

# **Doob-Martin-Theorie diskreter Markov-Ketten: Struktur und Anwendungen**

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Math. Klaas Hagemann**

geboren am 02.07.1988 in Langenhagen

2016

Referent: Prof. Dr. R. Grübel  
Korreferent: Prof. Dr. A. Wakolbinger

Tag der Promotion: 21.12.2016

## Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung kombinatorischer Markov-Ketten mithilfe der Doob-Martin-Theorie. Es werden unter anderem strukturelle Aussagen im Falle nicht lokalendlicher Ketten bewiesen und eine hinreichende Bedingung für stetige Erweiterung von Markov-Funktionen auf den Martin-Rand gegeben. Zwei größere Anwendungen, die Asymptotik von Rekorden und ein leader-election-Algorithmus, werden im Detail ausgeführt.

Nach der Einführung werden wir im zweiten Kapitel ausführlich die Doob-Martin-Theorie einführen und die zentralen Resultate beweisen. Hierbei gehen wir insbesondere auf nicht lokalendlichen Ketten ein.

Die Theorie wird in Kapitel 3 zunächst anhand erster Beispiele veranschaulicht. Unter den Beispielen finden sich zentrale diskrete Strukturen wie Zählvektoren von Verteilungen auf  $\mathbb{N}$  und Erdős-Rényi-Graphen.

Im vierten Kapitel verwenden wir funktionentheoretische Methoden, um zusammen mit der Doob-Martin-Theorie die Asymptotik von Rekorden zu untersuchen. Wir ergänzen am Ende des Kapitels Betrachtungen zu Markov-Ketten, die mit der Asymptotik von Rekorden im direkten Zusammenhang stehen.

Danach betrachten wir in Kapitel 5 ein aus der Literatur bekanntes Auswahlverfahren in verteilten Systemen. Diese *leader election* hängt vom Maximum geometrisch verteilter Zufallsgrößen ab, das wir wieder mit unseren Methoden untersuchen werden.

Im letzten Kapitel betrachten wir *Markov-Funktionen*, die eine kombinatorische Markov-Kette wieder auf eine kombinatorische Markov-Kette abbilden, und geben eine hinreichende Bedingung dafür an, dass sich diese Funktion stetig auf den Doob-Martin-Rand fortsetzen lässt. Beispiele für diese Situation schließen das Kapitel.

**Schlagwörter:** Kombinatorische Markov-Ketten, Doob-Martin-Theorie, Auswahlalgorithmen

## Abstract

This dissertation deals with the analysis of combinatorial Markov chain via Doob-Martin theory. We will prove structural statements in case of non locally finite chains and give a sufficient condition for a continuous extension of Markov functions to the Martin boundary. Two applications, the asymptotics of records and a leader election algorithm will be given in detail.

After an introduction we will elaborate the Doob-Martin theory and will prove the central results. We will especially focus on non locally finite chains.

By means of first examples the theory will be illustrated in Chapter 3. Among others we will deal with important discrete structures like counting vectors of distributions on  $\mathbb{N}$  and Erdős-Rényi graphs.

In the fourth chapter we will use methods from complex analysis to investigate together with Doob-Martin theory the asymptotics of records. We will add considerations on closely related combinatorial Markov chains at the end of the chapter.

Thereafter we will examine an easy, well known leader election algorithm in distributed systems. This algorithm depends on the maxima of geometric distributed random variables, which we will study using our methods.

In the last chapter we will consider *Markov functions*, i.e. functions which map a combinatorial Markov chain to a combinatorial Markov chain, and will give a sufficient condition for their continuous extendability to the Martin boundary. Finally, we will give some examples for this situation.

**Keywords:** Combinatorial Markov chains, Doob-Martin theory, election algorithms

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die Doob-Martin-Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Die Doob-Martin-Kompaktifizierung . . . . .	5
2.2	Der Doob-Martin-Rand gerichteter, gewichteter Graphen . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Erste Beispiele</b>	<b>35</b>
3.1	Gleichverteilungen auf $[n]$ . . . . .	35
3.1.1	Unabhängige Zuwächse . . . . .	36
3.1.2	Die Bremer-Kette . . . . .	36
3.1.3	Sprung auf den höchsten Wert . . . . .	41
3.2	Ein Urnenmodell mit unendlich vielen Farben . . . . .	44
3.3	Die Erdős-Rényi-Kette . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Die Asymptotik von Rekorden</b>	<b>57</b>
4.1	Die Rekordanzahlen . . . . .	57
4.2	Die harmonische Poisson-Kette . . . . .	71
4.3	Die Rekordzeitpunkte . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Leader Election</b>	<b>77</b>
5.1	Die Maximums-Kette . . . . .	78
5.2	Die Multiplizitäts-Kette . . . . .	84
5.3	Die Anzahl der Teilnehmer . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Über das Zusammenfassen von Zuständen</b>	<b>103</b>
6.1	Die sortierte Pólya-Urne . . . . .	109
6.2	Geordnete binäre Bäume . . . . .	115
<b>A</b>	<b>Hilfsmittel</b>	<b>121</b>
	<b>Literatur</b>	<b>123</b>



# 1 | Einleitung

Viele zufällige kombinatorische Objekte lassen sich über eine stochastische Prozedur konstruieren: Möchten wir zum Beispiel  $n$  Karten mischen, so können wir diese sukzessive auf einen Stapel legen, indem jede Karte zufällig und gleichverteilt in eine der Positionen des bereits gebildeten Stapels geschoben wird. Das Ergebnis ist dann eine zufällige Permutation vom Umfang  $n$ .

Formal betrachten wir Markov-Ketten  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in einer kombinatorischen Familie  $\mathbb{F}$ . Jedem kombinatorischen Objekt  $x \in \mathbb{F}$  können wir einen Größenparameter  $\phi_{\mathbb{F}}(x) \in \mathbb{N}$  zuordnen. Im Kartenmischbeispiel ist dies die Anzahl der Karten. Die Familie  $\mathbb{F}$  zerfällt so in disjunkte Teilmengen  $\mathbb{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , der Objekte der Größe  $n$ . Die stochastische Prozedur liefert zum Zeitpunkt  $n$  ein zufälliges Objekt der Größe  $n$ , d.h.  $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{F}_n) = 1$ . Wir sagen, dass  $X$  die *Raum-Zeit-Eigenschaft* hat. Folglich ist die Markov-Kette  $X$  transient. Wir verwenden die Bezeichnung aus [Grü13] und nennen  $X$  eine *kombinatorische Markov-Kette*.

Für die asymptotische Analyse der stochastischen Prozedur benötigen wir Grenzwertaussagen über die kombinatorische Markov-Kette  $X$ . Die Betrachtung randwerttheoretischer Aspekte diskreter Markov-Ketten geht auf [Doo59] zurück: Eine transiente Markov-Kette  $X$  mit Werten in einer höchstens abzählbar unendlichen Menge  $\mathbb{F}$  wird durch ihre Startverteilung  $\mu$  und ihre Übergangsmatrix  $P$  beschrieben. Die Matrix  $P$  lässt sich als Operator auf der Menge  $\mathbb{R}^{\mathbb{F}}$  der reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{F}$  auffassen. Die Matrix  $P - I$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix sei, ist dann das diskrete Analogon des Laplace-Operators der Potentialtheorie. Das originäre Ziel in [Doo59] ist die Beschreibung aller bezüglich dieses Operators nichtnegativen harmonischen Funktionen. Dazu sei  $x_0 \in \mathbb{F}$  ein beliebiger Referenzpunkt. Es reicht, die Menge  $\mathcal{H}_1^+$  aller am Punkt  $x_0$  zu 1 normierten, nichtnegativen harmonischen Funktionen zu kennen. Die Menge  $\mathcal{H}_1^+$  ist konvex und kann demnach durch ihre Extrempunkte beschrieben werden. Nach einem Vorgehen aus [Mar41] wird der Zustandsraum  $\mathbb{F}$  mit einer Metrik  $d$  versehen und zu  $\bar{\mathbb{F}}$  vervollständigt. Wir nennen deswegen  $\partial\mathbb{F} := \bar{\mathbb{F}} \setminus \mathbb{F}$  *Martin-Rand*. Die Vervollständigung  $\bar{\mathbb{F}}$  ist kompakt und heißt *Doob-Martin-Kompaktifizierung*. Zu jedem Punkt  $\alpha$  im Martin-Rand gehört eine superharmonische Funktion  $s_\alpha$  und die Extrempunkte von  $\mathcal{H}_1^+$  liegen vollständig im Martin-Rand und werden als *minimaler Martin-Rand* bezeichnet. Weitere gute einführende Quellen für

dieselbe Konstruktion finden sich in [Hun60], [Dyn69], [KSK76], [Saw97] und [Woe09]. Während in der Originalarbeit [Doo59] und in [Saw97] und [Woe09] ein Referenzpunkt  $x_0 \in \mathbb{F}$  bzw. in [Dyn69] ein Referenzmaß auf  $(\mathbb{F}, \mathcal{B}(\mathbb{F}))$  für die Konstruktion gewählt wird, werden in [Hun60] und [KSK76] verallgemeinerte Ketten mit zufälligem Start- und Endzeitpunkt betrachtet. Wir werden allerdings nur die erste Konstruktion betrachten, denn kombinatorische Markov-Ketten starten zum Zeitpunkt 1 in  $\mathbb{F}_1$ . Neben der Vervollständigung ist es auch möglich, die Kompaktifizierung rein topologisch über eine Stone-Čech-Kompaktifizierung ohne Einführung einer Metrik zu definieren (siehe z.B. [Woe09, S. 188f]).

Die Konsequenzen der potentialtheoretischen Überlegungen, die sich für stochastische Prozesse ergeben, werden sehr ausführlich in [Doo84] beschrieben. Wir verwenden, dass eine kombinatorische Markov-Kette  $X$  fast sicher in ihrer Doob-Martin-Kompaktifizierung konvergiert und der fast sichere Grenzwert bis auf Nullmengen die terminale  $\sigma$ -Algebra von  $X$  erzeugt.

Interessante Beispiele für die fast sichere Konvergenz kombinatorischer Markov-Ketten finden sich in [EGW12]. Dort wird eine große Klasse kombinatorischer Markov-Ketten untersucht. Hierunter fällt unter anderem der BST-Prozess, die Markov-Kette, die sich aus dem bekannten binary-search-tree-Algorithmus ergibt. Weitere kürzlich veröffentlichte Arbeiten in diesem Bereich sind [EGW16], die sich mit Rémys Algorithmus zur Konstruktion binärer Bäume befasst, und [EW16], die den minimalen Martin-Rand der radix sort trees bestimmt. Bei letzterem ist zu beachten, dass dort die Teilmengen  $\mathbb{F}_n$  nicht endlich sind. Auf diese Besonderheit bei kombinatorischen Markov-Ketten werden wir bei der ausführlichen Beschreibung der Theorie eingehen. Die Doob-Martin-Theorie liefert fast sichere Grenzwertaussagen für die kombinatorischen Strukturen selbst, aber sie kann auch genutzt werden, um die Asymptotik einiger Funktionale dieser Strukturen zu untersuchen. Mithilfe von Martingalmethoden ist es dann zum Beispiel möglich, die fast sichere Konvergenz der internen Pfadlänge und den Wiener-Index bei binären ([Grü14b]) und rekursiven Bäumen ([GM15]) zu bestimmen.

Die Tatsache, dass der fast sichere Limes bis auf Nullmengen die terminale  $\sigma$ -Algebra des Prozesses  $X$  erzeugt, kann genutzt werden, die terminale  $\sigma$ -Algebra auf Trivialität zu untersuchen. Daraus würde ein Verschwinden der Zufälligkeit im Grenzwert folgen. In [Grü14a] finden sich Beispiele hierfür.

Eine weitere zentrale Idee stammt auch aus [Doo59]: Jede normierte, nichtnegative harmonische Funktion  $h$  liefert eine Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{F}$ , die wir  *$h$ -Transformierte* nennen wollen. Alle  $h$ -Transformierten haben dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten, die Übergangswahrscheinlichkeiten der zeitinvertierten Prozesse.

Über  $h$ -Transformation ist es dann möglich, verschiedene Prozesse miteinander in Beziehung zu setzen. Zum Beispiel hängen die klassische Pólya-Urne und Nord-Ost-Irrfahrten ([BK64]) oder der binary-search-tree- und der digital-search-tree-Algorithmus über  $h$ -Trans-

formation zusammen ([EGW12]).

Die Betrachtung  $h$ -Transformierter liefert einen weiteren Zugang zur Doob-Martin-Theorie: Ausgehend von einem qualitativen Übergangsgraphen werden alle Wahrscheinlichkeitsmaße gesucht, die dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten haben. Diese Fragestellung hat ihre Ursprünge in der Darstellungstheorie. Der gewichtete, gerichtete Übergangsgraph hängt mit sogenannten *Bratelli-Diagrammen* zusammen. Die Bestimmung aller Maße im obigen Sinn ist dann äquivalent zur Bestimmung aller Charaktere der zum Bratelli-Diagramm gehörigen AF-Algebra oder der bezüglich der Graphgewichte harmonischen Funktionen. Eine gute Einführung in diesen Ideenkreis bietet das Buch [Ker03]. Ein zentrales Resultat aus diesem Bereich ist die Bestimmung aller Charaktere der unendlichen symmetrischen Gruppe ([VK81]). In den Arbeiten, die diese Fragestellungen untersuchen, geht es nicht um die Beschreibung der Vorwärtsmechanismen der zugehörigen Markov-Ketten.

In der vorliegenden Arbeit soll es dagegen darum gehen, nicht nur die Martin-Ränder der gegebenen Beispiele zu bestimmen, sondern auch die zugehörigen  $h$ -transformierten Ketten so explizit wie möglich anzugeben. Des Weiteren wird die Theorie kombinatorischer Markov-Ketten mit vollständigen Beweisen angegeben mit Berücksichtigung möglicherweise nichtendlicher  $\mathbb{F}_n$ 's. Als komplett neuen Aspekt der Theorie möchten wir die stetige Fortsetzbarkeit von Markov-Funktionen - solche Funktionen, die eine kombinatorische Markov-Kette wieder auf eine kombinatorische Markov-Kette abbilden - auf den Martin-Rand untersuchen.

Im zweiten Kapitel werden wir ausführlich die Doob-Martin-Theorie kombinatorischer Markov-Ketten einführen und alle zentralen Resultate beweisen. Hierbei gehen wir auf die Besonderheiten bei nichtlokalendlichen Ketten ein und erklären den Zusammenhang der Theorie für kombinatorische Markov-Ketten zu der Randtheorie bei gerichteten, gewichteten Graphen.

Zur Veranschaulichung der Theorie werden wir in Kapitel 3 zunächst erste Beispiele geben und die Bestimmung der Doob-Martin-Kompaktifizierung im Detail durchführen. Zunächst untersuchen wir Ketten, deren Randverteilung zum Zeitpunkt  $n$  die Gleichverteilung auf der Menge  $[n]$  ist. Je nach Übergangsmechanismus - also gegebenen Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten - unterscheiden sich die Martin-Ränder voneinander. Des Weiteren betrachten wir Zählvektoren von Verteilungen auf  $\mathbb{N}$  und eine Markov-Kette mit Werten in Äquivalenzklassen von Erdős-Rényi-Graphen.

Auch die asymptotische Anzahl der Rekorde einer Folge von reellen i.i.d Zufallsvariablen mit stetiger Verteilungsfunktion lässt sich mithilfe der Doob-Martin-Theorie untersuchen. Dazu verwenden wir für diese *Rekord-Kette* im vierten Kapitel funktionentheoretische Methoden. Dadurch erhalten wir im Gegensatz zu bereits vorhandenen Resultaten konkrete Darstellungen der erweiterten Martin-Kerne. Wir gehen anschließend noch auf kombinatorische Markov-Ketten ein, die im direkten Zusammenhang mit der Rekord-Kette stehen.

Als zweite größere Anwendung der Theorie betrachten wir in Kapitel 5 ein einfaches Aus-

wahlverfahren in verteilten Systemen, das in der Forschung schon viel Aufmerksamkeit erhalten hat. Diese *leader election* hängt vom Maximum geometrisch verteilter Zufallsgrößen ab, das wir wieder mit unseren Methoden untersuchen werden. Auch hier können wir alle zugehörigen  $h$ -Transformierten explizit angeben. Teile dieses Kapitels sind bereits in der Arbeit [GH16] veröffentlicht, wobei die vorliegende Arbeit die dort ausgelassenen Details und Erweiterungen ergänzt.

Im letzten Kapitel betrachten wir Markov-Funktionen und geben eine hinreichende Bedingung dafür an, dass sich diese Funktion stetig auf den Doob-Martin-Rand fortsetzen lässt. Wir schließen dieses Kapitel mit der Angabe von Beispielen für diese Situation.

Die für jedes Kapitel relevante Literatur findet sich direkt in dem jeweiligen Text. Sofern nicht anders definiert verwenden wir die gängige Notation der Wahrscheinlichkeitstheorie.

## 2 | Die Doob-Martin-Theorie

### 2.1 Die Doob-Martin-Kompaktifizierung

Wir betrachten im Folgenden einen stochastischen Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . Da wir uns für wachsende diskrete Strukturen interessieren, soll  $X$  Werte in der Menge  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$  annehmen, wobei die Teilmengen  $\mathbb{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , disjunkt und höchstens abzählbar seien. Den Spezialfall endlicher Mengen  $\mathbb{F}_n$  betrachten wir gesondert im Unterabschnitt 2.2.

Insbesondere lässt sich jedes Element  $x \in \mathbb{F}$  eindeutig einer Teilmenge  $\mathbb{F}_n$  zuordnen; wir haben also eine Funktion  $\phi_{\mathbb{F}} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\phi_{\mathbb{F}}(x) = n$ , falls  $x \in \mathbb{F}_n$  gilt. Für bessere Lesbarkeit setzen wir hier  $|x| := \phi_{\mathbb{F}}(x)$ . Dem sukzessiven Wachstum kombinatorischer Strukturen oder deren Funktionale tragen wir Rechnung, indem wir fordern, dass der Prozess  $X$  die **Raum-Zeit-Eigenschaft** besitzt: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $P(X_n \in \mathbb{F}_n) = 1$ . Zum Zeitpunkt  $n$  ist  $X_n$  fast sicher eine kombinatorische Struktur der Größe  $n$ . Für den Prozess  $X$  seien zudem die Vergangenheit und die Zukunft unabhängig gegeben den gegenwärtigen Zustand. Formal: Die  $\sigma$ -Algebren

$$\mathcal{F}_m := \sigma(\{X_1, \dots, X_m\}) \quad \text{und} \quad \mathcal{G}_n := \sigma(\{X_n, X_{n+1}, \dots\}), \quad n \geq m,$$

seien bedingt unabhängig gegeben  $X_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Abkürzend schreiben wir hierfür

$$\mathcal{F}_m \perp\!\!\!\perp_{X_m} \mathcal{G}_n. \tag{2.1}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass sowohl  $X$  als auch  $(X_{N-n})_{n=0,1,\dots,N-1}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , Markov-Ketten mit Werten in  $\mathbb{F}$  sind. Sind umgekehrt diese Prozesse Markov-Ketten, so gilt Gleichung (2.1) für alle  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq m$  (siehe [Kal02, Lemma 8.1]). Durch die Raum-Zeit-Eigenschaft erhalten wir immer zeithomogene Markov-Ketten.

Wie allgemein üblich wollen wir fortan die kanonische Konstruktion der Markov-Kette  $X$  betrachten, d.h. wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathbb{F}^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{F})^{\otimes \mathbb{N}}, \mathbb{P}^X)$ , dessen  $\sigma$ -

Algebra  $\mathcal{P}(\mathbb{F})^{\otimes \mathbb{N}}$  von den speziellen Zylindermengen

$$C(x_1, \dots, x_n) := \{y = (y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : y_i = x_i, i \in [n]\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

erzeugt wird, wobei  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  die Menge der ersten  $n$  natürlichen Zahlen sei.

Die meisten kombinatorischen Strukturen haben nur ein Objekt der Größe 1. Daher fordern wir zusätzlich  $\#\mathbb{F}_1 = 1$ . Die Kette  $X$  startet also in einem deterministischen Zustand  $e \in \mathbb{F}_1$ . Wir gehen davon aus, dass  $X$  **schwach irreduzibel** ist: Jedes Element  $x \in \mathbb{F}$  wird mit positiver Wahrscheinlichkeit von  $X$  besucht, d.h.  $\mathbb{P}(X_n = x) > 0$  für  $|x| = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Andernfalls verkleinern wir entsprechend den Zustandsraum. Einen stochastischen Prozess  $X$ , der alle vorhergegangenen Forderungen erfüllt, nennen wir eine **kombinatorische Markov-Kette**. Wir merken an, dass sich die erste Definition kombinatorischer Markov-Ketten nur auf Ketten mit endlichen  $\mathbb{F}_n$ 's bezog (siehe [Grü13]), wir aber sehen werden, dass sich auch für abzählbar unendliche  $\mathbb{F}_n$ 's interessante Beispiele ergeben und die Erweiterung sinnvoll ist.

Die Verteilung einer Markov-Kette ist bekanntlich eindeutig durch ihre Startverteilung und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten charakterisiert. Für  $X$  ist wegen unserer Forderungen die Startverteilung die Einpunktverteilung  $\delta_e$  in  $e$ . Für zwei Elemente  $x \in \mathbb{F}_m$ ,  $y \in \mathbb{F}_n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \leq n$ , schreiben wir  $p_m^n(x, y) := \mathbb{P}(X_n = y | X_m = x)$  für die Übergangswahrscheinlichkeiten. Die Indizes dienen zur schnelleren Identifikation der Größen der  $x$ 's und  $y$ 's. Ist  $n = m + 1$ , lassen wir die Indizes weg. Wir erhalten dadurch eine Matrix  $P = (p(x, y))_{x, y \in \mathbb{F}}$ . Sofern es eindeutig ist, um welche kombinatorische Markov-Kette  $X$  es sich handelt, werden wir diese nicht speziell auszeichnen, weisen aber darauf hin, dass unterschiedliche Markov-Ketten natürlich unterschiedliche Übergangswahrscheinlichkeiten haben können. Wir werden sehen, dass die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten eine wichtige Rolle bei Raum-Zeit-Ketten spielen und setzen daher analog  $q_m^n(x, y) := \mathbb{P}(X_m = x | X_n = y)$ . Auch hier werden wir die Indizes bei Einschnittübergangswahrscheinlichkeiten weglassen.

Die Matrix  $P$  lässt sich als Operator auf der Menge  $\mathbb{R}^{\mathbb{F}} = \{f : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}\}$  der reellwertigen Funktionen auf  $\mathbb{F}$  auffassen, indem wir für eine Funktion  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}}$

$$Pf(x) := \sum_{y \in \mathbb{F}} p(x, y)f(y), \quad \forall x \in \mathbb{F}, \quad (2.2)$$

definieren. Wir wollen nur noch solche Funktionen betrachten, bei denen die Summe in (2.2) endlich ist, und nennen diese  **$P$ -integrierbar**. Wir bezeichnen eine  $P$ -integrierbare Funktion  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}}$  als **superharmonisch**, falls  $Ps \leq s$  gilt. Bei Gleichheit heißt die Funktion **harmonisch**. Die Bezeichnung „harmonisch“ hat ihren Ursprung in der Potentialtheorie. Das Analogon des dortigen Laplace-Operators ist in unserem Fall  $P - I$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix sei. Wir bezeichnen mit  $\mathcal{S}(X) := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}} : Pf \leq f\}$  die Menge der superharmonischen, mit  $\mathcal{H}(X) := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}} : Pf = f\}$  die Menge der harmonischen Funktionen auf  $\mathbb{F}$ . Insbe-

sondere interessieren wir uns für die **nichtnegativen, normierten** (super-)harmonischen, also diejenigen Funktionen  $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{F}}$ , die zusätzlich zur (Super-)Harmonizität  $f \geq 0$  und  $f(e) = 1$  erfüllen. Die Mengen  $\mathcal{S}^+(X)$  und  $\mathcal{H}^+(X)$  enthalten die nichtnegativen super- bzw. harmonischen Funktionen und werden mit einer 1 als Index versehen, wenn die Funktionen normiert sind. Diese sind Unterräume des topologischen Raumes  $\mathbb{R}^{\mathbb{F}}$ , der wie üblich mit der Produkttopologie versehen wird.

Wir können die Funktionen  $s \in \mathcal{S}_1^+(X)$  verwenden, um neue Prozesse mit Werten in  $\mathbb{F}$  zu erhalten. Die Übergangsmatrix  $P^s$  des neuen Prozesses definieren wir für  $x, y \in \mathbb{F}$  durch

$$p^s(x, y) := \frac{1}{s(x)}p(x, y)s(y) \quad \text{für } s(x) > 0, \quad p^s(x, y) := 0 \quad \text{für } s(x) = 0.$$

In Anlehnung an [Doo59] nennen wir die Markov-Kette mit den (Sub-)Übergangswahrscheinlichkeiten  $p^s(\cdot, \cdot)$  **Doobs  $s$ -Transformierte** oder  **$s$ -Prozess**  $X^s$ . Diese haben die Randverteilungen

$$\mathbb{P}(X_n^s = x) = s(x)\mathbb{P}(X_n = x) \tag{2.3}$$

für  $|x| = n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Aus probabilistischer Sicht interessieren uns später nur die  $h$ -Transformierten für  $h \in \mathcal{H}_1^+(X)$ , weil bei diesen „keine Masse auf dem Weg verloren geht“. Die **Menge der erreichbaren Zustände**

$$\mathbb{F}^s := \{x \in \mathbb{F} : \mathbb{P}(X_n^s = x) > 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$$

kann sich durch Nullstellen der superharmonischen Funktion verkleinern. Wir schreiben für diese Teilmenge auch  $\mathbb{F}^{X^s}$ , wenn wir verdeutlichen wollen, um welche Markov-Kette es sich handelt. Die Matrix  $P^s$  ist dann ein Operator auf dieser verkleinerten Menge, allerdings nicht notwendigerweise stochastisch:

**LEMMA 2.1** *Die Matrix  $P^s$  ist genau dann stochastisch, wenn  $s \in \mathcal{H}^+(X)$  gilt.*

*Beweis.* Es sei  $x \in \mathbb{F}^s$ . Dann erhalten wir, falls die Funktion  $s \in \mathcal{H}^+(X)$  harmonisch ist,

$$\sum_{y \in \mathbb{F}^s} p^s(x, y) = \sum_{y \in \mathbb{F}^s} \frac{1}{s(x)}p(x, y)s(y) = \frac{1}{s(x)} \sum_{y \in \mathbb{F}^s} p(x, y)s(y) = 1.$$

Ist die Funktion  $s \in \mathcal{S}^+(X) \setminus \mathcal{H}^+(X)$  echt superharmonisch, so existiert ein  $x \in \mathbb{F}^s$  mit  $s(x) > Ps(x)$ . Für dieses  $x$  ist

$$\sum_{y \in \mathbb{F}^s} p^s(x, y) = \frac{Ps(x)}{s(x)} < 1,$$

und daher ist die Matrix  $P^s$  echt substochastisch. □

Das vorhergegangene Lemma zeigt, dass die Verteilung von  $X^s$  kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, falls  $s$  echt superharmonisch ist. Um diesen Makel zu beseitigen, führen wir ausgehend von der Konstruktion in [Dyn69] „Grabeszustände“  $\dagger_m^x$ ,  $x \in \mathbb{F}$ ,  $m > |x|$ , ein. Für eine echt superharmonische Funktion  $s \in \mathcal{S}^+(X) \setminus \mathcal{H}^+(X)$  definieren wir dann für  $x \in \mathbb{F}_n^s$

$$p^s(x, \dagger_{n+1}^x) := 1 - \sum_{y \in \mathbb{F}^s} p^s(x, y), \quad p(\dagger_m^x, \dagger_{m+1}^x) := 1, \quad m > n. \quad (2.4)$$

Erweiterungen wollen wir künftig durch **fett gedruckte** Zeichen kennzeichnen. Die erweiterte Matrix  $\mathbf{P}^s$  ist folglich stochastisch auf

$$\mathbf{F} := \mathbb{F} \cup \bigcup_{x \in \mathbb{F}} \bigcup_{m=|x|+1}^{\infty} \{\dagger_m^x\}.$$

Erreicht die Kette  $X^s$  einen Grabeszustand  $\dagger_m^x$ , stirbt sie für immer. Die Größenfunktion setzen wir dann als  $\phi_{\mathbf{F}}(x) = \phi_{\mathbb{F}}(x)$  für  $x \in \mathbb{F}$  und  $\phi_{\mathbf{F}}(\dagger_m^x) = m$ ,  $x \in \mathbb{F}$ ,  $m > |x|$ . Der Unterschied unserer Konstruktion zum Vorgehen in [Dyn69] ist, dass wir die Raum-Zeit-Eigenschaft erhalten, den Prozess nach dem Todeszeitpunkt also nicht abbrechen lassen. Es sei  $\mathfrak{H}_1^+(X^s)$  die Menge der normierten, nichtnegativen harmonischen Funktionen auf  $\mathbf{F}$  bezüglich der auf  $\mathbf{F}$  erweiterten Matrix  $\mathbf{P}^s$ . Wir merken an, dass weiterhin  $\mathcal{S}_1^+(X^s)$  die Menge der nichtnegativen, normierten superharmonischen Funktionen bezüglich der auf  $\mathbb{F}^s$  definierten Matrix  $P^s$  ist. Diese ist nach Lemma 2.1 nicht notwendigerweise stochastisch.

Wir werden daher ab jetzt kombinatorische Markov-Ketten  $X$  auf  $\mathbb{F}$  und ihre  $s$ -transformierten Ketten,  $s \in \mathcal{S}_1^+(X)$ , mit Werten in  $\mathbf{F}$  betrachten. Die schwache Irreduzibilität der Transformierten bezieht sich dann natürlich auf  $\mathbf{F}^s$  und wir lassen wegen der besseren Lesbarkeit den Index  $s$  bzw.  $X^s$  häufig weg und schreiben dafür  $\mathbf{X}$ , um zu kennzeichnen, dass es sich um eine  $s$ -transformierte Kette handelt und wir gegebenenfalls den erweiterten Zustandsraum  $\mathbf{F}$  betrachten müssen. Mit  $h \equiv 1$  ist  $X^h$  natürlich auch eine transformierte Kette - die Ausgangskette  $X$ . Wir merken an, dass allgemein für eine harmonische Funktion  $h \in \mathcal{H}_1^+(X)$  natürlich  $\mathbf{F}^h \setminus \mathbb{F} = \emptyset$  gilt, da dann  $P^h$  stochastisch ist.

Es gilt ein zentraler Zusammenhang zwischen  $s$ -transformierten Ketten und Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten.

**SATZ 2.2** *Es seien  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  zwei kombinatorische Markov-Ketten mit Werten in der (erweiterten) kombinatorischen Familie  $\mathbf{F}$ . Außerdem gelte  $\mathbf{F}^{\mathbf{Y}} \subset \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$ ; jeder Zustand, der von  $\mathbf{Y}$  erreicht wird, wird auch von  $\mathbf{X}$  erreicht. Dann haben  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  auf  $\mathbf{F}^{\mathbf{Y}}$  genau dann dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten, wenn es eine harmonische Funktion  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  gibt, sodass  $\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}}) = \mathcal{L}(\mathbf{Y})$  gilt. Insbesondere ist die Funktion  $\mathbf{h}$  dann gegeben durch*

$$\mathbf{h}(x) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_n = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)} \quad \text{für } x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{h}(x) = 0, \quad x \notin \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}.$$

*Beweis.* Sei  $\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}}) = \mathcal{L}(\mathbf{Y})$  für ein  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$ . Dann gilt für  $x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}$  und  $y \in \mathbf{F}_{n+1}^{\mathbf{Y}}$

$$\varrho^{\mathbf{h}}(x, y) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}} = y)} p^{\mathbf{h}}(x, y) = \frac{\mathbf{h}(x) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)}{\mathbf{h}(y) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y)} \frac{1}{\mathbf{h}(x)} p(x, y) \mathbf{h}(y) = \varrho(x, y).$$

Nehmen wir umgekehrt an, dass  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  auf  $\mathbf{F}^{\mathbf{Y}}$  dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten haben. Für  $x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}$  definieren wir dann die Funktion

$$\mathbf{h}(x) := \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_n = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)}$$

und  $\mathbf{h}(x) := 0$  für  $x \notin \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}$ . Mit dieser erhalten wir für  $x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{Y}}$  und  $y \in \mathbf{F}_{n+1}^{\mathbf{Y}}$

$$\frac{1}{\mathbf{h}(x)} p_{\mathbf{X}}(x, y) \mathbf{h}(y) = \varrho(x, y) \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_{n+1} = y)}{\mathbb{P}(\mathbf{Y}_n = x)} = p_{\mathbf{Y}}(x, y)$$

und die Harmonizität folgt hieraus trivialerweise.  $\square$

Der Satz 2.2 liefert uns auch nachträglich eine Begründung dafür, bei den Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten keinen Index für die harmonische Funktion zu verwenden. Außerdem legt der Satz eine Mischungseigenschaft nahe. Für zwei harmonische Funktionen  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  ist die  $\mathbf{h}$ -Transformierte der Mischung der beiden Funktionen die Mischung der beiden  $\mathbf{h}_i$ -transformierten Ketten,  $i = 1, 2$ . Formal:

**LEMMA 2.3** Für zwei harmonische Funktionen  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  und  $\alpha \in [0, 1]$  gilt

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}^{\alpha \mathbf{h}_1 + (1-\alpha) \mathbf{h}_2}) = \alpha \mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}_1}) + (1-\alpha) \mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}_2}).$$

*Beweis.* Die Verteilung einer Markov-Kette ist durch die Randverteilungen und die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten eindeutig festgelegt. Es seien  $\mathbf{Y} := \mathbf{X}^{\alpha \mathbf{h}_1 + (1-\alpha) \mathbf{h}_2}$  und  $\mathbf{Z}$  ein Prozess mit  $\mathcal{L}(\mathbf{Z}) := \alpha \mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}_1}) + (1-\alpha) \mathcal{L}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}_2})$ . Aus der Definition von  $\mathbf{Z}$  folgt mit (2.3) für  $x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{Z}}$

$$P(\mathbf{Z}_n = x) = (\alpha \mathbf{h}_1(x) + (1-\alpha) \mathbf{h}_2(x)) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x) = \mathbb{P}(\mathbf{Y}_n = x).$$

Eine Erweiterung der Gleichung (2.3) liefert mit der Markov-Eigenschaft der Kette  $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\mathbf{Z}_{n+1} = x_{n+1} \mid \mathbf{Z}_n = x_n, \dots, \mathbf{Z}_1 = x_1) \\ &= \frac{(\alpha \mathbf{h}_1(x_{n+1}) + (1-\alpha) \mathbf{h}_2(x_{n+1})) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = x_{n+1}, \dots, \mathbf{X}_1 = x_1)}{(\alpha \mathbf{h}_1(x_n) + (1-\alpha) \mathbf{h}_2(x_n)) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x_n, \dots, \mathbf{X}_1 = x_1)} \\ &= \frac{(\alpha \mathbf{h}_1(x_{n+1}) + (1-\alpha) \mathbf{h}_2(x_{n+1})) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = x_{n+1}, \mathbf{X}_n = x_n)}{(\alpha \mathbf{h}_1(x_n) + (1-\alpha) \mathbf{h}_2(x_n)) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x_n)} \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{Z}_{n+1} = x_{n+1} \mid \mathbf{Z}_n = x_n). \end{aligned}$$

Der Prozess  $\mathbf{Z}$  ist also eine Markov-Kette mit den Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten für  $x \in \mathbf{F}_n$  und  $y \in \mathbf{F}_{n+1}^{\mathbf{Z}}$

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathbf{Z}}(x, y) &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_{n+1} = y, \mathbf{Z}_n = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n = x)} \\ &= \frac{\alpha \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}_1} = y, \mathbf{X}_n^{\mathbf{h}_1} = x) + (1 - \alpha) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}_2} = y, \mathbf{X}_n^{\mathbf{h}_2} = x)}{\alpha \mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}_1} = x) + (1 - \alpha) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}_2} = x)} \\ &= \frac{\alpha \mathbf{h}_1(y) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y, \mathbf{X}_n = x) + (1 - \alpha) \mathbf{h}_2(y) \mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y, \mathbf{X}_n = x)}{\alpha \mathbf{h}_1(x) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x) + (1 - \alpha) \mathbf{h}_2(x) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)} \\ &= \varrho_{\mathbf{Y}}(x, y). \end{aligned}$$

wobei wir Satz 2.2 benutzt haben. Die Ketten  $\mathbf{Y}$  und  $\mathbf{Z}$  haben daher dieselben Randverteilungen und dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten.  $\square$

Zur Beschreibung aller bezüglich  $\mathbf{P}$  nichtnegativen, normierten harmonischen Funktionen auf  $\mathbf{F}$  benötigen wir für  $x \in \mathbf{F}_m$  und  $y \in \mathbf{F}_n$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , den **Martin-Kern**

$$K_{\mathbf{X}}(x, y) := \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_m = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)} = \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_m = x)} \varrho_m^n(x, y)$$

zur kombinatorischen Markov-Kette  $\mathbf{X}$ , wobei wir Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten für  $m > n$  gleich 0 setzen. Der Name geht auf [Mar41] zurück. Ist klar, um welche kombinatorische Markov-Kette es sich handelt, sparen wir uns den Index. Für jedes  $x \in \mathbf{F}$  ist die Funktion  $y \mapsto K(x, y)$  wegen

$$K(x, y) = \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_m = x)} \varrho(x, y) \leq \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_m = x)} =: c_x$$

nach oben beschränkt. Es sei  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  die Menge der normierten, nichtnegativen superharmonischen Funktionen auf  $\mathbf{F}$  bzgl.  $\mathbf{P}$ .

**LEMMA 2.4** Für  $y \in \mathbf{F}$  ist  $K(\cdot, y) \in \mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X}) \setminus \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine echt superharmonische Funktion.

*Beweis.* Sei  $y \in \mathbf{F}$  beliebig und  $|y| = n$ . Mit der Markov-Eigenschaft folgt für alle  $x \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$  mit  $|x| \leq n - 2$ , dass

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbf{F}} p(x, z) K(z, y) &= \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)} \sum_{z \in \mathbf{F}} p(x, z) p_{|z|}^n(z, y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_{|x|} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)} = K(x, y). \end{aligned}$$

Für  $|x| = n - 1$  ist nach obiger Gleichung

$$PK(x, y) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_{n-1} = x) \leq \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_{n-1} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)}.$$

Schließlich gilt für  $|x| = n$ , dass  $K(x, y) = \mathbb{1}_y(x) \geq PK(x, y) = 0$ . Die Funktion  $K(\cdot, y)$  ist also für alle  $y \in \mathbf{F}$  superharmonisch und im Punkt  $y$  echt superharmonisch.  $\square$

**BEMERKUNG 2.5** Natürlich ist für  $y \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$  auch  $K(\cdot, y) \in \mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X}) \setminus \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine echt superharmonische Funktion. Mit dieser könnten wir eine weitere Markov-Kette  $\mathbf{X}^{K(\cdot, y)}$  definieren, die dann wieder substochastisch wäre, sodass wir Grabeszustände hinzufügen müssten, um diese stochastisch zu machen. Diese Konstruktion ließe sich dann unendlich weit fortsetzen, aber da es uns später hauptsächlich um die Ausgangskette  $X$  und deren  $h$ -transformierte Ketten  $X^h$ ,  $h \in \mathcal{H}_1^+$ , geht, belassen wir es bei dieser Bemerkung.

Wir nutzen nun die Martin-Kerne, um eine Metrik auf  $\mathbf{F}$  zu definieren. Dafür sei  $w : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\sum_{x \in \mathbf{F}} w(x) < \infty$ , eine positive Gewichtsfunktion. Mithilfe dieser Funktion können wir die Funktion  $d : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  durch

$$d(x, y) := \sum_{z \in \mathbf{F}} w(z) \frac{|K(z, x) - K(z, y)|}{c_z} + \sum_{z \in \mathbf{F}} w(z) |\mathbb{1}_z(x) - \mathbb{1}_z(y)| \quad (2.5)$$

definieren.

**SATZ 2.6** (a) Die Funktion  $d$  ist eine Metrik und der metrische Raum  $(\mathbf{F}, d)$  ist diskret.

(b) Eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$  ist genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich  $d$ , wenn

- (i) entweder die Folge einfriert (d.h., es existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $y \in \mathbf{F}$ , sodass  $y_n = y$  für alle  $n \geq n_0$ ),
- (ii) oder die Folge jede endliche Teilmenge  $A \subset \mathbf{F}$  schließlich verlässt (d.h., es existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $y_n \notin A$  für alle  $n \geq n_0$ ) und die Werte des Martin-Kerns  $K(x, y_n)$  für alle  $x \in \mathbf{F}$  in  $\mathbb{R}$  konvergieren.

*Beweis.* (a) Die Nichtnegativität der Funktion  $d$  ist offensichtlich, ebenso, dass  $d(x, x) = 0$  ist.

Für  $x \neq y$  gilt  $d(x, y) \geq w(x) > 0$ . Die Symmetrie und die Dreiecksungleichung sind klar.

Wegen  $B_{w(x)}(x) = \{y \in \mathbf{F} : d(x, y) \leq w(x)\} = \{x\}$  ist  $(\mathbf{F}, d)$  diskret.

(b) Friert eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$  schließlich ein, ist es offensichtlich, dass die Folge eine Cauchy-Folge bezüglich  $d$  ist. Sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$  eine Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} K(x, y_n) < \infty$  für alle  $x \in \mathbf{F}$ , die jede endliche Teilmenge schließlich verlässt. Insbesondere ist  $(K(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ . Da  $\sum_{z \in \mathbf{F}} w(z)$  absolut konvergiert, erhält man mit dem Satz der

majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{m,n \rightarrow \infty} d(y_n, y_m) &= \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{z \in \mathbf{F}} w(z) \left( \frac{|K(z, y_n) - K(z, y_m)|}{c_z} + |\mathbb{1}_z(y_n) - \mathbb{1}_z(y_m)| \right) \\ &= \sum_{z \in \mathbf{F}} w(z) \lim_{m,n \rightarrow \infty} \left( \frac{|K(z, y_n) - K(z, y_m)|}{c_z} + |\mathbb{1}_z(y_n) - \mathbb{1}_z(y_m)| \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei wir für den zweiten Term ausgenutzt haben, dass  $y_n$  jede endliche Teilmenge schließlich verlässt.

Ist umgekehrt  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge, so ist  $(K(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge für jedes  $x \in \mathbf{F}$ , denn für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $m, n \geq N(\epsilon) \in \mathbb{N}$  gilt

$$\begin{aligned} \epsilon > d(y_m, y_n) &\geq \sum_{z \in \mathbf{F}} w(z) \frac{|K(z, y_n) - K(z, y_m)|}{c_z} \\ &\geq \underbrace{\frac{w(x)}{c_x}}_{>0} |K(x, y_m) - K(x, y_n)|, \end{aligned}$$

und wegen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  konvergiert  $(K(x, y_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$  für alle  $x \in \mathbf{F}$ . Die Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bleibt entweder schließlich in einer endlichen Teilmenge von  $\mathbf{F}$ , woraus, weil  $\mathbf{F}$  diskret und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchy-Folge ist, folgt, dass  $y_n \equiv y$  für ein  $y \in \mathbf{F}$  und  $n \geq n_0$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  ist. Andernfalls verlässt  $y_n$  schließlich jede endliche Teilmenge.  $\square$

**SATZ 2.7** Die Vervollständigung  $\bar{\mathbf{F}}$  des metrischen Raumes  $(\mathbf{F}, d)$  ist kompakt.

*Beweis.* Es sei  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{F}^{\mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbf{F}$ . Da  $\{K(x, \cdot) : x \in \mathbf{F}\}$  abzählbar ist, erhalten wir mit einem Diagonalfolgenargument eine Teilfolge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , sodass  $K(x, y_{n_k})$  konvergent für alle  $x \in \mathbf{F}$  ist. Dann ist diese Teilfolge nach Satz 2.6 eine Cauchy-Folge. Wegen Satz A.1 ist  $(\mathbf{F}, d)$  total beschränkt. Die Vervollständigung eines metrischen Raumes  $(X, d)$  ist genau dann kompakt, wenn dieser Raum total beschränkt ist ([Eng89, Corollary 4.3.30]). Die Vervollständigung  $\bar{\mathbf{F}}$  ist daher kompakt.  $\square$

Wir nennen den kompakten metrischen Raum  $(\bar{\mathbf{F}}, d)$  die **Doob-Martin-Kompaktifizierung** der kombinatorischen Markov-Kette  $\mathbf{X}$ . Die Teilmenge  $\partial \mathbf{F} := \bar{\mathbf{F}} \setminus \mathbf{F}$  nennen wir den **Doob-Martin-Rand** zu  $\mathbf{X}$ . Die Metrik  $d$  setzen wir auf übliche Weise auf die Vervollständigung  $\bar{\mathbf{F}}$  fort. Wir erhalten zudem wegen der Definition der Metrik  $d$  direkt:

**KOROLLAR 2.8** Die Menge  $\mathbf{F}$  ist diskret in  $(\bar{\mathbf{F}}, d)$  und  $\partial \mathbf{F}$  ist eine abgeschlossene Menge.

*Beweis.* Wegen des zweiten Terms in (2.5) der Metrik  $d$  gilt für  $\alpha \in \partial \mathbf{F}$  und eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

die gegen  $\alpha$  konvergiert, dass

$$d(x, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) \geq w(x)$$

für alle  $x \in \mathbf{F}$ . Damit ist wieder  $B_{w(x)}(x) = \{x\}$ , also  $\mathbf{F}$  diskret und offen, und demzufolge  $\partial\mathbf{F}$  abgeschlossen.  $\square$

Wegen

$$|K(x, y) - K(x, z)| \leq \frac{c_x}{w(x)} d(y, z)$$

ist die Abbildung  $y \mapsto K(x, y)$  gleichmäßig stetig auf  $\mathbf{F}$  für alle  $x \in \mathbf{F}$  und lässt sich nach [Jän05, Lemma S. 68] stetig auf  $\bar{\mathbf{F}}$  fortsetzen. Für ein  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  nennen wir  $K(x, \alpha)$  den **erweiterten Martin-Kern**. Wir nennen  $\mathbf{X}$  bzw.  $\mathbf{P}$  **lokalendlich**, falls für alle  $x \in \mathbf{F}$

$$\#\{y \in \mathbf{F} : p(x, y) > 0\} < \infty$$

gilt. Dies ist natürlich insbesondere der Fall, wenn wir endliche Mengen  $\mathbf{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , vorliegen haben. Ist  $\#\mathbf{F}_n < \infty$ , so gilt dies natürlich auch für den erweiterten Zustandsraum  $\mathbf{F}$ .

**LEMMA 2.9** *Der erweiterte Martin-Kern  $K(\cdot, \alpha)$  ist ein Element in  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$ . Ist die Übergangsmatrix  $\mathbf{P}$  lokalendlich, so gilt  $K(\cdot, \alpha) \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$ . Für eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die in der Doob-Martin-Topologie gegen  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  konvergiert, für die aber  $|y_n|$  nicht gegen  $\infty$  konvergiert, ist  $K(\cdot, \alpha)$  echt superharmonisch.*

*Beweis.* Für ein  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  finden wir nach Satz 2.6 eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , sodass  $K(\cdot, y_n)$  punktweise gegen  $K(\cdot, \alpha)$  konvergiert. Nach Lemma 2.4 ist  $K(\cdot, y_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine superharmonische Funktion, daher ist auch der punktweise Limes eine superharmonische Funktion. Ein Anwenden des Operators  $\mathbf{P}$  liefert uns für  $x \in \mathbf{F}^X$

$$\mathbf{P}K(x, y_n) = \sum_{z \in \mathbf{F}} p(x, z) K(z, y_n).$$

Ist  $\mathbf{P}$  lokalendlich, so können wir wegen der Endlichkeit der Summe Grenzwertbildung und Summation vertauschen und erhalten, dass  $K(\cdot, \alpha)$  harmonisch ist.

