf dieser Analyse erfolgt der Entwurf verschiedener Kopplungskriterien und Optimierungsansätze.

Experimentelle Validierung Zur Verifikation der anhand der Modelle gewonnenen Er-kenntnisse werden Sonotrodenprototypen mit verschiedenen Geometrien gefertigt und hinsichtlich ihrer technischen Eigenschaften miteinander verglichen. Die Geometrie der ersten Sonotrode basiert auf den bisherigen Erfahrungswerten. Im Unterschied dazu er-folgt die Berechnung der Geometrie der anderen Sonotroden auf den Ergebnissen der im Rahmen der vorliegenden Arbeit entwickelten Optimierungsverfahren.

4 Modale Überlagerung

4.1 Ersatzmodell eines multimodalen Schwingers

Das folgende Kapitel beschreibt eine Anregung der Struktur mit einer Frequenz außerhalb ihrer Eigenfrequenzen, wie es in diesem konkreten Fall der Ultraschallschwinggebilde ist. Wie erwähnt kann ein geringer Abstand zwischen den Eigenfrequenzen problematisch sein, da die einzelnen Antworten sich überlagern. Für die Bewertung der Interaktion zwischen den Moden wird das elektrische Ersatzmodell der Abb. 2.3 aus Abschnitt 2.1 genutzt und die relevanten Kenngrößen ins Verhältnis gesetzt.

4.1.1 Multimodale Schreibweise einer piezoelektrischen Erregung

In diesem Abschnitt werden die piezoelektrischen Kopplungsgleichungen für mehrere Moden bestimmt. Es werden sowohl elektrische als auch mechanische Übertragungsfunktionen dargestellt. Für die mechanischen Freiheitsgrade (FHG) werden die Vektoren der Koordinaten und der Kräfte im modalen Raum durch die Vergrößerungsfunktion G_n verknüpft¹:

$$\hat{y}_n = \frac{G_n}{\omega_n^2} \hat{f}_n \quad (4.1)$$

Hier bezeichnet \hat{y}_n die modale Koordinate der n -ten Mode, die angibt, wie stark die Eigenform in der mechanischen Bewegung des Schwingsystems enthalten ist. Die modale Kräfte \hat{f}_n entspricht einer linearen Kombination der physikalischen Kräfte, die mit der Auslenkung der Eigenform an den Einleitungs-FHG nach Gl. 4.2 gewichtet werden. Die Modalmatrix \mathbf{U} enthält die massennormierten Eigenvektoren und dient als Transformationsmatrix zwischen dem physikalischen und modalen Raum:

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{F}} \quad \text{oder} \quad \hat{f}_n = \sum_{j=1}^N U_{jn} \hat{F}_j \quad (4.2)$$

¹Der Zusammenhang wird im Anhang in Gl. 8.9 ausführlich beschrieben.

$$\hat{x} = \mathbf{U}\hat{y} \quad \text{oder} \quad \hat{x}_i = \sum_{n=1}^N U_{in}\hat{y}_n \quad (4.3)$$

Handelt es sich um ein piezoelektrisches System (siehe Kapitel 2.1), ist eine zusätzliche Kraft aufgrund der elektromechanischen Kopplung vorhanden. Die modale Kraft \hat{f}_n der n -ten Schwingungsmode besteht aus einem externen modalen mechanischen Kraftanteil $\hat{f}_{n_{\text{mech}}}$ und einem internen modalen elektrischen Kraftanteil $\hat{f}_{n_{\text{elek}}}$, die durch unterschiedliche Kopplungen mit den physikalischen Größen verknüpft sind. Der elektrische Kraftanteil resultiert aus der Kopplung der elektrischen Spannung \hat{V} über α_n und der mechanische Anteil aus der Kopplung einer externen Kraft.

$$\hat{f}_n = \hat{f}_{n_{\text{mech}}} + \hat{f}_{n_{\text{elek}}} = \mathbf{u}_n^T \hat{\mathbf{F}} + \alpha_n \hat{V} \quad (4.4)$$

Im freischwingenden Zustand wirkt keine externe Kraft auf dem Schwingensystem ($\hat{f}_{n_{\text{mech}}} = 0$). Das Einsetzen der Gl. 4.1 liefert die Kopplung zwischen den internen elektrischen und mechanischen modalen Kräften:

$$\frac{\omega_n^2}{G_n} \hat{y}_n = \alpha_n \hat{V} \quad (4.5)$$

Gemäß der elektrischen Schaltung in Abb. 2.3 berechnet sich die Gesamtladung \hat{Q} an den Elektroden aus:

$$\hat{Q} = C_0 \hat{V} + \sum_{n=1}^N \hat{Q}_n \quad (4.6)$$

wobei die in den jeweiligen Ästen gebildeten Ladungen \hat{Q}_n im Rahmen dieser Arbeit als *Kernladungen* bezeichnet werden. Mit Hilfe von Gl. 2.4 folgt die lineare Beziehung zwischen den elektrischen Kernladungen und den mechanischen modalen Koordinaten:

$$\hat{Q}_n = G_n C_n \hat{V} = \alpha_n \hat{y}_n \quad (4.7)$$

Beschreibt das Ersatzmodell wie in 2.1.1.2 nur die Längsmode eines stabförmigen Piezoschwingers, ist es angebracht den einzigen Eigenvektor auf die maximale physikalische Auslenkungsamplitude zu normieren. Dadurch entspricht die modale Koordinate genau der physikalischen Amplitude an der Stelle der maximalen Auslenkung. In der folgenden Untersuchung wird dieses Normierungsverfahren für mehrere Eigenvektoren zugleich bewusst nicht verwendet, da die modalen Amplituden miteinander verglichen werden. Stattdessen kommt die übliche Massennormierung der Eigenvektoren zum Einsatz.

Bei einer resonanten Anregung $\Omega \approx \omega_r$ überwiegt der Ladungssummand \hat{Q}_r in Gl. 4.6 und die Bewegung des Schwingers \hat{x}_i enthält nahezu nur die einzige Eigenform u_r . Für schwach gedämpfte Schwinger kompensieren sich die Induktivität und die Kapazität. Da der Versatz des Admittanzkreises in Abb. 2.4b aus Abschnitt 2.1 entlang der imaginären Achse viel kleiner als sein Durchmesser ist, darf die piezoelektrische Kapazität vernachlässigt werden ($\omega_r C_0 \ll 1/R_r$). Die elektromechanische Kopplung α_r verknüpft dann die Gesamtladung \hat{Q} mit der modalen Koordinate \hat{y}_r . Die Beziehung gilt ebenfalls zwischen dem Gesamtstrom und der modalen Geschwindigkeit:

$$\hat{Q} \approx \alpha_r \hat{y}_r \quad \text{mit} \quad \hat{y}_r = \frac{\hat{x}_i}{U_{ir}} \quad (4.8)$$

4.1.2 Bewertung des parasitären Anteils einer Störmode in der Schwingungsantwort

Die folgende Untersuchung basiert auf einem Ersatzsystem mit zwei Freiheitsgraden. Für die Beschreibung einer modalen Interaktion sind nur zwei Moden völlig ausreichend: die Mode 1 wird als Betriebsmode festgelegt und die Mode 2 als Störmode. Um die Anteile der beiden Moden in der gesamten Bewegung einander gegenüber zu stellen, werden die modalen Koordinaten \hat{y}_1 und \hat{y}_2 zueinander ins Verhältnis gesetzt. So quantifiziert dieses Verhältnis den parasitären Anteil der Störmode in der Schwingbewegung.

Wie im Kapitel 2.1 vorgestellt, wird der piezoelektrische Schwinger in der Nähe einer Resonanzfrequenz mit einer elektrischen Schaltung modelliert. Jede modale Koordinate \hat{y}_n wird durch die in jedem Ast entstehende Kernladung \hat{Q}_n repräsentiert, nachdem die mechanischen Größen in elektrische Größen mit Hilfe der modenabhängigen elektromechanischen Kopplung α_n überführt werden. Das elektrische Ersatzmodell in Abb. 2.3 wird genutzt. Die elektromechanischen Kopplungen sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht dargestellt, sie können jedoch als Skalierungsfaktoren für alle Größen in den jeweiligen RLC-Serienschwingkreisen berücksichtigt werden.

Die Berechnung des Verhältnisses der modalen Koordinaten erfolgt mit Hilfe der Kernladungen \hat{Q}_n und wird mit den messbaren Referenzgrößen bewertet: die mechanischen Güten und die Resonanzfrequenzen. Die Erregerkreisfrequenz Ω und die zweite Eigenkreisfrequenz ω_{S_2} werden beide auf die erste Eigenkreisfrequenz ω_{S_1} normiert:

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_{S_1}} \quad \gamma = \frac{\omega_{S_2}}{\omega_{S_1}} \quad (4.9)$$

Aus Gl. 4.7 ergibt sich das komplexe Verhältnis R der modalen Koordinaten:

$$R = \frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_1} = \frac{\hat{Q}_2/\alpha_2}{\hat{Q}_1/\alpha_1} = \frac{G_2 C_2 \alpha_1}{G_1 C_1 \alpha_2} = \gamma \frac{\frac{1}{\eta} - \eta + j \frac{1}{Q_{m_1}}}{\frac{\gamma}{\eta} - \frac{\eta}{\gamma} + j \frac{1}{Q_{m_2}}} \frac{C_2 \alpha_1}{C_1 \alpha_2} \quad (4.10)$$

Werden die elektrischen Kapazitäten als mechanische Steifigkeiten beschrieben, lässt sich ihr Verhältnis unter einer Massennormierung folgendermaßen schreiben:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{k_1}{k_2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 = \frac{\omega_{S_1}^2}{\omega_{S_2}^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^2 \quad (4.11)$$

Daraus folgt:

$$R = V_\alpha \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{1}{\eta} - \eta + j \frac{1}{Q_{m_1}}}{\frac{\gamma}{\eta} - \frac{\eta}{\gamma} + j \frac{1}{Q_{m_2}}} \quad \text{mit} \quad V_\alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (4.12)$$

Hierin beinhaltet V_α das Verhältnis der elektromechanischen Kopplungen. Q_{m_1} und Q_{m_2} sind die beiden mechanischen Güten. Die Störgröße wird als Produkt von zwei Haupttermen quantifiziert:

- der erste Term V_α ist signifikanter, bei großem α_2 und kleinem α_1 .
- der zweite Term beinhaltet sowohl die Frequenzverhältnisse als auch die mechanischen Güten. Der Einfluss dieser Parameter wird im nächsten Abschnitt analysiert.

4.1.3 Parameteruntersuchung

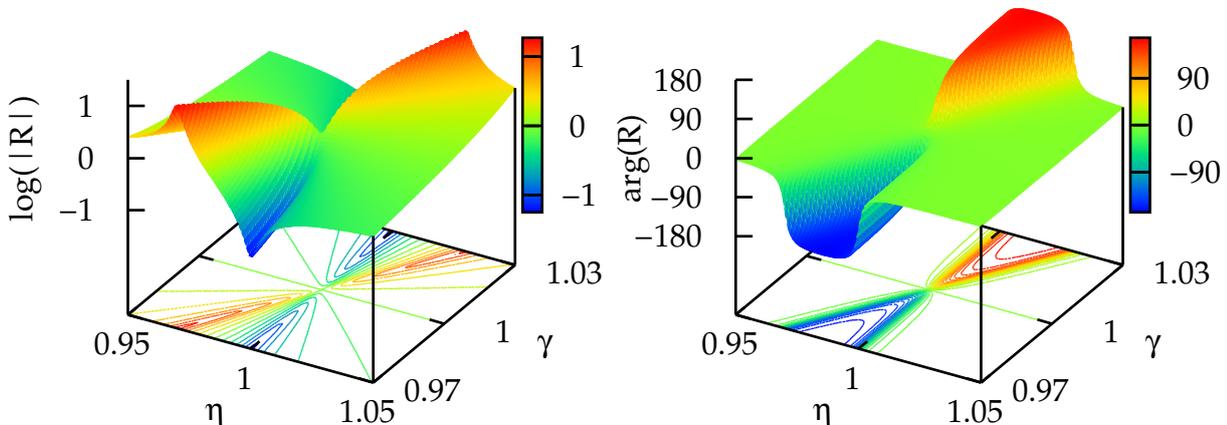


Abb. 4.1: Betrag und Phase des Störungsverhältnisses R , für $V_\alpha = 1$ und $Q_{m_1} = Q_{m_2} = 300$.

In Abb. 4.1 sind jeweils Betrag und Phase des Störungsverhältnisses R in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz γ und der relativen Frequenzlage der Störmode η dargestellt.

Dabei werden die elektromechanischen Kopplungen und die mechanischen Güten der beiden Moden gleich groß gesetzt.

- $\eta = 1$ (*best case*): die Anregung des Schwingsystems erfolgt in der Hauptresonanz, die Erregerfrequenz ist gleich die Eigenfrequenz der Betriebsmode. Der Störungsbetrag nimmt den kleinsten Wert (siehe in Abb. 4.1 links die blauen Bereiche):

$$|R| = V_\alpha \frac{1}{Q_{m_1}} \sqrt{\frac{1}{(\gamma^2 - 1)^2 + \frac{1}{Q_{m_2}^2}}} \quad (4.13)$$

und lässt sich als Produkt des Kehrwertes der Güte der Betriebsmode Q_{m_1} und einem zweiten Term schreiben, der gleichzeitig die zweite relative Eigenfrequenz γ und die Güte Q_{m_2} enthält. Der Störungsbetrag wird dann umso mehr unterdrückt, je größer die Güte der Betriebsmode Q_{m_1} ist, je kleiner die Güte der Störmode Q_{m_2} ist und je weiter sich die zweite Eigenfrequenz von der ersten entfernt. Im Gegenteil dazu überwiegt die Güte der Störmode Q_{m_2} im zweiten Term, je näher sich diese zweite Eigenfrequenz γ an 1 kommt.

- $\eta = \gamma$ (*worst case*): die Erregerfrequenz entspricht exakt der Eigenfrequenz der Störmode. Der Störungsbetrag ist maximal (siehe die roten Bereiche im Betrag Abb. 4.1). Sind beide Eigenfrequenzen dicht beieinander, kann der Term $1/Q_{m_1}$ in der Summe im Zähler von Gl. 4.12 vernachlässigt werden, da die Güte der Betriebsmode typischerweise größer als 100 ist. Dabei ist nur noch die Güte der Störmode Q_{m_2} entscheidend und der Störungsbetrag wird dann umso mehr unterdrückt, je weitersich die Erregerfrequenz von den beiden Eigenfrequenzen entfernt:

$$|R| \approx V_\alpha Q_{m_2} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \quad (4.14)$$

- Beim Sonderfall $\eta = \gamma = 1$ treffen sich die Erreger- und die beiden Eigenfrequenzen genau. Die Amplitude des Störungsverhältnisses hängt lediglich vom Verhältnis V_α und von den mechanischen Güten Q_{m_2} und Q_{m_1} ab:

$$|R| = V_\alpha \frac{Q_{m_2}}{Q_{m_1}} \quad (4.15)$$

4.1.4 Zusammenfassung

Ein Schwingsystem mit zwei nahe beieinander liegenden Eigenfrequenzen antwortet auf eine Anregung mit Auslenkungen in beiden Eigenformen. Die modalen Koordinaten definieren die Beteiligungen der jeweiligen Moden in der Gesamtantwort. Das Verhältnis der beiden modalen Koordinaten kann als Störungsmaß für die modale Interaktion zwischen zwei Moden angesehen werden. Die erste Mode ist die Betriebsmode des Schwingsystems und die zweite Mode soll jede beliebige Störmode abbilden. Diese Störung wird gemäß Gl. 4.12 in Abhängigkeit von diesen drei wichtigen Parametern bestimmt:

1. **Verhältnis der elektromechanischen Kopplungen** V_α : dieser Parameter bewertet, wie die harmonische elektrische Anregung in die jeweiligen Moden der piezoelektrischen Struktur koppelt.
2. **Frequenzverhältnissen** η und γ : die Erregerfrequenz und beide Eigenfrequenzen werden als dimensionslose Größen betrachtet. Der größte Störungsbetrag wird erhalten, wenn die Erregerfrequenz der zweiten Eigenfrequenz entspricht. Der ideale kleinste Betrag entspricht einer Anregung in der Hauptresonanz. Zwischen diesen beiden extremen Fällen, gibt der Störungsbetrag R an, wie groß die modalen Koordinaten zueinander sind.
3. **Mechanischen Güten** Q_{m_1} und Q_{m_2} : diese Kenngrößen geben ein Maß für die Dämpfung der einzelnen Moden an. Sie sind im Entwurfsprozess mit einem FE-Modell zwar schwer zu bewerten, aber sie lassen sich mit einer Messung in der Nähe der Resonanz gut ermitteln.

Im nächsten Abschnitt wird die Antwort eines typischen 20 kHz Ultraschallschwinggebildes auf einer harmonischen Anregung mit einem FE-Modell untersucht. Zahlenwerte werden für die modalen Koordinaten und Kernladungen angegeben.

4.2 20 kHz Schwinggebilde mit zahlreichen antwortenden Moden

Dieser Abschnitt hat den Zweck, die Antwort eines typischen Ultraschallschwinggebildes auf eine nicht resonante Anregung zu beschreiben. Das untersuchte Schwinggebilde besitzt aufgrund seiner komplexen Geometrie eine hohe modale Dichte. Ziel ist, die Beteiligung anderer Moden anhand eines praktischen Beispiels vorzustellen.

Das elektrische Ersatzmodell in Abb. 2.3 wird genutzt, um die parasitären Anteile der Nachbarmoden mit Hilfe der elektrischen Kernladungen zu beschreiben. Für die Umrechnung dieser Anteile in die mechanischen modalen Koordinaten werden die elektromechanischen Kopplungen α_n benötigt. Da diese Koeffizienten experimentell schwer bestimmbar sind, beschränkt sich diese Untersuchung auf die Bestimmung der Kernladungen \hat{Q}_n . Die elektrischen Komponenten werden aus der Admittanzmessung identifiziert. Anschließend werden die Kernladungen zueinander ins Verhältnis gesetzt.

Die Ergebnisse werden mit einer FE-Simulation verglichen. Die Berechnung der modenabhängigen Auslenkungsanteile $\hat{x}_{i,n}$ führt zu den modalen Koordinaten \hat{y}_n . Im Unterschied zur experimentellen Identifikation sind die elektromechanischen Kopplungen α_n einfach bestimmbar. Anhand von Gl. 4.7 ergeben sich die Kernladungen, die mit dem elektrischen Ersatzmodell verglichen werden.

4.2.1 Schwinggebilde

Im Herstellungsprozess von Sonotroden wird die Eigenfrequenz der Längsmode auf die gewünschte Betriebsfrequenz abgestimmt, indem die Schwinglänge in kleinen Schritten gekürzt wird. Die Messung der elektrischen Impedanz des gesamten Ultraschallschwingers erfolgt nach der Verschraubung der Sonotrode (und ggf. des Amplitudentransformationsstücks) mit dem Wandler. Befindet sich keine weitere Resonanz neben der Resonanz der Betriebsmode im Frequenzbereich 19.5 kHz bis 20.5 kHz, kann der Schwinger mit dem Generator betrieben werden.

Mit einer Frequenzregelung (siehe Abschnitt 2.1.4) variiert der Generator die Erregerfrequenz von ca. 300 Hz oberhalb der Resonanz der Betriebsmode nach unten, bis der Nominalwert der Auslenkung erreicht ist. Da sich der Betriebspunkt oberhalb der Resonanzfrequenz befindet und die modale Dichte relativ hoch ist, sind andere Nachbarmoden neben der Betriebsmode an der Schwingungsantwort beteiligt.

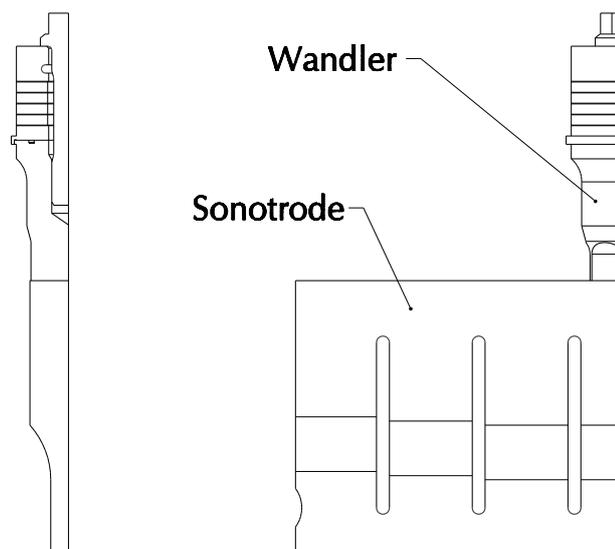


Abb. 4.2: Viertelmodell des untersuchten 20 kHz Schwinggebildes.

Das untersuchte Schwinggebilde in Abb. 4.2 besteht aus einem auf 20 kHz abgestimmten Wandler und einer 315 mm breiten Messersonotrode. Die komplexe Geometrie und die großen Abmessungen in Bezug auf der Wellenlänge führen dazu, dass die modale Dichte in der Nähe der Arbeitsfrequenz sehr groß ist. Das Schwinggebilde besitzt seine zweite Längsmode ($\lambda = 1$) bei 20091 Hz, so dass die beiden auf 20 kHz angepassten Komponenten (Sonotrode und Wandler) eine $\lambda/2$ -Schwingung ausbilden. Der Generator stellt die Betriebsfrequenz auf 20154 Hz (1.0031 Mal die Resonanzfrequenz) ein, um den nominalen Arbeitspunkt zu erreichen.

4.2.2 Messung des Schwinggebildes

4.2.2.1 Admittanzmessung

Mit Hilfe eines Impedanzanalysators (4294A, Fa. Agilent) erfolgt eine Messung der Admittanz¹ des Schwinggebildes zwischen 18 kHz und 30 kHz. Die im Strom gemessenen Resonanzfrequenzen stimmen nahezu mit den mit dem LDV bestimmten Frequenzen überein, wie es später gezeigt wird. In der Nähe dieser Resonanzen muss die spektrale Auflösung ausreichend hoch sein, um die Güte richtig bestimmen zu können.

4.2.2.2 Messung der Eigenformen

Ein Frequenzgenerator regt das Schwinggebilde mit einem elektrischen Eingangssignal (*periodic chirp*) an. Die Geschwindigkeitsantworten bei den Resonanzfrequenzen sind mit Hilfe eines LDV auf der Schweißfläche erfasst worden und in Abb. 4.3 dargestellt. Aufgrund der hohen Güten entsprechen die in den Resonanzen gemessenen Betriebschwingungsformen bzw. Frequenzen nahezu den Eigenformen bzw. Eigenfrequenzen des Schwingers, die mit den aus der Simulation erhaltenen Moden später korreliert werden können.

Alle gemessenen Moden in Abb. 4.3 zeigen eine symmetrische Auslenkung der Schweißfläche in longitudinaler Richtung. Die Betriebsmode mit gleichphasiger Auslenkung ist bei 20091 Hz zu finden. Die nächste Mode – im Beispiel bei 21249 Hz – ist charakteristisch für lange Sonotroden. Ihr Auslenkungsprofil entlang der Schweißfläche weist zwei Nullstellen auf.

4.2.3 FE-Simulation

Die Bestimmung der Kernladungen mit Hilfe der FE-Simulation erfolgt in zwei Schritten. Zunächst werden die elektromechanischen Kopplungen anhand der Modalanalyse ermittelt. Anschließend erfolgt die Berechnung der modalen Koordinaten und der Kernladungen mit Hilfe einer harmonischen Analyse. Die Erregerkraft wird durch die an den Piezoelementen liegende Spannung in die Struktur eingeleitet. Bei Eigenmoden, deren Schwingungsform eine antisymmetrische Bewegung gegenüber dem Mittelpunkt des kreisförmigen Querschnitts der piezoelektrischen Scheiben bilden, ergibt sich ein Mittelwert von 0 N und somit eine modale Erregerkraft von 0 N. Daher sind die Biege- und Torsionsmoden durch den Stapel von in der Längsrichtung polarisierten piezoelektrischen Scheiben bei perfekter Symmetrie des Systems theoretisch nicht anregbar.

Aufgrund der Vernachlässigung der Auswirkungen der Asymmetrie wird nur ein Viertel des FE-Modells benutzt. Die Vereinfachung hat den Vorteil sowohl eines deutlich reduzierten Rechenaufwandes als auch das prinzipielle Verschwinden aller asymmetrischen

¹Die gemessene Admittanz wird später in Abb. 4.6 dargestellt (grüne Kurve).

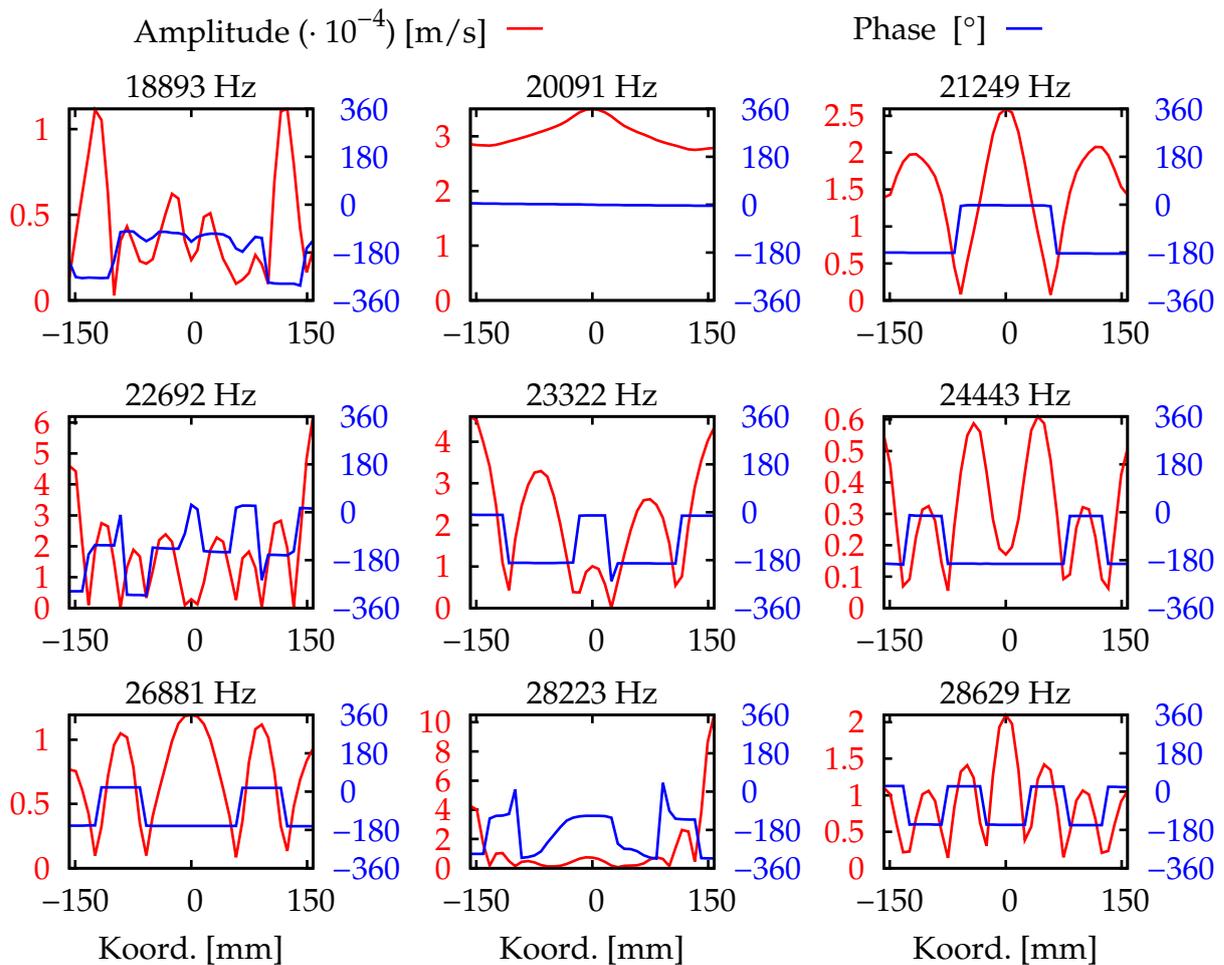


Abb. 4.3: Gemessene Geschwindigkeitsantworten bei den Resonanzfrequenzen.

Moden aus der Modalanalyse. Es sind lediglich zwei zusätzliche Randbedingungen an den Schnittflächen zu definieren. Für die Sonotrode sind die bei Herrmann Ultraschall genutzten orthotropen Materialdaten für gewalzte TiAl6V4-Plattenmaterialien verwendet, die technischen Daten der piezoelektrischen Scheiben entsprechen dem Datenblatt des Materials PZT802¹.

4.2.3.1 Modalanalyse

Die Modalanalyse erfolgt mit kurzgeschlossenen Elektroden, so dass kein elektrisches Feld in den piezoelektrischen Scheiben vorhanden ist. Alle aus der Modalanalyse ermittelten Eigenformen der Moden zwischen 18 kHz und 30 kHz sind in Abb. 4.4 bzw. in Tab. 4.1 mit den zugehörigen Eigenfrequenzen zu finden. Im Frequenzbereich von 18 kHz bis 30 kHz existieren zehn Moden, diese sind mit A bis J gekennzeichnet. Die Mode B wird als die Längs- bzw. Betriebsmode identifiziert. Die Mode D zeigt ausschließlich ein Ausbeulen des Piezostapels, eine radiale Bewegung senkrecht zur Polarisationsrichtung. Aus diesem Grund ist sie nicht an der Sonotrodenbewegung beteiligt. Daher wird die Mode D in den folgenden Analysen nicht berücksichtigt. Nach dem Vergleich der simu-

¹Alle verwendeten Materialdaten befinden sich im Anhang 8.2.1, Tab. 8.1.

lierten Eigenformen mit den gemessenen Antwortprofilen lassen sich alle gefundenen Resonanzfrequenzen den jeweiligen Eigenmoden zuordnen, siehe Tab. 4.1.

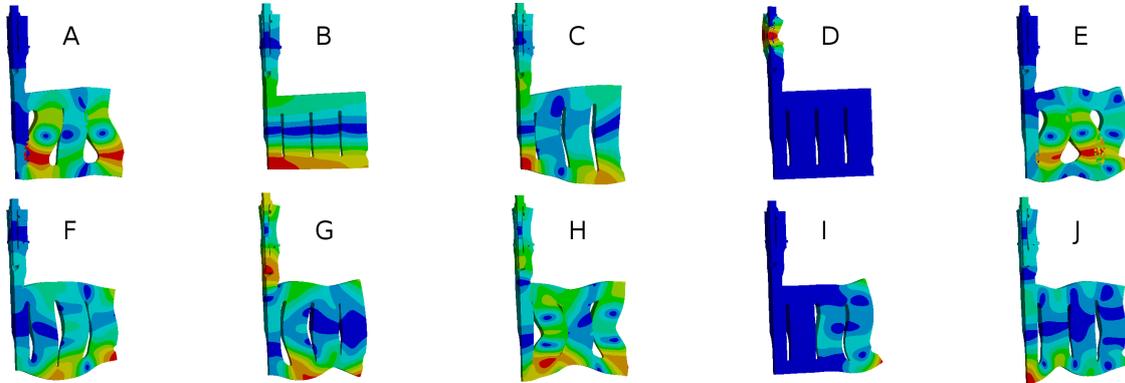


Abb. 4.4: Ergebnis der Modalanalyse im Frequenzbereich zwischen 18 kHz und 30 kHz (Erste Zeile: A bis E, zweite Zeile: F bis J).

Mode	Simulierte Eigenfrequenz	Gemessene Resonanzfrequenz
A	19314	18893
B	19972	20091
C	21246	21249
D	23081	-
E	22877	22692
F	23462	23322
G	24979	24443
H	27272	26881
I	28400	28223
J	28813	28629

Tab. 4.1: Frequenzen der verschiedenen Eigenmoden [Hz].

Durch die Verformung der Struktur bei jeder Eigenform entstehen Ladungsreaktionskräfte in den Elektroden. Da in der Modalanalyse die physikalische Auslenkung die massennormierte Eigenform repräsentiert, beträgt die modale Koordinate \hat{y}_n Eins. Die entstehende Ladung bestimmt nach Gl. 4.7 die elektromechanische Kopplung:

$$a_n = \hat{Q}_n^{\text{modal}} \quad (4.16)$$

4.2.3.2 Harmonische Analyse

Die elektrische Anregung des Ultraschallsystems erfolgt mit Hilfe einer Spannung von 1 V an den Elektroden der parallel geschalteten piezoelektrischen Scheiben. Die Erregerfrequenz ist relativ zur Resonanzfrequenz der Längsmode ω_B analog zu der vom Generator eingestellten Erregerfrequenz angepasst, sie beträgt $\Omega = 1.0031 \cdot \omega_B$. Die kommerzielle Berechnungssoftware Ansys ermöglicht verschiedene Methoden für die Durchführung einer harmonischen Analyse. Optional können die Ergebnisse der Modalanalyse verwendet werden, um die Gesamtantwort abzuschätzen und Rechenzeit zu sparen.

Vollmethode (*full method*) Die vollständigen Systemmatrizen werden für die Berechnung der dynamischen Steifigkeitsmatrix verwendet. Die Methode basiert auf den wenigsten Vereinfachungen, im Gegenzug sind sehr lange Rechenzeiten für die Bestimmung der Lösung erforderlich.

Modale Überlagerung (*modal superposition*) Die Übertragungsfunktion des Modells wird als Summe der Übertragungsfunktionen derjenigen zuvor berechneten Moden bestimmt, deren Eigenfrequenzen in einem bestimmten, als relevant betrachteten Bereich liegt. Diejenigen Moden, deren Übertragungsfunktion für die jeweilige Berechnung berücksichtigt werden sollen, müssen vorab ausgewählt werden.

Für die folgende Untersuchung wird die Mitte der Schweißfläche als Referenzpunkt festgelegt. Mit Hilfe der harmonischen Analyse wird der Anteil $\hat{x}_{i,n}$ jeder beteiligten Mode n an der gesamten Systemantwort berechnet. Es wird davon ausgegangen, dass sich alle $\hat{x}_{i,n}$ linear am Referenzpunkt überlagern. Anhand der so am Referenzpunkt berechneten physikalischen Auslenkungsantworten und den Kopplungen aus der Modalanalyse sind schließlich die modalen Koordinaten \hat{y}_n und die Kernladungen \hat{Q}_n bestimmbar:

$$\hat{y}_n = \frac{\hat{x}_{i,n}}{U_{in}} \quad (4.17)$$

$$\hat{Q}_n = \alpha_n \hat{y}_n \quad (4.18)$$

4.2.4 Ergebnisse

4.2.4.1 Antwort bei der Betriebsfrequenz

Die Simulation der Amplitude der Geschwindigkeitsantwort bei der Betriebsfrequenz erfolgt an mehreren Punkten entlang der Schweißfläche (siehe Abb. 4.5). Es kommt dabei sowohl die Vollmethode wie auch die Methode der modalen Überlagerung mit verschiedenen Frequenzbereichen in der harmonischen Analyse zur Anwendung. Abweichungen im Amplitudenprofil zeigen sich hauptsächlich in der Mitte der Schweißfläche ($Z = 0$), wenn ein reduzierter Satz von Eigenmoden berücksichtigt wird. Anhand dieses Ergebnisses kann davon ausgegangen werden, dass weitere Moden einen signifikanten Anteil zur Gesamtantwort beitragen. Für das betrachtete Beispiel muss der Frequenzbereich für die harmonische Analyse bis auf 60 kHz erweitert werden, um eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse im Vergleich zur Vollmethode zu erreichen.

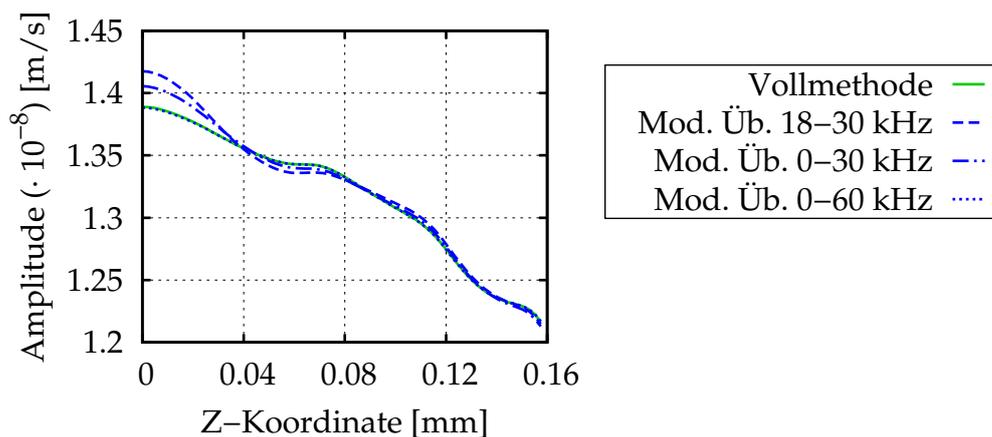


Abb. 4.5: Geschwindigkeitsamplituden bei der Betriebsfrequenz, ermittelt in Ansys.

4.2.4.2 Parameteridentifikation

Bei der Admittanzmessung kann eine zusätzliche Resonanzstelle bei ca. 27.2 kHz in der Parallelresonanz der Mode H nicht zugeordnet werden. Sie wird im Rahmen der vorliegenden Analyse nicht berücksichtigt. Die Parameteridentifikation des multispektralen piezoelektrischen äquivalenten Systems erfolgt anhand der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Methode. Die Admittanzkurve wird in verschiedene Frequenzabschnitte aufgeteilt und die Frequenzintervalle jeweils so angegeben, dass die Maxima und Minima des Admittanzbetrags durch den Programmcode direkt identifizierbar sind.

Die erhaltenen Parameter des äquivalenten Ersatzmodells werden im Anhang 8.2.2 zusammengefasst. Die Admittanz der identifizierten Parameter wird zusammen mit der vorher gemessenen Admittanz in Abb. 4.6 dargestellt. Beide Kurven zeigen eine gute Übereinstimmung, dies gilt auch für die nur kleinen Antworten der Moden A, E und I.

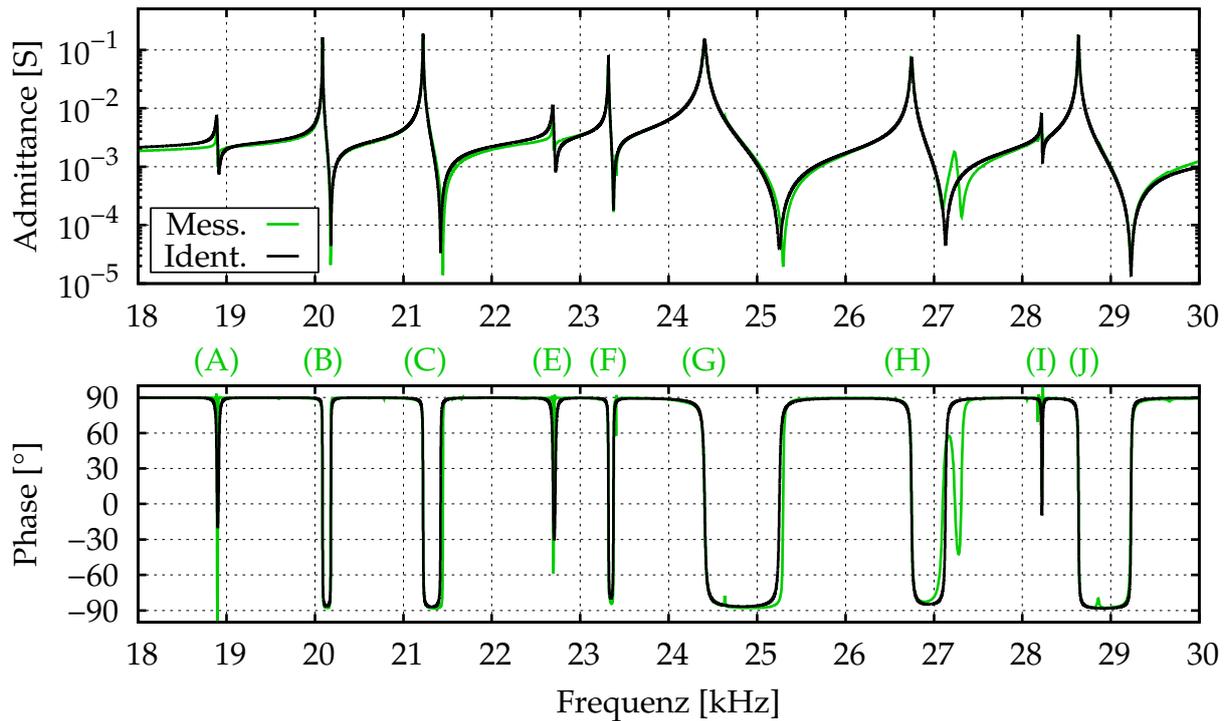


Abb. 4.6: Gemessene Admittanz (grüne Kurve) und berechnete Admittanz aus dem elektrischen Ersatzmodell (schwarze Kurve). Mode B ist die Betriebsmode.

4.2.4.3 Kernladungen und modale Koordinaten

Die Bestimmung der modalen Koordinaten und der Kernladungen erfolgt gemäß Gl. 4.18. Die aus der FE-Analyse ermittelten Faktoren werden in Tab. 4.2a dargestellt. Dabei werden die modalen Koordinaten und die Kernladungen auf die Werte der Betriebsmode normiert. Die Kernladungen aus der Parameteridentifikation werden in Tab. 4.2b aufgelistet.

	Mode	α	\hat{y}_n	\hat{Q}_n		Mode	\hat{Q}_n
a)	A	0.83	2.6 %	0.8 %	b)	A	1.1 %
	B	2.80	(100 %)	(100 %)		B	(100 %)
	C	4.15	7.4 %	10.9 %		C	11.8 %
	E	1.07	0.8 %	0.3 %		E	0.8 %
	F	3.10	1.9 %	2.1 %		F	1.6 %
	G	9.37	3.7 %	12.5 %		G	11.0 %
	H	5.97	1.5 %	3.3 %		H	2.3 %
	I	0.80	0.2 %	0.0 %		I	0.1 %
	J	6.94	1.4 %	3.6 %		J	2.1 %

Tab. 4.2: (a) Ergebnisse der FE-Analyse: elektromechanische Kopplungen, modale Koordinaten und Kernladungen. (b) Ergebnisse aus dem elektrischen Ersatzmodell: Kernladungen.

4.2.5 Zusammenfassung

Mit Hilfe eines FE-Modells lässt sich die modale Überlagerung in Übereinstimmung mit dem elektrischen Modell quantifizieren. Durch die elektromechanischen Kopplungen werden die modalen Koordinaten mit den elektrischen Kernladungen des Ersatzschaltbildes verknüpft. Auch im Fall einer nichtresonanten Anregung können diese modalen Koordinaten signifikant sein. Diese Untersuchung basiert auf zwei Modellansätzen:

- Das einfache multimodale piezoelektrische Ersatzmodell beschreibt die zehn Schwingungsmoden des Ultraschallschwinggebildes zwischen 20 und 30 kHz. Es besteht aus einer äquivalenten piezoelektrischen Kapazität und den elektrischen Komponenten der RLC-Serienschwingkreise, die aus der gemessenen Admittanz identifiziert werden.
- Das FE-Modell stellt im Unterschied zum elektrischen Modell eine deutlich höhere Anzahl von Moden mit ihren mechanischen Verformungen dar und liefert die elektromechanischen Kopplungen, die modalen Koordinaten und die Kernladungen.

Die ungenaue Lage der berechneten Frequenzen lässt sich unter anderem auf die angenommenen Materialdaten der Komponenten und auf die Idealisierung der Fügestellen im FE-Modell zurückführen. Trotz dieser Vereinfachungen und des konstant angenommenen modalen Dämpfungsmaßes (10^{-4}) befinden sich die berechneten Kernladungen in der gleichen Größenordnung wie die auf Messdaten basierenden Kernladungen des elektrischen Modells. Interessant ist in diesem Zusammenhang die große Beteiligung der zur Betriebsmode benachbarte Mode C in der gesamten Schwingungsbewegung, die trotz des Frequenzabstands von 1 kHz immerhin 7.4 % der Betriebsmode beträgt. Die Mode G weist auch eine relativ große modale Koordinate auf, etwa halb so groß wie die der Mode C. Dies lässt sich auf die starke elektromechanischen Kopplung und die geringe Dämpfung des Mode G zurückführen.

5 Modale Degeneration

Im Folgenden wird auf die Degeneration der Betriebsmode als Kopplungsmechanismus zwischen den Moden eingegangen. Die modale Degeneration wurde als eine wichtige modale Interaktion identifiziert, zusätzlich zur Überlagerung der modalen Antworten. Zuerst wird die Entstehung dieser Interaktionsart in Abhängigkeit der wichtigsten Einflussparameter untersucht. Darüber hinaus wird eine Anpassung der aus der Literatur bekannten Kopplungskriterien auf dem hier untersuchten konkreten Fall der Ultraschall-Schwinggebilde vorgenommen. Im Anschluss daran folgt eine Analyse eines elementaren Schwingers, mit verstimmten Materialeigenschaften und geometrischen Parametern. Verschiedene Methoden werden zur Minimierung der Anfälligkeit der Betriebsmode zur Degeneration mit Anpassung der Geometrie untersucht.

5.1 Ableitung eines verstimmungsbasierten Kopplungskriteriums

5.1.1 Verstimmungsvariation

Die Abhängigkeit der dynamischen Eigenschaften einer Struktur von ihren Parametern spielt heutzutage eine wesentliche Rolle. Um die Abdrehung der Frequenzkurven nachweisen zu können, werden die Eigenfrequenzen zweckmäßiger Weise als Funktion eines Parameters dargestellt. Bei komplexen Modellen wird hierfür z.B. die Vorspannkraft [28], das geometrische Verhältnis Breite/Länge einer Platte [29] oder der Ausrichtungswinkel einer Schaufel [18] herangezogen.

Bei periodischen Strukturen tritt eine Modenlokalisierung auf, wenn die Verstimmung der Steifigkeits- oder Masseneigenschaften der Substrukturen in die gleiche Größenordnung wie die interne Kopplung zwischen diesen Substrukturen kommt. Die Abdrehung der Frequenzen und die Rotation der Eigenformen lassen sich auch bei nicht-periodischen Strukturen finden, z.B. bei symmetrischen Systemen mit einer leichten Verstimmung. In diesem Fall muss auch noch ein enger Frequenzabstand der Eigenmoden vorhanden sein. In Analogie zu gekoppelten Pendeln (PIERRE [67]) und zum zwei-Massen-Modell in 2.3.3 ist der Frequenzabstand zwischen den Moden durch die interne Kopplung β , die Asymmetrie dagegen durch die Verstimmung α bestimmt.

Im Folgenden wird die Nennkonfiguration anhand der symmetrischen bzw. unverstimmten Struktur definiert, die eine gewisse interne Kopplung besitzt. Diese störungsfreie Konfiguration wird als abgestimmter oder *nominaler* Zustand bezeichnet und ist auch unter dem englischen Begriff *tuned* bekannt. In der vorliegenden Arbeit werden alle Größen dieser Nennkonfiguration mit dem hochgestellten Index ⁽⁰⁾ gekennzeichnet. Auf Grundlage der Untersuchung verschiedener Verstimmungstypen wird gezeigt, dass die Nennkonfiguration inhärent vorhanden, aber nicht zwangsläufig bekannt ist.

Erst wenn eine strukturelle Verstimmung der Symmetrieeigenschaften eingeführt wird, entsteht eine Degeneration der Modenpaare mit einer schwachen internen Kopplung. Der verstimmte Zustand ⁽¹⁾ besitzt eine uniforme oder raumabhängige Fehlordnung, deren Auswirkung auf die dynamischen Eigenschaften in den folgenden Abschnitten untersucht wird.

