Globale klassische Lösungen nichtlinearer parabolischer Probleme mit dynamischen Randbedingungen in einer Raumdimension

Von der Fakultät für Mathematik und Physik

der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Simon Gvelesiani

geboren am 26.04.1973 in Rustavi, Georgien

2014

Referent:	Prof. Dr. Ch. Walker
Koreferent:	Prof. Dr. J. Escher
Tag der Promotion:	30.01.2014

Abstract

We consider general quasilinear parabolic equations in one space dimension complemented by a nonlinear dynamic boundary condition, i.e. a boundary condition which involves a time derivative. We solve an associated linear problem and derive optimal Schauder estimates in classes of Hölder continuous functions. This result is used to obtain a local existence result for the nonlinear problem. Moreover, we establish generalized Bernstein - Nagumo conditions ensuring global in time existence of solutions.

Keywords: Quasilinear parabolic problems, classical solutions, global existence, dynamic boundary condition

Zusammenfassung

Wir betrachten allgemeine quasilineare parabolische Gleichungen in einer Raumdimension komplementiert durch eine nichtlineare dynamische Randbedingung. Wir lösen das assoziierte lineare Problem in Klassen Hölder-stetiger Funktionen und beweisen eine optimale Schauder-Abschätzung. Dieses Ergebnis wird benutzt, um die lokale Wohlgestelltheit des nichtlinearen Problems nachzuweisen. Darüber hinaus geben wir verallgemeinerte Bernstein - Nagumo Bedingungen an, die die globale Existenz von Lösungen sicherstellen.

Stichworte: Quasilineare parabolische probleme, klassische Lösungen, globale Existenz, dynamische Randbedingung

INHALTSVERZEICHNIS

Einführung		2
1.	Notation, Lösungsbegriff, Funktionenräume, Hilfsresultate	10
2.	Lineare Gleichung	15
2.1.	Notation und Hilfsresultate	17
2.2.	Modellgleichungen	21
2.3.	Beweis von Theorem 2.3	46
2.4.	Beweis von Theorem 2.1	58
3.	Lokale Lösungen	60
4.	A-priori Abschätzungen und globale Existenz	68
4.1.	A-priori Abschätzungen für $\max \lvert u_x \rvert$	68
4.2.	A-priori Abschätzung für $\langle u_x \rangle^{(\frac{\delta}{2},\delta)}$	83
4.3.	A-priori Abschätzung für $\max \lvert u \rvert$	84
4.4.	Globale Existenz	87
Literatur		89
Lebenslauf		91

EINFÜHRUNG

Darstellung des Problems. In der vorliegenden Arbeit werden lineare und quasilineare parabolische Gleichungen mit Zeitableitung in den Randbedingungen im räumlich eindimensionalen Gebiet $(0,T) \times (-l,l)$ untersucht. Wir betrachten quasilineare Differentialgleichungen der Art

$$u_t - a(t,x,u,u_x)u_{xx} = f(t,x,u,u_x), \qquad (t,x) \in (0,T) \times (-l,l), \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$u_t \pm b(t,\pm l,u,u_x)u_x = g(t,\pm l,u,u_x), \qquad t \in (0,T), \tag{2}$$

und der Anfangsbedingung

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-l,l], \tag{3}$$

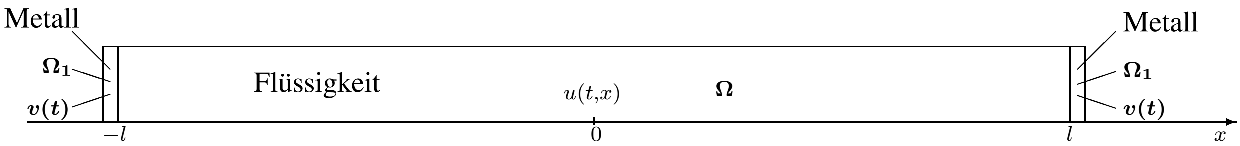
wobei $T, l > 0$ fest gewählte Zahlen und a, f, b, g reellwertige Funktionen auf $(0,T) \times (-l,l) \times \mathbb{R}^2$ bzw. $(0,T) \times \{-l,l\} \times \mathbb{R}^2$ sind. Obwohl diese Gleichungen für die eindimensionale Ortsvariable x formuliert sind, bezeichnen wir die Ortsableitung u_x auch als Gradienten. Unser Hauptaugenmerk ist auf die Frage gerichtet, unter welchen Voraussetzungen (1), (2), (3) globale klassische Lösungen besitzt. Der Weg zur Antwort auf diese Frage führt über die Untersuchung des zu (1), (2), (3) korrespondierenden linearen Problems, der lokalen Lösbarkeit von (1), (2), (3) und die Herleitung geeigneter a-priori Abschätzungen. Das Studium dieser Teilaufgaben haben im wesentlichen den Verlauf und die Struktur dieser Arbeit bestimmt. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit konnten für die allgemeine Randbedingung (2) formuliert werden, allerdings mussten wir uns bei einigen Aussagen auf die Randbedingung

$$u_t \pm b(t,\pm l,u)u_x = g(t,\pm l,u), \qquad t \in (0,T), \tag{2a}$$

mit gradientenunabhängigen Nichtlinearitäten beschränken, die offensichtlich einen Spezialfall von (2) darstellt. Deshalb werden wir überwiegend vom Randwertproblem (1), (2), (3) sprechen, es sei denn, das gegebene Resultat ist nur für die Randbedingung (2a) gültig.

Die rasante Entwicklung der Theorie von linearen und nichtlinearen elliptischen bzw. parabolischen Differentialgleichungen (zweiter Ordnung) in den vergangenen Jahrzehnten hat in vielen Klassikern [1], [16], [21], [24]–[26] ihren Niederschlag gefunden. Viele Aussagen in diesen Werken sind vor allem am Beispiel von Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen und entsprechenden Verallgemeinerungen sowie dem Cauchy-Problem formuliert worden, gleichwohl die verwendeten Methoden sich oft auf ein viel breiteres Spektrum von Randwertaufgaben anwenden lassen. Die Randbedingungen vom Typ (2) unterscheiden sich von den obengenannten durch die darin enthaltene Zeitableitung. Sie sind in der Literatur meistens als dynamische Randbedingungen („*dynamical*“ bzw. „*dynamic boundary conditions*“) bekannt. Gelegentlich [22], [8] findet man sie aber auch unter dem Namen (verallgemeinerte) Wentzell- oder einfach die Zeitableitung enthaltende Randbedingung (russischsprachige Literatur). Sie tauchen in verschiedenen Zusammenhängen auf, wie gewissen Prozessen des Wärmeaustausches [10], mathematischer Modellierung chemischer Reaktoren [13], Linearisierung des (Einphasen) Stefan-Problems [3] etc. Diese Aufzählung ist bei weitem nicht vollständig. Für einen ausführlicheren Überblick naturwissenschaftlicher Prozesse bzw. mathematischer Fragestellungen, die zu solchen Randwertproblemen führen, verweisen wir auf [13] und die darin angegebene Literatur. Eine ausführliche physikalische Herleitung der dynamischen Randbedingungen als eine Verallgemeinerung der Wentzell-Randbedingungen für Wärmeleitungs- und Wellengleichungen finden wir in [22]. Das folgende Beispiel, das eine eindimensionale Version des physikalischen Modells aus [10] ist, demonstriert, wie die Zeitableitung für die Beschreibung eines Randprozesses bei einem Wärmeaustausch zwischen zwei Medien involviert wird.

Physikalisches Modell. Wir betrachten Wärmediffusion in einem eindimensionalen Stab Ω mit einer (vernachlässigbar) dünnen, gut wärmeleitenden Umrandung Ω_1. Man stelle sich etwa einen mit einer Flüssigkeit gefüllten Zylinder vor, der an beiden Enden durch eine dünne Metallscheibe verschlossen ist, deren Wärmeleitfähigkeit die der Flüssigkeit erheblich übersteigt. Sei $u(t,x)$ die Temperaturverteilung und $f(t,x,u)$ eine Wärmequelle innerhalb des Stabes.



Die Temperaturverteilung innerhalb des Stabes genügt bekanntlich der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(t,x) - (a(t,x,u)u_x)_x = f(t,x,u),$$

wobei a der Wärmeleitungskoeffizient ist. Dabei haben wir hier angenommen, dass sowohl der Wärmeleitungskoeffizient als auch die Quellenstärke nicht nur von Zeit und Ort, sondern auch von der Temperatur abhängen.

Um die Randbedingung herzuleiten, betrachten wir den rechten Rand von Ω. Wir nehmen an, dass die Wärme durch den Rand von Ω fließend in Ω_1 akkumuliert wird. Ferner wird angenommen, dass Ω_1 so dünn ist, dass die dort produzierte bzw. dorthin geflossene Wärme sofort gleichmäßig umverteilt wird, was mathematisch bedeutet, dass die Temperatur v in Ω_1 zu jedem Zeitpunkt t in der Ortsvariable x konstant ist. So ist die im Zeitintervall $[t, t+\triangle t]$ in Ω_1 akkumulierte Energie $\triangle E$ einerseits proportional zu dem

Unterschied der Temperatur zu gegebenen Zeitpunkten, d.h.

$$\triangle E = C[v(t + \triangle t) - v(t)],$$

mit einer positiven Konstante C, die von Materialeigenschaften (genauer: von der Wärmekapazität) des Mediums in Ω_1 abhängt. Andererseits gilt

$$\triangle E = \int\limits_t^{t+\triangle t} J(\xi, l, u_x)\, d\xi + \int\limits_t^{t+\triangle t} g(\xi, v)\, d\xi,$$

wobei J der Wärmefluss durch den Rand von Ω und g eine sich in Ω_1 befindende Wärmequelle ist. Ferner ist es physikalisch sinnvoll, anzunehmen, dass sich der Wärmefluss J (aus bzw. in Ω) proportional zum Temperaturgradienten u_x auf dem Rand von Ω verhält, d.h.

$$J(t, l) = -b(t, l, u) u_x(t, l),$$

wobei b die Wärmeleitfähigkeit des Randes von Ω ist. Das Einsetzen in die obigen Gleichungen liefert zunächst

$$C \frac{v(t + \triangle t) - v(t)}{\triangle t} = \frac{1}{\triangle t} \Big(\int\limits_t^{t+\triangle t} -b(\xi, l, u) u_x(\xi, l)\, d\xi + \int\limits_t^{t+\triangle t} g(\xi, v(\xi))\, d\xi \Big),$$

und mit $\triangle t \to 0$ ergibt sich

$$C v_t(t) = -b(t, l, u) u_x(t, l) + g(t, v(t)).$$

Schließlich nehmen wir an, dass auf dem Rand von Ω die Temperatur der beiden Medien übereinstimmt, d.h.

$$u(t, l) = v(t).$$

Daraus erhalten wir die Randbedingung

$$C u_t(t, l) = -b(t, l, u(t, l)) u_x(t, l) + g(t, u(t, l)).$$

Da C eine positive Konstante ist, entspricht diese Gleichung offensichtlich der Randbedingung (2a).

Einordnung der erzielten Ergebnisse. In den vergangenen Jahrzehnten wurden verschiedene Aspekte von Randwertaufgaben mit dynamischen Randbedingungen durch Anwendung unterschiedlicher Techniken untersucht, wir können hier nur einige von diesen Arbeiten erwähnen [3]–[11], [13], [22]. Mit Hilfe der Theorie der Operatorhalbgruppen wurden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen sowohl für die Modellgleichungen [23], als auch für allgemeine lineare und nichtlineare Gleichungen bewiesen [10], [13], [29]. Ein anderer klassischer Zugang zu linearen Differentialgleichungen, der auf der Berechnung des Lösungspotentials für die korrespondierende Modellgleichung mit Hilfe der Fourier-Laplace Transformation (und anschließender Konstruktion eines Regularisators) basiert [25, Kap. 4], fand für dynamische Randbedingungen in [8], [9], [37], [4] Anwendung. In [37] wurden zudem 2D-Gebiete mit Ecken betrachtet. In verschiedenen Arbeiten [38], [33], [8] ,[5] wurde der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen des Koeffizienten b

in dynamischen Randbedingungen vom Typ (2) und der Wohlgestelltheit der Aufgabe diskutiert.

Mehrere Autoren [10], [11], [13]–[15], [18], [19], [29], [31] haben sich mit der globalen Lösbarkeit sowie damit zusammenhängenden Fragen wie a-priori Abschätzungen bzw. Blow-up Phänomenen beschäftigt. Für quasilineare (elliptische bzw. parabolische) Differentialgleichungen zweiter Ordnung besteht ein klassischer programmatischer Ablauf, nämlich a-priori Abschätzungen, die für den Nachweis der globalen Existenz notwendig sind, zu gewinnen, bekanntlich [25], [21], [26] aus

- Abschätzung des Absolutbetrages der Lösung,
- Abschätzung des Absolutbetrages des Gradienten der Lösung,
- Abschätzung einer geeigneten Höldernorm des Gradienten der Lösung.

Dabei liefern für die Durchführung des ersten und dritten Schrittes das Maximumprinzip bzw. das De Giorgi-Nash Theorem über Hölderregularität von Lösungen linearer Differentialgleichungen die theoretische Grundlage, während es für den zweiten Schritt keinen solchen Standardweg zu geben scheint. Dadurch ist die Abschätzung des Absolutbetrages des Gradienten der schwierigere Teil beim Beweis der globalen Existenz. Bekannt ist allerdings, dass für Gleichungen vom Typ (1) diese Abschätzung durchgeführt werden kann, wenn man das Wachstum der rechten Seite $f(t, x, u, u_x)$ für $|u_x| \to \infty$ geeignet einschränkt. Dabei kann in „guten Fällen" für die rechte Seite ein Polynom mit einem kritischen Exponenten als Kriterium für das Langzeitverhalten der Lösung angegeben werden, was bedeutet, dass, wenn die rechte Seite langsamer als dieses Polynom wächst, $\max |u_x|$ abgeschätzt werden kann. Andernfalls kann man einen Blow-up (des Gradienten) in endlicher Zeit nachweisen.

Den Ausgangspunkt für unsere Untersuchungen bilden die Resultate aus [10] und [36]. In [10] wurden Kriterien für die Existenz globaler klassischer Lösungen für die Randwertprobleme vom Typ (1), (2a), (3) untersucht. Es wurde gezeigt, dass, wenn die rechte Seite $f(t, x, u, \nabla u)$ nicht schneller als $|\nabla u|^{1+\alpha}$ wächst, mit $\alpha \in [0, 1)$ im semilinearen und $\alpha = 0$ im quasilinearen Fall, dann das maximale Existenzintervall $[0, t^+)$ nur dann endlich ist, wenn der Absolutwert der Lösung für $t \longrightarrow t^+$ explodiert. Außerdem zeigen die Autoren, dass, wenn die rechte Seite schneller als $|\nabla u|^{2+\alpha}$ wächst, die Lösung einen (reinen) Gradienten Blow-up in endlicher Zeit entwickeln kann, d.h. das folgende Verhalten der Lösung möglich ist: Der Absolutwert der räumlichen Ableitung der Lösung explodiert in endlicher Zeit, während der Absolutwert der Lösung beschränkt bleibt. Das gleiche Verhalten der Lösung, im Fall, dass die rechte Seite f eine Singularität enthält, wurde in [31] gezeigt.

Für die quasilineare parabolische Differentialgleichung vom Typ

$$u_t - a(t, x, u, Du)D_{ij}u = f(t, x, u, Du)$$

ist gut bekannt (vgl. [25, Kap. VI, §3], [26, Kap. 10], [32, Kap. 35]), dass das quadratische Wachstum der rechten Seite im Gradienten, genauer des Quotienten $\frac{f(t,x,u,p)}{a(t,x,u,p)}$ für $|p| \to \infty$, eine nahezu optimale Voraussetzung darstellt (zumindest im Falle von Dirichlet- oder

Neumann-Randbedingungen), unter der eine globale a-priori Abschätzung des Absolutwertes des Gradienten möglich ist. Eine scharfe Formulierung dieser Wachstumsbedingung erreicht man, indem man die das Wachstum beschränkende Funktion als Lösung einer geeigneten gewöhnlichen Differentialgleichung sucht (vgl. (4.13)) und somit deren Integraldarstellung bestimmt. Daraus ergibt sich etwa die Forderung

$$\left|\frac{f(t,x,u,p)}{a(t,x,u,p)}\right| \leq \psi(|p|), \tag{5}$$

wobei ψ eine positive Funktion ist mit

$$\int^{+\infty} \frac{\xi \, d\xi}{\psi(\xi)} = \infty. \tag{6}$$

Man beachte, dass die Funktion ψ sogar schneller als quadratisch wachsen kann und trotzdem die Bedingung (6) nicht verletzt (vgl. Bemerkung 4.2 a)). Diese Voraussetzung, auch als Bernstein-Nagumo Bedingung bekannt, scheint ihren Ursprung in den Arbeiten [7] und [30] zu haben, wo sie als Kriterium für die Existenz globaler Integralkurven der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y'' = f(x, y, y')$$

auftaucht. Die Bedingung ist scharf in dem Sinne, dass ihre Verletzung in verschiedenen Situationen zu einem Gradienten Blow-up führen kann [10], [32], vgl. dazu auch den einführenden Teil in [36] sowie die dort angegebene Literatur. Allerdings konnte im Falle der Gleichung (1), d.h. wenn die Raumvariable eindimensional ist, die Bedingung (5)–(6) mit Hilfe der Methode der Verdoppelung der Variable abgeschwächt werden [36]. Ferner ist auch bekannt, dass das Langzeitverhalten einer Lösung auch durch die gegebene Randbedingung beeinflusst werden kann [32]. Ausgehend hiervon haben wir unsere Untersuchungen mit den folgenden Fragestellungen gestartet:

- Unter welchen (zusätzlichen) Voraussetzungen ist die Bernstein-Nagumo Bedingung (5)–(6) für die globale Abschätzung des Gradienten von beschränkten, klassischen Lösungen von (1), (2), (3) bzw. (1), (2a), (3) hinreichend?
- Kann bei der Abschätzung von $\max|u_x|$ die Bernstein-Nagumo Bedingung auch für die Randwertprobleme mit dynamischen Randbedingungen abgeschwächt bzw. ersetzt werden?
- Kann die Abschätzung von $\max|u_x|$ auch durchgeführt werden, wenn man dynamische Randbedingungen an einem Ende des Intervalls $(-l, l)$ mit „klassischen" Randbedingungen an dem anderen Ende kombiniert?
- Unter welchen Voraussetzungen führen die a-priori Abschätzung des Gradienten zu globaler Existenz der (klassischen) Lösungen von (1), (2), (3) bzw. (1), (2a), (3)?

Die Antworten auf die ersten drei Fragen findet man in den Theoremen 4.1, 4.3 und 4.5, vgl. auch die Bemerkung 4.4. Die Untersuchung der globalen Lösbarkeit der gestellten Probleme erstreckt sich gewissermaßen über die ganze Arbeit. Das Problem haben wir für (1), (2a), (3) vollständig und für (1), (2), (3) zum wesentlichen Teil gelöst (mehr dazu unten).

Wie oben schon erwähnt, basiert die Methode, die wir für den Beweis der Theoreme 4.1, 4.3 und 4.5 verwendet haben, auf der Verdoppelung der Raumvariable, die zum ersten Mal in [28] vorgeschlagen wurde. Diese Methode wurde in den Arbeiten [34]–[36] weiterentwickelt und auf die Gleichung (1) im Falle homogener Dirichlet-, Neumann- oder gemischter Randbedingungen angewandt. In Theorem 4.1 konnten wir dieses Verfahren nach einer geeigneten Modifizierung erfolgreich auf das Problem (1)–(3) anwenden. Dabei erforderte die Inklusion der Randbedingung (2) die neuen Wachstumsbedingungen (4.6)–(4.9).

Der Beweis ist so konstruiert, dass man den Gradienten im Inneren und auf dem Rand des betrachteten Gebiets gewissermaßen separat abschätzt. Daher ist es auf eine einfache Weise möglich, Theorem 4.1 mit den Resultaten von [36] zu kombinieren, und somit die Gradientenabschätzung für die Gleichung (1) auch dann durchzuführen, wenn sie an einem Ende des Intervalls $(-l, l)$ die dynamische Randbedingung (2) und an dem anderen Ende Dirichlet-, Neumann- oder gemischte Randbedingung erfüllt. Für die homogene Dirichlet- Randbedingung haben wir es im Theorem 4.5 explizit formuliert. Dieses Resultat ist insbesondere interessant, da in diesem Fall die Verletzung der Wachstumsbedingung (5)–(6) zwangsläufig einen Blow-up des Gradienten nach sich zieht (vgl. die Bemerkung 4.6). Somit ist die Wachstumsbedingung an f von Theorem 4.5 offensichtlich scharf.

Schließlich konnten wir in Theorem 4.3 ähnlich wie in [36] auf die Wachstumsbedingungen an f bzw. g für eine gewisse Klasse von Funktionen verzichten: Die Abschätzung des Gradienten bleibt gültig, wenn man die rechte Seite in (1) bzw. (2) jeweils um einen Summanden $\widetilde{f}(t, x, u, u_x)$ bzw. $\widetilde{g}(t, x, u, u_x)$ erweitert - Funktionen, die zwar beliebig schnell in $|u_x|$ wachsen können, jedoch gewissen Homogenitätsbedingungen unterliegen (vgl. (4.41)–(4.43)). Dabei sind die Bedingungen (4.41) schon aus [36] bekannt, während (4.42) und (4.43) durch die Randbedingung (2) bedingt und somit neu sind. Ausgehend aus dem oben vorgestellten physikalischen Modell des Wärmeaustausches lassen sich diese Bedingungen auch leicht physikalisch interpretieren: Das Explodieren des Temperaturgradienten auf dem Rand des betrachteten Gebietes ist nicht möglich, falls die Differenz zwischen den internen und externen Wärmequellen ausgleichende Wirkung auf den Temperaturanstieg (-abfall) hat.

Die Gradientenabschätzungen der Theoreme 4.1, 4.3 und 4.5 spielen eine Schlüsselrolle im Beweis der globalen Existenz der jeweiligen Randwertaufgabe. Wie oben schon erwähnt, haben wir das entsprechende Existenzresultat für das Problem (1), (2a), (3) in Theorem 4.10 formuliert, dessen Beweis über die ganze Arbeit verteilt ist. Darauf gehen wir im nächsten Abschnitt ausführlicher ein.

Aufbau der Arbeit. Die Arbeit besteht aus vier Kapiteln. Das erste Kapitel hat einen Hilfscharakter. Hier werden die Notation festgelegt, begriffliche Vereinbarungen getroffen sowie die parabolischen Hölderräume, die den funktionalanalytischen Rahmen für unsere Untersuchungen bilden, eingeführt und einige wichtigen Eigenschaften angeführt.

Im zweiten Kapitel betrachten wir das mit (1), (2), (3) assoziierte lineare Problem (2.1)–(2.3). Als Hauptresultat dieses Kapitels beweisen wir in Theorem 2.1 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Randwertaufgabe im Hölderraum $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$ und eine entsprechende Schauder-Abschätzung. Dabei haben für den rigorosen Beweis dieses Theorems einige Ergebnisse aus [8] eine wesentliche Rolle gespielt.

Durch eine Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes beweisen wir im dritten Kapitel in Theorem 3.1 unter zusätzlichen Strukturbedingungen (3.1)–(3.2) an a, f, b und g die Existenz einer lokalen Lösung von (1), (2a), (3), d.h. die Existenz einer Lösung in $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}((0,\varepsilon) \times (-l,l))$ für ein $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in (0,1)$. Ausgehend von dieser Aussage beweisen wir in Theorem 3.2 die Existenz einer $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$-Lösung von (1), (2a), (3) im ganzen Gebiet $(0,T) \times (-l,l)$ für ein vorgegebenes, beliebiges $T > 0$, vorausgesetzt, man kennt eine a-priori Schranke für die geeignete Höldernorm des Gradienten, genauer für $|u_x|_{\Omega_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$.

Diese Hölder-Abschätzung für die Lösung des allgemeinen Problems (1), (2), (3) führen wir im letzten Kapitel in Theorem 4.7 durch. Dieses Theorem beweisen wir, nachdem wir die a-priori Abschätzungen für $\max |u_x|_{\Omega_T}$, auf die wir bereits oben eingegangen sind, gewonnen haben. Außerdem bestimmen wir in Theorem 4.9 die a-priori Schranke für $\max |u|$ (die bis dahin immer als gegeben angenommen worden ist) der Lösung von (1), (2a), (3), unter zusätzlichen Wachstumsbedingungen an f und g. Schließlich fassen wir alle Resultate über das Problem (1), (2a), (3) in Theorem 4.10 zusammen, indem wir Bedingungen für die globale Existenz der Lösung dieser Aufgabe angeben.

Danksagung. An erster Stelle bedanke ich mich von ganzem Herzen bei Prof. Walker für die intensive Betreuung, vor allem für die ständige Bereitschaft, über den aktuellen Stand der Arbeit zu diskutieren. Seine kritischen Anmerkungen und Hinweise sowie die Vorschläge zur Überwindung verschiedener Probleme waren für die Erstellung dieser Arbeit von immenser Bedeutung.

Mein verbindlichster Dank gilt auch Prof. Escher, der mich seit mehr als einem Jahrzehnt nicht nur fachlich unterstützt. Seine positive Einstellung und seine stets sachlichen Ratschläge waren mir in vielen kritischen Situationen eine große Hilfe.

Außerdem bedanke ich mich bei meinem langjährigen Freund und Kollegen Dr. Friedrich Lippoth für die unermüdliche Bereitwilligkeit, seine Zeit für mich zu opfern. Durch seine schnelle Auffassungsgabe hat er mich sehr oft in die Lage versetzt, bestehende Fragestellungen sowie erhaltene Resultate aus einer anderen Perspektive zu betrachten.

Ferner bedanke ich mich bei Dr. Natalya Vasylyeva, die ich 2011 dank Ihrer Dissertation über elliptische und parabolische Probleme mit dynamischen Randbedingungen kennengelernt habe. Durch ihre Spezialkenntnisse auf diesem Gebiet ist mir der ein oder andere Umweg bei meinen Kalkulationen erspart geblieben. Ich danke ihr außerdem für ihre herzliche Gastfreundschaft bei meinem Forschungsaufenthalt in Donetsk im Herbst 2012. An dieser Stelle möchte ich auch meinen Dank dem GRK 1463 aussprechen, das diesen Aufenthalt finanziell unterstützt hat.

Ich bedanke mich auch bei allen Freunden und Kollegen am IfAM für eine überaus angenehme Arbeitsathmosphäre über viele Jahre. Ein besonderer Dank gilt Christina

Schmidt, die mit viel Einsatz dafür gesorgt hat, das auf den nachfolgenden neunzig Seiten möglichst wenig Kommata und Verben an einer falschen Stelle stehen.

Nicht zuletzt bedanke ich mich bei meinen Familienmitgliedern und Freunden für jahrelange moralische Unterstützung, insbesondere bei meiner Mutter und meiner Frau Natia, die besonders in den letzten Monaten sehr viel Geduld bewiesen hat.

Für ein Intervall $Q \subset \mathbb{R}$ und ein $t > 0$ sei

$$Q_t := (0,t) \times Q$$

und

$$S_t(Q) := (0,t) \times \partial Q.$$

Ist aus dem Kontext klar, bezüglich welchen Intervalls Q die Menge $S_t(Q)$ zu verstehen ist, so schreiben wir der Einfachheit halber stets $S_t = S_t(Q)$.

Ist ferner

$$\Omega := (-l, l),$$

so sind (1) und (2) formuliert in

$$\Omega_T = (0,T) \times \Omega,$$

bzw.

$$S_T = (0,T) \times \{-l, l\}.$$

Wo keine Missverständnisse zu befürchten sind, schreiben wir die Argumente der Funktionen nicht explizit hin, z.B.

$$a(t,x,u,u_x)u_{xx} := a(t,x,u(t,x),u_x(t,x))u_{xx}(t,x).$$

Die Schreibweise $(t, \pm l)$ in (2) bzw. (2a) bedeutet, dass diese Randbedingung aus zwei Gleichungen auf $(0,T) \times \{-l\}$ und $(0,T) \times \{l\}$ besteht. Für eine Funktion, definiert auf S_T, wird die jeweilige Norm (Halbnorm) als Maximum dieser Norm (Halbnorm) an beiden dieser Ränder verstanden. So ist z.B.

$$\begin{aligned} &\big\langle b(\cdot, \pm l, u(\cdot, \pm l), u_x(\cdot, \pm l))\big\rangle_{S_T}^{(\alpha)} \\ &\qquad := \max\Big\{ \big\langle b(\cdot, -l, u(t,-l), u_x(\cdot, -l))\big\rangle_{(0,T)}^{(\alpha)}\,,\ \ \big\langle b(\cdot, l, u(t,l), u_x(\cdot, l))\big\rangle_{(0,T)}^{(\alpha)} \Big\} \end{aligned}$$

(die Definition von $\langle \,\cdot\, \rangle_{(0,T)}^{(\alpha)}$ folgt unten in diesem Abschnitt).

Ferner verstehen wir unter einer (klassischen) Lösung des gestellten Problems immer eine im klassischen Sinne differenzierbare Funktion, die die jeweilige Gleichung bzw. Randbedingung punktweise erfüllt. So ist z.B. die Funktion u eine Lösung des Problems (1), (2), (3), falls $u \in C^{1,2}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, die Ableitungen u_t und u_x stetig fortsetzbar auf S_T sind und u die Gleichungen (1), (2), (3) punktweise erfüllt.

Wie schon erwähnt, bilden parabolische Hölderräume den funktionalanalytischen Rahmen in dieser Arbeit. Wir erinnern deren Definition und einige wichtige Eigenschaften. Dabei beschränken wir uns hier auf den räumlich eindimensionalen Fall, bemerken aber, dass mit geeigneten Regularitätsforderungen an das Gebiet diese Definitionen und die meisten Eigenschaften auch für zylindrische (vgl. z.B. [8], [25, Kap. 1] oder [27, Kap. 8]) oder auch allgemeinere (vgl. [26, Kap. 4]) Gebiete des $\mathbb{R}^{n+1}$ gültig sind.

Für ein Intervall $Q \subset \mathbb{R}$ und Zahlen $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0,1)$ bezeichnen wir mit $C^{k+\alpha}(Q)$ den Raum aller reellwertigen, k-mal stetig differenzierbarer Funktionen auf Q, für die die Norm

$$|u|_Q^{(k+\alpha)} := \sum_{j \le k} |D^j u|_{0,Q} + [u]_Q^{(\alpha)}$$

endlich ist, wobei

$$|u|_{0,Q} := \sup_{x \in Q} |u(x)|,$$

$$[u]_Q^{(\alpha)} := 0, \quad \text{falls} \quad \alpha = 0,$$

und

$$[u]_Q^{(\alpha)} := \sum_{j=k} \sup_{x,y \in Q} \frac{|D^j u(x) - D^j u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad \text{falls} \quad \alpha \in (0,1).$$

Die parabolischen Hölderräume $C^{\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha}(Q_T)$ für $T > 0$, $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$ definieren wir nun als Menge der Funktionen mit endlicher Norm

$$|u|_{Q_T}^{(\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha)} := \sum_{2j_0+j \le k} |D_t^{j_0} D_x^j u|_{Q_T} + \langle u \rangle_{Q_T}^{(\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha)}, \tag{1.1}$$

wobei, falls $k = 0$,

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} := \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha}{2})} + \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)}$$

mit

$$\langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{\alpha}{2})} := \sup_{x \in \Omega} [u(\cdot,x)]_{(0,T)}^{(\frac{\alpha}{2})} \quad \text{bzw.} \quad \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} := \sup_{t \in (0,T)} [u(t,\cdot)]_{\Omega}^{(\alpha)},$$

und, falls $k \ge 1$,

$$\langle u \rangle_{Q_T}^{(\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha)} := \sum_{2j_0+j=k} \langle D_t^{j_0} D_x^j u \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \sum_{2j_0+j=k-1} \langle D_t^{j_0} D_x^j u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}. \tag{1.2}$$

In dieser Arbeit ist meistens $k \in \{0,1,2\}$, deshalb schreiben wir diese Spezialfälle hier explizit aus:

$$|u|_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} = |u|_{0,Q_T} + \langle u \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}, \tag{1.3}$$

$$|u|_{Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} = |u|_{0,Q_T} + |u_x|_{0,Q_T} + \langle u_x \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} |u|_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} =& |u|_{0,Q_T} + |u_x|_{0,Q_T} + |u_{xx}|_{0,Q_T} + |u_t|_{0,Q_T} + \langle u_{xx} \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ &+ \langle u_t \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \langle u_x \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bemerkung 1.1. *Da die (globale) Hölder-Stetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit impliziert, kann eine auf einem Gebiet Hölder-stetige Funktion, auf den Rand dieses Gebiets eindeutig stetig fortgesetzt werden. Somit folgt aus den obigen Definitionen offensichtlich, dass, falls* $u \in C^{\frac{k+\alpha}{2}, k+\alpha}(Q_T)$ *ist, so ist*

$$D_t^{j_0} D_x^j u \in C(\overline{Q}_T), \quad \textit{für} \quad 2j_0 + j \leq k.$$

Bemerkung 1.2. *Der zweite Summand in* (1.2) *und folglich auch der letzte Summand in* (1.4) *bzw.* (1.5) *ist überflüssig (vgl.* [26] *Seite 46 und* [27]*, Aufgabe 8.8.6), da die folgende Abschätzung gültig ist:*

$$\sum_{2j_0+|j|=k-1} \langle D_t^{j_0} D_x^j u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c|u|_{Q_T} + \sum_{2j_0+|j|=k} \langle D_t^{j_0} D_x^j u \rangle_{Q_T}^{(\alpha/2,\alpha)}.$$

Allerdings lassen sich durch die Inklusion von diesem Term in der Definition einige Rechnungen bequemer aufschreiben.

