

Beobachterkonzepte und Darstellungsformen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung der Lehrbefugnis (venia legendi)
für das Fachgebiet
„Mechanik“
angenommene

Habilitationsschrift

von

Dr.-Ing. Jörn Ihlemann
geboren am 21. August 1967 in Hildesheim

Berichterstatter:

Prof. Dr.-Ing. habil. Dieter Besdo

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion

Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht

Tag der Habilitation: 28. Juni 2007

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand größtenteils während meiner Tätigkeit am Institut für Kontinuumsmechanik der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover und entspricht bis auf sehr wenige Änderungen meiner bereits im Juni 2006 eingereichten Habilitationsschrift. Erst im Juli 2007 erreichte das Habilitationsverfahren endlich seinen Abschluss. Nur fünf Tage später erhielt ich den Ruf auf die Professur Festkörpermechanik der Technischen Universität Chemnitz. Mit viel Glück und viel Einsatz hat sich die Professur seither fast stürmisch entwickelt und viele reizvolle, aber auch arbeitsintensive Aufgaben wurden mir angetragen. Dabei besteht das größte Glück im Team der Mitarbeiter der Professur, das mich perfekt unterstützt und meine Arbeit in vielerlei Hinsicht zur Freude macht.

Von dieser noch immer anhaltenden Entwicklung der Professur in Chemnitz wurde leider die Veröffentlichung der Habilitationsschrift aufgehalten. Während ich sie immer wieder vermeintlich kurzfristig aufschob, die Schrift selbst aber bereits Ausgangspunkt der Akquise wichtiger Forschungsprojekte wurde und meine Doktoranden bereits intensiv damit arbeiteten (und dies nach wie vor tun), existierten in Hannover noch immer nur die für den Vollzug der Habilitation notwendigen Belegexemplare.

Dies soll hiermit nun geändert werden. Dementsprechend wurde die Schrift ausgehend von der begutachteten Form lediglich um die Anregungen der Gutachter ergänzt. Eine Anpassung an die Entwicklung und Literatur der inzwischen verstrichenen Jahre erfolgte nicht. Auch die traditionelle Rechtschreibung wurde beibehalten.

Ich möchte an dieser Stelle Dank sagen für Hilfe und Unterstützung, die mir während der Erstellung dieser Arbeit zuteil wurde. Besonders dankbar bin ich den drei Gutachtern der Schrift: Professor Dr.-Ing. habil. Dieter Besdo, Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Lion und Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht. Alle drei sind sowohl fachlich als auch menschlich sehr wichtige Vorbilder für mich, und ich verdanke ihnen wertvolle Anregungen, wegweisende Ratschläge und vieles mehr. Dieter Besdo, der leider im Februar 2012 verstarb, prägte entscheidend meine Art zu forschen und zu lehren; er war mein Doktorvater, und er ermöglichte mir auch die Anfertigung dieser Arbeit.

Meinen damaligen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Kontinuumsmechanik gilt mein Dank für die sehr freundschaftliche Zusammenarbeit und Unterstützung. Insbesondere gilt dieser Dank Dr.-Ing. Carsten Hohl und Dr.-Ing. Jörn Kirbach. Ich hatte die Freude, ein wenig zur Betreuung ihrer Promotionen beitragen zu können und bin sehr glücklich über unsere Freundschaft. Weiterhin danke ich Dr.-Ing. Klaus Heiner Oehmen für viele wertvolle Ratschläge und Denkweisen, auf die ich immer wieder gerne zurückgreife.

Schließlich danke ich meiner lieben Frau Farzaneh von ganzem Herzen, dass sie mich schon lange erträgt und stärkt, mich immer wieder anspornt und dass ich nach der Arbeit immer mit großer Freude nach Hause komme.

Jörn Ihlemann im April 2014

Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen, Symbole und Abkürzungen	VIII
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Ziele der Arbeit	3
1.2 Inhalte der Arbeit	5
2 Darstellungsformen in der Tensoralgebra	8
2.1 Schreibweisen, Benennungen, Vereinbarungen	8
2.1.1 Komponenten, Koordinaten, Koeffizienten	11
2.1.2 Symbolische Darstellung und Koeffizientendarstellungen	12
2.1.3 Identitäten von Skalaren, Vektoren und Tensoren	14
2.2 Koeffizientenfreie Tensordarstellungen	16
2.2.1 Motivation	16
2.2.2 Mathematische Eigenschaften	18
2.2.3 Invarianten	21
2.2.4 Koeffizientenfreie Darstellungen isotroper Tensoren	23
2.2.5 Koeffizientenfreie Darstellungen in Eigenrichtungen	26
2.3 Angepaßte Basisdyaden für symmetrische Tensoren	30
2.3.1 Symmetrien von Tensoren 4. Stufe	31
2.3.2 Eigenschaften der angepaßten Basisdyaden	33
2.3.3 Spezielle aus nur zwei Tensoren 2. Stufe gebildete Tensoren 4. Stufe	34
2.3.3.1 Unsymmetrische Basisvarianten	34
2.3.3.2 Übertragungen	36
2.3.3.3 Symmetrisierte Varianten	39
2.4 Ellipsoidrepräsentationen von Tensoren	42
2.4.1 Positiv definite Formen	43
2.4.2 Ordnungsrelationen	53
2.4.2.1 Größenvergleich von Skalaren	53
2.4.2.2 Größenvergleich von Vektoren	54
2.4.2.3 Größenvergleich von Tensoren 2. Stufe	54
2.4.2.4 Analogie Tensor - Ellipsoid	59
2.4.3 Maximum-/Minimumfunktion von Tensoren	60
2.4.3.1 Kleinstes umhüllendes und größtes einbeschriebenes Ellipsoid	60
2.4.3.2 Ellipsoidverzerrungen	62
2.4.4 Polarzerlegung von Tensoren	65

3	Beobachterkonzepte der Kontinuumsmechanik	69
3.1	Standardbeobachter	71
3.1.1	Beobachterunabhängige Spannungen	75
3.1.2	Beobachterindividuelle Deformationsgradienten	76
3.1.3	Beobachterunabhängige Verzerrungstensoren	79
3.1.4	Beobachterunabhängige Zeitableitungen	80
3.1.5	Leistungsbilanzen	83
3.2	Eulerscher und Lagrangescher Beobachter	85
3.2.1	Verzerrungstensoren der Lagrangeschen Betrachtungsweise	86
3.2.2	Lagrangesche Zeitableitungen	89
3.2.3	Spannungen der Lagrangeschen Betrachtungsweise	89
3.3	Lie-Ableitungen und Oldroyd-Beobachter	90
4	Darstellungswechsel kontinuumsmechanischer Relationen	94
4.1	Der Übertragungsoperator	94
4.1.1	Mathematische Eigenschaften	95
4.1.2	Übertragung transponierter Argumente	96
4.2	Konzepterweiterung auf Zwischenkonfigurationen	97
4.2.1	Anwendung auf Verzerrungstensoren	98
4.2.2	Anwendung auf Spannungstensoren	99
4.2.3	Übertragung elastischer Stoffgesetze	100
4.2.4	Anwendung auf Zeitableitungen	101
4.3	Rheologische Materialmodelle	108
4.3.1	Viskoelastizität	111
4.3.2	Elastoplastizität	112
4.4	Konzepterweiterung auf Tensoren 4. Stufe	114
5	Beobachtersysteme für konsistente Linearisierungen	115
5.1	Motivation: Anforderungen der nichtlinearen FEM	115
5.1.1	Leistungsbilanz am Einzelement	117
5.1.2	Relation der virtuellen Leistung	120
5.1.3	Elementknotenkräfte	121
5.1.4	Zeitdiskretisierung	122
5.1.5	Linearisierung	123
5.2	Materialsteifigkeit in gemischter Darstellung	126
5.2.1	Modellalgorithmus für allgemeine homogene Zustände	128
5.2.2	Simultane numerische Variationen	134

5.3	Ableitungen nach Tensoren und nach Tensorkoeffizienten	136
5.3.1	Ableitungen nach unsymmetrischen Tensoren	136
5.3.2	Ableitungen nach symmetrischen Tensoren	140
5.4	Lagrangesche Materialsteifigkeit	143
5.5	Eulersche Materialsteifigkeit	148
5.5.1	Auswahl geeigneter Tensoren	148
5.5.2	Auswahl eines geeigneten Beobachtungssystems	157
5.6	Übertragung von Materialsteifigkeiten	163
5.6.1	Programmierungsbeispiel	172
5.6.2	Sonderfall: Isotrope Elastizität	178
5.6.3	Kontrollbeispiel: Neo-Hooke-Materialsteifigkeit	182
6	Anwendungsbeispiele	189
6.1	FEM-Implementierungen des MORPH-Stoffgesetzes	189
6.2	Belastungsinduzierte Anisotropie	200
7	Zusammenfassung und Ausblick	209
	Literatur	212

Formelzeichen, Symbole und Abkürzungen

Abkürzungen

ABAQUS	Finite-Elemente-Programmpaket der ABAQUS, Inc. (Rhode Island, USA)
FEM	Finite-Elemente-Methode
MORPH	Model of Rubber Phenomenology (s. Abschnitt 6.1)
TARRC	Tun Abdul Razak Research Centre, Hertford (UK)
UMAT	Benutzerschnittstelle zu ABAQUS

Kennzeichnungen

Symbol	Beschreibung	Gleichung
X	Platzhaltersymbol, Skalar	
$[\dots]$	Matrix	2.7
\underline{X}	Vektor	2.1
$\underline{\underline{X}}$	Tensor zweiter Stufe	2.1
$\underline{\underline{\underline{X}}}$	Tensor dritter Stufe	2.1
$\underline{\underline{\underline{\underline{X}}}}$	Tensor vierter Stufe	2.1
$\text{EW}[\underline{\underline{X}}]$	Eigenwerte von $\underline{\underline{X}}$	4.3
X_T	Vergleichsgröße nach Tresca: Betragsgrößte Eigenwertdifferenz	6.1
X_{vM}	Vergleichsgröße nach von Mises	4.27
$\underline{\underline{X}}^S$	Symmetrischer Anteil: $\underline{\underline{X}}^S = \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}^T) = \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{X}}$	2.55
$\underline{\underline{X}}^A$	Antisymmetrischer Anteil: $\underline{\underline{X}}^A = \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}^T)$	2.40
$\underline{\underline{X}}'$	Mathematischer Deviator: $\underline{\underline{X}}' = \underline{\underline{X}} - \frac{1}{3} (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{E}}$	4.25
$\underline{\underline{X}}^T$	Transponierter Tensor: $\underline{\underline{X}}^T = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} \circ \underline{e}_a$	2.23
$\underline{\underline{X}}^{-1}$	Inverser Tensor: $\underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$	2.26
$\underline{\underline{X}}^n$	Tensorpotenz: $\underline{\underline{X}}^n = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{X}}$	2.48

$f(\underline{\underline{X}})$	Tensorwertige Funktion eines tensoriellen Arguments	2.49
$S(\underline{\underline{X}})$	Übertragungsoperator: $S(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}$	4.1
$S^{-1}(\underline{\underline{X}})$	Inverser Übertragungsoperator: $S^{-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$	4.1
$\overset{1}{S}(\underline{\underline{X}})$	Übertragungsoperator für die erste Teildeformation	4.5
$\overset{2}{S}(\underline{\underline{X}})$	Übertragungsoperator für die zweite Teildeformation	4.5
$\underline{\underline{\underline{X}}}^{T_{24}}$	Austausch des zweiten und vierten Basisvektors bei einem Tensor vierter Stufe: $\underline{\underline{\underline{X}}}^{T_{24}} = X_{abcd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b$	2.64
$\underline{\underline{\underline{X}}}^{S_{24}}$	(1,2)- und (3,4)-symmetrisierter $\underline{\underline{\underline{X}}}^{T_{24}}$ -Tensor	2.70
\tilde{X}	Größe der Referenzkonfiguration	2.16
\hat{X}	Größe der Zwischenkonfiguration	2.16
$\overset{1}{X}$	Größe der 1. Teildeformation gemäß $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1$	2.16
$\overset{2}{X}$	Größe der 2. Teildeformation gemäß $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1$	2.16
$\overset{\alpha}{X}$	Größe, die von einem Beobachter im \underline{e}_a -Basissystem registriert wird	3.3
$\overset{A}{X}$	Größe, die von einem Beobachter im \underline{e}_A -Basissystem registriert wird	3.3
\dot{X}	Zeitableitung bei Skalaren	3.7
$\underline{\underline{\dot{X}}}$	Lokale Zeitableitung	3.4
$\overset{\Delta}{\underline{\underline{\dot{X}}}}$	Lagrangesche Zeitableitung	3.7
$\frac{d}{dt}\Big _{\alpha}(\underline{\underline{X}})$	vom α -Beobachter registrierte $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\dot{X}}}}$ -Zeitableitung	3.10
$\frac{d}{dt}\Big _{\mathcal{A}}(\underline{\underline{X}})$	vom \mathcal{A} -Beobachter registrierte $\overset{\Delta}{\underline{\underline{\dot{X}}}}$ -Zeitableitung	3.10
$\overset{*}{\underline{\underline{\dot{X}}}}$	Zaremba-Jaumann-Zeitableitung	3.28
$\overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square\square}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square}_{\square}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square}_{\square} \rightarrow$	Oldroyd-Zeitableitungen	3.54
$\overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square\hat{\square}}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square\hat{\square}\hat{\square}}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square\hat{\square}}_{\hat{\square}}, \overset{\circ}{\underline{\underline{\dot{X}}}}^{\square\hat{\square}}_{\hat{\square}} \rightarrow$	Oldroyd-Zeitableitungen bezüglich der Deformation von der Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zur Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{K}}$	4.17

Produkte

Symbol	Beschreibung	Gleichung
$\underline{X} \circ \underline{X}$	Dyadisches Produkt	2.9
$\underline{X} \times \underline{X}$	Kreuzprodukt	2.37
$\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}$	Einfaches Punktprodukt: $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}} = X_{ab} Y_{bc} \underline{e}_a \circ \underline{e}_c$	2.11
$\underline{\underline{X}} \cdot \cdot \underline{\underline{X}}$	Doppeltes Punktprodukt: $\underline{\underline{X}} \cdot \cdot \underline{\underline{Y}} = X_{ab} Y_{ba}$	2.11

Indizes

Symbol	Beschreibung	Gleichung
$()_a, ()_b, ()_c, \dots$	\rightarrow Koeffizienten zu orthonormierten Basen $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$, z.B.: $X_{ab} = \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{e}_b$	2.2
$()_A, ()_B, ()_C, \dots$	\rightarrow Koeffizienten zu orthonormierten Basen $\underline{e}_X, \underline{e}_Y, \underline{e}_Z$, z.B.: $X_{AB} = \underline{e}_A \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{e}_B$.	2.2
	Bei einem Tensor zweiter Stufe und nur einem Index: Eigenwert. X_I, X_{II}, X_{III} sind die Eigenwerte von $\underline{\underline{X}}$	2.47
$()^i, ()^j, ()^k, \dots$	und: $()^i, ()^j, ()^k, \dots \rightarrow$ Koeffizienten zu schiefwinkli- gen Basen $\underline{g}_1, \underline{g}_2, \underline{g}_3$ bzw. $\underline{g}^1, \underline{g}^2, \underline{g}^3$, z.B.: $X_{ij} = \underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_j$	2.2
$()^I, ()^J, ()^K, \dots$	und: $()^I, ()^J, ()^K, \dots \rightarrow$ Koeffizienten zu schiefwinkli- gen Basen $\underline{g}_I, \underline{g}_{II}, \underline{g}_{III}$ bzw. $\underline{g}^I, \underline{g}^{II}, \underline{g}^{III}$, z.B.: $X^{IJ} = \underline{g}^I \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}^J$	2.2
$()_{a^{(6)}}, ()_{b^{(6)}}, ()_{c^{(6)}}, \dots$	\rightarrow jeweils 6 Koeffizienten zu angepaßten Basisdya- den $\underline{j}_{1^{(6)}}, \underline{j}_{2^{(6)}}, \dots, \underline{j}_{6^{(6)}}$ für symmetrische Tensoren	2.54

Skalare

Symbol	Beschreibung	Gleichung
α	MORPH-Stoffgesetz: Schleppzeigerfunktion	6.7
b_T^S	MORPH-Stoffgesetz: Schleppzeiger	6.2
β	MORPH-Stoffgesetz: Schleppzeigerfunktion	6.7
γ	MORPH-Stoffgesetz: Schleppzeigerfunktion	6.7
δ	Kronecker-Symbol	2.3
E_{kin}	Kinetische Energie	3.32
g_{ij}, g_i^a	Metriken	3.14

G	Schubmodul	4.11
η	Viskosität	4.25
I_1, I_2, I_3	Hauptinvarianten, Koeffizienten der charakteristischen Gleichung	2.28
κ	numerische Dämpfung	5.18
N_K	Ansatzfunktionen	5.1
ν	Querkontraktionszahl	4.11
ξ^i	Materialkoordinaten	2.4
p	Hydrostatischer Druck	6.3
$p_1 - p_8$	Parameter des MORPH-Stoffgesetzes	6.7
P_{ex}	Leistung der äußeren Kräfte	3.31
P_{Sp}	Formänderungsleistung, Spannungsleistung	3.39
Φ	Formänderungsarbeitsdichte	5.30
ρ	Materialdichte	3.31
x_a	kartesische Koordinaten	2.3
Y	Fließspannung	4.28

Vektoren

Symbol	Beschreibung	Gleichung
$\underline{\nabla}$	Nabla-Operator: $\underline{\nabla} = \underline{e}_a \frac{\partial}{\partial x_a} = \underline{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$; $\tilde{\underline{\nabla}} = \underline{e}_a \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_a} = \underline{\tilde{g}}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}$	2.14
\underline{a}	Beschleunigungsvektor	3.6
$\overset{abs}{\underline{a}}$	Absolutbeschleunigung	3.31
$\underline{e}_a, \underline{e}_A$	Basisvektoren zu kartesischen Koordinatensystemen	2.3
\underline{f}	Verteilte Volumenkräfte	3.31
$\underline{g}_i, \underline{g}^i$	Schiefwinklige Basisvektoren zu den krummlinigen Materialkoordinaten ξ^i	2.4
\underline{n}	Normaleinsvektor	3.30
\underline{Q}_K	Elementknotenkräfte	5.2
\underline{r}	Ortsvektor	2.8
\underline{s}	Spannungsvektor	3.30
\underline{u}	Verschiebungsvektor	3.17
\underline{U}_K	Knotenverschiebung	5.1
\underline{v}	Geschwindigkeitsvektor	3.6
\underline{V}_K	Knotengeschwindigkeit	5.2

Tensoren

Symbol	Beschreibung	Gleichung
$\underline{\underline{b}}$	Linker Cauchy-Green-Tensor	4.2
$\underline{\underline{C}}$	Rechter Cauchy-Green-Tensor	4.2
$\underline{\underline{D}}$	Tensor der Formänderungsgeschwindigkeiten	3.29
$\underline{\underline{E}}$	Einheits- oder Metriktenor	2.32
$\underline{\underline{F}}$	Deformationsgradient	2.14
$\underline{\underline{G}}$	Geschwindigkeitsgradient	3.25
$\underline{\underline{\gamma}}$	Greenscher Deformationstensor	3.49
$\underline{\underline{h}}$	Eulerscher Hencky-Tensor	5.70
$\underline{\underline{j}}$	Basisdyade, z.B. $\underline{\underline{j}}_{ab} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b$	2.10
$\underline{\underline{Q}}$	Beschreibung der relativen Ausrichtung zweier Beobachtersysteme	3.15
$\underline{\underline{R}}$	Drehanteil des Deformationsgradienten	3.19
$\underline{\underline{\sigma}}$	Cauchy-Spannungstensor	2.17
$\underline{\underline{T}}$	1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	3.50
$\underline{\underline{\tilde{T}}}$	2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor	3.48
$\underline{\underline{\hat{T}}}$ ^H	MORPH-Stoffgesetz: Hüllspannungen	6.6
$\underline{\underline{\hat{T}}}$ ^Z	MORPH-Stoffgesetz: Zusatzspannungen	6.5
$\underline{\underline{\hat{T}}}$ [^]	Spannungstensor der Zwischenkonfiguration	4.9
$\underline{\underline{\tau}}$	Kirchhoff-Spannungstensor	3.50
$\underline{\underline{U}}$	Rechter Strecktensor	3.41
$\underline{\underline{V}}$	Linker Strecktensor	3.19
$\underline{\underline{W}}$	Beschreibung der Relativbewegung zweier Beobachter	3.21
$\underline{\underline{\chi}}$	ABAQUS-eigenes Verformungsmaß	5.72
$\underline{\underline{\Omega}}$	Antisymmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten $\underline{\underline{G}}$	3.27
$\underline{\underline{\epsilon}}$	Ricci-Permutationstensor: $\underline{v} \times \underline{w} = \underline{w} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{v}$	2.36
$\underline{\underline{\underline{J}}}$ ¹ , $\underline{\underline{\underline{J}}}$ ² , $\underline{\underline{\underline{J}}}$ ³	Isotrope Tensoren vierter Stufe	2.33
$\underline{\underline{k}}$	Eulersche Materialsteifigkeit (für ABAQUS)	5.68
$\underline{\underline{K}}$	Lagrangesche Materialsteifigkeit	5.89
$\underline{\underline{m}}$	Materialsteifigkeit in gemischter Darstellung	5.89
$\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ $\underline{\underline{M}}$	Elementsteifigkeit	5.20

1 Einleitung

Das Fach Technische Mechanik, so wie es heutzutage üblicherweise im Grundstudium Maschinenbau gelehrt und in zahlreichen Lehrbüchern (z.B. Szabó 1964, Pestel & Wittenburg 1981 o. Magnus & Müller 1990) beschrieben wird, ist durch die breite deduktive Entfaltung und technische Anwendung einer Basis physikalischer Axiome charakterisiert. Diese Axiome, wie z.B. der Impulserhaltungssatz, zeichnen sich besonders dadurch aus, daß sie in zahlreichen tagtäglichen Erfahrungen wiedererkannt und auf diesem Weg weitgehend intuitiv verstanden werden können. Dies trägt entscheidend dazu bei, daß das Fach im Rahmen einer ganzen Reihe von Beschränkungen, z.B. auf lineare Zusammenhänge oder kleinste Verformungen, den Eindruck der Eindeutigkeit und der Geschlossenheit erweckt. Dieser Eindruck erstreckt sich sogar auf den Bereich der Nachbildung von Materialeigenschaften in Form des Hookeschen Gesetzes, wo er durch die Beschränkung auf elastisches und isotropes Materialverhalten und auf kleine Verformungen entsteht. Allerdings hat diese Beschränkung nicht den Charakter einer mathematisch besonders einfach zu erfassenden (linearen) Näherung der Realität, sondern stellt stattdessen eine drastische Einengung des Blickfeldes dar. In ähnlicher Weise erzeugt auch bei Problemstellungen mit Reibeinflüssen erst die radikale gedankliche Beschränkung auf einen Spezialfall (Coulombsche Reibung) wiederum den Anschein von Eindeutigkeit.

Die Kontinuumsmechanik, insbesondere die nichtlineare Kontinuumsmechanik, löst sich von vielen der Beschränkungen, denen die Grundlagenmechanik unterworfen ist. Ein teilweiser Abschluß dieses Wissensgebiets wurde in dem Moment erreicht, in dem es gelang, die axiomatisch basierten Bilanzgleichungen in einer insbesondere für große Deformationen hinreichenden Allgemeinheit präzise zu formulieren. Damit ist die Kontinuumsmechanik als Ganzes aber durchaus nicht als abgeschlossen zu betrachten, denn sie ist eng verknüpft mit der Materialtheorie und den numerischen Näherungsverfahren und hier vor allen anderen der Methode der finiten Elemente (FEM) zur Analyse inhomogener Strukturbelastungen.

Bei den numerischen Verfahren lassen sich infolge der seit geraumer Zeit rapide zunehmenden Rechnerleistungen die Simulationsmodelle immer mehr ausweiten und immer detaillierter gestalten. Mit der Größe des Modells wächst aber der zur Lösung der resultierenden Gleichungssysteme erforderliche Berechnungsaufwand überproportional und damit sehr viel schneller an als die Arbeit, die zur Bereitstellung dieser Gleichungssysteme (bei gleichbleibender Materialbeschreibung) erforderlich ist. Auf diese Weise werden mit anwachsender Modellgröße immer komplexere Verfahren auch unter wirtschaftlichen Gesichtspunkten interessant. Ein Beispiel hierfür wären aktuelle Überlegungen, bei plastischen Materialien in jedem Gaußpunkt ein Vielkristallmodell mit einer statistisch hinreichend großen Anzahl von Einzelkristalliten zu berechnen.

In der Materialtheorie sind die zum Einsatz kommenden Forschungsverfahren induktiv geprägt. Ausgangsbasis für die Entwicklung eines Stoffgesetzes für eine bestimmte Materialklasse ist zum einen eine zwangsläufig beschränkte und damit unvollständige Kenntnis der

Grundlagenmechanik (Festigkeitslehre)		Kontinuumsmechanik
lineares Dehnungsmaß $\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_b} + \frac{\partial u_b}{\partial x_a} \right)$	<ul style="list-style-type: none"> • Geometrisch linear • Kleinste Verzerrungen • Kleinste Drehungen 	<ul style="list-style-type: none"> • Geometrisch nichtlinear • Große Verzerrungen • Beliebige Drehungen
Kräfte pro unverformter Fläche als symmetrische Spannungen $\sigma = \frac{dF}{dA_0}$	<ul style="list-style-type: none"> • Vermischung unterschiedlicher Spannungsbegriffe 	<ul style="list-style-type: none"> • Separate Tensoren für natürliche Spannungen und Ingenieurspannungen
Vorwiegend Hookesches Stoffgesetz	<ul style="list-style-type: none"> • Physikalisch linear • (meistens) isotrop • elastisch (reversibel) Kein Einfluß der Formänderungsgeschwindigkeiten auf die Spannungen • nur kompressibel 	<ul style="list-style-type: none"> • Physikalisch nichtlinear • auch anisotrop • elastisch, viskos, plastisch und Kombinationen • auch inkompressibel
Spezielle homogene Bauteile	<ul style="list-style-type: none"> • (Annähernd) prismatische Zug-/Druckstäbe • Schlanke Biegebalken • Torsionswellen mit dünnwandigem oder rotations-symmetrischem Profil 	Beliebige Bauteilgeometrien (in Kombination mit der Methode der finiten Elemente → FEM)
Spezielle, idealisierte Belastungsarten	<ul style="list-style-type: none"> • Diskrete Kräfte und Momente als Lasten • Einachsige Zug- u. Druckbeanspruchung • Biegung um Hauptträgheitsachsen (gerade Biegung) mit eben bleibenden Querschnitten (Bernoulli) • Torsion ohne Wölbbehinderung (St. Vernant) 	Beliebige verteilte Lasten (in Kombination mit der Methode der finiten Elemente → FEM)
Bilanzgleichungen (Energie, Impuls, Drall) mit einer auf Punktmassen oder Starrkörper beschränkten Gültigkeit	Verallgemeinerte Bilanzgleichungen für den sich verformenden Körper in verschiedenen Darstellungsweisen	

Übersicht: Abgrenzung der Arbeitsgebiete und Methoden der Kontinuumsmechanik gegenüber der Festigkeitslehre in der Grundlagenmechanik

Phänomenologie des Materialverhaltens aus meßtechnischen Befunden unter ausgewählten Belastungsprozessen. Hinzu kommen eine zumeist nur bruchstückhaft vorhandene Kenntnis der grundlegenden physikalisch-chemischen Vorgänge auf atomarer Ebene und die den Rahmen des Möglichen absteckenden thermodynamischen Hauptsätze. Aus diesen unvollständigen Daten werden in der Kontinuumsmechanik allgemein formulierte Stoffgesetze abstrahiert, die Vorhersagen für beliebige Belastungsprozesse gestatten und damit die Mindestanforderung für den Einsatz innerhalb der FEM erfüllen. Diese Arbeitsweise erfordert ein hohes Maß an Kreativität.

Trotz wichtiger Arbeiten zur standardisierten Suche nach Materialbeschreibungen (z.B: Kra-wietz 1986) ist in der Materialtheorie bezüglich der Entwicklung und Anwendung neuer Methoden mit einem Abschluß auf lange Sicht nicht zu rechnen. Die Ursache hierfür liegt im Widerstreit einer Vielzahl von Interessen bei der Entwicklung eines Materialmodells begründet. Neben dem Interesse an einer möglichst realitätsnahen Materialbeschreibung sind hier vor allem wirtschaftliche Gesichtspunkte bezüglich der Bereitstellung einer hinreichend breiten Datenbasis für die Anpassung des Modells an das jeweilige Material und der Verwendung des Materialmodells innerhalb der FEM zu nennen. Folglich ist ein generell optimales Materialmodell nicht denkbar. Die Eignung eines Modells richtet sich viel mehr nach der jeweiligen Problemstellung, den wirtschaftlichen Rahmenbedingungen, den zeitlichen Ressourcen, den zur Verfügung stehenden Verfahren, dem vorliegenden Datenmaterial usw. Dementsprechend wird sich auch in Zukunft nicht nur bei neuen Materialien, sondern auch bei neuen Produkten, neuen Produktionsverfahren oder neuen Simulationsmöglichkeiten und -techniken immer wieder Bedarf an neuen oder modifizierten Materialmodellen ergeben.

Die Kontinuumsmechanik ist somit zumindest in den genannten Teilgebieten weder als geschlossenes Wissensgebiet anzusehen noch ist in absehbarer Zeit mit einem Abschluß zu rechnen. Vielmehr wird hier neben der Anwendung bereits erschlossenen Wissens auch weiterhin die kreative Erschließung neuen Wissens eine wesentliche Rolle spielen. Hierfür wiederum ist eine möglichst große methodische Freiheit wichtig, die Raum für neue Denkansätze, Interpretationen und Herangehensweisen läßt.

1.1 Motivation und Ziele der Arbeit

Die Arbeit richtet sich an den in der Kontinuumsmechanik bereits geschulten Leser. Für das Erlernen der Grundlagen sind die beiden mit Grundlagen befaßten Kapitel sicher nicht empfehlenswert. In den Abschnitten, in denen Neuerungen eingeführt werden, nehmen Herleitungen und Beweise den größten Platz ein und verleihen der Arbeit damit zwangsläufig einen ausgeprägten mathematischen Akzent. Hauptsächlich richtet sich die Arbeit an solche Leser, die sich mit komplexen kontinuumsmechanischen Materialmodellen beschäftigen, diese verstehen, anwenden, an ihre Bedürfnisse anpassen und in die Methode der Finiten Elemente implementieren wollen oder müssen. Dieser potentielle Leserkreis wird in der Regel ohne wesentliche Einbußen die zur Verfügung gestellten Herleitungen übergehen und sich direkt der Anwendung der Resultate zuwenden können. Die Angabe der Herleitungen und Beweise dient natürlich zunächst dem Nachweise der Stichhaltigkeit und der Überprüfbarkeit der Resultate. Vor allem aber sind die Herleitungen und Beweise für den (kleinen) Kreis von Lesern

vorgesehen, der die resultierenden Methoden und Algorithmen erweitern, weiterentwickeln oder auf andere Bereiche übertragen will. In diesem Fall ist eine genaue Kenntnis der aus den Herleitungen zu erkennenden Einschränkungen und Einsatzmöglichkeiten notwendig.

In der Kontinuumsmechanik existieren eine ganze Reihe verschiedener Grundkonzepte und Darstellungsformen, die wiederum Anlaß zu ganz unterschiedlichen Denkansätzen, Interpretationsweisen und Arbeitsmethoden geben. Dies ist für ein offenes Forschungsgebiet sicher nicht ungewöhnlich, die Unterschiede sind aber bei der Kontinuumsmechanik besonders ausgeprägt. Ein charakteristisches Beispiel hierfür sind die verschiedenen Beschreibungsmöglichkeiten für die zentrale Klasse von Größen in der Kontinuumsmechanik, die Tensoren 2. Stufe. So kann ein solcher Tensor aufgefaßt werden als:

- ein Element einer Klasse physikalischer Größen, wie z.B. ein Spannungszustand in einem Punkt oder die Verformung eines infinitesimalen Körperausschnitts,
- eine Abbildungsvorschrift für Vektoren,
- eine Kurzschreibweise für eine Matrix,
- eine verallgemeinerte Matrix,
- der Gradient eines Vektorfeldes,
- die Beschreibung eines Ellipsoids (vorrangig bei positiv definiten Tensoren),
- eine Transformation zwischen zwei Vektorräumen,
- ein mathematisches Konstrukt mit bestimmten (die Tensoren definierenden) Transformationseigenschaften,
- die Metrik eines verallgemeinerten Raumes oder
- ein geometrisches, unter Koordinatentransformationen invariantes Objekt.

Dabei schließen sich die meisten Elemente dieser sicher nicht vollständigen Liste durchaus nicht gegenseitig aus und eine Diskussion darüber, welches die (einzig) richtige Auffassung von Tensoren ist, ist wenig erfolgversprechend (siehe hierzu das bemerkenswerte Diskussionsprotokoll zum Tensorbegriff in der freien Internetenzyklopädie Wikipedia → www.wikipedia.de). Die Varianten unterscheiden sich allerdings teilweise in ihrem Gültigkeitsbereich und sie weisen je nach Kontext unterschiedliche Vor- und Nachteile auf.

Eine solche Vielfalt in Konzepten und Methoden ist bei einem Forschungsgebiet wie der Kontinuumsmechanik, wo es gerade in den Bereichen der Materialtheorie und der numerischen Verfahren nach wie vor auf die kreative Erschließung bisher unbekannter Zusammenhänge ankommt, prinzipiell durchaus wünschenswert. Eine Einengung auf einen einzelnen besonders eleganten und kompakten Zugang zu einer Thematik ist zwar geeignet, eine bereits bekannte Gesetzmäßigkeit zu belegen, bei der Suche nach Neuem, z.B. einem neuen Stoffgesetz ist eine solche Reduktion hingegen hinderlich.

Die Entwicklung von Stoffgesetzen verlangt die Umsetzung von Kenntnissen aus Experimenten oder aus den das Materialverhalten bestimmenden molekularen Zusammenhängen in ein mathematisch ausformuliertes generalisiertes Konstrukt. Somit entsteht bei dieser Tätigkeit fortwährend die Notwendigkeit, die mathematischen Werkzeuge mit Elementen der unmittelbaren Anschauung in Verbindung zu bringen, z.B. mit Meßergebnissen, die einen bestimmten

Aspekt des Materialverhaltens aufzeigen. Für dieses Unterfangen ist die Interpretierbarkeit der verwendeten mathematischen Begriffe und Methoden in Begriffen der Mechanik von existentieller Bedeutung. Dementsprechend wird in dieser Arbeit der Versuch unternommen, die diskutierten Ansätze, Modelle und Methoden möglichst anschaulich darzustellen. In bezug auf die genannten Interpretationen von Tensoren ist somit für diese Arbeit die Aussage: "Ein typisches Beispiel für einen Tensor zweiter Stufe ist die vollständige Beschreibung eines (momentanen) Spannungszustands in einem Punkt" richtungsweisend. Für Vektoren gilt analog: "Ein typisches Beispiel für einen Vektor ist die vollständige Beschreibung einer Einzelkraft". Alle vorgestellten Darstellungsformen orientieren sich an dieser Vorgabe.

Sowohl Spannungszustände als auch Kräfte sind der unmittelbaren Erfahrung zugänglich und damit Elemente des Euklidischen Raums eben dieser unmittelbaren Erfahrung. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit auf Interpretationen im Rahmen mathematischer nichteuklidischer Theorieräume verzichtet, ohne solchen Interpretationen ihre Bedeutung oder Berechtigung absprechen zu wollen.

Zweck der Arbeit ist es einerseits, bestehende Darstellungsformen und Arbeitsmethoden gemäß ihrem jeweiligen Geltungsbereich in den gesteckten Rahmen einzuordnen und sie in ihren Überschneidungsbereichen gegenüberzustellen. Desweiteren werden eine Reihe neuer Methoden und Interpretationen eingeführt, detailliert vorgestellt und in ihrer Darstellung in den gemeinsamen Rahmen eingegliedert. Hinzu kommen neue Möglichkeiten, Ergebnisse aus unterschiedlichen Betrachtungsweisen ineinander zu überführen. Auf diese Weise wird versucht, eine möglichst große methodische Freiheit bei der Entwicklung von Stoffgesetzen und der Implementierung solcher Stoffgesetze in numerische Näherungsmethoden wie die der finiten Elemente zu erreichen.

Eine besondere Bedeutung kommt den speziell in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik intensiv verwendeten Beobachterkonzepten zu. Erstaunlicherweise existieren in diesem Bereich parallel sehr unterschiedliche Denkweisen, ohne daß dies immer in vollem Umfang erkannt bzw. zu erkennen gegeben wird. Teilweise lassen sich diese Unterschiede in den Denkweisen auf fundamentale Zusammenhänge zurückführen. Eine wichtige Rolle spielt hierbei beispielsweise die trivial erscheinende Frage, unter welchen Bedingungen zwei Tensoren (oder Vektoren) als gleich anzusehen sind.

1.2 Inhalte der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Hauptsegmente. Das erste Segment mit den Kapiteln 2 und 3 umfaßt die Beschreibung und Analyse der verschiedenen Darstellungsformen und Beobachterkonzepte. Daran schließt sich das zweite, mit Kapitel 4 übereinstimmende Segment mit Methoden zum Wechsel zwischen verschiedenen Betrachtungsweisen der Kontinuumsmechanik an. Das Thema des dritten Segments mit den Kapiteln 5 und 6 ist die Anwendung der vorgestellten Beschreibungsformen und Umrechnungsmethoden im Rahmen der Implementierung von Stoffgesetzen in die Methode der nichtlinearen finiten Elemente.

Ausgangspunkt des ersten Segments sind die Darstellungsformen der Tensoralgebra in Kapitel 2. Den herkömmlichen Darstellungen werden hier die sogenannten koeffizientenfreien

Darstellungen sowie eine redundanzfreie, aber vollständige Darstellungsmöglichkeit symmetrischer Tensoren und schließlich Ellipsoidrepräsentationen gegenübergestellt. Einen weiteren Schwerpunkt bilden Relationen tensorieller Größen. In diesem Zusammenhang werden analog zu skalaren Größen Formen der Ungleichheit unterschieden und sogar Maximum- und Minimum-Funktionen für tensorielle Argumente eingeführt - beides allerdings mit der Beschränkung auf symmetrische und positiv definite Tensorargumente zweiter Stufe. Solche Funktionen erlangen in Kapitel 6 im Zusammenhang mit belastungsinduzierter Anisotropie bei der Aufsummierung von Richtungsinformationen entscheidende Bedeutung. Eine anschauliche Deutung dieser Zusammenhänge gelingt wiederum mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen der beteiligten Tensoren.

Der Schwerpunkt von Kapitel 3 sind Beobachterkonzepte und die Auswirkungen dieser Konzepte auf die Denkweise und Vorstellungen in bezug auf kontinuumsmechanische Größen wie Spannungen, Verzerrungen, substantielle Zeitableitungen und Leistungen. Hinzu kommen räumliche und materielle bzw. Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweisen. Favorisiert wird hier ein Konzept, dem die Vorstellung von sogenannten Standardbeobachtern zugrunde liegt. Diesen Beobachtern werden, entsprechend einem realen Beobachter in einer typischen Laborsituation, keinerlei außergewöhnliche Fähigkeiten (wie zum Beispiel die Fähigkeit zwei Konfigurationen gleichzeitig wahrnehmen zu können) oder ausgezeichnete Bewegungszustände (z.B. eine Fixierung in einem Inertialsystem) zugesprochen. Dementsprechend leicht fällt es, sich mit einem solchen Standardbeobachter zu identifizieren und dessen Beobachtungen nachzuvollziehen. Interessanterweise existieren durchaus etablierte Beobachterkonzepte, deren Vorhersagen nicht durchgehend mit den Beobachtungen von Standardbeobachtern übereinstimmen. In diesem Zusammenhang spielt die in Kapitel 2 diskutierte Frage, unter welchen Bedingungen zwei Tensoren als identisch angesehen werden, eine wichtige Rolle.

Das vierte Kapitel umfaßt das zweite Hauptsegment der Arbeit. Schwerpunkt ist hier die Übertragung tensorieller Relationen, z.B. von Stoffgesetzen, zwischen verschiedenen Darstellungsformen. Vorgesehen sind dabei solche Übertragungen, bei denen sich zwar die beteiligten Größen und die Gestalt der zueinander in Relation stehenden mathematischen Konstrukte ändert, die Relation selbst aber identisch erhalten bleibt. Für diese Aufgabe wurde der sogenannte Übertragungsoperator entwickelt. Im einfachsten Fall sind die beiden in Frage kommenden Darstellungsformen die mit der aktuellen Konfiguration als Basis arbeitende Eulersche Darstellungsweise und die mit der Referenzkonfiguration verknüpfte Lagrangesche Darstellungsweise. In dieser Form wurde der Übertragungsoperator bereits (Ihlemann, 2003a) beschrieben. Durch die Erweiterung des Konzepts auf Zwischenkonfigurationen wurde der Anwendungsbereich nochmals drastisch vergrößert. Beispielsweise ist so ein sehr vielseitiger Einsatz bei Stoffgesetzen der Plastizität möglich geworden. Darüber hinaus gelingt auch die Übertragung von Tensoren vierter Stufe. Dies findet im fünften Kapitel Anwendung.

Thema des dritten Segments ist die Anwendung der in den vorhergehenden Kapiteln erarbeiteten Konzepte und Methoden am Beispiel der Implementierung komplexer Stoffgesetze in die FEM. Schwerpunkt ist hierbei das fünfte Kapitel mit der Be- und Umrechnung der zu verschiedenen Beobachtersystemen gehörenden Formen von FEM-Steifigkeitsmatrizen.

Dabei werden auch gemischte Formulierungen mit 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen und dem vollständigen Deformationsgradienten einbezogen. Darüber hinaus werden in Kapitel 6 exemplarisch einige Simulationsergebnisse von Implementierungsbeispielen gezeigt und in bezug auf die jeweiligen Besonderheiten diskutiert.

Für die konsistente Steifigkeitsmatrix ergeben sich ausgehend von dem jeweiligen Beobachtersystem verschiedene Formulierungsvarianten und damit einhergehend verschiedene Berechnungsvorschriften. Je nach Art des verwendeten Materialmodells ist die Eignung dieser Formulierungsvarianten sehr unterschiedlich, so daß auch in diesem Zusammenhang die Schwierigkeit besteht, eine 'beste' Variante zu bestimmen. Dementsprechend uneinheitlich sind die Formen der Steifigkeitsmatrizen, die in den bestehenden kommerziellen und wissenschaftlich motivierten FEM-Programmen zur Anwendung kommen. Bei der Implementierung eines Stoffgesetzes in ein bestehendes FEM-Programm entsteht somit häufig die Notwendigkeit, eine bestehende Berechnungsvorschrift für die Steifigkeitsmatrix an die neue Schnittstelle anzupassen oder das zu implementierende Stoffgesetz überhaupt erst in eine Form zu übertragen, in der sich die benötigte Steifigkeitsmatrix ableiten läßt. In beiden Fällen tragen die in den beiden ersten Segmenten vorgestellten Methoden zur Effizienz bei.

2 Darstellungsformen in der Tensoralgebra

Den herkömmlichen Darstellungsformen von Tensoren werden die aus der Summe von drei Vektordyaden bestehenden koeffizientenfreien Darstellungen, die redundanzfreien Darstellungen symmetrischer Tensoren in symmetrischen Basisdyaden und Ellipsoidrepräsentationen gegenübergestellt. In diesem Rahmen werden die benötigten Grundlagen der Tensoralgebra bereitgestellt. Außerdem werden die Ellipsoidrepräsentationen für eine anschauliche Definition von Maximum- und Minimum-Funktionen von Tensoren herangezogen. Während die symmetrischen Basisdyaden für die Behandlung von Ableitungen nach symmetrischen Tensoren in Kapitel 5 verwendet werden, sind die Ellipsoidrepräsentationen das Kernelement der Anisotropieformulierung in Kapitel 6.

2.1 Schreibweisen, Benennungen, Vereinbarungen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden Vektoren und Tensoren entgegen dem in der Literatur weit verbreiteten Fettdruck durch Unterstriche gekennzeichnet, deren Anzahl zugleich die Stufe des jeweiligen Tensors wiedergibt.

$$\begin{array}{ll}
 s & \text{Tensor 0. Stufe (Skalar)} \\
 \underline{w} = w_a \underline{e}_a & \text{Tensor 1. Stufe (Vektor)} \\
 \underline{\underline{X}} = X_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b & \text{Tensor 2. Stufe} \\
 \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \epsilon_{abc} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_c & \text{Tensor 3. Stufe} \\
 \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = C_{abcd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_d & \text{Tensor 4. Stufe}
 \end{array} \tag{2.1}$$

Diese z.B. bei Besdo (z.B. 1974 o. 1998) oder Riemer (1993) zu findende Technik hat den Vorteil der handschriftlichen Reproduzierbarkeit und ist für Textsatzsysteme auf dem aktuellen Stand der Technik unproblematisch. Wichtig ist außerdem, daß hierbei keinerlei Einschränkungen bei der Symbolwahl für bestimmte Tensoren nötig sind (z.B. Kleinbuchstaben nur für Vektoren oder ähnliches).

Für indizierte Größen ist zwischen Indexvariablen und direkten Wertangaben zu unterscheiden. Eine Variable steht für drei Indexwerte, sofern nicht explizit auf eine Ausnahme hingewiesen wird. Die Angabe v_a mit der Indexvariablen a steht beispielsweise für die drei Werte: v_x , v_y und v_z , die ihrerseits jeweils einen konkreten Wert repräsentieren. Die Indexvariablen werden zu Gruppen zusammengefaßt, um zwischen unterschiedlichen Koordinatensystemen oder Basisvektorvereinbarungen unterscheiden zu können.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Indexgruppen:} & \text{Indexwerte:} \\
 a, b, c, d, \dots, h & \rightarrow x, y, z \\
 A, B, C, D, \dots, H & \rightarrow X, Y, Z \\
 i, j, k, l, \dots, w & \rightarrow 1, 2, 3 \\
 I, J, K, L, \dots, W & \rightarrow I, II, III
 \end{array} \tag{2.2}$$

Die ersten beiden Indexgruppen werden für kartesische Koordinatensysteme x_a bzw. X_A und die zugeordneten orthonormierten Basisvektoren \underline{e}_x , \underline{e}_y und \underline{e}_z genutzt.

$$\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_a} = \underline{e}_a \quad \text{mit:} \quad \underline{e}_b \cdot \underline{e}_a = \delta_{ba} = \begin{cases} 0 & \text{wenn: } b \neq a \\ 1 & \text{wenn: } b = a \end{cases} \quad (2.3)$$

Die beiden unteren Indexgruppen stehen für allgemeine Systeme mit krummlinigen Koordinaten ξ^i und zugeordnete schiefwinklige angepaßte Basen \underline{g}_i zur Verfügung.

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \quad (2.4)$$

Krummlinige Koordinaten werden hier verwendet, um die Vorteile des Konzepts der Materialkoordinaten voll ausschöpfen zu können, das einen sehr anschaulichen Zugang zur Beschreibung von Deformationen von einer Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zur aktuellen Konfiguration \mathcal{K} ermöglicht.

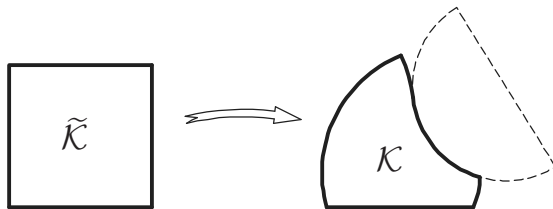


Abbildung 2.1: Inhomogene Verformung von der Referenz- zur aktuellen Konfiguration.

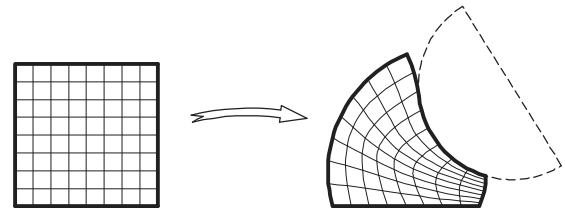


Abbildung 2.2: Die sich mitverformenden Materialkoordinatenlinien erlauben die Beurteilung der lokalen Verzerrungen.

Die den Materialkoordinaten ξ^i gemäß Gleichung 2.4 zugeordneten Basisvektoren \underline{g}_i sind im allgemeinen schiefwinklig und nicht normiert.

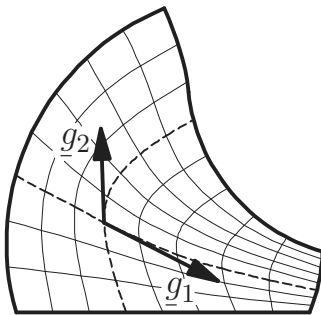


Abbildung 2.3: Die \underline{g}_i sind tangential zu den Koordinatenlinien ausgerichtet. Ihr Betrag ändert sich mit der Streckung bzw. Stauchung der Linien.

Sofern die Koordinaten ξ^i jeden Punkt des Raumes eindeutig kennzeichnen, spannen die \underline{g}_i -Vektoren den gesamten dreidimensionalen Raum auf und sind somit linear unabhängig.

$$\underline{g}_1 \cdot (\underline{g}_2 \times \underline{g}_3) \neq 0$$

Dies ist eine wichtige Voraussetzung für die Verwendung dieser Vektoren als Beschreibungsbasis. Ebenfalls linear unabhängig sind die Vektoren \underline{g}^i , die der \underline{g}_i -Basis als duale Basis gemäß

$$\underline{g}^i \cdot \underline{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & \text{wenn: } j \neq i \\ 1 & \text{wenn: } j = i \end{cases} \quad (2.5)$$

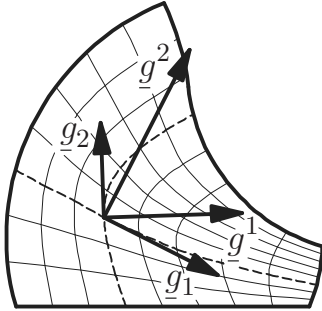


Abbildung 2.4: Die Vektoren \underline{g}^i bilden die duale Basis bezüglich der Basis der \underline{g}_i . Die \underline{g}^i sind orthogonal zu denjenigen \underline{g}_k mit $k \neq i$. Je länger ein Vektor \underline{g}_i ist, desto kürzer ist \underline{g}^i .

zugeordnet werden.

Für eine noch weitergehende Verkürzung der Schreibweise wird wie üblich die Einsteinsche Summationskonvention angewendet. Alle Terme, die mehrere Summen enthalten, werden derart umgestaltet, daß alle Summenzeichen an den Beginn des Terms gesetzt werden können. Danach kann auf die explizite Angabe der Summenzeichen ohne Verlust der Eindeutigkeit vollständig verzichtet werden, sofern generell beim Auftreten von zwei gleichen Indizes in einem Produkt die entsprechende Summe gebildet wird. Zum Beispiel:

$$\underline{w} = w_a \underline{e}_a = w_x \underline{e}_x + w_y \underline{e}_y + w_z \underline{e}_z$$

Diese Konvention wird hier dahingehend erweitert, daß auch dann summiert wird, wenn sich die beiden Indizes in der Groß-/Kleinschreibung unterscheiden. Damit lassen sich zum Beispiel Drehtensoren (oder Tensoren, die einer Spiegelung entsprechen) sehr kompakt darstellen (vergl. hierzu Abschnitt 2.2).

$$\underline{\underline{R}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_A = \underline{e}_x \circ \underline{e}_X + \underline{e}_y \circ \underline{e}_Y + \underline{e}_z \circ \underline{e}_Z$$

(Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, daß der Austausch einer der Vektorgruppen, z.B. der Austausch der Vektoren \underline{e}_a gegen irgendwelche anderen Vektoren \underline{e}_α einen ganz anderen Tensor ergibt: $\underline{\underline{R}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_A \neq \underline{\underline{Q}} = \underline{e}_\alpha \circ \underline{e}_A$.)

Ausgenommen von der Summationskonvention sind lediglich unterstrichene Indizes. Dies wird zum Beispiel benötigt, um die Komponenten eines Vektors als Vielfache von Einheitsvektoren darzustellen.

$$\underline{\underline{w}}^a = w_a \underline{e}_a = w_a \underline{e}_a \quad (2.6)$$

Desweiteren sind Größen innerhalb von eckigen Matrizenklammern von der Summationskonvention ausgenommen, da eine Matrix stets alle Elemente, die im Rahmen der angegebenen Indexgruppen existieren, umfaßt.

$$\left[X_i^k \right] = \left[X_k^i \right] = \left[X_m^n \right] = \begin{bmatrix} X_1^1 & X_1^2 & X_1^3 \\ X_2^1 & X_2^2 & X_2^3 \\ X_3^1 & X_3^2 & X_3^3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

2.1.1 Komponenten, Koordinaten, Koeffizienten

Tensoren können als Summen dyadischer Produkte von Basisvektoren mit skalaren Vorfaktoren dargestellt werden. Zum Beispiel (vergl. Gl. 2.1):

$$\underline{w} = w^i \underline{g}_i \quad ; \quad \underline{\underline{X}} = X^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad .$$

Aus dieser Art der Darstellung ergeben sich unmittelbar die für Tensoren typischen Transformationseigenschaften, z.B.:

$$\underline{\underline{X}} = X_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b = \underbrace{X_{ab} (\underline{e}_a \cdot \underline{g}^i) (\underline{e}_b \cdot \underline{g}^j)}_{X^{ij}} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad .$$

Durch Multiplikation mit Basisvektoren lassen sich die skalaren Vorfaktoren isolieren.

$$\underline{w} \cdot \underline{g}^i = w^i \quad ; \quad \underline{g}^i \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}^j = X^{ij}$$

Bezüglich der Benennung dieser Skalare herrscht in der Literatur keine Einheitlichkeit. Häufig finden sich sogar innerhalb einer Abhandlung unterschiedliche Bezeichnungen. Bei Vektoren werden diese Skalare zumeist als *Koordinaten* (z.B. Klingbeil 1966, Besdo 1974, Zurmühl & Falk 1984, Bronstein et al. 1995, Hiersig 1995, Betten 2001) oder *Komponenten* (z.B. Klingbeil 1966; Krawietz 1986, Hiersig 1995, Wellerdick-Wojtasik & Besdo 2004) bezeichnet. Teilweise findet sich auch die Bezeichnung *Koeffizienten* (de Boer 1982, Bronstein et al. 1995). Bei Tensoren höherer Stufe und Matrizen findet sich die Bezeichnung *Koeffizienten* hingegen häufiger (de Boer 1982, Zurmühl & Falk 1984, Hiersig 1995), aber auch hier sind die Bezeichnungen *Koordinaten* (Besdo 1974, Betten 2001) und *Komponenten* (Klingbeil 1966, Krawietz 1986, Hiersig 1995, Betten 2001, Wellerdick-Wojtasik & Besdo 2004) häufig. In der englischsprachigen Literatur scheint hingegen klar die Bezeichnung *components* zu dominieren (z.B. Truesdell & Noll 1965, Green & Zerna 1968, Ogden 1984, Sussmann & Bathe 1987, Salencon 2001).

Die typischen Angaben in Enzyklopädien und allgemeinen Nachschlagewerken werden durch die Kurzbeschreibungen im Duden recht gut zusammengefaßt. Demnach ist ein Koeffizient eine Vorzahl der veränderlichen Größen einer Funktion. Eine Komponente ist Bestandteil eines Ganzen und eine Koordinate ist eine Zahl, die die Lage eines Punktes in der Ebene oder im Raum bestimmt.

Demnach sollte die Bezeichnung Vektorkomponente den Teilvektoren $\underline{\overset{x}{w}}$, $\underline{\overset{y}{w}}$ und $\underline{\overset{z}{w}}$ in den jeweiligen Koordinatenrichtungen vorbehalten bleiben, die in der Summe den vollständigen Vektor \underline{w} ergeben (s. Abb. 2.5).

$$\underline{w} = \underline{\overset{x}{w}} + \underline{\overset{y}{w}} + \underline{\overset{z}{w}}$$

Passend dazu bezeichnet de Boer (1982) die w_a als Koeffizienten der Komponenten.

Bei einer Zerlegung des Ortsvektors \underline{r} in Komponenten in Richtung eines kartesischen Koordinatensystems x_a ist die Bezeichnung *Koordinaten* des Ortsvektors für die r_a sehr sinnvoll, denn diese stimmen mit den Lage- oder Ortskoordinaten x_a überein.

$$\underline{r} = r_a \underline{e}_a = x_a \underline{e}_a \quad (2.8)$$

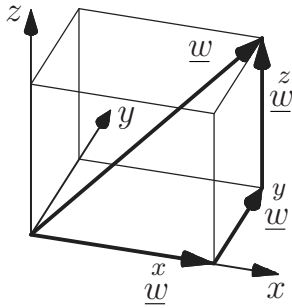


Abbildung 2.5: Zerlegung eines Vektors in Komponenten.

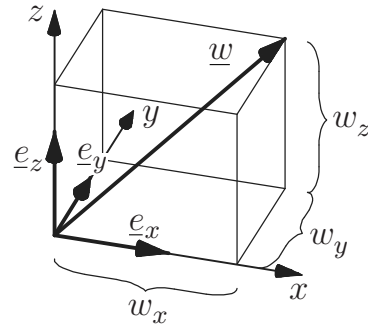


Abbildung 2.6: Zerlegung der Komponenten in Basisvektoren und skalare Vorfaktoren.

Insofern legt die Bezeichnung *Koordinaten* für die w_a eines allgemeinen Vektors \underline{w} eine Analogie zum Ortsvektor nahe. Aus dieser Analogie läßt sich allerdings keine Motivation dafür ableiten, auch die X_{ab} -Werte eines Tensors $\underline{\underline{X}}$ als Koordinaten zu bezeichnen.

Erschwerend kommt hinzu, daß die Basis der Analogie völlig zusammenbricht, wenn auch krummlinige Koordinaten ξ^i in die Betrachtung einbezogen werden. Solche krummlinigen Koordinaten sind nämlich nicht mehr *Koordinaten* des Ortsvektors.

$$\underline{r} \neq \xi^i \underline{g}_i$$

Vielmehr gehören die ξ^i gar nicht zu einem Tensor. Bei unterschiedlichen krummlinigen Koordinaten gilt nämlich im allgemeinen:

$$\xi^K g_K = \xi^K \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^K} \neq \xi^i \underline{g}_i = \xi^i \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \quad .$$

Somit sind die krummlinigen Koordinaten ξ^i keine *Koordinaten* des Ortsvektors. Vielmehr sind sie sogar generell keine *Vektorkoordinaten*.

Dies ist die Motivation dafür, die Werte X_{ij} eines allgemeinen Tensors, insbesondere bei der Verwendung krummliniger Koordinaten, weder als *Komponenten* noch als *Koordinaten* des Tensors zu bezeichnen, sondern eine neutralere und nicht irreführende Bezeichnung zu wählen. Hierfür bietet sich *Koeffizienten* an, denn skalare Vorfaktoren sind die X_{ij} ohne Zweifel.

Aus den gleichen Gründen wird auch darauf verzichtet, den Ortsvektor mit \underline{x} zu bezeichnen. Dies ist zwar bei ausschließlicher Verwendung kartesischer Koordinaten sehr naheliegend, bei krummlinigen Koordinaten würde dann aber wiederum die Bezeichnung x_i suggerieren, daß es sich dabei um Ortskoordinaten handelt, was nicht zutrifft.

2.1.2 Symbolische Darstellung und Koeffizientendarstellungen

Neben der symbolischen Darstellung eines Tensors in der Form $\underline{\underline{X}}$, die auch als koeffizientenunabhängige Darstellung bezeichnet wird, existiert eine Vielzahl sogenannter Koeffizientendarstellungen. Die einfachsten Varianten sind kartesische Darstellungen.

$$\underline{\underline{X}} = X_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \quad \text{mit:} \quad X_{ab} = \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{e}_b \quad (2.9)$$

Für die Dyaden $\underline{e}_a \circ \underline{e}_b$ kann eine weitere Abkürzung eingeführt werden, die eine besondere Rolle bei der Behandlung von symmetrischen Tensoren spielen wird.

$$\underline{j}_{ab} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \quad \Rightarrow \quad \underline{X} = X_{ab} \underline{j}_{ab} \quad (2.10)$$

Die \underline{j}_{ab} weisen (jeder für sich) die für Tensoren typischen Transformationseigenschaften auf, z.B.:

$$\underline{j}_{xx} = \underline{e}_x \circ \underline{e}_x = (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_A) (\underline{e}_x \cdot \underline{e}_B) \underline{e}_A \circ \underline{e}_B \quad .$$

Für die Tensoren \underline{j}_{ab} bietet sich die Bezeichnung Basisdyaden an. Um mit Hilfe dieser Basisdyaden die Koeffizienten X_{ab} aus \underline{X} zu extrahieren, bedarf es eines doppelten Punktprodukts. In der Literatur werden hierfür zwei Varianten verwendet, die beide auf das einfache Punktprodukt zurückführbar sind. Für Tensoren mindestens 2. Stufe gilt:

$$\begin{aligned} \underline{x} : \underline{y} &= \left(\underline{x} \cdot \underline{e}_a \right) \cdot \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \cdot \left(\underline{e}_b \cdot \underline{y} \right) \\ \underline{x} \cdot \underline{y} &= \left(\underline{x} \cdot \underline{e}_a \right) \cdot \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \cdot \left(\underline{e}_a \cdot \underline{y} \right) = \left(\underline{x} \cdot \underline{e}_a \right) \cdot \left(\underline{e}_a \cdot \underline{y} \right) \quad . \end{aligned}$$

Allein die zweite Form läßt sich aus einem zunächst ermittelten einfachen Punktprodukt berechnen. Dies wird an einer Umformulierung des einfachen Punktprodukts deutlich.

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \left(\underline{x} \cdot \underline{e}_a \right) \circ \left(\underline{e}_a \cdot \underline{y} \right)$$

Für Tensoren zweiter Stufe ergeben beide doppelten Punktprodukte skalare Ergebnisse.

$$\underline{X} : \underline{Y} = X_{ab} Y_{ab} \quad ; \quad \underline{X} \cdot \underline{Y} = X_{ab} Y_{ba}$$

Ist einer der beiden Tensoren \underline{X} , \underline{Y} symmetrisch, so stimmt das Produkt überein.

$$\overset{S}{\underline{X}} : \underline{Y} = \overset{S}{\underline{X}} \cdot \underline{Y}$$

Das Produkt '·' hat den Vorteil, daß bei einem Produkt von mehr als zwei Tensoren ohne Änderung des Ergebnisses zyklisch vertauscht werden darf und außerdem das Doppelpunktprodukt verschoben werden darf:

$$\left(\underline{A} \cdot \underline{B} \right) \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{D} \right) = \underline{A} \cdot \left(\underline{B} \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} \right) = \underline{B} \cdot \left(\underline{C} \cdot \underline{D} \cdot \underline{A} \right) = \left(\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} \right) \cdot \underline{E} \quad .$$

Bei dem Produkt ':' muß hingegen partiell transponiert werden.

$$\begin{aligned} \left(\underline{A} \cdot \underline{B} \right) : \left(\underline{C} \cdot \underline{D} \right) &= \underline{A} : \left(\underline{C} \cdot \underline{D} \cdot \underline{B}^T \right) = \underline{B} : \left(\underline{A}^T \cdot \underline{C} \cdot \underline{D} \right) \\ &= \left(\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{D}^T \cdot \underline{C}^T \right) : \underline{E} \end{aligned}$$

Deswegen wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich das Produkt '·' verwendet.

In Anbetracht dieser Kontroverse und aufgrund der Wichtigkeit der Frage für entscheidende Abschnitte dieser Arbeit erscheint eine gründliche Untersuchung dieser Frage und die Einnahme einer eindeutigen Position notwendig.

Im Bereich skalarer physikalischer Größen ist für eine Verständigung zweier Beobachter lediglich die Kenntnis des vom jeweils anderen Beobachter verwendeten Maßstabs, bzw. Meßinstruments notwendig. Im Hinblick auf die nachfolgenden Überlegungen ist von Interesse, daß zwei Beobachter ihre Messungen bei jeweils unbekanntem Maßstab des anderen nur dann vergleichen können, wenn sie beide auf eine gemeinsam verfügbare Vergleichsgröße Zugriff haben. Ein weiterer Aspekt im Hinblick auf die folgenden Überlegungen ist die Frage, ob zwei Größen gleich sein können, wenn sie an unterschiedlichen Orten oder zu unterschiedlichen Zeitpunkten auftreten. Üblicherweise werden diesbezüglich bei skalaren Größen keine Einschränkung gemacht. Bei Vektoren hingegen wird teilweise der Angriffspunkt als Teil der Vektordefinition angesehen, so daß zwei Vektoren mit unterschiedlichen Angriffspunkten grundsätzlich nicht identisch sein können.

Im Rahmen dieser Arbeit wird hingegen – so wie bei Skalaren auch – bei Vektoren der Angriffspunkt nicht als Teil der Definition angesehen. Ein Vektor ist somit lediglich eine (einfach) gerichtete Größe, wie beispielsweise eine Kraft oder eine Geschwindigkeit. Der Betrag eines Vektors ist lediglich eine skalare Größe und es gilt das oben Gesagte bezüglich gleicher skalarer Größen. Für die Beurteilung der Gleichheit der beiden Richtungen sind – ähnlich wie beim skalaren Maßstab – wiederum entweder der direkte Vergleich oder geeignete vektorielle Vergleichsgrößen erforderlich.

Registrieren also zwei für einander blinde Beobachter jeweils einen Vektor, so können sie die Gleichheit der beiden Vektoren nur dann beurteilen, wenn sie beide etwas beobachten können, daß zur Vereinbarung eines \underline{g}_i -Basissystems geeignet ist. Sind die Erlebniswelten der beiden Beobachter hingegen völlig entkoppelt, und es steht keine gemeinsame \underline{g}_i -Basis zur Verfügung, so können lediglich Koeffizienten verglichen werden, und dementsprechend sollten die jeweiligen Beobachtungen beobachterspezifisch markiert werden (z.B. $\underline{\hat{w}}^\alpha, \underline{\hat{w}}^A$). Ein Vergleich kann dann höchstens partiell, in bezug auf die Länge erfolgen.

Selbst wenn beiden Beobachtern ein gemeinsames \underline{g}_i -Basissystem zugänglich ist, entstehen weitere Probleme bei Beobachtungen zu unterschiedlichen Zeitpunkten, da beide Beobachter und auch die gemeinsam beobachtete \underline{g}_i -Basis unterschiedlich rotieren können. Die Gleichheit zweier zu unterschiedlichen Zeitpunkten existierenden Vektoren ist somit nur relativ zu einem Inertialsystem definierbar. Ist dem Beobachter ein solches System nicht zugänglich, ist auf einen Vergleich vektorieller Größen zu unterschiedlichen Zeitpunkten zu verzichten.

Diese Art der Definition von Gleichheit berücksichtigt nicht die Entwicklungsgeschichte der verglichenen Vektoren. Die Gleichheit zweier Vektoren setzt also beispielsweise nicht voraus, daß sich diese beiden Vektoren im Zuge einer Deformation in gleichartiger Weise verändern. Wäre z.B. \underline{v} ein Vektor normal zur Oberfläche eines Körpers und \underline{w} hingegen ein Vektor tangential zu einem anderen Gebiet der Oberfläche, so würden die beiden Vektoren dennoch als gleich betrachtet, sofern sie zum betrachteten Zeitpunkt den gleichen Betrag und die gleiche Richtung aufweisen.

$$\underline{e}_a \cdot \underline{v}(t) = \underline{e}_a \cdot \underline{w}(t) \quad \forall \underline{e}_a \quad \Rightarrow \quad \underline{v}(t) = \underline{w}(t)$$

Diese Vereinbarung steht im Kontrast zu anderen Vereinbarungen, bei denen solche Vektoren unterschiedlichen mathematischen Räumen (Tangential- und Kotangentialraum) zugeordnet werden. Hingegen werden im Rahmen dieser Arbeit – im Hinblick auf die Anforderungen einer ingenieurtechnischen Simulation von Bauteileigenschaften – sämtliche physikalischen Vektoren als Elemente des Euklidischen Raums der erlebten Realität aufgefaßt. Dieser Erfahrungsraum weicht prinzipiell von der Realität des physikalischen, relativistisch gekrümmten Raumes ab. In den typischen Anwendungsbereichen der Kontinuumsmechanik sind diese Abweichungen aber extrem gering und deshalb vernachlässigbar. Somit sind Vektoren bezüglich der Raumeigenschaften uneingeschränkt vergleichbar.

Bei Tensoren ist die Situation ähnlich. Auch hier wird die Frage nach Gleichheit der vollständigen Größen nur dann als sinnvoll erachtet, wenn die beiden Größen gleichzeitig registriert werden und entweder ein direkter Vergleich oder ein Zugriff auf eine gemeinsame g_i -Basis möglich ist. Auch die physikalischen Tensoren wie Spannungs- und Verzerrungstensoren werden als Beschreibungen realer Größen im Euklidischen Raum angesehen. Dementsprechend wird auch hier die Zuordnung zu unterschiedlichen mathematischen Räumen im Rahmen einer mathematischen Interpretation nicht als Kriterium für die Gleichheit anerkannt. Dieser Diskussionspunkt ist eng verknüpft mit dem Gedanken der *natürlichen Basis*. Dabei wird bei jedem Tensor jeweils einer Koeffizientendarstellung (vergl. Gl. 2.12) eine größere physikalische Bewandnis zugesprochen als allen anderen. Häufig werden in diesem Zusammenhang mehrere Metriktensoren unterschieden (z.B. Nasdala 2000, Barthold 2002, Rieger 2004). In der vorliegenden Arbeit wird hingegen nur ein Metriktensor verwendet, nämlich wiederum derjenige des Euklidischen Raums, in dem sich praktisch alle ingenieurtechnischen Anwendungen der Kontinuumsmechanik abspielen.

Mit der Beschränkung auf die Euklidische Metrik sind auch die Begriffe Eigenwert und Eigenrichtung eindeutig. Die Gleichheit zweier Tensoren läßt sich damit auch auf die Gleichheit der skalaren Eigenwerte und der vektoriellen Eigenrichtungen zurückführen. Ein Tensor ist somit durch seine Eigenwerte und Eigenvektoren vollständig wiedergegeben. Dementsprechend werden im Rahmen dieser Arbeit Begriffe wie kartesischer Tensor, ko- oder kontravarianter Tensor (z.B. bei Doll 1998, Nasdala 2000) nicht verwendet.

2.2 Koeffizientenfreie Tensordarstellungen

2.2.1 Motivation

Viele physikalische Zusammenhänge führen auf spezielle Zerlegungen der beteiligten Tensoren in einzelne Dyaden, die sich von den gewöhnlichen Koeffizientendarstellungen dadurch unterscheiden, daß explizite Angaben skalarer Koeffizienten gänzlich fehlen.

Gut bekannt sind derartige Darstellungen beispielsweise beim Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$.

$$\underline{\underline{F}} = (\tilde{\nabla} \circ \underline{r})^T = \frac{\partial x_a}{\partial \tilde{x}_b} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \quad (2.14)$$

In den Basisvektoren g_i und \tilde{g}_i , die zu unterschiedlichen Konfigurationen gehören, aber dem gleichen System von Materialkoordinaten ξ^i zugeordnet sind, entsteht eine koeffizientenfreie

Darstellung von $\underline{\underline{F}}$.

$$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} \quad ; \quad \underline{\tilde{g}}_i = \frac{\partial \underline{\tilde{r}}}{\partial \xi^i} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} = \underline{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i \quad (2.15)$$

Diese Darstellung erlaubt die anschauliche Interpretation des Deformationsgradienten als das verbindende Element zwischen Referenz- und aktueller Konfiguration oder auch als ein durch die Deformation entarteter Einheitstensor.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{g}_i \circ \underline{g}^i = \underline{\tilde{g}}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i$$

Gleichzeitig wird hieran unmittelbar die Wirkungsweise des Deformationsgradienten auf materielle Linienelemente deutlich.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\tilde{g}}_j = \underline{g}_j \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot d\xi^j \underline{\tilde{g}}_j = d\xi^j \underline{g}_j \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\tilde{s}} = d\underline{s}$$

Viele Umformungen und Beweisführungen sind in der koeffizientenfreien Darstellung besonders einfach. Für zwei aufeinanderfolgende Deformationen mit der Zwischenkonfiguration \hat{K} und den zugehörigen Basisvektoren \hat{g}_i ergibt sich beispielsweise unmittelbar:

$$\underline{\underline{F}}^1 = \hat{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i \quad ; \quad \underline{\underline{F}}^2 = \underline{g}_i \circ \hat{g}^i \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} = \underline{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1 \quad . \quad (2.16)$$

Auch bei Spannungen sind derartige Darstellungen sehr anschaulich interpretierbar. Bei der Betrachtung eines infinitesimalen Materialausschnitts können die Verteilungen der Schnittkräfte auf ebenen Teilerflächen als konstant angesehen, bzw. durch Mittelwerte ersetzt werden, und die mit der dreifachen Potenz der Längenskala abnehmenden Volumen- und Trägheitskräfte können vernachlässigt werden. Für den in Abbildung 2.7 dargestellten Tetraeder ist somit zu fordern, daß die Summe der Oberflächenkräfte verschwindet.

$$\underline{F}_C + \underline{F}_x + \underline{F}_y + \underline{F}_z = \underline{0}$$

Diese Kräfte werden auf die jeweiligen Flächeninhalte bezogen. Es entstehen die Spannungsvektoren $\underline{\sigma}_C$ und $\underline{\sigma}_a$.

$$\underline{\sigma}_C = \frac{\underline{F}_C}{dA_C} \quad \text{und} \quad \underline{\sigma}_a = \frac{\underline{F}_a}{dA_a} \quad , \quad a = x, y, z \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma}_C = -\frac{dA_a}{dA_C} \underline{\sigma}_a$$

Die Flächenverhältnisse $\frac{dA_a}{dA_C}$ entsprechen gerade den Beträgen der in allen drei Fällen negativen Produkte $\underline{e}_C \cdot \underline{e}_a$ der zugehörigen Flächennormalen (s. Abbildung 2.8). Daraus resultieren koeffizientenfreie Darstellungen des Cauchy-Spannungstensors in Normaleins- und Spannungsvektoren, die gleichzeitig die Unabhängigkeit vom gewählten Koordinatensystem belegen.

$$\underline{\sigma}_C = (\underline{e}_C \cdot \underline{e}_a) \underline{\sigma}_a \quad \Rightarrow \quad \underline{e}_C \circ \underline{\sigma}_C = \underline{e}_a \circ \underline{\sigma}_a = \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.17)$$

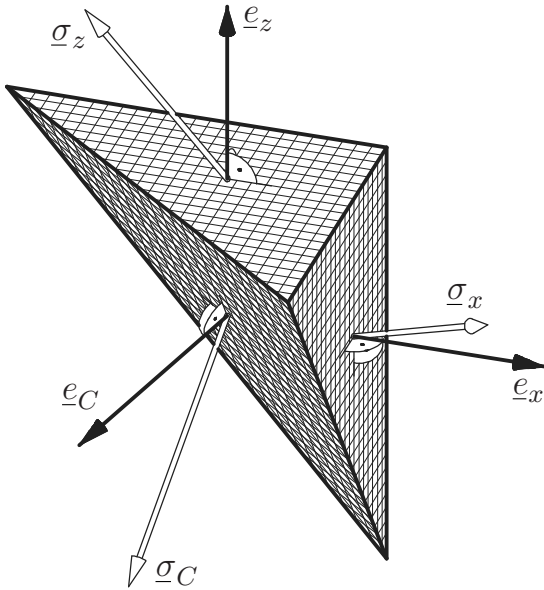


Abbildung 2.7: Spannungen an einem infinitesimalen Tetraeder mit drei zueinander senkrechten Begrenzungsflächen.

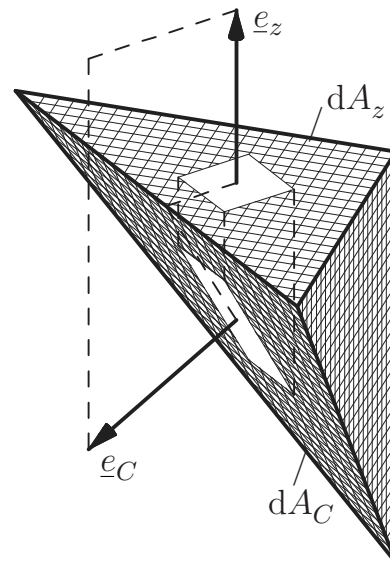


Abbildung 2.8: Die Flächenverhältnisse hängen mit Skalarprodukten der Normalenvektoren zusammen: $-\underline{e}_C \cdot \underline{e}_z = \frac{dA_z}{dA_C}$.

2.2.2 Mathematische Eigenschaften

Die gewöhnliche Darstellung eines Tensors 2. Stufe stellt eine Summe von neun Dyaden dar.

$$\underline{\underline{X}} = X_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b$$

Eine Reduktion auf eine einzelne Dyade ist nicht immer möglich. Dies wird daran deutlich, daß bei einer einzelnen Dyade immer ein Vektor existiert, der im Produkt mit der Dyade einen Nullvektor ergibt.

$$(\underline{v} \circ \underline{w}) \cdot (\underline{v} \times \underline{w}) = \underline{0} \quad (2.18)$$

Dies ist aber durchaus nicht bei allen Tensoren so. Bei einem derartigen Spannungstensor existierte mindestens eine Schnittrichtung, in der keinerlei Kräfte auftreten. Dies trifft aber nur in speziellen Fällen zu. Somit ist ein Tensor im allgemeinen mehr als eine einzelne Dyade, wenn auch einzelne Dyaden immer Tensoren sind.

Allerdings ist jeder Tensor 2. Stufe auf eine Summe von nur drei Dyaden reduzierbar, denn die neun Tensorkoeffizienten lassen sich in jedem Fall als jeweils drei Koeffizienten dreier Vektoren interpretieren.

$$\underline{\underline{X}} = X_{ij} \underline{g}^i \circ \underline{g}^j = (X_{ij} \underline{g}^i) \circ \underline{g}^j = \underline{g}^i \circ (X_{ij} \underline{g}^j) \quad (2.19)$$

Diese Schlußfolgerung gelingt auch ohne Koeffizientendarstellungen mit Hilfe der Multiplikation mit dem Einheitstensor.

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}} = (\underline{g}^i \circ \underline{g}_i) \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{g}^i \circ (\underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}}) \quad (2.20)$$

Es existieren vier derartige Formen.

$$\underline{\underline{X}} = \underline{g}^i \circ (\underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}}) = \underline{g}_i \circ (\underline{g}^i \cdot \underline{\underline{X}}) = (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}^i) \circ \underline{g}_i = (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_i) \circ \underline{g}^i \quad (2.21)$$

Diese Ausdrücke weisen zunächst keinerlei Koeffizienten auf (bzw. ausschließlich Koeffizienten mit dem Wert Eins). Deshalb wird hier für diese Darstellungen die Bezeichnung *koeffizientenfrei* eingeführt.

Gemäß der Interpretation der Tensorkoeffizienten X_{ij} als Koeffizienten dreier Vektoren ergibt sich automatisch als Bezeichnung für diese Vektoren: \underline{X}_i .

$$\underline{X}_i = X_{ij} \underline{g}^j \quad \text{analog:} \quad \underline{X}^i = X^{ij} \underline{g}_j$$

Dementsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \underline{X}_i = \underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}} &\Rightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{g}^i \circ \underline{X}_i \\ \underline{X}^i = \underline{g}^i \cdot \underline{\underline{X}} &\Rightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{g}_i \circ \underline{X}^i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Für das Produkt $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_i$ ist die Bezeichnung \underline{X}_i hingegen nicht geeignet, denn gemäß der vereinbarten Darstellungsweise $\underline{w} = w_j \underline{g}^j$ entsteht auch: $\underline{Y}_i = Y_{ij} \underline{g}^j$, also:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_i &= \underline{Y}_i = Y_{ij} \underline{g}^j \\ &= X_{jk} \underline{g}^j \circ \underline{g}^k \cdot \underline{g}_i = X_{ji} \underline{g}^j \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_{ji} = Y_{ij} \neq X_{ij} \quad .$$

Stattdessen gehören die beiden verbleibenden Darstellungen aus Gleichung 2.21 zum transponierten Tensor.

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}}^T \Rightarrow \begin{cases} \underline{Y}_i = \underline{g}_i \cdot \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_i \Rightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{Y}_i \circ \underline{g}^i \\ \underline{Y}^i = \underline{g}^i \cdot \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}^i \Rightarrow \underline{\underline{X}} = \underline{Y}^i \circ \underline{g}_i \end{cases} \quad (2.23)$$

Anhand der Vektoren \underline{X}_i lassen sich alle Vektoren \underline{X}_K des gleichen Tensors bezüglich alternativer Basisvektorguppen \underline{g}_K berechnen.

$$\underline{X}_K = \underline{g}_K \cdot \underline{\underline{X}} = (\underline{g}_K \cdot \underline{g}^i) \underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}} = (\underline{g}_K \cdot \underline{g}^i) \underline{X}_i \quad (2.24)$$

Diese Gleichungen ähneln zwar formal den Transformationsgleichungen für Vektorkoeffizienten ($w_K = (\underline{g}_K \cdot \underline{g}^i) w_i$), hier werden aber nicht Skalare, sondern ganze Vektoren miteinander in Beziehung gesetzt.

Bei kartesischen Koordinaten schließlich fallen mehrere koeffizientenfreie Darstellungsformen zusammen.

$$\underline{\underline{X}} = \underline{e}_a \circ \underline{X}_a \quad \text{mit:} \quad \underline{X}_a = \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{e}_a$$

Koeffizientenfreie Darstellungen erweisen sich häufig gerade dann als besonders nützlich, wenn die beiden Vektorgruppen, z.B. \underline{g}_i und \underline{X}^i (Gl. 2.22), in ihrer Bedeutung nahezu oder auch vollständig austauschbar werden. Beispielsweise sind bei einem Tensor $\underline{\underline{X}}$ mit linear unabhängigen linksseitigen Eigenvektoren (diagonalähnlicher Tensor, s. Abschnitt 2.2.5) auch

stets die rechtsseitigen Eigenvektoren linear unabhängig. Solche Gruppen von Eigenvektoren kommen somit prinzipiell als zwei unterschiedliche Basen \underline{g}_k bzw. \underline{g}^L in Frage, mit denen unter anderem koeffizientenfreie Darstellungen erzeugt werden können. Wie in Abschnitt 2.2.5 gezeigt wird, sind die Vektoren \underline{X}_k bzw. \underline{X}^L , die dabei entstehen, wiederum Eigenvektoren des Tensors \underline{X} . Damit entstände eine Darstellung der Form:

$$\underline{X} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \quad \text{mit:} \quad \underline{g}^K = \underline{g}^k \cdot \underline{X} \quad \text{bzw.:} \quad \underline{g}_k = \underline{X} \cdot \underline{g}_K \quad . \quad (2.25)$$

In dieser Darstellung kommt treffend die ähnliche Bedeutung der Vektoren \underline{g}_k und \underline{g}^K , im gewählten Beispiel der links- und rechtsseitigen Eigenvektoren von \underline{X} zum Ausdruck. Stattdessen deklarieren Formen wie in Gleichung 2.22, bei denen die Vektorgruppen unterschiedlich benannt werden, stets eine Vektorgruppe als die von der Bedeutung des Tensors losgelöste Basis und die andere Vektorgruppe als die den Tensor charakterisierende Gruppe.

Um die Vorteile beider Beschreibungsformen ausschöpfen zu können, werden neben den koeffizientenfreien Darstellungen gemäß Gleichung 2.22 auch Darstellungen in der Form der Gleichung 2.25 zugelassen. Dies wird sogar noch dahingehend erweitert, daß die Vektoren nur einer der beiden Vektorgruppen linear unabhängig sein müssen. Dementsprechend ist zu beachten, daß in solchen Fällen entweder die Vektoren \underline{g}_K oder aber die \underline{g}^k gemäß Gleichung 2.25 unendliche Längen annehmen, also nicht mehr gebildet werden können. Dementsprechend werden im Zusammenhang mit koeffizientenfreien Darstellungen nur dann Umrechnungen zwischen dualen Basen durchgeführt, wenn zuvor sichergestellt wurde, daß die duale Basis auch tatsächlich existiert.

Dies alles verursacht keinerlei Einschränkungen bezüglich der Transformationseigenschaften der dargestellten Tensoren. Da eine koeffizientenfreie Darstellung den Tensor ausschließlich durch Vektoren beschreibt, die jeweils die typischen Transformationseigenschaften aufweisen, überträgt sich dies unmittelbar auf den Tensor.

$$\underline{X} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K = \underbrace{(\underline{g}_k \cdot \underline{e}_a) (\underline{g}^K \cdot \underline{e}_b)}_{X_{ab}} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b$$

Desweiteren ist zu beachten, daß zwar die Wahl der einen Gruppe linear unabhängiger Vektoren prinzipiell frei ist, daß sich aber die zweite Gruppe gemäß Gleichung 2.22 aus der ersten Gruppe und dem darzustellenden Tensor berechnet. Dementsprechend sind beispielsweise sowohl $\underline{g}^L \circ \underline{g}_l$ als auch $\underline{g}_K \circ \underline{g}^k$ koeffizientenfreie Darstellungen von Tensoren, sofern die \underline{g}_l oder die \underline{g}_K oder sogar beide linear unabhängig sind, es sind aber im allgemeinen keinesfalls Darstellungen desselben Tensors.

In diesem Zusammenhang ist auch zu beachten, daß die \underline{g}_K keineswegs den \underline{X}_k entsprechen, denn:

$$\begin{aligned} \underline{g}_K \cdot \underline{g}^L &= \delta_K^L \quad ; \quad \underline{g}_K = \underline{X}^{-1} \cdot \underline{g}_k \quad \text{aber:} \\ \underline{X}_i \cdot \underline{X}^j &\neq \delta_i^j \quad ; \quad \underline{X}_i = \underline{g}_i \cdot \underline{X} \quad . \end{aligned}$$

In einigen Fällen spiegeln die koeffizientenfreien Darstellungen unmittelbar den physikalischen Sinngehalt des dargestellten Tensors wider. Handelt es sich bei dem Tensor beispielsweise um einen Deformationsgradienten, so lassen sich die verwendeten Vektoren gemäß

Gleichung 2.15 mit materialfesten Linienelementen in unterschiedlichen Stadien des Verformungsvorganges in Verbindung bringen. Bei allen physikalisch sinnvollen Deformationen überträgt sich außerdem die lineare Unabhängigkeit stets auf beide Vektorbasen. In anderen Fällen hängt es von der Wahl der Gruppe der linear unabhängigen Vektoren ab, inwieweit eine koeffizientenfreie Darstellung den physikalischen Sinngehalt des dargestellten Tensors wiedergibt.

In der koeffizientenfreien Darstellungsweise lassen sich viele Operationen besonders kompakt darstellen (zu $\underline{\underline{\epsilon}}$ s. Gl. 2.36).

$$\underline{\underline{X}} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{X}}^T = \underline{g}^K \circ \underline{g}_k & \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{g}_k \cdot \underline{g}^K \\ \underline{\underline{X}}^{-1} = \underline{g}_K \circ \underline{g}^k & \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{g}^K \times \underline{g}_k \\ \underline{\underline{X}}^{T^{-1}} = \underline{g}^k \circ \underline{g}_K = \underline{\underline{X}}^{-1T} & \underline{g}^i \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{g}_j = \delta^i_j \end{cases} \quad (2.26)$$

Auch das Doppelpunktprodukt mit einem allgemeinen Tensor $\underline{\underline{Y}}$ zweiter Stufe nimmt eine interessante Form an.

$$\underline{\underline{X}} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \Rightarrow \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}} = (\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{g}_k) \cdot \underline{g}^K = Y^K_k \quad (2.27)$$

Die verschiedenen Sonderformen von Tensoren, wie beispielsweise symmetrische oder deviatorische Tensoren, haben auch bezüglich der koeffizientenfreien Darstellungen charakteristische Eigenschaften.

Bezeichnung	Charakteristika		
	Symbolische Darstellung	Koeffizientenschreibweise	Koeffizientenfrei: $\underline{\underline{X}} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K$
Symmetrischer Tensor	$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^T$	$X_{ij} = X_{ji}$	$\underline{g}_k \cdot \underline{g}_j = \underline{g}_j \cdot \underline{g}_k$ $\underline{g}_k \times \underline{g}^K = \underline{0}$
Antisymmetrischer Tensor	$\underline{\underline{X}} = -\underline{\underline{X}}^T$	$X_{ij} = -X_{ji}$	$\underline{g}_k \cdot \underline{g}_j = -\underline{g}_j \cdot \underline{g}_k$
Deviatorischer Tensor	$\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{E}} = 0$	$X_i^i = 0$	$\underline{g}_k \cdot \underline{g}^K = 0$
Hydrostatischer Tensor	$\underline{\underline{X}} = f \underline{\underline{E}}$	$[X_i^j] = f [\delta^j_i]$	$\underline{g}_k = f \underline{g}_K$
Orthogonaler Tensor	$\underline{\underline{X}}^T = \underline{\underline{X}}^{-1}$	$[X_j^i]^T = [X_i^j]^{-1}$	$\underline{g}_k \cdot \underline{g}_j = \underline{g}_K \cdot \underline{g}_J$

2.2.3 Invarianten

Die Hauptinvarianten, die Vorfaktoren innerhalb der charakteristischen Gleichung, entsprechen bei einer gemischtindizierten Koeffizientendarstellung der Spur, der Hauptunterdeterminante und der Determinante der Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} I_1(\underline{\underline{X}}) &= X_1^1 + X_2^2 + X_3^3 \\ I_2(\underline{\underline{X}}) &= X_1^1 X_2^2 - X_1^2 X_2^1 + X_2^2 X_3^3 - X_2^3 X_3^2 + X_3^3 X_1^1 - X_3^1 X_1^3 \\ I_3(\underline{\underline{X}}) &= \det [X_i^j] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ausgedrückt durch die Eigenwerte des Tensors gilt weiterhin:

$$\begin{aligned}
I_1(\underline{X}) &= X_I + X_{II} + X_{III} &= \underline{X} \cdot \underline{E} \\
I_2(\underline{X}) &= X_I X_{II} + X_{II} X_{III} + X_{III} X_I = &\frac{I_1(\underline{X})^2 - I_1(\underline{X}^2)}{2} \\
I_3(\underline{X}) &= X_I X_{II} X_{III} &= I_1(\underline{X}) I_2(\underline{X}) - \frac{I_1(\underline{X})^3 - I_1(\underline{X}^3)}{3} .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Zur Ermittlung der Berechnungsvorschriften für die Hauptinvarianten anhand von koeffizientenfreien Tensordarstellungen werden diese in gemischtindizierte Koeffizientendarstellungen überführt (bezüglich der linearen Unabhängigkeit der beiden Vektorgruppen siehe die Anmerkungen zu Gleichung 2.25).

$$\begin{aligned}
\underline{g}^K &= \underline{g}^k \cdot \underline{X} \quad \Rightarrow \quad \underline{X} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K = \left(\underline{g}^K \cdot \underline{g}_j \right) \underline{g}_k \circ \underline{g}^j \\
\Rightarrow \quad \left[X^k_j \right] &= \begin{bmatrix} \underline{g}^I \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}^I \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}^I \cdot \underline{g}_3 \\ \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_3 \\ \underline{g}^{III} \cdot \underline{g}_1 & \underline{g}^{III} \cdot \underline{g}_2 & \underline{g}^{III} \cdot \underline{g}_3 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Die Determinante einer solchen Matrix entspricht laut Bronstein et al. (1995) dem Produkt der Spatprodukte der beteiligten Vektorgruppen. Für die dritte Hauptinvariante ergibt sich somit:

$$I_3(\underline{X}) = \det \left[X^k_j \right] = \left\{ \left(\underline{g}^I \times \underline{g}^{II} \right) \cdot \underline{g}^{III} \right\} \left\{ \left(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2 \right) \cdot \underline{g}_3 \right\} . \tag{2.31}$$

Daran wird im Zusammenhang mit Gleichung 2.15 erkennbar, daß im Fall des Deformationsgradienten die dritte Hauptinvariante dem Dichteverhältnis zwischen Referenz- und aktueller Konfiguration entspricht (mit: $I_3(\underline{E}) = 1 = I_3(\underline{g}_K \circ \underline{g}^K)$).

Für I_2 ergibt sich ausgehend von Gleichung 2.28 unter Ausnutzung der Lagrangeschen Identität (vergl. Gl. 2.41):

$$\begin{aligned}
I_2(\underline{X}) &= \left(\underline{g}^I \cdot \underline{g}_1 \right) \left(\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_2 \right) - \left(\underline{g}^I \cdot \underline{g}_2 \right) \left(\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_1 \right) + \dots \\
&= \left(\underline{g}^I \times \underline{g}^{II} \right) \cdot \left(\underline{g}_1 \times \underline{g}_2 \right) + \left(\underline{g}^{II} \times \underline{g}^{III} \right) \cdot \left(\underline{g}_2 \times \underline{g}_3 \right) \\
&\quad + \left(\underline{g}^{III} \times \underline{g}^I \right) \cdot \left(\underline{g}_3 \times \underline{g}_1 \right) .
\end{aligned}$$

I_1 ist wieder die Spur.

$$I_1(\underline{X}) = \underline{g}^I \cdot \underline{g}_1 + \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_2 + \underline{g}^{III} \cdot \underline{g}_3$$

Stattdessen kann auch geschrieben werden:

$$\underline{X} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} I_1 = \underline{g}^K \cdot \underline{g}_k \\ I_2 = \frac{1}{2} \left(\underline{g}^J \times \underline{g}^K \right) \cdot \left(\underline{g}_j \times \underline{g}_k \right) \\ I_3 = \frac{1}{6} \left\{ \left(\underline{g}^J \times \underline{g}^K \right) \cdot \underline{g}^L \right\} \left\{ \left(\underline{g}_j \times \underline{g}_k \right) \cdot \underline{g}_l \right\} . \end{cases}$$

2.2.4 Koeffizientenfreie Darstellungen isotroper Tensoren

Isotrope Tensoren können anhand koeffizientenfreier Darstellungen besonders leicht identifiziert werden. Um der Forderung nach Isotropie zu genügen, müssen diese Tensoren vollständig durch ein einzelnes Basissystem darstellbar sein. Im einfachsten Fall sind dies orthonormierte Basen \underline{e}_a . Isotrope Tensoren 2. Stufe sind der Einheitstensor $\underline{\underline{E}}$ und seine Vielfachen.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_a \quad (2.32)$$

Bei den Tensoren 3. Stufe gibt es den Ricci-Permutationstensor.

$$\underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{e}_a \circ (\underline{e}_b \times \underline{e}_a) \circ \underline{e}_b$$

Werden die beiden enthaltenen Summen zum Beispiel für ein Rechtshandsystem ausgeschrieben, so wird deutlich, daß es keine weiteren unabhängigen isotropen Tensoren 3. Stufe gibt.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} = & \underline{e}_x \circ \underline{e}_y \circ \underline{e}_z + \underline{e}_y \circ \underline{e}_z \circ \underline{e}_x + \underline{e}_z \circ \underline{e}_x \circ \underline{e}_y \\ & - \underline{e}_z \circ \underline{e}_y \circ \underline{e}_x - \underline{e}_x \circ \underline{e}_z \circ \underline{e}_y - \underline{e}_y \circ \underline{e}_x \circ \underline{e}_z \end{aligned}$$

Hingegen gibt es offensichtlich drei voneinander unabhängige Möglichkeiten, zwei Basenpaarungen miteinander zu Tensoren 4. Stufe zu verknüpfen.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}^1 &= \underline{e}_a \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b = \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}^2 &= \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_b = \underline{\underline{j}}_{ab} \circ \underline{\underline{j}}_{ab} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}^3 &= \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a = \underline{\underline{j}}_{ab} \circ \left(\underline{\underline{j}}_{ab} \right)^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

Der Übergang auf schiefwinklige Basen gestaltet sich bei solchen koeffizientenfreien Darstellungen wegen der innerhalb eines Terms möglichen Umformungen ('...' kennzeichnen beliebige, bei den angegebenen Umformungen unverändert bleibende Produktelemente):

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \underline{e}_a & \dots & \underline{e}_a & \dots & & \\ \dots & (\underline{e}_a \cdot \underline{g}^i) \underline{g}_i & \dots & \underline{e}_a & \dots & & \\ \dots & \underline{g}_i & \dots & \underline{e}_a \cdot \underline{g}^i \underline{e}_a & \dots & & \\ \dots & \underline{g}_i & \dots & \underline{g}^i & \dots & & \end{array} \quad (2.34)$$

besonders einfach.

Damit ergibt sich für den Einheitstensor die Form, die bereits in Gleichung 2.19 bei der Einführung der koeffizientenfreien Darstellungen verwendet wurde.

$$\underline{\underline{E}} = \underline{g}_i \circ \underline{g}^i = \underline{g}^i \circ \underline{g}_i$$

Diese koeffizientenfreien Formen eignen sich sehr gut für kompakte Herleitungen, z.B. (‘...’ kennzeichnen beliebige, bei den angegebenen Umformungen unverändert bleibende Produkt-elemente):

$$\begin{aligned}
\dots (\underline{X} \cdot \underline{g}_i) \dots (\underline{g}^i \cdot \underline{Y}) \dots &= \dots (\underline{g}_k \circ \underline{g}^k \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}_i) \dots (\underline{g}^i \cdot \underline{Y} \cdot \underline{g}^J \circ \underline{g}_J) \dots \\
&= \dots (\underline{X} \cdot \underline{g}_i \circ \underline{g}^i \cdot \underline{Y} \cdot \underline{g}^J) \dots (\underline{g}_J) \dots \\
&= \dots (\underline{X} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{g}^J) \dots (\underline{g}_J) \dots \\
&= \dots (\underline{g}_k) \dots (\underline{g}^k \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}_i \circ \underline{g}^i \cdot \underline{Y}) \dots \\
&= \dots (\underline{g}_k) \dots (\underline{g}^k \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}) \dots
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Für den Ricci-Permutationstensor ergibt sich beispielsweise mit schiefwinkligen Basen:

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{g}_i \circ (\underline{g}^k \times \underline{g}^i) \circ \underline{g}_k = \left\{ (\underline{g}^k \times \underline{g}^i) \cdot \underline{g}^j \right\} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \circ \underline{g}_k \quad . \tag{2.36}$$

An der koeffizientenfreien Darstellung ist die Bedeutung dieses Tensors für das Kreuzprodukt von Vektoren unmittelbar zu erkennen.

$$\underline{v} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{w} = \underline{v} \cdot \underline{g}_i \circ (\underline{g}^k \times \underline{g}^i) \circ \underline{g}_k \cdot \underline{w} = (\underline{g}_k \cdot \underline{w}) \underline{g}^k \times \underline{g}^i (\underline{v} \cdot \underline{g}_i) = \underline{w} \times \underline{v} \tag{2.37}$$

Außerdem zeigt diese Form, daß sich der Ricci-Permutationstensor mit dem isotropen Tensor 2. Stufe in Verbindung bringen läßt.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{g}_i \circ (\underline{g}^k \times \underline{g}^i) \circ \underline{g}_k = -\underline{g}_i \circ (\underline{g}^i \times \underline{g}^k) \circ \underline{g}_k = -\underline{E} \times \underline{E}$$

Anhand der zyklischen Eigenschaften des Spatprodukts

$$(\underline{g}^k \times \underline{g}^i) \cdot \underline{g}^j = (\underline{g}^j \times \underline{g}^k) \cdot \underline{g}^i = (\underline{g}^i \times \underline{g}^j) \cdot \underline{g}^k$$

ergeben sich weitere koeffizientenfreie Darstellungen des Permutationstensors.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = (\underline{g}^j \times \underline{g}^k) \circ \underline{g}_j \circ \underline{g}_k = \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \circ (\underline{g}^i \times \underline{g}^j)$$

Diese lassen zusätzliche Übersetzungen für das Kreuzprodukt erkennen.

