

Bewertung dreidimensionaler Rekonstruktionen durch stochastische Messdatenauswertung von Röntgenbildern bei eingeschränktem Aufnahmebereich

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informatik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieurin
(abgekürzt: Dr.-Ing.)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. (FH) Anja Frost

geboren am 4. Januar 1980
in Gehrden

2013

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörn Ostermann
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Bernardo Wagner
3. Referent: Prof. Dr.-Ing. Michael Hötter

Tag der Promotion: 18. Dezember 2013

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Hötter am Institut für Innovationstransfer der Fachhochschule Hannover im Rahmen eines Forschungsprojektes mit GE Sensing and Inspection Technologies (ehemals phoenix|x-ray aus Wunstorf).

Ich danke Herrn Prof. Dr.-Ing. Michael Hötter. Er hat mir nicht nur einen Arbeitsplatz zur Verfügung gestellt, sondern meine berufliche und persönliche Weiterentwicklung wesentlich gefördert. Für die Zusammenarbeit und das phantastische Arbeitsklima, dass er geschaffen hat, sowie für seinen ansteckenden Enthusiasmus für Signal- und Bildverarbeitung danke ich ihm herzlich. Die Jahre am Institut waren für mich eine glückliche Zeit.

Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörn Ostermann vom Institut für Informationsverarbeitung der Universität Hannover. Sein Wohlwollen hat mir den Weg zur Promotion eröffnet. Sein Fachwissen hat diese Dissertation bedeutend geprägt. Herrn Prof. Dr.-Ing. Bernardo Wagner gebührt Dank für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegengebracht hat, und für das Erstellen des Zweitgutachtens. Herrn Prof. Dr.-Ing. Bodo Rosenhahn danke ich für die Annahme des Promotionsvorsitzes.

Weiterhin danke ich meinen Kollegen vom Institut für Innovationstransfer, insbesondere Dr. Thorsten Ike für seine Hilfe bei meinen Veröffentlichungen, sowie den vielen ehemaligen Studentinnen und Studenten, die im Rahmen von Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten und ihrer Tätigkeit als studentische Hilfskräfte einen Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben.

Die Gespräche mit Dr. Alexander Suppes und Nils Rothe von GE Sensing and Inspection Technologies haben dafür gesorgt, dass meine Arbeit von praktischem Nutzen ist. Dafür schätze ich sie sehr.

Dr. Kai Cordes vom Institut für Informationsverarbeitung danke ich für seine hilfreichen Tipps.

Meinem lieben Daniel danke ich dafür, dass er immer für mich da ist.

Bremen, im Januar 2014

Anja Frost

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Physikalische Grundlagen zur Aufnahme eines Röntgenbildes	6
3	Rekonstruktionsverfahren	8
3.1	Einführung in die Algebraische Rekonstruktionstechnik	9
3.1.1	Das diskrete Abbildungsmodell	9
3.1.2	Aufstellung des Gleichungssystems	13
3.1.3	Lösung des Gleichungssystems mittels Algebraischer Rekonstruktions- techniken	14
3.2	Problematik unvollständiger Datensätze	24
3.3	Einbringen von a priori Wissen	25
4	Bewertung einer Rekonstruktion	31
4.1	Stand der Technik	31
4.2	Messdatengestützte Bewertung	33
4.2.1	Analyse der lokalen Kosten	35
4.2.2	Histogrammbasierte Analyse der Projektionsfehler	39
4.2.3	Herleitung eines stochastischen Gütemaßes	43
4.3	Rekonstruktionsverfahren unter Berücksichtigung eines Gütemaßes	70
4.3.1	Problem der klassischen Rekonstruktionsverfahren	70
4.3.2	Variation der Menge der Unbekannten	72
4.3.3	RegioSART	73
5	Experimentelle Untersuchungen	79
5.1	Beschreibung der verwendeten Aufnahmereihen	79
5.2	Alternative Methoden zur Bewertung	84
5.2.1	Differenz	84
5.2.2	Binarisierter Gradient	85
5.3	Untersuchungen zur Detektierbarkeit schlecht rekonstruierter Volumenbereiche	86
5.3.1	Subjektive Betrachtung der Bewertung	87
5.3.2	Quantitative Betrachtung der Bewertung	88

5.3.3	Stabilität eines festen Schwellenwertes	95
5.4	Untersuchungen der Bewertung bei Rauschen	97
5.4.1	Subjektive Betrachtung der Bewertung	97
5.4.2	Quantitative Betrachtung der Bewertung	105
5.4.3	Verifizierung anhand realer Aufnahmereihen	109
5.5	Einsatz der Bewertung in der RegioSART	111
5.5.1	Folgen einer Fehldetektion	111
5.5.2	Rekonstruktionsergebnisse der RegioSART	115
6	Zusammenfassung	128
	Literaturverzeichnis	132

Abkürzungen und Formelzeichen

a_n	Gütemaß Averatio im Voxel n
ART	<u>A</u> lgebraic <u>R</u> econstruction <u>T</u> echnique
b	Interpolationsfunktion zur Herleitung der Wichtungsfaktoren
$B(f)$	Frequenzspektrum der Interpolationsfunktion b
bin_n	Entscheidungsregel „Binarisierter Gradient“ im Voxel n
c	Zählindex für die a priori bekannten Materialien einer Aufnahmezene
CT	<u>C</u> omputertomografie
d	Zählindex für die a priori bekannten Materialien einer Aufnahmezene
DT	<u>D</u> iskrete <u>T</u> omografie
$D1$	A priori bekanntes Material, welches mit seinem Absorptionskoeffizienten m_{D1} dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n eines bestimmten Voxels n wertemäßig am nächsten liegt
$D2$	A priori bekanntes Material, welches mit seinem Absorptionskoeffizienten m_{D2} dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n eines bestimmten Voxels n gemäß Definition am „zweitnächsten“ liegt
dif_n	Betrag der Differenz zwischen dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n eines Voxels n und dem dazugehörigen Material-Absorptionskoeffizienten m_{D1}
dif'_n	Gütemaß „Differenz“ im Voxel n
$e_u(x_n = m_d)$	(Unnormierter) Projektionsfehler im Strahl u speziell nach Einsetzen des Absorptionskoeffizienten m_d an der Position des Voxels n
$e_{u,norm}(x_n = m_d)$	Auf den Wichtungsfaktor w_{nu} normierter Projektionsfehler $e_u(x_n = m_d)$ im Strahl u speziell nach Einsetzen des Absorptionskoeffizienten m_d an der Position des Voxels n
e_{norm}	Kurzschreibweise für $e_{u,norm}(x_n = m_d)$
$e_{norm} \approx 0$	Gemäß Definition Kurzschreibweise für $e_{u,norm}(x_n = m_d)$ „ausreichend nah bei Null“
E_{norm}	Normierter Projektionsfehler als kontinuierliche Zufallsvariable (wobei die Projektionsfehler $e_{u,norm}(x_n = m_d)$ der einzelnen Strahlen u als Realisierungen dieser Zufallsvariablen gelten)

$E_{u,norm}$	Normierter Projektionsfehler des Strahles u als kontinuierliche Zufallsvariable
f	Frequenz
f	tiefgestellt zur Bezeichnung der Geradengleichung g_f
F	Menge „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel in einem Volumen
g_f	Geradengleichung zur Herleitung der ART
g_u	Geradengleichung zur Herleitung der ART
$grad_n$	Gradientenbetrag in der $3 \times 3 \times 3$ er Nachbarschaft eines Voxels n in einem mittels Schwellwertverfahren diskretisierten Rekonstruktionsvolumen
h	Relative Häufigkeit
$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_d)$	Kurzschreibweise für die relative Häufigkeit für einen Projektionsfehler „ausreichend nah bei Null“ unter der Bedingung, dass der Absorptionskoeffizient m_d an der Position des Voxels n vorliegt
H	Ereignis, beispielhaft verwendet zur Einführung in die Evidenztheorie
i	Koordinate im Zweidimensionalen zur Herleitung der Wichtungsfaktoren
I_0	Intensität der Röntgenstrahlung beim Verlassen der Röntgenquelle
I_u	Intensität der Röntgenstrahlung an der Raumkoordinate u (im Detektorpixel u)
j	Koordinate im Zweidimensionalen zur Herleitung der Wichtungsfaktoren
J	Besselfunktion 1. Art, 2. Ordnung
k	Iterationszähler
K	Kantenlänge des Rekonstruktionsvolumens in Voxel
l	Variable zur Herleitung der ART
$L(v,s)$	Abstand zwischen Voxel v und Abtastpunkt s auf einem Strahl zur Herleitung der Wichtungsfaktoren
m_d	A priori bekannter Absorptionskoeffizient eines Materials d mit $d = 1 \dots M$ und $m_d < m_{d+1}$ für alle $d < M$
m_{D1}	Material-Absorptionskoeffizient, der dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n eines bestimmten Voxels n wertemäßig am nächsten liegt. Es gilt $m_{D1} \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$.
m_{D2}	Material-Absorptionskoeffizient, der dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n eines bestimmten Voxels n gemäß Definition am „zweitnächsten“ liegt. Es gilt $m_{D2} \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$.
$m_q(a_n)$	Absorptionskoeffizient des durch das Gütemaß Averatio an der Position des Voxels n ermittelten „wahrscheinlichsten“ Materials. Es gilt $m_q(a_n) \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$.

M	Anzahl der a priori bekannten Materialien, die in einer Aufnahmeszene vorkommen („Luft“ als Material mitgerechnet)
n	Ein Beispielvoxel
N	Anzahl der Messwerte pro Voxel
o	Ein Beispielvoxel
phm_n	Soll-Absorptionskoeffizient eines Voxels n (entspricht dem Phantomwert an der Position des Voxels)
$p(Z x_n = m_d)$	Wahrscheinlichkeitsdichte des mittleren, gewichteten, normierten Projektionsfehlers für den Fall, dass der Absorptionskoeffizient m_d an der Position des Voxels n vorliegt
$P(Z \approx 0 x_n = m_d)$	Kurzschreibweise für die Wahrscheinlichkeit für „ausreichend kleine Z “ unter der Bedingung, dass der Absorptionskoeffizient m_d an der Position des Voxels n vorliegt
$P(\xi_1 \Psi_0)$	Fehldetektionswahrscheinlichkeit
$P(\xi_1 \Psi_1)$	Detektionswahrscheinlichkeit
$PFRV$	<u>P</u> rozentsatz <u>F</u> ehlerhaft <u>R</u> ekonstruierter <u>V</u> oxel im Volumen
q	„Wahrscheinlichstes“ Material
r	Zählindex für die Röntgenbilder einer Aufnahmeszene
$r(i_t, j_t)$	Durch Interpolation rekonstruierter Absorptionskoeffizient an einem Abtastpunkt t mit den Koordinaten (i_t, j_t)
R	Anzahl der Röntgenbilder einer Aufnahmeszene
RegioSART	Iteratives, SART-verwandtes Rekonstruktionsverfahren
ROC	<u>R</u> eceiver <u>O</u> perating <u>C</u> haracteristic
ROI	<u>R</u> egion of <u>I</u> nterest
s	Raumkoordinate oder (je nach Interpretation) Abtastpunkt auf einem Röntgenstrahl
s_1, s_2	Beispielabtastpunkte auf einem Röntgenstrahl
S	Breite des Detektors in Pixel
SIRT	<u>S</u> imultaneous <u>I</u> terative <u>R</u> econstruction <u>T</u> echnique
SART	<u>S</u> imultaneous <u>A</u> lgebraic <u>R</u> econstruction <u>T</u> echnique
t_1, t_2	Zwei Schwellen zur Wertdiskretisierung eines Rekonstruktionsvolumens
t	Abtastpunkt auf einem Röntgenstrahl
T	Höhe des Detektors in Pixel
u	Ein Röntgenstrahl, gleichbedeutend mit dem Detektorpixel u in einem Röntgenbild, gleichbedeutend mit der Raumkoordinate des Detektorpixels
$U = R \cdot S \cdot T$	Anzahl der Messwerte
v	Ein Beispielvoxel
V	Anzahl der Voxel im Rekonstruktionsvolumen

w_{nu}	Wichtungsfaktor des Voxels n im Strahl u
x	Parameter einer zu minimierenden Kostenfunktion
x_n	Rekonstruierter Absorptionskoeffizient des Voxels n
$X(f)$	Frequenzspektrum des Rekonstruktionsvolumens
y_u	Messwert im Detektorpixel u
$Z(x_n = m_d)$	Mittlerer, gewichteter, normierter Projektionsfehler (speziell nach Einsetzen des Absorptionskoeffizienten m_d an der Position des Voxels n) als Zufallsvariable
$Z \approx 0$	Kurzschreibweise für Z „ausreichend nah bei Null“
α	Parameter zur Gewichtung der Kostenfunktionen in Φ_{gesamt}
β	Parameter zur Gewichtung der Kostenfunktionen in Φ_{gesamt}
Δv	Abstand zwischen zwei benachbarten Voxeln
$\Delta x_{nu}^{(k)}$	Korrekturterm bei der Rekonstruktion mit einem iterativen Rekonstruktionsverfahren, hier speziell für Voxel n und Strahl u in der k -ten Iteration
ε_u	„Ursprünglicher“ Projektionsfehler im Strahl u
Θ_r	Menge der Messwerte im r -ten Röntgenbild
λ	Relaxationsfaktor
Λ	Ausdehnung des Bessel-Kaiser-Filters im Ortsbereich
$\mu(s)$	Absorptionskoeffizient an der Koordinate s (in physikalischer Notation)
$\mu_{e_{norm}}$	Mittelwert der Häufigkeitsverteilung der normierten Projektionsfehler $e_{u,norm}$
$\mu_{E_{norm}}$	Mittelwert der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(E_{norm} x_n = m_d)$
$\sigma_{e_{norm}}^2$	Varianz der Häufigkeitsverteilung der normierten Projektionsfehler $e_{u,norm}$
$\sigma_{E_{norm}}^2$	Varianz der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(E_{norm} x_n = m_d)$
$\sigma_{E_{norm}}$	Standardabweichung der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(E_{norm} x_n = m_d)$
σ_Z^2	Varianz der Zufallsvariablen Z
σ_y	Durch Rauschen hervorgerufene Standardabweichung des Messwertes y_u
τ	Schwellenwert Binarisierung eines Gütemaßes
ξ_0	Entscheidung: Voxel ist „fehlerhaft“ rekonstruiert
ξ_1	Entscheidung: Voxel ist „originalgetreu“ rekonstruiert
Ψ_0	Ereignis: Voxel ist „fehlerhaft“ rekonstruiert
Ψ_1	Ereignis: Voxel ist „originalgetreu“ rekonstruiert
Φ_{mess}	Globale Kosten der Messdaten
$\Phi_{mess,n}$	Lokale Kosten der Messdaten in einem Voxel n
Φ_{prior}	Globale Kosten des a priori Wissens
$\Phi_{gesamt} = \alpha \cdot \Phi_{mess} + \beta \cdot \Phi_{prior}$	Gesamtkosten

Kurzfassung

Die Computertomografie findet zunehmend Verbreitung in industriellen Anwendungen. Ein Bauteil wird aus verschiedenen Richtungen (meist in einer 360°-Rotation) geröntgt. Aus den Röntgenbildern wird ein Rekonstruktionsvolumen berechnet, das das Bauteil dreidimensional abbildet, Einblick in innere Strukturen gewährt und Lunker oder kalte Lötstellen sichtbar macht. Mathematisch betrachtet entspricht die Berechnung des Rekonstruktionsvolumens der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wobei die Röntgenbilder die Gleichungen bilden und die Voxel des Volumens die Unbekannten. Blockiert ein Bauteil aufgrund seiner sperrigen Form die Rotationsbewegung im Computertomografen, fehlen Röntgenbilder aus bestimmten Richtungen. Der Winkelbereich, den die aufgenommenen Röntgenbilder aufspannen, ist eingeschränkt, das Gleichungssystem unterbestimmt. Die Rekonstruktion wird nur geschätzt, in manchen Bereichen des Volumens richtig, in anderen falsch.

In dieser Arbeit wird mit *Averatio* ein Gütemaß eingeführt, das die Rekonstruktionsqualität durch einen Zahlenwert ausdrückt, explizit für jedes Voxel im Volumen. Falsch rekonstruierte Voxel zeigen niedrige *Averatio*werte. In originalgetreu rekonstruierten Bereichen herrschen hohe *Averatio*werte vor. In der Herleitung basiert das Gütemaß auf a priori Wissen über die Materialien, aus denen ein Bauteil besteht, sowie auf einer stochastischen Auswertung der Röntgenaufnahmen. Receiver Operating Characteristics verschiedener Rekonstruktionen, die aus Röntgenbildern mit unterschiedlich stark eingeschränkten Winkelbereichen generiert wurden, bestätigen die Zuverlässigkeit des Gütemaßes *Averatio* und belegen, dass existierende Gütemaße schlechter geeignet sind um falsch rekonstruierte Bereiche im Volumen zu detektieren: Bei Einschränkung des Winkelbereiches zeigen diese eine Zunahme der Fehldetektionswahrscheinlichkeit. Dagegen liefert *Averatio* eine konstant niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit.

Mit Hilfe des Gütemaßes lassen sich Artefakte nicht nur erkennen, sondern auch korrigieren. Zu diesem Zweck wird ein iteratives Rekonstruktionsverfahren vorgestellt, welches imstande ist mit einer variierenden Menge an Unbekannten umzugehen. Voxel, die das geröntgte Bauteil originalgetreu abbilden, werden aus der Menge der Unbekannten entfernt. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Unbekannten. Im besten Fall wird das Gleichungssystem lösbar. Zur Detektion „originalgetreuer“ Voxel werden verschiedene Gütemaße getestet. *Averatio* erzielt dabei die beste Artefaktkorrektur: Umspannen die Röntgenbilder einen Winkelbereich von 150°, werden durchschnittlich 90% der Artefakte korrigiert.

Abstract

Nowadays, computed tomography (CT) is wide spread in industrial applications. As it generates a three-dimensional reconstruction of an object from series of X-ray images (normally measured in a 360° turn) inner structures such as casting defects or cold soldered connections become visible. The calculation of the reconstruction volume corresponds to the solution of a system of linear equations, in which the equations arise from the measured X-rays and the variables from the voxels in the volume. Unfortunately, some objects block the rotation of the CT scanner because of their bulky shape. Then, there are less X-ray images spanning a limited angle range. The system of equations is underdetermined. The reconstruction volume can only be estimated. For some voxels, this estimation is successful. But in places, the reconstruction volume is affected by artefacts.