Für eine Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die in der Doob-Martin-Topologie gegen  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  konvergiert, für die aber  $|y_n|$  nicht gegen  $\infty$  konvergiert, gibt es zumindest eine Teilfolge  $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , die in der Größe schließlich beschränkt durch ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  bleibt. Dann ist natürlich  $K(x, \alpha) = 0$  für alle  $x \in \mathbf{F}$  mit  $|x| > n_0$ , also ist  $K(\cdot, \alpha)$  echt superharmonisch.  $\square$

Das erste zentrale Resultat der Theorie liefert uns nun die fast sichere Konvergenz einer kombinatorischen Markov-Kette in der Topologie der Doob-Martin-Kompaktifizierung. Auf

dem metrischen Raum  $(\bar{\mathbf{F}}, d)$  betrachten wir als  $\sigma$ -Algebra die von den offenen Mengen erzeugte Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$ . Wegen Korollar 2.8 ist  $\partial\mathbf{F}$  eine messbare Menge.

**SATZ 2.10** *Eine kombinatorische Markov-Kette  $\mathbf{X}$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen eine Zufallsgröße  $\mathbf{X}_\infty$  mit  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_\infty \in \partial\mathbf{F}) = 1$ .*

*Beweis.* Nach Satz 2.6 (b) müssen wir zeigen, dass die Zufallsvariablen  $K(x, \mathbf{X}_n)$ ,  $x \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$ , fast sicher konvergieren. Es sei also  $x \in \mathbf{F}_k$ . Dann haben wir wegen (2.1), dass für  $n > k$

$$\mathbb{E}[K(x, \mathbf{X}_n) | \mathcal{G}_{n+1}] = \mathbb{E}[K(x, \mathbf{X}_n) | \mathbf{X}_{n+1}]$$

gilt. Betrachten wir nun also ein konkretes  $y \in \mathbf{F}_{n+1}^{\mathbf{X}}$ , so folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K(x, \mathbf{X}_n) | \mathbf{X}_{n+1} = y] &= \sum_{z \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{X}}} K(x, z) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = z | \mathbf{X}_{n+1} = y) \\ &= \sum_{z \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{X}}} \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_k = x)} \varrho_k^n(x, z) \varrho(z, y) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_k = x)} \varrho_k^{n+1}(x, y) = K(x, y). \end{aligned}$$

Wir haben also die Gleichheit

$$\mathbb{E}[K(x, \mathbf{X}_n) | \mathcal{G}_{n+1}] = K(x, \mathbf{X}_{n+1}).$$

Die Kette der  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{G}_n \supset \mathcal{G}_{n+1} \supset \dots$  ist absteigend. Für alle  $x \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$  ist daher

$$(K(x, \mathbf{X}_n), \mathcal{G}_n)_{n > |x|}$$

ein Rückwärtsmartingal. Nach dem bekannten Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale (siehe z.B. [Kle06, Satz 12.14]) konvergiert  $K(x, \mathbf{X}_n)$  für alle  $x \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$  fast sicher (und sogar in  $L^1$ ) gegen eine Zufallsvariable  $K(x, \mathbf{X}_\infty)$ . Die Markov-Kette  $\mathbf{X}$  verlässt (sogar sicher) wegen der Raum-Zeit-Eigenschaft jede endliche Teilmenge und daher hat der Grenzwert  $\mathbf{X}_\infty$  fast sicher Werte in  $\partial\mathbf{F}$ .  $\square$

Wir möchten die Verteilung des fast sicheren Grenzwertes  $\mathbf{X}_\infty$ , die **Austrittsverteilung** der Kette  $\mathbf{X}$ , genauer bestimmen. Zunächst können wir aus Lemma 2.3 folgern, dass die Austrittsverteilung der Mischung zweier kombinatorischer Markov-Ketten die Mischung der zugehörigen Austrittsverteilungen ist:

**KOROLLAR 2.11** *Für zwei harmonische Funktionen  $h_1, h_2 \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  und  $\alpha \in [0, 1]$  gilt*

$$\mathcal{L}(\mathbf{X}_\infty^{\alpha h_1 + (1-\alpha)h_2}) = \alpha \mathcal{L}(\mathbf{X}_\infty^{h_1}) + (1-\alpha) \mathcal{L}(\mathbf{X}_\infty^{h_2}).$$

*Beweis.* Dies folgt aus Lemma 2.3 und Satz 2.10.  $\square$

Die Austrittsverteilung können wir nach Satz 2.10 als ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\partial\mathbf{F}, \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}})$  auffassen. Weiter definieren wir für  $x \in \mathbf{F}_n^X$ ,  $y \in \mathbf{F}_m^X$ ,

$$\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_m = y) := \mathbb{P}(\mathbf{X}_m = y \mid \mathbf{X}_n = x),$$

die bedingte Verteilung der kombinatorischen Markov-Kette  $\mathbf{X}$ , gegeben, dass diese zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$  in  $x$  ist.

**SATZ 2.12** Für alle Elemente  $x \in \mathbf{F}^X$  und alle  $B \in \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}}$  gilt

$$\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_\infty \in B) = \int_B K(x, \alpha) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}(\alpha).$$

Insbesondere ist der erweiterte Martin-Kern  $K(x, \cdot)$  die Radon-Nikodym-Dichte  $\frac{d\mathbb{P}_x^{\mathbf{X}_\infty}}{d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}}$ .

*Beweis.* Die Verteilung von  $\mathbf{X}_\infty$  mit Startverteilung  $\delta_x$  ist natürlich absolut stetig bezüglich der Verteilung von  $\mathbf{X}_\infty$  mit Startverteilung  $\delta_e$ , da wir „später starten“. Außerdem wissen wir aus Satz 2.10, dass

$$\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_\infty \in \partial\mathbf{F}) = \mathbb{P}_e(\mathbf{X}_\infty \in \partial\mathbf{F}) = 1 \quad (2.6)$$

gilt. Zwei Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  und  $\nu$  auf einem topologischen Raum  $\Omega$  mit Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  stimmen überein, falls  $\mu(f) = \nu(f)$  für alle beschränkten gleichmäßig stetigen Funktionen  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  gilt ([Bil99, Theorem 1.2]). Sei also  $f : \bar{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beschränkte stetige Funktion und wegen der Kompaktheit von  $\bar{\mathbf{F}}$  gleichmäßig stetige Funktion. Einfache Umformungen liefern für  $x \in \mathbf{F}_m^X$ ,  $n \geq m$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(f(\mathbf{X}_n)) &= \sum_{y \in \mathbf{F}_n} f(y) \mathbb{P}_x(\mathbf{X}_n = y) = \sum_{y \in \mathbf{F}_n} f(y) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_m = x) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{F}_n} f(y) \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_m = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y) \\ &= \sum_{y \in \mathbf{F}_n} f(y) K(x, y) \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y) = \mathbb{E}_e(f(\mathbf{X}_n) K(x, \mathbf{X}_n)). \end{aligned}$$

Wegen der Beschränktheit von  $f$  und  $K(x, \cdot)$  können wir den Satz der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten dann

$$\mathbb{E}_x(f(\mathbf{X}_\infty)) = \mathbb{E}_e(f(\mathbf{X}_\infty) K(x, \mathbf{X}_\infty)). \quad (2.7)$$

Indikatorfunktionen können von stetigen Funktionen approximiert werden. Die Gleichung

(2.7) wird dann zu

$$\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_\infty \in B) = \int_B K(x, \alpha) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}(\alpha)$$

für alle offenen Mengen  $B \in \partial\mathcal{F}$ . Da die Borel- $\sigma$ -Algebra von den offenen Mengen erzeugt wird, folgt zusammen mit (2.6) die gewünschte Aussage.  $\square$

Mit den bedingten Verteilungen erhalten wir noch eine andere Charakterisierung der Konvergenz in der Doob-Martin-Theorie. Ein Argument dieser Art findet sich auch in [Föl75], wo es im Zusammenhang mit stochastischen Feldern verwendet wird.

**SATZ 2.13** *Eine kombinatorische Markov-Kette  $\mathbf{X}$  konvergiert genau dann fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen eine Zufallsgröße  $\mathbf{X}_\infty$ , wenn die bedingten Verteilungen  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}_n}$  fast sicher schwach konvergieren.*

*Beweis.* Für die speziellen Zylindermengen

$$A_{(x_1, \dots, x_k)} := \{\mathbf{X}_1 = x_1, \dots, \mathbf{X}_k = x_k\}.$$

erhalten wir für  $n \geq k$  und beliebiges  $x_n \in \mathbf{F}_n$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{x_n}(A_{(x_1, \dots, x_k)}) &= \frac{\mathbb{P}_e(\mathbf{X}_1 = x_1, \dots, \mathbf{X}_k = x_k, \mathbf{X}_n = x_n)}{\mathbb{P}_e(\mathbf{X}_n = x_n)} \\ &= \mathbb{P}_e(A_{(x_1, \dots, x_k)}) \frac{\mathbb{P}_e(\mathbf{X}_n = x_n \mid \mathbf{X}_k = x_k)}{\mathbb{P}_e(\mathbf{X}_n = x_n)} \\ &= \mathbb{P}_e(A_{(x_1, \dots, x_k)}) K(x_k, x_n). \end{aligned}$$

Daher ist  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}_n}(A_{(x_1, \dots, x_k)}) = \mathbb{P}_e(A_{(x_1, \dots, x_k)}) K(x_k, \mathbf{X}_n)$  und die Verteilung  $\mathbb{P}_{\mathbf{X}_n}$  konvergiert genau dann schwach für  $\mathbb{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ , wenn  $\mathbf{X}_n$  fast sicher in der Doob-Martin-Topologie konvergiert.  $\square$

Die Austrittsverteilung der  $\mathbf{h}$ -transformierten Prozesse  $\mathbf{X}^{\mathbf{h}}$  dient aber nicht nur dazu, die Verteilung bei späterem Start dieses Prozesses zu erhalten, sondern auch um harmonische Funktionen zu beschreiben.

**SATZ 2.14** *Sei  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine harmonische Funktion. Dann gilt die Integraldarstellung*

$$\mathbf{h}(x) = \int_{\partial\mathbf{F}^{\mathbf{X}}} K(x, \alpha) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}}}(\alpha) = \mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}})), \quad \forall x \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}.$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst  $\mathbf{h} \equiv 1$ . Im Beweis zu Satz 2.10 haben wir schon gesehen, dass  $K(x, \mathbf{X}_n)$  in  $L^1$  gegen  $K(x, \mathbf{X}_\infty)$  konvergiert. Daher konvergieren auch die ersten Momente,

d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_n)) = \mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_\infty)).$$

Für  $n \geq |x|$  erhalten wir

$$\mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_n)) = \sum_{y \in \mathbf{F}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y) \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y \mid \mathbf{X}_{|x|} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = y)} = 1,$$

demnach wie gewünscht  $\mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_\infty)) = 1$ . Für andere  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  ist nach Definition der  $\mathbf{h}$ -transformierten Kette

$$K^{\mathbf{h}}(x, y) = \frac{1}{\mathbf{h}(x)} K(x, y) \quad (2.8)$$

für  $\mathbf{h}(x) > 0$  und 0 sonst. Für  $x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{h}}$  erhalten wir das Resultat analog wegen

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(K^{\mathbf{h}}(x, \mathbf{X}_n^{\mathbf{h}})) = \mathbb{E}(K^{\mathbf{h}}(x, \mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}})) = \frac{1}{\mathbf{h}(x)} \mathbb{E}(K(x, \mathbf{X}_\infty)).$$

Für  $x \notin \mathbf{F}^{\mathbf{h}}$  gilt natürlich  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{|y|}^{\mathbf{h}} = y) = 0$  für alle  $y \in \mathbf{F}^{\mathbf{X}}$  mit  $\mathbb{P}(\mathbf{X}_{|y|} = y \mid \mathbf{X}_{|x|} = x) > 0$ . Daher konvergiert  $K(x, \mathbf{X}^{\mathbf{h}})$  fast sicher gegen 0 und wir erhalten auch für diese  $x$  die gewünschte Darstellung.  $\square$

Für die erweiterten Martin-Kerne gilt natürlich ebenso die Gleichung (2.8). Wir können in Satz 2.14 statt der Austrittsverteilung auch ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_s$  auf  $\partial\mathbf{F}$  verwenden:

**LEMMA 2.15** *Es sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\partial\mathbf{F}, \mathcal{B}_{\partial\mathbf{F}})$ . Dann ist*

$$\mathbf{s}(x) := \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \alpha) d\mu(\alpha), \quad x \in \mathbf{F}$$

ein Element von  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$ .

*Beweis.* Die Normiertheit folgt aus  $K(e, \cdot) \equiv 1$ . Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz können wir für  $x \in \mathbf{F}_n$

$$\mathbf{P}\mathbf{s}(x) = \sum_{y \in \mathbf{F}_{n+1}} p(x, y) \mathbf{s}(y) = \sum_{y \in \mathbf{F}_{n+1}} \int_{\partial\mathbf{F}} p(x, y) K(y, \alpha) d\mu_s(\alpha)$$

Integration und Summation vertauschen. Nach Lemma 2.4 sind die erweiterten Martin-Kerne

$$\sum_{y \in \mathbf{F}_{n+1}} p(x, y) K(y, \alpha) \leq K(x, \alpha)$$

superharmonisch, und folglich auch  $\mathbf{s}$ .  $\square$

Sind wir in der Situation, dass  $\mu$  auf die  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  konzentriert ist, für die  $K(\cdot, \alpha)$  harmonisch ist, so ist  $x \mapsto \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \alpha) d\mu(\alpha)$  wieder harmonisch. Angenommen, es gilt

$$1 = \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \alpha) d\mu(\alpha), \quad \forall x \in \mathbf{F}.$$

Aus Satz 2.12 oder Satz 2.14 folgt, dass

$$1 = \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \alpha) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}^\infty}(\alpha), \quad \forall x \in \mathbf{F},$$

gilt. Wir haben also für  $\mathbf{h} \equiv 1$  zwei Integraldarstellungen. Können wir daraus schließen, dass  $\mu = \mathbb{P}^{\mathbf{X}^\infty}$  gilt? Hierzu brauchen wir einen weiteren Begriff. Eine normierte, harmonische Funktion  $\mathbf{h}$  heißt **minimal**, falls für alle normierten harmonischen Funktionen  $\mathbf{h}_1$  mit  $\mathbf{h}_1 \leq \mathbf{h}$  folgt, dass  $\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}$ . Minimale harmonische Funktionen nennen wir auch **extremale** harmonische Funktionen, denn es lässt sich zeigen:

**SATZ 2.16** Die Extrempunkte  $\partial\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  der konvexen Menge  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  lassen sich zerlegen in

$$\partial\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X}) = \{K_{\mathbf{X}}(\cdot, y) : y \in \mathbf{F}\} \cup \{\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X}) : \mathbf{h} \text{ ist minimal}\}.$$

*Beweis.* [Woe09, Theorem 7.6] □

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen den minimalen harmonischen Funktionen und den erweiterten Martin-Kernen:

**SATZ 2.17** Es sei  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine minimale harmonische Funktion. Dann existiert ein  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$ , sodass  $\mathbf{h} = K(\cdot, \alpha)$ .

*Beweis.* [Woe09, Theorem 7.50] Wir wissen aus Satz 2.14, dass sich die minimale harmonische Funktion  $\mathbf{h}$  darstellen lässt durch

$$\mathbf{h}(x) = \int_{\partial\mathbf{F}^\mathbf{X}} K(x, \gamma) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}^\mathbf{h}}(\gamma).$$

Es sei  $B \in \mathcal{B}_{\partial\mathbf{F}}$  eine Borel-Menge, für die  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}^\mathbf{h}}(B) \in (0, 1)$  gilt. Dann definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_B(x) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_\infty^\mathbf{h} \in B)} \int_B K(x, \gamma) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}^\mathbf{h}}(\gamma), \\ \mathbf{h}_{B^c}(x) &= \frac{1}{1 - \mathbb{P}(X_\infty^\mathbf{h} \in B)} \int_{B^c} K(x, \gamma) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}^\mathbf{h}}(\gamma), \end{aligned}$$

die natürlich normiert und superharmonisch sind und die eine Zerlegung

$$\mathbf{h} = \mathbb{P}(X_\infty^{\mathbf{h}} \in B)\mathbf{h}_B + (1 - \mathbb{P}(X_\infty^{\mathbf{h}} \in B))\mathbf{h}_{B^c}$$

liefern. Nach Satz 2.16 gilt folglich  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_B = \mathbf{h}_{B^c}$ . Insbesondere ist

$$\int_B \mathbf{h}(x) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}}}(\gamma) = \mathbf{h}(x)\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}}}(B) = \int_B K(x, \gamma) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}}}(\gamma) \quad (2.9)$$

für alle Borel-Mengen  $B \in \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}}$ , denn für Borel-Mengen mit  $\mathbb{P}(X_\infty^{\mathbf{h}} \in B) \in \{0, 1\}$  gilt die Gleichung (2.9) trivialerweise. Daher können wir

$$\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}}}(\{\alpha \in \partial\mathbf{F} : K(\cdot, \alpha) = \mathbf{h}\}) = 1 \quad (2.10)$$

folgern. Wegen unserer Konstruktion der Doob-Martin-Kompaktifizierung kann diese Menge nur einen Punkt enthalten, d.h., es gibt ein  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  mit  $h = K(\cdot, \alpha)$ .  $\square$

Wir bezeichnen

$$\partial\mathbf{F}_{\min} := \{\alpha \in \partial\mathbf{F} : K(\cdot, \alpha) \text{ ist minimal}\}$$

als den *minimalen Martin-Rand*. Dieser ist eine Borel-Menge ([Woe09, Lemma 7.52]).

**KOROLLAR 2.18** *Ein Punkt  $\alpha \in \partial\mathbf{F}$  ist genau dann im minimalen Rand  $\partial\mathbf{F}_{\min}$  enthalten, wenn  $\mathcal{L}(\mathbf{X}_\infty^{K(\cdot, \alpha)}) = \delta_\alpha$  gilt.*

*Beweis.* Wir folgern sofort aus Gleichung (2.10) im Beweis zu Satz 2.17, dass die Bedingung notwendig ist.

Sei umgekehrt  $\mathcal{L}(\mathbf{X}_\infty^{K(\cdot, \alpha)}) = \delta_\alpha$ . Angenommen,  $K(\cdot, \alpha)$  ist harmonisch, aber nicht minimal bzw. ein Extrempunkt der Menge  $\partial\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$ . Dann gibt es zwei normierte harmonische Funktionen  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  mit  $\mathbf{h}_1 \neq \mathbf{h}_2$  und ein  $\beta \in (0, 1)$  mit

$$K(\cdot, \alpha) = \beta\mathbf{h}_1 + (1 - \beta)\mathbf{h}_2.$$

Nach Korollar 2.11 ist dann

$$\delta_\alpha = \mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{K(\cdot, \alpha)}} = \beta\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_1}} + (1 - \beta)\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_2}},$$

also  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_1}} = \mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_2}} = \delta_\alpha$ . Satz 2.14 liefert uns nun

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1(x) &= \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \gamma) \mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_1}}(\gamma) = K(x, \alpha), \\ \mathbf{h}_2(x) &= \int_{\partial\mathbf{F}} K(x, \gamma) \mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty^{\mathbf{h}_2}}(\gamma) = K(x, \alpha), \end{aligned}$$

für  $x \in \mathbb{F}$  im Widerspruch zu unserer Annahme, dass  $\mathbf{h}_1$  und  $\mathbf{h}_2$  verschieden sind.  $\square$

Mithilfe dieses Korollars und Resultaten aus der Choquet-Theorie können wir nun das zweite Hauptresultat - neben der fast sicheren Konvergenz in der Doob-Martin-Topologie - beweisen. Die Austrittsverteilung ist das eindeutige darstellende Maß der Funktion  $\mathbf{h} \equiv 1$ , das auf den minimalen Rand konzentriert ist.

**SATZ 2.19** *Es sei  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine normierte harmonische Funktion. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{\mathbf{h}}$  auf  $(\partial\mathbf{F}, \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}})$  mit*

$$\mu_{\mathbf{h}}(\partial\mathbf{F} \setminus \partial\mathbf{F}_{\min}) = 0,$$

sodass

$$\mathbf{h}(x) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} K(x, \alpha) d\mu_{\mathbf{h}}(\alpha), \quad x \in \mathbf{F}.$$

Dieses Maß ist gegeben durch  $\mathcal{L}(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}})$ .

*Beweis.* Wir wollen einen Satz aus der Choquet-Theorie verwenden und weisen deswegen zuerst nach, dass  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  kompakt und metrisierbar ist. Es sei  $(\mathbf{s}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})^{\mathbb{N}}$  eine Folge superharmonischer Funktionen, die in der Produkttopologie gegen eine Funktion  $\mathbf{s} : \mathbf{F} \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann gilt mit dem Lemma von Fatou, dass

$$\mathbf{P}\mathbf{s} = \mathbf{P} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\mathbf{s}_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbf{s}_n = \mathbf{s}. \quad (2.11)$$

Die Menge  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  ist daher abgeschlossen. Außerdem erhalten wir dadurch, dass die Funktionen normiert sind, für  $x \in \mathbf{F}_n$

$$1 = \mathbf{s}(e) \geq \mathbf{P}^n \mathbf{s}(x) \geq \mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x) \mathbf{s}(x) = c_x \mathbf{s}(x).$$

Dies bedeutet, dass nicht nur die Martin-Kerne in  $x$  durch  $c_x$  nach oben beschränkt sind. Die normierten superharmonischen Funktionen sind folglich in  $\prod_{x \in \mathbf{F}} [0, c_x]$  enthalten, einer nach dem Satz von Tychonov kompakten Menge. Da  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  abgeschlossen ist, ist die Menge auch kompakt. Die Metrisierbarkeit folgt ebenso aus dem Enthaltensein in  $\prod_{x \in \mathbf{F}} [0, c_x]$ . Nach dem Satz von Choquet ([Phe66, Theorem S. 15]) lässt sich jedes Element aus der kompakten, konvexen und metrisierbaren Menge  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  als Mischung über die Extrempunkte darstellen. Für alle  $\mathbf{s} \in \mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  existiert nach Satz 2.16 ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{\mathbf{s}}$  auf  $\bar{\mathbf{F}}$  mit  $\mu_{\mathbf{s}}(\mathbf{F} \cup \partial\mathbf{F}_{\min}) = 1$ , sodass

$$\mathbf{s}(x) = \int_{\bar{\mathbf{F}}} K(x, \alpha) d\mu_{\mathbf{s}}(\alpha)$$

für alle  $x \in \mathbf{F}$ . Aus Lemma 2.4 wissen wir, dass die Funktionen  $K(\cdot, y)$ ,  $y \in \mathbf{F}$ , aus der Menge der Extrempunkte von  $\mathfrak{S}_1^+(\mathbf{X})$  echt superharmonisch sind. Für normierte harmonische

Funktionen  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  gibt es also ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_{\mathbf{h}}$  mit  $\mu_{\mathbf{h}}(\partial\mathbf{F}_{\min}) = 1$  und

$$\mathbf{h}(x) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} K(x, \alpha) d\mu_{\mathbf{h}}(\alpha)$$

für alle  $x \in \mathbf{F}$ . Daraus können wir für  $B \in \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}}$  folgern, dass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}} \in B) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) d\mu_{\mathbf{h}}(\alpha). \quad (2.12)$$

Der minimale Rand ist eine Borel-Menge und wir erhalten daraus  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}}(\partial\mathbf{F}_{\min}) = 1$ . Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Angenommen, es gäbe zwei unterschiedliche Maße  $\mu_1$  und  $\mu_2$ , die auf den minimalen Rand konzentriert sind und die harmonische Funktion  $\mathbf{h}$  darstellen. Dann müsste es eine Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}_{\min}}$  geben, auf der sich die Maße unterscheiden. Die Gleichung (2.12) und Korollar 2.18 sagen uns, dass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}} \in B) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) d\mu_1(\alpha) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{1}_B(\alpha) d\mu_1(\alpha) = \mu_1(B)$$

und analog

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}} \in B) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) d\mu_2(\alpha) = \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{1}_B(\alpha) d\mu_2(\alpha) = \mu_2(B).$$

Wegen der Eindeutigkeit der Austrittsverteilung erhalten wir einen Widerspruch und das darstellende Maß der harmonischen Funktion  $\mathbf{h}$  ist eindeutig und durch  $\mathbb{P}^{\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}}(\partial\mathbf{F}_{\min}) = 1$  gegeben.  $\square$

Die Gleichung (2.12) des vorangegangenen Beweises zusammen mit Satz 2.12 liefert uns auch die Austrittsverteilung der  $\mathbf{h}$ -transformierten Ketten mit späterem Start:

**KOROLLAR 2.20** Für beliebiges  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  und  $x \in \mathbf{F}^{\mathbf{h}}$  gilt für eine Borel-Menge  $B \in \mathcal{B}_{|\partial\mathbf{F}_{\min}}$

$$\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}} \in B) = \frac{1}{\mathbf{h}(x)} \int_{\partial\mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}_{\infty}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) K(x, \alpha) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}}(\alpha).$$

Wollen wir in konkreten Beispielen die Austrittsverteilung der kombinatorischen Markov-Kette  $\mathbf{X}$  bestimmen, so müssen wir erst ermitteln, welches der minimale Rand der Kette ist. Das Maß, das dann die Funktion konstant 1 über diesem minimalen Rand darstellt, ist nach Satz 2.19 die Austrittsverteilung. Das Nachweisen der Minimalität über die Definition minimaler harmonischer Funktionen kann aber unter Umständen sehr mühsam sein. Deshalb geben wir

ein weiteres Kriterium zum Nachweis der Minimalität an. Wir schreiben

$$\mathcal{T} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{X_n, X_{n+1}, \dots\}$$

für die **terminale  $\sigma$ -Algebra** der Kette  $\mathbf{X}$  und verzichten wiederum auf einen Index, sofern klar ist, um welche Markov-Kette es sich handelt.

**LEMMA 2.21** *Eine Funktion  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  ist genau dann minimal, wenn der Prozess  $\mathbf{X}^{\mathbf{h}}$  eine  $\mathbb{P}$ -triviale terminale  $\sigma$ -Algebra hat, also für alle  $A \in \mathcal{T}$   $\mathbb{P}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in A) \in \{0, 1\}$  gilt.*

*Beweis.* Sei  $\mathbf{h} \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  eine harmonische Funktion und der Prozess  $\mathbf{X}^{\mathbf{h}}$  habe triviale terminale  $\sigma$ -Algebra. Dann konvergiert  $\mathbf{X}^{\mathbf{h}}$  nach Satz 2.10 fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}$ . Offensichtlich gilt die Inklusion  $\sigma(\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}) \subset \mathcal{T}$ . Aus der Trivialität der terminalen  $\sigma$ -Algebra, können wir folgern, dass  $\mathbf{X}_{\infty}^{\mathbf{h}}$  fast sicher konstant ist, was nach Korollar 2.18 genau dann der Fall ist, wenn  $\mathbf{h}$  minimal ist.

Nehmen wir umgekehrt an, dass  $\mathcal{T}$  nicht trivial ist. Dann gibt es eine Borel-Menge  $B \in \mathcal{T}$  mit  $\alpha := \mathbb{P}(X \in B) \in (0, 1)$ . Dann können wir durch

$$\mathbf{h}_1(x) := \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)}, \quad \mathbf{h}_2(x) := \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B^c)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)}, \quad x \in \mathbf{F}_n^{\mathbf{h}}.$$

zwei Funktionen  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathfrak{H}_1^+(\mathbf{X})$  definieren. Diese Funktionen sind harmonisch, denn nach Satz 2.2 gilt  $\mathbf{h}(x) = \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{|x|}^{\mathbf{h}} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{|x|} = x)}$ , und wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{y \in \mathbf{F}} p(x, y) \mathbf{h}_1(y) &= \sum_{y \in \mathbf{F}} p(x, y) \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}} = y \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1} = y)} \\ &= \sum_{y \in \mathbf{F}} p(x, y) \mathbf{h}(y) \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}} = y \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}} = y)} \\ &= \frac{\mathbf{h}(x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)} \sum_{y \in \mathbf{F}} p^{\mathbf{h}}(x, y) \mathbb{P}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B \mid \mathbf{X}_{n+1}^{\mathbf{h}} = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n = x)} \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x)} = \mathbf{h}_1(x). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Der Nachweis, dass  $\mathbf{h}_2$  harmonisch ist, verläuft natürlich analog. Mit diesen beiden harmonischen Funktionen haben wir eine Zerlegung der Funktion  $\mathbf{h}$  gefunden, denn mit obigem  $\alpha$  gilt

$$\mathbf{h} = \alpha \cdot \mathbf{h}_1 + (1 - \alpha) \mathbf{h}_2.$$

Können wir nun ein  $x \in \mathbf{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , finden, sodass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B) \neq \mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B^c),$$

so haben wir eine nichttriviale Zerlegung gefunden und  $\mathbf{h}$  kann nicht minimal sein. Hierfür definieren wir die Funktion  $\mathbf{h}_B$  durch

$$\mathbf{h}_B(x) := \frac{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B)}{\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x)}, \quad x \in \mathbf{F}_n.$$

Wir verfahren wie in (2.13), um zu zeigen, dass  $\mathbf{h}_B$  harmonisch bezüglich  $\mathbf{P}^{\mathbf{h}}$  ist. Analog definieren wir auch  $\mathbf{h}_{B^c}$ . Nach Gleichung (2.3) haben wir für die Verteilungen der transformierten Ketten

$$\mathcal{L}\left(\left(\mathbf{X}^{\mathbf{h}}\right)^{\mathbf{h}_B}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B\right), \quad \mathcal{L}\left(\left(\mathbf{X}^{\mathbf{h}}\right)^{\mathbf{h}_{B^c}}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B^c\right).$$

Die Markov-Ketten sind durch ihre Randverteilungen eindeutig festgelegt. Gälte also für alle  $x \in \mathbf{X}$ , dass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B) = \mathbb{P}(\mathbf{X}_n^{\mathbf{h}} = x \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B^c),$$

so würde auch

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B) = \mathbb{P}(\mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B \mid \mathbf{X}^{\mathbf{h}} \in B^c)$$

gelten - ein Widerspruch. □

Hieraus können wir nun den letzten Satz dieses Abschnitts folgern. Bisher haben wir noch nicht erklärt, warum wir gerade die Doob-Martin-Kompaktifizierung gewählt haben, wenn es nur darum ginge, dass die kombinatorische Markov-Kette in der Topologie dieser Kompaktifizierung fast sicher konvergiert. Wir hätten auch die Alexandroff-Kompaktifizierung wählen können, und alle Ketten wären fast sicher gegen den hinzugefügten Punkte  $\{\infty\}$  konvergiert. Der Vorteil ist, dass unser fast sicherer Grenzwert die terminale  $\sigma$ -Algebra fast sicher erzeugt, wobei fast sichere Gleichheit zweier  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  so definiert sei, dass für alle  $C \in \mathcal{C}$  ein  $D \in \mathcal{D}$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}(C \Delta D) = 0$$

gilt, und für alle  $\tilde{D} \in \mathcal{D}$  ein  $\tilde{C} \in \mathcal{C}$  existiert, sodass

$$\mathbb{P}(\tilde{D} \Delta \tilde{C}) = 0.$$

Wir schreiben hierfür  $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ .  
 $\mathbb{P}$ -f.s.

**SATZ 2.22** Für eine kombinatorische Markov-Kette  $\mathbf{X}$  gilt  $\mathcal{T} \stackrel{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{=} \sigma(\mathbf{X}_\infty)$ .

*Beweis.* Die Inklusion  $\sigma(\mathbf{X}_\infty) \underset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\subset} \mathcal{T}$  ist klar. Sei  $B \in \mathcal{T}$  ein terminales Ereignis. Wir können aus der Darstellung der Randverteilung und dem bisher Gezeigten ohne Weiteres folgern, dass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B) = \int_{\partial \mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}(\alpha)$$

gilt. Außerdem wissen wir aus Lemma 2.21, dass  $\mathbb{P}(\mathbf{X}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) \in \{0, 1\}$  für alle  $\alpha \in \partial \mathbf{F}_{\min}$  gilt. Dementsprechend erhalten wir für die Menge

$$A_B := \left\{ \alpha \in \partial \mathbf{F}_{\min} : \mathbb{P}(\mathbf{X}^{K(\cdot, \alpha)} \in B) = 1 \right\},$$

dass

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B, \mathbf{X}_\infty \in A_B) = \int_{\partial \mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}^{K(\cdot, \alpha)} \in B, \mathbf{X}_\infty^{K(\cdot, \alpha)} \in A_B) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}(\alpha) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in B)$$

und

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B, \mathbf{X}_\infty \in A_B^c) = \int_{\partial \mathbf{F}_{\min}} \mathbb{P}(\mathbf{X}^{K(\cdot, \alpha)} \in B, \mathbf{X}_\infty^{K(\cdot, \alpha)} \in A_B^c) d\mathbb{P}^{\mathbf{X}_\infty}(\alpha) = 0$$

gilt. Zusammengenommen ist also  $\mathbb{P}(\mathbf{X} \in B \triangle \mathbf{X}_\infty \in A_B) = 0$  und wir erhalten die gewünschte Inklusion  $\mathcal{T} \underset{\mathbb{P}\text{-f.s.}}{\subset} \sigma(\mathbf{X}_\infty)$ .  $\square$

## 2.2 Der Doob-Martin-Rand gerichteter, gewichteter Graphen

Wir haben schon in Lemma 2.9 gesehen, dass für eine kombinatorische Familie  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$ , die lokalendlich ist, d.h., es gilt  $\#\mathbb{F}_n < \infty$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die erweiterten Martin-Kerne harmonisch sind. Bei der Konstruktion der Doob-Martin-Kompaktifizierung müssen wir also nur Folgen untersuchen, deren Folgenglieder in der Größe gegen  $\infty$  konvergieren. Die Bezeichnung kombinatorische Markov-Kette bezieht sich in der Literatur auf diesen Spezialfall ([EGW12],[Grü13],[GM15]). Wir wollen in diesem Abschnitt diese Konstruktion vorstellen und den Zusammenhang zur Theorie aus dem vorherigen Abschnitt skizzieren.

Wir untersuchen den lokalendlichen Übergangsgraphen einer kombinatorischen Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{F}$ . Wir betrachten demnach einen unendlichen gerichteten Graphen  $G = (\mathbb{F}, E)$  mit Knotenmenge  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$ . Die Kanten verbinden nur Knoten aus  $\mathbb{F}_n$  mit Knoten aus  $\mathbb{F}_{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir schreiben symbolisch  $v_n \nearrow v_{n+1}$ , falls es eine gerichtete Kante von  $v_n$  nach  $v_{n+1}$  gibt. Außerdem existiert ein ausgezeichnete Ursprung  $\mathbb{F}_1 = \{e\}$ . Wir versehen jede Kante  $e \in E$  mit einem Gewicht  $w : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  und nennen das Paar  $(G, w)$  einen **gerichteten, gewichteten Graphen**. In Anlehnung an die englischsprachige Literatur könnten wir auch von einem gradierten Graphen (*graded graph*) oder einem Verzweigungsgraphen (*branching*

graph) sprechen, und dieser steht im Zusammenhang zu sogenannten Bratelli-Diagrammen ([KOO98],[GK00],[Ker03],[GP05],[Gne11],[GG15]).

Wegen der lokalen Endlichkeit ist es klar, dass es reichen wird, sich auf die Folgen in  $\mathbb{F}$  zu konzentrieren, die mögliche Werte der Markov-Kette  $X$  sind. Daher sei

$$T := \{(v_1, v_2, \dots) : v_n \in \mathbb{F}_n, v_n \nearrow v_{n+1}\}$$

die Menge der unendlichen Pfade in  $G$  versehen mit der Topologie des projektiven Limes. Mithilfe der Gewichtsfunktion  $w$  lassen sich endlichen Pfaden  $t = (t_m, t_{m+1}, \dots, t_n)$  durch Multiplikation der zugehörigen Kantengewichte Pfadgewichte zuordnen, d.h. für  $m \leq n$  sei

$$w(t) := \prod_{i=m}^{n-1} w(t_i, t_{i+1}).$$

Existiert keine Kante zwischen zwei Knoten  $v_m$  und  $v_n$ ,  $m \leq n$ , so setzen wir  $w(v_m, v_n) := 0$ . Für  $v_n \in \mathbb{F}_n$  nennen wir

$$d(v_n) := \sum_{\substack{t=(t_1, \dots, t_n) \\ t_1=e \nearrow \dots \nearrow t_n=v_n}} w(t),$$

die Summe der Gewichte aller endlichen Pfade vom Ursprung nach  $v_n$ , die **Dimension** von  $v_n$ . Für den Ursprung setzen wir  $d(e) = 1$ .

Sei  $\mathfrak{T}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $T$ . Ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  auf  $(T, \mathfrak{T})$  heißt **zentral**, wenn für  $t = (t_1, t_2, \dots) \in T$  und  $n \in \mathbb{N}$

$$P((t_1, \dots, t_{n-1}) | t_n) = \frac{w((t_1, \dots, t_n))}{d(t_n)} \quad (2.14)$$

gilt, sofern die bedingte Wahrscheinlichkeit definiert ist. Dabei sei in kanonischer Weise für  $m \leq n$

$$P((v_m, \dots, v_n)) := P(\{t \in T : t_i = v_i \text{ für } i = m, \dots, n\}).$$

Endliche Pfade mit demselben Endpunkt  $t_n$  haben unter einem zentralen Maß eine Wahrscheinlichkeit proportional zu ihrem Pfadgewicht. Insbesondere haben bei einer Gewichtsfunktion  $w \equiv 1$  alle Pfade mit demselben Endpunkt dieselbe Wahrscheinlichkeit. Außerdem definieren wir eine Funktion  $\varphi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  durch

$$\varphi(v_n) := \frac{P(v_n)}{d(v_n)} = \frac{P((v_1, \dots, v_n))}{w((v_1, \dots, v_n))}, \quad (2.15)$$

wobei nach (2.14) die  $v_i \in \mathbb{F}_i$ ,  $i \in [n-1]$  beliebig sein dürfen. Damit legt  $\varphi$  das Maß  $P$  eindeutig fest.

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{P}$  die Menge aller zentralen Maße auf  $(T, \mathfrak{T})$ . Für jedes  $\varphi$  erhalten wir

die Rückwärtsrekursion mit  $v_n \in \mathbb{F}_n$

$$\begin{aligned} \sum_{v_{n+1} \in \mathbb{F}_{n+1}} w((v_n, v_{n+1})) \varphi(v_{n+1}) &= \sum_{v_{n+1} \in \mathbb{F}_{n+1}} w((v_n, v_{n+1})) \frac{P((v_1, \dots, v_n, v_{n+1}))}{w((v_1, \dots, v_n, v_{n+1}))} \\ &= \frac{P((v_1, \dots, v_n))}{w((v_1, \dots, v_n))} \\ &= \varphi(v_n). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Wir nennen nichtnegative Funktionen  $\varphi$  mit  $\varphi(e) = 1$ , die die obige Gleichung erfüllen, **normierte, nichtnegative harmonische Funktionen** auf dem Paar  $(G, w)$ . Jede normierte, nichtnegative harmonische Funktion definiert ein zentrales Maß auf  $(T, \mathfrak{T})$  und umgekehrt. Auf einem gerichteten, gewichteten Graphen ist die Bestimmung aller normierten harmonischen Funktionen äquivalent zur Bestimmung aller zentralen Maße. Mit  $\mathcal{H}_1^+ = \mathcal{H}_1^+(G)$  bezeichnen wir die Menge der nichtnegativen normierten harmonischen Funktionen auf  $G$ . Beide können wir als Teilmengen des  $\mathbb{R}^{\mathbb{F}}$  mit der dortigen Topologie der punktweisen Konvergenz betrachten.

**SATZ 2.23** Die Mengen  $\mathcal{H}_1^+$  und  $\mathcal{P}$  sind affin homöomorph, d.h., es existiert ein Homöomorphismus  $\Phi : \mathcal{H}_1^+ \rightarrow \mathcal{P}$ , sodass für  $\alpha \in [0, 1]$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1^+$

$$\Phi(\alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2) = \alpha\Phi(\varphi_1) + (1 - \alpha)\Phi(\varphi_2)$$

gilt.

*Beweis.* Es ist klar, dass wir als Bijektion  $\Phi$  die Abbildung wählen, die mit Gleichung (2.15) assoziiert ist. Für eine harmonische Funktion  $\varphi \in \mathcal{H}_1^+$  und  $v \in \mathbb{F}$  sei

$$\Phi : \mathcal{H}_1^+ \rightarrow \mathcal{P}, \quad \Phi(\varphi)(v) = d(v)\varphi(v).$$

Dies liefert ein Element  $P \in \mathcal{P}$ , indem wir  $P(v) := \Phi(\varphi)(v)$  setzen. Dass diese Abbildung bijektiv ist, folgt unmittelbar aus (2.15) und (2.16). Für ein  $\alpha \in [0, 1]$  und zwei harmonische Funktionen  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}_1^+$  ist natürlich für  $v \in \mathbb{F}$

$$\Phi(\alpha\varphi_1 + (1 - \alpha)\varphi_2)(v) = d(v)(\alpha\varphi_1(v) + (1 - \alpha)\varphi_2(v)) = \alpha\Phi(\varphi_1)(v) + (1 - \alpha)\Phi(\varphi_2)(v),$$

also ist die Abbildung affin. Wegen der Lokalendlichkeit können wir analog zum Vorgehen in (2.11) zeigen, dass  $\mathcal{H}_1^+$  abgeschlossen ist. Wegen der Bijektivität wissen wir, dass alle harmonischen Funktionen  $\varphi \in \mathcal{H}_1^+$  die Gestalt aus (2.15) für ein zentrales Maß  $P \in \mathcal{P}$  haben und daher

$$\mathcal{H}_1^+ \subset \prod_{v \in \mathbb{F}} \left[ 0, \frac{1}{d(v)} \right]$$

gilt. Als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist  $\mathcal{H}_1^+$  wieder kompakt. Außerdem haben wir  $\Phi$  punktweise definiert und erhalten deshalb für  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$ , dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(\varphi_n)(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(v)\varphi_n(v) = d(v)\varphi(v) = \Phi(\varphi)(v), \quad v \in \mathbb{F}.$$

Die affine, bijektive Abbildung  $\Phi$  ist also stetig. Stetige, bijektive Abbildungen von einem kompakten in einen Hausdorff-Raum sind automatisch Homöomorphismen (Lemma A.6).  $\square$

**KOROLLAR 2.24** *Die Mengen  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{H}_1^+$  sind Choquet-Simplizes, d.h. konvexe, kompakte Mengen, bei denen jeder Punkt als eindeutige Mischung der Extrempunkte geschrieben werden kann.*

*Beweis.* Wir haben schon im Beweis zu Satz 2.23 gesehen, dass die Menge  $\mathcal{H}_1^+$  kompakt ist. Die Konvexität und Metrisierbarkeit sind klar. Wir verfahren dann wie im Beweis zu Satz 2.19. Das Bild eines Choquet-Simplex unter einem affinen Homöomorphismus ist wieder ein Choquet-Simplex, also folgt der zweite Teil aus Satz 2.23.  $\square$

Die Randwerttheorie der gerichteten, gewichteten Graphen fragt nach den Extrempunkten der Simplizes aus dem vorherigen Korollar und deren geometrischer Beschreibung. Auch wir haben in dieser Konstruktion keine ausgezeichnete Markov-Kette  $X$  angegeben. Allerdings sind die Elemente  $P \in \mathcal{P}$  Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Pfadraum  $(T, \mathfrak{T})$ . Sei also  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein stochastischer Prozess auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit Werten in  $\mathbb{F}$  und Verteilung  $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}$ . Wir nutzen nun die multiplikative Struktur der Gewichtsfunktion.

**LEMMA 2.25** *Ein Prozess  $X$  mit  $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}$  ist eine Markov-Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten*

$$p(v_{n-1}, v_n) = w((v_{n-1}, v_n)) \frac{d(v_{n-1})\mathbb{P}(X_n = v_n)}{d(v_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})} = \frac{w((v_{n-1}, v_n))\varphi(v_n)}{\varphi(v_{n-1})}, \quad n \geq 2.$$

*Beweis.* Mit der Multiplikativität der Pfadgewichte erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = v_n \mid X_{n-1} = v_{n-1}, \dots, X_1 = v_1) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = v_n, X_{n-1} = v_{n-1}, \dots, X_1 = v_1)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1}, \dots, X_1 = v_1)} \\ &= \frac{w((v_1, \dots, v_n))\mathbb{P}(X_n = v_n)d(v_{n-1})}{w((v_1, \dots, v_{n-1}))\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})d(v_n)} \\ &= w((v_{n-1}, v_n)) \frac{d(v_{n-1})\mathbb{P}(X_n = v_n)}{d(v_n)\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})} \end{aligned}$$

und mit einer Zerlegung nach den ersten  $n - 2$  Zuständen und der Verwendung der Gleichung

(2.14)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_n = v_n \mid X_{n-1} = v_{n-1}) \\
&= \frac{\sum_{t=(t_1, \dots, t_{n-2}) \in \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_{n-2}} \mathbb{P}(X_n = v_n, X_{n-1} = v_{n-1}, X_{n-2} = t_{n-2}, \dots, X_1 = t_1)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})} \\
&= \frac{\sum_{t=(t_1, \dots, t_{n-2}) \in \mathbb{F}_1 \times \dots \times \mathbb{F}_{n-2}} \frac{w((t_1, \dots, t_{n-2}, v_{n-1}, v_n))}{d(v_n)} \mathbb{P}(X_n = v_n)}{\mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})} \\
&= w((v_{n-1}, v_n)) \frac{d(v_{n-1}) \mathbb{P}(X_n = v_n)}{d(v_n) \mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1})} = \frac{w((v_{n-1}, v_n)) \varphi(v_n)}{\varphi(v_{n-1})}.
\end{aligned}$$

Der Prozess  $X$  erfüllt also die Markov-Eigenschaft.  $\square$

Aus (2.14) folgt auch unmittelbar, dass alle Markov-Ketten  $Y$  mit Verteilung  $\mathbb{P}^Y \in \mathcal{P}$  dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
\varrho(v_{n-1}, v_n) &= \mathbb{P}(X_{n-1} = v_{n-1} \mid X_n = v_n) = \frac{p(v_{n-1}, v_n) \mathbb{P}^X(v_{n-1})}{\mathbb{P}^X(v_n)} \\
&= \frac{w((v_{n-1}, v_n)) d(v_{n-1})}{d(v_n)}
\end{aligned}$$

haben. Bezeichnen wir mit  $d(v_m, v_n)$  die **Summe aller Pfadgewichte** von  $v_m$  nach  $v_n$ ,  $m \leq n$ , so erhalten wir insbesondere

$$\varrho_m^n(v_m, v_n) = \frac{d(v_m) d(v_m, v_n)}{d(v_n)}. \quad (2.17)$$

Zentrale Maße sind also nichts anderes als Verteilungen von Markov-Ketten auf dem Pfadraum, die alle dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten haben.

**BEMERKUNG 2.26** Die Randverteilungen  $P_n$  eines Maßes  $P$  auf  $(T, \mathfrak{T})$  sind Wahrscheinlichkeitsmaße auf den Räumen  $(\mathbb{F}_n, \mathcal{F}_n)$  mit Borel'scher  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_n$  bezüglich der diskreten Topologie. Mit der Definition der Abbildung  $\varphi$  erhalten wir für  $P \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}
\sum_{v_{n+1} \in \mathbb{F}_{n+1}} \frac{w((v_n, v_{n+1})) d(v_n)}{d(v_{n+1})} P_{n+1}(v_{n+1}) &= \sum_{v_{n+1} \in \mathbb{F}_{n+1}} \varrho(v_n, v_{n+1}) P_{n+1}(v_{n+1}) \\
&= P_n(v_n)
\end{aligned} \quad (2.18)$$

und nennen eine Folge  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die diese Gleichung erfüllt, **kohärent** (vgl. Bemerkung 6.9).

Sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Markov-Kette mit Verteilung  $\mathbb{P}^X \in \mathcal{P}$ . Dann erhalten wir für die

bedingte Verteilung gegeben einen zukünftigen Zustand mit der Markov-Eigenschaft

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m | X_n = v_n) &= \mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m) \frac{\mathbb{P}(X_n = v_n | X_m = v_m)}{\mathbb{P}(X_n = v_n)} \\ &= \mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m) K_X(v_m, v_n),\end{aligned}$$

wobei  $K_X(\cdot, \cdot)$  der Martin-Kern zu  $X$  sei. Nach Satz 2.13 konvergiert diese bedingte Verteilung genau dann schwach gegen eine Verteilung  $P \in \mathcal{P}$ , wenn der Martin-Kern für alle  $v_m \in \mathbb{F}$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert. Es liegt also nahe, die Grenzwerte  $P$  dieser bedingten Verteilungen auch als **Martin-Rand** zu bezeichnen.