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot (\underline{v} \circ \underline{w}) = (\underline{v} \circ \underline{w}) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{w} \times \underline{v} \tag{2.38}$$

Der erste Teil dieser Gleichung gilt nicht nur für einzelne Dyaden $\underline{w} \circ \underline{v}$, sondern offensichtlich auch für Summen von Dyaden, also allgemein für Tensoren.

$$\underline{X} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{X} = -\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{X}^T = -\underline{X}^T \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \tag{2.39}$$

Daraus wiederum ergeben sich charakteristische Beziehungen für symmetrische und antisymmetrische Anteile von $\underline{\underline{X}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \\ \frac{1}{2}(\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Da der Permutationstensor isotrop ist, muß das einfache Produkt zweier Permutationstensoren ein isotroper Tensor 4. Stufe sein. Für dieses Produkt ergibt sich in kartesischen Koordinaten zunächst:

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ (\underline{e}_a \times \underline{e}_b) \cdot (\underline{e}_c \times \underline{e}_d) \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \quad .$$

Das Skalarprodukt der beiden Kreuzprodukte ist nur dann ungleich Null, wenn die Ergebnisse der beiden Kreuzprodukte parallel sind. Also muß entweder a mit c und b mit d übereinstimmen oder a mit d und b mit c . Mit diesen Forderungen ist automatisch auch erfüllt, daß das Gesamtergebnis bei $a = b$ oder $c = d$ verschwindet.

$$(\underline{e}_a \times \underline{e}_b) \cdot (\underline{e}_c \times \underline{e}_d) = \delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}$$

Dies ist die Basis für die sogenannte Lagrangesche Identität:

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \cdot (\underline{c} \times \underline{d}) = (\underline{a} \cdot \underline{c})(\underline{b} \cdot \underline{d}) - (\underline{a} \cdot \underline{d})(\underline{b} \cdot \underline{c}) \quad . \quad (2.41)$$

Mit diesen Beziehungen kann das einfache Produkt zweier Ricci-Permutationstensoren identifiziert werden.

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_b - \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a = \underline{\underline{J}}^2 - \underline{\underline{J}}^3 \quad (2.42)$$

Das doppelte Punktprodukt zweier Permutationstensoren ergibt unweigerlich ein Vielfaches des isotropen Tensors 2. Stufe.

$$\underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = -2 \underline{\underline{E}}$$

Die isotropen Tensoren 4. Stufe sind besonders interessant in ihrer Wirkung auf Tensoren 2. Stufe.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}^1 \cdot \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{X}} = I_1(\underline{\underline{X}}) \underline{\underline{E}} &= \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^1 \\ \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{\underline{X}} &= \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b (\underline{e}_b \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{e}_a) = \underline{\underline{X}}^T = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^2 \\ \underline{\underline{J}}^3 \cdot \underline{\underline{X}} &= \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{e}_a \circ \underline{\underline{E}} \cdot (\underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^3 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Darüber hinaus folgt mit Gleichung 2.35 die Beziehung:

$$\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^3 = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a = \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{J}}^3 \cdot \underline{\underline{X}} \quad .$$

Produkte isotroper Tensoren 4. Stufe können natürlich wiederum nur isotrope Tensoren ergeben.

$$\underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{\underline{J}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{\underline{J}}} \quad ; \quad \underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{\underline{J}}}$$

Die Multiplikation eines allgemeinen Tensors $\underline{\underline{\underline{K}}}$ mit dem isotropen Tensor $\underline{\underline{\underline{J}}}$ läßt den Tensor unverändert. Dieses Produkt kann analog zu der Gleichung 2.20 ebenfalls als eine koeffizientenfreie Darstellung interpretiert werden.

$$\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{\underline{K}}} = \underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{\underline{\underline{K}}} = \underline{j}_{ab} \circ \underbrace{\left(\underline{j}_{ba} \cdot \underline{\underline{\underline{K}}} \right)}_{\text{Tensoren 2. Stufe}}$$

Mit solchen Darstellungen lassen sich wiederum in besonders einfacher und eleganter Weise Umformungen durchführen.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{K}}} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{Y}) &= \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{j}_{ab} \right) \circ \underline{j}_{ba} \cdot (\underline{X} \cdot \underline{Y}) = \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{X} \right) \cdot \underline{Y} \\ &= \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{j}_{ab} \right) \circ \underbrace{\underline{j}_{ab} \cdot (\underline{Y}^T \cdot \underline{X}^T)}_{\text{Skalar}} = \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{\underline{J}}} \cdot \underline{Y}^T \right) \cdot \underline{X}^T \end{aligned}$$

So läßt sich auch eine zu Gleichung 2.35 äquivalente Aussage für Tensoren 4. Stufe herleiten ('...' kennzeichnen beliebige, bei den angegebenen Umformungen unverändert bleibende Produktelemente).

$$\begin{aligned} \dots \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{j}_{ab} \right) \dots \left(\underline{j}_{ba} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \right) \dots &= \\ \begin{array}{l} \underline{\underline{\underline{K}}} \dots \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{j}_{ab} \right) \dots \left(\underline{j}_{ba} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{j}_{cd} \circ \underline{j}_{dc} \right) \dots \\ \underline{\underline{\underline{K}}} \dots \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{ba} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{j}_{cd} \right) \dots \left(\underline{j}_{dc} \right) \dots \\ \underline{\underline{\underline{K}}} \dots \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{j}_{cd} \right) \dots \left(\underline{j}_{dc} \right) \dots \\ \underline{\underline{\underline{K}}} \dots \left(\underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \cdot \underline{j}_{ab} \right) \dots \left(\underline{j}_{ba} \right) \dots \\ \underline{\underline{\underline{K}}} \dots \left(\underline{j}_{ab} \right) \dots \left(\underline{j}_{ba} \cdot \underline{\underline{\underline{K}}} \cdot \underline{\underline{\underline{L}}} \right) \dots \end{array} \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.2.5 Koeffizientenfreie Darstellungen in Eigenrichtungen

Die Elemente einer in vielen Zusammenhängen besonders wichtigen Teilgruppe der Tensoren 2. Stufe zeichnen sich durch die Eigenschaft aus, daß zu diesen Tensoren jeweils drei linear unabhängige rechtsseitige Eigenvektoren \underline{g}_K existieren. (Der Unterstrich bei \underline{X}_K signalisiert, daß dieser Index von der Summationskonvention ausgenommen ist (s.S. 10).)

$$\underline{X} \cdot \underline{g}_K = \underline{X}_K \underline{g}_K$$

Solche Tensoren werden als diagonalähnliche Tensoren bezeichnet (Zurmühl & Falk 1984). Die Existenz dreier linear unabhängiger Eigenvektoren ist durchaus nicht selbstverständlich. Dies belegt der folgende nicht diagonalähnliche Beispieltensor.

$$\underline{\underline{X}} = X_{ab} e_a \circ e_b \quad \text{mit:} \quad [X_{ab}] = \begin{bmatrix} p & s & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} s \neq 0 \\ p \neq q \end{array}$$

Zu diesem Tensor existieren lediglich zwei linear unabhängige linksseitige Eigenvektoren $\underline{\underline{v}}^{\text{I}}$ und $\underline{\underline{v}}^{\text{II}}$ und zwei linear unabhängige rechtsseitige Eigenvektoren $\underline{\underline{w}}^{\text{I}}$ und $\underline{\underline{w}}^{\text{II}}$.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}^{\text{I}} = v_a^{\text{I}} e_a \quad \text{mit:} \quad \begin{bmatrix} v_a^{\text{I}} \end{bmatrix} = f [0 \ 0 \ 1] \\ \underline{\underline{w}}^{\text{I}} = w_a^{\text{I}} e_a \quad \text{mit:} \quad \begin{bmatrix} w_a^{\text{I}} \end{bmatrix} = f [0 \ 0 \ 1] \end{array} \right\} \text{zugeordneter Eigenwert: } \underline{\underline{X}} = q$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{\underline{v}}^{\text{II}} = v_a^{\text{II}} e_a \quad \text{mit:} \quad \begin{bmatrix} v_a^{\text{II}} \end{bmatrix} = f [0 \ 1 \ 0] \\ \underline{\underline{w}}^{\text{II}} = w_a^{\text{II}} e_a \quad \text{mit:} \quad \begin{bmatrix} w_a^{\text{II}} \end{bmatrix} = f [1 \ 0 \ 0] \end{array} \right\} \text{zugeordneter Eigenwert: } \underline{\underline{X}} = p$$

Mit der Definition der diagonalähnlichen Tensoren über die Forderung nach jeweils drei linear unabhängigen Eigenvektoren wird nicht ausgeschlossen, daß weitere rechtsseitige Eigenvektoren zu $\underline{\underline{X}}$ existieren (z.B. bei $\underline{\underline{E}}$). Die drei Vektoren $\underline{\underline{g}}_K$ aber sind durch ihre Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit geeignet, als Basissystem $\underline{\underline{g}}_K$ von koeffizientenfreien Darstellungen (und natürlich auch Koeffizientendarstellungen) verwendet zu werden.

$$\underline{\underline{X}} = (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{g}}_K) \circ \underline{\underline{g}}^K = (X_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{g}}_K) \circ \underline{\underline{g}}^K \tag{2.45}$$

Diese Darstellung macht bereits deutlich, daß die zu den $\underline{\underline{g}}_K$ dualen Vektoren $\underline{\underline{g}}^K$ linksseitige Eigenvektoren von $\underline{\underline{X}}$ sind. Zu einem diagonalähnlichen Tensor existieren also auch drei linear unabhängige linksseitige Eigenvektoren. Außerdem gehören zu den rechtsseitigen Eigenvektoren dieselben Eigenwerte X_K wie zu den linksseitigen Eigenvektoren.

$$\underline{\underline{g}}^L \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{g}}^L \cdot X_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{g}}_K \circ \underline{\underline{g}}^K = X_{\underline{\underline{L}}} \underline{\underline{g}}^L \tag{2.46}$$

Da Eigenvektoren keine bestimmte Länge haben, sind die Vektoren $X_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{g}}_K$ ebenso rechtsseitige Eigenvektoren wie die $\underline{\underline{g}}_K$ selbst und entsprechend sind die Vektoren $X_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{g}}^K$ ebenso wie die $\underline{\underline{g}}^K$ -Vektoren linksseitige Eigenvektoren. Die charakteristische koeffizientenfreie Darstellung diagonalähnlicher Tensoren in Gleichung 2.45 besteht somit aus links- und rechtsseitigen Eigenvektoren. Dabei weisen diese koeffizientenfreien Darstellungen von $\underline{\underline{X}}$ gegenüber allen anderen koeffizientenfreien Darstellungen die Besonderheit auf, daß die Vektoren der beiden Dreiergruppen bei unterschiedlichen Indexwerten stets senkrecht zueinander sind.

$$(X_{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{g}}_K) \cdot \underline{\underline{g}}^L = X_{\underline{\underline{K}}} \delta_K^L$$

Die zugehörige Koeffizientendarstellung weist somit Diagonalgestalt auf, wobei die Diagonale mit den drei Eigenwerten von $\underline{\underline{X}}$: X_I , X_{II} und X_{III} besetzt ist. Obwohl diese Matrix somit symmetrisch ist, ist damit die Symmetrie des Tensors $\underline{\underline{X}}$ keineswegs gezeigt.

$$\left[X^J_K \right] = \begin{bmatrix} X_I & 0 & 0 \\ 0 & X_{II} & 0 \\ 0 & 0 & X_{III} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Aufgrund dieser Darstellungsmöglichkeit werden Tensoren mit drei linear unabhängigen Eigenvektoren als diagonalähnliche Tensoren bezeichnet. Die koeffizientenfreie Darstellung in Gleichung 2.45 läßt besonders einfach erkennen, bei welchen Operationen die Diagonalähnlichkeit übertragen wird. Für das Quadrat eines diagonalähnlichen Tensors gilt beispielsweise:

$$\underline{\underline{X}}^2 = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}} = X_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \cdot X_{\underline{L}} \underline{g}_L \circ \underline{g}^L = X_{\underline{K}}^2 \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad .$$

Dies kann auch auf tensorielle Potenzreihen erweitert werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}} = X_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K &\Rightarrow \underline{\underline{P}} = \sum_n p_n \underline{\underline{X}}^n = \left(\sum_n p_n X_{\underline{K}}^n \right) \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \\ \Rightarrow \left[P^K_J \right] &= \begin{bmatrix} \sum_n p_n X_I^n & 0 & 0 \\ 0 & \sum_n p_n X_{II}^n & 0 \\ 0 & 0 & \sum_n p_n X_{III}^n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Damit sind auch bereits tensorwertige analytische Funktionen, also solche Funktionen, die lokal durch eine konvergente Potenzreihe gegeben sind, erfaßt. Die Tensorwertigkeit des Funktionswerts werde durch eine enge doppelte Klammerung des Arguments signalisiert.

$$\underline{\underline{X}} = X_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f}} = f(\underline{\underline{X}}) = f(X_{\underline{K}}) \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad (2.49)$$

Dies sind die von Truesdell & Noll (1965) als polynomiale isotrope Tensorfunktionen bezeichneten Funktionen (dort allerdings nur für symmetrische Argumenttensoren eingeführt), z.B.:

$$\exp(\underline{\underline{X}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \underline{\underline{X}}^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X_{\underline{K}}^n \right) \underline{g}_K \circ \underline{g}^K = \exp(X_{\underline{K}}) \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad .$$

Da die Potenzreihen und Funktionen in den Eigenrichtungen jeweils mit dem Argument übereinstimmen, überträgt sich eine Diagonalähnlichkeit des Arguments auch auf die Funktion.

Dies gilt ebenso für das Transponieren eines Tensors, wenn sich auch bei dieser Operation links- und rechtsseitige Eigenvektoren austauschen, wie wiederum den koeffizientenfreien Darstellungen unmittelbar zu entnehmen ist.

$$\underline{\underline{X}} = X_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X}}^T = \underline{g}^K \circ X_{\underline{K}} \underline{g}_K = X_{\underline{K}} \underline{g}^K \circ \underline{g}_K$$

Darüber hinaus sind bei Diagonalähnlichkeit von \underline{X} auch alle Produkte $\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}$ (mit einem invertierbaren Tensor \underline{Y}) diagonalähnlich, wie an der koeffizientenfreien Darstellung mit den dualen Vektorgruppen $\underline{g}^K \cdot \underline{Y}$ und $\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{g}_K$, die damit wiederum links- und rechtsseitige Eigenvektoren von $\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}$ sind, zu erkennen ist.

$$\underline{X} = X_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K \quad \Rightarrow \quad \underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y} = X_{\underline{K}} (\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{g}_K) \circ (\underline{g}^K \cdot \underline{Y}) \quad (2.50)$$

Außerdem zeigt sich hieran, daß $\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}$ stets die gleichen Eigenwerte wie \underline{X} hat. Solche Abwandlungen sind besonders bei symmetrischen Argumenttensoren von Interesse.

Symmetrische Tensoren sind stets diagonalähnlich. Bei diesen Tensoren fallen wegen

$$\underline{w} \cdot \underline{X} = \underline{w} \cdot \underline{g}_i \circ \underline{g}^i \cdot \underline{X} = (\underline{w} \cdot \underline{g}_i) \underline{g}^i \cdot \underline{X} = \underline{g}^i \cdot \underline{X} \circ \underline{g}_i \cdot \underline{w} = \underline{X}^T \cdot \underline{w} \quad (2.51)$$

die rechts- und linksseitigen Eigenvektoren zu den einzelnen Eigenwerten stets zusammen. Mit der Dualität von links- und rechtsseitigen Eigenvektoren diagonalähnlicher Tensoren (Gl. 2.46) folgt daraus, daß jeder Eigenvektor eines symmetrischen Tensors zu einem System dreier orthogonaler Eigenvektoren gehört. Aufgrund der beliebigen Längen der Eigenvektoren kann ein solches System von Eigenvektoren als orthonormiertes Basissystem wiedergegeben werden. Somit existiert für symmetrische Tensoren als Spezialfall der Gleichung 2.45 eine spezielle koeffizientenfreie Darstellung in Eigenrichtungen mit drei zueinander senkrechten Vektoren $X_{\underline{A}} \underline{e}_A$ und den zugehörigen Einsvektoren \underline{e}_A .

$$\underline{X} = \underline{X}^T \quad ; \quad \underline{e}_A \cdot \underline{X} \parallel \underline{e}_A \quad \Rightarrow \quad \underline{X} = X_{\underline{A}} \underline{e}_A \circ \underline{e}_A \quad (2.52)$$

Eine weitere wichtige Eigenschaft der symmetrischen Tensoren besteht darin, daß ihre Eigenwerte durchgehend reell sind (Zurmühl & Falk 1984).

Wird nun ein symmetrischer Tensor \underline{X} gemäß Gleichung 2.50 mit einem beliebigen, aber invertierbaren Tensor \underline{Y} verknüpft, so entsteht ein im allgemeinen unsymmetrischer Tensor mit den reellen Eigenwerten von \underline{X} . Die Elemente dieser Untergruppe der diagonalähnlichen Tensoren, die alle symmetrischen Tensoren beinhaltet, werden in Anlehnung an Zurmühl & Falk (1984) als symmetrisierbare Tensoren bezeichnet. Jeder dieser Tensoren läßt sich wegen

$$\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y} = \underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underbrace{\underline{Y}^{T^{-1}} \cdot \underline{Y}^T}_{\underline{E}} \cdot \underline{Y} = \left(\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}^{T^{-1}} \right) \cdot \left(\underline{Y}^T \cdot \underline{Y} \right)$$

stets als ein Produkt eines im Falle der Symmetrie von \underline{X} ebenfalls symmetrischen Tensors $\left(\underline{Y}^{-1} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}^{T^{-1}} \right)$ und eines weiteren symmetrischen und außerdem positiv definiten Tensors $\left(\underline{Y}^T \cdot \underline{Y} \right)$ darstellen.

Werden diese beiden Tensoren koeffizientenfrei in den Eigenvektoren des Ergebnistensors dargestellt, so ergeben sich zwei außergewöhnliche Ausdrücke, bei denen ausnahmsweise über Indizes auf gleicher Indexposition zu summieren ist.

$$\underline{Z} = Z_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}^K = (Z_{\underline{K}} \underline{g}_K \circ \underline{g}_K) \cdot (\underline{g}^L \circ \underline{g}^L)$$

2.3 Angepaßte Basisdyaden für symmetrische Tensoren

Die meisten tensoriellen physikalischen Größen entsprechen symmetrischen Tensoren. Für solche Tensoren stellen gewöhnliche Koeffizientendarstellungen gemäß Gleichung 2.9, aber auch die koeffizientenfreien Darstellungen, redundante Beschreibungen dar. In vielen Zusammenhängen wird deshalb nicht erst zur Berechnung konkreter Zahlenwerte, sondern bereits in wesentlich früheren Stadien der Bearbeitung zu Matrizendarstellungen der sechs unabhängigen Koeffizienten in Form von Spalten- oder Zeilenmatrizen übergegangen (s. z.B. ABAQUS 2004 o. Bertram 1985). Häufig werden dabei die drei Nebendiagonalelemente, je nachdem ob es sich um Verzerrungen oder um Spannungen handelt, mit unterschiedlichen Vorfaktoren versehen (ABAQUS 2004), damit die typischen Arbeitsbegriffe direkt aus einem Skalarprodukt solcher Matrizen berechnet werden können. Werden nun mit solchen Matrizen, deren Elemente zu unterschiedlichen Koeffizientendarstellungen der beteiligten Tensoren gehören, weitere Umformungen durchgeführt, so kann eine Rückführung des Endergebnisses in eine symbolische Darstellung äußerst schwierig sein. Sehr stark ausgeprägt treten derartige Probleme bei Ableitungen nach symmetrischen Tensoren auf (vergl. Abschnitt 5.3.2).

Zur Vermeidung solcher Schwierigkeiten kommen im Rahmen dieser Arbeit wie z.B. schon bei Böhlke (2001) sechs spezielle Dyaden $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ zum Einsatz, die für symmetrische Tensoren anstelle der $\underline{\underline{j}}_{ab}$ (Gl. 2.10) verwendet werden können. Die hier verwendeten speziellen Indizes $a^{(6)}, b^{(6)}, \dots$ sind gegebenenfalls über alle sechs vorhandenen Indexwerte aufzusummieren.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{j}}_{1^{(6)}} &= \underline{e}_x \circ \underline{e}_x = \underline{\underline{j}}_{xx} & ; & \quad \underline{\underline{j}}_{4^{(6)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_y \circ \underline{e}_z + \underline{e}_z \circ \underline{e}_y) = \frac{\underline{\underline{j}}_{yz} + \underline{\underline{j}}_{zy}}{\sqrt{2}} \\ \underline{\underline{j}}_{2^{(6)}} &= \underline{e}_y \circ \underline{e}_y = \underline{\underline{j}}_{yy} & ; & \quad \underline{\underline{j}}_{5^{(6)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_z \circ \underline{e}_x + \underline{e}_x \circ \underline{e}_z) = \frac{\underline{\underline{j}}_{zx} + \underline{\underline{j}}_{xz}}{\sqrt{2}} \\ \underline{\underline{j}}_{3^{(6)}} &= \underline{e}_z \circ \underline{e}_z = \underline{\underline{j}}_{zz} & ; & \quad \underline{\underline{j}}_{6^{(6)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\underline{e}_x \circ \underline{e}_y + \underline{e}_y \circ \underline{e}_x) = \frac{\underline{\underline{j}}_{xy} + \underline{\underline{j}}_{yx}}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (2.53)$$

Bei $\underline{\underline{j}}_{4^{(6)}}, \underline{\underline{j}}_{5^{(6)}}$ und $\underline{\underline{j}}_{6^{(6)}}$ ist der Begriff Basisdyade streng genommen nicht zutreffend, da es sich um Summen von jeweils zwei Dyaden handelt. Zur Betonung der Analogie zu den Basisdyaden $\underline{\underline{j}}_{ab}$ wird im Rahmen dieser Arbeit aber auch für die $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ die Bezeichnung Basisdyaden beibehalten.

Die Basisdyaden $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ sind symmetrische Tensoren:

$$\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \left(\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \right)^T = \underline{\underline{j}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}} \quad .$$

Zu diesen Basisdyaden können analog zu Gleichung 2.11 die zugehörigen Koeffizienten von Tensoren berechnet werden.

$$\begin{aligned} X_{a^{(6)}} &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \\ \text{mit: } [X_{a^{(6)}}]^T &= \left[X_{xx}; X_{yy}; X_{zz}; \frac{X_{yz} + X_{zy}}{\sqrt{2}}; \frac{X_{zx} + X_{xz}}{\sqrt{2}}; \frac{X_{xy} + X_{yx}}{\sqrt{2}} \right] \end{aligned} \quad (2.54)$$

Dies sind offensichtlich Vielfache von Koeffizienten des symmetrischen Anteils von $\underline{\underline{X}}$, die einen Tensor in einem gegebenen kartesischen Koordinatensystem somit nur dann vollständig beschreiben, wenn der Tensor symmetrisch ist.

$$X_{a^{(6)}} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \underline{\underline{X}}^S \quad \text{mit:} \quad \left[\begin{array}{c} S \\ \underline{\underline{X}}_{ab} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} X_{1^{(6)}} & \frac{X_{6^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \frac{X_{5^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ & X_{2^{(6)}} & \frac{X_{4^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ \text{(sym.)} & & X_{3^{(6)}} \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Die Motivation für die Vereinbarung der $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ -Dyaden in der vorgestellten Form (mit den Faktoren $\sqrt{2}$) ist:

$$\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} = \delta_{a^{(6)}b^{(6)}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X}}^S \cdot \underline{\underline{Y}} = X_{a^{(6)}} Y_{a^{(6)}} \quad .$$

2.3.1 Symmetrien von Tensoren 4. Stufe

Aus den neuen Dyaden $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ allein lassen sich nur Vielfache eines einzigen isotropen Tensors 4. Stufe bilden.

$$\delta_{a^{(6)}b^{(6)}} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} 2 \\ \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{J}} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{J}} \end{array} \right) \quad (2.56)$$

Die Multiplikation dieses Tensors mit einem Tensor $\underline{\underline{X}}$ 2. Stufe ist gleichbedeutend mit der Symmetrisierung von $\underline{\underline{X}}$.

$$\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \underline{\underline{X}}^S \quad (2.57)$$

Auch zu Tensoren 4. Stufe ergeben sich mit den neuen Basisdyaden alternative Koeffizienten.

$$\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} = K_{a^{(6)}b^{(6)}} \quad (2.58)$$

Diese ergeben zusammen mit den Dyaden wiederum nur unter Voraussetzung bestimmter Symmetrieeigenschaften den ursprünglichen Tensor. Ein Tensor $\underline{\underline{K}}$ 4. Stufe ist:

- (1,2)-symmetrisch, wenn gilt: $K_{abcd} = K_{bacd}$ bzw. $\underline{\underline{K}} = \begin{array}{c} 2 \\ \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{K}} \end{array} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}}$
- (3,4)-symmetrisch, wenn gilt: $K_{abcd} = K_{abdc}$ bzw. $\underline{\underline{K}} = \begin{array}{c} \underline{\underline{K}} \\ \underline{\underline{J}} \\ \underline{\underline{K}} \end{array} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \quad .$

Bertram (1985) bezeichnet diese Symmetrien als left/right-symmetric. In einigen wichtigen Fällen, z.B. bei Materialsteifigkeiten rein elastischer Materialmodelle, tritt im Zusammenhang mit diesen beiden Symmetrien zusätzlich eine Symmetrie gemäß $K_{abcd} = K_{cdab}$ auf (Bertram 1985: symmetric tetrad).

Ist ein Tensor $\underline{\underline{K}}$ (1,2)-symmetrisch, so ist jeder Tensor $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{Y}}$ (unabhängig von $\underline{\underline{Y}}$) symmetrisch und jedes Produkt $\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{L}}$ ist (1,2)-symmetrisch. Entsprechendes gilt für die (3,4)-Symmetrie von $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{K}}$ und die Symmetrie von $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{K}}$.

Aber diese Logik ist nicht umkehrbar. Ein Tensor $\underline{\underline{K}}$ mit $\underline{\underline{h}} = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{K}}$ ist auch bei symmetrischen Tensoren $\underline{\underline{h}}$ und $\underline{\underline{b}}$ nicht unbedingt (3,4)-symmetrisch. (Entsprechend bei $\underline{\underline{h}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{b}}$

auch nicht (1,2)-symmetrisch.) Dies läßt sich gut veranschaulichen, indem zu zwei symmetrischen Tensoren \underline{b} und $\underline{\sigma}$ einerseits das symmetrische Produkt $\underline{b} \cdot \underline{b}$ und andererseits das im allgemeinen unsymmetrische Produkt $\underline{\sigma} \cdot \underline{b}$ betrachtet werden. Beide Produkte können mit Hilfe des gleichen Tensors $\underline{\underline{K}} = \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{b}$ beschrieben werden.

$$\underline{b} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underbrace{\underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{b}}_{\underline{\underline{K}}} \quad ; \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{b} = \underline{\sigma} \cdot \underbrace{\underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{b}}_{\underline{\underline{K}}} \quad (2.59)$$

Dieser Tensor $\underline{\underline{K}}$ ist (1,2)-symmetrisch, da jeder der Tensoren $\underline{j}_{a^{(6)}}$ symmetrisch ist. Würde zusätzlich aus der Symmetrie der Tensoren \underline{b} und $\underline{b} \cdot \underline{b}$ zwangsläufig folgen, daß der Tensor $\underline{\underline{K}}$ auch (3,4)-symmetrisch ist, so wäre damit unweigerlich auch das Produkt $\underline{\sigma} \cdot \underline{b}$ symmetrisch. Dies muß aber keinesfalls immer der Fall sein. Vielmehr entsteht die Symmetrie des Produkts $\underline{b} \cdot \underline{b}$ erst bei der Multiplikation von \underline{b} mit dem nicht (3,4)-symmetrischen Tensor $\underline{\underline{K}}$ infolge der Addition einander teilweise neutralisierender, jeweils unsymmetrischer Anteile.

Die Koeffizienten $K_{a^{(6)}b^{(6)}}$ in Gleichung 2.58 repräsentieren nur dann den vollständigen Tensor $\underline{\underline{K}}$, wenn dieser sowohl (1,2)-symmetrisch als auch (3,4)-symmetrisch ist, also

$$\underline{\underline{K}} = \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K}} = K_{a^{(6)}b^{(6)}} \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}}$$

erfüllt. Selbstverständlich können die Koeffizienten $K_{a^{(6)}b^{(6)}}$ aus den K_{abcd} berechnet werden.

$$\begin{bmatrix} K_{1^{(6)}1^{(6)}} & K_{1^{(6)}2^{(6)}} & K_{1^{(6)}3^{(6)}} & K_{1^{(6)}4^{(6)}} & K_{1^{(6)}5^{(6)}} & K_{1^{(6)}6^{(6)}} \\ K_{2^{(6)}1^{(6)}} & K_{2^{(6)}2^{(6)}} & K_{2^{(6)}3^{(6)}} & K_{2^{(6)}4^{(6)}} & K_{2^{(6)}5^{(6)}} & K_{2^{(6)}6^{(6)}} \\ K_{3^{(6)}1^{(6)}} & K_{3^{(6)}2^{(6)}} & K_{3^{(6)}3^{(6)}} & K_{3^{(6)}4^{(6)}} & K_{3^{(6)}5^{(6)}} & K_{3^{(6)}6^{(6)}} \\ K_{4^{(6)}1^{(6)}} & K_{4^{(6)}2^{(6)}} & K_{4^{(6)}3^{(6)}} & K_{4^{(6)}4^{(6)}} & K_{4^{(6)}5^{(6)}} & K_{4^{(6)}6^{(6)}} \\ K_{5^{(6)}1^{(6)}} & K_{5^{(6)}2^{(6)}} & K_{5^{(6)}3^{(6)}} & K_{5^{(6)}4^{(6)}} & K_{5^{(6)}5^{(6)}} & K_{5^{(6)}6^{(6)}} \\ K_{6^{(6)}1^{(6)}} & K_{6^{(6)}2^{(6)}} & K_{6^{(6)}3^{(6)}} & K_{6^{(6)}4^{(6)}} & K_{6^{(6)}5^{(6)}} & K_{6^{(6)}6^{(6)}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{xxxx} & K_{xxyy} & K_{xxzz} & \frac{K_{xyyz}+K_{xxzy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{xxzx}+K_{xxzx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{xxxxy}+K_{xxxxy}}{\sqrt{2}} \\ K_{yyxx} & K_{yyyy} & K_{yyzz} & \frac{K_{yyyz}+K_{yyzy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{yyzx}+K_{yyzx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{yyxy}+K_{yyxy}}{\sqrt{2}} \\ K_{zzxx} & K_{zzyy} & K_{zzzz} & \frac{K_{zzyz}+K_{zzzy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{zzzx}+K_{zzzx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{zzxy}+K_{zzxy}}{\sqrt{2}} \\ \frac{K_{yzxx}+K_{zyxx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{yzyy}+K_{zyyy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{yzzz}+K_{zyzz}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{yzyz}+K_{yzzzy}+K_{zyyz}+K_{zyzy}}{2} & \frac{K_{yzzx}+K_{yzxz}+K_{zyzx}+K_{zyxz}}{2} & \frac{K_{yzyx}+K_{yzyx}+K_{zyyx}+K_{zyyx}}{2} \\ \frac{K_{zxxx}+K_{zxzx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{zxyy}+K_{xzyy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{zxxx}+K_{zxzx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{zxyz}+K_{zxzy}+K_{xzyz}+K_{xzzzy}}{2} & \frac{K_{zxxx}+K_{zxxx}+K_{xzzx}+K_{xzzx}}{2} & \frac{K_{zxyx}+K_{zxyx}+K_{xzyx}+K_{xzyx}}{2} \\ \frac{K_{xyxx}+K_{yxxx}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{xyyy}+K_{yxyy}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{xyzz}+K_{yxzz}}{\sqrt{2}} & \frac{K_{xyyz}+K_{xyzy}+K_{yxyz}+K_{yxzy}}{2} & \frac{K_{xyzx}+K_{yxxz}+K_{yxxz}+K_{yxxz}}{2} & \frac{K_{xyxy}+K_{xyxy}+K_{yxyx}+K_{yxyx}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

2.3.2 Eigenschaften der angepaßten Basisdyaden

Bereits die Gleichung 2.59 zeigt, daß das Produkt $\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{b}$ fast immer unsymmetrisch ist. Ausnahmen gibt es bei $\underline{b} = \underline{E}$, $\underline{b} = \underline{0}$ und je nach Kombination bei bestimmten $\underline{b} = \underline{j}_{c^{(6)}}$.

Solche einfachen Produkte $\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{c^{(6)}}$ von Basisdyaden sind im Gegensatz zum doppelten Punktprodukt ($\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{c^{(6)}} = \delta_{a^{(6)}c^{(6)}}$, s.o.) eher umständlich zu bilden.

$$[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}}] = \begin{bmatrix} \underline{j}_{1^{(6)}} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_z}{\sqrt{2}} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_y}{\sqrt{2}} \\ \underline{0} & \underline{j}_{2^{(6)}} & \underline{0} & \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_z}{\sqrt{2}} & \underline{0} & \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_x}{\sqrt{2}} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{j}_{3^{(6)}} & \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_y}{\sqrt{2}} & \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_x}{\sqrt{2}} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_y}{\sqrt{2}} & \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_z}{\sqrt{2}} & \underline{j}_{2^{(6)}} + \underline{j}_{3^{(6)}} & \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_x}{2} & \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_x}{2} \\ \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_x}{\sqrt{2}} & \underline{0} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_z}{\sqrt{2}} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_y}{2} & \underline{j}_{3^{(6)}} + \underline{j}_{1^{(6)}} & \frac{\underline{e}_z \circ \underline{e}_y}{2} \\ \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_x}{\sqrt{2}} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_y}{\sqrt{2}} & \underline{0} & \frac{\underline{e}_x \circ \underline{e}_z}{2} & \frac{\underline{e}_y \circ \underline{e}_z}{2} & \underline{j}_{1^{(6)}} + \underline{j}_{2^{(6)}} \end{bmatrix}$$

Häufig werden davon wiederum (Skalar-)Produkte mit symmetrischen Tensoren 2. Stufe benötigt.

$$\underline{X} = \underline{X}^T \Rightarrow \left[\underline{X} \cdot \left(\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right) \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 X_{1^{(6)}} & 0 & 0 & 0 & X_{5^{(6)}} & X_{6^{(6)}} \\ 0 & 2 X_{2^{(6)}} & 0 & X_{4^{(6)}} & 0 & X_{6^{(6)}} \\ 0 & 0 & 2 X_{3^{(6)}} & X_{4^{(6)}} & X_{5^{(6)}} & 0 \\ 0 & X_{4^{(6)}} & X_{4^{(6)}} & X_{2^{(6)}} + X_{3^{(6)}} & \frac{X_{6^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \frac{X_{5^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ X_{5^{(6)}} & 0 & X_{5^{(6)}} & \frac{X_{6^{(6)}}}{\sqrt{2}} & X_{3^{(6)}} + X_{1^{(6)}} & \frac{X_{4^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ X_{6^{(6)}} & X_{6^{(6)}} & 0 & \frac{X_{5^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \frac{X_{4^{(6)}}}{\sqrt{2}} & X_{1^{(6)}} + X_{2^{(6)}} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Mit zwei sowohl (1,2)- als auch (3,4)-symmetrischen Tensoren \underline{m} und \underline{n} gilt auch die zu Gleichung 2.44 analoge Gleichung unter Verwendung der Dyaden $\underline{j}_{a^{(6)}} \underline{j}_{b^{(6)}}$ ('...' kennzeichnen

beliebige, bei den angegebenen Umformungen unverändert bleibende Produktelemente).

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{m}} &= \underline{j_{a^{(6)}}} \circ \underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \underline{\underline{m}} \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \circ \underline{j_{b^{(6)}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{n}} = \underline{j_{a^{(6)}}} \circ \underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \underline{\underline{n}} \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \circ \underline{j_{b^{(6)}}} \quad \Rightarrow \\
 &\cdots \left(\underline{\underline{m}} \cdots \underline{j_{a^{(6)}}} \right) \cdots \left(\underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \underline{\underline{n}} \right) \cdots = \\
 &\quad \begin{array}{c} \parallel \\ \dots \quad \left(\underline{\underline{m}} \cdots \underline{j_{a^{(6)}}} \right) \quad \dots \quad \left(\underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \underline{\underline{n}} \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \circ \underline{j_{b^{(6)}}} \right) \dots \\ \parallel \\ \dots \left(\underline{\underline{m}} \cdots \underline{j_{a^{(6)}}} \circ \underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \underline{\underline{n}} \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \right) \dots \quad \left(\underline{j_{b^{(6)}}} \right) \dots \\ \parallel \\ \dots \quad \left(\underline{\underline{m}} \cdots \underline{\underline{n}} \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \right) \quad \dots \quad \left(\underline{j_{b^{(6)}}} \right) \dots \end{array}
 \end{aligned}$$

Darüber hinaus gibt es einige sehr nützliche Umformungen für bestimmte Konstellationen von allgemeinen (nicht unbedingt symmetrischen) Tensoren $\underline{\underline{X}}$ oder $\underline{\underline{Y}}$ in Produkten mit den neuen Dyaden ('...' kennzeichnen beliebige, bei den angegebenen Umformungen unverändert bleibende Produktelemente).

$$\begin{aligned}
 &\cdots \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{j_{a^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \right) \cdots \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{j_{a^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \cdots \\
 &\quad \begin{array}{c} \parallel \\ \dots \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{j_{a^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \right) \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \circ \underline{j_{b^{(6)}}} \cdots \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{j_{a^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \dots \\ \parallel \\ \dots \underline{j_{b^{(6)}}} \cdots \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \left\{ \underline{j_{a^{(6)}}} \circ \underline{j_{a^{(6)}}} \cdots \left(\underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{j_{b^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{X}} \right) \right\} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \dots \\ \parallel \\ \dots \underline{j_{b^{(6)}}} \cdots \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{j_{b^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \dots \\ \parallel \\ \dots \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{j_{b^{(6)}}} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \right) \cdots \underline{j_{b^{(6)}}} \cdots \end{array}
 \end{aligned}$$

2.3.3 Spezielle aus nur zwei Tensoren 2. Stufe gebildete Tensoren 4. Stufe

2.3.3.1 Unsymmetrische Basisvarianten

Eine wichtige Klasse von Tensoren 4. Stufe sind solche, die sich durch eine Verknüpfung zweier beliebiger Tensoren 2. Stufe ergeben. Im allgemeinen (im weiteren werden allerdings vor allem (1,2)- und (3,4)-symmetrisierte Varianten dieser Tensoren von Interesse sein) gibt es 24 unabhängige Varianten solcher Verknüpfungen, z.B.:

$$X_{ab} Y_{cd} \begin{cases} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_d & ; & \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c & ; & \underline{e}_a \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_d & ; \\ \underline{e}_a \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_b & ; & \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_c & ; & \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b & ; \\ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_d & ; & \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c & ; & \dots & \end{cases} \quad (2.62)$$

Von besonderem Interesse ist die Variante, mit der sich aus einem Produkt $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{Y}}$ der mittlere Tensor $\underline{\underline{Z}}$ in der Form $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{Y}} = (\dots) \cdots \underline{\underline{Z}}$ isolieren läßt.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{Y}} &= X_{ab} Z_{bc} Y_{cd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_d = X_{ab} Y_{cd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b \cdots Z_{ef} \underline{e}_e \circ \underline{e}_f \\
 &\quad \text{auch:} \quad = Z_{ef} \underline{e}_e \circ \underline{e}_f \cdots Y_{cd} X_{ab} \underline{e}_c \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a \circ \underline{e}_d
 \end{aligned}$$

Die hier gebildeten Tensoren 4. Stufe entstehen offensichtlich aus $\underline{X} \circ \underline{Y}$ bzw. $\underline{Y} \circ \underline{X}$ durch Austausch der Vektoren \underline{e}_b und \underline{e}_d (2. und 4. Position). Diese dem Transponieren ähnliche Operation wird wie folgt symbolisiert:

$$\begin{aligned} (\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} = X_{ab} Y_{cd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b &\Rightarrow \underline{X} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{Y} = (\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} \cdot \underline{Z} \\ &= \underline{Z} \cdot (\underline{Y} \circ \underline{X})^{T_{24}} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dies wird auch für allgemeine Tensoren vierter Stufe eingeführt.

$$\underline{\underline{K}}^{T_{24}} = K_{abcd} \underline{e}_a \circ \underline{e}_d \circ \underline{e}_c \circ \underline{e}_b \quad (2.64)$$

Bei der hier primär betrachteten Verknüpfung zweier Tensoren 2. Stufe läßt sich der Basenaustausch auch ohne volle Expansion der Koeffizienten in einer der symbolischen Darstellung näheren Art und Weise beschreiben. Anschaulich wird hierbei die benötigte Basenfolge 1,4,3,2 erzeugt, indem zunächst die beiden Basen 2 und 3 durch das Produkt $\underline{X} \cdot \underline{j}_{bc} \cdot \underline{Y}$ extrahiert werden und anschließend hinter den verbleibenden Basen 1 und 4 in umgekehrter Reihenfolge wieder ergänzt werden.

$$(\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} = \underline{X} \cdot \underline{j}_{bc} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{cb}$$

Stattdessen können auch zunächst die Basen 4 und 1 extrahiert werden.

$$(\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} = \underline{j}_{ad} \circ \underline{Y} \cdot \underline{j}_{da} \cdot \underline{X}$$

Gleichung 2.35 eröffnet weitere Darstellungsmöglichkeiten.

$$(\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} = \underline{X} \cdot \underline{j}_{ab} \circ \underline{Y} \cdot \underline{j}_{ba} = \underline{j}_{ab} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{ba} \cdot \underline{X}$$

Sofern der Einheitstensor als Argument auftritt, ergeben sich wiederum besonders einfache Zusammenhänge.

$$\begin{aligned} (\underline{E} \circ \underline{E})^{T_{24}} &= \underline{\underline{J}} \\ (\underline{X} \circ \underline{E})^{T_{24}} &= \underline{X} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{X} \\ \Rightarrow (\underline{X} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot (\dots) &= \underline{X} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot (\dots) = \underline{X} \cdot (\dots) \\ \Rightarrow (\dots) \cdot (\underline{X} \circ \underline{E})^{T_{24}} &= (\dots) \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{X} = (\dots) \cdot \underline{X} \end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln sind:

$$\begin{aligned} \underline{x} \cdot (\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} \cdot \underline{y} &= \underline{x} \cdot \underline{X} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{ba} \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot \underline{X} \cdot \underline{y} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{ba} \\ &= \left(\underline{x} \cdot \underline{X} \cdot \underline{y} \circ \underline{Y} \right)^{T_{24}} \end{aligned} \quad (2.65)$$

und:

$$\begin{aligned} (\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} \cdot (\underline{x} \circ \underline{y})^{T_{24}} &= \underline{X} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{ba} \cdot \underline{j}_{cd} \circ \underline{y} \cdot \underline{j}_{dc} \cdot \underline{x} = \underline{X} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{Y} \circ \underline{y} \cdot \underline{j}_{ba} \cdot \underline{x} \\ &= \underline{X} \cdot \underline{x} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{y} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{ba} = \left(\underline{X} \cdot \underline{x} \circ \underline{y} \cdot \underline{Y} \right)^{T_{24}} . \end{aligned} \quad (2.66)$$

Daraus folgt wiederum:

$$(\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} \cdot (\underline{X}^{-1} \circ \underline{Y}^{-1})^{T_{24}} = \underline{\underline{J}}^3 . \quad (2.67)$$

Außerdem sind noch Wechselwirkungen mit isotropen Tensoren von Interesse.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{J}}^2 \cdot (\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} &= \underline{\underline{J}}^2 \cdot \left(\underline{X} \cdot \underline{j}_{bc} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{cb} \right) = \underline{Y}^T \cdot \underline{j}_{cb} \cdot \underline{X}^T \circ \underline{j}_{cb} \\ &= \left(\underline{Y}^T \circ \underline{X}^T \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}}^2 = \underline{\underline{J}}^2 \cdot \left(\underline{j}_{bc} \cdot \underline{Y} \circ \underline{j}_{cb} \cdot \underline{X} \right) = \underline{Y}^T \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{X} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Dementsprechend gilt auch:

$$(\underline{X} \circ \underline{Y})^{T_{24}} = \left(\underline{X} \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{Y}^T \right) \cdot \underline{\underline{J}}^2 .$$

Mit $\underline{\underline{J}}^3$ ergibt sich hingegen:

$$\underline{X} \cdot \underline{\underline{J}}^3 \cdot \underline{Y} = \underline{X} \cdot (\underline{E} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \underline{Y} = (\underline{X} \cdot \underline{Y} \circ \underline{E})^{T_{24}} = \underline{X} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{\underline{J}}^3 = \underline{\underline{J}}^3 \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y} .$$

2.3.3.2 Übertragungen

Die Gleichung 2.63, mit der aus einem Produkt von drei Tensoren der mittlere Tensor isoliert werden kann, ist für Übertragungen der Art, wie sie bei pull-back / push-forward-Methoden verwendet werden, von Interesse.

$$\begin{aligned} \underline{F} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{F}^T &= \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F} \right)^{T_{24}} \\ \underline{F}^T \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{F} &= \left(\underline{F}^T \circ \underline{F} \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Z}} \cdot \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T \right)^{T_{24}} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Auch bei Tensoren 4. Stufe lassen sich damit Übertragungen bequem schreiben.

$$\begin{aligned} \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T \right)^{T_{24}} \cdot (\underline{X} \circ \underline{Y}) \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F} \right)^{T_{24}} &= \underline{F} \cdot \underline{X} \cdot \underline{F}^T \circ \underline{F} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{F}^T \\ \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F} \right)^{T_{24}} &= \underline{F} \cdot \left(\underline{\underline{K}} \cdot \underline{j}_{ba} \right) \cdot \underline{F}^T \circ \underline{F} \cdot \underline{j}_{ab} \cdot \underline{F}^T \end{aligned}$$

Bei einer Übertragung einer T_{24} -Modifikation darf die Bearbeitungsreihenfolge vertauscht werden (Gl. 2.66).

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T\right)^{T_{24}} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{T_{24}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} &= \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{F}}^T\right)^{T_{24}} \\ &= \left(\left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T\right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}}\right)^{T_{24}} \end{aligned}$$

Die Übertragung eines symmetrischen Anteils eines allgemeinen Tensors $\underline{\underline{Z}}$ läßt eine Besonderheit des Tensors $\left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T\right)^{T_{24}}$ erkennen. Entscheidend dabei ist, daß die Übertragung mit $\underline{\underline{F}}$ und $\underline{\underline{F}}^T$ die Symmetrie erhält. Mit Hilfe von Gleichung 2.57 kann zunächst gefolgert werden:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Z}} \neq \underline{\underline{Z}}^T \quad \text{aber:} \quad \underline{\underline{Z}}^S &= \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} = \underline{\underline{Z}}^S \\ \Rightarrow \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Z}}^S \cdot \underline{\underline{F}}^T &= \underline{\underline{F}} \cdot \left(\underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)}\right) \cdot \underline{\underline{F}}^T = \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{F}}^T\right)^T \end{aligned}$$

Gemäß Gleichung 2.69 folgt für diesen symmetrischen Tensor $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Z}}^S \cdot \underline{\underline{F}}^T$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \left(\underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)}\right) \cdot \underline{\underline{F}}^T &= \left(\underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)}\right) \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} \\ &= \underline{\underline{Z}} \cdot \left\{ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} \right\} \end{aligned}$$

Aus der Tatsache, daß dieser Tensor bei beliebigem $\underline{\underline{Z}}$ stets symmetrisch ist, folgt offenbar, daß die geschweifte Klammer stets (3,4)-symmetrisch ist. Bei der geschweiften Klammer handelt es sich aber lediglich um den (1,2)-symmetrisierten Tensor $\left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T\right)^{T_{24}}$. Eine (1,2)-Symmetrisierung des vollständig unsymmetrischen Tensors $\left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}}$ bewirkt also automatisch auch eine (3,4)-Symmetrie dieses Tensors. Diese Besonderheit ist allerdings nur für den speziellen Fall zweier zueinander transponierter Tensoren möglich, wie eine Kontrollrechnung zeigt.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{bc} \cdot \underline{\underline{F}}\right) \circ \underline{\underline{j}}_{cb} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{F}}^T\right) \cdot \underline{\underline{j}}^3 \\ &= \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} = \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}}\right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \end{aligned}$$

Derartige (1,2)- und (3,4)-symmetrisierte Varianten eines $\left(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{T_{24}}$ -Tensors werden in der Folge mit $\left(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{S_{24}}$ bezeichnet.

$$\left(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \quad (2.70)$$

Für die Übertragung eines symmetrischen Tensors $\underline{\underline{\sigma}}$ muß also nicht mit dem vollständig unsymmetrischen Tensor $(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}}$ multipliziert werden, sondern es kann der (1,2)- und (3,4)-symmetrische Tensor $(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{S_{24}}$ verwendet werden.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} = \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}$$

Auch bei einem (1,2)- und (3,4)-symmetrischen Tensor 4. Stufe kann die Übertragung analog vereinfacht werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}} &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \\ \Rightarrow \quad \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{T_{24}} &= \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \end{aligned}$$

Um den Vorteil der symmetrisierten Varianten voll nutzen zu können, werden die Koeffizienten dieser Tensoren zu den neuen Basisdyaden $\underline{\underline{j}}_{a(6)}$ benötigt. Den Symmetrien von $(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}}$ entsprechend sollte eine Definition allein anhand der neuen Basisdyaden $\underline{\underline{j}}_{a(6)}$ gelingen.

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{dc} \cdot \underline{\underline{Y}} \circ \underline{\underline{j}}_{cd} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{X}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{dc} \circ \underline{\underline{j}}_{cd} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{X}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} = \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \end{aligned}$$

Im Falle der Übertragungstensoren vereinfachen sich diese Ausdrücke wegen den diesen Tensoren innewohnenden Symmetrien.

$$\left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten von $(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{S_{24}}$ ermitteln.

$$\left[\underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \right] \quad (\text{z.B. auch}) \quad \left[\left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \right) \cdot \left(\underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{F}} \right) \right] =$$

$$\begin{bmatrix} F_{xx}^2 & F_{yx}^2 & F_{zx}^2 & \sqrt{2} F_{zx} F_{yx} & \sqrt{2} F_{xx} F_{zx} & \sqrt{2} F_{yx} F_{xx} \\ F_{xy}^2 & F_{yy}^2 & F_{zy}^2 & \sqrt{2} F_{zy} F_{yx} & \sqrt{2} F_{xy} F_{zy} & \sqrt{2} F_{yy} F_{xy} \\ F_{xz}^2 & F_{yz}^2 & F_{zz}^2 & \sqrt{2} F_{zz} F_{yz} & \sqrt{2} F_{xz} F_{zz} & \sqrt{2} F_{yz} F_{xz} \\ \sqrt{2} F_{xz} F_{xy} & \sqrt{2} F_{yz} F_{yy} & \sqrt{2} F_{zz} F_{zy} & F_{zz} F_{yx} + F_{yz} F_{zy} & F_{xz} F_{zy} + F_{zz} F_{xy} & F_{yz} F_{xy} + F_{xz} F_{yy} \\ \sqrt{2} F_{xx} F_{xz} & \sqrt{2} F_{yx} F_{yz} & \sqrt{2} F_{zx} F_{zz} & F_{zx} F_{yz} + F_{yx} F_{zz} & F_{xx} F_{zz} + F_{zx} F_{xz} & F_{yx} F_{xz} + F_{xx} F_{yz} \\ \sqrt{2} F_{xy} F_{xx} & \sqrt{2} F_{yy} F_{yx} & \sqrt{2} F_{zy} F_{zx} & F_{zy} F_{yx} + F_{yy} F_{zx} & F_{xy} F_{zx} + F_{zy} F_{xx} & F_{yy} F_{xx} + F_{xy} F_{yx} \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Diese Matrix erhält man z.B., indem man bei der Matrix der $K_{a^{(6)}b^{(6)}}$ als Funktionen der K_{abcd} (s. Gl. 2.60) zunächst bei jedem K_{abcd} die Indexpositionen 2 und 4 vertauscht und danach jedes K_{abcd} durch ein $F_{ba} F_{cd}$ ersetzt.

Die Koeffizientenmatrix von $(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T)^{S_{24}}$ ist die transponierte der vorhergehenden.

$$\left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}\right) \cdot \left(\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}}^T\right) = \left(\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}}^T\right) \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}\right) = \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}\right) \cdot \left(\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}}\right)$$

Solche (1,2)- und (3,4)-symmetrisierten Tensoren $(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}}$ sind nicht nur für Übertragungen von großem Interesse.

2.3.3.3 Symmetrisierte Varianten

Von den 24 Möglichkeiten, zwei Tensoren $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$ zu Tensoren 4. Stufe zu verknüpfen, stimmen jeweils vier in ihren (1,2)- und (3,4)-symmetrisierten Varianten überein. Es verbleiben somit sechs Möglichkeiten, die sich allesamt durch S_{24} -Modifikationen und einfache dyadische Produkte beschreiben lassen.

$$\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}} ; \quad \underline{\underline{Y}} \circ \underline{\underline{X}} ; \quad (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} ; \quad (\underline{\underline{Y}} \circ \underline{\underline{X}})^{S_{24}} ; \quad \left(\underline{\underline{X}}^T \circ \underline{\underline{Y}}\right)^{S_{24}} ; \quad \left(\underline{\underline{Y}} \circ \underline{\underline{X}}^T\right)^{S_{24}} \quad (2.72)$$

Im folgenden werden die mathematischen Eigenschaften der S_{24} -Modifikationen vorgestellt. Wichtig in diesem Zusammenhang ist die Identität:

$$(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{Y}}\right) \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} = \left(\underline{\underline{Y}}^T \circ \underline{\underline{X}}^T\right)^{S_{24}} .$$

Die Verknüpfung zweier Metriktensoren ergibt einen symmetrisierten $\underline{\underline{J}}^3$ -Tensor, den für die neuen Dyaden $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ typischen isotropen Tensor 4. Stufe (vergl. Gl. 2.56).

$$(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{J}}^2 + \underline{\underline{J}}^3 \right)$$

Das Doppelpunktprodukt mit einem Tensor zweiter Stufe ergibt ein symmetrisiertes (einfaches) Produkt der drei beteiligten Tensoren (vergl. Gl. 2.63).

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{Z}} &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{Y}}\right) \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{Z}} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \left(\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{Z}}\right) \cdot \underline{\underline{Y}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \right) \\ \underline{\underline{Z}} \cdot (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \end{aligned}$$

Für einfache Produkte mit Tensoren zweiter Stufe ist ausgehend von Gleichung 2.70 zunächst ein Zwischenschritt mit den Regeln für Produkte mit $\underline{\underline{J}}^2$ (s. Gl. 2.68) nötig:

$$(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} = \frac{1}{4} \left\{ (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{T_{24}} + \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{\underline{Y}}^T + (\underline{\underline{Y}}^T \circ \underline{\underline{X}}^T)^{T_{24}} \right\} .$$

Jetzt können Tensoren von außen einmultipliziert werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{x}} \cdot (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{y}} &= \frac{1}{4} \left\{ (\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{Y}})^{T_{24}} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{y}} + \right. \\ &\quad \left. + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{J}}^2 \cdot \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{y}} + (\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{X}}^T)^{T_{24}} \right\} \end{aligned}$$

Solche Produkte treten in der Regel wiederum in symmetrisierter Form auf.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left\{ \underline{\underline{x}} \cdot (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{y}} \right\} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} &= \\ = \frac{1}{4} \left(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \circ \underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{X}}^T + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \cdot \underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{X}}^T \right)^{S_{24}} \end{aligned}$$

Dabei ist nur der erste Term äquivalent zu dem Ergebnis bei $(\dots)^{T_{24}}$ -Tensoren (vergl. Gl. 2.65).

Mit jedem Tensor, der in diesem Ausdruck durch den Einheitstensor ersetzt wird, erniedrigt sich die Zahl unterschiedlicher Tensoren im Ergebnis. Z.B.:

$$\left\{ (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{y}} \right\} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{Y}} \right)^{S_{24}} .$$

Hingegen ohne Symmetrisierungen: $(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{Y}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{y}} = (\underline{\underline{y}} \circ \underline{\underline{Y}})^{T_{24}} .$

Das Doppelpunktprodukt zweier $(\dots)^{S_{24}}$ -Tensoren ergibt:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{Y}})^{S_{24}} \cdot (\underline{\underline{x}} \circ \underline{\underline{y}})^{S_{24}} &= \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{j}}_{c(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{c(6)} \cdot \left(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{j}}_{d(6)} \cdot \underline{\underline{y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{d(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \left(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{j}}_{d(6)} \cdot \underline{\underline{y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{d(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \left\{ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \left(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{j}}_{d(6)} \cdot \underline{\underline{y}} \right) \right\} \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{d(6)} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{X}} \cdot \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{j}}_{d(6)} \cdot \underline{\underline{y}} + \underline{\underline{y}}^T \cdot \underline{\underline{j}}_{d(6)} \cdot \underline{\underline{x}}^T \right) \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{d(6)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{x}} \circ \underline{\underline{y}} \cdot \underline{\underline{Y}} + \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{y}}^T \circ \underline{\underline{x}}^T \cdot \underline{\underline{Y}} \right)^{S_{24}} \end{aligned} \tag{2.73}$$

Dabei ist wiederum nur der erste Term äquivalent zu dem Ergebnis bei $(\dots)^{T_{24}}$ -Tensoren (vergl. Gl. 2.66). Der zweite Term hingegen enthält ganz neue Produkte. Dementsprechend kann hieraus auch keine vollständige Analogie zu Gleichung 2.67 gewonnen werden. Dazu müßte das Ergebnis einem isotropen Tensor entsprechen, wofür an dieser Stelle nur $\underline{j}_{a(6)} \circ \underline{j}_{a(6)} = (\underline{E} \circ \underline{E})^{S_{24}}$ in Frage kommt. Offensichtlich sind nur die speziellen Fälle, bei denen sowohl \underline{x} also auch \underline{y}^T invers zu \underline{X} und gleichzeitig auch zu \underline{Y}^T sind. Dies entspricht zwei entgegengesetzten Übertragungen.

$$\left(\underline{X} \circ \underline{X}^T\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{X}^{-1} \circ \underline{X}^{T-1}\right)^{S_{24}} = (\underline{E} \circ \underline{E})^{S_{24}} = \underline{j}_{a(6)} \circ \underline{j}_{a(6)}$$

Mit Hilfe von Gleichung 2.73 kann gezeigt werden, daß bei einer Übertragung einer S_{24} -Modifikation wie auch bei derjenigen einer T_{24} -Modifikation die Übertragung in die S_{24} -Klammer hineingezogen werden kann. Dies funktioniert so allerdings nur bei einer Übertragung mit zwei zueinander transponierten Tensoren \underline{F} und \underline{F}^T .

$$\begin{aligned} \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T\right)^{T_{24}} \cdot \left(\underline{X} \circ \underline{Y}\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{T_{24}} &= \\ &= \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{X} \circ \underline{Y}\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{S_{24}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{F} \cdot \underline{X} \circ \underline{Y} \cdot \underline{F}^T + \underline{F} \cdot \underline{Y}^T \circ \underline{X}^T \cdot \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{S_{24}} \\ &= \left(\underline{F} \cdot \underline{X} \circ \underline{Y} \cdot \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{S_{24}} \\ &= \left(\underline{F} \cdot \underline{X} \cdot \underline{F}^T \circ \underline{F} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \\ &= \left(\left(\underline{F} \circ \underline{F}^T\right)^{T_{24}} \cdot \underline{X} \circ \underline{Y} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{T_{24}}\right)^{S_{24}} \end{aligned}$$

Sofern zusätzlich \underline{X} und \underline{Y} symmetrisch sind, können von diesen Tensoren $\underline{j}_{a(6)} \circ \underline{j}_{a(6)}$ -Tensoren abgespalten werden, so daß in diesem Fall die $(\dots)^{T_{24}}$ -Tensoren durch $(\dots)^{S_{24}}$ -Tensoren ersetzt werden dürfen.

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}^T ; \quad \underline{b} = \underline{b}^T \quad \Rightarrow$$

$$\left(\underline{F} \circ \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{\sigma} \circ \underline{b}\right)^{S_{24}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{S_{24}} = \left(\left(\underline{F} \circ \underline{F}^T\right)^{S_{24}} \cdot \underline{\sigma} \circ \underline{b} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F}\right)^{S_{24}}\right)^{S_{24}}$$

Bei symmetrischen Tensoren $\underline{\sigma}$, \underline{b} verbleiben von den 24 Möglichkeiten, zwei Tensoren zu unterschiedlichen Tensoren 4. Stufe zu verknüpfen (s. Gl. 2.62), bzw. den 6 verbleibenden Möglichkeiten (1,2)- und (3,4)-symmetrisierte Tensoren aufzustellen (s. Gl. 2.72), nur noch die drei Möglichkeiten $\underline{\sigma} \circ \underline{b}$, $\underline{b} \circ \underline{\sigma}$ und $(\underline{\sigma} \circ \underline{b})^{S_{24}}$, um unterschiedliche (1,2)- und (3,4)-symmetrische Ergebnisse zu erzeugen. Dementsprechend fallen viele Varianten zusammen.

$$(\underline{\sigma} \circ \underline{b})^{S_{24}} = (\underline{\sigma} \circ \underline{b})^{S_{14}} = (\underline{\sigma} \circ \underline{b})^{S_{13}} = (\underline{\sigma} \circ \underline{b})^{S_{23}} = (\underline{b} \circ \underline{\sigma})^{S_{24}} = \dots$$

Die Koeffizientenmatrix von $(\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}}$ ergibt sich in ähnlicher Weise wie bei $(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{S_{24}}$ (s. S. 38), nur daß hier abschließend die K_{abcd} durch $\sigma_{ab} b_{cd}$ ersetzt werden und schließlich von den σ_{ab} und den b_{cd} zu $\sigma_{a^{(6)}}$ und $b_{b^{(6)}}$ (mit den zugehörigen Faktoren gemäß Gleichung 2.55) übergegangen wird.

$$\left[\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdots (\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} \cdots \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} \sigma_1 b_1 & \frac{\sigma_6 b_6}{2} & \frac{\sigma_5 b_5}{2} & \frac{\sigma_5 b_6 + \sigma_6 b_5}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma_1 b_5 + \sigma_5 b_1}{2} & \frac{\sigma_6 b_1 + \sigma_1 b_6}{2} \\ \frac{\sigma_6 b_6}{2} & \sigma_2 b_2 & \frac{\sigma_4 b_4}{2} & \frac{\sigma_4 b_2 + \sigma_2 b_4}{2} & \frac{\sigma_6 b_4 + \sigma_4 b_6}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma_2 b_6 + \sigma_6 b_2}{2} \\ \frac{\sigma_5 b_5}{2} & \frac{\sigma_4 b_4}{2} & \sigma_3 b_3 & \frac{\sigma_3 b_4 + \sigma_4 b_3}{2} & \frac{\sigma_5 b_3 + \sigma_3 b_5}{2} & \frac{\sigma_4 b_5 + \sigma_5 b_4}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_5 b_6 + \sigma_6 b_5}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma_4 b_2 + \sigma_2 b_4}{2} & \frac{\sigma_3 b_4 + \sigma_4 b_3}{2} & \frac{\sigma_4 b_4 + \sigma_2 b_3 + \sigma_3 b_2}{2} & \left(\frac{\sigma_5 b_4 + \sigma_4 b_5}{4} + \frac{\sigma_6 b_3 + \sigma_3 b_6}{2\sqrt{2}} \right) & \left(\frac{\sigma_4 b_6 + \sigma_6 b_4}{4} + \frac{\sigma_2 b_5 + \sigma_5 b_2}{2\sqrt{2}} \right) \\ \frac{\sigma_1 b_5 + \sigma_5 b_1}{2} & \frac{\sigma_6 b_4 + \sigma_4 b_6}{2\sqrt{2}} & \frac{\sigma_5 b_3 + \sigma_3 b_5}{2} & \left(\frac{\sigma_5 b_4 + \sigma_4 b_5}{4} + \frac{\sigma_3 b_6 + \sigma_6 b_3}{2\sqrt{2}} \right) & \frac{\sigma_5 b_5 + \sigma_3 b_1 + \sigma_1 b_3}{2} & \left(\frac{\sigma_6 b_5 + \sigma_5 b_6}{4} + \frac{\sigma_4 b_1 + \sigma_1 b_4}{2\sqrt{2}} \right) \\ \frac{\sigma_6 b_1 + \sigma_1 b_6}{2} & \frac{\sigma_2 b_6 + \sigma_6 b_2}{2} & \frac{\sigma_4 b_5 + \sigma_5 b_4}{2\sqrt{2}} & \left(\frac{\sigma_4 b_6 + \sigma_6 b_4}{4} + \frac{\sigma_5 b_2 + \sigma_2 b_5}{2\sqrt{2}} \right) & \left(\frac{\sigma_6 b_5 + \sigma_5 b_6}{4} + \frac{\sigma_1 b_4 + \sigma_4 b_1}{2\sqrt{2}} \right) & \frac{\sigma_6 b_6 + \sigma_1 b_2 + \sigma_2 b_1}{2} \end{array} \right] \quad (2.74)$$

Zur Kontrolle kann hier durch $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{E}}$ der Tensor $(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdots \left(\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}$ erzeugt werden, dessen Koeffizienten $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdots \left(\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) = \underline{\underline{b}} \cdots \left(\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \right)$ bereits in Gleichung 2.61 angegeben sind.

Wird schließlich ein symmetrischer Tensor mit sich selbst zu Tensoren 4. Stufe verknüpft, ergeben sich nur noch 3 unabhängige Möglichkeiten, und bei der Beschränkung auf (1,2)- und (3,4)-symmetrische Ergebnisse reduziert sich die Zahl weiter auf 2, nämlich:

$$\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}} \quad \text{und} \quad (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underbrace{\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}}}_{\text{sym.}} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}^T$$

2.4 Ellipsoidrepräsentationen von Tensoren

Bei der Nachbildung belastungsinduzierter Änderungen von Materialeigenschaften, wie zum Beispiel bei den für viele Materialklassen charakteristischen Entfestigungs- und Verfestigungsvorgängen, muß die Entwicklung geeignet gewählter Kenngrößen während des Belastungsvorgangs verfolgt werden. Häufig werden hierfür skalare Kenngrößen, wie zum Beispiel eine Verzerrungsinvariante oder eine spezifische Energiedichte, genutzt und die entsprechende Materialeigenschaft wird dementsprechend isotrop modelliert (z.B. bei Besdo 1981,

Simo 1987, Miehe 1995, Besdo & Ihlemann 1996, Ogden & Roxburgh 1999 oder Nasdala 2000). Anhand der Entwicklung der Kenngröße wird wiederum der aktuelle Wert der zu beschreibenden Größe, also z.B. der aktuelle Entfestigungs- oder Verfestigungsgrad, berechnet. Hierfür wird häufig ein einfaches Maximum aller Werte der Kenngröße in der Vorgeschichte berechnet (z.B. bei Holzapfel et al. 1999, Kaliske & Rothert 1999 oder Ihlemann 2003a). Es finden sich aber auch Ansätze mit komplizierteren Evolutionsgleichungen (z.B. bei Miehe 1995, Govindjee & Simo 1992), mit denen beispielsweise eine Erholung von den Einflüssen weit zurückliegender Belastungsphasen nachgebildet werden kann. Die isotrope Nachbildung mit Hilfe skalarer Kenngrößen stellt sich allerdings in wichtigen Fällen als zu ungenaue Näherung heraus (Mullins 1948, Lion 1996, Pawelski 1998, Muhr et al. 1999). Für eine entsprechende Erweiterung der Materialmodelle um die Richtungsinformationen zurückliegender Belastungen muß somit zu tensoriellen Geschichtsvariablen übergegangen werden. Um die Maximalwertbildung als den einfachsten Fall einer Evolutionsgleichung für solche Tensoren übernehmen zu können, muß zunächst die Maximumfunktion für Tensoren mindestens zweiter Stufe derart vereinbart werden, daß die Richtungsinformationen der einzelnen Argumente sich in geeigneter Art und Weise auf den Ergebnistensor einer solchen Funktion auswirken. Diese Aufgabe ist keineswegs trivial.

Maximum- und Minimumfunktion basieren auf den Ordnungsrelationen $<$, $>$. Somit bietet es sich an, mit der Verallgemeinerung auf tensorielle Argumente bei diesen Relationen anzusetzen und zu überprüfen, ob eine physikalisch sinnvolle und gleichzeitig zweckdienliche Definition gefunden werden kann. Dies gelingt mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen der beteiligten Tensoren. Mit der Bewältigung dieser Aufgabenstellung an dieser Stelle wird ein vielseitiges und weitreichendes Werkzeug zur Nachbildung anisotrop belastungsinduzierter Effekte verfügbar.

2.4.1 Positiv definite Formen

Für den Vergleich von Tensoren in Abschnitt 2.4.2.3 sind spezielle Eigenschaften sogenannter positiv definiten Formen wichtig. Zur Untersuchung richtungsspezifischer Eigenschaften von Tensoren 2. Stufe werden Einsvektoren \underline{n} ($\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$) beliebiger Ausrichtung herangezogen. Die wichtige Gruppe der sogenannten positiv definiten Tensoren ist durch die Eigenschaft:

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n}$$

gekennzeichnet. Häufig wird diese Bezeichnung nur auf symmetrische Tensoren angewandt (z.B. Bronstein et al. (1995)). Da aber, wie noch gezeigt werden wird, bei den symmetrischen Tensoren diese Eigenschaft äquivalent zu dem Merkmal ausschließlich positiver Eigenwerte ist, bietet sich eine Erweiterung des Begriffs positiv definit zumindest auf die größere Gruppe der symmetrisierbaren Tensoren (vergl. Abschnitt 2.2.5) an. Dementsprechend wird hier verfahren.

Das charakteristische Produkt $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ eines positiv definiten Tensors \underline{X} mit den Vektoren \underline{n} wird auch als *positiv definite Form* bezeichnet (Bronstein et al. 1995).

Von besonderer Bedeutung ist der präzise Zusammenhang zwischen positiv definiten Formen und dem möglichen Wertebereich der zugehörigen Tensoreigenwerte. Das Resultat dieser Untersuchung ist schließlich Gleichung 2.77.

Bei durchgehend positiven Eigenwerten X_K eines symmetrisierbaren Tensors \underline{X} gilt z.B. für alle rechtsseitigen Eigenrichtungen \underline{g}_K von \underline{X} :

$$\underline{X} \cdot \underline{g}_K = X_K \underline{g}_K \quad \Rightarrow \quad \underline{g}_K \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}_K = X_K |\underline{g}_K|^2 \quad .$$

Hieran wird ersichtlich, daß (zumindest) alle symmetrisierbaren positiv definiten Tensoren ausschließlich positive Eigenwerte aufweisen.

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad \Rightarrow \quad X_K > 0 \quad \forall K$$

Der Umkehrschluß gilt allerdings nicht: Bei einem symmetrisierbaren Tensor spannen sowohl die links- als auch die rechtsseitigen Eigenvektoren den gesamten dreidimensionalen Raum auf (s. Abschnitt 2.2.5). Jeder beliebige Vektor \underline{n} läßt sich also als Linearkombination von Eigenvektoren auffassen.

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} = n^L \underline{g}_L \cdot \underline{X} \cdot n^K \underline{g}_K$$

Zwar ist der Teil dieser Summe, der aus den Summanden mit $K = L$ besteht, stets positiv, es existieren aber auch Summanden mit $K \neq L$, da $\underline{g}_K \cdot \underline{g}_L$ nicht unbedingt verschwindet. Dies tritt erst beim Sonderfall symmetrischer Tensoren ein (s. Gl. 2.52).

Nicht verschwindende Summanden mit $K \neq L$ können zwar ausgeschlossen werden, indem sowohl links- als auch rechtsseitige Eigenvektoren von \underline{X} verwendet werden, um die Vektoren \underline{n} darzustellen (Gl. 2.46):

$$\underline{X} \cdot \underline{g}_K = X_K \underline{g}_K \quad \Rightarrow \quad \underline{g}^L \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}_K = X_K \delta^K_L \quad ,$$

Für die Form $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ ergibt sich damit:

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} = n_L \underline{g}^L \cdot \underline{X} \cdot n^K \underline{g}_K = n_K n^K X_K \quad .$$

Aber auch dies ist nicht unbedingt positiv, denn die Ausdrücke $n_K n^K$ sind keine Quadrate. Stattdessen sind n^K und n_K Produkte des Vektors \underline{n} mit im allgemeinen nicht parallelen Vektoren \underline{g}_K und \underline{g}^K .

Tatsächlich gibt es Konstellationen, in denen eine Form $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ einen negativen Wert ergibt, obwohl alle Eigenwerte von \underline{X} positiv sind. Dies wird im Rahmen des konkreten Zahlenbeispiels auf Seite 51 belegt. Im folgenden (bis zur Gleichung 2.76) wird zusätzlich anhand eines komplexeren, eine große Gruppe von Tensoren einbeziehenden Beispiels gezeigt, daß die belegte Situation – nicht positiv definit trotz durchgehend positiver Eigenwerte – nicht nur ein extremer Sonderfall ist. Anstelle eines Einsvektors \underline{n} wird in diesem Beispiel ein Vektor \underline{w} mit von Eins abweichender Länge verwendet. Diese Substitution hat keinen Einfluß auf die entscheidende Frage, ob $\underline{w} \cdot \underline{X} \cdot \underline{w}$ negativ sein kann, da die Länge von \underline{w} in diese Form quadratisch eingeht.

$$\underline{w} = \underline{g}_{\text{II}} + \underline{g}^{\text{II}} \quad \text{mit:} \quad \underline{g}_{\text{III}} \perp \underline{g}_{\text{I}} \quad \text{und} \quad \underline{g}_{\text{III}} \perp \underline{g}_{\text{II}} \quad \text{aber} \quad \underline{g}_{\text{I}} \cdot \underline{g}_{\text{II}} \neq 0 \quad . \quad (2.75)$$

Für das Produkt $w_I w^I$ (vergl. Gl. 2.75) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} w_I w^I &= (\underline{w} \cdot \underline{g}_I) (\underline{w} \cdot \underline{g}^I) = \left((\underline{g}_{II} + \underline{g}^{II}) \cdot \underline{g}_I \right) \left((\underline{g}_{II} + \underline{g}^{II}) \cdot \underline{g}^I \right) \\ &= \underbrace{(\underline{g}_{II} \cdot \underline{g}_I + \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}_I)}_0 \underbrace{(\underline{g}_{II} \cdot \underline{g}^I + \underline{g}^{II} \cdot \underline{g}^I)}_0 \quad . \end{aligned}$$

Der Term $\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}^I$ ist eingehender zu untersuchen. Zunächst folgt gemäß Gleichung 2.5:

$$\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}^I = \frac{\underline{g}_{III} \times \underline{g}_I}{\underline{g}_{II} \cdot (\underline{g}_{III} \times \underline{g}_I)} \cdot \frac{\underline{g}_{II} \times \underline{g}_{III}}{\underline{g}_I \cdot (\underline{g}_{II} \times \underline{g}_{III})} \quad .$$

Mit Hilfe der Lagrangeschen Identität (Gl. 2.41) folgt daraus:

$$\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}^I = \frac{(\underline{g}_{III} \cdot \underline{g}_{II}) (\underline{g}_I \cdot \underline{g}_{III}) - (\underline{g}_{III} \cdot \underline{g}_{III}) (\underline{g}_I \cdot \underline{g}_{II})}{(\underline{g}_I \cdot (\underline{g}_{II} \times \underline{g}_{III}))^2} \quad .$$

Unter den oben genannten Voraussetzungen gilt $\underline{g}_{III} \cdot \underline{g}_{II} = 0$ und damit zeigt sich, daß in diesem Beispielfall $w_I w^I$ negativ ist.

$$\Rightarrow w_I w^I = (\underline{g}_{II} \cdot \underline{g}_I) (\underline{g}^{II} \cdot \underline{g}^I) = -\underline{g}_{III} \cdot \underline{g}_{III} \left(\frac{\underline{g}_I \cdot \underline{g}_{II}}{\underline{g}_I \cdot (\underline{g}_{II} \times \underline{g}_{III})} \right)^2 < 0$$

Wenn nun noch der Eigenwert X_I deutlich größer als die beiden anderen Eigenwerte ist (aber dennoch alle drei positiv), fällt tatsächlich die Form $\underline{w} \cdot \underline{X} \cdot \underline{w}$ (vergl. Gl. 2.75) trotz durchgehend positiver Eigenwerte von \underline{X} negativ aus. Bei symmetrischen Tensoren ist dies hingegen - wie bereits belegt - ausgeschlossen. Dies zeigt sich am gewählten Beispiel darin, daß bei einem symmetrischen Tensor stets $\underline{g}_I \cdot \underline{g}_{II} = 0$ gilt und somit das Produkt $w_I w^I$ ebenfalls verschwindet.

Es gilt also nur für symmetrische Tensoren mit $\underline{e}_A \cdot \underline{X}^S = \underline{X}_A^S \underline{e}_A$ eine Äquivalenzbeziehung der Form:

$$\underline{X}_A^S > 0 \quad \forall A \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{X}^S \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad . \quad (2.76)$$

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß positiv definite Tensoren stets durchgehend positive Eigenwerte aufweisen. Umgekehrt sind zumindest symmetrische Tensoren mit durchgehend positiven Eigenwerten stets positiv definit. Unsymmetrische Tensoren sind hingegen selbst bei durchgehend positiven Eigenwerten nicht in jedem Fall positiv definit.

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow X_I > 0 \quad ; \quad X_{II} > 0 \quad ; \quad X_{III} > 0 \\ X_I > 0 \quad ; \quad X_{II} > 0 \quad ; \quad X_{III} > 0 &\not\Rightarrow \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Über diese Erkenntnisse hinaus, sind für die nachfolgenden Abschnitte einige mathematische Eigenschaften positiver definiter Tensoren wichtig. Insbesondere ist von Bedeutung, welche

Auswirkungen positiv definite Tensoren als Argumente von Operationen (Summen, Produkte) auf das Ergebnis der jeweiligen Operation haben. Diese Untersuchungen, die viele wichtige Zwischenergebnisse umfassen, führen schließlich zu den Relationen 2.86, in denen die Ergebnisse für Produkte zusammenfaßt sind.

Die Summe von positiv/negativ definiten Tensoren ist wiederum positiv/negativ definit.

$$\underline{n} \cdot (a^2 \underline{\underline{X}} + b^2 \underline{\underline{Y}}) \cdot \underline{n} = a^2 \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} + b^2 \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n}$$

Ist ein Tensor $\underline{\underline{X}}$ positiv/negativ definit, so gilt dies auch für den transponierten Tensor und damit auch für den symmetrischen Anteil von $\underline{\underline{X}}$, denn:

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} &= \underline{n} \cdot (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{n}) = (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{n} = (\underline{n} \cdot \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{n} \\ \Rightarrow \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} &= \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{n} \quad . \end{aligned}$$

Demnach liefern antisymmetrische Tensoren in einem zweifachen Produkt mit einem Vektor somit immer den Wert Null. Im einfachen Produkt mit einem Vektor liefert ein antisymmetrischer Tensor somit immer entweder den Nullvektor oder einen zum Ausgangsvektor senkrechten Ergebnisvektor.

$$\underline{n} \cdot \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{n} = \underline{n} \circ \underline{n} \cdot \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}}^T) = 0 \quad \forall \underline{n}$$

Ist ein Tensor $\underline{\underline{X}}$ positiv/negativ definit, so gilt dies (wie oben gezeigt) auch für seinen symmetrischen Anteil. Auch der Rückschluß ist gültig.

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n} \cdot \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}}^T) \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \quad (2.78)$$

Gemäß Gleichung 2.76 existiert somit die im Gegensatz zu den Relationen 2.77 vollständige Äquivalenzbeziehung (mit den Eigenwerten des symmetrischen Anteils von $\underline{\underline{X}}$):

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad \Leftrightarrow \quad \overset{S}{X}_I > 0 \quad ; \quad \overset{S}{X}_{II} > 0 \quad ; \quad \overset{S}{X}_{III} > 0 \quad . \quad (2.79)$$

Für die Untersuchung der Produkte von positiv definiten Tensoren sind wiederum Vorarbeiten bezüglich der Invarianten solcher Tensoren notwendig. Zunächst ist zu zeigen, welche Charakteristika der Hauptinvarianten einen Tensor mit durchgehend positiven Eigenwerten anzeigen. Die drei Eigenwerte seien an dieser Stelle zugunsten der Übersichtlichkeit mit den Buchstaben A , B und C bezeichnet.

Sind die drei Eigenwerte durchgehend größer als Null sind, so gilt dies auch für die drei Hauptinvarianten.

$$\left. \begin{matrix} A > 0 \\ B > 0 \\ C > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} I_1 = A + B + C > 0 \\ I_2 = AB + BC + CA > 0 \\ I_3 = ABC > 0 \end{matrix} \right.$$

Neben den nun verfügbaren Eigenschaften der Invarianten werden weitergehende Erkenntnisse über bestimmte Koeffizientendarstellungen benötigt.

Werden bei der Form $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ anstelle der normierten \underline{n} -Vektoren andere Vektoren \underline{v} beliebiger (aber nicht verschwindender) Länge eingesetzt, so geht die Länge dieser Vektoren quadratisch in das Ergebnis ein. Dies ändert also keinesfalls etwas an der Eigenschaft der positiven/negativen Definitheit.

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} \cdot \underline{X} \cdot \underline{v} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0}$$

Da dies somit für alle Vektoren \underline{v} gilt, gilt es auch für alle denkbaren Basisvektoren \underline{e}_a , \underline{g}_i und \underline{g}^i . Daraus wird ersichtlich, daß in jeder beliebigen einheitlich indizierten Darstellung (beide Indizes oben oder beide unten) eines positiv/negativ definiten Tensors alle Hauptdiagonalelemente positiv/negativ definit sind, obwohl es sich hierbei keineswegs um Invarianten des Tensors handeln muß.

$$\underline{v} \cdot \underline{X} \cdot \underline{v} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{v} \neq \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{e}_a \cdot \underline{X} \cdot \underline{e}_a = X_{aa} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 & \forall \underline{e}_a \\ \underline{g}_i \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}_i = X_{ii} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 & \forall \underline{g}_i \\ \underline{g}^i \cdot \underline{X} \cdot \underline{g}^i = X^{ii} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 & \forall \underline{g}^i \end{cases} \quad (2.82)$$

Weiterhin können anstelle der Vektoren \underline{v} auch Vektoren $\underline{w} \cdot \underline{Y}$ ($\forall \underline{w}$) verwendet werden. Um dabei die Allgemeingültigkeit zu erhalten, muß \underline{Y} invertierbar sein ($I_3(\underline{Y}) \neq 0$). Dann gehört über $\underline{w} \cdot \underline{Y} = \underline{v}$ zu jedem \underline{w} ein \underline{v} und über $\underline{v} \cdot \underline{Y}^{-1} = \underline{w}$ auch zu jedem \underline{v} ein (nicht verschwindender) Vektor \underline{w} .

$$\left. \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \\ I_3(\underline{Y}) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (\underline{w} \cdot \underline{Y}) \cdot \underline{X} \cdot (\underline{w} \cdot \underline{Y}) \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{w} \neq \underline{0} \\ \underline{w} \cdot (\underline{Y} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}^T) \cdot \underline{w} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{w} \neq \underline{0} \end{array} \quad (2.83)$$

Wird hingegen die quadratische Form nicht mit Null, sondern mit einem anderen Wert $s \neq 0$ verglichen, so muß die Länge der Vektoren $\underline{w} \cdot \underline{Y}$ berücksichtigt werden.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s \quad \forall \underline{n} \\ I_3(\underline{Y}) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\underline{w} \cdot (\underline{Y} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Y}^T) \cdot \underline{w}}{\underline{w} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Y}^T \cdot \underline{w}} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s \quad \forall \underline{w} \neq \underline{0}$$

Wird insbesondere für \underline{Y} ein Orthogonaltensor $\underline{Q} = \underline{Q}^{T^{-1}}$ verwendet, so sind die Vektoren $\underline{n} \cdot \underline{Q}$ wiederum Einsvektoren. Folglich sind diese Vektoren in ihrer Gesamtheit identisch mit den Vektoren \underline{n} . Somit gilt für beliebige verdrehte Tensoren und beliebige Zahlen s :

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s \quad \forall \underline{n} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{n} \cdot (\underline{Q} \cdot \underline{X} \cdot \underline{Q}^T) \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} s \quad \forall \underline{n} \quad .$$

Die Gleichung 2.83 läßt auch Rückschlüsse auf den inversen Tensor zu, indem $\underline{Y} = \underline{X}^{-1}$ verwendet wird. Daraus folgt, daß der zu einem positiv/negativ definiten Tensor inverse Tensor stets ebenfalls positiv/negativ definit ist.

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} & \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{X}^{T^{-1}} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \\ & \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{X}^{-1} \cdot \underline{n} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \forall \underline{n} \end{aligned}$$

Auch die Hauptdiagonalelemente aller einheitlich indizierten Koeffizientenmatrizen des zu einem positiv definiten Tensor inversen Tensors sind also stets positiv (vergl. Gl. 2.82). Anhand dieses Befundes kann eine zusätzliche Aussage über die Unterdeterminanten zu den Hauptdiagonalelementen belegt werden.

$$\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}^{-1} = \underline{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad X^{ij} (\underline{g}_j \cdot \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{g}_k) = \delta^i_k \quad \Rightarrow \quad [X^{ij}]^{-1} = [\underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{g}_j]$$

Gemäß der Adjunktenregel zur Inversion einer Matrix entsprechen somit die Hauptdiagonalelemente der Matrix der unten indizierten Koeffizienten des inversen Tensors den zugehörigen Hauptunterdeterminanten der oben indizierten Koeffizienten des Argumenttensors geteilt durch die Determinante der gleichen Matrix.

$$\underline{g}_i \cdot \underline{\underline{X}}^{-1} \cdot \underline{g}_i = \frac{\text{Udet}(X^{ii})}{\det [X^{jk}]}$$

mit: $\text{Udet}(X^{ii}) = X^{jj} X^{kk} - X^{jk} X^{kj}$ mit: $i \neq j \neq k \neq i$

Die Determinante $\det [X^{jk}]$ entspricht zwar nicht der dritten Hauptinvarianten von $\underline{\underline{X}}$, stimmt aber mit dieser im Vorzeichen überein, da sie sich lediglich um $\det [E_{ik}] = (\det [E_{ia}])^2$ von dieser unterscheidet.

In der Zusammenfassung ergibt sich nun: Ist ein Tensor positiv/negativ definit, so ist er invertierbar und der inverse Tensor ist gleichermaßen positiv/negativ definit. Dabei entspricht jede Koeffizientenmatrix in einheitlicher Indizierung des inversen Tensors der invertierten Koeffizientenmatrix des Argumenttensors in der jeweils anderen einheitlich indizierten Darstellung. Folglich sind die Hauptdiagonalelemente des inversen Tensors (wie auch die des Argumenttensors) in jeder einheitlich indizierten Darstellung durchweg positiv/negativ. Diese entsprechen aber den jeweiligen Hauptunterdeterminanten des Argumenttensors geteilt durch dessen Gesamtdeterminante, die bei einem positiv/negativ definiten Tensor positiv/negativ ist. Die Hauptunterdeterminanten sind somit sowohl bei einem positiv als auch bei einem negativ definiten Tensor stets alle positiv (Von der Summe, der 2. Hauptinvarianten I_2 , wurde dies schon festgestellt: s.o.).

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} \geq 0 \quad \forall \underline{n} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X_{aa} \geq 0, \text{Udet}(X_{aa}) > 0 \quad \forall a; & \det [X_{bc}] \geq 0 \\ X_{ii} \geq 0, \text{Udet}(X_{ii}) > 0 \quad \forall i; & \det [X_{jk}] \geq 0 \\ X^{ii} \geq 0, \text{Udet}(X^{ii}) > 0 \quad \forall i; & \det [X^{jk}] \geq 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

Damit sind alle Voraussetzungen geschaffen, um Rückschlüsse auf Produkte symmetrischer positiv/negativ definiten Tensoren zu ziehen.

Die Vektoren \underline{e}_A seien die Eigenvektoren eines symmetrischen Tensors $\underline{\underline{X}}$.

$$\underline{\underline{X}} = X_{\underline{A}} \underline{e}_A \circ \underline{e}_A = \underline{\underline{X}}^T \quad \Rightarrow \quad [X_{AB}] = \begin{bmatrix} X_{\text{I}} & 0 & 0 \\ 0 & X_{\text{II}} & 0 \\ 0 & 0 & X_{\text{III}} \end{bmatrix}$$

Das Produkt $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}}$ mit einem ebenfalls symmetrischen Tensor $\underline{\underline{Y}}$ hat dann die Koeffizientenmatrix:

$$[Z_{AB}] = \begin{bmatrix} X_{\text{I}} Y_{XX} & X_{\text{II}} Y_{XY} & X_{\text{III}} Y_{XZ} \\ X_{\text{I}} Y_{YX} & X_{\text{II}} Y_{YY} & X_{\text{III}} Y_{YZ} \\ X_{\text{I}} Y_{ZX} & X_{\text{II}} Y_{ZY} & X_{\text{III}} Y_{ZZ} \end{bmatrix} .$$

Die Vorzeichen der Hauptdiagonalelemente, Hauptunterdeterminanten und der Determinante dieser Matrix sind festgelegt, wenn $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$ beide positiv definit sind.

$$\begin{aligned} Z_{AA} &= X_A Y_{AA} \\ \text{Udet}(Z_{AA}) &= X_B X_C \text{Udet}[Y_{AA}] \quad \text{mit: } A \neq B \neq C \neq A \quad (2.85) \\ \det[Z_{AB}] &= X_A X_B X_C \det[Y_{AB}] \end{aligned}$$

Sind beide Tensoren positiv definit oder beide negativ definit, so sind sowohl Z_{AA} als auch $\text{Udet}(Z_{AA})$ und auch $\det[Z_{AB}]$ positiv. Ist hingegen einer der beiden Tensoren $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$ positiv und der andere negativ definit, so sind Z_{AA} und $\det[Z_{AB}]$ negativ, während $\text{Udet}(Z_{AA})$ auch in diesem Fall positiv ist. Diesen Vorzeichenkonstellationen kann allerdings nicht entnommen werden, daß das Produkt $\underline{\underline{Z}}$ positiv bzw. negativ definit ist, da die Relation 2.84 keine Äquivalenzbeziehung ist, sondern nur Rückschlüsse in einer Richtung zuläßt. Sicher ableiten lassen sich hingegen die Vorzeichen der Hauptinvarianten von $\underline{\underline{Z}}$, die jeweils den Summen der drei in Gleichung 2.85 dargestellten Größen entsprechen (Vorzeichen von a und b steuern die verschiedenen Kombinationen von positiv/negativ definit).

$$\left. \begin{array}{l} a \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ b \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a b I_1 \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}} \right) > 0 \\ I_2 \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}} \right) > 0 \\ a b I_3 \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}} \right) > 0 \end{cases}$$

Mit den Relationen 2.80 und 2.81 folgt schließlich, daß $\underline{\underline{Z}}$ ausschließlich positive Eigenwerte hat, wenn $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$ beide symmetrisch und beide positiv oder beide negativ definit sind. Ist hingegen einer der beiden symmetrischen Tensoren positiv und der andere negativ definit, so hat $\underline{\underline{Z}}$ ausschließlich negative Eigenwerte.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Y}} \quad \text{mit: } \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^T \quad \text{und: } \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{Y}}^T \quad \Rightarrow \\ \begin{aligned} \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} > 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow Z_{\text{I}} > 0, \quad Z_{\text{II}} > 0, \quad Z_{\text{III}} > 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} < 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n} < 0 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow Z_{\text{I}} > 0, \quad Z_{\text{II}} > 0, \quad Z_{\text{III}} > 0 \quad (2.86) \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} > 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n} < 0 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow Z_{\text{I}} < 0, \quad Z_{\text{II}} < 0, \quad Z_{\text{III}} < 0 \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{n} < 0, \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow Z_{\text{I}} < 0, \quad Z_{\text{II}} < 0, \quad Z_{\text{III}} < 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

Positiv oder negativ definit ist das Produkt $\underline{\underline{Z}}$ damit allerdings nur dann sicher, wenn $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$ identische Eigenrichtungen haben und damit $\underline{\underline{Z}}$ ebenfalls symmetrisch ist. Ansonsten läßt sich nur die Symmetrisierbarkeit von $\underline{\underline{Z}}$ feststellen.

Das folgende Beispiel (bis Gl. 2.87) beweist, daß $\underline{\underline{Z}}$ nicht positiv definit sein muß.

$$[X_{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad [Y_{AB}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

mit: $I_1(\underline{\underline{Y}}) = 7$; $I_2(\underline{\underline{Y}}) = 11$; $I_3(\underline{\underline{Y}}) = 5$
 und dementsprechend: $Y_{I,II} = 1$; $Y_{III} = 5$

Beide Tensoren sind somit symmetrisch und positiv definit. Für das Produkt $\underline{\underline{Z}} = \underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{X}}$ ergibt sich:

$$[Z_{AB}] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

mit: $I_1(\underline{\underline{Z}}) = 25$; $I_2(\underline{\underline{Z}}) = 59$; $I_3(\underline{\underline{Z}}) = 35$
 und dementsprechend: $Z_I = 1$; $Z_{II,III} = 12 \pm \sqrt{109}$.

Somit sind die Eigenwerte wie erwartet durchgehend positiv. Um zu zeigen, daß $\underline{\underline{Z}}$ tatsächlich nicht positiv definit ist, wird der symmetrische Anteil berechnet. Dieser ist in gleicher Weise wie $\underline{\underline{Z}}$ selbst positiv definit oder nicht. Beim symmetrischen Anteil ist positiv definit aber gleichbedeutend mit durchgehend positiven Eigenwerten.

$$\left[\begin{matrix} S \\ \underline{\underline{Z}}_{AB} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 21 \end{bmatrix}$$

mit: $I_1\left(\begin{matrix} S \\ \underline{\underline{Z}} \end{matrix}\right) = 25$; $I_2\left(\begin{matrix} S \\ \underline{\underline{Z}} \end{matrix}\right) = 23$; $I_3\left(\begin{matrix} S \\ \underline{\underline{Z}} \end{matrix}\right) = -1$
 und dementsprechend: $\overset{S}{Z}_I = 1$; $\overset{S}{Z}_{II,III} = 12 \pm \sqrt{145}$

Hier ist nun der kleinste Eigenwert negativ.

$$\overset{S}{Z}_{III} = 12 - \sqrt{145} = \sqrt{144} - \sqrt{145}$$

Der zugehörige Eigenvektor v_{III} hat die Koeffizienten (nicht normiert):

$$[v_{III} \cdot e_A] = \left[23 - \sqrt{145} ; 0 ; -44 + 4\sqrt{145} \right] .$$

Mit diesem Vektor liefert nun auch $\underline{\underline{Z}}$ selbst (der unsymmetrische Ausgangstensor) im Produkt $v_{III} \cdot \underline{\underline{Z}} \cdot v_{III}$ das gleiche negative Ergebnis wie $\overset{S}{Z}$, nämlich $v_{III} \cdot v_{III} \overset{S}{Z}_{III}$. Auch bei dem sehr ähnlich ausgerichteten (numerisch handlicheren) Vektor w :

$$[w_A] = [5 ; 0 ; 2]$$

ergibt sich für die Form $\underline{w} \cdot \underline{Z} \cdot \underline{w}$ ein negatives Ergebnis.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & [5 \ 0 \ 2] [11 \ 0 \ -28] [-1] \end{aligned} \quad (2.87)$$

Somit beweist dieses Beispiel, daß einerseits ein Tensor mit durchgehend positiven Eigenwerten (\underline{Z}) nicht immer positiv definit ist, und daß andererseits das Produkt zweier symmetrischer positiv definiten Tensoren nicht in jedem Fall ebenfalls positiv definit ist!

Eine Erweiterung erfahren die Aussagen der Relationen 2.77 und 2.79 durch die Betrachtung des möglichen Wertebereichs einer Form $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$.

$$\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \rightarrow \text{Extr.} \quad ; \quad \text{Nebenbed.:} \quad \underline{n} \cdot \underline{n} = 1$$

Die Nebenbedingung wird mit Hilfe eines Lagrangeschen Parameters in die Extremalaufgabe integriert.

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial n_a} \left\{ \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} - \lambda (\underline{n} \cdot \underline{n} - 1) \right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall a$$

Nur \underline{n} hängt von den Koeffizienten n_a ab.

$$\frac{\partial \underline{n}}{\partial n_a} = \frac{\partial n_b e_b}{\partial n_a} = e_a$$

Folglich ergibt die Ableitung:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \underline{e}_a \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} + \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{e}_a - 2 \lambda \underline{e}_a \cdot \underline{n} \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall a \\ \Rightarrow \quad & \underline{e}_a \cdot \left[\left\{ \frac{1}{2} (\underline{X} + \underline{X}^T) - \lambda \underline{E} \right\} \cdot \underline{n} \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall a \quad . \end{aligned}$$

Somit führt die Suche nach den Richtungen, in denen $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ extreme Werte annimmt, auf das Eigenwertproblem für den symmetrischen Anteil von \underline{X} .

$$\Rightarrow \quad \left\{ \frac{1}{2} (\underline{X} + \underline{X}^T) - \lambda \underline{E} \right\} \cdot \underline{n} \stackrel{!}{=} 0$$

Die extremen Werte von $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ finden sich also in den Eigenrichtungen des symmetrischen Anteils von \underline{X} und entsprechen somit den Eigenwerten des symmetrischen Anteils (nicht denen von \underline{X} selbst). Dies kann kaum überraschen, da bereits bekannt ist, daß der antisymmetrische Anteil keinen Einfluß auf das Produkt $\underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n}$ hat.

$$\min \left(\overset{S}{\underline{X}}_K \right) \leq \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \leq \max \left(\overset{S}{\underline{X}}_K \right) \quad \forall \underline{n}$$

Für den inversen Tensor kann hieraus im allgemeinen Fall nicht auf den Wertebereich von $\underline{n} \cdot \underline{X}^{-1} \cdot \underline{n}$ gefolgert werden, da Symmetrisierung und Invertierung nicht frei vertauschbar sind.

$$\underline{X} \neq \underline{X}^T \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\underline{X} + \underline{X}^T)^{-1} \neq \frac{1}{2}(\underline{X}^{-1} + \underline{X}^{T-1})$$

Ist aber bereits der Argumententensor symmetrisch (und invertierbar), so gilt:

$$u \leq \underline{n} \cdot \underline{X} \cdot \underline{n} \leq o \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{o} \leq \underline{n} \cdot \left(\underline{X}\right)^{-1} \cdot \underline{n} \leq \frac{1}{u} \quad . \quad (2.88)$$

2.4.2 Ordnungsrelationen

Nach der Bereitstellung der benötigten Grundlagen bezüglich positiv definiter Formen wird im folgenden die zu Beginn von Abschnitt 2.4 auf Seite 42 motivierte Suche nach geeigneten Ordnungsrelation für Tensoren 2. Stufe aufgenommen. Hierfür erweist sich eine Vorabbeachtung der Interpretationsmöglichkeiten von Ordnungsrelationen bei Skalaren und Vektoren als hilfreich.