This thesis introduces a novel method to evaluate any reconstruction voxel by voxel. The evaluation is based on a probabilistic handling of the measured X-rays, as well as the inclusion of a priori knowledge about the materials the object consists of. For each voxel, the proposed method outputs a numerical value, called *Averatio*, which represents the truth of the reconstruction at the position of the voxel. In good reconstructed areas, high *Averatio* values predominate. False reconstructed areas get detected by their low *Averatio*. Due to the probabilistic base, the *Averatio* value *is* a probability and therefore provides a uniform basis to validate any reconstruction. The experiments deal with different test objects made of several materials and x-rayed in a cone beam geometry with limited angle ranges that are typical for industrial applications. Receiver Operating Characteristics confirm the reliability of *Averatio* and demonstrate that existing quality measures are less suitable to detect artefacts: They show an increasing in false positive rate in case the angle range becomes reduced. With *Averatio* a low false positive rate is kept. Reducing the angle range just decreases the true positive rate. This is a right side failure.

Once artefacts are detected, it is possible to correct them. In this thesis, an iterative reconstruction algorithm is used that is able to deal with a varying number of variables. Voxels that are representing the object true to original get excluded from the system of equations. In so doing, the number of variables reduces. Ideally, the system gets solvable. To detect the „good“ i.e. excludable voxels, different quality measures are tested. Using *Averatio*, the best artefact correction is brought out. With an angle range of 150°, 90% of the „bad“ reconstructed voxels are corrected.

1 Einleitung

1895 entdeckte Wilhelm Conrad Röntgen bei Experimenten eine damals unbekannte Strahlung. Diese Strahlung durchdringt einige Materialien offensichtlich besser, andere schlechter, und macht – auf einem Leuchtschirm aufgenommen – verborgene innere Strukturen wie beispielsweise die Knochen einer Hand sichtbar. Die Nachricht von dieser neuen Aufnahmetechnik verbreitete sich bald in alle Welt und sorgte für großes Aufsehen [12]. Vor allem der medizinischen Diagnostik verhalf sie zu einem Durchbruch. Erstmals war es möglich, ohne Operation in Menschen hineinzublicken und einzelne Organe in Augenschein zu nehmen. Nur eine Tiefeninformation fehlt; Hintereinanderliegende Organe lassen sich auf einem Röntgenbild nicht trennen.

Der Übergang zur vollständigen räumlichen Darstellung gelang in den 1970er Jahren mit der Entwicklung der Computertomografie. Im Computer wird eine dreidimensionale „Rekonstruktion“ eines Körpers mit all seinen inneren Strukturen berechnet, wobei der Berechnung viele Röntgenbilder zugrunde liegen, die den Körper aus unterschiedlichen Richtungen zeigen. Üblicherweise wird für die Aufnahme der einzelnen Röntgenbilder die Anlage in kleinen Abständen gedreht, bis eine 360°-Rotation vollzogen ist (siehe Abbildung 1.1). Die Rekonstruktion erlaubt schließlich, einzelne Organe in ihrer Form und Lage zueinander genau zu erfassen und zu untersuchen, sogar Schnittbild für Schnittbild.

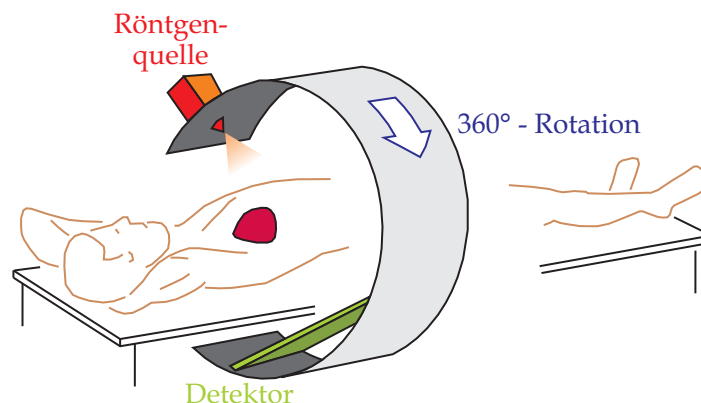


Abbildung 1.1: Prinzipieller Aufbau eines Computertomografen

Heute dient die Computertomografie nicht allein der medizinischen Diagnostik. In zunehmendem Maße findet sie Anwendung in der Qualitätssicherung bei der Fertigung und Wartung von

Bauteilen [13]. Sie gewährt (zerstörungsfrei) Einblick in das Innere von Gusseisenobjekten, bringt beispielsweise Risse, Lunker und Oxideinschlüsse zum Vorschein, macht kalte Lötstellen auf Platinen sichtbar, und eignet sich für genaue Vermessungen der Bauteilform. Doch gerade ein Einsatz in der Qualitätssicherung macht es erforderlich, den Rekonstruktionen, die berechnet wurden, vertrauen zu können. Originalgetreue Rekonstruktionen sind aber nur dann zu erwarten, wenn das Bauteil praktisch aus allen Richtungen geröntgt wurde. Das ist nicht immer realisierbar. Sperrige Bauteile lassen sich nicht beliebig zwischen Röntgenröhre und Detektor positionieren, und blockieren damit die 360° -Drehung, oder sind schlichtweg zu groß, um komplett auf den Detektor projiziert werden zu können. In diesen Fällen liegen zu wenige Messwerte vor. Die Rekonstruktion der Bauteile aus den Messwerten entspricht – mathematisch ausgedrückt – dem Versuch, ein unterbestimmtes Gleichungssystem zu lösen. Das Rekonstruktionsvolumen wird nur geschätzt, teils richtig, teils falsch. Die rekonstruierten Bauteile erscheinen stellenweise verzerrt (siehe Abbildung 1.2).

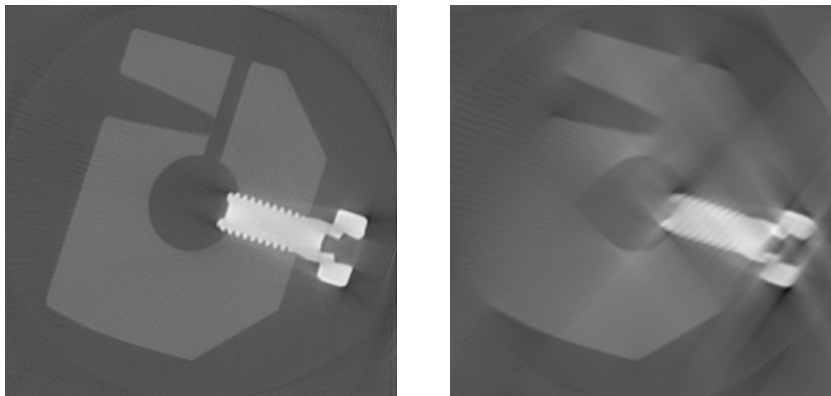


Abbildung 1.2: Schnittbilder durch die Rekonstruktionen eines Aluminiumwerkstückes mit eingelassener Schraube, generiert aus Röntgenbildern mit einem Winkelbereich von 360° (links) und 100° (rechts). Je kleiner der Winkelbereich, desto dominanter die Verzerrungen in der Rekonstruktion.

Stand der Technik

Aus der Literatur sind zahlreiche Ansätze zur Korrektur verzerrter Rekonstruktionen bekannt. Einen Ausgleich zu dem bestehenden Mangel an Messwerten schafft das Einbringen von zusätzlichen Informationen: A priori Wissen von dem geröntgten Bauteil, sprich von der Bauteilform, oder von den Materialien, aus denen ein Bauteil gefertigt wurde, genauer gesagt deren Absorptionskoeffizient für Röntgenstrahlung.

A priori Wissen von der Bauteilform stammt bei industriellen Anwendungen entweder aus CAD-Daten oder aus einem „golden sample“, von dem ein parametrisches Oberflächenmodell generiert

wird [2] [24] [25] [50] [51]. Mittels Anpassung dieses Parametermodells an die Messwerte lassen sich sehr gute Rekonstruktionen erzeugen, selbst aus wenigen Röntgenbildern [10] [11] [40] [42] [58] [67].

In vielen Anwendungen beschränkt sich das a priori Wissen aber auf die Materialien, aus denen ein Prüfobjekt besteht. Zum Beispiel ist bekannt, dass das untersuchte Bauteil aus Aluminium und Stahl zusammengesetzt ist. Jedes Material besitzt für Röntgenstrahlung einen spezifischen Absorptionskoeffizienten, der in einer originalgetreuen Rekonstruktion durch einen festen Grauwert repräsentiert wird (monochromatische Strahlung vorausgesetzt und Streuung vernachlässigt). Mit diesem Wissen – oder vielmehr dem Ausschluss unmöglicher Grauwerte – wird die Rekonstruktion diskret, verfälschte Bereiche im günstigsten Fall korrigiert. Ansätze, die darauf aufbauen, gibt es viele. Einige rekonstruieren das Prüfobjekt zunächst mit einem klassischen Verfahren aus den Röntgenaufnahmen und führen in einem zweiten Schritt auf Basis des a priori Wissens eine Diskretisierung durch, letztere mit mehr oder weniger Aufwand. Bewährt haben sich zudem iterative Algorithmen, die in mehreren Durchläufen abwechselnd die klassische Rekonstruktion und die Diskretisierung vornehmen, und damit ein Ausbalancieren zwischen Messwerten und a priori Wissen bewirken [8] [9] [17] [40] [61] [71].

Trotz der Vielzahl der veröffentlichten Lösungsvorschläge ist zu beobachten, dass mit originalgetreuen Rekonstruktionsergebnissen meist nur dann zu rechnen ist, wenn das geröntgte Bauteil aus einem einzigen Material besteht. In diesem Fall muss im Volumen lediglich zwischen „Luft“ und „Objekt“ unterschieden werden. Aber mit jedem weiteren Material wird das Problem komplexer. Die Rekonstruktionsverfahren [17] [61] und [71] sind nicht ausgelegt für Aufnahmeszenarien mit Bauteilen, die sich aus mehreren Materialien zusammensetzen. In [40] werden zwar Konzepte zur Rekonstruktion von Objekten mit mehreren Materialien vorgestellt, eine Untersuchung zur Anwendbarkeit dieser Konzepte bei realistischen Aufnahmeanordnungen ist bisher nicht bekannt.

Für reale Anwendungen kommt dem von Joost Batenburg und Jan Sijbers in [8] und [9] beschriebenen iterativen Rekonstruktionsverfahren eine herausragende Stellung zu, denn es liefert für beliebige Prüfobjekte mit beliebig vielen unterschiedlichen Materialien gute Ergebnisse: Die Rekonstruktion aus Röntgenbildern entspricht mathematisch betrachtet der Lösung eines linearen Gleichungssystems. In diesem Gleichungssystem repräsentiert jeder Messwert eine Gleichung, jedes einzelne Voxel eine Unbekannte. Fakt ist, bei eingeschränkten Aufnahmebedingungen stehen zu wenig Messwerte zur Verfügung. Das Gleichungssystem ist folglich unterbestimmt. Rekonstruierte Bauteile erscheinen, wie eingangs gezeigt, stellenweise verzerrt. Der Grundgedanke in [8] ist, diejenigen Voxel, die das Prüfobjekt bereits originalgetreu wiedergeben, aus der Menge der Unbekannten zu entfernen, und somit die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Die übrigen, fehlerhaften Voxel verbleiben in der Menge der Unbekannten und werden weiterrekonstruiert. Das bedeutet, in der nachfolgenden Iteration kann sich das Rekonstruktionsverfahren

ganz auf die fehlerhaften Voxel konzentrieren und dort (im Idealfall) eine Korrektur bewirken.

Das Gelingen der Rekonstruktion hängt jedoch maßgeblich von der Detektion der originalgetreu rekonstruierten Voxel ab. Fehler bei der Detektion haben zur Folge, dass das Rekonstruktionsverfahren in eine falsche Richtung steuert. Das in [8] und [9] zur Detektion verwendete Gütemaß ist unzuverlässig, insbesondere bei Prüfobjekten, die in einem stark eingeschränkten Winkelbereich geröntgt wurden. Bis heute fehlt in der Literatur ein zuverlässiges Gütemaß, das in der Lage ist speziell bei variierenden Aufnahmebedingungen eine Rekonstruktion Voxel für Voxel zu bewerten.

Ziele und Aufbau der Arbeit

Im Rahmen dieser Arbeit soll ein Gütemaß entwickelt werden, das die Qualität einer Rekonstruktion durch einen Zahlenwert ausdrückt, explizit für jedes Voxel im Rekonstruktionsvolumen. Bereiche des Volumens, die ein geröntgtes Bauteil nicht originalgetreu wiedergeben, zum Beispiel weil die Röntgenbilder einen zu kleinen Winkelbereich aufspannen, werden überwiegend niedrige Zahlenwerte aufweisen, während in besser rekonstruierten Bereichen entsprechend höhere Zahlenwerte vorherrschen.

Um beliebige Prüfobjekte unter variierenden realen Aufnahmebedingungen bewerten zu können, ist große Flexibilität geboten. Daher kann bei der Bewertung nur auf a priori Wissen über die Materialien, aus denen ein Bauteil gefertigt wurde, zurückgegriffen werden. Kenntnisse von der Bauteilform dürfen nicht miteinfließen. Im Kern beinhaltet diese Arbeit eine stochastische Auswertung der Messwerte, die zur Verfügung stehen. Darauf aufbauend wird ein Gütemaß hergeleitet, das die Rekonstruktionsqualität durch eine Wahrscheinlichkeit ausdrückt: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein vorgegebenes, a priori bekanntes Material an einer bestimmten Voxelposition im Prüfobjekt tatsächlich existierte, als es geröntgt wurde. Eine Wahrscheinlichkeit von 1,0 wird erwartet, wenn kein Zweifel daran besteht, dass die Rekonstruktion richtig ist. Je „schlechter“ oder – aus Sicht der Messwerte – je „unsicherer“ ein Voxel rekonstruiert ist, desto niedriger fällt die Wahrscheinlichkeit aus.

Anhand des Wahrscheinlichkeitswertes soll es möglich sein, „originalgetreu“ rekonstruierte Voxel in einem Volumen zu detektieren und – entsprechend dem Grundgedanken in [8] – aus der Menge der Unbekannten zu entfernen. Die übrigen Voxel verbleiben in der Menge der Unbekannten. Im iterativen Verlauf des Rekonstruktionsverfahrens können sie gezielt nachgebessert werden, bis sie (im Idealfall) das geröntgte Prüfobjekt ebenfalls originalgetreu wiedergeben. Das Gütemaß entscheidet.

Kapitel 2 befasst sich mit den wesentlichen physikalischen Grundlagen zur Aufnahme eines Röntgenbildes.

Kapitel 3 stellt das klassische iterative Rekonstruktionsverfahren in seiner Herleitung und Funktionsweise vor. Die Auswirkungen eines eingeschränkten Winkelbereiches der Röntgenaufnahmen auf die Rekonstruktion werden betrachtet sowie die in der Literatur gebräuchlichen Methoden zum Einbringen von a priori Wissen behandelt.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Bewertung einer Rekonstruktion. Existierende Kennzahlen, die die Rekonstruktionsqualität in gewissem Rahmen widerspiegeln, werden eingeführt und ihre Grenzen aufgezeigt. Schließlich wird das neue Gütemaß – Averatio genannt – ausgehend von einer stochastischen Messwertanalyse hergeleitet und der Einsatz im iterativen Rekonstruktionsverfahren RegioSART beschrieben.

Kapitel 5 zeigt anhand experimenteller Untersuchungen an verschiedenen Prüfobjekten aus künstlichen wie realen Röntgenaufnahmen die Flexibilität und Zuverlässigkeit des Gütemaßes Averatio im Vergleich zu bisherigen Ansätzen zur lokalen Bewertung. Der Einfluss von Rauschen und die Auswirkung eines eingeschränkten Winkelbereiches werden dabei analysiert. Abschließend präsentiert dieses Kapitel die Verbesserung einer Rekonstruktion aus Röntgenaufnahmen mit eingeschränktem Winkelbereich durch Einsatz des Verfahrens RegioSART.

2 Physikalische Grundlagen zur Aufnahme eines Röntgenbildes

Ein Röntgenstrahl, der von einer Röntgenquelle ausgesendet wird und auf Materie trifft, nimmt an Strahlungsintensität ab. Diese Abnahme ist maßgeblich von dem materialspezifischen Absorptionskoeffizienten μ der getroffenen Materie geprägt. Prüfobjekte aus Eisen beispielsweise senken die Intensität stärker als Kunststoffe.

Setzt der Röntgenstrahl seinen Weg durch die Materie fort, so verliert er weiter an Intensität. Das bedeutet, die von einem Detektor aufgenommene Intensität I_u ist von dem Linienintegral der Absorptionskoeffizienten $\mu(s)$ entlang des Strahlenweges s abhängig. Den mathematischen Zusammenhang zwischen I_u und der Anfangsintensität I_0 an der Röntgenquelle beschreibt das Lambert-Beersche Gesetz in Gleichung (2.1) [14].

$$I_u = I_0 \cdot \exp\left(-\int_0^u \mu(s) ds\right) \quad (2.1)$$

Abbildung 2.1 zeigt modellhaft die Abschwächung eines Röntgenstrahles beim Durchqueren eines Prüfobjektes, das aus einem homogenen Material besteht und von Luft umgeben ist.