Nun können wir aber mit den Zutaten unseres gerichteten, gewichteten Graphen die bedingte Verteilung mit (2.14) auch anders ausdrücken:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m | X_n = v_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m, X_n = v_n)}{\mathbb{P}(X_n = v_n)} \\ &= \sum_{t=(t_{m+1}, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{F}_{m+1} \times \dots \times \mathbb{F}_{n-1}} \frac{\mathbb{P}(X_1 = v_1, \dots, X_m = v_m, X_{m+1} = t_{m+1}, \dots, X_n = v_n)}{\mathbb{P}(X_n = v_n)} \\ &= \sum_{t=(t_{m+1}, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{F}_{m+1} \times \dots \times \mathbb{F}_{n-1}} \frac{w((v_1, \dots, v_m, t, v_n))}{d(v_n)} \\ &= \frac{d(v_m, v_n)}{d(v_n)} w((v_1, \dots, v_m)).\end{aligned}$$

Die bedingte Verteilung konvergiert genau dann schwach gegen eine Verteilung  $P \in \mathcal{P}$ , wenn der „alternative Martin-Kern“

$$\tilde{K}(v_m, v_n) := \frac{d(v_m, v_n)}{d(v_n)}$$

für alle  $v_m, m \in \mathbb{N}$ , konvergiert. Es ist zu beachten, dass dieser Martin-Kern nicht von der Wahl der zentralen Markov-Kette abhängt. Die Menge aller solchen schwachen Grenzwerte sei der Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$ . Für ein  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$  sei  $P_\alpha \in \mathcal{P}$  das zugehörige Maß. Wir schreiben außerdem wieder  $\tilde{K}(\cdot, \alpha)$  für den erweiterten Martin-Kern. Zusammengefasst erhalten wir:

**SATZ 2.27** *Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kombinatorische Markov-Kette mit einer Verteilung  $P \in \mathcal{P}$ . Dann konvergiert  $X_n$  genau dann fast sicher in der zugehörigen Doob-Martin-Topologie, wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(v_m, X_n)}{d(X_n)}$$

*fast sicher für alle  $v_m \in \mathbb{F}$  konvergiert.*

Aus den in Abschnitt 2.1 bewiesenen Aussagen können wir einen wichtigen Satz zur Be-

stimmung der extremalen Punkte der zentralen Maße folgern (siehe [Ker03, Theorem 3, S. 10]):

**SATZ 2.28** Es sei  $P \in \mathcal{P}$  ein Extrempunkt der konvexen Menge  $\mathcal{P}$ . Dann hat die Menge

$$\{t = (t_1, t_2, \dots) \in T : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(v_m, t_n)}{d(e, t_n)} \text{ existiert für alle } v_m \in \mathbb{F}\}$$

das  $P$ -Maß 1.

**BEMERKUNG 2.29** (a) Pfade  $t = (t_1, t_2, \dots) \in T$ , bei denen  $\tilde{K}(v_m, t_n)$  für alle  $v_m \in \mathbb{F}$  konvergiert, werden auch **regulär** genannt. Sie bilden die möglichen Pfade aus  $T$ , auf die jede Markov-Kette mit einer Verteilung  $P \in \mathcal{P}$  konzentriert ist.

(b) Für eine Markov-Kette mit einer Verteilung  $P \in \mathcal{P}$  gilt für eine Menge  $A \in \mathcal{T}$  in der terminalen  $\sigma$ -Algebra der Kette, dass mit  $s \in A$  auch alle  $t \in A$  liegen, die schließlich mit  $s$  übereinstimmen. Nach Lemma 2.21 ist die terminale  $\sigma$ -Algebra trivial, wenn  $P$  extremal ist, und deshalb wird das Maß  $P$  auch häufig **ergodisch** bezüglich der Äquivalenzrelation schließlich übereinstimmender Pfade genannt (siehe [Ker03, S. 10]).

(c) Ist die Gewichtsfunktion  $w \equiv 1$ , so läuft die Bestimmung des Martin-Kerns auf ein Zählen der Pfade hinaus (siehe z.B. Abschnitt 6.1).

Beim Betrachten der  $h$ -Transformierten können wir entweder ein analoges Resultat zu Satz 2.2 angeben oder wir transformieren die Gewichtsfunktion (siehe [Ker03, Section 1.2.2]) Wir betrachten auf einem gerichteten Graphen  $G$  nun zwei Gewichtsfunktionen  $w_1$  und  $w_2$ . Wir nennen die gewichteten Graphen  $(G, w_1)$  und  $(G, w_2)$  **ähnlich**, wenn es eine positive Funktion  $g : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}_+$  gibt, sodass

$$w_2(u, v) = g(u)w_1(u, v) \frac{1}{g(v)}$$

für alle  $u, v \in V$  mit  $u \nearrow v$  gilt. Sind  $(G, w_1)$  und  $(G, w_2)$  zwei ähnliche Graphen, so gilt für die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten für  $u \nearrow v$

$$\begin{aligned} \varrho_{w_2}(u, v) &= \frac{w_2((u, v))d_{w_2}(u)}{d_{w_2}(v)} = \frac{g(u)w_1(u, v) \frac{1}{g(v)} g(e)d_{w_1}(u) \frac{1}{g(u)}}{g(e)d_{w_1}(v) \frac{1}{g(v)}} \\ &= \frac{w_2((u, v))d_{w_2}(u)}{d_{w_2}(v)} = \varrho_{w_1}(u, v). \end{aligned}$$

Zentrale Maße auf ähnlichen gewichteten Graphen haben also dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten. Daher sind die Martin-Ränder ähnlicher gewichteter Graphen homöomorph. Wählen wir als Funktion  $g$  eine zu einem bzgl.  $w_1$  zentralem Maß gehörige harmonische

Funktion  $\varphi$  (das Maß  $P$  muss schwach irreduzibel sein, damit  $\varphi$  positiv ist), so erhalten wir als  $w_2$  die Übergangswahrscheinlichkeiten der zu  $P$  gehörigen Markov-Kette  $X$ . Offensichtlich ist dann  $\tilde{K}_{w_2}(u, v) = K_X(u, v)$ ; der „alternative“ und der gewöhnliche Martin-Kern stimmen überein.

Wir können nun Satz 2.2 umformulieren und erhalten

**PROPOSITION 2.30** ([KER03, PROPOSITION 2, S. 66]) *Es seien  $(G, w_1)$  und  $(G, w_2)$  zwei ähnliche Graphen mit transformierender Funktion  $g$ . Dann gilt für alle  $v \in \mathbb{F}$*

$$g(v) = \frac{d_1(v)}{d_2(v)}.$$

Als Zusammenhang der Abschnitte 2.1 und 2.2 erhalten wir insgesamt

**SATZ 2.31** *Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in der kombinatorischen Familie  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$  und dem gerichteten, gewichteten Übergangsgraphen  $G = (\mathbb{F}, w)$ , wobei*

$$w(v_{n-1}, v_n) = \mathbb{P}(X_n = v_n | X_{n-1} = v_{n-1}), \quad v_{n-1} \in \mathbb{F}_{n-1}, v_n \in \mathbb{F},$$

*sei. Dann ist die Menge aller zentralen Maße  $\mathcal{P}$  auf  $G$  die Menge aller Verteilungen kombinatorischer Markov-Ketten mit Werten in  $\mathbb{F}$  mit denselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten wie  $X$ .*

Gehen wir allerdings nicht von einer ausgezeichneten Markov-Kette  $X$  aus, so ergibt sich ein wesentlicher Unterschied der Herangehensweisen der Abschnitte 2.1 und 2.2. Um dies zu verdeutlichen, benutzen wir ein Beispiel aus [GP05]:

**BEISPIEL 2.32** Wir betrachten einen gerichteten, gewichteten Graphen  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge

$$V := \{\emptyset, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \beta_2, \beta_3, \dots, \gamma_1, \gamma_2, \dots\}.$$

Die Kanten haben alle Gewicht 1 und der Wurzelknoten  $\emptyset$  habe eine Kante zu  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$ ,  $\alpha_i$  und  $\gamma_i$  Kanten zu  $\alpha_{i+1}$  und  $\beta_{i+1}$  bzw.  $\gamma_{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ , und  $\beta_i$  zu  $\beta_{i+1}$  für alle  $i \geq 2$  (siehe Abbildung 2.1). Da alle Kantengewichte gleich 1 sind, müssen wir zur Bestimmung des Martin-Kerns Pfade zählen und erhalten für  $m \leq n$

$$d(\alpha_n) = d(\gamma_n) = d(\alpha_m, \alpha_n) = d(\beta_m, \beta_n) = d(\gamma_m, \gamma_n) = 1,$$

$$d(\beta_n) = 2(n-1), \quad d(\alpha_m, \beta_n) = d(\gamma_m, \beta_n) = 2(n-m),$$

woraus

$$\begin{aligned}\tilde{K}(\alpha_m, \alpha_n) &= \tilde{K}(\gamma_m, \gamma_n) = 1, \\ \tilde{K}(\alpha_m, \gamma_n) &= \tilde{K}(\gamma_m, \alpha_n) = \tilde{K}(\beta_m, \gamma_n) = \tilde{K}(\beta_m, \alpha_n) = 0, \\ \tilde{K}(\alpha_m, \beta_n) &= \tilde{K}(\gamma_m, \beta_n) = \frac{n-m}{2n-2}, \quad \tilde{K}(\beta_m, \beta_n) = \frac{1}{2n-2}.\end{aligned}$$

folgt. Für eine Folge  $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ , konvergiert der Kern  $\tilde{K}(w, v_n)$  genau dann für alle  $w \in V$  bei  $n \rightarrow \infty$ , wenn ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$  existiert, sodass sich  $v_n$  für alle  $n \geq n_0$  auf einem der Strahlen  $\alpha, \beta, \gamma$  befindet. Der Martin-Rand ist also isomorph zur dreielementigen Menge  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Die erweiterten Martin-Kerne sind

$$\begin{aligned}\tilde{K}(v, \alpha) &= \begin{cases} 1, & v = \alpha_m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \tilde{K}(v, \gamma) &= \begin{cases} 1, & v = \gamma_m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ \tilde{K}(v, \beta) &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & v = \alpha_m \vee v = \gamma_m \text{ für ein } m \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}\end{aligned}$$

Dann gilt für das zugehörige zentrale Maß  $P_\beta$

$$P_\beta(X_n = v_n) = \frac{1}{2}P_\alpha(X_n = v_n) + \frac{1}{2}P_\gamma(X_n = v_n).$$

Die Markov-Kette, die schließlich auf den mittleren Strahl konzentriert ist, ist eine Mischung der Ketten, die auf den linken bzw. rechten Strahl konzentriert sind. Dies lässt sich auch anhand der Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten ablesen, denn es gilt nach (2.17)

$$\varrho_m^n(\alpha_m, \beta_n) = \varrho_m^n(\gamma_m, \beta_n) = \frac{n-m}{2(n-1)}, \quad \varrho_m^n(\beta_m, \beta_n) = \frac{m-1}{n-1}.$$

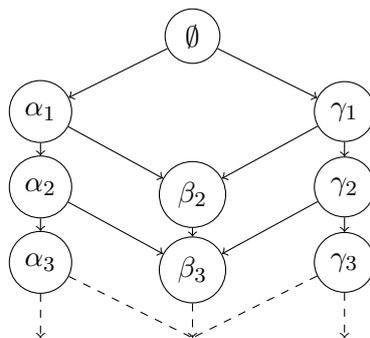


Abbildung 2.1: Ein Ausschnitt des Graphen

Gegeben, dass sich die Kette zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$  in  $\beta_n$  befindet, ist die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt  $m \in \mathbb{N}$  in  $\alpha_m$  bzw.  $\gamma_m$  zu sein, asymptotisch  $\frac{1}{2}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Der Zeitpunkt, an dem die Kette auf den Strahl  $\beta$  wechselt, ist gleichverteilt auf den Möglichkeiten gegeben  $X_n = \beta_n$ , denn für  $l \leq n$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\min\{k : X_k = \beta_k\} = l \mid X_n = \beta_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{l-1} \in \{\alpha_{l-1}, \gamma_{l-1}\}, X_l = \beta_l \mid X_n = \beta_n) \\ &= \mathbb{P}(X_{l-1} \in \{\alpha_{l-1}, \gamma_{l-1}\} \mid X_l = \beta_l) \mathbb{P}(X_l = \beta_l \mid X_n = \beta_n) = \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Der minimale Rand lässt sich mit der zweielementigen Menge  $\{\alpha, \gamma\}$  identifizieren und ist echt kleiner als der Martin-Rand. Für den Graphen  $G$  gilt allerdings:

**PROPOSITION 2.33** *Es gibt kein zentrales Maß  $P$  auf dem Graphen  $G$  des Beispiels 2.32, sodass  $P(v) > 0$  für alle  $v \in V$  gilt.*

*Beweis.* Angenommen, wir haben ein zentrales Maß  $P$  auf dem Pfadraum. Für festes  $n \geq 3$  müssen alle Pfade  $\{\emptyset, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n\}$ ,  $m < n$ , dieselbe Wahrscheinlichkeit haben. Insbesondere haben damit die Pfadstücke  $\{\alpha_{m-1}, \alpha_m, \beta_{m+1}\}$  und  $\{\alpha_{m-1}, \beta_m, \beta_{m+1}\}$  dieselbe Wahrscheinlichkeit. Wegen  $p(\beta_m, \beta_{m+1}) = 1$  und  $p(\alpha_m, \beta_{m+1}) < 1$ , muss folglich  $p(\alpha_{k-1}, \beta_k) < p(\alpha_{k-1}, \alpha_k)$  sein. Daraus folgt, dass

$$\rho_k := p(\alpha_{k-1}, \beta_k) \in (0, 1/2), \quad \text{für alle } k \geq 2.$$

Für  $k \geq 2$  sei  $n_k := \left\lceil \frac{1}{\rho_k} \right\rceil$ . Dann gilt

$$\frac{1}{n_k} \leq \rho_k < \frac{1}{n_k - 1}.$$

Aus der Beziehung  $(1 - \rho_k)\rho_{k+1} = \rho_k$  erhalten wir

$$n_{k+1} = \left\lceil \frac{1}{\rho_{k+1}} \right\rceil = \left\lceil \frac{1 - \rho_k}{\rho_k} \right\rceil = n_k - 1,$$

und damit induktiv

$$\rho_{k+n_k-2} \geq \frac{1}{n_k - n_k - 2} = \frac{1}{2}.$$

Dies ist ein Widerspruch. Es kann also kein schwach irreduzibles Maß  $P$  auf  $G$  geben.  $\square$

In der Herangehensweise aus Abschnitt 2.1 gäbe es keine Markov-Kette, die den Graphen  $G$  als Übergangsgraphen besitzt.

**BEMERKUNG 2.34** Bei Übergangsgraphen, die nicht lokalendlich sind, ist es nach Lemma 2.9

möglich, dass der minimale Rand nicht gleich dem vollen Rand ist, da im minimalen Rand nur harmonische Funktionen liegen. Beispiel 2.32 verdeutlicht, dass es auch im lokalendlichen Fall Beispiele gibt, für die der minimale Rand nicht der volle Martin-Rand ist, nur gab es dort keine zugehörige schwach irreduzible Markov-Kette. Es gibt allerdings auch Beispiele für Raum-Zeit-Ketten, bei denen der minimale und der volle Martin-Rand nicht übereinstimmen, aber eine passende schwach irreduzible Kette existiert (siehe [VM15]). Die Frage, ob der minimale und der volle Rand übereinstimmen, ist in manchen Fällen noch unbeantwortet (siehe z.B. [GK00]), trotz struktureller Ähnlichkeiten zu Beispielen, bei denen diese Frage beantwortet ist (siehe [GG15]).

## 3 | Erste Beispiele

In diesem Kapitel wollen wir anhand erster Beispiele die Theorie erläutern. Dazu untersuchen wir zunächst lokalendliche Markov-Ketten, die in jedem Schritt auf der Menge  $[n]$  gleichverteilt sind, betrachten dann ein Urnenmodell, das als einfachstes, aber nicht triviales Beispiel für eine nicht lokalendliche kombinatorische Markov-Kette dient, und zeigen im letzten Beispiel, dass die Doob-Martin-Topologie in manchen Fällen mit bereits bekannten Topologien übereinstimmt.

### 3.1 Gleichverteilungen auf $[n]$

In diesem Beispiel betrachten wir als kombinatorische Familie die Mengen  $\mathbb{F}_n = \{n\} \times [n]$  mit  $[n] := \{1, \dots, n\}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die erste Komponente gibt den Zeitparameter vor. Natürlich könnten wir diesen auch implizit angeben, indem wir Markov-Ketten auf der Familie  $\tilde{\mathbb{F}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathbb{F}}_n$  mit  $\tilde{\mathbb{F}}_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : i + j = n\}$  betrachten. Da sich in unseren Beispielen allerdings die Konvergenzen in der jeweiligen Doob-Martin-Topologie auf den Zeitparameter beziehen, werden wir die erste Darstellung verwenden. Wir möchten auf dieser Familie die Übergangswahrscheinlichkeiten so definieren, dass wir zu jedem Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{L}(X_n) = \delta_{\{n\}} \otimes \text{unif}[n], \quad (3.1)$$

also in der zweiten Komponente die Gleichverteilung auf  $[n]$  haben. Da es um kombinatorische Markov-Ketten gehen soll, ist klar, dass bei allen uns hier interessierenden Markov-Ketten  $\mathbb{P}(X_1 = (1, 1)) = 1$  gelte.

Zur Bestimmung der Doob-Martin-Kompaktifizierung betrachten wir wegen Satz 2.6 Folgen  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die jede endliche Teilmenge verlassen, deren Zeitparameter folglich gegen  $\infty$  geht:

**LEMMA 3.1** *Es sei  $\mathbb{F}$  eine lokalendliche kombinatorische Familie. Dann erhalten wir für jede Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , die jede endliche Teilmenge schließlich verlässt, dass*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(x_n) = \infty.$$

*Beweis.* Sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  eine Folge, die jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{F}$  schließlich verlässt. Gäbe es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $\phi(x_n) \leq c_0 < \infty$  für unendlich viele  $n \geq n_0$  und ein  $c_0 \in \mathbb{N}$  gälte, so wäre

$$x_n \in \bigcup_{i=1}^{c_0} \mathbb{F}_i =: F \subset \mathbb{F} \quad \text{für unendlich viele } n \geq n_0, \quad \#F < \infty,$$

die Folge verließ die endliche Teilmenge  $F$  also schließlich nicht.  $\square$

### 3.1.1 Unabhängige Zuwächse

Eine erste naive Idee könnte es sein, den nächsten Zustand unabhängig vom momentanen Zustand zum Zeitpunkt  $n$  zufällig und gleichverteilt aus der Menge  $\mathbb{F}_{n+1}$  auszuwählen. Wir erhalten so offensichtlich eine Markov-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , für die  $\mathcal{L}(X_n) = \delta_{\{n\}} \otimes \text{unif}[n]$  gilt. Der Martin-Kern von  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist dann

$$K((m, i), (n, j)) = \frac{\mathbb{P}(X_n = (n, j) \mid X_m = (m, i))}{\mathbb{P}(X_n = (n, j))} = 1$$

für  $(m, i) \in \mathbb{F}_m$ ,  $(n, j) \in \mathbb{F}_n$ ,  $n \geq m$ , weil  $X_n$  und  $X_m$  unabhängig sind. Demzufolge ist die Doob-Martin-Kompaktifizierung gegeben durch die Einpunktkompaktifizierung  $\hat{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ . Dieses Erkenntnis bleibt natürlich nicht auf die vorliegende Familie beschränkt, sondern wir haben allgemein:

**SATZ 3.2** *Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in der kombinatorischen Familie  $\mathbb{F}$ , deren Komponenten  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unabhängig sind. Dann ist die zugehörige Doob-Martin-Kompaktifizierung die Einpunktkompaktifizierung  $\hat{\mathbb{F}} = \mathbb{F} \cup \{\infty\}$ .*

### 3.1.2 Die Bremer-Kette

Als zweite Markov-Kette, die die Bedingung (3.1) erfüllt, betrachten wir den Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{1}{i(i+1)}, & j \leq i, \\ \frac{i}{i+1}, & j = i+1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ , insbesondere hängen die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht vom Zeitparameter  $n$  ab. Die Markov-Kette geht also entweder vom Zustand  $i$  einen Schritt nach oben oder wählt zufällig und gleichverteilt ein  $j \in [i]$ . Die Idee zu dieser Kette stammt von J. Bremer ([Bre10]) und wir nennen sie deswegen **Bremer-Kette**. Für den Nachweis, dass  $X$  die Gleichung (3.1)

erfüllt, benötigen wir noch, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{n}{n+1} \quad (3.2)$$

gilt.

Für  $n = 1$  ist Gleichung (3.1) schon per Definition erfüllt. Für den Schritt von  $n$  nach  $n+1$  erhalten wir mit (3.2)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = (n+1, j)) &= \sum_{(n,i) \in \mathbb{F}_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = (n+1, j) \mid X_n = (n, i)) \mathbb{P}(X_n = (n, i)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{(n,i) \in \mathbb{F}_n} \mathbb{P}(X_{n+1} = (n+1, j) \mid X_n = (n, i)) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=j}^n \frac{1}{i(i+1)} + \frac{j-1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{j-1}{j} \right) \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{n}{n+1} - \frac{j-1}{j} + \frac{j-1}{j} \right) = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

für alle  $j \in [n+1]$ .

**SATZ 3.3** (a) Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , für die  $n_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der Bremer-Kette, wenn  $n_k - j_k$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Der Doob-Martin-Rand  $\partial \mathbb{F}$  der Bremer-Kette  $X$  lässt sich mit  $(\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$  zusammen mit der üblichen Topologie der Einpunktkompaktifizierung der erweiterten natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}_0$  identifizieren. Der minimale Martin-Rand  $\partial \mathbb{F}_{\min}$  entspricht dem vollen Martin-Rand.

(b) Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen  $\{\infty\}$ .

(c) Die erweiterten Martin-Kerne für  $\alpha \in \partial \mathbb{F}$  sind durch  $K(\cdot, \infty) \equiv 1$  für  $\alpha = \infty$  und

$$K((m, i), \alpha) = \begin{cases} i, & m - i = \alpha, \\ 1, & m - i < \alpha, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $\alpha \in \mathbb{N}_0$  gegeben. Bei den  $K(\cdot, \alpha)$ -transformierten Ketten,  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ , friert  $X_{n,1} - X_{n,2}$  fast sicher beim Wert  $\alpha$  ein.

*Beweis.* Wir betrachten die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_m^n((m, i), (n, j))$  für  $n \geq m$ . Nur die Zustände  $(n, j) \in \mathbb{F}_n$  mit  $j \in \{1, \dots, n - m + i\}$  können von  $(m, i)$  aus in  $n - m$  Schritten erreicht werden. Wir behaupten, dass

$$p_m^n((m, i), (n, j)) = \begin{cases} \frac{i}{i + n - m}, & n - j = m - i, \\ \frac{n - m}{(i + n - m - 1)(i + n - m)}, & n - j > m - i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gilt. Dafür setzen wir  $k = n - m$  und machen eine Induktion über  $k$  für

$$\mathbb{P}(X_{m+k} = (m + k, j) \mid X_m = (m, i)) = \begin{cases} \frac{i}{i + k}, & j = i + k, \\ \frac{k}{(i + k - 1)(i + k)}, & j < i + k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $k = 1$  ist dies die Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten. Für den Induktionsschritt  $k \rightarrow k + 1$  zerlegen wir nach dem Wert zum Zeitpunkt  $m + k$ . Um den Zustand  $(m + k + 1, j)$  zu erreichen, muss sich die Kette zum Zeitpunkt  $m + k$  in einem der Zustände aus der Menge  $\{(m + k, l) \in \mathbb{F}_{m+k} : l \in \{j - 1, \dots, i + k\}\}$  befinden. Somit erhalten wir mit (3.1) und der Induktionsvoraussetzung für  $j \in \{1, \dots, i + k\}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{m+k+1} = (m + k + 1, j) \mid X_m = (m, i)) \\ &= \sum_{l=j-1}^{i+k} p_m^{m+k}((m, i), (m + k, l)) \cdot p((m + k, l), (m + k + 1, j)) \\ &= \sum_{l=j}^{i+k-1} \frac{k}{(i + k - 1)(i + k)} \cdot \frac{1}{l(l + 1)} \\ &\quad + p_m^{m+k}((m, i), (m + k, j - 1)) \cdot p((m + k, j - 1), (m + k + 1, j)) \\ &\quad + p_m^{m+k}((m, i), (m + k, i + k)) \cdot p((m + k, i + k), (m + k + 1, j)) \\ &= \frac{k}{(i + k - 1)(i + k)} \left( \frac{i + k - 1}{i + k} - \frac{j - 1}{j} \right) \\ &\quad + \frac{k}{(i + k - 1)(i + k)} \cdot \frac{j - 1}{j} + \frac{i}{i + k} \cdot \frac{1}{(i + k)(i + k + 1)} \\ &= \frac{k(i + k + 1) + i}{(i + k)^2(i + k + 1)} = \frac{k + 1}{(i + k)(i + k + 1)} \end{aligned}$$

und für  $j = i + k + 1$  ergibt sich sofort

$$\mathbb{P}(X_{m+k+1} = (m + k + 1, j) \mid X_m = (m, i)) = \frac{i}{i + k + 1}.$$

Damit erhalten wir den Martin-Kern der Markov-Kette  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$K((m, i), (n, j)) = \begin{cases} \frac{ni}{i+n-m}, & n-j = m-i, \\ \frac{n(n-m)}{(i+n-m-1)(i+n-m)}, & n-j > m-i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $(m, i) \in \mathbb{F}_m$ ,  $(n, j) \in \mathbb{F}_n$ ,  $n \geq m$ .

Wir betrachten eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , die jede endliche Teilmenge schließlich verlässt. Nach Lemma 3.1 folgt  $n_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ . Angenommen, es gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k - j_k = \infty$ . Für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  und alle  $\epsilon > 0$  existiert dann ein  $k(m, i, \epsilon) \in \mathbb{N}$ , sodass

$$|K((m, i), (n_k, j_k)) - 1| < \epsilon$$

für alle  $k \geq k(m, i, \epsilon)$ . Für solche  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  gegen 1. Konvergiert  $n_k - j_k$  gegen ein  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ , d.h., es existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $n_k - j_k = \alpha$  für alle  $k \geq k_0$  ist, dann gilt

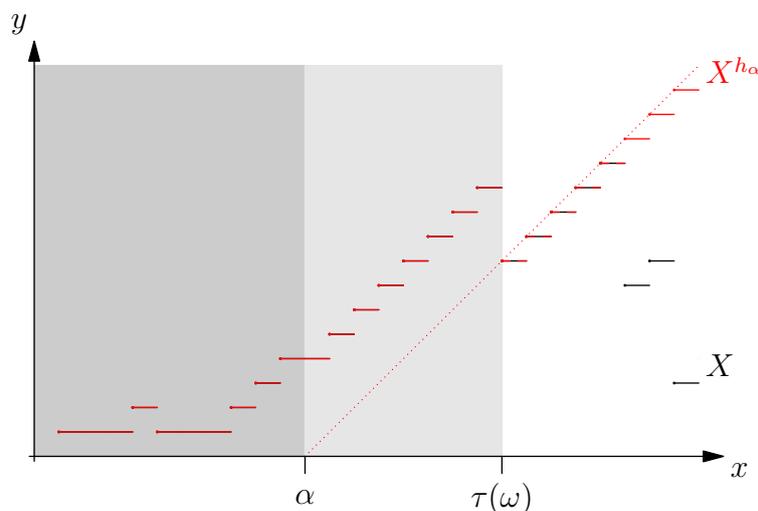
$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = \begin{cases} i, & m - i = \alpha, \\ 1, & m - i < \alpha \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für solche  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$ . Damit haben wir bewiesen, dass die Bedingung der Konvergenz aus Teil (a) hinreichend ist, und haben die Gestalt der zugehörigen erweiterten Martin-Kerne aus (c) gezeigt. Es bleibt, die Notwendigkeit nachzuweisen.

Wir nehmen dafür umgekehrt an, dass  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergiert. Dann gilt entweder  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k - j_k = \infty$  oder es existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $A \subset \mathbb{N}_0$ ,  $\#A < \infty$ , sodass  $n_k - j_k \in A$  für unendlich viele  $k \geq k_0$ . Angenommen, es gibt kein  $k_1 \geq k_0$ , sodass  $n_k - j_k = \alpha$  für ein  $\alpha \in A$  und alle  $k \geq k_1$  gilt. Dann existiert ein  $\alpha_0 \in A$ , mit  $n_k - j_k = \alpha_0$  für unendlich viele  $k \geq k_0$  und  $n_k - j_k \neq \alpha_0$  für unendlich viele  $k \geq k_0$ . Für  $i > 1$  kann somit  $K((i + \alpha_0, i), (n_k, j_k))$  nicht konvergieren. Dies ist ein Widerspruch.

Die Doob-Martin-Kompaktifizierung lässt sich also mit  $\mathbb{F} \cup (\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\})$  identifizieren. Als stetige Fortsetzung des Martin-Kerns erhalten wir  $K(\cdot, \infty) \equiv 1$  und für  $\alpha \in \mathbb{N}_0$

$$K((m, i), \alpha) = \begin{cases} i, & m - i = \alpha, \\ 1, & m - i < \alpha, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Abbildung 3.1: Ein möglicher Pfad von  $X$  und  $X^{h_\alpha}$ 

Die stetigen Fortsetzungen des Martin-Kerns sind nach Lemma 2.9 harmonisch. Wir schreiben abkürzend

$$h_\alpha := K(\cdot, \alpha)$$

für  $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ . Für diese betrachten wir die Übergangswahrscheinlichkeiten der  $h_\alpha$ -transformierten Markov-Kette  $X^{h_\alpha} = (X_n^{h_\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} \left(p^{h_\alpha}\right)_m^n((m, i), (n, j)) &= \frac{1}{h_\alpha(m, i)} p_m^n((m, i), (n, j)) h_\alpha(n, j) \\ &= \begin{cases} p_m^n((m, i), (n, j)), & m - i < \alpha, n - j < \alpha \\ \frac{n - \alpha}{i(i + 1)}, & n = m + 1, m - i < \alpha, n - j = \alpha \\ 1, & n = m + 1, n - j = m - i = \alpha, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Für  $\alpha \in \mathbb{N}_0$  lässt sich die  $h_\alpha$ -transformierte Markov-Kette in drei Zeitbereiche aufteilen. Bis zum Zeitpunkt  $\alpha$  folgt  $X^{h_\alpha}$  der Ursprungskette. Ab den Zeitpunkten  $n > \alpha$  bewegt sich die Kette zwischen den Geraden  $y = x$  und  $y = x - \alpha$ , bis sie schließlich ab einem zufälligen Zeitpunkt  $\tau(\omega)$  nur Werte auf der Geraden  $y = x - \alpha$  annimmt. Der zufällige Zeitpunkt ist der, an dem die Ursprungskette diese Gerade unterschreitet. Ein beispielhafter Pfad findet sich in Abbildung 3.1. Für diese Ketten gilt

$$\mathbb{P}^{h_\alpha}(\tau(\omega) < \infty) = 1.$$

Daraus folgt, dass  $\mathbb{P}^{h_\alpha}(X_\infty = \alpha) = 1$  gilt, und die Prozesse  $X^{h_\alpha}$  haben daher für alle  $\alpha \in$

$\mathbb{N}_0$  triviale terminale  $\sigma$ -Algebra. Die Trivialität der terminalen  $\sigma$ -Algebra der Originalkette ist offensichtlich, denn mit Wahrscheinlichkeit 1 finden unendlich viele Sprünge statt. Daher haben wir nach Lemma 2.21, dass der minimale Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}_{\min}$  gleich dem ganzen Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  ist. Die Austrittsverteilung von  $X$  ist nach Satz 2.19 daher  $\mathcal{L}(X_\infty) = \delta_{\{\infty\}}$ . Aufgrund der Extremalität der Kette  $X$  gilt

$$\mathcal{L}(X_\infty | X_n = (n, j)) = \mathcal{L}(X_\infty), \quad \forall n \in \mathbb{N}, j \in [n];$$

die Austrittsverteilung hängt nicht vom Startzustand ab.  $\square$

### 3.1.3 Sprung auf den höchsten Wert

Die Markov-Kette  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  habe diesmal die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & j = n+1, \\ \frac{n}{n+1}, & j = i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Die Markov-Kette springt also entweder auf den größtmöglichen Wert oder bleibt in  $i$ . Da wir für jeden Zustand genau zwei mögliche Nachfolgezustände haben, erfüllt  $X$  offensichtlich Gleichung (3.1).

**SATZ 3.4** (a) Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , für die  $n_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der obigen Markov-Kette, wenn  $j_k$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  von  $X$  lässt sich mit  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})$  zusammen mit der üblichen Topologie der Einpunktkompaktifizierung der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  identifizieren. Der minimale Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}_{\min}$  entspricht dem vollen Martin-Rand.

(b) Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen  $\{\infty\}$ .

(c) Die erweiterten Martin-Kerne für  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$  sind durch  $K(\cdot, \infty) \equiv 1$  für  $\alpha = \infty$  und

$$K((m, i), \alpha) = \begin{cases} m, & i = \alpha, \\ 1, & m+1 \leq \alpha \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $\alpha \in \mathbb{N}$  gegeben. Bei den  $K(\cdot, \alpha)$ -transformierten Ketten,  $\alpha \in \mathbb{N}$ , friert  $X_{n,2}$  fast sicher bei  $\alpha$  ein.

*Beweis.* Um den Martin-Kern der kombinatorischen Markov-Kette  $X$  zu bestimmen, betrachten wir wieder zuerst die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p_m^n((m, i), (n, j))$  für  $n \geq m$ . Ent-

weder die zweite Komponente der Kette bleibt im Zustand  $i$ , oder sie springt in einen der möglichen Zustände aus der Menge  $\{m+1, \dots, n\}$ . Für den ersten Fall erhalten wir

$$\mathbb{P}(X_n = (n, i) \mid X_m = (m, i)) = \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m+1}{m+2} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Beim zweiten Fall ist  $j = m+k$ ,  $k = 1, \dots, n-m$ , d.h., die Kette muss zum Zeitpunkt  $m+k$  auf jeden Fall springen und kann danach nur die Zustände mit zweiter Komponente  $m+k$  annehmen. Davor sind alle  $2^{k-1}$  Kombinationen aus Sprüngen oder Verbleiben der zweiten Komponente möglich. Damit ergibt sich für  $j = m+k$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = (n, m+k) \mid X_m = (m, i)) &= \left( \sum_{\vec{j}} \frac{j_1 \cdots j_{k-1}}{(m+1) \cdots (m+k-1)} \right) \cdot \frac{1}{m+k} \cdot \frac{m+k}{m+k+1} \cdots \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{(m+1) \cdots (m+k-1)} \left( \sum_{\vec{j}} j_1 \cdots j_{k-1} \right) \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

wobei die Summe über alle  $\vec{j} \in \{(j_1, \dots, j_{k-1}) : j_l \in \{1, m+l-1\}, l \in [k-1]\}$  läuft. Demzufolge erhalten wir

$$\sum_{\vec{j}} j_1 \cdots j_{k-1} = (m+1) \cdots (m+k-1),$$

und damit ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(X_n = (n, j) \mid X_m = (m, i)) = \frac{1}{n},$$

für  $j = m+1, \dots, n$ . Zusammengefasst liefern diese Überlegungen für den Martin-Kern der Markov-Kette  $X$

$$K((m, i), (n, j)) = \begin{cases} m, & j = i, \\ 1, & j \in \{m+1, \dots, n\} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $(m, i) \in \mathbb{F}_m$ ,  $(n, j) \in \mathbb{F}_n$ ,  $n \geq m$ .

Wir verfahren analog zu Abschnitt 3.1.2: Es sei  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  eine Folge, die jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{F}$  schließlich verlässt. Angenommen, es gilt neben  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$  auch  $\lim_{k \rightarrow \infty} j_k = \infty$ . Dann finden wir für jedes  $(m, i) \in \mathbb{F}$  ein  $k(m, i) \in \mathbb{N}$ , sodass  $j_k \geq m+1$  für alle  $k \geq k(m, i)$  ist. Für solche  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$

gegen 1. Konvergiert  $j_k$  gegen ein  $\alpha \in \mathbb{N}$ , dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = \begin{cases} m, & i = \alpha, \\ 1, & m + 1 \leq \alpha \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für solche  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$ .

Nehmen wir wieder umgekehrt an, dass  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergiert. Dann gilt entweder  $\lim_{k \rightarrow \infty} j_k = \infty$  oder es existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $\#A < \infty$ , sodass  $j_k \in A$  für unendlich viele  $k \geq k_0$  gilt. Angenommen, es gibt kein  $k_1 \geq k_0$ , sodass  $j_k = \alpha$  für ein  $\alpha \in A$  und alle  $k \geq k_1$  gilt. Dann existiert ein  $\alpha_0 \in A$ , mit  $j_k = j_0$  für unendlich viele  $k \geq k_0$  und  $j_k \neq \alpha_0$  für unendlich viele  $k \geq k_0$ . Für  $m > 1$  kann somit  $K((m, j_0), (n_k, j_k))$  nicht konvergieren. Wir erhalten wieder einen Widerspruch zu unserer Annahme, dass  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergiert.

Die Doob-Martin-Kompaktifizierung lässt sich also mit  $\mathbb{F} \cup (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$  identifizieren. Als stetige Fortsetzung des Martin-Kerns erhalten wir  $K(\cdot, \infty) \equiv 1$  und für  $\alpha \in \mathbb{N}$

$$K((m, i), \alpha) = \begin{cases} m, & i = \alpha, \\ 1, & m + 1 \leq \alpha \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

Auch hier kürzen wir die erweiterten Martin-Kerne mit  $h_\alpha((m, i)) = K((m, i), \alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}$  ab. Für  $X^{h_\alpha}$  erhalten wir die Übergangswahrscheinlichkeiten

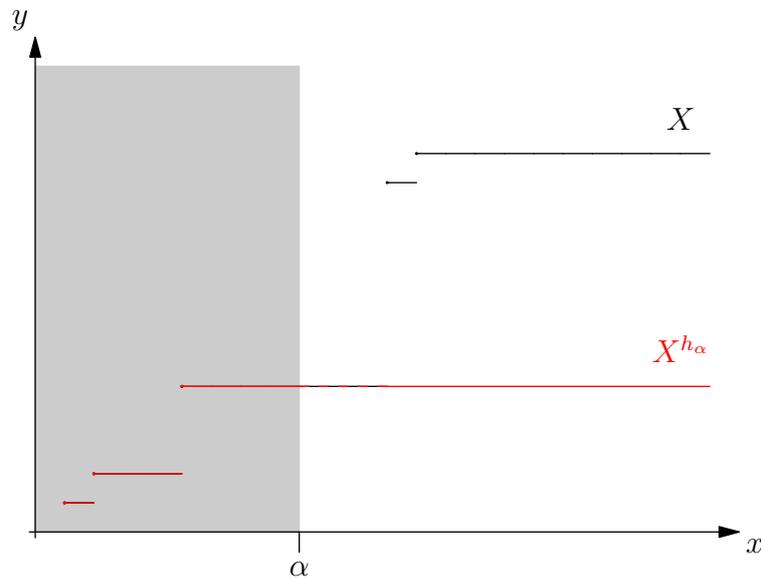
$$\left(p^{h_\alpha}\right)_m^n((m, i), (n, j)) = \begin{cases} p_m^n((m, i), (n, j)), & n < \alpha \\ 1, & j = n = \alpha, n = m + 1, \\ 1, & n > \alpha, n = m + 1, i = j = \alpha, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bis zum (deterministischen) Zeitpunkt  $\alpha - 1$  folgt  $X^{h_\alpha}$  der Ursprungskette, ab  $\alpha$  ist die zweite Komponente konstant  $\alpha$ . Ein beispielhafter Pfad findet sich in Abbildung 3.2. Die Trivialität der terminalen  $\sigma$ -Algebra der  $h_\alpha$ -transformierten Ketten ist daher auch offensichtlich.

Wir erhalten wieder, dass  $X_n \rightarrow X_\infty$  fast sicher konvergiert, wobei

$$\mathcal{L}(X_\infty) = \delta_{\{\infty\}}.$$

□

Abbildung 3.2: Ein möglicher Pfad von  $X$  und  $X^{h_c}$ 

### 3.2 Ein Urnenmodell mit unendlich vielen Farben

Für unser Urnenmodell betrachten wir zunächst eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die alle geometrisch verteilt seien mit Parameter  $\theta \in (0, 1)$ , d.h.  $\mathbb{P}(Z_1 = k) = (1 - \theta)^{k-1}\theta$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Der Satz von Glivenko-Cantelli ([Kal02, Proposition 4.24]) besagt, dass die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Z_i \leq x\}}$$

fast sicher gleichmäßig gegen die Verteilungsfunktion  $F$  der  $Z_i$  konvergiert. Wir wollen nun diesen Sachverhalt mit einer kombinatorischen Markov-Kette verknüpfen.

Sei dazu  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n$  die kombinatorische Familie mit

$$\mathbb{F}_n := \left\{ (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{N}_0^{\infty} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i = n \right\}.$$

Auf dieser betrachten wir die kombinatorische Markov-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = a + e_j \mid X_n = a) = (1 - \theta)^{j-1}\theta, \quad a \in \mathbb{F}_n,$$

wobei  $e_j$  der  $j$ -te Einheitsvektor im  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  sei. Die Zufallsgröße  $X_n$  lässt sich also als Zählvektor

zur Folge der  $Z_i$ 's auffassen, d.h., dass

$$X_{n,j} = \#\{i \in [n] : Z_i = j\} \quad (3.3)$$

gilt. Alternativ ist  $X$  ein Urnenmodell, bei dem in jedem Zug gemäß einer geometrischen Verteilung mit Parameter  $\theta$  eine Kugel mit Nummer  $j \in \mathbb{N}$  hinzugefügt wird.

Betrachten wir zwei Elemente  $a \in \mathbb{F}_m$ ,  $b \in \mathbb{F}_n$ ,  $m \leq n$ , mit  $a \leq b$ , wobei ' $\leq$ ' elementweise zu verstehen ist. Es seien  $i_1, \dots, i_r$  die paarweise verschiedenen Indizes, für die  $a_{i_l} > 0$  gilt. Weiter seien  $j_1, \dots, j_s$  jene mit  $b_{j_l} - a_{j_l} > 0$  und  $k_1, \dots, k_{r+s}$  jene mit  $b_{k_l} > 0$ . Alle Reihenfolgen des Hinzufügens der Kugeln haben dieselbe Wahrscheinlichkeit, sodass wir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m = a) &= \binom{m}{a_{i_1}} ((1-\theta)^{i_1-1}\theta)^{a_{i_1}} \binom{m-a_{i_1}}{a_{i_2}} ((1-\theta)^{i_2-1}\theta)^{a_{i_2}} \\ &\quad \dots \binom{m-\sum_{l=1}^{r-1} a_{i_l}}{a_{i_r}} ((1-\theta)^{i_r-1}\theta)^{a_{i_r}} \\ &= \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} (1-\theta)^{\sum_{l=1}^r a_{i_l}(i_l-1)} \theta^m \end{aligned}$$

erhalten. Dadurch ergeben sich die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \varrho_m^n(a, b) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = b \mid X_m = a) \mathbb{P}(X_m = a)}{\mathbb{P}(X_n = b)} \\ &= \frac{\binom{n-m}{b_{j_1}-a_{j_1}, \dots, b_{j_s}-a_{j_s}} (1-\theta)^{\sum_{l=1}^s (b_{j_l}-a_{j_l})(j_l-1)} \theta^{n-m} \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} (1-\theta)^{\sum_{l=1}^r a_{i_l}(i_l-1)} \theta^m}{\binom{n-m}{b_{k_1}, \dots, b_{k_{r+s}}} (1-\theta)^{\sum_{l=1}^{r+s} b_{k_l}(k_l-1)} \theta^{r+s}} \\ &= \frac{(n-m)! m!}{n!} \frac{b_{i_1}!}{(b_{i_1}-a_{i_1})! a_{i_1}!} \dots \frac{b_{i_r}!}{(b_{i_r}-a_{i_r})! a_{i_r}!} = \frac{1}{\binom{n}{m}} \prod_{l=1}^r \binom{b_{i_l}}{a_{i_l}}. \end{aligned}$$

In unserem Urnenmodell ist die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeit die Anzahl der Möglichkeiten  $n - m$  Kugeln zu entfernen, sodass aus der Konfiguration  $b$  die Konfiguration  $a$  entsteht, geteilt durch die Gesamtzahl aller Möglichkeiten,  $n - m$  Kugeln aus der Urne zu entfernen. Speziell für  $m = n - 1$  ist

$$\mathbb{P}(X_{n-1} = a \mid X_n = a + e_j) = \frac{a_j + 1}{n}. \quad (3.4)$$

In jedem Rückwärtsschritt entnehmen wir zufällig und gleichverteilt eine Kugel.

Der Martin-Kern zur Markov-Kette  $X$  ist dann für  $a \in \mathbb{F}_m$ ,  $b \in \mathbb{F}_n$ ,  $m \leq n$ , mit  $a \leq b$ , wie üblich gegeben durch

$$K(a, b) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = a)} \varrho_m^n(a, b).$$

**SATZ 3.5** (a) Die Doob-Martin-Kompaktifizierung  $\bar{\mathbb{F}}$  lässt sich mit

$$\mathbb{F} \cup \left\{ \beta \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1 \right\} \cup \{(b, i) : b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{N}, i > |b|\}$$

identifizieren. Der Martin-Rand ist demnach

$$\left\{ \beta \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1 \right\} \cup \{(b, i) : b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{N}, i > |b|\}.$$

Eine Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn die Anteile  $\frac{b_{k,j}}{|b_k|}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , punktweise in  $\mathbb{R}$  konvergieren.

(b) Der minimale Rand ist der unendlich-dimensionale Wahrscheinlichkeitssimplex

$$\Delta_{\infty} := \left\{ \beta \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i = 1 \right\}.$$

(c) Es gilt  $\mathcal{L}(X_{\infty}) = \delta_{\beta}$  mit  $\beta_j = (1 - \theta)^{j-1} \theta$ .

*Beweis.* Um die Doob-Martin-Kompaktifizierung dieser Kette zu bestimmen, betrachten wir wegen Satz 2.6 nun Folgen  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , die jede Teilmenge schließlich verlassen, und wollen untersuchen, für welche dieser Folgen der Martin-Kern  $K(a, b_k)$  für alle  $a \in \mathbb{F}$  mit  $k \rightarrow \infty$  konvergiert.

Wir nehmen zunächst an, dass die Komponentensumme  $|b_k|$  der Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  schließlich beschränkt bleibt, d.h., es existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $|b_k| \leq n_0$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Wir nehmen zusätzlich an, dass die Komponenten des Vektors  $b_k$  konvergieren, wir also

$$\forall j \in \mathbb{N} \exists k_j \geq k_0 : b_{k,j} = \hat{b}_j \quad \forall k \geq k_j, \quad \hat{b}_j \in \mathbb{N}_0,$$

haben. Es sei  $\hat{b} = (\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots)$  der Vektor der komponentenweisen Grenzwerte. Ist  $n_0 = |\hat{b}|$ , so konvergiert  $b_k$  gegen  $\hat{b}$  und kann demnach nicht alle endlichen Teilmengen schließlich verlassen. Daher gehen wir davon aus, dass  $|b_k| > \hat{b}_j$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Für die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten erhalten wir dann mit  $\hat{b}_j \cdot e_j = (0, \dots, 0, \hat{b}_j, 0, \dots)$

$$Q_{\hat{b}_j}^{|b_k|}(\hat{b}_j \cdot e_j, b_k) = \frac{(|b_k| - \hat{b}_j)! \hat{b}_j!}{|b_k|!} \frac{1}{\binom{|b_k|}{\hat{b}_j}}.$$

Ist  $\hat{b}_j = 0$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so ist dieser Ausdruck immer konstant 1. Ansonsten kann dies natürlich nur konvergieren, wenn  $|b_k|$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert.