2.4.2.1 Größenvergleich von Skalaren

Bei skalaren Argumenten können alle denkbaren Vergleiche zwischen zwei Werten auf den (Standard-)Vergleich eines einzelnen Werts mit der Null (neutrales Element der Addition) reduziert werden.

$$a > b \quad \text{wenn} \quad a - b > 0$$

$$a < b \quad \text{wenn} \quad b - a > 0$$

Es reicht also aus, angeben zu können, ob $a - b$ bzw. $b - a$ positiv ist. Damit kann auf weitere Relationen geschlossen werden.

$$a \begin{matrix} > \\ \equiv \\ < \end{matrix} b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a c^2 \begin{matrix} \geq \\ \equiv \\ \leq \end{matrix} b c^2 & \text{sofern } c \neq 0 \\ a + c^2 \begin{matrix} \geq \\ \equiv \\ \leq \end{matrix} b + c^2 \end{cases}$$

Bemerkenswert ist außerdem, daß sich die drei Relationen '<', '=' und '>' gegenseitig ausschließen, aber eine immer zutrifft.

Werden ausschließlich positive Werte behandelt, so kann anstatt des Vergleichs mit 0 als Standardvergleich auch auf den Vergleich mit Eins (neutrales Element der Multiplikation) zurückgegriffen werden.

$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > 1$$

Überdies ergeben sich bei durchgehend positiven Argumenten mannigfaltige Folgerungsmöglichkeiten.

$$a > b > 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 > b^2 \\ \sqrt{a} > \sqrt{b} \\ \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \end{array} \right\} \quad \text{allg. } (r > 0): \quad a^r > b^r \quad ; \quad a^{-r} < b^{-r}$$

2.4.2.2 Größenvergleich von Vektoren

Während eine Definition der Identität von Vektoren keine grundsätzlichen Schwierigkeiten aufwirft (s. Abschnitt 2.1.3), treten bei dem Versuch, aussagekräftige Vergleiche von Vektoren nach ' $<$ ' oder ' $>$ ' aufzustellen, erhebliche Probleme auf. Schon eine eindeutige Zuordnung nach 'positiv' oder 'negativ' ist bei Vektoren nicht gegeben. Auch die einzige Invariante der Vektoren, der Betrag, beinhaltet keine Vorzeicheninformation. Anhand des Betrages können Vektoren allerdings durchaus verglichen werden. Dies ist allerdings nur ein Vergleich von Teilinformationen, da die Richtungen keinerlei Berücksichtigung finden. Einen vollständigen Vergleich bieten die Beträge nur dann, wenn die verglichenen Vektoren parallel sind und die gleiche Orientierung haben.

2.4.2.3 Größenvergleich von Tensoren 2. Stufe

Auch beim Vergleich von Tensoren 2. Stufe ist eine geeignete Einbeziehung der die Argumente charakterisierenden Richtungen das Kernproblem. Allerdings gibt es hier im Gegensatz zu der Situation bei den Vektoren einige Elemente, die intuitiv und ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit als 'positiv' bzw. 'negativ' angesehen werden können. Beispiele hierfür sind der 'positive' Einheitstensor $\underline{\underline{E}}$ und sein negatives Gegenstück $-\underline{\underline{E}}$. Diese Tensoren können nun mit Tensoren unterschiedlicher Eigenrichtungen verglichen werden.

Ähnlich wie beim Vergleich der Beträge von Vektoren könnte man sich auf den Vergleich 'paralleler' Tensoren beschränken. Als 'parallel' könnte man einerseits ausschließlich Tensoren ansehen, die Vielfache voneinander sind, oder symmetrische (oder auch nur symmetrisierbare) Tensoren mit identischen Eigenrichtungen. Ein Tensor könnte dann als größer als ein anderer definiert werden, wenn in jeder Eigenrichtung der zugehörige Eigenwert des größeren Tensors größer als derjenige des kleineren Tensors wäre. Zu beachten ist hier, daß es im Gegensatz zu der Situation bei skalaren Argumenten selbst bei der Beschränkung der Vergleiche auf solche 'parallelen' Tensoren Paarungen gibt, für die weder ' $<$ ' noch ' $>$ ' noch '=' zutrifft. In jedem Fall sollte eine Vereinbarung für die Relation ' $>$ ' gewährleisten, daß jeder Tensor $\underline{\underline{A}}$, der sich lediglich in einem skalaren Faktor f mit $f > 1$ von einem weiteren Tensor $\underline{\underline{B}}$ unterscheidet, als größer als $\underline{\underline{B}}$ definiert ist.

$$\underline{\underline{A}} = f \underline{\underline{B}} \quad \text{mit:} \quad f > 1 \quad \stackrel{!}{\Rightarrow} \quad \underline{\underline{A}} > \underline{\underline{B}} \quad (2.89)$$

Interessanterweise stellen gerade die hydrostatischen Tensoren ein potentielles Bindeglied zwischen Tensoren mit unterschiedlichen Eigenrichtungen dar, da bei den hydrostatischen Tensoren jede Richtung eine Eigenrichtung ist. Auf einem solchen Weg wäre ein Vergleich zwischen zwei Tensoren unterschiedlicher Eigenrichtungen möglich, wenn ein Vergleich mit einem hydrostatischen Tensor zwischengeschaltet wird. Ist zum Beispiel der größte Eigenwert des ersten Tensors kleiner als f , so würde dieser Tensor als kleiner als $f \underline{\underline{E}}$ angesehen werden. Ist wiederum der kleinste Eigenwert des zweiten Tensors größer als f , so wäre dieser größer als $f \underline{\underline{E}}$ und könnte dann auch als größer als der noch kleinere erste Tensor angesehen werden. Unabhängig von den Eigenrichtungen wäre somit ein Tensor größer als ein anderer, wenn der kleinste Eigenwert des ersten größer als der größte des zweiten ist. Bemerkenswerterweise

ist diese Regel in einigen Fällen strenger als die Vielfachen-Regel (z.B. bei der Eigenwertkonstellation: 4, 1, 1 \leftrightarrow 8, 2, 2) und somit mit dieser inkompatibel. Die formulierte Regel ist somit in bestimmten Fällen offensichtlich noch zu streng, da die Erfüllung von Gleichung 2.89 als unabdingbar gelten dürfte. Die Eigenrichtungen müssen einbezogen werden (Auch für die praktische Anwendung (Anisotropietensor) stört die bisherige völlige Unabhängigkeit von der relativen Ausrichtung der Eigenrichtungen).

Die weiteren Betrachtungen werden auf symmetrische und positiv definite Tensoren $\underline{\underline{A}}^S$ und $\underline{\underline{B}}^S$ beschränkt (die damit auch stets invertierbar sind), da allgemeinere Aussagen im Rahmen dieser Arbeit nicht benötigt werden. Mit diesen Beschränkungen soll keineswegs behauptet werden, eine weitergehende Verallgemeinerung sei unmöglich oder sinnlos.

Für eine detailliertere Betrachtung wird mit Hilfe von Einheitsvektoren \underline{n} beliebiger Orientierung (skalare) Information aus den zu vergleichenden Tensoren gezogen (extrahiert). Bei einer Multiplikation der zu vergleichenden Tensoren mit solchen Vektoren entstehen zunächst wiederum Vektoren \underline{w} und \underline{v} .

$$\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S ; \quad \underline{v} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{B}}^S$$

Wenn für einen Vergleich der Tensoren von diesen Vektoren Parallelität verlangt würde, kämen wie beim Vergleich von Vektoren wiederum nur Vielfache Tensoren für Vergleiche in Frage. Da hier aber bei jedem einzelnen Tensor zu jedem der unendlich vielen denkbaren \underline{n} auch ein \underline{w} bzw. \underline{v} gehört, besteht keine Notwendigkeit, die Parallelität der zu einem einzelnen \underline{n} gehörenden Vektoren \underline{w} und \underline{v} zu fordern.

Im folgenden sollen zunächst drei Vereinbarungsalternativen für '>', '<'-Relationen in ihren Auswirkungen untersucht und danach im Vergleich beurteilt werden. Alle drei Vereinbarungsalternativen (A1), (A2) und (A3) sind mit der Vielfachen-Regel in Gleichung 2.89 vereinbar. Bei der Vereinbarungsalternative (A1) werden die Anteile der Vektoren \underline{w} und \underline{v} in Richtung des jeweiligen \underline{n} verglichen. Bei Spannungstensoren wäre dies ein Vergleich der Normalspannungsanteile.

$$(A1) \quad \underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S \quad \text{wenn} \quad \underline{w} \cdot \underline{n} > \underline{v} \cdot \underline{n} \quad \forall \underline{n}$$

Dies entspricht offensichtlich der Forderung, daß die Differenz der beiden Tensoren positiv definit ist.

$$(A1) \quad \underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S \quad \text{wenn} \quad \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S - \underline{\underline{B}}^S \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad (2.90)$$

Statt nur die Längen der Normalanteile zu vergleichen, werden bei der Vereinbarungsalternative (A2) die Längen der vollständigen Vektoren \underline{w} und \underline{v} verglichen.

$$(A2) \quad \underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S \quad \text{wenn} \quad \underline{w} \cdot \underline{w} > \underline{v} \cdot \underline{v} \quad \forall \underline{n}$$

(Bei nicht symmetrischen Tensoren müßte hier unterschieden werden, ob es sich um rechts- oder linksseitige Vektoren handelt. Mit $\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}$ entstünde $\underline{w} \cdot \underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n}$)

$$\underline{w} \cdot \underline{w} = \left(\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \right) \cdot \left(\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \right) = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^2 \cdot \underline{n}$$

Die Alternative (A2) ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß die Differenz der Quadrate der beiden Argumenttensoren positiv definit sein muß.

$$(A2) \quad \underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S \quad \text{wenn} \quad \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S - \underline{\underline{B}}^S \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad (2.91)$$

Als dritte Möglichkeit könnten jeweils Vektoren \underline{w} und \underline{v} in ihrer Länge verglichen werden, die nicht aus dem gleichen \underline{n} hervorgehen, sondern die zueinander parallel sind. Um diese Vereinbarungsalternative mathematisch zu fassen und in eine zu den beiden ersten Alternativen vergleichbare Form zu überführen, wird zunächst als Vektor \underline{w} das f -fache von \underline{v} angesetzt. Daraus resultiert eine Beziehung zwischen den zugehörigen Normaleinsvektoren \underline{n} (für \underline{w}) und \underline{n}^* (für $\underline{v} = \underline{w}/f$).

$$\begin{aligned} \underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S &\Rightarrow \underline{n} = \underline{w} \cdot \underline{\underline{A}}^{S-1} \\ \underline{v} = \frac{1}{f} \underline{w} = \underline{n}^* \cdot \underline{\underline{B}}^S &\Rightarrow \underline{n}^* = \frac{1}{f} \underline{w} \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} = \frac{1}{f} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} \end{aligned}$$

Die Vereinbarungsalternative (A3) erklärt dementsprechend den Tensor $\underline{\underline{A}}$ als größer als Tensor $\underline{\underline{B}}$, wenn der Faktor f für alle Richtungen \underline{n} größer als Eins ist.

Aus der Beziehung zwischen \underline{n} und \underline{n}^* kann wiederum das Verhältnis f zwischen den parallelen Vektoren \underline{w} und \underline{v} berechnet werden.

$$\begin{aligned} \underline{n}^* \cdot \underline{n}^* = 1 &= \left(\frac{1}{f} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{f} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} \right) \\ &\Rightarrow f^2 = \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} \cdot \underline{\underline{B}}^{S-1} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{n} \end{aligned}$$

Von diesen Faktoren f wird nun gemäß der dritten Vereinbarungsalternative verlangt, daß sie bei $\underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S$ stets größer als 1 sind.

$$(A3) \quad \underline{\underline{A}}^S > \underline{\underline{B}}^S \quad \text{wenn} \quad \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-2} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right) \cdot \underline{n} > 1 \quad \forall \underline{n} \quad (2.92)$$

Dies läßt sich mit

$$\underline{n} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{n} = 1 \quad \forall \underline{n}$$

analog zu (A1) und (A2) in einen Vergleich mit 0 umformen.

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-2} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right) \cdot \underline{n} &> 1 \quad \forall \underline{n} \\ \Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-2} \cdot \underline{\underline{A}}^S - \underline{\underline{E}} \right) \cdot \underline{n} &> 0 \quad \forall \underline{n} \\ \Rightarrow \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \left(\underline{\underline{B}}^{S-2} - \underline{\underline{A}}^{S-2} \right) \cdot \underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{n} &> 0 \quad \forall \underline{n} \end{aligned}$$

Die Vektoren links und rechts von der Klammer können ohne Änderung der Relation wiederum normiert werden.

$$\Rightarrow \frac{\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S}{\left| \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right|} \cdot \left(\underline{\underline{B}}^{S-2} - \underline{\underline{A}}^{S-2} \right) \cdot \frac{\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S}{\left| \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right|} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad (2.93)$$

Wegen der vereinbarten Invertierbarkeit von $\underline{\underline{A}}^S$ entspricht jedem \underline{n} ein $\frac{\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S}{\left| \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right|}$.

$$\underline{n}' = \frac{\underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S}{\left| \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right|} \Rightarrow \underline{n} = \underline{n}' \cdot \underline{\underline{A}}^{S-1} \left| \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right| \quad (2.94)$$

Somit kann Gleichung 2.93 vereinfacht dargestellt werden.

$$\Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{B}}^{S-2} - \underline{\underline{A}}^{S-2} \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n}$$

Allerdings ist auch in dieser Form ein Vergleich mit (A1) oder (A2) kaum möglich (vergl. Gln. 2.90 u. 2.91). Hierfür bietet es sich an, bereits Gleichung 2.92 umzuformen. Aufgrund der Symmetrie des Produkts $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}^{-2} \cdot \underline{\underline{A}}$ kann Gleichung 2.88 angewendet werden.

$$\underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^S \cdot \underline{\underline{B}}^{S-2} \cdot \underline{\underline{A}}^S \right) \cdot \underline{n} > 1 \quad \forall \underline{n} \quad \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^{S-1} \cdot \underline{\underline{B}}^2 \cdot \underline{\underline{A}}^{S-1} \right) \cdot \underline{n} < 1 \quad \forall \underline{n}$$

Nach einer Umformung analog zu den Umformungen von Gleichung 2.92 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^{S-1} \cdot \underline{\underline{B}}^2 \cdot \underline{\underline{A}}^{S-1} \right) \cdot \underline{n} < 1 \quad \forall \underline{n} &\Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{B}}^2 - \underline{\underline{A}}^2 \right) \cdot \underline{n} < 0 \quad \forall \underline{n} \\ &\Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2 \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Also resultiert aus der Vereinbarungsalternative (A3) die gleiche Relation wie bei (A2) in Gleichung 2.91. Die beiden Forderungen (A2) und (A3) sind somit gleichbedeutend. Zu klären ist die Frage, ob sie eindeutig schärfer oder eindeutig schwächer als (A1) sind oder in einem mehrdeutigen Verhältnis zu (A1) stehen.

Der Ausdruck $\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2$ in Gleichung 2.95 entspräche im Skalaren: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Für Tensoren folgt bei einer solchen Aufteilung:

$$\underline{\underline{X}} = \left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} \right) \left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \right) = \underline{\underline{A}}^2 + \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} - \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}^2 \quad .$$

Dieser Tensor ist nicht mit $\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2$ identisch. Da aber die Differenz antisymmetrisch ist, sind die symmetrischen Anteile identisch.

$$\left(\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \right)^T = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2$$

Dies ist von zentraler Bedeutung. Die Summe $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}$ ist positiv definit, da beide Summanden vereinbarungsgemäß positiv definit sind. Ist nun die Differenz $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ ebenfalls positiv definit (Forderung (A1), Gl. 2.90), so folgt daraus zwar, daß das Produkt $\underline{\underline{X}}$ ausschließlich positive Eigenwerte hat (vergl. Gl. 2.86). Da aber $\underline{\underline{X}}$ in der Regel nicht symmetrisch ist, ist $\underline{\underline{X}}$ damit nicht zwangsweise positiv definit (vergl. Gl. 2.77). Folglich ist dann auch der symmetrische Anteil von $\underline{\underline{X}}$ nicht zwangsweise positiv definit (vergl. Gl. 2.78), und dieser Tensor hat dann auch mindestens einen nicht positiven Eigenwert. In diesen Fällen ist demnach Forderung (A3) verletzt (s. Gl. 2.95), obwohl Forderung (A1) erfüllt ist.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \end{array} \right\} \not\Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2 \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n}$$

Ist im umgekehrten Fall Forderung (A3) erfüllt, so ist $\underline{\underline{X}}$ positiv definit und damit auch der Tensor $\underline{\underline{X}}$ selbst (Gl. 2.78). Dann hat das Produkt der positiv definiten Tensoren $\underline{\underline{X}}$ und $\left(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} \right)^{-1}$ ausschließlich positive Eigenwerte (Gl. 2.86). Dies ist aber die Differenz der vereinbarungsgemäß symmetrischen Tensoren $\underline{\underline{A}}$ und $\underline{\underline{B}}$. Damit ist auch die Differenz symmetrisch und somit bei ausschließlich positiven Eigenwerten auch positiv definit (vergl. Gl. 2.76). Somit ist die Forderung (A1) immer erfüllt, wenn Forderung (A3) erfüllt ist. Forderung (A3) umfaßt also Forderung (A1) vollständig.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2 \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}} \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n}$$

Darüber hinaus ist Forderung (A3) offensichtlich mit der Vielfachen-Regel (Gl. 2.89) verträglich.

Aus diesen Gründen wird im Rahmen dieser Arbeit der Vergleich zweier Tensoren anhand

der äquivalenten Forderungen (A2) und (A3) definiert.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{n} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \\ \underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{A}}^2 - \underline{\underline{B}}^2 \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{A}} > \underline{\underline{B}} \quad (2.96)$$

Ist also ein Tensor $\underline{\underline{A}}$ größer als Tensor $\underline{\underline{B}}$, so ist die Differenz $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ in jedem Fall positiv definit. Eine positiv definite Differenz $\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{B}}$ ist aber noch kein sicheres Zeichen dafür, daß der Tensor $\underline{\underline{A}}$ größer als $\underline{\underline{B}}$ ist. Das bedeutet auch, daß die Summe zweier positiv definiten Tensoren nicht in jedem Fall größer als die einzelnen Summanden ist. Natürlich ist die Summe dabei trotzdem nicht kleiner als der betreffende Summand. Es handelt sich in solchen Fällen um zwei Tensoren, von denen keiner eindeutig kleiner oder größer ist.

2.4.2.4 Analogie Tensor - Ellipsoid

Der Gedankengang, der der Vereinbarungsalternative (A3) zugrunde lag (Gl. 2.92), führt unmittelbar zu einer sehr anschaulichen Interpretation der '>', '<'-Relationen bei symmetrischen Tensoren 2. Stufe. Wird nämlich eine Form $1 = \underline{w} \cdot \underline{\underline{C}}^{-2} \cdot \underline{w}$ in demjenigen Koordinatensystem berechnet, das zu den Eigenrichtungen $\underline{e}_I, \underline{e}_{II}$ und \underline{e}_{III} von $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T$ gehört, so ergibt sich die charakteristische Form einer Ellipsoidgleichung (vergl. Altenbach & Altenbach 1994, S. 54).

$$\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{C}} \quad \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 = \underline{w} \cdot \underline{\underline{C}}^{-2} \cdot \underline{w} = \left(\frac{w_I}{C_I} \right)^2 + \left(\frac{w_{II}}{C_{II}} \right)^2 + \left(\frac{w_{III}}{C_{III}} \right)^2 \quad (2.97)$$

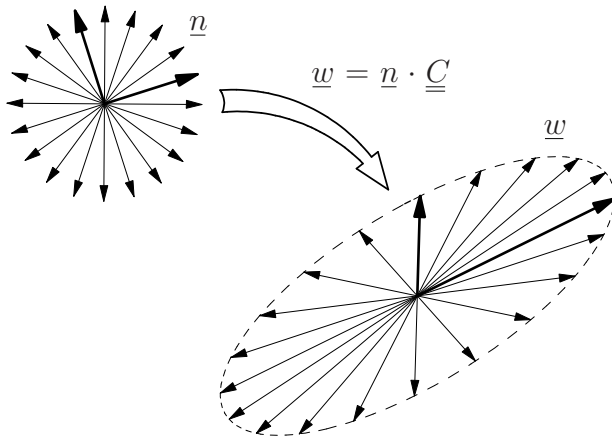


Abbildung 2.9: Ellipsoidrepräsentation eines Tensors $\underline{\underline{C}}$. Bei den Vektoren \underline{n} handelt es sich um Einheitsvektoren ($\underline{n} \cdot \underline{n} = 1$) beliebiger Richtung.

Die Hauptachsen dieses Ellipsoids entsprechen in der Länge den doppelten Eigenwerten C_I, C_{II} und C_{III} von $\underline{\underline{C}}$ und in der Richtung dessen Eigenrichtungen \underline{e}_A . Alle Vektoren \underline{w} , die sich durch Multiplikation eines Tensors 2. Stufe mit Vektoren \underline{n} der Länge Eins ergeben, gehören somit in der in Abbildung 2.9 gezeigten Weise zu einem einzigen Ellipsoid.

Die Betrachtung paralleler Vektoren $\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{C}}$ und $\underline{v} = \underline{n}^* \cdot \underline{\underline{X}}$, die zur Vereinbarung (A3) für die Relation $\underline{\underline{X}} > \underline{\underline{C}}$ (vergl. Gl. 17) führte, besagt nunmehr, daß ein Tensor $\underline{\underline{X}}$ dann größer als $\underline{\underline{C}}$ ist, wenn das zu $\underline{\underline{X}}$ gehörende Ellipsoid das zu $\underline{\underline{C}}$ gehörende Ellipsoid vollständig umfängt.

2.4.3 Maximum-/Minimumfunktion von Tensoren

Die anschauliche Interpretation des '>', '<'-Vergleichs von Tensoren zweiter Stufe anhand sich umschließender Ellipsoide eröffnet die Möglichkeit, auch die Maximum- und die Minimumfunktion in der Anwendung auf tensorielle Argumente in mathematisch und physikalisch sinnvoller und gleichzeitig der Anschauung leicht zugänglicher Weise zu vereinbaren. Die zugehörigen Herleitungen erweisen sich allerdings als deutlich komplexer als bei skalaren Argumenten. Zwar ließen sich z.B. für den Spezialfall von Tensorargumenten mit identischen Eigenrichtungen eventuell einfache Regeln ableiten, dies reicht aber für die hiermit angestrebten Anwendungen, wie z.B. tensorielle Geschichtsvariablen, keinesfalls aus. Vielmehr taucht das zentrale Problem auf, daß beispielsweise das Maximum einer Gruppe von Tensoren, die lediglich gegeneinander verdreht sind, in der Regel nicht mit einem der Argumente übereinstimmt. Das Maximum ist also nicht mehr wie im Skalaren unbedingt ein Element aus der Gruppe der Argumente. Hilfreich ist an dieser Stelle eine Umdeutung der Maximumfunktion, die deren Wirkung im Skalaren unverändert läßt. Das Maximum einer Gruppe von Argumenten ist danach der kleinste Wert aus der Menge derjenigen Elemente, die jeweils größer als alle Argumente sind.

$$\max \left[\underline{\underline{C}}^1, \underline{\underline{C}}^2, \dots, \underline{\underline{C}}^n \right] = \min \left[\left\{ \underline{\underline{X}} \mid \underline{\underline{X}} > \underline{\underline{C}}^k ; k = 1, 2, \dots, n \right\} \right]$$

Auf den ersten Blick wird hier möglicherweise kein Fortschritt erkennbar, da nun statt einem Maximum ein Minimum gesucht wird. Der entscheidende Unterschied ist aber, daß hier das Minimum in jedem Fall ein Element der Argumentgruppe ist, so daß der Vergleich einer geeigneten (skalaren) Invarianten der einzelnen Tensoren ausreichen wird, um ein derartiges Minimum aufzufinden (s. Gl. 2.98).

2.4.3.1 Kleinstes umhüllendes und größtes einbeschriebenes Ellipsoid

Auf diese Weise und mit Hilfe der vorgenommenen Definition der '>'-Relation läßt sich nun unmittelbar auch das Maximum einer Gruppe von Tensoren leicht veranschaulichen:

Das kleinste Ellipsoid, das die Ellipsoide der symmetrischen positiv definiten Tensoren $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \dots$ vollständig umhüllt, gehört zu dem Tensor $\underline{\underline{M}} = \max[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \dots]$.

Es ist lediglich noch zu präzisieren, was unter dem 'kleinsten' Ellipsoid der (unendlich großen) Gruppe dieser umhüllenden Ellipsoide zu verstehen ist. Als maßgebliche Invariante bietet sich unmittelbar das Ellipsoidvolumen an. Mit den Bezeichnungen aus der Gleichung 2.97 für das Ellipsoid beträgt es:

$$V_{\text{Ellipsoid}} = \frac{4}{3}\pi C_{\text{I}} C_{\text{II}} C_{\text{III}} = \frac{4}{3}\pi I_3(\underline{\underline{C}}) \quad . \quad (2.98)$$

und ist damit proportional zur dritten Hauptinvarianten des zugrundeliegenden Tensors, die wiederum der Determinante der Koeffizientenmatrix des Tensors (bei einer Darstellung in kartesischen Koordinaten) entspricht.

Damit ist die Verallgemeinerung der Maximumfunktion auf symmetrische positiv definite Tensorargumente zweiter Stufe vollständig. In analoger Weise läßt sich auch die Minimumfunktion verallgemeinern:

Das größte Ellipsoid, das von allen Ellipsoiden der symmetrischen positiv definiten Tensoren $\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \dots$ umhüllt wird, gehört zu dem Tensor $\underline{\underline{m}} = \min[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}, \underline{\underline{C}}, \dots]$.

Die Eigenschaften der neu definierten Maximum- und Minimumfunktion für tensorielle Argumente unterscheiden sich in einigen Aspekten von denen der skalaren Gegenstücke. Ein wichtiger, bereits angesprochener Unterschied besteht in der (Nicht-)Zugehörigkeit des Funktionswerts zu der Gruppe der Argumente. Ein weiterer wichtiger Unterschied besteht darin, daß bei den tensoriellen Varianten die Vorausberechnung von Teilmaxima/-minima einen Einfluß auf das Endergebnis haben kann. Im Skalaren gilt beispielsweise uneingeschränkt:

$$\max[\max[a, b], c] = \max[a, b, c] = \max[a, \max[b, c]] \quad .$$

Bei tensoriellen Argumenten lassen sich hingegen Beispiele finden, bei denen diese Regel verletzt wird. Wird beispielsweise ein Ellipsoid/Tensor $\underline{\underline{A}}$ mit den Hauptachsenlängen a, b und b mit $a > b$ um z.B. 15° um eine der beiden kürzeren Hauptachsen gedreht und wird dann zu dem gedrehten Ellipsoid/Tensor $\underline{\underline{A}}^*$ und $\underline{\underline{A}}$ selbst das kleinste umhüllende Ellipsoid ermittelt, so ist die größte Hauptachsenlänge dieses Ergebnisellipsoids größer als a . Wird zu diesem Ellipsoid und einer Kugel mit Radius a (zugehöriger Tensor: $a \underline{\underline{E}}$) anschließend wiederum ein umhüllendes Ellipsoid gesucht, so hat auch dieses die gleiche größte Hauptachsenlänge. Werden hingegen die gleichen drei Argumentellipsoide in einer anderen Reihenfolge miteinander verknüpft, so stimmt das Endergebnis immer mit der Kugel mit Radius a überein, da die beiden anderen Argumentellipsoide vollständig in die Kugel passen.

$$\max[\max[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^*], a \underline{\underline{E}}] \neq \max[\underline{\underline{A}}, \max[\underline{\underline{A}}^*, a \underline{\underline{E}}]] = a \underline{\underline{E}} \quad (2.99)$$

Die Kugel ist in diesem einfachen Beispiel offensichtlich die Lösung mit dem kleinsten Volumen. Das Beispiel stellt somit insofern einen Sonderfall dar, als daß das Ergebnis der Maximumfunktion ein Element der Argumentgruppe ist.

$$a \underline{\underline{E}} = \max[\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{A}}^*, a \underline{\underline{E}}]$$

Im folgenden wird ein Algorithmus vorgestellt, mit dem es möglich ist, zu zwei Argumenten das kleinste umhüllende Ellipsoid bzw. das größte einbeschriebene Ellipsoid direkt (ohne Iteration) zu berechnen. Um mit diesem Algorithmus zu einer Argumentgruppe mit mehr als zwei Elementen das Maximum zu finden, muß somit zunächst für zwei Argumente das Maximum berechnet werden, dann von diesem partiellen Maximum und einem weiteren Argument wiederum das Maximum und so fort, bis alle Argumente berücksichtigt sind. Bei den Problemstellungen, auf die hier abgezielt wird (z.B. tensorielle Geschichtsvariablen), haben die Argumente eine vorgegebene natürliche Reihenfolge (im einfachsten Falle die zeitliche

Abfolge des Auftretens der Argumente) und das Maximum wird in der Regel nicht erst abgefragt, wenn alle Argumente vorliegen, sondern das Maximum wird immer dann aktualisiert, wenn ein neues Argument verfügbar wird. Für derartige Aufgabenstellungen stellt der in Gleichung 2.99 dargestellte Einfluß der Bearbeitungsreihenfolge keinerlei Einschränkung dar.

Bei einer Aufgabenstellung, bei der die Abarbeitungsreihenfolge wählbar wäre und somit Einfluß auf das Endergebnis nehmen könnte, müßten, um das absolut kleinste alle Argumente einhüllende Ellipsoid zu finden, prinzipiell alle denkbaren Reihenfolgen berechnet werden. Dieser Aufwand stiege mit der Zahl der Argumente stark an. Eine Alternative bestände in dem Versuch, einen allgemeineren Algorithmus zu finden, der eine direkte Berechnung des Maximums von mehr als zwei Argumenten erlaubt. Da aber bereits der Algorithmus für zwei Argumente nicht trivial ist, ist nicht sicher, ob ein allgemeinerer Algorithmus zu finden sein wird. Für die hier behandelten Aufgabenstellungen besteht aber, wie bereits ausgeführt, ohnehin kein Anlaß für eine solche Entwicklung.

Es verbleibt nunmehr lediglich der mathematische Aspekt, eine Berechnungsmöglichkeit für das zwei gegebene Ellipsoide umhüllende volumenkleinste Ellipsoid anzugeben. Die Qualität dieses Algorithmus und der damit verbundene numerische Aufwand sind von entscheidender Bedeutung für die Effizienz von Ellipsoidrepräsentationen bei der Modellierung induzierter Anisotropie. Erfreulicherweise ist es gelungen, den im folgenden beschriebenen, direkten (nicht-iterativen) und schnellen Algorithmus zu entwickeln.

2.4.3.2 Ellipsoidverzerrungen

Von entscheidender Bedeutung für die Ellipsoidberechnung ist die Tatsache, daß ein Ellipsoid nach einer geometrischen Verzerrung (entsprechend einem linearen Ansatz mit einem Deformationsgradienten \underline{F}) wiederum ein Ellipsoid ergibt. So wie die Vektoren $\underline{v} = \underline{n} \cdot \underline{X}$ ein Ellipsoid bilden (s. Abb. 2.9 u. Gl. 2.97), so ergibt sich auch für die verzerrten Vektoren $\underline{F} \cdot \underline{v}$ die charakteristische Form einer Ellipsoidgleichung.

$$1 = \underline{v} \cdot \underline{X}^{-2} \cdot \underline{v} = \underbrace{\underline{v} \cdot \underline{F}^T}_{\underline{F} \cdot \underline{v}} \cdot \underbrace{\underline{F}^{T^{-1}} \cdot \underline{X}^{-2} \cdot \underline{F}^{-1}}_{(\underline{X}_{\text{zerr}})^{-2}} \cdot \underbrace{\underline{F} \cdot \underline{v}}_{\underline{F} \cdot \underline{v}}$$

Zu dem mit \underline{F} verzerrten Ellipsoid gehört der Tensor $\underline{X}_{\text{zerr}}$.

$$\underline{F} \cdot \underline{v} = \underline{n}^* \cdot \underline{X}_{\text{zerr}} \quad \text{mit:} \quad \underline{X}_{\text{zerr}} = \sqrt{\underline{F} \cdot \underline{X}^2 \cdot \underline{F}^T} \quad (2.100)$$

Zur Berechnung des kleinsten umhüllenden Ellipsoids \underline{H} zu zwei Argumentellipsoiden \underline{X} und \underline{Y} werden nun zunächst beide Argumenttensoren gleichermaßen verzerrt. Die Verzerrung erfolgt derart, daß \underline{X} zum Einheitstensor und das zugehörige Ellipsoid damit zur Einheitskugel wird (vergl. Abb. 2.10).

$$\underline{X}_{\text{zerr}} \stackrel{!}{=} \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{F} = \underline{X}^{-1}$$

Mit diesem speziellen \underline{F} wird auch \underline{Y} verzerrt.

$$\underline{Y}_{\text{zerr}} = \sqrt{\underline{F} \cdot \underline{Y}^2 \cdot \underline{F}^T} = \sqrt{\underline{X}^{-1} \cdot \underline{Y}^2 \cdot \underline{X}^{-1}} \quad (2.101)$$

Aufgrund der Kugelform hat $\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}$ keine ausgezeichneten Richtungen. Jede Richtung ist eine Eigenrichtung von $\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}$. Richtungsinformationen liegen somit nur noch in $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$ vor, speziell in dessen Eigenrichtungen, die hier durch die drei orthogonalen Einheitsvektoren \underline{e}_A repräsentiert werden. Die verzerrte Variante $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ des gesuchten kleinsten umhüllenden Ellipsoids $\underline{\underline{H}}$ wird mit den gleichen Eigenvektoren \underline{e}_A ausgestattet. Damit dann das zu diesem $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ gehörende Ellipsoid die zu $\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}$ und $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$ gehörenden Ellipsoide umhüllt, müssen die einzelnen Eigenwerte von $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ mindestens so groß sein wie die jeweils zur gleichen Eigenrichtung gehörenden Eigenwerte von $\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}$ (alle Eigenwerte gleich Eins) und $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$. Für die Eigenwerte $H_{\text{zerr},A}$ von $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ folgt damit (vergl. Abb. 2.10):

$$H_{\text{zerr},A} = \max(1, Y_{\text{zerr},A}) \quad . \quad (2.102)$$

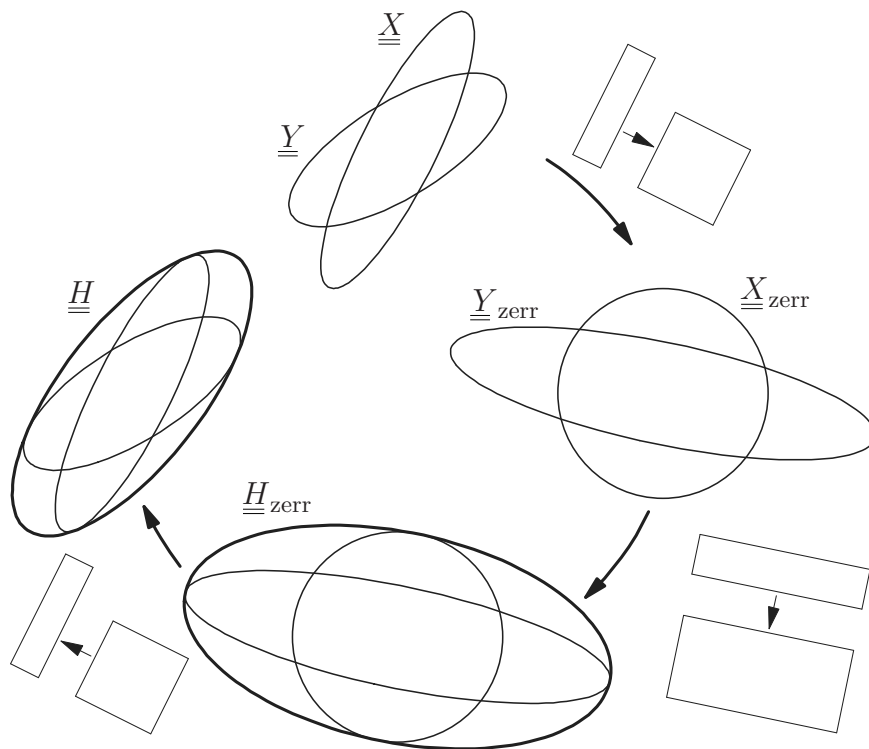


Abbildung 2.10: Einfache Konstruktion des kleinsten umhüllenden Ellipsoids $\underline{\underline{H}}$ zu zwei Ellipsoiden $\underline{\underline{X}}$ und $\underline{\underline{Y}}$. In einer verzerrten Darstellung, in der $\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}$ einer Einheitskugel entspricht, ergibt sich $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ aus $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$, indem jeder Eigenwert auf den Mindestwert Eins gebracht wird. Abschließend wird die Verzerrung rückgängig gemacht.

Abschließend muß lediglich die Verzerrung von $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ aufgehoben werden.

$$\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}} = \sqrt{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{H}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^T} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{H}} = \sqrt{\underline{\underline{X}} \cdot (\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}})^2 \cdot \underline{\underline{X}}} \quad (2.103)$$

Es verbleibt zu belegen, daß auf diesem Weg tatsächlich das umhüllende Ellipsoid mit dem kleinsten Volumen gefunden wird. Hierfür ist als erstes zu beachten, daß gemäß Gleichung

2.98 das Volumen proportional zur dritten Hauptinvarianten und damit zur Determinante der Koeffizientenmatrix des zugehörigen Tensors ist. Die Determinante eines Matrizenprodukts entspricht dem Produkt der Einzeldeterminanten, also folgt aus der Verzerrungsvorschrift in Gleichung 2.100:

$$I_3(\underline{\underline{X}}_{\text{zerr}}) = \sqrt{I_3(\underline{\underline{F}}) I_3(\underline{\underline{X}}^2) I_3(\underline{\underline{F}}^T)} = I_3(\underline{\underline{F}}) I_3(\underline{\underline{X}}) \quad .$$

Demnach wird sich bei der Verzerrung das Volumen aller beteiligten Ellipsoide in gleicher Weise um den Faktor $I_3(\underline{\underline{F}})$ ändern. Die Verhältnisse der Volumina untereinander bleiben aber erhalten, und insbesondere behält das umhüllende Ellipsoid mit dem kleinsten Volumen diese Eigenschaft auch in der verzerrten Form bei.

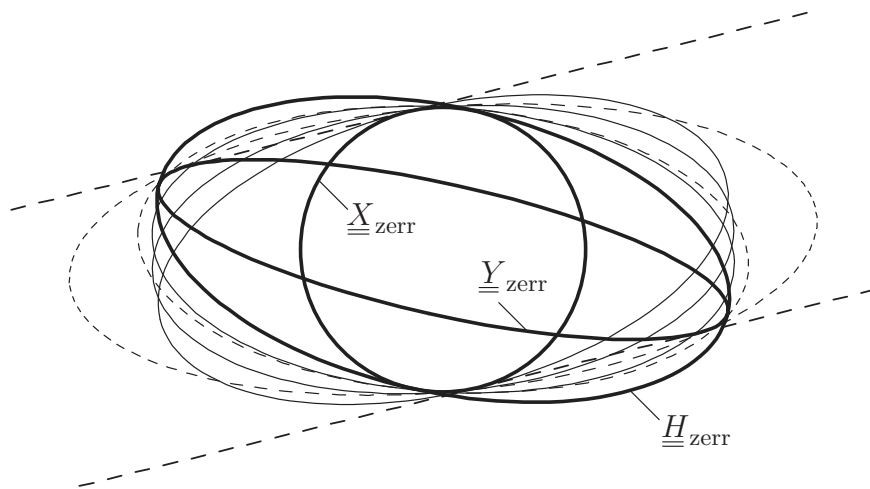


Abbildung 2.11: Nachweis des minimalen Volumens des gemäß Abb. 2.10 ermittelten umhüllenden Ellipsoids. Dünne durchgezogene Linien: Ellipsen, die durch Drehungen aus der $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ -Ellipse hervorgehen (und die $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$ -Ellipse schneiden); unterbrochene Linien: Verdrehte Ellipsen mit (in jedem Fall) vergrößertem maximalem Eigenwert, so daß die $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$ -Ellipse wieder tangiert und damit umhüllt wird.

Abbildung 2.11 belegt anhand von gedrehten Versionen des gemäß Gleichung 2.102 berechneten umhüllenden Ellipsoids, daß dieses das kleinste Volumen hat. In Frage kommen dabei nur solche Drehungen, bei denen noch immer beide Argumentellipsoide tangiert werden können. In diesem Winkelbereich führt aber offensichtlich jede Drehung zu Überschneidungen zwischen dem jeweiligen verdrehten $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ -Ellipsoid und dem $\underline{\underline{Y}}_{\text{zerr}}$ -Ellipsoid. Um ein umhüllendes Ellipsoid mit diesen verdrehten Hauptrichtungen zu erzeugen, müßte also in jedem Fall das Volumen vergrößert werden. Somit hat das $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ -Ellipsoid tatsächlich das minimale Volumen.

Mit den Gleichungen 2.101, 2.102 und 2.103 liegt somit der Algorithmus zur Berechnung des zwei gegebene Ellipsoide umhüllenden volumenkleinsten Ellipsoids bereits vollständig vor. Dabei kann zur weitergehenden Vereinfachung auf die Berechnung der Wurzel in Gleichung 2.101 verzichtet werden, da der Eigenwertabgleich in Gleichung 2.102 ohne weiteres auch mit

den Quadraten der beteiligten Tensoren durchführbar ist, und in Gleichung 2.103 wiederum nur das Quadrat von $\underline{\underline{H}}_{\text{zerr}}$ verwendet wird.

Der damit vollständig beschriebene Algorithmus wird in Abschnitt 6.2 zur Berechnung eines Anisotropietensors für belastungsinduzierte Anisotropie verwendet. Die Argumenttensoren für die Maximumfunktion sind dort die sich im Laufe eines Belastungsprozesses einstellenden rechten Cauchy-Green-Tensoren. Die diese Argumenttensoren keine sprunghaften Änderungen aufweisen können, entstehen auch bei dem umhüllenden Ellipsoid keine sprunghaften Änderungen.

2.4.4 Polarzerlegung von Tensoren

Ellipsoidrepräsentationen existieren nicht nur zu symmetrischen Tensoren. Bei unsymmetrischen Tensoren stehen die Ellipsoidrepräsentationen in engem Zusammenhang mit dem Polarzerlegungssatz. Wird ein unsymmetrischer, aber invertierbarer Tensor $\underline{\underline{F}}$ mit Normaleinsvektoren \underline{n} multipliziert, so entsteht analog zu Gleichung 2.97:

$$\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{F}} \quad \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 = \underline{w} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \cdot \underline{w} \quad . \quad (2.104)$$

Dabei ist der entstehende Tensor $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}}$ genau wie der Tensor $\underline{\underline{C}}^{-2}$ in Gleichung 2.97 symmetrisch und auch positiv definit. Letzteres zeigt sich an dem Spezialfall der Gleichung 2.83 mit $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{E}}$:

$$\underline{n} \cdot \left(\underline{\underline{Y}} \cdot \underline{\underline{Y}}^T \right) \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \quad .$$

Dementsprechend ergibt sich auch in diesem Fall ein Ellipsoid, das allerdings in seinen Hauptachsenrichtungen und -längen nicht mit den Eigenrichtungen und Eigenwerten von $\underline{\underline{F}}$ übereinstimmt, sondern gemäß der Analogie zwischen den Gleichungen 2.104 und 2.97 mit den Eigenrichtungen und Eigenwerten desjenigen symmetrischen und positiv definiten Tensors, der in Begriffen der Gleichung 2.97 dem Tensor $\underline{\underline{C}}$ zu $\underline{\underline{C}}^{-2}$ entspricht, also gemäß Gleichung 2.104 der Wurzel aus dem Inversen Tensor zu $\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}}$.

$$\underline{n} \cdot \underline{n} = 1 = \underline{w} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \cdot \underline{w} = \underline{w} \cdot \left(\sqrt{\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}} \right)^{-2} \cdot \underline{w}$$

Sofern $\underline{\underline{F}}$ als Deformationsgradient interpretiert wird, so entspricht dieser Tensor $\sqrt{\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}}$ bekanntermaßen dem rechten Strecktensor $\underline{\underline{U}}$. Da das Quadrat von $\underline{\underline{U}}$ positiv definit ist, trifft dies auch auf $\underline{\underline{U}}$ selbst zu. Die beiden Tensoren $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{F}}$ liefern also das gleiche Ellipsoid, sofern die Einsvektoren \underline{n} gemäß Gleichung 2.104 mit $\underline{\underline{F}}$ multipliziert werden. Dies schließt allerdings nicht die Behauptung ein, daß sich bei den Produkten jedes einzelnen Vektors \underline{n} mit den beiden Tensoren jeweils der gleiche Vektor ergibt. Ein Vektor \underline{w} , der dem Produkt $\underline{n} \cdot \underline{\underline{F}}$ entspricht, wird sich vielmehr aus $\underline{\underline{U}}$ durch die Multiplikation mit einem anderen Einsvektor \underline{n}^* ergeben.

$$\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{n}^* \cdot \underline{\underline{U}} \quad \Rightarrow \quad \underline{n}^* = \underline{n} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{U}}^{-1} \quad (2.105)$$

Das Tensorprodukt $\underline{F} \cdot \underline{U}^{-1}$ überführt somit jeden beliebigen Einsvektor \underline{n} in einen Vektor \underline{n}^* gleicher Länge. Dies legt die Vermutung nahe, daß es sich um einen Orthogonaltensor $\underline{R} = \underline{R}^{T^{-1}}$ handelt, denn (mit Gl. 2.51):

$$\underline{w} = \underline{n} \cdot \underline{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{w} \cdot \underline{w} = (\underline{n} \cdot \underline{R}) \cdot (\underline{n} \cdot \underline{R}) = \underline{n} \cdot \underline{R} \cdot \underline{R}^T \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 \quad .$$

Diese Vermutung kann bestätigt werden.

$$\begin{aligned} \underline{U} \cdot \underline{U} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} \quad \Rightarrow \quad \underline{F} \cdot \underline{U}^{-1} &= \underline{F} \cdot (\underline{U}^{-1} \cdot \underline{U}^{-1}) \cdot \underline{U} = \underline{F} \cdot (\underline{F}^{-1} \cdot \underline{F}^{T^{-1}}) \cdot \underline{U} \\ &= \underline{F}^{T^{-1}} \cdot \underline{U} = (\underline{U}^{-1} \cdot \underline{F}^T)^{-1} = (\underline{F} \cdot \underline{U}^{-1})^{T^{-1}} \end{aligned}$$

Somit wird vereinbart:

$$\underline{R} = \underline{F} \cdot \underline{U}^{-1} = \underline{F} \cdot (\underline{F}^T \cdot \underline{F})^{-\frac{1}{2}} = \underline{R}^{T^{-1}} \quad .$$

Eine Umstellung dieser Gleichung liefert die Polarzerlegung des invertierbaren Tensors \underline{F} in einen symmetrischen positiv definiten Tensor \underline{U} und einen Orthogonaltensor \underline{R} .

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U} \quad (2.106)$$

Auch der Tensor \underline{R} erhält im Rahmen der Ellipsoidrepräsentationen eine sehr anschauliche Bedeutung, die im folgenden erklärt werden soll. Aufgrund seiner Symmetrie hängt bei dem Tensor \underline{U} das Ergebnis einer Multiplikation mit einem Vektor nicht davon ab, ob der Vektor links oder rechts vom Tensor steht.

$$\underline{n} \cdot \underline{U} = \underline{U} \cdot \underline{n}$$

Somit formen die Vektoren $\underline{U} \cdot \underline{n}$ das gleiche Ellipsoid wie die Vektoren $\underline{n} \cdot \underline{U}$ und damit auch $\underline{n} \cdot \underline{F}$ (vergl. Gl. 2.105). Im Gegensatz zu den symmetrischen Tensoren macht es im Fall des im allgemeinen unsymmetrischen Tensors \underline{F} einen Unterschied, ob die \underline{n} -Vektoren von links oder von rechts in den Tensor einmultipliziert werden.

$$\underline{F} \cdot \underline{n} = \underline{n} \cdot \underline{F}^T \neq \underline{n} \cdot \underline{F}$$

Dieser Unterschied läßt sich sehr gut mit Hilfe der Polarzerlegung von \underline{F} in Gleichung 2.106 untersuchen.

$$\underline{F} \cdot \underline{n} = \underline{R} \cdot \underline{U} \cdot \underline{n} = \underline{R} \cdot (\underline{U} \cdot \underline{n}) = \underline{R} \cdot (\underline{n} \cdot \underline{U}) = \underline{R} \cdot (\underline{n}^* \cdot \underline{F})$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Vektoren $\underline{F} \cdot \underline{n}$ ein Ellipsoid formen, das gegenüber demjenigen aus $\underline{n} \cdot \underline{F}$ lediglich um \underline{R} verdreht ist (vergl. Abb. 2.12). Beide Ellipsoide haben somit exakt dieselbe Form.

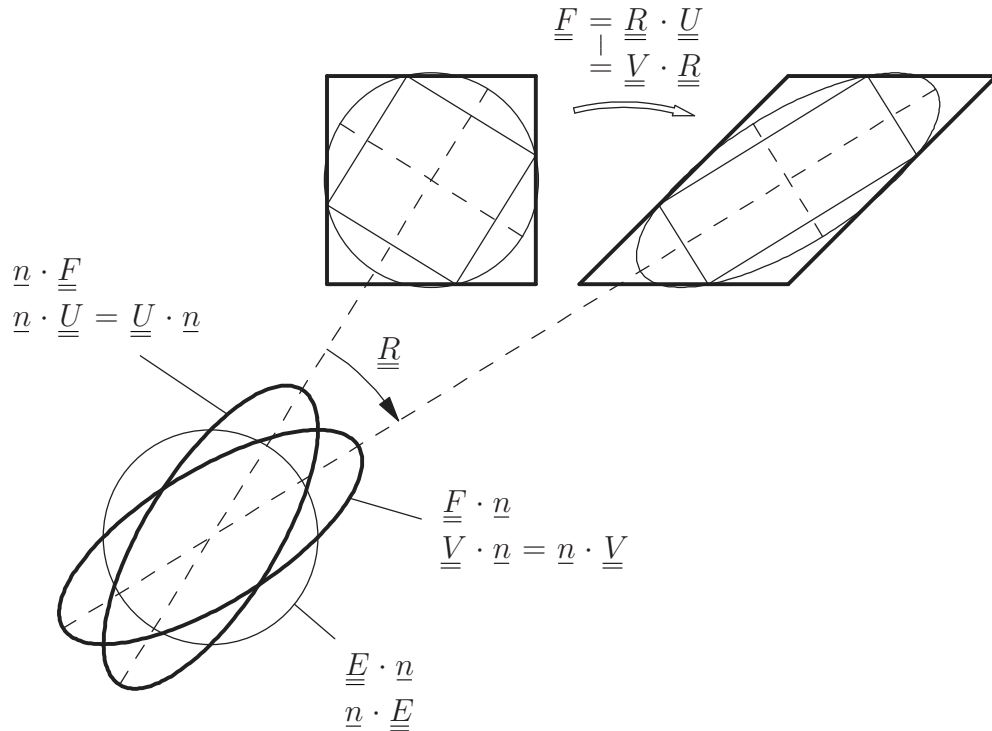


Abbildung 2.12: Multiplikation des Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ mit Einheitsvektoren \underline{n} von links und von rechts. Die Ergebnisvektoren ergeben zwei zueinander verdrehte Ellipsoide identischer Form, die zu den beiden Strecktensoren $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{V}}$ gehören. Die Verdrehung entspricht dem in der Deformation enthaltenen Drehanteil $\underline{\underline{R}}$.

Analog zu dem Vorgehen bei der Herleitung des Tensors $\underline{\underline{U}}$ anhand von $\underline{n} \cdot \underline{\underline{F}}$ wird nun auch für den Fall $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{n}$ verfahren. Zunächst wird der zu dem von den Vektoren $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{n}$ geformten Ellipsoid gehörende symmetrische Tensor ermittelt.

$$\underline{\underline{F}} \cdot \underline{n} = \underline{w}' \quad \Rightarrow \quad \underline{n} \cdot \underline{n} = 1 = \underline{w}' \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{w}' = \underline{w}' \cdot \left(\sqrt{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T} \right)^{-2} \cdot \underline{w}'$$

Dieser Tensor $\sqrt{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T}$ wird mit $\underline{\underline{V}}$ bezeichnet. Sofern $\underline{\underline{F}}$ als Deformationsgradient interpretiert wird, so entspricht dieser Tensor dem linken Strecktensor. Auch dieser Strecktensor ist symmetrisch, hat ausschließlich positive Eigenwerte und ist somit auch positiv definit.

$$\underline{\underline{V}} = \sqrt{\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T} = \sqrt{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}}^T} = \sqrt{\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}}^T} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \quad (2.107)$$

So wie die zu $\underline{\underline{U}}$ und $\underline{\underline{V}}$ gehörenden Ellipsoide sich lediglich um eine Drehung unterscheiden, so sind auch die beiden Tensoren selbst lediglich zueinander verdreht, haben aber demnach stets die gleichen Invarianten und Eigenwerte.

In Kombination mit Gleichung 2.106 ergibt sich die zweite Möglichkeit einer Polarzerlegung.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}} \cdot \left(\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \right) = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

Die beiden formgleichen Ellipsoide, die sich aus der Multiplikation eines unsymmetrischen Tensors $\underline{\underline{F}}$ mit Einheitsvektoren \underline{n} ergeben, lassen sich somit den symmetrischen und positiv

definiten Tensoren \underline{U} und \underline{V} zuordnen, die sich durch Multiplikation von \underline{F} mit dem Orthogonaltensor \underline{R}^T ergeben. Dieser Orthogonaltensor beschreibt darüber hinaus die relative Ausrichtung der beiden Ellipsoide, woraus auch die Eindeutigkeit der Polarzerlegungen ersichtlich ist.

Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei symmetrischen Tensoren sind bei einer Ellipsoiddarstellung eines unsymmetrischen Tensors die Extremwerte des Ellipsoids im allgemeinen nicht die Eigenwerte des Tensors und die Hauptachsen des Ellipsoids sind auch keine Eigenrichtungen des Tensors oder seines symmetrischen Anteils, sondern der zugehörigen Strecktensoren \underline{U} und \underline{V} aus der Polarzerlegung. In diesen Richtungen fallen auch \underline{n} und \underline{w} nicht zusammen. Werden die gemeinsamen Eigenwerte von \underline{U} und \underline{V} mit λ_a bezeichnet und die Eigenvektoren von \underline{U} mit \underline{e}_a , so ergibt sich mit Gleichung 2.107:

$$\underline{U} = \lambda_a \underline{e}_a \circ \underline{e}_a \quad , \quad \underline{V} = \lambda_a \underline{R} \cdot \underline{e}_a \circ \underline{e}_a \cdot \underline{R}^T \quad .$$

Darin sind die Vektoren $\underline{R} \cdot \underline{e}_a$ offensichtlich die Eigenvektoren \underline{e}_A von \underline{V} (Der Grund für die Unterscheidung der Darstellungen der beiden Vektorgruppen \underline{e}_a und \underline{e}_A durch zwei verschiedene Indexgruppen besteht wiederum darin, z.B. die Koeffizienten F_{ab} und F_{AB} problemlos unterscheiden zu können. Vergl. Abschnitt 2.2). Die beiden Eigenvektorgruppen werden durch \underline{R} ineinander überführt.

$$\underline{R} \cdot \underline{e}_a = \underline{e}_A \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = \lambda_a \underline{e}_A \circ \underline{e}_A \quad \Rightarrow \quad \underline{F} = \lambda_a \underline{e}_A \circ \underline{e}_a \quad (2.108)$$

Offenbar handelt es sich bei dieser neuen Darstellung von \underline{F} um eine koeffizientenfreie Darstellung gemäß Gleichung 2.25, also der Summe dreier Dyaden mit jeweils einem der \underline{e}_a -Vektoren und einem der $\lambda_a \underline{e}_A$ -Vektoren. Da bei dieser besonderen Form beide Systeme orthogonal sind, entsteht eine Ähnlichkeit mit der Gleichung 2.52 für symmetrische Tensoren. Im vorliegenden Fall allerdings sind weder die Werte λ_a Eigenwerte von \underline{F} , noch sind die Vektoren \underline{e}_A oder \underline{e}_a Eigenvektoren von \underline{F} , es sei denn, der Teiltensor \underline{R} wird zum Einheitstensor und die Vektoren \underline{e}_A und \underline{e}_a fallen zusammen. In diesem Ausnahmefall ist \underline{F} symmetrisch und identisch mit \underline{V} und \underline{U} .

Zu jedem invertierbaren Tensor existieren somit immer zwei orthogonale Basissysteme, die durch diesen Tensor ineinander überführt werden. Im Unterschied zu einem orthogonalen Tensor können allerdings nicht beide Systeme normiert sein.

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \lambda_a \underline{e}_A \circ \underline{e}_a \quad , \quad \underline{e}_A \cdot \underline{F} = \lambda_a \underline{e}_a \quad , \quad \underline{F} \cdot \underline{e}_a = \lambda_a \underline{e}_A \\ \underline{R} &= \underline{e}_A \circ \underline{e}_a \quad , \quad \underline{e}_A \cdot \underline{R} = \underline{e}_a \quad , \quad \underline{R} \cdot \underline{e}_a = \underline{e}_A \end{aligned}$$

Außerdem überführt ein orthogonaler Tensor sämtliche orthogonalen Systeme wiederum in orthogonale Systeme, während dies bei einem allgemeinen Tensor nur für zwei bestimmte, den Tensor charakterisierende Systeme gilt.

Abschließend seien die grundlegenden Beziehungen des Polarzerlegungssatzes noch einmal zusammengefaßt.

$$\begin{aligned} \underline{F} &= \lambda_a \underline{e}_A \circ \underline{e}_a = \underline{V} \cdot \underline{R} = \underline{R} \cdot \underline{U} \\ \underline{V} &= \lambda_a \underline{e}_A \circ \underline{e}_A \quad , \quad \underline{V} \cdot \underline{V} = \underline{F} \cdot \underline{F}^T \\ \underline{U} &= \lambda_a \underline{e}_a \circ \underline{e}_a \quad , \quad \underline{U} \cdot \underline{U} = \underline{F}^T \cdot \underline{F} \\ \underline{R} &= \underline{e}_A \circ \underline{e}_a \quad , \quad \underline{R}^T = \underline{R}^{-1} \end{aligned} \quad (2.109)$$

3 Beobachterkonzepte der Kontinuumsmechanik

Im Rahmen einer Gegenüberstellung unterschiedlicher Beobachterkonzepte wird die kontinuumsmechanische Basis für die nachfolgenden Abschnitte bereitgestellt. Der Schwerpunkt liegt in der Charakterisierung der Eulerschen und der Lagrangeschen Betrachtungsweise mit den jeweiligen Spannungs- Deformations- und Leistungsmaßen sowie geeigneten Zeitableitungen. Den klassischen Konzepten des Eulerschen und des Lagrangeschen Beobachters wird das der Anschauung besonders weitreichend zugängliche Konzept der sogenannten Standardbeobachter gegenübergestellt, bei dem die Wahrnehmungen mehrerer beliebig bewegter Beobachter verglichen werden. Hinzu kommen spezielle Beobachterkonzepte zur Definition Eulerscher Zeitableitungen.

Beobachterkonzepte werden im Rahmen der Kontinuumsmechanik häufig verwendet, um Zusammenhänge und Besonderheiten zu veranschaulichen. Um beispielsweise den Einfluß von Drehungen, die einer allgemeinen Deformation vor- oder nachgeschaltet sind, auf Eulersche und Lagrangesche Tensoren zu charakterisieren, werden fiktive Beobachter in einer der dem Verformungsprozess zugeordneten Konfigurationen plziert und ihre Beobachtungen der jeweils anderen Konfiguration werden analysiert. Typischerweise ordnet beispielsweise ein sogenannter Eulerscher Beobachter einen Verschiebungsvektor dem Ort zu, an dem sich das verschobene Partikel nach der Verschiebung befindet, also dem Ort in der aktuellen Konfiguration. Ein sogenannter Lagrangescher Beobachter ordnet den gleichen Verschiebungsvektor dem Ort zu, von dem aus das Partikel verschoben worden ist, also einem Ort in der Referenzkonfiguration. Somit verwendet der Eulersche Beobachter die aktuelle Konfiguration als Referenz und beobachtet von dort aus die Startkonfiguration. Der Lagrangesche Beobachter nutzt hingegen die Startkonfiguration als Referenzkonfiguration und beurteilt von dieser Werte aus die aktuelle Konfiguration.

Bei den Konzepten des Eulerschen und des Lagrangeschen Beobachters wird in der Regel stillschweigend davon ausgegangen, daß der jeweilige Beobachter zwei Konfigurationen, nämlich die Start- und die aktuelle Konfiguration, unmittelbar (simultan) miteinander vergleichen kann. Im Gegensatz dazu kann beispielsweise ein realer Laborant, der mit Hilfe einer Zugmaschine einen Probekörper aus einem bestimmten Material verformt, um das Kraft-/Verformungsverhalten zu untersuchen, zu jedem Zeitpunkt trivialerweise nur eine Konfiguration des Probekörpers registrieren. Um diesen aktuellen Zustand mit einem früheren Zustand zu vergleichen, wäre dieser reale Beobachter auf seine Erinnerung angewiesen. Ein solcher Beobachter wird im folgenden als Standardbeobachter bezeichnet. Ein Standardbeobachter ist weder ein Eulerscher noch ein Lagrangescher Beobachter. Entsprechend einer typischen, alltäglichen Laborsituation hat ein Standardbeobachter folgende Eigenschaften und (Un-)fähigkeiten, die trivial anmuten, aber für den Vergleich mit anderen Beobachterkonzepten von großer Bedeutung sind.

- Ein Standardbeobachter registriert zu jedem Zeitpunkt die aktuelle Konfiguration. Für den Vergleich mit zurückliegenden Konfigurationen ist er auf seine Erinnerung angewiesen.
- Ein Standardbeobachter empfindet sich selbst als unbewegt. Er versucht nicht, seinen eigenen Bewegungszustand gegenüber einem Inertialsystem zu ermitteln und dementsprechend seine Beobachtungen zu korrigieren. Beispielsweise weicht eine alltägliche Laborsituation bereits durch die Erdrotation von einem Inertialsystem ab. Eine Korrektur dieser krummlinigen Bewegung findet selbst bei langandauernden Experimenten wie zum Beispiel Relaxationsmessungen in aller Regel nicht statt.
- Ein Standardbeobachter ist gegenüber anderen, anders bewegten Standardbeobachtern nicht ausgezeichnet.
- Ein Standardbeobachter registriert stets nur Koeffizienten von den gemessenen vektoriellen, bzw. tensoriellen Größen. Wenn er sich an frühere Zustände erinnert, erinnert er sich an diese registrierten Koeffizienten.

Mit diesen Eigenschaften ist ein Standardbeobachter leicht vorstellbar und seine Beobachtungen sind damit der Anschauung gut zugänglich. Aus den gleichen Gründen weicht das Konzept der Standardbeobachter aber grundsätzlich von solchen Konzepten ab, bei denen andersartige, gegenüber dem Laboranten fiktive Beobachter verwendet werden, die beispielsweise zwei Konfigurationen eines Verformungsprozesses simultan in Augenschein nehmen und damit unmittelbar vergleichen können, während diese bei einem realen Experiment nur zu unterschiedlichen Zeitpunkten existieren.

Wiederum andere Beobachterkonzepte werden herangezogen, um objektive Zeitableitungen für Eulersche Tensoren zu beschreiben. Hier wird den Beobachtern eine durch den Verformungsprozess determinierte Bewegung auferlegt, und die Änderungen der Tensorkoeffizienten, die sich in einem derart bewegten Koordinatensystem ergeben, werden als Koeffizienten der tensoriellen Zeitableitung interpretiert. Hierzu wird diesen Beobachtern ähnlich wie den oben beschriebenen Standardbeobachtern unterstellt, daß sie ihre Eigenbewegung nicht registrieren. Andernfalls würden sie neben den zeitlichen Änderungen der Koeffizienten auch Änderungen ihrer Basisvektoren bei der Bildung der Zeitableitung berücksichtigen. Der wesentliche Unterschied zu den Standardbeobachtern besteht in diesem Fall darin, daß hier die Beobachterbewegung durch den Verformungsprozeß determiniert ist, während die Bewegung der Standardbeobachter (absichtlich) unbekannt bleibt.

Einen Sonderfall stellen die Oldroyd-Zeitableitungen dar. Will man diese Ableitungen ebenfalls mit Beobachtern in Verbindung bringen, so entsteht das Bild eines sich mitverformenden Beobachters, bzw. eines Beobachters, der den Verformungsvorgang durch eine sich mitverzerrende Optik verfolgt.

Ähnliche Beobachterkonzepte wie bei den Eulerschen Zeitableitungen werden herangezogen, um das Postulat der materiellen Objektivität zu veranschaulichen. Hierbei werden in der Regel die Beobachtungen desselben Prozesses durch unterschiedlich bewegte Beobachter verglichen. Häufig wird dies auch mit dem Wechsel des Bezugsrahmens ("Changes of frame of reference", Truesdell & Noll 1965) in Verbindung gebracht. Erstaunlicherweise finden sich

diesbezüglich in der Literatur bei Konzepten mit scheinbar gleichen Voraussetzungen trotzdem widersprüchliche Schlußfolgerungen (s. z.B. König 2002, Salencon 2001, Truesdell & Noll 1965). Deswegen soll hier das oben bereits motivierte Konzept der Standardbeobachter entwickelt werden, das mit besonders einfachen und der Anschauung zugänglichen Begriffen arbeitet, die somit auch einfach, klar und eindeutig vereinbart werden können. Dem Konzept wird die in Abschnitt 2.1.3 vorgestellte Auffassung bezüglich identischer Tensoren zugrunde gelegt, wonach eine Vergleichbarkeit zweier Beobachtungen bezüglich aller Richtungen Vorbedingung für die Untersuchung auf Identität ist. Dies erscheint möglicherweise trivial, es gibt aber durchaus andere (oftmals für Herleitungen oder konkrete Berechnungen sehr praktische) Vorstellungsweisen, die implizit auf anderen Grundannahmen basieren.

3.1 Standardbeobachter

Die behandelten Beobachter sollen als Standardbeobachter bezeichnet werden, da sie in ihren Wahrnehmungen und Fähigkeiten den gleichen Beschränkungen unterliegen sollen wie ein realer Experimentator in einer alltäglichen Laborsituation. Eine solche Situation stellt allein durch die Erdrotation bereits ein beschleunigtes Bezugssystem dar und ist somit gegenüber allen anders bewegten Beobachtungssystemen in keiner Weise ausgezeichnet. Es wird nicht vorausgesetzt, daß das jeweilige Bezugssystem einem Inertialsystem im Rahmen der Genauigkeitsanforderungen hinreichend nahe kommt. Vielmehr wird das Sich-Zurückziehen in ein Inertialsystem im Rahmen dieses Konzepts konsequent vermieden. Damit entfällt die Notwendigkeit, sich gedanklich in die für alltägliche Verhältnisse fiktive Position innerhalb eines echten Inertialsystems zu versetzen. Es wird stattdessen ausdrücklich und vollständig darauf verzichtet, die Bewegungen der Beobachter oder deren Lagen zu bestimmten Zeitpunkten von vornherein im Bezug auf den beobachteten Vorgang oder relativ zueinander in irgendeiner Weise festzulegen. Trotzdem empfindet sich jeder Standardbeobachter wie vereinbart durchgehend als unbewegt und beschreibt dementsprechend relative zeitliche Änderungen (vergl. GL. 3.10). Darüber hinaus wird realistischlicherweise davon ausgegangen, daß zum Zeitpunkt der Beobachtung nur der aktuelle Zustand zugänglich ist. Um diesen Zustand mit zurückliegenden Zuständen vergleichen zu können, ist der Beobachter auf seine Erinnerung angewiesen, die, wie noch gezeigt werden wird, von der Eigenbewegung des Beobachters abhängt. Mit diesen Vereinbarungen sollte es möglich sein, sich problemlos und ohne Einschränkungen mit den Standardbeobachtern zu identifizieren und anschauliche Rückschlüsse zu ziehen.

Kernaspekt des Konzepts ist nicht etwa der Vergleich verschiedener Verformungsprozesse, beispielsweise mit unterschiedlichen vor- oder nachgeschalteten Drehungen, sondern der Vergleich der Beobachtungen ein und desselben Vorgangs in einem einzigen materiellen Arbeitspunkt durch zwei beliebige Standardbeobachter. Diese Vorstellung zweier durchaus als real denkbarer Beobachter, die den gleichen Vorgang im materiellen Arbeitspunkt registrieren, impliziert einige grundsätzliche Eigenschaften solcher Beobachter. Diese Eigenschaften werden hier der Definition der Standardbeobachter hinzugefügt: Beide Beobachter müssen die gleiche Wahrnehmung haben, d.h. sie müssen Einigkeit über den betrachteten Materialpunkt erlangen können. Außerdem müssen beide Beobachter gleiche Größenmaßstäbe haben und

diese müssen richtungsunabhängig sein, d.h. die Beobachter dürfen nicht selbst “verzerrt“ werden. Unter diesen Umständen erlangen die beiden so definierten Standardbeobachter über skalare Materialeigenschaften, wie z.B. die Dichte, übereinstimmende Aussagen.

Hingegen können die beiden Standardbeobachter aufgrund der jeweils definitionsgemäß (s.o.) fehlenden Information über die Eigenbewegung weder absolute Richtungen identifizieren noch Richtungsänderungen effektiv beschreiben. Dementsprechend ist damit zu rechnen, daß die Beobachter beispielsweise bezüglich der Änderung \dot{E}_{kin} der kinetischen Energie (und sogar E_{kin} selbst) oder der Leistung P_{ex} der äußeren Kräfte keine eindeutigen Ergebnisse erlangen können.

$$\overset{\alpha}{E}_{\text{kin}} \neq \overset{\mathcal{A}}{E}_{\text{kin}} \quad ; \quad \overset{\alpha}{P}_{\text{ex}} \neq \overset{\mathcal{A}}{P}_{\text{ex}} \quad (3.1)$$

Allerdings sollten die Formänderungsarbeit (oder auch Spannungsarbeit, Lion 2000a) W_{Sp} und ihre zeitliche Änderung \dot{P}_{Sp} für alle Standardbeobachter in übereinstimmender Weise feststellbar sein, denn jedem Beobachter sind alle Vorgänge am Material auch für einzelne Materialrichtungen durchaus zugänglich.

$$\overset{\alpha}{\dot{P}}_{\text{Sp}} = \overset{\mathcal{A}}{\dot{P}}_{\text{Sp}} = \dot{P}_{\text{Sp}} \quad (3.2)$$

Dieses einfache und intuitiv erfaßbare Axiom (vergl. Besdo 1974), die Beobachterunabhängigkeit der Formänderungsleistung, bildet den kontinuumsmechanischen Ausgangspunkt des Konzepts der Standardbeobachter und repräsentiert in diesem Rahmen das Postulat der materiellen Objektivität (vergl. Truesdell & Noll 1965, Krawitz 1986, Betten 1998 oder Haupt 2000).

Die Beobachter sollen zunächst anhand ihrer Standorte identifiziert werden. Der eine Beobachter befinde sich am Ort “ α “, der andere in “ \mathcal{A} “. Eine Übereinstimmung der beiden Standorte ist nicht notwendig. Die Bewegungen der beiden Orte α und \mathcal{A} werden im Bezug auf Geschwindigkeit und Beschleunigung ausdrücklich nicht festgelegt, es sei lediglich angemerkt, daß jede natürliche Bewegung stetig erfolgt. Dies gelte auch für die Bewegungen der Standorte der beiden Beobachter und ihre jeweilige Rotation. Beide Beobachter sollen darüber hinaus völlig blind für einander und für die Beobachtungen des jeweils anderen sein. Dies ist zwar prinzipiell nicht notwendig, dient aber als Absicherung für alle diesbezüglichen Folgerungen. Unter diesen Voraussetzungen soll nun untersucht werden, welche Informationen die beiden Beobachter benötigen, um zu äquivalenten Aussagen über das wahrgenommene Materialverhalten zu gelangen.

	Basissystem	Urspr.	Ableitung (Gl. 3.9)
1. Beobachter:	\underline{e}_a mit: $\underline{e}_a \cdot \underline{e}_b = \delta_{ab}$	α	$\overset{\Delta}{(\)} \rightarrow \frac{d}{dt}\Big _{\alpha} (\)$
2. Beobachter:	\underline{e}_A mit: $\underline{e}_A \cdot \underline{e}_B = \delta_{AB}$	\mathcal{A}	$\overset{\Delta}{(\)} \rightarrow \frac{d}{dt}\Big _{\mathcal{A}} (\)$

(3.3)

Zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen kann ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit vorausgesetzt werden, daß beide Beobachter zur Beschreibung gerichteter Größen, wie

Vektoren oder Tensoren höherer Stufe, jeweils ein orthonormiertes Basissystem wählen, das ihnen als unbewegt erscheint, und das sich somit genauso bewegt wie der Beobachter selbst. Dies sei für den Beobachter in α das \underline{e}_α -System und für den \mathcal{A} -Beobachter das \underline{e}_A -System (vergl. Gl. 3.3). Zur Festlegung dieser Systeme könnten die Beobachter z.B. die Wände eines Laborraums, geographische Richtungen oder auch den Fixsternhimmel benutzen. Die Wahrnehmungen der beiden Beobachter entsprechen somit bei tensoriellen Größen zugehörigen Koeffizienten, die jeweils zu einer beobachtoreigenen Vektorbasis gehören. Dementsprechend muß differenziert werden zwischen unterschiedlichen Wahrnehmungen identischer Größen einerseits und andererseits solchen Größen, die selbst von der Beobachtung abhängen und sich somit nicht nur in der Wahrnehmung von Beobachter zu Beobachter unterscheiden.

Damit die von den verschiedenen Standardbeobachtern registrierten Verzerrungen sinnvoll verglichen werden können, wird darüber hinaus vereinbart, daß beide Beobachter die gleiche Referenzkonfiguration wählen. Außerdem wird wiederum zur Vereinfachung der folgenden Betrachtungen, aber ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit vereinbart, daß beide Beobachter die gleichen Materialkoordinatenlinien und -flächen im beobachteten Körper registrierten und dementsprechend das gleiche System von Materialkoordinaten verwenden.

	Referenzkonfiguration	Materialkoordinaten	angepaßte Basis
α -Beobachter:	$\tilde{\mathcal{K}}$	ξ^i	$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i}$
\mathcal{A} -Beobachter:	$\tilde{\mathcal{K}}$	ξ^i	$\underline{g}_i = \frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i}$

Zur Beschreibung des Materialverhaltens werden im allgemeinen neben Spannungs- und Verzerrungsgrößen auch Aussagen über die zeitlichen Änderungen dieser Größen benötigt. Eine Möglichkeit der Beschreibung zeitlicher Änderungen sind lokale Zeitableitungen.

$$\underline{\underline{\dot{X}}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{X}}(\underline{r}, t + \Delta t) - \underline{\underline{X}}(\underline{r}, t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (3.4)$$

Um die für das Materialverhalten relevanten zeitlichen Änderungen zu erfassen, ist allerdings die Entwicklung der betreffenden Größe bei gleichbleibenden Koeffizienten ξ^i , also am stets gleichen Materialpunkt, von größerem Interesse. Eine solche als substantiell oder auch materiell bezeichnete Zeitableitung ergibt sich formal aus dem Grenzwert des auf diesem Weg entstehenden Differenzenquotienten.

$$\hat{\underline{\underline{X}}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\underline{X}}(\xi^i, t + \Delta t) - \underline{\underline{X}}(\xi^i, t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (3.5)$$

Typische Beispiele substantieller Zeitableitungen sind Geschwindigkeiten \underline{v} und Beschleunigungen \underline{a} .

$$\underline{v} = \hat{\underline{r}} \quad ; \quad \underline{a} = \hat{\underline{v}} \quad (3.6)$$

Die gesonderte Symbolik eines über das Argument gesetzten Dreiecks für diese substantielle Zeitableitung dient der Unterscheidung zwischen Koeffizienten \hat{X}^i_j , der substantiellen

Ableitung $\hat{\underline{X}}^i_j$ des vollständigen Tensors \underline{X} und ebenfalls substantiellen Ableitungen \dot{X}^i_j der skalaren Koeffizienten X^i_j von \underline{X} . Um diese Unterscheidungsmöglichkeit sicherzustellen, wird im Rahmen dieser Arbeit der Punkt als Ableitungssymbol ausschließlich bei skalaren Ableitungsargumenten verwendet.

$$\hat{\underline{X}}^i_j = \underline{g}^i \cdot \hat{\underline{X}} \cdot \underline{g}_j \quad ; \quad \dot{X}^i_j = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X^i_j(\xi^i, t + \Delta t) - X^i_j(\xi^i, t - \Delta t)}{2 \Delta t} \quad (3.7)$$

Der Zusammenhang zwischen lokaler und substantieller Zeitableitung ist:

$$\hat{\underline{X}} = \left. \frac{\partial \underline{X}}{\partial t} \right|_{r=\text{const.}} + \left. \frac{\partial \underline{X}}{\partial x_a} \right|_{t=\text{const.}} \frac{\partial x_a}{\partial t} \Big|_{\xi^i=\text{const.}} = \underline{\dot{X}} + \underline{v} \cdot \nabla \circ \underline{X} \quad . \quad (3.8)$$

Für den Vergleich der von verschiedenen Beobachtern wahrgenommenen Zeitableitungen wird zunächst eine entsprechend differenzierte Schreibweise eingeführt (vergl. Gl. 3.3). Jeder Beobachter hat vereinbarungsgemäß sein Basissystem so gewählt, daß es ihm als unbewegt und somit zeitlich konstant erscheint.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (\underline{e}_a) = \underline{0} \quad , \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (\underline{e}_A) = \underline{0} \quad (3.9)$$

Für den α -Beobachter ergibt sich damit für die Ableitung eines Tensors \underline{X} , daß bei einer Darstellung in der \underline{e}_a -Basis lediglich die Koeffizienten abzuleiten sind.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (\underline{X}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (X_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (X_{ab}) \underline{e}_a \circ \underline{e}_b + X_{ab} \overbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (\underline{e}_a)}^{\underline{0}} \circ \underline{e}_b + X_{ab} \underline{e}_a \circ \overbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (\underline{e}_b)}^{\underline{0}} \\ &= \dot{X}_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \end{aligned}$$

Für den \mathcal{A} -Beobachter folgt gemäß Gleichung 3.9 völlig analog:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (\underline{X}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (X_{AB} \underline{e}_A \circ \underline{e}_B) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (X_{AB}) \underline{e}_A \circ \underline{e}_B + X_{AB} \overbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (\underline{e}_A)}^{\underline{0}} \circ \underline{e}_B + X_{AB} \underline{e}_A \circ \overbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (\underline{e}_B)}^{\underline{0}} \\ &= \dot{X}_{AB} \underline{e}_A \circ \underline{e}_B \end{aligned}$$

Bei der Zeitableitung desselben Argumenttensors \underline{X} kommen die beiden Beobachter somit im allgemeinen zu unterschiedlichen Resultaten.

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{\alpha} (\underline{X}) &= \dot{X}_{ab} \underline{e}_a \circ \underline{e}_b \\ \left. \frac{d}{dt} \right|_{\mathcal{A}} (\underline{X}) &= \dot{X}_{AB} \underline{e}_A \circ \underline{e}_B \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1.1 Beobachterunabhängige Spannungen

Sofern die Standorte α und \mathcal{A} der Standardbeobachter nicht zusammenfallen, kommen diese über den Ortsvektor zu einem beobachteten Materialpunkt \mathcal{P} ($\underline{r}^{\alpha\mathcal{P}}$ für den α -Beobachter, $\underline{r}^{\mathcal{A}\mathcal{P}}$ für den \mathcal{A} -Beobachter) unweigerlich zu unterschiedlichen Auffassungen.

$$\underline{r}^{\alpha\mathcal{P}} = \underline{r}^{\alpha\mathcal{A}} + \underline{r}^{\mathcal{A}\mathcal{P}}$$

Umgekehrt fallen diese beiden Vektoren unabhängig von den zur Berechnung von Koeffizienten verwendeten Basissystemen oder den unterschiedlichen Bewegungen der beiden Beobachter zusammen, wenn der Vektor $\underline{r}^{\alpha\mathcal{A}}$ zumindest momentan dem Nullvektor entspricht.

$$\underline{r}^{\alpha\mathcal{A}} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{r}^{\alpha\mathcal{P}} = \underline{r}^{\mathcal{A}\mathcal{P}}$$

Die unterschiedlichen Standorte verlieren ihre Bedeutung, sobald Vektoren zwischen zwei Punkten beschrieben werden. Auch in diesen Fällen stimmen allerdings die Vektorkoeffizienten, die zwei Beobachter registrieren, im allgemeinen nicht überein, da Produkte mit den individuellen Basisvektoren gebildet werden (vergl. Abb. 3.1).

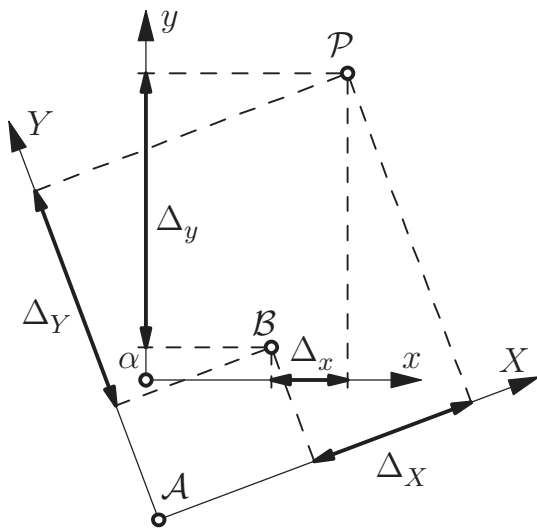


Abbildung 3.1: Bei der Beschreibung der relativen Lage zweier Punkte \mathcal{B} und \mathcal{P} erhalten die beiden Beobachter in α und in \mathcal{A} aufgrund der Verwendung der individuellen Basisvektoren \underline{e}_α und $\underline{e}_\mathcal{A}$ unterschiedliche Koeffizienten des Abstandsvektors $\underline{\Delta}$.

Sofern die Beobachtungen eines Abstandsvektors aber simultan erfolgen, so unterscheidet sich die Situation, in der ein Beobachter das \underline{e}_α -System und der andere Beobachter das $\underline{e}_\mathcal{A}$ -System zur Berechnung von Koeffizienten nutzt, im Ergebnis in keiner Weise von der Situation einer Koordinatentransformation, bei der beide Basisvektorsysteme von ein und demselben Beobachter verwendet werden.

$$\underline{r}^{\mathcal{P}\mathcal{B}} = r_a^{\mathcal{P}\mathcal{B}} \underline{e}_\alpha = r_A^{\mathcal{P}\mathcal{B}} \underline{e}_\mathcal{A} \quad \text{mit:} \quad r_a^{\mathcal{P}\mathcal{B}} \neq r_A^{\mathcal{P}\mathcal{B}} \quad (3.11)$$

Die Kombinationen der unterschiedlichen registrierten Koeffizienten mit den individuellen Basisvektoren zu vollständigen Vektoren führt somit zu einem beobachterunabhängigen Ergebnis.

Das über Abstandsvektoren Gesagte gilt ebenso für die über Gleichung 2.4 den Materialkoordinaten zugeordneten Basisvektoren \underline{g}_i , bei denen infinitesimale Abstände beschrieben werden, und die daraus berechnete duale Basis \underline{g}^i .

$$\underline{g}_i^\alpha(t) = \underline{g}_i^A(t) = \underline{g}_i \quad \Rightarrow \quad \underline{g}^{\alpha i}(t) = \underline{g}^{A i}(t) = \underline{g}^i \quad (3.12)$$

Der Cauchy-Spannungstensor setzt sich gemäß Gleichung 2.17 aus Dyaden von Normaleinsvektoren zu Schnittflächen und zugehörigen Spannungsvektoren (flächenbezogene Kraftvektoren) zusammen (vergl. auch Abb. 2.7). Die beobachterunabhängigen Vektoren \underline{g}^i entsprechen Normalvektoren zu ξ^i -Koordinatenflächen.

Auch Kraftvektoren sind beobachterunabhängig. Dies läßt sich am Vorgang der Kraftmessung durch eine Federwaage veranschaulichen. Zum Zeitpunkt der Kraftmessung beschreibt der jeweilige Beobachter den Abstandsvektor zwischen zwei Punkten auf der Skala, also einen beobachterunabhängigen Vektor wie in Gleichung 3.11. Somit registrieren beide Beobachter (bei gleichem Materialpunkt und zum gleichen Zeitpunkt) den gleichen Cauchy-Spannungstensor (genauer: sie registrieren Koeffizienten des gleichen Tensors). Sie benötigen dafür keinerlei Informationen über ihre Ausrichtung oder ihre Bewegung.

$$\underline{\underline{\sigma}}^\alpha = \underline{\underline{\sigma}}^A = \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.13)$$

Diese Eigenschaft ist kennzeichnend für Größen der sogenannte Eulerschen Darstellungsweise. Wird eine Eulersche Größe von verschiedenen Beobachtern registriert, so ergeben alle Beobachtungen identische Ergebnisse. Diese Aussage gilt nur für die vollständigen (tensoriellen) Größen. Die durch verschiedene Beobachter registrierten Koeffizienten eines Eulerschen Vektors oder Tensors sind in der Regel verschieden.

3.1.2 Beobachterindividuelle Deformationsgradienten

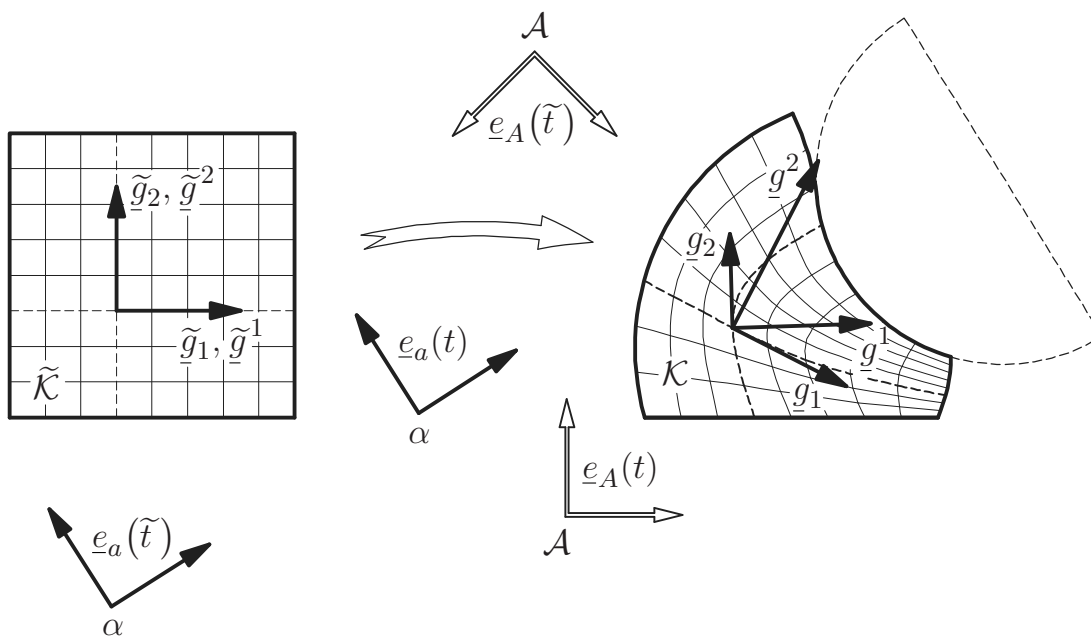


Abbildung 3.2: Während des Verformungsprozesses von der Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zur aktuellen Konfiguration \mathcal{K} bewegen sich die Standardbeobachter in nicht festgelegter Art und Weise relativ zueinander.

Wenn neben der beobachterunabhängigen Formänderungsleistung (Gl. 3.2) mit den Eulerschen Cauchy-Spannungen auch eine beobachterunabhängige Spannungsdarstellung existiert, müssen auch die Verzerrungen beobachterunabhängig beschrieben werden können.

Um die Verzerrungen des Materials zu erfassen, registrieren die Beobachter die Abstands- und Winkeländerungen der Koordinatenlinien zu den Materialkoordinaten ξ^i beim Übergang von der Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zur aktuellen Konfiguration \mathcal{K} . Diese Änderungen wiederum werden durch die Entwicklung der diesen Koordinaten zugeordneten Basen \underline{g}_i (vergl. Gl. 2.4) erfaßt.

Der Vergleich zwischen Referenz- und aktueller Konfiguration kann erst zum aktuellen Zeitpunkt t stattfinden. Somit muß jeder Beobachter die aktuellen Vektoren $\underline{g}_i(t)$ mit seiner Erinnerung an die $\underline{g}_i(\tilde{t})$ vergleichen. Da aber jeder Beobachter sein eigenes Basissystem als unveränderlich empfindet, können diese Erinnerungen durchaus unterschiedlich sein (vergl. Abbn. 3.2 - 3.5).

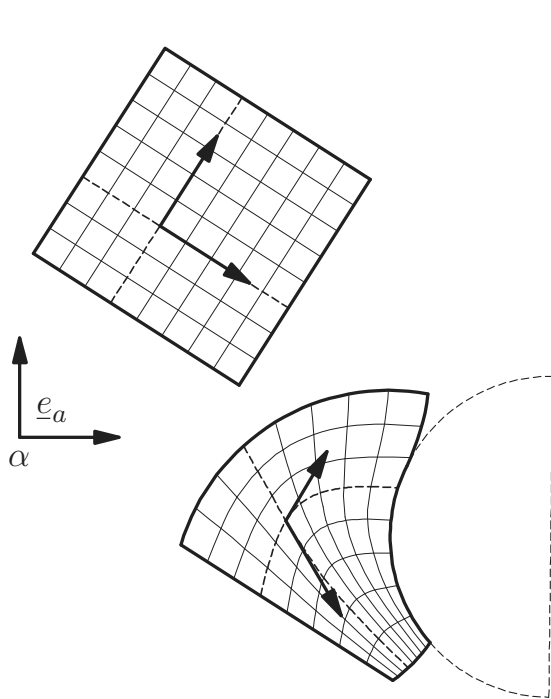


Abbildung 3.3: Der Deformationsprozeß aus Abbildung 3.2 aus der Perspektive des mit der \underline{e}_a -Basis verbundenen Beobachters in α .

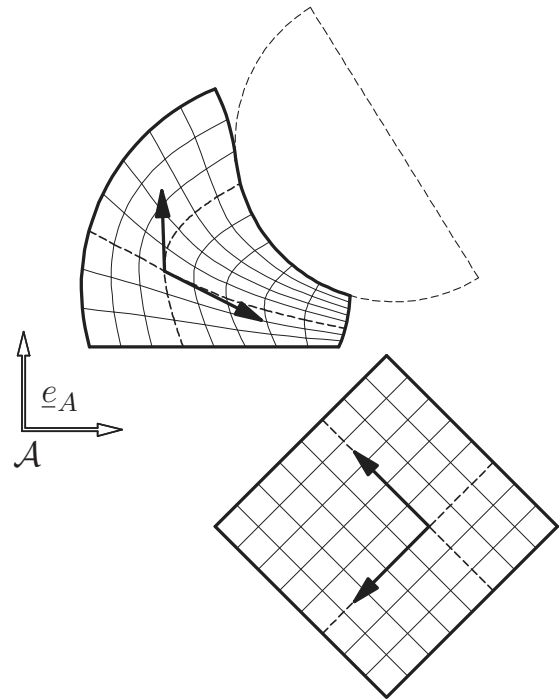


Abbildung 3.4: Der gleiche Prozeß wie in Abbildung 3.3 aus der Perspektive des mit der \underline{e}_A -Basis verbundenen Beobachters in \mathcal{A} .

Die Vektoren \underline{g}_i , die zum Zeitpunkt \tilde{t} beobachtet werden oder wurden, werden im folgenden mit einer Tilde gekennzeichnet. Zu dem Zeitpunkt \tilde{t} , zu dem diese Vektoren beobachtet werden, ist die zugehörige $\tilde{\mathcal{K}}$ -Konfiguration die aktuelle Konfiguration. Demnach registrieren zu diesem Zeitpunkt alle Standardbeobachter die gleichen Vektoren $\tilde{\underline{g}}_i$. Eine Beobachterabhängigkeit entsteht erst beim Erinnern zu einem späteren Zeitpunkt, wenn der jeweilige Beobachter die zum Referenzzeitpunkt registrierten Koeffizienten mit seiner als unverändert

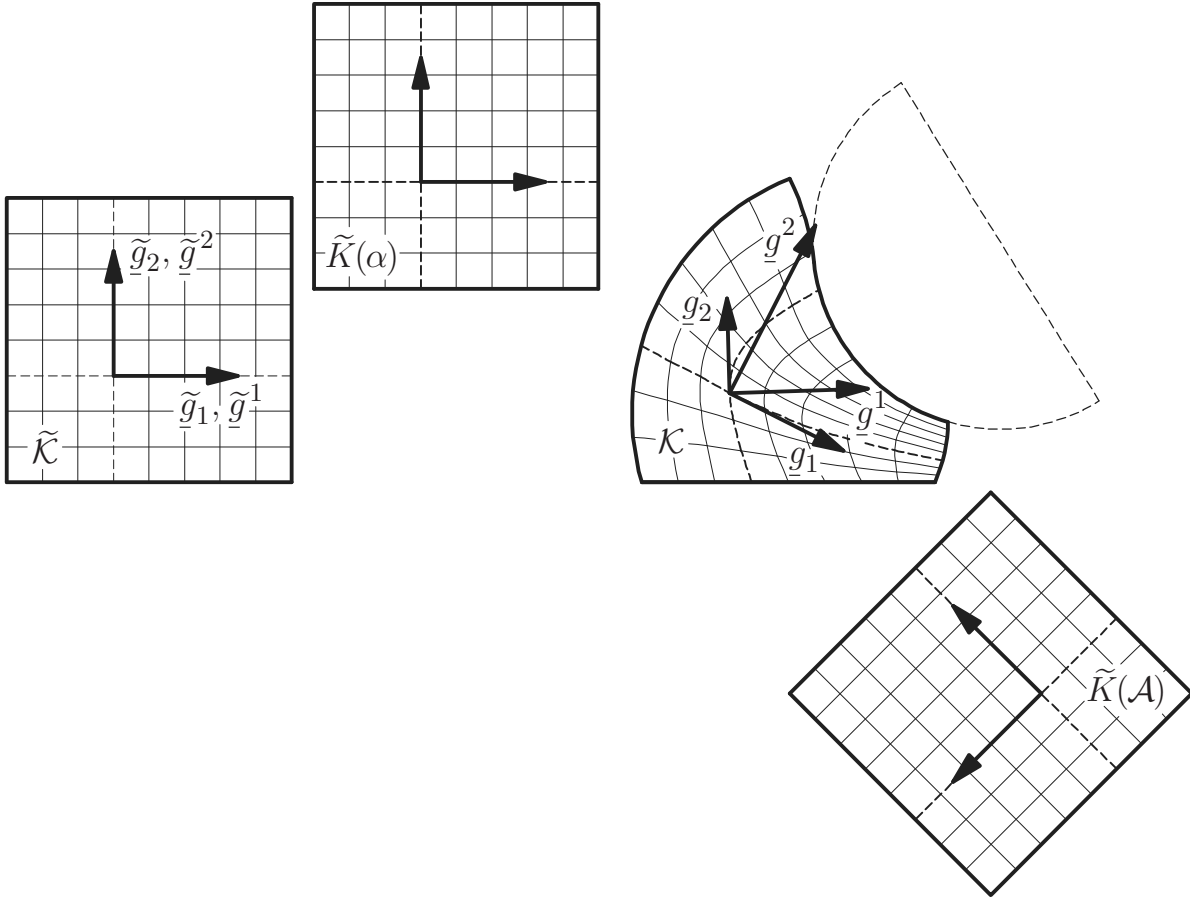


Abbildung 3.5: Deformationsvorgang aus Abbildung 3.2 mit den unterschiedlichen Erinnerungen der beiden Beobachter an die Referenzkonfiguration zum aktuellen Zeitpunkt.

empfundene Basis $\underline{e}_a(t)$ wieder zu einem Vektor kombiniert.

$$\tilde{g}_{ia} = \underline{g}_i(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_a(\tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tilde{\underline{g}}_i^{\alpha}(\tilde{t}) = \tilde{g}_{ia} \underline{e}_a(\tilde{t}) = \tilde{\underline{g}}_i(\tilde{t}) \\ \tilde{\underline{g}}_i^{\alpha}(t) = \tilde{g}_{ia} \underline{e}_a(t) \end{cases}$$

Das gleiche tut der Beobachter in \mathcal{A} in seinem \underline{e}_A -Beobachtersystem. Er registriert zum Zeitpunkt \tilde{t} die Koordinaten \tilde{g}_{iA} , die zum gleichen Vektor $\underline{g}_i(\tilde{t})$ gehören, wie die \tilde{g}_{ia} des Beobachters in α . Zum Zeitpunkt t erinnert er sich dann an:

$$\begin{aligned} \tilde{\underline{g}}_i^{\mathcal{A}}(t) &= \tilde{g}_{iA} \underline{e}_A(t) \quad \text{mit:} \quad \tilde{g}_{iA} = \underline{g}_i(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t}) = \tilde{g}_{ib} [\underline{e}_b(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t})] \\ &= \left[\tilde{\underline{g}}_i^{\alpha}(t) \cdot \underline{e}_b(t) \right] \left[\underline{e}_b(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t}) \right] \underline{e}_A(t) \\ &= \tilde{\underline{g}}_i^{\alpha}(t) \cdot \left[\underline{e}_b(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t}) \right] \underline{e}_b(t) \circ \underline{e}_A(t) = \tilde{\underline{g}}_i^{\alpha}(t) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} \quad . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Der Tensor $\underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}}$ kann als Produkt zweier Orthogonaltensoren dargestellt werden und ist somit selbst auch ein Orthogonaltensor.

$$\underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} = \tilde{\underline{g}}^{\alpha} \circ \underline{\underline{g}}^{\mathcal{A}} = \left[\underline{e}_a(t) \circ \underline{e}_a(\tilde{t}) \right] \cdot \left[\underline{e}_B(\tilde{t}) \circ \underline{e}_B(t) \right] = \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}T^{-1}} \quad (3.15)$$

Die zum aktuellen Zeitpunkt vorliegenden Erinnerungen der einzelnen Standardbeobachter an die \tilde{g}_i -Vektoren unterscheiden sich also um eine durch $\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}$ beschriebene Drehung (vergl. auch Abb. 3.5). Dementsprechend unterscheiden sich auch die von verschiedenen Beobachtern ermittelten Deformationsgradienten durch eine vorgeschaltete (vergl. Gl. 2.16) Drehung.

$$\underline{\underline{F}}^A = \underline{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i = \underline{g}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} = \underline{\underline{F}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \quad (3.16)$$

3.1.3 Beobachterunabhängige Verzerrungstensoren

Eine Möglichkeit für die verschiedenen Beobachter, aus ihren individuellen Deformationsgradienten (Gl. 3.16) beobachterunabhängige Verzerrungstensoren zu extrahieren, besteht darin, die Beobachtung eines für alle Standardbeobachter identifizierbaren, ausgezeichneten Beobachters zu rekonstruieren. Eine Umformung der Gleichung 3.14 zeigt, daß eine solche Rekonstruktion prinzipiell möglich ist.

$$\underline{\tilde{g}}_i^A(t) = \underline{\tilde{g}}_i^{\alpha}(t) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} = [\underline{e}_b(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t})] [\underline{e}_A(t) \cdot \underline{e}_c(t)] \underline{e}_b(t) \circ \underline{e}_c(t)$$

Sofern der Beobachter im \underline{e}_a -System zu den Zeitpunkten \tilde{t} und t neben dem sich deformierenden Körper auch das \underline{e}_A -Vektorsystem des anderen Beobachters erkennen könnte, wäre er in der Lage, die Skalarprodukte $\underline{e}_b(\tilde{t}) \cdot \underline{e}_A(\tilde{t})$ und $\underline{e}_A(t) \cdot \underline{e}_c(t)$ zu berechnen und somit zu rekonstruieren, welche Vektoren $\underline{\tilde{g}}_i^A(t)$ der Beobachter im \underline{e}_A -System benutzt. Er benötigte hierfür keinerlei Kenntnis über seinen eigenen Bewegungszustand. Wenn demzufolge alle denkbaren Beobachter ohne Kenntnis anderer Beobachter ein bestimmtes Beobachtersystem identifizieren könnten, so könnten sie auch die zu diesem ausgezeichneten System gehörenden \tilde{g}_i -Vektoren und den Deformationsgradienten berechnen und damit die Verzerrung des Materials eindeutig und übereinstimmend angeben.

