# Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen über Lösungen eines Prionenmodells mit Koagulation

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades
Doktorin der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

M.Sc. Elena Leis

2016

| | |
|---|---|
| Referent: | Prof. Dr. Ch. Walker |
| Korreferent: | Prof. Dr. G. Simonett |
| | |
| Tag der Promotion: | 23. Juni 2016 |

# Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Walker bedanken, der mir das hochinteressante Thema überlassen und meine Arbeit in jeder Phase intensiv betreut hat. Seine professionelle Unterstützung und kompetenter Rat kam mir in zahlreichen Angelegenheiten sehr zugute. Das habe ich nie als selbstverständlich angesehen. Herzlichen Dank.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Simonett für die hilfsbereite und wissenschaftliche Betreuung als Zweitgutachter.

Mein Dank geht an alle Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen des Instituts für die freundliche Atmosphäre am Arbeitsplatz und ihre Hilfsbereitschaft in verschiedenen Situationen.

Meiner Familie danke ich für ihre Geduld, Unterstützung und Aufmunterung, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

# Inhaltsverzeichnis

# Zusammenfassung


Die Beziehung zwischen normalen Proteinen und infektiösen Prionen wird durch ein Modell beschrieben, das aus einer gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) = \lambda - \gamma v(t) - \frac{v(t)}{1 + \nu \int_{y_0}^{\infty} u(t,x)x \,\mathrm{d}x} \int_{y_0}^{\infty} \tau(y) u(t,y) \,\mathrm{d}y \\ + 2 \int_{y_0}^{\infty} u(t,y)\beta(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y) \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{0.1}$$

gekoppelt mit einer quasilinearen partiellen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,y) + &\frac{v(t)}{1 + \nu \int_{y_0}^{\infty} u(t,x)x \,\mathrm{d}x} \partial_y(\tau(y)u(t,y)) \\ &= -(\mu(y) + \beta(y))u(t,y) + 2 \int_y^{\infty} \beta(z)\kappa(y,z)u(t,z) \,\mathrm{d}z \\ &\quad + \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)u(t,y-z)u(t,z) \,\mathrm{d}z \\ &\quad - 2u(t,y) \int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)u(t,z) \,\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{0.2}$$

für $y \in (y_0, \infty)$ mit $y_0 > 0$ und $t > 0$ besteht. Dabei wird durch $u(t,y)$ die Dichte von Prionen (Polymeren) und durch $v(t)$ die Anzahl der normalen Proteine (Monomere) repräsentiert. $\tau, \mu, \beta, \eta$ stehen entsprechend für die polymerlängenabhängigen Verlängerungs-, Polymerabbau-, Fragmentations- und Koagulationsraten. Die Gleichungen werden durch die Randbedingungen

$$u(t, y_0) = 0 \ , \quad t > 0 \tag{0.3}$$

und Anfangswerte

$$v(0) = v^0 \ , \quad u(0,y) = u^0(y) \ , \quad y \in (y_0, \infty) \tag{0.4}$$

vervollständigt.
Die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für das System (0.1)–(0.4) wurde in [33, 41, 46] für den Fall $\eta \equiv 0$ und $\nu = 0$ ausführlich studiert.

Die vorliegende Arbeit ist dem Fall $\eta \not\equiv 0$ und $\nu \geq 0$ gewidmet. Im ersten Teil der Arbeit wird gezeigt, dass wenn die Raten $\tau, \mu, \beta, \eta$ beschränkt sind, eine eindeutige klassische globale nichtnegative Lösung $(v, u)$ für das System (0.1)–(0.4) existiert. Im zweiten und dritten Teil der Arbeit wird der Fall unbeschränkter Raten $\tau, \mu, \beta, \eta$ untersucht. Es wird die Existenz einer schwachen monomererhalten Lösung für (0.1)–(0.4) bewiesen, die unter zusätzlichen Voraussetzungen eindeutig ist.



*Schlagwörter*: Prionenmodell mit Koagulation, klassische Lösungen, schwache Lösungen.

# Abstract

The model considered in this thesis describes the interaction between non-infectious and infectious prion proteins and consists of an ordinary differential equation

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) = \lambda - \gamma v(t) - \frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^{\infty} u(t,x)x\,\mathrm{d}x}\int_{y_0}^{\infty}\tau(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y \\ + 2\int_{y_0}^{\infty} u(t,y)\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{0.5}$$

coupled with an integro-partial quasilinear differential equation

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,y) + &\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^{\infty} u(t,x)x\,\mathrm{d}x}\partial_y(\tau(y)u(t,y)) \\ &= -(\mu(y)+\beta(y))u(t,y) + 2\int_y^{\infty}\beta(z)\kappa(y,z)u(t,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \mathbf{1}_{[y>2y_0]}\int_{y_0}^{y-y_0}\eta(y-z,z)u(t,y-z)u(t,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad - 2u(t,y)\int_{y_0}^{\infty}\eta(z,y)u(t,z)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{0.6}$$

for $y \in (y_0,\infty)$ with $y_0 > 0$ and $t > 0$, where $u(t,y)$ and $v(t)$ represent the density distribution function for the prion polymers and the number of normal monomers, respectively. $\tau,\mu,\beta,\eta$ are the length-dependent rates associated with lengthening, methabolic degradation, fragmentation and coagulation of polymers. The boundary condition

$$u(t,y_0) = 0\ ,\quad t>0 \tag{0.7}$$

and the initial conditions

$$v(0) = v^0\ ,\quad u(0,y) = u^0(y)\ ,\quad y\in(y_0,\infty) \tag{0.8}$$

complete the system of equations.
The existence and uniqueness of solutions for the system (0.5)–(0.8) is analyzed in [33, 41, 46] for $\eta \equiv 0$ and $\nu = 0$.

The present thesis is devoted to the case $\eta \not\equiv 0$ and $\nu \geq 0$. In the first part of the thesis it is shown that, if the rates $\tau,\mu,\beta,\eta$ are bounded, the system (0.5)–(0.8) has a unique classical non-negative solution $(v,u)$. The solution exists globally in time. In the second and third parts of the thesis the prion model with unbounded rates $\tau,\mu,\beta,\eta$ is analyzed. The existence of a monomer-preservig weak solution (0.5)–(0.8) that is unique under some additional assumptions is proven.



*Key words.* Prion model with coagulation, classical solutions, weak solutions.

# 1. Einleitung

## 1.1. Modellbeschreibung

Bei gewissen Krankheiten, die als übertragbare spongiöse Enzephalopathien bezeichnet werden, vermutet man, dass sie durch infektiöse Proteine (Prionen) entstehen können. Von verschiedenen Formen dieser Krankheiten können sowohl Tiere als auch Menschen betroffen sein. Menschen, Rinder, Schafe und andere für diese Krankheit anfällige Tiere produzieren in gesundem Zustand das normale Protein $\mathrm{PrP^C}$. Dieses Protein existiert normalerweise in Form von Monomeren. Man geht davon aus, dass sich die Polymerprionen $\mathrm{PrP^{Sc}}$ kettenweise an die Monomere anschließen. Dadurch wird $\mathrm{PrP^C}$ in die infektiöse Form $\mathrm{PrP^{Sc}}$ umgewandelt. Ab einer bestimmten kritischen Größe wird $\mathrm{PrP^{Sc}}$ sehr stabil und durch Polymerisation können schnell Polymerketten entstehen, die mehrere tausend Monomere enthalten. Diese Ketten können sich aber auch aufteilen (meist die kleineren) und es wird angenommen, dass sie unterhalb einer kritischen Größe umgehend in Monomere $\mathrm{PrP^C}$ zerfallen.
Polymerisationsmodelle für $\mathrm{PrP^C}$ Monomere und $\mathrm{PrP^{Sc}}$ Polymere wurden erstmals in in [35] und [36] im diskreten Fall formuliert und untersucht. Das in [35] beschriebene Modell besteht aus einem unendlich-dimensionalen System von gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lambda - \gamma v - \tau v \sum\limits_{i=n_0}^{\infty} u_i + 2\beta \sum\limits_{j \geq n_0} \sum\limits_{i<n_0} i u_j \ , \\[2em] \dfrac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\mu u_i - \beta(i-1)u_i - \tau v(u_i - u_{i-1}) + 2\beta \sum\limits_{j>i} i u_j \qquad \text{für } i \geq n_0 \end{cases}$$

und berücksichtigt Polymerisation, Polymerteilung und Polymerabbau sowie die natürliche Monomerproduktion und Monomerabbau. Hier repräsentiert $v$ die Anzahl der gesunden Monomere ($\mathrm{PrP^C}$) und $u_i$ die Anzahl der infektiösen Polymere ($\mathrm{PrP^{Sc}}$), bestehend aus $i$ Monomeren. Dabei wird $i \geq n_0 \geq 2$ vorausgesetzt, wobei $n_0$ die kleinste stabile Polymerlänge bezeichnet. $\lambda, \gamma, \tau, \beta, \mu$ modellieren entsprechend die Produktionsrate von $\mathrm{PrP^C}$, die Abbaurate von $\mathrm{PrP^C}$, die Polymerisationsrate, den Polymerteilungskoeffizient und die Polymerabbaurate. Polymere können aus mehreren tausenden Monomere bestehen.
Ein darauf basierendes Modell mit stetigen Polymerlängen wurde in [25] eingeführt und später in [17, 27, 39] weiter analysiert. Da biologische Forschungsergebnisse ( [37, 40]) darauf hinweisen, dass nur abgeschnittene Polymerformen in der Lage sind, sich im Rahmen des Polymerisationsvorganges zu verlängern, bzw. dass sich Polymere mit Längen aus einem bestimmten Intervall am schnellsten verlängern, wurde das Modell in [26] weiter modifiziert. Es wurde so konzipiert, dass die

Polymerisation langsamer wird, wenn das Verhältnis der Gesamtanzahl der in Polymeren enthaltenen Monomere zu der Polymergesamtzahl größer wird. Das bedeutet, dass sich der Polymerisationsvorgang mit dem Wachstum der durchschnittlichen Polymerlänge verlangsamt. Außerdem wurde im Modell in [26] die Koagulationsmöglichkeit für Polymere entsprechend [6,10] berücksichtigt. Es existieren auch andere Prionenmodelle, welche z.B. die Bewegung von Prionen berücksichtigen (eingeführt in [9]), oder welche den Verlauf von Alzheimer- oder Parkinson-Krankheit beschreiben (vgl. [28]).

Im Folgenden stellen wir das in [26] beschriebene Modell vor, das die Vermehrungsdynamik von Prionen beschreibt. Wir benutzen folgende Bezeichnungen:

- $v(t) \geq 0$ ist die Anzahl von $\mathrm{PrP^C}$ Monomeren zum Zeitpunkt $t \geq 0$;
- $y_0 > 0$ ist die minimale stabile Polymerlänge, d.h. die Polymere haben eine Länge $y$ mit $y_0 < y < \infty$;
- $u = u(t, y) \geq 0$ ist die Dichte von infektiösen $\mathrm{PrP^{Sc}}$ Polymeren der Länge $y \in (y_0, \infty)$ zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Entsprechend bezeichnet der Ausdruck $\int_{y_0}^{\infty} u(t, y)\,\mathrm{d}y$ die Anzahl der Polymere zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Der Ausdruck $\int_{y_0}^{\infty} u(t, y)y\,\mathrm{d}y$ entspricht der Anzahl der Monomere, die in allen Polymeren zum Zeitpunkt $t \geq 0$ enthalten sind;
- $\lambda \geq 0$ ist die Rate von natürlich produzierten $\mathrm{PrP^C}$ Monomeren;
- $\gamma \geq 0$ ist die natürliche Abbaurate von Monomeren;
- $\tau(y) > 0$ ist die längenabhängige Polymerisationsrate;
- $\nu \geq 0$ ist ein mit der Polymerisation assoziierter Parameter;
- $\beta(y) \geq 0$ ist die längenabhängige Polymerteilungsrate;
- $\kappa(y', y)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Polymer der Länge $y > y_0$ in zwei Polymere der Länge $y' < y$ und $y - y' < y$ aufteilt;
- $\mu(y) \geq 0$ ist die längenabhängige Abbaurate von $\mathrm{PrP^{Sc}}$ Polymeren;
- $\eta(z, y) = \eta(y, z) \geq 0$ ist die Koagulationsrate von zwei Polymeren der Länge $z$ und $y$.

Die wechselseitige Beeinflussung von $\mathrm{PrP^C}$ Monomeren und $\mathrm{PrP^{Sc}}$ Polymeren wird mit dem folgenden gekoppelten System von Differentialgleichungen beschrieben:

Der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) = \lambda - \gamma v(t) - \frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty u(t,x)x\mathrm{d}x}\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y \\ + 2\int_{y_0}^\infty u(t,y)\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1.1}$$

und der hyperbolischen quasilinearen Gleichung

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,y) + &\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty u(t,x)x\mathrm{d}x}\partial_y(\tau(y)u(t,y)) \\ &= -(\mu(y)+\beta(y))u(t,y) + 2\int_y^\infty \beta(z)\kappa(y,z)u(t,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \mathbf{1}_{[y>2y_0]}\int_{y_0}^{y-y_0}\eta(y-z,z)u(t,y-z)u(t,z)\,\mathrm{d}z \\ &\quad - 2u(t,y)\int_{y_0}^\infty \eta(z,y)u(t,z)\,\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{1.2}$$

für $y \in (y_0,\infty)$ mit $y_0 > 0$, vervollständigt durch die Randbedingungen

$$u(t,y_0) = 0\ , \quad t > 0 \tag{1.3}$$

und die Anfangswerte

$$v(0) = v^0\ , \quad u(0,y) = u^0(y)\ , \quad y \in (y_0,\infty)\ . \tag{1.4}$$

Die Anzahl der $\mathrm{PrP}^{\mathrm{C}}$ Monomere kann sich durch Absterben (der Ausdruck $-\gamma v$) und Polymerisation, entsprechend

$$-\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty u(t,x)x\,\mathrm{d}x}\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y\ ,$$

verkleinern, oder auf Grund natürlicher Produktion ($\lambda$) und Polymerteilung in Polymere kleinerer Länge als $y_0$ (der Ausdruck mit $\beta(y)$ in (1.1)) und anschließendes Zerfalls in Monomere, vergrößern. Es ist zu beachten, dass die Polymerisation im Fall $\nu > 0$ umso langsamer wird, je größer die Anzahl der in Polymeren enthaltenen Monomere wird. In der Gleichung (1.2) entspricht der Ausdruck

$$\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty u(t,x)x\,\mathrm{d}x}\partial_y(\tau u)$$

der Verlängerung der Polymere der Länge $y$ durch Anschließen von Monomeren, $-\mu(y)u(y)$ entspricht der Anzahl der abgestorbenen Polymere und die Ausdrücke mit $\beta$ entsprechen der Vergrößerung bzw. Verkleinerung der Anzahl von Polymeren der Länge $y$ auf Grund von Teilung. Der Rückgang bzw. die Vermehrung von Polymeren der Länge $y$ kann auch bei der Polymerkoagulation stattfinden, wenn diese sich an die anderen Prionen anschließen (der Ausdruck $-2u(y)\int_{y_0}^{\infty}\eta(z,y)u(z)\,\mathrm{d}z$) bzw. wenn sich zwei kleinere Prionen zusammenschließen, was dem Ausdruck

$$\int_{y_0}^{y-y_0}\eta(y-z,z)u(y-z)u(z)\,\mathrm{d}z$$

entspricht.

## 1.2. Ziel der Arbeit

Wie wir schon erwähnt haben, wurde das Modell in [26] eingeführt und im Fall von Raten

$$\tau,\mu,\eta\equiv const\ , \qquad \beta(y)=\beta y\ , \qquad \kappa(z,y)=\frac{1}{y} \tag{1.5}$$

untersucht. Mit den Bezeichnungen

$$U(t):=\int_{y_0}^{\infty}u(t,y)\mathrm{d}y\ , \qquad P(t):=\int_{y_0}^{\infty}yu(t,y)\mathrm{d}y$$

erhält man in diesem Fall aus (1.1), (1.2) formal das geschlossene System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} v'=\lambda-\gamma v-\dfrac{\tau vU}{1+\nu P}+\beta y_0^2U\ , \\ U'=\beta P-\mu U-2\beta y_0U-\eta U^2\ , \\ P'=\dfrac{\tau vU}{1+\nu P}-\mu P-\beta y_0^2U\ . \end{cases} \tag{1.6}$$

Die Autoren haben in [26] gezeigt, dass das System eine eindeutige beschränkte globale Lösung in $\mathbb{R}^3_+$ besitzt, wenn die Anfangswerte nichtnegativ sind. In diesem Artikel wurde für die Raten (1.5) auch bewiesen, dass das triviale Equilibrium $(v,U,P)=(\lambda/\gamma,0,0)$ im Fall $\gamma\geq\beta y_0+\mu$ und $\dfrac{\beta\lambda\tau}{\gamma(\beta y_0+\mu)^2}\leq 1$ global attraktiv ist. Wenn der letzte Ausdruck dabei strikt kleiner als 1 ist, ist die stationare Lösung darüber hinaus global asymptotisch stabil. Falls $\gamma\geq\beta y_0+\mu$ und $\dfrac{\beta\lambda\tau}{\gamma(\beta y_0+\mu)^2}>1$, existiert eine eindeutige endemische Gleichgewichtslösung, die auf $\mathbb{R}^3_+\setminus[\mathbb{R}_+\times\{0\}\times\{0\}]$ lokal stabil ist. Außerdem wurde die Gleichgewichtslösung für (1.1), (1.2) in diesem Fall für $\eta\equiv 0$ explizit konstruiert. Das Langzeitverhalten der Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) und Stabilitätsfragen wurden für

den Fall $\eta \equiv 0$ auch in [7, 8, 17, 23, 24, 41, 46] untersucht.
Wir bemerken, dass wenn das System (1.6) gelöst werden kann, die ursprünglichen Gleichungen (1.1), (1.2) nicht mehr gekoppelt sind, weil $v$ für $t \geq 0$ bestimmt ist. In [17] wurde gezeigt, dass (1.2) in diesem Fall (mit den Raten wie in (1.5), $\eta \equiv 0$ und $\nu = 0$) für $u = u(t, y)$ mit der Charakteristikenmethode kombiniert mit Methoden aus der Halbgruppentheorie gelöst werden kann. Die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen wurden im Fall $\eta \equiv 0$ auch in [12] und im diskreten Fall in [11] untersucht.

Der Fall allgemeinerer Raten wurde in [41], [46] und [33] studiert. Es wurde dabei $\eta \equiv 0$ und $\nu = 0$ vorausgesetzt. In dieser speziellen Situation hängt die rechte Seite von (1.2) linear von $u$ ab. Für $v : [0, T] \to \mathbb{R}^+$ wurde in [41, 46] der Operator

$$[\mathbb{A}_v(t)u](y) := v(t)\partial_y(\tau u) + (\mu(y) + \beta(y))u(y) - 2\int_y^\infty \beta(z)\kappa(y, z)u(z)\mathrm{d}z \ ,$$
$$u \in E_1 \ , \quad t \in [0, T] \ , \quad y_0 < y < \infty$$

mit geeignetem Definitionsbereich $E_1$ definiert und seine Eigenschaften wurden untersucht, wenn $\mu, \beta$ beschränkt sind und $\kappa$ die Bedingungen (1.7), (1.8) erfüllt. Es wurde gezeigt, dass die Familie $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$ für $v \in C^1([0, T])$ mit

$$0 < R^{-1} \leq v(t) \leq \|v\|_{C^1([0,T])} \leq R \ , \quad t \in [0, T]$$

im biologisch natürlichen Raum $E_0 := L_1((y_0, \infty), y\mathrm{d}y)$ ein hyperbolisches Evolutionssystem generiert, dessen Eigenschaften in [41, 46] studiert wurden. Die Autoren haben mit Halbgruppentheorie bewiesen, dass das Anfangswertproblem (1.1)–(1.4) im Fall beschränkter Raten $\mu, \beta$ und

$$\tau \in C^1([y_0, \infty)) \quad \text{mit} \quad 0 < \tau(y) \leq \tau^* y \ , \quad y \geq y_0$$

für $v^0 > 0$ und $u^0 \in E_1^+$ eine eindeutige klassische Lösung $(v, u)$ besitzt, sodass $v \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $v(t) > 0$ für $t > 0$ und $u \in C^1(\mathbb{R}^+, E_0) \cap C(\mathbb{R}^+, E_1^+)$.
Die Wahl des Raums $E_0 = L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ ist dadurch bedingt, dass die Ausdrücke

$$\int_{y_0}^\infty yu(t, y)\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \int_{y_0}^\infty u(t, y)\mathrm{d}y$$

der gesamten Anzahl der Monomere, die in Polymeren des Systems enthalten sind, und der Anzahl der Polymere im System zum Zeitpunkt $t$ entsprechen.
In [33] wurde gezeigt, dass im Fall unbeschränkter Raten $\tau, \mu, \beta$ und $\eta \equiv 0$, $\nu = 0$ eine globale schwache monomererhaltende Lösung für das Problem (1.1)–(1.4) existiert, die unter zusätzlichen Voraussetzungen an die Raten eindeutig ist.

In [13] wurde die Existenz von schwachen monomererhaltenden Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) mit $\eta \equiv 0$, $\nu = 0$ studiert, wobei die Autoren die Resultate für diskrete Modelle aus [4, 5] verwendet haben.
Wichtig ist in diesem Zusammenhang der Begriff "monomererhaltend". Dies bedeutet, dass sich die Gesamtanzahl von Monomeren im System nur durch natürliche Produktion bzw. durch Absterben ändert. Die entsprechende Identität für $t > 0$

$$\begin{aligned} v(t) - v^0 + &\int_{y_0}^{\infty} y u(t,y)\mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\infty} y u^0(y)\mathrm{d}y \\ &= \lambda t - \gamma \int_0^t v(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \end{aligned}$$

erhält man formal, indem man (1.2) bezüglich des Maßes $y\mathrm{d}y$ und bezüglich $t$ unter Berücksichtigung von (1.7), (1.8) integriert und mit (1.1) aufaddiert. Für die Eindeutigkeit scheint diese Eigenschaft kritisch zu sein, weil sich die Gleichung (1.2) im Fall $\tau \equiv 0$, $\mu \equiv 0$, $\eta \equiv 0$ und $y_0 := 0$ zur stetigen Fragmentationsgleichung reduziert, für die die Nichteindeutigkeit von nichtmassenerhaltenden Lösungen z.B. in [14] beobachtet wurde.
Da die rechte Seite von (1.2) im Wesentlichen Koagulations- und Fragmentationsprozesse beschreibt, welche in Chemie, Physilk, Biologie eine große Rolle spielen, sind viele Arbeiten auf diesem Gebiet auch für unser Modell relevant, z.B. [14, 19, 20, 29, 31, 32, 42, 45] und viele andere.

In der vorliegenden Arbeit wird der Fall mit $\eta \not\equiv 0$ und $\nu \geq 0$ untersucht.
Im ersten Teil der Arbeit (Kapitel 2) wird Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) mit beschränkten Raten $\tau, \mu, \beta, \eta$ nachgewiesen. Dazu betrachten wir (1.2) als eine inhomogene quasilineare hyperbolische Differentialgleichung mit nichtlinearer rechter Seite. Zum Nachweis der Existenz zeitlich lokaler (positiver) Lösungen benötigen wir drei Fixpunktiterationen (siehe Kapitel 2, Abschnitt 2.3). Wir bedienen uns der Resultate aus [41, 46] betreffend der Familie $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$. Schließlich beweisen wir die zeitlich globale Existenz der Lösung. Die Ergebnisse von diesem Teil der Arbeit werden in Theorem 2.1 vorgestellt.

In den Kapiteln 3 und 4 studieren wir das Problem (1.1)–(1.4) mit unbeschränkten Raten $\tau$, $\mu$, $\beta$, $\eta$. Wir übertragen die in [33] beschriebenen Ideen auf unseren Fall. Um die Existenz einer schwachen monomererhaltenden Lösung zu zeigen, konstruieren wir eine Folge von Problemen mit beschränkten Raten $\tau_n, \mu_n, \beta_n, \eta_n$. Unter Verwendung der Ergebnisse aus dem ersten Teil der Arbeit beweisen wir mit einem Kompaktheitsargument die in Theorem 3.2 formulierte Existenzaussage über schwache monomererhaltende Lösungen.

Für den Nachweis der Eindeutigkeit von schwachen monomererhaltenden Lösungen untersuchen wir eine Stammfunktion für die Differenz zwischen zwei beliebigen schwachen monomererhaltenden Lösungen des Problems (1.1)–(1.4). Geeignete Abschätzungen für diese Stammfunktion implizieren dann die Gleichheit der beiden Lösungen. Die allgemeinen Eindeutigkeitsresultate sind in den Theoremen 4.5 und 4.6 formuliert. Im Teil (a) bzw. im Teil (b) von Theorem 4.1 wird ein Spezialfall von Theorem 4.5 bzw. von Theorem 4.6 dargestellt. Korollar 4.2 präsentiert danach eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für schwache monomererhaltende Lösungen des Problems (1.1)–(1.4).

## 1.3. Voraussetzungen

Im letzten Abschnitt haben wir schon erwähnt, dass die Arbeit aus drei Teilen besteht, nämlich der Existenz einer eindeutigen klassischen Lösung, der Existenz einer schwachen monomererhaltenden Lösung und der Eindeutigkeit der schwachen monomererhaltenden Lösung. Jedes dieser Resultate kann natürlich nur unter bestimmten Voraussetzungen gewonnen werden, die sich von einem Kapitel zum anderen unterscheiden. In diesem Abschnitt möchten wir die Voraussetzungen und Bezeichnungen zusammenstellen, die für die ganze Arbeit gelten sollen.

Mit

$$Y := (y_0, \infty)$$

bezeichnen wir die Menge der möglichen Polymerlängen. $\kappa \geq 0$ sei eine auf

$$\mathcal{K} := \{(z,y); y_0 < y < \infty, 0 < z < y\}$$

messbare Funktion mit

$$\kappa(z,y) = \kappa(y-z,y) \ , \quad (z,y) \in \mathcal{K} \ , \tag{1.7}$$

und

$$2\int_0^y z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z = y \ , \quad \text{für fast alle } y \in Y \ . \tag{1.8}$$

Die letzte Gleichung bedeutet, dass die Anzahl der Monomere nach der Spaltung erhalten bleibt. (1.7), (1.8) implizieren

$$\int_0^y \kappa(z,y)\,\mathrm{d}z = 1 \ , \quad \text{für fast alle } y \in Y \ . \tag{1.9}$$

Ein Beispiel für solch eine Funktion ist

$$\kappa(z,y) = \frac{1}{y} k_0\left(\frac{z}{y}\right) \ , \quad y > y_0 \ , \quad 0 < z < y \ , \tag{1.10}$$

wobei $k_0$ eine nichtnegative integrierbare Funktion ist, die auf $(0,1)$ definiert ist und für die

$$k_0(y) = k_0(1-y) \ , \quad y \in (0,1) \ , \quad \int\limits_0^1 k_0(y)\,\mathrm{d}y = 1 \tag{1.11}$$

gilt. Insbesondere erhalten wir für $k_0 \equiv 1$

$$\kappa(z,y) = \frac{1}{y} \ , \quad y > y_0 \ , \quad 0 < z < y \ . \tag{1.12}$$

Für $y \in Y$ und $u \in L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ definieren wir die Abbildungen

$$L[u](y) := -(\mu(y) + \beta(y))u(y) + 2\int_y^\infty \beta(z)\kappa(y,z)u(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.13}$$

und

$$Q[u,w](y) := \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int\limits_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)u(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z - 2u(y)\int_{y_0}^\infty \eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z \tag{1.14}$$

mit $\mu, \beta \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Y, \mathbb{R}^+)$ und $\eta \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Y \times Y, \mathbb{R}^+)$ symmetrisch. Es sei $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ messbar, dann gilt (formal)

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^\infty \varphi(y)L[u](y)\,\mathrm{d}y = &- \int_{y_0}^\infty \varphi(y)\mu(y)u(y)\,\mathrm{d}y \\ &+ \int_{y_0}^\infty u(y)\beta(y)\left(-\varphi(y) + 2\int_{y_0}^y \varphi(z)\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1.15}$$

und

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^\infty \varphi(y)Q[u,u](y)\,\mathrm{d}y &= \int_{2y_0}^\infty \varphi(y)\int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)u(y-z)u(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ &\quad - 2\int_{y_0}^\infty \varphi(y)u(y)\int_{y_0}^\infty \eta(z,y)u(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_0}^\infty u(z)\int_{z+y_0}^\infty \varphi(y)\eta(y-z,z)u(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\quad - 2\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty \varphi(y)\eta(z,y)u(y)u(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \ .\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung berücksichtigen wir die Symmetrie von $\eta$ und nach der Substitution $y := y - z$ erhalten wir

$$\int_{y_0}^{\infty} \varphi(y) Q[u,u](y) \,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} (\varphi(y+z) - \varphi(y) - \varphi(z)) \eta(y,z) u(y) u(z) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \ . \tag{1.16}$$

# 2. Klassische Lösungen für beschränkte Raten

Es sei $Y = (y_0, \infty)$. In diesem Kapitel setzen wir stets voraus, dass (1.7), (1.8) und die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind. Es sei

$$\mu, \beta \in L_\infty^+(Y) \ , \tag{2.1}$$

wobei $L_\infty^+(Y)$ den positiven Kegel in $L_\infty(Y)$ bezeichnet. Ferner gelte

$$\nu, \lambda, \gamma \geq 0 \ , \tag{2.2}$$

$$\tau \in BC^1(Y, \mathbb{R}^+) \ , \quad 0 < \tau_0 < \tau(y) \leq \tau^* y \ , \ y \geq y_0 \ , \tag{2.3}$$

wobei $\tau_0$, $\tau^* > 0$ Konstanten sind (beachte, dass z.B. $\tau^* = \|\tau\|_\infty / y_0$ gewählt werden kann), und

$$\eta \in BC^1(Y \times Y, \mathbb{R}^+) \ , \qquad \eta(y,z) = \eta(z,y) \quad \text{für } y, z \in Y \ . \tag{2.4}$$

Dann implizieren (1.15), (2.1) und (1.8), dass der in (1.13) definierte Operator $L : L_1(Y, y\mathrm{d}y) \to L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ linear und beschränkt ist.
Es sei im Folgenden

$$E_0 := L_1(Y, y\,\mathrm{d}y)$$

und

$$E_1 := \{u \in E_0 : \partial_y(\tau u) \in E_0, u(y_0) = 0\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{E_1} := \|u\|_{E_0} + \|\partial_y(\tau u)\|_{E_0} \ .$$

Unter $E_0^+$ verstehen wir den positiven Kegel in $E_0$ und $E_1^+ := E_1 \cap E_0^+$.

Im nächsten Theorem stellen wir das Resultat über die Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) vor.

**Theorem 2.1.** *Es seien die Voraussetzungen* (1.7), (1.8) *und* (2.1)–(2.4) *erfüllt. Dann besitzt das Problem* (1.1)–(1.4) *für jedes gegebene* $v^0 > 0$ *und* $u^0 \in E_1^+$ *eine eindeutige globale klassische Lösung* $(v,u)$ *mit* $v \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $v(t) > 0$ *für* $t > 0$ *und* $u \in C^1(\mathbb{R}^+, E_0) \cap C(\mathbb{R}^+, E_1^+)$.

Um diese Aussage zeigen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen, sodass sich am Ende von Kapitel 2 der Beweis für Theorem 2.1 ergibt.

## 2.1. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt schauen wir uns als erstes einige Eigenschaften des Raumes $E_1$ näher an. Im folgenden Lemma zeigen wir, dass der Raum $E_1$ genau aus den Funktionen $u \in W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)$ mit $u(y_0) = 0$ besteht. Mit $\mathcal{D}(Y)$ bezeichnen wir die glatten Funktionen auf $Y$ mit kompaktem Träger.

**Lemma 2.2.** *Wir definieren die Räume*

$$F := \{u \in W_1^1(Y, y\mathrm{d}y) \mid u(y_0) = 0\} \quad \text{und} \quad G := \mathrm{cl}_{W_1^1(Y,y\mathrm{d}y)}\mathcal{D}(Y) \ .$$

*Dann ist*

$$E_1 = F = G \ .$$

***Beweis***. Es sei $u \in E_1$. Dann gilt

$$u(y_0) = 0 \ , \quad u \in E_0 \ , \quad \partial_y(\tau u) \in E_0 \ .$$

Wegen

$$\tau\partial_y u = \partial_y(\tau u) - \tau' u \in E_0$$

erhalten wir

$$\int_{y_0}^{\infty} |\partial_y u(y)| y \,\mathrm{d}y \leq \int_{y_0}^{\infty} \frac{\tau(y)}{\tau_0} |\partial_y u(y)| y \,\mathrm{d}y < \infty \ .$$

Somit gilt $u \in F$.
Sei nun $u \in F$. Die Bedingung $\tau \in BC^1$ impliziert dann $\tau' u + \tau\partial_y u \in E_0$ und somit auch $\partial_y(\tau u) \in E_0$, was zusammen mit $u(y_0) = 0$ das Ergebnis $u \in E_1$ liefert.

Es sei $u \in W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)$ mit $u(y_0) = 0$. Dann ist $yu \in W_1^1(Y, \mathrm{d}y) = W_1^1(Y)$ mit $u(y_0) = 0$. Wir wissen, dass $\mathcal{D}(Y)$ dicht in der Menge $\{w \in W_1^1(Y) \mid w(y_0) = 0\}$ liegt (Satz [43, I.5.4]). Somit existiert eine Folge $(u_n) \subset \mathcal{D}(Y)$, sodass $u_n \to yu$ in $W_1^1(Y)$, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \Big[ \int_{y_0}^{\infty} |u_n - yu| \,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} |\partial_y u_n - u - y\partial_y u| \,\mathrm{d}y \Big] = 0 \ . \tag{2.5}$$

Da $y_0 > 0$, erhalten wir, dass $[y \mapsto u_n/y] \in \mathcal{D}(Y)$ und

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{y} u_n - u \right\|_{W_1^1(Y,y\mathrm{d}y)} &= \int_{y_0}^{\infty} \left| \frac{1}{y} u_n - u \right| y \,\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{y_0}^{\infty} \left| \frac{1}{y}\partial_y u_n - \frac{1}{y^2} u_n - \partial_y u \right| y \,\mathrm{d}y \\
&\leq \int_{y_0}^{\infty} |u_n - yu| \ \mathrm{d}y \\
&\quad + \int_{y_0}^{\infty} |\partial_y u_n - u - y\partial_y u| \ \mathrm{d}y + \frac{1}{y_0} \int_{y_0}^{\infty} |yu - u_n| \ \mathrm{d}y \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit (2.5)

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{y} u_n - u \right\|_{W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)} = 0$$

und damit $u \in G$.
Nun sei $u \in G \subset W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)$. Dann existiert eine Folge $(u_n) \subset \mathcal{D}(Y)$ mit

$$u_n \to u \quad \text{in } W_1^1(Y, y\mathrm{d}y) \ .$$

Dies impliziert

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad W_1^1\big((y_0, 2y_0),\, \mathrm{d}y\big) \hookrightarrow C([y_0, 2y_0]) \ .$$

Wegen $u_n(y_0) = 0$ folgt daraus $u(y_0) = 0$, d.h. $u \in F$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Normen $\| \cdot \|_{E_1}$ und $\| \cdot \|_{W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)}$ äquivalent sind. Dafür sei $u \in E_1$. Dann gilt wegen (2.3)

$$\begin{aligned}
\|u\|_{E_1} = \|u\|_{E_0} + \|\partial_y(\tau u)\|_{E_0} &= \|u\|_{E_0} + \int_{y_0}^{\infty} |\partial_y(\tau u)(y)| y \,\mathrm{d}y \\
&\leq \|u\|_{E_0} + \int_{y_0}^{\infty} \big(|\tau'(y) u(y)| + \tau(y) |\partial_y u(y)|\big) y \,\mathrm{d}y \\
&\leq \|u\|_{E_0} + \|\tau'\|_\infty \|u\|_{E_0} + \|\tau\|_\infty \|\partial_y u\|_{E_0} \\
&\leq M \|u\|_{W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)}
\end{aligned}$$

für ein $M > 0$. Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W_1^1(Y, y\mathrm{d}y)} &= \int_{y_0}^{\infty} |u(y)| y \,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} |\partial_y u(y)| y \,\mathrm{d}y \\
&\leq \|u\|_{E_0} + \int_{y_0}^{\infty} \frac{\tau(y)}{\tau_0} |\partial_y u(y)| y \,\mathrm{d}y \\
&= \|u\|_{E_0} + \frac{1}{\tau_0} \int_{y_0}^{\infty} |\partial_y(\tau u)(y) - \tau'(y) u(y)| y \,\mathrm{d}y \\
&\leq \|u\|_{E_0} + \frac{1}{\tau_0} \big(\|\partial_y(\tau u)\|_{E_0} + \|\tau'\|_\infty \|u\|_{E_0}\big) \\
&\leq M_1 \|u\|_{E_1}
\end{aligned}$$

für ein $M_1 > 0$. Somit ist die Aussage bewiesen. □

Im folgenden Lemma untersuchen wir den in (1.14) definierten bilinearen Operator $Q : E_j \times E_0 \to E_j$ für $j \in \{0, 1\}$.

**Lemma 2.3.** *Der Operator $Q$ besitzt folgende Eigenschaften.*

(a) *Für $j \in \{0,1\}$ ist $Q : E_j \times E_0 \to E_j$ bilinear mit*

$$\|Q[u,w]\|_{E_j} \leq c\|u\|_{E_j}\|w\|_{E_0} \ , \quad u \in E_j \ , \ w \in E_0 \ .$$

(b) *Für $u \in E_1$, $w \in E_0$ ist $\partial_y Q[u,w] \in E_0$ mit*

$$\begin{aligned}\partial_y Q[u,w](y) = \mathbf{1}_{[y>2y_0]} &\int_{y_0}^{y-y_0} \partial_1\eta(y-z,z)u(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &+ \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)\partial_y u(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &- 2\partial_y u(y) \int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &- 2u(y) \int_{y_0}^{\infty} \partial_2\eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z \ .\end{aligned}$$

***Beweis***. Zuerst zeigen wir Teil (b). Es sei $u \in E_1$. Nach Lemma 2.2 existiert eine Folge $(u_j) \subset \mathcal{D}(Y)$ mit $u_j \to u$ in $F$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ und jedes $t \in J_T$ erhalten wir aus dem Satz über Differenzierbarkeit von Parameterintegralen die Identität

$$\begin{aligned}\partial_y Q[u,w](y) = \mathbf{1}_{[y>2y_0]}&\eta(y_0, y-y_0)\underbrace{u_j(y_0)}_{=0}w(y-y_0) \\ &+ \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \partial_1\eta(y-z,z)u_j(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &+ \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)\partial_y u_j(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &- 2\partial_y u_j(y) \int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z \\ &- 2u_j(y) \int_{y_0}^{\infty} \partial_2\eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z \ .\end{aligned}$$

Wegen $\eta \in BC^1(Y \times Y, \mathbb{R}^+)$, $w \in E_0$ und $u_j \to u$ in $F$ folgt daraus Teil (b) der Aussage.