Im Folgenden wird das Linienintegral der Absorptionskoeffizienten aus Gleichung (2.1) als Messwert y_u eines Detektorpixels u bezeichnet (2.2).

$$y_u = \ln\left(\frac{I_0}{I_u}\right) = \int_0^u \mu(s) ds \quad (2.2)$$

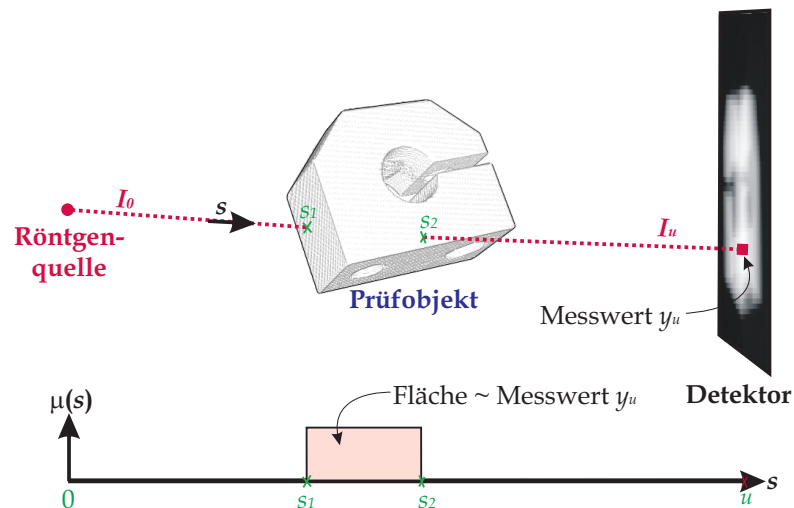


Abbildung 2.1: Abschwächung eines Röntgenstrahles beim Durchqueren eines Prüfobjektes. Oben: Physikalische Anordnung. Parallel dazu unten: Absorptionskoeffizient als Funktion des Strahlenweges.

Störeinflüsse

Unter realen Bedingungen kommt es zu Abweichungen von der beschriebenen Modellvorstellung. Verantwortlich dafür sind aus physikalischer Sicht im wesentlichen zwei Effekte: Strahlaufhärtung im Fall von polychromatischer Strahlung und Streuung [43].

Strahlaufhärtung bezeichnet eine gewisse Abhängigkeit des Absorptionsvermögens eines Materials von der Strahlungsenergie. Strahlen mit niedriger Energie werden insgesamt stärker absorbiert als Strahlen höherer Energie. Diese Abhängigkeit – oder vielmehr ihre Missachtung – kommt besonders dann zum Tragen, wenn die Röntgenröhre Strahlung unterschiedlicher Energie (sogenannte polychromatische Strahlung) emittiert. In der Rekonstruktion eines eigentlich homogenen Prüfobjektes entstehen Helligkeitsschwankungen. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Röntgenaufnahmen kann dank des Einsatzes eines Monochromators von einer annähernd konstanten Energie ausgegangen werden. Strahlaufhärtung ist weitgehend unterdrückt.

Auch Streuung lässt sich zum Großteil hardwareseitig vermeiden. Kollimatoren, das heißt gitterartige Filter vor dem Detektor, wirken ähnlich wie Scheuklappen. Sie verhindern das Aufnehmen seitlich einfallender Röntgenstrahlen.

Verbliebene Störungen werden unter dem Stichwort „Rauschen“ zusammengefasst und in späteren Kapiteln eingehend behandelt.

3 Rekonstruktionsverfahren

Ziel der Rekonstruktion ist es, aus aufgenommenen Röntgenbildern eines Prüfobjektes die ortsabhängigen Absorptionskoeffizienten μ zu bestimmen. Dafür wurden seit der Einführung des ersten Computertomografen zahlreiche Verfahren entwickelt. Diese Verfahren lassen sich in zwei Kategorien einteilen. Auf der einen Seite gibt es analytische Methoden, die in einem Schritt alle verfügbaren Röntgenbilder berücksichtigen und daraus *ein* Ergebnis generieren. Auf der anderen Seite finden iterative Verfahren Anwendung, allen voran die Algebraische Rekonstruktionstechnik (ART) [29], die sich schrittweise der Lösung annähert, wobei in jedem Schritt nur ein Röntgenstrahl ausgewertet und eine Korrektur des vorangegangenen Ergebnisses vorgenommen wird. Eine Übersicht der aktuell gebräuchlichsten Rekonstruktionsverfahren bieten [6] [14] [37] [41].

Diese Arbeit konzentriert sich auf die Rekonstruktion von Prüfobjekten, die sich aufgrund ihrer speziellen Form nicht in der traditionellen 360°-Rotation röntgen lassen. Ein Ausweichen auf andere Aufnahmegeometrien, und sei es nur die Beschränkung des Winkelbereiches, ist mit den analytischen Verfahren nicht ohne weiteres möglich. Die Aufnahmegeometrie fließt bereits in die Herleitung der Verfahren ein [6]. Iterative Methoden können dagegen, wie nachfolgend gezeigt wird, mit beliebigen Geometrien umgehen, ohne dass die implementierte Rekonstruktionsformel angepasst werden muss.

Der entscheidende Vorteil der iterativen Verfahren zeigt sich beim Versuch, auch aus Röntgenaufnahmen mit einem eingeschränkten Winkelbereich originalgetreue Rekonstruktionen zu generieren. Wie eingangs erwähnt wird durch die Verwendung von zusätzlichem Wissen – a priori Wissen über das Bauteil – der Mangel an Messdaten kompensiert. Die iterativen Verfahren bieten hier die notwendige Flexibilität, a priori Wissen in den Rekonstruktionsprozess einzubringen [21].

Aus diesem Grunde setzt diese Arbeit den Fokus auf die iterativen Rekonstruktionsverfahren. In Abschnitt 3.1 werden Herleitung und Details zur Implementierung erläutert. Ferner erfolgt eine Untersuchung des Konvergenzverhaltens bei vollständigen Messdaten sowie – in Abschnitt 3.2 – bei unvollständigen Messdaten. Verschiedene Ansätze zum Einbringen von a priori Wissen in die Rekonstruktion behandelt Abschnitt 3.3.

3.1 Einführung in die Algebraische Rekonstruktionstechnik

3.1.1 Das diskrete Abbildungsmodell

Die Basis zur Rekonstruktion eines Prüfobjektes aus seinen Röntgenbildern bildet ein ortsdiskreter Berechnungsraum: Das Rekonstruktionsvolumen. An den einzelnen, nunmehr festen Berechnungspunkten (den Voxeln) wird der lokale Absorptionskoeffizient berechnet.

Durch die Diskretisierung geht das Integral aus Gleichung (2.2) in eine Summe über (3.1). Der zu rekonstruierende, de facto unbekannte Absorptionskoeffizient eines Voxels v wird (abweichend von der physikalischen Notation) mit x_v angegeben. V bezeichnet die Anzahl der Voxel im gesamten Volumen. Im Falle eines kubischen Volumens mit einer Kantenlänge von K Voxel gilt $V = K \cdot K \cdot K$. Mit w_{vu} wird ein Wichtungsfaktor eingebracht, der den Einfluss des u -ten Röntgenstrahles auf das v -te Voxel ausdrückt, und auf Null zurückgeht, sobald ein Voxel so weit vom Strahl entfernt liegt, dass es praktisch keinen Beitrag mehr zum Messwert y_u liefert. Auf diese Weise wird in Gleichung (3.1) die Summe ausschließlich über die Absorptionskoeffizienten der Voxel im aktuellen Strahl u gebildet. Die genaue Festlegung der Wichtungsfaktoren soll im nächsten Abschnitt näher erläutert werden.

$$y_u = \sum_{v=1}^V x_v \cdot w_{vu} \quad (3.1)$$

Abbildung 3.1 zeigt beispielhaft ein Rekonstruktionsvolumen passend zu der Aufnahmeszene aus Abbildung 2.1.

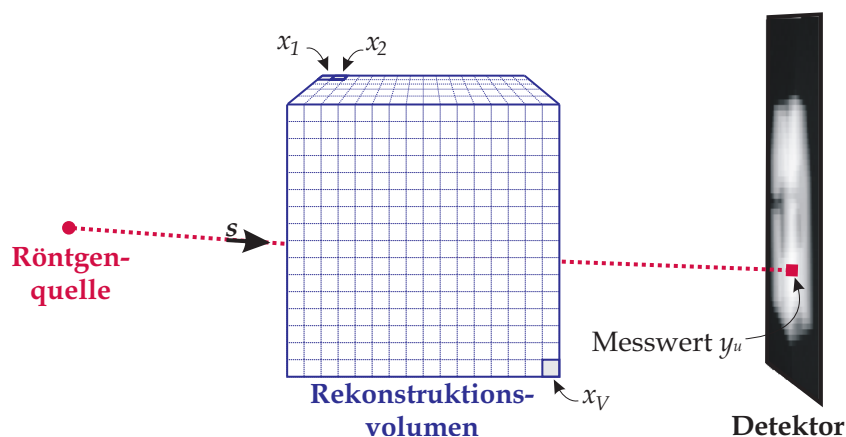


Abbildung 3.1: Diskretisierung des Berechnungsraumes

Wichtungsfaktoren

In den Wichtungsfaktoren stecken alle Informationen über die Geometrie der Aufnahmeszene, sprich die festgelegte Größe und Auflösung des Rekonstruktionsvolumens, die Raumkoordinaten der Röntgenquelle für jede einzelne Bildaufnahme, die dazugehörige Lage und Ausrichtung des Detektors sowie dessen Größe und Auflösung. Der Berechnung der Wichtungsfaktoren wurde in der Vergangenheit viel Aufmerksamkeit gewidmet.

Die erste Veröffentlichung zur Algebraischen Rekonstruktionstechnik [29] verwendet binäre Wichtungsfaktoren: $w_{vu} = 1$ wenn der Röntgenstrahl u ein Voxel v durchquert, andernfalls gilt $w_{vu} = 0$. Spätere Arbeiten setzen – in Übereinstimmung mit der physikalischen Interpretation – den Wichtungsfaktor mit der Strecke, die der Strahl innerhalb eines Voxels zurückgelegt hat, gleich (Abbildung 3.2 links) [30] [59]. In manchen Arbeiten wird jedem Röntgenstrahl eine gewisse räumliche Ausdehnung zugesprochen. Der Wichtungsfaktor ergibt sich dann aus dem Volumen, welches der Strahl innerhalb des Voxels abdeckt (Abbildung 3.2 rechts) [14] [46] [45]. Doch all diese Ansätze betrachten das Voxel als einen Würfel, in dem ein homogener Absorptionskoeffizient herrscht. Das ist eine sehr grobe Näherung und entspricht kaum der Realität.

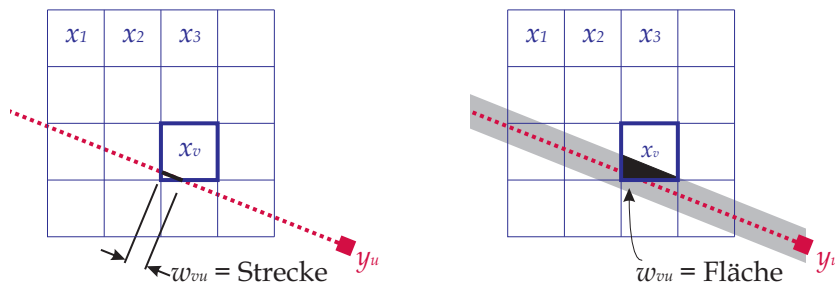


Abbildung 3.2: Verschiedene Herangehensweisen zur Berechnung der Wichtungsfaktoren, demonstriert an einem zweidimensionalen Beispiel.

In dieser Arbeit wird – in Anlehnung an [47] [62] [72] – ein Voxel v als Punkt ohne jegliche räumliche Ausdehnung aufgefasst. Das heißt, der Absorptionskoeffizient x_v ist nur an der Koordinate des Voxels, genauer gesagt seinem Mittelpunkt, gültig. Zur Herleitung des Wichtungsfaktors w_{vu} wird die Messung von y_u aus der Sicht der Signalverarbeitung betrachtet:

Ein Röntgenstrahl durchquert, wie bereits im vorangegangenen Kapitel 2, Abbildung 2.1 gezeigt, einen realen und damit kontinuierlichen Raum. Entlang des Strahlenweges s erfolgt in verschwindend kleinen Abständen eine Abtastung des Raumes. Die Integration der Absorptionskoeffizienten der einzelnen Abtastpunkte auf dem Strahl liefert den Messwert y_u . Wird der beschriebene Vorgang in einem als gegeben angenommenen, diskreten Rekonstruktionsvolumen nachgebildet, so ist davon auszugehen, dass der Röntgenstrahl nur in den seltensten Fällen eine

Voxelcoordinate trifft. Für alle anderen Abtastpunkte auf dem Strahl muss der lokale Absorptionskoeffizient berechnet werden. Das gelingt durch Interpolation [35]. Wie in Abbildung 3.3 (links) demonstriert wird an dem Abtastpunkt t mit den Koordinaten (i_t, j_t) eine Interpolationsfunktion $b(i, j)$ platziert. Die Absorptionskoeffizienten $x_v = x(i_v, j_v)$ der Voxel, die in den durch den schwarzen Ring versinnbildlichten Interpolationsbereich fallen, werden entsprechend Gleichung 3.2 gewichtet und aufsummiert, wodurch der lokale Absorptionskoeffizient $r(i_t, j_t)$ *rekonstruiert*¹ ist.

$$r(i_t, j_t) = \sum_{v=1}^V x(i_v, j_v) \cdot b(i_v - i_t, j_v - j_t) \quad (3.2)$$

Für den Messwert y_u gilt in Analogie zu Gleichung (2.2):

$$y_u = \int r(i_s, j_s) ds = \int \sum_{v=1}^V x(i_v, j_v) \cdot b(i_v - i_s, j_v - j_s) ds \quad (3.3)$$

Durch Umstellung der Gleichung (3.3) ergibt sich der Wichtungsfaktor w_{vu} des Voxels v wie folgt:

$$y_u = \sum_{v=1}^V x(i_v, j_v) \cdot \int b(i_v - i_s, j_v - j_s) ds \quad (3.4)$$

$$w_{vu} = \int b(i_v - i_s, j_v - j_s) ds \quad (3.5)$$

Für den dreidimensionalen Raum gilt verallgemeinert

$$w_{vu} = \int b(L(v, s)) ds \quad (3.6)$$

wobei $L(v, s)$ den Abstand zwischen dem Voxel v und dem aktuell betrachteten Abtastpunkt s des Strahles bezeichnet.

Der Wichtungsfaktor w_{vu} entspricht damit den aufintegrierten Gewichten $b(L(v, s))$ der einzelnen Abtastpunkte, in dessen Interpolationsbereich das Voxel fällt. Oder andersherum ausgedrückt, der Wichtungsfaktor entspricht den aufintegrierten Gewichten der Abtastpunkte, die in den Interpolationsbereich *des Voxels* fallen. In Abbildung 3.3 (rechts) ist diese Sichtweise veranschaulicht.

Für die Wahl der Interpolationsfunktion b ist es sinnvoll, die Aufgabenstellung im Frequenzbereich zu interpretieren. Beträgt der Abstand zwischen zwei benachbarten Voxelkoordinaten Δv , so zeigt das diskrete Rekonstruktionsvolumen ein sich wiederholendes Spektrum bei den Viel-

¹Rekonstruktion im Sinne der klassischen digitalen Signalverarbeitung, nicht im Sinne des hier häufig verwendeten Begriffes der Rekonstruktion eines Prüfobjektes aus seinen Röntgenaufnahmen

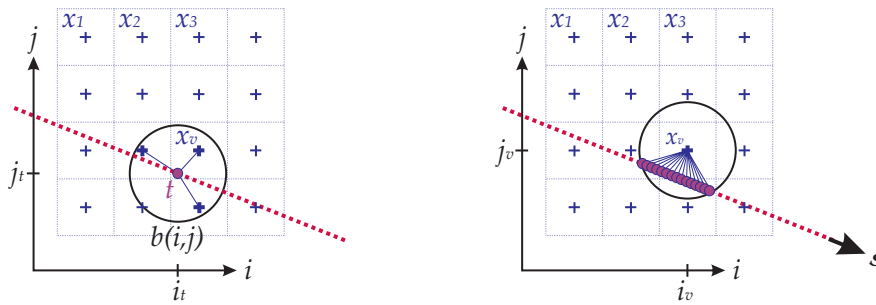


Abbildung 3.3: Interpretation eines Voxels als Koordinate ohne räumliche Ausdehnung. Links: Interpolation des Absorptionskoeffizienten an einem auf dem Strahl gelegenen Abtastpunkt $t = (i_t, j_t)$. Der schwarze Ring versinnbildlicht den Interpolationsbereich. Rechts: Bestimmung des Wichtungsfaktors eines Voxels v aus den Gewichten der Abtastpunkte, die in den Interpolationsbereich des Voxels fallen.

fachen der Abtastfrequenz $1/\Delta v$. Die Seitenbänder müssen zur Rekonstruktion des kontinuierlichen Signals (als Bestandteil der beschriebenen Interpolation) „ausgeblendet“ werden. Hierfür würde sich ein Sinc-Filter eignen, da dieser im Frequenzbereich eine Rechteck-Funktion darstellt (siehe Abbildung 3.4). Ungünstigerweise besitzt die Impulsantwort des Sinc-Filters im Ortsbe-

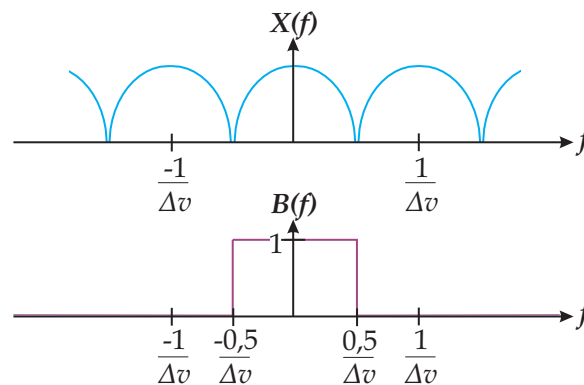


Abbildung 3.4: Oben: Spektrum des diskreten Rekonstruktionsvolumens, dargestellt für eine Dimension. Unten: Spektrum des Sinc-Filters. Die Multiplikation beider Spektren entfernt die Seitenbänder und rekonstruiert damit das kontinuierliche Signal (entsprechend Gleichung 3.2)

reich eine unendliche Ausdehnung, was seine Verwendung in der Praxis unmöglich macht. Eine alternative Lösung bietet der Bessel-Kaiser-Filter (3.7). Dieser weist, wie in Abbildung 3.5 skizziert, eine begrenzte räumliche Ausdehnung auf und gewährt eine für die Röntgenrekonstruktion

adäquate Unterdrückung der Seitenbänder [47].

$$b(L) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{L}{\Lambda}\right)^2\right) \cdot \frac{J\left(\zeta \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{L}{\Lambda}\right)^2}\right)}{J(\zeta)} & \text{wenn } 0 \leq L \leq \Lambda \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

Die Arbeit von K. Müller [47] behandelt die Optimierung des Filters und setzt die Parameter ζ und Λ in Gleichung (3.7) auf $\zeta = 10,4$ und $\Lambda = 2 \cdot \Delta v$. J bezeichnet die Besselfunktion 1. Art, 2. Ordnung [23].