Wir werden unten Hölder-Seminormen für Produkte mehrerer Hölder-stetiger Funktionen abschätzen. Dabei verwenden wir eine einfache Rechenregel, die man wie folgt herleiten kann. Sei $Q \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $\alpha \in (0,1)$ und $f_1, f_2 \in C^\alpha(Q)$. Dann folgt aus

$$\frac{|f_1(x)f_2(x) - f_1(y)f_2(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{|f_1(x)||f_2(x) - f_2(y)| + |f_2(y)||f_1(x) - f_1(y)|}{|x-y|^\alpha},$$

dass

$$\big[f_1 f_2\big]_Q^\alpha \leq \big|f_1\big|_{0,Q} \big[f_2\big]_Q^\alpha + \big|f_2\big|_{0,Q} \big[f_1\big]_Q^\alpha. \tag{1.6}$$

Es ist klar, dass man diese Rechenregel durch Induktion auch auf Produkte von mehr als zwei Funktionen verallgemeinern kann, und dass sie auch für die Seminormen $\langle u \rangle_{Q_T}^{(\alpha)}$ gültig ist, d.h.

$$\Big\langle \prod_{k=1}^n f_k \Big\rangle_Q^{(\alpha)} \leq \sum_{k=1}^n \Big(\langle f_k \rangle_Q^{(\alpha)} \Big| \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n f_i \Big|_{0,Q} \Big). \tag{1.7}$$

Folgende Interpolationsungleichungen, genauer deren multiplikative Versionen (vgl. (1.9)), werden wir oft in unseren Berechnungen benutzen. Wir formulieren sie hier für unseren Spezialfall $\Omega_T = (0,T) \times (-l,l)$, obwohl sie auch für geeignete zylindrische Gebiete des $\mathbb{R}^{n+1}$ gültig sind.

Theorem 1.3. *Es gibt eine Konstante* $c = c(l)$*, so dass für jedes* $\varepsilon > 0$ *und jede Funktion* $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\Omega_T)$ *gilt*

$$\begin{aligned}
|u_t|_{0,Q_T} &\leq \varepsilon \langle u_t \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + c\varepsilon^{-\frac{2}{\alpha}} |u|_{0,Q_T}, \\
|u_{xx}|_{0,Q_T} &\leq \varepsilon \langle u \rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c\varepsilon^{-\frac{2}{\alpha}} |u|_{0,Q_T}, \\
|u_x|_{0,Q_T} &\leq \varepsilon \langle u \rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c\varepsilon^{-\frac{1}{1+\alpha}} |u|_{0,Q_T}, \\
\langle u_x \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &\leq \varepsilon \langle u \rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c\varepsilon^{-(1+\alpha)} |u|_{0,Q_T}, \\
\langle u \rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &\leq \varepsilon \langle u \rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c\varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}} |u|_{0,Q_T}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Beweis. Für den Beweis siehe [27], Theorem 8.8.1. □

Da die obigen Ungleichungen für jedes $\varepsilon > 0$ gelten, können durch geschickte Wahl dieser Zahl die folgenden multiplikativen Interpolationsungleichungen leicht bewiesen werden.

Korollar 1.4. *Es gibt ein $c = c(l)$, so dass für jedes $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_T)$ gilt*

$$\begin{aligned} |u_t|_{0,Q_T} + |u_{xx}|_{0,Q_T} &\le c\, U_{2+\alpha}^{2/(2+\alpha)} U_0^{1-2/(2+\alpha)}, \\ |u_x|_{0,Q_T} &\le c\, U_{2+\alpha}^{1/(2+\alpha)} U_0^{1-1/(2+\alpha)}, \\ \langle u_x\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &\le c\, U_{2+\alpha}^{(1+\alpha)/(2+\alpha)} U_0^{1-(1+\alpha)/(2+\alpha)}, \\ \langle u\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &\le c\, U_{2+\alpha}^{\alpha/(2+\alpha)} U_0^{1-\alpha/(2+\alpha)}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

wobei $U_0 := |u|_{0,Q_T}$ und $U_{2+\alpha} := \langle u\rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$.

Beweis. Sei $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_T)$. Laut Theorem 1.3 gibt es ein $c = c(l)$ mit

$$|u_t|_{0,Q_T} \le \varepsilon a + C\varepsilon^{-\frac{2}{\alpha}} b,$$

wobei $a := \langle u_t\rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ und $b := |u|_{0,Q_T}$. Diese Ungleichung ist für beliebiges $\varepsilon > 0$ gültig. Wir setzen $\varepsilon := \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}}$ und erhalten

$$\begin{aligned} |u_t|_{0,Q_T} &\le a\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} + cb\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{-2}{2+\alpha}} \\ &= a^{\frac{2}{2+\alpha}} b^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} + ca^{\frac{2}{2+\alpha}} b^{\frac{\alpha}{2+\alpha}} \\ &= (1+c) a^{\frac{2}{2+\alpha}} b^{(1-\frac{2}{2+\alpha})} \\ &= (1+c)\Big(\langle u_t\rangle_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\Big)^{\frac{2}{2+\alpha}} \Big(|u|_{0,Q_T}\Big)^{(1-\frac{2}{2+\alpha})} \\ &\le (1+c)\, U_{2+\alpha}^{\frac{2}{2+\alpha}}\, U_0^{(1-\frac{2}{2+\alpha})}. \end{aligned}$$

Durch das Einsetzen des gleichen ε in die zweite Ungleichung von (1.8) können wir $|u_{xx}|_{0,Q_T}$ genauso abschätzen, und wir erhalten die erste Ungleichung von (1.9). Die Wahl eines geeigneten ε liefert auch die restlichen Ungleichungen. Ein passendes ε kann gefunden werden, indem die jeweilige rechte Seite in (1.8) als Funktion von ε minimiert wird (vgl. auch [27, Aufgabe 8.8.2]). □

Bemerkung 1.5. *Laut* (1.9) *kann man alle Summanden der Norm $|\cdot|_{Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}$ bis auf $\langle u\rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ gegen U_0 und $U_{2+\alpha}$ interpolieren. Nach Bemerkung 1.2 ist die Abschätzung dieser Halbnorm überflüssig. Da wir aber später genau wissen müssen, wie $\langle u\rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ gegen $|u|_{0,Q_T}$ und $\langle u\rangle_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ interpoliert werden kann, führen wir hier diese Rechnung* *ausführlich durch. Seien zunächst* $(t,x),(s,x) \in Q_T$. *Dann folgt, falls* $|t-s| \leq 1$, *aus dem Mittelwertsatz und der ersten Ungleichung in* (1.9), *dass*

$$\frac{|u(t,x)-u(s,x)|}{|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leq \frac{|u(t,x)-u(s,x)|}{|t-s|} \leq |u_t|_{0,Q_T} \leq c\,U_{2+\alpha}^{2/(2+\alpha)} U_0^{1-2/(2+\alpha)}$$

und, falls $|t-s| > 1$, *dass*

$$\frac{|u(t,x)-u(s,x)|}{|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}} \leq |u(t,x)-u(s,x)| \leq 2U_0.$$

Folglich ist

$$\langle u\rangle_{t,Q_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c\,U_{2+\alpha}^{2/(2+\alpha)} U_0^{1-2/(2+\alpha)} + 2U_0. \tag{1.10}$$

Schließlich wollen wir hier noch bemerken, dass in Kapitel 2 eine zusätzliche Notation verwendet wird, die wir in Abschnitt 2.1 vereinbaren.

2. Lineare Gleichung

In diesem Kapitel betrachten wir die lineare Randwertaufgabe

$$u_t - a(t,x)u_{xx} = f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T) \times (-l,l), \tag{2.1}$$

$$u_t \pm b(t,\pm l)u_x = g(t,\pm l), \qquad t \in (0,T), \tag{2.2}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad x \in [-l,l]. \tag{2.3}$$

Wir werden beweisen, dass unter Voraussetzung gleichmäßiger Parabolizität, geeigneter Kompatibilitäts- und Regularitätsbedingungen und einer Vorzeichenbedingung an b, dieses Problem im Hölderraum $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$ eindeutig lösbar ist. Bevor wir diese Aussage als ein Theorem formulieren, treffen wir geeignete Annahmen.

Da wir den räumlich eindimensionalen Fall betrachten, kann man sowohl die gleichmäßige Parabolizität als auch die geeignete Vorzeichenbedingung an b auf eine einfache Weise dadurch fordern, dass es positive Zahlen ε_1, ε_2, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ gibt, so dass

$$0 < \varepsilon_1 \le a(t,x) \le \mathcal{E}_1, \quad (t,x) \in \Omega_T, \tag{2.4}$$

und

$$0 < \varepsilon_2 \le \pm b(t,\pm l) \le \mathcal{E}_2, \quad t \in (0,T). \tag{2.5}$$

Ferner bemerken wir, dass, falls eine Funktion $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega}_T)$ das Problem (2.1)–(2.3) im klassischen Sinne löst, sich die Zeitableitung u_t in den Eckpunkten $(0,\pm l)$ sowohl aus der Rand- als auch aus der Anfangsbedingung bestimmen lässt. Deshalb ist offensichtlich, dass für die klassische Lösbarkeit von (2.1)–(2.3) in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$ folgende Kompatibilitätsbedingung erfüllt sein muss:

$$\big(au_{0xx} + f\big)(0,\pm l) = \big(\mp bu_{0x} + g\big)(0,\pm l) \tag{2.6}$$

(vgl. Bemerkung 1.1).

Nun können wir unter diesen Voraussetzungen das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

Theorem 2.1. *Für ein $\alpha \in (0,1)$ seien $a \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\Omega_T)$, $b \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$ und die Bedingungen* (2.4)–(2.5) *seien erfüllt. Dann existiert für die Funktionen $f \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\Omega_T)$, $g \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$ und $u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, falls sie der Voraussetzung* (2.6) *genügen, eine eindeutige Lösung $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$ des Problems* (2.1)–(2.3) *mit $u_t \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$, und es gibt eine Konstante*

$$c(T) = c(T,\varepsilon_1,\varepsilon_2,|a|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)},|b|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}),$$

so dass

$$|u|_{\Omega_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + |u_t|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \le c(T)\big(|f|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |u_0|_{(-l,l)}^{(2+\alpha)} + |g|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big), \tag{2.7}$$

wobei $c(T)$ eine (exponentiell) wachsende Funktion von T ist.

Bemerkung 2.2. *Die Behauptung des obigen Theorems für den Fall von Raumdimensionen strikt größer als 1 findet man in* [8, Theorem 1.1]. *Allerdings ist dort nur ein Teil* *des Beweises gegeben. Wir benötigen diese Aussage vor allem für den Beweis der Existenz lokaler Lösungen nichtlinearer Probleme und wollen deshalb genau wissen, wie die Konstante $c(T)$ von den Parametern, durch die sie bestimmt wird, abhängt. Aus diesem Grund geben wir einen rigorosen Beweis des Theorems 2.1. Hierzu verwenden wir einige Abschätzungen aus* [8].

Die Methode, die wir zum Beweis des Theorems 2.1 verwenden, ist in [25, Kap. 4] für Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen ausführlich beschrieben. Wir reduzieren dabei das Problem (2.1)–(2.3) durch Konstruktion einer Hilfsfunktion (vgl. Abschnitt 2.4) auf das Problem mit Anfangswert 0, genauer, auf die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} v_t - a(t,x)v_{xx} &= f(t,x), && (t,x) \in (0,T) \times (-l,l), \\ v_t \pm b(t,\pm l)v_x &= g(t,\pm l), && t \in (0,T), \\ v(0,x) &= 0, && x \in [-l,l], \end{aligned} \tag{2.8}$$

in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$, wobei $f \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\Omega_T)$ und $g \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$ mit

$$f(0,x) = g(0,\pm l) = 0, \quad x \in (-l,l).$$

Die folgenden Funktionenräume bieten den geeigneten Rahmen für die Untersuchung dieses Problems: Für ein Intervall Q und reelle Zahlen $l, T > 0$ notieren wir mit $\mathring{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{Q}_T)$ die Unterräume von $C^{\frac{l}{2},l}(Q_T)$ derjenigen Funktionen, deren Zeitspur 0 ist, genauer,

$$\mathring{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{Q}_T) := \left\{ f \in C^{\frac{l}{2},l}(Q_T) : \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,x) = 0, \quad k = 0, ..., \left[\frac{l}{2}\right] \right\} \tag{2.9}$$

bzw.

$$\mathring{C}^{l}([0,T]) := \left\{ f \in C^{l}(0,T) : \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0) = 0, \quad k = 0, ..., [l] \right\}, \tag{2.10}$$

wobei $[s] := \max\{z \in \mathbb{Z} : \; z < s\}$. Ist $v \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_T)$ eine Lösung von (2.8), so ist offensichtlich

$$v(0,x) = v_t(0,x) = 0, \quad x \in (-l,l),$$

d.h. $v \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$. Somit ist das in (2.8) gestellte Problem äquivalent dazu, dass man für jedes Paar $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ und $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$ eine Funktion $v \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_T)$ bestimmt, mit

$$\begin{aligned} v_t(t,x) - a(t,x)v_{xx}(t,x) &= f(t,x), && (t,x) \in (0,T) \times (-l,l), \\ v_t(t,0) \pm b(t,\pm l)v_x(t,\pm l) &= g(t,\pm l), && t \in (0,T). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Wir bemerken noch, dass wir für dieses Problem keine Kompatibilitätsbedingung stellen müssen, da für $u_0 = 0$ und jedes Paar $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$ die Gleichung (2.6) offensichtlich immer erfüllt ist.

Nun formulieren wir die Aussage, die im Beweis des Theorems 2.1 die entscheidende Rolle spielt.

Theorem 2.3. *Für ein* $\alpha \in (0,1)$ *seien* $a \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\Omega_T)$, $b \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$, *und es seien* (2.4) *und* (2.5) *erfüllt. Dann existieren für jedes Paar* $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{\Omega}_T)$, $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$ *positive Zahlen*

$$\tau = \tau(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |a|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}, |b|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, l)$$

und

$$c = c(\varepsilon_1, \mathcal{E}_1, \varepsilon_2, \mathcal{E}_2, l),$$

so dass das Problem (2.11) *eine eindeutige Lösung* $v \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ *besitzt, für die die folgende Abschätzung gilt*

$$|v|_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + |v_t|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c\big(|f|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big). \tag{2.12}$$

Die Hauptidee des Beweises ist, die lineare Randwertaufgabe (2.11), die variable Koeffizienten a und b enthält, auf korrespondierende Anfangs-Randwertaufgaben mit konstanten Koeffizienten zurückzuführen. Für diesen Zweck wird das betrachtete Gebiet in hinreichend kleine Gebiete zerlegt, in denen die Koeffizienten eingefroren werden. Danach werden mittels Zerlegung der Eins die Lösungen der Modellgleichungen im jeweiligen Gebiet zu einer Lösung zusammengefügt. Auf diese Weise wird die Invertierbarkeit eines geeigneten Operators A zwischen den Räumen $\mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ und $\mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{\Omega}_\tau) \times \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{S}_\tau)$ bewiesen, was zu der eindeutigen Lösbarkeit von (2.11) äquivalent ist. Die Abschätzung (2.12) folgt dann aus der Abschätzung der Operatornorm von A^{-1}.

2.1. **Notation und Hilfsresultate.**

Bevor wir die Modellgleichungen formulieren, führen wir hier eine zusätzliche Notation ein und zitieren einige Resultate, die wir in diesem Kapitel verwenden werden.

2.1.1. ***Notation***.

Wir nutzen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ &:= (0,\infty), & R &:= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \\ D &:= \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, & \widetilde{D} &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ R^l &:= \mathbb{R}^+ \times (-\infty, l), & R^{-l} &:= \mathbb{R}^+ \times (-l, \infty) \end{aligned}$$

und

$$B_{(T)} := \{(t,x) \in B :\ t < T\},$$

für ein $B \subset \mathbb{R}^2$. So ist zum Beispiel $\mathbb{R}^2_{(T)} = (-\infty, T) \times \mathbb{R}$ und $D_{(T)} = (0,T) \times \mathbb{R}$. Diese Notation werden wir immer dort benutzen, wo es aus Platzgründen sinnvoll erscheint.

Ferner notieren wir mit f^0 die triviale Fortsetzung für $t < 0$ einer Funktion f, die nur für $t \geq 0$ definiert ist, d.h.

$$f^0(t,x) := \begin{cases} f(t,x), & \text{wenn} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{wenn} \quad t < 0. \end{cases} \tag{2.13}$$

2.1.2. ***Zerlegung der Eins***. Auf dem Intervall $\overline{\Omega} = [-l, l]$ können wir die folgende Zerlegung der Eins definieren (für die Existenz einer solchen Zerlegung verweisen wir auf [25, Kap. IV, § 4]):

Für ein beliebiges $\lambda > 0$ seien $N \in \mathbb{N}$ und Intervalle $\omega^{(k)}$, $\Omega^{(k)}$ mit $-N \leq k \leq N$ so gewählt, dass

a) $\omega^{(k)} \subset \Omega^{(k)} \subset \Omega \quad$ und $\quad \bigcup\limits_{|k|\leq N} \omega^{(k)} = \bigcup\limits_{|k|\leq N} \Omega^{(k)} = \Omega$;

b) für jedes $x \in \Omega$ gibt ein $k \in \{-N, ..., N\}$ so, dass $x \in \omega^{(k)}$ und der Abstand zwischen x und $\Omega \setminus \omega^{(k)}$ nicht kleiner ist als λ;

c) es gibt ein $N_0 \in \mathbb{N}$ so, dass höchstens N_0 verschiedene $\Omega^{(k)}$ einen nicht leeren Schnitt haben;

d) für $k \in \{-N+1, ..., N-1\}$ enthalten die Mengen $\overline{\omega^{(k)}}$ und $\overline{\Omega^{(k)}}$ keine Randpunkte, haben einen gemeinsamen Mittelpunkt ξ_k, und ihre Länge ist λ bzw. 2λ. Außerdem ist $\xi_{-N} := -l \in \overline{\omega^{(-N)}}$ und $\xi_N := l \in \overline{\omega^{(N)}}$.

Bekanntlich (vgl. z.B. [2, Satz 7.14]) gibt es $\zeta^{(k)} \in C^\infty(\Omega^{(k)})$, $k = -N, ..., N$, mit folgenden Eigenschaften:

$$0 \leq \zeta^{(k)} \leq 1, \quad \zeta^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad x \in \omega^{(k)}, \\ 0, & \text{falls} \quad x \in \Omega \setminus \Omega^{(k)}, \end{cases}$$

und es gibt für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $c(m) > 0$, so dass

$$\left| \frac{\partial^m \zeta^{(k)}}{\partial x^m} \right|_{0,\Omega^{(k)}} \leq \frac{c(m)}{\lambda^m}. \tag{2.14}$$

Ferner definieren wir die Funktionen

$$\mu^{(k)} := \frac{\zeta^{(k)}}{\sum\limits_{|k|\leq N} |\zeta^{(j)}|^2},$$

für die offensichtlich gilt

$$\mu^{(k)} = 0 \text{ in } \Omega \setminus \Omega^{(k)} \quad \text{und} \quad 0 \leq \mu^{(k)} \leq 1.$$

Außerdem folgt aus der Eigenschaft $c)$ der Intervalle $\Omega^{(k)}$, dass

$$1 \leq \sum_{|k|\leq N} |\zeta^{(k)}(x)|^2, \leq N_0 \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Folglich kann man wegen (2.14) leicht überlegen, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $c(m) > 0$ existiert, mit

$$\left| \frac{\partial^m \mu^{(k)}}{\partial x^m} \right|_{0,\Omega^{(k)}} \leq \frac{c(m)}{\lambda^m}. \tag{2.15}$$

Es gilt außerdem

$$\sum_{|k|\leq N} \mu^{(k)}(x) \zeta^{(k)}(x) = 1, \quad x \in \Omega. \tag{2.16}$$

2.1.3. ***Äquivalente Normen auf*** $u \in \overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{\Omega}_\tau)$ ***und andere Hilfsresultate.*** Sei $\Omega^{(k)}$ die oben angegebene Zerlegung von Ω und $\tau > 0$. Dann definiert $\Omega_\tau^{(k)} = (0,\tau) \times \Omega^{(k)}$, $k = -N, ..., N$, eine Zerlegung von Ω_τ und offensichtlich ist

$$\{u\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)} := \max_{|k|\le N} \langle u\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{l}{2},l)} < \infty. \tag{2.17}$$

Wie wir sehen werden, wird durch $\{\cdot\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)}$ eine zu $|\cdot|_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)}$ äquivalente Norm auf $\overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{\Omega}_\tau)$ definiert.

Lemma 2.4. *Sei* $u \in \overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{\Omega}_\tau)$. *Für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $k \le l$ *gibt es ein* $c = c(k,l)$, *so dass*

$$\sum_{2j_0+j=k} |D_t^{j_0} D_x^j u|_{0,\Omega_\tau} \le c\,\tau^{\frac{l-k}{2}} \sum_{0<l-2j_0-j<2} \left\langle D_t^{j_0} D_x^j u\right\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{l-2j_0-j}{2})}. \tag{2.18}$$

Beweis. Siehe [25, Kapitel IV, Lemma 4.1]. □

Lemma 2.5. *Sei*

$$\tau = \lambda^2\chi, \tag{2.19}$$

mit $\chi \le 1$ *und* $\lambda^2\chi \le T$. *Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$, *die nicht von* λ *und* χ *abhängt, so dass für jedes* $u \in \overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{\Omega}_\tau)$ *gilt*

$$\{u\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)} \le \langle u\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)} \le c\,\{u\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)}. \tag{2.20}$$

Beweis. Siehe [25, Kapitel IV, Lemma 4.2]. □

Bemerkung 2.6. *Aus Lemma 2.4 folgt, dass für eine Funktion* $u \in \overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}(\overline{\Omega}_\tau)$ *der erste Summand der rechten Seite von* (1.1) *durch den zweiten nach oben abgeschätzt werden kann. Kombinieren wir dies mit der Aussage von Lemma 2.5, so ist offensichtlich, dass durch* $|\cdot|_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$, $\langle\cdot\rangle_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ *und* $\{\cdot\}_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ *äquivalente Normen definiert werden (auf dem Raum* $\overset{\circ}{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$*).*

In Lemma 2.22 werden wir Funktionen bzw. deren Summen abschätzen, die durch die oben definierten Funktionen $\mu^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ auf $\Omega^{(k)}$ abgeschnitten sind. Wir werden dabei die folgenden zwei Lemmata anwenden.

Lemma 2.7. *Seien* $s \le [l]+1$ *und* ψ_k *eine* s*-mal differenzierbare Funktion, definiert auf* $\Omega^{(k)}$, *so dass*

$$\left|\frac{\partial^s \psi_k}{\partial x^s}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \le \frac{c_s}{\lambda^s} \tag{2.21}$$

mit τ *und* λ *wie im Lemma 2.5. Dann gibt es eine Konstante* $c > 0$, *die weder von* τ *noch von* λ *abhängt, so dass für jede Funktion* $u \in \overset{\circ}{C}^{\frac{l}{2},l}\left(\overline{\Omega_\tau^{(k)}}\right)$ *gilt*

$$\langle \psi_k u\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{l}{2},l)} \le c\,\langle u\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{l}{2},l)}.$$

Beweis. Siehe [25, Kapitel IV, Lemma 4.3]. □

Lemma 2.8. *Seien $\Omega^{(k)}$, $k \in \{-N, ..., N\}$, wie oben und*

$$w(t,x) := \sum_{|k| \le N} w^{(k)}(t,x),$$

wobei $w \in C^{\frac{l}{2},l}(\Omega_\tau)$ mit $w^{(k)}(t,x) = 0$, wenn $x \in \Omega \setminus \Omega^{(k)}$. Dann ist

$$\{w\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{l}{2},l)} \le N_0 \max_{|k| \le N} \langle w^{(k)} \rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{l}{2},l)}.$$

Beweis. Siehe [25, Kapitel IV, Lemma 4.4]. □

2.1.4. ***Wärmeleitungsgleichungen***. Wir wollen hier kurz einige Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung bzw. des Wärmeleitungskerns erinnern. Für $f \in C(\mathbb{R}^2)$ sei

$$\Gamma * f(t,x) := \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t-\tau, x-y) f(\tau, y) dy d\tau, \tag{2.22}$$

wobei Γ den Wärmeleitungskern

$$\Gamma(t,x) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, & \text{wenn} \quad t > 0, \\ 0, & \text{wenn} \quad t \le 0, \end{cases} \tag{2.23}$$

bezeichnet. Wächst $f(t,x)$ nicht zu schnell für $|x| \to \infty$ (nicht schneller als e^{cx^2} für ein $c > 0$), so gilt

$$(\partial_t - \partial_{xx})(\Gamma * f)(t,x) = f(t,x) \quad \text{für} \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

d.h. $\Gamma * f$ löst die homogene Wärmeleitungsgleichung in $\mathbb{R}^2$. Ist f zusätzlich in $C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\mathbb{R}^2_{(T)})$, so ist $\Gamma * f \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\mathbb{R}^2_{(T)})$ und es gibt eine Konstante $c > 0$, die nicht von T abhängt, mit

$$\langle \Gamma * f \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \le c \, \langle f \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}. \tag{2.24}$$

Ferner erinnern wir, dass das Dirichlet-Problem für die nicht homogene Wärmeleitungsgleichung mit nicht konstantem Wärmeleitungskoeffizienten, d.h.

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - a(t,x) u_{xx}(t,x) &= f(t,x), && (t,x) \in Q_T, \\ u(t,x) &= \phi(t,x), && (t,x) \in (0,T) \times \partial Q, \\ u(0,x) &= u_0(x), && x \in Q, \end{aligned} \tag{2.25}$$

unter Annahme der gleichmäßigen Parabolizität und der üblichen Regularitäts- bzw. Kompatibilitätsbedingungen im Hölderraum $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_T)$ eindeutig lösbar ist. Dies wollen wir im folgenden Theorem, das einen Spezialfall von [25, Kap. IV, Theorem 5.2] darstellt, festhalten.

Theorem 2.9. *Seien $Q \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $T > 0$ und $a \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)$. Ferner sei die Bedingung* (2.4) *erfüllt. Dann gibt es für die Funktionen $f \in C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(Q_T)$, $\phi \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$ und $u_0 \in C^{2+\alpha}(Q)$, falls sie die Kompatibilitätsbedingungen*

$$u(0,x) = \phi(0,x), \quad \phi_t(0,x) - a(0,x)u_{0_{xx}}(0,x) = f(0,x), \quad x \in \partial Q, \tag{2.26}$$

erfüllen, eine eindeutige Lösung $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(Q_T)$ von (2.25) *und es gibt eine Konstante $c = c(\varepsilon_1, T)$, so dass*

$$|u|_{Q_T}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \leq c(|f|_{Q_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |\phi|_{S_T}^{(1+\frac{\alpha}{2})} + |u_0|_Q^{2+\alpha}). \tag{2.27}$$

2.2. **Modellgleichungen.** In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Modellaufgaben. Sie enthalten Gleichungen mit konstanten Koeffizienten, die mit (2.1), (2.2) korrespondieren, d.h. sie entstehen aus (2.1) und (2.2) durch das Einfrieren von $a(t,x)$ bzw. $b(t,x)$ in den Punkten $(0,\xi_k)$.

Die erste Modellaufgabe ist das Cauchy-Problem im Halbraum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ für die nicht homogene Wärmeleitungsgleichung mit Anfangbedingung. Wir können es mit Hilfe der oben eingeführten Räume $\mathring{C}^{\frac{l}{2},l}$ wie folgt formulieren:

Modellaufgabe 1: Für Konstanten $a, T > 0$, $\alpha \in (0,1)$ und ein $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{\mathbb{R}^2_{(T)}})$ suchen wir eine Funktion $w \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}^2_{(T)}})$ mit

$$w_t(t,x) - aw_{xx}(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}. \tag{2.28}$$

Die zweite Aufgabe besteht aus der nicht homogenen Wärmeleitungsgleichung, gekoppelt mit dynamischen Randbedingung, genauer:

Modellaufgabe 2: Für Konstanten $a, -b, T > 0$, $\alpha \in (0,1)$ und Funktionen $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{R_{(T)}})$ und $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$ suchen wir eine Funktion $u \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R_{(T)}})$, die folgende Randwertaufgabe erfüllt:

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - au_{xx}(t,x) &= f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ u_t(t,0) + bu_x(t,0) &= g(t), \qquad\qquad t \in (0,T). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die folgenden zwei Aussagen über die Lösbarkeit der Modellprobleme 1 und 2 spielen eine fundamentale Rolle im Beweis des Theorems 2.3.

Theorem 2.10. *Die Modellaufgabe 1 hat eine eindeutige Lösung $w \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R_{(T)}})$ und es gibt eine von T unabhängige Konstante $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a)$ mit*

$$\langle w \rangle_{R_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \leq \mathcal{C} \langle f \rangle_{R_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}. \tag{2.30}$$

Beweis. Diese Aussage ist gut bekannt und ist für den allgemeinen n-dimensionalen Fall z.B. in [25, Kapitel IV, Theorem 6.1] bewiesen. □

Theorem 2.11. *Die Modellaufgabe 2 besitzt eine eindeutige Lösung $u \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R_{(T)}})$ mit $u_t(\cdot,0) \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$ und es gibt eine Konstante*

$$\mathcal{C}_T = \mathcal{C}_T\,(\alpha, \max\{a, \frac{1}{a}, |b|, \frac{1}{|b|}\}, T),$$

so dass
$$\langle u\rangle^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}_{R(T)} + \langle u_t(\cdot,0)\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,T)} \le \mathcal{C}_T\Big(\langle f\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}_{R(T)} + \langle g\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,T)}\Big), \tag{2.31}$$
wobei $\mathcal{C}_T$ wachsend in T ist.

Der Beweis dieser Aussage ist der Hauptinhalt des Abschnitts 2.2. Eine Methode, die für die Untersuchung solcher Modellprobleme verwendet wird, besteht im Wesentlichen in der Herleitung einer expliziten oder impliziten Darstellungsformel der Lösung mittels einer geeigneten Integraltransformation und der Durchführung von Schauder-Abschätzungen für die hergeleitete Lösung (vgl. [25, Kapitel IV, §2], [8], [9]). Diese Methode wenden wir auf das Modellproblem 2 an und gehen dabei wie folgt vor: Zunächst betrachten wir das Problem (2.32), das einen Spezialfall von (2.29) darstellt und zeigen, dass dessen Lösung durch das Faltungsintegral (2.36) gegeben ist. Dabei können wir, da wir den räumlich eindimensionalen Fall betrachten, mit Laplace-Transformation auskommen (statt Fourier-Laplace Transformation, wie im allgemeinen n-dimensionalen Fall). In den Lemmata 2.12–2.16 und dem anschließenden Satz 2.17 führen wir für diese Lösung die Abschätzung der entsprechenden Höldernorm durch. Ferner beweisen wir im Satz 2.19 ein einfaches Vergleichsprinzip, das die eindeutige Lösbarkeit von (2.29) sichert. Nach diesen Vorbereitungen beweisen wir Theorem 2.11 im Abschnitt 2.2.4.

2.2.1. ***Lösungspotential für homogene Wärmeleitungsgleichung mit dynamischer Randbedingung***. Wie angekündigt betrachten wir zunächst den Spezialfall von (2.29) mit $a = 1$ und $f = 0$, genauer, wir betrachten eine beschränkte klassische Lösung v des Problems
$$\begin{aligned} v_t(t,x) - v_{xx}(t,x) &= 0, && (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty),\\ v_t(t,0) + bv_x(t,0) &= g(t), && t\in(0,T),\\ v(0,x) &= 0, && x\in(0,\infty), \end{aligned} \tag{2.32}$$
und wenden darauf die Laplace-Transformation in der t-Variable an, die für eine geeignete Funktion f definiert ist durch
$$L(f)(p,x) := \widetilde{f}(p,x) := \int_0^\infty e^{-pt} f(t,x)dt,$$
wobei $p\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\ p > 0$. Das transformierte Problem lautet
$$\begin{aligned} p\widetilde{v}(p,x) - \widetilde{v}_{xx}(p,x) &= 0,\\ p\widetilde{v}(p,0) + b\widetilde{v}_x(p,0) &= \widetilde{g}(p). \end{aligned} \tag{2.33}$$
Folglich ist für eine geeignete Funktion F
$$\widetilde{v}(p,x) = F(p)e^{-\sqrt{p}x}$$
eine beschränkte Lösung der ersten Gleichung von (2.33). (Das formale Vorgehen bei der Herleitung einer Darstellungsformel für die Lösung von (2.32) ist an dieser Stelle gerechtfertigt, da wir später rigoros zeigen, dass durch die hergeleitete Formel die eindeutige

Lösung von (2.32) in der gewählten Funktionenklasse gegeben ist.) Das Einsetzen von $\widetilde{v}$ in die transformierte Randbedingung liefert

$$pF(p) - b\sqrt{p}F(p) = \widetilde{g}(p)$$

und daher

$$F(p) = \frac{\widetilde{g}(p)}{p - b\sqrt{p}}.$$

Somit ist

$$v = L^{-1}\Big(\frac{e^{-\sqrt{p}x}}{p - b\sqrt{p}}\,\widetilde{g}(p)\Big). \tag{2.34}$$

Wir zeigen unten, dass

$$G(t,x) := L^{-1}\Big(\frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p - b\sqrt{p}}\Big) = -2\int_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x - b\xi)d\xi \tag{2.35}$$

mit Γ aus (2.23). Ferner gilt für geeignete Funktionen f_1 und f_2 (vgl. z.B. [12, 4.1 (20)])

$$L(f_1 *_t f_2)(t) = \widetilde{f_1}(p)\widetilde{f_2}(p),$$

wobei

$$f_1 *_t f_2(t) := \int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau.$$

Somit ist wegen (2.34) und (2.35) die Funktion

$$v(t,x) = G *_t g(t,x) = \int_0^t G(t-\tau,x)g(\tau)d\tau, \quad (t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}^+, \tag{2.36}$$

eine Lösung der Randwertaufgabe (2.32).