Um (a) zu zeigen, betrachten wir für $u \in E_0$

$$\begin{aligned}\|Q[u,w]\|_{E_0} &= \int_{y_0}^{\infty} y|Q[u,w]|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{y_0}^{\infty} y\mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)|u(y-z)||w(z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{y_0}^{\infty} 2y|u(y)| \int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)|w(z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \ .\end{aligned}$$

Mit

$$K := \|\eta\|_{BC^1(Y\times Y,\mathbb{R})}$$

folgt aus (2.4)

$$\begin{aligned}\|Q[u,w]\|_{E_0} \le K \int_{y_0}^{\infty} y\mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} |u(y-z)||w(z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ + 2K \int_{y_0}^{\infty} y|u(y)| \int_{y_0}^{\infty} |w(z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\ .\end{aligned}$$

Beachten wir

$$\begin{aligned}&\int_{y_0}^{\infty} y\mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} |u(y-z)||w(z)|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \\ &\qquad = \int_{y_0}^{\infty} |w(z)| \int_{z+y_0}^{\infty} y|u(y-z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\qquad = \int_{y_0}^{\infty} |w(z)| \int_{z+y_0}^{\infty} (y-z)|u(y-z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\qquad\quad + \int_{y_0}^{\infty} z|w(z)| \int_{z+y_0}^{\infty} |u(y-z)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &\qquad \le 2\frac{1}{y_0} \int_{y_0}^{\infty} z|w(z)| \int_{y_0}^{\infty} y|u(y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,\end{aligned}$$

so folgt sofort die erste Aussage des Lemmas für $j = 0$. Im Fall $j = 1$ erhält man die Behauptung, indem man mit $\partial_y Q$ völlig analog unter Berücksichtigung von (2.4) rechnet. □

Als nächstes möchten wir das Problem (1.1)–(1.4) abstrakt umformulieren, um es mit den Methoden der Halbgruppentheorie behandeln zu können. In [41] und [46] wurde im Rahmen der Halbgruppentheorie eine Operatorenfamilie und das von ihr generierte Evolutionssystem konstruiert und untersucht, sodass wir die Ergebnisse auf unseren Fall übertragen können. Der Vollständigkeit halber geben wir auch hier die Aussagen mit den Beweisen wieder.

Dafür definieren wir einen Diffeomorphismus $\Theta : Y \to (0,\infty)$ durch

$$\Theta(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y'}{\tau(y')}\ , \quad y \in Y\ . \tag{2.6}$$

Nun setzen wir für $f \in E_0$

$$(W(t)f)(y) := \mathbf{1}_{[t,\infty)}(\Theta(y))\,\frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-t))}{\tau(y)} f(\Theta^{-1}(\Theta(y)-t))\ , \quad y \in Y\ ,\ t \ge 0\ . \tag{2.7}$$

In [46] wurde gezeigt, dass $\{W(t); t \geq 0\}$ eine stark stetige positive Halbgruppe auf $E_0$ ist, wobei der entsprechende Generator $-A$ durch den Operator

$$Au = \partial_y(\tau u), \quad u \in D(A) = E_1 = \{f \in E_0 : \partial_y(\tau f) \in E_0, f(y_0) = 0\} \tag{2.8}$$

gegeben ist. Der Vollständigkeit halber führen wir den Beweis an.

**Lemma 2.4.** *Der in* (2.8) *definierte Operator* $-A$ *generiert eine stark stetige positive Halbgruppe* $\{W(t);\ t \geq 0\}$ *auf* $E_0$. *Sie ist durch* (2.7) *gegeben und erfüllt die Bedingung*

$$\|W(t)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq e^{\tau^* t}\ , \quad t \geq 0\ . \tag{2.9}$$

***Beweis***. Als erstes bemerken wir, dass

$$\Theta^{-1}(\Theta(y) + t) \leq y e^{t\tau^*}\ , \quad y > y_0, t \geq 0\ . \tag{2.10}$$

Dafür sei

$$z = \Theta^{-1}(\Theta(y) + t)$$

mit $y \in Y$ und $t \geq 0$ beliebig. Dann

$$t = \Theta(z) - \Theta(y) = \int_y^z \frac{\mathrm{d}y'}{\tau(y')} \geq \int_y^z \frac{\mathrm{d}y'}{\tau^* y'}\ ,$$

wobei wir in der letzten Ungleichung (2.3) verwendet haben. Daraus folgt

$$\frac{1}{\tau^*} \ln z - \frac{1}{\tau^*} \ln y \leq t$$

und damit (2.10).
Mit der Substitution

$$y := \Theta^{-1}(\Theta(z) + t)\ , \quad \mathrm{d}y = \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(z) + t))}{\tau(z)}\,\mathrm{d}z$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|W(t)f\|_{E_0} &= \int_{\Theta^{-1}(t)}^{\infty} \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y) - t))}{\tau(y)} |f(\Theta^{-1}(\Theta(y) - t))| y \,\mathrm{d}y \\
&= \int_{y_0}^{\infty} \frac{\tau(z)}{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(z) + t))} |f(z)| \Theta^{-1}(\Theta(z) + t)) \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(z) + t))}{\tau(z)}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{y_0}^{\infty} |f(z)| \Theta^{-1}(\Theta(z) + t)\,\mathrm{d}z \\
&\leq e^{\tau^* t} \int_{y_0}^{\infty} |f(z)| z \,\mathrm{d}z \\
&= e^{\tau^* t} \|f\|_{E_0}\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt (2.10) benutzt haben. Somit erfüllt $\{W(t); t \geq 0\}$ (2.9).
Nun zeigen wir, dass (2.7) eine stark stetige Halbgruppe auf $E_0$ definiert. Für $f \in E_0$ gilt offensichtlich

$$[W(0)f]\,(y) = f(y)\ , \quad y_0 < y < \infty\ .$$

Die Halbgruppen-Eigenschaft erkennt man anhand der Gleichung

$$\begin{aligned}
&[W(s)W(t)f](y)\\
&\quad = \mathbf{1}_{[s,\infty)}\,(\Theta(y))\,\frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s))}{\tau(y)}\,[W(t)f]\,(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s))\\
&\quad = \mathbf{1}_{[t+s,\infty)}\,(\Theta(y))\,\frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s))}{\tau(y)} \times \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s)))-t)}{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s))}\\
&\qquad\qquad \times f(\Theta^{-1}(\Theta(\Theta^{-1}(\Theta(y)-s)))-t)\\
&\quad = \mathbf{1}_{[t+s,\infty)}\,(\Theta(y))\,\frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-(s+t)))}{\tau(y)} f(\Theta^{-1}(\Theta(y)-(s+t)))\\
&\quad = [W(s+t)f](y)\ , \quad s,t \geq 0\ ,\ y_0 < y < \infty\ .
\end{aligned}$$

Um die starke Stetigkeit von $\{W(t); t \geq 0\}$ auf $E_0$ zu zeigen, sei $f \in E_0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Ferner sei $f^F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die triviale Fortsetzung der Funktion $f$ von $(y_0, \infty)$ auf $\mathbb{R}^+$. Nach [3, Theorem X.4.14] gibt es ein $g \in C_c(\mathbb{R}^+)$ mit $\|f^F - g\|_{E_0} < \varepsilon/(2 + e^{\tau^*})$. Da der Träger von $g$ kompakt ist, finden wir wegen (2.3) ein $R > 0$, sodass $\mathrm{supp}(W(h)g) \subset [0, R]$ für alle $h \in [0, 1]$. Da $g$ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta \in (0, 1]$ mit

$$\|W(h)g - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{(2 + e^{\tau^*})R}\ , \quad 0 < h < \delta\ .$$

Wegen $\mathrm{supp}(W(h)g - g) \subset [0, R]$ gilt nun offensichtlich

$$\|W(h)g - g\|_{E_0} < \varepsilon/(2 + e^{\tau^*})\ , \quad 0 < h < \delta\ .$$

Da

$$\begin{aligned}
\|W(h)f - f\|_{E_0} &= \|W(h)f^F - f^F\|_{E_0}\\
&\leq \|W(h)f^F - W(h)g\|_{E_0} + \|W(h)g - g\|_{E_0} + \|g - f^F\|_{E_0}
\end{aligned}$$

und, wegen (2.10),

$$\begin{aligned}
&\|W(h)f^F - W(h)g\|_{E_0}\\
&= \int_{\Theta^{-1}(h)}^{\infty} \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-h))}{\tau(y)} \left| f^F(\Theta^{-1}(\Theta(y)-h)) - g(\Theta^{-1}(\Theta(y)-h)) \right| y \, \mathrm{d}y\\
&= \int_{y_0}^{\infty} |f^F(z) - g(z)| \Theta^{-1}(\Theta(z)+h) \, \mathrm{d}z\\
&\leq e^{\tau^* h} \int_{y_0}^{\infty} |f^F(z) - g(z)| z \, \mathrm{d}z\\
&\leq e^{\tau^*} \|f^F - g\|_{E_0}
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir

$$\|W(h)f - f\|_{E_0} \leq \varepsilon$$

für $0 < h < \delta$. Da $\varepsilon$ beliebig gewählt wurde, zeigt die letzte Abschätzung die starke Stetigkeit von $\{W(t), t \geq 0\}$.
Damit ist gezeigt, dass (2.7) eine stark stetige positive Halbgruppe auf $E_0$ definiert, welche die Bedingung (2.9) erfüllt. Es bleibt noch zu zeigen, dass der entsprechende Generator $-A$ durch (2.8) gegeben ist.

Für $f \in C_c^1(Y)$ (der Raum der stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf $Y$) gilt $f \in L_1(Y, y\mathrm{d}y)$, $\partial_y f \in L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ und

$$\int_{y_0}^{\infty} \left| \frac{\mathbf{1}_{[h,\infty)}(\Theta(y)) \tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-h)) f(\Theta^{-1}(\Theta(y)-h)) - \tau(y) f(y)}{h\tau(y)} - \partial_y(\tau f)(y) \right| y \, \mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{y_0}^{\Theta^{-1}(h)} \left| \frac{f(y)}{-h} - \partial_y(\tau f)(y) \right| y \, \mathrm{d}y\\
&\quad + \int_{h}^{\infty} \left| \frac{\tau(\Theta^{-1}(z-h)) f(\Theta^{-1}(z-h)) - \tau(\Theta^{-1}(z)) f(\Theta^{-1}(z))}{h} - \partial_z(\tau f)(\Theta^{-1}(z)) \right|\\
&\qquad\qquad \times \Theta^{-1}(z) \, \mathrm{d}z \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $z := \Theta(y)$ unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\tau(\Theta^{-1}(z)) = (\Theta^{-1})'(z)$, verwendet haben. Da $f \in C_c^1(Y)$ und $\Theta$ ein strikt wachsender Diffeomorphismus mit $\Theta^{-1}(0) = y_0$ ist, konvergieren die beiden Summanden auf der rechten Seite der letzten Gleichung gegen 0 für $h \to 0$.
Daraus folgt, dass $\dfrac{(W(h)f - f)}{h} \to \partial_y(\tau f)$ in $E_0$ für $h \to 0$ und damit

$$f \in D(A) \ , \quad Af = \partial_y(\tau f) \tag{2.11}$$

für $f \in C_c^1(Y)$. Der Raum $C_c^1(Y)$ ist offensichtlich invariant unter $W(t)$. Da $C_c^1(Y)$ eine dichte Teilmenge von $E_0$ ist, ist der Raum $C_c^1(Y)$ nach [16, Proposition 1.7] dicht in $D(A)$, d.h. für jedes $f \in D(A)$ existiert eine Folge $(f_n) \subset C_c^1(Y)$ mit $\|f - f_n\|_{E_0} + \|Af - Af_n\|_{E_0} \to 0$ für $n \to \infty$. Daraus zusammen mit (2.11) folgt (2.8). □

Im Weiteren sei $J_T := [0,T]$ für $T > 0$. Für ein gegebenes $R > 1$ definieren wir

$$\mathcal{V}_{T,R} := \left\{ v \in C^1(J_T) \; ; \; R^{-1} \le v(t) \le \|v\|_{C^1(J_T)} \le R \right\} . \tag{2.12}$$

Für eine Funktion $v \in \mathcal{V}_{T,R}$ und eine Abbildung $\tau$, welche die Bedingung (2.3) erfüllt, definieren wir ferner den Operator

$$\mathbb{A}_v(t)u := v(t)\partial_y(\tau u) - L[u] \; , \quad u \in E_1 \; , \quad t \in J_T \; . \tag{2.13}$$

Aus Lemma 2.4 und $L \in \mathcal{L}(E_0)$ folgt mit dem Störungssatz [38, Theorem 3.1.1], dass $-\mathbb{A}_v(t)$ eine stark stetige Halbgruppe auf $E_0$ für $t \in J_T$ generiert. Es gilt sogar die folgende Aussage über die Operatorenfamilie $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$.

**Satz 2.5.** *Es sei $R > 0, T_0 > 0$ gegeben und $0 < T \le T_0$. Dann generiert $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$ für jedes $v \in \mathcal{V}_{T,R}$ ein eindeutiges Evolutionssystem $U_v(t,s)$, $0 \le s \le t \le T$, in $E_0$, und es existiert ein $\omega_0 := \omega_0(T_0, R) > 0$, sodass*

$$\|U_v(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \le e^{\omega_0(t-s)} \; , \quad 0 \le s \le t \le T \; , \; v \in \mathcal{V}_{T,R} \tag{2.14}$$

*und*

$$\|U_v(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \le \omega_0 \; , \quad 0 \le s \le t \le T \; , \; v \in \mathcal{V}_{T,R} \; . \tag{2.15}$$

*Ferner gilt für $v, w \in \mathcal{V}_{T,R}$*

$$\|U_v(t,s) - U_w(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \le \omega_0(t-s)\|v-w\|_{C(J_T)} \; , \quad 0 \le s \le t \le T \; . \tag{2.16}$$

***Beweis***. Den hier vorgestellten Beweis findet man auch in [41, Proposition 2.2]. Wir geben ihn der Vollständigkeit halber wieder. Da $L$ ein linearer beschränkter Operator auf $E_0$ ist, folgt aus Lemma 2.4 und dem Störungssatz [38, Theorem 3.1.1], dass für jedes feste $v \in \mathcal{V}_{T,R}$ und jedes $s \in J_T$ der Operator $-\mathbb{A}_v(s)$ eine stark stetige Halbgruppe auf $E_0$ generiert. Für diese Halbgruppe gilt wegen (2.9)

$$\|e^{-t\mathbb{A}_v(s)}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \le e^{\bar{\omega}t} \; , \quad t \ge 0 \tag{2.17}$$

mit $\bar{\omega} := R\tau^* + \|L\|_{\mathcal{L}(E_0)}$. Daraus folgt, dass die Familie $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$ für jedes $v \in \mathcal{V}_{T,R}$ im Sinne von [38, Def. 5.2.1.] stabil ist. Ferner ist die Abbildung

$$t \mapsto \mathbb{A}_v(t)u$$

stetig differenzierbar in $E_0$ auf $[0,T]$ für $u \in E_1$ mit der Ableitung

$$\dot{\mathbb{A}}_v(t)u := \dot{v}(t)\partial_y(\tau u) \ .$$

Der Definitionsbereich $D(\mathbb{A}_v(t)) = E_1$ ist außerdem unabhängig von $t \in [0,T]$. Wir können daher [38, Theorem 5.4.8] anwenden, welches besagt, dass in diesem Fall für jedes $v \in \mathcal{V}(T,R)$ ein eindeutiges Evolutionssystem $U_v(t,s), 0 \leq s \leq t \leq T$, in $E_0$ existiert, das die Bedingungen $(E_1) - (E_5)$ aus [38, §5] erfüllt. Es gilt insbesondere die Abschätzung (2.14) (mit $\bar{\omega}$ anstelle von $\omega_0$). Darüber hinaus zeigt der Beweis von [38, Theorem 5.4.8], dass die Familie $\{-\mathbb{A}_v(t)\}_{t\in[0,T]}$ die Bedingungen $(H_1)$, $(H_2^+)$ und $(H_3)$ aus [38, §5] erfüllt.

Wir definieren für jedes $t \in J_T$ den Operator

$$P_v(t) := \omega + \mathbb{A}_v(t)$$

mit $\omega := \bar{\omega} + 1$. Dann folgt aus dem Hille-Yosida Theorem, dass $\omega \in \rho(-\mathbb{A}_v(t))$. Somit gilt $P_v(t) \in \mathcal{L}_{is}(E_1, E_0)$ und

$$\|P_v(t)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \leq \omega + R + \|L\|_{\mathcal{L}(E_0)} \ , \quad t \in J_T \ , \ v \in \mathcal{V}_{T,R} \ . \tag{2.18}$$

Für $u \in E_1$ gilt darüber hinaus

$$P_v(\cdot)u \in C^1(J_T, E_0) \quad \text{ mit } \dot{P}_v(t)u := \dot{v}(t)\partial_y(\tau u) \ .$$

Da die Voraussetzungen $(H_1)$, $(H_2^+)$ und $(H_3)$ aus [38, §5] erfüllt sind, können wir den Beweis von [38, Theorem 5.4.6] verwenden und eine Zerlegung

$$U_v(t,s) = P_v(t)^{-1} W_v(t,s) P_v(s) \ , \quad 0 \leq s \leq t \leq T \tag{2.19}$$

angeben, wobei $W_v(t,s) \in \mathcal{L}(E_0)$ die Gleichung

$$W_v(t,s)u = U_v(t,s)u + \int_s^t W_v(t,r)C_v(r)U_v(r,s)u \,\mathrm{d}r \tag{2.20}$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$ und $u \in E_0$ erfüllt mit

$$C_v(t) := \dot{P}_v(t)P_v(t)^{-1} \in \mathcal{L}(E_0) \ , \quad t \in J_T \ .$$

Jetzt wollen wir zeigen, dass eine Konstante $C_0(R) > 0$ existiert, sodass

$$\|P_v(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \leq C_0(R) \ , \quad t \in J_T \ , \ v \in \mathcal{V}_{T,R} \ . \tag{2.21}$$

Aus dem Theorem von Hille-Yosida und (2.17) folgt

$$\|P_v(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq 1 \ , \quad t \in J_T \ .$$

Es gilt außerdem für $u \in E_0$ und $t \in J_T$

$$u = P_v(t)P_v(t)^{-1}u = (\omega + v(t)\partial_y(\tau\cdot) - L)P_v(t)^{-1}u$$

und folglich

$$\partial_y(\tau P_v(t)^{-1}u) = \frac{u - (\omega - L)P_v(t)^{-1}u}{v(t)} \ .$$

Daraus erhalten wir für $u \in E_0$ und $t \in J_T$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}\|P_v(t)^{-1}u\|_{E_1} &= \|P_v(t)^{-1}u\|_{E_0} + \|\partial_y(\tau P_v(t)^{-1})u\|_{E_0} \\ &\leq \|u\|_{E_0} + \frac{1}{v(t)}\|u - (\omega - L)P_v(t)^{-1}u\|_{E_0} \\ &\leq (1 + R(1 + \omega + \|L\|_{\mathcal{L}(E_0)}))\|u\|_{E_0} \ ,\end{aligned}$$

woraus sich (2.21) ergibt. Folglich kommen wir auf

$$\begin{aligned}\|C_v(t)\|_{\mathcal{L}(E_0)} &\leq \|\dot{P}_v(t)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\|P_v(t)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E_0,E_1)} \\ &\leq \|\dot{v}\|_{C(J_T)}C_0(R) \leq C_0'(R)\end{aligned} \tag{2.22}$$

für $t \in J_T$ und $v \in \mathcal{V}_{T,R}$. Aus (2.22), (2.14) und dem Beweis von [38, Lemma 5.4.5] folgt nun, dass eine Konstante $C(T_0, R) > 0$ existiert, sodass

$$\|W_v(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \leq C(T_0, R) \ , \quad 0 \leq s \leq t \leq T \ , \ v \in \mathcal{V}_{T,R} \ . \tag{2.23}$$

Jetzt wenden wir die Abschätzungen (2.18), (2.21) und (2.23) auf (2.19) an und damit ist (2.15) bewiesen.

Um die letzte Aussage des Satzes zu zeigen, wählen wir $v, w \in \mathcal{V}_{T,R}$ und $u \in E_1$ beliebig. Ferner definieren wir für $0 \leq s < t \leq T$

$$N := [\sigma \mapsto U_v(t,\sigma)U_w(\sigma,s)u] \ .$$

Dann folgt aus (2.15) und aus den Eigenschaften $(E_4)$ und $(E_5)$ des Evolutionssystems, dass $N \in C([s,t], E_1)$. Es gilt ferner für $0 \leq s < \sigma < t \leq T$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\sigma}N(\sigma) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{U_v(t,\sigma+h)U_w(\sigma+h,s)u - U_v(t,\sigma)U_w(\sigma,s)u}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \Bigg[\frac{U_v(t,\sigma+h)U_w(\sigma+h,s)u - U_v(t,\sigma+h)U_w(\sigma,s)u}{h} \\ &\qquad + \frac{U_v(t,\sigma+h)U_w(\sigma,s)u - U_v(t,\sigma)U_w(\sigma,s)u}{h}\Bigg] \\ &= \lim_{h\to 0^+} \Bigg[U_v(t,\sigma+h)\frac{U_w(\sigma+h,\sigma) - I}{h}U_w(\sigma,s)u \\ &\qquad + U_v(t,\sigma+h)\frac{I - U_v(\sigma+h,\sigma)}{h}U_w(\sigma,s)u\Bigg] \ .\end{aligned} \tag{2.24}$$

Die Eigenschaft $(E_4)$ aus [38, §5] impliziert

$$U_w(\sigma,s)u \in D(\mathbb{A}_w(\sigma)) = D(\mathbb{A}_v(\sigma)) = E_1$$

für $0 \le s \le \sigma \le t \le T$ und $u \in E_1$. Dann erhalten wir für $0 \le s < \sigma < t \le T$ aus (2.14), der starken Stetigkeit von $U_v(t,s), 0 \le s \le t \le T$, der Eigenschaft $(E_2)$ aus [38, §5] und (2.24) die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^+}{\mathrm{d}\sigma} N(\sigma) = U_v(t,\sigma)(\mathbb{A}_v(\sigma) - \mathbb{A}_w(\sigma))U_w(\sigma,s)u \; . \tag{2.25}$$

Da die rechte Seite in (2.25) stetig in $E_0$ für $0 \le s \le \sigma \le t \le T$ ist, gilt auch $N \in C^1((s,t),E_0)$ mit

$$\dot{N}(\sigma) = U_v(t,\sigma)(\mathbb{A}_v(\sigma) - \mathbb{A}_w(\sigma))U_w(\sigma,s)u \; , \quad 0 \le s < \sigma < t \le T \; .$$

Daraus folgt nun zusammen mit (2.14) und (2.15) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|U_w(t,s)u - U_v(t,s)u\|_{E_0} &= \|N(t) - N(s)\|_{E_0} = \| \int_s^t \dot{N}(\sigma)\mathrm{d}\sigma \|_{E_0} \\
&\le \int_s^t \|U_v(t,\sigma)\|_{\mathcal{L}(E_0)} \|\mathbb{A}_v(\sigma) - \mathbb{A}_w(\sigma)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \|U_v(t,\sigma)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \,\mathrm{d}\sigma \|u\|_{E_1} \\
&\le C(T_0,R)(t-s)\|v-w\|_{C(J_T)}\|u\|_{E_1}
\end{aligned}$$

für $0 \le s \le t \le T$ und damit ist (2.16) bewiesen. $\square$

**Bemerkung 2.6.** Im Beweis von Satz 2.5 wurde gezeigt, dass das Evolutionssystem $U_v(t,s), 0 \le s \le t \le T$ mit $v \in \mathcal{V}_{T,R}$ die Eigenschaften $(E_1) - (E_5)$ aus [38, §5] hat. Aus $(E_4)$ und $(E_5)$ folgt insbesondere, dass für $u^0 \in E_1$

$$[t \mapsto U_v(t,0)u^0] \in C(J_T, E_1) \; . \tag{2.26}$$

Da $U_v(t,s)u^0 \in E_1$ für $0 \le s \le t \le T$ (die Eigenschaft $(E_4)$), erhalten wir ferner für $0 \le s \le t \le T$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^+}{\partial t} U(t,s)u^0 &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,s)u^0 - U(t,s)u^0}{h} \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{U(t+h,t) - I}{h} U(t,s)u^0 = -\mathbb{A}_v(t)U(t,s)u^0 \; .
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile von (2.27) die Eigenschaft $(E_2)$ verwendet. Wir wissen nun, dass $t \mapsto U(t,s)u^0$ stetig in $E_1$ und $t \mapsto -\mathbb{A}_v(t)$ stetig in $\mathcal{L}(E_1,E_0)$

ist (im vorherigen Satz wurde gezeigt, dass insbesondere die Bedingung $(H_3)$ aus [38, §5] erfüllt ist). Daraus folgt, dass die rechte Seite von (2.27) stetig in $E_0$ ist. Folglich ist $t \mapsto U_v(t,s)u^0$ stetig differenzierbar in $E_0$ für $0 \le s \le t \le T$, und die Ableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,s)u^0 = -\mathbb{A}_v(t)U(t,s)u^0 \ , \quad 0 \le s \le t \le T \ . \tag{2.28}$$

Damit gilt für $u^0 \in E_1$ und $0 \le s \le t \le T$

$$[t \mapsto U_v(t,s)u^0] \in C^1(J_T, E_0) \cap C(J_T, E_1) \tag{2.29}$$

und $U_v(t,s)u^0$, $0 \le s \le t \le T$, ist die eindeutige klassische Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dot{u} + \mathbb{A}_v(t)u = 0 & \text{für } 0 \le s < t \le T \ , \\ u(s) = u^0 \ . \end{cases} \tag{2.30}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus [38, Theorem 5.5.2].

Im nächsten Lemma verwenden wir die Notation $-A_v(t) = -v(t)\partial_y(\tau\cdot)$. Es handelt sich dabei um eine Abschätzung für das entsprechende eindeutige Evolutionssystem in $L_1(Y) := L_1(Y, \mathrm{d}y)$. Die Existenz des Evolutionssystems zeigt man völlig analog zum Beweis von Satz 2.5. Die Aussage des Lemmas wird uns in Kapitel 3 für den Nachweis der Existenz einer schwachen Lösung für das Problem (1.1)–(1.4) behilflich sein.

**Lemma 2.7.** *Es sei $v \in C^1([0,T], \mathbb{R}^+)$, $v(t) > 0$ für alle $t \in [0,T]$ und es sei $U_{A_v}(t,s)$, $0 \le s \le t \le T$, das eindeutige Evolutionssystem in $L_1(Y)$ für*

$$-A_v(t) := -v(t)\partial_y(\tau\cdot) \ , \quad 0 \le t \le T \ .$$

*Für $M > y_0$ und $\delta > 0$ definieren wir*

$$\lambda_M(\delta) := \tau^* M \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0, M), \\ |\mathcal{E}| \le \delta}} \int_{\mathcal{E}} \frac{\mathrm{d}z}{\tau(z)} \ .$$

*Dann gilt*

$$\sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0, M), \\ |\mathcal{E}| \le \delta}} \int_{\mathcal{E}} U_{A_v}(t,s) f \,\mathrm{d}y \le \sup_{\substack{\mathcal{F} \subset (y_0, M), \\ |\mathcal{F}| \le \lambda_M(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} f \,\mathrm{d}y$$

*für alle $f \in L_1^+(Y)$ und $0 \le s \le t \le T$. Dabei sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ messbare Teilmengen von $(y_0, M)$ und $|\cdot|$ bezeichnet das Lebesgue-Maß.*

***Beweis***. Den hier angeführten Beweis findet man in [46, Lemma 4.1]. Es sei $\mathcal{E}$ eine messbare Teilmenge von $(y_0, M)$ und $f \in L_1^+(Y)$ sei beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} W(t)f \,\mathrm{d}y &= \int_{\Theta^{-1}(t)}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(y) \frac{\tau(\Theta^{-1}(\Theta(y)-t))}{\tau(y)} f(\Theta^{-1}(\Theta(y)-t)) \,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{E}}(\Theta^{-1}(\Theta(z)+t)) f(z) \,\mathrm{d}z \\ &= \int_{y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-t)\cap(0,\infty)\big)}(y) f(y) \,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

mit $\Theta$ aus (2.6). Dabei haben wir die Substitution

$$z := \Theta^{-1}(\Theta(y)-t)$$

verwendet und die Tatsache, dass

$$\Theta^{-1}(\Theta(z)+t) \in \mathcal{E} \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-t) \cap (0,\infty)\big)$$

berücksichtigt. Da $\Theta^{-1}(0) = y_0$, $\Theta^{-1}$ wachsend ist und $\mathcal{E} \subset (y_0, M)$, gilt

$$\Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-t) \cap (0,\infty)\big) \subset (y_0, M) \ .$$

Sei nun $\mathcal{E} \subset (y_0, M)$ messbar mit $|\mathcal{E}| \leq \delta$. Wegen $\tau(y) \leq \tau^* y$ für $y \geq y_0$ ergibt sich die Abschätzung

$$\frac{1}{\tau^* M} |\Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-t) \cap (0,\infty)\big)| \leq \sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,M),\\ |\mathcal{E}|\leq\delta}} \int_{\mathcal{E}} \frac{\mathrm{d}z}{\tau(z)} \ ,$$

weil das Lebesgue-Maß translationsinvariant ist, und somit

$$|\Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-t) \cap (0,\infty)\big)| \leq \lambda_M(\delta) \ .$$

Da das eindeutige Evolutionssystem zu $\{-A_v(t)\}_{t\in[0,T]}$ durch

$$U_{A_v}(t,s) = W\left(\int_s^t v(r)\mathrm{d}r\right) \ , \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

gegeben ist, erhalten wir für $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{E}} W\left(\int_s^t v(r)\,\mathrm{d}r\right) f(y)\,\mathrm{d}y &= \int_{y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\Theta^{-1}\big((\Theta(\mathcal{E})-(\int_s^t v(r)\,\mathrm{d}r))\cap(0,\infty)\big)}(y) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,M),\\ |\mathcal{F}|\leq\lambda_M(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} f(y)\,\mathrm{d}y \ .\end{aligned}$$

Da die letzte Ungleichung für alle messbaren $\mathcal{E} \subset (y_0, M)$ mit $|\mathcal{E}| \leq \delta$ gilt, folgt daraus die Behauptung. $\square$

## 2.2. Abstrakte Formulierung des Problems

In diesem Abschnitt formulieren wir das ursprüngliche Problem (1.1)–(1.4) abstrakt.
Dafür definieren wir für $u \in E_0$ die Abbildung

$$g(u) := 2\int_{y_0}^{\infty} u(y)\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \tag{2.31}$$

und erinnern uns an den in (1.14) definierten Operator $Q$ mit

$$Q[u,w](y) = \mathbf{1}_{[y>2y_0]}\int_{y_0}^{y-y_0}\eta(y-z,z)u(y-z)w(z)\,\mathrm{d}z - 2u(y)\int_{y_0}^{\infty}\eta(z,y)w(z)\,\mathrm{d}z$$

sowie an den in (1.13) gegebenen Operator $L$ mit

$$L[u](y) = -(\mu(y)+\beta(y))u(y) + 2\int_y^{\infty}\beta(z)\kappa(y,z)u(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{für fast alle } y \in Y\ .$$

Außerdem führen wir den Operator

$$\mathbb{A}_v(t,u)u = \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\partial_y(\tau u) - L[u]\ , \quad u \in E_1\ , \quad t \in J_T$$

ein. Mit diesen Bezeichnungen können wir nun das Problem (1.1)–(1.4) in der Form

$$\dot v = \lambda - \gamma v - \frac{v}{1+\nu\|u\|_{E_0}}|\tau u|_1 + g(u)\ , \quad t>0\ , \quad v(0)=v^0\ , \quad u \geq 0 \tag{2.32}$$

und

$$\dot u + \mathbb{A}_v(t,u)u = Q[u,u]\ , \quad t>0\ , \quad u(0)=u^0 \tag{2.33}$$

schreiben, wobei $|\cdot|_1$ die Norm in $L_1(Y) = L_1(Y,dy)$ und $\|\cdot\|_{E_0}$ die Norm in $E_0 = L_1(Y,ydy)$ bezeichnet.

## 2.3. Strukturelle Vorbemerkung

Zuerst betrachten wir den Fall $\nu = 0$ (der Fall $\nu > 0$ wird in Abschnitt 2.6 ausführlich behandelt).
Dann lässt sich das abstrakte Problem (2.32), (2.33) als

$$\dot v = \lambda - \gamma v - v|\tau u|_1 + g(u)\ , \quad t>0\ , \quad v(0)=v^0\ , \quad u\geq 0 \tag{2.34}$$

und

$$\dot u + \mathbb{A}_v(t)u = Q[u,u]\ , \quad t>0\ , \quad u(0)=u^0 \tag{2.35}$$

schreiben mit

$$\mathbb{A}_v(t)u = v(t)\partial_y(\tau u) - L[u]\ , \quad u \in E_1\ , \quad t \in J_T\ .$$

Da die rechte Seite in (2.35) nicht linear in $u$ ist, versuchen wir, das Problem lokal so zu modifizieren bzw. in einige Schritte aufzuteilen, dass wir die lineare Theorie anwenden können.

Wir fixieren nun einige wesentliche Begriffe, die wir im weiteren Verlauf von Kapitel 2 beibehalten:

$$X_T := \{u \in C(J_T, E_0^+)\ ;\ \|u(t)\|_{E_0} \leq 2\omega_0 S + 1\ ,\ t \in J_T\}$$

und

$$W_T := \{u \in C(J_T, E_1^+)\ ;\ \|u(t)\|_{E_1} \leq 2\omega_0 S + 1\ ,\ t \in J_T\}$$

für $S > 0$ und $\omega_0$ aus (2.15). Offensichtlich sind dies vollständige metrische Räume. Mit $c(S)$ werden wir eine generische positive Konstante bezeichnen, die von $S$ abhängt, aber nicht von $T \in (0,1]$ und die sich von Zeile zu Zeile ändern kann.

Die Idee ist, für festes $\overline{u} \in X_T$ die gewöhnliche Differentialgleichung (2.34) vorzulösen und diese Lösung in die Gleichung (2.35) einzusetzen. Linearisiert man zusätzlich die rechte Seite $Q[u,u]$, so erhält man eine inhomogene nichtautonome hyperbolische Differentialgleichung, die mit Hilfe eines Fixpunktargumentes im Raum $W_T$ gelöst werden kann, falls $T > 0$ klein genug ist. Ferner wird gezeigt, dass die entsprechende Lösungsabbildung $\overline{u} \mapsto u(\overline{u})$ genau einen Fixpunkt im Raum $X_T$ für ein kleines $T$ besitzt. Es ist an dieser Stelle zu bemerken, dass die für die letzte Aussage verwendete Abschätzung (2.16) eine Kontraktion nur in $X_T$ und nicht in $W_T$ garantiert. Anschließend wird gezeigt, dass dieser Fixpunkt eine klassische Lösung des Problems (2.34), (2.35) definiert, die darüber hinaus zeitlich global existiert.

Für den Fall $\nu > 0$ wird eine zusätzliche Menge

$$\begin{aligned} Z_T = \Big\{u \in X_T\ :\ &\int_{y_0}^\infty y u(\cdot, y)\mathrm{d}y \in C^1(J_T)\ , \\ &\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^\infty y u(t,y)\mathrm{d}y\right| \leq r(S)\ ,\ t \in J_T\ ,\ u(0) = u^0\Big\} \end{aligned}$$

mit

$$r(S) := (2S\omega_0 + 1)\nu\Big[(S + (2S\omega_0 + 1)\|\beta\|_\infty + \lambda)\tau^* + \|\mu\|_\infty + \|\beta\|_\infty\Big]$$

eingeführt. Nun findet man wie oben für ein festes $\hat{u} \in Z_T$ eine eindeutige klassische Lösung des Systems

$$\dot{v} = \lambda - \gamma v - \frac{v}{1+\nu\|\hat{u}\|_{E_0}}|\tau u|_1 + g(u) \ , \quad t > 0 \ , \quad v(0) = v^0 \ , \quad u \geq 0$$

und

$$\dot{u} + \mathbb{A}_v(t,\hat{u})u = Q[u,u] \ , \quad t > 0 \ , \quad u(0) = u^0 \ .$$

Im weiteren Verlauf wird gezeigt, dass die Abbildung $\hat{u} \mapsto u(\hat{u})$ für kleine Anfangswerte $(v^0, u^0)$ eine strikte Kontraktion auf $Z_T$ für $T > 0$ klein genug definiert, was die Existenz einer eindeutigen globalen klassischen Lösung für (2.32), (2.33) beweist.

## 2.4. Lokale Existenz im Fall $\nu = 0$

Im folgenden Lemma betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung (2.34) mit $u$ ersetzt durch ein festes $\overline{u} \in X_T$ und zeigen, dass sie eine eindeutige Lösung in der Menge $\mathcal{V}_{T,R}$ (wurde in (2.12) definiert) für ein $R := R(S) > 1$ besitzt.