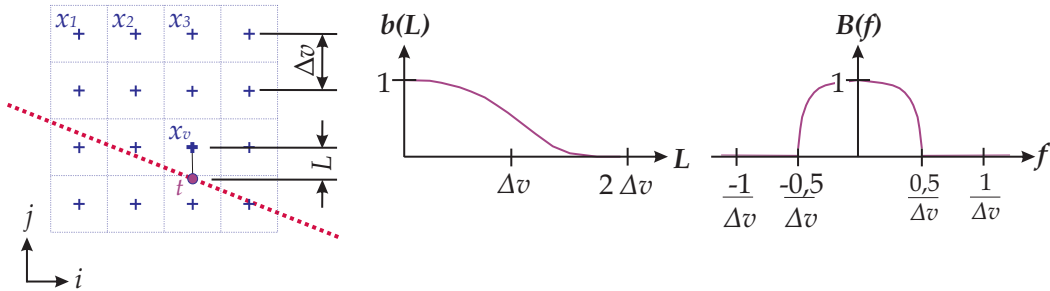


Abbildung 3.5: Bessel-Kaiser-Filter im Orts- und Frequenzbereich

3.1.2 Aufstellung des Gleichungssystems

Soll ein geröntgtes Prüfobjekt im Rekonstruktionsvolumen nachgebildet werden, so müssen viele Röntgenbilder aus unterschiedlichen Richtungen ausgewertet werden. Angenommen, es stehen insgesamt R Röntgenbilder mit jeweils $S \cdot T$ Pixeln zur Verfügung. Dann beträgt die Anzahl der Messwerte $U = R \cdot S \cdot T$. Jeder einzelne Messwert stellt eine Gleichung gemäß (3.1) dar. Alle Messwerte zusammen bilden ein lineares Gleichungssystem (3.8). Jedes Voxel repräsentiert darin eine Unbekannte, die zu bestimmen ist.

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cdot w_{11} + x_2 \cdot w_{21} + x_3 \cdot w_{31} + \cdots + x_V \cdot w_{V1} \\ y_2 &= x_1 \cdot w_{12} + x_2 \cdot w_{22} + x_3 \cdot w_{32} + \cdots + x_V \cdot w_{V2} \\ y_3 &= x_1 \cdot w_{13} + x_2 \cdot w_{23} + x_3 \cdot w_{33} + \cdots + x_V \cdot w_{V3} \\ &\vdots \\ y_u &= x_1 \cdot w_{1u} + x_2 \cdot w_{2u} + x_3 \cdot w_{3u} + \cdots + x_V \cdot w_{Vu} \\ &\vdots \\ y_U &= x_1 \cdot w_{1U} + x_2 \cdot w_{2U} + x_3 \cdot w_{3U} + \cdots + x_V \cdot w_{VU} \end{aligned} \quad (3.8)$$

In der industriellen Praxis bewegt sich die Detektorauflösung in einer Größenordnung von 512^2 bis 2048^2 Pixel. Üblich ist eine Aufnahme von 512 bis 2048 Röntgenbildern, so dass die Anzahl

der Gleichungen zwischen 512^3 und 2048^3 liegt. Gleichermaßen beinhalten die Rekonstruktionsvolumen 512^3 bis 2048^3 Voxel. Es wird klar, dass ein Gleichungssystem dieser Dimension sehr viel Speicherplatz bedarf und nicht mehr direkt gelöst werden kann. Bei iterativen Verfahren besteht das Problem nicht, da stets nur ein Teil der Messdaten ausgewertet wird.

3.1.3 Lösung des Gleichungssystems mittels Algebraischer Rekonstruktionstechniken

Unter den verschiedenen iterativen Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kommt der Algebraischen Rekonstruktionstechnik [29], kurz ART, eine hohe Bedeutung zu. 1970 durch Gordon, Bender und Herman eingeführt und im ersten klinischen Computertomografen von Hounsfield eingesetzt [68] bildet sie den Grundbaustein für eine Reihe weiterer Algorithmen, die sich aus ihr ableiten, etwa die SIRT (Simultaneous Iterative Reconstruction Technique) oder die in der Praxis heute weit verbreitete SART (Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique). Später stellte sich heraus, dass mit der ART ein bereits im Jahre 1937 von dem Mathematiker Stefan Kaczmarz entwickeltes Verfahren wiedererfunden wurde [14].

Kaczmarz-Methode

Die Vorgehensweise, nach der Kaczmarz sich der Lösung eines linearen Gleichungssystems annähert, lässt sich an einem zweidimensionalen Beispiel anschaulich demonstrieren. „Zweidimensional“ bedeutet in diesem Fall, das Gleichungssystem besteht aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Jede Gleichung kann demzufolge als Gerade interpretiert werden. Der Schnittpunkt beider Geraden markiert die Lösung des Gleichungssystems (siehe Abbildung 3.6).

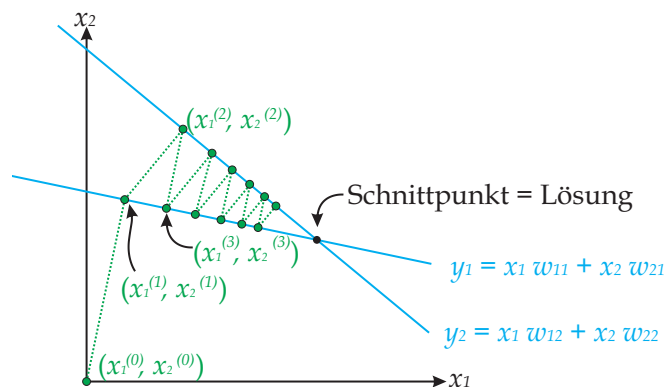


Abbildung 3.6: Visualisierung der Kaczmarz-Methode zur iterativen Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten

Die Kaczmarz-Methode wird mit einem beliebigen Ausgangspunkt $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ initialisiert. In dem in Abbildung 3.6 dargestellten Beispiel liegt er im Ursprung des Koordinatensystems. Dieser Ausgangspunkt wird senkrecht auf die erste Gerade projiziert. Dadurch „springt“ er an die Position $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$.

Im nächsten Schritt bildet $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$ den Ausgangspunkt, und die Projektion erfolgt nun senkrecht auf die zweite Gerade, an die Position $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$. Danach wird $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ wieder auf die erste Gerade projiziert. Durch Wiederholung dieses Vorganges abwechselnd für beide Geraden nähert sich die in jedem Schritt neu berechnete Position stetig der tatsächlichen Lösung des Gleichungssystems.

Der beschriebene Projektionsvorgang soll im Folgenden mathematisch hergeleitet werden. Sei $g_u : y_u = x_1 \cdot w_{1u} + x_2 \cdot w_{2u}$ die aktuelle Gerade, auf die der Punkt $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ projiziert werden soll. Zur Berechnung der neuen Position $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$ muss der Schnittpunkt zwischen der Geraden g_u und einer vom Punkt $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ ausgehenden, senkrecht auf g_u stehenden zweiten Geraden g_f bestimmt werden. Das heißt, es muss gelten: $g_u = g_f$. Diese Bedingung wird in Vektorschreibweise angegeben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y_u/w_{2u} \end{pmatrix} + l_u \cdot \begin{pmatrix} w_{2u} \\ -w_{1u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + l_f \cdot \begin{pmatrix} w_{1u} \\ w_{2u} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Mittels Komponentenzersetzung lassen sich die Variablen l_u und l_f aus (3.9) bestimmen. Daraus folgt:

$$l_f = \frac{y_u - x_1^{(k)} \cdot w_{1u} - x_2^{(k)} \cdot w_{2u}}{w_{1u} \cdot w_{1u} + w_{2u} \cdot w_{2u}} \quad (3.10)$$

Eingesetzt in die Geradengleichung g_f ergibt sich der Ortsvektor für den gesuchten Schnittpunkt schließlich zu:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \left(\frac{y_u - x_1^{(k)} \cdot w_{1u} - x_2^{(k)} \cdot w_{2u}}{w_{1u} \cdot w_{1u} + w_{2u} \cdot w_{2u}} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_{1u} \\ w_{2u} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Die Korrekturformel für eine der beiden Unbekannten lautet allgemein:

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \left(\frac{y_u - x_1^{(k)} \cdot w_{1u} - x_2^{(k)} \cdot w_{2u}}{w_{1u} \cdot w_{1u} + w_{2u} \cdot w_{2u}} \right) \cdot w_{nu} \quad (3.12)$$

Ein reales Rekonstruktionsvolumen, welches aus insgesamt V Voxeln besteht, deren Absorptionskoeffizienten zu ermitteln sind, stellt einen V -dimensionalen Berechnungsraum dar. Das obige Rechenbeispiel kann entsprechend erweitert werden. Die Korrekturformel (3.12) geht über in (3.13).

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \underbrace{\frac{y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v=1}^V w_{vu} \cdot w_{vu}}}_{\text{Korrekturterm}} \cdot w_{nu} \quad (3.13)$$

Alle zur Verfügung stehenden Gleichungen aus (3.8) werden nacheinander verarbeitet. Eine Iteration ist vollendet, wenn jede Gleichung einmal Berücksichtigung fand, das heißt bei U Gleichungen besteht die Iteration aus U Korrekturschritten. Üblich ist die Durchführung mehrerer Iterationen. Die Reihenfolge, in der die Gleichungen verarbeitet werden, nimmt genauso wie die Wahl des Initialwertes Einfluss auf die Konvergenzgeschwindigkeit, nicht aber auf die Tatsache, dass das Verfahren konvergiert.

Wenn eine perfekte Rekonstruktion erreicht ist, entspricht in jedem Röntgenstrahl die Summe $\sum x_v w_{vu}$ exakt dem Messwert y_u . Der Korrekturterm in Gleichung (3.13) wird Null, die Bedingung (3.1) erfüllt.

Relaxaktion

Für die praktische Anwendung hat es sich als nützlich erwiesen, der klassischen Korrekturformel (3.13) einen Relaxationsfaktor $\lambda \in [0, 1]$ hinzuzufügen.

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \lambda \cdot \frac{y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v=1}^V w_{vu} \cdot w_{vu}} \cdot w_{nu} \quad (3.14)$$

Mit $0 < \lambda < 1$ wird der Punkt $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ nicht direkt *auf* die aktuelle Gerade projiziert, sondern, wie in Abbildung 3.7 demonstriert, nur ein Stück weit *in Richtung* der Geraden. Dadurch reduziert sich für das gezeigte Beispiel zwar die Konvergenzgeschwindigkeit der ART, aber im Fall von gestörten Messdaten wird verhindert, dass die in einer Messung vorhandene Störung zu starken Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis hat und von der eigentlichen Lösung ablenkt. Abbildung 3.8 veranschaulicht diesen Fall. Dem aus Abbildung 3.7 bekannten Beispiel wird eine dritte, fehlerbehaftete Gleichung $g_3 : y_3 = x_1 \cdot w_{13} + x_2 \cdot w_{23}$ hinzugefügt. Die Störung im Messwert y_3 bewirkt eine Parallelverschiebung der Geraden g_3 . Die Lösung des Gleichungssystems ist nicht mehr eindeutig. Es gibt drei Schnittpunkte, von denen – liegen reale und damit

verrauschte Messdaten vor – wahrscheinlich keiner richtig ist. Die in der klassischen ART berechnete Position wird in der Nähe der drei Schnittpunkte oszillieren. Mit $0 < \lambda < 1$ hat eine einzelne Störung weniger Gewicht, folglich fällt das Oszillieren schwächer aus.

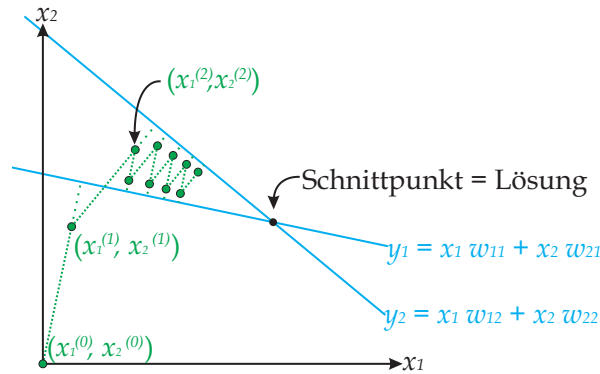


Abbildung 3.7: Iterative Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten nach der ART mit Relaxationsfaktor $\lambda = 0.7$

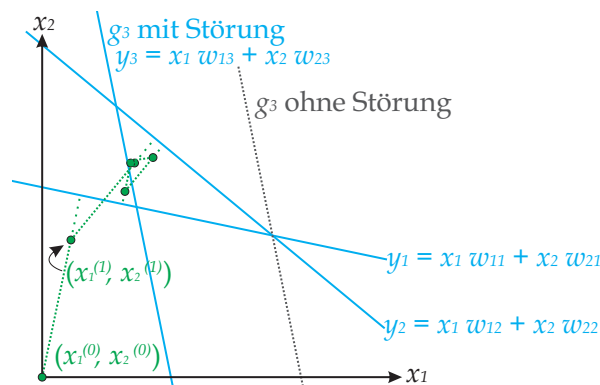


Abbildung 3.8: Anwendung der ART mit Relaxationsfaktor $\lambda = 0.7$ auf ein Beispiel mit inkonsistenten Messdaten

Erwiesenermaßen konvergiert ART mit einem Relaxationsfaktor $\lambda \ll 1$ für inkonsistente Daten im quadratischen Mittel gemäß (3.15) gegen ein Minimum [38].

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{u=1}^U \left(y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu} \right)^2 = \min \quad (3.15)$$

SIRT und SART

Als verhältnismäßig unempfindlich gegenüber Störungen in der Messung erweisen sich auch die beiden ART-verwandten Verfahren SIRT und SART [57]. Statt *einen* Schnittpunkt zu suchen (den es, wie bereits angemerkt, nicht gibt) wird eine Pseudolösung für die Rekonstruktion angestrebt, die *im Mittel* zu allen Messdaten passt.

Die SIRT basiert auf dem selben Projektionsvorgang wie die ART. Allerdings wird der Korrekturterm

$$\Delta x_{nu}^{(k)} = \frac{y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v=1}^V w_{vu} \cdot w_{vu}} \cdot w_{nu} \quad (3.16)$$

für alle Gleichungen simultan berechnet und zwischengespeichert, ohne dabei die aktuellen Absorptionskoeffizienten im Rekonstruktionsvolumen zu ändern. Erst wenn alle Gleichungen abgearbeitet sind, werden die berechneten Korrekturfaktoren Δx_{nu} gemittelt und ausgeführt (veranschaulicht in Abbildung 3.9) und der Vorgang wiederholt. Die SIRT erweist sich als äußerst effizient zur Unterdrückung von Rauschen. Von Nachteil ist allerdings die langsame Konvergenz. Extrem viele Iterationsdurchläufe sind nötig, um eine präzise Darstellung des geröntgten Objektes zu erhalten [47].

Eine Kompromisslösung zwischen der schnellen Konvergenz der ART und der guten Rauschunterdrückung der SIRT stellt die SART dar [5]. Hier werden nur die Gleichungen, die zu den Messwerten eines Röntgenbildes Θ_r gehören, simultan verarbeitet. Das bedeutet, die Korrektur der Absorptionskoeffizienten aller Voxel im Rekonstruktionsvolumen erfolgt pro Röntgenbild einmal nach der Formel (3.17):

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \lambda \cdot \frac{\sum_{u \in \Theta_r} \frac{y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v=1}^V w_{vu}} \cdot w_{nu}}{\sum_{u \in \Theta_r} w_{nu}} \quad (3.17)$$

Per Definition ist eine Iteration vollendet, wenn jede Gleichung einmal Berücksichtigung fand. Sie besteht bei R Röntgenbildern aus R Korrekturschritten.

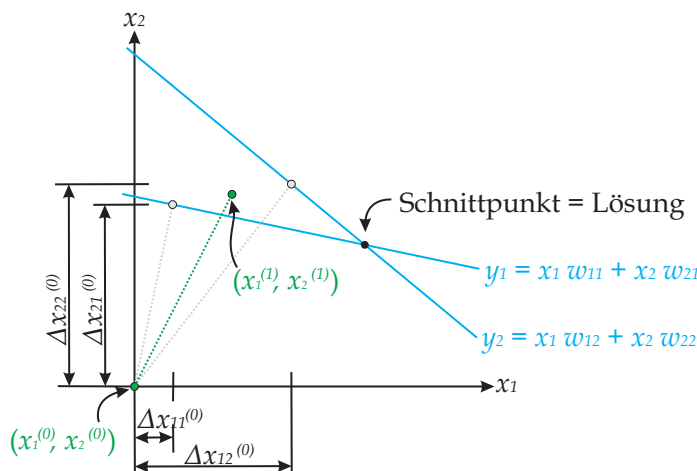


Abbildung 3.9: Erste Iteration mit der SIRT

Verlauf einer Rekonstruktion aus realen Röntgenbildern

Zum besseren Verständnis der Arbeitsweise der SART soll eine Rekonstruktion aus realen Röntgenbildern in ihrem iterativen Verlauf betrachtet werden. Als Testobjekt dient ein Aluminiumwerkstück. Abbildung 3.10 zeigt die verwendete Aufnahmegeometrie.

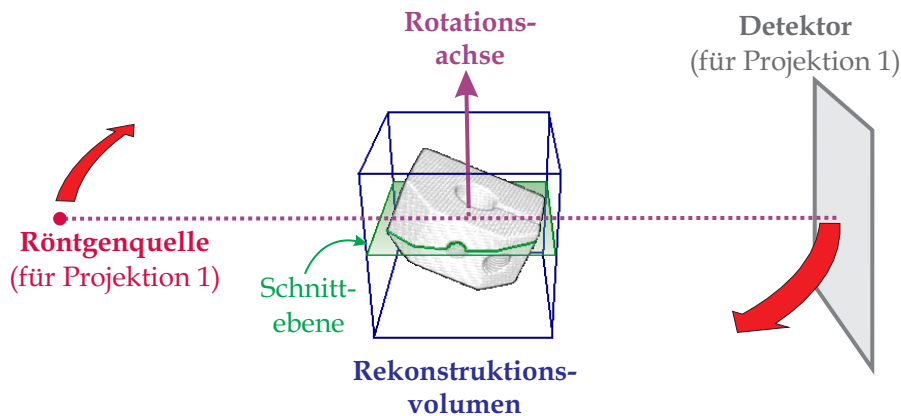


Abbildung 3.10: Geometrische Anordnung zur Aufnahme des Aluminiumwerkstückes (nicht maßstabsgerecht). Die roten Pfeile versinnbildlichen die Bewegungsrichtung von Röntgenquelle und Detektor für die Aufnahme der einzelnen Röntgenbilder.

