

# Anwendungen von Einzelelektronenpumpen für hochpräzise quantisierte Stromquellen und Schaltungen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN  
- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Phys. Philipp Wiese  
geboren am 16. Januar 1981 in Hannover

2016

---

Referent: Prof. Dr. R. J. Haug  
Korreferent: PD. Dr. H. W. Schumacher  
Tag der Promotion: 03.02.2016

---

Gewidmet meiner Tochter Ella.

---

---

# Kurzzusammenfassung

Einzelelektronenpumpen liefern einen Strom auf der Grundlage der quantisierten Ladung von Elektronen. Während die meisten dieser Pumpen auf niedrige Pumpfrequenzen begrenzt sind, kann für nicht-adiabatische Einzelelektronenpumpen diese Grenze bis zu einigen GHz angehoben werden. Auch bei dieser Frequenz ist die Quantisierung immer noch zu beobachten. Daher können nicht-adiabatische Einzelelektronenpumpen relativ hohe Ströme auf Basis einer bekannten Anzahl gepumpter Elektronen pro Zeitintervall herstellen. Erste Ansätze, diese Eigenschaft für die Neudefinition der SI-Einheit „Ampere“ zu verwenden, wurden bereits durchgeführt. Dabei wurde versucht, die Abweichung zwischen dem vorhergesagten und der tatsächlichen erzeugten Strom zu minimieren.

Für diese Arbeit wurden bisher vernachlässigte Betriebsarten für nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen getestet. Auf diese Weise konnte das Verständnis der während des Pumpprozesses stattfindende Physik vertieft werden. Um Besonderheiten der Messdaten abzudecken, war eine Überarbeitung des gängigen theoretischen Modells notwendig. In dieser Arbeit ist die vollständige Herleitung dieses modifizierten Ansatzes mit allen Annahmen und Näherungen zu finden.

Die verwendeten nicht-adiabatische Einzelelektronenpumpen wurden aus *GaAs-AlGaAs* Heterostrukturen gefertigt. Eine Pumpe besteht aus einem einzelnen leitenden Kanal und drei den Kanal kreuzenden Top-Gates, die zur Blockierung der Leitfähigkeit im Kanal verwendet werden können. Durch Modulation der negativen Spannung des Top-Gates an der Eingangsseite lassen sich Elektronen von dort (*Source*) in einem dynamischen Quantenpunkt einfangen und später während des Pumpzyklus auf der anderen Seite (*Drain*) wieder auswerfen.

Neue Anwendungen wie die Erzeugung von Strömen mit arbiträren Wellenformen oder der Parallelbetrieb mehrerer Pumpen mit einem gemeinsamen modulierten Gate an der Eingangsseite wurden erfolgreich getestet und die entsprechenden theoretischen Vorhersagen hierdurch überprüft. Wechselnde Stromstärken von nahezu Null bis etwa 0.1 nA bei Modulationsfrequenzen bis zu 2352 Hz wurden erreicht. Mehr als 0.25 nA konnten durch drei parallel betreibende Pumpen bei einer Pumpfrequenz von 550 MHz erzeugt werden.

Zudem wurde ein Betriebsmodus entdeckt, bei dem sich die Umschaltspannung gegen magnetische Felder stabilisieren lässt: Wird eine Pumpe mit einem dynamischen Doppelquantenpunkt betrieben, führt ein Magnetfeld zu zwei entgegengesetzt wirkenden Effekten. Bei Verwendung geeigneter Betriebsparameter lassen sich auf diese Weise beide gegeneinander kompensieren, so dass die Umschaltspannung gegen ein störendes Magnetfeld geschützt wird.

**Schlagerworte:** Einzelelektronenpumpe, Einzelladungstransport, Dynamischer Quantenpunkt, Dynamischer Doppel-Quantenpunkt, Decay cascade

---

---

# Abstract

Single-electron pumps deliver a current based on the quantized charge of electrons. While most of these pumps are limited to low pumping frequencies, for non-adiabatic single-electron pumps this limit can be raised to some GHz. Even at this frequency the quantisation is still observable. Therefore non-adiabatic single-electron pumps are promising building blocks, that allow to produce relatively high currents based on the known number of pumped electrons per time interval. First attempts to use this property for the redefinition of the SI unit “ampere” have already been made. In this context the main aim was the minimization of the variance between the predicted and the actual generated current.

For this thesis previously neglected operating modes were tested for non-adiabatic single-electron pumps. Thus a deeper insight was obtained about the underlying physics during the pump process. In order to cover some features of the experimental data a revision of the commonly used theoretical model was necessary. The complete derivation of this modified approach with all assumptions and approximations is part of this thesis.

The used non-adiabatic single-electron pumps are based on a *GaAs-AlGaAs* heterostructure. A pump consists of a single conducting channel crossed by three top gates that can be used to block the conductance and to form quantum dots. By modulating the negative voltage on the so called “entrance gate” electrons are captured from the entrance (source) in a dynamic quantum dot and finally ejected to the other side (drain).

New applications like arbitrary current waveform generation or parallel pumping with a common entrance gate were successfully tested and the corresponding theoretical predictions verified. Currents alternating between almost zero and around 0.1 nA at modulation frequency up to 2352 Hz were achieved. More than 0.25 nA was generated operating three parallel pumps at a pumping frequency of 550 MHz.

In addition to that a stabilisation of the switching voltage against a magnetic field was discovered: Running the non-adiabatic single-electron pump with a dynamic double quantum dot revealed that the loading state of the additional quantum dot has a massive impact on the tunnelling processes during the pumping cycle. Increasing the capturing probability of electrons in the dots via an applied magnetic field results in two opposing effects. Using appropriate working parameters leads to a compensation, so that the switching voltage is protected against a magnetic stray field.

**Keywords:** Single-electron pump, Single-electron transport, Dynamic quantum dot, Dynamic double quantum dot, Decay cascade

---

---



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>13</b>
<b>Symbole</b>	<b>15</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>17</b>
<b>1. EINLEITUNG</b>	<b>19</b>
<b>2. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN</b>	<b>23</b>
2.1. Elektronengas . . . . .	23
2.2. Quantenpunkte . . . . .	25
2.3. Coulomb-Blockade . . . . .	28
2.4. Getakteter Einzelladungstransport . . . . .	32
2.5. Nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen . . . . .	33
2.5.1. Phasen des Pumpzyklus . . . . .	35
2.5.2. Auswirkung der Nicht-Adiabatizität . . . . .	39
2.5.3. Pumpregion . . . . .	40
2.6. Zusammenfassung: Grundlagen . . . . .	55
<b>3. HERSTELLUNG DER EINZEL-ELEKTRONEN-PUMPEN</b>	<b>57</b>
3.1. Ausgangsmaterial . . . . .	57
3.2. Beschreibung der Prozessierung . . . . .	60
3.2.1. Herstellung der Mesa . . . . .	60
3.2.2. Herstellung der ohmschen Kontakte . . . . .	63
3.2.3. Herstellung der Top-Gates . . . . .	67
3.3. Zusammenfassung: Herstellung . . . . .	68
<b>4. MESSAUFBAU UND VORBEREITENDE MESSUNGEN</b>	<b>69</b>
4.1. Kryostat . . . . .	69
4.2. Verwendete Messgeräte . . . . .	72
4.2.1. Schema des Messaufbaus . . . . .	72
4.2.2. Resonanzfrequenzen des Messaufbaus . . . . .	75
4.2.3. Dämpfung der eingekoppelten Leistung . . . . .	77
4.2.4. Bestimmung der Messunsicherheiten . . . . .	77
4.3. Optimierung und Variation der Pumpgeometrie . . . . .	80
4.3.1. Bestimmung der <i>Side-Wall-Depletion</i> . . . . .	80

4.3.2.	Untersuchungen an deldotierten <i>GaAs</i> -Wafeln . . . . .	87
4.4.	Zusammenfassung: Aufbau und Vorbereitungen . . . . .	90
<b>5.</b>	<b>MODELLIERUNG DES PUMPPROZESSES</b>	<b>91</b>
5.1.	Beschreibung des Pumpvorgangs durch Ratengleichungen . . . . .	91
5.1.1.	Beschränkung auf ein einziges gepumptes Elektron . . . . .	93
5.1.2.	<i>Decay-Cascade</i> -Theorie . . . . .	96
5.1.3.	Separation der Tunnelereignisse auf verschiedene Zeitskalen . . . . .	101
5.1.4.	Berechnung des erzeugten Pumpstroms . . . . .	103
5.1.5.	Spannungsabhängigkeit der Tunnelfunktion $X$ . . . . .	105
5.1.6.	Betrachtungen unter Einbeziehung des Elektronenspins . . . . .	114
5.2.	Zusammenfassung: Modellierung . . . . .	118
<b>6.</b>	<b>MESSUNGEN UND ERGEBNISSE</b>	<b>119</b>
6.1.	Parallelschaltung . . . . .	119
6.1.1.	Parallelbetrieb von 3 Pumpen . . . . .	121
6.1.2.	Parallelbetrieb von 3 Pumpen bei 2.6 T . . . . .	124
6.1.3.	Parallelbetrieb der Pumpen $B$ und $C$ bei 2.6 T . . . . .	127
6.2.	Arbiträr-Stromquelle . . . . .	128
6.2.1.	Auswirkungen des geänderten Messaufbaus . . . . .	129
6.2.2.	Charakterisierung der verwendeten Pumpe . . . . .	131
6.2.3.	Erzeugung arbiträrer Stromwellenformen . . . . .	134
6.2.4.	Erhöhung des FM-Intervalls . . . . .	134
6.3.	Doppelquantenpunkt-Pumpe . . . . .	137
6.3.1.	Entwicklung der Fit-Parameter bei zunehmendem Magnetfeld . . . . .	139
6.3.2.	Auswirkungen des zweiten QDs auf den Pumpzyklus . . . . .	143
6.3.3.	DQD-Pumpzyklus . . . . .	147
6.3.4.	Pumpen mit einem DQD . . . . .	151
6.4.	Zusammenfassung: Messungen . . . . .	155
<b>7.</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b>	<b>157</b>
<b>A.</b>	<b>ANHANG</b>	<b>159</b>
A.1.	Rechnungen zu $\sum_{n=0}^N \mathcal{P}_n(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) = 1$ . . . . .	159
A.2.	Beweis für $C_k = \prod_{m=k+1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_k}$ . . . . .	162
A.3.	Gültigkeit von $\alpha^{-1} \cdot d\langle n(t) \rangle / dU = \langle X_n(t) \rangle$ . . . . .	165
A.4.	Frequenzmodulation . . . . .	167
A.4.1.	Sinusoid . . . . .	168
A.4.2.	Sägezahn . . . . .	169
A.4.3.	Dreieck . . . . .	170
A.4.4.	Rechteck . . . . .	170
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>171</b>

<b>Lebenslauf</b>	<b>179</b>
<b>Publikationen</b>	<b>181</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1. Grundlagen: Zustandsdichte für $n$ -dimensionale Elektronengase . . . . .	24
2.2. Grundlagen: Quantenpunkt . . . . .	27
2.3. Grundlagen: Coulomb-Blockade . . . . .	30
2.4. Grundlagen: Nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe im REM . . . . .	34
2.5. Grundlagen: Nicht-adiabatischer Pumpzyklus (1) . . . . .	36
2.6. Grundlagen: Nicht-adiabatischer Pumpzyklus (2) . . . . .	37
2.7. Grundlagen: Pumpregion nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen (1) . . . . .	41
2.8. Grundlagen: Einfluss der Eingangsbarriere auf die Einladephase . . . . .	42
2.9. Grundlagen: Rücktunnelwahrscheinlichkeit $W_{n \rightarrow n-1}^S$ (1) . . . . .	46
2.10. Grundlagen: Rücktunnelwahrscheinlichkeit $W_{n \rightarrow n-1}^S$ (2) . . . . .	47
2.11. Grundlagen: Pumpregion mit unüblichen Auffälligkeiten . . . . .	49
2.12. Grundlagen: Auswurfwahrscheinlichkeit $W_{n \rightarrow n-1}^D$ . . . . .	51
2.13. Grundlagen: Pumpregion nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen (2) . . . . .	53
3.1. Herstellung: Modulationsdotierte <i>GaAs-AlGaAs</i> -Heterostruktur . . . . .	59
3.2. Herstellung: Nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe (Lichtmikroskop) . . . . .	61
3.3. Herstellung: 2-Lagen-Positiv-Lacksystem . . . . .	64
4.1. Aufbau: Schema des Kryostaten . . . . .	70
4.2. Aufbau: Foto des Messaufbaus . . . . .	73
4.3. Aufbau: Schematische Darstellung des Messaufbaus . . . . .	74
4.4. Aufbau: Resonanzfrequenz des Messaufbaus . . . . .	76
4.5. Aufbau: Bestimmung der angekoppelten HF-Leistung . . . . .	78
4.6. Aufbau: Bestimmung der Messunsicherheit $\zeta$ . . . . .	79
4.7. Vorbereitungen: Probe zum Testen verschiedener Kanalbreiten . . . . .	82
4.8. Vorbereitungen: REM-Aufnahme eines unterätzten <i>Mesa</i> -Kanals . . . . .	84
4.9. Vorbereitungen: Bestimmung der <i>Side-Wall-Depletion</i> . . . . .	86
4.10. Vorbereitungen: Deltadotierter <i>GaAs</i> -Wafer . . . . .	88
4.11. Vorbereitungen: <i>Side-Wall-Depletion</i> des deltatdotierten <i>GaAs</i> -Wafers . . . . .	89
5.1. Theorie: Vergleich vom adiabatischem und nicht-adiabatischem Pumpschema . . . . .	95
5.2. Theorie: Zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten (1) . . . . .	101
5.3. Theorie: Zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten (2) . . . . .	102
5.4. Theorie: Qualitätswert $\delta$ . . . . .	109
5.5. Theorie: Plateaus des Erwartungswert $\langle n \rangle$ . . . . .	110
5.6. Theorie: Relative Steigung auf einem Plateau . . . . .	112

5.7. Theorie: Relative Steigung mehrerer Plateaus . . . . .	114
6.1. Parallelschaltung: Aufnahme der Probe . . . . .	122
6.2. Parallelschaltung: Pumpplateaus der Pumpen <i>A</i> , <i>B</i> und <i>C</i> . . . . .	123
6.3. Parallelschaltung: Auswirkungen des Magnetfelds auf den Pumpstrom . . .	125
6.4. Parallelschaltung: Pumpplateaus der Pumpen <i>A</i> , <i>B</i> und <i>C</i> im Magnetfeld . .	126
6.5. Parallelschaltung: Erzeugter Pumpstrom der Pumpen <i>B</i> und <i>C</i> . . . . .	127
6.6. AC-Stromquelle: Schematische Darstellung des Messaufbaus . . . . .	130
6.7. AC-Stromquelle: Frequenzabhängigkeit des Pumpplateaus . . . . .	132
6.8. AC-Stromquelle: Frequenzmodulierte Pumpströme . . . . .	135
6.9. AC-Stromquelle: Frequenzmodulierter Pumpstrom von 1 MHz bis 699 MHz	136
6.10. DQD: Pumpplateaus der Pumpe bei verschiedenen magnetischen Feldstärken	140
6.11. DQD: Entwicklung der Fit-Parameter des Pumpplateaus im Magnetfeld . .	141
6.12. DQD: Einfluss des Ladezustands des <i>Drain-Dots</i> . . . . .	143
6.13. DQD: Zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten . . . . .	145
6.14. DQD: Pumpzyklus <i>0ef</i> ( <i>Drain-Dot</i> besetzt) . . . . .	149
6.15. DQD: Pumpzyklus <i>1ef</i> ( <i>Drain-Dot</i> leer) . . . . .	150
6.16. DQD: Pumpzyklus <i>1ef</i> ( <i>Drain-Dot</i> besetzt) . . . . .	152

# Symbole

$i, j, k$	Platzhalter für Indexzahlen
$l, m, n$	bzw. natürliche Zahlen
$\underline{n}, \bar{n}$	untere bzw. obere Schranke des Intervalls der Zahl $n$
$x, y, z$	Indizes zur Bezeichnung der Raumrichtung: Bei Wafern bzw. den daraus gefertigten Proben entspricht die $z$ -Achse der Wachstumsrichtung.
$\mathcal{B}, \mathcal{L}$	Breite bzw. Länge eines Halbleiterkristalls bzw. einer <i>Mesa</i> -Struktur
$\mathcal{P}$	Besetzungswahrscheinlichkeit
$\dot{\mathcal{P}}$	Zeitableitung der Besetzungswahrscheinlichkeit
$\alpha$	Fit-Parameter der Steigung in [ $V^{-1}$ ] (siehe 5.1.5)
$\Gamma, \Xi$	Tunnelrate (raus aus dem Dot bzw. rein in den Dot) in [Hz]
$\delta_k$	Qualitätswert des $k$ -ten Plateaus
$\epsilon_n$	Energieniveau des $n$ -ten Elektron im Grundzustand
$\mu$	chemisches Potential in [J] bzw. in [eV]
$\mu_S, \mu_D$	chemisches Potential der <i>Source</i> bzw. des <i>Drains</i>
$\varphi$	Phase des Signals bei der Frequenzmodulation in [rad]
$\phi$	modulierender Term bei Winkelmodulation
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit in [S/m]
$\sigma_{2D}$	Flächenleitfähigkeit in [S]
$\zeta$	experimentelle Messunsicherheit: entspricht für rein statistische Unsicherheiten der Standardabweichung
$t_\Omega$	Periodendauer bei FM in [s]
$\Theta_{\text{Fermi}}$	Fermiverteilung
$\dot{\Theta}_{\text{Fermi}}$	Zeitableitung von der Fermiverteilung
$\varpi$	Korrekturwert zur Berücksichtigung der Energieverschiebungen
$Y$	Tunnelkopplung in [J]
$\chi$	Anteil des <i>Al</i> im Verhältnis zum <i>Ga</i> in einer <i>AlGaAs</i> -Schicht
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit des Signals bei FM in [rad/s]
$\omega_C$	mittlere Winkelgeschwindigkeit bei FM (auch Träger bzw. Carrier)
$\Delta\omega$	Intervall der Winkelgeschwindigkeiten bei FM
$\omega_{oG}$	Winkelgeschwindigkeit (obere Grenze) bei FM
$\omega_{uG}$	Winkelgeschwindigkeit (untere Grenze) bei FM
$\Omega$	Modulationswinkelgeschwindigkeit des Signals bei FM in [rad/s <sup>2</sup> ]
$C_\Sigma$	Gesamtkapazität eines Quantenpunkts mit seiner Umgebung
$e$	Elementarladung ( $1.602\,176\,6208(98) \cdot 10^{-19}$ C [1])
$E$	Energie in [J] bzw. in [eV]

$E_{\text{Fermi}}$	Fermi-Energie
$E_L$	Ladeenergie eines Quantenpunkts
$f$	Frequenz in [Hz] (ohne Index: Pumpfrequenz)
$f_m$	Modulationsfrequenz
$I$	(elektrische) Stromstärke in [A]
$k_B$	Boltzmann-Konstante $(1.380\ 648\ 52(79) \cdot 10^{-23} \text{ J/K [1]})$
$\vec{k}$	Wellenvektor in $[\text{m}^{-1}]$
$ \mathbf{k}_j $	Wellenzahl (der Index $j$ kann die Werte $x, y$ oder $z$ annehmen)
$h$	plancksches Wirkungsquantum $(6.626\ 070\ 040(81) \cdot 10^{-34} \text{ Js [1]})$
$\hbar$	$h/2\pi = 1.054\ 571\ 800(13) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
$m^*$	effektive Masse in [kg]
$m_{ij}^*$	Tensorelement der effektiven Masse (die Indices $i$ und $j$ können die Werte $x, y$ oder $z$ annehmen)
$\langle n \rangle$	Erwartungswert der Verteilung gepumpter Elektronen pro Pumpzyklus
$\mathcal{P}_k$	Besetzungswahrscheinlichkeit des $k$ -ten Dot-Niveaus
$P$	Leistung in [W] bzw. [dBm]: 0 dBm entspricht 1 mW
$R$	Widerstand in $[\Omega]$
$t$	Zeit in [s]
$t_{0,k}$	Zeitpunkt ab dem Rücktunneln aus dem $k$ -te Dot-Niveau startet
$t_0$	Startzeit des Zeitintegrals der Tunnelfunktion $X$
$\underline{t}, \bar{t}$	Zeitpunkte (untere bzw. obere Schranke eines Zeitintervalls)
$T$	absoluten Temperatur in [K] bzw. [ $^{\circ}\text{C}$ ]
$U$	(elektrische) Spannung in [V]
$U_k$	Übergangsspannungen (siehe 2.5.3 und 5.1.5)
$U_{\text{SD}}$	Spannung, die zwischen der <i>Source</i> und dem <i>Drain</i> anliegt
$U_{\text{I}}^{\text{AC}}$	Spannungamplitude, die am <i>source</i> seitigen Top-Gate anliegt
$U_{\text{I}}^{\text{DC}}$	Offset-Spannung, die am <i>source</i> seitigen Top-Gate anliegt
$U_{\text{II}}$	Spannung, die am mittleren Top-Gate anliegt
$U_{\text{III}}$	Spannung, die am <i>drain</i> seitigen Top-Gate anliegt
$U_{\text{in}}$	Eingangsspannung
$U_{\text{out}}$	Ausgangsspannung
$W_{j \rightarrow k}^{\text{D}}$	Tunnelwahrscheinlichkeit in Richtung <i>Drain</i>
$W_{j \rightarrow k}^{\text{S}}$	Tunnelwahrscheinlichkeit in Richtung <i>Source</i>
$X$	Tunnelfunktion
$\dot{X}$	Zeitableitung der Tunnelfunktion



# Abkürzungen

0D, 1D, 2D, 3D	null-, ein-, zwei-, dreidimensional
<i>2DEG</i>	zweidimensionales Elektronengas
AC, DC	<i>Alternating Current</i> bzw. <i>Direct Current</i>
<i>ADC</i>	<i>Analog-to-Digital-Converter</i>
AWG	Arbiträr-Funktionsgenerator
<i>BNC</i>	Bayonet Neill Concelman koaxial Steckverbindung
bzw.	beziehungsweise
<i>DAC</i>	<i>Digital-to-Analog-Converter</i>
d.h.	das heißt
DOS	<i>Density Of States</i> : Zustandsdichte, Anzahl der Zustände pro Energieintervall
DQD	<i>Double Quantum Dot</i> (siehe QD)
FM, PM	Frequenz-, Phasenmodulation
HEMT	High-Electron-Mobility Transistor
HF	Hochfrequenz
IPA	Isopropylalkohol (mit Reinheit > 99%)
<i>IVC</i>	<i>Inner Vacuum Chamber</i> : Vakuumisolation zwischen der Probenkammer und dem flüssig- <sup>4</sup> He Tank eines Kryostaten
<i>LCC20</i>	<i>Leadless Chip Carrier</i> mit 20 Kontakten
meas	measurement
MIBK	Methylisobutylketon
<i>NPL</i>	<i>National Physical Laboratory</i>
<i>OPA</i>	Operationsverstärker ( <i>OpAmp</i> )
<i>OVC</i>	<i>Outer Vacuum Chamber</i> : äußere Vakuumisolation des flüssig- <sup>4</sup> He-Tanks eines Kryostaten
<i>PTB</i>	<i>Physikalisch-Technische Bundesanstalt</i>
QD	<i>Quantum Dot</i> (andere Bezeichnungen: Quantenpunkt, Dot)
RC -Zeit	Zeitkonstante eines RC-Glieds (Schwingkreis mit einem Widerstand und einer Kapazität)
REM	Rasterelektronenmikroskop
<i>SWD</i>	<i>Side-Wall-Depletion</i>
z.B.	zum Beispiel



---

# 1. EINLEITUNG

Die zielgerichtete Manipulation von Stromflüssen ist das zentrale Anliegen der Halbleitertechnik. In Halbleitern lässt sich mit externen elektrischen Feldern die Leitfähigkeit lokal beeinflussen, so dass integrierte Schaltungen zur Steuerung von Strömen realisierbar werden. Durch Miniaturisierung der Schaltungen sinken die benötigten Schaltströme und es verbessert sich dadurch die Schaltgeschwindigkeit bzw. die Energieeffizienz. Die Verkleinerung von Transistoren steht dabei besonders im Vordergrund, da sich aus ihnen kompakte Datenspeicher und Logikschaltungen aufbauen lassen. Im Extremfall genügen zur Steuerung ausreichend verkleinerter Transistoren dann bereits einzelne Ladungsträger.[2][3][4][5] Mit Abnahme der Strukturgrößen werden quantenmechanische Einflüsse immer dominanter und können gezielt ausgenutzt werden. Einzelne Elektronen lassen sich auf diese Weise isolieren und damit manipulieren. Derart steuerbare Elektronen können dann gezielt transportiert werden, wodurch gepumpte Elektronenströme mit quantisierten Stromstärken realisierbar sind. Derartige Gebilde werden auch als Einzel-Elektronen-Pumpen bezeichnet. Basierend auf diesen Pumpen könnte zukünftig eine neue Definition der SI-Einheit „Ampere“ erfolgen.[6][7][8] Auch andere metrologische Anwendungen, wie z.B. eine vollständig halbleiterbasierte quantisierte Spannungsquelle lassen sich mit Einzel-Elektronen-Pumpen realisieren.[9] Hierzu müssen diese Pumpen jedoch ausreichend hohe und somit präzise messbare Ströme liefern. Dabei sollte die Abweichung vom ideal zu erwartenden Strom durch Rauschen und andere Fehlermechanismen möglichst gering bleiben, so dass die Messung eine kleinere Unsicherheit als bei Verwendung eines bisherigen Stromnormals aufweist.[10]

Nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen liefern kontinuierliche, gerichtete, quantisierte Ströme und sind zudem in der Lage diese Ströme auch gegen eine entgegen gerichtete äußere Spannung aufrecht zu halten.[11] Dabei ermöglicht das breite Pumpfrequenzintervall von mehreren 100 MHz und die verhältnismäßig hohe maximale Pumpfrequenz von über 1 GHz gezielt einstellbare Pumpströme.[12] Theoretische Vorhersagen zeigen, dass für den Parallelbetrieb von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen keine individuelle Hochfrequenz-Ansteuerung nötig ist.[13] Demnach könnten parallel geschaltete Pumpen quantisierte Ströme jeder Größenordnung produzieren. Die beim Betrieb der Pumpen auftretenden Unregelmäßigkeiten führen zu einer Abweichung des erzeugten Pumpstroms von der zu erwartenden Quantisierung. Diese Fehlerquote kann durch den Einsatz eines Magnetfelds um mehrere Größenordnungen gesenkt werden.[14] Durch eine serielle Verschaltung der Pumpen lassen sich Pumpfehler messen.[15] In diesen Serienschaltungen kommt es durch Rückkopplung zu einer Abnahme dieser Pumpfehler.[16]

Der Aufbau nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen weist deutliche Parallelen zu Sperrschicht-Feldeffekttransistoren auf. Basierend auf einem HEMT (High-Electron-Mobility

Transistor) können diese Pumpen durch das Hinzufügen eines weiteren Top-Gates erzeugt werden. Sie lassen sich mit den in der Halbleiterindustrie gängigen Herstellungsverfahren fertigen, wodurch ihre Eingliederung in integrierte Schaltungen wenig technischen Aufwand erfordert. Die Herstellung kann parallel zu den anderen elektrischen Bauelementen der Schaltung erfolgen und benötigt somit im Allgemeinen keine zusätzlichen Fertigungsschritte. Wie erste Messungen an einer aus Silizium hergestellten nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe gezeigt haben, liefern diese quantisierte Ströme bei Temperaturen von 20 K.[17][18]<sup>1</sup> Mit verbesserten Fertigungsverfahren würden noch kleinere Strukturgrößen[20] und damit zukünftig sogar quantisiertes Pumpen bei Raumtemperatur möglich werden.

In dieser Arbeit sollen zunächst theoretische Beschreibungen des Pumpvorgangs erarbeitet und dann in Messungen besondere Betriebsarten der nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe untersucht werden. Dies ist zum einen der Parallelbetrieb mehrerer Pumpen zur Erhöhung des erzeugten Pumpstroms und zum anderen die Erzeugung von Strömen mit arbiträrer Wellenform. Bisher nur aus theoretischen Überlegungen vorhergesagte Eigenschaften werden auf diese Weise ebenfalls experimentell verifiziert. Zudem sollen an einer Pumpe mit einem Doppelquantenpunkt die Vorgänge während des Pumpvorgangs genauer untersucht werden. Hierzu wird die Abhängigkeit des erzeugten Pumpstroms von einem externen Magnetfeld beobachtet.

Der Versuchsaufbau für die Messungen orientiert sich an gängigen Tieftemperaturmessungen: Die Pumpen werden in der Probenkammer eines Kryostaten mit <sup>3</sup>He-System betrieben. Dieser verfügt zudem über einen supraleitenden Magneten, wodurch Messungen bei verschiedenen Magnetfeldstärken möglich werden.

In den Kapiteln 2 bis 4 werden Grundlagen und die vorbereitenden Arbeiten beschrieben: Kapitel 2 handelt von den theoretischen Grundlagen und liefert eine quantitative Beschreibungen der Vorgänge während des Pumpvorgangs.

Kapitel 3 widmet sich der Herstellung der verwendeten Proben basierend auf *GaAs-AlGaAs* Heterostrukturen.

Kapitel 4 beschreibt den Messaufbau und erste vorbereitende Messungen. Die Charakterisierung des Messaufbaus sowie die verwendeten Abschätzungen zur Bestimmung der anliegenden HF-Leistung sind hier ebenfalls zu finden.

In Kapitel 5 soll ein theoretischen Modell zur Beschreibung des Pumpvorgangs hergeleitet werden. Mit diesem sollten sich Pumpprozesse allgemein beschreiben lassen. Dabei ist zu überprüfen, ob bereits ein semi-klassischer Ansatz (ohne quantenmechanischen Hamiltonian) zur Beschreibungen genügt. Allgemein ist zu klären, ob und mit welchen Einschränkungen eine analytische Lösung der beschreibenden Gleichungen des Modells gefunden werden kann. Bereits veröffentlichte Lösungen vergleichbarer Modellrechnungen sollten sich dann als Spezialfall auch mit dem neuen Ansatz ergeben.[21][22]

Ein Anliegen dieser Arbeit ist die Vermeidung einer Überanpassung bei der Auswertung von Messwerten mit dem zu findenden Modell.[23] Idealerweise lässt sich die Anzahl unabhängi-

---

<sup>1</sup>Der Betrieb einer den Pumpen ähnelnden sogenannten Turnstile auf Silizium-Basis bei Raumtemperatur wurde bereits demonstriert.[19]

---

ger Parameter des Modells direkt aus der Anzahl charakteristischer Kurvenabschnitte in den zugehörigen experimentellen Messkurven bestimmen. Damit ließe sich die grundsätzlichen Kurvenform beschreiben und weitere Parameter haben dann eher marginale Bedeutung. In der Realität werden sich nicht alle charakteristischen Kurvenabschnitte eindeutig voneinander abgrenzen lassen. Mit zunehmender Anzahl von gepumpten Elektronen pro Pumpzyklus sind die anfänglich deutlichen Quantisierungen des Pumpstroms einer Einzel-Elektronen-Pumpe immer schlechter zu beobachten.[12][17] Zu überprüfen ist demnach, ob bzw. unter welchen Bedingungen eine Beschränkung des Modells auf einzelne wenige Elektronen zulässig ist. Zu untersuchen ist also, wie der experimentell messbare Pumpstrom durch das Modell beschrieben werden kann und wie die anderen experimentellen Messgrößen mit den theoretischen Parametern in Verbindung stehen. Dabei ist besonders die Abhängigkeit des Pumpprozesses von den Spannungen an den Steuerelektroden zu berücksichtigen. Geklärt werden muss auch die Frage, inwieweit der Pumpstrom dem angestrebten perfekt quantisierten Strom entspricht.

Im Kapitel 6 werden die Ergebnisse der Messungen gezeigt. Der bereits genannte Parallelbetrieb mit einer gemeinsamen Hochfrequenz-Ansteuerung soll zur Erzeugung von Strömen oberhalb von 0.25 nA realisiert werden. Dabei wird ebenfalls die Frage beantwortet, ob dies ohne zusätzliche Maßnahmen möglich ist.[13]

Anschließend wird das Verhalten von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen bei einer schnell variierender Pumpfrequenz untersucht. Ziel ist es, durch Frequenzmodulation der Pumpfrequenz einen arbiträren Pumpstrom zu erzeugen. Auf diese Weise ließen sich zukünftig mittels nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen auch quantisierte Wechselströme realisieren.

Abschließend soll an einer Pumpe mit zwei in Serie geschalteten Quantenpunkten untersucht werden, wie die in den beiden Quantenpunkten befindlichen Elektronen miteinander interagieren und inwiefern sie dadurch dann auch den Pumpprozess beeinflussen. Hierzu werden bei Magnetfeldern bis 3 T im Abstand von 0.1 T die erzeugten Pumpströme analysiert.



---

## 2. PHYSIKALISCHE GRUNDLAGEN

In diesem Kapitel werden zunächst die theoretischen Grundlagen für Elektronengase und Quantenpunkte aufgeführt. Es folgt eine kurze Abhandlung über Coulomb-Blockade in Quantenpunkten. Im Anschluss werden verschiedene Systeme zum Einzelladungstransport beschrieben. Auf die in dieser Arbeit verwendeten nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen wird anschließend ausführlicher eingegangen. Dabei wird der Pumpprozess beschrieben und in mehreren Phasen unterteilt. In jeder dieser Phasen müssen bestimmte Bedingungen erfüllt werden, damit letztlich ein quantisierter Pumpstrom erzeugt werden kann. Diese Anforderungen an die Betriebsparameter zeigen sich in Messungen durch Übergänge, die Gebiete unterschiedlich quantisierter Ströme voneinander trennen. Die auf diese Weise unterteilte Pumpregion und die sie unterteilenden Kanten werden im anschließenden Abschnitt beschrieben. Ebenfalls wird dort auch die tendenzielle Änderung der Pumpregion bei Variationen der Pumpparameter erläutert.

Die für diese Pumpen hergeleiteten theoretischen Beschreibungen sind weiter hinten im Kapitel 5 zu finden.

### 2.1. Elektronengas

In Festkörpern können sich geordnete Gitterstrukturen ausbilden. In diesen sind die Atome regelmäßig angeordnet. In Metallen und Halbleitern sind nicht alle Elektronen fest in den Bindungen des Gitters verankert. Diese Elektronen verhalten sich in guter Näherung wie ein Gas aus freien und unabhängigen Teilchen. Diese Elektronen bilden das sogenannte *Elektronengas*. Abhängig von dem sie umgebenden Kristallgitter können Elektronen ausgewählte Zustände annehmen. Durch Fehler im Kristallgitter sowie durch die Oberflächen des Kristalls ergeben sich Randbedingungen für die Wellenfunktion der Elektronen. Da durch die Randbedingungen die möglichen Wellenvektoren eingeschränkt sind, werden in jedem nicht fehlerfreien, unendlich ausgedehnten Kristall die Energiezustände voneinander separiert. Die möglichen Energien (bei der Temperatur  $T = 0$  K) eines freies *Elektronengas* ergeben sich durch[24]:

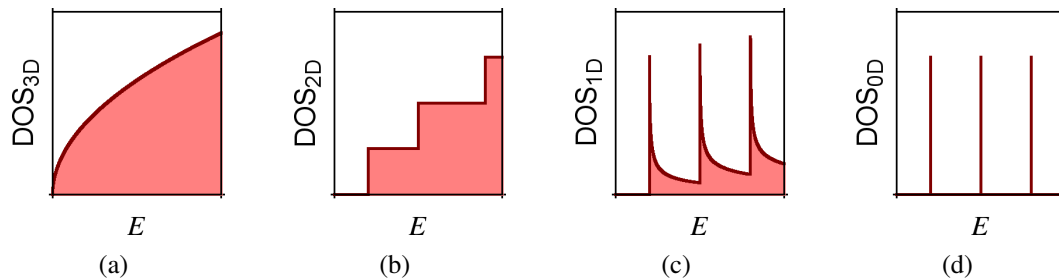
$$E(\vec{\mathbf{k}}) = \sum_j \left( \frac{\hbar^2 \cdot \mathbf{k}_x^2}{2m_{xj}^*} + \frac{\hbar^2 \cdot \mathbf{k}_y^2}{2m_{yj}^*} + \frac{\hbar^2 \cdot \mathbf{k}_z^2}{2m_{zj}^*} \right) , \quad \mathbf{k}_j = \pi \cdot \frac{n_j}{\mathcal{L}_j} , \quad n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (2.1)$$

Der Index  $j$  steht jeweils für eine der Raumrichtungen  $\{x; y; z\}$ . Als Komponenten  $\mathbf{k}_j$  des Wellenvektors  $\vec{\mathbf{k}}$  können ganzzahlige Vielfache von  $\pi / \mathcal{L}_j$  gewählt werden. Die Länge  $\mathcal{L}_j$

entspricht dabei der Ausdehnung des Kristalls in dieser Raumrichtung. Der Tensor der effektiven Masse  $m_{ij}^*$  kann in einem isotropen Kristall durch einen richtungsunabhängigen Wert  $m^*$  ersetzt werden:

$$E(\vec{\mathbf{k}}) = \frac{\hbar^2}{2m^*} \cdot (\mathbf{k}_x^2 + \mathbf{k}_y^2 + \mathbf{k}_z^2) \quad (2.2)$$

Mit abnehmendem  $\mathcal{L}_j$  steigt  $|\mathbf{k}_j|$ , wodurch der entsprechende Energieterm  $\hbar^2 \cdot \mathbf{k}_j^2 / (2m^*)$  quadratisch zunimmt. Jeder auswählbare Wellenvektor  $\vec{\mathbf{k}}$  stellt aufgrund der beiden möglichen Spin-Ausrichtungen der Elektronen zwei mögliche Zustände dar. Der Grundzustand des Elektronengases entspricht bei  $T = 0$  K der minimal möglichen Gesamtenergie des Systems. Dieser wird erreicht, wenn beginnend mit dem energetisch günstigsten Zustand alle Zustände ansteigend nach und nach aufgefüllt werden.[24] Die Anzahl der Zustände pro Energieintervall, auch Zustandsdichte (bzw. *Density Of States*, abgekürzt DOS) genannt, hängt von der Ausdehnung des Elektronengases ab. In Abbildung 2.1 ist das DOS für verschiedene  $n$ -dimensionale Elektronengase dargestellt. Zustände mit identischer Energie bilden ein Energieniveau. Die Energie des energiereichsten Elektrons entspricht der sogenannten Fermi-Energie  $E_{\text{Fermi}}$ .



**Abbildung 2.1.:** Zustandsdichte für  $n$ -dimensionale Elektronengase. Die Zustandsdichte (auch *Density Of States* genannt, DOS) ergibt sich, indem die Anzahl der Zustände pro Energieintervall aufgetragen werden. Je mehr Dimensionen des Elektronengases nicht mehr in guter Näherung als unendlich ausgedehnt angesehen werden können, desto stärker konzentrieren sich die Zustände bei quantisierten Energien.

- (a) DOS eines ausgedehnten Elektronengases: Die DOS steigt proportional zu  $\sqrt{E}$  an.
- (b) Eine Dimension des Elektronengas ist derart klein, dass erst beim Überschreiten einer Grundzustandsenergie besetzbare Zustände erreichbar werden können. Die zu dieser Raumrichtung zugehörige Wellenzahl  $|\mathbf{k}_j|$  kann für ein breites Energieintervall nur den Wert 1 annehmen. Sobald  $|\mathbf{k}_j| = 2$  möglich wird, verdoppelt sich die Anzahl besetzbarer Zustände. Entsprechend erhöht sich die DOS jedes Mal, wenn das maximal mögliche  $|\mathbf{k}_j|$  um 1 ansteigt.
- (c) Wird das Elektronengas in einer weitere Dimension eingeschränkt, steigt die Grundzustandsenergie an und die DOS beginnt sich bei quantisierten Energien zu konzentrieren.
- (d) Sobald auch die letzte ausgedehnte Dimension des Elektronengases verschwindet, weicht die DOS nur noch an den quantisierten Energien von Null ab.

Durch Gitterschwingungen des Kristalls bei Temperaturen  $T > 0$  K kommt es jedoch zu einer thermischen Verbreiterung der Energieniveaus, wodurch sich benachbarte Niveaus zu einem Kontinuum verbinden können. In einem drei-dimensionalen Kristall steigt die Dichte



---

der möglichen Zustände proportional zu  $\sqrt{E}$  an. Hierdurch werden die Energieabstände benachbarter Niveaus mit zunehmender Energie tendenziell immer kleiner. Durch die thermische Anregung der Elektronen können einige höhere Zustände von Elektronen besetzt werden, wodurch entsprechend viele niedrigere Zustände frei bleiben. Dies kann durch die Fermi-Verteilung beschrieben werden:

$$\Theta_{\text{Fermi}}(E - \mu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) + 1} \quad (2.3)$$

Mit  $\mu$  wird das elektrochemische Potential der Elektronen angegeben. Im folgenden wird es als chemisches Potential bezeichnet. Bei  $T = 0$  K entspricht  $\mu$  der Fermi-Energie  $E_{\text{Fermi}}$ . Mit zunehmender Temperatur  $T$  wird die Verteilung immer breiter und die Energien der energiereichsten Elektronen immer höher. Für den in dieser Arbeit untersuchten quantisierten Elektronentransport wurden nahezu alle Messungen bei tiefen Temperaturen  $T < 1$  K durchgeführt, so dass die Fermi-Verteilung eine Halbwertsbreite von kleiner  $100 \mu\text{eV}$  hat.

## 2.2. Quantenpunkte

Diskrete Energieniveaus lassen sich nur dann beobachten, wenn die Abstände der Energieniveaus größer als die Temperaturverbreiterung sind. Diese Anforderung kann erfüllt werden, wenn die Wellenfunktion in allen Raumrichtungen stark eingeschränkt wird. Diese kleine von der Umgebung elektrisch abgetrennte Region wird als Quantenpunkt bzw. *Quantum Dot*, abgekürzt als QD, bezeichnet. Die Potentiallandschaft eines QDs weist an den Rändern trennende Barrieren zur Umgebung auf. Diese Barrieren können durch Kristalloberflächen aber im Falle eines Halbleiterkristalls auch durch elektrische Felder erzeugt werden.

Wie in Gleichung (2.1) zu sehen, sorgt eine geringen Ausdehnungen  $\mathcal{L}_j$  für größere Energieabstände zwischen den Zuständen. Je nach dem in wie vielen Raumrichtungen die Bewegungsfreiheit der Elektronen eingeschränkt wurde, spricht man von einem zwei-dimensionalen-Elektronengas (kurz *2DEG*), einem ein-dimensionalen-Elektronengas (*1DEG* bzw. auch Quantendraht genannt) oder einem null-dimensionalen-Elektronengas bzw. QD. Dieses wird wegen der deutlichen Energiequantisierung auch „künstliches Atom“ genannt. Die Energieniveaus werden beginnend mit dem Grundzustand  $E_1$  im folgenden mit  $E_j$  bezeichnet. Wird durch ein Magnetfeld die Entartung dieser Niveaus aufgehoben, spaltet jedes Energieniveau in zwei Niveaus  $E_{\uparrow j}$  und  $E_{\downarrow j}$  auf. Zudem können weitere Entartungen durch diesen Symmetriebruch aufgehoben werden. Bei unsymmetrischen QD sind bis auf die Spin-Entartung keine zusätzliche Entartungen zu erwarten.

Wird ein QD mit mehr als einem einzigen Elektron geladen, sorgt die Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen für eine zusätzliche Energieskala. Diese kann näherungsweise durch das *Constant-Interaction-Model* [25][26] beschrieben werden. Nach diesem Modell muss für das Hinzufügen eines weiteren Elektrons für jedes bereits im QD befindliche Elektron

einmal die Ladeenergie  $E_L$  aufgewendet werden.[27]

$$\epsilon_n^{\text{Coulomb}} = (n-1) \cdot E_L \quad (2.4)$$

Die Ladeenergie  $E_L$  lässt sich dabei aus der Gesamtkapazität  $C_\Sigma$  des QD mit der Umgebung berechnen.

$$E_L = \frac{e^2}{C_\Sigma} \quad (2.5)$$

Die Gesamtenergie  $E_\Sigma$  eines mit  $n$  Elektronen besetzten QD ist in erster Näherung die Summe aus diesen elektrostatischen Energien und den jeweiligen Einzel-Elektronen-Energien:

$$\begin{aligned} E_\Sigma(n) &= \left( \sum_{j=1}^n \epsilon_j^{\text{Coulomb}} \right) + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) \\ &= \left( \sum_{j=1}^n (j-1) \cdot E_L \right) + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) \\ &= \frac{n}{2}(n-1) \cdot E_L + \sum_{m=1}^n \epsilon_m \end{aligned}$$

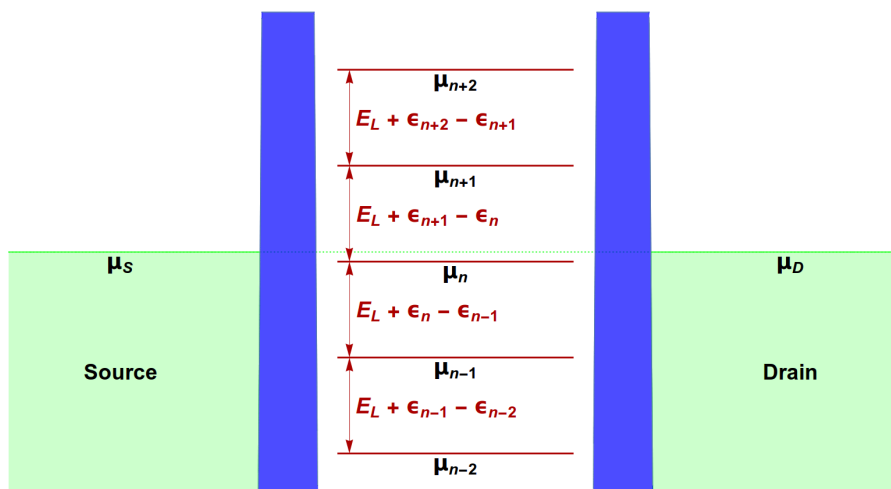
Besetzt das  $m$ -te Elektron das  $j$ -te Energieniveau, entspricht  $\epsilon_m = E_j$ . Nach dem Pauli-Prinzip darf kein Quantenzustand doppelt besetzt sein. Je nach Entartung der Niveaus steht es somit mitunter nicht für alle Elektronen zur Verfügung.

Bei genauerer Betrachtung muss auch die Veränderung der Grundzustandsenergie durch die kapazitive Kopplung beachtet werden. Zudem fließt noch ein Korrekturwert  $\varpi$  zur Berücksichtigung der Energieverschiebungen durch die Spannungen an den Gates ein:[25]

$$E_\Sigma(n) = \frac{[(n-1) \cdot e - \varpi]^2}{2 \cdot C_\Sigma} + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) \quad (2.6)$$

Nach Umformung taucht somit ein weiterer Term auf, der die Grundzustandsenergie und Energieverschiebung beinhaltet:

$$\begin{aligned} E_\Sigma(n) &= \frac{[(n-1) \cdot e - \varpi]^2}{2 \cdot C_\Sigma} + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) \\ &= \frac{1}{2}(n-1)^2 \cdot E_L + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varpi}{e} \right)^2 - (n-1) \cdot \frac{\varpi}{e} \right] \cdot E_L + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) \\ &= \frac{n}{2}(n-1) \cdot E_L + \left( \sum_{m=1}^n \epsilon_m \right) + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\varpi}{e} \right)^2 - (n-1) \cdot \frac{\varpi}{e} - \frac{n-1}{2} \right] \cdot E_L \end{aligned}$$



**Abbildung 2.2.:** Schematische Darstellungen eines Schnitts durch die Potentiallandschaft eines Quantenpunkts zwischen den Zuleitungen *Source* und *Drain*. In grün sind die chemischen Potentiale  $\mu_S$  und  $\mu_D$  von *Source* bzw. *Drain* eingezeichnet. Die hellgrünen darunter liegenden Flächen symbolisieren die mit Elektronen aufgefüllten Zustände von *Source* und *Drain*. In dunkelrot sind die Dot-Niveaus bei  $\mu_{n-2}$  bis  $\mu_{n+2}$  eingezeichnet. Die Abstände zwischen den Dot-Niveaus entsprechen nach Gleichung (2.8) der Ladeenergie  $E_L$  und dem Unterschied der Einzel-Elektronen-Energien  $\epsilon$ . In dieser Darstellung ist  $E_L \gg \epsilon$ , so dass alle Abstände nahezu identisch sind. Die Temperaturverbreiterungen der Dot-Zustände und die in *Source* und *Drain* vorhandene Temperaturverteilung der Elektronen ist in diesen Grafiken kleiner als die Strichbreite und somit nicht wahrnehmbar.

Werden Grundzustands-Gesamtenergien für eine Besetzung mit  $n - 1$  und mit  $n$  verglichen, entspricht der Unterschied dem chemischen Potential des mit  $n - 1$  Elektronen beladenen Quantenpunkts.

$$\mu_n = (n - 1) \cdot E_L + \epsilon_n - \left( \frac{1}{2} + \frac{\varpi}{e} \right) \cdot E_L \quad (2.7)$$

Wobei  $\epsilon_n$  dem Energieniveau entspricht, in das das  $n$ -te Elektron im Grundzustand geladen werden würde. In Abbildung 2.2 findet sich eine Darstellung der Dot-Niveaus im Quantenpunkt. Der Energieabstand zweier chemischen Potentiale beträgt:

$$\mu_n - \mu_{n-1} = E_L + \epsilon_n - \epsilon_{n-1} \quad (2.8)$$

Wenn  $E_L \gg \epsilon$  spielt bereits für kleine  $n$  die Einzel-Elektronen-Energien keine Rolle mehr. Bei den in nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen erzeugten QDs wird mit zunehmender Barrierenhöhe diese Annahme immer gerechtfertigter. Jedoch wurde beim *Constant-Interaction-Model* von einer größeren Anzahl an Elektronen ausgegangen, da auf diese Weise die Änderung durch ein einzelnes zusätzliches Elektron bezogen auf die Anordnung der anderen Dot-Elektronen nur gering ist. Für kleine  $n$  sind dagegen deutlich komplexere Berechnungen nötig.<sup>1</sup>

### 2.3. Coulomb-Blockade

Ein QD und seine Umgebung tauschen durch das Tunneln von Elektronen durch die den Dot definierenden Tunnelbarrieren Ladungen aus. Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt zum einen von den Barrieren, zum anderen aber auch von der Anzahl geeigneter, besetzter Elektronenzustände mit der nötigen Energie zusammen. Dies ist in Abbildung 2.3 skizziert.

Ist ein Dot-Niveau mit dem chemischen Potential  $\mu_n$  mit Elektronen geladen, könnte eines von ihnen aus dem Dot tunneln, wenn es unbesetzte Zustände mit gleichem chemischen Potential in der Umgebung gibt. Die Temperaturverbreiterung der Dot-Niveaus muss vernachlässigbar kleiner als der Unterschied der Potentiale sein, damit Einzelelektroneneffekte sichtbar werden. Ist dies der Fall und zudem das chemische Potential der Umgebung höher als  $\mu_n$ , so kann keines der  $n$  Elektronen im Dot diesen unter normalen Umständen mehr

---

<sup>1</sup>Da die in dieser Arbeit untersuchten Einzel-Elektronen-Pumpen auf dynamischen QD basieren und sich somit die Energieniveaus kontinuierlich verändern, entziehen sich genaue Energieabschätzungen dem rechnerischen Zugang und wären eher experimentell zu bestimmen.[28][29] Anhand der bisherigen Messungen kann jedoch die Größenordnung abgeschätzt werden. Ohne den Pumpstrom stark zu verändern, können die Steuerelektroden einige mV durchgefahren werden. Somit sollten die Energieabstände der Dot-Niveaus in der für den Pumpprozess kritischen Phase in der Größenordnung von einigen 100  $\mu\text{eV}$  liegen. Erste energieaufgelöste Messungen der ausgeworfenen Elektronen ermöglichen indirekte Rückschlüsse, da durch Messungen der Energieabstände beim Auswurf Werte von etwa 12 meV gefunden wurden.[30][31] Durch den unter 2.5.1 beschriebenen, speziellen Pumpzyklus wird der Energieunterschied beim Auswurf der Elektronen um ein vielfaches größer als in der kritischen Phase sein. Die Messergebnisse aus Referenz [31] deuten zudem an, dass in erster Näherung die chemischen Potentiale  $\mu_n$  des QDs als linear ansteigend betrachtet werden können.

---

verlassen.<sup>2</sup> Äquivalent zu den vorigen Ausführungen kann ein unbesetzter Dot-Zustand durch ein Elektron aus der Umgebung nur dann geladen werden, wenn dieses die erforderliche Energie besitzt.

Befindet sich ein QD zwischen zwei Zuleitungen *Source* und *Drain*, kann durch Tunneln ein Austausch von Elektronen erfolgen. Mit *Source* ist allgemein eine Elektronenquelle und mit *Drain* eine Elektronensenke gemeint. Abhängig von dem Unterschied der chemischen Potentiale von *Source* und *Drain* ist eine Vorzugsrichtung für diesen Austausch festgelegt. Der Unterschied zwischen den beiden Potentialen entspricht der *Source-Drain*-Spannung  $U_{SD}$  multipliziert mit der Elementarladung  $e$ .

$$U_{SD} = \frac{1}{e} \cdot (\mu_S - \mu_D) \quad (2.9)$$

Bei positiver *Source-Drain*-Spannung  $U_{SD} > 0$  fließt ein durch den QD transportierter Tunnelstrom von *Source* zu *Drain*. Dieser hängt jedoch stark von dem Abstand zwischen den chemischen Potentialen der Dot-Niveaus und den chemischen Potentialen von *Source* und *Drain* ab:

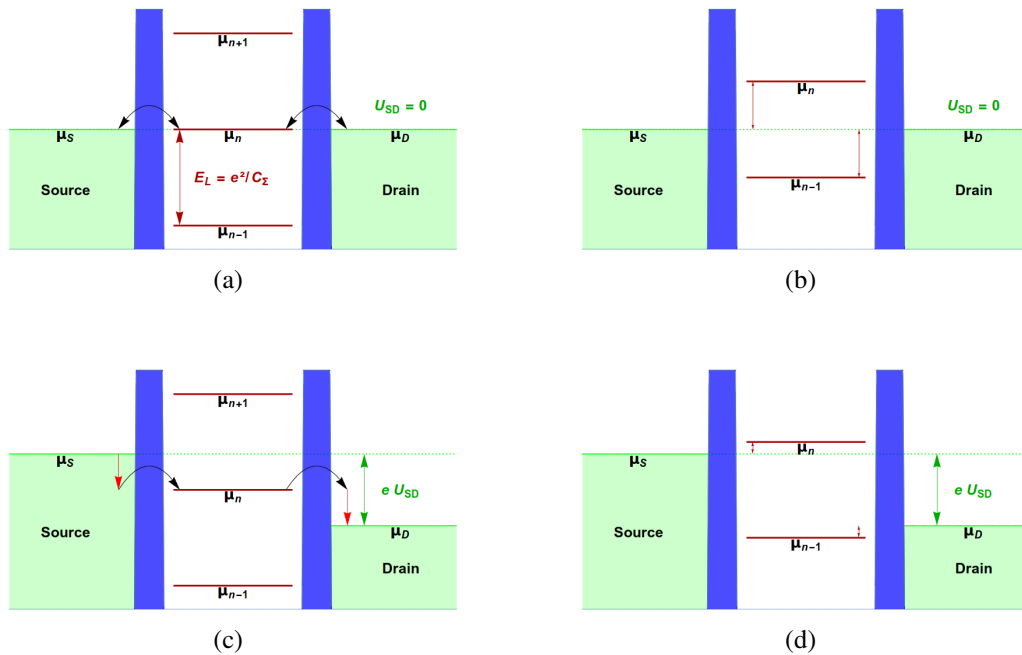
Wie in Abbildung 2.3(a) zu sehen, ist das  $n$ -te Dot-Niveau mit chemischem Potential  $\mu_n$  in Resonanz mit *Source* und *Drain* und es liegt keine Spannung zwischen *Source* und *Drain* an ( $U_{SD} = 0$ ). Auch ohne Vorzugsrichtung tunneln Elektronen hin und her, jedoch heben sich im zeitlichen Mittel diese Tunnelereignisse auf und der resultierende Strom ist Null. Sofern die chemischen Potentiale von *Source* und *Drain* nicht gegeneinander stabil gehalten werden, verändern sich durch die Tunnelereignisse die chemischen Potentiale. Das dadurch entstandene Ungleichgewicht führt zu einer Spannung zwischen *Source* und *Drain* ( $U_{SD} \neq 0$ ), wodurch für weitere Tunnelprozesse eine Vorzugsrichtung entsteht. Durch diese kommt es zu Ausgleichsprozessen, so dass sich die chemischen Potentiale wieder angleichen und die Spannung somit verschwindet ( $U_{SD} = 0$ ).

In (b) sind die Dot-Niveaus bezüglich den chemischen Potentialen von *Source* und *Drain* „maximal“ verstimmt. Da kein Elektron von *Source* oder *Drain* die nötige Energie besitzt, um in das  $n$ -te Dot-Niveau zu tunneln, bleibt es auf Dauer ungeladen. Den Elektronen im geladenen  $(n - 1)$ -te Dot-Niveau darunter hingegen fehlt Energie, so dass auch von ihnen keines aus dem QD tunneln kann.

In (c) wurde eine Spannung zwischen *Source* und *Drain* angelegt ( $U_{SD} > 0$ ), wodurch das chemische Potential von *Source*  $\mu_S$  höher liegt als das von *Drain*  $\mu_D$ . Zudem befindet sich das  $n$ -te Dot-Niveau zwischen den beiden chemischen Potentialen ( $\mu_D < \mu_n < \mu_S$ ). Ist dieses Niveau ungeladen, stehen Elektronen mit der nötigen Energie zum Tunneln in den QD auf der *Source*-Seite zur Verfügung. Für die Elektronen auf der *Drain*-Seite ist das  $n$ -te Dot-Niveau jedoch nicht zu erreichen. Aus diesem Grund wird in dieses letztlich ein Elektron

---

<sup>2</sup>Eine Ausnahme ergibt sich aus der Energie-Zeit-Unschärfe, wonach ein Elektron kurzzeitig Energie aufnimmt und somit doch aus dem QD tunneln kann. Da die Lebensdauer dieser angeregten Zustände reziprok mit der Energie abnimmt, wird auch dieser Tunnelmechanismus mit zunehmenden Potentialunterschieden immer unwahrscheinlicher. Er spielt deshalb für die Herleitung der Coulomb-Blockade nur eine untergeordnete Rolle.



**Abbildung 2.3.:** Schematische Darstellungen eines Schnitts durch die Potentiallandschaft eines Quanten-Dots zwischen den Zuleitungen *Source* und *Drain* bei schwacher Tunnelkopplung bzw. Coulomb-Blockade. Durch die in blau dargestellten Potentialbarrieren können Elektronen nur dann tunneln, wenn ein unbesetzter Zustand auf der anderen Seite erreicht werden kann. Mit schwarzen Pfeilen sind diese möglichen Tunnelprozesse dargestellt. In grün sind die chemischen Potentiale  $\mu_S$  und  $\mu_D$  von *Source* bzw. *Drain* eingezeichnet. Die hellgrünen darunter liegenden Flächen symbolisieren die mit Elektronen aufgefüllten Zustände von *Source* und *Drain*. Die Differenz von  $\mu_S$  und  $\mu_D$  entspricht der *Source-Drain-Spannung*  $U_{SD}$  multipliziert mit der Elementarladung  $e$ . In dunkelrot sind die Dot-Niveaus bei  $\mu_{n-1}$ ,  $\mu_n$  und  $\mu_{n+1}$  eingezeichnet. Die Abstände zwischen den Dot-Niveaus entsprechen in etwa der Ladeenergie  $E_L$ . Die Temperaturverbreiterungen der Dot-Zustände und die in *Source* und *Drain* vorhandene Temperaturverteilung der Elektronen ist in diesen Grafiken kleiner als die Strichbreite und somit nicht wahrnehmbar. In Grafik (a) befindet sich ein Dot-Niveau in Resonanz mit  $\mu_S$  und  $\mu_D$  und das System ist in einem transmittierenden Zustand. Da keine *Source-Drain-Spannung*  $U_{SD}$  anliegt, haben die Tunnelprozesse der Elektronen keine Vorzugsrichtung.

Grafik (b) zeigt die Coulomb-Blockade, da weder der leere  $n$ -te noch der gefüllte  $(n-1)$ -te Dot-Zustand Tunneln ermöglichen. Die dunkelroten Doppelpfeile zeigen die jeweils bis zur Aufhebung der Blockade noch fehlende Energie.

Durch eine positive *Source-Drain-Spannung*  $U_{SD}$  ist in (c) der Quanten-Dot für Elektronen von *Source* nach *Drain* durchgängig. Die roten Pfeile bei den Zuleitungen deuten Thermalisierungsprozesse an, wodurch diese im Quanten-Dot dann nicht mehr notwendig werden. Prinzipiell wäre eine Thermalisierung im Dot jedoch auch denkbar.

In (d) sind die Dot-Zustände verschoben, so dass Aufgrund der Coulomb-Blockade der Ladungstransport durch den Quanten-Dot unterbunden ist. Wie in Grafik (b) zeigen die dunkelroten Doppelpfeile, die zur Aufhebung noch fehlende Energie. Diese sind wegen der angelegten *Source-Drain-Spannung*  $U_{SD}$  deutlich kleiner als in (b).

---

von *Source* tunneln.<sup>3</sup> Das chemische Potential des nächsten unbesetzten Dot-Niveaus liegt über den chemischen Potentialen von *Source* und *Drain* ( $\mu_D < \mu_S < \mu_{n+1}$ ), so dass der QD nicht weiter geladen werden kann. Der Dot ist somit zu diesem Zeitpunkt für zusätzliche Elektronen blockiert, wobei diese Blockade von der Coulomb-Abstoßung der Elektronen untereinander abhängig ist. Erst wenn ein Elektron aus dem QD tunnelt, wird das erreichbare Dot-Niveau bei  $\mu_n$  wieder für das nächste Elektron frei. Da  $\mu_n$  oberhalb von  $\mu_D$  liegt, kann ein Elektron aus dem Dot in einen unbesetzten Zustand auf der *Drain*-Seite tunneln.<sup>4</sup> Der entstehende Strom wird Elektron für Elektron durch das  $n$ -te Dot-Niveau transportiert und ist somit nicht nur von der Spannung zwischen *Source* und *Drain* sondern auch stark von den beiden Tunnelkopplungen abhängig.

Bei (d) hingegen liegt kein Dot-Niveau zwischen den chemischen Potentialen von *Source* und *Drain* ( $\mu_{n-1} < \mu_D < \mu_S < \mu_n$ ). Die Situation entspricht deshalb in Prinzip dem von (b). Zwar gibt es eine Vorzugsrichtung für Tunnelereignisse, jedoch besitzt kein Elektron bei *Source* oder *Drain* die nötige Energie, um in das unbesetzte  $n$ -te Dot-Niveau zu tunneln. Aus diesem Grund können höchstens die deutlich unwahrscheinlicheren Tunnelprozesse stattfinden, bei denen ein Elektron die fehlende Energie mittels der Energie-Zeit-Unschärfe verliehen bekommt. Deshalb ist der fließende Strom nahezu null. Durch die Coulomb-Abstoßung der Elektronen im Dot wurde auf diese Weise der Strom nahezu komplett blockiert.

Wird nur eine einzelne Tunnelbarriere zwischen *Source* und *Drain* betrachtet, finden sich Parallelen zu den eben gemachten Überlegungen. Da ein tunnelndes Elektron durch seine elektrostatische Abstoßung andere Elektronen am Tunneln hindern kann, entspricht diese Situation in etwa der in Abbildung 2.3(c). Genau wie beim QD muss das Elektron zuerst die Barriere wieder verlassen, bevor das nächste Elektron an dieser Stelle tunneln kann. Der Aufenthalt in der Barriere entspricht in dieser Betrachtung der Zeit in denen sich die Elektronen auf dem Dot-Niveau aufhalten. Multi-Elektronen-Tunneln kann in Analogie als Kotunneln aufgefasst werden. Der Stromfluss wird zwar nicht komplett verhindert, jedoch durch den Coulomb-Blockade-Effekt gehemmt.<sup>5</sup>

---

<sup>3</sup>Da nun auf der *Source*-Seite ein Zustand mit der entsprechenden Energie frei geworden ist, können die Elektronen auf der *Source*-Seite durch Thermalisierung ihre Gesamtenergie minimieren. Der freie Zustand wird schnell besetzt und, falls das chemische Potential  $\mu_S$  nicht stabil gehalten wird, der zuvor höchste besetzte Zustand auf der *Source*-Seite frei gegeben. In dem Fall würde  $\mu_S$  absinken, was jedoch durch die dicht aufeinander folgenden Zustände den Wert von  $\mu_S$  nur geringfügig ändern würde. Die freigewordene Energie wird als zusätzliche thermische Energie, d.h. im Kristall letztlich als stärkere Gitterschwingung, wirksam und über die Zeit an kältere Reservoirs abgegeben. Letztlich kann aber auch ein energetisch höher gelegenes Elektron aus *Source* in den Dot tunneln, wenn es dort schnell genug thermalisieren kann. Da jedoch im QD deutlich weniger Elektronen bei diesem Prozess beteiligt sind, ist er somit unwahrscheinlicher. Siehe hierzu [32, Kapitel 6], in dem Anhand der resonanten Tunneliode der hierfür benötigte Streuprozess betrachtet wird.

<sup>4</sup>Hier gibt das Elektron durch Thermalisierung Energie ab, um die Gesamtenergie auf der *Drain*-Seite zu minimieren. Im Falle instabiler chemischer Potentiale steigt durch das hineingetunnelte Elektron  $\mu_D$ . Auch hier gilt, dass die dicht liegenden Zustände dann nur zu einer geringen Änderung führen würden.

<sup>5</sup>Allgemein gilt diese Betrachtung für alle Ladungsträger. Sobald andere Ladungsträger mit Ladung des gleichen Vorzeichens am Tunneln gehindert werden, kann in diesen Fällen von Coulomb-Blockade gesprochen werden.

## 2.4. Getakteter Einzelladungstransport

Die Fähigkeit einzelne Ladungen kontrolliert zwischen zwei Ladungsreservoirs zu transportieren, ermöglicht es quantisierte Ströme zu erzeugen. Für perfekten, getakteten Einzelladungstransport darf die trennende Barriere zwischen den beiden Reservoirs nur dann überwindbar sein, wenn die von außen angelegten Steuerparameter den Transport zulassen. Zudem muss die exakte Anzahl der transportierten Ladungen pro Zeiteinheit kontrolliert werden können. Um Letzteres zu gewährleisten wird in nahezu allen getakteten Einzelladungstransport-Systemen auf die Coulomb-Blockade gesetzt. Bei einem kleinen Reservoir, wie z.B. einem Quantenpunkt, können die Abstände der chemischen Potentiale größer als die thermische Energieverbreiterung werden, wodurch diskrete Zustandsniveaus entstehen. Mit geeigneten Steuerparametern lässt sich auf diese Weise die exakte Anzahl an Ladungsträgern in diesem Quanten-Reservoir einstellen. Werden die Besetzungsanzahl des Quanten-Reservoirs und die Kopplung zu den Umgebungsreservoirs geschickt über die Zeit verändert, lässt sich das Beladen sowie das Entladen des Quanten-Reservoirs kontrolliert steuern. Die Ladungsträger können somit gezielt aus einem *Source*-Reservoir entnommen und in ein *Drain*-Reservoir abgegeben werden.<sup>6</sup> Mit der Wiederholfrequenz des Transportzyklus  $f$  und der pro Zyklus transportierten Ladung  $n \cdot e$  ergibt sich somit ein Strom von  $I = n \cdot e \cdot f$ , wobei  $e = 1.602176565 \times 10^{-19}$  C der Elementarladung entspricht.[1] Die vielfältigen Realisierungen dieses Prinzips<sup>7</sup>[8] lassen sich im Wesentlichen in zwei Gruppen zusammenfassen. Die momentan gängigsten Transportsysteme können bezüglich ihres Transportprinzips in Turnstiles und in Pumpen aufgeteilt werden.<sup>8</sup> Während Turnstiles den Strom getaktet hindurch lassen und somit auf eine Spannung zwischen *Source* und *Drain* angewiesen sind, können Pumpen auch entgegen einer solchen Spannung Ladungen aktiv liefern. Dies ist möglich, da die Kopplung zu den Reservoirs entweder durch variierende Barrieren und/oder durch Verschiebung der Ladungen beeinflusst wird. In den Anfängen des Einzel-Elektronen-Transports wurden 1990 von *Geerligs, Pothier et al.* zunächst Messungen an einer Turnstile veröffentlicht.[35] Diese bestand aus drei in Serie geschalteten metallischen Aluminium-Inseln, die durch Tunnelübergänge aus Aluminium-Oxid untereinander bzw. mit *Source* und *Drain* verbunden waren. Durch ein Magnetfeld von 2 T wurde die Supraleitung im Aluminium bei der Betriebstemperatur von  $< 1$  K aufgehoben. Mittels eines Gates an der mittleren Insel wurde der Einzel-Elektronenstrom getaktet. In den folgenden Jahren wurde ein leicht abgewandeltes Probedesign mit zwei Inseln und zwei Gates zum gezielten Weiterreichen der Ladung verwendet. Hierdurch wurde erstmals ein Pumpbetrieb ermöglicht.[36] Dieser Aufbau wurde weiterentwickelt und konnte bereits 1996

---

<sup>6</sup>Eine besondere Einzel-Elektronen-Quelle stellt ein Quanten-Kapazität dar, die nur mit einer Zuleitung in Kontakt gebracht wird.[33]

<sup>7</sup>Bei *Pekola et al.* [8] findet sich eine umfangreiche Abhandlung zu diesem Thema. Dort werden auch andere Prinzipien, wie z.B. Surface-Acoustic-Waves (SAWs), Quantum-Phase-Slip oder Mechanical-Single-Electron-Shuttle, aufgeführt.

<sup>8</sup>Leider wird diese Unterscheidung nicht allgemein gemacht, so dass mitunter Turnstiles in den zugehörigen Veröffentlichungen auch als Pumpen bezeichnet werden. So ist z.B. die *Molecular Quantized Charge Pump* von *Siegle et al.* eine auf einem Kohlenstoffnanoröhrchen basierende Turnstile.[34]



---

eine Fehlerquote des Pumpstroms von  $1.5 \cdot 10^{-8}$  demonstrieren.[37]<sup>9</sup>

Dieser Pumpentyp eignet sich jedoch nicht für hohe Pumpfrequenzen, so dass die erzielten Ströme bei  $< 10$  pA liegen. Dies folgt aus den begrenzten Tunnelraten durch die Tunnelübergänge, da Tunnelprozesse stochastisch verlaufen. Ein Tunnelprozess durch eine hohe bzw. breite Barriere hat somit nach einer gewissen Zeit nur zu einer gewissen Wahrscheinlichkeit stattgefunden. Aus diesem Grund steigt mit zunehmender Pumpfrequenz die Fehlerquote.[39] Durch die Gates werden nur die Niveaus gegeneinander verschoben und der eigentliche Weitertransport beruht allein auf den dann folgenden Energieminimierungs-Prozessen. Idealerweise würden sich die Niveaus so langsam bewegen, dass das Weitertunneln bereits mit Ende des Resonanzfalls in jedem Fall komplett abgeschlossen ist. Der ganze Pumpzyklus wäre in dem Fall adiabatisch, da keine Thermalisierung nötig wäre. Dies entspricht jedoch einer Pumpfrequenz, die gegen Null geht. Um messtechnisch geeignete Ströme zu produzieren, muss jedoch mit höheren Pumpfrequenzen gearbeitet werden. Letztlich wird die Pumpe deshalb zwar nur in der Nähe des adiabatischen Limit betrieben, jedoch können geringe Fehlerquoten bei Frequenzen bis zu einigen Megahertz erreicht werden. Somit wird diese Pumpmethode auch als quasi-adiabatisches Pumpen bezeichnet.<sup>10</sup>

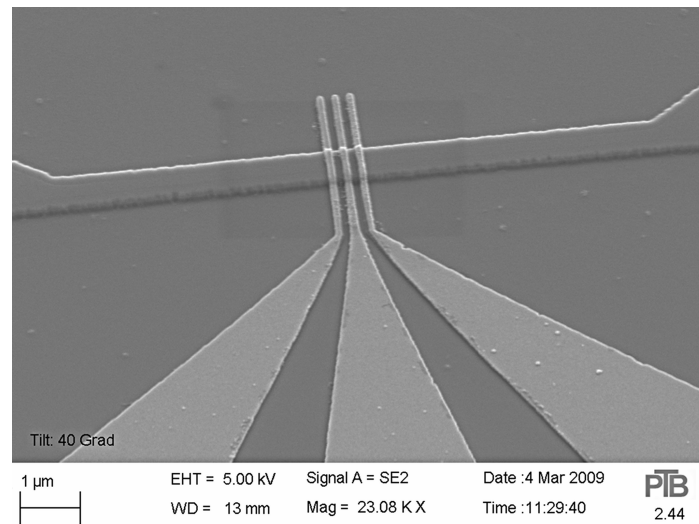
## 2.5. Nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen

Mit nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen lassen sich vergleichsweise hohe quantisierte Ströme erzeugen. Pumpfrequenzen bis über 1 GHz wurden bereits erfolgreich demonstriert und auf diese Weise Pumpströme  $I > 160$  pA erzeugt.[12] Auch bei diesen hohen Pumpfrequenzen lässt sich weiterhin eine geringe Fehlerquote von  $< 2 \cdot 10^{-7}$  erreichen.[10] Durch modulierte Barrieren werden die Elektronen bei nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen aktiv in einem Minimum der variierenden Potentiallandschaft von *Source* nach *Drain* befördert. Um die Tunnelbarrieren entsprechend kontrollieren zu können, bietet sich als Ausgangsmaterial ein Halbleiter an. In diesem kann durch Feldeffekte die Leitfähigkeit eines leitenden Kanals eingestellt werden. Die auf diese Weise erzeugten Barrieren lassen sich mit hoher Frequenz steuern und können zudem durch Superposition komplexe Potentiallandschaften erzeugen. Durch den Einsatz von in der Halbleiterindustrie üblichen Lithographie-Techniken wurden in Silizium bereits nicht-adiabatische Pumpen mit Quantenpunkten von etwa  $100 \text{ nm} \times 30 \text{ nm} \times 20 \text{ nm}$  hergestellt, die bei Temperaturen von 16 K stabiles quantisiertes Pumpen gezeigt haben.[17] Mit kleineren Quantenpunkten stehen somit die Chancen recht gut, oberhalb der Temperatur von flüssigem Stickstoff noch quantisierte

---

<sup>9</sup>Inwieweit sich diese niedrige Fehlerquote sogar zur Realisierung eines Maxwellschen Dämons nutzen lässt, steht noch nicht fest.[38]

<sup>10</sup>Eine quasi-adiabatische Pumpe auf Basis eines Graphene-QD wurde bereits 2012 bei einer Pumpfrequenz von bis zu 1.4 GHz betrieben. Die Rate der in der Messung auftretenden Pumpfehler waren bei den hohen Pumpfrequenzen für eine quasi-adiabatische Pumpe verhältnismäßig gering. Unterhalb von 90 MHz soll in dieser Messung die Fehlerquote sogar in der Größenordnung von  $10^{-8}$  liegen.[40]



**Abbildung 2.4.:** REM-Aufnahme einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe. Der von links nach rechts verlaufende *Mesa*-Kanal ist nach dem naß-chemischen Ätzen rund 800 nm breit. Im Kristall unterhalb dieses Kanals liegt in ca. 100 nm Tiefe das *2DEG*. Dieses kann durch im Halbleiter erzeugbare Potenzialbarrieren beeinflusst werden. Diese Barrieren werden durch negative Spannungen an den drei quer zum Kanal aufgebrachten Top-Gates erzeugt. Jedes dieser Top-Gates ist etwa 100 nm breit. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Gates beträgt rund 150 nm. Für den nicht-adiabatischen Pumpprozess werden nur zwei dieser drei Top-Gates benötigt. Deshalb wird das dritte Gate zumeist mit dem Massepotential elektrisch verbunden. Die Einsatzmöglichkeiten des dritten Gates werden in dieser Arbeit im Kapitel 6 experimentell überprüft.