**Lemma 2.8.** *Es sei $S > 0$, $\overline{u} \in X_T$, $S^{-1} \leq v^0 \leq S$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $v_{\overline{u}}$ der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$\dot{v} = \lambda - \gamma v - v|\tau\overline{u}|_1 + g(\overline{u}) \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ , \quad v(0) = v^0 \ . \tag{2.36}$$

*Es gibt ein $R := R(S) > 1$, das nicht von $T \in (0,1]$ abhängt, sodass $v_{\overline{u}} \in \mathcal{V}_{T,R}$, wobei die Menge $\mathcal{V}_{T,R}$ in (2.12) gegeben ist. Es gilt darüber hinaus*

$$|v_{\overline{u}_1}(t) - v_{\overline{u}_2}(t)| \leq Tc(S)\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C([0,T],E_0)} \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ , \quad \overline{u}_1, \overline{u}_2 \in X_T \ . \tag{2.37}$$

***Beweis***. Aus den Ungleichungen

$$\big||\tau\overline{u}(t_1)|_1 - |\tau\overline{u}(t_2)|_1\big| \leq |\tau(\overline{u}(t_1) - \overline{u}(t_2))|_1 \leq \tau^*\|\overline{u}(t_1) - \overline{u}(t_2)\|_{E_0} \ , \qquad t_1, t_2 \in [0,T] \ , \quad \overline{u} \in X_T \tag{2.38}$$

und

$$\begin{aligned} |g(\overline{u}(t_1)) - g(\overline{u}(t_2))| &= \Big|2\int_{y_0}^{\infty} (\overline{u}(t_1,y) - \overline{u}(t_2,y))\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\Big| \\ &\leq \|\beta\|_\infty \int_{y_0}^{\infty} |\overline{u}(t_1,y) - \overline{u}(t_2,y)|y\,\mathrm{d}y \\ &= \|\beta\|_\infty\|\overline{u}(t_1) - \overline{u}(t_2)\|_{E_0} \ , \quad t_1, t_2 \in [0,T] \ , \quad \overline{u} \in X_T \end{aligned} \tag{2.39}$$

folgt, dass $|\tau\overline{u}|_1,\ g(\overline{u}) \in C(J_T)$ für $\overline{u} \in X_T$ (in der Ungleichung in (2.39) haben wir (1.8) verwendet und in (2.38) wurden (2.3) und die Positivität von $\overline{u}$ benutzt). Diese Funktionen sind außerdem auf $J_T$ beschränkt, weil $\overline{u} \in X_T$. Nun bezeichnen wir durch $h : J_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die rechte Seite von (2.36), d.h.

$$h(t,v) := \lambda - \gamma v - v|\tau\overline{u}(t)|_1 + g(\overline{u}(t)) \ , \quad t \in J_T \ , \quad v \in \mathbb{R} \ . \tag{2.40}$$

Dann gilt $h \in C(J_T \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ und es existiert ein $c(S) > 0$, sodass

$$|h(t,v_1) - h(t,v_2)| \leq c(S)|v_1 - v_2| \ , \quad t \in [0,T] \ , \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R} \ .$$

Folglich besitzt die Gleichung (2.36) eine eindeutige Lösung $v_{\overline{u}} \in C^1(J_T)$, die durch

$$v_{\overline{u}}(t) = e^{-\gamma t - \int_0^t |\tau\overline{u}(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} v^0 + \int_0^t e^{-\gamma(t-s) - \int_s^t |\tau\overline{u}(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} (\lambda + g(\overline{u}(s)))\,\mathrm{d}s \ , \quad t \in J_T \tag{2.41}$$

gegeben ist. Aus (2.41) erhält man die Abschätzung

$$v_{\overline{u}}(t) \geq e^{-\gamma t - \tau^*(2\omega_0 S + 1)t} v^0 \geq c(S) \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ , \tag{2.42}$$

weil $g(\overline{u})$ nichtnegativ ist. Wenn man berücksichtigt, dass $v^0 \leq S$, $T \leq 1$,

$$g(\overline{u}) \leq \|\beta\|_\infty (2\omega_0 S + 1)$$

und

$$e^{-\gamma(t-s) - \int_s^t |\tau\overline{u}|_1 \,\mathrm{d}\sigma} \leq 1$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$, kommt man auf

$$v_{\overline{u}}(t) \leq c(S) \ , \quad t \in J_T \tag{2.43}$$

und schließlich erhält man aus (2.36) und (2.43) die Abschätzung

$$-c(S) \leq -(\gamma + |\tau\overline{u}(t)|_1) v_{\overline{u}}(t) \leq \dot{v}_{\overline{u}}(t) \leq \lambda + g(\overline{u}(t)) \leq c(S) \ , \quad t \in J_T \ . \tag{2.44}$$

Aus (2.42)–(2.44) folgt nun, dass ein $R := R(S) > 1$ mit $v_{\overline{u}} \in \mathcal{V}_{T,R}$ existiert.

Um (2.37) zu zeigen, bemerken wir, dass aus (2.41) zusammen mit $\gamma \geq 0$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |v_{\overline{u}_1}(t) - v_{\overline{u}_2}(t)| \leq & \left| e^{-\int_0^t |\tau\overline{u}_1(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} v^0 - e^{-\int_0^t |\tau\overline{u}_2(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} v^0 \right| \\ & + \left| \int_0^t e^{-\int_s^t |\tau\overline{u}_1(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} \lambda \,\mathrm{d}s - \int_0^t e^{-\int_s^t |\tau\overline{u}_2(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} \lambda \,\mathrm{d}s \right| \\ & + \left| \int_0^t e^{-\int_s^t |\tau\overline{u}_1(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} g(\overline{u}_1(s)) \,\mathrm{d}s - \int_0^t e^{-\int_s^t |\tau\overline{u}_2(\sigma)|_1 \,\mathrm{d}\sigma} g(\overline{u}_2(s)) \,\mathrm{d}s \right| \end{aligned}$$

für $0 \leq t \leq T \leq 1, \overline{u}_1, \overline{u}_2 \in X_T$ folgt. Ferner benutzen wir $T \leq 1$ und die Tatsache, dass die Exponentialfunktion gleichmäßig Lipschitz stetig auf $(-\infty, 0]$ ist. Daher gilt für $\overline{u}_1, \overline{u}_2 \in X_T$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |v_{\overline{u}_1}(t) - v_{\overline{u}_2}(t)| \leq v^0 T \max_{t\in[0,T]} \big| |\tau\overline{u}_1(t)|_1 - |\tau\overline{u}_2(t)|_1 \big| \\ + \lambda T \max_{t\in[0,T]} \big| |\tau\overline{u}_1(t)|_1 - |\tau\overline{u}_2(t)|_1 \big| \\ + T \max_{t\in[0,T]} \big| |\tau\overline{u}_1(t)|_1 - |\tau\overline{u}_2(t)|_1 \big| \max_{t\in[0,T]} |g(\overline{u}_1(t))| \\ + T \max_{t\in[0,T]} |g(\overline{u}_1(t)) - g(\overline{u}_2(t))| \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ . \end{aligned}$$

Nun folgt aus (2.38) und (2.39)

$$|v_{\overline{u}_1}(t) - v_{\overline{u}_2}(t)| \leq Tc(S) \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C([0,T],E_0)} \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ , \quad \overline{u}_1 \ , \overline{u}_2 \in X_T$$

und damit ist die Ungleichung (2.37) gezeigt. □

Auf Grund von Lemma 2.8 ist die folgende Definition sinnvoll: Für $\overline{u} \in X_T$ definieren wir den Operator

$$\mathbb{A}_{v_{\overline{u}}}(t)u := v_{\overline{u}}(t)\partial_y(\tau u) - L[u] \ , \quad u \in E_1 \ , \quad t \in J_T \ .$$

Nun betrachten wir die lineare Gleichung

$$\dot{u} + \mathbb{A}_{v_{\overline{u}}}(t)u = Q[u, \overline{u}(t)] \ , \quad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0 \ . \tag{2.45}$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird gezeigt, dass die Gleichung (2.45) eine eindeutige klassische Lösung $u \in W_T \subset X_T$ für $\overline{u} \in X_T$ auf $J_T$ besitzt, wenn $T$ klein genug gewählt wird. Diese Lösung wird dann in (2.36) als neues $\overline{u} \in X_T$ eingesetzt. Der Banachsche Fixpunktsatz liefert uns dann die eindeutige klassische Lösung des Problems (2.34), (2.35) auf $J_T$ für ein kleines $T$.

Es ist offensichtlich, dass, wenn $u \in W_T$ die Gleichung (2.45) für ein festes $\overline{u} \in X_T$ löst, $u$ auch die Gleichung

$$\dot{u} + \mathbb{A}_{v_{\overline{u}}}(t)u + \omega u = Q[u, \overline{u}(t)] + \omega u \ , \quad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0 \tag{2.46}$$

für jedes $\omega > 0$ löst und umgekehrt. Um die Positivität der Lösung $u$ zu gewährleisten, wollen wir $\omega > 0$ so wählen, dass

$$Q[u, \overline{u}(t)] + \omega u \geq 0$$

und

$$Q[u, \overline{u}(t)] + \omega u + L[u] \geq 0$$

für $t \in J_T$, $\overline{u} \in X_T$ und $u \in E_0^+$ gilt. Wir setzen

$$K := \|\eta\|_{BC^1(Y\times Y,\mathbb{R}^+)}$$

und wählen

$$\omega := \frac{2}{y_0} K \cdot (2\omega_0 S + 1) + \|\mu + \beta\|_\infty \ .$$

Für dieses $\omega$ und ein festes $\overline{u} \in X_T$ definieren wir

$$\mathbb{A}^\omega_{v_{\overline{u}}}(t)u := v_{\overline{u}}(t)\partial_y(\tau u) - L[u] + \omega u \ , \quad u \in E_1 \ , \quad t \in J_T \ .$$

Wir betrachten die Gleichung

$$\dot{u} + \mathbb{A}^\omega_{v_{\overline{u}}}(t)u = Q[u, \overline{u}(t)] + \omega u \ , \quad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0 \tag{2.47}$$

für ein festes $\overline{u} \in X_T$ und zeigen, dass unter bestimmten Voraussetzungen an $u^0$ die Differentialgleichung (2.47) eine eindeutige Lösung $u \in W_T$ besitzt, wenn $T$ klein genug gewählt wird.

**Satz 2.9.** *Es sei $S > 0$ beliebig. Wenn $u^0 \in E_1^+$ mit $\|u^0\|_{E_1} \le S$ und $\overline{u} \in X_T$, dann besitzt die Gleichung* (2.47) *eine eindeutige Lösung $u \in W_T \cap C^1(J_T, E_0)$ für $T = T(S) > 0$ geeignet.*

***Beweis*.** Es sei $\overline{u} \in X_T$. Wir definieren

$$\tilde{W}_T := \{u \in C(J_T, E_1) \ ; \ \|u(t)\|_{E_1} \le 2\omega_0 S + 1, \ t \in J_T\}$$

und

$$U^\omega_{v_{\overline{u}}}(t,s) := U_{v_{\overline{u}}}(t,s)e^{\omega(t-s)} \ , \quad 0 \le s \le t \le T \ ,$$

wobei $U_{v_{\overline{u}}}(t,s), 0 \le s \le t \le T$ das in Satz 2.5 beschriebene Evolutionssystem für $v_{\overline{u}} \in \mathcal{V}(T,R)$ ist. Wegen Satz 2.5 gelten für $U^\omega_{v_{\overline{u}}}(t,s), 0 \le s \le t \le T$ die Bedingungen $(E_1)$–$(E_5)$ aus [38, §5]. Da $\overline{u} \in C(J_T, E_0)$, liefert Teil (a) von Lemma 2.3 für $w \in C(J_T, E_1)$, dass

$$Q[w(\cdot), \overline{u}(\cdot)] + \omega w \in C(J_T, E_1) \ .$$

Damit sind die Voraussetzungen von [38, Theorem 5.5.2] erfüllt und die Gleichung

$$\dot{u} + \mathbb{A}^\omega_{v_{\overline{u}}}(t)u = Q[w(t), \overline{u}(t)] + \omega w(t) \ , \quad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0$$

besitzt daher eine eindeutige Lösung

$$F_{\overline{u}}[w] \in C(J_T, E_1) \cap C^1(J_T, E_0) \ , \tag{2.48}$$

die durch

$$F_{\overline{u}}[w](t) = U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,0)u^0 + \int\limits_0^t U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,s)\big(Q[w(s),\overline{u}(s)] + \omega w(s)\big)\,\mathrm{d}s\;, \quad t \in J_T$$

gegeben ist.
Es sei nun $w \in \tilde{W}_T \subset C(J_T, E_1)$. Dann folgt aus (2.15) und Lemma 2.3

$$\begin{aligned}\|F_{\overline{u}}[w](t)\|_{E_1} \le \|U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,0)\|_{\mathcal{L}(E_1)}\|u^0\|_{E_1} &+ \int\limits_0^t \|U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)}\|Q[w(s),\overline{u}(s)]\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\ &+ \omega\int\limits_0^t \|U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)}\|w(s)\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\ &\le e^{\omega T}\omega_0 S + (e^{\omega T} + \omega e^{\omega T})\omega_0 c(S) T \le 2\omega_0 S + 1\;, \quad t \in J_T\end{aligned} \tag{2.49}$$

für $T$ genügend klein. Es gilt außerdem für $w_1, w_2 \in \tilde{W}_T$ und $t \in J_T$

$$\begin{aligned}&\|F_{\overline{u}}[w_1](t) - F_{\overline{u}}[w_2](t)\|_{E_1} \\ &\quad\le \int\limits_0^t \|U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)}\|Q[w_1(s),\overline{u}(s)] - Q[w_2(s),\overline{u}(s)]\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\ &\quad\quad + \omega\int\limits_0^t \|U^{\omega}_{v_{\overline{u}}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)}\|w_1(s) - w_2(s)\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\ &\quad\le (e^{\omega T} + \omega e^{\omega T})\omega_0 c(S) T \|w_1 - w_2\|_{C([0,T],E_1)} \\ &\quad\le \frac{1}{2}\|w_1 - w_2\|_{C([0,T],E_1)}\;,\end{aligned}$$

wenn $T$ klein genug gewählt wird. Es existiert also nach dem Banachschen Fixpunktsatz ein eindeutiges $u \in \tilde{W}_T \cap C^1(J_T, E_0)$, sodass $u(t) = F_{\overline{u}}[u](t)$ für $t \in J_T$. Somit löst dieses $u$ die Gleichung (2.47).

Es bleibt noch zu zeigen, dass $u(t) \ge 0$ für $t \in J_T$. Dafür beachten wir, dass $u$ die Gleichung

$$\dot{w} + (A_{v_{\overline{u}}}(t) + \omega)w = Q[w,\overline{u}(t)] + \omega w + L[w] =: H[w]\;, \quad t \in J_T\;,\; w(0) = u^0 \tag{2.50}$$

löst, wobei $A_{v_{\overline{u}}}(t) := v_{\overline{u}}(t)\partial_y(\tau\cdot)$.
Auf Grund der Wahl von $\omega$ gilt $H[w] \in E_0^+$ für $w \in E_0^+$. Außerdem gilt offensichtlich $H[w] \in \mathcal{L}(E_0)$. Nach Lemma 2.4 generiert $-A_{v_{\overline{u}}}(t)$ eine positive Halbgruppe auf $E_0$ für $t \in J_T$, also auch $-(A_{v_{\overline{u}}}(t) + \omega)$, $t \in J_T$. Aus der Konstruktion

des Evolutionssystems (beschrieben in [38], Beweis von Theorem 5.3.1) folgt dann, dass auch das von $\{-(A_{v_{\overline{u}}}(t)+\omega)\}_{t\in J_T}$ generierte Evolutionssystem $\overline{U}(t,s)$ positiv ist. Für $w \in C([0,\tilde{T}],E_0)$ und $t \in [0,\tilde{T}]$ mit $0 < \tilde{T} \leq T$ definieren wir

$$G[w](t) := \overline{U}(t,0)u^0 + \int_0^t \overline{U}(t,s)H[w(s)]\,\mathrm{d}s \ .$$

Wenn $\tilde{T} \in (0,T]$ klein genug ist und $\mathbb{B}(\tilde{T})$ ein in $C([0,\tilde{T}],E_0)$ beschränkter abgeschlossener Ball mit $u^0 \in \mathcal{B}(\tilde{T})$ ist, dann ist $G : \mathbb{B}(\tilde{T}) \to \mathbb{B}(\tilde{T})$ eine Kontraktion. Daraus folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge $(w_n)$, definiert durch

$$w_0 := u^0 \ , \quad w_{n+1} := G[w_n] \ , \quad n \in \mathbb{N} \ ,$$

in $C([0,\tilde{T}],E_0^+)$ gegen die eindeutige Lösung $w$ der Gleichung (2.50) konvergiert mit $w(t) = G[w](t)$, $t \in [0,\tilde{T}]$. Nun wissen wir, dass $u|_{[0,\tilde{T}]}$ mit $u(t) \in E_1$ für $t \in [0,\tilde{T}]$ die Gleichung (2.50) auch löst. Wegen $E_1 \hookrightarrow E_0$ und der Eindeutigkeit der Lösung stimmt $G[w](t)$ mit $u(t)$ für $t \in [0,\tilde{T}]$ überein, also gilt $u(t) \in E_1^+$ für $t \in [0,\tilde{T}]$. Es sei nun

$$T^* := \sup\{T' \in (0,T] : u(t) \in E_1^+,\ 0 \leq t \leq T'\} \ .$$

Dann gilt $T^* \geq \tilde{T}$. Wenn $T^* < T$ wäre, könnten wir den Vorgang mit $u(T^*) \in E_1^+$ statt $u^0$ wiederholen und daraus schließen, dass ein $T^{**} \in (T^*,T]$ existiert, sodass $u(t) \in E_1^+$ für $0 \leq t < T^{**}$, was der Definition von $T^*$ widersprechen würde. Es gilt also $T^* = T$ und folglich $u(t) \in E_1^+$ für $t \in J_T$. □

Bisher wurde das Folgende gezeigt: Für $T > 0$ genügend klein, $S > 0$, $\overline{u} \in X_T$ und $S^{-1} \leq v^0 \leq S$ existieren eindeutige $v_{\overline{u}} \in C^1(J_T)$ mit $v_{\overline{u}}(t) > 0$ für $t > 0$ und $u(\overline{u}) \in W_T \cap C^1(J_T,E_0)$, sodass $v_{\overline{u}}$ die Gleichung

$$\dot{v} = \lambda - \gamma v - v|\tau\overline{u}|_1 + g(\overline{u}) \ , \quad 0 \leq t \leq T \leq 1 \ , \quad v(0) = v^0 \tag{2.51}$$

und $u(\overline{u})$ die Gleichung

$$\dot{u} + \mathbb{A}_{v_{\overline{u}}}u = Q[u,\overline{u}(t)] \ , \quad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0 \tag{2.52}$$

löst, wobei $u^0 \in E_1^+$, $\|u^0\|_{E_1} \leq S$ vorausgesetzt wurde.

Nun zeigen wir, dass die Abbildung $\Lambda : X_T \to X_T$, $\overline{u} \mapsto u(\overline{u})$ eine Kontraktion ist.

**Satz 2.10.** $\Lambda : X_T \to X_T$ *ist strikt kontraktiv falls* $T > 0$ *klein genug ist.*

***Beweis***. Wir wissen, dass $E_1 \subset E_0$ und $\|x\|_{E_0} \leq \|x\|_{E_1}$ für $x \in E_1$. Folglich gilt $W_T \subset X_T$. Damit folgt aus Satz 2.9 für

$$\Lambda(\overline{u})(t) := U_{v_{\overline{u}}}(t,0)u^0 + \int\limits_0^t U_{v_{\overline{u}}}(t,s)Q[u(\overline{u}),\overline{u}(s)]\,\mathrm{d}s \ , \quad t \in J_T \ , \ \overline{u} \in X_T \ , \tag{2.53}$$

dass $\Lambda(\overline{u}) \in X_T$ für $\overline{u} \in X_T$ und ein passendes $T \in (0,1)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Abbildung strikt kontraktiv ist. Dafür betrachten wir für $t \in J_T$, $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2 \in X_T$, $u_1 = u(\overline{u}_1) \in W_T$, $u_2 = u(\overline{u}_2) \in W_T$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda(\overline{u}_1)(t) - \Lambda(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} \\
&\leq \|U_{v_{\overline{u}_1}}(t,0) - U_{v_{\overline{u}_2}}(t,0)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\|u^0\|_{E_1} \\
&\quad + \int\limits_0^t \|U_{v_{\overline{u}_1}}(t,s) - U_{v_{\overline{u}_2}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)]\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int\limits_0^t \|U_{v_{\overline{u}_2}}(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_0)}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)] - Q[u_2(s),\overline{u}_2(s)]\|_{E_0}\,\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}$$

Aus Satz 2.5 (siehe insbesondere die Ungleichungen (2.16) und (2.14)) folgt nun

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda(\overline{u}_1)(t) - \Lambda(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} \\
&\leq \omega_0 T\|v_{\overline{u}_1} - v_{\overline{u}_2}\|_{C(J_T)}\|u^0\|_{E_1} \\
&\quad + \int\limits_0^t \omega_0 T\|v_{\overline{u}_1} - v_{\overline{u}_2}\|_{C(J_T)}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)]\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int\limits_0^t e^{\omega_0 T}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)] - Q[u_2(s),\overline{u}_2(s)]\|_{E_0}\,\mathrm{d}s \ , \quad t \in J_T \ .
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit Lemma 2.8 die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\|\Lambda(\overline{u}_1)(t) - \Lambda(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} \\
&\leq c(S)\omega_0 T\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)}\|u^0\|_{E_1} \\
&\quad + c(S)\int\limits_0^t \omega_0 T\|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)]\|_{E_1}\,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int\limits_0^t e^{\omega_0 T}\|Q[u_1(s),\overline{u}_1(s)] - Q[u_2(s),\overline{u}_2(s)]\|_{E_0}\,\mathrm{d}s \ , \quad t \in J_T \ .
\end{aligned}$$

Schließlich verwenden wir Lemma 2.3 und finden

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda(\overline{u}_1)(t) - \Lambda(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} &\leq c(S)\omega_0 T \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \|u^0\|_{E_1} \\
&\quad + c(S) \int_0^t \omega_0 T \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \|u_1(s)\|_{E_1}\, \mathrm{d}s \\
&\quad + c(S) \int_0^t e^{\omega_0 T} \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)}\, \mathrm{d}s \\
&\quad + c(S) \int_0^t e^{\omega_0 T} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{E_0}\, \mathrm{d}s \\
&\leq c(S)\omega_0 T c(S) \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \\
&\quad + c(S)\omega_0 T^2 \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \\
&\quad + c(S) e^{\omega_0 T} T \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \\
&\quad + c(S) e^{\omega_0 T} T \max_{0 \leq t \leq T} \|u(\overline{u}_1)(t) - u(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} \ ,
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung in (2.54) die Tatsache benutzt haben, dass $u_1(\overline{u}_1) \in W_T$ und somit $\|u_1\|_{E_1} \leq 2\omega_0 S + 1$ gilt. Wegen

$$
c(S) e^{\omega_0 T} T \leq \frac{1}{2}
$$

folgt aus (2.54)

$$
\frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} \|\Lambda(\overline{u}_1)(t) - \Lambda(\overline{u}_2)(t)\|_{E_0} \leq \frac{1}{4} \|\overline{u}_1 - \overline{u}_2\|_{C(J_T,E_0)} \tag{2.55}
$$

für $T > 0$ genügend klein. Somit ist $\Lambda : X_T \to X_T$ eine strikte Kontraktion. □

Im folgenden Korollar fassen wir die Resultate dieses Abschnitts zusammen und untersuchen einige Eigenschaften der maximalen Lösung des Anfangswertproblems (2.34), (2.35).

**Korollar 2.11.** *Für jedes $u^0 \in E_1^+$ und $v^0 > 0$ besitzt das Problem* (2.34), (2.35) *eine eindeutige maximale Lösung $(v, u) \in C(J, \mathbb{R}^+ \times E_1^+) \cap C^1(J, \mathbb{R} \times E_0)$. Das maximale Existenzintervall $J$ ist offen in $\mathbb{R}^+$. Falls $t^+ := \sup J < \infty$, so gilt entweder*

$$
\underline{\lim}_{t \nearrow t^+} v(t) = 0 \qquad \textit{oder} \qquad \overline{\lim}_{t \nearrow t^+} (v(t) + \|u(t)\|_{E_1}) = \infty \ . \tag{2.56}
$$

***Beweis***. Wir zeigen die Aussage analog zu dem entsprechden Beweis in [41, Theorem 3.1]. Die Gleichung (2.53) garantiert, dass der Fixpunkt im Raum $X_T$ eine klassische Lösung des Problems (2.34), (2.35) definiert. Somit folgt aus den Sätzen 2.9 und 2.10 zusammen mit Lemma 2.8, dass das Anfangswertproblem (2.34), (2.35) eine eindeutige klassische Lösung $(v,u) \in C(J_T, \mathbb{R}^+ \times E_1^+) \cap C^1(J_T, \mathbb{R} \times E_0)$ auf $J_T = [0,T]$ hat, wenn T klein genug gewählt wird. Es ist klar, dass diese Lösung auf ein maximales Intervall $J$ fortgesetzt werden kann, wobei $J$ offen in $\mathbb{R}^+$ ist. Es bleibt zu zeigen, dass im Fall $t^+ := \sup J < \infty$ (2.56) gilt. Dafür nehmen wir an, dass eine Folge $t_j \nearrow t^+$ und ein $S > 0$ existieren, sodass

$$v(t_j) \geq S^{-1} \quad \text{und} \quad v(t_j) + \|u(t_j)\|_{E_1} \leq S$$

gilt. Dann gibt es ein $T(S) > 0$, das nicht von $t_j$ abhängt, sodass das Problem (2.34), (2.35) mit den Anfangswerten $(v(t_j), u(t_j)) \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \times E_1^+$ auf $[t_j, T(S)]$ eine eindeutige klassische Lösung besitzt. Das gilt auch für ein $t_N$ mit $t_N > t^+ - T(S)$. Aber dann könnte die Lösung $(v,u)$ auf $[0, t_N + T(S)]$ fortgesetzt werden, was der Maximalität von $J$ widersprechen würde. □

## 2.5. Globale Existenz im Fall $\nu = 0$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die klassische Lösung aus dem vorherigen Abschnitt auf das Intervall $[0,\infty)$ fortgesetzt werden kann, d.h. dass die klassische Lösung des Problems (2.34), (2.35) global existiert.
Wir erinnern an den in (1.14) definierten Operator $Q$, gegeben durch

$$Q[u,u](y) = \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)u(y-z)u(z)\,\mathrm{d}z - 2u(y)\int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)u(z)\,\mathrm{d}z\ ,$$

und bemerken, dass für $u \in E_0$ wegen (2.4) und (1.16) die Identität

$$\int_{y_0}^{\infty} yQ[u,u](y)\,\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} \big((y+z) - y - z\big)\eta(y,z)u(y)u(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \tag{2.57}$$

gilt. Nun zeigen wir, dass die Funktion $t \mapsto v(t) + \|u(t)\|_{E_0}$ höchstens linear auf $J$ wächst.

**Lemma 2.12.** *Es sei $(v,u)$ die klassische Lösung des Problems* (2.34), (2.35) *auf $J$. Dann ist die Lösung monomererhaltend, d.h. es gilt*

$$\dot{v}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^{\infty} yu(t,y)\,\mathrm{d}y = \lambda - \gamma v(t) - \int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y\ , \quad t \in J\ . \tag{2.58}$$

*Insbesondere gilt für $t \in J$*

$$v(t) + \|u(t)\|_{E_0} \leq v^0 + \|u^0\|_{E_0} + \lambda t\ . \tag{2.59}$$

***Beweis***. Da $(v, u)$ die Lösung des Problems (2.34), (2.35) ist, folgt aus (2.35) und (2.57)

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} y\partial_t u(t,y)\,\mathrm{d}y &+ v(t)\int_{y_0}^{\infty} y\partial_y(\tau u)(t,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_0}^{\infty} yL[u](y)\,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} yQ[u,u](y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{y_0}^{\infty} yL[u](y)\,\mathrm{d}y\ , \quad t \in J\ .\end{aligned} \tag{2.60}$$

Aus (1.15) und (1.8) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} yL[u](y)\,\mathrm{d}y &= -\int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(y)\,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} u(y)\beta(y)\left(-y + 2\int_{y_0}^{y} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \\ &= -\int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(y)\,\mathrm{d}y - 2\int_{y_0}^{\infty} u(y)\beta(y)\int_{0}^{y_0} z\kappa(z,y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\ .\end{aligned} \tag{2.61}$$

Ferner erhalten wir mit partieller Integration für $R > y_0$

$$\int_{y_0}^{R} y\partial_y(\tau(y)u(y))\,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{R} \tau(y)u(y)\,\mathrm{d}y = y\tau(y)u(y)\Big|_{y_0}^{R}\ .$$

Wegen $u \in E_1$ und (2.3) konvergiert die linke Seite und damit auch die rechte Seite der letzten Gleichung für $R \to \infty$ und wir erhalten wegen $u(y_0) = 0$

$$\int_{y_0}^{\infty} y\partial_y(\tau(y)u(y))\,\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} \tau(y)u(y)\,\mathrm{d}y = 0\ . \tag{2.62}$$

Nach Addieren von (2.34) und (2.60) unter Berücksichtigung von (2.61) und (2.62) erhalten wir

$$\dot{v}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^{\infty} yu(t,y)\,\mathrm{d}y = \lambda - \gamma v(t) - \int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y\ , \quad t \in J\ .$$

Daraus und aus der Positivität von $u$, $v$, $\gamma$ und $\mu$ folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 2.13.** Die Gleichung (2.58) bedeutet, dass die Lösung $(v, u)$ monomererhaltend ist, dass also die Anzahl der Monomere sich nur durch den natürlichen Abbau bzw. durch die natürliche Produktion ändern kann.

Im nächsten Satz beweisen wir, dass die Lösung $(v,u)$ global existiert.

**Satz 2.14.** *Es sei* $(v,u) \in C(J,\mathbb{R}^+ \times E_1^+) \cap C^1(J,\mathbb{R} \times E_0)$ *die eindeutige maximale Lösung von* (2.34), (2.35) *und* $t^+ := \sup J$. *Dann gilt* $t^+ = \infty$.

***Beweis***. Wir nehmen an, dass $t^+ < \infty$. Mit $c(t^+)$ bezeichnen wir eine Konstante, die nur von $t^+$ abhängt und die sich von einer Zeile zur anderen ändern kann. Aus (2.34) und der Positivität von $u$ und $v$ erhalten wir mit Lemma 2.12 die Abschätzungen

$$\dot{v}(t) \leq \lambda + g(u(t)) \leq \lambda + \|\beta\|_\infty \|u(t)\|_{E_0} \leq c(t^+) \ , \quad t \in J \ ,$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung (1.8) benutzt haben, und aus (2.3) folgt

$$\dot{v}(t) \geq -\gamma v(t) - |\tau u(t)|_1 v(t) \geq -\gamma v(t) - \tau^* \|u(t)\|_{E_0} v(t) \geq -c(t^+) \ , \quad t \in J \ .$$

Dies ergibt

$$\|v\|_{C^1(J)} \leq c(t^+) \ . \tag{2.63}$$

Aus (2.41) erhalten wir außerdem

$$v(t) \geq e^{-(\gamma + |\tau u(t)|_1)t} v^0 \geq e^{-(\gamma+\tau^* c(t^+))t^+} v^0 > 0 \ , \quad t \in J \ . \tag{2.64}$$

Folglich existiert ein $R = R(c(t^+)) > 0$, sodass für jedes $0 < T < t^+$ gilt $v \in \mathcal{V}_{T,R}$. Nun können wir Satz 2.5 verwenden, insbesondere (2.15). Somit ergibt sich die Abschätzung

$$\|U_v(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \leq c(t^+) \ , \quad 0 \leq s \leq t < t^+ \ . \tag{2.65}$$

Ferner gilt nach Lemma 2.12

$$\|u(t)\|_{E_0} \leq c(t^+) \ , \quad t \in J$$

und folglich mit Lemma 2.3

$$\|Q[u(t),u(t)]\|_{E_1} \leq c(t^+) \|u(t)\|_{E_1} \ , \quad t \in J \ .$$

Nun können wir die Lösung $u$ durch

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{E_1} &\leq \|U_v(t,0)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \|u^0\|_{E_1} + \int_0^t \|U_v(t,s)\|_{\mathcal{L}(E_1)} \|Q[u(s),u(s)]\|_{E_1} \,\mathrm{d}s \\ &\leq c(t^+) \|u^0\|_{E_1} + c(t^+) \int_0^t \|u(s)\|_{E_1} \,\mathrm{d}s \ , \quad t \in J \end{aligned} \tag{2.66}$$

abschätzen und mit dem Lemma von Gronwall erhalten wir

$$\|u(t)\|_{E_1} \leq c(t^+) \ , \quad t \in J \ . \tag{2.67}$$

Es gelten also die Abschätzungen (2.63), (2.64) und (2.67), obwohl $t^+ < \infty$, was der Bedingung (2.56) widerspricht. Aus diesem Widerspruch folgt, dass $t^+ = \infty$, d.h. dass die Lösung $(v,u)$ global existiert. □

## 2.6. Lokale und globale Existenz im Fall $\nu > 0$

Nun interessieren wir uns für den Fall, wenn der Parameter $\nu > 0$ ist. Dann müssen wir das System (2.32), (2.33) lösen. Es sei $v^0 > 0$, $u^0 \in E_1^+$ und $S > 0$ mit

$$S^{-1} \leq v^0 \leq S \ , \quad \|u^0\|_{E_1} \leq S \ .$$

Wir definieren

$$r(S) := (2S\omega_0 + 1)\nu \Big[ (S + (2S\omega_0 + 1)\|\beta\|_\infty + \lambda)\tau^* + \|\mu\|_\infty + \|\beta\|_\infty \Big]$$

und den Raum

$$\begin{aligned} Z_T = \Big\{ u \in X_T \ : \ & \int_{y_0}^\infty y u(\cdot, y) \mathrm{d}y \in C^1(J_T) \ , \\ & \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{y_0}^\infty y u(t,y) \mathrm{d}y \right| \leq r(S) \ , \ t \in J_T \ , \ u(0) = u^0 \Big\} \end{aligned} \tag{2.68}$$

versehen mit der Metrik

$$d(u,w) := \|u - w\|_{C([0,T],E_0)} + \left\| \int_{y_0}^\infty y \big( u(\cdot,y) - w(\cdot,y) \big) \mathrm{d}y \right\|_{C^1([0,T])} \tag{2.69}$$

für $u, w \in Z_T$. Dies ist ein vollständiger metrischer Raum. Im Folgenden verwenden wir die Notation

$$\|u - w\|_{Z_T} := d(u,w)$$

für $u, w \in Z_T$. Wir halten $\hat{u} \in Z_{T_0}$ für ein $0 < T_0 \leq 1$ fest. Dann folgt wie in Abschnitt 2.4, dass das System

$$\dot{v}(t) = \lambda - \gamma v(t) - \frac{v(t)}{1 + \nu\|\hat{u}(t)\|_{E_0}} |\tau u(t)|_1 + g(u(t)) \ , \quad t \in J_T \ , \ v(0) = v^0 \tag{2.70}$$

und

$$\dot{u}(t) + \mathbb{A}_{V_{\hat{u}}}(t) u = Q[u,u] \ , \qquad t \in J_T \ , \quad u(0) = u^0 \tag{2.71}$$

mit

$$\mathbb{A}_{V_{\hat{u}}}(t) u = V_{\hat{u}}(t) \partial_y (\tau u) - L[u] \ , \quad u \in E_1 \ , \quad t \in J_T \ ,$$

wobei $V_{\hat{u}}$ als

$$V_{\hat{u}}(t) := \frac{v(t)}{1 + \nu\|\hat{u}(t)\|_{E_0}} \ , \quad t \in J_T$$

definiert ist, eine eindeutige klassische Lösung $(v,u)$ mit $v \in C^1(J_T),\ v > 0$ und $u \in W_T \cap C^1(J_T, E_0)$ für ein $T := T(S) \in (0, T_0]$ besitzt. Dabei gilt für $t \in J_T$

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp\left(-\gamma t - \int_0^t \frac{|\tau u(\sigma)|_1}{1+\nu\|\hat{u}(\sigma)\|_{E_0}}\,\mathrm{d}\sigma\right) v^0 \\ &\quad + \int_0^t \exp\left(-\gamma(t-s) - \int_s^t \frac{|\tau u(\sigma)|_1}{1+\nu\|\hat{u}(\sigma)\|_{E_0}}\,\mathrm{d}\sigma\right)\big(\lambda + g(u(s))\big)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.72}$$

und

$$u(t) = U_{V_{\hat{u}}}(t,0)u^0 + \int_0^t U_{V_{\hat{u}}}(t,s) Q[u(s),u(s)]\mathrm{d}s\ . \tag{2.73}$$

Hierbei bezeichnet $U_{V_{\hat{u}}}(t,s),\ 0 \le s \le t \le T \le 1$ das von der Operatorenfamilie $\{\mathbb{A}_{V_{\hat{u}}}(t)\}_{t\in J_T}$ generierte Evolutionssystem. Wegen (2.72) und (2.68) gilt $V_{\hat{u}} \in \mathcal{V}(T,R)$ für ein $R = R(S) > 1$, das nicht von $T$ und $\hat{u} \in Z_T$ abhängt. Das bedeutet, dass das Evolutionssystem $U_{V_{\hat{u}}}(t,s),\ 0 \le s \le t \le T \le 1$ wohldefiniert ist und alle Eigenschaften aus Satz 2.5 besitzt.