Die einzige Informationsquelle, die allen Beobachtern ohne Kenntnis ihrer eigenen Bewegung zur Bestimmung eines solchen ausgezeichneten Beobachtersystems zur Verfügung steht, ist der ablaufende Deformationsprozeß. Dabei ist nicht entscheidend, daß alle Beobachter den gleichen Ursprung und die gleiche momentane Ausrichtung des ausgezeichneten Systems ermitteln, es muß lediglich sichergestellt sein, daß die von unterschiedlichen Beobachtern ermittelten Systeme zwischen \tilde{t} und t keine Relativrotationen ausführen. Als Kriterium für das ausgezeichnete System ist die Forderung nach der Rotationsfreiheit des dort beobachteten Verschiebungsfelds geeignet. Dieses System ist im Hinblick auf seine Rotation, wie gefordert, für alle Beobachter eindeutig identifizierbar.

Obwohl der Verschiebungsvektor die Differenz zwischen zwei Orten beschreibt, ist er im Gegensatz zu dem Vektor $\overset{PB}{r}$ in Gleichung 3.11 von der Bewegung des jeweiligen Beobachters abhängig, da die beiden verglichenen Orte beim Verschiebungsvektor zu unterschiedlichen Zeitpunkten registriert werden.

$$\underline{u}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = \underline{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) - \underline{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \tilde{t}) \quad (3.17)$$

Gemäß den Gleichungen 2.38 und 2.40 entspricht dies einem symmetrischen Gradienten des Verschiebungsfelds.

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\nabla} \circ \underline{u} = (\underline{\nabla} \circ \underline{u})^T \quad (3.18)$$

Dieser Gradient hängt unmittelbar mit dem Deformationsgradienten zusammen.

$$\underline{\nabla} \circ \underline{u} = \underline{g}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \circ (\underline{r} - \tilde{\underline{r}}) = \underline{g}^i \circ \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \tilde{\underline{r}}}{\partial \xi^i} \right) = \underline{g}^i \circ (\underline{g}_i - \tilde{\underline{g}}_i) = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{F}}^{T-1}$$

Das gesuchte Beobachtersystem zeichnet sich also durch die Besonderheit aus, daß der in diesem System registrierte Deformationsgradient symmetrisch ist. Diese Symmetrie ist nur in dem gesuchten ausgezeichneten Beobachtersystem gegeben.

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} \stackrel{!}{=} \underline{0} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}}^S$$

Dieser symmetrische und überdies stets positiv definite Deformationsgradient des ausgezeichneten Beobachters, der infolge seiner auf den Deformationsprozeß abgestimmten Eigenbewegung ein rotationsfreies Verschiebungsfeld registriert, ist der linke Strecktensor $\underline{\underline{V}}$. Gemäß Gleichung 3.16 gewinnt ein beliebiger Beobachter diesen speziellen Deformationsgradienten durch Polarzerlegung seines eigenen in der Regel unsymmetrischen Deformationsgradienten.

$$\underline{\underline{F}}^\alpha = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^\alpha \quad ; \quad \underline{\underline{F}}^A = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^A \quad (3.19)$$

Der linke Strecktensor und alle Tensorfunktionen dieses Tensors sind Eulersche, beobachterunabhängige Deformationsmaße.

3.1.4 Beobachterunabhängige Zeitableitungen

Die von den Standardbeobachtern gemäß Gleichung 3.5 registrierten zeitlichen Änderungen sind selbst bei einem Eulerschen Argument unterschiedlich, da zur Bestimmung der Differenzenquotienten wiederum Erinnerungen der Beobachter an zurückliegende Zustände benötigt werden. Diese Unterschiede werden bereits in Gleichung 3.10 deutlich. Völlig analog zu dem bei den Deformationsmaßen gewählten Vorgehen können auch hier beobachterunabhängige Tensoren bestimmt werden, indem die Beobachtungen in speziellen, anhand des beobachteten Deformationsprozesses identifizierbaren Beobachtersystemen rekonstruiert werden. Zur Ermittlung der zugehörigen Rekonstruktionsvorschriften werden die von zwei beliebigen Standardbeobachtern registrierten zeitlichen Änderungen eines beobachterunabhängigen Vektors \underline{x} untersucht (vergl. Gl. 3.10).

$$\frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{x}) = \frac{d}{dt}\Big|_\alpha (x_A \underline{e}_A) = \dot{x}_A \underline{e}_A + x_A \frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{e}_A) = \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{x}) + \underline{x} \cdot \underline{e}_A \circ \frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{e}_A) \quad (3.20)$$

Offensichtlich unterscheiden sich diese Zeitableitungen um einen additiven Term. Der darin enthaltene Tensor $\underline{e}_A \circ \frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{e}_A)$, der die Bewegung des (vom α -Beobachter zu rekonstruierenden) \mathcal{A} -Beobachters aus der Sicht des α -Beobachters beschreibt, hängt mit der Zeitableitung

des Tensors $\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}$ (vergl. Gl. 3.14) zusammen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \right) &= \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} \left([e_b(\tilde{t}) \cdot e_A(\tilde{t})] e_b(t) \circ e_A(t) \right) \\ &= [e_b(\tilde{t}) \cdot e_A(\tilde{t})] e_b(t) \circ \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (e_A(t)) = \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \cdot e_A(t) \circ \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (e_A(t)) \\ \Rightarrow e_A(t) \circ \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (e_A(t)) &= \underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \right) \end{aligned}$$

Dieser Tensor ist wegen $\frac{d}{dt} \left(\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} \right) = \frac{d}{dt} (\underline{\underline{E}}) = \underline{\underline{0}}$ antisymmetrisch. Für den transponierten Tensor wird die Abkürzung $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ eingeführt.

$$\underline{\underline{W}}^{\alpha A} = \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} = \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (e_A) \circ e_A = -\underline{\underline{W}}^{\alpha A T} \quad (3.21)$$

Da $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ eine Beobachtung aus dem e_a -System ist (s. Gl. 3.21), empfiehlt sich eine Umstellung der Gleichung 3.20.

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{x}) = \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (\underline{x}) + \underline{x} \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \quad (3.22)$$

In dieser Form entspricht die Gleichung 3.22 der auf zwei bewegte Systeme verallgemeinerten Eulerschen Differentiationsregel (vergl. Magnus & Müller 1990). Mit Hilfe koeffizientenfreier Darstellungen (s. Gl. 2.25) läßt sich dieses Ergebnis besonders einfach auf Tensoren 2. Stufe erweitern.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}} &= \underline{\underline{X}}^{\alpha} = \underline{\underline{X}}^{\mathcal{A}} = \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{\underline{X}}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{g}_k) \circ \underline{g}^K + \underline{g}_k \circ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{g}^K) \\ &= \left[\frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (\underline{g}_k) + \underline{g}_k \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \right] \circ \underline{g}^K + \underline{g}_k \circ \left[\frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (\underline{g}^K) + \underline{g}^K \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \right] \quad (3.23) \\ &= \frac{d \underline{g}_k}{dt}\Big|_{\alpha} \circ \underline{g}^K + \underline{g}_k \circ \frac{d \underline{g}^K}{dt}\Big|_{\alpha} - \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \cdot \underline{g}_k \circ \underline{g}^K + \underline{g}_k \circ \underline{g}^K \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} (\underline{\underline{X}}) - \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \end{aligned}$$

Die Gleichung bestätigt, daß die Ableitung eines Eulerschen Tensors in einem beliebigen Beobachtersystem im allgemeinen keine Eulersche Größe ist. Allerdings könnte der Beobachter im e_a -System, sofern er neben der Deformation auch das e_A -System beobachten könnte, die von einem Beobachter im e_A -System wahrgenommenen zeitlichen Änderungen Eulerscher Größen vollständig rekonstruieren (s. Gl. 3.21), ohne seine eigene Bewegung kennen zu müssen.

Damit kann wiederum, ähnlich wie in Abschnitt 3.1.3, ein für alle Standardbeobachter identisches Maß ermittelt werden, indem jeder Beobachter mit Hilfe der Gleichung 3.23 diejenige Zeitableitung rekonstruiert, die in einem ausgezeichneten System, das von allen Beobachtern gleichermaßen identifiziert werden kann, beobachtet wird. Als ausgezeichnetes System kann hier wiederum jenes genutzt werden, in dem das Verschiebungsfeld rotationsfrei erscheint (vergl. Gl. 3.19). Auf diesem Weg ergibt sich die Zeitableitung nach Green und McInnis (Haupt, 2000) bzw. nach Naghdi (Meyers et al. 2000).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^\alpha &= \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^\alpha \quad , \quad \underline{\underline{Q}} := \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{W}}^{\alpha A} = \frac{d}{dt}\Big|_\alpha \left(\underline{\underline{R}}^\alpha \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \\ &\rightarrow \frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{\underline{X}}) - \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_\alpha \left(\underline{\underline{R}}^\alpha \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \right\} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \cdot \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_\alpha \left(\underline{\underline{R}}^\alpha \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \right\} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} (\underline{\underline{X}}) - \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{R}}^A \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{AT} \right\} \cdot \underline{\underline{X}} + \underline{\underline{X}} \cdot \left\{ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{R}}^A \right) \cdot \underline{\underline{R}}^{AT} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Das hierbei genutzte spezielle Beobachtersystem hat allerdings den Nachteil, daß es durch den Vergleich der aktuellen mit der Referenzkonfiguration definiert ist (Dies äußert sich auch in dem Auftreten von $\underline{\underline{R}}$), und damit von der Wahl der Referenzkonfiguration abhängig ist. Dies ist für Zeitableitungen unbefriedigend, die durch den momentanen Zustand mit den aktuellen Geschwindigkeiten beschrieben werden sollten. Näher liegt insofern ein System, das dadurch ausgezeichnet ist, daß ein Beobachter in diesem System ein rotationsfreies Feld der zeitlichen Änderungen der Verschiebungen wahrnimmt. Diese Forderung ist gleichbedeutend damit, daß das Geschwindigkeitsfeld rotationsfrei ist (vergl. Gl. 3.17).

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{\hat{r}}} - \underline{\underline{\hat{r}}} = \underline{\underline{v}}$$

Aus der verschwindenden Rotation folgt wiederum die Symmetrie des zugehörigen Gradienten (s. Gl. 3.18). Dieser Geschwindigkeitsgradient läßt sich koeffizientenfrei durch die den Materialkoordinaten zugeordneten Basen $\underline{\underline{g}}_i$ und deren Zeitableitungen ausdrücken.

$$\underline{\underline{\nabla}} \times \underline{\underline{v}} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{0}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{\nabla}} \circ \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{g}}^i \circ \underline{\underline{\hat{g}}}_i \stackrel{!}{=} \underline{\underline{G}}^T \quad (3.25)$$

Im Vergleich der beiden Beobachter ergibt sich mit Gleichung 3.22 eine additive Zerlegung. Dabei entsteht zunächst eine koeffizientenfreie Darstellung des Tensors $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ (Gl. 2.21).

$$\underline{\underline{G}}^A = \underline{\underline{g}}^i \circ \left[\frac{d}{dt}\Big|_\alpha (\underline{\underline{g}}_i) + \underline{\underline{g}}_i \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \right] = \underline{\underline{G}}^\alpha + \underline{\underline{g}}^i \circ \left(\underline{\underline{g}}_i \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \right) = \underline{\underline{G}}^\alpha + \underline{\underline{W}}^{\alpha A} \quad (3.26)$$

Das $\underline{\underline{e}}_A$ -Basissystem möge nun vorübergehend das ausgezeichnete System sein, in dem die Rotation des Geschwindigkeitsfelds verschwindet und in dem somit der Geschwindigkeitsgradient symmetrisch sein muß (Gl. 3.25). Aufgrund der Antisymmetrie von $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ (Gl. 3.21) kann $\underline{\underline{G}}^A$ nur dann symmetrisch sein, wenn $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ sich mit dem antisymmetrischen Anteil von $\underline{\underline{G}}^\alpha$ aufhebt.

$$\underline{\underline{G}}^A \stackrel{!}{=} \underline{\underline{G}}^{AT} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{W}}^{\alpha A} = -\underline{\underline{\Omega}}^\alpha \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{\Omega}}^\alpha = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{G}}^\alpha - \underline{\underline{G}}^{\alpha T} \right) \quad (3.27)$$

Damit ist das gesuchte System bereits hinreichend spezifiziert, insofern sich die gesuchte Zeitableitung mit diesem speziellen $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ von jedem beliebigen Beobachtersystem aus mit Hilfe von Gleichung 3.23 berechnen läßt. Diese Ableitung ist als Zaremba-Jaumann-Zeitableitung bekannt und wird hier durch einen Stern über dem Ableitungsargument gekennzeichnet. Für nunmehr wiederum beliebige Beobachtersysteme \underline{e}_a und \underline{e}_A gilt also:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{X}}^{\alpha} = \underline{\underline{X}}^{\mathcal{A}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{X}}^* &= \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} (\underline{\underline{X}}) + \underline{\underline{\Omega}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^{\alpha} \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{A}} (\underline{\underline{X}}) + \underline{\underline{\Omega}}^{\mathcal{A}} \cdot \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^{\mathcal{A}} \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung und die Ableitung nach Green und McInnis (Gl. 3.24) sind zwei der unendlich vielen $\frac{d}{dt}$ -Ableitungen, die von unterschiedlich bewegten Beobachtern registriert werden. Es sind somit normale Zeitableitungen von in besonderer Weise bewegten Beobachtern, also genau wie alle anderen echte Tensorableitungen! Dies gilt auch für die vergleichsweise neue, sogenannte logarithmische Zeitableitung, die derart definiert ist, daß ihre Anwendung auf den Eulerschen Hencky-Tensor den symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten liefert. Die Definition dieser Zeitableitung und Anwendungen in der Materialmodellierung finden sich bei Meyers et al. (2000) und Xiao et al. (2000 u. 2001). Bei dieser Art der Zeitableitung ist allerdings die Berechnung des zugehörigen $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ -Tensors (s. Gl. 3.23) vergleichsweise aufwendig. Außerdem weist diese Zeitableitung bezüglich des Einflusses der Referenzkonfiguration ein ähnliches Verhalten wie die Green-McInnis-Zeitableitung auf. Neben den Eulerschen Zeitableitungen wurde eine weitere Eulersche Größe gefunden, denn aufgrund der generellen Antisymmetrie von $\underline{\underline{W}}^{\alpha A}$ folgt aus Gleichung 3.26 die Gleichheit der symmetrischen Anteile der Geschwindigkeitsgradienten für alle Beobachter.

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{G}}^{\alpha} + \underline{\underline{G}}^{\alpha T} \right) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{G}}^{\mathcal{A}} + \underline{\underline{G}}^{\mathcal{A}T} \right) \quad (3.29)$$

Der auch als Formänderungsgeschwindigkeitstensor bezeichnete Tensor $\underline{\underline{D}}$ ist somit ebenfalls eine Eulersche Größe und in allen Beobachtersystemen identisch.

Somit stehen nunmehr neben dem Cauchy-Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ und dem linken Strecktensor $\underline{\underline{V}}$ und daraus abgeleiteten Verzerrungstensen auch Eulersche Beschreibungsmöglichkeiten für zeitliche Veränderungen zur Verfügung. Wird mit Hilfe dieser Größen das Verhalten von Materialien beschrieben, so gelangt jeder Beobachter zu identischen Schlußfolgerungen in Bezug auf das Materialverhalten, unabhängig von seiner individuellen Eigenbewegung.

3.1.5 Leistungsbilanzen

Mit dem Einfluß der Bewegungen der Standardbeobachter auf die verschiedenen Leistungsanteile in den Gleichungen 3.1 und 3.2 knüpft das präsentierte Konzept der Standardbeobachter an die Axiomatik von Besdo (1974) an, die sich unter anderem durch eine sehr weitgehende Anschaulichkeit auszeichnet. Die Aussagen dieses Abschnitts orientieren sich sehr eng an dieser Axiomatik.

Leistungen äußerer Kräfte entstehen mit den beobachterabhängigen Geschwindigkeiten ($\underline{\dot{v}}^\alpha$ bzw. $\underline{\dot{v}}^A$) zum einen durch verteilte Oberflächenkräfte $d\underline{F}$, wirksam auf einem Flächenabschnitt dA ,

$$d\underline{F} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha = \frac{d\underline{F}}{dA} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dA = \underline{s} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dA = \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dA \quad (3.30)$$

und zum anderen durch über das Volumen verteilte Feldkräfte \underline{f} (z.B. in Folge eines Gravitationsfelds) und Führungs- und Coriolis-Trägheitskräfte $\varrho \left(\underline{\dot{a}}^{\text{abs}} - \underline{\dot{a}}^\alpha \right)$, die bei einer beschleunigten Eigenbewegung des jeweiligen Beobachters auftreten.

$$\underline{P}_{\text{ex}}^\alpha = \oint_{\mathcal{R}} \underline{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dA + \int_{\mathcal{G}} \left(\underline{f} - \varrho \left(\underline{\dot{a}}^{\text{abs}} - \underline{\dot{a}}^\alpha \right) \right) \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dV \quad (3.31)$$

Allein anhand ihrer Wirkung sind die Feld- und Trägheitskräfte für die Standardbeobachter nicht unterscheidbar. Beispielsweise würde ein Beobachter, der sich im freien Fall befindet, anhand der von ihm beobachtbaren Kräfte kein Indiz dafür finden können, daß er sich beschleunigt einer Gravitationsquelle nähert.

Ein Teil der Leistung der äußeren Kräfte führt zu Änderungen der ebenfalls beobachterabhängigen kinetischen Energie.

$$\underline{E}_{\text{kin}}^\alpha = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \underline{\dot{v}}^\alpha \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dm \quad \Rightarrow \quad \underline{\dot{E}}_{\text{kin}}^\alpha = \int_{\mathcal{B}} \underline{\dot{a}}^\alpha \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dm = \int_{\mathcal{G}} \varrho \underline{\dot{a}}^\alpha \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dV \quad (3.32)$$

Der neben der Änderung der kinetischen Energie verbleibende Teil P_{Sp} der Leistung der äußeren Kräfte hängt ausschließlich mit Formänderungen zusammen und sollte somit gemäß Gleichung 3.2 beobachterunabhängig sein, obwohl er sich aus der Differenz zweier beobachterabhängiger Leistungen ergibt.

Mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes werden alle Integrale in Gebietsintegrale umgewandelt und zusammengefaßt.

$$P_{\text{Sp}} = \underline{P}_{\text{ex}}^\alpha - \underline{\dot{E}}_{\text{kin}}^\alpha = \int_{\mathcal{G}} \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha \right) + \left(\underline{f} - \varrho \underline{\dot{a}}^{\text{abs}} \right) \cdot \underline{\dot{v}}^\alpha dV \stackrel{!}{=} \underline{P}_{\text{ex}}^A - \underline{\dot{E}}_{\text{kin}}^A \quad (3.33)$$

Demnach muß die Differenz der beiden Beobachtungen verschwinden und außerdem muß dies bereits für den Integranden allein gelten, da die Leistungsbilanz auch für beliebige Teilkörper zu erfüllen ist.

$$\Rightarrow \quad \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{\dot{v}}^A - \underline{\dot{v}}^\alpha \right) \right) + \left(\underline{f} - \varrho \underline{\dot{a}}^{\text{abs}} \right) \cdot \left(\underline{\dot{v}}^A - \underline{\dot{v}}^\alpha \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.34)$$

Der erste Term wird mit Hilfe von $\underline{v} \cdot \underline{X} \cdot \underline{w} = \underline{X} \cdot \underline{w} \circ \underline{v} = \underline{X}^T \cdot \underline{v} \circ \underline{w}$ weitergehend analysiert.

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{v} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\sigma}}) \cdot \underline{v} + \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot (\underline{\nabla} \circ \underline{v}) \quad (3.35)$$

Für die Differenzgeschwindigkeiten $\underline{\dot{v}}^A - \underline{\dot{v}}^\alpha$ folgt gemäß Gleichung 3.22:

$$\underline{\dot{v}}^A - \underline{\dot{v}}^\alpha = \underline{\dot{r}}^{\mathcal{A}} \cdot \underline{\underline{W}} - \frac{d}{dt} \Big|_\alpha \left(\underline{\dot{r}}^\alpha \right) \quad .$$

Der Gradient dieser Geschwindigkeitsdifferenz ist wegen der Ortsunabhängigkeit sowohl von $\underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}}$ (Gl. 3.21) als auch von $\underline{\underline{r}}^{\alpha\mathcal{A}}$ sehr einfach.

$$\underline{\underline{\nabla}} \circ \underline{\underline{r}}^{\mathcal{AP}} = \underline{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\nabla}} \circ \left(\underline{\underline{v}}^{\mathcal{A}} - \underline{\underline{v}}^{\alpha} \right) = \underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}}$$

Von der Forderung nach Beobachterunabhängigkeit (vergl. Gl. 3.34) verbleibt somit:

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}} + \left(\underline{\underline{f}} - \varrho \underline{\underline{a}}^{\text{abs}} + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) \cdot \left(\underline{\underline{r}}^{\mathcal{AP}} \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}} - \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{r}}^{\alpha\mathcal{A}} \right) \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad . \quad (3.36)$$

Da bei der Wahl der Beobachter die Größen $\underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}}$ und $\underline{\underline{r}}^{\alpha\mathcal{A}}$ unabhängig voneinander variiert werden können, $\underline{\underline{r}}^{\alpha\mathcal{A}}$ aber nur in dem zweiten Term in Gleichung 3.36 auftritt, muß der beobachterunabhängige Vorfaktor dieses Terms stets Null ergeben.

$$\underline{\underline{f}} - \varrho \underline{\underline{a}}^{\text{abs}} + \underline{\underline{\nabla}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \stackrel{!}{=} 0 \quad (3.37)$$

Dies ist die lokale Gleichgewichtsbedingung. Unter ihrer Berücksichtigung und Beachtung der Antisymmetrie von $\underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}}$ (s. Gl. 3.21) verbleibt als zweites Resultat aus Gleichung 3.36 die Forderung nach Symmetrie des Spannungstensors.

$$\underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}} \stackrel{!}{=} 0 \quad ; \quad \underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}} = -\underline{\underline{W}}^{\alpha\mathcal{A}T} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{\sigma}}^T \quad (3.38)$$

Mit der Berücksichtigung dieser Folgerungen aus der Beobachterunabhängigkeit der Formänderungsleistung (auch: Spannungsleistung, z.B. Lion 2000a) nimmt diese nunmehr eine stark vereinfachte Form an.

$$P_{\text{Sp}} = \int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{\underline{\nabla}} \circ \underline{\underline{v}}^{\alpha} \right) dV = \int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} dV \quad (3.39)$$

Damit gilt für die Gesamt-Leistungsbilanz:

$$\int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} dV = \int_{\mathcal{R}} \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{v}} dA + \int_{\mathcal{G}} \left(\underline{\underline{f}} - \varrho \underline{\underline{a}}^{\text{abs}} \right) \cdot \underline{\underline{v}} dV \quad . \quad (3.40)$$

3.2 Eulerscher und Lagrangescher Beobachter

Neben der Untersuchung unterschiedlicher Beobachtungen des gleichen Vorgangs ist auch der Vergleich ähnlicher Deformationen von Interesse. So läßt die Polarzerlegung des Deformationsgradienten in den Eulerschen Strecktensor $\underline{\underline{V}}$ und den Drehtensor $\underline{\underline{R}}$ (Gl. 3.19) erkennen, daß Deformationen, die sich untereinander lediglich durch vorgeschaltete Drehungen $\underline{\underline{Q}}$ unterscheiden, den gleichen linken Strecktensor liefern.

$$\underline{\underline{F}}^2 = \underline{\underline{F}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{V}}^1 \cdot \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{V}}^1 \quad , \quad \underline{\underline{R}}^2 = \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}}$$

Eine nachgeschaltete Drehung überträgt sich hingegen auf die linken Strecktensoren.

$$\underline{\underline{F}}^2 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}^1 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{V}}^1 \cdot \underline{\underline{R}}^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{V}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}}^T, \quad \underline{\underline{R}}^2 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}^1$$

Diese Zusammenhänge werden häufig so interpretiert, daß $\underline{\underline{V}}$ eine Beobachtung eines sogenannten Eulerschen Beobachters ist, der fest mit der aktuellen Konfiguration verbunden ist und von dieser Warte aus die Referenzkonfiguration beobachtet. Diese Vorstellung unterscheidet sich insofern von dem Konzept der Standardbeobachter, als daß hier unterstellt wird, die beiden Konfigurationen wären gleichzeitig definiert und einer Beobachtung zugänglich.

Besonders interessant an dem Konzept des Eulerschen Beobachters ist die Erweiterungsmöglichkeit um den Lagrangeschen Beobachter, der von der Warte der Referenzkonfiguration aus die aktuelle Konfiguration beobachtet. Das grundlegende Lagrangesche Verzerrungsmaß ist der rechte Strecktensor $\underline{\underline{U}}$, der sich aus der alternativen Polarzerlegung (s. Gl. 2.109) des Deformationsgradienten ergibt.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}} \quad (3.41)$$

Dementsprechend zeigen die Lagrangeschen Verzerrungsmaße vorgeschaltete Drehungen an, nachgeschaltete hingegen nicht.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^2 &= \underline{\underline{F}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{U}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}}^2 \cdot \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{U}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{U}}^1 \cdot \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{F}}^2 &= \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{F}}^1 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{U}}^1 = \underline{\underline{R}}^2 \cdot \underline{\underline{U}}^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{U}}^1 \end{aligned} \quad (3.42)$$

Gemäß ihrer Platzierung werden die Beschreibungen durch den Eulerschen und den Lagrangeschen Beobachter auch häufig als räumliche und materielle Beschreibung bezeichnet. Allerdings muß bei diesen Bezeichnungen der Trugschluß vermieden werden, eine materielle Beschreibung mit Eulerschen Größen sei mit Einschränkungen verbunden.

Darüber hinaus hängt das Konzept mit Eulerschem und Lagrangeschem Beobachter eng mit dem in der Literatur ebenfalls häufig zu findenden Konzept der Bezugsplatzierungen zusammen. Eine Abgrenzung zwischen der Beschreibung verschiedener Prozesse wie in Gleichung 3.42 einerseits und andererseits verschiedener Beobachtungen desselben Prozesses 3.16 scheint in diesem Kontext allerdings mit größeren Schwierigkeiten verbunden zu sein als bei den Standardbeobachtern.

Im folgenden werden die Lagrangeschen Größen in den Rahmen des Standardbeobachterkonzepts eingefügt.

3.2.1 Verzerrungstensoren der Lagrangeschen Betrachtungsweise

Mit Hilfe der Gleichungen 3.19, 3.16 und 3.41 läßt sich zeigen, daß der rechte Strecktensor $\underline{\underline{U}}$ im Gegensatz zum linken Strecktensor $\underline{\underline{V}}$ beobachterabhängig ist. So wie beim Deformationsgradienten auch registriert also jeder Standardbeobachter seinen individuellen $\underline{\underline{U}}$ -Tensor.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R}}^{\mathcal{A}} &= \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} = \underline{\underline{V}}^{-1} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} = \underline{\underline{R}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} \quad \Rightarrow \\ \underline{\underline{U}}^{\alpha} &= \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{U}}^{\mathcal{A}} &= \underline{\underline{R}}^{\mathcal{A}T} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\mathcal{A}} = \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}T} \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha T} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot \underline{\underline{R}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} = \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}T} \cdot \underline{\underline{U}}^{\alpha} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

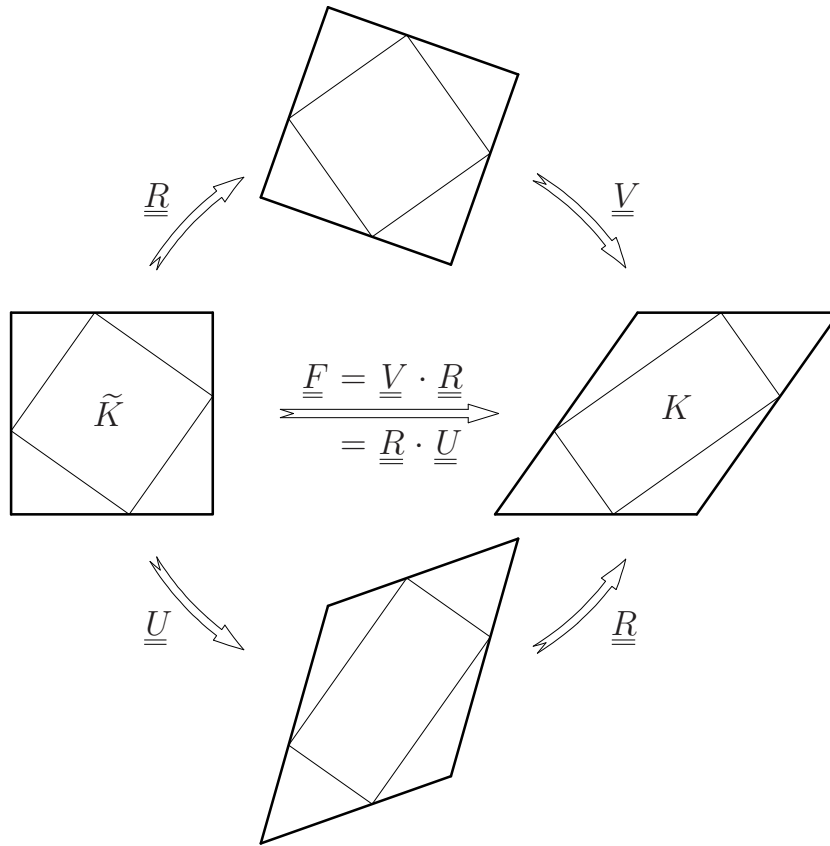


Abbildung 3.6: Anschauliche Deutung der Strecktensoren als Teildeformationen. Zusätzlich sind die Eigenrichtungen der beiden Tensoren angedeutet.

Da $\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}$ ein Orthogonaltensor ist, stimmen allerdings die Eigenwerte aller Varianten überein. Wenn $\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}$ gemäß Gleichung 3.14 in Gleichung 3.43 eingesetzt wird, zeigt sich eine bemerkenswerte Eigenschaft der von unterschiedlichen Beobachtern registrierten rechten Strecktensoren.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{U}}^A &= \overbrace{[e_B(\tilde{t}) \cdot e_a(\tilde{t})] e_B(t) \circ e_a(t)}^{\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}_T} \cdot \overbrace{U_{cd}^\alpha(t) e_c(t) \circ e_d(t)}^{\underline{\underline{U}}^\alpha} \\
 &\quad \cdot \underbrace{e_e(t) \circ e_F(t) [e_e(\tilde{t}) \cdot e_F(\tilde{t})]}_{\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}} \\
 &= U_{ad}^\alpha(t) [e_B(\tilde{t}) \cdot e_a(\tilde{t})] e_B \circ [e_d(\tilde{t}) \cdot e_F(\tilde{t})] e_F \\
 &= U_{AD}^A(t) \quad e_A \quad \circ \quad e_D
 \end{aligned}$$

Die Gegenüberstellung zeigt, daß die Koeffizienten U_{ad}^α und U_{AD}^A übereinstimmen, sofern die

beiden Beobachtungssysteme zum Zeitpunkt \tilde{t} identisch waren.

$$\underline{e}_a(\tilde{t}) = \underline{e}_A(\tilde{t}) \quad \Rightarrow \quad \overset{\alpha}{U}_{ad}(t) = \overset{\mathcal{A}}{U}_{AD}(t) \quad (3.44)$$

Diese Eigenschaft ist zur Charakterisierung der Lagrangeschen Größen geeignet. Demgegenüber stimmen die Koeffizienten der beobachterunabhängigen Eulerschen Tensoren überein, wenn die Beobachtungssysteme zum aktuellen Zeitpunkt übereinstimmen.

$$\underline{e}_a(t) = \underline{e}_A(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \overset{\alpha}{\sigma}_{ad}(t) = \overset{\mathcal{A}}{\sigma}_{AD}(t) \\ \overset{\alpha}{V}_{ad}(t) = \overset{\mathcal{A}}{V}_{AD}(t) \end{cases} \quad (3.45)$$

Um übereinstimmende Koeffizienten über einen ganzen Zeitraum zu gewährleisten, müßten somit die Bewegungen der Beobachter identisch sein. Bei den Lagrangeschen Größen reicht hierfür die Übereinstimmung zu Beginn des Prozesses aus. Diese Zusammenhänge stützen die Bezeichnung *materiell* für die Lagrangeschen Größen versus *räumlich* für die Eulerschen Größen. Allerdings treffen die Gleichungen 3.44 und 3.45 nicht für die vollständigen Tensoren, sondern nur für bestimmte Koeffizientenmatrizen zu.

Um die Lagrangesche Betrachtungsweise für die Formulierung von Stoffgesetzen nutzen zu können, müssen Spannungsmaße und Zeitableitungen gefunden werden, die einer der Gleichung 3.43 entsprechenden Beziehung genügen:

$$\underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{X}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} \quad . \quad (3.46)$$

Verknüpfungen von Tensoren mit dieser Eigenschaft führen in praktisch allen relevanten Fällen wiederum zu Lagrangeschen Tensoren.

Dies gilt sowohl für die Addition

$$\underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{X}}} + \underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{Y}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} + \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{Y}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \left(\underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} + \underline{\underline{\overset{\alpha}{Y}}} \right) \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}$$

als auch für die Multiplikation

$$\underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{Y}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{Y}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \left(\underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{Y}}} \right) \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}$$

und damit für beliebige Potenzreihen und Tensorfunktionen.

$$\underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{X}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} \quad \Rightarrow \quad f\left(\left(\underline{\underline{\overset{\mathcal{A}}{X}}}\right)\right) = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot f\left(\left(\underline{\underline{\overset{\alpha}{X}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}$$

Der Metriktensor $\underline{\underline{E}}$ kann sowohl als Eulersche als auch als Lagrangesche Größe aufgefaßt werden.

$$\underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} = \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{\overset{\alpha\mathcal{A}}{Q}}} = \underline{\underline{E}}$$

3.2.2 Lagrangesche Zeitableitungen

Die Suche nach Zeitableitungen, die zu einem Lagrangeschen Argument wiederum eine Lagrangesche Größe liefern, setzt bei den von den einzelnen Beobachtern direkt ermittelten zeitlichen Änderungen an. Hierbei wird eine Darstellung des Tensors $\underline{\underline{Q}}^{\alpha A}$ (vergl. Gl. 3.14) in gemischten Basen gewählt, bei der die Koeffizienten $Q_{aB}^{\alpha A}$ dem Beobachter im \underline{e}_A -System als zeitlich konstant erscheinen (s. ebenfalls GL. 3.14).

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}^A &= \underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \cdot \underline{\underline{U}}^a \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \quad \Rightarrow \\ \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{U}}^A \right) &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(Q_{aB}^{\alpha A} \underline{e}_B \circ \underline{e}_a \cdot U_{cd}^a \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \cdot Q_{eF}^{\alpha A} \underline{e}_e \circ \underline{e}_F \right) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(Q_{aB}^{\alpha A} U_{ad}^a Q_{dF}^{\alpha A} \underline{e}_B \circ \underline{e}_F \right) \end{aligned}$$

Der Beobachter im \underline{e}_A -System empfindet neben den Koeffizienten $Q_{aB}^{\alpha A}$ auch die Dyaden $\underline{e}_B \circ \underline{e}_F$ als gleichbleibend (Gl. 3.9). Als einziger abzuleitender Term verbleiben somit die skalaren Koeffizienten U_{ad}^a . Die Änderung dieser Skalare wird von allen Beobachtern in gleicher Weise wahrgenommen.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{U}}^A \right) &= Q_{aB}^{\alpha A} \frac{d}{dt} \left(U_{ad}^a \right) Q_{dF}^{\alpha A} \underline{e}_B \circ \underline{e}_F \\ &= Q_{aB}^{\alpha A} \underline{e}_B \circ \underline{e}_a \cdot \frac{d}{dt} \left(U_{cd}^a \right) \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \cdot Q_{eF}^{\alpha A} \underline{e}_e \circ \underline{e}_F \quad (3.47) \\ &= \underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{U}}^a \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \end{aligned}$$

Dies entspricht bereits der Forderung für eine Lagrangesche Größe (Gl. 3.46). Somit ist die zeitliche Änderung, die ein beliebig bewegter Beobachter an den von ihm registrierten Lagrangeschen Größen wahrnimmt, bereits wieder eine Lagrangesche Größe. Eine Rekonstruktion der Wahrnehmungen anderer Beobachter wie bei der Eulerschen Betrachtungsweise ist somit weder notwendig noch zweckmäßig. Damit zeigt sich ein wesentlicher Vorteil der Lagrangeschen Betrachtungsweise: Die eindeutige und einfach zu berechnende Zeitableitung. In Bezug auf Verzerrungen und Zeitableitungen erscheint die Lagrangesche Betrachtungsweise somit einfacher als die Eulersche Betrachtungsweise, da ein beliebiger Beobachter hierbei nicht darauf angewiesen ist, die Wahrnehmungen spezieller Beobachter zu rekonstruieren, um zueinander passende Größen zu erlangen. Die Tatsache, daß jeder Beobachter dabei die einzelnen Größen mit unterschiedlichen Tensoren identifiziert, ist unkritisch, solange ausschließlich Lagrangesche Größen miteinander zu Stoffgesetzen kombiniert werden.

3.2.3 Spannungen der Lagrangeschen Betrachtungsweise

Während sich die Lagrangesche Beschreibungsweise durch ihre einfache und gut verwendbare Zeitableitung auszeichnet, fehlt ihr ein natürlicher Spannungsbegriff, da die Spannungen

allein in der aktuellen Konfiguration beobachtet werden können. Folglich muß für die Lagrangesche Betrachtungsweise ein geeigneter Spannungsbegriff (künstlich) konstruiert werden. Der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ entsteht, indem der beobachterunabhängige Cauchy-Spannungstensor derart mit dem Deformationsgradienten verknüpft wird, daß das Ergebnis die für Lagrangesche Größen typische Eigenschaft gemäß Gleichung 3.46 aufweist.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tilde{T}}} &= \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tilde{T}}}^{\mathcal{A}} = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right)^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right)^{T-1} \\ &= \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} = \underline{\underline{Q}}^{\alpha A T} \cdot \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha A} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Dieser Tensor ist genau wie der Cauchy-Spannungstensor symmetrisch, im Unterschied zu $\underline{\underline{\sigma}}$ ist $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ aber nicht unmittelbar physikalisch interpretierbar, da für eine Ermittlung der tatsächlich im Körper wirksamen Spannungen aus $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ die vollständige Kenntnis der Deformation nötig ist.

Im Produkt mit der Lagrangeschen Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors $\underline{\underline{\gamma}}$ ergibt $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ die Formänderungsleistung P_{Sp} .

$$P_{\text{Sp}} = \int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{D}} \, dV = \int_{\tilde{\mathcal{G}}} \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\gamma}}} \, d\tilde{V} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{\gamma}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{E}} \right) \quad (3.49)$$

Zwei weitere Spannungstensoren werden im Rahmen dieser Arbeit verwendet. Es handelt sich um den Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\tau}}$, der wie der Cauchy-Spannungstensor zur Eulerschen Betrachtungsweise gehört, und um den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$, der in ähnlicher Weise wie der Deformationsgradient weder zur Eulerschen noch zur Lagrangeschen Betrachtungsweise gehört.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \underline{\underline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{Sp}} = \int_{\tilde{\mathcal{G}}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}} \, d\tilde{V} \\ \underline{\underline{T}} &= \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad \Rightarrow \quad P_{\text{Sp}} = \int_{\tilde{\mathcal{G}}} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} \, d\tilde{V} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Darüber hinaus wird in Kapitel 4 ein weiterer Spannungstensor bezüglich einer Zwischenkonfiguration eingeführt (vergl. Gl. 4.9).

3.3 Lie-Ableitungen und Oldroyd-Beobachter

Alternativ zu den in Abschnitt 3.1.4 angegebenen beobachterunabhängigen Zeitableitungen läßt die Gleichung 3.48 eine weitere Berechnungsmöglichkeit für beobachterunabhängige, also Eulersche Beschreibungen zeitlicher Änderungen erkennen. Soll beispielsweise die zeitliche Änderung eines Tensors $\underline{\underline{\sigma}}$ der Eulerschen Betrachtungsweise beschrieben werden, wird

zunächst mit Hilfe des Deformationsgradienten eine verwandte Größe erzeugt, die der Definitionsgleichung 3.46 für Lagrangesche Größen genügt.

$$\left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \right) = \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}T} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{\alpha-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha T-1} \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}}$$

Dieser Vorgang wird häufig als *pull-back* bezeichnet, teilweise (z.B. Rieger 2004) wird diese Bezeichnung aber auch direkt für das Ergebnis des Vorgangs verwendet. Für das Lagrange-sche pull-back-Ergebnis kann nunmehr die einfache Lagrangesche Zeitableitung (vergl. Gl. 3.47) gebildet werden.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \right) = \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}T} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{F}}^{\alpha-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha T-1} \right) \cdot \underline{\underline{Q}}^{\alpha\mathcal{A}}$$

Abschließend wird aus dieser Zeitableitung durch nochmalige Multiplikation mit dem Deformationsgradienten wieder eine Eulersche, für beide Beobachter gleiche Größe gebildet. Dieser Vorgang wird mit *push-forward* bezeichnet.

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} = \underline{\underline{F}}^{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{F}}^{\alpha-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha T-1} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha T}$$

Ein auf diese Weise gewonnenes beobachterunabhängiges Maß für die zeitliche Änderung von $\underline{\underline{\sigma}}$ wird als Lie-Ableitung bezeichnet. Allerdings beschreibt die Lie-Ableitung offensichtlich nicht allein die Änderung von $\underline{\underline{\sigma}}$, sondern auch die von $\underline{\underline{F}}$.

Es gibt eine zweite, völlig äquivalente Umformung mit den gleichen logischen Forderungen an die einzelnen Schritte, die allerdings ein abweichendes Ergebnis liefert.

$$\Rightarrow \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{A}} \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} = \underline{\underline{F}}^{\alpha T-1} \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\underline{F}}^{\alpha T} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\alpha-1}$$

Auch in diesem Fall wird von pull-back, push-forward und Lie-Ableitung gesprochen. Welche dieser beiden Berechnungsalternativen zu wählen ist, wird im pull-back/push-forward-Konzept von dem jeweiligen Argument abhängig gemacht. Dabei wird jedem möglichen Argument eine *natürliche Basis* zugeordnet. Die Bedeutung dieser Basis für das Konzept läßt sich an einer Darstellung der beiden Zeitableitungen in Materialkoordinaten, bzw. den zugeordneten Basisvektoren $\underline{\underline{g}}_i$, zeigen. Mit $\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\tilde{g}}}_i = \underline{\underline{g}}_i$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} &= \underline{\underline{F}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} \cdot \overset{\Delta}{\sigma^{ij}} \underline{\underline{g}}_i \circ \underline{\underline{g}}_j \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} \\ &= \underline{\underline{F}} \cdot \left(\overset{\Delta}{\sigma^{ij}} \underline{\underline{\tilde{g}}}_i \circ \underline{\underline{\tilde{g}}}_j \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} = \underline{\underline{F}} \cdot \overset{\Delta}{\sigma^{ij}} \underline{\underline{\tilde{g}}}_i \circ \underline{\underline{\tilde{g}}}_j \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} = \overset{\Delta}{\sigma^{ij}} \underline{\underline{g}}_i \circ \underline{\underline{g}}_j \end{aligned} \quad (3.51)$$

und:

$$\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T-1} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}T} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{\mathcal{A}-1} = \overset{\Delta}{\sigma}_{ij} \underline{\underline{g}}^i \circ \underline{\underline{g}}^j \quad . \quad (3.52)$$

Die obere Ableitung würde dementsprechend auf Tensoren mit der natürlichen Basis $\underline{g}_i \circ \underline{g}_j$, die untere hingegen auf Tensoren mit der natürlichen Basis $\underline{g}^i \circ \underline{g}^j$ angewandt werden.

Das Konzept der natürlichen Basis ist unvereinbar mit dem dieser Arbeit zugrunde liegenden, in Abschnitt 2.1.3 dargestellten Standpunkt bezüglich der Identität zweier Tensoren. Denn selbst wenn zwei Tensoren mit unterschiedlicher natürlicher Basis zu jedem Zeitpunkt eines Zeitraums die gleichen Eigenwerte und Eigenvektoren hätten, würde ihnen gemäß den Lie-Ableitungen eine unterschiedliche zeitliche Änderung zugeschrieben werden. Mit der natürlichen Basis wird den Tensoren somit ein zusätzliches Unterscheidungskriterium zugeordnet, das im Rahmen dieser Arbeit nicht als Unterscheidungskriterium für tensorielle Größen, sondern als Unterscheidungskriterium für Koeffizientenmatrizen, die nach einer zusätzlichen Regel ausgewählt werden, aufgefaßt würde.

Nichtsdestotrotz sind die Resultate der Lie-Ableitungen beobachterunabhängige Beschreibungen zeitlicher Änderungen. Im Rahmen des hier aufgestellten theoretischen Rahmens muß lediglich von der Auffassung Abstand genommen werden, jedem Argument sei eindeutig eine Zeitableitung gemäß einer der Gleichungen 3.51 und 3.52 zugeordnet. Vielmehr müssen diese beiden Gleichungen als Anwendungen unterschiedlicher Zeitableitungen verstanden werden. In diesem Kontext werden die Ableitungen allerdings nicht als Lie-Ableitungen, sondern als Oldroyd-Ableitungen bezeichnet. Zwar ist jede Lie-Ableitung eine Oldroyd-Ableitung, aber nicht immer die gleiche. So können z.B. gleichartige Lie-Ableitungen zweier unterschiedlicher Argumente den Anwendungen unterschiedlicher Oldroyd-Ableitungen entsprechen.

Die Oldroyd-Zeitableitungen lassen sich wiederum als Wahrnehmungen spezieller Beobachter interpretieren. Allerdings handelt es sich in diesem Fall um eine Gruppe rein fiktiver und der Anschauung nur sehr eingeschränkt zugänglicher Beobachter, bei denen die räumliche Wahrnehmung selbst einer sich verändernden Verzerrung unterworfen ist, die dem jeweiligen Beobachter allerdings verborgen bleibt. Am ehesten ließe sich dieser Vorgang anhand einer sich im Laufe der Zeit verändernden Optik veranschaulichen, durch die alle Beobachtungen getätigt würden. Demgegenüber wurden bisher nur Wahrnehmungen von solchen Beobachtern untersucht, die mit starren Basissystemen identifiziert werden können. Solche Beobachter sind allerdings prinzipiell in der Lage, auch Beobachtungen in anderen, sich selbst deformierenden Systemen, zu rekonstruieren, um auf diesem Wege zu weiteren beobachterunabhängigen Maßen für zeitliche Änderungen zu gelangen. Dieses Vorgehen ist allerdings insofern kritisch, als solche Maße verschiedene typische Eigenschaften herkömmlicher Zeitableitungen nicht aufweisen und somit nur mit Einschränkungen verwendbar sind. Dies soll im folgenden näher erläutert werden.

Im einfachsten Fall empfindet ein derartiger Beobachter die Vektoren \underline{g}_i als unveränderlich über der Zeit und registriert folglich in Einklang mit Gleichung 3.51 von den Änderungen eines Tensors \underline{X} lediglich die Änderungen der Koeffizienten X^{ij} , die er mit den als konstant empfundenen Vektoren wiederum zu einem Tensor zusammensetzt, der nunmehr mit $\underline{\overset{\circ}{X}}^{\square\square}$ bezeichnet werden soll.

$$\underline{X} = X^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad , \quad \underline{\overset{\circ}{X}}^{\square\square} = \dot{X}^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \quad (3.53)$$

Eine koordinatenunabhängige Berechnungsvorschrift für diesen Ausdruck erhält man mit

Hilfe einer geeigneten Zerlegung von $\underline{\hat{X}}$.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{X}} &= \dot{X}^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j + X^{ij} \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{g}_j + X^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{\hat{g}}_j \\ &\stackrel{\circ}{=} \underline{\hat{X}}^{\circ\circ} + \underline{\hat{g}}_k \circ \underline{g}^k \cdot \underline{\hat{X}}^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j + X^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \cdot \underline{g}^k \circ \underline{\hat{g}}_k \\ &\stackrel{\circ}{=} \underline{\hat{X}}^{\circ\circ} + \underline{G}^T \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{G}\end{aligned}$$

Alternativ zu einem Beobachter in den \underline{g}_i kann die Beobachtung auch aus den kontravarianten Vektoren \underline{g}^i erfolgen. Dies führt zu dem Ausdruck $\underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ}$ (vergl. Gl. 3.52). Daneben motiviert Gleichung 3.53 zu zwei weiteren Oldroyd-Ableitungen, bei denen jeweils die gemischtindizierten Koeffizienten abgeleitet werden. Die sich dabei ergebenden Tensoren $\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}$ und $\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}$ sind einer anschaulichen Deutung anhand fiktiver Beobachter allerdings kaum noch zugänglich.

$$\begin{aligned}\underline{\hat{X}}^{\circ\circ} &= \underline{\hat{X}} - \underline{G}^T \cdot \underline{X} - \underline{X} \cdot \underline{G} = \dot{X}^{ij} \underline{g}_i \circ \underline{g}_j \\ \underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ} &= \underline{\hat{X}} - \underline{G}^T \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{G}^T = \dot{X}^i_j \underline{g}_i \circ \underline{g}^j \\ \underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ} &= \underline{\hat{X}} + \underline{G} \cdot \underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{G}^T = \dot{X}_{ij} \underline{g}^i \circ \underline{g}^j \\ \underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ} &= \underline{\hat{X}} + \underline{G} \cdot \underline{X} - \underline{X} \cdot \underline{G} = \dot{X}_i^j \underline{g}^i \circ \underline{g}_j\end{aligned}\tag{3.54}$$

Die Oldroyd-Ableitungen haben aufgrund der fehlenden Starrheit der Beobachtersysteme verschiedene Nachteile. So sind die beiden Ableitungen $\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}$ und $\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}$ auch bei symmetrischem Argument \underline{X} im allgemeinen unsymmetrisch, sie sind dabei zueinander transponiert. Hingegen sind die beiden Typen $\underline{\hat{X}}^{\circ\circ}$ und $\underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ}$ bei symmetrischem Argument stets symmetrisch.

$$\underline{Y} = \underline{X}^T \Rightarrow \begin{cases} \underline{\hat{Y}} = \left(\underline{\hat{X}}\right)^T, & \underline{Y}^* = \left(\underline{X}^*\right)^T \\ \underline{\hat{Y}}^{\circ\circ} = \left(\underline{\hat{X}}^{\circ\circ}\right)^T, & \underline{\hat{Y}}_{\square\square}^{\circ} = \left(\underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ}\right)^T \\ \text{aber: } \underline{\hat{Y}}_{\square}^{\circ} \neq \left(\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}\right)^T, & \underline{\hat{Y}}_{\square}^{\circ} \neq \left(\underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ}\right)^T \end{cases}$$

Die beiden Typen $\underline{\hat{X}}^{\circ\circ}$ und $\underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ}$ erfüllen hingegen die Produktregel nicht.

$$\underline{X} = \underline{x} \cdot \underline{y} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\hat{X}} = \underline{\hat{x}} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}} \\ \underline{\hat{X}}^* = \underline{\hat{x}}^* \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}}^* \\ \underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ} = \underline{\hat{x}}_{\square}^{\circ} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}}_{\square}^{\circ} & \text{aber: } \underline{\hat{X}}^{\circ\circ} \neq \underline{\hat{x}}^{\circ\circ} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}}^{\circ\circ} \\ \underline{\hat{X}}_{\square}^{\circ} = \underline{\hat{x}}_{\square}^{\circ} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}}_{\square}^{\circ} & \underline{\hat{X}}_{\square\square}^{\circ} \neq \underline{\hat{x}}_{\square\square}^{\circ} \cdot \underline{y} + \underline{x} \cdot \underline{\hat{y}}_{\square\square}^{\circ} \end{cases}$$

Hinzu kommt, daß die Ableitungen $\underline{\hat{E}}^{\circ\circ}$ und $\underline{\hat{E}}_{\square\square}^{\circ}$ des Einheitstensors im allgemeinen nicht verschwinden. Stattdessen hängen sie mit den Formänderungsgeschwindigkeiten zusammen (Gln. 3.54 u. 3.29).

$$\underline{\hat{E}}_{\square\square}^{\circ} = \underline{\hat{E}} + \underline{G} \cdot \underline{E} + \underline{E} \cdot \underline{G}^T = 2 \underline{D} = -\underline{\hat{E}}^{\circ\circ}\tag{3.55}$$

4 Darstellungswechsel kontinuumsmechanischer Relationen

Das in Ihlemann (2003) entwickelte Konzept des Übertragungsoperators wird auf Anwendungen mit Zwischenkonfigurationen und auf Tensoren 4. Stufe erweitert, womit sich das Einsatzgebiet des Übertragungsoperators vervielfacht. Der Übertragungsoperator ermöglicht die standardisierte Erzeugung äquivalenter tensorieller Relationen in unterschiedlichen Darstellungsweisen. Das Potential des Operators wird am Beispiel thermodynamisch konsistenter rheologischer Modelle mit elastischen, viskosen und plastischen Grundelementen belegt. Die rheologischen Modelle werden mit dem Ziel eines möglichst einfachen Austauschs einzelner Grundelemente entwickelt.

Gerade bei der Entwicklung neuer Stoffgesetze und bei Kombinationen bereits bestehender Modelle entsteht häufig die Notwendigkeit, die Darstellungsweise solcher aus tensoriellen Relationen aufgebauter kontinuumsmechanischer Modelle zu ändern, beispielsweise von einer Eulerschen zu einer Lagrangeschen Darstellungsweise überzugehen.

Idealerweise bleibt bei einem solchen Wechsel der Darstellung die eigentliche Relation identisch erhalten, das nachgebildete Materialverhalten also unverändert. Sofern dieses Ziel erreicht wird, findet an den physikalischen Inhalten und Aussagen der Relationen keinerlei Veränderung statt. Somit dürfen physikalische Interpretationen derartige Umformungen auch nicht verbieten. Allerdings ist es natürlich möglich, daß das Ergebnis einer mathematisch zulässigen Operation einer physikalischen Interpretation nicht zugänglich ist und somit, wenn auch nicht falsch, so dennoch wertlos ist.

Folgt aber beispielsweise aus einer mathematisch zulässigen und mathematisch korrekt durchgeführten Umformung einer mit den verwendeten Axiomen verträglichen Relation eine neue Relation, von der zumindest die eine Seite physikalisch interpretierbar ist, so daß sich daraus Rückschlüsse auf die andere Seite der Relation ergeben, so ist dieser Rückschluß auch dann nicht falsch, wenn die Art der Umformung einer physikalischen Interpretation im Rahmen des verwendeten Konzepts nicht zugänglich ist.

4.1 Der Übertragungsoperator

Zur Durchführung des Darstellungswechsels kontinuumsmechanischer Relationen wird der sogenannte Übertragungsoperator verwendet, der in seiner Grundfunktion bereits ausführlich beschrieben wurde (Ihlemann 2003a). Außerdem wurde die große Leistungsfähigkeit dieses Operators an der Übertragung des MORPH-Stoffgesetzes für inelastische Gummiwerkstoffe (s.a. Abschnitt 6.1) demonstriert (ebenfalls Ihlemann 2003a). Ziel der Entwicklung und der hier zu zeigenden Erweiterungen des Übertragungsoperatorkonzepts ist eine möglichst große methodische Freiheit bei der Entwicklung kontinuumsmechanischer Relationen. Der Zweck des Operators besteht in der standardisierten Übertragung komplizierter Relationen von einer Darstellungsweise in eine andere, wobei die Relation selbst in jedem Fall identisch

erhalten bleibt. Die bearbeiteten Relationen können beispielsweise tensorwertige Funktionen tensorieller Argumente, substantielle Zeitableitungen und Operationen mit Eigenwerten und Invarianten enthalten.

Der Sinn der Anwendung des Übertragungsoperators liegt somit ausdrücklich in der Übertragung ganzer Relationen. Nur zu diesem Zweck werden Übertragungen der Einzelemente solcher Relationen ermittelt. Eine Verfahren wie die Berechnung der Lie-Ableitungen mit Hilfe des pull back/push forward-Konzepts ist dem Übertragungsoperator-Konzept hingegen völlig fremd. Der physikalische Sinngehalt einer Relation, z.B. eines Stoffgesetzes, kann somit durch die Anwendung des Übertragungsoperator keinesfalls eingeschränkt oder erweitert werden. Es ist lediglich möglich, daß die Übertragung neue Verwendungsmöglichkeiten oder Interpretationsweisen eröffnet. Eine Deutung oder Modifikation des physikalischen Inhalts der betroffenen Relation wird nicht vorgenommen.

4.1.1 Mathematische Eigenschaften

Die Anwendung des Übertragungsoperators $S(\dots)$ auf ein tensorielles Argument zweiter Ordnung entspricht einer Multiplikation von rechts mit dem Deformationsgradienten und einer weiteren Multiplikation von links mit dem inversen Deformationsgradienten.

$$S(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}} \quad (4.1)$$

Die Umkehrung des Übertragungsoperators wird als inverser Übertragungsoperator $S^{-1}(\dots)$ eingeführt.

$$S^{-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad S^{-1}(S(\underline{\underline{X}})) = \underline{\underline{X}}$$

Zusätzlich können ein transponierter und ein transponiert inverser Übertragungsoperator vereinbart werden (vergl. Ihlemann 2003a). Diese stellen allerdings keine eigenständigen Operationen dar, sondern können durch $S(\dots)$ und $S^{-1}(\dots)$ ausgedrückt werden.

Die Anwendung von $S(\dots)$ auf Eulersche Argumente liefert Lagrangesche Resultate, während umgekehrt $S^{-1}(\dots)$ für Lagrangesche Argumente Eulersche Resultate erbringt. Die weiteren denkbaren Kombinationen liefern Mischergebnisse und werden daher nicht weiter verfolgt. Mit den Kirchhoff-Spannungen $\underline{\underline{\tau}} = \frac{\tilde{q}}{q} \underline{\underline{\sigma}}$ als Eulersches Spannungsmaß:

$$\begin{aligned} S(\underline{\underline{\tau}}) &= \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{C}} & ; & & S^{-1}(\underline{\underline{\tilde{T}}}) &= \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \\ S(\underline{\underline{b}}) &= \underline{\underline{C}} & ; & & S^{-1}(\underline{\underline{C}}) &= \underline{\underline{b}} \quad . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die große Flexibilität beim Einsatz des Übertragungsoperators und seine vielseitige Verwendbarkeit resultieren aus seinen einfachen, aber sehr weitreichenden mathematischen Eigenschaften. Die folgenden Rechenregeln für S gelten in analoger Weise auch für S^{-1} (Herleitungen, s. Ihlemann 2003a).

$$\begin{aligned} S(\underline{\underline{X}}) + S(\underline{\underline{Y}}) &= S(\underline{\underline{X}} + \underline{\underline{Y}}) & ; & & S(\underline{\underline{E}}) &= \underline{\underline{E}} \\ S(\underline{\underline{X}}) \cdot S(\underline{\underline{Y}}) &= S(\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{Y}}) & ; & & \text{EW}[S(\underline{\underline{X}})] &= \text{EW}[\underline{\underline{X}}] \\ S(\underline{\underline{X}}) \cdot\cdot S(\underline{\underline{Y}}) &= \underline{\underline{X}} \cdot\cdot \underline{\underline{Y}} & ; & & S(f(\underline{\underline{X}})) &= f(S(\underline{\underline{X}})) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Da die Eigenwerte $\text{EW}[S(\underline{\underline{X}})]$ des Argumenttensors mit denen der zugehörigen Übertragung stets übereinstimmen, sind auch die Hauptinvarianten (s. Gl. 2.28) und alle anderen allein aus den Eigenwerten berechenbaren Invarianten von $S(\underline{\underline{X}})$ und $\underline{\underline{X}}$ identisch.

Bezüglich der Übertragung von Tensorfunktionen $f(\dots)$ ist anzumerken, daß $S(\underline{\underline{X}})$ stets diagonalähnlich und damit als Argument einer Tensorfunktion geeignet ist, sofern diese Forderung für $\underline{\underline{X}}$ selbst erfüllt ist (vergl. Gl. 2.50). Dies gilt, obwohl $S(\underline{\underline{X}})$ selbst bei einem symmetrischen Tensor $\underline{\underline{X}}$ im allgemeinen unsymmetrisch ist.

Alle genannten Rechenregeln und Eigenschaften gelten uneingeschränkt auch für unsymmetrische Tensoren. Für die Übertragung von Tensorfunktionen ist allerdings die Diagonalähnlichkeit des Arguments zu fordern. Zu beachten ist jedoch, daß die Übertragungen eines Tensors und seines transponierten Gegenstücks nicht zueinander transponiert sind, die Reihenfolge von Transponieren und Übertragung ist somit für das Ergebnis von Bedeutung. Die Übertragbarkeit wird hierdurch allerdings in keiner Weise eingeschränkt.

4.1.2 Übertragung transponierter Argumente

Bei der Vertauschung der Reihenfolge von Transponieren und Übertragen tritt zusätzlich ein Cauchy-Green-Tensor und der dazu inverse Tensor auf.

$$\begin{aligned}
 S(\underline{\underline{X}}^T) &= \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \overbrace{\underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \cdot \underline{\underline{F}}^T}^{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \overbrace{\underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \cdot \underline{\underline{F}}^T}^{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{F}} \\
 &= \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \right) \cdot \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}} \right)^T \cdot \underline{\underline{C}} \\
 &= \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \left(S(\underline{\underline{X}}) \right)^T \cdot \underline{\underline{C}} = \left(S(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right)^T \cdot \underline{\underline{C}}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Nichtdestoweniger bleibt die Relation natürlich identisch erhalten, lediglich die Struktur ändert sich in einer für die Wechselwirkung von Transponieren und Übertragungsoperator typischen Weise.

Sofern $\underline{\underline{X}}$ symmetrisch ist, überträgt sich diese Symmetrie auf $S(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}$, und Gleichung 4.4 vereinfacht sich zu der in diesem Fall trivialen Identität: $S(\underline{\underline{X}}^T) = S(\underline{\underline{X}})$:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}}^T \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} &= \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} \right)^{-1} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \\
 &= \left(S(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right)^T \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{X}}^T) = S(\underline{\underline{X}}) \quad .
 \end{aligned}$$

Natürlich gilt auch:

$$S(\underline{\underline{X}}^T) = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \left(S(\underline{\underline{X}}) \right)^T \cdot \underline{\underline{C}} \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \left(S(\underline{\underline{X}}^T) \right)^T \cdot \underline{\underline{C}} \quad .$$

Analog treten bei der entgegengesetzten Übertragung von der Lagrangeschen zur Eulerschen Darstellung der Eulersche linke Cauchy-Green-Tensor $\underline{\underline{b}}$ und sein inverses Gegenstück auf.

$$S^{-1}(\underline{\underline{X}}^T) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{b}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{T^{-1}} \cdot \underline{\underline{X}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} = \underline{\underline{b}} \cdot \left(S^{-1}(\underline{\underline{X}}) \right)^T \cdot \underline{\underline{b}}^{-1}$$

Auch Invarianten, zu deren Berechnung neben $\underline{\underline{X}}$ auch $\underline{\underline{X}}^T$ benötigt wird, können uneingeschränkt übertragen werden.

$$\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}}^T = S(\underline{\underline{X}}) \cdot S(\underline{\underline{X}}^T) \stackrel{\text{z.B.}}{=} \left(S(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot (S(\underline{\underline{X}}))^T \cdot \underline{\underline{C}} \right) \cdot \underline{\underline{E}}$$

4.2 Konzepterweiterung auf Zwischenkonfigurationen

Das Konzept des Übertragungsoperators wird im folgenden auf mehrstufige Prozesse erweitert, bei denen auf eine tatsächlich durchlaufene oder auch fiktive Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{K}}$ Bezug genommen wird. Basis für derartige Zerlegungen der Gesamtdeformation ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten (vergl. Gl. 2.16).

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{F}}^1 = \underline{\underline{F}}^{2-1} \cdot \underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{F}}^2 = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{1-1} \end{cases}$$

Zu beiden Teildeformationen können formal separate kontinuumsmechanische Größen berechnet werden, z.B.:

$$\underline{\underline{b}}^n = \underline{\underline{F}}^n \cdot \underline{\underline{F}}^{nT} \quad ; \quad \underline{\underline{C}}^n = \underline{\underline{F}}^{nT} \cdot \underline{\underline{F}}^n \quad ; \quad \underline{\underline{\tau}}^n = \underline{\underline{F}}^n \cdot \underline{\underline{T}}^n \cdot \underline{\underline{F}}^{nT} \quad .$$

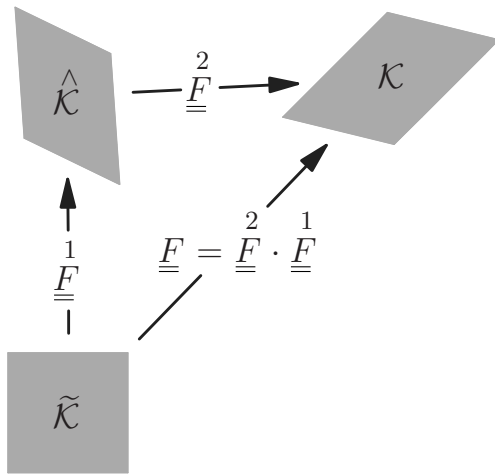


Abbildung 4.1: Die gedankliche Zerlegung des Deformationsprozesses in zwei aufeinanderfolgende Teildeformationen entspricht mathematisch der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ in die als erstes ausgeführte Teildeformation $\underline{\underline{F}}^1$ von der Referenzkonfiguration $\tilde{\mathcal{K}}$ zur Zwischenkonfiguration $\hat{\mathcal{K}}$ und die anschließend durchlaufene Teildeformation $\underline{\underline{F}}^2$ von $\hat{\mathcal{K}}$ zur aktuellen Konfiguration \mathcal{K} .

Zu beiden Teildeformationen werden zugehörige Übertragungsoperatoren definiert.

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{S}}^1(\underline{\underline{X}}) &= \underline{\underline{F}}^{1-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^1 \\ \underline{\underline{S}}^2(\underline{\underline{X}}) &= \underline{\underline{F}}^{2-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \underline{\underline{S}}\left(\underline{\underline{S}}(\underline{\underline{X}})\right) = S(\underline{\underline{X}}) \quad (4.5)$$

Auch die zwei inversen Operatoren werden vereinbart.

$$\underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad ; \quad \underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}}^{2-1}$$

Da die neuen Operatoren die gleiche Struktur wie der ursprüngliche Übertragungsoperator $S(\dots)$ aufweisen, gelten auch für sie die umfassenden Rechenregeln in Gleichung 4.3.

4.2.1 Anwendung auf Verzerrungstensoren

Übertragungen, bei denen der Operator und das Argument zum gleichen Teilprozeß gehören, sind vollständig analog zu den bekannten Übertragungen der Größen des Gesamtprozesses. Gemäß 4.2 gilt somit z.B. für die Größen der ersten Teildeformation:

$$\overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) = \overset{1}{\underline{C}} \quad ; \quad \overset{1}{S}^{-1}\left(\left(\overset{1}{\underline{C}}\right)\right) = \overset{1}{\underline{b}} \quad . \quad (4.6)$$

Bei rheologischen Modellen, bei denen Teildeformationen mit unterschiedlichen Materialeigenschaften verknüpft werden, entsteht der Bedarf, die Größen einer Teildeformation durch Größen der Gesamtdeformation und der anderen Teildeformation auszudrücken, bzw. die Größen der Gesamtdeformation durch Größen der Teildeformationen zu beschreiben. Dieser Übergang ist häufig anspruchsvoll. Hier entfalten die neuen Varianten des Übertragungsoperators ihr ganzes Potential. Die Gleichungen 4.5 eröffnen zusammen mit den Anwendungsbeispielen des ursprünglichen Operators in den Gleichungen 4.2 einen Zugang hierzu.

$$\begin{aligned} \underline{C} = S(\underline{b}) &= \overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{S}(\underline{b})\right)\right) = \overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{F}^{-1} \cdot \underline{b} \cdot \overset{2}{F}\right)\right) = \overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{F}^{-1} \cdot \left(\overset{2}{F} \cdot \overset{1}{F} \cdot \overset{1}{F}^T \cdot \overset{2}{F}^T\right) \cdot \overset{2}{F}\right)\right) \\ &= \overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{F} \cdot \overset{1}{F}^T \cdot \overset{2}{F}^T \cdot \overset{2}{F}\right)\right) = \overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}} \cdot \overset{2}{\underline{C}}\right)\right) = \overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) \cdot \overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{\underline{C}}\right)\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Hieran ist zunächst einmal bemerkenswert, daß sowohl die Anwendung von $\overset{2}{S}(\dots)$ auf eine Eulersche Größe des Gesamtprozesses ($\overset{2}{S}(\underline{b})$) als auch die Anwendung von $\overset{1}{S}^{-1}(\dots)$ auf eine Lagrangesche Größe ($\overset{1}{S}^{-1}(\underline{C})$) ein Ergebnis liefern, in dem ausschließlich Größen von Teilprozessen auftreten.

$$\overset{2}{S}(\underline{b}) = \overset{1}{S}^{-1}(\underline{C}) = \overset{1}{\underline{b}} \cdot \overset{2}{\underline{C}} \quad (4.8)$$

Darüber hinaus umfaßt $S(\underline{b})$ in Gleichung 4.7 neben der auf den ersten Teilprozeß beschränkten Übertragung $\overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right)$ (vergl. Gl. 4.6) noch die gemischte Operation $\overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{\underline{C}}\right)\right)$.

$$\left. \begin{array}{l} S(\underline{b}) = \underline{C} \\ \overset{1}{S}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) = \overset{1}{\underline{C}} \end{array} \right\} \Rightarrow \overset{1}{S}\left(\left(\overset{2}{\underline{C}}\right)\right) = \overset{1}{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{C}$$

Schließlich liefert die Umkehrung von Gleichung 4.8 zusätzlich:

$$\underline{b} = \overset{2}{S}^{-1}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) \cdot \overset{2}{S}^{-1}\left(\left(\overset{2}{\underline{C}}\right)\right) = \overset{2}{S}^{-1}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) \cdot \overset{2}{\underline{b}} \Rightarrow \overset{2}{S}^{-1}\left(\left(\overset{1}{\underline{b}}\right)\right) = \underline{b} \cdot \overset{2}{\underline{b}}^{-1} \quad .$$

Die nutzbringenden Anwendungen der verschiedenen Varianten des Übertragungsoperators sind in Abbildung 4.2 zusammengefaßt.

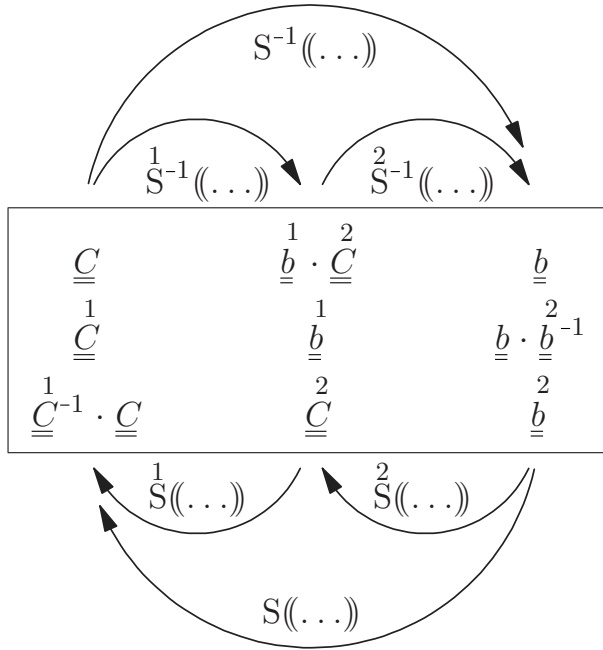


Abbildung 4.2: Zusammenstellung der Übertragungen von Cauchy-Green-Tensoren der Teilprozesse und des Gesamtprozesses. Beispielweise gilt: $\underline{\underline{S}}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\underline{b}} \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{2-1}$

Die Zusammenhänge der Operatorvarianten (vergl. Gl. 4.5) führen bei der Aufstellung in Abbildung 4.2 automatisch zu einer Zuordnung der einzelnen Größen zu jeweils einer der drei Konfigurationen. Die Lagrangeschen Größen des Gesamtprozesses und des ersten Teilprozesses sind mit der Referenzkonfiguration verbunden, Eulersche Größen des Gesamtprozesses und des zweiten Teilprozesses hingegen mit der aktuellen Konfiguration. Größen vom Eulerschen Typ des ersten Teilprozesses und Größen vom Lagrangeschen Typ des zweiten Teilprozesses sind der Zwischenkonfiguration zugeordnet.

Während der Übertragungsoperator in seiner ursprünglichen Form bei den Verzerrungsmaßen stets symmetrische Ergebnisse lieferte, treten bei den neuen Varianten auch hier schon unsymmetrische Resultate auf, z.B.: $\underline{\underline{S}}^{-1}(\underline{\underline{C}}) = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{C}}$.

Gemäß den für alle Varianten geltenden Rechenregeln 4.3 lassen sich anhand dieser Übertragungen problemlos die Übertragungen aller Verzerrungsmaße angeben, die als Tensorfunktionen der Cauchy-Green-Tensoren aufgefaßt werden können.

4.2.2 Anwendung auf Spannungstensoren

Gemäß der in Abbildung 4.2 deutlich werdenden Zuordnung der Tensorgruppen zu den drei Konfigurationen, ist der Cauchy-Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ der aktuellen Konfiguration, der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor hingegen der Referenzkonfiguration zugeordnet. Der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor fällt aus diesem Schema heraus, da er weder der Eulerschen noch der Lagrangeschen Darstellungsweise angehört. Für die neu eingeführte Zwischenkonfiguration empfiehlt sich die Konstruktion des zusätzlichen Spannungsbegriffs $\underline{\underline{\hat{T}}}$.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\hat{T}}} &= \frac{\hat{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \underline{\underline{F}}^1 \cdot \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{1T} \\
 \underline{\underline{\sigma}} &= \frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{\hat{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{2T}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

Entsprechend dieser Definition ergeben sich die Übertragungen des neuen Tensors. Z.B.:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\hat{S}}(\underline{\underline{\sigma}}) &= \frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \overset{\wedge}{\underline{\underline{T}}} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{C}}} \\ \overset{1}{\hat{S}}(\overset{\wedge}{\underline{\underline{T}}}) &= \frac{\hat{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{C}}} \quad . \end{aligned} \quad (4.10)$$

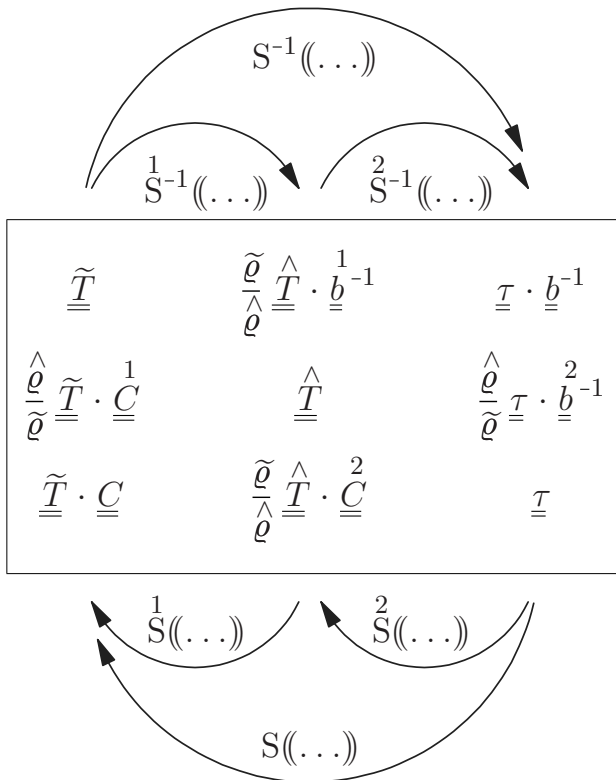


Abbildung 4.3: Zusammenstellung der Übertragungsmöglichkeiten der drei Spannungstensoren. Diese ergeben sich aus Umformungen der Gleichungen 4.10.

4.2.3 Übertragung elastischer Stoffgesetze

Anhand der in den Abbildungen 4.2 und 4.3 zusammengestellten Übertragungen von Verzerrungs- und Spannungsmaßen lassen sich bereits elastische Stoffgesetze zwischen den Konfigurationen übertragen. Als Beispiel diene ein Stoffgesetz für physikalisch lineares Materialverhalten bezüglich der zweiten Teildeformation. Als Verzerrungsmaß wird der insbesondere im Zusammenhang mit einer linearen Modellierung physikalisch besonders gut interpretierbare Eulersche Hencky-Tensor $\underline{\underline{h}} = \frac{1}{2} \ln(\underline{\underline{b}})$ verwendet.

$$\underline{\underline{\sigma}} = G \left\{ \ln\left(\overset{2}{\underline{\underline{b}}}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\ln\left(\overset{2}{\underline{\underline{b}}}\right) \cdot \underline{\underline{E}} \right) \underline{\underline{E}} \right\} \quad (4.11)$$

Dieses Stoffgesetz wird zunächst innerhalb der zweiten Teildeformation von der gegebenen Eulerschen Darstellung in die zugehörige Lagrangesche Darstellung übertragen. Trotz der enthaltenen Tensorfunktion bereitet der Übergang keinerlei Schwierigkeiten. Das Ergebnis

enthält wiederum eine Logarithmusfunktion, die als der Lagrangesche Hencky-Tensor $\underline{\underline{H}} = \frac{1}{2} \ln \underline{\underline{C}}$ identifiziert werden kann.

$$\overset{2}{\mathring{S}}(\dots) \rightarrow \frac{\varrho}{\hat{\varrho}} \hat{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{C}}^2 = G \left\{ \ln \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^2 \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\ln \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^2 \right) \cdot \underline{\underline{E}} \right) \underline{\underline{E}} \right\}$$

Die Auflösung nach $\hat{\underline{\underline{T}}}$ liefert:

$$\hat{\underline{\underline{T}}} = \frac{\hat{\varrho}}{\varrho} G \left\{ \ln \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^2 \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\ln \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^2 \right) \cdot \underline{\underline{E}} \right) \underline{\underline{C}}^{-1} \right\} .$$

Soll das Stoffgesetz ausschließlich in Größen der Referenzkonfiguration dargestellt werden, so ist statt der Übertragung $\overset{2}{\mathring{S}}(\dots)$ der vollständige Operator $S(\dots)$ anzuwenden.

$$S(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\varrho}{\tilde{\varrho}} \tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{C}} = G \left\{ \ln \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\ln \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{E}} \right) \underline{\underline{E}} \right\}$$

Dieser Ausdruck ist zunächst im allgemeinen unsymmetrisch. Erst die Auflösung nach $\tilde{\underline{\underline{T}}}$ stellt auf beiden Seiten der Gleichung die Symmetrie wieder her.

$$\tilde{\underline{\underline{T}}} = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} G \left\{ \ln \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\ln \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{E}} \right) \underline{\underline{C}}^{-1} \right\}$$

Da sich die Logarithmusfunktion als Potenzreihe wiedergeben läßt, kann die Symmetrie von $\ln \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1}$ anhand von

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^n \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} &= \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{n-1} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \\ &= \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \dots \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \rightarrow \text{Sym.} \end{aligned}$$

belegt werden.

4.2.4 Anwendung auf Zeitableitungen

Für Übertragungen von Stoffgesetzen für inelastisches Materialverhalten müssen auch Zeitableitungen übertragbar sein. Für die Herleitung für allgemeine Argumente wird eine Kombination von einem Lagrangeschen Tensor $\underline{\underline{X}}$ und dem zugehörigen Eulerschen Tensor $\underline{\underline{x}}$ herangezogen.

$$\underline{\underline{X}} = S(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{F}} \Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = S^{-1}(\underline{\underline{X}})$$

Anhand dieser Ausdrücke wird nun die Lagrangesche Zeitableitung von $\underline{\underline{X}}$ gebildet.

$$\hat{\underline{\underline{X}}} = \hat{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{x}}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^{-1} \underline{\underline{x}} \cdot \hat{\underline{\underline{F}}} \quad \text{mit:} \quad \hat{\underline{\underline{F}}}^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{\hat{\underline{\underline{F}}}} \neq \left(\hat{\underline{\underline{F}}} \right)^{-1}$$

Die Übertragung von $\underline{\hat{X}}$ liefert die zugeordnete Eulersche Größen.

$$\mathbb{S}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right) = \underline{F} \cdot \underline{\hat{X}} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} \cdot \underline{x} + \underline{\hat{x}} + \underline{x} \cdot \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1}$$

In dieser Gleichung ist mehrfach der Geschwindigkeitsgradient \underline{G} enthalten (s. Gl. 3.25). In einer koeffizientenfreien Darstellung in Materialkoordinaten wird der Zusammenhang mit dem Deformationsgradienten (s. 2.16) und dessen Zeitableitung deutlich.

$$\underline{G}^T = \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{g}^i = \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\tilde{g}}^i \cdot \underline{\tilde{g}}_k \circ \underline{g}^k = \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1}$$

Außerdem gilt:

$$\underline{\hat{E}} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} + \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{G}^T = -\underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} = -\underline{g}_i \circ \underline{\hat{g}}^i \quad .$$

Damit wird die Übertragung von $\underline{\hat{X}}$ als Oldroyd-Zeitableitung von \underline{x} erkennbar.

$$\mathbb{S}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right) = \underline{\hat{x}} - \underline{G}^T \cdot \underline{x} + \underline{x} \cdot \underline{G}^T = \underline{\hat{x}}_{\square}^{\circ} = \left(\underline{g}^i \cdot \underline{x} \cdot \underline{g}_k\right) \underline{g}_i \circ \underline{g}^k \quad (4.12)$$

Analog gilt für die erste Teildeformation mit: $\underline{\hat{x}} = \underline{\hat{S}}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right)$ und: $\underline{\hat{G}}^T = \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1} = \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\hat{g}}^i$:

$$\underline{\hat{S}}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right) = \underline{\hat{x}} - \underline{\hat{G}}^T \cdot \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{G}}^T = \left(\underline{\hat{g}}^i \cdot \underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{g}}_k\right) \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\hat{g}}^k \quad . \quad (4.13)$$

Dieser Tensor ist bezüglich der ersten Teildeformation vom Eulerschen Typ und paßt damit in das Schema, das der Abbildung 4.2 zugrunde liegt.

Als Kurzschreibweise für diesen Tensor wurde gewählt:

$$\left(\underline{\hat{g}}^i \cdot \underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{g}}_k\right) \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\hat{g}}^k = \underline{\hat{x}}_{\square}^{\circ} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\hat{S}}\left(\left(\underline{\hat{x}}_{\square}^{\circ}\right)\right) = \underline{\hat{X}} \quad .$$

Schwierigkeiten ergeben sich bei einem entsprechenden Vorgehen bei der zweiten Teildeformation. Die ersten Schritte können mit: $\underline{\hat{x}} = \underline{\hat{S}}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right)$ und: $\underline{\hat{G}}^T = \underline{F} \cdot \underline{F}^{-1}$ noch analog durchgeführt werden.

$$\underline{\hat{S}}^{-1}\left(\left(\underline{\hat{X}}\right)\right) = \underline{\hat{x}} - \underline{\hat{G}}^T \cdot \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{G}}^T \quad (4.14)$$

Eine Umformung ähnlich derjenigen am Ende von Gleichung 4.13, deren Existenz die Identifikation als Eulersche Größe ermöglichte, gelingt in diesem Fall allerdings nicht, da $\underline{\hat{F}}$ die

koeffizientenfreie Darstellung $\underline{\underline{F}}^2 = g_i \circ \hat{g}^i$ hat, und somit beide beteiligten Basen im allgemeinen zeitlich nicht konstant sind.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^{\hat{2}} = \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\hat{g}}^i + \underline{g}_i \circ \underline{\hat{g}}^i &\Rightarrow \underline{\underline{G}}^{2T} = \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{g}^i + \underline{g}_i \circ \underline{\hat{g}}^i \cdot \underline{\hat{g}}_k \circ \underline{g}^k \\ &= \underline{\underline{G}}^{1T} + \underline{g}_i \circ \underline{\hat{g}}^i \cdot \underline{\underline{F}}^{2-1} \\ &= \underline{\underline{G}}^{1T} - \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{G}}^{1T} \cdot \underline{\underline{F}}^{2-1} = \underline{\underline{G}}^{1T} - \underline{\underline{S}}^{-1} \left(\left(\underline{\underline{G}}^{1T} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Also entsteht auf der rechten Seite der Gleichung 4.14 keine Eulersche Größe, was aber von einer $\underline{\underline{S}}^{-1}(\dots)$ -Übertragung gefordert werden muß. Demnach ist $\underline{\underline{X}}^{\hat{2}}$ auch keine Größe, die zur Zwischenkonfiguration gehört. Dies leuchtet insofern ein, als das für die \triangle -Ableitung die Referenzkonfiguration die Basis darstellt. Ausgangspunkt für die zweite Teildeformation ist aber die Zwischenkonfiguration.

Ein geeigneter Ersatz für $\underline{\underline{X}}^{\hat{2}}$ ergibt sich, wenn die Kombination der Gleichungen 4.14 und 4.15 so aufgelöst wird, daß auf der einen Seite eine zur aktuellen Konfiguration gehörende Größe entsteht, während auf der anderen Seite eine Übertragung einer Größe der Zwischenkonfiguration verbleibt.

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \left(\left(\underline{\underline{X}}^{\hat{2}} - \underline{\underline{G}}^{1T} \cdot \underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{X}}^2 \cdot \underline{\underline{G}}^{1T} \right) \right) = \underline{\underline{x}}^{\hat{2}} - \underline{\underline{G}}^{1T} \cdot \underline{\underline{x}}^2 + \underline{\underline{x}}^2 \cdot \underline{\underline{G}}^{1T}$$

Mit den eingeführten Schreibweisen kann hierfür kurz geschrieben werden:

$$\underline{\underline{S}}^{-1} \left(\left(\underline{\underline{X}}^{\hat{2}}_{\square} \right) \right) = \underline{\underline{x}}^{\hat{2}}_{\square} \quad . \quad (4.16)$$

Die im Abschnitt 3.2.2 definierten \triangle -Ableitungen haben sich somit als ungeeignet für die zweite Teildeformation erwiesen. Stattdessen ist zu verwenden:

$$\underline{\underline{X}}^{\hat{2}}_{\square} = \underline{\underline{X}}^{\hat{2}} - \underline{\underline{G}}^{1T} \cdot \underline{\underline{X}}^2 + \underline{\underline{X}}^2 \cdot \underline{\underline{G}}^{1T} = \left(\underline{\hat{g}}^i \cdot \underline{\underline{X}}^2 \cdot \underline{\hat{g}}_k \right) \underline{\hat{g}}_i \circ \underline{\hat{g}}^k \quad . \quad (4.17)$$

Die Koeffizientendarstellung zeigt, daß es sich dabei um eine Ableitung handelt, bei der die Basen der Zwischenkonfiguration in der Art einer Oldroyd-Ableitung (s. Abschnitt 3.3) als zeitlich unveränderlich gehandhabt werden, obwohl sich diese bei einer fortschreitenden ersten Teildeformation in ihren relativen Winkeln und Längen durchaus ändern können. Die \triangle -Ableitung läßt sich bezüglich der ersten Teildeformation analog darstellen.

$$\underline{\underline{X}}^{\hat{1}} = \underline{\underline{X}}^{\hat{1}}_{\tilde{\square}} = \left(\underline{\tilde{g}}^i \cdot \underline{\underline{X}}^1 \cdot \underline{\tilde{g}}_k \right) \underline{\tilde{g}}_i \circ \underline{\tilde{g}}^k$$

Bestätigt wird $\overset{\circ}{\underline{\underline{X}}}_{\hat{\Delta}}^{\hat{\Delta}}$ als geeignete Zeitableitungsgröße für die Zwischenkonfiguration durch die Untersuchung der Übertragung von $\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}$ in die Referenzkonfiguration. Dies führt nach einigen Umformungen ebenfalls auf $\overset{\circ}{\underline{\underline{X}}}_{\hat{\Delta}}^{\hat{\Delta}}$ und dessen Übertragung in die Referenzkonfiguration (s. Gl. 4.18).

$$\begin{aligned} \overset{2}{\underline{\underline{X}}} &= \overset{1}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \\ \Rightarrow \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}} &= \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} + \overset{1}{\underline{\underline{F}}} \cdot \left\{ \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \right\} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} + \overset{1}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \\ \Rightarrow \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}\right) &= \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) + \left\{ \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}\right) \right\} + \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} \end{aligned}$$

$\overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right)$ ist eine Lagrangesche Größe, also ist auch die direkte Zeitableitung davon eine Lagrangesche Größe. Wenn diese Größe auf einer Gleichungsseite isoliert wird, muss somit auch die andere Seite eine Lagrangesche Größe sein.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}\right) \right\} &= \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}\right) - \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) - \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{2}{\underline{\underline{X}}}\right) \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} \\ &= \underbrace{\overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}} - \overset{1}{\underline{\underline{S}}}^{-1}\left(\overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}\right) \cdot \overset{2}{\underline{\underline{X}}} - \overset{2}{\underline{\underline{X}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{S}}}^{-1}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}\right)\right)}_{\text{Lagrangesch!}} \end{aligned}$$

Statt des Geschwindigkeitsgradienten $\underline{\underline{G}}^T = \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1}$ steht in den Zusatztermen das Produkt $\overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}$. Diese beiden Tensoren hängen zusammen über:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} &= \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} = \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{S}}\left(\underline{\underline{G}}^T\right) \quad \text{und:} \\ \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} &= -\overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{F}}} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} = -\overset{1}{\underline{\underline{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot \overset{1}{\underline{\underline{F}}} = -\underline{\underline{S}}\left(\underline{\underline{G}}^T\right) \quad . \end{aligned}$$

Damit entsteht auf der linken Gleichungsseite wiederum der bereits aus Gleichung 4.17 bekannte Term.

$$\left\{ \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}\right) \right\} = \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}} - \underline{\underline{G}}^T \cdot \overset{2}{\underline{\underline{X}}} + \overset{2}{\underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\underline{G}}^T\right) = \overset{1}{\underline{\underline{S}}}\left(\overset{\circ}{\underline{\underline{X}}}_{\hat{\Delta}}^{\hat{\Delta}}\right) \quad (4.18)$$

Damit liegen die Übertragungen von $\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}$ in die aktuelle Konfiguration (Gl. 4.12), von $\overset{\hat{\Delta}}{\underline{\underline{X}}}$ in die Zwischenkonfiguration (Gl. 4.13) und von $\overset{\circ}{\underline{\underline{X}}}_{\hat{\Delta}}^{\hat{\Delta}}$ sowohl in die aktuelle Konfiguration (Gl.

4.16) als auch in die Referenzkonfiguration (Gl. 4.18) vor.

$${}^1S^{-1}\left(\underline{\underline{\hat{X}}}\right) = \left\{ {}^1S^{-1}\left(\underline{\underline{X}}\right) \right\}^{\hat{\Delta}}_{\Delta} \quad ; \quad S^{-1}\left(\underline{\underline{\hat{X}}}\right) = \left\{ S^{-1}\left(\underline{\underline{X}}\right) \right\}^{\circ}_{\square}$$

Zusammen mit den Übertragungen aus der Abbildung 4.2 folgen hieraus die Beispielübertragungen in Abbildung 4.4.

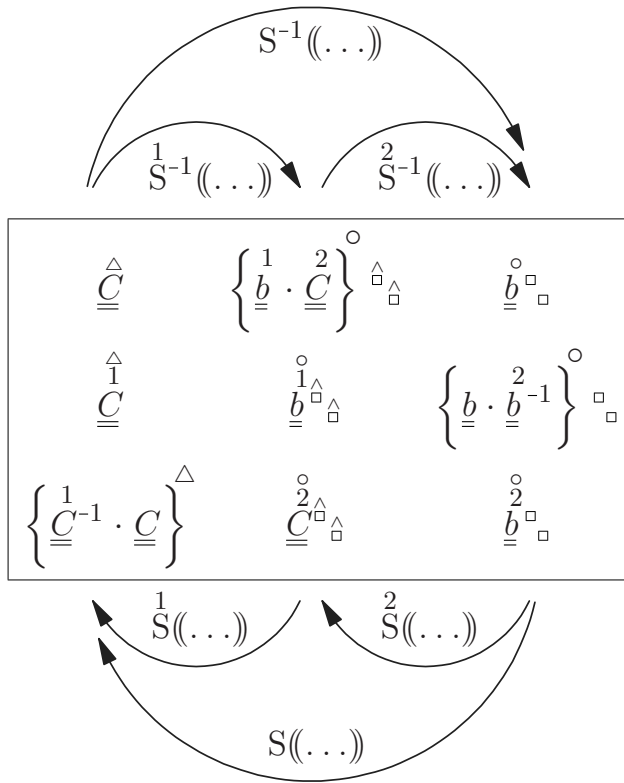


Abbildung 4.4: Zusammenstellung der Übertragungsmöglichkeiten einiger Zeitableitungen der Cauchy-Green-Tensoren. Eine physikalische Deutung dieser Größen sollte erst im Kontext der vollständigen Relation versucht werden, da zum Beispiel erst in der Gesamtübertragung die einer Relation eigenen Symmetrien wieder zutage treten.

Bei der Betrachtung der Übertragungen in Abbildungen 4.4 im Zusammenhang mit den Übertragungen der Spannungstensoren in Abbildung 4.3 tritt ein scheinbares Symmetrieproblem auf. Beispielsweise könnte in einem Stoffgesetz die Paarung $\underline{\underline{\hat{T}}}, \underline{\underline{\hat{C}}}$ auftreten. Nach einer Übertragung entsteht daraus die äquivalente Paarung $\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1}, \underline{\underline{\hat{b}}}$. Da $\underline{\underline{\hat{T}}}, \underline{\underline{\hat{C}}}$ und $\underline{\underline{\tau}}$ symmetrisch sind, sollte dies auch für $\underline{\underline{\hat{b}}} \cdot \underline{\underline{b}}$ gelten, wenn dies auch nicht unmittelbar zu erkennen ist. Darum wird diese Produkt näher untersucht.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\hat{x}}}_{\square} &= \underline{\underline{\hat{x}}} - \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{G}}^T = \left\{ \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \right\}^{\Delta} - \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^T \\ &= \left\{ \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \right\}^{\Delta} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \left(\underline{\underline{b}}^{-1} \right) + \left(-\underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \end{aligned}$$

Die Zeitableitung des inversen Cauchy-Green-Tensors wird umformuliert.

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{b}}^{-1} \right)^{\Delta} &= -\underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\hat{b}}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{\hat{b}}} = \underline{\underline{\hat{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}^T = \underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{G}} \\ &\Rightarrow \left(\underline{\underline{b}}^{-1} \right)^{\Delta} = -\underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{G}}^T - \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \end{aligned}$$

Wird dies in $\underline{\underline{\dot{x}}}_\square$ eingesetzt, so wird daran die erwartete Symmetrie von $\underline{\underline{\dot{b}}}_\square \cdot \underline{\underline{b}}$ erkennbar.

$$\underline{\underline{\dot{x}}}_\square = \{\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}}\}^\Delta \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} - \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} + \left(-\underline{\underline{G}}^T \cdot \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}}\right) \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} = \{\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}}\}^{\circ\circ} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \quad .$$

Ähnliche Herleitungen führen auf:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{x}}}_\square &= \{\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}}\}^{\circ\circ} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} = \underline{\underline{b}} \cdot \{\underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{x}}\}_{\square\square}^{\circ} \quad \text{und:} \\ \underline{\underline{\dot{x}}}_\square &= \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \{\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{x}}\}^{\circ\circ} = \{\underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1}\}_{\square\square}^{\circ} \cdot \underline{\underline{b}} \quad . \end{aligned}$$

Damit und unter Zuhilfenahme der Gleichung 3.55 können die Elemente der Abbildung 4.4 in diejenigen der Abbildung 4.5 umgeformt werden.