---

Ströme zu erzeugen.<sup>11</sup> In Abbildung 2.4 ist eine REM-Aufnahme einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe gezeigt. Indem an den Top-Gates negative Spannungen angelegt werden, kann das parallel zum *Mesa*-Kanal unter der Halbleiteroberfläche liegende *2DEG* beeinflusst und letztlich sogar lokal verdrängt werden.

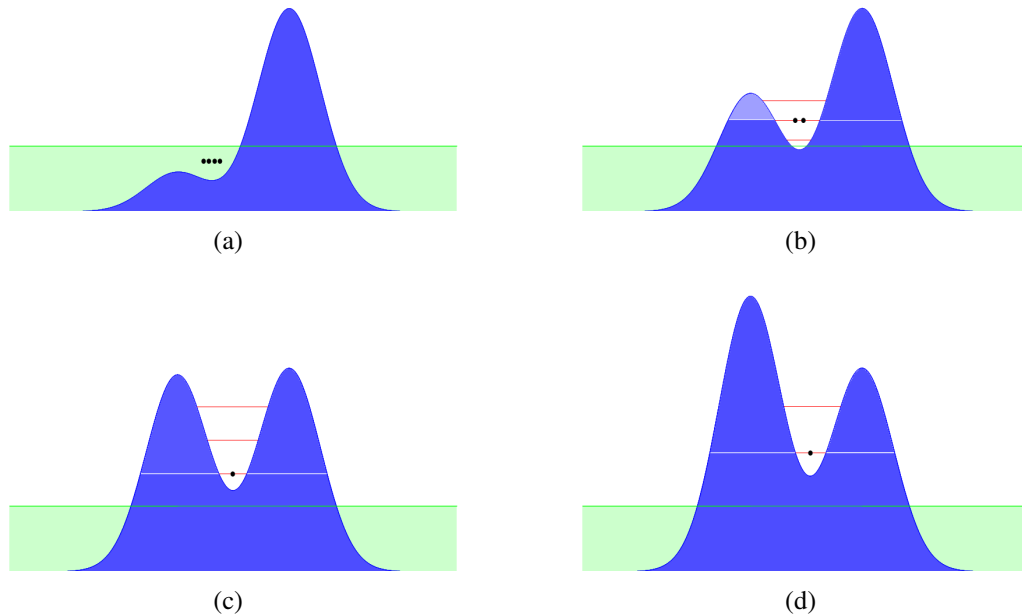
Damit ein nicht-adiabatischer Pumpprozess durchlaufen werden kann, muss ein Pumpzyklus schneller als die zu vermeidenden adiabatischen Ausgleichsprozesse beendet werden. Demnach sinkt unterhalb einer unteren Grenzfrequenz die Präzision der Pumpen, da zunehmend unerwünschte Tunnelereignisse stattfinden. Nach oben sind die Pumpfrequenzen durch die Geschwindigkeit der Ausgleichsprozesse in den Elektronenreservoirs des *2DEG* sowie durch die Schaltgeschwindigkeiten der Barrieren begrenzt. Zudem muss immer mehr Aufwand betrieben werden, um die Hochfrequenz verlust- und verzehrungsarm an die Steuerelektroden zu bringen. Um beliebig hohe quantisierte Ströme erzeugen zu können, können Einzel-Elektronen-Pumpen auch parallel betrieben werden. Besonders vorteilhaft ist in diesem Fall, viele Pumpen mit möglichst wenig individuellen Parametern ansteuern zu müssen. Im Kapitel 6 im Abschnitt Parallelschaltung wird gezeigt, dass mehrere Pumpen mit einer gemeinsamen Elektrode für die Eingangsbarrieren gleichzeitig betrieben werden können. Die individuellen Unterschiede der Pumpen erfordern nur jeweils eine eigene ansteuerbare Ausgangselektrode. Da diese nur mit konstanter Spannung die Ausgangsbarriere fest legt, reicht somit für die gesamte Parallelschaltung eine einzige Hochfrequenzleitung. Integrierte Schaltkreise aus parallel- und in Serie geschalteten Pumpen lassen sich dadurch deutlich einfacher realisieren.

### 2.5.1. Phasen des Pumpzyklus

Einzel-Elektronen-Pumpen erzeugen elektrische Ströme, indem einzelne Elektronen aus einer elektrischen Zuleitung (*Source*) eingefangen und danach in die Ableitung (*Drain*) befördert werden. Hierzu werden die Elektronen zwischenzeitlich in einem Quanten-Dot von *Source* und *Drain* isoliert. Dieser wird durch Potentialbarrieren zwischen Dot und *Source* (Eingangsbarriere) bzw. zwischen Dot und *Drain* (Ausgangsbarriere) geformt. Durch die Barrieren kann das *2DEG* an diesen Stellen verdrängt werden. Die beiden Barrieren werden durch Top-Gates geformt, indem an diese negative Spannungen angelegt werden. Durch eine konstante Ausgangsbarriere sind *Source* und *Drain* die ganze Zeit getrennt. Mit zunehmender Eingangsbarriere wird auf der Eingangsseite das Elektronengas verdrängt und der Quanten-Dot gebildet. Das System kann somit als ein dynamischer Quanten-Dot zwischen zwei Elektronengasreservoirs beschrieben werden.

---

<sup>11</sup>Als Abschätzung für laterale QDs ergibt sich eine maximale Temperatur  $T$  aus  $k_B T = 2/3.53 \cdot \hbar^2 / m^* \cdot r^{-2}$ , unter der die 0-dimensionalen Eigenschaften eines QD noch wahrnehmbar sind.[27] Um die maximale Temperatur zu vervierfachen müssen demnach die Abmessungen halbiert werden. Um die obere Betriebstemperatur dieser Silizium-Pumpe oberhalb von 77 K zu bringen, würde eine Reduzierung der Gate-Abstände auf 40 nm und geringe Verringerungen der anderen Abstände wahrscheinlich schon reichen. Mit Strukturgrößen von 22 nm, die seit Ende 2012 in der Halbleiterindustrie serienmäßig hergestellt werden können, wären solche Verkleinerungen bereit möglich.[41]



**Abbildung 2.5.:** Schnitte durch die Potentiallandschaft des dynamischen Quanten-Dots. In grün sind entsprechend wie in Abbildung 2.3 die besetzten Zustände in *Source* (links) und *Drain* (rechts) gezeigt. In blau ist die Potentiallandschaft dargestellt, wobei für die Form der Barrieren die Gleichung  $V(x, t) = V_S(t) \cdot \exp\left(-\frac{(x + x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + V_D \cdot \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$  verwendet wurde (siehe Referenz [11, Gleichung (1)]). Die zeitabhängige Amplitude der Eingangsbarriere  $V_S(t)$  nimmt von Bild zu Bild linear zu.

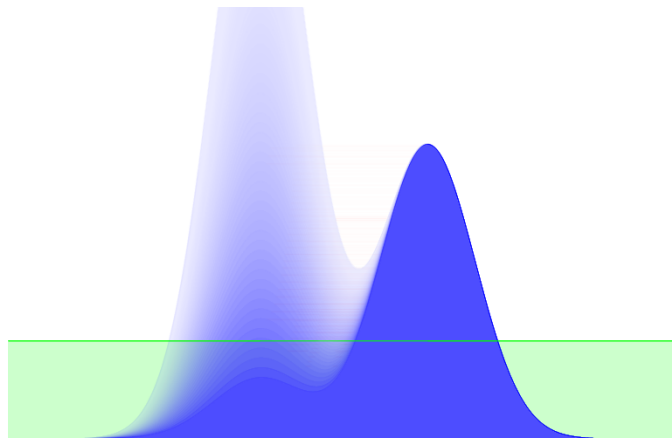
Grafik (a) zeigt den noch nicht von *Source* entkoppelten Quanten-Dot bevor die linke Eingangsbarriere angehoben wurde. Zu diesem Zeitpunkt in der Einladephase reicht das Elektronengas noch in den Dot hinein und in diesem Beispiel halten sich dort vier Elektronen auf. Aber durch die ab diesem Zeitpunkt anwachsende Eingangsbarriere wird die Trennung vom Elektronengas erreicht und der Quanten-Dot richtig ausgebildet. Da dieser nicht allen Elektronen Platz bietet, tunneln die meisten der anfänglichen Elektronen im Dot zurück nach *Source*.

In Grafik (b) ist der Einfangprozess noch nicht abgeschlossen und von den zwei im Dot verbliebenen Elektronen wird im Folgenden mit hoher Wahrscheinlichkeit eines nach *Source* zurück tunneln. Die jeweilige Tunnelwahrscheinlichkeit wird durch die Transparenz der Barriere in diesen Bildern angedeutet.

Die Einfangphase ist in Grafik (c) abgeschlossen und das verbliebene letzte Elektron hat zu diesem Zeitpunkt in etwa die gleiche niedrige Wahrscheinlichkeit nach *Source* oder nach *Drain* zu tunneln. Da die Transparenz der Barrieren aber zu diesem Zeitpunkt recht gering ist, verbleibt das Elektron aufgrund der kurzen Dauer des Pumpzyklus mit hoher Wahrscheinlichkeit im Quanten-Dot.

Grafik (d) zeigt den Beginn der Auswurfphase. Das letzte Elektron wird durch die beständig ansteigende linke Barriere immer weiter in Richtung *Drain* befördert und dabei energetisch angehoben. Somit steigt die Transparenz der rechten Ausgangsbarriere während die Transparenz der Eingangs-Barriere immer weiter absinkt. Durch ausreichendes Anheben der Eingangsbarriere kann der Quanten-Dot somit komplett nach *Drain* entleert werden.

Die während eines Pumpzyklus ablaufenden Vorgänge werden in Abbildung 2.5 dargestellt. In einem Pumpzyklus wird der Dot zunächst mit *Source* gekoppelt (a). Dies findet unter Bedingungen statt, bei denen Elektronen von *Source* in den Dot tunneln und somit den Dot mit zusätzlichen Elektronen besetzen. Danach wird die Tunnelkopplung zwischen dem Dot und *Source* wieder verringert (b) und die Elektronen im Dot auf diese Weise zwischenzeitlich von der Umwelt isoliert (c). Damit ein gerichteter Pumpstrom erzeugt werden kann, müssen die zu pumpenden Elektronen nach *Drain* ausgeworfen werden. Dazu wird die Tunnelkopplung zwischen Dot und *Drain* weiter erhöht (d) bis letztlich die Elektronen nach *Drain* ausgeworfen werden. Wie bereits in Abbildung 2.5 gesehen, werden die Dot-Niveaus in diesem Fall durch die ansteigende Eingangsbarriere angehoben. Hierdurch entsteht für die Pumpelektronen eine Vorzugsrichtung aus dem Dot nach *Drain*. In Abbildung 2.6 ist eine graphische Überlagerung mehrerer Momentaufnahmen der variierenden Potentiallandschaft des Dots gezeigt. Während die rechte Ausgangsbarriere nahezu konstant bleibt, ändert sich die Eingangsbarriere und damit auch die Position des QD. Die durch das Überlagern nur noch schemenhaft zu erkennenden Dot-Niveaus ändern sich entsprechend ebenfalls. Da der gezeigte dynamische QD deutlich energetisch angehoben wird, können selbst bei leicht negativen *Source-Drain-Spannung*<sup>12</sup>  $U_{SD}$  die Dot-Niveaus letztlich energetisch oberhalb des chemische Potentials von *Drain*  $\mu_D$  liegen.



**Abbildung 2.6.:** Überlagerung mehrerer Momentaufnahmen der Schnitte durch die Potentiallandschaft des dynamischen Quanten-Dots. Entsprechend Abbildung 2.5 sind in grün die besetzten Zustände in *Source* (links) und *Drain* (rechts) gezeigt. In blau ist die Potentiallandschaft dargestellt, wobei diese durch die Überlagerung für die stark variierende Eingangsbarrieren verschiedene Helligkeiten hat.

Bei den in dieser Arbeit untersuchten nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen wird das Anheben der Niveaus und der Wechsel der beiden Ankopplungen durch die periodische Variation der Potentialbarriere zwischen Dot und *Source* erreicht. Die Ausgangsbarriere zwischen dem Dot und *Drain* muss nicht geändert werden. Zum Teil wird jedoch durch Kopplung der beiden Gates das HF-Signal auch die Ausgangsbarriere leicht modulieren.

<sup>12</sup>siehe Gleichung (2.9) mit  $\mu_D > \mu_S$

Dies muss jedoch erfahrungsgemäß nicht kompensiert werden. Wenn die Kopplung zu einem gegenphasigen Mitschwingen führt, kann hierdurch mitunter sogar der Pumpprozess unterstützt werden. Die Ausgangsbarriere wäre in den Fällen nämlich zu Beginn eines Pumpzyklus etwas höher und der Dot dadurch näher an der *Source*. Beim Auswerfen der Elektronen wäre die Ausgangsbarriere hingegen leicht niedriger, wodurch auch dieser Prozess profitieren würde.

### **Einladephase**

Am Anfang eines Pumpzyklus in der Einladephase ist die Höhe der Eingangsbarriere gerade unterhalb des chemischen Potentials von *Source* gesunken. Durch weiteres Absinken der Barriere dringen Elektronen des 2DEG von *Source* bis zur Ausgangsbarriere vor und werden somit beim anschließenden Ansteigen der Barriere in dem sich ausbildenden QD vom 2DEG getrennt. Durch das Anheben der Eingangsbarriere wird diese auch zunehmend breiter. Gleichzeitig schrumpft dann der Quanten-Dot, wodurch sich die Energieabstände der Dot-Besetzungszustände vergrößern. Zudem wird der Dot in Richtung Ausgang verschoben und energetisch angehoben. Sobald ein besetztes Dot-Niveau energetisch oberhalb des chemischen Potentials von *Source* angestiegen ist, endet die Einladephase. In der anschließenden Phase werden Elektronen den Dot vorrangig in Richtung *Source* verlassen und umgekehrt nur in seltenen Fällen Elektronen von *Source* in den Dot gelangen. Die hohe Ausgangsbarriere macht ein Tunneln durch diese in dieser Phase nahezu unmöglich. Sollte am Ende der Einladephase kein Elektron im QD vorhanden sein, wird in diesem Pumpzyklus höchstwahrscheinlich kein Elektron gepumpt werden.

### **Einfangphase**

Da bei der Abschnürung des Quanten-Dots ein möglicher Mehrelektronenzustand besetzt war, der beim folgenden Anstieg der Energie-Level des Dots über das chemische Potential von *Source* oder *Drain* ansteigt, können Elektronen aus dem Quanten-Dot tunneln. Weil die Eingangsbarriere aber zu diesem Zeitpunkt noch deutlich kleiner als die Ausgangsbarriere ist, werden die Elektronen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in Richtung Eingang zurück tunneln. Somit muss die Eingangsbarriere schnell genug anwachsen um ein Rücktunneln aller Elektronen aus dem Dot zu verhindern, so dass nach dieser Einfangphase die gewünschte Anzahl Elektronen eingeschlossen sind.

### **Auswurfphase**

Durch das weitere negative Aufladen des Eingangs-Gates steigt die Eingangspotentialbarriere stetig, wodurch ab einem gewissen Punkt die steigende Tunnelwahrscheinlichkeit der Dot-Elektronen nach *Drain* größer als die Sinkende nach *Source* ist. In der nun stattfindenden Auswurfphase wird durch ausreichendes Anheben der Eingangsbarriere somit der Anfangs

---

gebildete und durch die dynamische Potentiallandschaft bewegte Quanten-Dot zum Schluss nach *Drain* entleert. Die dabei von *Source* nach *Drain* beförderten Elektronen bilden den von der Pumpe in diesem Pumpzyklus erzeugten Pumpstrom.

### **Rückkehrphase**

Nach der Auswurfphase muss nun die Eingangsbarriere für den nächsten Pumpzyklus wieder auf den in der Einfangphase anfänglichen niedrigen Wert gefahren werden. Ein Rücktunneln der energiereichen gepumpten Elektronen von *Drain* in den nun wieder energetisch absinkenden Quanten-Dot könnte nun stattfinden, wenn nicht durch Thermalisierung diese heißen Elektronen ihre Energie schnell an das Reservoir abgeben würden und dadurch die zugehörigen Tunnelwahrscheinlichkeiten stark unterdrückt wären.

### **2.5.2. Auswirkung der Nicht-Adiabatizität**

Wie gerade im Abschnitt 2.5.1 beschrieben, werden die Elektronen in *Source* und *Drain* durch die bei höheren Energien tunnelnden Elektronen und dem anschließenden Thermalisieren aufgeheizt. Zudem bewirkt die periodisch modulierte Potentiallandschaft, dass Elektronen auch außerhalb des Dots energetisch angehoben werden. Die veränderte Potentiallandschaft sorgt für lokale Verschiebungen des 2DEGs und somit auch für ein Abfließen bzw. Rückfließen von Elektronen. Durch dabei stattfindende Thermalisierungsprozesse steigt beim Besetzen energetisch günstigerer freier Zustände die Temperatur der Elektronen. Da sich die Potentiallandschaft für die Elektronen im *Drain* verhältnismäßig weniger ändert, werden in erster Linie die Elektronen auf der *Source*-Seite auf diese Weise geheizt. Wegen dieser nicht zu vermeidenden Erwärmung der im 2DEG befindlichen Elektronen wird dieses Pumpschema als nicht-adiabatisch bezeichnet. Die Temperatur der Elektronen ist demnach höher als die Temperatur der Probe.

Um Elektronen mit hoher Wahrscheinlichkeit in der Einfangphase im Quanten-Dot zu isolieren, darf die Dauer dieser Phase nicht länger als die mittlere Zeit für das Tunnelereignis des einzufangenden Elektron sein. Sofern die Eingangsbarriere sinusförmig moduliert wird, ergibt sich somit eine Bedingung für die minimal mögliche Pumpfrequenz, d.h. die Wiederholrate des Pumpzyklus. Die Pumpfrequenz darf allerdings auch nicht zu hoch gewählt werden, da sonst das Heraustunneln der Dot-Elektronen in der Auswurfphase unvollständig sein kann. Zudem muss vor der Einfangphase genug Zeit zur Verfügung stehen, damit die nötigen Ausgleichsprozesse stattfinden können und das Elektronengas von der *Source*-Seite den Quanten-Dot auffüllt. Diese Nicht-Adiabatizität ist somit der Grund für die spezielle Frequenzabhängigkeit der auftretenden Pumpfehler. Sie führt zu einem optimalen Arbeitsbereich zwischen den zu niedrigen und den zu hohen Pumpfrequenzen.[11][42] Wird statt der sinusförmigen eine Puls-Modulation der Eingangsbarriere verwendet, kann für die jeweiligen Phasen das Zeitintervall unabhängig voneinander gewählt werden. Da in jedem Fall in der Einfangphase ein schneller Anstieg der Eingangsbarriere erfolgen muss, kann

trotz Verwendung von Pulsen das adiabatische Limit beim Senken der Pumpfrequenz nicht erreicht werden.

### 2.5.3. Pumpreigion

Um mit den Einzel-Elektronen-Pumpen quantisierte Ströme zu erzeugen, ist es notwendig, sie mit geeigneten Pumpparametern zu betreiben. Das sich ergebende Parameterregime für quantisierte Pumpströme ist für jede Einzel-Elektronen-Pumpe individuell, da z.B. Inhomogenitäten im Kanal in der Nähe des Quanten-Dots dessen Energiespektrum deutlich verändern. Trotzdem finden sich allgemein auftretende Charakteristika, die mit Hilfe des in dieser Arbeit im Kapitel 5 vorgestellten theoretischen Modells gedeutet werden können und danach im Umkehrschluss Aussagen über den eigentlichen Pumpvorgang ermöglichen.

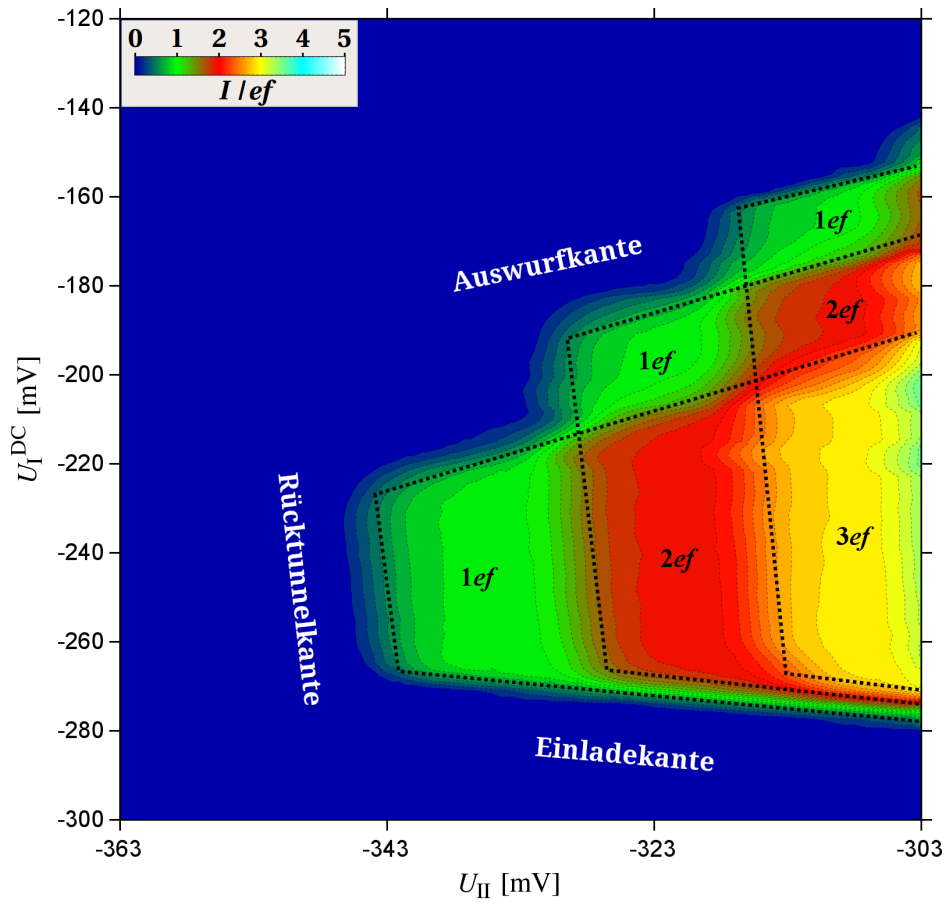
Mit den veränderbaren Barrieren lassen sich, wie bereits beschrieben, Elektronen von *Source* nach *Drain* pumpen. Diese Barrieren werden im Halbleiter durch negative Spannungen an Elektroden geformt. Da die Eingangsbarriere periodisch ansteigen und absinken muss, variiert die Spannung an der *source*seitigen Elektrode periodisch mit der Pumpfrequenz  $f$  und der Amplitude  $U_1^{\text{AC}}$  um die Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$ . Die Spannung an der Elektrode für die Ausgangsbarriere  $U$  stellt einen weiteren Parameter dar. Wird diese Barriere durch die mittlere bzw. zweite der drei Top-Gates erzeugt, entspricht die Spannung  $U$  der Spannung  $U_{\text{II}}$ . Soll stattdessen die Spannung am dritten Top-Gate angegeben werden, wird die Bezeichnung  $U_{\text{III}}$  verwendet. Sofern nicht anders angegeben, ist immer  $U_{\text{III}} = 0$ . Bei konstanter Pumpfrequenz und Amplitude tritt bei Variation von  $U_1^{\text{DC}}$  und  $U$  quantisiertes Pumpen nur innerhalb einer abgegrenzten Parameterregion auf. Die Kanten dieser Pumpreigion entstehen, da der Pumpprozess an mehreren Stellen nur unter geeigneten Bedingungen stattfinden kann. Liegen diese nicht mehr vor, wird kein Pumpstrom mehr erzeugt. In Abbildung 2.7 und 2.13 sind die Abhängigkeit des Pumpstroms von den beiden Elektrodenspannungen exemplarisch farbkodiert aufgetragen. Wie zu sehen, kann ein Pumpstrom nur in den blau verschiedenen Gebieten erzeugt werden. Die eingezeichneten schwarz-gestrichelten Linien verdeutlichen die Kanten der Pumpreigion. Im Folgenden werden diese Kanten einzeln erläutert und die zugrunde liegenden Mechanismen beschrieben.

#### Einladekante

Wie in Abbildung 2.7 zu sehen, beschränkt die Einladekante die Pumpreigion in Richtung negativerer Offset-Spannungen  $U_1^{\text{DC}}$ . Unterhalb dieser Kante gelangen keine Elektronen von *Source* mehr in den Dot. Demnach kann kein Pumpstrom unter diesen Bedingungen erzeugt werden.

Am Anfang eines Pumpzyklus ist die Eingangsbarriere soweit abgesenkt, dass der unbesetzte dynamische QD durch Elektronen aus *Source* geladen werden kann. Das unterste Dot-Niveaus  $\mu_1$  sinkt somit energetisch unterhalb des chemischen Potentials von *Source*  $\mu_S$ . Dieser Zeitpunkt wird mit  $t$  bezeichnet. Indem die Eingangsbarriere weiter sinkt, steigt



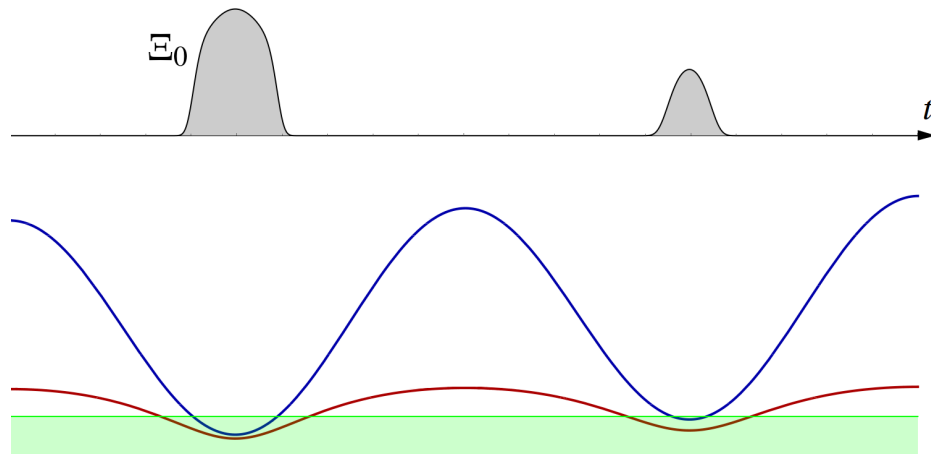


**Abbildung 2.7.:** Pumpregion einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe. Zur besseren Darstellung wurden die Kanten der Pumpregion schwarz, gestrichelt eingezeichnet. Die weißen Beschriftungen beziehen sich auf die zu ihnen parallel verlaufenden Kanten. Die schwarzen Beschriftungen benennen den idealerweise in dieser Region produzierten Pumpstrom und dienen zur Bezeichnung der jeweiligen Plateaus. Da die Ausgangsbarriere durch das zweiten, d.h. mittleren Gate erzeugt wurde, ist die Bezeichnung der Abszisse  $U_{II}$ . Im blauen Gebiet unterhalb der Einladekante ist die Eingangsbarriere während des Pumpzyklus zu hoch, so dass keine Elektronen von *Source* in den Dot gelangen können. Oberhalb der Auswurfkante von den  $1ef$ -Regionen ist hingegen die Ausgangsbarriere für die im Quantenpunkt befindlichen Elektronen durchgängig zu hoch, so dass kein Tunneln nach *Drain* erfolgt. Dies hängt mit der zu hohen Offset-Spannung  $U_I^{DC}$  zusammen, wodurch es der Eingangsbarriere nicht mehr gelingt, den QD ausreichend energetisch anzuheben.

die Rate mit der Elektronen von *Source* in den Dot tunneln. Damit Elektronen am Ende der Einfangphase im QD isoliert werden können, müssen zuvor diese Elektronen im QD vorhanden gewesen sein. Beim Zeitpunkt  $\bar{t}$  ist die Einladephase abgeschlossen, da das unterste Dot-Niveau wieder energetisch oberhalb der chemischen Potentials von *Source* ist. Somit gilt:

$$\mu_1(t) < \mu_S \quad , \quad \underline{t} < t < \bar{t} \quad (2.10)$$

Bis zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  muss wenigstens ein Elektron von *Source* in den QD eingedrungen sein, damit ein Pumpstrom erzeugt werden kann. Wie in Abbildung 2.8 gezeigt, bleibt durch ein Absenken der Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  zu negativeren Werten die Eingangsbarriere länger zu weit oben. Für das Eindringen von Elektronen von *Source* in den Dot bleibt somit weniger Zeit. Demnach ist das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  kürzer.



**Abbildung 2.8.:** Einfluss der Eingangsbarriere auf die Einladephase. Die unteren Kurven stellen die zeitliche Entwicklung des Maximums der Eingangsbarriere (blau) und des niedrigsten Dot-Niveaus  $\mu_1$  (rot) über zwei Pumpzyklen dar.

Im ersten Zyklus taucht die Barriere deutlich unterhalb des chemischen Potentials von *Source*  $\mu_S$  (grüne Linie) ab. Das Dot-Niveau  $\mu_1$  sinkt bereits vorher unterhalb von  $\mu_S$  und bleibt dort über einen längeren Zeitraum. In diesem Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  ist die Wahrscheinlichkeit für ein Beladen des Dot-Niveaus mit einem Elektron aus *Source* deutlich erhöht. In der darüber befindlichen schwarzen Kurve ist die zu diesem Vorgang zugehörige Tunnelrate  $\Xi_0$  aufgetragen. Je größer die grau eingefärbte Fläche unterhalb dieser Kurve ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt  $\bar{t}$  einen leeren QD vorzufinden.

Im zweiten Zyklus wurde die Eingangsbarriere durch eine negativere Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  energetisch nach oben verschoben, so dass zum Beladen mit Elektronen aus *Source* weniger Zeit zur Verfügung steht. Da die Barriere nicht so weit wie zuvor absinkt, bleibt das Dot-Niveau  $\mu_1$  ebenfalls etwas kürzer unterhalb von  $\mu_S$ . Die sich aus diesen Bedingungen ergebene Tunnelrate  $\Xi_0$  steigt im Vergleich zum vorherigen Zyklus jedoch später auf einen deutlich kleineren Wert, um dann früher wieder gegen Null zu fallen. Die sich hierdurch ergebende Fläche ist somit in diesem Beispiel etwa 71% kleiner. Im zweiten Zyklus ist die Wahrscheinlichkeit für einen leeren Dot am Ende der Einladephase somit erheblich größer.

Die zum Zeitpunkt  $t$  vorherrschende Besetzung kann durch die Besetzungswahrscheinlich-

keiten  $\mathcal{P}_n(t)$  beschrieben werden. Der Index  $n$  steht dabei für die Anzahl von Elektronen im QD. Ein anfänglich leerer Dot führt zu folgenden Besetzungswahrscheinlichkeiten:

$$\mathcal{P}_0(\underline{t}) = 1 \quad , \quad \mathcal{P}_k(\underline{t}) = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (2.11)$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_0$  wird mit fortlaufender Zeit in dem Maße absinken, wie höhere Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_k$  ( $k > 0$ ) ansteigen. Ein Rücktunneln eines im unterste Dot-Niveau sitzenden Elektrons nach *Source* ist in diesem Zeitintervall unwahrscheinlich. Wie bereits in Gleichung (2.10) beschrieben, müsste das rücktunnelnde Elektron in diesem Fall die Energiedifferenz der chemischen Potentiale überwinden.

Die Tunnelwahrscheinlichkeit für das Tunneln in den Dot hängt von der Tunnelkopplung zwischen *Source* und dem untersten unbesetzten Dot-Niveau und somit von der Höhe und Dicke der Eingangsbarriere ab. Je breiter und je höher diese Barriere für Elektronen aus *Source* ist, desto geringer unterscheidet sich der Wert der Tunnelwahrscheinlichkeit von Null. Statt dem Wert der Tunnelwahrscheinlichkeit wird im Folgenden die Tunnelrate  $\Xi_{n-1}$  zur Beschreibung für die Häufigkeit von Tunnelereignissen in das  $n$ -te Dot-Niveau verwendet. Sie gibt an, wie viele derartige Tunnelereignisse bei konstanten Umgebungsbedingungen pro Zeiteinheit im Mittel statt finden würden. Das Inverse der Tunnelrate ist somit die mittlere Zeitdauer für ein Tunnelereignis. Die Tunnelrate mit der das unterste Dot-Niveau besetzt wird, ist  $\Xi_0$ . Gemittelt über viele Pumpzyklen ist die zeitliche Änderung von  $\mathcal{P}_0$  durch eine Ratengleichung gegeben:

$$\dot{\mathcal{P}}_0 = -\Xi_0 \mathcal{P}_0 \quad (2.12)$$

Somit kann die sinkende Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_0$  am Ende des Zeitintervalls  $\bar{t} - \underline{t}$  folgendermaßen beschrieben werden:

$$\mathcal{P}_0(\bar{t}) = \exp \left( - \int_{\underline{t}}^{\bar{t}} \Xi_0(\tau) \, d\tau \right) \quad (2.13)$$

Der Wert des Integrals kann nicht ausreichend ansteigen, wenn das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  zu kurz ist und die Tunnelrate  $\Xi_0$  währenddessen niedrig bleibt. In dem Fall bleibt der Dot in den meisten Pumpzyklen in der Einladephase leer, und ein kontinuierlicher Pumpstrom tritt nicht auf. Sinkt jedoch  $\mathcal{P}_0$  bis zum Ende der Einladephase  $\bar{t}$  auf Null ab, ist der Dot am Ende der Einladephase mit Elektronen geladen. Um Aussagen zur genauen Anzahl bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung machen zu können, müssen auch die Tunnelraten  $\Xi_k$  für höhere Besetzungszahlen  $k$  beachtet werden. Die Einladekanten für höhere Besetzungszahlen liegen jedoch dicht an der ersten Einladekante, so dass in vielen Fällen die bisherige Betrachtung zum Auffinden der Einladekanten genügt.

Wie bereits beschrieben sorgt ein Absinken der Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  dafür, dass die Tunnelrate  $\Xi_0$  und das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  abnehmen. Die bisher konstant gehaltene Ausgangsbarriere kann durch eine Änderung der Spannung an der zugehörigen Elektrode ebenfalls Auswirkungen auf die Einladephase haben:

Zum einen bewirkt eine schrumpfende Ausgangsbarriere eine Vergrößerung und energetische

Absenkung des Dots, wodurch hauptsächlich das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  deutlich ansteigt. Zudem bewirkt die Änderung der Spannung an einer Elektrode auch eine Änderung an den nicht direkt zugeordneten Barrieren. Beim Absenken der Ausgangsbarriere sinkt in geringem Maße auch die Eingangsbarriere, wodurch die Elektronen von *Source* leichter in den QD tunneln können. Die Tunnelrate  $\Xi_0$  wird demnach im zeitlichen Mittel mit absinkender Ausgangsbarriere ansteigen.

Insgesamt bewirkt eine Absenkung der Ausgangsbarriere nach Gleichung (2.13) einen schnelleren Zerfall von  $\mathcal{P}_0$ . Umgekehrt steigt die Wahrscheinlichkeit am Ende der Einladephase kein Elektron im Dot zu finden mit ansteigend negativer Spannung am Ausgangs-Gate.

Insgesamt ergibt sich aus den für den Pumpstrom die in Abbildung 2.7 gezeigte Abhängigkeit von den Spannungen  $U_I^{\text{DC}}$  und  $U_{\text{II}}$ . Die parallel zur Beschriftung „**Einladekante**“ mit schwarzen gestrichelten Linien hervorgehobenen Übergänge liegen dicht beieinander, so dass keine ausgeprägten Zwischenplateaus auftreten. Dieses Verhalten ist durch die in dieser Phase nur geringen Energieabstände der Dot-Niveaus begründet.

Die anderen Parameter wie Pumpfrequenz  $f$  und Amplitude  $U_I^{\text{AC}}$  bewirken in erster Linie nur Verschiebungen dieser Kante. Bei sinkender Pumpfrequenz  $f$  steigt das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  antiproportional, so dass die Kante zu negativeren Spannungswerten wandert. Durch eine größere Amplitude der Spannung am Eingangs-Gate  $U_I^{\text{AC}}$  wird in der Einladephase die Eingangsbarriere tiefer abgesenkt. Ist die Barriere im zeitlichen Mittel höher als das chemische Potential von *Source*, so sorgt die größere Amplitude  $U_I^{\text{AC}}$  bei einer sinusförmigen Modulation der Eingangsbarriere für einen etwas früheren Beginn und ein entsprechend etwas späteres Ende der Einladephase. Das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  ist somit größer. Sollte die Barriere im Mittel unterhalb des chemischen Potentials von *Source* liegen, führt dies zu einer Reduzierung des Zeitintervalls  $\bar{t} - \underline{t}$ . Der gerade beschriebene Effekt wird jedoch im Allgemeinen durch den im Folgenden beschriebenen Sachverhalt dominiert:

Mit ansteigender Amplitude  $U_I^{\text{AC}}$  steigt in jedem Fall die Geschwindigkeit, mit der sich die Eingangsbarriere absenkt und wieder anhebt. Auch wenn sich das Zeitintervall  $\bar{t} - \underline{t}$  hierdurch verkürzen sollte, so wird gleichzeitig der zeitliche Verlauf von der Tunnelrate  $\Xi_0$  derart verändert, dass der Wert des Integrals von  $\Xi_0$  über das Zeitintervall trotzdem zunimmt. Folglich sinkt nach Gleichung (2.13) die Wahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_0(\bar{t})$ . Durch das Anheben der Amplitude  $U_I^{\text{AC}}$  verschiebt sich somit die Einladekante zu negativeren Spannungswerten. Mit ansteigender Amplitude erhöht sich jedoch die notwendige HF-Leistung, so dass ein höherer Wärmeeintrag entsteht. Hierdurch treten beim Pumpprozess vermehrt thermisch bedingte Pumpfehler auf, wodurch letztlich die Quantisierung des Pumpstroms verschwindet.

Genauere Untersuchungen zu der Geschwindigkeit, mit der Elektronen aus *Source* den Dot befüllen können, wurden mit einer gepulsten Eingangsbarriere ermittelt.[43]<sup>13</sup> Die dabei gefundene Zeitabhängigkeit der Anzahl letztlich in den Dot gelangter Elektronen entspricht dem im Kapitel 5 entwickelten Ratengleichungsmodell.[45]

---

<sup>13</sup>Später konnten in vergleichbare Messungen sogar die Auswirkungen der Kopplung zwischen den Elektroden auf den Pumpstrom nachgewiesen werden.[44]

---

## Rücktunnelkante

Nachdem in der Einladephase Elektronen in den Dot gelangt sind, müssen in der anschließenden Einfangphase ein Teil dieser Elektronen im QD isoliert werden. Da die Eingangsbarriere zwischen Dot und *Source* in dieser Phase des Pumpzyklus ansteigt, baut sich diese trennende Barriere in der Einfangphase auf. Jedoch werden durch den Anstieg der Eingangsbarriere die Dot-Niveaus energetisch angehoben, so dass Elektronen aus dem QD zurück nach *Source* tunneln. Wie im Abschnitt 2.5.1 beschrieben setzt dieses Rücktunneln ein, sobald zum Zeitpunkt  $t_{n,0}$  ein besetztes Dot-Niveau  $\mu_n$  (in diesem Fall mit  $n$  Elektronen) energetisch oberhalb des chemischen Potentials von *Source*  $\mu_S$  liegt.

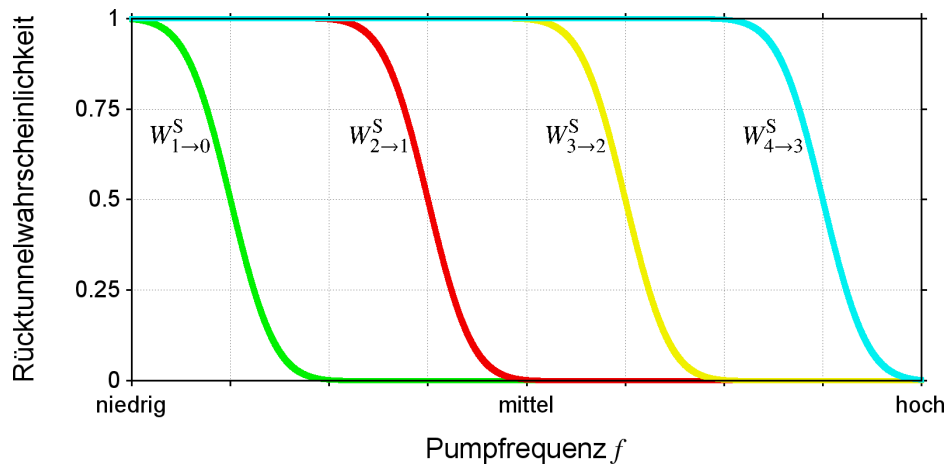
$$\mu_n(t) > \mu_S \quad , \quad t \geq t_{n,0} \quad (2.14)$$

Das Ende der Einladephase  $\bar{t}$  überschneidet sich etwas mit der Einfangphase, da zum Zeitpunkt  $\bar{t} \equiv t_0$  alle Dot-Niveaus energetisch oberhalb des chemischen Potentials von *Source*  $\mu_S$  liegen. Es gilt  $t_0 \geq t_{n,0}$ , wobei nur für  $n = 1$  beide Zeitpunkte identisch sind.

Das Rücktunneln von Elektronen aus dem  $n$ -ten Dot-Niveau startet zum Zeitpunkt  $t_{n,0}$  und endet, wenn die Eingangsbarriere die Elektronen im QD von *Source* isoliert hat. Während in der Einfangphase die Eingangsbarriere ansteigt, können die noch im Dot befindlichen Elektronen zurück nach *Source* tunneln. Die Rücktunnelraten  $\Gamma$  entsprechen der mittleren Anzahl von Rücktunnelereignissen pro Zeiteinheit, wenn sich durch das Tunnelereignis die Umgebungsbedingungen nicht ändern würden.  $\Gamma_n$  steht dabei für den Vorgang, bei dem aus dem  $n$ -ten Dot-Niveau ein Elektron zurück nach *Source* tunnelt. Da in der Einfangphase die Eingangsbarriere kontinuierlich ansteigt, sinken alle Rücktunnelraten in entsprechendem Maße mit fortlaufender Zeit ab. Im Abschnitt 5.1.2 werden diese Rücktunnelprozesse genauer durch ein Modell beschrieben, zum Allgemeinen Verständnis reichen jedoch folgende Überlegungen:

Wenn der Dot zu Beginn der Einfangphase zum Zeitpunkt  $t_{n,0}$  mit  $n$  Elektronen geladen ist und die Tunnelrate  $\Gamma_n(t_{n,0})$  deutlich größer als die Pumpfrequenz  $f$  ist, wird der zugehörige Tunnelprozess mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit in der Einfangphase stattfinden. Somit sinkt die Anzahl der Elektronen im Dot auf  $n - 1$ . Die Tunnelwahrscheinlichkeiten für diesen Prozess wird im Folgenden mit  $W_{n \rightarrow n-1}^S$  dargestellt.

Abbildung 2.9 zeigt schematisch die Tunnelwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^S$  in Abhängigkeit der Pumpfrequenz  $f$ . Bei dem dort erläuterten Beispiel können bei der Pumpfrequenz  $f = 1$  GHz zwar durchschnittlich zwei Elektronen im Dot eingefangen werden, jedoch streut die Besetzungszahl zwischen 1 und 3. Dies hängt mit den Werten für  $\underline{n}$  und  $\bar{n}$  zusammen. Mit  $\bar{n}$  wird das kleinste  $n$  bezeichnet, für das der Rücktunnelprozess während der Einfangphase noch mit einer Wahrscheinlichkeit von nahezu 1 stattfindet. Entsprechend ist  $\underline{n}$  das größte  $n$  mit einer Rücktunnelwahrscheinlichkeit von nahezu 0. Erst für diesen Rücktunnelprozess ist das entsprechende Tunnelereignis während des Ansteigen der Eingangsbarriere nicht mehr zu erwarten. Allgemein können die Rücktunnelwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^S$  folgendermaßen

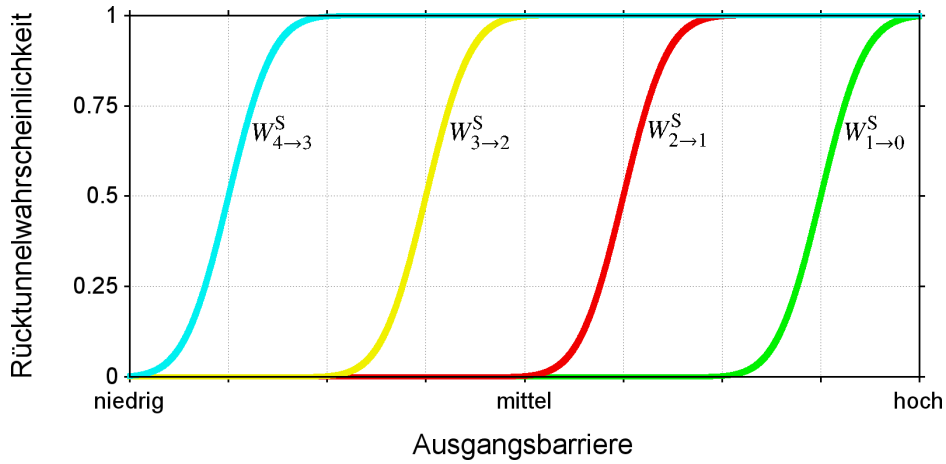


**Abbildung 2.9.:** Abhängigkeit der Rücktunnelwahrscheinlichkeiten  $W_{1 \rightarrow 0}^S$  (grün) bis  $W_{4 \rightarrow 3}^S$  (cyan) von der Pumpfrequenz  $f$ . Die gezeigten Kurven entsprechen keinen Messergebnissen sondern dienen nur als schematisches Beispiel. Da von einem linearen Anstieg der Eingangsbarriere ausgegangen wurde, ist die Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere proportional zu  $f$ . Je höher die Anstiegsgeschwindigkeit wird, desto kürzer ist die Einfangphase. Rücktunnelereignisse treten demnach mit ansteigender Pumpfrequenz  $f$  bei Besetzungen mit einer geringen Anzahl von Elektronen nur noch sporadisch auf. Die  $W_{n \rightarrow n-1}^S$  für diese Ereignisse sinkt somit gegen Null. Wird zum Beispiel eine mittlere Pumpfrequenz gewählt, sind  $W_{1 \rightarrow 0}^S \approx W_{2 \rightarrow 1}^S \approx 0$  bzw.  $W_{3 \rightarrow 2}^S \approx W_{4 \rightarrow 3}^S \approx 1$ . Demnach ergeben sich für  $\underline{n} = 2$  bzw.  $\bar{n} = 3$  und die Anzahl an eingefangenen Elektronen liegt für nahezu jeden Pumpzyklus bei rund 2. Wird die Pumpfrequenz hingegen eine Markierung kleiner gewählt, ist  $W_{2 \rightarrow 1}^S \approx \frac{1}{2}$  und  $\underline{n}$  hat nur noch den Wert 1. Da unter diesen geänderten Bedingungen  $\underline{n} + 1 \neq \bar{n}$  ist, tritt kein quantisiertes Pumpen mehr auf. Im Durchschnitt werden jetzt nur noch 1.5 Elektronen in der Einfangphase isoliert.

angeordnet werden:

$$0 < \dots < W_{\underline{n}-1 \rightarrow \underline{n}-2}^S < W_{\underline{n} \rightarrow \underline{n}-1}^S \ll \frac{1}{2} \ll W_{\bar{n} \rightarrow \bar{n}-1}^S < W_{\bar{n}+1 \rightarrow \bar{n}}^S < \dots < 1 \quad (2.15)$$

Wenn  $\underline{n} + 1 \neq \bar{n}$ , dann liegt zwischen  $W_{\underline{n} \rightarrow \underline{n}-1}^S$  und  $W_{\bar{n} \rightarrow \bar{n}-1}^S$  mindestens noch eine Rücktunnelwahrscheinlichkeit, die nicht einem der beiden Extremwerten 0 und 1 in guter Näherung entspricht. Derartige Tunnelwahrscheinlichkeiten führen zu nicht-quantisierten Pumpströmen, da nur in manchen Pumpzyklen diese Rücktunnelereignisse stattfinden und somit die Anzahl isolierter Elektronen am Ende der Einfangphase nicht immer identisch ist.[11]



**Abbildung 2.10.:** Abhängigkeit der Rücktunnelwahrscheinlichkeiten  $W_{1 \rightarrow 0}^S$  (grün) bis  $W_{4 \rightarrow 3}^S$  (cyan) von der Ausgangsbarriere. Die gezeigten Kurven entsprechen keinen Messergebnissen sondern dienen nur als schematisches Beispiel. Je höher bzw. auch breiter die Ausgangsbarriere wird, desto weniger Elektronen können im dynamischen QD eingefangen werden. Da die Ausgangsbarriere mit zunehmend negativer Spannung am zugehörigen Top-Gate wächst, sinkt die Anzahl der im Dot eingefangenen Elektronen in bestimmten Spannungsintervallen um eins. Immer wenn in der gezeigten Grafik die Kurve einer Rücktunnelwahrscheinlichkeit den Wechsel von 0 zu 1 durchführt und dabei den Wert  $1 - \exp(-1) \approx 0.632$  erreicht, entspricht die zu diesem Zeitpunkt angelegte Spannung am Top-Gate der Ausgangsbarriere der Übergangsspannung  $U_n$ . Die Wahl des Wertes  $1 - \exp(-1)$  ergibt sich aus dem im Kapitel 5 hergeleiteten theoretischen Modell. In der Umgebung der Übergangsspannung  $U_n$  findet der Wechsel der Besetzungszahl des Dots statt. Der von der Anzahl der eingefangenen Elektronen abhängige Pumpstrom ändert sich somit bei den gewählten Betriebsparametern an den resultierenden Übergangsspannungen  $U_n$ .

Nach Gleichung (2.15) werden am Ende der Einfangphase in nahezu allen Fällen höchstens  $\bar{n} - 1$  und mindestens  $\underline{n}$  Elektronen eingefangen. Werden die Rücktunnelraten  $\Gamma$  erhöht, steigen die Rücktunnelwahrscheinlichkeiten. Somit verschieben sich bei bestimmten Werten für  $\Gamma$  dann auch  $\underline{n}$  und  $\bar{n}$  zu niedrigeren Werten. Indem die Höhe der Ausgangsbarriere durch eine stärker negative Ausgangs-Gate-Spannung vergrößert wird, bildet sich der dynamische QD früher und das anfängliche Rücktunneln findet bei einer geringeren Eingangsbarriere statt. Zudem ändert sich der zeitliche Verlauf des dynamischen Dots, da dieser mehr in Richtung

*Source* geschoben wird. Diese beiden Einflüsse sorgen dafür, dass die Rücktunnelraten  $\Gamma$  hauptsächlich von der Spannung des Ausgangs-Gates abhängig sind. Diese gerade beschriebene Abhängigkeit der Rücktunnelwahrscheinlichkeit  $W_{n \rightarrow n-1}^S$  von der durch die Spannung am Ausgangs-Gate erzeugten Ausgangsbarriere wird in Abbildung 2.10 gezeigt. Mit einer geeigneten Gate-Spannung kann die Ausgangsbarriere so gewählt werden, dass  $W_{1 \rightarrow 0}^S \approx 0$  und  $W_{2 \rightarrow 1}^S \approx 1$  entspricht. Somit wird bei jedem Pumpzyklus in dieser Phase genau ein Elektron eingefangen, das in der Auswurfphase nach *Drain* befördert werden kann. Wie für quantisiertes Pumpen gefordert, wurde in diesem Beispiel dann  $\bar{n} + 1 = \bar{n}$  mit  $\bar{n} = 1$  erfüllt.

Wird die Spannung am Ausgangs-Gate zu stärker negativen Werten gefahren, springt  $\bar{n}$  irgendwann bei der Übergangsspannung  $U_1$  auf den Wert 0. Bei einer derart hohen Ausgangsbarriere ist die Rücktunnelrate  $\Gamma_1$  ausreichend angestiegen, dass die Rücktunnelwahrscheinlichkeit  $W_{1 \rightarrow 0}^S$  nicht mehr in guter Näherung Null ist. Demnach tunneln ab dieser Übergangsspannung  $U_1$  häufiger alle anfänglich im Dot befindlichen Elektronen während der Rücktunnelphase aus dem QD nach *Source* zurück.

Steigt dagegen die Spannung und wird somit weniger negativ, springt  $\bar{n}$  bei der Übergangsspannung  $U_2$  auf den Wert 2. Ein weiteres Absenken der Ausgangsbarriere kann bei der Übergangsspannung  $U_3$  dann für eine erneute Zunahme der Anzahl von im Dot eingefangenen Elektronen auf  $\bar{n} = 3$  sorgen. Dieses Absenken der Ausgangsbarriere kann jedoch nicht beliebig erfolgen, da diese Barriere in jedem Fall *Source* und *Drain* während der kompletten Einladephase noch ausreichend von einander trennen muss.

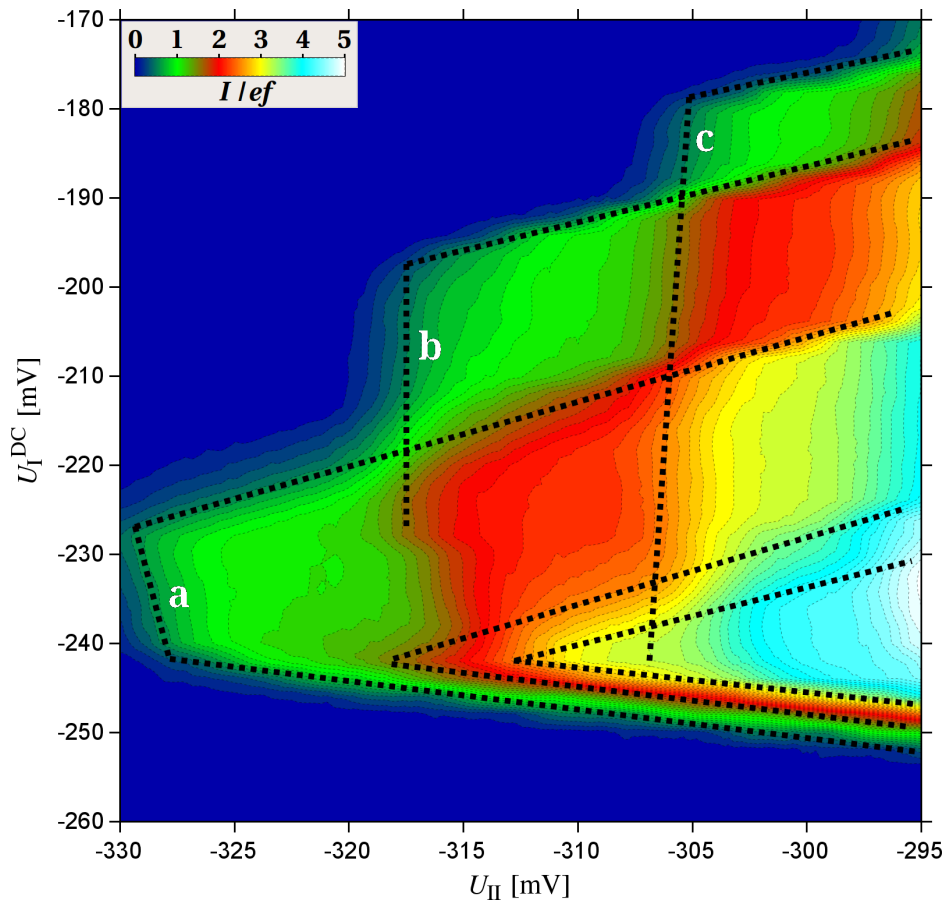
Diese Übergangsspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  sind in der Abbildung 2.7 durch die parallel zur Beschriftung „**Rücktunnelkante**“ verlaufenden gestrichelten schwarzen Linien zu sehen. Diese Kanten verlaufen nicht exakt parallel zur senkrechten Achse, da die Übergangsspannungen in geringerem Maße auch von der Offset-Spannung am Eingangsgate  $U_1^{\text{DC}}$  abhängen. Wenn die Eingangsbarriere sinusförmig moduliert wird, verläuft der Anstieg der Barriere nicht linear. Eine Änderung von  $U_1^{\text{DC}}$  kann somit die Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere ändern und dadurch die Übergangsspannungen verschieben. Dies ist in Abbildung 2.11 zu beobachten.

Wenn die Rücktunnelkanten bei zunehmend negativer Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  in Richtung positiverer Spannung am Ausgangs-Gate wandert (Kante **a**), bewirkt die negative Zunahme von  $U_1^{\text{DC}}$  eine Abnahme der Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere zu Beginn der Einfangphase. Somit sinken die Rücktunnelraten  $\Gamma$  langsamer auf niedrige Werte ab, wodurch die Rücktunnelwahrscheinlichkeiten ansteigen. Um dies zu kompensieren muss die Ausgangsbarriere abgesenkt werden.

Wenn hingegen die Rücktunnelkanten bei zunehmend negativer Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  in Richtung negativerer Spannung am Ausgangs-Gate wandert (Kante **c**), bewirkt die negative Zunahme von  $U_1^{\text{DC}}$  eine Zunahme der Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere zu Beginn der Einfangphase. Die Rücktunnelraten  $\Gamma$  fallen dann schneller auf niedrige Werte, so dass die Rücktunnelwahrscheinlichkeiten kleiner werden. Um diese wieder zu auf den vorherigen Wert anzuheben, muss die Ausgangsbarriere erhöht werden.

Wenn die Rücktunnelkanten parallel zur senkrechten Achse verläuft (Kante **b**), ändert sich die





**Abbildung 2.11.:** Pumpregion einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe mit unüblichen Auffälligkeiten. Zur besseren Darstellung wurden die Kanten der Pumpregion schwarz, gestrichelt eingezeichnet. Die weißen Beschriftungen beziehen sich auf die zu ihnen parallel verlaufenden Rücktunnelkanten.

Grundsätzlich ähnelt diese Pumpregion der in Abbildung 2.7 gezeigten. In diesem Fall unterscheiden sich jedoch die Ausrichtungen der Rücktunnelkanten **a** bis **c**: Während **a** von oben-links nach unten-rechts verläuft, ist bei **c** genau die gegenteilige Richtung zu beobachten. Die Rücktunnelkante **b** hingegen verläuft nahezu parallel zur senkrechten Achse. Der Grund für diese Beobachtung kann mit der an den jeweiligen Orten unterschiedliche Spannungsabhängigkeit der Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere zu Beginn der Einfangphase erklärt werden.

Für Spannungen  $U_{II} > -317$  mV und Offset-Spannungen  $U_I^{DC}$  bei ca. -240 mV sind das Aufeinandertreffen der Einlade- und Auswurfkanten zu beobachten. Dies spricht dafür, dass die HF-Leistung zu klein gewählt wurde. Mit zunehmender Leistung würden die Kanten auseinander fahren und diese unüblichen Kantenformationen verschwinden.

Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere zu Beginn der Einfangphase trotz einer Verschiebung der Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  nicht. Dies spricht für einen linearen Anstieg der Eingangsbarriere zu Beginn der Rücktunnelphase.

Wie zuvor beschrieben hängt die Ausrichtung der Rücktunnelkante von der Auswirkung einer Änderung der Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  auf die Anstiegsgeschwindigkeit der Barriere ab. Wird statt einer sinusförmigen Modulation ein Sägezahn oder auch eine Rechteckspannung verwendet, ist der Anstieg linear und somit unabhängig von  $U_1^{\text{DC}}$ . Die Rücktunnelkante verläuft dann parallel zur senkrechten Achse.[17]

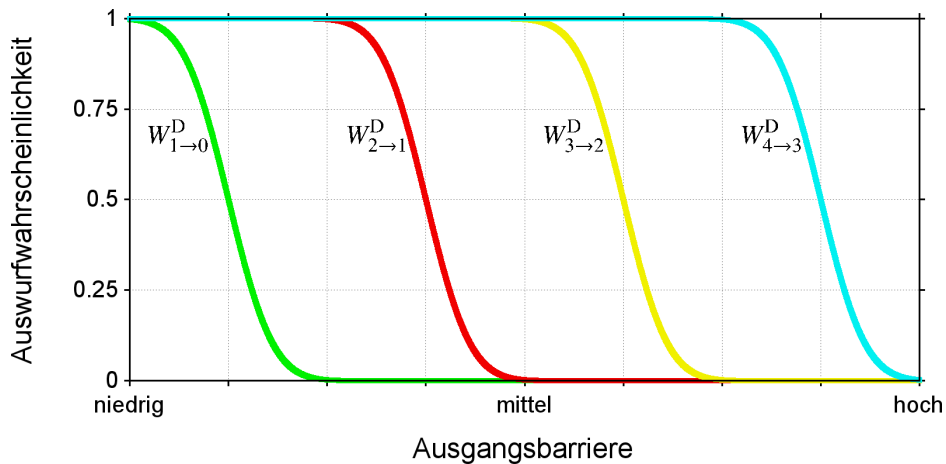
Wenn die Amplitude  $U_1^{\text{AC}}$  ausreichend groß ist, ändert sich die Ausrichtung der Rücktunnelkante bei variierender Amplitude nicht. Bei zu geringem  $U_1^{\text{AC}}$  ist der Abstand zwischen Einlade- und Auswurfkante nicht ausreichend, so dass diese beiden aufeinander stoßen und somit die eigentliche Rücktunnelkante nicht beobachtet werden kann. Dies ist in Abbildung 2.11 gezeigt. Mit zunehmender Amplitude  $U_1^{\text{AC}}$  vergrößert sich der Abstand zwischen der Einlade- und der Auswurfkante, wodurch die Rücktunnelkante nur länger wird.[13]

Eine Erhöhung der Pumpfrequenz  $f$  sorgt für einen schnelleren Anstieg der Eingangsbarriere, wodurch die Rücktunnelwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^{\text{S}}$  sinken. Dies wird auch in Abbildung 2.9 gezeigt. Die Übergangsspannungen  $U_n$  sollten demnach zu negativeren Werten verschieben.[42][46] Häufig bewirkt eine Änderung der Pumpfrequenz  $f$  gleichzeitig auch eine Änderung der Amplitude  $U_1^{\text{AC}}$ , da mit zunehmendem  $f$  die Dämpfung in der Zuleitung zwischen Frequenzgenerator und Eingangs-Gate tendenziell zunimmt. Eine Änderung der Pumpfrequenz kann dazu führen, dass die am Eingangs-Gate anliegende Amplitude  $U_1^{\text{AC}}$  deutlich absinkt und Einlade- und Auswurfkante aufeinander stoßen. Ohne Nachregelung der Amplitude am Frequenzgenerator wird bei ansteigender Pumpfrequenz  $f$  tendenziell eine Verschiebung der Übergangsspannungen zu positiveren Werten beobachtet.[13]

### Auswurfkante

Eine Auswurfkante der Pumpregion entsteht, wenn die in der Einfangphase im QD isolierten Elektronen nicht mehr alle nach *Drain* befördert werden können. Wie in der Abbildung 2.7 zu sehen, verlaufen parallel zur Beschriftung „**Auswurfkante**“ schwarz gestrichelte Linien, die die Auswurfkanten anzeigen. Wird durch Anheben der an der senkrechten Achse aufgetragenen Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  eine Auswurfkante überschritten, führt dies zu einer Absenkung des Pumpstroms um ein Elektron pro Pumpzyklus. Letztlich verschwindet der Pumpstrom, obwohl in der Einladephase ausreichend Elektronen in den QD gelangt und in der Einfangphase auch isoliert worden sind.

Genau wie im vorigen Abschnitt 2.5.3 hängt dies von den Tunnelwahrscheinlichkeiten ab. Diesmal sollen jedoch die Elektronen nach *Drain* ausgeworfen werden. Die Auswurfwahrscheinlichkeit für ein Elektron aus einem mit  $n$  Elektronen besetzten Dot, sei  $W_{n \rightarrow n-1}^{\text{D}}$ . Auch hier können wieder die Besetzungszahlen  $\bar{n}$  und  $\underline{n}$  gefunden werden:  $\bar{n}$  ist das kleinste  $n$ , für das der Auswurfprozess während der Auswurfphase noch mit einer



**Abbildung 2.12.:** Abhängigkeit der Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{1 \rightarrow 0}^D$  (grün) bis  $W_{4 \rightarrow 3}^D$  (cyan) von der Ausgangsbarriere. Die gezeigten Kurven entsprechen keinen Messergebnissen sondern dienen nur als schematisches Beispiel. Wenn die Ausgangsbarriere zu hoch ist, sinken die Auswurfwahrscheinlichkeiten gegen Null. Je niedriger die Barriere ist, desto mehr Elektronen können mit hoher Wahrscheinlichkeit nach *Drain* gelangen.

In diesem Beispiel befinden sich zu Anfang der Auswurfphase vier Elektronen im Dot. Bei einer mittelhohen Ausgangsbarriere sind die Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{2 \rightarrow 1}^D \approx 0$  bzw.  $W_{3 \rightarrow 2}^D \approx 1$ . Demnach ergeben sich für  $\bar{n} = 2$  bzw.  $\bar{n} = 3$ . Die Anzahl an ausgeworfenen Elektronen liegt bei nahezu allen Pumpzyklen bei 2.

Wird die Ausgangsbarriere hingegen eine Markierung kleiner gewählt, ist  $W_{2 \rightarrow 1}^S \approx \frac{1}{2}$  und  $\bar{n}$  hat nur noch den Wert 1. Da unter diesen geänderten Bedingungen  $\bar{n} + 1 \neq \bar{n}$  ist, tritt kein quantisiertes Pumpen mehr auf. Im Durchschnitt werden jetzt 2.5 Elektronen ausgeworfen.

Um in nahezu jedem Pumpzyklus alle vier Elektronen nach *Drain* zu befördern, muss die Ausgangsbarriere so niedrig eingestellt werden, dass sogar  $W_{1 \rightarrow 0}^S \approx 1$  erfüllt ist. Da jedoch die Ausgangsbarriere wegen ihrer Funktion als sperrende Barriere zwischen *Source* und *Drain* nicht beliebig abgesenkt werden kann, ist es mitunter unmöglich einen mehrfach gefüllten QD komplett zu entleeren.

Wahrscheinlichkeit von nahezu 1 stattfindet.  $\underline{n}$  ist das größte  $n$  mit einer Auswurfwahrscheinlichkeit von nahezu 0.

Entsprechend Gleichung (2.15) folgt daraus:

$$0 < \dots < W_{\underline{n}-1 \rightarrow \underline{n}-2}^D < W_{\underline{n} \rightarrow \underline{n}-1}^D \ll \frac{1}{2} \ll W_{\bar{n} \rightarrow \bar{n}-1}^D < W_{\bar{n}+1 \rightarrow \bar{n}}^D < \dots < 1 \quad (2.16)$$

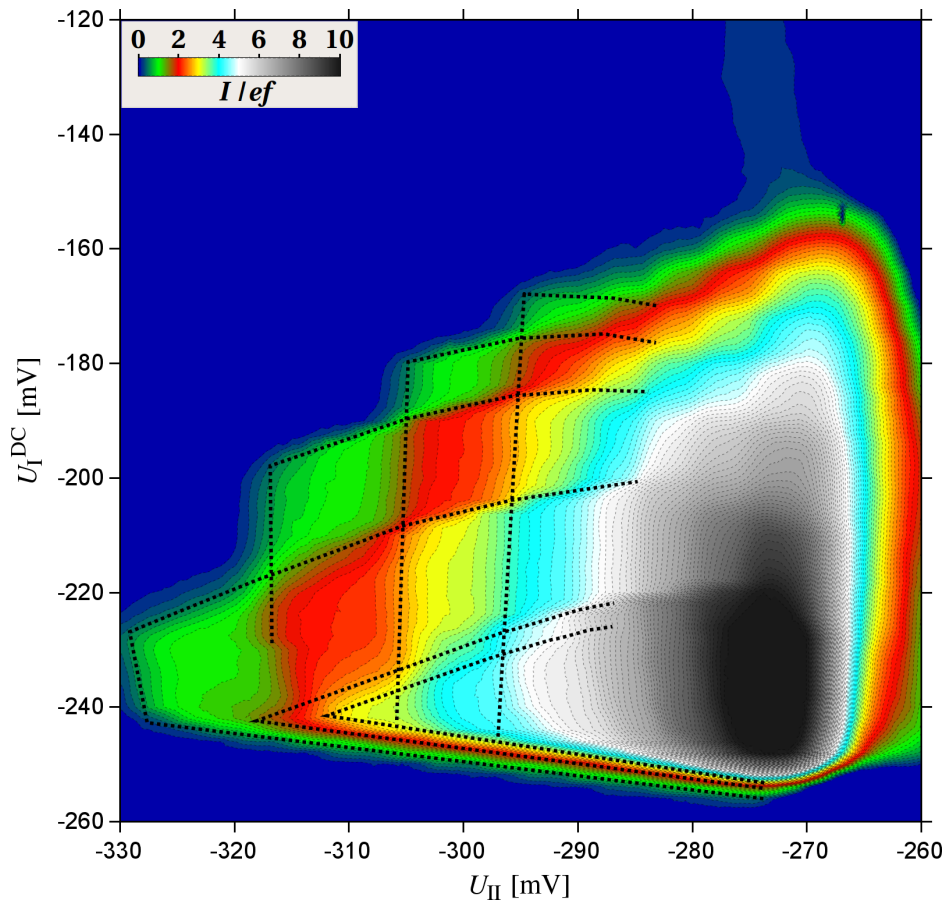
Wenn  $\underline{n}$  nicht 0 ist, wird der QD während der Auswurfphase demnach nicht komplett nach *Drain* entleert.

In Abbildung 2.12 sind Auswurfwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit der Ausgangsbarriere schematisch aufgetragen. Entsprechend wie in Abbildung 2.9 ändert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung und somit die Anzahl der im Dot verbleibenden Elektronen, wenn der Parameter der horizontalen Achse anders gewählt wird. Damit jedoch ein Pumpstrom erzeugt werden kann, müssen Elektronen nach *Drain* ausgeworfen werden. Im Gegensatz zur Einfangphase ist die zu überwindende Barriere am Anfang der Auswurfphase undurchlässig und wird erst durch das Anheben der Dot-Niveaus immer durchlässiger. Wenn die Eingangsbarriere ihren Höchstwert erreicht, ist die Ausgangsbarriere für Elektronen im Dot am ehesten zu überwinden. Danach sinken die Dot-Niveaus wieder ab und die Ausgangsbarriere wird für Elektronen im QD zunehmend undurchlässiger.

Die Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^D$  sind somit von der maximalen Höhe der Eingangsbarriere und von der Höhe der Ausgangsbarriere abhängig. Wird der Maximalwert der Eingangsbarriere erhöht, indem entweder  $U_I^{DC}$  oder  $U_I^{AC}$  stärker negativ eingestellt wird, steigen die Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^D$ . Um dies zu kompensieren müsste die Ausgangsbarriere erhöht werden:

Die Höhe der Ausgangsbarriere lässt sich durch die Spannung am zugehörigen Top-Gate steuern. Wenn das mittlere bzw. zweite Gate die Ausgangsbarriere formt, wird diese Spannung mit  $U_{II}$  bezeichnet. Je negativer  $U_{II}$  gewählt wird, desto niedriger sind demnach die Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^D$ . Entlang einer Auswurfkante wird eine Erhöhung der Eingangsbarriere durch eine Erhöhung der Auswurfbarriere kompensiert.