Es ist nun leicht zu sehen, dass die Lösung $(v,u)$ für (2.70), (2.71) auch monomererhaltend ist, d.h. sie erfüllt die Gleichung (2.58) für $t \in J_T$. Aus (2.70) folgt für $t \in J_T$

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = \lambda - \frac{v(t)}{1+\nu\|\hat{u}(t)\|_{E_0}}|\tau u(t)|_1 + g(u(t))\ .$$

Dies ergibt zusammen mit (2.58) die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^\infty y u(t,y)\mathrm{d}y &= \frac{v(t)}{1+\nu\|\hat{u}(t)\|_{E_0}}|\tau u(t)|_1 - g(u(t)) - \int_{y_0}^\infty y\mu(y)u(t,y)\mathrm{d}y \\ &= V_{\hat{u}}|\tau u(t)|_1 - g(u(t)) - \int_{y_0}^\infty y\mu(y)u(t,y)\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{2.74}$$

für $t \in J_T$. Wie im Fall $\nu = 0$ erhalten wir aus (2.73), dass $u = u(\hat{u}) \in X_T$, und die Gleichung (2.74) impliziert $u = u(\hat{u}) \in Z_T$. Nun betrachten wir die Abbildung $\Gamma : Z_T \to Z_T,\ \hat{u} \mapsto u(\hat{u})$, die durch

$$\Gamma[\hat{u}](t) = U_{V_{\hat{u}}}(t,0)u^0 + \int_0^t U_{V_{\hat{u}}}(t,s)Q[u(\hat{u}),u(\hat{u})]\mathrm{d}s\ , \quad t \in J_T\ , \quad \hat{u} \in Z_T$$

gegeben ist. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass ein $T > 0$ existiert, sodass $\Gamma$ eine strikte Kontraktion ist. Wir erhalten völlig analog zur Rechnung aus Satz 2.10 die Abschätzung

$$\begin{aligned} \sup_{0\le t\le T}\|\Gamma[\hat{u}_1](t) - \Gamma[\hat{u}_2](t)\|_{E_0} &\le c(S)T\|\hat{u}_1 - \hat{u}_2\|_{Z_T} \\ &\quad + c_1(S)T\max_{0\le t\le T}\|u(\hat{u}_1)(t) - u(\hat{u}_2)(t)\|_{E_0}\ . \end{aligned} \tag{2.75}$$

Wegen (2.74) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^{\infty} y\big(u_1(t,y)-u_2(t,y)\big)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad\le |(V_{\hat u_1}-V_{\hat u_2})(t)|\int_{y_0}^{\infty}\tau(y)\Gamma[\hat u_1](t,y)\mathrm{d}y \\
&\quad\quad + V_{\hat u_2}(t)\left|\int_{y_0}^{\infty}\tau(y)\big(\Gamma[\hat u_1](y,t)-\Gamma[\hat u_2](t,y)\big)\mathrm{d}y\right| \\
&\quad\quad + \left|2\int_{y_0}^{\infty}\big(\Gamma[\hat u_1](t,y)-\Gamma[\hat u_2](t,y)\big)\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right| \\
&\quad\quad + \left|\int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)\big(\Gamma[\hat u_1](t,y)-\Gamma[\hat u_2](t,y)\big)\mathrm{d}y\right|\,,\quad t\in J_T\,.
\end{aligned}
\tag{2.76}
$$

Da $\hat u_1, \hat u_2$ nichtnegativ sind, erhalten wir aus (2.72) analog zur Rechnung aus Lemma 2.8

$$
\begin{aligned}
|(V_{\hat u_1}-V_{\hat u_2})(t)| &= \left|\frac{v_1(t)}{1+\nu\int_{y_0}^{\infty}x\hat u_1(t,x)\mathrm{d}x}-\frac{v_2(t)}{1+\nu\int_{y_0}^{\infty}x\hat u_2(t,x)\mathrm{d}x}\right| \\
&\le |v_1(t)-v_2(t)| + v_2(t)\nu\left|\int_{y_0}^{\infty} y\big(\hat u_1(t,y)-\hat u_2(t,y)\big)\mathrm{d}y\right| \\
&\le c(S)T\|\hat u_1-\hat u_2\|_{Z_T} + c_1(S)\left|\int_{y_0}^{\infty} y\big(\hat u_1(t,y)-\hat u_2(t,y)\big)\mathrm{d}y\right| \\
&= c(S)T\|\hat u_1-\hat u_2\|_{Z_T} + c_1(S)\left|\int_0^t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{y_0}^{\infty} y\big(\hat u_1(s,y)-\hat u_2(s,y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\
&\le c(S)T\|\hat u_1-\hat u_2\|_{Z_T}
\end{aligned}
$$

für $t\in J_T$, wobei wir in der zweiten Ungleichung (2.59) und im letzten Schritt (2.69) verwendet haben. Nun folgt aus (2.76) unter Berücksichtigung von (2.3), (2.1), (1.8), (2.59) und (2.75)

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^{\infty} y\big(u_1(t,y)-u_2(t,y)\big)\mathrm{d}y\right| &\le c(S)T\|\hat u_1-\hat u_2\|_{Z_T} \\
&\quad + c_1(S)T\max_{0\le t\le T}\|u(\hat u_1)(t)-u(\hat u_2)(t)\|_{E_0}\,.
\end{aligned}
$$

Dies impliziert zusammen mit (2.69) und (2.75) die Abschätzung

$$
\|\Gamma[\hat u_1]-\Gamma[\hat u_2]\|_{Z_T}\le a\|\hat u_1-\hat u_2\|_{Z_T}
$$

für ein $a<1$, wenn T klein genug gewählt ist. Dies bedeutet, dass das Problem (1.1)–(1.4) auch im Fall $\nu>0$ eine eindeutige klassische Lösung auf $[0,T]$ für ein

$T > 0$ besitzt. Genauso wie im Fall $\nu = 0$ gelten für diese Lösung die Aussagen von Korollar 2.11, Lemma 2.12 und Satz 2.14.

***Beweis von Theorem* 2.1**. Die Behauptung folgt aus Korollar 2.11 und Satz 2.14. □

## 2.7. Anfangswert mit kompaktem Träger

Das letzte Resultat in diesem Kapitel ist dem Fall gewidmet, wenn die Anfangsverteilung $u^0$ und die Koagulationsrate $\eta$ in (1.1)–(1.4) kompakte Träger haben. Im folgenden Satz zeigen wir, dass der Träger der $u$-Komponente der eindeutigen klassischen Lösung des Problems in diesem Fall auch kompakt ist.

**Satz 2.15.** *Es seien die Bedingungen* (1.7), (1.8) *und* (2.1)–(2.4) *erfüllt. Für* $v^0 > 0$ *und* $u^0 \in E_1^+$ *sei* $(v, u)$ *die eindeutige klassische globale Lösung für das Problem* (1.1)–(1.4). *Wenn*

$$\operatorname{supp} u^0 \subset [y_0, S_0]$$

*für ein* $S_0 > y_0$ *und wenn ein* $S_1 > 0$ *existiert, sodass* $\eta(y, z) = 0$ *für* $(y, z) \in Y \times Y$ *mit* $z + y > S_1$, *dann gilt*

$$\operatorname{supp} u(t) \subset [y_0, S(t)] \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

*wobei* $S$ *die Lösung für*

$$\dot{S} = \frac{v(t)}{1 + \nu \|u(t)\|_{E_0}} \tau(S)$$

*ist mit* $S(0) = \max\{S_0, S_1\}$.

***Beweis***. Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von [46, Theorem 2.4] bzw. [41, Prop. 3.2.]. Zunächst bemerken wir, dass die Lösung der Gleichung

$$\dot{S} = \frac{v}{1 + \nu \|u\|_{E_0}} \tau(S) \ , \quad S(0) = \max\{S_0, S_1\}$$

auf $[0, \infty)$ gemäß [1, Satz 5.1] als

$$S(t) = \phi^{-1} \left( \int_0^t \frac{v(s)}{1 + \nu \|u(s)\|_{E_0}} \, \mathrm{d}s \right) \qquad \text{mit } \phi(y) := \int_{\max\{S_0, S_1\}}^y \frac{\mathrm{d}z}{\tau(z)}$$

gegeben ist. Wir definieren $P \in C^1\big([0, t^+), L_1(Y)\big)$ durch

$$P(t, y) := \int_y^\infty u(t, y') \, \mathrm{d}y' \ , \quad y \in Y, \quad t \geq 0 \ .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}P(t,y) &= \int_y^\infty \partial_t u(t,y')\,\mathrm{d}y' \\ &= \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\tau(y)u(t,y) + \int_y^\infty L[u(t)](y')\,\mathrm{d}y' \\ &\quad + \int_y^\infty Q[u(t),u(t)](y')\,\mathrm{d}y' \ .\end{aligned}$$

Nun beachten wir für $t \geq 0$

$$\begin{aligned}&\int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty Q[u,u](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\ &\qquad = \int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty \mathbf{1}_{[y'>2y_0]} \int\limits_{y_0}^{y'-y_0} \eta(y'-z,z)u(y'-z)u(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\ &\qquad\quad - 2\int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty u(y') \int_{y_0}^\infty \eta(z,y')u(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \ .\end{aligned}$$

Für $S_1 \leq S(t) < y < y' < \infty$ und $t \geq 0$ folgt aus den Voraussetzungen des Satzes, dass $\eta(y'-z,z)$ und $\eta(z,y')$ in der letzten Gleichung gleich 0 sind. Damit gilt

$$\int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty Q[u,u](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y = 0$$

für $t \geq 0$. Mit (1.2) und (1.9) erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}^\infty P(t,y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad = \int_{S(t)}^\infty \frac{\partial}{\partial t}P(t,y)\,\mathrm{d}y - S'(t)P(t,S(t)) \\ &\quad = \int_{S(t)}^\infty \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\tau(y)u(t,y)\,\mathrm{d}y + \int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty L[u(t)](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\ &\qquad - \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\tau(S(t))P(t,S(t)) \\ &\quad = \frac{-v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\int_{S(t)}^\infty \tau(y)\,\partial_y P(t,y)\mathrm{d}y + \int_{S(t)}^\infty \int_y^\infty L[u(t)](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\ &\qquad - \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\tau(S(t))P(t,S(t))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}} \left( \tau(y)P(t,y)\Big|_{S(t)}^{\infty} - \int_{S(t)}^{\infty} \tau'(y)P(t,y)\,\mathrm{d}y \right) \\
&\qquad + \int_{S(t)}^{\infty}\int_{y}^{\infty} L[u(t)](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y - \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}}\tau(S(t))P(t,S(t)) \\
&= \frac{v(t)}{1+\nu\|u(t)\|_{E_0}} \int_{S(t)}^{\infty} \tau'(y)P(t,y)\,\mathrm{d}y + \int_{S(t)}^{\infty}\int_{y}^{\infty} L[u(t)](y')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\
&\leq \|\tau'\|_{\infty} v(t) \int_{S(t)}^{\infty} P(t,y)\,\mathrm{d}y + 2\int_{S(t)}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\int_{y'}^{\infty} \beta(y'')\kappa(y',y'')u(t,y'')\,\mathrm{d}y''\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y \\
&= \|\tau'\|_{\infty} v(t) \int_{S(t)}^{\infty} P(t,y)\,\mathrm{d}y + 2\int_{S(t)}^{\infty}\int_{y}^{\infty} \beta(y'')u(t,y'') \int_{y}^{y''} \kappa(y',y'')\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}y''\,\mathrm{d}y \\
&\leq \|\tau'\|_{\infty} v(t) \int_{S(t)}^{\infty} P(t,y)\,\mathrm{d}y + 2\|\beta\|_{\infty} \int_{S(t)}^{\infty} P(t,y)\,\mathrm{d}y \ .
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\int_{S(0)}^{\infty} P(0,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

folgt daraus mit dem Lemma von Gronwall

$$\int_{S(t)}^{\infty} P(t,y)\,\mathrm{d}y = 0 \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

weil $u(t,y)$ nichtnegativ ist. Somit gilt $u(t,y) = 0$ für $y \in (S(t),\infty)$ und $t \geq 0$. $\square$

# 3. Schwache Lösungen für unbeschränkte Raten

In Kapitel 2 über klassische Lösungen haben wir gezeigt, dass das Problem (1.1)–(1.4) im Fall von beschränkten Raten $\mu, \beta, \tau, \eta$, oder, genauer, wenn die Bedingungen (2.1)–(2.4) erfüllt sind, eine eindeutige klassische Lösung $(v, u)$ im Produktraum $\mathbb{R}^+ \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ besitzt. Aus biologischer Sicht ist es allerdings sinnvoll, auch unbeschränkte Raten zu betrachten. Beispielsweise ist es vernünftig anzunehmen, dass die Polymerteilungsrate $\beta$ umso größer wird, je länger die Polymere sind, als z.B. sich wie $\beta^* y$ für ein $\beta^* > 0$ verhält (vgl. [35]).

Nun ist unser Ziel, die Existenz von schwachen Lösungen für unbeschränkte $\tau, \mu$, $\beta$ und $\eta$ zu prüfen.

Es gelte

$$\lambda, \gamma, \nu \geq 0 \ . \tag{3.1}$$

Statt (2.1), (2.3) und (2.4) setzen wir im Folgenden voraus, dass

$$\mu, \beta \in L^+_{\infty,\mathrm{loc}}(Y) \ , \tag{3.2}$$

$$\tau \in C([y_0, \infty)) \ , \qquad 0 < \tau_0 \leq \tau(y) \leq \tau^* y \ , \quad y \geq y_0 \ , \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\eta : [y_0, \infty) \times [y_0, \infty) \to \mathbb{R}^+ \text{ stetig mit} \\ &\eta(y, z) = \eta(z, y) \leq K(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha) \end{aligned} \tag{3.4}$$

für $(y, z) \in Y \times Y$, für ein $K \geq 1$ und ein Paar $(\alpha, \rho)$ mit $0 \leq \alpha \leq \rho \leq 1$. Dabei ist die Einschränkung an $\alpha$ und $\rho$ dadurch bedingt, dass wir eine Lösung $(v, u)$ mit $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L_1^+(Y, y\mathrm{d}y))$ suchen möchten, was, wie schon erwähnt wurde, aus biologischer Sicht sinnvoll ist. Somit wird mit der Bedingung (3.4) gewährleistet, dass $\int_{y_0}^\infty \varphi(y) Q[u(t)](y)\mathrm{d}y$ für jedes $\varphi \in L_\infty(Y)$ und jedes $t \geq 0$ existiert.
Im Weiteren verwenden wir die Bezeichnung

$$\theta := \alpha + \rho \in [0, 2] \ .$$

Im Fall $\theta \in (1, 2]$ formulieren wir noch eine Bedingung für $\beta$ und $\kappa$:

$$\begin{cases} \text{Es existieren } B > 0, \ \zeta > \theta - 1 \text{ und } 0 < a < 1, \text{ sodass} \\ (i) \quad \beta(y) \geq B y^\zeta \ , \quad y \in Y \ , \\ (ii) \quad 2\displaystyle\int_{y_0}^{y} z\kappa(z, y)\mathrm{d}z \leq ay \ , \quad y \in Y \ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Die Bedingung (ii) in (3.5) bedeutet aus biologischer Sicht, dass bei der Polymerteilung das Verhältnis der Anzahl der dabei entstehenden Monomeren zur Anzahl der Partikel, die in den neuen Polymeren enthalten sind, nicht kleiner ist als $\frac{1-a}{a} > 0$. Wir fordern außerdem, dass $\kappa$ sowohl (1.7), (1.8) als auch die folgenden Bedingungen erfüllt: Für jedes $R > y_0$ gilt

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{\substack{E\subset(y_0,R)\\ |E|\le\delta}} \operatorname*{ess\,sup}_{y\in(y_0,R)} \beta(y) \int\limits_{y_0}^{y} \mathbf{1}_E(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z = 0 \ , \tag{3.6}$$

wobei $E$ messbar ist und $|E|$ das Lebesgue-Maß von $E$ bezeichnet, und es gibt ein $y_1 \in Y$ und ein $\delta_1 > 0$, sodass

$$\int\limits_{y_1}^{y} \left(1 - \frac{z}{y}\right) \kappa(z,y)\mathrm{d}z \ge \delta_1 \ , \quad y \ge 2y_1 \ . \tag{3.7}$$

Wenn $\kappa$ die Form (1.10), (1.11) besitzt, dann sind die Bedingungen (1.7), (1.8), (3.6) und (3.7) erfüllt. Dabei folgt (3.6) aus der Identität

$$\int_{y_0}^{y} \mathbf{1}_E(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z = \int_{y_0}^{y} \mathbf{1}_E(z)\frac{1}{y}k_0\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}z = \int_{y_0/y}^{1} \mathbf{1}_{\frac{1}{y}E}(z)k_0(z)\mathrm{d}z$$

und der Tatsache, dass $y_0 > 0$, $\beta \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Y)$ und $k_0$ integrierbar ist. Um (3.7) in diesem Fall zu zeigen, betrachten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{y_1}^{y} \left(1-\frac{z}{y}\right)\kappa(z,y)\mathrm{d}z &= \int_{y_1}^{y} \left(1-\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y}k_0\left(\frac{z}{y}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{y_1/y}^{1} (1-x)k_0(x)\mathrm{d}x \\
&\ge \int_{1/2}^{1} (1-x)k_0(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{1/2}^{1} (1-x)k_0(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1/2} xk_0(x)\mathrm{d}x\right) > 0 \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt (1.11) verwendet haben. Nun folgt (3.7) aus (1.11) und der Nichtnegativität von $k_0$.

Wir erinnern wieder an die in (1.13) und (1.16) eingeführten Abbildungen

$$L[u](y) = -(\mu(y) + \beta(y))u(y) + 2\int_{y}^{\infty} \beta(z)\kappa(y,z)u(z)\mathrm{d}z$$

und

$$Q[u,u](y) = \mathbf{1}_{[y>2y_0]} \int\limits_{y_0}^{y-y_0} \eta(y-z,z)u(y-z)u(z)\mathrm{d}z - 2u(y) \int_{y_0}^{\infty} \eta(z,y)u(z)\mathrm{d}z$$

für fast alle $y \in Y$. In den Kapiteln 3 und 4 verwenden wir stets die Notation

$$Q[u] := Q[u,u]$$

für $u \in L_1(Y, y\mathrm{d}y)$. Man beachte die (formalen) Identitäten

$$\int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)Q[u](y)\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} (\varphi(y+z) - \varphi(y) - \varphi(z))\eta(y,z)u(y)u(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ ,$$

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)L[u](y)\mathrm{d}y = &- \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)\mu(y)u(y)\mathrm{d}y \\ &+ \int_{y_0}^{\infty} u(y)\beta(y)\left(-\varphi(y) + 2\int_{y_0}^{y} \varphi(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y \ .\end{aligned}$$

Nun führen wir den Begriff einer *monomererhaltenden schwachen Lösung* ein.

**Definition 3.1.** Es seien $v^0 > 0$ und $u^0 \in L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ gegeben. Wir nennen $(v,u)$ eine *monomererhaltende schwache Lösung* von (1.1)–(1.4), wenn

(i) $v \in C^1(\mathbb{R}^+)$ eine nichtnegative Lösung von (1.1) ist,

(ii) $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ so ist, dass für alle $t > 0$ und $\varphi \in W_\infty^1(Y)$

$$[(s,y) \to \big(\mu(y) + \beta(y)\big)u(s,y)] \in L_1\big((0,t) \times Y\big) \ , \tag{3.8}$$

$$[(s,y,z) \mapsto \eta(y,z)u(s,y)u(s,z)] \in L_1((0,t) \times Y \times Y) \tag{3.9}$$

und

$$\begin{aligned}&\int\limits_{y_0}^{\infty} \varphi(y)u(t,y)\mathrm{d}y - \int\limits_{0}^{t} \frac{v(s)}{1 + \nu\|u(s)\|_{L_1(Y,y\mathrm{d}y)}} \int\limits_{y_0}^{\infty} \varphi'(y)\tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \int\limits_{y_0}^{\infty} \varphi(y)u^0(y)\mathrm{d}y + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{y_0}^{\infty} \varphi(y)L[u(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{y_0}^{\infty} \varphi(y)Q[u(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\end{aligned}$$

gilt,

(iii) $(v, u)$ für $t > 0$ die Gleichung

$$v(t) - v^0 + \int_{y_0}^{\infty} yu(t,y)\mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\infty} yu^0(y)\mathrm{d}y$$
$$= \lambda t - \gamma \int_0^t v(s)\mathrm{d}s - \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} y\mu(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \quad (3.10)$$

erfüllt.

Die schwache Formulierung der Lösung in (ii) entspricht der Gleichung, die wir durch Testen von (1.2) mit $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ erhalten. Wenn die Bedingungen (1.7), (1.8), (3.3), (3.4) und (3.8) erfüllt sind, sind alle Terme in (ii) endlich.

Mit der Gleichung in (iii) wird gewährleistet, dass sich die Gesamtanzahl der Monomere im System ausschließlich durch die natürliche Produktion mit der Rate $\lambda$ steigern und durch das Absterben mit der Rate $\gamma$ verkleinern kann. Wenn diese Gleichung erfüllt ist, spricht man von einer "monomererhaltenden" Lösung. Formal erhält man die Gleichung, indem man (1.2) bezüglich des Maßes $y\mathrm{d}y$ und bezüglich $t$ unter Berücksichtigung von (1.7), (1.8) integriert, vorausgesetzt, das Integral existiert, und danach mit (1.1) aufaddiert (vgl. (2.58)).

Im Weiteren benutzen wir die Notation $L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)$ für den Raum $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$, versehen mit seiner schwachen Topologie.
Das folgende Theorem stellt eine Existenzaussage für schwache monomererhaltende Lösungen dar.

**Theorem 3.2.** *Es gelte* (3.1). *Es sei* $\mu, \beta \in L^+_{\infty,\,\mathrm{loc}}(Y)$, $\kappa$ *erfülle die Bedingungen* (1.7), (1.8), (3.6) *und* (3.7), $\tau$ *erfülle* (3.3) *und für* $\eta$ *gelte die Bedingung* (3.4), *wobei entweder*

$$\alpha + \rho \leq 1 \quad (3.11)$$

*oder*

$$1 < \alpha + \rho \leq 2 \text{ zusammen mit } (3.5) \quad (3.12)$$

*erfüllt sein soll.*

*(i) Dann besitzt das Problem* (1.1)–(1.4) *für jeden Anfangswert* $(v_0, u_0)$ *mit*

$$v^0 > 0\ , \quad u^0 \in L^+_1(Y, y\mathrm{d}y)$$

*eine globale monomererhaltende schwache Lösung* $(v, u)$ *mit*

$$u \in C(\mathbb{R}^+, L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y))\ .$$

*(ii) Gilt* (3.11) *und* $u^0 \in L_1^+(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)$ *für ein* $\sigma \geq 1$*, so gilt darüber hinaus für die monomererhaltende schwache Lösung* $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)\big)$.

Um Theorem 3.2 beweisen zu können, benötigen wir einige Vorbereitungen. In Abschnitt 3.1 konstruieren wir eine Folge von Problemen mit "abgeschnittenen" Raten $(\tau_n, \eta_n, \mu_n, \beta_n)$ und Anfangswerten $u_n^0 \in \mathcal{D}(Y)$, von denen jedes nach dem Resultat aus Kapitel 2 eine eindeutige klassische globale Lösung $(v_n, u_n)$ besitzt. Danach beweisen wir in Abschnitt 3.2, dass die Lösungsfolge $(v_n, u_n)$ schwach kompakt in $C\big([0,T], \mathbb{R} \times L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ für jedes $T > 0$ ist. Die Schwierigkeit hierbei besteht darin, dass die einzige Erhaltungsgleichung (3.10) nur Abschätzungen der Folge $(u_n)$ in dem nicht-reflexiven Raum $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ liefert, also keine unmittelbare (schwache) Kompaktheit (vgl. [29]). Daher verwenden wir das Theorem von Dunford-Pettis (Theorem A.4), das die schwache Kompaktheit in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ charakterisiert. Der Satz von Arzelà-Ascoli (für schwache Topologien) garantiert dann die Existenz eines Häufungspunktes. In Abschnitt 3.3 zeigen wir, dass dieser Häufungspunkt tatsächlich eine schwache monomererhaltende Lösung für (1.1)–(1.4) definiert. Wir beweisen die Aussage zuerst im Fall $\nu = 0$.

## 3.1. Ratenapproximationen und Abschätzungen

In diesem und im nächsten Abschnitt der Arbeit wird angenommen, dass $\nu = 0$.

Es sei im Weiteren $T > 0$ beliebig. Wegen $u^0 \in L_1^+(Y)$ können wir $u^0 \mathrm{d}y$ als Maß auf $Y$ betrachten. Da auch $u^0 \in L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ gilt, garantiert eine verallgemeinerte Version des Theorems von de la Vallée-Poussin [34] (siehe im Anhang Theorem A.3) die Existenz einer nichtnegativen, nichtfallenden und konvexen Funktion $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit den folgenden Eigenschaften: $\Phi(0) = 0$, $\Phi'$ ist konkav,

$$\lim_{r\to\infty} \Phi'(r) = \lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{r} = \infty \tag{3.13}$$

und

$$\int_{y_0}^\infty \Phi(y) u^0(y) \mathrm{d}y < \infty \ .$$

Da $\Phi u^0 \in L_1(Y)$, existiert eine nichtnegative Folge $(u_n^0) \subset \mathcal{D}(Y)$, sodass

$$u_n^0 \to u^0 \quad \text{in} \quad L_1^+(Y) \qquad \text{und} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{y_0}^\infty \Phi(y) u_n^0(y) \mathrm{d}y < \infty \ . \tag{3.14}$$

Nun definieren wir auf $[y_0, \infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y_0$ die Funktion

$$\tau_{0,n}(y) := \min\{\tau(y), \tau^* n\} - \tau_0 \ \geq 0 \ ,$$

wobei $\tau_0$ und $\tau^*$ die Kostanten aus (3.3) sind. Ferner sei

$$\tau_n^F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad \tau_n^F(y) = \begin{cases} 0, & 0 \le y < \frac{y_0}{2} \\ \tau_{0,n}(y_0), & \frac{y_0}{2} \le y \le y_0 \\ \tau_{0,n}(y), & y \ge y_0 \ . \end{cases}$$

Offensichtlich ist $\tau_n^F \in L_\infty^+(\mathbb{R}^+)$ stetig auf $(\frac{y_0}{2}, \infty)$. Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ mit $\int_{\mathbb{R}_+} \varphi \mathrm{d}y = 1$ und $\varphi_t(x) := t^{-1}\varphi(x/t),\ x \in \mathbb{R}_+,\ t > 0$. Dann gilt wegen [21, Theorem 8.14]

$$\varphi_t * \tau_n^F \to \tau_n^F \quad \text{für } t \to 0$$

gleichmäßig auf kompakten Intervallen. Dies bedeutet, dass für jedes $n > y_0$ ein $t_n > 0$ mit

$$\|\varphi_{t_n} * \tau_n^F - \tau_n^F\|_{L_\infty([y_0,n])} < \frac{\tau_0}{8n}$$

existiert. Nun definieren wir für jedes natürliche $n > y_0$ die Funktion

$$\tau_n := \left(\varphi_{t_n} * \tau_n^F\right)|_Y + (1 - \frac{1}{4n})\tau_0 \ .$$

Dann gilt für $n > y_0$

$$\begin{aligned} \|\tau - \tau_n\|_{L_\infty([y_0,n])} &\le \|\tau - (\tau_n^F + \tau_0)\|_{L_\infty([y_0,n])} + \|\tau_n^F + \tau_0 - \tau_n\|_{L_\infty([y_0,n])} \\ &= \|\tau - (\tau_{0,n} + \tau_0)\|_{L_\infty([y_0,n])} + \left\|\tau_n^F - \varphi_{t_n} * \tau_n^F + \frac{\tau_0}{4n}\right\|_{L_\infty([y_0,n])} \ . \end{aligned}$$

Da wegen (3.3) und der Definition von $\tau_{0,n}$

$$\|\tau - (\tau_{0,n} + \tau_0)\|_{L_\infty([y_0,n])} = 0$$

gilt, erhalten wir für $n > y_0$

$$\|\tau - \tau_n\|_{L_\infty([y_0,n])} \le \|\tau_n^F - \varphi_{t_n} * \tau_n^F\|_{L_\infty([y_0,n])} + \frac{\tau_0}{4n} \le \frac{\tau_0}{2n} \ .$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz $\tau_n \to \tau$ für $n \to \infty$ auf kompakten Intervallen. Es gilt außerdem offensichtlich für $n > y_0$

$$\tau_n \in BUC^\infty([y_0, \infty)) \ , \qquad 0 < \frac{\tau_0}{2} \le \tau_n(y) \le \tau^* y \ , \quad y > y_0 \ . \tag{3.15}$$

Um die Funktionen $\eta_n, n > y_0$, zu konstruieren, definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y_0$, $(y, z) \in \mathbb{R}_+^2$ und für ein gegebenes $0 < \varepsilon < 1/2$ die Funktion

$$\chi_n(y, z) := \begin{cases} 1 - \dfrac{\varepsilon}{4Kn^3} \ , & (y, z) \in [y_0, n+1] \times [y_0, n+1] \\ 0 \ , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei $\eta_F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ durch

$$\eta_F(y,z) = \begin{cases} 0, & (y,z) \in \big([0,\frac{y_0}{2}) \times [0,\infty)\big) \cup \big([0,\infty) \times [0,\frac{y_0}{2})\big) \\ \eta(y_0,y_0), & (y,z) \in \big([\frac{y_0}{2},y_0) \times [\frac{y_0}{2},\infty)\big) \cup \big([\frac{y_0}{2},\infty) \times [\frac{y_0}{2},y_0)\big) \\ \eta(y,z), & (y,z) \in [y_0,\infty) \times [y_0,\infty) \end{cases}$$

gegeben. Es gilt offensichtlich

$$\chi_n \eta_F(y,z) = \left(1 - \frac{\varepsilon}{4Kn^3}\right) \eta(y,z)$$

für $(y,z) \in [y_0,n] \times [y_0,n]$. Ferner sei $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^2)$ symmetrisch und nichtnegativ mit $\int \varphi \mathrm{d}x = 1$ und $\varphi_t(x) := t^{-2}\varphi(x/t),\ x \in \mathbb{R}_+^2,\ t > 0$. Dann konvergiert $\varphi_t * (\chi_n \eta_F)$ für $t \to 0$ wegen [21, Theorem 8.14] gleichmäßig auf $[y_0,n] \times [y_0,n]$ gegen $\chi_n \eta_F$, d.h. für jedes $n > y_0$ existeiert ein $t_n > 0$, sodass

$$\|\varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F) - \chi_n \eta_F\|_{L_\infty([y_0,n]\times[y_0,n])} \leq \frac{\varepsilon}{2n} \ . \tag{3.16}$$

Ferner gilt für jedes $n > y_0$ wegen (3.4)

$$\begin{aligned} &[\varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F)](y,z) \\ &\quad = \int_{\substack{x_1 \leq y \\ x_2 \leq z}} \varphi_{t_n}\big((y,z) - (x_1,x_2)\big) \chi_n \eta_F(x_1,x_2) \, \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &\quad \leq K \int_{\substack{x_1 \leq y \\ x_2 \leq z}} \varphi_{t_n}\big((y,z) - (x_1,x_2)\big)(x_1^\alpha x_2^\rho + x_1^\rho x_2^\alpha) \, \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &\quad \leq K(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha) \int_{\substack{x_1 \leq y \\ x_2 \leq z}} \varphi_{t_n}\big((y,z) - (x_1,x_2)\big) \, \mathrm{d}(x_1,x_2) \\ &\quad \leq K(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha) \ . \end{aligned}$$

Daher erhalten wir für jedes $n > y_0$

$$0 \leq [\varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F)](y,z) \leq K(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha)$$

für fast alle $(y,z) \in Y \times Y$ und

$$\begin{aligned} \|\varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F) - \eta\|_{L_\infty([y_0,n]\times[y_0,n])} &\leq \|\varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F) - \chi_n \eta_F\|_{L_\infty([y_0,n]\times[y_0,n])} \\ &\quad + \|\chi_n \eta_F - \eta\|_{L_\infty([y_0,n]\times[y_0,n])} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n} + \|\eta\|_{L_\infty([y_0,n]\times[y_0,n])} \frac{\varepsilon}{4Kn^3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n} + 2K(n^\alpha n^\rho) \frac{\varepsilon}{4Kn^3} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2n} + 2Kn^2 \frac{\varepsilon}{4Kn^3} = \frac{\varepsilon}{n} \ , \end{aligned}$$

wobei (3.16), (3.4) und die Relation $\alpha + \rho \leq 2$ benutzt wurde. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y_0$ definieren wir Funktion

$$\eta_n := \varphi_{t_n} * (\chi_n \eta_F)|_{Y\times Y}$$

und bemerken, dass die Folge $(\eta_n)$ für $n \to \infty$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $Y \times Y$ gegen $\eta$ konvergiert. Für $n > y_0$ gilt außerdem

$$\eta_n(y,z) = \eta_n(z,y) \leq K(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha) \tag{3.17}$$

mit $K$, $\alpha$ und $\rho$ aus (3.4) sowie $\eta_n \in BUC^\infty(Y \times Y)$ und $\eta_n(y,z) = 0$ für $(y,z)$ mit $y + z > R_n$ für ein $R_n > 0$.
Wir definieren

$$n_0 := \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ n > y_0\}$$

und für jedes $n \geq n_0$

$$S_n^0 := \sup\{y \in (y_0, \infty) \ : \ y \in \operatorname{supp} u_n^0\} \ ,$$

$$H_n(T) := \phi_n^{-1}\left(\int_0^T \left(v_0 + \int_{y_0}^\infty y u_n^0(y)\mathrm{d}y + \lambda t\right)\mathrm{d}t\right)$$

mit

$$\phi_n(y) := \int_{\max\{S_n^0, R_n\}}^y \frac{\mathrm{d}z}{\tau_n(z)}$$

wie im Beweis von Satz 2.15. Nun konstruieren wir rekursiv die Folge

$$\mathcal{S}_{n_0}(T) := \max\{H_{n_0}(T), n_0\}$$

und

$$\mathcal{S}_n(T) := \max\{\mathcal{S}_{n-1}(T), H_n(T), n\} \ , \quad n > n_0 \ .$$

Wir definieren $\mu_n := \mathbf{1}_{[y_0, \mathcal{S}_n(T)]}\mu$ und $\beta_n := \mathbf{1}_{[y_0, \mathcal{S}_n(T)]}\beta$ für jedes natürliche $n > y_0$.

Dann folgt aus Kapitel 2, dass für jedes $v^0 > 0$ eindeutige klassische Lösungen

$$(v_n, u_n) \in C^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R} \times L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$$

für (1.1)–(1.4) mit $(\tau, \mu, \beta, \eta, u^0)$ ersetzt durch $(\tau_n, \mu_n, \beta_n, \eta_n, u_n^0)$ existieren. Es gilt darüber hinaus $v_n(t) > 0$, $u_n(t) \geq 0$, $\partial_y u_n \in C\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ und

$$\operatorname{supp} u_n(t) \subset [y_0, \mathcal{S}_n(T)] \ , \quad t \in [0,T] \ , \tag{3.18}$$

wobei (3.18) aus Lemma 2.12, Satz 2.15 und der Konstruktion von $\mathcal{S}_n(T)$ folgt. Man beachte, dass also

$$\operatorname{supp} u_n(t) \subset \operatorname{supp} \beta_n \ , \quad t \in [0,T]$$

gilt, was später wichtig sein wird, um den Fall $\theta = \alpha + \rho \in (1, 2]$ betrachten zu können.
Da die klassischen Lösungen $(u_n, v_n)$ monomererhaltend sind, impliziert Lemma 2.12 zusammen mit (3.14) die fundamentale Abschätzung

$$v_n(t) + \int_{y_0}^{\infty} y u_n(t, y) \mathrm{d}y + \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} y \mu_n(y) u_n(s, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \leq c(T) \tag{3.19}$$

für $t \in [0, T]$ und $n > y_0$, wobei $c(T)$ eine von $n$ unabhängige Konstante bezeichnet.

Im weiteren Verlauf des Kapitels verwenden wir die Notation

$$L_n[u](y) := -(\mu_n(y) + \beta_n(y))u(y) + 2 \int_y^{\infty} \beta_n(z) \kappa(y, z) u(z) \mathrm{d}z$$

und

$$Q_n[u](y) := \mathbf{1}_{[y > 2y_0]} \int_{y_0}^{y - y_0} \eta_n(y - z, z) u(y - z) u(z) \mathrm{d}z - 2u(y) \int_{y_0}^{\infty} \eta_n(z, y) u(z) \mathrm{d}z$$

für fast alle $y \in Y$.

In den folgenden Lemmata werden einige nützliche Eigenschaften von $u_n$ gezeigt.