Gibt es dagegen einen Index  $j_0$ , für den  $b_{k,j_0}$  nicht konvergiert, so haben wir bekannter-

maßen

$$\underline{b}_{j_0} := \liminf_{k \rightarrow \infty} b_{k,j_0} < \limsup_{k \rightarrow \infty} b_{k,j_0} =: \bar{b}_{j_0}.$$

Dann gibt es Teilfolgen  $(b_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$  und  $(b_{k_t})_{t \in \mathbb{N}}$ , für die  $b_{k_s, j_0}$  gegen  $\underline{b}_{j_0}$  und  $b_{k_t, j_0}$  gegen  $\bar{b}_{j_0}$  konvergiert. Entlang dieser Teilfolgen gilt dann aber

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varrho_{\underline{b}_{j_0}}^{|b_{k_s, s}|}(\bar{b}_{j_0} \cdot e_{j_0}, b_{k_s}) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varrho_{\underline{b}_{j_0}}^{|b_{k_t, t}|}(\bar{b}_{j_0} \cdot e_{j_0}, b_{k_t}) > 0,$$

der Martin-Kern  $K(\bar{b}_{j_0} \cdot e_{j_0}, b_k)$  kann also nicht konvergieren. Die Grenzwerte bilden einen Teil des Martin-Randes und wir identifizieren diese mit der Menge

$$B := \{(b, i) : b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{N}, i > |b|\} \cup \{0\},$$

wobei  $b = \hat{b}$  und  $i = \lim_{k \rightarrow \infty} |b_k|$  entspricht. Für ein Element  $(b, i) \in B$  ist der erweiterte Martin-Kern dann durch obige Überlegungen für  $a \in \mathbb{F}_m$

$$K(a, (b, i)) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = a)} \frac{1}{\binom{i}{m}} \prod_{l=1}^r \binom{b_{i_l}}{a_{i_l}}, & a \leq b \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, dass  $|b_k| \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Konvergieren die Komponenten  $b_{k,i}/|b_k|$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  gegen ein  $\beta_i \in [0, 1]$ , so ist klar, dass die Summe der Grenzwerte dieser Komponenten kleiner oder gleich 1 ist. Wir untersuchen die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten bezüglich eines  $a \in \mathbb{F}_m$ , wobei wieder  $i_1, \dots, i_r$  die paarweise verschiedenen Indizes mit  $a_{i_l} > 0$  sein sollen. Wir nehmen an, dass ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $a \leq b_k$  für alle  $k \geq k_0$ , denn ansonsten sind die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten unendlich oft 0. Wir erhalten für  $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} \varrho_m^{|b_k|}(a, b_k) &= \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} \frac{b_{k,i_1}}{|b_k|} \dots \frac{b_{k,i_1} - a_{i_1} + 1}{|b_k| - a_{i_1} + 1} \cdot \frac{b_{k,i_2}}{|b_k| - a_{i_1}} \dots \frac{b_{k,i_1} - a_{i_2} + 1}{|b_k| - a_{i_1} - a_{i_2} + 1} \\ &\quad \cdot \frac{b_{k,i_r}}{|b_k| - m + a_{i_r}} \dots \frac{b_{k,i_r} - a_{i_r} + 1}{|b_k| - m + 1} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}}. \end{aligned}$$

Der erweiterte Martin-Kern konvergiert für diese Folge für alle  $a \in \mathbb{F}$ . Wir sehen auch sofort, dass die Bedingung für Folgen mit  $|b_k| \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  notwendig ist, denn mit dem  $j$ -ten Einheitsvektor gilt

$$\varrho_1^{|b_k|}(e_j, b_k) = \frac{b_{k,j}}{|b_k|}.$$

Wir können diese Grenzwerte als Teil des Martin-Randes mit der Menge

$$\tilde{\Delta}_\infty := \left\{ a \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} a_i \leq 1 \right\}$$

identifizieren. Für ein  $\beta \in \tilde{\Delta}_\infty$  ist dann der erweiterte Martin-Kern durch

$$K(a, \beta) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = a)} \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}}$$

gegeben.

Abschließend müssen wir uns nur noch überlegen, was für Folgen  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  passiert, bei denen die Größe der Folgenglieder weder schließlich beschränkt bleibt noch gegen  $\infty$  geht. Dazu bemerken wir zunächst, dass  $K(\cdot, b) = K(\cdot, \beta)$  gilt, falls  $0 = b \in B$  und  $0 = \beta \in \tilde{\Delta}_\infty$ . Diese beiden Punkte sind also identisch. Für  $0 \neq (b, i) \in B$  sei  $b_j$  eine Komponente von  $b$ , die größer als 0 ist. Für  $\beta \in \tilde{\Delta}_\infty$  gilt dann

$$K(\cdot, (b, i)) = K(\cdot, \beta) \Rightarrow K(e_j, (b, i)) = K(e_j, \beta) \Leftrightarrow \frac{b_j}{i} = \beta_j.$$

Allerdings sehen wir auch, dass dann

$$\begin{aligned} K(\cdot, (b, i)) = K(\cdot, \beta) &\Rightarrow K((b_j + 1) \cdot e_j, (b, i)) = K((b_j + 1) \cdot e_j, \beta) \\ &\Leftrightarrow 0 = \beta_j^{b_j + 1} \end{aligned}$$

gelten muss. Wegen  $b_j/i > 0$  kann es daher kein  $\beta \in \tilde{\Delta}_\infty$  geben mit  $K(\cdot, (b, i)) = K(\cdot, \beta)$ . Für eine Folge  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , bei der die Größe der Folgenglieder weder schließlich beschränkt bleibt noch gegen  $\infty$  geht, gibt es natürlich Teilfolgen, entlang derer Ersteres bzw. Letzteres zutrifft. Konvergiert  $b_k$  entlang dieser Teilfolgen, so ist wegen unserer Überlegungen der Grenzwert verschieden, solange nicht beide gegen 0 konvergieren. Insgesamt lässt sich Doob-Martin-Rand durch

$$\left\{ \beta \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \leq 1 \right\} \cup \{(b, i) : b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{N}, i > |b|\}$$

beschreiben.

Für Elemente  $(b, i) \in \{(b, i) : b \in \mathbb{F} \setminus \{0\}, i \in \mathbb{N}, i > |b|\}$  ist der erweiterte Martin-Kern  $K(a, (b, i)) = 0$  für alle  $a \in \mathbb{F}$  mit  $|a| > |b|$ , also echt superharmonisch.

Für  $\beta \in \tilde{\Delta}_\infty$  gilt für  $a \in \mathbb{F}_m$ , wobei wir die Darstellung (3.4) der Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten benutzen,

$$PK(a, \beta) = \sum_{b \geq a} p(a, b) K(b, \beta) = \sum_{j=1}^{\infty} p(a, a + e_j) K(a + e_j, \beta)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(X_{m+1} = a + e_j \mid X_m = a)}{\mathbb{P}(X_{m+1} = a + e_j)} \binom{m+1}{a_{i_1}, \dots, a_j+1, \dots, a_{i_r}} \\
&\quad \cdot \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_j^{a_j+1} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}}. \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(X_m = a \mid X_{m+1} = a + e_j)}{\mathbb{P}(X_m = a)} \binom{m+1}{a_{i_1}, \dots, a_j+1, \dots, a_{i_r}} \\
&\quad \cdot \beta_j \cdot \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = a)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j+1}{m+1} \frac{(m+1)!}{a_{i_1}! \dots (a_j+1)! \dots (a_{i_r})!} \beta_j \cdot \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = a)} \binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = K(a, \beta) \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j.
\end{aligned}$$

Für  $\beta \in \Delta_{\infty}$  ist  $K(\cdot, \beta)$  harmonisch, für  $\beta \in \tilde{\Delta}_{\infty} \setminus \Delta_{\infty}$  ist  $K(\cdot, \beta)$  echt superharmonisch. Wir wissen folglich, dass der minimale Martin-Rand

$$\partial\mathbb{F}_{\min} \subset \Delta_{\infty}$$

in  $\Delta_{\infty}$  enthalten sein muss. Für ein  $\beta \in \Delta_{\infty}$  sind die  $K(\cdot, \beta)$ -transformierten Übergangswahrscheinlichkeiten bei  $a \in \mathbb{F}_m$

$$\begin{aligned}
p^{K(\cdot, \beta)}(a, a + e_j) &= \frac{\mathbb{P}(X_m = a)}{\binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}} \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}}} \cdot p(a, a + e_j) \\
&\quad \cdot \frac{\binom{m+1}{a_{i_1}, \dots, a_j+1, \dots, a_{i_r}} \beta_j \cdot \beta_{i_1}^{a_{i_1}} \dots \beta_{i_r}^{a_{i_r}}}{\mathbb{P}(X_{m+1} = a + e_j)} \\
&= \beta_j \cdot \frac{\binom{m+1}{a_{i_1}, \dots, a_j+1, \dots, a_{i_r}}}{\binom{m}{a_{i_1}, \dots, a_{i_r}}} \varrho(a, a + e_j) = \beta_j.
\end{aligned}$$

Die  $K(\cdot, \beta)$ -transformierte Kette  $X^{K(\cdot, \beta)}$  ist also das Urnenmodell, bei dem wir in jedem Zug eine Kugel mit der Nummer  $j \in \mathbb{N}$  mit Wahrscheinlichkeit  $\beta_j$  hinzufügen, also der Zählvektor zu einer Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen  $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion  $\beta$ . Dann gilt für die  $j$ -te Komponente wegen der Darstellung in (3.3)

$$\frac{X_{n,j}^{K(\cdot, \beta)}}{n} = F_n(j) - F_n(j-1),$$

wobei  $F_n$  die empirische Verteilungsfunktion zur Folge der  $Z_i$ 's sei. Nach dem Satz von Glivenko-Cantelli konvergiert  $F_n$  fast sicher gleichmäßig gegen  $F$ , also konvergiert  $X_{n,j}^{K(\cdot, \beta)}/n$  fast sicher gegen  $F(j) - F(j-1) = \beta_j$ . Die  $K(\cdot, \beta)$ -transformierte Kette konvergiert also in

der Doob-Martin-Kompaktifizierung fast sicher gegen  $\beta$ , was nach Korollar 2.18 bedeutet, dass

$$\partial\mathbb{F}_{\min} = \Delta_{\infty}.$$

Für die Ausgangskette mit den  $\text{Geo}(\theta)$ -verteilten Zufallsvariablen  $Z_i$  ist daher  $\mathcal{L}(X) = \delta_{\beta}$ , wobei  $\beta$  die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion zu den  $Z_i$ 's ist.  $\square$

**BEMERKUNG 3.6** (a) Der Beweis macht deutlich, dass die Wahl der Verteilung  $\beta \in \Delta_{\infty}$  als  $\text{Geo}(\theta)$  willkürlich war. Wir haben nur diesen speziellen Fall gewählt, um später einen Zusammenhang zu Kapitel 5 zu erhalten. Wir können den speziell gewählten Prozess als „Irrfahrt“ auf  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  mit Schritten  $e_Y$ ,  $Y \sim \text{Geo}(\theta)$  auffassen. Jedes  $\beta \in \Delta_{\infty}$  liefert eine weitere Irrfahrt. Gibt es ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\beta_j = 0$  für alle  $j \geq i$ , so haben wir eine „gewöhnliche“ Irrfahrt (vgl. Abschnitt 6.1).

(b) Für  $\beta \in \Delta_{\infty}$  ist klar, wie die  $K(\cdot, \beta)$ -transformierten Markov-Ketten aussehen: Wir betrachten das Urnenmodell, bei dem in jedem Zug eine Kugel gemäß der Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion  $\beta$  hinzugefügt wird. Ist  $\beta \in \tilde{\Delta}_{\infty} \setminus \Delta_{\infty}$ , so haben wir in jedem Zug die Wahrscheinlichkeit  $1 - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j$ , dass wir keine Kugel hinzufügen, sondern den Prozess stattdessen „beenden“; im erweiterten Zustandsraum endet  $X^{K(\cdot, \beta)}$  fast sicher auf einem Strahl  $(\dagger_{|x|+1}^x, \dagger_{|x|+2}^x, \dots)$ . Hier ließen sich noch weitere Überlegungen anstellen: Wann ist der Todeszeitpunkt? Wie sieht die Verteilung von  $X_{\infty}^{K(\cdot, \beta)}$  in diesem Fall aus?

Für ein  $(b, i) \in B \setminus \{0\}$  sind die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $a \in \mathbb{F}_m$ ,  $a \leq b$ ,  $a_j < b_j$ , gegeben durch

$$\begin{aligned} & p^{K(\cdot, (b, i))}(a, a + e_j) \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_m = a)}{(i - m)! m! \frac{b_{i_1}!}{i!} \frac{b_{i_2}!}{(b_{i_1} - a_{i_1})! a_{i_1}!} \dots \frac{b_{i_r}!}{(b_{i_r} - a_{i_r})! a_{i_r}!}} \cdot p(a, a + e_j) \\ &= \frac{(i - m - 1)! (m + 1)! \frac{b_{i_1}!}{i!} \frac{b_j!}{(b_{i_1} - a_{i_1})! a_{i_1}!} \dots \frac{b_j!}{(b_j - a_j)! a_j!} \dots \frac{b_{i_r}!}{(b_{i_r} - a_{i_r})! a_{i_r}!}}{\mathbb{P}(X_{m+1} = a + e_j)} \\ &= \frac{b_j - a_j}{i - m}. \end{aligned}$$

Diese Markov-Kette hat denselben qualitativen Übergangsgraphen wie  $X^{K(\cdot, b)}$ , hat aber entgegen dieser schon zu den Zeitpunkten  $m < |b|$  die Wahrscheinlichkeit  $\frac{i - |b|}{i - m}$  auszusterben.

(c) Wir können eine konkrete Konstruktion zu einer  $K(\cdot, \beta)$ -transformierten Kette,  $\beta \in \Delta_{\infty}$ , angeben: Wir unterteilen das Intervall in Teilintervalle  $I_1, I_2, \dots$  der Länge  $\beta_1, \beta_2, \dots$

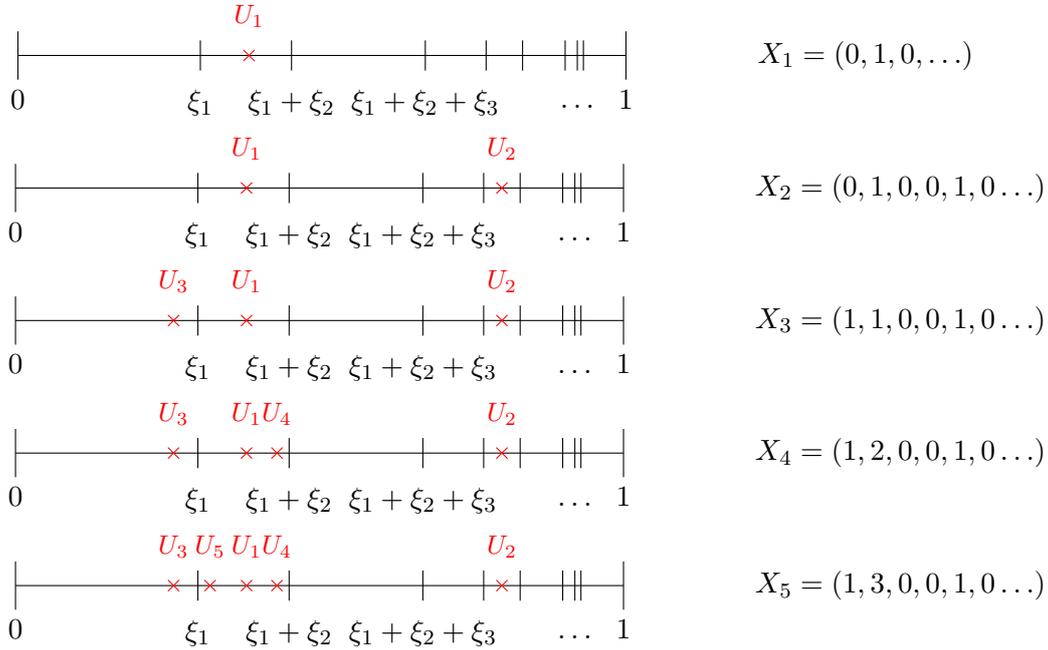


Abbildung 3.3: Die Konstruktion für eine Realisierung einer  $GEM_{0,1}$ -Verteilung

Dann wählen wir eine Folge  $U_1, U_2, \dots$  von unabhängigen und  $\text{unif}(0, 1)$ -verteilten Zufallsvariablen und können für die Übergangswahrscheinlichkeiten der  $K(\cdot, \beta)$ -transformierten Kette

$$p(a, a + e_j) = \mathbb{P}(U_{|a|+1} \in I_j)$$

schreiben. Mit dieser Konstruktion ist auch klar, wie wir bei einem zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\Delta_\infty$  verfahren: Wir wählen ein  $\beta \in \Delta_\infty$  gemäß der Verteilung  $\mu$  und unterteilen dann  $[0, 1]$  wie oben nach dem Vektor  $\beta$ . Eine bekannte Familie zufälliger Maße auf  $\Delta_\infty$  sind die (verallgemeinerten) Griffith-Engen-McCloskey-Verteilungen (siehe [Pit06, Chapter 3]): Für  $0 \leq \alpha < 1$  und  $\theta > -\alpha$  schreiben wir  $GEM_{\alpha, \theta}$  für die Verteilung des  $\Delta_\infty$ -wertigen Zufallsgröße  $\xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  gegeben durch

$$\xi_1 = \zeta_1, \quad \xi_i = \zeta_i \prod_{j=1}^{i-1} (1 - \zeta_j) \quad \text{für } i > 1, \quad (3.5)$$

wobei die  $\zeta_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , unabhängig und ihre Verteilungen durch

$$\zeta_i \sim \text{Beta}(1 - \alpha, \theta + i\alpha)$$

gegeben sind.

Die Darstellung in (3.5) legt den Begriff **stick-breaking-Prozess** nahe. Für  $\alpha = 0$  und  $\theta = 1$

steht dies im Zusammenhang mit dem gewöhnlichen Chinese-Restaurant-Prozess (siehe Abschnitt 4.2) und kann zur Konstruktion rekursiver Bäume und der Untersuchung von Baumfunktionalen verwendet werden ([EGW12],[GM15]). Für diesen speziellen Fall findet sich ein Beispiel der angegebenen Konstruktion der  $h$ -Transformierten in Abbildung 3.3. Für die allgemeine Darstellung lokalendlicher kombinatorischer Markov-Ketten in dieser Form verweisen wir auf [Ger16].

### 3.3 Die Erdős-Rényi-Kette

Bei der nächsten Markov-Kette ist die Topologie der Doob-Martin-Kompaktifizierung eine bereits bekannte Topologie.

Ein einfacher **Graph**  $G = (V, E)$  ist ein Tupel bestehend aus einer endlichen Menge  $V$  und einer Teilmenge  $E \subset [V]^2$  der zweielementigen Teilmengen von  $V$  (siehe z.B. [Die00]). Insbesondere sind bei diesen Graphen keine Schleifen erlaubt. Es sei  $\mathbb{G}[n]$  die Menge der **einfachen Graphen**  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V = [n]$  und damit sei  $\mathbb{G} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}[n]$  die Menge aller einfachen Graphen. Für  $H, G \in \mathbb{G}$  sei  $\Gamma(H, G)$  die Menge der injektiven Funktionen  $\psi : V(H) \rightarrow V(G)$ . Wir definieren

$$T(H, G) := \{\psi \in \Gamma(H, G) : \{\psi(i), \psi(j)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{i, j\} \in E(H)\},$$

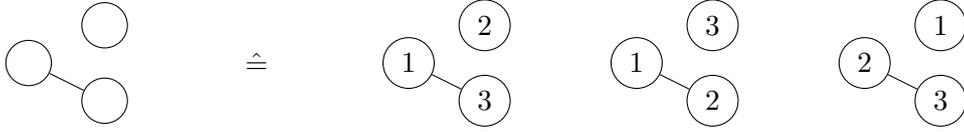
$$t(H, G) := \#T(H, G), \quad \rho(H, G) := \frac{t(H, G)}{\#\Gamma(H, G)} = \frac{(v(G) - v(H))!}{v(G)!} t(H, G).$$

Die Menge  $T(H, G)$  ist die Menge der **adjazenttreuen Abbildungen**.

Es sei  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Zufallsgröße mit Werten in  $\mathbb{G}[n]$ , sodass  $X_n$  jede der  $\binom{n}{2}$  möglichen Kanten unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit  $\theta \in [0, 1]$  enthält. Wir schreiben  $ER(n, \theta)$  für die Verteilung von  $X_n$  und nennen  $X_n$  einen **Erdős-Rényi-Graphen** der Größe  $n$  (siehe z.B. [JLR00, S. 2]). Wir definieren eine kombinatorische Markov-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $\mathbb{G}$  und  $P(X_n \in \mathbb{G}[n]) = 1$ , indem wir mit dem einzigen möglichen einfachen Graphen  $X_1 = G_1$  mit einem Knoten starten, und beim Schritt von  $n$  zu  $n + 1$  einen Knoten  $n + 1$  zu  $V$  und die  $n$  Kanten zu den vorhandenen Knoten mit Wahrscheinlichkeit  $\theta$  unabhängig voneinander hinzufügen. Wir definieren die Abbildungen  $\sigma_m^n : \mathbb{G}[n] \rightarrow \mathbb{G}[m], \sigma_m^n(G_n) = G_n|_{[m]}$ , als Einschränkung eines Graphen  $G_n \in \mathbb{G}[n]$  auf die Knoten aus  $[m]$  und deren inzidente Kanten. Die Übergangswahrscheinlichkeiten zu  $X$  ergeben sich dann für  $G_m \in \mathbb{G}[m], G_n \in \mathbb{G}[n], m \leq n$ ,

$$p_m^n(G_m, G_n) = \begin{cases} \theta^{e(G_n) - e(G_m)} (1 - \theta)^{\binom{n}{2} - e(G_n) - \binom{m}{2} + e(G_m)}, & \text{falls } \sigma_m^n(G_n) = G_m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus einem Zustand zum Zeitpunkt  $n$  lassen sich aufgrund der Bewertungen alle vorherigen Zu-

Abbildung 3.4: Die isomorphen Graphen einer Isomorphieklasse aus  $\mathcal{G}_3$ 

stände zurückgewinnen (entferne jeweils den Knoten mit der größten Bewertung und dessen inzidente Kanten), sodass die Doob-Martin-Kompaktifizierung dieser Kette die Endenkompaktifizierung des Übergangsgraphen – eines Baumes – ist (siehe [Grü13, Abschnitt 6.1]).

Um einen interessanteren Grenzwert zu erhalten, fassen wir die Graphen zu Isomorphieklassen zusammen. Wir betrachten die Abbildung  $\phi : \mathbb{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , die einem Graphen  $G \in \mathbb{G}[n]$  seine Isomorphieklasse  $\mathbf{G} = \text{Iso}(G)$  zuordnet, wobei wir die Menge der Isomorphieklassen der einfachen Graphen mit  $n$  Knoten mit  $\mathcal{G}_n$  bezeichnen. Es sei  $\#\mathbf{G}$  die Mächtigkeit der Isomorphieklasse zu  $G \in \mathbb{G}$ . Durch  $\phi$  wird ein stochastischer Prozess  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf der Menge der Isomorphieklassen definiert durch  $Y_n := \phi(X_n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , der nach dem folgenden Satz eine Markov-Kette ist, die **Erdős-Rényi-Kette**.

**SATZ 3.7** (a) Der Prozess  $Y$  ist eine Markov-Kette.

(b) Eine Folge  $(\mathbf{G}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert in der zu  $Y$  gehörigen Doob-Martin-Kompaktifizierung genau dann, wenn für alle  $\mathbf{H} \in \mathcal{G}$  die Folge  $(\rho(H, G_n))_{n \in \mathbb{N}}$  für beliebigen Vertreter  $H \in \mathbf{H}$  und beliebige Vertreter  $G_n \in \mathbf{G}_n$  konvergiert.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Gruppentheorie. Für einen Graphen  $G_n \in \mathbb{G}[n]$  sei  $\alpha(G_n)$  die Anzahl der **Automorphismen von  $G_n$** , also die Anzahl der Permutationen  $\pi \in \mathbb{S}_n$  mit  $\pi(G_n) = G_n$ , wobei eine Permutation  $\pi$  auf den Bewertungen der Knoten wirkt.

**LEMMA 3.8** Für die Anzahl der zu  $G_n \in \mathbb{G}[n]$  isomorphen Graphen gilt

$$\#\phi(G_n) = \frac{n!}{\alpha(G_n)}.$$

*Beweis.* Die Automorphismen zu einem Graphen  $G_n \in \mathbf{G}_n$  bilden eine Untergruppe  $\text{Aut}(G_n)$  der  $\mathbb{S}_n$ , die **Automorphismengruppe** oder den Stabilisator von  $G_n$ . Die Isomorphieklasse  $\phi(G_n)$  ist auch die Bahn des Graphen  $G_n$  unter  $\mathbb{S}_n$ . Bekanntlich ist  $\mathbb{S}_n$  eine endliche Gruppe mit  $n!$  Elementen. Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf einer Menge  $\mathcal{X}$  wirkt. Für ein  $x \in \mathcal{X}$  sei  $G \circ x$  die Bahn und  $G_x$  der Stabilisator von  $x$ . Aus dem Bahnensatz der Gruppentheorie

([JS06, Satz I.6.4]) ergibt sich dann

$$|G| = |G \circ x| \cdot |G_x|.$$

Die gewünschte Aussage folgt dann aus  $G = \mathbb{S}_n$ ,  $G \circ x = \phi(G_n)$  und  $G_x = \text{Aut}(G_n)$ .  $\square$

*Beweis des Satzes 3.7.* Es gilt offensichtlich  $P(Y_n \in \mathcal{G}_n) = 1$ . Für zwei Elemente  $\mathbf{G}_m \in \mathcal{G}_m$  und  $\mathbf{G}_n \in \mathcal{G}_n$ ,  $m \leq n$ , sei

$$p_m^n(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n) := p_m^n(G_m, \mathbf{G}_n) := \sum_{G_n \in \mathbf{G}_n} p_m^n(G_m, G_n).$$

Für einen beliebigen, aber festen Vertreter  $G_m \in \mathbf{G}_m \in \mathcal{G}_m$  sei

$$\tau(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n) := \#\{G_n \in \mathbf{G}_n : \sigma_m^n(G_n) = G_m\}$$

die Anzahl der Pfade im Übergangsgraphen zu  $X$  von  $G_m$  zu einem Element  $G_n \in \mathbf{G}_n \in \mathcal{G}_n$ . Dies ist unabhängig von der Wahl des Vertreters  $G_m \in \mathbf{G}_m$ , da für den Übergangsmechanismus zu  $X$  die Bewertungen der Knoten des Graphen  $G_m$  keine Rolle spielen, sondern nur die Isomorphiestruktur. Wir erhalten damit

$$p_m^n(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n) = \tau(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n) \theta^{e(\mathbf{G}_n) - e(\mathbf{G}_m)} (1 - \theta)^{\binom{n}{2} - e(\mathbf{G}_n) - \binom{m}{2} + e(\mathbf{G}_m)}.$$

Dabei ist  $e(\mathbf{G}_n)$  die Kantenanzahl eines Vertreters  $G_n \in \mathbf{G}_n$ , denn alle Elemente einer Isomorphieklasse haben dieselbe Kantenanzahl. Damit ist  $p_m^n(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n)$  unabhängig von der Wahl des Vertreters  $G_m \in \mathbf{G}_m$ . Dies ist eine hinreichende Bedingung dafür, dass der Prozess  $Y$  wieder eine Markov-Kette ist ([KS76, Theorem 6.3.2]). Im Sinne von Kapitel 6 ist das Zusammenfassen zu Äquivalenzklassen von Graphen eine starke Markov-Funktion. Insbesondere hat  $Y$  die Übergangswahrscheinlichkeiten  $p(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n)$  und für  $\mathbf{G}_n \in \mathcal{G}_n$  gilt

$$P(Y_n = \mathbf{G}_n) = p_1^n(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_n) = \#\mathbf{G}_n \theta^{e(\mathbf{G}_n)} (1 - \theta)^{\binom{n}{2} - e(\mathbf{G}_n)}.$$

Der Übergangsmechanismus zu  $Y$  funktioniert also dermaßen, dass wir zufällig und gleichverteilt einen Graphen aus der Isomorphieklasse  $\mathbf{G}_n$  des momentanen Zustandes auswählen. Mit dem Übergangsmechanismus zu  $X$  gehen wir zu einem Graphen mit  $n + 1$  Knoten. Anschließend bilden wir mittels  $\phi$  wieder auf die zugehörige Isomorphieklasse ab.

Für den Martin-Kern von  $Y$  erhalten wir

$$K(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n) = \frac{\tau(\mathbf{G}_m, \mathbf{G}_n)}{\#\mathbf{G}_n} \frac{1}{\theta^{e(\mathbf{G}_m)} (1 - \theta)^{\binom{m}{2} - e(\mathbf{G}_m)}}.$$

Der zweite Faktor hängt nicht von  $n$  ab, sodass wir für die Konvergenz nur den ersten Faktor

untersuchen müssen.

Es ist klar, dass für  $G_n, H_n \in \mathbf{G}_n$   $\alpha(G_n) = \alpha(H_n)$  gilt, die Automorphismengruppen selbst allerdings verschieden sein können.

Wir betrachten ein Paar  $(G_m, G_n) \in \mathbb{G}[m] \times \mathbb{G}[n]$ ,  $m \leq n$ . Zu jedem der  $\tau(\phi(G_m), \phi(G_n))$  Graphen  $H'_n \in \phi(G_n)$  mit  $\sigma_m^n(H'_n) = G_m$  gibt es genau einen Pfad im Übergangsgraphen zu  $X$ , da  $X$  ein vollständiges Gedächtnis hat. Für solches  $H'_n \in \mathbb{G}[n]$  existiert eine Permutation  $\iota \in \mathbb{S}_n$  mit  $\iota(G_n) = H'_n$ , weil  $G_n$  und  $H'_n$  aus derselben Isomorphieklasse stammen. Dann gilt für alle  $\pi \in \text{Aut}(G_n)$ , dass  $\iota \circ \pi(G_n) = H'_n$  ist. Wir behaupten, dass

$$\{\pi \in \mathbb{S}_n : \pi(G_n) = H'_n\} = \{\iota \circ \varphi : \varphi \in \text{Aut}(G_n)\}$$

gilt. Dass die zweite Menge Teilmenge der ersten ist, ist sofort einzusehen. Umgekehrt gilt für  $\pi \in \mathbb{S}_n$  mit  $\pi(G_n) = H'_n$ , dass  $\iota^{-1} \circ \pi(G_n) = G_n$ , also lässt sich  $\pi$  schreiben als  $\iota \circ \varphi$  mit einem  $\varphi \in \text{Aut}(G_n)$ . Es gibt also  $\alpha(G_n)$  Permutationen  $\pi' \in \mathbb{S}_n$ , sodass  $\pi'(G_n) = H'_n$  ist. Die Einschränkung von  $\pi'$  auf  $[m]$  liegt dann in  $T(G_m, G_n)$ . Permutieren wir die Bilder der Elemente  $m+1, \dots, n$  in  $\pi'$ , so erhalten wir ein  $\pi'' \in \mathbb{S}_n$ . Die Einschränkungen von  $\pi'$  und  $\pi''$  auf  $[m]$  stimmen überein. Es gilt  $\pi''(G_n) = H''_n$  mit  $\sigma_m^n(H''_n) = G_m$ , aber nicht notwendigerweise  $H'_n = H''_n$ . Wir erhalten somit

$$t(G_m, G_n) \geq \frac{\alpha(G_n)\tau(\phi(G_m), \phi(G_n))}{(n-m)!}.$$

Sei umgekehrt  $\psi \in T(G_m, G_n)$  eine adjazentreue Abbildung von  $G_m$  nach  $G_n$ . Wir können  $\psi$  zu einer Permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  ergänzen und haben dafür  $(n-m)!$  Möglichkeiten. Mit einem so erhaltenen  $\pi$  gilt  $\pi(G_n) = H_n$  für ein  $H_n \in \phi(G_n)$ , da  $\phi(G_n)$  die Bahn von  $G_n$  unter der Operation der  $\mathbb{S}_n$  auf  $\mathbb{G}[n]$  ist. Außerdem muss für dieses  $H_n$   $\sigma_m^n(H_n) = G_m$  gelten. Da es nach oben Gezeigtem  $\alpha(G_n)$  Permutationen  $\pi \in \mathbb{S}_n$  mit  $\pi(G_n) = H_n$  gibt, erhalten wir

$$\frac{t(G_m, G_n)(n-m)!}{\alpha(G_n)} \leq \tau(\phi(G_m), \phi(G_n)).$$

Insgesamt haben wir also

$$t(G_m, G_n) = \frac{\alpha(G_n)\tau(\phi(G_m), \phi(G_n))}{(n-m)!},$$

woraus sich mit Lemma 3.8 die Gleichheit

$$\frac{\tau(\phi(G_m), \phi(G_n))}{\#\phi(G_n)} = \frac{(n-m)!t(G_m, G_n)}{n!} = \rho(G_m, G_n),$$

ergibt. □

- BEMERKUNG 3.9** (a) Wir erhalten also dieselbe Topologie, die wir erhalten würden, wenn wir die Kette  $X$  betrachten und in jedem Schritt die Knoten zufällig neu bewerten (siehe [Grü14a]). Außerdem stimmt diese Topologie mit einer graphentheoretischen Topologie konvergenter Graphen überein (siehe [Lov12]).
- (b) Die Frage, ob sich die Isomorphie-Abbildung stetig auf den Rand der bewerteten Erdős-Rényi-Kette fortsetzen lässt, kann nicht mit den Methoden aus Kapitel 6 beantwortet werden. In [Lov12] wird man auf Graphone als Limesobjekte geführt und die Isomorphie von Graphen geht in die schwache Isomorphie der Graphone über.
- (c) Mithilfe des Bahnsatzes lässt sich leicht Burnside's Lemma beweisen ([LW92, Theorem 10.5]). Mit diesem wird man auf „Pólyas Theorie des Zählens“ geführt ([LW92, Chapter 35]), eine Theorie für das Zählen kombinatorischer Strukturen, die als Ausgangspunkt bei der Analyse weiterer kombinatorischer Markov-Ketten dienen kann.

## 4 | Die Asymptotik von Rekorden

Bei den Beispielen im vorangegangenen Kapitel 3 konnten wir jedes Mal den Martin-Kern explizit angeben und diesen dann auf seine Asymptotik untersuchen. Da wir nach Satz 2.6 aber nur das asymptotische Verhalten des Martin-Kerns benötigen, um die Doob-Martin-Kompaktifizierung zu bestimmen, ist eine explizite Kenntnis der Übergangs- oder Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten nicht nötig. Wir wollen im kommenden Abschnitt ein Beispiel genauer untersuchen, bei dem eine explizite Bestimmung des Martin-Kerns nicht möglich scheint, aber funktionentheoretische Methoden dennoch Aussagen über die Asymptotik liefern.

### 4.1 Die Rekordanzahlen

Wir betrachten eine Folge  $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von reellen i.i.d Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  mit stetiger Verteilungsfunktion  $F$ . Die  $Z_i$ 's nehmen fast sicher nie die gleichen Werte an, d.h.,

$$N := \{\exists i \neq j : Z_i = Z_j\} = \bigcup_{\substack{i, j \in \mathbb{N} \\ i \neq j}} \{Z_i = Z_j\}$$

ist eine Nullmenge, denn für  $i \neq j$  ist wegen der Stetigkeit von  $F$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_i = Z_j) &= \mathbb{P}^{Z_i} \otimes \mathbb{P}^{Z_j}((x, x) : x \in \mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\{x\}} d\mathbb{P}^{Z_j}(y) \right) d\mathbb{P}^{Z_i}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x) - F(x-) d\mathbb{P}^{Z_i}(x) = 0, \end{aligned}$$

die Menge  $N$  ist also eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen.

Zu  $Z$  definieren wir die Folge  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$Y_n = \begin{cases} 1, & Z_n > Z_i, \forall i \in [n-1], \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die angibt, ob  $Z_n$  ein **Rekord** ist oder nicht. Für eine allgemeine Übersicht der Theorie der

Rekorde empfehlen wir [ABN98]. Sei

$$A := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$$

die Menge der aufsteigend geordneten  $n$ -Tupel. Da die  $Z_i$ 's unabhängig sind, sind sie insbesondere austauschbar und für jede Permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  gilt

$$\mathbb{P}((Z_1, \dots, Z_n) \in A) = \mathbb{P}((Z_{\pi(1)}, \dots, Z_{\pi(n)}) \in A) = \frac{1}{n!}.$$

Damit erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, dass  $Z_n$  ein Rekord ist,

$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \sum_{\substack{\pi \in \mathbb{S}_n \\ \pi(n)=n}} \mathbb{P}((Z_{\pi(1)}, \dots, Z_{\pi(n)}) \in A) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Die  $Y_i$ 's sind also jeweils  $\text{Ber}(1/i)$ -verteilt. Ebenso elementar lässt sich die Unabhängigkeit der  $Y_i$ 's zeigen.

Sei  $S = (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  die **Anzahl der Rekorde unter den  $n$  ersten  $Z_i$ 's**. Als kombinatorische Familie betrachten wir

$$\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n, \quad \mathbb{F}_n = \{n\} \times [n].$$

Wegen der Unabhängigkeit der  $Y_i$ 's ist  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X_n := (n, S_n)$ , mit Werten in  $\mathbb{F} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_i$  eine Markov-Kette mit Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & j = i+1, \\ \frac{n}{n+1}, & j = i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir bemerken die Ähnlichkeit zum Beispiel aus Abschnitt 3.1.3, bei der die Markov-Kette Werte in derselben kombinatorischen Familie annimmt und vergleichbare Übergangswahrscheinlichkeiten besitzt, allerdings der Übergangsgraph sich unterscheidet. Wir nennen  $X$  die **Rekord-Kette**. Es sei  $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die komplexe Gammafunktion.

**SATZ 4.1** (a) *Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  der Rekord-Kette  $X$  lässt sich mit der Menge  $[0, \infty) \cup \{\infty\}$  identifizieren, zusammen mit der üblichen Topologie hierauf. Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn  $\frac{j_k}{\log n_k}$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Jedes Element aus dem Martin-Rand ist minimal.*

(b) *Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen 1.*

(c) Für die erweiterten Martin-Kerne gilt für  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$ ,  $\alpha < \infty$ ,

$$K((m, i), \alpha) = \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1 + \alpha)}{\Gamma(m + \alpha)}$$

und

$$K((m, i), \infty) = \begin{cases} m!, & i = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die  $h_\alpha := K(\cdot, \alpha)$ -transformierten Ketten für  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$ ,  $\alpha < \infty$ , haben die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p^{h_\alpha}((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{\alpha}{n + \alpha}, & j = i + 1, \\ \frac{n}{n + \alpha}, & j = i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und für  $\alpha = \infty$

$$p^{h_\infty}((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} 1, & j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um das asymptotische Verhalten der Anzahl der Rekorde von  $Z$  zu untersuchen, betrachten wir wieder den Martin-Kern

$$K((m, k), (n, l)) := \frac{\mathbb{P}(X_n = (n, l) \mid X_m = (m, k))}{\mathbb{P}(X_n = (n, l))}.$$

Wir können in diesem Fall den Martin-Kern nicht so einfach wie in den vorherigen Fällen angeben. Da wir nach Satz 2.6 nur die Asymptotik des Martin-Kerns kennen müssen, um die Doob-Martin-Kompaktifizierung zu bestimmen, reicht es aus, auch die Übergangswahrscheinlichkeiten nur asymptotisch anzugeben, d.h., wir suchen einen Ausdruck, sodass

$$K((m, i), (n_k, j_k)) \sim a((m, i), (n_k, j_k)) \quad \text{bei } \phi((n_k, j_k)) \rightarrow \infty$$

und die Asymptotik von  $a((m, i), (n_k, j_k))$  leichter zugänglich ist. Zunächst wollen wir zeigen, dass  $K((m, i), (n_k, j_k))$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergiert, falls  $j_k \sim \alpha \log n_k$ ,  $\alpha \in (0, \infty)$  gilt. Die Randfälle  $\alpha = 0$  und  $\alpha = \infty$  werden wir separat untersuchen. Hierfür werden wir noch folgendes Monotonieargument aus [GP05, Lemma 6, Lemma 7, Theorem 9] benötigen:

**LEMMA 4.2** (a) Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der Rekord-Kette  $X$ , wenn  $K((m, 1), (n_k, j_k))$  für alle  $m \in \mathbb{N}$  konvergiert.

(b) Für  $(m, 1) \in \mathbb{F}$  und  $n \geq m$  ist  $K((m, 1), (n, j))$  monoton fallend in  $j = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* (a) Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus Satz 2.6. Für eine harmonische Funktion  $h \in \mathcal{H}_1^+(X)$  gilt

$$h((m, i)) = \frac{h((m+1, i+1))}{m+1} + m \frac{h((m+1, i))}{m+1},$$

welches äquivalent zu

$$h((m+1, i+1)) = (m+1)h((m, i)) - mh((m+1, i))$$

ist. Induktiv folgt, dass für jede harmonische Funktion  $h((m, i))$  eine Linearkombination der Werte an den Punkten  $(k, 1)$ ,  $k \leq m$ , ist. Damit ergibt sich die Aussage, weil die erweiterten Martin-Kerne der Rekord-Kette wegen der Lokalendlichkeit harmonisch sind.

(b) Für  $n = m$  ist die Aussage richtig. Gehen wir also davon aus, dass die Aussage für ein  $n \geq m$  richtig ist. Dann gilt für  $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \alpha K((m, 1), (n, j-1)) + (1-\alpha)K((m, 1), (n, j)) \\ \geq K((m, 1), (n, j)) \\ \geq \beta K((m, 1), (n, j+1)) + (1-\beta)K((m, 1), (n, j)). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Wählen wir für  $\alpha = \mathbb{P}(X_n = (n, j-1) \mid X_{n+1} = (n+1, j))$ , so folgt

$$\begin{aligned} \alpha K((m, 1), (n, j-1)) + (1-\alpha)K((m, 1), (n, j)) \\ = \mathbb{P}(X_n = (n, j-1) \mid X_{n+1} = (n+1, j)) \frac{\mathbb{P}(X_m = (m, 1) \mid X_n = (n, j-1))}{\mathbb{P}(X_m = (m, 1))} \\ + \mathbb{P}(X_n = (n, j) \mid X_{n+1} = (n+1, j)) \frac{\mathbb{P}(X_m = (m, 1) \mid X_n = (n, j))}{\mathbb{P}(X_m = (m, 1))} \\ = \frac{\mathbb{P}(X_m = (m, 1) \mid X_{n+1} = (n+1, j))}{\mathbb{P}(X_m = (m, 1))} = K((m, 1), (n+1, j)). \end{aligned}$$

Analog gilt mit  $\beta = \mathbb{P}(X_n = (n, j) \mid X_{n+1} = (n+1, j+1))$

$$\beta K((m, 1), (n, j+1)) + (1-\beta)K((m, 1), (n, j)) = K((m, 1), (n+1, j+1)).$$

Setzen wir diese beiden Gleichungen in (4.1) ein, so ergibt sich Teil (b).  $\square$

*Beweis des Satzes 4.1.* Es sei

$$S_{m,n} := \sum_{i=m+1}^n Y_i, \quad m \leq n,$$

**die Anzahl der Rekorde im Tupel**  $(Z_{m+1}, \dots, Z_n)$ . Mit dieser Definition der  $S_{m,n}$ 's können

wir den Martin-Kern auch schreiben als

$$K((m, i), (n, j)) = \frac{\mathbb{P}(S_{m,n} = j - i)}{\mathbb{P}(S_n = j)}.$$

Für  $S_{m,n}$  ist  $\mathbb{P}(S_{m,n} = j - i) = [z^{j-i}] \hat{p}_{S_{m,n}}(z)$  der  $(j - i)$ -te Koeffizient der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion  $\hat{p}_{S_{m,n}}(z)$  zu  $S_{m,n}$ . Mit der Unabhängigkeit der  $Y_i$ 's erhalten wir

$$\begin{aligned} \hat{p}_{S_{m,n}}(z) &= \mathbb{E}(z^{S_{m,n}}) = \prod_{j=m+1}^n \mathbb{E}(z^{Y_j}) = \prod_{j=m+1}^n \frac{j-1+z}{j} \\ &= \frac{(n-1+z)(n-2+z) \cdots (m+z)}{n \cdot (n-1) \cdots (m+1)} \\ &= \frac{m!}{n!} \cdot \frac{\Gamma(n+z)}{\Gamma(m+z)} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+z)} \cdot \binom{n-1+z}{n} \cdot \Gamma(z). \end{aligned}$$

Hier ist zu beachten, dass nur der Binomialkoeffizient von  $n$  abhängt und deswegen nur dieser für die asymptotische Analyse eine Rolle spielt. Den ersten Faktor bezeichnen wir mit  $g_m(z) := \Gamma(m+1)/\Gamma(m+z)$ . Die Funktion  $\Gamma(m+z)$  ist für alle  $m \in \mathbb{N}$  meromorph und besitzt an keiner Stelle den Wert 0 [FB00, Satz IV.1.2]. Daher sind  $1/\Gamma(m+z)$  und somit auch  $g_m(z)$  analytische Funktionen.