Diese Behauptung werden wir im Folgenden ausführlich beweisen. Zunächst aber gehen wir kurz darauf ein, wie man die Gleichung (2.35) herleiten kann. Laut [12, 5.6 (1)] gilt für jedes $x > 0$

$$L^{-1}(e^{-x\sqrt{p}}) = \frac{x}{t}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}} = -2\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\Big) = -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x).$$

Somit ist für $-b, x, \xi > 0$

$$L^{-1}\Big(e^{-(x-b\xi)\sqrt{p}}\Big) = -2\frac{\partial\Gamma(t, x-b\xi)}{\partial x}. \tag{2.37}$$

Ferner ist laut [12, 4.1 (4)] für $\xi > 0$

$$L^{-1}(e^{-\xi p}\widetilde{f}(p)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad t < \xi, \\ f(t-\xi), & \text{wenn} \quad t > \xi. \end{cases}$$

Deshalb folgt aus (2.37), dass

$$L^{-1}(e^{-\xi p}e^{-(x-b\xi)\sqrt{p}}) = \begin{cases} 0, & \text{wenn} \quad t < \xi, \\ -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi), & \text{wenn} \quad t > \xi. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} L\Big(-2\int_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi)d\xi\Big) &= L\Big(-2\int_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi)d\xi\Big) \\ &= \int_0^\infty L\Big(-2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi)\Big)d\xi = \int_0^\infty e^{-\xi p}e^{-(x-b\xi)\sqrt{p}}d\xi \\ &= \frac{e^{-x\sqrt{p}}}{p-b\sqrt{p}}. \end{aligned}$$

Somit gilt (2.35) und folglich auch (2.36).

Wir zeigen nun, dass v, gegeben durch (2.35) und (2.36), die Gleichung (2.32) im Punkt (t, x) löst, falls g in t stetig ist. Zuerst bemerken wir, dass für Γ, definiert in (2.23), gilt

$$\frac{\partial^j\partial^k\Gamma(t,x)}{\partial t^j\partial x^k} = \frac{P(t,x)}{t^s}\, e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

wobei s eine von der Differentiationsordnung abhängige positive reelle Zahl und P ein Polynom in $\sqrt{t}$ und x ist. Damit gilt für $x \neq 0$

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\partial^j\partial^k\Gamma(t,x)}{\partial t^j\partial x^k} = 0.$$

Folglich ist $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+)$ mit

$$\partial_j^t\partial_k^x\Gamma(t,x) = 0, \quad \text{wenn} \quad t \le 0.$$

Somit ist für $b < 0$ auch $G \in C^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+)$ und

$$G(t,x) \longrightarrow 0, \quad \text{wenn} \quad t \longrightarrow 0. \tag{2.38}$$

Wir rechnen leicht nach, dass für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \partial_{xx})G(t,x) &= (\partial_t - \partial_{xx})\Big(-2\int_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi)d\xi\Big) \\ &= -2\lim_{\xi\to t}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\xi, x-b\xi) - 2\int_0^t \partial_x(\partial_t - \partial_{xx})\Gamma(t-\xi, x-b\xi)d\xi \\ &= 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$
\begin{aligned}
&(\partial_t - \partial_{xx})v(t,x)\\
&\quad = (\partial_t - \partial_{xx})\Big(\int_0^t G(t-s,x)g(s)ds\Big)\\
&\quad = \lim_{h\to 0+} G(h,x)g(t) + \int_0^t (\partial_t - \partial_{xx})G(t-s,x)g(s)ds = 0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+,
\end{aligned}
$$

d.h. v erfüllt die erste Gleichung von (2.32). Um zu überprüfen, dass auch die Randbedingung erfüllt ist, rechnen wir zunächst nach, dass für alle $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$ gilt

$$
(\partial_t + b\partial_x)G(t,x) = -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x). \tag{2.39}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} &= -2\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)d\tau\\
&= -2\Big(\lim_{\tau\to t}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-\tau,x-b\tau) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)d\tau\Big)\\
&= -2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

und

$$
\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} = -2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)d\tau.
$$

Somit ist

$$
\begin{aligned}
(\partial_t + b\partial_x)G(t,x) &= -2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}(\partial_t + b\partial_x)\Gamma(t-\tau,x-b\tau)d\tau\\
&= 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial}{\partial \tau}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)\Big)d\tau = 2\int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Gamma(t-\tau,x-b\tau)\Big)d\tau\\
&= 2\lim_{\tau\to t}\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\tau,x-b\tau) - 2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x)\\
&= -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x).
\end{aligned}
$$

So folgt aus (2.36) und (2.39)

$$(\partial_t + b\partial_x)v(t,x) = (\partial_t + b\partial_x)\int\limits_0^t G(t-\tau,x)g(\tau)d\tau = -2\int\limits_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\tau,x)g(\tau)d\tau.$$

Deshalb müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\lim_{x\to 0} -2\int\limits_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\tau,x)g(\tau)d\tau = g(t). \tag{2.40}$$

Es gilt

$$\int\limits_0^\infty -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)d\tau = 2\int\limits_0^\infty \frac{-x}{2\tau}\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}d\tau = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{x}{\tau^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4\tau}}d\tau$$

und mit $\xi := \frac{x}{2\sqrt{\tau}}$ erhalten wir

$$\int\limits_0^\infty -2\frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)d\tau = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty 4e^{-\xi^2}d\xi = 1. \tag{2.41}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
-2&\int\limits_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t-\tau,x)g(\tau)d\tau \\
&= -2\int\limits_0^t \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x)g(t-\tau)d\tau \\
&= -2\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x)g^0(t-\tau)d\tau \\
&= -2\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(t,x)(g(t)-g(t)+g^0(t-\tau))d\tau \\
&= g(t)\Big(-2\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)d\tau\Big) + 2\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g(t)-g^0(t-\tau))d\tau \\
&= g(t) + 2\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g^0(t)-g^0(t-\tau))d\tau.
\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass, wenn g stetig in t ist, dann ist

$$\lim_{x\to 0}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g^0(t)-g^0(t-\tau))d\tau = 0. \tag{2.42}$$

Da t eine Stetigkeitsstelle von g ist, können wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so wählen, dass

$$\sup_{\tau\in(0,\delta)}|g^0(t)-g^0(t-\tau)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir erhalten zunächst

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g^0(t)-g^0(t-\tau))d\tau &= \int\limits_\delta^\infty \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g^0(t)-g^0(t-\tau))d\tau \\ &\quad + \int\limits_0^\delta \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)(g^0(t)-g^0(t-\tau))d\tau =: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Dann ist

$$|I_1| \le x\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sup_{\tau\in(0,t)}|g^0(t)-g^0(t-\tau)|\Big|\sup_{\tau\in\mathbb{R}^+} e^{-\frac{x^2}{4\tau}}\int\limits_\delta^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}}\Big| \le C(\delta)x \le \frac{\varepsilon}{2},$$

wenn x hinreichend klein ist, und mit (2.41) und durch unsere Wahl von δ folgt auch, dass

$$|I_2| \le \Big|\int\limits_0^\delta \frac{\partial\Gamma}{\partial x}(\tau,x)d\tau\Big|\sup_{\tau\in(0,\delta)}|g^0(t)-g^0(t-\tau)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Somit gilt (2.42) und damit auch (2.40). Folglich erfüllt v die Randbedingung in (2.32). Dass v auch die Anfangsbedingung erfüllt, ist offensichtlich.

2.2.2. ***Hölderabschätzung von*** $G *_t g$. Wir wollen nun für v, gegeben durch (2.35)–(2.36), eine Abschätzung vom Typ (2.24) erhalten, genauer, wir wollen $\langle G *_t g\rangle_{R_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ durch $\langle g\rangle_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ nach oben abschätzen. Dafür schätzen wir nach etwas Vorbereitung in den Lemmata 2.15–2.16 die notwendigen Hölder-Seminormen ab und fassen diese Abschätzungen im Satz 2.17 zu dem erwünschten Ergebnis zusammen. An dieser Stelle möchten wir bemerken, dass die nachfolgenden Abschätzungen (2.44), (2.45), (2.57) und (2.75) das eindimensionale Analogon der Abschätzungen (4.6), (4.7), (4.14) und (5.6) aus [8] darstellen und auf gleiche Weise bewiesen werden.

Beim Beweis der Lemmata 2.12–2.15 werden wir oft benutzen, dass $\sup\limits_x x^m e^{-ax^n}$ für $a > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}$ durch eine Konstante nach oben abgeschätzt werden kann, wobei das Supremum über $\mathbb{R}$, falls $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl ist, und andernfalls über $[0,\infty)$ gebildet wird. Deshalb setzen wir

$$\mathcal{M} := \max_{a,m,n}\sup_x x^m e^{-ax^n}, \tag{2.43}$$

wobei das Maximum über die endlich vielen Zahlen m, n und a gebildet wird, die in den Lemmata 2.12–2.15 vorkommen.

Lemma 2.12. *Sei G wie in (2.35) gegeben. Dann gibt es $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 > 0$, so dass*

$$|G(t,x)| \le \mathcal{C}_1, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \tag{2.44}$$

und

$$\Big|\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}\Big| \le \frac{\mathcal{C}_2}{t}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \tag{2.45}$$

Beweis. Laut (2.35) und (2.23) gilt

$$G(t,x) = -2\int_0^t \frac{\partial\Gamma(t-u, x-bu)}{\partial x}\,du = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{x-bu}{(t-u)^{3/2}} e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}}\,du. \tag{2.46}$$

Mit $d := x - bt$ und der Substitution $\xi = t - u$ ist

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi}G(t,x) &= \int_0^t \frac{d+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(d+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi \\ &= \int_0^{t/2} \frac{d+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(d+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi + \int_{t/2}^t \frac{d+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(d+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.47}$$

Für $\xi \in (0, \frac{t}{2})$ und $d = x - bt$ mit $-b, t, x > 0$ gilt, dass $\frac{(d+b\xi)^2}{4\xi} \ge \frac{d^2}{16\xi}$ und somit

$$|I_1| \le \int_0^{t/2} \frac{d}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{d^2}{16\xi}}\,d\,\xi = \int_0^{t/2d^2} \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{16\tau}}\,d\,\tau \le \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{16\tau}}\,d\,\tau < \infty, \tag{2.48}$$

wobei wir die Substitution $\tau = \frac{\xi}{d^2}$ verwendet haben. Offensichtlich ist das letzte Integral konvergent und dessen Wert von t, x und b unabhängig. Mit der Substitution $z = \frac{d+b\xi}{\xi^{1/2}}$ erhalten wir für I_2

$$|I_2| = \Big|\int_{t/2}^t \frac{1}{\xi} z e^{-\frac{z^2}{4}}\,d\xi\Big| \le \max_{z\in\mathbb{R}}(ze^{-\frac{z^2}{4}}) \int_{t/2}^t \frac{1}{\xi}\,d\xi \le \mathcal{M}\ln 2. \tag{2.49}$$

Somit folgt (2.44) aus (2.47)–(2.49) mit $\mathcal{C}_1 := \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Big(\mathcal{M}\ln 2 + \int_0^\infty \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{1}{16\tau}}\,d\,\tau\Big)$.

Um die Ungleichung (2.45) zu zeigen, benutzen wir die Gleichung (2.39). Demnach können wir anstelle von $\Big|\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}\Big|$ die Größen $\Big|\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\Big|$ und $\Big|\frac{\partial \Gamma(t,x)}{\partial x}\Big|$ abschätzen. Aus (2.23) und mit $c_1 := \frac{\mathcal{M}}{2\sqrt{\pi}}$ erhalten wir

$$\Big|\frac{\partial \Gamma}{\partial x}(t,x)\Big| = \frac{1}{t}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{x}{2\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}} \le \frac{c_1}{t}, \qquad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,\infty). \tag{2.50}$$

Für $\frac{\partial G}{\partial x}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} 4\sqrt{\pi}\,\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \frac{-(x-bu)}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}}\,du \\ &= \int\limits_0^t \Big(\frac{-1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}} + \frac{(x-bu)^2}{2(t-u)^{5/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}}\Big)\,du. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Wir schätzen zunächst den zweiten Summanden des Integranden ab. Für $u \in (0,t)$ ist

$$\begin{aligned} \frac{(x-bu)^2}{2(t-u)^{5/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}} &= \frac{4}{(t-u)^{3/2}}\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}} \\ &\le \frac{4\mathcal{M}}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Da $e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}} \le e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}}$ ist, folgt aus (2.51), (2.52) und mit $c_2 := 4\mathcal{M}+1$, dass

$$\Big|4\sqrt{\pi}\,\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\Big| \le c_2 \int\limits_0^t \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}}\,du. \tag{2.53}$$

Für $x > 0$ und $b < 0$ ist

$$\begin{aligned} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{(x-bu)^2}{8(t-u)}}\,du &= \int\limits_0^t \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{b^2u^2}{8(t-u)}}e^{\frac{-x^2+2xbu}{8(t-u)}}\,du \\ &\le \int\limits_0^t \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{b^2u^2}{8(t-u)}}\,du \\ &= \int\limits_0^{t/2} \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{b^2u^2}{8(t-u)}}\,du + \int\limits_{t/2}^t \frac{1}{(t-u)^{3/2}}e^{-\frac{b^2u^2}{8(t-u)}}\,du \\ &=: I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Da

$$I_3 \le \Big(\max_{0\le u\le \frac{t}{2}} \frac{1}{(t-u)^{3/2}}\Big) \int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{b^2u^2}{8(t-u)}}\,du \le \Big(\frac{2}{t}\Big)^{3/2} \int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{b^2u^2}{8t}}\,du$$
$$= \frac{2^{3/2}}{t}\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{b^2u^2}{8t}}\,du,$$

folgt mit der Substitution $\xi = \frac{ub}{\sqrt{t}}$ und $c_3 := 2^{3/2}\int\limits_0^{\infty} e^{-\xi^2/8}\,d\xi$, dass

$$|I_3| \le \frac{1}{t}\frac{2^{3/2}}{|b|}\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{8}}\,d\xi = \frac{1}{t}\frac{c_3}{|b|}. \tag{2.54}$$

Um I_4 abzuschätzen, folgern wir zunächst, dass

$$|I_4| \le \int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-u)^{3/2}} e^{-\frac{b^2t^2}{32(t-u)}}\,du \le \int\limits_0^{t/2} \frac{1}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{b^2t^2}{32\xi}}\,d\xi.$$

Mit der Substitution $\mu = \frac{bt}{4\sqrt{\xi}}$ und $c_4 := 8\int\limits_0^{\infty} e^{\frac{-\tau^2}{2}}\,d\tau$ erhalten wir

$$|I_4| \le \frac{1}{t}\frac{-8}{b}\int\limits_0^{\infty} e^{\frac{-\mu^2}{2}}\,d\mu \le \frac{1}{t}\frac{c_4}{|b|}. \tag{2.55}$$

Aus (2.53), (2.54) und (2.55) folgt

$$\Big|b\,\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\Big| \le \frac{1}{2\sqrt{\pi}} c_2(c_3+c_4)\frac{1}{t}, \quad (t,x)\in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+. \tag{2.56}$$

Nun folgt (2.45) mit $\mathcal{C}_2 := c_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}c_2(c_3+c_4)$ aus (2.39), (2.50) und (2.56). $\square$

Lemma 2.13. *Für G gegeben durch* (2.35) *gibt es ein $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_3(b,T)$, so dass*

$$\Big|\frac{\partial^j}{\partial x^j} G(t,x)\Big| \le \mathcal{C}_3 \frac{1}{(t^2+x^2)^{j/2}}, \quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^+, \quad j\in\{1,2\}. \tag{2.57}$$

Beweis. Aus (2.23) berechnen wir, dass

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2}(t-\tau,x-b\tau)\Big| &= \Big|\frac{-1}{4\sqrt{\pi}}\Big(\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{4(t-\tau)}} \\
&\quad - \frac{4}{(t-\tau)^{3/2}}\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\Big)\Big| \\
&\le \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{1+4\mathcal{M}}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}} \\
&\le c_1\,\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}},
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

mit $c_1 := \frac{1+4\mathcal{M}}{4\sqrt{\pi}}$ und

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^3\Gamma}{\partial x^3}(t-\tau,x-b\tau)\Big| &= \Big|\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Big(\frac{3(x-b\tau)}{2(t-\tau)^{5/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{4(t-\tau)}} - \frac{(x-b\tau)^3}{4(t-\tau)^{7/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{4(t-\tau)}}\Big)\Big| \\
&\le \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Big(\frac{3\sqrt{2}}{(t-\tau)^2}\Big(\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}\Big)^{1/2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}} \\
&\qquad + \frac{8\sqrt{2}}{(t-\tau)^2}\Big(\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}\Big)^{3/2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\Big) \\
&\le \frac{11\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}\frac{\mathcal{M}}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}} \\
&= \frac{c_2}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}},
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

mit $c_2 := \frac{11\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}\mathcal{M}$. Somit ist

$$
\Big|\frac{\partial^{j+1}\Gamma}{\partial x^{j+1}}(t-\tau,x-b\tau)\Big| \le (c_1+c_2)\frac{1}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}, \quad j\in\{1,2\}. \tag{2.60}
$$

Wir setzen $\delta := \frac{\min\{1,b^2\}}{8}$. Dann ist $\frac{x^2+b^2\tau^2}{8} \ge \delta(x^2+b^2\tau^2)$ und für $-b,\tau,x>0$ gilt

$$
e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}} \le e^{-\frac{x^2+b^2\tau^2}{8(t-\tau)}} \le e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}.
$$

Daraus, aus (2.60) und aus (2.35) erhalten wir für $j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{2}\frac{\partial^j G}{\partial x^j}(t,x)\Big| &\leq \int\limits_0^t \Big|\frac{\partial^{j+1}\Gamma}{\partial x^{j+1}}(t-\tau, x-b\tau)\Big|\, d\tau \\
&\leq (c_1+c_2)\int\limits_0^t \frac{e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau \qquad (2.61)\\
&\leq (c_1+c_2)\Big(\int\limits_0^{t/2} \frac{e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau + \int\limits_{t/2}^{t} \frac{e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau\Big).
\end{aligned}$$

Wir setzen $c_3 := \frac{2}{j}\max\limits_{t,x>0}\Big[e^{-\delta\frac{x^2}{t}}\Big(\frac{t+x^2}{t}\Big)^{j/2}\Big] = \frac{2}{j}\max\limits_{a>0} e^{-\delta a}(1+a)^{j/2}$ und erhalten für $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int\limits_0^{t/2} \frac{e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau \leq e^{-\delta\frac{x^2}{t}}\int\limits_0^{t/2} \frac{1}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau \\
&= \frac{2}{j}(2^{j/2}-1)e^{-\delta\frac{x^2}{t}}\frac{1}{t^{j/2}} \leq \frac{c_3}{(t+x^2)^{j/2}} \leq \frac{c_3}{(\frac{t^2}{T}+x^2)^{j/2}} \qquad (2.62)\\
&\leq c_3\max\{T^{j/2-1},1\}\frac{1}{(t^2+x^2)^{j/2}}.
\end{aligned}$$

Um das zweite Integral von (2.61) abzuschätzen, überlegen wir zunächst, dass für $\delta, a > 0$

$$\max_{z>0} z^{-\frac{2+j}{2}}\exp(-\delta\frac{a}{z}) = c_4^{-\frac{2+j}{2}} a^{\frac{2+j}{2}}\exp(-\frac{\delta}{c_4}a^2). \qquad (2.63)$$

mit $c_4 := -\frac{2+j}{2\delta}$. Ferner gilt

$$I_2 := \int\limits_{t/2}^{t} \frac{e^{-\delta\frac{x^2+\tau^2}{t-\tau}}}{(t-\tau)^{(2+j)/2}}\, d\tau \leq \int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{(2+j)/2}} e^{-\delta\frac{x^2+(\frac{t}{2})^2}{t-\tau}}\, d\tau. \qquad (2.64)$$

So folgt aus (2.63) und mit $c_5 := 4c_4^{-\frac{2+j}{2}}\mathcal{M}$, dass

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{(2+j)/2}} e^{-\delta\frac{x^2+(\frac{t}{2})^2}{t-\tau}}\,d\tau \\
&\quad\le c_4^{-\frac{2+j}{2}}\left(x^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^{\frac{2+j}{2}} e^{-\delta(x^2+(\frac{t}{2})^2)^2/c_4}\int\limits_{t/2}^{t} d\tau \\
&\quad\le c_4^{-\frac{2+j}{2}} \frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^{j/2}} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)}{\left(x^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\left(x^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^{\frac{3+2j}{2}} e^{-\delta(x^2+(\frac{t}{2})^2)^2/c_4} \qquad (2.65)\\
&\quad\le c_4^{-\frac{2+j}{2}} \frac{1}{\left(x^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)^{j/2}} \max_{\xi>0}\xi^{\frac{3+2j}{2}}e^{-\delta\frac{\xi^2}{c_4}} \\
&\quad\le \frac{c_5}{\left(x^2+t^2\right)^{j/2}}.
\end{aligned}
$$

Somit haben wir I_1 und I_2 durch die rechte Seite von (2.57) abgeschätzt. Folglich erhalten wir die Behauptung aus (2.61). □

Als nächstes beweisen wir eine Darstellungsformel, die in den Beweisen der Lemmata 2.15 und 2.16 verwendet wird.

Lemma 2.14. *Für $g \in C(\mathbb{R}^+)$ und G gegeben durch* (2.35) *gilt*

$$
\frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau)-g(t)]\,d\tau, \quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+, \qquad (2.66)
$$

wobei g^0 die triviale Fortsetzung von g ist (vgl. (2.13)*).*

Beweis. Wir erinnern, dass

$$
G *_t g\,(t,x) = \int\limits_0^t G(t-\tau,x)g(\tau)\,d\tau.
$$

Folglich erhalten wir mit (2.38), dass

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,x) &= \lim_{h\to 0} G(h,x)g(t) + \int\limits_0^t \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t} g(\tau)\,d\tau \\
&= \int\limits_0^t \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t} g(\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\infty}^t \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t} g^0(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \qquad (2.67)
$$

Also müssen wir nur noch zeigen, dass

$$\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t} g^0(t)\,d\tau = 0.$$

Wir formen das Integral um:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t} g^0(t)\,d\tau &= -g^0(t) \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial \tau}\,d\tau \\ &= -g^0(t)\Big(\lim_{h\to 0} G(h,x) + \lim_{h\to\infty} G(h,x)\Big) \\ &= g^0(t) \lim_{h\to\infty} G(h,x).\end{aligned} \tag{2.68}$$

Somit muss noch gezeigt werden, dass

$$\lim_{h\to\infty} G(h,x) = 0. \tag{2.69}$$

Wir erinnern (vgl. (2.46)), dass

$$G(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{t} \frac{x-bu}{(t-u)^{3/2}} e^{-\frac{(x-bu)^2}{4(t-u)}}\,du.$$

Mit $a := x - bt$ (beachte, dass $a > 0$, da $b < 0$) und der Substitution $\xi := t - u$ erhalten wir

$$I := 2\sqrt{\pi} G(t,x) = \int_{0}^{t} \frac{a+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi. \tag{2.70}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta(\varepsilon) \in (0,1)$, so dass

$$\log\frac{1}{\delta} < \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{\sqrt{2e}} \tag{2.71}$$

und spalten I wie folgt auf:

$$|I| \le \Big|\int_{0}^{\delta t} \frac{a+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi\Big| + \Big|\int_{\delta t}^{t} \frac{a+b\xi}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}}\,d\xi\Big| =: |I_1| + |I_2|. \tag{2.72}$$

Für $\xi \in (0, \delta t)$, $b < 0$, $\delta \in (0,1)$ und $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ gilt

$$a + b\xi \ge x - bt + \delta bt \ge (1-\delta)x - (1-\delta)bt = (1-\delta)a > 0$$

und somit

$$e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}} \le e^{-\frac{(1-\delta)^2 a^2}{4\xi}}.$$

Folglich ist

$$|I_1| \leq \left| \int\limits_0^{\delta t} \frac{a}{\xi^{3/2}} e^{-\frac{(1-\delta)^2 a^2}{4\xi}} \, d\xi \right|.$$

Durch die Substitution $\mu = \frac{(1-\delta)a}{2\sqrt{\xi}}$ erhalten wir

$$|I_1| \leq \frac{4}{1-\delta} \int\limits_{\frac{a(1-\delta)}{2\sqrt{\delta t}}}^{\infty} e^{-\mu^2} \, d\mu = \frac{4}{1-\delta} \int\limits_{\frac{(x-bt)(1-\delta)}{2\sqrt{\delta t}}}^{\infty} e^{-\mu^2} \, d\mu.$$

Da wiederum $\delta \in (0,1)$ fest gewählt und $b < 0$ ist, sieht man, dass $\frac{(x-bt)(1-\delta)}{2\sqrt{\delta t}} \to \infty$, wenn $t \to \infty$. Wir können somit t so groß wählen, dass

$$|I_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.73}$$

Als nächstes zeigen wir, dass I_2 unabhängig von der Wahl von t abgeschätzt werden kann. Es gilt

$$\max_{\xi \in [\delta t, t]} \left| \frac{a + b\xi}{\xi^{1/2}} e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}} \right| \leq \max_{\xi > 0} \left| \frac{a + b\xi}{\xi^{1/2}} e^{-\frac{(a+b\xi)^2}{4\xi}} \right| \leq \max_{x > 0} \left| x e^{-\frac{x^2}{4}} \right| = 2e.$$

Somit ist nach unserer Wahl von δ (vgl. (2.71)), dass

$$|I_2| \leq \sqrt{2e} \int\limits_{\delta t}^{t} \frac{1}{\xi} \, d\xi = \sqrt{2e} \log \frac{1}{\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.74}$$

Nun folgt (2.69) aus (2.70), (2.72), (2.73) und (2.74). Die Behauptung des Lemmas folgt nun aus (2.67), (2.68) und (2.69). $\square$

Lemma 2.15. *Für jedes $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ gibt es eine Konstante $\mathcal{C}_4 = \mathcal{C}_4(\beta, b, T) > 0$, so dass*

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} (G *_t g) \right\rangle_{t, R_{(T)}}^{(\beta)} \leq \mathcal{C}_4 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} \tag{2.75}$$

für jedes $g \in \mathring{C}^{\beta}([0,T])$.

Beweis. Laut Lemma 2.14 ist

$$\frac{\partial}{\partial t} (G *_t g)(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau, x)}{\partial t} [g^0(\tau) - g(t)] \, d\tau, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+.$$

Somit ist für $h > 0$ mit $t + h < T$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\,(G *_t g)(t+h,x) - \frac{\partial}{\partial t}\,(G *_t g)(t,x)\\
&\qquad = \int\limits_{-\infty}^{t+h} \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t+h)]\,d\tau\\
&\qquad\quad - \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t)]\,d\tau\\
&\qquad = \int\limits_{t-h}^{t+h} \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t+h)]\,d\tau\\
&\qquad\quad - \int\limits_{t-h}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t)]\,d\tau\\
&\qquad\quad + \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(\frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}g(t) - \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}g(t+h)\Big)\,d\tau\\
&\qquad\quad + \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(\frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t} - \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}\Big)g^0(\tau)\,d\tau.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Wir integrieren den dritten Summanden unter Berücksichtigung von (2.69) und formen dann das Ergebnis passend um:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(\frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}g(t) - \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}g(t+h)\Big)\,d\tau\\
&= \Big(-G(t-\tau,x)g(t) + G(t+h-\tau,x)g(t+h)\Big)\Big|_{-\infty}^{t-h}\\
&= -G(h,x)g(t) + G(2h,x)g(t+h)\\
&= G(2h,x)g(t+h) - G(2h,x)g(t) + G(2h,x)g(t) - G(h,x)g(t)\\
&= G(2h,x)g(t+h) - G(2h,x)g(t)\\
&\qquad + \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(-\frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t} + \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}\Big)g(t)\,d\tau.
\end{aligned}$$

Das Einsetzen in (2.76) liefert

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t+h,x) - \frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,x) \\
&\qquad = \int\limits_{t-h}^{t+h} \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t+h)]\,d\tau \\
&\qquad\quad - \int\limits_{t-h}^{t} \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t)]\,d\tau \\
&\qquad\quad + G(2h,x)[g(t+h) - g(t)] \\
&\qquad\quad + \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(\frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t} - \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}\Big)[g^0(\tau) - g(t)]\,d\tau \\
&\qquad =: I_1 - I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned} \tag{2.77}
$$

Die Abschätzungen für I_1 bis I_3 sind relativ einfach, da wir hier die Hölder-Stetigkeit von g direkt ausnutzen können. Um I_1 abzuschätzen, verwenden wir außerdem (2.45):

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\leq \int\limits_{t-h}^{t+h} \Big| \frac{\partial G(t+h-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t+h)] \Big|\,d\tau \\
&\leq \int\limits_{t-h}^{t+h} \frac{\mathcal{C}_2}{|t+h-\tau|}\,\langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)} |t+h-\tau|^{\beta}\,d\tau \\
&\leq \mathcal{C}_2 \frac{2}{\beta}\,\langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)}\,h^{\beta}.
\end{aligned} \tag{2.78}
$$

Auf die gleiche Weise folgt für I_2, dass

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int\limits_{t-h}^{t} \Big| \frac{\partial G(t-\tau,x)}{\partial t}[g^0(\tau) - g(t)] \Big|\,d\tau \\
&\leq \int\limits_{t-h}^{t} \frac{\mathcal{C}_2}{|t-\tau|}\,\langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)} |t-\tau|^{\beta}\,d\tau \\
&\leq \mathcal{C}_2 \frac{1}{\beta}\,\langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)}\,h^{\beta}
\end{aligned} \tag{2.79}
$$

und schließlich mit (2.44), dass

$$
|I_3| \leq\ |G|_{0,\Omega_T}\,\langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)}\,h^{\beta} \leq \mathcal{C}_1 \langle g\rangle^{(\beta)}_{(0,T)}\,h^{\beta}. \tag{2.80}
$$

Das Integral I_4 formen wir zunächst um

$$I_4 = \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(\int\limits_0^h \frac{\partial^2 G(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t^2}\, d\lambda \Big) [g^0(\tau) - g(t)]\, d\tau.$$

Ferner liefert die Darstellung von $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}$ durch (2.39), dass

$$\begin{aligned} I_4 &= \int\limits_{-\infty}^{t-h} \int\limits_0^h \Big(-2\frac{\partial^2 \Gamma(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x} + b\frac{\partial^2 G(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x}\, d\lambda \Big) [g^0(\tau) - g(t)]\, d\tau \\ &= \int\limits_0^h \int\limits_{-\infty}^{t-h} \Big(-2\frac{\partial^2 \Gamma(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x} + b\frac{\partial^2 G(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x} \Big) [g^0(\tau) - g(t)]\, d\tau d\lambda. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Wir wollen die einzelnen Summanden des Integranden abschätzen. Zunächst rechnen wir nach, dass mit $c_1 := \frac{5\mathcal{M}}{4\pi}$:

$$\Big|\frac{\partial^2 \Gamma(t,x)}{\partial t \partial x}\Big| = \frac{1}{4\pi}\Big| 3\Big(\frac{x^2}{4t}\Big)^{1/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{1}{t^2} - 2\Big(\frac{x^2}{4t}\Big)^{3/2} e^{-\frac{x^2}{4t}} \frac{1}{t^2}\Big| \le \frac{c_1}{t^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} &\Big| \int\limits_0^h \int\limits_{-\infty}^{t-h} -2\frac{\partial^2 \Gamma(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x} [g^0(\tau) - g(t)]\, d\tau d\lambda \Big| \\ &\le 2c_1 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} \Big| \int\limits_0^h \int\limits_{-\infty}^{t-h} \frac{1}{(t+\lambda-\tau)^2} |t-\tau|^\beta\, d\tau d\lambda \Big| \\ &\le 2c_1 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} \int\limits_0^h \int\limits_{-\infty}^{t-h} \frac{1}{(t+\lambda-\tau)^2} (t+\lambda-\tau)^\beta\, d\tau d\lambda \\ &\le c_1 \frac{2(2^\beta - 1)}{\beta(1-\beta)} \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} h^\beta. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Ferner folgt wieder aus (2.23) und mit $c_2 := \frac{1+2\mathcal{M}}{4\sqrt{\pi}}$, dass

$$\Big|\frac{\partial^2 \Gamma(t,x)}{\partial x^2}\Big| = \Big| \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Big(\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{2}{t^{3/2}} \frac{x^2}{4t} e^{-\frac{x^2}{4t}} \Big) \Big| \le \frac{c_2}{t^{3/2}}.$$

Damit und mit Hilfe von (2.57) können wir den zweiten Summanden in (2.81) abschätzen. Dabei benutzen wir erneut die Formel (2.39), um daraus $\frac{\partial^2 G(t+\lambda-\tau,x)}{\partial t \partial x}$ zu bestimmen. Da

$\beta \in (0, \frac{1}{2})$, erhalten wir mit $c_3 := 2(c_2 + \mathcal{C}_3) \max\{2b, b^2\}$, dass

$$
\begin{aligned}
&\Big| \int_0^h \int_{-\infty}^{t-h} b \frac{\partial^2 G(t+\lambda-\tau, x)}{\partial t \partial x} [g^0(\tau) - g(t)] \, d\tau d\lambda \Big| \\
&= \Big| \int_0^h \int_{-\infty}^{t-h} b \frac{\partial}{\partial x} \Big(-2 \frac{\partial \Gamma(t+\lambda-\tau, x)}{\partial x} + b \frac{\partial G(t+\lambda-\tau, x)}{\partial x} \Big) [g^0(\tau) - g(t)] \, d\tau d\lambda \Big| \\
&\leq (c_2 + \mathcal{C}_3) \Big| \int_0^h \int_{-\infty}^{t-h} \Big(2b \frac{1}{(t+\lambda-\tau)^{3/2}} + b^2 \frac{1}{(t+\lambda-\tau)^2 + x^2} \Big) [g^0(\tau) - g(t)] \, d\tau d\lambda \Big| \\
&\leq (c_2 + \mathcal{C}_3) \max\{2b, b^2\} \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} \Big| \int_0^h \int_{-\infty}^{t-h} \Big(\frac{1}{(t+\lambda-\tau)^{3/2-\beta}} + \frac{1}{(t+\lambda-\tau)^{2-\beta}} \Big) \, d\tau d\lambda \Big| \\
&\leq (c_2 + \mathcal{C}_3) \max\{2b, b^2\} \, \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} \, |(2h)^{\beta+\frac{1}{2}} - h^{\beta+\frac{1}{2}} + (2h)^\beta - h^\beta| \\
&\leq c_3 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} h^\beta,
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

wobei wir in der letzten Ungleichung o.B.d.A. angenommen haben, dass $|h| < 1$ und somit $|h|^{\beta+\frac{1}{2}} \leq |h|^\beta$. Aus (2.81), (2.82), (2.83) und mit $c_4 := c_1 \frac{2(2^\beta - 1)}{\beta(1-\beta)} + c_3$ ergibt sich, dass

$$
I_4 \leq c_4 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\beta)} h^\beta, \tag{2.84}
$$

und dann folgt aus (2.77)–(2.80), (2.84) und mit $\mathcal{C}_4 := \mathcal{C}_1 + \frac{3}{\beta}\mathcal{C}_2 + c_4$ die Behauptung des Lemmas. □

Lemma 2.16. *Für jedes $\alpha \in (0,1)$ gibt es eine Konstante $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_5(\alpha, b, T)$, so dass*

$$
\Big\langle \frac{\partial}{\partial t} (G *_t g) \Big\rangle_{x, R_{(T)}}^{(\alpha)} \leq \mathcal{C}_5 |g|_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \tag{2.85}
$$

für jedes $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$.