**Lemma 3.3.** *Es sei $\theta = \alpha + \rho \in (1, 2]$. Wenn die Bedingung (3.5) erfüllt ist mit $\zeta > 0$, dann existiert eine Konstante $C_M$, die nur von $K$, $\theta$, $B$, $\zeta$ und $T$ abhängt, sodass*

$$\int_{y_0}^{\infty} y^2 u_n(t, y) \mathrm{d}y \leq C_M (1 + t^{-1/\zeta}) , \quad t \in [0, T] . \tag{3.20}$$

***Beweis***. Wir modifizieren den Beweis von [18, Lemma 3.2] für unseren Fall. Für $\int_{y_0}^{\infty} y^s u_n(t, y) \mathrm{d}y$ mit $s > 0$ verwenden wir die Notation $M_{s,n}(t)$. Hier bemerken wir, dass auf Grund der Kompaktheit des Trägers von $[y \mapsto u_n(t, y)]$ für $n > y_0$ und $t \in [0, T]$ die Momente $M_{s,n}(t)$ für jedes $s > 0$ und jedes $n > y_0$ existieren. Mit $c(T)$ und $c_1(T)$ bezeichnen wir positive Konstanten, die nur von $K$, $\theta$, $B$, $\zeta$ und $T$ abhängen und die sich von einer Zeile zur anderen ändern können. Zuerst bemerken wir, dass wegen (3.17) die Abschätzung

$$\eta_n(y, z) \leq 2K(y^\theta + z^\theta) , \quad (y, z) \in Y \times Y , \quad n > y_0$$

gilt. Damit erhalten wir aus (1.16) und (3.19) für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{\infty} y^2 Q_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y \\
&\quad\le 2K \int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} (y^\theta + z^\theta)((y+z)^2 - y^2 - z^2)u_n(t,y)u_n(t,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad= 8K \int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} y^\theta y z u_n(t,y)u_n(t,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad= 8K \int_{y_0}^{\infty} y^{\theta+1}u_n(t,y)\mathrm{d}y \int_{y_0}^{\infty} z u_n(t,z)\mathrm{d}z \\
&\quad\le c(T)M_{1+\theta,n}(t) \ .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Andererseits ergibt sich aus (1.9), (1.15) und der Nichtnegativität von $\mu_n$, $\beta_n$ und $u_n$ für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&-\int_{y_0}^{\infty} y^2 L_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y \\
&\quad= \int_{y_0}^{\infty} y^2\mu_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} y^2\beta_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y \\
&\qquad - 2\int_{y_0}^{\infty} \beta_n(y)u_n(t,y)\int_{y_0}^{y} z^2\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad\ge \int_{y_0}^{\infty} y^2\mu_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} y^2\beta_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\infty} a y^2\beta_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y \\
&\quad= \int_{y_0}^{\infty} y^2\mu_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y + (1-a)\int_{y_0}^{\infty} y^2\beta_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

und somit aus (3.5)

$$\begin{aligned}
&-\int_{y_0}^{\infty} y^2 L_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y \\
&\quad\ge \int_{y_0}^{\infty} y^2\mu_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y + (1-a)B\int_{y_0}^{\infty} y^2 y^\zeta u_n(t,y)\mathrm{d}y \\
&\quad\ge (1-a)B\int_{y_0}^{\infty} y^{2+\zeta}u_n(t,y)\mathrm{d}y = (1-a)B\, M_{2+\zeta,n}(t) \ .
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Die Gleichung (1.2) impliziert

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} y^2 \partial_t u_n(t,y)\mathrm{d}y + v(t) \int_{y_0}^{\infty} y^2 \partial_y\big(\tau_n(y) u_n(t,y)\big)\mathrm{d}y \\ = \int_{y_0}^{\infty} y^2 L_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} y^2 Q_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y\ .\end{aligned} \tag{3.23}$$

Nun verwenden wir partielle Integration für den zweiten Summanden auf der linken Seite unter Berücksichtigung von (3.15):

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{\infty} y^2 \partial_y\big(\tau_n(y) u_n(t,y)\big)\mathrm{d}y &= \underbrace{y^2\big(\tau_n(y)u_n(t,y)\big)\Big|_{y_0}^{\infty}}_{=0} - 2\int_{y_0}^{\infty} y\tau_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y \\ &\geq -2\tau^* M_{2,n}(t)\ , \quad t \in [0,T]\ .\end{aligned}$$

Somit erhalten wir aus (3.21), (3.22) und (3.23) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M_{2,n}(t)}{\mathrm{d}t} &\leq c(T)M_{2,n}(t) + \int_{y_0}^{\infty} y^2 L_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y + \int_{y_0}^{\infty} y^2 Q_n[u_n(t)](y)\mathrm{d}y \\ &\leq c(T)M_{2,n}(t) - (1-a)B\, M_{2+\zeta,n}(t) + c(T)M_{1+\theta,n}(t) \\ &\leq -c_1\, M_{2+\zeta,n}(t) + c(T)M_{1+\theta,n}(t)\ ,\end{aligned}$$

weil $1+\theta > 2$. Dies ist äquivalent zu der Ungleichung

$$\frac{\mathrm{d}M_{2,n}(t)}{\mathrm{d}t} + c_1\, M_{2+\zeta,n}(t) \leq c(T)M_{1+\theta,n}(t)\ , \quad t\in[0,T]\ . \tag{3.24}$$

Nun bemerken wir, dass $\zeta > \theta - 1$ und dass für $y \in (y_0,\infty)$ und $t \in [0,T]$ offensichtlich gilt

$$y^{1+\theta} u_n(t,y) = \big(y u_n(t,y)\big)^{1-\frac{\theta}{1+\zeta}} \big(y u_n(t,y)\big)^{\frac{\theta}{1+\zeta}} y^{\theta}\ .$$

Mit der Hölderschen Ungleichung und $M_{1,n}(t) \leq c(T)$ (vgl. (3.19)) folgt daraus für $t \in [0, T]$

$$
\begin{aligned}
&M_{1+\theta,n}(t)\\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} y^{1+\theta} u_n(t,y) \mathrm{d}y\\
&\quad \leq \left( \int_{y_0}^{\infty} \left( (y u_n(t,y))^{\frac{1+\zeta-\theta}{1+\zeta}} \right)^{\frac{1+\zeta}{1+\zeta-\theta}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{1+\zeta-\theta}{1+\zeta}} \left( \int_{y_0}^{\infty} \left( (y u_n(t,y))^{\frac{\theta}{1+\zeta}} y^{\theta} \right)^{\frac{1+\zeta}{\theta}} \mathrm{d}y \right)^{\frac{\theta}{1+\zeta}}\\
&\quad = M_{1,n}^{\frac{1+\zeta-\theta}{1+\zeta}}(t) M_{2+\zeta,n}^{\frac{\theta}{1+\zeta}}(t) \leq c(T) M_{2+\zeta,n}^{\frac{\theta}{1+\zeta}}(t) \ .
\end{aligned}
$$

Somit kann (3.24) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$
\frac{\mathrm{d}M_{2,n}(t)}{\mathrm{d}t} + c_1 \, M_{2+\zeta,n}(t) \leq c(T) M_{2+\zeta,n}^{\frac{\theta}{1+\zeta}}(t) \ , \quad t \in [0, T] \ .
$$

Da $\theta < 1 + \zeta$, erhalten wir daraus mit der Youngschen Ungleichung

$$
\frac{\mathrm{d}M_{2,n}(t)}{\mathrm{d}t} + c_1(T) \, M_{2+\zeta,n}(t) \leq c(T) \ , \quad t \in [0, T] \ .
$$

Wegen $\zeta > 0$ gilt $2 \in (1, 2+\zeta)$, und wir können wieder die Höldersche Ungleichung verwenden, was uns zusammen mit (3.19) die Abschätzung

$$
M_{2,n}(t) \leq M_{1,n}^{\frac{\zeta}{1+\zeta}}(t) M_{2+\zeta,n}^{\frac{1}{1+\zeta}}(t) \leq c(T) M_{2+\zeta,n}^{\frac{1}{1+\zeta}}(t) \ , \quad t \in [0, T]
$$

liefert. Dann gilt wegen der vorletzten Ungleichung auch

$$
\frac{\mathrm{d}M_{2,n}(t)}{\mathrm{d}t} + c_1(T) M_{2,n}^{1+\zeta}(t) \leq c(T) \ .
$$

Da die Funktion $[t \mapsto C_M(1+t^{-\frac{1}{\zeta}})]$ mit einer Konstanten $C_M$, die nur von $K, B, \theta, \zeta$ und $T$ abhängt, die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung löst, folgt mit dem Vergleichssatz die Behauptung. □

**Lemma 3.4.** *Es sei $\theta \in (1, 2]$ und es gelte die Bedingung (3.5). Dann ist*

$$
\int_0^T M_{\theta,n}(t) \mathrm{d}t \leq c(T)
$$

*erfüllt, wobei $c(T)$ eine Konstante ist, die nur von $K, B, \theta, \zeta$ und $T$ abhängt.*

***Beweis***. Wegen $\theta \in (1,2]$ können wir die Höldersche Ungleichung verwenden. Damit erhalten wir

$$M_{\theta,n}(t) \leq M_{1,n}(t)^{2-\theta} M_{2,n}(t)^{\theta-1} \ , \quad t \in [0,S] \ .$$

Nun ergibt sich mit Lemma 3.3

$$M_{\theta,n}(t) \leq M_{1,n}(t)^{2-\theta} C_M^{\theta-1} (1 + t^{-\frac{1}{\zeta}})^{\theta-1} \leq c(T) \left(1 + t^{-\frac{\theta-1}{\zeta}}\right) \ , \quad t \in [0,T] \ ,$$

wobei die zweite Ungleichung aus (3.19) folgt. Da wegen (3.5) die Ungleichung $\theta - 1 < \zeta$ gilt, folgt aus der letzten Abschätzung die Behauptung. □

Wegen der Kompaktheit des Trägers von $u_n$ dürfen wir die Gleichung (1.2) mit jedem $\varphi \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(Y)$ testen, insbesondere mit $\Phi$. Damit erhalten wir für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{\infty} \Phi(y) u_n(t,y) \mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\infty} \Phi(y) u_n^0(y) \mathrm{d}y \\
&\quad = \int_0^t v_n(s) \int_{y_0}^{\infty} \Phi'(y) \tau_n(y) u_n(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \Phi(y)(\mu_n(y) + \beta_n(y)) u_n(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\qquad + 2 \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,y) \beta_n(y) \int_{y_0}^{y} \Phi(z) \kappa(z,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \tilde{\Phi}(y,z) \eta_n(y,z) u_n(y) u_n(z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{3.25}$$

mit $\tilde{\Phi}(y,z) := \Phi(y+z) - \Phi(y) - \Phi(z)$ für $y,z \in Y$, wobei wir (1.15) und (1.16) verwendet haben. Wir definieren

$$I_{1,n}(s) := \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,y) \beta_n(y) \int_{y_0}^{y} \left( \frac{\Phi(y)}{y} - \frac{\Phi(z)}{z} \right) z \kappa(z,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y$$

und

$$I_{2,n}(s) := \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,y) \beta_n(y) \frac{\Phi(y)}{y} \int_0^{y_0} z \kappa(z,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y$$

und benutzen die Tatsache, dass für $t \in [0,T]$

$$-\int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\beta_n(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + 2\int_0^t \int_{y_0}^\infty u_n(t,y)\beta_n(y)\int_{y_0}^y \Phi(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$
$$= -2\int_0^t (I_{1,n}(s) + I_{2,n}(s))\mathrm{d}s \ .$$

Nun schreiben wir (3.25) als

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y - \int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n^0(y)\mathrm{d}y \\ = \int_0^t v_n(s)\int_{y_0}^\infty \Phi'(y)\tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ - \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ - 2\int_0^t (I_{1,n}(s) + I_{2,n}(s))\mathrm{d}s \\ + \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \tilde{\Phi}(y,z)\eta_n(y,z)u_n(s,y)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.26}$$

für $t \in [0,T]$. Da $\Phi \geq 0$, $\mu \geq 0$ und $\beta \geq 0$, sind $I_{2,n}$ und der zweite Term der rechten Seite von (3.26) nichtnegativ. Wegen $\Phi(0) = 0$ und der Konvexität von $\Phi$ ist die Abbildung $y \mapsto \dfrac{\Phi(y)}{y}$ nichtfallend und $I_{1,n}$ ist somit nichtnegativ. Andererseits impliziert die Konkavität von $\Phi'$ zusammen mit $\Phi'(0) \geq 0$ die Ungleichungen $-\Phi'(y) \leq \Phi'(0) - \Phi'(y) \leq -y\Phi''(y)$. Das Integrieren bezüglich $y$ unter Berücksichtigung von $\Phi(0) = 0$ ergibt $y\Phi'(y) \leq 2\Phi(y)$ für $y \in Y$. Aus $\Phi' \geq 0$, (3.15) und (3.19) erhält man nun

$$\begin{aligned}\int_0^t v_n(s)\int_{y_0}^\infty \Phi'(y)\tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s &\leq c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty y\Phi'(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{3.27}$$

für $t \in [0,T]$ und $n > y_0$. Da $\Phi$ konvex und nichtfallend ist, gilt

$$0 \leq \tilde{\Phi}(y,z) \leq 2\frac{z\Phi(y) + y\Phi(z)}{(y+z)} \ , \qquad (y,z) \in \mathbb{R}_+^2 \ ,$$

wobei in der zweiten Ungleichung [29, Lemma A.2] benutzt wurde. Analog zum Beweis in [18, Proposition 3.4] definieren wir

$$\Psi(y,z) := \tilde{\Phi}(y,z) y^\alpha z^\rho \ , \quad (y,z) \in Y \times Y \ .$$

Dann gilt für $(y,z) \in Y \times Y$

$$\Psi(y,z) \leq 2\frac{z\Phi(y) + y\Phi(z)}{y+z} y^\alpha z^\rho \leq 2\big(z\Phi(y) + y\Phi(z)\big) \ ,$$

wenn $\theta = \alpha + \rho \leq 1$. Für $\theta \in (1,2]$ unterscheiden wir die beiden Fälle $y \geq z$ und $y < z$. Für $y \geq z$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Psi(y,z) &\leq 2\frac{z\Phi(y) + y\Phi(z)}{y+z} y^\alpha z^\rho \\
&= 2\frac{z^{1-\alpha} z^\alpha z^\rho y^\alpha \Phi(y) + y y^\alpha z^\rho \Phi(z)}{y+z} \\
&\leq 2\frac{y^{1-\alpha} z^\theta y^\alpha \Phi(y) + y y^\alpha y^\rho \Phi(z)}{y+z} \\
&= 2\frac{y z^\theta \Phi(y) + y y^\theta \Phi(z)}{y+z} \\
&\leq 2\big(z^\theta \Phi(y) + y^\theta \Phi(z)\big) \ .
\end{aligned}$$

Der zweite Fall wird völlig analog behandelt. Wir setzen $\theta_1 := \max\{1,\theta\}$ und erhalten für $t \in [0,T]$ wegen (3.17) die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \tilde{\Phi}(y,z) \eta_n(y,z) u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\qquad \leq K \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \tilde{\Phi}(y,z) \Big(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha\Big) u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\qquad = 2K \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \Psi(y,z) u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \tilde{\Phi}(y,z)\eta_n(y,z)u_n(s,y)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad \le 4K \int_0^t \int_{y_0}^\infty z^{\theta_1} u_n(s,z)\mathrm{d}z \int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad\quad + 4K \int_0^t \int_{y_0}^\infty y^{\theta_1} u_n(s,y)\mathrm{d}y \int_{y_0}^\infty \Phi(z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\qquad = 8K \int_0^t M_{\theta_1,n}(s) \int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ .
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Aus Lemma 3.4 wissen wir, dass $\int_0^t M_{\theta_1,n}(s)\mathrm{d}s$ gleichmäßig beschränkt für alle $n > y_0$ und $t \in [0,T]$ ist. Dies erlaubt uns zusammen mit (3.26), (3.27) und (3.28), die Gronwallsche Ungleichung zu verwenden. Damit erhalten wir für $t \in [0,T]$

$$\int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y \le c(T) \ , \tag{3.29}$$

$$\int_0^t I_{1,n}(s)\mathrm{d}s \le c(T) \ , \tag{3.30}$$

$$\int_0^t I_{2,n}(s)\mathrm{d}s \le c(T) \ , \tag{3.31}$$

$$\int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \le c(T) \ , \tag{3.32}$$

wobei

$$I_{1,n}(s) = \int_{y_0}^\infty u_n(s,y)\beta_n(y) \int_{y_0}^y \left(\frac{\Phi(y)}{y} - \frac{\Phi(z)}{z}\right) z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \ ,$$

$$I_{2,n}(s) = \int_{y_0}^\infty u_n(s,y)\beta_n(y)\frac{\Phi(y)}{y} \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y$$

gilt und $c(T)$ unabhängig von $n$ ist. Diese Abschätzungen ermöglichen uns, die schwache Kompaktheit der Folge $(v_n, u_n)$ in $C\big([0,T], \mathbb{R} \times L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ zu beweisen.

## 3.2. Schwache Kompaktheit der Lösungsfolge

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Folge $(v_n, u_n)$ die Bedingungen einer Version des Theorems von Arzelà-Ascoli (Theorem A.5) erfüllt und somit schwach kompakt in $C\big([0,T], \mathbb{R} \times L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ ist. In den nachfolgenden Beweisen bezeichnen wir mit $c(T)$, $c_1(T)$, $c(T,R)$, $c_1(T,R)$ von $n$ unabhängige Konstanten. Wir nehmen wieder an, dass $\nu = 0$. Zuerst beweisen wir eine Hilfsaussage.

**Lemma 3.5.** *Es sei $\mathcal{F}$ eine messbare Teilmenge von $\mathbb{R}$. Wenn*

$$|\mathcal{F}| \leq k\delta$$

*für ein $\delta > 0$ und ein $k \in \mathbb{N}$, dann existieren paarweise disjunkte messbare Mengen $\mathcal{F}_1, \cdots, \mathcal{F}_k$ mit*

$$|\mathcal{F}_j| \leq \delta, \quad \bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{F}_j = \mathcal{F} \ .$$

***Beweis***. Wegen $|\mathcal{F}| \leq k\delta$ gilt entweder

$$|\mathcal{F}| \leq \delta$$

oder es existiert eine messbare Menge $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ mit $|\mathcal{F}_1| = \delta$. Dann ist

$$\mathcal{F}_1^c := \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_1$$

messbar und es gilt entweder

$$|\mathcal{F}_1^c| < \delta$$

oder es existiert eine messbare Menge $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1^c$ mit

$$|\mathcal{F}_2| = \delta \ .$$

Da alle Mengen disjunkt sind, bricht der Prozess nach spätestens $k$ Schritten ab. Somit wurden die gesuchten Mengen konstruiert. □

Das nächste Lemma ist der erste Schritt für den Beweis der schwachen Kompaktheit der Folge $(v_n, u_n)$.
In den Beweisen für die Lemmata 3.6–3.8 verwenden wir die in [41], [33], [18] beschriebenen Ideen. Einige Abschätzungen, die für den Fall $\eta \equiv 0$ in [33] bzw. in [41] konstruiert wurden, übernehmen wir mit den notwendigen für den Fall $\eta \not\equiv 0$ Modifikationen.

**Lemma 3.6.** *Es existiert eine schwach kompakte Menge $K_T \subset L_1(Y, y\mathrm{d}y)$, sodass $u_n(t) \in K_T$ für $n > y_0$ und $0 \leq t \leq T$. Es gilt darüber hinaus*

$$\int_0^T \int_{y_0}^{\infty} \beta_n(y) u_n(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \leq c(T) \tag{3.33}$$

*für $n > y_0$.*

***Beweis***. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > y_0$. Für $R > y_0$ und $t \in [0,T]$ gilt

$$\int_R^\infty u_n(t,y)y\mathrm{d}y \le \sup_{z>R}\left\{\frac{z}{\Phi(z)}\right\}\int_{y_0}^\infty \Phi(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y \ .$$

Dies impliziert zusammen mit (3.13) und (3.29)

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{\substack{n>y_0\\ t\in[0,T]}}\int_R^\infty u_n(t,y)y\mathrm{d}y = 0 \ . \tag{3.34}$$

Da sowohl $\Phi$ als auch $y \mapsto \Phi(y)/y$ nichtfallende Funktionen sind, erhält man

$$\frac{z}{y}\Phi(y) - \Phi(z) \ge y_0\frac{\Phi(S)}{S} - \Phi(R) \ , \quad y_0 < z < R < S < y \ ,$$

und folglich

$$\int_S^\infty u_n(s,y)\beta_n(y)\int_{y_0}^R \kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \le \frac{1}{y_0\Phi(S)/S - \Phi(R)}I_{1,n}(s) \tag{3.35}$$

für $S > R$ und $s \in [0,T]$.
Sei nun $U_{v_n}(t,s), 0 \le s \le t \le \infty$, das dem Operator $-A_{v_n}(t) := -v_n(t)\partial_y(\tau\cdot)$ entsprechende Evolutionssystem in $L_1(Y)$. Dann gilt für $t \in [0,T]$ und $y \in Y$

$$u_n(t) = U_{v_n}(t,0)u_n^0 + \int_0^t U_{v_n}(t,s)(L_n[u_n(s)] + Q_n[u_n(s)])\mathrm{d}s \ .$$

Wir wenden für ein gegebenes $\delta > 0$ Lemma 2.7 an und erhalten damit unter Berücksichtigung der Positivität von $u_n(t)$ für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{E}|\le\delta}}\int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \le & \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}}\int_{\mathcal{F}} u_n^0(y)\mathrm{d}y \\ & + 2\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}}\int_{y_0}^\infty u_n(s,y)\beta_n(y)\int_{y_0}^y \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ & + \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}}\int_{\mathcal{F}}\int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ ,\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ messbar sind, $R > 2y_0$ und

$$\lambda_{n,R}(\delta) := \tau^* R \sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{E}|\le\delta}}\int_{\mathcal{E}}\frac{\mathrm{d}z}{\tau_n(z)} \ .$$

Hier bemerken wir, dass wegen (3.15)

$$\lambda_{n,R}(\delta) \le \frac{2\tau^* R}{\tau_0}\delta =: \lambda_R(\delta) \tag{3.36}$$

gilt. Dies impliziert zusammen mit Lemma 3.5 und der Additivität des Integrals

$$\sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \le \left(\frac{2\tau^* R}{\tau_0}+1\right) \sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{E}|\le\delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y\ , \quad t\in[0,T]\ . \tag{3.37}$$

Aus (3.35) folgt für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{E}|\le\delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \\
&\quad\le \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n^0(y)\mathrm{d}y \\
&\qquad + 2\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \Bigg(\int_{y_0}^{S} u_n(s,y)\beta_n(y)\int_{y_0}^{R\wedge y} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{y_0\Phi(S)/S-\Phi(R)} I_{1,n}(s)\Bigg)\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}}\int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\ ,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

wobei $S > R > y_0$. Für den letzten Summanden in (3.38) ergibt sich für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}}\int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{2y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(y)\int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,z)\int_{z+y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(y)\eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\ |\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,z)\int_{y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(y+z)\eta_n(y,z)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(2y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} \int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(s,y-z)u_n(s,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad \le c(R)\int_0^t\int_{y_0}^{\infty} u_n(s,z) \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{y_0}^{\infty} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\qquad = c(R)\int_0^t\int_{y_0}^{\infty} u_n(s,z)\mathrm{d}z \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (3.39)\\
&\qquad \le c(R,T)\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_{n,R}(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad \le c_1(R,T)\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{E}|\le\delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\ , \quad t\in[0,T]\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir (3.17), (3.19) und (3.37) verwendet haben. Nun implizieren (3.38), (3.39) und (3.36)

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{E}|\le\delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \le{}& \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_R(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n^0(y)\mathrm{d}y \\
&+2\int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_R(\delta)}} \Bigg(\int_{y_0}^{S} u_n(s,y)\beta_n(y)\int_{y_0}^{R\wedge y}\mathbf{1}_{\mathcal{F}}(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\qquad + \frac{1}{y_0\Phi(S)/S-\Phi(R)} I_{1,n}(s)\Bigg)\mathrm{d}s \\
&+c(R,T)\int_0^t\left(\sup_{\substack{\mathcal{E}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{E}|\le\delta}}\int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}s\ , \quad t\in[0,T]\ .
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Da $(u_n^0)$ gegen $u_0$ in $L_1((y_0,\infty),y\mathrm{d}y)$ konvergiert, ist $(u_n^0)$ relativ schwach folgenkompakt. Daraus folgt mit dem Theorem von Dunford-Pettis

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{n\ge y_0} \sup_{\substack{\mathcal{F}\subset(y_0,R)\\|\mathcal{F}|\le\lambda_R(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n^0(y)\mathrm{d}y = 0\ ,$$

wobei wir die Tatsache benutzt haben, dass $\lambda_R(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$. Also existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass

$$\sup_{n \geq y_0} \sup_{\substack{\mathcal{F} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{F}| \leq \lambda_R(\delta)}} \int_{\mathcal{F}} u_n^0(y)\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.41}$$

für $\delta \leq \delta_\varepsilon$. Wir definieren

$$\begin{aligned} P(\delta, S) :=& 2 \sup_{\substack{t \in [0,T] \\ n > y_0}} \Bigg\{ \int_0^t \sup_{\substack{\mathcal{F} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{F}| \leq \lambda_R(\delta)}} \Bigg( \int_{y_0}^S u_n(s,y)\beta_n(y) \int_{y_0}^{R \wedge y} \mathbf{1}_{\mathcal{F}}(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\ &+ \frac{1}{y_0\Phi(S)/S - \Phi(R)} I_{1,n}(s) \Bigg) \mathrm{d}s \Bigg\} \end{aligned}$$

und bemerken, dass $P(\delta, S)$ wegen (3.6), (3.13), (3.19) und (3.30) gegen 0 konvergiert, wenn man zuerst $\delta$ gegen 0 und dann $S$ gegen unendlich gehen lässt. Dabei haben wir wieder $\lambda_R(\delta) \to 0$ für $\delta \to 0$ benutzt. Daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ und ein $S_\varepsilon > R$ mit $P(\delta, S) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ für $\delta \leq \delta_\varepsilon$ und $S \geq S_\varepsilon$. Somit gilt wegen (3.40) und (3.41) für $t \in [0,T]$ und $n > y_0$

$$\sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \leq \varepsilon + c(R,T) \int_0^t \left( \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}s \;, \tag{3.42}$$

wenn $\delta$ klein und $S$ groß genug ist. Hier bemerken wir, dass die Abbildung

$$[0,T] \to \mathbb{R} \;, \quad t \mapsto \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \tag{3.43}$$

stetig ist. Es gilt in der Tat für jede messbare Menge $\mathcal{E} \subset (y_0, R)$ mit $|\mathcal{E}| \leq \delta$, $\delta > 0$

$$\int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \leq \int_{\mathcal{E}} |u_n(t,y) - u_n(s,y)|\mathrm{d}y + \int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y \;, \quad t,s \in [0,T]$$

und damit auch

$$\sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y \leq \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} |u_n(t,y) - u_n(s,y)|\mathrm{d}y + \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y$$

für $t, s \in [0,T]$. Da wir $t$ und $s$ tauschen können, ist das gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \left| \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y)\mathrm{d}y - \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(s,y)\mathrm{d}y \right| &\leq \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0,R) \\ |\mathcal{E}| \leq \delta}} \int_{\mathcal{E}} |u_n(t,y) - u_n(s,y)|\mathrm{d}y \\ &\leq \frac{1}{y_0} \|u_n(t) - u_n(s)\|_{L_1(Y, y\mathrm{d}y)} \end{aligned}$$

für $t, s \in [0, T]$. Wegen $u_n \in C^1\big(\mathbb{R}^+, L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ konvergiert die rechte Seite in der letzten Ungleichung gegen 0, wenn $s$ gegen $t$ geht. Damit wurde gezeigt, dass die Abbildung (3.43) stetig in ist. Nun wenden wir auf (3.42) das Lemma von Gronwall an und lassen zuerst $\delta$ gegen 0 und dann $S$ gegen unendlich gehen. Daraus erhalten wir

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{n > y_0 \\ t \in [0,T]}} \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0, R) \\ |\mathcal{E}| \le \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t, y) \mathrm{d}y = 0$$

und folglich

$$0 \le \lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{n > y_0 \\ t \in [0,T]}} \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0, R) \\ |\mathcal{E}| \le \delta}} \int_{\mathcal{E}} u_n(t, y) y \mathrm{d}y \le \lim_{\delta \to 0} \sup_{\substack{n > y_0 \\ t \in [0,T]}} \sup_{\substack{\mathcal{E} \subset (y_0, R) \\ |\mathcal{E}| \le \delta}} R \int_{\mathcal{E}} u_n(t, y) \mathrm{d}y = 0 \; . \tag{3.44}$$

Nun folgt aus (3.19), (3.34 ), (3.44) und dem Theorem von Dunford-Pettis ( [15, Theorem 4.21.2]) die erste Behauptung des Lemmas. Die Aussage des Theorems von Dunford-Pettis findet man in Theorem A.4.

Um die Abschätzung (3.33) zu zeigen, verwenden wir den in [33, Lemma 4.1] beschriebenen Beweis. Zuerst bemerken wir, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\varepsilon_1 := y_1 \Phi'(y_1) - \Phi(y_1) > 0$ mit $y_1$ aus (3.7) annehmen dürfen. In der Tat, $\varepsilon_1 \ge 0$ gilt wegen der Konvexität von $\Phi$ und der Eigenschaft $\Phi(0) = 0$. Im Fall $\varepsilon_1 = 0$ definieren wir

$$\Phi_1(y) := \Phi(y) + y^2/y_1$$

für $y \in [0, y_1]$ und

$$\Phi_1(y) := \Phi(y) + 2y - y_1$$

für $y > y_1$ und ersetzen $\Phi$ mit $\Phi_1$. Die Funktion $\Phi_1$ besitzt offensichtlich die gleichen Eigenschaften wie $\Phi$, ist aber nur einmal stetig differenzierbar, was in diesem Fall für unsere Zwecke reicht. Aus der Konvexität von $\Phi$ folgt für $y \ge 2y_1$ und $z \in (y_1, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(y)}{y} - \frac{\Phi(z)}{z} &\ge \frac{1}{y}(\Phi(z) + \Phi'(z)(y - z)) - \frac{\Phi(z)}{z} \\ &= \frac{(y - z)}{yz}(z\Phi'(z) - \Phi(z)) \; . \end{aligned}$$

Da die Abbildung $z \mapsto z\Phi'(z) - \Phi(z)$ wegen der Konvexität von $\Phi$ und der Eigenschaft $\Phi(0) = 0$ nichtnegativ und nichtfallend ist, erhalten wir aus der letzten Ungleichung

$$\frac{\Phi(y)}{y} - \frac{\Phi(z)}{z} \ge \varepsilon_1 \frac{(y - z)}{yz}$$

für $y \geq 2y_1$ und $z \in (y_1, y)$. Daraus zusammen mit (3.7) folgt die Abschätzung

$$\int_{y_0}^{y} \left( \frac{\Phi(y)}{y} - \frac{\Phi(z)}{z} \right) z\kappa(z,y)\mathrm{d}z \geq \int_{y_1}^{y} \varepsilon_1 \frac{(y-z)}{yz} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z \geq \varepsilon_1\delta_1$$

für $y \geq 2y_1$. Daher gilt

$$\varepsilon_1\delta_1 \int_0^T \int_{2y_1}^{\infty} \beta_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leq \int_0^T I_{1,n}(s)\mathrm{d}s \leq c(T) \ ,$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung (3.30) benutzt haben. Die Abschätzung (3.33) folgt nun aus (3.19) und der Tatsache, dass $\beta \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(Y)$. □

**Lemma 3.7.** *Die Familie $\{u_n; n > y_0\}$ ist schwach gleichgradig stetig in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ in jedem Punkt $t \in [0,T]$.*

***Beweis***. Es sei $\varphi \in \mathcal{D}(Y)$. Dann ist auch $[y \mapsto y\varphi(y)] \in \mathcal{D}(Y)$. Nach dem Testen von (1.2) (mit abgeschnittenen Raten) für $u_n$ mit $y \mapsto y\varphi(y)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{y_0}^{\infty} y\varphi(y)[u_n(t,y) - u_n(s,y)]\mathrm{d}y \right| \\
&\quad \leq \int_s^t v_n(\sigma) \int_{y_0}^{\infty} y|\varphi'(y)|\tau_n(y)u_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_s^t v_n(\sigma) \int_{y_0}^{\infty} |\varphi(y)|\tau_n(y)u_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_s^t \int_{y_0}^{\infty} y|\varphi(y)|(\mu_n(y) + \beta_n(y))u_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + 2\int_s^t \int_{y_0}^{\infty} u_n(\sigma,y)\beta_n(y) \int_{y_0}^{y} z|\varphi(z)|\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + \int_s^t \int_{y_0}^{\infty} y|\varphi(y)| \int_{y_0}^{y-y_0} \eta_n(y-z,z)u_n(\sigma,y-z)u_n(\sigma,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&\qquad + 2\int_s^t \int_{y_0}^{\infty} y|\varphi(y)|u_n(\sigma,y) \int_{y_0}^{\infty} \eta_n(z,y)u_n(\sigma,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

für $0 \leq s \leq t \leq T$. Nun verwenden wir (3.19) und (3.15) für die ersten beiden Terme auf der rechten Seite der letzten Ungleichung, (3.19), (3.2), (3.35), (3.30), (3.13), (1.9) für die nächsten zwei Terme und (3.19) zusammen mit (3.17) für die letzten zwei Terme. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\left| \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)[u_n(t,y) - u_n(s,y)] y \mathrm{d}y \right| \leq c(T,\varphi)|t-s| \ , \quad t,s \in [0,T] \ . \tag{3.45}$$

Für jedes $\varphi \in L_\infty(Y)$ existiert eine Folge $\varphi_j \in \mathcal{D}(Y)$ mit $\varphi_j \to \varphi$ fast überall und $\|\varphi_j\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$ (siehe [2, S.133]). Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann folgt aus (3.34), aus der Tatsache, dass $\{u_n(t); t \in [0,T], n > y_0\}$ relativ kompakt in $L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)$ ist, und aus dem Satz von Egorov die Existenz einer Zahl $R > y_0$, einer messbaren Teilmenge $\mathcal{E}$ von $(y_0, R)$ und eines $j \in \mathbb{N}$, sodass

$$\int_R^{\infty} u_n(t,y) y \mathrm{d}y + \int_{\mathcal{E}} u_n(t,y) y \mathrm{d}y \leq \frac{\varepsilon}{12\|\varphi\|_\infty} \ , \quad t \in [0,T] \ , \ n \geq y_0$$

und

$$\|\varphi - \varphi_j\|_{L_\infty((y_0,R)\setminus\mathcal{E})} \leq \frac{\varepsilon}{6c_0(T)}$$

mit $c_0(T)$ wie $c(T)$ in (3.19). Somit erhalten wir aus (3.45)

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)[u_n(t,y) - u_n(s,y)] y \mathrm{d}y \right| \\
&\quad = \left| \int_{y_0}^{\infty} \big(\varphi(y) - \varphi_j(y) + \varphi_j(y)\big)[u_n(t,y) - u_n(s,y)] y \mathrm{d}y \right| \\
&\quad \leq \|\varphi - \varphi_j\|_{L_\infty((y_0,R)\setminus\mathcal{E})} \big(\|u_n(t)\|_{L_1(Y,y\mathrm{d}y)} + \|u_n(s)\|_{L_1(Y,y\mathrm{d}y)}\big) \\
&\qquad + (\|\varphi\|_\infty + \|\varphi_j\|_\infty) \int_{\mathcal{E}} (u_n(t,y) + u_n(s,y)) y \mathrm{d}y \\
&\qquad + (\|\varphi\|_\infty + \|\varphi_j\|_\infty) \int_R^{\infty} (u_n(t,y) + u_n(s,y)) y \mathrm{d}y \\
&\qquad + c(T,\varphi_j)|t-s| \\
&\quad \leq \varepsilon + c(T,\varphi_j)|t-s|
\end{aligned}$$

für $t, s \in [0,T]$ und $n > y_0$. Folglich gilt

$$\lim_{s\to t} \sup_{n>y_0} \left| \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y)[u_n(t,y) - u_n(s,y)]y\mathrm{d}y \right| = 0 \ .$$

Damit ist die Folge $\{u_n; n > y_0\}$ gleichgradig stetig in $L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)$ in jedem Punkt $t \in [0,T]$. □

**Lemma 3.8.** *Die Familie $\{v_n; n > y_0\}$ ist relativ kompakt in $C([0,T])$.*

***Beweis***. Wir testen die Gleichung (1.2) (mit abgeschnittenen Raten) mit $\varphi(y) = y$ und benutzen die Positivität von $u_n(t)$ und die Tatsache, dass

$$\int_{y_0}^{\infty} Q_n[u_n](y)y\mathrm{d}y = 0 \ .$$

Daraus ergibt sich zusammen mit (1.15) und (1.8) für $0 < s < t < T$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{\infty} (u_n(t,y) - u_n(s,y))y\mathrm{d}y &+ \int_s^t v_n(\sigma) \underbrace{\left(y\tau_n(y)u_n(\sigma,y)\right)\Big|_{y_0}^{\infty}}_{=0} \mathrm{d}\sigma \\
&- \int_s^t v_n(\sigma) \int_{y_0}^{\infty} \tau_n(y)u_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
= - \int_s^t \int_{y_0}^{\infty} & u_n(\sigma,y)\mu_n(y)y\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \\
&- 2\int_s^t \int_{y_0}^{\infty} u_n(\sigma,y)\beta_n(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \ .
\end{aligned}$$

Da $u_n$, $\mu_n$, $\beta_n$ und $\kappa$ nichtnegativ sind, folgt daraus

$$\begin{aligned}
2&\left| \int_s^t \int_{y_0}^{\infty} u_n(\sigma,y)\beta_n(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \right| \\
&\le \left| \int_s^t v_n(\sigma) \int_{y_0}^{\infty} \tau_n(y)u_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \right| + \left| \int_{y_0}^{\infty} y\big(u_n(s,y) - u_n(t,y)\big)\mathrm{d}y \right| \\
&\le \tau^* \left| \int_s^t v_n(\sigma) \int_{y_0}^{\infty} yu_n(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma \right| + \left| \int_{y_0}^{\infty} y\big(u_n(s,y) - u_n(t,y)\big)\mathrm{d}y \right| \\
&\le c(T)|t-s| + \left| \int_{y_0}^{\infty} y\big(u_n(s,y) - u_n(t,y)\big)\mathrm{d}y \right| ,
\end{aligned}$$

wobei wir (3.19) und (3.15) benutzt haben. Aus Lemma 3.7 folgt nun

$$\limsup_{s\to t} \sup_{n>y_0} \int_s^t \int_{y_0}^\infty u_n(\sigma,y)\beta_n(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma = 0 \ .$$

Aus (1.1) und (3.19) erhalten wir damit

$$\lim_{s\to t} \sup_{n>y_0} |v_n(t) - v_n(s)| = 0 \ .$$

Das Theorem von Arzelà-Ascoli liefert nun die Behauptung. □

Um Theorem 3.2 über die Existenz einer schwachen Lösung für (1.1)–(1.4) zu beweisen, benötigen wir noch eine Hilfsaussage, die in [42, Lemma 4.1] implizit enthalten ist. Wir geben diese Aussage im nächsten Lemma an wie sie in [45, Prop. A.1] formuliert und bewiesen wurde.

**Lemma 3.9.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 1$ eine messbare Menge mit Maß $|\Omega| > 0$. Es seien $h_k, h \in L_\infty(\Omega)$ so, dass $\|h_k\| \leq c_1$ für $k \geq 1$ und $h_k \to h$ fast überall. Dann impliziert $w_k \to w$ in $L_{1,\mathrm{w}}(\Omega)$ die Kovergenz $h_k w_k \to hw$ in $L_{1,\mathrm{w}}(\Omega)$.*

***Beweis***. Es sei $\varepsilon > 0$ und $f \in L_\infty(\Omega)$, $f \neq 0$ beliebig. Da die Menge $(w_k)_{k\geq 1}$ relativ folgenkompakt in $L_{1,\mathrm{w}}(\Omega)$ ist, existiert nach dem Theorem von Dunford-Pettis ein $\delta := \delta(\varepsilon)$, sodass für jede messbare Teilmenge $A$ von $\Omega$ mit dem Maß $|A| \leq \delta$ die Abschätzung

$$\int_A |w_k(x)|\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{(c_1 + \|h\|_\infty)\|f\|_\infty} \ , \quad k \geq 1$$

gilt. Da $h_k \to h$ fast überall, liefert der Satz von Egorov die Existenz von $A \subset \Omega$ mit $|A| \leq \delta$, sodass $h_k \to h$ gleichmäßig auf $\Omega \setminus A$ und $h_k \to h$ in $L_\infty(\Omega \setminus A)$. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega f(x)[h_k(x)w_k(x) - h(x)w(x)]\mathrm{d}x \right| \\
&\quad \leq \left| \int_A f(x)w_k(x)[h_k(x) - h(x)]\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Omega\setminus A} f(x)w_k(x)[h_k(x) - h(x)]\mathrm{d}x \right| \\
&\qquad + \left| \int_\Omega f(x)h(x)[w_k(x) - w(x)]\mathrm{d}x \right| \\
&\quad \leq \|f\|_\infty (c_1 + \|h\|_\infty) \int_A |w_k(x)|\mathrm{d}x + \|f\|_\infty \sup_j \|w_j\|_{L_1(\Omega)} \|h_k - h\|_{L_\infty(\Omega\setminus A)} \\
&\qquad + \left| \int_\Omega f(x)h(x)[w_k(x) - w(x)]\mathrm{d}x \right| \ .
\end{aligned}$$

Für $k \to \infty$ folgt daraus

$$0 \leq \limsup_k \left| \int_\Omega f(x)[h_k(x)w_k(x) - h(x)w(x)]\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon$$

und somit die Behauptung. □

## 3.3. Existenz von schwachen Lösungen

Nun verfügen wir über alle notwendigen Voraussetzungen, um die Existenz einer schwachen Lösung des Problems (1.1)–(1.4) nachzuweisen.