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt  $\binom{n-1+z}{n} = [x^n](1-x)^{-z}$ . Hierfür haben wir nach [FO90, S.220] bzw. [Hwa95, S.346] die asymptotische Entwicklung

$$\frac{n^{z-1}}{\Gamma(z)} \left( 1 + \frac{z(z-1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

gleichmäßig für alle  $|z| \leq \eta$  für jedes feste  $\eta > 0$  bei  $n \rightarrow \infty$ . Mit Cauchys Koeffizientenformel ([FS09, Theorem IV.4]), einer Folgerung aus dem Residuensatz, und dem Radius  $r = (j - i)/\log n$  erhalten wir<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{m,n} = j - i) &= [z^{j-i}] \hat{p}_{S_{m,n}}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\hat{p}_{S_{m,n}}(z)}{z^{j-i+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g_m(z) \frac{n^{z-1}}{z^{j-i+1}} \left( 1 + \frac{z(z-1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) dz \\ &= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g_m(z) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \left( 1 + \frac{z(z-1)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) dz. \end{aligned}$$

Wir haben nun eine Darstellung des Martin-Kerns als Quotient von Kurvenintegralen und nach unseren Vorüberlegungen suchen wir nun deren Asymptotik. Wir nutzen die Linearität

<sup>1</sup>Es ist der Unterschied zwischen der Laufvariablen  $i$  und der imaginären Einheit  $i$  zu beachten.

des Integrals und untersuchen zunächst

$$I_1 := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g_m(z) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} dz$$

und verfahren im Folgenden wie im Beweis zu Theorem 2 aus [Hwa95]. Wir führen eine Taylorentwicklung für  $g_m$  mit Entwicklungspunkt  $r$  durch und haben für  $|z| \leq \eta$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{g_m(r)}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} dz \\ &\quad + \frac{g'_m(r)}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (z-r) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} dz + \xi \end{aligned}$$

mit Restterm  $\xi$  in Integraldarstellung,  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := r + (z-r)t$ ,

$$\begin{aligned} \xi &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \int_{\gamma} g''_m(\zeta) (z-\zeta) d\zeta dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \int_0^1 (z-r)^2 (1-t) g''_m(r + (z-r)t) dt dz. \end{aligned}$$

Die beiden Integrale

$$\begin{aligned} I_{1,1} &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} dz, \\ I_{1,2} &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} (z-r) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} dz \end{aligned}$$

lassen sich wieder mithilfe von Cauchys Koeffizientenformel bestimmen:

$$\begin{aligned} I_{1,1} &= [z^{j-i}] \exp(z \log n) = \frac{(\log n)^{j-i}}{(j-i)!}, \\ I_{1,2} &= [z^{j-i-1}] \exp(z \log n) - r [z^{j-i}] \exp(z \log n) \\ &= \frac{(\log n)^{j-i-1}}{(j-i-1)!} - \frac{j-i}{\log n} \frac{(\log n)^{j-i}}{(j-i)!} = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Berechnung des Integrals  $I_{1,2}$  erklärt, warum für den Radius  $r$  gerade  $(j-i)/\log n$  gewählt wurde. Der zweite Term der Taylorentwicklung mit Entwicklungspunkt  $r$  fällt dadurch weg. Es bleibt für die Asymptotik von  $I_1$ , den Restterm abzuschätzen. Sei

$$\kappa := \sup_{|z| \leq \eta} |g''_m(z)|$$

eine Obergrenze von  $|g''_m|$ , die endlich ist, da Ableitungen analytischer Funktionen wieder

analytisch sind. Dann gilt mit der Kurve  $\alpha : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\beta(s) := re^{is}$ ,

$$\begin{aligned}
|\xi| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\beta} \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \int_0^1 (z-r)^2 (1-t) g_m''(r+(z-r)t) dt dz \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \exp(re^{is} \log n) (re^{is})^{-(j-i+1)} \right. \\
&\quad \cdot \left. \int_0^1 (re^{is}-r)^2 (1-t) g_m''(r+(re^{is}-r)t) dt i re^{is} ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\exp(re^{is} \log n)| |re^{is}|^{-(j-i+1)} \\
&\quad \cdot \int_0^1 |re^{is}-r|^2 |1-t| |g_m''(r+(re^{is}-r)t)| dt |i re^{is}| ds \\
&\leq \frac{\kappa}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\exp(re^{is} \log n)| |r|^{-(j-i+1)} \int_0^1 |r|^2 |e^{is}-1|^2 |1-t| dt |r| ds \\
&\leq \frac{\kappa r^{2+i-j}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\exp(re^{is} \log n)| |e^{is}-1|^2 ds.
\end{aligned}$$

Mit  $r = (j-i)/\log n$  wird daraus

$$\begin{aligned}
|\xi| &\leq \frac{\kappa r^{2+i-j}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\exp((j-i)(\cos s + i \sin s))| |e^{is}-1|^2 ds \\
&= \frac{\kappa r^{2+i-j}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp((j-i) \cos s) |e^{is}-1|^2 ds.
\end{aligned}$$

Wir zerlegen das Integral in zwei Teile

$$J_1 := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp((j-i) \cos s) |e^{is}-1|^2 ds \quad J_2 := \int_{\pi/2 \leq |s| \leq \pi} \exp((j-i) \cos s) |e^{is}-1|^2 ds.$$

Die Funktion  $\cos s$  ist auf  $\pi/2 \leq |s| \leq \pi$  negativ, daher gilt  $\int_{\pi/2}^{\pi} \exp((m-1) \cos s) ds \leq \pi/2$  und wegen  $|e^{is}-1| \leq 2$  folgt  $J_2 \leq 4\pi$ . Für  $J_1$  erhalten wir mit

$$|e^{is}-1| = |\cos s - 1 + i \sin s| = \sqrt{2(1-\cos s)}$$

und den Substitutionen  $s = \arccos(1 - y)$  und  $y = z/(j - i)$

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp((j - i) \cos s) |e^{is} - 1|^2 ds \\
&= 4 \exp(j - i) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(s)) \exp(-(j - i)(1 - \cos s)) ds \\
&= 4 \exp(j - i) \int_0^1 \frac{y \exp(-(j - i)y)}{\sqrt{y(2 - y)}} dy \\
&\leq 4 \exp(j - i) \int_0^1 y^{1/2} \exp(-(j - i)y) dy \\
&= 4 \exp(j - i)(j - i)^{-3/2} \int_0^{m-1} z^{1/2} \exp(-z) dz \\
&< 4 \exp(j - i)(j - i)^{-3/2} \int_0^\infty z^{1/2} \exp(-z) dz \\
&= 4 \exp(j - i)(j - i)^{-3/2} \Gamma(3/2).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
|\xi| &< \frac{2 \kappa \Gamma(3/2) \exp(j - i) r^{2+i-j}}{\pi (j - i)^{3/2}} + 2 \kappa r^{2+i-j} \\
&< \kappa \frac{\exp(j - i) r^{2+i-j}}{(j - i)^{3/2}} + 2 \kappa r^{2+i-j}.
\end{aligned}$$

Mit der Stirling-Formel erhalten wir für  $n > 0$

$$\frac{n! \exp(n)}{\sqrt{2\pi n n^n}} \leq \exp(1/12n),$$

woraus für  $m \geq 2$

$$\frac{\exp(m - 1)}{(m - 1)^{m-1/2}} < \frac{\exp(1/12) \sqrt{2\pi}}{(m - 1)!}$$

folgt. Insgesamt erhalten wir dann wieder mit  $r = (j - i)/\log n$  für die Asymptotik des Restterms  $\xi$

$$\begin{aligned}
|\xi| &= O\left(\frac{\exp(j - i) r^{2+i-j}}{(j - i)^{3/2}}\right) = O\left(\frac{(j - i)}{(\log n)^2} (\log n)^{j-i} \frac{\exp(j - i)}{(j - i)^{j-i+1/2}}\right) \\
&= O\left(\frac{j - i}{(\log n)^2} \frac{(\log n)^{j-i}}{(j - i)!}\right) = O\left(\frac{(\log n)^{j-i-2}}{(j - i - 1)!}\right).
\end{aligned}$$

Nach diesen funktionentheoretischen Überlegungen ergibt sich für  $I_1$

$$I_1 = \frac{(\log n)^{j-i} \Gamma(m + 1)}{(j - i)! \Gamma(m + r)} + O\left(\frac{(\log n)^{j-i-2}}{(j - i - 1)!}\right)$$

$$= \frac{(\log n)^{j-i}}{(j-i)!} \left( \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r)} + O\left(\frac{j-i}{(\log n)^2}\right) \right).$$

Für  $|z| \leq \eta$  verfahren wir mit

$$I_2 := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g_m(z) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \frac{z(z-1)}{2n} dz$$

analog, indem wir wieder eine Taylorentwicklung von  $g_m(z)$  durchführen. Bei der Berechnung der Integrale  $I_{2,1}$  und  $I_{2,2}$  wie in (4.2) ergeben sich wegen der zusätzlichen  $z$ -Potenzen weitere Terme und wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} I_2 = & \frac{(\log n)^{j-i}}{(j-i)!} \left\{ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r)} \left( \frac{1}{2n} \frac{(j-i)(j-i-1)}{(\log n)^2} - \frac{1}{2n} \frac{j-i}{\log n} \right) \right. \\ & - \frac{g'_m(r)}{2n} \left( \frac{2(j-i)(j-i-1)}{(\log n)^3} + \frac{j-i}{(\log n)^2} \right) \\ & \left. + O\left(\frac{(j-i)^3}{(\log n)^4}\right) - O\left(\frac{(j-i)^2}{(\log n)^3}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Es bleibt den Rest

$$I_3 := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} g_m(z) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} O\left(\frac{1}{n^2}\right) dz$$

zu untersuchen. Hier verfahren wir wie im Beweis zu [Hwa95, Theorem 1]. Wegen der Gleichmäßigkeit in  $z$  für  $|z| \leq \eta$  gilt

$$\begin{aligned} I_3 &= O\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left| g_m(z) \exp(z \log n) z^{-(j-i+1)} \frac{1}{n^2} \right| dz\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^2} \int_{|z|=r} |g_m(z)| \exp(\Re z \log n) |z|^{-(j-i+1)} dz\right). \end{aligned}$$

Hier können wir ausnutzen, dass  $|z| \leq \eta$  für ein festes  $\eta$  gilt, um  $|g_m(z)|$  wegen der Analytizität abschätzen zu können. Wieder mit  $r = (j-i)/\log n$  und Berechnung des Kurvenintegrals über die Kurve  $\beta : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha(s) := r e^{is}$  folgt

$$I_3 = O\left(\frac{(\log n)^{j-i}}{n^2 (j-i)^{j-i}} \int_{-\pi}^{\pi} \exp((j-i) \cos s) ds\right).$$

Wir formen wie bei (4.3) um und erhalten

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp((j-i) \cos s) ds \leq 2 \int_0^{\pi/2} \exp((j-i) \cos s) ds + \pi < 2\sqrt{\pi} \frac{\exp(j-i)}{\sqrt{j-i}} + \pi.$$

Mit der Stirling-Formel erhalten wir schließlich

$$I_3 = O\left(\frac{(\log n)^{j-i}}{n^2(j-i)!}\right).$$

Zusammengefasst können wir nun die Asymptotik der Wahrscheinlichkeiten für  $n \rightarrow \infty$  durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{m,n} = j-i) &= \frac{1}{n}(I_1 + I_2 + I_3) \\ &= \frac{1}{n} \frac{(\log n)^{j-i}}{(j-i)!} \times \left\{ \left( \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r)} + O\left(\frac{j-i}{(\log n)^2}\right) \right) \right. \\ &\quad + \left[ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+r)} \left( \frac{1}{2n} \frac{(j-i)(j-i-1)}{(\log n)^2} - \frac{1}{2n} \frac{j-i}{\log n} \right) \right. \\ &\quad - \frac{g'_m(r)}{2n} \left( \frac{2(j-i)(j-i-1)}{(\log n)^3} + \frac{j-i}{(\log n)^2} \right) \\ &\quad \left. \left. + O\left(\frac{(j-i)^3}{(\log n)^4}\right) - O\left(\frac{(j-i)^2}{(\log n)^3}\right) \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

angeben.

Sei nun  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  eine Folge, die jede endliche Teilmenge von  $\mathbb{F}$  schließlich verlässt, insbesondere gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ . Wir nehmen an, dass  $j_k \sim \alpha \log n_k$  für ein  $\alpha \in (0, \infty)$  gilt. Dann folgt für beliebiges  $(m, i) \in \mathbb{F}$

$$r_k := \frac{j_k - i}{\log n_k} \sim \frac{\alpha \log n_k - i}{\log n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \alpha.$$

Wir wählen nun ein  $\eta > \alpha$  und wegen der Analytizität von  $g_m(z)$  gilt dann

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_m(r_k) = g_m(\alpha) \quad \text{und} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g'_m(r_k) = g'_m(\alpha) < \infty.$$

Damit lässt sich die Asymptotik des Martin-Kerns untersuchen. Für den Nenner setzen wir  $m = i = 1$  und haben mit (4.4)

$$K((m, i), (n_k, j_k)) \sim \frac{\frac{1}{n_k} \frac{(\log n_k)^{j_k - i}}{(j_k - i)!} g_m(r_k)}{\frac{1}{n_k} \frac{(\log n_k)^{j_k - 1}}{(j_k - 1)!} g_1(q_k)} = \frac{(j_k - 1)!}{(j_k - i)!} \frac{1}{(\log n_k)^{i-1}} \frac{g_m(r_k)}{g_1(q_k)},$$

wobei  $q_k := (j_k - 1)/\log n_k$  sei. Wir haben eine feste Anzahl von  $i - 1$  Faktoren der Größen-

ordnung  $\alpha \log n_k / \log n_k$ , sodass insgesamt für beliebiges  $(m, i) \in \mathbb{F}$  gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) &= \alpha^{i-1} \frac{g_m(\alpha)}{g_1(\alpha)} = \alpha^{i-1} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} \\ &= \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}. \end{aligned}$$

Für  $\alpha \in (0, \infty)$  können wir nun die erweiterten Martin-Kerne

$$K((m, i), \alpha) := \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)}$$

definieren. Diese sind stetig in  $\alpha$  für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$ . Mithilfe der Analytizität der Gammafunktion  $\Gamma(z)$  für  $\Re z > -1$  erhalten wir

$$K((m, i), 0) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} K((m, i), \alpha) = \begin{cases} m, & i = 1, \\ 0, & i \geq 2. \end{cases}$$

Dies ist, wie sich leicht nachweisen lässt, eine harmonische Funktion und die zugehörige  $h$ -Transformierte ist die Kette, bei der nur zum Zeitpunkt 1 ein Rekord eintritt. Wir nutzen die Funktionalgleichung der Gammafunktion und erhalten

$$\begin{aligned} K((m, i), \infty) &:= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} K((m, i), \alpha) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(m+\alpha)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1+\alpha)}{(m+\alpha) \Gamma(m-1+\alpha)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha^{i-1} \frac{m! \Gamma(1+\alpha)}{(m+\alpha) \cdots (2+\alpha) \Gamma(1+\alpha)} \\ &= \begin{cases} m!, & i = m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Auch diese Funktion ist harmonisch und die zugehörige transformierte Kette ist diejenige, die in jedem Schritt einen Rekord hat. Beide Ketten sind auf einen Strahl konzentriert und nach Lemma 2.21 sind die Funktion  $K(\cdot, 0)$  und  $K(\cdot, \infty)$  minimal. Für  $\alpha \in (0, \infty)$  lässt sich sehr leicht zeigen, dass  $\frac{X_{n,2}^{K(\cdot, \alpha)}}{\log X_{n,1}^{K(\cdot, \alpha)}}$  in Wahrscheinlichkeit gegen 1 konvergiert (Bemerkung 4.3 (c)). Nach dem bisher Gezeigten und Satz 2.10 gilt diese Konvergenz auch fast sicher. Wir wollen nun zeigen, dass für  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j_k}{\log n_k} = 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = K((m, i), 0)$$

und für  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{j_k}{\log n_k} = \infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = K((m, i), \infty)$$

gilt. Wir verwenden hierzu die Stetigkeit der Abbildung  $\alpha \mapsto K(\cdot, \alpha)$  und das Monotonieargument aus Lemma 4.2 (b). Wir nehmen nun an, dass  $(n_k, j_k)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge ist, für die  $j_k / \log n_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Es sei  $X^\alpha$  die  $h$ -Transformierte, die zu den erweiterten Martin-Kernen  $K(\cdot, \alpha)$ ,  $\alpha \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$  gehört. Dann gilt für  $\epsilon > 0$  mit Satz 2.2

$$1 \geq \mathbb{P}(X_m = (m, 1) | X_{n_k} = (n_k, j_k)) = \mathbb{P}(X_m^\epsilon = (m, 1) | X_{n_k}^\epsilon = (n_k, j_k)).$$

Wegen Lemma 4.2 (a) betrachten wir nur die Elemente  $(m, 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Die Monotonieeigenschaft aus Lemma 4.2 (b) überträgt sich natürlich auf die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten, sodass wir durch sukzessives Erhöhen von  $j_k$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_m^\epsilon = (m, 1) | X_{n_k}^\epsilon = (n_k, j_k)) &\geq \mathbb{P}(X_m^\epsilon = (m, 1) | X_{n_k}^\epsilon = (n_k, j_k + 1)) \\ &\geq \dots \geq \mathbb{P}(X_m^\epsilon = (m, 1) | X_{n_k, 2}^\epsilon / \log X_{n_k, 1}^\epsilon > \epsilon/2) \end{aligned}$$

erhalten. Durch Grenzübergang erhalten wir dann

$$1 = \mathbb{P}(X_m^0 = (m, 1)) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_m = (m, 1) | X_{n_k} = (n_k, j_k)) \geq \mathbb{P}(X_m^\epsilon = (m, 1)).$$

Die Stetigkeit der Abbildung  $\alpha \mapsto K(\cdot, \alpha)$  liefert uns nun die gewünschte Aussage, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = K((m, i), 0).$$

Für  $j_k / \log n_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  verfahren wir in ähnlicher Weise. Insgesamt wissen wir nun, dass  $K((m, i), (n_k, j_k))$  konvergiert, wenn  $j_k / \log n_k$  konvergiert oder bestimmt divergiert.

Nehmen wir umgekehrt an, dass für eine Folge  $(n_k, j_k)_{j \in \mathbb{N}}$  die Martin-Kerne für jedes  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergieren, aber  $j_k / \log n_k$  nicht konvergiert und nicht bestimmt divergiert, so gilt

$$0 \leq \beta := \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{j_k}{\log n_k} < \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{j_k}{\log n_k} =: \gamma \leq \infty.$$

Wir finden also Teilfolgen  $(n_{k_s}, j_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$  und  $(n_{k_t}, j_{k_t})_{t \in \mathbb{N}}$ , für die  $\lim_{s \rightarrow \infty} j_{k_s} / \log n_{k_s} = \beta$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} j_{k_t} / \log n_{k_t} = \gamma$  gilt. Für  $(2, 1) \in \mathbb{F}$  haben wir

$$K((2, 1), \alpha) = \frac{2}{1 + \alpha}, \quad \alpha \in [0, \infty) \quad K((2, 1), \infty) = 0,$$

der erweiterte Martin-Kern ist also streng monoton fallend als Funktion des zweiten Argu-

ments. Damit ist

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K((2, 1), (n_{k_s}, j_{k_s})) > \lim_{t \rightarrow \infty} K((2, 1), (n_{k_t}, j_{k_t})),$$

und der Martin-Kern kann für die Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht konvergieren.

Der Martin-Kern konvergiert folglich genau dann, wenn  $j_k / \log n_k$  konvergiert oder bestimmt divergiert und der Martin-Rand lässt sich mit  $\partial\mathbb{F} := [0, \infty) \cup \{\infty\}$  identifizieren und der üblichen Topologie hierauf identifizieren.

Die  $h_\alpha$ -Transformierten von  $X$  für  $h_\alpha := K(\cdot, \alpha)$ ,  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$ , liefern für  $\alpha \in [0, \infty)$  die Übergangswahrscheinlichkeiten der transformierten Kette  $X^{h_\alpha}$

$$\begin{aligned} p^{h_\alpha}((m, i), (n, j)) &= \frac{1}{h_\alpha(m, i)} p((m, i), (n, j)) h_\alpha(n, j) \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha}{m + \alpha}, & n = m + 1, j = i + 1, \\ \frac{m}{m + \alpha}, & n = m + 1, j = i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $\alpha = \infty$

$$p^{h_\infty}((m, i), (n, j)) = \begin{cases} 1, & n = m + 1, j = i + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die  $h_\alpha$ -Transformierten stehen in Verbindung mit der aus der Populationsgenetik bekannten *Ewens-Sampling-Formula*  $\text{ESF}(\alpha)$  mit Parameter  $\alpha$  (siehe z.B. [ABT03, Chapter 4 & 5]). Die Anzahl der Rekorde erhält einen Bias durch  $\alpha$ . Auch hier gilt wegen der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, dass  $S_n / \log n$  fast sicher gegen  $\alpha$  konvergiert. Der minimale Martin-Rand stimmt also mit dem vollen Rand überein.  $\square$

Seien  $s(n, k)$ ,  $n, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \leq n$  die vorzeichenlosen Stirlingzahlen 1. Art. Die Wahrscheinlichkeit, dass zum Zeitpunkt  $n$  genau  $k$  Rekorde vorkamen, lässt sich mit ihrer Hilfe auch als

$$\mathbb{P}(S_n = (n, k)) = \frac{s(n, k)}{n!}$$

darstellen, denn unter den  $n!$  Permutationen der Länge  $n$  gibt es  $s(n, k)$  mit genau  $k$  Zyklen, also  $k$  Rekorde. Alle  $h_\alpha$ -Transformierten haben natürlich dieselben Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(S_{n-1} = (n-1, l) \mid S_n = (n, k)) \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_{n-1} = (n-1, l)) \mathbb{P}(S_n = (n, k) \mid S_{n-1} = (n-1, l))}{\mathbb{P}(S_n = (n, k))} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{(n-1)s(n-1, k)}{s(n, k)}, & l = k, \\ \frac{s(n-1, k-1)}{s(n, k)}, & l = k-1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir erhalten hieraus auch sofort die Rekursion  $s(n+1, k) = n \cdot s(n, k) + s(n, k-1)$  für die Stirlingzahlen 1. Art.

**BEMERKUNG 4.3** (a) Wenn es uns einfach nur darum gegangen wäre, die fast sichere Konvergenz der normierten Rekordanzahlen gegen 1 zu beweisen, so hätte eine Version des starken Gesetzes der großen Zahlen ausgereicht, denn es gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} \text{var} \left( \frac{Y_n}{\log n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^2 \log^2 n} \leq \int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x} dx = \frac{1}{\log 2} < \infty.$$

Daher folgt mit Satz A.4, dass  $\frac{S_n - H_n}{\log n}$  fast sicher gegen 0 konvergiert. Die fast sichere Konvergenz von  $S_n / \log n$  wurde erstmals von Rényi ([Rén62]) gezeigt.

(b) Die Doob-Martin-Kompaktifizierung der Rekord-Kette lässt sich auch mithilfe der Methoden aus Abschnitt 2.2 bestimmen (siehe hierzu [GP05, Case  $\alpha = 0$ ]). Wir gehen dabei vom Übergangsgraphen der Rekord-Kette aus und die zentralen Maße sind durch die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten festgelegt, die sich aus der Rekursion der Stirling-Zahlen 1. Art ergeben. Die bereits benutzten Monotonieargumente und ebenfalls analytische Methoden liefern das analoge Resultat zu Satz 4.1, ohne dass jedoch auf den Beweis und die erweiterten Martin-Kerne eingegangen wird.

(c) Die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit von  $S_n / \log n$  folgt natürlich aus der fast sicheren Konvergenz. Dies ist aber auch direkt zu zeigen. Wir erhalten mit

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sim \log(n), \quad \text{var}(S_n) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{i} - \frac{1}{i^2} \right) \sim \log(n),$$

und dem Satz von Chebychev für  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1 \right| > \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \text{var} \left( \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} \right) = \frac{\text{var}(S_n)}{\epsilon^2 (\mathbb{E}(S_n))^2} \sim \frac{1}{\epsilon^2 \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.5)$$

Mit dem Continuous Mapping Theorem erhalten wir für  $a_n \sim b_n$ , dass  $X_n / a_n \xrightarrow{P} X$  genau dann gilt, wenn  $X_n / b_n \xrightarrow{P} X$ . Daher konvergiert  $S_n / \log n$  in Wahrscheinlichkeit gegen 1.

Das  $p$ -te zentrale Moment,  $p \geq 1$ , von  $S_n$  ist ebenso asymptotisch  $\log n$ , daher gilt

$$\mathbb{E} \left( \left| \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)} - 1 \right|^p \right) = \frac{1}{\mathbb{E}(S_n)^p} \mathbb{E}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)|^p) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also konvergiert  $S_n / \log n$  auch im  $p$ -ten Mittel gegen 1.

Ebenso lässt sich asymptotische Normalität zeigen. Es sei  $\epsilon > 0$ . Dann gilt für  $i \geq 2$

$$\int_{|Y_i - \frac{1}{i}| > \epsilon \log n} \left( Y_i - \frac{1}{i} \right)^2 d\mathbb{P} = \begin{cases} \frac{i-1}{i^3} + \frac{(i-1)^2}{i^3}, & \frac{1}{i} > \epsilon \log n, \\ \frac{(i-1)^2}{i^3}, & \frac{1}{i} \leq \epsilon \log n < \frac{i-1}{i}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^n \int_{|Y_i - \frac{1}{i}| > \epsilon \log n} \left( Y_i - \frac{1}{i} \right)^2 d\mathbb{P} = 0.$$

Die Folge  $Y$  erfüllt also die Lindeberg-Bedingung und nach [Kal02, Theorem 5.12] gilt dann

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{\sqrt{\text{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} N(0, 1).$$

## 4.2 Die harmonische Poisson-Kette

Wir wollen eine im Bezug zum Resultat des vorherigen Abschnitts interessante Markov-Kette untersuchen. Dazu betrachten wir den **Chinese Restaurant Process** (CRP)  $\Pi = (\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (siehe [Pit06, Abschnitt 3.1] für eine Einführung). Dieser ist eine Markov-Kette, die für  $n \in \mathbb{N}$  Werte in der Menge  $\mathbb{S}_n$  der Permutationen vom Umfang  $n$  annimmt und deren Randverteilungen zum Zeitpunkt  $n$  die Gleichverteilung auf  $\mathbb{S}_n$  sind, d.h.,

$$\mathbb{P}(\Pi_n = \pi) = \frac{1}{n!}, \quad \pi \in \mathbb{S}_n$$

gilt. Eine Permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$  und damit auch  $\Pi_n$  lässt sich auf kanonische Weise in ihrer Zyklenarstellung schreiben. Beim CRP kommt beim Übergang von  $n$  zu  $n+1$  mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{n+1}$  ein neuer Zykel mit dem Element  $n+1$  hinzu, andernfalls wird  $n+1$  Element eines bestehenden Zyklus, indem einer der  $n$  bestehenden Elemente zufällig und gleichverteilt als Vorgänger ausgewählt wird. Es sei  $C_{n,i}$  die **Anzahl der Zyklen der Länge  $i$**  in  $\Pi_n$  für  $i \in \mathbb{N}$ . Wir nennen den Zufallsvektor  $C_n = (C_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$  den **Zähltyp** zu  $\Pi_n$ . Wir definieren

$$\hat{S}_n := \sum_{i=1}^{\infty} C_{n,i} \tag{4.6}$$

die **Anzahl der Zyklen der zufälligen Permutation**  $\Pi_n$ . Aufgrund der Konstruktion des CRP erhalten wir

$$\mathcal{L}(\hat{S}_n) = \mathcal{L}(S_n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ , wobei  $S_n$  wie in Abschnitt 4.1 definiert sei.

**SATZ 4.4** ([ABT03, THEOREM 1.3]) *Der Zähltyp  $C_n$  des CRP konvergiert mit  $n \rightarrow \infty$  in Verteilung gegen  $C = (C_1, C_2, \dots)$ , wobei  $C_i$  unabhängige und  $Po(\frac{1}{i})$ -verteilte Zufallsvariablen seien.*

Daher interessieren wir uns in diesem Fall für die Konvergenz von  $\tilde{S}_n := \sum_{i=1}^n C_i$ , die Summe der ersten  $n$  Variablen des Grenzwertes aus Satz 4.4. Die Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen ist wieder Poisson-verteilt mit der Summe der Parameter der Summanden als neuem Parameter. Folglich ist  $\tilde{S}_n$  Poisson-verteilt mit Parameter  $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ , der  $n$ -ten **harmonischen Zahl**. Wir betrachten einen stochastischen Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $X_n = (n, S_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $X_0 = (0, 0)$  auf der Menge

$$\mathbb{F} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n, \quad \mathbb{F}_n := \{(n, j) : j \in \mathbb{N}_0\}.$$

Die erste Komponente kann wie in Abschnitt 3.1 als Zeitparameter aufgefasst werden. Es gilt  $P(X_i \in \mathbb{F}_i) = 1$ , daher ist  $X$  offensichtlich eine kombinatorische Markov-Kette, die aber im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt nicht mehr lokalendlich ist. Die Kette hat die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{j-i}}{(j-i)!}, & j \geq i, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen  $X$  **harmonische Poisson-Kette**.

**SATZ 4.5** (a) *Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  der harmonischen Poisson-Kette  $X$  lässt sich mit der Menge  $[0, \infty) \cup \{\infty\}$  identifizieren, zusammen mit der üblichen Topologie hierauf. Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn  $\frac{j_k}{\log n_k}$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Der minimale Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}_{\min}$  entspricht dem halboffenen Intervall  $[0, \infty)$ .*

(b) *Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen 1.*

(c) *Für die erweiterten Martin-Kerne gilt für  $\alpha \in \partial\mathbb{F}$ ,  $\alpha < \infty$ ,*

$$K((m, i), \alpha) = \exp(H_m(1 - \alpha))\alpha^i$$

und

$$K((m, i), \infty) = \delta_{(0,0)}(m, i).$$

Die  $h_\alpha := K(\cdot, \alpha)$ -transformierten Ketten für  $\alpha \in \partial\mathbb{F}_{\min}$  erhält man, wenn man in (4.6)  $C_\alpha := (C_{\alpha,1}, C_{\alpha,2}, \dots)$  mit unabhängigen,  $Po(\frac{\alpha}{i})$ -verteilten Zufallsvariablen  $C_{\alpha,i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , wählt.

*Beweis.* Analog zu den Rekordanzahlen des vorherigen Abschnitts sei  $\tilde{S}_{m,n} := \sum_{i=m+1}^n C_i$ . Auch  $\tilde{S}_{m,n}$  ist Poisson-verteilt mit Parameter  $H_n - H_m$ . Damit erhalten wir den Martin-Kern für  $i, j \in \mathbb{N}_0$  und  $m \leq n$

$$\begin{aligned} K((m, i), (n, j)) &= \frac{P(X_n = (n, j) \mid X_m = (m, i))}{P(X_n = (n, j))} = \frac{\mathbb{P}(\tilde{S}_{m,n} = j - i)}{\mathbb{P}(\tilde{S}_n = j)} \\ &= \frac{\exp(H_m - H_n) \frac{(H_n - H_m)^{j-i}}{(j-i)!}}{\exp(-H_n) \frac{H_n^j}{j!}} \\ &= \exp(H_m) \cdot \frac{j!}{(j-i)!} \cdot \frac{(H_n - H_m)^{j-i}}{H_n^j}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Wir betrachten nun eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  von Elementen aus  $\mathbb{F}$ , die jede endliche Teilmenge schließlich verlässt. Bleibt  $n_k$  schließlich in einer endlichen Teilmenge von  $\mathbb{N}$ , muss  $j_k \rightarrow \infty$  gelten. Für jedes feste  $(m, i) \in \mathbb{F} \setminus \{(0, 0)\}$  ist der zweite Faktor in (4.7) von der Größenordnung  $j_k^i$ , konvergiert daher langsamer gegen  $\infty$ , als der dritte Faktor gegen 0 konvergiert. Für diese  $(m, i)$  konvergiert der Martin-Kern dann gegen 0. Den Grenzwert dieser Folgen identifizieren wir mit dem Punkt  $\infty$ . Verlässt  $n_k$  hingegen alle endlichen Teilmengen  $A \subset \mathbb{N}$  schließlich, so betrachten wir zunächst Folgen, für die  $j_k \sim \alpha \log n_k$ ,  $\alpha \in (0, \infty)$ , für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Mit der bekannten Tatsache, dass  $H_n \sim \log n$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} K((m, i), (n_k, j_k)) &\sim \exp(H_m) \frac{j_k!}{(j_k - i)!} \frac{(\log n_k - H_m)^{j_k - i}}{(\log n_k)^{j_k}} \\ &= \exp(H_m) \frac{j_k!}{(j_k - i)!} \left(1 - \frac{H_m}{\log n_k}\right)^{j_k} \frac{1}{(\log n_k - H_m)^i} \\ &\sim \exp(H_m) \left(1 - \frac{H_m}{\log n_k}\right)^{\alpha \log n_k} \frac{(\alpha \log n_k)^i}{(\log n_k - H_m)^i} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \exp(H_m) \exp(-\alpha H_m) \alpha^i = \exp(H_m(1 - \alpha)) \alpha^i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für Folgen, für die  $j_k = o(\log n_k)$  gilt, konvergiert (4.7) für  $(m, 0)$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ , gegen  $\exp(H_m)$ , für alle anderen Werten  $i \in \mathbb{N}$  gegen 0. Für  $\alpha \in [0, \infty)$  erhalten wir dann die erweiterten Martin-Kerne

$$h_\alpha((m, i)) := K((m, i), \alpha) := \exp(H_m(1 - \alpha)) \alpha^i, \quad (m, i) \in \mathbb{F}.$$

Durch Grenzübergang  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K(\cdot, \alpha) = \delta_{\{(0,0)\}}$  folgt, dass für Folgen mit  $\log n_k = o(j_k)$  der Martin-Kern gegen dieselbe Funktion konvergiert wie bei Folgen, bei denen  $n_k$  schließlich beschränkt bleibt. Dies rechtfertigt auch die Bezeichnung  $\infty$ . Wir bemerken hier, dass  $K(\cdot, \infty) = K(\cdot, (0, 0))$  gilt, aber wegen der Definition (2.5) die Punkte  $(0, 0)$  und  $\infty$  in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der harmonischen Poisson-Kette verschieden sind. Die  $K(\cdot, \infty)$ -transformierte Kette und die  $K(\cdot, (0, 0))$ -transformierte Kette sind dennoch identisch.

Es bleibt zu zeigen, dass es für die Konvergenz des Martin-Kerns auch notwendig ist, dass  $j_k / \log n_k$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Da nach Satz 2.6 der Martin-Kern für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergieren muss, reicht es  $(1, 0)$  zu betrachten und wir erhalten

$$K((1, 0), (n_k, j_k)) = \exp(1) \left( \frac{H_{n_k} - 1}{H_{n_k}} \right)^{j_k} \sim \exp(1) \left( \left( 1 - \frac{1}{\log n_k} \right)^{\log n_k} \right)^{\frac{j_k}{\log n_k}}.$$

Der Martin-Rand lässt sich also mit  $[0, \infty) \cup \{\infty\}$  identifizieren. Da wir es nicht mit einer lokalendlichen Kette zu tun haben, müssen wir noch nachweisen, dass die  $h_\alpha$  auch tatsächlich harmonisch sind. Für  $(n, i) \in \mathbb{F}$  gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i}^{\infty} K((n+1, j), \alpha) p((n, i), (n+1, j)) \\ &= \sum_{j=i}^{\infty} \exp(H_{n+1}(1-\alpha)) \alpha^j \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{j-i}}{(j-i)!} \\ &= \exp\left(H_{n+1}(1-\alpha) - \frac{1}{n+1}\right) \alpha^i \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{j-i}}{(j-i)!} \\ &= \exp(H_n(1-\alpha)) \alpha^i = K((n, i), \alpha). \end{aligned}$$

Die  $h_\alpha$ -Transformierten der Markov-Kette mit  $\alpha \in [0, \infty)$  haben die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $j \geq i$

$$\begin{aligned} & p^{h_\alpha}((n, i), (n+1, j)) \\ &= \frac{1}{h_\alpha((n, i))} p((n, i), (n+1, j)) h_\alpha((n+1, j)) \\ &= \frac{1}{\exp(H_n(1-\alpha)) \alpha^i} \exp\left(-\frac{1}{n+1}\right) \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{j-i}}{(j-i)!} \exp(H_{n+1}(1-\alpha)) \alpha^j \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha}{n+1}\right) \frac{\left(\frac{\alpha}{n+1}\right)^{j-i}}{(j-i)!}. \end{aligned}$$

Diese Übergangswahrscheinlichkeiten gehören zu der Markov-Kette  $X_\alpha$ , die wir analog erhalten, wenn wir anstatt  $C$  den Vektor  $C_\alpha = (Z_{\alpha,i})_{i \in \mathbb{N}}$  mit unabhängigen,  $\text{Po}(\alpha/i)$ -verteilten  $C_{\alpha,i}$  betrachten. Es sei damit  $\tilde{S}_{\alpha,n}$  die Summe der ersten  $C_{\alpha,i}$ 's. Analog zur Gleichung (4.5) folgt für  $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P} \left( \left| \frac{\tilde{S}_{\alpha,n}}{\log n} - \alpha \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{\text{var}(\tilde{S}_{\alpha,n})}{(\epsilon \mathbb{E}(\tilde{S}_{\alpha,n}))^2} \sim \frac{1}{\epsilon^2 \log n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

dass  $\tilde{S}_{\alpha,n}/\log n$  in Wahrscheinlichkeit gegen  $\alpha$  konvergiert. Aus Satz 2.10 folgt, dass der Quotient  $\tilde{S}_{\alpha,n}/\log n$  sogar fast sicher gegen  $\alpha$  konvergiert. Wegen Korollar 2.18 ist der minimale Rand daher  $[0, \infty)$ , denn  $K(\cdot, \infty)$  ist eine echt superharmonische Funktion.  $\square$

**BEMERKUNG 4.6** Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten der Poisson-Kette sind für  $j \geq i$  durch

$$q_m^n((m, i), (n, j)) = \binom{j}{i} \left( \frac{H_n - H_m}{H_n} \right)^j \left( \frac{H_m}{H_n - H_m} \right)^i = \binom{j}{i} \left( \frac{H_m}{H_n} \right)^i \left( 1 - \frac{H_m}{H_n} \right)^{j-i}$$

gegeben. Gegeben einen Zustand  $(n, j)$  ist die zweite Komponente zum Zeitpunkt  $m \leq n$   $\text{Bin}\left(j, \frac{H_m}{H_n}\right)$ -verteilt. Dies erklärt nochmal die Konvergenz in (4.8). Für eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $n_k \rightarrow \infty$  und  $j_k/\log n_k \sim \alpha \in (0, \infty)$  konvergiert  $\text{Bin}\left(j_k, \frac{H_m}{H_{n_k}}\right)$  für  $k \rightarrow \infty$  in Verteilung gegen ein  $\text{Po}(\alpha H_m)$ -verteilte Zufallsvariable.

### 4.3 Die Rekordzeitpunkte

Wir können auch die Zeitpunkte  $T_n$  des  $n$ -ten Rekordes der Folge  $Z$  betrachten. Formal ist  $T = (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch

$$T_1 \equiv 1, \quad T_n = \min\{i \in \mathbb{N} : Z_i > Z_{T_{n-1}}\}, \quad n \geq 2,$$

gegeben. Wenn es zum Zeitpunkt  $n$  mindestens  $k$  Rekorde gegeben hat, so ist der Zeitpunkt des  $k$ -ten Rekordes höchstens  $n$ , d.h.  $S_n \geq k \Leftrightarrow T_k \leq n$ . Mit diesem Zusammenhang zwischen  $T$  und  $S$  lässt sich zeigen, dass  $\log(T_n)/n$  fast sicher gegen 1 konvergiert. Dies lässt sich auch wie folgt einsehen: Der Prozess  $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{X}_n := (n, T_n)$  ist eine Markov-Kette mit Werten in der kombinatorische Familie  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$ ,  $\mathbb{F}_1 = \{(1, 1)\}$ ,  $\mathbb{F}_n = \{(n, i) : i \geq n\}$ ,  $n \geq 2$ , und mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}(\tilde{X}_{n+1} = (n+1, j) \mid \tilde{X} = (n, i)) = \begin{cases} \frac{i}{j(j-1)}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Martin-Kern zu  $\tilde{X}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} K((m, i), (n, j)) &= \frac{\mathbb{P}(T_n = j \mid T_m = i)}{\mathbb{P}(T_n = j)} = \frac{\mathbb{P}(S_{i,j-1} = n - m - 1, Y_n = 1)}{\mathbb{P}(S_{j-1} = n - 1, Y_j = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(S_{i,j-1} = n - m - 1)}{\mathbb{P}(S_{j-1} = n - 1)}. \end{aligned}$$

Eine Vertauschung der Parameter im Vergleich zu Abschnitt 4.1 liefert die Aussage, dass die Rekordzeitpunkte fast sicher exponentiell wachsen.

**SATZ 4.7** (a) *Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  der Markov-Kette  $\tilde{X}$  lässt sich mit der Menge  $[0, \infty) \cup \{\infty\}$  identifizieren, zusammen mit der üblichen Topologie hierauf. Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn  $\frac{\log j_k}{n_k}$  konvergiert oder bestimmt divergiert. Jedes Element aus dem Martin-Rand ist minimal.*

(b) *Die Kette  $\tilde{X}$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen 1.*

## 5 | Leader Election

In verteilten Systemen kann es häufig nützlich sein, einen Prozessor zu wählen, der die Koordination des Systems übernimmt. Diese *leader election* kann durch diverse Algorithmen behandelt werden. Oft hat das verteilte System eine Ringstruktur (siehe [AW04, Chapter 3]). Bei Systemen, die einen vollständigen Graphen bilden, gibt es Auswahlverfahren, die in linearer Zeit arbeiten (siehe [Vil+05]).

Wir wollen einen besonders einfachen Auswahlalgorithmus im Falle vollständiger Graphen untersuchen. Jeder der  $n$  Teilnehmer wirft in jeder Runde eine Münze mit der Wahrscheinlichkeit  $\theta \in (0, 1)$  für ‘Kopf’. Die Teilnehmer, die während einer Runde ‘Kopf’ werfen, scheiden aus dem Auswahlprozess aus. Diejenigen, die ‘Zahl’ geworfen haben, nehmen an der nächsten Auswahlrunde teil. Die Prozedur endet, sobald nur ein Teilnehmer übrig bleibt oder alle verbleibenden Teilnehmer ‘Kopf’ werfen. Einfache Auswahlalgorithmen dieser Bauart sind Gegenstand zahlreicher Arbeiten ([BO90], [Pro93], [ESS93], [FMS96], [KP96], [JS97], [BG03], [LP09], [KM14]). Häufig wird hier allerdings von einer fairen Münze ausgegangen und bei einem Gleichstand (alle verbleibenden Teilnehmer werfen ‘Kopf’) das Auswahlverfahren fortgesetzt. Eine Realisierung in einem verteilten System wäre natürlich die Ausgabe eines 0-1-Streams, wobei die 1 mit Wahrscheinlichkeit  $\theta$  gesendet wird. Eine Realisierung mit 8 Teilnehmern,  $\theta = 0.2$  und 2 Gewinnern findet sich in Abbildung 5.

$A_1$ :	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$A_2$ :	1								
$A_3$ :	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$A_4$ :	0	1							
$A_5$ :	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$A_6$ :	1								
$A_7$ :	0	0	0	0	0	1			
$A_8$ :	0	1							

Abbildung 5.1: Ein Auswahlverfahren mit den **Gewinnern**  $A_3$  und  $A_5$

Zur Analyse der Verfahrens betrachten wir einen Vektor

$$Z = (Z_1, \dots, Z_n)$$

von unabhängigen,  $\text{Geo}(\theta)$ -verteilten Zufallsvariablen mit dem Maximum

$$M_n := \max_{i \leq n} Z_i.$$

Für die am Ende verbleibenden Teilnehmer  $L_n$  und die Anzahl der Runden  $R_n$  gilt

$$L_n := \#\{1 \leq i \leq n : Z_i = M_n\}, \quad R_n := \begin{cases} Z_{(n:n-1)}, & L_n = 1, \\ M_n + 1, & L_n \geq 2, \end{cases}$$

wobei  $Z_{(n:n-1)}$  die  $(n-1)$ -te Ordnungsstatistik zu  $Z$  sei. Um es an bestehende Resultate anzupassen, werden wir von nun an auch den letzten Teilnehmer noch „auswerfen lassen“, sodass wir

$$L_n := \#\{1 \leq i \leq n : Z_i = M_n\}, \quad R_n := \begin{cases} M_n, & L_n = 1, \\ M_n + 1, & L_n \geq 2, \end{cases} \quad (5.1)$$

erhalten.

Im ersten Unterabschnitt wollen wir das Maximum geometrisch verteilter Zufallsvariablen einzeln betrachten. Danach nutzen wir die Kopplung aus (5.1) für die Untersuchung der Multiplizität und des Maximums. Abschließend betrachten wir die Anzahl  $N_n$  der Teilnehmer in der  $n$ -ten Runde, wenn wir mit  $k$  Teilnehmern beginnen, indem wir diese eine Kette rückwärts laufen lassen und  $k \rightarrow \infty$  betrachten.

## 5.1 Die Maximums-Kette

Wie wir bei der Betrachtung des Auswahlalgorithmus' gesehen haben, ergibt sich aus dem Maximum geometrisch verteilter Zufallsvariablen und dessen Multiplizität die Anzahl der benötigten Runden. In einem ersten Schritt wollen wir die asymptotische Entwicklung dieses Maximums mit einer kombinatorischen Markov-Kette beschreiben. Allgemein können wir auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  eine Folge  $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  betrachten. Wir interessieren uns für die Folge  $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Maxima

$$M_n := \max_{i \leq n} Z_i.$$

Ist der Träger von  $\mathbb{P}^{Z_1}$  nach oben beschränkt, d.h., dass  $\mathbb{P}(Z_i = n_0) > 0$  und  $\mathbb{P}(Z_i \geq n) = 0$  für alle  $n \geq n_0$  für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so gilt offensichtlich

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = n_0\right) = 1.$$

Wir schreiben  $F(n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(Z_1 = k)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , für die Verteilungsfunktion der  $Z_i$  und beschränken uns auf die (interessanten) Verteilungen mit  $F(n) < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir nehmen außerdem an, dass  $F(n) > 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Andernfalls führen wir einen Shift auf den natürlichen Zahlen durch. Resultate zur Verteilungskonvergenz und dafür notwendige Bedingungen finden sich in [And70].

Wir betrachten wie üblich die Raum-Zeit-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $X_n := (n, M_n)$ . Diese ist eine kombinatorische Markov-Kette auf der kombinatorischen Familie

$$\mathbb{F} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n, \quad \mathbb{F}_n := \{(n, j) : j \in \mathbb{N}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{F}_0 = \{(0, 0)\},$$

und  $X_0 := (0, 0)$  mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = (n, j) \mid X_m = (m, i)) &= \begin{cases} \mathbb{P}(M_{n-m} \leq j), & i = j, \\ \mathbb{P}(M_{n-m} = j), & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(j)^{n-m}, & i = j, \\ F(j)^{n-m} - F(j-1)^{n-m}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Die zugehörigen Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten erhalten wir dann als

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_m = (m, i) \mid X_n = (n, j)) \\ &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(M_m = i, \max\{Z_{m+1}, \dots, Z_n\} \leq i)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i = j, \\ \frac{\mathbb{P}(M_m = i, \max\{Z_{m+1}, \dots, Z_n\} = j)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(M_m = i)\mathbb{P}(M_{n-m} \leq i)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i = j, \\ \frac{\mathbb{P}(M_m = i)\mathbb{P}(M_{n-m} = j)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{(F(i)^m - F(i-1)^m) F(i)^{n-m}}{F(j)^n - F(j-1)^n}, & i = j, \\ \frac{(F(i)^m - F(i-1)^m) (F(j)^{n-m} - F(j-1)^{n-m})}{F(j)^n - F(j-1)^n}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten hängen also von der Verteilung  $\mathcal{L}(Z_1)$  ab. Unterschiedliche Folgen von Maxima lassen sich also nicht als  $h$ -Transformierte voneinander darstellen. Insbesondere trifft dies auf die uns interessierende Folge geometrisch-verteilter Zufallsvariablen zu.

Als Martin-Kern zur Kette  $X$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} K((m, i), (n, j)) &= \begin{cases} \frac{\mathbb{P}(M_{n-m} \leq j)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i = j, \\ \frac{\mathbb{P}(M_{n-m} = j)}{\mathbb{P}(M_n = j)}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{F(j)^{n-m}}{F(j)^n - F(j-1)^n}, & i = j, \\ \frac{F(j)^{n-m} - F(j-1)^{n-m}}{F(j)^n - F(j-1)^n}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{F(j)^{-m}}{1 - \left(\frac{F(j-1)}{F(j)}\right)^n}, & i = j, \\ F(j)^{-m} \frac{1 - \left(\frac{F(j-1)}{F(j)}\right)^{n-m}}{1 - \left(\frac{F(j-1)}{F(j)}\right)^n}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Sei nun  $Z$  die für uns relevante Folge unabhängiger und  $\text{Geo}(\theta)$ -verteilter Zufallsgrößen mit festem  $\theta \in (0, 1)$ . Wir nennen  $X$  die **Maximums-Kette**.

**SATZ 5.1** (a) Die Doob-Martin-Kompaktifizierung  $\bar{\mathbb{F}}$  der Maximums-Kette  $X$  lässt sich mit der Menge

$$(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^2$$

identifizieren, zusammen mit der üblichen Topologie hierauf. Eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \bar{\mathbb{F}}^{\mathbb{N}}$  konvergiert in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn

- (i)  $n_k \rightarrow n \in \mathbb{N}$ ,  $j_k \rightarrow j \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $n_k \rightarrow n \in \mathbb{N}$ ,  $j_k \rightarrow \infty$ ,
- (iii)  $n_k \rightarrow \infty$ ,  $j_k \rightarrow j \in \mathbb{N}$ , oder

(iv)  $n_k \rightarrow \infty, j_k \rightarrow \infty$ .

Der minimale Rand ist durch  $\{\infty\} \times (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$  gegeben.

(b) Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen  $(\infty, \infty)$ .