Der in Abb. 2.11 unten dargestellte Schwinger von HARKNESS, LUCAS UND CARDONI [44] (siehe Abschnitt 2.3.5) wird als *mode-degenerating horn* kennzeichnet. Da seine Eigenfrequenzen mit großen Abständen getrennt sind, besitzt der Schwinger eine gewisse interne Kopplung. Die Tiefe der schrägen Wendeln bestimmt die Verstimmung des dynamischen Systems. Mit zunehmender Verstimmung α ist die Degeneration der Eigenformen für eine große Kopplung β auffälliger als die Frequenzabdringung, wie es beim Modell in Abb. 2.10 und bei der untersuchten Messersonotrode in Abb. 3.4b zu sehen ist. Dementsprechend führt der Verlust des nominalen Zustands (der rotationssymmetrische Schwinger) in beiden Fällen sowohl zu einer Modenkopplung wie auch zu einer Degeneration der Moden.

5.1.2 Sensitivitätsrechnung

In dieser Arbeit wird im Unterschied zu etlichen Quellen wie z.B. [28] [29] die umgekehrte Vorgehensweise für die Analyse der Degeneration benutzt: der Variationsparameter für die Sensitivitätsrechnung ist nicht die interne Kopplung, sondern grundsätzlich die Verstimmungsgröße (sprich E-Modul, Dichte, Geometrie). Die Verstimmung der diskretisierten Strukturen wird als steifigkeits- und/oder massenbasierte Matrizen geschrieben. Werden diese Matrizen durch einen festgelegten Verstimmungsbetrag geteilt, erhält man die geometrische Verteilung der Verstimmung. Der Bezugswert des Verstimmungsbetrags ist ein beliebiger Skalar, der zur Anpassung dient. Beispielweise in PIERRE [67], wird der Störungsparameter als euklidische Norm der Matrix definiert. Die Sensitivität des Eigenvektors \mathbf{u}_i über dem Verstimmungsparameter α wird für ein diskretes System von Gl. 2.28 beschrieben. Für eine infinitesimale Verstimmungsdifferenz $d\alpha$ lässt sich für das Eigenvektordifferential in der Nennkonfiguration ⁽⁰⁾ folgendes schreiben:

$$d\mathbf{u}_i^{(0)} = -\frac{1}{2}(\mathbf{u}_i^{(0)\text{T}} \mathbf{dM} \mathbf{u}_i^{(0)}) \mathbf{u}_i^{(0)} + \sum_{k \neq i}^N \frac{\mathbf{u}_k^{(0)\text{T}} (\mathbf{dK} - \lambda_i^{(0)} \mathbf{dM}) \mathbf{u}_i^{(0)}}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} \mathbf{u}_k^{(0)} \quad (5.1)$$

Der Verstimmungsparameter α kann je nach verstimmter Kenngröße linear, nichtlinear oder gar nicht zu der Variation der Strukturmatrizen beitragen. In Tab. 5.1 werden die Abhängigkeitseigenschaften von drei wichtigen Kenngrößen aufgelistet. Die Materialkonstanten (der E-Modul bzw. die Dichte) tragen zu der Berechnung der Matrizerterme linear bei oder haben gar keinen Einfluss. Im Unterschied dazu wirkt die geometrische Verstimmung auf die Abmessungen bzw. die Ausrichtung der finiten Elemente. Sie trägt daher zumeist nichtlinear zu den Strukturmatrizen bei.

Kenngröße	Steifigkeitsmatrix	Massenmatrix
E-Modul	linear	0
Dichte	0	linear
Geometrie	nichtlinear	nichtlinear/linear

Tab. 5.1: Beitrag von drei Kenngrößen auf die Strukturmatrizen

Wirkt die Verstimmung nur in den Materialeigenschaften, sind die Ableitungen der Strukturmatrizen über dem Verstimmungsgrad konstant oder Null im ganzen Parameterbereich. Im Fall einer kleinen geometrischen Verstimmung kann der Beitrag in den Matrizen in der Nähe eines Verstimmungsgrades α_0 näherungsweise linearisiert werden:

$$\mathbf{K}(\alpha) \approx \mathbf{K}(\alpha_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) \quad \mathbf{M}(\alpha) \approx \mathbf{M}(\alpha_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} (\alpha - \alpha_0)$$

5.1.2.1 Modale Kopplung

Der erste Term in Gl. 5.1 ist sehr klein im Vergleich zur Summe der anderen Terme (mehrere Zehnerpotenzen bei den im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Systemen) und dient als Korrekturterm für die Orthogonalisierung. In [29] werden die Zähler $\mathbf{u}_k^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p} \right) \mathbf{u}_i$ in Gl. 2.28 als *modale Kopplungen* bezeichnet. Sie bilden gemäß Gl. 2.42 eine Matrix von Kopplungsfaktoren zwischen allen Eigenvektoren. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird die Definition der modalen Kopplung zwischen den Moden i und j für eine vorgegebene Steifigkeits- und Massenvariation wie folgt angepasst:

$$D_{ij} = \mathbf{u}_j^{(0)T} \left(\Delta \mathbf{K} - \lambda_i^{(0)} \Delta \mathbf{M} \right) \mathbf{u}_i^{(0)} \quad (5.2)$$

Im Allgemeinen ist die Matrix der modalen Kopplungen aufgrund der Multiplikation mit dem Eigenwert $\lambda_i^{(0)}$ im Massenterm nicht symmetrisch. Eine Ausnahme bildet der Sonderfall einer konstanten Massenmatrix.

5.1.3 Steifigkeitsvariation als Sonderfall

Für die Simulation einer Veränderung der Materialeigenschaften kann sowohl der E-Modul wie auch die Dichte innerhalb der dynamischen Struktur variiert werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt erwähnt, tragen die Materialkonstanten linear zu den Strukturmatrizen bei. Besonders der E-Modul wirkt sich signifikant auf die Terme der Steifigkeitsmatrix aus. Aus Vereinfachungsgründen wird die Heterogenität des Materials zunächst als eine lineare Ortsabhängigkeit des E-Moduls angenommen, dann als Steifigkeitsvariation betrachtet.

- In der Nennkonfiguration ⁽⁰⁾ ist der E-Modul innerhalb der Sonotrode konstant.
- Im verstimmten Zustand ⁽¹⁾ variiert der E-Modul linear entlang der gesamten Sonotrodenbreite. Der Verstimmungsbetrag ist über den Maximalwert an den äußeren Seiten festgelegt.

Gemäß Tab. 5.1 ist die Massenmatrix verstimmungsunabhängig und dient darüber hinaus als Normierungsmatrix. Die Eigenvektoren der beiden Zustände sind über die Transformationsmatrix verbunden. Wird Gl. 2.30 transponiert und mit $\mathbf{Mu}_j^{(0)}$ multipliziert, ist die Transformationsmatrix \mathbf{C} mit Hilfe der konstanten Massenmatrix bestimmt. Dieser Ausdruck hat signifikante Vorteile bei der Berechnung der Beteiligungsterme mit einer reduzierten modalen Basis von R Eigenvektoren ($R \ll N$):

$$C_{ji} = \mathbf{u}_i^{(1)\top} \mathbf{Mu}_j^{(0)} \quad \begin{array}{l} (1 \leq i \leq R) \\ (1 \leq j \leq R) \end{array} \quad (5.3)$$

In der Transformationsmatrix sind die Komponenten der nominalen Eigenvektoren vertikal und die Komponenten der verstimmten Eigenvektoren horizontal auszulesen. Die Quadrate der Komponenten C_{ji} entsprechen dem *Normalized Cross Orthogonality* Vergleichskriterium (NCO) ¹. Somit beschreibt das NCO die Orientierung der verstimmten Vektoren in der nominalen Basis:

$$\sum_{j=1}^N \text{NCO}_{ji} = \sum_{j=1}^N C_{ji}^2 = 1$$

¹Das NCO wird, wie das MAC-Kriterium, zur Bewertung der Korrelation zwischen zwei Eigenvektoren genutzt. Eine detaillierte Beschreibung ist in Gl. 8.38 des Anhangs zu finden.

5.1.4 Rotationswinkel als Auswirkung der modalen Interaktion

Wie im Abschnitt 2.4.5 erwähnt, beschreibt die Transformationsmatrix \mathbf{C} die Orientierung der verstimmtten Eigenvektoren in der nominalen Basis. Im Folgenden wird der elementare Fall untersucht, bei welchem die Wechselwirkung ausschließlich zwischen zwei Moden stattfindet. Dadurch beschränkt sich \mathbf{C} auf eine 2×2 Matrix.

5.1.4.1 Interaktion zwischen zwei Moden

Im Fall einer ausschließlich auf die beiden Moden 1 und 2 beschränkten Wechselwirkung beschreibt ein einziger Winkel die Position der Eigenvektoren auf der Ebene. Das zweidimensionale gestörte Eigenwertproblem von YANG UND GRIFFIN [82] aus Gl. 2.32 im Fall einer reinen Steifigkeitsvariation für $i = [1, 2]$ lässt sich folgendermaßen aufstellen:

$$\mathbf{\Lambda}^{(0)}(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{I}_k)\mathbf{C}_i = \lambda_i\mathbf{C}_i \quad (5.4)$$

wobei $\Delta\hat{\mathbf{K}}$ aus Gl. 2.33 die spektral normierte Variation der modalen Steifigkeitsmatrix $\Delta\mathbf{I}_k$ definiert:

$$\Delta\mathbf{I}_k = \mathbf{\Lambda}^{(0)-1}\Delta\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}$$

- Die Diagonalterme sind unabhängig von den Vorzeichen der Eigenvektoren. Sie sind null, wenn die Verstimmung antisymmetrisch bezüglich der longitudinalen Richtung ist.
- Die Terme außerhalb der Hauptdiagonale haben willkürliche Vorzeichen, aufgrund der Eigenvektoren. Sie sind nahezu identisch, weil beide Eigenwerte dicht beieinander liegen [82].

Mit Hilfe des mittleren Referenzeigenwerts $\bar{\lambda}$ wird der relative Eigenwertabstand δ definiert:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\lambda_2^{(0)} + \lambda_1^{(0)}) \quad \text{und} \quad \delta = \frac{\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}}{2\bar{\lambda}}$$

Das Einsetzen in Gl. 5.4 liefert:

$$\begin{bmatrix} 1 - \delta & 0 \\ 0 & 1 + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + k_{11} & k_{21} \\ k_{12} & 1 + k_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1i} \\ \mathbf{C}_{2i} \end{pmatrix} = \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}} \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{1i} \\ \mathbf{C}_{2i} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

mit

$$k_{11} = \frac{\Delta \hat{K}_{11}}{\lambda_1^{(0)}} \quad k_{22} = \frac{\Delta \hat{K}_{22}}{\lambda_2^{(0)}} \quad k_{12} \approx k_{21} \approx \frac{\Delta \hat{K}_{12}}{\lambda}$$

Die Lösung von Gl. 5.5 liefert das Verhältnis ζ der beiden Komponenten C_{1i} und C_{2i} des Beteiligungsvektors C_i , sowie den i -ten relativen verstimmteten Eigenwert. Beide Eigenvektoren drehen sich in derselben Ebene und die Verstimmung verursacht eine Rotation [29] um den Winkel ϑ , der ein Maß für die Verzerrung der Eigenvektoren darstellt:

$$\mathbf{C} = \sqrt{\frac{1}{\zeta^2 + 1}} \begin{bmatrix} 1 & \zeta \\ -\zeta & 1 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \zeta = -\frac{C_{21}}{C_{11}} = \frac{C_{12}}{C_{22}} = \tan \vartheta \quad (5.6)$$

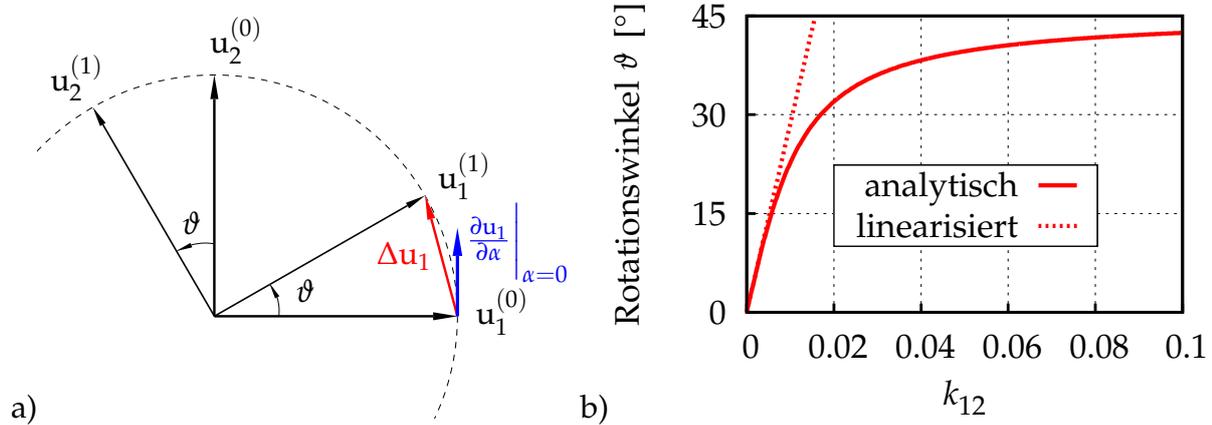


Abb. 5.1: (a) Rotation der Eigenvektoren im selben Unterraum. (b) Darstellung des Rotationswinkels ϑ als Funktion des Kopplungsterms k_{12} ($\delta = 10^{-2}$), jeweils die analytische Lösung aus Gl. 5.7 und die Linearisierung in Gl. 5.9.

Der Rotationswinkel ϑ , in Abb. 5.1a dargestellt, kann maximal 45° betragen. Unter Annahme einer kleiner Variation der Steifigkeitsmatrix und Vernachlässigung der höheren Termen [82] lässt sich der Nennfaktor ζ in Abhängigkeit vom relativen Eigenwertabstand δ und vom Kopplungsterm k_{12} berechnen:

$$\zeta = \frac{(\delta + 1)k_{12}}{\delta + \sqrt{k_{12}^2 + \delta^2}} \quad (5.7)$$

Die Variation des Drehwinkels mit dem Verstimmungsbetrag bzw. dem Kopplungsterm k_{12} zeigt Abb. 5.1b. Da die Steigung der Kurve im nominalen Zustand maximal ist, wirkt sich die Verstimmung in der Nennkonfiguration am stärksten aus. Diese Sensitivität des Rotationswinkels in der Nennkonfiguration kann als eine Anfälligkeit zur Verstimmung gesehen werden, da sie beschreibt, wie schnell die Eigenvektorenrotation mit zunehmender Verstimmung erfolgen wird.

5.1.4.2 Lokale Betrachtung

Die Berechnung des Rotationswinkels macht die Lösung des verstimmtten Eigenwertproblems erforderlich. Ist die Nennkonfiguration bekannt, kann der Rotationswinkel in Termen der nominalen dynamischen Größen und der Steifigkeitsvariation bewertet werden, ohne das Eigenwertproblem des verstimmtten Zustands zu lösen. Im konkreten Fall des E-Moduls liegt die Größenordnung von 1% über der in der Praxis zu erwartenden maximalen Grenze. Die Verstimmungsbeträge für die folgenden Untersuchungen werden in Folge als klein angenommen. Da die Steigung des Rotationswinkels in der Nennkonfiguration maximal und konstant ist, können die Kenngrößen linearisiert werden.

In der Nennkonfiguration ist keine Verstimmung vorhanden. Daraus folgt für den Verstimmungsparameter:

$$\alpha^{(0)} = 0 \quad (5.8)$$

Gemäß Gl. 5.1 ist die Differenz des ersten Eigenvektors $\Delta \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1^{(1)} - \mathbf{u}_1^{(0)}$:

$$\Delta \mathbf{u}_1 \approx \left. \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \alpha^{(1)} = \frac{\mathbf{u}_2^{(0)\top} \left. \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} \mathbf{u}_1^{(0)}}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}} \alpha^{(1)} \mathbf{u}_2^{(0)} = \frac{\Delta \hat{K}_{12}}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_1^{(0)}} \mathbf{u}_2^{(0)} = X_{12} \mathbf{u}_2^{(0)}$$

nahezu parallel zu $\mathbf{u}_2^{(0)}$, wie es in Abb. 5.1a für kleine Winkel zu beobachten ist. Ihr Betrag entspricht dem außerhalb der Hauptdiagonale befindlichen Term der Matrix \mathbf{X} von Gl. 2.39 und wächst proportional zum Verstimmungsgrad $\alpha^{(1)}$. Er entspricht in etwa dem Rotationswinkel für kleine Werte des Kopplungsterms bzw. kleine Verstimmungsbeträge und kann in der Umgebung des nominalen Zustands linearisiert werden (siehe Abb. 5.1b):

$$\|\Delta \mathbf{u}_1\|_2 \approx \tan \vartheta \approx \vartheta \approx \frac{k_{12}}{2\delta} \quad (5.9)$$

5.1.5 Erweiterung auf mehrere Moden

Sind mehr als zwei Moden an der Interaktion beteiligt, erfolgt die Rotation *out-of-plane*. Der Winkel $\vartheta = (\mathbf{u}_i^{(0)}, \mathbf{u}_i^{(1)})$ beschreibt die Rotation des nominalen Eigenvektors $\mathbf{u}_i^{(0)}$ zu seinem entsprechend verstimmtten Eigenvektor $\mathbf{u}_i^{(1)}$ und steht in Beziehung zu den Projektionskomponenten der nominalen Basis:

$$\tan \vartheta = \sqrt{\frac{\sum_{k \neq i}^N C_{ki}^2}{C_{ii}^2}} = \sqrt{\frac{1}{C_{ii}^2} - 1} \quad (5.10)$$

Die lokale Eigenvektorendifferenz lässt sich auf einen reduzierten Satz von R Eigenvektoren erweitern, unter Verwendung vom SNM-Reduktionsverfahren von YANG UND GRIFFIN [83]. Der linearisierte Rotationswinkel beschreibt nun die Rotation in allen Richtungen und wird mit der l^2 -Norm der Eigenvektorendifferenz geschrieben. Zwecks zukünftiger Minimierung wird das Kopplungskriterium χ folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u}_i &\approx \sum_{k \neq i}^R \frac{\Delta \hat{K}_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \mathbf{u}_k^{(0)} \\ \chi = \vartheta^2 &\approx \|\Delta \mathbf{u}_i\|_2^2 \approx \sum_{k \neq i}^R \left(\frac{\Delta \hat{K}_{ik}}{\lambda_k^{(0)} - \lambda_i^{(0)}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.1.6 Zusammenfassung

Im Rahmen dieses Abschnitts wurden zwei getrennte Zustände definiert. In der Nennkonfiguration ist die Struktur nicht verstimmt und alle Schwingungsformen sind entkoppelt. Nach der Einführung einer Fehlordnung in die dynamische Struktur kommt es zu einer Modenkopplung, die mit Hilfe des entworfenen Kopplungskriteriums bewertet wird. Der Übergang wird mit Hilfe des variablen Parameters Verstimmungsbetrag beschrieben.

Die Linearisierung der Kenngrößen in der Nähe der Nennkonfiguration basiert auf der Annahme kleiner Verstimmungen. Für diesen Fall wird die Anfälligkeit der dynamischen Struktur zur modalen Interaktion mit dem linearisierten Rotationswinkel bewertet.

5.2 Modellbildung

Eine Messersonotrode besteht aus mehreren Segmenten, die miteinander gekoppelt sind. Um die Verzerrung der Längsmode zu korrigieren, wird die Sonotrode in geometrisch möglichst identische Segmente der Breite nach geschlitzt. Die Breite der Segmente soll typischerweise ein Viertel der longitudinalen Wellenlänge nicht überschreiten [27].

Im folgenden Abschnitt werden die N Segmente der Sonotrode in der normalen Konfiguration zunächst mit identischer Geometrie ausgelegt. Die Modellierung erfolgt dann als eine N -Mal wiederholte Struktur, die jedoch nicht zyklisch ist, da keine Kopplung der äußeren Segmente vorhanden ist.

Wie in den vorhergehenden Abschnitten gezeigt, weisen die Lokalisierung einer periodischen Struktur und die Degeneration der Längsmode eines Ultraschallschwingers die gleiche Eigenvektorrotation auf. Darüber hinaus sind beide über den gleichen Kopplungsmechanismus eng miteinander verbunden. Die vervielfachten Einzelschwinger der Sonotrodensegmente werden in ähnlicher Weise wie die bekannten zyklischen Strukturen (z.B. Schaufelkränze in Turbomaschinen) als Kette von Schwingern modelliert. Die Kopplung zwischen zwei benachbarten Einzelschwingern wird mit Hilfe einer zusätzlichen Feder nachgebildet. Da die untersuchte Messersonotrode keine zyklische Struktur aufweist, sondern die seitlichen Ende frei sind, wird eine dieser Kopplungsfedern entfernt. Dadurch ändern sich die dynamischen Eigenschaften signifikant. Dies wird im Folgenden genauer untersucht. Das Modell mit fünf gekoppelten Feder-Massen-Schwingern gemäß Abb. 5.2 ohne die blaue Kopplungsfeder (bzw. $k_c = 0$) repräsentiert eine charakteristische Messersonotrode mit fünf Segmenten.

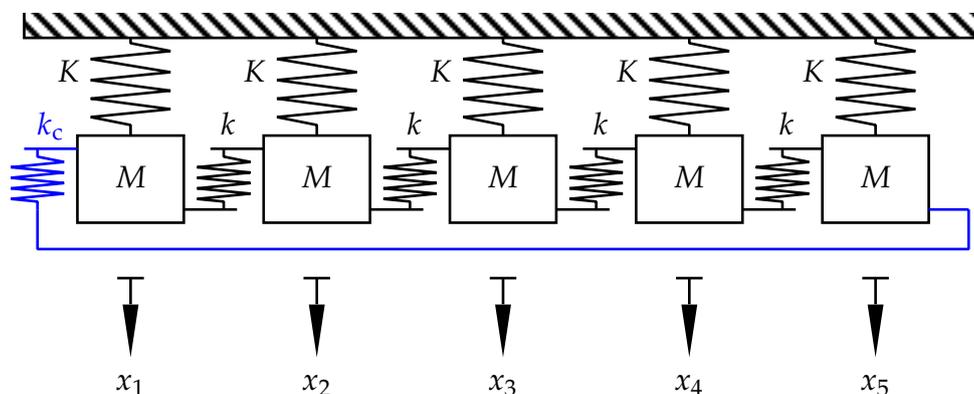


Abb. 5.2: Ersatzmodell einer Struktur mit fünf identischen Substrukturen.

5.2.1 Zyklische Struktur

Das Ersatzmodell ist zunächst zyklisch aufgebaut, d.h. der Fall $k_c = k$ wird betrachtet. Die N einzelnen Massen sind jeweils über eine Feder mit der Federsteifigkeit K mit einer unbeweglichen Platte und zugleich über eine weitere Kopplungsfeder k mit ihren Nachbarmassen verbunden. Alle Feder-Masse Substrukturen haben für sich betrachtet die gleichen Eigenschaften ¹.

Die Eigenformen werden anhand der Anzahl von Knotendurchmessern n_{ND} bzw. Nulldurchgänge bezeichnet. Die Mode ohne Knotendurchmesser ($n_{ND} = 0$) und die Mode mit $n_{ND} = \frac{N}{2}$ (nur im Fall einer gerade Anzahl von Substrukturen vorhanden), treten mit einfachen Eigenwerten auf. Alle anderen Moden gehören paarweise zu den sogenannten *Doppeleigenmoden*, da ihre Eigenwerte doppelt auftreten. Die zugehörigen Eigenvektoren sind beliebig in ihrem Vektorraum drehbar. Eine Herleitung findet man z.B. in PANNING [65]. Für diese Untersuchung werden die Eigenvektoren in Abb. 5.3a so dargestellt, dass sie jeweils eine symmetrische und antisymmetrische Bewegung bezüglich der Mitte von Abb. 5.3a aufweisen.

5.2.2 Verlust der zyklischen Symmetrie

Um den Verlust der zyklischen Symmetrie nachzustellen, wird die Steifigkeit der Kopplungsfeder k_c auf 1% von k reduziert. Mit abnehmender Steifigkeit dieser Kopplungsfeder trennen sich alle Doppelmoden in eine symmetrische Mode und eine antisymmetrische Mode, wie in Abb. 5.3b erkennbar ist.

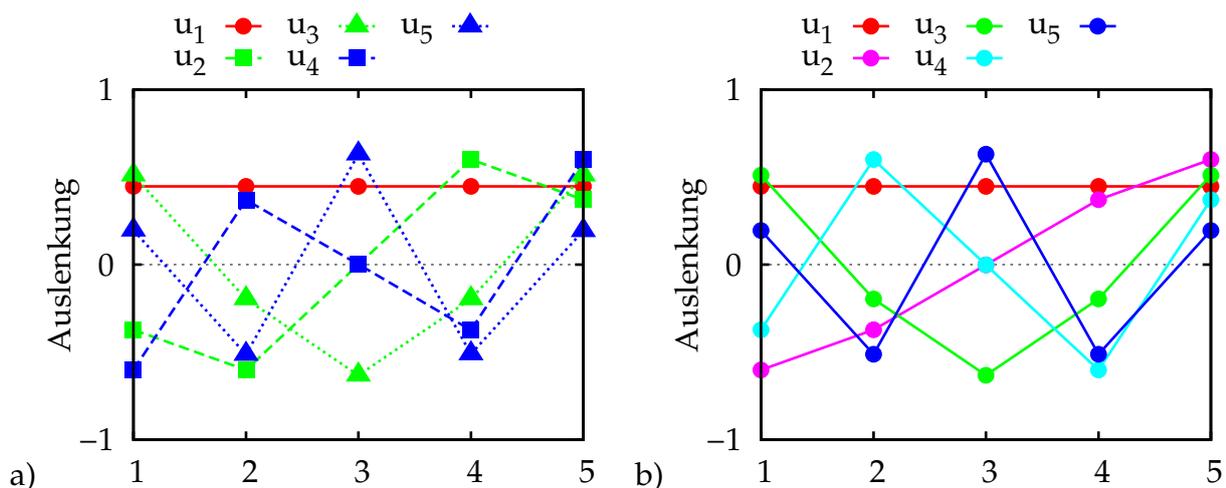


Abb. 5.3: Darstellung der Eigenvektoren des Ersatzmodells: (a) zyklische Struktur, (b) nach Entfernung der Kopplungsfeder k_c .

¹Die zyklischen Systeme mit periodisch angeordneten Substrukturen werden in Abschnitt 8.3 des Anhangs beschrieben.

- Die symmetrischen Moden bleiben vom Wegfall der Kopplungsfeder unbeeinflusst.
- Im Unterschied dazu weisen die antisymmetrischen Moden eine starke Veränderung ihrer Eigenformen auf und ihre Eigenwerte nehmen in Abhängigkeit der Kopplungsfeder k_c gemäß Abb. 5.4 ab.

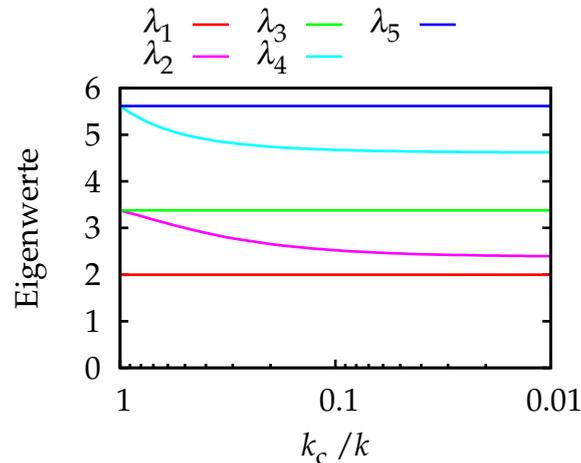


Abb. 5.4: Abhängigkeit der Eigenwerte von der Steifigkeit der Kopplungsfeder k_c .

5.2.2.1 Zusammenfassung

Der zyklische Aufbau erlaubt nur eine gerade Anzahl von Nulldurchgängen. Geht die zyklische Symmetrie durch die Entfernung der Kopplungsfeder k_c verloren, wird eine der beiden Doppelmoden in die fehlende ungerade Ordnung verschoben und bildet eine antisymmetrische Eigenform. Mit diesem Effekt geht das Absinken der zugehörigen Eigenfrequenz einher. Die dynamischen Eigenschaften der symmetrischen Eigenformen bleiben im Unterschied dazu unverändert.

5.3 Modale Analyse eines elementaren Schwingers

Das Modell einer Schwingerkette stellt die Hauptunterschiede zwischen einer zyklischen Ankopplung von identischen Substrukturen und einem aus wiederholten Segmenten bestehenden Ultraschallschwinger heraus. Für die Beschreibung der modalen Degeneration wird ein komplexeres zweidimensionales FE-Modell ohne Ankopplung eines piezoelektrischen Wandlers untersucht. Die modalen Eigenschaften werden in Abhängigkeit des geometrischen Seitenverhältnisses und der Symmetrieeigenschaften bestimmt.

5.3.1 Modellaufbau

Eine einfache Blocksonotrode ohne Amplitudenübersetzung wird durch das nachfolgende zweidimensionale FE-Modell beschrieben. Der in Abb. 5.5 dargestellte Schwinger besteht aus fünf identischen Segmenten, die in den oberen und unteren Enden miteinander gekoppelt sind. Aus Vereinfachungsgründen ist eine Symmetrierandbedingung in der horizontalen Mittellinie definiert und die Schlitz sind rechteckig modelliert.

- Die Höhe des Schwingers (gemessen in der longitudinalen Richtung entlang der Y-Achse) wird auf eine Referenzfrequenz der longitudinalen Moden abgestimmt und konstant gehalten.
- Die Breite des Schwingers bildet im Unterschied dazu den variablen Parameter. Alle Maße in der X-Richtung ändern sich proportional zur Änderung der Breite (u.a. Segment- und Schlitzbreiten).

Für eine symmetrische Vernetzung in Ansys kommen insgesamt 2880 vierknotige Elemente PLANE182 zur Anwendung, davon sind 210 Elemente über die gesamte Breite verteilt. Die erzeugten Systemmatrizen besitzen ca. 6000 Freiheitsgrade. Es wird von isotropen Materialeigenschaften ausgegangen, die näherungsweise mit denen von Titan übereinstimmen (E-Modul 120 GPa, Querkontraktionszahl 0.3 und Dichte 4400 kg/m^3).

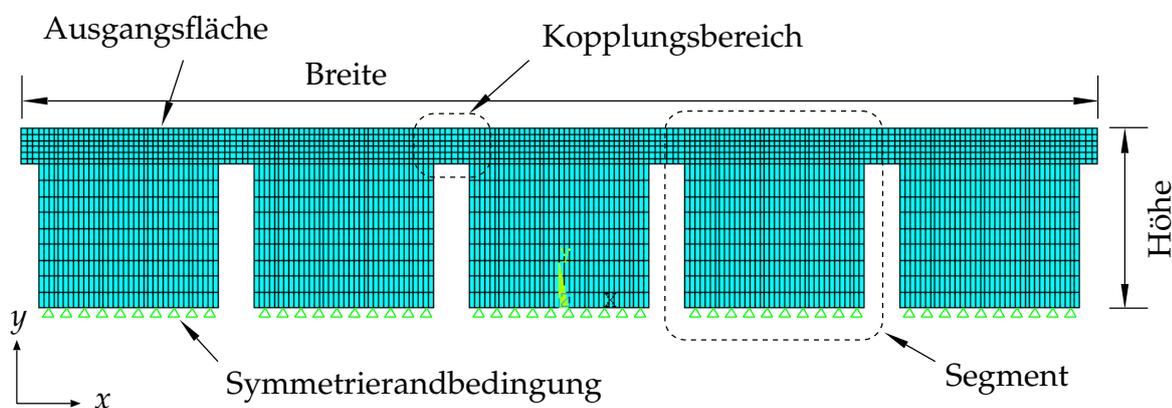


Abb. 5.5: Geometrie des elementaren Schwingers mit fünf Segmenten.

5.3.2 Frequenzkurven

Für die numerische Berechnung in Ansys wurde die Höhe des Schwingers so angepasst, dass die Frequenz der ersten longitudinalen Schwingmode die Ultraschallfrequenz 20 kHz erreicht. Die Wellenlänge λ_0 beträgt in Abhängigkeit von der Schallgeschwindigkeit des modellierten Materials ca. 303 mm. Sie dient als Bezugsmaß für alle geometrischen Größen. Die Gesamtbreite des Schwingers wird schrittweise von $0.6 \cdot \lambda_0$ bis $1.4 \cdot \lambda_0$ vergrößert. Bei jeder Stufe wird eine Modalanalyse durchgeführt.

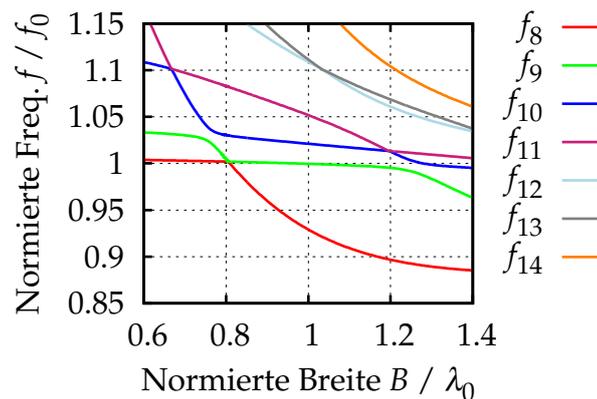


Abb. 5.6: Frequenzkurven des elementaren Schwingers.

Abb. 5.6 zeigt die auf die Referenzfrequenz (Frequenz der Längsmode) normierten Eigenfrequenzen 8 bis 14 als Funktion der Breite des Schwingers. Die normierte Darstellung der Frequenzen beschränkt sich auf die Moden, deren Eigenfrequenz innerhalb $\pm 15\%$ der Referenzfrequenz liegt.

Es wird festgelegt, dass die Eigenvektoren und Eigenwerte aufsteigend aufgezählt werden, während als Mode ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge immer eine charakteristische Schwingungsform bezeichnet wird (z.B. eine Verschiebungsrichtung, Anzahl von Knoten, ...). Aufgrund der konstant gehaltenen Höhe des Schwingers bildet die Frequenzkurve der Längsmode nahezu eine Horizontale bei 1. Die anderen Frequenzkurven gehören zu anderen Biege- und Schermoden. Darüber hinaus zeigen sich einige Frequenzkollisionen bzw. -Abdringungen, die durch die komplexe Geometrie hervorgerufen sind.

5.3.2.1 Definition der Modensymmetrie

Im Folgenden werden die Moden bezüglich ihrer Symmetrieeigenschaften klassifiziert. Mit der Definition der Symmetrierandbedingung entlang der horizontalen Knotenebene gelten stets die folgenden Beziehungen zwischen den Verschiebungsanteilen:

$$\begin{aligned} u_x(x, -y) &= u_x(x, y) \\ u_y(x, -y) &= u_y(x, y) \end{aligned}$$

Anhand ihrer Verschiebung bezüglich der longitudinalen Hauptrichtung Y lassen sich alle Moden aufgrund der Bauform des Schwingers in zwei Symmetrieklassen untergliedern:

- Die Moden mit einer symmetrischen Verschiebung bezüglich der Hauptrichtung werden als *symmetrisch* bezeichnet, wie u.a. die Längsmode in Abb. 5.7a. Sie weisen eine dazu antisymmetrische Verschiebung in Querrichtung (X) auf:

$$\begin{aligned}u_x(-x, y) &= -u_x(x, y) \\ u_y(-x, y) &= u_y(x, y)\end{aligned}$$

- Die *antisymmetrischen* Moden weisen im Unterschied dazu eine antisymmetrische Verschiebung bezüglich der Hauptrichtung und eine symmetrische Verschiebung bezüglich der anderen Richtung auf (siehe z.B. die Eigenform in Abb. 5.7b):

$$\begin{aligned}u_x(-x, y) &= u_x(x, y) \\ u_y(-x, y) &= -u_y(x, y)\end{aligned}$$

5.3.2.2 Schnittbereiche

Wie in Abb. 5.6 erkennbar, sind mehrere Schnittpunkte zwischen den Frequenzen vorhanden. U.a. bei der normierten Breite 0.8 tauscht die symmetrische Betriebsmode mit einer antisymmetrischen Mode (Eigenformen 8 und 9) abrupt sowohl ihre Frequenzkurven als auch ihre Eigenformen aus. Die in Abb. 5.7 dargestellten Eigenformen zeigen keine geometrische Änderung in der Nähe des Frequenzschnittpunkts. Dadurch werden die Symmetrieeigenschaften der Betriebsmode und der anderen Mode vor und nach dem Übergang völlig aufgehoben. In Übereinstimmung mit [28] führt die Kreuzung einer symmetrischen Mode und einer antisymmetrischen Mode immer zu einem Schnittpunkt, wenn die Struktur symmetrische Eigenschaften besitzt.

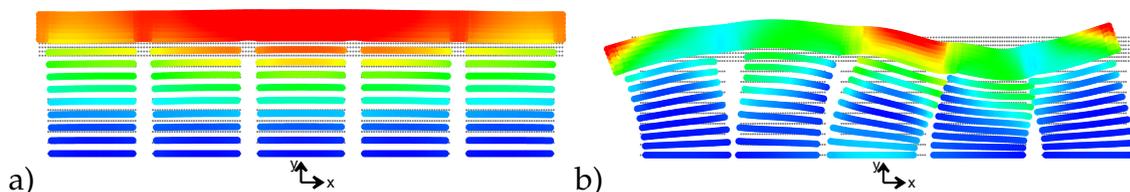


Abb. 5.7: Eigenformen 8 (a) und 9 (b) bei der normierten Breite 0.8021.

5.3.2.3 Abdrehungsbereiche

Im Gegenteil dazu zeigen die Frequenzkurven 9 und 10 zwei Abdrehungsbereiche, jeweils bei den normierten Breiten ca. 0.75 und 1.25. Die erste Abdrehung betrifft die Degeneration zweier antisymmetrischer Moden, während sich die zweite als eine Rotation zwischen der Betriebsmode und einer anderen symmetrischen Mode herausstellt.

- Vor dem Abdrehungsbereich ($B < 1.254 \cdot \lambda_0$) ist die Betriebsmode vom 9. Eigenvektor repräsentiert. Mit zunehmender Breite wird sie kontinuierlich immer mehr vom 10. Eigenvektor übernommen.
- Bei der Schwingerbreite $1.254 \cdot \lambda_0$ ist der Frequenzabstand zwischen den Eigenwerten 9 und 10 am kleinsten. Die degenerierten Eigenformen der beiden symmetrischen Moden zeigt Abb. 5.8. Die longitudinale Mode ist völlig degeneriert und damit nicht mehr erkennbar.
- Nach dem Abdrehungsbereich ($B > 1.254 \cdot \lambda_0$) ist die Betriebsmode fast nur noch im 10. Eigenvektor zu finden.

Solche Abdrehungsbereiche stellen kritische Zonen für die Auslegung von Ultraschall-schwingern dar, da die Form der gewünschten Längsmode auf jede kleine Änderung reagiert.

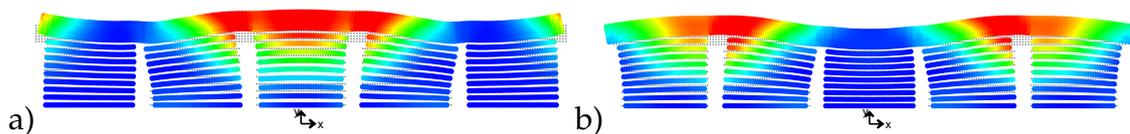


Abb. 5.8: Eigenformen 9 (a) und 10 (b) bei der normierten Breite 1.254.

5.3.2.4 Zuordnung Eigenvektoren / Moden

Aufgrund der modalen Degeneration können die Eigenvektoren nicht immer eindeutig zu den jeweiligen Moden zugeordnet werden. Dies muss vor und nach dem Übergangsbereich erfolgen. Im Abdrehungsbereich ist jedoch keine Zuweisung möglich, da der Austausch übergangslos erfolgt. Bei kurzen Schwingerbreiten wird die Längsmode durch den Eigenvektor 8 repräsentiert und ab der Schwingerbreite $0.8 \cdot \lambda_0$ vom 9. Eigenvektor übernommen. Zwischen den normierten Breiten 1.2 und 1.3 ist die Längsmode degeneriert und auf die Eigenvektoren 9 und 10 aufgeteilt. Nach dem Abdrehungsbereich wird die Längsmode dem Eigenvektor 10 zugeordnet.

5.3.2.5 Zusammenfassung

Anhand der Modalanalyse eines elementaren symmetrischen FE-Modells erfolgt die Bestimmung der Eigenfrequenzen als Funktion der Breite des Schwingers. Nähern sich zwei Eigenfrequenzen einander an, sind sowohl Kollisions- als auch Abdrehungsbereiche vorhanden. Die Kollision findet zwischen Moden mit entgegengesetzten Symmetrieeigenschaften (symmetrisch–antisymmetrisch) statt, die in diesem Fall abrupt ihre Eigenformen tauschen. Im Unterschied dazu treten Abdrehungsbereiche zwischen Moden mit identischen Symmetrieeigenschaften (symmetrisch–symmetrisch oder antisymmetrisch–antisymmetrisch). Eine solche Degeneration der Längsmode erschwert die Auslegung von Ultraschwingern. Im nächsten Abschnitt wird dieser permanente Abdrehungseffekt im symmetrischen Fall genauer untersucht.

5.3.3 Einführung einer Verstimmung

5.3.3.1 Verstimmung des E-Moduls

Analog zu 3.2 wird eine Verstimmung der Materialeigenschaften des FE-Modells eingeführt. In der Praxis kann sich eine Materialheterogenität als Steifigkeits- oder als Dichtenvariation innerhalb der Struktur zeigen. In einem ersten Schritt wird nur der E-Modul ortsabhängig gemacht, um die Normierungsmatrix konstant zu halten. Die Ortsabhängigkeit ist dabei als lineare Änderung entlang der Schwingerbreite angenommen, zentriert in der Mitte des Schwingers. Die maximalen Abweichungen ergeben sich jeweils an den äußeren Enden der Struktur. Der Betrag der Ortsabhängigkeit α_E ist auf 1% pro Längeneinheit $\frac{\lambda_0}{2}$ festgelegt. Dadurch wird die in Abb. 5.9 dargestellte Verstimmung jeweils an den Enden des Schwingers ($x = \pm \frac{B}{2}$) erreicht, der Maximalwert beträgt $v_{\max} = \alpha_E \frac{B}{\lambda_0}$. Aus den Materialdaten resultiert eine Schallgeschwindigkeit von 6060 m/s in longitudinaler Richtung¹. 1% Abweichung im E-Modul entspricht in diesem Fall einer Änderung der Schallgeschwindigkeit von 30 m/s. Abweichungen dieser Größenordnung finden sich auch praktisch bei der Fertigung breiter Sonotroden.

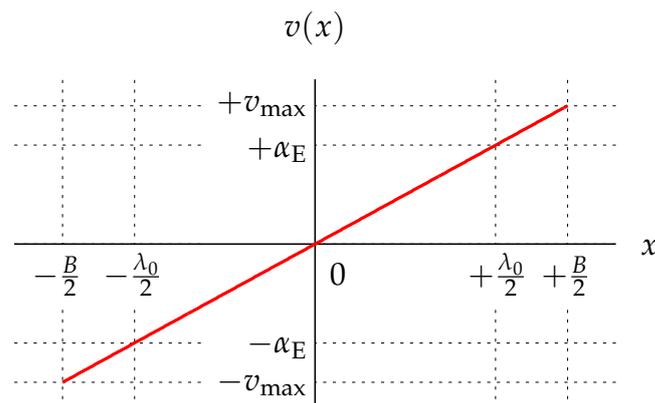


Abb. 5.9: Darstellung der Verstimmung über der Schwingerbreite.

Die Modellierung eines raumabhängigen E-Moduls erfolgt in Ansys durch die Definition einer großen Anzahl von Abschnitten über der Schwingerbreite (200 im vorliegenden Fall). Der E-Modul kann dann als Produkt eines nominalen Werts E_0 und einer raumabhängigen Verstimmungsfunktion $1 + v(x)$ beschrieben werden:

$$E(x) = E_0 \left(1 + v(x) \right) \quad \text{mit} \quad v(x) = 2\alpha_E \frac{x}{\lambda_0} \quad (5.12)$$

Durch die zugrunde gelegte Asymmetrie im Material treten nun Abdrehbereiche an den Stellen auf, an denen vorher Frequenzen kollidiert sind. Besonders bei der Breite $0.8 \cdot \lambda_0$ zeigen die Frequenzkurven in Abb. 5.10 eine Abdrehung zwischen den Eigenfrequenzen 8 und 9.

¹Entsprechend Gl. 8.36 im Anhang.

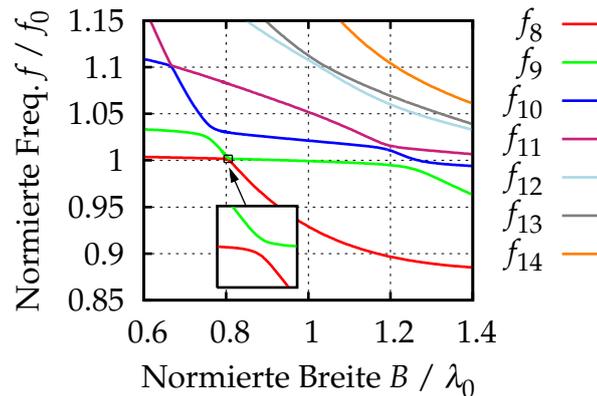


Abb. 5.10: Frequenzkurven, verstimmtter E-Modul.

Der Fokus wird nun auf der kritischen Schwingerbreite $0.8021 \cdot \lambda_0$ in der Nähe der maximalen Krümmung der Frequenzkurven gesetzt. Beide Eigenformen 8 und 9 erfahren gemäß Abb. 5.11 eine Rotation, die zur Degeneration der Längsmode und der antisymmetrischen Mode führt. Die verstimmtten Eigenvektoren sind nun weder symmetrisch noch antisymmetrisch, da alle Symmetrieeigenschaften verlorengegangen sind.

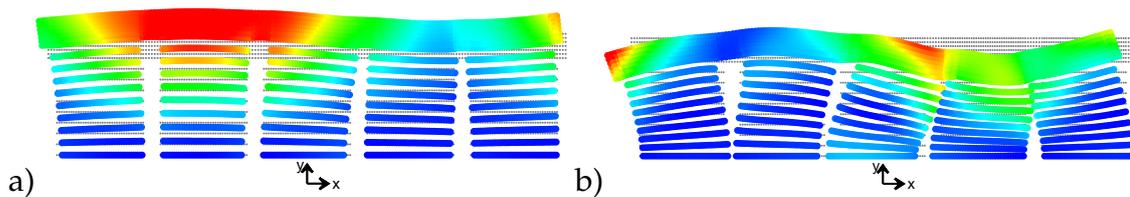


Abb. 5.11: Degenerierte Eigenformen 8 (a) und 9 (b) bei der normierten Breite 0.8021, nach Verstimmung des E-Moduls.