***Beweis von Theorem* 3.2.** **(i)** Es sei $\nu = 0$. Wir verwenden eine Variante des Theorems von Arzelà-Ascoli (Theorem A.5) und erhalten aus den Lemmata 3.6, 3.7 und 3.8, dass Teilfolgen $(v_{n_k})$, $(u_{n_k})$ (im Weiteren nennen wir sie wieder $(v_n)$ und $(u_n)$) und Funktionen $v \in C(\mathbb{R}^+)$ und $u \in C\big(\mathbb{R}^+, L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ existieren mit

$$v_n \to v \quad \text{in} \quad C([0,T]) \ , \tag{3.46}$$

$$u_n \to u \quad \text{in} \quad C\big([0,T], L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)\big) \tag{3.47}$$

für jedes $T > 0$. Es gilt offensichtlich $v(t) \geq 0$. Das Theorem von Mazur impliziert $u(t) \geq 0$, weil der Raum $L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ abgeschlossen und konvex ist. Aus (3.47) und (3.33) folgt mit dem Lemma von Fatou

$$[(t,y) \mapsto \beta(y)u(t,y)] \in L_1\big((0,T) \times Y\big) \ . \tag{3.48}$$

Ferner gilt für jedes $R > y_0$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_{y_0}^\infty y\mu_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s - \int_0^t \int_{y_0}^\infty y\mu(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \right| \\
&\quad \leq \left| \int_0^t \int_{y_0}^R y\mu(y)(u(s,y) - u_n(s,y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \right| \\
&\qquad + \int_0^t \int_{y_0}^R y u_n(s,y)|\mu(y) - \mu_n(y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \int_R^\infty y\mu_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \int_R^\infty y\mu(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Der erste Summand der rechten Seite in der letzten Ungleichung konvergiert gegen 0 für $n \to \infty$ wegen (3.47) und der lokalen Beschränktheit von $\mu$ . Unter Berücksichtigung der Tatsasche, dass $|\mu - \mu_n| = 0$ auf $[y_0, R]$, wenn $\mathcal{S}_n(T) > R$, sieht man leicht, dass der zweite Summand in der letzten Ungleichung verschwindet, wenn $n \to \infty$. Beachten wir, dass für jedes $k > y_0$ wegen (3.32) und (3.47)

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{y_0}^\infty & \Phi(y)\mu_k(y)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{n\geq k} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_k(y)u_n(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{n>y_0} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_n(y)u_n(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leq c(T)\end{aligned}$$

gilt, so erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_{y_0}^\infty & \Phi(y)\mu(y)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_k(y)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leq c(T) \ .\end{aligned}$$

Daraus folgt zusammen mit (3.13) und den Abschätzungen

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_R^\infty & y\mu(y)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{z>R} \left\{ \frac{z}{\Phi(z)} \right\} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu(y)u(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_R^\infty & y\mu_n(y)u_n(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leq \sup_{z>R} \left\{ \frac{z}{\Phi(z)} \right\} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Phi(y)\mu_n(y)u_n(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ ,\end{aligned}$$

dass wenn wir zuerst $n$, dann $R$ gegen $\infty$ gehen lassen, die beiden letzten Integrale in (3.49) verschwinden. Dies liefert

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{y_0}^\infty y\mu_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t \int_{y_0}^\infty y\mu(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s < \infty \ . \tag{3.50}$$

Weiter zeigen wir, dass $(v,u)$ eine schwache Lösung für (1.1)–(1.4) ist. Es sei $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ beliebig. Aus (3.47) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{y_0}^\infty \varphi(y)u_n(t,y)\mathrm{d}y = \int_{y_0}^\infty \varphi(y)u(t,y)\mathrm{d}y \ , \quad t \in [0,T] \ . \tag{3.51}$$

Für $t \in [0,T]$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t v(s) \int_{y_0}^\infty \varphi'(y)\tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s - \int_0^t v_n(s) \int_{y_0}^\infty \varphi'(y)\tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \right| \\
&\quad \leq \int_0^t |v(s)-v_n(s)| \int_{y_0}^\infty |\varphi'(y)|\tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \|\varphi'\|_\infty \int_0^t v_n(s) \left| \int_{y_0}^\infty \big(\tau(y)u(s,y) - \tau_n(y)u_n(s,y)\big)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}s \\
&\quad \leq \tau^* \|\varphi'\|_\infty \int_0^t |v(s)-v_n(s)| \int_{y_0}^\infty u(s,y)y\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \|\varphi'\|_\infty \int_0^t v_n(s) \left| \int_{y_0}^R \big(\tau(y)u(s,y) - \tau_n(y)u_n(s,y)\big)\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}s \\
&\qquad + \tau^* \|\varphi'\|_\infty \int_0^t v_n(s) \left| \int_R^\infty \big(u(s,y) + u_n(s,y)\big)y\mathrm{d}y \right| \mathrm{d}s \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir (3.3) und (3.15) berücksichtigt haben. Der erste Summand auf der rechten Seite der Ungleichung konvergiert wegen (3.46) gegen 0. Wir bemerken, dass $\tau_n \to \tau$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen und dass $\|\tau_n\|_{L_\infty([y_0,R])} \leq \tau^* R$ für $n \geq y_0$. Somit folgt daraus zusammen mit $\|v_n\|_{C([0,T])} \leq c(T)$, (3.47) und Lemma 3.9 die Konvergenz gegen 0 für $n \to \infty$ des zweiten Summanden der rechten Seite der letzten Ungleichung. Nun lassen wir zuerst $n$ und dann $R$ gegen $\infty$ gehen. Daraus ergibt sich zusammen mit (3.47) und (3.34) für $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t v_n(s) \int_{y_0}^\infty \varphi'(y)\tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t v(s) \int_{y_0}^\infty \varphi'(y)\tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ . \tag{3.52}$$

Es sei $R > y_0$ beliebig. Wir zeigen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{y_0}^\infty \varphi(y)L_n[u_n(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t \int_{y_0}^\infty \varphi(y)L[u(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{3.53}$$

für $t \in [0,T]$ und $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ mit kompaktem Träger in $[y_0,R]$. Für $t \in [0,T]$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{y_0}^\infty \varphi(y)L[u(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s-\int_0^t\int_{y_0}^\infty \varphi(y)L_n[u_n(s)](y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\\
&\quad\le\left|\int_0^t\int_{y_0}^R \varphi(y)\big(\mu(y)u(s,y)-\mu_n(y)u_n(s,y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\\
&\qquad+\left|\int_0^t\int_{y_0}^R \varphi(y)\big(\beta(y)u(s,y)-\beta_n(y)u_n(s,y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\\
&\qquad+2\left|\int_0^t\int_{y_0}^R\int_y^\infty \varphi(y)\big(\beta(z)u(s,z)-\beta_n(z)u_n(s,z)\big)\kappa(y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\ .
\end{aligned}\tag{3.54}$$

Da $\varphi\mu,\varphi\beta\in L_\infty(Y)$ und $\mu=\mu_n,\beta=\beta_n$ auf $[y_0,R]$, wenn $\mathcal{S}_n(T)>R$, konvergieren die beiden ersten Summanden gegen 0 für $n\to\infty$ wegen (3.47). Für den letzten Summanden gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{y_0}^R\int_y^\infty \varphi(y)\big(u(s,z)\beta(z)-u_n(s,z)\beta_n(z)\big)\,\kappa(y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|\\
&\quad\le\left|\int_0^t\int_{y_0}^S \big(u(s,z)\beta(z)-u_n(s,z)\beta_n(z)\big)\int_{y_0}^{R\wedge z}\varphi(y)\kappa(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s\right|\\
&\qquad+\left|\int_0^t\int_S^\infty u_n(s,z)\beta_n(z)\int_{y_0}^R\varphi(y)\kappa(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s\right|\\
&\qquad+\left|\int_0^t\int_S^\infty u(s,z)\beta(z)\int_{y_0}^R\varphi(y)\kappa(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s\right|\ ,
\end{aligned}$$

wobei $S>R>y_0$ und $t\in[0,T]$. Nun benutzen wir die Tatsache, dass die Abbildung $\left[z\mapsto\int_{y_0}^R\varphi(y)\kappa(y,z)\mathrm{d}y\right]$ beschränkt für $z\in Y$ ist, und erhalten damit aus (3.47), (3.30), (3.35), (3.13) und (3.48) die Konvergenz des letzten Summanden in (3.54) gegen 0 für $n\to\infty$ und $S\to\infty$. Die Gleichung (3.53) gillt also für alle Testfunktionen $\varphi\in W^1_\infty(Y)$ mit kompaktem Träger.

Als nächstes betrachten wir für $0\le s\le t\le T$ und $\varphi\in W^1_\infty(Y)$ mit kompaktem Träger in $[y_0,R]$ den Ausdruck

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{y_0}^\infty \varphi(y)\big(Q[u(s)](y)-Q_n[u_n(s)](y)\big)\mathrm{d}y\right|\\
&\quad\le\left|\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty \varphi(y+z)\big(\eta(y,z)u(s,y)u(s,z)-\eta_n(y,z)u_n(s,y)u_n(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right|\\
&\qquad+2\left|\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty \varphi(z)\big(\eta(y,z)u(s,y)u(s,z)-\eta_n(y,z)u_n(s,y)u_n(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right|
\end{aligned}$$

$$\leq G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) + 2\big(H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)\big) \tag{3.55}$$

mit

$$\begin{aligned}
G_1(s) &:= \left| \int_{y_0}^R \int_{y_0}^R \varphi(y+z)\eta(y,z)u(s,z)\big(u(s,y) - u_n(s,y)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \ , \\
G_2(s) &:= \left| \int_{y_0}^R \int_{y_0}^R \varphi(y+z)\eta(y,z)u_n(s,y)\big(u(s,z) - u_n(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \ , \\
G_3(s) &:= \|\varphi\|_\infty \int_{y_0}^R \int_{y_0}^R u_n(s,y)\left|\eta(y,z) - \eta_n(y,z)\right| u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \ , \\
H_1(s) &:= \left| \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\big(u(s,y) - u_n(s,y)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \ , \\
H_2(s) &:= \left| \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \varphi(z)\eta(y,z)u_n(s,y)\big(u(s,z) - u_n(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \ , \\
H_3(s) &:= \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty |\varphi(z)|\left|\eta(y,z) - \eta_n(y,z)\right| u_n(s,y)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \ .
\end{aligned}$$

Wir definieren für $y \in (y_0, R]$

$$h[u(s)](y) := \int_{y_0}^R \varphi(y+z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z \ .$$

Dann implizieren (3.4), (3.19) und (3.47) sowohl $h[u(s)] \in L_\infty((y_0,R])$ als auch $h[u_n(s)] \in L_\infty((y_0,R])$ für $n > y_0$. Weil $u_n(s)$ schwach gegen $u(s)$ in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ konvergiert, verschwindet $G_1(s)$ für $n \to \infty$. Da

$$h[u_n(s)](y) = \int_{y_0}^R \varphi(y+z)\eta(y,z)u_n(s,z)\mathrm{d}z \leq c(\varphi, T, R)$$

für $n > y_0$ gilt und $h[u_n(s)] \to h[u(s)]$ für $n \to \infty$ fast überall, folgt aus Lemma 3.9 die Konvergenz $G_2(s) \to 0$ für $n \to \infty$. Die Konvergenz $G_3(s) \to 0$ für $n \to \infty$ erhalten wir aus (3.19) und der Tatsache, dass $\eta_n \to \eta$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $Y \times Y$. Die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{y_0}^R \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z \right| \\
&\quad \leq \|\varphi\|_\infty K \int_{y_0}^R \big(y^\alpha z^\rho + y^\rho z^\alpha\big)u(s,z)\mathrm{d}z \\
&\quad \leq c(T)\big(y^\alpha + y^\rho\big) \ , \quad y \in Y
\end{aligned}$$

liefert uns zusammen mit (3.47)

$$\begin{aligned}
H_1(s) &= \left| \int_{y_0}^{\infty} (u(s,y) - u_n(s,y)) \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \left| \int_{y_0}^{S} (u(s,y) - u_n(s,y)) \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \\
&\quad + \int_{S}^{\infty} (u(s,y) + u_n(s,y)) \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \;\to\; 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$ und $S \to \infty$, wobei wir (3.4), (3.47), (3.34) und $\alpha, \rho \leq 1$ berücksichtigt haben. Ferner gilt für jedes $S > y_0$

$$\begin{aligned}
H_2(s) &\leq \left| \int_{y_0}^{S} \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u_n(s,y)\big(u(s,z) - u_n(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \\
&\quad + \left| \int_{S}^{\infty} u_n(s,y) \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \\
&\quad + \left| \int_{S}^{\infty} u_n(s,y) \int_{y_0}^{R} \varphi(z)\eta(y,z)u_n(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \right| \\
&\leq \left| \int_{y_0}^{R} \big(u(s,z) - u_n(s,z)\big)\varphi(z) \int_{y_0}^{S} \eta(y,z)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right| \\
&\quad + 2c(T)\|\varphi\|_\infty \int_{S}^{\infty} u_n(s,y)\big(y^\alpha + y^\rho\big)\mathrm{d}y \;.
\end{aligned}$$

Wir definieren für $z \in (y_0, R]$

$$p[u(s)](z) := \varphi(z) \int_{y_0}^{S} \eta(y,z)u(s,y)\mathrm{d}y \;.$$

Dann $p[u_n(s)] \to p[u(s)]$ punktweise auf $(y_0, R]$ für $n \to \infty$ und es gilt wegen (3.4), (3.19) und $\alpha, \rho \leq 1$

$$\|p[u_n(s)]\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \, c(R) \int_{y_0}^{S} u_n(s,y)\big(y^\alpha + y^\rho\big)\mathrm{d}y \leq c\big(\varphi, R, c(T)\big) \;.$$

Nun liefert Lemma 3.9 wegen (3.19) die Konvergenz

$$\int_{y_0}^{R} \big(u(z) - u_n(z)\big)p[u_n(s)](z)\mathrm{d}z \to 0$$

für $n \to \infty$. Daraus folgt zusammen mit (3.34), dass $H_2(s)$ gegen 0 konvergiert, wenn wir zuerst $n$ und dann $S$ gegen $\infty$ gehen lassen. Wegen (3.4), (3.17) und

(3.19) gilt für jedes $S > y_0$

$$\begin{aligned} H_3(s) \leq \|\varphi\|_\infty \int_{y_0}^{S} \int_{y_0}^{R} |\eta(y,z) - \eta_n(y,z)| u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ + \|\varphi\|_\infty \Bigg( \int_{S}^{\infty} \int_{y_0}^{R} \eta(y,z) u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ + \int_{S}^{\infty} \int_{y_0}^{R} \eta_n(y,z) u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \Bigg) \ , \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} H_3(s) \leq \|\varphi\|_\infty \int_{y_0}^{S} \int_{y_0}^{R} |\eta(y,z) - \eta_n(y,z)| u_n(s,y) u_n(s,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\ + 2c(T) \|\varphi\|_\infty \int_{S}^{\infty} u_n(s,y) \big(y^\alpha + y^\rho\big) \mathrm{d}y \ . \end{aligned}$$

Da die Folge $(\eta_n)$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $Y \times Y$ gegen $\eta$ konvergiert, wird $H_3(s)$ wegen (3.19) und (3.34) beliebig klein, wenn $n \to \infty$ und danach $S \to \infty$. Dies bedeutet, dass für jedes $s \in [0,t]$ mit beliebig gewähltem $t \in [0,T]$

$$G_1(s) + G_2(s) + G_3(s) + 2\big(H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)\big) \to 0 \ ,$$

wenn $n \to \infty$. Da außerdem $\sup\limits_{\substack{n>y_0 \\ s\in[0,T]}} |G_i| < \infty$, $\sup\limits_{\substack{n>y_0 \\ s\in[0,T]}} |H_i| < \infty$, $i \in \{1,2,3\}$, gilt, erhält man aus (3.55) mit dem Satz von Lebesgue für $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y) Q_n[u_n(s)](y)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s = \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \varphi(y) Q[u(s)](y)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \ , \tag{3.56}$$

wenn $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ einen kompakten Träger in $[y_0, \infty)$ hat. Ferner gilt auf Grund von (3.47) und (3.4) für $t \in [0,T]$

$$\int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \eta(y,z) u(s,z) u(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}z \mathrm{d}s < \infty \ . \tag{3.57}$$

Da $(v_n, u_n)$ für jedes $n > y_0$ eine klassische und damit auch schwache Lösung im Sinne von Definition 3.1 des Problems (1.1)–(1.4) mit abgeschnittenen Raten ist, erfüllt $(v,u)$ wegen (3.51)–(3.53), (3.56) und (3.57) die Bedingung (ii) in Definition 3.1 für alle Testfunktionen $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ mit kompaktem Träger.

Es sei nun $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ beliebig und $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_{[0,R]} = 1$ für ein $R > 0$. Wir definieren $\varphi_k : Y \to \mathbb{R}$ mit $\varphi_k := \psi(\frac{1}{k}\cdot)\varphi$ für $k \in \mathbb{N}$. Damit hat jedes $\varphi_k \in W^1_\infty(Y)$ einen kompakten Träger, $\varphi_k \to \varphi$, $\varphi_k' \to \varphi'$ punktweise für $k \to \infty$ und $\|\varphi_k\|_{W^1_\infty(Y)} \leq c(\psi)\|\varphi\|_{W^1_\infty(Y)}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann ist für jedes $k \geq 1$ die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\int_{y_0}^{\infty} \varphi_k(y)u(t,y)\mathrm{d}y - \int_{y_0}^{\infty} \varphi_k(y)u^0(t,y)\mathrm{d}y
&= \int_0^t v(s) \int_{y_0}^{\infty} \varphi_k'(y)\tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \varphi_k(y)\big(\mu(y)+\beta(y)\big)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad + 2\int_0^t \int_{y_0}^{\infty} u(s,y)\beta(y) \int_{y_0}^{y} \varphi_k(z)\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad + \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \big(\varphi_k(y+z)-\varphi_k(y)-\varphi_k(z)\big)\eta(y,z)u(y)u(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

erfüllt. Wegen (1.9), (3.48), (3.50), (3.57) und des Satzes von Lebesgue wird die Gültigkeit von Definition 3.1 (ii) auf alle $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ erweitert.

Um zu zeigen, dass $v \in C(\mathbb{R}^+)$ die Gleichung (1.1) löst, betrachten wir

$$
g_n(u_n(t)) := 2\int_{y_0}^{\infty} u_n(t,y)\beta_n(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\ , \quad t \in [0,T]
$$

und

$$
g(u(t)) := 2\int_{y_0}^{\infty} u(t,y)\beta(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\ , \quad t \in [0,T]\ .
$$

Wegen (1.9), (3.13), (3.31) und (3.48) gilt

$$
\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \bigg( \sup_{n>y_0}\ 2\int_R^{\infty} u_n(t,y)\beta_n(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y& \\
+ 2\int_R^{\infty} u(t,y)\beta(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \bigg) &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Andererseits erhalten wir für $R > y_0$ und $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\left| 2\int_{y_0}^R u(t,y)\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y - 2\int_{y_0}^R u_n(t,y)\beta_n(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right| \\
&\quad\le 2\int_{y_0}^R u_n(t,y)|\beta_n(y)-\beta(y)|\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\qquad + 2\left|\int_{y_0}^R (u_n(t,y)-u(t,y))\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\right| \\
&\quad\le 2y_0\int_{y_0}^R u_n(t,y)|\beta_n(y)-\beta(y)|\mathrm{d}y \\
&\qquad + 2\int_{y_0}^R (u_n(t,y)-u(t,y))\beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\ ,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung (1.9) verwendet haben. Wir bemerken, dass $\beta = \beta_n$ auf $[y_0, R]$ für $n > y_0$ mit $\mathcal{S}_n(T) > R$. Nun folgt aus (3.58), (3.59), (3.19), (3.47), aus der Tatsache, dass $\left[y \mapsto \beta(y)\int_0^{y_0} z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\right] \in L_\infty((y_0,R))$ (dies wird von (3.2) und (1.9) impliziert), und aus dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} g_n(u_n(t)) = g(u(t))\ , \quad t \in [0,T]\ .$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t\int_{y_0}^\infty \tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s - \int_0^t\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\
&\quad\le \left|\int_0^t\int_{y_0}^R \big(\tau_n(y)u_n(s,y) - \tau(y)u(s,y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\
&\qquad + \tau^*\int_0^t\int_R^\infty \big(u_n(s,y)+u(s,y)\big)y\mathrm{d}y\mathrm{d}s\ .
\end{aligned}$$

Da $\tau_n \to \tau$ gleichmäßig auf kompakten Intervallen und

$$\|\tau_n\|_{L_\infty([y_0,R])} \le \tau^* R \quad \text{für} \quad n \ge y_0\ ,$$

folgt aus Lemma 3.9 zusammen mit (3.47) und aus (3.34) die Konwergenz der rechten Seite der letzten Ugleichung gegen 0 für $n \to \infty$. Dies bedeutet

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^t\int_{y_0}^\infty \tau_n(y)u_n(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\ , \quad t\in[0,T]\ .$$

Daraus folgt für $t \in [0,T]$

$$v(t) = \exp\left(-\gamma t - \int_0^t \int_{y_0}^\infty \tau(y)u(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma\right) v^0$$
$$+ \int_0^t \exp\left(-\gamma(t-s) - \int_s^t \int_{y_0}^\infty \tau(y)u(\sigma,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma\right) \big(\lambda + g(u(s))\big)\mathrm{d}s ,$$

weil $(v_n,u_n) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+ \times E_1^+) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+ \times E_0)$ die Gleichung

$$\dot{v}_n = \lambda - \gamma v_n - v_n \int_{y_0}^\infty \tau_n(y)u_n(y)\mathrm{d}y + g_n(u_n) , \quad t > 0 , \qquad v_n(0) = v^0$$

löst. (3.48) und (3.47) garantieren, dass $g(u) \in C([0,T])$. Außerdem gilt

$$\left[t \mapsto \int_{y_0}^\infty \tau(y)u(t,y)\mathrm{d}y\right] \in C([0,T]) .$$

Somit löst $v \in C^1([0,T])$ die Gleichung (1.1). Schließlich benutzen wir die Tatsache, dass $(v_n,u_n)$ für jedes $n > y_0$ die Gleichung (3.10) (mit abgeschnittenen Raten) erfüllt. Nun können wir mit Hilfe von (3.46), (3.47) und (3.50) prüfen, dass (3.10) auch für $(v,u)$ gilt. Damit definiert $(v,u)$ eine monomererhaltende schwache Lösung.
Den Beweis der Aussage für den Fall $\nu > 0$ erhält man völlig analog zum Beweis im Fall $\nu = 0$, wenn man die Ungleichung

$$\left| \frac{v_1(t)}{1 + \nu\int_{y_0}^\infty x u_1(t,x)\mathrm{d}x} - \frac{v_2(t)}{1 + \nu\int_{y_0}^\infty x u_2(t,x)\mathrm{d}x} \right| \leq |(v_1 - v_2)(t)|$$
$$+ v_2(t)\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L_1(Y,y\mathrm{d}y)}$$

für zwei klassische Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) mit den "abgeschnitteten" Raten $\tau_1, \mu_1, \beta_1, \eta_1$ bzw. $\tau_2, \mu_2, \beta_2, \eta_2$ berücksichtigt. Somit ist der erste Teil von Theorem 3.2 über die Existenz einer schwachen monomererhaltenden Lösung für (1.1)–(1.4) mit unbeschränkten Raten bewiesen.

**(ii)** Es sei $\nu = 0$ und $u^0 \in L_1(y^\sigma \mathrm{d}y)$ für ein $\sigma \geq 1$ und es gelte (3.11). Genauso wie im Beweis vom ersten Teil des Theorems verwenden wir das Theorem von de la Vallée-Poussin, das die Existenz einer nichtnegativen, nichtfallenden und konvexen Funktion $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ mit $\Phi(0) = 0$ garantiert, sodass $\Phi'$ konkav ist und die Bedingungen (3.13) und

$$\int_{y_0}^\infty \Phi(y)u^0(y)\mathrm{d}y < \infty$$

erfüllt sind. Dann existiert eine nichtnegative Folge $(u_n^0) \subset \mathcal{D}(Y)$ mit

$$u_n^0 \to u^0 \quad \text{in} \quad L_1^+(Y) \qquad \text{und} \qquad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{y_0}^{\infty} \Phi(y) u_n^0(y) \mathrm{d}y < \infty \ .$$

Ferner definieren wir $\mu_n := \mathbf{1}_{[y_0,n]}\mu$ und $\beta_n := \mathbf{1}_{[y_0,n]}\beta$ für jedes natürliche $n > y_0$. Die Folgen $\tau_n \in C^\infty([y_0,\infty))$ und $\eta_n \in BUC^\infty(Y \times Y)$ werden genauso konstruiert wie im Beweis vom ersten Teil von Theorem 3.2 (offensichtlich werden somit die Bedingungen (3.15) und (3.17) erfüllt). Nun ersetzen wir in (1.1)–(1.4) $(v^0, u^0, \mu, \beta, \eta)$ durch $(v_n^0, u_n^0, \mu_n, \beta_n, \eta_n)$ und erhalten damit dank Theorem 2.1 eine eindeutige globale klassische Lösung $(v_n, u_n) \in C^1\big(\mathbb{R}^+, \mathbb{R} \times L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ des entsprechenden Problem.

Es gilt darüber hinaus $v_n(t) > 0$, $u_n(t) \geq 0$ und $\partial_y u_n \in C\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y\mathrm{d}y)\big)$. Außerdem ist $\operatorname{supp} u_n(t)$ wegen Satz 2.15 für jedes $t \geq 0$ eine kompakte Teilmenge von $[y_0, \infty)$ .
Es sei $T > 0$ beliebig. Da die klassischen Lösungen $(v_n, u_n)$ monomererhaltend sind, impliziert (3.10) die Abschätzung

$$v_n(t) + \int_{y_0}^{\infty} y u_n(t,y) \mathrm{d}y + \int_0^t \int_{y_0}^{\infty} y \mu_n(y) u_n(s,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \leq c(T) \tag{3.60}$$

für $t \in [0,T]$ und $n > y_0$. Wegen der Kompaktheit des Trägers von $u_n$ dürfen wir die Gleichung (1.2) mit jedem $\varphi \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(Y)$ testen, insbesondere mit $y^\sigma$. Damit erhalten wir für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y) \mathrm{d}y = \sigma v_n(t) & \int_{y_0}^{\infty} y^{\sigma-1} \tau_n(y) u_n(t,y) \mathrm{d}y \\
& - \int_{y_0}^{\infty} y^\sigma (\mu_n(y) + \beta_n(y)) u_n(t,y) \mathrm{d}y \\
& + 2 \int_{y_0}^{\infty} u_n(s,y) \beta_n(y) \int_{y_0}^{y} z^\sigma \kappa(z,y) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \\
& + \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \big((y+z)^\sigma - y^\sigma - z^\sigma\big) \eta_n(y,z) u_n(t,y) u_n(t,z) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \ ,
\end{aligned}$$

wobei die Identitäten (1.15) und (1.16) benutzt wurden. (1.8) liefert uns die Abschätzung

$$2\int_{y_0}^{y} z^\sigma \kappa(z,y)\mathrm{d}z \leq y^\sigma \ .$$

Da $u_n(t) \geq 0$ für $t \in [0,T]$, erhalten wir aus der Binomischen Reihe, (3.17) und der Tatsache, dass $\rho + \alpha \leq 1$, die weitere Abschätzung für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}((y+z)^\sigma - y^\sigma - z^\sigma)\eta_n(y,z)u_n(t,y)u_n(t,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\leq c_1(\sigma)\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{y} y^{\sigma-1}z\eta_n(y,z)u_n(t,z)u_n(t,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad + c_2(\sigma)\int_{y_0}^{\infty}\int_{y}^{\infty} z^{\sigma-1}y\eta_n(y,z)u_n(t,z)u_n(t,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\leq c_3\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma z u_n(t,z)u_n(t,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\leq c(T)\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y)\mathrm{d}y \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung (3.60) verwendet haben. Somit impliziert (3.3) zusammen mit (3.15) für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y)\mathrm{d}y &\leq \sigma\tau^* v_n(t)\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y)\mathrm{d}y + c(T)\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y)\mathrm{d}y \\
&\leq c(T)\int_{y_0}^{\infty} y^\sigma u_n(t,y)\mathrm{d}y \ ,
\end{aligned}$$

wobei wir (3.3),(3.60) und die Positivität von $u_n$, $\mu_n$, $\beta_n$ und $\eta_n$ berücksichtigt haben. Das Lemma von Gronwall liefert uns

$$\|u_n(t)\|_{L_1(Y,y^\sigma\mathrm{d}y)} \leq c(T) \ , \quad t \in [0,T] \ , \ n > y_0 \ . \tag{3.61}$$

Nun sind wir in der Lage, eine schwache monomererhaltende Lösung $(v,u)$ von (1.1)–(1.4) wie im ersten Teil des Theorems zu konstruieren, für die wegen (3.61) auch $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma \mathrm{d}y))$ gilt. Den Beweis im Fall $\nu > 0$ erhält man völlig analog. Somit ist die Aussage bewiesen. $\square$

# 4. Eindeutigkeit schwacher Lösungen

In diesem Kapitel beweisen wir, dass monomererhaltende schwache Lösungen für das Problem (1.1)–(1.4) unter bestimmten Voraussetzungen eindeutig sind. Wir beginnen mit einem Theorem, in dem die Raten $\tau, \beta, \mu$ zwar unbeschränkt sein können, aber eine bestimmte Struktur besitzen. Die Koagulationsrate $\eta$ mit

$$\eta \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}([y_0,\infty) \times [y_0,\infty)) \tag{4.1}$$

soll eine der folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(\mathrm{A}) \begin{cases} \text{Es existieren } \alpha \in (0,1] \text{ und } K_0, K_1 > 0 \text{ mit} & \\ \eta(y,z) \le K_0(y+z)^\alpha \ , & (y,z) \in Y \times Y \ , \\ (y^\alpha \wedge z^\alpha)|\partial_y \eta(y,z)| \le K_1 y^{\alpha-1} z^\alpha \ , & (y,z) \in Y \times Y \end{cases}$$

oder

$$(\mathrm{B}) \begin{cases} \text{Es existieren } \alpha \in (1,2] \text{ und } K_0, K_1 > 0 \text{ mit} & \\ \eta(y,z) \le K_0(yz^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}z) \ , & (y,z) \in Y \times Y \ , \\ (y \wedge z)(y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1})|\partial_y \eta(y,z)| \le K_1 y^{\alpha-1} z^\alpha \ , & (y,z) \in Y \times Y \ . \end{cases}$$

In diesem Kapitel wird stets

$$\lambda, \gamma, \nu \ge 0$$

vorausgesetzt. Dann gilt folgende Aussage über die Eindeutigkeit.

**Theorem 4.1.** *Es gelte*

$$\beta(y) = By^b, \quad \mu(y) = My^m, \quad \tau(y) = Sy^\theta$$

*für $y > y_0$ mit $B, M, S, b, m \ge 0$ und $0 \le \theta \le 1$. Ferner sei $\kappa$ durch* (1.10), (1.11) *mit $[y \mapsto yk_0(y)] \in L_\infty(0,1)$ gegeben. Es sei*

$$\xi(x) := 2b \int_x^1 k_0(z)\mathrm{d}z - b + 2xk_0(x) \ , \quad x \in (0,1) \ .$$

(a) *Es gelte*

$$\alpha := \Big( \sup_{x \in (0,1)} \xi(x) \vee m \vee \theta \Big) \in (0,2] \ .$$

*Im Fall $\alpha \in (0,1]$ erfülle $\eta$ die Bedingung* (A) *für dieses $\alpha$, andernfalls die Bedingung* (B).

*Dann existiert ein $\sigma \ge 1$, das groß genug ist und nur von $k_0$, $b$, $m$ und $\theta$ abhängt, sodass das Problem* (1.1)–(1.4) *für jedes Paar von Anfangswerten $(v^0, u^0)$ mit $v^0 > 0$ und $u^0 \in L_1^+(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)$ höchstens eine monomererhaltende schwache Lösung $(v,u)$ mit $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)\big)$ besitzt.*

(b) *Seien* $b, m \leq 1$ *und* $\eta$ *erfülle die Bedingung* (A) *mit* $\alpha := m$. *Es gelte außerdem*

$$\xi(x) \geq 0 \ , \quad x \in (0,1) \ .$$

*Dann existiert für jedes Paar* $(v^0, u^0) \in (0, \infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ *höchstens eine monomererhaltende schwache Lösung.*

Wir weisen darauf hin, dass in Abschnitt 4.1 einige allgemeinere Ergebnisse beschrieben werden. Dort wird nämlich eine größere Klasse der Raten $\tau, \mu, \beta$ und $\eta$ betrachtet, sodass die Aussage von Teil (a) von Theorem 4.1 als ein Spezialfall von Theorem 4.5 und entsprechend Teil (b) als ein Spezialfall von Theorem 4.6 angesehen werden können.

Nun können wir die Existenzaussage von Theorem 3.2 und die Eindeutigkeitsaussage von Theorem 4.1 miteinander kombinieren, was uns das folgende Korollar liefert.

**Korollar 4.2.** (a) *Es seien die Voraussetzungen von Theorem* 4.1(a) *erfüllt, wobei* $\alpha \in (0,1]$, *d.h. für* $\eta$ *gelte die Bedingung* (A). *Dann existiert ein* $\sigma \geq 1$ *(groß genug), sodass das Problem* (1.1)–(1.4) *für jeden Anfangswert* $(v_0, u_0)$ *mit* $v^0 > 0$, $u^0 \in L_1^+(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)$ *eine eindeutige monomererhaltende schwache Lösung* $(v, u)$ *mit* $u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma \mathrm{d}y)\big)$ *besitzt.*

(b) *Es seien die Voraussetzungen von Theorem* 4.1(b) *erfüllt. Dann besitzt das Problem* (1.1)–(1.4) *für jeden Anfangswert* $(v_0, u_0)$ *mit* $v^0 > 0$, $u^0 \in L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ *eine eindeutige monomererhaltende schwache Lösung* $(v, u)$.

Der Teil der Arbeit über die Eindeutigkeit der monomererhaltenden schwachen Lösung für das Problem (1.1)–(1.4) basiert im Wesentlichen auf den in [33] und [22] beschriebenen Ideen. In [33] wurde das Prionenmodell "ohne Koagulation" untersucht, d.h. für den Fall $\eta \equiv 0$. Das Thema von [22] ist dagegen die Eindeutigkeit und die Existenz einer schwachen Lösung für die Smoluchowskische Koagulationsgleichung mit homogenen Koagulationsraten. In dieser Gleichung werden nur Koagulationsterme berücksichtigt. Wir kombinieren die beiden Ansätze mit geeigneten Modifikationen, um das Prionenmodell mit Koagulation zu behandeln. Einige der hierzu benötigten Abschätzungen sind bereits in den oben erwähnten Arbeiten zu finden. Wir geben diese hier mit den nötigen Anpassungen auf unseren Fall der Vollständigkeit halber wieder.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, integrieren wir die Differenz zwischen zwei beliebigen monomererhaltenden schwachen Lösungen $u, \hat{u}$, die demselben Anfangswert $(v^0, u^0)$ entsprechen, über die Menge $(y, \infty)$ mit $y \in (y_0, \infty)$. Die in Abschnitt 4.1 für die Raten eingeführten Bedingungen ermöglichen uns, in Abschnitt 4.2 die notwendigen Abschätzungen zu konstruieren. In Abschnitt 4.3 beweisen wir, dass diese zusammen mit dem Lemma von Gronwall implizieren, dass das Integral gleich 0 für alle $y \in (y_0, \infty)$ ist, d.h. $u \equiv \hat{u}$.

## 4.1. Eigenschaften von schwachen Lösungen

Wir wollen ein allgemeineres Resultat als Theorem 4.1 beweisen. Wir zeigen im Folgenden, dass die in [33] geforderten Bedingungen auch im Fall mit Koagulation die Eindeutigkeit von schwachen monomererhaltenden Lösungen implizieren. Daher sei im weiteren Verlauf des Kapitels $\kappa$ eine nichtnegative messbare Funktion, die auf der Menge $\{(y_*, y); y > y_0, 0 < y_* < y\}$ definiert ist und die die Bedingungen (1.7), (1.8) erfüllt. Zusätzlich setzen wir voraus, dass

$$\lim_{y_* \searrow y} \int_y^{y_*} \kappa(z, y_*)\mathrm{d}z = 0 \ , \quad y > y_0 \tag{4.2}$$

und

$$\mu, \beta \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(Y) \quad \text{mit} \quad \mu, \beta \geq 0 \ . \tag{4.3}$$

Es wird außerdem die Existenz einer Konstanten $c_0 > 0$ und einer strikt positiven Funktion

$$g \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(Y) \quad \text{mit} \quad g'(y) \leq c_0(g(y) + 1) \ , \ y > y_0 \tag{4.4}$$

vorausgesetzt, sodass

$$\begin{cases} \tau \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(Y) \ , \quad 0 \leq \tau(y) \leq c_0 y \ , \quad y \geq y_0 \ , \\ |\tau'(y)| \leq c_0 g(y) \quad \text{und} \quad (\tau g)'(y) \leq c_0 g(y) \ , \quad y > y_0 \end{cases} \tag{4.5}$$

gilt. Nun definieren wir die Funktion

$$G(y) := \int_{y_0}^{y} g(z)\mathrm{d}z \ , \quad y > y_0$$

und verlangen, dass die Ungleichungen

$$(\mu + \beta)(y) \leq c_0((\mu + \beta)(y_*) + G(y_*) + y_*) \ , \quad y_* > y > y_0 \ , \tag{4.6}$$

$$|\mu'(y)| + |\beta'(y)| \leq c_0 g(y) \ , \quad y > y_0 \ , \tag{4.7}$$

$$\left|\partial_y \left(\beta(y) \int_0^{y_0} z\kappa(z, y)\mathrm{d}z\right)\right| + |B_2(y_*, y)| \leq c_0 g(y) \ , \quad y > y_* \geq y_0 \tag{4.8}$$

erfüllt seien, wobei

$$B_2(y_*, y) := \partial_y \left(\beta(y) \int_{y_*}^{y} \kappa(z, y)\mathrm{d}z\right) \qquad \text{für} \ \ y > y_* \geq y_0 \ . \tag{4.9}$$

Wir fordern außerdem

$$\int_{y_0}^{y} g(y_*)|2B_2(y_*,y) - (\beta' + \mu')(y)|\mathrm{d}y_* \leq g(y)(c_0 + (\mu+\beta)(y)) \tag{4.10}$$

für $y > y_0$. Wir bemerken, dass (4.6) die Gleichung

$$\lim_{y\to\infty} (\mu+\beta)(y) \int_y^\infty |\phi(y_*)|\mathrm{d}y_* = 0 \quad \text{für} \quad \phi \in L_1(Y, r(y)\mathrm{d}y) \tag{4.11}$$

impliziert, wenn $r(y) := (\mu+\beta)(y) + G(y) + y$ für $y \in Y$.
Für die Koagulationsrate

$$\eta \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}([y_0,\infty) \times [y_0,\infty))$$

existiere ein $K > 0$ mit

$$\begin{cases} \eta(y,z) \leq K\big(G(y)+y\big)\big(G(z)+z\big) \ , & (y,z) \in Y \times Y \ , \\ |\partial_y \eta(y,z)| \leq Kg(y)\big(G(z)+z\big) \ , & (y,z) \in Y \times Y \ . \end{cases} \tag{4.12}$$

Außerdem setzen wir voraus, dass für $(y,z) \in Y \times Y$ die Bedingungen

$$\eta(y,z)|g(y+z) - g(y)| \leq Cg(y)\big(G(z)+z\big) \ , \tag{4.13}$$

$$\eta(y,z)\Big[G(y+z) - G(y\vee z) + G(y \wedge z)\Big] \leq C\big(G(y)+y\big)\big(G(z)+z\big) \ , \tag{4.14}$$

$$|\partial_y \eta(y,z)| \ \Big[G(y+z) - G(y\vee z) + G(y \wedge z)\Big] \leq Cg(y)\big(G(z)+z\big) \tag{4.15}$$

gelten, wobei $C > 0$ eine Konstante ist.
Für den Fall $(v^0, u^0) \in (0,\infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$ (vgl. Teil (b) in Theorem 4.1) wird zusätzlich vorausgesetzt, dass es ein $C_1 > 0$ und ein $\delta > 0$ gibt, sodass die Ungleichungen

$$\eta(y,z) \leq C_1(\mu(y) + \mu(z)) \ , \quad (y,z) \in Y \times Y \tag{4.16}$$

und

$$\int_0^y \frac{y_*}{y}\left(1 - \frac{y_*}{y}\right) \kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_* \geq \delta \ , \quad y > y_0 \tag{4.17}$$

gelten. Die Bedingungen (4.2) und (4.17) sind offensichtlich erfüllt, wenn $\kappa$ wie in (1.10), (1.11) definiert ist.
Wir werden später sehen, dass diese Bedingungen insbesondere nach den Voraussetzungen von Theorem 4.1 erfüllt sind.