Das Werkstück befindet sich im Zentrum der Anordnung, auf der Rotationsachse. Von der Rotationsachse in einem Abstand von 485 mm ist die Röntgenquelle angeordnet. Demgegenüber liegt stets der Detektor 290 mm von der Achse entfernt. Beide, die Röntgenquelle und der Detektor, drehen sich für die Aufnahme der einzelnen Röntgenbilder synchron in $2,195^\circ$ -Schritten um die Rotationsachse. Insgesamt werden 164 Röntgenbilder aufgenommen und damit 360° umschlossen. Reale Fehlereinflüsse, allem voran Rauschen, aber auch leichtes Wackeln des Werkstückes im Computertomografen, beeinträchtigen die Messung.

Der Detektor bildet eine quadratische Fläche von $51,2 \text{ mm} \times 51,2 \text{ mm}$ mit 128×128 Pixel. Das Volumen ist kubisch angelegt und weist eine Kantenlänge von 31 mm beziehungsweise 124 Voxel auf. Für die Rekonstruktion wird es mit Null initialisiert. Die Verarbeitung der Röntgenbilder erfolgt in der Reihenfolge ihrer Aufnahme.

Die Tabellen 3.1 und 3.2 zeigen Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen senkrecht zur Drehachse (in der in Abbildung 3.10 eingezeichneten Schnittebene) während der ersten Iteration, jeweils nach dem Korrekturschritt, das heißt nach der Verarbeitung aller Messwerte eines Röntgenbildes. Zu Beginn ist die Darstellung des Werkstückes noch sehr verschwommen. Aber mit jedem Korrekturschritt wird sie präziser. Langsam kristallisiert sich das Werkstück heraus.

In der Tabelle 3.3 sind Schnittbilder nach jeder Iteration zu sehen. Schon nach der ersten Iteration, wenn alle Röntgenbilder genau einmal berücksichtigt wurden, ist die grobe Form des Prüfobjektes erkennbar. Voxel, die im Inneren des Werkstückes liegen, besitzen ungefähr den Absorptionskoeffizienten von Aluminium. Die übrigen Voxel repräsentieren Luft. Ihr Absorptionskoeffizient beträgt annähernd Null. In den nachfolgenden Iterationen nimmt die Schärfe der Rekonstruktion zu. Nach zehn Iterationen sind die Oberflächen des Prüfobjektes klar herausgebildet.

Das Diagramm in Abbildung 3.11 gibt den iterativen Verlauf der Kosten Φ_{mess} (3.18) wieder.

$$\Phi_{mess} = \sum_{u=1}^U \left(y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu} \right)^2 \quad (3.18)$$

In der ersten Iteration fallen die Kosten aufgrund der unscharfen Darstellung des Werkstückes erwartungsgemäß hoch aus. Danach tendieren sie auf ein Minimum zu, welches jedoch aufgrund der realen Fehlereinflüsse ungleich Null ist. Einen mathematischen Beweis zur Konvergenz der SART erbringen [18] [36].

Tabelle 3.1: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes während der ersten Iteration der SART ($\lambda = 0,5$). Dargestellt sind Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen jeweils nach dem Korrekturschritt. Ein höherer Absorptionskoeffizient wird durch einen helleren Grauwert wiedergegeben.

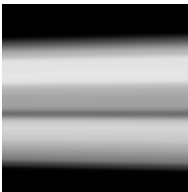
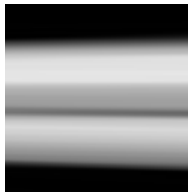
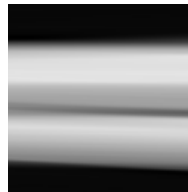
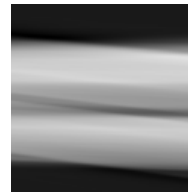
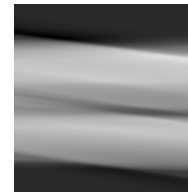
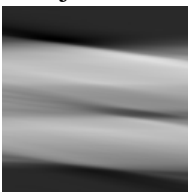
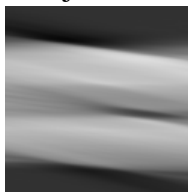
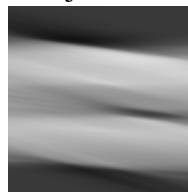
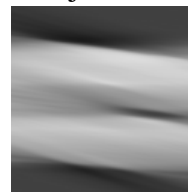
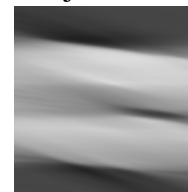
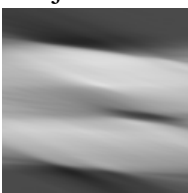
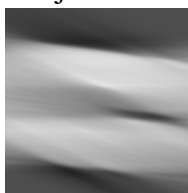
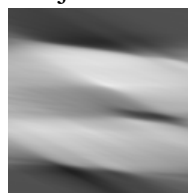











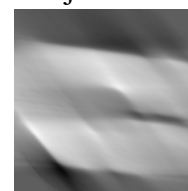





Projektion 1 	Projektion 2 	Projektion 3 	Projektion 4 	Projektion 5 
Projektion 6 	Projektion 7 	Projektion 8 	Projektion 9 	Projektion 10 
Projektion 11 	Projektion 12 	Projektion 13 	Projektion 14 	Projektion 15 
Projektion 16 	Projektion 17 	Projektion 18 	Projektion 19 	Projektion 20 
Projektion 21 	Projektion 22 	Projektion 23 	Projektion 24 	Projektion 25 
Projektion 26 	Projektion 27 	Projektion 28 	Projektion 29 	Projektion 30 

Tabelle 3.2: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes während der ersten Iteration der SART ($\lambda = 0,5$). Dargestellt sind Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen jeweils nach dem Korrekturschritt. Ein höherer Absorptionskoeffizient wird durch einen helleren Grauwert wiedergegeben.














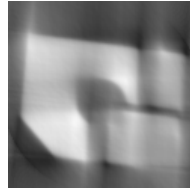
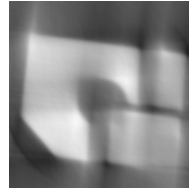
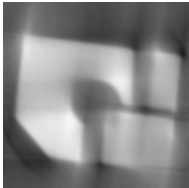
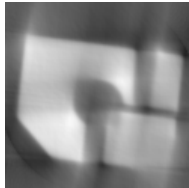
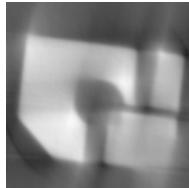
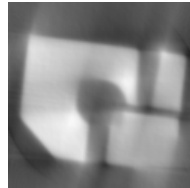
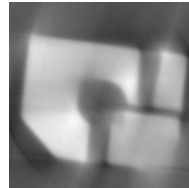
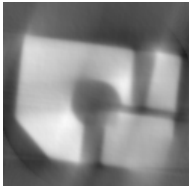
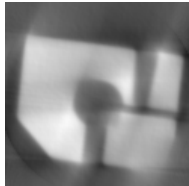
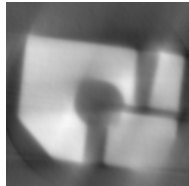
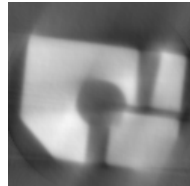




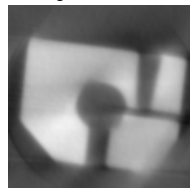
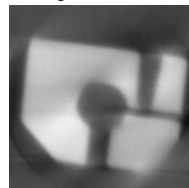
Projektion 31	Projektion 32	Projektion 33	Projektion 34	Projektion 35
				
Projektion 36	Projektion 37	Projektion 38	Projektion 39	Projektion 40
				
Projektion 41	Projektion 42	Projektion 43	Projektion 44	Projektion 45
				
Projektion 46	Projektion 47	Projektion 48	Projektion 49	Projektion 50
				
Projektion 51	Projektion 52	Projektion 53	Projektion 54	Projektion 55
				
Projektion 56	Projektion 57	Projektion 58	Projektion 59	Projektion 60
				

Tabelle 3.3: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes mit der SART ($\lambda = 0,5$). Dargestellt sind Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen pro Iteration.

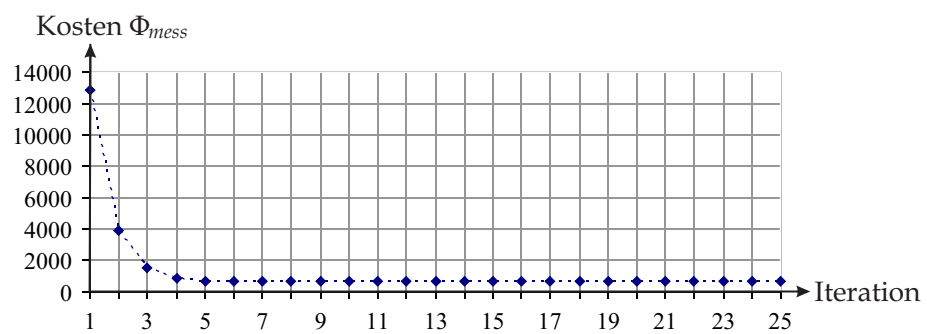
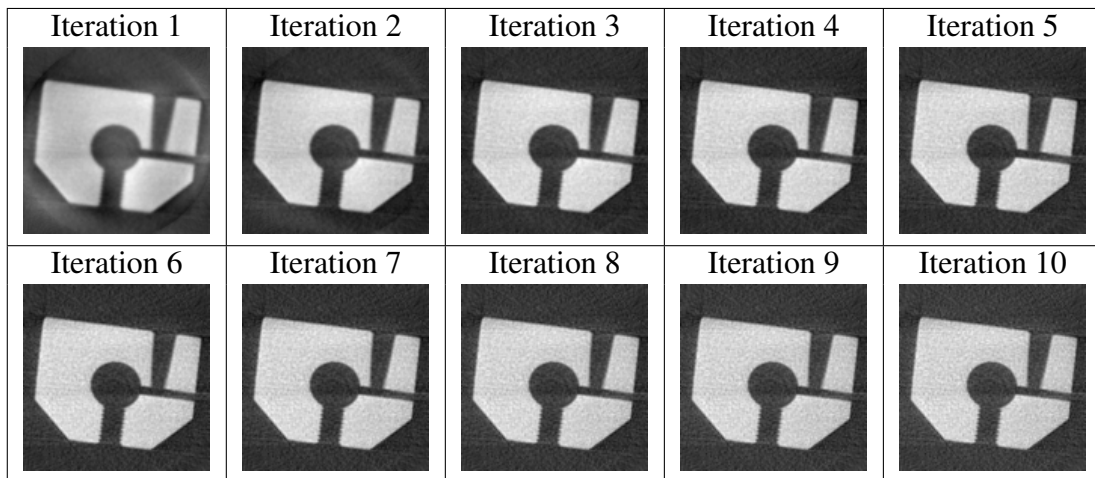


Abbildung 3.11: Verlauf der Kosten während der Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes mit der SART ($\lambda = 0,5$)

3.2 Problematik unvollständiger Datensätze

Diese Arbeit beschäftigt sich schwerpunktmäßig mit der Rekonstruktion von Prüfobjekten, die sich aufgrund ihrer Größe nicht in der traditionellen 360°-Rotation röntgen lassen. Hierzu zählen beispielsweise großformatige Platinen, Turbinenschaufeln oder Motoregehäuse. Sie versperren, wie in Abbildung 3.12 skizziert, die Umlaufbahn der Röntgenquelle, oder stoßen gegen den Detektor. Der Winkelbereich, den die aufgenommenen Röntgenbilder dann noch aufspannen, beträgt weniger als 180°. Der Datensatz ist unvollständig, das Gleichungssystem (3.8) unterbestimmt.

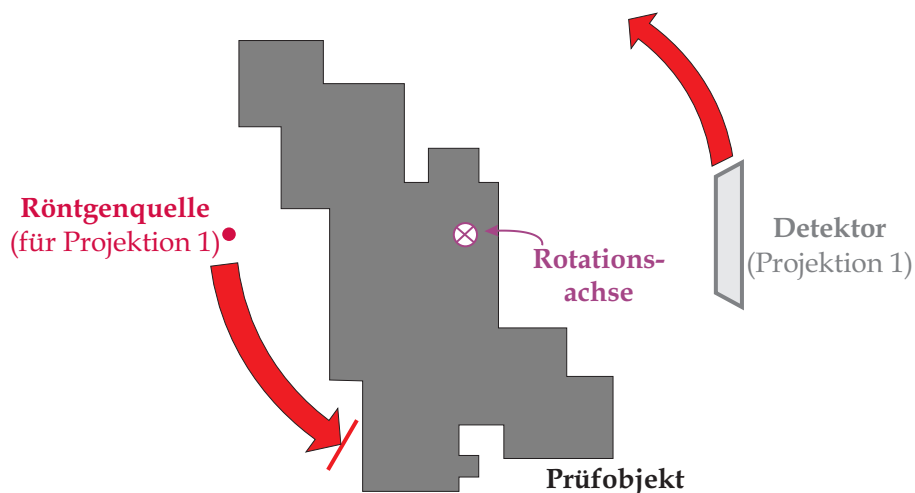


Abbildung 3.12: Eingeschränkte Aufnahmebedingungen bei einem sperrigen Prüfobjekt

Der in Tabelle 3.1 gezeigte Verlauf der Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes lässt bereits erahnen, wie sich ein beschränkter Winkelbereich auf das Rekonstruktionsergebnis auswirkt. Von Projektion 1 bis Projektion 30 sind 65° umfasst. Die Darstellung des Prüfobjektes ist stark verzerrt. Auch die Durchführung mehrerer Iterationen wird hier keine Verbesserung bewirken.

Tabelle 3.4 zeigt unterschiedliche Rekonstruktionen des Aluminiumwerkstückes jeweils nach 15 Iterationen. Für jede Rekonstruktion wurde ein Teil der Röntgenbilder aus dem Datensatz entfernt, so dass das Aufnahmeszenario eines beschränkten Winkelbereiches nachgestellt ist. Die Oberflächen, die senkrecht zur Hauptprojektionsrichtung liegen, erscheinen verschwommen. Die verschwommenen Bereiche sind umso größer, je kleiner der Winkelbereich ist, und zeigen charakteristischerweise kegelförmige Artefakte. Der Öffnungswinkel dieser Kegel entspricht annähernd dem Winkelbereich der Röntgenaufnahmen. Teilweise überlagern sich die Kegel benachbarter Oberflächen, wodurch beispielsweise der Luftspalt rechts im Schnittbild der 90°-Rekonstruktion fast gänzlich verschwindet.

Tabelle 3.4: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes aus Röntgenaufnahmen mit beschränktem Winkelbereich. Oben: Aufnahmegeometrie. Die strichpunktierte Linie markiert die Hauptprojektionsrichtung, die roten Pfeile versinnbildlichen die Trajektorie der Röntgenquelle. Unten: Schnittbilder durch die Rekonstruktionsvolumen jeweils nach der 15. Iteration.

150° Winkelbereich	120° Winkelbereich	90° Winkelbereich

3.3 Einbringen von a priori Wissen

Ein unterbestimmtes Gleichungssystem lässt grundsätzlich mehrere Lösungen zu. Das gilt auch für die Rekonstruktion aus Röntgenaufnahmen, die einen eingeschränkten Winkelbereich aufspannen: Verschiedene Lösungen für das Rekonstruktionsvolumen minimieren die Kosten Φ_{mess} (3.18). Wie bereits die in Tabelle 3.4 aufgeführten Ergebnisse zeigen steuert das klassische Rekonstruktionsverfahren in aller Regel zu einer falschen Lösung.

Abhilfe schafft hier die Einbeziehung von a priori Wissen. Wenn beispielsweise bekannt ist, dass das geröntgte Bauteil würfelförmig ist, so können alle Lösungen, die ein anderes, etwa kegelförmiges Objekt hervorbringen, als „unwahrscheinlich“ betrachtet und ausgeschlossen werden. Um nun eine Lösung zu finden, die sowohl von den Messdaten als auch vom a priori Wissen unterstützt wird, existieren in der Literatur verschiedene Ansätze. Manche [7] [15] [20] [32] [40] [43] [59] [70] definieren eine zweite Kostenfunktion Φ_{prior} , die umso höher ausfällt, je weniger das Rekonstruktionsvolumen im Einklang mit dem a priori Wissen steht (Abbildung 3.13). Dann wird allgemein versucht, die Summe

$$\Phi_{gesamt} = \alpha \cdot \Phi_{mess} + \beta \cdot \Phi_{prior} \quad (3.19)$$

unter Einsatz eines geeigneten Optimierungsverfahrens zu minimieren, wobei die Parameter α und β die Gewichtung des a priori Wissens gegenüber den Messdaten regeln sollen und im Vorfeld eingestellt werden. (Im Allgemeinen gilt $\alpha + \beta = 1$.) Eine Gewichtung ist an dieser Stelle unverzichtbar, denn üblicherweise sind die beiden Kostenfunktionen völlig unterschiedlicher Größenordnung. Φ_{mess} ist eine Summe über alle Messwerte, Φ_{prior} könnte – wenn, wie im angeführten Beispiel, eine Auswertung der Bauteilform stattfindet – von der Anzahl der Oberflächenvoxel abhängen, und Abstände zwischen der rekonstruierten Oberfläche und einer definierten Sollform messen. Oft werden α und β durch Tests bestimmt [7] oder, zum Beispiel in [20], aus einem golden sample geschätzt.