Beweis: Wir schätzen zunächst $\frac{\partial G}{\partial t \partial x}$ ab und beweisen dann mit Hilfe dieser Abschätzung, der Darstellung (2.66) und des Mittelwertsatzes die Behauptung des Lemmas.

Zunächst folgt aus (2.39), dass

$$
\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x}(t,x) = -b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x) - 2 \frac{\partial \Gamma^2}{\partial x^2}(t,x). \tag{2.86}
$$

Es gilt (vgl. (2.58))

$$
\Big| \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}(t,x) \Big| \leq c_1 \frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{8t}}, \tag{2.87}
$$

mit c_1 aus Lemma 2.13. Aus (2.35) und (2.59) folgt ferner

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x)\Big| &\le \Big|\,2\int\limits_0^t \frac{\partial \Gamma^3}{\partial x^3}(t-\tau, x-b\tau)\,d\tau\Big| \\ &\le \frac{11\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\mathcal{M}\int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\,d\tau.\end{aligned} \tag{2.88}$$

Um das letzte Integral abzuschätzen, teilen wir das Integrationsintervall $(0,t)$ auf. Wir erhalten, dass

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{t/2} \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\,d\tau &\le \max_{0\le\tau\le\frac{t}{2}}\frac{1}{(t-\tau)^2}\Big(\int\limits_0^{t/2} e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\,d\tau\Big) \\ &\le \frac{4}{t^2}e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{T}{2} \\ &= 2T\frac{e^{-\frac{x^2}{8t}}}{t^2}\end{aligned} \tag{2.89}$$

und

$$\begin{aligned}\int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{8(t-\tau)}}\,d\tau &\le \max_{0\le\tau\le\frac{t}{2}} e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{16(t-\tau)}}\Big(\int\limits_{t/2}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{(x-b\tau)^2}{16(t-\tau)}}\,d\tau\Big) \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}}\int\limits_{t/2}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{x^2}{16(t-\tau)}}e^{\frac{xb\tau}{16(t-\tau)}}e^{-\frac{b^2\tau^2}{16(t-\tau)}}\,d\tau \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}}\int\limits_{t/2}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{b^2\tau^2}{16(t-\tau)}}\,d\tau \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}}\int\limits_{t/2}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{b^2t^2}{64(t-\tau)}}\,d\tau \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}}\int\limits_{t/2}^{t}\frac{1}{\xi^2}e^{-\frac{b^2t^2}{64\xi}}\,d\xi \\ &\le e^{-\frac{x^2}{8t}}\int\limits_{2/t}^{\infty} e^{-\frac{b^2t^2\eta}{64}}\,d\eta = e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{32}{t^2} = \frac{64}{b^2}\frac{e^{-\frac{x^2}{8t}}}{t^2}.\end{aligned} \tag{2.90}$$

Also folgt aus (2.88)–(2.90) und mit $c_2 := \frac{11\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\mathcal{M}(2T + \frac{64}{b^2})$, dass

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(t,x)\right| \le c_2 e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{1}{t^2}. \tag{2.91}$$

Aus (2.86), (2.87), (2.91) und mit $c_3 := 2c_1 + |b|c_2$ erhalten wir

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x}(t,x)\right| \le |b|c_2 e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{1}{t^2} + 2c_1 e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{1}{t^{3/2}} \le \begin{cases} c_3 e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{1}{t^2}, & \text{falls} \quad t \le 1, \\ c_3 e^{-\frac{x^2}{8t}}\frac{1}{t^{3/2}}, & \text{falls} \quad t > 1. \end{cases} \tag{2.92}$$

Nun benutzen wir, wie eingangs angekündigt, diese Abschätzung, um die Behauptung des Lemmas zu zeigen, indem wir zusätzlich auf die Darstellungsformel (2.66) zurückgreifen. Aus (2.66) und dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt für $0 < x < y$, dass

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,y) \\ &= \int_x^y \int_{-\infty}^t \frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial \xi}(t-\tau,\xi)[g(\tau) - g(t)]\,d\tau d\xi \\ &= \int_x^y \int_0^\infty \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial \xi}(\mu,\xi)[g(t-\mu) - g(t)]\,d\mu d\xi \\ &= \int_x^y \int_0^1 \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial \xi}(\mu,\xi)[g(t-\mu) - g(t)]\,d\mu d\xi \\ &\quad + \int_x^y \int_1^\infty \frac{\partial^2 G}{\partial \mu \partial \xi}(\mu,\xi)[g(t-\mu) - g(t)]\,d\mu d\xi \\ &\quad =: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Eine solche Aufteilung des Integrals ist durch die Fallunterscheidung in (2.92) bedingt. Aus (2.92) folgt

$$|I_1| \le c_3 \int_x^y \int_0^1 e^{-\frac{\xi^2}{8\mu}}\frac{1}{\mu^2}|g(t-\mu) - g(t)|\,d\mu d\xi \le c_3 \int_x^y \int_0^1 e^{-\frac{\xi^2}{8\mu}}\frac{1}{\mu^2}\mu^{\frac{1+\alpha}{2}}\langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\,d\mu d\xi.$$

Durch die Substitution $\eta := \frac{\xi^2}{\mu}$ und mit $c_4 := c_3 \int\limits_0^\infty e^{-\frac{\eta}{8}} \frac{1}{\eta^{\frac{1+\alpha}{2}}}\, d\eta$ ($c_4 < \infty$, da $\frac{1+\alpha}{2} < 1$) erhalten wir

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c_3 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \int\limits_x^y \int\limits_{\xi^2}^\infty e^{-\frac{\eta}{8}} \frac{1}{\xi^{1-\alpha}} \frac{1}{\eta^{\frac{1+\alpha}{2}}}\, d\eta d\xi \\ &\leq c_4 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \int\limits_x^y \frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\, d\xi = c_4 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \frac{1}{\alpha}(y^\alpha - x^\alpha) \leq c_4 \langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \frac{1}{\alpha} |x-y|^\alpha. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Die letzte Ungleichung gilt wegen $\alpha \in (0,1)$. Auf die gleiche Weise schätzen wir I_2 ab. Zuerst gilt

$$|I_2| \leq 2|g|_{0,(0,T)} \int\limits_x^y \int\limits_1^\infty \Big| \frac{\partial^2 G}{\partial\mu\partial\xi}(\mu,\xi) \Big| d\mu d\xi.$$

Ferner folgt mit (2.92) und $c_5 := c_3 8^{\frac{1-\alpha}{2}} \int\limits_1^\infty \frac{1}{\mu^{1+\frac{\alpha}{2}}}\, d\mu$, dass

$$\begin{aligned} \int\limits_x^y \int\limits_1^\infty \Big| \frac{\partial^2 G}{\partial\mu\partial\xi}(\mu,\xi) \Big| d\mu d\xi &\leq c_3 \int\limits_x^y \int\limits_1^\infty e^{-\frac{\xi^2}{8\mu}} \frac{1}{\mu^{3/2}}\, d\mu d\xi \\ &\leq c_3 \int\limits_x^y \int\limits_1^\infty \Big(\frac{8\mu}{\xi^2} \Big)^{\frac{1-\alpha}{2}} \frac{1}{\mu^{3/2}}\, d\mu d\xi \\ &\leq c_3 8^{\frac{1-\alpha}{2}} \int\limits_1^\infty \frac{1}{\mu^{1+\frac{\alpha}{2}}}\, d\mu \int\limits_x^y \frac{1}{\xi^{1-\alpha}}\, d\xi \\ &\leq c_5 \frac{1}{\alpha} |x-y|^\alpha. \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, dass $e^{-z} \leq z^{-\frac{1-\alpha}{2}}$, wenn $z > 0$. Somit ist

$$|I_2| \leq c_5 \frac{2}{\alpha} |g|_{0,(0,T)} |x-y|^\alpha. \tag{2.95}$$

Insgesamt folgt aus (2.93), (2.94), (2.95) und mit $\mathcal{C}_5 := \frac{1}{\alpha}(c_4 + 2c_5)$, dass

$$\Big| \frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,x) - \frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)(t,y) \Big| \leq |I_1| + |I_2| \leq \mathcal{C}_5 |g|_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} |x-y|^\alpha, \tag{2.96}$$

was offensichtlich zu der Behauptung des Lemmas äquivalent ist. □

Aus den Lemmata 2.15 und 2.16 folgt nun leicht die Abschätzung für die notwendige Höldernorm der durch (2.36) gegebenen Lösung des Modellproblems 2 (vgl. (2.32)), die wir im folgenden Satz beweisen.

Satz 2.17. *Seien $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$, $b < 0$ und $\alpha \in (0,1)$. Dann gibt es eine Konstante*

$$\mathcal{C}_6(T) = \mathcal{C}_6\Big(\alpha,\, \max\Big\{|b|, \frac{1}{|b|}\Big\},\, T\Big),$$

so dass

$$\langle G *_t g\rangle_{R_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha)} \leq \mathcal{C}_6(T) \langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \tag{2.97}$$

wobei $\mathcal{C}_6(T)$ eine wachsende Funktion von T ist.

Beweis. Aus den Lemmata 2.15 und 2.16 folgt, dass

$$\Big\langle \frac{\partial}{\partial t}(G *_t g)\Big\rangle_{R_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq (\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5)|g|_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Da aber $G *_t g$ die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt, ist offensichtlich, dass

$$\Big\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2}(G *_t g)\Big\rangle_{R_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq (\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5)|g|_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Ferner folgt wegen $g(0) = 0$, dass $|g|_{0,(0,T)} \leq T^{\frac{1+\alpha}{2}} \langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$ und somit per Definition

$$|g|_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq (1 + T^{\frac{1+\alpha}{2}})\langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Zusammen mit den obigen Ungleichungen ergibt sich daraus (2.97) für

$$\mathcal{C}_6(T) := (1 + T^{\frac{1+\alpha}{2}})(\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5).$$

□

2.2.3. ***Ein Maximumprinzip für die Modellaufgabe 2.*** Bevor wir eine Lösung von (2.29) konstruieren, beweisen wir ein Maximumprinzip, das die Eindeutigkeit dieser Lösung garantiert. Für diesen Zweck beweisen wir zunächst ein Hilfsresultat.

Lemma 2.18. *Seien $a, -b, S, T > 0$ und $R_{TS} := (0,T) \times (0,S)$. Ferner sei $w \in C^{1,2}(R_{TS}) \cap C(\overline{R_{TS}})$ eine Funktion, deren Ableitungen erster Ordnung auf $(0,T) \times \{0\}$ stetig fortsetzbar sind. Dann folgt aus*

$$\begin{aligned} w_t(t,x) - a w_{xx}(t,x) &\geq 0, \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,S),\\ w_t(t,0) + b w_x(t,0) &\geq 0, \qquad t \in (0,T),\\ w(t,S) &\geq 0, \qquad t \in (0,T),\\ w(0,x) &\geq 0, \qquad x \in (0,S), \end{aligned}$$

dass $w \geq 0$ in $(0,T) \times (0,S)$.

Beweis: Sei $\widetilde{w} := we^{-t}$. Dann ist $\widetilde{w}_t + \widetilde{w} = we^{-t}$, $\widetilde{w}_x = w_x e^{-t}$, $\widetilde{w}_{xx} = w_{xx}e^{-t}$ und daher

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_t(t,x) + \widetilde{w}(t,x) - a\widetilde{w}_{xx}(t,x) &\geq 0, \qquad (t,x) \in (0,T) \times (0,S),\\ \widetilde{w}_t(t,0) + \widetilde{w}(t,0) + b\widetilde{w}_x(t,0) &\geq 0, \qquad t \in (0,T), \end{aligned} \tag{2.98}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(t,S) &\geq 0, \quad t \in (0,T), \\ \widetilde{w}(0,x) &\geq 0, \quad x \in (0,S). \end{aligned} \tag{2.99}$$

Wir nehmen an, dass die Funktion w und daher auch $\widetilde{w}$ einen negativen Wert in $(0,T)\times(0,S)$ annehmen. Dann muss $\widetilde{w}$ das negative Minimum in einem Punkt $(t_0,x_0)\in[0,T]\times[0,S]$ erreichen. Falls $(t_0,x_0)\in(0,T]\times(0,S)$, dann gilt $\widetilde{w}(t_0,x_0)<0$, $\widetilde{w}_t(t_0,x_0)\leq 0$, $\widetilde{w}_{xx}(t_0,x_0)\geq 0$ und folglich

$$\widetilde{w}_t(t_0,x_0)+\widetilde{w}(t_0,x_0)-a\widetilde{w}_{xx}(t_0,x_0)<0,$$

was ein Widerspruch zu (2.98) ist. Falls $(t_0,x_0)\in(0,T]\times\{0\}$, dann ist $\widetilde{w}(t_0,0)<0$, $\widetilde{w}_t(t_0,0)\leq 0$ und $\widetilde{w}_x(t_0,0)\geq 0$. Folglich, da $b<0$,

$$\widetilde{w}_t(t_0,0)+\widetilde{w}(t_0,0)+b\widetilde{w}_x(t_0,0)<0,$$

was ebenfalls ein Widerspruch zu (2.98) ist. Dass $\widetilde{w}$ kein negatives Minimum für $x=S$ bzw. $t=0$ annehmen kann, ist wegen (2.99) offensichtlich. Damit ist $\widetilde{w}\geq 0$ und somit auch $w\geq 0$ auf R_{TS}. □

Da die Modellaufgabe 2 in einem unbeschränkten Gebiet gestellt ist, ist Lemma 2.18 zum Beweis der eindeutigen Lösbarkeit dieses Problems nicht direkt anwendbar. Man kann aber ein geeignetes Maximumprinzip beweisen, indem man eine Schrankenfunktion konstruiert, mit deren Hilfe man das Lemma 2.18 auch im Falle $S=\infty$ anwenden kann. Dies zeigen wir im folgenden Satz.

Satz 2.19. *Seien $a,-b,T>0$ und $u\in C^{1,2}(R_{(T)})\cap C(\overline{R_{(T)}})$ beschränkt mit stetig fortsetzbaren Ableitungen u_t und u_x auf $(0,T)\times\{0\}$. Dann folgt aus*

$$\begin{aligned} u_t(t,x)-au_{xx}(t,x)&=0, \quad (t,x)\in(0,T)\times(0,\infty), \\ u_t(t,0)+bu_x(t,0)&=0, \quad t\in(0,T), \\ u(0,x)&=0, \quad x\in(0,\infty), \end{aligned}$$

dass $u=0$.

Beweis. Seien $M:=\sup\limits_{R_{(T)}}|u|$, $S>0$ und $v_S(t,x):=\frac{2Ma}{S^2}(\frac{x^2}{2a}+t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\partial_t-a\partial_{xx})v_S&=0 \quad \text{in} \quad (0,T)\times\mathbb{R}^+, \\ (\partial_t+b\partial_x)v_S|_{x=0}&=\frac{4Ma}{S^2}\Big(1+\frac{bx}{a}\Big)|_{x=0}=\frac{4Ma}{S^2}>0 \quad \text{für} \quad t\in(0,T), \\ v_S(t,S)&=\frac{2Ma}{S^2}\Big(\frac{S^2}{2a}+t\Big)>M, \quad \text{für} \quad t\in(0,T), \\ v_S(0,x)&=\frac{Mx^2}{S^2}\geq 0. \end{aligned}$$

Dann ist klar, dass die Funktionen $w_1:=v_S-u$ und $w_2:=v_S+u$ alle Voraussetzungen von Lemma 2.18 in $(0,T)\times(0,S)$ erfüllen. Deshalb ist $w_1\geq 0$, $w_2\geq 0$ und somit

$$-v_S\leq u\leq v_S \quad \text{in} \quad (0,T)\times(0,S) \tag{2.100}$$

für jedes $S > 0$. Offensichtlich gilt

$$\lim_{S\to\infty} v_S(t_0, x_0) = 0, \quad (t_0, x_0) \in (0,T) \times \mathbb{R}^+. \tag{2.101}$$

Aus (2.100) und (2.101) folgt die Behauptung. $\square$

2.2.4. ***Beweis von Theorem 2.11***. Seien $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{R_{(T)}})$, $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,T])$ gegeben und sei $w \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\mathbb{R}_{(T)}})$ die Lösung des Problems (2.28). Dann ist leicht einzusehen, dass

$$u' := w + G *_t \bar{g} \tag{2.102}$$

mit

$$\bar{g} := g - (\partial_t + b\partial_x)w|_{x=0} \tag{2.103}$$

das Problem (2.29) für $a = 1$ löst, denn mit $L := \partial_t - \partial_{xx}$ und $B := \partial_t + b\partial_x$ erhalten wir

$$Lu' = Lw + L(G *_t \bar{g}) = f \quad \text{in} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^+ \tag{2.104}$$

und

$$\begin{aligned} Bu' &= Bw + B(G *_t \bar{g}) \\ &= Bw + B(G *_t g) - B(G_t * Bw|_{x=0}) \\ &= Bw + B(G *_t g) - Bw|_{x=0} \\ &= B(G *_t g) = g \qquad\qquad \text{auf} \quad (0,T) \times \{0\}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

Die Abschätzung (2.31) erhalten wir wie folgt: Sei $c_1 := \mathcal{C} + \mathcal{C}_6(T)$ die Summe der Konstanten in (2.30) und (2.97) und $c_2 := c_1(c_1 b + 1)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle u' \rangle_{R_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} &\leq \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + \langle G *_t \bar{g} \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\ &\leq \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c_1 \, \langle \bar{g} \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\leq \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c_1 \left(\langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle Bw \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \right) \\ &\leq \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c_1 \left(\langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle bw_x \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \right) \\ &\leq \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + c_1 \left(\langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + b \langle w \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \right) \\ &\leq c_2 \left(\langle g \rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle f \rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \right). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Ähnlich erhalten wir die Abschätzung für $u'_t(\cdot, 0)$. Aus (2.105) folgt, dass

$$u'_t(t,0) = g(t) - bu'_x(t,0), \qquad t \in (0,T)$$

und somit

$$\begin{aligned}\langle u_t'(\cdot,0)\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} &\le \langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + b\,\langle u_x(\cdot,0)\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\\ &\le \langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + b\,\langle u'\rangle_{R_{(T)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}\\ &\le (1+c_2)\Big(\langle g\rangle_{(0,T)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + \langle f\rangle_{\mathbb{R}^2_{(T)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\Big)\end{aligned} \tag{2.107}$$

Den Fall $a \neq 1$ kann man einfach behandeln. Ist nämlich $\widetilde{u}$ die Lösung von

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_t(t,x) - \widetilde{u}_{xx}(t,x) &= 0 &&\text{für}\quad (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^+,\\ \widetilde{u}_t(t,0) + \frac{b}{\sqrt{a}}\widetilde{u}_x(t,0) &= g(t) &&\text{für}\quad t\in(0,T),\\ \widetilde{u}(0,x) &= 0 &&\text{für}\quad x\in\mathbb{R}^+,\end{aligned}$$

so löst $u(t,x) = \widetilde{u}(t,\frac{x}{\sqrt{a}})$ das Problem (2.29) und die Abschätzung (2.31) folgt aus (2.106) und (2.107).

Die Eindeutigkeit der Lösung folgt direkt aus dem Satz 2.19: Seien u_1 und u_2 zwei verschiedene Lösungen von (2.29) aus $\mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R_{(T)}})$. Damit sind sie erstens beschränkt und zweitens $u_1(0,x) = u_2(0,x) = 0$. Dann erfüllt die Funktion $w := u_1 - u_2$ alle Voraussetzungen des Satzes 2.19 und ist somit gleich 0 auf $(0,T)\times\mathbb{R}^+$.

2.3. **Beweis von Theorem 2.3.** Wie wir im Folgenden zeigen, folgt das Theorem 2.3 als Korollar aus den Lemmata 2.21 und 2.22, die wir in diesem Abschnitt beweisen. Die Idee des Beweises besteht darin, dass man das Problem (2.11) als eine Operatorgleichung in geeigneten Funktionenräumen zu formuliert, die anhand der Modellprobleme (2.28) und (2.29) unter Anwendung elementarer Methoden der Funktionalanalysis gelöst werden kann.

Wir definieren den Operator

$$\begin{aligned}A : \mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) &\longrightarrow \mathring{H}^\alpha(\overline{\Omega}_\tau)\\ u &\longmapsto (Lu, Bu).\end{aligned} \tag{2.108}$$

durch

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x) := \partial_t - a(t,x)\partial_{xx}, \quad B(t,\pm l,\partial_t,\partial_x) := \partial_t \pm b(t,\pm l)\partial_x \tag{2.109}$$

mit dem Definitionsbereich

$$\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) := \big\{u \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) : \quad u_t \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S_\tau})\big\}$$

versehen mit der Norm

$$|u|_{\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)} := |u|_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + |u_t|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

und den Zielraum

$$\mathring{H}^\alpha(\overline{\Omega}_\tau) := \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)\times\mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_\tau)$$

versehen mit der Norm

$$|(f,g)|_{\mathring{H}^\alpha(\overline{\Omega}_\tau)} := |f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}. \tag{2.110}$$

Es ist offensichtlich, dass die eindeutige Lösbarkeit von (2.11) äquivalent zur Invertierbarkeit von A ist. Um zu zeigen, dass A invertierbar ist, konstruieren wir einen beschränkten Operator

$$R : \mathring{H}^\alpha(\overline{\Omega}_\tau) \to \mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau),$$

so dass für jedes $h \in \mathring{H}^\alpha(\Omega_\tau)$ und jedes $v \in \mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\tau)$ gilt

$$ARh = h + Th \tag{2.111}$$

und

$$RAv = v + Wv, \tag{2.112}$$

wobei T und W beschränkte Operatoren in $\mathring{H}^\alpha(\overline{\Omega}_\tau)$ bzw. $\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ sind, deren Operatornorm beliebig klein ist, wenn τ klein ist. Wählen wir nun τ so, dass

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathring{H}^\alpha,\mathring{H}^\alpha)} < 1 \tag{2.113}$$

und

$$\|W\|_{\mathcal{L}(\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha},\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha})} < 1, \tag{2.114}$$

so impliziert dies die Invertierbarkeit von $(Id + T)$ bzw. $(Id + W)$, woraus zusammen mit (2.111) und (2.112) die links- bzw. rechtsseitige Invertierbarkeit und somit auch die Invertierbarkeit von A folgt. Die Abschätzung (2.12) ist äquivalent zu der Abschätzung der Operatornorm von A^{-1}, die z.B. aus (2.111) wie folgt gewonnen werden kann:

$$\begin{aligned} \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathring{H}^\alpha,\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha})} &= \|R(Id+T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathring{H}^\alpha,\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha})} \\ &\le \|R\|_{\mathcal{L}(\mathring{H}^\alpha,\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha})} \|(Id+T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathring{H}^\alpha,\mathring{H}^\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.115}$$

Der Operator R wird wie folgt konstruiert. Für $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{D_{(\tau)}})$ sei $R^{(k)}f$ die eindeutige Lösung in $\mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{D_{(\tau)}})$ von

$$u_t(t,x) - a(0,\xi_k)u_{xx}(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\tau)\times\mathbb{R}, \tag{2.116}$$

falls $k \in \{-N+1, ..., N-1\}$. Ferner sei $R^{(N)}(f,g)$ für $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{R^l_{(\tau)}})$ und $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,\tau])$ die eindeutige Lösung aus $\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R^l_{(\tau)}})$ von

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - a(0,l)u_{xx}(t,x) &= f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\tau)\times(-\infty,l), \\ u_t(t,l) + b(0,l)u_x(t,l) &= g(t), \qquad t \in (0,\tau), \end{aligned} \tag{2.117}$$

und $R^{(-N)}(f,g)$ für $f \in \mathring{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}(\overline{R^{-l}_{(\tau)}})$ und $g \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}([0,\tau])$ die eindeutige Lösung aus $\mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{R^{-l}_{(\tau)}})$ von

$$\begin{aligned} u_t(t,x) - a(0,-l)u_{xx}(t,x) &= f(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\tau)\times(-l,\infty), \\ u_t(t,-l) - b(0,-l)u_x(t,-l) &= g(t), \qquad t \in (0,\tau). \end{aligned} \tag{2.118}$$

Die eindeutige Lösbarkeit für (2.116) ist durch Theorem 2.10 gegeben. Die eindeutige Lösungen von (2.117) und (2.118) erhalten wir durch einfache Koordinatentransformation aus der Lösung von (2.29) (vgl. Theorem 2.11). So löst z.B. $u(t,x) := v(t,-x+l)$ das Problem (2.117) genau dann, wenn v das Problem

$$\begin{aligned} v_t(t,x) - a(0,l)v_{xx}(t,x) &= \widetilde{f}(t,x), \qquad && (t,x) \in (0,\tau) \times (0,\infty), \\ v_t(t,0) - b(0,l)v_x(t,0) &= g(t), && t \in (0,\tau), \end{aligned} \tag{2.119}$$

löst, wobei $\widetilde{f}(t,x) := f(t,-x+l)$.

Ferner seien die Funktionen $\zeta^{(k)}$ und $\mu^{(k)}$ wie im Abschnitt 2.1.2 definiert. Wir definieren nun den Operator R durch

$$\begin{aligned} R : \mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) &\longrightarrow \mathring{C}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau), \\ (f,g) &\longmapsto \sum_{|k|\le N} \mu^{(k)} v^{(k)}, \end{aligned} \tag{2.120}$$

mit

$$v^{(k)} := \begin{cases} R^{(k)}\zeta^{(k)} f, & \text{wenn} \quad |k| \le N-1, \\ R^{(k)}(\zeta^{(k)} f, g(\cdot,\pm l)), & \text{wenn} \quad |k| = N. \end{cases} \tag{2.121}$$

Aus dem Theorem 2.10, dem Theorem 2.11 und mit $f^{(k)} := \zeta^{(k)} f$ folgt

$$\left\langle R^{(k)} f^{(k)} \right\rangle_{D_{(\tau)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \le \mathcal{C} \left\langle f^{(k)} \right\rangle_{D_{(\tau)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}, \qquad |k| \le N-1 \tag{2.122}$$

und

$$\begin{aligned} &\left\langle R^{(k)}(f^{(k)}, g(\cdot,\pm l)) \right\rangle_{R_{(\tau)}^{\pm l}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + \left\langle \partial_t R^{(k)}(f^{(k)}, g(\cdot,\pm l))(\cdot,\pm l) \right\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\qquad \le \mathcal{C}_T \big(\left\langle f^{(k)} \right\rangle_{R_{(\tau)}^{\pm l}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \left\langle g(\cdot,\pm l) \right\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \big), \qquad |k| = \pm N \end{aligned} \tag{2.123}$$

wobei $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}_T$ die Konstanten aus (2.30) und (2.31) sind.

Bemerkung 2.20. *Bevor wir die Lemmata 2.21 und 2.22 formulieren, wollen wir erinnern, dass laut Bemerkung 2.6 durch $\{v\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha)}$ (vgl.* (2.17)*) und $|v|_{\Omega_\tau}^{(\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha)}$ äquivalente Normen auf $\mathring{C}^{\frac{k+\alpha}{2},k+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ definiert werden. Somit ist durch*

$$\|h\|_{\mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)} := \{f\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \qquad h = (f,g) \in \mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau), \tag{2.124}$$

auch eine zu $|h|_{\mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)}$ (vgl. (2.110)*) äquivalente Norm auf $\mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ definiert. Die Äquivalenzkonstante ist dabei nicht von der gewählten Zerlegung der Eins abhängig, da in* (2.18) *und* (2.20) *die Konstante c weder von der Feinheit der Zerlegung (d.h. von λ), noch von der Größe des Zeitintervalls (d.h. von τ), noch von dem Verhältnis $\kappa = \frac{\tau}{\lambda^2}$ abhängt.*

Lemma 2.21. *Der durch* (2.120) *definierte Operator R ist beschränkt, d.h. es gibt ein $c > 0$ mit*

$$\{Rh\}_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + \left\langle \partial_t Rh \right\rangle_{S_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \le c\|h\|_{\mathring{H}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)}. \tag{2.125}$$

Dabei hängt c nicht von λ und τ ab.

Beweis. Der Beweis ist identisch zu dem Beweis von [25, Kap. IV, Theorem 7.1]. □

Im folgenden Lemma beweisen wir de facto die Existenz- und Eindeutigkeitsaussage des Theorems 2.3.

Lemma 2.22. *Für alle $h \in \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ und $v \in \overset{\circ}{C}{}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ gelten die Gleichungen* (2.111) *bzw.* (2.112)*, wobei T ein beschränkter Operator auf $\overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ und W ein beschränkter Operator auf $\overset{\circ}{C}{}_r^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)$ ist. Die Operatornorm von T bzw. W ist kleiner als $\frac{1}{2}$, wenn τ hinreichend klein ist.*

Beweis. Seien L und B die durch (2.109) definierten Operatoren. Wir beweisen zunächst die erste Aussage: Wir zeigen, dass es einen Operator

$$\begin{aligned} T:\ \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) &\longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau) \\ h &\longmapsto (T_1 h, T_2 h) \end{aligned}$$

gibt, der die Gleichung (2.111) erfüllt, und dass es ein $c = c(\tau)$ gibt, so dass

$$\|Th\|_{\overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)} = \|(T_1 h, T_2 h)\|_{\overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)} \le c\Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big) = c\,\|h\|_{\overset{\circ}{H}{}^{\alpha}(\overline{\Omega}_\tau)}, \qquad (2.126)$$

mit $c \to 0$, wenn $\tau \to 0$.