(c) Die  $h_{(\infty, J)} := K(\cdot, (\infty, J))$ -transformierten Ketten für  $J \in \mathbb{N}$  haben die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p^{h_{(\infty, J)}}((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{1 - (1 - \theta)^i}{1 - (1 - \theta)^J} & i = j \leq J \\ \frac{\theta(1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^J}, & i < j \leq J, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis.* Für eine geometrische Verteilung mit Parameter  $\theta$  haben wir  $F(n) = 1 - (1 - \theta)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Wir erhalten dann

$$K((m, i), (n, j)) = \begin{cases} \frac{(1 - (1 - \theta)^j)^{n-m}}{(1 - (1 - \theta)^j)^n - (1 - (1 - \theta)^{j-1})^n}, & i = j, \\ \frac{(1 - (1 - \theta)^j)^{n-m} - (1 - (1 - \theta)^{j-1})^{n-m}}{(1 - (1 - \theta)^j)^n - (1 - (1 - \theta)^{j-1})^n}, & i < j. \end{cases} \quad (5.2)$$

Wir betrachten  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , die jede endliche Teilmenge  $A \subset \mathbb{F}$  schließlich verlassen. Hier konzentrieren wir uns zunächst auf drei Fälle: Nur der Parameter  $j_k$ , nur der Parameter  $n_k$  oder beide Parameter verlassen schließlich jede endliche Menge. Im ersten Fall muss  $j_k \rightarrow \infty$  gelten (vergleiche Abschnitt 4.2). Für festes  $n \in \mathbb{N}$  und  $(m, i) \in \mathbb{F}$ ,  $m \leq n$ , gibt es ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $j_k > i$  für alle  $k \geq k_0$ . Wir erhalten dann durch Ausmultiplizieren und Ausklammern des Terms  $(1 - \theta)^{j_k-1}$

$$\begin{aligned} K((m, i), (n, j_k)) &= \frac{\sum_{l=1}^{n-m} \binom{n-m}{l} (-(1 - \theta)^{j_k})^l - \sum_{l=1}^{n-m} \binom{n-m}{l} (-(1 - \theta)^{j_k-1})^l}{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l} (-(1 - \theta)^{j_k})^l - \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} (-(1 - \theta)^{j_k-1})^l} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^{n-m} \binom{n-m}{l} (-1)^l (1 - \theta)^{(l-1)j_k+1} - \sum_{l=1}^{n-m} \binom{n-m}{l} (-1)^l ((1 - \theta)^{j_k-1})^{l-1}}{\sum_{l=1}^n \binom{n}{l} (-1)^l (1 - \theta)^{(l-1)j_k+1} - \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} (-1)^l ((1 - \theta)^{j_k-1})^{l-1}}. \end{aligned}$$

In Zähler und Nenner dieses Bruchs konvergiert für  $k \rightarrow \infty$  nur der erste Summand der ersten Summe nicht gegen 0 sondern gegen  $-(n - m)(1 - \theta)$  bzw.  $-n(1 - \theta)$ . Für festes  $n \in \mathbb{N}$  und  $(m, i) \in \mathbb{F}$ ,  $m \leq n$ , gilt daher

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n, j_k)) = \frac{n - m}{n}.$$

Da  $n_k$  im ersten Fall schließlich beschränkt bleibt, konvergiert für diese Folgen der Martin-Kern genau dann, wenn  $n_k$  gegen ein  $N \in \mathbb{N}$  konvergiert. Wir identifizieren die Grenzwerte

dieser Folgen mit dem Tupel  $(N, \infty)$  und die erweiterten Martin-Kerne  $K((m, i), (N, \infty))$  sind superharmonische Funktionen (Lemma 2.9), also nicht minimal.

Für den zweiten Fall gelte  $n_k \rightarrow \infty$  und  $j_k$  bleibe schließlich in einer endlichen Menge. Durch die letzte Umformung in (5.2) folgt hier

$$K((m, i), (n, j)) = \begin{cases} \frac{(1 - (1 - \theta)^j)^{-m}}{1 - \left(\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j}\right)^n}, & i = j, \\ \frac{(1 - (1 - \theta)^j)^{-m} - \left(\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j}\right)^n (1 - (1 - \theta)^{j-1})^{-m}}{1 - \left(\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j}\right)^n}, & i < j. \end{cases}$$

Wir sehen unmittelbar, weil  $\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j} < 1$  und der erste Term im Zähler nicht von  $n$  abhängt, dass der Martin-Kern in diesem Fall genau dann für alle  $(m, i) \in \mathbb{F}$  konvergiert, wenn  $j_k$  gegen ein  $J \in \mathbb{N}$  konvergiert. Wir bezeichnen die Grenzwerte dieser Folgen mit  $(\infty, J)$  und der zugehörige erweiterte Martin-Kern ist dann durch

$$K((m, i), (\infty, J)) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1 - (1 - \theta)^J}\right)^m, & i \leq J, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben. Dass die Funktionen  $h_J := K(\cdot, (\infty, J))$ ,  $J \in \mathbb{N}$ , auch tatsächlich harmonisch sind, folgt aus

$$\begin{aligned} & \sum_{k=i}^{\infty} p((m, i), (m+1, k)) h_J((m+1, k)) \\ &= \left(\frac{1}{1 - (1 - \theta)^J}\right)^{m+1} \left( (1 - (1 - \theta)^i) - \sum_{k=i+1}^J (1 - \theta)^{k-1} \theta \right) \\ &= \left(\frac{1}{1 - (1 - \theta)^J}\right)^{m+1} (1 - (1 - \theta)^J) = \left(\frac{1}{1 - (1 - \theta)^J}\right)^m. \end{aligned}$$

Einfache Rechnungen ergeben die Übergangswahrscheinlichkeiten aus Teil (c) des Satzes. Aus diesen folgt, dass bei den zugehörigen transformierten Ketten die zweite Komponente nach oben durch  $J$  beschränkt ist. Es ist klar, dass diese obere Schranke fast sicher angenommen wird; die transformierten Ketten haben daher triviale terminale  $\sigma$ -Algebra und die Punkte  $(\infty, J)$ ,  $J \in \mathbb{N}$ , gehören zum minimalen Martin-Rand.

Es bleibt, den dritten Fall zu untersuchen. Wir nehmen an, dass auch  $j_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Wir betrachten also für jedes  $(m, i) \in \mathbb{F}$  nur den Fall, dass  $j_k > i$  für alle  $k \geq k_0$  und ein

$k_0 \in \mathbb{N}$ . Wir formen den Martin-Kern um zu

$$K((m, i), (n, j)) = (1 - (1 - \theta)^j)^{-m} \frac{1 - \left(\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j}\right)^{n-m}}{1 - \left(\frac{1 - (1 - \theta)^{j-1}}{1 - (1 - \theta)^j}\right)^n}.$$

Da  $(1 - \theta) \in (0, 1)$  gilt, konvergiert der erste Faktor wegen unserer Annahme gegen 1. Wir wollen Zähler und Nenner des zweiten Faktors separat untersuchen. Diese unterscheiden sich offensichtlich nur um  $m$  Faktoren der Gestalt

$$\frac{1 - (1 - \theta)^{j_k - 1}}{1 - (1 - \theta)^{j_k}} = 1 - (1 - \theta)^{j_k - 1} \frac{\theta}{1 - (1 - \theta)^{j_k}} =: 1 - \alpha_k.$$

Die Folge  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert mit  $k \rightarrow \infty$  gegen 0, daher erhalten wir mit der Tatsache, dass  $\log(1 - x) = -x + \mathcal{O}(x^2)$  für  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_k)^{n_k} &= \exp(n_k \log(1 - \alpha_k)) = \exp(-n_k \alpha_k + \mathcal{O}(n_k \alpha_k^2)) \\ &= \exp(-n_k \alpha_k + o(n_k \alpha_k)) \end{aligned}$$

für  $k \rightarrow \infty$ . Angenommen,  $n_k \alpha_k$  konvergiert gegen ein  $\beta \in (0, \infty)$ . Dann konvergiert  $n_k \alpha_k^2$  gegen 0 und wir erhalten als Grenzwert für den Martin-Kern

$$\lim_{k \rightarrow \infty} K((m, i), (n_k, j_k)) = \frac{1 - \exp(\beta)}{1 - \exp(\beta)} = 1.$$

Offensichtlich konvergiert  $K(\cdot, (n_k, j_k))$  auch gegen 1, wenn  $n_k \alpha_k$  bestimmt divergiert.

Nehmen wir an, dass  $n_k \alpha_k$  für  $k \rightarrow \infty$  gegen 0 geht. Aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion folgt sofort, dass  $\exp(-x) \sim 1 - x$  für  $x \rightarrow 0$  gilt. Wir haben somit

$$\begin{aligned} K((m, i), (n_k, j_k)) &\sim \frac{1 - \exp(-n_k \alpha_k)}{1 - \exp(-(n_k - m) \alpha_k)} \sim \frac{1 - (1 - (n_k - m) \alpha_k)}{1 - (1 - n_k \alpha_k)} \\ &= \frac{n_k - m}{n_k}, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

also konvergiert der Martin-Kern auch in diesem Fall gegen 1.

Es bleibt, den Fall zu untersuchen, bei dem  $n_k \alpha_k$  divergiert. Für jede Teilfolge  $(n_{k_l} \alpha_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  gilt dann

$$[0, \infty) \cup \{\infty\} \ni \underline{\beta} := \liminf_{l \rightarrow \infty} n_{k_l} \alpha_{k_l}.$$

Zu dieser Teilfolge finden wir eine Teilfolge  $(n_{k_{l_m}} \alpha_{k_{l_m}})_{m \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $\underline{\beta}$  konvergiert. Für diese Teilfolge konvergiert nach unseren vorherigen Überlegungen  $K(\cdot, (n_{k_{l_m}}, j_{k_{l_m}}))$  gegen 1. Wir benutzen Lemma A.5 und erhalten, dass auch bei divergierendem  $n_k \alpha_k$  der Martin-Kern gegen 1 konvergiert. Wir identifizieren diesen Grenzwert mit dem Tupel  $(\infty, \infty)$ .

Mit der Untersuchung der drei Fälle haben wir alle möglichen Grenzwerte bereits abgedeckt, denn ist  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  keinem der drei Fälle eindeutig zuzuordnen, so finden wir Teilfolgen, für die dies der Fall ist. Da sich alle erweiterten Martin-Kerne paarweise unterscheiden, müssen sich die Grenzwerte entlang dieser Teilfolgen unterscheiden und der Martin-Kern kann für diese Folge nicht konvergieren.

Der Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  lässt sich also insgesamt mit  $(\mathbb{N} \cup \{\infty\})^2$  und der gewöhnlichen Topologie hierauf identifizieren. Für festes  $j \in \mathbb{N}$  überschreitet wegen

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} M_n > j) = 1 - \mathbb{P}(M_n \leq j \forall n \in \mathbb{N}) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq j) = 1$$

die Zufallsgröße  $M_n$  fast sicher alle Grenzen für  $n \rightarrow \infty$  und  $X$  konvergiert in der Doob-Martin-Topologie fast sicher gegen  $(\infty, \infty)$ . Wir erhalten, dass die terminale  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{T}(X)$  trivial ist und mit Lemma 2.21 ist der Punkt  $(\infty, \infty)$  auch im minimalen Rand enthalten.  $\square$

## 5.2 Die Multiplizitäts-Kette

Die Anzahl der benötigten Runden und die Anzahl der Gewinner nach diesen Runden ist nach Gleichung (5.1) gekoppelt. Es liegt also nahe, die Kette aus dem vorherigen Abschnitt 5.1 um die Multiplizität  $L_n$  des Maximums  $M_n$  zu ergänzen. Wir erhalten so eine kombinatorische Markov-Kette  $X$  mit Werten in der Familie

$$\mathbb{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n, \quad \mathbb{F}_n = \{(n, j, l) : j, l \in \mathbb{N}, j \geq 2, l \leq n\} \cup \{(n, 1, n)\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\mathbb{F}_0 = \{(0, 0, 0)\}.$$

Allgemein betrachten wir wieder auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  eine Folge  $Z = (Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrößen mit Werten in  $\mathbb{N}_0$  und Verteilungsfunktion  $F$  mit  $F(n) \in (0, 1)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei wieder

$$M_n := \max_{i \leq n} Z_i$$

das Maximum der ersten  $n$  Variablen und

$$L_n := \#\{i \in [n] : Z_i = M_n\}$$

die Multiplizität des Maximums. Haben wir zum Zeitpunkt  $m$  den Maximalwert  $i$  mit Multiplizität  $k$ , so gibt es für den Zeitpunkt  $n \geq m$  zwei Möglichkeiten: Entweder sind alle  $Z_t$ ,  $t \in \{m+1, \dots, n\}$  kleiner oder gleich  $i$ , oder mindestens eines der  $Z_t$  ist größer als  $i$ . Im zweiten Fall hängt die Multiplizität des Maximums zum Zeitpunkt  $n$  also nur von den Varia-

blen  $Z_{m+1}, \dots, Z_n$  ab, ist also unabhängig von der Multiplizität des Maximums zum Zeitpunkt  $m$ . Folglich hat  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  mit  $X_n = (n, M_n, L_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_0 = (0, 0, 0)$ , die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $m \leq n$

$$\mathbb{P}(X_n = (n, j, l) \mid X_m = (m, i, k)) = \begin{cases} \binom{n-m}{l-k} \mathbb{P}(Z_1 = i)^{l-k} F(i-1)^{n-m-(l-k)}, & i = j, \\ \binom{n-m}{l} \mathbb{P}(Z_1 = j)^l F(j-1)^{n-m-l}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Als Martin-Kern zur Kette  $X$  erhalten wir dann analog

$$\begin{aligned} K((m, i, k), (n, j, l)) &= \begin{cases} \frac{\binom{n-m}{l-k} \mathbb{P}(Z_1 = i)^{l-k} F(i-1)^{n-m-(l-k)}}{\binom{n}{l} \mathbb{P}(Z_1 = i)^l F(i-1)^{n-l}}, & i = j, \\ \frac{\binom{n-m}{l} \mathbb{P}(Z_1 = j)^l F(j-1)^{n-m-l}}{\binom{n}{l} \mathbb{P}(Z_1 = j)^l F(j-1)^{n-l}}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{\binom{n-m}{l-k}}{\binom{n}{l}} \mathbb{P}(Z_1 = i)^{-k} F(i-1)^{k-m}, & i = j, \\ \frac{\binom{n-m}{l}}{\binom{n}{l}} F(j-1)^{-m}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Sei nun  $Z$  wieder die für uns relevante Folge unabhängiger und  $\text{Geo}(\theta)$ -verteilter Zufallsgrößen mit festem  $\theta \in (0, 1)$ . Wir nennen  $X$  dieses Mal **Multiplizitäts-Kette**.

**SATZ 5.2** (a) Die Doob-Martin-Kompaktifizierung  $\bar{\mathbb{F}}$  der Multiplizitäts-Kette  $X$  lässt sich mit der Menge

$$\mathbb{F} \cup \{(N, L) \in \mathbb{N}^2 \mid L \leq N\} \cup (\mathbb{N}_{\geq 2} \times (0, 1]) \cup (\{\infty\} \times [0, 1]) \cup \{(1, 1)\}$$

identifizieren. Eine Folge  $(n_s, j_s, l_s)_{s \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  konvergiert in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn

- (i)  $n_s \rightarrow N \in \mathbb{N}$ ,  $j_s \rightarrow \infty$ ,  $l_s \rightarrow L \in \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $n_s \rightarrow \infty$ ,  $j_s \rightarrow J \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ,  $l_s/n_s \rightarrow \alpha \in (0, 1]$ ,
- (iii)  $n_s \rightarrow \infty$ ,  $j_s \rightarrow \infty$ ,  $l_s/n_s \rightarrow \alpha \in [0, 1]$ ,
- (iv)  $n_s \rightarrow \infty$ ,  $j_s \rightarrow 1$ ,  $l_s/n_s \rightarrow 1$ .

Der minimale Rand ist durch  $(\mathbb{N}_{\geq 2} \times (0, 1]) \cup \{(\infty, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$  gegeben.

(b) Die Kette  $X$  konvergiert fast sicher in der Doob-Martin-Topologie gegen  $(\infty, 0)$ .

(c) Die  $h_{(J,\alpha)} := K(\cdot, (J, \alpha))$ -transformierten Ketten für  $J \in \mathbb{N}$  haben die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p^{h_{(J,\alpha)}}((m, i, k), (m+1, j, l)) = \begin{cases} (1-\alpha) \frac{(1-(1-\theta)^{i-1})}{1-(1-\theta)^{J-1}}, & i = j \leq J, l = k, \\ (1-\alpha) \frac{\theta(1-\theta)^{i-1}}{1-(1-\theta)^{J-1}}, & i = j < J, l = k+1, \\ (1-\alpha) \frac{\theta(1-\theta)^{j-1}}{1-(1-\theta)^{J-1}}, & i < j < J, l = 1, \\ \alpha, & i < j = J, l = 1, \\ \alpha, & i = j = J, l = k+1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsaussagen.

**LEMMA 5.3** *Es sei  $(n_s, l_s)_{s \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^2)^{\mathbb{N}}$  eine Folge, für die  $l_s \leq n_s$  für alle  $s \in \mathbb{N}$  gilt und bei der  $n_s$  schließlich beschränkt bleibt. Dann konvergiert  $\binom{n_s-m}{l_s} \binom{n_s}{l_s}^{-1}$  genau dann für alle  $m \in \mathbb{N}$ , wenn  $(n_s, l_s)$  gegen ein  $(N, L) \in \mathbb{N}^2$  konvergiert.*

*Beweis.* Die Rückrichtung ist offensichtlich. Für die Hinrichtung betrachten wir die Spezialfälle  $m = 1$  und  $m = 2$ , für die der Quotient nach Voraussetzung konvergieren muss. Der Quotient ist im ersten Fall

$$\binom{n_s-1}{l_s} \binom{n_s}{l_s}^{-1} = \frac{n_s - l_s}{n_s}. \quad (5.4)$$

Da  $n_s$  schließlich beschränkt bleibt, gibt es ein  $s_0 \in \mathbb{N}$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodass  $(n_s, l_s) \in [n_0]^2$  für alle  $s \geq s_0$ . Wegen der Endlichkeit der Menge  $[n_0]^2$  konvergiert (5.4) gegen ein  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ ,  $0 \leq a < b \leq n_0$ . Es gibt nur endlich viele Tupel  $(N_i, L_i) \in [n_0]^2$ , sodass

$$\frac{N_i - L_i}{N_i} = \frac{a}{b}. \quad (5.5)$$

Angenommen,  $(n_s, l_s)$  konvergiert nicht gegen ein  $(N, L) \in [n_0]^2$ . Dann gibt es mindestens zwei Paare  $(N_1, L_1) \neq (N_2, L_2)$ , die Gleichung (5.5) erfüllen, mit  $(n_s, l_s) = (N_1, L_1)$  für unendlich viele  $s \in \mathbb{N}$  und  $(n_s, l_s) = (N_2, L_2)$  für unendlich viele  $s \in \mathbb{N}$ . Aus (5.5) folgt, dass  $N_1 = c \cdot N_2$  und  $N_1 - L_1 = c \cdot (N_2 - L_2)$  für  $c = \frac{N_1}{N_2}$ . Für  $m = 2$  hat der Quotient die Gestalt

$$\binom{n_s-2}{l_s} \binom{n_s}{l_s}^{-1} = \frac{(n_s - l_s)(n_s - l_s - 1)}{n_s(n_s - 1)}.$$

Auch dieser muss konvergieren und wir haben daher, dass

$$\frac{(N_1 - L_1)(N_1 - L_1 - 1)}{N_1(N_1 - 1)} = \frac{(N_2 - L_2)(N_2 - L_2 - 1)}{N_2(N_2 - 1)} = \frac{c^2(N_1 - L_1)(N_1 - L_1 - 1/c)}{c^2 N_1(N_1 - 1/c)}$$

gelten muss. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$(N_1 - 1)(N_1 - L_1 - 1/c) - (N_1 - 1/c)(N_1 - L_1 - 1) = L_1(1 - 1/c) = 0.$$

Da  $L_1 > 0$ , muss  $c = 1$  gelten, und wir haben, dass  $(N_1, L_1) = (N_2, L_2)$  und  $(n_s, l_s) \rightarrow (N_1, L_1)$  für  $s \rightarrow \infty$ .  $\square$

**LEMMA 5.4** *Es sei  $(n_s, l_s)_{s \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^2)^{\mathbb{N}}$  eine Folge, für die  $l_s \leq n_s$  für alle  $s \in \mathbb{N}$  und bei der  $n_s \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$  gilt. Dann konvergiert  $\binom{n_s - m}{l_s - k} \binom{n_s}{l_s}^{-1}$  genau dann für alle  $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0, k \leq m$ , wenn  $l_s/n_s$  gegen ein  $\alpha \in [0, 1]$  konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \binom{n_s - m}{l_s - k} \binom{n_s}{l_s}^{-1} = \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k}.$$

*Beweis.* Ein Ausfaktorisieren liefert

$$\binom{n_s - m}{l_s - k} \binom{n_s}{l_s}^{-1} = \prod_{q=0}^{k-1} \frac{l_s - q}{n_s - q} \prod_{r=0}^{m-k-1} \frac{n_s - l_s - r}{n_s - k - r}.$$

Gilt nun  $l_s/n_s \rightarrow \alpha \in [0, 1]$  für  $s \rightarrow \infty$ , so konvergiert der erste Faktor gegen  $\alpha^k$  und der zweite gegen  $(1 - \alpha)^{m-k}$ , da  $m \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  fest sind. Konvergiert der Quotient für alle  $m \in \mathbb{N}$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ , so auch

$$\binom{n_s - 1}{l_s} \binom{n_s}{l_s}^{-1} = 1 - \frac{l_s}{n_s},$$

woraus folgt, dass  $l_s/n_s \rightarrow \alpha \in [0, 1]$  bei  $s \rightarrow \infty$  auch notwendig ist.  $\square$

*Beweis des Satzes 5.2.* Aus der Darstellung (5.3) folgt hier für die Darstellung des Martin-Kerns

$$K((m, i, k), (n, j, l)) = \begin{cases} \binom{n - m}{l - k} \binom{n}{l}^{-1} (\theta(1 - \theta)^{i-1})^{-k} (1 - (1 - \theta)^{i-1})^{k-m}, & i = j, \\ \binom{n - m}{l} \binom{n}{l}^{-1} (1 - (1 - \theta)^{j-1})^{-m}, & i < j, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Um Fallunterscheidungen und Schreibarbeit zu sparen, nehmen wir in natürlicher Weise an, dass  $\binom{a}{b} = 0$ , falls  $a < 0$  oder  $b \notin \{0, \dots, a\}$  gilt.

Wir betrachten Folgen  $(n_s, j_s, l_s)_{s \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ , die jede endliche Teilmenge  $A \subset \mathbb{F}$  schließlich verlassen. Wir nehmen wieder zunächst an, dass  $n_s$  schließlich beschränkt ist; folglich auch  $l_s$ .

Mit Lemma 5.3 konvergiert der Martin-Kern für Folgen, bei denen  $n_s$  beschränkt bleibt und  $j_s \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$  gilt, wenn  $(n_s, l_s)$  gegen ein  $(N, L)$  konvergiert und wir bezeichnen diesen Grenzwert mit  $(N, L)$ . Die erweiterten Martin-Kerne sind wieder superharmonisch (Lemma 2.9).

Gilt andererseits, dass  $n_s \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ , so können wir wieder aus der Gestalt des Martin-Kerns ersehen, dass wir die Asymptotik des Quotienten der Binomialkoeffizienten untersuchen müssen. Hierzu benutzen wir ein Resultat aus der Theorie der Pólya-Urnen (siehe auch Abschnitt 6.1):

Für  $n_s \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$  nehmen wir nun zunächst an, dass  $j_s$  gegen ein  $J \in \mathbb{N}$  konvergiert. Für  $i > J$  ist dann  $K((m, i, k), (n_s, j_s, l_s))$  schließlich 0. Ist  $i = J$ , so existiert ein  $s_0 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$K((m, J, k), (n_s, j_s, l_s)) = \binom{n_s - m}{l_s - k} \binom{n_s}{l_s}^{-1} (\theta(1 - \theta)^{J-1})^{-k} (1 - (1 - \theta)^{J-1})^{k-m}$$

für alle  $s \geq s_0$  gilt. Nach Lemma 5.4 wissen wir, dass dieser Ausdruck genau dann konvergiert, wenn  $l_s/n_s$  gegen ein  $\alpha \in [0, 1]$  konvergiert. Ist  $i < J$ , so existiert wieder ein  $s_0 \in \mathbb{N}$ , sodass

$$K((m, i, k), (n_s, j_s, l_s)) = \binom{n_s - m}{l_s} \binom{n_s}{l_s}^{-1} (1 - (1 - \theta)^{J-1})^{-m}$$

für alle  $s \geq s_0$  gilt. Wieder nach Lemma 5.4 wissen wir, dass dieser Ausdruck genau dann konvergiert, wenn  $l_s/n_s$  gegen ein  $\alpha \in [0, 1]$  konvergiert. Wir identifizieren den Grenzwert dieser Folgen mit  $(J, \alpha)$  und haben die erweiterten Martin-Kerne

$$K((m, i, k), (J, \alpha)) = \begin{cases} \alpha^k (1 - \alpha)^{m-k} (\theta(1 - \theta)^{J-1})^{-k} (1 - (1 - \theta)^{J-1})^{k-m}, & i = J, \\ (1 - \alpha)^m (1 - (1 - \theta)^{J-1})^{-m}, & i < J, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir weisen darauf hin, dass  $(J, 1)$  zu unterscheiden ist von  $(N, 1)$ , dem Grenzwert bei einfrügendem Zeitparameter, erlauben uns aber diesen leichten Missbrauch der Notation. Zudem sehen wir, dass für  $J \geq 2$

$$\begin{aligned} K\left((m, i, k), \left(J - 1, \frac{\theta(1 - \theta)^{J-2}}{1 - (1 - \theta)^{J-1}}\right)\right) &= \begin{cases} (1 - (1 - \theta)^{J-1})^{-m}, & i \leq J - 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= K((m, i, k), (J, 0)) \end{aligned}$$

gilt. Wir identifizieren also den Punkt  $(J, 0)$  mit  $\left(J - 1, \frac{\theta(1 - \theta)^{J-2}}{1 - (1 - \theta)^{J-1}}\right)$ .

Gilt  $j_s \rightarrow \infty$  für  $s \rightarrow \infty$ , so konvergiert  $K((m, i, k), (n_s, j_s, l_s))$  wieder genau dann, wenn  $l_s/n_s$  gegen ein  $\alpha \in [0, 1]$  konvergiert und wir identifizieren diesen Grenzwert mit  $(\infty, \alpha)$  mit zugehörigem erweiterten Martin-Kern

$$K((m, i, k), (\infty, \alpha)) = (1 - \alpha)^m$$

für alle  $(m, i, k) \in \mathbb{F}$ .

Es bleibt zu zeigen, dass die Konvergenz der  $j_s$  in der Einpunktkompaktifizierung der natürlichen Zahlen notwendig für die Konvergenz der Martin-Kerne im Falle  $n_s \rightarrow \infty$  ist. Dazu nehmen wir zunächst an, dass weiterhin  $l_s/n_s$  konvergiert,  $j_s$  allerdings nicht. Dann gilt, dass

$$\mathbb{N} \ni J_- := \liminf_{s \rightarrow \infty} j_s < \limsup_{n \rightarrow \infty} j_s =: J_+ \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Dann können wir Teilfolgen  $(j_{s_u})_{u \in \mathbb{N}}$  und  $(j_{s_v})_{v \in \mathbb{N}}$  finden, sodass  $j_{s_u}$  gegen  $J_-$  für  $u \rightarrow \infty$  und  $j_{s_v}$  gegen  $J_+$  für  $v \rightarrow \infty$  konvergiert. Konvergiert  $l_s/n_s$  gegen ein  $\alpha \in (0, 1)$ , erhalten wir, dass

$$\lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_- + 1, 1), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) = 0,$$

aber

$$\begin{aligned} & \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_- + 1, 1), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})) \\ &= \begin{cases} \alpha(1 - \alpha)^{m-1}(\theta(1 - \theta)^{J_-})^{-1}(1 - (1 - \theta)^{J_-})^{1-m}, & J_+ = J_- + 1, \\ (1 - \alpha)^m(1 - (1 - \theta)^{J_+ - 1})^{-m}, & J_- + 1 < J_+ < \infty, \\ (1 - \alpha)^m, & J_+ = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Analog gehen wir vor, falls  $l_s = o(n_s)$ , denn in diesem Fall folgt

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_-, 1), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) = 0, \\ & \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_-, 1), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})) = \begin{cases} (1 - (1 - \theta)^{J_+ - 1})^{-m}, & J_+ < \infty, \\ 1, & J_+ = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Abschließend ist für  $l_s \sim n_s$

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_-, m), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) = (\theta(1 - \theta)^{J_- - 1})^{-m}, \\ & \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_-, m), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})) = 0. \end{aligned}$$

In all diesen Fällen kann der Martin-Kern nicht für alle  $(m, i, k) \in \mathbb{N}$  konvergieren.

Wenn weder  $j_s$  noch  $l_s/n_s$  konvergieren, können wir solche Teilfolgen finden, dass  $l_s/n_s$  gegen den Limes Inferior  $\alpha_-$  bzw. den Limes Superior  $\alpha_+$  entlang dieser Teilfolgen konvergiert.

Sollte  $j_s$  entlang einer dieser Teilfolgen nicht konvergieren, so können wir dieselbe Argumentation wie oben verwenden, um zu zeigen, dass der Martin-Kern nicht konvergieren kann. Konvergiert  $j_s$  gegen  $J \in \mathbb{N}$  entlang beider Teilfolgen, nutzen wir

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J, m), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) &= \alpha_-^m (\theta(1 - \theta)^{J-1})^{-m} \\ &< \alpha_+^m (\theta(1 - \theta)^{J-1})^{-m} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J, m), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})), \end{aligned}$$

und für  $J = \infty$  benutzen wir  $(1 - \alpha_-)^m > (1 - \alpha_+)^m$ .

Es bleibt also nur noch zu zeigen, was passiert, wenn  $j_s$  gegen  $J_1$  entlang der ersten und gegen  $J_2 \neq J_1$  entlang der zweiten Teilfolge konvergiert. Wieder betrachten wir verschiedene Fälle und passen  $(m, i, k) \in \mathbb{F}$  dementsprechend an. Für  $J_1 < J_2 < \infty$  betrachten wir

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_2, m), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) &= 0 < \alpha_+^m (\theta(1 - \theta)^{J_2-1})^{-m} \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_2, m), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})). \end{aligned}$$

Für  $J_1 < J_2 = \infty$  unterscheiden wir zwischen

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_1 + 1, m), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) &= 0 < (1 - \alpha_+)^m \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_1 + 1, 1), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})) \end{aligned}$$

für  $\alpha_+ < 1$  und

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, 1, 1), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) &= (1 - \alpha_-)^m (1 - (1 - \theta)^{J_1-1})^{-m} > 0 \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_1 + 1, 1), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})) \end{aligned}$$

für  $\alpha_+ = 1$ , denn falls  $J_1 = 1$  gilt, muss  $\alpha_- = 1$  sein. Gilt  $J_2 < J_1 = \infty$ , so ist

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} K((m, J_2 + 1, 1), (n_{s_u}, j_{s_u}, l_{s_u})) &= (1 - \alpha_-)^m > 0 \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} K((m, J_2 + 1, 1), (n_{s_v}, j_{s_v}, l_{s_v})). \end{aligned}$$

Für  $J_1 < \infty$  und  $\alpha_- > 0$  wählen wir  $(m, J_1, m)$  und für  $\alpha_- = 0$  wählen wir  $(m, J_2 + 1, 1)$ . Insgesamt folgt nach diesen diversen Fallunterscheidungen die Notwendigkeit der Konvergenz der  $j_s$  in der Einpunktkompaktifizierung  $\bar{\mathbb{N}}$ .

Für  $\alpha \in [0, 1]$  ist  $K(\cdot, (\infty, \alpha))$  nur dann harmonisch, wenn  $\alpha = 0$  gilt. Für  $\alpha > 0$  können diese Funktionen also nicht im minimalen Martin-Rand liegen. Die Funktionen  $K(\cdot, (J, \alpha))$ ,

$J \in \mathbb{N}$  sind harmonisch, denn für  $(m, i, k) \in \mathbb{N}$ ,  $i < J$ , gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{(m+1, j, l) \in \mathbb{F}_{m+1}} p((m, i, k), (m+1, j, l)) K((m+1, j, l), (J, \alpha)) \\
&= \sum_{j=i+1}^J p((m, i, k), (m+1, j, 1)) K((m+1, j, 1), (J, \alpha)) \\
&\quad + p((m, i, k), (m+1, i, k)) K((m+1, i, k), (J, \alpha)) \\
&\quad + p((m, i, k), (m+1, i, k+1)) K((m+1, i, k+1), (J, \alpha)) \\
&= \sum_{j=i+1}^{J-1} \theta(1-\theta)^{j-1} (1-\alpha)^{m+1} (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m-1} \\
&\quad + \alpha(1-\alpha)^m (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m} \\
&\quad + (1-(1-\theta)^{i-1}) (1-\alpha)^{m+1} (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m-1} \\
&\quad + \theta(1-\theta)^{i-1} (1-\alpha)^{m+1} (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m-1} \\
&= (1-\alpha)^m (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m} \left\{ \alpha + (1-\alpha)(1-(1-\theta)^{J-1})^{-1} \right. \\
&\quad \cdot \left. \left( (1-\theta)^i - (1-\theta)^{J-1} + 1 - (1-\theta)^{i-1} + \theta(1-\theta)^{i-1} \right) \right\} \\
&= (1-\alpha)^m (1-(1-\theta)^{J-1})^{-m} = K((m, i, k), (J, \alpha)),
\end{aligned}$$

und für  $(m, i, k) \in \mathbb{N}$ ,  $i = J$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \sum_{(m+1, j, l) \in \mathbb{F}_{m+1}} p((m, i, k), (m+1, j, l)) K((m+1, j, l), (J, \alpha)) \\
&= p((m, J, k), (m+1, J, k)) K((m+1, J, k), (J, \alpha)) \\
&\quad + p((m, J, k), (m+1, J, k+1)) K((m+1, J, k+1), (J, \alpha)) \\
&= (1-(1-\theta)^{J-1}) \alpha^k (1-\alpha)^{m+1-k} (\theta(1-\theta)^{J-1})^{-k} (1-(1-\theta)^{J-1})^{k-m-1} \\
&\quad + \theta(1-\theta)^{J-1} \alpha^{k+1} (1-\alpha)^{m-k} (\theta(1-\theta)^{J-1})^{-k-1} (1-(1-\theta)^{J-1})^{k-m} \\
&= K((m, J, k), (J, \alpha)).
\end{aligned}$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten der  $h_{(J, \alpha)}$ -transformierten Ketten aus Teil (c) ergeben sich analog durch einfache Rechnungen.

Die erweiterten Martin-Kerne  $h_{(J, \alpha)}$  sind nur harmonisch für  $(J, \alpha) \in (\mathbb{N}_{\geq 2} \times (0, 1]) \cup \{(\infty, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$ . Wir haben nur noch zu zeigen, dass alle diese Funktionen auch minimal sind. Für  $X^{(1,1)}$  ist dies offensichtlich. Für  $(J, \alpha)$  wollen wir die  $h_{(J, \alpha)}$ -transformierten Ketten genauer beschreiben, um Korollar 2.18 anwenden zu können. Dazu sei  $Z^J = (Z_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$  eine

Folge unabhängiger Zufallsvariablen, für die

$$\mathcal{L}(Z_i^J) = \mathcal{L}(Z_i | Z_i \leq J - 1)$$

gilt. Wir bedingen also die Ausgangsfolge  $Z$  darauf, dass die  $Z_i$ 's mit Wahrscheinlichkeit 1 kleiner  $J$  sind. Es sei  $\chi^J = (\chi_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$  die zu  $Z^J$  gehörige Multiplizitäts-Kette. Zudem sei  $\zeta^J = (\zeta_n^J)_{n \in \mathbb{N}}$  die Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{F}$  mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((m, i, k), (m + 1, j, l)) = \begin{cases} 1, & i < j = J, l = 1, \\ 1 - \alpha, & i = j = J, l = k, \\ \alpha, & i = j = J, l = k + 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist die  $h_{(J, \alpha)}$ -transformierte Kette  $X^{h_{(J, \alpha)}}$  die Mischung der Ketten  $\chi^J$  und  $\zeta^J$ , also

$$X^{h_{(J, \alpha)}} = \alpha \zeta^J + (1 - \alpha) \chi^J.$$

In jedem Schritt verlassen wir mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha > 0$  das Regime der  $\chi$ -Kette und bewegen uns nur noch auf der Menge  $\{(J, l) : l \in \mathbb{N}\}$ , wobei wir in jedem Schritt den zweiten Parameter  $l$  mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  um eins erhöhen oder mit Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  in  $l$  bleiben. Der Parameter  $\alpha$  erfüllt hier eine Doppelrolle. Ab dem Verlassen des  $\chi$ -Regimes ist  $X^{h_{(J, \alpha)}}$  eine Nord-Ost-Irrfahrt mit Parameter  $\alpha$  (siehe Abschnitt 6.1), die minimal ist. Die Kette  $X^{h_{(J, \alpha)}}$  konvergiert demnach fast sicher gegen  $(J, \alpha)$  und ist nach Korollar 2.18 minimal. Für  $(\infty, 0)$  ist  $X^{h_{(\infty, 0)}} = X$ . Wir wissen, dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n > i) = 1$  für alle  $i \in \mathbb{N}$  und  $L_n = 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Daher konvergiert  $X_n$  in Verteilung gegen  $(\infty, 0)$ , nach Satz 2.10 fast sicher und wieder mit Korollar 2.18 ist  $(\infty, 0)$  daher im minimalen Rand enthalten.  $\square$

### 5.3 Die Anzahl der Teilnehmer

Wir wollen nun mit unseren Methoden die Anzahl der Teilnehmer  $N_n$  untersuchen, wenn wir mit  $j \in \mathbb{N}$  Teilnehmern starten und die Auswahl  $n$  Runden gedauert hat. Die Anzahl der verbleibenden Teilnehmer ist natürlich eine antitone Funktion. Deswegen betrachten wir eine Markov-Kette, bei der wir keine ausgezeichneten Übergangswahrscheinlichkeiten sondern nur zugehörige Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten festlegen (vgl. Abschnitt 2.2). Die Wahrscheinlichkeit, dass wir bei ursprünglich  $j$  Teilnehmern nach einem Durchgang nur noch  $i = 0, \dots, j$  Teilnehmer haben, ist durch

$$\binom{j}{i} (1 - \theta)^i \theta^{j-i}$$

gegeben. Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die kombinatorische Markov-Kette mit Werten in

$$\mathbb{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n, \quad \mathbb{F}_0 = \{(0, 0)\}, \quad \mathbb{F}_n = \{n\} \times \mathbb{N}_0,$$

und den Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten

$$q((n, i), (n+1, j)) := \begin{cases} \binom{j}{i} (1-\theta)^i \theta^{j-i}, & j > 0, i = 0, \dots, j \\ 1, & i = j = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Außerdem definieren wir die Folge  $W = (W_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von unabhängigen Zufallsvariablen mit den Dichten

$$f_i(x) := \frac{1}{(i-1)!} \exp(-ix - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.7)$$

Für die harmonischen Zahlen  $H_n$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n - \log n = \gamma$  mit der Euler-Mascheroni-Konstante  $\gamma = 0.57721 \dots$ .

**SATZ 5.5** Sei  $X$  eine kombinatorische Markov-Kette mit den Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten aus (5.6).

(a) Der Doob-Martin-Rand  $\partial \mathbb{F}$  zu  $X$  ist  $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , die Menge der erweiterten reellen Zahlen, wobei eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  genau dann gegen ein  $z \in \overline{\mathbb{R}}$  konvergiert, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c(\theta) \log(j_k) - n_k) = z, \quad (5.8)$$

mit

$$c(\theta) := -\frac{1}{\log(1-\theta)}.$$

(b) Es seien  $W_i$  und  $\zeta_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  unabhängige Zufallsvariablen, wobei die  $W_i$ 's die Dichte aus (5.7) besitzen und die  $\zeta_i$ 's  $\text{Exp}(i)$ -verteilt sind. Für  $z \in \mathbb{R}$  ist dann der erweiterte Martin-Kern

$$K((m, i), z) = \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \mathbb{P}(W_i < c_\infty(m, i, z) < W_i + \zeta_i), & i \geq 1, \\ \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \exp(-(1-\theta)^{-m-z}), & i = 0, \end{cases}$$

mit

$$c_\infty(m, i, z) := H_i - \gamma - \frac{m+z}{c(\theta)}.$$

Außerdem gilt  $K(m, i, -\infty) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \mathbb{1}_{\{i=0\}}((m, i))$  und  $K(\cdot, +\infty) = \mathbb{1}_{(0,0)}$ .

(c) Für  $z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  sind die erweiterten Martin-Kerne  $K(\cdot, z)$  harmonisch.

*Beweis.* Wie gewohnt betrachten wir Folgen  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die jede Teilmenge schließlich verlassen. Da wir nur Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten gegeben haben, benutzen wir die Darstellung

$$K((m, i), (n_k, j_k)) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = (m, i))} \varrho_m^{n_k}((m, i), (n_k, j_k))$$

des Martin-Kerns. Zunächst betrachten wir die Elemente  $(m, i) \in \mathbb{F}$ , für die  $i \geq 1$  gilt. Die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeit  $\varrho_m^{n_k}((m, i), (n_k, j_k))$  korrespondiert mit der Situation, dass von  $j_k$  Teilnehmern nach  $n_k - m$  Runden immer noch  $i$  Teilnehmer vorhanden sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die zugehörigen  $Z_j$ 's größer als  $n_k - m$  sind. Wir erhalten also

$$\varrho_m^{n_k}((m, i), (n_k, j_k)) = \mathbb{P}(\#\{1 \leq l \leq j_k : Z_l > n_k - m\} = i). \quad (5.9)$$

Es geht also um die Anzahl geometrisch verteilter Zufallsvariablen, die eine bestimmte Größe überschreiten. Wir werden den Zusammenhang zwischen geometrisch und exponentialverteilten Zufallsvariablen ausnutzen, um eine Darstellung der Ordnungsstatistiken letzterer zu verwenden. Dazu sei  $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängiger,  $\text{Exp}(1)$ -verteilter Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\mathcal{L}(\lceil c(\theta)\xi_i \rceil) = \mathcal{L}(Z_i)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  mit  $c(\theta) := -\frac{1}{\log(1-\theta)}$ . Die Kardinalität der Menge aus (5.9) können wir dann auch als

$$\begin{aligned} \#\{1 \leq l \leq j_k : Z_l > n_k - m\} &= \#\{1 \leq l \leq j_k : \lceil c(\theta)\xi_l \rceil > n_k - m\} \\ &= \#\{1 \leq l \leq j_k : \xi_l \geq c(\theta)^{-1}(n_k - m)\} \end{aligned}$$

schreiben. Wir weisen darauf hin, dass die zweite Gleichheit nur außerhalb einer Nullmenge gilt. Mithilfe der Ordnungsstatistiken  $\xi_{(j_k:1)} < \dots < \xi_{(j_k:j_k)}$  erhalten wir für die zu untersuchende Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeit

$$\varrho_m^{n_k}((m, i), (n_k, j_k)) = \mathbb{P}(\xi_{(j_k:j_k-i)} < c(\theta)^{-1}(n_k - m) \leq \xi_{(j_k:j_k-i+1)}). \quad (5.10)$$

Der Vektor der Ordnungsstatistik unabhängiger,  $\text{Exp}(1)$ -verteilter Zufallsvariablen hat nach Erkenntnissen von Sukhatme und Rényi (siehe z.B. [SW86, Exercise 1, S. 336]) die Darstellung

$$\mathcal{L}(\xi_{(j_k:1)}, \dots, \xi_{(j_k:j_k)}) = \mathcal{L}(\zeta_{j_k}, \zeta_{j_k} + \zeta_{j_k-1}, \dots, \zeta_{j_k} + \zeta_{j_k-1} + \dots + \zeta_1),$$

wobei die  $\zeta_i$ 's unabhängig und  $\text{Exp}(i)$ -verteilt sind. Es sei  $\mathcal{F}_n := \sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  die von den

ersten  $n$   $\zeta_i$ 's erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Dann ist  $(M_{n,i}, \mathcal{F}_n)_{n>i}$  mit

$$M_{n,i} := \sum_{l=i+1}^n \left( \zeta_l - \frac{1}{l} \right) = \sum_{l=i+1}^n \zeta_l - H_n + H_i$$

wegen der Unabhängigkeit der  $\zeta_i$ 's ein quadratintegrierbares Martingal, das dann für  $n \rightarrow \infty$  fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $W_i$  konvergiert. Nach [BG03] ist  $W_i$  absolut stetig mit der Dichte  $f_i$  aus (5.7). Wegen

$$\xi_{(j_k:j_k-i+1)} - \xi_{(j_k:j_k-i)} \sim \zeta_i$$

ist  $\xi_{(j_k:j_k-i+1)} - \xi_{(j_k:j_k-i)}$  unabhängig von  $\xi_{(j_k:j_k-i)}$ . Nehmen wir an, dass  $j_k \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$ , so konvergiert nach dem Satz von Cramér-Wold ([Kal02, Corollary 5.5])

$$\left( \xi_{(j_k:j_k-i)} - H_{j_k} + H_i, \xi_{(j_k:j_k-i+1)} - H_{j_k} + H_i \right)$$

in Verteilung gegen  $(W_i, W_i + \zeta_i)$ . Es sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen, die von unten gegen  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert. Für  $(X_k, Y_k) \xrightarrow{D} (X, Y)$ , wobei  $X$  und  $Y$  eine stetige Verteilungsfunktion haben, gilt dann

$$\mathbb{P}(X_k < a_k < Y_k) = \mathbb{P}(X_k < a < Y_k) - \mathbb{P}(X_k \in [a_k, a), Y_k > a) + \mathbb{P}(X_k < a_k, Y_k \in (a_k, a]).$$

Der erste Summand der rechten Seite konvergiert nach dem Portmanteau-Theorem ([Kal02, Theorem 4.25]) gegen  $\mathbb{P}(X < a < Y)$  und die anderen beiden Terme wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktionen gegen 0. Daher konvergiert

$$\begin{aligned} \varrho_m^{n_k}((m, i), (n_k, j_k)) &= \mathbb{P}(\xi_{(j_k:j_k-i)} < c(\theta)^{-1}(n_k - m) \leq \xi_{(j_k:j_k-i+1)}) \\ &= \mathbb{P}(\xi_{(j_k:j_k-i)} - H_{j_k} + H_i < c(\theta)^{-1}(n_k - m) - H_{j_k} + H_i \leq \xi_{(j_k:j_k-i+1)} - H_{j_k} + H_i), \end{aligned}$$

wenn  $c_k(m, i) := c(\theta)^{-1}(n_k - m) - H_{j_k} + H_i$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergiert. Wegen  $\lim_{k \rightarrow \infty} H_k - \log k = \gamma$  ist dies genau dann der Fall, wenn  $c(\theta) \log j_k - n_k$  gegen ein  $z \in \mathbb{R}$  konvergiert. Die Folge  $c_k(m, i)$  konvergiert dann gegen  $c_\infty(m, i, z) := H_i - \gamma - \frac{m+z}{c(\theta)}$ . Für  $i = 0$  erhalten wir analog zu den obigen Überlegungen

$$\begin{aligned} \varrho_m^{n_k}((m, 0), (n_k, j_k)) &= \mathbb{P}(\xi_{(j_k:j_k)} \leq c(\theta)^{-1}(n_k - m)) \\ &= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq l \leq j_k} \{\xi_l\} \leq c(\theta)^{-1}(n_k - m)\right) \\ &= (1 - \exp(-c(\theta)^{-1}(n_k - m)))^{j_k} \\ &= (1 - (1 - \theta)^{n_k - m})^{j_k}. \end{aligned}$$

Wenn  $c(\theta) \log j_k - n_k$  gegen ein  $z \in \mathbb{R}$  konvergiert, so ist dies äquivalent dazu, dass  $j_k \sim (1 - \theta)^{-n_k - z}$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wir erhalten

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_m^{n_k}((m, 0), (n_k, j_k)) = \exp(-(1 - \theta)^{-m - z}).$$

Für  $z \in \mathbb{R}$  erhalten wir die erweiterten Martin-Kerne

$$K((m, i), z) := \begin{cases} \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \mathbb{P}(W_i < c_\infty(m, i, z) < W_i + \zeta_i), & i \geq 1, \\ \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \exp(-(1 - \theta)^{-m - z}), & i = 0. \end{cases}$$

Für eine Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $z_k \rightarrow -\infty$  für  $k \rightarrow \infty$  konvergieren die erweiterten Martin-Kerne gegen  $K(m, i, -\infty) = \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = i)} \mathbb{1}_{\{i=0\}}((m, i))$  und für  $z_k \rightarrow +\infty$  für  $k \rightarrow \infty$  erhalten wir  $K((m, i), +\infty) = \mathbb{1}_{(0,0)}((m, i))$ . Gilt  $j_k = O(1)$ , so müssen wir  $n_k \rightarrow \infty$  haben, damit  $(n_k, j_k)$  jede endliche Teilmenge schließlich verlässt. Die Darstellung in (5.10) impliziert, dass wir in diesem Fall die Konvergenz der Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $-\infty$  erhalten.