Eigenvektorenrotation

Die Projektion der verstimmtten Eigenvektoren in die Basis der unverstimmtten Eigenvektoren ergibt gemäß Gl. 5.3 die Beteiligungsfaktoren der Transformationsmatrix \mathbf{C} . Ihre Quadrate führen auf die in Gl. 5.4 beschriebenen NCO-Koeffizienten. Die tabellarische Darstellung der NCO-Faktoren in Abb. 5.12 bei der kritischen Breite $0.8021 \cdot \lambda_0$ zeigt die Verteilung der Projektion der verstimmtten Eigenvektoren $\mathbf{U}^{(1)}$ auf die originalen Eigenvektoren $\mathbf{U}^{(0)}$ für eine Basis von 15 Moden. Die Reihenindizes beziehen sich in diesem Fall auf die originale Referenzbasis (mit den unverstimmtten Eigenvektoren). Die Spaltenindizes beziehen sich dagegen auf die zu projizierende Basis (mit den verstimmtten Eigenvektoren). Aus Abb. 5.12 kann entnommen werden, dass die Rotation nahezu im von den Eigenvektoren 8 und 9 gebildeten Unterraum erfolgt. Der Rotationswinkel ϑ des 8. Eigenvektors beträgt ca. 21° (siehe Gl. 5.10).

Die Summe der NCO-Terme entlang der Spalten und Reihen beträgt Eins für den reduzierten Satz der 15 ersten Eigenvektoren. In Übereinstimmung mit der SNM-Methode [83], lassen sich die verstimmtten Eigenvektoren in diesem Fall mit einem kleinen Satz von nominalen Eigenvektoren beschreiben.

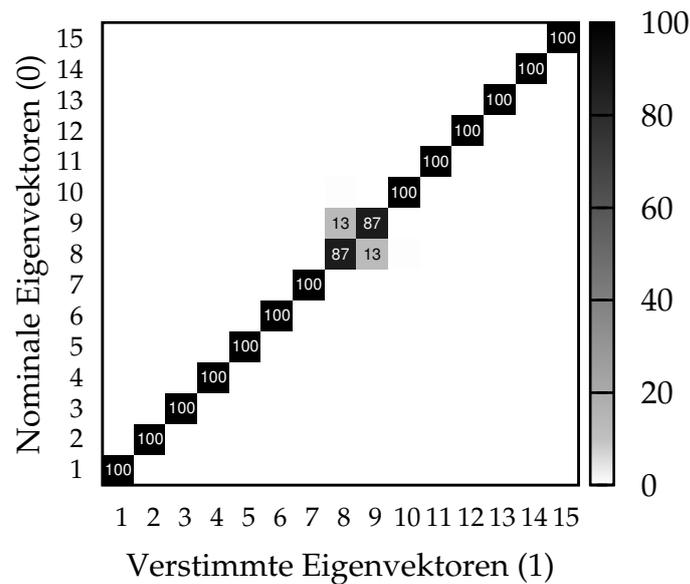


Abb. 5.12: Zerlegung der verstimmten Eigenvektoren in der Basis der nominalen Eigenvektoren ($\cdot 10^{-2}$), berechnet bei der Breite $0.8021 \cdot \lambda_0$

Modale Kopplungen

Die modalen Kopplungen aus Gl. 5.2 zwischen dem Eigenvektor 8 der Längsmode und allen anderen Eigenvektoren sind berechenbar. Da keine Massenvariation vorhanden ist, ist die Matrix der modalen Kopplungen \mathbf{D} symmetrisch. Die Auflistung der modalen Kopplungen $D_{8,n}$ in Tab. 5.2 sowie die Darstellung der Eigenformen in Abb. 5.13 deuten darauf hin, dass eine Kopplung durch diesen Verstimmungstyp ausschließlich zwischen antisymmetrischen und symmetrischen Moden erfolgen kann. Da der Wert $D_{8,8}$ keine Information über den Eigenvektorensensitivitäten verrät (siehe Abschnitt 2.5.1), wird er in der Auflistung absichtlich nicht angezeigt. Mit dem Eigenvektor 9 der antisymmetrischen Störmode beträgt die modale Kopplung $D_{8,9} = 25.0 \cdot 10^6 \text{ N/m}$. Sie ist zusammen mit dem geringen Frequenzabstand für die erhebliche Drehung verantwortlich. Im Gegenteil dazu ist der Abstand zwischen den Eigenwerten λ_8 und λ_{10} ausreichend, um eine Rotation in Richtung des 10. Eigenvektors zu vermeiden, trotz einer hohen modalen Kopplung $D_{8,10} = 60.1 \cdot 10^6 \text{ N/m}$.

Eigenvektor n	$D_{8,n} (\cdot 10^6)$	Eigenvektor n	$D_{8,n} (\cdot 10^6)$
1	0	9	25.0
2	0	10	60.1
3	0.22	11	0
4	0	12	5.49
5	0.31	13	0
6	16.3	14	0
7	0	15	0.15

Tab. 5.2: Modale Kopplungen (N/m) zwischen dem 8. und den anderen Eigenvektoren, berechnet bei der Breite $0.8021 \cdot \lambda_0$.

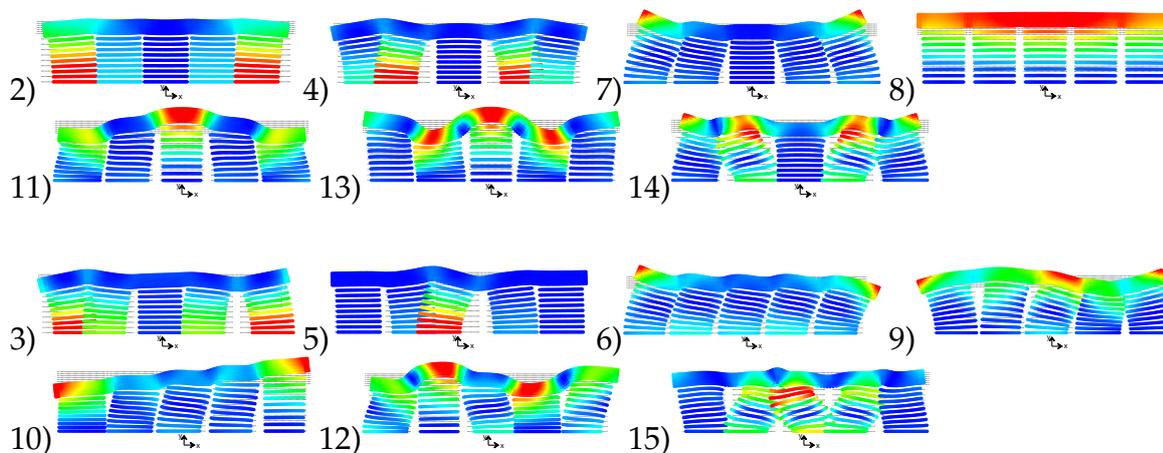


Abb. 5.13: Eigenformen berechnet für die normierte Breite 0.8021 ({2,4,7,8,11,13,14}: symmetrische Moden, {3,5,6,9,10,12,15}: antisymmetrische Moden).

Einfluss der Verstimmungsverteilung

In einem nächsten Schritt erfolgt der Vergleich des Einflusses verschiedener Verstimmungsverteilungen auf die modale Kopplung $D_{8,9}$ in der aktuellen kritischen Breite des elementaren Schwingers. Zu diesem Zweck sind alle Verstimmungsprofile $v(x)$ bezüglich einer Referenzmenge zu skalieren, die als die bisherige lineare Verteilung festgelegt wurde (siehe Abb. 5.9 und Gl. 5.12), so dass:

$$\int_{-B/2}^{+B/2} |v(x)| dx = 2 \int_{-B/2}^{+B/2} \left| \alpha_E \frac{x}{\lambda_0} \right| dx = \frac{B^2}{2\lambda_0} \alpha_E \quad (5.13)$$

Die in Abb. 5.14 dargestellten Verteilungen haben u.a. lineare, stufenförmige und sinusförmige Verläufe. Abgesehen von den Verteilungen 2 und 4 sind sie alle antisymmetrisch bezüglich der mittleren vertikalen Ebene. Die resultierenden modalen Kopplungen finden sich in Tab. 5.3 aufgelistet. Die Verteilung 6 mit dem sinusförmigen Verlauf zeigt die bei weitem größte modale Kopplung. Daraus folgt, dass sich bei dieser Verteilung im Vergleich zur linearen Verteilung eine nahezu doppelte so große Neigung zur Rotation der Eigenvektoren ergibt, obwohl dieselbe Verstimmungsmenge zugrunde gelegt ist.

Verteilung	1	2	3	4	5	6
$D_{8,9}$	25.0	25.0	25.9	32.5	32.5	42.8
$D_{8,8}$	0	-57.7	0	-61.5	0	0
$D_{9,9}$	0	-56.8	0	-61.8	0	0

Tab. 5.3: Einfluss der verschiedenen Verteilungen auf die modale Kopplung ($\cdot 10^6$ N/m) zwischen den Eigenvektoren 8 und 9, berechnet bei der normierten Breite 0.8021.

Die Verstimmungsprofile 1:2 und 4:5 weisen paarweise den gleichen Kopplungswert $D_{8,9}$ auf, da sie denselben antisymmetrischen Anteil besitzen. Der symmetrische Anteil der Verteilungen hat keine Auswirkung auf die gegenseitige Kopplung der beiden Eigen-

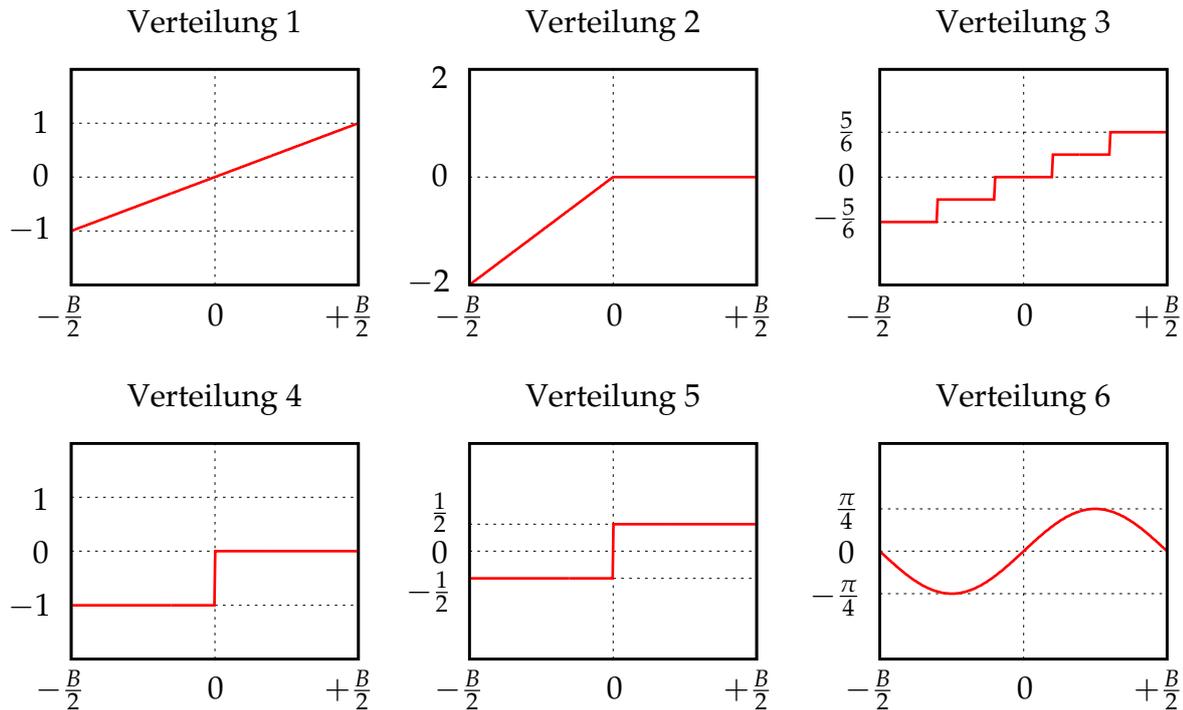


Abb. 5.14: Darstellung der verschiedenen Verstimmungsverteilungen (%).

vektoren. Ein Einfluss ist nur auf die Diagonalterme der Matrix der modalen Kopplung gegeben. In Übereinstimmung mit [29], sind die Terme außerhalb der Diagonale für die Drehung der Eigenvektoren verantwortlich, wohingegen die Änderung der Eigenwerte durch die Diagonalterme hervorgerufen wird.

In der Praxis ist die Verteilung der Verstimmung selten bekannt. Für diesen konkreten Fall hat das sinusförmige Profil unter den sechs untersuchten Verteilungen die größte modale Kopplung gezeigt. Diese qualitative Voruntersuchung legt die Vermutung nahe, dass die größte Kopplung erreicht wird, wenn die Verteilung in etwa der longitudinalen Auslenkung der Störmode entspricht.

Analyse der antisymmetrischen Verstimmungsverteilung

Die modale Kopplung zwischen dem symmetrischen Eigenvektor u der Längsmode und dem antisymmetrischen Eigenvektor einer Störmode v lässt sich für diese Steifigkeitsvariation in vier richtungsabhängige Terme zerlegen:

$$D_{u,v} = \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{u}_x^T \Delta \mathbf{K}_{xx} \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_x^T \Delta \mathbf{K}_{xy} \mathbf{v}_y + \mathbf{u}_y^T \Delta \mathbf{K}_{xy} \mathbf{v}_x + \mathbf{u}_y^T \Delta \mathbf{K}_{yy} \mathbf{v}_y \quad (5.14)$$

Dabei werden die Eigenvektoren u und v anhand der Richtung x bzw. y ihrer Freiheitsgrade in zwei Untervektoren und die Steifigkeitsvariation in vier Matrizen aufgeteilt. Die Querbewegung der Längsmode ist vernachlässigbar, die richtungsgemischten Terme von $\Delta \mathbf{K}$ sind klein in Vergleich zu den anderen Termen (bei dieser Art von Verstimmung).

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} u_{x_i} &\approx 0 \\ \Delta K_{xy_{ij}} &\ll \Delta K_{xx_{ij}} \\ \Delta K_{xy_{ij}} &\ll \Delta K_{yy_{ij}} \end{aligned}$$

In dieser Untersuchung überwiegt der letzte Summand in Gl. 5.14 bei der Berechnung der modalen Kopplung. Daraus resultiert, dass die Gewichtung der Y-Freiheitsgrade des zweiten Eigenvektors v_y mit der Steifigkeitsvariation ΔK_{yy} einen großen Einfluss auf die modale Kopplung hat. Diese Feststellung wird mit einer Monte-Carlo Simulation (MCS) numerisch überprüft, indem eine sehr hohe Anzahl von zufälligen Verstimmungsprofilen generiert werden.

Monte-Carlo Simulation

Für die Generierung der zufälligen Verteilungen kommt die Methode von SHINOZUKA ET AL. [15] zur Anwendung, die im Abschnitt 2.6.3 präsentiert wird. Die halbe Schwin- gerbreite ist als Korrelationsabstand festgelegt. Die Generierung der Zufallsvariablen k_i , die gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $g(k)$ verteilt sind, erfolgt durch eine Interpolation der entsprechenden kumulativen Verteilungsfunktion [42].

In einem zweiten Schritt werden die erhaltenen Profile von ihren Mittelwert abgezogen und auf denselben Verstimmungsbetrag wie die lineare Verteilung skaliert. In Summe werden tausend Verteilungsfunktionen generiert, die zugehörigen modalen Kopplungen zeigt Abb. 5.15a. Die Verstimmungsprofile, die zu den minimalen und maximalen Kopp- lungswerten führen, sind in Abb. 5.15b als blaue und rote Verläufe dargestellt. Die nahezu perfekt symmetrischen und antisymmetrischen Verläufe bestätigen, dass eine symmetri- sche Verteilung nicht zu einer Kopplung zwischen den Eigenvektoren 8 und 9 führen kann. Darüber hinaus zeigt das rote Profil die größte Anfälligkeit zur Degeneration und entspricht nahezu der longitudinalen Auslenkung der Schweißkante bei der Störmode.

5.3.3.2 Einführung einer Verstimmung der Dichte

Im Unterschied zum E-Modul, der an den Steifigkeitstermen beteiligt ist, bildet sich die Materialdichte nur in der Massenmatrix ab. Wie schon zuvor wird die Variation der Ma- terialdichte ebenfalls linear mit dem Betrag $\alpha_\rho = 1\%$ pro Wellenlänge angenommen. Die Schallgeschwindigkeit beträgt dabei dann 6060 ± 30 m/s. Die Frequenzkurven sind in Abb. 5.16a dargestellt. Sie weist die gleichen Merkmale wie im Fall der Verstimmung des E-Moduls auf.

Laut Abb. 5.16b hat die Dichtenverstimmung qualitativ die gleiche Auswirkung auf die Abdehnung der Eigenfrequenzen 8 und 9. Die modale Kopplung $D_{8,9}$ beträgt $23.7 \cdot 10^6$ N/m bei der Breite $0.8021 \cdot \lambda_0$ und liegt somit in der gleichen Größenordnung wie die

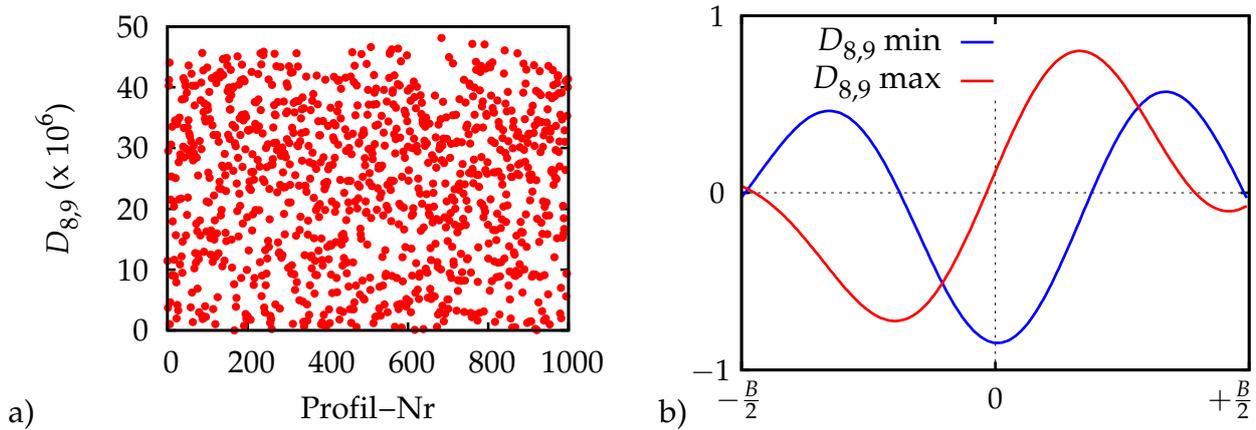


Abb. 5.15: Aus der MCS berechnete Verteilungen der Verstimmung: (a) Berechnung der 1000 Punkte, (b) Verstimmungsverteilungen (%), die zur minimalen und maximalen modalen Kopplungen führen.

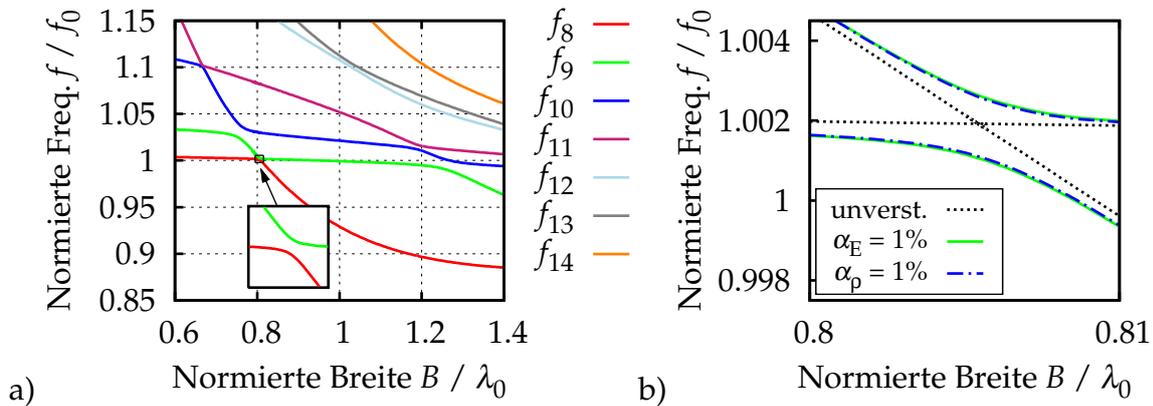


Abb. 5.16: (a) Frequenzkurven des Schwingers mit heterogener Dichte. (b) Vergleich der beiden Materialverstimmungen (E-Modul und Dichte).

Verstimmung des E-Moduls. Dies lässt sich im mathematischen Ausdruck für die modale Kopplung und die Schallgeschwindigkeit nachvollziehen, da beiden Größen in Verhältnis E/ρ in der Wellengleichung enthalten sind.

5.3.3.3 Einführung einer geometrischen Verstimmung

Die geometrische Verstimmung resultiert für gewöhnlich aus einer Änderung der nominalen Geometrie. Sie ist zumeist unerwünscht und kann z.B. durch Fertigungsungenauigkeiten hervorgerufen sein. Im Unterschied dazu kann die geometrische Asymmetrie absichtlich eingeführt werden, wie etwa beim longitudinalen Wandler, um einen Torsionsanteil zu erzielen. In diesem Fall bestimmt die geometrische Verstimmung die Exzentrizität Δx der Schlitzes und der seitlichen Abfräsungen in der Querrichtung X :

$$\Delta x = \alpha_G B \quad (5.15)$$

wobei α_G der Verstimmpungsparameter und B die Schwingerbreite sind. Für die Frequenzkurven in Abb. 5.18a wird der Verstimmpungsbetrag auf $\alpha_G = 1\%$ festgelegt.

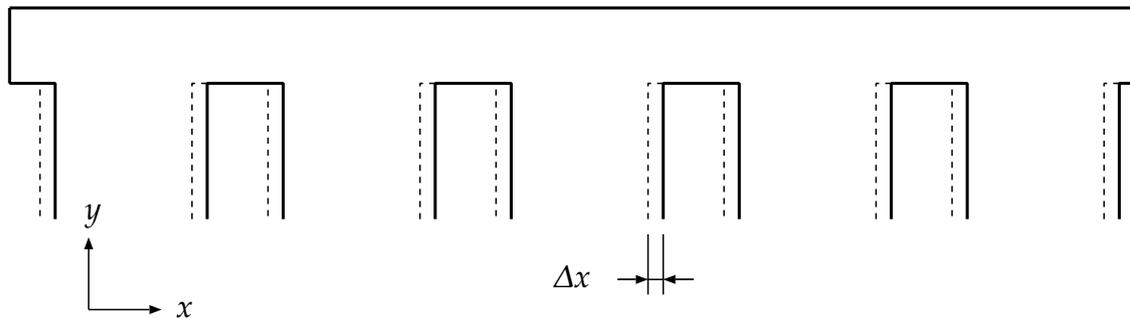


Abb. 5.17: Darstellung der definierten Exzentrizität.

Die Auswirkung der geometrischen Fertigungstoleranzen auf die Frequenzabdringung wird qualitativ mit der der Materialverstimmpung verglichen. Die geometrische Verstimmpung definiert das konstante Exzentrizitätsmaß Δx als der Versatz in der X-Richtung:

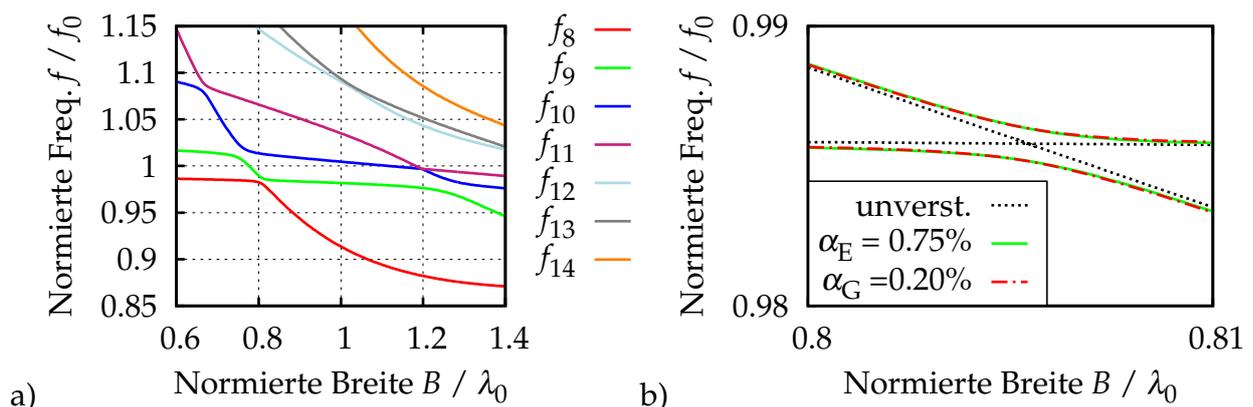


Abb. 5.18: (a) Frequenzloci der geometrisch verstimmpen Geometrie. (b) Vergleich der Frequenzloci der Verstimmpung des E-Moduls und der geometrischen Verstimmpungen.

Aus Abb. 5.18a geht hervor, dass sich die geometrische Verstimmpung in den Frequenzkurven in gleicher Weise wie die materialbedingte Verstimmpung auswirkt. Da sich die definierten Verstimmpungsbeträge α auf verschiedene Kenngrößen beziehen, weisen die Frequenzkurven der beiden Verstimmpungstypen unterschiedlich große Abdringungsbe-
reiche auf.

Die Berechnung des Kopplungskriteriums aus zwei weit entfernten Verstimmpungszuständen ($\alpha^{(0)} = 0$ und $\alpha^{(1)}$) ist aufgrund der nicht konstanten Ableitung über den Verstimmpungsparameter ungenau. Aus diesem Grund wird für diesen Verstimmpungstyp auf die Berechnung der modalen Kopplung verzichtet.

Der Einfluss der geometrischen Fertigungstoleranzen wird numerisch für den speziellen Fall eines 20 kHz Schwingers abgeschätzt. Die kritische Breite beträgt hierbei $0.8 \cdot \lambda_0$ d.h. ca. 244 mm. Das größte Fertigungsmaß ist die halbe Schwingerbreite, die von der vertikalen Mittellinie bis zur äußersten Kante bemaßt wird. Nach DIN ist dieses Maß mit

0.5 mm toleriert. Gemäß Gl. 5.15, wird die geometrische Verstimmlung mit einem konstanten Versatz in X-Richtung definiert, der dem Verstimmungsbetrag ($\alpha_G^{(1)} = 0.2\%$) entspricht.

Die eingeführte Exzentrizität führt gemäß Abb. 5.18b zu einer gleich großen Frequenzabdringung wie eine lineare Verstimmlung des E-Moduls von $\alpha_E = 0.75\%$ pro λ_0 . Auf den 244 mm breiten Schwinger zurückgerechnet, entspricht der geometrische Verstimmungsbetrag von $\alpha_G = 0.6\%$ einer Abweichung der Schallgeschwindigkeit von ± 18 m/s zwischen der linken und der rechten Kante des Schwingers.

5.3.3.4 Zusammenfassung

Es werden gezielt Verstimmlungen der Materialeigenschaften des elementaren Schwingers eingeführt. In einem ersten Schritt wird die Verstimmlung als eine ortsproportionale Variation des E-Moduls entlang der Schwingerbreite festgelegt, um die Massenmatrix konstant zu halten.

- Die Frequenzkurven des verstimmlten Schwingers weist Abdringungsbereiche auf, an denen im Fall eines homogenen Materials Kollisionen und Schnittpunkte der Eigenfrequenzen vorhanden sind. Einer der Abdringungsbereiche betrifft die longitudinale Mode und eine antisymmetrische Störmode, was zur Degeneration beider Moden führt. Die Darstellung der Beteiligungsmatrix zeigt eine Rotation der beiden Eigenvektoren, die in ihrer eigenen Ebene erfolgt.
- Eine modale Kopplung, abhängig von beiden Eigenformen und der festgelegten Verstimmlung, kommt nur zwischen symmetrischen und antisymmetrischen Moden zustande. Diese Aussage wird anhand der Untersuchung anderer Verstimmlungsverteilungen bestätigt.
- Zwischen den Modenpaaren mit gegenseitigen Symmetrieeigenschaften trägt nur der antisymmetrische Anteil der Verstimmlungsverteilung zu der Kopplung bei.
- Speziell bei der Interaktion zwischen der longitudinalen Mode und einer antisymmetrischen Störmode erzeugt eine Verstimmlungsverteilung, die nahezu bis zur Auslenkung der Störmode in der Längsrichtung reicht, die größte modale Kopplung. Das Ergebnis wurde in einem weiteren Schritt mit einer Monte-Carlo Simulation bestätigt.

Danach wurde eine Verstimmlung gleichen Betrags hinsichtlich der Materialdichte definiert, was zu einer nahezu identischen Kopplung führte. Zuletzt erfolgte die Simulation einer geometrischen Verstimmlung (unter Voraussetzung homogener Materialdaten) und zwar als eine zur Schwingerbreite proportionalen Exzentrizität der Schlitze und seitlichen Absätze. Bewegt sich diese Exzentrizität innerhalb der DIN-Toleranz ($< 0.2\%$ der Schwingerbreite) bei dem beispielhaft betrachteten Schwinger (20 kHz 244 mm breit), so ergeben sich qualitativ die gleichen Auswirkungen wie eine ortsproportionale Verstimmlung des E-Moduls von 0.6% entlang der Schwingerbreite.

5.3.4 Untersuchung der Randverstimmung

Im Fall einer Verstimmung der Materialeigenschaften oder einer geometrischen Verstimmung sind diese Abdrehungsbereiche die Indikatoren einer Modendegeneration. Wie die durchgeführten Untersuchungen gezeigt haben, ist dafür immer eine Verstimmung erforderlich. Dem Abschnitt 5.3.2.3 ist zu entnehmen, dass die Frequenzkurven des elementaren Schwingers auch Abdrehungsbereiche zwischen den Frequenzkurven von Moden mit denselben Symmetrieeigenschaften zeigen (symmetrisch / symmetrisch und antisymmetrisch / antisymmetrisch). Einer dieser kritischen Abdrehungsbereiche betrifft die Längsmode bei der Breite $1.254 \cdot \lambda_0$ (siehe Abb. 5.6). Hier kommt es doch schon bei symmetrischer Geometrie und homogenen Materialeigenschaften zu einer Abdrehung. Die modalen Eigenschaften des elementaren Schwingers bei dieser kritischen Breite deuten darauf hin, dass sogar durch die symmetrische Geometrie eine gewisse Verstimmung hervorgerufen wird (ähnlich der zylindrischen Schalen bei LITTMANN [57]). Die folgende Untersuchung hat diese auf den ersten Blick nicht erkennbare Verstimmung zum Gegenstand.

5.3.4.1 Kopplungsrandbedingung

Im folgenden Abschnitt werden die Freiheitsgrade des freien Endes des linken Segments mit einer Kopplungsrandbedingung zum Ende des rechten Segments versehen. Da alle Segmente identisch aufgebaut sind, besteht der elementare Schwinger nun aus einer unendlich langen und periodischen Geometrie. Die Absätze an beiden Enden des Schwingers bilden somit einen Schlitz, der identisch zu den anderen ist.

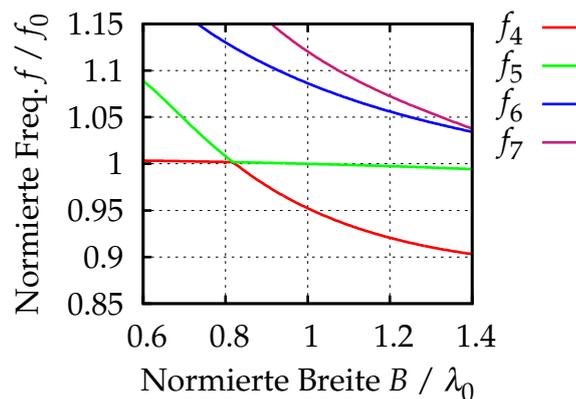


Abb. 5.19: Frequenzkurven des elementaren Schwingers mit Kopplungsrandbedingung.

Wie in Abb. 5.19 erkennbar, sind die problematischen Abdrehungsbereiche aus dem untersuchten Frequenzbereich verschwunden. Das modale Spektrum enthält eine erhebliche Zahl von Doppelmoden, da das System zyklisch ist. Nur wenige Moden, wie longitudinale und Scherenmoden haben die Multiplizität 1. In Abb. 5.20 ist die Längsmode (a) zusammen mit zwei Doppeleigenformen (b) bei der Breite $0.703 \cdot \lambda_0$ dargestellt. Es fällt auf, dass die Längsmode eine ideal gleichmäßige Auslenkung aufweist. Die Doppelmoden besitzen dieselbe Eigenfrequenz. Ihre Eigenformen sind beliebig rotierbar in ihrem

Vektorraum wie bei rotationssymmetrischen Systemen, da keine Vorzugsrichtung existiert. Die beiden um 90° versetzten Eigenvektoren lassen sich als komplexe Darstellung eines einzigen Segmentes beschreiben, welches relativ zu seinen Nachbarn eine definierte Phasenlage hat (siehe Anhang 8.3).

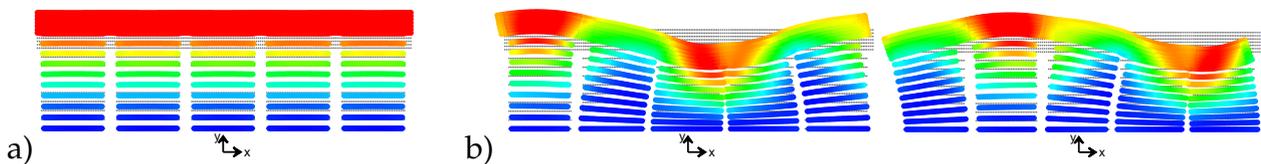


Abb. 5.20: Einfache Eigenform der ersten Längsmode (a) und beide Eigenformen einer Doppelmode (b) des periodischen Schwingers, berechnet bei der Breite $0.703 \cdot \lambda_0$.

- Das periodische System mit theoretisch unendlicher Breite wird in Folge als *ideal* bezeichnet und beschreibt die Nennkonfiguration mit ihrer Basis von nominalen Eigenvektoren. Die Frequenzkurven weisen weniger Abdrehungsbereiche auf, im speziellen verschwindet der kritische Bereich für die Längsmode.
- Im Unterschied dazu bezeichnet der *physikalische* Zustand im Folgenden den realen Schwinger mit der finiten Breite. Einige Abdrehungsbereiche der Eigenfrequenzen sind vorhanden in Abb. 5.6, besonders der kritische Bereich bei $B = 1.254 \cdot \lambda_0$ führt zu einer Degeneration der Längsmode.

Durch Anpassen der Kopplungsrandbedingung wird der Übergang vom idealen zum physikalischen Zustand wie eine Verstimmung dargestellt und soll daher im Rahmen dieser Arbeit als *Randverstimmung* bezeichnet werden.

5.3.4.2 Definition der Kopplungsfeder

Um den Übergang zwischen beiden Zuständen näher zu untersuchen, wird die Kopplungsrandbedingung durch die Definition von steifen Federn zwischen den entsprechenden Knoten der Begrenzungen ersetzt. Die Federsteifigkeit ist so hoch gewählt (10^{13} N/m), dass die resultierenden Eigenformen und Eigenfrequenzen gegenüber dem idealen System nur unwesentlich geändert werden. Die 14 ersten Eigenformen für die Schwingerbreite $0.901 \cdot \lambda_0$ sind in Abb. 5.21 aufgeführt. Die Doppeleigenformen weisen im Unterschied zur konventionellen Kopplungsrandbedingung eine leichte Asymmetrie auf, die auf die endliche Steifigkeit der Kopplungsfeder zurückzuführen ist. Durch die Kopplungsfeder mit $k_c \neq \infty$ geht die zyklische Struktur verloren und es entsteht eine ausgezeichnete Stelle, nämlich genau dort, wo die Kopplungsfeder ist. Dadurch besitzen die Doppelmoden eine symmetrische oder antisymmetrische Auslenkung bezüglich der Schwingrichtung Y . Im folgenden Text werden diese Doppelmoden als *pseudo-symmetrisch* und *pseudo-antisymmetrisch* bezeichnet ¹.

¹Analog zu den zyklischen Strukturen werden die Moden des idealen Schwingers im Anhang Abschnitt 8.4 klassifiziert.

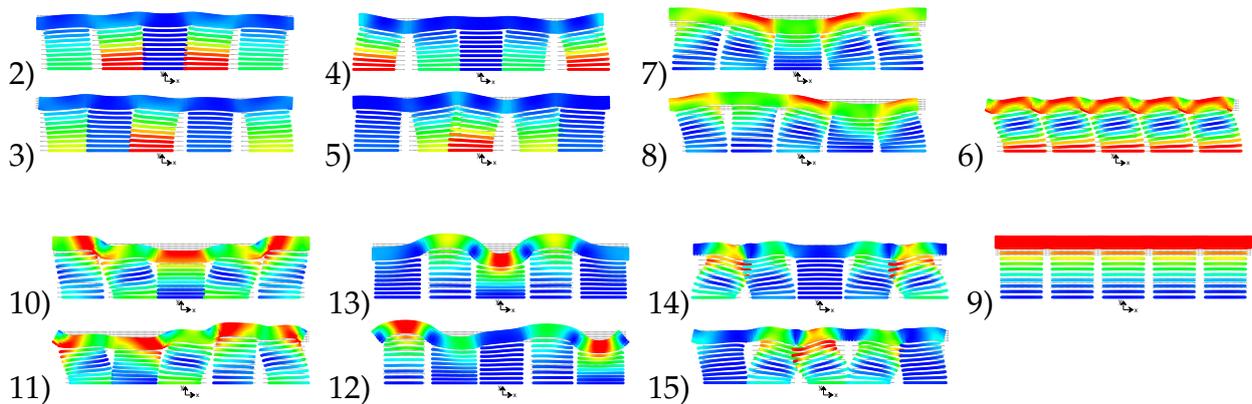


Abb. 5.21: Eigenformen des idealen Schwingers, berechnet für die Breite $0.901 \cdot \lambda_0$ ($\{2,4,7,9,10,13,14\}$: pseudo-symmetrische Moden, $\{3,5,6,8,11,12,15\}$: pseudo-antisymmetrische Moden). Die Doppelpfeigenformen sind spaltenweise angeordnet.

Im zweiten Schritt wird die Steifigkeit der Kopplungsfeder k_c schrittweise bis auf Null reduziert, so dass das Modell wieder dem physikalischen Schwinger entspricht. Die Erweichung der Kopplungsfeder lässt den idealen Schwinger seine periodische Eigenschaft verlieren und ändert seine modalen Eigenschaften drastisch. Der Steifigkeitswert der Kopplungsfeder dient als Verstellparameter der Randverstimmung.

- Die Frequenzkurven sind in Abb. 5.22a in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sich die Doppelmoden mit abnehmender Federsteifigkeit in einfache Moden mit tieferen Eigenfrequenzen aufspalten, jeweils in eine symmetrische und eine antisymmetrische Mode. Im Unterschied dazu bleibt die Eigenfrequenz f_9 der Längsmode konstant.
- Die Eigenformen des idealen und des physikalischen Schwingers können anhand von Abb. 5.21 und Abb. 5.23 verglichen werden. Die Transformationsmatrix zwischen der idealen und der physikalischen Basis von Eigenvektoren (NCO-Koeffizienten) in Abb. 5.22b wird dank der konstanten Massenmatrix wieder mit Hilfe von Gl. 5.3 berechnet. Keine der Moden lässt sich eindeutig zuordnen, mit Ausnahme des 9. Eigenvektors. Die Rotationen erfolgt zwar *out-of-plane* im Raum des kompletten Eigenvektorensatzes, jedoch ausschließlich zwischen den symmetrischen Moden oder zwischen den antisymmetrischen Moden. Die Längsmode des idealen Schwingers wird hauptsächlich vom 9. Eigenvektor des physikalischen Schwingers übernommen, der aber einen Auslenkungsabfall in den äußeren Segmenten aufweist (siehe die 9. Eigenformen in Abb. 5.21 und Abb. 5.23).

Der Frequenzverlauf in Abhängigkeit von der Federsteifigkeit hat einige Ähnlichkeiten mit den Frequenzkurven der untersuchten Schwingerkette in Abb. 5.4. Die Trennung der Doppelmoden in symmetrische und antisymmetrische Moden findet wie im Modell statt. Mit abnehmender Federsteifigkeit werden die Eigenfrequenzen der symmetrischen Moden jedoch zu tieferen Frequenzen verschoben. Im einfachen Modell bleiben Sie im Un-

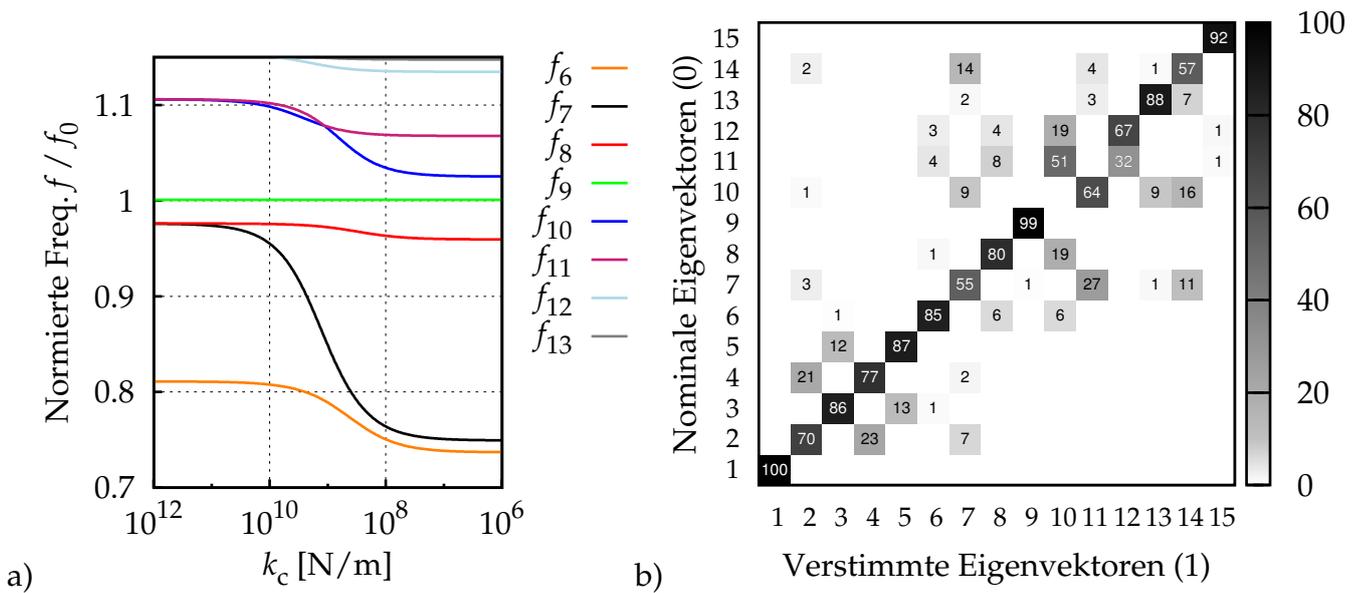


Abb. 5.22: (a) Variation der Kopplungsfeder bei der Breite $0.901 \cdot \lambda_0$. (b) NCO-Faktoren zwischen den physikalischen und den idealen Eigenvektoren ($\cdot 10^{-2}$).

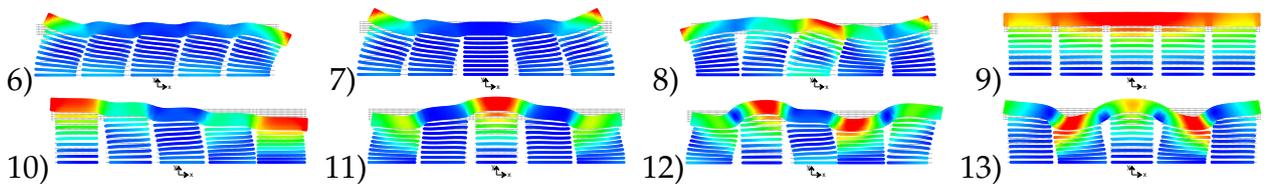


Abb. 5.23: Eigenformen Nr. 6 bis 13 des physikalischen Schwingers, berechnet für die Breite $0.901 \cdot \lambda_0$.

terschied dazu unbeeinflusst. Wie in der Beteiligungsmatrix erkennbar, betrifft die Änderung der symmetrischen Moden auch die Schwingungsformen. Aus diesem Grund verliert der physikalische Schwinger mit zunehmender Breite die Gleichmäßigkeit der longitudinalen Mode, weil diese mehr und mehr von den anderen symmetrischen Moden beeinflusst wird. In Folge wird die longitudinale Mode des physikalischen Schwingers im Unterschied zur perfekten *Längsmode* des idealen Schwingers als die *Betriebsmode* bezeichnet.

5.3.4.3 Abdrehabereich bei der Breite $1.254 \cdot \lambda_0$

Mit der gleichen Vorgehensweise wird eine Kopplungsfeder beim elementaren Schwinger eingeführt. Dies erfolgt bei der kritischen Breite $1.254 \cdot \lambda_0$, bei der der Degenerations-effekt im physikalischen Schwinger am stärksten ist. Wie bereits erwähnt, unterdrückt die Einführung der Kopplungsfeder den Abdrehabereich zwischen den Frequenzen 9 und 10 und damit die Degeneration der Längsmode. In Abb. 5.24 ist die Längsmode (a) des idealen Schwingers neben der stark verzerrten Betriebsmode (b) dargestellt. In diesem Fall wird von einer weicherer Kopplungsfeder ausgegangen.

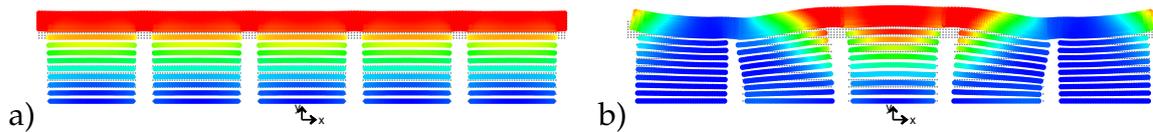


Abb. 5.24: (a) Ideale Längsmode mit der steifen Kopplungsfeder. (b) Physikalische Betriebsmode ohne Kopplungsfeder, berechnet für die Schwingerbreite $1.254 \cdot \lambda_0$.

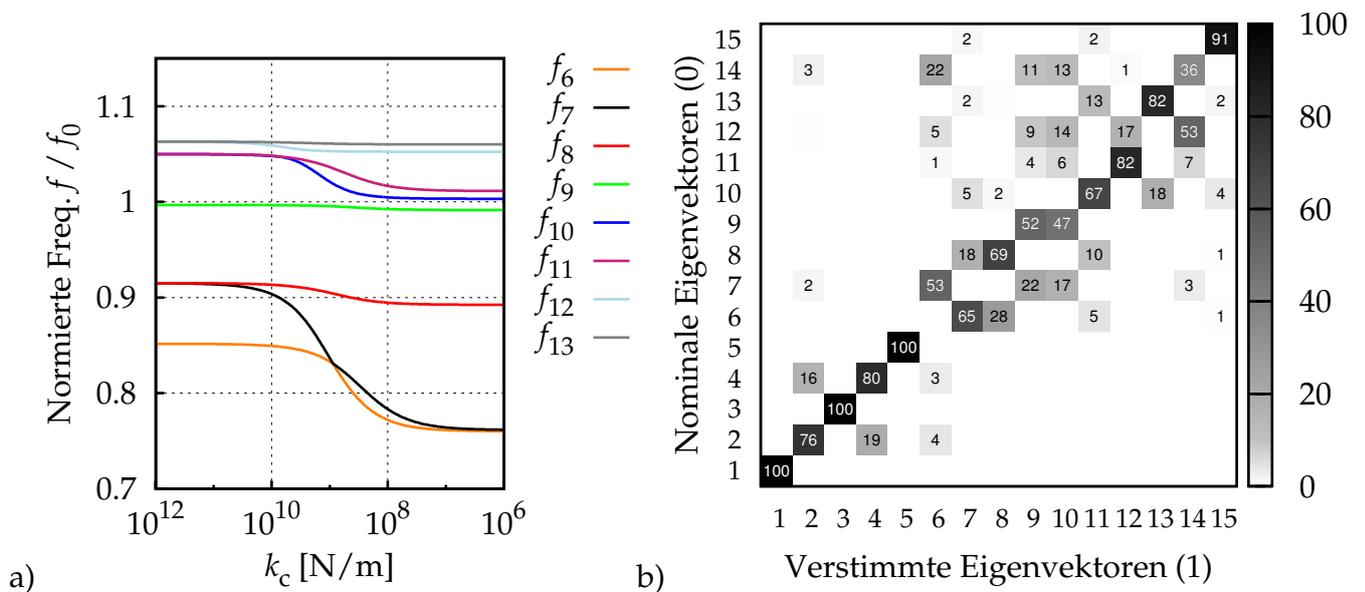


Abb. 5.25: (a) Variation der Kopplungsfeder bei der normierten Breite 1.254. (b) NCO-Faktoren zwischen den physikalischen und den idealen Eigenvektoren ($\cdot 10^{-2}$).