Um T_1 und T_2 zu bestimmen, extrahieren wir aus

$$ARh = (LRh, BRh) = (f + T_1 h, g + T_2 h),$$

den Vektor (f, g). Um anschließend für den Vektor $(T_1 h, T_2 h)$ die Ungleichung (2.126) zu zeigen, machen wir davon Gebrauch, dass laut Bemerkung 2.20 sowohl die Feinheit der Zerlegung λ als auch die Länge des Zeitintervalls τ und das Verhältnis $\chi = \frac{\tau}{\lambda^2}$ beliebig klein gewählt werden kann, ohne dass die Berechnung von $\big\{T_1 h\big\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ relevant beeinflusst wird. Deshalb setzen wir

$$\mathcal{M}_3 := \max\Big\{\lambda, \tau, \frac{\tau}{\lambda^2}\Big\}. \qquad (2.127)$$

Als erstes bestimmen wir $T_1 h$. Es gilt

$$\begin{aligned} LRh &= L \sum_{|k|\le N} \mu^{(k)} v^{(k)} = \sum_{k} L\mu^{(k)} v^{(k)} \\ &= \sum_{|k|\le N} \Big[(\mu^{(k)} v^{(k)})_t - a(t,x)(\mu^{(k)} v^{(k)})_{xx}\Big] \\ &= \sum_{|k|\le N} \Big[\mu^{(k)} v_t^{(k)} - a(t,x)\Big(\mu_{xx}^{(k)} v^{(k)} + 2\mu_x^{(k)} v_x^{(k)} + \mu^{(k)} v_x^{(k)}\Big)\Big] \qquad (2.128) \\ &= \sum_{|k|\le N} \Big[\mu^{(k)}\Big(v_t^{(k)} - a(0,\xi_k) v_{xx}^{(k)}\Big) - (a(t,x) - a(0,\xi_k))\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} \\ &\qquad - a(t,x)\Big(\mu_{xx}^{(k)} v^{(k)} + 2\mu_x^{(k)} v_x^{(k)}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Wenn wir berücksichtigen, dass

$$v_t^{(k)} - a(0,\xi_k)v_{xx}^{(k)} = f^{(k)}, \quad f^{(k)} = \zeta^{(k)} f \quad \text{und} \quad \sum_k \mu^{(k)}\zeta^{(k)} = 1,$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} LRh =& \sum_k \Big[\mu^{(k)} f^{(k)} - \Big(a(t,x) - a(0,\xi_k)\Big)\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} \\ & \qquad - a(t,x)\Big(\mu_{xx}^{(k)} v^{(k)} + 2\mu_x^{(k)} v_x^{(k)}\Big)\Big] \\ =& f + T_1 h, \end{aligned} \tag{2.129}$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 h :=& -\sum_k \Big[(a(t,x) - a(0,\xi_k))\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} + a(t,x)\mu_{xx}^{(k)} v^{(k)} + 2a(t,x)\mu_x^{(k)} v_x^{(k)}\Big] \\ =:& -\sum_k (D_1^{(k)} + D_2^{(k)} + D_3^{(k)}). \end{aligned} \tag{2.130}$$

Aus den Lemmata V 4.2, V 4.4 in [25] und der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \langle T_1 h \rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &= \Big\langle \sum_k (D_1^{(k)} + D_2^{(k)} + D_3^{(k)}) \Big\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ &\le \Big\{ \sum_k (D_1^{(k)} + D_2^{(k)} + D_3^{(k)}) \Big\}_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ &\equiv \sup_k \Big\langle \sum_k (D_1^{(k)} + D_2^{(k)} + D_3^{(k)}) \Big\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ &\le N_0 \sup_k \Big\langle (D_1^{(k)} + D_2^{(k)} + D_3^{(k)}) \Big\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ &\le N_0 \sum_{i=1}^{3} \sup_k \Big\langle D_i^{(k)} \Big\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.131}$$

Somit genügt es, $\langle D_i^{(k)} \rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ unabhängig von k abzuschätzen. Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} \Big\langle D_1^{(k)} \Big\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} =& \Big\langle (a(\cdot,\cdot) - a(0,\xi_k))\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} \Big\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \\ =& \Big\langle (a(\cdot,\cdot) - a(0,\xi_k))\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} \Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \\ & + \Big\langle (a(\cdot,\cdot) - a(0,\xi_k))\mu^{(k)} v_{xx}^{(k)} \Big\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Wir schätzen die beiden Summanden separat ab. Es gilt

$$\begin{aligned}\Big\langle (a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))\mu^{(k)}v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}&\\ \leq&\Big\langle (a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\\ \leq&\Big\langle a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k)\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\Big|v_{xx}^{(k)}\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\ &+\Big|a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k)\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\Big\langle v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}.\end{aligned}\tag{2.133}$$

Dabei haben wir zunächst berücksichtigt, dass $\mu^{(k)}$ nicht von t abhängt und deshalb als ein konstanter Faktor betrachtet werden kann, ferner, dass $\left|\mu^{(k)}\right|\leq 1$, und schließlich haben wir das Produkt von zwei Funktionen durch (1.7) abgeschätzt.

Nun betrachten wir die beiden Summanden wieder einzeln. Im ersten Summanden der letzten Zeile berücksichtigen wir erstens, dass die Addition einer Konstante die entsprechende Hölder-Seminorm nicht ändert. Zweitens gilt wegen $v^{(k)}\in\mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega^{(k)})$, dass $v^{(k)}(0,x)=0$ und folglich $v_{xx}^{(k)}(0,x)=0$. Somit ist $\left|v_{xx}^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\leq\tau^{\frac{\alpha}{2}}\left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ und wir erhalten

$$\Big\langle a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k)\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\Big|v_{xx}^{(k)}\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\leq\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\Big\langle v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\leq\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\Big|v^{(k)}\Big|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}.$$

Im zweiten Summanden von (2.133) berücksichtigen wir, dass

$$\begin{aligned}\Big|a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k)\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}&\leq\Big|a(\cdot,\cdot)-a(\cdot,\xi_k)\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}+\Big|a(\cdot,\xi_k)-a(0,\xi_k)\Big|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\ &\leq\lambda^\alpha\langle a\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}+\tau^{\frac{\alpha}{2}}\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\\ &\leq(\lambda^\alpha+\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}.\end{aligned}$$

Wir setzen $c_4:=c_2c_3(\lambda^\alpha+2\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$, wobei c_2 die Summe der Konstanten aus (2.122) und (2.123) ist und c_3 die Konstante aus (2.21). Dann erhalten wir aus (2.133) und den letzten beiden Rechnungen, dass

$$\begin{aligned}\Big\langle (a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))\mu^{(k)}v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}&\\ \leq\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\Big|v^{(k)}\Big|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}&+(\lambda^\alpha+\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\Big\langle v_{xx}^{(k)}\Big\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\\ \leq(\lambda^\alpha+2\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\Big|v^{(k)}\Big|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}&\\ \leq c_2\,\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}(\lambda^\alpha+2\tau^{\frac{\alpha}{2}})\Big(\big|f^{(k)}\big|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}+\big|g\big|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big)&\\ \leq c_4(\mathcal{M}_3)\Big(\big|f\big|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}+\big|g\big|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big).&\end{aligned}\tag{2.134}$$

Hierbei haben wir außerdem benutzt, dass offensichtlich $\left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \leq \left|v^{(k)}\right|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ und $\left|f\right|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq \left|f\right|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$. Somit haben wir den ersten Summanden der letzten Zeile von (2.132) abgeschätzt. Um den zweiten Summanden abzuschätzen, setzen wir zunächst $c_6 := c_2(2\tau^{\frac{\alpha}{2}} + \lambda^\alpha + c_5(1+\kappa^{\frac{\alpha}{2}})c_2\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$, wobei c_5 die Konstante aus (2.15) ist. Durch die Anwendung von (1.7) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\left\langle (a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))\mu^{(k)}v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\\
&\leq \langle a\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|\mu^{(k)}v_{xx}^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + \left\langle \mu^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|(a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))v_{xx}^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\
&\quad + \left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|(a(\cdot,\cdot)-a(0,\xi_k))\mu^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\
&\leq \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{(\frac{\alpha}{2})}\left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} + \frac{c_5}{\lambda^\alpha}\,(\lambda^\alpha+\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\\
&\quad + \left|v^{(k)}\right|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}\,(\lambda^\alpha+\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\\
&\leq \left(\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{\frac{\alpha}{2}} + c_5\,(1+\chi^{\frac{\alpha}{2}})\,\tau^{\frac{\alpha}{2}}\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + (\lambda^\alpha+\tau^{\frac{\alpha}{2}})\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\right)\left|v^{(k)}\right|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}\\
&\leq c_6\left(\left|f\right|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \left|g\right|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right).
\end{aligned}
\tag{2.135}
$$

Aus (2.134) und (2.135) folgt

$$
\sup_k \left\langle D_1^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq (c_4+c_6)\left(\left|f\right|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \left|g\right|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right). \tag{2.136}
$$

Als nächstes betrachten wir

$$
\begin{aligned}
\left\langle D_2^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} &= \left\langle a(\cdot,\cdot)\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\\
&= \left\langle a(\cdot,\cdot)\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} + \left\langle a(\cdot,\cdot)\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}.
\end{aligned}
\tag{2.137}
$$

Um den ersten Summanden abzuschätzen, verwenden wir wieder, dass $\mu^{(k)}$ nicht von t abhängt, die Formel (1.7) und schließlich, dass man $|\mu_{xx}^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}$ durch (2.15) abschätzen kann. Mit $c_7 := c_5c_2\kappa|a|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\left\langle a(\cdot,\cdot)\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} &\leq \frac{c_5}{\lambda^2}\left(\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})}|v^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\langle v^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})}\right)\\
&\leq \frac{c_5}{\lambda^2}\left(\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})}\,\tau\,|v_t^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\,\tau\,\langle v_t^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})}\right)\\
&\leq c_5\,\frac{\tau}{\lambda^2}\left(\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})} + |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\right)\left|v^{(k)}\right|_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}\\
&\leq c_7\left(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right).
\end{aligned}
\tag{2.138}
$$

Außerdem haben wir hier verwendet, dass, da $v^{(k)} \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\overline{\Omega_\tau^{(k)}})$ ist, ist

$$|v^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \leq \tau\,|v_t^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}$$

sowie

$$\begin{aligned}\langle v^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2})} &\leq \sup_{x\in\Omega_\tau^{(k)}}\ \sup_{0\leq s_1<s_2\leq\tau} \frac{|v^{(k)}(s_1,x)-v^{(k)}(s_2,x)|}{|s_1-s_2|^{\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{|s_1-s_2|^{1-\frac{\alpha}{2}}}{|s_1-s_2|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\\ &\leq |v_t^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\tau^{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \langle v_t^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\tau^{1-\frac{\alpha}{2}}\\ &= \tau\langle v_t^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}.\end{aligned} \tag{2.139}$$

Nun schätzen wir den zweiten Summanden von (2.137) ab. Mit

$$c_8 := c_5c_2\,(2\kappa+\kappa^{1+\frac{\alpha}{2}})|a|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$$

gilt

$$\begin{aligned}&\left\langle a\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\\ &\leq \left\langle a\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|\mu_{xx}^{(k)}v^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + \left\langle \mu_{xx}^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|av^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\ &\qquad + \left\langle v^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}\left|a\mu_{xx}^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\\ &\leq \left\langle a\right\rangle_{x,\Omega_\tau}^{(\alpha)}\frac{c_5}{\lambda^2}\tau\left|v_t^{(k)}\right|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + \frac{c_5}{\lambda^{2+\alpha}}\,|a|_{0,\Omega_\tau}\,\tau^{1+\frac{\alpha}{2}}\left\langle v_t^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{\frac{\alpha}{2}}\\ &\qquad + \tau\left\langle v_t^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{\alpha}|a|_{0,\Omega_\tau}\frac{c_5}{\lambda^2}\\ &\leq c_8\left(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right).\end{aligned} \tag{2.140}$$

Zusätzlich zu den Abschätzungen, die wir bereits oben Berücksichtigt haben, haben wir im zweiten Summanden verwendet, dass

$$\left\langle \mu_{xx}^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} \leq \frac{c_5}{\lambda^{2+\alpha}}.$$

Dies kann man leicht aus dem Mittelwertsatz folgern, indem man $|\mu_{xxx}^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}$ durch (2.15) abschätzt. Aus dem Mittelwertsatz und der Definition von $\langle\cdot\rangle_t^{\frac{\alpha}{2}}$ folgt auch, dass

$$|v^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \leq \tau^{1+\frac{\alpha}{2}}\langle v_t^{(k)}\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}.$$

Schließlich haben wir im dritten Summanden benutzt, dass

$$\begin{aligned}\left\langle v^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} &= \sup_{t\in(0,\tau)} \sup_{x,y\in\Omega^{(k)}} \frac{|v^{(k)}(t,x)-v^{(k)}(t,y)|}{|x-y|^\alpha} \\ &\le \sup_{t\in(0,\tau)} \sup_{x,y\in\Omega^{(k)}} \frac{\int_0^t |v_t^{(k)}(s,x)-v_t^{(k)}(s,y)|d\,s}{|x-y|^\alpha} \\ &\le \sup_{t\in(0,\tau)} t\left\langle v_t^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} \le \tau\left\langle v_t^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Somit folgt aus (2.137), (2.138) und (2.140), dass

$$\sup_k \left\langle D_2^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \le (c_7+c_8)\Big(\big|f\big|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \big|g\big|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big). \tag{2.141}$$

Nun betrachten wir $D_3^{(k)} = a\mu_x^{(k)}v_x^{(k)}$. Zunächst benutzen wir wieder die Tatsache, dass μ_x nicht von t abhängt und die Formel (1.7). Wir erhalten

$$\left\langle a\mu_x^{(k)}v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \le |\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\Big(\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}|v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} + |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}\Big).$$

Wieder betrachten wir die beiden Summanden einzeln. Mit $c_9 := c_5c_2\kappa^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ gilt

$$\begin{aligned}|\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}|v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} &\le \frac{c_5}{\lambda}\langle a\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})}|v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \\ &\le \frac{c_5}{\lambda}\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}\left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\le c_5\Big(\frac{\tau}{\lambda^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\left\langle v^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\ &\le c_9\Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big)\end{aligned}$$

und mit $c_{10} := c_5c_2\kappa^{\frac{1}{2}}\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$

$$\begin{aligned}|\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}|a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} &\le \frac{c_5}{\lambda}\,|a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \\ &\le \frac{c_5}{\lambda}\,\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\tau^{\frac{\alpha}{2}}\left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\le c_5\,\Big(\frac{\tau}{\lambda^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\,\langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}\left\langle v^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\ &\le c_{10}\Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\Big).\end{aligned}$$

Für die Abschätzung der Hölder-Regularität in x von $D_3^{(k)}$ erhalten wir erneut mit (1.7) zunächst, dass

$$\begin{aligned}\left\langle a\mu_x^{(k)} v_x^{(k)}\right\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} \leq\ & \langle a\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \\ & + \langle \mu_x^{(k)}\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \\ & + \langle v_x^{(k)}\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}}\end{aligned}$$

und schätzen dann die einzelnen Summanden ab. Es gilt

$$\begin{aligned}\langle a\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} &\leq \langle a\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \frac{c_5}{\lambda} \tau^{\frac{1+\alpha}{2}} \left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\leq c_5 \left(\frac{\tau}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tau^{\frac{\alpha}{2}} \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \left\langle v^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\ &\leq c_9 \Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big).\end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir mit $c_{11} := c_5 c_2 \kappa^{\frac{1+\alpha}{2}} \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$, dass

$$\begin{aligned}\langle \mu_x^{(k)}\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |v_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} &\leq \frac{c_5}{\lambda^{1+\alpha}} \langle a\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \tau^{\frac{1+\alpha}{2}} \left\langle v_x^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\ &\leq c_5 \left(\frac{\tau}{\lambda^2}\right)^{\frac{1+\alpha}{2}} \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \left\langle v^{(k)}\right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\ &\leq c_{11} \Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big)\end{aligned}$$

und schließlich für den dritten Summanden mit $c_{12} := c_5 c_2 \kappa^{\frac{\alpha}{2}} \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$, dass

$$\begin{aligned}\langle v_x^{(k)}\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\alpha)} |a|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} |\mu_x^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} &\leq |v_{xx}^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \lambda^{1-\alpha} \langle a\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \frac{c_5}{\lambda} \\ &\leq \frac{c_5}{\lambda^\alpha} \langle a\rangle_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \tau^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq c_{12} \Big(|f|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |g|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big).\end{aligned}$$

Bei der letzten Rechnung haben wir verwendet, dass

$$\begin{aligned}\langle v_x^{(k)}\rangle_{x,\Omega_\tau^{(k)}}^{\alpha} &\leq \sup_{t\in(0,\tau)} \sup_{x,y\in\Omega^{(k)}} \frac{|v_x^{(k)}(t,x) - v_x^{(k)}(t,y)|}{|x-y|^\alpha} \frac{|x-y|^{1-\alpha}}{|x-y|^{1-\alpha}} \\ &\leq |v_{xx}^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \sup_{x,y\in\Omega^{(k)}} |x-y|^{1-\alpha} \leq |v_{xx}^{(k)}|_{0,\Omega_\tau^{(k)}} \lambda^{1-\alpha} \\ &\leq \left\langle v_{xx}^{(k)}\right\rangle_{t,\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \tau^{\frac{\alpha}{2}} \lambda^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Aus den obigen Rechnungen folgt

$$\sup_k \left\langle D_3^{(k)} \right\rangle_{\Omega_\tau^{(k)}}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq (2c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12})\Big(\big|f\big|_{\Omega_\tau}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \big|g\big|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big). \tag{2.142}$$

Aus (2.131), (2.136), (2.141) und (2.142) schließen wir

$$\langle T_1 h\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq c(\mathcal{M}_3)\,\|h\|_{\mathring{H}^\alpha}, \tag{2.143}$$

wobei $c(\mathcal{M}_3) \to 0$, wenn $\mathcal{M}_3 \to 0$.

Wir betrachten den Randoperator B zunächst auf $(0,\tau) \times \{l\}$:

$$\begin{aligned}
B(t, l,&\partial_t, \partial_x)Rh \\
&= (\partial_t + b(t,l)\partial_x) \sum_{|k|\leq N} \mu^{(k)} v^{(k)} \\
&= (\partial_t + b(t,l)\partial_x)(\mu^{(N)} v^{(N)}) \\
&= \mu^{(N)} v_t^{(N)} + b(t,l)\Big(\mu_x^{(N)} v^{(N)} + \mu^{(N)} v_x^{(N)}\Big) \\
&= \mu^{(N)}\Big(v_t^{(N)} + b(0,l) v_x^{(N)}\Big) + b(t,l)\mu_x^{(N)} v^{(N)} + \Big(b(t,l) - b(0,l)\Big)\mu^{(N)} v_x^{(N)} \\
&= g(t,l) + b(t,l)\mu_x^{(N)} v^{(N)} + \Big(b(t,l) - b(0,l)\Big)\mu^{(N)} v_x^{(N)} \\
&= g(t,l) + T_2^{(l)} h,
\end{aligned}$$

wobei

$$T_2^{(l)} h := b(t,l)\mu_x^{(N)} v^{(N)} + \Big(b(t,l) - b(0,l)\Big)\mu^{(N)} v_x^{(N)}.$$

Die erwünschte Abschätzung für $T_2^{(l)}$ erhalten wir wie folgt: Mit

$$c_{13} := c_2 c_5 \kappa^{\frac{1}{2}} \langle b\rangle_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} (\tau^{\frac{1}{2}} + 1)$$

ist

$$\begin{aligned}
\Big\langle b(\cdot,l)&\mu_x^{(N)} v^{(N)} \Big\rangle_{(0,\tau)\times\{l\}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \\
&\leq |\mu_x^{(N)}|_{0,S_\tau^{(N)}} \Big(\langle b(\cdot,l)\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} |v^{(N)}|_{0,S_\tau^{(N)}} + |b(\cdot,l)|_{0,(0,\tau)} \langle v^{(N)}\rangle_{t,S_\tau^{(N)}}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big) \\
&\leq \frac{c_5}{\lambda} \Big(\langle b(\cdot,l)\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \tau\, |v_t^{(N)}|_{0,S_\tau^{(N)}} + \langle b(\cdot,l)\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \tau^{\frac{1}{2}} \langle v_t^{(N)}\rangle_{t,S_\tau^{(N)}}^{(\frac{\alpha}{2})} \Big) \\
&\leq c_5 \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{\lambda} \langle b(\cdot,l)\rangle_{(0,\tau)}^{(\frac{1+\alpha}{2})} (\tau^{\frac{1}{2}} + 1) |v^{(N)}|_{\Omega_\tau^N}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \\
&\leq c_2 c_5\, \kappa^{\frac{1}{2}} \langle b\rangle_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} (\tau^{\frac{1}{2}} + 1)\Big(\langle f^{(N)}\rangle_{\Omega_\tau^N}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \langle g\rangle_{S_\tau^N}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big) \\
&\leq c_{13}\Big(\langle f\rangle_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \langle g\rangle_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \Big).
\end{aligned} \tag{2.144}$$

Bei dieser Rechnung wurde unter anderem die Ungleichung $\langle v^{(N)}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,S_\tau^{(N)}} \leq \tau^{\frac{1}{2}}\,\langle v_t^{(N)}\rangle^{(\frac{\alpha}{2})}_{t,S_\tau^{(N)}}$ berücksichtigt, die genauso wie (2.139) hergeleitet werden kann. Schließlich gilt mit $c_{14} := 2c_2\tau^{(\frac{1+\alpha}{2})}\langle b\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{S_\tau}$, dass

$$
\begin{aligned}
&\Big\langle \big(b(\cdot,l)-b(0,l)\big)\mu^{(N)}v_x^{(N)}\Big\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,\tau)\times\{l\}} \\
&\quad\leq |\mu^{(N)}|_{0,S_\tau^{(N)}}\Big(\langle b(\cdot,l)-b(0,l)\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,\tau)}|v_x^{(N)}|_{0,S_\tau^{(N)}} \\
&\qquad + |b(\cdot,l)-b(0,l)|_{0,(0,\tau)}\langle v_x^{(N)}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,S_\tau^{(N)}}\Big) \\
&\quad\leq 2\tau^{\frac{1+\alpha}{2}}\langle b\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{(0,\tau)}|v^{(N)}|^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}_{\Omega_\tau^N} \\
&\quad\leq c_{14}\Big(\langle f\rangle^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}_{\Omega_T} + \langle g\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{S_T}\Big).
\end{aligned}
\tag{2.145}
$$

Analog kann man den Randoperator B auf $(0,\tau)\times\{-l\}$ betrachten und zeigen, dass

$$
B(t,-l,\partial_t,\partial_x)Rh = g(t,l) + T_2^{(-l)}h,
$$

wobei

$$
T_2^{(-l)}h := -b(\cdot,-l)\mu_x^{(-N)}v^{(-N)} - \Big(b(\cdot,-l)-b(0,-l)\Big)\mu^{(-N)}v_x^{(-N)}.
$$

Es ist offensichtlich, dass $T_2^{(-l)}$ wie in (2.144) und (2.145) abgeschätzt werden kann. Insgesamt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\big\langle T_2h\big\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{S_\tau} &= \max\big\{\langle T_2^{(l)}h\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{S_\tau}, \langle T_2^{(-l)}h\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{S_\tau}\big\} \\
&\leq (c_{13}+c_{14})\|h\|_{\mathring{H}^\alpha} \\
&\leq c\,(\mathcal{M}_3)\|h\|_{\mathring{H}^\alpha},
\end{aligned}
\tag{2.146}
$$

wobei $c\,(\mathcal{M}_3)\to 0$, wenn $\mathcal{M}_3\to 0$. Aus (2.143) und (2.146) folgt nun (2.126) und somit (2.113).

Um die Gleichung (2.112) zu erhalten, können wir ähnlich wie in (2.128), (2.129) aus RAv die Funktion v extrahieren. Die erwünschte Abschätzung für $Wv := RAv - v$ wird mit den gleichen Methoden durchgeführt, die wir bei den Abschätzungen (2.143) und (2.146) verwendet haben, deshalb verzichten wir an dieser Stelle auf eine detaillierte Ausführung dieser Rechnungen. Für mehr Details verweisen wir auf den Beweis von [25, Kap. IV, Theorem 7.2]. □

Bemerkung 2.23. *Wie aus dem obigen Beweis ersichtlich ist, können wir λ und τ z.B. so wählen, dass $\|T\| \leq \frac{1}{2}$, folglich $\|(Id-T)^{-1}\| \leq 2$. Die Abschätzung* (2.12) *folgt dann aus* (2.108), (2.115) *und* (2.125).

2.4. **Beweis von Theorem 2.1.** Der Beweis von Theorem 2.1 kann mit Hilfe von Theorem 2.3 genauso hergeleitet werden wie in [25, Kap IV, § 8] beschrieben. Deshalb machen wir hier nur eine Skizze des Beweises. Die Lösung wird in zwei Schritten konstruiert. Im ersten Schritt löst man das Problem (2.1)–(2.3) lokal, indem man es auf das Problem (2.11) durch die Konstruktion einer Hilfsfunktion zurückführt. Sei $U \in C^{1+\frac{\alpha}{2}}(S_T)$ mit $U_t(\cdot, \pm l) \in C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_T)$ so, dass

$$U(0, \pm l) = u_0(\pm l), \quad U_t(0, \pm l) = \mp b(0, \pm l) u_{0_x}(\pm l) + g(0, \pm l). \tag{2.147}$$

und

$$|U|_{S_T}^{(1+\frac{\alpha}{2})} + |U_t|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c_1(|u_0|_{\Omega_T}^{(2+\alpha)} + |g|_{S_T}^{\frac{1+\alpha}{2}}), \tag{2.148}$$

mit einer positiven Konstante c_1 (man könnte z.B. $U(t, \pm l) := u_0(\pm l) + [\mp b(0, \pm l) u_{0_x}(\pm l) + g(0, \pm l)]t$ setzen). Dann setzt man U in Ω_T durch eine Funktion $v \in C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\Omega_T)$ fort, indem man das folgende Problem löst:

$$\begin{aligned} v_t(t,x) - a(t,x) v_{xx}(t,x) &= f(t,x) & (t,x) &\in (0,T) \times (-l,l), \\ v(t, \pm l) &= U(t, \pm l) & t &\in [0,T], \\ v(0,x) &= u_0(x) & x &\in [-l,l]. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Wegen (2.147) und (2.6) gilt offensichtlich, dass

$$U_t(0, \pm l) = a(0, \pm l) u_{0_{xx}}(0, \pm l) + f(0, \pm l)$$

und somit erfüllt das Dirichlet-Problem (2.149) die Kompatibilitätsbedingungen des Theorems 2.9. Deshalb gibt es eine eindeutige Funktion $v \in C^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\Omega_T)$, die das Problem (2.149) löst und eine positive Konstante $c_2 = c_2(\varepsilon_1, |a|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2}, \alpha)}, T)$ mit

$$|v|_{\Omega_T}^{(1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha)} \leq c_2 \left(|f|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2}, \alpha)} + |u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |U|_{S_T}^{(1+\frac{\alpha}{2})}\right). \tag{2.150}$$

Wir setzen

$$g' := g - (\partial_t \pm b(t, \pm l) \partial_x) v|_{S_T}.$$

Dann ist leicht nachzuvollziehen, dass $g' \in \mathring{C}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{S}_T)$. Somit gibt es laut Theorem 2.3 ein $\tau > 0$ und eine eindeutige Funktion $u' \in \mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha}(\Omega_\tau)$, die das Problem

$$\begin{aligned} u'_t(t,x) - a(t,x) u'_{xx}(t,x) &= 0, & (t,x) &\in (0,\tau) \times (-l,l), \\ u'_t(t,0) \pm b(t, \pm l) u'_x(t, \pm l) &= g'(t, \pm l), & t &\in (0,\tau), \end{aligned}$$

löst, und ein

$$c_3 = c_3(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |a|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2}, \alpha)}, |b|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, T)$$

mit

$$|u'|_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2}, 2+\alpha)} \leq c_3 |g'|_{\Omega_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c_3 \big(|g|_{\Omega_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} + |(\partial_t \pm b(\cdot, \pm l) \partial_x) v|_{\Omega_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\big). \tag{2.151}$$

Damit ist offensichtlich

$$u^1(t,x) := u'(t,x) + v(t,x)$$

die Lösung von (2.1)–(2.3) in $(0,\tau) \times (-l,l)$. Aus (2.148)-(2.151) und (2.2) folgt (vgl. auch den Beweis von Theorem 2.11), dass ein

$$c_4 = c_4(\varepsilon_1, \varepsilon_2, |a|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}, |b|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, T)$$

existiert, so dass

$$|u^1|_{\Omega_\tau}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + |u^1|_{S_\tau}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leq c_4\,(|f|_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + |u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} + |g|_{S_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}). \tag{2.152}$$

Somit haben wir eine $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$-Lösung von (2.1)–(2.3) in Ω_τ konstruiert.

Im nächsten Schritt kann man sich überlegen, wie man die Lösung in ganz Ω_T konstruiert. Die Funktion $u_0^1 := u^1(\frac{\tau}{2}, \cdot) \in C^{2+\alpha}(-l,l)$ erfüllt die Kompatibilitätsbedingung (2.6) und kann als ein neuer Anfangswert betrachtet werden. Das bedeutet, dass wir wie oben eine Lösung $u^2 \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}\big((\frac{\tau}{2}, \frac{3\tau}{2}) \times (-l,l)\big)$ konstruieren können, die das Problem (2.1)–(2.3) mit diesem neuen Anfangswert löst. Es ist leicht nachzuvollziehen, dass auf $(\frac{\tau}{2}, \tau) \times (-l,l)$ die Funktionen u^1 und u^2 übereinstimmen, denn die Funktion $u^1 - u^2$ liegt in $\mathring{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}([\frac{\tau}{2}, \tau] \times [-l,l])$, löst das Problem (2.11) mit $f = g = 0$ und kann somit wegen (2.12) nur die triviale Lösung sein. Somit wurde eine Lösung von (2.1)–(2.3) in $(0, \frac{3\tau}{2}) \times (-l,l)$ konstruiert. Nun ist auch klar, dass man durch ein solches Vorgehen in endlich vielen Schritten das ganze Intervall $(0,T)$ ausschöpfen kann. Man kann sich einfach überlegen, dass (2.7) schrittweise wie die Abschätzung (2.152) hergeleitet werden kann: Die Konstante $c(T)$ in (2.7) hängt von der Konstante c in (2.12) ab, genauer, von der n-er Potenz von c, wobei n die Anzahl der für die Ausschöpfung des Intervalls $(0,T)$ notwendigen Schritte ist, d.h. $n = \left[\frac{T}{\tau}\right] + 1$.

Bemerkung 2.24. *Da es für unsere Zwecke ausreichend ist, haben wir das lineare Problem so formuliert, dass wir sowohl in der Gleichung als auch in der Randbedingung nur die Ortsableitungen höchster Ordnung betrachten. Dadurch vereinfacht sich die Vorzeichenbedingung an den Koeffizienten b, wodurch sich auch die Fixpunktabbildung im Beweis des Theorems 3.1 etwas einfacher gestalten läßt. Eine Einbeziehung der Terme niedrigerer Ordnung ist jedoch ohne großen zusätzlichen Aufwand möglich, indem man diese Terme als einen Störungsoperator auffasst, der durch Interpolationsungleichungen für kleine Zeiten geeignet abgeschätzt werden kann (vgl. den Operator A_1 im Beweis von* [25, Kap. IV, Theorem 7.2]*).*

3. Lokale Lösungen

In diesem Kapitel zeigen wir, dass unter geeigneten Regularitäts-, Kompatibilitäts-, Vorzeichen- und Strukturbedingungen an a, f, b, g und u_0 das Problem (1), (2a), (3) lokal klassisch lösbar ist, genauer, dass dieses Problem eine klassische Lösung $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ besitzt. Diese Behauptung wird mittels eines Standard-Fixpunktargumentes bewiesen. Dazu betrachten wir eine geeignete Lösungsabbildung eines zu (1), (2a), (3) assoziierten linearen Problems, dessen Lösbarkeit durch das Theorem 2.1 gegeben ist. Die Existenz eines Fixpunktes dieser Abbildung ist zu der lokalen Lösbarkeit von (1), (2a), (3) äquivalent und wird mit Hilfe des Schauderschen Fixpunktsatzes bewiesen.

Im folgenden formulieren wir Forderungen an (1), (2a), (3), die garantieren, dass das korrespondierende lineare Problem den Bedingungen des Satzes 2.1 genügt. Damit die Koeffizienten und rechten Seiten des linearen Problems in geeigneten Hölderräumen liegen, fordern wir, dass es ein $\alpha \in (0,1)$ gibt, so dass es für jedes Kompaktum $\mathcal{K} \subset \overline{\Omega}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Konstante $c_h(\mathcal{K}) > 0$ gibt, mit

$$\begin{aligned}
&|a(t_1,x_1,z_1,p_1) - a(t_2,x_2,z_2,p_2)| \\
&\qquad \le c_h(|t_1-t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + |x_1-x_2|^\alpha + |z_1-z_2| + |p_1-p_2|), \\
&|f(t_1,x_1,z_1,p_1) - f(t_2,x_2,z_2,p_2)| \\
&\qquad \le c_h(|t_1-t_2|^{\frac{\alpha}{2}} + |x_1-x_2|^\alpha + |z_1-z_2| + |p_1-p_2|),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

und

$$\begin{aligned}
|b(t_1,\pm l,z_1) - b(t_2,\pm l,z_2)| &\le c_h(|t_1-t_2|^{\frac{1+\alpha}{2}} + |z_1-z_2|), \\
|g(t_1,\pm l,z_1) - g(t_2,\pm l,z_2)| &\le c_h(|t_1-t_2|^{\frac{1+\alpha}{2}} + |z_1-z_2|)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

für $(t_i,x_i,z_i,p_i) \in \mathcal{K},\ i = 1,2$.