Die Erhöhung der Pumpfrequenz  $f$  verkürzt die Dauer der Auswurfphase und führt somit zu einem Absinken aller Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^D$ . Mit zunehmender Pumpfrequenz verschiebt sich die Auswurfkanten deshalb zu negativeren Werten für  $U_I^{DC}$  bzw.  $U_{II}$ . [42] Genau wie bei der Betrachtung der Rücktunnelkante im Abschnitt 2.5.3 muss auch hier die von der Pumpfrequenz  $f$  abhängige Dämpfung der Amplitude  $U_I^{AC}$  berücksichtigt werden. Sonst könnte für bestimmte Pumpfrequenzen ohne Nachregelung der Amplitude eine Erhöhung der Pumpfrequenz  $f$  im Endeffekt stattdessen zu einem Anstieg aller Auswurfwahrscheinlichkeiten  $W_{n \rightarrow n-1}^D$  führen. Ohne Nachregelung der Amplitude sind Änderungen an der Pumpfrequenz  $f$  nicht einer eindeutigen Verschiebung der Auswurfkante zuzuordnen, wie in [47, Abbildung 4.13] exemplarisch zu sehen ist.



**Abbildung 2.13.:** Pumpregion einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe. In der zuvor gezeigten Abbildung 2.11 wurde bisher nur ein vergrößerter Ausschnitt der Pumpregion dargestellt. In dieser Grafik ist die komplette Pumpregion zu sehen. Zur besseren Darstellung wurden die deutlich auftretenden Kanten der Pumpregion schwarz, gestrichelt eingezeichnet. Da die Ausgangsbarriere durch das zweiten, d.h. mittleren Gate erzeugt wurde, ist die Bezeichnung der Abszisse  $U_{II}$ . In dieser Messung ist die Spannung  $U_{SD}$  zwischen *Source* und *Drain* nahezu Null. Es treten somit nur Pumpströme bzw. bei weniger negativen Offset-Spannung  $U_I^{DC} > -150$  mV auch Gleichrichtungsströme auf. Ab einer Spannung  $U_{II} > -270$  mV sinkt der Pumpstrom wieder gegen Null, da aufgrund der geringen Ausgangsbarriere der Dot in der Einladephase aus beiden Reservoirs beladen und nach *Drain* gepumpte Elektronen zum Teil als Ausgleichsstrom wieder zurück nach *Source* fließen. Lokale Ungleichgewichte der Ladungsverteilung werden somit an der Pumpe beständig ausgeglichen, so dass an den Messgeräten kein gerichteter Strom mehr ankommt.

In Abbildung 4.5 wird in Kapitel 4 anhand dieser Messung die Methode zur Bestimmung der Pumpleistung erläutert.

### Begrenzung der Pumpregion bei niedriger Ausgangsbarriere

Wie Abbildung 2.13 zeigt, ist die Pumpregion in allen Richtungen begrenzt. Zusätzlich zu den bereits beschriebenen Kanten ist hier bei verschwindender *Source-Drain*-Spannung  $U_{SD}$  auch die Begrenzung bei zu hohen Spannung für  $U_{II}$  zu sehen. Dieses rapide Absinken des Pumpstroms ist durch eine zu niedrige Ausgangsbarriere begründet. Sobald die Ausgangsbarriere während der Einladephase nicht mehr in der Lage ist *Source* und *Drain* voneinander zu trennen, treten bei  $U_{SD} = 0$  Ausgleichsströme durch die Ausgangsbarriere auf. Somit können eventuell gepumpte Elektronen durch zurück strömende Elektronen ausgeglichen werden und der gemessene Pumpstrom verschwindet. Für Offset-Spannungen  $U_I^{DC}$  oberhalb von etwa -150 mV treten nur noch Gleichrichtungseffekte auf. Da die *Source*-Elektronen durch die eingekoppelte HF-Leistung und die damit einhergehende Erwärmung etwas höhere Energien erreichen können, treten Thermodiffusionsströme auf. Diese können im Vergleich zu den Elektronen auf der *Drain*-Seite mit höherer Tunnelwahrscheinlichkeit die trennende Ausgangsbarriere überwinden. So entsteht ein gerichteter Strom durch die Ausgangsbarriere, die hierzu nicht zu hoch sein darf. Eine zu niedrig Ausgangsbarriere bewirkt andererseits eine Zunahme der Ausgleichsströme, wodurch der am Messgerät erfassbare Strom wieder verschwindet.

### Auswirkung eines senkrechten Magnetfelds auf die Pumpregion

Die Pumpregion einer nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpe wird auch durch ein magnetisches Feld beeinflusst. Insbesondere führt ein ausreichend starkes, senkrecht zum *2DEG* stehendes Magnetfeld zur Ausbildung von Landau-Niveaus in *Source* und *Drain*. Die Kopplung der aus den Landau-Niveaus resultierenden Randkanälen mit dem QD kann für nahezu identische Feldstärken deutlich voneinander abweichen, da sich die Verteilung der besetzten Zustände in den Zuleitungen bei Änderungen des Entartungsgrads sprunghaft ändert. Die Tunnelkopplung kann demnach nicht eine einfache Magnetfeldabhängigkeit haben.[47, Abbildung 5.3][48] Für niedrige Felder bilden sich jedoch noch keine separieren Landau-Niveaus, so dass die zuvor beschriebenen Effekte noch verhältnismäßig wenige Auswirkungen haben.[49] In diesem Bereich könnte dann die stärkere Lokalisierung der Elektronen im Dot ausschlaggebend sein.[25, Abbildung 6] Da mit zunehmendem Magnetfeld der in die Barrieren hineinreichende Anteil der Wellenfunktion immer kleiner wird, sinkt die Tunnelwahrscheinlichkeit. Die Barrieren trennen somit im Magnetfeld effektiver den Dot von den Zuleitungen *Source* und *Drain*. Ein ansteigendes Magnetfeld führt somit zunächst zu einer Verschiebung der Einladekante zu negativeren Werten von  $U_I^{DC}$  und  $U_{II}$ . Die Rücktunnelkanten verschieben entsprechend ebenfalls zu negativeren Werten. Auch die Auswurfkanten wandern mit ansteigendem Magnetfeld zu negativeren Werten von  $U_I^{DC}$  und  $U_{II}$ . Gebiete in der Pumpregion, die durch ein unvollständiges Auswerfen der Elektronen entstehen, können durch diesen Vorgang in senkrechter Richtung breiter werden.

---

## 2.6. Zusammenfassung: Grundlagen

Die Funktionsweise einer Einzel-Elektronen-Pumpe basiert auf der periodischen räumlichen und energetischen Verschiebung eines Quantenpunkts (QD), so dass abwechselnd eine bevorzugte Tunnelrichtung der Elektronen aus der Elektronenquelle (*Source*) in den QD bzw. aus dem QD in die Elektronensenke (*Drain*) realisiert wird. Das nicht-adiabatischen Pumpschema lässt sich mit einer einzigen modulierten Eingangsbarriere umsetzen, wenn trotz Rücktunneln am Ende der Einfangphase reproduzierbar eine bestimmte Anzahl Elektronen im Dot isoliert werden können, die danach in der Auswurfphase nach *Drain* befördert werden. In der Rückkehrphase wird die Eingangsbarriere wieder abgesenkt, so dass die Einfangphase des nächsten Pumpzyklus wieder unter vergleichbaren Voraussetzungen stattfinden kann. Die Nicht-Adiabatizität bewirkt durch das schnelle Ansteigen der Eingangsbarriere eine Erhöhung der Elektronenenergie und damit der Temperatur an der Einzel-Elektronen-Pumpe. Zudem können bei Verwendung einer sinusförmigen Modulation der Eingangsbarriere nicht beliebig kleine Pumpfrequenzen genutzt werden, da sonst irgendwann die Anforderung an das ausreichend schnelle Ansteigen der Eingangsbarriere während der Einfangphase nicht mehr erfüllt ist. Mit einer langsam ansteigenden Eingangsbarriere hätten sämtliche im Dot befindlichen Elektronen genug Zeit zurück nach *Source* zu tunneln, so dass kein Pumpstrom erzeugt werden kann. Zu hoch darf die Pumpfrequenz jedoch auch nicht sein, da sonst das Zeitintervall für die Prozesse in der Einladephase bzw. Auswurfphase nicht mehr lang genug ist. Die anderen Pumpparameter müssen ebenfalls innerhalb geeigneter Parameterintervalle gewählt werden, damit quantisierte Pumpströme erzeugt werden können. Die Übergänge zwischen den Gebieten mit quantisierten Pumpströmen werden jeweils durch die Bedingungen einer der ersten drei Pumpphasen (Einlade-, Einfang- und Auswurfphase) hervorgerufen. Auf diese Weise können die Änderungen dieser Pumpregion bei Variation eines Parameters quantitativ vorhergesagt werden.





---

## 3. HERSTELLUNG DER EINZEL-ELEKTRONEN-PUMPEN

Dieses Kapitel handelt von der Herstellung der in dieser Arbeit verwendeten nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen. Zunächst wird das verwendete Ausgangsmaterial beschrieben und auf die bei dessen Fertigung notwendigen Fertigungsbedingungen des Halbleitermaterials eingegangen. Die zur Herstellung der verwendeten Proben notwendigen Lithographieschritte werden danach im einzelnen aufgeführt. Zudem werden die jeweiligen Ätz- bzw. Metallisierungsverfahren beschrieben.

### 3.1. Ausgangsmaterial

Für die Prozessierung der verwendeten Einzelelektronenpumpen wird ein strukturierbares zweidimensionales Elektronengas (*2DEG*) benötigt, damit die gewünschten Leitungsnetzwerke erzeugt werden können.[50][51, Kapitel 4] Im experimentellen Einsatz bietet sich hier das *GaAs-AlGaAs*-System an:

Die Gitterkonstanten von *GaAs* und *AlAs* sind mit 0.565 nm bzw. 0.566 nm fast identisch, so dass sich nahezu verspannungsfreie Kristalle aus diese beiden Halbleitermaterialien erzeugen lassen.[52] Durch die unterschiedlichen Bandlücken von *GaAs* und *AlAs* können an den Materialübergängen Sprünge in der Bandstruktur realisiert werden. Da *AlAs* im Gegensatz zu *GaAs* ein indirekter Halbleiter ist, wird zumeist das sogenannte  $Al_\chi Ga_{1-\chi}As$  mit einem *Al*-Anteil  $\chi < 40\%$  verwendet. Für die in dieser Arbeit verwendeten Proben beträgt der Anteil  $\chi = 33\%$ . Durch den geringen Anteil des *Al* reduziert sich der bereits zuvor schon geringe Unterschied in den Gitterkonstanten, so dass Verspannungen im Kristall für *GaAs-Al<sub>0.33</sub>Ga<sub>0.67</sub>As* praktisch ausgeschlossen werden können. Durch den geringen Anteil des *Al* sinkt jedoch auch die Bandlücke von zuvor etwa 2.2 eV auf ca. 1.8 eV bei 297 K. Da *GaAs* bei Raumtemperatur eine Bandlücke von rund 1.4 eV besitzt, halbiert sich somit der Bandlückenunterschied. Bei tiefen Temperaturen sinken die Werte der Gitterkonstanten von *GaAs* und *AlAs*, so dass die Bandlücken von beiden Materialien etwas ansteigen. Bei 0 K beträgt die Bandlücke von *GaAs* etwas über 1.5 eV und für *AlAs* kann ein ähnlicher Anstieg erwartet werden.[53, Abbildung 4.17][54, Kapitel 2.5]

Sämtliche im Kapitel 6 gemessenen Proben basieren auf *GaAs-Al<sub>0.33</sub>Ga<sub>0.67</sub>As*-Heterostrukturen, die von H. Marx an der *PTB* mittels Molekularstrahlepitaxie hergestellt wurden. Dabei musste jeweils auf einen 2-Zoll-*GaAs*-Wafer zunächst 0.5  $\mu\text{m}$  weiteres *GaAs* aufgetragen werden.

Danach wurden abwechselnd Schichten aus  $GaAs$  und  $Al_{0.33}Ga_{0.67}As$  aufgebracht, wodurch ein 40-fach Übergitter entsteht. Durch weitere  $0.5 \mu m$   $GaAs$  wurde dieses Übergitter vom späten  $2DEG$  räumlich getrennt. Die somit insgesamt knapp über  $1 \mu m$  dicke Schicht wird im Folgenden *Buffer*-Schicht genannt.

Als nächstes wird eine  $Al_{0.33}Ga_{0.67}As$ -Schicht epitaktisch aufgebracht. Am Übergang vom  $GaAs$  zum  $Al_{0.33}Ga_{0.67}As$  kann sich das  $2DEG$  bilden. Hierzu muss jedoch die Bandstruktur durch eine zusätzliche Dotierung ausreichend verbogen werden. Um die Coulomb-Streuung an diesen Donatoren zu reduzieren, wird die Dotierung erst nach einigen  $10 \text{ nm}$  eingebracht. Diese undotierte Zwischenschicht, auch *Spacer* genannt, weist bei den verwendeten Wafern Werte von  $30 \text{ nm}$  bis  $42 \text{ nm}$  auf. Wie in der folgenden Tabelle aufgeführt, weisen die Wafer trotz möglichst identischer Dotierung verschiedene Elektronenbeweglichkeiten und Ladungsträgerdichten auf.

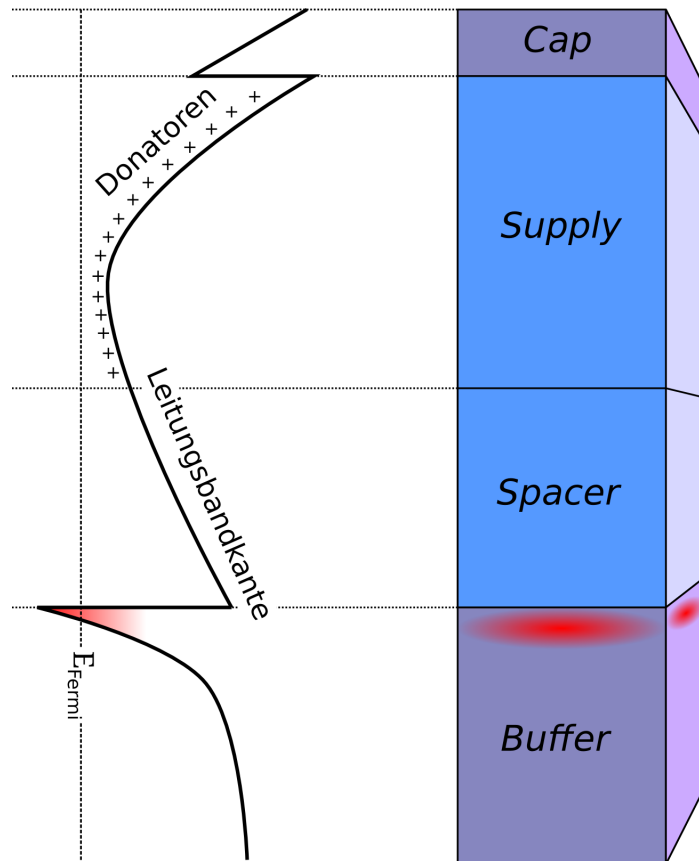
	Verwendung	<i>Spacer</i> nm	Beweglichkeit $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Ladungsträgerdichte $10^{11} \text{ cm}^{-2}$
P640	Parallelschaltung (Kapitel 6.1)	30	0.936	2.77 (@4 K)
P652	Double-Dot-Pumpe (Kapitel 6.3)	35	0.968	2.08 (@4 K)
P948	AC-Stromquelle (Kapitel 6.2)	42	1.970	2.09 (@4 K)

Danach wird mittels Silizium die folgende  $Al_{0.33}Ga_{0.67}As$ -Schicht n-dotiert. Dies wird ermöglicht, da Silizium bevorzugt anstatt von  $Al$  oder  $Ga$  in den Kristall einbaut wird.[55][56] Diese beiden chemischen Elemente gehören zur 3. Hauptgruppe des Periodensystems, während Silizium in der 4. Hauptgruppe steht. Somit wird bei den ins Kristallgitter eingebrachten Siliziumatomen vorrangig eines der vier Elektronen auf der M-Schale nicht für die Kristallbindungen verwendet und steht demnach als Leitungselektron zur Verfügung.

Aufgrund von unterschiedlichen Gitterkonstanten führt das Dotieren zudem zu Kristallfehlern. Diese sind allerdings selbst bei einer Dotierung von  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$  bezogen auf  $10^{23} \text{ cm}^{-3}$  Atome zu vernachlässigen. Alle im Kapitel 6 verwendeten Wafer wurden mit einer  $50 \text{ nm}$  dicken Dotierschicht hergestellt. Die Dotierung in dieser *Supply*-Schicht wurde in allen verwendeten Wafern mit einer Substrattemperatur von  $640 \text{ }^\circ\text{C}$  erzeugt. Bei der Herstellung der im Abschnitt 4.3.2 untersuchten deltadotierten  $GaAs$ -Wafer wurde auf die  $Al_{0.33}Ga_{0.67}As$ -Schichten verzichtet und stattdessen auf das  $GaAs$  direkt eine Schicht Silizium aufgebracht. Hierdurch wurde eine Dotierung von  $5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  realisiert.

Versiegelt wurde jeder Wafer mit einer  $GaAs$ -Schicht. Diese *Cap*-Schicht ist bei allen für die Messungen in Kapitel 6 verwendeten Wafern immer  $10 \text{ nm}$  dick. Eine schematische Darstellung des resultierenden Verlaufs des Leitungsbands ist in Abbildung 3.1 dargestellt.

Damit beim epitaktischen Aufwachsen der jeweiligen Schichten möglichst wenig Verunreinigungen mit eingebaut werden, müssen diese zuvor aus der Wachstumskammer entfernt werden. Dazu wird diese bis auf ca.  $10 \text{ nPa}$  evakuiert. Abhängig von der Menge an ausgasenden Verunreinigungen, die bei jedem Öffnen der Vakuumkammer in diese hinein gelangen können, wird ein geeignetes Vakuum erst nach längerer Zeit erreicht. In der üblichen Bauform werden die Wafer durch ein Mehrkammersystem in eine Molekularstrahlepitaxie-Anlage



**Abbildung 3.1.:** Schematische Darstellung einer modulationsdotierten  $GaAs-AlGaAs$ -Heterostruktur (rechts) und dem resultierenden Verlauf des Leitungsbands (links). Die violett eingefärbte *Cap*- und *Buffer*-Schicht im Kristall bestehen aus  $GaAs$ , während die bläuliche *Supply*- bzw. *Spacer*-Schicht aus  $Al_{0,33}Ga_{0,67}As$  besteht. Durch die Dotierung der *Supply*-Schicht wird das Leitungsband zu niedrigeren Energien verbogen, wodurch am Übergang von der *Buffer*- zur *Spacer*-Schicht das Leitungsband unterhalb der Fermi-Energie  $E_{Fermi}$  absinkt. Somit kann sich im Halbleiterkristall in dieser Tiefe ein *2DEG* ausbilden, wie hier in rot angedeutet. Wird die Dotierung beim Ätzen der *Mesa* in einigen Regionen entfernt, verschiebt sich das Leitungsband wieder zu höheren Energien und bleibt somit beständig oberhalb von  $E_{Fermi}$ . Auf diese Weise kann durch ein Entfernen der *Supply*-Schicht das darunter befindliche *2DEG* strukturiert werden.

eingeschleust, wodurch die Kontaminierung der Wachstumskammer mit unerwünschten Substanzen reduziert wird. Durch ständiges Abpumpen bei intakten Dichtungen wird mit zunehmender Dauer das Vakuum immer besser. Die genaue Zusammensetzung des Restgases kann jedoch nicht reproduziert werden. Deshalb variieren trotz dieser Maßnahmen die Wachstumsbedingungen in der Wachstumskammer nach jedem Waferwechsel. Selbst mit identischen Parameterwerten für die Substrattemperatur und die Wachstumsrate können demnach nicht exakt identische Wafer produziert werden. Die geringen aber doch vorhandenen dotierenden Verunreinigungen führen zu messbaren Unterschieden der Leitungseigenschaften des *2DEGs*. Inwieweit diese Abweichungen für die Pumpqualität der verwendeten nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen ausschlaggebend ist, müssen spätere Untersuchungen zeigen. Hierzu muss jedoch die Prozessierung der Pumpen weiter optimiert werden, so dass die Abweichungen in der Herstellung verhältnismäßig zu vernachlässigen sind.

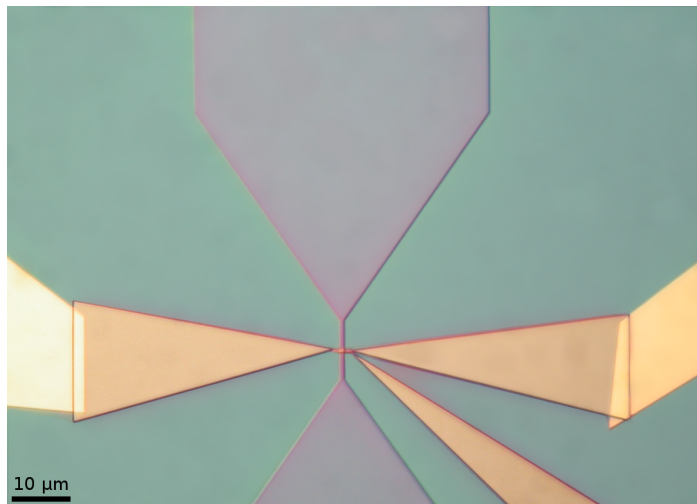
## 3.2. Beschreibung der Prozessierung

In Abbildung 3.2 ist eine nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe umgeben von den *Mesa*- und Gate-Zuleitungen gezeigt. Um diese verschiedenen Strukturen auf der Halbleiteroberfläche zu erzeugen müssen die im folgenden Text beschriebenen Prozessierungsschritte durchgeführt werden.

### 3.2.1. Herstellung der Mesa

Im ersten Schritt wird das zur Probenherstellung verwendete Waferstück gereinigt. Dazu wird dieses in ein vorher gereinigtes Becherglas mit Aceton (Dimethylketon mit Reinheit > 99%) gegeben und für 10 min in ein Ultraschallbad gestellt. Auf diese Weise werden nicht nur organische Verunreinigungen entfernt, sondern zudem auch durch Adhäsionskräfte anhaftender Staub gelöst. Dieser besteht häufig aus den kristallinen Splintern, die beim Auftrennen des Wafers in einzelne Stücke entstehen. Beim Herausziehen des Waferstücks aus dem Ultraschallbad wird die zu prozessierende Waferoberfläche mit einem Acetonstrahl aus einer Spritzflasche benetzt gehalten. Bevor die Oberfläche trocknet wird der Acetonstrahl durch einen Strahl aus einer zweiten Spritzflasche gefüllt mit IPA (Isopropylalkohol mit Reinheit > 99%) ersetzt. Die Oberfläche wird anschließend mit Stickstoff (Reinheit > 99.99%) aus einem Druckbehälter trocken geblasen.

Um das Waferstück weiter verarbeiten zu können, muss es auf einem Träger befestigt werden, da im Reinraum der *PTB* die Lackschleudern sowie das Einschleusesystem der Elektronenstrahlolithographiesystem für 3-Zoll-Wafer vorgesehen sind. Deshalb wird in gleicher Weise wie beim Waferstück auch ein 3-Zoll-Wafer gereinigt, der als Träger in den kommenden Prozessierungsschritten dient. Das Waferstück lässt sich nun mit zur Probenpräparation in der Transmissionselektronenmikroskopie geeignetem, gereinigtem Wachs (TEM-Wachs)



**Abbildung 3.2.:** Aufnahme einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe unter einem Lichtmikroskop. Die hier gezeigte Pumpe entspricht der nicht verwendeten vierten Pumpe in Abbildung 6.1. Die violette *Mesa* verjüngt sich in der Mittel des Bildes zu einem rund 800 nm breiten *Mesa*-Kanal. Diesen kreuzen drei metallische Top-Gates. Ihre Breite beträgt etwa 100 nm und die Abstände zwischen ihnen ca. 150 nm. Die bläuliche, geätzte Oberfläche des Halbleiters liegt ca. 50 nm unterhalb der *Mesa*-Oberfläche. Hierdurch wurde in diesen Gebieten die Dotierschicht im Halbleiter entfernt, so dass sich nur unterhalb der *Mesa* in ca. 100 nm Tiefe das *2DEG* ausbilden kann.

Die metallischen Zuleitungen der Top-Gates wurden in diesem Fall in zwei aufeinander folgenden Metallisierungsschritten hergestellt. Prinzipiell stellt dies keinen Unterschied zu dem im Text beschriebenen Verfahren dar. Durch die Aufteilung in grobe und feine Gate-Strukturen wurde in diesem Fall Zeit eingespart, da der Elektronenstrahl beim Schreiben der groben Strukturen einen größeren Durchmesser haben konnte und somit die Flächen schneller überstreichen konnte.

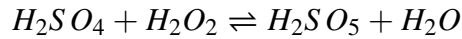
auf den Träger kleben. Hierzu muss der Träger mit der Rückseite auf einer Heizplatte erwärmt werden. Das TEM-Wachs kann dann dünn verteilt werden, wodurch das Waferstück gleichmäßig aufgeklebt werden kann. Hierzu muss es möglichst an allen Ecken gleich stark angedrückt werden, so dass überschüssiges TEM-Wachs an den Seiten heraus gedrückt wird. Durch Abkühlen des Trägers wird das Wachs wieder fest und sollte das Waferstück auch bei seitlichem Druck mit einer Pinzette auf dem Träger halten. Waferstück und Träger bilden somit vorerst eine Einheit, die im folgenden als Halbzeug-Wafer bezeichnet wird.

Um ein Unterätzen der bei der Lithographie verwendeten Lackmasken zu verringern, sollte die Oxidschicht an der Oberfläche so dünn wie möglich sein. Deshalb wird diese im nächsten Schritt mit einem 30 s andauernden Tauchbad in einer 8.3%-igen Salzsäure (hergestellt aus einem Volumenanteil 30%-iger *HCl*-Lösung und 3 Volumenanteilen destilliertem Wasser) weitgehend entfernt. Danach wird der Halbzeug-Wafer mit destilliertem Wasser gespült, sofort mittels Stickstoff trocken geblasen und im Anschluss auf einer Heizplatte bei 160 °C für 300 s getrocknet.

Aus Erfahrung haftet der für die Elektronenstrahlithografie verwendete Negativ-Lack *maN-2403* besser auf der Oberfläche des Wafers, wenn dieser zuvor für 120 s in einer Hexamethyldisilazan-Atmosphäre gelegen hat. Als nächstes wird der Halbzeug-Wafer in die Haltevorrichtung einer Lackschleuder eingesetzt und ein Tropfen *maN-2403* zentriert auf das Waferstück gegeben. Die Haltevorrichtung der Lackschleuder wird dann bei ansteigender Umdrehungsgeschwindigkeit bis maximal 3000 Umdrehungen pro Minute rotiert, wodurch der Lack eine etwa 300 nm dicke Schicht auf dem Waferstück bildet. Diese Lackschicht wird danach für 120 s bei 90 °C getrocknet. Treten auf der Lackschicht sichtbare Schlieren auf, ist dies ein Zeichen für eine ungleichmäßige Dicke der Schicht. In diesem Fall muss der Wafer erneut gereinigt und danach sämtliche bisherigen Schritte wiederholt werden. Bei einwandfreier Lackschicht wird diese nun mittels Elektronenstrahl belichtet. Durch den Beschuss mit Elektronen aus einem Elektronenstrahl verändert sich der verwendete Lack. Bei einem Negativ-Lack löst sich der bestrahlte Bereich beim späteren Entwickeln langsamer auf. Da im ersten Lithographieschritt die Waferoberfläche strukturiert wird, fährt der Elektronenstrahl über die Flächen, die später die Halbleiterbahnen der Nanostruktur bilden. Nach dem Belichten wird mit dem Entwickler *AZ 726 MIF* der Lack an den unbeschriebenen Stellen entfernt. Der Halbzeug-Wafer wird in einem mit dem Entwickler gefüllten Becherglas für 120 s untergetaucht und dieses dabei im Kreis geschwenkt. Hierdurch kann ein ungleichmäßiges Entwickeln an Engstellen verringert werden. Um den Entwicklungsprozess zu stoppen folgt danach für 60 s ein Tauchbad in destilliertem Wasser. Im Anschluss wird der Halbzeug-Wafer mittels Stickstoff getrocknet und auf eine Heizplatte bei 90 °C gelegt. Nach der Erwärmung des TEM-Wachses lässt sich das Waferstück wieder vom Träger lösen. Eine erneut entstandene dünne Oxidschicht wird als nächstes durch 8.3%-igen Salzsäure entfernt, indem die Säure etwa 5 s über das schräg gestellte Waferstück gegossen wird. Danach folgt ein gründliches Abspülen des Wafers mit destilliertem Wasser. Dies ist notwendig, um eine Kontamination mit Chlor-Ionen im anschließenden Schritt zu vermeiden. Da Salzsäurereste im Spalt zwischen den beiden Wafers verbleiben könnten, wurde vorher das Waferstück vom Träger getrennt. Die verwendete Pinzette muss ebenfalls gründlich gespült werden.

---

Um die nun freigelegten Waferflächen zu ätzen, wurde eine mit destilliertem Wasser verdünnte Schwefelsäure (11.4 mmol/L) direkt vor der Benutzung mit Wasserstoffperoxid-Lösung gemischt (12.7 mol/L) im Volumenverhältnis von ca. 1 : 200. Hierdurch kommt es zur Bildung von Peroxomonoschwefelsäure:



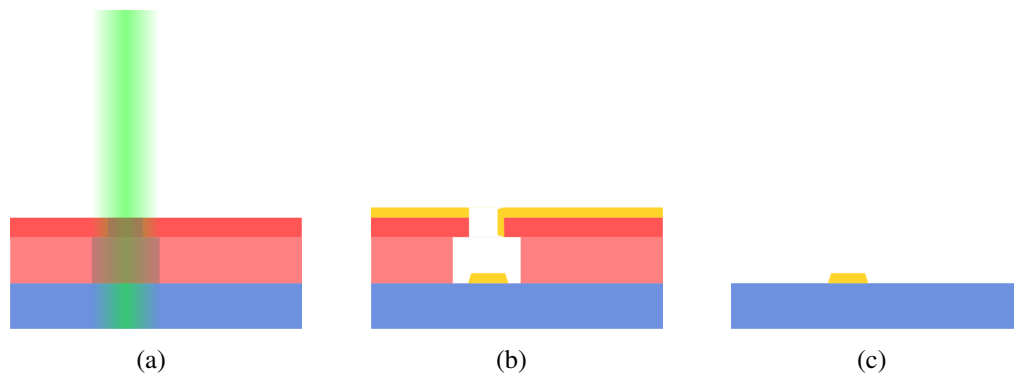
Aus den jeweiligen Stoffmengenkonzentrationen von  $H_2SO_4$  und  $H_2O_2$  ergibt sich bei Raumtemperatur in etwa ein Verhältnis von  $H_2SO_4 : H_2O_2 = 1 : 5$ . Erst durch die Bildung von Peroxomonoschwefelsäure kann das Wafermaterial mit den gewünschten Ätzraten bearbeitet werden. Um die autokatalytische Zersetzung von Wasserstoffperoxid zu vermeiden, muss die Wasserstoffperoxid-Lösung möglichst frei von Fremdstoffen sein. Eine verunreinigte oder bereits gealterte Wasserstoffperoxid-Lösung hat eine geringere Konzentration, die bei der Herstellung der Ätzlösung zu einer geringeren Ätzrate führen kann. Ebenfalls ist darauf zu achten, dass die beiden Lösungen gut durchmischt werden. Anderenfalls ist die Ätzrate anfänglich sehr gering und steigt erst im Laufe der Zeit auf den gewünschten Wert. Bei sachgemäßer Herstellung der Ätzlösung sollte die Ätzrate bei Gallium-Arsenid erfahrungsgemäß etwa bei 0.4 nm/s liegen. Nach 120 bis 130 Sekunden werden somit ca. 50 nm abgetragen, wodurch an diesen Stellen die Dotierschicht des Wafers vollständig entfernt wurde. Sogar bei tiefen Temperaturen kann sich dann das 2DEG dort nicht mehr ausbilden, so dass die durch den Lack geschützten, nicht geätzten Regionen die verbleibenden, elektrischen Halbleiterbahnen bilden. Die durch das Ätzen entstandene Oberflächen-Landschaft wird in Anlehnung an die spanische Bezeichnung für Tafelberge *Mesa* genannt. Um den Ätzprozess zu stoppen wird das Waferstück mit destilliertem Wasser gespült.

### 3.2.2. Herstellung der ohmschen Kontakte

Beim Kontakt von Metall und Halbleiter bildet sich in letzterem an der Kontaktfläche eine Barriere für Elektronen. Diese sogenannte Schottky-Barriere behindert den Stromfluss.[57] Um einen möglichst guten ohmschen Kontakt zwischen Metall und Halbleiter zu realisieren, wird die Oberfläche des Halbleiters mit geeigneten chemischen Stoffen legiert. Zur späteren Kontaktierung des strukturierten Halbleiters müssen in diesem Herstellungsschritt an Kontaktflächen ohmsche Kontakte erzeugt werden. Diese Kontaktflächen werden auch Bond-Pads genannt.[58]

Bevor für den anstehenden Lithographieschritt erneut das Waferstück mit Lack überzogen werden kann, müssen die verbliebene Lackreste in einem Acetonbad entfernt und das Waferstück dann wieder auf einem 3-Zoll-Träger-Wafer befestigt werden. Dies erfolgt mit der bereits zuvor bei der *Mesa*-Herstellung beschriebenen Methode.

Für die Herstellung der ohmschen Kontakte wird ein 2-Lagen-Positiv-Lacksystem verwendet. Wie in Abbildung 3.3 gezeigt, lässt sich durch die Verwendung von zwei Lacken mit unterschiedlichen Strahlungsempfindlichkeiten nach dem Entwickeln ein unterschrittenes Lackprofil erzeugen:



**Abbildung 3.3.:** Verwendung eines 2-Lagen-Positiv-Lacksystems. Auf das Substrat (blau) soll eine dünne Metallstruktur (gelb) von geringer Breite aufgebracht werden.

(a) Mit einem Elektronenstrahl (grün) wird der verwendete Lack (rosa) derartig verändert, dass sich dieser beim chemischen Entwickeln an diesen Stellen auflöst. Die obere der beiden Schichten des 2-Lagen-Positiv-Lacksystems (dunkelrosa) hat eine höhere Dichte und ist unempfindlicher gegenüber dem Elektronenbeschuss. Somit reicht in der empfindlicheren unteren Schicht (hellrosa) auch noch die geringere Strahlungsintensität am Rand des Elektronenstrahls, um den Lack umzuwandeln (grau).

(b) Nachdem im chemischen Entwickler der veränderte Lack entfernt wurde, findet die Metallisierung statt. Da die Metallatome in diesem Beispiel tendenziell leicht schräg von der linken Seite auftreffen, bildet sich nicht nur auf den senkrechten Flächen sondern auch auf der einen Wandungen des Lacks eine Metallschicht. Durch das 2-Lack-System wird jedoch eine komplette Versiegelung dieser Wandung verhindert.

(c) Mit Lösungsmitteln kann nun der Lack und die auf ihm befindlichen Metallreste abgelöst werden. Es entstehen keine oder höchstens geringe seitliche Metallablagerungen an die vorgesehenen Metallstrukturen.



---

Ein dünne Schicht unempfindlicheren Lacks wird auf eine Lackschicht mit höherer Strahlungsempfindlichkeit aufgebracht. Beim Belichten mit einem Elektronenstrahl reagiert eine größere Region des unteren Lacks als in der obere Lackschicht, da für den obere Lack die Strahlungsintensität nur im Fokus ausreichend hoch ist. Beim späteren Entwickeln der beiden Positiv-Lacke werden in den Randregionen unterhalb des unveränderten oberen Lacks Bereiche des unteren Lacks durch den Entwickler aufgelöst. So entstehen aus den mit dem Elektronenstrahl geschriebenen Flächen nach dem Entwickeln Gebiete, an denen die Oberfläche des Waferstücks nicht mehr mit Lack bedeckt ist. Beim Aufbringen der für die ohmschen Kontakte benötigten Metallschicht wird immer die komplette Fläche metallisiert und danach das überschüssige Metall zusammen mit dem verbleibenden Lack entfernt (*Lift-Off*). Der durch das 2-Lagen-Positiv-Lacksystem entstandene Hohlraum erleichtert den notwendigen Ablöse-Prozess des nicht benötigten Metalls, da dabei Aceton effektiver die verbliebene Lackschicht auflösen kann. Ohne ein unterschrittenes Lackprofil können die Seitenwände des Lacks bei der Metallisierung mit Metall versiegelt werden, wodurch das Aceton an diesen Stellen keine Angriffsfläche mehr hätte.

Für die Herstellung der verwendeten Proben kamen die Lacke *AR-P 641.03* und *AR-P 671.02* zum Einsatz. Diese beiden ALLRESIST Lacke bestehen aus in Chlorbenzen gelöstem Polymethylmethacrylaten (*PMMA*). Der Lack *AR-P 641.03* besteht dabei aus Polymeren mit einer mittleren molaren Masse von etwa 200 kg/mol und einem Feststoffgehalt von 3%. Mit einer Lackschleuder wird dieser Lack bei 2000 Umdrehungen pro Minute für 90 s auf der Oberfläche des Waferstücks verteilt. Damit die nächste Lackschicht aufgebracht werden kann, wird die erste Schicht für 10 min auf eine Heizplatte bei 160 °C getrocknet und damit verfestigt. Die dadurch entstandene Schicht ist dann ca. 152 nm dick.[59]<sup>1</sup> Der zweite Lack *AR-P 671.02* besteht aus deutlich längeren Molekülketten mit einer mittleren molaren Masse von etwa 950 kg/mol. Der Feststoffgehalt liegt bei diesem Lack allerdings nur bei 2%, so dass sich beim 90 s andauernden Aufschleudern mit 2000 Umdrehungen pro Minute und dem darauf folgenden Trocknungsprozess bei 160 °C auf der Heizplatte eine dünnere Lackschicht mit etwa 130 nm Dicke bildet.[59]

Anschließend wird im Elektronenstrahl-Lithographieschritt der Bereich der ohmschen Kontaktflächen bestrahlt und danach das 2-Lagen-Lacksystem chemisch entwickelt. Dazu wird der Halbleiter-Wafer zunächst für 60 s in ein Tauchbad aus einem Gemisch auf Basis von Methylisobutylketon (MIBK) und IPA gelegt.[60][61][62] Direkt im Anschluss daran folgt ein zweites Tauchbad in IPA für weitere 60 s. Dabei werden die beiden Entwickler währenddessen kreisförmig geschwenkt. Genau wie bei der Herstellung der *Mesa* beschrieben, erfolgt danach das Trockenblasen der Oberfläche mit Stickstoff.

Bevor die Metallisierung der ohmschen Kontakte erfolgen kann, muss zunächst die dünne Oxidschicht auf der Waferoberfläche entfernt werden. Da diese jedoch schnell unter At-

---

<sup>1</sup>Da kein Eintrag für *AR-P 641.03* in der Referenz [59] aufgeführt ist, wurde dieser Wert durch Anfitzen der vorhandenen Daten an ein Polynom dritten Grades abgeschätzt:  $y = 0.7166 \cdot x^3 - 1.4073 \cdot x^2 + 48.453 \cdot x$  wobei  $x$  für den Feststoffgehalt in Prozent steht und  $y$  der Wert der Schichtdicke in nm ist. Die vorliegenden, ungenauen Daten lassen aber auch Werte als Abschätzung zu, die bis zu 20 nm größer oder kleiner sind. Zusammen mit der zweiten Lackschicht ergibt sich jedoch mit diesem abgeschätzten Mittelwert in etwa die mittels eines *Dektak*-Profilometers gemessene Gesamtschichtdicke von um die 280 nm bis 290 nm.

mosphärenbedingungen nachwächst, muss zuvor die Probenkammer der Aufdampfanlage vorbereitet werden. Um die Oxidschicht zu entfernen, wird das Waferstück für 20 s mit 30%-iger *HCl*-Lösung umspült und danach sofort mit Stickstoff trocken geblasen.

Die Metallisierung der Wafer-Oberfläche erfolgt in der Probenkammer einer Aufdampfanlage. Für die ohmsche Kontakte werden eine Gold-Germanium-Legierung und zudem Nickel thermisch verdampft und im kontrollierten Verhältnis aufgebracht. Die an der *PTB* verwendete Gold-Germanium-Legierung hat ein Massenverhältnis von etwa 9 : 1. Das Phasendiagramm von Gold-Germanium hat ein Eutektikum bei einem Germanium-Massenanteil von ca. 12%.<sup>[63]</sup> Da die Ausgangslegierung weniger Germanium enthält, wird am Anfang zunächst hauptsächlich Gold aus der Legierung verdampft und dadurch der Anteil von Germanium in der Legierung beständig erhöht. Zwar nimmt hierdurch auch die Verdampfungsrate von Germanium zu, der Germaniumanteil steigt aber weiterhin. Auf diese Weise erreicht die Legierung letztlich das Anteilsverhältnis des Eutektikums, so dass dann schließlich die beiden Stoffe entsprechend ihres Anteils gleichmäßig verdampfen. Aus diesem Grund kann das anfängliche Massenverhältnis der Legierung nur durch das vollständige Verdampfen der Gold-Germanium-Einwaage auf den Wafer aufgebracht werden. Deshalb richtet sich die eingewogene Menge nach der gewünschten Schichtdicke.

Bei Verwendung der Aufdampfanlage *CongoVac* im Reinraum der *PTB* haben sich ca. 520 mg Gold-Germanium-Legierung als geeignete Menge für die ohmschen Kontakte erwiesen. Je nach verwendeter Aufdampfanlage muss jedoch der geeignete Wert empirisch ermittelt werden, da der Abstand zwischen Tiegel und Wafer, der Öffnungswinkel, das Regelprogramm zum kontrollierten Aufwachsen der Schichten und viele weitere Eigenheiten bei jeder Aufdampfanlage variieren. Aus der zweiten Quelle wird Nickel verdampft, wobei nur zwei Schichten Nickel mit insgesamt weniger als 50 nm aufgebracht werden. Von diesen zwei Schichten wird eine vor der Metallisierung mit Gold-Germanium und die andere am Ende als Abschluss aufgedampft.

Der Halbzeug-Wafer wird nach der Beseitigung der Oxid-Schicht möglichst schnell in die Probenkammer der Aufdampfanlage eingebaut und diese danach auf einen Druck von unter 1 mPa evakuiert. Im ersten Schritt kann dann 10 nm Nickel mit einer Rate von 0.1 nm/s aufgedampft werden. Danach wird die Gold-Germanium-Legierung aufgebracht und dabei komplett aufgebraucht. Die eingestellte Aufdampfrate ist anfänglich 0.1 nm/s und wird im Laufe des Prozesses bis zuletzt 0.5 nm/s gesteigert. Zumindest für die ersten 10 nm sollte die Anfangsrate noch beibehalten werden und danach langsam gesteigert werden. Die Aufdampfraten lassen sich elektronisch regeln. Der dabei eingesetzte Schichtdickensensor ermöglicht es am Ende der Metallisierung mit Gold-Germanium die Dicke dieser Schicht abzulesen. Da hierbei allerdings die Regelelektronik in der *CongoVac* mit den selben Einstellungen wie beim Nickel betrieben wurde, entspricht weder die gemessene Schichtdicke noch die Aufdampfrate den tatsächlichen Werten. Somit sollten die typischen Messwerte bei ca. 230 nm nicht überinterpretiert werden. Die tatsächliche Dicke der Schicht spielt jedoch bei diesem Verfahren keine wesentliche Rolle, da die Dicke der abschließenden Nickelschicht mittels des gewonnenen Messwerts errechnet wird. Sie sollte erfahrungsgemäß 1/14 der

---

gemessenen Dicke von Gold-Germanium entsprechen. Die beiden Nickelschichten ergeben zusammen etwa 26 nm.

Nach dem Aufdampfen wird der Wafer in ein Acetonbad gelegt, damit sich die Lackmaske und damit auch die dort aufliegende Metallschicht an diesen Stellen ablöst. Dieser *Lift-Off* Prozess sollte bei dem unterschrittenen Lackprofil des 2-Lagen-Lacksystems nach einigen Stunden erfolgreich verlaufen sein, so dass höchstens einige überschüssige Metallschichtenfragmente noch locker mit den auf den Wafer aufgedampften Flächen verbunden sind. Durch das Abspülen mit Aceton und IPA aus den Spritzflaschen reißen diese unerwünschten Fragmente ab, so dass das Waferstück, welches sich im Acetonbad vom Träger gelöst hat, jetzt nur noch Metall auf den späteren Kontaktflächen für das Drahtbonds bzw. anderen elektrischen Kontaktierungsarten zu finden ist. Beim Herausnehmen des Waferstücks wird mittels einer Spritzflasche die Oberfläche erst mit Aceton, dann mit IPA benetzt gehalten und zum Schluss mit Stickstoff trocken geblasen.

Beim folgenden Einlegieren werden die Metallschichten im Einlegierofen aufgeschmolzen und dringen in den Waferkristall durch Diffusion ein. Nur hierdurch lässt sich die Schottky-Barriere minimieren und somit ein quasi-ohmscher Kontakt zwischen Halbleiterkristall und Metall realisieren. Das Waferstück wird in der Probenkammer des Ofens in einer Wasserstoffatmosphäre innerhalb von Sekunden auf knapp über 450 °C erhitzt und dann für 55 s bei 450 °C gehalten. Der Druck des erhitzten Wasserstoffgases in der Probenkammer steigt dabei auf etwa 0.5 bar (50 kPa). Nach langsamen Abkühlen wird das Waferstück entnommen und hat nun auch bei tiefen Temperaturen funktionierende ohmsche Kontakte zu dem sich ausbildenden *2DEG*. Unter einem Lichtmikroskop sehen diese Kontaktflächen wie eine Kraterlandschaft aus. Um ein Oxidieren der ohmschen Kontaktflächen zu verhindern, werden bei dem anschließenden Lithographieschritt zur Erzeugung der Top-Gates auch die Flächen der ohmschen Kontakte erneut mit dem Elektronenstrahl beschrieben und darauf ebenfalls eine dünne Goldschicht abgeschieden. Am Ende der Prozessierung sind dann die ohmschen Kontakte durch eine Goldschicht vor Korrosion geschützt.

### 3.2.3. Herstellung der Top-Gates

Die Leitfähigkeit in Halbleitern lässt sich durch externe elektrische Felder ändern. Um diese Felder anlegen zu können, werden als nächstes Elektroden auf die Oberfläche des Waferstücks aufgebracht. Diese Elektroden werden Top-Gates genannt. Sie werden zur Erzeugung der Barrieren zwischen Source und Drain in den nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen genutzt. Hierzu werden die Top-Gates quer über die geätzten dünnen Leiterbahnen der *Mesa* aufgebracht. In den Abbildungen 2.4 und 3.2 sind diese den *Mesa*-Kanal kreuzenden Gates gezeigt.

Wie in den vorigen Abschnitten werden zu Beginn dieses Arbeitsschrittes das Waferstück und der Träger gereinigt und mit TEM-Wachs zu einem Halbzeug-Wafer verbunden. Analog zu der Herstellung der ohmschen Kontakte werden mit einem 2-Lagen-Positiv-Lacksystem die zu metallisierenden Oberflächen mittels Elektronenstrahl-Lithographie geschrieben und

danach chemisch entwickelt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die beiden Lacke *AR-P 641.04* und *AR-P 671.02* jeweils mit 4000 Umdrehungen pro Minute aufgebracht werden. Hierdurch erreicht das 2-Lagen-Lacksystem dann nur eine Gesamtdicke von etwa 250 nm.[59] Die untere Schicht *AR-P 641.04* hat nach 10 min bei 160 °C eine Schichtdicke von etwa 160 nm. Die Schichtdicke der danach aufgeschleuderten obere Schicht *AR-P 671.02* beträgt nach dem 10-minütigen Trocknen bei 160 °C ca. 90 nm.

Die Oxidschicht an der Oberfläche des Waferstücks wird nicht entfernt, da diese beim anschließende Metallisieren nicht stört. Das Metallisieren erfolgt wieder im Hochvakuum einer Aufdampfanlage. Diese muss für die Top-Gates mit Titan und Gold bestückt sein. Zunächst wird eine Schicht von ca. 20 nm Titan als Haftvermittler aufgedampft. Danach folgen etwa 35 nm Gold.

Anschließend wird der Wafer wieder für den Lift-Off in ein Acetonbad gelegt. Die überschüssigen Metallschichten müssen sich ohne äußere Einwirkung allein durch den *Lift-Off*-Prozess komplett ablösen. Andernfalls können die nur ca. 100 nm breiten Top-Gates über den Leiterbahnen der *Mesa* bei der Entnahme aus dem Acetonbad beschädigt werden, da diese feinen Gate-Strukturen zusammen mit angrenzenden metallisierten Lackresten abreißen. Deshalb muss dieser *Lift-Off*-Prozess möglichst langsam über mindestens 12 h erfolgen. Nach dieser Zeit sollte sich durch vorsichtiges Schwenken des Becherglases sämtliches überschüssiges Metall ablösen und danach das Waferstück mit Aceton und IPA abschließend wie gewohnt reinigen lassen. Damit ist der Herstellungsprozess der Proben beendet. Um diese letztlich elektrisch vermessen zu können, muss das Waferstück in die einzelnen Probenstücke zerteilt und diese dann anschließend in die jeweils verwendeten Probenhalter eingebaut werden.

### 3.3. Zusammenfassung: Herstellung

Für die im Kapitel 6 verwendeten nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen wurden mit Silizium dotierte  $GaAs-Al_{0,33}Ga_{0,67}As$ -Heterostrukturen verwendet, bei denen sich in ca. 100 nm ein *2DEG* ausbildet. Die Bearbeitung dieses Halbleitermaterials erfolgte in 3 Abschnitten mittels Elektronenstrahl-Lithographie:

Zu Beginn mussten zur lokalen Entfernung der Dotierschicht ca. 50 nm tiefe Mesa-Strukturen geätzt und danach in zwei weiteren Schritten die metallischen Bond-Pads sowie die Top-Gates gefertigt werden. Durch das Einlegieren der für die Bond-Pads verwendeten Nickel-Gold-Germanium-Schichten wurde ein ohmscher Kontakt zwischen Metall und Halbleiter erzeugt. Die nur 100 nm breiten Top-Gates wurden danach mit ca. 20 nm Titan als Haftvermittler und etwa 35 nm Gold aufgedampft.

Auf diese Weise können mit Abbildung 3.2 vergleichbare Halbleiterstrukturen mit Steuer Elektroden gefertigt werden.

---

## 4. MESSAUFBAU UND VORBEREITENDE MESSUNGEN

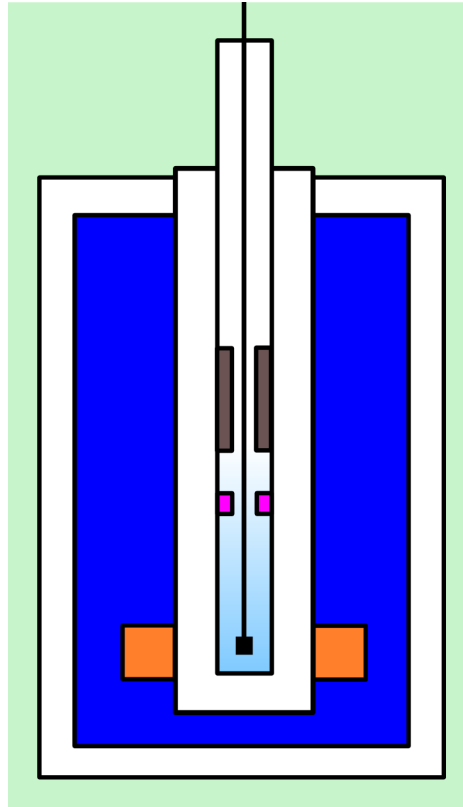
Der grundlegende Messaufbau und erste vorbereitende Messungen zur Bestimmung geeigneter Geometrieparameter der Pumpen werden in diesem Kapitel behandelt. Als erstes wird der verwendete Single-Shot- $^3\text{He}$ -Kryostat beschrieben. Auf die verwendeten Messgeräte und der Schaltungsaufbau wird danach eingegangen. Anschließend werden die Ergebnisse der Messungen an *Mesa*-Kanälen mit verschiedenen Breiten zur Bestimmung der optimalen Kanalbreite für die nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen gezeigt. Zum Schluss wird noch die Eignung von Halbleitermaterial mit einem *2DEG* in der Ebene der Deltadotierung untersucht.

### 4.1. Kryostat

Um die nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen in Betrieb zu nehmen, müssen zunächst geeignete Bedingungen hergestellt werden. Da sich bei den verwendeten GaAlAs-Heterostrukturen das *2DEG* erst bei tiefen Temperaturen nahe 0 K ausbildet, wurde für alle späteren Messungen der, in Abbildung 4.1 gezeigte, HelioxTL-Kryostat von Oxford Instruments verwendet.<sup>1</sup> Über mehrere Stunden können durch Abpumpen von flüssigem  $^3\text{He}$  in diesem System Temperaturen von ca. 300 mK an der Probe erreicht werden. Der Aufbau dieses Kryostaten besteht aus einer inneren, mit  $^3\text{He}$  befüllten Probenkammer, dem *IVC* (*Inner Vacuum Chamber*) und dem äußeren flüssig- $^4\text{He}$  Tank, der durch das *OVC* (*Outer Vacuum Chamber*) zu der Umgebung isoliert ist. In der inneren Probenkammer, in der der Probenstab mit der Probe eingesetzt wird, sitzt eine Adsorptionspumpe und der sogenannte 1-K-Pot. Diese beiden Komponenten können durch Kühlleitungen mit vorbei strömendem  $^4\text{He}$  gekühlt werden. Durch Nadelventile lässt sich die Kühlleistung regulieren. Die Adsorptionspumpe kann zudem durch einen Heizer erwärmt werden. Wird die Adsorptionspumpe gekühlt, speichert sie  $^3\text{He}$  ein und reduziert auf diese Weise den Gasdruck. Befindet sich einkondensiertes, flüssiges  $^3\text{He}$  in der Probenkammer wird durch die Verminderung des Gasdrucks der Austritt von weiterem  $^3\text{He}$  aus der Flüssigkeit erleichtert. Dabei tritt vermehrt  $^3\text{He}$  mit höherer kinetischen Energie aus, so dass die durchschnittliche kinetische Energie der  $^3\text{He}$ -Atome in der Flüssigkeit sinkt. Dies ist identisch mit einer Temperaturabnahme.

---

<sup>1</sup>Die ersten Messungen um die Eigenschaften der Kanäle zu charakterisieren wurden in einer Weithalskanne gemacht. Dort wird die Probe zur Kühlung direkt in flüssiges  $^4\text{He}$  eingetaucht.



**Abbildung 4.1.:** Schematische Darstellung des verwendeten Kryostaten. Die Vakuumisolierungen (weiß) trennen den Tank mit flüssigem Helium (blau) von der Umgebung und der Probenkammer. Die äußere dieser Vakuumisolierungen wird *OVC* (*Outer Vacuum Chamber*) und die Innere *IVC* (*Inner Vacuum Chamber*) genannt. Die Probenkammer enthält  $^3\text{He}$ , welches sich in der Darstellung verflüssigt am Boden der Probenkammer befindet (hellblau). Ein Teil steigt jedoch gasförmig auf und passiert dabei den kühlenden 1-K-Pot (violett). Das weiterhin aufsteigende  $^3\text{He}$ -Gas erreicht letztlich die Adsorptionspumpe (grau) um dort eingefangen zu werden. Die Probe befindet sich in dem flüssigen  $^3\text{He}$  am Ende des Probenstabes. Dort sitzt sie im Zentrum des supraleitenden Magneten (orange), der zur Kühlung im Tank mit dem flüssigem Helium untergebracht ist.

---

Auf diese Weise lässt sich mit flüssigen  $^3\text{He}$  eine Kühlleistung bei etwa 5 mW bei 450 mK erreichen. Durch den zwar geringen jedoch nicht verschwindenden Wärmeeintrag von Außen sind hier Grenzen bezüglich der Basistemperatur von ca. 300 mK gesetzt. Das ständige Abpumpen und die eindringende Wärme bewirken letztlich die Verdampfung der gesamten Flüssigkeit, die nahezu vollständig in der Adsorptionspumpe gespeichert wird. Nun muss erneut einkondensiert werden. Dazu wird die Adsorptionspumpe auf ca. 40 K erwärmt und der 1-K-Pot auf Temperaturen von etwa 1.5 K gebracht. Dies gelingt, indem das den 1-K-Pot füllende  $^4\text{He}$  mittels einer Pumpe, wie bereits beschrieben, abgepumpt und dabei abgekühlt wird. Bei Temperaturen unter 3.3 K beginnt das  $^3\text{He}$ -Gas an der Außenhülle des 1-K-Pots zu kondensieren. Das flüssige  $^3\text{He}$  tropft herab und mit der Zeit sammelt sich der größte Teil des  $^3\text{He}$  am Boden der Probenkammer als Flüssigkeit. Wird nun die Adsorptionspumpe wieder gekühlt, beginnt erneut das Einspeichern von  $^3\text{He}$ -Gas und somit das Abkühlen des flüssigen  $^3\text{He}$ . Um die Standzeit im Kühlbetrieb zu erhöhen, wird der 1-K-Pot durchgehend betrieben. Auf diese Weise kann ein Teil des  $^3\text{He}$ -Gases sowie die untere Region der Probenkammerwandung zusätzlich gekühlt werden. Bei dieser Vorgehensweise sind Messzyklen von bis zu 12 h möglich. Da kein kontinuierlicher Betrieb möglich ist, wird dieser Betriebsmodus als Single-Shot bezeichnet.

Um in der unteren Region der Probenkammer ein Magnetfeld zu erzeugen, befindet sich auf entsprechender Höhe im  $^4\text{He}$ -Tank ein supraleitender 16 T Solenoid-Magnet. Dieser Elektromagnet besteht aus einem in sich geschlossenen supraleitenden Draht, der an einer Stelle mit einem Heizer versehen ist. An beiden Seiten des mit dem Heizer versehenen Drahts sind zudem Zuleitungen angebracht, über die der Magnet mit einer Stromquelle verbunden werden kann. Durch das umgebende flüssige  $^4\text{He}$  ist die Temperatur der Spule unterhalb der Sprungtemperatur und wird somit supraleitend. Wird am Heizer lokal die Temperatur erhöht, lässt sich an dieser Stelle die Sprungtemperatur überschreiten. Wird nun der Stromkreis zur Stromquelle geschlossen, lässt sich durch den fließenden Strom das Magnetfeld aufbauen. Der komplette Strom fließt dabei durch die weiterhin supraleitende Spule und nicht durch das erwärmte Drahtstück. Ist das Feld aufgebaut, wird das Heizen des Drahtstücks beendet, so dass sich dieses wieder abkühlt und letztlich wieder supraleitend wird. Wird nun die Verbindung zur Stromquelle getrennt, fließt der gesamte zu diesem Zeitpunkt in der Spule befindliche Strom beständig weiter durch den supraleitenden Draht und das erzeugte Magnetfeld bleibt bestehen (Persistent).

Mittels eines Probenstabes werden die zu messenden Einzelelektronenpumpen von oben in die Probenkammer eingebracht. Damit die Probenkammer nicht durch andere Gase verunreinigt wird, muss die Probe ins Innere eingeschleust werden. Dabei trotzdem eingedrungenes Gas schlägt sich bei den niedrigen Temperaturen als Kondensat an den Oberflächen ab. Somit sind die unvermeidbaren leichten Verunreinigungen nur ein geringes Problem. Nachdem die Schleuse geöffnet ist, wird der Probenstab langsam abgesenkt und dabei mittels  $^3\text{He}$  thermisch an die kalte Probenkammerwandung angekoppelt. Bei diesem Einkühlvorgang wird bereits Strom durch die *Mesa*-Struktur der Einzelelektronenpumpen geschickt, um zeitgleich auf diese Weise zu testen, ob die Bildung des *2DEG* gelingt. Wenn die Leitfähigkeit z.B. durch zu schnelles Absenken des Probenstabes auf Null fällt, muss die Einzelelektronenpumpe zunächst wieder aufgewärmt werden. Dies erfolgt indem der Probenstab wieder nach oben

gezogen wird. Um die untere Region der Probenkammer von der oberen Schleuse her zu erreichen, muss der Probenstab ca. 1.5 m abgesenkt werden. So gelingt es, die zu messenden Einzelelektronenpumpen in das sich dort ansammelnde flüssige  $^3\text{He}$  einzutauchen.

Die Kühlung durch das flüssige  $^3\text{He}$  ist notwendig, um den unvermeidbaren Wärmeeintrag von außen zu kompensieren. Der Hauptteil dieser Wärme dringt im Hochvakuum über Wärmeleitung der metallenen Drähte des Probenstabs ein. Die geschirmten Hochfrequenzleitungen (Semi-Rigid-Koaxialkabel) leiten über ihre Metallschirmung weit aus mehr Wärme als die dünnen DC-Drähte aus Konstantan. Deshalb ist hier ein Kompromiss zwischen zu viel Wärmeeintrag und benötigter Leitungsanzahl bzw. -qualität zu wählen. Für die Messungen wurde ein Probenstab mit zwei HF-Leitungen und 10 DC-Leitungen verwendet.

## 4.2. Verwendete Messgeräte

Abbildung 4.2 zeigt den Messaufbau. Eine vereinfachte schematische Darstellung ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Die Spannungen wurden mittels eines *Digital-to-Analog-Converters* (DAC) in die Messschaltung eingespeist. Durch eine symmetrische Operationsverstärkerschaltung wurden die Ströme in Spannungssignale übersetzt und diese mit einem *Analog-to-Digital-Converter* (ADC) gemessen. Je nach zwischengeschaltetem Widerstand konnte auf diese Weise der erzeugte Pumpstrom in den geeigneten Spannungsbereiche geschoben werden.<sup>2</sup> Zur Abschirmung gegen äußere Störquellen umschließt eine Metallhülle die Verstärkerschaltung. Diese Operationsverstärker-Box (wegen der englischen Bezeichnung *Operational Amplifier* auch *OPA-Box* genannt) ist über *BNC*-Kabel mit einer Matrixbox verbunden. Über ein 24-adriges Kabel ermöglicht diese die Verbindung der DC-Drähte des Probenstabs mit den zuschaltbaren *BNC*-Anschlüssen. Somit ist sichergestellt, dass nur die verwendeten Drähte an die angeschlossene *OPA-Box* bzw. den *DAC* weitergeführt werden und die anderen in der geerdeten Matrixbox enden.

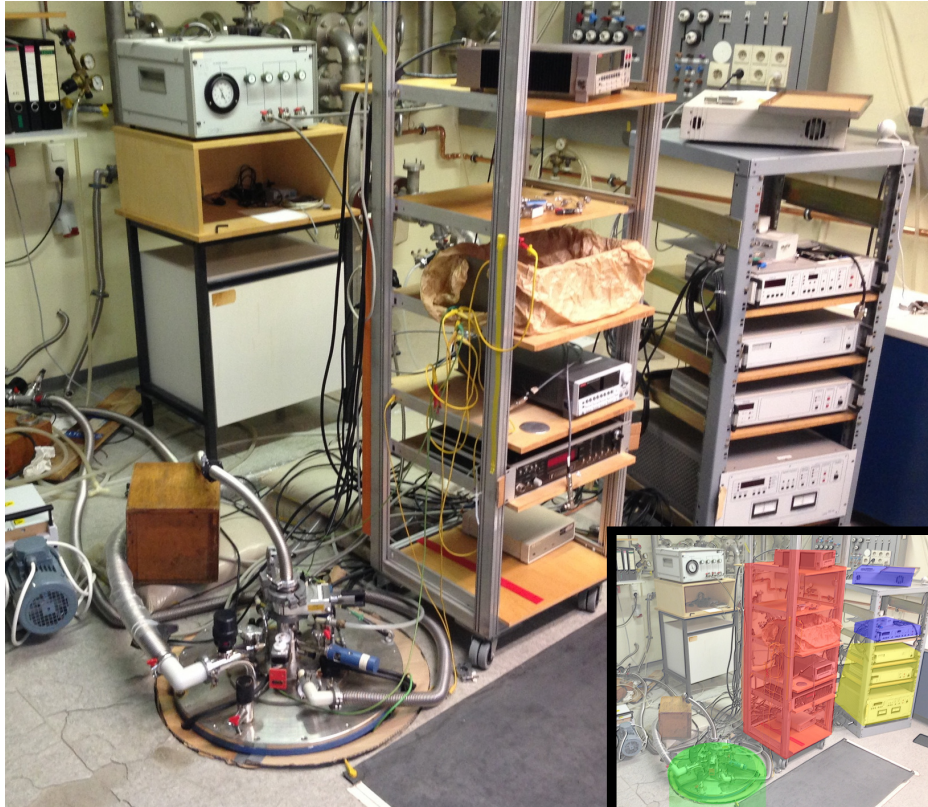
### 4.2.1. Schema des Messaufbaus

Die Verbindungen zwischen der Box und dem Probenstab bzw. dem *DAC/ADC* sind mit geschirmten Kabel realisiert. Das Hochfrequenzsignal wurde mittels Frequenzgenerator erzeugt (R&S SMC 100A, bis zu 1.1 GHz) und durch ein 3 m langes Koaxialkabel, an dessen Ende sich ein 6 dB-Dämpfungsglied befindet, am HF-Eingang eines Bias-T angeschlossen. Dieser wurde direkt am Anschluss der HF-Leitung des Probenstabs befestigt. Der Gleichspannungsanteil der angelegten HF-Gate-Spannung wurde durch den *DAC* geliefert und parallel zum HF-Signal durch ein Koaxialkabel gleichen Typs mit dem Offset-Eingang des Bias-T verbunden.

---

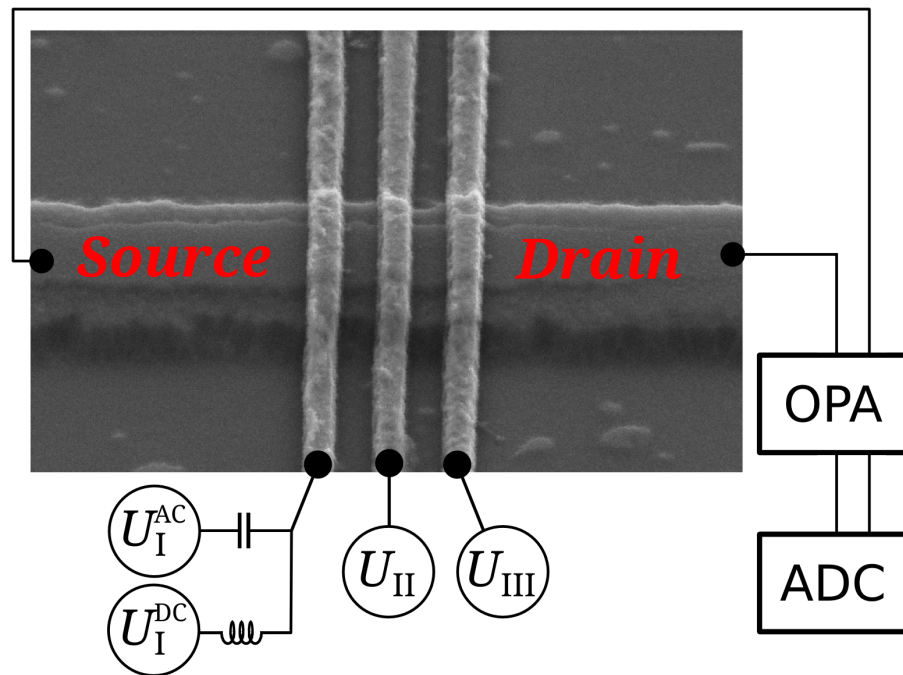
<sup>2</sup>Eine spätere weiterentwickelte Version mit vier separaten Operationsverstärkerschaltungen ermöglichte es zugleich bis zu vier verschiedene Ströme parallel zu messen. Somit konnten auch die DC-Gates über diese Schaltung angeschlossen und die eventuell auftretenden Leckströme registriert werden.





**Abbildung 4.2.:** Foto des Messaufbaus. In der unteren rechten Ecke befindet sich ein verkleinertes Bild des Fotos mit farblich hervorgehobenen Elementen. Der Kryostat ist in grün dargestellt. Zu sehen ist jedoch nur die obere Platte mit den Anschlüssen für das Vakuumpumpsystem und der Schleuse zur Probenkammer. Der verwendete Probenstab ist in diesem Foto an der Schleuse aufgesetzt und in die Probenkammer abgesenkt. In blau sind die mit dem mit der  $^3\text{He}$ -Kühlung verbundenen Steuergeräte und Temperaturmessgeräte eingefärbt. Die Steuereinheiten für den 16 T-Magneten haben eine gelbe Hervorhebung. Im rot markierten Regal werden die für die Messungen jeweils nötigen Geräte untergebracht. Dazu zählen ein Frequenzgenerator und die Operationsverstärker-Einheit, mit der die Ströme in Spannungen von einigen Volt umgewandelt werden.

(Foto dankenswerterweise von C. Leicht zur Verfügung gestellt)



**Abbildung 4.3.:** Schema des Messaufbaus. Oben links zeigt eine REM-Aufnahme eine Einzel-Elektronen-Pumpe, deren drei Top-Gates mit den Spannungen  $U_I$ ,  $U_{II}$  und  $U_{III}$  die Potentiallandschaft des  $2DEG$ s lokal formen. Die Spannung am *source*seitigen Gate setzt sich durch die Offset-Spannung  $U_I^{DC}$  und den Amplitudenanteil  $U_I^{AC}$  zusammen. Der erzeugte Pumpstrom wird mit der *OPA*-Box doppelt gemessen, um auf diese Weise eine Abweichung durch Leckströme zu registrieren. Die den gemessenen Stromstärken äquivalenten Spannungssignale am Ausgang der *OPA*-Box lassen sich nun mit einem *ADC* digitalisieren.

---

Zur zusätzlichen Abschirmung von äußeren Störquellen wurde die Matrixbox von einer weiteren äußeren Mu-Metallbox umschlossen, von der sternförmig die Masseleitungen zu den anderen Metallboxen und den verwendeten Messgeräten führt. Die Leitung zur Deckelplatte des Kryostaten stellt die Anbindung zum Erdpotential da. Die Messgeräte, der DAC/ADC, die OPA-Box und der Frequenzgenerator, sind zudem durch Trenntrafos vom Stromnetz galvanisch getrennt. Um sie ebenfalls vom Messrechner zu trennen, werden die GPIB-Signale per Optokoppler übertragen.

#### 4.2.2. Resonanzfrequenzen des Messaufbaus

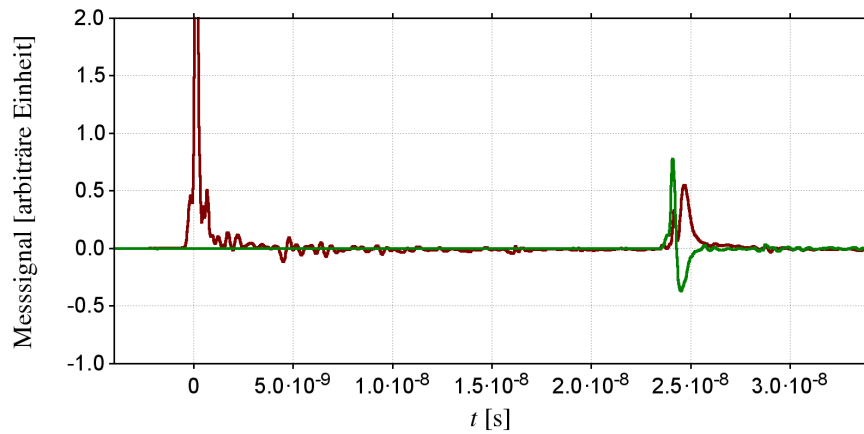
Die zwei HF-Leitungen des in den Messungen verwendeten Probenstabs wurden bezüglich der zu erwartenden Resonanzfrequenzen untersucht. Hierzu wurde mit einem TDR (Time Domain Reflectometer) ein Spannungspuls eingespeist und die Zeitentwicklung des reflektierten und des transmittierten Signals aufgezeichnet.

Zunächst wurden die Resonanzfrequenzen der verwendeten Kabel ohne den Probenstab ermittelt. Die Zeit die ein eingekoppelter Puls bis zu seiner Rückkehr benötigt, beträgt etwa 16.7 ns wodurch sich eine Resonanzfrequenz von ca. 30 MHz ergibt. Danach wurden die charakterisierten Kabel mit den beiden HF-Leitung verbunden. Indem in der Probenkammer eine durch einen *Bond*-Draht kurzgeschlossene Probe eingebaut wurde, kann ein eingekoppelter Puls zunächst durch das eine Kabel und danach durch die angeschlossene HF-Leitung bis zur Probe geführt werden. Dort wird ein Teil des Pulses reflektiert und läuft auf dem bisherigen Weg zurück. Der transmittierte Anteil läuft durch die zweite HF-Leitung und danach durch das zweite Kabel um dort letztlich ebenfalls gemessen zu werden.