In Abb. 5.25a fällt die Eigenfrequenz f_9 der longitudinalen Mode nun in geringem Maß, da sie von der Frequenz der höher gelegenen symmetrischen Mode f_{10} abgestoßen wird. Ein Blick auf die 9. Zeile der Beteiligungsmatrix in Abb. 5.25b zeigt, dass die ideale Längsmode $u_9^{(0)}$ ausschließlich mit zwei Eigenvektoren ($u_9^{(1)}$ und $u_{10}^{(1)}$) des physikalischen Schwingers verbunden wird.

Bei Vernachlässigung des Anteils der anderen physikalischen Moden bei der Berechnung der Längsmode, wird die 2D-Rotation des Eigenvektors der longitudinalen Mode in der Ebene ($u_9^{(1)}, u_{10}^{(1)}$) beschrieben. Die beiden physikalischen Eigenvektoren können wiederum in einer reduzierten modalen Basis Φ zerlegt werden, bei welcher die ideale Längsmode einen der beiden Basisvektoren bildet. Das Invertieren der 2×2 Transformationsmatrix Γ vom idealen zum physikalischen Zustand führt zum zweiten Zusatzvektor der nominalen Basis in Abb. 5.26:

$$\Phi^{(1)} = \Phi^{(0)}\Gamma \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)} & \varphi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1^{(0)} & \varphi_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Hierin bezeichnet $\varphi_1^{(0)} = u_9^{(0)}$ den Eigenvektor der Längsmode, $\varphi_1^{(1)} = u_9^{(1)}$ und $\varphi_2^{(1)} = u_{10}^{(1)}$ sind die Eigenvektoren der beiden physikalischen Betriebsmoden. Der Zusatzvektor

$\varphi_2^{(0)}$ besteht dann aus der Kombination aller anderen Eigenvektoren der idealen Basis.

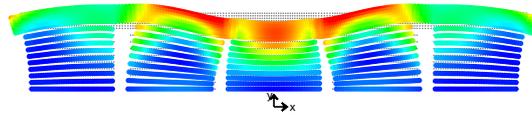


Abb. 5.26: Ermittelter Zusatzvektor $\varphi_2^{(0)}$.

5.3.4.4 Modale Kopplung

Im Vergleich zur konventionellen Kopplungsrandbedingung hat die Einführung der Kopplungsfeder zwischen den äußeren Grenzen den großen Vorteil, dass die Systemmatrizen gleich groß sind und die Berechnung von $\Delta\mathbf{K}$ erlaubt. Mit der Erweichung der Kopplungsfeder k_c bildet die modellierte Randverstimmung eine reine Steifigkeitsvariation. Werden die Freiheitsgrade nach Koordinaten der entsprechenden Knoten angeordnet, befinden sich die durch die Variation der Kopplungsfeder beeinflussten Elemente an den Rändern der Steifigkeitsmatrix:

$$\Delta\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & & \\ & \mathbf{0} & \\ & & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Bei Festlegung der Federsteifigkeit als Variationsparameter ist die Ableitung der Steifigkeitsmatrix wieder eine konstante Matrix, wie im Fall der Variation des E-Moduls. Wird sie im idealen Zustand berechnet, so lässt sich die äquivalente modale Kopplung aus Gl. 5.2 mit dem folgenden Ausdruck schreiben:

$$D_k = \varphi_1^{(0)T} \Delta\mathbf{K}_c \varphi_2^{(0)} \quad (5.18)$$

5.3.4.5 Rotationswinkel und Kopplungskriterium

Im Gegensatz zur materialbedingten Verstimmung und zur geometrischen Verstimmung lassen sich die physikalischen Eigenvektoren hier nur mit dem vollständigen Satz von idealen Eigenvektoren schreiben. Die in Abb. 5.22b und Abb. 5.25b dargestellten Beteiligungsmatrizen werden nur bis 15 Moden berechnet. Die höheren Moden weisen große Beteiligungsfaktoren auf und dürfen in der linearen Kombination nicht vernachlässigt werden. Dieser Sachverhalt wird bei Beachtung der NCO-Faktoren deutlich. Deren Summe bleibt beispielsweise entlang der Zeile 10, 14 oder 15 kleiner eins.

Die Einträge der Verstimmungsmatrix $\Delta\mathbf{K}_c$ sind dem Betrag nach alle größer als die anderen Steifigkeitsterme. Aus diesem Grund gilt die Annahme einer kleinen Verstimmung nicht mehr. Die SNM-Methode ist im Unterschied zu Abschnitt 5.3.3.1 nicht verwendbar, da ein viel größerer Satz nominaler Eigenvektoren erforderlich ist.

Der Aufbau der idealen Basis erfordert das Lösen eines Eigenwertproblems, um die physikalischen Eigenvektoren geeignet zu projizieren. Gehört der l -te Eigenvektor zur idealen Längsmode, wird der b -te Eigenvektor der Betriebsmode mit dem größten Faktor in der l -ten Zeile der Beteiligungsmatrix identifiziert. Somit kann der Rotationswinkel ϑ bzw. sein Tangenswert in Abhängigkeit der Beteiligungsfaktoren als Kopplungskriterium eingeführt werden:

$$\psi = \tan \vartheta = \sqrt{\frac{\sum_{k \neq l}^N C_{kb}^2}{C_{lb}^2}} = \sqrt{\frac{1}{C_{lb}^2} - 1} \quad (5.19)$$

Das Kopplungskriterium ψ wird unabhängig von der Größe der modalen Basis berechnet, da lediglich der Beteiligungsfaktor C_{lb} erforderlich ist.

5.3.4.6 Einfluss der anderen physikalischen Eigenvektoren

Wie im Abschnitt 5.3.4.3 gezeigt, besteht die Längsmode bei der kritischen Breite $1.254 \cdot \lambda_0$ hauptsächlich aus zwei physikalischen Eigenvektoren. Im Unterschied dazu sind Längs- und Betriebsmode des $0.901 \cdot \lambda_0$ breiten Schwingers gemäß NCO-Matrix Abb. 5.22 um 99% identisch. Der Auslenkungsabfall der Betriebsmode (Eigenform Nr. 9 in Abb. 5.23) erweckt den Anschein, dass die kleinen Anteile der anderen idealen Moden trotzdem erkennbar sind. Dies fällt in der NCO-Matrix aufgrund der Quadrierung der Beteiligungsfaktoren nicht auf. In Tab. 5.4a finden sich die fünf in der Längsmode am stärksten beteiligten physikalischen Eigenvektoren aufgelistet. Dabei sind die 7. und 11. physikalischen Eigenformen nahezu gleich schwach vertreten. Im Vergleich dazu zeigt Tab. 5.4a die Beteiligungsfaktoren für die Breite $1.254 \cdot \lambda_0$.

	Phys. b -te EV	Beteiligung $C_{9,b}$		Phys. b -te EV	Beteiligung $C_{9,b}$
a)	9	99.7	b)	9	72.5
	11	5.2		10	68.5
	7	4.9		6	5.4
	14	2.7		14	4.0
	2	1.2		12	1.5

Tab. 5.4: (a) Beteiligungsfaktoren der physikalischen Eigenvektoren in der Längsmode ($\cdot 10^{-2}$) bei der Breite $0.901 \cdot \lambda_0$ (a) und $1.254 \cdot \lambda_0$ (b).

5.3.4.7 Zusammenfassung

Jedem Hersteller von Ultraschallwerkzeugen ist bekannt, dass die Homogenität der Auslenkung der longitudinalen Betriebsmode mit zunehmender Breite des Sonotrode abnimmt. Ab einer bestimmten kritischen Breite degeneriert die ideale Längsmode sogar vollständig. Dies hat zur Folge, dass die Auslegung der Sonotrodegeometrie problema-

tisch ist, da deren modale Eigenschaften nicht robust sind. Durch die Einführung einer steifen Kopplungsfeder zwischen den beiden äußeren Grenzen im Modell lässt sich die ideale Längsmode künstlich erhalten. Die Lösung des Eigenwertproblems dieses idealen Systems liefert eine nominale modale Basis, in welche die physikalischen Eigenvektoren des verstimmten Systems projiziert werden können.

Die Rückführung zum physikalischen Zustand mit Hilfe der Verminderung der Steifigkeit dieser Kopplungsfeder wirkt wie eine Randverstimmung und führt zu einer Modenkopplung zwischen allen symmetrischen Moden und zwischen allen antisymmetrischen Moden.

Für die Degeneration der Längsmode steht nun das Kopplungskriterium in Gl. 5.19 zur Verfügung. Das folgende Kapitel hat zum Ziel, dieses Kriterium durch eine Anpassung der Geometrie zu minimieren. Die Steifigkeitsverstimmung durch die Entfernung der Kopplungsfeder hat einen signifikanten Anteil am Ergebnis. Daher ist die Annahme einer kleinen Verstimmung wie im zuvor beschriebenen Fall der Verstimmung der Materialeigenschaften nicht zulässig. Aus diesem Grund ist das Lösen zweier unterschiedlicher Eigenwertprobleme und die direkte Berechnung des Rotationswinkels erforderlich.

5.4 Optimierung

Im vorherigen Abschnitt wurden zwei kritische Bereiche untersucht, bei welchen die Längsmode eine Degeneration erfährt. Die Einführung einer Verstimmung in die nominale Struktur führt zu einer Frequenzabdrehung und bei den gewünschten Eigenformen des Schwingers lässt sich die Gleichmäßigkeit der Auslenkung der Ausgangsfläche nicht mehr erreichen. Die beiden Material- und Randverstimmungen sind auf völlig unterschiedlichen Kopplungsmechanismen zurückzuführen. Verschiedene, auf der Empfindlichkeit der Eigenvektoren basierende Ansätze werden genutzt, um die modale Interaktion zu bewerten.

Ziel dieses Kapitels ist es, den Ultraschallschwinger durch geeignete Anpassung der Geometrie so auszulegen, dass die Längs- bzw. die Betriebsmode von anderen Moden entkoppelt bleibt. Gemäß den Sensitivitäts- und Störungsrechnungen ist die Verzerrung der Eigenformen unmittelbar vom Verhältnis zwischen den modalen Kopplungen und den Eigenwertenabständen abhängig. Im Folgenden werden drei verschiedene Kopplungskriterien genutzt, um die Rotation des Eigenvektors der Längsmode zu minimieren:

1. Die modale Kopplung D_{ij} , definiert in Gl. 5.2, wird in der Nennkonfiguration zwischen zwei Eigenvektoren betrachtet. Der erste Eigenvektor gehört zur Betriebsmode und der zweite zu einer oder mehreren störenden Nachbarmoden. Somit bleibt das Kopplungskriterium unabhängig vom Eigenwertabstand.
2. Die Eigenvektorendifferenz χ , definiert in Gl. 5.11, berücksichtigt den linearisierten Rotationswinkel des Eigenvektors der Betriebsmode in der Nennkonfiguration. Da-

bei wird die durch die Verstimmung verursachte Rotation in allen Richtungen beschrieben. Dieses Kopplungskriterium ist auf den Fall einer Materialinhomogenität aufgrund der Annahme kleiner Verstimmungsbeiträge beschränkt. Es erfordert die Lösung eines Eigenwertproblems in der Nennkonfiguration.

3. Der Tangens des Rotationswinkels ψ , definiert in Gl. 5.19, beschreibt den Rotationswinkel zwischen der Nennkonfiguration und dem verstimmten Zustand in der gesamten modalen Basis mit Hilfe der Transformationsmatrix. Dabei ist die Annahme eines kleinen Verstimmungsbetrags nicht erforderlich, aber das Eigenwertproblem muss in beiden Zuständen gelöst werden. Dieses Kriterium bietet sich für die Randverstimmung an, da die nominale Basis im Vorfeld ermittelt werden muss.

Zwecks Minimierung der verschiedenen Kopplungskriterien kommen zwei Methoden zur Anwendung:

- Die DOE-Methode (*Design of Experiment*) ist eine bekannte Annäherungsmethode für Versuchspläne, die die Änderung einer Größe auf Basis der Sensitivitätsfaktoren in der Nähe eines Punktes ermittelt.
- Das automatische Minimierungsverfahren (AMV) liefert eine exakte Lösung. Es beruht auf einem dynamisch aufgebauten Modell des Schwingers. Die modalen Größen werden bei jedem Optimierungsschritt berechnet.

Die Kopplungskriterien werden je nach Art der Verstimmung mit einer oder mit beiden Methoden minimiert. Die Nutzung der Methoden für die Minimierung findet sich in Tab. 5.5 zusammengefasst. Im Fall der Materialheterogenität ist die Eingabe einer Verstimmung für die Berechnung der Kopplungskriterien erforderlich. Allen Optimierungen liegt eine lineare Verteilung der Verstimmung entlang der Schwingerbreite mit einem Verstimmungsbetrag von 1 % pro Wellenlänge λ_0 zu Grunde (in Übereinstimmung mit Verstimmung Nr. 1 in Abb. 5.14).

	Kriterium	DOE	AMV
a)	D	×	×
	χ		×
	ψ		

	Kriterium	DOE	AMV
b)	D	×	×
	χ		
	ψ		×

Tab. 5.5: Nutzung der beiden Methoden (DOE und AMV) für die Minimierung der Kopplungskriterien im Fall der materialbedingten Verstimmung (a) und der Randverstimmung (b).

5.4.1 Das *Design Of Experiments* Verfahren (DOE)

FISHER(1935) beschrieb [35] eine Methodik für Experimente, die ursprünglich für landwirtschaftliche Anwendungen gedacht war. Sie liefert die möglichen Interaktionen zwischen mehreren Parametern. Die im Folgenden verwendete Sensitivitätsanalyse bewertet den Einfluss jedes einzelnen Parameters und basiert auf der von FISHER beschriebenen Vorgehensweise.

Die Geometrie des elementaren Schwingers wird anhand von sechs Variablen beschrieben, die in Tab. 5.6 zusammengefasst und in Abb. 5.27 dargestellt sind. Je nach Richtung werden diese Variablen auf die Schwingerbreite oder –länge normiert. Die Sensitivitätsanalyse liefert die lineare Abhängigkeit der Messgröße (hier der modalen Kopplung) innerhalb eines sehr kleinen Variationsbereichs der geometrischen Parameter ($\pm 0.2\%$). Das lineare Gesetz wird danach für größere Änderungen der Parameter extrapoliert. Schließlich wird die Geometrie manuell so angepasst, dass die modale Kopplung verschwindet. Zu diesem Zweck werden im Regelfall die Parameter mit den größten Einflüssen modifiziert.

Parameter	Beschreibung	Nominaler Wert	Normierungsmaß
p_1	Seitliches Übermaß	1/60	Breite B
p_2	Innerer Schlitzabstand	1/12	Breite B
p_3	Äußerer Schlitzabstand	17/60	Breite B
p_4	Innere Schlitzbreite	1/30	Breite B
p_5	Äußere Schlitzbreite	1/30	Breite B
p_6	Schlitzlänge	8/10	Länge L

Tab. 5.6: Übersicht über die Geometrieparameter des elementaren Schwingers.

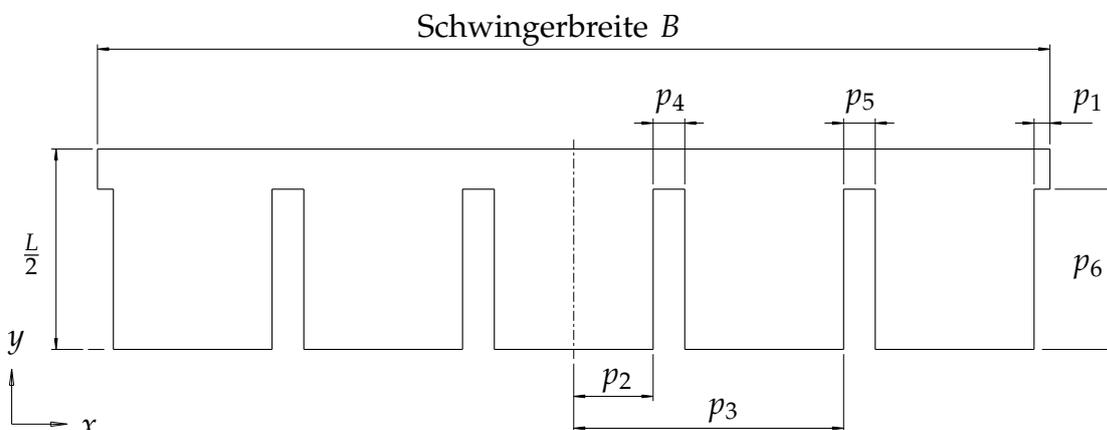


Abb. 5.27: Geometrieparameter des elementaren Schwingers.

5.4.1.1 Ablauf

Bei diesem Verfahren wird die ursprüngliche Schwingergeometrie in einzelne Segmente aufgeteilt, die wiederum gemäß Abb. 5.28 anhand von fünf geometrischen Parametern beschrieben werden: Segmentbreite, rechte Schlitzlänge, linke Schlitzlänge, rechte Schlitzbreite, linke Schlitzbreite. Aufgrund der Symmetrie und der Randbedingungen zwischen Nachbarsegmenten lässt sich die Geometrie des fünfsegmentigen elementaren Schwingers anhand von nur zehn unabhängigen Parametern beschreiben. Diese Zerlegung in Substrukturen hat den großen Vorteil, dass die Anzahl der Segmente variabel ist. An dieser Stelle ist anzumerken, dass die Periodizität der nominalen Geometrie verloren geht, da jedes Segment in unterschiedlicher Weise geändert wird.

5.4.2 Automatisches Minimierungsverfahren (AMV)

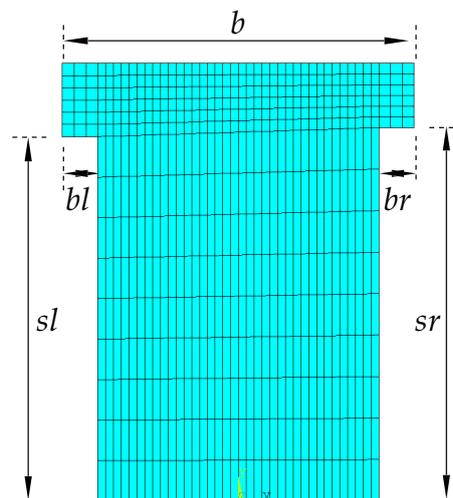


Abb. 5.28: Definition der geometrischen Parameter eines Segmentes.

Für die AMV Methode wird das mathematische Berechnungsprogramm GNU Octave (Open-Source) mit der FEM-Software Ansys gekoppelt. Das Hauptprogramm ist in Octave mit den Startparametern und ihren Variationsbereichen hinterlegt und steuert den Minimierungsablauf. Wie in [43] beschrieben, wird Ansys mit Hilfe eines Skripts (APDL) im *batch mode* im Hintergrund ausgeführt und greift auf die dynamischen Parameter aus einer ASCII-Datei zu. Die Minimierungsroutine optimiert iterativ das Schwingermodell ohne Nutzereingriff so lange, bis die Zielfunktion (hier das Kopplungskriterium) minimal ist oder eine maximale Iterationen erreicht wird. Ihr Ablauf wird in Abb. 5.29 zusammengefasst:

1. Vor der Optimierung werden die Variationsbereiche der Parameter und die Startgeometrie eingegeben.
2. Octave berechnet das im Vorfeld definierte Kopplungskriterium anhand der Startgeometrie. Der Algorithmus legt einen neuen geometrischen Punkt fest und die Pa-

- parameter werden in eine ASCII-Datei exportiert.
3. Das APDL-Skript liest diese Datei ein und modelliert die neue Geometrie. Durch die Abarbeitung der Batchdatei erfolgt der Aufbau der Strukturmatrizen (Steifigkeits- und Massenmatrizen).
 4. Octave importiert die Strukturmatrizen, ordnet sie nach Knotenkoordinaten an und baut sie zusammen, wie später beschrieben.
 5. Nach dem Lösen des Eigenwertproblems wird das Kopplungskriterium berechnet und es erfolgt ein neuer Optimierungsschritt, wenn die Ergebnisse nicht den Anforderungen entsprechen. Ansonsten wird das Endergebnis ausgegeben.

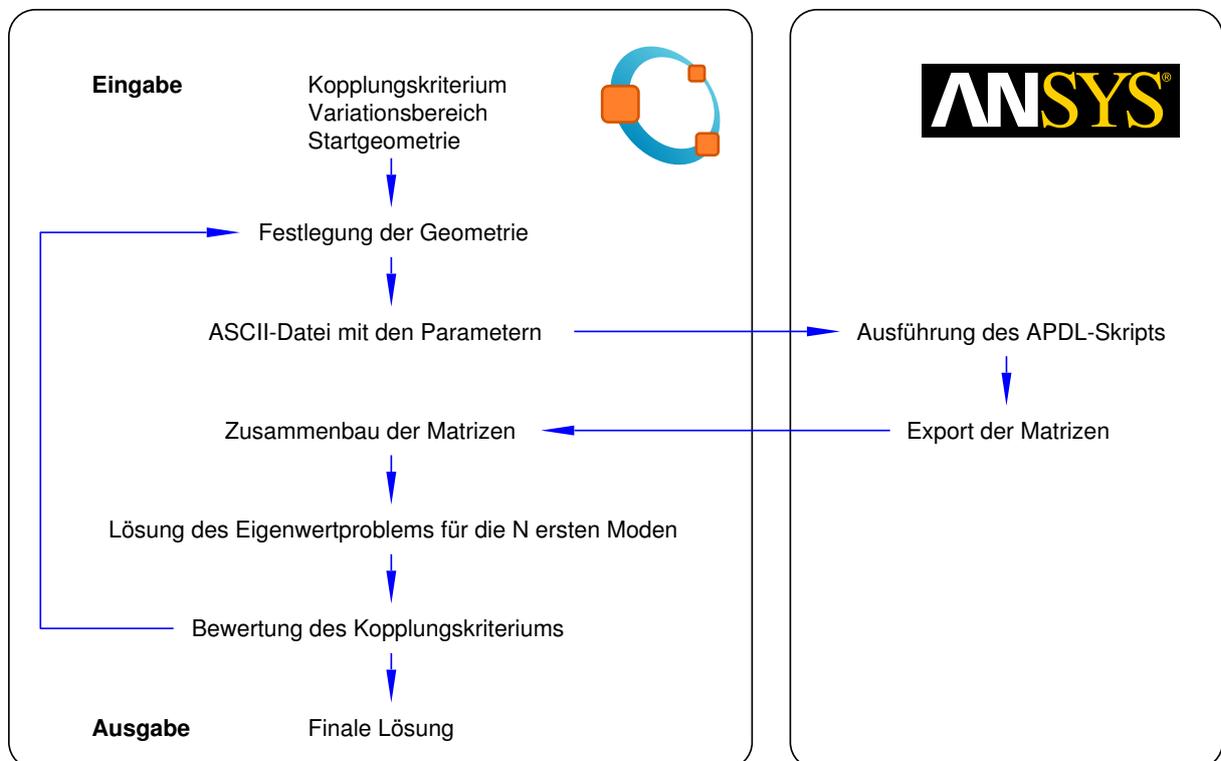


Abb. 5.29: Ablauf der Minimierungsroutine.

Mit Hilfe der Minimierungsfunktion $fmins$ von Octave lässt sich das Minimum einer nicht-linearen Zielfunktion von mehreren Variablen finden. Dabei kommt im Normalfall der *Nelder & Mead Simplex Algorithmus* [40] zur Anwendung. Da $fmins$ keine Begrenzung des Variationsbereichs erlaubt, müssen die Variablen mit einer speziell dafür entwickelten bijektiven Funktion¹ transformiert werden, bevor sie in $fmins$ eingespeist werden. Nach Ausgabe der Lösung, wird das Ergebnis in den ursprünglichen Raum zurücktransformiert.

¹Die Eigenschaften der Funktion Areatangens Hyperbolicus findet sich in Abb. 8.10 im Anhang genauer beschrieben.

Geometrie bereits berechnet. Gemäß Tab. 5.2 beträgt sie $25.0 \cdot 10^6$ N/m. Dieser Abschnitt beschreibt die Minimierung dieser modalen Kopplung unter Verwendung der beiden bereits vorgestellten Verfahren.

5.4.3.1 Minimierung der modalen Kopplung mit der DOE-Methode

Die Berechnungen werden für jede Kombination der minimalen und maximalen Werte der sechs geometrischen Parameter durchgeführt. Die Parameter p_3 und p_6 (Position der äußeren Schlitzes und die Schlitzlänge) haben den bei weitem größten Einfluss¹. Abb. 5.31a zeigt die 2^6 berechneten Werte der modalen Kopplung zusammen mit den theoretischen Werten aus Gl. 5.2. Basierend auf der Visualisierung lässt sich die lineare Interpolation überprüfen, die Stützpunkte sollen möglichst auf einer Gerade liegen.

Basierend auf der Kenntnis der Sensitivitätsfaktoren werden die geometrischen Parameter mit dem größten Einfluss gewählt, um die modale Kopplung verschwinden zu lassen. Werden die Schlitzes verlängert, so ändert sich die relative Lage der beiden Moden und der kritische Bereich verschiebt sich. Um den Einfluss der modalen Kopplung allein unabhängig vom Frequenzabstand herauszuarbeiten, wird der Parameter p_6 (Schlitzlänge) nicht variiert. Im Unterschied dazu erfolgt eine manuelle Anpassung der anderen Parameter². Basierend auf dem sensitivitätsbasierenden linearen Gesetz wird ein Wert von $2.13 \cdot 10^6$ N/m für die resultierende Kopplung erwartet. Die Bestimmung mit Hilfe von Ansys ergibt einen Wert von $9.91 \cdot 10^4$ N/m. Die Eigenformen der so veränderten Geometrie sind in Abb. 5.30 dargestellt, die Stör- und Betriebsmoden haben ihre Eigenvektoren getauscht. Der gewonnene Wert der modalen Kopplung ist günstiger als erwartet. Die gefundenen großen Abweichungen lassen auf einen zu großen Variationsbereich bei den Sensitivitätsfaktoren schließen.

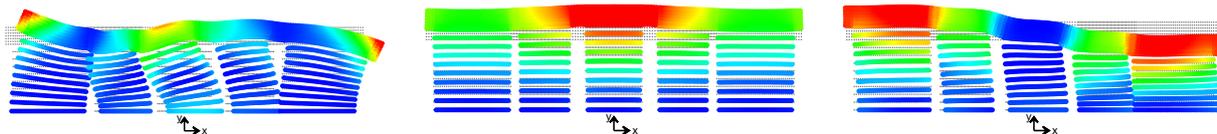


Abb. 5.30: Eigenformen Nr. 8, 9 und 10 der neuen Geometrie, berechnet bei der Schwingbreite $0.8021 \cdot \lambda_0$.

In Abb. 5.31b sind die Frequenzkurven des optimierten Schwingers basierend auf dem heterogenen Material dargestellt. Die Lage des kritischen Bereichs mit geringem Abstand zwischen den 8. und 9. Frequenzen ist nahezu unverändert. Im Unterschied dazu ist die Abdrehung nun fast vollständig unterdrückt. Bei der normierten Breite 0.8021 ist die Längsmode (9. Eigenform) von der Störmode (8. Eigenform) entkoppelt. Dies ist in der NCO-Matrix in Abb. 5.32 zu sehen. Stattdessen ist die Beteiligung des 10. Eigenvektors leicht gestiegen. Dies ist zum größten Teil dem Umstand geschuldet, dass die Störmode durch die erhebliche Änderung der Geometrie ihre longitudinale Bewegung auf die 10. Eigenform übertragen hat.

¹Die ermittelten Sensitivitätsfaktoren sind in Tab. 8.10 im Anhang 8.5 zusammengefasst.

²Die Parameterwerte sind in Tab. 8.11a im Anhang zu finden.

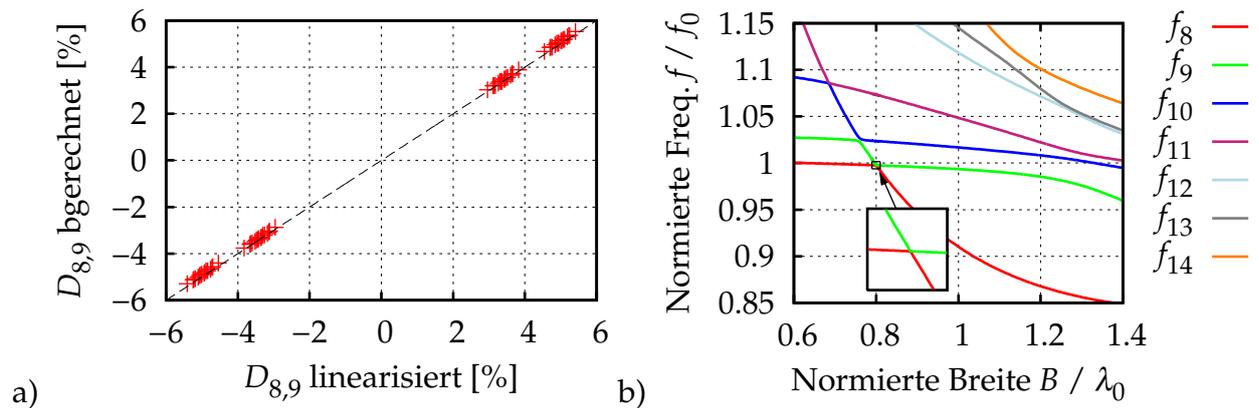


Abb. 5.31: (a) Visuelle Überprüfung der Linearität der DOE-Methode. (b) Frequenzkurven der optimierten Geometrie.

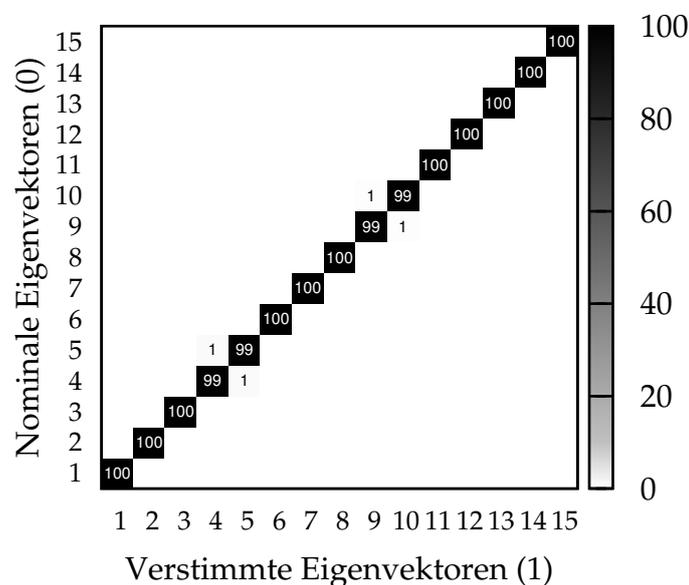


Abb. 5.32: NCO-Faktoren der neuen Geometrie bei der normierten Breite 0.8021.

5.4.3.2 Minimierung der modalen Kopplung mit der AMV-Methode

In Unterschied zur DOE-Methode wird die modale Kopplung jetzt nicht mehr mit linearen Sensitivitätsfaktoren lokal berechnet. Die Geometrie und die modalen Eigenschaften werden stark geändert, die Störmode kann entweder unterhalb oder oberhalb der Betriebsmode liegen. Aus diesem Grund ist zuerst eine Identifikation der Betriebsmode in jedem Optimierungsschritt erforderlich. Dies erfolgt im vorliegenden Fall durch Zählen der Nulldurchgänge der longitudinalen Bewegung entlang der Schweißkante des Schwingers. Aufgrund der veränderlichen Lage der Störmode wird das alternative Minimierungskriterium D^* als die Summe der modalen Kopplungen zwischen der Betriebsmode und den beiden Nachbarvektoren festgelegt:

$$D^* = D_{(b-1),b} + D_{b,(b+1)} \quad (5.22)$$

Hierin bezeichnet das Indiz b den Eigenvektor der Betriebsmode. Einer der beiden in der Summe beteiligten Eigenvektor ist in diesem Fall immer symmetrisch und verursacht keine Kopplung. Die Minimierung der modalen Kopplung ist erfolgreich, die Ergebnisse befinden sich in Tab. 8.12 und Tab. 8.13.

Diese Vorgehensweise bietet keine universelle Lösung zur Minimieren der modalen Degeneration, da keine Berücksichtigung der Kopplung mit den anderen antisymmetrischen Moden erfolgt. Trotz der noch kleineren Kopplung mit der ersten Störmode, hat die Kopplung in die nächste antisymmetrische Mode ebenfalls zugenommen.

5.4.3.3 Minimierung des Eigenvektorenverschiebungsbetrags mit der AMV-Methode

Müssen die Beteiligungen der anderen antisymmetrischen Mode mit berücksichtigt werden, lässt sich das Minimierungskriterium χ als der quadrierte linearisierte Rotationswinkel in Gl. 5.11 als Zielfunktion schreiben. Die Optimierung erfolgt für zwei unterschiedlichen Parameterbereiche, die als eng und breit bezeichnet werden¹. Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Lösungen:

- Die Minimierung im engen Parameterbereich führt zur Lösung Nr. 1 in Abb. 5.33. Die geometrischen Parameter werden innerhalb vom festgelegten Parameterraum gefunden und der resultierende Rotationswinkel beträgt 3.7° .
- Für den breiten Parameterbereich wird die Lösung Nr. 2 in Abb. 5.34 generiert. Der Lösungspunkt befindet sich zwar an der Grenze des festgelegten Parameterbereichs, der erzielte Rotationswinkel ist jedoch viel kleiner als bei der anderen Lösung (1.0°).

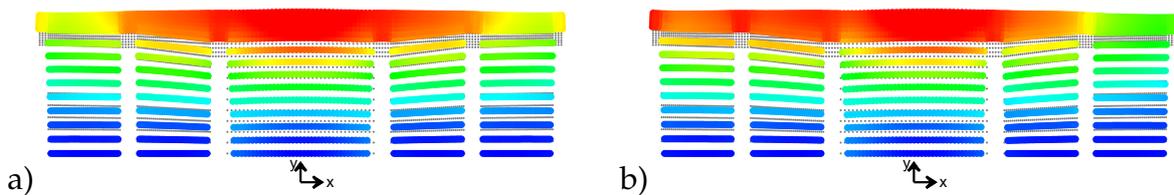


Abb. 5.33: Nominale (a) und verstimmte (b) Eigenformen der Lösung Nr. 1 erhalten aus dem engen Variationsbereich.

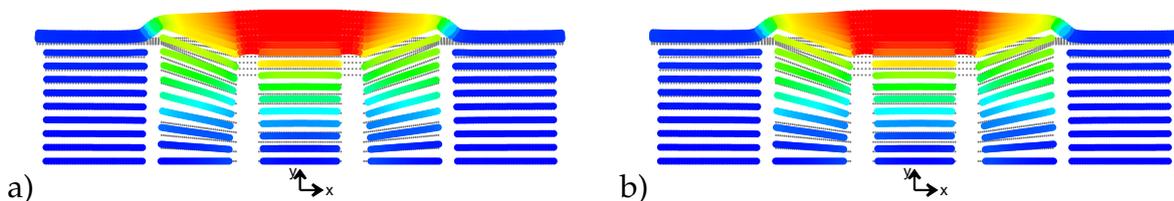


Abb. 5.34: Nominale (a) und verstimmte (b) Eigenformen der Lösung Nr. 2 erhalten aus dem breiten Parameterbereich.

Die ursprüngliche Geometrie wird in beiden Fällen als Startvektor in die Minimierungsroutine eingespeist. Die Minimierungsroutine wird beendet, sobald der Algorithmus

¹Die Parameter der beiden gewählten Bereiche befinden sich jeweils im Anhang Tab. 8.14 und Tab. 8.16.

konvergiert. Der Verlauf, der zur Lösung Nr. 1 geführt hat, ist in Abb. 5.35a dargestellt. Für beide Lösungen ergibt sich ein minimiertes Kopplungskriterium χ nach ca. 200 Iterationen. Dadurch wird der Rotationswinkel durch eine lineare Verstimmung des E-Moduls ebenfalls minimiert, siehe Abb. 5.35b und Tab. 5.7.

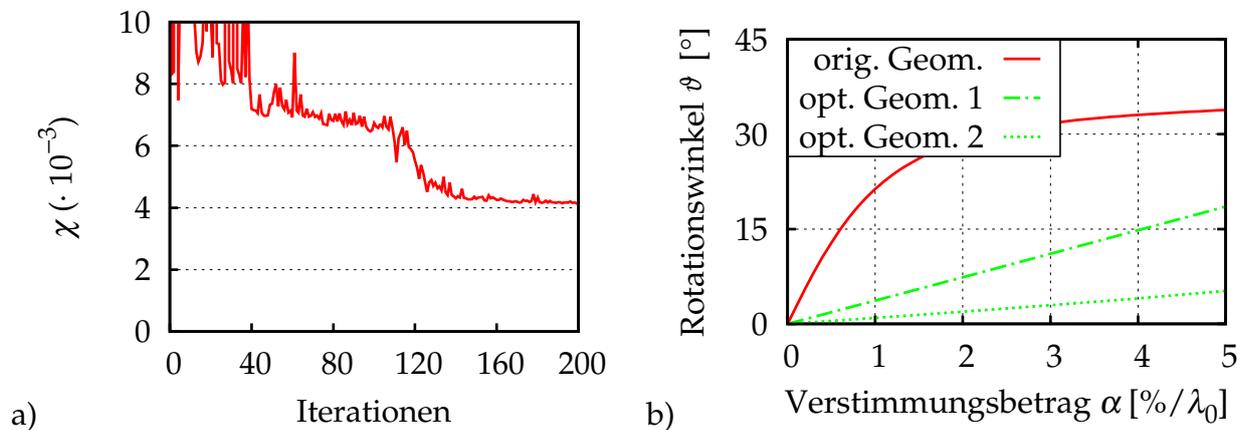


Abb. 5.35: (a) Minimierungsverlauf des Kopplungskriteriums χ . (b) Vergleich der Rotationswinkel der originalen Geometrie mit denen der beiden Lösungen.

Geometrie	Kopplungskriterium $\chi (\cdot 10^{-4})$	Rotationswinkel ϑ
Originale Geometrie	2396	21.3°
Lösung Nr. 1	41.2	3.7°
Lösung Nr. 2	2.8	1.0°

Tab. 5.7: Vergleich der originalen Geometrie mit beiden Lösungen (berechnet bei 1% Verstimmung).

Beide Lösungen weisen einen signifikanten Auslenkungsabfall an den Extremitäten auf, der aufgrund des höchsten Verstimmungsbetrags an den äußeren Segmenten nachvollziehbar ist. Die erste Lösung aus dem engen Bereich ließe sich für die Praxis übernehmen. Im Unterschied dazu ist die zweite Lösung aus dem breiten Bereich praktisch inakzeptabel. Um ein gutes Schwingverhalten zu erreichen, sollte die Gleichmäßigkeit der Auslenkung der nominalen Eigenform im Fokus behalten und als Nebenbedingung im Minimierungsverfahren mit berücksichtigt werden. Ein solches Vorgehen wird bei der Auslegung des Prototypen im nächsten Abschnitt gewählt.

5.4.3.4 Zusammenfassung

Der elementare Schwinger mit der Breite $0.8021 \cdot \lambda_0$ ist aufgrund des kleinen Frequenzabstands zwischen der Betriebsmode und einer antisymmetrischen Störmode auf jegliche Materialverstimmung anfällig. Um diese Anfälligkeit zu minimieren, kommen verschiedene Methoden und Kopplungskriterien zur Anwendung.

- Im ersten Schritt ist die modale Kopplung zwischen den beiden Nachbarmoden im Fokus der Untersuchung. Ihre Reduktion führt zu einer Verminderung der gegenseitigen Eigenvektorsensitivität bei unverändert konstantem Frequenzabstand. Die

Einflussfaktoren der geometrischen Parameter in der Nähe der nominalen Geometrie wurden mit Hilfe einer Linearapproximation basierend auf dem DOE-Verfahren ermittelt. Dieses Verfahren liefert einen Schätzwert für die Sensitivitätsfaktoren. Dabei stellt sich der verwendete Ansatz bei größeren Geometrieänderungen als ungenau heraus. Als Alternative bietet die AMV-Methode eine dynamische Berechnung der Kriterien in Verbindung mit der FEM-Software. Die Minimierung der modalen Kopplung basierend auf einer einzigen antisymmetrischen Nachbarmode führt nicht zwangsläufig zu einem geringeren Rotationswinkel, da eine Interaktion auch mit weiteren Moden stattfinden kann.

- Im zweiten Schritt kommt ein weiteres Kriterium zur Anwendung, das den linearisierten Rotationswinkel des Eigenvektors der Betriebsmode beschreibt. Bei diesem Verfahren werden alle antisymmetrischen Moden und jeweiligen Frequenzabstände berücksichtigt. Aufgrund des multivariablen Minimierungsproblems wurde ausschließlich die AMV-Methode verwendet. Das zweite Kriterium zeigt sich als robuste Vorgehensweise für die Minimierung der Anfälligkeit zur Materialverstimmung und wird daher im nächsten Abschnitt für die Auslegung des Prototyps verwendet.

5.4.4 Minimierung der Anfälligkeit zur Randverstimmung

5.4.4.1 Minimierung der modalen Kopplung mit der DOE-Methode

In der Nähe der Breite $1.254 \cdot \lambda_0$ ist die Auslegung des elementaren Schwingers aufgrund der degenerierten Längsmode problematisch. Die berechnete Längsmode lässt sich durch Kombination von zwei eng beieinander liegenden Nachbarmoden finden (siehe Abschnitt 5.3.4.3). Die modale Kopplung Gl. 5.18 zwischen den Eigenvektoren der reduzierten Basis Φ wird im Folgenden wieder mit der DOE-Methode linearisiert. Die Ermittlung der Sensitivitätsfaktoren erfolgt in gleicher Weise anhand der Variation der geometrischen Parameter. Die inneren und äußeren Schlitzbreiten (als Parameter p_4 und p_5 gekennzeichnet) haben sowohl die größten als auch entgegengesetzt wirksame Anteile an der Kopplungsvariation¹. Anhand von Abb. 5.36a lässt sich die lineare Abhängigkeit innerhalb des Variationsbereichs bestätigen. Die innere Schlitzbreite kommt für den folgenden Fall als einziger Einstellparameter zur Anwendung. Durch die Verminderung der Schlitzbreite von $1/30$ auf 2.17% der Schwingerbreite lässt sich die modale Kopplung nach dem linearen Gesetz zum Verschwinden bringen. Die Berechnung des Kopplungskriteriums bei der optimierten Geometrie ergibt nur noch ca. 5% des originalen Werts ($8.51 \cdot 10^6 \text{ N/m}$ im Vergleich zu $177.1 \cdot 10^6 \text{ N/m}$). Abb. 5.36b zeigt, dass der Einfluss der Störmode fällt, er verschwindet jedoch nicht vollständig. Mit der AMV-Methode wird im nächsten Abschnitt das Kopplungskriterium genauer berechnet.

¹Wie in Tab. 8.18 im Anhang erkennbar.

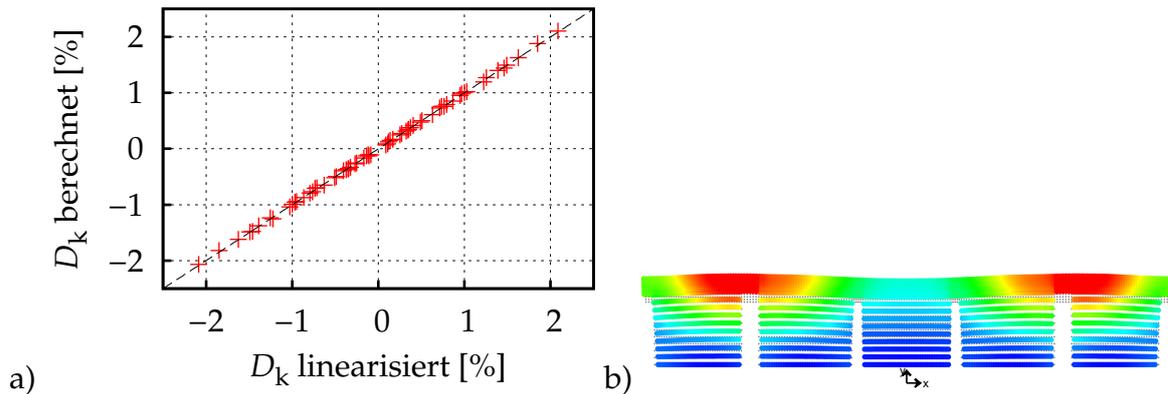


Abb. 5.36: a) Visuelle Überprüfung der Linearität der DOE-Methode. b) 10. Eigenform bei der Schwingbreite $1.254 \cdot \lambda_0$.

5.4.4.2 Minimierung der modalen Kopplung mit der AMV-Methode

Da mit dieser Methode die Geometrie in einzelne Segmente zerlegt wird, lässt sich die Steifigkeitsvariation aus Gl. 5.21 durch die Entfernung der Kopplungsfeder zwischen dem ersten und dem letzten Segment beschreiben:

$$\Delta \mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{S,rr} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{K}_{1,ll} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

wobei S der Anzahl von Segmenten entspricht, r und l sind die rechten und linken Master-Freiheitsgrade. In jeder Optimierungsschleife muss das Berechnungsprogramm die folgenden Schritte durchführen:

1. Segmentmatrizen gemäß Gl. 5.21 zusammenbauen
2. Lösen des Eigenwertproblems des physikalischen Zustands
3. Lösen des Eigenwertproblems des idealen Zustands für die Ermittlung der reduzierten Basis Φ
4. Berechnung des Kopplungskriteriums D_k gemäß Gl. 5.18

Die vorherige Lösung aus der DOE-Methode wird nun feiner angepasst, indem die innere Schlitzbreite das einzige Einstellmaß ist. Aufgrund der Zerlegung der Schwingergeometrie in fünf einzelne Segmente besteht diese innere Schlitzbreite aus der Summe der jeweiligen rechten bzw. linken halben Schlitzbreiten des Segments 2 bzw. 3 (Siehe Abb. 5.27 und Abb. 5.28: $p_4 = br_2 + bl_3 = br_3 + bl_4$). Diese Parameter br_2 , bl_3 , br_3 und bl_4 werden bei dieser Minimierung gleich gehalten und betragen daher die Hälfte der inneren Schlitzbreite.