Andere Arbeiten [8] [9] [15] [17] [61] bauen auf den bewährten iterativen Rekonstruktionsverfahren (wie ART oder SART) auf. Zwischen den Iterationen wird das Rekonstruktionsvolumen modifiziert, so dass es der a priori gegebenen Gesetzmäßigkeit näher kommt. Im obigen Beispiel bietet sich für diese Modifikation ein leichtes „Geradebiegen“ des rekonstruierten Objektes hin zu einer Würfelform an. Anschließend erfolgt die Durchführung einer weiteren Iteration mit dem gewählten Rekonstruktionsverfahren, das heißt, es wird wieder versucht die Kosten Φ_{mess} (3.18) zu minimieren. War das Geradebiegen falsch, so werden die Messdaten die Rekonstruktion hin zu einer anderen (möglicherweise der „alten“) Lösung steuern. War es richtig, bleibt die Rekonstruktion im modifizierten Bereich unverändert, denn sie stellt eine Lösung dar, die sowohl von den Messdaten als auch vom a priori Wissen unterstützt wird. Natürlich kann es sich immer noch um die falsche Lösung handeln. Durch das Einbringen von a priori Wissen wird das Rekonstruktionsproblem nicht zwangsläufig eindeutig.

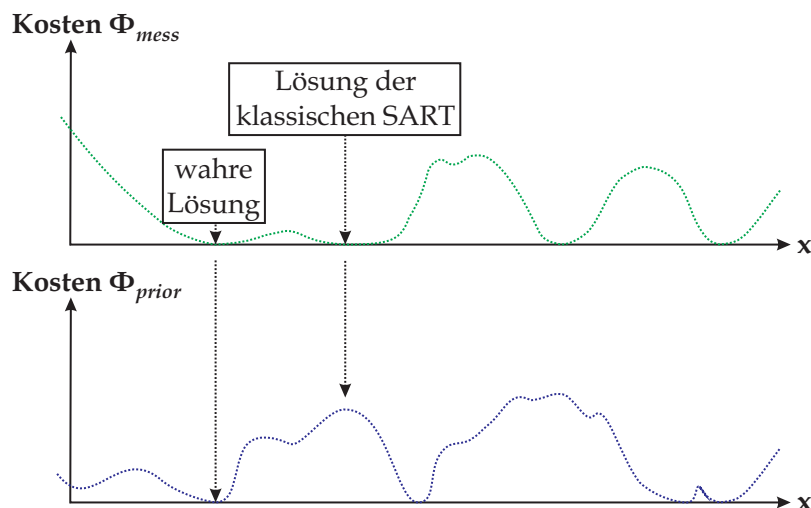


Abbildung 3.13: Verlauf der Kosten Φ_{mess} und Φ_{prior} für einen (fiktiven) Parameter x . Das klassische Rekonstruktionsverfahren liefert eine Lösung, die Φ_{mess} zwar minimiert, dennoch das Prüfobjekt nicht originalgetreu wiedergibt.

Dieser Arbeit stehen weder golden samples noch a priori Wissen über die Prüfobjektform zur Verfügung. Es kann lediglich auf Kenntnis von den Materialien, aus denen das Prüfobjekt gefertigt wurde, zurückgegriffen werden, genauer gesagt auf deren Absorptionskoeffizienten. Diese seien im Folgenden durch das Formelzeichen m_d beschrieben mit $d = 1 \dots M$ bei M verschiedenen Materialien, wobei die das Prüfobjekt umgebende Luft als Material mitgezählt wird. Es gilt $m_d < m_{d+1}$ für alle $d < M$. Mit der Forderung $x_v \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$ wird das Rekonstruktionsvolumen wertdiskret². Die Modifikation besteht in einer Diskretisierung entweder im gesamten Rekonstruktionsvolumen oder in Teilausschnitten [8] [9] [31] [33] [40] [59] [74]. Die beiden wichtigsten Entwicklungen in diesem Bereich sollen hier kurz präsentiert werden.

1. Röntgenstrahlung wird beim Durchqueren von Materie *abgeschwächt*. Der Absorptionskoeffizient kann demzufolge niemals negativ sein. Trotzdem tauchen in einem berechneten Rekonstruktionsvolumen Voxel mit einem negativen Absorptionskoeffizienten auf (siehe Abbildung 3.14). Die erste Modifikation sieht vor, nach jedem Korrekturschritt der SART, das heißt nach jeder Verarbeitung eines Röntgenbildes gemäß Gleichung (3.17), alle negativen Absorptionskoeffizienten auf Null zu setzen. Diese noch sehr vorsichtige Maßnahme bewirkt anders, als vielleicht zu vermuten ist, nicht nur eine Änderung der Voxel mit negativen Absorptionskoeffizienten, sondern durch den iterativen Prozess eine nachhaltige Verbesserung im gesamten Volumen. Denn hat ein Voxel, das Luft repräsentiert, einen negativen Absorptionskoeffizienten getragen, so musste das Rekonstruktionsverfahren zur Erfüllung der Gleichung $y_u = \sum x_v \cdot w_{vu}$ (zur Minimierung der Kosten Φ_{mess}) dafür anderen Voxeln einen entsprechend höheren Absorptionskoeffizienten zuweisen. Dank der Änderung des ersten Voxels im Modifikationsschritt kann das Rekonstruktionsverfahren selbstständig die Absorptionskoeffizienten der anderen Voxel senken. Dieser Sachverhalt lässt sich in dem in Abbildung 3.15 dargestellten Rekonstruktionsverlauf beobachten. Gestartet wird mit dem Rekonstruktionsvolumen der klassischen SART nach 15 Iterationen ohne Begrenzung des Wertebereiches der rekonstruierten Absorptionskoeffizienten. Das obere Diagramm zeigt den Verlauf der Absorptionskoeffizienten entlang einer Voxelreihe. In den beiden unteren Diagrammen ist zu sehen, wie sich die Absorptionskoeffizienten für 17 Luftvoxel in den ersten drei Korrekturschritten der sechzehnten Iteration ändern, wenn zum einen die klassische SART fortgesetzt wird (links dargestellt) und zum anderen fortan nach jedem Korrekturschritt negative Absorptionskoeffizienten auf Null gesetzt werden (rechts dargestellt). Die klassische SART ruft kaum eine Veränderung hervor. Das Nullsetzen der negativen Absorptionskoeffizienten bewirkt eine deutliche Verbesserung in der Rekonstruktion aller 17 Luftvoxel.
2. Die zweite Modifikation begrenzt zusätzlich den maximalen Absorptionskoeffizienten, der a priori aus der Menge $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$ bekannt ist. Nach jedem Korrekturschritt wer-

²In der Literatur ist für Anwendungen dieser Art auch der Begriff *Diskrete Tomografie* (DT) gebräuchlich.

den Voxel mit einem Absorptionskoeffizienten $x_v > m_M$ auf m_M gesetzt. Dieses Konzept wurde erstmals in [19] vorgeschlagen, und in [17] und [61] ausführlich behandelt.

Tabelle 3.5 stellt zusammenfassend die Ergebnisse der verschiedenen Rekonstruktionen des Aluminiumwerkstückes aus Röntgenbildern mit eingeschränktem Winkelbereich dar. Die obere Zeile gibt die bereits aus Tabelle 3.4 bekannten Schnittbilder der klassischen SART nach 15 Iterationen wieder. Die mittlere Zeile zeigt die entsprechenden Resultate bei Nullsetzen von negativen Absorptionskoeffizienten nach jedem Korrekturschritt. (Im Gegensatz zu der in Abbildung 3.15 behandelten Analyse erfolgt die Modifikation allerdings schon ab der ersten Iteration.) Es ist deutlich zu sehen, dass viele der in der Luft befindlichen Artefakte verschwinden. Auf Voxel im Bereich des Werkstückes hat die Modifikation keine erkennbare Auswirkung. Die dritte Zeile zeigt Schnittbilder der 15. Iteration, wenn nach jedem Korrekturschritt sowohl negative Absorptionskoeffizienten auf Null gesetzt werden als auch Absorptionskoeffizienten oberhalb des a priori bekannten Absorptionskoeffizienten von Aluminium $m_M = 0,006109$ den Wert $0,006109$ zugewiesen bekommen. Im gesamten Volumen ist eine deutliche Verbesserung festzustellen. Die verschwommenen Bereiche schrumpfen. Mit einem Winkelbereich von 150° kommt die Rekonstruktion einer originalgetreuen Darstellung des Werkstückes bereits sehr nahe.

Eine derartige Verbesserung der Rekonstruktion wird nicht erzielt, wenn sich das Prüfobjekt aus mehreren verschiedenen Materialien zusammensetzt ($M > 2$). Es ist nur eine verbesserte Darstellung der Luft und der Elemente, die den höchsten Absorptionskoeffizienten besitzen, zu erwarten. Alle übrigen Elemente bleiben artefaktbehaftet. Die meisten aus der Literatur bekannten Ansätze behandeln nur den Fall der sogenannten binären Rekonstruktion ($M = 2$). Sie scheitern beim Vorliegen mehrerer Materialien.

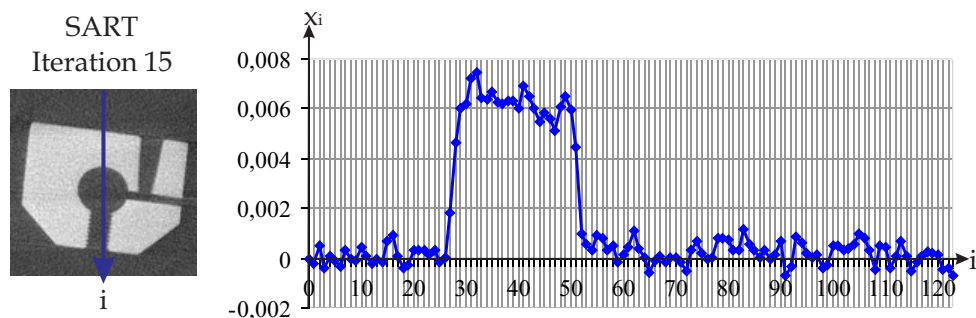


Abbildung 3.14: 360° -Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes nach 15 Iterationen. Links: Schnittbild durch das Volumen. Rechts: Verlauf der Absorptionskoeffizienten entlang der markierten Voxelreihe.

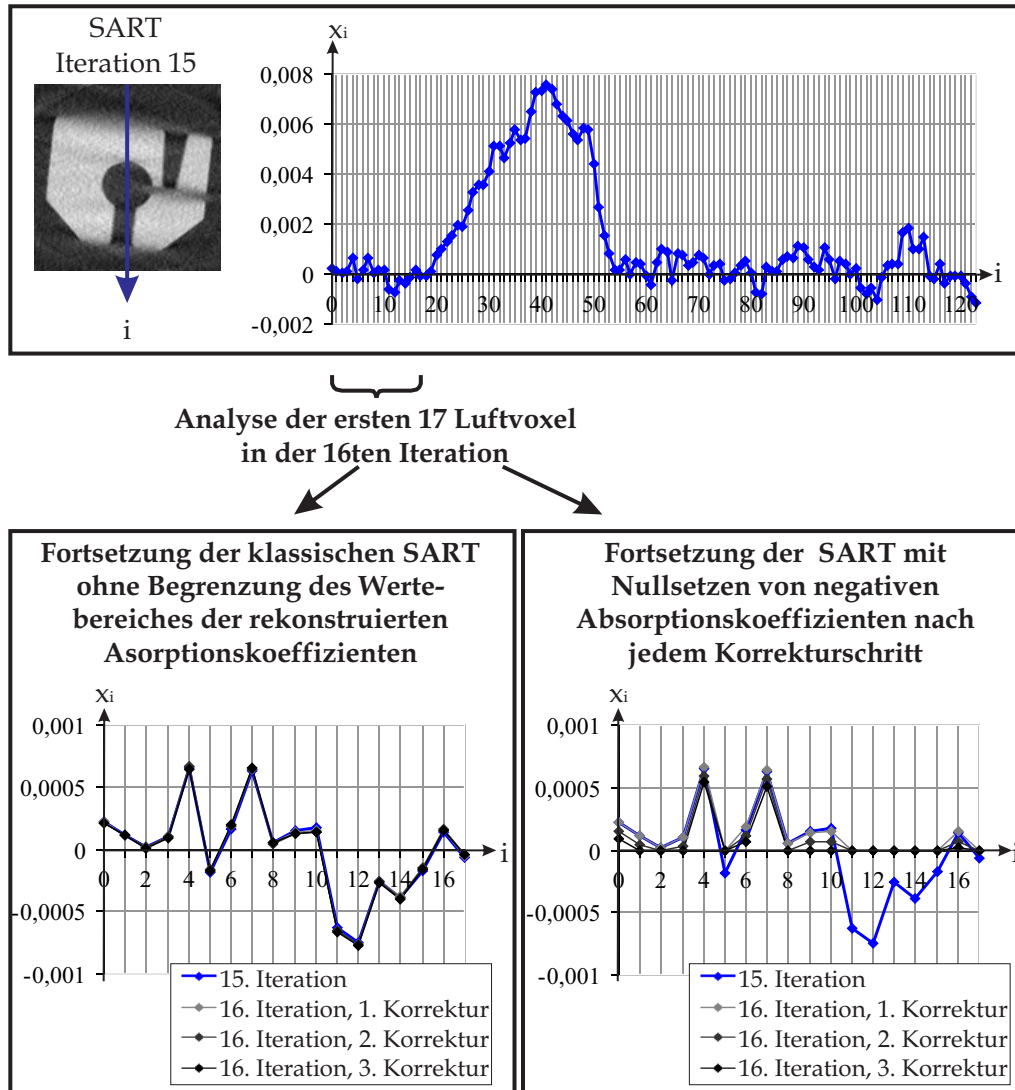
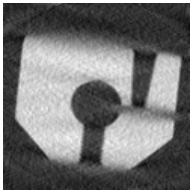


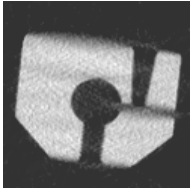
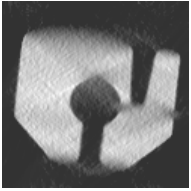
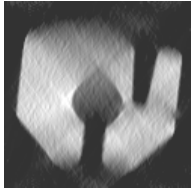

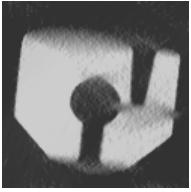



Abbildung 3.15: 150°-Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes. Oben: Schnittbild durch das Volumen der klassischen SART (ohne Begrenzung des Wertebereiches der rekonstruierten Absorptionskoeffizienten) nach 15 Iterationen sowie der dazugehörige Verlauf der Absorptionskoeffizienten entlang der markierten Voxelreihe. Unten: Analyse der 16ten Iteration in 17 Luftvoxeln bei Fortsetzung der klassischen SART sowie parallel dazu bei Nullsetzen negativer Absorptionskoeffizienten nach jedem Korrekturschritt der SART.

Tabelle 3.5: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes aus Röntgenaufnahmen mit beschränktem Winkelbereich (entsprechend Tabelle 3.4) bei unterschiedlicher Begrenzung des Wertebereiches der Absorptionskoeffizienten während der Rekonstruktion. Ein hellerer Grauwert repräsentiert stets einen höheren Absorptionskoeffizienten. Das Grauwertfenster reicht in jedem Schnittbild von -0,002 (schwarz) bis +0,008 (weiß).

Wertebereich der Rekonstruktion	150° Winkelbereich	120° Winkelbereich	90° Winkelbereich
$-\infty < x_v < +\infty$			
$0 \leq x_v < +\infty$			
$0 \leq x_v \leq 0,006109$			

4 Bewertung einer Rekonstruktion

Die im vorangegangenen Kapitel präsentierten Rekonstruktionen zeigen, dass geröntgte Prüfobjekte abhängig von den Aufnahmebedingungen teils originalgetreu wiedergegeben werden können, teils nicht. Spannen die Röntgenbilder beispielsweise einen eingeschränkten Winkelbereich auf, so entstehen Artefakte. Die Artefakte zu erkennen und einzugrenzen obliegt dem Anwender und seinem subjektiven Empfinden [41]. Bis heute existiert in der industriellen Praxis kein zuverlässiges Gütemaß, das in der Lage ist die Rekonstruktionsqualität *lokal*, das heißt explizit für jedes Voxel, durch einen Zahlenwert auszudrücken. Jedoch steckt in den Verfahren, die eine Verbesserung der Rekonstruktion anstreben, durchaus eine Unterscheidung „sicher“ und „unsicher“ rekonstruierter Voxel, wenn auch nicht im statistischen Sinne. Diese Verfahren werden im **Abschnitt 4.1** vorgestellt und ihre Grenzen aufgezeigt.

In **Abschnitt 4.2** wird eine neuartige Methode zur lokalen Bewertung einer Rekonstruktion hergeleitet, die sich durch eine stochastische Auswertung der Messdaten auszeichnet. Unter Verwendung dieses Ansatzes wird die Rekonstruktionsqualität durch eine Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, genauer gesagt durch die Wahrscheinlichkeit für die Existenz eines bestimmten Materials an der Position des untersuchten Voxels während des Röntgens.

Abschnitt 4.3 behandelt ein neues iteratives Rekonstruktionsverfahren, das durch Berücksichtigung des in Abschnitt 4.2 eingeführten Gütemaßes eine nachhaltige Verbesserung der Rekonstruktion bewirkt, auch dann, wenn die Aufnahmebedingungen nicht optimal zu sein scheinen.

4.1 Stand der Technik

Aus der Literatur sind verschiedene Ansätze bekannt, die eine Unterscheidung zwischen „sicher“ und „unsicher“ rekonstruierten Voxeln treffen und damit ein Rekonstruktionsvolumen lokal bewerten. Die im Abschnitt 3.3 vorgestellte Modifizierung zum Beispiel setzt Voxel mit negativen Absorptionskoeffizienten auf Null, weist sie demnach eindeutig der Luft zu. Voxel mit einem Absorptionskoeffizienten $x_v > m_M$ werden dem Material M zugeordnet. Für alle übrigen Voxel erfolgt keine Diskretisierung. Es ist „unsicher“, zu welchem Material sie gehören. Die Arbeit [19]

geht einen Schritt weiter und führt für die binäre Rekonstruktion ($M=2$) zwei dynamische, vom Iterationszähler k abhängige Schwellen $t_1(k)$ und $t_2(k)$ ein, wobei gilt: $m_1 < t_1(k) < t_2(k) < m_2$. Alle Voxel mit einem Absorptionskoeffizienten $x_v < t_1(k)$ werden auf m_1 gesetzt, alle Voxel mit $x_v > t_2(k)$ auf m_2 .