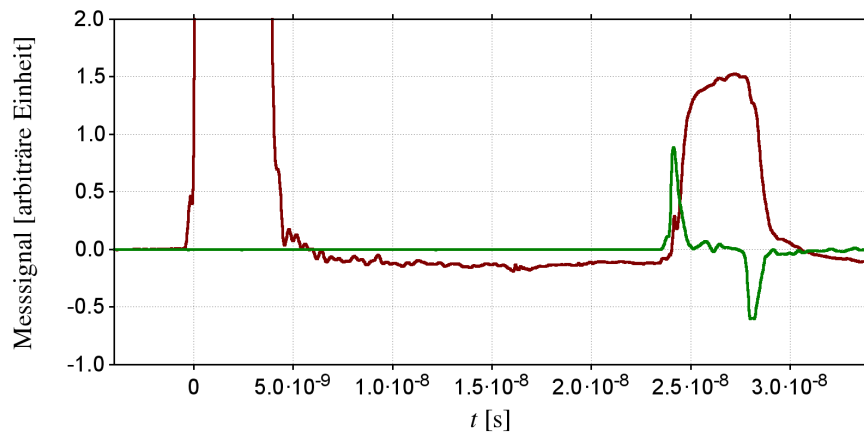
Wie in Abbildung 4.4 dargestellt, benötigt das reflektierte Signal in rot für Hin- und Rückweg nahezu genau die gleiche Zeit, wie das grüne transmittierte Signal für den Weg durch beiden Kabel und HF-Leitungen. Bezüglich der Laufzeit macht es dabei keinen Unterschied, ob (a) ein langer Puls von 4 ns Dauer oder (b) ein kurzer Puls verwendet wird. In jedem Fall beträgt die Pulslaufzeiten auf beiden Pfaden etwa 24 ns. Dies entspricht einer Resonanzfrequenz von rund 20.8 MHz. Da die verwendeten Pumpfrequenzen deutlich größer als diese 20.8 MHz sein werden, kann konstruktive und destruktive Interferenz die anliegende Amplitude der Spannungsmodulation am Top-Gate stark beeinflussen. Wie sich in Messung 6.2 bei der Realisierung einer AC-Stromquelle zeigen wird, müssen diese 20.8 MHz bei der Wahl der geeigneten Arbeitsparameter beachtet werden. Für ungerade Vielfache von 20.8 MHz ist die Schwingungsamplitude an der Probe minimal. Etwa alle 41.6 MHz wiederholt sich somit die destruktive Interferenz.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Dies wird durch die Messung 6.2 bestätigt. Wie in Abbildung 6.7 zu sehen sind die auftretenden Minima jedoch um um ca. 15.5 MHz verschoben.



(a) kurzer Puls



(b) 4 ns andauernder Puls

**Abbildung 4.4.:** Darstellung der Pulslaufzeiten zur Bestimmung der Resonanzfrequenz des Messaufbaus. Die beiden HF-Leitungen des Probenstabs wurden in diesen Messungen durch einen *Bond*-Draht in der Probenkammer miteinander elektrisch verbunden. Das rote Messsignal zeigt den an diesem Probenersatz reflektierten Puls. Der durch beide HF-Leitungen geführte transmittierte Puls ist in grün dargestellt. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  hat der erzeugte Puls sein Pulsmaximum erreicht. Während in der Messung zu Grafik (a) ein kurzer Puls verwendet wurde, hat der in Grafik (b) verwendete Puls eine Pulslänge von 4 ns. In beiden Fällen benötigt der reflektierte bzw. transmittierte Puls etwa 24 ns für den Weg zurück zum Detektor. Demnach liegt die Resonanzfrequenz bei ca. 20.8 MHz.

---

### 4.2.3. Dämpfung der eingekoppelten Leistung

Das Dämpfungsmaß der Zuleitungen variiert für verschiedene Messungen. Wie bereits im vorigen Abschnitt 4.2.2 beschrieben, ist das Dämpfungsmaß von der Pumpfrequenz abhängig. Zudem bewirken aber auch noch andere Einflüsse, wie z.B. die Temperaturverhältnisse an den Verbindungsstücken im Kryostaten deutliche Variationen der jeweiligen Dämpfung. Damit trotzdem die in einer Messung an die Probe gebrachte Pumpleistung abgeschätzt werden kann, kann die Pumpregion der zu untersuchenden Pumpe bei zu vernachlässigender *Source-Drain*-Spannung  $U_{SD}$  gemessen und dann das maximale Spannungsintervall zwischen der Einladekante (siehe Abschnitt 2.5.3) und der Auswurfkante (2.5.3) bestimmt werden. Wie Abbildung 4.5 zeigt, lässt sich bei verschwindender *Source-Drain*-Spannung  $U_{SD}$  dieses Spannungsintervall graphisch abgelesen. In erster Näherung entspricht diese Peak-Peak-Spannung der doppelten Spannungsamplitude  $U_I^{AC}$  am Eingangs-Gate. Umgerechnet in dBm ergibt sich dann die angelegte Leistung für ein  $50 \Omega$ -Impedanz-System zu:

$$P = 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{(U_I^{AC})^2}{0.1 \text{ V}^2} \right) \text{ dBm} \quad (4.1)$$

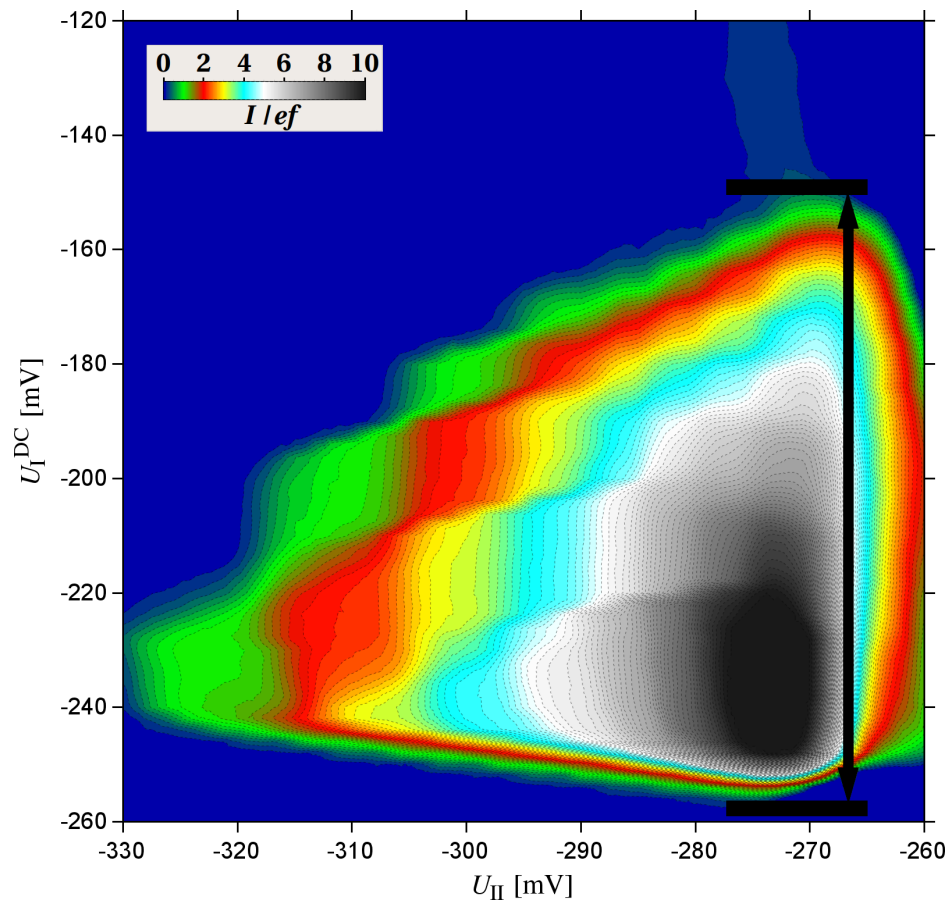
Mit dieser Methode kann die an der Pumpe anliegenden Pumpleistung abgeschätzt werden. Die Ergebnisse dieser Abschätzungen liefern Ergebnisse, die den mit der zuvor veröffentlichten Methode aus Referenz [13] bestimmten Werten ähneln. Die auf dem Spannungsintervall basierenden Abschätzungen sollten den unteren Grenzwert besser erfassen, jedoch ist vermutlich die Abschätzung eher zu pessimistisch.

Sofern keine geeigneten Messungen der kompletten Pumpregion bei  $U_{SD} = 0$  verfügbar sind, müssen Spannungsintervalle über vergleichbare Plateaus der Pumpregionen ins Verhältnis gesetzt werden. Sicherlich sinkt die auf diese Weise erzielbare Genauigkeit der Abschätzung, je stärker die gewählten Spannungsintervalle vom maximalen Spannungsintervall abweichen. Die in dieser Arbeit abgeschätzten Leistungswerte geben nur die ungefähre Größenordnung an. Abweichungen von einigen dB sind demnach nicht ausgeschlossen.

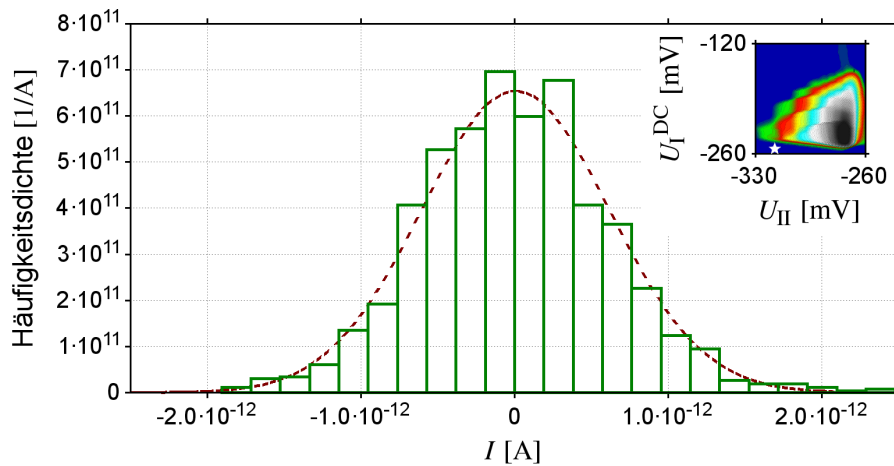
### 4.2.4. Bestimmung der Messunsicherheiten

Bei der Messung eines erzeugten Pumpstroms treten trotz konstanter Betriebsparameter Schwankungen auf. Ein Teil dieser Schwankungen wird durch die Zufälligkeit der Tunnelprozesse während eines Pumpzyklus erzeugt. Die Anzahl gepumpter Elektronen pro Pumpzyklus kann somit variieren. Bei der Erzeugung von quantisierten Pumpströmen wird versucht diese Variationen möglichst zu minimieren. Sollte in einem Pumpzyklus trotzdem die Anzahl gepumpter Elektronen von dem angestrebten Wert abweichen, wird dies als Pumpfehler bezeichnet.

Bei der Messung des Pumpstroms sind jedoch auch noch andere Fehlerquellen für die auftretenden Schwankungen verantwortlich. Selbst wenn eine Pumpe einen quantisierten Pumpstrom ohne Pumpfehler liefern würde, könnten z.B. thermische Schwankungen im ADC



**Abbildung 4.5.:** Bestimmung der angekoppelten HF-Leistung durch Messung des Intervalls der Spannung  $U_I^{\text{DC}}$ , bei der ein Pumpstrom erzeugt wird. Die Hälfte dieses Intervalls wird als Abschätzung für die Amplitude  $U_I^{\text{AC}}$  verwendet. Die Grafik zeigt eine Messung der Pumpe A der Parallelschaltung aus Abschnitt 6.1 bei der mit 425 MHz die komplette Pumpregion erfasst wurde. Das mit dem Doppelpfeil markierte Spannungsintervall beträgt etwa 110 mV. Die an der Pumpe wirksame Leistung ist demnach für diese Pumpfrequenz ungefähr -15 dBm. Da die am Frequenzgenerator eingekoppelte Leistung 2 dBm betrug, ist in diesem Fall die gesamte Dämpfung durch Leitungen und Dämpfungsglied ca. 17 dB.



**Abbildung 4.6.:** Bestimmung der Messunsicherheit  $\zeta$  des Stroms bei gesperrter Pumpe. Die Sperrung erfolgte durch eine Erhöhung der Eingangsbarriere, so dass Tunnelereignisse von *Source* in den Dot unterdrückt werden. Die grünen umrandeten Balken stellen die aus der Messung gewonnenen Histogrammdata des trotz der gesperrten Pumpe noch detektierten Stroms  $I$  dar. Die Breite eines Balken, auch Klassenbreite genannt, beträgt  $1.88 \times 10^{-13}$  A. Diese Breite wurde durch die Regel nach Scott bestimmt.[64][65] Die rot-gestrichelte Linie zeigt eine Normalverteilung mit einem Erwartungswert bei rund  $6 \times 10^{-15}$  A und einer Standardabweichung von ca.  $6.1 \times 10^{-13}$  A. Dieser Wert wird ebenfalls für die Messunsicherheit  $\zeta$  verwendet, da die Messdaten in guter Näherung normal verteilt sind. Die in der Grafik dargestellte Verteilung der gemessenen Stromstärken  $I$  wurde bei Spannungen  $U_I^{DC} \approx -255$  mV und  $U_{II} \approx -318$  mV gemessen. Im der eingefügten Darstellung der Pumpregion ist diese Region mit einem weißen Stern markiert. In größerer Darstellung kann diese Pumpregion in Abbildung 4.5 betrachtet werden.

die Messergebnisse verfälschen. Diese durch das Messsystem eingebrachte Unsicherheit kann durch eine Messung bei gesperrter Pumpe abgeschätzt werden. Hierzu werden die Barrieren des Dots durch die negativen Spannungen an den Top-Gates so lange angehoben, bis der Pumpstrom verschwindet. Die dort gemessene mittlere Stromstärke stellt den zu verrechnenden Strom-Offset dar. Die dabei ebenfalls auftretenden Schwankungen des Stroms werden zur Bestimmung der Messunsicherheit verwendet. Die auftretende Schwankung ist wie erwartet in guter Näherung normal verteilt. Wäre die Verteilung eher links- bzw. rechtsschief, deutet dies auf eine systematische Abweichung hin. Bei einer rein statistischen Unsicherheit würde sich die Verteilung einer Normalverteilung mit zunehmender Anzahl von Messpunkten immer weiter annähern. Unter dieser Bedingung würde die Messunsicherheit  $\zeta$  genau der Standardabweichung entsprechen.

Die erreichbare minimale Messunsicherheit beträgt für diesen Messaufbau ca.  $6 \times 10^{-13}$  A. Der Wert von  $\zeta$  bleibt in den Experimenten unterhalb von  $1.5 \times 10^{-12}$  A.

### 4.3. Optimierung und Variation der Pumpgeometrie

Bevor die eigentlichen Messungen an den nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen erfolgten, wurden zunächst die zugrunde liegenden Strukturen in Vormessungen untersucht. Hierdurch konnten Erkenntnisse über die Breite des *2DEG*-Kanals gewonnen werden. Der Einsatz eines speziell dotierten Halbleitermaterials wurde ebenfalls getestet. Ohne zusätzliche Herstellungsschritte kann dieses nicht zur Pumpenherstellung verwendet werden.

#### 4.3.1. Bestimmung der *Side-Wall-Depletion*

An der Oberfläche von Halbleitern kann das regelmäßige Kristallgitter nicht mehr eingehalten werden. Die dort sitzenden Halbleiteratome hätten sonst ungebundene Valenzelektronen. Derartige halbgefüllte Orbitale werden *dangling bond* genannt und sind energetisch ungünstig und deshalb instabil. Um ihre Energie weiter zu minimieren, gehen diese Atome deshalb auf verschiedenste Weise Bindungen mit den jeweiligen Nachbaratomen ein, wodurch das Kristallgitter für mehrere Atomlagen zer- bzw. gestört wird. Bei Anwesenheit anderer Atome auf der Halbleiteroberfläche, wie z.B. Sauerstoff, verändert sich die Struktur erneut, da sich durch Bindungen mit diesen Adatomen die benötigte Energie erneut senken lässt. Die Oberflächenregionen haben deshalb zumeist eine deutlich vom Kristallgitter verschiedene Bandstruktur, die zudem räumlich variieren kann. Für Leitungselektronen ist es zumeist energetisch vorteilhaft die entstandenen Zustände des Oberflächenbands zu besetzen.[66][67][68][69][70] Hierdurch bildet sich eine Ansammlung von negativer Ladung an der Oberfläche, die durch eine direkt unter der Oberfläche liegende Schicht mit positiver Raumladung neutralisiert wird. Diese an Ladungsträgern verarmte Region wird *depletion region* genannt.

Bei der Herstellung der *Mesa* wird der Wafer durch nass-chemisches Ätzen strukturiert. Hierbei wird ca. 50 nm in die Tiefe geätzt. Unter den Rändern der Maske entstehen somit



---

die seitlichen Wände der *Mesa*. Durch die Zerstörung der regelmäßigen Kristallstruktur und die Bindung von vielen Adatomen wie z.B. Sauerstoff aus der Ätzflüssigkeit, sollten die Verarmungsregionen an diesen Wänden größer sein, als bei der mittels Epitaxie gewachsenen, reinen Oberfläche des Wafers. Aus diesem Grund sind die Einflüsse der *Side-Wall-Depletion* zu berücksichtigen, wenn die optimale Kanalbreite für die Einzelelektronenpumpen gesucht wird.

Leider kann nicht einfach überprüft werden, ab welcher Kanalbreite das *2DEG* komplett von der *Side-Wall-Depletion* verdrängt und somit kein Stromfluss mehr möglich ist. Teilweise werden nämlich auch Gebiete ausgebildet, die Leitungselektronen eine Zeit lang an sich binden können. Diese sogenannte *Traps* lassen die Leitungseigenschaften in ihrer Umgebung stark variieren, da sie nicht die ganze Zeit besetzt oder unbesetzt sind.<sup>4</sup> Wird ein Leitungselektron eingefangen, sinkt dadurch die Leitfähigkeit in dieser Region, da durch die elektrostatische Abstoßung andere Leitungselektronen behindert werden. Es wird für diese Zeit die *Side-Wall-Depletion* lokal durch die *Trap* ergänzt und im Falle eines dünnen Leitungskanals dieser eventuell sogar komplett abgeschnürt, so dass es scheint als wäre die *Side-Wall-Depletion* durchgängig größer. Der geladene Zustand der *Trap* bleibt allerdings nicht dauerhaft bestehen, da das Elektron nach einer nicht vorhersehbaren Zeit austritt und somit die Leitfähigkeit wieder auf den ursprünglichen Wert ansteigt. Dieser Zustand hält so lange an, bis das nächste Elektron eingefangen wird. Sofern die *Trap* nicht nur zwischen zwei Zuständen wechselt, sondern mehrere Möglichkeiten hat ein Elektron zu binden bzw. wieder frei zu geben, springt die Leitfähigkeit nicht nur zwischen zwei Werten sondern zeigt entsprechend mehrere hohe bzw. niedrige Leitfähigkeiten. Da bei dünnen Kanälen die Änderungen der Leitfähigkeit an den Grenzen zur *Side-Wall-Depletion* einen größeren Einfluss auf den Leitwert des Kanals ausüben als bei breiteren Kanälen, sollten dünne Kanäle signifikant größere Schwankungen des Kanalwiderstandes zeigen.[72]

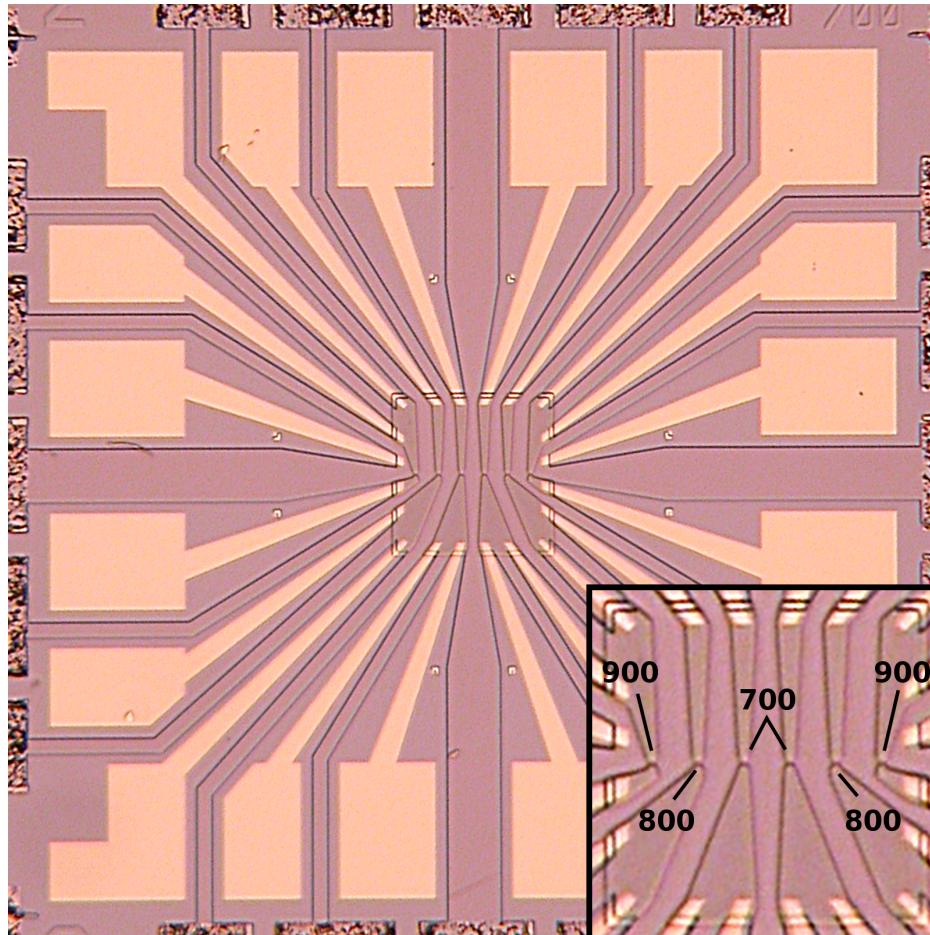
Um im ersten Schritt die Beschaffenheit der *2DEG*-Kanäle zu ermitteln, wurden Proben mit Kanäle verschiedener Breiten<sup>5</sup> hergestellt und bei 4.2 K im flüssigen He4 elektrisch charakterisiert. Die verwendeten Wafer sind *GaAlAs*-Heterostrukturen, die im Rahmen einer Zusammenarbeit vom *National Physical Laboratory (NPL)* zur Verfügung gestellt wurden. Bei dem Aufbau der Wafer unterscheiden diese sich durch die Stärke der Dotierung und der Dicke der *Spacer*-Schicht, die die Dotierschicht vom Übergang zwischen dem *GaAs* und dem *AlGaAs* räumlich trennt. Das in Abbildung 4.7 gezeigte Design der hergestellten Proben besteht aus 6 Kanälen unterschiedlicher Breite, die in Reihe gesetzt sind. Jeweils 2 Zuleitungen an beiden Enden der Kanäle ermöglichen auf diese Weise jeden Kanal mit einer 4-Punkt-Messung zu charakterisieren.

Zum Vergleich sind in der folgenden Tabelle noch einmal die in den späteren Messungen verwendeten Wafer aus Kapitel 3.1 aufgelistet. Die Wafer V125\_1 und V403\_1 wurden

---

<sup>4</sup>Bei den verwendeten *AlGaAs*-Schichten mit einem *Al*-Anteil von 33% treten derartige *Traps* vermehrt auf: DX-Zentren.[71]

<sup>5</sup>Die Kanalbreiten in der Maske betragen: 600 nm, 700 nm, 800 nm, 900 nm, 1  $\mu\text{m}$ , 2  $\mu\text{m}$  und 5  $\mu\text{m}$ . Die Länge der Kanäle in der Maske war immer 2  $\mu\text{m}$  mit der Ausnahme des 5  $\mu\text{m}$ -Kanals, der stattdessen 5  $\mu\text{m}$  lang war.



**Abbildung 4.7.:** Aufnahme einer Probe zum Testen verschiedener Kanalbreiten. Diese variieren zwischen nominell 700 nm bis 900 nm und verlaufen von links nach rechts. In der rechts unten dargestellten Vergrößerung sind die sechs zu untersuchenden *Mesa*-Kanäle mit ihren jeweiligen Kanalbreiten markiert.

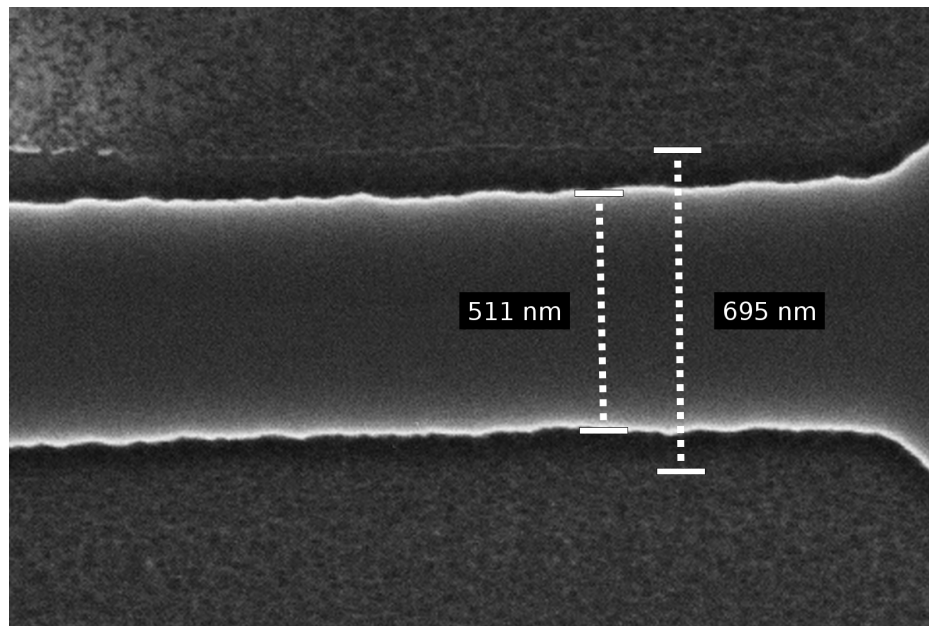
mit möglichst identischen Herstellungsbedingungen hergestellt und sollten demnach relativ ähnliche Werte bezüglich Elektronenbeweglichkeit und Ladungsträgerdichte aufweisen. Direkte Messergebnisse sind jedoch nur von V403\_1, V510\_1 und V523\_1 bekannt.

	Verwendung	Spacer nm	Beweglichkeit $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Ladungsträgerd. $10^{11} \text{ cm}^{-2}$
P640	Parallelschaltung (Kapitel 6.1)	30	0.936	2.77 (@4 K)
P652	Double-Dot-Pumpe (Kapitel 6.3)	35	0.968	2.08 (@4 K)
P948	AC-Stromquelle (Kapitel 6.2)	42	1.970	2.09 (@4 K)
V125_1	<i>Mesa</i> -Kanaltests	20	k.A.	k.A.
V403_1	<i>Mesa</i> -Kanaltests	20	0.77	2.6 (@4 K)
V510_1	<i>Mesa</i> -Kanaltests	40	1.40	1.6 (@4 K)
V523_1	<i>Mesa</i> -Kanaltests	30	0.84	1.6 (@4 K)

In einem Flüssighelium Behälter mit weiter Öffnung wurden die Teststrukturen untersucht. Diese Weithalskanne mit zugehörigem Probenstab ermöglichte es die Kanäle in kurzer Zeit zu überprüfen, da die Wechsel der Proben ohne längeres Einkühlen innerhalb von 30 min möglich sind. Die 4-Punkt-Messungen zur Bestimmung der Kanalwiderstände wurden mit einem Agilent B1500A Semiconductor Device Analyzer bei variierender Spannung über jeden Kanal durchgeführt. Für eine 4-Punkt-Messung sollten nur die angrenzenden beiden Zuleitungspaare angeschlossen werden. Da jedoch auch alle anderen Zuleitungen beim *Bonden* der Probe in einen 20-pin *Leadless Chip Carrier (LCC20)* schon mit den Kontakten des Aufnehmers im Probenstab elektrisch verbunden wurden, sind beim Einbau der Probe in den verwendeten Probenstab auch die nicht beteiligten Zuleitungen an die Konstantandrähte des Probenstabs angeschlossen. Diese enden an Buchsen am Kopfende des Probenstabs und wurden bei der Messung nicht zusätzlich abgeschirmt. Bei den Messungen zeigten sich starke Schwankungen der ermittelten Kanalwiderstände, die wahrscheinlich auf die Fluktuation des *2DEG* im Kanal zurück zu führen sind. Gründe hierfür sind vermutlich die Unterschiede der Thermospannungen der Konstantandrähte, die während des Abkühlens unterschiedliche Kühlleistungen erfahren. Auch andere Fehlerquellen wie z.B. ein Einkoppeln von hochfrequenten Signalen können eventuell beteiligt sein. Da diese Fluktuationen des *2DEGs* gerade bei dünnen Kanälen zu einem Zusammenbruch der Leitung führen können, sind deshalb für diese Kanalbreiten unverhältnismäßig höhere Kanalwiderstände beobachtet worden.

Bei der Herstellung der vergleichbaren Proben aus den NPL Wafern V125\_1 und V403\_1 ist eine unterschiedliche Unterätzung der *Mesa*-Maske aufgetreten,<sup>6</sup> wodurch die Messergebnisse nicht direkt verglichen werden konnten. Im Rasterelektronenmikroskop (REM) wurden daraufhin bei V125\_1 eine Reduzierung der Kanalbreite durch Unterätzung von etwa 102 nm ermittelt. Dies passt zu den ca. 50 nm Ätztiefe, die durch isotropes Ätzen auch auf beiden Seiten des Kanals statt gefunden hat. Wie in Abbildung 4.8 zu sehen, lag bei V403\_1 dieser Wert bei ca. 290 nm, da es aufgrund einer fehlerhaften Aufbringung der Maske zu

<sup>6</sup>Die *Mesa* des Waferstücks V125\_1 wurde im NPL geätzt, während die *Mesa* auf V403\_1 im Reinraum der PTB hergestellt wurde



**Abbildung 4.8.:** Unterätzen bei einem nominell 800 nm breiten *Mesa*-Kanals einer Probe des Wafers V403\_1. Statt den bei Proben der Wafer V125\_1, V510\_1 und V523\_1 beobachteten Verringerung der Kanalbreite von rund 100 nm zeigt diese REM-Aufnahme eine Unterätzung von etwa 290 nm. Bei der Herstellung dieser Proben wurde eine zu dicke Oxidschicht auf der Waferoberfläche zugelassen, so dass bei dem vorbereitenden Ätzschritt mit *HCl*-Lösung ein Spalt zwischen Lackmaske und Wafer entstand. Durch diesen Spalt wurde im eigentlichen Ätzschritt ebenfalls die Oberfläche abgetragen. Dies geschah aber anscheinend deutlich langsamer und ungleichmäßiger, da der Spalt schlechter durchspült wird und somit mitunter keine aktiven Ionen zum Ätzen vor Ort sind. Dieser Vorgang erklärt die zu beobachtende dunklere Region außerhalb der Kanalrands.

einem Unterätzen gekommen ist. Diese rund 200 nm Unterschied finden sich auch in den errechneten Korrekturwerten der beiden Messreihen.

Um die elektrische Flächenleitfähigkeit  $\sigma_{2D}$  zu ermitteln, wird die Länge des Kanals  $\mathcal{L}$  durch die Breite  $\mathcal{B}$  und den gemessenen Widerstand  $R$  geteilt.

$$\sigma_{2D} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}}$$

Durch das Unterätzen und die *Side-Wall-Depletion* ist der am Transport beteiligte Kanal schmaler aber dafür länger als in der *Mesa-Maske* vorgesehen. Um diese Änderungen in der Formel zu berücksichtigen, wird der Korrekturwert  $\Delta$  eingeführt. Dieser fasst die Unterätzung und die *Side-Wall-Depletion* von beiden Seiten des Kanals zusammen und korrigiert dadurch die vorgesehene Länge  $\mathcal{L}$  und Breite  $\mathcal{B}$  zu der tatsächlichen Länge  $\mathcal{L} + \Delta$  und Breite  $\mathcal{B} - \Delta$  des Leitungskanals:

$$\sigma_{2D} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathcal{L} + \Delta}{\mathcal{B} - \Delta}$$

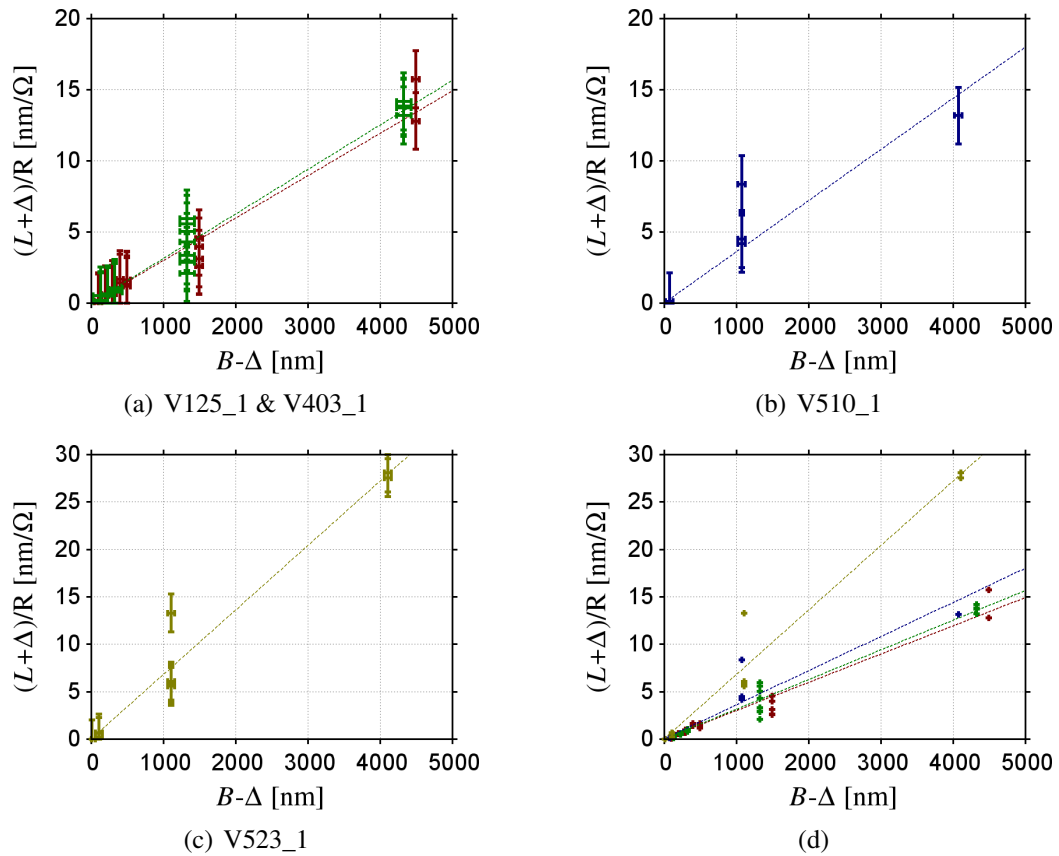
Durch Umformen ergibt sich:

$$\frac{\mathcal{L} + \Delta}{R} = \sigma_{2D} \cdot (\mathcal{B} - \Delta)$$

Wird  $(\mathcal{L} + \Delta)/R$  über  $\mathcal{B} - \Delta$  aufgetragen, lässt sich mittels linearer Regression aus der Steigung der Geraden ein Wert für  $\sigma_{2D}$  errechnen. Für ein geeignetes  $\Delta$  läuft diese Regressionsgerade durch den Ursprung, wodurch dieser Wert für  $\Delta$  die gesuchte Korrektur für diese Messreihe ist. In Abbildung 4.9 sind die Messergebnisse und die zugehörigen Regressionsgeraden dargestellt. Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in folgender Tabelle zu finden:

	Spacer nm	Beweglichkeit $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Ladungsträgerd. $10^{11} \text{ cm}^{-2}$	$\Delta$ nm	$\sigma_{2D}$ mS	Bestimmtheitsmaß
V125_1	20	k.A.	k.A.	505.8	2.98	95.4%
V403_1	20	0.77	2.6 (@4 K)	678.5	3.13	97.2%
V510_1	40	1.40	1.6 (@4 K)	930.7	3.60	76.1%
V523_1	30	0.84	1.6 (@4 K)	895.6	6.80	95.6%

Wie zu erwarten unterscheiden sich bei V125\_1 und V403\_1 die Werte für die Flächenleitfähigkeit  $\sigma_{2D}$  nur geringfügig. Der Unterschied der beiden  $\Delta$  entspricht in etwa den bereits angesprochenen 200 nm, die bei REM-Aufnahmen zu beobachten waren. Werden rund 100 nm bzw. für V403\_1 entsprechend ca. 300 nm abgezogen ergeben sich für die *Side-Wall-Depletion* (SWD) folgende Werte:



**Abbildung 4.9.:** Zur Bestimmung der *Side-Wall-Depletion* wurden die Widerstände durch Kanäle mit verschiedene Kanalbreiten für die untersuchten Wafer gemessen. Indem diese, wie im Text erläutert, mit der angepassten Kanallänge  $\mathcal{L} + \Delta$  verrechnet und über die angepasste Kanalbreite  $\mathcal{B} - \Delta$  aufgetragen wurden, ergibt sich die Flächenleitfähigkeit  $\sigma_{2D}$  aus der Steigung der Regressionsgeraden. Das für jeden untersuchten Wafer individuelle  $\Delta$  entspricht der Summe aus dem beidseitigen Ätzabtrag und der beidseitigen *Side-Wall-Depletion*. Die jeweiligen Werte der Steigungen  $\sigma_{2D}$  und der Korrekturwert  $\Delta$  sind in der Tabelle auf Seite 85 zu finden. Dort findet sich ebenfalls das jeweilige Bestimmtheitsmaß der linearen Regression.

In (a) sind die aus der Messung gewonnenen Punkte der beiden sehr ähnlichen Wafer V125\_1 (rot) und V403\_1 (grün) aufgetragen. Die unterschiedlich langen Fehlerbalken für  $\mathcal{B} - \Delta$  ergeben sich durch den verunglückten Ätzprozess bei V403\_1.

Grafik (b) zeigt in blau die berechneten Punkte für den Wafer V510\_1. Die Regressionsgerade kann in diesem Fall nur mit einem Bestimmtheitsmaß von 76.1% durch die Punkte gelegt werden, da von den fünf Punkten zwei deutlich abweichen.

In Grafik (c) sind die Punkte für den Wafer V510\_1 und die zugehörige Regressionsgerade in gelb abgebildet.

In (d) sind nun alle vorherigen Punkte und Geraden gemeinsam aufgetragen. In dieser Grafik wurde zur besseren Übersicht auf die Fehlerbalken verzichtet.

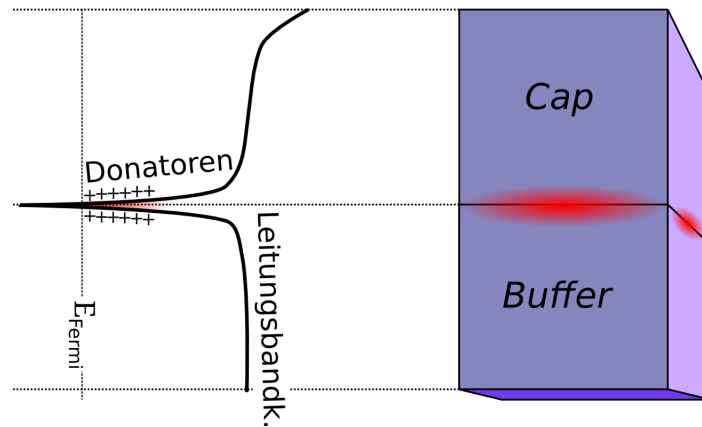
	<i>Spacer</i> nm	Beweglichkeit $10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$	Ladungsträgerdichte $10^{11} \text{ cm}^{-2}$	<i>SWD</i> (Summe beider Seiten) nm
V125_1	20	k.A.	k.A.	$\approx 400$
V403_1	20	0.77	2.6 (@4 K)	$\approx 400$
V510_1	40	1.40	1.6 (@4 K)	$\approx 850$
V523_1	30	0.84	1.6 (@4 K)	$\approx 800$
P640	30	0.936	2.77 (@4 K)	650*
P652	35	0.968	2.08 (@4 K)	700*
P948	42	1.970	2.09 (@4 K)	750*

Da die für die späteren Messungen verwendeten Wafer P640, P652 und P948 nicht exakt mit den getesteten Wafern vergleichbar sind, wird ihre *Side-Wall-Depletion* andere Werte annehmen. Die hier gewonnenen Werte können somit nur als Abschätzung für die zu erwartende *SWD* bei P640, P652 und P948 dienen. Da eine höhere Ladungsträgerdichte tendenziell eher die *SWD* verringert,[72] könnten somit trotz vergleichbarer *Spacer*-Dicke, niedrigere Werte erreicht werden. Die in der Tabelle mit Sternen versehenen Werte werden im folgenden als Abschätzung verwendet. Da die *Side-Wall-Depletion* entlang der *Mesa*-Kanten nicht konstant verläuft, sondern z.B. stark von lokalen Störstellen abhängt, sind zur Bestimmung der Dimensionen des Dots in der Pumpe in jedem Fall nur Abschätzungen möglich. Für die in Kapitel 6 präsentierten Messungen sollten demnach Kanalbreiten von ca. 800 nm gewählt werden.

### 4.3.2. Untersuchungen an deltatdotierten *GaAs*-Wafern

Um eine Einzelelektronenpumpe zu realisieren, wird eine Engstelle zwischen zwei elektrisch leitenden Gebieten benötigt, die durch angelegte Steuerimpulse für Elektronen komplett gesperrt werden kann. Hierzu wird zumeist ein Halbleitermaterial mit *2DEG* gewählt, welches sich mittels üblicher Ätzverfahren mit hoher Reproduzierbarkeit in großen Stückzahlen herstellen lässt. *GaAs-AlGaAs*-Heterostrukturen finden in der Forschung viel Verwendung, da sich in diesen Systemen bei tiefen Temperaturen *2DEGs* mit hohen Beweglichkeiten erzeugen lassen. Durch die Trennung der Dotieratome von der *2DEG*-Ebene ist dort die Kristallstruktur nahezu fehlerfrei und deshalb besonders geeignet für Messungen an ballistischen Elektronen. Es gibt jedoch auch weitere *2DEG*-Systeme, die andere Vorteile aufweisen. Wird auf die Schichtung von *AlGaAs* auf das *GaAs* verzichtet und die Dotierung nur in einer dünnen Lage beim epitaktischen Wachsen des Wafers eingebracht, so bildet sich ein *2DEG* in der Ebene der Dotierung. Da die Dotierung ähnlich einer Deltafunktion verteilt ist, wird sie im folgenden Deltadotierung genannt. Da mit absinkender Temperatur die Elektronen im *2DEG* wieder stärker an die Dotieratome gebunden werden, sinkt die Leitfähigkeit bei dieser Dotierung bis letztlich aufgrund überlappender Wellenfunktionen der gebundenen Elektronen nur noch eine schwache Störstellenleitung vorliegt. Umgekehrt bedeutet dies jedoch auch, dass Proben mit dieser Dotierungsart eher für höhere Betriebstemperaturen geeignet sind. Als weiterer Vorteil ähnelt der Aufbau von diesem deltatdotierten *GaAs* den

Standard-Silizium-Systemen, bei denen ebenfalls durch die Dotierung die leitenden Schichten definiert werden. Somit wäre ein Wechsel zu Silizium als Standard-Halbleitermaterial eventuell einfacher, da die gewonnenen Erfahrungen sich teilweise übertragen lassen.



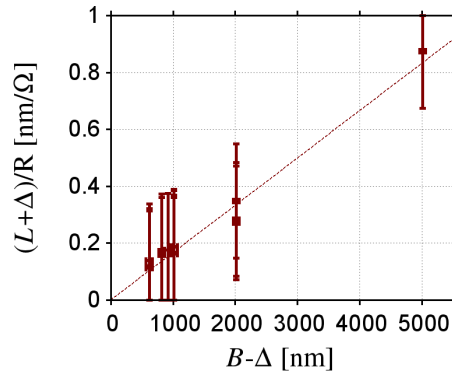
**Abbildung 4.10.:** Schematische Darstellung eines *GaAs*-Wafers mit Deltadotierung (rechts) und dem resultierenden Verlauf des Leitungsbandes (links). Genau wie bei Abbildung 3.1 wurde auch hier die aus *GaAs* bestehende *Cap*- und *Buffer*-Schicht violett eingefärbt. Da die Dotierung mit Silizium nur in einer dünnen Schicht epitaktisch aufgebracht wurde, ist in dem Schema keine gesonderte *Supply*-Schicht eingezeichnet. Durch die lokalisierte Dotierung wird das Leitungsband zu niedrigeren Energien verbogen, so dass in dieser stark dotierten Schicht die Fermi-Energie  $E_{\text{Fermi}}$  unterschritten wird. Anders als die Grafik vermuten lässt, sitzen die Donatoren hauptsächlich genau am Übergang der beiden Schichten und somit im Bereich des in rot angedeuteten *2DEGs*. Durch die richtige Platzierung der eingezeichneten Donatoren wäre jedoch die Grafik im Bereich der Deltadotierung nicht mehr übersichtlich geworden.

Ein *GaAs*-Wafer mit einer in 30 nm Tiefe eingebauten Silizium-Deltadotierung mit der Konzentration von  $5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  wurde als Ausgangswafermaterial gewählt. Eine schematische Darstellung des Verlaufs des Leitungsbandes ist in Abbildung 4.10 dargestellt. Um die Kanaleigenschaften zu bestimmen, wurden die ersten Messungen an Kanälen verschiedener Breite entsprechend wie im vorigen Abschnitt durchgeführt. Für diese Messreihe konnte kein sinnvoller Wert für die Kanalbreitenreduktion  $\Delta$  gefunden werden.

Wie in Abbildung 4.11 zu sehen, ist der Wert für  $\Delta = -14.2 \text{ nm}$ . Der Leitungskanal scheint somit breiter als der *Mesa*-Kanal zu sein. Aufgrund der Deltadotierung wird beim Ätzen die *2DEG*-Ebene direkt angegriffen und somit befindet sich diese bei der stehen gebliebenen *Mesa* in gleicher Höhe wie die geätzten Seitenwände. Ohne eine ausreichende Isolierung kommt demnach das *2DEG* in elektrischem Kontakt mit der durch die Adatome dotierten Oberfläche. Das negative  $\Delta$  kann so gedeutet werden, dass die Oberfläche ebenfalls leitend ist und somit ein Teil des Stroms über diese parallel geführt wird. Zwischen *2DEG* und der leitenden Oberfläche besteht anscheinend eine elektrische Verbindung. Wenn dies zutrifft, sind das *2DEG* und auf die Halbleiteroberfläche aufgebrachten Top-Gate-Strukturen nur durch eine Schottky-Barriere von einander elektrisch getrennt.[57]

Diese Vermutung wurde in weiteren Messungen bestätigt: Wurden über den geätzten *Mesa*-





**Abbildung 4.11.:** Die *Side-Wall-Depletion* des deldotierten *GaAs*-Wafers ergibt den Wert  $\Delta = -14.2$  nm. Da zumindest die Reduzierung der Kanalbreite durch das isotrope Ätzen in der Größenordnung von rund 100 nm liegt, wäre sogar Werte für  $\Delta < 100$  nm untypisch. Die Flächenleitfähigkeit beträgt  $\sigma_{2D} = 0.166$  mS. Das Bestimmtheitsmaß der Regressionsgeraden erreicht den Wert 97%. Mit derartig großen Fehlerbalken ist die Aussagekraft der Messung eher gering. Die späteren Messungen bestätigten jedoch das Fehlen einer trennenden *Side-Wall-Depletion*, so dass die metallischen Top-Gates nicht mehr gegen das *2DEG* isoliert sind.

Kanal Top-Gates aufgebracht und diese negativ geladen, flossen signifikante Leckströme. Dies führt dazu, dass auch mit starken negativen Spannungen am Gate der Strom zwischen *Source* und *Drain* nicht komplett blockiert werden konnte. Eine Abschnürung des *2DEG*s im Kanal ließ sich demnach nicht messen.

Wie sich gezeigt hat, sind bei der Entwicklung von Einzelelektronenpumpen in diesen Systemen zusätzliche Maßnahmen erforderlich, damit die Oberfläche vom *2DEG* getrennt werden kann. Die zwischen Halbleiter und Metall vorhandene Schottky-Barriere reicht für den Einsatz der Top-Gates nicht aus. Ohne eine ausreichend isolierende Schicht können keine sinnvollen Charakterisierungen gemacht werden, da sich die von der Pumpe erzeugten Ströme nicht unabhängig von den auftretenden Leckströmen messen lassen. Daher wurde die Entwicklung mit diesem Halbleitermaterial nicht weiterverfolgt.

## 4.4. Zusammenfassung: Aufbau und Vorbereitungen

Der verwendete HelioxTL-Kryostat von Oxford Instruments erreicht bei einer Temperatur von 450 mK eine Kühlleistung von ca. 5 mW. Da der Wärmeeintrag bei dem verwendete Probenstab hauptsächlich nur über die beiden HF-Leitungen erfolgt und somit kaum höher als in der Spezifizierung ist, weicht die erreichbare Minimaltemperatur nur wenig von der Basistemperatur bei ca. 300 mK ab. Selbst bei langen Messzyklen, bei denen höhere Temperaturen zugelassen werden, sollte die Temperatur unterhalb von 1 K bleiben.

Die Messung der Pumpströme erfolgt über eine symmetrische Operationsverstärkerschaltung, die den erzeugten Pumpstrom in eine Spannung übersetzt. Diese wird durch einen *ADC* digitalisiert und an den Messrechner übermittelt. Die an der Probe anliegenden Spannungen wurden bis auf das HF-Signal von einem *DAC* geliefert. Der verwendete Frequenzgenerator (R&S SMC 100A) ermöglicht es Pumpfrequenzen bis zu 1.1 GHz über ein Bias-Tee einzukoppeln. Das Messsystem aus Probenstab und den angeschlossenen Leitungen zu den verwendeten Geräten hat eine Resonanzfrequenz von 41.6 MHz. Die Abschätzung der an der Probe anliegenden HF-Leistung erfolgt durch die Betrachtung der Pumpregion. Strommessungen bei gesperrter Pumpe zeigen Schwankungen von einigen pA. Die Messunsicherheit  $\zeta$  des verwendeten Messaufbaus kann bei den Messungen bis zu  $1.5 \times 10^{-12}$  A betragen.

Messungen an *Mesa*-Kanäle aus Halbleiterwafern mit ähnlichen Charakteristiken lieferten Werte für die *Side-Wall-Depletion* zwischen etwa 390 nm und 450 nm. Als Abschätzung für die *Side-Wall-Depletion* der Kanäle der nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen werden Werte in der Größenordnung von 650 nm bis 750 nm verwendet.

Der Einsatz von Halbleitermaterial mit einem *2DEG* in der Ebene der Deltadotierung kann nur mit einem zusätzlichen Lithographieschritt gelingen, bei dem eine Isolatorschicht zwischen Top-Gates und *Mesa*-Kanal aufgebracht wird. Ohne diese Schicht wird sonst das *2DEG* nur durch die Schottky-Barriere zwischen Halbleiter und Metall von den Elektronen in den Top-Gates getrennt. Bei den an den Gates mitunter anliegenden negativen Spannungen von  $< -100$  mV reicht diese geringe Barriere nicht mehr aus.

---

## 5. MODELLIERUNG DES PUMPPROZESSES

Um die Funktionsweise der nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen zu beschreiben, wird in diesem Kapitel eine Theorie hergeleitet, die sich hauptsächlich an den Veröffentlichungen von Bernd Kästner und Vyacheslavs Kashcheyevs orientiert.[21][11][13] [22][73][45] Diese vollständige Herleitung eines allgemeineren Modells wird erstmals die Möglichkeit zur Auswertung bisher ungeeigneter Messkurven bieten. Der Zusammenhang zwischen den Parametern der Theorie und den Betriebsparametern der Pumpe wird untersucht und die gemachten Annahmen wenn möglich anhand von Messungen verifiziert. Zum Schluss wird noch eine Erweiterung zur Betrachtung der Spin-Zusammensetzungen während des Pumpens entwickelt. Diese soll für zukünftige Spin-Experimente zur Verfügung stehen.

### 5.1. Beschreibung des Pumpvorgangs durch Ratengleichungen

Für die theoretische Beschreibung des sich zeitlich verändernden Ladezustands eines Quanten-Dots, sollten sämtliche Tunnelereignisse aufgeführt werden. Da sich die Anzahl von Elektronen im Quanten-Dot aufgrund von zufälligen Tunnelereignissen unvorhersehbar verändert, ist es sinnvoll stattdessen die Besetzungswahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Elektronen im Quanten-Dot anzugeben. Die unregelmäßigen Tunnelereignisse können dann in zeitlich gemittelte Tunnelraten für die verschiedenen Übergänge im Quanten-Dot zusammengefasst werden. Die Änderungen der beiden Reservoirs *Source* und *Drain* werden in der verwendeten Markow-Näherung nicht berücksichtigt, wodurch sie bei Tunnelereignissen instantan in den vorherigen Zustand übergehen.[74, Kapitel 3]

Die dabei entstehenden Tunnelraten lassen sich in drei Gruppen aufteilen: In der einen Gruppe ändert sich die Besetzung nur um ein Elektron, da dieses entweder in den Quanten-Dot hinein oder hinaus tunnelt. In der zweiten Gruppe ändert sich die Besetzungszahl nicht, da gleichzeitig genauso viele Elektronen hinein wie hinaus tunnelt, und in der letzten Gruppe wird die Besetzung um mehr als ein Elektron verändert. Für die Anzahl der im Dot befindlichen Elektronen spielen die Tunnelraten der zweiten Gruppe keine Rolle.<sup>1</sup> Im Gegensatz dazu

---

<sup>1</sup>Bei Betrachtungen des Spins wären diese jedoch nicht zu vernachlässigen.

führen die Tunnelraten der dritten Gruppe zu einer stärkeren Änderung der Besetzungszahl im Quanten-Dot. Sofern diese Übergänge jedoch weniger wahrscheinlich als die vergleichbar zusammengesetzten Übergänge aus der ersten Gruppe sind, dominieren die Tunnelraten der ersten Gruppe. In diesem Fall bietet es sich an, die Mehrelektronen-Tunnelereignisse als gleichzeitig stattfindende Einzelelektronen-Tunnelereignisse aufzufassen. Hierdurch wachsen die Tunnelraten der ersten Gruppe um die Anteile der dritten Gruppe an, die unter diesem Aspekt nicht mehr berücksichtigt werden müssen. Sollten allerdings Mehrelektronen-Tunnelereignisse nicht vernachlässigbar selten sein, würden einige Besetzungszahlen zusätzlich stabilisiert. Wenn sich nur wenige oder fast schon zu viele Elektronen im Quanten-Dot aufhalten, sind manche Mehrelektronenprozesse nicht mehr möglich. So wäre z.B. ein eventuell favorisiertes hinaus Tunneln von 2-Elektronen für den 1-Elektron-Besetzungszustand nicht möglich.

Durch Multiplizieren der Raten mit der zugehörigen Besetzungswahrscheinlichkeit ergibt sich die jeweilige Anzahl an entsprechenden Tunnelereignissen in einem Zeitintervall. Da sich jedoch die Tunnelraten sowie die Besetzungswahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von der variierenden Potentiallandschaft des Dots zeitlich verändern, gilt dies nur für infinitesimal kurze Zeitintervalle. Mit diesen Tunnelraten und den Besetzungswahrscheinlichkeiten lässt sich eine Ratengleichung für jede Besetzungswahrscheinlichkeit aufstellen

$$\dot{\mathcal{P}}_n = \Gamma_{n+1}\mathcal{P}_{n+1} + \Xi_{n-1}\mathcal{P}_{n-1} - \Gamma_n\mathcal{P}_n - \Xi_n\mathcal{P}_n \quad (5.1)$$

Mit  $\mathcal{P}_n$  wird die Besetzungswahrscheinlichkeit des Dots mit  $n$  Elektronen angegeben.  $\mathcal{P}_{n+1}$  und  $\mathcal{P}_{n-1}$  stehen somit für Besetzungswahrscheinlichkeiten mit einem Elektron mehr bzw. weniger.  $\dot{\mathcal{P}}_n$  symbolisiert die zeitliche Ableitung der Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_n$ .  $\Gamma_{n+1}$  und  $\Gamma_n$  sind die Tunnelraten aus dem Quanten-Dot bei einer Besetzung mit  $n + 1$  bzw.  $n$  Elektronen.  $\Xi_n$  und  $\Xi_{n-1}$  dagegen stehen für die Raten, mit denen Elektronen in den Quanten-Dot bei einer Besetzung mit  $n$  bzw.  $n - 1$  Elektronen tunneln. Da bis jetzt noch nicht unterschieden wurde, ob die Tunnelereignisse mit der *Source*- oder der *Drain*-Seite zu tun hatten, könnte man jedes  $\Gamma$  bzw.  $\Xi$  auch als Summe über den Anteil von *Source* und *Drain* schreiben

$$\Gamma \equiv \Gamma_S + \Gamma_D \quad ; \quad \Xi \equiv \Xi_S + \Xi_D \quad (5.2)$$

Für den allgemeinen Fall ist diese Unterscheidung aber noch nicht relevant. Wie in der Gleichung (5.1) ersichtlich, nimmt die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_n$  über die Zeit durch die Terme  $\Gamma_{n+1}\mathcal{P}_{n+1}$  und  $\Xi_{n-1}\mathcal{P}_{n-1}$  zu. Beim ersten Term zerfällt der höhere Besetzungszustand durch ein heraus tunnelndes Elektron von  $n + 1$  nach  $n$  und beim zweiten Term tunnelt ein weiteres Elektron hinein und füllt somit den niedrigeren Zustand von  $n - 1$  nach  $n$  auf. Bei den Termen mit einer Besetzung des Quanten-Dots mit  $n$  Elektronen wirken sich jedoch sowohl ein Zerfall sowie ein Auffüllen verständlicherweise negativ auf die Besetzungswahrscheinlichkeit aus. Da es sich bei den  $\mathcal{P}_n$  um Wahrscheinlichkeiten handelt, können sie nicht negativ werden und deshalb gilt  $0 \leq \mathcal{P}_n \leq 1$ . Zudem muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten gleich eins sein. Deshalb gilt für ein System mit einer maximalen Besetzung von  $N$  Elektronen für die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n \equiv 0$  falls  $n > N$ . Alle anderen

Wahrscheinlichkeiten ergeben in der Summe eins

$$\sum_n \mathcal{P}_n \equiv \sum_{n=0}^N \mathcal{P}_n \equiv 1 \quad (5.3)$$

Da bei einer Besetzung mit null Elektronen kein weiterer Zerfall auftritt, ist  $\Gamma_0 \equiv 0$ . Entsprechend gilt für  $\Xi_N \equiv 0$ , da kein weiteres Elektron mehr aufgefüllt werden kann.

### 5.1.1. Beschränkung auf ein einziges gepumptes Elektron

Wenn für eine einfache Beschreibung des gesamten Pumpzyklus zunächst angenommen wird, dass der Quanten-Dot nur ein einziges Elektron aufnehmen kann ( $N = 1$ ), vereinfacht sich Gleichung (5.1) zu

$$\dot{\mathcal{P}}_1 = \Xi_0 \mathcal{P}_0 - \Gamma_1 \mathcal{P}_1 = \Xi_0(1 - \mathcal{P}_1) - \Gamma_1 \mathcal{P}_1 = -\dot{\mathcal{P}}_0 \quad (5.4)$$

Diese Annahme ist gerechtfertigt, wenn der Energieabstand  $\mu_2 - \mu_1$  zum nächsthöheren Besetzungszustand größer als die Unterschiede der chemischen Potentiale von *Source* oder *Drain* ist. Indem die chemischen Potentiale  $\mu_S$  (*Source*) bzw.  $\mu_D$  (*Drain*) durchgängig energetisch unterhalb von  $\mu_2$  bleibt, kann das zweite Dot-Niveau für den Ladungstransport vernachlässigt werden.

Zudem sollte die Temperatur und damit die Breite der Energieverteilung der Elektronen gering sein, so dass  $\mu_2 - \mu_1 > k_B T$  gilt.

Als weitere Einschränkung muss auch die Pumpfrequenz  $f$  klein genug gewählt werden, da sonst aufgrund der Energie-Zeit-Unschärfe  $\mu_2 - \mu_1 > hf$  nicht eingehalten wird und somit über diesen Mechanismus der Energieabstand überwunden wird. Dieser spezielle Fall wurde bereits in Referenz [11] aus Referenz [21] hergeleitet und in [75] bestätigt. Vergleicht man Referenz [11, Gleichung (2)] mit Gleichung (5.4), so folgt mit den oben genannten Bedingungen

$$\hbar\Gamma_1 = \hbar\Gamma_{S1} + \hbar\Gamma_{D1} \rightarrow Y_S(1 - \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_S)) + Y_D(1 - \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_D))$$

und

$$\hbar\Xi_0 = \hbar\Xi_{S0} + \hbar\Xi_{D0} \rightarrow Y_S \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_S) + Y_D \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_D)$$

Die Tunnelkopplung  $Y$  ist für resonantes Tunneln, d.h. beim Tunneln zwischen dem Dot-Niveau  $\mu_1$  und Zuständen mit identischer Energie in den Zuleitungen, für rein und raus tunnelnde Elektronen identisch. Die zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}_1$  hängt maßgeblich mit den Unterschieden der Kopplung mit *Source*  $Y_S$  bzw. der Kopplung mit *Drain*  $Y_D$  zusammen. Im gleichen Maße wirken sich auch Unterschiede in den Wahrscheinlichkeiten geeignete Zuleitungszustände in *Source* bzw. *Drain* vorzufinden aus. Diese Wahrscheinlichkeiten sind durch die Fermi-Verteilung aus Gleichung (2.3)

gegeben:

$$\Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu) = \frac{1}{\exp\left(\frac{\mu_0 - \mu}{k_B T}\right) + 1}$$

Somit ergibt sich unter diesen speziellen Bedingungen durch Einsetzen in Gleichung (5.4) folgende Ratengleichung<sup>2</sup>

$$\hbar \dot{\mathcal{P}}_1 = Y_S [\Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_S) - \mathcal{P}_1] + Y_D [\Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_D) - \mathcal{P}_1] \quad (5.5)$$

Die Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung kann durch Variation der Konstanten ermittelt werden. Speziell für den Fall von zeitunabhängigen Tunnelkopplungen ( $\dot{Y} = 0$ ) und zeitunabhängigen Besetzungswahrscheinlichkeiten von *Source* bzw. *Drain* ( $\dot{\Theta}_{\text{Fermi}} = 0$ ) ist mit der Randbedingung  $\mathcal{P}_1(0) = 0$  die Lösung<sup>3</sup> somit

$$\mathcal{P}_1(t) = \frac{Y_S \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_S) + Y_D \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_D)}{Y_S + Y_D} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y_S + Y_D}{\hbar} t\right) \right] \quad (5.6)$$

Mit zunehmender Zeit  $t$  nimmt der Exponentialterm immer weiter ab und es stellt sich ein gewichteter Mittelwert zwischen den Besetzungswahrscheinlichkeiten von *Source* bzw. *Drain* ein. Solange die Veränderungen der Tunnelkopplungen langsam im Verhältnis zu diesem Ausgleichsprozess sind, da die Pumpfrequenz  $f \ll \frac{Y_S + Y_D}{10\hbar}$ , lässt sich die Gleichung (5.6) auch für die beim Pumpen nötigen Übergänge zwischen Einfangphase und Auswurfphase nutzen. Somit kann durch geeignete Manipulation des Dot-Niveaus ein kompletter Pumpzyklus realisiert werden. Wie in Referenz [21] beschrieben, muss dafür die Pumpe so betrieben werden, dass nur ein einzelnes Elektron in den Dot gelangen kann. Der Einladeprozess findet unter Bedingungen statt, die zunächst das Tunneln von Elektronen in den Dot aus *Source* gegenüber *Drain* bevorzugen. Danach werden die Tunnelkopplungen derart verändert, dass der geladene Dot mehr an *Drain* als an *Source* ankoppelt. Wenn nun das besetzte Dot-Level energetisch angehoben wird und dabei in Resonanz mit dem chemischen Potential von *Drain* gelangt, beginnt der Ausladeprozess des Quanten-Dots.

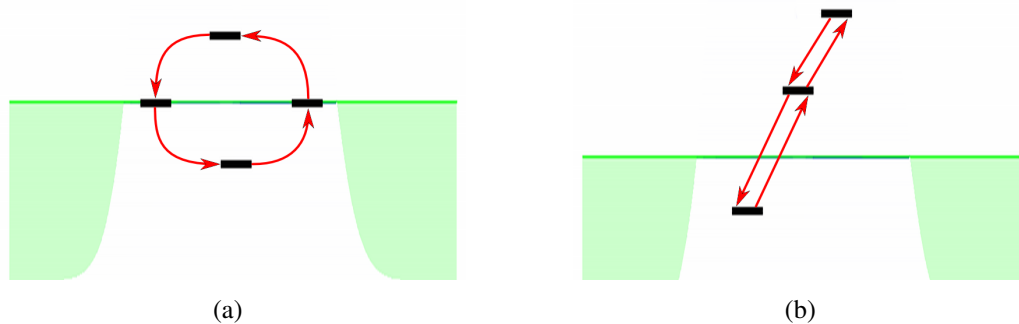
Die gefundene Lösung beschreibt den adiabatischen Fall mit nur einem beteiligten Dot-Level. Der Ladungsaustausch wurde eingangs allein auf resonantes Tunneln beschränkt, die Tunnelraten  $\Gamma_1$  und  $\Xi_0$  in Gleichung (5.4) ließen sich jedoch jeweils auch durch ein Integral von Tunnelkopplung und Besetzungswahrscheinlichkeit über ein Energieintervall abhängig von  $k_B T$  ersetzen. An der grundsätzlichen Struktur der gefundenen Lösungsgleichung mit dem gewichteten Mittelwert der Besetzungswahrscheinlichkeiten würde dies nur wenig ändern.

In Abbildung 5.1 werden der eben beschriebene adiabatische (a) und der in dieser Arbeit genutzte nicht-adiabatische Pumpzyklus (b) verglichen. Die Beschreibung des nicht-adiabatischen Pumpzyklus ist im Abschnitt 2.5.1 zu finden.

---

<sup>2</sup>Die aus dem zitierten Artikel noch kürzere Ratengleichung  $\hbar \dot{\mathcal{P}}_1 = (Y_S + Y_D) [\Theta_{\text{Fermi}}(\mu_0 - \mu) - \mathcal{P}_1]$  ergibt sich für den Fall, dass keine Bias-Spannung zwischen *Source* und *Drain* anliegt und somit  $\mu_S = \mu_D = \mu$ .

<sup>3</sup> $\mathcal{P}_1(t) = \exp\left(-\frac{Y_S + Y_D}{\hbar} t\right) + \frac{Y_S \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_S) + Y_D \Theta_{\text{Fermi}}(\mu_1 - \mu_D)}{Y_S + Y_D} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{Y_S + Y_D}{\hbar} t\right) \right]$  ergibt sich für den Fall  $\mathcal{P}_1(0) = 1$



**Abbildung 5.1.:** Vergleich der Pumpschema von einer adiabatischen und der nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe. Das Dot-Niveau bei  $\mu_1$  ist für vier Momentaufnahmen als schwarzer Balken dargestellt. Die roten Pfeile verdeutlichen den Verlauf der räumlichen und energetischen Verschiebung. In grün sind entsprechend wie in Abbildung 2.3 die besetzten Zustände in *Source* (links) und *Drain* (rechts) gezeigt.

Grafik (a) zeigt schematisch den Weg des Dot-Niveaus beim adiabatischen Pumpen. Da nur bei einem unendlich langsamen Durchlauf Thermalisierungsprozesse komplett ausgeschlossen werden kann, ist dieser Pumpzyklus bei realen Pumpen nur quasi-adiabatisch. Die beiden (nicht dargestellten) Barrieren zwischen Dot und *Source* bzw. *Drain* werden phasenverschoben moduliert und hierdurch das Dot-Niveau abwechselnd mit *Source* und *Drain* in Kontakt gebracht. Dazwischen durchläuft das Dot-Niveau eine Bahn, bei der es auf dem Weg von *Source* nach *Drain* energetisch unterhalb von  $\mu_S$  absinkt und nach dem Entladen des Elektrons nach *Drain* auf dem Rückweg zunächst energetisch oberhalb von  $\mu_D$  bleibt.

Das nicht-adiabatischen Pumpen dagegen wird nur durch eine variierende Barriere erreicht und der Weg des Energie-Levels verläuft, wie in Grafik (b) zu sehen, in etwa auf einer Geraden. Auf dem Hin- und Rückweg durchläuft das Dot-Niveau somit die mittlere eingezeichnete Position (dort sind folglich zwei der vier eingezeichneten Positionen des Dot-Niveaus deckungsgleich). Dieser Pumpzyklus wird in den folgenden Abschnitten erläutert.

Während das Dot-Niveau bei (a) durch die beiden (nicht dargestellten) Barrieren nach dem Beladen mit dem Elektron aus *Source* energetisch absinkt und erst beim Entladen auf der *Drain*-Seite wieder energetisch oberhalb des chemischen Potentials  $\mu_D$  ansteigt, wird das Dot-Niveau im nicht-adiabatischen Fall (b) in diesem Zeitintervall stets energetisch angehoben.[73] Bei diesem Pumpzyklus kann im adiabatischen Grenzfall, d.h. bei zu niedrigen Pumpfrequenzen  $f$ , kein Elektron von *Source* nach *Drain* befördert werden, da ein aus *Source* stammendes, im Dot befindliches Elektron mit nahezu 100%-iger Sicherheit wieder zurück nach *Source* tunnelt. Andererseits gelingt mit dem gezeigten Zyklus ein gerichteter Elektronentransport bei höheren Pumpfrequenzen  $f > \frac{Y_S + Y_D}{\hbar}$ . In den folgenden Abschnitten wird unter dem Namen *Decay Cascade* ein theoretisches Modell zur Beschreibung des für diesen Pumpzyklus entscheidenden Einfangprozesses hergeleitet.

### 5.1.2. Decay-Cascade-Theorie

Beim nicht-adiabatischen Pumpen sind nicht mehr alle Ausgleichsprozesse viel schneller als die Pumpfrequenz. Daraus folgt, dass die Tunnelkopplungen und damit die Tunnelraten nicht mehr als zeitlich konstant angenommen werden können. Des Weiteren findet während der Einfangphase in vielen Fällen ein Rücktunneln aus dem Quanten-Dot statt. Deshalb sollte Gleichung (5.1) nicht auf den Fall  $N = 1$  vereinfacht werden. Sobald jedoch der übervolle Quanten-Dot energetisch über das chemische Potential von *Source* und *Drain* angehoben wurde, werden bei tiefen Temperaturen nur sehr selten weitere Elektronen in den Dot hinein tunnelt. Wie bereits im Abschnitt 2.5.1 beschrieben, lassen sich dann die letztlich eingefangenen Elektronen durch eine ausreichend hohe Eingangsbarriere nach *Drain* auswerfen. Die Einlade- und Auswurfphase spielt deshalb bei der Berechnung des erzeugten Pumpstrom in den meisten Fällen nur eine untergeordnete Rolle. Aus diesem Grund kann die theoretische Beschreibung des Pumpvorgangs auf die Einfangphase beschränkt und zudem in guter Näherung für alle  $\Xi \equiv 0$  angenommen werden. Diese Einschränkungen entsprechen dem *Universal Decay Cascade Model* von Vyacheslavs Kashcheyevs und Bernd Kästner.[22] In Anlehnung an dieses Modell werden im Folgenden die Herleitungen gemacht.

Mit der Einschränkung auf die  $\Gamma$  als einzige Tunnelraten ergibt sich die Ratengleichung

$$\dot{\mathcal{P}}_n = \Gamma_{n+1}\mathcal{P}_{n+1} - \Gamma_n\mathcal{P}_n \quad (5.7)$$

Die Bedingungen aus Gleichung (5.3) sowie  $\Gamma_0 \equiv 0$  gelten dabei weiterhin. Die Lösung dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung lässt sich iterativ finden. Für den zu Beginn der *Decay Cascade* mit  $N$  Elektronen besetzten Dot gilt für alle  $n < N$ :

$$\mathcal{P}_n(t) = \int_{t_0}^t \exp\left(-\int_{\tau_1}^t \Gamma_n(\tau_2) d\tau_2\right) \cdot \Gamma_{n+1}(\tau_1)\mathcal{P}_{n+1}(\tau_1) d\tau_1 \quad (5.8)$$



Zur Berechnung der Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_n(t)$  wird das nächsthöhere  $\mathcal{P}_{n+1}(t)$  benötigt. Da der Dot am Anfang mit  $N$  Elektronen startet und während der *Decay Cascade* keine Elektronen in den Dot hinein tunneln, folgt die zeitliche Entwicklung von  $\mathcal{P}_N(t)$  einem exponentiellen Zerfall mit variabler Zerfallsrate:

$$\mathcal{P}_N(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^t \Gamma_N(\tau) d\tau\right) \quad (5.9)$$

Zu dem Zeitpunkt  $t_0$  hat sich der Quanten-Dot ausgebildet und wird, wie bereits vorher beschrieben, nicht mehr aus dem Reservoir beladen, so dass nach  $t > t_0$  nur noch überschüssige Elektronen den schrumpfenden Dot verlassen. Ein dynamischer QD wird trotz identischer Betriebsparameter nicht in jedem Pumpzyklus zu Beginn der *Decay Cascade* zwangsweise immer die gleiche Anzahl an Elektronen enthalten. Bei den periodischen Pumpzyklen treten die möglichen Anfangsbesetzungszahlen mit ihren entsprechenden Wahrscheinlichkeiten auf. Diese Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$  zum Zeitpunkt  $t_0$  decken die Verteilung der Elektronenanzahl beim Start der *Decay Cascade* ab. Die anfänglichen Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n(t_0)$  sind somit nicht nur auf 0 und 1 beschränkt.