In Abb. 5.37 wird der absolute Wert des Kopplungskriteriums D_k als Funktion der halben Schlitzbreite dargestellt. Er weist bei 5.29 % der Segmentbreite eine Singularität auf, die in gestrichelten Linien dargestellt wird. Dieser Sprung ist dem Umstand geschuldet,

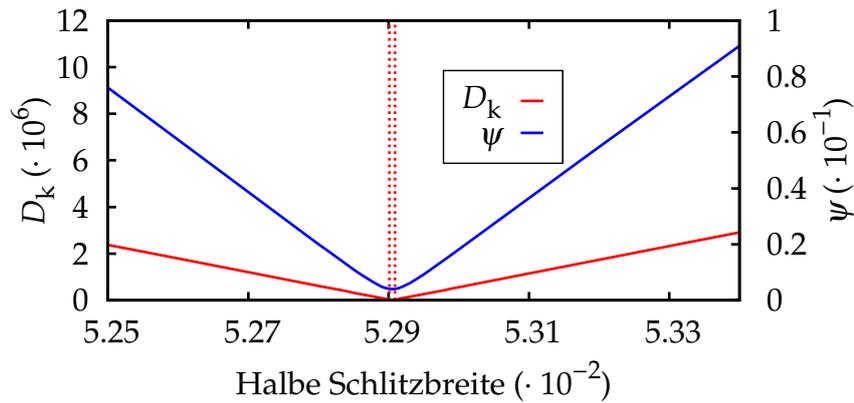


Abb. 5.37: Variation der beiden Kopplungskriterien über der halben Schlitzbreite.

dass die in Gl. 5.16 beschriebene Rotation in der Nähe des Optimums nahezu Null Grad beträgt. Die Eigenvektoren der Längs- und Betriebsmoden sind identisch und der Partnereigenvektor $\varphi_2^{(0)}$ der idealen Basis ist daher sehr klein. Seine Hochskalierung (Massenormierung) führt zu einem erheblichen Rechenfehler und zum Sprung.

5.4.4.3 Minimierung des Rotationswinkels mit der AMV-Methode

Der Tangens des Rotationswinkels ψ wird wieder in Abhängigkeit von der inneren Schlitzbreite gemäß Gl. 5.19 berechnet und zusammen mit der modalen Kopplung D_k dargestellt. Da keine Singularität mehr vorhanden ist, ist dieses Minimierungskriterium besser geeignet. Mit einer weiteren Reduzierung der Schlitzbreite um ca. 3 %¹ bezüglich der vorherigen Lösung kann die Ungenauigkeit aus der DOE-Methode eliminiert werden. Die Längs- und Betriebsmoden sind nun genau identisch und sind in Abb. 5.38b dargestellt. Die in Abb. 5.38a abgebildete Frequenzortskurve weist eine komplett unterdrückte Abdringung zwischen f_9 und f_{10} bei der kritischen Breite auf. Die Lage der Eigenfrequenzen werden von der angepassten inneren Schlitzbreite kaum beeinflusst.

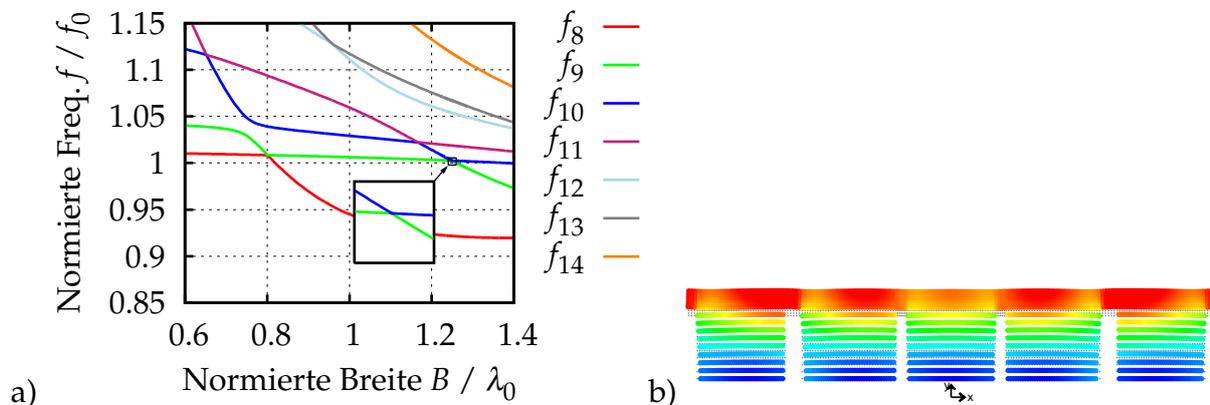


Abb. 5.38: (a) Frequenzortskurve der Lösung. (b) Die Eigenformen der Längs- und Betriebsmoden sind identisch.

¹Die Parameterwerte sind in Tab. 8.20 des Anhangs zu finden.

Im nächsten Schritt werden drei verschiedene Startpunkte (originale Geometrie, Geometrie mit minimalen Parameterwerten, Geometrie mit maximalen Parameterwerten) aus den festgelegten Variationsbereichen ¹ in die Minimierungsroutine eingespeist. Jeder Startpunkt führt zu einer anderen Lösung, bei welcher die Minimierungsbedingung erfüllt ist. Die erhaltenen Eigenformen sind in Abb. 5.39 dargestellt ².

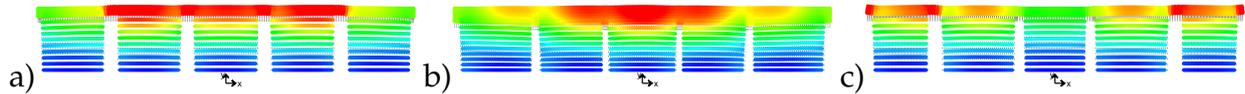


Abb. 5.39: Lösungen mit drei unterschiedlichen Startpunkten: (a) originale Geometrie, (b) Geometrie mit den minimalen Parameterwerten und (c) Geometrie mit den maximalen Parameterwerten.

5.4.4.4 Minimierung des Rotationswinkels mit Berücksichtigung der Gleichmäßigkeit der Auslenkung

Aufgrund der geometrischen Anpassung sind die Segmente nicht mehr identisch. Dies führt zu einer Verzerrung der idealen Längsmode. Der ideale Schwinger mit der Kopp-
lungsrandbedingung besitzt zwar weiterhin einen periodischen Aufbau, die Substruk-
turen sind jedoch nicht mehr identisch. Die Minimierung des Rotationswinkels führt
zu unterschiedlichen Lösungen, die exakt und stark abhängig vom Startpunkt sind. Die
Vielzahl der möglichen Lösungen lässt erwarten, dass eine Lösung mit gleichmäßigerer
Auslenkung vorhanden ist. Im nächsten Schritt wird die Gleichmäßigkeit der Schwin-
gungsamplitude entlang der Schweißkante als Nebenbedingung bei der Berechnung mit
berücksichtigt. Die Berechnung des Gleichmäßigkeitskriteriums v wird für die ideale
Längsmode (l -ter Eigenvektor) mit der auf den Mittelwert normierten Verschiebung der
Schweißkante in Längsrichtung (Y) festgelegt:

$$v = \frac{\max(u_{l_y}) - \min(u_{l_y})}{\bar{u}_{l_y}} \quad (5.24)$$

Die Gleichmäßigkeit der originalen idealen Geometrie v_0 , bei welcher alle Segmente geo-
metrisch identisch sind, wird als Referenzwert herangezogen. Für die Schwingerbreite
 $1.254 \cdot \lambda_0$ beträgt sie 4.38 %. Bei jedem Optimierungsschritt wird das Gleichmäßigkeits-
kriterium relativ zum Referenzwert betrachtet. Die beiden Zielgrößen (Rotationswinkel
 ψ und Gleichmäßigkeit v) werden mit dem Faktor τ in der zu minimierenden Funktion
 $f(\mathbf{p})$ relativ zueinander gewichtet:

$$f(\mathbf{p}) = \left(v(\mathbf{p}) - v_0 \right) \tau + \psi(\mathbf{p}) \quad (5.25)$$

¹Siehe Tab. 8.21 im Anhang.

²Die geometrischen Parameter der drei Lösungen sind im Anhang zu finden: Tab. 8.22, Tab. 8.23 und Tab. 8.24.

Der optimale Wert des Gewichtungsfaktors τ ist schwer zu bestimmen. Aus diesem Grund wird die Minimierungsroutine für viele τ -Werte zwischen 0 und 1 durchgeführt. Da die Lösung sehr stark von τ abhängt, werden die Schritte in der Nähe von 0.5 feiner gewählt. $\tau = 0.465$ stellt sich als der optimale Gewichtungsfaktor für diesen konkreten Fall heraus. Die Entkopplung erfolgt bereits mit $\psi = 1.88 \cdot 10^{-3}$ und die Gleichmäßigkeit der Auslenkung in diesem Fall unter 10 %. Wie in Abb. 5.40a erkennbar, liegt der gewählte Lösungspunkt auf der Pareto-Front.

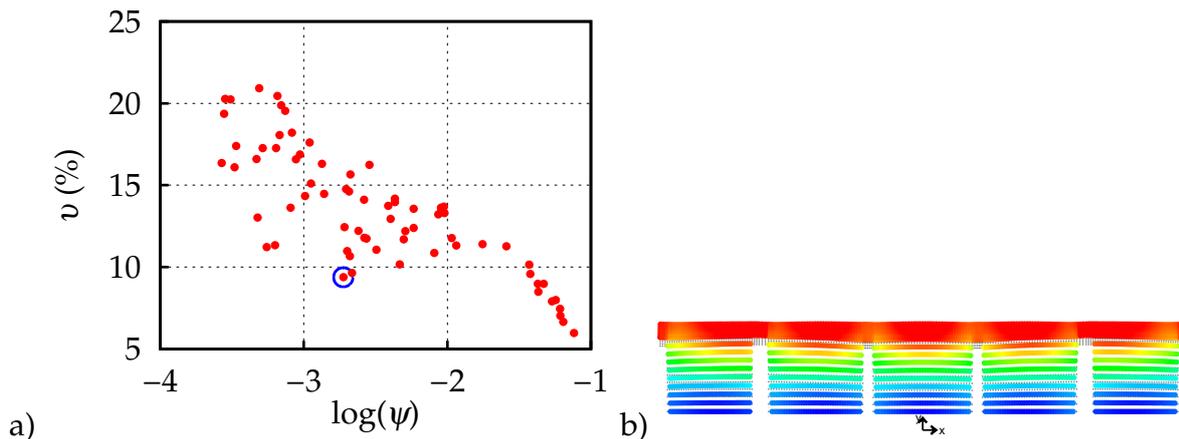


Abb. 5.40: (a) Darstellung der Lösungen im zweidimensionalen Parameterraum, die gewählte Lösung liegt auf der Pareto-Grenzkurve. (b) Betriebsmode der gewählten Lösung ($B = 1.254 \cdot \lambda_0$).

In Abb. 5.40b ist die Betriebsmode der gewählten Lösung dargestellt¹, die Gleichmäßigkeit der Auslenkung ist zufriedenstellend. Des Weiteren sind die Längsmode (Eigenvektor $u_9^{(0)}$) und die Betriebsmode (Eigenvektor $u_{10}^{(1)}$) entkoppelt².

5.4.4.5 Zusammenfassung

Analog zum Fall der Materialverstimmung wird die DOE- und die AMV-Methode verwendet, um die durch die Randverstimmung verursachte Kopplung zwischen der Längsmode und anderen symmetrischen Moden zu unterdrücken. Alle Optimierungen erfolgen bei der kritischen Breite $1.254 \cdot \lambda_0$. Dort ist die Längsmode des elementaren Schwingers völlig degeneriert. Wie bereits erwähnt, liefert die AMV-Methode genauere Ergebnisse und basiert auf einem flexiblen Aufbau von Segmenten. Der Hauptunterschied zur Materialverstimmung liegt darin, dass die nominale bzw. die ideale Basis von Eigenvektoren im Vorfeld nicht bekannt und damit gesondert berechnet werden muss. Das Eigenwertproblem wird zweimal für einen kleinen Satz von 15 Moden gelöst und der Rotationswinkel wird direkt bestimmt.

Wie bei der Störungsrechnung kommt die modale Kopplung D_k als Minimierungsgröße zur Anwendung. Sie lässt sich mit dem Eigenvektor der Längsmode und einem Eigenvektor aus der Kombination aller anderen Moden berechnen. Die Minimierung führt

¹Die geometrischen Parameter der Lösung werden im Anhang Tab. 8.25 zusammengefasst.

²Die NCO-Beteiligungs-faktoren in Abb. 8.4 des Anhangs zeigen eine sehr gute Übereinstimmung.

zwar zu einer erfolgreichen Entkopplung, aufgrund der Kleinheit des zweiten nominalen Eigenvektors an der Stelle des Minimums kommt es aber zu numerischen Problemen.

Aus diesem Grund wird das Kriterium ψ verwendet, das den Rotationswinkel der Längsmode direkt mit beinhaltet. Die mit Hilfe der DOE-Methode ermittelten Sensitivitätsfaktoren zeigen auf, dass eine kleine Geometrieänderung ausreicht, um eine Entkopplung der Längsmode zu erreichen. In diesem konkreten Fall ist nur die innere Schlitzbreite um ca. ein Drittel zu reduzieren.

Wird die Gleichmäßigkeit der Auslenkung der Schweißkante als Nebenbedingung mit eingerechnet, liefert das Minimierungsverfahren eine Schwingergeometrie mit einer entkoppelten Betriebsmode, die zugleich eine homogene Auslenkung in der longitudinalen Richtung aufweist. Der optimale Gewichtungsfaktor zwischen beiden Minimierungsgrößen ist im Vorfeld nicht bekannt. Obwohl eine große Anzahl von Berechnungen zur Ermittlung des optimalen Gewichtungsfaktors erforderlich ist, hat diese Methode im vorliegenden Fall eine sehr zufriedenstellende Lösung geliefert. Es stellt sich die Frage, ob der optimale Wert dieses Gewichtungsfaktors für andere Geometrien gleich ist.

6 Experimentelle Validierung

Nach der theoretischen Untersuchung des elementaren Schwingers dient dieses Kapitel zur Verifizierung der gewonnenen Erkenntnisse. Verschiedene Sonotroden werden zu diesem Zweck, basierend auf dem neu entwickelten Optimierungsverfahren, ausgelegt und gefertigt. Es handelt sich um sogenannte Messersonotroden, d.h. sie weisen eine Übersetzung der longitudinalen Auslenkung auf, wie in Abb. 1.3 zu erkennen ist.

- In Abschnitt 6.1 erfolgt der Aufbau des FE-Modells: d.h. die Definition der geometrischen Parameter, die Auflösung der Vernetzung und die Einführung der Symmetrierandbedingungen.
- In Abschnitt 6.2 wird die Fertigung einer Sonotrode aus Aluminium zur Untersuchung der Randverstimmung beschrieben. Ihre Breite wird im kritischen Bereich gewählt, so dass die Längsmode degeneriert ist.
- Der Abschnitt 6.3 beschreibt den Aufbau zweier weiterer Sonotroden mit ebenfalls unterschiedliche gefertigten Geometrien. Diese dienen der Verifizierung der Ergebnisse bezüglich der Verstimmung der Materialeigenschaften. Die Sonotrodenbreite wird so festgelegt, dass auch geringe Materialinhomogenitäten zu Veränderungen der modalen Eigenschaften führen.

6.1 FE-Modell eines Sonotrodensegments

6.1.1 Geometrische Parameter

Für die Auslegung der Sonotrodenprototypen wird ausschließlich die AMV-Methode und die Zerlegung der Geometrie in einzelne Segmente genutzt, wie im vorherigen Kapitel vorgestellt. Die Anzahl von Segmenten S ist variabel und variiert in den folgenden Untersuchungen zwischen vier und sieben. Jedes Segment ist durch die Y-Z Ebene halbiert und von verschiedenen Parametern definiert. Die konstanten Parameter (Tab. 6.1 oben) sind in Abb. 6.1b schwarz dargestellt. Im Gegenteil dazu sind die acht variablen und normierten Parametern (Tab. 6.1 unten) in Abb. 6.1b rot gekennzeichnet. In der Breitenrichtung (Z) wird das Segment durch die Gesamtbreite und die halben Schlitzbreiten definiert. Die Maße werden auf die Sonotrodenbreite B normiert. Die vertikalen Maße in

der longitudinalen Richtung (Y) sind entweder auf die Endlänge L_u oder auf das nominale Knotenmaß L_o normiert. Alle Maße in der Dickenrichtung (X) sind konstant.

Parameter	Beschreibung	Normierungsmaß
B	Sonotrodenbreite	
L_o	nominales Knotenmaß	
L_u	Endlänge	
E_d	Eingangsdicke	
A_d	Ausgangsdicke	
b	Segmentbreite	B
br/bl	halbe Schlitzbreite (rechts/links)	B
sor/sol	Schlitzlänge nach oben (rechts/links)	L_o
sur/sul	Schlitzlänge nach unten (rechts/links)	L_u
km	Knotenanzpassung	L_o

Tab. 6.1: Geometrische Parameter eines Segments.

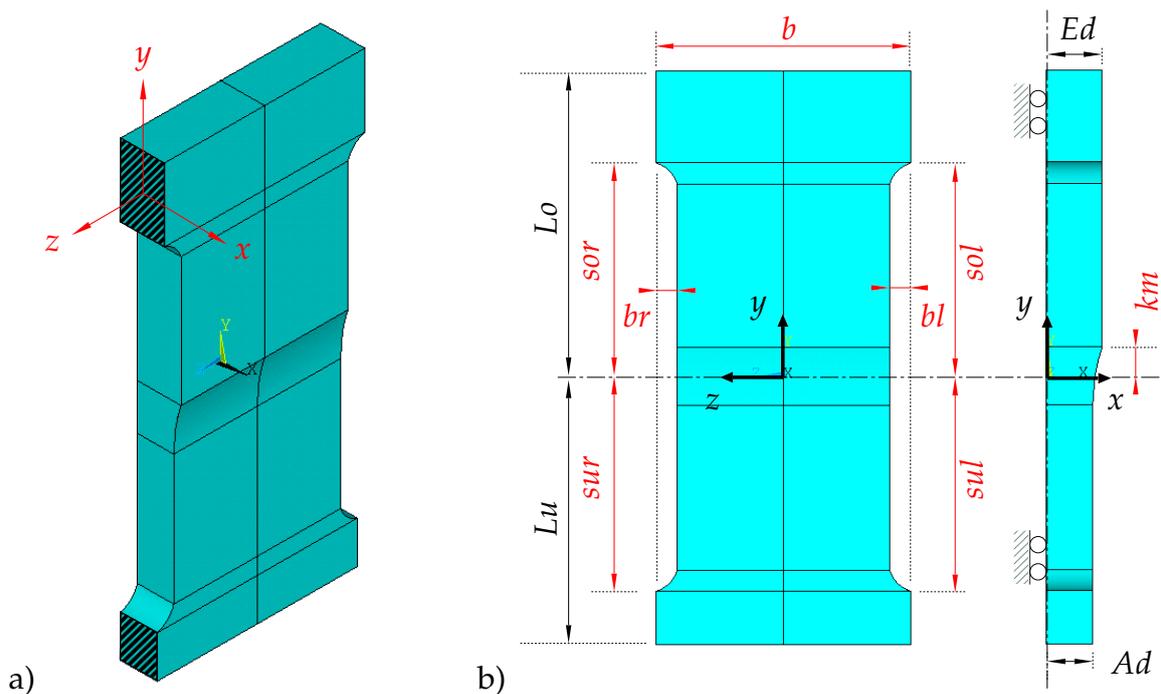


Abb. 6.1: Darstellung der geometrischen Segmentparameter.

6.1.2 Nutzung der Symmetrie

Die Moden, die von Interesse sind, haben ihre Hauptbewegung in der Längs- (Y) und Querrichtung (Z). Das FE-Modell wird vereinfacht, indem diese Bewegungen in der Dickenrichtung (X) symmetrisch definiert sind (dabei entfallen u.a. alle Biege- und Torsionsmoden außerhalb der Hauptebene):

$$\begin{aligned}u_y(-x) &= u_y(x) \\u_z(-x) &= u_z(x)\end{aligned}$$

Als Randbedingung wird die Bewegung aller Flächen in X-Richtung gesperrt ($x = 0$), die auf der Y-Z Ebene liegen. Beim zweidimensionalen elementaren Schwinger ist diese Bedingung automatisch erfüllt.

Als weitere Reduktion wird das Halbmodell in der Breitenrichtung (entlang der X-Y Ebene) wieder halbiert, da die Sonotrodengeometrie in dieser Richtung auch symmetrisch ist. Somit wird nur ein Viertel der Sonotrode modelliert. Im Fall einer ungeraden Anzahl von Segmenten, wird die Hälfte des mittleren Segments berechnet.

- Wird die Symmetrie bezüglich der Schwingrichtung definiert (wie beim elementaren Schwinger im Abschnitt 5.3.2.1), weisen die *symmetrischen* Moden eine symmetrische Verschiebung in Hauptrichtung (Y) und eine antisymmetrische Verschiebung in der Querrichtung (Z) auf:

$$\begin{aligned}u_y(y, -z) &= u_y(y, z) \\u_z(y, -z) &= -u_z(y, z)\end{aligned}$$

- Im Unterschied dazu haben die *antisymmetrischen* Moden eine antisymmetrische Verschiebung bezüglich der Schwingrichtung (Y) und eine symmetrische Verschiebung bezüglich der Querrichtung (Z):

$$\begin{aligned}u_y(y, -z) &= -u_y(y, z) \\u_z(y, -z) &= u_z(y, z)\end{aligned}$$

Analog zu einem freischwingenden Balken erhält man zwei verschiedene Symmetrieklassen von Moden (symmetrische oder antisymmetrisch), je nachdem welche Freiheitsgrade, der auf der Schnittebene X-Y liegenden Knoten ($z = 0$), gesperrt sind [77]:

- Mit der Sperrung in Z-Richtung: $u_z(y, 0) = 0$ werden nur die symmetrischen Moden berechnet.
- Mit der Sperrung in Y-Richtung: $u_y(y, 0) = 0$ werden nur die antisymmetrischen Moden berechnet.

Damit nur die Hälfte der Sonotrode betrachtet wird, müssen nur die Strukturmatrizen exportiert werden, deren Segmente auf der positiven Seite liegen ($z > 0$). Die Implementierung der Symmetrie bzw. der Antisymmetrie hat den erheblichen Vorteil, dass die exportierten Matrizen nahezu 64 Mal kleiner sind als im Vollmodell und nur einmal zusammengefügt werden müssen. Je nach Symmetrieklasse werden die entsprechenden Freiheitsgrade, mit ihren Knoten auf der Schnittebene X-Y, gelöscht. Das Eigenwertproblem wird zwar zweimal gelöst, die Rechenzeiten sind jedoch beim Viertelmodell wesentlich kürzer als bei der Verwendung des Halbmodells.

6.1.3 Modellvernetzung

Das Segment wird mit einem strukturierten Netz diskretisiert. Aufgrund der hohen Anzahl von Iterationen bei der AMV-Methode ist es erforderlich eine Netzstudie durchzuführen, um den besten Kompromiss zwischen Rechenzeit und Genauigkeit treffen zu können.

Drei Vernetzungen mit unterschiedlicher Anzahl von Elementen werden gewählt (siehe Abb. 6.2 b bis d). Zwei strukturelle dreidimensionale *Brick*-Elementtypen werden untersucht: die linearen SOLID185 Elementen mit 8 Knoten und die quadratischen SOLID186 Elementen mit 20 Knoten. Für die Bewertung dient die in Abb. 6.2a dargestellte Vernetzung als Referenz. Sie besitzt 2112 quadratische Elemente, um eine hohe Genauigkeit zu gewährleisten. Die Verstimmung der Materialeigenschaften wird entlang der Breitenrichtung (Z) definiert. Aus diesem Grund wird die Geometrie für die Referenzvernetzung besonders in dieser Richtung feiner aufgelöst.

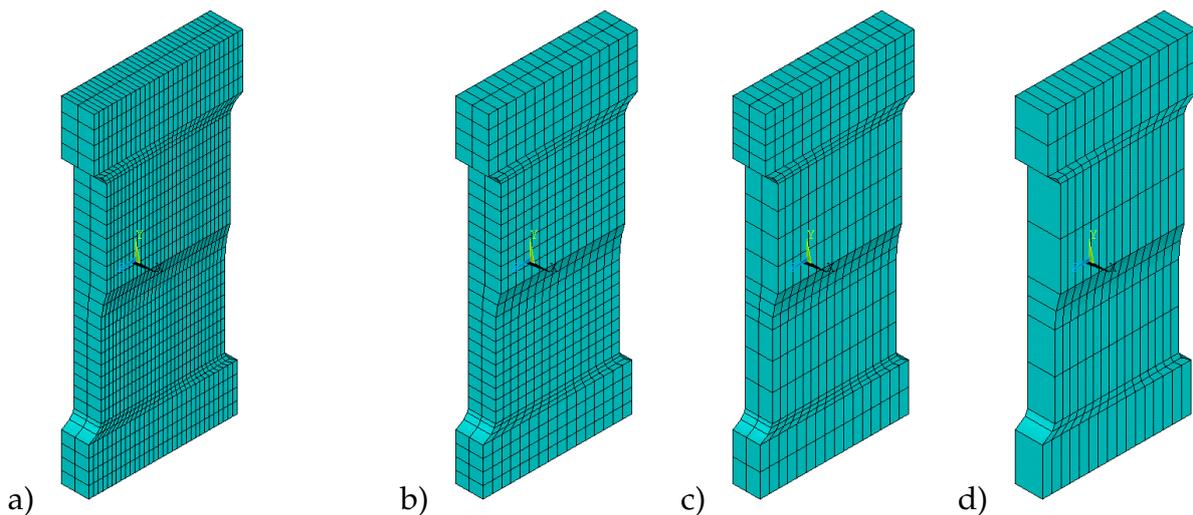


Abb. 6.2: Vernetzung des Segments mit 2112 Elementen (a: Referenz), 1056 Elemente (b: fein), 704 Elemente (c: mittel) und 208 Elemente (d: grob).

Abb. 6.2	Anz. El.	Elementtyp	FHG	Rechenzeit [s]	Frequenzfehler [%]
(a)	2112	SOLID186	164804	587	-
(b)	1056	SOLID185	22800	39	0.66
	1056	SOLID186	83844	239	0.02
(c)	704	SOLID185	15384	27	1.29
	704	SOLID186	56410	148	0.03
(d)	208	SOLID185	5850	13	3.17
	208	SOLID186	20425	45	0.09

Tab. 6.2: Einfluss der Anzahl von Elementen und des Elementtyps auf die Rechenzeit und die Genauigkeit der berechneten Frequenzen. Die erste Zeile beinhaltet die Referenzvernetzung.

Für die Voruntersuchung der Vernetzung wird eine $0.8 \cdot \lambda_0$ breite Sonotrode mit fünf Segmenten betrachtet. Die Modalanalyse liefert alle Moden in der Nähe der Arbeitsfrequenz. Die Mittelwerte der Frequenzfehler werden in Bezug auf die Referenzvernetzung berechnet und sind in Tab. 6.2 aufgelistet. Dabei ist zu erkennen, dass der Elementtyp den größten Einfluss auf die Genauigkeit hat. Unter der Voraussetzung, dass quadratische Elemente verwendet werden, wird mit 208 Elementen eine ausreichende Genauigkeit mit einer durchschnittlichen Abweichung der Frequenz von nur 0.1% erreicht. Diese Kombination, mit 208 quadratischen Elementen (in Abb. 6.2d dargestellt), wird für die nachfolgenden Untersuchungen gewählt, da sie einen guten Kompromiss aus Rechenzeit und Genauigkeit zeigt.

6.2 Versuchsmuster zur Klärung der Randverstimmung

Bei der zuvor beschriebenen Randverstimmung erfährt die Längsmode der Sonotrode in der Nähe einer bestimmten Breite (ca. $1.25 \cdot \lambda_0$ im Fall des elementaren Schwingers) eine Degeneration. Die Auslegung einer solchen Sonotrode ist sehr problematisch, da die Betriebsmode keine gleichmäßige longitudinale Schwingungsform mehr aufweist.

Im ersten Schritt wird die optimale Geometrie des Prototyps gesucht, um die Längsmode für diese Art von modalen Degeneration zu entkoppeln. Für diesen Zweck wird das Kopplungskriterium mittels FE-Simulationen ermittelt. Daraus folgen die Messungen der gefertigten Sonotrode. Nach jedem Fertigungsschritt werden die Messergebnisse mit der Simulation verglichen.

Für eine vertretbare Baugröße wird die Arbeitsfrequenz des Prototyps auf 35 kHz festgelegt. Aufgrund der guten Bearbeitbarkeit und der besseren Homogenität im Vergleich zu Titan, wird der hochfeste Aluminium-Walzwerkstoff AMP8000 verwendet. Um die Genauigkeit der Simulationsergebnisse zu erhöhen, erfolgt vorab eine Abschätzung der Materialparameter mit einem Probestück desselben Materialhalbzeugs. Die ermittelten Zahlenwerte sind im Anhang Tab. 8.26 aufgelistet und liefern eine Abschätzung der Geschwindigkeit der Longitudinalwelle im Material: $c_{y/y} = 6316 \text{ m/s}$ ¹. Daraus ergibt sich die Wellenlänge $\lambda_0 = 180 \text{ mm}$ bei 35 kHz.

¹Gemäß Gl. 8.28 im Anhang.

6.2.1 Auslegung des Prototyps mittels FE-Simulation

Die ursprüngliche Geometrie der Sonotroden ist in Abb. 6.3 dargestellt. Sie weist fünf identische Segmente auf ($b_1 = b_2 = b_3 = \frac{B}{5}$). Die Eingangs- und Ausgangsdicken sind jeweils auf 30 mm und 13 mm festgelegt, was zu einem Amplitudenübersetzungsfaktor von ca. 2 führt. In Abb. 6.4a sind die Frequenzen der Sonotrode über der Breite im Bereich 35 kHz dargestellt. Die Frequenzen (blaue und grüne Kurven) der physikalischen Moden weisen eine Abdringung beim Maß ca. 225 mm, das der kritischen Breite $1.25 \cdot \lambda_0$ beim elementaren Schwinger entspricht. Dabei ist der Abstand zwischen beiden Frequenzen minimal. Die ideale Längsmode ergibt sich, wenn eine Kopplungsrandbedingung zwischen beiden Enden der Sonotrode definiert ist. Die Frequenz f_0 der idealen Längsmode (rote Kurve) liegt nahezu auf einer Horizontalen.

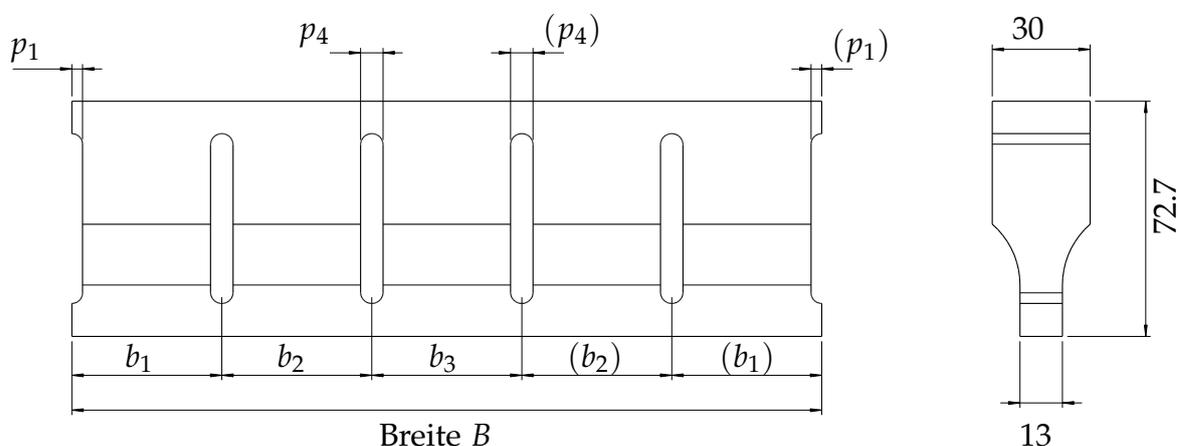


Abb. 6.3: Ursprüngliche Geometrie des Sonotrode.

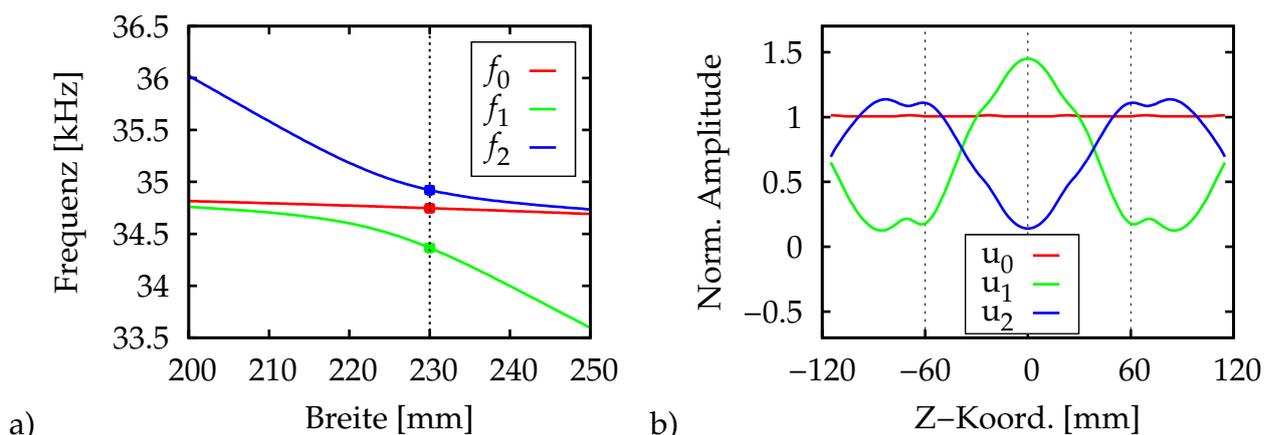


Abb. 6.4: (a) Frequenzkurven der idealen Längsmode f_0 und der physikalischen Moden f_1 und f_2 in der Nähe der Betriebsfrequenz 35 kHz. (b) Amplitudenprofile der idealen Längsmode und der physikalischen Moden bei der Sonotrodenbreite 230 mm ($f_0 = 34747$ Hz, $f_1 = 34365$ Hz und $f_2 = 34922$ Hz).

Die Sonotrodenbreite wird auf 230 mm gewählt, was in der Nähe des kritischen Maßes liegt. In Abb. 6.4b sind die Auslenkungsprofile der Schweißfläche der Schwingungsmo-

den dargestellt. Die rote Kurve zeigt die sehr gleichmäßige Auslenkung des Eigenvektors der idealen Längsmode (als u_0 bezeichnet). Wie erwartet deuten die grünen und blauen Amplitudenprofile der physikalischen Eigenformen (u_1 und u_2) auf eine starke Kopplung zwischen beiden Moden hin. Dies gilt auch dann, wenn die Sonotrodenbreite ca. 10 mm weiter vom kritischen Wert entfernt ist. Die Betriebsmode ist im zweiten Eigenvektor u_2 identifizierbar und zeigt einen starken Amplitudenabfall in der Mitte der Schweißfläche. Wie im Abschnitt 5.3.4 untersucht, erfährt u_0 eine Rotation aufgrund der Randverstimmung. Im folgenden Abschnitt wird anhand des Prototyps gezeigt, wie die Geometrie in der Nähe der problematischen Breite ausgelegt werden kann, um dennoch eine gleichmäßige Amplitudenverteilung zu erreichen.

6.2.1.1 Minimierung der modalen Kopplung und des Rotationswinkels

In Gl. 5.11 wurde die Rotation der Eigenvektoren in direktem Zusammenhang mit den Verhältnissen der modalen Kopplungen und der Frequenzabstände beschrieben. Die Minimierung der modalen Kopplung zwischen der Längsmode und den anderen Nachbarmoden führt ebenfalls zu einem minimalen Rotationswinkel des zur Längsmode gehörenden Eigenvektors. Die theoretischen Ergebnisse aus der Optimierung des elementaren Schwingers werden mit der Messung dieses Prototyps validiert.

Die Minimierung der modalen Kopplung erfolgt für diese Sonotrode nicht mit Hilfe des automatischen Minimierungsverfahren, sondern basierend auf den Erkenntnissen aus der Untersuchung des elementaren Schwingers aus Abschnitt 5.4.4.1. Dieselben, in Abb. 6.3 dargestellten, geometrischen Parameter kommen zur Anwendung: innere Schlitzbreite p_4 sowie seitliches Übermaß p_1 . Die Anpassung dieser Parameter ermöglicht es, die modale Kopplung zwischen der Längsmode und den anderen Moden zu reduzieren. Anhand der Durchführung der Sensitivitätsanalyse¹ zeigt sich, dass die Parameter p_1 und p_4 mit gleichem Vorzeichen aber unterschiedlichem Betrag auf die modale Kopplung Einfluss nehmen.

Die inneren Schlitze (p_4) müssen schmaler als in der ursprünglichen Geometrie werden, um die Entkopplung der Längsmode zu erreichen. Sind die inneren Schlitze aber zu schmal, ist die Entkopplungsbedingung nicht mehr erfüllt. Da die Nacharbeit der Schlitze fertigungstechnisch aufwändig ist, wird stattdessen das seitliche Übermaß (p_1) genutzt. Dieses Maß wird in mehreren Schritten vergrößert, um die Entkopplung zu erreichen.

Zur Bewertung der Degeneration der Längsmode in der Simulation kommt das Kopplungskriterium ψ zur Anwendung. Abb. 6.5 zeigt die Änderung von ψ in Abhängigkeit der beiden geometrischen Parametern Schlitzbreite bzw. seitliches Übermaß. Das Minimum ist jeweils für bestimmte Werte von p_1 und p_4 erreicht. Das Kriterium ψ wird mit Hilfe der idealen Längsmode berechnet und kann daher nur in der Simulation bestimmt werden.

¹Siehe die Ergebnisse der Sensitivitätsanalyse in Tab. 8.18 im Anhang

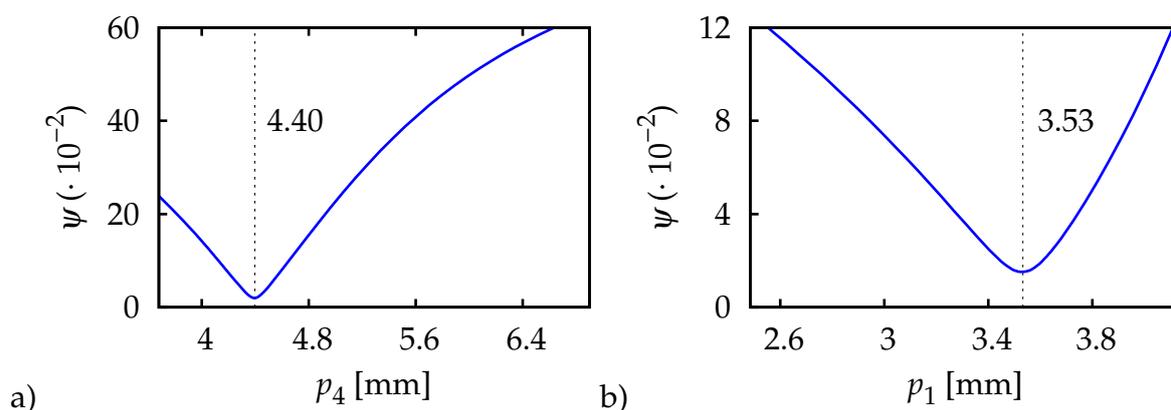


Abb. 6.5: (a) Kopplungskriterium ψ in Abhängigkeit (a) der inneren Schlitzbreite p_4 ($p_1 = 2.48$ mm) und (b) des seitlichen Übermaßes p_1 ($p_4 = 4.05$ mm).

6.2.1.2 Amplitudenprofil der idealen Längsmode

Wie im Abschnitt 5.4.4.4 muss nicht nur der Rotationswinkel minimal sein, sondern auch die ideale Längsmode eine möglichst gleichmäßige Amplitudenverteilung aufweisen. Durch die zuvor beschriebene Anpassung der Geometrie ändert sich das Amplitudenprofil der idealen Längsmode (bewertet mit v_0 im Abschnitt 5.4.4.3).

Für die im Beispiel vorliegende Sonotrodengeometrie wird die Amplitudenverteilung der idealen Längsmode v_0 mit Hilfe einer manuellen Anpassung der Schlitzaufteilung optimiert. Die mittlere Segmentbreite (b_3 in Abb. 6.3) wird empirisch vom ursprünglichen Maß 46 mm auf 48 mm vergrößert. Im Gegensatz hierzu werden die benachbarten Segmente schmaler ausgelegt ($b_2 = 45$ mm).

6.2.1.3 Übersicht der verschiedenen Stände

Tab. 6.3 fasst die betrachteten Auslegungsstände aus der FE-Simulation für die Auslegung der 230 mm breiten Sonotrode zusammen.

Stand	p_1 [mm]	p_4 [mm]	$\psi (\cdot 10^{-2})$	f_0 [Hz]	f_2 [Hz]
1	3.45	6.90	70.3	34747	34922
2	2.48	6.90	63.2	34831	34952
3	2.48	4.40	1.95	35041	35030
4	2.48	4.05	12.6	35068	35060
5	3.53	4.05	1.53	34996	34999

Tab. 6.3: Übersicht der verschiedenen Auslegungen.

1. Stand 1 beschreibt die ursprüngliche Geometrie mit identischen Segmenten. Bei der Betriebsmode zeigt sich ein starker Amplitudenabfall in der Mitte der Schweißfläche (siehe u_2 in Abb. 6.4).
2. Stand 2: das seitliche Übermaß p_1 wird von 3.45 auf 2.48 mm reduziert und die Schlitzverteilung angepasst.

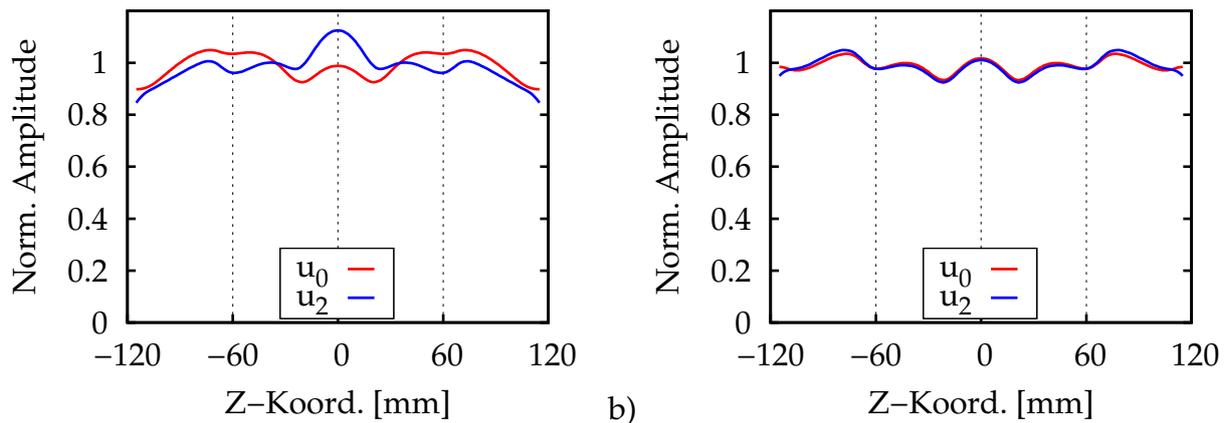


Abb. 6.6: Amplitudenprofile der idealen Längsmode und der physikalischen Betriebsmode: (a) Stand 4 und (b) Stand 5.

3. Stand 3: die innere Schlitzbreite p_4 wird bis auf 4.40 mm reduziert, so dass der minimale Rotationswinkel erreicht wird (siehe Abb. 6.5a).
4. Stand 4: die innere Schlitzbreite wird weiter reduziert (4.05 mm). Der Parameterwert p_4 ist unterschritten, die Amplitude der Betriebsmode in der Mitte der Schweißfläche ist nun maximal (siehe u_2 in Abb. 6.6a).
5. Stand 5: das seitliche Übermaß wird gemäß Abb. 6.5b von 2.48 mm bis auf 3.53 mm vergrößert, um die Entkopplung der Längsmode wieder zu erreichen. Wie in Abb. 6.6b dargestellt, weisen somit Längs- und Betriebsmode nahezu identische Amplitudenprofile auf. Darüber hinaus zeigt Tab. 6.3, dass die Lage der beiden Eigenfrequenzen (f_0 und f_2) sich nahezu nicht unterscheiden.

Die Stände 4 und 5 der Simulation werden experimentell realisiert, um die progressive Entkopplung der Längsmode zu bestätigen. Die Sonotrode wird gemäß Stand 4 gefertigt¹. Danach wird der seitliche Absatz in mehreren Schritten nachgearbeitet, bis die theoretische Entkopplung der Längsmode (Stand 5) erreicht ist. Da die ideale Längsmode und das Kopplungskriterium ψ nur in der Simulation bestimmbar sind, wird das Amplitudenprofil der Betriebsmode für jeden Fertigungsschritt qualitativ beobachtet und mit der Simulation verglichen.

6.2.2 Messungen am Prototyp

Insgesamt wird die Sonotrode (siehe Abb. 6.7) in vier unterschiedlichen Fertigungsständen vermessen. Der erste Fertigungsstand entspricht dem zuvor beschriebenen Stand 4, bei welchem das seitliche Übermaß $p_1 = 2.48$ mm beträgt. Die innere Schlitzbreite p_4 bleibt bei 4.05 mm. In weiteren Schritten wird p_1 in kleinen Schritten von 2.48 mm bis 3.28 mm vergrößert.

Da die Sonotrode wie im FE-Modell ohne Gewindebohrung konzipiert worden ist, wird

¹Die geometrischen Parameter finden sich im Anhang (Tab. 8.28).

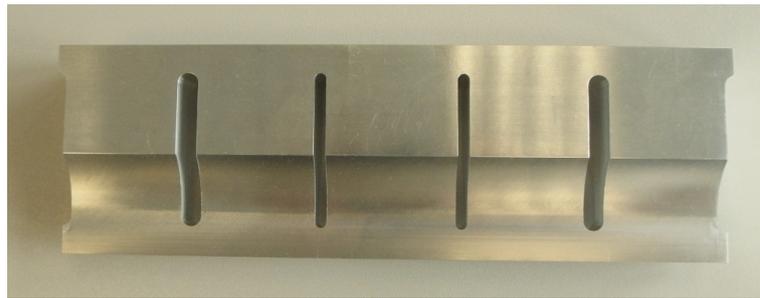


Abb. 6.7: Prototyp der 35 kHz Sonotrode beim ersten Fertigungsschritt.

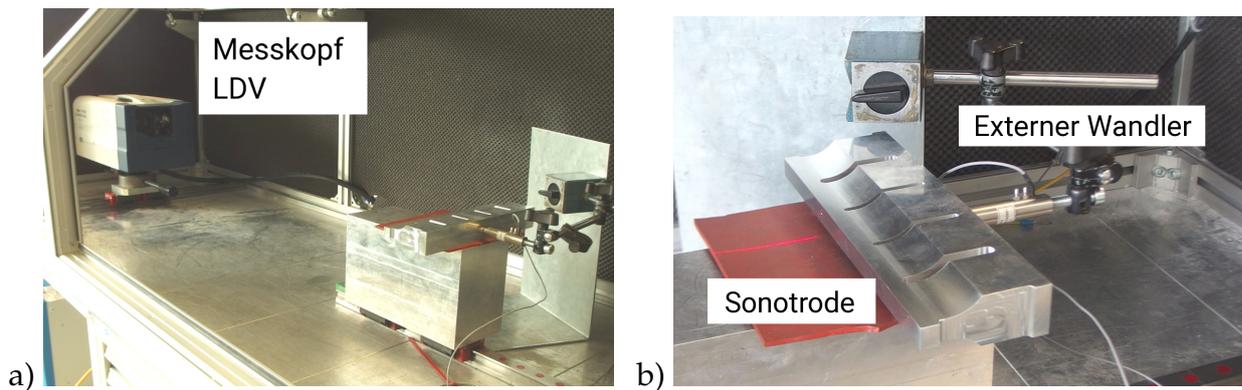


Abb. 6.8: Messaufbau.

sie für die Messung mit einem externen Wandler angeregt. Dabei wird der Piezoaktor gegen den Mittelpunkt der Sonotrodeingangsfläche angesetzt. Die Schwingungsanregung vom Typ *periodic chirp* erfolgt im Frequenzbereich 33 – 37 kHz.