Ferner muss aufgrund der Bedingung (2.4) der Koeffizient a in (1) im folgenden Sinne gleichmäßig parabolisch sein: Für jedes Kompaktum $\mathcal{K}_1 \subset \overline{\Omega}_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gibt es ein $\delta_1 = \delta_1(\mathcal{K}_1) > 0$, so dass

$$a(t,x,z,p) \ge \delta_1 \quad \text{für alle} \quad (t,x,z,p) \in \mathcal{K}_1. \tag{3.3}$$

Ähnlich fordern wir wegen (2.5), dass es für jedes Kompaktum $\mathcal{K}_2 \subset [0,T] \times \mathbb{R}$ ein $\delta_2 = \delta_2(\mathcal{K}_2) > 0$ gibt mit

$$b(t,\pm l,z) \ge \delta_2 \quad \text{für alle} \quad (t,z) \in \mathcal{K}_2. \tag{3.4}$$

Schließlich, damit auch die Kompatibilitätsbedingungen erfüllt sind, fordern wir, dass

$$\mp b(0,\pm l,u_0)u_{0x} + g(0,\pm l,u_0) = a(0,\pm l,u_0,u_{0x})u_{0xx} + f(0,\pm l,u_0,u_{0x}). \tag{3.5}$$

Unter diesen Bedingungen beweisen wir die folgende Aussage:

Theorem 3.1. *Es seien die Funktionen a, f und b, g auf $(0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $(0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}$ gegeben und die Voraussetzungen (3.1)–(3.4) seien erfüllt. Dann existiert für jedes*

$u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$*, das der Bedingung* (3.5) *genügt, ein* $\varepsilon > 0$*, so dass das Problem* (1), (2a), (3) *eine Lösung* $u \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ *besitzt.*

Beweis. Der Beweis ist eine Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes. Da $u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$, ist u_0 insbesondere auch in $C^{1+\alpha}(\Omega)$ und wir können

$$M_0 := 1 + |u_0|_\Omega^{(1+\alpha)} \tag{3.6}$$

setzen. Ferner definieren wir für ein $\varepsilon \in (0, T)$,

$$\mathcal{U}_\varepsilon := \{v \in C^{\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha}(\Omega_\varepsilon) : |v|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} \leq M_0\}$$

und betrachten die Zuordnungsvorschrift

$$\begin{aligned} J_\varepsilon : \ \mathcal{U}_\varepsilon &\longrightarrow C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon), \\ v &\longmapsto J_\varepsilon v = u, \end{aligned}$$

wobei u eine klassische Lösung des folgenden linearen Problems ist:

$$\begin{aligned} u_t - \widetilde{a}(t,x)u_{xx} &= \widetilde{f}(t,x), \quad & (t,x) &\in \Omega_\varepsilon, \\ u_t \pm \widetilde{b}(t,\pm l)u_x &= \widetilde{g}(t,\pm l), & t &\in (0,\varepsilon), \\ u(0,x) &= u_0(x), & x &\in [-l,l], \end{aligned} \tag{3.7}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t,x) &:= a(t,x,v(t,x),v_x(t,x)), \\ \tilde{f}(t,x) &:= f(t,x,v(t,x),v_x(t,x)), \\ \tilde{b}(t,\pm l) &:= b(t,\pm l,v(t,\pm l)), \\ \tilde{g}(t,\pm l) &:= g(t,\pm l,v(t,\pm l)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Wir zeigen in mehreren Schritten, dass J_ε eine wohldefinierte Abbildung ist, die für ein geeignetes $\varepsilon > 0$ die Voraussetzungen des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt und somit einen Fixpunkt besitzt. Der Fixpunkt ist offensichtlich eine Lösung von (1), (2a), (3).

Im ersten Schritt beweisen wir, dass J_ε für jedes $\varepsilon \in (0,T)$ *wohldefiniert* ist. Um das zu tun, müssen wir zeigen, dass (3.7) den Voraussetzungen des Theorems 2.1 genügt und somit eine eindeutige Lösung in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ besitzt. Wir zeigen zunächst, dass $\widetilde{a}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{b}$ und $\widetilde{g}$ in den geeigneten Hölderräumen liegen. Sei

$$\mathcal{K} := \overline{\Omega}_T \times [-M_0, M_0] \times [-M_0, M_0], \tag{3.9}$$

und die Konstante $c_h(\mathcal{K})$ sei so gewählt, dass die Bedingungen (3.1) und (3.2) erfüllt sind. Sei ferner

$$c_1 := \max\Big\{\sup_{\mathcal{K}}|a(t,x,z,p)|, \sup_{\mathcal{K}}|f(t,x,z,p)|, \sup_{\mathcal{K}}|b(t,\pm l,z,p)|, \sup_{\mathcal{K}}|g(t,x,z,p)|\Big\}.$$

Seien nun $v \in \mathcal{U}_\varepsilon$ und (t,x), $(s,x) \in \Omega_\varepsilon$ mit $|t-s| < 1$. Aus der Bedingung (3.1) folgt, dass

$$\begin{aligned}
|\widetilde{a}(t,x) - \widetilde{a}(s,x)| &= |a(t,x,v(t,x),v_x(t,x)) - a(s,x,v(s,x),v_x(s,x))| \\
&\leq c_h\Big(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}} + |v(t,x)-v(s,x)| + |v_x(t,x)-v_x(s,x)|\Big) \\
&\leq c_h\Big(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}} + \langle v\rangle_{t,\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2})}|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}} + \langle v_x\rangle_{t,\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2})}|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}\Big) \\
&\leq c_h\big(1 + |v|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}\big)|t-s|^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\leq c_h(1+M_0)|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

Hier haben wir lediglich die Definitionen von $\mathcal{U}_\varepsilon$ und der Norm $|\cdot|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}$ benutzt, sowie die Tatsache, dass $|t-s| < 1$ und somit fallend im Exponenten ist.

Den Fall $|t-s| \geq 1$ kann man einfacher behandeln. Für jedes $v \in \mathcal{U}_\varepsilon$ gilt $|v|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq M_0$ und $|v_x|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq M_0$. Da a laut (3.1) in jeder Variable Hölder-stetig und somit insbesondere stetig ist, ist $|\widetilde{a}|_{0,\Omega_\varepsilon}$ durch $\max_{\mathcal{K}}|a|$ nach oben beschränkt. Deshalb gilt für alle (t,x), $(s,x) \in \Omega_\varepsilon$ mit $|t-s| \geq 1$, dass

$$|\widetilde{a}(t,x) - \widetilde{a}(s,x)| \leq 2|\widetilde{a}|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq 2c_1|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Somit ist $\widetilde{a}$ für jedes $v \in \mathcal{U}_\varepsilon$ Hölder-stetig in der ersten Variable mit Hölder-Exponenten $\frac{\alpha}{2}$ und die Hölderkonstante hängt nur von c_h, M_0 und c_1 ab.

Analog kann man die Hölder-Stetigkeit von $\widetilde{a}$ auch in der zweiten Variable zeigen. Seien $v \in \mathcal{U}_\varepsilon$ und (t,y), $(s,y) \in \Omega_\varepsilon$ mit $|x-y| < 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|\widetilde{a}(t,x) - \widetilde{a}(t,y)| &= |a(t,x,v(t,x),v_x(t,x)) - a(t,y,v(t,y),v_x(t,y))| \\
&\leq c_h\Big(|x-y|^{\alpha} + |v(t,x)-v(t,y)| + |v_x(t,x)-v_x(t,y)|\Big) \\
&\leq c_h\Big(|x-y|^{\alpha} + |v_x|_{0,\Omega_\varepsilon}|x-y| + \langle v_x\rangle_{x,\Omega_\varepsilon}^{(\alpha)}|x-y|^{\alpha}\Big) \\
&\leq c_h\big(1 + |v|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}\big)|x-y|^{\alpha} \\
&\leq c_h(1+M_0)|x-y|^{\alpha}.
\end{aligned}$$

Den Fall $|x-y| \geq 1$ kann man völlig analog zu dem Fall $|t-s| \geq 1$ behandeln. Folglich ist

$$\langle\widetilde{a}\rangle_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq c(c_h, M_0, c_1).$$

Genauso können wir zeigen, dass

$$\langle\widetilde{f}\rangle_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} \leq c(c_h, M_0, c_1).$$

Ähnliche Rechnungen liefern die Hölder-Stetigkeit von $\widetilde{b}$ und $\widetilde{g}$. Für $|t-s|<1$ gilt

$$\begin{aligned}|\widetilde{b}(t,\pm l)-\widetilde{b}(s,\pm l)| &= |b(t,\pm l,v(t,\pm l))-b(s,\pm l,v(s,\pm l))|\\ &\leq c_h\Big(|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}+|v(t,x)-v(s,x)|\Big)\\ &\leq c_h\Big(|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}+\langle v\rangle_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}\Big)\\ &\leq c_h\big(1+|v|_{\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}\big)|t-s|^{\frac{(1+\alpha)}{2}}\\ &\leq c_h(1+M_0)|t-s|^{\frac{(1+\alpha)}{2}}.\end{aligned}$$

Analog gilt für $\widetilde{g}$ und $t,s\in(0,T)$ mit $|t-s|<1$, dass

$$|\widetilde{g}(t,\pm l)-\widetilde{g}(s,\pm l)|\leq c_h\big(1+|v|_{\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}\big)|t-s|^{\frac{1+\alpha}{2}}\leq c_h(1+M_0)|t-s|^{\frac{(1+\alpha)}{2}}.$$

Die Fälle $|t-s|\geq 1$ kann man wie oben behandeln. Fassen wir die obigen Überlegungen zusammen, so ist offensichtlich, dass es eine Konstante

$$c_2=c_2(c_h,M_0,c_1)$$

gibt, die nicht von ε abhängt, so dass

$$\max\left\{|\widetilde{a}|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)},\ |\widetilde{f}|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)},\ |\widetilde{b}|_{S_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2})},\ |\widetilde{g}|_{S_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2})}\right\}\leq c_2,\quad \varepsilon\in(0,T). \tag{3.10}$$

Somit erfüllen $\widetilde{a}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{b}$ und $\widetilde{g}$ die Regularitätsbedingungen des Theorems 2.1. Die Gleichung (3.5) garantiert, dass auch die Kompatibilitätsbedingung erfüllt ist. Folglich existiert laut Theorem 2.1 eine eindeutige Lösung $u\in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ von (3.7). Damit ist J_ε für jedes $\varepsilon\in(0,T)$ eine wohldefinierte Abbildung.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass für hinreichend kleine ε die Abbildung J_ε die Menge $\mathcal{U}_\varepsilon$ in sich abbildet. Dafür müssen wir zeigen, dass für jedes $v\in\mathcal{U}_\varepsilon$

$$|J_\varepsilon v|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}\leq M_0. \tag{3.11}$$

Da $\varepsilon<T$ ist, folgt aus (2.7) und (3.10), dass ein

$$c_3=c_3(\delta_1,\delta_2,c_h,M_0,c_1)$$

existiert, so dass für jedes $v\in\mathcal{U}_\varepsilon$

$$|J_\varepsilon v|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}\leq c_3, \tag{3.12}$$

wobei c_3 nicht von ε abhängt. Wir definieren auf Ω_ε eine Hilfsfunktion h durch

$$h:=J_\varepsilon v-\widetilde{u}_0,$$

und

$$\widetilde{u}_0(t,x):=u_0(x),\quad (t,x)\in(0,\varepsilon)\times[-l,l].$$

Da $u_0\in C^{2+\alpha}(\Omega)$ und $\widetilde{u}$ konstant in der ersten Variablen ist, kann man leicht überlegen, dass

$$\widetilde{u}_0\in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$$

und
$$|\widetilde{u}_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} = |u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)}.$$
Deshalb und weil $J_\varepsilon v \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$, ist dann auch $h \in C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ und
$$|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \leq |J_\varepsilon v|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} + |\widetilde{u}_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \leq c_3 + |u_0|_{\Omega}^{(2+\alpha)} =: c_4. \tag{3.13}$$
Wir zeigen, dass $|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} \to 0$, wenn $\varepsilon \to 0$. Nach Definition gilt
$$|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} = |h|_{0,\Omega_\varepsilon} + |h_x|_{0,\Omega_\varepsilon} + \langle h_x\rangle_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)} + \langle h\rangle_{t,\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$
Laut (1.9) und (1.10) kann man alle Summanden auf der rechten Seite durch Produkte abschätzen, die als Faktoren verschiedene Potenzen von $|h|_{0,\Omega_\varepsilon}$ und $\langle h\rangle_{\Omega_\varepsilon}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}$ enthalten, und zwar gilt
$$\begin{aligned}|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} \leq 3H_0 + c_5\Big[&H_{2+\alpha}^{1/(2+\alpha)} H_0^{1-1/(2+\alpha)} + H_{2+\alpha}^{(1+\alpha)/(2+\alpha)} H_0^{1-(1+\alpha)/(2+\alpha)} \\ &+ H_{2+\alpha}^{2/(2+\alpha)} H_0^{1-2/(2+\alpha)}\Big],\end{aligned}$$
wobei $H_0 := |h|_{0,\Omega_\varepsilon}$, $H_{2+\alpha} := \langle h\rangle_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)}$ und $c_5 = c_5(l)$ die Konstante aus (1.9) bezeichnet. Da $h(0,x) = 0$, erhalten wir aus dem Mittelwertsatz, dass
$$|h|_{0,\Omega_\varepsilon} = \sup_{(t,x)\in\Omega_\varepsilon} |h(t,x)| \leq \varepsilon |h_t|_{0,\Omega_\varepsilon} \leq \varepsilon |h|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha)} \leq c_4. \tag{3.14}$$
Setzen wir dies in die obige Gleichung ein und nehmen wir o.B.d.A. an, dass $\varepsilon < 1$, so gilt
$$\begin{aligned}|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} &\leq 3c_4\varepsilon + c_5\big(c_4\varepsilon^{1-1/(2+\alpha)} + c_4\varepsilon^{1-(1+\alpha)/(2+\alpha)} + c_4\varepsilon^{1-2/(2+\alpha)}\big) \\ &\leq 3(1+c_5)c_4\varepsilon^{1-2/(2+\alpha)}.\end{aligned} \tag{3.15}$$
Wir können
$$\varepsilon = \varepsilon(c_4, c_5) = \varepsilon(l, \delta_1, \delta_2, c_h, |u_0|^{2+\alpha}, c_1) \tag{3.16}$$
offensichtlich so wählen, dass
$$|h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} < \frac{1}{2}. \tag{3.17}$$
Daraus folgern wir leicht mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass
$$\begin{aligned}|J_\varepsilon v|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} &\leq |\tilde{u}_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} + |J_\varepsilon v - \tilde{u}_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} \\ &= |u_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\alpha)} + |h|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)} \leq |u_0|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\alpha)} + \frac{1}{2} < M_0.\end{aligned}$$
Somit haben wir gezeigt, dass $J_\varepsilon(\mathcal{U}_\varepsilon) \subset \mathcal{U}_\varepsilon$, wenn ε hinreichend klein ist.

Bis jetzt haben wir bewiesen, dass J_ε für hinreichend kleine ε eine wohldefinierte Selbstabbildung auf $\mathcal{U}_\varepsilon$ ist. Da $\mathcal{U}_\varepsilon$ topologisch ein Ball und somit insbesondere eine konvexe Menge ist, müssen wir, um den Schauderschen Fixpunktsatz anwenden zu können, nur noch die Existenz einer Topologie auf $\mathcal{U}_\varepsilon$ zeigen, bzgl. der die Abbildung J_ε stetig und die Menge $\mathcal{U}_\varepsilon$ kompakt ist.

Bekanntlich kann man mit dem Satz von Arzelà-Ascoli zeigen, dass $\mathcal{U}_\varepsilon$ kompakt in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ ist. Man kann auch leicht einsehen, dass J_ε auf $\mathcal{U}_\varepsilon$ bezüglich der Norm in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ stetig ist: Sei (v_i) eine Folge in $\mathcal{U}_\varepsilon$ mit $v_i \to v$ in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Wir zeigen, dass $w_i := Jv_i \to Jv$ in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Aus (2.7) folgt, dass $\{w_i\}$ beschränkt in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ ist. Wiederum kann man mit dem Satz von Arzelà-Ascoli zeigen, dass $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ kompakt eingebettet ist. Somit ist der Abschluss von $\{w_i\}$ kompakt in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Sei $\widetilde{w}_i$ eine in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ konvergente Teilfolge von w_i mit dem Grenzwert w. Dann gilt

$$\begin{aligned}
w_t - &a(t,x,v,v_x)w_{xx} - f(t,x,v,v_x) \\
&= \lim_{i\to\infty}\big(\widetilde{w}_{i_t} - a(t,x,v_i,v_{i_x})\widetilde{w}_{i_{xx}} - f(t,x,v_i,v_{i_x})\big) = 0, \quad (t,x) \in \Omega_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
w_t \pm &b(t,\pm l,v,v_x)w_x - g(t,\pm l,v,v_x) \\
&= \lim_{i\to\infty}\big(\widetilde{w}_{i_t} \pm b(t,\pm l,v_i,v_{i_x})\widetilde{w}_{i_x} - g(t,\pm l,v_i,v_{i_x})\big) = 0, \quad t \in (0,\varepsilon),
\end{aligned}$$

und offensichtlich

$$w(0,x) = w_i(0,x) = u_0(x), \quad x \in [-l,l],$$

was insgesamt bedeutet, dass

$$w = J_\varepsilon v.$$

Somit besitzt $J_\varepsilon v_i$ in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ nur den einzigen Häufungspunkt $J_\varepsilon v$. Folglich ist $J_\varepsilon v$ der Grenzwert von $J_\varepsilon v_i$ in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ also insbesondere auch in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$. Somit haben wir insgesamt gezeigt, dass J_ε auf $\mathcal{U}_\varepsilon$ bzgl. der Norm in $C^{0,1}(\overline{\Omega}_\varepsilon)$ eine stetige Selbstabbildung ist, was bedeutet, dass $J_\varepsilon : \mathcal{U}_\varepsilon \to \mathcal{U}_\varepsilon$ alle Voraussetzung des Schauderschen Fixpunktsatzes erfüllt und somit einen Fixpunkt $u = J_\varepsilon u \in \mathcal{U}_\varepsilon$ besitzt. u löst offensichtlich das Problem (1), (2a), (3) in Ω_ε. Dass u in $C^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$ liegt, haben wir bereits oben gezeigt. □

Das Theorem 3.1 sichert die lokale Lösbarkeit des Problems (1), (2a), (3). Nun wenden wir uns der Frage zu, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen dieses Problem auch global lösbar ist, d.h. eine Lösung in ganz Ω_T besitzt. Im Beweis des Theorems 3.1 haben wir das gegebene nichtlineare Problem mittels der Fixpunktabbildung J_ε mit einem linearen Problem assoziiert, das laut Satz 2.1 eindeutig lösbar ist. Damit die Koeffizienten dieses linearen Problems die notwendigen Regularitätsbedingungen erfüllen, muss die Funktion, die in die Nichtlinearitäten eingesetzt wird (vgl. (3.8)), eine endliche $|\cdot|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}$ Norm haben. Es stellt sich heraus, dass, falls dieselbe Norm für die Lösungen von (1), (2a), (3) eine globale (d.h. von ε unabhängige) a-priori Schranke besitzt, es dann eine Lösung für dieses Problem in ganz Ω_T gibt. Diese Behauptung beweisen wir im folgenden Theorem.

Theorem 3.2. *Seien alle Voraussetzungen des Theorems 3.1 erfüllt. Ferner seien ein $\beta \in (0,1)$ und ein $C_\beta > 0$ so gegeben, dass für jede klassische Lösung u von* (1), (2a), (3) *in Ω_ε mit $\varepsilon < T$*

$$|u|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\beta}{2},1+\beta)} \le C_\beta \tag{3.18}$$

gilt. Dann besitzt das Problem (1),(2a),(3) *eine klassische Lösung* u *in* Ω_T*. Ferner ist* $u \in C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(\Omega_T)$*, wobei* $\gamma := \{\alpha, \beta\}$).

Beweis. Wir setzen

$$\varepsilon_0 := \sup\{\varepsilon \in [0,T] : \text{ (1), (2a), (3) besitzt eine klassische Lösung in } C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(\Omega_\varepsilon)\}.$$

Wir zeigen, dass $\varepsilon_0 = T$. Laut Voraussetzung sind die Bedingungen des Theorems 3.1 für ein $\alpha \in (0,1)$ erfüllt. Da nach unserer Wahl $\gamma \leq \alpha$ ist, sind diese Bedingungen auch erfüllt, wenn wir α mit γ ersetzen. Somit folgt aus Theorem 3.1 die Existenz einer Lösung von (1), (2a), (3) in $C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(\Omega_\varepsilon)$ für ein $\varepsilon \geq 0$. Folglich ist $\varepsilon_0 > 0$. Wir zeigen, dass wegen (3.18) nicht $\varepsilon_0 < T$ gelten kann.

Da $\gamma \leq \beta$ gibt es aufgrund von (3.18) ein $C_\gamma = C_\gamma(C_\beta, l)$, so dass für jede klassische Lösung von (1), (2a), (3) in Ω_ε mit $\varepsilon < T$

$$|u|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\gamma}{2},1+\gamma)} \leq C_\gamma \tag{3.19}$$

gilt. Offensichtlich löst jede Lösung u von (1), (2a), (3) auch (3.7) mit $v = u$. Wegen (3.19) kann man wie oben (vgl. (3.10)) überlegen, dass es ein

$$c_1 = c_1(c_h, C_\gamma) = c_1(c_h, C_\beta, l)$$

gibt, so dass

$$\max\left\{|\widetilde{a}|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\gamma}{2},\gamma)},\ |\widetilde{f}|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{\gamma}{2},\gamma)},\ |\widetilde{b}|_{S_\varepsilon}^{(\frac{1+\gamma}{2})},\ |\widetilde{g}|_{S_\varepsilon}^{(\frac{1+\gamma}{2})}\right\} \leq c_1. \tag{3.20}$$

Also gibt es wegen (2.7) ein

$$c_2 = c_2(\delta_1, \delta_2, c_h, c_1) = c_2(\delta_1, \delta_2, c_h, C_\beta, |u_0|_\Omega^{(2+\alpha)}),$$

so dass für jede klassische Lösung u_ε von (1), (2a), (3) in Ω_ε mit $\varepsilon < T$

$$|u_\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}^{(1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma)} \leq c_2 \tag{3.21}$$

gilt. Laut der Definition von ε_0 gibt es eine wachsende Folge (ε_i) mit Grenzwert ε_0, so dass (1), (2a), (3) eine klassische Lösung u_i in Ω_{ε_i} besitzt. Offensichtlich gibt es dann für jedes $t_1 < \varepsilon_0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\varepsilon_i > t_1$ für $i \geq N$ und u_i die Gleichung (1), (2a), (3) in $\overline{\Omega}_{t_1}$ löst. Wir wissen, dass $C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(\Omega_{t_1})$ in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_{t_1})$ kompakt ist. Ferner ist wegen (3.21) die Menge $\{u_i, i \geq N\}$ beschränkt bzgl. $|\cdot|_{\Omega_{t_1}}^{(1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma)}$. Somit besitzt (u_i) eine Teilfolge $(\widetilde{u}_i)$, die in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_{t_1})$ gegen einen Grenzwert u_1 konvergiert. Offensichtlich ist u_1 eine klassische Lösung von (1), (2a), (3) in $\overline{\Omega}_{t_1}$. Wir wählen nun beliebiges t_2 mit $t_1 < t_2 < \varepsilon_0$. Da ε_i wachsend gegen ε_0 konvergiert, kann man wieder eine Teilfolge von $(\widetilde{u}_i)$ finden, die gleichmäßig gegen eine Funktion u_2 konvergiert, die eine klassische Lösung von (1), (2a), (3) in $\overline{\Omega}_{t_2}$ ist. Aufgrund der Eindeutigkeit der Grenzwerte in $C^{1,2}(\overline{\Omega}_{t_1})$ stimmt u_2 mit u_1 in $\overline{\Omega}_{t_1}$ überein. Auf diese Weise kann man durch sukzessive Wahl der Teilfolgen eine Funktion $u_{\varepsilon_0} \in C^{1,2}(\Omega_{\varepsilon_0})$ konstruieren, die das Problem (1), (2a), (3) in jedem $\overline{\Omega}_t \subset \Omega_{\varepsilon_0}$ und folglich auch in Ω_{ε_0} löst. Nun gilt wegen der Voraussetzung (3.18) auch für u_{ε_0} die Abschätzung (3.19) und folglich auch (3.21). Somit ist $u_{\varepsilon_0} \in C^{1+\frac{\gamma}{2},2+\gamma}(\Omega_{\varepsilon_0})$ und folglich sind u_{ε_0}, $\partial_t u_{\varepsilon_0}$, $\partial_x u_{\varepsilon_0}$ und $\partial_{xx} u_{\varepsilon_0}$ gleichmäßig stetig auf Ω_{ε_0}, wodurch sie sich auf $\{\varepsilon_0\} \times (-l, l)$ stetig fortsetzen lassen. Dann ist offensichtlich

$$u_0^* := u_{\varepsilon_0}(\varepsilon_0, \cdot) \in C^{(2+\gamma)}(\Omega)$$

und u_0^* erfüllt die Kompatibilitätsbedingungen (3.5) für die Anfangszeit ε_0. Wir wissen bereits, dass $\varepsilon_0 > 0$. Wir nehmen an, dass $\varepsilon_0 < T$. Dann gibt es laut Theorem 3.1 ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon_0 + \varepsilon < T$ und ein u^*, das die Gleichungen (1), (2a) in $\Omega^* := (\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon) \times (-l, l)$ löst und der Anfangsbedingung

$$u^*(\varepsilon_0, x) = u_0^*(x), \quad x \in [-l, l],$$

genügt. Dann ist

$$w(t,x) := \begin{cases} u_{\varepsilon_0}(t,x), & (t,x) \in [0, \varepsilon_0) \times (-l, l), \\ u^*(t,x), & (t,x) \in [\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon) \times (-l, l), \end{cases}$$

eine klassische Lösung von (1), (2a), (3) in $[0, \varepsilon_0 + \varepsilon) \times (-l, l)$. Dies ist aber laut Definition von ε_0 unmöglich. Folglich ist die Annahme, dass $\varepsilon_0 < T$, falsch. Somit folgt $\varepsilon_0 = T$. $\square$

Aus Theorem 3.2 folgt die Existenz einer globalen klassischen Lösung von (1), (2a), (3), vorausgesetzt, die Abschätzung (3.18) ist erfüllt. Ein analoges Resultat für das allgemeinere Problem (1), (2), (3) konnte mit den oben verwendeten Methoden nicht bewiesen werden. Wir wollen es kurz näher erläutern. Wählt man nämlich den gleichen Fixpunktansatz, wie im Beweis des Theorems 3.1, so stellt sich heraus, dass derselbe Definitionsbereich $\mathcal{U}_\varepsilon$ für eine analoge Fixpunktabbildung im Falle der Randbedingung (2) ungeeignet ist. Denn, falls man eine Funktion $v \in \mathcal{U}_\varepsilon$ in b und g aus der Randbedingung (2) einsetzt (vgl. (3.8)), so sind v_x und somit auch $\widetilde{b}$ und $\widetilde{g}$ nur in $C^{\frac{\alpha}{2}}(S_\varepsilon)$ (selbst wenn b und g in der letzen Variable Lipschitz-stetig sind) und erfüllen somit nicht die für die Lösbarkeit des linearen Problems notwendigen Regularitätsvoraussetzungen (vgl. Theorem 2.1). Somit wäre eine zu J_ε analoge Zuordnungsvorschrift in diesem Fall keine wohldefinierte Abbildung. Dieses Problem könnte man lösen, indem man im Definitionsbereich der Fixpunktabbildung nur Funktionen zulässt, deren erste Ortsableitung mindestens in $C^{\frac{1+\alpha}{2}}(S_\varepsilon)$ für ein $\alpha \in (0,1)$ ist. Wählt man nun den Definitionsbereich der Fixpunktabbildung als eine Teilmenge von $C^{\frac{k+\alpha}{2}, k+\alpha}(\Omega_\varepsilon)$, so muss $k \geq 2$ gelten. In diesem Fall wäre ein zu (3.7) analoges lineares Problem zwar lösbar, die Lösung aber würde keine höhere Regularität besitzen, als die Funktionen aus dem Definitionsbereich. Somit könnten wir diese Lösung nicht wie in (3.15) interpolieren und zeigen, dass die Abbildung J_ε für ein geeignetes ε eine Selbstabbildung ist.

Aufgrund des Satzes 2.1 liegt dennoch die Vermutung nahe, dass man durch eine geeignete Fixpunkttechnik (evtl. durch die Anwendung eines anderen Fixpunktansatzes oder sogar durch eine geschicktere Wahl des Definitionsbereichs der Fixpunktabbildung) die zu den Aussagen der Theoreme 3.1 und 3.2 analogen Aussagen auch für das Problem (1), (2), (3) beweisen kann. Dies ist der Gegenstand aktueller Untersuchungen.

4. A-PRIORI ABSCHÄTZUNGEN UND GLOBALE EXISTENZ

Wie aus dem Theorem 3.2 ersichtlich ist, reduziert sich der Beweis der Existenz einer globalen klassischen Lösung von (1), (2a), (3) darauf, dass man für die lokalen Lösungen u dieses Problems ein $\beta \in (0,1)$ und eine a-priori Schranke für $|u|_{\Omega_\varepsilon}^{(\frac{1+\beta}{2},1+\beta)}$ für jedes $\varepsilon < T$ findet. Wie schon in der Einführung erwähnt, gewinnt man diese Abschätzung aus der allgemeinen Theorie der linearen parabolischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, falls man a-priori Schranken für $\max|u|$ und $\max|u_x|$ bereits kennt, da man in diesem Fall die nichtlineare Gleichung (1) wie eine lineare Gleichung mit beschränkten Koeffizienten behandeln kann (für Details vgl. Theorem 4.7 und den Beweis von [25, Theorem 5.1]). Wie auch bereits gesagt, ist der schwierigere Teil bei diesem Ablauf die a-priori Abschätzung von $\max|u_x|$, was auch unser Hauptanliegen in diesem Kapitel ist. Diese Abschätzung führen wir im Abschnitt 4.1 für die Lösungen des allgemeinen Problems (1), (2), (3) unter verschiedenen Bedingungen durch (vgl. Theoreme 4.1, 4.3 und 4.5). Dabei betrachten wir die a-priori Schranke für $\max|u|$ zunächst als gegeben. Anschließend zeigen wir im Theorem 4.7, wie man die erwünschte a-priori Abschätzung für $|u|_{\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha)}$ ebenfalls für die Lösung des allgemeinen Problems (1), (2), (3) in Abhängigkeit von $\max_{\Omega_T}|u|$ und $\max_{\Omega_T}|u_x|$ erhält. Im nächsten Abschnitt in Theorem 4.9 zeigen wir, wie man die a-priori Abschätzung für $\max|u|$ im Falle des Randwertproblems (1), (2a), (3) mit Hilfe des parabolischen Maximumprinzips gewinnen kann. Nun folgt die globale Existenz für das Problem (1), (2a), (3) aus den gewonnenen a-priori Abschätzungen und Theorem 3.2. Dieses Resultat haben wir in Theorem 4.10 explizit formuliert. Die globale Existenz der Lösung im Falle der Randbedingung (2) konnten wir nicht vollständig beweisen. Das fehlende Glied in der Beweiskette ist ein zu dem Theorem 3.1 analoges Theorem für das Randwertproblem (1), (2), (3) (für Details siehe die Bemerkung nach Theorem 3.2).

4.1. **A-priori Abschätzungen für** $\max|u_x|$**.** Wir wollen unsere Vorgehensweise kurz erläutern. Um den Betrag des Gradienten der Lösung u abzuschätzen, ist es offensichtlich ausreichend, eine obere Schranke für $\frac{|u(t,x)-u(t,y)|}{|x-y|}$ zu finden, wenn $|x-y|$ klein ist. Um das zu tun, benutzen wir die Methode der Verdoppelung der Raumvariable aus [36], die man kurz wie folgt zusammenfassen kann: Wir betrachten die Gleichung (1) in zwei Punkten $(t,x),(t,y) \in \Omega_T$ und erhalten durch die Differenzbildung eine Differentialgleichung für die auf der Menge $(0,T)\times(-l,l)\times(-l,l)$ definierte Funktion $u(t,x)-u(t,y)$, deren Raumvariable offensichtlich nicht mehr ein- sondern zweidimensional ist. Ferner definieren wir eine Funktion h als die Lösung einer geeigneten Differentialgleichung (vgl. (4.13)), die man mit mit Hilfe eines Maximumprinzips mit der Funktion $u(t,x)-u(t,y)$ vergleichen kann. Die erwünschte Abschätzung für $\max|u_x|$ folgt aus der Ungleichung

$$|u(t,x)-u(t,y)| \leq h(|x-y|),$$

die in einer Umgebung der Menge $\{(t,x,y) \in (0,T)\times(-l,l)\times(-l,l) : x = y\}$, d.h. für kleine Werte von $|x-y|$, gültig ist.

4.1.1. ***Abschätzung unter der Berstein-Nagumo Bedingung***.