Die Lösung (5.8)+(5.9) der Ratengleichung (5.7) ist durch das Doppelintegral analytisch schwer zu handhaben. Es ist jedoch auch möglich Gleichung (5.7) mit einem von Kashcheyevs und Kästner vorgeschlagenen Ansatz zu lösen, wodurch das äußere Integral vermieden werden kann.[22, Gleichung (4)] Dieser Ansatz bedingt Forderungen an die verwendeten Normierungsfaktoren  $Q_{n,k}$  und  $C_k$ . Diese müssen zeitunabhängig sein. Diese Einschränkung wird sich jedoch im Weiteren als unproblematisch erweisen.

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \quad (5.10)$$

$$\frac{dX_k(t)}{dt} = \Gamma_k(t) \quad ; \quad \frac{dQ_{n,k}}{dt} = 0 \quad ; \quad \frac{dC_k}{dt} = 0 \quad (5.11)$$

Die in diesem Ansatz ebenfalls eingeführte Tunnelfunktion  $X_k(t)$  wird im Abschnitt 5.1.5 eingehend untersucht. Momentan ist nur die Zeitableitung dieser Größe entscheidend.

Das Einsetzen des Ansatzes (5.10) in (5.7) liefert folgendes:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_n &= -\sum_{k=n}^N \Gamma_k \cdot Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k) \\ &= \Gamma_{n+1} \cdot \mathcal{P}_{n+1} - \Gamma_n \cdot \mathcal{P}_n \\ &= -\Gamma_n \cdot Q_{n,n} \cdot C_n \cdot \exp(-X_n) - \sum_{k=n+1}^N [\Gamma_n \cdot Q_{n,k} - \Gamma_{n+1} \cdot Q_{n+1,k}] \cdot C_k \cdot \exp(-X_k) \end{aligned}$$

Der Vergleich der obersten und der untersten Zeile zeigt, dass gelten muss

$$\Gamma_k \cdot Q_{n,k} = \Gamma_n \cdot Q_{n,k} - \Gamma_{n+1} \cdot Q_{n+1,k}$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach  $Q_{n,k}$  entsteht

$$Q_{n,k} = \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n - \Gamma_k} \cdot Q_{n+1,k} \quad (5.12)$$

Da diese Gleichung auch auf  $Q_{n+1,k}$  erneut angewendet werden kann, erhält man letztlich

$$Q_{n,k} = Q_{k,k} \cdot \prod_{m=n}^{k-1} \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (5.13)$$

Der Ausdruck  $Q_{k,k}$  kann wegen  $n \leq k - 1$  nicht mehr in Gleichung (5.12) eingesetzt werden. Das Inverse  $1/Q_{n,k}$  entspricht den Verhältnissen von Tunnelraten bei verschiedenen Besetzungszahlen des Quanten-Dots multipliziert mit  $1/Q_{k,k}$ . Da  $Q_{k,k}$  in späteren Berechnungen jeweils zusammen mit dem zugehörigen  $C_k$  auftauchen wird, gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit:

$$Q_{k,k} = 1 \quad (5.14)$$

Eine andere Wahl des Wertes für  $Q_{k,k}$  würde durch die sich anpassenden  $C_k$  kompensiert werden, so dass das Produkt  $Q_{k,k} \cdot C_k$  stets den selben Wert annimmt. Da  $\Gamma_0 = 0$ , ergibt sich für  $Q_{0,k} = -Q_{1,k} \cdot \Gamma_1 / \Gamma_k$ . Nach Bedingung (5.11) sind alle  $Q_{n,k}$  zeitlich unabhängig. Aus diesem Grund müssen bei diesem Ansatz alle  $\Gamma_n$  die gleiche Zeitabhängigkeit aufweisen. Der Quotient zweier Tunnelraten ist somit zeitlich konstant und es gilt:

$$\frac{\Gamma_{n+1}(t)}{\Gamma_n(t)} \equiv \exp(\delta_n) \quad ; \quad \frac{d}{dt} \delta_n = 0 \quad (5.15)$$

Die Einführung von  $\delta_n$  als Verhältnis der Tunnelraten ist wie viele andere Gleichungen in diesem Abschnitt aus [22] übernommen. Der Index wurde jedoch gegenüber der Vorlage um 1 verschoben. Dies führt im späteren Gebrauch zu weniger Verwechslungen. Wie bereits vorher bei Gleichung (5.3) gefordert, muss die Summe über alle Besetzungswahrscheinlichkeiten 1 ergeben. Es zeigt sich jedoch, dass hierfür nur  $Q_{0,0} \cdot C_0 = C_0 = 1$  gelten muss. Der Beweis hierfür findet sich im Anhang unter A.1. Alle anderen  $C_k$  sind bis jetzt noch nicht an Bedingungen gebunden. Deshalb werden sie nun für die Anpassung an die Anfangsbedingung  $\mathcal{P}_n(t_0)$  verwendet. Zunächst wird ein geeignetes  $X_k(t)$  gewählt, dass die Bedingungen (5.11) erfüllt.

$$X_k(t) \equiv X_{k,0} - \ln(C_k) + \int_{t_0}^t \Gamma_k(\tau) \, d\tau \quad (5.16)$$

Das dimensionslose Integral entspricht der Anzahl der im Zeitintervall zwischen  $t_0$  und  $t$  stattfindenden Tunnelereignisse, wenn trotz heraus tunnelnder Elektronen der Dot über die ganze Zeit im Zustand mit  $k$  Elektronen wäre. Es charakterisiert die Tunnelleigenschaften der

Barriere über diesen Zeitraum. Für verschiedene Besetzungszahlen startet das Tunneln zu verschiedenen Zeitpunkten, da die Dot-Energie-Level beim Ansteigen nur nacheinander über das chemische Potential von *Source* bzw. *Drain* angehoben werden. Somit ist zum Zeitpunkt  $t_0$  für die höheren Besetzungszahlen das heraus Tunneln bereits seit einiger Zeit im Gange. Mit  $X_{k,0}$  wird deshalb dieses Zeitintervall auch berücksichtigt, welches ab dem Zeitpunkt  $t_{k,0}$  begonnen hat

$$X_{k,0} \equiv \int_{t_{k,0}}^{t_0} \Gamma_k(\tau) d\tau \quad (5.17)$$

Wird  $X_k(t)$  in Gleichung (5.10) eingesetzt, fällt  $C_k$  heraus. Im Umkehrschluss bedeutet dies aber auch, dass  $X_{k,0} = \ln(C_k)$  sein muss, damit der Wert von  $X_k(t_0) = 0$  ergibt.  $X_k(t)$  lässt sich somit auch ohne  $X_{k,0}$  und  $\ln(C_k)$  schreiben.

$$X_k(t) \equiv \int_{t_0}^t \Gamma_k(\tau) d\tau \quad (5.18)$$

Aus den Anfangsbedingungen folgt

$$\mathcal{P}_n(t_0) = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t_0)) = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k$$

Da im Falle  $n = N$  die Summe nur aus einem Summanden besteht und nach Gleichung (5.14) der Wert von  $Q_{N,N} = 1$  wird, bedeutet dies:

$$C_N = \frac{\mathcal{P}_N(t_0)}{Q_{N,N}} = \mathcal{P}_N(t_0)$$

Für die Berechnung eines  $C_n$  werden alle  $C_k$  mit  $k > n$  benötigt. Da  $C_N$  bekannt ist, kann zunächst  $C_{N-1}$  und danach iterativ jedes mal ein weiteres  $C_n$  berechnet werden. Letztlich lassen sich also alle  $C_n$  bei bekannten Anfangsbedingungen finden.

$$C_n = \frac{1}{Q_{n,n}} \cdot \left( \mathcal{P}_n(t_0) - \sum_{k=n+1}^N Q_{n,k} \cdot C_k \right) = \mathcal{P}_n(t_0) - \sum_{k=n+1}^N Q_{n,k} \cdot C_k$$

Wird der Spezialfall  $\mathcal{P}_N(t_0) = 1$  betrachtet, bedeutet dies

$$\mathcal{P}_N(t_0) = 1 = Q_{N,N} \cdot C_N = C_N$$

und für  $n < N$  folgt daraus

$$\mathcal{P}_n(t_0) = 0 = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k$$

Somit kann man auch schreiben

$$C_k = -\frac{1}{Q_{k,k}} \cdot \sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m = -\sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m \quad (5.19)$$

Diese Ergebnisse findet sich auch in der Referenz [22],<sup>4</sup> wobei eine direktere Definition von  $C_k$  möglich ist. Die iterative Berechnung von  $C_k = -\sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m$  mit  $C_N = 1$  kann in die Bildung eines Produkts von Faktoren überführt werden. Dann ergibt sich

$$C_N = 1 \quad ; \quad C_k = \prod_{m=k+1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (5.20)$$

Der Beweis für die Gültigkeit dieser Umrechnung ist ausführlich im Anhang unter A.2 beschrieben. In jedem Fall ist die Bedingung nach  $C_0 = 1$  erfüllt, da  $\Gamma_0 = 0$

$$C_0 = \prod_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_0} = \prod_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m} = 1$$

Zusammenfassend ergibt sich also mit der Bedingung aus Gleichung (5.15),<sup>5</sup> letztlich für die Ratengleichung (5.7) folgende Lösung

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \quad (5.21)$$

$$X_k(t) \equiv \int_{t_0}^t \Gamma_k(\tau) \, d\tau \quad (5.22)$$

$$Q_{n,n} = 1 \quad ; \quad Q_{n,k} = \prod_{m=n}^{k-1} \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (5.23)$$

$$C_N = \mathcal{P}_N(t_0) \quad ; \quad C_k = \mathcal{P}_k(t_0) - \sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m \quad (5.24)$$

$$C_k = \exp(X_{k,0}) \quad ; \quad X_{k,0} \equiv \int_{t_{k,0}}^{t_0} \Gamma_k(\tau) \, d\tau \quad (5.25)$$

---

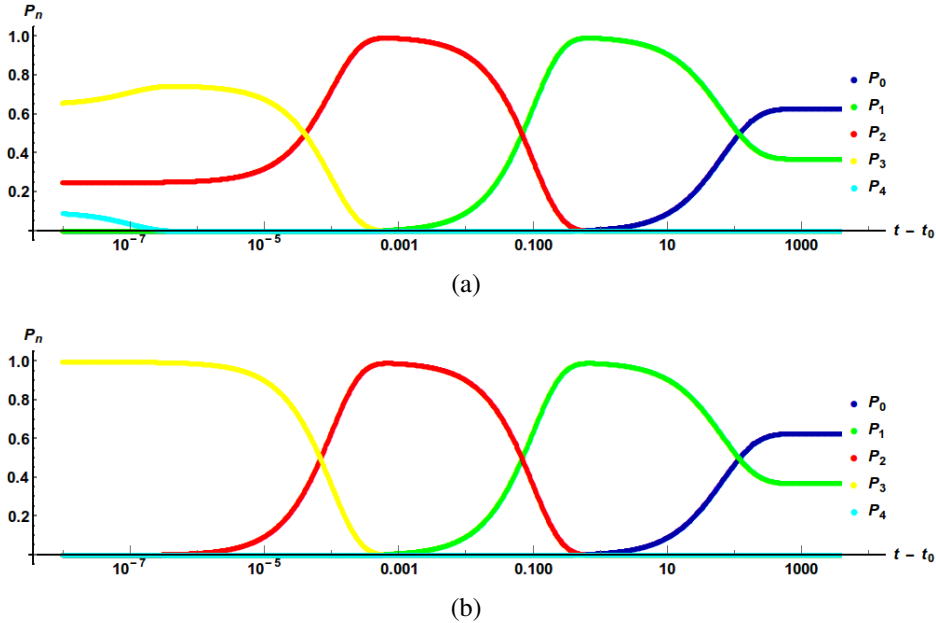
<sup>4</sup>Die in Gleichung (5.13) hergeleitete Beziehung  $Q_{n,k} = \prod_{m=n}^{k-1} \Gamma_{m+1} / (\Gamma_m - \Gamma_k)$  entspricht [22, Gleichung (6)], solange alle  $\Gamma_n$  den identischen Zeitentwicklungsterm haben und somit  $dQ_{n,k} / dt = 0$  erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung können die  $\Gamma_n$  durch  $X_n$  ersetzt werden.

<sup>5</sup>wonach alle  $\Gamma_n$  die gleiche zeitliche Entwicklung haben müssen, damit der Quotient aus zwei Tunnelraten zeitlich konstant ist

bzw. für den Fall  $\mathcal{P}_N(t_0) = 1$  gilt zusätzlich noch

$$C_N = 1 \quad ; \quad C_k = \prod_{m=k+1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (5.26)$$

### 5.1.3. Separation der Tunnelereignisse auf verschiedene Zeitskalen



**Abbildung 5.2.:** Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$ . Alle Parameter sind ohne Einheiten. Die Zeitachse  $t$  ist logarithmisch eingeteilt. Die Tunnelraten fallen exponentiell mit  $\exp(-t/100)$  und starten mit den Werten:

$$\Gamma_1(t_0) = 10^{-2}, \Gamma_2(t_0) = 10, \Gamma_3(t_0) = 10^4 \text{ und } \Gamma_4(t_0) = 10^7.$$

Abbildung (a) zeigt den Verlauf, wenn die Besetzungswahrscheinlichkeiten am Anfang mit  $\mathcal{P}_4(t_0) = 10\%$ ,  $\mathcal{P}_3(t_0) = 65\%$ ,  $\mathcal{P}_2(t_0) = 25\%$  und  $\mathcal{P}_1(t_0) = \mathcal{P}_0(t_0) = 0$  gegeben sind.

In Abbildung (b) hingegen sind (mit Ausnahme von  $\mathcal{P}_3(t_0) = 100\%$ ) die anfänglichen Besetzungswahrscheinlichkeiten alle null.

Der Vergleich beider Verläufe zeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten für hohe Besetzungen aufgrund der hohen Tunnelraten schnell verschwinden und danach in beiden Fällen die gleiche zeitliche Entwicklung von  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_0$  stattfindet. Bei stark verschiedenen Tunnelraten ( $\Gamma_{n+1} \gg \Gamma_n$ ) spielen nur noch die benachbarten Besetzungswahrscheinlichkeiten eine Rolle. Da der exponentielle Abfall der Tunnelraten letztlich dafür sorgt, dass zum Schluss nahezu keine Tunnelereignisse mehr stattfinden, wird die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_1$  hier bei einem Wert von etwa 37% eingefroren. Dieser Wert wurde gewählt, da bei  $\exp(-1) \approx 37\%$  der Anstieg zwischen den Plateaus der Strom-Spannungskurven maximal wird. Somit würden bereits etwaige Differenzen unter diesen Bedingungen besonders stark auftreten. Die Strom-Spannungskurve zu diesen Parametern ist in Abbildung 5.5 gezeigt.

Sind für alle  $n$  die Tunnelrate  $\Gamma_n$  und damit auch die Tunnelfunktion  $X_n$  um Größenordnungen kleiner als ihre Gegenstücke mit dem Index  $n + 1$  (und deshalb  $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n \gg 1$ ), so findet das Ansteigen und Absinken der verschiedenen Besetzungswahrscheinlichkeiten auf unterschiedlichen Zeitskalen statt. In aufeinander folgenden Pumpzyklen laufen vergleichbare Rücktunnelereignisse mit hoher Wahrscheinlichkeit in dem gleichen Zeitintervall in der Rücktunnelphase ab. In diesem Zeitfenster treten andere Tunnelereignisse hingegen nahezu niemals auf. Unter diesen Bedingungen gilt  $Q_{n,k} \rightarrow 0$  für alle  $k > n + 1$  und  $Q_{n,n+1} \rightarrow -1$ . In diesem Fall wird die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_n(t)$  mit  $n < N$  nur noch von  $X_n$  und  $X_{n+1}$  bedeutend beeinflusst.

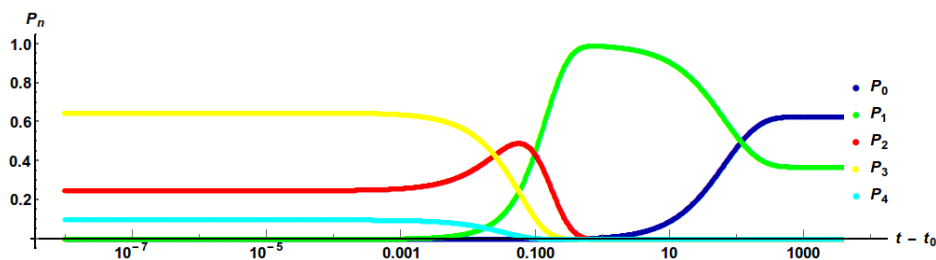
$$\mathcal{P}_n(t) \approx \sum_{k=n}^{n+1} Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \approx C_n \cdot \exp(-X_n(t)) - C_{n+1} \cdot \exp(-X_{n+1}(t))$$

Die zugehörigen  $C_k$  sind dann in guter Näherung

$$C_k = \mathcal{P}_k(t_0) - \sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m \approx \mathcal{P}_k(t_0) - Q_{k,k+1} \cdot C_{k+1} \approx \sum_{m=k}^N \mathcal{P}_m(t_0)$$

Sollte bereits  $C_{n+1} = \sum_{m=n+1}^N \mathcal{P}_m(t_0) = 1$  sein, da anfangs nur höhere Besetzungszahlen mit von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeiten aufgetreten sind, so ist näherungsweise für  $0 \leq n < N$

$$\mathcal{P}_n(t) \approx \exp(-X_n(t)) - \exp(-X_{n+1}(t)) \quad (5.27)$$



**Abbildung 5.3.:** Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$  für kaum von einander abweichenden Tunnelraten. Alle Parameter sind ohne Einheiten. Die Zeitachse  $t$  ist logarithmisch eingeteilt. Die Tunnelraten fallen exponentiell mit  $\exp(-t/100)$  und starten mit den Werten:

$$\Gamma_1(t_0) = 10^{-2}, \Gamma_2(t_0) = 10, \Gamma_3(t_0) = 20 \text{ und } \Gamma_4(t_0) = 30.$$

Die Besetzungswahrscheinlichkeiten sind am Anfang  $\mathcal{P}_4(t_0) = 10\%$ ,  $\mathcal{P}_3(t_0) = 65\%$ ,  $\mathcal{P}_2(t_0) = 25\%$  und  $\mathcal{P}_1(t_0) = \mathcal{P}_0(t_0) = 0$  und somit vergleichbar mit der Abbildung 5.2(a). Anstatt einer zeitlichen Trennung der Entwicklungen der einzelnen Besetzungswahrscheinlichkeiten treten in diesem Fall im Zeitintervall von etwa 0,01 bis 1 Mischzustände auf, so dass  $\mathcal{P}_4$  und  $\mathcal{P}_3$  gleichzeitig absinken und schon jetzt  $\mathcal{P}_1$  ansteigt. An der zum Schluss erreichten Wahrscheinlichkeitsverteilung ändert sich dadurch aber nichts, da mit  $\Gamma_1(t_0) = 0,01$  wieder die selben Anfangsbedingungen für den letzten Übergang vorhanden sind.

In Referenz [22, Gleichung (8)] findet sich das entsprechende Gegenstück zu Gleichung

(5.27). In der Referenz wird ebenfalls gezeigt, dass sich (5.27) direkt aus der anfänglichen Gleichung (5.8) herleiten lässt. Somit ist für diesen Fall der Zeitskalen-Separation die zwischenzeitlich benutzte Forderung nach der gleichen Zeitabhängigkeit aller  $\Gamma$  nicht mehr nötig.

In den Abbildungen 5.2 und 5.3 ist jeweils der zeitliche Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n(t)$  beim Zerfall eines 4-Elektronen-Zustands aus einem QD dargestellt. 5.2(a) und 5.2(b) unterscheiden sich nur in der Anfangsverteilung der  $\mathcal{P}_n(t_0)$ . Durch deutlich voneinander abweichenden Tunnelraten

$$\Gamma_n(t) = \Gamma_n(t_0) \cdot \exp(-t/100) \quad , \quad \Gamma_n \ll \Gamma_{n+1}$$

finden Rücktunnelereignisse für die verschiedenen Besetzungszahlen auf verschiedenen Zeitskalen statt. Dies wird durch die logarithmische Zeitachse verdeutlicht. Die Zeitvariable  $t$  ist in diesen Darstellungen dimensionslos. Die verwendeten Parameter entsprechen keiner tatsächlichen Messung, sondern dienen nur zur Verdeutlichung der bei der *Decay Cascade* stattfindenden Prozesse. Durch die zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten werden die anfänglichen Unterschiede bei den verwendeten Parameterwerten bis  $t \approx 10^{-4}$  nahezu komplett ausgeglichen, so dass danach beide identische Kurvenverläufe zeigen. In Abbildungen 5.3 sind  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  und  $\Gamma_4$  nahezu identisch, so dass die zugehörigen Tunnelereignisse nicht in voneinander getrennten Zeitintervallen erfolgen. Dadurch ergibt sich die gezeigte Situation, in der von  $\mathcal{P}_4$  bis  $\mathcal{P}_1$  alle Besetzungswahrscheinlichkeiten für die weitere zeitliche Entwicklung berücksichtigt werden müssen und somit Näherung (5.27) nicht mehr gilt. Da jedoch  $\Gamma_1$  wieder den selben Wert wie in Abbildungen 5.2 aufweist und  $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$  erfüllt ist, ergibt sich wieder die bereits beobachtete Endverteilung der Besetzungswahrscheinlichkeiten. Diese wurde so gewählt, dass sie der Situation bei dem Übergang von *0ef* zu *1ef* entspricht. In Abbildung 5.5 ist diese mit einem Kreuz auf der Kurve markiert.

Um bei quantisierten Pumpströmen die relevanten letzten Rücktunnelprozesse während der *Decay Cascade* in guter Näherung zu beschreiben, reicht die Gleichung (5.27) aus. Ist z.B. am Ende der Einfangphase regelmäßig in jedem Pumpzyklus ein 1-Elektronen-Zustand im Dot besetzt, muss folglich  $\Gamma_1 \ll \Gamma_2$  gelten. Die anderen Tunnelraten und auch die anfänglichen Besetzungswahrscheinlichkeiten sind für die Betrachtungen des quantisierten Pumpstroms somit unbedeutend. Auf diese Weise sinkt die Komplexität, wodurch die Auswertung von Messdaten mit einem reduzierten Satz an Parametern möglich wird.

#### 5.1.4. Berechnung des erzeugten Pumpstroms

Um letztlich die von der Pumpe erzeugte Stromstärke zu erhalten, ist es wichtig zu klären, woher die Elektronen stammen und wohin sie ausgeworfen werden. Wie bereits in Gleichung (5.2) beschrieben, können die Tunnelraten als Summe der Anteile von *Source* und *Drain* aufgefasst werden

$$\Gamma \equiv \Gamma_S + \Gamma_D \quad ; \quad \Xi \equiv \Xi_S + \Xi_D$$

Im Idealfall nimmt die Einzel-Elektronen-Pumpe in der Einfangphase nur Elektronen aus *Source* auf (d.h.  $\Xi_S > 0$  und alle anderen Tunnelraten nahezu Null), findet zu einer stabilen Besetzungszahl durch Rücktunneln nach *Source* (Einfangphase: nur  $\Gamma_S > 0$ ) und gibt diese in der Auswurfphase nach *Drain* ab (Auswurfphase: nur  $\Gamma_D = 0$ ). Um dies in guter Näherung sicher zu stellen, muss die Ausgangsbarriere ausreichend hoch sein. Nur so lässt sich zum einen ein verschwindendes  $\Xi_D \rightarrow 0$  und zudem eine deutliche zeitliche Trennung zwischen dem Ende der *Decay Cascade* und dem Beginn der Auswurfphase realisieren. Dadurch können diese beiden Prozesse jeweils unter den geeigneten Bedingungen statt finden. Beim Wechsel zwischen dem Rücktunneln nach *Source* und dem Auswurf der Elektronen nach *Drain* ist dann in dem Übergang zwischenzeitlich der Quanten-Dot komplett von der Umgebung isoliert ( $\Gamma_S \rightarrow 0$  und  $\Gamma_D \rightarrow 0$ ). Wird die Ausgangsbarriere jedoch zu klein gewählt, wird erstens der Dot nicht mehr allein aus *Source* mit Elektronen beladen und zweitens beim Beginn der Auswurfphase ein Teil der Elektronen nicht nach *Drain* transportiert. Deshalb ist quantisiertes Pumpen unter diesen Bedingungen nicht mehr möglich. Bei einer sehr ungünstigen Wahl der Barrierenparameter können die nicht erwünschten Prozesse sogar überwiegen und somit ein Strom in die Gegenrichtung erzeugt werden.[76][77] Bei einem Betrieb der Pumpe gegen eine negative *Source-Drain-Spannung* kehrt sich die Stromrichtung bei zu niedrigen Ausgangs-Gate-Spannungen um, wodurch in Messungen das Einsetzen dieses Fehlermechanismus beobachtet werden konnte. Die für das quantisierte Pumpen ungeeigneten Parameterwerte unterscheiden sich jedoch bei guten Pumpen deutlich von den gesuchten Pumpparametern. Diese individuellen Werte werden am Anfang einer Messung durch die Charakterisierung der Pumpen ermittelt. Im normalen Pumpbetrieb spielt diese Fehlerquelle somit nur eine untergeordnete Rolle.

Zur Berechnung des Pumpstroms muss als erstes der Erwartungswert  $\langle n \rangle(t)$  berechnet werden. Dieser gibt an, wie die Verteilung der Besetzungswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt  $t$  ist.

$$\langle n \rangle(t) = \sum_{n=0}^N n \cdot \mathcal{P}_n(t) \quad (5.28)$$

Dieser Wert fällt zunächst sehr schnell ab. Da die Tunnelraten jedoch mit dem Anstieg der Barriere immer weiter sinken, nähert sich  $\langle n \rangle$  asymptotisch dem Erwartungswert für  $t \rightarrow \infty$  an. Dies geschieht, da bei sinkenden Tunnelraten  $\Gamma$  das Integral in der Tunnelratenfunktion  $X_k$  aus Gleichung (5.22) gegen einen konstanten Wert läuft. Mit konstanten  $X_k$  ändert sich auch die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$  immer weniger. Wenn die Eingangsbarriere weiterhin ansteigt, erreicht das System mit der Zeit eine Endkonfiguration und der Einfluss der *Decay Cascade* verliert an Bedeutung. Unter diesen Voraussetzungen kann in guter Näherung  $\langle n \rangle(t \rightarrow \infty) \equiv \langle n \rangle$  als Erwartungswert für den Pumpstrom verwendet werden. Dieser entspricht  $I = \langle n \rangle \cdot e \cdot f$ , wobei  $e$  der Elementarladung und  $f$  der Pumpfrequenz entsprechen.



---

### 5.1.5. Spannungsabhängigkeit der Tunnelfunktion $X$

Wie bereits in der Beschreibung der Rücktunnelkante der Pumpregion im Abschnitt 2.5.3 ausgeführt, wird die Anzahl an durchschnittlich gepumpten Elektronen  $\langle n \rangle$  durch die Höhe der Ausgangsbarriere geregelt.[75] Somit bestimmt die Spannung am Ausgangs-Gate  $U$  den sich letztlich einstellenden Wert von  $X_k(t \rightarrow \infty) \equiv X_{k,\infty}$ . Wird angenommen, dass mit ansteigender Spannung am Ausgangs-Gate die Tunnelraten exponentiell ansteigen, kann dies durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\ln(X_{k,\infty}) = -\alpha_k \cdot (U - U_k) \quad (5.29)$$

Als  $U_k$  sind die Übergangsspannungen einzusetzen, bei denen das gemessene  $\langle n \rangle$  von  $k$  nach  $k - 1$  wechselt.<sup>6</sup> Präziser lässt sich der Wert festlegen, wenn  $X_{k-1,\infty} \ll X_{k,\infty} \ll X_{k+1,\infty}$  erfüllt ist. In dem Fall hängt die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_k(t \rightarrow \infty) \equiv \mathcal{P}_{k,\infty}$ , wie in Näherung (5.27) beschrieben, nur noch von  $X_{k,\infty}$  und  $X_{k+1,\infty}$  ab. Bei der Spannung  $U = U_k$  wird der Ausdruck  $\exp(-X_{k,\infty}) = \exp(-1)$ , während die anderen Exponentialfunktionen  $\exp(-X_{j,\infty})$  in guter Näherung entweder 1 ( $j < k$ ) oder 0 ( $j > k$ ) ergeben. Bei der Spannung  $U_k$  nimmt  $\langle n \rangle$  somit den Wert  $k - 1 + \exp(-1)$  an. Wenn bei Variation der Spannung  $U$  am Ausgangs-Gate in den Messkurven von  $\langle n \rangle$  deutliche Plateaus auftreten und sich somit eine Strom-Spannungs-Kennlinie mit deutlicher Quantisierung ergibt, sind die gemachten Annahmen gerechtfertigt.

Um die ersten  $m$  Stufen dieser Strom-Spannungs-Kennlinie zu beschreiben, gilt in guter Näherung  $\mathcal{P}_j = 0$  mit  $m + 1 < j \leq N$ . Dann folgt aus den Gleichungen (5.27), (5.28) und (5.29):

$$\langle n \rangle = \frac{I}{ef} \approx \sum_{k=1}^{m+1} \exp(-\exp(-\alpha_k \cdot (U - U_k))) \quad (5.30)$$

Um Werte für die  $\alpha_k$  und die  $U_k$  zu bestimmen, müssen die im Experiment gemessenen Stromwerte in Einklang mit Gleichung (5.30) gebracht werden. Dazu werden die  $U_k$  und die  $\alpha_k$  variiert, bis die Summe der quadratischen Abweichungen bei einem Minimum angeht. Dieses Verfahren wird Anpassung bzw. aus dem Englischen Fit genannt. Da nach Gleichung (5.30) für jedes weitere Plateau zwei zusätzliche Fit-Parameter hinzukommen, werden schnell Anpassungen mit über vier Parametern nötig. Bei zu vielen Parametern besteht immer die Gefahr, dass Änderungen an einem Parameter im Fit komplett durch

---

<sup>6</sup>Wie im Abschnitt 2.5.3 beschrieben, besteht eine Wechselwirkung zwischen den Elektroden und dem Dot. Die Änderung der elektrischen Ladung auf einer Elektrode bewirkt eine Änderung der Potentiallandschaft im *2DEG*, so dass die zeitliche Entwicklung des dynamischen QDs auch verändert verläuft. Hierdurch ändern sich die Tunnelraten und demnach auch die am Ende eines Pumpzyklus gepumpte Anzahl an Elektronen. Somit verschieben sich prinzipiell die Werte für die  $U_k$  bei variierender Offset-Spannung am Eingangs-Gate. Bei ausgeprägten Pumpregionen kann jedoch zumeist eine Offset-Spannung gewählt werden, bei der Änderungen des Offsets nahezu keine Auswirkungen haben. Entlang der durch den *Decay-Cascade*-Prozess auftretende Rücktunnelkante können diese geeigneten Offset-Spannungen im Allgemeinen gefunden werden. Nur in Sonderfällen bei zu geringer Spannungsamplitude der Modulation bzw. durch den Einsatz eines zum *2DEG* senkrecht Magnetfelds sind die Rücktunnelkanten nicht mehr eindeutig von den anderen Kanten zu trennen.

die anderen Parameter kompensiert werden können und somit kein eindeutiges Ergebnis gefunden werden kann. Sofern die Fit-Parameter nicht zu eindeutigen Werten konvergieren können, eignet sich das Verfahren nicht zur Auswertung von Messwerten.

Zudem sind die Messwerte mit Fehlern behaftet und können deshalb nicht alle perfekt auf der gefundenen Fit-Kurve liegen. Ist die Abweichung signifikant zu klein spricht dies für eine sogenannte Überanpassung (engl. *overfitting*), bei der den Termen der verwendete Fit-Funktion gegenüber der zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeit der Natur falsche Gewichtungen zugeschrieben und somit mitunter deutlich abweichende Werte für die Fit-Parameter gefunden werden. Die überangepasste Fit-Funktion kann auch Parameter aufweisen, die in Wirklichkeit keine bzw. eine deutlich untergeordnete Rolle spielen. Diese Parameter werden zum Ausgleichen der Streuung der Messpunkte genutzt, so dass eigentlich unwichtige Parameter hervorgehoben und gleichzeitig die Fit-Werte der übrigen relevanten Parameter stark verfälscht werden.[23] Eine in 1. Näherung linearen Abhängigkeit kann bei einer Überanpassung z.B. fälschlicherweise als Polynom 11-ten Grades gedeutet werden. Dadurch können zwar alle Messpunkte perfekt auf der Kurve liegen, jedoch sind Vorhersagen auf Basis dieser überangepassten Fit-Funktion unbrauchbar.

Ein mathematisches Modell dient dazu Aussagen aus dem Verlauf einer Messkurve ziehen zu können. Dabei steht die Anzahl der Aussagen in einem bestimmten Verhältnis zur Zahl der eingesetzten Parameter. Mit zunehmender Anzahl an Parametern verbessert sich die Anpassung des Modells an die Messdaten. Jedoch entsprechen dann die aus einem überangepassten Modell gewonnenen Aussagen nicht der Realität.<sup>7</sup>

Bei der verwendeten Gleichung (5.30) tritt jeder Parameter nur einmal auf und ist direkt mit einer in der Messkurve auftauchenden Steigung bzw. Position verbunden. Des weiteren wirkt sich ein Parameterpaar  $U_k$  und  $\alpha_k$  in 1. Näherung nur auf den zugehörigen Stufenanstieg aus. Sofern die Stufenanstiege von einander separiert auftauchen, wird in der Umgebung eines solchen Stufenanstiegs der Kurvenverlauf nahezu komplett durch das mit dem Anstieg verbundene Parameterpaar beschrieben. Der Spannungswert  $U_k$  und die Steigung  $\alpha_k$  können somit isoliert von den anderen Parametern an diesem Stufenanstieg bestimmt werden. Die auf diese Weise gewonnene Parameter beschreiben den Kurvenverlauf nur lokal. Der Kurvenverlauf im Bereich der deutlichen Quantisierung wird nahezu komplett durch die lokal bestimmbaren Parameter beeinflusst. Eine Überanpassung oder ein Konvergenzproblem tritt in diesen Bereichen demnach eher nicht auf.

Gleichung (5.30) ähnelt bei ausreichenden Abständen zwischen den  $U_k$  in etwa einer Summe von Stufenfunktionen. Da  $\exp(-\exp(-\alpha_k \cdot (U - U_k)))$  nur in einem kleinen Intervall um  $U_k$  deutlich von 0 oder 1 abweicht, kann jedes ausgeprägte Plateau durch die Stufenanstiege an beiden Seiten ausreichend beschrieben werden.<sup>8</sup> Da die Stufenspannungen  $U_k$  aus den Messkurven bereits schnell abgeschätzt werden können, sind mit diesen guten Startwerten die Fits für eine Stufe in nahezu allen Fällen bereits erfolgreich. Wichtig hierfür ist aber eine

---

<sup>7</sup> siehe Epizyklen im ptolemäischen Weltbild: Um die Genauigkeit zu erhöhen, wurden zur Beschreibung des Planetenlaufs immer mehr Parameter verwendet. Trotzdem ist die Idee falsch.

<sup>8</sup> Wenn die Abstände zwischen den Stufenanstiegen nicht größer als ihre von  $\alpha$  abhängige Breite ist, vermischen sich beide Übergänge und die Eindeutigkeit der Parameter geht dann verloren. Diese nicht vorhandenen „Plateaus“ sind für quantisiertes Pumpen jedoch uninteressant.

Anpassung des Strom-Offsets  $I_0$ , damit für jedes  $n$  das  $n$ -te Plateau zwischen  $I = (n-1) \cdot ef$  und  $I = n \cdot ef$  liegt, wobei  $I = I_{\text{meas}} - I_0$  und  $I_{\text{meas}}$  dem gemessenen Strom entspricht. Weichen die Werte von gemeinsamen Parametern für benachbarte Plateaus deutlich voneinander ab, wäre dies ein Indiz für einen fehlerhaften Fit. Bei kleinen Unterschieden kann der Mittelwert als gute Abschätzung des Parameterwerts verwendet werden. Danach können die ermittelten Werte der Fit-Parameter als Startwerte für einen Fit über alle Stufen genutzt werden, wobei jedoch nur noch kleinere Anpassungen zugelassen werden. Tritt ein deutliches Abweichen von den vorherigen Werten auf, ist dies ein Indiz für einen Kompensationseffekt, der jedoch bei ausgeprägten Plateaus nicht auftreten sollte.

Das Spannungsintervall für den Übergang zwischen  $U_k$  und  $U_{k-1}$  ist abhängig von  $\alpha_k$ . Je größer dieser Wert desto steiler ist der Anstieg. Um die Qualität der Plateaus zu vergleichen, könnte das Spannungsintervall zwischen dem An- und dem Abstieg verwendet werden. Zur besseren Vergleichbarkeit sollte allerdings der Anstieg  $\alpha$  zwischen den Plateaus ebenfalls berücksichtigt werden. Um eine sinnvolle Vergleichsgröße zu berechnen, wird erneut die Gleichung (5.29) betrachtet. Durch Einsetzen von Gleichung (5.22) entsteht folgende Beziehung

$$-\alpha_k \cdot (U - U_k) = \ln \left( \int_{t_0}^{t \rightarrow \infty} \Gamma_k(\tau) \, d\tau \right)$$

Nach Gleichung (5.15) kann  $\Gamma_k$  durch  $\Gamma_{k-1}$  und ein zeitunabhängiges  $\delta_{k-1}$  ersetzt werden, wobei jedoch  $k > 1$  gelten muss.

$$\Gamma_k = \Gamma_{k-1} \cdot \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1}} = \Gamma_{k-1} \cdot \exp(\delta_{k-1}) = \Gamma_1 \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \exp(\delta_j) \quad (5.31)$$

Demnach ergibt sich

$$-\alpha_k \cdot (U - U_k) = \ln \left( \int_{t_0}^{t \rightarrow \infty} \Gamma_1(\tau) \, d\tau \right) + \sum_{j=1}^{k-1} \delta_j \quad (5.32)$$

woraus für  $k = 1$  direkt folgt

$$-\alpha_1 \cdot (U - U_1) = \ln \left( \int_{t_0}^{t \rightarrow \infty} \Gamma_1(\tau) \, d\tau \right) \equiv \delta_0 \quad (5.33)$$

Der Wert  $\delta_0$  wurde so gewählt, dass sich nun allgemein schreiben lässt:

$$-\alpha_k \cdot (U - U_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j$$

Auf diese Weise lassen sich für  $k > 1$  die anderen  $\delta$  leicht berechnen

$$\delta_{k-1} = (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \cdot U - \alpha_{k-1}U_{k-1} + \alpha_k U_k$$

Wenn ein gemeinsames  $\alpha$  für beide Anstiege gefunden werden kann, verschwindet der erste Term und  $d\delta_{k-1}/dU = 0$ . Wie zu sehen, entspricht der dann gefundene Wert  $\delta_k$  dem mit  $\alpha$  multiplizierten Spannungsintervall  $U_{k+1} - U_k$ . Der Wert von  $\delta_k$  gibt somit eine Aussage über die Qualität des  $k$ -ten Plateaus. Dabei sei unter Qualität eine klare Ausprägung des Plateaus verstanden. Je größer  $\delta_k$  ist, desto geringer ist der Anstieg auf dem Plateau und desto größer ist der Bereich indem das Plateau nahezu nicht vom idealen Wert  $nef$  abweicht. Um verschiedene Plateaus besser vergleichen zu können, wird bei der Auswertung der Messwerte der Qualitätswert  $\delta_k$  durch folgende Gleichung errechnet:

$$\delta_{k-1} = (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \cdot U_{k,\alpha} - \alpha_{k-1}U_{k-1} + \alpha_k U_k \quad (5.34)$$

Damit auch für Plateaus mit voneinander abweichenden  $\alpha$  immer ein vergleichbarer Wert von  $\delta$  bestimmt werden kann, muss ein geeigneter Spannungswert  $U_{k,\alpha}$  für  $U$  gewählt werden. Eine mögliche Wahl wäre, den Mittelwert zwischen den beiden Übergangs-Spannungen zu nehmen. Dieser lässt sich schnell bestimmen und würde das  $\delta_k$  als Spannungsintervall  $U_{k+1} - U_k$  multipliziert mit dem Mittelwert der beiden Steigungen  $\alpha_k$  und  $\alpha_{k+1}$  festlegen. Durch Betrachtungen des Kurvenverlauf dieser speziellen Doppel-Exponentialfunktion wird jedoch ersichtlich, dass der Anstieg nicht symmetrisch ist und deshalb bei nahezu identischen  $\alpha$  der Einfluss des einen Übergangs weiter ins Plateau hineinreicht. Aus diesem Grund müsste diejenige Spannung gesucht werden, bei der die beide Steigungen den gleichen Einfluss auf das Plateau ausüben. Bei diesem Wert wird die Steigung  $d\langle n \rangle/dU$  minimal und in einer Messung sollte die Varianz  $\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$  dort ebenfalls minimal werden. Sofern bei einem sichtbaren Plateau die beiden Steigungen nur wenig voneinander abweichen, liegt der gesuchte Spannungswert bezogen auf das Intervall  $U_k$  bis  $U_{k+1}$  im oberen Viertel. Für erste Abschätzungen wird deshalb folgender Wert vorgeschlagen

$$U_{k,\alpha} \approx \frac{1}{4} \cdot (U_k + 3 \cdot U_{k+1}) \quad (5.35)$$

Die hierdurch entstehenden Qualitätswerte  $\delta$  sind hierbei eher pessimistisch abgeschätzt. Wie bereits beschrieben, dienen die  $\delta$  zum Vergleich der verschiedenen Plateaus: Je höher das  $\delta$ , desto ausgeprägter tritt das zugehörige Plateau auf. Wie in Abbildung 5.4 gezeigt, sinken für das erste Plateau die minimale relative Steigung

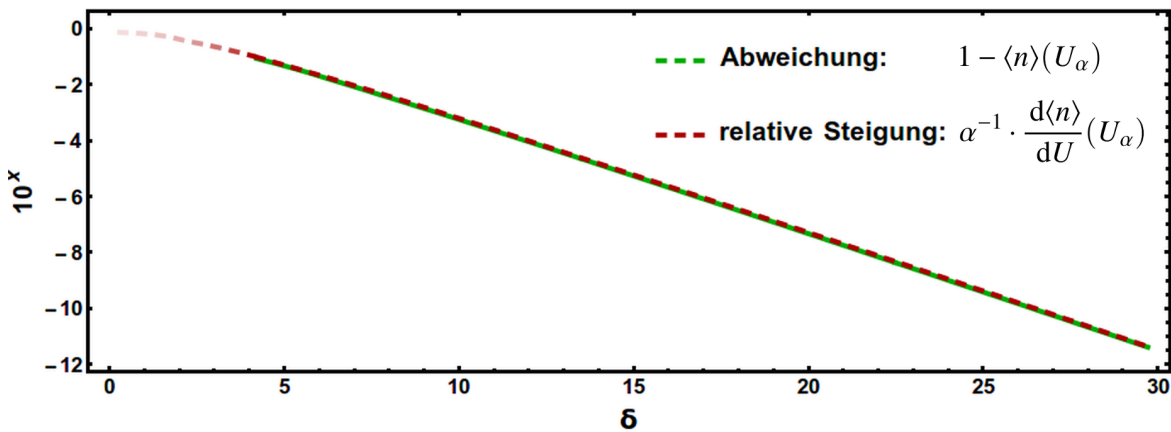
$$\alpha^{-1} \cdot \frac{d\langle n \rangle}{dU}(U_{1,\alpha}) \quad , \quad \alpha \equiv \frac{\delta_1}{U_2 - U_1} \quad (5.36)$$

bzw. die zugehörige Abweichung

$$1 - \langle n \rangle(U_{1,\alpha}) \quad (5.37)$$

bei steigendem  $\delta_1$ . Da die Steigung an  $U_{1,\alpha}$  durch den Wert  $\alpha$  geteilt wurde, verlaufen die beiden Kurven nahezu deckungsgleich. Für identische Anstiegssteigungen ergibt sich

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ . In Folge der gewählten Konstruktion ist  $\alpha$  ein gewichteter Mittelwert von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ . Die gefundenen Abschätzungen gelten auch für höhere Plateaus, sofern die vorangegangenen Anstiege nur einen sehr geringen Einfluss auf das Plateau haben. Allgemein ist für das  $k$ -te Plateau als relativierender Faktor  $\alpha = \delta_k / (U_{k+1} - U_k)$  und für die Abweichung  $k - \langle n \rangle(U_{k,\alpha})$  zu verwenden. Ein berechnetes  $\delta_k$  liefert dann die aus den eingezeichneten Kurven abzulesenden minimalen relativen Steigungen und die zugehörige Abweichung von  $k$ , die im Pumpstrom als fehlender Anteil von  $k \cdot ef$  auftritt. Um eine geringe Abweichung von unter  $10^{-8}$  zu erreichen, muss das Plateau mindestens ein  $\delta > 21.6$  haben. Diese Fehlerabschätzungen berücksichtigt allerdings nicht das Rauschen der Messwerte, sondern stellt nur die aus der Theorie des Rücktunnelprozesses zu erwartenden Abweichungen von dem idealen Plateau mit vernachlässigbarer Steigung und Abweichung dar.



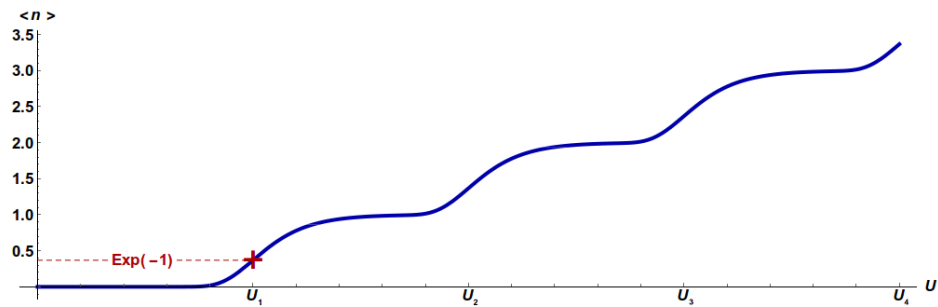
**Abbildung 5.4.:** Darstellung der Beziehung des Qualitätswerts  $\delta$  zu dem minimalen relativen Anstieg auf dem ersten Plateau bei der Spannung  $U_{1,\alpha}$  bzw. der dortigen Abweichung des mit  $\frac{1}{ef}$  normierten Pumpstroms vom idealen Wert 1. Für Qualitätswerte  $\delta < 5$  sind eigentlich keine geeigneten Plateaus mehr vorhanden, jedoch läuft die Steigung bei Abnahme von  $\delta$  gegen einen Wert von etwa  $2 \cdot \exp(-1)$ .

Für Plateaus mit einem  $\delta < 5$  sind nur noch sinnvolle Abschätzungen für den minimalen Anstieg möglich. Läuft für das erste Plateau  $\delta_1 \rightarrow 0$ , so gilt nach Gleichung (5.34) auch  $U_1 \rightarrow U_2$ . Das Plateau schrumpft bis die beiden Übergänge ineinander übergehen. Ein solches Plateau mit  $\delta = 0$  entspricht somit einem Übergang von  $0ef$  zu  $2ef$ . Da  $U_1 \leq U_{1,\alpha} \leq U_2$  und nur diese beiden Übergänge bei der Abschätzungen des minimalen Anstiegs berücksichtigt werden, folgt dann aus Gleichung (5.30):

$$\langle n \rangle \approx \sum_{k=1}^2 \exp(-\exp(-\alpha_k \cdot (U_{1,\alpha} - U_k))) = \sum_{k=1}^2 \exp(-\exp(-\alpha_k \cdot 0)) = 2 \cdot \exp(-1)$$

Die logarithmischen Werte von der minimalen relativen Steigung (5.36) bzw. der Abweichung (5.37) können gut durch eine Regressionsgerade  $0.9 - 0.411 \cdot \delta$  beschrieben werden. Das Bestimmtheitsmaß liegt dabei nach Vernachlässigung der Werte mit  $\delta < 5$  bei über 99%.

Abbildung 5.5 zeigt den Verlauf des Erwartungswert  $\langle n \rangle$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$ .



**Abbildung 5.5.:** Graphische Darstellung der Plateaus des Erwartungswert  $\langle n \rangle$  in Abhängigkeit von der Spannung  $U$ . Da  $I = \langle n \rangle e f$  können diese Kurven auch als (normalisierte) Strom-Spannungskurve verstanden werden. Unabhängig von der Pumpfrequenz lassen sich auf diese Weise die Pumpströme vergleichen. Auf der x-Achse sind bei den Spannungen  $U_1$  bis  $U_4$  die Anstiege auf das nächste Plateau dargestellt. Bei der Spannung  $U_k$  ist die Steigung an diesem Übergang maximal und der Funktionswert ist  $\exp(-1) + (k-1)$ . Die Plateaus entsprechen einem Verhältnis der Tunnelraten  $\Gamma_{k+1}/\Gamma_k = 1000$ . Damit ergibt sich ein Wert für  $\delta = \ln(1000) \approx 6.908$ . Der bei  $U_1$  markierten Punkt entspricht dem in Abbildung 5.2 gezeigten finalen Werten von  $\mathcal{P}_n(t \rightarrow \infty)$ .

An den Übergangsspannungen  $U_k$  wird nach Gleichung (5.29) die Tunnelfunktion  $X_{k,\infty} = 1$ . Somit ist  $\exp(-X_{k,\infty}) = \exp(-1)$ , wie bei  $U_1$  durch das Kreuz dargestellt. Die gezeigten Plateaus haben einen Qualitätswert  $\delta_k = \ln(1000) \approx 6.908$  und demnach an der flachsten Stelle eine relative Steigung von etwa  $10^{-2}$ .

### Linearität der Spannung $U$ in der Tunnelfunktion $X$

In Gleichung (5.29) werden die Tunnelfunktionen  $X$  durch Spannungen beschrieben, die in einer Messung ermittelt werden können. Die gewählte Beziehung

$$X_{k,\infty} = \exp(-\alpha_k \cdot (U - U_k))$$

ist jedoch nur eine von beliebig vielen Möglichen. Wenn gleich auch eine der einfach analytisch zu handhabenden und in bisherigen Messungen bestätigten Varianten,[78] ist die Wahl einer linearen Spannungsabhängigkeit in der Exponentialfunktion eventuell nicht optimal. Durch Potenzieren der Differenz der Spannungen  $U$  und  $U_k$  ergibt sich eine ganze Schar an möglichen Gleichungen, die grundsätzlich einen ähnlichen Verlauf haben.

$$X_{k,\infty} = \exp\left(-\frac{\alpha_k}{a_k} \cdot \text{sgn}(U - U_k) \cdot [(1 + |U - U_k|)^{a_k} - 1]\right)$$

Damit im relevanten Bereich an der  $k$ -ten Stufe ( $U \approx U_k$ ) die Auswirkung des Potenzieren mit zunehmenden Abstand immer stärker auftreten, wurde dieser Bereich um eins verschoben. Zusammen mit dem Betrag von  $U$  und  $U_k$  wird auf diese Weise sichergestellt, dass für Potenzen  $a_k > 1$  die Krümmungen zu Beginn und zum Ende des Anstiegs enger werden.

Hierdurch schmiegt sich der Kurvenverlauf schneller an den idealen Stromwert von  $(k - 1) \cdot ef$  bzw.  $k \cdot ef$  an. Die Vorzeichenfunktion  $\text{sgn}(U - U_k)$  sorgt dann trotz des Betrags wieder für den Wechsel von negativen zu positiven Werten. Alle Funktionen der Schar laufen durch den selben Punkt bei  $U = U_k$ , wo der Funktionswert von  $\exp(-X_{k,\infty}) = \exp(-1)$  wird. Die dortige Steigung ist unabhängig von  $a_k$  immer  $\frac{d}{dU} \exp(-X_{k,\infty}) = a_k \cdot \exp(-1)$ .<sup>9</sup>

Wie im Anhang bei A.3 gezeigt, kann  $X_{k,\infty}$  für ein deutlich ausgeprägtes  $k$ -te Plateau bestimmt werden. A.3 setzt jedoch voraus, dass  $dX_{k,\infty}/dU = -\alpha \cdot X_k$  und somit  $a_k = 1$ . Wird die relative Steigung  $\alpha^{-1} \cdot d\langle n \rangle / dU$  logarithmisch über die linear ansteigende Spannung  $U$  aufgetragen, müsste in dem Intervall zwischen  $U_k$  und  $U_{k+1}$  eine abfallende Gerade in dem Abschnitt mit  $\mathcal{P}_k(\infty) \approx 1$  auftreten. Sonst ist in jedem Fall der Ansatz aus Gleichung (5.29) nicht zu erfüllen. Umgekehrt gilt jedoch nicht zwingend bei Existenz dieses geraden Abschnitts  $a_k = 1$ . In den Abbildungen 5.6 und 5.7 sind an zwei Messkurven (a) beispielhaft logarithmisch die relative Steigung (b) über die Spannung  $U$  aufgetragen. Da die Ausgangsbarriere in beiden Fällen durch das mittlere bzw. zweite Top-Gate erzeugt wurde, ist  $U = U_{II}$ .

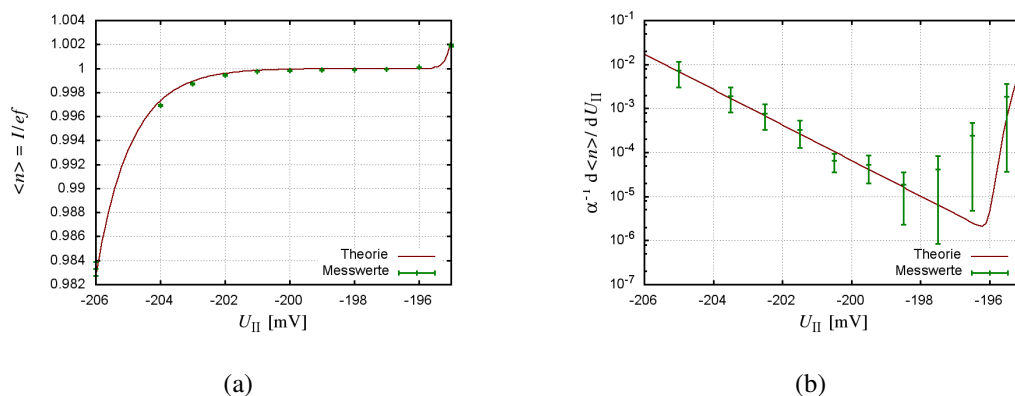
Bei endlicher Messgenauigkeit treten auch auf den Plateaus Fluktuationen durch Rauschen auf, so dass die experimentell bestimmte relative Steigung entgegen dem stets positiven Anstieg in der Theorie für einige Wertepaare auch negative Werte annehmen kann. Gleichzeitig werden demnach die benachbarten berechneten Steigungen etwas größer sein, um diese negativen Abweichungen auszugleichen. Die berechneten Steigungen streuen somit um den aus der *Decay Cascade* abgeleitete theoretische Wert. Bisher nicht berücksichtigte Fehlermechanismen, wie z.B. thermisches Rauschen[79], Schrotrauschen[80] aber auch in den Dot tunnelnde Elektronen während der *Decay Cascade* (durch Floquet scattering[81][82]), sorgen zusätzlich dafür, dass nicht über das gesamte Plateau die relative Steigung in logarithmischer Skalierung einer Geraden entsprechen sollte.[29][83]

Aus den Daten einer Präzisionsmessung von Christoph Leicht lässt sich die relative Steigung auf einem Plateau mit  $\delta_1 = 16.1$  berechnen. Der Messaufbau für diese Kompensationsmessung wird in [47, Kapitel 6.3] beschrieben und stellt eine weiterentwickelte Version von der Messung [84] dar. Die Messwerte von  $\langle n \rangle = I/(ef)$  sind in Abbildung 5.6(a) als grüne Kreuze und der zugehörige Fit als rote Kurve dargestellt. Wie in Abbildung 5.6(b) zu sehen, entspricht zumindest bei relativen Steigungen bis zu etwa  $10^{-5}$  der Verlauf der Messdaten der theoretischen Vorhersage auf Basis der *Decay Cascade* und für  $\ln(X_{1,\infty}) = -\alpha \cdot (U - U_1)$ . 6 der 10 aus den Messwerten berechnete Punkte liegen nahezu perfekt auf der Geraden. Bei Berücksichtigung der aufgetragenen Messunsicherheit  $\zeta$  ist der Verlauf der theoretischen Kurve für nahezu alle Punkte im  $1-\zeta$ -Intervall.

Mit diesen wenigen Punkten kann noch keine eindeutige Aussage über die Richtigkeit der Wahl von  $a_k$  gemacht werden, jedoch scheint sich zumindest  $a_k \approx 1$  etwas zu erhärten. Falls die Beziehung A.3 trotz  $a_k \neq 1$  weiterhin in guter Näherung gültig bleibt, würde in logarithmischer Darstellung keine Gerade mehr auftreten:

Für  $a_k \gg 1$  würde sich eine konkave Krümmung abzeichnen und die Punkte bei ansteigender

<sup>9</sup>Da die Vorzeichenfunktion an dieser Stelle null liefert, wurde jeweils von recht und links angenähert.



**Abbildung 5.6.:** Relative Steigung auf dem  $1ef$ -Plateau einer Pumpe mit dem Qualitätswert  $\delta_1 = 16.1$ .

Grafik (a) zeigt die Messpunkte mit der zugehörigen experimentellen Unsicherheit  $\zeta$  in grün. Die eingezeichnete rote Linie entspricht der nach der *Decay Cascade* und  $\ln(X_{1,\infty}) = -\alpha \cdot (U - U_1)$  bzw.  $\ln(X_{2,\infty}) = -\alpha \cdot (U - U_2)$  zu erwartenden theoretischen Kurve mit den Fit-Parametern  $\alpha = 0.93 \text{ mV}^{-1}$ ,  $U_1 = -210.35 \text{ mV}$  und  $U_2 = -193.05 \text{ mV}$ . Die den Punkten zugrunde liegende Präzisionsmessung basierte auf dem Vergleich des Pumpstrom mit einem  $1 \text{ G}\Omega$ -Widerstand, der den Messfehler bei der Stromkompensation auf etwa  $2.5 \text{ ppm}$  reduziert.

In (b) ist die relative Steigung der theoretischen Kurve ebenfalls in rot aufgetragen. Aus den experimentellen Daten wurde die relative Steigung durch die Steigung zwischen benachbarten Messpunkten bestimmt und als Ordinatenwert verwendet. Als Abszissenwert wurde von den Abszissenwerten der beiden beteiligten Punkte der Mittelwert gewählt. Die auf diese Weise bestimmten Wertepaare sind in grün mit der berechneten Unsicherheit  $\zeta$  eingezeichnet. Die Ordinatenachse ist logarithmisch skaliert um Unterschied bei geringen Steigungen deutlicher hervorzuheben. Im Spannungsintervall bis etwa  $-197 \text{ mV}$  bildet diese eine Gerade. Bis ca.  $-198.5 \text{ mV}$  bzw. fast  $10^{-5}$  liegen die berechneten Punkte in etwa auf der theoretischen Geraden.



---

Spannung somit schneller als die eingezeichnete Gerade auf die Steigungswerte bei  $10^{-5}$  fallen.

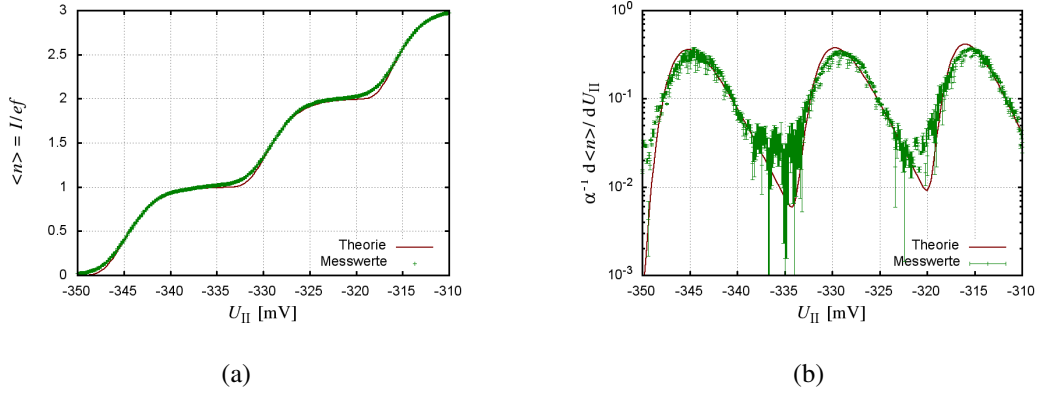
Umgekehrt würde durch einen konvexen Kurvenverlauf bei  $a_k \ll 1$  die relative Steigung langsamer absinken und demnach auch auf einem derartig qualitativ hochwertigen Plateau nicht den ermittelten Wert bei  $10^{-5}$  erreichen.

Demnach passen Kurven mit  $a_k \ll 1$  oder  $a_k \gg 1$  anscheinend nicht zu den Messdaten.

Statt einer Präzisionsmessung mit nur wenigen Messpunkten können auch die im Kapitel 6 gezeigten Messungen ausgewertet werden. In Abbildung 5.7(a) wurde der Verlauf von  $\langle n \rangle = I/(ef)$  der Pumpe A aus Abschnitt 6.1 (Parallelschaltung) über die Spannung am Ausgangs-Gate  $U = U_{II}$  aufgetragen. Die Schrittweite beträgt bei dieser Messung 0.05 mV. Um die relative Steigung der Messung zu bestimmen, muss das Rauschen der Messpunkte durch Mittelwertbildung unterdrückt werden. Damit keine negativen Steigungen auftreten, die bei der logarithmischen Skalierung in Abbildung 5.7(b) nicht dargestellt werden können, wurde ein gleitende Mittelwert über 11 Messpunkte verwendet. Für derartige Plateaus mit einem geringen Qualitätswert  $\delta$  genügt dieses Mittelungsverfahren. Da im flachsten Abschnitt die Änderungen von Punkt zu Punkt deutlich durch das Rauschen dominiert werden, reicht für Plateaus mit höherem  $\delta$  diese Vorgehensweise nicht unbedingt. Zudem müssen die Steigungen der Übergänge möglichst identisch sein, damit ein gemeinsames  $\alpha$  verwendet werden kann.

Die Abweichung zwischen den Messpunkten und der theoretischen Kurve in 5.7(a) zeigt, dass der Beginn eines Übergangs für Plateaus mit geringen Qualitätswerten  $\delta$  nur näherungsweise beschrieben werden kann, da zuvor gemachte Vereinfachungen qualitativ hochwertige Plateaus vorausgesetzt haben. Zudem scheint der Verlauf der Messpunkte an den Übergängen eher punktsymmetrisch zu sein, was für einen deutlichen Einfluss der thermischen Fehlerquellen spricht.[83] Trotz dieser Abweichungen wird der Verlauf der relativen Steigung in Abbildung 5.7(b) über weite Bereiche passend beschrieben. Insbesondere im Intervall zwischen einer Übergangsspannung  $U_k$  und etwa der Mitte des  $k$ -ten Plateaus folgen die auf den Messwerten basierenden Punkte für alle drei gezeigten Übergänge in guter Übereinstimmung dem geraden Abschnitt der theoretischen Kurve.

Auch wenn die genaue Spannungsabhängigkeit der Tunnelfunktion deutlich komplexer als die gewählte Beziehung  $\ln(X_{k,\infty}) = -\alpha_k \cdot (U - U_k)$  verläuft, sollte zur Beschreibung dieser Beziehung zunächst ein einfacher Ansatz gewählt werden. Zwar könnte ein Anfitzen an die Messpunkte auch mit dem zusätzlichen Parameter  $a_k$  gelingen, jedoch steigt hierdurch gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit einer Überanpassung. Da die Fit-Kurven der relativen Steigung in dem linearen Abschnitt mit den aus den Messwerten berechneten Steigungen in erster Ordnung übereinstimmen, ist mit  $a_k = 1$  die gewählte Beziehung  $\ln(X_{k,\infty}) = -\alpha_k \cdot (U - U_k)$  allem Anschein nach zur Beschreibung des *Decay-Cascade*-Prozesses geeignet.



**Abbildung 5.7.:** Relative Steigung auf dem  $1ef$ - und  $2ef$ -Plateau einer Pumpe mit den Qualitätswert  $\delta_1 = 7.5$  bzw.  $\delta_2 = 6.7$ . Entsprechend Abbildung 5.6 sind in Grafik (a) die Messergebnisse und in (b) die berechneten relativen Steigungen aufgetragen. Damit keine negativen Steigungen auftreten, wurde das Rauschen der Messwerte durch einen gleitende Mittelwert über 11 Punkte neutralisiert. Als Fit-Parameter für die beiden roten Linien wurden  $\alpha = 0.49 \text{ mV}^{-1}$ ,  $U_1 = -345.12 \text{ mV}$ ,  $U_2 = -329.69 \text{ mV}$  und  $U_3 = -315.97 \text{ mV}$  verwendet. Die experimentelle Unsicherheit  $\zeta$  beträgt für die Messwerte in (a) etwa 0.01 und ist somit bezogen auf einen Messpunkt bei dieser Achsenskalierung nicht wahrnehmbar.

### 5.1.6. Betrachtungen unter Einbeziehung des Elektronenspins

In den Gleichungen zur Beschreibung der Menge an gepumpten Elektronen ist der Elektronenspin nicht berücksichtigt. Für genauere Betrachtungen, die diesen Aspekt einschließen, lässt sich die allgemeine Ratengleichung (5.1) erweitern. Hierzu wird mit dem Index  $j$  die Anzahl an  $\downarrow$ -Spins angegeben. Die Anzahl an  $\uparrow$ -Spins entspricht dann  $n - j$ . Dieser zusätzliche Index wird im folgenden Spin-Index genannt. Für jedes mögliche Verhältnis von Spins kann mit folgender Beziehung die zeitliche Änderung berechnet werden.

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}_{n,j} = & \Gamma_{n+1,j}^{\uparrow} \mathcal{P}_{n+1,j} + \Gamma_{n+1,j+1}^{\downarrow} \mathcal{P}_{n+1,j+1} + \Xi_{n-1,j}^{\uparrow} \mathcal{P}_{n-1,j} + \Xi_{n-1,j-1}^{\downarrow} \mathcal{P}_{n-1,j-1} \\ & - \Gamma_{n,j}^{\uparrow} \mathcal{P}_{n,j} - \Gamma_{n,j}^{\downarrow} \mathcal{P}_{n,j} - \Xi_{n,j}^{\uparrow} \mathcal{P}_{n,j} - \Xi_{n,j}^{\downarrow} \mathcal{P}_{n,j} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Die auftretenden Tunnelraten beziehen sich ebenfalls über den Index  $j$  auf die jeweilige Zusammensetzung der Spins. Die Tunnelraten  $\Gamma^{\uparrow}$  und  $\Xi^{\uparrow}$  stehen dabei für das heraus bzw. herein Tunneln eines Spin- $\uparrow$ -Elektrons. Entsprechend sind  $\Gamma^{\downarrow}$  und  $\Xi^{\downarrow}$  die Tunnelraten für Spin- $\downarrow$ -Elektronen. Ein Umspringen von Elektronenspin wird nicht separat mit eigenen Raten erfasst, sondern zu den entsprechenden  $\Gamma^{\uparrow}$  und  $\Xi^{\downarrow}$  (austretendes Spin- $\uparrow$ -Elektron und eindringendes Spin- $\downarrow$ -Elektron) bzw.  $\Gamma^{\downarrow}$  und  $\Xi^{\uparrow}$  (austretendes Spin- $\downarrow$ -Elektron und eindringendes Spin- $\uparrow$ -Elektron) dazu gerechnet. Alle  $\mathcal{P}_{n,j}$  mit gleichem  $n$  entsprechen in der Summe dem bisherigen  $\mathcal{P}_n$ . Deshalb gilt:

$$\mathcal{P}_n = \sum_{j=0}^n \mathcal{P}_{n,j} \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathcal{P}}_n = \sum_{j=0}^n \dot{\mathcal{P}}_{n,j} \quad (5.39)$$

Aus dem Vergleich zwischen Gleichung (5.1) und (5.38) folgt somit:

$$\Gamma_{n+1}\mathcal{P}_{n+1} - \Xi_n\mathcal{P}_n = \sum_{j=0}^{n+1} \{(\Gamma_{n+1,j}^\uparrow + \Gamma_{n+1,j}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{n+1,j} - (\Xi_{n,j}^\uparrow + \Xi_{n,j}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{n,j}\} \quad (5.40)$$

$$k < 0 \quad \vee \quad k > n \quad \Rightarrow \quad \Xi_{n,k}^\uparrow = \Gamma_{n,k}^\downarrow = 0 = \mathcal{P}_{n,k} \quad ; \quad \Gamma_{n,n}^\uparrow = \Gamma_{n,0}^\downarrow = 0$$

In der letzten Zeile werden alle unphysikalischen Tunnelraten und Besetzungswahrscheinlichkeiten mit zu großem oder zu kleinem Spin-Index auf Null gesetzt. Wie bereits eingangs definiert, entspricht der Spin-Index der Anzahl an Spin-↓-Elektronen. Aus diesem Grund kann er nicht negativ aber auch nicht größer als  $n$  werden. Um beide möglichen Spin-Ausrichtungen abzudecken, wurde in Anlehnung an  $\pm$  in diesem Fall  $\uparrow$  verwendet. Aus den Gleichungen (5.39) und (5.40) können für die Wahrscheinlichkeiten der beiden Spin-Zustände  $\mathcal{P}_\uparrow \equiv \mathcal{P}_{1,0}$  und  $\mathcal{P}_\downarrow \equiv \mathcal{P}_{1,1}$  die jeweiligen Anteile berechnet werden.

$$\begin{aligned} \Gamma_1\mathcal{P}_1 - \Xi_0\mathcal{P}_0 &= \sum_{j=0}^1 (\Gamma_{1,j}^\uparrow + \Gamma_{1,j}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{1,j} - (\Xi_{0,j}^\uparrow + \Xi_{0,j}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{0,j} \\ &= \Gamma_{1,0}^\uparrow\mathcal{P}_{1,0} + \Gamma_{1,1}^\downarrow\mathcal{P}_{1,1} - (\Xi_{0,0}^\uparrow + \Xi_{0,0}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{0,0} \\ &\Downarrow \leftarrow \mathcal{P}_{1,1} = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_{1,0} \quad \wedge \quad \mathcal{P}_{0,0} = \mathcal{P}_0 \\ (\Gamma_{1,1}^\downarrow - \Gamma_{1,0}^\uparrow) \cdot \mathcal{P}_{1,0} &= (\Gamma_{1,1}^\downarrow - \Gamma_1) \cdot \mathcal{P}_1 - (\Xi_{0,0}^\uparrow + \Xi_{0,0}^\downarrow - \Xi_0) \cdot \mathcal{P}_0 \\ (\Gamma_{1,0}^\uparrow - \Gamma_{1,1}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{1,1} &= (\Gamma_{1,0}^\uparrow - \Gamma_1) \cdot \mathcal{P}_1 - (\Xi_{0,0}^\uparrow + \Xi_{0,0}^\downarrow - \Xi_0) \cdot \mathcal{P}_0 \end{aligned}$$

Die beiden Wahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_{1,0}$  und  $\mathcal{P}_{1,1}$  lassen sich somit über die Tunnelraten mit den durch Strommessungen gewonnenen Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_0$  und  $\mathcal{P}_1$  in Verbindung bringen. Mit geeigneten Pumpparametern, die dem ersten Pumpplateau entsprechen, ist  $\mathcal{P}_1 \approx 1$  und  $\mathcal{P}_0 \approx 0$ . Da bei der *Decay Cascade* rein tunnelnde Elektronen vernachlässigbar sind, sollte der hintere Term eine untergeordnete Rolle spielen. Die einzige Ausnahme wäre dann gegeben, wenn die Lebensdauern der Spin-Zustände deutlich kürzer als ein Pumpzyklus sind und aus diesem Grund die  $\Xi$  groß genug werden. In allen anderen Fällen reicht es die Verhältnisse von  $\Gamma_{1,0}^\uparrow$ ,  $\Gamma_{1,1}^\downarrow$  und  $\Gamma_1$  zueinander zu kennen.