Die Frequenzantworten in Abb. 6.9a werden im Mittelpunkt der Schweißfläche mit dem LDV gemessen und weisen zwei stark ausgeprägte Resonanzen im Frequenzbereich 34.5 bis 35.2 kHz aus. Die Frequenz der oberen Mode (zwischen 34950 und 35000 Hz) wird durch die Nacharbeit des seitlichen Absatzes in geringem Maß beeinflusst, während die Frequenz der unteren Mode konstant bei ca. 34800 Hz bleibt.

Die Schwingungsform der Schweißfläche wird bei beiden Resonanzfrequenzen gemessen. In Übereinstimmung mit der FE-Simulation wird die Störmode in der unteren Resonanzfrequenz, die Betriebsmode in der oberen Resonanzfrequenz gemessen. Das Amplitudenprofil der Betriebsmode im ersten Fertigungsschritt (Abb. 6.9b, graue Kurve) findet sich in guter Übereinstimmung mit der FE-Simulation des Stands 4 (Abb. 6.6a, blaue Kurve). Die Auslenkung ist in der Mitte der Schweißfläche maximal.

Die Vertiefung des seitlichen Absatzes bringt den erwarteten Effekt: mit zunehmenden Übermaß wird das Amplitudenprofil schrittweise gleichmäßiger. Da die Verteilung bei einem Wert von 3.28 mm den Anforderungen (Abb. 6.9b, rote Kurve) entspricht, ist ein weiterer Optimierungsschritt nicht mehr erforderlich. Die Geometrie entspricht nahezu dem Stand 5 der FE-Simulation ($p_1 = 3.53$ mm). Die Zeichnung der Sonotrode mit der finalen Geometrie ist in Abb. 8.11 im Anhang zu finden.

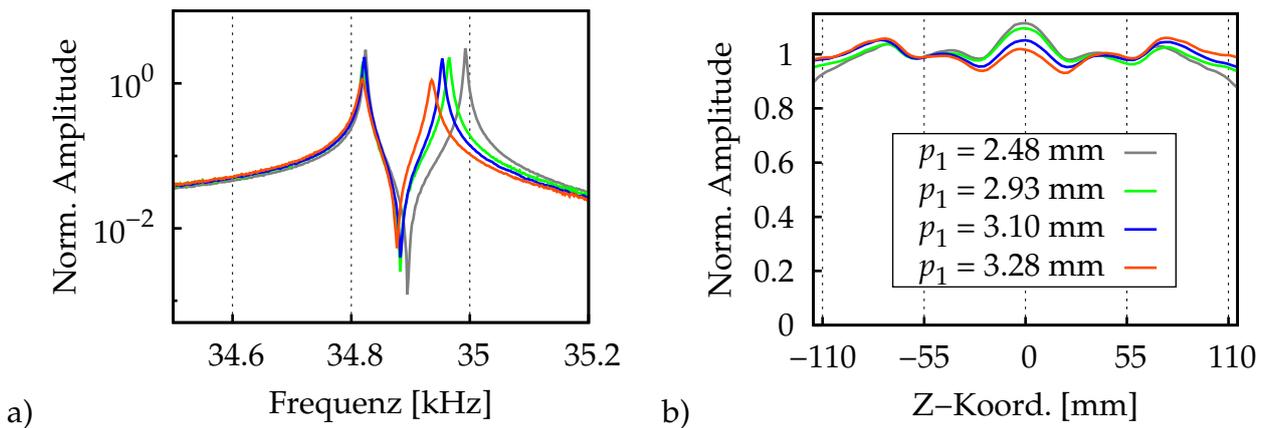


Abb. 6.9: (a) Frequenzantwort der Sonotrode bei verschiedenen Fertigungsschritten. (b) Amplitudenprofil der Sonotrodenschweißfläche bei verschiedenen Fertigungsschritten.

6.2.3 Zusammenfassung

Zu Validierungszwecken wurde der Prototyp einer Messersonotrode mit der problematischen Breite 230 mm ausgelegt. Die Ergebnisse der Messungen weisen eine gute Übereinstimmung zu der FE-Simulation auf, das entworfene Kopplungskriterium findet Anwendung. Durch eine Anpassung der Geometrie lässt sich die Längsmode der Sonotrode entkoppeln, wodurch sich ein gleichmäßiges Amplitudenprofil ergibt.

6.3 Versuchsmuster zur Klärung der Materialverstimmung

Die Untersuchung des elementaren Schwingers hat eine kritische Breite hervorgehoben ($0.8 \cdot \lambda_0$), bei welcher die longitudinale Mode und eine antisymmetrische Mode spektral dicht beieinander liegen. Die Verstimmung der Materialeigenschaften hat zu einer Abdrift der Eigenfrequenzen geführt und zur Degeneration beider Moden (siehe Abschnitt 5.3.3.1).

Zwei weitere Sonotroden werden aus einem möglichst heterogenen TiAl6V4-Material gefertigt und bei dieser kritischen Breite ausgelegt. Um den Nutzen der entwickelten Methode zu zeigen, basiert die folgende Untersuchung auf dem Vergleich von zwei Sonotroden-Designs. Die erste Sonotrode wird manuell mit der traditionellen und erfahrungsbasierten Anpassung der Geometrie entworfen (beschrieben in Kap. 1). Im Vergleich dazu wird die Geometrie der zweiten Sonotroden mit der entwickelten AMV-Methode automatisch ermittelt.

6.3.1 Probestück

Da die Messung der Schallgeschwindigkeit die Gleichmäßigkeit der Materialeigenschaften innerhalb eines Probestücks darstellen kann, wurde ein Probekörper aus TiAl6V4 mit möglichst ungleichmäßiger Schallgeschwindigkeit ausgesucht. Die Dicke der Sonotroden wurde so gewählt, dass beide Sonotroden in der Dickenrichtung des Probestücks entnommen werden können.

Das Messgerät DM4 DL von KRAUTKRAMER misst die Laufzeit einer longitudinalen Schallwelle zwischen zwei Flächen. Nach Eingabe des Abstands zwischen den Flächen wird die Laufzeit in Schallgeschwindigkeit umgerechnet. In diesem Fall beträgt die Länge des Probestücks 143.5 mm. Da die Wiederholgenauigkeit bei der Messung des Abstands 0.1 mm beträgt, wird eine Auflösung von ca. ± 4 m/s für die Schallgeschwindigkeit erreicht. Die longitudinale Schallgeschwindigkeit des Probestücks wird in der Walzrichtung (Y) entlang dreier Messspuren gemessen und dokumentiert. Die Messspuren befinden sich entlang der Breite (Z) mit jeweils 18 mm Abstand, gemäß Abb. 6.10b. Sie werden mit dem Vorzeichen (-), (0) und (+) gekennzeichnet.

Die Messergebnisse sind in Abb. 6.10a dargestellt. Die drei Messspuren zeigen eine klare Tendenz und eine Abweichung der Schallgeschwindigkeit von links ($z = -80$) nach rechts ($z = +80$). Darüber hinaus weisen die äußeren Spuren größere Messwerte als die mittlere Spur auf, was einer parasitären Reflektion der longitudinalen Schallwelle auf die seitlichen Flächen geschuldet sein kann. Die Sonotroden wurden entlang den Messspuren (0) und (+) entnommen, da dann die Schallgeschwindigkeitsdifferenz insgesamt nahezu identisch ist (35 und 39 m/s).

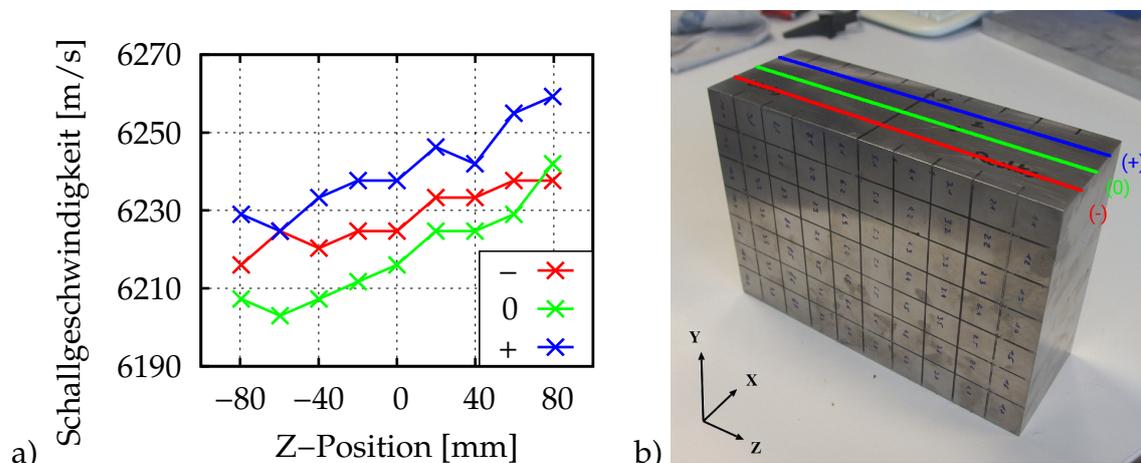


Abb. 6.10: (a) Messung der longitudinalen Schallgeschwindigkeit in der Walzrichtung entlang von drei Spuren. (b) Darstellung der drei Messspuren auf dem Probestück.

6.3.2 Untersuchung der kritischen Sonotrodenbreite

Das Probestück wurde aus der zuvor vermessen gewalzten TiAl6V4-Platte entnommen. Somit sind die Hauptrichtungen des Materials eindeutig definiert:

- Die Walzrichtung ist die longitudinale Schwingrichtung Y
- Die Plattendicke definiert die Richtung X
- Die dritte Richtung Z wird als Querrichtung definiert

Bei Herrmann Ultraschall werden typischerweise orthotrope Materialdaten für die FE-Simulationen verwendet¹. In der folgenden Untersuchung wird die Annahme getroffen, dass nur der E-Modul in der longitudinalen Richtung (Y) für den gemessenen Verlauf der Schallgeschwindigkeit verantwortlich ist. E_y hat neben den Querkontraktionszahlen den größten Einfluss auf die longitudinale Schallgeschwindigkeit². Alle anderen neun Parameter des orthotropen Materials ($E_x, E_z, \nu_{xy}, \nu_{yz}, \nu_{xz}, G_{xy}, G_{yz}, G_{xz}$ und ρ) werden als konstant angenommen.

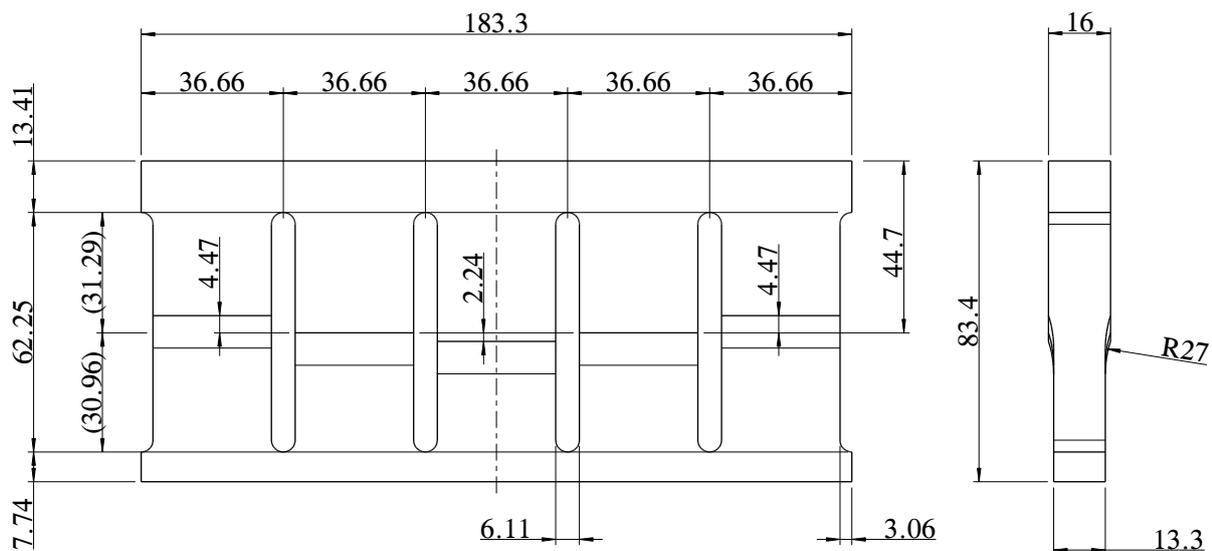


Abb. 6.11: Originale Geometrie der Sonotrode.

Aufgrund der Abmessungen des Probestücks wird die Arbeitsfrequenz der Sonotroden auf 30 kHz festgelegt. Daraus ergeben sich eine Schwinglänge von 83.4 mm und ein nominales Knotenmaß von 44.7 mm (vgl. Abb. 6.11). Die Eingangs- und Ausgangsdicken der Sonotrode werden jeweils auf 16 und 13.3 mm gewählt. Beide Sonotroden wurden wieder ohne Gewindebohrung in der Eingangsfläche gefertigt, damit eine externe Anregung für die Messung exakt mittig angebracht werden kann. Die originale Geometrie wird für die Voruntersuchung mit fünf gleich breiten Segmenten versehen³. Nur die Knotenmaße

¹Die verwendeten Materialdaten sind im Anhang Tab. 8.29 aufgelistet.

²Gemäß Gl. 8.28 im Anhang.

³Die geometrischen Parameter sind in Tab. 8.30 des Anhangs aufgelistet.

(Parameter km) werden wegen des Auslenkungsabfalls an den Seiten manuell angepasst (in Abb. 6.13a dargestellt). Dadurch wird ein gleichmäßigeres Auslenkungsprofil der Sonotrodenschweißfläche erreicht.

Die Schallgeschwindigkeit in der longitudinalen Richtung in Abb. 6.10a beträgt im Durchschnitt 6230 m/s und die Lage des ersten kritischen Bereichs ($0.8 \cdot \lambda_0$ beim elementaren Schwinger) ist bei ca. 165 mm zu erwarten. Allerdings findet die nächste Frequenzkollision in Abb. 6.12 für die Breite 183.3 mm zwischen der 17. und 18. Eigenfrequenz statt. Die Darstellung der Eigenformen in Abb. 6.13 deutet darauf hin, dass die kollidierenden Moden dieselben sind, wie beim elementaren Schwinger. Der Eigenvektor 17 entspricht der Betriebsmode und der Eigenvektor 18 der antisymmetrischen Störmode. Die Verschiebung des kritischen Bereichs ist vermutlich auf die starke Orthotropie der Materialeigenschaften und auf die angepasste Geometrie zurückzuführen. Für die folgende Untersuchung werden beide Sonotroden mit der Breite 183.3 mm ausgelegt, bei welcher die Frequenzen beider Moden zusammenfallen.

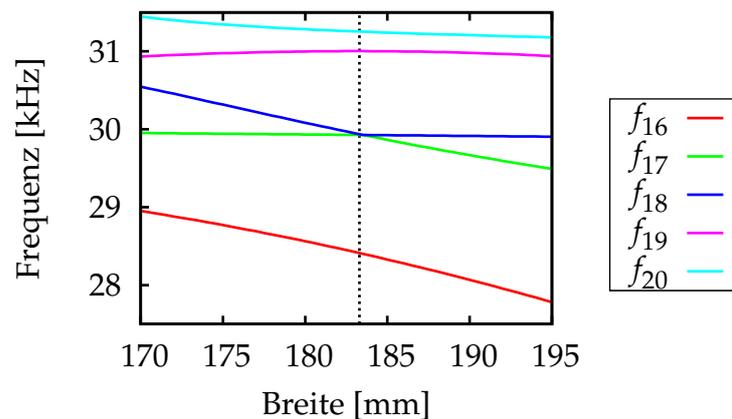


Abb. 6.12: Frequenzkurven der Sonotroden mit der originalen Geometrie.

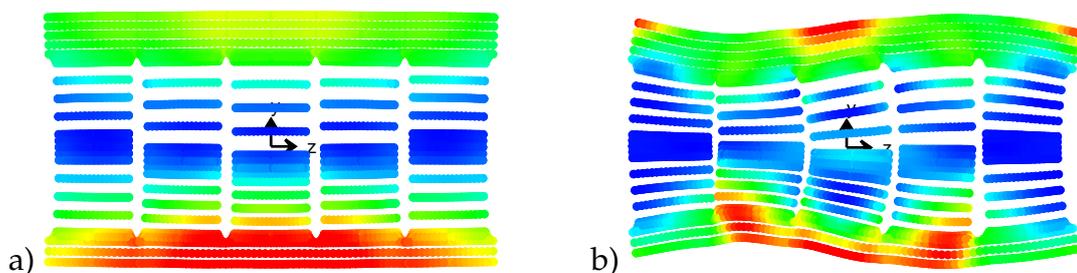


Abb. 6.13: Eigenformen 17 und 18 der Sonotrode mit der originalen Geometrie bei der Breite 183.3 mm: (a) 29927 Hz und (b) 29937 Hz.

6.3.3 Auslegung der ersten Sonotrodengeometrie

Die gewählte Sonotrodenbreite ist problematisch aufgrund des dabei vorliegenden geringen Frequenzabstands zur Störmode. Die *manuell angepasste Geometrie* der ersten Sonotrode wird nach dem traditionellen und erfahrungsbasierten Verfahren optimiert ¹.

- Wie in Kapitel 1 beschrieben, kann die Frequenz einer Störmode mit der Schlitzlänge, in bestimmten Grenzen, beeinflusst werden. Für die folgende Untersuchung werden die Schlitze der Sonotrode kürzer ausgelegt (12.5 % vom nominalen Maß). Durch diese geometrische Anpassung liegt die Frequenz der Störmode nun bei 1.012 Mal die Frequenz der Betriebsmode (ca. 350 Hz höher).
- Die Betriebsmode wies durch die erste Maßnahme wieder eine Amplitudenüberhöhung in der Mitte der Schweißfläche auf. Das mittlere Knotenmaß musste vergrößert werden, um das Amplitudenprofil abzugleichen.

6.3.4 Auslegung der zweiten Sonotrodengeometrie

Im Unterschied zur manuell angepassten Geometrie wird die Geometrie der zweiten Sonotrode mit der AMV-Methode ermittelt:

- Die Abmessungen der Segmente in der Dickenrichtung bleiben identisch zur originalen Geometrie: Eingangsdicke E_d , Ausgangsdicke A_d , nominales Knotenmaß L_0 .
- Die acht geometrischen Segmentparameter können sich im festgelegten Variationsbereich bewegen ² und werden vom Minimierungsalgorithmus berechnet.
- Die Anzahl von Segmenten ist zwischen vier und sieben frei wählbar. Die Optimierungsschleife wird für jede Segmentanzahl wiederholt und die beste Lösung wird gewählt.
- Das Maß der Endlänge L_u wird in jedem Optimierungsschritt dynamisch angepasst, da die Frequenz der Betriebsmode stark von den Schlitzbreiten abhängig ist. Die Endlänge L_u wird mit Hilfe von zwei Stützwerten linear interpoliert, während das Knotenmaß L_0 konstant gehalten wird. Die Interpolation ³ liefert für die einfache Geometrie eine gute Annäherung der optimalen Schwinglänge, wodurch eine zusätzliche Optimierungsschleife im Programm gespart wird.

¹Zur detaillierten Beschreibung der Geometrie und der zugehörigen Schwingungsformen siehe Tab. 8.31 und Abb. 8.5 im Anhang

²Die Variationsbereiche aller geometrischen Parameter sind im Anhang Tab. 8.32 zu finden

³Siehe im Anhang den Abschnitt 8.6.2.4 die Definition der Interpolation.

6.3.5 Definition der Nebenbedingung

Im Fall des elementaren Schwingers wurde die von der Verstimmung hervorgerufene Rotation der Eigenformen minimiert. Ein kleiner Rotationswinkel ist nicht das einzige Qualitätskriterium einer Sonotrode. Durch die geometrische Anpassung entfernt sich die Lösung von der idealen Längsmode und eine starke Verzerrung der Schwingungsform kann auftreten. Wie in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt, ist die longitudinale Auslenkung der Schweißfläche im Betrieb eines der wichtigsten Qualitätskriterien der Sonotrode (siehe Kap. 1). Aus diesem Grund ist neben einem kleinen Rotationswinkel auch eine gleichmäßige Auslenkung der nominalen, unverstimmten Eigenform der Betriebsmode erforderlich.

In Folge wird das in Gl. 5.24 definierte Gleichmäßigkeitskriterium v für die nominale Eigenform als Nebenbedingung in der AMV-Methode, zusammen mit dem verstimmungsabhängigen Kopplungskriterium χ aus Gl. 5.11, genutzt. In jeder Schleife der Optimierungsroutine wird die zu minimierende Zielgröße mit einem Faktor gewichtet, wenn die erhaltene nominale Eigenform nicht zufriedenstellend ist. Dieser Faktor σ wird in Abhängigkeit vom Gleichmäßigkeitskriterium v geschrieben¹. Somit werden beide Größen v und χ im Rahmen der Optimierung gleichzeitig minimiert.

6.3.6 Definition der Verstimmung

Die angenommene Verstimmung des E-Moduls E_y führt zu einer reinen Steifigkeitsvariation und der resultierende Rotationswinkel wird vom Kriterium χ bewertet. Für die numerische Analyse wird die Variation des E-Moduls um 1 % pro 300 mm entlang der Sonotrodenbreite angenommen.

Wie beim elementaren Schwinger ermittelt, hat die Verstimmungsverteilung einen großen Einfluss auf die modale Kopplung und daher auch auf den Rotationswinkel. Da die räumliche Verteilung der Materialparameterabweichungen im Probestück unbekannt ist und nur qualitativ durch die Schallgeschwindigkeitsmessung abschätzbar ist, wird die Optimierung ansatzweise sowohl für eine lineare als auch für eine sinusförmige Verteilung des E-Moduls E_y durchgeführt. In Folge werden nur die Lösungen mit fünf und sechs Segmenten betrachtet, da diese mit Abstand die besten Ergebnisse zeigen. Insgesamt werden dann vier Lösungen verglichen, die durch die Anzahl von Segmenten und die Verstimmungsverteilung gekennzeichnet sind (siehe Tab. 6.4).

Anzahl Segmente	Lineare Verteilung	Sinusförmige Verteilung
5	lin/5	sin/5
6	lin/6	sin/6

Tab. 6.4: Übersicht der vier Lösungen aus der AMV-Methode.

¹Der Berechnung dieses Faktors wird in Abschnitt 8.6.2.5 im Anhang erläutert.

Geometrie	$v^{(0)}$
<i>original</i>	18.9%
manuell angepasst	26.8%
automatisch ang. (lin/5)	14.1%
automatisch ang. (lin/6)	9.5%
automatisch ang. (sin/5)	11.0%
automatisch ang. (sin/6)	10.6%

Tab. 6.5: Gleichmäßigkeitskriterium der erhaltenen Lösungen.

In Tab. 6.5 wird das Gleichmäßigkeitskriterium der nominalen Eigenform $v^{(0)}$ angegeben, jeweils für die originale Geometrie, die manuell angepasste Geometrie und die vier erhaltenen Lösungen (lin/5, sin/5, lin/6, sin/6). Zur Ergänzung werden diese vier Lösungen mit zufälligen Verstimmungsprofilen nachgerechnet, die aus einer Monte-Carlo Simulation generiert werden, um ihre Robustheit bezüglich weiteren Verstimmungsverteilungen zu vergleichen. Angesichts der Histogramme der χ -Werte in Abb. 6.14 hat sich die automatisch angepasste Geometrie **lin/6** als die beste Lösung herausgestellt, da alle χ -Werte unter $1.5 \cdot 10^{-3}$ liegen¹. Die linear verstimmtten Eigenformen der verschiedenen Geometrien können in Abb. 6.15 optisch verglichen werden. Die Auslenkungsprofile entlang der Schweißfläche werden jeweils in Abb. 6.16 dargestellt. Die aus einer linearen Verstimmung des E-Moduls resultierenden Profile sind in roter Farbe gekennzeichnet. Die automatisch ermittelte Lösung lin/6 ist sowohl für die nominale longitudinale Auslenkung (unter 10 %), sowie für den verstimmungsbedingten Rotationswinkel günstiger als die manuell angepasste Geometrie².

Die manuell angepasste Geometrie besitzt in der Nähe der Arbeitsfrequenz zwei antisymmetrische Moden: die Störmode bei 30181 Hz und die nächste antisymmetrische Mode bei 31941 Hz. Durch die erhebliche Änderung der geometrischen Parameter, weist die optimierte Lösung ganz andere Eigenformen auf. Es sind nun drei antisymmetrische Moden im Frequenzspektrum vorhanden: 28767, 31135 und 31606 Hz.

¹Ihre geometrischen Parameter sind in Tab. 8.33 im Anhang zu finden.

²Die zugehörigen Schwingungsformen sind in Abb. 8.5 im Anhang dargestellt

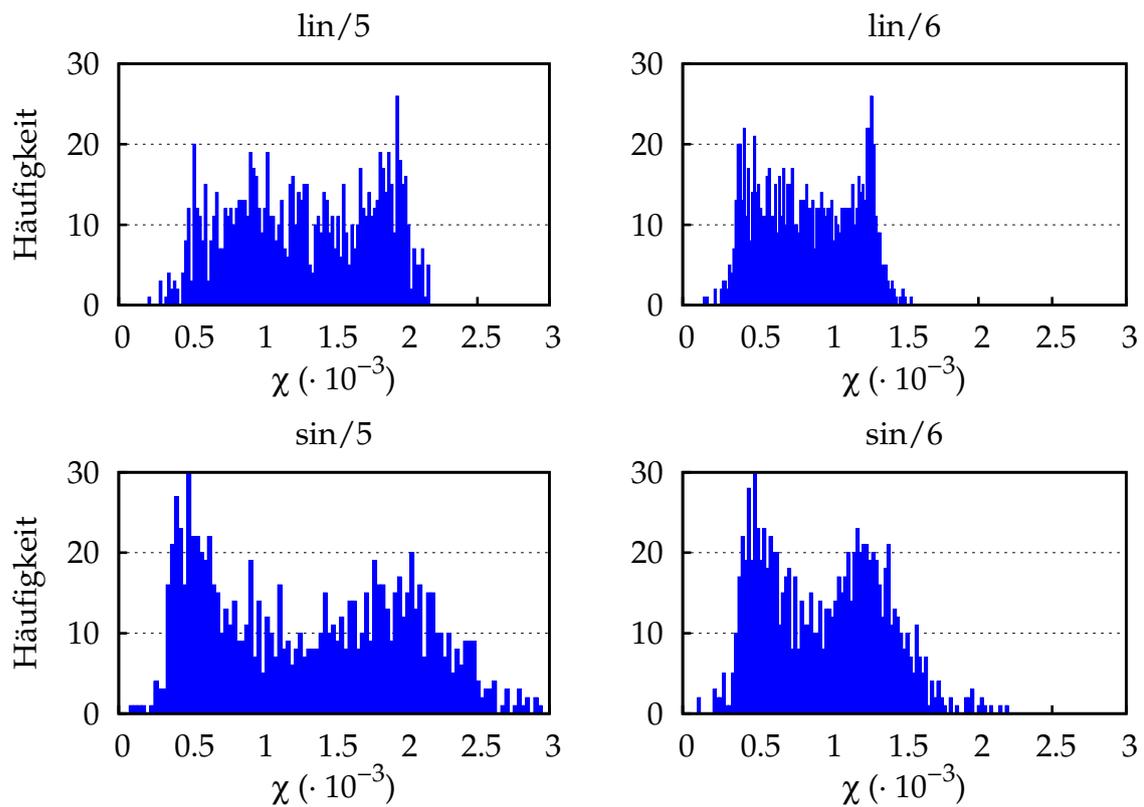


Abb. 6.14: Histogramme der MCS für die vier Lösungen.

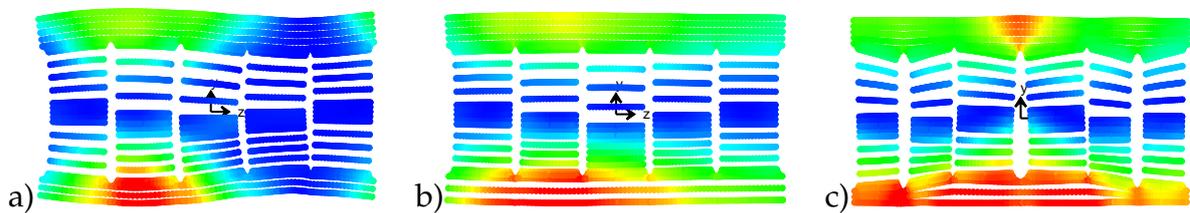


Abb. 6.15: Verstimmten Eigenformen der verschiedenen Geometrien: (a) originale Geometrie, (b) manuell angepasste Geometrie, (c) automatisch angepasste Geometrie lin/6.

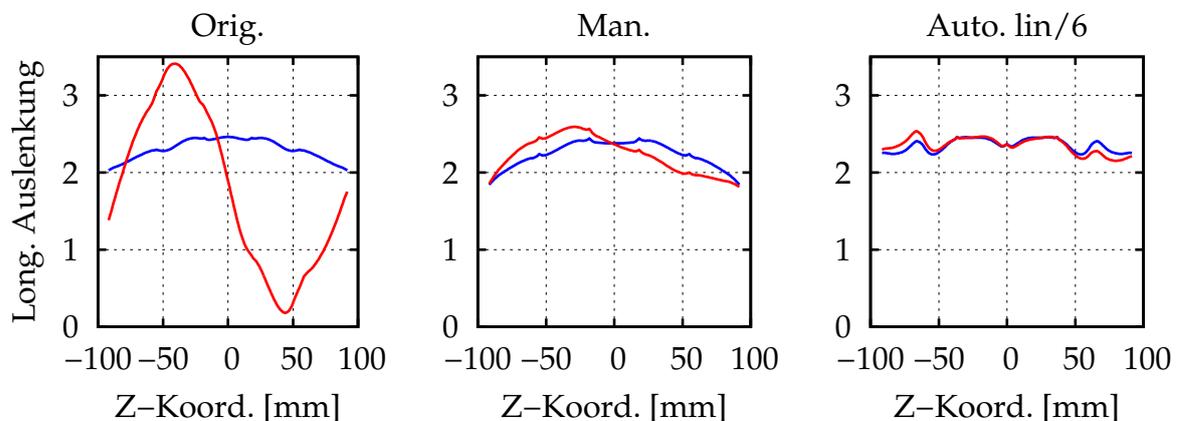


Abb. 6.16: Longitudinale Auslenkung der Schweißfläche, für die Betriebsmode der verschiedenen Geometrien (blaue Profile: nominale Eigenformen, rote Profile: verstimte Eigenformen).

6.3.7 Messung der Prototypen

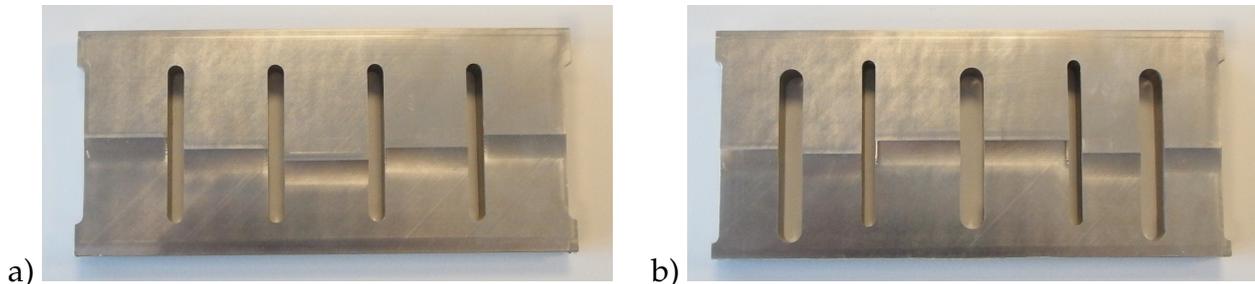


Abb. 6.17: (a) Manuell angepasste Geometrie der ersten Sonotrode. (b) Geometrie der zweiten Sonotrode, ermittelt aus der AMV-Methode.

Die beiden Sonotroden werden in Abb. 6.17 dargestellt. Für die Messung werden sie wieder mit einem externen Wandler angeregt, der auf den Mittelpunkt der Eingangsfläche angesetzt wird. Die Erfassung der Bewegungsantwort entlang der Schweißfläche erfolgt mit Hilfe des LDV und die Frequenzantworten aus Abb. 6.18 werden im Mittelpunkt der Schweißfläche gemessen.

Für die Identifizierung der Moden wird die Antwort der Schweißfläche in jeder Resonanz gemessen ¹ und die gemessenen Moden anhand den Schwingungsformen der Schweißfläche den Moden aus der FE-Simulation optisch zugeordnet. Die simulierten Schwingungsformen der beiden Sonotroden befinden sich in Abb. 8.5 im Anhang.

In Tab. 6.6 werden die Lagen der Moden zwischen der FE-Simulation und der Messung jeweils für beide Sonotroden miteinander verglichen. Die Resonanz der Betriebsmode (A) liegt für die erste Sonotrode bei 29395 Hz und ist tiefer als erwartet. Im Gegenteil dazu liegt sie für die zweite Sonotrode (Q) bei 29902 Hz und ist in guter Übereinstimmung mit der Simulation, auch wenn die Materialparameter vorgegeben waren und nicht angepasst wurden. Die Mode (E) der ersten Sonotrode konnte im gemessenen Frequenzspektrum nicht beobachtet werden. Vermutlich lässt sich diese Mode von der mittleren Anregung durch den Piezoaktor nicht anregen. Die Messungen bei der Resonanzfrequenz der Betriebsmode liefern die Auslenkungsprofile der Schweißfläche in Abb. 6.19:

- Für Sonotrode 1 zeigt die in der Hauptresonanz gemessene Auslenkungsamplitude eindeutig den Anteil der Störmode (zweite Resonanz dicht oberhalb (B) bei 29821 Hz) in der degenerierten Eigenform der Betriebsmode. Alle Messpunkte entlang der Schweißfläche weisen dieselbe Phasenverschiebung zur Anregung auf. Wie erwartet, antwortet die Störmode stark auf eine symmetrische Anregung. Mit homogenem Material wie in der FE-Simulation, wäre diese Resonanz bei mittiger Anregung überhaupt nicht detektierbar.

¹Alle Antwortprofile sind im Anhang Abb. 8.8 und Abb. 8.9 dargestellt.

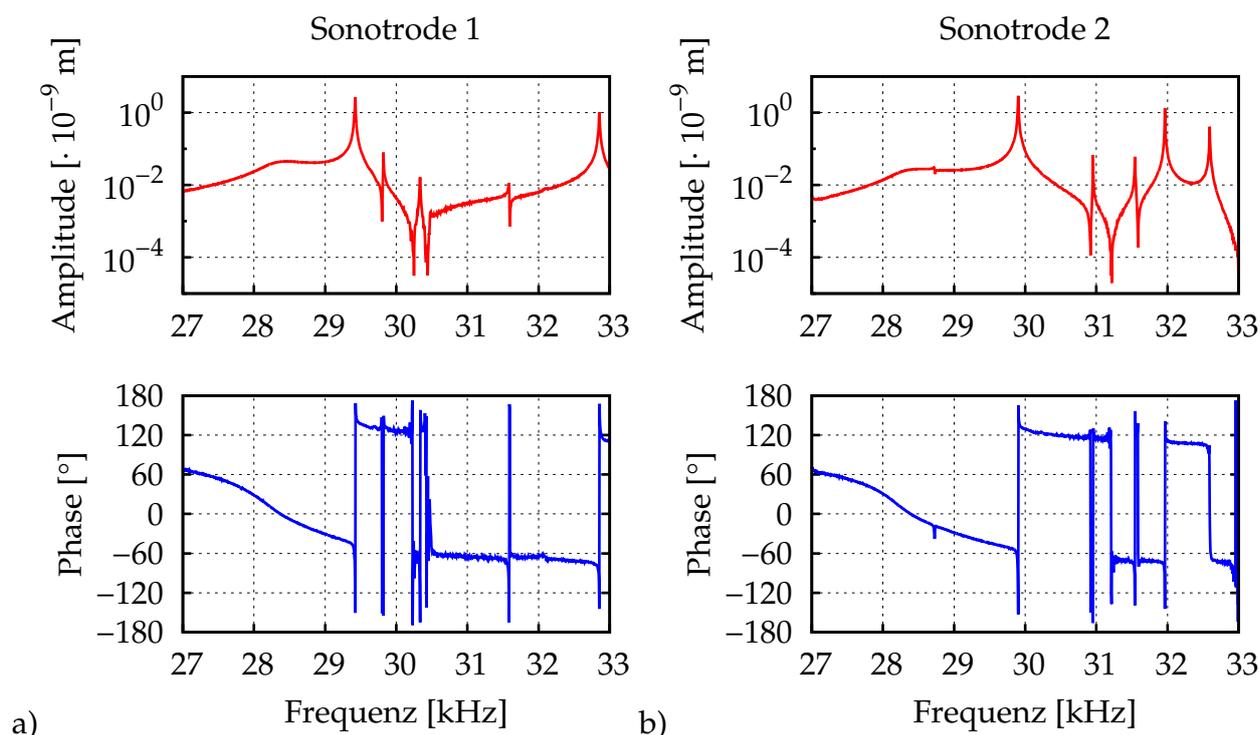


Abb. 6.18: Frequenzgangmessung im Mittenpunkt der Schweißfläche von beiden Sonotroden.

	Mode	Freq. FE [Hz]	Freq. Messung [Hz]		Mode	Freq. FE [Hz]	Freq. Messung [Hz]
a)	A	29821	29422	b)	P	28767	28719
	B	30181	29820		Q	29999	29902
	C	30453	30336		R	31135	30953
	D	31941	31582		S	31606	31543
	E	32929			T	32066	31965
	F	33244	32852		U	32555	32594

Tab. 6.6: Übersicht der Frequenzlagen der Schwingungsmoden der Sonotrode 1 (a) und Sonotrode 2 (b), jeweils aus der Simulation und der Messung identifiziert.

- Die modale Dichte in der Nähe der Arbeitsfrequenz ist für Sonotrode 2 deutlich geringer. Die Lage der beiden Nachbarresonanzen (P) bei 28719 und (R) 30941 Hz stimmen mit der FE-Simulation besser überein als für Sonotrode 1. Das in der Hauptresonanz gemessene Auslenkungsprofil ist deutlich gleichmäßiger als für die erste Sonotrode. In der Überhöhung des Amplitudenprofils an der linken Seite lässt sich ein kleiner Anteil der antisymmetrischen Mode (R) bestenfalls erahnen.

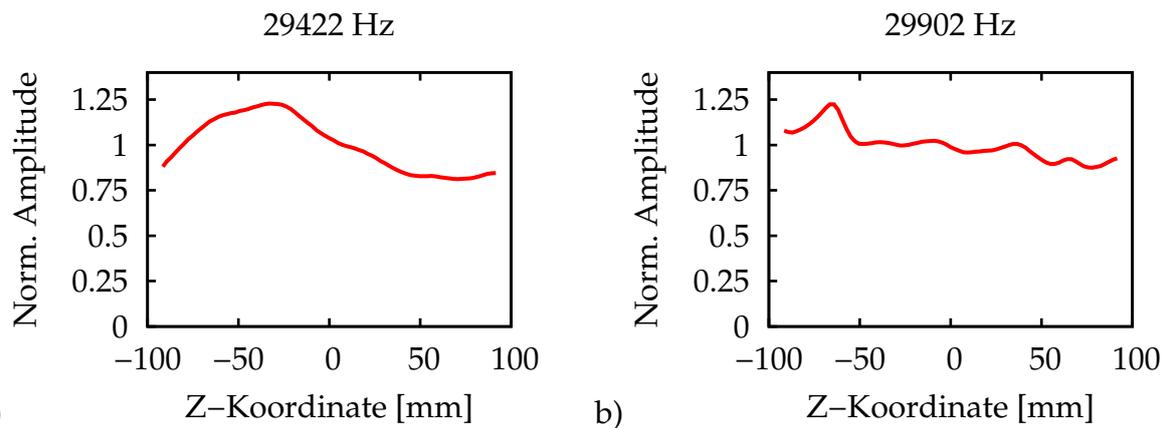


Abb. 6.19: Gemessenes Auslenkungsprofil entlang der Schweißfläche in der Hauptresonanz, jeweils bei der Sonotrode 1 (a) und der Sonotrode 2 (b). Die Amplituden sind auf der Auslenkung des Mittenpunkts normiert.

6.3.8 Zusammenfassung

Die experimentelle Überprüfung weist die Degeneration der Betriebsmode und den Einfluss der Heterogenität im Sonotrodenmaterial nach. Die manuelle Anpassung der ersten Sonotrodengeometrie erfordert eine gewisse Erfahrung und eine iterative Vorgehensweise, um die richtigen Maßnahmen zur Vergrößerung der Abstände zwischen der Betriebsmode und den Störmoden zu erreichen. Manchmal ist eine Maßnahme sogar kontraproduktiv, da die Frequenzverschiebung einer Störmode zu einer Annäherung von anderen antisymmetrischen Moden oder zu einer Vergrößerung ihrer modalen Kopplung mit der Betriebsmode führen kann.

Nach der Fertigung dieser beiden Sonotroden können die gewonnen Erkenntnisse aus den vorherigen theoretischen Analysen verifiziert und das entwickelte Kriterium χ zur Anwendung gebracht werden. In diesem praktischen Beispiel wird das Kopplungskriterium und dadurch gleichzeitig auch der verstimmungsbedingte Rotationswinkel automatisch minimiert. Gleichzeitig wurde die Gleichmäßigkeit des Auslenkungsprofils der nominalen Betriebsmode berücksichtigt. Die Anwendung dieser Optimierungsmethode führt zu einer theoretisch optimierten Geometrie mit sechs Segmenten, welche experimentell validiert wird.

Die aus der AMV-Methode ermittelte Geometrie zeigt eine gleichmäßigere Schwingungsform der Betriebsmode als die der manuell ausgelegten Geometrie und bildet daher eine robustere Sonotrodengeometrie bezüglich Inhomogenitäten innerhalb des Materials ab.

7 Diskussion der Ergebnisse

Die aus der Literatur bekannten Typen von modalen Interaktionen wurden im ersten Teil der Arbeit allgemein mit Bezug zu ähnlichen Phänomenen wie z.B. bei Schaufelkränzen dargestellt. Die modale Überlagerung und die modale Degeneration wurden für den speziellen Fall von Ultraschallwerkzeugen genauer untersucht.

In Kapitel 4 wurde die parasitäre Antwort einer zusätzlichen Mode anhand eines piezoelektrischen Modells beschrieben. Es wurde gezeigt, dass die modale Degeneration eine wichtige Art von modaler Interaktion bei Ultraschallwerkzeugen darstellt und dass sie auf eine gewisse Verstimmung zurückzuführen ist. Diese kann z.B. darin bestehen, dass die Materialeigenschaften örtlich inhomogen sind oder dass kleine Fertigungsabweichungen auftreten. Nach der ausführlichen Untersuchung eines elementaren FE-Modells folgte in Kapitel 5 die Entwicklung eines automatischen Verfahrens zur Minimierung der Degeneration der Betriebsmode. Schließlich in Kapitel 6 wurde dieses Verfahren anhand von mehreren Beispielsonotroden experimentell validiert. Die Antworten zu den verschiedenen Fragestellungen sind im vorliegenden Kapitel zusammengefasst.

Mit welchen Kopplungsmechanismen lassen sich die modalen Interaktionen beschreiben?

Insgesamt wurden drei Hauptmechanismen identifiziert, die zu modalen Interaktionen bei Ultraschallwerkzeugen führen. Sie alle wurden bereits in vorhergehenden Arbeiten beschrieben, die Untersuchungen erfolgten dabei jedoch mit einem sehr unterschiedlichen Detaillierungsgrad.

- Bei einem optimalen Antrieb einer Ultraschallsonotrode in longitudinaler Richtung soll ausschließlich die gewünschte Mode auf die mechanische Anregung reagieren. Voraussetzung dafür ist, dass die Frequenz dieser Mode von den anderen Moden spektral hinreichend weit entfernt ist. Die Problematik der modalen Überlagerung verstärkt sich bei Anwendungen in denen die Anregungsfrequenz nicht exakt mit der Resonanzfrequenz der angestrebten Betriebsmode übereinstimmt, was im realen Betrieb häufig der Fall ist. Die wichtigsten Einflussfaktoren sind das Verhältnis zwischen der Erregerfrequenz und den Eigenfrequenzen sowie die Auslenkung der Eigenvektoren an den Erreger- und Messstellen.

- Kombinationsresonanzen verursachen eine instabile Kopplung der Betriebsmode mit tieffrequenten Moden. Dieser Typ von modaler Interaktion führt zu starker Geräuschentwicklung und darüber hinaus ggf. zum Versagen der Schwingkomponenten aufgrund der parasitären Beteiligung der tieffrequenten Moden. Die Kombinationsresonanzen sind auf nichtlineare Eigenschaften der Ultraschallwandler und auf eine hohe modale Dichte der Sonotroden zurückzuführen.
- Modale Degeneration ruft eine Verzerrung bzw. eine Degeneration der Eigenformen hervor. Sie ist direkt auf die Kombination eines geringen Frequenzabstands und auf eine Asymmetrie bzw. eine Verstimmung im Schwingssystem zurückführbar. Ursachen sind meist geometrische Asymmetrien oder Inhomogenitäten der Materialeigenschaften. Eine mögliche weitere Ursache liegt in der allgemeinen Bauform der Struktur.

Die Überlagerung der modalen Antwort findet sich in der technischen Literatur ausführlich beschrieben. Aus diesem Grund wurde diesem Interaktionstyp nur ein kleiner Teil der vorliegenden Arbeit gewidmet. Für den speziellen Fall von Ultraschallwerkzeugen wurde die modale Degeneration als besonders wichtiger Interaktionsmechanismus identifiziert. Die wesentlichen Einflussparameter wurden untersucht. Es wurde eine Auslegungsmethodik entwickelt, mit der es gelingt, die Degeneration der gewünschten Betriebsmode zu minimieren und damit einen optimalen Betrieb der Sonotroden zu ermöglichen.

Wie groß muss der Frequenzabstand zwischen der longitudinalen Betriebsmode und den anderen Moden sein, um eine zufriedenstellende Entkopplung zu gewährleisten?

Im Fall der modalen Überlagerung hängt der minimale Frequenzabstand von verschiedenen Faktoren ab. Zum einen ist eine resonanznahe Anregung immer von Vorteil, da die Antwort der Betriebsmode stärker überwiegt, umso näher die Erregerfrequenz bei der Resonanzfrequenz liegt. Weiterhin ist die modale Antwort von der Anregungsstelle und der Eigenform der Betriebsmode abhängig. Für ein Ultraschallschwinggebilde befindet sich die Anregungsstelle immer an den Wandler Elektroden und die modalen Größen werden durch die modenabhängigen elektromechanischen Kopplungen bestimmt.