Theorem 4.1. *Sei u eine klassische Lösung von* (1), (2), (3) *mit*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u| \leq M. \tag{4.1}$$

Es gelte

$$a(t,x,z,p) > 0, \quad (t,x,z,p) \in \overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Ferner sei u_0 eine Lipschitz-stetige Funktion mit

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq K|x-y|, \quad x,y \in [-l,l]. \tag{4.3}$$

Außerdem existiere ein $q_0 \geq K$ sowie eine reellwertige Funktion $\psi \in C^1([0,\infty))$ mit $\psi \geq 1$ und

$$\int_{q_0}^{\infty} \frac{\rho \,\mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)} > 2M, \tag{4.4}$$

so dass

$$|f(t,x,z,p)| \leq a(t,x,z,p)\psi(|p|), \quad (t,x,z,p) \in \overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times \mathbb{R} \tag{4.5}$$

und

$$g(t,l,z,p) \leq b(t,l,z,p)p, \tag{4.6}$$
$$-g(t,-l,z,p) \leq b(t,-l,z,p)p, \tag{4.7}$$
$$g(t,-l,z,-p) \leq b(t,-l,z,-p)p, \tag{4.8}$$
$$-g(t,l,z,-p) \leq b(t,l,z,-p)p, \tag{4.9}$$

für $(t,z) \in (0,T] \times [-M,M]$ und $p \geq q_0$. Dann existiert ein

$$c = c(q_0, M, \psi, K), \tag{4.10}$$

so dass

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u_x| \leq c. \tag{4.11}$$

Beweis. Durch die Voraussetzung (4.4) existiert ein $q_1 > q_0$ so, dass

$$\int_{q_0}^{q_1} \frac{\rho \,\mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)} = 2M. \tag{4.12}$$

Wir definieren auf dem Intervall $[q_0, q_1]$ die Funktion τ durch

$$\tau(\xi) := \int_{\xi}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}, \quad \xi \in [q_0, q_1].$$

Da ψ strikt positiv ist, ist τ offensichtlich strikt monoton fallend auf $[q_0, q_1]$ mit

$$\tau_0 := \tau(q_0) = \int_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)} = 2M \quad \text{und} \quad \tau(q_1) = 0.$$

Somit ist die Funktion τ auf ihrem Definitionsbereich umkehrbar und die Umkehrfunktion $q := \tau^{-1}$, definiert auf dem Intervall $[0, \tau_0]$, ist offensichtlich auch fallend, mit

$$q(0) = \tau^{-1}(0) = q_1 \quad \text{und} \quad q(\tau_0) = \tau^{-1}(\tau_0) = q_0.$$

Somit können wir auf $[0, \tau_0]$ eine Funktion h definieren durch

$$h(\xi) := \int\limits_{q(\xi)}^{q_1} \frac{\rho \, \mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)}.$$

Offensichtlich ist $h(\xi) = e \circ q(\xi)$ mit

$$e(\zeta) := \int\limits_{\zeta}^{q_1} \frac{\rho \, \mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)}.$$

Dann erhalten wir durch die Verwendung der Kettenregel, des Satzes über die Differenzierbarkeit des Integrals nach der oberen Grenze und des Satzes über die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung, dass

$$\begin{aligned} h'(\xi) &= e'(q(\xi))q'(\xi) = e'(q(\xi))(\tau^{-1})'(\xi) = e'(q(\xi))\frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(\xi))} = e'(q(\xi))\frac{1}{\tau'(q(\xi))} \\ &= \frac{-q(\xi)}{\psi(q(\xi))}\frac{1}{\frac{-1}{\psi(q(\xi))}} = q(\xi) \geq q_0 \end{aligned}$$

und

$$h''(\xi) = q'(\xi) = \frac{1}{\tau'(q(\xi))} = -\psi(q(\xi)).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} h(0) &= e(q(0)) = e(q_1) = 0, \\ h(\tau_0) &= e(q(\tau_0)) = e(q_0) = 2M. \end{aligned}$$

Somit ist h zweimal differenzierbar auf $(0, \tau_0)$ und löst das Problem:

$$\begin{aligned} h''(\xi) + \psi(|h'(\xi)|) &= 0, \quad \xi \in (0, \tau_0), \\ h'(\xi) &\geq q_0, \quad \xi \in (0, \tau_0), \\ h(\tau_0) &= 2M, \\ h(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Da $h' \geq q_0 \geq K$ und $h(0) = 0$, gibt es laut dem Mittelwertsatz für $x, y \in [-l, l]$ mit $|x - y| \leq \tau_0$ ein $\xi \in [0, |x - y|]$, so dass

$$h(|x - y|) = h'(\xi)|x - y| \geq K|x - y|.$$

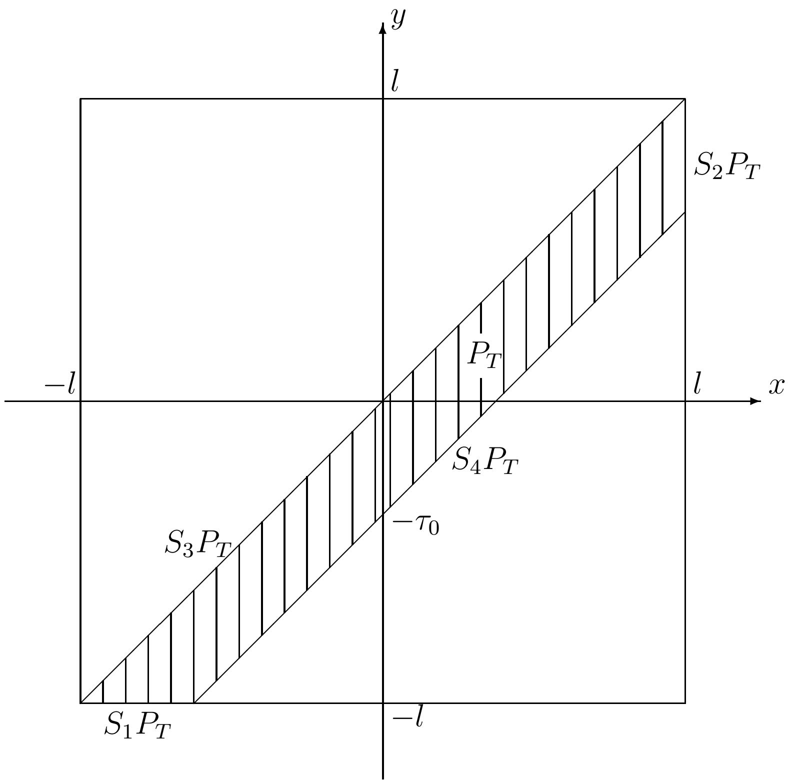
Folglich ist wegen (4.3), dass

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq h(|x - y|), \quad x, y \in [-l, l], \ |x - y| \leq \tau_0. \tag{4.14}$$

Wir definieren die Mengen

$$
\begin{aligned}
P &:= \{(x,y) \in \Omega \times \Omega :\ 0 < x - y < \tau_0\ \},\\
P_T &:= (0,T) \times P,\\
S_1P_T &:= \{(t,x,y) \in \overline{P} :\ -l < x < -l + \tau_0,\ y = -l,\ t \in (0,T]\},\\
S_2P_T &:= \{(t,x,y) \in \overline{P} :\ x = l,\ l - \tau_0 < y < l,\ t \in (0,T]\},\\
S_3P_T &:= \{(t,x,y) \in \overline{P} :\ x = y,\ t \in (0,T]\},\\
S_4P_T &:= \{(t,x,y) \in \overline{P} :\ x - y = \tau_0,\ t \in (0,T]\},\\
SP_T &:= \bigcup_{i=1}^{4} S_iP_T,\\
BP_T &:= \{0\} \times \overline{P},\\
\Gamma P_T &:= SP_T \cup BP_T
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

und veranschaulichen sie für ein festes t (d.h. 2D-Projektion dieser Mengen) durch das folgende Bild:



Wir definieren in $\overline{P}_T$ folgende Hilfsfunktionen:

$$\begin{aligned} v(t,x,y) &:= u(t,x) - u(t,y), \\ w(t,x,y) &:= v(t,x,y) - h(x-y), \\ \widetilde{w}(t,x,y) &:= e^{-t} w(t,x,y). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Die räumlichen partiellen Ableitungen, d.h. die Ableitungen nach der zweiten bzw. dritten Variable dieser Funktionen notieren wir als Ableitung nach x bzw. y. Um die Notation möglichst übersichtlich zu halten, verwenden wir die beiden Symbole u_x und u_y auch für die Ableitung nach der Raumvariablen der nur von zwei Variablen abhängiger Funktion u, d.h.

$$u_x := u_y := \partial_2 u.$$

Im Folgenden zeigen wir, dass $\widetilde{w}$ in $\overline{P}_T$ kein positives Maximum annehmen kann. Für $(t,x,y) \in P_T \backslash \Gamma P_T$ sind (t,x) und (t,y) Elemente von Ω_T. Deshalb ist dort die Gleichung (1) erfüllt, d.h.

$$\begin{aligned} -u_t(t,x) + a(t,x,u,u_x)u_{xx} + f(t,x,u,u_x) &= 0, \\ -u_t(t,y) + a(t,y,u,u_y)u_{yy} + f(t,y,u,u_y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Aus der Definition von v folgt,

$$\begin{aligned} v_x(t,x,y) &= (u(t,x) - u(t,y))_x = u_x(t,x), \\ v_y(t,x,y) &= (u(t,x) - u(t,y))_y = -u_y(t,y), \\ v_{xx}(t,x,y) &= u_{xx}(t,x), \\ v_{yy}(t,x,y) &= -u_{yy}(t,y). \end{aligned}$$

Wenn wir dies in (4.17) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} -u_t(t,x) + a(t,x,u,v_x)v_{xx} + f(t,x,u,v_x) &= 0, \\ -u_t(t,y) - a(t,y,u,-v_y)v_{yy} + f(t,y,u,-v_y) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen und das Berücksichtigen von

$$-v_t(t,x,y) = -u_t(t,x) + u_t(t,y),$$

erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} -v_t(t,x,y) + a(t,x,u,v_x)v_{xx} + f(t,x,u,v_x) & \\ + a(t,y,u,-v_y)v_{xx} - f(t,y,u,-v_y) &= 0. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Aus (4.5) folgt

$$\begin{aligned} f(t,x,u,v_x) &\leq a(t,x,u,v_x)\psi(|v_x|), \\ -f(t,y,u,-v_y) &\leq a(t,y,u,-v_y)\psi(|v_y|). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wir führen die folgende Notation ein:

$$\begin{aligned} A(t,x) &:= a(t,x,u,v_x), \\ A(t,y) &:= a(t,y,u,-v_y). \end{aligned} \tag{4.20}$$

Damit erhalten wir aus (4.18) und (4.19), dass

$$-v_t(t,x,y) + A(t,x)(v_{xx} + \psi(|v_x|)) + A(t,y)(v_{yy} + \psi(|v_y|)) \geq 0.$$

Ferner folgt aus der ersten Gleichung von (4.13), dass

$$A(t,x)(h''(x-y) + \psi(|h'(x-y)|)) + A(t,y)(h''(x-y) + \psi(|h'(x-y)|)) = 0.$$

Wiederum durch Subtraktion und unter der Verwendung der Gleichungen

$$\begin{aligned} w_t(t,x,y) &= v_t(t,x,y), \\ w_{xx}(t,x,y) &= v_{xx}(t,x,y) - h''(x-y), \\ w_{yy}(t,x,y) &= v_{yy}(t,x,y) - h''(x-y), \end{aligned}$$

die sich unmittelbar aus der Definition von w (vgl. (4.16)) ergeben, erhalten wir

$$-w_t(t,x,y) + A(t,x)w_{xx}(t,x,y) + A(t,y)w_{yy}(t,x,y) + r(t,x,y) \geq 0, \tag{4.21}$$

wobei

$$r(t,x,y) := \psi(|v_x(t,x,y)|) - \psi(|h'(x-y)|) + \psi(|v_y(t,x,y)|) - \psi(|h'(x-y)|).$$

Durch die Multiplikation von (4.21) mit e^{-t} und wegen der Gleichungen

$$-w_t e^{-t} = -\widetilde{w}_t - \widetilde{w}, \qquad w_{xx}e^{-t} = \widetilde{w}_{xx}, \qquad w_{yy}e^{-t} = \widetilde{w}_{yy}, \tag{4.22}$$

die aus der Definition von $\widetilde{w}$ (vgl. (4.16)) folgen, ergibt sich

$$[-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + re^{-t}]\big|_{(t,x,y)\in\overline{P}_T\setminus\Gamma P_T} \geq 0. \tag{4.23}$$

Wir nehmen nun an, dass die Funktion $\widetilde{w}$ das positive Maximum in $(t_0,x_0,y_0) \in \overline{P}_T\setminus\Gamma P_T$ annimmt. Dann gilt in diesem Punkt

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(t_0,x_0,y_0) > 0, &\qquad \widetilde{w}_t(t_0,x_0,y_0) \geq 0, \\ \widetilde{w}_{xx}(t_0,x_0,y_0) \leq 0, &\qquad \widetilde{w}_{yy}(t_0,x_0,y_0) \leq 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Außerdem ist

$$\widetilde{w}_x(t_0,x_0,y_0) = \widetilde{w}_y(t_0,x_0,y_0) = 0,$$

woraus wieder mit der Definition von $\widetilde{w}$ die Gleichung

$$e^{-t}(v_x(t_0,x_0,y_0) - h'(x_0-y_0)) = e^{-t}(v_y(t_0,x_0,y_0) + h'(x_0-y_0)) = 0.$$

folgt. Folglich ist

$$v_x(t_0,x_0,y_0) = -v_y(t_0,x_0,y_0) = h'(x_0-y_0) \tag{4.25}$$

und somit

$$r(t_0,x_0,y_0) = 0. \tag{4.26}$$

Da $A(t_0,x_0)$ und $A(t_0,y_0)$ wegen (4.2) nicht negativ sind, folgt aus (4.24) und (4.26), dass

$$(-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + re^{-t})\big|_{(t_0,x_0,y_0)} < 0. \tag{4.27}$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.23). Also kann $\widetilde{w}$ kein positives Maximum in $\overline{P}_T \setminus \Gamma P_T$ annehmen.

Wir müssen noch zeigen, dass $\widetilde{w}$ auch auf ΓP_T kein positives Maximum annehmen kann. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle: $\tau_0 < 2l$ und $\tau_0 \geq 2l$. Sei zunächst $\tau_0 < 2l$ und $(t, l, y) \in S_2 P_T$. Da $\tau_0 < 2l$, gilt $-l < y < l$. Also erfüllt die Funktion u in den Punkten (t, y) und (t, l) Gleichungen (1) bzw. (2), d.h.

$$-u_t(t, y) + a(t, y, u, u_y)u_{yy} + f(t, y, u, u_y) = 0,$$
$$-u_t(t, l) - b(t, l, u, u_x)u_x + g(t, l, u, u_x) = 0.$$

Wir erinnern, dass

$$v_y(t, l, y) = -u_y(t, y), \quad v_{yy}(t, l, y) = -u_{yy}(t, y), \quad v_x(t, l, y) = u_x(t, l).$$

Durch das Einsetzen in die obigen Gleichungen ergibt sich, dass

$$-u_t(t, y) - a(t, y, u, -v_y)v_{yy} + f(t, y, u, -v_y) = 0,$$
$$-u_t(t, l) - b(t, l, u, v_x)v_x + g(t, l, u, v_x) = 0.$$

Wenn wir die obere Gleichung von der unteren subtrahieren und dabei (4.5) sowie die Definition von v berücksichtigen, erhalten wir

$$-v_t(t, l, y) + a(t, y, u, -v_y)v_{yy} + a(t, y, u, -v_y)\psi(|v_y|)$$
$$- b(t, l, u, v_x)v_x + g(t, l, u, v_x) \geq 0.$$

Mit

$$r_1(t, l, y) := -b(t, l, u, v_x)v_x + g(t, l, u, v_x)$$

und $A(t, y)$ wie in (4.20) ist

$$-v_t(t, l, y) + A(t, y)(v_{yy} + \psi(|v_y|)) + r_1(t, l, y) \geq 0. \tag{4.28}$$

Da $(t, l, y) \in S_2 P_T$ und somit $0 \leq l - y \leq \tau_0$, folgt aus (4.13), dass

$$A(t, y)(h''(l - y) + \psi(|h'(l - y)|)) = 0.$$

Ziehen wir diese Gleichung von (4.28) ab und berücksichtigen, dass

$$w_t(t, l, y) = v_t(t, l, y), \qquad w_{yy}(t, l, y) = v_{yy}(t, l, y) - h''(l - y),$$

so erhalten wir

$$[-w_t + A(t, y)w_{yy} + A(t, y)(\psi(|v_y|) - \psi(|h'|)) + r_1]\big|_{(t,l,y)\in S_2 P_T} \geq 0.$$

Multiplikation mit e^{-t} und Berücksichtigung von (4.22) liefert

$$[-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t, y)\widetilde{w}_{yy} + r_2 e^{-t} + r_1 e^{-t}]\big|_{(t,l,y)\in S_2 P_T} \geq 0, \tag{4.29}$$

wobei

$$r_2(t, l, y) := A(t, y)(\psi(|v_y(t, l, y)|) - \psi(|h'(l - y)|)).$$

Wir nehmen nun an, dass $\widetilde{w}$ in $(t_0, l, y_0) \in S_2 P_T$ das Maximum annimmt. Dann gilt in diesem Punkt

$$\widetilde{w}(t_0, l, y_0) > 0, \qquad \widetilde{w}_t(t_0, l, y_0) \geq 0, \qquad \widetilde{w}_{yy}(t_0, l, y_0) \leq 0.$$

Ferner, ist (t_0, l, y_0) ein innerer Punkt von S_2P_T und es gilt deshalb

$$\widetilde{w}_y(t_0, l, y_0) = 0.$$

Aus der Definition von $\widetilde{w}$ folgt dann unmittelbar, dass

$$e^{-t_0}(v_y(t_0, l, y_0) + h'(l - y_0)) = 0.$$

Folglich ist

$$-v_y(t_0, l, y_0) = h'(l - y_0) \tag{4.30}$$

und somit

$$r_2(t_0, l, y_0) = 0.$$

Ferner muss gelten, dass

$$\widetilde{w}_x(t_0, l, y_0) = e^{-t_0}(v_x(t_0, l, y_0) - h'(l - y_0)) \geq 0.$$

Daraus folgt wegen (4.13), dass

$$v_x(t_0, l, y_0) \geq h'(l - y_0) \geq q_0 > 0 \tag{4.31}$$

und schließlich mit (4.6), dass

$$r_1(t_0, l, y_0) = -b(t_0, l, u, v_x)v_x + g(t_0, l, u, v_x) \leq 0.$$

Insgesamt folgt, dass

$$(-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t, y)\widetilde{w}_{yy} + r_2 e^{-t_0} + r_1 e^{-t_0})\big|_{(t_0,l,y_0)} < 0, \tag{4.32}$$

was ein Widerspruch zu (4.29) ist. Somit kann $\widetilde{w}$ in S_2P_T kein positives Maximum annehmen.

In der gleichen Art und Weise untersuchen wir $\widetilde{w}$ auf S_1P_T. Sei $(t, x, -l) \in S_1P_T$. Aus (1) und (2) folgt, dass

$$-u_t(t, x) + a(t, x, u, u_x)u_{xx} + f(t, x, u, u_x) = 0,$$
$$-u_t(t, -l) + b(t, -l, u, u_x)u_x + g(t, -l, u, u_x) = 0$$

und aus der Definition von v, dass

$$v_x(t, x, -l) = u_x(t, x), \quad v_{xx}(t, x, -l) = u_{xx}(t, x), \quad v_y(t, x, -l) = -u_x(t, -l).$$

Einsetzen liefert

$$-u_t(t, x) + a(t, x, u, v_x)v_{xx} + f(t, x, u, v_x) = 0,$$
$$-u_t(t, -l) - b(t, -l, u, -v_y)v_y + g(t, -l, u, -v_y) = 0.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} -v_t(t, x, -l) + a(t, x, u, v_x)v_{xx} + f(t, x, u, v_x)& \\ + b(t, -l, u, -v_y)v_y - g(t, -l, u, -v_y) &= 0. \end{aligned}$$

Mit

$$r_3(t, x, -l) := b(t, -l, u, -v_y)v_y - g(t, -l, u, -v_y),$$

$A(t, x)$ wie in (4.20), und weil wegen (4.5)

$$f(t, x, u, v_x) \leq a(t, x, u, v_x)\psi(|v_x|),$$

erhalten wir

$$-v_t(t,x,-l) + A(t,x)(v_{xx} + \psi(|v_x|)) + r_3(t,x,-l) \geq 0.$$

Wiederum gilt wegen (4.13), dass

$$A(t,x)(h''(x+l) + \psi(|h'(x+l)|)) = 0.$$

Wir subtrahieren diese Gleichung von der letzten Ungleichung, berücksichtigen dabei, dass

$$\begin{aligned} w_t(t,x,-l) &= v_t(t,x,-l), \\ w_{xx}(t,x,-l) &= v_{xx}(t,x,-l) - h''(x+l) \end{aligned}$$

und erhalten

$$[-w_t + A(t,x)w_{xx} + A(t,x)(\psi(|v_x|) - \psi(|h'|)) + r_3]\big|_{(t,x,-l)\in S_1 P_T} \geq 0.$$

Mutltiplikation mit e^{-t} liefert

$$[-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + r_4 e^{-t} + r_3 e^{-t}]\big|_{(t,x,-l)\in S_1 P_T} \geq 0, \tag{4.33}$$

wobei

$$r_4(t,x,-l) := A(t,x)(\psi(|v_x(t,x,-l)|) - \psi(|h'(x+l)|)).$$

Wir nehmen nun an, dass $\widetilde{w}$ in einem Punkt $(t_0, x_0, -l) \in S_1 P_T$ mit $x_0 \neq l$ das positive Maximum erreicht. Dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{w}(t_0,x_0,-l) &> 0, \quad \widetilde{w}_t(t_0,x_0,-l) \geq 0, \\ -\widetilde{w}_y(t_0,x_0,-l) &\geq 0, \quad \widetilde{w}_x(t_0,x_0,-l) = 0, \\ \widetilde{w}_{xx}(t_0,x_0,-l) &\leq 0. \end{aligned}$$

Aus $\widetilde{w}_x(t_0,x_0,-l) = 0$ folgt

$$e^{-t}(v_x(t_0,x_0,-l) - h'(x_0+l)) = 0.$$

Dann ist offensichtlich

$$|v_x(t_0,l,y_0)| = |h'(x_0+l)|$$

und somit

$$r_4(t_0,l,y_0) = 0.$$

Ferner gilt

$$-\widetilde{w}_y(t_0,x_0,-l) = e^{-t_0}(-v_y(t_0,x_0,-l) - h'(x_0+l)) \geq 0.$$

Mit (4.13) folgt daraus, dass

$$-v_y(t_0,x_0,-l) \geq h'(x_0+l) \geq q_0 > 0,$$

dann mit (4.7), dass

$$-g(t_0,-l,u,-v_y) \leq b(t_0,-l,u,-v_y)(-v_y)$$

und schließlich, dass

$$r_3(t_0,x_0,-l) \leq 0.$$

Insgesamt folgt

$$(-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + r_4 e^{-t} + r_3 e^{-t})_{|(t_0,x_0,-l)} < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.33). Also kann $\widetilde{w}$ auch auf S_1P_T kein positives Maximum erreichen.

Nun betrachten wir $\widetilde{w}$ auf S_3P_T und S_4P_T. Für $(t,x,y) \in S_3P_T$ gilt $x = y$. Da $h(0) = 0$ (vgl. (4.13)), erhalten wir unmittelbar aus der Definition von $\widetilde{w}$

$$\widetilde{w}(t,x,y) = e^{-t}(u(t,x) - u(t,y) - h(x-y)) = 0, \quad (t,x,y) \in S_3P_T.$$

Insbesondere nimmt $\widetilde{w}$ auf S_3P_T kein positives Maximum nicht an.

Für $(t,x,y) \in S_4P_T$ gilt $x - y = \tau_0$. Nach (4.13) ist $h(\tau_0) = 2M = 2\max_{\bar{\Omega}_T}|u(t,x)|$, woraus direkt folgt, dass

$$\widetilde{w}(t,x,y) = u(t,x) - u(t,y) - h(\tau_0) \leq 0,$$

d.h. auch auf S_4P_T kann $\widetilde{w}$ kein positives Maximum annehmen.

Schließlich müssen wir $\widetilde{w}$ noch auf BP_T betrachten. Für $(t,x,y) \in BP_T$ gilt $t = 0$ und deshalb folgt aus (4.14) offensichtlich, dass

$$\widetilde{w}(t,x,y) = (u_0(x) - u_0(y) - h(x-y)) \leq 0.$$

Also kann $\widetilde{w}$ auf $\Gamma\overline{P}_T$ kein positives Maximum annehmen, falls $\tau_0 < 2l$.

Nun betrachten wir $\widetilde{w}$ auf $\Gamma\overline{P}_T$ für den Fall, dass $\tau_0 \geq 2l$. Der Unterschied zu den bisherigen Betrachtungen besteht darin, dass die Menge S_4P_T nun leer ist und, dass die Mengen S_1P_T und S_2P_T zusätzlich die Menge $\{(t,l,-l) : t \in (0,T]\}$ enthalten. Wir müssen also noch zeigen, dass $\widetilde{w}$ auch auf dieser Menge kein positives Maximum annehmen kann.

In den Punkten (t,l) und $(t,-l)$ erfüllt die Funktion u die Randbedingung (2), d.h.

$$\begin{aligned} -u_t(t,l) - b(t,l,u,u_x)u_x + g(t,l,u,u_x) &= 0, \\ -u_t(t,-l) + b(t,-l,u,u_x)u_x + g(t,-l,u,u_x) &= 0. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion erhalten wir die Gleichung

$$\begin{aligned} -w_t(t,l,-l) - b(t,l,u,u_x)u_x + g(t,l,u,u_x)& \\ - b(t,-l,u,u_x)u_x - g(t,-l,u,u_x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Wir nehmen an, dass $\widetilde{w}$ in $(t_0,l,-l)$ für $t \in (0,T]$ ein positives Maximum erreicht. Dann ist

$$\begin{aligned} \widetilde{w}_x(t_0,l,-l) &= e^{-t}(u_x(t_0,l) - h'(2l)) \geq 0, \\ -\widetilde{w}_y(t_0,l,-l) &= e^{-t}(u_y(t_0,-l) - h'(2l)) \geq 0 \end{aligned}$$

und folglich gilt wegen (4.13) offensichtlich, dass

$$\begin{aligned} u_x(t_0,l) &\geq h'(2l) \geq q_0 > 0, \\ u_y(t_0,-l) &\geq h'(2l) \geq q_0 > 0. \end{aligned}$$

Dann folgt aus (4.6) und (4.7) zunächst, dass

$$-b(t,l,u,u_x)u_x + g(t,l,u,u_x) \le 0,$$
$$-b(t,-l,u,u_x)u_x - g(t,-l,u,u_x) \le 0$$

und somit aus (4.34), dass

$$-w_t(t_0,l,-l) \ge 0. \tag{4.35}$$

Andererseits, da $\widetilde{w}$ auf $\{(t_0,l,-l):\ t \in (0,T]\}$ ein positives Maximum annimmt, gilt

$$\widetilde{w}(t_0,l,-l) > 0, \quad \widetilde{w}_t(t_0,l,-l) \ge 0$$

und somit

$$-w_t(t_0,l,-l) = -e^t(\widetilde{w}(t_0,l,-l) + \widetilde{w}_t(t_0,l,-l)) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch zu (4.35). Somit haben wir insgesamt gezeigt, dass $\widetilde{w}$ in $\overline{P}_T$ kein positives Maximum erreichen kann. Deshalb folgt aus der Stetigkeit von $\widetilde{w}$, dass

$$\widetilde{w}(t,x,y) \le 0, \quad (t,x,y) \in \overline{P}_T.$$

Durch analoge Überlegungen kann man zeigen, dass auch die Funktion

$$\widetilde{w}_1 := u(t,y) - u(t,x) - h(x-y)$$

kein positives Maximum in $\overline{P}_T$ erreichen kann und deshalb

$$\widetilde{w}_1(t,x,y) \le 0, \quad (t,x,y) \in \overline{P}_T.$$

Also gilt

$$|u(t,x) - u(t,y)| \le h(x-y), \quad (t,x,y) \in \overline{P}_T.$$

Aufgrund der Symmetrie der Variablen schließen wir leicht, dass

$$|u(t,x) - u(t,y)| \le h(y-x), \quad (t,x,y) \in \overline{Q}_T,$$

wobei

$$Q_T := \{(t,x,y) : (t,y,x) \in P_T\}$$

(d.h. $\overline{Q}_T$ ist die Spiegelung von $\overline{P}_T$ an der Ebene $\{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$).

Insgesamt gilt dann

$$|u(t,x) - u(t,y)| \le h(|x-y|), \quad (t,x,y) \in \overline{Q}_T \cup \overline{P}_T,$$

wobei

$$\overline{Q}_T \cup \overline{P}_T = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le |x-y| \le \tau_0,\ |x| \le l,\ |y| \le l,\ t \in [0,T]\}.$$

Da $h(0) = 0$ ist, folgt daraus, dass

$$\left|\frac{u(t,x) - u(t,y)}{x-y}\right| \le \frac{h(|x-y|) - h(0)}{|x-y|}, \quad (t,x,y) \in \overline{Q}_T \cup \overline{P}_T$$

und man erhält durch die Grenzwertbildung, dass

$$|u_x(t,x)| \le h'(0) = q_1, \quad (t,x) \in \Omega_T. \tag{4.36}$$

Das bedeutet, dass (4.11) mit $c = q_1$ erfüllt ist. Da die Zahl q_1 wiederum durch die Bedingung (4.12) bestimmt wird, ist offensichtlich, dass sie nur von K, M, q_0 und ψ abhängt. □

Bemerkung 4.2. a) *Die Bedingung* (4.5) *kann man wegen der Parabolizitätsbedingung* (4.2) *auch in der Form*

$$\left|\frac{f(t,x,z,p)}{a(t,x,z,p)}\right| \leq \psi(|p|) \tag{4.37}$$

schreiben. Diese Bedingung ist gut bekannt in der Theorie der parabolischen Gleichungen 2. Ordnung. Oft wird für die Funktion ψ ein quadratisches Polynom gewählt. Diese Wahl ist in gewisser Hinsicht optimal. Wächst der Quotient $\left|\frac{f(t,x,z,p)}{a(t,x,z,p)}\right|$ in der Variable p schneller als $p^{2+\alpha}$, so kann man einen Blow-up des Gradienten nachweisen, sowohl auf dem Rande als auch im Inneren des betrachteten Gebietes. Die in (4.4) *gegebene Integralformulierung der Wachstumsbedingung ist noch etwas schärfer. Es ist offensichtlich, dass im Allgemeinen $\psi(p) = p^{2+\alpha}$ auch diese Bedingung verletzt (wenn z.B. $\int\limits_K^\infty \rho^{-\alpha}\mathrm{d}\rho < 2\max|u_0|$), allerdings werden durch* (4.4) *einige Funktionen auf der rechten Seite zugelassen, die asymptotisch zwischen p^2 und $p^{2+\alpha}$ liegen, wie z.B. $p^2 \log p$.*

b) *Wie schon in der Einführung erwähnt, hat sich die Notwendigkeit der Voraussetzungen* (4.6)–(4.9) *durch die dynamische Randbedingung* (2) *ergeben. Wir wollen eine einfache Situation schildern, wann diese Voraussetzungen erfüllt sind: Ersetzt man die Bedingung* (4.4) *durch die restriktivere Bedingung*

$$\int\limits_{q_0}^{\infty} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)} = \infty, \tag{4.38}$$

dann existiert zu jedem $q_0 > 0$ ein $q_1 > 0$, das die Gleichung (4.12) *erfüllt. Dann kann man leicht nachvollziehen, dass die Voraussetzungen* (4.6)–(4.9) *erfüllt sind, wenn beispielsweise der Koeffizient $b(u, u_x)$ positiv und von 0 weg beschränkt und die Funktion $g(u, u_x)$ beschränkt ist.*

4.1.2. ***Rechte Seiten mit beliebigem Wachstum***. In [36] wurde im Falle der klassischen Randbedingungen (4.46) gezeigt, dass die Gradientenabschätzung auch in einer allgemeineren Situation durchgeführt werden kann, und zwar kann man die rechte Seite in (1) durch einen geeigneten Summanden $f_1(t, x, u, u_x)$ erweitern, der nun in der Variable u_x beliebig schnell wachsen darf, aber einer Art Homogenitätsbedingung (vgl. (4.41)) unterliegt. Eine genaue Analyse des Beweises des Theorems 4.1 zeigt, dass diese allgemeinere rechte Seite auch unter der Randbedingung (2) zugelassen werden kann, falls wir die rechte Seite von (2) um einen geeigneten Summanden g_1 erweitern und zusätzlich fordern, dass die Summe von f_1 und g_1 das „richtige Vorzeichen" hat (vgl. (4.42) und (4.43)).

Wir betrachten also die Gleichung

$$u_t - a(t,x,u,u_x)u_{xx} = f(t,x,u,u_x) + f_1(t,x,u,u_x), \quad (t,x) \in (0,T)\times(-l,l), \tag{4.39}$$

mit der Randbedingung

$$u_t \pm b(t, \pm l, u, u_x)u_x = g(t, \pm l, u, u_x) + g_1(t, \pm l, u, u_x), \quad t \in (0,T), \tag{4.40}$$

wobei f_1 und g_1 den folgenden Bedingungen genügen:

$$\begin{aligned} f_1(t,y,u_1,p) - f_1(t,x,u_2,p) &\geq 0, \\ f_1(t,x,u_1,-p) - f_1(t,y,u_2,-p) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

für $-l \leq x \leq y \leq l,\ -M \leq u_1 \leq u_2 \leq M,\ p \geq 0,$

$$\begin{aligned} f_1(t,x,u_1,p_1) - g_1(t,l,u_2,p_2) &\geq 0, \\ f_1(t,x,u_1,-p_1) - g_1(t,-l,u_2,-p_2) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

für $-l \leq x \leq l,\ -M \leq u_1 \leq u_2 \leq M,\ q_0 \leq p_1 \leq p_2$, und schließlich

$$\begin{aligned} g_1(t,l,u_1,-p_1) - f_1(t,x,u_2,-p_2) &\geq 0, \\ g_1(t,-l,u_1,p_1) - f_1(t,x,u_2,p_2) &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.43}$$

für $-l \leq x \leq l,\ -M \leq u_1 \leq u_2 \leq M,\ q_0 \leq p_2 \leq p_1.$

Unter diesen zusätzlichen Bedingungen kann man die folgende Aussage beweisen.