Wir wollen nun umgekehrt zeigen, dass für die Konvergenz in der Doob-Martin-Topologie die Bedingung in (5.8) notwendig ist. Dazu merken wir abermals an, dass es nach Satz 2.10 reicht, die Notwendigkeit für ein  $(m, i) \in \mathbb{F}$  zu zeigen. Wir wählen in diesem Fall  $(m, i) = (1, 0)$ . Die Funktion  $f(z) = \exp(-(1 - \theta)^{-1 - z})$  ist streng monoton fallend in  $z$ ,  $f(z) \in (0, 1)$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 1$  und  $\lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 0$ . Wenn wir also eine Folge  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  haben, bei der die Bedingung (5.8) nicht gilt, so gilt

$$-\infty \leq z_- := \liminf_{k \rightarrow \infty} (c(\theta) \log(j_k) - n_k) < \limsup_{k \rightarrow \infty} (c(\theta) \log(j_k) - n_k) =: z_+ \leq +\infty.$$

Wir finden dann Teilfolgen  $(n_{k_s}, j_{k_s})_{s \in \mathbb{N}}$  und  $(n_{k_t}, j_{k_t})_{t \in \mathbb{N}}$ , die gegen  $z_-$  bzw.  $z_+$  konvergieren. Wegen der Eigenschaften der Funktion  $f$  gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} K((1, 0), (n_{k_s}, j_{k_s})) &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 = 0)} f(z_-) \\ &\neq \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 = 0)} f(z_+) = \lim_{t \rightarrow \infty} K((1, 0), (n_{k_t}, j_{k_t})). \end{aligned}$$

Der Martin-Kern kann nicht konvergieren und die Bedingung (5.8) muss notwendig sein.

Es bleibt zu zeigen, dass die  $h_z$ 's für alle  $z \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  harmonisch sind. Für  $z = -\infty$  ist dies klar. Für  $z \in \mathbb{R}$  sei  $(n_k, j_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge, die in der Doob-Martin-Kompaktifizierung gegen  $z$  konvergiert, dann gilt für ein  $(m, i) \in \mathbb{F}$

$$\sum_{j=i}^{\infty} p((m, i), (m+1, j)) K((m+1, j), z)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = (m, i))} \sum_{j=i}^{\infty} \varrho((m, i), (m+1, j)) \mathbb{P}(W_j < c_{\infty}(m+1, j; z) < W_j + \zeta_j) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_m = (m, i))} \sum_{j=i}^{\infty} \varrho((m, i), (m+1, j)) \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_{m+1}^{n_k}((m+1, j), (n_k, j_k)).
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt zeigen können, dass Summation und Limes vertauscht werden können, so ist die Harmonizität gezeigt. Dies folgt aber leicht aus

$$\begin{aligned}
\sum_{j=i}^{\infty} \varrho((m, i), (m+1, j)) \varrho_{m+1}^{n_k}((m+1, j), (n_k, j_k)) &\leq \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} \theta^{j-i} (1-\theta)^i \\
&\leq \frac{1}{i!} \sum_{j=i}^{\infty} j(j-1) \cdots (j-i+1) \theta^{j-i} \\
&= \left( \frac{1}{1-\theta} \right)^{i+1} < \infty
\end{aligned} \tag{5.11}$$

und dem Satz der majorisierten Konvergenz.  $\square$

An diesen Satz schließt sich in natürlicher Weise eine Frage an: Gibt es überhaupt eine kombinatorische Markov-Kette mit diesen Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten?

**SATZ 5.6** *Es existiert eine kombinatorische Markov-Kette mit den gewünschten Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten.*

*Beweis.* Wir wollen eine Kette konstruieren, die die gewünschten Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten besitzt. Für den Beweis würde es ausreichen, konkrete Übergangswahrscheinlichkeiten anzugeben und nachzuweisen, dass eine Markov-Kette mit diesen die gewünschten Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten besitzt, aber zum besseren Verständnis geben wir eine Konstruktion an. Dazu sei  $V \sim \text{Geo}_0(\eta)$ ,  $\eta \in (0, 1)$ , eine Zufallsvariable, die eine geometrische Verteilung mit Parameter  $\eta$  besitzt, die die Misserfolge zählt. Damit definieren wir eine Zufallsvariable  $W$  mit der bedingten Verteilung  $\mathcal{L}(W|V = j) = \text{Bin}(j, 1 - \theta)$ , d.h.

$$\mathbb{P}(W = i | V = j) = \binom{j}{i} (1 - \theta)^i \theta^{j-i}.$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $W = i$  gegeben  $V = j$  ist gerade die gesuchte Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeit und wir wollen eine Konstruktion finden, die  $W$  durch  $\chi_n$  und  $V$  durch  $\chi_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ersetzt. Einfache Umformungen liefern für  $i \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(W = i) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(W = i, V = j) = \sum_{j=i}^{\infty} \mathbb{P}(W = i | V = j) \mathbb{P}(V = j)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} (1-\theta)^i (1-\theta)^{j-i} (1-\eta)^j \eta \\
&= \eta ((1-\theta)(1-\eta))^i \sum_{j=i}^{\infty} \binom{j}{i} (\theta(1-\eta))^{j-i} \\
&= \eta ((1-\theta)(1-\eta))^i \left( \frac{1}{1-\theta+\eta\theta} \right)^{i+1} \\
&= \frac{\eta}{1-\theta+\eta\theta} \left( 1 - \frac{\eta}{1-\theta+\eta\theta} \right)^i.
\end{aligned}$$

Eine Zufallsvariable  $X$  ist  $\text{Geo}_0(p)$ -verteilt,  $p \in (0, 1)$ , wenn für  $k \in \mathbb{N}_0$   $\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p$  gilt. Die Zufallsvariable  $W$  ist folglich  $\text{Geo}_0\left(\frac{\eta}{1-\theta+\eta\theta}\right)$ -verteilt. Nehmen wir also an, dass  $\chi_1 \sim \text{Geo}_0(t_1)$ ,  $t_1 \in [0, 1]$ , so muss  $\chi_2$   $\text{Geo}_0(t_2)$ -verteilt sein mit  $t_1 = \frac{t_2}{1-\theta+t_2\theta}$ . Die Umkehrfunktion zu  $t_j \mapsto t_{j-1}$  ist gegeben durch

$$f_\theta(t) = \frac{t(1-\theta)}{1-t\theta}.$$

Damit definieren wir für  $t_1 \in [0, 1]$  die Folge  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  rekursiv durch

$$t_{n+1} = f_\theta(t_n).$$

Induktiv erhalten wir

$$t_n = \frac{t_1(1-\theta)^{n-1}}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}},$$

denn für  $n = 1$  ist dies klar und für  $n \rightarrow n+1$  gilt

$$\begin{aligned}
t_{n+1} = f_\theta(t_n) &= \frac{t_n(1-\theta)}{1-\theta t_n} = \frac{\frac{t_1(1-\theta)^{n-1}}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}}(1-\theta)}{1-\theta \frac{t_1(1-\theta)^{n-1}}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}}} \\
&= \frac{t_1(1-\theta)^n}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}-\theta t_1(1-\theta)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Für die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\chi_{n+1} = (n+1, j) \mid \chi_n = (n, i)) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\chi_n = (n, i) \mid \chi_{n+1} = (n+1, j)) \mathbb{P}(\chi_{n+1} = (n+1, j))}{\mathbb{P}(\chi_n = (n, i))} \\
&= \frac{\binom{j}{i} (1-\theta)^i \theta^{j-i} (1-t_{n+1})^j t_{n+1}}{(1-t_n)^i t_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\binom{j}{i} (1-\theta)^i \theta^{j-i} \left(1 - \frac{t_n(1-\theta)}{1-\theta t_n}\right)^j \frac{t_n(1-\theta)}{1-\theta t_n}}{(1-t_n)^i t_n} \\
&= \binom{j}{i} (1-\theta)^{i+1} \theta^{j-i} (1-t_n)^{j-i} (1-\theta t_n)^{-(j+1)} \\
&= \binom{j}{i} (1-\theta)^{i+1} \theta^{j-i} \left(1 - \frac{t_1(1-\theta)^{n-1}}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}}\right)^{j-i} \\
&\quad \cdot \left(1 - \theta \frac{t_1(1-\theta)^{n-1}}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}}\right)^{-(j+1)} \\
&= \binom{j}{i} (1-\theta)^{i+1} \theta^{j-i} (t_1(1-\theta)^{n-1} + 1 - t_1)^{i+1} \\
&\quad \cdot (1-t_1)^{j-i} (t_1(1-\theta)^n + 1 - t_1)^{-(j+1)}.
\end{aligned}$$

Der Prozess  $(n, \chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine kombinatorische Markov-Kette mit den gewünschte Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten. Hier haben wir implizit den Erweiterungssatz von Kolmogorov ([Kal02, Theorem 6.16]) verwendet.  $\square$

Wir können aber noch weitere Dinge über den im vorherigen Beweis konstruierten Prozess sagen.

**SATZ 5.7** *Es sei  $X$  die im Beweis zu Satz 5.6 konstruierte Markov-Kette. Dann gilt für den fast-sicheren Grenzwert  $X_\infty$*

$$\mathcal{L}(X_\infty) = \mathcal{L}(\log_\Theta Y)$$

mit  $\Theta := \frac{1}{1-\theta}$  und  $Y \sim \text{Exp}\left(\frac{t_1 \Theta}{1-t_1}\right)$ .

*Beweis.* Die Zufallsvariablen  $c(\theta) \log X_n - n$  konvergieren fast sicher gegen eine Zufallsvariable  $X_\infty$ . Mit der Verteilungsfunktion einer  $\text{Geo}_0(p)$ -verteilten Zufallsgröße erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(c(\theta) \log X_n - n \leq x) &= \mathbb{P}\left(X_n \leq \exp\left(\frac{x+n}{c(\theta)}\right)\right) = P(X_n \leq (1-\theta)^{-(x+n)}) \\
&= 1 - (1-t_n)^{\lfloor (1-\theta)^{-(x+n)} \rfloor} \\
&= 1 - \left(\frac{1-t_1}{1-t_1+t_1(1-\theta)^{n-1}}\right)^{\lfloor (1-\theta)^{-(x+n)} \rfloor + 1} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{1 + \frac{t_1}{1-t_1}(1-\theta)^{n-1}}\right)^{\lfloor (1-\theta)^{-(x+n)} \rfloor + 1} \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \exp\left(- (1-\theta)^{-x-1} \frac{t_1}{1-t_1}\right).
\end{aligned}$$

Nach dem Continuous Mapping Theorem konvergiert  $c(\theta) \log X_n - n$  genau dann fast sicher gegen  $X_\infty$ , wenn  $\Theta^{c(\theta) \log X_n - n} = \frac{X_n}{\Theta^n}$  fast sicher gegen  $\Theta^{X_\infty}$  konvergiert. Für eine  $\text{Geo}_0(p_n)$ -

verteilte Zufallsvariable  $Y_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$  gilt, dass  $Y_n/\mathbb{E}Y_n$  in Verteilung gegen eine  $\text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsvariable  $Y_\infty$  konvergiert. Die Zufallsvariable  $X_n$  hat den Erwartungswert

$$EX_n = \frac{1 - t_n}{t_n} = \frac{1 - \frac{t_1(1 - \theta)^{n-1}}{1 - t_1 + t_1(1 - \theta)^{n-1}}}{\frac{t_1(1 - \theta)^{n-1}}{1 - t_1 + t_1(1 - \theta)^{n-1}}} = \frac{1 - t_1}{t_1} \Theta^{n-1}.$$

Somit konvergiert  $\frac{X_n}{\Theta^n} \cdot \frac{t_1 \Theta}{1 - t_1}$  in Verteilung gegen eine  $\text{Exp}(1)$ -verteilte Zufallsvariable. Insbesondere hat  $X_\infty$  dieselbe Verteilung wie  $\log_\Theta(Y)$ ,  $Y \sim \text{Exp}\left(\frac{t_1 \Theta}{1 - t_1}\right)$ .  $\square$

Wir wollen nun abschließend zeigen, wie unsere Resultate das oszillierende Verhalten der Multiplizität erklären können. Dazu „drehen wir die Zeit um“, damit wir eine Markov-Kette erhalten, die (5.6) als Vorwärtsübergangswahrscheinlichkeiten hat. Dazu dehnen wir den Zeitbereich auf  $\mathbb{Z}$  aus und betrachten den Pfadraum  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$  mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}$  bezüglich der Produkttopologie. Wir weisen darauf hin, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$  vollständig durch die Wahrscheinlichkeit der Mengen

$$A(i_r, \dots, i_s) = \{(j_t) \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} : j_t = i_t, t = r, \dots, s\}, \quad r, s \in \mathbb{Z}, r < s, i_r, \dots, i_s \in \mathbb{N}_0,$$

beschrieben wird. Die Auswahlprozedur beginnt mit  $j_k$  Teilnehmern und hat die Übergangswahrscheinlichkeiten wie in (5.6). Wir lassen das Verfahren zum Zeitpunkt  $-k$  beginnen. Wir erhalten daher ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , auf  $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B})$  durch

$$\mathbb{P}_k(A(i_r, \dots, i_s)) = \begin{cases} \prod_{t=-k}^{s-1} \varrho((t+1, i_{t+1}), (t, i_t)), & r \leq -k, i_l = \dots = i_{-k} = j_k, \\ \varrho_r^k((r, i_r), (k, j_k)) \prod_{t=r}^{s-1} \varrho((t+1, i_{t+1}), (t, i_t)), & r > -k, i_r \leq j_k, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Erweiterung der Übergangswahrscheinlichkeiten für einen Zeitparameter  $n < 0$  ist klar, da (5.6) nicht von diesem abhängt. Ein Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit Verteilung  $\mathbb{P}_k$  modelliert den Auswahlprozess, der zum Zeitpunkt  $-k$  mit  $j_k$  Teilnehmern startet, d.h., es gilt

$$\mathbb{P}_k(X_n = j_k) = 1, \quad n \leq -k,$$

$$\mathbb{P}_k(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = \varrho((n+1, j), (n, i)), \quad n \geq -k.$$

Dann können wir mithilfe des Satzes 5.5 zeigen:

**SATZ 5.8** Für eine Folge  $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  natürlicher Zahlen, sei  $(\mathbb{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  die zugehörige Folge der Maße auf  $(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B})$ . Dann konvergieren die Maße  $(\mathbb{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  genau dann schwach für  $k \rightarrow \infty$ , wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (c(\theta) \log j_k - k) = z$$

für ein  $z \in \mathbb{R}$ . Ein Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , der als Verteilung das Grenzmaß  $\mathbb{P}^z$  hat, ist Markov mit den Übergangswahrscheinlichkeiten aus (5.6) und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} (c(\theta) \log X_n + n) = z \quad (5.12)$$

$\mathbb{P}^z$ -fast sicher.

*Beweis.* Um die schwache Konvergenz zu zeigen, betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten der Mengen  $A(i_r, \dots, i_s)$ ,  $r < s$ ,  $i_r, \dots, i_s \in \mathbb{N}_0$ , und für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $-k < r$  gilt

$$\mathbb{P}_k(A(i_r, \dots, i_s)) = \varrho_r^k((r, i_r), (k, j_k)) \prod_{t=r}^{s-1} \varrho((t+1, i_{t+1}), (t, i_t)).$$

Dies konvergiert nach Satz 5.5 genau dann, wenn

$$c(\theta) \log j_k - k$$

für  $k \rightarrow \infty$  gegen ein  $z \in \mathbb{R}$  konvergiert. Der schwache Grenzwert eines Markov'schen Maßes ist wieder Markov'sch. Satz 2.13 und abermals Satz 5.5 liefern dann die zweite Aussage, denn damit konvergiert  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $Y_n := X_{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}^z$ -fast sicher gegen  $z$ .  $\square$

**BEMERKUNG 5.9** (a) Auf dem Pfadraum  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$  können wir den Linksshift

$$T : \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}, \quad (i_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (i_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}},$$

definieren. Auf Prozessebene ist dies der Übergang von  $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  zu  $(X_{n+1})_{n \in \mathbb{Z}}$ . Mit diesem liefert dann (5.12) aus Satz 5.8, dass  $(\mathbb{P}^z)^T = \mathbb{P}^{z-1}$ . Die Dauer des Auswahlalgorithmus ist invariant unter einem Linksshift, hängt also von  $z$  nur über den Nachkommaanteil ab. Dies liefert einen Zusammenhang zur bereits bewiesenen logarithmischen Periodizität aus [BO90].

(b) Der Übergang von Satz 5.5 zu 5.8 kann als Bestimmen des **Martin-Eintritts-Randes** aufgefasst werden. Dieser steht im Gegensatz zu dem von uns bisher betrachteten Martin-Austritts-Rand in der Bestimmung der sogenannten harmonischen Maße (siehe [Doo59, Abschnitt 13]). Informell erhalten wir eine Beziehung zwischen dem Martin-Eintritts-Rand und dem Martin-Austritts-Rand der zeitumgekehrten Kette.

- (c) Starten wir die Auswahlprozedur zum Zeitpunkt 0 mit  $n$  Teilnehmern, so können wir den Prozess der Anzahl der Teilnehmer auch als einen Galton-Watson-Prozess ansehen: Jeder Teilnehmer hat mit Wahrscheinlichkeit  $1 - \theta$  einen, und mit Wahrscheinlichkeit  $\theta$  keinen Nachfolger. Diese Markov-Kette hat nicht die Raum-Zeit-Eigenschaft, aber wir können auch hier den Martin-Eintritts-Rand bestimmen (denn die Zeit ist umgekehrt) und erhalten den Torus  $S^1$  ([AR06, Theorem 1.2]). Wir weisen aber darauf hin, dass der Austausch von Summation und Limes in (5.11) wegen der fehlenden Lokalendlichkeit nicht aus der allgemeinen Theorie folgt<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>„the interchange of limit and summation being nontrivial but justified by the general theory“, [AR06, S. 593]

## 6 | Über das Zusammenfassen von Zuständen

Als Motivation dieses Abschnitts wollen wir mit einem Beispiel beginnen, das einen sehr bekannten stochastischen Prozess mit der kombinatorischen Markov-Kette aus Abschnitt 4.1 verbindet.

**BEISPIEL 6.1** Ein *gewurzelter binärer Baum*  $\mathfrak{t}$  ist eine präfixstabile Teilmenge von  $\{0, 1\}^*$ , d.h., ist  $u = u_1 \dots u_l$  ein Element von  $\mathfrak{t}$ , so sind für  $k \leq l$  auch alle  $v = v_1 \dots v_k$  mit  $u_i = v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Das leere Wort  $\emptyset$  sei der Wurzelknoten des Baumes. Elemente  $w = w_1 \dots w_k \in \{0, 1\}^*$ , deren direkter Vorgänger  $\bar{w} := w_1 \dots w_{k-1}$  Element von  $\mathfrak{t}$  ist,  $w$  selbst jedoch nicht, heißen externe Knoten des Baumes  $\mathfrak{t}$ . Wir bezeichnen mit  $\mathbb{B}_n$  die Menge aller binären Bäume mit  $n$  Knoten und mit  $\mathbb{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{B}_n$  die Menge aller endlichen binären Bäume.

Sei  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen mit  $\mathcal{L}(\eta_1) = \text{unif}(0, 1)$ . Zu dieser definieren wir eine Folge  $((\mathfrak{t}_n, L_n))_{n \in \mathbb{N}}$  bewerteter binärer Bäume wie folgt: Wir beginnen mit  $(\emptyset, L_1)$  und  $L_1(\emptyset) = \eta_1$ . Zu gegebenem  $(\mathfrak{t}_n, L_n)$  konstruieren wir  $(\mathfrak{t}_{n+1}, L_{n+1})$ : Beginnend mit dem Wurzelknoten vergleichen wir für den aktuellen Knoten  $u$   $\eta_{n+1}$  mit  $L_n(u)$ . Ist  $\eta_{n+1} < L_n(u)$ , so wählen wir als nächsten Knoten  $u0$ , andernfalls  $u1$ . Wir fahren fort, bis der aktuelle Knoten  $u$  ein externer Knoten von  $\mathfrak{t}_n$  ist. Der Baum  $(\mathfrak{t}_{n+1}, L_{n+1})$  sei dann  $\mathfrak{t}_{n+1} := \mathfrak{t}_n \cup \{u\}$  und  $L_{n+1}(v) := L_n(v)$  für  $v \in \mathfrak{t}_n$  und  $L_{n+1}(u) := \eta_{n+1}$ . Durch Weglassen der Bewertungen ist der stochastische Prozess  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $X_n := \mathfrak{t}_n$ , eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{B}$  ([Grü14b]) und heißt **BST-Kette** nach dem binary-search-tree-Algorithmus. Es gilt  $\mathbb{P}(X_n \in \mathbb{B}_n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Beim Übergang von  $n$  zu  $n+1$  wird einer der  $n+1$  externen Knoten von  $\mathfrak{t}_n$  zufällig und gleichverteilt ausgewählt. Hierbei spielt nur der Rang von  $\eta_{n+1}$  unter den ersten  $n \eta_i$ 's eine Rolle. Nummerieren wir die externen Knoten von  $\mathfrak{t}_n$  von links nach rechts (in der kanonischen Darstellung eines binären Baumes, der von unten nach oben wächst), und ist der Rang von  $\eta_{n+1}$  gleich  $k \in [n+1]$ , so wird der externe Knoten  $k$  hinzugefügt. Ist  $\eta_{n+1}$  ein Rekord, so wird der am weitesten rechts gelegene Knoten hinzugefügt.

Wir betrachten nun die Menge  $\mathbb{F} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$ ,  $\mathbb{F}_n := \{n\} \times [n]$ . Damit können wir die Abbildung  $\phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{F}$  durch

$$\phi(\mathfrak{t}_n) := (n, r_n) \quad \text{mit } r_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \underbrace{1 \dots 1}_{(k-1)\text{-mal}} \in \mathfrak{t}_n \right\}$$

definieren. Die Funktion  $\phi$  bildet auf die Anzahl der Rekorde unter den ersten  $n$   $\eta_i$ 's ab. Der stochastische Prozess  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $Y_n := \phi(X_n)$  ist wieder eine Markov-Kette mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p((n, i), (n+1, j)) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & j = i+1, \\ \frac{n}{n+1}, & j = i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und liefert uns demnach die bekannte Rekord-Kette aus Kapitel 4.

Zu der Markov-Kette  $X$  ist auch die Doob-Martin-Kompaktifizierung bekannt ([EGW12]). Dafür definieren wir für  $\mathfrak{t} \in \mathbb{B}$  und  $u \in \mathfrak{t}$  den Teilbaum  $\mathfrak{t}(u) := \{v \in \mathfrak{t} : u \leq v\}$  von  $\mathfrak{t}$  mit Wurzel  $u$ . Eine Folge  $(\mathfrak{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von binären Bäumen mit  $\#\mathfrak{t}_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung, wenn für alle  $u \in \{0, 1\}^*$  das Verhältnis  $\#\mathfrak{t}_n(u)/\#\mathfrak{t}_n$  konvergiert. Das Verhältnis aller Teilbaumgrößen zur Gesamtknotenzahl muss also konvergieren. Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{B}$  lässt sich mit der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\{0, 1\}^\infty$  identifizieren. Ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß ist definiert durch seine Werte auf den Mengen

$$A_u := \{v \in \{0, 1\}^\infty : u \leq v\}, \quad u \in \{0, 1\}^*.$$

Die Grenzzufallsvariable  $X_\infty$  ist also ein zufälliges Maß auf  $\{0, 1\}^\infty$  und nach ([Grü14b, Theorem 1]) gilt für alle  $u \in \{0, 1\}^*$

$$X_\infty(A_u) = \eta_{(i:j+1)} - \eta_{(i:j)}, \quad i := \inf\{n \in \mathbb{N} : u \in X_n\}, \quad \eta_{(i:j)} < \eta_{i+1} < \eta_{(i:j+1)}.$$

Lässt sich die Abbildung  $\phi$  stetig auf den Doob-Martin-Rand fortsetzen?

Hierzu konstruieren wir uns eine spezielle Folge  $\mathfrak{t} = (\mathfrak{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von binären Bäumen: Wir beginnen mit dem Wurzelknoten, d.h.  $\mathfrak{t}_1 = \{\emptyset\}$ . Es sei

$$l_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \underbrace{0 \dots 0}_{(k-1)\text{-mal}} \in \mathfrak{t}_n \right\}, \quad r_n := \max \left\{ k \in \mathbb{N} : \underbrace{1 \dots 1}_{(k-1)\text{-mal}} \in \mathfrak{t}_n \right\}$$

die Anzahl der Knoten in  $\mathfrak{t}_n$  im ganz linken bzw. ganz rechten Ast, also  $l_1 = r_1 = 1$ . Dazu

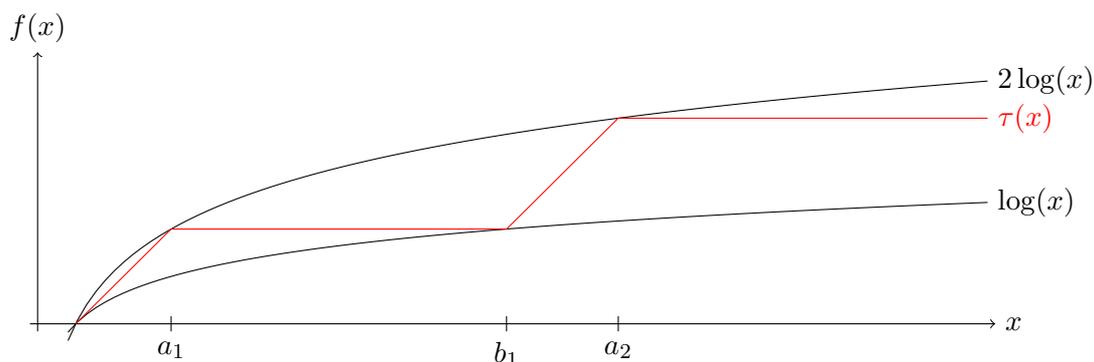


Abbildung 6.1: Die Funktion  $\tau$  im Bezug zu  $\log(x)$  und  $2 \log(x)$

definieren wir rekursiv zwei Folgen  $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ . Dazu sei  $\text{root}(f)$  das Maximum der Nullstellenmenge einer reellwertigen Funktion  $f$ ,  $\text{root}(f) = \infty$ , falls diese leer ist. Damit sei

$$\begin{aligned} b_0 &:= 1, & b_n &:= \text{root}(2 \log(a_n) - \log(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ a_n &:= \text{root}(2 \log(x) - x + b_{n-1} - \log(b_{n-1})) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es gilt  $a_n < b_n < a_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit Hilfe von  $a$  und  $b$  definieren wir die Funktion  $\tau : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$\tau(x) := \begin{cases} x - b_{n-1} + \log(b_{n-1}), & b_{n-1} \leq x < a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \\ 2 \log(a_n), & a_n \leq x < b_n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Funktion ist also linear zwischen  $b_{n-1}$  und  $a_n$ , konstant zwischen  $a_n$  und  $b_n$ , und hat bei  $a_n$  den Wert  $2 \log(a_n)$  und bei  $b_n$  den Wert  $\log(b_n)$  (siehe Abbildung 6.1). Dann können wir  $\mathfrak{t}$  als eine Folge aus nur zwei Ästen konstruieren, indem wir  $r_n := \lceil \tau(n) \rceil$  und  $l_n := n + 1 - r_n$  setzen. Dann befinden sich im rechten Ast  $O(\log n)$  Knoten und für jeden Knoten  $u$  im linken Ast gilt  $\#\mathfrak{t}_n(u)/n \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$ . Diese Folge binärer Bäume, für die offensichtlich  $\#\mathfrak{t}_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt, konvergiert in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der BST-Kette gegen das Einpunktmaß  $\mu$  auf  $\{0, 1\}^\infty$  in  $(0, 0, \dots)$ . Für die Folge  $\phi(\mathfrak{t}) = (\phi(\mathfrak{t}_n))_{n \in \mathbb{N}}$  gilt allerdings nach Konstruktion

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_2(\mathfrak{t}_n)}{\log n} = 1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi_2(\mathfrak{t}_n)}{\log n} = 2,$$

wobei mit  $\phi_2(\mathfrak{t}_n)$  die zweite Komponente von  $\phi(\mathfrak{t}_n)$  gemeint sei. Die Folge  $\phi(\mathfrak{t})$  konvergiert nach Satz 4.1 demnach nicht in der Doob-Martin-Kompaktifizierung der Rekord-Kette.

Nach Lemma 2.9 haben wir im Falle nicht lokalendlicher Ketten die Möglichkeit, dass Folgen gegen ein Element des Martin-Randes konvergieren, bei denen der Größenparameter der

Folgliedern aber schließlich beschränkt bleibt. Bilden wir nun von dieser Kette auf eine lokalendliche Kette ab, so kann es nach Satz 2.6 solch eine Folge keine Bildfolge haben, die gegen ein Element des Martin-Randes konvergiert. In diesem Fall können wir daher keine stetige Erweiterung dieser Abbildung haben, die Elemente des Martin-Randes auf Elemente des Martin-Randes der größeren Kette abbildet. Wir wollen daher wie in Abschnitt 2.2 nur lokalendliche kombinatorische Markov-Ketten betrachten. In diesem Fall können wir den zweiten Summanden in der Definition der Metrik  $d$  aus (2.5) weglassen, da dieser nur bei nicht lokalendlichen Ketten ohne die Raum-Zeit-Eigenschaft benötigt wird (siehe [Saw97]). Die Gewichtsfunktion  $w_{\mathbb{F}}$  ist frei wählbar, solange sie summierbar ist, und daher setzen wir ohne Einschränkung wegen  $f_n := \#\mathbb{F}_n < \infty$

$$w_{\mathbb{F}}(x) = \frac{2^{-n}}{f_n}, \quad x \in \mathbb{F}_n,$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir wollen nun Zustände aus  $\mathbb{F}$  zusammenfassen. Dazu sei  $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  eine Abbildung von  $\mathbb{F}$  in eine weitere kombinatorische Familie  $\mathbb{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}_n$ , sodass  $\phi(\mathbb{F}_n) = \mathbb{G}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Außerdem sei für  $y \in \mathbb{G}$

$$\mathbb{F}[y] := \{x \in \mathbb{F} : \phi(x) = y\}$$

die Menge der Urbilder von  $y \in \mathbb{G}$ . Es sei  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{F}$ . Wir nennen  $\phi$  eine **(schwache) Markov-Funktion** für  $X$ , wenn  $\phi(X)$  wieder eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{G}$  ist. Wir nennen eine Funktion  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  von einer endlichen Menge  $\mathcal{X}$  in eine endliche Menge  $\mathcal{Y}$  eine **starke Markov-Funktion** für eine Markov-Kette  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $\mathcal{X}$ , falls  $f(Y)$  für jede Startverteilung  $\mathcal{L}(Y_1)$  eine Markov-Kette ist.

**SATZ 6.2** *Es seien  $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  eine Abbildung von  $\mathbb{F}$  in eine weitere kombinatorische Familie  $\mathbb{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{G}_n$ , sodass  $\phi(\mathbb{F}_n) = \mathbb{G}_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt, und  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine kombinatorische Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{F}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\phi$  eine starke Markov-Funktion für die Prozesse  $X^{r,n} := (X_{n-m})_{m=0,\dots,n-1}$ . Dann gilt:*

(a) *Die Funktion  $\phi$  ist eine Markov-Funktion.*

(b) *Die Abbildung  $\phi$  lässt sich stetig auf den Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  fortsetzen.*

*Beweis.* (a) Die Übergangswahrscheinlichkeiten von  $X^{r,n}$  sind die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten zu  $X$  und als Startverteilung erhalten wir  $\mathcal{L}(X_n)$ . Aus diesem Grund erhalten wir für das Tupel  $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \in \times_{k=1}^n \mathbb{G}_k$

$$\mathbb{P}(\phi(X_n) = y_n \mid \phi(X_{n-1}) = y_{n-1}, \dots, \phi(X_1) = y_1)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mathbb{P}(\phi(X_n) = y_n, \phi(X_{n-1}) = y_{n-1}, \dots, \phi(X_1) = y_1)}{\mathbb{P}(\phi(X_{n-1}) = y_{n-1}, \dots, \phi(X_1) = y_1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\phi(X_n^{r,n}) = y_n) \mathbb{P}(\phi(X_{n-1}^{r,n}) = y_{n-1} \mid \phi(X_n^{r,n}) = y_n)}{\mathbb{P}(\phi(X_{n-1}^{r,n}) = y_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}(\phi(X_n) = y_n \mid \phi(X_{n-1}) = y_{n-1}).
\end{aligned}$$

Da das Tupel  $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$  beliebig gewählt war, erhalten wir, dass  $Y := \phi(X)$  die Markov-Eigenschaft hat und demnach eine Markov-Kette ist.

- (b) Wir beweisen diese Aussage, indem wir verwenden, dass die Doob-Martin-Kompaktifizierung eine Vervollständigung eines metrischen Raumes ist (Satz 2.7). Nach [KS76, Theorem 6.3.2] ist die Eigenschaft, dass  $\phi$  eine starke Markov-Funktion für die Ketten  $X^{r,n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ist, äquivalent dazu, dass für  $\tilde{x} \in \mathbb{G}_m$  und  $\tilde{y} \in \mathbb{G}_n$ ,  $m \leq n$ , gilt, dass

$$\sum_{x \in \mathbb{F}[\tilde{x}]} \mathbb{P}(X_m = x \mid X_n = y) \quad (6.1)$$

nicht von der Wahl von  $y \in \mathbb{F}[\tilde{y}]$  abhängt. Wir können wieder eine summierbare Gewichtsfunktion  $w_{\mathbb{G}} : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}_+$  wählen und gehen so vor, dass wir  $w_{\mathbb{G}}$  mit  $w_{\mathbb{F}}$  in Verbindung bringen können. Für  $\tilde{x} \in \mathbb{G}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sei also auch

$$w_{\mathbb{G}}(\tilde{x}) = \frac{2^{-n}}{f_n}.$$

Der Prozess  $Y = \phi(X)$  ist nach Teil (a) eine Markov-Kette und deren Martin-Kern bezeichnen wir mit  $K_Y(\cdot, \cdot)$  und können damit die Metrik

$$d_{\mathbb{G}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \frac{|K_Y(\tilde{z}, \tilde{x}) - K_Y(\tilde{z}, \tilde{y})|}{c_Y(\tilde{z})}$$

definieren. Damit erhalten wir für  $\tilde{x} \in \mathbb{G}_{n_1}$ ,  $x \in \mathbb{F}[\tilde{x}]$  und  $\tilde{y} \in \mathbb{G}_{n_2}$ ,  $y \in \mathbb{F}[\tilde{y}]$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{G}}(\tilde{x}, \tilde{y}) &= \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \frac{|K_Y(\tilde{z}, \tilde{x}) - K_Y(\tilde{z}, \tilde{y})|}{c_Y(\tilde{z})} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \mathbb{P}(Y_n = \tilde{z}) |K_Y(\tilde{z}, \tilde{x}) - K_Y(\tilde{z}, \tilde{y})| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \mathbb{P}(Y_n = \tilde{z}) \left| \frac{\mathbb{P}(Y_n = \tilde{z} \mid Y_{n_1} = \tilde{x})}{\mathbb{P}(Y_n = \tilde{z})} - \frac{\mathbb{P}(Y_n = \tilde{z} \mid Y_{n_2} = \tilde{y})}{\mathbb{P}(Y_n = \tilde{z})} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \left| \sum_{z \in \phi^{-1}(\tilde{z})} \mathbb{P}(X_n = z \mid X_{n_1} = x) - \mathbb{P}(X_n = z \mid X_{n_2} = y) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \sum_{z \in \phi^{-1}(\tilde{z})} |\mathbb{P}(X_n = z | X_{n_1} = x) - \mathbb{P}(X_n = z | X_{n_2} = z)| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \sum_{z \in \phi^{-1}(\tilde{z})} \mathbb{P}(X_n = z) \left| \frac{\mathbb{P}(X_n = z | X_{n_1} = x)}{\mathbb{P}(X_n = z)} - \frac{\mathbb{P}(X_n = z | X_{n_2} = z)}{\mathbb{P}(X_n = z)} \right| \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\tilde{z} \in \mathbb{G}_n} w_{\mathbb{G}}(\tilde{z}) \sum_{z \in \phi^{-1}(\tilde{z})} \frac{|K_X(z, x) - K_X(z, y)|}{c(z)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{z \in \mathbb{F}_n} w_{\mathbb{F}}(z) \frac{|K_X(z, x) - K_X(z, y)|}{c(z)} = d_{\mathbb{F}}(x, y).
\end{aligned}$$

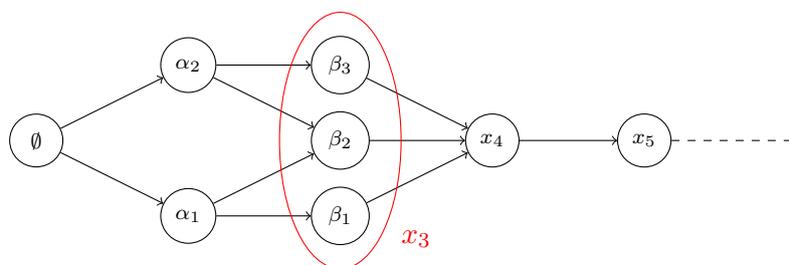
Die Abbildung  $\phi$  ist daher Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $K = 1$ . Damit ist  $\phi$  insbesondere gleichmäßig stetig und wir erhalten durch einen bekannten topologischen Sachverhalt (siehe z.B. [vQ01, Satz 12.14]), dass sich  $\phi$  stetig auf die Vervollständigung, und damit auf den Doob-Martin-Rand fortsetzen lässt.  $\square$

Für die Eigenschaft, dass  $\phi$  eine Markov-Funktion für  $X$  ist, reicht es zu zeigen, dass  $\phi$  eine starke Markov-Funktion für die Rückwärtsketten ist. Daher gilt Satz 6.2 auch für alle  $h$ -transformierten Ketten. Aus der Gleichung (6.1) folgt auch, dass  $\phi(X)$  die Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten

$$(\varrho_Y)_m^n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{x \in \mathbb{F}[\tilde{x}]} \mathbb{P}(X_m = x | X_n = y)$$

besitzt. Unser anfängliches Beispiel erfüllt (6.1) nicht. Die naheliegende Frage ist daher, ob die Bedingung (6.1) notwendig für eine stetige Erweiterung ist. Die Antwort hierauf ist negativ:

**BEISPIEL 6.3** Wir betrachten eine Markov-Kette  $X$ , die folgenden qualitativen Übergangsgraphen besitzt: Die kombinatorische Familie ist also  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n$  mit



$$\mathbb{F}_1 := \{\emptyset\}, \quad \mathbb{F}_2 := \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \mathbb{F}_3 := \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \quad \mathbb{F}_n := \{x_n\}, \quad n \geq 4.$$

Außerdem gelte

$$\mathbb{P}(X_2 = \alpha_i | X_1 = \emptyset) := \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbb{P}(X_3 = \beta_j | X_2 = \alpha_i) := \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad j = i, i + 1.$$

Bis auf  $\beta_2$  und  $x_4$  haben alle Elemente genau einen Vorgänger. Wir erhalten

$$\mathbb{P}(X_2 = \alpha_i | X_3 = \beta_2) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad \mathbb{P}(X_3 = \beta_j | X_4 = x_4) = \frac{1}{4}, \quad j = 1, 3,$$

$$\mathbb{P}(X_3 = \beta_2 | X_4 = x_4) = \frac{1}{2}.$$

Die Doob-Martin-Kompaktifizierung ist offensichtlich die Alexandroff'sche Einpunktkompaktifizierung. Wir definieren nun die Abbildung  $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  durch

$$\phi(x) := \begin{cases} x_3, & x = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ x, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die die Zustände  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  zu einem gemeinsamen Zustand  $x_3$  zusammenfasst, aber ansonsten die Identität auf  $\mathbb{F}$  ist. Die kombinatorische Familie  $\mathbb{G}$  unterscheidet sich von  $\mathbb{F}$  also nur in der Menge  $\mathbb{G}_3 = \{x_3\}$ . Für  $n \neq 3$  gilt  $\mathbb{G}_n = \mathbb{F}_n$ . Dann ist  $\phi(X)$  offensichtlich wieder eine Markov-Kette, deren Doob-Martin-Kompaktifizierung ebenfalls der Einpunktkompaktifizierung entspricht. Die stetige Fortsetzung bildet den Punkt  $\infty$  auf  $\infty$  ab. Aber es gilt

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha_1 | X_{n+1} = \beta_1) = 1 \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = \alpha_1 | X_{n+1} = \beta_2),$$

sodass Bedingung (6.1) verletzt ist. Die Bedingung ist also nicht notwendig für die Existenz einer stetigen Fortsetzung.

Wir wollen nun Beispiele angeben, bei denen die Bedingung (6.1) erfüllt ist, und die stetigen Erweiterungen bestimmen.

## 6.1 Die sortierte Pólya-Urne

Als erstes Beispiel wollen wir das vielleicht bekannteste Urnen-Modell auf das Zusammenfassen von Zuständen untersuchen: die **Pólya-Urne mit  $k$  Farben**,  $k \geq 2$ . Eine Urne enthalte dazu  $k$  Kugeln mit paarweise unterschiedlichen Farben. In jedem Zug wird der Urne eine Kugel zufällig und gleichverteilt entnommen, die Farbe der Kugel begutachtet und diese zusammen mit einer Kugel der gleichen Farbe zurück in die Urne gelegt. Formal betrachten wir die kombinatorische Markov-Kette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,k})$ ,  $X_0 = 0$ , mit Werten in der kombinatorischen Familie  $\mathbb{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n$ ,  $\mathbb{F}_n = \{x \in \mathbb{N}_0^k : |x| = n\}$ , und den Übergangswahr-

scheinlichkeiten

$$p(x, x + e_i) = \frac{x_i + 1}{|x| + k}, \quad i = 1, \dots, k,$$

mit dem  $i$ -ten Einheitsvektor  $e_i$  und der üblichen Schreibweise  $|x| := \sum_{i=1}^k x_i$ . Der Zufallsvektor  $X_n$  zählt also die bis zum Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}_0$  hinzugefügten Kugeln. Um Verwirrungen zu verhindern, weisen wir darauf hin, dass manchmal bei diesem Modell auch die vorhandenen Kugeln gezählt werden und zum Zeitpunkt  $n = 1$  gestartet wird. Der besseren Übersicht wegen lassen wir die Kette beim Zeitpunkt  $n = 0$  starten. Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\#\mathbb{F}_n = \binom{n+k-1}{n}$ , denn es gibt  $\binom{n+k-1}{n}$  Möglichkeiten, die  $n$  hinzugefügten Kugeln auf die  $k$  verschiedenen Farben zu verteilen.

**SATZ 6.4** *Es sei  $X$  die Pólya-Urne mit  $k$  Farben.*

(a) *Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}}$  mit  $|x_n| \rightarrow \infty$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung zu  $X$ , wenn die Anteile*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n,i}}{|x_n|} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

*konvergieren.*

(b) *Der minimale und der volle Rand stimmen überein und lassen sich mit dem  $k - 1$ -dimensionalen Wahrscheinlichkeitssimplex*

$$\Delta_k := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

*mit der Topologie der punktweisen Konvergenz identifizieren.*

(c) *Der fast sichere Grenzwert  $X_\infty$  ist  $\text{Dir}(1, \dots, 1)$ -verteilt.*

*Beweis.* Für eine Konfiguration  $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,k})$  zum Zeitpunkt  $n$  sind alle Reihenfolgen, in der die  $n$  Kugeln hinzugefügt wurden, gleich wahrscheinlich. Damit erhalten wir für die  $(n - m)$ -Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten,  $n \geq m$ ,  $x_m \in \mathbb{F}_m$ ,  $x_n \in \mathbb{F}_n$ ,  $x_m \leq x_n$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_m = x_m) \\ &= \binom{n-m}{x_{n,1} - x_{m,1}, \dots, x_{n,k} - x_{m,k}} \cdot \frac{(x_{m,1} + 1)(x_{m,1} + 2) \cdots x_{n,1} \cdots (x_{m,k} + 1)(x_{m,k} + 2) \cdots x_{n,k}}{(m+k)(m+k+1) \cdots (n+k-1)}. \end{aligned}$$

Da die Kette deterministisch in 0 startet, erhalten wir insbesondere die Randverteilungen der

Kette, denn für  $x_n \in \mathbb{F}_n$  gilt

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = \binom{n}{x_{n,1}, \dots, x_{n,k}} \frac{x_{n,1}! \cdots x_{n,k}!}{k \cdots (n+k-1)} = \frac{1}{\binom{n+k-1}{n}} = \frac{1}{\#\mathbb{F}_n}. \quad (6.2)$$

Zu jedem Zeitpunkt  $n \in \mathbb{N}_0$  ist  $X_n$  auf den Möglichkeiten gleichverteilt. Für  $k = 2$  erhalten wir somit ein weiteres Beispiel für die in Abschnitt 3.1 betrachtete Situation. Für eine bessere Übersicht kürzen wir den Multinomialkoeffizienten

$$\binom{n}{x_n} := \binom{n}{x_{n,1}, \dots, x_{n,k}}$$

ab. Außerdem gilt, dass  $X$

$$\mathbb{P}(X_m = x_m | X_n = x_n) = \frac{\binom{n-m}{x_n-x_m} \binom{m}{x_m}}{\binom{n}{x_n}} = \frac{\binom{x_{n,1}}{x_{m,1}} \cdots \binom{x_{n,k}}{x_{m,k}}}{\binom{n}{m}}$$

als Rückwärtsübergangswahrscheinlichkeiten hat. Gegeben  $X_n = x_n$  ist  $X_m$ ,  $m \leq n$ , multivariat (verallgemeinert) hypergeometrisch verteilt mit den Parametern  $x_n$  und  $m$  (siehe [Kle06, Beispiel 1.105.(vi)]). Damit erhalten wir für den Doob-Martin-Kern  $K_X$

$$\begin{aligned} K_X(x_m, x_n) &= \frac{\mathbb{P}(X_n = x_n | X_m = x_m)}{\mathbb{P}(X_n = x_n)} = \frac{\binom{n-m}{x_n-x_m} k \cdots (m+k-1)}{\binom{n}{x_n} x_{m,1}! \cdots x_{m,k}!} \\ &= \frac{(x_{n,1} - x_{m,1} + 1) \cdots x_{n,1} \cdots (x_{n,k} - x_{m,k} + 1) \cdots x_{n,k} k \cdots (m+k-1)}{(n-m+1)(n-m+2) \cdots n x_{m,1}! \cdots x_{m,k}!}. \end{aligned}$$

Der erste Bruch hat in Zähler und Nenner eine feste Anzahl von  $m$  Faktoren, der zweite Bruch hängt nicht von  $x_n$  ab. Für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $|x_n| \rightarrow \infty$  konvergiert  $K(x_m, x_n)$  für alle  $x_m \in \mathbb{F}$ , wenn die Anteile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n,i}}{|x_n|} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

konvergieren. Um die Notwendigkeit dieser Bedingung einzusehen, reicht es, die  $k$  Einheitsvektoren  $e_i$  für  $x_m$  einzusetzen. Der Doob-Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  zu  $X$  lässt sich also mit dem  $k-1$ -dimensionalen Wahrscheinlichkeitssimplex

$$\Delta_k := \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}_+^k : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

identifizieren. Der erweiterte Martin-Kern ist dann

$$K_X(x_m, \alpha) = \alpha_1^{x_{m,1}} \cdots \alpha_k^{x_{m,k}} \frac{k \cdots (m+k-1)}{x_{m,1}! \cdots x_{m,k}!}.$$

Die  $h$ -transformierte Kette  $X^h$  mit  $h = K_X(\cdot, \alpha)$  für ein  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Delta_k$  hat die Übergangswahrscheinlichkeiten für  $x_n \in \mathbb{F}_n, i = 1, \dots, k$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1}^h = x_n + e_i \mid X_n^h = x_n) = \frac{1}{h(x_n)} \mathbb{P}(X_{n+1} = x_n + e_i \mid X_n = x_n) h(x_n + e_i) = \alpha_i.$$

Dies ist die Irrfahrt auf  $\mathbb{F}$  mit Parameter  $\alpha$ . Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen konvergieren die relativen Anteile  $\frac{1}{n} X_n^h$  fast sicher gegen  $\alpha$ . Der minimale Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$  ist also der volle Martin-Rand  $\partial\mathbb{F}$ . Die erweiterten Martin-Kerne  $K_X(x_m, \alpha)$  sind Dichten der Dirichlet-Verteilung (siehe z.B. [Kle06, Definition 24.25]) mit Parameter  $(x_{m,1}+1, \dots, x_{m,k}+1)$  bezüglich der Gleichverteilung  $\text{unif}(\Delta_k)$ , d.h.

$$\int_{\Delta_k} K_X(x_m, \alpha) (k-1)! \ell^k(d\alpha) = 1,$$

wobei  $\ell^k$  das  $k$ -dimensionale Lebesgue-Maß sei. Nach Satz 2.12 konvergieren also die relativen Anteile der Polyá-Urne mit Startbesetzung  $(x_1, \dots, x_k)$  fast sicher gegen eine  $\text{Dir}(x_1+1, \dots, x_k+1)$ -verteilte Zufallsgröße.