Für höhere Besetzungszahlen kann eine analytische Lösung nur unter bestimmten Annahmen gefunden werden. Wenn die Tunnelraten für  $\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow} \equiv \mathcal{P}_{2,0}$  und  $\mathcal{P}_{\downarrow\downarrow} \equiv \mathcal{P}_{2,2}$  ungefähr gleich sind ( $\Gamma_{2,0}^\uparrow \approx \Gamma_{2,2}^\downarrow$ ), lässt sich zumindest für  $\mathcal{P}_{\uparrow\downarrow} \equiv \mathcal{P}_{2,1}$  ein Näherungswert finden. Diese zusätzliche Annahme spiegelt die Symmetrie der beiden Zustände  $\uparrow\uparrow$  und  $\downarrow\downarrow$  wieder.

$$(\Gamma_{2,0}^\uparrow - \Gamma_{2,1}^\uparrow - \Gamma_{2,1}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{2,1} \approx (\Gamma_{2,0}^\uparrow - \Gamma_2) \cdot \mathcal{P}_2 + \Xi_1\mathcal{P}_1 - (\Xi_{1,0}^\uparrow + \Xi_{1,0}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{1,0} - (\Xi_{1,1}^\uparrow + \Xi_{1,1}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{1,1}$$

Da mit zunehmenden äußeren Einflüssen wie z.B. einem Magnetfeld die Symmetrie immer mehr aufgebrochen wird, lässt sich diese Näherung nicht in allen Fällen verwenden. Jedoch lässt sich erkennen, wie für die Zustände  $\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow\downarrow} \equiv \mathcal{P}_{3,1}$  und  $\mathcal{P}_{\uparrow\downarrow\downarrow} \equiv \mathcal{P}_{3,2}$  zusammen ebenfalls eine vergleichbare Näherungslösung gefunden werden kann. Mit  $\Gamma_{3,0}^\uparrow \approx \Gamma_{3,3}^\downarrow$ ,  $\Gamma_{3,1}^\uparrow \approx \Gamma_{3,2}^\downarrow$  und

$\Gamma_{3,2}^\uparrow \approx \Gamma_{3,1}^\downarrow$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\Gamma_{3,0}^\uparrow - \Gamma_{3,1}^\uparrow - \Gamma_{3,1}^\downarrow) \cdot (\mathcal{P}_{3,1} + \mathcal{P}_{3,2}) &\approx (\Gamma_{3,0}^\uparrow - \Gamma_3) \cdot \mathcal{P}_3 + \Xi_2 \mathcal{P}_2 \\ &\quad - (\Xi_{2,0}^\uparrow + \Xi_{2,0}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{2,0} - (\Xi_{2,1}^\uparrow + \Xi_{2,1}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{2,1} - (\Xi_{2,2}^\uparrow + \Xi_{2,2}^\downarrow) \cdot \mathcal{P}_{2,2} \end{aligned}$$

Ohne Magnetfeld sind bei Atomen für bis zu fünf Elektronen die energetisch stabilsten Zustände diejenigen, bei denen sich die  $\uparrow$ -Spins und die  $\downarrow$ -Spins möglichst ausgleichen. Da zunächst das 1S- und das 2S-Orbital komplett aufgefüllt werden, kann das fünfte Elektron mit beliebiger Ausrichtung ein 2P-Orbital besetzen. Erst bei 6 Elektronen tritt dann das erste mal eine durch die Hundsche-Regel beschriebene Abweichung auf. Statt das vom fünften Elektron besetzte Orbital aufzufüllen, wird vielmehr ein weiteres 2P-Orbital einfach besetzt und der Gesamtspin in dem Fall nicht ausgeglichen sondern maximiert. Da jedoch je nach Geometrie des QDs die Orbitale anders geformt und angeordnet sind, ist eher davon auszugehen, dass es z.B. nicht 3 gleichwertige 2P-Orbitale gibt und somit die Besetzungen der Grundzustände anders aussehen. Je stärker die Längen des QDs in den unterschiedlichen Raumrichtungen voneinander abweichen, desto weniger symmetrisch können sich die Orbitale anordnen. Somit können die Orbitale in einem unsymmetrischen QD alle energetisch verschieden sein. In diesem Fall werden für den Grundzustand die Orbitale nacheinander aufgefüllt. Die Spin-Zusammensetzung besteht dann zur Hälfte aus  $\uparrow$ -Spins und zur anderen Hälfte aus  $\downarrow$ -Spins, wengleich bei einer ungeraden Anzahl an Elektronen eine Spin-Ausrichtung einen zusätzlichen Spin besitzt. Die Grundzustände sind in diesem Fall möglichst zu gleichen Teilen aus den beiden Spin-Ausrichtungen zusammen gesetzt. Da jedoch keine genauen Informationen über die Orbitale in den QDs der verwendeten Einzel-Elektronen-Pumpen verfügbar sind, können energetisch gleiche Orbitale nicht ausgeschlossen werden. Für Besetzungen bis zum fünften Elektron wird jedoch im Folgenden von einem bezüglich der Spins möglichst ausgeglichenen Grundzustand ausgegangen.

Im adiabatischen Fall würde das System die meiste Zeit in diesen ausgeglichenen Zuständen verweilen. Die vollständig polarisierten Zustände mit maximaler Anzahl von  $\uparrow$ -Spins oder  $\downarrow$ -Spins wären demnach vernachlässigbar. Hierin unterscheidet sich der nicht-adiabatischen Zerfall: Es ist bei dem Einladeprozess der Einzel-Elektronen-Pumpen nur in der Umgebung der Einladekante wahrscheinlich, dass Zustände mit wenigen Elektronen ( $n < 5$ ) direkt geladen werden. Vielmehr entstehen sie indem durch die *Decay Cascade* höhere Besetzungszustände in diese letztlich zerfallen. In einem einfachen Modell, bei dem alle Elektronen ohne zusätzliches Magnetfeld mit gleicher Wahrscheinlichkeit Tunneln können, zerfällt ein Zustand mit  $n$  Elektronen:

Von den  $n$  Elektronen weisen  $j$  einen  $\downarrow$ -Spin auf. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron mit  $\downarrow$ -Spin heraus tunnelt wäre demnach  $j/n$ . Entsprechend tunnelt bei dieser Spin-Zusammensetzung ein  $\uparrow$ -Spin-Elektron mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - j/n$  aus dem QD. Gelangt das System zu einem Zeitpunkt zufällig in einen reinen  $\uparrow$ -Spin- oder  $\downarrow$ -Spin-Zustand, können durch die *Decay Cascade* nur noch vollständig polarisierte Zustände erreicht werden. Erst durch einen Wechsel eines Spins in die andere Ausrichtung, einem sogenannten Spin-Flip, würde die Besetzung wieder gemischte Spin-Zustände erreichen. Selbst wenn die *Decay Cascade* mit einer ausgeglichenen Besetzung startet, kommt es in einigen Fällen

---

somit im QD zu Spin-Besetzungen, die im adiabatischen Fall nicht erreicht werden. Für den Anfangszustand mit  $n = 10$  und  $j = 5$  wird nach diesem Modell mit einer Wahrscheinlichkeit von  $1/126 \approx 7.9 \cdot 10^{-3}$  ein vollständig polarisierter Zustand mit fünf Elektronen (entweder mit  $j = 0$  oder mit  $j = 5$ ) erreicht. Dieser Wert entspricht allerdings nur einer oberen Abschätzung, da im tatsächlichen QD die Wellenfunktionen der Elektronen in den Orbitalen unterschiedlich weit in die Tunnelbarriere hineinreichen. Aus diesem Grund kann davon ausgegangen werden, dass die energetisch ungünstigsten Elektronen mit höherer Tunnelwahrscheinlichkeit austreten und somit vorrangig von einem Grundzustand zum nächsten Grundzustand getunnelt wird. Da jedoch andererseits im zeitlich variierenden Einschlusspotential des QDs mit absinkender Elektronenbesetzung möglicherweise verschiedene Orbital-Anordnungen in einander übergehen, könnte in diesem System eine breitere Verteilung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_{n,j}$  als im statischen QD auftreten.

Auch wenn die aus dem einfachen Modell gewonnene Abschätzung wahrscheinlich noch deutlich zu hoch ist, wird mit einem ansteigenden Magnetfeld die Besetzungswahrscheinlichkeit des vollständig polarisierten Zustands mit der bevorzugten Spin-Ausrichtung immer wichtiger. Durch ein Magnetfeld wird die Spin-Symmetrie aufgehoben, wodurch die Tunnelwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit des Spins unterschiedlich verschoben werden. Hierdurch sinkt die Häufigkeit der vollständig polarisierten Zustände mit energetisch unvorteilhaftem Spin. Dafür steigt die Anzahl der Fälle, bei dem sich das System in einem nur aus dem bevorzugten Spin bestehenden, vollständig polarisierten Zustand befindet. Ist z.B. im Magnetfeld der  $\uparrow$ -Spin energetisch günstiger, so wird aufgrund der ungleichen Tunnelraten für  $\uparrow$ - und  $\downarrow$ -Spins  $\mathcal{P}_{n,n}$  sinken und  $\mathcal{P}_{n,0}$  anwachsen. Mit steigendem Magnetfeld wird dieser Anteil immer gewichtiger und auch letztlich energetisch stabil. Solange dieser Übergang jedoch noch nicht komplett abgeschlossen ist, könnten durch die *Decay Cascade* vollständig polarisierte Zustände mit der bevorzugten Spin-Ausrichtung anteilig vermehrt auftreten. Je weniger ausgleichende Prozesse möglich sind bzw. je kleiner die Wahrscheinlichkeiten für diese Spin-Flips sind, desto größer kann die Abweichung von dem adiabatischen Fall ausfallen.

Inwieweit sich der beschriebene Effekt der verstärkten Spin-Polarisation im Experiment bestätigen lässt, muss die Zukunft zeigen. Spin-abhängiges Tunneln in einen QD zeigt bereits unerwartete Ergebnisse bezüglich der Tunnelraten der beiden möglichen Spins,[85] so dass die Spin-Besetzung zu Beginn des Rücktunnels bereits polarisiert ist. Tritt zudem eine deutliche Spin-Polarisation des *2DEGs* auf,[86] lässt sich die Entstehungsgeschichte der im Endergebnis gefundenen Polarisation sicherlich nicht mehr eindeutig zuweisen.

## 5.2. Zusammenfassung: Modellierung

Zur Beschreibung des Pumpprozesses können in Markow-Näherung Ratengleichungen verwendet werden. Nicht-adiabatisches Pumpen wird zumeist durch das Rücktunneln der Elektronen aus dem QD nach *Source* beeinflusst. Dieser Vorgang kann durch die sogenannte *Decay Cascade* beschrieben werden.[22] Die gefundenen analytische Lösungen setzen eine identische Zeitabhängigkeit der Tunnelraten voraus. Jedoch ist diese Forderung nur in den Fällen ausschlaggebend, in denen nahezu keine Quantisierung des Strom auftritt. In guter Näherung kann somit bei ausgeprägter Stromquantisierung diese Bedingung als erfüllt betrachtet werden.

Die in dieser Arbeit ausführlich hergeleiteten theoretischen Gleichungen beschreiben eine Verallgemeinerung des bisherigen *Decay-Cascade*-Modells.[22] Die publizierten Messungen an verschiedenen nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen können somit auch mit dem neuen Modell ausgewertet werden und es ergeben sich keine nennenswerte Abweichungen zu den alten Ergebnissen.[47][17][87][7] Da zudem nicht mehr wie bisher die Forderung nach identischen Anstiegen an den Übergängen zwischen den Plateaus besteht, lassen sich nun auch für alle bisher ungeeigneten Messkurven nicht-adiabatischer Einzel-Elektronen-Pumpen geeignete Fit-Parameter finden.

Die Fehlerquote des erzeugten Pumpstroms sollte für Anwendungen als Quantennormal im Idealfall exakt Null betragen, jedoch kann dies aufgrund der von Null abweichenden Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen möglichen Tunnelprozesse nicht erfüllt werden. Aus den hergeleiteten Formeln lässt sich eine erste Abschätzung der Fehlerquote für die *Decay Cascade* aufstellen. Solange diese Fehlerquote höher als die der in dem Modell nicht berücksichtigte Fehlermechanismen liegt, werden die Messdaten durch das Modell gut beschrieben. Mit Daten aus einer Präzisionsmessung ließen sich somit über weite Teile des Plateaus eine Übereinstimmung zeigen, wodurch die gewählte Beziehung zwischen Tunnelfunktion  $X$  und der für die Ausgangsbarriere zuständigen Gate-Spannung  $U$  untermauert wird.

Zum Schluss wurde das Modell erweitert, so dass auch der Elektronen-Spin bei den Tunnelprozessen berücksichtigt werden kann. Sofern Spin-Flips während eines Pumpzyklus in guter Näherung ausgeschlossen werden können, ergibt sich die endgültige Zusammensetzung der gepumpten Spins durch den *Decay-Cascade*-Prozess. Die resultierende Spin-Polarisation sollte sich nach diesen Überlegungen von denen aus adiabatischen Pumpen unterscheiden.

---

## 6. MESSUNGEN UND ERGEBNISSE

Dieses Kapitel befasst sich mit neuartigen Anwendungen für nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen. Während in bisherigen Messungen zumeist nur die zur Realisierung eines Quantenstromnormals notwendige Minimierung der Pumpfehler im Fokus stand, sollen in dieser Arbeit folgende Betriebsarten untersucht werden:<sup>1</sup>

Zuerst wird der Parallelbetrieb mehrere, auf einem Proben-Chip befindlicher Pumpen untersucht. Durch diese Messung soll überprüft werden, ob mehrere Pumpen mit gemeinsamen Top-Gates und somit identischen Parameterwerten betrieben werden können. Auf diese Weise sollen Pumpströme  $>0.25$  nA realisiert werden.

Danach wird die Erzeugung eines zeitlich variierenden, quantisierten Pumpstroms durch eine Frequenzmodulation der Pumpfrequenz untersucht. Hierdurch wird gezeigt, dass somit quantisierte Ströme mit beliebigen Wellenformen möglich sind.

Abschließend soll der Einfluss eines zweiten am Pumpen beteiligten Dots durch Messungen bei verschiedenen Magnetfeldern genauer erforscht werden. Dabei wird geklärt, inwieweit sich hierdurch der Pumpzyklus ändert. Der Einfluss der Coulomb-Abstoßung zwischen den Elektronen in den beiden Quantenpunkten wird hierdurch beleuchtet, so dass dieser gegebenenfalls in zukünftigen, energiselektiven Messungen gezielt eingesetzt werden kann.

### 6.1. Parallelschaltung

Gängige nicht-adiabatische Einzelelektronenpumpen arbeiten mit Pumpfrequenzen bis zu knapp über einem GHz und erzeugen somit Ströme bis zu knapp unterhalb von 200 nA. Um größere Stromstärken zu erzeugen, ist ein sinnvoller Ansatz, mehrere Pumpen parallel zu betreiben und damit die Ströme zu addieren. Bereits 2009 wurde von Maisi et al.[89] der Parallelbetrieb von 10 Supraleiter-Metall-Supraleiter-Turnstiles bei 65 MHz demonstriert.

---

<sup>1</sup>Dieses Vorgehen soll es zukünftig ermöglichen Quantenstromnormale bei höheren Stromstärken und für Wechselströme einzusetzen. Dies ist vergleichbar mit den Entwicklungen bei Josephson-Elementen: Mit dem quantenmechanischen Josephson-Effekt kann ein Frequenzsignal in eine Spannung überführt werden. Jedoch lassen sich auf diese Weise mit einem einzelnen Josephson-Kontakt nur geringe Spannungen erzeugen, da der Proportionalfaktor mit etwa  $2.0678 \cdot 10^{-15}$  V/Hz selbst für Frequenzen von einigen GHz nur Spannungen im  $\mu$ V-Regime liefert. Durch Reihenschaltung mehrerer Josephson-Kontakte konnte die Spannung vervielfältigt werden, so dass heute auch Spannungen im 10 V-Regime mit Josephson-Spannungsnormale erzeugt werden können. Um auch Wechselfspannungen auf Basis des quantisierten Josephson-Effekts zu realisieren, werden heute programmierbare Josephson-Normale im Pulsbetrieb eingesetzt.[88]

Diese Turnstiles wurden zudem mit einem gemeinsamen Modulationssignal betrieben, wodurch gezeigt wurde, dass sie sich besonders für den Parallelbetrieb eignen. Bei der ersten Parallelschaltung von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen wurden die beiden beteiligten Pumpe noch nicht mit einem gemeinsamen Modulationssignal betrieben.[90] Nur durch die Verwendung des selben HF-Signals, kann jedoch die Anzahl an benötigten HF-Leitungen im Probenstab gering gehalten werden. Dies reduziert den technischen Aufwand die HF-Signale zu den Pumpen zu führen und sorgt zudem dafür, dass die thermische Last durch viele HF-Leitungen nicht zu groß wird.

Bei nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen wird nur die Spannung an dem Eingangs-Gate periodisch verändert, während konstante Spannung an das Ausgangs-Gate angelegt wird. Durch elektrostatische Abstoßung werden bei einer Zunahme an Elektronen auf dem Eingangs-Gate die Elektronen auf benachbarten Gates stärker verdrängt. Hierdurch ausgelöst wird die Spannung direkt am Ausgangs-Gate ebenfalls leicht schwanken. Da *GaAs* piezoelektrisch ist, wird zudem durch die variierende Abstoßungskraft der Gates im Kristall eine zusätzliche Piezo-Spannung auf- und abgebaut. Wie sich in den erfolgreichen Messungen an nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen auf *GaAs* jedoch gezeigt hat, mussten diese periodischen Veränderungen nicht durch eine entgegenwirkende Spannung kompensiert werden. Da trotz des Übersprechens zwischen den Gates und der variierenden Piezospaltung das Pumpen einzelner Elektronen möglich ist, verhindern diese Effekte zumindest bei dem verwendeten Pumpendesign nicht das nicht-adiabatische Pumpen. Deshalb reicht es, nur am Eingangs-Gate die Hochfrequenz anzulegen. Bei der Parallelschaltung mehrerer Einzelelektronenpumpen ist es von großem Vorteil, wenn mehrere Pumpen sich ein gemeinsames Eingangs-Gate teilen würden. Hierdurch kann die Anzahl an benötigten HF-Leitungen und der Signal erzeugenden Frequenzgeneratoren reduziert werden. Zudem ist es dadurch möglich diese Pumpen synchron zu betreiben, was sonst eine ständige Synchronisierung der stattdessen parallel arbeitenden Frequenzgeneratoren erfordern würde. Ein gemeinsames Eingangs-Gate kann allerdings nur dann für alle angeschlossenen Pumpen verwendet werden, wenn diese mit einer gemeinsamen modulierten Spannung jeweils quantisierte Pumpströme erzeugen. Da bei diesen Nanostrukturen durch Unregelmäßigkeiten in der *Side-Wall-Depletion* oder auch durch die Anwesenheit von Traps die optimalen Betriebsparameter schwanken, sind gemeinsame Werte für die Amplitude und den Offset des HF-Signals für das Eingangs-Gate bei erster Betrachtung nicht zu erwarten. Gründlichere Überlegungen legen jedoch nahe, dass zumindest theoretisch ein Parallelbetrieb mit gemeinsamer Modulation möglich sein sollte.

Wie im Abschnitt 2.5.1 beschrieben, muss die Eingangsbarriere in der Einladephase ausreichend abgesenkt werden, damit Elektronen in den Dot gelangen können. Zudem muss in der Auswurfphase die Eingangsbarriere mindestens so hoch sein, dass die Elektronen nach *Drain* ausgeworfen werden können. Sollen mehrere Pumpen mit einer gemeinsamen modulierten Spannung an den Eingangs-Gates betrieben werden, ergibt sich somit folgende Bedingung: Die Modulation muss mindestens so groß gewählt werden, dass für alle Pumpen die jeweilige Eingangsbarriere in der Einfangphase ausreichend niedrig und in der Auswurfphase ausreichend hoch ist.

Die im Abschnitt 2.5.3 beschriebene Pumpregion jeder einzelnen Pumpe verändert sich bei



---

zunehmender Amplitude der Modulation, indem die Einladekante zu negativeren und die Auswurfkante zu positiveren Offset-Spannungen verschiebt. Folglich haben alle beteiligten Pumpen bei der geforderten Amplitude eine gemeinsame Offset-Spannung, für die jede Pumpe quantisierte Pumpströme liefern kann. Diese können in Abhängigkeit der Spannung am Ausgangs-Gate für jede Pumpe individuell eingestellt werden.

Diese Überlegungen wurde bereits 2008 von B. Kaestner und V. Kashcheyevs in dem Paper *Robust single-parameter quantized charge pumping* veröffentlicht.[13] Ob sich diese aus der Theorie hergeleitete Vorhersage erfüllen lässt, wurde mit dieser Messung getestet.

### 6.1.1. Parallelbetrieb von 3 Pumpen

Der Versuch sollte zeigen, ob mehrere Pumpen mit einem gemeinsamen Eingangs-Gate betrieben werden können und was zu tun ist, wenn ungeeignete Pumpen in der Parallelschaltung enthalten sind. Hierzu wurde ein Probandesign gewählt bei der vier rund 800 nm breite *Mesa*-Kanäle parallel angeordnet sind.<sup>2</sup> Bei jedem dieser Kanäle kreuzen drei Titan-Gold-Top-Gates den Mesa-Kanal. Eine Aufnahme der verwendeten Probe ist in Abbildung 6.1 zu sehen.

Das jeweils erste Gate ist über eine Verbindungsleiterbahn mit einer gemeinsamen Zuleitung verbunden. Für die Messungen wurde es als Eingangs-Gate genutzt.

Die mittleren Top-Gates wurden als Ausgangs-Gates verwendet. Damit die Pumpen individuell eingestellt werden können, sind die Zuleitungen zu den Ausgangs-Gates der vier Pumpen getrennt geführt.

Das nicht genutzte jeweils dritte Top-Gate der Pumpen ist durchgängig über alle vier Kanäle gelegt und ist an einer Seite mit der Zuleitung verbunden. Es wurde für die Messungen mit Masse verbunden. Sollte mit den nicht durchgängigen Eingangs-Gates kein Parallelbetrieb möglich sein, wäre es möglich, stattdessen diese Gates als Eingangs-Gates zu nutzen und somit nur die Pumprichtung umzukehren.

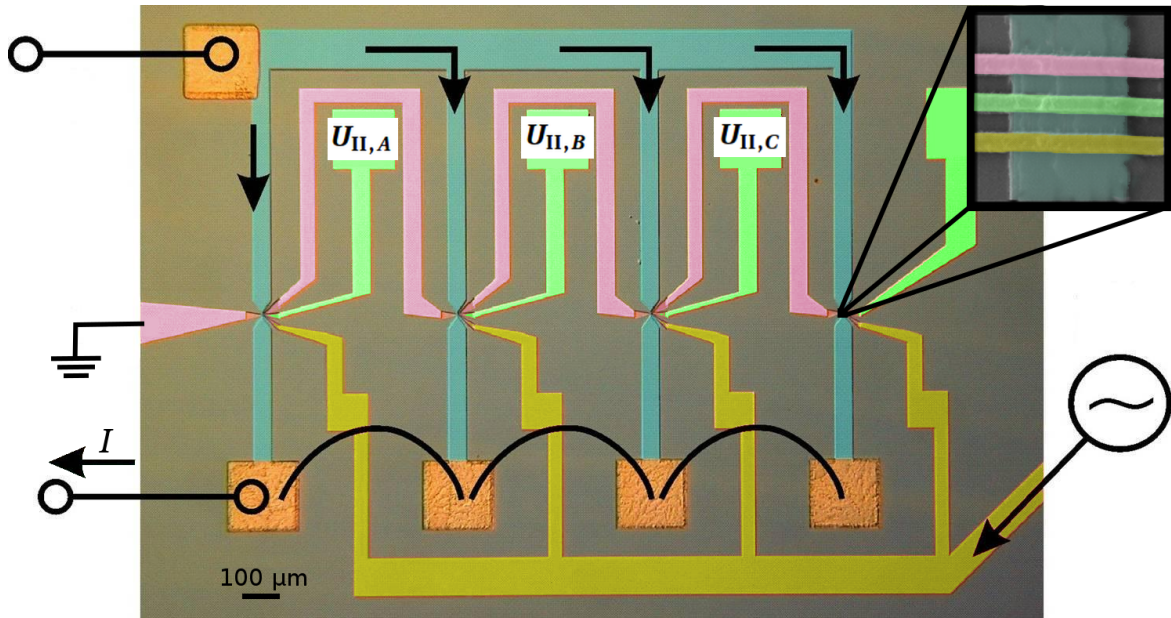
Da die Wege der Eingangs-Gates nicht identisch sind, wird eine geringfügig unterschiedliche Signalstärke an den Eingangs-Gates anliegen. Das angelegte Hochfrequenzsignal wird bei diesem Experiment an den offenen Enden reflektiert. Um die Reflektion zu minimieren, müsste das HF-Signal durch ein zweites HF-Kabel wieder zurück geführt werden. Hierdurch wäre der Aufbau aber aufwendiger und deshalb wurde in diesem ersten Versuch ein entsprechendes Design nicht umgesetzt. Vielmehr sollte untersucht werden, ob bereits dieser auf nötigste reduzierte Aufbau schon erfolgreich Parallelbetrieb ermöglicht.

Das *2DEG* des verwendete Wafer-Materials hat bei einer Temperatur von 4 K eine Ladungsträgerdichte von  $2.77 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und eine Beweglichkeit bei  $0.936 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

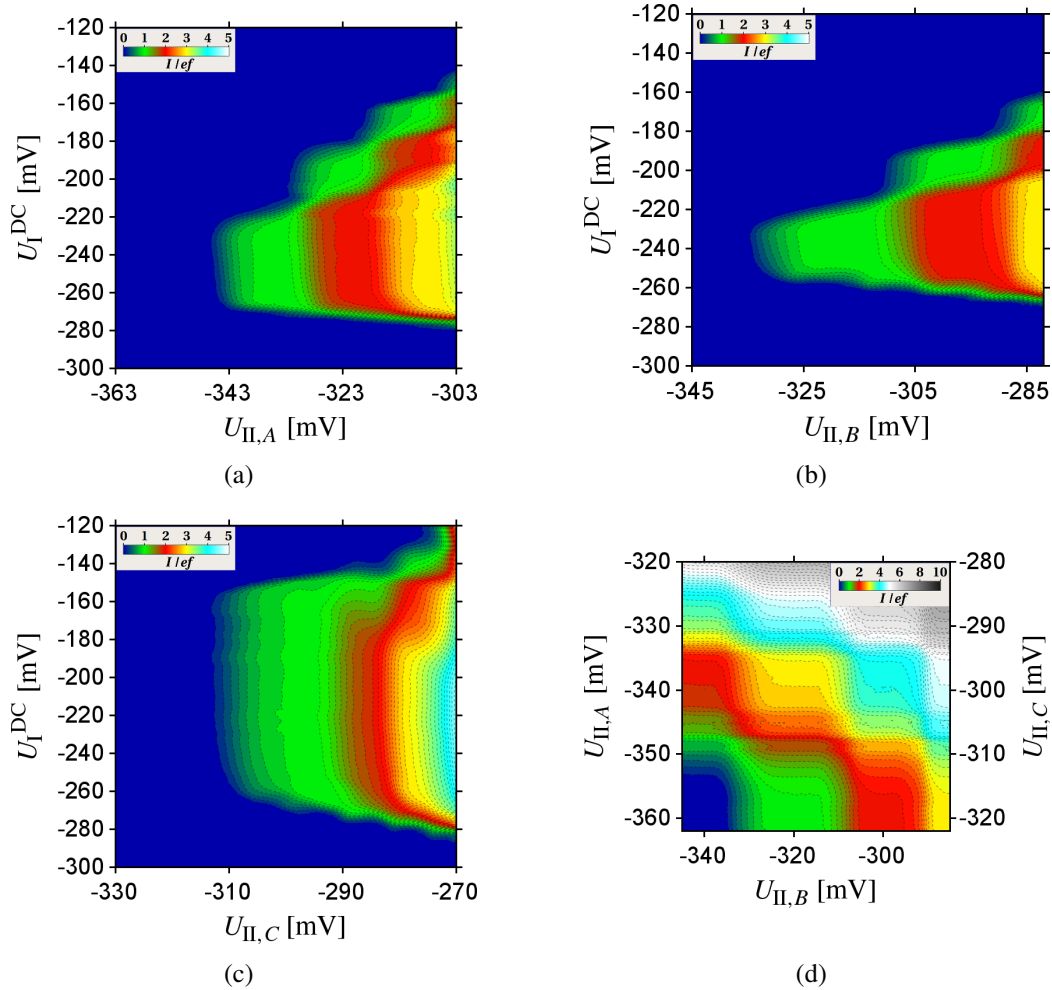
Zur Charakterisierung der vier Einzelelektronenpumpen wurde zunächst die jeweilige Pinch-Off-Spannung der Kanäle bestimmt. Um danach jeweils nur eine Pumpe zu betreiben, wurde

---

<sup>2</sup>Die Kanalbreite wurde wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben von nominell 900 nm um zwei mal die Ätztiefe von ca. 50 nm reduziert. Mit dem ebenfalls bestimmten Wert für die *Depletion* von ungefähr 650 nm verbleibt somit ein etwa 150 nm breiter Leitungskanal.



**Abbildung 6.1.:** Aufnahme der verwendeten Probe. Zur Verdeutlichung wurden in dieser Aufnahme die verschiedenen Strukturen eingefärbt und die Schaltung schematisch erweitert: Zwischen den beiden links eingezeichneten Anschlusspunkten wird der erzeugte Pumpstrom  $I$  gemessen. Die eingezeichneten Richtungspfeile zeigen die technische Stromrichtung an. Die gepumpten Elektronen begeben sich somit in die Gegenrichtung. Bläulich eingefärbt sind die *Mesa*-Kanäle, durch die der Pumpstrom fließt. Vier parallel geschaltete Pumpen sitzen in den jeweiligen Verjüngungen der *Mesa*-Kanäle. In gelb sind die Eingangs-Gates und die zugehörige Zuleitung eingefärbt. Alle Pumpen werden über diese elektrische Verbindung mit dem eingekoppelte HF-Signal (rechts angedeutet) versorgt. Die jeweiligen Ausgangs-Gates sind grünlich dargestellt. Das rosa eingefärbte gemeinsame dritte Gate wurde auf Masse gelegt. In der oberen rechten Ecke ist eine REM-Aufnahme der Pumpe mit den drei Top-Gates zu sehen. Der *Mesa*-Kanal ist etwa 800 nm und die Gates jeweils ca. 100 nm breit.



**Abbildung 6.2.:** Pumpplateaus der Pumpen A, B und C. In den Graphen ist der gemessene Strom farbig dargestellt. Werte in grün entsprechen einem Strom von  $I = 1ef$  mit einer Pumpfrequenz von  $f = 550$  MHz und der Elementarladung  $e$ . Werte in rot entsprechen  $I = 2ef$ , während gelbe Regionen einen Pumpstrom von  $I = 3ef$  darstellen. Hellblau und weiß stehen für  $I = 4ef$  bzw.  $I \geq 5ef$ . In dunkelblau sind Regionen eingefärbt, bei der kein Pumpstrom erzeugt wird. Die eingespeiste Pumpleistung beträgt etwa -13 dBm.

(a)-(c) Pumpregionen der Pumpen A bis C. Bei einer gemeinsamen Offset-Spannung von -240 mV können alle drei Pumpen gemeinsam auf dem ersten Pumpplateau betrieben werden.

(d) gemeinsamer Betrieb der drei Pumpen. Die Spannung am Ausgangs-Gate der Pumpen A und C wurde bei der Messung gemeinsam variiert, wobei die auf der rechten y-Achse aufgetragene Gate-Spannung von Pumpe C um 40 mV größer als die Gate-Spannung der Pumpe A ist. Durch diese Beziehung zwischen Pumpe A und C ist es möglich den gemeinsamen Pumpstrom aller drei Pumpen in einem Graphen zu zeigen.

die Spannung am Ausgangs-Gate der anderen Pumpen entsprechend stark negativ gesetzt, so dass diese komplett blockiert wurden. Der erzeugte Pumpstrom wurde demnach allein von der aktiven Pumpe geliefert. Auf diese Weise wurde für jede der vier Einzelelektronenpumpen der Parameterbereich des ersten Pumpplateaus gesucht. Wie sich im Versuch herausstellte, war eine der vier Pumpe nicht funktionsfähig und konnte deshalb nicht eingesetzt werden. Die anderen Drei konnten bei einer Pumpleistung von ca. -13 dBm und einer Pumpfrequenz 550 MHz zusammen betrieben werden.<sup>3</sup>

Als geeignete gemeinsame Offset-Spannung  $U_I^{\text{DC}}$  ergab sich ein ca. 20 mV breites Intervall mit Mittelwert bei etwa -240 mV. In Abbildung 6.2 sind in den ersten drei Graphen die Pumpregionen der drei Pumpen *A*, *B* und *C* einzeln gezeigt. Auch wenn sich die farblich codierten Plateaus der erzeugten Pumpströme unterscheiden und somit jede Pumpe individuelle Intervalle der Gate-Spannungen für das grün gefärbte, erste Pumpplateau aufweist, haben alle drei eine gemeinsame Schnittmenge bei  $U_I^{\text{DC}}$  zwischen etwa -220 mV und -260 mV. Zudem zeigt der vierte Graph den gemeinsam erzeugten Strom aller drei Pumpen, wenn diese bei  $U_I^{\text{DC}} = -240$  mV am Eingangs-Gate betrieben werden. In der ausgedehnten, gelben Region liefern alle drei Pumpen jeweils ein Elektron pro Pumpzyklus, so dass sich bei 550 MHz ein Gesamtstrom von ca. 264.36 pA ergibt.

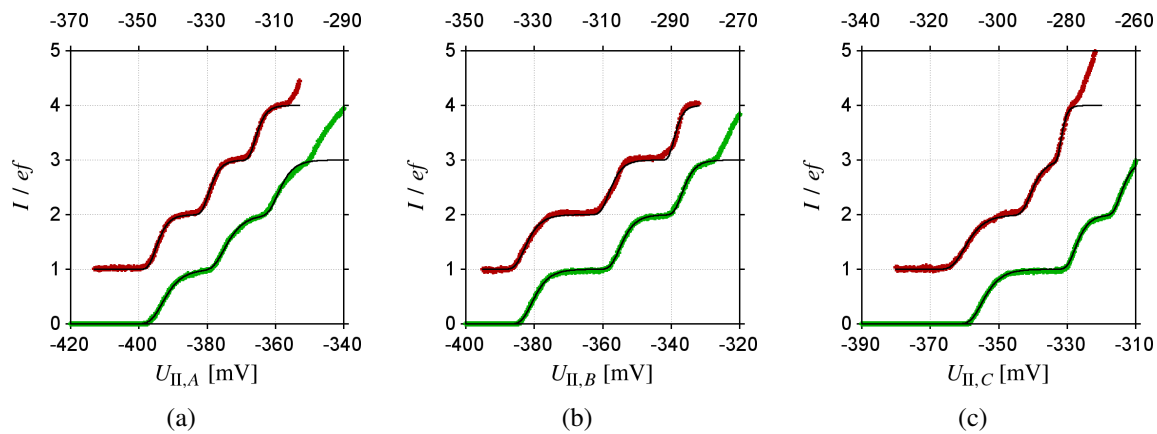
### 6.1.2. Parallelbetrieb von 3 Pumpen bei 2.6 T

Durch die Verwendung eines senkrechten Magnetfelds kann die Qualität der Pumpplateaus verbessert werden.[91][14][49][92] Wie in Abbildung 6.3 zu sehen, wurde bei einer magnetischen Feldstärke von 2.6 T das  $1ef$ -Plateau der Pumpe *C* deutlich flacher. Bei Pumpe *B* war nur eine kleinere Änderung zu beobachten, die hauptsächlich die Form der Anstiege geglättet hat.

Hierzu musste jedoch zusätzlich die Pumpleistung für alle Pumpen auf etwa -10 dBm erhöht werden. Während das erste Pumpplateau der Pumpen *B* und *C* wie erwartet qualitativ besser wurde, verschlechterte sich bei der Pumpe *A* der Qualitätswert des ersten Plateaus  $\delta_1$  von 7.5 auf 5.4. Nach Abbildung 5.5 erhöht sich demnach die minimale Steigung auf dem Plateau und die dortige Abweichung vom idealen Strom um eine Größenordnung. In Abbildung 6.4 sind die im Magnetfeld veränderten Pumpregionen zu sehen. Da die Pumpen *A* und *C* nun nicht mehr vergleichbare Plateaus aufweisen, wurde in Abbildung 6.4(d) die Ausgangs-Gate-Spannungen der Pumpen *B* und *C* gemeinsam variiert. Dabei entspricht  $U_{\text{II},C} = U_{\text{II},B} - 18$  mV.

---

<sup>3</sup>Die Pumpleistung wurde in der Veröffentlichung nur mit -14 dBm angegeben, da eine ermittelte Peak-Peak-Spannung von ca. 140 mV knapp unterhalb von -13 dBm liegt. Die Nachkommastelle wurde fälschlicherweise abgerundet.

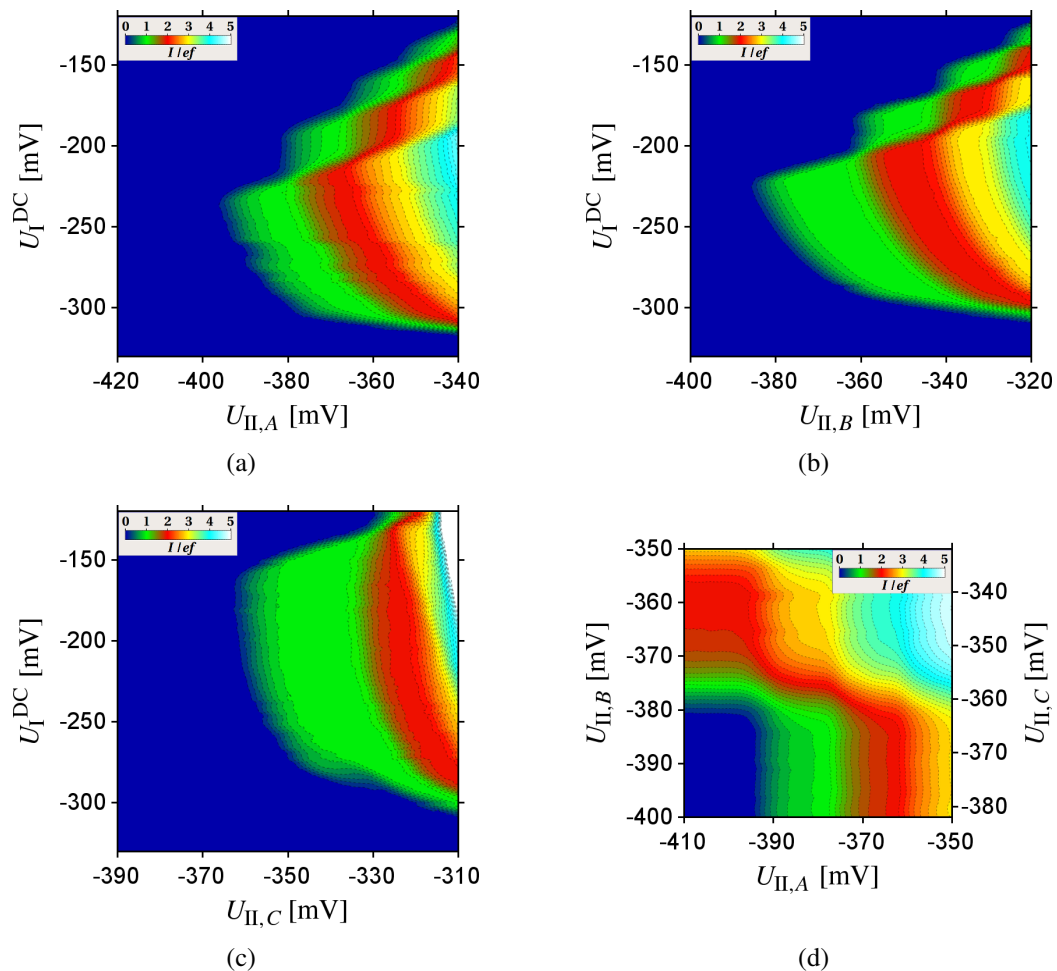


**Abbildung 6.3.:** Schnitte durch die Pumpplateaus bei  $U_I^{\text{DC}} = -240$  mV. In grün sind die Messungen ohne Magnetfeld bei ca. -13 dBm und in rot die Messergebnisse bei 2.6 T und ca. -10 dBm dargestellt. Die rote Kurve wurde zur besseren Darstellung um 1 angehoben und die zugehörige Abszisse oberhalb des Graphen aufgetragen. Die schwarzen, dünnen Linien zeigen den Fit der jeweiligen Kurve.

(a) Die Qualität des Plateaus der Pumpe A wurde durch das Magnetfeld nicht verbessert:  $\delta_1(0 \text{ T}) = 7.5$  sank auf  $\delta_1(2.6 \text{ T}) = 5.4$ .

(b) Das Plateau der Pumpe B zeigt bei 2.6 T weniger Fluktuationen und die Form der Stufenübergänge kann besser durch den Fit mit der Doppel Exponentialfunktion beschrieben werden:  $\delta_1(0 \text{ T}) \approx \delta_1(2.6 \text{ T}) = 9$ .

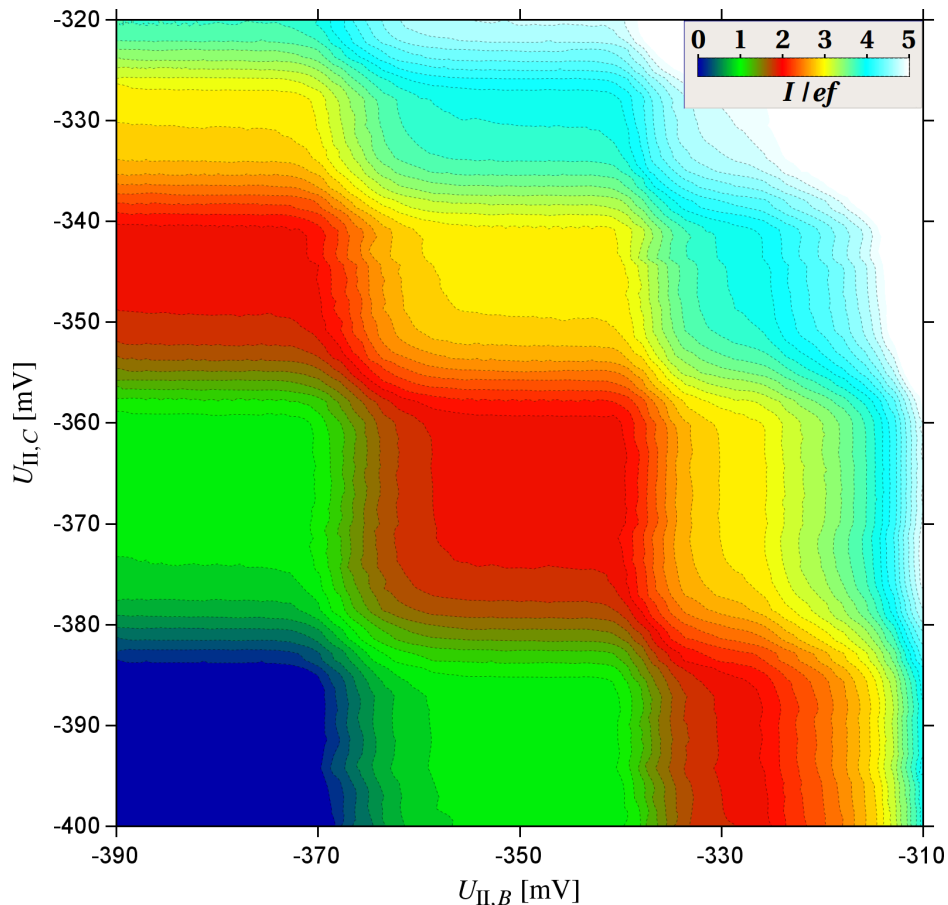
(c) Pumpe C wird durch das eingesetzte Magnetfeld von der vormals qualitativ schlechtesten zur besten Pumpe:  $\delta_1(0 \text{ T}) = 6.2$  stieg auf  $\delta_1(2.6 \text{ T}) = 9.3$ . Dieser Anstieg entspricht nach Abbildung 5.5 eines Absinkens der minimalen Steigung auf dem Plateau und der dortige Abweichung vom idealen Strom um etwa eine Größenordnung.



**Abbildung 6.4.:** Pumpplateaus der Pumpen A, B und C in einem senkrechten Magnetfeld von 2.6 T. In den Graphen ist genau wie in Abbildung 6.2 der gemessene Strom farbig dargestellt. Werte in grün entsprechen einem Strom von  $I = 1ef$  mit einer Pumpfrequenz von  $f = 550$  MHz und der Elementarladung  $e$ . Wie in den Skalen abzulesen, sind in dunkelblau Regionen mit verschwindendem Pumpstrom eingefärbt. Die eingespeiste Pumpleistung beträgt ca. -10 dBm. (a)-(c) Pumpregionen der Pumpen A bis C. Bei einer gemeinsamen Offset-Spannung  $U_I^{\text{DC}}$  von -240 mV können alle drei Pumpen gemeinsam auf dem ersten Pumpplateau betrieben werden. (d) Der gemeinsame Betrieb aller Pumpen wird durch die geringe Qualität ( $\delta_1 = 5.4$  und  $\delta_1 = 5.0$ ) des Plateaus der Pumpe A limitiert.

### 6.1.3. Parallelbetrieb der Pumpen B und C bei 2.6 T

Um die Messdaten der beiden im Magnetfeld verbesserten Pumpen unabhängig voneinander darstellen zu können, wurde in einer anschließenden Messung die Pumpe A gesperrt und die Spannungen  $U_{II,B}$  und  $U_{II,C}$  getrennt voneinander durchgeföhren. Das resultierende Schachbrettmuster der erzeugten Pumpströme ist in Abbildung 6.5 zu sehen.



**Abbildung 6.5.:** Erzeugter Pumpstrom der Pumpen B und C. Da die Länge des Pumpplateaus von Pumpe A deutlich geringer als bei den anderen Beiden ausfällt, wurde sie in dieser Messung gesperrt. Wie in Abbildung 6.2 ist der gemessene Strom farbig kodiert. Im mittleren roten Bereich liefern beide aktiven Pumpe jeweils ein Elektron pro Pumpzyklus. Dies entspricht einer gepumpte Stromstärke von rund 176 pA. In der oberen linken Ecke des mittleren roten Gebiets sind beide Spannungen  $U_{II,B}$  und  $U_{II,C}$  ungefähr -360 mV. Durch die im Magnetfeld verbesserten Plateauqualitäten überlappen die Plateaus trotz der Unterschiede der beiden Pumpen. Die eingespeiste Pumpleistung beträgt etwa -10 dBm.

In dem mittleren, roten Bereich liefern beiden Pumpen jeweils ein Elektron pro Pumpzyklus. Wie sich zeigte, ist die Ausdehnung diese Region so groß, dass beide Ausgangs-Gate-Spannungen  $U_{II,B}$  und  $U_{II,C}$  auf den gleichen Wert gesetzt werden können. Somit könnten diese Pumpen sogar mit einem gemeinsamen Ausgangs-Gate betrieben werden. Es ist zu

erwarten, dass zukünftig die individuellen Unterschiede der Pumpen durch Verbesserungen in der Herstellung abnehmen werden. Dennoch spricht momentan noch einiges dafür auf ein gemeinsames Ausgangs-Gate zu verzichten. Bei individuellen Ausgangs-Gates lassen sich nicht funktionierende Pumpen separat komplett sperren und die Charakterisierung der einzelnen Pumpen bleibt weiterhin möglich. Erst bei hinreichend stabiler Reproduzierbarkeit überwiegen die Vorteile der einfacheren Kontaktierung vieler Pumpen und die damit einhergehende Reduzierung der benötigten Leitungen zu der Probe im Kryostaten.

Die völlig unterschiedliche Entwicklung des Qualitätswerts  $\delta$  im Magnetfeld für benachbarte Pumpen des gleichen Wafers bei nahezu identischen Umweltbedingungen ist noch nicht ausreichend verstanden. Genauere Untersuchungen mit parallel geschalteten Pumpen könnten der Schlüssel zur Unterscheidung lokaler Effekte in den Pumpen und globaler Auswirkungen auf das *2DEG* sein.

Das Experiment bestätigen die Anfangs zitierten theoretischen Vorhersagen bezüglich der Robustheit des Pumpplateaus, dass mit zunehmender HF-Leistung an Breite gewinnt.[13] Aus diesem Grund sind nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen gute Kandidaten für eine zukünftigen in Parallelschaltung realisierte quantisierte Stromquelle für Stromstärken über 1 nA.

Die hier vorgestellte Messung wurde in Referenz [93] veröffentlicht.

### 6.2. Arbiträr-Stromquelle

Zur Erzeugung eines quantisierten Pumpstroms wird eine nicht-adiabatische Einzelelektronenpumpe mit einer passenden Pumpfrequenz betrieben. Die Quantisierung bezieht sich dabei nur auf die unteilbare Elementarladung der gepumpten Elektronen. Bezogen auf ein Zeitintervall können im Mittel trotzdem nur Bruchteile eines Elektrons gepumpt werden. Somit sind nicht nur einige festgelegte Pumpströme möglich, sondern sie können vielmehr kontinuierlich in der Stromstärke gewählt werden. Der von einer Einzelelektronenpumpe erzeugte Pumpstrom  $I = n \cdot e \cdot f$  hängt in erster Linie von der gewählten Pumpfrequenz  $f$  ab. Zwar kann auch die Menge gepumpter Elektronen pro Pumpzyklus  $n$  verändert werden, jedoch unterscheiden sich die Pumpplateaus dann bezüglich ihrer Qualität. Wie sich in den bisherigen Messungen gezeigt hat, ist im Normalfall das erste Pumpplateau deutlich robuster und aus diesem Grund die damit erreichbare Genauigkeit des Pumpstroms dort am größten. Naturgemäß sind nur ganzzahlige  $n$  sinnvoll zu realisieren, da sich andernfalls in den Übergangsbereichen zwischen den Plateaus schon geringfügige Spannungsschwankungen am Ausgangs-Gate stark auswirken. Bei einer am Eingangs-Gate anliegender HF-Leistung kann davon ausgegangen werden, dass die Höhe der Ausgangsbarriere bereits durch die Kopplung zwischen Eingangs- und Ausgangs-Gate ebenfalls leicht schwankt. Durch die Regelung der Pumpfrequenz  $f$  können somit stufenlos die zugehörigen Stromstärken erzeugt werden. Ändert sich die Pumpfrequenz über die Zeit, entstehen zeitlich variierende quantisierte Pumpströme. Letztlich lassen sich dann mit einer Modulation der Pumpfrequenz sogar



---

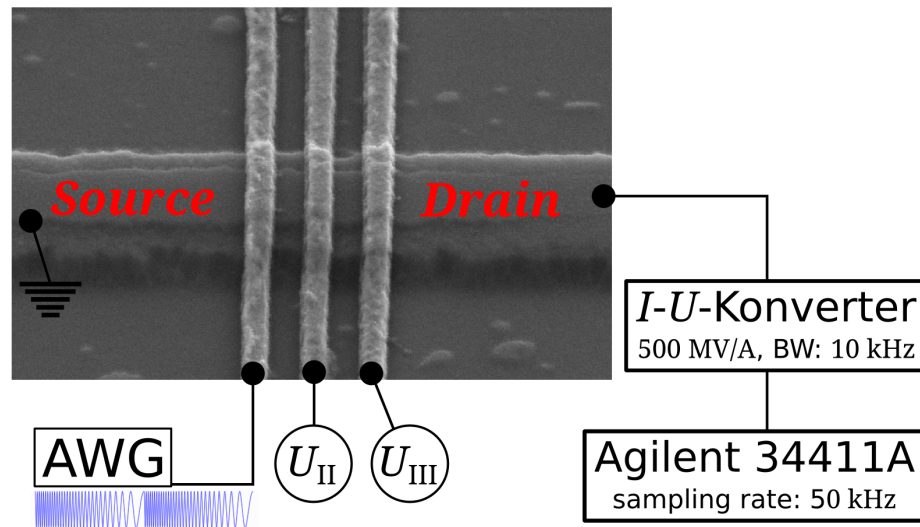
Wechselströme realisieren, wobei bauartspezifische Grenzfrequenzen zu beachten sind. Diese Modulation der Pumpfrequenz wird als Frequenzmodulation bezeichnet und im Folgenden mit FM abgekürzt.

Bei ansteigenden Pumpfrequenzen steht für den Einladevorgang der Elektronen aus der *Source* in den Quanten-Dot der Einzelelektronenpumpe immer weniger Zeit zur Verfügung, so dass unvollständiges Einladen immer wahrscheinlicher wird. Letztlich wird bei zu hohen Frequenzen deshalb kein Strom mehr erzeugt. Zwar ist bei nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen diese obere Grenzfrequenz deutlich höher als bei adiabatischen Pumpen, allerdings gibt es im nicht-adiabatischen Fall auch eine untere Grenzfrequenz. Wie im *Decay-Cascade*-Modell beschrieben, werden die Elektronen nur eingefangen wenn die Eingangsbarriere schnell genug angehoben wird. Unterhalb der unteren Grenzfrequenz tunneln alle Elektronen zur *Source* zurück. Das Intervall zwischen der oberen und unteren Grenzfrequenz legt somit fest, welche von der Pumpe erzeugten Stromstärken möglich sind.

Des Weiteren ist die Frequenz, mit der zwischen den Pumpfrequenzen variiert wird, zu beachten. Diese Modulationsfrequenz wirkt ebenfalls wie eine untere Grenzfrequenz. Um nach dem Durchlauf eines Modulationsdurchgangs wieder exakt bei dem Anfangswert des Signals anzukommen, muss die mittlere Pumpfrequenz, auch Trägerfrequenz genannt, einem ganzzahligen Vielfachen der Modulationsfrequenz entsprechen. Die Herleitung dieser Beziehung sowie die Berechnung des frequenzmodulierten Signals findet sich im Anhang unter A.4. Andernfalls sind mehrere Modulationsdurchgänge nötig um Phasensprünge zu verhindern. Mehrere Durchgänge sorgen jedoch dafür, dass die modulierte Eingangsbarriere nicht bei jedem Durchgang der Modulation in exakt der gleichen Phase startet. Gerade bei Pumpfrequenzen unterhalb der Modulationsfrequenz kann sich dieser Unterschied deutlich auf die Anzahl der in der Einfangphase im Dot isolierten Elektronen auswirken. Für maximale Reproduzierbarkeit des am Eingangs-Gate anliegenden Signals müssen Trägerfrequenz und Modulationsfrequenz entsprechend aufeinander abgestimmt werden. Wenn die Trägerfrequenz bei typischerweise einigen hundert MHz liegt, ergibt sich für  $N$ , dem Verhältnis von Trägerfrequenz zu Modulationsfrequenz, bei einer Modulationsfrequenz um die 1 kHz ein Wert der Größenordnung  $10^5$ . Mögliche Modulationsfrequenzen sind somit in dieser Frequenzregion schon sehr dicht gepackt, so dass die Forderung nach einem ganzzahligen  $N$  leicht zu erfüllen ist. Diese Einschränkung wirkt sich somit in den gemachten Messungen nicht aus, da die Grenzen des Messaufbaus deutlich höhere Modulationsfrequenzen kaum zulassen.

### 6.2.1. Auswirkungen des geänderten Messaufbaus

Wie in Abbildung 6.6 schematisch gezeigt, wurde in dieser Messung ein geänderter Messaufbau gewählt. Auf diese Weise konnte der zeitliche Verlauf der variierenden Ströme ermittelt werden. Zur zeitaufgelösten Messung des Pumpstroms wurde dieser mit einem Femto LCA-10K-500M in Spannungswerte transferiert. Mit einer Transimpedanz von 500 MV/A



**Abbildung 6.6.:** Schema des geänderten Messaufbaus. Oben links zeigt eine REM-Aufnahme eine Einzel-Elektronen-Pumpe, an die für diese Messung ein AWG an das Gate an der *Source*-Seite angeschlossen wurde. Wie als blaue Schwingung unterhalb des AWGs angedeutet, wird durch diesen die Spannung am Gate derartig moduliert, dass die Pumpfrequenz  $f$  ebenfalls zeitlich variiert. Auf diese Weise wird ein entsprechend zeitlich modulierter Pumpstrom erzeugt, der durch den Ultra-Low-Noise-Strom-Spannungs-Konverter in ein Spannungssignal umgewandelt wird. Dieses wird alle  $20 \mu\text{s}$  mit dem Agilent 34411A gemessen. In dem gezeigten Beispiel würde dem blau dargestellten modulierten Spannungsverlauf ein stetig abnehmendes  $f$  entsprechen, das beim Erreichen der minimalen Pumpfrequenz wieder auf den anfänglichen hohen Wert springt. Der zeitliche Stromverlauf wäre demzufolge ein Sägezahn.

---

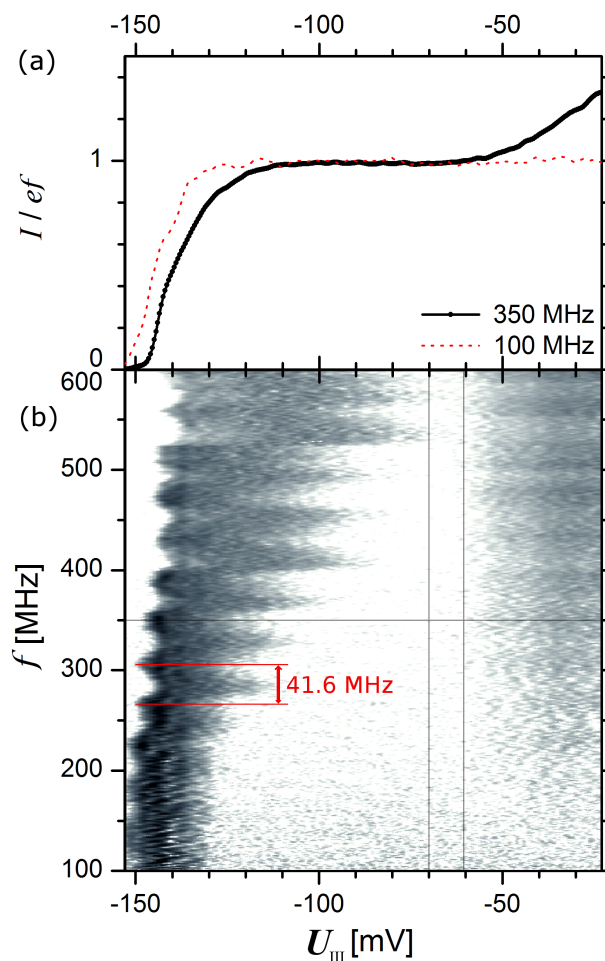
werden aus Ströme von bis zu 100 pA auf diese Weise Spannungen bis 50 mV. Dieser Ultra-Low-Noise-Strom-Spannungs-Konverter ist für den Frequenzbereich bis 10 kHz vorgesehen. Schnellere Schwankungen des Stroms können somit nicht mehr richtig aufgelöst weitergegeben werden. Die Spannung am Ausgang des Konverters wurde mit einem Agilent 34411A bei einer Sampling-Rate von 50 kHz gemessen. Parasitäre Kapazitäten im Stromkreis bzw. die Begrenzungen der Messgeräte wie z.B. die An- bzw. Abstiegszeit des Konverters von 40  $\mu$ s (10% – 90%) führen insgesamt zu einer Zeitkonstante (RC-Zeit) von ca. 22  $\mu$ s. Dadurch liegt die Übergangsfrequenz des gesamten Systems bei etwa 7.23 kHz. Bei dieser Frequenz wird die Amplitude eines Signals bereits um 3 dB gedämpft. Die Abweichungen des erzeugten Stroms von der vorgesehenen Wellenform lassen sich klein halten, wenn die Modulationsfrequenz deutlich unterhalb dieser 7.23 kHz liegt. Bei einigen Modulationsformen, wie z.B. einem Sägezahn, sind höhere Frequenzanteile zur Erzeugung der Wellenform nötig. Durch die unvermeidbare Dämpfung dieser höheren Anteile treten an den Sprungstellen bzw. steilen Flanken der Wellenform die größten Abweichungen auf. Zur Erzeugung des modulierten Spannungssignals wurde bei dieser Messung ein Arbiträr-Funktionsgenerator (Tektronix AWG 7102) verwendet. Dieser bildet mit  $10^{10}$  Spannungswerten pro Sekunde und einer Anstiegszeit von 75 ps die gewünschte Wellenform nach. Hierdurch wird selbst bei der Frequenz von 600 MHz eine Periode mit mindestens 16 Spannungswerten dargestellt, so dass die Wellenformen als ausreichend glatt angesehen werden können. Mit dem AWG ist eine exakte Reproduktion zwischen den Phasen der Modulation und des modulierten Signals möglich. Die Pumpe hatte einen etwa 800 nm breiter Mesa-Kanal.<sup>5</sup> Das 2DEG des verwendete Wafermaterials hat bei einer Temperatur von 4 K eine Ladungsträgerdichte von  $2.09 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und eine Beweglichkeit bei  $1.970 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ .

## 6.2.2. Charakterisierung der verwendeten Pumpe

Zur Charakterisierung der verwendeten Einzelelektronenpumpe wurde zunächst die Pinch-Off-Spannung der drei Top-Gates bestimmt und danach für eine Pumpfrequenz von 350 MHz geeignete Parameter für die HF-Amplitude und die Offset-Spannung am Eingangs-Gate gesucht. Es konnte in einem größeren Parameterbereich gepumpt werden, wenn an das dritte Top-Gate ebenfalls eine negative Spannung angelegt wurde. Hierdurch bildete es zusammen mit dem mittlere Gate eine breitere Ausgangsbarriere, die zu frühes Tunneln nach *Drain* verhindert. Als Ausgleich musste in diesem Fall die Höhe der Ausgangsbarriere nicht so hoch sein, wodurch zu erwarten ist, dass in der Einfangphase die Elektronen bereits früher isoliert werden können. Dies würde den Betrieb mit niedrigen Pumpfrequenzen begünstigen. Andererseits müssten bei dem nun langsamer schrumpfenden Quanten-Dot die Energieabstände für verschiedene Besetzungen weniger schnell anwachsen, was sich bei der *Decay Cascade* nachteilig auf die Präzision bei hohen Frequenzen auswirkt. Mit einer angelegten

---

<sup>5</sup>Wie bereits bei der Parallelschaltung wurde die Kanalbreite wie in Abschnitt 4.3.1 beschrieben von nominell 900 nm um zwei mal die Ätztiefe von ca. 50 nm reduziert. Der Leitungskanal im 2DEG ist nach Berücksichtigung der *Side-Wall-Depletion* noch etwa 50 nm breit.



**Abbildung 6.7.:** Frequenzabhängigkeit des Pumpplateaus. Das Eingangs-Gate wurde mit einer anliegenden Leistung von rund -14 dBm und  $U_I^{\text{DC}} = -210$  mV betrieben.<sup>4</sup> Die Spannung am mittleren Gate betrug  $U_{\text{II}} = -85$  mV. (a) Strom-Spannungs-Kennlinien für  $f = 350$  MHz (schwarze Linie) und 100 MHz (rote, gestrichelte Linie). Da der erzeugte Pumpstrom  $I$  bei beiden Kurven auf das Produkt aus Elementarladung  $e$  und Pumpfrequenz  $f$  bezogen wird, können die Plateaus bei  $1ef$  direkt miteinander verglichen werden. (b) Darstellung der Ableitung der Messkurven im Frequenzintervall von 100 MHz bis 600 MHz. Hierzu wurden die gemessenen Strom-Spannungs-Kennlinien, wie bereits in (a) gezeigt, jeweils durch  $ef$  geteilt und danach die Steigung ermittelt. Um die Regionen geringer Steigung deutlicher als helles Weiß darzustellen, wurde nicht zwischen positiver und negativer Steigung unterschieden. An- und Abstiege werden mit zunehmendem Betrag immer dunkler dargestellt. In weißen Regionen entspricht  $|dI/dU_{\text{III}}| \leq 5 \cdot 10^{-3} ef/\text{mV}$ , während in schwarzen Gebieten  $|dI/dU_{\text{III}}| \geq 0.1 ef/\text{mV}$ . Wird  $U_{\text{III}}$  innerhalb des durch die vertikalen grauen Linien begrenzten Intervalls gewählt, ist  $I \approx 1ef$ . Wie in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, treten bei Pumpfrequenzen  $f$  im Abstand von 41.6 MHz Resonanzen auf. Exemplarisch wurde eines dieser Intervalle rot markiert.

---

Spannung von -85 mV am mittleren Gate und den gefundenen Parametern für das Eingangsgate (200 mV HF-Amplitude, -210 mV Offset-Spannung) wurden danach für Frequenzen zwischen 100 MHz und 600 MHz jeweils die Position des ersten Pumpplateaus bestimmt, indem die Spannung am dritten Gate variiert wurde. In Abbildung 6.7 sind die Ergebnisse dieser Messungen dargestellt. Um die Qualität des ersten Pumpplateaus unabhängig von der Frequenz zu vergleichen, wurden die durchschnittlich pro Zyklus gepumpten Elektronen berechnet.

In Abbildung 6.7(a) sind zwei dieser Kurven exemplarisch gezeigt. Zur besseren Darstellung des gesuchten Parameterbereichs für das Ausgangsgate wurden von den normierten Messkurven der Betrag der Ableitung gebildet. Auf diese Weise sind den Regionen mit Steigung nahe Null niedrige Werte zugeordnet. In Abbildung 6.7(b) sind diese Bereiche als helle Flächen dargestellt. Wie an der stärker fluktuierenden gestrichelten, roten Linie bei 6.7(a) zu sehen, wirkt sich ein frequenzunabhängiges Rauschen bei niedrigeren Strömen stärker aus, weshalb bei 6.7(b) die mittlere helle Fläche zu niedrigen Frequenzen immer verrauschter wird. Im Mittel wird jedoch hier trotzdem immer noch ein Strom von  $I = 1ef$  gepumpt. Zu hohen Frequenzen nimmt die Breite der hellen Region ab, da das  $1ef$ -Plateau immer kürzer wird. Wie bereits vermutet, kann dies mit dem weniger selektiven *Decay-Cascade*-Prozess in der Einfangphase zusammen hängen. Eine weitere Erkenntnis aus der Messung ist mit der periodisch auftretenden Verschiebung des Flanke zum  $1ef$ -Plateau verbunden. Wie sich zeigt, tritt dieses Phänomen alle 41.6 MHz auf. Wie bereits in Abschnitt 4.2.2 beschrieben, passt dieser Wert zu der Resonanzfrequenz in der Zuleitung. Durch konstruktive und destruktive Interferenz ist die am Eingangsgate anliegende Amplitude frequenzabhängig. Durch eine kleinere Amplitude ändert sich ebenfalls die Geschwindigkeit mit der die Eingangsbarriere ansteigt. Aus diesem Grund können während des *Decay-Cascade*-Prozesses die Elektronen mit höherer Tunnelwahrscheinlichkeit den Dot Richtung *Source* verlassen. Es ist davon auszugehen, dass die anderen Phasen innerhalb des Pumpzyklus weniger empfindlich auf eine Amplitudenreduzierung reagieren. Erst wenn die Amplitude so klein wird, dass entweder das Auswerfen des Elektrons nach *Drain*, oder das Ankoppeln des QD nach *Source* nicht mehr möglich ist, sollte der Pumpstrom dramatisch einbrechen.

Um über den gemessenen Frequenzbereich immer ein Elektron pro Pumpzyklus zu pumpen, muss die Spannung am Ausgangsgate  $U_{III}$  in einem gewissen Intervall gewählt werden. Dieses wird durch die Breite des  $1ef$ -Plateau bei hohen Frequenzen auf Werte von  $U_{III} = -75$  mV bis -60 mV begrenzt. Vermutlich hängt die geringe Qualität des Plateaus bei 600 MHz mit dem bereits beschriebenen Einfluss des dritten Gates zusammen. Durch das niedrige Ausgangsgate wird die Rücktunnelphase schneller durchlaufen und die dabei stattfindenden *Decay-Cascade*-Prozesse sind weniger voneinander zeitlich separiert. Wie im Abschnitt 5.1.3 und 5.1.4 beschrieben, steigt somit die Wahrscheinlichkeit gegen Ende der Rücktunnelphase eine Abweichung von dem Erwartungswert der Besetzungszahl  $\langle n \rangle$  zu beobachten. Zugunsten niedrigerer Frequenzen wurde im Rahmen dieser Messung auf optimale Präzision des Pumpplateaus verzichtet.

### 6.2.3. Erzeugung arbiträrer Stromwellenformen

Nachdem nun die geeigneten Pumpparameter ermittelt sind, kann mit einer frequenzmodulierten Pumpfrequenz  $f(t)$  ein quantisierter Strom mit quantisiertem Wechselstromanteil erzeugt werden. Wie in Abbildung 6.8 zu sehen, wurden Messungen mit verschiedenen Wellenformen bei unterschiedlichen Modulationsfrequenzen gemacht. Jede Kurve ist über zwei Perioden der Modulation dargestellt. Die Spannung am Ausgangs-Gate wurde von Messung zu Messung ebenfalls im gefundenen Parameter-Intervall variiert. Um den Rauschanteil der Messwerte zu reduzieren, wurden Durchschnittswerte über 500 Wellenformen gebildet. In jedem Graphen sind die auf diese Weise ermittelten Messwerte als blaue Quadrate eingezeichnet. Der aus der angelegten Modulation direkt abgeleitete Verlauf des Pumpstroms ist als grüne, gestrichelte Linie dargestellt. Bei diesem wurde allerdings nicht die begrenzte Übergangsfrequenz des Systems berücksichtigt und stellt somit den idealisierten Fall dar. Wird dagegen angenommen, dass der Verlauf aufgrund eines RC-Glieds erster Ordnung nur asymptotisch der idealen Kurve folgt, so ergibt sich mit der ermittelten Zeitkonstante von  $22 \mu\text{s}$  bzw. der zugehörigen Übergangsfrequenz von etwa  $7.23 \text{ kHz}$  die gepunktete, rote Linie. Diese passt sehr gut zu den Messwerten und bestätigt dadurch die Annahme, nach der die Trägheit des Messsystems mit einem einfachen RC-Glied bereits ausreichend gut beschrieben wird. Obwohl unterhalb der Übergangsfrequenz sind bei den gewählten Modulationsfrequenzen von  $f_m = 2352 \text{ Hz}$ ,  $1700 \text{ Hz}$  und  $326 \text{ Hz}$  die Abweichungen zwischen der grünen und der roten Linie deutlich sichtbar. Die Phasenverschiebung zwischen der Messkurve und der theoretisch zu erwartenden Kurve ergibt sich durch:

$$\Delta_\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot (\arctan(\ln(22 \mu\text{s} \cdot f_m)) + 1)$$

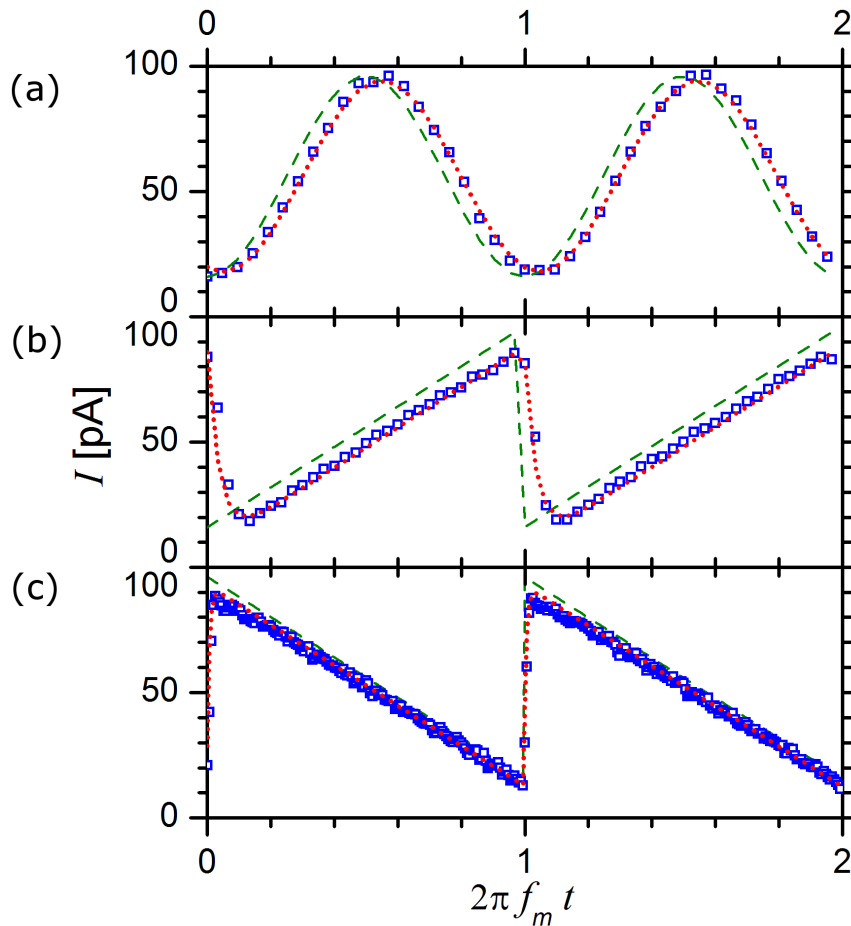
und nimmt mit zunehmender Modulationsfrequenzen  $f_m$  bis maximal  $\pi$  zu. Gleichzeitig wird ein sinusförmiges Signal bei ansteigendem  $f_m$  zunehmend immer stärker gedämpft, so dass von der Eingangsspannung  $U_{\text{in}}$  immer weniger als Ausgangsspannung  $U_{\text{out}}$  bei der Pumpe ankommt.

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (22 \mu\text{s} \cdot f_m)^2}}$$

Die höheren Frequenzanteile komplexerer Schwingungen, die sich per Fourier-Transformation berechnen lassen, werden demnach durch ihre höhere Dämpfung unterdrückt. Somit lassen sich speziell an Sprungstellen hauptsächlich nur exponentielle An- bzw. Abstiege beobachten.

### 6.2.4. Erhöhung des FM-Intervalls

Die bisherigen Messungen zeigen, dass im FM-Intervall von  $100 \text{ MHz}$  bis  $600 \text{ MHz}$  die Pumpe im Rahmen der Messgenauigkeit jede beliebige Stromwellenform erzeugen kann. Wie in Abbildung 6.7 gesehen, ist das Intervall nutzbarer Frequenzen durch die an beiden Intervall-Enden zunehmende Rate an Pumpfehlern begrenzt. Da jedoch beim Messen der



**Abbildung 6.8.:** Beispiele für frequenzmodulierte Pumpströme. Die Parameter für das Eingangsgate ( $U_I^{\text{AC}} = 200 \text{ mV}$ ,  $U_I^{\text{DC}} = -210 \text{ mV}$ ) und das mittlere Gate ( $U_{\text{II}} = -85 \text{ mV}$ ) sind für alle drei Kurven identisch. Das Intervall der Pumpfrequenzen von 100 MHz bis 600 MHz entspricht einer Trägerfrequenz bei 350 MHz, um die mit  $\pm 250 \text{ MHz}$  die Pumpfrequenz  $f$  variiert. Als grüne gestrichelte Linie ist der nominelle Strom dargestellt, der im idealen Fall bei Vernachlässigung der Übergangsfrequenz des Messsystems entstehen würde. Die blauen Quadrate stellen die Messpunkte dar. Die rote Punktlinie entspricht dem theoretisch zu erwartenden Strom, wenn die begrenzte Übergangsfrequenz bei etwa 7.23 kHz berücksichtigt wird. Die gute Übereinstimmung der theoretisch zu erwartenden Werte und der Messergebnisse zeugt von geringen zusätzlichen Störeinflüssen.