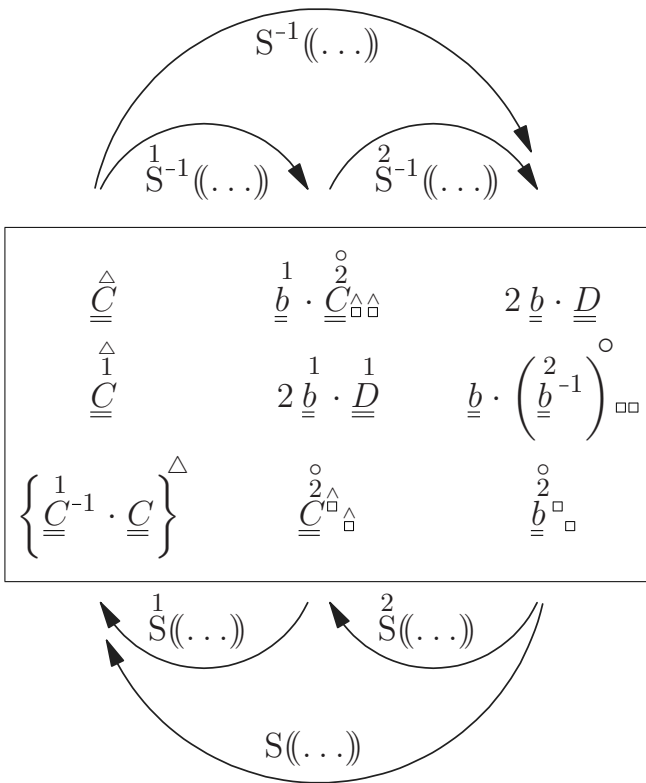


Abbildung 4.5: Umformungen der in Abbildung 4.4 angegebenen Übertragungen einiger Zeitableitungen der Cauchy-Green-Tensoren.

Darin sind wiederum Übertragungen der Formänderungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{D}}^1$ zu erkennen.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot S^{-1}\left(\left(\underline{\underline{\hat{C}}}\right)\right) = \frac{1}{2} S^{-1}\left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}}\right)\right) \\ \underline{\underline{D}}^1 &= \frac{1}{2} \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot S^{-1}\left(\left(\underline{\underline{\hat{C}}}\right)\right) = \frac{1}{2} S^{-1}\left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}}\right)\right) \end{aligned}$$

Eine Sonderrolle nimmt wieder die zweite Teildeformation ein. Hier steht bereits $\underline{\underline{\hat{C}}}_{\square\square}^{\circ}$ stellvertretend für $\underline{\underline{\hat{C}}}$. Dementsprechend tritt an die Stelle von $\underline{\underline{D}}$:

$$\frac{1}{2} S^{-1}\left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}}_{\square\square}^{\circ}\right)\right) = \frac{1}{2} \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}_\square^{\circ} \quad .$$

Sofern demnach bezüglich der zweiten Teildeformation Zeitableitungen auftreten, so sind weder $\overset{\Delta}{\underline{\underline{C}}}$ noch $\overset{2}{\underline{\underline{D}}}$ verwendbar. Stattdessen müssen diese gegen geeignete Ersatzgrößen ausgetauscht werden:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{F}} &\longrightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{b}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\circ}{\underline{\underline{b}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\Delta}{\underline{\underline{C}}} = \overset{\circ}{\underline{\underline{C}}}_{\square} \\
 \overset{1}{\underline{\underline{F}}} &\longrightarrow \overset{1}{\underline{\underline{D}}} = \frac{1}{2} \overset{1}{\underline{\underline{b}}}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\overset{1}{\underline{\underline{b}}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\circ}{\overset{1}{\underline{\underline{b}}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\Delta}{\overset{1}{\underline{\underline{C}}}} = \overset{\circ}{\overset{1}{\underline{\underline{C}}}}_{\square} \\
 \overset{2}{\underline{\underline{F}}} &\longrightarrow \frac{1}{2} \overset{2}{\underline{\underline{b}}}^{-1} \cdot \overset{\circ}{\underline{\underline{b}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\circ}{\underline{\underline{b}}}_{\square} & ; & \quad \overset{\circ}{\overset{2}{\underline{\underline{C}}}}_{\square}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

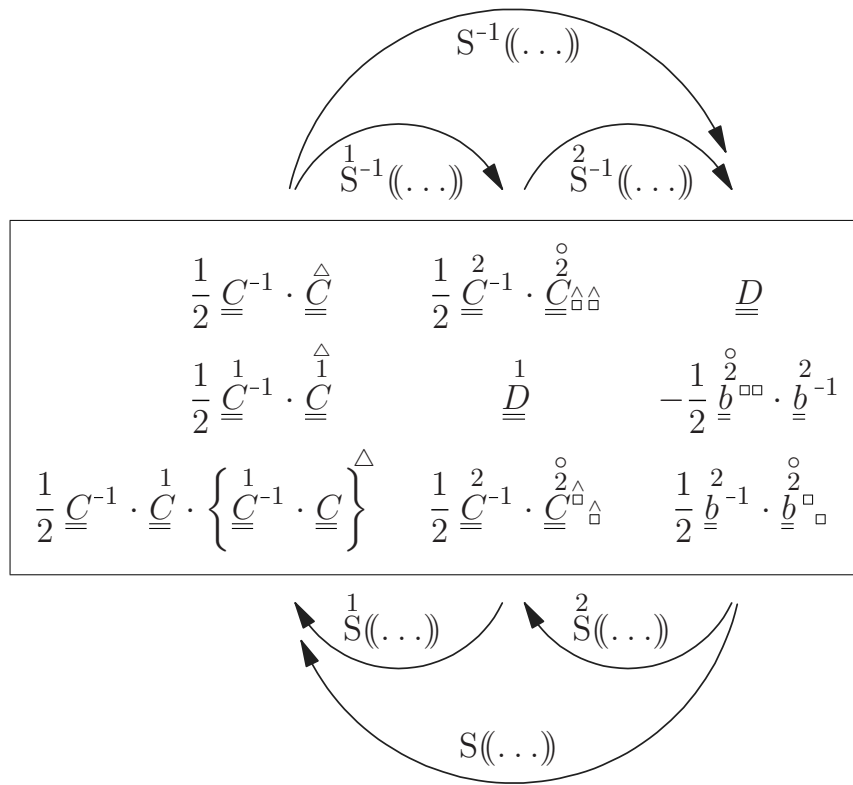


Abbildung 4.6: Zusammenstellung der Übertragungsmöglichkeiten für die Formänderungsgeschwindigkeitstensoren $\underline{\underline{D}}$ und $\overset{1}{\underline{\underline{D}}}$ und die Ersatzgröße für den Formänderungsgeschwindigkeitstensor zur zweiten Teildeformation.

Die Übertragungen der Formänderungstensoren, bzw. der Ersatzgröße für die zweite Teildeformation, können anhand der in Abbildung 4.5 angegebenen Beziehungen bestimmt werden. Für die Übertragung $\overset{2}{\underline{\underline{S}}}^{-1} \left(\left(\overset{1}{\underline{\underline{D}}} \right) \right)$ empfiehlt sich wiederum die Umformulierung der Ableitung eines invertierten Tensors.

$$\text{mit: } b^{ij} b_{jk} = \delta^i_k \quad \Rightarrow \quad \overset{2}{\underline{\underline{S}}}^{-1} \left(\left(\overset{1}{\underline{\underline{D}}} \right) \right) = \frac{1}{2} \overset{2}{\underline{\underline{b}}} \cdot \left(\overset{2}{\underline{\underline{b}}}^{-1} \right)_{\square}^{\circ} = -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\underline{\underline{b}}}_{\square} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{b}}}^{-1}$$

Weitere Eulersche Zeitableitungen können gemäß den Gleichungen 3.54 aus $\underline{\underline{\dot{b}}}_\square$ und $\underline{\underline{D}}$ berechnet werden.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\dot{x}}}_{\square\square} &= \underline{\underline{\dot{x}}}_\square + 2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{x}} \\ \underline{\underline{\dot{x}}}_\square &= \underline{\underline{\dot{x}}}_\square + 2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{x}} - 2 \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{D}} \\ \underline{\underline{\dot{x}}}_{\square\square} &= \underline{\underline{\dot{x}}}_\square - 2 \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{D}} \\ \underline{\underline{\dot{x}}}^* &= \underline{\underline{\dot{x}}}_\square + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{x}} - \underline{\underline{x}} \cdot \underline{\underline{D}}\end{aligned}$$

Für die Gesamtdeformation führt dies beispielsweise auf:

$$\underline{\underline{x}} = S^{-1}(\underline{\underline{X}}) \begin{cases} S(\underline{\underline{\dot{x}}}_{\square\square}) = \underline{\underline{\dot{X}}} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \cdot \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \\ S(\underline{\underline{\dot{x}}}_\square) = \underline{\underline{\dot{X}}} - \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \\ S(\underline{\underline{\dot{x}}}_{\square\square}) = \underline{\underline{\dot{X}}} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \cdot \underline{\underline{X}} \\ S(\underline{\underline{\dot{x}}}^*) = \underline{\underline{\dot{X}}} + \frac{1}{2} (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \cdot \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}}) \end{cases} \quad (4.20)$$

Gemäß Gleichung 4.3 lassen sich z.B. auch Tensorfunktionen solcher Zeitableitungen übertragen.

4.3 Rheologische Materialmodelle

Bei Reihenschaltungen von eindimensionalen Elementen wie Federn, Dämpfern und Reibelementen ist bekannt, daß sich die Längenänderungen Δl der Einzelelemente zur Gesamtlängenänderung addieren und daß die Kräfte F in allen Elementen der Reihe gleich groß sind.

$$\Delta l = \overset{1}{\Delta} l + \overset{2}{\Delta} l \quad ; \quad F = \overset{1}{F} = \overset{2}{F}$$

Bei einer Umsetzung auf das dreidimensionale Kontinuum tritt bekanntermaßen an die Stelle der Summation von Längenänderungen das Produkt von Deformationsgradienten (s. z.B. Lion 2000b, Haupt 2000, Sedlan 2001, Heimes 2004).

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}}^1{}^T \cdot \underline{\underline{F}}^2{}^T \quad , \quad \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^1{}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}^2{}^{-1} \quad , \quad \underline{\underline{F}}^{T^{-1}} = \underline{\underline{F}}^2{}^{T^{-1}} \cdot \underline{\underline{F}}^1{}^{T^{-1}}$$

Bei den Spannungen hingegen ist die Umsetzung nicht sofort klar. Die Gleichsetzung unterschiedlicher Spannungstensoren ist nicht gleichbedeutend, und teilweise ist nicht klar, wie die Spannungen zu den Teildeformationen zu definieren sind.

Abhilfe kann geschaffen werden, indem bereits im eindimensionalen Modell als Basis für die Gleichsetzung der Kräfte $\overset{1}{F}$ und $\overset{2}{F}$ die verlustfreie (additive!) Aufteilung der Formänderungsleistung auf die beiden Unterelemente postuliert wird. Für die Formänderungsleistungen gilt:

$$P_{\text{Sp}} = F \dot{l} = F \left(\overset{1}{\dot{l}} + \overset{2}{\dot{l}} \right) \stackrel{!}{=} \overset{1}{P}_{\text{Sp}} + \overset{2}{P}_{\text{Sp}} = \overset{1}{F} \overset{1}{\dot{l}} + \overset{2}{F} \overset{2}{\dot{l}} \quad .$$

Hieran wird klar, daß im eindimensionalen Modell $\overset{1}{F}$ und $\overset{2}{F}$ mit dem Gesamt- F übereinstimmen müssen.

Dementsprechend wird nun auch die Formänderungsleistung im allgemeinen Fall aufgeteilt. Dabei wird die Ersatzgröße für die Formänderungsgeschwindigkeit der zweiten Teildeformation aus Gleichung 4.19 verwendet. Die dabei auftretenden Spannungstensoren der Einzelelemente sind mit ihren Übertragungen in Abbildung 4.7 zusammengestellt. Sowohl Spannungen vom Eulerschen Typ der ersten Teildeformation als auch Spannungen des Lagrangeschen Typs der zweiten Teildeformation gehören dabei zur Zwischenkonfiguration.

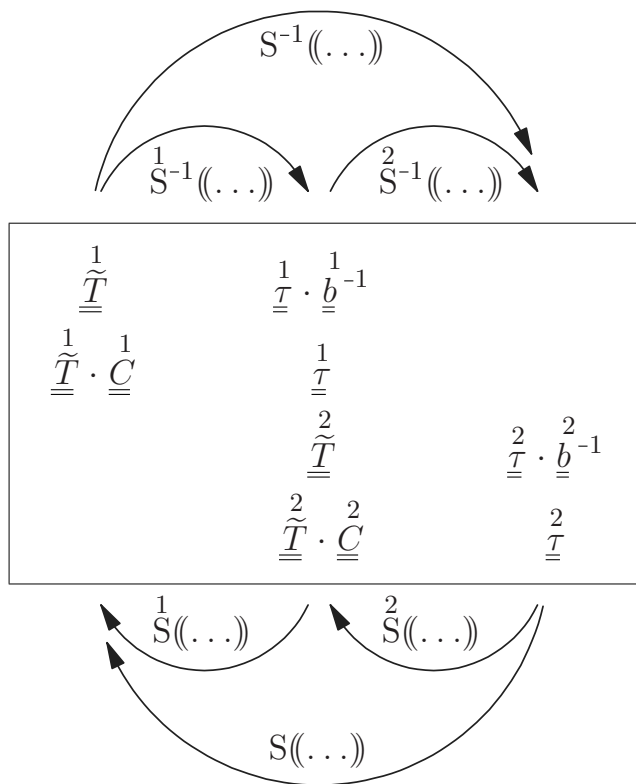


Abbildung 4.7: Spannungstensoren der Einzelelemente einer Reihenschaltung.

$$P_{\text{Sp}} \stackrel{!}{=} \overset{1}{P}_{\text{Sp}} + \overset{2}{P}_{\text{Sp}} \quad \text{mit:} \quad \begin{cases} P_{\text{Sp}} = \int \underline{\underline{\overset{\tilde{G}}{\tau}}} \cdot \underline{\underline{D}} \, d\tilde{V} & = \int \underline{\underline{\overset{\tilde{G}}{T}}} \cdot \frac{1}{2} \underline{\underline{\overset{\hat{C}}{C}}} \, d\tilde{V} \\ \overset{1}{P}_{\text{Sp}} = \int \underline{\underline{\overset{\tilde{G}}{\tau}}} \cdot \underline{\underline{D}} \, d\tilde{V} & = \int \underline{\underline{\overset{\tilde{G}}{T}}} \cdot \frac{1}{2} \underline{\underline{\overset{\hat{C}}{C}}} \, d\tilde{V} \\ \overset{2}{P}_{\text{Sp}} = \int \underline{\underline{\overset{\hat{G}}{\tau}}} \cdot \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\overset{2}{b}^{-1}}} \cdot \underline{\underline{\overset{\circ}{b}^{\square}}} \right) \, d\hat{V} & = \int \underline{\underline{\overset{\hat{G}}{T}}} \cdot \frac{1}{2} \underline{\underline{\overset{\circ}{C}^{\hat{\square}}}} \, d\hat{V} \end{cases} \quad (4.21)$$

Die Übertragung aller Elemente der Gleichung 4.21 in die Referenzkonfiguration mit Hilfe der Abbildungen 4.5 und 4.7 und unter Berücksichtigung der zunächst unterschiedlichen

Integrationsgebiete liefert:

$$\underbrace{\tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \frac{1}{2} \hat{\underline{\underline{C}}}}_{P_{\text{Sp}}} \stackrel{!}{=} \underbrace{\tilde{\underline{\underline{T}}} \cdot \frac{1}{2} \hat{\underline{\underline{C}}}}_{P_{\text{Sp}}^1} + \underbrace{\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \left\{ \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right\}^{\hat{\underline{\underline{C}}}}}_{P_{\text{Sp}}^2} .$$

$$\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} - \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}$$

Die Sortierung nach den Zeitableitungen führt auf:

$$\Rightarrow \left(\tilde{\underline{\underline{T}}} - \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} - \left(\tilde{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} \stackrel{!}{=} 0 . \quad (4.22)$$

In dem Vorfaktor zu $\hat{\underline{\underline{C}}}$ treten Spannungstensoren aus beiden Teildeformationen auf. Deshalb wird dieser Term in die Zwischenkonfiguration übertragen, wo beide Spannungsanteile auftreten. Dabei ist die typische Arbeitsweise mit dem Übertragungsoperator gut zu erkennen: Zunächst wird formal die gesamte Relation übertragen, dann der Operator bis auf die unterste Argumentebene hinuntergezogen und die verbleibenden Übertragungen aus den Tabellen abgelesen. Abschließend wird das Ergebnis zusammengefasst.

$$\begin{aligned} & \left(\tilde{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} \\ &= \overset{1}{\text{S}}^{-1} \left(\left(\tilde{\underline{\underline{T}}} - \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \right) \cdot \overset{1}{\text{S}}^{-1} \left(\hat{\underline{\underline{C}}} \right) \\ &= \left(\overset{1}{\text{S}}^{-1} \left(\left(\tilde{\underline{\underline{T}}} \right) \right) - \left(\overset{1}{\text{S}}^{-1} \left(\left(\underline{\underline{C}} \right) \right) \right)^{-1} \cdot \overset{1}{\text{S}}^{-1}(\underline{\underline{C}}) \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \overset{2}{\text{S}}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \left(\overset{1}{\text{S}}^{-1}(\underline{\underline{C}}) \right)^{-1} \right) \cdot \overset{1}{\text{S}}^{-1} \left(\hat{\underline{\underline{C}}} \right) \\ &= \left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} - \underline{\underline{b}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \overset{2}{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \right) \cdot 2 \left(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}} \right) \\ &= \left(\underline{\underline{T}} - \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \overset{2}{\underline{\underline{T}}} \right) \cdot 2 \underline{\underline{D}} \end{aligned}$$

Die Bedingung in Gleichung 4.22 ist somit durch

$$\text{sym} \left\{ \tilde{\underline{\underline{T}}} - \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \text{S}\left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}}\right)\right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right\} = \underline{\underline{0}} \quad \text{und} \quad \text{sym} \left\{ \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{C}} \cdot \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \overset{2}{\underline{\underline{T}}} \right\} = \underline{\underline{0}}$$

erfüllbar.

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{\hat{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \underline{\underline{T}} \quad \text{und:} \quad \frac{\hat{\varrho}}{\tilde{\varrho}} \underline{\underline{T}} = \text{sym} \left\{ \underline{\underline{C}} \cdot \overset{2}{\underline{\underline{T}}} \right\} \quad (4.23)$$

Die zweite Gleichung führt auf eine Bestimmungsgleichung für die Zwischenkonfiguration (vergl. z.B. Gl. 4.26), die erste dient der abschließenden Berechnung der Gesamtspannungen. Die zweite Bedingung läßt weitere Rückschlüsse zu:

$$\frac{\hat{\varrho}}{\varrho} \frac{1}{\underline{\underline{T}}} = \text{sym} \left\{ \frac{2}{\underline{\underline{C}}} \cdot \frac{2}{\underline{\underline{T}}} \right\} = \text{sym} \left\{ \frac{2}{\underline{\underline{T}}} \cdot \frac{2}{\underline{\underline{C}}} \right\} = \text{sym} \left\{ \overset{2}{\mathbb{S}} \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{T}}} \right) \right) \right\}$$

Dies ist besonders einfach zu erfüllen, wenn der zweiten Teildeformation ein isotrop elastisches Materialmodell zugeordnet ist.

$$\frac{2}{\underline{\underline{T}}} = f \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{b}}} \right) \right) \Rightarrow \frac{2}{\underline{\underline{T}}} = f \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{C}}} \right) \right) \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \parallel \underline{\underline{C}} \Rightarrow \frac{1}{\underline{\underline{T}}} = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} f \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{C}}} \right) \right) \quad (4.24)$$

4.3.1 Viskoelastizität

Im Rahmen viskoelastischer Modelle treten Reihenschaltungen rein elastischer und rein viskoser Elemente auf (Lubarda et al. 2003, Haupt 2000, Lion 2000a u. 1998, Bergström & Boyce 1998, Kaliske & Rothert 1997). Diese werden wiederum häufig parallel zueinander und zu durchgehend elastischen Elementen angeordnet.

Bei einer Reihenschaltung eines linear viskosen (Viskosität η) und inkompressiblen ($I_1(\underline{\underline{D}}) = 0$, $\hat{\varrho} = \tilde{\varrho}$) Elements bezüglich der ersten Teildeformation und eines elastischen Elements bezüglich der zweiten Teildeformation entsteht gemäß Gleichung 4.24:

$$\frac{1}{\underline{\underline{T}}} = \eta \underline{\underline{D}} + q \underline{\underline{E}} \Rightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{1}{\eta} \left(\frac{1}{\underline{\underline{T}}} - q \underline{\underline{E}} \right) \stackrel{!}{=} \underline{\underline{D}}' \Rightarrow q = \frac{1}{3} \frac{1}{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{E}} \quad (4.25)$$

Als Bestimmungsgleichung für die Zwischenkonfiguration resultiert daraus:

$$\Rightarrow \underline{\underline{D}} = \frac{1}{\eta} f \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{C}}} \right) \right)' .$$

Eine Übertragung in die Referenzkonfiguration liefert:

$$\begin{aligned} \overset{1}{\mathbb{S}} \left(\left(\frac{1}{\underline{\underline{D}}} \right) \right) &= \overset{1}{\mathbb{S}} \left(\left(\frac{1}{\eta} f \left(\left(\frac{2}{\underline{\underline{C}}} \right) \right)' \right) \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} &= \frac{1}{\eta} f \left(\left(\frac{1}{\underline{\underline{C}}^{-1}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right)' \\ \Rightarrow \hat{\underline{\underline{C}}} &= \frac{2}{\eta} \underline{\underline{C}} \cdot f \left(\left(\frac{1}{\underline{\underline{C}}^{-1}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right)' \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\underline{\underline{C}}^{-1}} \right)^\Delta &= \frac{-2}{\eta} f \left(\left(\frac{1}{\underline{\underline{C}}^{-1}} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \right)' \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (4.26) \end{aligned}$$

4.3.2 Elastoplastizität

In der Elastoplastizität ergeben sich in einfachen Fällen ganz ähnliche Zusammenhänge wie in der Viskoelastizität. Wiederum sei das Materialverhalten während der zweiten Teildeformation rein elastisch gemäß Gleichung 4.24.

Die gebräuchlichste Fließbedingung besagt, daß plastisches Fließen unabhängig von der Deformationsart immer bei der gleichen Vergleichsspannung σ_{vM} nach von Mises auftritt (s. z.B. Besdo 1993).

Die Vergleichsgröße nach von Mises kann gemäß Gleichung 2.29 durch die Hauptinvarianten des Argumenttensors ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} X_{vM} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (X_I - X_{II})^2 + (X_{II} - X_{III})^2 + (X_{III} - X_I)^2 \right\}} \\ &= \sqrt{(X_I)^2 + (X_{II})^2 + (X_{III})^2 - X_I X_{II} - X_{II} X_{III} - X_{III} X_I} \\ &= \sqrt{I_1(\underline{\underline{X}}^2) - I_2(\underline{\underline{X}})} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{X}} - \frac{1}{2} (\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{E}})^2} \end{aligned} \quad (4.27)$$

An dem ersten Ausdruck ist erkennbar, daß für den Deviator das gleiche Ergebnis wie für den vollständigen Argumenttensor zu erwarten ist.

$$X_{vM} = X'_{vM} = \sqrt{\frac{3}{2} \underline{\underline{X}}' \cdot \underline{\underline{X}}'}$$

Ist die Fließspannung Y für eine einachsige Zugbelastung bekannt, so kann die Grenzvergleichsspannung berechnet werden.

$$[\sigma_{ab}] = \begin{bmatrix} Y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \sigma_{vM,Grenz} = \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ (Y - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - Y)^2 \right\}} = Y \quad (4.28)$$

Die Fließbedingung besagt dann:

$$\sigma_{vM} \leq \sigma_{vM,Grenz} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2} \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \leq Y^2 \quad \Rightarrow \quad g := \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{\underline{\sigma}}' - \frac{2}{3} Y^2 \leq 0 \quad .$$

Natürlich können statt einer einachsigen Zugbelastung auch andere Belastungsarten als Referenz herangezogen werden. Beispielsweise leitet Sedov (1997, S. 1159 ff) die entsprechenden Beziehungen für eine Scherbelastung her.

Bei linear elastischem isotropem Materialverhalten mit dem Schubmodul G und unter der gebräuchlichen Annahme der Volumenkonstanz der plastischen Deformation entsteht mit Gleichung 4.24:

$$\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{\underline{\tau}}' = G \underline{\underline{b}}'^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}' = G \underline{\underline{C}}'^2 \quad \Rightarrow \quad g = G \underline{\underline{C}}'^2 \cdot \underline{\underline{C}}'^2 - \frac{2}{3} Y^2 \quad (4.29)$$

Diese Fließbedingung stimmt mit der von Besdo (1981 u. 1998) im Rahmen der Dehnungsraumformulierung angegebenen überein, so daß die dort auf der Basis des Ilyushins-Postulats entwickelte Fließregel, die dann wiederum zur Bestimmung der Zwischenkonfiguration herangezogen wird, übernommen werden kann.

$$\left(\underline{\underline{\overset{\Delta}{C}^{-1}}} \right) = -\chi \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{C}}} \quad (4.30)$$

Um diese Ableitung von g durchzuführen, wird g in die Referenzkonfiguration übertragen (vergl. Abb. 4.2, für anisotrope Fließbedingungen s. Besdo et al. 2004 u. 2005b).

$$\begin{aligned} g &= G \underline{\underline{C}}^{\prime 2} \cdot \underline{\underline{C}}^{\prime 2} - \frac{2}{3} Y = G \overset{1}{S} \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \right) \cdot \overset{1}{S} \left(\left(\underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \right) - \frac{2}{3} Y \\ &= G \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \cdot \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} - \frac{2}{3} Y \end{aligned}$$

Für die Ableitung nach $\underline{\underline{C}}$ wird das Tensorprodukt aufgelöst.

$$\begin{aligned} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \cdot \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} &= \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \cdot \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} - \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \underline{\underline{E}} \right) \\ &= \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \cdot \underline{\underline{C}} - \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^2 \end{aligned}$$

Im Vorgriff auf die Gleichungen 5.54 und 5.55 und in Übereinstimmung mit Besdo (1998) ergibt sich daraus:

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\underline{C}}} \left(\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \cdot \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \right) = 2 \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \underline{\underline{C}}^{-1} \quad .$$

Für die Entwicklung der Zwischenkonfiguration ergibt sich somit gemäß Gleichung 4.30:

$$\left(\underline{\underline{\overset{\Delta}{C}^{-1}}} \right) = -2\chi G \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \underline{\underline{C}}^{-1} = -\chi^* \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}} \right)^{\prime} \underline{\underline{C}}^{-1}$$

Diese Gleichung ist bemerkenswerterweise völlig äquivalent zu der Gleichung 4.26 für die Entwicklung der Zwischenkonfiguration des viskoelastischen Modells, wenn auch dort das lineare elastische Stoffgesetz aus Gleichung 4.29 eingesetzt wird.

Allerdings ist χ im elastoplastischen Modell im Gegensatz zu der Viskosität η im viskoelastischen Modell natürlich nicht konstant, sondern nimmt, sofern Fließen überhaupt stattfindet, jeweils denjenigen Wert an, der dafür sorgt, daß $g = 0$ erfüllt ist. χ könnte mit einer variablen Viskosität verglichen werden, die stets so hoch ist wie im Rahmen von $g \leq 0$ möglich (auch unendlich).

4.4 Konzepterweiterung auf Tensoren 4. Stufe

In kontinuumsmechanischen Relationen treten an verschiedenen Stellen Tensoren vierter Stufe auf, insbesondere im Zusammenhang mit Materialsteifigkeiten und mit Anisotropieformulierungen (s. z.B. Besdo 1998). In der Regel handelt es sich um Doppelpunktprodukte solcher Tensoren mit Tensoren zweiter Stufe oder anderen Tensoren vierter Stufe. Dementsprechend soll die Übertragung eines Tensors 4. Stufe derart vereinbart werden, daß gilt:

$$\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Y}} \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{X}}) = S(\underline{\underline{M}}) \cdot S(\underline{\underline{Y}}) \quad . \quad (4.31)$$

Um dies zu erreichen, wird für die Anwendung des Übertragungsoperators eine alternative Formulierung gewählt (vergl. Gl. 2.63).

$$S(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{X}} \cdot (\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^{-1})^{T_{24}}$$

Für $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Y}}$ folgt daraus:

$$S(\underline{\underline{X}}) = S(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Y}}) = (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{Y}} \quad .$$

Die Einfügung eines isotropen Tensors $\overset{3}{\underline{\underline{J}}}$ gemäß Gleichung 2.67 führt auf:

$$S(\underline{\underline{X}}) = (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underbrace{(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^{-1})^{T_{24}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}}}_{\overset{3}{\underline{\underline{J}}}} \cdot \underline{\underline{Y}} \stackrel{!}{=} S(\underline{\underline{M}}) \cdot S(\underline{\underline{Y}}) \quad .$$

Darin kann die Übertragung des Tensors $\underline{\underline{M}}$ vierter Stufe gemäß Gleichung 4.31 identifiziert werden.

$$S(\underline{\underline{Y}}) = (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{Y}} \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{M}}) \stackrel{!}{=} (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot (\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^{-1})^{T_{24}}$$

Eine koeffizientenfreie Darstellung von $\underline{\underline{M}}$ ermöglicht eine alternative Schreibweise (s. Gl. 2.33).

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}} \cdot \overset{3}{\underline{\underline{J}}} = \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{j}}_{ab} \circ \underline{\underline{j}}_{ba} \quad \Rightarrow \quad S(\underline{\underline{M}}) = S(\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\underline{j}}_{ab}) \circ S(\underline{\underline{j}}_{ba})$$

Damit ist auch eine Übertragung von Relationen mit enthaltenen Tensoren vierter Stufe möglich.

5 Beobachtersysteme für konsistente Linearisierungen

Anhand einer groben Skizze der FEM und eines kompakten Modellalgorithmus für homogene Belastungen werden Anforderungen an die Formulierung der Steifigkeit für inelastische Materialien erarbeitet. Außerdem werden hocheffiziente numerische Ableitungen eingeführt. Zur Ermittlung Lagrangescher und Eulerscher Materialsteifigkeiten werden mit Hilfe der Basisdyaden für symmetrische Tensoren (Abschnitt 2.3) Ableitungen nach symmetrischen Tensoren bereitgestellt. Im Rahmen einer detaillierten Analyse der ABAQUS-Benutzerschnittstelle UMAT werden verschiedene Varianten Eulerscher Materialsteifigkeiten verglichen. Schließlich werden mit Hilfe der in vorhergehenden Kapiteln entwickelten Methoden Übertragungen zwischen verschiedenen Formen von Materialsteifigkeiten erschlossen (Wegweiser, s. Abb. 5.6) und für die numerische Umsetzung aufgearbeitet. Die Resultate werden am Sonderfall isotroper Elastizität detailliert validiert und bilden die Grundlage für die in Kapitel 6 präsentierte ABAQUS-Implementierung.

Um mit Hilfe eines Stoffgesetzes Voraussagen über das mechanische Verhalten technischer Bauteile, also ganzer Strukturen mit kontinuierlich verteilten Materialeigenschaften, zu generieren, empfiehlt sich die Implementierung des Stoffgesetzes in ein geeignetes numerisches Näherungsverfahren. Häufig wird hierfür die Methode der Finiten Elemente (FEM) genutzt. Für die Implementierung muß zum einen für die Berechnung der Spannungen das Stoffgesetz zur Verfügung stehen. Darüber hinaus wird für eine Linearisierung der Spannungs-/Verzerrungsbeziehungen im jeweiligen Arbeitspunkt eine Materialsteifigkeit benötigt. Vor allem die Materialsteifigkeit, in Teilaspekten aber auch die daraus aufgebauten Element- und Systemsteifigkeiten, sind das Thema dieses Kapitels. In Abhängigkeit vom verwendeten Beobachtersystem kommen für die Berechnung der Materialsteifigkeit unterschiedliche Spannungs- und Verzerrungstensoren in Frage. Infolgedessen unterscheiden sich die Beobachtersysteme auch in den jeweils zugeordneten Steifigkeiten voneinander.

5.1 Motivation: Anforderungen der nichtlinearen FEM

Der Zweck dieses ersten Abschnitts des Kapitels 5 beschränkt sich ausdrücklich darauf, eine Motivation für die intensive Auseinandersetzung mit den verschiedenen Formen von Materialsteifigkeiten zu liefern. Dementsprechend wurden kompakte Darstellungsformen ausgewählt, die speziell für die Beurteilung und den Vergleich der verschiedenen Formen von Materialsteifigkeiten (für andere Zwecke hingegen weniger) geeignet sind. Der Abschnitt ist hingegen weder als Einführung in die Methode der Finiten Elemente oder deren numerische Umsetzung vorgesehen noch geeignet. Für die intensive und umfassende Beschäftigung mit der FEM als Ganzem und ihren speziellen Varianten stehen eine ganze Reihe ausgezeichneter und ausführlicher Bücher zur Verfügung (z.B. Zienkiewicz 1984, Bathe 1986 oder Wriggers 2001). Zusätzlich bietet das (bisher unveröffentlichte) Vorlesungsskript von Wellerdick-Wojtasik &

Besdo (2004) eine leicht verständliche Darstellung - allerdings explizit beschränkt auf sowohl geometrisch als auch physikalisch lineare Fragestellungen und auf zweidimensionale Problemstellungen.

In Anbetracht seines Zweckes als Motivation für das Nachfolgende ist dieser Abschnitt bereits sehr umfangreich. Dementsprechend wird im Sinne eines groben Überblicks für alle Teilaspekte der Methode der Finiten Elemente, die hier nicht im Fokus stehen, z.B. der Wahl der Elementform und der Ansatzfunktionen oder der numerischen Integration, von einfachen Standardmethoden ausgegangen. Auch Methoden, bei denen die finiten Elemente nicht materialgebunden sind, werden ausgeklammert. Außerdem werden, wo immer möglich, Vereinfachungen vorgenommen, sofern diese nicht bezüglich der Materialsteifigkeit wesentliche Aspekte berühren. Beispielsweise werden Trägheits- und Volumenkräfte außer Betracht gelassen.

In der einschlägigen Literatur (s.o.) finden sich ausführliche und sorgfältige Darstellungen der mathematischen Basis der FEM als eine spezielle Art von Ritz-Ansätzen. Für den hier verfolgten Zweck einer Motivation reicht allerdings eine (häufig zutreffende) anschauliche Interpretation aus, nach der die Basis der FEM in einer Einteilung des Kontinuums in gedachte Teilvolumina, die Finiten Elemente, besteht, die lediglich an vorgegebenen Knotenpunkten miteinander verbunden sind und auch nur dort wechselwirken können. Die Knotenverschiebungen werden an dieser Stelle mit \underline{U}_K , die Knotengeschwindigkeiten mit \underline{V}_K und die über die Knoten ausgetauschten Kräfte mit \underline{Q}_K bezeichnet. Sofern im Zusammenhang mit Finiten Elementen große Indizes auftreten, so wird hier ausnahmsweise nicht wie sonst über drei Indexwerte, sondern über die Knotenzahl des jeweiligen Elements summiert. Für die einzelnen Elemente werden in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten möglichst realitätsnahe und physikalisch sinnvolle Verschiebungs- und Geschwindigkeitsverteilungen als kinematische Zwänge festgelegt. Dies geschieht mittels sogenannter Ansatzfunktionen N_K , die gemäß Wellerdick & Besdo (2004, S. 96) sowohl als Funktionen des Ortes als auch als Funktionen von Elementkoordinaten ξ^i aufgefaßt werden können. Die Elementkoordinaten folgen in völliger Analogie zu Materialkoordinaten den Verformungen des jeweiligen Elements.

$$\underline{u}(\xi^i) = N_K(\xi^i) \underline{U}_K \quad (5.1)$$

Durch diese kinematischen Zwänge wird die Gesamtstruktur in jedem Fall steifer abgebildet als sie tatsächlich ist, d.h. bei Deformationsvorgaben werden die resultierenden Kräfte eher zu groß und bei Kraftvorgabe die Verschiebungen zu klein wiedergegeben. Im Idealfall sind die Ansatzfunktionen so flexibel und die Elemente so klein, daß die durch diese räumliche Diskretisierung verursachte Versteifung gegenüber der abzubildenden Struktursteifigkeit von untergeordneter Bedeutung ist.

Die Ansatzfunktionen N_K sind über der Zeit unveränderliche Eigenschaften des jeweiligen Elementtyps. Bei der Berechnung der Geschwindigkeiten durch substantielle Ableitungen der Verschiebungen nach der Zeit treten sie somit lediglich als konstante Vorfaktoren auf. Daraus resultiert dieselbe Abhängigkeit zwischen der Geschwindigkeitsverteilung und den Knotenge-

schwindigkeiten wie zwischen der Verschiebungsverteilung und den Knotenverschiebungen.

$$\begin{aligned} \underline{v}(\xi^i) &= \hat{\underline{r}} = \hat{\underline{r}} + \hat{\underline{u}} = 0 + N_K(\xi^i) \hat{\underline{U}}_K \\ &= N_K(\xi^i) \underline{V}_K \end{aligned} \quad (5.2)$$

Damit ergeben sich für die Ortsableitungen der Verschiebungen und der Geschwindigkeiten gegenüber der Referenz- und der aktuellen Konfiguration die folgenden charakteristischen Beziehungen.

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \circ \underline{v} &= \underline{\underline{G}} &= & (\underline{\nabla} N_K) \circ \underline{V}_K \\ \underline{\nabla} \circ \underline{r} &= \underline{\underline{E}} \\ \underline{\nabla} \circ \tilde{\underline{r}} &= \underline{\underline{F}}^{T-1} &= & \underline{\underline{E}} - (\underline{\nabla} N_K) \circ \underline{U}_K \\ \tilde{\underline{\nabla}} \circ \underline{v} &= \underline{\underline{\hat{F}}}^T &= & (\tilde{\underline{\nabla}} N_K) \circ \underline{V}_K \\ \tilde{\underline{\nabla}} \circ \underline{r} &= \underline{\underline{F}}^T &= & \underline{\underline{E}} + (\tilde{\underline{\nabla}} N_K) \circ \underline{U}_K \\ \tilde{\underline{\nabla}} \circ \tilde{\underline{r}} &= \underline{\underline{E}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Infolge der Festlegung 5.1 und der daraus resultierenden Beziehung 5.2 ergeben sich aus dem Stoffgesetz anhand der Knotenverschiebungen und Knotengeschwindigkeiten und ggf. deren Verlauf in der Belastungsvorgeschichte die zugehörigen Spannungen für die einzelnen Punkte des Elements. Das primäre Problem besteht nun darin, einen Zusammenhang zwischen dieser Spannungsverteilung und den äußeren Lasten des Elements zu ermitteln. Dabei sollen (s.o.) Trägheitskräfte und sonstige Volumenkräfte unberücksichtigt bleiben. Da die Methode verlangt, daß an den Rändern der Finiten Elemente zwischen den einzelnen Knoten keine Wechselwirkungen stattfinden (s.o.), kommen als Träger äußerer Leistungen lediglich die in den Knotenpunkten konzentrierten, auf das jeweilige Element wirkenden Elementknotenkräfte \underline{Q}_K in Frage. Stoßen an einem Knoten mehrere Elemente zusammen, so summieren sich die Elementknotenkräfte dieser Elemente zur resultierenden (äußeren) Knotenkraft.

5.1.1 Leistungsbilanz am Einzelement

Die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Spannungsverteilung im Element und den Elementknotenkräften setzt bei der Formänderungsleistung an. Um dabei die Gleichung 5.3 ausnutzen zu können, empfiehlt sich an dieser Stelle eine Formulierung der Formänderungsleistung mit dem vollständigen Geschwindigkeitsgradienten anstatt dessen symmetrischen Anteils. Das Integral erstreckt sich in diesem Fall über das Gesamtvolumen \mathcal{E} des betrachteten Elements.

$$P_{\text{ex}} - \dot{E}_{\text{kin}} = \int_{\mathcal{E}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\nabla} \circ \underline{v}) \, dV$$

Da die Knotengeschwindigkeiten \underline{V}_K keine Funktionen des Ortes sind, folgt beim Einsetzen der Gleichung 5.2 mit Hilfe von Gleichung 2.27:

$$P_{\text{ex}} - \dot{E}_{\text{kin}} = \int_{\mathcal{E}} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \{(\underline{\nabla} N_K) \circ \underline{V}_K\} \, dV = \int_{\mathcal{E}} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\nabla} N_K) \cdot \underline{V}_K \, dV \quad .$$

Zusätzlich kann hier die Reihenfolge von Integration und Summation über K vertauscht werden.

$$P_{\text{ex}} - \dot{E}_{\text{kin}} = \int_{\mathcal{E}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_K) dV \cdot \underline{V}_K$$

Da Trägheits- und Volumenkräfte unberücksichtigt bleiben sollen (s.o.), verbleibt von der externen Leistung lediglich ein die Spannungen in den Oberflächen erfassendes Randintegral, und Änderungen der kinetischen Energie treten nicht auf. Hinsichtlich des Randintegrals kommt nun weiterhin zum Tragen, daß lediglich die Elementknotenkräfte \underline{Q}_K (jeweils am Knoten K) zu äußeren Leistungen beitragen können, da nur an den Knoten Wechselwirkungen stattfinden.

$$P_{\text{ex}} = \oint_{\mathcal{R}} \underline{s} \cdot \underline{v} dA \stackrel{\text{hier}}{=} \underline{Q}_K \cdot \underline{V}_K \quad \text{und} \quad \dot{E}_{\text{kin}} = 0 \quad (5.4)$$

Aus der Leistungsbilanz folgt somit mit den hier festgelegten Einschränkungen:

$$\int_{\mathcal{E}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_K) dV \cdot \underline{V}_K = \underline{Q}_K \cdot \underline{V}_K \quad .$$

Eine Umstellung dieser Gleichung liefert:

$$\underline{R}_K \cdot \underline{V}_K = 0 \quad \text{mit:} \quad \underline{R}_K = \int_{\mathcal{E}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_K) dV - \underline{Q}_K \quad . \quad (5.5)$$

Sofern aus der Gleichung 5.5 geschlossen werden könnte, daß die einzelnen \underline{R}_K jeweils verschwinden müssen, so wäre damit bereits eine Bestimmungsgleichung für die gesuchten Elementknotenkräfte gefunden. Um eine derartige Schlussfolgerung zu rechtfertigen, steht wiederum die Betrachtung mehrerer Beobachter zur Verfügung, denn die Knotenkraftvektoren sind wie auch die Formänderungsleistung beobachterunabhängig. Die zu beantwortende Frage ist also, ob die Variationsmöglichkeiten in den \underline{V}_K durch Wechsel des Beobachters ausreichen, um aus $\underline{R}_K \cdot \underline{V}_K = 0$ zu schließen, daß $\underline{R}_K = \underline{0}$ für jeden einzelnen Knoten gelten muß. Dies führt zunächst auf (vergl. Gl. 3.22):

$$\left. \begin{array}{l} \underline{R}_K \cdot \underline{\dot{V}}_K^\alpha = 0 \\ \underline{R}_K \cdot \underline{\dot{V}}_K^{\mathcal{A}} = 0 \end{array} \right\} \quad \text{mit:} \quad \underline{\dot{V}}_K^{\mathcal{A}} - \underline{\dot{V}}_K^\alpha = \underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \cdot \underline{W} - \frac{d}{dt} \Big|_\alpha \left(\underline{\dot{r}}^{\alpha\mathcal{A}} \right) \quad . \quad (5.6)$$

Dabei sind die Vektoren $\underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}}$ vom Ursprung \mathcal{A} des \underline{e}_A -Beobachter-Systems zum jeweiligen Knoten natürlich für jeden Knoten verschieden, während der Tensor \underline{W} , der die Relativdrehung zwischen den beiden Beobachtersystemen beschreibt (vergl. Gl. 3.21) und der Verbindungsvektor der beiden Beobachter-Systemursprünge $\underline{\dot{r}}^{\alpha\mathcal{A}}$ sowie dessen Zeitableitung im α -System für jeden Knoten identisch sind.

Aus Gleichung 5.6 geht hervor, daß die Vektoren \underline{R}_K auch im Produkt mit den Differenzgeschwindigkeiten verschwinden müssen.

$$\underline{R}_K \cdot \left(\underline{\dot{V}}_K^{\mathcal{A}} - \underline{\dot{V}}_K^{\alpha} \right) \stackrel{!}{=} 0 = \underline{R}_K \cdot \left(\underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \cdot \underline{W} \right) - \sum_K (\underline{R}_K) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\dot{r}}^{\alpha \mathcal{A}} \right)$$

Da \underline{W} und $\underline{\dot{r}}^{\alpha \mathcal{A}}$ unabhängig voneinander von Beobachter zu Beobachter variieren, müssen die einzelnen Terme jeweils verschwinden.

$$\underline{R}_K \cdot \left(\underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \cdot \underline{W} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad , \quad \sum_K (\underline{R}_K) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{\alpha} \left(\underline{\dot{r}}^{\alpha \mathcal{A}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.7)$$

Die zweite Bedingung ist aufgrund der im allgemeinen nicht verschwindenden Änderung des Vektors $\underline{\dot{r}}^{\alpha \mathcal{A}}$ nur durch das Verschwinden der Summe der \underline{R}_K zu erfüllen. Dies entspricht dem Kräftegleichgewicht zwischen inneren und äußeren Kräften für das Gesamtelement.

$$\sum_K \underline{R}_K \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

Die erste Bedingung in Gleichung 5.7 besteht aus einer Summe von drei Skalarprodukten. Um diese Bedingung leichter auswerten zu können, wird auf Gleichung 2.42 zurückgegriffen. Aus dieser Gleichung folgt für den Tensor \underline{W} wie für jeden anderen antisymmetrischen Tensor auch:

$$\underline{W} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{W}^T - \underline{W} = -2 \underline{W} \quad .$$

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs läßt sich auch die erste Bedingung in ein einzelnes Skalarprodukt zweier Vektoren umformen.

$$\begin{aligned} \underline{R}_K \cdot \left(\underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \cdot \underline{W} \right) &= \underline{R}_K \cdot \left(\underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \left(\underline{W} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \right) \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \right) \right) \\ &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2} \left(\underline{R}_K \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \right) \cdot \left(\underline{W} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Da wiederum einer der Vektoren, nämlich $\underline{W} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}$ von der Relativbewegung der beliebigen wählbaren Beobachter abhängt, muß zur Erfüllung dieser Bedingung gefordert werden, daß der erste Vektor stets verschwinden muß. Nach Umformung erkennt man in dieser Forderung unmittelbar das Momentengleichgewicht für das gesamte Element. Für das gesamte Element ist somit unter den hier getroffenen Voraussetzungen der Drallsatz stets erfüllt.

$$\left(\underline{R}_K \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \right) = \underline{\dot{r}}_K^{\mathcal{AP}} \times \underline{R}_K \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

Die Beobachterunabhängigkeit schränkt die möglichen Vektoren \underline{R}_K also neben der Summenbedingung $\underline{R}_K \cdot \underline{V}_K = 0$ auf solche Kombinationen ein, die sowohl das Kräfte- als auch das Momentengleichgewicht am Gesamtelement erfüllen. Damit ist allerdings das Ziel noch nicht erreicht, zu zeigen, ob für alle Vektoren \underline{R}_K die Gleichung $\underline{R}_K = \underline{0}$ gefordert werden darf.

Zur weiteren Untersuchung wären Aussagen über Teile des Elementes nötig. Diese sind aber sehr aufwendig, da dann Spannungen auf den entstehenden Schnittflächen auftreten würden und berücksichtigt werden müßten. Daher wird eine andere Strategie verfolgt. Das Problem wäre einfach lösbar, wenn bei Einhaltung der Leistungsbilanz eine noch größere Variierbarkeit der Geschwindigkeiten als in Gleichung 5.6 gefordert werden dürfte. Ob dies der Fall ist, soll nun nicht an dem speziellen Fall eines Finiten Elements, sondern in allgemeinerer Form untersucht werden.

5.1.2 Relation der virtuellen Leistung

Beim Rückblick auf die Herleitung der Formänderungsleistung aus der Leistung der äußeren Kräfte und der Änderung der kinetischen Energie (s. Gl. 3.33ff.) fällt auf, daß die Zusammenhänge zwischen den Kraft- und Geschwindigkeitsgrößen nur an einer einzigen Stelle ausgenutzt wurden, nämlich bei der Ableitung der kinetischen Energie in Gleichung 3.32. Dies motiviert zu dem Versuch, zur Steigerung der Variabilität der Geschwindigkeiten mit modifizierten Geschwindigkeitsfeldern zu arbeiten und zu überprüfen, ob auch hierfür eine Bilanz gemäß Gleichung 3.40 Gültigkeit besitzt (Die folgende Herleitung der Relation der virtuellen Leistungen entstammt dem unveröffentlichten Skript von Wellerdick-Wojtasik & Besdo (2004)). Bei diesen modifizierten, als virtuell bezeichneten Geschwindigkeiten handelt es sich ausdrücklich nicht mehr um die realen Geschwindigkeiten, die über das Stoffgesetz die Spannungen bedingen. Zur präzisen Unterscheidung realer und virtueller Größen sollen die verbleibenden realen Größen durch einen Stern gekennzeichnet werden. Der Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ wird nun beispielsweise durch $\underline{\underline{\sigma}}^*$ gekennzeichnet. Im Gegensatz dazu werden die virtuellen Geschwindigkeiten und alle daraus abgeleiteten Größen durch zwei Sterne gekennzeichnet, z.B. \underline{v}^{**} . Von diesen virtuellen Geschwindigkeiten wird lediglich verlangt, daß sie den Axiomen des Abschnitts 3.1.5 genügen und somit als reales Geschwindigkeitsfeld bei zugehörigen Spannungen durchaus denkbar wären. D.h., diese Geschwindigkeiten sollen den realen Randbedingungen genügen und stetig verteilt sein. Gegenüber z.B. virtuellen Verrückungen, die als infinitesimal definiert sind, haben diese virtuellen Geschwindigkeiten somit den Vorteil, daß sie sich in ihren Eigenschaften in keiner Weise von realen Geschwindigkeiten unterscheiden, was in einfacher Weise einen sicheren, flexiblen und der Anschauung zugänglichen Umgang mit diesen Größen ermöglicht.

Für die virtuelle Formänderungsleistung gilt unter Ausnutzung der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors und der lokalen Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.37), die ausschließlich reale Kraftgrößen in Beziehung setzen:

$$\int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{D}}^{**} dV = \int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot (\nabla \circ \underline{v}^{**}) + \left(\underline{f}^* - \varrho \underline{a}^{\text{abs}*} + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}}^* \right) \cdot \underline{v}^{**} dV$$

Mit Hilfe der Gleichung 3.35 und dem Gaußschen Integralsatz ergibt sich schließlich:

$$\int_{\mathcal{G}} \underline{\underline{\sigma}}^* \cdot \underline{\underline{D}}^{**} dV = \int_{\mathcal{R}} \underline{s}^* \cdot \underline{v}^{**} dA + \int_{\mathcal{G}} \left(\underline{f}^* - \varrho \underline{a}^{\text{abs}*} \right) \cdot \underline{v}^{**} dV \quad . \quad (5.8)$$

Der Vergleich mit Gleichung 3.40 zeigt, daß diese Beziehung zwischen den virtuellen Leistungen mit identischen Definitionen wie bei den realen Leistungen exakt die gleiche Form

hat wie die Bilanz der realen Leistungen. Dies ist dabei keineswegs ein neues Axiom. Der gefundene Zusammenhang stellt also prinzipiell keinerlei neue Information dar.

Der hergeleitete Zusammenhang in Gleichung 5.8 wird gemeinhin als Prinzip der virtuellen Leistungen bezeichnet. In dem hier vorgestellten Kontext einer Herleitung ist diese Bezeichnung allerdings eher mißverständlich (s. Graßmann 1997 im Zusammenhang mit der Unschärferelation). In diesem Sinne wäre es vielleicht empfehlenswert, von der Relation der virtuellen Leistungen zu sprechen. In der Literatur hingegen wird diese Relation oder andere aus ihr ableitbare Aussagen häufig als grundsätzliches Axiom eingeführt (Siehe z.B. Haupt 2000, Pestel & Wittenburg 1981 oder Szabó 1964). In diesem Zusammenhang bemerken Pestel & Wittenburg bezüglich des Prinzips der virtuellen Arbeit: *”Die angegebene Formulierung des Prinzips ist wenig anschaulich. Welche weitreichenden Konsequenzen es hat, wird erst die ausführliche Darstellung der folgenden Abschnitte zeigen. Das Prinzip ist ein unabhängiges Naturgesetz.”* Damit ergeben sich häufig Schwierigkeiten bei der anschaulichen Deutung und bei der Übertragung auf besondere Probleme, z.B. bei außergewöhnlichen Beschreibungsformen kinematischer Größen.

Das hergeleitete Prinzip der virtuellen Leistungen ist exakt und gilt sowohl für virtuelle Geschwindigkeits- als auch Lastgrößen. Statt der Geschwindigkeiten können nämlich auch die Lastgrößen, also die äußeren, die Volumen- und die Trägheitskräfte als die virtuellen Größen angesehen werden. Damit die Gleichung 5.8 und deren Herleitung ihre Gültigkeit behalten, ist lediglich die Symmetrie von $\underline{\sigma}^*$ einzuhalten und das lokale Gleichgewicht zu erfüllen.

Die Relation der virtuellen Leistungen ist somit sehr weitreichend anwendbar, sie umfaßt z.B. virtuelle Kräfte, passive Formänderungsarbeiten und beinhaltet auch das Prinzip der virtuellen Verrückungen der Statik durch Integration der Geschwindigkeiten über infinitesimale Zeiträume. Durch eine derartige Integration der weitgehend beliebigen virtuellen Geschwindigkeiten entstehen die charakteristischen Eigenschaften der virtuellen Verrückungen. Sie sind infinitesimal klein, verträglich mit den realen Randbedingungen, aber darüber hinaus beliebig. Die virtuellen Kraftgrößen werden dabei durch die realen Größen ersetzt. Ein entscheidender Punkt für die nutzbringende Anwendung virtueller Verrückungen ist, daß die Lastgrößen während des infinitesimal kurzen Integrationszeitraums keine Änderung erfahren. Umgekehrt ist gerade hierfür der infinitesimale Zeitraum notwendig. Dies bringt andererseits zumindest für die Anschauung den Nachteil mit sich, daß sich virtuelle und reale Verrückungen durch ihre Größe prinzipiell voneinander unterscheiden. Diesen Nachteil weisen die virtuellen Geschwindigkeiten nicht auf.

5.1.3 Elementknotenkräfte

Mit Kenntnis der Gleichung 5.8 kann nun über Gleichung 5.5 hinausgehend gefordert werden, daß die \underline{R}_K auch im Produkt mit virtuellen Knotengeschwindigkeiten \underline{V}_K^{**} Null ergeben müssen. Zur Erfüllung dieser Gleichung müssen aufgrund der freien Variierbarkeit dieser zwar virtuellen, aber nicht infinitesimal kleinen und damit problemlos vorstellbaren Geschwindigkeiten tatsächlich die einzelnen Vektoren \underline{R}_K jeweils Nullvektoren sein.

$$\underline{R}_K \cdot \underline{V}_K^{**} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{R}_K = \underline{0} \quad \forall K$$

Damit ergibt sich aus Gleichung 5.5 eine noch vollständig koordinatenunabhängige Bestimmungsgleichung für die Elementknotenkräfte.

$$\underline{Q}_K = \int_{\mathcal{E}} (\underline{\sigma} \cdot \underline{\nabla} N_K) dV \quad (5.9)$$

Da die Integration über das aktuelle Volumen häufig, z.B. bei materialgebundenen Elementgrenzen (insbesondere im Zusammenhang mit der Gaußpunktintegration), für die Anwendung ungünstig ist, empfiehlt sich der Übergang auf andere Spannungsgrößen. Mit den 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen $\underline{T} = \frac{\tilde{\rho}}{\rho} \underline{F}^{-1} \cdot \underline{\sigma}$ folgt:

$$\underline{Q}_K = \int_{\mathcal{E}} \left(\underline{T}^T \cdot \underline{\nabla} N_K \right) d\tilde{V} \quad (5.10)$$

und mit den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen $\underline{\tilde{T}}$:

$$\underline{Q}_K = \int_{\mathcal{E}} \left(\underline{F} \cdot \underline{\tilde{T}} \cdot \underline{\nabla} N_K \right) d\tilde{V} \quad (5.11)$$

Für die eindeutige Bestimmung der Elementknotenkräfte aus der Spannungsverteilung im Element war somit lediglich die Relation der virtuellen Leistungen notwendig, deren Herleitung ohne zusätzliche axiomatische Vereinbarungen aus der vorgestellten Axiomatik heraus gelang.

Damit sind nun einerseits die Zusammenhänge bekannt, die nötig sind, um aus Knotenverschiebungen und Knotengeschwindigkeiten die Verschiebungen und Geschwindigkeiten jedes einzelnen Punktes des Elements zu bestimmen und anhand dessen Verzerrungen und deren Änderungen zu berechnen. Zum anderen kann anhand der sich aus diesen Vorgaben ergebenden Spannungen innerhalb des Elements auf die zugehörigen Elementknotenkräfte geschlossen werden.

5.1.4 Zeitdiskretisierung

Die Unterteilung des Körpers in finite Elemente entspricht einer räumlichen Diskretisierung der Wechselwirkungen innerhalb des Kontinuums. Damit wird eine Reduktion der unbekanntenen Größen auf eine endliche Zahl von Knotenverschiebungen, -geschwindigkeiten und -kräften erreicht. Darüber hinaus ist für die näherungsweise Erfassung der zeitlichen Abhängigkeiten dieser unbekanntenen Größen während eines Belastungsprozesses auch eine zeitliche Diskretisierung der Prozedurdauer nötig. Dementsprechend werden die unbekanntenen Größen nur noch zu einzelnen Zeitpunkten berechnet, während für die dazwischenliegenden Zeitintervalle analog zu den räumlichen Ansatzfunktionen wiederum standardisierte Annahmen getroffen werden.

Eine Annahme über den zeitlichen Ablauf des Prozesses während eines Zeitintervalls von $t - \Delta t$ bis t legt die Beziehungen zwischen den Knotenverschiebungen und den Knotengeschwindigkeiten fest, von der zunächst nur

$$\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t) = \int_{t-\Delta t}^t \underline{V}_K(\tau) d\tau$$

bekannt ist. Bei einer linearen Änderung der Verschiebung \underline{U}_K innerhalb von Δt entspricht die Geschwindigkeit dem zugehörigen Differenzenquotienten.

$$\underline{V}_K(t) = \frac{\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (5.12)$$

Die bisherige Geschwindigkeit hat bei diesem Ansatz keinen Einfluß auf die weitere Entwicklung. Dies ist anders, wenn ein linearer und damit sprunghafter Übergang der Geschwindigkeiten gefordert wird. In diesem Fall ergibt sich der Zusammenhang aus der Trapezregel.

$$\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t) = \Delta t \frac{\underline{V}_K(t) + \underline{V}_K(t - \Delta t)}{2}$$

Eine Umstellung liefert eine Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit $\underline{V}_K(t)$ zu einer Verschiebungsschätzung $\underline{U}_K(t)$ und den Daten des letzten Zeitschritts.

$$\underline{V}_K(t) = 2 \frac{\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t)}{\Delta t} - \underline{V}_K(t - \Delta t) \quad (5.13)$$

Eine Interpolation zwischen den beiden Ansätzen für $\underline{V}_K(t)$ in den Gleichungen 5.12 und 5.13 erlaubt auch Mischformen (vergl. Bathe 1986: α -Methode der Zeitintegration).

$$\begin{aligned} \underline{V}_K(t) &= \kappa \left\{ 2 \frac{\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t)}{\Delta t} - \underline{V}_K(t - \Delta t) \right\} \\ &\quad + (1 - \kappa) \left\{ \frac{\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\} \\ &= (1 + \kappa) \frac{\underline{U}_K(t) - \underline{U}_K(t - \Delta t)}{\Delta t} - \kappa \underline{V}_K(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dies entspricht mit $\kappa = 0$ der Gleichung 5.12 und mit $\kappa = 1$ der Gleichung 5.13. Diese beiden Fälle sollten als Grenzfälle aufgefaßt werden, womit für κ der Wertebereich $0 \leq \kappa \leq 1$ in Frage kommt. Die Wahl des κ -Werts beeinflußt sowohl die Fähigkeit des Verfahrens zur numerischen Stabilisierung als auch die Schnelligkeit des Gesamtverfahrens. κ -Werte nahe bei 1 können zu andauernden Schwingungsphänomenen führen, deren Ursprung allein in der Numerik liegt (Bei κ -Werten größer Eins kommt es sogar zu instabilem Verhalten). Derartige Störungen klingen bei kleineren Werten für κ schneller ab, dafür nimmt die Performance des Verfahrens ab. Bewährt hat sich der Wertebereich $\frac{1}{3} \leq \kappa \leq \frac{2}{3}$.

5.1.5 Linearisierung

Für jeden Knoten der Netzstruktur wird zu jedem Zeitpunkt als Randbedingung entweder die Verschiebung \underline{U}_K oder die Summe der Elementknotenkräfte, also die von außen auf diesen Knoten wirkende Kraft vorgegeben. Diese Vorgehensweise ist nicht zwingend, bietet sich aber aufgrund des Zusammenhangs mit der Leistung der äußeren Kräfte an (vergl. Gl. 5.4). Experimentell lassen sich Randbedingungen praktisch nur auf diesem Wege direkt vorgeben. Beispielsweise kann für einen Ort immer nur entweder die belastende Kraft oder aber

die Verschiebung vorgegeben werden. Sollen dennoch für beide Größen bestimmte Werte realisiert werden, so geschieht dies, indem an anderen Stellen geeignete Belastungen aufgebracht werden, mit deren Hilfe sich die gewünschten Bedingungen indirekt einregeln lassen. Typischerweise ist in den meisten Fällen, nämlich bei allen Knoten, die lediglich den Zusammenhalt der Struktur gewährleisten, als Krastrandbedingung eine Nullkraft zu fordern, da keine äußere Kraft angreift.

Die Berechnung der Verschiebungen derjenigen Knoten, für die Kraftvorgaben existieren, stellt das zentrale Problem dar. Hingegen werden die resultierenden Kräfte an den Knoten mit vorgegebenen Verschiebungen für die Berechnungen in den nachfolgenden Zeitschritten nicht benötigt. Sofern sie als Ausgabegrößen von Interesse sind, können sie im Nachgang, nach der Ermittlung der unbekannt Knotenverschiebungen direkt berechnet werden. Die unbekannt Verschiebungen können hingegen aufgrund der nichtlinearen Zusammenhänge nicht direkt berechnet werden. Somit wird zu jedem Zeitpunkt zunächst eine Schätzung vorgenommen, die dann iterativ verbessert wird. In jedem Iterationsschritt werden zu den geschätzten Knotenverschiebungen die zugehörigen Knotengeschwindigkeiten bestimmt (Gl. 5.32). Über die Ansatzfunktionen ergeben sich daraus die Verzerrungen und Verzerrungsänderungen innerhalb der einzelnen Elemente. Hierzu wiederum liefert das jeweilige Stoffgesetz die zugehörigen Spannungen, die gemäß den Gleichungen 5.9, 5.10 oder 5.11 Elementknotenkräfte \underline{Q}_K hervorrufen. Die Summe dieser Kräfte über alle Elemente, die den Knoten K enthalten, addieren sich zu der resultierenden Knotenkraft in der Gesamtstruktur. Von dieser Knotenkraft ist zu fordern, daß sie der jeweiligen Kraftvorgabe hinreichend genau entspricht.

Als Kriterium für die Güte der bisherigen Schätzung wird an allen Knoten mit Knotenkraftvorgabe die Differenz zwischen der Summe der aus der Schätzung resultierenden Elementknotenkräfte \underline{Q}_K und der Vorgabekraft $\underline{\tilde{Q}}_K$ herangezogen.

$$\sum_{\mathcal{E}} \underline{Q}_K \quad \text{soll ergeben} \quad \underline{\tilde{Q}}_K \quad (5.15)$$

Sofern die erreichte Genauigkeit nicht den jeweiligen Anforderungen genügt, muß die bisherige Schätzung verbessert werden. Dies geschieht durch eine Linearisierung der Berechnungsvorschrift für die Knotenkräfte in dem durch die momentanen Schätzwerte für die Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten gegebenen Arbeitspunkt. Als Basis für die verwendeten Koeffizientenschreibweisen wird hier der einfachste Fall eines ortsunabhängigen, orthonormierten Basissystems gewählt. Zur kompakten Darstellung im Zusammenhang mit verschiedenen Iterationsstufen werden die Koeffizienten der verschiedenen Vektoren zunächst in Spaltenmatrizen zusammengefaßt.

$$\begin{array}{ll} \text{Knotenverschiebungen:} & U_{Ka} \rightarrow \underline{U} \\ \text{Knotengeschwindigkeiten:} & V_{Ka} \rightarrow \underline{V} \\ \text{Elementknotenkräfte (pro Element):} & Q_{Ka} \rightarrow \underline{Q} \\ \text{globale Kraftvorgaben:} & \underline{\tilde{Q}}_{Ka} \rightarrow \underline{\tilde{Q}} \end{array} \quad (5.16)$$

Ausgehend von einer (noch nicht ausreichend genauen) n -ten Schätzung mit \underline{U}_n und \underline{V}_n entsteht als Näherungsgleichung für die Forderung 5.15 die konsistente Linearisierung:

$$\underline{\tilde{Q}} = \sum_{\mathcal{E}} \left\{ \underline{Q}_n + \frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{U}_n} \cdot (\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_n) + \frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{V}_n} \cdot (\underline{V}_{n+1} - \underline{V}_n) \right\}_{\mathcal{E}} \quad (5.17)$$

Darin stellt \underline{U}_{n+1} die gesuchte verbesserte $(n+1)$ -te Schätzung dar. Sowohl \underline{U}_n als auch \underline{U}_{n+1} stellen Schätzungen der Knotenverschiebungen zum gleichen Zeitpunkt t dar. Die ausiterierten Knotenverschiebungen des letzten Zeitschritts $t - \Delta t$ werden stattdessen durch die mit $\underline{U}_{\text{alt}}$ bezeichnete Spaltenmatrix repräsentiert. Gleichung 5.14 nimmt in dieser Schreibweise die folgende Form an:

$$\underline{V}_n = (1 + \kappa) \frac{\underline{U}_n - \underline{U}_{\text{alt}}}{\Delta t} - \kappa \underline{V}_{\text{alt}} \quad (5.18)$$

Im Hinblick auf spätere Überlegungen bezüglich Eulerscher Größen ist der Hinweis von Bedeutung, daß diese Schreibweise die Gleichung 5.14 nur dann korrekt wiedergibt, wenn die verwendeten Koeffizienten (S. Gl. 5.16) zu einem Basissystem gehören, das in sich starr ist und keine Relativgeschwindigkeit gegenüber dem Basissystem hat, in dem die Verschiebungen und Geschwindigkeiten ermittelt werden.

Der gleiche Zusammenhang gilt natürlich auch für die $(n+1)$ -te Schätzung.

$$\underline{V}_{n+1} = (1 + \kappa) \frac{\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_{\text{alt}}}{\Delta t} - \kappa \underline{V}_{\text{alt}}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen

$$\underline{V}_{n+1} - \underline{V}_n = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} (\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_n) \quad (5.19)$$

ermöglicht es, in der Linearisierung 5.17 die Geschwindigkeiten vollständig zu eliminieren. Damit entsteht ein Gleichungssystem, das neben Größen aus dem letzten, n -ten Iterationsschritt und den Kraftvorgaben nur noch die noch unbekanntenen, verbesserten Knotenverschiebungen \underline{U}_{n+1} enthält.

$$\underbrace{\underline{\tilde{Q}} - \sum_{\mathcal{E}} \{\underline{Q}_n\}_{\mathcal{E}}}_{\Delta \underline{Q}} = \sum_{\mathcal{E}} \underbrace{\left\{ \frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{U}_n} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{V}_n} \right\}_{\mathcal{E}}}_{\underline{\tilde{M}}_{\mathcal{E}}} \cdot \underbrace{(\underline{U}_{n+1} - \underline{U}_n)}_{\Delta \underline{U}} \quad (5.20)$$

Die sich aus der Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen $\underline{\tilde{M}}_{\mathcal{E}}$ ergebende Gesamt- oder Systemsteifigkeitsmatrix ist zunächst singulär. Erst nach der Berücksichtigung der Verschiebungsrandbedingungen ist das Gleichungssystem invertierbar, und die verbesserte Schätzung \underline{U}_{n+1} für die unbekanntenen Knotenverschiebungen kann berechnet werden. Nachdem dies geschehen ist, werden mit Gleichung 5.19 die zugehörigen Knotengeschwindigkeiten \underline{V}_{n+1}

ermittelt, womit gemäß den Gleichungen 5.1 und 5.2 die Verschiebungen und Geschwindigkeiten jedes Punktes der Struktur festgelegt sind. Daraus ergibt sich mit Hilfe des gewählten Stoffgesetzes die Spannungsverteilung, aus der gemäß Gleichung 5.9, 5.10 oder 5.11 die zugehörigen Knotenkräfte \underline{Q}_{n+1} pro Element folgen. Sofern die Summe dieser Kräfte pro Knoten den Knotenvorgaben $\underline{Q}_{n+1}^{\infty}$ hinreichend nahe kommt, kann die Iteration beendet und die Berechnung des nächsten Zeitschritts begonnen werden. Ansonsten wird die laufende Iteration mit der Aufstellung eines neuen Gleichungssystems gemäß Gleichung 5.20 zur Berechnung einer nochmals verbesserten Schätzung \underline{U}_{n+2} fortgesetzt.

Die Ableitungen $\frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{U}_n}$ und $\frac{\partial \underline{Q}_n}{\partial \underline{V}_n}$ der Elementknotenkräfte nach den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten hängen mit Ableitungen von Spannung nach Verzerrungen zusammen. Diese bilden die sogenannte Materialsteifigkeit.

5.2 Materialsteifigkeit in gemischter Darstellung

Um die in Gleichung 5.20 angegebene Elementsteifigkeit $\underline{M}^{\mathcal{E}}$ mit den Größen des jeweiligen Stoffgesetzes, also Spannungen, Verzerrungen und ggf. Verzerrungsgeschwindigkeiten in Verbindung zu bringen, ist eine Rückkehr von der Schreibweise mit den in Gleichung 5.16 vereinbarten Spaltenmatrizen zur Koeffizientenschreibweise empfehlenswert, da so einerseits die Herleitungen einfacher fallen und andererseits nicht mehr zwischen verschiedenen Iterationsschritten unterschieden zu werden braucht.

$$\underline{M}_{KaLb}^{\mathcal{E}} = \frac{\partial Q_{Ka}}{\partial U_{Lb}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial Q_{Ka}}{\partial V_{Lb}} \quad (5.21)$$

Die weitere Auflösung fällt am leichtesten, wenn die Koeffizienten Q_{Ka} gemäß Gleichung 5.10 mit den 1. Piola Kirchhoff-Spannungen in Verbindung gebracht werden. Hierzu müssen allerdings zunächst die Ableitungen der Ansatzfunktionen N_K diskutiert werden. Die Ansatzfunktionen werden in der Regel als Funktionen der Elementkoordinaten ξ^i eingeführt: $N_K = N_K(\xi^i)$. Gemäß Wellerdick-Wojtasik & Besdo (2004, S. 96) können sie aber ebenfalls als Funktionen der Orte in der Referenzkonfiguration aufgefaßt werden, da Elementkoordinaten und Orte sich eindeutig zugeordnet sind. Bei der Umrechnung der entsprechenden Ableitungen treten die Elemente der inversen Jacobi-Matrix auf (vergl. Wellerdick-Wojtasik & Besdo 2004, S. 93).

$$\frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{r}_c}$$

In Koeffizientenschreibweise nimmt die Gleichung 5.10 damit folgende Gestalt an:

$$Q_{Ka} = \int_{\mathcal{E}} T_{ca} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} d\tilde{V} \quad . \quad (5.22)$$

Da über das Elementvolumen in der Referenzkonfiguration integriert wird, können die zu bildenden Ableitungen nach den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten in das Integral

hineingezogen werden.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} M_{KaLb} &= \int \frac{\partial}{\partial U_{Lb}} \left(T_{ca} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \right) + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial V_{Lb}} \left(T_{ca} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \right) d\tilde{V} \\
 &= \int \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \left(\frac{\partial T_{ca}}{\partial U_{Lb}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial T_{ca}}{\partial V_{Lb}} \right) d\tilde{V}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Die Anknüpfung an Deformationsmaße gelingt, indem die Ableitungen erweitert werden. Hierzu liefern die Gleichungen 5.3 die Abhängigkeiten des Deformationsgradienten und dessen Zeitableitung von den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten.

$$\left. \begin{aligned}
 F_{ed} &= \delta_{ed} + U_{Ke} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_d} \\
 \hat{F}_{ed} &= V_{Ke} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_d}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial F_{ed}}{\partial U_{Lb}} = \frac{\partial \hat{F}_{ed}}{\partial V_{Lb}} = \delta_{KL} \delta_{eb} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_d} = \delta_{eb} \frac{\partial N_L}{\partial \tilde{r}_d} \tag{5.24}$$

Neben der vollständigen Unabhängigkeit dieser Ableitungen von der ablaufenden Deformation ist hieran bemerkenswert, daß die Koeffizienten von \hat{F} nicht von den Knotenverschiebungen abhängen.

Mit Hilfe der vorgefundenen Zusammenhänge läßt sich Gleichung 5.21 weiter auflösen.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} M_{KaLb} &= \int \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \left(\frac{\partial T_{ca}}{\partial F_{ed}} \frac{\partial F_{ed}}{\partial U_{Lb}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial T_{ca}}{\partial \hat{F}_{ed}} \frac{\partial \hat{F}_{ed}}{\partial V_{Lb}} \right) d\tilde{V} \\
 &= \int \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \frac{\partial N_L}{\partial \tilde{r}_d} \left(\frac{\partial T_{ca}}{\partial F_{bd}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial T_{ca}}{\partial \hat{F}_{bd}} \right) d\tilde{V}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Die Integration über das Elementvolumen wird in der Regel mit Hilfe des numerischen Verfahrens der Gaußpunktintegration berechnet. Dabei wird das Integral durch eine Summe mit wenigen Summanden ersetzt. An jedem dieser Gaußpunkte nehmen die Ausdrücke $\frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c}$ feste Werte an, die sich von Zeitschritt zu Zeitschritt nicht ändern und somit prinzipiell zur Rechenzeiterparnis abgespeichert werden können. Zu berechnen sind dann in jedem Zeitschritt nur noch die Koeffizienten der sogenannten Materialsteifigkeit.

$$\text{Materialsteifigkeit: } \frac{\partial T_{ca}}{\partial F_{bd}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial T_{ca}}{\partial \hat{F}_{bd}} \tag{5.26}$$

Die Materialsteifigkeit enthält ausschließlich lokale Informationen und repräsentiert damit reine Materialeigenschaften. Die Tatsache, daß sich die Ableitungen der Spannungen T_{ca} nach F_{bd} und \hat{F}_{bd} vollständig von den die Elementgeometrie betreffenden Termen isolieren lassen (Gl. 5.25), ist, wie noch gezeigt werden wird, keineswegs selbstverständlich, sondern eine Besonderheit der hier verwendeten gemischten Darstellungsweise.

5.2.1 Modellalgorithmus für allgemeine homogene Zustände

Der beschriebene Algorithmus läßt sich in einer reduzierten Variante sehr gut zur schnellen und robusten Simulation einer sehr großen Klasse von Prozessen mit rein homogenen Belastungen verwenden. Dies entspricht im Prinzip einer FEM-Berechnung mit nur einem einzigen Gaußpunkt. Die reduzierte Variante gestattet überdies einen leichteren Überblick über den Algorithmus.

Während für die Berechnung inhomogener Belastungen innerhalb technischer Bauteile ein aufwendiges numerisches Verfahren wie die FEM unentbehrlich ist, sind für die Beurteilung und Anpassung von Stoffgesetzen homogene Belastungen häufig besser geeignet. Diese Berechnungen lassen sich zwar prinzipiell auch mit einem geeigneten FEM-Programm anhand eines einzelnen Elements und passend gewählter Randbedingungen durchführen, damit wird aber sinnbildlich 'mit Kanonen nach Spatzen geschossen'. Daraus erwächst ein Nachteil, sobald sehr viele solcher Rechnungen an sehr kleinen Systemen benötigt werden, wie es z.B. bei der Identifikation von Stoffgesetzparametern der Fall ist.

Die Klasse der hier behandelten homogenen Zustände und Zustandsänderungen umfaßt sämtliche Prozesse, deren einzelne Zustände sich durch separate Randbedingungen für Koeffizienten des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors und des Deformationsgradienten beschreiben lassen. Die genutzten Koeffizienten gehören dabei zu den Darstellungen $[T_{ab}]$ und $[F_{ab}]^T$ der beiden Tensoren in demselben kartesischen, als unbewegt empfundenen Koordinatensystem mit den zugehörigen Basen e_a .

Zunächst sollen zur Veranschaulichung dieses Vorgehens zwei einfache Beispiele vorgestellt werden. In Gleichung 5.27 sind die Randbedingungen für einen zyklischen einachsigen Zugversuch in y-Richtung angegeben.

$$\begin{bmatrix} T_{xx} = 0 & F_{xy}^T = 0 & F_{xz}^T = 0 \\ F_{yx}^T = 0 & T_{yy} = \frac{f}{2}(1 - \cos(\omega t)) & F_{yz}^T = 0 \\ F_{zx}^T = 0 & F_{zy}^T = 0 & T_{zz} = 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Die Zugspannung schwankt periodisch zwischen 0 und f , während die x- und z-Richtungen normalspannungsfrei bleiben. Sämtliche Scherverformungen in den e_a -Richtungen werden ausgeschlossen. Entsprechend diesen Randbedingungen stellen sich in Abhängigkeit von dem verwendeten Stoffgesetz die Längungen in x-, y- und z-Richtung ein. Sofern das Stoffgesetz isotrop ist, werden sich verschwindende Scherspannungen einstellen. Bei einem anisotropen Stoffgesetz hingegen entsprechen die angegebenen Randbedingungen nicht unbedingt einem einachsigen Zugversuch.

Im Vergleich dazu zeigt Gleichung 5.28 die Randbedingungen für einen symmetrischen Scherversuch in y-Richtung. In diesem Fall ist die Scherdeformation periodisch schwankend mit der Scheramplitude k vorgegeben. Der Querschnitt senkrecht zur y-Achse ist durch die in \underline{F} gegebenen Randbedingungen in seiner Form und seiner Ausrichtung zur y-Achse festgelegt. Die einzige verbleibende Verformungsfreiheit neben der Scherung besteht in der sich einstellenden Höhe in y-Richtung. In dieser Konstellation gibt die Höhenänderung direkt

die Änderung des Volumens wieder, so daß bei einem nahezu inkompressiblen Material wie Gummi die Höhe annähernd unverändert bleiben wird und der Verformungszustand somit einer einfachen Scherung (simple shear) nahekommt.

$$\begin{bmatrix} F_{xx}^T = 1 & F_{xy}^T = 0 & F_{xz}^T = 0 \\ F_{yx}^T = k \sin(\omega t) & T_{yy} = 0 & F_{yz}^T = 0 \\ F_{zx}^T = 0 & F_{zy}^T = 0 & F_{zz}^T = 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Statt der Scherdeformation kann mit den in Gleichung 5.29 vorgegebenen Randbedingungen auch die Scherspannung bei ansonsten unveränderten Bedingungen vorgegeben werden.

$$\begin{bmatrix} F_{xx}^T = 1 & F_{xy}^T = 0 & F_{xz}^T = 0 \\ T_{yx} = f \sin(\omega t) & T_{yy} = 0 & F_{yz}^T = 0 \\ F_{zx}^T = 0 & F_{zy}^T = 0 & F_{zz}^T = 1 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Wie die Beispiele zeigen, werden die Randbedingungen stets derart vorgegeben, daß zu jedem Element einer 3×3 -Matrix jeweils entweder der zugehörige Koeffizient des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors oder stattdessen des transponierten Deformationsgradienten vorgegeben wird. Dieses Vorgehen ist aus der Formänderungsarbeit (vergl. Gl. 3.50) heraus motiviert (Kurvenintegrale, s. Bronstein et al. 1995).

$$\Phi = \int_{\widehat{K}K} T_{ab} \, dF_{ba} \quad (5.30)$$

Da die Ingenieurspannungen T_{ab} den Bezug von Kraftanteilen auf die zugehörigen Flächenelemente der Referenzkonfiguration herstellen und deshalb häufig mit meßtechnisch realisierbaren Belastungen eng zusammenhängen, ist mit ihrer Hilfe die Vorgabe von Spannungsrandbedingungen vergleichsweise anschaulich und einfach, aber dennoch sehr vielseitig möglich. Auch die Koeffizienten des Deformationsgradienten kommen der Anschauung entgegen und erlauben einen sehr flexiblen Einsatz.

Die Tatsache, daß hier zwei unsymmetrische Tensoren verwendet werden, zu deren eindeutiger Charakterisierung folglich jeweils neun Zahlen notwendig sind, scheint zunächst einen übermäßig großen Aufwand darzustellen. Effektiver erscheint eine Randbedingungsvorgabe in Eulerschen oder stattdessen in Lagrangeschen Größen. Tatsächlich ist im Fall eines isotropen elastischen Gesetzes die Vorgabe von nur sechs Eulerschen Randbedingungen ausreichend, um die Cauchy-Spannungen und die Verzerrungen festzulegen. Daß dabei der Drehanteil des Deformationsgradienten unbestimmt bleibt, braucht nicht zu stören, sofern nur die natürlichen Spannungen $\underline{\sigma}$ von Interesse sind, die von diesen Drehanteilen unbeeinflusst bleiben. Erst für eine Umrechnung in 1. oder 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen wird der vollständige Deformationsgradient benötigt (s. Gl. 3.48). Diese Zusammenhänge gelten allerdings nicht mehr für inelastische Stoffgesetze, in denen Zeitableitungen auftreten. Für die Berechnung Eulerscher Zeitableitungen wird bereits der vollständige Deformationsgradient benötigt (Gl.

3.28 und 3.54). Andererseits können in der Lagrangeschen Darstellung zwar Zeitableitungen auch ohne Kenntnis der Drehanteile des Deformationsgradienten berechnet und somit auch die Spannungen bestimmt werden. In der Lagrangeschen Betrachtungsweise sind dies allerdings 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen, die sich ohne Kenntnis der vollständigen Deformation physikalisch nicht vollständig deuten lassen. Für die Umrechnung in Cauchy- oder 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen ist aber wiederum der vollständige Deformationsgradient notwendig. Somit zeigt sich, daß zwar für die Modellierung des Materialverhaltens durch ein Stoffgesetz die symmetrischen Tensoren entweder der Eulerschen oder aber der Lagrangeschen Darstellungsweise ausreichen, daß aber für die vollständige Erfassung eines Belastungszustands im allgemeinen zusätzlich der Drehanteil der Deformation bekannt sein muß. Folglich enthält eine Angabe von neun Randbedingungen keinerlei Überschuß.

Bei der FEM wird vor der Einarbeitung der Randbedingungen zunächst die Gesamtsteifigkeit aus der Summe der Elementsteifigkeiten gebildet (vergl. Gl. 5.20). Folglich werden bei der Berechnung der Ableitungen der Elementknotenkräfte nach den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten die Verschiebungsrandbedingungen noch nicht berücksichtigt. Der hierdurch betriebene prinzipiell überschüssige Rechenaufwand ist in aller Regel, wenn die Zahl der Knoten mit Verschiebungsrandbedingungen sehr viel kleiner als die Gesamtknotenzahl ist, unbedeutend. Dies trifft auf die homogenen Belastungen nicht zu, so daß in diesem Fall eine selektive Berechnung der Ableitungen eine wesentliche Rechenzeiterparnis erbringt.

Die zum Zeitpunkt t durch die Randbedingungen bereits bekannten Koeffizienten F_{ab}^T des Deformationsgradienten werden für eine kompakte Darstellung in der Spaltenmatrix \underline{f}^T zusammengefaßt, die zugehörigen, noch unbekanntem Werte von T_{ab} und \hat{F}_{ab}^T in den Spaltenmatrizen \underline{t} und $\hat{\underline{f}}^T$. Außerdem werden die durch Randbedingungen festgelegten T_{ab} -Werte und die zugehörigen Werte aus F_{ab}^T und \hat{F}_{ab}^T zu den Spaltenmatrizen \underline{T}^∞ , \underline{F}^T und $\hat{\underline{F}}^T$ zusammengestellt.

$$\begin{aligned} F_{ab}^T &\rightarrow \underline{F}^T & \underline{f}^T \\ \hat{F}_{ab}^T &\rightarrow \hat{\underline{F}}^T & \hat{\underline{f}}^T \\ T_{ab} &\rightarrow \underline{T}^\infty & \underline{t} \end{aligned}$$

Die Bezeichnungen sind derart gewählt, daß alle mit Großbuchstaben benannten Matrizen die gleiche Größe haben und ebenso die Matrizen mit Kleinbuchstaben.

$$\begin{aligned} \text{vorgegeben: } & \underline{f}^T, \hat{\underline{f}}^T, \underline{T}^\infty \\ \text{zu berechnen: } & \underline{F}^T, \hat{\underline{F}}^T, \underline{t} \end{aligned}$$

Die Linearisierung (vergl. Gl. 5.17) wird somit nur mit den mit Großbuchstaben versehenen Matrizen durchgeführt.

$$\underline{T}^\infty = \underline{T}_n + \frac{\partial \underline{T}_n}{\partial \underline{F}_n^T} \cdot (\underline{F}_{n+1}^T - \underline{F}_n^T) + \frac{\partial \underline{T}_n}{\partial \hat{\underline{F}}_n^T} \cdot (\hat{\underline{F}}_{n+1}^T - \hat{\underline{F}}_n^T) \quad . \quad (5.31)$$

Die Zeitableitungen $\hat{\underline{F}}_n^T$ werden auch in diesem Fall mit dem in Abschnitt 5.1.4 beschriebenen Zeitintegrationsverfahren mit den \underline{F}_n^T in Zusammenhang gebracht (vergl. Gln. 5.14 und 5.19).

$$\begin{aligned} \hat{\underline{F}}_n^T &= (1 + \kappa) \frac{\underline{F}_n^T - \underline{F}_{\text{alt}}^T}{\Delta t} - \kappa \hat{\underline{F}}_{\text{alt}}^T \\ \Rightarrow \hat{\underline{F}}_{n+1}^T - \hat{\underline{F}}_n^T &= \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \left(\underline{F}_{n+1}^T - \underline{F}_n^T \right) \quad \text{mit: } 0 \leq \kappa \leq 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Da die Randbedingungen in diesem Fall bereits berücksichtigt wurden, ist das aus der Kombination der letzten beiden Gleichungen resultierende Gleichungssystem bereits invertierbar, sofern denn die Randbedingungen geeignet gewählt wurden und jede Starrkörperbewegung ausschließen.

$$\underbrace{\underline{T}^\infty - \underline{T}_n}_{\Delta \underline{T}} = \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{T}_n}{\partial \underline{F}_n^T} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{T}_n}{\partial \hat{\underline{F}}_n^T} \right)}_{\underline{m}} \cdot \underbrace{\left(\underline{F}_{n+1}^T - \underline{F}_n^T \right)}_{\Delta \underline{F}^T} \quad (5.33)$$

Die Struktur der Matrix \underline{m} ist wie erwartet identisch mit der in Gleichung 5.26 angegebenen Materialsteifigkeit. Die Umkehrung des erhaltenen Gleichungssystems liefert die gesuchten \underline{F}_{n+1}^T .

$$\underline{F}_{n+1}^T = \underline{F}_n^T + \underline{m}^{-1} \cdot \Delta \underline{T} \quad (5.34)$$

Um die Qualität dieser Näherung beurteilen zu können, muß als nächstes das neue $\Delta \underline{T}$ berechnet werden. Hierzu werden die Spannungen \underline{T}_{n+1} benötigt, deren Berechnung anhand des Stoffgesetzes wiederum die Bestimmung von $\hat{\underline{F}}_{n+1}^T$ erfordern kann. Hierzu steht Gleichung 5.32 zur Verfügung.

$$\hat{\underline{F}}_{n+1}^T = \hat{\underline{F}}_n^T + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{F}^T \quad (5.35)$$

Damit werden \underline{T}_{n+1} und $\Delta \underline{T}$ berechenbar. Entspricht $\Delta \underline{T}$ noch nicht den Genauigkeitsanforderungen für die Iteration, so werden für den nächsten Iterationsschritt zunächst die Ableitungen der Spannungen nach den Deformationen und deren Änderungen berechnet, um schließlich mit Gleichung 5.33 erneut verbesserte Werte für die gesuchten Koeffizienten des Deformationsgradienten berechnen zu können. Auf diese Weise schreitet die Iteration fort, bis die Lösung mit der erforderlichen Genauigkeit genähert wurde und der nächste Zeitschritt begonnen wird. Zuvor können noch abschließend die unbekanntene Spannungswerte \underline{t} anhand der nun vollständig bekannten Tensoren \underline{F} und $\hat{\underline{F}}$ bestimmt werden, falls diese als Ausgabegrößen benötigt werden.

Während die Gleichungen 5.34 und 5.35 eine Korrektur der jeweils vorhergehenden Schätzung für \underline{F}_n^T und $\hat{\underline{F}}_n^T$ darstellen, muß zu Beginn jedes Zeitschritts im Rahmen eines sogenannten Prediktorschritts eine geeignete Startschätzung gefunden werden.

Zu Beginn eines Zeitschritts liegt keinerlei Information darüber vor, wie sich die unbekanntene Elemente des Deformationsgradienten und deren Zeitableitungen entwickeln werden. Lediglich die zuletzt berechneten Deformationsgeschwindigkeiten lassen sich für Vermutungen

darüber heranziehen, was im kommenden Zeitschritt passieren wird. Auch wenn eine auf diesem Wege erzielte Startschätzung idealerweise für viele Situationen bereits als geeignet betrachtet werden kann, so gibt es unweigerlich auch die Möglichkeit, daß sich aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen Entwicklungen ergeben, für die eine solche Startschätzung eher ungeeignet ist. Sofern die dem Algorithmus innewohnenden Stabilisierungsmöglichkeiten in derartigen Situationen nicht ausreichen, müssen zusätzliche Maßnahmen getroffen werden. Eine relativ einfache Möglichkeit dieser Art liegt z.B. darin, daß bei der Detektion einer divergierenden Iteration innerhalb der mit Gleichung 5.33 durchgeführten Korrektorschritte die Berechnungen für den aktuellen Zeitschritt mit alternativen Startschätzungen wiederholt werden. Die Notwendigkeit solcher Eingriffe sollte allerdings aufgrund des hohen Zeitbedarfs auf ein Minimum reduziert werden. Insofern empfiehlt es sich, die Startschätzung vor allem möglichst robust auszulegen, statt für die wahrscheinlich häufigsten Situationen eine besonders gut geeignete Startschätzung zu realisieren. So werden z.B. in der überragenden Zahl der Zeitschritte die gesuchten Geschwindigkeiten $\hat{\underline{F}}^T(t)$ den Geschwindigkeiten des letzten Zeitschritts $\hat{\underline{F}}_{\text{alt}}^T = \hat{\underline{F}}^T(t - \Delta t)$ ähneln. Für diese Situationen wäre es folglich nahe liegend, für die Startschätzung von der Gleichheit dieser Geschwindigkeiten auszugehen. Für die Startschätzung \underline{F}_1^T ergäbe sich somit aus Gleichung 5.32:

$$\hat{\underline{F}}_1^T = \hat{\underline{F}}_{\text{alt}}^T \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_1^T = \underline{F}_{\text{alt}}^T + \Delta t \hat{\underline{F}}_{\text{alt}}^T \quad . \quad (5.36)$$

Darüber hinaus könnten die Geschwindigkeiten sogar noch präziser abgeschätzt werden, indem zusätzlich die Geschwindigkeiten von weiter zurückliegenden Zeitschritten in die Abschätzung mit einbezogen würden. Alle diese Abschätzungen wären allerdings in Situationen, in denen der aktuelle Zeitschritt z.B. der erste Schritt nach einer Belastungsumkehr ist, sehr weit von der tatsächlichen Lösung entfernt, so daß es durchaus möglich ist, daß dies innerhalb der Korrektorschritte nicht mehr ausgeglichen werden kann.

Eine robustere Startschätzung ergibt sich stattdessen, wenn diese unter der Annahme ermittelt wird, daß die unbekanntes Geschwindigkeiten innerhalb des aktuellen Zeitschritts auf Null abfallen. Gleichung 5.32 liefert unter diesen Bedingungen:

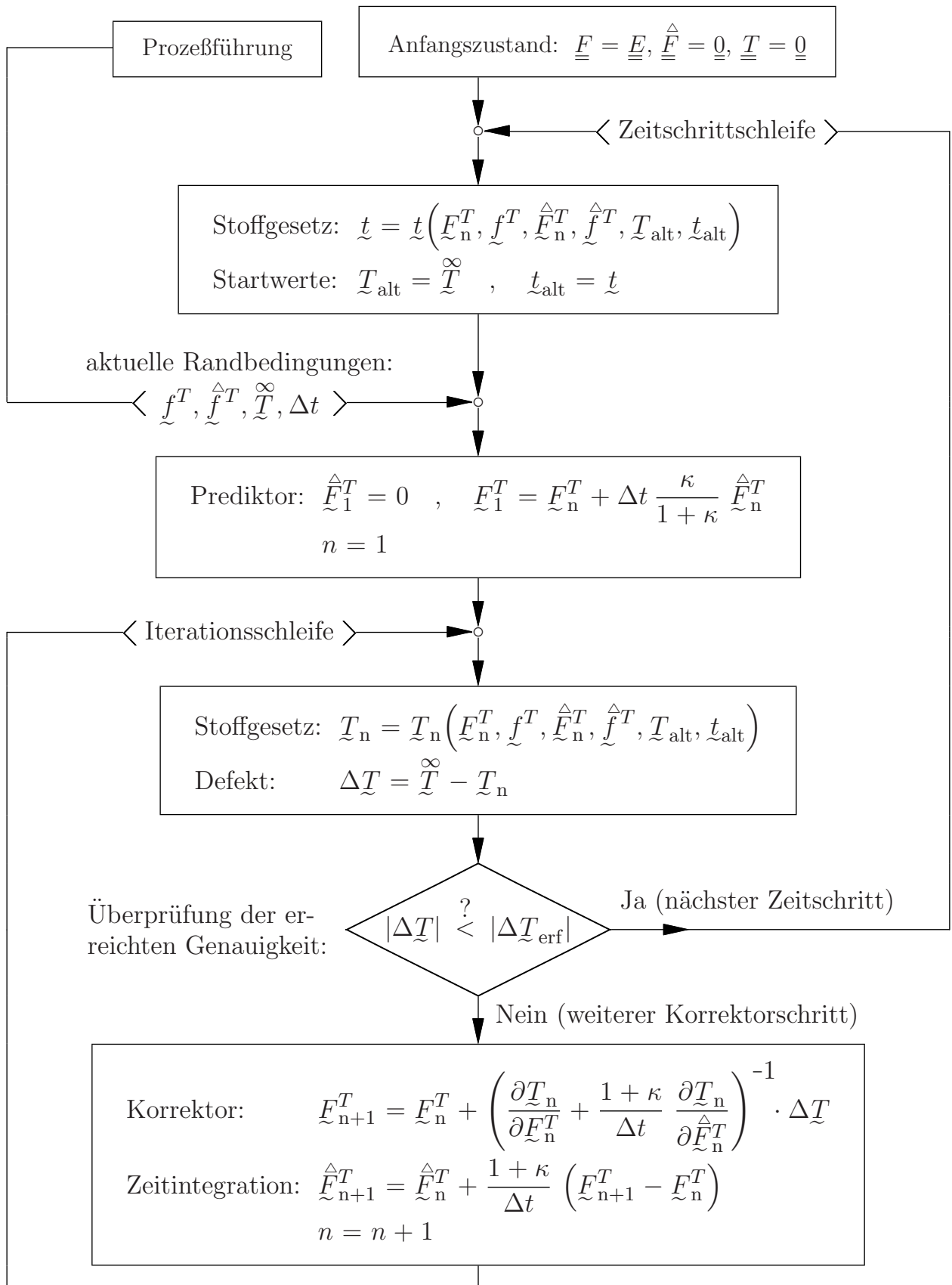
$$\hat{\underline{F}}_1^T = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{F}_1^T = \underline{F}_{\text{alt}}^T + \Delta t \frac{\kappa}{1 + \kappa} \hat{\underline{F}}_{\text{alt}}^T \quad (5.37)$$

Diese Abschätzung ist zwar in Standardsituationen der Abschätzung in Gleichung 5.36 unterlegen und erfordert somit mehr Rechenzeit für die Korrektorschritte, sie ist aber in aller Regel noch gut genug, um ein Auffinden der gesuchten Lösung zu gewährleisten. Ihr großer Vorteil aber liegt darin, daß sie auch in Ausnahmesituationen, z.B. nach einer Belastungsumkehr, in der Regel auch ohne Zusatzmaßnahmen ein Auffinden der Lösung ermöglicht. Aus diesem Grund wurde für die Berechnung der hier vorgestellten Ergebnisse die Startschätzung gemäß Gleichung 5.37 verwendet.

Für den allerersten Zeitschritt liegen im allgemeinen keinerlei Informationen vor, die eine konkrete Abschätzung erlauben. Deshalb kann hier nur von dem entspannten Anfangszustand mit $\underline{F} = \underline{E}$, $\hat{\underline{F}} = \underline{0}$ und $\underline{T} = \underline{0}$ ausgegangen werden.

Der gesamte Algorithmus ist noch einmal auf Seite 133 zusammenfassend dargestellt.