Es gibt in der Literatur zahlreiche weitere Ansätze, die zur Verbesserung der Rekonstruktion eine Diskretisierung in Teilbereichen des Volumens durchführen, unter anderem [17] [22] [61] [69]. Zur Bewertung eines Voxels wird der aktuell rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_v mit definierten Schwellen beziehungsweise den a priori bekannten Absorptionskoeffizienten der Materialien $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$ verglichen. Manche Voxel werden irrtümlich als „sicher“ angesehen und diskretisiert. Dieser Fall tritt beispielsweise in der in Abbildung 4.1 dargestellten Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes aus Röntgenaufnahmen mit einem Winkelbereich von 90° auf. Die Verzerrungen des Prüfobjektes fallen so stark aus, dass für viele Voxel im Luftspalt exakt der Absorptionskoeffizient des Aluminiums rekonstruiert wird. Sie werden bei einer Diskretisierung immer dem Aluminium zugerechnet und fälschlicherweise als „sicher“ bewertet.

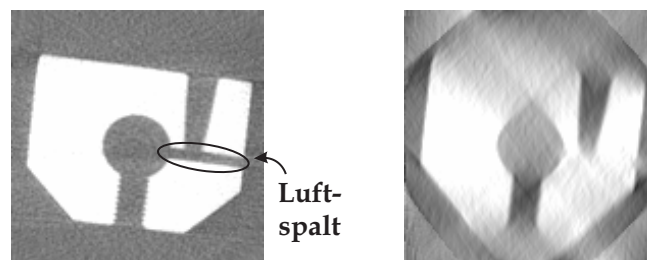


Abbildung 4.1: Rekonstruktion des Aluminiumwerkstückes aus Röntgenaufnahmen mit einem Winkelbereich von 360° (links) und 90° (rechts)

Einige Arbeiten zur Verbesserung einer Rekonstruktion beziehen die Absorptionskoeffizienten der Nachbarvoxel ein. Wenn davon ausgegangen werden kann, dass die geröntgten Prüfobjekte größer sind als ein Voxel, werden alle Voxel, die sich in ihrem Absorptionskoeffizienten stark von ihrer Umgebung unterscheiden, als „unsicher“ oder „falsch rekonstruiert“ angesehen [8] [9] [16] [40] [44] [70] [71]. Laut [4] wird in praktischen Anwendungen auch die Varianz in der lokalen Nachbarschaft eines Voxels ausgewertet, um unterschiedliche Computertomografen hinsichtlich ihrer Leistungsfähigkeit miteinander zu vergleichen. Eine hohe Varianz steht für hohes Rauschen und deutet auf eine schlechte Rekonstruktionsqualität hin. Ein sinnvoller Vergleich verschiedener Computertomografen kann allerdings nur für eine ausgewählte, feste Testszene und in einer als homogen angenommenen ROI (Region of Interest) durchgeführt werden. In [41] [65] und [66] wird die Varianz in einer ROI betrachtet, um unterschiedliche Rekonstruktionsalgorithmen zu bewerten.

Für die hier angestrebte Anwendung sind die existierenden Ansätze allesamt ungenügend. Verzerrte Bereiche in einer Rekonstruktion zeichnen sich weder dadurch aus, besonders verrauscht

zu sein, noch kann davon ausgegangen werden, dass in ihnen bestimmte Absorptionskoeffizienten nicht vorkommen.

4.2 Messdatengestützte Bewertung

Die aus der Literatur bekannten Ansätze zur lokalen Bewertung einer Rekonstruktion vernachlässigen die zur Verfügung stehenden Messdaten. Der folgende Abschnitt enthält eine kritische Analyse der Messdaten – das heißt der Röntgenaufnahmen – in Hinblick auf Informationen, die sie noch enthalten und die sich bei geeigneter Verarbeitung für eine lokale Bewertung eignen. Auf dieser Analyse aufbauend, und unter Einbeziehung des a priori Wissens über die Absorptionskoeffizienten der Materialien, aus denen das Prüfobjekt besteht, wird schließlich das Gütemaß *Averatio* hergeleitet.

Jeder nachfolgend beschriebene Verarbeitungsschritt wird beispielhaft an der in Abbildung 4.2 skizzierten Testszene demonstriert. Das Prüfobjekt liegt als mathematisch definiertes Parametermodell vor. Es handelt sich also nicht um ein reales Bauteil. Mit Hilfe der Software TAKE [48] erfolgt eine Umwandlung vom Parametermodell in ein Voxellmodell, wovon wiederum mathematisch Röntgenbilder generiert werden. In späteren Simulationen wird auf die generierten Röntgenbilder gaußsches Rauschen addiert, um reale Fehlereinflüsse nachzubilden.

Die Arbeit mit künstlichen Aufnahmeszenen bietet den Vorteil, dass mit dem Voxellmodell eine ideale Rekonstruktion, ein sogenanntes „Phantom“, zur Verfügung steht, mit dem die tatsächlichen Rekonstruktionsergebnisse optimal verglichen und auf Fehler untersucht werden können. Von realen Bauteilen gibt es kein Phantom. Bestenfalls liegen CAD-Daten vor, aber ob das gefertigte Bauteil dem Entwurf entspricht, ist fraglich. Und ob eine Rekonstruktion, selbst aus Röntgenaufnahmen mit einem Winkelbereich von 360° , das Bauteil wirklich originalgetreu wiedergibt, so dass sie als Vorlage dienen könnte, ist reine Spekulation.

Das hier verwendete, mathematisch definierte Prüfobjekt setzt sich aus acht einzelnen Quadern zusammen, die einem Kunststoff mit dem Absorptionskoeffizienten $m_2 = 0,01$ nachempfunden und von Luft ($m_1 = 0,00$) umgeben sind. Fünf der Quader weisen einen Hohlraum auf. (In späteren Tests werden sie mit einem dritten Material $m_3 = 0,025$ gefüllt.) Der große Quader enthält zwei Haarrisse. Diese sind in dem Schnittbild in Abbildung 4.3 sichtbar. Das Volumen besitzt eine Größe von $10\text{ mm} \times 10\text{ mm} \times 2\text{ mm}$ beziehungsweise $200 \times 200 \times 40$ Voxel. Der Detektor bildet eine Fläche von $20\text{ mm} \times 4\text{ mm}$ mit 200×40 Pixel. Zwei Aufnahmereihen werden betrachtet. Die erste Aufnahmereihe umfasst einen Winkelbereich von 360° (200 Röntgenbilder), die zweite 150° (83 Röntgenbilder). Der Abstand zwischen Röntgenquelle und Rotationsachse beträgt stets 400 mm, Röntgenquelle und Detektor sind 800 mm voneinander entfernt.

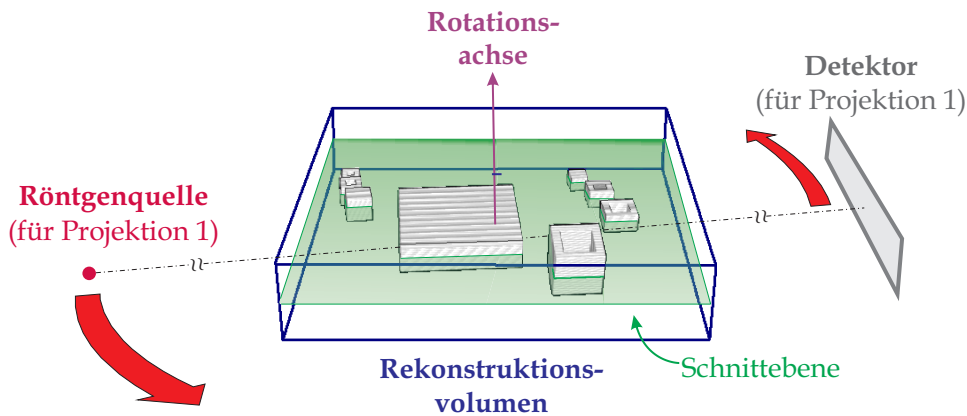


Abbildung 4.2: Geometrische Anordnung zur Aufnahme des ersten Röntgenbildes des künstlichen Prüfobjektes (nicht maßstabsgerecht). Die roten Pfeile versinnbildlichen die Bewegungsrichtung von Röntgenquelle und Detektor für die Aufnahme der nachfolgenden Röntgenbilder.

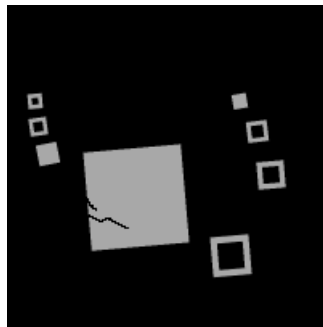


Abbildung 4.3: Schnittbild durch das Phantom des künstlichen Prüfobjektes in der in Abbildung 4.2 eingezeichneten Schnittebene

Aus den generierten Röntgenbildern wird mit der klassischen SART ($\lambda = 0,5$) das Prüfobjekt rekonstruiert (siehe Tabelle 4.1 und 4.2). Einziger Unterschied zu dem im Kapitel 3 beschriebenen Rekonstruktionsverfahren bildet die Reihenfolge, in der die Gleichungen verarbeitet werden. Während in den bisher betrachteten Simulationen die Gleichungen in der Reihenfolge ihrer Aufnahme zur Rekonstruktion herangezogen wurden, wird im Folgenden eine Umsortierung vorgenommen (nach dem in [47] beschriebenen Weighted Distance Projection Ordering Scheme), um die Konvergenz zu beschleunigen und Rechenzeit einzusparen. Nach wie vor wird in einer Iteration jede Gleichung genau einmal berücksichtigt. Auf eine Untersuchung verschiedener Sortieralgorithmen zur Optimierung der Rechenzeit wird verzichtet. Der Hauptaugenmerk der folgenden Analyse liegt auf der Bewertung eines Rekonstruktionsvolumens, das sich von Iteration zu Iteration nicht mehr wesentlich ändert. Dieser Zustand stellt sich bei der hier gewählten Testszene nach circa vier bis fünf Iterationen ein. Im Folgenden wird von jeder Aufnahmereihe jeweils die Rekonstruktion nach sechs Iterationen zur Analyse verwendet.

Tabelle 4.1: Rekonstruktion des künstlichen Prüfobjektes aus ungestörten Röntgenbildern der 360°-Aufnahmereihe. Dargestellt sind Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen der ersten, fünften und sechsten Iteration.

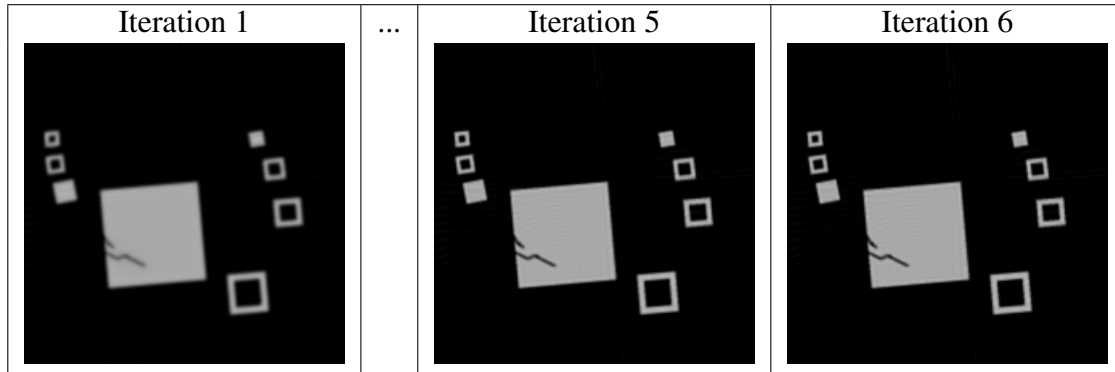
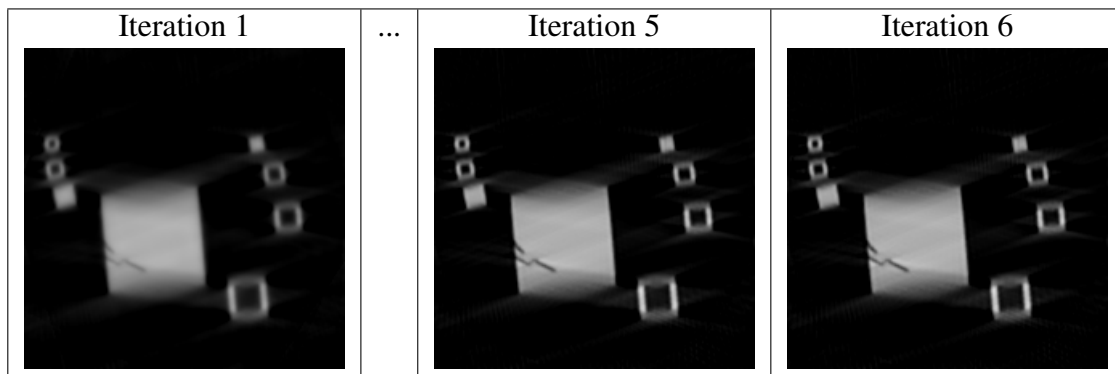


Tabelle 4.2: Rekonstruktion des künstlichen Prüfobjektes aus ungestörten Röntgenbildern der 150°-Aufnahmereihe. Dargestellt sind Schnittbilder durch das Rekonstruktionsvolumen der ersten, fünften und sechsten Iteration.



4.2.1 Analyse der lokalen Kosten

Der erste Schritt der Analyse der Messdaten baut auf den in Kapitel 3 eingeführten Kosten Φ_{mess} (3.18) auf. Wie bereits in Abbildung 3.11 demonstriert konvergieren die Kosten während des Rekonstruktionsvorganges mit der SART gegen ein Minimum. Im Idealfall ist dieses Minimum gleich Null, das heißt, in jedem Röntgenstrahl $u = 1 \dots U$ entspricht die Summe $\sum x_v w_{vu}$ exakt dem Messwert y_u . In der Praxis birgt ein Rekonstruktionsvolumen aber auch Fehler: In dem Beispiel aus Abbildung 3.11 führt Rauschen dazu, dass nicht in jedem Röntgenstrahl die Summe $\sum x_v w_{vu}$ mit dem Messwert y_u übereinstimmen kann, aber auch Oberflächenvoxel verursachen hier Abweichungen, da sie interpolationsbedingt immer etwas unscharf bleiben. (Abschnitt 4.2.3 geht näher auf diesen Umstand ein.) Die Kosten Φ_{mess} , die sich nach einigen Iterationsdurchläufen einstellen, weichen infolge der Fehler von Null ab. Das bedeutet, sie spiegeln schon die Rekonstruktionsqualität wider, allerdings global für ein komplettes Volumen.

Mit dem Ziel, die Rekonstruktion explizit an einem Voxel n zu bewerten, werden die lokalen Kosten $\Phi_{mess,n}$ (4.1) betrachtet.

$$\Phi_{mess,n} = \frac{\sum_{u=1}^U \left(y_u - \sum_{v=1}^V x_v \cdot w_{vu} \right)^2 \cdot w_{nu}}{\sum_{u=1}^U w_{nu}} \quad (4.1)$$

Von allen Röntgenstrahlen $u = 1 \dots U$, die aufgenommen wurden, werden nur diejenigen herangezogen, die das aktuell zu untersuchende Voxel n durchqueren, genauer gesagt alle Strahlen, die den *Interpolationsbereich* des Voxels n durchqueren, so dass der Wichtungsfaktor $w_{nu} \neq 0$ ist (siehe Abbildung 4.4). Von diesen Röntgenstrahlen werden in Analogie zu der Definition der globalen Kosten Φ_{mess} (3.18) die Differenzen $y_u - \sum x_v w_{vu}$ quadriert und gewichtet mit w_{nu} aufsummiert.

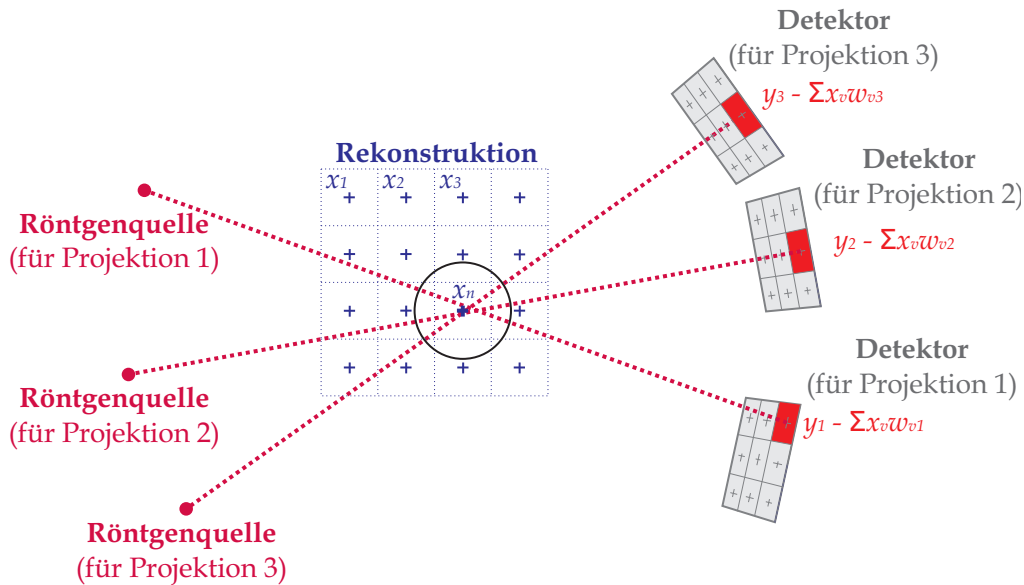
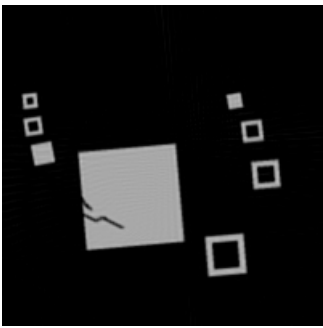
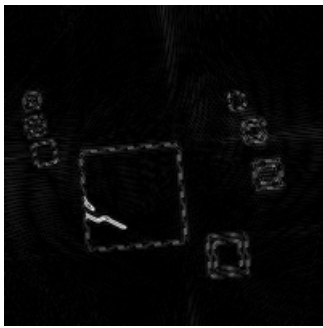
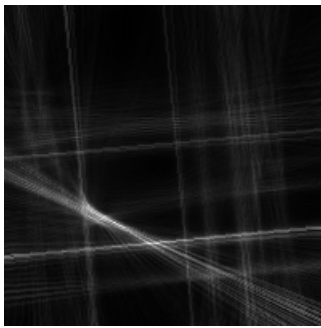


Abbildung 4.4: Prinzip der Auswahl der Röntgenstrahlen zur Bewertung eines Voxel n . Der schwarze Ring markiert beispielhaft den Interpolationsbereich des Voxels. (Bei Verwendung des Bessel-Kaiser-Filters (3.7) beträgt der Radius abweichend von dieser Skizze $\Lambda = 2 \cdot \Delta v$.) Prinzipiell durchqueren pro Röntgenbild mehrere Strahlen benachbarter Detektorpixel den Interpolationsbereich. Zur leichteren Zuordnung wird für die nachfolgend durchgeführte Analyse aus jedem Röntgenbild nur ein Strahl ausgewählt: Stets der Strahl, der dem Voxel am nächsten liegt (rot markiert).