Im Unterschied dazu spielt die Anregung im Fall der modalen Degeneration nahezu keine Rolle, da die Eigenform der longitudinalen Mode selbst verzerrt ist. Die Interaktion verursacht eine Rotation der modalen Basis und verändert damit die Schwingungsform. Die Projektion der Eigenvektorenverschiebung auf einen nominalen Eigenvektor hängt direkt vom Verhältnis der modalen Kopplung zum Eigenwertabstand ab. Je stärker die modale Kopplung und je geringer der Frequenzabstand, desto mehr dreht sich der Eigenvektor der Betriebsmode in Richtung eines anderen Eigenvektors. Die beiden Einflussfaktoren müssen für jedes Modenpaar zueinander ins Verhältnis gesetzt werden. Findet die Interaktion mit mehr als einer Mode statt, muss die Norm der Eigenvektorenverschiebung betrachtet werden.

Welchen Einfluss hat die Asymmetrie auf die modalen Eigenschaften der Ultraschallschwinger?

Die modale Kopplung zwischen zwei Moden wird von den Eigenformen und der Verstimmung bestimmt, die wiederum über eine räumliche Verteilung in der Struktur definiert wird. Eine asymmetrische Verstimmungsverteilung bezüglich der longitudinalen Richtung ist besonders ungünstig, da dadurch eine Kopplung zwischen der symmetrischen Betriebsmode und den antisymmetrischen Moden entsteht. Diese Verstimmung kann u. a. von heterogenen Materialeigenschaften oder Geometrieabweichungen (z.B. Fertigungstoleranzen) hervorgerufen werden.

Für kleine Verstimmungen haben die Variationen von E-Modul und Dichte vergleichbare Auswirkungen. Bei der FE-Simulation kann eine solche Verstimmung auch durch eine ungünstige Vernetzung verursacht sein, wenn diese asymmetrisch und grob aufgebaut ist. Die durch die Verstimmung hervorgerufene und unerwünschte modale Kopplung ist besonders ungünstig, wenn zwei Moden spektral dicht beieinander liegen. Bei der Auslegung und der Fertigung von komplexen Ultraschallschwinggebilden mit einer hohen modalen Dichte ist es von Nutzen, sowohl das FE-Modell wie die gefertigte Sonotrodengeometrie möglichst symmetrisch zu legen.

Unter welchen Bedingungen können Modenkopplungen bei FE-Analysen richtig nachgewiesen werden?

Die Längsmode bzw. die Betriebsmode einer symmetrischen Struktur weist eine symmetrische Auslenkung in longitudinaler Richtung auf. Unter der Voraussetzung einer symmetrischen Vernetzung sowie homogener Materialdaten ist ihre Kopplung mit den antisymmetrischen Moden nicht möglich. Eine asymmetrische Verzerrung der Betriebsmode im FE-Modell ist nur erkennbar, wenn eine fehlerhafte Kopplung (z.B. Asymmetrie in der Vernetzung oder in der Geometrie) vorhanden ist. Die absichtliche Modellierung einer asymmetrischen Verstimmung (u.a. im Material oder in der Geometrie) ist dennoch möglich, sie macht aber die Anpassung des FE-Modells erforderlich.

Eine weitere Kopplung zwischen den symmetrischen Moden ist aufgrund der Bauform der schwingenden Struktur (z.B. Rechteck) vorhanden. Im Unterschied dazu ist die modale Kopplung sehr groß und stark von den betroffenen Eigenformen abhängig. Bei geringen Frequenzabständen kann eine ungenaue Modellierung zu signifikanten und instabilen Abweichungen der modalen Eigenformen führen. Diese Ungenauigkeit wird durch die Idealisierung der Kontaktstellen verstärkt, wenn zusätzliche Schwingkomponenten wie z.B. ein Wandler oder ein Amplitudentransformationsstück in die Berechnung mit einbezogen werden.

Im Allgemeinen ist ein geringer Frequenzabstand bei der FE-Simulation immer problematisch, da kleine Fehler in der Berechnung der modalen Kopplung und des Frequenzabstands einen großen Einfluss auf das Gesamtergebnis haben. Aus diesem Grund ist es wesentlich, möglichst genaue Materialdaten und eine symmetrische und feine Modellvernetzung zu nutzen, um zuverlässige Ergebnisse zu erhalten.

Wie muss man systematisch vorgehen, um die Geometrie eines Ultraschallschwingers so auszulegen, dass sich möglichst robuste Schwingungseigenschaften ergeben?

Wie erwähnt, sind ein ungleichmäßiges Auslenkungsprofil der Schweißfläche und eine hohe Eingangsleistung im freischwingenden Zustand die unerwünschten Folgen einer Modenkopplung bei Ultraschall-Längsschwingern. Beide Sachverhalte lassen sich auf parasitäre Querbewegungen zurückführen, die durch eine Überlagerung mit anderen Moden oder die Degeneration der longitudinalen Betriebsmode verursacht werden.

Im Fall der modalen Überlagerung reicht die spektrale Trennung der Eigenfrequenzen mit Rücksicht auf die relativen Positionen der Erreger- und Eigenfrequenzen sowie die elektromechanischen Kopplungen. Um die Degeneration der longitudinalen Betriebsmode zu minimieren, sollte eine Optimierung bezüglich zweier Kriterien vorgenommen werden: die Sonotrode soll in der Nennkonfiguration ein gleichmäßiges Auslenkungsprofil ihrer Schweißfläche aufweisen und die verstimmungsbedingte Rotation des Eigenvektors der Betriebsmode soll minimal sein. Da die Eigenschaften des Sonotrodenmaterials immer variieren, können in manchen Fällen auch bei unproblematischen Geometrien unerwünschten Modenkopplungen auftreten. In der vorliegenden Arbeit wurden Methoden vorgestellt, um diese beiden Kriterien zusammen in einem automatischen Minimierungsverfahren zu optimieren und dadurch eine bezüglich zufälliger Verstimmungen robuste Geometrie zu finden.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit hat die Untersuchung zweier verschiedener Typen von Modenkopplungen bei Ultraschallwerkzeugen zum Gegenstand: die Überlagerung der modalen Antworten und die Degeneration der Eigenformen. Zur Bewertung der modalen Interaktionen wurden Bewertungskriterien entwickelt. Der Einfluss einer Verstimmung auf die Eigenschaften von Ultraschallwerkzeugen wurde bisher kaum untersucht, hier liefert diese Arbeit erste Ansätze und Nachweise. Zur besseren Auslegung von Ultraschallsonotroden wurde ein automatisches Optimierungsverfahren entwickelt, implementiert und praktisch erprobt. Die dadurch mögliche robuste Auslegung führt auf Ultraschallwerkzeuge mit stabilerem Verhalten und stellt einen erheblichen wirtschaftlichen Nutzen dar.

Darüber hinaus wurde eine Vielzahl weiterführende Ideen für nachfolgende Untersuchungen entwickelt. Beispielsweise wird in dieser Arbeit der Einfluss der Verstimmungsverteilung innerhalb des Sonotrodenmaterials untersucht. Eine Reihe von Fragen ist jedoch noch offen: so wurde z.B. die Dämpfung bei der modalen Degeneration außer Acht gelassen. Ihr Einfluss bleibt noch zu überprüfen. Bei der Untersuchung der modalen De-

generation wurde die Sonotrode als einziger Schwingkörper berücksichtigt. Wird der Wandler mit in die Modellierung einbezogen, so entstehen etliche Fragen bezüglich seiner Nichtlinearität und dem mechanischen Verhalten an den Kontaktstellen. Auch wenn damit noch nicht alle Fragen im Zusammenhang mit der robusten Auslegung von Ultraschallwerkzeugen beantwortet sind, hat diese Arbeit eine wesentliche Grundlage geschaffen, auf der weiterführende Untersuchungen aufbauen können.

8 Anhang

8.1 Lineare Fremderregung

8.1.1 Erzwungene Schwingungen

8.1.1.1 Erzwungene Schwingungen eines gedämpften Systems

In IRRETIER [48] wird die mechanische Übertragungsfunktion eines mechanischen Systems auf Basis der Eigenformen, –frequenzen und modale Kräfte beschrieben. Die Bewegungsgleichungen werden im Vergleich zum freien ungedämpften System in Gl. 2.21 erweitert:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (8.1)$$

Der Vektor \mathbf{x} beinhaltet die physikalischen Koordinaten. \mathbf{M} , \mathbf{D} und \mathbf{K} beschreiben jeweils die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen. Der zeitabhängige Erregerkraftvektor $\mathbf{F}(t)$ enthält die angreifenden Erregerkräfte an den N physikalischen Freiheitsgraden. Treten Kräfte an mehreren Freiheitsgraden auf, wird die Anregung Mehrpunktanregung genannt. Für den Sonderfall einer einzigen Erregerkraft wird von einer Einzelpunktanregung gesprochen.

8.1.2 Modaltransformation

Die Lösung des Eigenwertproblems stellt eine lineare Transformation zwischen dem Vektor \mathbf{x} der physikalischen Koordinaten, dem Vektor \mathbf{y} der zeitabhängigen modalen Koordinaten und den Eigenvektoren \mathbf{u} des Systems her:

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n y_n \quad (8.2)$$

Die Bewegung $\mathbf{x}(t)$ der Struktur wird dadurch in seine Eigenformen zerlegt, worin die zeitabhängigen Modalkoordinaten y_n angeben, wie stark jede Eigenform in dieser Bewe-

gung enthalten ist. Die Modalmatrix besteht aus den spaltenweise angeordneten Eigenvektoren,

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N] = \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{N1} & \dots & U_{NN} \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

welche die Orthogonalitätsbeziehungen erfüllen. Da Dämpfungsterme auftreten, ist die Entkopplung der Bewegungsgleichungen nur unter der Annahme einer modalen Dämpfung möglich. Der Sonderfall der proportionalen Dämpfung (oder RAYLEIGH-Dämpfung) liefert den mathematischen Ansatz, bei dem die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} als Linearkombination von Massen- und Steifigkeitsmatrix geschrieben wird. Mit einer Massennormierung der Eigenvektoren lassen sich die Gleichungen folgendermaßen darstellen [80]:

$$\underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U}}_{\mathbf{I}} \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{D} \mathbf{U}}_{\alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{\Lambda}} \dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}}_{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{U}^T \mathbf{F}(t)}_{\mathbf{f}(t)} \quad (8.4)$$

Der Vektor $\mathbf{f}(t)$ beschreibt die modal gewichteten Erregerkräfte. Da die Matrizen \mathbf{I} und $\mathbf{\Lambda}$ diagonal besetzt sind, hat die modal transformierte Bewegungsgleichung im Fall von einfach auftretenden Eigenwerten die Form von N entkoppelten Differentialgleichungen:

$$\ddot{y}_n(t) + 2D_n \omega_n \dot{y}_n(t) + \omega_n^2 y_n(t) = f_n(t) \quad (8.5)$$

Jede der modalen Bewegungsgleichungen entspricht der Bewegungsgleichung eines fremderregten, linearen Systems mit einem Freiheitsgrad, wobei D_n dem Lehrschen Dämpfungsmaß der n -ten Mode entspricht.

8.1.3 Harmonische Anregung

An allen Freiheitsgraden wird eine isofrequente und phasengleiche (oder gegenphasige, je nach Vorzeichen der Erregerkraftamplitude) harmonische Anregung angenommen. Der Erregerkraftvektor lautet:

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \vdots \\ \hat{F}_N \end{pmatrix} \cos \Omega t = \hat{\mathbf{F}} \cos \Omega t \quad (8.6)$$

worin im Vektor $\hat{\mathbf{F}}$ alle Erregeramplituden zusammengefasst sind. Als Inverse der dynamischen Steifigkeitsmatrix $(\mathbf{K} + j\Omega \mathbf{D} - \Omega^2 \mathbf{M})$, beschreibt die Frequenzganzmatrix \mathbf{H} die

dynamischen Eigenschaften der Struktur:

$$\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{F} \quad (8.7)$$

Entsprechend der Modaltransformation lautet der Vektor der modal gewichteten Erregerkräfte:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{F}} \cos \Omega t \quad (8.8)$$

Jede Komponente $f_n(t) = \mathbf{u}_n^T \hat{\mathbf{F}} \cos \Omega t$ ist eine skalare Größe, welche die Summe der Produkte der Erregerkraftamplituden mit den Werten der Eigenvektoren an den jeweiligen Erregerstellen enthält. Mit dem Ansatz $y(t) = \hat{y} \cos \Omega t$, lautet die partikuläre Lösung von Gl. 8.5:

$$y_n(t) = G_n \frac{\mathbf{u}_n^T \hat{\mathbf{F}}}{\omega_n^2} \cos \Omega t = \frac{G_n}{\omega_n^2} f_n(t) \quad (8.9)$$

wobei G_n die Vergrößerungsfunktionen in Abhängigkeit von den Lehrschen Dämpfungsmaßen D_n und von Verhältnissen η_n der Erregerkreisfrequenz Ω zu den Eigenkreisfrequenzen ω_n sind. Es gilt:

$$G_n(j\Omega) = \frac{1}{1 - \eta_n^2 + 2jD_n\eta_n} \quad \text{mit} \quad \eta_n = \frac{\Omega}{\omega_n} \quad (8.10)$$

Im Fall eines ungedämpften Systems ergibt sich demnach die Phasenverschiebung 0° bis 90° bei unterkritischer Anregung und 90° bis 180° bei überkritischer Anregung. Mit den modalen Amplituden und dem Modalansatz ergibt sich schließlich der Vektor der physikalischen Amplituden der Systemantwort:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underbrace{\sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \frac{G_n}{\omega_n^2} \mathbf{u}_n^T}_{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{F}} \quad (8.11)$$

Jedes Element H_{ik} der Frequenzgangmatrix stellt einen Skalierungsfaktor dar, der angibt, mit welcher Auslenkung \hat{x}_i eine lineare Struktur am Punkt i antwortet, wenn sie harmonisch mit der Erregerkreisfrequenz Ω der Erregeramplitude \hat{F}_k am Punkt k zur Schwingung angeregt wird. Dieses Übertragungsverhalten zwischen den Punkten i und k wird durch alle N Eigenformen des Systems bestimmt:

$$\hat{x}_i = \sum_{k=1}^N H_{ik} \hat{F}_k = \sum_{n=1}^N \underbrace{U_{in}}_{(1)} \underbrace{\frac{G_n}{\omega_n^2}}_{(2)} \underbrace{\sum_{k=1}^N U_{kn} \hat{F}_k}_{(3)} \quad (8.12)$$

Wie stark jede Eigenform k zu der Schwingungsübertragung in einer Struktur beiträgt, hängt davon ab:

1. wie groß die i -te Komponente des n -ten Eigenvektors am Messpunkt i ist,
2. wie nah die Erregerkreisfrequenz Ω an der Eigenkreisfrequenz ω_n ist und
3. wie groß die k -te Komponente des n -ten Eigenvektors an den Erregungspunkten k ist.

8.1.3.1 Übertragungsfunktion in Resonanznähe

Für eine resonante Anregung mit $\Omega \approx \omega_r$, wird die Vergrößerungsfunktion lediglich vom Dämpfungsmaß begrenzt. Unter der Annahme eines schwach gedämpften Systems, wird der zugehörige Summand so groß, dass er gegenüber allen anderen Summanden überwiegt, sofern $U_{in}U_{kn}$ nicht Null ist. Für den Antwortamplitudenvektor in Resonanznähe gilt die Näherung:

$$\hat{x} \approx -j \frac{\mathbf{u}_r}{2D_r \omega_r^2} \mathbf{u}_r^T \hat{\mathbf{F}} \quad (8.13)$$

Somit nimmt \hat{x} näherungsweise die Form des Eigenvektors \mathbf{u}_r an, lediglich multipliziert mit dem Skalar $\hat{f}_r / (2D_r \omega_r^2)$. Wird also ein lineares System in der Nähe einer Eigenkreisfrequenz ω_r erregt, antwortet es dann wie ein System mit einem einzigen Freiheitsgrad. Es nimmt dabei eine Schwingungsform an, die der zugehörigen Eigenform \mathbf{u}_r entspricht.

8.1.3.2 Einzelpunktanregung

Im Sonderfall der Einzelpunktanregung am Freiheitsgrad k ist nur eine Komponente im Erregungsvektor ungleich Null. Der Kraftvektor und die modal gewichtete Erregerkraft reduzieren sich und die Antwortamplituden sind ausschließlich durch die k -te Spalte der Frequenzgangmatrix \mathbf{H} bestimmt.

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} H_{1k} \\ \vdots \\ H_{Nk} \end{pmatrix} \hat{F}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \hat{F}_k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cos \Omega t \quad (8.14)$$

Allerdings sind, analog zum Phänomen der Schwingungstilgung, einzelne Erregerkreisfrequenzen Ω vorhanden, bei denen die Vergrößerungsfunktion Minima besitzen. Die zugehörigen Punkte sind als Antiresonanzen bezeichnet. Für eine Einzelpunktanregung lässt sich allgemein zeigen, dass der Frequenzgang H_{kk} des Erregerorts k stets zwischen allen Resonanzen, die bei den Eigenfrequenzen des Systems auftreten, eine Antiresonanzstelle hat [36].

8.1.3.3 Zusammenfassung

Zwischen den Resonanzstellen antwortet das System immer mit allen seinen Eigenformen, abgesehen von den Eigenformen, deren Eigenvektor eine Nullstelle an den Erregerorten hat (Schwingungsknoten). Bei Einzelpunktanregung ist die modale Erregerkraft das Produkt der am Punkt k angreifenden Erregerkraft mit der am selben Punkt vorhandenen Auslenkung U_{kn} der n -ten Eigenform. Beträgt diese Auslenkung Null, enthält die resultierende Schwingung nicht die n -Eigenform. Es hängt also bei Einzelpunktanregung nur vom Wert der Eigenform an der Erregerstelle ab, wie leicht anregbar eine bestimmte Schwingungsform einer Struktur ist. Bei vorhandener Dämpfung treten Resonanzen und Antiresonanzen nicht so ausgeprägt auf wie im ungedämpften Fall. Es treten keine unendlichen Amplituden und keine vollständigen Tilgungen mehr auf.

8.2 20 kHz Schwinggebilde mit zahlreichen antwortenden Moden

8.2.1 Materialdaten

In den folgenden Tabelle sind die Materialparameter zur Simulation des 20 kHz Schwinggebildes aus Abschnitt 4.2 aufgelistet. Die Materialdaten *TiAl6V4-Rund* und *TiAl6V4-Platte* stammen aus der Standard-Materialdatenbank von Herrmann Ultraschall. Die anderen Materialdaten sind in den Datenblättern der Hersteller zu finden.

Teil	Material
Sonotrode	TiAl6V4-Platte
Unterteil	TiAl6V4-Rund
Elektroden	CuBe2
Piezoelektrische Scheiben	PZT802
Oberteil	90MnCrV8
Schraube	TiAl6V4-Rund

Tab. 8.1: Material der Sonotrode und der Wandlerkomponenten.

Material	CuBe2	90MnCrV8
E-Modul E [GPa]	130	210
Querkontraktionszahl ν	0.3	0.3
Dichte ρ [kg/m ³]	8250	7800

Tab. 8.2: Isotrope Materialkonstanten.

Material	TiAl6V4-Rund
E-Modul E_L [GPa]	106
E-Modul E_T [GPa]	117
Querkontraktionszahl ν_{LT}	0.32
Querkontraktionszahl ν_{TT}	0.305
Dichte ρ [kg/m ³]	4400

Tab. 8.3: Transversal isotrope Materialkonstanten. L definiert die longitudinale Richtung und T die transversale Richtung.

Material	TiAl6V4-Platte
E-Modul E_1 [GPa]	121
E-Modul E_2 [GPa]	135
E-Modul E_3 [GPa]	119
Querkontraktionszahl ν_{31}	0.395
Querkontraktionszahl ν_{12}	0.263
Querkontraktionszahl ν_{32}	0.302
Schubmodul G_{31} [GPa]	42.3
Schubmodul G_{12} [GPa]	48.35
Schubmodul G_{32} [GPa]	48.8
Dichte ρ [kg/m ³]	4400

Tab. 8.4: Orthotrope Materialkonstanten. 1 definiert die Walzrichtung der Platte, 2 die Querrichtung und 3 die Dickenrichtung.

Material	PZT802
Dichte ρ [kg/m ³]	7500
d_{31} [m/V]	$-9.70 \cdot 10^{-11}$
d_{33} [m/V]	$2.50 \cdot 10^{-10}$
d_{15} [m/V]	$3.00 \cdot 10^{-10}$
s_{11}^E [m.s ² /kg]	$1.15 \cdot 10^{-11}$
s_{33}^E [m.s ² /kg]	$1.35 \cdot 10^{-11}$
s_{12}^E [m.s ² /kg]	$-3.38 \cdot 10^{-12}$
s_{13}^E [m.s ² /kg]	$-4.69 \cdot 10^{-12}$
s_{44}^E [m.s ² /kg]	$3.19 \cdot 10^{-11}$
s_{66}^E [m.s ² /kg]	$2.78 \cdot 10^{-11}$
$\epsilon_{11}^T / \epsilon_0$	1290
$\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	1150

Tab. 8.5: Piezoelektrische Materialkonstanten PZT802 (Morgan Ceramics).

8.2.2 Parameteridentifikation

Es folgt eine Auflistung der identifizierten Parameter des multimodalen piezoelektrischen äquivalenten Systems:

$$C_0 = 11.662 \text{ nF}$$

Mode	C [pF]	R [Ω]	L [H]	Q_m
A	45.156	148.02	1.5718	1260
B	200.08	6.0948	0.3138	6498
C	340.65	5.277	0.16509	4172
E	52.51	95.677	0.93679	1396
F	117.01	12.469	0.39809	4678
G	1026.5	6.7615	0.041426	940
H	293.34	13.49	0.1207	1504
I	11.248	140.3	2.8283	3574
J	318.29	5.6089	0.097057	3113

8.3 Dynamik der zyklischen Strukturen

Schwingungssysteme mit identischen und periodisch angeordneten Substrukturen können mit zyklischen Randbedingungen beschrieben werden. Dabei besitzen die Freiheitsgrade an den Schnittstellen zwischen Nachbarsegmenten die gleiche Verschiebung, die mit einer Phasenlage behaftet sind, siehe u.a. THOMAS [78] und PANNING [65].

8.3.1 Eigenformen

Eine Schwingungsfamilie kann durch die Schwingungsform eines einzigen Segments beschrieben werden und die Eigenvektoren der gesamten Struktur lassen sich durch die Anzahl der Knotendurchmesser N_D (engl. *nodal diameter*) charakterisieren. Meistens werden die Eigenfrequenzen der Moden aus derselben Schwingungsfamilie in einem Diagramm in Abhängigkeit von der Anzahl der Knotendurchmesser dargestellt. Die Anzahl von Segmenten N ergibt für die n -te Mode der Familie den Teilungswinkel δ , die Anzahl der Knotendurchmesser N_D und den konstanten Phasenwinkel zwischen zwei benachbarten Segmenten $\Delta\varphi$:

$$\delta = \frac{2\pi}{N} \quad \Delta\varphi = N_D \delta \quad N_D = n - 1 \quad (8.15)$$

Aufgrund der diskreten Anzahl von Substrukturen werden die Moden bis Knotendurchmesser $N/2$ eindeutig beschrieben. Für höhere Knotendurchmesser taucht der sogenannte *aliasing effect* auf, bei welchem die Moden N_D und $(N - N_D)$ dieselbe Eigenform haben. Die Eigenvektoren werden grundsätzlich in drei Klassen unterteilt:

8.3.1.1 Knotendurchmesser $N_D = 0$

Für den Sonderfall $N_D = 0$ tritt der tiefste Eigenwert λ_1 einfach auf und der zugehörige Eigenvektor weist keine Phasendifferenz zwischen den Segmenten auf:

$$\mathbf{u}_1^{(k)} = \mathbf{u}_1^{(1)} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (8.16)$$

8.3.1.2 Knotendurchmesser $N_D = \frac{N}{2}$

Für den Sonderfall einer geraden Anzahl von Segmenten $N_D = \frac{N}{2}$ tritt der Eigenwert $\lambda_{\frac{N}{2}+1}$ ebenfalls einfach auf. Die Eigenvektoren weisen gegenphasige Bewegung zwischen benachbarten Segmenten auf:

$$\mathbf{u}_{\frac{N}{2}+1}^{(k)} = \mathbf{u}_{\frac{N}{2}+1}^{(1)} (-1)^{(k-1)} \quad (8.17)$$

8.3.1.3 Andere Knotendurchmesser

Die anderen Eigenvektoren die zu den doppelten Eigenwerten $\lambda_n = \lambda_{N+2-n}$ gehören treten konjugiert komplex auf und sind beliebig in ihrem Vektorraum drehbar:

$$\lambda_{N+2-n} = \lambda_n \quad \mathbf{u}_{N+2-n} = \mathbf{u}_n \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^{(k)} &= \mathbf{u}_n^{(1)} e^{j(k-1)\Delta\varphi} \\ \bar{\mathbf{u}}_n^{(k)} &= \bar{\mathbf{u}}_n^{(1)} e^{-j(k-1)\Delta\varphi} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Die aus den beiden konjugiert komplexen Eigenvektoren ermittelten Eigenformen besitzen die gleiche Frequenz und sind orthogonal zueinander. Diese Eigenvektoren können durch zwei orthogonale reelle Eigenvektoren w_n und w'_n ersetzt werden, indem der Realteil und der Imaginärteil eines der beiden Eigenvektoren ausgelesen wird:

$$\begin{aligned} w_n &= \operatorname{Re} \{ \mathbf{u}_n \} \\ w'_n &= \operatorname{Im} \{ \mathbf{u}_n \} \end{aligned} \quad (8.20)$$

8.3.2 Modellierung mit Mehrmassenschwinger

Zyklische dynamischen Systeme wie z.B. Scheiben mit Schaufeln lassen sich wie in Abb. 8.1 dargestellt mit Hilfe einer Schwingerkette vereinfacht modellieren. Dabei bilden die einzelnen Feder-Masse-Schwinger eine Schwingungsfamilie der Schaufeln. Die einzelnen Kopplungsfedern repräsentieren die Steifigkeit der Verbindung zwischen den Schaufeln und der Scheibe.

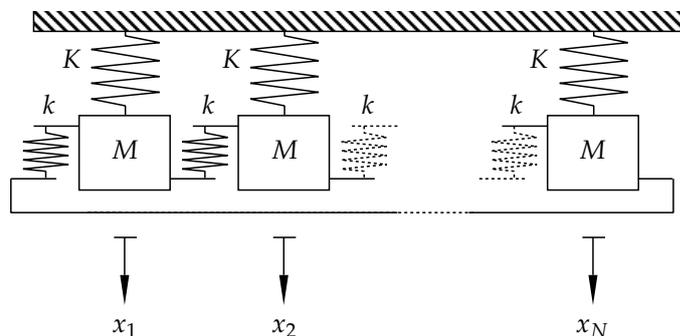


Abb. 8.1: Schwingungsmodell mit N gekoppelten Massenschwingern.

Anhand dieser Wahl der verallgemeinerten Koordinaten ist die Massenmatrix diagonal besetzt. Die Steifigkeitsmatrix des gesamten Systems lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & M \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} K+2k & -k & 0 & \dots & 0 & -k \\ -k & K+2k & -k & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & -k & K+2k & -k \\ -k & 0 & \dots & & -k & K+2k \end{bmatrix} \quad (8.21)$$

Die in Tab. 8.6 aufgelisteten Phasenwinkel $\Delta\varphi$ bestimmen die Eigenwerte:

$$\lambda(\Delta\varphi) = \frac{K}{M} + 2\frac{k}{M}(1 - \cos \Delta\varphi) \quad (8.22)$$

N	ND = 0	ND = 1	ND = 2	ND = 3	...
2	0	π			
3	0	$\pm \frac{2\pi}{3}$			
4	0	$\pm \frac{2\pi}{4}$	π		
5	0	$\pm \frac{2\pi}{5}$	$\pm 2\frac{2\pi}{5}$		
6	0	$\pm \frac{2\pi}{6}$	$\pm 2\frac{2\pi}{6}$	π	
\vdots					

Tab. 8.6: Phasenwinkel $\Delta\varphi$ über der Anzahl von Massen N und Knotendurchmessern ND .

8.4 Klassifizierung der Moden des elementaren Schwingers

8.4.1 Moden des idealen Schwingers

Der ideale Schwinger, mit der Kopplungsrandbedingung zwischen seinen beiden Enden, besteht aus identisch angeordneten und zueinander gekoppelten Segmenten. Seine Moden können in Analogie zu zyklischen Strukturen klassifiziert werden. Die Moden sind mit der Schwingungsform eines einzigen Segmentes und einer Anzahl von Knotendurchmessern definiert.

In Abb. 5.21 werden die 15 ersten Eigenformen bei der Breite $0.901 \cdot \lambda_0$ dargestellt (die erste Eigenform ist eine Starrkörpermode). Die Phasenlage $\Delta\varphi$ zwischen den Segmenten wurden für die Eigenvektoren 6 und 9 optisch auf null identifiziert. Weil die entsprechenden Scher- und Längsmode keinen Knotendurchmesser ($ND = 0$) aufweisen, handelt es sich um einfache Eigenwerte und die jeweiligen Eigenvektoren bilden die Grundformen ihrer jeweiligen Schwingungsfamilie ab.

Die anderen ermittelten Eigenvektorenpaare bestehen in der FE-Analyse aus zwei reellen orthogonalen Eigenvektoren w_n und w'_n . Die Transformation zur komplexen Schreibwei-

se erfolgt durch die Linearkombination der beiden Eigenvektoren eines einzigen Segmentes (k), gemäß Gl. 8.20. Die beiden Eigenformen lassen sich in einen komplexen Eigenvektor zurückführen, der die Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen zwei benachbarten Segmenten liefert:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^{(k)} &= \mathbf{w}_n^{(k)} + j\mathbf{w}_n^{\prime(k)} \\ \Delta\varphi &= \arg\left(\frac{\mathbf{u}_n^{(k+1)}}{\mathbf{u}_n^{(k)}}\right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

Aufgrund der Diskretisierung beträgt bei dieser besonderen Struktur mit fünf Segmenten die maximale Anzahl von Knotendurchmessern $ND = 2$.

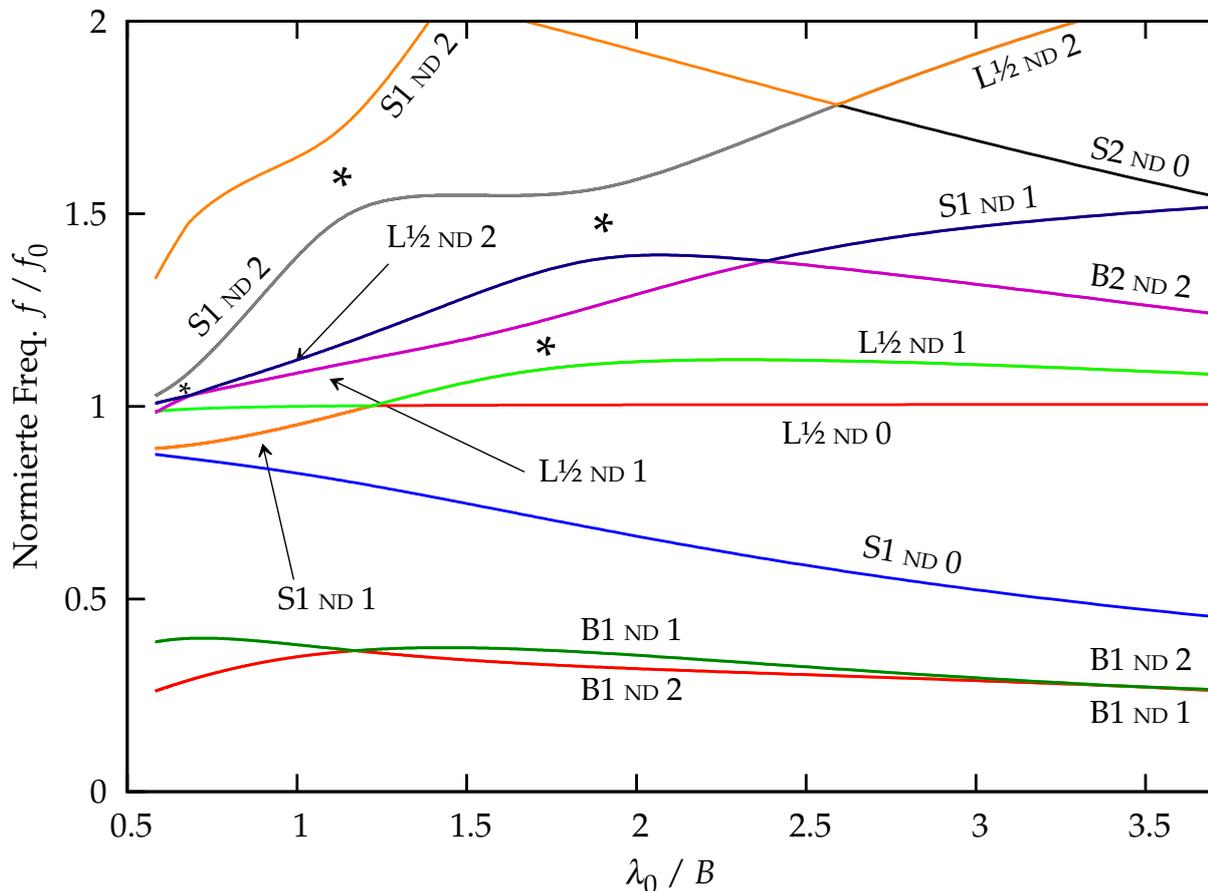


Abb. 8.2: Frequenzkurven des idealen Schwingers.

Die Frequenzkurven des idealen Schwingers sind in Abb. 8.2 als Funktion der Breite B dargestellt. Dabei ist entlang der X-Achse der Kehrwert der Schwingerbreite aufgetragen. Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, dass die dünnen Segmente eine sehr geringe modale Dichte besitzen und die Identifikation der Schwingungsfamilie daher eindeutig ist. Dazu ändern sich die Eigenfrequenzen fast umgekehrt proportional zur Schwingerbreite und die Modenfrequenzen verlaufen nahezu in Geraden.

Einige Frequenzabdrehabereiche, die mit * gekennzeichnet sind, können trotz des periodischen Aufbaus der Struktur beobachtet werden. Sie erlauben keine eindeutige Zuordnung der Moden und betreffen nur die Moden mit derselben Anzahl von Knotendurchmessern. Außerhalb der Abdrehabereiche werden die Moden mit ihrer Anzahl von Knotendurchmessern gekennzeichnet und ihrer Schwingungsfamilie zugeordnet. Wird die Gestalt des Segments als Rechteck gesehen, können die charakteristischen Eigenformen nach FROMME UND LEISSA [39] in vier Hauptfamilien mit zwei Symmetrieebenen unterteilt werden: Scherung, Primäre Biegung, Sekundäre Biegung und longitudinal, wobei die torsionale Verformung und die sekundäre Biegung im zweidimensionalen Halbmodell nicht vorkommen. Die Moden des idealen Schwingers werden mit der folgenden Schreibweise $F w_{ND} nd$ bezeichnet:

- Das erste Buchstaben F steht für die Schwingungsfamilie (L: Längs, B: Biegung, S: Scherung).
- Die erste Zahl w beschreibt die Anzahl von Wellenlängen bzw. von Nulldurchgängen in der Längsrichtung der Segmente (Y)
- Die zweite Zahl nd steht für die Anzahl der Knotendurchmesser entlang der Querichtung der Segmente (X)

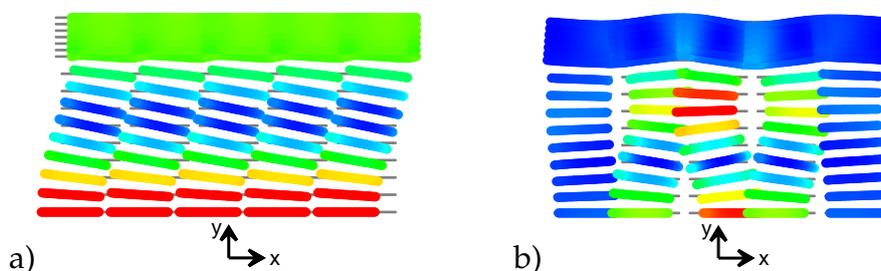


Abb. 8.3: Beispiel von gut identifizierbaren Moden bei $\lambda_0/B = 3$: (a) $S1_{ND 0}$ und (b) $B2_{ND 2}$.

In Abb. 8.3 werden zwei eindeutig identifizierbare Moden bei $\lambda_0/B = 3$ dargestellt. Wird der Schwinger unendlich breit (linke Seite des Diagramms), fallen die Eigenfrequenzen der Moden aus der gleichen Schwingungsfamilie zusammen, wie es bei Schaufelkränzen bereits bekannt ist, da sie unabhängig vom Knotendurchmesser werden. Es ist u.a. bei den Modenpaaren $S1_{ND 0} / S1_{ND 1}$ und $L\frac{1}{2}_{ND 0} / L\frac{1}{2}_{ND 1}$ deutlich zu erkennen.

Gemäß den Frequenzkurven in Abb. 8.2 werden alle 15 Eigenvektoren in Tab. 8.7 klassifiziert. Weil die idealen Moden (7)(8) und (10)(11) eine schwache Degeneration laut Abb. 8.2 erfahren und die Schwingerbreite links vom Abdrehabereich liegt, wird die dominierende Schwingungsfamilie in Klammern gesetzt.

Eigenvektor	Zugehörige ideale Mode
(2)(3)	B1 ND 2
(4)(5)	B1 ND 1
(6)	S1 ND 0
(7)(8)	(S1) ND 1
(9)	L $\frac{1}{2}$ ND 0
(10)(11)	(L $\frac{1}{2}$) ND 1
(12)(13)	L $\frac{1}{2}$ ND 2
(14)(15)	S1 ND 2

Tab. 8.7: Zuordnung der idealen Eigenvektoren zu den Moden.

8.4.2 Moden des physikalischen Schwingers

Eine Randverstimmung der Struktur, bei der eine der Koppelfedersteifigkeit schrittweise reduziert wird, führt zu einer drastischen Änderung der modalen Eigenschaften, die mit einer Trennung der Doppelmoden und einer erheblichen Rotation der Eigenvektoren einhergeht. Abb. 5.23 stellt die physikalischen Eigenformen 6 bis 13 dar, die häufig bei Messersonotroden vorhanden sind. Im Folgenden werden sie mit den idealen Eigenformen, in Bezug auf der Anzahl der Knotendurchmesser und der Schwingungsfamilie verknüpft. Die folgende Zuordnung gilt für die Breite $0.901 \cdot \lambda_0$.

Die Transformation der idealen Eigenformen, die eine ganzzahlige Anzahl von Knotendurchmessern aufweisen, wird von der Beteiligungsmatrix beschrieben. In Tab. 8.8 werden dazu die physikalischen Eigenformen mit der höchsten Beteiligung in Abb. 5.22b aufgeführt.

Ideale Mode	Physikalischer Eigenvektor	Beteiligung	Symmetrie
S1 ND 0	(6)	85%	antisymmetrisch
(S1) ND 1	(8)	80%	antisymmetrisch
L $\frac{1}{2}$ ND 0	(9)	99%	symmetrisch
(L $\frac{1}{2}$) ND 1	(11)	64%	symmetrisch
L $\frac{1}{2}$ ND 2	(13)	88%	symmetrisch

Tab. 8.8: Zuordnung der physikalischen Moden mit ganzzahliger Anzahl von Knotendurchmessern.

Die Beteiligungsfaktoren sind deutlich unter eins, deswegen darf die Zuweisung nur qualitativ betrachtet werden. Die schwache Beteiligung 64% vom physikalischen Eigenvektor 11 in der idealen Mode 10 ist zum größten Teil dem degenerationsbedingten Scheranteil geschuldet. In Analogie mit dem Modell der Schwingerkette und anhand vom Frequenzverlauf in Abb. 5.22a können die physikalischen Eigenvektoren mit nicht-ganzzahliger Anzahl von Knotendurchmessern, mit ihrer ursprünglichen Doppelmode $\text{ND} + \frac{1}{2}$ in der folgenden Tab. 8.9 verknüpft werden.

Mode	Physikalischer Eigenvektor	Symmetrie
(S1) $ND \frac{1}{2}$	(7)	symmetrisch
(L $\frac{1}{2}$) $ND \frac{1}{2}$	(10)	antisymmetrisch
L $\frac{1}{2}$ $ND \frac{3}{2}$	(12)	antisymmetrisch

Tab. 8.9: Zuordnung der physikalischen Moden mit nicht-ganzzahliger Anzahl von Knotendurchmessern.

8.5 Optimierungslösungen

8.5.1 Minimierung der Anfälligkeit zur Materialverformung

8.5.1.1 Minimierung der modalen Kopplung mit der DOE-Methode

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.3.1:

Parameter	Sensitivitätsfaktor ($\cdot 10^4$)
p_1	2.27
p_2	-2.75
p_3	-19.8
p_4	3.78
p_5	-2.03
p_6	10.4

Tab. 8.10: Ermittelte Sensitivitätsfaktoren der modalen Kopplung $D_{8,9}$ aus der DOE-Methode.

Parameter	Angep. Wert
p_1	1/50
p_2	3/40
p_3	1/4
p_4	1/24
p_5	1/40
p_6	8/10

Tab. 8.11: Parameterwerte der optimierten Geometrie.

8.5.1.2 Minimierung der modalen Kopplung mit der AMV-Methode

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.3.2:

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	1.0428	1.0914	0.73153	1.0914	1.0428
br	0.087283	0.087989	0.088113	0.087379	0.088128
bl	0.088128	0.087379	0.088113	0.087989	0.087283
sr	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
sl	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8

Tab. 8.12: Parameterwerte der optimierten Geometrie.

Eigenvektor	$D_{8,n} (\cdot 10^6)$	Mode
8	-	Betriebsmode
9	0.0049	Störmode 1
10	62.2	Störmode 2

Tab. 8.13: Modale Kopplungen (N/m) der optimierten Geometrie.

8.5.1.3 Minimierung des Eigenvektorenverschiebungsbetrags mit der AMV-Methode

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.3.3:

Parameter	Min	Max
b	0.85	1.15
br	0.083	0.084
bl	0.083	0.084
sr	0.99	1.11
sl	0.99	1.11

Tab. 8.14: Minimale und maximale Parameterwerte im engen Variationsbereich.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	0.85218	0.86423	1.5672	0.86423	0.85218
br	0.083687	0.084	0.083	0.083994	0.083896
bl	0.083896	0.083994	0.083	0.084	0.083687
sr	0.86849	0.7939	0.7939	0.86849	0.888
sl	0.888	0.86849	0.7939	0.7939	0.86849

Tab. 8.15: Parameterwerte der optimierten Geometrie aus dem engen Variationsbereich.

Parameter	Min	Max
b	0.9	1.0
br	0.08	1.11
bl	0.08	1.11
sr	0.70	0.95
sl	0.70	0.95

Tab. 8.16: Minimale und maximale Parameterwerte im breiten Variationsbereich.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	1.0998	0.90054	0.99935	0.90054	1.0998
br	0.085453	0.10999	0.10997	0.082106	0.080011
bl	0.080011	0.082106	0.10997	0.10999	0.085453
sr	0.95	0.70001	0.70001	0.95	0.95
sl	0.95	0.95	0.70001	0.70001	0.95

Tab. 8.17: Parameterwerte der optimierten Geometrie aus dem breiten Variationsbereich.

8.5.2 Minimierung der Anfälligkeit zur Randverstimmung

8.5.2.1 Minimierung der modalen Kopplung mit der DOE-Methode

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.4.1:

Parameter	Sensitivitätsfaktor ($\cdot 10^5$)
p_1	2.10
p_2	-5.29
p_3	-4.10
p_4	10.1
p_5	-9.92
p_6	5.56

Tab. 8.18: Ermittelte Sensitivitätsfaktoren der modalen Kopplung D_k aus der DOE-Methode.

Parameter	Angep. Wert
p_1	1/60
p_2	1/12
p_3	17/60
p_4	1/46
p_5	1/30
p_6	8/10

Tab. 8.19: Parameterwerte der optimierten Geometrie.

8.5.2.2 Minimierung des Rotationswinkels mit der AMV-Methode

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.4.3:

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	1	1.028986	0.942030	1.028986	1
br	1/12	0.052905	0.052905	1/12	1/12
bl	1/12	1/12	0.052905	0.052905	1/12
sr	8/10	8/10	8/10	8/10	8/10
sl	8/10	8/10	8/10	8/10	8/10

Tab. 8.20: Optimierte Geometrie nach Minimierung des Kopplungskriteriums ψ (nur die innere Schlitzbreite wird geändert).

Parameter	Min	Max
b	0.9	1.1
br	1/24	1/10
bl	1/24	1/10
sr	0.7	0.9
sl	0.7	0.9

Tab. 8.21: Minimale und maximale Parameterwerte im Variationsbereich.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	0.967654	1.018302	1.028087	1.018302	0.967654
br	0.096124	0.091367	0.091667	0.096131	0.052182
bl	0.052182	0.096131	0.091668	0.091367	0.096124
sr	0.873914	0.872019	0.872019	0.873914	0.856210
sl	0.856210	0.873914	0.872019	0.872019	0.873914

Tab. 8.22: Parameterwerte der Lösung mit der originalen Geometrie als Startpunkt.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	1.092379	0.915199	0.984845	0.915199	1.092379
br	0.072348	0.042100	0.041685	0.045129	0.081002
bl	0.081002	0.045129	0.041685	0.042100	0.072348
sr	0.720726	0.722137	0.722137	0.720726	0.768782
sl	0.768782	0.720726	0.722137	0.722137	0.720726

Tab. 8.23: Parameterwerte der Lösung mit den minimalen Werten als Startpunkt.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	0.900000	1.099936	1.000129	1.099936	0.900000
br	0.099996	0.041667	0.099369	0.099998	0.081950
bl	0.081950	0.099998	0.099369	0.041667	0.099996
sr	0.879973	0.879659	0.879659	0.879973	0.879998
sl	0.879998	0.879973	0.879659	0.879659	0.879973

Tab. 8.24: Parameterwerte der Lösung mit den maximalen Werten als Startpunkt.

8.5.2.3 Minimierung des Rotationswinkels mit Berücksichtigung der Gleichmäßigkeit der Auslenkung

Rechenergebnisse aus dem Abschnitt 5.4.4.4:

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	0.941880	1.034865	1.046509	1.034865	0.941880
br	0.068121	0.047461	0.052456	0.089815	0.069202
bl	0.069202	0.089815	0.052456	0.047461	0.068121
sr	0.851101	0.806482	0.806482	0.851101	0.832572
sl	0.832572	0.851101	0.806482	0.806482	0.851101

Tab. 8.25: Parameterwerte der Lösung mit Berücksichtigung der Gleichmäßigkeit ($\tau = 0.465$).

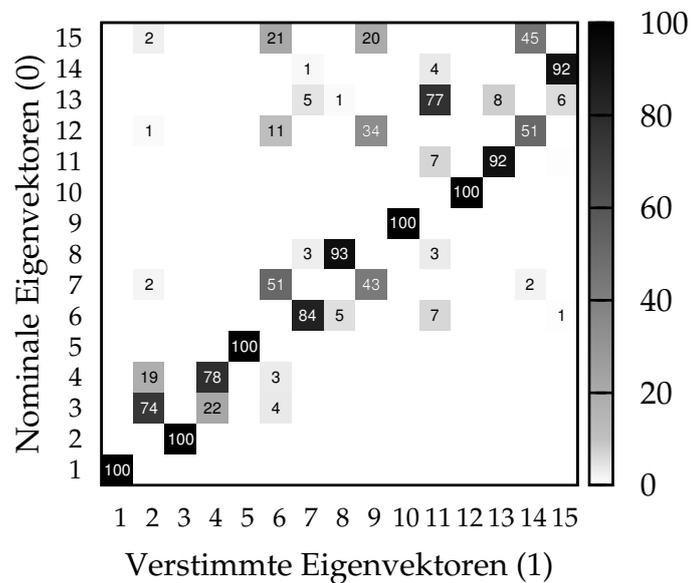


Abb. 8.4: NCO-Matrix des optimierten Schwingers, berechnet bei der Breite $1.254 \cdot \lambda_0$.