Algorithmus zur Berechnung homogener Belastungszustände (schematisch)



5.2.2 Simultane numerische Variationen

Ein zentraler Punkt in diesem Algorithmus ist die Berechnung der Steifigkeitsmatrix \underline{m} aus Gleichung 5.33. Die dort angegebene Berechnungsvorschrift resultiert aus Gleichung 5.31, die wiederum darauf beruht, daß \underline{T}_n neben nicht variierbaren Größen von \underline{F}_n^T und $\hat{\underline{F}}_n^T$ abhängt. Diese beiden wesentlichen Variablen werden als unabhängig variierbar gehandhabt: $\underline{T}_n = \underline{T}_n(\underline{F}_n^T, \hat{\underline{F}}_n^T)$. Folglich gilt für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix in ausführlicher Schreibweise:

$$m_{IJ} = \frac{\partial T_{nI}}{\partial F_{nJ}^T} \bigg|_{\substack{F_{nL}^T = c. \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nL}^T = c. \forall L}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial T_{nI}}{\partial \hat{F}_{nJ}^T} \bigg|_{\substack{F_{nL}^T = c. \forall L \\ \hat{F}_{nL}^T = c. \forall L \neq J}} \quad (5.38)$$

Diese Zusammenhänge können allerdings auch in einer alternativen Weise interpretiert werden, indem berücksichtigt wird, daß die unabhängige Variierbarkeit von \underline{F}_n^T und $\hat{\underline{F}}_n^T$ zwar mathematisch durchaus vereinbar ist, tatsächlich aber im Rahmen des vorgestellten Algorithmus durch die Zeitintegration in der Form von Gleichung 5.32 unterbunden wird. Somit können die Spannungen auch als Funktion der Deformationen allein aufgefaßt werden: $\underline{T}_n = \underline{T}_n(\underline{F}_n^T)$, $\hat{\underline{F}}_n^T = \hat{\underline{F}}_n^T(\underline{F}_n^T)$. Der Übergang zu dieser Interpretationsweise kann auch unmittelbar an der Steifigkeitsmatrix vollzogen werden. Hierzu wird zunächst die Abhängigkeit zwischen $\hat{\underline{F}}_n^T$ und \underline{F}_n^T herangezogen (s. Gl. 5.32).

$$\frac{\partial \hat{F}_{nK}^T}{\partial F_{nJ}^T} \bigg|_{F_{nL}^T = c. \forall L \neq J} = \delta_{JK} \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \quad (5.39)$$

Eingesetzt in Gleichung 5.38 folgt daraus:

$$m_{IJ} = \frac{\partial T_{nI}}{\partial F_{nJ}^T} \bigg|_{\substack{F_{nL}^T = c. \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nL}^T = c. \forall L}} + \frac{\partial \hat{F}_{nK}^T}{\partial F_{nJ}^T} \bigg|_{F_{nL}^T = c. \forall L \neq J} \frac{\partial T_{nI}}{\partial \hat{F}_{nK}^T} \bigg|_{\substack{F_{nL}^T = c. \forall L \\ \hat{F}_{nL}^T = c. \forall L \neq K}} \quad .$$

Dies entspricht einer vollständigen Ableitung der Spannungen T_{nI} nach den Deformationen F_{nJ}^T unter Berücksichtigung der Zeitintegrationsvorschrift.

$$m_{IJ} = \frac{\partial T_{nI}}{\partial F_{nJ}^T} \bigg|_{\substack{F_{nL}^T = c. \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nL}^T = c. \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nJ}^T = \frac{1+\kappa}{\Delta t} F_{nJ}^T + c.}} \quad (5.40)$$

Obwohl die Begriffe 5.38 und 5.40 für die Steifigkeitsmatrix analytisch völlig identisch sind, gibt es für den Fall, daß die Ableitungen numerisch gebildet werden, gravierende Unterschiede. Für die numerischen Ableitungen werden die zu berechnenden Ableitungen durch die zugehörigen Differenzenquotienten ersetzt. Für die Ableitungen in Gleichung 5.38 ist dies in den Gleichungen 5.41 und 5.42 am Beispiel vorderer Differenzenquotienten gezeigt. Die

Abhängigkeiten der Spannungen von den Elementen F_{nL}^T und \hat{F}_{nL}^T mit $L \neq J$, die nicht variiert werden, wurden hier zugunsten einer verbesserten Übersicht ausgelassen. Außerdem wurden Variationen nicht wie üblich mit Δx , sondern mit dx bezeichnet, um Verwechslungen mit Differenzen zwischen zwei Iterationsschritten auszuschließen (vergl. z.B. $\Delta \underline{F}^T$ in Gl. 5.33).

$$\left. \frac{\partial T_{nI}}{\partial F_{nJ}^T} \right|_{\substack{\hat{F}_{nL}^T = c, \forall L \\ F_{nL}^T = c, \forall L \neq J}} = \lim_{dF_{nJ}^T \rightarrow 0} \frac{T_{nI}(F_{nJ}^T + dF_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T) - T_{nI}(F_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T)}{dF_{nJ}^T} \quad (5.41)$$

$$\left. \frac{\partial T_{nI}}{\partial \hat{F}_{nJ}^T} \right|_{\substack{F_{nL}^T = c, \forall L \\ \hat{F}_{nL}^T = c, \forall L \neq J}} = \lim_{d\hat{F}_{nJ}^T \rightarrow 0} \frac{T_{nI}(F_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T + d\hat{F}_{nJ}^T) - T_{nI}(F_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T)}{d\hat{F}_{nJ}^T} \quad (5.42)$$

Bei der Bildung der für Gleichung 5.40 benötigten Ableitungen wird hingegen die Abhängigkeit der \hat{F}^T von \underline{F}^T unmittelbar berücksichtigt. Eine Veränderung von \underline{F}^T zieht somit gemäß Gleichung 5.32 automatisch auch eine Änderung von \hat{F}^T nach sich.

$$\begin{aligned} \hat{F}_{nJ}^T &= c + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} F_{nJ}^T \quad \text{mit:} \quad c = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} F_{\text{alt},J}^T - \kappa \hat{F}_{\text{alt},J}^T \\ \Rightarrow \quad c + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} (F_{nJ}^T + dF_{nJ}^T) &= \hat{F}_{nJ}^T + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} dF_{nJ}^T \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich in diesem Fall für die Differenzenquotienten:

$$\left. \frac{\partial T_{nI}}{\partial \hat{F}_{nJ}^T} \right|_{\substack{F_{nL}^T = c, \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nL}^T = c, \forall L \neq J \\ \hat{F}_{nJ}^T = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} F_{nJ}^T + c}} = \lim_{dF_{nJ}^T \rightarrow 0} \left\{ T_{nI} \left(F_{nJ}^T + dF_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} dF_{nJ}^T \right) - T_{nI} \left(F_{nJ}^T, \hat{F}_{nJ}^T \right) \right\} \frac{1}{dF_{nJ}^T} \quad (5.43)$$

Besonders günstig ist hierbei, daß die Größe der vorzunehmenden Änderungen der Elemente von \hat{F}^T sich direkt aus den Änderungen der \underline{F}^T ergibt. Im Gegensatz zu den Gleichungen 5.41 und 5.42 müssen in diesem Fall also nur geeignete Variationen der Elemente von \underline{F}^T , aber nicht von \hat{F}^T gefunden werden. Gerade das Auffinden geeigneter Variationen für die Elemente von \hat{F}^T in Gleichung 5.42 die in jeder Situation ein hinreichend gutes Ergebnis liefern, erweist sich aber als schwierig.

Ein weiterer leicht einzusehender Vorteil der Gleichung 5.40 gegenüber 5.38 bei der Verwendung numerischer Ableitungen liegt natürlich darin, daß nur halb so viele variierte Spannungszustände mit Hilfe des Stoffgesetzes berechnet werden müssen.

Dementsprechend empfiehlt sich der Einsatz der simultanen Variationen von \underline{F} und $\hat{\underline{F}}$ natürlich auch bei der Bildung der Materialsteifigkeit innerhalb der FEM, sofern diese mit

Hilfe numerischer Ableitungen gebildet wird. An die Stelle der Gleichung 5.25 tritt damit:

$$\underline{\underline{M}}_{KaLb} = \int \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \frac{\partial N_L}{\partial \tilde{r}_d} \frac{\partial T_{ca}}{\partial F_{bd}} \bigg|_{\substack{F_{ef} = c, \forall ef \neq bd \\ \hat{F}_{ef} = c, \forall ef \neq bd \\ \hat{F}_{bd} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} F_{bd} + c.}} d\tilde{V} \quad . \quad (5.44)$$

Der Einbau eines Stoffgesetzes in die FEM erfordert somit prinzipiell zwei Berechnungsalgorithmen. Zum einen das Stoffgesetz, das die Berechnung von Spannungen \underline{T} in Abhängigkeit von Vorgaben für \underline{F} und $\hat{\underline{F}}$ erlaubt, um daraus (stoffgesetzunabhängig) gemäß der Gleichung 5.22 die Knotenkräfte zu berechnen. Als zweites wird ein Algorithmus zur Berechnung der Materialsteifigkeit $\underline{\underline{m}}$ (Gl. 5.38) benötigt, um daraus - wiederum stoffgesetzunabhängig - die Elementsteifigkeit und schließlich die Gesamtsteifigkeit aufzubauen.

5.3 Ableitungen nach Tensoren und nach Tensorcoeffizienten

Die Definition von Ableitungen nach vollständigen Tensoren zweiter Stufe anstatt nach speziellen Tensorcoeffizienten bietet sich bereits bei der Beschäftigung mit Gleichung 5.26 an. Besonders wichtig wird eine eindeutige Definition im Zusammenhang mit Ableitungen nach symmetrisch definierten Tensoren wie den typischen Spannungs- und Verzerrungstensoren, da bei diesen Tensoren nicht alle Koeffizienten separat variierbar sind.

5.3.1 Ableitungen nach unsymmetrischen Tensoren

In diesem Abschnitt werden zunächst Ableitungen nach allgemeinen Tensoren, die nicht symmetrisch definiert sind, behandelt. Häufig verwendete Beispiele aus der Kontinuumsmechanik sind der Deformationsgradient oder der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor. Solche Tensoren sind im allgemeinen unsymmetrisch, sie können aber momentan bzw. lokal durchaus symmetrisch sein. Entscheidend ist, daß es die Definition dieser Tensoren nicht ausschließt, daß sich beispielsweise der Koeffizient F_{xy} ändert, während F_{yx} unverändert bleibt. Genau solche Änderungen werden durch partielle Ableitungen beschrieben.

Als einführendes Beispiel sei das skalare Produkt s zweier allgemeiner Tensoren \underline{T} und \underline{F} zweiter Stufe betrachtet. Die Ableitung von s nach den Koeffizienten des einen Tensors ergibt die Koeffizienten des zweiten Tensors, sofern die beiden Tensoren nicht voneinander abhängen und wie im Beispiel \underline{T} während der Änderung von \underline{F} konstant bleiben kann.

$$s = \underline{F} \cdot \underline{T} = F_{ab} T_{ba} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial F_{cd}} \bigg|_{\underline{T}} = \delta_{ac} \delta_{bd} T_{ba} = T_{dc}$$

Die Ableitung nach dem vollständigen Tensor \underline{F} wird nun derart vereinbart, daß die hinzukommenden Basisvektoren als Ergebnis den Tensor \underline{T} (und nicht \underline{T}^T) liefern.

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{F}} \bigg|_{\underline{T}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{ab}} \circ \underline{e}_b \circ \underline{e}_a = \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{ab}} \circ \underline{j}_{ba} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial \underline{F}} \bigg|_{\underline{T}} = \underline{T} \quad (5.45)$$

Mit dem für das Beispiel (aber nicht generell) gleichen Ergebnis wäre prinzipiell auch die Vereinbarung $\frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\underline{F}}} \Big|_{\underline{\underline{T}}} = \underline{\underline{j}}_{ab} \circ \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{ba}}$ möglich. In diesem Fall ergäbe sich allerdings bei einer entsprechenden Ableitung der Tensor $\frac{\partial T_{cd}}{\partial F_{ba}} \underline{\underline{j}}_{ab} \circ \underline{\underline{j}}_{cd}$, dessen Umsetzung in eine Matrixschreibweise eine unübliche Zuordnung von Zeilen und Spalten erforderte. Auch die beiden zusätzlichen Varianten mit den transponierten $\underline{\underline{j}}_{ab}$ -Tensoren wären denkbar. Diese sind insbesondere dann interessant, wenn als Standardprodukt " : " statt " .. " verwendet wird.

Eine weitere Motivation für die getroffene Ableitungsdefinition, insbesondere für die Reihenfolge der Basen, die zu der Größe gehören, nach der abgeleitet wird, ergibt sich aus der Kettenregel. Bei einem Tensor $\underline{\underline{F}}$, der im Beispiel ausschließlich von einem weiteren Tensor $\underline{\underline{X}}$ abhängt, ergibt sich gerade das von skalaren Größen gewohnte Verhalten.

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{X}}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{ab}} \circ \underline{\underline{j}}_{ba} \cdot \frac{\partial F_{cd}}{\partial X_{ef}} \underline{\underline{j}}_{cd} \circ \underline{\underline{j}}_{fe} = \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{ab}} \frac{\partial F_{ab}}{\partial X_{ef}} \circ \underline{\underline{j}}_{fe} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\underline{X}}}$$

Auch in allen anderen kartesischen Systemen gilt:

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{\underline{F}}} \Big|_{\underline{\underline{T}}} = \frac{\partial(\dots)}{\partial F_{AB}} \circ \underline{\underline{e}}_B \circ \underline{\underline{e}}_A$$

Dies liegt daran, daß sich jede tensorielle Größe in verschiedenen kartesischen Systemen in genau der gleichen Form darstellen läßt. Dieser Übergang ist insofern rein mathematisch. Bei Anisotropie kann es beispielsweise sein, daß bei einer solchen Ableitung Koeffizienten eines Anisotropietensors (mathematisch) als konstante Größen gehandhabt werden, die sich in dieser Darstellung bei einer Deformation aber durchaus ändern. Wird somit ein Ableitungsausdruck in einer Darstellung ermittelt, so kann er in alle anderen kartesischen Darstellungen übernommen werden.

Unübersichtlicher wird die Situation, wenn eine tensorielle Ableitung durch Ableitungen nach Koeffizienten ausgedrückt werden soll, die wiederum zu schiefwinkligen und Materialkoordinaten zugeordneten Basisvektoren gehören.

$$\frac{\partial(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{E}})}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{E}} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{E}})}{\partial F_{ij}} = \frac{\partial(F_{kl} E^{lk})}{\partial F_{ij}}$$

Dabei müssen offensichtlich die Koeffizienten E^{lk} als konstant gehandhabt werden. Auch dann, wenn $\underline{\underline{F}}$ der Deformationsgradient ist, und sich die E^{lk} bei Materialkoordinaten durchaus ändern, wenn sich $\underline{\underline{F}}$ ändert.

Es gibt aber noch andere Ableitungen in Materialkoordinaten. Beispielsweise gilt für elastische Modelle:

$$\tau^{j(6)} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial E_{j(6)}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{j(6)}} \quad .$$

Die Metriken der aktuellen Konfiguration dürfen hierbei (im Gegensatz zu oben) natürlich nicht als konstant betrachtet werden. Vielmehr ist eine Formulierung zu suchen, in der neben den $\varepsilon_{j^{(6)}}$ keine Metriken der aktuellen Konfiguration auftreten.

In Anbetracht dieser Probleme und des fehlenden Bedarfs wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Ermittlung der Koeffizienten einer Ableitung aus den Koeffizienten der an der Ableitung beteiligten Größen verzichtet. Zur Berechnung der Koeffizienten des Ergebnistensors ist es somit stets nötig, eine kartesische Darstellung der beteiligten Tensoren heranzuziehen (Gl. 5.45). Dies beeinträchtigt keineswegs die Tensoreigenschaften solcher Ableitungen. Es ist auch ohne Einschränkung möglich, das Ableitungsergebnis wiederum in allen anderen Koordinatensystemen darzustellen.

Im Hinblick auf kompliziertere Zusammenhänge wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Arbeitsweise favorisiert, bei der innerhalb von Herleitungen möglichst lange die kompakte und damit übersichtlichere symbolische Schreibweise beibehalten wird. Dementsprechend wird angestrebt, Ableitungen zusammengesetzter Ausdrücke noch innerhalb der symbolischen Schreibweise möglichst weit zu reduzieren. Im folgenden werden Hilfsmittel für diese Vorgehensweise erzeugt.

In einem nach $\underline{\underline{X}}$ abzuleitenden Term sei ein Tensor $\underline{\underline{Y}}$ das einzige Element, das sich mit $\underline{\underline{X}}$ ändert oder $\underline{\underline{Y}}$ sei dasjenige Element, das im Rahmen einer Produktregel momentan als einziges zu variieren ist. Wenn in einem solchen Fall der abzuleitende Term entweder die Form $(\dots) \cdot \underline{\underline{Y}}$ oder die Form $\underline{\underline{Y}} \cdot (\dots)$ hat (Dabei sei (\dots) ein von $\underline{\underline{X}}$ unabhängiger Tensor mindestens zweiter Stufe) oder sich in eine dieser Formen umwandeln läßt, so kann die Ableitung gemäß der getroffenen Definition in folgender Weise reduziert werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\dots) \cdot \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{X}}} &= \frac{\partial(\dots) \cdot Y_{ab} \underline{j}_{ab}}{\partial X_{cd}} \circ \underline{j}_{dc} = (\dots) \cdot \frac{\partial Y_{ab}}{\partial X_{cd}} \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{dc} = (\dots) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \\ \frac{\partial \underline{\underline{Y}} \cdot (\dots)}{\partial \underline{\underline{X}}} &= \frac{\partial Y_{ab}}{\partial X_{cd}} \underline{j}_{ab} \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc} = \left(\frac{\partial Y_{ab}}{\partial X_{ef}} \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{fe} \cdot \underline{j}_{cd} \right) \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc} \\ &= \left(\frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \underline{j}_{cd} \right) \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc} = \underline{j}_{cd} \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{Y}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Stimmt $\underline{\underline{Y}}$ mit $\underline{\underline{X}}$ überein, so tritt die Ableitung eines allgemeinen Tensors nach sich selbst auf.

$$\frac{\partial \underline{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{X}}} = \frac{\partial X_{ab}}{\partial X_{cd}} \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{dc} = \delta_{ac} \delta_{bd} \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{dc} = \underline{\underline{J}} \quad (5.47)$$

In diesem Fall vereinfachen sich die Ableitungsregeln aus Gleichung 5.46 zu:

$$\frac{\partial(\dots) \cdot \underline{\underline{X}}}{\partial \underline{\underline{X}}} = (\dots) \quad \text{und:} \quad \frac{\partial \underline{\underline{X}} \cdot (\dots)}{\partial \underline{\underline{X}}} = \underline{j}_{cd} \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc} \quad .$$

Bei der Ableitung eines Skalars entspricht die Größe (\dots) einem Tensor zweiter Stufe. In den Gleichungen 5.46 fällt damit der Ausdruck $\underline{j}_{cd} \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{dc}$ mit (\dots) selbst zusammen. Ist (\dots) hingegen ein Tensor höherer Stufe, so gilt dies im allgemeinen nicht. Bei der Ableitung

eines Skalarprodukts stehen somit bei der Produktregel die Ableitungen in beiden Termen am Schluß.

$$\frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} = \underline{Y} \cdot \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + \underline{Z} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}}$$

Tritt ein solcher Skalar in einem größeren Produkt auf, so muß der Skalar (gedanklich) ans Ende geschoben werden, um unmittelbar die gewohnten Ableitungsregeln zu erhalten.

$$\frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{Z} \circ (\dots)}{\partial \underline{X}} = (\dots) \circ \frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + \frac{\partial (\dots)}{\partial \underline{X}} \circ \underline{Y} \cdot \underline{Z}$$

Häufig treten Ableitungen mit $\underline{Y} = \underline{X}$ auf, bei denen zusätzlich \underline{Z} nicht von \underline{X} abhängt. Für diesen einfachen Fall folgt:

$$\frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{Z} \cdot \underline{X}}{\partial \underline{X}} = \frac{\partial \underline{X} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} = \underline{Z} \quad .$$

Beispiele hierfür sind Ableitungen von Invarianten, z.B. den Hauptinvarianten (vergl. Abschnitt 2.2.3).

$$\begin{aligned} I_1 = \underline{X} \cdot \underline{E} & \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I_1}{\partial \underline{X}} = \underline{E} \\ I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_1(\underline{X}^2)) & \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I_2}{\partial \underline{X}} = I_1 \underline{E} - \underline{X} \\ I_3 = I_1 I_2 - \frac{1}{3}(I_1^3 - I_1(\underline{X}^3)) & \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial I_3}{\partial \underline{X}} = I_2 \underline{E} + I_1 (I_1 \underline{E} - \underline{X}) - I_1^2 \underline{E} + \underline{X}^2 \\ & \quad \quad \quad = \underline{X}^2 - I_1 \underline{X} + I_2 \underline{E} = I_3 \underline{X}^{-1} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Handelt es sich bei der Größe (...) in den Gleichungen 5.46 um einen Tensor \underline{K} vierter Stufe, so ist das Objekt der Ableitungen jeweils ein Tensor 2. Stufe. Die Gleichungen lauten dann:

$$\frac{\partial \underline{K} \cdot \underline{Y}}{\partial \underline{X}} = \underline{K} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{K}}{\partial \underline{X}} = \underline{j}_{cd} \cdot \underline{K} \circ \underline{j}_{dc} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} \quad . \quad (5.49)$$

Derartige Konstellationen entstehen aus einfachen Produkten von Tensoren 2. Stufe. Der Gleichung 5.49 entsprechende Formen können daraus mit Hilfe der isotropen Tensoren erzeugt werden.

$$\begin{aligned} \underline{X} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z} & = \left(\underline{X} \cdot \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{ba} \right) \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z} = \left(\underline{j}_{ba} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{Z} \circ \underline{j}_{ab} \right) \cdot \underline{X} \\ & = \underline{X} \cdot \left(\underline{Y} \cdot \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{ba} \right) \cdot \underline{Z} = \left(\underline{X} \cdot \underline{j}_{ba} \cdot \underline{Z} \circ \underline{j}_{ab} \right) \cdot \underline{Y} \\ & = \underline{X} \cdot \underline{Y} \cdot \left(\underline{Z} \cdot \underline{j}_{ab} \circ \underline{j}_{ba} \right) = \left(\underline{X} \cdot \underline{Y} \cdot \underline{j}_{ba} \circ \underline{j}_{ab} \right) \cdot \underline{Z} \end{aligned}$$

Für die vollständige Ableitung des Produkts zweier Tensoren zweiter Stufe ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} &= \frac{\partial \underline{Y} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} = \left(\underline{Y} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \right) \cdot \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + \overset{3}{\underline{J}} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \cdot \underline{Z} \circ \overset{3}{\underline{J}} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} \\ &= \underline{Y} \cdot \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + \overset{3}{\underline{J}} \cdot \overset{3}{\underline{J}} \cdot \underline{Z} \circ \overset{3}{\underline{J}} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} = \underline{Y} \cdot \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + (\underline{E} \circ \underline{Z})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} \end{aligned} \quad (5.50)$$

Eine Formulierungsvariante mit: $\underline{Y} \cdot \overset{3}{\underline{J}} = \underline{Y} \cdot \overset{3}{\underline{J}}_{bc} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{cb} = \underline{Y} \cdot \overset{3}{\underline{J}}_{bc} \cdot \underline{E} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{cb} = (\underline{Y} \circ \underline{E})^{T_{24}}$ führt zu einer Darstellung, bei der die Ähnlichkeit der beiden Summanden deutlich wird.

$$\frac{\partial \underline{Y} \cdot \underline{Z}}{\partial \underline{X}} = (\underline{Y} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{Z}}{\partial \underline{X}} + (\underline{E} \circ \underline{Z})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{Y}}{\partial \underline{X}} \quad (5.51)$$

Ein interessantes Anwendungsbeispiel dieser Zusammenhänge ist die Bestimmung der Ableitung von \underline{X}^{-1} nach \underline{X} selbst.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}}{\partial \underline{X}} &= \underline{0} = \frac{\partial \underline{X} \cdot \underline{X}^{-1}}{\partial \underline{X}} = \underline{X} \cdot \frac{\partial \underline{X}^{-1}}{\partial \underline{X}} + (\underline{E} \circ \underline{X}^{-1})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{X}}{\partial \underline{X}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \underline{X}^{-1}}{\partial \underline{X}} = -\underline{X}^{-1} \cdot (\underline{E} \circ \underline{X}^{-1})^{T_{24}} \cdot \overset{3}{\underline{J}} = -(\underline{X}^{-1} \circ \underline{X}^{-1})^{T_{24}} \end{aligned} \quad (5.52)$$

5.3.2 Ableitungen nach symmetrischen Tensoren

Wird nach symmetrisch definierten Tensoren (nicht solche, die nur momentan zufällig symmetrisch sind) abgeleitet, so sind die Koeffizienten b_{ac} und b_{ca} bei $a \neq c$ physikalisch nicht unabhängig voneinander variierbar. Für eine Berücksichtigung der sich hieraus ergebenden Besonderheiten sind Koeffizientendarstellungen in den angepaßten Basisdyaden für symmetrische Tensoren (s. Abschnitt 2.3) von großem Vorteil, da sie direkte und sichere Definitionen und Herleitungen ermöglichen. Bei der Definition der Ableitung mit diesen Koeffizienten treten die gekoppelten Größen nur einfach auf und verursachen somit keinerlei Probleme. Trotzdem bleibt der Zugang zu symbolischen Darstellungen voll erhalten.

$$\frac{\partial(\dots)}{\partial \underline{b}} := \frac{\partial(\dots)}{\partial b_{A^{(6)}}} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{A^{(6)}}$$

Das Ergebnis einer Ableitung kann davon abhängen, ob der Tensor, nach dem abgeleitet wird, symmetrisch definiert ist oder nicht. Im Unterschied zu Gleichung 5.47 ergibt sich z.B.:

$$\frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{b}} = \frac{\partial b_{a^{(6)}}}{\partial b_{b^{(6)}}} \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{b^{(6)}} = \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} = \frac{1}{2} \left(\overset{2}{\underline{J}} + \overset{3}{\underline{J}} \right) \quad .$$

In diesem Abschnitt sind \underline{h} und $\underline{\sigma}$ stets Beispiele für symmetrische Tensoren. Für isolierte Abhängige lassen sich wiederum Ableitungsregeln angeben (vergl. Gl. 5.46).

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\dots) \cdot \underline{h}}{\partial \underline{b}} &= \frac{\partial(\dots) \cdot h_{a^{(6)}} \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}}}{\partial b_{c^{(6)}}} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{c^{(6)}} = (\dots) \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{b}} \\ \frac{\partial \underline{h} \cdot (\dots)}{\partial \underline{b}} &= \frac{\partial h_{a^{(6)}} \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} \cdot (\dots)}{\partial b_{c^{(6)}}} \circ \overset{3}{\underline{J}}_{c^{(6)}} = \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} \cdot (\dots) \circ \overset{3}{\underline{J}}_{a^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{b}} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Für den Sonderfall mit $\underline{h} = \underline{b}$ ergibt sich hier:

$$\frac{\partial(\dots) \cdot \underline{b}}{\partial \underline{b}} = (\dots) \cdot \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{b} \cdot (\dots)}{\partial \underline{b}} = \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot (\dots) \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \quad .$$

In den Fällen, in denen die Ableitungen von Skalaren gebildet werden, stimmen die Ergebnisse mit denen bei den unsymmetrischen Tensoren überein.

$$\frac{\partial \underline{\sigma} \cdot \underline{h}}{\partial \underline{b}} = \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{b}} + \underline{h} \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{b}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{b}} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\sigma} \cdot \underline{b}}{\partial \underline{b}} = \frac{\partial \underline{b} \cdot \underline{\sigma}}{\partial \underline{b}} = \underline{\sigma} \quad (5.54)$$

Die für die Ableitungen der Invarianten gewonnenen Ergebnisse in Gleichung 5.48 gelten somit auch für Invarianten symmetrischer Tensoren.

Bei der vollständigen Ableitung des Produkts zweier symmetrischer Tensoren existieren hingegen wieder Unterschiede.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\sigma} \cdot \underline{h}}{\partial \underline{b}} &= \frac{\partial \underline{\sigma} \cdot \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}} \cdot \underline{h}}{\partial \underline{b}} \\ &= \left(\underline{\sigma} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}} \right) \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{b}} + \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \left(\underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{h} \right) \circ \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{b}} \quad (5.55) \\ &= \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{b}} + \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{h} \circ \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial \underline{b}} \end{aligned}$$

Diese Ableitung ist in jedem Fall (3,4)-symmetrisch und sofern das Produkt $\underline{\sigma} \cdot \underline{h}$ symmetrisch ist, so ist die Ableitung auch (1,2)-symmetrisch. Dies ist in der letztendlich erreichten Form allerdings kaum erkennbar, da bemerkenswerterweise die beiden Summanden diese Symmetrie ihrer Summe im allgemeinen nicht aufweisen. Sie sind (1,2)-unsymmetrisch. Dies wird zum Beispiel an dem Produkt $\underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{b}^{-1}$ der beiden symmetrischen Tensoren $\underline{j}_{c^{(6)}}$ und \underline{b}^{-1} deutlich, die sich bis auf Sonderfälle in ihren Eigenrichtungen unterscheiden.

Dieser Effekt tritt zum Beispiel auch bei der Ableitung von $\underline{b} \cdot \underline{b}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{E}}{\partial \underline{b}} = \underline{0} &= \frac{\partial \underline{b} \cdot \underline{b}^{-1}}{\partial \underline{b}} = \underline{b} \cdot \frac{\partial \underline{b}^{-1}}{\partial \underline{b}} + \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{b}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{b}^{-1}}{\partial \underline{b}} = -\underline{b}^{-1} \cdot \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{j}_{c^{(6)}} = -(\underline{b}^{-1} \circ \underline{b}^{-1})^{S_{24}} \end{aligned}$$

und bei derjenigen von $\underline{b} \cdot \underline{b}$ nach \underline{b} auf.

$$\frac{\partial \underline{b} \cdot \underline{b}}{\partial \underline{b}} = \underline{b} \cdot \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} + \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{b} \circ \underline{j}_{c^{(6)}}$$

Erst in der Zusammenfassung der zwei Terme des letzten Beispiels entsteht wieder eine (1,2)-Symmetrie.

$$\frac{\partial \underline{b} \cdot \underline{b}}{\partial \underline{b}} = \left(\underline{b} \cdot \underline{j}_{c^{(6)}} + \underline{j}_{c^{(6)}} \cdot \underline{b} \right) \circ \underline{j}_{c^{(6)}} = 2 \underline{j}_{b^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}} \cdot \left(\underline{b} \cdot \underline{j}_{c^{(6)}} \right) \circ \underline{j}_{c^{(6)}} = 2 (\underline{E} \circ \underline{b})^{S_{24}}$$

Die (merkwürdige) Unsymmetrie der Summanden tritt allerdings nicht auf, wenn einer der Summanden zu Null wird. Das abzuleitende Produkt zweier Tensoren kann nämlich (bis auf Ausnahmen) nur dann einen symmetrischen Tensor liefern, wenn die beiden Tensoren in geeigneter Weise zusammenpassen und somit voneinander abhängen. (Bei den Ausnahmen, wenn z.B. der eine Tensor der Metriktensor ist, ist die Ableitung nicht unsymmetrisch.) Dementsprechend existieren in den allgemeinen Fällen stets beide Summanden der Ableitung und die vollständige Ableitung ist dann wieder symmetrisch.

Die Unsymmetrie der einzelnen Summanden läßt sich vermeiden, indem eine ggf. vorhandene Symmetrie des abzuleitenden Tensors explizit angegeben wird, also z.B. statt $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{h}}$ jetzt $(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{h}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ bzw. statt $\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{h}}$ jetzt $(\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{h}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$. In diesem Zusammenhang erweisen sich zwei weitere Ableitungsregeln als nützlich.

Mit Hilfe der bereits vorliegenden Gleichungen 5.53 (hier mit $(\dots) = \underline{\underline{K}}$):

$$\frac{\partial \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{K}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \quad \text{und:} \quad \frac{\partial \underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{K}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}}$$

und der Umformung $\underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ (\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{h}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \\ \frac{\partial \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{K}})}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{h}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ (\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \end{aligned}$$

Die beiden neuen Ableitungen sind offensichtlich stets (1,2)-symmetrisch.

Für das symmetrische Produkt zweier symmetrischer Tensoren ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{h}})}{\partial \underline{\underline{b}}} \\ &= \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + \\ &\quad \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \left\{ (\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{h}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \right\} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \\ &= (\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \left\{ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ (\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{h}}) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \right\} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \\ &= (\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{h}}) \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich eine zum unsymmetrischen Fall (Gl. 5.51) äquivalente Formulierung.

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}^T \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \parallel \underline{\underline{h}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = (\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + (\underline{\underline{h}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{b}}}$$

Eine weitere Umformung mit:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{E}} \right) \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \\ &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \right) = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \right) \end{aligned}$$

liefert schließlich:

$$\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}}^T \quad ; \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T \parallel \underline{\underline{h}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{h}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + \underline{\underline{h}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \right) .$$

In dem bereits diskutierten Beispiel sind jetzt beide Anteile (1,2)-symmetrisch und sogar identisch.

$$\frac{\partial \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = 2 (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}}$$

Schließlich seien die vereinfachten Formen der neuen Ableitungsregeln für den Fall der Identität von Ableitungsargument $\underline{\underline{b}}$ und isolierter Abhängiger (bisher $\underline{\underline{h}}$) angegeben.

$$\frac{\partial \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{K}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{\partial \left(\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{\partial \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{K}} \right)}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}$$

5.4 Lagrangesche Materialsteifigkeit

Die Knotenkräfte und -verschiebungen in Gleichung 5.20 können statt mit dem 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{T}}$ und dem Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$ in Verbindung gebracht zu werden (vergl. Gl. 5.25) auch aus der Warte eines Lagrangeschen Beobachters, also mit dem 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ und beispielsweise dem Greenschen Verzerrungstensor $\underline{\underline{\gamma}}$, beschrieben werden. Diese Methode findet sich im Gegensatz zu der Darstellung der Materialsteifigkeit in der gemischten Darstellungsweise häufig in der Literatur (s. z.B. Sussmann & Bathe 1987, Warnecke 2002). Statt die Knotenkräfte der Gleichung 5.11 zu entnehmen, ist es in diesem Fall leichter, von den Leistungsbegriffen in den Gleichungen 5.4 und 3.49 auszugehen:

$$P_{\text{ex}} = \underline{\underline{Q}}_K \cdot \underline{\underline{V}}_K = \int_{\mathcal{E}} \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \hat{\underline{\underline{\gamma}}} \, d\tilde{V} = P_{\text{Sp}} \quad ,$$

und von dort auf eine Bestimmungsgleichung für die Knotenkräfte zu folgern.

$$Q_{Ka} = \int_{\mathcal{E}} \tilde{T}_{bc} \frac{\partial \gamma_{cb}}{\partial U_{Ka}} d\tilde{V}$$

Da hier symmetrisch definierte Tensoren verwendet werden, empfiehlt sich der konsequente Gebrauch der in Abschnitt 2.3 eingeführten reduzierten Koeffizientendarstellung zu den angepaßten Basisdyaden.

$$Q_{Ka} = \int_{\mathcal{E}} \tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} d\tilde{V}$$

Für die Elementsteifigkeitsmatrix gemäß Gleichung 5.21 ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} M_{KaLb} &= \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial U_{Lb}} \left(\tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} \right) + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial}{\partial V_{Lb}} \left(\tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} \right) d\tilde{V} \\ &= \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} + \tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial^2 \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka} \partial U_{Lb}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial V_{Lb}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} d\tilde{V} . \end{aligned} \quad (5.56)$$

Im Gegensatz zu Gleichung 5.23 entsteht hier ein zusätzlicher Term mit den zweiten Ableitungen der $\gamma_{c^{(6)}}$, die im Gegensatz zu den zweiten Ableitungen der Koeffizienten des Deformationsgradienten nicht verschwinden (vergl. Gl. 5.24). Für die weitere Auflösung werden nun analog zu Gleichung 5.24 die Ableitungen der Koeffizienten von $\underline{\gamma}$ und $\hat{\underline{\gamma}}$ nach den Knotenfreiheiten benötigt. Hierbei tritt wiederum ein zusätzlicher Term gegenüber der alternativen Formulierung mit \underline{T} und \underline{F} auf, da die Koeffizienten $\hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}$ nicht nur von den Knotengeschwindigkeiten, sondern zusätzlich auch von den Knotenverschiebungen abhängen.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} &= \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \gamma_{d^{(6)}}} \frac{\partial \gamma_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} + \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}} \frac{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} \\ \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial V_{Lb}} &= \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}} \frac{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}}{\partial V_{Lb}} \end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Zusammenhänge in Gleichung 5.56 führt zu:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} M_{KaLb} &= \int_{\mathcal{E}} \left\{ \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \gamma_{d^{(6)}}} \frac{\partial \gamma_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} + \tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial^2 \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka} \partial U_{Lb}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}} \left(\frac{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \hat{\underline{\gamma}}_{d^{(6)}}}{\partial V_{Lb}} \right) \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} \right\} d\tilde{V} . \end{aligned} \quad (5.57)$$

Diese Gleichung ist allerdings noch nicht für den Vergleich mit Gleichung 5.25 geeignet, da hier noch keine vollständige Separierung von Termen, die reines Materialverhalten beschreiben, gegenüber solchen, die lediglich die Elementgeometrie wiedergeben, ohne von der

Deformation abzuhängen (Ableitungen der Ansatzfunktionen nach Referenzorten), erreicht ist. Stattdessen stellen diesbezüglich die Ableitungen der $\gamma_{d^{(6)}}$ und der $\hat{\gamma}_{d^{(6)}}$ nach den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten noch Mischgrößen dar. Die Auflösung dieser Terme gelingt erst, indem eine Kettenregel mit dem Deformationsgradienten und dessen Ableitungen aufgestellt wird. Allerdings sind für diesen Schritt die reduzierten Koeffizientendarstellungen gemäß Gleichung 2.54 ausnahmsweise weniger geeignet. Stattdessen wird die übliche Indizierung verwendet.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\gamma}} &= \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{E}}) = \frac{1}{2}(F_{ac} F_{ad} - \delta_{cd}) \underline{e}_c \circ \underline{e}_d \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}} &= \frac{1}{2}(\hat{\underline{\underline{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \hat{\underline{\underline{F}}}) = \frac{1}{2}(\hat{F}_{ac} F_{ad} + F_{ac} \hat{F}_{ad}) \underline{e}_c \circ \underline{e}_d\end{aligned}\quad (5.58)$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial F_{ef}} &= \frac{1}{2}(\delta_{cf} F_{ed} + F_{ec} \delta_{df}) \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial F_{ef}} &= \frac{1}{2}(\hat{F}_{ec} \delta_{df} + \delta_{cf} \hat{F}_{ed}) \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial \hat{F}_{ef}} &= \frac{1}{2}(\delta_{cf} F_{ed} + F_{ec} \delta_{df}) = \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial F_{ef}}.\end{aligned}$$

Zusammen mit den Gleichungen 5.24 folgen daraus die gesuchten Ausdrücke.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial U_{Ka}} &= \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial F_{ef}} \frac{\partial F_{ef}}{\partial U_{Ka}} = \frac{1}{2} \left(F_{ad} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_c} + F_{ac} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_d} \right) \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial U_{Ka}} &= \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial F_{ef}} \frac{\partial F_{ef}}{\partial U_{Ka}} = \frac{1}{2} \left(\hat{F}_{ac} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_d} + \hat{F}_{ad} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_c} \right) \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial V_{Ka}} &= \frac{\partial \hat{\gamma}_{cd}}{\partial \hat{F}_{ef}} \frac{\partial \hat{F}_{ef}}{\partial V_{Ka}} = \frac{1}{2} \left(F_{ad} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_c} + F_{ac} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_d} \right) = \frac{\partial \gamma_{cd}}{\partial U_{Ka}}\end{aligned}\quad (5.59)$$

Darauf aufbauend kann schließlich mit Hilfe von Gleichung 5.24 auch die zweite Ableitung der γ_{cd} bestimmt werden.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{cd}}{\partial U_{Ka} \partial U_{Lb}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_L}{\partial \tilde{x}_d} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_c} + \frac{\partial N_L}{\partial \tilde{x}_c} \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{x}_d} \right) \delta_{ab}\quad (5.60)$$

Damit liegen alle Beziehungen für einen Vergleich mit der Formulierungsvariante für die Steifigkeitsmatrix in Gleichung 5.25 vor. Hierzu kann noch anhand der Identität der Ausdrücke in

der ersten und letzten Zeile von Gleichung 5.59 die Gleichung 5.57 für die Steifigkeitsmatrix in eine der Gleichung 5.25 ähnelndere Form überführt werden.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}}_{KaLb}^{\mathcal{E}} = \int_{\mathcal{G}} \left\{ \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} \frac{\partial \gamma_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} \left(\frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \gamma_{d^{(6)}}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \hat{\gamma}_{d^{(6)}}} \right) \right. \\ \left. + \tilde{T}_{c^{(6)}} \frac{\partial^2 \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka} \partial U_{Lb}} + \frac{\partial \tilde{T}_{c^{(6)}}}{\partial \hat{\gamma}_{d^{(6)}}} \frac{\partial \gamma_{c^{(6)}}}{\partial U_{Ka}} \frac{\partial \hat{\gamma}_{d^{(6)}}}{\partial U_{Lb}} \right\} d\tilde{V} \end{aligned} \quad (5.61)$$

Zu vergleichen ist nun die letzte Zeile der Gleichung 5.25 für den Ansatz in der gemischten Darstellungsweise mit den Gleichungen 5.61, 5.59 und 5.60 für den Lagrangeschen Ansatz. Auffallend ist zunächst der wesentlich größere Darstellungsaufwand beim herkömmlichen Ansatz. Prinzipiell werden natürlich die Elemente der gleichen Matrix beschrieben und die beiden Formulierungen lassen sich somit analytisch ineinander überführen, wenn dies auch recht aufwendig ist. Unterschiede bestehen allerdings in den benötigten Berechnungszeiten und den zur Verfügung stehenden Möglichkeiten bei der numerischen Umsetzung.

Oberflächlich betrachtet erscheint es zunächst vorteilhaft, daß in Gleichung 5.61 die Ableitungen der Spannungen nach den Verzerrungen aufgrund der Symmetrie der beteiligten Lagrangeschen Tensoren lediglich zu 6×6 -Matrizen führen, während die entsprechenden Ausdrücke in der alternativen Formulierung 9×9 -Matrizen darstellen. Die Ausnutzung dieses scheinbaren Vorteils würde es allerdings erfordern, die Ableitungen in den Gleichungen 5.59 ebenfalls als separate Matrizen aufzustellen. Diese Matrizen wären aber sechs mal so groß wie die Matrizen $[\partial N_K / \partial \tilde{x}_d]$, die in Gleichung 5.25 benötigt werden. Statt diese großen Matrizen aufzustellen, empfiehlt es sich somit dringend, die in den Gleichungen 5.59 auftretenden Koeffizienten F_{ac} und \hat{F}_{ac} zunächst in die Spannungsableitungen hineinzumultiplizieren, bevor mit Matrizen multipliziert wird, die von der Zahl der Elementknoten abhängen. Damit entstehen allerdings ebenfalls 9×9 -Matrizen, die zusammengefaßt analytisch sogar wieder identisch mit derjenigen 9×9 -Matrix aus Gleichung 5.25 sind.

Ein entscheidenderer Unterschied zwischen den beiden Formulierungen tritt auf, wenn numerische Ableitungen gebildet werden. Bei dem Ansatz in $\underline{\underline{T}}$ und $\underline{\underline{F}}$ ist dann der Übergang auf Gleichung 5.44 empfehlenswert, da dann von den sehr robusten numerischen Ableitungen mit simultanen Variationen gemäß Gleichung 5.43 Gebrauch gemacht werden kann. Eine entsprechende Umformung der Gleichung 5.61 ist hingegen nicht möglich, da hier die Ableitungen der Spannungen nach den Verzerrungsgeschwindigkeiten zusätzlich in einem separaten Term auftreten. Außerdem impliziert die numerische Zeitintegration der Knotenverschiebungen gemäß Gleichung 5.19 zwar eine gleichartige Integrationsgleichung für die Koeffizienten des Deformationsgradienten (Gl. 5.39), dies gilt aber nicht für die Koeffizienten von $\underline{\underline{\gamma}}$.

$$\Delta \underline{\underline{V}} = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{U}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial \hat{F}_{ab}}{\partial F_{cd}} = \delta_{ac} \delta_{bd} \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \\ \frac{\partial \hat{\gamma}_{a^{(6)}}}{\partial \gamma_{b^{(6)}}} \neq \delta_{a^{(6)}b^{(6)}} \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \end{cases}$$

Somit läßt sich das Verfahren der numerischen Ableitung mit simultanen Variationen nicht auf $\underline{\underline{\gamma}}$ und $\hat{\underline{\underline{\gamma}}}$ übertragen, solange an Gleichung 5.19 festgehalten wird. Dies bringt außerdem den Nachteil mit sich, daß für die numerischen Ableitungen im Fall der Lagrangeschen Darstellung die Spannungen insgesamt 12-mal zu variieren sind, während für die Berechnung der Gleichung 5.25 neun Spannungsvariationen pro Gaußpunkt ausreichen.

Umgehen lassen sich diese Nachteile nur, indem die Zeitintegration direkt auf die Koeffizienten von $\hat{\underline{\underline{\gamma}}}$ angewendet wird.

$$\Delta \hat{\underline{\underline{\gamma}}} = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} \\ M_{KaLb} = \int \frac{\partial \gamma_{c(6)}}{\partial U_{Ka}} \frac{\partial \gamma_{d(6)}}{\partial U_{Lb}} \frac{\partial \tilde{T}_{c(6)}}{\partial \gamma_{d(6)}} \Big|_{\substack{\gamma_{f(6)} = c, \forall f \neq d \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_{f(6)} = c, \forall f \neq d \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_{d(6)} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \gamma_{d(6)} + c.}} + \tilde{T}_{c(6)} \frac{\partial^2 \gamma_{c(6)}}{\partial U_{Ka} \partial U_{Lb}} d\tilde{V} \\ \Delta \underline{\underline{V}} \neq \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{U}} \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Damit vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für die Steifigkeitsmatrix erheblich und es verbleibt im Vergleich zu Gleichung 5.44 lediglich ein zusätzlicher Term. Außerdem müssen für die numerischen Ableitungen nunmehr nur noch sechs Spannungsvariationen pro Gaußpunkt berechnet werden.

Mit dieser Zeitintegration ergibt sich für homogene Belastungen analog zu Gleichung 5.33:

$$\underline{\underline{\hat{T}}} - \underline{\underline{\tilde{T}}}_n = \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}_n}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_n} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}_n}{\partial \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_n} \right)}_{\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}_n}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_n} \Big|_{\hat{\underline{\underline{\gamma}}}_n = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{\gamma}}_n + c.}} \cdot (\underline{\underline{\gamma}}_{n+1} - \underline{\underline{\gamma}}_n)$$

Für eine kompakte, aber präzise symbolische Schreibweise empfiehlt sich die Betrachtung der zeitlichen Änderungen der Spannungen. Da sowohl die Spannungen als auch die Verzerrungen und auch die Ableitungen des letzten Iterationsschritts bezüglich der Zeit als konstant anzusehen sind, entsteht:

$$\underline{\underline{\hat{T}}} = \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_n} \Big|_{\hat{\underline{\underline{\gamma}}}_n = c.} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_n} \Big|_{\underline{\underline{\gamma}}_n = c.} \right) \cdot \hat{\underline{\underline{\gamma}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{\gamma}}_n} \Big|_{\hat{\underline{\underline{\gamma}}}_n = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{\gamma}}_n + c.} \cdot \hat{\underline{\underline{\gamma}}} .$$

Ohne den Zusammenhang abzuändern, kann statt $\underline{\underline{\gamma}}$ auch der rechte Cauchy-Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$ verwendet werden.

$$\underline{\underline{\hat{T}}} = \underline{\underline{K}} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{K}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}_n} \Big|_{\hat{\underline{\underline{C}}}_n = c.} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \hat{\underline{\underline{C}}}_n} \Big|_{\underline{\underline{C}}_n = c.} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}_n} \Big|_{\hat{\underline{\underline{C}}}_n = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{C}}_n + c.} . \quad (5.63)$$

Im Vergleich dazu nimmt Gleichung 5.33 in der symbolischen Schreibweise die folgende Form an.

$$\underline{\underline{\hat{T}}} = \underline{\underline{m}} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{m}} = \left. \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \right|_{\underline{\underline{\hat{F}}}=c} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \left. \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \right|_{\underline{\underline{F}}=c} = \left. \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \right|_{\underline{\underline{\hat{F}}} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{F}} + c} \quad (5.64)$$

Die letzten beiden Gleichungen sind allerdings im allgemeinen nicht äquivalent. Eine Ausnahme hiervon ergibt sich bei solchen Stoffgesetzen, bei denen die Spannungen unabhängig von den Verzerrungsänderungen sind, die also elastisches Materialverhalten beschreiben. In allen anderen Fällen entsprechen die unterschiedlichen Zeitintegrationsverfahren unterschiedlichen Verzerrungsübergängen zwischen den einzelnen Arbeitspunkten. Erst im theoretischen Grenzfall infinitesimaler Zeitschrittlängen ist auch im allgemeinen Fall Äquivalenz gewährleistet.

Das von Gleichung 5.32 abweichende Integrationsverfahren bei der direkten Zeitintegration für die Koeffizienten von $\underline{\underline{\gamma}}$ ist im Rahmen der FEM als Nachteil zu sehen, da damit eine von Gleichung 5.19 abweichende Integration der Knotenverschiebungen impliziert wird, die aber die eigentlichen Systemfreiheiten darstellen. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die im Zusammenhang mit Gleichung 5.14 diskutierten Maßnahmen zur Stabilisierung und Optimierung des numerischen Verfahrens und die damit verbundenen Einschränkungen zu sehen. Bezüglich dieses Aspekts erscheint es eher empfehlenswert, im Rahmen des herkömmlichen Ansatzes mit Lagrangeschen Größen auf den Ansatz 5.61 zurückzugreifen und den gegenüber der Gleichung 5.62 größeren Berechnungsaufwand in Kauf zu nehmen. Allerdings müssen dann vom Material neben dem Stoffgesetz zwei separate Matrizen für die FEM zur Verfügung gestellt werden, und auf die Vorteile der simultanen Variation bei der Berechnung numerischer Ableitungen muß verzichtet werden.

Die Verknüpfung der beiden wesentlichen Vorteile, nämlich der gleichzeitigen Variation der Koeffizienten des Deformationsmaßes und seiner Zeitableitung für die Bildung numerischer Ableitungen und zum zweiten die direkte Zeitintegration der Knotenfreiheiten als Systemfreiheiten, ist nur mit dem modifizierten Ansatz mit dem Deformationsgradienten als zu variierender Größe zu erreichen, worin sich der wesentliche Vorteil dieses Ansatzes zeigt.

5.5 Eulersche Materialsteifigkeit

Die Ableitungen der Knotenkräfte nach den Knotenverschiebungen und -geschwindigkeiten in Gleichung 5.20 lassen sich auch auf Ableitungsbegriffe mit Tensoren der Eulerschen Darstellungsweise zurückführen. Hierbei treten allerdings einige Besonderheiten auf, die vor allem auf den Umstand zurückzuführen sind, daß die Ermittlung Eulerscher Zeitableitungen auf die Verwendung spezieller, sich mitbewegender Beobachtersysteme angewiesen ist. Dementsprechend tritt an die Stelle der Gleichungen 5.63 und 5.64 in diesem Fall eine Beziehung zwischen Eulerschen Zeitableitungen Eulerscher Spannungs- und Verzerrungstensoren.

5.5.1 Auswahl geeigneter Tensoren

Als Spannungstensor wird meistens der Kirchhoff-Spannungstensor $\underline{\underline{\tau}}$ verwendet, der sich vom Cauchy-Spannungstensor lediglich durch ein Dichteverhältnis unterscheidet und damit

zu Gebietsintegralen über der Referenzkonfiguration führt (vergl. Gln. 3.49 u. 5.9).

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} \underline{\underline{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad P_{\text{Sp}} = \int_{\mathcal{E}} \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}} \, d\tilde{V} \quad ; \quad Q_K = \int_{\mathcal{E}} (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{\nabla}} N_K) \, d\tilde{V}$$

Als Verzerrungsmaß käme beispielsweise der linke Cauchy-Green-Tensor und als Zeitableitung die Zaremba-Jaumann-Ableitung in Frage. Die Zeitintegration lautet in diesem Fall:

$$\Delta \underline{\underline{b}}^* = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{b}} \quad (5.65)$$

und führt auf die Materialsteifigkeit:

$$\underline{\underline{\tau}}^* = \left\{ \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=c}^* + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=c}^* \right\} \cdot \underline{\underline{b}}^* = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{b}}+c}^* \cdot \underline{\underline{b}}^* \quad (5.66)$$

An die Stelle von $\underline{\underline{b}}^*$ wird aber häufig der Tensor $\underline{\underline{D}}$ der Formänderungsgeschwindigkeiten gesetzt (z.B. ABAQUS 2004). Die entsprechende Umformung ergibt:

$$\underline{\underline{b}}^* = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{J}} \cdot (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{b}})^T = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{J}} \cdot (\underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}})$$

und im Produkt unter Berücksichtigung der Symmetrien von $\underline{\underline{b}}$ und $\underline{\underline{D}}$:

$$(\dots) \cdot \underline{\underline{b}}^* = \left\{ (\dots) \cdot \underline{\underline{b}} + (\dots) \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{b}} \right\} \cdot \underline{\underline{D}} = \left\{ (\dots) \cdot \left(\underline{\underline{J}} + \underline{\underline{J}} \right) \cdot \underline{\underline{b}} \right\} \cdot \underline{\underline{D}} \quad .$$

Aufgrund der (3,4)-Symmetrie von Ableitungen nach symmetrischen Tensoren vereinfacht sich dieser Zusammenhang bei der Anwendung auf die Materialsteifigkeit noch weiter.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}^* = 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{b}}+c}^* \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{D}} \quad (5.67)$$

Wegen dem Doppelpunktprodukt mit $\underline{\underline{D}}$ kann hierbei ohne Einschränkung eine (in der Regel nicht von vornherein vorhandene, s. Abschnitt 5.6.3) (3,4)-Symmetrisierung ergänzt werden.

$$\underline{\underline{\tau}}^* = \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{k}} = 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{b}}+c}^* \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \quad (5.68)$$

Bei dieser Formulierung verbleibt allerdings noch der störende Effekt, daß das Produkt in der Klammer aufgrund seiner fehlenden (3,4)-Symmetrie nicht in Basisdyaden $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ dargestellt werden kann, obwohl dies sowohl bei der Ableitung als natürlich auch bei $\underline{\underline{b}}$ allein möglich ist. Abhilfe hiervon schafft eine weitergehende Umformung, die eine durchgehende Darstellung in $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}}$ -Dyaden erlaubt.

$$\underline{\underline{k}} = 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \Big|_{\underline{\underline{b}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{b}}+c}^* \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \quad (5.69)$$

Auch diese Gleichung basiert auf der Zeitintegration gemäß Gleichung 5.65, obwohl diese Steifigkeit die Spannungsänderung $\underline{\underline{\tau}}^*$ nicht mehr mit $\underline{\underline{b}}^*$ sondern mit $\underline{\underline{D}}$ in Beziehung setzt. Stattdessen kann auch der Ansatz verfolgt werden, $\underline{\underline{D}}$ direkt zu integrieren. Wie bereits in Abschnitt 3.1.4 thematisiert, entspricht $\underline{\underline{D}}$ der logarithmischen Zeitableitung des Eulerschen Hencky-Tensors $\underline{\underline{h}}$. Dementsprechend kann

$$\Delta \underline{\underline{D}} = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{h}} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{h}}^{*(\log)} = \underline{\underline{D}} \quad (5.70)$$

als Zeitintegration genutzt werden. Daraus ergäbe sich:

$$\underline{\underline{\tau}}^{*(\log)} = \left\{ \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{h}}} \Big|_{\underline{\underline{D}}=c.} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{D}}} \Big|_{\underline{\underline{h}}=c.} \right\} \cdot \underline{\underline{h}}^{*(\log)} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{h}}} \Big|_{\underline{\underline{D}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{h}}+c.} \cdot \underline{\underline{D}} \quad (5.71)$$

Stattdessen wird z.B. in dem kommerziellen FEM-Programmpaket ABAQUS (ABAQUS 2004) im Rahmen der Benutzerschnittstelle UMAT der Tensor $\underline{\underline{D}}$ der Formänderungsgeschwindigkeiten als Zaremba-Jaumann-Zeitableitung einer als "Total integrated strain measure" (nicht identisch mit der logarithmischen Ausgabegröße im Postprocessor) bezeichneten Größe interpretiert. Innerhalb der Programmdokumentation wird dieser Tensor mit $\underline{\underline{\varepsilon}}$ bezeichnet. Da er aber mit keinem Eulerschen Verzerrungsmaß übereinstimmt, soll er im Rahmen dieser Arbeit zur Vermeidung von Verwechslungen mit $\underline{\underline{\chi}}$ bezeichnet werden.

$$\underline{\underline{\chi}}^* = \underline{\underline{D}} \quad (5.72)$$

Damit läßt sich wiederum die zugehörige Zeitintegration

$$\Delta \underline{\underline{D}} = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \Delta \underline{\underline{\chi}} \quad (5.73)$$

und die Materialsteifigkeit angeben.

$$\underline{\underline{\tau}}^* = \left\{ \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{\chi}}} \Big|_{\underline{\underline{D}}=c.} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{D}}} \Big|_{\underline{\underline{\chi}}=c.} \right\} \cdot \underline{\underline{D}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{\chi}}} \Big|_{\underline{\underline{D}}=\frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{\chi}}+c.} \cdot \underline{\underline{D}} \quad (5.74)$$

Dabei bleibt allerdings noch zu klären, wie die Ableitungen $\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{\chi}}}$ zu bestimmen sind und wie gegebenenfalls die Kopplung zwischen $\underline{\underline{D}}$ und $\underline{\underline{\chi}}$ zu realisieren ist.

Von Meyers et al. (2000) wurde gezeigt, daß $\underline{\underline{D}}$ als Zeitableitung nur eines einzigen Verzerrungsmaßes, nämlich des Eulerschen Hencky-Tensors $\underline{\underline{h}}$, in Frage kommt. Die zugehörige Zeitableitung ist die logarithmische Zeitableitung. Folglich kann $\underline{\underline{\chi}}$ kein Verzerrungsmaß sein, obwohl $\underline{\underline{\chi}}$ bei vollständig rotationsfreien Deformationsprozessen, wie z.B. einachsigen Zug- oder Druckversuchen, sogar identisch mit $\underline{\underline{h}}$ ist, da bei solchen Prozessen alle Beobachter Eulerscher Zeitableitungen gleichermaßen nicht rotieren. Bei Prozessen mit Drehanteilen, also nicht verschwindenden Rotationstensoren $\underline{\underline{R}}$ ergeben sich hingegen Unterschiede. Dies läßt

sich am Beispiel einer homogenen einfachen Scherung bei konstantem Volumen gut untersuchen, da bei dieser einfachen Deformationsart die Koeffizienten der beteiligten Tensoren noch analytisch erfaßt werden können.

Die Scherung wird beschrieben durch die Koeffizienten des Deformationsgradienten $\underline{\underline{F}}$

$$[F_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Prozeßablauf wird durch die Änderung \dot{k} des Schermaßes k bestimmt. Für die Formänderungsgeschwindigkeiten als dem symmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten folgt damit:

$$[D_{ab}] = \frac{\dot{k}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{aus:} \quad \underline{\underline{D}} = \text{sym}(\text{grad } \underline{v}) = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\hat{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}^T \right) \quad (5.75)$$

Die Polarzerlegung von $\underline{\underline{F}}$ ist analytisch aufwendig, liefert aber schließlich den linken Strecktensor $\underline{\underline{V}}$ und den Drehtensor $\underline{\underline{R}}$.

$$[V_{ab}] = \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k^2}{2} & \frac{k}{2} \\ \frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad [R_{ab}] = \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{2} \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

Die durch $\underline{\underline{R}}$ beschriebene Drehung läßt sich durch den Drehwinkel φ_R wiedergeben. Offensichtlich überschreitet der Betrag dieser Drehung niemals den Grenzwert $\pi/2$.

$$[R_{ab}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_R & \sin \varphi_R \\ -\sin \varphi_R & \cos \varphi_R \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi_R = \arctan \frac{k}{2} \quad (5.77)$$

Der Rotation des Zaremba-Jaumann-Beobachters sind hingegen bei der Scherung prinzipiell keine Grenzen gesetzt. Der Drehwinkel $\varphi_{Jaumann}$ ergibt sich aus der Integration des antisymmetrischen Anteils des Geschwindigkeitsgradienten.

$$\varphi_{Jaumann} = \frac{k}{2} \quad (5.78)$$

Aus der Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{\underline{V}}$ ergeben sich die Eigenwerte des Hencky-Tensors

$$h_{\text{I}} = -h_{\text{II}} = \ln \left(\frac{k}{2} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} \right) \quad .$$

und dessen Koeffizienten im \underline{e}_a -System.

$$[h_{ab}] = \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \ln \left(\frac{k}{2} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}} \right) \begin{bmatrix} \frac{k}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{k}{2} \end{bmatrix}$$

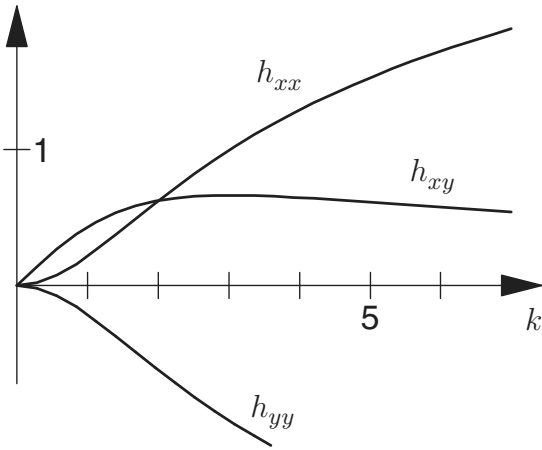


Abbildung 5.1: Simulation einer homogenen einfachen Scherung bei konstantem Volumen. Koeffizienten des Eulerschen Hencky-Tensors \underline{h} über dem Schermaß k (F_{xy}).

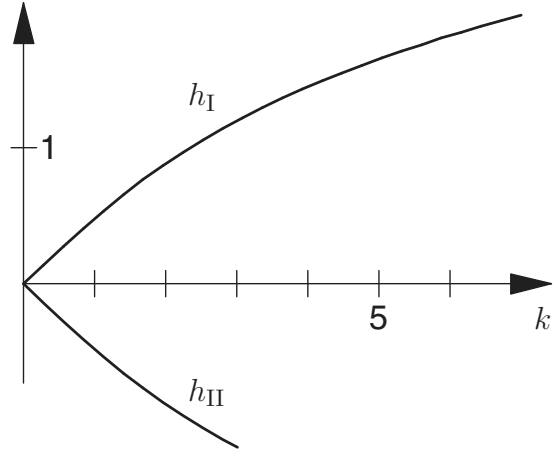


Abbildung 5.2: Simulation einer homogenen einfachen Scherung bei konstantem Volumen. Eigenwerte von \underline{h} über k .

Die Integration von \underline{D} in dem mit $\varphi_{Jaumann}$ rotierenden Basissystem ergibt die Koeffizienten von $\underline{\chi}$

$$[\chi_{ab}] = \sin \frac{k}{2} \begin{bmatrix} \sin \frac{k}{2} & \cos \frac{k}{2} \\ \cos \frac{k}{2} & -\sin \frac{k}{2} \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

und die zugehörigen Eigenwerte.

$$\chi_I = -\chi_{II} = \sin \frac{k}{2}$$

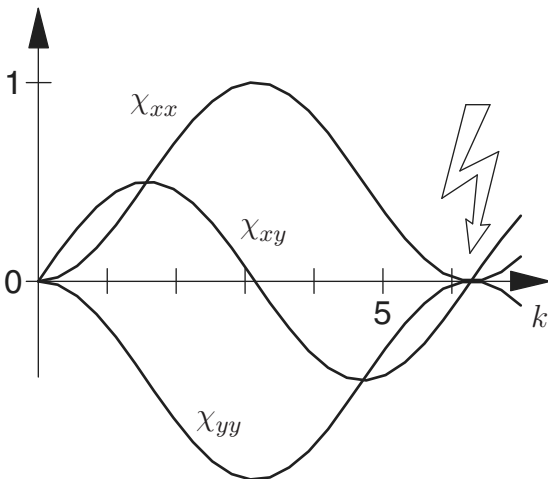


Abbildung 5.3: Simulation einer homogenen einfachen Scherung bei konstantem Volumen. Aufgetragen sind über dem Schermaß k (F_{xy}) die relevanten Koeffizienten des aus der Integration der Formänderungsgeschwindigkeiten gewonnenen Tensors $\underline{\chi}$. Bei $k = 2\pi$ verschwinden alle Koeffizienten ($\underline{\chi} = \underline{0}$).

In dem Verlauf des Koeffizienten h_{xy} über dem Schermaß k in Abbildung 5.1 zeigt sich ein zunächst überraschendes Maximum, ab dem die Werte trotz steigendem k allmählich gegen Null streben. Dieser Effekt ist eine Eigenart des für die Berechnung der Koeffizienten verwendeten Koordinatensystems. Dies wird an den Eigenwerten von \underline{h} deutlich (Abb. 5.2), die

beide (der dritte, nicht dargestellte Eigenwert ist konstant Null) monotone Verläufe aufweisen. Die Verläufe der Koeffizienten von $\underline{\underline{\chi}}$ in Abbildung 5.3 zeigen ebenfalls Extremwerte und sogar Vorzeichenwechsel. Bei einer sehr großen Scherung mit $k = 2\pi$ schließlich haben alle Koeffizienten von $\underline{\underline{\chi}}$ und damit der vollständige Tensor $\underline{\underline{\chi}}$ selbst einen Nulldurchgang.

$$\text{Einfache volumenkonstante Scherung: } \Rightarrow \underline{\underline{\chi}}(F_{xy} = k = 2\pi) = \underline{\underline{0}}$$

Tatsächlich verschwindet der Tensor $\underline{\underline{\chi}}$ in periodischen Abständen von 2π . Daran zeigt sich eindeutig, daß $\underline{\underline{\chi}}$ als Maße für große $\underline{\underline{V}}$ Verzerrungen nicht in Frage kommt.

Darüber hinaus ist $\underline{\underline{\chi}}$ sogar pfadabhängig, ist also anhand der Verzerrung allein nicht bestimmbar und damit aus echten Verzerrungsmaßen allein auch nicht berechenbar. Die Pfadabhängigkeit läßt sich anhand einer speziellen Deformationsabfolge (s. Abb. 5.4) eindeutig belegen.

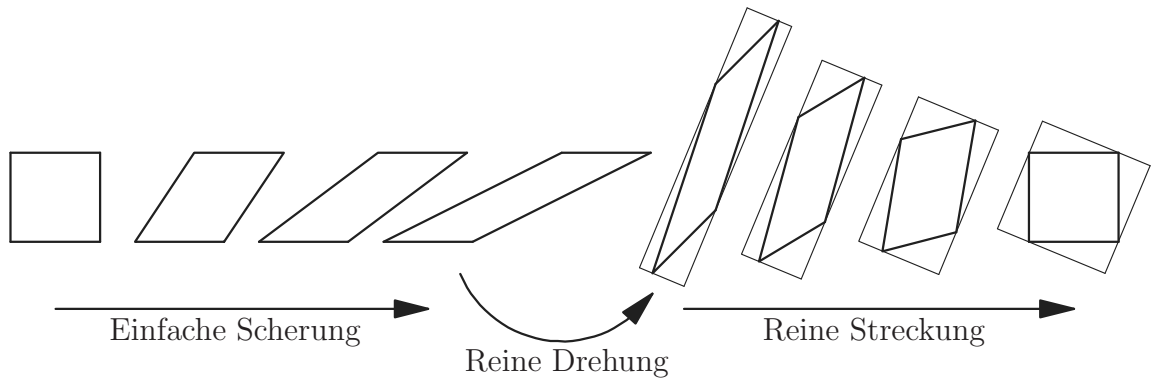


Abbildung 5.4: Geschlossene Deformationsschleife zur Untersuchung von Pfad(-un)-abhängigkeiten. Auf eine Scherung mit $k = 2\pi$ folgt eine Drehung derart, daß anschließend mit einer reinen Streckung in die Ausgangslage zurückgekehrt werden kann.

Als erste Teildeformation $\underline{\underline{F}}^1$ wird eine einfache Scherung bis $k = 2\pi$ durchgeführt. Wie bereits ausgeführt, entspricht $\underline{\underline{\chi}}$ nach dieser Deformation dem Nulltensor.

$$\left[\begin{matrix} \underline{\underline{F}}^1 \\ ab \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} 1 & 2\pi \\ 0 & 1 \end{matrix} \right] \Rightarrow \underline{\underline{\chi}} = \underline{\underline{0}}$$

Die zweite Teildeformation ist eine reine Drehung, die transponiert zu dem Drehanteil der ersten Teildeformation ist. Während dieser reinen Drehung findet keine Formänderung statt, so daß $\underline{\underline{D}}$ verschwindet und damit auch das Integral $\underline{\underline{\chi}}$.

$$\underline{\underline{F}}^2 = \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{U}}^1 \quad ; \quad \underline{\underline{F}}^2 = \underline{\underline{R}}^{1T} \Rightarrow \underline{\underline{D}}^2 = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \underline{\underline{\chi}}^2 = \underline{\underline{0}}$$

Die beiden Teildeformationen $\underline{\underline{F}}^1$ und $\underline{\underline{F}}^2$ ergeben zusammen den Strecktensor der ersten Teildeformation.

$$\underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1 = \underline{\underline{R}}^{1T} \cdot \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{U}}^1 = \underline{\underline{U}}^1$$

Die dritte und abschließende Teildeformation ist eine reine Streckung, die den Körper wieder in seine Ausgangskonfiguration zurückführt.

$$\underline{\underline{F}}^3 = \underline{\underline{U}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}}^{\text{ges}} = \underline{\underline{F}}^3 \cdot \underline{\underline{F}}^2 \cdot \underline{\underline{F}}^1 = \underline{\underline{E}} \quad (5.80)$$

Diese dritte Teildeformation enthält keinen Rotationsanteil.

$$\underline{\underline{F}}^3 = \underline{\underline{U}}^3 = \underline{\underline{V}}^3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{R}}^3 = \underline{\underline{E}}$$

Infolgedessen entspricht der Tensor der Formänderungsgeschwindigkeiten während dieser Teildeformation dem vollständigen Geschwindigkeitsgradienten. Dessen antisymmetrischer Anteil, der die Bewegung des Zaremba-Jaumann-Beobachters bestimmt, verschwindet somit, und der Zaremba-Jaumann-Beobachter dreht sich relativ zum \underline{e}_a -System nicht. Auch der Beobachter der logarithmischen Zeitableitung rotiert in dieser Situation nicht, sofern er als Referenzkonfiguration eine Konfiguration wählt, die während der dritten Teildeformation durchlaufen wird, so daß die Deformation zwischen der Referenz- und der aktuellen Konfiguration vollständig rotationsfrei ist. Von dieser Referenzkonfiguration aus entspricht der Eulersche Hencky-Tensor demnach dem Zuwachs des Tensors $\underline{\underline{\chi}}$. Da $\underline{\underline{\chi}}$ zu Beginn der dritten Teildeformation gerade gleich Null ist, entspricht somit der Hencky-Tensor der dritten Teildeformation dem $\underline{\underline{\chi}}$ -Tensor des gesamten Prozesses.

$$\underline{\underline{h}}^3 = \underline{\underline{\chi}}^3 = \underline{\underline{\chi}}^{\text{ges}} \quad \text{aber:} \quad \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{h}}^{\text{ges}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{\text{ges}} = \underline{\underline{H}}^{\text{ges}} = \underline{\underline{\gamma}}^{\text{ges}} = \dots$$

Damit steht bereits fest, daß $\underline{\underline{\chi}}^{\text{ges}}$ nicht verschwindet, obwohl der Körper am Ende des Gesamtprozesses wieder exakt seinen Ausgangszustand erreicht.

Eine einfache Scherung um das Maß k wird gerade von einer nachfolgenden einfachen Scherung um das Maß $-k$ wieder neutralisiert.

$$\underline{\underline{F}}^1(-k) \cdot \underline{\underline{F}}^1(k) = \underline{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F}}^{-1}(k) = \underline{\underline{F}}^1(-k)$$

Daraus folgt, daß der linke Strecktensor einer Scherung um $-k$ dem inversen rechten Strecktensor einer Scherung um k entspricht.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^1 &= \underline{\underline{V}}^1 \cdot \underline{\underline{R}}^1 = \underline{\underline{R}}^1 \cdot \underline{\underline{U}}^1 & \Rightarrow & \quad \underline{\underline{V}}^1(-k) = \underline{\underline{U}}^{-1}(k) \quad \text{und:} \quad \underline{\underline{R}}^1(-k) = \underline{\underline{R}}^{1T}(k) \\ \underline{\underline{F}}^{-1} &= \underline{\underline{U}}^{-1} \cdot \underline{\underline{R}}^{1T} \end{aligned}$$

Demnach entspricht der linke Strecktensor der reinen Streckung im letzten Prozeßabschnitt dem linken Strecktensor einer einfachen Scherung, die derjenigen im ersten Prozeßabschnitt genau entgegengerichtet ist (vergl. Gl. 5.80).

$$\underline{\underline{V}}^3(k = 2\pi) = \underline{\underline{U}}^{-1}(k = 2\pi) = \underline{\underline{V}}^1(k = -2\pi)$$

Dieser Zusammenhang überträgt sich auch auf die Hencky-Tensoren.

$$\underline{\underline{h}}^3(k = 2\pi) = \underline{\underline{h}}^1(k = -2\pi)$$

Damit können die Koeffizienten von $\underline{\underline{\chi}}$ angegeben werden.

$$\left[\begin{array}{c} \text{ges} \\ \underline{\underline{\chi}}_{ab} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} 1,775 & -0,565 \\ -0,565 & -1,775 \end{array} \right]$$

Am Ende der in Abbildung 5.4 skizzierten Deformationsfolge nimmt $\underline{\underline{\chi}}$ somit die gleichen Eigenwerte an wie der Tensor $\underline{\underline{h}}$ bei einer Scherung mit $k = 2\pi$, obwohl in Abbildung 5.4 der Körper zuletzt wieder seinen Ausgangszustand annimmt. Damit ist die Pfadabhängigkeit des Tensors $\underline{\underline{\chi}}$ belegt. Bei diesem Tensor handelt es sich somit nicht um ein Verzerrungsmaß. Die Ursache für die Besonderheiten des Tensors $\underline{\underline{\chi}}$ wird aus der Kombination des zweiten Teils der Gleichung 5.70 mit der Gleichung 5.72 deutlich.

$$\underline{\underline{\chi}}^* = \underline{\underline{h}}^{*(\log)}$$

Diese Gleichung zeigt, daß an der Berechnung von $\underline{\underline{\chi}}$ aus dem exakten Verzerrungsmaß $\underline{\underline{h}}$ zwei Beobachter, nämlich ein Beobachter im Zaremba-Jaumann-Bezugssystem und ein weiterer im Bezugssystem der logarithmischen Zeitableitung, beteiligt sind. Der zuletzt genannte Beobachter leitet zunächst die Koeffizienten von $\underline{\underline{h}}$ in seinem eigenen Basissystem nach der Zeit ab. Diese Koeffizienten sind in das Basissystem des anderen Beobachters zu transformieren, der sie danach wieder über der Zeit integriert und mit seinen Basen wiederum zu dem Tensor $\underline{\underline{\chi}}$ zusammensetzt. Der Unterschied zwischen $\underline{\underline{h}}$ und $\underline{\underline{\chi}}$ entspricht in dieser Interpretation der zeitlichen Änderung der Transformation zwischen den beiden Beobachtersystemen, also der Relativbewegung der beiden Beobachtersysteme. Diese Relativbewegung zeigt sich in dem Unterschied zwischen der Rotation des Zaremba-Jaumann-Systems (vergl. Gl. 5.78) und:

$$\varphi_{\log} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{k}{2}\right) - \frac{1}{8} \int \frac{k \left(1 + \frac{k^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}}{\ln\left(\frac{k}{2} + \sqrt{1 + \frac{k^2}{4}}\right)} dk \quad .$$

Anschaulich rühren die periodischen Schwankungen der ε_{ab} somit daher, daß ein Beobachter ableitet und ein anders rotierender Beobachter wieder integriert. Ähnliche Effekte sind bei Modellen anisotroper Plastizität seit langem bekannt (s. Lehmann 1972).

Ausgangspunkt der detaillierten Untersuchung von $\underline{\underline{\chi}}$ war die Gleichung 5.74. Um die dort angegebenen Ableitungen der Spannungen nach $\underline{\underline{\chi}}$ und $\underline{\underline{D}}$ direkt ausführen zu können, müßte das entsprechende Stoffgesetz in der Form $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}(\underline{\underline{\chi}}, \underline{\underline{D}})$ vorliegen. Da aber $\underline{\underline{\chi}}$ in seinen Eigenschaften von denen eines Verzerrungsmaßes signifikant abweicht, wird eine solche Stoffgesetzformulierung in der Regel nicht in Frage kommen. Somit muß die Ableitung nach $\underline{\underline{\chi}}$

auf andere Ableitungen zurückgeführt werden. Hierfür kommen wiederum Ableitungen nach \underline{b} und \underline{b}^* oder auch nach \underline{b} und \underline{D} in Frage.

$$\left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{\chi}} \right|_{\underline{D}=c.} = \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{b}^*=c.} \cdot \left. \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{\chi}} \right|_{\underline{D}=c.} + \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}^*} \right|_{\underline{b}=c.} \cdot \left. \frac{\partial \underline{b}^*}{\partial \underline{\chi}} \right|_{\underline{D}=c.} = \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{D}=c.} \cdot \left. \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{\chi}} \right|_{\underline{D}=c.}$$

Für den ersten Fall ist auch eine Umformung der Ableitung nach \underline{D} ratsam.

$$\left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{\chi}=c.} = \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{b}=c.} \cdot \left. \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{\chi}=c.}$$

Zu klären ist noch die Ableitung von \underline{b} nach $\underline{\chi}$. Dies gelingt mit Hilfe der Zaremba-Jaumann-Zeit Ableitungen. Offensichtlich ist eine Änderung von \underline{b} ohne eine Änderung von $\underline{\chi}$ unmöglich.

$$\underline{b}^* = \underline{b} \cdot \underline{\chi}^* + \underline{\chi}^* \cdot \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{b}^* = \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{\chi}} \cdot \underline{\chi}^* \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{\chi}^*} = \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{D}} = 2(\underline{b} \circ \underline{E})^{S_{24}} = \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{\chi}}$$

Gleichung 5.74 führt auf diesem Weg zu:

$$\underline{\dot{\tau}}^* = 2 \left\{ \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{b}^*=c.} + \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}^*} \right|_{\underline{b}=c.} \cdot 2(\underline{D} \circ \underline{E})^{S_{24}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{b}=c.} \right\} \cdot (\underline{b} \circ \underline{E})^{S_{24}} \cdot \underline{D}$$

bzw.:

$$\underline{\dot{\tau}}^* = \left\{ 2 \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \right|_{\underline{D}=c.} \cdot (\underline{b} \circ \underline{E})^{S_{24}} + \frac{1 + \kappa}{\Delta t} \left. \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{D}} \right|_{\underline{\chi}=c.} \right\} \cdot \underline{D} \quad .$$

In beiden Fällen ist eine simultane Variation der Verzerrungs- und der Verzerrungsänderungsgrößen für eine numerische Ableitung wie in Gleichung 5.69 nicht möglich. Insofern ist die Gleichung 5.69 zu bevorzugen, da auch die Zeitintegration gemäß Gleichung 5.73 keinen Vorteil gegenüber derjenigen gemäß Gleichung 5.65 erkennen läßt.

Eine simultane Variation zusammen mit der Zeitintegration gemäß Gleichung 5.73 gelingt erst, wenn die Variationen selbst ineinander umgerechnet werden. Abermals sollen die für die Bildung einer numerischen Ableitung einer Größe x zu bildenden Variationen mit dx bezeichnet werden. Dementsprechend werden z.B. die für die Ableitungen benötigten sechs Variationen von $\underline{\chi}$ mit $d\underline{\chi}_{a(6)}$ bezeichnet. Damit lautet die Gleichung 5.73:

$$d\underline{D}_{a(6)} = \frac{1 + \kappa}{\Delta t} d\underline{\chi}_{a(6)} \quad . \quad (5.81)$$

Für Variationen von \underline{b} ergibt sich:

$$\underline{b}^* = \underline{b} \cdot \underline{D} + \underline{D} \cdot \underline{b} \quad \Rightarrow \quad d\underline{b}_{a(6)} = \underline{b} \cdot d\underline{\chi}_{a(6)} + d\underline{\chi}_{a(6)} \cdot \underline{b} \quad . \quad (5.82)$$

Das zugehörige Verfahren gestaltet sich hierbei derart, daß für die numerischen Ableitungen Variationen für die einzelnen Koeffizienten von $\underline{\chi}$ gewählt werden. Jedes $d\underline{\chi}_{a^{(6)}}$ hat damit in der Darstellung, in der die Ableitungen gebildet werden, jeweils nur einen von Null abweichenden Koeffizienten. Zu dem jeweiligen $d\underline{\chi}_{a^{(6)}}$ werden gemäß den Gleichungen 5.81 und 5.82 die Variationen $d\underline{D}_{a^{(6)}}$ und $d\underline{b}_{a^{(6)}}$ berechnet. Während bei $d\underline{D}_{a^{(6)}}$ genau wie bei $d\underline{\chi}_{a^{(6)}}$ nur ein Koeffizient von Null abweicht, wird ein $d\underline{b}_{a^{(6)}}$ im Normalfall in mehreren (möglicherweise sogar in allen) Koeffizienten von Null abweichen. Durch Addition der jeweiligen $d\underline{D}$ und $d\underline{b}$ mit den aktuellen Werten werden die gemäß $d\underline{\chi}$ variierten Tensoren \underline{D} und \underline{b} ermittelt und zur Berechnung der variierten Spannungen herangezogen. Die Differenz $d\underline{\sigma}_{a^{(6)}}$ zu den Originalspannungen in Relation zu den $d\underline{\chi}_{a^{(6)}}$ ergibt schließlich die gesuchte Näherung für die Ableitung.

$$d\underline{\chi}_{a^{(6)}} \begin{cases} \nearrow \\ \searrow \end{cases} \begin{matrix} d\underline{D}_{a^{(6)}} \\ d\underline{b}_{a^{(6)}} \end{matrix} \begin{cases} \searrow \\ \nearrow \end{cases} d\underline{\tau}_{a^{(6)}} = \underline{\tau}(\underline{D} + d\underline{D}_{a^{(6)}} , \underline{b} + d\underline{b}_{a^{(6)}}) - \underline{\tau}(\underline{D} , \underline{b}) \rightarrow \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{\chi}} \quad (5.83)$$

Die so gebildete numerische Ableitung stellt bereits ein Äquivalent zu dem Tensor \underline{k} aus Gleichung 5.69 dar, ohne daß noch mit einem weiteren Tensor multipliziert werden muß. Dementsprechend ist diese Methode besonders schnell.

5.5.2 Auswahl eines geeigneten Beobachtungssystems

Alle drei angegebenen Varianten Eulerscher Materialsteifigkeiten (Gln. 5.69, 5.71 und 5.74) unterliegen der Voraussetzung, daß sich die Spannungen $\underline{\tau}$ als Funktionen von \underline{b} und \underline{D} darstellen lassen. Bei der Bildung numerischer Ableitungen spiegelt sich dies darin wider, daß sich aus den aktuellen (ggf. variierten) Werten von \underline{b} und \underline{D} und den Informationen aus dem letzten Zeitschritt die aktuellen Spannungen berechnen lassen müssen. Aktuelle Größen, die sich nicht aus den (ggf. variierten) Werten von \underline{b} und \underline{D} berechnen lassen, stehen für die Spannungsberechnung nicht zur Verfügung.

Es sind aber ohne weiteres durchaus sinnvolle Stoffgesetze denkbar (und bereits existent), für die diese Bedingung nur eingeschränkt erfüllbar ist. Dies betrifft alle Stoffgesetze, in denen Größen nach der Zeit abgeleitet werden, bei denen es sich nicht um Verzerrungsmaße handelt. Ein häufig anzutreffendes Beispiel hierfür sind Zeitableitungen von Spannungsanteilen im Rahmen von Evolutionsgleichungen. Eine Eulersche Formulierung des Stoffgesetzes erfordert an dieser Stelle natürlich auch eine Eulersche Zeitableitung, zu deren Berechnung Zusatzterme (vergl. Gl. 3.23) erforderlich sind, die im allgemeinen aus \underline{b} und \underline{D} nicht berechenbar sind. Für die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung der Kirchhoff-Spannungen folgt beispielsweise:

$$\underline{\tau}^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{\tau}(t + \Delta t) - \underline{\tau}(t - \Delta t)}{2 \Delta t} + \underline{\Omega} \cdot \underline{\tau} - \underline{\tau} \cdot \underline{\Omega} \quad .$$

Darin ist der Tensor $\underline{\Omega}$ kein Eulerscher Tensor, er ist also beobachterabhängig. Dementsprechend kann er im allgemeinen allein anhand Eulerscher Größen wie \underline{b} und \underline{D} nicht berechnet werden. Ausnahmen hiervon bilden lediglich die Beobachtersysteme Eulerscher Zeitableitungen. Insbesondere bei dem System, in dem die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung beobachtet

wird, ist dies offensichtlich, da in diesem System der Tensor $\underline{\underline{\Omega}}$ verschwindet und damit $\underline{\underline{\tau}}^*$ und $\underline{\underline{\hat{\tau}}}$ identisch sind. Ein Beobachter in einem solchen System kann in einem ihm unbewegt erscheinenden Basissystem \underline{e}_A von der Beziehung

$$\underline{\underline{e}}_A^* = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{j}}_{A^{(6)}} \cdot \underline{\underline{\tau}}^* = \underline{\underline{\tau}}_{A^{(6)}}^* = \underline{\underline{\dot{\tau}}}_{A^{(6)}}$$

Strenggenommen ist somit die tensorielle Form der Gleichungen 5.69, 5.71 und 5.74 nur für solche Stoffgesetze zulässig, bei denen die beschriebenen Schwierigkeiten nicht auftreten. Bei allgemeinen Stoffgesetzen ist hingegen die Gültigkeit dieser Gleichungen auf Darstellungen in bestimmten Basissystemen beschränkt, gilt also nicht für die vollständigen Tensoren, sondern nur für bestimmte Koeffizienten.

Um die Berechnung der Materialsteifigkeiten auch für Stoffgesetze mit Evolutionsgleichungen zu ermöglichen, müssen somit alle Tensoren durch deren Koeffizienten in dem Basissystem eines Beobachters einer Eulerschen Zeitableitung repräsentiert werden. Hierfür bietet sich das System an, in dem die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung der direkten Beobachtung entspricht. Um alle Tensoren in diesem Bezugssystem darstellen zu können, muß zunächst eine Annahme über den Deformationshergang während des aktuellen Zeitschritts, also zwischen $\underline{\underline{F}}(t - \Delta t)$ und $\underline{\underline{F}}(t)$ getroffen werden, die wiederum die Identifikation des Zaremba-Jaumann-Basissystems ermöglicht. Eine mögliche Annahme hierfür, die ein sehr komfortables Arbeiten erlaubt, besteht darin, daß sich die Teildeformation des aktuellen Zeitschritts aus einer reinen Drehung zu Beginn und einer nachfolgenden reinen Streckung in gleichbleibenden Eigenrichtungen zusammensetzt. Verzerrungen des Materials finden somit nur während der zweiten Phase statt. Der praktische Vorteil dieser Phasenseparierung im Zeitschritt besteht darin, daß sich der Zaremba-Jaumann-Beobachter während der zweiten Phase relativ zum Lagrangeschen Beobachter nicht bewegt. Diese Annahme liefert aus der Anschauung heraus Zusammenhänge, die im wesentlichen dem Algorithmus von Hughes & Winget (1980) entsprechen, der auch die Basis für die ABAQUS-Benutzerschnittstelle UMAT (vergl. ABAQUS 2004) bildet.

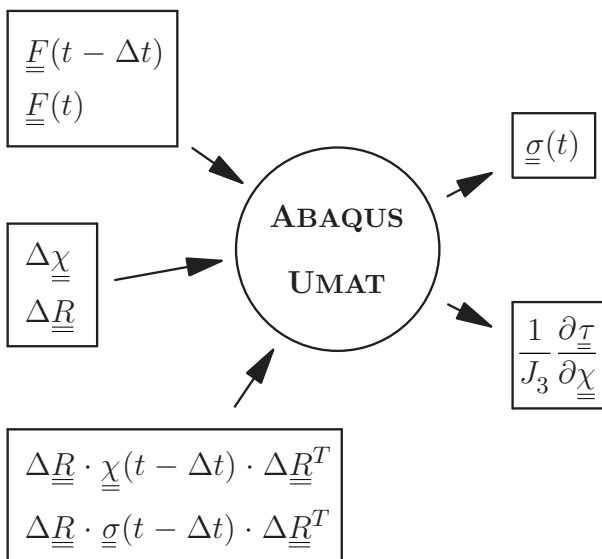


Abbildung 5.5: Übersicht über die Ein-/Ausgabegrößen der Benutzerschnittstelle UMAT des FEM-Programmpakets ABAQUS zur Implementierung von allgemeinen Stoffgesetzen (vergl. ABAQUS 2004).

antisymmetrisch. damit bestätigt sich, daß während einer reinen Drehung keine Formänderungsgeschwindigkeiten auftreten und außerdem das Basissystem des Zaremba-Jaumann-Beobachters der Drehung exakt folgt. Darüber hinaus ist die gefundene Antisymmetrie aber auch bezüglich kleiner Zeitschritte interessant. Mit kleiner werdenden Zeitschritten werden $\underline{\underline{\Delta V}}$, $\underline{\underline{\Delta V}}^{-1}$ und $\underline{\underline{\Delta R}}^T$ dem Einheitstensor immer ähnlicher, während die zeitlichen Änderungen $(\underline{\underline{\Delta V}})$ und $(\underline{\underline{\Delta R}})$ ihre Größenordnung beibehalten. Daraus folgt für die Formänderungsgeschwindigkeiten:

$$\Delta t \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta F}} \rightarrow \underline{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \underline{\underline{G}}^T \rightarrow (\underline{\underline{\Delta V}}) \cdot \underline{\underline{\Delta V}}^{-1} + (\underline{\underline{\Delta R}}) \cdot \underline{\underline{\Delta R}}^T \\ \underline{\underline{D}} \rightarrow \frac{1}{2} \left\{ (\underline{\underline{\Delta V}}) \cdot \underline{\underline{\Delta V}}^{-1} + \underline{\underline{\Delta V}}^{-1} \cdot (\underline{\underline{\Delta V}}) \right\} \end{cases} .$$

Demnach geht mit kleiner werdenden Zeitschritten der anhand der vollständigen Änderungen von $\underline{\underline{\Delta F}}$ berechnete Tensor der Formänderungsgeschwindigkeiten in denjenigen Tensor $\underline{\underline{D}}$ über, der sich für die reine Streckungsphase ergibt, was die Gleichung 5.86 zumindest für kleine Schritte rechtfertigt. Darüber hinaus wird anhand dieser Betrachtung erkennbar, daß eine Integration gemäß Gleichung 5.85 auch dann als eine gegen die exakte Formstrebende Näherung für die Integration innerhalb des Bezugssystems des Zaremba-Jaumann-Beobachters interpretiert werden kann, wenn gar keine Separierung in reine Dreh- und Streckanteile vorgesehen ist, sofern von kleinen Zeitschritten ausgegangen wird.

Das Beispiel der einfachen Scherung läßt eine analytische Bestimmung der Koeffizienten von $4\underline{\underline{\chi}}$ gemäß Gleichung 5.86 selbst bei infinitesimaler Zeitschrittweite zu, so daß die Identität mit dem Ergebnis aus Gleichung 5.79 überprüft werden kann.

Werden mehrere gleichartige Scherungen nacheinander ausgeführt, so ergibt sich die Gesamtscherung aus der Addition der Einzelscherungen.

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dementsprechend ergibt sich bei einer Unterteilung eines Scherungsprozesses in n gleiche Teilschritte ein $\underline{\underline{\Delta F}}$ von:

$$\underline{\underline{F}} = (\underline{\underline{\Delta F}})^n \quad \text{mit:} \quad [\underline{\underline{\Delta F}}_{ab}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{k}{n} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Der Drehanteil $\underline{\underline{\Delta R}}$ aus der Polarzerlegung von $\underline{\underline{\Delta F}}$ ist bereits aus Gleichung 5.77 bekannt.

$$\underline{\underline{\Delta F}} = \underline{\underline{\Delta V}} \cdot \underline{\underline{\Delta R}} \quad \text{mit:} \quad [\underline{\underline{\Delta R}}_{ab}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_{\Delta} & \sin \varphi_{\Delta} \\ -\sin \varphi_{\Delta} & \cos \varphi_{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{mit:} \quad \varphi_{\Delta} = \arctan \frac{k}{2n}$$

Die Formänderungsgeschwindigkeiten (s. Gl. 5.75) liefern des Zuwachs $\Delta \underline{\underline{\chi}}$ von $\underline{\underline{\chi}}$ während eines Δt -Zeitschritts.

$$[D_{ab}] = \frac{\dot{k}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [\Delta \chi_{ab}] = \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} D_{ab} dt \right] = \frac{k}{2n} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gemäß Gleichung 5.86 ergibt sich damit für das Ende des zweiten Schrittes:

$$\underline{\underline{\chi}} = \Delta \underline{\underline{\chi}} + \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T$$

und das Ende des dritten Schrittes:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\chi}} &= \Delta \underline{\underline{\chi}} + \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \left(\Delta \underline{\underline{\chi}} + \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T \right) \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T \\ &= \Delta \underline{\underline{\chi}} + \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T + \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \Delta \underline{\underline{R}} \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T \cdot \Delta \underline{\underline{R}}^T \end{aligned}$$

und schließlich das Ende des letzten (n -ten) Schrittes:

$$\underline{\underline{\chi}} = \Delta \underline{\underline{\chi}} + \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta \underline{\underline{R}})^j \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot (\Delta \underline{\underline{R}}^T)^j \quad . \quad (5.87)$$

Für die Berechnung der in der Summe auftretenden Produkte von $\underline{\underline{\chi}}$ mit zwei Drehtensoren werden zunächst die Koeffizientenmatrizen ausmultipliziert (der Vorfaktor $\frac{k}{2n}$ der D_{ab} wurde hier ausgelassen):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi \\ \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & -2 \cos \varphi \sin \varphi \end{bmatrix} \quad .$$

Daraus ergeben sich nach Einbeziehung der Zusammenhänge:

$$2 \cos \varphi \sin \varphi = \sin 2\varphi \quad ; \quad \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi \quad (5.88)$$

die Koeffizienten der Tensorprodukte.

$$\Rightarrow \left[\underline{e}_a \cdot (\Delta \underline{\underline{R}})^j \cdot \Delta \underline{\underline{\chi}} \cdot (\underline{\underline{R}}^T)^j \cdot \underline{e}_b \right] = \frac{k}{2n} \begin{bmatrix} \sin (2j \varphi_\Delta) & \cos (2j \varphi_\Delta) \\ \cos (2j \varphi_\Delta) & -\sin (2j \varphi_\Delta) \end{bmatrix}$$

Damit liegen die Koeffizienten von $\underline{\underline{\chi}}$ für eine n -stufige einfache Scherung vor (vergl. Gl. 5.87).

$$[\chi_{ab}] = \frac{k}{2n} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} \sin (2j \varphi_\Delta) & 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \cos (2j \varphi_\Delta) \\ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \cos (2j \varphi_\Delta) & -\sum_{j=1}^{n-1} \sin (2j \varphi_\Delta) \end{bmatrix}$$

Mit dem Übergang zu unendlich vielen ($n \rightarrow \infty$) und somit infinitesimalen Zeitschritten wird auch der Teildrehwinkel φ_Δ infinitesimal und unterscheidet sich damit nicht mehr von $\tan \varphi_\Delta$.

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \varphi_\Delta \rightarrow \frac{k}{2n} \Rightarrow [\chi_{ab}] = \frac{k}{2n} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{jk}{n} & 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \cos \frac{jk}{n} \\ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \cos \frac{jk}{n} & - \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{jk}{n} \end{bmatrix}$$

In der Matrix stehen auf jeder Position Summen äquidistanter Werte von $\sin x$ bzw $\cos x$ innerhalb des Intervall von Null bis k . Zusammen mit dem Vorfaktor $1/n$ stellt dies eine Mittelwertbildung der jeweiligen Funktion in dem betreffenden Intervall dar. Die gleichen Mittelwerte können auch durch Integrationen in dem gleichen Intervall und nachträgliches Teilen durch die Intervallgröße k bestimmt werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\chi_{ab}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \int_0^k \sin x \, dx & \int_0^k \cos x \, dx \\ \int_0^k \cos x \, dx & - \int_0^k \sin x \, dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \cos k & \sin k \\ \sin k & -(1 - \cos k) \end{bmatrix}$$

Die aus der Integration gewonnenen Ausdrücke für die χ_{ab} -Koeffizienten sind gemäß Gleichung 5.88 tatsächlich völlig identisch mit dem Ergebnis aus Gleichung 5.79.

5.6 Übertragung von Materialsteifigkeiten

In den vorhergehenden Abschnitten wurden Materialsteifigkeiten für unterschiedliche Beobachtersysteme ermittelt (vergl. Gln. 5.64, 5.63 u. 5.68 mit 5.69).

$$\begin{aligned} \text{gemischt:} \quad \underline{\underline{\hat{T}}} &= \underline{\underline{\hat{m}}} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} & \text{mit:} \quad \underline{\underline{\hat{m}}} &= \left. \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \right|_{\underline{\underline{\hat{F}}} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{F}} + c.} \\ \text{Lagrange:} \quad \underline{\underline{\hat{T}}} &= \underline{\underline{\hat{K}}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} & \text{mit:} \quad \underline{\underline{\hat{K}}} &= \left. \frac{\partial \underline{\underline{\hat{T}}}}{\partial \underline{\underline{\hat{C}}}} \right|_{\underline{\underline{\hat{C}}} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{C}} + c.} \\ \text{Euler:} \quad \underline{\underline{\hat{T}}}^* &= \underline{\underline{\hat{k}}} \cdot \underline{\underline{\hat{D}}} & \text{mit:} \quad \underline{\underline{\hat{k}}} &= 2 \left. \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \right|_{\underline{\underline{\hat{b}}} = \frac{1+\kappa}{\Delta t} \underline{\underline{b}} + c.} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \end{aligned} \tag{5.89}$$

Diese Formulierungen sind im allgemeinen nicht äquivalent, da ihnen unterschiedliche Arten der Zeitintegration und damit unterschiedliche Annahmen über den Verlauf der Deformation zwischen zwei Zeitpunkten zugrunde liegen. Nur bei elastischen Stoffgesetzen, bei denen die Spannungen ausschließlich von den Verzerrungen abhängen, sind die Gleichungen äquivalent.