**Lemma 4.3.** *Es sei* $(v,u)$ *eine monomererhaltende Lösung für das Problem* (1.1)–(1.4) *mit Anfangswert* $(v^0,u^0)\in(0,\infty)\times L_1^+\big(Y,y\mathrm{d}y\big)$. *Dann gilt*

$$\big[(s,y)\mapsto y\big(1+\mu(y)\big)u(s,y)\big]\in L_1\big((0,t)\times Y\big)\ ,\quad t>0\ . \tag{4.18}$$

*Wenn die Bedingungen* (4.2)–(4.17) *erfüllt sind, gilt darüber hinaus*

$$\lim_{R\to\infty} R\int_0^t\int_R^\infty \beta(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s=0\ ,\quad t>0\ . \tag{4.19}$$

***Beweis***. Die Eigenschaft (4.18) folgt aus Teil (iii) der Definition einer monomererhaltenden Lösung, wenn man die Nichtnegativität von $\mu$, $v$ und $u$ berücksichtigt. Um (4.19) zu zeigen, setzen wir $\varphi(y):=R\wedge y:=\min\{R,y\}$ mit $R>y_0$ in Definition 3.1. Nach der Addition von (1.1) erhalten wir für $t>0$

$$\begin{aligned}
v(t)&-v^0+\int_{y_0}^\infty (R\wedge y)(u(t,y)-u^0(y))\,\mathrm{d}y\\
&=\lambda t-\gamma\int_0^t v(s)\mathrm{d}s-\int_0^t\frac{v(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(s,x)\mathrm{d}x}\int_R^\infty \tau(y)u(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\
&\quad-\int_0^t\int_{y_0}^\infty (R\wedge y)\mu(y)u(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_0^t\int_R^\infty \beta(y)u(s,y)\int_{y_0}^y\left(\frac{R\wedge y_*}{y_*}-\frac{R}{y}\right)y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\
&\quad+2\int_0^t\int_R^\infty \beta(y)u(s,y)\left(1-\frac{R}{y}\right)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_0^t\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty\big(R\wedge(y+z)-R\wedge y-R\wedge z\big)\\
&\qquad\qquad\times\eta(y,z)\,u(s,y)\,u(s,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\ ,
\end{aligned}\tag{4.20}$$

wobei wir (1.15), (1.8) und (1.16) verwendet haben. Wegen (4.16) und (4.18) gilt für $t>0$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty |R\wedge(y+z)-R\wedge y-R\wedge z|\ \eta(y,z)\,u(s,y)\,u(s,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\le C_1\int_0^t\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty (y+z)\,\big(\mu(y)+\mu(z)\big)\,u(s,y)\,u(s,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s\ <\ \infty\ .
\end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue liefert dann für $t>0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^t\int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty\big(R\wedge(y+z)-R\wedge y-R\wedge z\big)\,\eta(y,z)\,u(s,y)\,u(s,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}s=0\ .$$

Daraus folgt zusammen mit (4.5) und (4.18), dass die Gleichung (3.10) genau dann erfüllt ist, wenn

$$\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^t\int_R^\infty \beta(y)u(s,y)\int_{y_0}^y\left(\frac{R\wedge y_*}{y_*}-\frac{R}{y}\right)y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_R^\infty \beta(y)u(s,y)\left(1-\frac{R}{y}\right)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s\right]=0\ .$$

Wegen

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{R}{y}\right)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_* &= \left(1-\frac{R}{y}\right)\int_0^{R} y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\\ &\quad-\int_{y_0}^R\left(\frac{R\wedge y_*}{y_*}-\frac{R}{y}\right)y_*\kappa(y_*,y)\,\mathrm{d}y_*\end{aligned}$$

erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}\lim_{R\to\infty}\int_0^t\int_R^\infty\beta(y)u(s,y)\Bigg\{&(y-R)\int_0^R\frac{y_*}{y}\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\\ &+R\int_R^y\left(1-\frac{y_*}{y}\right)\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\Bigg\}\mathrm{d}y\mathrm{d}s=0\ ,\quad t>0\ .\end{aligned}\tag{4.21}$$

Für $y>2R$ gilt

$$\begin{aligned}(y-R)&\int_0^R\frac{y_*}{y}\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*+R\int_R^y\left(1-\frac{y_*}{y}\right)\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\\ &\geq R\int_0^R\frac{y_*}{y}\left(1-\frac{y_*}{y}\right)\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*+R\int_R^y\frac{y_*}{y}\left(1-\frac{y_*}{y}\right)\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\\ &=R\int_0^y\frac{y_*}{y}\left(1-\frac{y_*}{y}\right)\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\geq R\delta\ ,\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung aus (4.17) folgt. Gleichung (4.21) ergibt somit

$$\lim_{R\to\infty}R\delta\int_0^t\int_R^\infty\beta(y)u(s,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s=0$$

für $t>0$, was das Lemma beweist. □

**Lemma 4.4.** *Die Bedingungen* (4.2)–(4.10) *seien erfüllt und* $(v,u)$, $(\hat v,\hat u)$ *mit*

$$u,\hat u\in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+,L_1(Y,G(y)\mathrm{d}y)\big)$$

*seien zwei monomererhaltende schwache Lösungen des Problems* (1.1)–(1.4) *mit demselben Anfangswert* $(v^0, u^0) \in (0,\infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$*. Mit*

$$E(t,y) := \int_y^\infty (u-\hat{u})(t,y_*)\mathrm{d}y_* \ , \quad (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times Y$$

*gilt dann*

$$\begin{aligned}
&\partial_t E(t,y) + \frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x}\,\tau(y)\partial_y E(t,y) \\
&= \left(\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(t,x)\mathrm{d}x}\right)\tau(y)\hat{u}(t,y) - (\mu+\beta)(y)E(t,y) \\
&\quad - \int_y^\infty (\mu'+\beta')(y_*)E(t,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\quad + 2\int_y^\infty E(t,y_*)B_2(y,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\quad + \int_{y_0}^y\int_{y_0}^y \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)[u(t,y_*)u(t,z)-\hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)]\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\
&\quad - \int_y^\infty\int_y^\infty \eta(y_*,z)[u(t,y_*)u(t,z)-\hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)]\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \ .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

***Beweis***. Wir argumentieren zunächst formal. Da

$$u,\hat{u} \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, G(y)\mathrm{d}y)\big) \ ,$$

folgt aus der Definition von $E$ und $G$, dass $E \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, g(y)\mathrm{d}y)\big)$ und $\partial_y E = \hat{u} - u$. Da die Lösungen $u, \hat{u}$ monomererhaltend sind, gilt auch

$$u,\hat{u} \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, r(y)\mathrm{d}y)\big)$$

mit $r(y) = (\mu+\beta)(y) + G(y) + y$ für $y \in Y$. Durch Integrieren von (1.2) erhalten wir für $t > 0$

$$\begin{aligned}
\partial_t E(t,y) + \Bigg[\tau(y_*)\Bigg(&\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x}u(t,y_*) \\
&- \frac{\hat{v}(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(t,x)\mathrm{d}x}\hat{u}(t,y_*)\Bigg)\Bigg]_{y_*=y}^{y_*=\infty}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \Big[(\mu+\beta)(y_*)E(t,y_*)\Big]_{y_*=y}^{y_*=\infty} - \int_y^\infty (\mu'+\beta')(y_*)E(t,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\quad + 2\int_y^\infty (u-\hat{u})(t,y_*)\beta(y_*)\int_y^{y_*}\kappa(z,y_*)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_* \\
&\quad + \int_{y_0}^\infty\int_{y_0}^\infty \left[\mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*) - \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z) - \mathbf{1}_{[y,\infty)}(y_*)\right]\eta(z,y_*) \\
&\qquad\qquad \times \big(u(z)u(y_*) - \hat{u}(y_*)\hat{u}(z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\ ,
\end{aligned}
$$

wobei wir partielle Integration und (1.16) verwendet haben. Aus (4.5) folgt $\tau u(t,\cdot)\in L_1(Y)$ und somit

$$
\tau(y_*)\left(\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x}u(t,y_*) - \frac{\hat{v}(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(t,x)\mathrm{d}x}\hat{u}(t,y_*)\right)\to 0
$$

für $y_*\to\infty$. Der erste Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung verschwindet wegen (4.11) für $y_*\to\infty$. Wir verwenden erneut partielle Integration und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
&\partial_t E(t,y) - \frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x}\tau(y)(u-\hat{u})(t,y) \\
&\quad= \left(\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(t,x)\mathrm{d}x}\right)\tau(y)\hat{u}(t,y) \\
&\qquad - (\mu+\beta)(y)E(t,y) - \int_y^\infty (\mu'+\beta')(y_*)E(t,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\qquad - 2\left[E(t,y_*)\beta(y_*)\int_y^{y_*}\kappa(z,y_*)\mathrm{d}z\right]_{y_*=y}^{y_*=\infty} + 2\int_y^\infty E(t,y_*)B_2(y,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\qquad + \int_{y_0}^y\int_{y_0}^y \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(z,y_*)\big(u(z)u(y_*) - \hat{u}(y_*)\hat{u}(z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_* \\
&\qquad - \int_y^\infty\int_y^\infty \eta(z,y_*)\big(u(z)u(y_*) - \hat{u}(y_*)\hat{u}(z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\ ,
\end{aligned}
$$

wobei wir (4.9) verwendet haben. Wenn wir nun für die Terme, die die Grenzwerte beinhalten, die Ungleichungen (1.9), (4.2) und (4.11) benutzen, stellen wir fest, dass diese Terme verschwinden. Wir bemerken, dass die rechte Seite von (4.22) wegen (4.7), (4.8) und (4.12) wohldefiniert ist. Dies liefert die Behauptung. Für einen rigorosen Beweis betrachten wir die Differenz zwischen den schwachen Formulierungen für $u$ und $\hat{u}$ in Definition 3.1. Dabei wählen wir als Testfunktion die Abbildung

$$
\varphi_\varepsilon(y_*) := \frac{(y_*-y)_+}{\varepsilon}\wedge 1\ ,\quad y_*\in Y
$$

für gegebene $y \in Y$ und $\varepsilon \in (0,1)$. Es gilt offensichtlich $\varphi \in W^1_\infty(Y)$ und $\varphi_\varepsilon \to \mathbf{1}_{(y,\infty)}$ punktweise für $\varepsilon \to 0$. Nach dem Rechnen wie im formalen Beweis erhalten wir die entsprechende Gleichung, indem wir $\varepsilon$ gegen 0 gehen lassen. $\square$

An dieser Stelle geben wir die präzisen Formulierungen unserer Eindeutigkeitsresultate an. Analog zu [33] verallgemeinern wir die Bedingungen von Theorem 4.1 folgendermaßen. Für das erste Ergebnis, das als eine Verallgemeinerung von Theorem 4.1(a) betrachtet werden kann, benötigen wir zusätzlich zu (4.2)–(4.10) die Voraussetzungen

$$\int_{y_*}^{y} |(\mu' + \beta')(z)| \mathrm{d}z \leq c_1(1 + (\mu + \beta)(y)) \ , \quad y > y_* > y_0 \tag{4.23}$$

und

$$\int_{y'}^{y} |B_2(y', y_*)| \mathrm{d}y_* \leq c_1(1 + (\mu + \beta)(y)) \ , \quad y > y' > y_0 \ , \tag{4.24}$$

wobei $c_1 > 0$ eine Konstante ist.

**Theorem 4.5.** *Es gelte $\nu = 0$ und es seien die Bedingungen (4.2)–(4.10), (4.12)–(4.15), (4.23) und (4.24) erfüllt. Dann existiert für jeden Anfangswert $(v^0, u^0)$ mit $v^0 > 0$ und $u^0 \in L_1^+(Y, y\mathrm{d}y) \cap L_1\big(Y, (\mu + \beta)(y)G(y)\mathrm{d}y\big)$ höchstens eine monomererhaltende schwache Lösung $(v, u)$ des Problems (1.1)–(1.4) im Sinne von Definition 3.1, sodass*

$$u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, G(y)\mathrm{d}y)\big) \cap L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, (\mu + \beta)(y)G(y)\mathrm{d}y)\big) \ .$$

*Für $\nu > 0$ bleibt die Aussage wahr, wenn $g(y) \geq const > 0$ für $y \in Y$ gilt.*

Obwohl Theorem 4.5 für eine ziemlich große Klasse von Funktionen $\beta, \mu, \tau$ und $\kappa$ anwendbar ist, wird die Eindeutigkeit der monomererhaltenden Lösung im Fall der Raten

$$\eta \equiv const \ , \quad \tau \equiv const \ , \quad \mu \equiv const \ , \quad \beta(y) = \beta y \ , \quad y > y_0$$

und wie in (1.12) definiertem $\kappa$ nur für $u \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^2\mathrm{d}y)\big)$ gewährleistet und nicht im aus biologischer Sicht sinnvollen Raum $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$. Dennoch kann unter zusätzlichen Annahmen die Eindeutigkeit von monomererhaltenden Lösungen auch in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ garantiert werden. Dazu seien die Bedingungen (4.2)–(4.17) für

$$g \equiv 1 \tag{4.25}$$

erfüllt. Ferner gelte für $\mu$ und $\beta$

$$\begin{cases} \mu = \mu_1 + \mu_2 & \text{mit } \mu_1, \mu_1' \geq 0 \ , \quad \mu_2' \in L_1(Y) \ , \\ \beta = \beta_1 + \beta_2 & \text{mit } \beta_1, \beta_1' \geq 0 \ , \quad \beta_2' \in L_1(Y) \ . \end{cases} \tag{4.26}$$

Es existiere außerdem eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\frac{1}{R}\int_{y_0}^{R} |B_2(y_*, y)|\mathrm{d}y_* \leq C_2\beta_1'(y) \ , \quad y > R > y_0 \ . \tag{4.27}$$

Die nächste Aussage entspricht einer Verallgemeinerung von Theorem 4.1(b).

**Theorem 4.6.** *Es seien die Bedingungen* (4.2)–(4.10)*,* (4.12)–(4.17) *und* (4.25)–(4.27) *erfüllt. Dann besitzt das Problem* (1.1)–(1.4) *für jeden Anfangswert* $(v^0, u^0)$ *mit* $v^0 > 0$ *und* $u^0 \in L_1^+(y, y\mathrm{d}y)$ *höchstens eine monomererhaltende schwache Lösung im Sinne von Definition* 3.1*.*

Um die Eindeutigkeitsresultate aus diesem Abschnitt zu zeigen, benötigen wir einige Hilfsaussagen, die wir im nächsten Abschnitt formulieren und beweisen.

## 4.2. Relevante Abschätzungen

In diesem Abschnitt seien die Bedingungen (4.2)–(4.10), (4.12)–(4.15) erfüllt. Es seien $(v, u)$ und $(\hat{v}, \hat{u})$ zwei monomererhaltende schwache Lösungen des Problems (1.1)–(1.4) mit demselben Anfangswert $(v^0, u^0) \in (0, \infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$, sodass

$$u, \hat{u} \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, G(y)\mathrm{d}y)\big) \ . \tag{4.28}$$

Wir definieren wieder die Abbildung

$$E(t, y) := \int_y^\infty (u - \hat{u})(t, y_*)\mathrm{d}y_* \ , \quad (t, y) \in \mathbb{R}^+ \times Y$$

und bemerken, dass dann offensichtlich

$$E \in L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, g(y)\mathrm{d}y)\big) \tag{4.29}$$

gilt. Hier fixieren wir auch ein $T > 0$.

**Lemma 4.7.** *Es existiert ein* $c(T) > 0$*, sodass*

$$|E(t, y_0)| \leq c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s, y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ , \quad 0 < t < T \ .$$

***Beweis.*** Wir wählen $\varphi \equiv 1$ in Definition 3.1 und verwenden (1.8). Da

$$\partial_y E = \hat{u} - u \ ,$$

erhalten wir mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned}|E(t,y_0)| &= \left|\int_{y_0}^{\infty}(u-\hat{u})(t,y_*)\mathrm{d}y\right| \\ &\leq \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\left(2\beta(y)\int_{y_0}^{y}\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_* - (\beta+\mu)(y)\right)(u-\hat{u})(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\quad + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\big(Q[u(s,\cdot)](y) - Q[\hat{u}(s,\cdot)](y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\leq \left|\int_0^t\left[\left(-2\beta(y)\int_{y_0}^{y}\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_* + (\beta+\mu)(y)\right)E(s,y)\right]_{y=y_0}^{y=\infty}\mathrm{d}s\right| \\ &\quad + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\left(2B_2(y_0,y) - (\beta'+\mu')(y)\right)E(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\quad + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\big(Q[u(s,\cdot)](y) - Q[\hat{u}(s,\cdot)](y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| ,\end{aligned}$$

wobei $Q$ der in (1.14) definiertre Operator ist. Wegen (1.9), (3.8), (4.11) und (4.28) verschwindet der Term mit den Grenzwerten für $y \to \infty$. Daraus folgt zusammen mit (4.3), (4.7) und (4.8) die Abschätzung

$$\begin{aligned}|E(t,y_0)| \leq c\int_0^t|E(s,y_0)|\mathrm{d}s + c\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\big(Q[u(s,\cdot)](y) - Q[\hat{u}(s,\cdot)](y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| .\end{aligned} \tag{4.30}$$

Für den letzten Summanden verwenden wir (1.16) und erhalten

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\big(Q[u(s,\cdot)](y) - Q[\hat{u}(s,\cdot)](y)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\quad = \left|-\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)[u(s,y)u(s,z) - \hat{u}(s,y)\hat{u}(s,z)]\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\quad \leq \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)(u(s,y) - \hat{u}(s,y))u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\qquad + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)(u(s,z) - \hat{u}(s,z))\hat{u}(s,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\quad = \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)\partial_y E(s,y)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\ &\qquad + \left|\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)\partial_z E(s,z)\hat{u}(s,y)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| .\end{aligned} \tag{4.31}$$

Partielle Integration liefert uns für $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(y,z)\partial_y E(s,y)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \int_{y_0}^\infty \Big[\eta(y,z)E(s,y)\Big]_{y=y_0}^{y=\infty} u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \partial_y\eta(y,z)E(s,y)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}$$

Da $u$ und $\hat{u}$ monomererhaltende schwache Lösungen sind und $G$ monoton wachsend ist, folgt aus (4.28) für $0 < s < t < T$ und $y \in Y$

$$\big(y + G(y)\big)|E(s,y)| \leq \int_y^\infty \big(y_* + G(y_*)\big)|u(y_*) - \hat{u}(y_*)|\mathrm{d}y_* \to 0 \quad \text{für} \quad y \to \infty \ .$$

Daraus erhalten wir zusammen mit (4.12) und (4.28)

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(y,z)\partial_y E(s,y)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \\
&\leq c\int_0^t |E(s,y_0)|\mathrm{d}s + c\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

für $0 < t < T$. Aus der letzten Abschätzung, (4.30) und (4.31) folgt mit dem Lemma von Gronwall die Behauptung, wenn man noch die Symmetrie von $\eta$ berücksichtigt. □

Als nächstes konstruieren wir die entsprechende Abschätzung für die Differenz zwischen $v$ und $\hat{v}$.

**Lemma 4.8.** *Es existiert ein $c(T) > 0$, sodass*

$$|(v - \hat{v})(t)| \leq c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ , \quad 0 < t < T \ ,$$

*wenn $\nu = 0$ oder $g(y) \geq const > 0$ gilt.*

***Beweis.*** Wir modifizieren den Beweis für [33, Lemma 3.4] für unseren Fall. Wir integrieren (1.1) bezüglich $t$ und verwenden partielle Integration bezüglich $y$. Somit erhalten wir wegen der Nichtnegativität von $\gamma$, $\tau$ und $u$, dass

$$\begin{aligned}|(v-\hat{v})(t)| \le c(T)&\int_0^t |v(s)-\hat{v}(s)|\mathrm{d}s\\ &+\nu\|\hat{v}\|_{L_\infty(0,T)}\int_0^t \left|\int_{y_0}^\infty x(\hat{u}-u)(s,x)\mathrm{d}x\right|\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &+\|\hat{v}\|_{L_\infty(0,T)}\int_0^t\left|\int_{y_0}^\infty \tau(y)(u-\hat{u})(s,y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}s\\ &+2\int_0^t\left|\int_{y_0}^\infty (u-\hat{u})(s,y)\beta(y)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}s\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}|(v-\hat{v})(t)| \le c(T)&\int_0^t |v(s)-\hat{v}(s)|\mathrm{d}s\\ &+\nu\|\hat{v}\|_{L_\infty(0,T)}\int_0^t\left|\Big[xE(s,x)\Big]_{x=y_0}^{x=\infty}-\int_{y_0}^\infty E(s,x)\mathrm{d}x\right|\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\times\int_{y_0}^\infty \tau(y)u(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &+\|\hat{v}\|_{L_\infty(0,T)}\int_0^t\left|\Big[-\tau(y)E(s,y)\Big]_{y=y_0}^{y=\infty}+\int_{y_0}^\infty \tau'(y)E(s,y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}s\\ &+2\int_0^t\left|\Big[-\beta(y)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*E(s,y)\Big]_{y=y_0}^{y=\infty}\right|\mathrm{d}s\\ &+2\int_0^t\left|\int_{y_0}^\infty \partial_y\left(\beta(y)\int_0^{y_0} y_*\kappa(y_*,y)\mathrm{d}y_*\right)E(s,y)\mathrm{d}y\right|\mathrm{d}s\ .\end{aligned}$$

Wegen (1.9), (3.8), (4.5) und (4.11) verschwinden die Terme, die die Grenzwerte beinhalten, für $y\to\infty$ bzw. $x\to\infty$. Somit folgt aus (4.5) und (4.8), dass die Abschätzung

$$\begin{aligned}|(v-\hat{v})(t)| \le c(T)\int_0^t |E(s,y_0)|\mathrm{d}s + c\int_0^t\int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ + c(T)\int_0^t |v(s)-\hat{v}(s)|\mathrm{d}s\end{aligned}$$

erfüllt ist, wenn $\nu=0$ oder $g(y)\ge \mathit{const}>0$ für $y\in Y$ gilt. Dies liefert uns zusammen mit dem Lemma von Gronwall und Lemma 4.7 die Behauptung. □

Im Folgenden definieren wir für $0 < t < T$ und $y \in Y$

$$\begin{aligned} H[u,\hat{u}](t,y) :=& \frac{-v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x}\tau(y)\partial_y E(t,y) \\ &+ \left(\frac{v(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(t,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(t)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(t,x)\mathrm{d}x}\right) \\ &\qquad \times \tau(y)\hat{u}(t,y) \\ &- (\mu+\beta)(y)E(t,y) - \int_y^\infty (\mu'+\beta')(y_*)E(t,y_*)\mathrm{d}y_* \\ &+ 2\int_y^\infty E(t,y_*)B_2(y,y_*)\mathrm{d}y_* \end{aligned} \tag{4.32}$$

und

$$\begin{aligned} F[u,\hat{u}](t,y) :=& \int_{y_0}^y \int_{y_0}^y \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)[u(t,y_*)u(t,z) - \hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)]\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\ &- \int_y^\infty \int_y^\infty \eta(y_*,z)[u(t,y_*)u(t,z) - \hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)]\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \end{aligned} \tag{4.33}$$

Dann folgt aus Lemma 4.4, dass

$$E(t,y) = \int_0^t H[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}s + \int_0^t F[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}s\ , \quad y\in Y\ , \quad 0<t<T\ , \tag{4.34}$$

wobei wir berücksichtigt haben, dass $E(0,y) = 0$ für alle $y \in Y$.
Es gilt für $0 < t < T$

$$\begin{aligned} &\int_{y_0}^\infty g(y)\ |F[u,\hat{u}](t,y)|\ \mathrm{d}y \\ &\quad\le \int_{y_0}^\infty g(y) \Bigg[ \int_{y_0}^y \int_{y_0}^y \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\ &\qquad\qquad + \int_{y_0}^y \int_{y_0}^y \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)\hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\ &\qquad\qquad + \int_y^\infty \int_y^\infty \eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\ &\qquad\qquad + \int_y^\infty \int_y^\infty \eta(y_*,z)\hat{u}(t,y_*)\hat{u}(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \Bigg]\mathrm{d}y \\ &\quad= \int_{y_0}^\infty g(y)\ \Big[|F_1[u](t,y)| + |F_1[\hat{u}](t,y)| + |F_2[u](t,y)| + |F_2[\hat{u}](t,y)|\Big]\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

mit

$$F_1[u](t,y) := \int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{y} \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \ ,$$
$$F_2[u](t,y) := \int_{y}^{\infty} \int_{y}^{\infty} \eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \ .$$

Da für $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{\infty} g(y)\,|F_1[u](t,y)|\,\mathrm{d}y \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} g(y) \int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{y} \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \eta(y_*,z) \left( \int_{y_*\vee z}^{y_*+z} g(y)\mathrm{d}y \right) u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \eta(y_*,z)\big[G(y_*+z) - G(y_*\vee z)\big]u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^{\infty} g(y)\,|F_2[u](t,y)|\,\mathrm{d}y \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} g(y) \int_{y}^{\infty} \int_{y}^{\infty} \eta(y_*,z)u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z\mathrm{d}y \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \eta(y_*,z) \left( \int_{y_0}^{y_*\wedge z} g(y)\mathrm{d}y \right) u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z \\
&\quad = \int_{y_0}^{\infty} \int_{y_0}^{\infty} \eta(y_*,z)\big[G(y_*\wedge z)\big]u(t,y_*)u(t,z)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

gilt, erhalten wir wegen (4.14) und (4.28)

$$\int_{y_0}^{\infty} g(y)\ |F[u,\hat{u}](t,y)|\ \mathrm{d}y \le c(T) \ , \quad 0 < t < T \ . \tag{4.35}$$

Daraus folgt insbesondere

$$\int_0^t \int_{y_0}^{\infty} g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s < \infty \ , \quad 0 < t < T \ . \tag{4.36}$$

Es gilt außerdem offensichtlich

$$\int_{y_0}^{\infty} g(y)\ \mathrm{sign}(E(t,y))\ E(t,y)\mathrm{d}y = \int_{y_0}^{\infty} g(y)\ |E(t,y)|\ \mathrm{d}y < \infty \tag{4.37}$$

für fast alle $0 < t < T$.

**Lemma 4.9.** *Es sei $R > y_0$ beliebig. Dann gilt für $0 < t < T$*

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{y_0}^R & g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ H[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le c(T) \int_0^t |E(s,y_0)| \mathrm{d}s \\
&\quad + c(T) \int_0^t \int_{y_0}^R g(y) |E(s,y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad + c \int_0^t \left| \frac{v(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x u(s,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x \hat{u}(s,x)\mathrm{d}x} \right| \\
&\qquad\qquad \times \int_{y_0}^R (1+G(y))\hat{u}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad + V(t,R)\ ,
\end{aligned}
$$

*wobei*

$$
\begin{aligned}
V(t,R) := G(R) & \int_0^t \int_R^\infty \left|(\mu' + \beta')(y)\right|\ |E(s,y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
& + \int_0^t \int_R^\infty |E(s,y)| \int_{y_0}^R g(y_*) |B_2(y_*,y)| \mathrm{d}y_* \mathrm{d}y\mathrm{d}s\ .
\end{aligned}
\tag{4.38}
$$

***Beweis***. Hier folgen wir den Überlegungen aus [33, S.253–254]. Wegen (4.32) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_{y_0}^R & g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ H[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le - \int_0^t \frac{v(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x u(s,x)\mathrm{d}x} \Big[ g(y)\tau(y) |E(s,y)| \Big]_{y=y_0}^{y=R} \mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \frac{v(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x u(s,x)\mathrm{d}x} \int_{y_0}^R (g\tau)'(y) |E(s,y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left| \frac{v(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x u(s,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(s)}{1+\nu \int_{y_0}^\infty x \hat{u}(s,x)\mathrm{d}x} \right| \\
&\qquad\qquad \times \int_{y_0}^R g(y)\tau(y)\hat{u}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)(\mu+\beta)(y) |E(s,y)| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E)(s,y) \int_R^\infty (\mu'+\beta')(y_*) E(s,y_*) \mathrm{d}y_* \mathrm{d}y\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2\int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E)(s,y) \int_R^\infty B_2(y,y_*)E(s,y_*)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&- \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E)(s,y) \int_y^R (\mu' + \beta')(y_*)E(s,y_*)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&+ 2\int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E)(s,y) \int_y^R B_2(y,y_*)E(s,y_*)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}
$$

Nun benutzen wir (4.5) und wenden den Satz von Fubini auf die letzten zwei Integrale an. Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ H[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad \le g(y_0)\tau(y_0)\|v\|_{L_\infty(0,T)} \int_0^t |E(s,y_0)|\mathrm{d}s + c_0\|v\|_{L_\infty(0,T)} \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \left| \frac{v(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(s,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(s,x)\mathrm{d}x} \right| \\
&\qquad\qquad \times \int_{y_0}^R \big((g\tau)(y_0) + c_0G(y)\big)\hat{u}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t \int_{y_0}^R |E(s,y)|g(y)\big(\mu+\beta\big)(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad - \int_0^t \int_{y_0}^R |E(s,y)|\big(\mu'+\beta'\big)(y) \\
&\qquad\qquad \times \int_{y_0}^y g(y_*)\mathrm{sign}\big(E(s,y)E(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + 2\int_0^t \int_{y_0}^R |E(s,y)| \\
&\qquad\qquad \times \int_{y_0}^y g(y_*)B_2(y_*,y)\mathrm{sign}\big(E(s,y)E(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + V(t,R) \ .
\end{aligned}
$$

Nun folgt aus (4.10) die Behauptung des Lemmas, weil $g, \mu, \beta$ nichtnegativ sind. □

**Lemma 4.10.** *Es gilt für* $0 < t < T$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad \le c(T)\int_0^t |E(s,y_0)|\mathrm{d}s + c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

***Beweis***. Wir definieren

$$\tilde{G}(t,y) := \int_{y_0}^{y} g(z)\mathrm{sign}(E(t,z))\mathrm{d}z \ , \quad y \in (y_0,\infty) \ , \quad 0 < t < T \ .$$

Wegen (4.33) und (4.35) erhalten wir mit dem Satz von Fubini für $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \partial_y \tilde{G}(s,y) \int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{y} \mathbf{1}_{[y,\infty)}(z+y_*)\eta(z,y_*) \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_{y_0}^\infty \partial_y \tilde{G}(s,y) \int_{y}^{\infty} \int_{y}^{\infty} \eta(z,y_*)\big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \left( \int_{z\vee y_*}^{z+y_*} \partial_y \tilde{G}(s,y)\mathrm{d}y \right) \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&\quad - \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \left( \int_{y_0}^{z\wedge y_*} \partial_y \tilde{G}(s,y)\mathrm{d}y \right) \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z\vee y_*) - \tilde{G}(s,z\wedge y_*) + \tilde{G}(s,y_0)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}$$

Da $\tilde{G}(y_0) = 0$, folgt aus der letzten Gleichung für $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z)u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z) - \hat{u}(s,z)\big)u(s,y_*)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*) \Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \hat{u}(s,z)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \ .
\end{aligned}$$

Nun liefert uns die Symmetrie von $\eta$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)u(s,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \hat{u}(s,z)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \eta(z,y_*)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

für $0 < t < T$. Wir definieren für $0 < s < t$ und $y_* \in Y$

$$I(s,y_*) := \int_{y_0}^\infty \eta(y_*,z)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big]\big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\ .$$

Dann gilt wegen der letzten Gleichung

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad = \int_0^t \int_{y_0}^\infty I(s,y_*)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s\ , \quad 0 < t < T\ .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Die Definition von $\tilde{G}$ impliziert $|\tilde{G}(s,y_*)| \le G(y_*)$ für $y_* \in [y_0,\infty)$ und $0 < s < T$ und damit auch

$$\begin{aligned}
|\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)| &\le |G(z+y_*) - G(z\vee y_*)| + |G(z\wedge y_*)| \\
&= |G(z+y_*) - G(z\vee y_*) + G(z\wedge y_*)|
\end{aligned} \tag{4.41}$$

für $z, y_* \in [y_0,\infty)$ und $0 < s < T$. Somit folgt aus (4.14) und (4.28)

$$|I(s,y_*)| \le c(T)(G(y_*) + y_*)\ , \quad y_* \in Y\ , \quad 0 \le s < T\ . \tag{4.42}$$

Nun möchten wir für die rechte Seite von (4.40) partielle Integration verwenden. Es ist aber noch unklar, ob $I$ bezüglich $y_*$ differenzierbar ist. Aus diesem Grund führen wir für ein festes $S > y_0$ und für $y_* \in Y$, $0 < s < T$ den Operator

$$I_S(s,y_*) := \int_{y_0}^S \eta(y_*,z)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big]\big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z$$

ein. Wir bemerken, dass (4.14) und (4.28) genauso wie vorher die Abschätzung

$$|I_S(s,y_*)| \leq c(T)(G(y_*)+y_*)\ , \quad y_* \in Y\ , \quad 0 \leq s \leq T \tag{4.43}$$

implizieren.
Es gilt nach Voraussetzung $\eta \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}([y_0,\infty)\times[y_0,\infty))$. Ferner gilt nach Definition von $\tilde{G}$, dass $|\tilde{G}(s,y_*)| \leq G(y_*)$ und $|\partial_{y_*}\tilde{G}(s,y_*)| \leq g(y_*)$ für $y_* \in [y_0,\infty)$ und $0 < s < T$ . Dies impliziert zusammen mit (4.4), dass $I_S(s,\cdot) \in W^1_\infty([y_0,R))$ für jedes $R > y_0$ und $0 < s < T$ mit Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_{y_*} I_S(s,y_*) = &\int_{y_0}^S \partial_{y_*}\eta(y_*,z)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big]\big(u(s,z)+\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z \\ &+ \int_{y_0}^S \eta(y_*,z)\Big(\partial_{y_*}\tilde{G}(s,z+y_*) - \partial_{y_*}\tilde{G}(s,y_*)\Big)\big(u(s,z)+\hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z\ . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Dann folgt aus (4.40) unter Verwendung partieller Integration die Gleichung

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat{u}](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \Bigg( \int_{y_0}^\infty (I-I_S)(s,y_*)\big(u(s,y_*)-\hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_* - \Big[I_S(s,y_*)E(s,y_*)\Big]_{y_*=y_0}^{y_*=\infty} \\ &\qquad + \int_{y_0}^\infty \partial_{y_*} I_S(s,y_*)E(s,y_*)\mathrm{d}y_* \Bigg)\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{4.45}$$

für $0 < t < T$. Ferner gilt wegen (4.43) und der Tatsache, dass $G$ eine nichtfallende nichtnegative Funktion auf $Y$ ist und $u, \hat{u}$ nichtnegativ sind, die Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_S(s,y_*)E(s,y_*)| &\leq c(T)\big(G(y_*)+y_*\big)\int_{y_*}^\infty (u+\hat{u})(s,z)\mathrm{d}z \\ &\leq c(T)\int_{y_*}^\infty \big(G(z)+z\big)(u+\hat{u})(s,z)\mathrm{d}z\ . \end{aligned}$$

Da die Lösungen monomererhaltend sind, ergibt sich daraus zusammen mit (4.28)

$$\lim_{y_*\to\infty} |I_S(s,y_*)E(s,y_*)| = 0\ , \quad 0 \leq s \leq T\ .$$

Somit impliziert (4.45) für $0 < t < T$ und jedes $S > y_0$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\mathrm{sign}(E(s,y))F[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad = \int_0^t \Bigg( \int_{y_0}^\infty (I - I_S)(s,y_*)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_* \\
&\qquad + \int_{y_0}^\infty \partial_{y_*} I_S(s,y_*)E(s,y_*)\mathrm{d}y_* + |I_S(s,y_0)E(s,y_0)| \Bigg)\mathrm{d}s \ .
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Nun liefert uns (4.43) die Abschätzung

$$|I_S(s,y_0)E(s,y_0)| \le c(T)|E(s,y_0)| \ , \quad 0 \le s \le T \ . \tag{4.47}$$

Aus (4.41) und (4.14) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{y_0}^\infty (I - I_S)(s,y_*)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_* \right| \\
&\quad \le \int_{y_0}^\infty |(I - I_S)(s,y_*)|\big(u(s,y_*) + \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_* \\
&\quad \le \int_{y_0}^\infty \int_S^\infty \eta(y_*,z)\Big[G(z+y_*) - G(z \vee y_*) + G(z \wedge y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\,\mathrm{d}z\,\big(u(s,y_*) + \hat{u}(s,y_*)\big)\,\mathrm{d}y_* \\
&\quad \le C \int_{y_0}^\infty \int_S^\infty \big(G(y_*) + y_*\big)\big(G(z) + z\big) \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\,\mathrm{d}z\,\big(u(s,y_*) + \hat{u}(s,y_*)\big)\,\mathrm{d}y_* \\
&\quad \le c(T) \int_S^\infty \big(G(z) + z\big)\big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}z \ .
\end{aligned}$$