Theorem 4.3. *Sei u eine klassische Lösung von* (4.39), (4.40), (3) *und die Bedingungen* (4.1)–(4.9) *sowie* (4.41)–(4.43) *seien erfüllt. Dann gibt es eine Konstante c wie in* (4.10)*, so dass*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u_x| \leq c.$$

Beweis. Der Beweis ist bis auf geringfügige Änderungen identisch mit dem Beweis des Theorems 4.1. Wir zeigen es exemplarisch an folgenden zwei Rechnungen. Falls wir die Gleichung (1) durch die Gleichung (4.39) ersetzen und dem Beweis des Theorems 4.1 bis zu Ungleichung (4.23) folgen, so erhalten wir statt dieser Ungleichung die Ungleichung

$$\begin{aligned} [-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + re^{-t}]|_{(t,x,y)\in\overline{P}_T\setminus\Gamma P_T} \\ \geq f_1(t,y,u,-v_y) - f_1(t,x,u,v_x). \end{aligned} \tag{4.44}$$

Falls $\widetilde{w}$ ein positives Maximum in $(t_0,l,y_0) \in \overline{P}_T \setminus \Gamma P_T$ annimmt, dann gilt (vgl. (4.25))

$$v_x(t_0,l,y_0) = -v_y(t_0,l,y_0).$$

So folgt aus (4.44) und (4.41), dass

$$[-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,x)\widetilde{w}_{xx} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + re^{-t}]|_{(t_0,x_0,y_0)} \geq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu der Ungleichung (4.27), die genauso wie im Beweis von Theorem 4.1 hergeleitet werden kann.

Wir folgen weiter dem Beweis des Theorems 4.1 und betrachten $\widetilde{w}$ auf S_2P_T. Ersetzen wir f durch $f + f_1$ und g durch $g + g_1$, so erhalten wir anstelle der Ungleichung (4.29) zunächst die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
(-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + r_2 e^{-t} + r_1 e^{-t})_{|(t,l,y)\in S_2P_T} \\
\geq e^{-t}[f_1(t,y,u(t,y),-v_y(t,l,y)) - g_1(t,l,u(t,y),-v_y(t,l,y))].
\end{aligned}
\tag{4.45}
$$

Nimmt man nun an, dass $\widetilde{w}$ in $(t_0, l, y_0) \in S_2P_T$ ein positives Maximum annimmt, so kann man überlegen (vgl. (4.30), (4.31)), dass

$$v_x(t_0,l,y_0) \geq -v_y(t_0,l,y_0) \geq q_0.$$

Somit folgt aus (4.42) und (4.45), dass

$$(-\widetilde{w}_t - \widetilde{w} + A(t,y)\widetilde{w}_{yy} + r_2 e^{-t} + r_1 e^{-t})_{|(t_0,l,y_0)\in S_2P_T} \geq 0,$$

was der Ungleichung (4.32) widerspricht.

Die restlichen Überlegungen im Beweis des Theorems 4.1 bleiben entweder unverändert oder können auf die gleiche Art und Weise wie oben angepasst werden. □

Bemerkung 4.4. a) *Die Bedingungen* (4.42), (4.43) *sind vor allem aus dem mathematischen Grund gestellt worden, dass die in dem Beweis von Theorem 4.1 verwendete Methode der Verdoppelung der Variable auch für rechte Seiten wie in* (4.39) *und* (4.40) *angewendet werden kann. Allerdings kann man diese Bedingungen anhand des in der Einführung vorgestellten Modells des Wärmeaustausches auch folgendermaßen physikalisch interpretieren: Das Explodieren des Temperaturgradienten auf dem Rand des betrachteten Gebietes ist nicht möglich, falls die Differenz zwischen den internen und externen Wärmequellen $f_1 - g_1$ die Temperaturen im Inneren und auf dem Rande des Gebietes angleicht.*

b) *Man beachte, dass, mit $f_1 = g_1 = 0$, die Bedingungen* (4.41)–(4.43) *erfüllt sind. Deshalb, und weil f und g nur die Bedingungen des Theorems 4.1 erfüllen müssen, um der Voraussetzungen des Theorems 4.3 zu genügen, ist dieses Theorem offensichtlich eine Verallgemeinerung des Theorems 4.1.*

4.1.3. ***Dynamische Randbedingungen kombiniert mit klassischen Randbedingungen.*** In [36] wurde die Gradientenabschätzung für klassische Lösungen von (1) unter einer der Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
u_x(t,-l) &= u_x(t,l) = 0, \\
u(t,-l) &= u(t,l) = 0, \\
u_x(t,-l) + \sigma_1(t,-l,u) &= u_x(t,l) + \sigma_1(t,l,u) = 0
\end{aligned}
\tag{4.46}
$$

und mit Anfangsbedingung (3) durchgeführt (vgl. [36, Lemma 1-Lemma 3]). Eine Analyse der Beweise dieser Lemmata und des Theorems 4.1 zeigt, dass wir unter den gleichen Voraussetzungen wie in Theorem 4.1 die a-priori Abschätzungen für $\max|u_x|$ auch dann erhalten können, wenn wir die Randbedingungen (4.46) mit den dynamischen Randbedingungen (2) kombinieren, genauer, wenn die Funktion u die Gleichungen (1), (3) löst und an einem Ende des Intervalls $[-l,l]$ die dynamische Randbedingung (2) und an dem anderen Ende eine der Randbedingungen in (4.46) erfüllt. Als Beispiel formulieren wir dieses Resultat für die folgende Konstellation: u erfüllt für $x = -l$ die dynamische Randbedingung

$$u_t - b(t, -l, u, u_x)u_x = g(t, -l, u, u_x), \quad t \in (0, T), \tag{4.47}$$

und für $x = l$ die homogene Dirichlet-Randbedingung

$$u(t, l) = 0, \quad t \in (0, T). \tag{4.48}$$

Theorem 4.5. *Sei u eine klassische Lösung von* (1), (4.47), (4.48), (3). *Ferner seien die Bedingungen* (4.1)–(4.5), (4.7) *und* (4.9) *erfüllt. Dann gibt es eine Konstante c wie in* (4.10)*, so dass*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u_x| \le c.$$

Beweis. Der Beweis unterscheidet sich vom Beweis des Theorems 4.1 nur in der Betrachtung von $\widetilde{w}$ bzw. $\widetilde{w}_1$ auf $S_2 P_T$. Man muss zeigen, dass $\widetilde{w}$ bzw. $\widetilde{w}_1$ kein positives Maximum auf $S_2 P_T$ annehmen können. Dies kann genauso wie in [36, Lemma 3] durchgeführt werden. □

Bemerkung 4.6. *Theorem 4.11 ist besonders im Hinblick auf das in* [10, Proposition 2.14] *bewiesene Blow-up Resultat interessant. Die Autoren betrachten das Problem*

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \psi(u_x), && t > 0,\ 0 < x < l, \\ u(t, 0) &= 0, && t \ge 0, \\ u_t(t, l) + u_x(t, l) &= 0, && t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), && t \ge 0, \end{aligned} \tag{4.49}$$

das einen Spezialfall von (1), (4.47), (4.48), (3) *darstellt, und beweisen, dass, falls $\psi \in C^2(\mathbb{R}, (0, \infty))$ mit*

$$\liminf_{s \to \infty} \psi(s) > 0$$

die Bedingung (4.38) *verletzt, es dann ein $l > 0$ gibt, so dass für jedes $u_0 \in C^2([0, l])$ mit $u_0(0) = 0$ jede klassische Lösung von* (4.49) *eine Singularität des Gradienten in endlicher Zeit entwickelt, auch wenn die Lösung selbst beschränkt bleibt (vgl. auch* [10, Remark 2.15]*).*

Man beachte, dass für das Problem (4.49) *die Voraussetzungen* (4.2), (4.6)–(4.9) *erfüllt sind. Falls nun die Funktion ψ die Bedingung* (4.38) *erfüllt, dann ist für jede beschränkte klassische Lösung u von* (4.49) *auch die Bedingung* (4.4) *für jedes $q_0 > 0$ erfüllt. Ist somit u eine beschränkte Lösung von* (4.49) *mit einem beliebigen Lipschitz-stetigen Anfangswert u_0, dann kann $|u_x|$ laut Theorem 4.5 nicht in endlicher Zeit explodieren, d.h. in dieser Konstellation ist das oben geschilderte Phänomen eines reinen Gradienten-Blow-up ausgeschlossen. Theorem 4.5 verschärft also die Aussage in* [10] *in folgender Weise: Ist (unter der Voraussetzungen von* [10, Proposition 2.14]*) u die Lösung des Problems* (4.49) *auf $[0, t^+) \times [-l, l]$, so dass $\sup_{\Omega_t} |u_x| \to \infty$, wenn $t \to t^+$, und gleichzeitig $\sup_{\Omega_{t^+}} |u| < M$, so* *folgt, dass*

$$M > \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)}.$$

4.2. **A-priori Abschätzung für $\langle u_x\rangle^{(\frac{\delta}{2},\delta)}$.** Wie man aus Theorem 3.2 sieht, ist die a-priori Abschätzung einer geeigneten Höldernorm des Gradienten der letzte entscheidende Schritt im Beweis der Existenz einer globalen klassischen Lösung von (1), (2a), (3). In Theorem 4.8 zeigen wir die Existenz einer solchen Abschätzung für das allgemeine Problem (1), (2), (3). Es stellt sich dabei heraus, dass für diese Abschätzung die Voraussetzungen des Theorems 4.1 fast ausreichend sind. Um das zu zeigen, benötigen wir das folgende Resultat aus [25] über die Hölderregularität von Lösungen der eindimensionalen quasilinearen parabolischen Gleichungen vom Typ (1).

Theorem 4.7. *Seien a sowie f stetig in jeder Variable und $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega}_T)$ eine klassische Lösung von* (1) *mit*

$$M := \max_{\overline{\Omega}_T} |u|$$

und

$$M_1 := \max_{\overline{\Omega}_T} |u_x|.$$

Ferner gelte für positive Zahlen ν und μ, dass

$$\nu \le a(t,x,z,p) \le \mu, \quad (t,x,z,p) \in \overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times [-M_1,M_1], \tag{4.50}$$

und

$$|f(t,x,z,p)| \le \mu, \quad (t,x,z,p) \in \overline{\Omega}_T \times [-M,M] \times [-M_1,M_1]. \tag{4.51}$$

Außerdem sei $u(0,\cdot) \in C^{1+\alpha}(\Omega)$ für ein $\alpha > 0$ und $u(\cdot,\pm l) \in C^1\big((0,T)\big)$. Dann gibt es

$$\delta = \delta(\nu,\mu,M_1,\alpha) \in (0,1)$$

und eine positive Konstante

$$c = c(\nu,\mu,M_1,\langle u_x(0,\cdot)\rangle_\Omega^\alpha, \alpha, \max_{t\in[0,T]} |u_t(t,\pm l)|)$$

so, dass

$$\langle u_x\rangle_{\Omega_T}^{(\frac{\delta}{2},\delta)} \le c. \tag{4.52}$$

Beweis. Diese Aussage ist ein Teil von [25, Kap. VI, Theorems 5.1]. □

Mit Hilfe dieses Theorem kann man leicht die folgende Aussage beweisen.

Theorem 4.8. *Seien a, f sowie b, g stetige Funktionen auf $\overline{\Omega}_T \times \mathbb{R}^2$ bzw. auf $\overline{S}_T \times \mathbb{R}^2$ und $u \in C^{1,2}(\overline{\Omega}_T)$ eine klassische Lösung von* (1), (2), (3). *Ferner seien alle Voraussetzungen des Theorems 4.1 erfüllt. Dann gibt es ein*

$$\delta = \delta(M,\alpha,a,f,b,g) \in (0,1)$$

und eine positive Zahl

$$c = c(M,l,\psi,K,\langle u_x(0,\cdot)\rangle_\Omega^\alpha, \alpha, a, f, b, g),$$

so dass

$$\langle u_x \rangle_{\Omega_T}^{(\frac{\delta}{2},\delta)} \leq c. \tag{4.53}$$

Beweis. Da alle Voraussetzungen des Theorems 4.1 erfüllt sind, gibt es eine positive endliche Zahl

$$M_1 = M_1(M, l, \psi, K), \tag{4.54}$$

mit

$$M_1 := \max_{\overline{\Omega}_T} |u_x|.$$

Die Funktionen a und f sind laut Voraussetzung stetig und durch die Bedingung (4.2) ist $a > 0$. Deshalb müssen a und $|f|$ auf jedem Kompaktum ihr positives Minimum und Maximum annehmen. Wir setzen

$$\nu := \min a(t, x, z, p), \quad \mu_1 := \max a(t, x, z, p), \quad \mu_2 := \max |f(t, x, z, p)|$$

für $(t, x, z, p) \in \overline{\Omega}_T \times [-M, M] \times [-M_1, M_1]$ und

$$\mu := \max\{\mu_1, \mu_2\}.$$

Dann erfüllen ν und μ die Bedingungen (4.50) bzw. (4.51). Wegen der Randbedingung (2) haben wir außerdem, dass

$$\max_{[0,T]} |u_t(\cdot, \pm l)| \leq \max(|b(t, \pm l, z, p)||p| + |g(t, \pm l, z, p)|),$$

wobei das Maximum auf der rechten Seite für $(t, z, p) \in [0, T] \times [-M, M] \times [-M_1, M_1]$ gebildet wird, d.h. es gibt ein $c_1 = c_1(M, M_1, b, g)$ mit

$$\max_{[0,T]} |u_t(\cdot, \pm l)| \leq c_1.$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Theorem 4.7. $\square$

4.3. **A-priori Abschätzung für** $\max |u|$**.** In vorigen Abschnitten dieses Kapitels haben wir die a-priori Abschätzungen für $|u_x|_{0,\Omega_T}$ und $\langle u \rangle_{\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2},\alpha)}$ einer Lösung u von (1), (2), (3) unter dem Vorbehalt durchgeführt, dass wir $|u|_{0,\Omega_T}$ bereits kennen. Aus diesen Abschätzungen zusammen mit Theorem 3.2 folgt die Existenz einer globalen Lösung für (1), (2a), (3) (vgl. Theorem 4.8). Bevor wir die Behauptung präzise formulieren, möchten wir als Beispiel zeigen, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen man eine a-priori Schranke für $|u|_{0,\Omega_T}$ für eine Lösung u von (1), (2a), (3) bestimmen kann.

Wir nehmen an, dass f und g den folgenden Wachstumsbedingungen genügen: Es gibt positive Zahlen B_1, B_2, B_3 und B_4, so dass

$$uf(t, x, u, 0) \leq B_1 u^2 + B_2 \quad \text{für } (t, x, u) \in \Omega_T \times \mathbb{R} \tag{4.55}$$

und

$$ug(t, x, u) \leq B_3 u^2 + B_4 \quad \text{für } (t, x, u) \in \Omega_T \times \mathbb{R}. \tag{4.56}$$

Ferner fordern wir, dass

$$a(t, x, u, 0) \geq 0 \quad \text{für } (t, x, u) \in \Omega_T \times \mathbb{R} \tag{4.57}$$

und

$$\pm b(t, \pm l, u) \geq 0 \quad \text{für } (t, u) \in (0, T) \times \mathbb{R}. \tag{4.58}$$

Theorem 4.9. *Sei u eine klassische Lösung von* (1), (2a), (3). *Ferner seien die Bedingungen* (4.55)–(4.58) *erfüllt. Dann ist*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u| \leq M, \tag{4.59}$$

mit

$$M := \inf_{\lambda > \max\{B_1, B_3\}} e^{\lambda T} \max \Big\{ \max_{[-l,l]} |u_0|, \sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}}, \sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \Big\}. \tag{4.60}$$

Beweis. Für ein $\lambda > \max\{B_1, B_3\}$ betrachten wir auf $\overline{\Omega}_T$ die Hilfsfunktion

$$v(t, x) := u(t, x) e^{-\lambda t}. \tag{4.61}$$

Da u und daher auch v stetig auf $\overline{\Omega}_T$ ist, muss v in einem Punkt $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega}_T$ das Maximum annehmen. Bezeichne

$$\Gamma\Omega_T := \{0\} \times [-l, l] \cup S_T$$

den parabolische Rand von Ω_T. Es sind die folgenden Fälle möglich:

Fall 1: $v(t_0, x_0) \leq 0$, d.h. insbesondere, dass v in keinem Punkt von $\overline{\Omega}_T$ einen positiven Wert annimmt.

Fall 2: $v(t_0, x_0) > 0$ und $(t_0, x_0) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma\Omega_T$, d.h. v nimmt ein positives Maximum an, und zwar nicht auf dem parabolischen Rand von Ω_T.

Fall 3: $v(t_0, x_0) > 0$ und $(t_0, x_0) \in \Gamma\Omega_T$, d.h. v nimmt ein positives Maximum auf dem parabolischen Rand von Ω_T an.

Da wir die Funktion v zunächst von oben abschätzen wollen, müssen wir den ersten Fall nicht weiter betrachten, also betrachten wir gleich den zweiten. Da in diesem Fall (t_0, x_0) nicht auf dem parabolischen Rand liegt, muss in diesem Punkt neben $v(t_0, x_0) > 0$ gelten, dass

$$v_x(t_0, x_0) = 0, \quad v_{xx}(t_0, x_0) \leq 0 \quad \text{und} \quad v_t(t_0, x_0) \geq 0. \tag{4.62}$$

Ferner, da $u = ve^{\lambda t}$, folgt aus (1), dass

$$v_t e^{\lambda t_0} + \lambda v e^{\lambda t_0} - a(t_0, x_0, ve^{\lambda t_0}, 0) v_{xx} e^{\lambda t_0} = f(t_0, x_0, ve^{\lambda t_0}, 0). \tag{4.63}$$

Aus (4.62) und (4.57) folgt, dass

$$v_t(t_0, x_0) e^{\lambda t_0} \geq 0 \quad \text{und} \quad - a(t_0, x_0, ve^{\lambda t_0}, 0) v_{xx} e^{\lambda t_0} \geq 0. \tag{4.64}$$

Somit folgern wir zunächst aus (4.63), dass

$$\lambda v e^{\lambda t_0} \leq f(t_0, x_0, ve^{\lambda t_0}, 0).$$

Daher ist mit (4.55), und weil per Annahme $v(t_0, x_0) > 0$, auch

$$\lambda v^2(t_0, x_0) e^{2\lambda t_0} \leq f(t_0, x_0, ve^{\lambda t_0}, 0) v(t_0, x_0) e^{\lambda t_0} \leq B_1 v^2(t_0, x_0) e^{2\lambda t_0} + B_2$$

und somit

$$v(t_0, x_0) \leq e^{-\lambda t_0} \sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}} \quad \text{für jedes} \quad \lambda > B_1. \tag{4.65}$$

Im dritten Fall, d.h. falls $(t_0, x_0) \in \Gamma\Omega_T$, gibt es zwei Möglichkeiten. Falls $t_0 = 0$ ist, ist

$$v(t_0, x_0) = u(0, x_0) \leq \max_{[-l,l]} |u_0| \tag{4.66}$$

und falls $t_0 \neq 0$, dann ist $(t_0, x_0) \in S_T = (0, T) \times \{\pm l\}$. In diesem Fall können wir auf die Randbedingung (2a) zurückgreifen. Sei zunächst $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \{l\}$. Wegen (4.58) und weil in (t_0, x_0) das positive Maximum angenommen wird, gilt

$$v(t_0, l) = 0, \quad v_t(t_0, l) \leq 0 \quad \text{und} \quad b(t_0, l, ve^{\lambda t_0}) v_x(t_0, l) \geq 0.$$

Daraus folgt zusammen mit der Randbedingung (2a), dass

$$\begin{aligned} \lambda v(t_0, l) e^{\lambda t_0} &\leq v_t(t_0, l) e^{\lambda t_0} + \lambda v(t_0, l) e^{\lambda t_0} + b(t_0, l, ve^{\lambda t_0}) v_x(t_0, l) \\ &= g(t_0, l, ve^{\lambda t_0}). \end{aligned}$$

Folglich erhalten wir mit (4.56), dass

$$\lambda v^2(t_0, l) e^{2\lambda t_0} \leq g(t_0, l, ve^{\lambda t_0}) v(t_0, l) e^{\lambda t_0} \leq B_3 v^2(t_0, l) e^{2\lambda t_0} + B_4.$$

Den Fall $(t_0, x_0) \in (0, T) \times \{-l\}$ behandeln wir analog und schließen, dass falls $(t_0, x_0) \in S_T$, dann ist

$$v(t_0, x_0) \leq e^{-\lambda t_0} \sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \quad \text{für jedes} \quad \lambda > B_3. \tag{4.67}$$

Insgesamt folgt aus (4.65), (4.66) und (4.67), dass

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v \leq \max \left\{ \max_{[-l,l]} |u_0|, \sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}}, \sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \right\}.$$

Durch analoge Betrachtungen von $\min v$ auf $\overline{\Omega}_T$ schließt man, dass

$$\min_{\overline{\Omega}_T} v \leq \min \left\{ -\max_{[-l,l]} |u_0|, -\sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}}, -\sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \right\}$$

und folglich

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |v| \leq \max \left\{ \max_{[-l,l]} |u_0|, \sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}}, \sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \right\}.$$

So folgt aus (4.61), dass

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u| \leq \max_{t \in (0,T)} e^{\lambda t} \max_{\overline{\Omega}_T} |v| \leq e^{\lambda T} \max \left\{ \max_{[-l,l]} |u_0|, \sqrt{\frac{B_2}{\lambda - B_1}}, \sqrt{\frac{B_4}{\lambda - B_3}} \right\}.$$

Diese Ungleichung gilt offensichtlich für jedes $\lambda > \max\{B_1, B_3\}$. Daraus folgt unmittelbar die Behauptung. $\square$

4.4. **Globale Existenz.** Nun können wir die vorangegangenen Ergebnisse zusammenfassen.

Theorem 4.10.
1. Seien die Funktionen a, f, b und g so gegeben, dass sie die Voraussetzungen (3.1)–(3.4) *erfüllen.*

2. a) Es gebe eine Konstante $M > 0$, so dass für jedes $\tau \in (0, T)$ und für jede Lösung u von (1), (2a), (3) *in Ω_τ die Ungleichung $\max\limits_{\overline{\Omega}_\tau} |u| \leq M$ gilt*

oder

b) es seien die Bedingungen (4.55)–(4.56) *erfüllt.*

3. Es gebe Funktionen $u_0 \in C^{2+\alpha}([-l, l])$ und $\psi \in C^1([0, 1))$ mit $\psi \geq 1$ so, dass a, f und ψ die Bedingungen (4.4)–(4.5) *erfüllen mit $K := \max\limits_{[-l,l]} |u_{0_x}|$ und mit der Konstante M, die entweder durch die Bedingung 2 a) oder im Falle der Bedingung 2 b) durch* (4.60) *bestimmt ist. Ferner seien für die Funktionen b und g die Bedingungen* (4.6)–(4.9) *erfüllt.*

4. Für die Funktionen a, f, b, g und u_0 sei die Kompatibilitätsbedingung (3.5) *erfüllt.*

Dann gibt es eine globale klassische Lösung u des Problems (1), (2a), (3) *in Ω_T mit $u \in C^{1+\frac{\beta}{2}, 2+\beta}(\Omega_T)$ für ein $\beta \in (0, 1)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Theoremen 3.2, 4.8 und 4.9. □

Bemerkung 4.11. *Man beachte, dass aus den Bedingungen* (4.4)–(4.5) *und* (4.55)–(4.56) *eine untere Schranke für die maximale Existenzzeit der Lösung bestimmt werden kann. Gilt z.B. $g = f(t, x, u, 0) = 0$, so folgt aus* (4.59)–(4.60)*, dass für eine Lösung von* (1), (2a), (3) *in Ω_T a-priori die Gleichung*

$$\max_{\overline{\Omega}_T} |u| = \max_{\overline{\Omega}} |u_0|,$$

gilt, solange die Bedingungen (4.57) *und* (4.58) *erfüllt sind. Genügt dann f der Bedingung* (4.5) *und*

$$\int_{q_0}^{\infty} \frac{\rho \, \mathrm{d}\rho}{\psi(\rho)} > 2 \max_{\Omega} |u_0|, \tag{4.68}$$

dann gibt es laut Theorem 4.10 eine klassische Lösung von (1), (2a), (3) *für jedes $T > 0$ (vorausgesetzt, T erfüllt die restlichen Bedingungen). Unter den gleichen Bedingungen und falls ψ statt* (4.68) *der stärkeren Bedingung* (4.38) *genügt, gibt es sogar zu jedem Anfangswert $u_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ eine Lösung für jedes solche $T > 0$.*

Zum Schluss möchten wir noch bemerken, dass unter der verwendeten Methode der Verdoppelung der Variable die a-priori Abschätzungen des Gradienten auch für allgemeinere Gleichungen als (1) gemacht werden können. In [36] wird anstelle von (1) die Gleichung

$$u_t = F(t, x, u, u_x, u_{xx}) \tag{4.69}$$

betrachtet. In Kombination mit homogenen Dirichlet-, homogenen Neumann- und gemischten Randbedingungen (vgl. (4.46)) beweisen die Autoren eine globale Abschätzung des Gradienten. Vorausgesetzt ist dabei die stetige Differenzierbarkeit der Funktion F in der letzten Variablen mit $\partial_5 F > 0$, so dass (4.69) in der Form

$$u_t = \partial_5 F(t, x, u, u_x, \lambda u_{xx}) u_{xx} + F(t, x, u, u_x, 0)$$

für ein $\lambda \in [0, 1]$ geschrieben werden kann. Entsprechende Wachstumsbedingungen werden an die Funktion $F(t, x, u, u_x, 0)$ gestellt. Da auch dieser Beweis derart geführt ist, dass der Gradient im Inneren und auf dem Rande gewissermaßen separat abgeschätzt wird, können wir die Gleichung (4.69) komplementiert mit den dynamischen Randbedingungen (4.6)–(4.9) zulassen, und wir erhalten ein zu Theorem 4.1 analoges Resultat. Auf diese allgemeinere Formulierung haben wir allerdings verzichtet, um den Beweis nicht zu überladen.

LITERATUR

[1] H. Amann. *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems*. Function spaces, differential operators and nonlinear analysis (Friedrichroda, 1992), 9-126, Teubner-Texte Math., 133, Teubner, Stuttgart, 1993.

[2] H. Amann, J. Escher. *Analysis. III.* (German) Grundstudium Mathematik [Basic Study of Mathematics], Birkhäuser Verlag, Basel, 2001.

[3] B. V. Bazaliy, N. Vasylyeva. *On the solvability of a transmission problem for the Laplace operator with a dynamic boundary condition on a nonregular interface*. J. Math. Anal. Appl. **393** (2012), no. 2, 651-670.

[4] B. V. Bazaliy, S. P. Degtyarev. *On the classical solvability of a multidimensional Stefan problem with convective movement of a viscous incompressible fluid.* Mat. Sb. (N.S.) **132**(174) (1987), no. 1, 3-19, 142 (Russian); translation in Math. USSR-Sb. **60** (1988), no. 1, 1-17.

[5] J. von Below, C. De Coster. *A qualitative theory for parabolic problems under dynamical boundary conditions*. J. Inequal. Appl. **5** (2000), no. 5, 467-486.

[6] J. von Below, G.P. Mailly. *Blow up for some nonlinear parabolic problems with convection under dynamical boundary conditions*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 2007, Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, suppl., 1031-1041.

[7] S. N. Bernstein. *On the equations of calculus of variation*. Sobr. soch. M.: Izd-vo AN SSSR **3** (1960), 191-242 (Russian).

[8] G. I. Bizhanova, V. A. Solonnikov. *On the solvability of an initial-boundary value problem for a second-order parabolic equation with a time derivative in the boundary condition in a weighted Hölder space of functions*. Algebra i Analiz **5** (1993), no. 1, 109-142 (Russian); translation in: St. Petersburg Math. J. **5** (1994), no. 1, 97-124.

[9] G. I. Bizhanova, V. A. Solonnikov. *Some model problems for second-order parabolic equations with a time derivative in the boundary conditions*. Algebra i Analiz 6 (1994), no. 6, 30-50 (Russian); translation in St. Petersburg Math. J. **6** (1995), no. 6, 1151-1166.

[10] A. Constantin, J. Escher. *Global existence for fully parabolic boundary value problems*. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **13** (2006), no. 1, 91-118.

[11] C. M. Elliott, Y. Giga, S. Goto. *Dynamic boundary conditions for Hamilton-Jacobi equations*. SIAM J. Math. Anal. **34** (2003), no. 4, 861-881 (electronic).

[12] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi. *Tables of integral transforms*. Vol. I. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1954.

[13] J. Escher. *Über quasilineare parabolische Probleme*. Dissertation. Universität Zürich, Zenstralstelle der Studentenschaft, Zürich, 1991.

[14] J. Escher. *Global existence and nonexistence for semilinear parabolic systems with nonlinear boundary conditions*. Math. Ann. **284** (1989), no. 2, 285-305.

[15] J. Escher. *Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions*. Comm. Partial Differential Equations **18** (1993), no. 7-8, 1309-1364.

[16] L. C. Evans. *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathematics, **19**. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[17] M. Fila, K. Ishige, T. Kawakami. *Convergence to the Poisson kernel for the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition*. Commun. Pure Appl. Anal. **11** (2012), no. 3, 1285-1301.

[18] M. Fila, P. Quittner. *Global solutions of the Laplace equation with a nonlinear dynamical boundary condition*. Math. Methods Appl. Sci. **20** (1997), no. 15, 1325-1333.

[19] M. Fila, P. Quittner. *Large time behavior of solutions of a semilinear parabolic equation with a nonlinear dynamical boundary condition*. Topics in nonlinear analysis, 251-272, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **35**, Birkhäuser, Basel, 1999.

[20] C. G. Gal. *On a class of degenerate parabolic equations with dynamic boundary conditions*. J. Differential Equations 253 (2012), no. 1, 126-166.

[21] D. Gilbarg, N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[22] G. R. Goldstein. *Derivation and physical interpretation of general boundary conditions*. Adv. Differential Equations **11** (2006), no. 4, 457-480.

[23] T. Hintermann. *Evolutionsgleichungen mit dynamischen Randbedingungen*. Dissertation. Universität Zürich, Zenstralstelle der Studentenschaft, Zürich, 1988.

[24] O. A. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'ceva. *Linear and quasilinear elliptic equations*. Vol. **23** Academic Press, New York-London, 1968.

[25] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'ceva. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Vol. **23** American Mathematical Society, Providence, R.I. 1967.

[26] G. M. Lieberman. *Second order parabolic differential equations*. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.

[27] N. V. Krylov. *Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces*. Graduate Studies in Mathematics, 12. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[28] S. N. Kruzkov. *Nonlinear parabolic equations with two independent variables*. Trudy Moskov. Mat. Obsc. **16** (1967) 329-346 (Russian).

[29] M. Meyries. *Maximal Regularity in Weighted Spaces, Nonlinear Boundary Conditions, and Global Attractors*. Dissertation. Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe, 2010.

[30] M. Nagumo. *über die Differentialgleichung* $y'' = f(x, y, y')$. Proc. Phys-Math. Soc. Japan, **19** (1937) 861-866.

[31] J. Petersson. *A note on quenching for parabolic equations with dynamic boundary conditions*. Nonlinear Anal. **58** (2004), no. 3-4, 417-423.

[32] P. Quittner, P. Souplet. *Superlinear parabolic problems. Blow-up, global existence and steady states*. Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[33] S. I. Temirbulatov. *The problem of heat conduction with a derivative with respect to time in the boundary condition*. Differentsial'nye Uravneniya **19** (1983), no. 4, 666-673 (Russian).

[34] Ar. S. Tersenov. *On the solvability of some boundary value problems for a class of quasilinear parabolic equations*. Sibirsk. Mat. Zh. **40** (1999), no. 5, 1147-1156, iii-iv (Russian); translation in Siberian Math. J. **40** (1999), no. 5, 972-980.

[35] A. Tersenov, A. Tersenov. *Global solvability for a class of quasilinear parabolic problems*. Indiana Univ. Math. J. **50** (2001), no. 4, 1899-1913.

[36] A. Tersenov, A. Tersenov. *On the Bernstein-Nagumo's condition in the theory of nonlinear parabolic equations*. J. Reine Angew. Math. **572** (2004), 197-217.

[37] N. V. Vasylyeva. *The elliptic and parabolic boundary value problems with the time derivative in the boundary condition in a plane corner and their application to free boundary problems*. Dissertation. Institute of Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Science of Ukraine, Donetsk, 2002 (Russian).

[38] J. L. Vázquez, E. Vitillaro. *Heat equation with dynamical boundary conditions of reactive-diffusive type*. J. Differential Equations **250** (2011), no. 4, 2143-2161.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name:	Gvelesiani, Simon
Geburtstag:	26. April 1973

Beruflicher Werdegang

02/2008-02/2013	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am IfAM, LU Hannover
10/2006-11/2007	Wissenschaftliche Hilfskraft am Fachreferat für Mathematik und Informatik, TIB Hannover
2001-2006	Wissenschaftliche Hilfskraft an verschiedenen Instituten der LU Hannover

Ausbildung

Seit 2008	Assoziiertes Mitglied des Graduiertenkollegs 1463 „ *Analysis, Geometry and String Theory*“
10/2001-12/2007	Studium der Mathematik mit Nebenfach Volkswirtschaftslehre an der LU Hannover, Abschluss: Diplom
09/1991-08/1996	Studium des Wirtschaftsingenieurwesens an der staatlichen Universität Tiflis, Abschluss: Diplom

Auslandsaufenthalte

08/2012-10/2012	Forschunsaufenthalt in Donetsk an der Akademie der Wissenschaften der Ukraine.
03/2010-04/2010	Sprachaufenthalt in London.

Teilnahme an Konferenzen

09/2010	Summer School *Spectral Theory and PDE*, LU Hannover
05/2010	*The 8th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Dresden
05/2009	*International Conference Nonlinear Parabolic Problems: In honor of Herbert Amann*, Bedlewo, Polen.
09/2008	Summer School *Functional Analytic Methods in Partial Differential Equations*, LU Hannover