Unabhängig von diesen Unterschieden ist es in vielen Fällen erforderlich oder zumindest sehr zweckdienlich, zwischen den Betrachtungsweisen zu wechseln. Beispielsweise kann die Formulierung eines Stoffgesetzes die Art der Ableitungen festlegen, gleichzeitig aber das zu verwendende FEM-Programm eine andere Art der Materialsteifigkeit erfordern. Für solche Fälle sollen in diesem Abschnitt Übertragungen zwischen den verschiedenen Betrachtungsweisen ermittelt werden. Dabei werden die in Gleichung 5.89 ausführlich symbolisierten Ableitungen im folgenden zugunsten der Übersichtlichkeit durch einfache Ableitungsangaben ersetzt. Gemeint ist aber stets eine vollständige Ableitung unter Berücksichtigung der jeweiligen Zeitintegrationsmethode.

$$\underline{\underline{m}} \xrightarrow{\text{hier}} \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} ; \quad \underline{\underline{K}} \xrightarrow{\text{hier}} \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} ; \quad \underline{\underline{k}} \xrightarrow{\text{hier}} 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}}$$

Die Ergebnisse werden auf verschiedenen Wegen bestätigt, um einerseits die Methoden in ihren Möglichkeiten und Einschränkungen vergleichen zu können und andererseits die Äquivalenz der Methoden zu belegen.

Als erstes soll eine Lagrange-Euler-Umrechnung anhand einer direkten Umrechnung unter Zuhilfenahme der *pull-back*- und *push-forward*-Abbildungen erfolgen. Gesucht ist also ein aus $\underline{\underline{K}}$ berechenbarer Ersatz $\underline{\underline{k}}^*$ für $\underline{\underline{k}}$. Dabei steht, wie oben begründet, von vornherein fest, daß $\underline{\underline{k}}^*$ und $\underline{\underline{k}}$ für allgemeine Stoffgesetz nicht identisch sein können. Allerdings wird für Beschreibungen elastischen Materialverhaltens Identität gefordert.

Um die Lagrangesche und die Eulersche Variante in Gleichung 5.89 in Beziehung zu setzen, müssen Zeitableitungen von $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ und $\underline{\underline{\tau}}$ in Beziehung gesetzt werden. $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ ist die *pull-back*-Abbildung von $\underline{\underline{\tau}}$.

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1}$$

Somit sollte die *push-forward*-Abbildung der Lagrangeschen Zeitableitung von $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ eine Eulersche Zeitableitung von $\underline{\underline{\tau}}$ sein. Für diese Umrechnung wird benötigt:

$$\underline{\underline{\hat{F}}^{-1}} = -\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad \text{und:} \quad \underline{\underline{L}} = (\nabla \circ \underline{\underline{v}})^T = \underline{\underline{\hat{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \quad .$$

Damit ergibt sich die kontravariante Oldroyd-Zeitableitung von $\underline{\underline{\tau}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\hat{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T &= -\underline{\underline{\hat{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\hat{T}}} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{\hat{F}}}^T \\ &= -\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\hat{T}}} - \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{\hat{T}}}^{\circ\circ\circ} \end{aligned}$$

Darüber hinaus wird eine Beziehung zwischen $\underline{\underline{\hat{C}}}$ und $\underline{\underline{D}}$ benötigt.

$$\underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \left(\underline{\underline{\hat{F}}}^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{\hat{F}}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{L}}^T + \underline{\underline{L}} = 2 \underline{\underline{D}}$$

Da $\underline{\underline{K}}$ sowohl (1,2)- als auch (3,4)-symmetrisch ist und außerdem $\underline{\underline{D}}$ symmetrisch ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\hat{T}}}^{\circ\circ\circ} &= \underline{\underline{F}} \cdot \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^T = \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \cdot 2 \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}} \right) \\ &= 2 \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad . \end{aligned} \tag{5.90}$$

Dies ist noch nicht der gesuchte Zusammenhang, da hier noch die Oldroyd-Zeitableitung $\underline{\underline{\dot{T}}}$ anstelle der Zaremba-Jaumann-Zeitableitung (vergl. Gl. 5.89) auftritt. Der gefundene Zusammenhang ist aber in mehrfacher Hinsicht interessant. Zum einen zeigt er, daß auch $\underline{\underline{\dot{T}}}$ und $\underline{\underline{D}}$ eine sinnvolle Paarung zur Definition einer Materialsteifigkeit darstellen. Dies erklärt sich aus der Tatsache, daß $\underline{\underline{D}}$ ebenfalls als Oldroyd-Ableitung interpretierbar ist, nämlich in der Form $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\dot{C}}}$. Gleichung 5.90 verdeutlicht desweiteren, daß die Lagrangesche Zeitableitung eines Lagrangeschen Arguments nicht äquivalent zu einer Eulerschen Zeitableitung in einem starren Beobachtersystem, sondern stattdessen zu einer Oldroyd-Ableitung ist.

Der Übergang auf die Zaremba-Jaumann-Zeitableitung erfolgt mit Hilfe der Kombination der Gleichungen 3.54 und 3.28.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{T}}}^* &= \underline{\underline{\dot{T}}}^{\circ\circ} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{\dot{T}}}^{\circ\circ} + 2 \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \cdot \left(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{b(6)} \cdot \underline{\underline{D}} \right) \\ &= \underline{\underline{\dot{T}}}^{\circ\circ} + 2 (\underline{\underline{\tau}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{D}} \end{aligned}$$

Damit liegt der gesuchte Zusammenhang zwischen $\underline{\underline{K}}$ und $\underline{\underline{k}}^*$ vor.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\hat{T}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot{T}}}^* = \underline{\underline{k}}^* \cdot \underline{\underline{D}} \\ \text{mit: } \underline{\underline{k}}^* &= 2 \left\{ \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} + (\underline{\underline{\tau}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \right\} \end{aligned} \quad (5.91)$$

Natürlich können bei $\underline{\underline{k}}^*$ die Übertragungen $(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T)^{S_{24}}$ auch nach außen gezogen werden.

$$\underline{\underline{k}}^* = 2 \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \left\{ \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} + (\underline{\underline{\tilde{T}}} \circ \underline{\underline{C}}^{-1})^{S_{24}} \right\} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}}$$

Diese Beziehungen lassen sich auch umkehren:

$$\left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \right)^{S_{24}} \cdot \frac{1}{2} \underline{\underline{k}}^* \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{T-1} \circ \underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{S_{24}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} + (\underline{\underline{\tilde{T}}} \circ \underline{\underline{C}}^{-1})^{S_{24}} .$$

Wird hierbei wiederum auf der linken Seite $\underline{\underline{k}}^*$ gegen $\underline{\underline{k}}$ ausgetauscht, so ergibt sich auf der rechten Seite im allgemeinen nicht mehr $\underline{\underline{K}}$, sondern ein $\underline{\underline{K}}^*$.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{T}}}^* = \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\hat{T}}} &= \underline{\underline{K}}^* \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \\ \text{mit: } \underline{\underline{K}}^* &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{T-1} \circ \underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{S_{24}} - (\underline{\underline{\tilde{T}}} \circ \underline{\underline{C}}^{-1})^{S_{24}} \\ &= \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \right)^{S_{24}} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \underline{\underline{k}} - (\underline{\underline{\tau}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \right\} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{T-1} \circ \underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{S_{24}} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Diese Ergebnisse sollen mit Hilfe des Übertragungsoperators bestätigt werden.

$$\underline{\underline{\hat{T}}} = \underline{\underline{K}}^* \cdot \underline{\underline{\hat{C}}} \quad \Rightarrow \quad S^{-1} \left(\left(\underline{\underline{\hat{T}}} \right) \right) = S^{-1} \left(\left(\underline{\underline{K}}^* \right) \right) \cdot S^{-1} \left(\left(\underline{\underline{\hat{C}}} \right) \right)$$

Das Auslesen der Übertragungstabellen führt zu:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\underline{\underline{\tilde{T}}}) &= \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} \rightarrow (\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1})_{\square}^{\circ} = (\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^{-1})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot (2 \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}}) \\ &= 2 (\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^{-1})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot (\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{D}} \quad . \end{aligned}$$

Aus der Definition der Oldroyd-Ableitung auf der linken Seite ergibt sich:

$$(\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1})_{\square}^{\circ} = (\tau^{ij} \dot{b}_{jk}^{-1}) \underline{g}_i \circ \underline{g}^k = \underline{\underline{\tau}}^{\circ} \cdot \underline{\underline{b}}^{-1} + \underline{\underline{\tau}} \cdot (\underline{\underline{b}}^{-1})_{\square}^{\circ} \quad \text{mit:} \quad (\underline{\underline{b}}^{-1})_{\square}^{\circ} = \underline{\underline{0}} \quad .$$

Daraus folgt bei Berücksichtigung der vorhandenen Symmetrien bereits die Bestätigung von Gleichung 5.90.

Um auch Umrechnungsbeziehungen zur gemischten Darstellung zu erhalten, bietet sich die direkte Umrechnung der Ableitungen an. Analog zu den bisher ermittelten Übertragungen wird auch in diesem Fall derart gerechnet, als wenn die Spannungen ausschließlich von Verzerrungen abhängen. Dementsprechend ist auch hier mit Unterschieden bezüglich der jeweils implizit verwendeten Zeitintegrationsart zu rechnen. Aus dem gleichen Grund sollten die Ergebnisse aber den bisherigen Übertragungen vollkommen entsprechen.

Ausgangspunkt sind die Beziehungen zwischen den verwendeten Spannungstensoren.

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

Daraus ergibt sich mit den Ableitungsregeln gemäß Gleichung 5.50 für die Ableitungen der 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen:

$$\frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T)^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{F}}} + \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} + (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{\tau}})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad . \quad (5.93)$$

Von diesen Ausdrücken sollen zunächst die Ableitungen der Spannungen $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ und $\underline{\underline{\tau}}$ näher untersucht werden.

$$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad (5.94)$$

Hierzu wiederum werden die Ableitungen der beiden Cauchy-Green-Tensoren nach dem Deformationsgradienten benötigt.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{F}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{F}}} + (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}^T}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{J}} + (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}} \\ &= \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{J}} + \underline{\underline{J}} \cdot (\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{E}})^{T_{24}} = \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = 2 \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \\ \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{F}}^T} &= \frac{\partial \underline{\underline{C}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{J}} = 2 \left(\underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) \cdot \underline{\underline{J}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = 2 \left(\underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{F}} \right) \cdot \underline{\underline{J}} \end{aligned}$$

Damit können die Gleichungen 5.94 weiterentwickelt werden.

$$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{F}} \right) \cdot \underline{\underline{J}} = 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{T_{24}} \quad (5.95)$$

Unter Ausnutzung der (1,2)-Symmetrie von $\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}}$ folgt damit aus dem rechten Teil der Gleichung 5.93 die Umrechnungsvorschrift von der Lagrangeschen zur gemischten Darstellung.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} &= \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{T_{24}} \cdot 2 \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{J}} = 2 \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{J}} \\ &= 2 \underline{\underline{J}} \cdot \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{J}} \cdot \left(2 \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{\tilde{T}}} \right)^{T_{24}} \right) \end{aligned} \quad (5.96)$$

Diese Gleichung läßt sich umkehren. Im Endergebnis ist allerdings weder die (1,2)- noch die (3,4)-Symmetrie der rechten Seite unmittelbar erkennbar und auch erst in der Summe, nicht aber in den einzelnen Summanden vorhanden. Überdies ist eine exakte Symmetrie nur bei Stoffgesetzen für elastisches Materialverhalten zu erwarten, bei denen keine Abweichungen durch unterschiedliche Zeitintegrationsarten auftreten.

$$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}^T}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{\tilde{T}}} \right)^{T_{24}}$$

Aufgrund der Symmetrien der linken Seite können aber ohne Einschränkungen für die Gleichung beide Summanden jeweils (1,2)- und (3,4)-symmetrisiert werden.

$$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}^T}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{T-1} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{\tilde{T}}} \right)^{S_{24}} \quad (5.97)$$

Eine entsprechende Beziehung zwischen der Eulerschen und der gemischten Darstellungsweise wird wiederum aus Gleichung 5.93 (diesmal aus dem zweiten Teil) abgeleitet. Zusammen mit Gleichung 5.52 folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} &= \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} + \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{\tau}} \right)^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{F}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{F}}} \quad \text{mit:} \quad \frac{\partial \underline{\underline{F}}^{-1}}{\partial \underline{\underline{F}}} = - \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{T_{24}} \\ &= \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} - \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{\tau}} \right)^{T_{24}} \\ &= 2 \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{T_{24}} - \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{\tau}} \right)^{T_{24}} \end{aligned} \quad (5.98)$$

Auch in diesem Fall ist die Umkehrung möglich.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \frac{1}{2} \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \right)^{T_{24}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)^{T_{24}} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \right) \cdot \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^{T-1} \cdot \underline{\underline{\tau}} \right)^{S_{24}} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Eine wirksame Kontrolle der entwickelten Gleichungen besteht in dem Versuch, durch Einsetzen der Gleichung 5.96 in Gleichung 5.99 den bereits bekannten Zusammenhang zwischen

$$\underline{k} = \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{\chi}} \quad \text{und} \quad \underline{K} = \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \quad \text{gemäß Gleichung 5.91 zu bestätigen.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} &= \underline{F} \cdot \underline{J} \cdot \left(\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot \underline{F}^T + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{\tilde{T}})^{T_{24}} \right) \cdot (\underline{E} \circ \underline{F}^{T^{-1}})^{T_{24}} + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{F}^{T^{-1}} \cdot \underline{\tau})^{T_{24}} \\ &= \underline{F} \cdot \underline{J} \cdot \left(\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{F}^{T^{-1}})^{T_{24}} + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{F}^{T^{-1}} \cdot \underline{\tilde{T}})^{T_{24}} \right) + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{F}^{T^{-1}} \cdot \underline{\tau})^{T_{24}} \\ &= \left(\underline{F} \cdot \underline{J} \cdot \underline{F} \right) \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{F}^{T^{-1}})^{T_{24}} + \frac{1}{2} (\underline{F} \cdot \underline{\tilde{T}} \cdot \underline{F}^{-1} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \underline{J} + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{b}^{-1} \cdot \underline{\tau})^{T_{24}} \\ &= \underline{J} \cdot (\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{b}^{-1} \cdot \underline{F})^{T_{24}} + \frac{1}{2} (\underline{\tau} \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \underline{J} + \frac{1}{2} (\underline{E} \circ \underline{b}^{-1} \cdot \underline{\tau})^{T_{24}} \\ &= (\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{T_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot \underline{J} \cdot (\underline{F}^T \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{F})^{T_{24}} \cdot \underline{J} + \underline{j}_{a(6)} \circ \underline{j}_{a(6)} \cdot (\underline{\tau} \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \underline{J} \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der (1,2)- und (3,4)-Symmetrien sowohl von $\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}}$ als auch von $\frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}}$ lassen sich daraus zwei Formulierungsalternativen ableiten, wobei die zweite Variante insbesondere für den Übergang auf den Tensor \underline{k} geeignet ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} &= (\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^{-1} \circ \underline{F})^{S_{24}} + (\underline{\tau} \cdot \underline{b}^{-1} \circ \underline{E})^{S_{24}} \\ &= (\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{F})^{S_{24}} \cdot \underline{b}^{-1} + \underline{j}_{a(6)} \circ \underline{j}_{a(6)} \cdot (\underline{\tau} \circ \underline{E})^{T_{24}} \cdot \underline{b}^{-1} \quad . \end{aligned} \quad (5.100)$$

Die Umrechnung auf \underline{k} bestätigt tatsächlich das bereits auf anderem Wege ermittelte Ergebnis (vergl. Gl. 5.91).

$$\begin{aligned} \underline{k} &= 2 \left(\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \cdot \underline{b} \right) \cdot \underline{j}_{c(6)} \circ \underline{j}_{c(6)} \\ &= 2 \left\{ (\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{F})^{S_{24}} + (\underline{\tau} \circ \underline{E})^{S_{24}} \right\} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Die Tabelle auf Seite 169 faßt die bisher vorgestellten Umrechnungsmöglichkeiten zusammen. Es stehen allerdings noch die wichtigen Beziehungen zwischen \underline{k} und \underline{m} aus. Aus Gleichung 5.95 folgt zunächst:

$$\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{F}} = 2 \left(\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} \cdot \underline{F} \right) \cdot \underline{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{F}} \cdot \underline{J} \cdot \underline{F}^{-1} \quad (5.102)$$

Funktion Ar- gument	$\underline{\underline{m}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$	$\underline{\underline{K}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}}$	$\underline{\underline{k}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{\chi}}}$	$\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}}$	$\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$	$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$
$\underline{\underline{m}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$		Gl. 5.97	Gl. 5.105	Gl. 5.99	Gl. 5.104	Inversion Gl. 5.93
$\underline{\underline{K}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}}$	Gl. 5.96		Gl. 5.91	Gl. 5.100		Gl. 5.95
$\underline{\underline{k}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{\chi}}}$	Gl. 5.106 Gl. 5.109	Gl. 5.92		Gl. 5.106 Gl. 5.108	Gl. 5.109	
$\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}}$	Gl. 5.98	Inversion Gl. 5.100	Gl. 5.68 Gl. 5.69			Gl. 5.95
$\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$	Gl. 5.98		Gl. 5.103	Gl. 5.102		
$\frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$	Gl. 5.93	Inversion Gl. 5.95				

Abbildung 5.6: Übersicht über die vorgestellten Umrechnungsmöglichkeiten zwischen verschiedenen Materialsteifigkeiten. Sofern eine Inversion einer Gleichung angegeben ist, so ist für die betreffende Paarung nur eine der beiden Abhängigkeiten explizit angegeben, eine Inversion ist aber direkt und ohne Einschränkungen möglich. Die durch separate Rahmungen hervorgehobenen Abhängigkeiten werden erst im folgenden vorgestellt.

und daraus wiederum gemäß Gleichung 5.68:

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}} = 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} = \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{a(6)} \circ \underline{\underline{j}}_{a(6)} \quad (5.103)$$

Der Übergang auf $\underline{\underline{m}}$ erfolgt über die Inversion der entsprechenden Zeile von Gleichung 5.98.

$$\frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} - (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \Rightarrow \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} + (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \quad (5.104)$$

Beim Einsetzen in Gleichung 5.103 entsteht:

$$\begin{aligned} (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{F}}^T &= \underline{\underline{J}} \cdot \left(\underline{\underline{T}}^T \circ \underline{\underline{E}} \right)^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{J}} \cdot \left(\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{E}} \right)^{T_{24}} \\ &= (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}} = (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \cdot \underline{\underline{J}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich der gesuchte Zusammenhang zwischen $\underline{\underline{k}}$ und $\underline{\underline{m}}$.

$$\Rightarrow \underline{\underline{k}} = \left(\underline{\underline{F}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} + (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{T}})^{S_{24}} \quad (5.105)$$

Eine unmittelbare Inversion dieser Gleichung ist aufgrund der enthaltenen Symmetrisierung nicht möglich. Trotzdem sprechen die bisher vorgefundenen Zusammenhänge dafür, daß eine eindeutige Beziehung von $\frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}}$ aus $\underline{\underline{k}}$ möglich sein sollte. Dies ist auch tatsächlich der Fall, erfordert allerdings eine separate Herleitung. Das vorgefundene Inversionsproblem existiert letztlich bereits für die Gleichung 5.68 zur Berechnung von $\underline{\underline{k}}$ aus $\frac{\partial \tau}{\partial \underline{\underline{b}}}$. In diesem Zusammenhang läßt sich das Problem allerdings mit Hilfe der Formulierungsalternative in Gleichung 5.69 umgehen, sofern ein zu dem Tensor $(\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}}$ inverser Tensor $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ bezüglich des doppelten Punktprodukts existiert.

$$\underline{\underline{\mathcal{B}}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \quad \Rightarrow \quad [\underline{\underline{\mathcal{B}}}_{a^{(6)}b^{(6)}}] = \left[\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \right]^{-1}$$

Mit Hilfe dieses Tensors könnte Gleichung 5.69 nach $\frac{\partial \tau}{\partial \underline{\underline{b}}}$ aufgelöst und in Gleichung 5.98 eingesetzt werden.

$$\frac{\partial \tau}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{k}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{B}}} \cdot (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{F}}^T)^{T_{24}} - (\underline{\underline{F}}^{-1} \circ \underline{\underline{T}})^{T_{24}} \quad (5.106)$$

Die Existenz eines (endlichen) Tensors $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ setzt voraus, daß die Determinante der Koeffizientenmatrix $\left[\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \right]$ von Null abweicht. Die Koeffizientenmatrix eines $(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}}$ -Tensors wurde bereits als identisch mit derjenigen Matrix in Gleichung 2.61 erkannt. Die Determinante muß in allen kartesischen Koordinatensystemen identisch sein, also auch in einer Darstellung in den Eigenrichtungen $\underline{\underline{e}}_A$ von $\underline{\underline{b}}$ mit den Eigenwerten b_I , b_{II} und b_{III} . Die Koeffizientenmatrix vereinfacht sich damit zu:

$$\left[\underline{\underline{j}}_{A^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{B^{(6)}} \right] = \begin{bmatrix} b_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{II} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{III} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b_{II} + b_{III}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_{III} + b_I}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b_I + b_{II}}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.107)$$

Offensichtlich ist die Determinante dieser Matrix für einen stets positiv definiten Tensor wie $\underline{\underline{b}}$ immer von Null verschieden.

$$\det \left[\underline{\underline{j}}_{A^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{B^{(6)}} \right] = b_I b_{II} b_{III} \frac{1}{8} (b_{II} + b_{III}) (b_{III} + b_I) (b_I + b_{II})$$

Damit ist gezeigt, daß sich der Tensor $\underline{\underline{\mathcal{B}}}$ stets berechnen läßt. Die Koeffizientenmatrix in Gleichung 5.107 zeigt aber auch, daß sich dieser Tensor nicht auf eine einfache Konstruktion wie $(\underline{b}^{-1} \circ \underline{E})^{S_{24}} \neq \underline{\underline{\mathcal{B}}}$ zurückführen läßt, sondern sich tatsächlich erst über die Invertierung einer 6×6 -Matrix erschließt (Stickforth (1983, S. 3-50) bietet diesbezüglich eine interessante Berechnungsvorschrift an).

Eine Alternative zu dieser Matrixinvertierung läßt sich erreichen, wenn in die Gleichung 5.100 für die Abhängigkeit des Tensors $\frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}}$ von $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{C}}$ die Gleichung 5.92 eingesetzt wird, die $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{C}}$ wiederum mit \underline{k} in Verbindung bringt. Somit wird das Problem, eine der Gleichungen 5.68 oder 5.69 zu invertieren mit dem Umweg über $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{C}}$ umgangen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{b}} &= \left(\underline{F} \circ \underline{F}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{C}} \cdot \left(\underline{F}^T \circ \underline{F} \right)^{S_{24}} \cdot \underline{b}^{-1} + \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \cdot \underline{b}^{-1} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \underline{k} - \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{S_{24}} + \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \right\} \cdot \underline{b}^{-1} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \underline{k} - \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \left[\left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \circ \underline{j}_{b^{(6)}} + \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \right] \right\} \cdot \underline{b}^{-1} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \underline{k} + \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} + \begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} \right) \cdot \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \cdot \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} \right) \right\} \cdot \underline{b}^{-1}
 \end{aligned} \tag{5.108}$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Formeln exakt nur für Stoffgesetze für elastisches Materialverhalten gelten. Dies wird beispielsweise daran deutlich, daß die rechte Seite der letzten Gleichung im allgemeinen nicht symmetrisch ist, während die linke Seite dies aber definitionsgemäß sein muß. Somit wird zumindest bei Stoffgesetzen jenseits der Elastizität die linke Seite zu symmetrisieren sein. Wird aber eine solche Symmetrisierung hier explizit durchgeführt, so ergibt sich beim Einsetzen in die Gleichung 5.68 für \underline{k} keine Identität mehr, sondern es verbleibt eine Beziehung zwischen der Steifigkeit \underline{k} und den Spannungen $\underline{\tau}$, die wiederum nur im Fall der Elastizität erfüllt ist. In allen anderen Fällen zeigen sich in dieser und ähnlichen widersprüchlichen Beziehungen die in den Ableitungen implizit enthaltenen unterschiedlichen Zeitintegrationsarten.

Einsetzen der Gleichung 5.108 in die Gleichungen 5.95 und 5.98 liefert schließlich eine Alternative zu Gleichung 5.106 bezüglich der Umrechnung zwischen \underline{k} und \underline{m} .

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \underline{T}}{\partial \underline{F}} &= \underline{F}^{-1} \cdot \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{F}} - \left(\underline{F}^{-1} \circ \underline{T} \right)^{T_{24}} \\
 \text{mit: } \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{F}} &= \left\{ \underline{k} + \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\tau} \circ \underline{E} \right)^{T_{24}} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} - \begin{smallmatrix} 2 \\ \underline{\underline{J}} \end{smallmatrix} \right) \right\} \cdot \left(\underline{b}^{-1} \circ \underline{F}^T \right)^{T_{24}}
 \end{aligned} \tag{5.109}$$

5.6.1 Programmierungsbeispiel

Die in der Tabelle auf Seite 169 (Abb. 5.6) genannten Gleichungen zur Umrechnung verschiedener Materialsteifigkeitsformulierungen dienen der Kopplung von zunächst inkompatiblen Formen eines Stoffgesetzes und eines FEM-Programmes. Bei der konkreten Programmierung einer solchen Koppelroutine sind in der Regel zusätzliche Anpassungen bezüglich der Eigenschaften der verwendeten Koeffizientenschreibweisen erforderlich. Dies soll exemplarisch an einer Routine für den Einsatz innerhalb der in Abbildung 5.5 auf Seite 158 skizzierten Benutzerschnittstelle des Programmpakets ABAQUS durchgeführt werden. Das Stoffgesetz liege beispielsweise in einer Lagrangeschen Formulierung vor (dies ist der wohl häufigste Fall), so daß gemäß der Tabelle in Abbildung 5.6 die Gleichung 5.91 umzusetzen ist.

In ABAQUS werden nicht die zu den angepaßten Basisdyaden (Gl. 2.53) korrespondierenden Koeffizienten $\tau_{a^{(6)}} = \underline{\tau} \cdot \underline{j}_{a^{(6)}}$ und $\chi_{a^{(6)}} = \underline{\chi} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}}$ (vergl. Gl. 2.54) verwendet, sondern für Spannungsgrößen die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{hier:} \quad & [\tau_{a^{(6)}}] = [\tau_{xx} \ \tau_{yy} \ \tau_{zz} \ \sqrt{2} \tau_{yz} \ \sqrt{2} \tau_{xz} \ \sqrt{2} \tau_{xy}] \\ \text{ABAQUS:} \quad & [\tau_{a^{(AQ)}}] = [\tau_{xx} \ \tau_{yy} \ \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}] \end{aligned}$$

und für Verformungsgrößen die mit anderen Vorfaktoren versehenen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{hier:} \quad & [\chi_{a^{(6)}}] = [\chi_{xx} \ \chi_{yy} \ \chi_{zz} \ \sqrt{2} \chi_{yz} \ \sqrt{2} \chi_{xz} \ \sqrt{2} \chi_{xy}] \\ \text{ABAQUS:} \quad & [\chi_{a^{(AQ)}}] = [\chi_{xx} \ \chi_{yy} \ \chi_{zz} \ 2 \chi_{xy} \ 2 \chi_{xz} \ 2 \chi_{yz}] \quad . \end{aligned}$$

Die in ABAQUS verwendeten Koeffizienten von Spannungs- und Verformungsgrößen gehören somit nicht zu einer einheitlichen Koeffizientenschreibweise und sind deshalb für Herleitungen und Manipulationen tensorieller Zusammenhänge nur eingeschränkt geeignet.

Für die Umstellung einer $[k_{a^{(6)}b^{(6)}}]$ -Matrix auf eine $[k_{a^{(AQ)}b^{(AQ)}}]$ -Matrix müssen demnach:

- die Zeilen 4 und 6 vertauscht werden und die Spalten 4 und 6,
- die Zeilen 4 bis 6 durch $\sqrt{2}$ geteilt werden, weil die zugehörigen Gleichungen jetzt nicht mehr für z.B. $\sqrt{2} \tau_{xy}$, sondern nur noch für τ_{xy} angegeben sind,
- die Spalten 4 bis 6 durch $\sqrt{2}$ geteilt werden, weil die betroffenen Elemente jetzt nicht mehr nur mit z.B. $\sqrt{2} \varepsilon_{yz}$ sondern jetzt mit $2 \varepsilon_{yz}$ multipliziert werden.

Diese Operationen können durch Multiplikationen mit der Matrix $[6 \rightarrow Q]$ und der dazu inversen Matrix $[Q \rightarrow 6]$ durchgeführt werden.

$$[6 \rightarrow Q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [Q \rightarrow 6] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Umstellung von $[k_{a^{(6)}b^{(6)}}]$ auf $[k_{a^{(AQ)}b^{(AQ)}}]$ lautet mit diesen Matrizen:

$$[k_{a^{(AQ)}b^{(AQ)}}] = [6 \rightarrow Q] \cdot [k_{a^{(6)}b^{(6)}}] \cdot [6 \rightarrow Q] \quad . \quad (5.110)$$

Die Matrix $[Q \rightarrow 6]$ wird für die Umkehrung benötigt.

$$[k_{a^{(6)}b^{(6)}}] = [Q \rightarrow 6] \cdot [k_{a^{(AQ)}b^{(AQ)}}] \cdot [Q \rightarrow 6] \quad (5.111)$$

mit: $[Q \rightarrow 6] = [6 \rightarrow Q]^{-1}$

Gegenüber der Belegung von $[k_{a^{(6)}b^{(6)}}]$ (Gl. 2.60) bietet die ABAQUS-Formatierung den Vorteil, daß beim Übergang von einer $3 \times 3 \times 3 \times 3$ -Matrix, bzw. einer 9×9 -Matrix auf eine 6×6 -Matrix ausschließlich Mittelwertbildungen (Symmetrisierungen) vorgenommen werden, aber keine formatierungsbedingten zusätzlichen Vorfaktoren wie in Gleichung 2.60 auftreten.

$$[k_{a^{(AQ)}b^{(AQ)}}] = \begin{bmatrix} K_{xxxx} & K_{xxyy} & K_{xxzz} & \frac{K_{xxyz}+K_{xxzy}}{2} & \frac{K_{xxzx}+K_{xxxz}}{2} & \frac{K_{xxyx}+K_{xyxx}}{2} \\ K_{yyxx} & K_{yyyy} & K_{yyzz} & \frac{K_{yyyz}+K_{yyzy}}{2} & \frac{K_{yyzx}+K_{yyxz}}{2} & \frac{K_{yyxy}+K_{yyyx}}{2} \\ K_{zzxx} & K_{zzyy} & K_{zzzz} & \frac{K_{zzyz}+K_{zzzy}}{2} & \frac{K_{zzzx}+K_{zzxz}}{2} & \frac{K_{zzxy}+K_{zzyx}}{2} \\ \frac{K_{yzxx}+K_{zyxx}}{2} & \frac{K_{yzyy}+K_{zyyy}}{2} & \frac{K_{yzzz}+K_{zyzz}}{2} & \frac{K_{yzyz}+K_{yzzy}+K_{zyyz}+K_{zyzy}}{4} & \frac{K_{yzzx}+K_{yzxz}+K_{zyzx}+K_{zyxz}}{4} & \frac{K_{yzxy}+K_{yzyx}+K_{zyxy}+K_{zyyx}}{4} \\ \frac{K_{zxxx}+K_{xzzx}}{2} & \frac{K_{zxyy}+K_{xzyy}}{2} & \frac{K_{zxxx}+K_{xzzx}}{2} & \frac{K_{zxyz}+K_{zxzy}+K_{xzyz}+K_{xzzy}}{4} & \frac{K_{zxxz}+K_{zxzx}+K_{xzzz}+K_{xzzz}}{4} & \frac{K_{zxyx}+K_{zxyx}+K_{xzxxy}+K_{xzxxy}}{4} \\ \frac{K_{xyxx}+K_{yxxx}}{2} & \frac{K_{xyyy}+K_{yxyy}}{2} & \frac{K_{xyzz}+K_{yxzz}}{2} & \frac{K_{xyyz}+K_{xyzy}+K_{yxyz}+K_{yxzy}}{4} & \frac{K_{xyzx}+K_{xyxz}+K_{yxzx}+K_{yxxz}}{4} & \frac{K_{xyxy}+K_{xyyx}+K_{yxxy}+K_{yxxy}}{4} \end{bmatrix}$$

Um die ABAQUS-Koeffizienten zweier Beispiltensoren $\underline{\underline{m}}$ und $\underline{\underline{M}}$, die gemäß

$$\underline{\underline{m}} = \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \quad (5.112)$$

zusammenhängen, ineinander umzurechnen, muß nicht zu dem $a^{(6)}$ -Format zurückgekehrt werden. Stattdessen werden geeignete Koeffizientenmatrizen von $(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}})^{S_{24}}$ verwendet. Zunächst wird als Abkürzung eingeführt:

$$f_{a^{(6)}b^{(6)}} = \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \quad .$$

Damit folgt für die zu Gleichung 5.112 äquivalente Matrixgleichung:

$$[m_{a^{(6)}b^{(6)}}] = [f_{a^{(6)}b^{(6)}}]^T \cdot [M_{a^{(6)}b^{(6)}}] \cdot [f_{a^{(6)}b^{(6)}}] \quad .$$

Mit Hilfe der Gleichungen 5.110 und 5.111 ergibt sich die Beziehung der ABAQUS-Koeffizienten der beiden Tensoren.

$$\begin{aligned} [m_{a(AQ)b(AQ)}] &= [6 \rightarrow Q] \cdot [f_{a(6)b(6)}]^T \cdot [M_{a(6)b(6)}] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] \\ &= [6 \rightarrow Q] \cdot [f_{a(6)b(6)}]^T \cdot [Q \rightarrow 6] \cdot [M_{a(AQ)b(AQ)}] \cdot [Q \rightarrow 6] \\ &\quad \cdot [f_{a(6)b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] \end{aligned}$$

Dabei sind auf der rechten Seite die Produkte vor und hinter $[M_{a(AQ)b(AQ)}]$ zueinander transponiert.

$$\begin{aligned} [m_{a(AQ)b(AQ)}] &= [f_{a(AQ)b(AQ)}]^T \cdot [M_{a(AQ)b(AQ)}] \cdot [f_{a(AQ)b(AQ)}] \\ \text{mit: } [f_{a(AQ)b(AQ)}] &= [Q \rightarrow 6] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] \end{aligned} \quad (5.113)$$

Mit der aus Gleichung 2.71 bekannten Matrix $[f_{a(6)b(6)}]$ kann die neue $[f_{a(AQ)b(AQ)}]$ -Matrix berechnet werden.

$$\begin{aligned} [f_{a(AQ)b(AQ)}] &= \\ &\left[\begin{array}{cccccc} F_{xx}^2 & F_{yx}^2 & F_{zx}^2 & F_{yx} F_{xx} & F_{zx} F_{xx} & F_{zx} F_{yx} \\ F_{xy}^2 & F_{yy}^2 & F_{zy}^2 & F_{yy} F_{xy} & F_{zy} F_{xy} & F_{zy} F_{yy} \\ F_{xz}^2 & F_{yz}^2 & F_{zz}^2 & F_{yz} F_{xz} & F_{zz} F_{xz} & F_{zz} F_{yz} \\ 2 F_{xy} F_{xx} & 2 F_{yy} F_{yx} & 2 F_{zy} F_{zx} & F_{yy} F_{xx} + F_{xy} F_{yx} & F_{zy} F_{xx} + F_{xy} F_{zx} & F_{zy} F_{yx} + F_{yy} F_{zx} \\ 2 F_{xz} F_{xx} & 2 F_{yz} F_{yx} & 2 F_{zz} F_{zx} & F_{yz} F_{xx} + F_{xz} F_{yx} & F_{zz} F_{xx} + F_{xz} F_{zx} & F_{zz} F_{yx} + F_{yz} F_{zx} \\ 2 F_{xz} F_{xy} & 2 F_{yz} F_{yy} & 2 F_{zz} F_{zy} & F_{yz} F_{xy} + F_{xz} F_{yy} & F_{zz} F_{xy} + F_{xz} F_{zy} & F_{zz} F_{yy} + F_{yz} F_{zy} \end{array} \right] \end{aligned} \quad (5.114)$$

Die Matrizen $[6 \rightarrow Q]$ und $[Q \rightarrow 6]$ sind auch für Umrechnungen von Tensoren 2. Stufe geeignet. Hier muß aber (in der ABAQUS-eigenen Weise) zwischen Spannungs- und Verzerrungstensoren unterschieden werden.

$$[\tau_{a(AQ)}] = [\tau_{a(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] = [6 \rightarrow Q] \cdot [\tau_{a(6)}]$$

$$[\tau_{a(6)}] = [\tau_{a(AQ)}] \cdot [Q \rightarrow 6] = [Q \rightarrow 6] \cdot [\tau_{a(AQ)}]$$

Bei den Verzerrungstensoren passen die Bezeichnungen der Umrechnungsmatrizen nicht mehr zu deren Wirkungsweise.

$$[\chi_{a(AQ)}] = [\chi_{a(6)}] \cdot [Q \rightarrow 6] = [Q \rightarrow 6] \cdot [\chi_{a(6)}]$$

$$[\chi_{a(6)}] = [\chi_{a(AQ)}] \cdot [6 \rightarrow Q] = [6 \rightarrow Q] \cdot [\chi_{a(AQ)}]$$

Für die Umrechnung der Lagrangeschen Spannungen $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ in das Eulersche Gegenstück $\underline{\underline{\tau}}$ folgt zunächst im (6)-Format:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\tau}} &= \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \underline{\underline{F}}^T = \underline{\underline{\tilde{T}}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \Rightarrow \tau_{a(6)} = \tilde{T}_{b(6)} f_{b(6)a(6)} \\ &\Rightarrow [\tau_{a(6)}] = [\tilde{T}_{a(6)}] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \quad . \end{aligned}$$

Daraus wiederum ergibt sich die Beziehung zwischen $[\tau_{a(AQ)}]$ und $[\tilde{T}_{a(AQ)}]$.

$$\begin{aligned} [\tau_{a(6)}] &= [\tilde{T}_{a(6)}] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \Rightarrow [\tau_{a(AQ)}] = [\tilde{T}_{a(6)}] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] \\ &\Rightarrow [\tau_{a(AQ)}] = [\tilde{T}_{a(AQ)}] \cdot [Q \rightarrow 6] \cdot [f_{a(6)b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] \quad (5.115) \\ &\Rightarrow [\tau_{a(AQ)}] = [\tilde{T}_{a(AQ)}] \cdot [f_{a(AQ)b(AQ)}] \end{aligned}$$

Bei einer entsprechenden Umrechnung für ein Verzerrungsmaß wäre das Ergebnis ein anderes. Mit der Matrix $[f_{a(AQ)b(AQ)}]$ kann der Teilausdruck $(\underline{F} \circ \underline{F}^T)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\tilde{T}}}{\partial \underline{C}} \cdot (\underline{F}^T \circ \underline{F})^{S_{24}}$ der Gleichung 5.91 umgesetzt werden. Für die vollständige Umsetzung fehlen lediglich noch die ABAQUS-Koeffizienten des Tensors $\underline{t} = (\underline{\tau} \circ \underline{E})^{S_{24}}$. Im (6)-Format liegen die Koeffizienten für einen allgemeinen Tensor \underline{X} anstelle von $\underline{\tau}$ bereits vor (s. Gl. 2.61 auf Seite 33).

$$\begin{aligned} [t_{a(AQ)b(AQ)}] &= [6 \rightarrow Q] \cdot [j_{a(6)} \cdot (\underline{\tau} \circ \underline{E})^{S_{24}} \cdot j_{b(6)}] \cdot [6 \rightarrow Q] = \\ &\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\tau_{xx} & 0 & 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} & 0 \\ 0 & 2\tau_{yy} & 0 & \tau_{xy} & 0 & \tau_{yz} \\ 0 & 0 & 2\tau_{zz} & 0 & \tau_{xz} & \tau_{yz} \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} & 0 & \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy}}{2} & \frac{\tau_{yz}}{2} & \frac{\tau_{xz}}{2} \\ \tau_{xz} & 0 & \tau_{xz} & \frac{\tau_{yz}}{2} & \frac{\tau_{zz} + \tau_{xx}}{2} & \frac{\tau_{xy}}{2} \\ 0 & \tau_{yz} & \tau_{yz} & \frac{\tau_{xz}}{2} & \frac{\tau_{xy}}{2} & \frac{\tau_{yy} + \tau_{zz}}{2} \end{bmatrix} \quad (5.116) \end{aligned}$$

Damit stehen alle Komponenten für die Umsetzung der Gleichung 5.91 in eine Programmroutine zur Verwendung innerhalb der ABAQUS-Benutzerschnittstelle UMAT zur Verfügung.

$$[k_{a(AQ)b(AQ)}] = 2 \left\{ [f_{a(AQ)b(AQ)}]^T \cdot [K_{a(AQ)b(AQ)}] \cdot [f_{a(AQ)b(AQ)}] + [t_{a(AQ)b(AQ)}] \right\}$$

Die Programmierung erfolgt in der Programmiersprache *Fortran*. Zunächst werden die Übergabeparameter definiert.

```
subroutine Lagrange_Euler(F,detF,PK,dPKdC,cauchy,dtaudchi_detF)
  real*8 F(3,3),detF,PK(6),dPKdC(6,6),cauchy(6),dtaudchi_detF(6,6)
```

Die Routine erhält als Eingabegrößen den Deformationsgradienten **F** und dessen dritte Hauptinvariante **detF**, die symmetrischen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen **PK** und die Lagrangesche Materialsteifigkeit **dPKdC**. Die Routine gibt die Cauchy-Spannungen **cauchy** und eine Eulersche Materialsteifigkeit **dtaudchi_detF** zurück. Dabei handelt es sich um die durch J_3 dividierte Ableitung $\underline{k} = \frac{\partial \underline{\tau}}{\partial \underline{\chi}}$ (vergl. Abb. 5.5).

Nach der Vereinbarung der lokalen Variablen und der Einführung der Abkürzung `Kehr_detF` für den Kehrwert von J_3 wird im ersten Block des ausführbaren Teils die Matrix $[f_{a(AQ)b(AQ)}]$ (`FFT_T24`) mit den aktuellen Koeffizienten des Deformationsgradienten belegt (vergl. Gl. 5.114).

```

      real*8  Kehr_detF,FFT_T24(6,6),arb(6,6)
*-----*
      Kehr_detF = 1.d0 / detF
C.....Übertragungsmatrix
      FFT_T24(1,1) = F(1,1)**2
      FFT_T24(1,2) = F(2,1)**2
      FFT_T24(1,3) = F(3,1)**2
      FFT_T24(2,1) = F(1,2)**2
      FFT_T24(2,2) = F(2,2)**2
      FFT_T24(2,3) = F(3,2)**2
      FFT_T24(3,1) = F(1,3)**2
      FFT_T24(3,2) = F(2,3)**2
      FFT_T24(3,3) = F(3,3)**2

      FFT_T24(1,4) = F(2,1)*F(1,1)
      FFT_T24(1,5) = F(3,1)*F(1,1)
      FFT_T24(1,6) = F(3,1)*F(2,1)
      FFT_T24(2,4) = F(2,2)*F(1,2)
      FFT_T24(2,5) = F(3,2)*F(1,2)
      FFT_T24(2,6) = F(3,2)*F(2,2)
      FFT_T24(3,4) = F(2,3)*F(1,3)
      FFT_T24(3,5) = F(3,3)*F(1,3)
      FFT_T24(3,6) = F(3,3)*F(2,3)

      FFT_T24(4,1) = 2.D0* F(1,2)*F(1,1)
      FFT_T24(5,1) = 2.D0* F(1,3)*F(1,1)
      FFT_T24(6,1) = 2.D0* F(1,3)*F(1,2)
      FFT_T24(4,2) = 2.D0* F(2,2)*F(2,1)
      FFT_T24(5,2) = 2.D0* F(2,3)*F(2,1)
      FFT_T24(6,2) = 2.D0* F(2,3)*F(2,2)
      FFT_T24(4,3) = 2.D0* F(3,2)*F(3,1)
      FFT_T24(5,3) = 2.D0* F(3,3)*F(3,1)
      FFT_T24(6,3) = 2.D0* F(3,3)*F(3,2)

      FFT_T24(4,4) = F(2,2)*F(1,1) + F(1,2)*F(2,1)
      FFT_T24(4,5) = F(3,2)*F(1,1) + F(1,2)*F(3,1)
      FFT_T24(4,6) = F(3,2)*F(2,1) + F(2,2)*F(3,1)
      FFT_T24(5,4) = F(2,3)*F(1,1) + F(1,3)*F(2,1)
      FFT_T24(5,5) = F(3,3)*F(1,1) + F(1,3)*F(3,1)
      FFT_T24(5,6) = F(3,3)*F(2,1) + F(2,3)*F(3,1)
      FFT_T24(6,4) = F(2,3)*F(1,2) + F(1,3)*F(2,2)
      FFT_T24(6,5) = F(3,3)*F(1,2) + F(1,3)*F(3,2)
      FFT_T24(6,6) = F(3,3)*F(2,2) + F(2,3)*F(3,2)

```

Als nächstes erfolgt die Umrechnung der Spannungen gemäß Gleichung 5.115.

```
C.....Umrechnung der Spannungen
  do k = 1 , 6
*
      Initialbelegung
      cauchy(k) = PK(1) * FFT_T24(1,k)
      do j = 2 , 5
          cauchy(k) = cauchy(k) + PK(j) * FFT_T24(j,k)
      enddo
*
      2PK -> Cauchy
      cauchy(k) = (cauchy(k) + PK(6) * FFT_T24(6,k)) * Kehr_detF
  enddo
```

Als letzter Schritt verbleibt die Belegung der Steifigkeit. Das Ausgabefeld `dtaudchi_detF` wird zunächst mit den Koeffizienten von $\underline{\tau}$ gemäß Gleichung 5.116 belegt.

```
C.....Startbelegung der Steifigkeit
  dtaudchi_detF(1,1) = 2.d0* cauchy(1)
  dtaudchi_detF(2,2) = 2.d0* cauchy(2)
  dtaudchi_detF(3,3) = 2.d0* cauchy(3)

  dtaudchi_detF(1,2) = 0.d0
  dtaudchi_detF(1,3) = 0.d0
  dtaudchi_detF(2,3) = 0.d0

  dtaudchi_detF(1,6) = 0.d0
  dtaudchi_detF(2,5) = 0.d0
  dtaudchi_detF(3,4) = 0.d0

  dtaudchi_detF(1,4) = cauchy(4)
  dtaudchi_detF(2,4) = cauchy(4)
  dtaudchi_detF(1,5) = cauchy(5)
  dtaudchi_detF(3,5) = cauchy(5)
  dtaudchi_detF(2,6) = cauchy(6)
  dtaudchi_detF(3,6) = cauchy(6)

  dtaudchi_detF(4,4) = .5d0* (cauchy(2)+cauchy(1))
  dtaudchi_detF(5,5) = .5d0* (cauchy(1)+cauchy(3))
  dtaudchi_detF(6,6) = .5d0* (cauchy(3)+cauchy(2))

  dtaudchi_detF(4,5) = .5d0* cauchy(6)
  dtaudchi_detF(4,6) = .5d0* cauchy(5)
  dtaudchi_detF(5,6) = .5d0* cauchy(4)
*
      Ergänzung der symmetrischen Anteile
  do k = 1 , 6
      do j = 1 , k-1
          dtaudchi_detF(k,j) = dtaudchi_detF(j,k)
      enddo
  enddo
```

Schließlich erfolgt die zweifache Multiplikation der Lagrangeschen Steifigkeit auf dem Eingabefeld dPKdC mit der Übertragungsmatrix auf dem FFT_T24-Feld gemäß Gleichung 5.113.

```

C.....Umrechnung der Lagrangeschen Steifigkeit
  do k = 1 , 6
    do j = 1 , 6
      arb(k,j) = dPKdC(k,1) * FFT_T24(1,j)
      do i = 2 , 5
        arb(k,j) = arb(k,j) + dPKdC(k,i) * FFT_T24(i,j)
      enddo
      arb(k,j) = 2.d0/detF * (arb(k,j) + dPKdC(k,6) * FFT_T24(6,j))
    enddo
  enddo
  do k = 1 , 6
    do j = 1 , 6
      do i = 1 , 6
        dtaudchi_detF(k,j) = dtaudchi_detF(k,j) +
+                               FFT_T24(i,k) * arb(i,j)
      enddo
    enddo
  enddo
END

```

5.6.2 Sonderfall: Isotrope Elastizität

In dem besonders einfachen Fall isotrop elastischen Materialverhaltens und isothermer Prozeßführung stellt die Formänderungsarbeitsdichte Φ bezüglich jedes Verzerrungstensors eine Invariante dar. Für die Formänderungsleistung kommen demnach in diesem Fall die folgenden Formulierungen in Frage.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elastizität} \\ \Theta(t) = \text{const.} \\ \text{Isotropie} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{\dot{C}}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{\dot{b}}}^*$$

Für die Eulersche Variante empfiehlt sich als Vorbereitung für das weitere Vorgehen eine Isolierung der in $\underline{\underline{\dot{b}}}^*$ enthaltenen Formänderungsgeschwindigkeiten $\underline{\underline{D}}$.

$$\text{mit: } \underline{\underline{\dot{b}}}^* = \underline{\underline{b}} \cdot \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{b}} = 2 (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{D}}$$

Die Ableitung einer Invarianten nach dem Argumenttensor der Invarianten ergibt stets einen Tensor, der die gleichen Eigenrichtungen wie der Argumenttensor aufweist. Somit hat der Tensor $\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}}$ die gleichen Eigenrichtungen wie $\underline{\underline{b}}$ selbst.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elastizität} \\ \Theta(t) = \text{const.} \\ \text{Isotropie} \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot 2 (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} \cdot \underline{\underline{D}} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \right) \cdot \underline{\underline{D}} \\ = 2 \left(\underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \right) \cdot \underline{\underline{D}}$$

Aus der Gegenüberstellung mit der allgemeinen Gleichung 3.49 für die Formänderungsleistung folgen Aussagen über die verschiedenen Spannungstensoren.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elastizität} \\ \Theta(t) = \text{const.} \\ \text{Isotropie} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{F}}} ; \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{\tilde{T}}} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}} \\ \underline{\underline{\tau}} = 2 \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}} \end{array} \quad (5.117)$$

Dementsprechend fällt die Bestimmung der Materialsteifigkeiten $\underline{\underline{m}}$ und $\underline{\underline{K}}$ besonders leicht.

$$\underline{\underline{m}} = \frac{\partial \underline{\underline{T}}}{\partial \underline{\underline{F}}} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{F}}^2} ; \quad \underline{\underline{K}} = \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \quad (5.118)$$

Diese Tensoren weisen die für elastisches Materialverhalten charakteristische Symmetrie der Materialsteifigkeit auf.

$$m_{abcd} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ba} \partial F_{dc}} = m_{cdab} ; \quad K_{a^{(6)}b^{(6)}} = 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial C_{a^{(6)}} \partial C_{b^{(6)}}} = K_{b^{(6)}a^{(6)}} \quad (5.119)$$

Diese Symmetrie überträgt sich auch auf die Element- und Gesamtsteifigkeitsmatrix (vergl. Gl. 5.25).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elastizität} \\ \Theta(t) = \text{const.} \\ \text{Isotropie} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{E}}} M_{KaLb} = \int \frac{\partial N_K}{\partial \tilde{r}_c} \frac{\partial N_L}{\partial \tilde{r}_d} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial F_{ac} \partial F_{bd}} d\tilde{V} = \underline{\underline{\mathcal{E}}} M_{LbKa} \quad (5.120)$$

Für die Berechnung der Eulerschen Materialsteifigkeit $\underline{\underline{k}}$ ist zunächst die Ableitung von $\underline{\underline{\tau}}$ nach $\underline{\underline{b}}$ zu bestimmen (vergl. Gl. 5.68).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} &= 2 \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \right) \quad \text{oder, Formulierungsvariante:} \\ &= 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}}{\partial \underline{\underline{b}}} + 2 (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \\ &= 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} + 2 \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left\{ \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \right\} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $\underline{\underline{k}}$ unter Verwendung von Gleichung 5.117:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{k}} &= 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \\ &= 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{E}} \circ \frac{\underline{\underline{\tau}}}{2} \right)^{S_{24}} + 4 \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \quad (5.121) \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang ist gut geeignet, die Notwendigkeit der konsequenten Beachtung von Symmetrieeigenschaften der Ableitungen nach symmetrischen Tensoren zu demonstrieren. Zum Vergleich sei die Berechnung eines $\underline{\underline{k}}^*$ durchgeführt, wobei gegenüber dem Original- $\underline{\underline{k}}$ der symmetrische Tensor $\underline{\underline{b}}$ durch einen allgemeinen Tensor $\underline{\underline{X}}$ ersetzt wird und erst das Endergebnis wiederum symmetrisiert wird.

$$\underline{\underline{k}}^* = 2 \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\underline{X}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}}$$

Bei den Spannungen wird die Abkürzung $\underline{\underline{P}}$ für die einfache Ableitung von Φ eingeführt.

$$\tau_{ab} = X_{ac} P_{cb} \quad \text{mit:} \quad \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} = \underline{\underline{b}} \quad \text{und:} \quad \underline{\underline{P}} = 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}}$$

Die Berechnung der Koeffizienten von $\underline{\underline{k}}$ erfordert dann als ersten Berechnungsschritt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{j}}_{ba} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{j}}_{dc} &= \frac{\partial \tau_{ab}}{\partial X_{ec}} X_{ed} = P_{cb} X_{ad} + X_{af} \frac{\partial P_{fb}}{\partial X_{ec}} X_{ed} \\ \Rightarrow \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\underline{X}} &= (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{P}})^{T_{24}} + \underline{\underline{X}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{P}}}{\partial \underline{\underline{X}}} \cdot \underline{\underline{X}} \quad . \end{aligned} \quad (5.122)$$

Wird nun abschließend symmetrisiert und $\underline{\underline{X}}$ wieder durch $\underline{\underline{b}}$ ersetzt, so verbleibt abweichend von Gleichung 5.121:

$$\underline{\underline{k}}^* = 4 \left(\underline{\underline{b}} \circ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \right)^{S_{24}} + 4 \left(\underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \quad . \quad (5.123)$$

Die Differenz von $\underline{\underline{k}}$ und $\underline{\underline{k}}^*$ beträgt:

$$\underline{\underline{\Delta}} = \underline{\underline{k}} - \underline{\underline{k}}^* = \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{\tau}} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}} = 2 \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}} \quad .$$

und ist damit keineswegs Null. Dies ist unmittelbar aus dem Vergleich der viele Nullen enthaltenden Koeffizientenmatrix eines Produktes $(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{X}})^{S_{24}}$ (Gl. 2.61) mit der voll besetzten Matrix eines Produktes $(\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}}$ (Gl. 2.74) zu entnehmen.

Somit ist das Ergebnis gemäß 5.123 widerlegt. Ein Einwand gegen diese Wertung könnte in der Frage bestehen, ob man die Symmetrie von $\underline{\underline{b}}$ beim Ableiten tatsächlich berücksichtigen muß. Dieser Einwand kann auf zwei Wegen entkräftet werden. Zum einen könnte $\underline{\underline{\tau}}$ statt aus $\underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{P}}$ genausogut aus $\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{X}}$ berechnet werden. In diesem Fall ergäbe sich für die Gleichung 5.122 statt dem Term $(\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{P}})^{T_{24}}$ ein Term $(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{X}} \cdot \underline{\underline{P}})^{T_{24}}$, womit sich für die Gleichung 5.123 wiederum eine Abweichung um $\underline{\underline{\Delta}}$ ergäbe. Das zweite Argument gegen den Einwand besteht darin, daß für die Herleitung der Gleichung 5.68 für $\underline{\underline{k}}$ bereits die (3,4)-

Symmetrie von $\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}}{\partial \underline{\underline{b}}}$ vorausgesetzt werden mußte (s. Kommentar zur Gleichung 5.67). Ohne

diese Voraussetzung wäre in dem Zusammenhang eine explizite Symmetrisierung enthalten geblieben, womit wiederum das richtige Ergebnis reproduziert würde.

Die gleiche Differenz $\underline{\underline{\Delta}}$ tritt auch bei der Umrechnung der Lagrangeschen Steifigkeit auf (vergl. Gl. 5.91).

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{k}} &= 2 \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{\tilde{T}}}}{\partial \underline{\underline{C}}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} + 2 \left(\underline{\underline{\tau}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \\
 &= 4 \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} + 2 \left(\underline{\underline{\tau}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \\
 \Rightarrow \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}^2} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} &= \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}^2} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \\
 &\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{E}} \circ \frac{\underline{\underline{\tau}}}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}}}_{\frac{1}{4} \underline{\underline{\Delta}}}
 \end{aligned}$$

Beispielsweise ergibt sich beim Neo-Hookeschen Stoffgesetz (vergl. Abschnitt 5.6.3) bezüglich des Gestaltänderungsanteils für $\underline{\underline{\Delta}}$ (vergl. Gl. 5.133 auf Seite 187):

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\Delta}} &= 2 \left(\underline{\underline{E}} \circ \frac{\underline{\underline{\tau}}}{2} - \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}} = 2\alpha \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G - \underline{\underline{E}} \circ \frac{J_1}{3} \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G + \frac{J_1}{3} \underline{\underline{b}}^{-1} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}} \\
 &= \frac{2\alpha}{3} J_1 \left(\underline{\underline{b}}^{-1} \circ \underline{\underline{b}} - \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}}
 \end{aligned}$$

Die zugehörige Matrix kann aus der allgemeinen Angabe für eine $(\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{b}})^{S_{24}}$ -Matrix (s. Gl. 2.74) entnommen werden, indem für σ jeweils $-\underline{\underline{b}}^{-1}$ eingesetzt wird und auf zu jedem Element der Hauptdiagonalen Eins addiert wird. Schließlich müßte noch mit $2\alpha J_1/3$ multipliziert werden. Daran zeigt sich, daß die Ergebnismatrix im allgemeinen voll besetzt ist, und ihre Elemente nicht vernachlässigbar klein sind.

Für den Sonderfall, in dem das Koordinatensystem den Eigenrichtungen von $\underline{\underline{b}}$ entspricht, vereinfacht sich die Matrix drastisch, da dann $b_{4^{(6)}} = b_{5^{(6)}} = b_{6^{(6)}} = 0$ gilt. Die einzigen von Null verschiedenen Elemente von $\Delta_{a^{(6)}b^{(6)}}$ sind dann:

$$\left. \begin{array}{l} b_{4^{(6)}} = 0 \\ b_{5^{(6)}} = 0 \\ b_{6^{(6)}} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{4^{(6)}4^{(6)}} = \frac{(b_{2^{(6)}} - b_{3^{(6)}})^2}{-2 b_{2^{(6)}} b_{3^{(6)}}} \\ \Delta_{5^{(6)}5^{(6)}} = \frac{(b_{3^{(6)}} - b_{1^{(6)}})^2}{-2 b_{3^{(6)}} b_{1^{(6)}}} \\ \Delta_{6^{(6)}6^{(6)}} = \frac{(b_{1^{(6)}} - b_{2^{(6)}})^2}{-2 b_{1^{(6)}} b_{2^{(6)}}} \end{array} \right. ; \quad \text{alle anderen } \Delta_{a^{(6)}b^{(6)}} = 0$$

5.6.3 Kontrollbeispiel: Neo-Hooke-Materialsteifigkeit

Da die Spannungen bei den elastischen Stoffgesetzen lediglich von den Verzerrungen, nicht aber von den momentanen Verzerrungsänderungen abhängen, ist für die numerische Umsetzung solcher Stoffgesetze keine Zeitintegration notwendig. Somit sollten die Abweichungen, die innerhalb der in Abbildung 5.6 genannten Gleichungen bei allgemeinen Stoffgesetzen aufgrund unterschiedlicher Zeitintegrationsarten auftreten, bei elastischen Stoffgesetzen verschwinden. Solche Stoffgesetze sind deshalb zur Kontrolle der hergeleiteten Zusammenhänge besonders gut geeignet.

Eine solche Kontrolle soll hier anhand des besonders einfachen Neo-Hooke-Stoffgesetzes durchgeführt werden. Es handelt sich um ein Stoffgesetz für nahezu inkompressible Materialien. Bei solchen Modellen empfiehlt sich eine Aufteilung der Formänderungsarbeitsdichte in einen Gestalt- und einen Volumenänderungsanteil. Der Gestaltänderungsanteil des Neo-Hooke-Stoffgesetzes enthält lediglich eine einzige an das jeweilige Material anzupassende Konstante α (bezügl. J_1 s. Gl. 5.125).

$$\Phi = \overset{G}{\Phi} + \overset{V}{\Phi} \quad \text{mit:} \quad \overset{G}{\Phi} = \alpha (J_1 - 3) \quad (5.124)$$

Für die Handhabung und numerische Umsetzung des Volumenänderungsanteils solcher nahezu inkompressibler Materialien stehen eine Reihe von Methoden zur Verfügung (s. z.B. Besdo & Mehrenholtz 1993, Cescotto & Fonder 1979, Sussmann & Bathe 1987). Hier soll nur der Gestaltänderungsanteil untersucht werden. Trotzdem wird unter anderem das Volumenverhältnis J_3 benötigt.

$$J_3 = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho} = I_3(\underline{\underline{F}}) = \sqrt{I_3(\underline{\underline{b}})} = \sqrt{I_3(\underline{\underline{C}})}$$

Sofern keine explizite Angabe erfolgt, sind im folgenden mit I_1 , I_2 und I_3 die drei Hauptinvarianten von $\underline{\underline{b}}$ bzw. $\underline{\underline{C}}$ gemeint.

Die Gestaltänderungsanteile von $\underline{\underline{b}}$ und $\underline{\underline{C}}$ sind derart vereinbart, daß $I_3\left(\overset{G}{\underline{\underline{b}}}\right) = I_3\left(\overset{G}{\underline{\underline{C}}}\right) = 1$ erfüllt ist.

$$\overset{G}{\underline{\underline{b}}} = J_3^{-2/3} \underline{\underline{b}} \quad ; \quad \overset{G}{\underline{\underline{C}}} = J_3^{-2/3} \underline{\underline{C}} \quad \text{mit:} \quad \begin{cases} J_1 = I_1\left(\overset{G}{\underline{\underline{b}}}\right) = I_1\left(\overset{G}{\underline{\underline{C}}}\right) = J_3^{-2/3} I_1 \\ J_2 = I_2\left(\overset{G}{\underline{\underline{b}}}\right) = I_2\left(\overset{G}{\underline{\underline{C}}}\right) = J_3^{-4/3} I_2 \end{cases} \quad (5.125)$$

Die Berechnung der Kirchhoff-Spannungen $\underline{\underline{\tau}}$ gemäß Gleichung 5.117 erfordert die Ableitung von Φ nach $\underline{\underline{b}}$.

$$\frac{\partial \overset{G}{\Phi}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \alpha \frac{\partial J_1}{\partial \underline{\underline{b}}}$$

Hierzu werden einige Teildableitungen benötigt.

$$\frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{b}}} = I_3 \underline{\underline{b}}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J_3^{-2/3}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{\partial I_3^{-1/3}}{\partial \underline{\underline{b}}} = -\frac{1}{3} I_3^{-4/3} I_3 \underline{\underline{b}}^{-1} = -\frac{1}{3} J_3^{-2/3} \underline{\underline{b}}^{-1}$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{b}}^G}{\partial \underline{\underline{b}}} = J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}}^{-1} \right\}$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{\partial J_1}{\partial \underline{\underline{b}}^G} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}^G}{\partial \underline{\underline{b}}} = \underline{\underline{E}} \cdot J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}}^{-1} \right\} = J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{E}} - \frac{I_1}{3} \underline{\underline{b}}^{-1} \right\}$$

Daraus ergibt sich, daß der Gestaltänderungsanteil der Kirchhoff-Spannungen einem Deviator entspricht.

$$\underline{\underline{\tau}}^G = 2 \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} = 2\alpha J_3^{-2/3} \underline{\underline{b}} \cdot \left\{ \underline{\underline{E}} - \frac{I_1}{3} \underline{\underline{b}}^{-1} \right\} = 2\alpha J_3^{-2/3} \underline{\underline{b}}' = 2\alpha \underline{\underline{b}}'^G = \underline{\underline{\tau}}'^G \quad (5.126)$$

Der Volumenänderungsanteil der Formänderungsarbeitsdichte hängt ausschließlich vom Volumenverhältnis J_3 ab.

$$\underline{\underline{\Phi}}^V = \underline{\underline{\Phi}}^V(J_3) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}^V = 2 \underline{\underline{b}} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{b}}}$$

mit: $\frac{\partial J_3}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{\partial \sqrt{I_3}}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{1}{2\sqrt{I_3}} \frac{\partial I_3}{\partial \underline{\underline{b}}} = \frac{1}{2J_3} I_3 \underline{\underline{b}}^{-1} = \frac{J_3}{2} \underline{\underline{b}}^{-1}$

Damit wird erkennbar, daß der Volumenänderungsanteil der Spannungen hydrostatisch ist. Folglich entspricht der rein deviatorische Gestaltänderungsanteil dem vollständigen Deviator von $\underline{\underline{\tau}}$.

$$\underline{\underline{\tau}}^V = \frac{\partial \Phi}{\partial J_3} J_3 \underline{\underline{E}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau}}^G = \underline{\underline{\tau}}'^G = \underline{\underline{\tau}}' \quad (5.127)$$

Als erste (beim Neo-Hooke-Stoffgesetz einfachere) Möglichkeit zur Berechnung der Materialsteifigkeit werden gemäß der ersten Zeile von Gleichung 5.121 die Spannungen abgeleitet, mit $2\underline{\underline{b}}$ multipliziert und abschließend (3,4)-symmetrisiert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{b}}'^G}{\partial \underline{\underline{b}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{b}}'^G}{\partial \underline{\underline{b}}^G} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{b}}^G}{\partial \underline{\underline{b}}} = \left\{ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \right\} \cdot J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{b^{(6)}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}}^{-1} \right\} \\ &= J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{b}}^{-1} - \frac{1}{3} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} + \frac{1}{9} I_1 \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^{-1} \right\} \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial \underline{\underline{\tau}}'}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} = 2\alpha J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}} + \frac{1}{9} I_1 \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \right\} \end{aligned}$$

Dies allein ist wegen $\underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{b}}$ tatsächlich (3,4)-unsymmetrisch! Die explizite Symmetrisierung innerhalb von $\underline{\underline{k}}$ ist also auch bei elastischen Stoffgesetzen keineswegs redundant.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{k}}^G &= 2 \left(\frac{\partial \underline{\underline{\tau}}'}{\partial \underline{\underline{b}}} \cdot \underline{\underline{b}} \right) \cdot \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{c^{(6)}} \\ &= 4\alpha \left\{ \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G \right)^{S_{24}} - \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{b}}^G \circ \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G \right) + \frac{1}{9} J_1 \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \right\} \end{aligned} \quad (5.128)$$

Die einzelnen Teiltensoren haben die folgenden Koeffizienten.

$$\left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdots \left(\underline{E} \circ \underline{b}^G \right)^{S_{24}} \cdots \underline{j}_{b^{(6)}} \right] = \left[\underline{b}^G \cdots \left(\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right) \right] \quad (\text{vergl. Gl. 2.61})$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \overset{G}{b}_{1^{(6)}} & 0 & 0 & 0 & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} \\ 0 & 2 \overset{G}{b}_{2^{(6)}} & 0 & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & 0 & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} \\ 0 & 0 & 2 \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & 0 \\ 0 & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{2^{(6)}} + \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \frac{\overset{G}{b}_{6^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \frac{\overset{G}{b}_{5^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & 0 & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \frac{\overset{G}{b}_{6^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \overset{G}{b}_{3^{(6)}} + \overset{G}{b}_{1^{(6)}} & \frac{\overset{G}{b}_{4^{(6)}}}{\sqrt{2}} \\ \overset{G}{b}_{6^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} & 0 & \frac{\overset{G}{b}_{5^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \frac{\overset{G}{b}_{4^{(6)}}}{\sqrt{2}} & \overset{G}{b}_{1^{(6)}} + \overset{G}{b}_{2^{(6)}} \end{bmatrix} \quad (5.129)$$

$$\left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdots \left\{ \underline{b}^G \circ \underline{E} + \underline{E} \circ \underline{b}^G \right\} \cdots \underline{j}_{b^{(6)}} \right] = \left[\overset{G}{b}_{a^{(6)}} E_{b^{(6)}} + E_{a^{(6)}} \overset{G}{b}_{b^{(6)}} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \overset{G}{b}_{1^{(6)}} & \overset{G}{b}_{1^{(6)}} + \overset{G}{b}_{2^{(6)}} & \overset{G}{b}_{1^{(6)}} + \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} \\ \overset{G}{b}_{1^{(6)}} + \overset{G}{b}_{2^{(6)}} & 2 \overset{G}{b}_{2^{(6)}} & \overset{G}{b}_{2^{(6)}} + \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} \\ \overset{G}{b}_{1^{(6)}} + \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \overset{G}{b}_{2^{(6)}} + \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & 2 \overset{G}{b}_{3^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} \\ \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & \overset{G}{b}_{4^{(6)}} & 0 & 0 & 0 \\ \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & \overset{G}{b}_{5^{(6)}} & 0 & 0 & 0 \\ \overset{G}{b}_{6^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} & \overset{G}{b}_{6^{(6)}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.130)$$

$$\left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdots \{ \underline{E} \circ \underline{E} \} \cdots \underline{j}_{b^{(6)}} \right] = \left[E_{a^{(6)}} E_{b^{(6)}} \right] =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Daraus ergeben sich in der Summe die Koeffizienten $\left[k_{a^{(6)}b^{(1-3)}}^G \right] =$

$$\frac{4}{3} \alpha \begin{bmatrix} G b_{1^{(6)}} + \frac{1}{3} J_1 & \frac{1}{3} J_1 - G b_{1^{(6)}} - G b_{2^{(6)}} & \frac{1}{3} J_1 - G b_{1^{(6)}} - G b_{3^{(6)}} & \dots \\ \frac{1}{3} J_1 - G b_{1^{(6)}} - G b_{2^{(6)}} & G b_{2^{(6)}} + \frac{1}{3} J_1 & \frac{1}{3} J_1 - G b_{2^{(6)}} - G b_{3^{(6)}} & \dots \\ \frac{1}{3} J_1 - G b_{1^{(6)}} - G b_{3^{(6)}} & \frac{1}{3} J_1 - G b_{2^{(6)}} - G b_{3^{(6)}} & G b_{1^{(6)}} + \frac{1}{3} J_1 & \dots \\ -G b_{4^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{4^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{4^{(6)}} & \dots \\ \frac{1}{2} G b_{5^{(6)}} & -G b_{5^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{5^{(6)}} & \dots \\ \frac{1}{2} G b_{6^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{6^{(6)}} & -G b_{6^{(6)}} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{a^{(6)}b^{(4-6)}}^G \right] = \frac{4}{3} \alpha \begin{bmatrix} \dots & -G b_{4^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{5^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{6^{(6)}} \\ \dots & \frac{1}{2} G b_{4^{(6)}} & -G b_{5^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{6^{(6)}} \\ \dots & \frac{1}{2} G b_{4^{(6)}} & \frac{1}{2} G b_{5^{(6)}} & -G b_{6^{(6)}} \\ \dots & \frac{3}{2} \left(G b_{2^{(6)}} + G b_{3^{(6)}} \right) & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{6^{(6)}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{5^{(6)}} \\ \dots & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{6^{(6)}} & \frac{3}{2} \left(G b_{3^{(6)}} + G b_{1^{(6)}} \right) & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{4^{(6)}} \\ \dots & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{5^{(6)}} & \frac{3}{2\sqrt{2}} G b_{4^{(6)}} & \frac{3}{2} \left(G b_{1^{(6)}} + G b_{2^{(6)}} \right) \end{bmatrix}$$

Die Umrechnung in das ABAQUS-Format ergibt eine vollständige Übereinstimmung mit der im ABAQUS-Handbuch angegebenen Beispielimplementierung (ABAQUS 2004).

$$\left[k_{a^{(AQ)}b^{(1-3)}}^G \right] = \frac{4}{3} \alpha \begin{bmatrix} G b_{xx} + \frac{J_1}{3} & \frac{J_1}{3} - G b_{xx} - G b_{yy} & \frac{J_1}{3} - G b_{xx} - G b_{zz} & \dots \\ \frac{J_1}{3} - G b_{xx} - G b_{yy} & G b_{yy} + \frac{J_1}{3} & \frac{J_1}{3} - G b_{yy} - G b_{zz} & \dots \\ \frac{J_1}{3} - G b_{xx} - G b_{zz} & \frac{J_1}{3} - G b_{yy} - G b_{zz} & G b_{xx} + \frac{J_1}{3} & \dots \\ \frac{1}{2} G b_{xy} & \frac{1}{2} G b_{xy} & -G b_{xy} & \dots \\ \frac{1}{2} G b_{xz} & -G b_{xz} & \frac{1}{2} G b_{xz} & \dots \\ -G b_{yz} & \frac{1}{2} G b_{yz} & \frac{1}{2} G b_{yz} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c} G \\ k_{a(AQ)b^{(4-6)}} \end{array} \right] = \frac{4}{3} \alpha \left[\begin{array}{cccc} \dots & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{xy}} & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{xz}} & -\frac{G}{b_{yz}} \\ \dots & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{xy}} & -\frac{G}{b_{xz}} & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{yz}} \\ \dots & -\frac{G}{b_{xy}} & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{xz}} & \frac{1}{2} \frac{G}{b_{yz}} \\ \dots & \frac{3}{4} \left(\frac{G}{b_{xx}} + \frac{G}{b_{yy}} \right) & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{yz}} & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{xz}} \\ \dots & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{yz}} & \frac{3}{4} \left(\frac{G}{b_{zz}} + \frac{G}{b_{xx}} \right) & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{xy}} \\ \dots & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{xz}} & \frac{3}{4} \frac{G}{b_{xy}} & \frac{3}{4} \left(\frac{G}{b_{yy}} + \frac{G}{b_{zz}} \right) \end{array} \right]$$

Zur Überprüfung der zweiten Zeile von Gleichung 5.121 wird die Steifigkeit alternativ zu dem oben geschilderten Vorgehen unmittelbar aus der 1. und 2. Ableitung von $\frac{G}{\Phi}$ berechnet. Dazu ist zunächst die 2. Ableitung von $\frac{G}{\Phi}$ zu ermitteln.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{G}{\Phi}}{\partial \underline{b}} &= \alpha J_3^{-2/3} \left\{ \underline{E} - \frac{J_1}{3} \underline{b}^{-1} \right\} = \alpha J_3^{-2/3} \underline{E} - \alpha \frac{J_1}{3} \underline{b}^{-1} \\ \frac{\partial^2 \frac{G}{\Phi}}{\partial \underline{b}^2} &= \alpha \underline{E} \circ \frac{-2}{3} J_3^{-5/3} \frac{\partial J_3}{\partial \underline{b}} - \frac{\alpha}{3} \underline{b}^{-1} \circ \frac{\partial J_1}{\partial \underline{b}} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{b}} - \alpha \frac{J_1}{3} \frac{\partial \underline{b}^{-1}}{\partial \underline{b}} \\ &= -\frac{\alpha}{3} J_3^{-2/3} \underline{E} \circ \underline{b}^{-1} - \frac{\alpha}{3} \underline{b}^{-1} \circ \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{b}}{\partial \underline{b}} - \alpha \frac{J_1}{3} \frac{\partial \underline{b}^{-1}}{\partial \underline{b}} \\ &= \frac{\alpha}{3} \left\{ -J_3^{-2/3} \underline{E} \circ \underline{b}^{-1} - \underline{b}^{-1} \circ \left(J_3^{-2/3} \underline{E} - \frac{1}{3} J_1 \underline{b}^{-1} \right) + J_1 (\underline{b}^{-1} \circ \underline{b}^{-1})^{S_{24}} \right\} \\ &= \frac{\alpha}{3} \left\{ -J_3^{-2/3} (\underline{E} \circ \underline{b}^{-1} + \underline{b}^{-1} \circ \underline{E}) + \frac{J_1}{3} \underline{b}^{-1} \circ \underline{b}^{-1} + J_1 (\underline{b}^{-1} \circ \underline{b}^{-1})^{S_{24}} \right\} \end{aligned} \quad (5.132)$$

Der dazu gehörende Anteil der Steifigkeit ist:

$$\begin{aligned} \frac{G}{k_1} &= 4 \left\{ \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \left(\underline{b} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{b}^2} \cdot \underline{b} \right) \cdot \underline{j}_{c^{(6)}} \circ \underline{j}_{c^{(6)}} \right\} \\ &= \frac{4}{3} \alpha \left\{ - \left(\underline{b} \circ \underline{E} + \underline{E} \circ \underline{b} \right) + \frac{J_1}{3} \underline{E} \circ \underline{E} + \frac{J_1}{2} (\underline{b} \circ \underline{b}^{-1})^{S_{24}} + \frac{J_1}{2} \underline{j}_{a^{(6)}} \circ \underline{j}_{a^{(6)}} \right\} . \end{aligned}$$

Der verbleibende Anteil der Steifigkeit ergibt:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{k}}_2^G &= 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{b}}} \circ \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{E}} \circ \frac{\underline{\underline{\tau}}}{2} \right)^{S_{24}} \\
 &= 2 \alpha \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G - \frac{J_1}{3} \underline{\underline{b}}^{-1} \circ \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}'^G \right)^{S_{24}} \\
 &= 2 \alpha \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G - \frac{J_1}{3} \underline{\underline{b}}^{-1} \circ \underline{\underline{b}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G - \underline{\underline{E}} \circ \frac{J_1}{3} \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \\
 &= \frac{4}{3} \alpha \left\{ \left(3 \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G - \frac{J_1}{2} \underline{\underline{b}}^{-1} \circ \underline{\underline{b}} \right)^{S_{24}} - \frac{J_1}{2} \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \circ \underline{\underline{j}}_{a^{(6)}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.133}$$

Tatsächlich entspricht die Summe der beiden Anteile exakt dem bereits auf anderem Wege ermittelten Ergebnis (vergl. Gl. 5.128).

$$\underline{\underline{k}}^G = \underline{\underline{k}}_1^G + \underline{\underline{k}}_2^G = 4 \alpha \left\{ \left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G \right)^{S_{24}} - \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{b}}^G \circ \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G \right) + \frac{J_1}{9} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} \right\}$$

Zur Überprüfung der Gleichung 5.91 zur Berechnung einer Eulerschen aus der Lagrangeschen Materialsteifigkeit müssen zunächst für den Fall des Neo-Hooke-Stoffgesetzes die Lagrangeschen Spannungen und Steifigkeiten gemäß den Gleichungen 5.117 und 5.118 berechnet werden. Dazu werden die erste und zweite Ableitung der Formänderungsarbeitsdichte Φ nach dem rechten Cauchy-Green-Tensor $\underline{\underline{C}}$ benötigt. Da aber alle Invarianten von $\underline{\underline{b}}$ und $\underline{\underline{C}}$ identisch sind, können diese Ableitungen einfach aus den Ableitungen nach $\underline{\underline{b}}$ (Gl. 5.132) durch Austausch von $\underline{\underline{b}}$ gegen $\underline{\underline{C}}$ gewonnen werden.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}}^G = \alpha J_3^{-2/3} \left\{ \underline{\underline{E}} - \frac{I_1}{3} \underline{\underline{C}}^{-1} \right\} = \alpha J_3^{-2/3} \underline{\underline{E}} - \alpha \frac{J_1}{3} \underline{\underline{C}}^{-1}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}^2}^G = \frac{\alpha}{3} \left\{ -J_3^{-2/3} (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{C}}^{-1} + \underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{E}}) + \frac{J_1}{3} \underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{C}}^{-1} + J_1 (\underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{C}}^{-1})^{S_{24}} \right\}$$

Einsetzen in Gleichung 5.91 bestätigt wiederum das Ergebnis aus Gleichung 5.128.

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{k}}^G &= 4 \left(\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{F}}^T \right)^{S_{24}} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}^2}^G + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{C}}}^G \circ \underline{\underline{C}}^{-1} \right)^{S_{24}} \right\} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^T \circ \underline{\underline{F}} \right)^{S_{24}} \\
 &= 4 \alpha \left\{ -\frac{1}{3} J_3^{-2/3} (\underline{\underline{b}} \circ \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}) + \frac{J_1}{9} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} + \frac{J_1}{3} (\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}})^{S_{24}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\left(J_3^{-2/3} \underline{\underline{b}} - \frac{J_1}{3} \underline{\underline{E}} \right) \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \right\} \\
 &= 4 \alpha \left\{ -\frac{1}{3} \left(\underline{\underline{b}}^G \circ \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{b}}^G \right) + \frac{J_1}{9} \underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{E}} + \left(\underline{\underline{b}}^G \circ \underline{\underline{E}} \right)^{S_{24}} \right\}
 \end{aligned}$$

Für die Lagrangesche Darstellung selbst bietet sich der Übergang auf Gestaltänderungsgrößen an.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \underline{\underline{C}}} &= \frac{2\alpha}{3 J_3^{4/3}} \left\{ - \underbrace{\left(\underline{\underline{E}} \circ \underline{\underline{C}}^{-1} + \underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{E}} \right)} + \frac{J_1}{3} \underbrace{\underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{C}}^{-1}} + J_1 \underbrace{\left(\underline{\underline{C}}^{-1} \circ \underline{\underline{C}}^{-1} \right)^{S_{24}}} \right\} \\ &= \frac{2\alpha}{3 J_3^{4/3}} \left\{ - \underbrace{\underline{\underline{K}}^1 \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \right)} + \frac{J_1}{3} \underbrace{\underline{\underline{K}}^2 \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \right)} + J_1 \underbrace{\underline{\underline{K}}^3 \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \right)} \right\} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\underline{\underline{K}}^1$ können aus Gleichung 5.130 entnommen werden, indem $\underline{\underline{b}}^G$ durch $\underline{\underline{C}}^{-1}$ ersetzt wird.

Die Koeffizienten von $\underline{\underline{K}}^2$ entsprechen dem einfachen Produkt $X_{a^{(6)}} X_{b^{(6)}}$.

$$\begin{aligned} \left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}}^2(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right] &= \left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \{ \underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{X}} \} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right] = \left[X_{a^{(6)}} X_{b^{(6)}} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} X_{1^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{1^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{1^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{1^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{1^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{1^{(6)}} X_{6^{(6)}} \\ X_{2^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{2^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{2^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{2^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{2^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{2^{(6)}} X_{6^{(6)}} \\ X_{3^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{3^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{3^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{3^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{3^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{3^{(6)}} X_{6^{(6)}} \\ X_{4^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{4^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{4^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{4^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{4^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{4^{(6)}} X_{6^{(6)}} \\ X_{5^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{5^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{5^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{5^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{5^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{5^{(6)}} X_{6^{(6)}} \\ X_{6^{(6)}} X_{1^{(6)}} & X_{6^{(6)}} X_{2^{(6)}} & X_{6^{(6)}} X_{3^{(6)}} & X_{6^{(6)}} X_{4^{(6)}} & X_{6^{(6)}} X_{5^{(6)}} & X_{6^{(6)}} X_{6^{(6)}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von $\underline{\underline{K}}^3$ stellen einen Sonderfall der in Gleichung 2.74 angegebenen Koeffizienten dar.

$$\begin{aligned} \left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot \underline{\underline{K}}^3(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right] &= \left[\underline{j}_{a^{(6)}} \cdot (\underline{\underline{X}} \circ \underline{\underline{X}})^{S_{24}} \cdot \underline{j}_{b^{(6)}} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} X_1^2 & \frac{X_6^2}{2} & \frac{X_5^2}{2} & \frac{X_5 X_6}{\sqrt{2}} & X_1 X_5 & X_6 X_1 \\ \frac{X_6^2}{2} & X_2^2 & \frac{X_4^2}{2} & X_4 X_2 & \frac{X_6 X_4}{\sqrt{2}} & X_2 X_6 \\ \frac{X_5^2}{2} & \frac{X_4^2}{2} & X_3^2 & X_3 X_4 & X_5 X_3 & \frac{X_4 X_5}{\sqrt{2}} \\ \frac{X_5 X_6}{\sqrt{2}} & X_4 X_2 & X_3 X_4 & X_3 X_2 + \frac{X_4^2}{2} & \frac{X_5 X_4}{2} + \frac{X_6 X_3}{\sqrt{2}} & \frac{X_4 X_6}{2} + \frac{X_2 X_5}{\sqrt{2}} \\ X_1 X_5 & \frac{X_6 X_4}{\sqrt{2}} & X_5 X_3 & \frac{X_5 X_4}{2} + \frac{X_3 X_6}{\sqrt{2}} & X_1 X_3 + \frac{X_5^2}{2} & \frac{X_6 X_5}{2} + \frac{X_4 X_1}{\sqrt{2}} \\ X_6 X_1 & X_2 X_6 & \frac{X_4 X_5}{\sqrt{2}} & \frac{X_4 X_6}{2} + \frac{X_5 X_2}{\sqrt{2}} & \frac{X_6 X_5}{2} + \frac{X_1 X_4}{\sqrt{2}} & X_2 X_1 + \frac{X_6^2}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6 Anwendungsbeispiele

Das Potential und die Breite der Anwendungsmöglichkeiten der in den vorhergehenden Kapiteln erarbeiteten Methoden und Algorithmen wird anhand zweier FEM-Implementierungen des komplexen MORPH-Stoffgesetzes für inelastisches Materialverhalten bei großen Deformationen und der Entwicklung eines anschaulichen kontinuumsmechanischen Modells belastungsinduzierter anisotroper Materialentfestigung demonstriert.

Ein Anwendungsbeispiel für eine ganze Reihe der in den vorhergehenden Kapiteln vorgestellten Techniken und Zusammenhänge ist die Nachbildung der für technische Gummiwerkstoffe typischen belastungsinduzierten Entfestigung. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf die FEM-Implementierung entsprechender Stoffgesetze und die Erfassung der durch die Entfestigung im Material entstehenden ausgeprägten Anisotropie. Die bezüglich des Entfestigungsaspekts im folgenden zusammengestellten Ergebnisse sind einer Reihe umfassender Veröffentlichungen mit abweichenden Schwerpunkten entnommen.

Die in den Abbildungen 6.2 und 6.17 gezeigten Messungen wurden im Rahmen einer Kooperation (Besdo et al. 2003) am Forschungszentrum TARRC in Hertford (UK) durchgeführt. Die ABAQUS-Simulationen eines rollenden Vollgummirads (Abbn. 6.5 bis 6.7) stammen aus Besdo et al. (2005a). Außerdem werden sie Teil einer detaillierten Darstellung in der vom Autor mitbetreuten Dissertation von Hohl (Hohl 2006) sein. Die FEM-Berechnungen am gekerbten Modellkörper (Abbn. 6.8 bis 6.14) stammen von Besdo (Besdo & Ihlemann 2001). Weitere, hier nicht gezeigte FEM-Berechnungen mit dem MORPH-Stoffgesetz (vergl. Ihlemann 2003a) finden sich in Besdo & Ihlemann (2003b). Schließlich finden sich weitergehende Informationen bezüglich der anisotropen Entfestigung in den Arbeiten Besdo & Ihlemann (2005b) und Ihlemann (2005).

6.1 FEM-Implementierungen des MORPH-Stoffgesetzes

Technische Gummiwerkstoffe stellen durch ihre starke Verformbarkeit, ihr ausgeprägt nicht-lineares Materialverhalten und durch komplizierte inelastische Effekte besonders hohe Anforderungen an eine effiziente kontinuumsmechanische Nachbildung. Dementsprechend ist die Entwicklung geeigneter Modelle und deren Implementierung in die Methode der finiten Elemente kompliziert.

Das typische Materialverhalten wurde bereits ausführlich (Ihlemann 2003a) anhand von einachsigen Zug-/Druck- und einfachen Schermessungen an unterschiedlichen Materialvarianten beschrieben und diskutiert. Ergänzend dazu zeigt Abbildung 6.2 das Verhalten eines weiteren Materials bei einfacher Scherung, bei dem der Probekörper (Abb. 6.1) über mehrere Zyklen hinweg nur zu einer Seite geschert und zwischenzeitlich immer wieder in seine Ausgangsgeometrie zurückgeführt wurde. Dabei wurde jeweils nach einigen Zyklen die größte

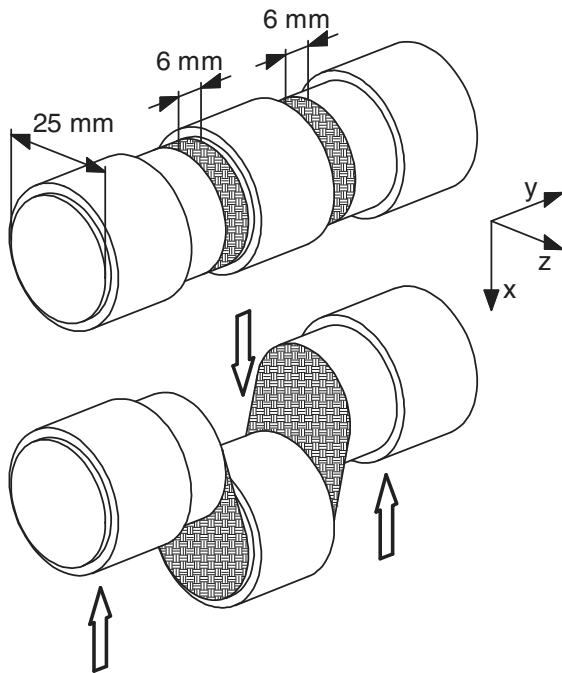


Abbildung 6.1: Probekörpergeometrie und Belastungsart für die einfache Scherung.

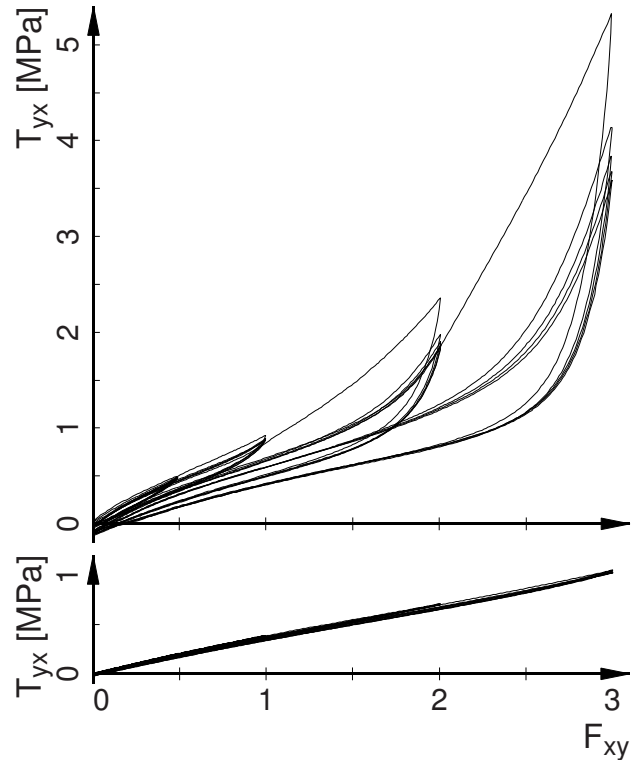


Abbildung 6.2: Messung (TARRC): Einseitige einfache Scherung (vgl. Abb. 6.15) an rußgefülltem (oben) und ungefülltem (unten) Gummi material auf Naturkautschukbasis (Materialrezepturen s. Besdo et al. 2003).

im Zyklus erreichte Scherung erhöht (vergl. Abb. 6.15). Die Verformungsvorgabe erfolgte zickzackförmig mit einer moderaten Schergeschwindigkeit von $\pm 1\% s^{-1}$ ($\dot{F}_{xy} = \pm 0.01 s^{-1}$).

Die Messungen am gefüllten Material ergeben mit den stark nichtlinearen Verläufen, der deutlichen Hysterese und den markante Entfestigungserscheinungen, die sich mit jeder Erhöhung des maximalen Scherwerts intensivieren, ein für Gummiwerkstoffe typisches Bild (vergl. Harwood et al. 1965, Muhr et al. 1999, Klüppel & Schramm 1999). Das ungefüllte Material hingegen zeigt auf dem realisierten niedrigen Spannungsniveau eine erwartungsgemäß schwache Nichtlinearität ohne nennenswerte Hysterese- oder Entfestigungseffekte.

Die auch als Mullins-Effekt bezeichnete Entfestigung wird oft als unwichtiger, nur bei der ersten Belastung eines neu hergestellten Bauteils relevanter Effekt verkannt. Tatsächlich ist dieser Effekt bei den typischerweise inhomogenen Belastungsverteilungen in Bauteilen aber zu allen Zeitpunkten des Betriebs relevant. Die inhomogene Belastungsverteilung verursacht nämlich eine ebenfalls inhomogene Verteilung der Entfestigungsintensität und damit der Steifigkeiten und zum Beispiel auch der Energiedissipationskapazitäten. Dies führt häufig sogar zu einer besseren Lastverteilung innerhalb des Bauteils (vergl. Abbn. 6.8 bis 6.14). Somit ist die Nachbildung der Entfestigung im Stoffgesetz von primärer Bedeutung für eine effiziente Simulation technischer Bauteile.

Für die Nachbildung derartiger Gummiwerkstoffe mit der beschriebenen belastungsinduzierten Entfestigung, den starken Nichtlinearitäten und der Hysterese ist das MORPH-Stoffgesetz

(MORPH $\hat{=}$ Model of Rubber Phenomenology) konzipiert. Dieses Stoffgesetz und die zugrunde liegende physikalische Motivation (Besdo & Ihlemann 2003a, Ihlemann 2003b) wurden bereits detailliert beschrieben (Ihlemann 2003a). Ebenfalls vorgestellt wurden die numerische Umsetzung und Anpassungsergebnisse (Besdo & Ihlemann 2003c) für unterschiedliche Materialien und Belastungsarten. Deshalb soll an dieser Stelle nur ein kurzer Überblick über das Stoffgesetz – speziell im Hinblick auf die Modellierung der Entfestigung – gegeben werden. Hierzu reicht ein vereinfachtes Modell für ideal inkompressibles Materialverhalten aus. Das MORPH-Stoffgesetz wurde ursprünglich in einer Eulerschen Formulierung entwickelt, läßt sich aber mit dem Übertragungsoperator (vergl. Kapitel 4) in standardisierter Form identisch in eine Lagrangesche Darstellung überführen (Ihlemann 2003a). Diese Fassung wird hier verwendet, da die Erweiterungen auf anisotrope Entfestigung im Abschnitt 6.2 auf eine Lagrangesche Formulierung angewiesen ist.

Alle Spannungsanteile unterliegen der Entfestigung. Diese wird (bei isotroper Entfestigung) durch einen einzelnen skalaren Wert, den sogenannten Schleppzeiger C_T^S , beschrieben. Dieser wird in einfacher Weise aus den während des Deformationsprozesses durchlaufenen rechten Cauchy-Green-Tensoren $\underline{\underline{C}}$ berechnet. Dazu wird zunächst zu jedem Zeitpunkt eine Invariante des aktuellen $\underline{\underline{C}}$ -Tensors bestimmt. Bei der Invarianten C_T handelt es sich um die betragsgrößte Eigenwertdifferenz.

$$C_T = \max\left\{|C_I - C_{II}|, |C_{II} - C_{III}|, |C_{III} - C_I|\right\} \quad (6.1)$$

Diese Invariante ist in der unverzerrten Lage Null und sonst immer positiv. Sie entspricht in der Anwendung auf einen Spannungstensor der Vergleichsspannung nach Tresca.

Der Schleppzeiger C_T^S entspricht wiederum dem Maximum aller im zurückliegenden Belastungsprozeß durchlaufenen C_T -Werte.

$$C_T^S(t) = \max[C_T(\tau) ; 0 \leq \tau \leq t] \quad (6.2)$$

Die Lagrangeschen 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen $\underline{\underline{\tilde{T}}}$ setzen sich additiv aus einem dem Neo-Hookeschen Stoffgesetz ähnlichen Grundanteil und den Zusatzspannungen $\underline{\underline{\tilde{T}}^Z}$ zusammen (vergl. Abb. 6.3).

$$\underline{\underline{\tilde{T}}} = \left\{ \left(2\alpha \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{\tilde{T}}^Z} \cdot \underline{\underline{C}} \right)' - p \underline{\underline{E}} \right\} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \quad (6.3)$$

Für die Berechnung der Zusatzspannungen wird unter anderem der Tensor $\underline{\underline{L}}$ benötigt, den der Übertragungsoperator gemäß den Gleichungen 4.20 als Lagrangesches Äquivalent zu einer Zaremba-Jaumann Zeitableitung des linken Cauchy-Green-Tensors liefert.

$$\underline{\underline{L}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C}}^{-1} \cdot \hat{\underline{\underline{C}}} + \hat{\underline{\underline{C}}} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \right) \cdot \underline{\underline{C}} \quad (6.4)$$

Die größte Eigenwertdifferenz L_T dieses Tensors geht in eine Differentialgleichung ein, die die zeitliche Entwicklung $\hat{\underline{\underline{\tilde{T}}^Z}}$ der Zusatzspannungen beschreibt.

$$\hat{\underline{\underline{\tilde{T}}^Z}} = \beta L_T \left(\underline{\underline{\tilde{T}}^H} - \underline{\underline{\tilde{T}}^Z} \right) + \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{\tilde{T}}^Z} \cdot \underline{\underline{C}} \right) \hat{\underline{\underline{C}}}^{-1} \quad (6.5)$$

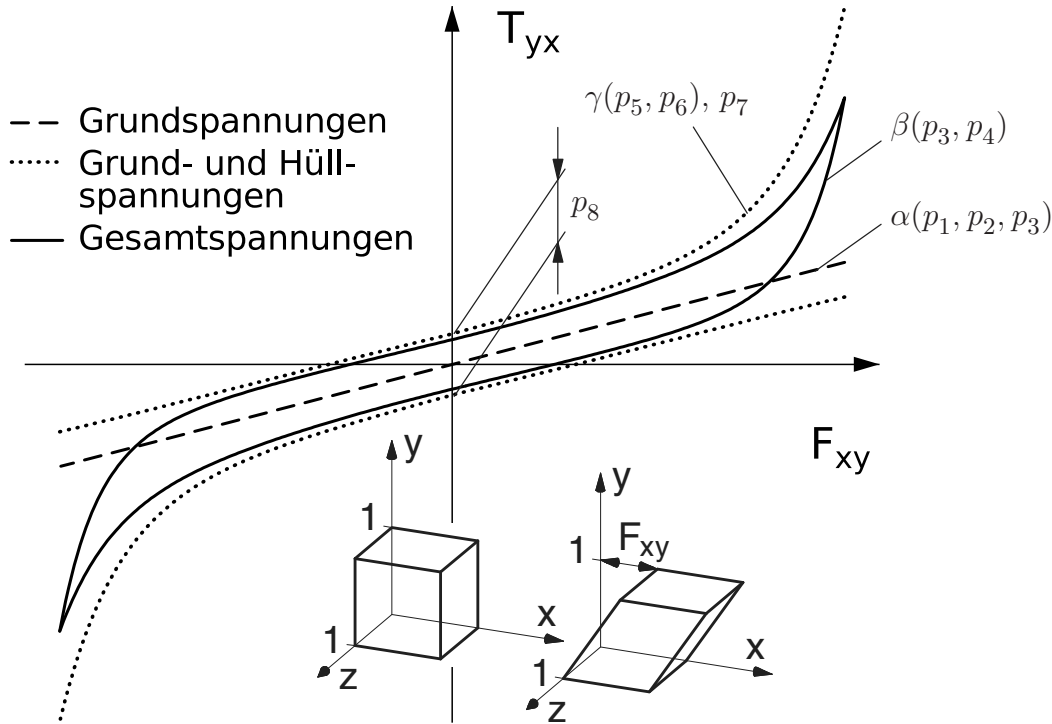


Abbildung 6.3: Prinzipieller Aufbau des MORPH-Stoffgesetzes. Die Gesamtspannungen setzen sich additiv aus einem nur schwach nichtlinearen Grundanteil und Zusatzspannungen zusammen, die wiederum den sogenannten Hüllspannungen zustreben. Beide Spannungsanteile hängen von der Vorreckung ab. Das Stoffgesetz enthält insgesamt acht an das jeweilige Material anzupassende Konstanten.