Wegen (4.28) bedeutet dies

$$\lim_{S\to\infty} \int_{y_0}^\infty (I - I_S)(s,y_*)\big(u(s,y_*) - \hat{u}(s,y_*)\big)\mathrm{d}y_* = 0 \ , \quad 0 \le s \le T \ . \tag{4.48}$$

Schließlich verwenden wir (4.15), (4.41), (4.28) und (4.29) und erhalten mit dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned}
&\lim_{S\to\infty} \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^S \partial_{y_*}\eta(y_*,z)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}zE(s,y_*)\mathrm{d}y_* \\
&\quad = \int_{y_0}^\infty \int_{y_0}^\infty \partial_{y_*}\eta(y_*,z)\Big[\tilde{G}(s,z+y_*) - \tilde{G}(s,z) - \tilde{G}(s,y_*)\Big] \\
&\qquad\qquad \times \big(u(s,z) + \hat{u}(s,z)\big)\mathrm{d}zE(s,y_*)\mathrm{d}y_* \ .
\end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned}
&\limsup_{S\to\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{S}\eta(y_*,z)\Big(\partial_{y_*}\tilde G(s,z+y_*)-\partial_{y_*}\tilde G(s,y_*)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\mathrm{d}zE(s,y_*)\mathrm{d}y_*\\
&=\limsup_{S\to\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{S}\eta(y_*,z)\Big(g(z+y_*)\mathrm{sign}\big(E(s,z+y_*)E(s,y_*)\big)-g(y_*)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times\big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\mathrm{d}z|E(s,y_*)|\mathrm{d}y_*
\end{aligned}$$

und somit wegen (4.13)

$$\begin{aligned}
&\limsup_{S\to\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{S}\eta(y_*,z)\Big(\partial_{y_*}\tilde G(s,z+y_*)-\partial_{y_*}\tilde G(s,y_*)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\mathrm{d}zE(s,y_*)\mathrm{d}y_*\\
&\quad\le\limsup_{S\to\infty}\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{S}\eta(y_*,z)\Big(g(z+y_*)-g(y_*)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\times\big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\mathrm{d}z|E(s,y_*)|\mathrm{d}y_*\\
&\quad=\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y_*,z)\Big(g(z+y_*)-g(y_*)\Big)\big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\mathrm{d}z|E(s,y_*)|\mathrm{d}y_*
\end{aligned}\tag{4.49}$$

für $0<s<T$. Nun lassen wir in (4.46) $S$ gegen $\infty$ gehen und erhalten damit aus (4.48), (4.44), (4.2), (4.49), (4.41) und (4.47) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}g(y)\ \mathrm{sign}(E(s,y))\ F[u,\hat u](s,y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&\le\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}\eta(y,z)\big[g(y+z)-g(y)\big]\ \big(u(s,z)+\hat u(s,z)\big)\ \mathrm{d}z\ |E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_0^t\int_{y_0}^{\infty}\int_{y_0}^{\infty}|\partial_y\eta(y,z)|\Big[G(s,y+z)-G(s,y\vee z)+G(s,y\wedge z)\Big]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\times(u(s,z)+\hat u(s,z))\mathrm{d}z\ E(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\
&\quad+c(T)\int_0^t|E(s,y_0)|\mathrm{d}s\ .
\end{aligned}$$

Die Ungleichungen (4.13) und (4.15) liefern zusammen mit (4.28) die Behauptung. □

## 4.3. Eindeutigkeitsresultate

***Beweis von Theorem 4.5***. Hier setzen wir voraus, dass zusätzlich zu (4.2)–(4.10) und (4.12)–(4.15) die Bedingungen (4.23), (4.24) erfüllt sind. Wir betrachten schwache monomererhaltende Lösungen $(v,u)$ und $(\hat{v},\hat{u})$ des Problems (1.1)–(1.4) mit demselben Anfangswert $(v^0,u^0) \in (0,\infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$, sodass

$$u,\hat{u} \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L_1(Y, G(y)\mathrm{d}y)) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L_1(Y, (\mu+\beta)(y)G(y)\mathrm{d}y)) \ . \quad (4.50)$$

Sei $E$ wieder definiert als

$$E(t,y) := \int_y^\infty (u-\hat{u})(t,y_*)\mathrm{d}y_*, \quad (t,y) \in \mathbb{R}^+ \times Y \ .$$

Hier bemerken wir, dass mit (4.50) auch die Bedingung (4.28) erfüllt ist. Wir multiplizieren (4.34) mit $g(y)\mathrm{sign}(E(t,y))$ und integrieren über $(y_0,\infty)$. Nun definieren wir $g_R := g\chi_{(y_0,R)}$ mit

$$\chi_{(y_0,R)}(y) = \begin{cases} 1, & y \in (y_0,R) \ , \\ 0, & y \in [R,\infty) \ . \end{cases}$$

Dann konvergiert $g_R$ für $R \to \infty$ punktweise gegen $g$. Das Lemma von Fatou liefert

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^\infty g(y)|E(t,y)|\mathrm{d}y &\le \liminf_{R\to\infty} \int_{y_0}^\infty g_R(y)|E(t,y)|\mathrm{d}y \\
&\le \limsup_{R\to\infty} \int_{y_0}^\infty g_R(y)|E(t,y)|\mathrm{d}y \\
&= \limsup_{R\to\infty} \Bigg[ \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E(t,y))H[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E(t,y))F[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \Bigg] \\
&= \limsup_{R\to\infty} \int_0^t \int_{y_0}^R g(y)\mathrm{sign}(E(t,y))H[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)\mathrm{sign}(E(t,y))F[u,\hat{u}](s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

für $0 < t < T$, wobei wir (4.34), (4.35) und (4.37) verwendet haben. Aus den Lemmata 4.9 und 4.10 folgt nun für $0 < t < T$

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^\infty g(y)|E(t,y)|\mathrm{d}y \le c(T) &\int_0^t |E(s,y_0)|\mathrm{d}s \\
&+ c(T) \int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ c\int_0^t \left| \frac{v(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(s,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(s,x)\mathrm{d}x} \right| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \int_{y_0}^\infty (1+G(y))\hat{u}(s,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (4.51) \\
&+ \limsup_{R\to\infty} V(t,R)
\end{aligned}
$$

mit der in (4.38) definierten Abbildung $V(t,R)$. Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass $V(t,R) \to 0$ für $R \to \infty$. Wir verwenden den Satz von Fubini und benutzen (4.23). Dies liefert

$$
\begin{aligned}
&G(R)\int_0^t \int_R^\infty \left|(\mu'+\beta')(y)\right| |E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le G(R)\int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*) \int_R^{y_*} \left|(\mu'+\beta')(y)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \\
&\le c_1 \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*)(1+(\mu+\beta)(y_*))G(y_*)\mathrm{d}y_*\mathrm{d}s \ , \quad 0<t<T, \quad R>y_0 \ ,
\end{aligned}
$$

wobei im letzten Schritt die Tatsache verwendet wurde, dass $G$ eine monoton wachsende Funktion ist. Wegen (4.50) konvergiert die rechte Seite der letzten Ungleichung gegen 0 für $R \to \infty$. Im nächsten Schritt benutzen wir wieder den Satz von Fubini unter Berücksichtigung von (4.24). Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_R^\infty |E(s,y)| \int_{y_0}^R g(y_*)|B_2(y_*,y)|\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y') \int_{y_0}^R g(y_*) \int_R^{y'} |B_2(y_*,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}y_*\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \\
&\le c_1 \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y')G(y')(1+(\mu+\beta)(y'))\mathrm{d}y'\mathrm{d}s \ , \quad 0<t<T \ , \quad R>y_0 \ .
\end{aligned}
$$

Auch hier konvergiert wegen (4.50) und für $R \to \infty$ die rechte Seite gegen 0. Folglich gilt

$$
\lim_{R\to\infty} V(t,R) = 0 \ , \quad 0<t<T \ . \qquad (4.52)
$$

Außerdem impliziert (4.50), dass

$$
\int_{y_0}^\infty (1+G(y))\hat{u}(s,y)\mathrm{d}y \le c(T)
$$

für $0 < s < T$. Wegen

$$\left| \frac{v(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty xu(s,x)\mathrm{d}x} - \frac{\hat{v}(s)}{1+\nu\int_{y_0}^\infty x\hat{u}(s,x)\mathrm{d}x} \right| \leq |(v-\hat{v})(s)| \\ + \|\hat{v}\|_\infty\, \nu \left| \int_{y_0}^\infty x(u-\hat{u})(s,x)\mathrm{d}x \right|$$

für $0 < s < T$ folgt daraus zusammen mit (4.52), (4.51) und den Lemmata 4.7 und 4.8

$$\int_{y_0}^\infty g(y)|E(t,y)|\mathrm{d}y \leq c(T)\int_0^t \int_{y_0}^\infty g(y)|E(s,y)|\mathrm{d}y\mathrm{d}s\ , \quad 0 < t < T\ , \tag{4.53}$$

wenn $\nu = 0$ ist oder wenn $\nu > 0$ und $g(y) \geq \mathit{const} > 0$ ist. Das Lemma von Gronwall liefert $E \equiv 0$, weil $g$ strikt positiv ist. Somit gilt $u \equiv \hat{u}$, und Theorem 4.5 ist bewiesen. □

***Beweis von Theorem* 4.6** . Nun seien die Bedingungen (4.2)–(4.10), (4.12)–(4.17) und (4.25)–(4.27) erfüllt, d.h. es gelte insbesondere $g \equiv 1$ und somit $G(y) = y - y_0$. Ferner seien $(v,u)$ und $(\hat{v},\hat{u})$ zwei monomererhaltende Lösungen im Sinne von Definition 3.1, die demselben Anfangswert $(v^0,u^0) \in (0,\infty)\times L_1^+(Y,y\mathrm{d}y)$ entsprechen. Dann ist (4.28) offensichtlich erfüllt und wir erhalten die Ungleichung (4.51) gleich wie zuvor. Um $\lim\limits_{R\to\infty} V(t,R)$ abzuschätzen, bemerken wir, dass auf Grund von (4.26)

$$\int_R^{y_*} \mu_1'\,\mathrm{d}y \leq \mu_1(y_*) \leq \mu(y_*) + |\mu_2(y_*)| \leq \mu(y_*) + \|\mu_2\|_{L_\infty(Y)}\ , \quad y_* > R$$

gilt, und somit

$$\begin{aligned} G(R) &\int_0^t \int_R^\infty |\mu'(y)||E(s,y)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}s \\ &\leq R\int_0^t\int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*)\int_R^{y_*}\left(\mu_1'(y)+|\mu_2'(y)|\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^t\int_R^\infty y_*(u+\hat{u})(s,y_*)\big(\mu(y_*)+\|\mu_2\|_{L_\infty(Y)}+\|\mu_2'\|_{L_1(Y)}\big)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}s \\ &\leq c\int_0^t\int_R^\infty \big(y_*+y_*\mu(y_*)\big)(u+\hat{u})(s,y_*)\,\mathrm{d}y_*\,\mathrm{d}s\ , \end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt den Satz von Fubini und (4.26) benutzt haben. Nun impliziert (4.18) die Konvergenz der rechten Seite der letzten Ungleichung gegen

0 für $R \to \infty$. Völlig analog erhalten wir

$$
\begin{aligned}
G(R) \int_0^t \int_R^\infty & |\beta'(y)||E(s,y)| \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\
& \leq R \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*) \int_R^{y_*} (\beta_1'(y) + |\beta_2'(y)|) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \\
& \leq R \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*) \big(\beta(y_*) + \|\beta_2\|_{L_\infty(Y)} + \|\beta_2'\|_{L_1(Y)}\big) \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \\
& \leq R \int_0^t \int_R^\infty \beta(y_*)(u+\hat{u})(s,y_*) \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \\
& \quad + c \int_0^t \int_R^\infty y_*(u+\hat{u})(s,y_*) \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \ .
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite der letzten Ungleichung konvergiert wegen (4.19) und (4.18) gegen 0 für $R \to \infty$. Ferner gilt

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \int_R^\infty |E(s,y)| & \int_{y_0}^R |B_2(y_*,y)| \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}s \\
& \leq C_2 R \int_0^t \int_R^\infty (u+\hat{u})(s,y_*) \int_R^{y_*} \beta_1'(y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \\
& \leq C_2 R \int_0^t \int_R^\infty \beta(y_*)(u+\hat{u})(s,y_*) \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \\
& \quad + c \int_0^t \int_R^\infty y_*(u+\hat{u})(s,y_*) \, \mathrm{d}y_* \, \mathrm{d}s \ ,
\end{aligned}
$$

wobei wir den Satz von Fubini und (4.27) verwendet haben. Wegen (4.19) und (4.18) konvergiert auch hier die rechte Seite gegen 0 für $R \to \infty$. Folglich erhalten wir

$$
\lim_{R\to\infty} V(t,R) = 0 \ , \quad 0 < t < T \ .
$$

Wenn $R$ nun gegen $\infty$ geht, ergeben die Lemmata 4.7 und 4.8 zusammen mit (4.51) die Abschätzung (4.53) für $g \equiv 1$. Somit folgt aus dem Lemma von Gronwall, dass $u \equiv \hat{u}$, und dies beweist Theorem 4.6. □

Unser weiteres Ziel ist, Theorem 4.1 zu beweisen. Zunächst zeigen wir das folgende Lemma.

**Lemma 4.11.** *$\eta$ erfülle die Voraussetzungen von Theorem* 4.1 *(d.h. es gilt entweder Bedingung* (A) *oder Bedingung* (B)*). Für $\alpha$ aus der entsprechenden Bedingung sei*

$$
g(y) := y^{\alpha-1} \ , \quad y \in Y
$$

*und*

$$G(y) = \frac{1}{\alpha}(y^\alpha - y_0^\alpha) \ , \quad y \in Y \ .$$

*Dann sind die Bedingungen* (4.12)–(4.15) *erfüllt.*

***Beweis***. Die Aussage zeigen wir analog zum Beweis von [22, Lemma 3.4.]. Wir betrachten zwei Fälle. Es sei die Bedingung (A) erfüllt. Dann ist $\alpha \in (0,1]$, die Abbildung $[y \mapsto y^\alpha]$ ist daher subadditiv und $g$ ist monoton fallend. Dann gilt für $y, z \in Y$

$$\begin{aligned}
\eta(y,z)|g(y+z) - g(y)| &\leq K_0\Big(y^\alpha + z^\alpha\Big)(g(y) - g(y+z)) \\
&\leq K_0 \ y^\alpha\big(g(y)^{1-\alpha}g(y)^\alpha - g(y+z)^{1-\alpha}g(y+z)^\alpha\big) + K_0 z^\alpha g(y) \\
&\leq K_0 \ y^\alpha g(y)^{1-\alpha}\big(g(y)^\alpha - g(y+z)^\alpha\big) + K_0 z^\alpha g(y) \\
&\leq K_0 \ y^\alpha g(y)^{1-\alpha}\big(g(y) - g(y+z)\big)^\alpha + K_0 z^\alpha g(y) \\
&= K_0 \ y^{\alpha-(1-\alpha)^2}\left(\int_y^{y+z}(1-\alpha)x^{\alpha-2}\mathrm{d}x\right)^\alpha + K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha \\
&\leq K_0 \ y^{\alpha-(1-\alpha)^2}(y+z)^{\alpha(\alpha-2)}(1-\alpha)^\alpha z^\alpha + K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha \\
&\leq K_0 \ y^{\alpha-(1-\alpha)^2}(y+z)^{\alpha(\alpha-2)}z^\alpha + K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha \\
&\leq 2K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha \ .
\end{aligned}$$

Daher gilt (4.13). Andererseits folgt aus der Subadditivität von $y \mapsto y^\alpha$

$$\begin{aligned}
\Big|G(y+z) - G(y \vee z) + G(y \wedge z)\Big| &\leq \int_{y\vee z}^{y+z} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x + \int_0^{y\wedge z} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x \\
&= \alpha^{-1}\big((y+z)^\alpha - (y\vee z)^\alpha + (y \wedge z)^\alpha\big) \\
&\leq 2\alpha^{-1}(y\wedge z)^\alpha \ .
\end{aligned}$$

Daraus folgen unter Berücksichtigung der Bedingung (A) sowohl (4.14) als auch (4.15). Nun gelte die Bedingung (B). Dann ist $\alpha \in (1,2]$ und entsprechend

$$\begin{aligned}
\eta(y,z)|g(y+z) - g(y)| &\leq K_0\Big(yz^{\alpha-1} + y^{\alpha-1}z\Big)(g(y+z) - g(y)) \\
&\leq K_0 y z^{\alpha-1}\int_y^{y+z} x^{\alpha-2}\mathrm{d}x \\
&\quad + K_0 y^{\alpha-1}z\Big(y^{\alpha-1} + z^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big) \\
&\leq K_0 y z^{\alpha-1} z y^{\alpha-2} + K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha = 2K_0 y^{\alpha-1}z^\alpha \ .
\end{aligned}$$

Damit wurde (4.13) in diesem Fall gezeigt. Nun benutzen wir die Subadditivität von $g$ und erhalten

$$\begin{aligned}\Big|G(y+z)-G(y\vee z)+G(y\wedge z)\Big| &\le \int_{y\vee z}^{y+z} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x+\int_0^{y\wedge z} x^{\alpha-1}\mathrm{d}x\\ &\le (y+z)^{\alpha-1}(y+z-y\vee z)+(y\wedge z)^{\alpha}\\ &\le 2(y\wedge z)(y+z)^{\alpha-1}\le 2(y\wedge z)(y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1})\ .\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen der Bedingung (B) sofort (4.15). Für $y,z\in Y$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}&\eta(y,z)\Big|G(y+z)-G(y\vee z)+G(y\wedge z)\Big|\\ &\quad\le 2K_0\Big(yz^{\alpha-1}+y^{\alpha-1}z\Big)(y\wedge z)\Big(y^{\alpha-1}+z^{\alpha-1}\Big)\\ &\quad\le 2K_0\Big(y^{\alpha}z^{\alpha-1}+yz^{\alpha}z^{\alpha-2}+y^{\alpha}zy^{\alpha-2}+y^{\alpha-1}z^{\alpha}\Big)(y\wedge z)\\ &\quad\le 2K_0\Big(y^{\alpha}z^{\alpha-1}+yz^{\alpha}(y\wedge z)^{\alpha-2}+y^{\alpha}z(y\wedge z)^{\alpha-2}+y^{\alpha-1}z^{\alpha}\Big)(y\wedge z)\\ &\quad\le 2K_0\Big(y^{\alpha}z^{\alpha}+yz^{\alpha}(y\wedge z)^{\alpha-1}+y^{\alpha}z(y\wedge z)^{\alpha-1}+y^{\alpha}z^{\alpha}\Big)\\ &\quad\le 8K_0y^{\alpha}z^{\alpha}\ ,\end{aligned}$$

woraus (4.14) im Fall der Bedingung (B) folgt. Da (4.12) in beiden Fällen offensichtlich erfüllt ist, ist die Aussage bewiesen. □

Nun verwenden wir die Resultate aus dem letzten Lemma und Theorem 4.5, um Theorem 4.1 zu beweisen.

***Beweis von Theorem* 4.1**. Als erstes bemerken wir, dass wenn $\kappa$ von der Form (1.10), (1.11) mit $[y\mapsto yk_0(y)]\in L_\infty(0,1)$ ist,

$$\begin{aligned}B_2(y_*,y)&=\partial_y\left(\beta(y)\int_{y_*}^{y}\kappa(z,y)\mathrm{d}z\right)\\ &=\beta'(y)\int_{y_*}^{y}k_0\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\mathrm{d}z}{y}+\frac{\beta(y)}{y}\frac{y_*}{y}k_0\left(\frac{y_*}{y}\right)\end{aligned}\tag{4.54}$$

und

$$\begin{aligned}\partial_y\left(\beta(y)\int_0^{y_0}z\kappa(z,y)\mathrm{d}z\right)&=\left(\beta'(y)+\frac{\beta(y)}{y}\right)\int_0^{y_0}zk_0\left(\frac{z}{y}\right)\frac{\mathrm{d}z}{y}\\ &\quad-y_0\frac{\beta(y)}{y}\frac{y_0}{y}k_0\left(\frac{y_0}{y}\right)\end{aligned}\tag{4.55}$$

für $y>y_*\ge y_0$ gilt. Die Bedingung (4.2) ist offensichtlich auch erfüllt. Wir erinnern an die Voraussetzungen an die Raten

$$\beta(y)=By^b\ ,\quad \mu(y)=My^m\ ,\quad \tau(y)=Sy^{\theta}$$

für $y > y_0$ mit $B, M, S, b, m \geq 0$ und $0 \leq \theta \leq 1$ sowie an die Abbildung

$$\xi(x) = 2b \int_x^1 k_0(z)\mathrm{d}z - b + 2xk_0(x) \ , \quad x \in (0,1) \ .$$

Nun definieren wir

$$g(y) := y^{\vartheta-1} \quad \text{für} \quad y \in [y_0, \infty)$$

mit

$$\vartheta := (\sup_{x\in(0,1)} \xi(x) \vee m \vee \theta \vee 1) = \alpha \vee 1 \ ,$$

wobei $\alpha \in (0,2]$ nach der Voraussetzung des Theorems. Hier bemerken wir, dass $\xi(0) = b$ wegen (1.11), d.h. $\alpha \geq b$. Es ist klar, dass die Bedingungen (4.3)–(4.7) und (4.23) in diesem Fall erfüllt sind. Ungleichungen (4.8), (4.24) folgen aus (4.54) und (4.55) wegen (1.11) und der Tatsache, dass die Abbildung $[y \mapsto yk_0(y)]$ auf $Y$ beschränkt ist. Aus (4.54) erhalten wir außerdem

$$\big|2B_2(y_*, y) - (\beta' + \mu')(y)\big| \leq \left|\xi\left(\frac{y_*}{y}\right)\right| By^{b-1} + mMy^{m-1} \tag{4.56}$$

für $y > y_* \geq y_0$. Dies liefert uns

$$\begin{aligned}
&\int_{y_0}^y g(y_*)|2B_2(y_*, y) - (\beta' + \mu')(y)|\mathrm{d}y_* \\
&\quad \leq \int_{y_0}^y y_*^{\vartheta-1}\left(\left|\xi\left(\frac{y_*}{y}\right)\right| By^{b-1} + mMy^{m-1}\right)\mathrm{d}y_* \\
&\quad \leq \frac{y^\vartheta + y_0^\vartheta}{\vartheta}\left(\sup_{x\in(0,1)} \xi(x)By^{b-1} + mMy^{m-1}\right) \\
&\quad \leq y^{\vartheta-1}\big(\beta(y) + \mu(y)\big) + c_0 y^{\vartheta-1} \\
&\quad = g(y)(c_0 + (\mu + \beta)(y))
\end{aligned}$$

für $y \in Y$. Somit ist die Bedingung (4.10) auch erfüllt. Lemma 4.11 impliziert die Gültigkeit von (4.12)–(4.15).
Nun sei $(v^0, u^0) \in (0,\infty) \times L_1^+(Y, y^\sigma\mathrm{d}y)$ mit $\sigma := \vartheta + (b \vee m)$ gegeben. Dann garantiert Theorem 4.5 die Eindeutigkeit von monomererhaltenden Lösungen $(v, u)$ mit

$$u \in L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\vartheta\mathrm{d}y)\big) \cap L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma\mathrm{d}y)\big) \ .$$

Wegen

$$L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma\mathrm{d}y)\big) \subset \Big[L_{\infty,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\vartheta\mathrm{d}y)\big) \cap L_{1,\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}^+, L_1(Y, y^\sigma\mathrm{d}y)\big)\Big]$$

folgt die Behauptung von Theorem 4.1 (a).
Wir bemerken, dass im Fall $\nu > 0$ die Bedingung $g(y) \geq const > 0$ für $y \in Y$ erfüllt sein muss. Deswegen haben wir $\vartheta$ als $\alpha \vee 1$ definiert. Im Fall $\nu = 0$ können wir statt $\vartheta$ einfach $\alpha$ nehmen. Dann gilt entsprechend $\sigma := \alpha + (b \vee m)$.
Für den Beweis von Theorem 4.1(b) setzen wir voraus, dass $b, m \leq 1$ und $\xi(x) \geq 0$ für $x \in (0,1)$. Ferner sei $g \equiv 1$. Wegen (1.10) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y} \left| \xi\left(\frac{y_*}{y}\right) \right| \frac{\mathrm{d}y_*}{y} &\leq \int_0^1 \xi(x)\mathrm{d}x \\
&= 2b \int_0^1 \int_x^1 k_0(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - b + 2\int_0^1 x k_0(x)\mathrm{d}x \\
&= 2b \int_0^1 \int_0^z k_0(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - b + 2\int_0^1 x k_0(x)\mathrm{d}x \\
&= 2b \int_0^1 z k_0(z)\mathrm{d}z - b + 2\int_0^1 x k_0(x)\mathrm{d}x = 1 \ .
\end{aligned}$$

Daher folgt aus (4.56) sofort (4.10). Die Bedingungen (4.2)–(4.8) und (4.17) sind klar erfüllt, sowie (4.26) und (4.27) mit $\beta_2 \equiv \mu_2 \equiv 0$. Theorem 4.6 garantiert nun die Eindeutigkeit von monomererhaltenden schwachen Lösung des Problems (1.1)–(1.4) mit Anfangswerten $(v^0, u^0) \in (0,\infty) \times L_1^+(Y, y\mathrm{d}y)$. Das beweist Theorem 4.1(b). $\square$

# A. Hilfsmittel

Die beiden folgenden Lemmata werden in Kapitel 2 verwendet. Da die Beweismethoden klassisch sind, geben wir hier die Aussagen ohne Beweise. Vorher führen wir noch einige Notationen ein.

- $E$ ist ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$;
- $J \subset \mathbb{R}^+$ ist ein Intervall mit $0 \in J, J \neq \{0\}$;
- $\Delta_J := \{(t,s) \in J \times J | 0 \leq s \leq t\}$;
- $\Delta_J^* := \{(t,s) \in \Delta_J | s < t)\}$.

**Lemma A.1.** *Es sei $b \in C(\Delta_J^*, E)$ und $\beta \in L_1(J, \mathbb{R}^+)$ fallend mit $\|b(t,s)\| \leq \beta(t-s)$ für $(t,s) \in \Delta_J^*$. Dann gilt*

$$B := \left[ t \mapsto \int_0^t b(t,s) \mathrm{d}s \right] \in C(J,E) \ .$$

**Lemma A.2.** *Es sei $b \in C(\Delta_J, E)$, $\partial_t b \in C(\Delta_J^*, E)$ und $\beta \in L_1(J, \mathbb{R}^+)$ fallend mit $\|\partial_t b(t,s)\| \leq \beta(t-s)$ für $(t,s) \in \Delta_J^*$. Dann gilt*

$$B := \left[ t \mapsto \int_0^t b(t,s) \mathrm{d}s \right] \in C^1(J,E)$$

*mit*

$$\dot{B}(t) = b(t,t) + \int_0^t \partial_t b(t,s) \mathrm{d}s \ , \quad t \in J \ .$$

Im Beweis von Theorem 3.2 spielt das Theorem von de la Vallée-Poussin ( [34]) und das Theorem von Dunford-Pettis ( [15, Theorem 4.21.2]) eine zentrale Rolle.

**Theorem A.3.** ***(de la Vallée-Poussin** Sei $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum und $\mathcal{F}$ sei eine beschränkte Teilmenge von $L_1(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

*(i)* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \sup \left\{ \int\limits_A |f| \mathrm{d}\mu : f \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{B}, \mu(A) \leq \varepsilon \right\} = 0$*;*

*(ii) Es existiert eine konvexe Funktion $\Phi \in C^\infty([0,\infty))$ mit $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, $\Phi'$ ist konkav,*

$$\Phi'(r) > 0 \text{ für } r > 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\Phi(r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \Phi'(r) = \infty$$

*und*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_\Omega \Phi(|f|)\mathrm{d}\mu < \infty \ .$$

***Beweis***. Vgl. [34]. □

**Theorem A.4.** ***(Dunford-Pettis)*** *Sei $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ ein $\sigma$-endlicher Maßraum und $\mathcal{F}$ eine Teilmenge von $L_1(\Omega)$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

*(i) $\mathcal{F}$ ist relativ schwach folgenkompakt in $L_1(\Omega)$;*

*(ii) $\mathcal{F}$ ist eine beschränkte Teilmenge von $L_1(\Omega)$, die die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:*

- $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \sup \left\{ \int\limits_A |f|\mathrm{d}\mu : f \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{B}, \mu(A) \le \varepsilon \right\} = 0;$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \Omega_\varepsilon \in \mathcal{B}$ *mit* $\mu(\Omega_\varepsilon) < \infty$ *und* $\sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int\limits_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon} |f|\mathrm{d}\mu \le \varepsilon.$

***Beweis***. Vgl. [15, Theorem 4.21.2]. □

Wir benötigen auch folgende Version des klassischen Satzes von Arzelà-Ascoli für schwach stetige Funktionen in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$.

**Theorem A.5.** ***(Arzelà-Ascoli)*** *Eine Teilmenge $K \subset C\big([0,T], L_{1,\mathrm{w}}(Y, y\mathrm{d}y)\big)$ ist genau dann relativ folgenkompakt, wenn $K$ schwach gleichgradig stetig in $L_1(Y, y\mathrm{d}y)$ ist und es eine dichte Teilmenge $D$ von $[0,T]$ existiert, sodass*

$$K(t) := \{f(t) \ : \ f \in K\}$$

*schwach relativ kompakt für jedes $t \in D$ ist.*

***Beweis***. Vgl. [44, Theorem 1.3.2]. □

# Literatur

[1] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1995.

[2] H. Amann. *Linear and Quasilinear Parabolic Problems.* Birkhäuser, Basel, 1995.

[3] H. Amann, J. Escher. *Analysis III.* Birkhäuser, Basel, 2001.

[4] J. M. Ball, J. Carr. *The discrete coagulation-fragmentation equations: existance, uniqueness, and density conservation.* J. Statist. Phys. **61** (1990), no. 1–2, 203–234.

[5] J. M. Ball, J. Carr, O. Penrose. *The Becker-Döring cluster equations: basic properties and asymptotic behaviour of solutions.* Comm. Math. Phys. **104** (1986), no. 4, 657–692.

[6] I. V. Baskakov, G. Legname, M. A. Baldwin, S. B. Prusiner, F. E. Cohen. *Pathway complexity of prion protein assembly into amyloid.* J. Biol. Chem. **277** (2002), 21140–21148.

[7] V. Calvez, N. Lenuzza, M. Doumic, J.-P. Deslys, F. Mouthon, B. Perthame. *Prion dynamics with size dependency-strain phenomena.* J. Biol. Dyn. **4** (2010), no. 1, 28–42.

[8] V. Calvez, N. Lenuzza, D. Oelz, J.-P. Deslys, P. Laurent, F. Mouthon, B. Perthame. *Size distribution dependence of prion aggregates infectivity.* Math. Biosci. **217** (2009), no. 1, 89–99.

[9] I. S. Ciuperca, E. Hingant, L. I. Palade, L. Pujo-Menjouet. *Fragmentation and monomer lengthening of rod-like polymers, a relevant model for prion proliferation.* Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **17** (2012), no. 3, 775–799.

[10] J. H. Come, P. E. Fraser, P. T. Lansbury. *A kinetic model for amyloid formation in the prion deseases: Importance of seeding.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90** (1993), 5959–5963.

[11] J. K. Davis, S. S. Sindi. *A mathematical model of the dynamics of prion aggregates with chaperone-mediated fragmentation.* J. Math. Biol. **72** (2016), no. 6, 1555–1578.

[12] M. Doumic, P. Gabriel. *Eigenelements of a general aggregation-fragmentation model.* Math. Models Methods Appl. Sci. **20** (2010), 757–783.

[13] M. Doumic, T. Goudon, T. Lepoutre. *Scaling limit of a discrete prion dynamics model.* Commun. Math. Sci. **7** (2009), no. 4, 839–865.

[14] P. B. Dubovskii, I. W. Stewart. *Existence, uniqueness and mass conservation for the coagulation-fragmentation equation.* Math. Methods Appl. Sci. **19** (1996), 571–591.

[15] R.E. Edwards. *Functional Analysis. Theory and Applications.* Dover Publications, Inc., New York, 1995.

[16] K.-J. Engel, R. Nagel. *A Short Course on Operator Semigroups.* Universitext. Springer, New York, 2006.

[17] H. Engler, J. Prüss, G. F. Webb. *Analysis of a model for the dynamics of prions II.* J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 98–117.

[18] M. Escobedo, Ph. Laurençot, S. Mischler, B. Perthame. *Gelation and mass conservation in coagulation-fragmentation models.* J. Differential Equations **195** (2003), 143–174.

[19] M. Escobedo, S. Mischler, B. Perthame. *Gelation in coagulation-fragmentation models.* Comm. Math. Phys. **231** (2002), 157–188.

[20] M. Escobedo, S. Mischler, M. Rodriguez Ricard. *On self-similarity and stationary problem for fragmentation and coagulation models* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **22** (2005), no. 1, 99–125.

[21] G. B. Folland. *Real Analysis. Modern Techniques and there Application.* John Wiley & Sons, New York, 1984.

[22] N. Fournier, Ph. Laurençot. *Well-posedness of Smoluchowski's coagulation equation for a class of homogeneous kernels.* J. Funct. Anal. **233** (2006), 351–379.

[23] P. Gabriel. *Global stability for the prion equation with general incidence.* Math. Biosci. Eng. **12** (2015), no. 4, 789–801.

[24] P. Gabriel. *Long-time asymptotics for nonlinear growth-fragmentation equations.* Commun. Math. Sci. **10** (2012), no. 3, 787–820.

[25] M. L. Greer. *A Population Model of Prion Dynamics.* Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Vanderbilt University, Nashville, TN, 2002.

[26] M. L. Greer, P. van den Driessche, L. Wang, G. F. Webb. *Effects of general incidence and polymer joining on nucleated polymerzation in a model of prion proliferation.* SIAM J. Appl. Math. **68** (2007), no. 1, 154–170.

[27] M. L. Greer, L. Pujo-Menjouet, G. F. Webb. *A mathematical analysis of the dynamics of prion proliferation.* J. Theoret. Biol. **242** (2006), 598–606.

[28] M. Helal, E. Hingant, L. Pujo-Menjouet, G. F. Webb. *Alzheimer's disease: analysis of a mathematical model incorporating the role of prions.* J. Math. Biol. **69** (2014), no. 5, 1207–1235.

[29] Ph. Laurençot. *The Lifshitz-Slyozov equation with encounters.* Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (2001) 731–748.

[30] Ph. Laurençot. *Weak compactness techniques and coagulation equations.* In: J. Banasiak, M. Mokhtar-Kharroubi (Eds.), Evolutionary equations with applications in natural sciences, 199–253, Lecture Notes in Math., 2126, Springer, Cham, 2015.

[31] Ph. Laurençot, S. Mischler. *On coalescence equations and related models.* In: P. Degond, L. Pareschi, G. Russo (Eds.), Modelling computational methods for kinetic equations, 321–356, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[32] Ph. Laurençot, S. Mischler. *The continuous coagulation-fragmentation equations with diffusion.* Arch. Ration. Mech. Anal. **162** (2002), 45–99.

[33] Ph. Laurençot, C. Walker. *Well-posedness for a model of prion proliferation dynamics.* J. Evol. Equ. **7** (2007), 241–264.

[34] C.-H. Lê. *Etude de la classe des opérateurs m-accrétifs de $L^1(\Omega)$ et accrétifs dans $L^\infty(\Omega)$. Thèse de 3-ème cycle.* Université de Paris VI, Paris, 1977.

[35] J. Masel, V. A. A. Jansen, M. S. Nowak. *Quantifying the kinetic parameters of prion replication.* Biophys. Chem. **77** (1999), 139–152.

[36] M. A. Nowak, D. C. Krakauer, A. Klug, R. M. May. *Prion infection dynamics.* Integr. Biol. **1** (1998), 3–15.

[37] K. M. Pan, M. Baldwin, J, Nguyen, M. Gasset, A. Serban, D. Groth, I. Mehlhorn, Z. Huang, R. J. Fletterick, F. E. Cohen, S. B. Prusiner. *Conversion of $\alpha$-helices and $\beta$-sheets features in the formation of the scrapie prion proteins.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90** (1993), 10962–10966.

[38] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operatos and Applications to Partial Differential Equations.* Springer, Berlin, New York, Heidelberg, 1983.

[39] J. Prüss, L. Pujo-Menjouet, G. F. Webb, R. Zacher. *Analysis of a model for the dynamics of prions.* Discrete Contin. Din. Syst. Ser. B **6** (2006), 225–235.

[40] J. R. Silveira, G. J. Raymond, A. G. Hughson, R. E. Race, V. L. Sim, S. F. Hayes, B. Caughey. *The most infectious prion protein particles.* Nature **437** (2005), 257–261.

[41] G. Simonett, C. Walker. *On the solvability of a mathematical model for prion proliferation.* J. Math.Anal. Appl. **324** (2006), 580–603.

[42] I. W. Stewart. *A global existance theorem for the general coagulation-fragmentation equation with unbounded kernels.* Math. Methods Appl. Sci. **11** (1989), 627–648.

[43] H. Triebel. *Höhere Analysis.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.

[44] I. I. Vrabie. *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions, second ed.* Longman Scientific & Technical, Harlow; copublished in the United States with John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.

[45] C. Walker. *On Diffusive and Non-Diffusive Coalescence and Breakage Processes.* Dissertation, Zürich, 2003.

[46] C. Walker. *Prion proliferation with unbounded polymerization rates.* Proceedings of the Sixth Mississippi State-UBA Conference on Differential Equations and Computational Simulations, 387–397, Electron. J. Differ. Equ. Conf., 15, Southwest Texas State Univ., San Marcos, TX, 2007.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Elena Leis (Geburtsname Mokina)

geboren am 27. Januar 1977 in Omsk (Russland)

## Studium

| | |
|---|---|
| 09/1994–06/1999 | Staatliche Universität Omsk<br>Abschluss: Dipl.-Mathematikerin (RUS) |
| 08/2008–03/2012 | Leibniz Universität Hannover<br>Abschluss: M. Sc. Mathematik |

## Berufserfahrung

| | |
|---|---|
| 10/1999–10/2003 | Ingenieurin-Programmiererin bei der Geschlossenen Aktiengesellschaft "Avtomatika-E", Omsk (Russland) |
| 04/2012–06/2012 | Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik, Leibniz Universität Hannover |
| seit 07/2012 | Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Angewandte Mathematik, Leibniz Universität Hannover |