Wir vergleichen auf  $\Delta_k$  die Teilraumtopologie  $\tau_0$  bzgl. der Standardtopologie auf  $\mathbb{R}^k$  mit der Doob-Martin-Topologie  $\tau_{\text{DM}}$ . Konvergiert eine Folge  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in \Delta_k^{\mathbb{N}_0}$  bzgl.  $\tau_0$  gegen  $\alpha \in \Delta_k$  für  $i \rightarrow \infty$ , d.h., dass  $\alpha_{i,j} \rightarrow \alpha_j$  für  $j = 1, \dots, k$  gilt, so konvergiert offensichtlich auch  $K_X(x_m, \alpha_i)$  gegen  $K_X(x_m, \alpha)$  für  $i \rightarrow \infty$  für alle  $x_m \in \mathbb{F}$  und damit bzgl.  $\tau_{\text{DM}}$ . Konvergiert umgekehrt  $K_X(x_m, \alpha_i)$  gegen  $K_X(x_m, \alpha)$  für  $i \rightarrow \infty$  für alle  $x_m \in \mathbb{F}$ , so auch  $K_X(e_j, \alpha_i) = k \cdot \alpha_{i,j}$  gegen  $K_X(e_j, \alpha) = k \cdot \alpha_j$  für  $i \rightarrow \infty$  für alle  $j = 1, \dots, k$ . Daraus folgt, dass  $\alpha_i$  auch bzgl.  $\tau_0$  gegen  $\alpha$  konvergiert. Die Doob-Martin-Topologie und die Standardtopologie stimmen also überein.  $\square$

Zu einer Pólya-Urne mit  $k$  Farben betrachten wir nun den Prozess  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ,  $Y_i = (Y_{i,1}, \dots, Y_{i,k})$ , bei dem die Kugelanzahlen absteigend sortiert sind, d.h.  $Y_i = (X_{i:k}, \dots, X_{i:1})$ . Der Prozess  $Y$  nimmt also Werte in  $\mathbb{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{G}_n$ ,  $\mathbb{G}_n := \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{F}_n : x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k\}$  an, und wir nennen diesen **sortierte Pólya-Urne mit  $k$  Farben**. Es sei  $\phi : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{G}$  die Abbildung, die einen Vektor  $x \in \mathbb{F}$  absteigend ordnet. Auf der Menge  $\mathbb{F}_n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , wirkt die symmetrische Gruppe  $\mathbb{S}$ , indem für  $x_n \in \mathbb{F}_n$  und  $\pi \in \mathbb{S}_k$

$$\pi(x_n) := (x_{n,\pi(1)}, \dots, x_{n,\pi(k)})$$

gesetzt wird. Es sei  $\mathbb{G}_n = \mathbb{F}_n / \mathbb{S}_k$  der Quotientenraum von  $\mathbb{F}_n$  bzgl.  $\mathbb{S}_k$ . Für  $x_m \in \mathbb{F}_m$  und  $x_n \in \mathbb{F}_n$ ,  $m \leq n$ , erhalten wir für beliebiges  $\tau \in \mathbb{S}_k$  und der Tatsache, dass  $\mathbb{S}_k = \{\pi \circ \tau : \pi \in \mathbb{S}_k\}$ ,

$$\sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \mathbb{P}(X_m = \pi(x_m) \mid X_n = x_n) = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \mathbb{P}(X_m = \pi(x_m) \mid X_n = \tau(x_n)). \quad (6.3)$$

Wegen (6.1) und Satz 6.2 (a) ist  $Y$  wieder eine Markov-Kette.

**SATZ 6.5** *Es sei  $Y$  die sortierte Pólya-Urne mit  $k$  Farben.*

(a) *Eine Folge  $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{G}^{\mathbb{N}}$  mit  $|\tilde{x}_n| \rightarrow \infty$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung zu  $Y$ , wenn die Anteile*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{x}_{n,i}}{|\tilde{x}_n|} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

*konvergieren.*

(b) *Der minimale und der volle Rand stimmen überein und lassen sich mit dem  $k - 1$ -dimensionalen Simplex*

$$\tilde{\Delta}_k := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Delta_k : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k\}$$

*mit der Topologie der punktweisen Konvergenz identifizieren.*

(c) *Die stetige Erweiterung  $\tilde{\phi} : \Delta_k \rightarrow \tilde{\Delta}_k$  ist gegeben durch*

$$\phi((\alpha_1, \dots, \alpha_k)) = (\alpha_{(k:k)}, \dots, \alpha_{(k:1)}).$$

*Beweis.* Aufgrund der Gleichverteilung (6.2) gilt für die Pólya-Urne mit  $k$  Farben, dass für  $x \in \mathbb{F}_n$ ,  $\phi(x) = \tilde{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\mathcal{L}(X_n | \phi(X_n) = \tilde{x}) = \text{unif}(\{y \in \mathbb{F}_n : \phi(y) = \tilde{x}\}). \quad (6.4)$$

Gegeben den Wert von  $Y_n$  ist  $X_n$  auf den Urbildern gleichverteilt. Wir merken, dass diese Eigenschaft im Allgemeinen nicht für die  $h$ -transformierten Ketten  $X^h$  erfüllt ist. In diesem Beispiel ist die obige Eigenschaft für alle Irrfahrten mit Parameter  $\alpha \neq (\frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$  nicht erfüllt. Aus (6.4) und (6.1) folgt dann für den Martin-Kern zu  $Y$  mit  $y_m \in \mathbb{G}_m$ ,  $y_n \in \mathbb{G}_n$ ,  $x_m \in \mathbb{F}[y_m]$ ,  $x_n \in \mathbb{F}[y_n]$ ,  $m \leq n$ ,

$$\begin{aligned} K_Y(y_m, y_n) &= \frac{\mathbb{P}(Y_m = y_m | Y_n = y_n)}{\mathbb{P}(Y_m = y_m)} \\ &= \frac{1}{\#\mathbb{F}[y_m] \mathbb{P}(X_m = x_m)} \sum_{x \in \mathbb{F}[y_m]} \mathbb{P}(X_m = x | X_n = x_n) \\ &= \frac{1}{\#\mathbb{F}[y_m]} \sum_{x \in \mathbb{F}[y_m]} \frac{\mathbb{P}(X_m = x | X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_m = x)} \\ &= \frac{1}{\#\mathbb{F}[y_m]} \sum_{x \in \mathbb{F}[y_m]} K_X(x, x_n). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wegen der Endlichkeit der Summe, dem Permutationsargument wie in (6.3) und Satz 6.4 erhalten wir, dass der Martin-Kern zu  $Y$  genau dann für eine Folge  $(y_{n_l})_{l \in \mathbb{N}}$  mit  $|y_{n_l}| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \infty$  konvergiert, wenn die Anteile

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{y_{n_l, i}}{|y_{n_l}|} = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

konvergieren. Wegen der Ordnungseigenschaft von  $Y$  gilt dann auch  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k$ . Der Doob-Martin-Rand lässt sich also mit dem  $k - 1$ -dimensionalen Simplex

$$\tilde{\Delta}_k := \{(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \Delta_k : \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_k\}$$

identifizieren. Als erweiterten Martin-Kern erhalten wir

$$K_Y(y_m, \alpha) = \frac{1}{\#\mathbb{F}[y_m]} \sum_{x \in \mathbb{F}[y_m]} K_X(x, \alpha).$$

Nach Satz 6.2 (b) existiert eine stetige Fortsetzung von  $\phi$  auf  $\bar{\mathbb{F}}$ , die in diesem Fall offensichtlich durch

$$\tilde{\phi}(\alpha) = (\alpha_{(k:k)}, \dots, \alpha_{(k:1)}), \quad \alpha \in \partial \mathbb{F}$$

gegeben ist. Die Werte in  $\Delta_k$  werden durch  $\tilde{\phi}$  absteigend geordnet. Elemente in  $\tilde{\Delta}_k$ , für die  $\alpha_i = \alpha_j, i \neq j$ , gilt, haben mehr als ein Urbild - die Abbildung  $\tilde{\phi}$  ist also nicht bijektiv.

Nun zeigen wir, dass die Standardtopologie  $\tilde{\tau}_0$  auf  $\tilde{\Delta}_k$  mit der durch  $Y$  definierten Doob-Martin-Topologie  $\tilde{\tau}_{\text{DM}}$  übereinstimmt. Dass die Konvergenz in der Standardtopologie die Konvergenz in der Doob-Martin-Topologie impliziert, ist wie in Satz 6.4 offensichtlich. Nehmen wir also an, dass  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \tilde{\Delta}_k^{\mathbb{N}_0}$  bzgl.  $\tilde{\tau}_{\text{DM}}$  gegen ein  $\alpha \in \tilde{\Delta}_k$  konvergiert. Wir betrachten die Funktion  $f : \tilde{\Delta}_k \rightarrow E \subset \mathbb{R}^k$  mit  $E := f(\tilde{\Delta}_k)$ , die definiert ist durch

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i, \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^k \alpha_i \alpha_j, \sum_{\substack{i,j,l=1 \\ i < j < l}}^k \alpha_i \alpha_j \alpha_l, \dots, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \right).$$

Diese Funktion ist offensichtlich stetig und differenzierbar. Wir wollen zeigen, dass diese Funktion injektiv und nach Definition dann bijektiv ist. Die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ist dann wegen der Kompaktheit von  $\tilde{\Delta}$  stetig (Lemma A.6). Seien dazu  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  und  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  Elemente aus  $\tilde{\Delta}$  mit  $f(\alpha) = f(\beta)$ . Fassen wir die Argumente von  $f$  als Veränderliche  $x_i, i = 1, \dots, k$ , auf, so sind die Komponenten von  $f$  die elementarsymmetrischen Polynome vom Grad  $k$ . Diese sind ein Erzeugendensystem für den Ring aller symmetrischen Polynome vom Grad  $k$ . Daher ist  $f(\alpha) = f(\beta)$  genau dann, wenn  $\pi(\alpha) = \beta$  für ein  $\pi \in \mathbb{S}_k$  ist. Wegen der Ordnungseigenschaft folgt daraus  $\alpha = \beta$  und damit die Injektivität. Für  $j = 1 \dots, k$  und ein

$\alpha \in \tilde{\Delta}$  gilt

$$\begin{aligned} K_Y \left( \sum_{i=1}^j e_i, \alpha \right) &= \frac{k(k+1) \cdots (j+k-1)}{k!} \sum_{\pi \in \mathbb{S}_k} \alpha_{\pi(1)} \cdots \alpha_{\pi(j)} \\ &= \frac{k(k+1) \cdots (j+k-1)}{\binom{k}{j}} \sum_{i_1 < \dots < i_j} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_j}. \end{aligned}$$

Die Konvergenz der Folge  $\alpha$  in der Doob-Martin-Topologie  $\tilde{\tau}_{\text{DM}}$  impliziert die Konvergenz von

$$\sum_{i_1 < \dots < i_j} \alpha_{n,i_1} \cdots \alpha_{n,i_j}$$

in der Standardtopologie auf  $E$  für alle  $j = 1, \dots, k$ . Wegen der gezeigten Stetigkeit der Funktion  $f^{-1}$  folgt hieraus, dass auch  $\alpha_{n,i}$  gegen  $\alpha_i$  konvergiert, wobei  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  der Grenzwert in  $\partial\mathbb{G}$  für  $n \rightarrow \infty$  sei. Wir erhalten folglich auch, dass die Doob-Martin-Topologie  $\tilde{\tau}_{\text{DM}}$  auf  $\partial\mathbb{G}$  mit der Standardtopologie  $\tilde{\tau}_0$  übereinstimmt.  $\square$

**BEMERKUNG 6.6** Zwei Simplexes bzgl. der Standardtopologie in  $\mathbb{R}^n$  sind affin homöomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben ([Eng89, Corollary, S.413]). Die Mengen  $\partial\mathbb{F}$  und  $\partial\mathbb{G}$  sind also homöomorph, allerdings ist  $\tilde{\phi}$  kein solcher affiner Homöomorphismus, denn z.B. ist

$$\frac{1}{2}\tilde{\phi}(e_1) + \frac{1}{2}\tilde{\phi}(e_2) = e_1 \neq \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0 \right) = \tilde{\phi} \left( \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \right).$$

## 6.2 Geordnete binäre Bäume

In diesem Abschnitt wollen wir im Gegensatz zu Beispiel 6.1 eine Abbildung auf binären Bäumen beschreiben, die (6.1) erfüllt. Dafür definieren wir für  $u = u_1 \dots u_k \in \{0, 1\}^*$  eine Abbildung  $\varphi_u : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  durch

$$\varphi_u(v) := \begin{cases} v, & u \not\prec v \\ u_1 \dots u_k (1 - v_{k+1}) v_{k+2} \dots v_l, & u \prec v, \end{cases} \quad (6.6)$$

für  $v = v_1 \dots v_l \in \{0, 1\}^*$ . Die Abbildung  $\varphi_u$  bildet also das Komplement an der  $k+1$ -ten Stelle des Wortes  $v$ , sofern  $u$  (echter) Präfix von  $v$  ist. Wir fassen diese Abbildungen zur Menge  $\Phi := \{\varphi_u : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* : u \in \{0, 1\}^*\}$  zusammen. Die  $\varphi_u \in \Phi$  lassen sich auf  $\mathbb{B}$  hochziehen, indem für  $\mathfrak{t} \in \mathbb{B}$  die Abbildung  $\varphi_u$  auf alle  $v \in \mathfrak{t}$  angewandt wird. Diese Abbildung liefert wieder ein  $\mathfrak{t}' \in \mathbb{B}$ , da die Präfixstabilität invariant unter  $\varphi_u$  ist. Anschaulich gesprochen vertauscht  $\varphi_u$  bei einem binären Baum  $\mathfrak{t}$  im Knoten  $u$  den linken und den rechten Teilbaum in  $u$ . Gehört Knoten  $u$  nicht zu  $\mathfrak{t}$ , bleibt  $\mathfrak{t}$  natürlich unverändert. Hiermit können

wir eine Äquivalenzrelation  $\sim_{\Phi}$  auf  $\mathbb{B}$  definieren. Zwei Bäume  $\mathfrak{s}, \mathfrak{t} \in \mathbb{B}$  heißen äquivalent, geschrieben  $\mathfrak{s} \sim_{\Phi} \mathfrak{t}$ , falls es Abbildungen  $\varphi_{u_i} \in \Phi$  gibt,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sodass

$$\varphi_{u_k} \circ \varphi_{u_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{u_1}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{t}$$

gilt. Die Menge aller Produkte zusammen mit der Verknüpfung  $\circ$  ist die von  $\Phi$  erzeugte Gruppe  $\langle \Phi \rangle$ . Die Anzahl der internen Knoten ist invariant unter  $\varphi_u$ , sodass zwei äquivalente binäre Bäume die gleiche Anzahl interner Knoten haben. Es sei dann

$$\mathbf{B}_n := \mathbb{B}_n / \sim_{\Phi}$$

die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich  $\Phi$  der binären Bäume mit  $n$  Knoten. Wir nennen dann die Menge  $\mathbf{B}_n$  der Äquivalenzklassen die **Menge der ungeordneten binären Bäume**. Die Anzahlen  $(\#\mathbf{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sind die **Etherington-Wedderburn-Zahlen** (Folge A001190 in Sloane's Online Encyclopedia of Integer Sequences). Etherington und Wedderburn definieren  $\#\mathbf{B}_{n-1}$  als die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten in einer kommutativen, nicht-assoziativen Algebra  $A$  die Potenz  $x^n$ ,  $x \in A$ , zu zerlegen ([Eth37],[Wed23]). Demzufolge ist  $x \cdot x^2 = x^2 \cdot x = x^3$ . Zum Beispiel lässt sich  $x^6$  als

$$\begin{aligned} & \left( \left( \left( (x \cdot x) \cdot x \right) \cdot x \right) \cdot x, \quad \left( \left( (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \right) \cdot x \right) \cdot x, \quad \left( \left( (x \cdot x) \cdot x \right) \cdot (x \cdot x) \right) \cdot x \\ & \left( \left( (x \cdot x) \cdot x \right) \cdot (x \cdot x), \quad \left( (x \cdot x) \cdot (x \cdot x) \right) \cdot (x \cdot x), \quad \left( (x \cdot x) \cdot x \right) \cdot \left( (x \cdot x) \cdot x \right) \end{aligned}$$

faktorisieren. Interpretieren wir  $\cdot$  als Aufteilung in linken und rechten Teilbaum und die Höhe der Potenz von  $x$  in den Faktoren als Anzahl der externen Knoten in dem jeweiligen Teilbaum, so erhalten wir die Bijektion zwischen solchen Produkten und binären Bäumen. Das Kommutieren zweier Faktoren entspricht der Anwendung eines  $\varphi_u \in \Phi$  auf den binären Baum. Wäre die Algebra nicht-kommutativ, so erhielten wir die Catalan-Zahlen  $C_n = \#\mathbb{B}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Die ersten Folgenglieder der Etherington-Wedderburn-Zahlen sind

$$1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, \dots$$

Die Abbildung 6.2 zeigt jeweils einen Vertreter der 6 Elemente aus  $\mathbf{B}_5$ . Für die Etherington-Wedderburn-Zahlen ist keine geschlossene Formel bekannt, aber es existieren asymptotische Resultate ([Ott48]) und die erzeugende Funktion  $T$  erfüllt

$$T(z) = z + \frac{T(z)^2 + T(z^2)}{2}$$

(siehe [Sta99, Exercise 6.52]). Wir wollen nun einen stochastischen Prozess  $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in der Menge  $\mathbf{B}$  definieren. Nehmen wir an, dass  $Y_n \sim \text{unif}(\mathbf{B}_n)$  gilt, so konvergiert

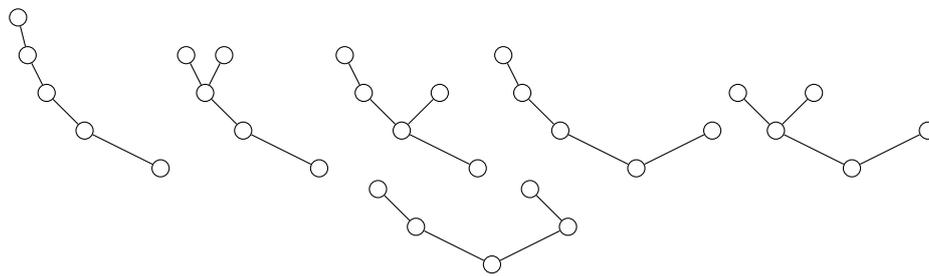


Abbildung 6.2: Jeweils ein Vertreter der 6 Äquivalenzklassen  $\mathbf{B}_5$

$Y_n$ , geeignet normiert, in der punktierten Gromov-Hausdorff-Topologie in Verteilung gegen den Continuum Random Tree ([MM11]). Es kann aber keine Markov-Kette  $Y' = (Y'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Werten in  $\mathbf{B}$  geben, die die Bäume sukzessive aufbaut, indem Blätter angehängt werden, und für die  $Y'_n \sim \text{unif}(\mathbf{B}_n)$  gilt, denn für die rot markierten Vertreter in Abbildung 6.3 gilt wegen  $\mathbb{P}(Y'_4 = \mathfrak{t}_4 | Y'_3 = \mathfrak{t}_3) = 1$ , dass aus  $\mathbb{P}(Y'_3) = \frac{1}{2}$  schon  $\mathbb{P}(Y'_4 = \mathfrak{t}_4) \geq \frac{1}{2}$  folgt.

Es sei  $X$  wieder die BST-Kette aus Beispiel 6.1. Wir wollen nun die Abbildung  $\phi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbf{B}$  betrachten, die einen binären Baum auf seine Äquivalenzklasse abbildet. Dazu beobachten wir, dass durch die Anwendung eines Elementes  $\varphi_u \in \Phi, u \in \{0, 1\}^*$  auf zwei Elemente  $\mathbb{B}_n \ni \mathfrak{t}_n \subset \mathfrak{t}_{n+1} \in \mathbb{B}_{n+1}, n \in \mathbb{N}$  die Enthaltenseinsrelation beibehalten wird, d.h.  $\varphi_u(\mathfrak{t}_n) \subset \varphi_u(\mathfrak{t}_{n+1})$ . Für die Randverteilung von  $X_n, n \in \mathbb{N}$ , gilt bekanntermaßen ([SF96, Theorem 6.1]) für  $\mathfrak{t} \in \mathbb{B}_n$

$$\mathbb{P}(X_n = \mathfrak{t}) = \prod_{u \in \mathfrak{t}} \frac{1}{\#\mathfrak{t}(u)}.$$

Das Produkt der Reziproken der Teilbaumgrößen ändert sich natürlich nicht, wenn in einzelnen Knoten linker und rechter Teilbaum vertauscht werden. Daher haben wir

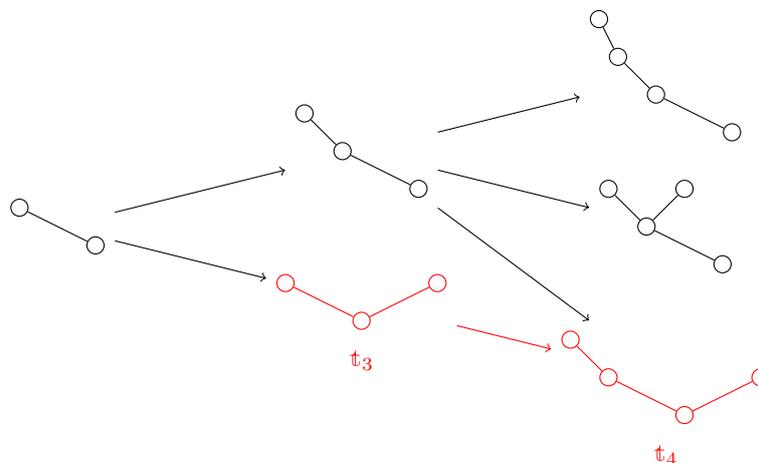


Abbildung 6.3: Ausschnitt eines Übergangsgraphen einer Markov-Kette auf  $\mathbf{B}$

$$\mathcal{L}(X_n | \phi(X_n) = \mathbf{t}) = \text{unif}(\{\mathfrak{t} \in \mathbb{B}_n : \phi(\mathfrak{t}) = \mathbf{t}\}), \quad (6.7)$$

die bedingte Gleichverteilung wie in (6.4). Für ein Element  $\varphi \in \langle \Phi \rangle$ , der von  $\Phi$  erzeugten Gruppe, gilt, dass

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{t}_n \in \mathbb{B}[\mathbf{t}_n]} \mathbb{P}(X_n = \mathfrak{t}_n | X_{n+1} = \mathfrak{t}_{n+1}) &= \sum_{\mathfrak{t}_n \in \mathbb{B}[\mathbf{t}_n]} \mathbb{P}(X_n = \varphi(\mathfrak{t}_n) | X_{n+1} = \varphi(\mathfrak{t}_{n+1})) \\ &= \sum_{\mathfrak{t}_n \in \mathbb{B}[\mathbf{t}_n]} \mathbb{P}(X_n = \mathfrak{t}_n | X_{n+1} = \varphi(\mathfrak{t}_{n+1})), \quad \mathbf{t}_n \in \mathbf{B}_n, \end{aligned}$$

also ist die Eigenschaft (6.1) erfüllt. Der stochastische Prozess  $Y := \phi(X)$  ist nach Satz 6.2 (a) eine Markov-Kette und  $\phi$  besitzt eine stetige Fortsetzung auf den Doob-Martin-Rand  $\partial \mathbf{B}$ . Wir nennen  $Y$  die **ungeordnete BST-Kette**. Da wir nach (6.7) wie in Abschnitt 6.1 die bedingte Gleichverteilung für die Kette  $Y$  haben, hat diese einen Martin-Kern wie in (6.5) und wir erhalten (vgl. Satz 3.7):

**SATZ 6.7** *Es sei  $Y$  die ungeordnete BST-Kette.*

(a) *Eine Folge  $(\mathfrak{t}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbf{B}^{\mathbb{N}}$  mit  $|\mathfrak{t}_n| \rightarrow \infty$  konvergiert genau dann in der Doob-Martin-Kompaktifizierung zu  $Y$ , wenn eine Folge von Vertretern  $(\mathfrak{t}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathfrak{t}_n \in \mathbb{B}[\mathbf{t}_n]$  existiert, sodass*

$$\frac{\#\mathfrak{t}_n(u)}{\#\mathfrak{t}_n}$$

*für alle  $u \in \{0, 1\}^*$  konvergiert.*

(b) *Es sei  $\mathcal{M}$  die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\{0, 1\}^\infty$ . Dann lässt sich der Doob-Martin-Rand mit*

$$\partial \mathbf{B} := \mathcal{M} / \sim_\Phi$$

*identifizieren, wobei zwei Maße  $\mu, \nu \in \mathcal{M}$  bzgl.  $\sim_\Phi$  äquivalent sind, falls für alle  $u = u_1 \cdots u_k \in \{0, 1\}^*$  gilt, dass entweder  $\mu(A_u) = \nu(A_u)$  oder  $\mu(A_u) = \nu(A_{u_1 \cdots u_{k-1}(1-u_k)})$ .*

(c) *Die stetige Erweiterung  $\tilde{\phi} : \partial \mathbb{B} \rightarrow \partial \mathbf{B}$  bildet ein Maß  $\mu \in \mathcal{M}$  auf seine Äquivalenzklasse ab.*

**BEMERKUNG 6.8** (a) Die Abbildungen  $\varphi_u, u \in \{0, 1\}^*$ , aus (6.6) sind in kanonischer Weise Abbildungen von  $\{0, 1\}^\infty$  nach  $\{0, 1\}^\infty$  und wir haben wieder die Gruppe  $\langle \Phi \rangle$ , die auf  $\{0, 1\}^\infty$  wirkt. Ein Element  $\alpha \in \partial \mathbf{B}$  aus Satz 6.7 (b) ist eine Menge von Maßen. Es sei  $\mu \in \alpha$ . Dann ist  $\nu \in \mathcal{M}$  genau dann in  $\alpha$  enthalten, wenn es ein  $\varphi \in \langle \Phi \rangle$  gibt, sodass  $\mu^\varphi = \nu$  gilt.

(b) Wir können  $Y$  als trickle-down-Prozess auffassen. Für Definitionen und Resultate hierzu siehe [EGW12]. Als gerichteten azyklischen Graphen  $I$  betrachten wir analog zur BST-

Kette den vollständigen binären Baum  $\{0, 1\}^*$ . Die routing-Prozesse  $Y^u = (Y_n^u)_{n \in \mathbb{N}}$  im Punkt  $u \in \{0, 1\}^*$  sind sortierte Pólya-Urnen mit 2 Farben.

**BEMERKUNG 6.9** Es gibt zahlreiche weitere kombinatorische Markov-Ketten, bei denen die Doob-Martin-Kompaktifizierung bekannt ist und sich die Frage nach der stetigen Fortsetzung einer Markov-Funktion  $\phi$  stellt.

- (a) Für kombinatorische Markov-Ketten mit Werten in den Kompositionen einer natürlichen Zahl  $n$ , bei der im Rückwärtsmechanismus die Teile der Komposition relativ zur Größe verringert werden, ist der Martin-Rand die Menge  $\mathcal{U}$  aller offenen Teilmengen des Intervalls  $[0, 1]$  ([Gne97]). Ein  $u \in \mathcal{U}$  kann in kanonischer Weise als Vereinigung disjunkter offener Intervalle aufgefasst werden. Die Abbildung  $\phi$  ordnet einer Komposition von  $n$  die zugehörige Partition zu, d.h., die Teile werden der Größe nach sortiert. Die zugehörigen Markov-Ketten haben

$$\tilde{\Delta}_\infty := \left\{ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \leq 1 \right\}$$

als Martin-Rand ([Kin78]). Die stetige Fortsetzung bildet ein  $u \in \mathcal{U}$  auf die geordneten Intervallgrößen ab. Dies kann als infinitesimale Version der in Abschnitt 6.1 behandelten Pólya-Urne mit  $k$  Farben angesehen werden.

- (b) Ein analoges Resultat zu (a) ergibt sich, wenn wir **Zigzag-Diagramme** betrachten. Ein Zigzag-Diagramm der Größe  $n$  ist ein Diagramm von  $n$  Kästchen, bei dem das  $j$ -te Kästchen rechts neben oder unterhalb des  $(j-1)$ -ten Kästchens angefügt wird. Ein Zigzag-Diagramm der Größe  $n$  entsteht aus einer Permutation  $\pi \in \mathbb{S}_n$ , indem wir das  $j$ -te Kästchen rechts anfügen, falls  $\pi(j) > \pi(j-1)$  gilt. Andernfalls fügen wir das  $j$ -te Kästchen unterhalb an. Es sei  $\mathbb{Z}_n$ ,  $n \in \mathbb{S}$  die Menge aller Zigzag-Diagramme mit  $n$  Kästchen,  $\mathbb{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$  die Menge aller Zigzag-Diagramme. Die Abbildung  $\zeta_n : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n$  bilde eine Permutation auf ihr zugehöriges Zigzag-Diagramm ab. Wir nennen zwei Permutationen  $\pi_{n-1} \in \mathbb{S}_{n-1}$  und  $\pi_n \in \mathbb{S}_n$  **kohärent**, falls  $\pi_{n-1}$  aus  $\pi_n$  entsteht, indem wir in der Tabellenschreibweise das Element  $n$  löschen. Ein Zigzag-Diagramm  $\lambda_{n-1} \in \mathbb{Z}_{n-1}$  ist Vorgänger eines Diagramms  $\lambda_n \in \mathbb{Z}_n$ , falls es für eine Permutation  $\pi_n \in \mathbb{S}_n$  mit  $\zeta_n(\pi_n) = \lambda_n$  eine kohärente Permutation  $\pi_{n-1} \in \mathbb{S}_{n-1}$  gibt, sodass  $\zeta_{n-1}(\pi_{n-1}) = \lambda_{n-1}$ . Der Rückwärtsmechanismus einer kombinatorischen Markov-Kette mit Werten in  $\mathbb{Z}$  wählt zufällig und gleichverteilt aus einem der Vorgänger eines Diagramms  $\lambda \in \mathbb{Z}$ . Der Martin-Rand zu diesem Übergangsgraphen ist der metrische Raum

$$\mathcal{U}^{(2)} := (\{(U_\uparrow, U_\downarrow) : U_\uparrow \text{ und } U_\downarrow \text{ sind disjunkte offene Mengen von } (0, 1)\}, d),$$

wobei für die Metrik

$$d((U_\uparrow, U_\downarrow), (V_\uparrow, V_\downarrow)) := \sup\{d_{\text{Haus}}((U_\uparrow^c, V_\uparrow^c), d_{\text{Haus}}((U_\downarrow^c, V_\downarrow^c))\}$$

gelte ([Tar15, Corollary 3]). Die Abbildung  $\phi$  sortiere die Reihen eines Zigzag-Diagramms der Größe nach. Wir erhalten dann ein Young-Diagramm. Für den zugehörigen Übergangsgraphen der Young-Diagramme ist der Martin-Rand durch

$$\tilde{\Delta}_\infty^{(2)} := \left\{ (\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} : \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \beta_n \leq 1 \right\}$$

gegeben ([Ker03, Chapter 0.2, Theorem 8]). Die stetige Fortsetzung von  $\phi$  bildet dann  $U = (U_\uparrow, U_\downarrow)$  auf die absteigenden Intervalllängen von  $U_\uparrow$  und  $U_\downarrow$  ab.

- (c) Offensichtlich ist (6.1) erfüllt, wenn  $\phi$  eine bijektive Abbildung ist. Die stetige Fortsetzung ist dann eine Bijektion zwischen den zugehörigen Martin-Rändern. Zum Beispiel ist die natürliche Korrespondenz  $\phi$  zwischen binären und ebenen Bäumen ([Knu69]) eine Bijektion. Aus der BST-Kette wird dann eine Markov-Kette, **Harris-Kette** genannt. Auch bei dieser Kette wird beim Übergang von  $n$  nach  $n + 1$  einer der externen Knoten zufällig und gleichverteilt ausgewählt und in einen internen Knoten umgewandelt. Der Martin-Rand der Harris-Kette ist die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf

$$\left( \mathbb{N}^\infty \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbb{N}^k \times \{\diamond\}^\infty), \mathcal{A} \right) := (\mathbf{N}, \mathcal{A})$$

mit der von den Mengen

$$A_u := \left\{ v \in \mathbb{N}^\infty \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} (\mathbb{N}^k \times \{\diamond\}^\infty) : u < v \right\}, \quad u \in \mathbb{N}^*$$

erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$  ([EGW12, Theorem 6.1]). Wir erhalten eine stetige Fortsetzung der Korrespondenz  $\phi$  auf den Martin-Rand der BST-Kette, die einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\{0, 1\}^\infty$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(N, \mathcal{A})$  abbildet ([Mic15, Satz 5.5]). Dazu brauchen wir nur die Urbilder der  $A_u$ 's unter der natürlichen Korrespondenz zu betrachten.

# A | Hilfsmittel

**SATZ A.1** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Wenn jede Folge in  $X$  eine Teilfolge hat, die Cauchy ist, dann ist  $X$  total beschränkt.

*Beweis.* Wenn  $X$  nicht total beschränkt ist, dann existiert zu einem  $\epsilon > 0$  ein  $x_0$ , sodass  $X \not\subseteq B_\epsilon(x_0)$ . Weiterhin existiert ein  $x_1 \in X \setminus B_\epsilon(x_0)$ , sodass  $X \not\subseteq B_\epsilon(x_0) \cup B_\epsilon(x_1)$ . Hat man  $x_0, \dots, x_k$  gewählt, so kann man ein  $x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=0}^k B_\epsilon(x_i)$  wählen, da  $X$  nicht total beschränkt ist. Die so definierte Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  kann nach Konstruktion keine Teilfolge haben, die Cauchy ist.  $\square$

**SATZ A.2** (KHINCHIN-KOLMOGOROV-KRITERIUM, [KAL02, LEMMA 4.16]) Es sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von zentrierten, unabhängigen Zufallsvariablen, für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2) < \infty$$

gilt. Dann konvergiert  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$   $\mathbb{P}$ -fast sicher.

**LEMMA A.3** (KRONECKERS LEMMA) Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von reellen Zahlen und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine isotone Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit  $a_n \uparrow \infty$ . Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{a_n} < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n x_i = 0.$$

**KOROLLAR A.4** Es sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine isotone Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit  $a_n \uparrow \infty$ . Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{var} \left( \frac{X_n}{a_n} \right) < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}(X_i)) = 0 \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

*Beweis.* Wir definieren die Zufallsvariablen  $\tilde{X}_n := \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{a_n}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Diese sind zentriert

und wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{X}_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{var}\left(\frac{X_n}{a_n}\right) < \infty$$

konvergiert nach Satz A.2  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n - \mathbb{E}(X_n)}{a_n}$   $\mathbb{P}$ -fast sicher. Die Folgerung ergibt sich also aus Kroneckers Lemma A.3.  $\square$

**LEMMA A.5** *Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von reellen Zahlen. Dann konvergiert  $x_n$  genau dann gegen ein  $x \in \mathbb{R}$ , wenn für jede Teilfolge  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(x_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$  existiert, die gegen  $x$  konvergiert.*

*Beweis.* Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist offensichtlich. Nehmen wir an, dass die Bedingung erfüllt ist,  $x_n$  allerdings nicht gegen  $x$  konvergiert. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein  $N \geq n$  existiert, für das  $|x_N - x| > \epsilon$  gilt. Daher können wir mit  $n_0 := 1$  rekursiv

$$n_k := \min\{n \geq n_{k-1} : |x_n - x| > \epsilon\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

definieren. Dann ist  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge, die nach Konstruktion keine konvergierende Teilfolge haben kann.  $\square$

**LEMMA A.6** *Es seien  $X$  ein kompakter Raum,  $Y$  ein Hausdorff-Raum und  $f : X \rightarrow Y$  eine stetige, bijektive Abbildung. Dann ist  $f$  ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* Wir müssen zeigen, dass das Urbild einer abgeschlossenen Menge  $A \subset X$  abgeschlossen unter  $f^{-1}$  ist. Da  $f$  bijektiv ist, ist das Urbild von  $A$  unter  $f^{-1}$  gerade  $f(A)$ . Es reicht also zu zeigen, dass das Bild abgeschlossener Mengen  $A \subset X$  abgeschlossen ist. Da  $X$  kompakt ist, ist  $A$  kompakt und damit auch  $f(A) \subset Y$ . Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raums ist abgeschlossen.  $\square$

# Literatur

- [ABN98] Barry C. Arnold, N. Balakrishnan und H. N. Nagaraja. *Records*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998.
- [ABT03] Richard Arratia, A. D. Barbour und Simon Tavaré. *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2003.
- [And70] C. W. Anderson. „Extreme value theory for a class of discrete distributions with applications to some stochastic processes“. In: *J. Appl. Probability* 7 (1970), S. 99–113.
- [AR06] Gerold Alsmeyer und Uwe Rösler. „The Martin entrance boundary of the Galton-Watson process“. In: *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 42.5 (2006), S. 591–606.
- [AW04] Hagit Attiya und Jennifer Welch. *Distributed Computing: Fundamentals, Simulations and Advanced Topics*. John Wiley & Sons, 2004.
- [BG03] F. Thomas Bruss und Rudolf Grübel. „On the multiplicity of the maximum in a discrete random sample“. In: *Ann. Appl. Probab.* 13.4 (2003), S. 1252–1263.
- [Bil99] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. 2. Aufl. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [BK64] David Blackwell und David Kendall. „The martin boundary of Pólya’s urn scheme, and an application to stochastic population growth“. In: *J. Appl. Probability* 1 (1964), S. 284–296.
- [BO90] F. Thomas Bruss und Colm Art O’Cinneide. „On the maximum and its uniqueness for geometric random samples“. In: *J. Appl. Probab.* 27.3 (1990), S. 598–610.
- [Bre10] Julia Bremer. „Markov-Darstellungen diskreter zufälliger Strukturen“. Diplomarbeit. Leibniz Universität Hannover, 2010.
- [Die00] Reinhard Diestel. *Graph theory*. Second. Bd. 173. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000.

- [Doo59] Joseph L. Doob. „Discrete potential theory and boundaries.“ In: *J. Math. Mech.* 8 (1959), S. 433–458.
- [Doo84] J. L. Doob. *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*. Bd. 262. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [Dyn69] E.B. Dynkin. „Boundary theory of Markov processes. (The discrete case).“ In: *Russ. Math. Surv.* 24.2 (1969), S. 1–42.
- [EGW12] Steven N. Evans, Rudolf Grübel und Anton Wakolbinger. „Trickle-down processes and their boundaries“. In: *Electron. J. Probab.* 17 (2012), S. 1–58.
- [EGW16] Steven N. Evans, Rudolf Grübel und Anton Wakolbinger. „Doob–Martin boundary of Rémy’s tree growth chain“. In: *Ann. Prob.* (2016+).
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General topology. Rev. and compl. ed.* Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
- [ESS93] Bennett Eisenberg, Gilbert Stengle und Gilbert Strang. „The asymptotic probability of a tie for first place“. In: *Ann. Appl. Probab.* 3.3 (1993), S. 731–745.
- [Eth37] I. M. H. Etherington. „Non-associate powers and a functional equation.“ In: *Math. Gaz.* 21 (1937), S. 36–39, 153.
- [EW16] Steven N. Evans und Anton Wakolbinger. *Radix sort trees in the large*. arXiv: 1603.07385. 2016.
- [FB00] Eberhard Freitag und Rolf Busam. *Funktionentheorie*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [FMS96] James Allen Fill, Hosam M. Mahmoud und Wojciech Szpankowski. „On the distribution for the duration of a randomized leader election algorithm“. In: *Ann. Appl. Probab.* 6.4 (1996), S. 1260–1283.
- [FO90] Philippe Flajolet und Andrew Odlyzko. „Singularity analysis of generating functions“. In: *SIAM J. Discrete Math.* 3.2 (1990), S. 216–240.
- [Föll75] Hans Föllmer. „Phase transition and Martin boundary“. In: (1975), 305–317. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 465.
- [FS09] Philippe Flajolet und Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [Ger16] Julian Gerstenberg. „Darstellung kombinatorischer Markov-Ketten“. Diss. Leibniz Universität Hannover, 2016+.
- [GG15] Alexander Gnedin und Vadim Gorin. „Record-dependent measures on the symmetric groups“. In: *Random Structures Algorithms* 46.4 (2015), S. 688–706.
- [GH16] Rudolf Grübel und Klaas Hagemann. „Leader election: a Markov chain approach“. In: *Mathematica Applicanda* 44 (2016), S. 113–134.

- [GK00] Frederick M. Goodman und Sergei V. Kerov. „The Martin boundary of the Young-Fibonacci lattice“. In: *J. Algebraic Combin.* 11.1 (2000), S. 17–48.
- [GM15] Rudolf Grübel und Igor Michailow. „Random recursive trees: a boundary theory approach“. In: *Electron. J. Probab.* 20 (2015), S. 1–22.
- [Gne11] Alexander Gnedin. „Boundaries from inhomogeneous Bernoulli trials.“ In: *Random walks, boundaries and spectra. Proceedings of the workshop on boundaries, Graz, Austria, June 29–July 3, 2009 and the Alp-workshop, Sankt Kathrein, Austria, July 4–5, 2009*. Basel: Birkhäuser, 2011, S. 91–110.
- [Gne97] Alexander Gnedin. „The representation of composition structures“. In: *Ann. Probab.* 25.3 (1997), S. 1437–1450.
- [GP05] Alexander Gnedin und Jim Pitman. „Exchangeable Gibbs partitions and Stirling triangles.“ In: *Zap. Nauchn. Semin. POMI* 325 (2005), S. 83–102. ISSN: 0373-2703.
- [Grü13] Rudolf Grübel. „Kombinatorische Markov-Ketten.“ In: *Mathematische Semesterberichte* 60.2 (2013), S. 185–215.
- [Grü14a] Rudolf Grübel. „Persisting randomness in randomly growing discrete structures: graphs and search trees.“ In: *Proceeding of the 25th international conference on probabilistic, combinatorial and asymptotic methods in the analysis of algorithms, AofA'14, UPMC-Jussieu, Paris, France, June 16–20, 2014*. Nancy: The Association. Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science (DMTCS), 2014, S. 121–131.
- [Grü14b] Rudolf Grübel. „Search trees: Metric aspects and strong limit theorems“. In: *Ann. Appl. Probab.* 24.3 (2014), S. 1269–1297.
- [Hun60] G. A. Hunt. „Markoff chains and Martin boundaries“. In: *Illinois J. Math.* 4 (1960), S. 313–340.
- [Hwa95] Hsien-Kuei Hwang. „Asymptotic expansions for the Stirling numbers of the first kind“. In: *J. Combin. Theory Ser. A* 71.2 (1995), S. 343–351.
- [Jän05] Klaus Jänich. *Topologie*. 8. Aufl. Berlin: Springer, 2005.
- [JŁR00] Svante Janson, Tomasz Łuczak und Andrzej Rucinski. *Random graphs*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [JS06] Jens Carsten Jantzen und Joachim Schwermer. *Algebra*. Berlin: Springer, 2006.
- [JS97] Svante Janson und Wojciech Szpankowski. „Analysis of an asymmetric leader election algorithm“. In: *Electron. J. Combin.* 4.1 (1997).
- [Kal02] Olav Kallenberg. *Foundations of modern probability*. 2. Aufl. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2002.

- [Ker03] S. V. Kerov. *Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*. Bd. 219. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [Kin78] J.F.C. Kingman. „The representation of partition structures.“ In: *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* 18 (1978), S. 374–380.
- [Kle06] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Berlin: Springer, 2006.
- [KM14] Ravi Kalpathy und Hosam M. Mahmoud. „Perpetuities in fair leader election algorithms“. In: *Adv. in Appl. Probab.* 46.1 (2014), S. 203–216.
- [Knu69] Donald E. Knuth. *The art of computer programming. Vol. 1: Fundamental algorithms*. Second printing. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, 1969.
- [KOO98] S. Kerov, A. Okounkov und G. Olshanski. „The boundary of the Young graph with Jack edge multiplicities“. In: *Internat. Math. Res. Notices* 4 (1998), S. 173–199.
- [KP96] Peter Kirschenhofer und Helmut Prodinger. „The number of winners in a discrete geometrically distributed sample“. In: *Ann. Appl. Probab.* 6.2 (1996), S. 687–694.
- [KS76] John G. Kemeny und J. Laurie Snell. *Finite Markov chains*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976.
- [KSK76] John G. Kemeny, J. Laurie Snell und Anthony W. Knapp. *Denumerable Markov chains*. Second. Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1976.
- [Lov12] László Lovász. *Large networks and graph limits*. Bd. 60. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [LP09] Guy Louchard und Helmut Prodinger. „The asymmetric leader election algorithm: another approach“. In: *Ann. Comb.* 12.4 (2009), S. 449–478.
- [LW92] J. H. van Lint und R. M. Wilson. *A course in combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [Mar41] Robert S. Martin. „Minimal positive harmonic functions“. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 49 (1941), S. 137–172.
- [Mic15] Igor Michailow. „Asymptotische Analyse zufälliger diskreter Strukturen mit Methoden der diskreten Potentialtheorie“. Diss. Leibniz Universität Hannover, 2015.
- [MM11] Jean-François Marckert und Grégory Miermont. „The CRT is the scaling limit of unordered binary trees“. In: *Random Structures Algorithms* 38.4 (2011), S. 467–501.
- [Ott48] Richard Otter. „The number of trees“. In: *Ann. of Math. (2)* 49 (1948), S. 583–599.
- [Phe66] Robert R. Phelps. *Lectures on Choquet’s theorem*. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1966.

- [Pit06] Jim Pitman. *Combinatorial stochastic processes*. Bd. 1875. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Pro93] Helmut Prodinger. „How to select a loser“. In: *Discrete Math.* 120.1-3 (1993), S. 149–159.
- [Rén62] Alfréd Rényi. „On the outliers of a series of observations“. In: *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.* 12 (1962), S. 105–121.
- [Saw97] Stanley A. Sawyer. „Martin boundaries and random walks“. In: *Harmonic functions on trees and buildings (New York, 1995)*. Bd. 206. Contemp. Math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, S. 17–44.
- [SF96] Robert Sedgewick und Philippe Flajolet. *An introduction to the analysis of algorithms*. Amsterdam: Addison-Wesley, 1996.
- [Sta99] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. Bd. 62. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [SW86] Galen R. Shorack und Jon A. Wellner. *Empirical processes with applications to statistics*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
- [Tar15] Pierre Tarrago. *Zigzag diagrams and Martin boundary*. arXiv: 1501.07087. 2015.
- [Vil+05] J. Villadangos u. a. „Efficient Leader Election in Complete Networks“. In: *Proceedings of the 13th Euromicro Conference on Parallel, Distributed and Network-Based Processing. PDP '05*. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 2005, S. 136–143.
- [VK81] A. M. Vershik und S. V. Kerov. „Asymptotic theory of the characters of a symmetric group“. In: *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* 15.4 (1981), S. 15–27, 96.
- [VM15] A. M. Vershik und A. V. Malyutin. „Phase transition in the exit boundary problem for random walks on groups“. In: *Funct. Anal. Appl.* 49.2 (2015), S. 86–96.
- [vQ01] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. 3. Aufl. Berlin: Springer, 2001.
- [Wed23] J. H. M. Wedderburn. „The functional equation  $g(x^2) = 2\alpha x + [g(x)]^2$ “. In: *Ann. Math. (2)* 24 (1923), S. 121–140.
- [Woe09] Wolfgang Woess. *Denumerable Markov chains*. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2009.



## **Danksagung**

Ich danke meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Grübel für die intensive Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit und die interessanten Gespräche über Mathematik und Musik.

Außerdem möchte ich Herrn Prof. Dr. Wakolbinger für die Übernahme des Korreferats danken.

Diese Arbeit entstand im Rahmen des von der DFG geförderten Projekts „Kombinatorische Markov-Ketten: Struktur und Asymptotik“.