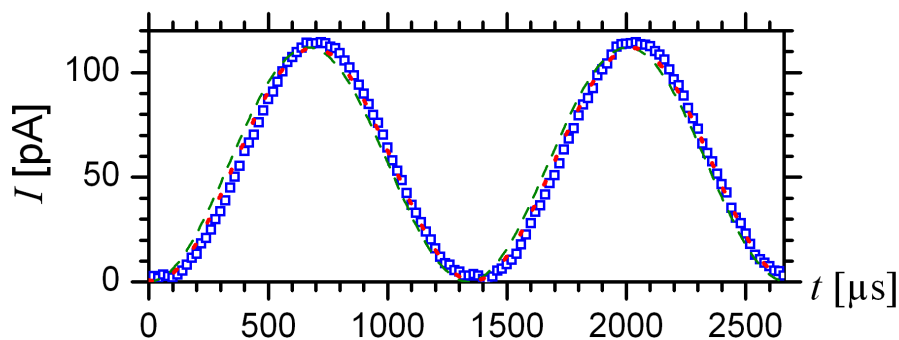
(a) Sinusförmige Modulation. Diese Messung wurde mit einer Modulationsfrequenz von  $f_m = 2352 \text{ Hz}$  und mit einer Spannung am Ausgangsgate von  $U_{\text{III}} = -60 \text{ mV}$  gemacht.

(b) Sägezahn-Modulation. Bei dieser Messung war die Modulationsfrequenz  $f_m = 1700 \text{ Hz}$  und  $U_{\text{III}} = -62 \text{ mV}$ .

(c) Inverse Sägezahn-Modulation. Gemessen wurde mit Modulationsfrequenz  $f_m = 326 \text{ Hz}$  und  $U_{\text{III}} = -70 \text{ mV}$ .

Pumpströme über 500 Wellenformen gemittelt wird, sollte das bei niedrigen Frequenzen hervortretende Stromrauschen im Falle eines normalverteilten Rauschspektrums reduziert werden. Bei höheren Pumpfrequenzen nimmt die Qualität des Plateaus  $\delta_1$  ab. Solange jedoch noch das Intervall größer als die Schwankungen der Spannung am Ausgangs-Gate  $U_{III}$  bleibt und die Verschiebung der Rücktunnelkante durch die konstruktive/destruktive Interferenz nicht störend einwirkt, kann auch bei höheren Frequenzen die Pumpe noch sinnvoll betrieben werden.

Ausgehend von der zentralen Frequenz bei 350 MHz wurde das FM-Intervall von 1 MHz bis 699 MHz erweitert. Wie Abbildung 6.9 zeigt, bleibt der gemessene Strom wie erwartet groß teils auf der rot, gepunkteten Linie. Die Abweichungen sind dort verglichen mit der durch die Trägheit des Messsystems entstehenden Messabweichung nicht signifikant. Bei hohen Stromstärken sind die Messpunkte oberhalb der vorhergesagten rot-gepunkteten Linie und sogar auch der grün-gestrichelten Linie. Demnach werden bei den hohen Pumpfrequenzen regelmäßig zusätzliche Elektronen gepumpt. Das  $1ef$ -Plateau ist für Frequenzen oberhalb von rund 625 MHz anscheinend nicht mehr zum quantisierten Pumpen geeignet.



**Abbildung 6.9.:** Frequenzmodulierter Pumpstrom von 1 MHz bis 699 MHz. Die sinusförmige Modulation wurde mit einer Modulationsfrequenz von  $f_m = 753$  Hz und mit einer Spannung am Ausgangs-Gate von  $U_{III} = -60$  mV gemacht. Ansonsten wurden wie bei Abbildung 6.8 die identischen Parameter für das Eingangs-Gate ( $U_I^{AC} = 200$  mV,  $U_I^{DC} = -210$  mV) und das mittlere Gate ( $U_{II} = -85$  mV) verwendet.

Die Eignung von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen zur Erzeugung arbiträrer Pumpströme wurde im Experiment im Rahmen der erreichten Messgenauigkeit bestätigt. Durch geschickte Parallelschaltungen ließen sich sogar Ströme mit wechselndem Richtungsvorzeichen realisieren. Der Einsatz des dritten Gates zur Formung eines geeigneteren Ausgangs-Gates um niedrigere Pumpfrequenzen zu begünstigen, war erfolgreich. Die in Referenz [42] beschriebenen Auswirkungen der Nicht-Adiabatizität auf den Pumpstrom konnten auch für ein größeres Intervall an Pumpfrequenzen wirksam unterdrückt werden.

Zukünftig könnten auch Arbiträr-Stromquellen mit Pulsbetrieb realisiert werden. Indem das Eingangs-Gate der Pumpe mit einem optimierten Spannungspuls betrieben wird, ist eine geringe Abweichung des Pumpstroms vom idealen Wert zu erreichen.[10] Abhängig von dem Zeitintervall zwischen diesen Spannungspulsen ergibt sich eine Pumpfrequenz  $f$  und



---

demnach auch die zugehörige Stromstärke  $I$ . Somit kann auf diese Weise der Pumpstrom ohne Änderungen der Präzision verändert werden. Wenn die Resonanzen in der HF-Leitung unterbunden bzw. durch kurze Laufwege zu höheren Frequenzen verschoben werden, ließen sich von der maximalen Pumpfrequenz (d.h. Puls folgt auf Puls) bis hinunter zu quasi 0 Hz alle denkbaren Frequenzmodulationen erzeugen.

Die hier vorgestellte Messung wurde in Referenz [94] veröffentlicht.

### 6.3. Doppelquantenpunkt-Pumpe

Die Quantisierung des Pumpstroms einer nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpe beruht auf der Trennung des Einfang- und des Auswurfprozesses. Die Elektronen werden in der Zwischenzeit in einer zur Umgebung isolierten Region gehalten. Auf dieser Ladungsinsel kann nur eine ganzzahlige Anzahl Elektronen zwischengespeichert werden, da in dieser Phase kein Ladungsaustausch stattfindet. Bei geeigneten Pumpparametern für quantisierten Strom sorgt dann die *Decay Cascade* dafür, dass am Ende der Einfangphase immer die gleiche Besetzungsanzahl auf der Ladungsinsel erreicht wird.<sup>6</sup> Anschließend wird bei diesen Parametern in der Auswurfphase die Insel durch die ansteigende Eingangsbarriere wieder komplett entleert. Auf diese Weise bleibt die Anzahl an gepumpten Elektronen für jeden Pumpzyklus konstant, wenngleich die Zeitabstände zwischen den einzelnen zufällig stattfindenden Tunnelereignisse von Zyklus zu Zyklus variieren.

In den bisherigen Messungen wurde als Ladungsinsel ein einzelner zeitlich variierender Quanten-Dot verwendet. Denkbar sind jedoch auch Konglomerate aus mehreren Quanten-Dots, die zwischen *Source* und *Drain* liegen. Diese Systeme können durch die zusätzlichen Wechselwirkungen wie z.B. Coulomb-Abstoßung oder auch resonantem Tunneln zwischen den Dots abweichende Pumpcharakteristiken aufweisen. Strukturen mit zwei Dots (Double Quantum Dot, DQD) unterscheiden sich bezüglich der auftretenden Quanteneffekte bereits deutlich vom Einzel-Dot.[95][96] In nicht-dynamischen Messungen an mit nicht-adiabatischen Pumpen vergleichbaren DQD-Strukturen konnten bereits die Pauli-Spin-Blockade nachgewiesen werden.[97] Durch die Änderung der trennenden mittleren Barriere ließen sich zudem Übergänge vom stark zum schwach gekoppelten System beobachten.[98] Erste gepulste Messungen an einem ähnlichen System wurden 2003 veröffentlicht.[99] Die auf diese Weise ermittelten Dekohärenzraten stellen als Inverses ein Maß für die zeitliche Stabilität der Anfangskonfiguration dar. Durch die vielen beteiligte Einwirkungen (Fluktuationen der Hintergrundladung, Kottunneleffekte, Elektron-Phononen-Wechselwirkung) waren die einzelnen Abhängigkeiten nicht vollständig zu rekonstruieren. Durch die Verwendung eines optimierten DQD ließe sich die Auswirkung einer Änderung des äußeren elektrischen Feldes

---

<sup>6</sup>Diese Aussage gilt genau genommen nur für den vereinfachten Fall, bei dem keine Pumpfehler mehr auftreten. Durch quantenmechanische Unschärfe kann dieser Fall aber nicht erreicht werden. Die stufenförmige Anstieg der Stromkennlinie zeigen, dass zwischen den Anstiegen die Fehlerrate einige Größenordnungen kleiner als die Pumprate wird. Somit werden dort in nahezu allen Fällen die gleiche Anzahl Elektronen am Ende der Einfangphase isoliert.

zukünftig eindeutiger Messen.[100] Eventuell könnten somit durch den Einsatz dieser neuen QDQs die Dekohärenzraten in gepulsten Messungen unabhängig von Fluktuationen der Hintergrundladung oder der Elektron-Phononen-Wechselwirkung bestimmt werden. Verschiedene Dekohärenzraten für den Singulett- und den Triplett-Zustand ließen sich auf diese Weise eventuell ebenfalls beobachten.

Aus den Dekohärenzraten für verschiedene Umgebungspotentiale könnte in erster Näherung eine Zeitentwicklung der Elektronenbesetzungszustände in den beiden Dots bei kontinuierlicher Änderung der Potentiallandschaft ermittelt werden. Somit ließen sich auf diese Weise aus Einzelmessungen die in der QDQ-Pumpe stattfindenden Prozesse abschätzen. Inwieweit sich aus den Strommessungen einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-DQD-Pumpe bereits direkt Aussagen über die in dem kontinuierlich veränderter Double-Dot stattfindenden Prozesse ableiten lassen, soll hier geklärt werden.

In der folgenden Messung wurde eine Pumpe mit einem etwa 800 nm breiter Mesa-Kanal verwendet.<sup>7</sup> Das 2DEG des verwendete Wafermaterials hat bei einer Temperatur von 4 K eine Ladungsträgerdichte von  $2.08 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und eine Beweglichkeit bei  $0.9688 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Zwischen *Source* und *Drain* lag eine schwache Spannung von 0.05 mV entgegen der beabsichtigten Pumprichtung an. Mit den drei Top-Gate-Elektroden wurden zwischen *Source* und *Drain* zwei hintereinander liegende Quanten-Dots geformt. Das Eingangs-Gate wurde bei einer Pumpfrequenz  $f$  von 100 MHz mit ca. -10 dBm um Offset-Spannungswerte  $U_I^{\text{DC}}$  zwischen -300 mV und 0 mV moduliert. Am mittleren Gate wurden Spannungen  $U_{\text{II}}$  im Intervall von -150 mV bis -100 mV angelegt. Im Unterschied zur üblichen Konfiguration wurde mit einer konstanten Gate-Spannung  $U_{\text{III}}$  von -140 mV am dritten Gate ein weiterer Dot geformt. Die beiden erzeugten äußeren Barrieren trennen *Source* und *Drain* auf diese Weise räumlich stärker voneinander als bei den Messungen mit nur zwei verwendeten Gates. Das zwischen den äußeren Barrieren liegende Gebiet teilt sich mit ansteigender Höhe der mittleren Barriere in zwei getrennte Quanten-Dots.<sup>8</sup>

Zudem lag bei den Messungen ein senkrechtes Magnetfeld bis 3 T an, um die Kopplung der beiden Quanten-Dots genauer untersuchen zu können. Da mit zunehmendem Magnetfeld die eingefangenen Elektronen immer stärker lokalisiert werden,[25] führt dies in vielen Fällen dazu, dass hierdurch die Wellenfunktion der Elektronen weniger weit in die Barrieren hineinreicht. Da die Tunnelwahrscheinlichkeiten mit sinkender Eindringtiefe der Wellenfunktion abfällt, würde sich dann die Effektivität der Barrieren trotz gleicher Barrierenhöhe und -breite verbessern. Wie bereits im Abschnitt 6.1 in Vergleich der Abbildungen 6.2 und 6.4 zu sehen, führt dies zu einer Veränderung der Pumpregionen. An den Stufenanstiegen der Plateaus reicht schon eine kleine Verschiebung der Tunnelratenverhältnisse, damit sich die Anzahl eingefangener und danach gepumpter Elektronen verändert. Bisherige Messungen zeigen, dass bei zunehmenden Magnetfeldern bis 3 T sich tendenziell die Stufenanstiege in Richtung

---

<sup>7</sup>Nach Berücksichtigung der *Side-Wall-Depletion* führt dies zu einem etwa 100 nm breiter Leitungskanal.

<sup>8</sup>Auch bei dem vorangegangenen Abschnitt 6.2 wurde das dritte Gate benutzt um die Zuleitung weiter voneinander zu trennen. Dabei wurde an das mittlere Gate eine konstante Spannung von -85 mV angelegt. Aufgrund der somit konstanten mittleren Barriere konnte kein Übergang vom Einzel- zum Double-Dot beobachtet werden.

---

negativerer Spannungen verschieben.[47][92] Mitunter vergrößert sich hierdurch auch der Abstand zwischen zwei Anstiegen, was zur Qualitätssteigerung der Pumpplateaus bereits im Abschnitt 6.1 und auch bei Messungen von Christoph Leicht ausgenutzt wurde.[14][47, Kapitel 6]

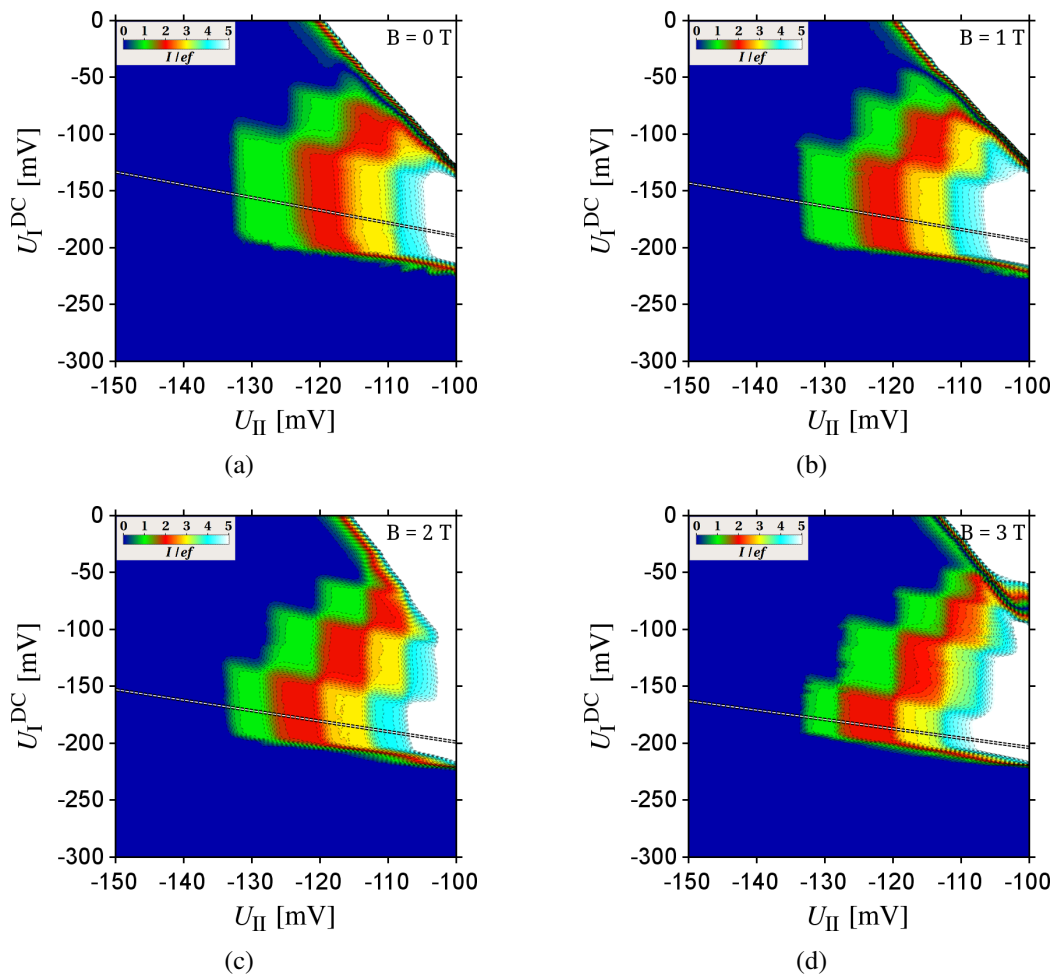
Der erzeugte Pumpstrom wurde bei konstantem  $U_{\text{III}} = -140$  mV in Abhängigkeit der Offset-Spannung am Eingangs-Gate  $U_{\text{I}}^{\text{DC}}$  und der Spannung am mittleren Gate  $U_{\text{II}}$  gemessen. Beginnend mit  $U_{\text{I}}^{\text{DC}} = 0$  mV lief der Parameter  $U_{\text{II}}$  dabei in 0.25 mV Schritten von -150 mV bis -100 mV. Zwischen jedem Durchgang von  $U_{\text{II}}$  wurde die Spannung  $U_{\text{I}}^{\text{DC}}$  um 2 mV bis auf letztlich -300 mV abgesenkt. Nach jedem kompletten Durchlauf der Parameter  $U_{\text{I}}^{\text{DC}}$  und  $U_{\text{II}}$  startete eine neue Messung, wobei jedoch das Magnetfeld von anfänglichen 3 T um weitere 0.1 T reduziert wurde. Auf diese Weise können die Pumpregionen der Double-Quanten-Dot-Pumpe (DQD-Pumpe) bei 31 verschiedenen Magnetfeldern von 0 T bis 3 T verglichen werden.

Wie in Abbildung 6.10 für 4 verschiedene Magnetfelder exemplarisch zu sehen, kann mit den verwendeten Parametern quantisierter Strom erzeugt werden. Es zeigte sich, dass für Spannungen am mittleren Gate  $U_{\text{II}}$  oberhalb von etwa -110 mV der Strom schnell ansteigt und die charakteristischen Pumpplateaus nicht mehr so deutlich auftreten. Andererseits wird ab Spannungen  $U_{\text{II}}$  unterhalb von ca. -134 mV kein Strom mehr gepumpt. Interessanterweise ist diese untere Grenze auch mit ansteigendem senkrechten Magnetfeld nahezu konstant. In früheren Messungen wie z.B. bei der Parallelschaltung in Abschnitt 6.1 oder auch in den Publikationen [101] und [47, Kapitel 5] wurde immer eine Verschiebung zu negativeren Spannungswerten beobachtet.

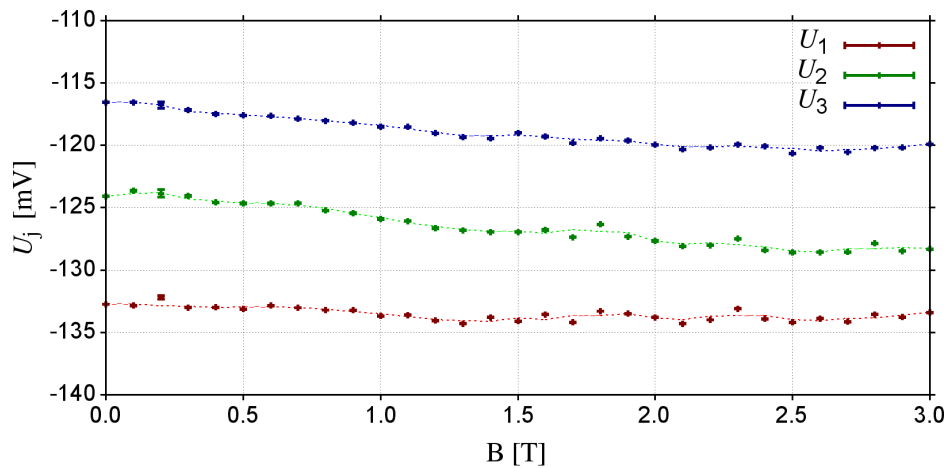
In den meisten Messungen an nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen traten keine deutlichen Unterschiede zwischen den Steigungen an den Übergängen zwischen den Plateaus auf. Häufig waren die Unterschiede sogar so klein, dass deshalb alle  $\alpha_j = \alpha$  gesetzt werden konnten. Bei dieser Messung einer Pumpe mit einem Double-Quanten-Dot tritt jedoch genau wie bei der Arbiträr-Stromquelle 6.2 ein signifikanter Unterschied auf. Da in beiden Fällen abweichend von der gängigen Vorgehensweise alle drei Top-Gates mit negativen Spannungen versorgt wurden, scheint dies den beobachteten Effekt zu bewirken. Um den Grund für diese Besonderheit zu ergründen, wurden die Messdaten hinsichtlich der Entwicklung der Fit-Parameter bei zunehmendem Magnetfeld untersucht.

### 6.3.1. Entwicklung der Fit-Parameter bei zunehmendem Magnetfeld

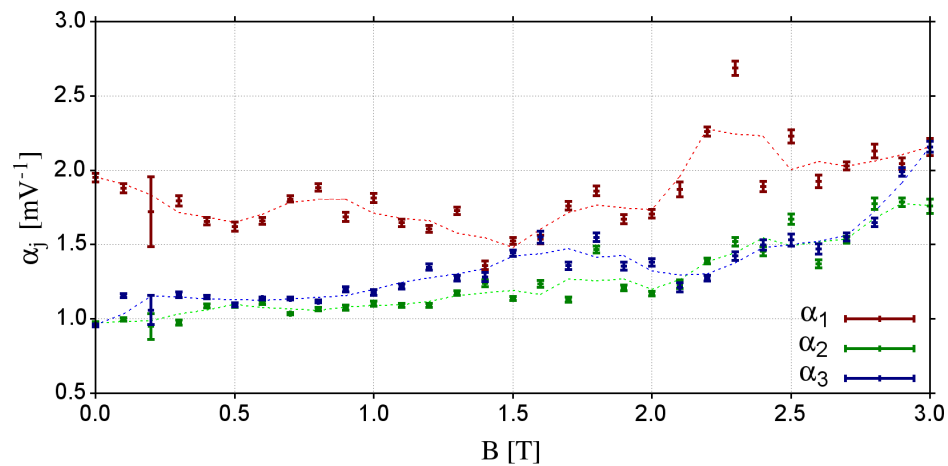
Die Stufenspannungen  $U_j$  und die Stufensteigungen  $\alpha_j$  mussten zunächst aus den Messwerten gewonnen werden. Dazu wurden Strom-Spannungs-Kennlinien ermittelt. Damit die Steigungen  $\alpha_j$  nicht durch Beiträge von den anderen Kanten der Pumpregion beeinflusst werden, sollten die Schnitte ausreichend Abstand zu diesen haben. Wie in Abbildung 6.10 zu sehen, würden für höhere Magnetfelder Schnitte durch die Pumpregionen bei konstantem  $U_{\text{I}}^{\text{DC}}$  in die Nähe der anderen Kanten der Plateaus kommen. Deshalb wurden die Schnitte stattdessen entlang der schwarz- bzw. weiß-gestrichelten Linien gemacht, so dass die



**Abbildung 6.10.:** Pumpplateaus der Pumpe bei verschiedenen magnetischen Feldstärken. An den drei eingezeichneten gestrichelten Linie (schwarz, weiß, schwarz) im Abstand von 1 mV wurden für die spätere statistische Auswertung die Strom-Spannungs-Kurven verwendet. In diesen Messungen tritt eine unübliche Ausrichtung der Auswurfkante auf. Bei den gezeigten Pumpregionen kann ein Spannungsanstieg der Gate-Spannung  $U_{II}$  in der Region der oberen Kante zu einer Senkung des Pumpstroms führen. Dies ist durch den Einsatz der dritten Barriere zu erklären, da für Elektronen in der Auswurfphase die zu überwindende Barriere nun aus den durch  $U_{II}$  und  $U_{III}$  erzeugten Barrieren besteht. Da  $U_{II}$  auch die Energien der Dot-Niveaus deutlich beeinflusst, bewirkt ein Anstieg bei  $U_{II}$  auch ein Absinken des mit Elektronen besetzten Dot-Niveaus. Zwar stellt die mittlere Barriere in dem Fall ein kleineres Hindernis dar, jedoch ist die verbleibende dritte Barriere dafür jetzt deutlich schwerer zu überwinden und somit die Tunnelwahrscheinlichkeit folglich kleiner. Ein zuvor noch in den meisten Pumpzyklen nach *Drain* gepumptes Elektron, würde bei ausreichend gesenkter Tunnelwahrscheinlichkeit stattdessen im Dot bleiben.



(a)



(b)

**Abbildung 6.11.:** Entwicklung der Fit-Parameter des Pumpplateaus im Magnetfeld.

(a) und (b) zeigen die gemittelten Werte mit der zugehörigen Messunsicherheit  $\zeta$ , die durch Schnitte mit variiertem Offset-Spannung  $U_1^{\text{DC}}$  gewonnen wurden. Diese Schnitte verlaufen dabei entlang der in Abbildung 6.10 gezeigten gestrichelten Linien. Um die tendenzielle Entwicklung deutlicher darzustellen, wurde von jeder Datenreihe jeweils ein gewichteter, gleitender Mittelwert über drei benachbarte Punkte als dünne, gestrichelte Linie hinzugefügt. Die Wichtung entspricht dem Kehrwert des jeweiligen  $\zeta$ .

In Abbildung (a) ist der Verlauf der Spannungen  $U_j$  zu sehen.  $U_1$  bleibt bei Magnetfelder bis 3 T nahezu konstant.

Abbildung (b) stellt den Verlauf der Steigungen  $\alpha_j$  dar. Im Gegensatz zu den anderen Steigungen  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  startet  $\alpha_1$  bei 0 T mit einem etwa doppelt so großen Wert, um danach mit zunehmendem Magnetfeld zunächst tendenziell abzusinken. Währenddessen ist der gemeinsame Trend von  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  ansteigend, so dass sich die Unterschiede der drei Steigungen bis 3 T nahezu ausgeglichen haben.

Kennlinien weniger störende Einflüsse beinhalten. Die dafür benötigten Werte wurden durch lineares Interpolieren der Werte an den Messpunkten gewonnen. Danach konnten von diesen Kennlinien die Projektionen auf die Abszisse gebildet werden. Somit sind diese nicht mehr von  $U_1^{\text{DC}}$  abhängig und die Steigungen bzw. Abstände entsprechen wieder den Werten von Schnitten mit konstantem  $U_1^{\text{DC}}$ .

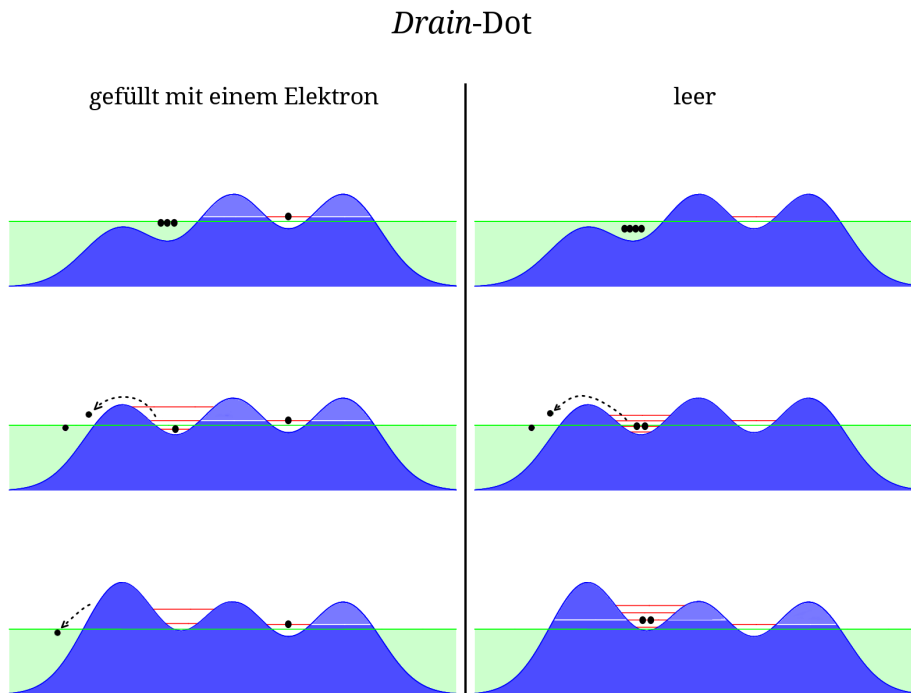
Wie im Abschnitt 5.1.5 genauer beschrieben, lassen sich mit Strom-Spannungs-Kennlinien die Werte für die Stufenspannungen  $U_j$  und die Stufensteigungen  $\alpha_j$  gewinnen. Damit die gefundenen Werte möglichst gut den tatsächlichen Werten entsprechen, wurde bei dieser Auswertung eine dreistufige Fit-Routine verwendet, die zunächst primär die Spannungen  $U_j$  und erst sekundär die Steigungen  $\alpha_j$  anfährt.

Wie sich gezeigt hat, ändern sich in dieser Messung diese Werte mitunter deutlich, wenn der Offsetwert des Strom  $I_0$  leicht variiert wird. Zur Bestimmung der Fehlerbalken an  $U_j$  und  $\alpha_j$  wurde deshalb die Verteilung der Stromwerte bei gesperrter Pumpe ermittelt und daraus der Mittelwert für  $I_0$  sowie die zugehörige Standardabweichung  $\sigma_0$  errechnet. Danach wurden um den Mittelwert neun Stromwerte mit jeweiligem Abstand  $\sigma_0$  als Offset gewählt und jeweils die Fit-Parameter für die drei in Abbildung 6.10 eingezeichneten Schnitte durch die Pumpregion bestimmt. Aus diesem Satz an Werten für jeden Fit-Parameter  $U_j$  und  $\alpha_j$  konnte danach der Mittelwert und die Standardabweichung für diese Messung gewonnen werden. Diese Schritte wurden für jede einzelne Magnetfeldmessung gemacht, so dass hinter jedem der 31 Messpunkte 27 Durchläufe der dreistufigen Fit-Routine stehen. Abbildung 6.11 zeigt den Verlauf der Steigungen  $\alpha_j$  und Spannungen  $U_j$  in Abhängigkeit der magnetischen Feldstärke  $B$ . Die aufgetragenen Fehlerbalken entsprechen der doppelten zugehörigen Standardabweichung.

Die  $U_j$  verschieben sich mit Anstieg des Magnetfelds zu negativeren Werten. Diese Änderung betrifft in nahezu gleichem Maße  $U_2$  und  $U_3$ . Die Spannung  $U_1$  bildet bezüglich dieses Verhaltens eine Ausnahme, da sie nur wenig absinkt und im Verhältnis zu den beiden anderen Spannungen somit nahezu konstant bleibt. Für die Steigungen  $\alpha_j$  ist auch eine Auffälligkeit bei  $\alpha_1$  zu beobachten. Während sich  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  an den Übergängen vom  $1ef$ - zum  $2ef$ -Plateau bzw.  $2ef$ - zum  $3ef$ -Plateau mit ansteigendem Magnetfeld ähnlich entwickeln und deshalb immer in etwa den gleichen Wert haben, weicht  $\alpha_1$  davon für geringe Magnetfelder signifikant ab. Statt wie die anderen Steigungen sinkt  $\alpha_1$  mit zunehmendem Magnetfeld von einem Startwert bei 0 T von etwa  $2 \text{ mV}^{-1}$  auf ungefähr  $1.5 \text{ mV}^{-1}$  bei 1.5 T ab, um danach rapide Werte bei  $2.5 \text{ mV}^{-1}$  zu erreichen. Von dort an schwankt der Wert und pendelt sich dann auf Wert von etwas über  $2 \text{ mV}^{-1}$  ein. Parallel dazu sind  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  von anfänglichen  $1 \text{ mV}^{-1}$  mit zunehmendem Magnetfeld auf ähnliche Werte wie  $\alpha_1$  angestiegen. Das bedeutet, dass für den Anstieg auf das erste Plateau anscheinend nicht allein die *Decay Cascade* sondern zusätzlich ein anderer Effekt verantwortlich ist.

### 6.3.2. Auswirkungen des zweiten QDs auf den Pumpzyklus

Da sich die in Abbildung 6.11 gezeigten Verläufe von  $\alpha_1$  sowie von  $U_1$  deutlich von den Verläufen der anderen Fit-Parameter unterscheiden, kommt es anscheinend zu einer Beeinflussung des 1-Elektron-Pumpzyklus durch den zweiten QD. Das Absinken von  $\alpha_1$  hängt wahrscheinlich mit der Rücktunnelkante der Einzel-Elektronen-Pumpe zusammen. Wenn die Spannung  $U_{II}$  an der mittleren Barriere stärker negativ als ca. -134 mV wird, findet kein Pumpen mehr statt. Es existiert somit so etwas wie eine kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  unterhalb derer das Pumpen anscheinend nicht mehr möglich ist. Liegt die Spannung am mittleren Gate unterhalb dieser kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$ , tunneln während der *Decay-Cascade*-Phase alle im *source*seitigen Dot befindlichen Elektronen wieder zurück zur *Source*. Selbst bei ansteigenden Magnetfeld und damit zunehmender Barrieren-Effektivität bleibt diese kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  nahezu konstant. Die anderen Übergängen vom  $1ef$ - zum  $2ef$ -Plateau bzw.  $2ef$ - zum  $3ef$ -Plateau hingegen verschieben sich, wie erwartet und in Abschnitt 2.5.3 beschrieben, in Richtung negativerer Gate-Spannung  $U_{II}$ .



**Abbildung 6.12.:** Einfluss des Ladezustands des *Drain-Dots* auf die Anzahl der am Ende der *Decay Cascade* eingefangenen Elektronen im *Source-Dot*. Die Grafiken zeigen untereinander, aufeinander folgende Momentaufnahmen während der Rücktunnelphase. In der linken Spalte ist der *Drain-Dot* mit einem Elektron geladen, wodurch die Coulomb-Abstoßung bzw. die damit einhergehende Vergrößerung der Energieabstände zwischen den Dot-Niveaus im *Source-Dot* das Tunneln der dort befindlichen Elektronen zurück nach *Source* unterstützt. Auf der rechten Seite ist der *Drain-Dot* leer und somit die Energieabstände zwischen den Dot-Niveaus im *Source-Dot* kleiner. Hierdurch können in diesem Beispiel zwei Elektronen am Ende der Rücktunnelphase im *Source-Dot* eingefangen werden.

Diese Abweichung beim Anstieg bei  $U_{\text{II}}^{\text{krit}}$  deutet auf eine Wechselwirkung mit dem zweiten Dot hin, die die geringe Veränderung durch effektivere Barrieren am Übergang von  $0ef$  zu  $1ef$  dominiert. Bei einer hohen mittleren Barriere ist das Tunneln von einem zum anderen der beide Quanten-Dots unterdrückt, so dass ein einfach geladener *drainseitiger* QD sein Elektron während der *Decay Cascade* dann nicht mehr an den *sourceseitigen* QD verliert. Durch das Elektron im *Drain-Dot* werden jedoch die Energieabstände der Zustände im *Source-Dot* durch Coulomb-Abstoßung signifikant erhöht.<sup>9</sup> Dies führt zu höheren Rücktunnelraten  $\Gamma$  der Elektronen im *Source-Dot*, so dass ein Einfangen von Elektronen in diesem Dot mit diesen Pumpparametern bei dieser Pumpe nicht mehr möglich ist. In Abbildung 6.12 sind untereinander Momentaufnahmen während der Rücktunnelphase aufgetragen. Die Zeitachse verläuft von oben nach unten, so dass die untersten Grafiken den Endzustand der *Decay Cascade* darstellen. Der *Drain-Dot* ist dabei in der linken Spalte durchgängig mit einem Elektron gefüllt. In der rechten Spalte hingegen ist der Dot leer, wodurch das Einfangen von Elektronen in diesem Fall möglich wird.

Wie im Abschnitt 5.1.3 beschrieben, können Elektronen nur dann reproduzierbar eingefangen werden, wenn in der *Decay-Cascade*-Phase die Tunnelraten nicht alle um ein vielfaches größer als die Pumpfrequenz sind. Tunneln dagegen das im *Drain-Dot* befindliche Elektron noch während der *Decay Cascade* in den *Source-Dot*, springen ab diesem Zeitpunkt die Tunnelrate für alle Besetzungen auf deutlich niedrigere Werte und die Charakteristiken der Einzelelektronenpumpe werden wieder fast ausschließlich vom *Source-QD* beeinflusst. Vereinfacht zusammengefasst lässt sich sagen: Wenn sich während der gesamten *Decay Cascade* im *Drain-Dot* ein Elektron befindet, tunneln alle im *Source-Dot* befindlichen Elektronen zurück und es wird somit kein Elektron in diesem Pumpzyklus nach *Drain* befördert.

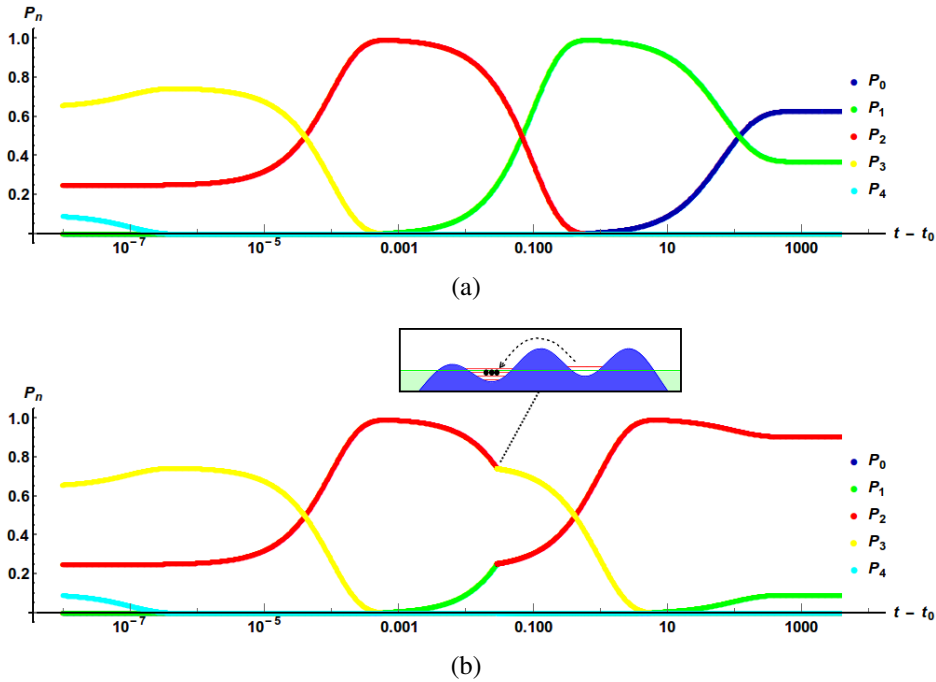
Um die Vorgänge im Double-Quanten-Dot qualitativ mit dem in Kapitel 5 gewonnenen mathematischen Modell zu veranschaulichen, werden die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}$  des *Source-Dot* für die bereits im Abschnitt 5.1.3 in den Abbildungen 5.2 und 5.2 verwendeten Parameter berechnet. Die Parameter entsprechen nicht einer tatsächlichen Messung sondern wurden so gewählt, dass ein deutlicher Unterschied zwischen den beiden in Abbildung 6.13 gezeigten zeitlichen Entwicklungen der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}$  zu sehen ist. Die Startparameter sind für die beide Fälle in (a) und (b) identisch, so dass zunächst in den zeitlichen Entwicklungen der  $\mathcal{P}$  keine Unterschiede auftreten. Zum Zeitpunkt  $t = 0.03$  wird in (b) jedoch ein Elektron hinzugefügt und von da die zugehörigen Tunnelraten durch  $10^4$  geteilt. Dies entspricht einem aus den *Drain-* in den *Source-Dot* tunnelnden Elektron. Zu diesem Zeitpunkt steigt  $\mathcal{P}_3$  (gelb) auf knapp über 74% und  $\mathcal{P}_2$  (rot) fällt entsprechend auf ca. 26% ab. Da von nun an die Tunnelraten deutlich kleiner geworden sind, zerfällt die Besetzung mit drei Elektronen nicht schlagartig. Vielmehr bewirken die neuen Tunnelraten, dass unter diesen Bedingungen jetzt auch mit hoher Wahrscheinlichkeit von  $\mathcal{P}_2 \approx 90\%$  am Ende der Rücktunnelphase 2 Elektronen eingefangen werden können.

Der *Decay-Cascade*-Prozess ist somit abhängig von einer dominierenden Umschaltfunktio-

---

<sup>9</sup>Mit *Drain-Dot* und *Source-Dot* werden von nun an der *drainseitige* QD bzw der *sourceseitige* QD bezeichnet.





**Abbildung 6.13.:** Graphische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$  des *Source*-Dot beim Double-Quanten-Dot. Alle Parameter sind ohne Einheiten. Die Zeitachse  $t$  ist logarithmisch eingeteilt. Die Tunnelraten fallen exponentiell mit  $\exp(-t/100)$  und starten mit den Werten:

$$\Gamma_1(t_0) = 10^{-2}, \Gamma_2(t_0) = 10, \Gamma_3(t_0) = 10^4 \text{ und } \Gamma_4(t_0) = 10^7.$$

In beiden Fällen sind die Besetzungswahrscheinlichkeiten am Anfang mit  $\mathcal{P}_4(t_0) = 10\%$ ,  $\mathcal{P}_3(t_0) = 65\%$ ,  $\mathcal{P}_2(t_0) = 25\%$  und  $\mathcal{P}_1(t_0) = \mathcal{P}_0(t_0) = 0$  gegeben.

Abbildung (a) zeigt den daraus resultierenden Verlauf der *Decay Cascade*.

In Abbildung (b) hingegen tunnelt ein im *Drain*-Dot befindliches Elektron, wie in der eingefügten Momentaufnahme angedeutet, bei  $t = 0.03$  in den *Source*-Dot. Die ab diesem Zeitpunkt wirkenden Tunnelraten berechnen sich, indem die vorherigen Raten mit den Faktor  $10^{-4}$  multipliziert werden. Hierdurch können letztlich mit deutlich höherer Wahrscheinlichkeit Elektronen im Dot gefangen werden. Kurzzeitig springen durch das zusätzliche Elektron die Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}$  auf die Werte ihrer unteren Nachbarn:  $\mathcal{P}_{j+1}(0.03) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{P}_j(0.03 - \epsilon)$ . Der gelbe Verlauf von  $\mathcal{P}_3$  erreicht hierdurch bei  $t = 0.03$  knapp über 74%. Die weitere Entwicklung entspricht einer ungestörten *Decay Cascade* mit geringeren Tunnelraten. Statt der in (a) etwa 37%-igen Wahrscheinlichkeit ein einzelnes Elektron im QD zu isolieren, wird die Besetzungswahrscheinlichkeit  $\mathcal{P}_2$  unter diesen Bedingungen bei einem Wert von ca. 90% eingefroren. Durch das aus dem *Drain*-Dot tunnelnde Elektron werden demnach mit hoher Wahrscheinlichkeit jetzt 2 Elektronen im *Source*-Dot eingefangen.

on, die den spontanen Wechsel vom gefüllten zum leeren *drain*seitigen Dot realisiert. Da der Zeitpunkt dieses Tunnelereignis bei der Betrachtung vieler Pumpzyklen in dem Zeitintervall der Einfangphase zu einer Wahrscheinlichkeitsverteilung führt, muss für jeden möglichen Umschaltzeitpunkt das Ergebnis des *Decay-Cascade*-Prozesses berechnet werden. Indem die jeweiligen Besetzungswahrscheinlichkeiten am Ende der Einfangphase mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Tunnelzeitpunkts multipliziert werden, ergeben sich die finalen Besetzungswahrscheinlichkeiten für den hier untersuchten Fall des DQD. Diese mathematische Faltung aus Wahrscheinlichkeitsverteilung des Tunnelzeitpunkts und den jeweiligen Besetzungswahrscheinlichkeiten am Ende der *Decay-Cascade* führt dazu, dass am Übergang von  $0ef$  zu  $1ef$  eine komplexere Abhängigkeit von den Pumpparametern zu erwarten ist. Wie sich im Experiment gezeigt hat, entspricht die grundsätzliche Form der Stufe trotzdem der bisherigen Doppel-Exponentialfunktion. Inwieweit eine Berechnung von dem Qualitätswert  $\delta_1$  nach Gleichung (5.34) somit zur Abschätzung der minimalen Steigung auf dem Plateau bzw. der dortigen Abweichungen vom idealen Pumpstrom Sinn macht, kann mit den gewonnenen Messwerten nicht endgültig geklärt werden. Anscheinend sind eventuelle Abweichungen klein gegenüber den in dieser Messung auftretenden Messfehlern ( $\zeta = 1.4 \times 10^{-12}$  A im Vergleich zu  $1ef = 1.6 \times 10^{-11}$  A). Das unter den Bedingungen einer gefalteten *Decay-Cascade* berechnete  $\delta_1 = \delta_1^{\text{DQD}}$  entspricht jedoch nicht dem nach Gleichung (5.15) mit dem Verhältnis der Tunnelraten  $\Gamma_2/\Gamma_1$  verknüpften  $\delta_1 = \delta_1^\Gamma$ .

Durch das aus dem *Drain*- in den *Source*-Dot tunnelnden Elektron wird die letztlich eingefangene Menge an Elektronen stark beeinflusst. Unter diesen Bedingungen hängt der Anstieg von  $0ef$  zu  $1ef$  demnach vielmehr von der Tunnelwahrscheinlichkeit des Elektron im *Drain*-Dot ab. Eine kleine Änderung der mittleren Barriere schaltet somit zwischen einem während der *Decay Cascade* dauerhaft gefangenen *Drain*-Dot-Elektron und einem rechtzeitig heraus tunnelnden Elektron um. Hierdurch kann die abweichende Entwicklung und die bei niedrigen Magnetfeldern deutlich höheren Werte von  $\alpha_1$  erklärt werden. Zwar ist kurzzeitig ein Elektron mehr im *Source*-Dot, dieses tunnelt aber bereits nach kurzer Zeit wieder heraus, wobei aufgrund der geringeren Barriere zu *Source* ein Tunneln in den *Drain*-Dot unwahrscheinlich ist. Abhängig von der Effektivität der mittleren Barriere verändert sich dieser Zeitpunkt, weshalb dieser Effekt für sich allein genommen im ansteigenden Magnetfeld zu einer Verschiebung der kritische Spannung  $U_{\text{II}}^{\text{krit}}$  in Richtung höherer Gate-Spannungen führen würde. Dies wird aber in diesem Fall durch die normalerweise auftretende Verschiebung zu negativeren Gate-Spannungen in etwa kompensiert.

Im späteren Verlauf des Pumpzyklus kann dann der *Drain*-QD wieder mit Elektronen geladen werden, so dass die Anzahl der gepumpten Elektronen nicht zwangsweise der Anzahl der in beiden QDs befindlichen Elektronen entsprechen muss. Die Eingangsbarriere wird unter den Messbedingungen nicht ausreichend stark angehoben, um hierdurch im *Drain*-Dot befindliche Elektronen über die konstant hohe Ausgangsbarriere zu pumpen.

Wird bei Spannungen  $U_{\text{II}}$  kleiner als ca. -134 mV kein Strom gepumpt, kann dies zwei Gründe haben:

Entweder ist die mittlere Potentialbarriere zu hoch, so dass in der Einfangphase der *Decay Cascade* kein Elektron gefangen werden kann (klassische *Decay-Cascade*-Einfangkante),

---

oder der *Drain-Dot* ist während der kritischen Einfangphase der *Decay Cascade*, in der sich entscheidet wie viele Elektronen gefangen werden können, durchgängig mit einem Elektron geladen (Grenzspannung).

Der zweite Fall kann auch eintreten, wenn anfänglich der *Drain-Dot* leer ist und erst im Laufe der *Decay Cascade* das Elektron aus dem *Source-Dot* in den *Drain-Dot* tunnelt. Ab diesem Moment wird dann durch die zusätzliche Coulomb-Abstoßung das Einfangen von Elektronen im *Source-Dot* schwerer. Ist der *Drain-QD* während der kritischen Phase durchgängig mit einem Elektron geladen, wird das Einfangen von Elektronen im *Source-QD* verhindert. Durch resonantes Tunneln kann danach zwar das Elektron aus dem *Drain-* in den *Source-QD* wechseln, jedoch ist zu diesem Zeitpunkt die *Decay Cascade* bereits beendet und das einzige Elektron in den beiden QDs wird schließlich durch die immer weiter ansteigende Eingangsbarriere in den *Drain-Dot* befördert. Über die Ausgangsbarriere wird es dann aber nicht mehr gehoben, da die Eingangsbarriere nicht ausreichend stark auf den *Drain-Dot* wirkt. Um auch diesen komplett zu entleeren, müsste die Pumpleistung bei dem größeren Abstand zwischen dem Eingangs-Gate und dem *Drain-Dot* deutlich stärker sein.<sup>10</sup>

### 6.3.3. DQD-Pumpzyklus

Damit die nicht-adiabatische DQD-Pumpe einen Pumpstrom erzeugen kann, darf demnach die Spannung am mittleren Top-Gate nicht stärker negativ als die kritische Spannung  $U_{\text{II}}^{\text{krit}}$  sein. Dann ist während der kritischen Phase der *Decay Cascade* der *Drain-Dot* nicht gefüllt und Elektronen werden im *Source-Dot* eingefangen. Eines dieser Elektronen wird jedoch in den *Drain-Dot* wechseln. Beim Auswerfen bleibt dieser voraussichtlich weiterhin besetzt, so dass eines der isolierten Elektronen nicht gepumpt wird.

Der Pumpstrom setzt somit erst ein, wenn in der Einfangphase der *Decay Cascade* der *Drain-Dot* rechtzeitig sein Elektron in den *Source-QD* abgibt und danach in diesem 2 Elektronen eingefangen werden können. Alternativ dazu wäre auch die Situation denkbar, dass nach dem Ende der Einfangphase in beiden QDs jeweils ein Elektron gefangen wurde. Diese Konfiguration wird aber im späteren Verlauf des Pumpzyklus auch bei der erstgenannten Variante erreicht, da mit der anwachsenden Eingangsbarriere auch die Dot-Niveaus ansteigen und dadurch in der Auswurfphase die Dot-Niveaus des *Source-QDs* höher als die des *Drain-Dots* werden. Eines der beiden Elektronen besetzt somit das zwischenzeitlich freigewordene Dot-Niveau im *Drain-Dot*, während das andere Elektron nach *Drain* gepumpt wird. Die gerade beschriebenen Vorgänge treten sicherlich mit jeweils einer gewissen Wahrscheinlichkeit

---

<sup>10</sup>Bei einer 2DEG-Tiefe von ca. 95 nm und einem Abstand von 150 nm zwischen den Gates, befindet sich der *Source-QD* zwischen Eingangs- und Mittel-Gate etwa 157 nm vom Eingangs-Gate entfernt. Dem gegenüber ist der *Drain-QD* zwischen Mittel- und Ausgangs-Gate mit ca. 387 nm ungefähr 2.5-mal so weit entfernt. Bei angenommener  $1/r$ -Abhängigkeit des Coulomb-Potentials müsste demzufolge die Pumpleistung entsprechend mehr als verdoppelt werden, um den *Drain-QD* vergleichbar zu beeinflussen. Aufgrund des komplexeren Potenzialverlaufs in der Einzelelektronenpumpe, bei der die Barrieren vorrangig unterhalb der Gates ausgebildet werden und durch Screening-Effekte jenseits davon schnell exponentiell absinken, sind diese Abschätzungen allerdings deutlich zu optimistisch.

während der Pumpzyklen auf. In den häufigsten Fällen verläuft ein Durchgang vermutlich jedoch wie in den Abbildungen 6.14 und 6.15 gezeigt. Den in Abbildung 6.11 beschriebene Verlauf der Tunnelereignisse wird danach in der Abbildung 6.16 gezeigt.

### **Pumpzyklus $0ef$ (Drain-Dot besetzt)**

Für Spannungen am mittleren Gate  $U_{II}$  unterhalb der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  werden keine Elektronen gepumpt, da der geladene *Drain-Dot* den Einfangprozess behindert.

Abbildung 6.14(a) zeigt den noch nicht von *Source* entkoppelten *Source-Dot* bevor die linke Eingangsbarriere angehoben wurde. Zu diesem Zeitpunkt reicht das Elektronengas noch in den Dot hinein und in diesem Beispiel halten sich dort drei Elektronen auf. Aber durch die ab diesem Zeitpunkt anwachsende Eingangsbarriere wird die Trennung vom Elektronengas erreicht und der Quanten-Dot richtig ausgebildet. Da dieser nicht allen Elektronen Platz bietet, tunneln die meisten der anfänglichen Elektronen im Dot zurück nach *Source*.

In Abbildung 6.14(b) ist der Einfangprozess immer noch nicht abgeschlossen. Durch das weitere Anheben der linken Eingangsbarriere wird das einzig verbliebene Elektron im folgenden energetisch oberhalb des chemischen Potential von *Source* liegen. Die Einfangphase ist in Abbildung 6.14(c) abgeschlossen und kein Elektron ist mehr im *Source-Dot* verblieben. Da die Eingangsbarriere im Zeitintervall von (b) nach (c) noch immer ausreichend durchlässig für Elektronen war, tunnelte das letzte in *Source-Dot* befindliche Elektron zurück nach *Source*. Das weiteres Anheben der Eingangsbarriere verläuft ab jetzt ereignislos.

In Abbildung 6.14(d) ist die Eingangsbarriere bereits wieder abgesunken und für das im *Drain-Dot* bisher gefangene Elektron ergeben sich bei Resonanz der Dot-Niveaus höhere Tunnelwahrscheinlichkeiten. Somit kann bei diesen Durchgängen mitunter ein Wechsel von *Drain-* zu *Source-Dot* erfolgen und dadurch der *Drain-Dot* entvölkert werden. Geschieht dies nicht, da die mittlere Barriere das Tunneln ausreichend unterbindet, beginnt der folgende Einfangprozess wieder wie in Abbildung (a) gezeigt. Im anderen Fall ist der *Drain-Dot* während des anschließenden Einfangprozesses leer. Wie in den Abbildung 6.15 gezeigt, können unter diesen geänderten Bedingungen dann im *Source-Dot* erfolgreich Elektronen gefangen und letztlich sogar gepumpt werden.

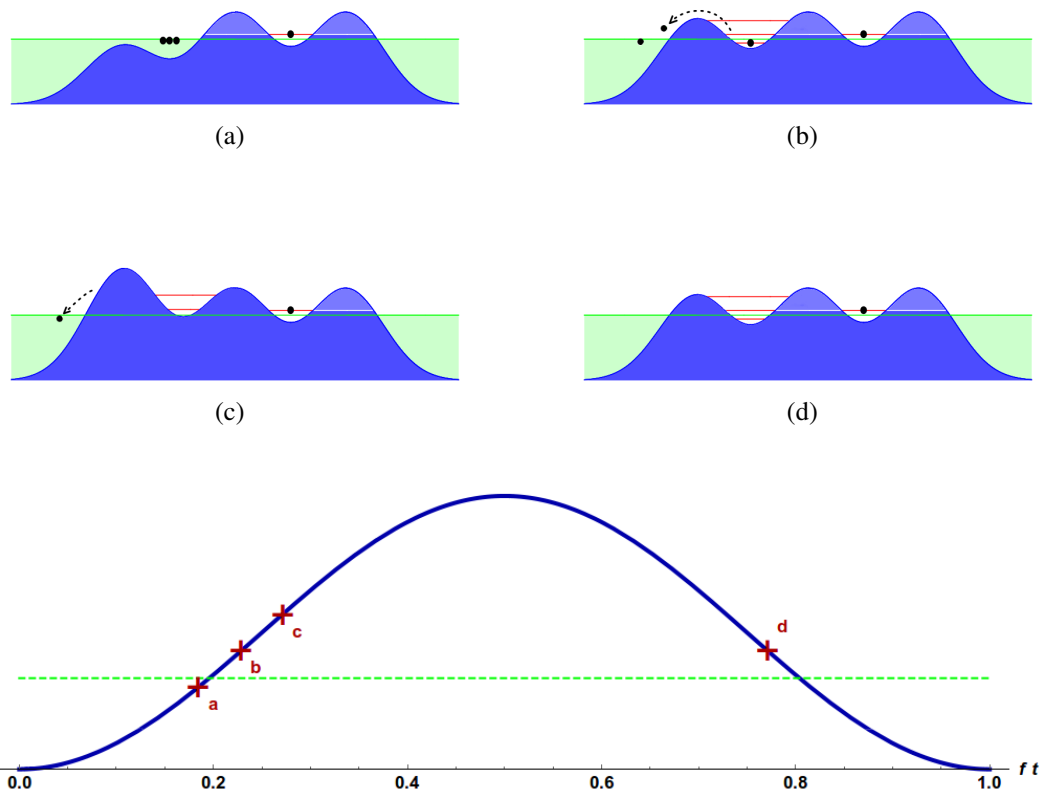
### **Pumpzyklus $1ef$ (Drain-Dot leer)**

Abbildung 6.15 zeigt dagegen den Verlauf des Pumpzyklus, wenn  $U_{II}$  oberhalb der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  liegt. Da sich die beiden Pumpzyklen ähneln, werden hier nur im Folgenden die Unterschiede hervorgehoben.

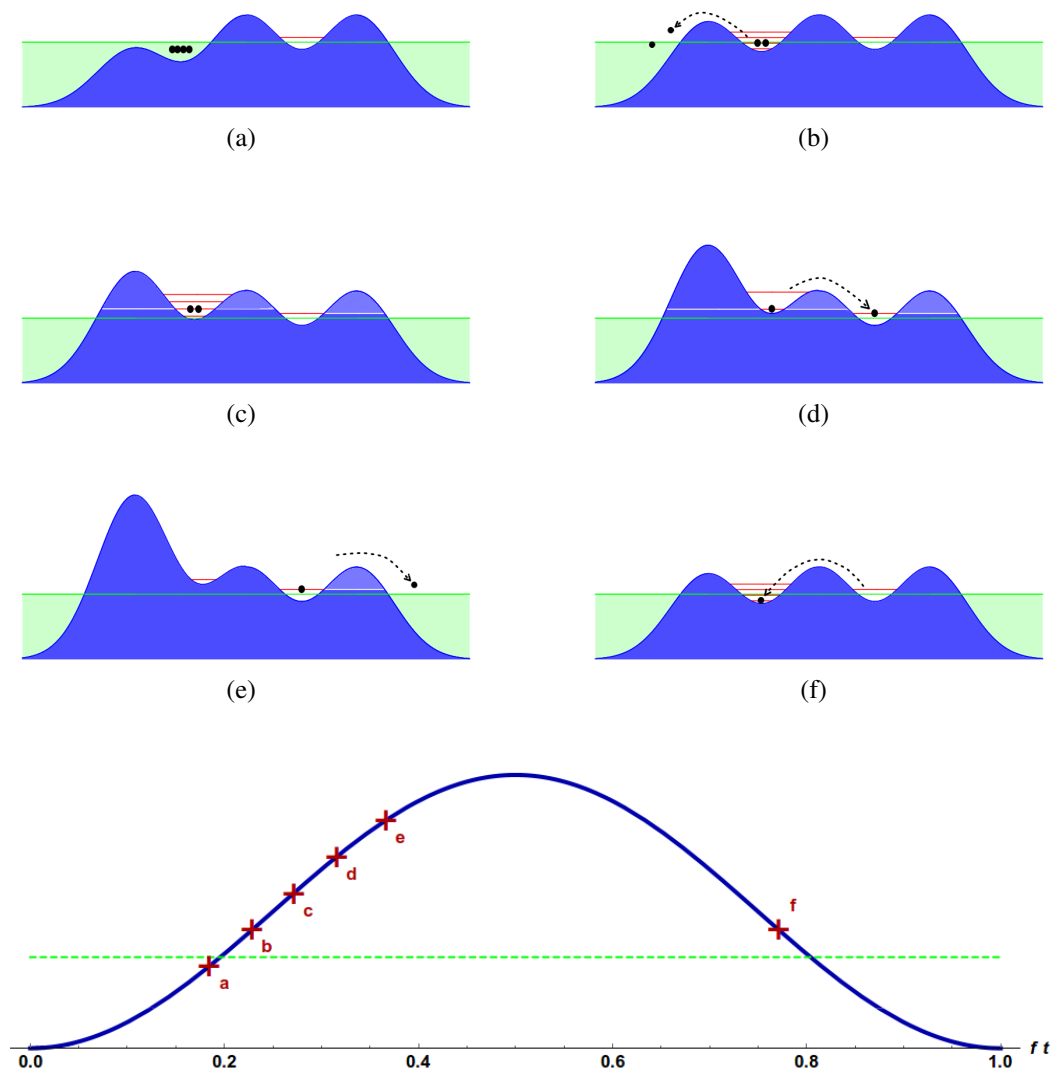
Zu dem Zeitpunkt in Abbildung 6.15(a) reicht das Elektronengas noch in den Dot hinein und in diesem Fall halten sich dort vier Elektronen auf.

In Abbildung 6.15(b) sind bereits nur noch zwei Elektronen im *Source-Dot*.

Die Einfangphase ist in Abbildung 6.15(c) abgeschlossen und beide Elektronen wurden isoliert. Mit ansteigender Eingangsbarriere wird die mittlere Barriere immer transparenter und ein Wechsel eines Elektrons in den *Drain-Dot* immer wahrscheinlicher.



**Abbildung 6.14.:** Pumpzyklus  $0ef$  (Drain-Dot besetzt): Schnitte durch die Potentiallandschaft des dynamischen Double-Quanten-Dots bei einer Gate-Spannung  $U_{II}$  knapp unterhalb der kritischen Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$ . Für die Form der Barrieren wurde angelehnt an die Abbildung 2.5 in dieser Abbildung die leicht abgewandelte Gleichung  $V(x, t) = V_I(t) \cdot g(-x_0) + V_{II} \cdot g(0) + V_{III} \cdot g(x_0)$  mit  $g(\xi) = \exp(-(x - \xi)^2 / (2\sigma^2))$  verwendet (siehe Referenz [11, Gleichung (1)]). In den oberen Schnitten durch die Potentiallandschaft sind entsprechend wie in Abbildung 2.3 die besetzten Zustände in *Source* (links) und *Drain* (rechts) grün gezeigt. In der untersten Abbildung ist in blau der zeitliche, periodische Verlauf der Barrierenhöhe von der ersten Barriere  $V_I(t)$  für einen Pumpzyklus dargestellt. Die grün-gestrichelte Linie entspricht dem chemischen Potential von *Source* und *Drain*. Die rot markierten Punkte zeigen die vier dargestellten Schnitte durch die Potentiallandschaft (a) - (d). Die zeitabhängige Amplitude  $V_I(t)$  nimmt von Abbildung (a) bis Abbildung (c) zu. In Abbildung (d) ist  $V_I(t)$  bereits wieder abgesunken. Der auf der rechten Seite eingezeichnete *Drain-Dot* ist während der *Decay Cascade* durchgängig geladen. Die in der Abbildung angedeutete Transparenz der Barrieren, die ein Maß für die Tunnelwahrscheinlichkeit darstellt, ist für dieses Elektron größer als Null, so dass ein Tunneln aus dem *Drain-Dot* für diese Elektron prinzipiell möglich wäre. Jedoch ist die Tunnelwahrscheinlichkeit bezogen auf die Dauer eines Pumpzyklus ausreichend klein. Dadurch bleibt in nahezu allen Pumpzyklen das Elektron durchgängig gefangen. Als Ergebnis dieses Pumpzyklus wird kein Elektron nach *Drain* gepumpt. Der Pumpstrom entspricht somit  $0ef$ .



**Abbildung 6.15.:** Pumpzyklus  $1ef$  (Drain-Dot leer): Schnitte durch die Potentiallandschaft des dynamischen Double-Quanten-Dots bei einer Gate-Spannung  $U_{II}$  knapp oberhalb der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$ . Die Form der Barrieren entspricht denen in Abbildung 6.14. In den oberen Schnitten durch die Potentiallandschaft sind entsprechend wie in Abbildung 2.3 die besetzten Zustände in *Source* (links) und *Drain* (rechts) grün gezeigt. Ebenfalls wie in Abbildung 6.14 zeigt die unterste Abbildung in blau den zeitlichen, periodischen Verlauf von  $V_1(t)$ , das chemischen Potential von *Source* und *Drain* und zudem die rot markierten Punkte für die Schnitten (a) - (f). Die zeitabhängige Eingangbarriere  $V_1(t)$  nimmt von Abbildung (a) bis Abbildung (e) zu. In Abbildung (f) ist die Barriere bereits wieder abgesunken. Der auf der rechten Seite eingezeichnete *Drain-Dot* ist während der *Decay Cascade* leer. Die in der Abbildung angedeutete Transparenz der Barrieren stellen auch hier ein Maß für die Tunnelwahrscheinlichkeit dar. Als Ergebnis dieses Pumpzyklus wird 1 Elektron gepumpt.

---

Das unbesetzte *Drain*-Dot-Niveau wurde in Abbildung 6.15(d) von einem Elektron aus dem *Source*-Dot besetzt.

In Abbildung 6.15(e) ist die Eingangsbarriere bereits so weit angestiegen, dass die anderen Barrieren für das Elektron in *Source*-Dot ausreichend transparent geworden sind. Eines der anfänglich gefangenen Elektronen tunnelt in diesem Pumpzyklus somit nach *Drain*, während das andere zwischenzeitlich das *Drain*-Dot-Niveau besetzt.

Abbildung 6.15(f) zeigt die Situation bei einer wieder abgesunkener Eingangsbarriere. Das im *Drain*-Dot verbliebene Elektron wechselt wieder zurück in den *Source*-Dot und ermöglicht somit eine Wiederholung des gezeigten Pumpzyklus. Wäre das Elektron stattdessen im *Drain*-Dot verblieben, würde sich stattdessen der in Abbildung 6.14 beschriebene Zyklus anschließen.

### **Pumpzyklus $1ef$ (*Drain*-Dot besetzt)**

Ist der *Drain*-Dot zu Anfang des Pumpzyklus nicht leer, kann es auch zu dem in Abbildung 6.16 dargestellten Verlauf kommen.

Am Anfang bei 6.16(a) ist die Situation identisch mit Abbildung 6.14(a).

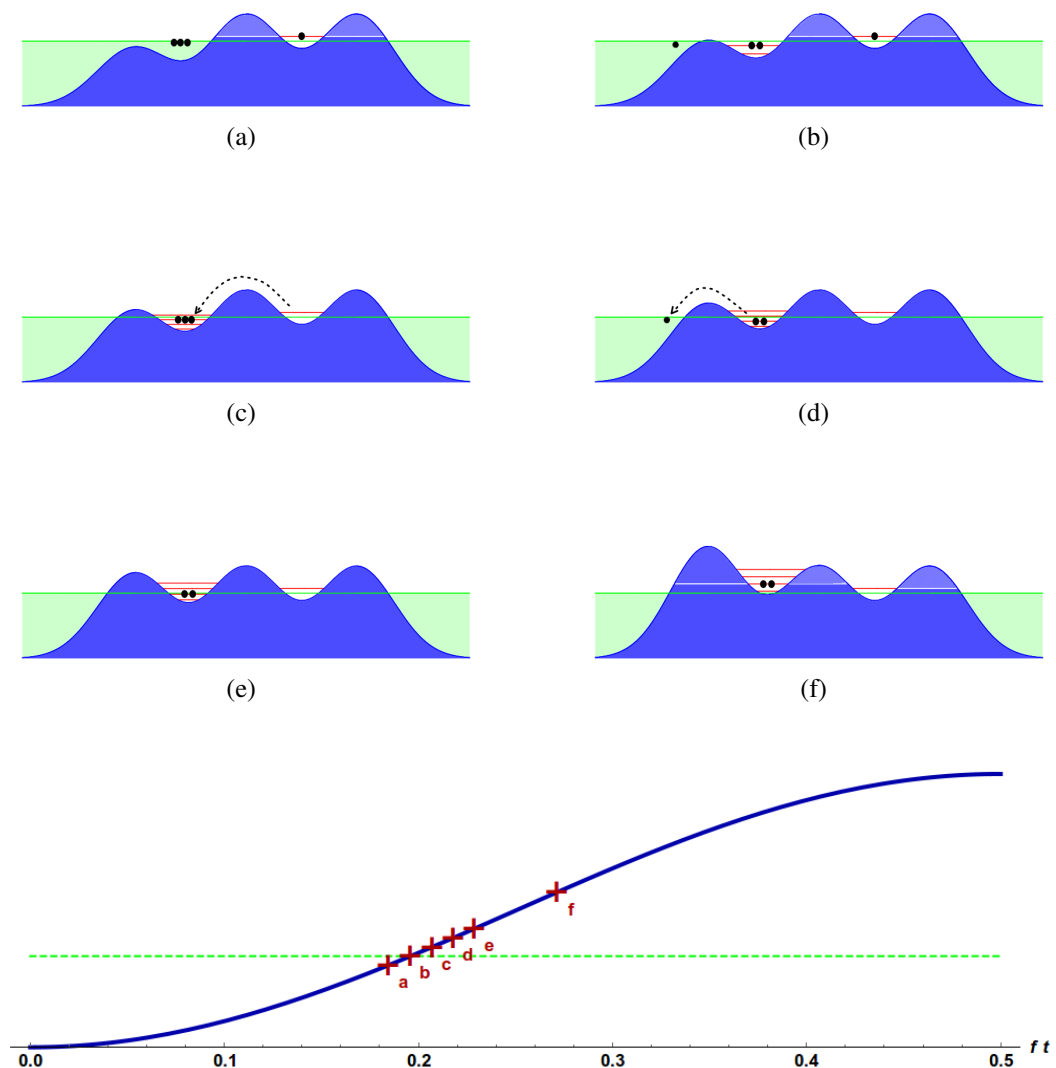
In Abbildung 6.16(b) sind bereits nur noch zwei Elektronen im *Source*-Dot.

In 6.16(c) ist das anfänglich im *Drain*-Dot gehaltene Elektron in den *Source*-Dot getunnelt und führt dort zu einer kurzzeitigen Zunahme der Besetzungszahl. Wie in der *Decay Cascade* beschrieben, wird dieser Zustand auf dem dritten Dot-Niveau jedoch aufgrund der noch immer nicht isolierenden Eingangsbarriere nach überschreiten des chemischen Potentials nicht bestehen bleiben. Sofern der *Source*-Dot vor dem Tunnelereignis nicht leer war, wurde die Tunnelwahrscheinlichkeit und somit der mittlere Tunnelzeitpunkt durch die Spin-Zusammensetzung aller Elektronen beider QDs beeinflusst. So hat z.B. ein Singulett-Zustand für das Rücktunneln eine höhere Wahrscheinlichkeit als der Triplett-Zustand.[100] Abbildung 6.16(d) zeigt die beiden verbliebenen Elektronen, die im folgenden eingefangen werden.

In Abbildung 6.16(e) befindet sich das System in dem bereits in Abbildung 6.15(b) gezeigten Zustand und nimmt danach den selben Verlauf. Aus diesem Grund entspricht 6.16(f) dann auch 6.15(c).

### **6.3.4. Pumpen mit einem DQD**

Wie sich in der Messung gezeigt hat, reicht eine kleine Änderung der mittleren Gate-Spannung  $U_{II}$  um zwischen den beiden beschriebenen Pumpzyklen zu wechseln. Demnach muss sich der Verlauf der Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen den Dots in diesem Spannungsbereich deutlich ändern. Die Tunnelraten für Elektronen im *Drain*-Dot sind für Gate-Spannungen  $U_{II}$  unterhalb der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  anscheinend zu klein, als das bei einer Pumpfrequenz  $f$  von 100 MHz in nahezu allen Zyklen dem im *Drain*-Dot gefangenen Elektron nicht genug Zeit zum Heraustunneln bleibt. Sofern dies jedoch durch Zufall in



**Abbildung 6.16.:** Pumpzyklus  $1ef$  (Drain-Dot besetzt): Schnitte durch die Potentiallandschaft des dynamischen Double-Quanten-Dots bei einer Gate-Spannung  $U_{II}$  knapp oberhalb der kritischen Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$ . Die Form bzw. Höhe der Barrieren und die chemischen Potentiale von *Source* (links) und *Drain* (rechts) entspricht denen in Abbildung 6.14 bzw. 6.15. In blau ist in dem unteren Graphen der zeitliche Verlauf von  $V_I(t)$  für die erste Hälfte der Periode dargestellt. Prinzipiell entspricht dieser Zyklus dem in Abbildung 6.15 gezeigten, wobei jedoch anfänglich der *Drain*-Dot noch geladen ist. Da dieses Elektron rechtzeitig den Dot verlässt, kann auch in diesem Pumpzyklus ein Elektron gepumpt werden. Um die bei diesem Zyklus wichtigen Tunnelereignisse genau verfolgen zu können, wurden in dieser Betrachtung kleinere Zeitschritte von (a) bis (e) gewählt. Der *Drain*-Dot ist anfänglich mit 1 Elektron besetzt. Dieses tunnelt zwischen (b) und (c) in den *Source*-Dot und erhöht dort kurzzeitig die Besetzungszahl. In (d) ist eines der drei Elektronen im *Source*-Dot nach *Source* zurück getunnelt. Die verbliebenen zwei Elektronen werden eingefangen und somit tritt in (e) kein Tunnelereignis auf. (f) entspricht dann wieder der Abbildung 6.15(c), so dass der restliche Teil des Pumpzyklus entsprechend genauso verläuft. Letztlich wird auch in diesem Fall 1 Elektron gepumpt.



---

einem Zyklus passiert, wird wie beschrieben im nächsten Zyklus der *Drain-Dot* erneut gefüllt und somit der vorherige Zustand wiederhergestellt.