Bestimmendes Element dieser Differentialgleichung für $\underline{\underline{\tilde{T}}}^Z$ ist der Tensor $\underline{\underline{\tilde{T}}}^H$ der sogenannten Hüllspannungen. Die Zusatzspannungen entwickeln sich stets in Richtung der aktuellen Hüllspannungen, die wiederum als eine Tensorfunktion gemäß Gleichung 2.49 von $\underline{\underline{L}}$ (Gl. 6.4) berechnet werden. Dabei ist $\underline{\underline{L}}$ zwar im allgemeinen unsymmetrisch, aber als Ergebnis einer Anwendung des Übertragungsoperators in jedem Fall diagonalähnlich (s. S. 95) und damit als Argument einer Tensorfunktion gemäß Gleichung 2.49 geeignet.

$$\underline{\underline{\tilde{T}}}^H = \left\{ \gamma \exp \left(\left(p_7 \frac{\underline{\underline{L}}}{L_T} \frac{C_T}{C_T^S} \right) \right) + p_8 \frac{\underline{\underline{L}}}{L_T} \right\} \cdot \underline{\underline{C}}^{-1} \tag{6.6}$$

Die Hüllspannungen enthalten den Quotienten aus dem aktuellen C_T -Wert und dem Schleppzeiger C_T^S , der die Entfestigung repräsentiert. Darüber hinaus geht der Schleppzeiger in die drei skalaren Vorfaktoren α , β und γ (s. Abb. 6.3) ein und beeinflusst auf diesem Weg alle Teile des Stoffgesetzes.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= p_1 + p_2 f(p_3 C_T^S) \\ \beta &= p_4 f(p_3 C_T^S) \\ \gamma &= p_5 C_T^S \left(1 - f(C_T^S/p_6) \right) \end{aligned} \right\} \text{ mit: } f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{6.7}$$

Damit ist das MORPH-Stoffgesetz mit seinen acht an das jeweilige Material anzupassenden Konstanten p_1, p_2, \dots, p_8 bereits vollständig.

Dieses Stoffgesetz zielt bereits in seiner Grundkonzeption auf den Einsatz innerhalb der Methode der Finiten Elemente ab und wurde sowohl in das kommerzielle FEM-Programmpaket ABAQUS als auch in spezielle FEM-Forschungsprogramme implementiert. Bei der Entwicklung wurde besonderes Augenmerk auf die Erfassung inhomogener Spannungs- und Verzerrungsverteilungen im Inneren technischer Bauteile und auf die Simulation periodischer Prozesse gelegt.

Abbildung 6.4 zeigt das Ergebnis einer automatischen Anpassung der acht Stoffgesetzparameter an die in Abbildung 6.2 gezeigten Schermessungen. Zur Parameteroptimierung wurden hierbei (standardgemäß) nur die besonders wichtigen, sogenannten stationären Zyklen, die sich nach mehreren Wiederholungen der gleichen Dehnungsgrenzwerte einstellen, herangezogen.

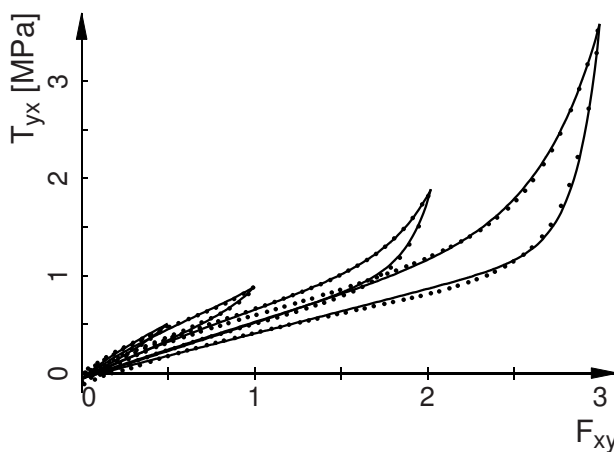


Abbildung 6.4: Stationäre Zyklen der einseitigen Scherung am gefüllten Material (Punkte, s. Abb. 6.2) und MORPH-Simulation des gleichen Prozesses mit entsprechend angepassten Materialparametern (durchgezogene Linien).

Das MORPH-Stoffgesetz wurde mit Hilfe einer geeigneten Adaptionstechnik (Besdo & Ihlemann 2005a, vergl. Abschnitt 5.5, insbesondere die G-ln. 5.81 - 5.83) von Hohl (Hohl 2006) in die Benutzerschnittstelle UMAT des FEM-Programmpakets ABAQUS implementiert. Ein einfaches Beispielsystem zeigt die Abbildung 6.5. Ein Vollgummirad aus zuvor unbelastetem Material auf einer starren Felge wird durch eine vertikale Achslast, beispielsweise das Gewicht eines Fahrzeugs, auf den Untergrund gedrückt. Im Kontakt zwischen Rad und Untergrund wird einfache Coulombsche Reibung simuliert. Die vorgenommene Unterteilung der Bauteilgeometrie in Elemente ist recht grob und läßt nur qualitative Rückschlüsse zu. Deshalb wird auf die Angabe von Zahlenwerten zu den verteilten Größen verzichtet.

Die dargestellten Grautöne geben die Verteilung der Entfestigung (Schleppzeiger C_T^S) wieder. Erwartungsgemäß treten nennenswerte Verformungen und damit einhergehend Materialentfestigungen nur in dem Bereich zwischen Felge und Untergrund auf. Die Verformungen bleiben allerdings vergleichsweise klein, extreme lokale Überhöhungen treten nicht auf. Bei profilierten Reifen mit im Gummi eingelagerten Festigkeitsträgern ist unter normalen Betriebsbedingungen (lokal) mit wesentlich größeren Verzerrungen zu rechnen.

Dem Rad wurde im weiteren Verlauf der Simulation unter gleichbleibender vertikaler Achslast eine konstante Horizontalgeschwindigkeit der Felge aufgezwungen. Durch die Reibung

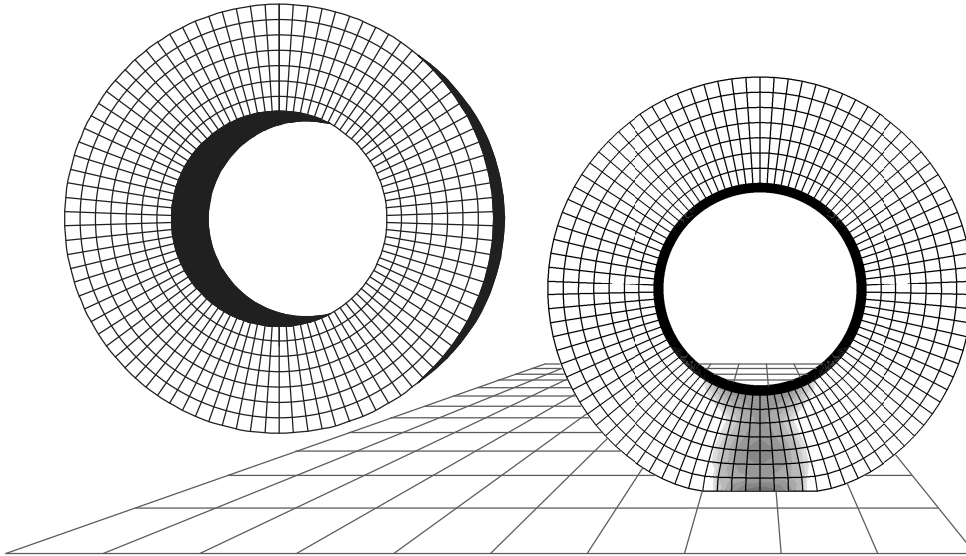


Abbildung 6.5: ABAQUS-Simulation (Hohl 2006) eines stillstehenden Vollgummirads unter vertikaler Achslast. Die als Starrkörper modellierte Felge wurde ausgeblendet. Aufgetragen ist die Verteilung der Entfestigung des zuvor unbelasteten Materials.

zwischen Rad und Untergrund setzt unter diesen Bedingungen eine Rollbewegung ein, obwohl weder ein Antriebs- noch ein Bremsmoment aufgebracht wird. Diese als freies Rollen bezeichnete Betriebsart entspricht der Situation eines nicht angetriebenen Rades eines geradlinig, mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Fahrzeugs. Bei einem angetriebenen Rad wäre hingegen zur Aufrechterhaltung der konstanten Geschwindigkeit gegen Verluste durch Luftwiderstand und Reibung ein Antriebsmoment nötig. Bei Kurvenfahrten kämen Belastungskomponenten parallel zur Achse hinzu.

Abbildung 6.6 zeigt die Entwicklung der Entfestigungsverteilung während der ersten Umdrehung beim freien Rollen. Dieser Vorgang ist technisch von untergeordnetem Interesse, läßt aber eine gute Kontrolle der Funktionsweise des Simulationswerkzeugs zu. Während das Rad nach rechts abrollt, treten immer neue Materialbereiche in den stark verformten Bereich zwischen Felge und Untergrund und werden dabei entfestigt. Andererseits behalten die bereits entfestigten Materialbereiche, die den stark verformten Bereich verlassen haben, dennoch den erreichten Entfestigungszustand bei.

Bei den vergleichsweise kleinen Verzerrungen in diesem Beispiel stellt sich bereits nach wenig mehr als einer vollen Umdrehung ein stationärer, gleichbleibender Zustand ein. Sobald dieser Zustand erreicht ist, ändert sich somit die Entfestigung der einzelnen Materialpunkte nicht mehr. Die Positionen, die im stationären Zustand während einer Umdrehung von einem Materialteilchen durchlaufen werden, bilden eine geschlossene Linie, die eine Analogie zu den Stromlinien der Strömungsmechanik darstellt. Alle Teilchen, deren Stromlinien zusammenfallen, weisen die gleiche Entfestigung auf. Die Entfestigungen unterschiedlicher Stromlinien weichen aber durchaus voneinander ab.

Abbildung 6.7 verdeutlicht diesen sehr wichtigen Aspekt. Bereits in der Seitenansicht sind Entfestigungsunterschiede auf unterschiedlichen Radien erkennbar. Noch weit größere Inhomogenitäten der Entfestigungsverteilung werden aber im Querschnitt erkennbar. Die ange-

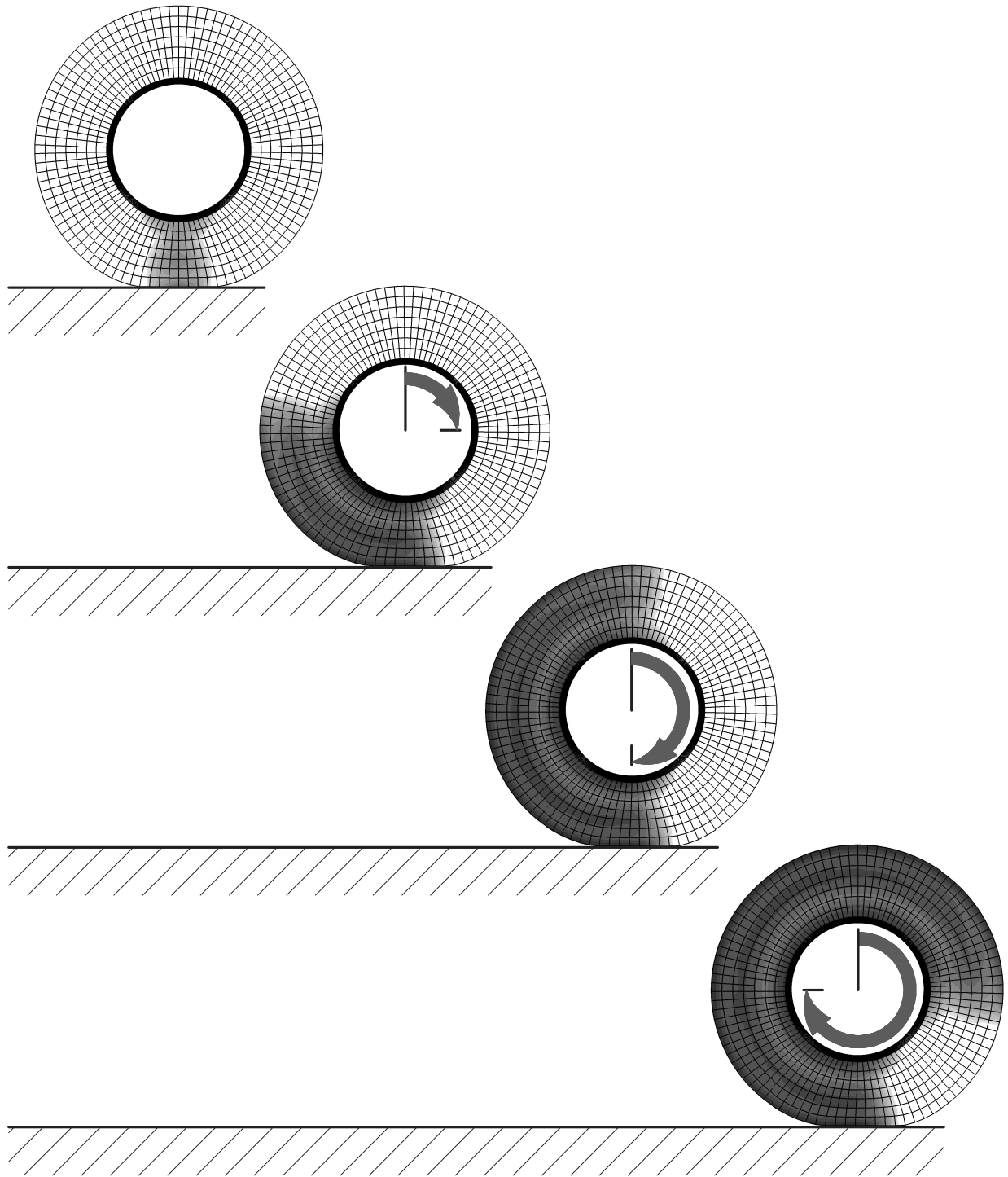


Abbildung 6.6: ABAQUS-Simulation (Hohl 2006): Entwicklung der Entfestigungsverteilung zu Beginn des freien Rollens.

zeigten Werte des Schleppteigers entsprechen einem Wertebereich von etwa $C_T^S = 0,33$ bis $C_T^S = 0,55$, wobei sich die höchsten Werte in der Mitte des Querschnitts finden. Die auffallend niedrigen Werte in der Nähe der Felge und in der Nähe des Kontakts zur Fahrbahn erklären sich aus den in diesen Bereichen sehr eingeschränkten Möglichkeiten des Materials zur Gestaltänderung. Die vertikale Achslast führt in diesen Bereichen stattdessen zu einem überhöhten hydrostatischen Druck, der allerdings im Modell keinerlei Einfluß auf die Ent-

wicklung der Entfestigung hat.

Umgerechnet auf einachsige Belastungen entspricht der untere Grenzwert der Entfestigung von $C_T = 0,33$ einer Längung um 23%, bzw. einer Stauchung um 21%. Der Maximalwert von $C_T = 0,55$ entspricht hingegen einer Längung um 40%, bzw. einer Stauchung um 33%. In Anbetracht dieser sehr stark differierenden Entfestigungen ist auch im stationären Betrieb mit sehr unterschiedlichen lokalen Steifigkeiten und Dämpfungseigenschaften zu rechnen. Gleichzeitig verdeutlichen die wenig entfestigten Bereiche in der Nähe der Felge, daß selbst eine gezielte, wie auch immer geartete Vorreckung des Bauteils kaum zu einer annähernd gleichmäßigen Entfestigung führen kann. Derartige hypothetische Vorreckungstechniken werden manchmal als Argument gegen die Notwendigkeit der Nachbildung der Entfestigung im Stoffgesetz angeführt.

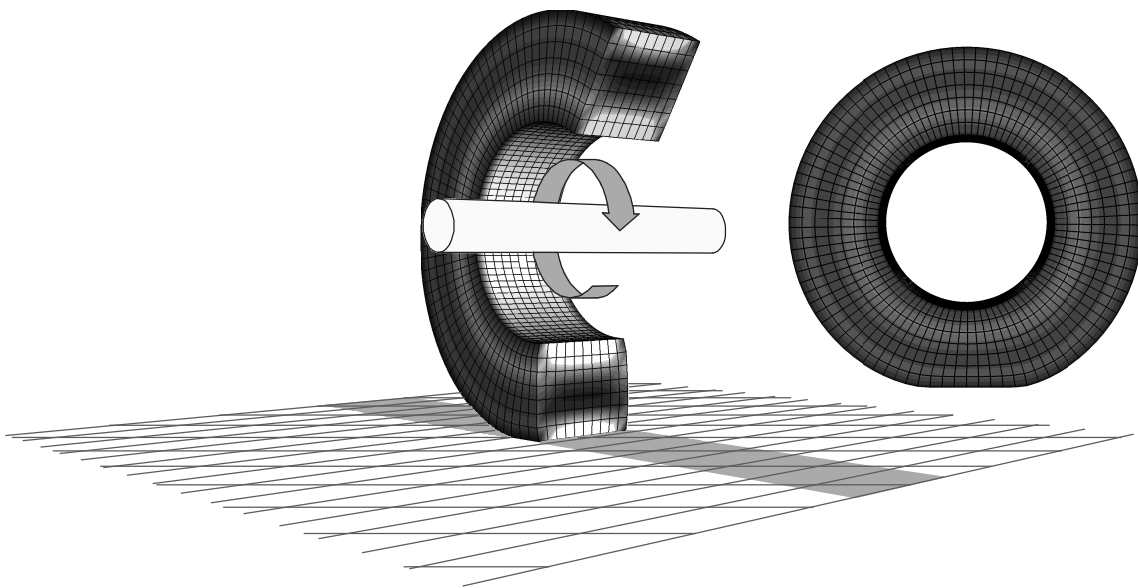


Abbildung 6.7: ABAQUS-Simulation (Hohl 2006): Entfestigungsverteilung im stationären Zustand. Besonders im Querschnitt wird die charakteristische Inhomogenität der Verteilung deutlich. Die Schleppzeigerwerte liegen hier im Bereich zwischen $C_T^S = 0,33$ und $C_T^S = 0,55$.

Die Bedeutung einer solchen inhomogenen Entfestigung für die Belastungsverteilung im Bauteil läßt sich sehr gut an der in Abbildung 6.8 dargestellten Kerbprobe untersuchen. Die Inhomogenität tritt infolge der halbkreisförmigen Kerbe auf, wobei die Intensität der zu erwartenden Inhomogenitäten im Vergleich zu den Verhältnissen in den meisten technischen Bauteilen relativ gering ist.

Die Berechnungen an der Kerbprobe (Besdo & Ihlemann 2001) wurden mit Hilfe eines von Besdo entwickelten FEM-Programms durchgeführt. Dieses Programm verwendet eine Lagrangesche Materialsteifigkeit (vergl. Abschnitt 5.4).

Abbildung 6.9 zeigt die in der Simulation erreichte Verformung der Kerbprobe. Dabei haben sich die beiden Endquerschnitte um etwa 55% ihres ursprünglichen Abstands voneinander entfernt. Während sich im Kerbgrund die stärksten lokalen Verzerrungen einstellen, bleiben die Kerbränder nahezu unverzerrt.

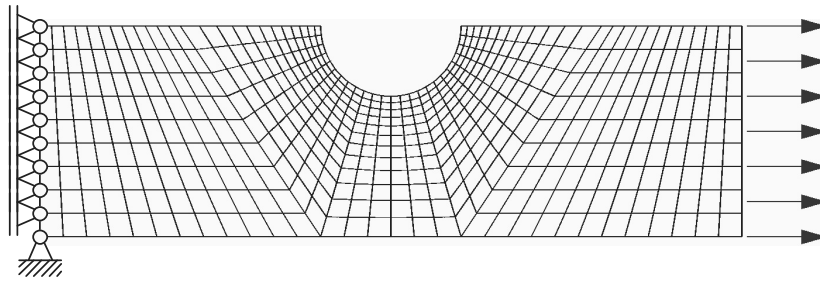


Abbildung 6.8: Netzeinteilung, Belastung und Lagerung eines einfachen Modells einer Kerbprobe. Die Berechnungen erfolgten unter der zusätzlichen Bedingung ebener Formänderung.

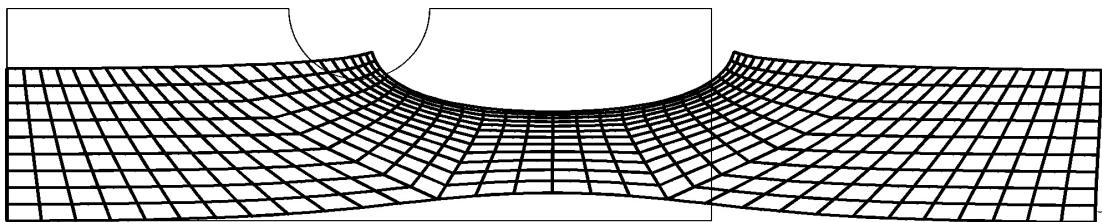


Abbildung 6.9: Inhomogene Verformung der Kerbprobe unter Maximallast. Die stärksten Verzerrungen treten im Kerbgrund auf.

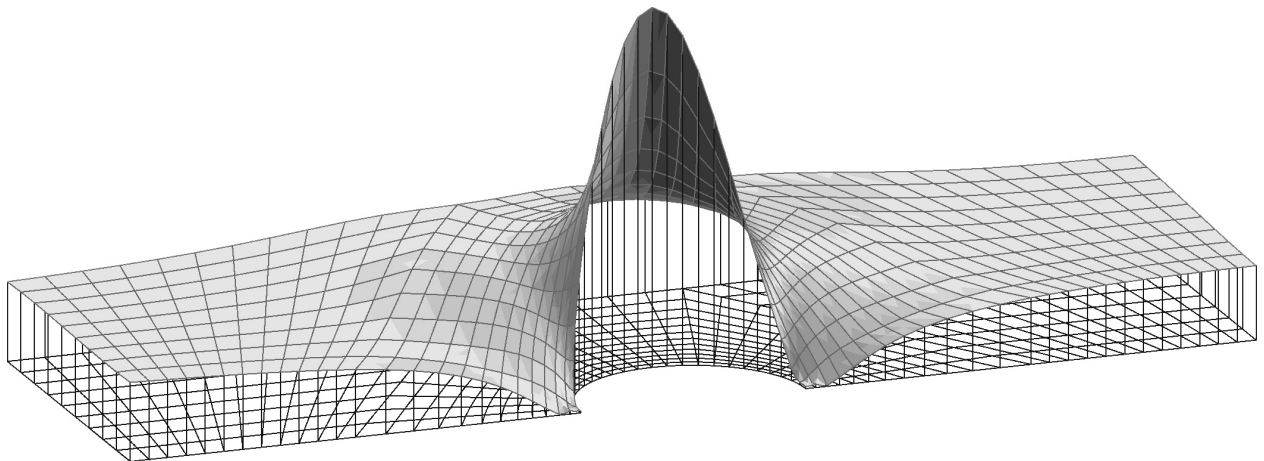


Abbildung 6.10: Vergleichsspannungen nach von Mises in der Kerbprobe bei Maximallast.

Dies zeigt sich ebenfalls in der Verteilung der Vergleichsspannungen nach von Mises in Abbildung 6.10. Während im Bereich der Kerbe starke Spannungsunterschiede auftreten, gleichen sich diese Unterschiede mit zunehmendem Abstand von der Kerbe schnell aus (Prinzip von Saint-Venant), so daß die Spannungsverteilungen in den beiden Endquerschnitten bereits nahezu perfekt konstant sind.

Diese Ergebnisse sollen nun mit einer Simulation mit einem modifizierten Stoffgesetz verglichen werden. Die Modifikation besteht darin, daß die Beeinflussung des Entfestigungsgrades durch die Belastung unterbleibt, und stattdessen der die Entfestigung repräsentierende Schleppezeiger für die gesamte Struktur und den gesamten Belastungsprozeß auf einen gemeinsamen konstanten Wert festgelegt wird. Für den ersten Vergleich wird der in der Originalberechnung erreichte Maximalwert des Schleppezeigers genutzt. Dieser abermals im Kerbgrund

auf tretende Maximalwert beträgt $C_T^S = 5,8$ und entspräche einer einachsigen Dehnung um etwa 150%. Das entfestigungsfreie Modellmaterial ist folglich außer im Kerbgrund in allen Bereichen weicher als das Originalmodell. Dementsprechend stellt sich bei gleicher äußerer Last eine deutlich stärkere Verformung der Kerbprobe ein (s. Abb. 6.11).

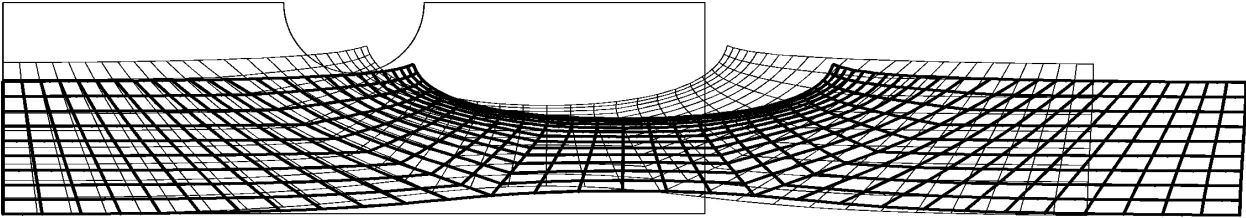


Abbildung 6.11: Verformung der Kerbprobe bei fixiertem Schleppzeiger: $C_T^S = 5,8$ (dicke Linien) im Vergleich zur Originalverformung aus Abbildung 6.9 (dünne Linien).

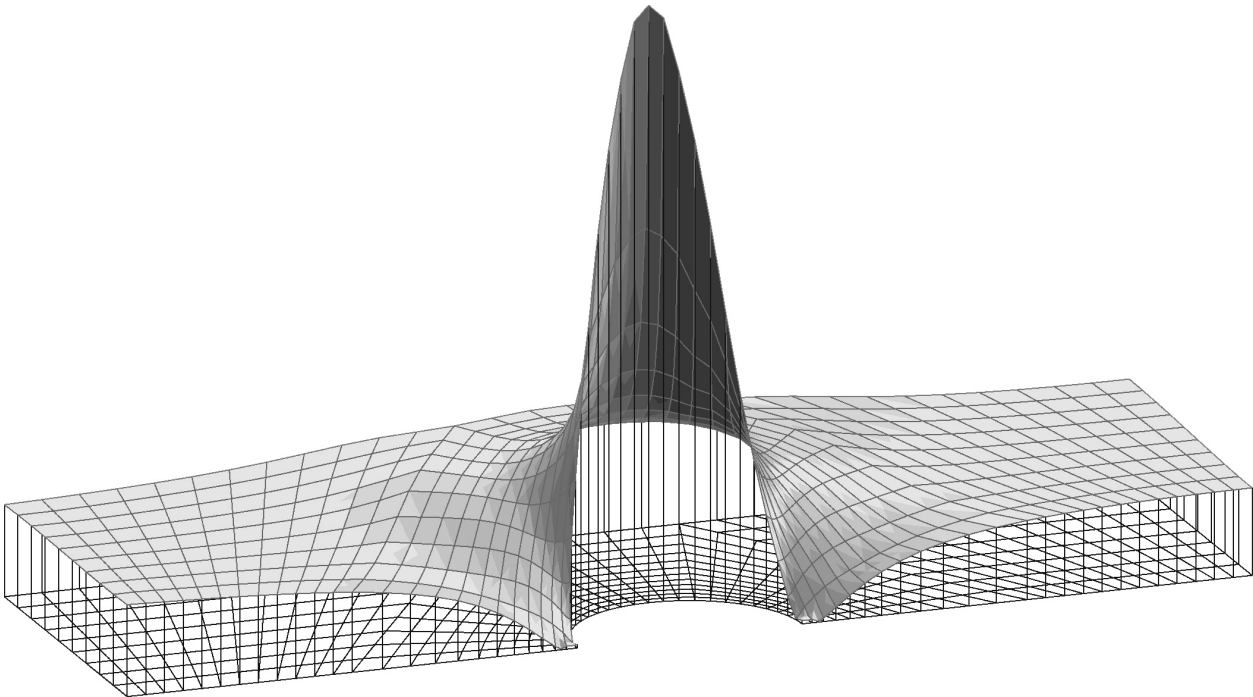


Abbildung 6.12: Spannungsverteilung bei fixiertem Schleppzeiger: $C_T^S = 5,8$. Die Skalierung ist identisch mit derjenigen von Abbildung 6.10.

Die stärkere Gesamtverformung allein kann allerdings nicht die wesentlich höheren Maximalspannungen bei gleicher äußerer Last erklären, die bei der Rechnung mit fixiertem Schleppzeiger auftreten (vergl. Abbn. 6.12 und 6.10). Die Maximalspannung im Kerbgrund ist bei fixiertem Schleppzeiger um mehr als 65% größer als bei der Rechnung mit Entfestigung, obwohl gerade im Kerbgrund die verwendeten Schleppzeigerwerte übereinstimmen. Der Grund hierfür liegt in den weniger belasteten Bereichen des Querschnitts unterhalb der Kerbe, die durch den dort zu hohen Schleppzeigerwert eine zu geringe Steifigkeit aufweisen und somit nur einen geringeren Teil der Gesamtlast tragen können. Zusammenfassend liefert somit die Simulation mit fixiertem Schleppzeiger neben stark abweichenden Gesamtverformungen und Spitzenspannungen auch eine falsche Charakteristik der Spannungsverteilung.

Um ein besseres Ergebnis zu erhalten, kann der Versuch unternommen werden, den Schleppzeiger auf einem anderen, niedrigeren Wert zu fixieren. Abbildung 6.13 zeigt das Resultat eines solchen Versuches mit einem bezüglich der Verformung der Außenkontur optimierten Schleppzeigerwert.

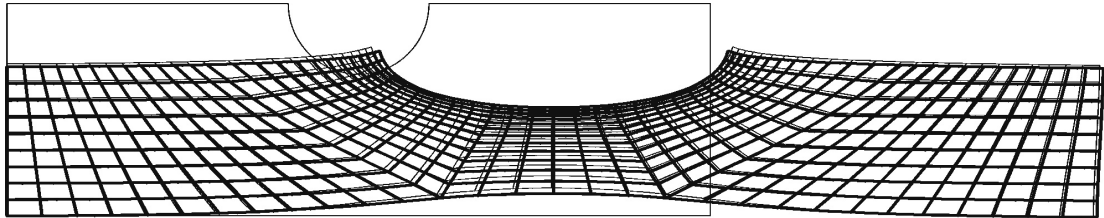


Abbildung 6.13: Verformung der Kerbprobe bei fixiertem Schleppzeiger: $C_T^S = 2,5$ (dicke Linien) im Vergleich zur Originalverformung aus Abbildung 6.9 (dünne Linien).

Trotz dieser Optimierung, die bei praktischen Problemstellungen natürlich nicht möglich ist, da dort die äußere Verformung erst als Teilergebnis der Simulation verfügbar wird, weichen die resultierenden Spannungen abermals stark von der Originalrechnung ab (vergl. die Abbn. 6.14 und 6.10)

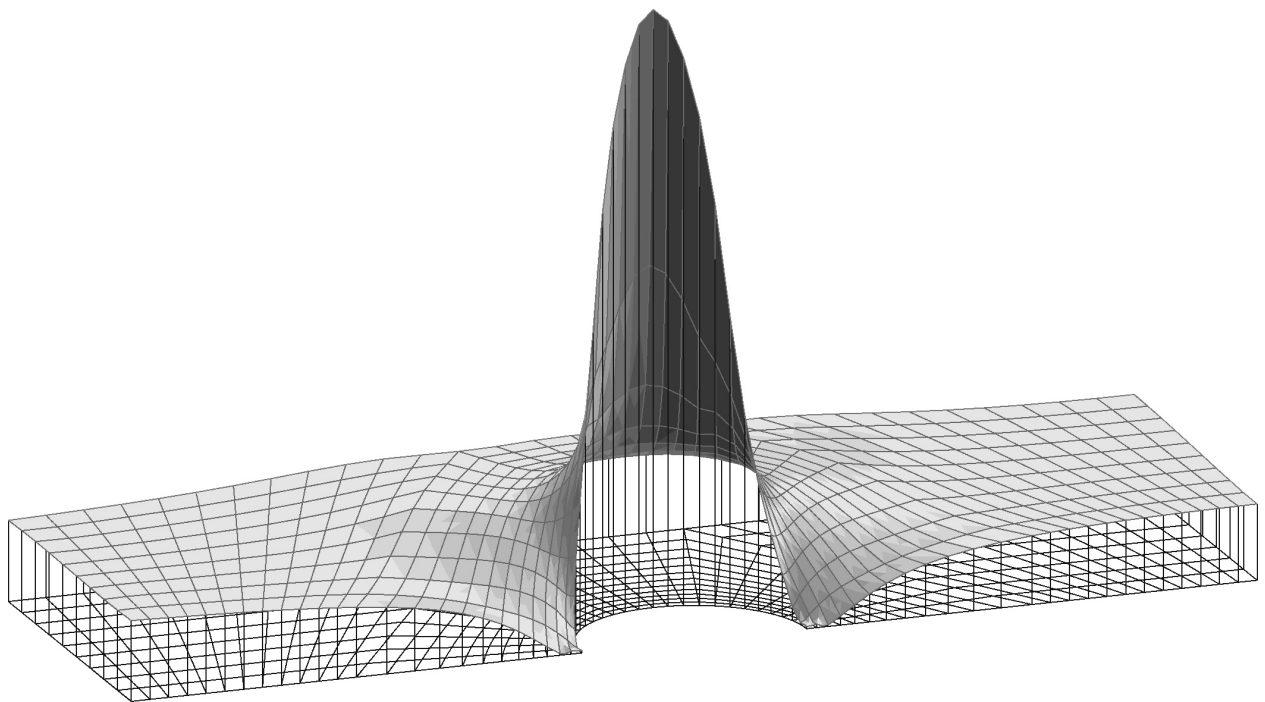


Abbildung 6.14: Spannungsverteilung bei fixiertem Schleppzeiger: $C_T^S = 2,5$. Die Skalierung ist identisch mit denjenigen der Abbildungen 6.10 und 6.12.

Der verwendete Schleppzeigerwert beträgt in diesem Fall $C_T^S = 2,5$ und entspräche einer einachsigen Dehnung um etwa 75%. Dementsprechend wird das Material im Kerbgrund wesentlich zu steif abgebildet. Daraus resultiert eine Spannungsverteilung, die derjenigen mit dem höheren, fixierten Schleppzeigerwert sehr ähnlich ist und damit ebenso drastisch von der Originalverteilung abweicht. Somit sind für beide Varianten mit fixierten Schleppzeigern

die Maximalspannungen wesentlich zu hoch und die Charakteristik der Spannungsverteilung verfälscht.

6.2 Belastungsinduzierte Anisotropie

Eine zusätzliche Schwierigkeit bei der Erfassung des mechanischen Verhaltens von Gummi-materialien stellt die Abhängigkeit des Mullins-Effekts von der relativen Ausrichtung der Vorreckung und der aktuellen Deformation dar. Diese Eigenschaft ist mit einer ausgeprägten belastungsinduzierten Anisotropie verknüpft. Dies wird bereits bei einfachen Scherbelastungen deutlich, sofern das Experiment in der in Abbildung 6.15 beschriebenen Weise durchgeführt wird. Diese Versuchsdurchführung bietet eine zuverlässige und einfach durchführbare Gelegenheit, die Richtungsabhängigkeit der Entfestigung experimentell zu belegen und zu analysieren. Dies zeigt außerdem, daß die Anisotropieeffekte auch in vielen industriellen Anwendungsfällen von entscheidender Bedeutung sein können, da beim Design technischer Bauteile innerhalb von Gummiwerkstoffen bevorzugt Scherbelastungen generiert werden.

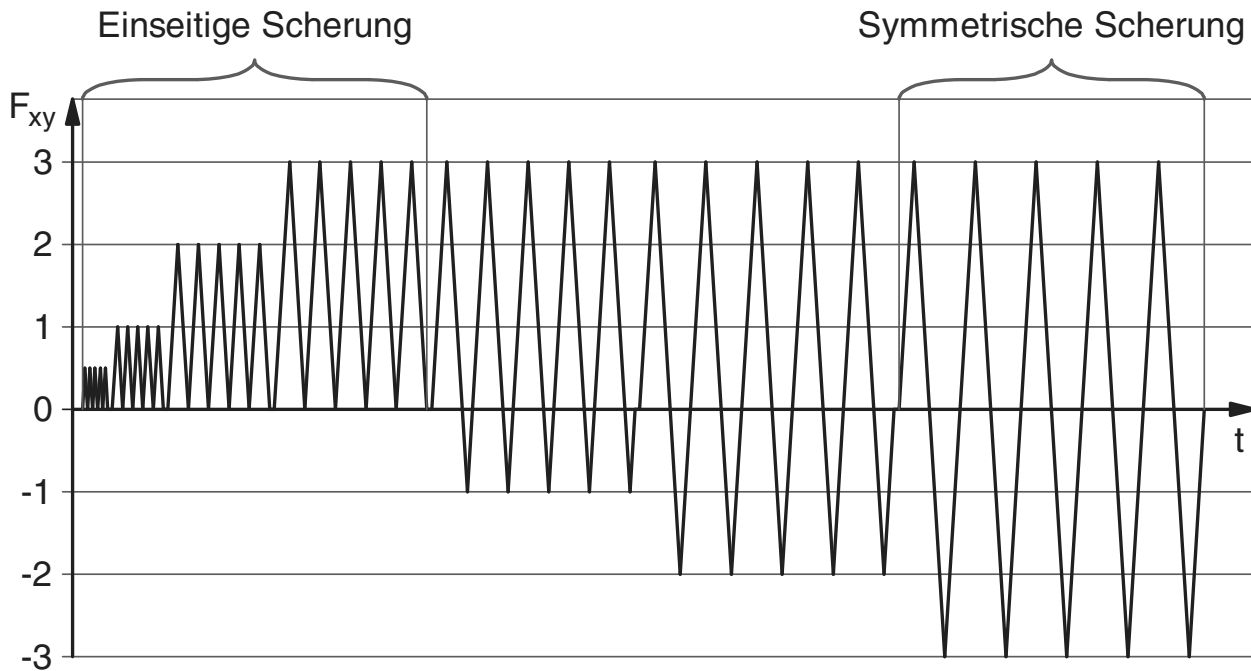


Abbildung 6.15: Scherversuchsführung nach Muhr (s.a. Besdo et al. 2003) zur Untersuchung (an)isotroper Entfestigung. In der Anfangsphase wird mit wachsenden Amplituden stets in die gleiche Richtung ($F_{xy} \geq 0$) geschert. Im Anschluß daran finden auch Scherungen in die Gegenrichtung statt. Bei einem isotrop entfestigenden Material wäre in dieser zweiten Phase kein Entfestigungsfortschritt zu erwarten.

Die Ergebnisse des ersten Teil des Experiments wurden bereits in Abbildung 6.2 dargestellt. In diesem ersten Teil wird bereits der höchste Betrag des Schermaßes $F_{xy} = 3$ erreicht. Bei einer verzerrungsgesteuerten isotropen Modellierung der Entfestigung wie im MORPH-Stoffgesetz ist somit nach Abschluß der ersten Versuchsphase die Entfestigung bereits abgeschlossen (vergl. Abb. 6.16).

Das reale Material zeigt hingegen ein ganz anderes Verhalten (s. Abb. 6.17). Hier werden zu den einzelnen Grenzwerten ähnliche Spannungsspitzen erreicht wie bei der vorhergehenden

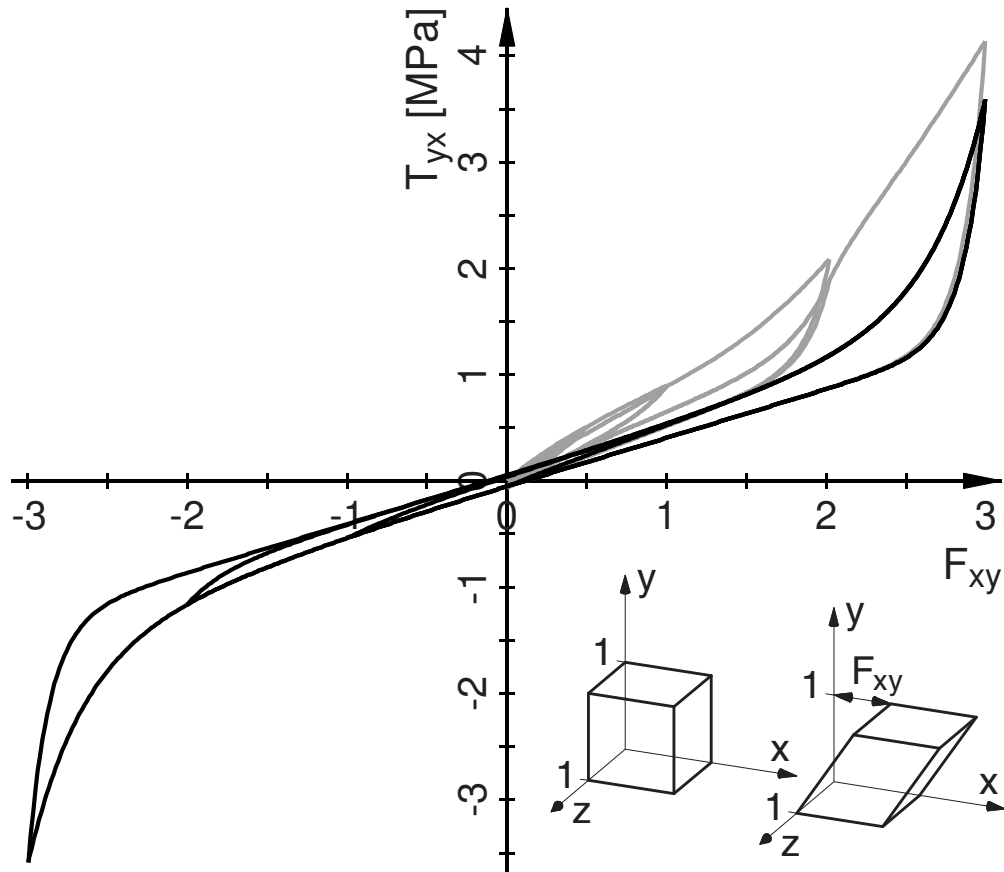


Abbildung 6.16: MORPH-Simulation (isotrope Entfestigung) des gesamten Scherversuchs gemäß Abb. 6.15 (grau: 1. Phase - einseitige Scherung, schwarz: 2. Phase - beidseitige Scherungen). Nach dem ersten Erreichen der maximalen Scherung ist die Entfestigung abgeschlossen.

einseitigen Scherung. Offensichtlich findet eine weitergehende Entfestigung statt. Die einseitige Scherung zu Beginn hat hingegen nur einen geringen Einfluß auf die Reaktion auf Belastungen in der Gegenrichtung (\rightarrow Anisotropie).

Diese deutlichen Diskrepanzen machen deutlich, daß in vielen technisch relevanten Fällen für die realitätsnahe Simulation eine Berücksichtigung der anisotropen Entfestigung im Stoffgesetz notwendig sein wird. Für eine Beschreibung der Anisotropie ist die Verwendung der Invarianten C_T als alleinige Basis für den Schleppzeiger ungeeignet. Statt dessen müssen Anisotropietensoren herangezogen werden, und die Entwicklung dieser Tensoren mit dem ablaufenden Belastungsprozeß muß geeignet beschrieben werden.

Sofern ein Material durch eine innere Struktur eine gleichbleibende Anisotropie aufweist, kann die Richtungsabhängigkeit in einer Lagrangeschen Beschreibungsweise durch einen konstanten Anisotropie- bzw. Strukturtenor beschrieben werden. Ein Beispiel hierfür ist das von Kaliske et al. (2003) vorgestellte elastische Stoffgesetz für den Verbund eines Matrixmaterials mit eingelagerten Festigkeitsträgern. Elastische Modelle kommen nur für rein strukturbedingte Anisotropie in Frage. Eine belastungsinduzierte Anisotropie ist hingegen immer mit inelastischen Vorgängen verbunden.

Zur Beschreibung belastungsinduzierter Anisotropie schlagen Holzapfel et al. (1999) einen

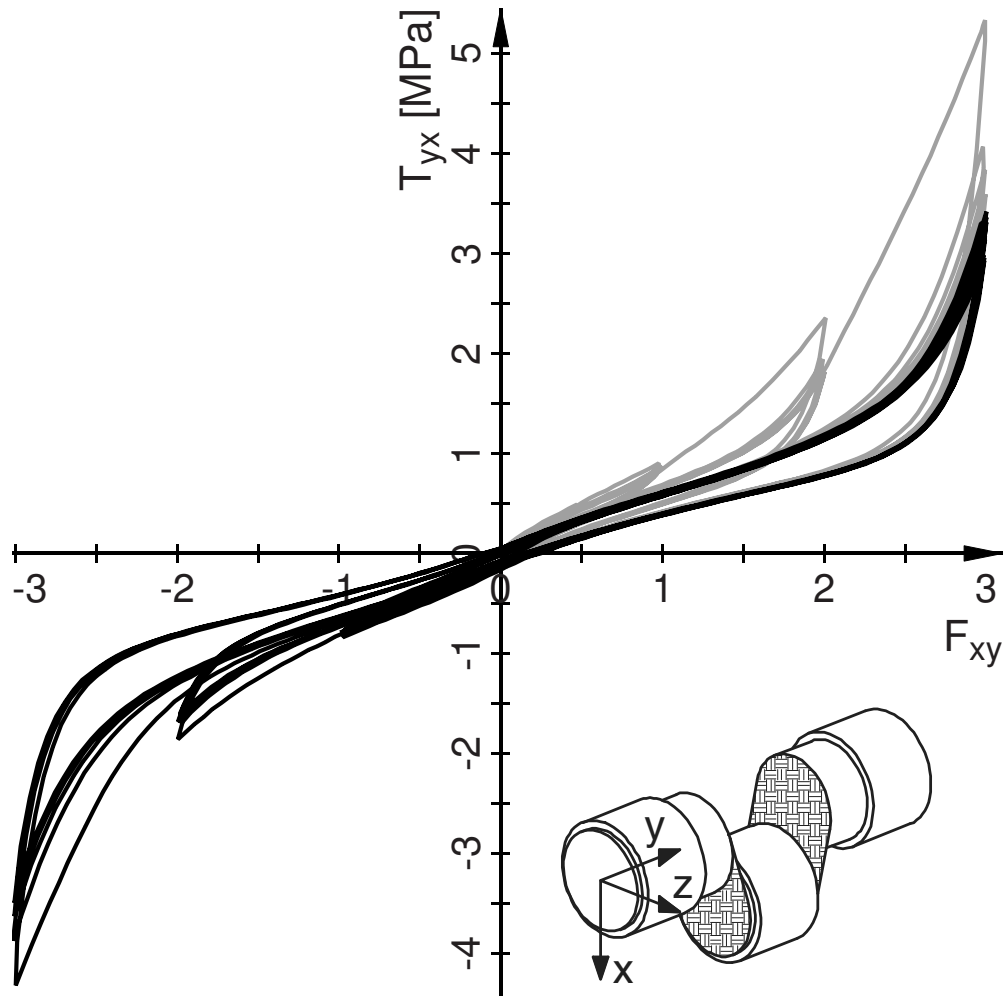


Abbildung 6.17: Messung (TARRC): Vollständiger Scherversuch gemäß Abb. 6.15 (grau: 1. Phase - einseitige Scherung, vergl. Abb. 6.2) am gefüllten Material. Die zweite Phase zeigt einen ähnlich starken Entfestigungsfortschritt wie die erste. Mit jeder Absenkung des unteren Grenzwerts steigt die Entfestigung sprunghaft. Somit zeigt das Material eine ausgeprägt anisotrope Entfestigung.

Ansatz mit drei Schädigungsvariablen vor, die in den drei Verzerrungseigenrichtungen jeweils eine ähnliche Funktion erfüllen wie der Schleppzeiger im MORPH-Stoffgesetz. Für die Fälle sich sprunghaft ändernder Eigenrichtungen oder vorübergehend zusammenfallender Eigenwerte scheint eine Erweiterung dieser Modellierung notwendig zu sein. Einen ganz anderen Ansatz verfolgen Pawelski (1998 u. 2001) und Miehe et al. (2004). Diese Autoren verzichten auf eine tensorielle Darstellung ihrer Stoffgesetze und berechnen statt dessen die Reaktion eines eindimensionalen Stoffgesetzes in einer den Genauigkeitsanforderungen genügenden Vielzahl repräsentativer Raumrichtungen. Eine weitere Modellierungsalternative deutet Böhl (2005) als Ausblick an. Er sieht vor, innerhalb spezieller Einheitszellen, deren Kanten Bündel von Polymerketten repräsentieren, den einzelnen Ketten oder Kettenbündeln eine individuelle Entfestigungsentwicklung zuzuordnen. Bereits etablierte Modelle anderer Materialien mit belastungsinduzierter Anisotropie, insbesondere solche der Plastizitätstheorie, enthalten Anisotropietensoren nicht nur zweiter sondern sogar vierter Stufe (z.B. Besdo 1998). An ei-

nigen Stellen werden sogar Tensoren sechster Stufe angedacht. Besonders großen Aufwand erfordert es hierbei, geeignete Entwicklungsgleichungen für die Tensorkoeffizienten zu finden und die zugehörigen Materialparameter eindeutig zu identifizieren.

Um derartige Probleme im vorliegenden Fall auf einem möglichst niedrigen Niveau zu halten, wird eine Formulierung angestrebt, die zunächst möglichst wenige zusätzliche Freiheiten (und damit zusätzliche Materialkonstanten) einbringt, die aber die wichtigsten Aspekte der zu beschreibenden Effekte bereits wiedergibt. Je nach Bedarf können dann Generalisierungen dieses Ansatzes vorgenommen werden. Das modifizierte Stoffgesetz soll in seiner Struktur dem vorliegenden Stand mit isotroper Entfestigung möglichst ähnlich sein, damit der vorliegende Erfahrungsschatz weiterhin genutzt werden kann. Dementsprechend soll lediglich der Schleppzeiger C_T^S durch einen Wert ersetzt werden, der bereits den benötigten Vergleich zwischen den Richtungen der Vorreckung und den aktuellen Verformungsrichtungen enthält. Ausgangspunkt hierfür ist das Verhältnis von C_T zum Schleppzeiger C_T^S , das in der Gleichung 6.6 für die Hüllspannungen enthalten ist. Dieser skalare Quotient wird nun durch eine noch näher zu bezeichnende, ebenfalls skalarwertige Funktion von $\underline{\underline{C}}$ und dem Kehrwert eines 'Schlepptensors' $\underline{\underline{H}}$ ersetzt.

$$\frac{C_T}{C_T^S} = C_T \cdot \left(C_T^S\right)^{-1} \rightarrow f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1}) \quad (6.8)$$

Hier tritt somit der vollständige Tensor $\underline{\underline{C}}$ an die Stelle seiner eigenen Invarianten C_T . An allen Stellen im Stoffgesetz, an denen nicht das Verhältnis von C_T zum Schleppzeiger, sondern der Schleppzeiger allein auftritt, wird der Ausdruck $f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1})$ in angepaßter Form zum Einsatz kommen.

$$C_T^S = \frac{C_T}{\frac{C_T^S}{C_T}} \rightarrow \frac{C_T}{f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1})} \quad (6.9)$$

Bei der Berechnung des Schleppzeigers (Gl. 6.2) wurde der Maximalwert des zeitlichen Verlaufs von C_T gebildet. Entsprechend der Substitution von C_T durch den vollständigen Tensor $\underline{\underline{C}}$ in Gleichung 6.8 sollte dann der Schlepptensor $\underline{\underline{H}}$ (Anisotropietensor) das Maximum aller bisher durchlaufenen $\underline{\underline{C}}$ -Tensoren sein.

$$\begin{aligned} \text{bisher: } C_T^S(t) &= \max[C_T(\tau) ; 0 \leq \tau \leq t] \\ \rightarrow \underline{\underline{H}}(t) &= \max[\underline{\underline{C}}(\tau) ; 0 \leq \tau \leq t] \end{aligned} \quad (6.10)$$

Hierfür bietet sich die in Abschnitt 2.4.3 eingeführte verallgemeinerte Maximumfunktion auf der Basis von Ellipsoidrepräsentationen an. Der rechte Cauchy-Green-Tensor ist aufgrund seiner Definition stets symmetrisch und positiv definit und eignet sich somit als Argument für diese Funktion.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T \quad ; \quad \underline{n} \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{n} > 0 \quad \forall \underline{n} \neq \underline{0}$$

Als konkretes Beispiel zeigt Abbildung 6.18 die Ellipsoidrepräsentationen einiger rechter Cauchy-Green-Tensoren, die während eines symmetrisch zu beiden Seiten ausgeführten einfachen Scherversuchs durchlaufen werden.

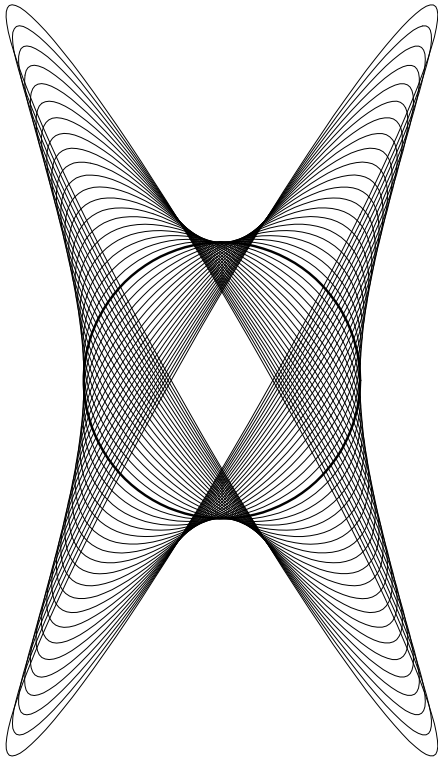


Abbildung 6.18: Ellipsoidrepräsentationen einiger rechter Cauchy-Green-Tensoren einer beidseitigen einfachen Scherung. Die Eigenrichtungen liegen bei sehr kleinen Scherungen (nahe der Kreisform) zunächst bei $\pm 45^\circ$.

Abbildung 6.19 zeigt die Umsetzung der Gleichung 6.10 für eine Folge konkreter Zeitschritte gemäß den in Abschnitt 2.4.3 getroffenen Vereinbarungen.

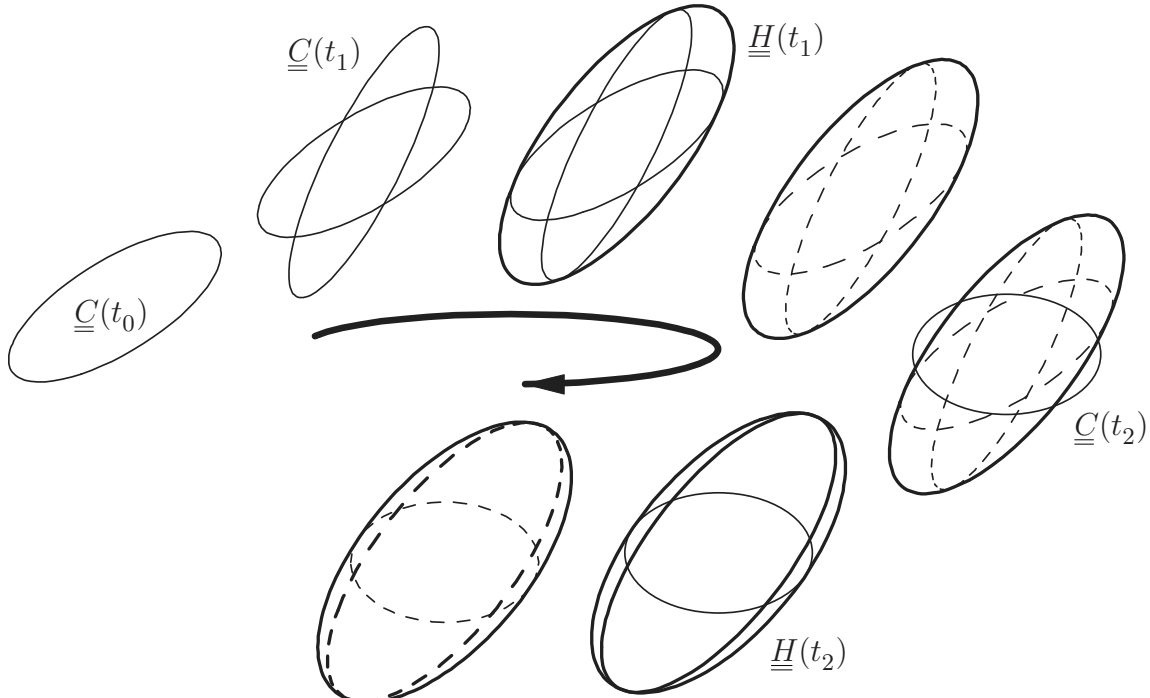


Abbildung 6.19: Entwicklung des Anisotropietensors $\underline{\underline{H}}$ zu einer zeitlichen Folge von $\underline{\underline{C}}$ -Tensoren. Der $\underline{\underline{H}}$ -Tensor zum Zeitpunkt t_2 entspricht dem volumenkleinsten Ellipsoid, das die Ellipsoide zu $\underline{\underline{H}}(t_1)$ und $\underline{\underline{C}}(t_2)$ beide vollständig umhüllt. Für die Berechnung von $\underline{\underline{H}}$ zu späteren Zeitpunkten werden $\underline{\underline{H}}(t_1)$ und $\underline{\underline{C}}(t_2)$ nicht mehr benötigt, nur der symmetrische Tensor $\underline{\underline{H}}(t_2)$ muß gespeichert werden.

In Abbildung 6.20 ist die aus diesem Prozeß resultierende Entwicklung des Schlepptensors während des bereits in Abbildung 6.18 vorgestellten symmetrischen Scherprozesses dargestellt. Nach Beendigung der einseitigen Scherung weist der Anisotropietensor eine ausgeprägte Richtungsabhängigkeit auf und ist somit gut geeignet, die Belastungsvorgeschichte zu beschreiben.

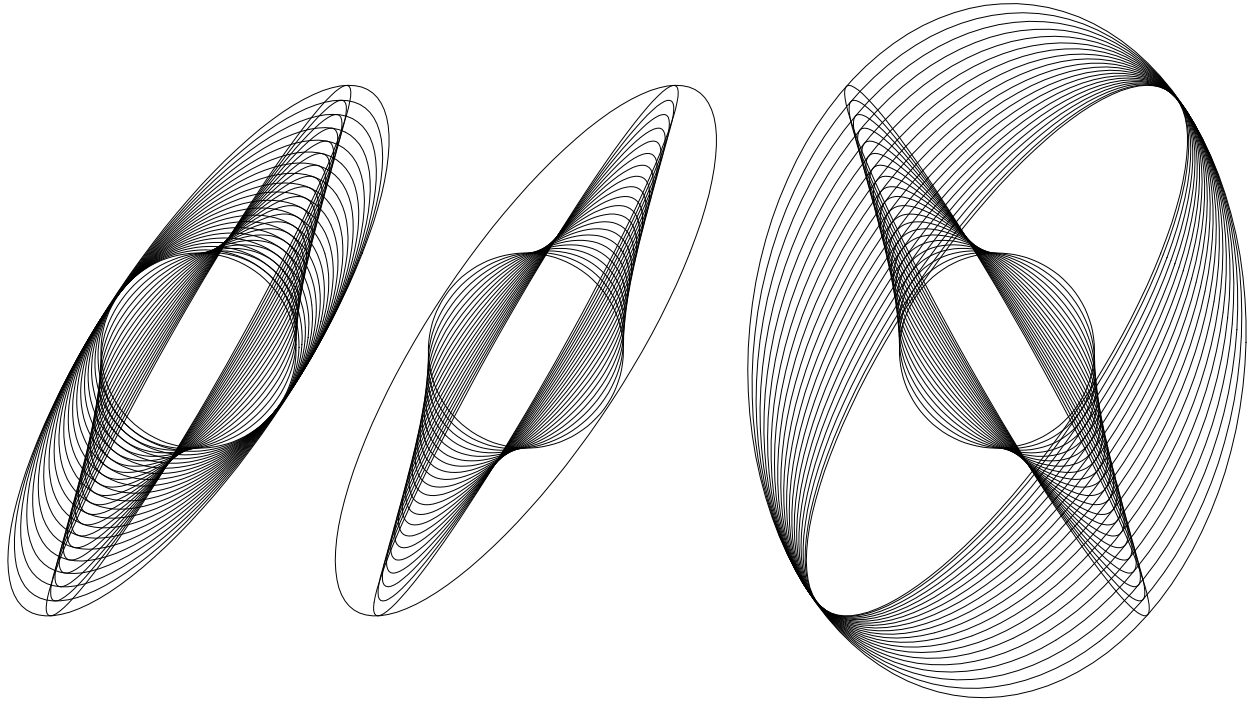


Abbildung 6.20: Entwicklung des Anisotropietensors $\underline{\underline{H}}$ bei einfacher Scherung (vergl. Abbn. 6.18 u. 6.19). Aus der unverformten Lage heraus (kreisförmiges Ellipsoid) erfolgt zunächst eine Scherbelastung nach rechts. Dabei vergrößert sich das Hüllellipsoid kontinuierlich. Bei der nachfolgenden Entlastung bleibt es hingegen unverändert (mittleres Bild). Schon mit Beginn der entgegengerichteten Scherung nach links setzt wieder eine Änderung ein (\rightarrow Anisotropie). Zuletzt ist das Hüllellipsoid nahezu symmetrisch zur Vertikalen, aber nicht kreisförmig.

Nachdem mit den vorgenommenen Definitionen der Schlepptensor $\underline{\underline{H}}$ gemäß Gleichung 6.10 aus den während des Belastungsprozesses durchlaufenen $\underline{\underline{C}}$ -Tensoren berechnet werden kann, ist nun ein bezüglich Gleichung 6.8 geeigneter Ausdruck $f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1})$ als Ersatz für den Quotienten von C_T und C_T^S zu formulieren. Um die Ähnlichkeit zum bisherigen Ansatz zu gewährleisten, wird für den Wertebereich dieses Ausdrucks gefordert:

$$0 \stackrel{!}{\leq} f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1}) \stackrel{!}{\leq} 1 \quad . \quad (6.11)$$

Hierfür scheint sich zunächst eine Invariante des Tensorprodukts $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}$ anzubieten. Dieses Produkt ist im allgemeinen unsymmetrisch, hat aber gemäß Abbildung 2.12 eine formgleiche Ellipsoidrepräsentation wie der gemäß der Polarzerlegung zugeordnete Tensor

$$\underline{\underline{C}}_{\text{zerr}} = \sqrt{\{\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}\}^T \cdot \{\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}\}} = \sqrt{\underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}^2 \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}} \quad .$$

Die Bezeichnung $\underline{\underline{C}}_{\text{zerr}}$ wurde gewählt, da dieser Tensor gemäß Gleichung 2.101 auch als Verzerrung von $\underline{\underline{C}}$ interpretiert werden kann. Die Verzerrung hätte in diesem Fall die Wirkung, dass das $\underline{\underline{H}}$ -Ellipsoid zur Einheitskugel wird. Die Abbildung 6.21 enthält solche verzerrten Versionen der $\underline{\underline{C}}$ -Tensoren des symmetrischen Scherprozesses, der bereits Gegenstand der Abbildungen 6.18 und 6.20 war. Sämtliche Schlepptensoren sind in dieser Abbildung durch den umschließenden Kreis repräsentiert. Folglich kann ein Entfestigungsfortschritt immer nur dann stattfinden, wenn in dieser Darstellung die aktuelle $\underline{\underline{C}}_{\text{zerr}}$ -Ellipse den Außenkreis berührt. Die Nähe zum Außenkreis beschreibt somit die Nähe zur Entfestigung.

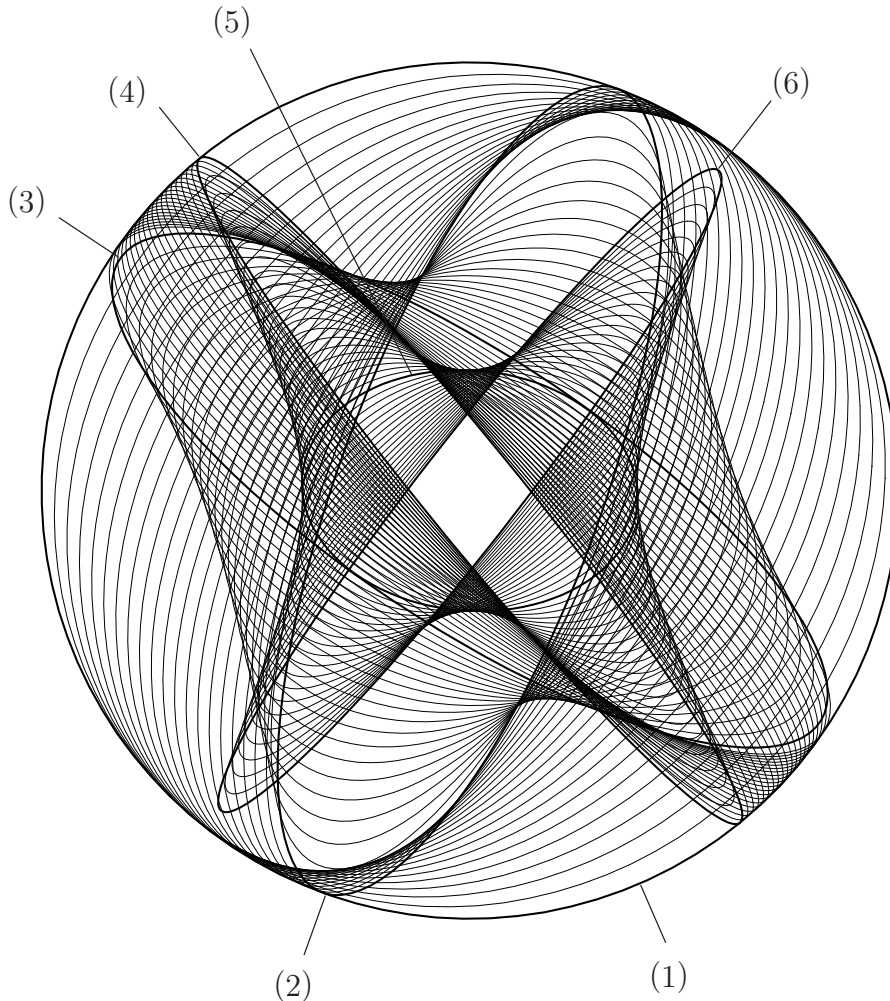


Abbildung 6.21: Verzernte $\underline{\underline{C}}$ -Ellipsen einer symmetrischen Scherung. Die Verzerrung erfolgte jeweils so, daß die Hüllellipsen aus Abb. 6.20 zu Einheitskreisen wurden. (1): Startlage: $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{E}}$; (2): maximale Scherung nach rechts; (3): Startlage; (4): maximale Scherung nach links. Ab hier $\underline{\underline{H}} = \text{const.}$; (5): Startlage; (6): wiederum maximale Scherung nach rechts. Nachfolgende Zyklen: (5) \rightarrow (4) \rightarrow (5) \rightarrow (6) \rightarrow (5) \rightarrow ...

Allerdings enthalten diese verzerrten Tensoren keine Informationen mehr darüber, wie stark die aktuellen Verzerrungen in den einzelnen Richtungen sind. Es kann also beispielsweise nicht entschieden werden, ob sich die aktuelle Deformation in einer stark oder gering verformten Richtung der Vorreckung annähert. Dies ist aber offensichtlich für das Materialver-

halten von entscheidender Bedeutung. Hieran wird deutlich, dass $\underline{\underline{C}}_{\text{zerr}}$ allein nicht ausreicht, um ein geeignetes Maß $f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1})$ für die Gleichung 6.8 zu ermitteln.

Stattdessen muß die im Produkt $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}$ enthaltene Information über die Nähe zur Vorreckung mit dem rechten Cauchy-Green-Tensor der jeweils aktuellen Deformation geeignet verknüpft werden. Dies geschieht, indem aus den Tensoren $\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}$ und $\underline{\underline{C}}$ durch Multiplikation ein skalares Maß gewonnen wird. Dabei stellt sich die Reihenfolge der Tensoren in diesem Skalarprodukt als beliebig heraus.

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{E}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \quad (6.12)$$

Im Hinblick auf Gleichung 6.11 lassen sich für diesen Wert eine untere und eine obere Schranke ermitteln. Zunächst ergibt sich mit den Eigenrichtungen \underline{e}_A von $\underline{\underline{C}}$ und den zugehörigen Eigenwerten C_A :

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}} = \sum_{A=I}^{III} C_A \underline{e}_A \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{e}_A \quad .$$

Die die Beträge der Vektoren $\underline{e}_A \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}$ nicht größer als Eins sein können (vergl. Abb. 6.21), können auch die Produkte $\underline{e}_A \cdot \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{e}_A$ nicht größer als Eins sein. Daraus folgt die obere Schranke.

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}} \leq \sum_{A=I}^{III} C_A = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{C}} \quad .$$

Weiterhin kann aus Gleichung 6.12 gefolgert werden:

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{C}}) \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} = \sum_{A=I}^{III} C_A^2 \underline{e}_A \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{e}_A \quad .$$

Da $\underline{\underline{H}}$ ein symmetrischer und positiv definiten Tensor ist, kann keines der Produkte $\underline{e}_A \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{e}_A$ negativ sein. Daraus folgt die untere Schranke.

$$(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}} \geq 0$$

Für ein bezüglich Gleichung 6.8 geeignetes Maß $f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1})$ müssen abschließend diese beiden Schranken mit der Forderung in Gleichung 6.11 in Einklang gebracht werden.

$$f(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{H}}^{-1}) = \frac{(\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{H}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{C}}}{\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{C}}}$$

Dieses richtungsabhängige Entfestigungsmaß wurde gemäß den Gleichungen 6.8 und 6.9 in das MORPH-Stoffgesetz implementiert. Weitere Änderungen wurden nicht vorgenommen. Auch die Materialparameter wurden nicht neu angepaßt.

Die Abbildung 6.22 zeigt die Simulation des gesamten Experiments. Das Ergebnis kommt dem Verhalten des realen Materials wesentlich näher als die Ergebnisse mit isotroper Entfestigung. Nach der Phase der einseitigen Scherung reagieren Modell und Material in der entgegengesetzten Scherrichtung zunächst nahezu mit der Festigkeit des unbelasteten Materials. Erst mit zunehmender Amplitude kommt es dann auch bezüglich der neuen Scherrichtung zu fortschreitender Entfestigung. Außerdem tritt interessanterweise durch die Modifikation des Stoffgesetzes ein zusätzlicher Krümmungswechsel in den Entlastungslinien auf, der typisch für Schermessungen an gefüllten Gummiwerkstoffen ist (vergl. Abb. 6.2). Das Modell mit isotroper Entfestigung ist nicht in der Lage, dieses Charakteristikum abzubilden (vergl. Abb. 6.16).

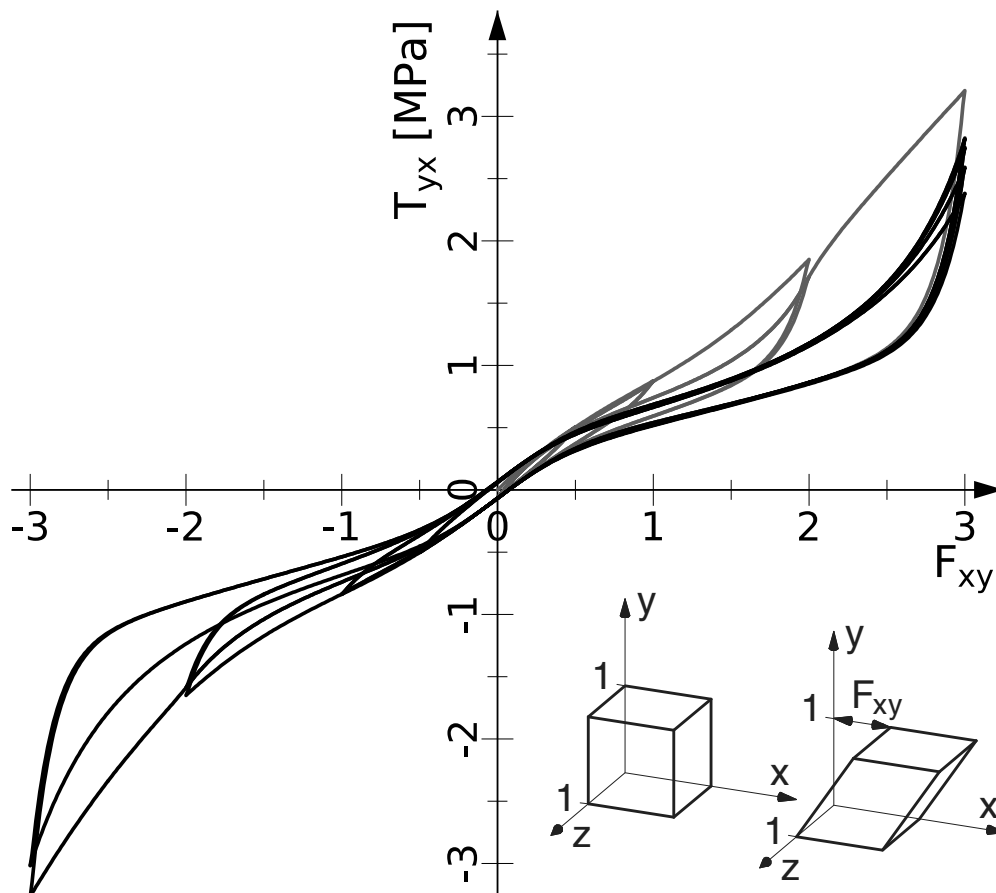


Abbildung 6.22: MORPH-Simulation (anisotrope Entfestigung) des gesamten Scherversuchs gemäß Abb. 6.15 (grau: 1. Phase - einseitige Scherung, schwarz: 2. Phase). In Einklang mit den experimentellen Befunden (Abb. 6.17) und im Gegensatz zur Simulation mit isotroper Entfestigung (Abb. 6.16) bewirken die negativen Scherungen in der zweiten Versuchsphase einen Entfestigungsfortschritt. Parameterwerte der ursprünglichen (isotropen) Stoffgesetzvariante.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Simulation von Bauteilbelastungen mit der Methode der finiten Elemente (FEM) erlangt in der industriellen Anwendung eine immer vielfältigere und umfassendere technische und wirtschaftliche Bedeutung. Dementsprechend werden auch immer mehr Materialgruppen in die Simulation einbezogen, und gleichzeitig steigen die Anforderungen an die Präzision der innerhalb der FEM die Materialeigenschaften repräsentierenden Stoffgesetze. Sowohl die Neuentwicklung von Stoffgesetzen als auch die Erweiterung oder Modifikation bestehender Stoffgesetzkonzepte auf neue Materialgruppen sind thematische Schwerpunkte der Kontinuumsmechanik. Solche Tätigkeiten erfordern neben Fachwissen und Erfahrung ein hohes Maß an Kreativität. Damit sich diese möglichst ungehindert entfalten kann, ist bezüglich der theoretischen mathematisch/physikalischen Basis eine möglichst große methodische Freiheit und Vielfalt erstrebenswert, die Raum für neue Denkansätze, Interpretationen und Herangehensweisen läßt.

Ganz ähnlich ist die Situation bei den numerischen Näherungsverfahren der Kontinuumsmechanik. Das Anwendungspotential dieser Methoden wird immer breiter, und es entsteht ein Bedarf an immer komplexeren Modellen und Algorithmen. Ursache hierfür sind die anhaltend rapide Leistungszunahme der verfügbaren Computer und der mit größer werdenden Modellen überproportional wachsende Leistungsbedarf für die Lösung der resultierenden Gleichungssysteme. Dementsprechend werden die Limitierungen für den Berechnungsaufwand der zur Aufstellung dieser Gleichungssysteme verwendeten Verfahren immer schwächer.

Sowohl im Bereich der Materialmodellierung als auch bei den numerischen Verfahren werden somit ständig neue Verfahren und Methoden benötigt und entwickelt. Dies verleiht der Kontinuumsmechanik den Charakter eines offenen Forschungsgebiets, in dem neben der Anwendung bereits erschlossenen Wissens auch weiterhin die kreative Erschließung neuen Wissens eine wesentliche Rolle spielen wird. Hierfür ist die existierende Vielfalt der Darstellungsformen und Arbeitsmethoden der Kontinuumsmechanik, die in der vorliegenden Arbeit zusammen mit den damit verbundenen Denk- und Interpretationsweisen gegenübergestellt, verglichen und um mehrere Neuerungen ergänzt wurden, durchaus vorteilhaft und erhaltenswert.

Von zentraler Bedeutung sind in diesem Zusammenhang die in der Kontinuumsmechanik verwendeten Beobachterkonzepte. Als besonders vorteilhaft hat sich das Konzept der Standardbeobachter erwiesen. Im Gegensatz zu einigen anderen gebräuchlichen Konzepten ist hier häufig eine Kontrolle der vorgefundenen Zusammenhänge anhand der Anschauung möglich. Das Konzept liefert einen sehr vielseitigen Rahmen für eine Reihe die vorliegende Arbeit prägender, sich teilweise durchdringender Themenstränge mit neu entwickelten Ansätzen und Methoden. Die wichtigsten vier dieser Stränge sind:

- Der sogenannte Übertragungsoperator dient der standardisierten Erzeugung äquivalenter tensorieller Relationen, z.B. von Stoffgesetzen, in unterschiedlichen Darstellungsformen.

Bezüglich einer einzelnen Deformation entspricht dies wechselseitigen Übertragungen zwischen Eulerschen und Lagrangeschen Darstellungen der entsprechenden Relation. Darüber hinaus kann die Relation auch in Darstellungen übertragen werden, die mit Zwischenkonfigurationen verknüpft sind. Bei allen Übertragungen bleibt die Relation identisch erhalten, lediglich die beteiligten Größen und die Gestalt der zueinander in Relation stehenden mathematischen Konstrukte ändern sich. Die Übertragungsmöglichkeit erstreckt sich von Spannungs- und Verzerrungstensoren über Invarianten und Eigenwerte bis zu komplizierten Gebilden wie tensorwertigen analytischen Funktionen tensorieller Argumente, substantiellen Zeitableitungen und sogar Tensoren vierter Stufe. Dabei bleibt die grundlegende Struktur der Relation erhalten, so daß eine Entwicklung auch mit dem Ergebnis einer Übertragung problemlos fortgesetzt werden kann. Eine Einschränkung bezüglich transponierter Argumente wurde aufgehoben.

Der Übertragungsoperator bietet einerseits die Möglichkeit, Stoffgesetze jeweils in diejenige Formulierung zu übertragen, die für die Berechnung einer Steifigkeitsmatrix in der zu dem verwendeten FEM-Programm passenden Form geeignet ist. Andererseits erlaubt die Erweiterung des Übertragungsoperatorkonzepts auf Tensoren vierter Stufe nun beispielsweise auch die Umrechnung verschiedener Typen von Steifigkeitsmatrizen ineinander. Damit eröffnet das Konzept eine große Freiheit in der Wahl der zur Stoffgesetzentwicklung genutzten Darstellungsweise. Seit der Erweiterung auf Zwischenkonfigurationen gilt dies beispielsweise auch für Stoffgesetze, die plastisches Materialverhalten beschreiben.

- Die angepaßten Basisdyaden für symmetrische Tensoren liefern redundanzfreie Darstellungen symmetrischer Tensoren. Damit erweisen sich solche Darstellungen als besonders vorteilhaft, wenn Ableitungen nach symmetrischen Tensoren zu bilden sind. Diese Notwendigkeit tritt bei der Berechnung von Steifigkeitstensoren häufig auf. Die angepaßten Basisdyaden liefern hierbei eine besonders kompakte Schreibweise und einfach und sicher zu handhabende Umformungsregeln. Außerdem lassen sich mit diesem Hilfsmittel Ableitungen von Tensorprodukten derart formulieren, daß auch die auftretenden Teilergebnisse symmetrisch sind, was wiederum für die numerische Umsetzung interessant ist. Mit dieser Kombination von Eigenschaften stellen die angepaßten Basisdyaden ein wertvolles Werkzeug bei der Umrechnung verschiedener Formen von Steifigkeitsmatrizen dar.
- Ellipsoidrepräsentationen von Tensoren 2. Stufe liefern eine in vielen Zusammenhängen sehr nützliche Interpretationsmöglichkeit insbesondere für symmetrische und positiv definite Tensoren. Im Zusammenhang mit unsymmetrischen Tensoren ergibt sich eine anschauliche Deutung der Polarzerlegung eines Tensors. Darüber hinaus gelingt es mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen eine sinnvolle und der Anschauung zugängliche Vereinbarung für die Relationen " $>$ " und " $<$ " in Bezug auf Tensoren zweiter Stufe zu treffen. Darauf aufbauend lassen sich auch eine Maximum- und eine Minimumfunktion für Tensorargumente vereinbaren. Anschaulich sind diese Funktionen mit dem kleinsten, alle Argumentellipsoide vollständig umhüllenden Ellipsoid und dem größten, von allen Argumentellipsoiden vollständig umhüllten Ellipsoid verknüpft. Für das Auffinden dieser speziellen Ellipsoide bei gegebenen Argumentellipsoiden wurden kompakte, nicht-iterative Algorithmen gefunden. Die beiden Funktionen ermöglichen wiederum einen anschauli-

chen Zugang zu einer vergleichsweise einfachen Erfassung einer Strukturensorevolution und zur Modellierung belastungsinduzierter Anisotropie.

- Die sogenannten koeffizientenfreien Darstellungen von Tensoren zweiter und vierter Stufe ermöglichen äußerst kompakte Darstellungen und Herleitungen und haben sich als sehr flexibles und nützliches Hilfsmittel erwiesen. Sie erlauben ein einfaches Arbeiten mit den angepassten Basisdyaden für symmetrische Tensoren und liegen der Erweiterung des Übertragungsoperators auf Tensorargumente vierter Stufe zu Grunde. Darüber hinaus wurden sie zur Umrechnung verschiedener Formen von Steifigkeitsmatrizen herangezogen.

Die Inhalte dieser Themenkomplexe wurden exemplarisch dazu genutzt, Umrechnungsvorschriften für die verschiedenen, zu unterschiedlichen Beobachtersystemen gehörenden Formen von Materialsteifigkeiten zu ermitteln. Damit können die Steifigkeiten, die für die Implementierung von Stoffgesetzen in unterschiedlichen FEM-Programmen benötigt werden, ineinander überführt werden. Neben den rein Eulerschen und Lagrangeschen Formulierungen wurden an dieser Stelle auch gemischte Formulierungen unter Verwendung von 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen und dem vollständigen Deformationsgradienten einbezogen. Als Anwendungen wurden zum einen einige FEM-Ergebnisse aus Beispielimplementierungen gezeigt und zum anderen ein Ansatz zur Modellierung belastungsinduzierter Anisotropie mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen im Zusammenhang mit einer tensoriellen Maximum-Funktion.

Im Hinblick auf weiterführende Arbeiten erscheint vor allem eine noch intensivere Verflechtung der neuen Techniken und Methoden sowohl untereinander als auch mit den etablierten Formen wünschenswert. In diesem Zusammenhang wäre beispielsweise eine sorgfältige Untersuchung der Wirkungsweise des Übertragungsoperators auf Ableitungen nach Eulerschen oder Lagrangeschen Verzerrungstensoren und die damit einhergehenden Rechenregeln bei der Übertragung solcher Ableitungen interessant. Diese Zusammenhänge sind nicht offensichtlich, da der Übertragungsoperator Multiplikationen mit dem Deformationsgradienten beinhaltet, der aber wiederum Basis für alle Verzerrungsmaße ist. Bezüglich tensorieller Ableitungen nach Tensoren wäre außerdem eine Präzisierung der Darstellung solcher Tensoren bezüglich schiefwinkliger, der Deformation folgender Basen wünschenswert.

Ein weiteres interessantes Beispiel wäre die Anwendung des Übertragungsoperators auf tensorielle Maximum- und Minimumfunktionen, die mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen sowohl der Argumente als auch der Funktion selbst definiert wurden. Mit dieser Übertragung wäre es beispielsweise möglich, ein typischerweise in Lagrangeschen Größen formuliertes Stoffgesetz für ein Material mit belastungsinduzierter Anisotropie in die Eulersche Darstellungsweise zu übertragen.

Schließlich zeichnet sich für die vergleichsweise anschauliche Beschreibung induzierter Anisotropie mit Hilfe von Ellipsoidrepräsentationen ein wichtiges Anwendungsfeld ab. Bestehende Modelle für derartige Phänomene sind einerseits oft nicht flexibel genug, um die experimentellen Daten zu reproduzieren, andererseits sind umfassendere Modelle oftmals mit einer Vielzahl von Parametern verbunden, die einer anschaulichen Deutung kaum noch zugänglich und teilweise auch nicht mehr eindeutig zu identifizieren sind. Mit Hilfe der Ellipsoidrepräsentationen und den damit verknüpften Tensoroperationen lassen sich möglicherweise spezielle Effekte separat und damit mit einer vergleichsweise geringen Parameterzahl nachbilden.

Literatur

- ABAQUS 2004. *Standard User's Manual, Version 6.5*. Rhode Island (USA): ABAQUS, Inc.
- Altenbach, J., Altenbach, H. 1994. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart: Teubner.
- Barthold, F.-J. 2002. *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrieprobleme*. Braunschweig: Habil.-Schrift, Techn. Univ.
- Bathe, K.-J. 1986. *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Berlin: Springer.
- Bergström, J.S., Boyce, M.C. 1998. *Constitutive Modelling of the Large Strain Time-Dependent Behavior of Elastomers*. J. Mech. Phys. Solids 46, S. 931-954.
- Bertram, A. 1985. *Symmetry properties of fourth-order tensors with applications in continuum mechanics*. Investigaciones ciencias e ingenierias, Revista de la Universidad Industrial de Santander 15, S. 41-55.
- Bertram, A. 1989. *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Besdo, D. 1974. *Ein Beitrag zur nichtlinearen Theorie des Cosserat-Kontinuums*. Acta Mechanica 20, S. 105-131.
- Besdo, D. 1981. *Zur Formulierung von Stoffgesetzen der Plastomechanik im Dehnungsraum nach Ilyushins Postulat*. Ingenieur-Archiv 51, S. 1-8.
- Besdo, D. 1993. *Grundbegriffe der Plastomechanik*. In: Dahl, W., Kopp, R., Pawelski, O. (Hrsg.), Umformtechnik Plastomechanik und Werkstoffkunde. Berlin: Springer, S. 49-63.
- Besdo, D. 1998. *A general material law of plasticity and its numerical applications*. steel research 69, S. 188-192.
- Besdo, D., Hohl, C., Ihlemann, J. 2005a. *ABAQUS implementation and simulation results of the MORPH constitutive model*. In: Austrell, P.-E., Kari, L. (Hrsg.), Constitutive Models for Rubber IV. Leiden: Balkema, S. 223-228.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 1996. *Zur Modellierung des Stoffverhaltens von Elastomeren*. Kautschuk Gummi Kunststoffe 49, S. 495-503.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2001. *The effect of softening phenomena in filled rubber during inhomogeneous loading*. In: Besdo, D., Schuster, R.H., Ihlemann, J. (Hrsg.), Constitutive Models for Rubber II. Rotterdam: Balkema, S. 137-147.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2002. *Wechsel zwischen Eulerscher und Lagrangescher Formulierung mit einem speziellen Übertragungsoperator*. PAMM 1, S. 143-144.

- Besdo, D., Ihlemann, J. 2003a. *Properties of rubberlike materials under large deformations explained by self-organizing linkage patterns*. International Journal of Plasticity 19, S. 1001-1018.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2003b. *A phenomenological constitutive model for rubberlike materials and its numerical applications*. International Journal of Plasticity 19, S. 1019-1036.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2003c. *Effiziente Parameteridentifikation bei Stoffgesetzen für inelastische technische Gummimaterialien*. PAMM 3, S. 324-325.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2005a. *Adaption des MORPH-Stoffgesetzes an die ABAQUS-Benutzerschnittstelle*. PAMM 5, S. 375-376.
- Besdo, D., Ihlemann, J. 2005b. *Directional sensitivity of Mullins effect*. In: Austrell, P.-E., Kari, L. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber IV*. Leiden: Balkema, S. 229-235.
- Besdo, D., Ihlemann, J., Kingston, J.G.R., Muhr, A.H. 2003. *Modelling inelastic stress-strain phenomena and a scheme for efficient experimental characterization*. In: Busfield, J., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber III*. Lisse: Balkema, S. 309-317.
- Besdo, D., Ihlemann, J., Kirbach, J. 2004. *Konfigurationswechsel bei plastischen Stoffgesetzen mit dem Übertragungsoperator*. PAMM 4, S. 215-216.
- Besdo, D., Ihlemann, J., Kirbach, J. 2005b. *ABAQUS-Implementierung eines Dehnungsraum-Stoffgesetzes nach Besdo*. PAMM 5, S. 261-262.
- Besdo, D., Mahrenholtz, O. 1993. *Finite-Elemente-Methode*. In: Dahl, W., Kopp, R., Pawelski, O. (Hrsg.), *Umformtechnik Plastomechanik und Werkstoffkunde*. Berlin: Springer, S. 227-240.
- Betten, J. 1998. *Anwendungen von Tensorfunktionen in der Kontinuumsmechanik anisotroper Materialien*. ZAMM 78, S. 507-521.
- Betten, J. 2001. *Kontinuumsmechanik*. Berlin: Springer.
- Böhlke, T. 2001. *Crystallographic Texture Evolution and Elastic Anisotropy: Simulation, Modeling, and Applications*. Aachen: Shaker.
- Böl, M. 2005. *Numerische Simulation von Polymernetzwerken mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode*. Bochum: Dissertation.
- Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A., Musiol, G., Mühlig, H. 1995. *Taschenbuch der Mathematik, 2. Aufl.*. Thun, Frankfurt am Main: Harri Deutsch.
- Cescotto, S., Fonder, G. 1979. *A finite element approach for large strains of nearly incompressible rubber-like materials*. Int. J. Solids Structures 15, S. 589-605.
- de Boer, R. 1982. *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Berlin: Springer.
- Doll, Stefan 1998. *Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten*. Karlsruhe: Dissertation, Institut für Mechanik, Univ.
- Govindjee, S., Simo, J.C. 1992. *Mullins' effect and the strain amplitude dependence of the storage modulus*. Int. J. Solids Structures 29, S. 1737-1751.
- Graßmann, H. 1997. *Das Top Quark, Picasso und Mercedes-Benz*. Berlin: Rowohlt.

- Green, A.E., Zerna, W. 1968. *Theoretical Elasticity*. Oxford: Clarendon Press.
- Harwood, J.A.C., Mullins, L., Payne, A.R. 1965. *Stress Softening in Natural Rubber Vulcanizates. Part II. Stress Softening in Pure Gum and Filler Loaded Rubbers*. Journal of Applied Polymer Science 9, S. 3011-3021.
- Haupt, P. 2000. *Continuum mechanics and theory of materials*. Berlin: Springer.
- Heimes, T. 2005. *Finite Thermoelastizität*. Düsseldorf: VDI.
- Hiersig, H.M. 1995. *Lexikon Ingenieurwissen-Grundlagen*. Düsseldorf: VDI.
- Holzapfel, G.A., Stadler, M., Ogden, R.W. 1999. *Aspects of stress softening in filled rubbers incorporating residual strains*. In: Dorfmann, A., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber*. Rotterdam: Balkema, S. 189-193.
- Hohl, C. 2006. *Zur Berechnung von Elastomerbauteilen (Arbeitstitel)*. Hannover: Dissertation in Vorbereitung.
- Hughes, T.J.R., Winget, J. 1980. *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 15, S. 1862-1867.
- Ihleemann, J. 2003a. *Kontinuumsmechanische Nachbildung hochbelasteter technischer Gummierwerkstoffe*. Düsseldorf: VDI.
- Ihleemann, J. 2003b. *Time dependencies in the response of self-organizing linkage patterns to imposed deformation*. In: Busfield, J., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber III*. Lisse: Balkema, S. 231-236.
- Ihleemann, J. 2005. *Richtungsabhängigkeiten beim Mullins-Effekt*. Kautschuk Gummi Kunststoffe 58, S. 438-447.
- Kaliske, M., Andre, M., Rieger, A. 2003. *Modelling of structural inhomogeneities by a homogenized approach*. In: Busfield, J., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber III*. Lisse: Balkema, S. 119-124.
- Kaliske, M., Rothert, H. 1997. *Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains*. Computational Mechanics 19, S. 228-239.
- Kaliske, M., Rothert, H. 1999. *Viscoelastic and elastoplastic damage formulations*. In: Dorfmann, A., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber*. Rotterdam: Balkema, S. 159-167.
- Klingbeil, E. 1966. *Tensorrechnung für Ingenieure*. Mannheim: Hochschultaschenbücher-Verlag.
- Klüppel, M., Schramm, J. 1999. *An Advanced micro-mechanical model of hyperelasticity and stress softening of reinforced rubbers*. In: Dorfmann, A., Muhr, A. (Hrsg.), *Constitutive Models for Rubber*. Rotterdam: Balkema, S. 211-218.
- König, J. 2002. *Modellierung des stationären Laufs eines Fördergurtes über eine Tragrollenstation*. Düsseldorf: VDI.
- Krawietz, A. 1986. *Materialtheorie: Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens*. Berlin: Springer.

- Lehmann, T. 1972. *Anisotrope plastische Formänderungen*. Romanian J. Techn. Sci. Appl. Mech. 17, S. 1077-1086.
- Lion, A. 1996. *A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation*. Continuum Mech. Thermodyn. 8, S. 153-169.
- Lion, A. 1998. *Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory*. J. Mech. Phys. Solids 46, S. 895-930.
- Lion, A. 2000a. *Thermomechanik von Elastomeren. Experimente und Materialtheorie*. Kassel: Gesamthochschul-Bibliothek.
- Lion, A. 2000b. *Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models*. International Journal of Plasticity 16, S. 469-494.
- Magnus, K., Müller, H.H. 1990. *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Stuttgart: Teubner.
- Meyers, A., Schieße, P., Bruhns, O.T. 2000. *Some comments on objective rates of symmetric Eulerian tensors with application to Eulerian strain rates*. Acta Mechanica 139, S. 91-103.
- Miehe, C. 1995. *Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials*. European Journal of Mechanics, A/Solids 14, S. 697-720.
- Miehe, C., Göktepe, S., Lulei, F. 2004. *A Micro-Macro Approach to Rubber-like Materials. Part I: The Non-Affine Micro-Sphere Model of Rubber Elasticity*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 52, S. 2617-2660.
- Muhr, A.H., Gough, J., Gregory, I.H. 1999. *Experimental determination of model for liquid silicone rubber: Hyperelasticity and Mullins' effect*. In: Dorfmann, A., Muhr, A. (Hrsg.), Constitutive Models for Rubber. Rotterdam: Balkema, S. 181-187.
- Mullins, L. 1948. *Effect of stretching on the properties of rubber*. Rubber Chem. Tech. 21, S. 281-300.
- Nasdala, L. 2000. *Ein viskoelastisches Schädigungsgesetz für den stationär rollenden Reifen*. Hannover: Dissertation.
- Ogden, R.W. 1984. *Non-linear elastic deformations*. England: Ellis Horwood Limited.
- Ogden, R.W., Roxburgh, D.G. 1999. *An energy-based model of the Mullins effect*. In: Dorfmann, A., Muhr, A. (Hrsg.), Constitutive Models for Rubber. Rotterdam: Balkema, S. 23-28.
- Pawelski, H. 1998. *Erklärung einiger mechanischer Eigenschaften von Elastomerwerkstoffen mit Methoden der statistischen Physik*. Aachen: Shaker.
- Pawelski, H. 2001. *Softening behavior of elastomeric media after loading in changing directions*. In: Besdo, D., Schuster, R.H., Ihlemann, J. (Hrsg.), Constitutive Models for Rubber II. Rotterdam: Balkema, S. 27-34.
- Pestel, E., Wittenburg, J. 1981. *Technische Mechanik, Band 2: Festigkeitslehre*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Rieger, S. 2004. *Temperaturabhängige Beschreibung visko-elasto-plastischer Deformationen kurzglasfaserverstärkter Thermoplaste: Modellbildung, Numerik und Experimente*. Stuttgart: Dissertation, Institut für Mechanik (Bauwesen), Univ.

- Riemer, M. 1993. *Technische Kontinuumsmechanik: synthetische und analytische Darstellung*. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Salencon, J. 2001. *Handbook of Continuum Mechanics*. Berlin: Springer.
- Sedlan, K. 2001. *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen: Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Kassel: Universitätsbibliothek.
- Sedov, L.I. 1997. *Mechanics of Continuous Media*. Singapur: World Scientific.
- Simo, J.C. 1987. *On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 60, S. 153-173.
- Stickforth, J. 1983. *Vektor und Tensorrechnung für Ingenieure*. Universität Braunschweig: Vorlesungsskript, unveröffentlicht.
- Sussmann, T., Bathe, K.-J. 1987. *A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis*. Computers and Structures 26, S. 357-409.
- Szabó, I. 1964. *Höhere Technische Mechanik, 4. Aufl.*. Berlin: Springer.
- Truesdell, C., Noll, W. 1965. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. In: S. Flügge (Hrsg.), *Encyclopedia of Physics III/3*. Berlin: Springer, S. 20-35.
- Warnecke, U. 2002. *Zur Untersuchung des stationären Gurt-Trommel-Umlaufs mit der Methode der Finiten Elemente*. Hannover: Dissertation.
- Wellerdick-Wojtasik, N., Besdo, D. 2004. *Methode der Finiten Elemente in der Mechanik. Eine Einführung*. Heilbronn: Vorlesungsskript.
- Wriggers, P. 2001. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin: Springer.
- Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A. 2000. *A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient*. International Journal of Plasticity 16, S. 143-177.
- Xiao, H., Bruhns, O.T., Meyers, A. 2001. *Large strain responses of elastic-perfect plasticity and kinematic hardening plasticity with the logarithmic rate: Swift effect in torsion*. International Journal of Plasticity 17, S. 211-235.
- Zienkiewicz, O.C. 1984. *Methode der finiten Elemente, 2. Aufl.*. München: Hanser.
- Zurmühl, R., Falk, S. 1984. *Matrizen und ihre Anwendungen. Teil 1: Grundlagen, 5. Aufl.* Berlin: Springer.