8.6 Experimentelle Validierung

8.6.1 Randverstimmung

E-Modul [GPa]	Querkontraktionszahl	Schubmodul [GPa]	Dichte [kg/m^3]
$E_x = 72.115$	$\nu_{xy} = 0.358$	$G_{xy} = 26.740$	$\rho = 2800$
$E_y = 71.456$	$\nu_{yz} = 0.328$	$G_{yz} = 26.083$	
$E_z = 71.768$	$\nu_{xz} = 0.349$	$G_{xz} = 26.218$	

Tab. 8.26: Verwendete Materialdaten für AMP8000 (Aluminium).

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
<i>b</i>	1	1	1	1	1
<i>br</i>	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
<i>bl</i>	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
<i>sor</i>	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684
<i>sur</i>	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605
<i>sol</i>	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684
<i>sul</i>	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605
<i>km</i>	0	0	0	0	0

Tab. 8.27: Geometrische Parameterwerte der 35 kHz-Sonotrode im Stand 1.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
<i>b</i>	1	0.97826	1.0435	0.97826	1
<i>br</i>	0.075	0.044	0.044	0.075	0.054
<i>bl</i>	0.054	0.075	0.044	0.044	0.075
<i>sor</i>	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684
<i>sur</i>	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605
<i>sol</i>	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684	0.73684
<i>sul</i>	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605	0.70605
<i>km</i>	0	0	0	0	0

Tab. 8.28: Geometrische Parameterwerte der 35 kHz-Sonotrode im Stand 4.

8.6.2 Materialverformung

E-Modul [GPa]	Querkontraktionszahl	Schubmodul [GPa]	Dichte [kg/m ³]
$E_x = 105.0$	$\nu_{xy} = 0.322$	$G_{xy} = 41.39$	$\rho = 4381$
$E_y = 118.0$	$\nu_{yz} = 0.349$	$G_{yz} = 46.00$	
$E_z = 123.5$	$\nu_{xz} = 0.324$	$G_{xz} = 42.35$	

Tab. 8.29: Verwendete Materialdaten für die Titan-Legierung TiAl6V4.

8.6.2.1 Originale Geometrie

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
<i>b</i>	1	1	1	1	1
<i>br</i>	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
<i>bl</i>	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
<i>sor</i>	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
<i>sur</i>	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
<i>sol</i>	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
<i>sul</i>	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8
<i>km</i>	0.1	0	-0.05	0	0.1

Tab. 8.30: Parameterwerte der originalen Geometrie.

8.6.2.2 Manuell angepasste Geometrie

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5
b	1	1	1	1	1
br	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
bl	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12
sor	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
sur	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
sol	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
sul	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7
km	0.1	0	-0.1	0	0.1

Tab. 8.31: Parameterwerte der manuell angepassten Geometrie.

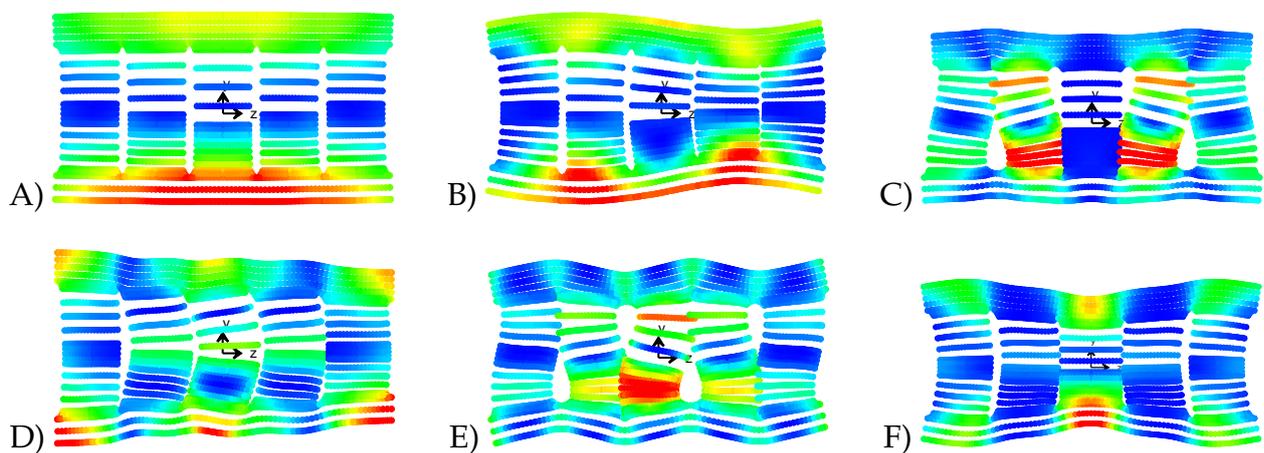


Abb. 8.5: Eigenformen 16 bis 21 der manuell angepassten Geometrie: (A) 29821 Hz, (B) 30181 Hz, (C) 30453 Hz, (D) 31941 Hz, (E) 32929 Hz und (F) 33244 Hz.

8.6.2.3 Automatisch angepasste Geometrie

Parameter	Min	Max
b	0.9	1.1
br	0.08	0.14
bl	0.08	0.14
sor	0.68	0.75
sur	0.68	0.75
sol	0.70	0.85
sul	0.70	0.85
km	-0.1	0.1

Tab. 8.32: Minimale und maximale Parameterwerte im Variationsbereich.

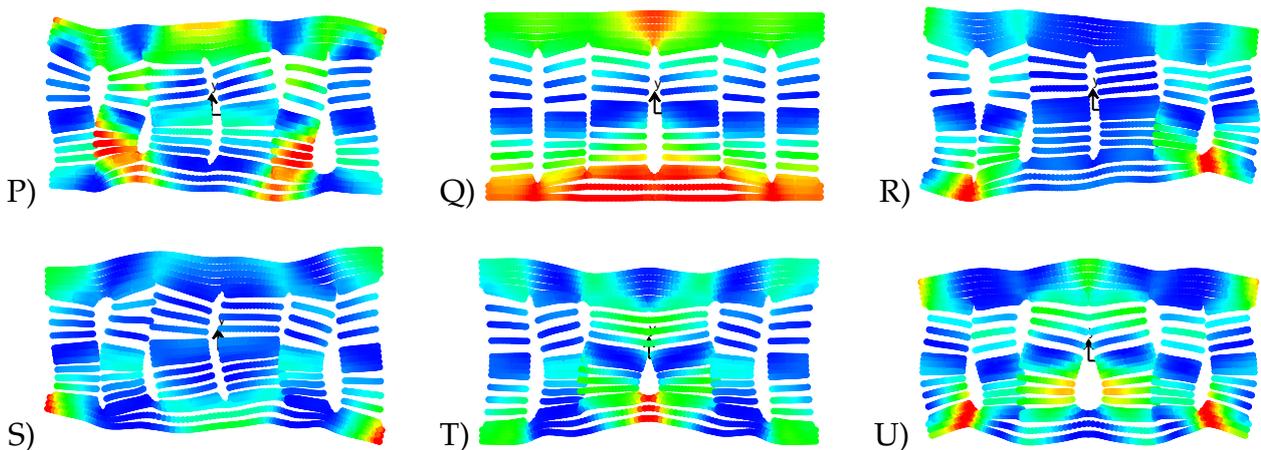


Abb. 8.6: Eigenformen 19 bis 24 der automatisch angepassten Geometrie (lin/6): (P) 28767 Hz, (Q) 29999 Hz, (R) 31135 Hz, (S) 31606 Hz, (T) 32066 Hz und (U) 32555 Hz.

Parameter	Seg. 1	Seg. 2	Seg. 3	Seg. 4	Seg. 5	Seg. 6
b	0.9	0.90028	1.1997	1.1997	0.90028	0.9
br	0.13963	0.080053	0.13949	0.08	0.13969	0.080829
bl	0.080829	0.13969	0.08	0.13949	0.080053	0.13963
sor	0.68	0.75	0.68944	0.75	0.68	0.75
sur	0.85	0.7	0.72647	0.7	0.85	0.85
sol	0.75	0.68	0.75	0.68944	0.75	0.68
sul	0.85	0.85	0.7	0.72647	0.7	0.85
km	0.034799	-0.0048347	0.1	0.1	-0.0048347	0.034799

Tab. 8.33: Parameterwerte der automatisch angepassten Geometrie (lin/6).

8.6.2.4 Lineare Interpolation der Schwinglänge

Die lineare Interpolation der Schwinglänge basiert auf zwei Stützwerten, die bei den halben Schlitzbreiten $1/12$ und $1/7$ berechnet werden. Bei jedem Optimierungsschritt des AMVs lässt sich die Endlänge Lu mit dem Mittelwert β aller halben Schlitzbreiten (br und bl) der Sonotrode berechnen:

$$Lu = -0.0616\beta + 0.0438 \quad (8.24)$$

Halbe Schlitzbreiten (β)	Optimale Schwinglänge (Lu)
$1/12$	38.67
$1/7$	35

Tab. 8.34: Stützwerte für die Interpolation.

8.6.2.5 Berücksichtigung der Auslenkungsgleichmäßigkeit als Nebenbedingung

Der Faktor σ gewichtet die erhaltene Lösung, wenn die Auslenkungsgleichmäßigkeit der nominalen Betriebsmode nicht zufriedenstellend ist. Er wird mit einem quadratischen Gesetz definiert, das auf drei Stützpunkten basiert. Somit werden beide Größen v und χ im Rahmen der Optimierung gleichzeitig minimiert.

v	σ
0%	1
10%	1.1
20%	2

Tab. 8.35: Stützwerte zur Definition des Gewichtungsfaktors σ .

Die Zielfunktion lautet:

$$f(v, \chi) = \chi \sigma(v) \quad \text{mit} \quad \sigma(v) = 40v^2 - 3v + 1 \quad (8.25)$$

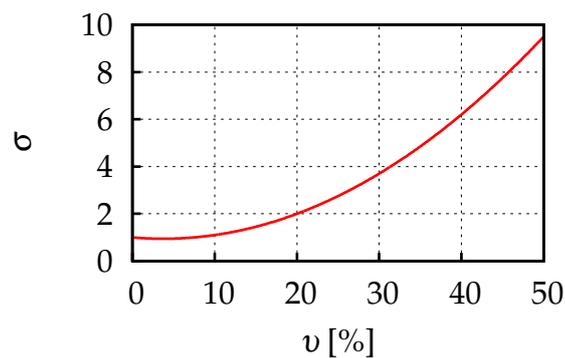


Abb. 8.7: Definition des Gewichtungsfaktors σ in Abhängigkeit der Auslenkungsgleichmäßigkeit v .

8.6.2.6 Schwingungsprofile in den Resonanzen

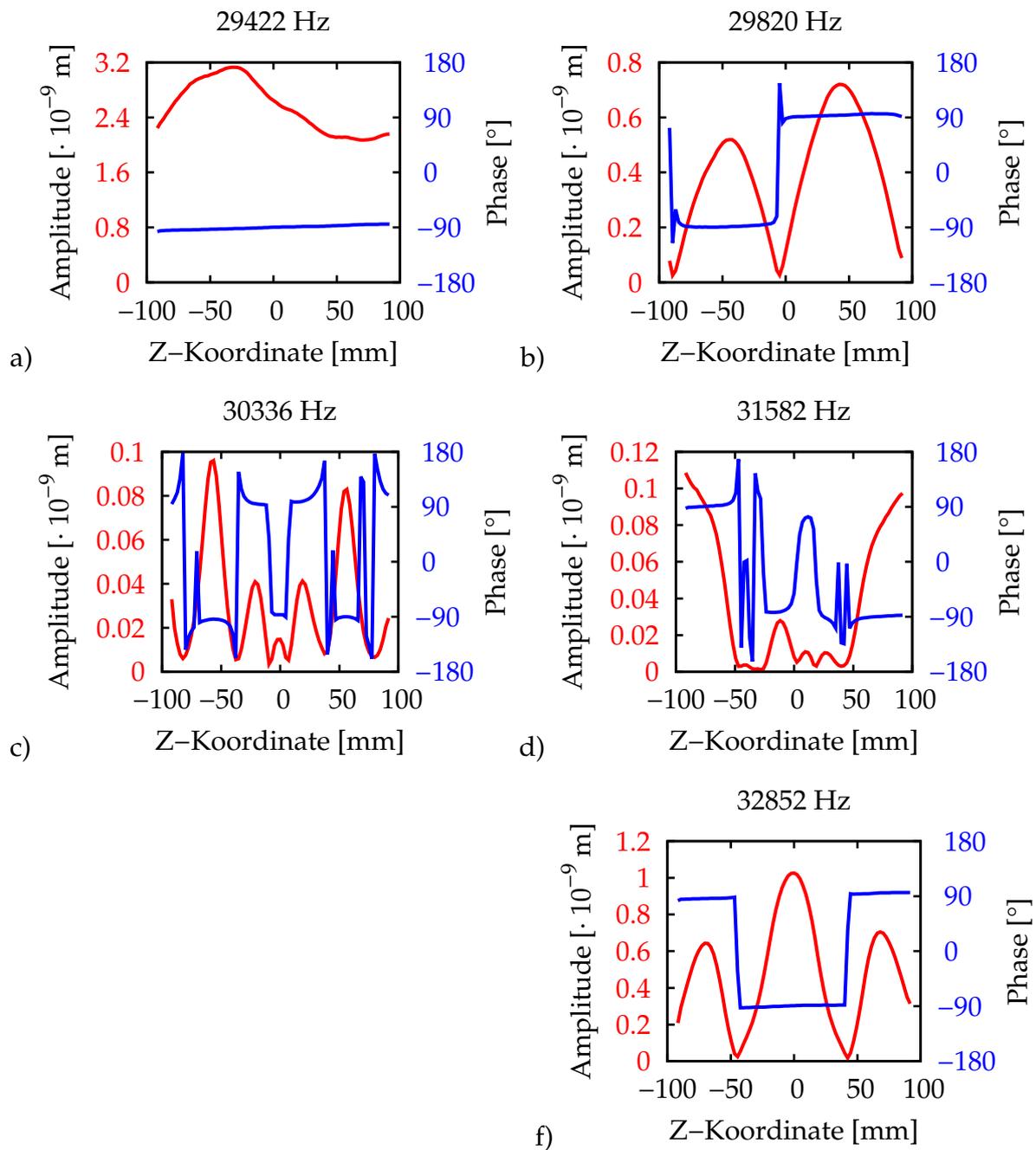


Abb. 8.8: Messung der Sonotrode 1 in den Resonanzen a-b-c-d-f (rot: Amplitude, blau: Phase).

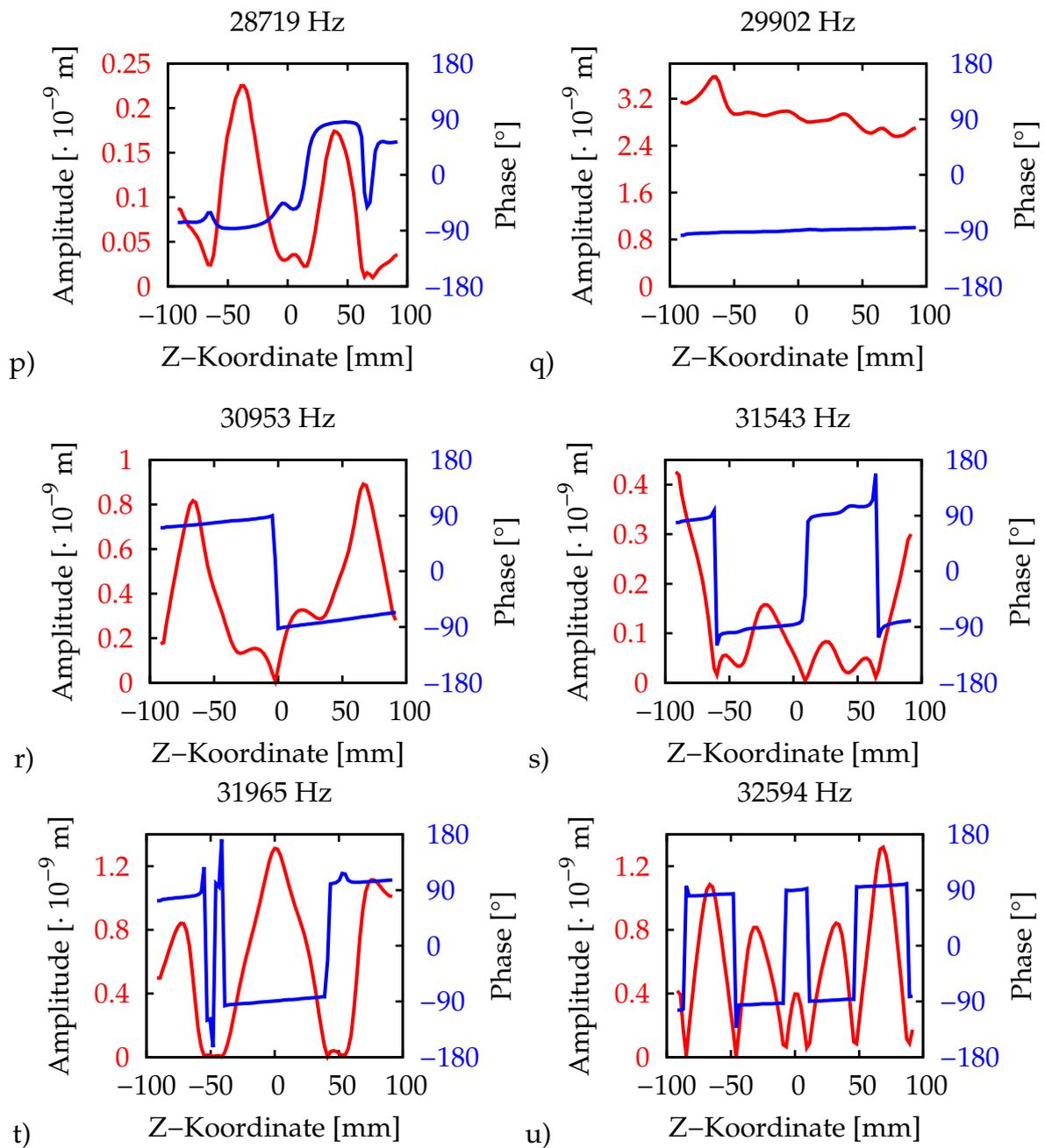


Abb. 8.9: Messung der Sonotrode 2 in den Resonanzen p-q-r-s-t-u (rot: Amplitude, blau: Phase).

8.7 Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Materialkonstanten

8.7.1 Orthotropie

Das HOOKE'sche Gesetz für ein orthotropes Material lautet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S}\boldsymbol{\sigma} \quad (8.26)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ beschreiben die Spannungs- und Dehnungstensoren. \mathbf{S} ist die Nachgiebigkeitsmatrix, welche für ein orthotropes Material die folgende Form besitzt:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

Die Matrix hat neun voneinander unabhängige Komponenten. Ihre Inverse $\mathbf{Y} = \mathbf{S}^{-1}$ ist die Elastizitätsmatrix. Gemäß der Übersicht von RAUM [72] lässt sich die Geschwindigkeit der Longitudinalwellen in der Richtung i folgendermaßen schreiben:

$$c_{i/i} = \sqrt{\frac{Y_{ii}}{\rho}} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho}} \mu_i \quad (8.28)$$

wobei E_i der E-Modul in der i -ten Richtung und ρ die Dichte sind. Mit der Beziehung $\frac{E_j}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{\nu_{ij}}$, enthalten die Faktoren μ_i und ξ_i lediglich die Querkontraktionszahlen:

$$\mu_i = \frac{1}{1 + \xi_i} \quad (8.29)$$

$$\xi_1 = \frac{\nu_{13}^2 \nu_{21} \nu_{31} + \nu_{21}^2 \nu_{12} \nu_{13} + 2\nu_{13} \nu_{21} \nu_{23} \nu_{31} \nu_{12}}{\nu_{23}^2 \nu_{12} \nu_{31} - \nu_{21} \nu_{13}} \quad (8.30)$$

$$\xi_2 = \frac{\nu_{23}^2 \nu_{12} \nu_{32} + \nu_{12}^2 \nu_{21} \nu_{23} + 2\nu_{12} \nu_{13} \nu_{21} \nu_{23} \nu_{32}}{\nu_{13}^2 \nu_{21} \nu_{32} - \nu_{12} \nu_{23}} \quad (8.31)$$

$$\xi_3 = \frac{\nu_{32}^2 \nu_{13} \nu_{23} + \nu_{13}^2 \nu_{31} \nu_{32} + 2\nu_{12} \nu_{13} \nu_{23} \nu_{31} \nu_{32}}{\nu_{12}^2 \nu_{23} \nu_{31} - \nu_{13} \nu_{32}} \quad (8.32)$$

8.7.2 Transversale Isotropie

Das transversal isotrope Material zeichnet sich durch eine Vorzugsrichtung aus. Beim Rundmaterial wird diese durch die Walzrichtung definiert und entspricht der longitudinalen Richtung L. Die senkrecht hierzu stehenden Richtungen 2 und 3 (transversale Richtung T) besitzen identische Materialeigenschaften. Das Elastizitätsgesetz besitzt nur noch fünf unabhängige Materialkennwerte: zwei E-Moduli (E_L und E_T), zwei Querkontraktionszahlen (ν_{LT} und ν_{TT}) sowie einen Schubmodul (G_{LT}). Der zweite Schubmodul ergibt sich aus:

$$G_{TT} = \frac{E_T}{2(1 + \nu_{TT})} \quad (8.33)$$

Die Faktoren $\tilde{\zeta}_L$ und $\tilde{\zeta}_T$ berechnen sich zu:

$$\tilde{\zeta}_L = 2 \frac{\nu_{LT}\nu_{TL}}{\nu_{TT} - 1} \quad \tilde{\zeta}_T = \frac{\nu_{TT}^2 + 2\nu_{LT}\nu_{TL}\nu_{TT} + \nu_{LT}\nu_{TL}}{\nu_{LT}\nu_{TL} - 1} \quad (8.34)$$

8.7.3 Isotropie

Bei der Isotropie sind die Eigenschaften des Materials in allen Richtungen identisch. Der E-Modul E und die Querkontraktionszahl ν sind zusammen mit der Dichte die einzigen Materialkonstanten. Damit ergibt sich für den Schubmodul G , die Faktoren ζ und die Schallgeschwindigkeit c :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \zeta = \frac{2\nu^2}{\nu - 1} \quad (8.35)$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{\nu - 1}{(\nu + 1)(2\nu - 1)}} \quad (8.36)$$

8.8 Korrelationskriterien

8.8.1 Das MAC-Kriterium

Das MAC-Kriterium (*Modal Assurance Criterion*) ist ein wesentliches Werkzeug in Modalanalysen. Es wird als ein Skalar verwendet, der sich auf der Konsistenz zwischen zwei Eigenvektoren bezieht. Der erste Eigenvektor bildet eine Referenz und der zu vergleichen zweite Eigenvektor wird z.B. aus einer experimentellen Modalanalyse ermittelt. ALLEMANG [12] fasst die anderen bezogenen Kriterien der letzten zwanzig Jahren zusammen, u.a. für die Übertragungsfunktionen (FRAC), die Orthogonalitätsprüfung (CORTHOG) oder die reduzierte Korrelationsprüfung (PMAC). Eine Erweiterung für komplexe Moden wird von VACHER, JACQUIER UND BUCHARLES [79] eingeführt. Das Vergleichskriterium wird auf die Amplituden der Vektoren normiert und ist daher zwischen null und eins begrenzt. Null bedeutet keine konsistente Übereinstimmung und eins eine völlig konsistente Übereinstimmung. Für zwei gegebene reelle Vektoren u und v , beträgt das MAC-Kriterium:

$$\text{MAC} = \frac{(u^T v)^2}{(u^T u)(v^T v)} \quad (8.37)$$

8.8.2 Das NCO-Kriterium

Die Arbeit von EWINS [33] begrenzt sich auf die Validierung von theoretischen Modellen und listet die bekannten Korrelationskriterien auf. Sie erweitert den Ausdruck vom MAC mit einer Normierungsmatrix \mathbf{N} zwecks Orthogonalitätsprüfung. Dieses Kriterium ist als NCO (*Normalized Cross Orthogonality*) bezeichnet und verlangt eine Reduktion der Normierungsmatrix zu den verfügbaren Freiheitsgraden.

$$\text{NCO} = \frac{(u^T \mathbf{N} v)^2}{(u^T \mathbf{N} u)(v^T \mathbf{N} v)} \quad (8.38)$$

8.9 Bijektive Funktion für die Koordinatentransformation der geometrischen Parameter

Die Geometrie eines Segments wird durch einen Punkt p im n -dimensionalen Variablenraum beschrieben. Die Funktion *fmins* von Octave wird beim AMV genutzt, um die definierte Zielfunktion zu minimieren. Um die Parameter p_i innerhalb eines Variationsbereich zu behalten, dient die Funktion w als Koordinatentransformation:

$$w : (p_{\min}, p_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (8.39)$$

$$w(p) = \operatorname{arctanh}\left(\frac{p - \bar{p}}{p_{\max} - \bar{p}}\right)$$

Aufgrund der Bijektivitätseigenschaft der Transformation wird die finale Lösung als ein eindeutiger Punkt im Variablenraum ausgegeben. \bar{p} steht für den Mittenpunkt:

$$\bar{p} = \frac{1}{2}(p_{\max} + p_{\min}) \quad (8.40)$$

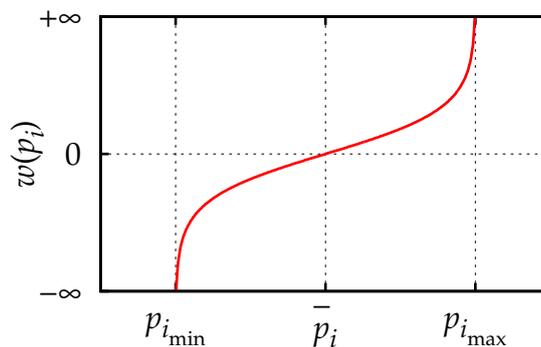


Abb. 8.10: Bijektive Funktion für die Koordinatentransformation.

8.10.2 Versuchsmuster zur Klärung der materialbedingten Verstim-
mung

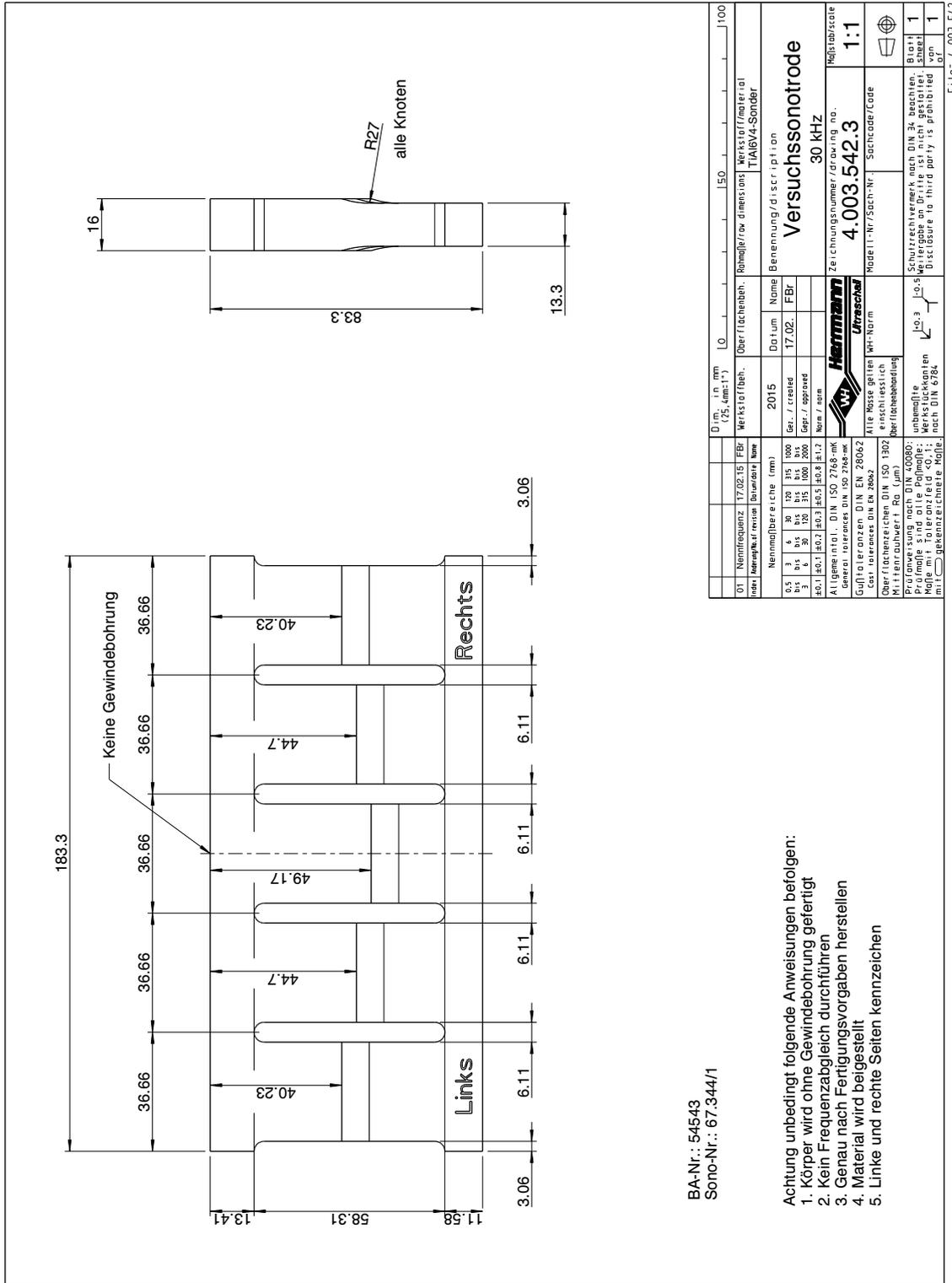


Abb. 8.12: Zeichnung der Sonotrode 1 (manuell angepasste Geometrie).

Literaturverzeichnis

- [1] *Walzen von Titan*, <http://www.evek.de/reference/prokatka-titana.html>
- [2] *Herrmann Ultraschalltechnik GmbH & Co. KG*, <http://www.herrmannultraschall.com>
- [3] *Forming of titanium and titanium alloys: Part two*, <http://www.keytometals.com>
- [4] 41st Annual Symposium of the Ultrasonic Industry Association, San Francisco, USA (Veranst.): *Optimisation of the longitudinal–torsional output of a half-wavelength Langevin transducer*. 2012
- [5] ABKOWITZ, S.: The emergence of the titanium industry and the development of the Ti-6 Al-4 V alloy: collections and recollections. In: *Minerals, Metals and Materials Society/AIME, 184 Thorn Hill Road, Warrendale, PA 15086-7528, USA, 1999*. 42 (1999)
- [6] ADHIKARI, S.: Rates of change of eigenvalues and eigenvectors in damped dynamic system. In: *AIAA Journal* 37 (1999), Nr. 11, S. 1452–1457
- [7] ADHIKARI, S.: Derivative of eigensolutions of non-viscously damped linear systems. In: *AIAA Journal* 40 (2002), Nr. 10, S. 2061–2069
- [8] AFOLABI, D.: Modal interaction in linear dynamic systems near degenerate modes / National Aeronautics and Space Administration. NASA Technical Memorandum, 1991. – Forschungsbericht
- [9] AFOLABI, D. ; ALABI, B.: Catastrophe theory, curve veering and the vibration of bladed discs. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* 206 (1992), Nr. 2, S. 143–144
- [10] AL-BUDAIRI, H.D.: *Design and analysis of ultrasonic horns operating in longitudinal and torsional vibration*, School of Engineering, College of Science and Engineering, University of Glasgow, Diss., 2012
- [11] AL-BUDAIRI, H.D. ; LUCAS, M. ; HARKNESS, P.: A design approach for longitudinal–torsional ultrasonic transducers. In: *Sensors and Actuators A: Physical* 198 (2013), S. 99–106
- [12] ALLEMANG, R.J.: The modal assurance criterion - Twenty years of use and abuse. In: *Sound and Vibration* (2003)
- [13] ALLIK, H. ; HUGHES, T.J.R.: Finite element method for piezoelectric vibration. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), Nr. 2, S. 151–157

- [14] ALTINTAS, G.: Effect of mass based imperfections on behavior of linear vibrating plates near degenerate modes. In: *Journal of Vibration and Control* 15 (2009), Nr. 2, S. 219–231
- [15] ASTILL, C.J. ; IMOSSEIR, S.B. ; SHINOZUKA, M.: Impact loading on structures with random properties. In: *Journal of Structural Mechanics: An international journal* 1 (1972), Nr. 1, S. 63–77
- [16] AURELLE, N. ; GUYOMAR, D. ; RICHARD, D. ; GONNARD, P. ; EYRAUD, L.: Nonlinear behaviour of an ultrasonic transducer. In: *Ultrasonics* 34 (1996), Nr. 2, S. 205–211
- [17] BALMÈS, E.: High modal density, curve veering, localization: a different perspective on the structural response. In: *Journal of Sound and Vibration* 161 (1993), Nr. 2, S. 358–363
- [18] Kap. Modal Analysis Topics, Volume 3 In: BONISOLI, E. ; DELPRETE, C. ; ESPOSITO, M. ; MOTTERSHEAD, J.E.: *Structural dynamics with coincident eigenvalues: modelling and testing*. Bd. 3. Springer, 2011, S. 325–337
- [19] CARDONI, A. ; LUCAS, M.: Enhanced vibration performance of ultrasonic block horns. In: *Ultrasonics* 40 (2002), Nr. 1, S. 365–369
- [20] CARDONI, A. ; LUCAS, M. ; CARTMELL, M.P. ; LIM, F.C.N.: A novel multiple blade ultrasonic cutting device. In: *Ultrasonics* 42 (2004), Nr. 1, S. 69–74
- [21] CARTMELL, M.P. ; LIM, F.C.N. ; CARDONI, A. ; LUCAS, M. ; MCGEOUGH, J.A.: Effects of modal interactions on vibration performance in ultrasonic cutting. In: *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 52 (2003), Nr. 1, S. 193–196
- [22] CASTANIER, M.P. ; PIERRE, C.: Using intentional mistuning in the design of turbomachinery rotors. In: *AIAA Journal* 40 (2002), Nr. 10, S. 2077–2086
- [23] CASTANIER, M.P. ; PIERRE, C.: Modelling and analysis of mistuned bladed disk vibration. In: *Journal of Propulsion and Power* 22 (2006), Nr. 2, S. 384–396
- [24] CHEN, J.S. ; BOGY, D.B.: Mathematical structure of modal interactions in a spinning disk-stationary load system. In: *Journal of Applied Mechanics* 59 (1992), Nr. 2, S. 390–397
- [25] CHEN, X. ; KAREEM, A.: Curve veering of eigenvalues loci of bridges with aeroelastic effects. In: *Journal of Engineering Mechanics* 129 (2003), Nr. 2, S. 146–159
- [26] CRANDALL, S.H. ; MROSZCZYK, J.W.: Conservative and nonconservative coupling in dynamic systems. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, International Conference* Bd. 7 Proceedings of institution of mechanical engineers international conference, vibrations in rotating machinery, institution of mechanical engineers, 1988, S. 567–572
- [27] DERKS, P.L.L.M.: *The design of ultrasonic resonators with wide output cross-sections*, Technische Hogeschool Eindhoven, Diss., 1984

- [28] DUBOIS, J.L. ; ADHIKARI, S. ; LIEVEN, N.A.J.: Eigenvalue curve veering in stressed structures: An experimental study. In: *Journal of Sound and Vibration* 322 (2009), Nr. 4, S. 1117–1124
- [29] DUBOIS, J.L. ; ADHIKARI, S. ; LIEVEN, N.A.J.: On the quantification of eigenvalue curve veering: a veering index. In: *Journal of Applied Mechanics* 78 (2011), Nr. 4, S. 041007
- [30] DYKE, K.S. V.: The piezo-electric resonator and its equivalent network. In: *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of* 16 (1928), S. 742–764
- [31] ELDRED, M.S. ; LERNER, P.B. ; ANDERSON, W.J.: Improvement of normalization methods for eigenvector derivatives. In: *AIAA Journal* 30 (1992), Nr. 6, S. 1609–1616
- [32] EWINS, D.J.: The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. In: *Journal of Sound and Vibration* 9 (1969), Nr. 1, S. 65–79
- [33] EWINS, D.J.: Model validation: Correlation for updating. In: *Sadhana* 25 (2000), Nr. 3, S. 221–234
- [34] FEINER, D.M. ; GRIFFIN, J.H.: A fundamental model of mistuning for a single family of modes. In: *Journal of Turbomachinery* 124 (2002), Nr. 4, S. 597–605
- [35] FISHER, R.A.: *The design of experiments*. 1935
- [36] FOSTER, R. M.: A reactance theorem. In: *Bell System Technical Journal* 3 (1924), Nr. 2, S. 259–267
- [37] FOX, R.L. ; KAPOOR, M.P.: Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. In: *AIAA Journal* 6 (1968), Nr. 2, S. 2426–2429
- [38] FRISWELL, M.I. ; ADHIKARI, S.: Derivatives of complex eigenvectors using Nelson's method. In: *AIAA Journal* 38 (2000), Nr. 12, S. 2355–2357
- [39] FROMME, J.A. ; LEISSA, A.W.: Free vibration of the rectangular parallelepiped. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 48 (1970), Nr. 18, S. 290–298
- [40] GLAUDELL, R.G. ; ROGELIO, T.G. ; BARRANCO, J.: Nelder-Mead Simplex Method. In: *Computer Journal* 7 (1965), S. 308–313
- [41] GOTTLIEB, H.P.W.: Extension of a text-book problem to curve veering for coupled pendulums. In: *Journal of Sound and Vibration* 113 (1987), Nr. 1, S. 185–187
- [42] HABERDAR, H.: *Computer Vision 101, section: Generating Random Numbers from Image of a Probability Density Function*. Compston & Scholz, 2013
- [43] HANNIG, S.: *Auslegung von komplexen Werkzeugen zur spanenden Bearbeitung mit Ultraschall*, RWTH Aachen, Diss., 2014
- [44] HARKNESS, P. ; LUCAS, M. ; CARDONI, A.: Coupling and degenerating modes in longitudinal-torsional step horns. In: *Ultrasonics* 52 (2012), Nr. 8, S. 980–988

- [45] HOHL, A.: *Systematische Verstimmung und mehrfach gekoppelte Schaufelkränze von Turbomaschinen*, Institut für Dynamik und Schwingungen, Universität Hannover, Diss., 2009
- [46] HOHL, A. ; KRIEGESMANN, B. ; WALLASCHEK, J. ; PANNING, L.: The influence of blade properties on the forced response of mistuned bladed disks. In: *ASME 2011 Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition* American Society of Mechanical Engineers, 2011, S. 1159–1170
- [47] IGUSA, T.: Critical configurations of systems subjected to wide-band input. In: *Journal of Sound and Vibration* 168 (1993), Nr. 3, S. 525–541
- [48] IRRETIER, H.: *Grundlagen der Schwingungstechnik 2*. Vieweg
- [49] J. KOCH. VALVO, Philips B.: *Piezoxide (PXE) Eigenschaften und Anwendungen*. 1988
- [50] JONES, K. ; CROSS, C.: On antiresonance in the forced response of mistuned bladed disks. In: *Shock and Vibration* 10 (2003), Nr. 2, S. 135–146
- [51] KENYON, J.A. ; GRIFFIN, J.H. ; KIM, N.E.: Sensitivity of tuned bladed disk response to frequency veering. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 127 (2005), Nr. 4, S. 835–842
- [52] KNEZEVIC, M. ; LEBENSOHN, R.A. ; CAZACU, O. ; REVIL-BAUDARD, B. ; PROUST, G. ; VOGEL, S.C. ; NIXON, M.E.: Modeling bending of α -titanium with embedded polycrystal plasticity in implicit finite elements. In: *Material Science and Engineering: A* 564 (2013), S. 116–126
- [53] KROME, J.W. ; WALLASCHEK, J.: Reduktion kontinuumsmechanischer Modelle im Rahmen der Optimierung mechatronischer Systeme am Beispiel des Wanderwellenmotors. In: *VDI Berichte* 1315 (1997), S. 75–90
- [54] KUNG, S.W. ; DUNLAP, K.B. ; BALLINGER, R.S.: Complex eigenvalue analysis for reducing low frequency brake squeal SAE 2000 World Congress Detroit, Michigan, 2000
- [55] LEISSA, W.: On a curve veering aberration. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 25 (1974), S. 99–111
- [56] LENK, A.: *Elektromechanische Systeme - Band 2: Systeme mit verteilten Parametern*. Berlin: VEB Verlag Technik, 1974
- [57] LITTMANN, W.: *Piezoelektrische, resonant betriebene Ultraschall-Leistungswandler mit nichtlinearen mechanischen Randbedingungen*, Heinz Nixdorf Institut, Universität Paderborn, Diss., 2003
- [58] LIU, X.L.: Behaviour of derivatives of eigenvalues and eigenvectors in curve veering and mode localization and their relation to close eigenvalues. In: *Journal of Sound and Vibration* 256 (2002), Nr. 3, S. 551–564

- [59] LUCAS, M. ; CARDONI, A. ; LIM, F.C.N. ; CARTMELL, M.P.: Controlling the effects of modal interactions in ultrasonic cutting devices. In: *Proceedings of World Congress on Ultrasonics WCU* Bd. 1, 2003, S. 49–56
- [60] LUCAS, M. ; CARDONI, A. ; PETZING, J.N. ; SMITH, L.J.: Design and characterisation of ultrasonic cutting tools. In: *CIRP Annals-Manufacturing Technology* 50 (2001), Nr. 1, S. 149–152
- [61] MASON, W.P.: An electromechanical representation of a piezoelectric crystal used as a transducer. In: *Radio Engineers, Proceedings of the Institute of* 23 (1935), Nr. 10, S. 1252–1263
- [62] MCINTYRE, M.E. ; WOODHOUSE, J.: On measuring the elastic and damping constants of orthotropic sheet materials. In: *Acta Metallurgica* 36 (1988), Nr. 6, S. 1397–1416
- [63] NELSON, R.B.: Simplified calculation of eigenvector derivatives. In: *AIAA Journal* 14 (1976), Nr. 9, S. 1201–1205
- [64] O'SHEA, K.: Enhanced vibration control of ultrasonic tooling using finite element analysis. In: *Vibration Analysis–Analytical and Computational* (1991), S. 259–265
- [65] PANNING, L.: *Auslegung von Reibelementen zur Schwingungsdämpfung von Turbinenschaukeln*, Institut für Dynamik und Schwingungen, Universität Hannover, Diss., 2005
- [66] PERKINS, N.C. ; MOTE, C.D.: Comments on curve veering in eigenvalue problems. In: *Journal of Sound and Vibration* 106 (1986), Nr. 3, S. 451–463
- [67] PIERRE, C.: Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 126 (1988), Nr. 3, S. 485–502
- [68] Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (Veranst.): *Harmonic mistuning of blisks*. 2015
- [69] Proceedings of 1990 MSC World Users Conference (Veranst.): *An iterative method for eigenvector derivatives*. 1990
- [70] PROKIC, M.: *Piezoelectric transducers modeling and characterization*. MPInterconsulting, 2004
- [71] R. NEUGEBAUER, A. S.: Ultrasonic application in drilling. In: *Journal of Materials Processing Technology* 149 (2004), S. 663–639
- [72] RAUM, K.: *Quantitative akustische Rastermikroskopiemethoden zur Charakterisierung der elastischen Eigenschaften von Knochengewebe*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Diss., 2002
- [73] RICHTER, B. ; TWIEFEL, J. ; WALLASCHEK, J. ; PRIYA, S. (Hrsg.) ; INMAN, D.J. (Hrsg.): *Energy Harvesting Technologies*. Springer, 2009. – 107–128 S

- [74] SATO, J. ; HUTCHINGS, I.M. ; WOODHOUSE, J.: Determination of the dynamic elastic properties of paper and paperboard from the low-frequency vibration modes of rectangular plates. (2007)
- [75] SHINOZUKA, M.: Simulation of multivariate and multidimensional random processes. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 49 (1971), Nr. 18, S. 357–368
- [76] SHINOZUKA, M. ; JAN, C.M.: Digital simulation of random processes and its application. In: *Journal of Sound and Vibration* 25 (1972), Nr. 1, S. 111–128
- [77] S.M. HAN, T. W.: Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. In: *Journal of Sound and Vibration* 225 (1999), Nr. 5, S. 935–988
- [78] THOMAS, D.L.: Dynamics of rotationally periodic structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), Nr. 1, S. 81–102
- [79] VACHER, P. ; JACQUIER, B. ; BUCHARLES, A.: Extensions of the MAC criterion to complex modes. In: *Proceedings of ISMA 2010 including USD 2010*
- [80] WALLASCHEK, J.: *Maschinendynamik: Skript zur Vorlesung*. 2012
- [81] WHITEHEAD, D.S.: Effect of mistuning on the vibration of turbomachine blades induced by wakes. In: *Journal of Mechanical Engineering Science* 8 (1966), Nr. 1, S. 15–21
- [82] YANG, M.T. ; GRIFFIN, J.H.: A normalized modal eigenvalues approach for resolving modal interaction. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 119 (1997), Nr. 3, S. 647–650
- [83] YANG, M.T. ; GRIFFIN, J.H.: A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 123 (2001), Nr. 4, S. 893–900
- [84] YOUNG, L.J. ; HWANG, M.C.: Curve veering phenomenon in one-dimensional eigenvalues problems. In: *Chung Hua Journal of Science and Engineering* (2001)
- [85] ZHU, Z.S. ; GU, J.L. ; LIU, R.Y. ; CHEN, N.P. ; YAN, M.G.: Variant section and its effect on phase transformation textures in cold rolled titanium sheet. In: *Materials Science and Engineering: A* 280 (2000), Nr. 1, S. 199–203

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name François Brouet
Geburtsdatum 06.01.1983
Geburtsort Commercy (*Frankreich*)
Staatsangehörigkeit französisch
Adresse Hindenburgstr. 60, 75334 Straubenhardt

Berufliche Erfahrung

seit 2007 Entwicklungsingenieur bei Herrmann Ultraschall GmbH & Co. KG, Karlsbad
2005 - 2007 VIE Konstrukteur (*Internationales Freiwilligenprogramm in Unternehmen*) bei Crown Verschlüsse GmbH, Seesen am Harz

Praktika

2010 Alfred Wegener Institut, Potsdam, Lena Delta (*Russland*)
2005 McMaster University, Hamilton (*Kanada*)
2003 H. Cegielski Poznan SA, Posen (*Polen*)
2002 CIM Aachen GmbH, Aachen

Studium

2004 - 2005 DEA Kontinuummmechanik (*franz. Vorabschluss zur Promotion*),
Universität de Metz (*Frankreich*)
2000 - 2005 ENIM, Ingenieurschule für Maschinenbau, Metz (*Frankreich*)

Schulbildung

2000 Abitur
1997 - 2000 Lycée Henri Vogt, Commercy (*Frankreich*)
1993 - 1997 College Les Avrils, Saint-Mihiel (*Frankreich*)