Die höheren Pumpplateaus werden erreicht, indem die Spannung am Mittel-Gate  $U_{II}$  höher eingestellt wird. Ab ca. -122 mV werden  $2ef$  Pumpstrom erzeugt bzw. ab ca. -115 mV beginnt das  $3ef$ -Plateau. Durch die niedrigere mittlere Barriere tunnelt ein eventuell im *Drain-Dot* befindliches Elektron bereits deutlich vor der kritischen Einfangphase heraus. Dieses findet demnach auf einer separaten Zeitskala statt und wird deshalb nicht mehr durch den zweiten QD beeinflusst. Die letztlich gefangenen Elektronen verhalten sich deshalb als wären sie in einer Einzel-Dot-Pumpe. Aus diesem Grund sind für die höheren Plateaus wieder typische Entwicklungen der Parameter im Magnetfeld zu beobachten. Zudem wird mit sinkender Mittel-Barriere der *Drain-Dot* immer weniger stark ausgebildet, so dass für zu hohe Gate-Spannungen  $U_{II}$  der *Drain-Dot* während der kritischen *Decay-Cascade*-Phase dann kein geeignetes Dot-Niveau mehr besitzt. Aufgrund dieser beiden Effekte wird nur im Umfeld der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  ein anderes Verhalten in den Strom-Spannungskurven sowie der Magnetfeldentwicklung beobachtet. Höheren Plateaus jenseits der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  zeigen stattdessen zu vorherigen Messungen mit Einzel-Dot-Pumpen vergleichbare Ergebnisse.

Der anfänglich bei einem Magnetfeld von 0 T höhere Wert von  $\alpha_1$  ist auf den Wechsel der Elektronenbesetzung im *Drain-Dot* zurückzuführen. Da mit dem Austritt des Elektrons aus dem *Drain-Dot* die Tunnelraten  $\Gamma$  allesamt stark abfallen, besteht ab diesem Moment eine deutlich höhere Wahrscheinlichkeit dafür, dass Elektronen im *Source-Dot* eingefangen werden. Somit reicht bereits eine kleine Änderung an der mittleren Barriere aus, um von  $0ef$  zum  $1ef$ -Plateau zu wechseln, was einem großen  $\alpha_1$  entspricht. Die deutlichen Schwankungen von  $\alpha_1$  mit ansteigendem Magnetfeld ( $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  zeigen bis 1.3 T einen linearen Anstieg mit nur wenig Schwankung) können auch damit zusammen hängen. So sollte die Breite des Spannungsintervalls an der mittleren Barriere für den Wechsel von  $0ef$  zu  $1ef$  nicht kontinuierlich kleiner werden, sondern müsste sich sogar ungleichmäßig verändern:

$\alpha_1$  entspricht der Änderung der Gesamttunnelwahrscheinlichkeiten zwischen zwei QDs. Deren Spektrum ändert sich mit variierendem Magnetfeld. Somit verschieben sich die Resonanzen und damit auch ihre jeweiligen Tunnelwahrscheinlichkeiten. Die Summe über alle diese Tunnelwahrscheinlichkeiten gibt die Gesamttunnelwahrscheinlichkeit an. Mit sich änderndem Magnetfeld zeigen die einzelnen Tunnelwahrscheinlichkeiten bei den Resonanzen unterschiedliche Fluktuationen. Sofern sich diese Schwankungen nicht zufällig alle kompensieren, muss demnach die Gesamttunnelwahrscheinlichkeit ebenfalls schwanken. Folglich wird diese Schwankung auch in der Entwicklung von  $\alpha_1$  im sich ändernden Magnetfeld zu beobachten sein.

Die anderen beiden Steigungen  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  beruhen dem gegenüber auf dem Tunneln aus einem QD in ein Kontinuum am *Source*-Kontakt. Mit zunehmender Effektivität der Barriere bei steigendem Magnetfeld sinken somit alle möglichen Tunnelwahrscheinlichkeiten und somit auch die Gesamttunnelwahrscheinlichkeit. Vergleichbar starke Fluktuationen sind demnach für  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  nicht zu erwarten.

Mit zunehmendem Magnetfeld wirken die Barrieren immer effektiver und demzufolge reicht

bereits eine weniger negative Spannung am mittleren Gate  $U_{II}$  um das Elektron im *Drain*-Dot zu halten. Andererseits ist die allgemeine Entwicklung der Plateau-Stufen-Spannungen  $U_j$  im Magnetfeld bis zu einigen Tesla gegenläufig.[47] Demnach sorgen die effektiveren Barrieren im Standardbetrieb mit nur einem QD dafür, dass Elektronen bereits bei stärker negativen Gate-Spannungen eingefangen werden können bzw. eventuell bei gleicher Spannung schon mehr Elektronen gepumpt werden. Diese Beobachtung zeigt sich auch für die höheren Plateau-Übergänge: Während die Übergangs-Spannung  $U_1$  der ersten Stufe bis 3 T im Spannungsintervall zwischen -132.6 mV und -134.6 mV bleibt und damit nur leicht abfällt, sinken  $U_2$  und  $U_3$  sichtbar stärker ab. Bei etwa 2.5 T erreichen beide ihr Minimum mit -128.7 mV bzw. -120.9 mV und sind bis dahin etwa 4.5 mV abgesunken. Durch den Effekt der effektiveren mittleren Barriere, die das Tunneln aus dem *Drain*- in den *Source*-Dot behindert, wird anscheinend ein Großteil des Absinkens von  $U_1$  kompensiert.

Soll eine nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe mit den Zuständen 0 (Pumpstrom  $I \approx 0ef$ ) und 1 (Pumpstrom  $I \approx 1ef$ ) betrieben werden, reicht es die Spannung am Steuer-Gate zwischen zwei Werten  $U_{\langle n \rangle=0}$  und  $U_{\langle n \rangle=1}$  umzuschalten. Zwischen diesen Spannungswerten liegt die Spannung  $U_1$ , bei der der Wechsel von  $0ef$  zu  $1ef$  stattfindet. Wie sich gezeigt hat, ist  $U_1$  beim Betrieb einer DQD-Pumpe mit geeigneten Parametern im Magnetfeld nahezu konstant. Somit können  $U_{\langle n \rangle=0}$  und  $U_{\langle n \rangle=1}$  trotz eines sich ändernden Magnetfelds dicht bei  $U_1$  gewählt werden. Dies wird ebenfalls durch den in der Messung beobachtete stärkeren Anstieg an der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  begünstigt. Da sich bei diesem Anstieg die Tunnelraten der *Decay Cascade* durch den Einfluss des Ladezustands des *Drain*-Dots um Größenordnungen ändern, ist der Übergang von  $0ef$  zu  $1ef$  besonders sensitiv auf die Spannung  $U_{II}$  am mittleren Steuer-Gate.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Coulomb-Blockade als Ursache für die Änderung der Einfangwahrscheinlichkeit für Elektronen im *Source*-Dot diskutiert. Bei geeigneten DQD-Systemen und ausreichender Austausch-Wechselwirkung könnten diese aber auch stark von den Spin-Zusammensetzungen im *Source*-Dot abhängen. Dies könnte zukünftig zur dynamischen Spinpräparation in DQDs genutzt werden.

---

## 6.4. Zusammenfassung: Messungen

Die Messungen mit parallel geschalteten Pumpen zeigte, dass durch geeignete Pumpleistungen ein Überlappen der Pumpregionen bezüglich der Offset-Spannung  $U_I$  realisiert werden kann. Auf diese Weise konnten 3 Pumpen bei einer Pumpfrequenz  $f$  von 550 MHz einen Pumpstrom von über einem  $1/4$  nA generieren. Dies gelang, obwohl die Pumpen deutlich voneinander abweichende Charakteristika und nur Plateaus mit geringen Qualitätswerten  $\delta$  aufwiesen. Für zwei der Pumpen konnte sogar der Parallelbetrieb jeweils auf dem  $1ef$ -Plateau mit identischer Spannung  $U_{II}$  erreicht werden, indem durch den Einsatz eines Magnetfeldes die Qualität der Plateaus verbessert wurde.

Mit nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen können in gewissem Rahmen arbiträre Ströme erzeugt werden. Einschränkungen ergeben sich durch die maximale und die minimale Pumpfrequenz sowie durch die Nicht-Umkehrbarkeit der Stromrichtung. Somit kann eine Pumpe nur Ströme in einer Richtung liefern, die zudem nicht beliebig große bzw. klein werden können. Im Experiment ließ sich für Pumpfrequenzen zwischen 1 MHz und 699 MHz der Pumpstrom modulieren. Sägezahn-förmige periodische Ströme konnten mit dem eingesetzten Messsystem nicht fehlerfrei gemessen werden, da dieses mit einer Zeitkonstante von ca.  $22 \mu\text{s}$  bzw. der zugehörigen Übergangsfrequenz von etwa 7.23 kHz den schnellen Sprünge der Stromstärke beim Sägezahn nicht instantan folgen kann. Die Abweichungen lassen sich jedoch für alle gemachten Messungen allein durch den Einfluss der RC-Zeit auf den Messvorgang erklären, so dass im Umkehrschluss die Pumpe anscheinend instantan zwischen großen und kleinen Pumpströmen umschalten kann.

Bei der Erforschung der Double-Dot-Pumpe zeigte sich ein von bisherigen Messungen abweichendes Verhalten für den Übergang zum ersten Plateau. Durch den zweiten am Pumpen beteiligten QD wird für Spannungen  $U_{II}$  unterhalb einer bestimmten kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  der Pumpprozess stark behindert, so dass der gemessene Übergang zum ersten Plateau eine deutlich höhere Steigung aufwies und diese im Magnetfelder bis 3 T eine deutlich von den anderen Übergangssteigungen abweichende Entwicklung zeigte. Der *Decay-Cascade*-Prozess wird durch den Ladezustand des zweiten Dots während der Einfangphase stark beeinflusst. Dieser Ladezustand wechselt bei absinkender Spannung  $U_{II}$  an der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  von einem in der kritischen Zeitspanne ungeladenen zu einem geladenen Zustand. Genau genommen ergibt sich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Zeitpunkt an dem sich der Ladezustand im zweiten Dot ändert. Der Übergang an der kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  ist somit das Resultat einer Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Tunnelzeitpunkts und den jeweiligen Besetzungswahrscheinlichkeiten am Ende der *Decay-Cascade*. Da sich die kritische Spannung  $U_{II}^{\text{krit}}$  bei der untersuchten Pumpe bis 3 T nur geringfügig verändert und die anderen Übergänge die gewohnte deutliche Verschiebung zu negativeren Spannungswerten zeigen, könnte dieser Effekt für Logikschaltungen zur Stabilisierung eines Übergangs gegen Magnetfelder Verwendung finden.



---

## 7. ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit wurde zunächst ein theoretisches Modell basierend auf Ratengleichungen zur Beschreibung des Pumpprozesses einer Einzel-Elektronen-Pumpe hergeleitet. Es zeigte sich, dass ein semi-klassischer Ansatz verwendet werden kann. Statt der Beschreibung durch einzelne zufällige Tunnelereignisse werden in der Lösung der Ratengleichungen die Besetzungswahrscheinlichkeiten durch gemittelte Tunnelwahrscheinlichkeiten bzw. Tunnelraten berechnet. Diese gewichteten Mittelwerte ergeben sich aus den möglichen Tunnelereignissen und deren Eintrittswahrscheinlichkeiten. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten erlauben dann die Anzahl der im Mittel gepumpten Elektronen pro Pumpzyklus zu bestimmen.

Die in den Referenzen [21] und [22] gefundenen Lösungen zur Beschreibung des adiabatischen Pumpens bzw. der *Decay Cascade* mit konstantem Hebelfaktor  $\alpha$  konnten verallgemeinert werden, wodurch für spezielle Betriebsarten der Pumpe die Auswertung erst möglich wurde. Zudem wurde eine Erweiterung der Ratengleichungen entwickelt, mit der sich auch der Elektronen-Spin berücksichtigen lässt. Auf diese Weise konnte eine analytische Lösung der Besetzungswahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Spin-Ausrichtungen des 1-Elektronen-Zustands gefunden werden. Für den 2-Elektronen- bzw. den 3-Elektronen-Zustand wurde gezeigt, wie sich die Besetzungswahrscheinlichkeiten im Falle symmetrischer Spin-Verteilung entwickeln lassen.

Indem die Gültigkeit bestimmter Umformungen bewiesen wurde, konnten die endgültigen Lösungen der Ratengleichungen vereinfacht werden. Sämtliche beteiligte Größen ließen sich dadurch überprüfen, so dass alle im Ansatz steckenden Einschränkungen gefunden wurden. Dabei erwies sich nur eine Einzige als potentiell problematisch:

Die analytischen Lösungen gelten an sich unter der Bedingung, dass die zeitliche Entwicklung für alle Tunnelraten identisch ist. Bei ausgeprägter Stromquantisierung ist diese Einschränkung jedoch vernachlässigbar. Nach Gleichung (5.30) kann zur Untersuchung eines quantisierten Stroms mit  $m$  ausgeprägten Plateaus deshalb folgende Näherung verwendet werden:

$$\langle n \rangle = \frac{I}{ef} \approx \sum_{k=1}^{m+1} \exp(-\exp(-\alpha_k \cdot (U - U_k)))$$

Im experimentellen Teil der Arbeit wurden Messungen zur Einschätzung unterschiedlicher Materialien und Herstellungsparameter sowie zur Überprüfung verschiedener Anwendungsmöglichkeiten durchgeführt. Bei tiefen Temperaturen von ca. 4 K erwiesen sich 2DEGs auf Basis einer *GaAs-AlGaAs*-Heterostruktur mit Ladungsträgerdichten von etwa  $2 \times$  bis  $3 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$  und Elektronenbeweglichkeiten von rund  $1 \times$  bis  $2 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$  als geeignetes Ausgangsmaterial. Im Gegensatz zu den *GaAs-AlGaAs*-2DEGs können delta-dotierte

2DEGs ohne zusätzliche Isolationsschicht nicht verwendet werden.

Der Parallelbetrieb von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen ist auch mit einem gemeinsamen Eingangs-Gate möglich. Die hochfrequente Modulation konnte so gewählt werden, dass drei Pumpen mit identischer Offset-Spannung am Eingangs-Gate jeweils einen quantisierten Strom von  $1ef$  und somit in Summe über  $1/4$  nA lieferten. Es wurde gezeigt, dass die Pumpen deutliche Unterschiede in ihren individuellen Pumpcharakteristiken besitzen. Bei ausreichend ausgebildeten Pumpplateaus kann jedoch ein gemeinsamer Arbeitspunkt gewählt werden.

Indem die Pumpfrequenz einer nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpe moduliert wird, kann der Pumpstrom zeitlich arbiträr gesteuert werden. Dies gelang in einem Frequenzintervall von 1 MHz bis 699 MHz. Die in der Messung beobachtete RC-Zeitkonstante von rund  $22 \mu\text{s}$  kann allein durch die Trägheit des Messsystems erklärt werden. Die Trägheit der Pumpe kann somit als vernachlässigbar betrachtet werden.

Zuletzt wurde eine nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpe mit einer seriellen Double-Dot-Konfiguration untersucht. Die Interaktion der Elektronen in den beiden Dots führt zu einer Faltung der *Decay Cascade* im *source*seitigen Dot mit der Tunnelwahrscheinlichkeit des Elektrons im *drain*seitigen Dot. In der Messung wurde eine kritische Spannung  $U_{\text{II}}^{\text{krit}}$  gefunden unterhalb derer das Pumpen durch den geladenen *drain*seitigen Dot unterbunden wird. Da diese kritische Spannung bei passenden Parametern im Magnetfeld konstant gehalten werden kann, lassen sich auf diese Weise nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen gegen variierende magnetische Felder stabilisieren.

Die in dieser Arbeit präsentierten Messungen bilden den Grundstein für zukünftige Entwicklung im Bereich eines quantisierten Stromstandarts auf Basis von nicht-adiabatischen Einzel-Elektronen-Pumpen. Erst durch den Parallelbetrieb von vielen Pumpen (Größenordnung  $10^4$ ) sind quantisierte Pumpströme im  $\mu\text{A}$ -Regime sinnvoll zu realisieren. Wenn zudem der Quantenstandart auch Wechselströme liefern können soll, müssen die Pumpen mit frequenzmodulierten Steuersignalen betrieben werden.

Im DQD-Betrieb können zukünftig nicht-adiabatische Einzel-Elektronen-Pumpen aufgrund der geringen Anzahl gefangener Elektronen auch zur Qubit- bzw. Spin-Präparation genutzt werden.

---

# A. ANHANG

## A.1. Rechnungen zu

$$\sum_{n=0}^N \mathcal{P}_n(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) = 1$$

Da die Summe über alle Besetzungswahrscheinlichkeiten immer eins ergeben muss, ist es notwendig die daraus entstehenden Bedingungen für den im Theorieteil verwendeten Ansatz (5.10) zu überprüfen

$$\sum_{n=0}^N \mathcal{P}_n(t) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) = 1 \quad (\text{A.1})$$

Summanden mit den zeitabhängigen  $X_k(t)$  in der Exponentialfunktion tauchen jeweils  $k + 1$  mal auf. Statt in der äußeren Summe  $n$  abzuarbeiten, kann auch  $k$  von 0 bis  $N$  an der äußeren Summe stehen. Dann jedoch läuft die innere Summe mit  $n$  nur noch von 0 bis  $k$ , da es keine  $Q_{n,k}$  mit  $n > k$  gibt. Die  $C_k$  treten jeweils nur mit den  $\exp(-X_k(t))$  auf und können zusammen vor die über  $n$  laufende Summe gezogen werden.

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^N \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \\ &= \sum_{k=0}^N \sum_{n=0}^k Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \\ &= \sum_{k=0}^N C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \cdot \sum_{n=0}^k Q_{n,k} \\ &= Q_{0,0} \cdot C_0 + \sum_{k=1}^N C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \cdot \sum_{n=0}^k Q_{n,k} \end{aligned}$$

In der letzten Umformung wurde der Summand mit  $k = 0$  und deshalb auch  $n = 0$  vor das Summenzeichen gestellt. Da  $X_0(t)$  eine Funktion mit der Steigung  $\Gamma_0 = 0$  ist und zum Zeitpunkt  $t_0$  den Wert Null haben sollte<sup>1</sup>, folgt daraus, dass  $X_0(t) = 0$  und deshalb auch  $\exp(-X_0(t)) = 1$ . Eine genauere Untersuchung des hinteren Terms zeigt, dass die Summe  $\sum_{n=0}^k Q_{n,k} = 0$  ist. Die Rechnungen hierzu werden im anschließenden Abschnitt gemacht.

<sup>1</sup>siehe hierzu auch die Definition von  $X_k(t)$  in Gleichung (5.22)

Da nur noch der vordere Term nach dem Wegfallen des Hinteren übrig bleibt, ergibt sich somit nur die Forderung, dass  $Q_{0,0} \cdot C_0 = 1$  sein muss.

### Beweis für $\sum_{n=0}^k Q_{n,k} = 0$

Nach Gleichung (5.12) kann für  $n < k$  folgende Umformung gemacht werden

$$Q_{n,k} = \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n - \Gamma_k} \cdot Q_{n+1,k}$$

Damit lässt sich zeigen, dass für  $k > 0$  gilt

$$\sum_{n=0}^k Q_{n,k} = 0 \tag{A.2}$$

Diese Behauptung ist für den einfachsten Fall mit  $k = 1$  erfüllt

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^1 Q_{n,1} = Q_{0,1} + Q_{1,1} \\ &= \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0 - \Gamma_1} + 1 \right) \cdot Q_{1,1} \\ &= \left( 1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma_1} \right) \cdot Q_{1,1} = 0 \end{aligned}$$

Dies ergibt sich, da  $\Gamma_0 = 0$  und nach Gleichung (5.12) jedes  $Q_{n,k}$  in ein  $Q_{n+1,k}$  übersetzt werden kann. Somit entspricht der Vorfaktor vor  $Q_{1,1}$  stets null. Für  $k > 1$  wird zunächst  $Q_{0,k}$  aus der Summe gezogen und in ein  $Q_{1,k}$  überführt. Der hierbei entstehende besondere Vorfaktor wird danach allgemein untersucht

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^k Q_{n,k} \\ &= Q_{0,k} + \sum_{n=1}^k Q_{n,k} \\ &= \left( \frac{\Gamma_1}{\Gamma_0 - \Gamma_k} + 1 \right) \cdot Q_{1,k} + \sum_{n=2}^k Q_{n,k} \\ &= \frac{\Gamma_k - \Gamma_1}{\Gamma_k} \cdot Q_{1,k} + \sum_{n=2}^k Q_{n,k} \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass durch Wiederholung der genannten Prozedur erneut der gleiche Vorfaktor entsteht, wobei aber die Indizes von eins nach zwei bzw. von zwei nach drei wechseln. Für



---

$k > a + 1$  gilt allgemein

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma_k - \Gamma_a}{\Gamma_k} \cdot Q_{a,k} + \sum_{n=a+1}^k Q_{n,k} \\
&= \frac{\Gamma_k - \Gamma_a}{\Gamma_k} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_a - \Gamma_k} \cdot Q_{a+1,k} + \sum_{n=a+1}^k Q_{n,k} \\
&= \left(1 - \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_k}\right) \cdot Q_{a+1,k} + \sum_{n=a+2}^k Q_{n,k} \\
&= \frac{\Gamma_k - \Gamma_{a+1}}{\Gamma_k} \cdot Q_{a+1,k} + \sum_{n=a+2}^k Q_{n,k}
\end{aligned}$$

Diese Gleichung kann solange erneut auf sich selber angewendet werden, bis  $k = a + 1$ .  
Dann folgt daraus

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma_k - \Gamma_{k-1}}{\Gamma_k} \cdot Q_{k-1,k} + \sum_{n=k}^k Q_{n,k} \\
&= \frac{\Gamma_k - \Gamma_{k-1}}{\Gamma_k} \cdot \frac{\Gamma_k}{\Gamma_{k-1} - \Gamma_k} \cdot Q_{k,k} + Q_{k,k} \\
&= \left(1 - \frac{\Gamma_k}{\Gamma_k}\right) \cdot Q_{k,k} = 0
\end{aligned}$$

Somit wird letztlich

$$\frac{\Gamma_k - \Gamma_a}{\Gamma_k} \cdot Q_{a,k} + \sum_{n=a+1}^k Q_{n,k} = 0$$

Aus diesem Grund ist deshalb auch

$$\frac{\Gamma_k - \Gamma_1}{\Gamma_k} \cdot Q_{1,k} + \sum_{n=2}^k Q_{n,k} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Diese Gleichung entspricht jedoch, wie bereits vorher geschrieben, der anfänglichen Behauptung (A.2).

## A.2. Beweis für $C_k = \prod_{m=k+1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_k}$

Die im Lösungsansatz der Ratengleichung steckenden zeitlichen Konstanten  $Q_{n,k}$  und  $C_k$  wurden bereits im Abschnitt 5.1.2 genauer untersucht. Wie sich gezeigt hat, kann  $C_k$  auf ähnliche Weise wie  $Q_{n,k}$  berechnet werden. Nach Referenz [22, Gleichung (5) und (6)] bzw. Gleichung (5.13) und (5.19) gilt:

$$Q_{n,n} = 1 \quad ; \quad Q_{n,k} = \prod_{m=n}^{k-1} \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (\text{A.3})$$

$$C_N = 1 \quad ; \quad C_k = - \sum_{m=k+1}^N Q_{k,m} \cdot C_m \quad (\text{A.4})$$

Die Konstante  $C_k$  kann jedoch auch ohne iterative Zwischenschritte direkt wie folgt berechnet werden:

$$C_N = 1 \quad ; \quad C_k = \prod_{m=k+1}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_k} \quad (\text{A.5})$$

Für den Beweis wird zunächst die Definition (A.4) umgeschrieben. Wird ein  $k < N - 1$  gewählt, gilt für  $C_k$  auch:

$$C_k = -Q_{k,N} - \sum_{m=k+1}^{N-1} Q_{k,m} \cdot C_m \quad (\text{A.6})$$

Da jetzt die Summe nicht mehr bis  $N$  läuft, tritt die Ausnahme  $C_N = 1$  nicht auf. Der Fall  $k = N - 1$  muss jedoch zunächst überprüft werden

$$\begin{aligned} C_{N-1} &= - \sum_{m=N}^N Q_{N-1,m} \cdot C_m \\ &= -Q_{N-1,N} \cdot C_N = -Q_{N-1,N} = - \prod_{m=N-1}^{N-1} \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m - \Gamma_N} \\ &= - \frac{\Gamma_N}{\Gamma_{N-1} - \Gamma_N} = \frac{\Gamma_N}{\Gamma_N - \Gamma_{N-1}} = \prod_{m=N}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_{N-1}} \end{aligned}$$

Für  $k = N - 1$  ist die Behauptung (A.5) somit bereits erfüllt. Für alle anderen Fälle folgt aus Gleichung (A.6) durch die Definition (A.3)

$$\begin{aligned} C_k &= -Q_{k,N} - \sum_{m=k+1}^{N-1} Q_{k,m} \cdot C_m \\ &= - \frac{\Gamma_{k+1}}{\Gamma_k - \Gamma_N} \cdot Q_{k+1,N} - \sum_{m=k+1}^{N-1} \frac{\Gamma_{k+1}}{\Gamma_k - \Gamma_m} \cdot Q_{k+1,m} \cdot C_m \end{aligned}$$

Eine genauere Untersuchung dieser Struktur von Termen liefert folgende interessante Eigenschaft

$$\begin{aligned}
& -\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a,N} - \sum_{m=a}^{N-1} \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{a,m} \cdot C_m \\
= & -\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a,N} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \cdot C_a - \sum_{m=a+1}^{N-1} \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{a,m} \cdot C_m \\
= & -\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a,N} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \cdot \left( -Q_{a,N} - \sum_{m_2=a+1}^{N-1} Q_{a,m_2} \cdot C_{m_2} \right) \\
& - \sum_{m_1=a+1}^{N-1} \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_{m_1}} \cdot Q_{a,m_1} \cdot C_{m_1} \\
= & -\left( \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_N} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \right) \cdot Q_{a,N} - \sum_{m=a+1}^{N-1} \left( \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_m} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \right) \cdot Q_{a,m} \cdot C_m \\
= & -\left( \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_N} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \right) \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_a - \Gamma_N} \cdot Q_{a+1,N} \\
& - \sum_{m=a+1}^{N-1} \left( \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_m} - \frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \right) \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_a - \Gamma_m} \cdot Q_{a+1,m} \cdot C_m \\
= & -\frac{\Gamma_a}{\Gamma_b - \Gamma_a} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_a - \Gamma_N}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_a - \Gamma_N} \cdot Q_{a+1,N} - \sum_{m=a+1}^{N-1} \frac{\Gamma_a - \Gamma_m}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_a - \Gamma_m} \cdot Q_{a+1,m} \cdot C_m \right] \\
= & \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a+1,N} - \sum_{m=a+1}^{N-1} \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{a+1,m} \cdot C_m \right]
\end{aligned}$$

Da sich in der Klammer erneut die anfängliche Struktur gebildet hat ( $a \rightarrow a + 1$ ), lassen sich die selben Rechenschritte wiederholen

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a+1,N} - \sum_{m=a+1}^{N-1} \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{a+1,m} \cdot C_m \right] \\
& \vdots \\
= & \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{a+2}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{a+2,N} - \sum_{m=a+2}^{N-1} \frac{\Gamma_{a+2}}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{a+2,m} \cdot C_m \right] \\
& \vdots \\
= & \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot Q_{N-1,N} - \sum_{m=N-1}^{N-1} \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot Q_{N-1,m} \cdot C_m \right]
\end{aligned}$$

Wie nach diesen Umformungen zu sehen, wird mit jedem Term aus der Summe ein weiterer Vorfaktor erzeugt. Das lässt sich solange fortsetzen, bis der letzte Summand mit  $m = N - 1$  die abschließenden Faktoren liefert

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot \mathcal{Q}_{N-1,N} - \sum_{m=N-1}^{N-1} \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_m} \cdot \mathcal{Q}_{N-1,m} \cdot C_m \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ -\frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot \mathcal{Q}_{N-1,N} - \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_{N-1}} \cdot C_{N-1} \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_{N-1} - \Gamma_N} - \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_{N-1}} \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_N - \Gamma_{N-1}} \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ \left( \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} - \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_{N-1}} \right) \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_N - \Gamma_{N-1}} \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_{N-1}} \cdot \frac{\Gamma_N - \Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_N} \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_N - \Gamma_{N-1}} \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \left[ \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_b - \Gamma_{N-1}} \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_b - \Gamma_N} \right] \\
&= \frac{\Gamma_a}{\Gamma_a - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{a+1}}{\Gamma_{a+1} - \Gamma_b} \cdots \frac{\Gamma_{N-2}}{\Gamma_{N-2} - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_{N-1}}{\Gamma_{N-1} - \Gamma_b} \cdot \frac{\Gamma_N}{\Gamma_N - \Gamma_b} \\
&= \prod_{m=a}^N \frac{\Gamma_m}{\Gamma_m - \Gamma_b} \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Somit handelt es sich bei der Behauptung (A.5) nur um einen Spezialfall mit  $a = k + 1$  und  $b = k$ .

---

### A.3. Gültigkeit von $\alpha^{-1} \cdot d\langle n(t) \rangle / dU = \langle X_n(t) \rangle$

Wenn alle Übergangsteigungen  $\alpha_n \equiv \alpha$  und durch die Wahl für  $X_n$  aus Gleichung (5.29)

$$\frac{dX_n}{dU} = -\alpha \cdot X_n \quad (\text{A.7})$$

und ebenfalls

$$\frac{dQ_{n,k}}{dU} = 0 \quad , \quad \frac{dC_k}{dU} = 0 \quad (\text{A.8})$$

sind, entspricht die relative Steigung

$$\alpha^{-1} \cdot \frac{d\langle n(t) \rangle}{dU} = \sum_{n=1}^N \alpha^{-1} \cdot n \cdot \frac{d\mathcal{P}_n(t)}{dU} \quad (\text{A.9})$$

dem mit den Besetzungswahrscheinlichkeiten  $\mathcal{P}_n$  gewichteten Mittelwert der Tunnelfunktion

$$\langle X_n(t) \rangle = \sum_{n=1}^N X_n(t) \cdot \mathcal{P}_n(t) \quad (\text{A.10})$$

Nach Gleichung (5.21) ist

$$\mathcal{P}_n(t) = \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t))$$

und somit

$$\begin{aligned} \alpha^{-1} \cdot \frac{d\langle n(t) \rangle}{dU} &= \sum_{n=1}^N \alpha^{-1} \cdot n \cdot \frac{d}{dU} \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \\ &= \sum_{k=1}^N C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \cdot \sum_{n=1}^k n \cdot X_k(t) \cdot Q_{n,k} \end{aligned}$$

Für  $\langle X_n(t) \rangle$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle X_n(t) \rangle &= \sum_{n=1}^N X_n(t) \cdot \sum_{k=n}^N Q_{n,k} \cdot C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \\ &= \sum_{k=1}^N C_k \cdot \exp(-X_k(t)) \cdot \sum_{n=1}^k X_n(t) \cdot Q_{n,k} \end{aligned}$$

Wird  $\sum_{n=1}^k Q_{n,k} \cdot (X_n(t) - nX_k(t)) = 0$ , ist der Beweis für  $\alpha^{-1} \cdot d\langle n(t) \rangle / dU = \langle X_n(t) \rangle$  erbracht.

Da nach Gleichung (5.15) alle  $\Gamma_n$  einen identischen Zeitentwicklungsterm haben, entspricht nach (5.23) für  $n < k$

$$Q_{n,k} = \prod_{m=n}^{k-1} \frac{\Gamma_{m+1}}{\Gamma_m - \Gamma_k} = \prod_{m=n}^{k-1} \frac{X_{m+1}}{X_m - X_k} \quad (\text{A.11})$$

Unabhängig von  $\Gamma$  oder  $X$  ist  $Q_{n,n} = 1$ . Durch Einsetzen von (A.11) folgt für

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^k Q_{n,k} \cdot (X_n - nX_k) &= \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot \frac{X_3}{X_2 - X_k} \cdot \frac{X_2}{X_1 - X_k} \cdot (X_1 - 1 \cdot X_k) \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot \frac{X_3}{X_2 - X_k} \cdot (X_2 - 2 \cdot X_k) \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot (X_3 - 3 \cdot X_k) \\ &+ \cdots \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdot (X_{k-2} - (k-2) \cdot X_k) \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot (X_{k-1} - (k-1) \cdot X_k) \\ &+ (X_k - k \cdot X_k) \\ &= \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot \frac{X_3}{X_2 - X_k} \cdot \frac{X_2}{\cancel{X_1 - X_k}} \cdot \overrightarrow{(X_1 - 1 \cdot X_k)}^1 \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot \frac{X_3}{X_2 - X_k} \cdot (X_2 - 2 \cdot X_k) \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot (X_3 - 3 \cdot X_k) \\ &+ \cdots \\ &= \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot \frac{X_3}{\cancel{X_2 - X_k}} \cdot \overrightarrow{(2 \cdot X_2 - 2 \cdot X_k)}^2 \\ &+ \frac{X_k}{X_{k-1} - X_k} \cdot \frac{X_{k-1}}{X_{k-2} - X_k} \cdots \frac{X_4}{X_3 - X_k} \cdot (X_3 - 3 \cdot X_k) \\ &+ \cdots \\ &= \frac{X_k}{\cancel{X_{k-1} - X_k}} \cdot \overrightarrow{((k-1) \cdot X_{k-1} - (k-1) \cdot X_k)}^{k-1} \\ &+ (X_k - k \cdot X_k) \\ &= (k \cdot X_k - k \cdot X_k) = 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

---

Rückschlüsse auf ein einzelnes  $X_{n,\infty}$  lassen sich dann machen, wenn aus einer gemessenen Strom-Spannungskurve die relative Steigung  $\alpha^{-1} \cdot d\langle n \rangle / dU$  auf dem  $n$ -ten Plateaus bestimmt wird. Je höher der Qualitätsfaktor  $\delta_n$  dieses Plateaus ist, desto besser entspricht das zugehörige  $\mathcal{P}_n(\infty) \approx 1$  und demnach  $\langle X_{n,\infty} \rangle \approx X_{n,\infty}$ .

## A.4. Frequenzmodulation

Wird statt einem Signal mit einer konstanten Frequenz ein Signal mit variierender Frequenz benötigt, lässt sich dieses durch eine Frequenzmodulation erzeugen. Der Phasenwinkel des Signals  $\varphi(t)$  ändert sich dann nicht mehr linear, sondern ist nun abhängig von der zeitabhängigen Frequenz  $f(t)$  und somit von der Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t) = 2\pi \cdot f(t)$ . Um den Wert eines frequenzmoduliertes Signals  $S(t) = \cos(\varphi(t))$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, muss die zeitabhängige Phase  $\varphi(t)$  ermittelt werden.

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) d\tau \quad (\text{A.12})$$

Mit dem Integral über  $\omega(t)$  werden die Änderungen der Phase über die Zeit aufsummiert, wodurch Phasensprünge vermeiden werden.<sup>2</sup> Die zeitliche Dauer eines Modulationsdurchgangs  $t_\Omega$  ergibt sich aus der Modulationswinkelgeschwindigkeit  $\Omega$ .

$$t_\Omega \equiv \frac{2\pi}{\Omega} \quad (\text{A.13})$$

Damit sich das Signal nach einem Modulationsdurchgang wiederholt, muss die Trägerfrequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Modulationsfrequenz sein. Allgemein gilt, dass sich das Signal nach  $k$  Modulationsdurchläufen wiederholt, wenn die zur Trägerfrequenz zugehörige mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_C$  der Modulationswinkelgeschwindigkeit  $\Omega$  multipliziert mit  $N/k$  entspricht, wobei  $N$  und  $k$  ganzzahlige Zahlen sein müssen.

$$\omega_C = \frac{N}{k} \cdot \Omega \quad (\text{A.14})$$

---

<sup>2</sup>Hierdurch unterscheidet sich die Frequenzmodulation von der Phasenmodulation. Bei dieser ist die Phase stattdessen  $\varphi_{\text{PM}}(t) = \varphi_0 + \omega_C \cdot t + \phi(t)$ . Wird die konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_C(t)$  und der modulierenden Term  $\phi(t)$  zusammengefasst, entsteht das zeitabhängige  $\omega_{\text{PM}}(t) = \omega_C(t) + \phi(t)/t$ . Die Phasenmodulation kann somit (in Anlehnung an die Frequenzmodulation) auch mit einer variierenden Frequenz bzw. Winkelgeschwindigkeit beschrieben werden.

$$\varphi_{\text{PM}}(t) = \varphi_0 + \omega_{\text{PM}}(t) \cdot t$$

Dies ergibt sich, da die Phase  $\varphi$  zum Zeitpunkt  $t$  und zum Zeitpunkt  $t + k \cdot t_\Omega$  nur um ganzzahlige Vielfache von  $2\pi$  unterscheiden darf.

$$\varphi(t) + N \cdot 2\pi = \varphi(t + k \cdot t_\Omega)$$

Da  $t_\Omega$  die Periodendauer der Modulation ist, lässt sich der Unterschied der beiden Phasen leicht berechnen.

$$\varphi(t + k \cdot t_\Omega) - \varphi(t) = \omega_C \cdot k \cdot t_\Omega = \omega_C \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\Omega}$$

Angewendet auf die darüber stehende Forderung, wonach die beiden Phasen nur um  $N \cdot 2\pi$  verschieden sind, folgt daraus Gleichung (A.14).

Die Parameter der Frequenzmodulation sind zum einen die Modulationsfrequenz bzw. -winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  und zum anderen die beiden Frequenzen, durch die das Frequenzintervall beschrieben wird. Diese liegen entweder als obere und untere Frequenz oder in Form der mittleren Frequenz und der Intervallbreite vor. Entsprechend können sie in einander umgerechnet werden. So entspricht die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\omega_C$ , auch Träger bzw. Carrier genannt, dem Mittelwert von der höchsten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{oG}$  und der niedrigsten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{uG}$ . Das Intervall zwischen diesen Beiden wird mit  $\Delta\omega$  bezeichnet. Allgemein gilt

$$\omega_C = \frac{\omega_{oG} + \omega_{uG}}{2} \quad ; \quad \Delta\omega = \omega_{oG} - \omega_{uG} \quad (\text{A.15})$$

Für die üblichen Modulationsformen wie einen Sinusoiden, Sägezahn, Dreieck oder Rechteck ist das Integral leicht zu lösen. Im Folgenden werden diese hergeleitet.

#### A.4.1. Sinusoid

Für einen sinusoidalen Verlauf der Modulation wird diese Beschreibung genutzt

$$\omega(t) = \omega_C + \frac{\Delta\omega}{2} \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

Eingesetzt in Gleichung (A.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) \, d\tau \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t + \frac{\Delta\omega}{2} \int_0^t \cos(\Omega \cdot \tau) \, d\tau \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t + \frac{\Delta\omega}{2 \cdot \Omega} \cdot \sin(\Omega \cdot t) \end{aligned}$$



## A.4.2. Sägezahn

Ein Sägezahn-Verlauf, auch Kippschwingung genannt, zwischen der höchsten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{oG}$  und der niedrigsten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{uG}$  ergibt sich mit folgender Gleichung

$$\omega(t) = \omega_C \pm \Delta_\omega \cdot \left( \frac{\Omega \cdot t}{2\pi} \bmod 1 - \frac{1}{2} \right)$$

Je nach Vorzeichen des hinteren Terms steigt die Rampe an (+) bzw. entsteht der inverse Sägezahn mit abfallender Rampe (-). Eingesetzt in Gleichung (A.12) ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) \, d\tau \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \Delta_\omega \int_0^t \left( \frac{\Omega \cdot \tau}{2\pi} \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \, d\tau \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \Delta_\omega \cdot \left( -\frac{t}{2} + \int_0^t \frac{\Omega \cdot \tau}{2\pi} \bmod 1 \, d\tau \right) \\ \text{mit } j &\equiv \lfloor t/t_\Omega \rfloor = \frac{t - t \bmod t_\Omega}{t_\Omega} \text{ folgt} \\ \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \Delta_\omega \cdot \left( -\frac{t}{2} + \int_{jt_\Omega}^t \left( \frac{\tau}{t_\Omega} - j \right) \, d\tau + \sum_{i=1}^j \int_0^{t_\Omega} \frac{\tau}{t_\Omega} \, d\tau \right) \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \Delta_\omega \cdot \left( -\frac{t}{2} + \frac{(t - jt_\Omega)^2}{2t_\Omega} + j \cdot \frac{t_\Omega}{2} \right) \end{aligned}$$

Wie gezeigt wurde, lässt sich die analytische Lösung des Integrals finden, indem Abschnitte der Länge einer Periode  $t_\Omega$  von dem Integral abgetrennt werden. Die Anzahl der so entstehenden Integrale  $j$  entspricht dem Quotienten  $t/t_\Omega$  ohne Rest. Der Kehrwert von  $t_\Omega$  ist zudem die Modulationsfrequenz. In den nächsten Schritten werden  $j$  und  $t_\Omega$  wieder durch die anfänglichen Variablen ersetzt.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \Delta_\omega \cdot \left( -\frac{t}{2} + \frac{(t \bmod t_\Omega)^2}{2t_\Omega} + \frac{t - t \bmod t_\Omega}{2} \right) \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \frac{\Delta_\omega}{2} \cdot \left( \frac{(t \bmod t_\Omega)^2}{t_\Omega} - t \bmod t_\Omega \right) \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t \pm \pi \cdot \frac{\Delta_\omega}{\Omega} \cdot \left( \left( \frac{\Omega \cdot t}{2\pi} \bmod 1 \right)^2 - \frac{\Omega \cdot t}{2\pi} \bmod 1 \right) \end{aligned}$$

---

### A.4.3. Dreieck

Eine Dreiecks-Spannung kann ähnlich wie die Sägezahn-Spannung aus Abschnitten zusammen gesetzt werden. In diesem Fall erfolgt aber ein An- und ein Abstieg in einer Periode. Im einfachsten Fall einer symmetrischen Dreiecksspannung kann direkt das Ergebnis vom Sägezahn verwendet werden. Die beschreibende Formel unterscheidet sich darin, dass die Periodenlänge  $t_\Omega$  in diesem Fall einem An- und einem Abstieg entspricht ( $2t_\Omega \rightarrow t_\Omega$  bzw.  $\Omega \rightarrow 2\Omega$ ) und statt dem  $\pm$  in der Lösung ein alternierendes Vorzeichen für einen Wechsel zwischen Auf- und Abstieg sorgt. Die Winkelgeschwindigkeit entspricht

$$\omega(t) = \omega_C + (-1)^{\lfloor \Omega \cdot t / \pi \rfloor} \cdot \Delta_\omega \cdot \left( \frac{\Omega \cdot t}{\pi} \bmod 1 - \frac{1}{2} \right)$$

Für die Phase folgt daraus

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t + (-1)^{\lfloor 2 \cdot t / t_\Omega \rfloor} \cdot \frac{\Delta_\omega}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{(t \bmod \frac{t_\Omega}{2})^2}{t_\Omega} - t \bmod \frac{t_\Omega}{2} \right) \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t + (-1)^{\lfloor \Omega \cdot t / \pi \rfloor} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta_\omega}{\Omega} \cdot \left( \left( \frac{\Omega \cdot t}{\pi} \bmod 1 \right)^2 - \frac{\Omega \cdot t}{\pi} \bmod 1 \right) \end{aligned}$$

### A.4.4. Rechteck

Um eine Rechteck-Spannung zu erzeugen, wird die Funktion ebenfalls abschnittsweise zusammen gesetzt. Die Frequenz ändert sich nur an den Stellen, an denen die Rechteck-Spannung von einem zum anderen Wert springt. Im Falle einer symmetrischen Rechteckspannung bedeutet dies

$$\omega(t) = \omega_C + (-1)^{\lfloor \Omega \cdot t / \pi \rfloor} \cdot \frac{\Delta_\omega}{2}$$

Der Wert von  $\omega(t) - \omega_C$  springt zwischen  $\frac{\Delta_\omega}{2}$  und  $-\frac{\Delta_\omega}{2}$ , so dass das Integral  $\int_0^t \omega(\tau) - \omega_C \, d\tau$  dem symmetrischen Dreiecks-Verlauf entspricht. Die Lösung des Integrals ist somit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi_0 + \int_0^t \omega(\tau) \, d\tau \\ &= \varphi_0 + \omega_C \cdot t + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Delta_\omega}{\Omega} \cdot \left[ \frac{1}{2} + (-1)^{\lfloor \Omega \cdot t / \pi \rfloor} \cdot \left( \frac{\Omega \cdot t}{\pi} \bmod 1 - \frac{1}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

---

# Literaturverzeichnis

- [1] *The NIST Reference on Constants, Units, and Uncertainty, 2010 CODATA recommended values*, NIST - US National Institute of Standards and Technology, 2014, zu finden unter: <http://physics.nist.gov/cuu/index.html>.
- [2] L. Guo, E. Leobandung und S. Y. Chou, *A Silicon Single-Electron Transistor Memory Operating at Room Temperature*, SCIENCE **275**, 649 (1997).
- [3] S. Y. Chou, L. Guo und E. Leobandung, *Single-electron floating-gate MOS memory*, 2000, entspricht [2]: US-Patent 6,069,380.
- [4] T. Futatsugi, A. Nakajima und H. Nakao, *Silicon Single-electron Memory Using Ultra-small Floating Gate*, FUJITSU Sci. Tech. J. **34**, 142 (1998).
- [5] C. Wasshuber, H. Kosina und S. Selberherr, *Single-Electron Memories*, VLSI DESIGN **8**, 219 (1998).
- [6] L. Fricke, M. Wulf, B. Kaestner, F. Hohls, P. Mirovsky, B. Mackrodt, R. Dolata, T. Weimann, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher, *Self-Referenced Single-Electron Quantized Current Source*, Phys. Rev. Lett. **112**, 226803 (2014).
- [7] S. P. Giblin, M. Kataoka, J. D. Fletcher, P. See, T. J. B. M. Janssen, J. P. Griffiths, G. A. C. Jones, I. Farrer und D. A. Ritchie, *Towards a quantum representation of the ampere using single electron pumps*, Nat. Comm. **3**, 930 (2012).
- [8] J. P. Pekola, O.-P. Saira, V. F. Maisi, A. Kemppinen, M. Möttönen, Y. A. Pashkin und D. V. Averin, *Single-electron current sources: towards a refined definition of ampere*, Rev. Mod. Phys. **85**, 1421 (2013).
- [9] F. Hohls, A. C. Welker, C. Leicht, L. Fricke, B. Kaestner, P. Mirovsky, A. Müller, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher, *Semiconductor Quantized Voltage Source*, Phys. Rev. Lett. **109**, 056802 (2012).
- [10] F. Stein, D. Drung, L. Fricke, H. Scherer, F. Hohls, C. Leicht, M. Götz, C. Krause, R. Behr, E. Pesel, K. Pierz, U. Siegner, F. J. Ahlers und H. W. Schumacher, *Validation of a quantized-current source with 0.2 ppm uncertainty*, Applied Physics Letters **107**, 103501 (2015).
- [11] B. Kaestner, V. Kashcheyevs, S. Amakawa, M. D. Blumenthal, L. Li, T. J. B. M. Janssen, G. Hein, K. Pierz, T. Weimann, U. Siegner und H. W. Schumacher, *Single-parameter nonadiabatic quantized charge pumping*, Phys. Rev. B **77**, 153301 (2008).

- 
- [12] M. D. Blumenthal, B. Kaestner, L. Li, S. Giblin, T. J. B. M. Janssen, M. Pepper, D. Anderson, G. Jones und D. A. Ritchie, *Gigahertz quantized charge pumping*, Nature Physics **3**, 343 (2007).
- [13] B. Kaestner, V. Kashcheyevs, G. Hein, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher, *Robust single-parameter quantized charge pumping*, Appl. Phys. Lett. **92**, 192106 (2008).
- [14] C. Leicht, B. Kaestner, V. Kashcheyevs, P. Mirovsky, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher, *Non-adiabatic pumping of single electrons affected by magnetic fields*, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **42**, 911 (2010).
- [15] M. Wulf, *Error accounting algorithm for electron counting experiments*, Phys. Rev. B **87**, 035312 (2013).
- [16] L. Fricke, F. Hohls, B. Kaestner, C. Leicht, P. Mirovsky, K. Pierz, H. W. Schumacher und R. J. Haug, *A quantized current source with mesoscopic feedback*, Phys. Rev. B **83**, 193306 (2011).
- [17] A. Fujiwara, K. Nishiguchi und Y. Ono, *Nanoampere charge pump by single-electron ratchet using silicon nanowire metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, Appl. Phys. Lett. **92**, 042102 (2008).
- [18] G. Yamahata, K. Nishiguchi und A. Fujiwara, *Accuracy evaluation of single-electron shuttle transfer in Si nanowire metal-oxide-semiconductor field-effect transistors*, Appl. Phys. Lett. **98**, 222104 (2011).
- [19] K. Nishiguchi, A. Fujiwara, Y. Ono, H. Inokaw und Y. Takahashi, *Room-temperature-operating data processing circuit based on single-electron transfer and detection with metal-oxide-semiconductor field-effect transistor technology*, Appl. Phys. Lett. **88**, 183101 (2006).
- [20] M. Fuechsle, J. A. Miwa, S. Mahapatra, H. Ryu, S. Lee, O. Warschkow, L. C. L. Hollenberg, G. Klimeck und M. Y. Simmons, *A single-atom transistor*, Nature Nanotechnology **7**, 242 (2012).
- [21] V. Kashcheyevs, A. Aharony und O. Entin-Wohlman, *Resonance approximation and charge loading and unloading in adiabatic quantum pumping*, Phys. Rev. B **69**, 195301 (2004).
- [22] V. Kashcheyevs und B. Kaestner, *Universal Decay Cascade Model for Dynamic Quantum Dot Initialization*, Phys. Rev. Lett. **104**, 186805 (2010).
- [23] D. M. Hawkins, *The Problem of Overfitting*, J. Chem. Inf. Comput. Sci. **44**, 1 (2004).
- [24] N. Ashcroft und N. Mermin, *Festkörperphysik* (Oldenbourg Verlag München Wien, 2005), 2. korrigierte Auflage.
- [25] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing und S. Tarucha, *Few-electron quantum dots*, Reports on Progress in Physics **64**, 701 (2001).

- 
- [26] L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P. L. McEuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt und N. S. Wingreen, in *Mesoscopic Electron Transport*, Band 345 aus *NATO ASI Series*, Herausgeber: L. Sohn, L. Kouwenhoven und G. Schön (Springer Netherlands, 1997), Seiten 105–214.
- [27] M. C. Rogge, *Einzel-, Doppel- und Dreifachquantenpunkte im Transport*, Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2008.
- [28] G. Gumbs, D. Huang, M. D. Blumenthal, S. J. Wright, M. Pepper und Y. Abruñyos, *Spin-split excitation gap and spin entanglement of a pair of interacting electrons in a quantum dot*, *Semiconductor Science and Technology* **24**, 115001 (2009).
- [29] V. Kashcheyevs und J. Timoshenko, *Quantum Fluctuations and Coherence in High-Precision Single-Electron Capture*, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 216801 (2012).
- [30] J. D. Fletcher, M. Kataoka, H. Howe, M. Pepper, P. See, S. P. Giblin, J. P. Griffiths, G. A. C. Jones, I. Farrer, D. A. Ritchie und T. J. B. M. Janssen, *Clock-controlled emission of single-electron wavepackets in a solid-state circuit*, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 216807 (2013).
- [31] J. Waldie, P. See, V. Kashcheyevs, J. Griffiths, I. Farrer, G. Jones, D. Ritchie, T. Janssen und M. Kataoka, *Measurement and control of electron wave packets from a single-electron source*, *Phys. Rev. B* **92**, 125305 (2015).
- [32] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems, Cambridge Studies in Semiconductor Physics and Microelectronic Engineering* (Cambridge University Press, 1997).
- [33] M. Albert, C. Flindt und M. Büttiker, *Accuracy of the quantum capacitor as a single-electron source*, *Phys. Rev. B* **82**, 041407 (2010).
- [34] V. Siegle, C.-W. Liang, B. Kaestner, H. W. Schumacher, F. Jessen, D. Koelle, R. Kleiner und R. S., *A Molecular Quantized Charge Pump*, *Nano Lett.* **10**, 3841 (2010).
- [35] L. J. Geerligs, V. F. Anderegg, P. A. M. Holweg, J. E. Mooij, H. Pothier, D. Esteve, C. Urbina und M. H. Devoret, *Frequency-locked turnstile device for single electrons*, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2691 (1990).
- [36] H. Pothier, P. Lafarge, C. Urbina, D. Esteve und M. H. Devoret, *Single-Electron Pump Based on Charging Effects*, *Europhys. Lett.* **17**, 249 (1992).
- [37] M. W. Keller, J. M. Martinis, N. M. Zimmerman und A. H. Steinbach, *Accuracy of electron counting using a 7-junction electron pump*, *Appl. Phys. Lett.* **69**, 1804 (1996).
- [38] D. V. Averin, M. Möttönen und J. P. Pekola, *Maxwell's demon based on a single-electron pump*, *Phys. Rev. B* **84**, 245448 (2011).
- [39] X. Jehl, B. Roche, B. Voisin, M. Sanquer, R. Wacquez und M. Vinet, *Hybrid Metal-Semiconductor Electron Pump for Quantum Metrology*, *Physical Review X* **3**, 021012 (2013).

- 
- [40] M. R. Connolly, K. L. Chiu, S. P. Giblin, M. Kataoka, J. D. Fletcher, C. Chua, J. P. Griffiths, G. A. C. Jones, V. I. Fal'ko, C. G. Smith und T. J. B. M. Janssen, *Gigahertz quantized charge pumping in graphene quantum dots*, Nature Nanotechnology **8**, 417 (2013).
- [41] M. Bohr und K. Mistry, *Intel's Revolutionary 22nm Transistor Technology*, Intel Corporation, 2011, zu finden unter: [download.intel.com/newsroom/kits/22nm/pdfs/22nm-Details\\_Presentation.pdf](http://download.intel.com/newsroom/kits/22nm/pdfs/22nm-Details_Presentation.pdf), Serienfertigung seit 2012: 3. Generation der Intel-Core-i-Prozessoren (Ivy Bridge).
- [42] B. Kaestner, C. Leicht, P. Mirovsky, V. Kashcheyevs, E. V. Kurganova, U. Zeitler, K. Pierz und H. W. Schumacher, *Constructive role of non-adiabaticity for quantized charge pumping*, AIP Conf. Proc. **1399**, 345 (2010), zu finden unter: <http://arxiv.org/pdf/1007.2062v1.pdf>.
- [43] S. Miyamoto, K. Nishiguchi, Y. Ono, K. M. Itoh und A. Fujiwara, *Escape dynamics of a few electrons in a single-electron ratchet using silicon nanowire metal-oxide-semiconductor field-effect transistor*, Appl. Phys. Lett. **93**, 222103 (2008).
- [44] S. Miyamoto, K. Nishiguchi, Y. Ono, K. M. Itoh und A. Fujiwara, *Resonant escape over an oscillating barrier in a single-electron ratchet transfer*, Phys. Rev. B **82**, 033303 (2010).
- [45] V. Kashcheyevs, *Derivation of the universal decay cascade distribution*, cond-mat.mes-hall **1412.3024**, (2014).
- [46] M. Kataoka, J. D. Fletcher, P. See, S. P. Giblin, T. J. B. M. Janssen, J. P. Griffiths, G. A. C. Jones, I. Farrer und D. A. Ritchie, *Tunable Nonadiabatic Excitation in a Single-Electron Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **106**, 126801 (2011).
- [47] C. Leicht, *Nicht-adiabatische Halbleitereinzelelektronenpumpe unter Magnetfeldeinfluss*, Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2013.
- [48] D. V. Melnikov, T. Fujisawa, D. G. Austing, S. Tarucha und J.-P. Leburton, *Many-body excitations in the tunneling current spectra of a few-electron quantum dot*, Phys. Rev. B **77**, 165340 (2008).
- [49] S. J. Wright, A. L. Thorn, M. D. Blumenthal, S. P. Giblin, M. Pepper, T. J. B. M. Janssen, M. Kataoka, J. D. Fletcher, G. A. C. Jones, C. A. Nicoll, G. Gumbs und D. A. Ritchie, *Single- and few-electron dynamic quantum dots in a perpendicular magnetic field*, J. Appl. Phys. **109**, 102422 (2011).
- [50] C. Riedesel, *Herstellung von lateral strukturierten zweidimensionalen Elektronengasen durch Überwachsen von implantationsdotiertem Al<sub>x</sub>-Ga<sub>(1-x)</sub>-As*, Dissertation, Fakultät für Physik und Astronomie der Ruhr-Universität Bochum, 2004.
- [51] C. Gerl, *Hochbewegliche zweidimensionale Lochsysteme in GaAs/AlGaAs Heterostrukturen*, Dissertation, Naturwissenschaftlichen Fakultät II - Physik der Universität Regensburg, 2009.

- 
- [52] S. Beyer, *Herstellung und Charakterisierung niedrigdimensionaler Elektronensysteme mit Hilfe von in situ Ätzen und Molekularstrahl Epitaxie*, Dissertation, Universität Hamburg, 2003.
- [53] G. Winstel und C. Weyrich, in *Optoelektronik I: Lumineszenz- und Laserdioden*, Herausgeber: W. Heywang und R. Müller (Springer-Verlag, 1980).
- [54] M. Kamp, *Angewandte Halbleiterphysik*, 2006, aus dem Skript der Vorlesung an der Universität Würzburg  
zu finden unter: <http://tep.physik.uni-wuerzburg.de/uploads/media/Skript-all.pdf>.
- [55] L. Pavesi, M. Henini, D. Johnston und I. Harrison, *A comparison of Si-doped (100), (111) A, (111) B and (311) B AlGaAs samples grown by molecular beam epitaxy*, *Semicond. Sci. Technol.* **10**, 49 (1995).
- [56] N. Galbiati, E. Grilli, M. Guzzi, P. Albertini, L. Brusaferrri, L. Pavesi, M. Henini und A. Gasparotto, *Investigation of Si as an n-type dopant in AlGaAs grown by molecular beam epitaxy on high index planes*, *Semicond. Sci. Technol.* **12**, 555 (1997).
- [57] W. Schottky, *Zur Halbleitertheorie der Sperrschicht- und Spitzengleichrichter*, *Zeitschrift für Physik* **113**, 367 (1939).
- [58] A. Coucoulas, *Compliant Bonding*, *Proceedings IEEE 20th Electronic Components Conference*, 380 (1970).
- [59] *Positiv - PMMA E-Beamresists AR-P 630 - 670*, ALLRESIST Gesellschaft für chemische Produkte zur Mikrostrukturierung mbH, 2014, zu finden unter: [www.allresist.de/wp-content/uploads/2014/03/allresist\\_produkinfos\\_ar-p630-deutsch.pdf](http://www.allresist.de/wp-content/uploads/2014/03/allresist_produkinfos_ar-p630-deutsch.pdf).
- [60] T. Katoh, Y. Nagamune, G. P. Li, S. Fukatsu, Y. Shiraki und R. Ito, *Fabrication of ultrafine gratings on GaAs by electron beam lithography and two-step wet chemical etching*, *Appl. Phys. Lett.* **57**, 1212 (1990).
- [61] D. G. Hasko, S. Yasin und A. Mumtaz, *Influence of developer and development conditions on the behavior of high molecular weight electron beam resists*, *J. Vac. Sci. Technol. B* **18**, 3441 (2000).
- [62] S. Yasin, D. G. Hasko, M. N. Khalid und H. Weaver, D. J. and Ahmed, *Influence of polymer phase separation on roughness of resist features*, *J. Vac. Sci. Technol. B* **22**, 574 (2004).
- [63] M. Hansen und K. Anderko, *Constitution of binary alloys*, Nr. Nr. 1 in *Metallurgy and metallurgical engineering series* (McGraw-Hill, 1965), s. Seite 206.
- [64] D. W. Scott, *On optimal and data-based histograms*, *Biometrika* **66**, 605 (1979).
- [65] K. H. Knuth, *Optimal Data-Based Binning for Histograms*, *physics.data-an* **0605197**, (2013).

- 
- [66] D. Zumbühl, Introduction to Mesoscopic Physics and Quantum Dots (Kapitel 2.1), 2008, aus dem Skript der Vorlesung an der Universität Basel zu finden unter: [https://zumbuhllab.unibas.ch/pages/teaching/QT\\_FS14.htm](https://zumbuhllab.unibas.ch/pages/teaching/QT_FS14.htm).
- [67] C. Calandra und G. Santoro, *Surface states of the (110) surface of GaAs*, Journal of Physics C: Solid State Physics **8**, L86 (1975).
- [68] J. Henk, *Surface band structure calculation for GaAs(111) 2x2*, Solid State Commun. **70**, 683 (1989).
- [69] W. G. Schmidt und F. Bechstedt, *Geometry and electronic structure of GaAs(001)(2x4) reconstructions*, Phys. Rev. B **54**, 16742 (1996).
- [70] S. Hasegawa, *Surface-state bands on silicon as electron systems in reduced dimensions at atomic scales*, Journal of Physics: Condensed Matter **12**, R463 (2000).
- [71] C. Köpf, *Modellierung des Elektronentransports in Verbindungshalbleiterlegierungen*, Dissertation, Technische Universität Wien, 1997.
- [72] Y. Takagaki, T. Kosugi, K. Gamo, S. Namba und K. Murase, *Effect of low-temperature photoconduction on the depletion width in GaAs-AlGaAs wire*, Semicond. Sci. Technol. **5**, 634 (1990).
- [73] B. Kaestner und V. Kashcheyevs, *Non-adiabatic quantized charge pumping with tunable-barrier quantum dots: a review of current progress*, Reports on Progress in Physics **78**, 103901 (2015).
- [74] D. Becker, *Ladungstransport durch einen Einzelorbital-Quantenpunkt im Regime der Coulomb-Blockade*, Diplomarbeit, Universität Hamburg, 2006.
- [75] L. Fricke, M. Wulf, B. Kaestner, V. Kashcheyevs, J. Timoshenko, P. Nazarov, F. Hohls, P. Mirovsky, B. Mackrodt, R. Dolata, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher, *Counting Statistics for Electron Capture in a Dynamic Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **110**, 126803 (2013).
- [76] A. Croy und U. Saalman, *Non-adiabatic Rectification and Current Reversal in Electron Pumps*, Phys. Rev. B **86**, 035330 (2012).
- [77] A. Castaneda, T. Dittrich und G. Sinuco, *Nonadiabatic pumping in classical and quantum chaotic scatterers*, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 395102 (2012).
- [78] K. MacLean, S. Amasha, I. P. Radu, D. M. Zumbühl, M. A. Kastner, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Energy-Dependent Tunneling in a Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **98**, 036802 (2007).
- [79] H. Nyquist, *Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors*, Phys. Rev. **32**, 110 (1928).
- [80] W. Schottky, *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern*, Annalen der Physik **362**, 541 (1918).



- 
- [81] S. W. Kim, *Floquet scattering in parametric electron pumps*, Phys. Rev. B **66**, 235304 (2002).
- [82] M. Moskalets und M. Büttiker, *Floquet scattering theory of quantum pumps*, Phys. Rev. B **66**, 205320 (2002).
- [83] V. Kashcheyevs und J. Timoshenko, in *Conference on Precision Electromagnetic Measurements 2014 (CPEM 2014)* (IEEE, 2014), Seiten 536–537.
- [84] S. P. Giblin, S. J. Wright, J. Fletcher, M. Kataoka, M. Pepper, T. J. B. M. Janssen, D. A. Ritchie, C. A. Nicoll, D. Anderson und G. A. C. Jones, *Accurate high speed single-electron quantum dot preparation*, New J.Phys. **12**, 073013 (2010).
- [85] S. Amasha, K. MacLean, I. P. Radu, D. M. Zumbühl, M. A. Kastner, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Spin-dependent tunneling of single electrons into an empty quantum dot*, Phys. Rev. B **78**, 041306 (2008).
- [86] V. V'yurkov und A. Vetrov, *Effect of screening on spin polarization in a two-dimensional electron gas*, Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures **22**, 442 (2004), 15th International Conference on Electronic Properties of Two-Dimensional Systems (EP2DS-15).
- [87] L. Fricke, *A self-referenced single-electron current source*, Dissertation, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, 2015.
- [88] J. Kohlmann und R. Behr, in *Superconductivity - Theory and Applications*, Herausgeber: A. M. Luiz (InTech, 2011), Kap. 11, Development of Josephson Voltage Standards.
- [89] V. F. Maisi, Y. A. Pashkin, S. Kafanov, J.-S. Tsai und J. P. Pekola, *Parallel pumping of electrons*, New J. Phys. **11**, 113057 (2009).
- [90] S. J. Wright, M. D. Blumenthal, M. Pepper, D. Anderson, G. A. C. Jones, C. A. Nicoll und D. A. Ritchie, *Parallel quantized charge pumping*, Phys. Rev. B **80**, 113303 (2009).
- [91] S. J. Wright, M. D. Blumenthal, G. Gumbs, A. L. Thorn, M. Pepper, T. J. B. M. Janssen, S. N. Holmes, D. Anderson, G. A. C. Jones, C. A. Nicoll und D. A. Ritchie, *Enhanced current quantization in high-frequency electron pumps in a perpendicular magnetic field*, Phys. Rev. B **78**, 233311 (2008).
- [92] J. D. Fletcher, M. Kataoka, S. P. Giblin, S. Park, H.-S. Sim, P. See, T. J. B. M. Janssen, J. P. Griffiths, G. A. C. Jones, H. E. Beere und D. A. Ritchie, *Stabilization of single-electron pumps by high magnetic fields*, Phys. Rev. B **86**, 155311 (2012).
- [93] P. Mirovsky, B. Kaestner, C. Leicht, A. C. Welker, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher, *Synchronized single electron emission from dynamical quantum dots*, Appl. Phys. Lett. **97**, 252104 (2010).

- 
- [94] P. Mirovsky, L. Fricke, F. Hohls, B. Kaestner, C. Leicht, K. Pierz, J. Melcher und H. W. Schumacher, *Towards quantized current arbitrary waveform synthesis*, J. Appl. Phys. **113**, 213704 (2013).
- [95] W. G. van der Wiel, S. De Franceschi, J. M. Elzerman, T. Fujisawa, S. Tarucha und L. P. Kouwenhoven, *Electron transport through double quantum dots*, Rev. Mod. Phys. **75**, 1 (2002).
- [96] B. Bertrand, H. Flentje, S. Takada, M. Yamamoto, S. Tarucha, A. Ludwig, A. D. Wieck, C. Bäuerle und T. Meunier, *Quantum Manipulation of Two-Electron Spin States in Isolated Double Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **115**, 096801 (2015).
- [97] H. W. Liu, T. Fujisawa, Y. Ono, H. Inokawa, A. Fujiwara, K. Takashina und Y. Hirayama, *Pauli-spin-blockade transport through a silicon double quantum dot*, Phys. Rev. B **77**, 073310 (2008).
- [98] H. W. Liu, T. Fujisawa, H. Inokawa, Y. Ono, A. Fujiwara und Y. Hirayama, *A gate-defined silicon quantum dot molecule*, Appl. Phys. Lett. **92**, 222104 (2008).
- [99] T. Hayashi, T. Fujisawa, H. D. Cheong, Y. H. Jeong und Y. Hirayama, *Coherent manipulation of electronic states in a double quantum dot*, Phys. Rev. Lett. **91**, 226804 (2003).
- [100] Y. E. Wang, A. Tankasala, L. C. L. Hollenberg, G. Klimeck, M. Y. Simmons und R. Rahman, *Engineering inter-qubit exchange coupling between donor bound electrons in silicon*, cond-mat.mes-hall **1507.08009**, (2015).
- [101] B. Kaestner, C. Leicht, V. Kashcheyevs, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher, *Single-parameter quantized charge pumping in high magnetic fields*, Appl. Phys. Lett. **94**, 012106 (2009).

---

# Lebenslauf

Name	Philipp Wiese, geb. Mirovsky
Geburtsdatum	16. Januar 1981
Geburtsort	Hannover
1987 - 1989	Grundschule am Mengendamm / Hannover
1989 - 1991	Grundschule Mellendorf
1991 - 1993	Orientierungsstufe Mellendorf
1993 - 2000	Gymnasium Mellendorf
Juni 2000	Abitur
2000 - 2001	Wehrdienst bei der Fernmeldegruppe der 1./Panzergrenadierlehrbataillons 92 Munster
2001 - 2008	Studiengang Physik mit der Studienrichtung Technische Physik an der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
2007 - 2008	Diplomarbeit am Institut für Festkörperphysik, Abteilung Nanostrukturen bei Prof. Dr. R. J. Haug Titel der Arbeit: „Entwicklung eines Sondenmessplatzes zur elektrischen Kontaktierung und Charakterisierung von Nanostrukturen“
2009 - 2013	Forschungsarbeiten an nicht-adiabatischen Einzelelektronenpumpen an der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig, Abteilung 2.53: Halbleiterphysik und Magnetismus, Betreuer: PD. Dr. H. W. Schumacher
2013 - 2016	Anfertigung der Dissertation



---

# Publikationen

*Self-Referenced Single-Electron Quantized Current Source*

L. Fricke, M. Wulf, B. Kaestner, F. Hohls, P. Mirovsky, B. Mackrodt, R. Dolata, T. Weimann, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher  
Phys. Rev. Lett. **112**, 226803 (2014).

*Towards quantized current arbitrary wave form synthesis*

P. Mirovsky, L. Fricke, F. Hohls, B. Kaestner, C. Leicht, K. Pierz, J. Melcher und H. W. Schumacher  
J. Appl. Phys. **113**, 213704 (2013).

*Counting Statistics for Electron Capture in a Dynamic Quantum Dot*

L. Fricke, M. Wulf, B. Kaestner, V. Kashcheyevs, J. Timoshenko, P. Nazarov, F. Hohls, P. Mirovsky, B. Mackrodt, R. Dolata, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher  
Phys. Rev. Lett. **110**, 126803 (2013).

*Integrated quantized electronics: a semiconductor quantized voltage source*

F. Hohls, A. C. Welker, C. Leicht, L. Fricke, B. Kaestner, P. Mirovsky, A. Müller, K. Pierz, U. Siegner und H. W. Schumacher  
Phys. Rev. Lett. **109**, 056802 (2012).

*Generation of energy selective excitations in quantum Hall edge states*

C. Leicht, P. Mirovsky, B. Kaestner, F. Hohls, V. Kashcheyevs, E. V. Kurganova, U. Zeitler, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher  
Semiconductor Science and Technology **26**, 055010 (2011).

*Quantized current source with mesoscopic feedback*

L. Fricke, F. Hohls, N. Ubbelohde, B. Kaestner, V. Kashcheyevs, C. Leicht, P. Mirovsky, K. Pierz, H. W. Schumacher und R. Haug  
Phys. Rev. B **83**, 193306 (2011).

*Synchronized single electron emission from dynamical quantum dots*

P. Mirovsky, B. Kästner, C. Leicht, A.C. Welker, T. Weimann, K. Pierz und H.W. Schumacher  
Applied Physics Letters **97**, 252104 (2010).

---

*Constructive role of non-adiabaticity for quantized charge pumping*

B. Kaestner, C. Leicht, P. Mirovsky, V. Kashcheyevs, E. V. Kurganova, U. Zeitler, K. Pierz und H. W. Schumacher

AIP Conf. Proc. **1399**, 345 (2010).

*Non-adiabatic pumping of single electrons affected by magnetic fields*

C. Leicht, B. Kaestner, V. Kashcheyevs, P. Mirovsky, T. Weimann, K. Pierz und H. W. Schumacher

Physica E **42**, 911 (2009).

---

# Danksagung

Mein Dank geht an alle Personen, die mir bei der Ausarbeitung dieser Dissertation zur Seite standen:

Besonders möchte ich mich bei meinem Doktorvater Professor Rolf J. Haug für die hilfreiche Unterstützung und wichtigen richtungsweisenden Gespräche bedanken.

In gleicher Weise danke ich auch Hans Werner Schumacher, der mir die Möglichkeit gegeben hat, bei meinen Experimenten verschiedene Richtungen einzuschlagen und somit dieses spannende Themengebiet ausgiebig zu untersuchen. Dankenswerterweise stellte er sich auch als Korreferent zur Verfügung.

Besonderer Dank gilt auch Bernd Kästner und Frank Hohls, die mir bei der Entwicklung der theoretischen Modelle eine große Hilfe waren. Ihre Expertise in den Bereichen Probenherstellung und Messtechnik hat maßgeblich zum Gelingen meiner Experimente beigetragen.

Ich danke Vyacheslavs Kashcheyevs für die vielen fruchtbaren Diskussionen, die stets zu begeisternden neuen Ideen führten.

Die Herstellung der in dieser Dissertation verwendeten Proben wäre ohne die folgenden Personen nicht möglich gewesen: Dr. T. Weimann (Elektronenstrahlolithographie), Dr. K. Pierz und Herrn H. Marx (Wafermaterial), Herrn P. Hinze und Frau K. Störr (REM-Aufnahmen). Auch für die Hilfe bei technischen Schwierigkeiten durch Herrn U. Becker und Herrn S. Droste sowie die Unterstützung und Rückendeckung bei Verwaltungsakten durch Frau C. Becker möchte ich mich hiermit bedanken.

Des Weiteren danke ich Lukas Fricke, Christoph Leicht, André Müller und Friederike Stein für ihre Hilfe und Unterstützung bei den alltäglichen Herausforderungen.

Mein herzlichster Dank geht an meine Familie. Ohne die aufopferungsvolle Unterstützung und den Zuspruch hätte ich diese Dissertation in ihrer derartigen Form niemals vollenden können. Die mir entgegengebrachte Engelsgeduld und Rücksichtnahme hat es mir erst ermöglicht, mich vollständig auf meine Arbeit zu konzentrieren. Für ihr Verständnis und die ansteckende Motivation gilt mein besonderer Dank meiner Frau Maxi und meiner Tochter Ella.

Nur durch Euch habe ich dies erreichen können!





---

# Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Hilfsmittel als angegeben verwendet habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Werken entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Hamm, 24.11.2015

---

Philipp Wiese