Im Falle einer komplett fehlerfreien Rekonstruktion betragen die lokalen Kosten $\Phi_{mess,n}$ Null. Die Vermutung liegt nahe, dass ein „schlecht“ rekonstruiertes Voxel durch vergleichsweise hohe lokale Kosten hervortritt. Die Simulation in Tabelle 4.3 zeigt jedoch, dass viele eigentlich „gut“ rekonstruierte Voxel vergleichsweise hohe lokale Kosten besitzen und eine Unterscheidung „gut“ und „schlecht“ rekonstruierter Bereiche im Volumen unmöglich machen. Die linke Spalte der Tabelle 4.3 enthält ein Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen der 360°-Aufnahmereihe (der Testszene aus Abbildung 4.2). Es stellt das Prüfobjekt nahezu originalgetreu dar. Die mittlere Spalte zeigt für jedes Voxel den Betrag der Differenz zwischen dem aktuell rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n und dem entsprechenden Phantomwert. Je niedriger der Betrag ausfällt, desto dunkler ist der abgebildete Grauwert. Wie erwartet sind die Beträge fast überall im Volumen annähernd Null (schwarz dargestellt). Nur an Oberflächenvoxeln werden Abweichungen zwischen Phantom und Rekonstruktion verzeichnet. Das Schnittbild in der rechten Spalte zeigt die lokalen Kosten. Auch hier repräsentiert ein dunklerer Grauwert niedrigere lokale Kosten. Im wesentlichen sind die lokalen Kosten überall sehr niedrig. Allerdings durchziehen helle Streifen das Volumen. Um die Ursache hierfür ausmachen zu können werden beispielhaft zwei Voxel näher untersucht, die sich beide in der Luft befinden und praktisch fehlerfrei rekonstruiert sind. Ihre Absorptionskoeffizienten weichen um weniger als 0,0001 von dem Absorptionskoeffizienten der Luft ab. Zum Vergleich: Der Absorptionskoeffizient des Kunststoffmaterials beträgt 0,01. Die Positionen der beiden Beispielvoxel sind in Abbildung 4.5 durch ein blaues und ein grünes Kreuz gekennzeichnet. Das blau markierte Voxel besitzt im Gegensatz zu dem grün markierten Voxel überproportional hohe lokale Kosten.

Tabelle 4.3: 360°-Aufnahmereihe des künstlichen Prüfobjektes. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Betrag der Differenz zwischen Phantom und Rekonstruktion. Rechts: Lokale Kosten. Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

Rekonstruktion	Phantom - Rekonstruktion	Lokale Kosten
Grauwertfenster: 0 bis 0,015 	Grauwertfenster: 0 bis 0,005 	Grauwertfenster: 0 bis 0,00005 

Dem Diagramm in Abbildung 4.6 können für beide Beispielvoxel die der Berechnung der lokalen Kosten zugrundeliegenden quadratischen Differenzen $(y_r - \sum x_v w_{vr})^2$ der einzelnen

Röntgenstrahlen entnommen werden, wobei $r = 1 \dots R$ die Röntgenbildnummer in der Reihenfolge der Aufnahme angibt. Der einfacheren Übersicht halber wird pro Röntgenbild nur ein Strahl analysiert, und zwar der Strahl, der den größten Wichtungsfaktor besitzt und damit dem aktuell untersuchten Voxel am nächsten kommt (Abbildung 4.4). Abbildung 4.6 zeigt, dass die Strahlen, die das grün markierte Beispielvoxel betreffen, in ihren quadratischen Differenzen nur unwesentlich von Null abweichen. Am blau markierten Voxel tauchen zwei deutliche Ausreißer auf. Der erste Ausreißerstrahl befindet sich bei $r = 47$. In Abbildung 4.7 ist seine geometrische Lage durch die hellblaue Linie angegeben. Der zweite Ausreißerstrahl liegt bei $r = 147$. Er ist gegenüber dem ersten Ausreißerstrahl um 180° versetzt. Beide Strahlen streifen die Oberfläche des großen Quaders und damit extrem viele Oberflächenvoxel. Die in den Oberflächenvoxeln vorhandenen Fehler akkumulieren sich in der Summe $\sum x_v w_{vr}$. Schlussendlich weicht die quadratische Differenz $(y_r - \sum x_v w_{vr})^2$ stark von Null ab und treibt die lokalen Kosten in die Höhe. Das bedeutet, ein Ausreißerstrahl dominiert die Bewertung aller Voxel, die sich auf dem Strahl befinden. Auch an „gut“ rekonstruierten Voxeln ergeben sich demzufolge hohe lokale Kosten.

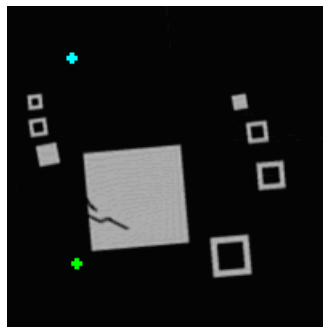


Abbildung 4.5: Positionen zweier Beispielvoxel in der Rekonstruktion des künstlichen Prüfobjektes markiert durch das blaue und das grüne Kreuz

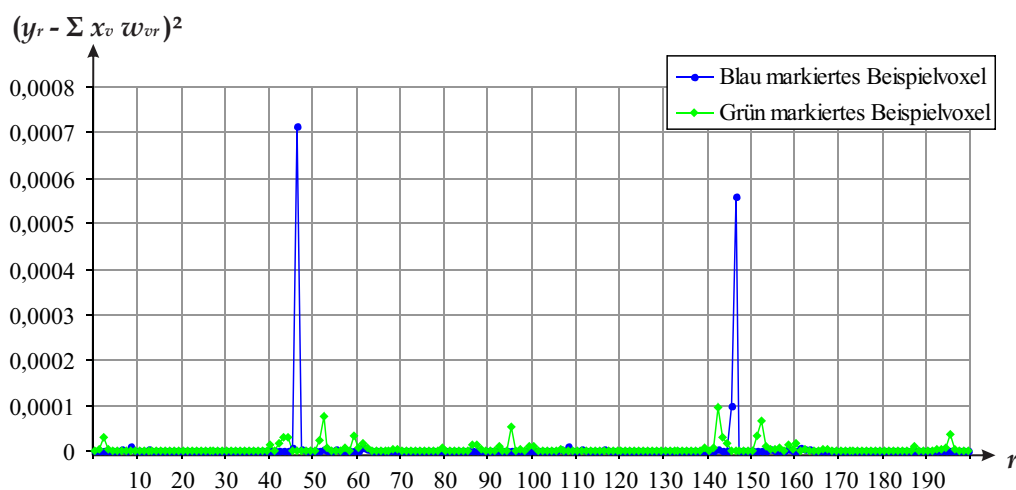


Abbildung 4.6: Messung der quadratischen Differenzen $(y_r - \sum x_v w_{vr})^2$ mit $r = 1 \dots 200$ an den beiden in Abbildung 4.5 markierten Voxelpositionen

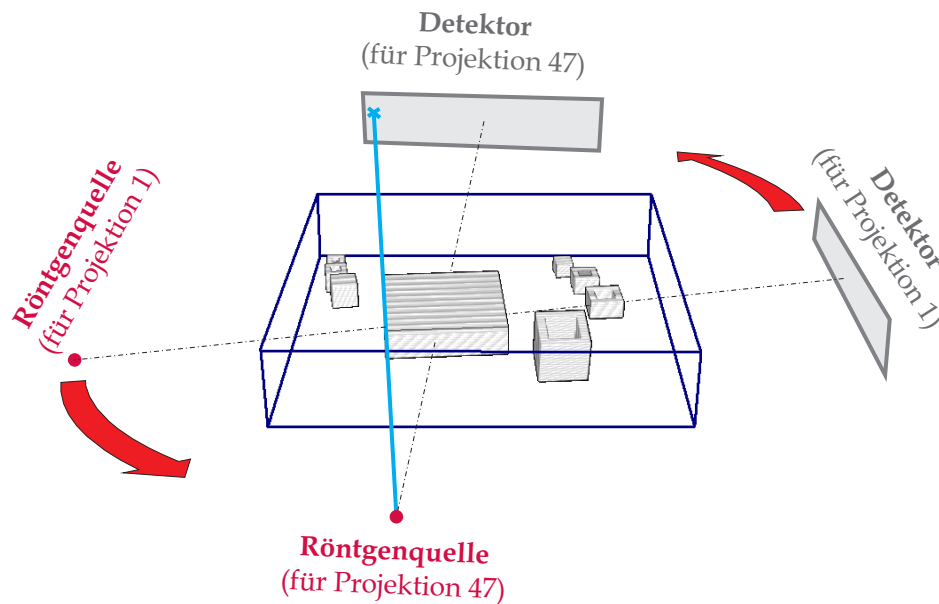


Abbildung 4.7: Skizze der geometrischen Anordnung zur Aufnahme des 47ten Röntgenbildes des künstlichen Prüfobjektes. Die hellblaue Linie kennzeichnet den Verlauf des Ausreißerstrahls, der unter anderem den Interpolationsbereich des in Abbildung 4.5 blau markierten Beispielvoxels durchquert.

Tabelle 4.4 fasst die Simulationsergebnisse der 150°-Aufnahmereihe zusammen. Infolge der Beschränkung des Winkelbereiches erscheinen in der Rekonstruktion die Quader verzerrt. Jedoch herrschen in den verzerrten Bereichen nicht auffallend hohe lokale Kosten vor. Statt dessen tauchen mehr Ausreißer auf, die im Schnittbild der lokalen Kosten helle Streifen hinterlassen und die Bewertung prägen.

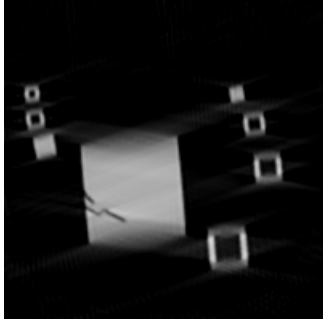
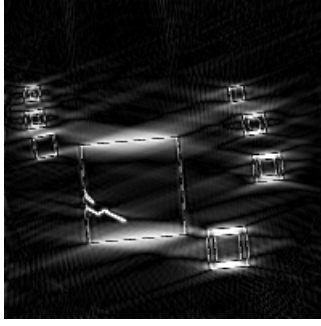
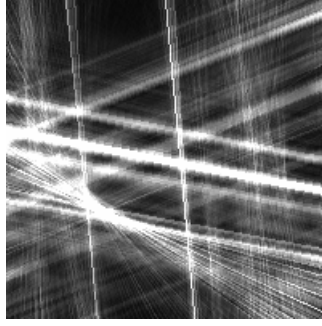
Als Quintessenz folgt aus der Analyse, dass die lokalen Kosten $\Phi_{mess,n}$ (4.1) als Gütemaß ungeeignet sind. Ausreißerstrahlen, das heißt Strahlen mit großer Differenz zwischen Messwert y_u und Summe $\sum x_v w_{vu}$, dominieren die Bewertung, während jene Strahlen, deren Messwert y_u exakt der Summe $\sum x_v w_{vu}$ entspricht, zum Gütemaß nur einen Wert von Null akkumulieren und zur Bewertung kaum beitragen.

4.2.2 Histogrammbasierte Analyse der Projektionsfehler

Die Differenz zwischen dem Messwert y_u und der Summe $\sum x_v w_{vu}$ in einem Strahl u wird im Folgenden als Projektionsfehler ε_u (4.2) bezeichnet.

$$\varepsilon_u = y_u - \sum_{v=1}^V x_v \cdot w_{vu} \quad (4.2)$$

Tabelle 4.4: 150°-Aufnahmereihe des künstlichen Prüfobjektes. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Betrag der Differenz zwischen Phantom und Rekonstruktion. Rechts: Lokale Kosten. Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

Rekonstruktion	Phantom - Rekonstruktion	Lokale Kosten
Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0 bis 0,005	Grauwertfenster: 0 bis 0,00005
		

In den im vorangegangenen Abschnitt 4.2.1 behandelten lokalen Kosten sind Strahlen mit kleinen Projektionsfehlern schlichtweg untergegangen. Im Folgenden werden die Projektionsfehler der einzelnen Röntgenstrahlen, die (entsprechend Abbildung 4.4) den Interpolationsbereich ausgewählter Beispielvoxel durchqueren, statt wie in Abbildung 4.6 in einem Diagramm nun in ihrer *Häufigkeitsverteilung* analysiert. Diese Herangehensweise erlaubt, jedem Strahl gleichviel Gewicht beizumessen, Strahlen mit großen Projektionsfehlern auszublenden, Strahlen mit kleineren Projektionsfehlern dafür näher zu untersuchen, und ihnen mögliche Informationen zu „entlocken“, die sich für eine Bewertung eignen.

Neben den beiden bereits behandelten Beispielvoxeln (aus Abbildung 4.5) werden zwei weitere Voxel untersucht. Ihre Positionen sind in Abbildung 4.8 durch ein rotes und ein gelbes Kreuz gekennzeichnet. Das rote Kreuz markiert ein Oberflächenvoxel und damit eine Stelle, die grundsätzlich nur unscharf rekonstruiert werden kann. Das gelb markierte Voxel befindet sich im Inneren des großen Quaders und besitzt sowohl in der Rekonstruktion der 360°-Aufnahmereihe als auch bei Beschränkung des Winkelbereiches auf 150° annähernd den Absorptionskoeffizienten des Kunststoffmaterials $m_2 = 0,01$. Die rekonstruierten Absorptionskoeffizienten der vier Beispielvoxel für beide Aufnahmereihen sind der Tabelle 4.5 zu entnehmen. Abbildung 4.9 zeigt die entsprechenden Histogramme der Projektionsfehler.

Die Histogramme der Projektionsfehler, die an den vier Beispielvoxeln aus der 360°-Aufnahmereihe gemessen werden können, sind auf der linken Seite der Abbildung 4.9 dargestellt. Es ist festzustellen, dass die beiden bereits im vorherigen Abschnitt behandelten Luftvoxel (blau und grün markiert) sich in ihren Histogrammen kaum voneinander unterscheiden. Die meisten Röntgenstrahlen liegen mit ihrem Projektionsfehler im Intervall von -0,001 bis +0,001.

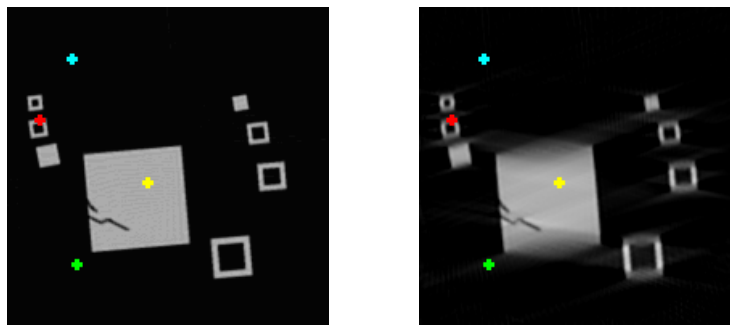


Abbildung 4.8: Positionen ausgewählter Beispielvoxel in der Rekonstruktion der 360°-Aufnahmereihe (links) und 150°-Aufnahmereihe (rechts)

Tabelle 4.5: Rekonstruierte Absorptionskoeffizienten der Beispielvoxel in Abbildung 4.8

Voxel	360°-Aufnahmereihe	150°-Aufnahmereihe
blau	-0,00006	-0,00004
grün	0,00001	0,00116
rot	0,00904	0,00535
gelb	0,01015	0,01067

Für das blau markierte Voxel sind es 84%, für das grün markierte Voxel 71%. Eine ähnliche Verteilung wird an dem gelb markierten Voxel registriert. Einzig das rot markierte Voxel zeigt eine geringfügig breitere Streuung der Projektionsfehler, die von den interpolationsbedingten Unstimmigkeiten der Rekonstruktion an Oberflächen hervorgerufen wird. An dem vergleichsweise „gut“ rekonstruierten, blau markierten Voxel dagegen lassen sich größere Abweichungen der Projektionsfehler von Null lediglich in zwei Strahlen (von insgesamt 200 Strahlen) ausmachen. Diese beiden Ausreißerstrahlen haben wenig Einfluss auf die Häufigkeitsverteilung. Somit bietet das Histogramm eine bessere Basis zur Entwicklung eines Gütemaßes als die lokalen Kosten.

Die Histogramme auf der rechten Seite der Abbildung 4.9 zeigen die entsprechenden Ergebnisse der 150°-Aufnahmereihe. Für jedes Voxel ergibt sich eine breitere Verteilung als in der 360°-Aufnahmereihe, vor allem für das grün markierte Voxel und das rot markierte Voxel. Das rot markierte Voxel liegt mitten in der verzerrten Darstellung der Quaderoberfläche, das heißt in einem Bereich, in dem sich die Rekonstruktion extrem vom Original unterscheidet. Auch das grün markierte Voxel weicht in seinem Absorptionskoeffizienten stärker vom Original ab (siehe Tabelle 4.5). Von Artefakten weitgehend verschont ist sowohl das blau als auch das gelb markierte Voxel. In beiden Fällen besitzen mehr als 50% der Strahlen einen Projektionsfehler zwischen -0,001 und +0,001.

Die Häufigkeitsverteilung der Projektionsfehler ε_u gibt Aufschluss über die lokale Rekonstruktionsqualität. Je „sicherer“ der Absorptionskoeffizient rekonstruiert ist, desto stärker ist die Konzentration der Projektionsfehler um Null.

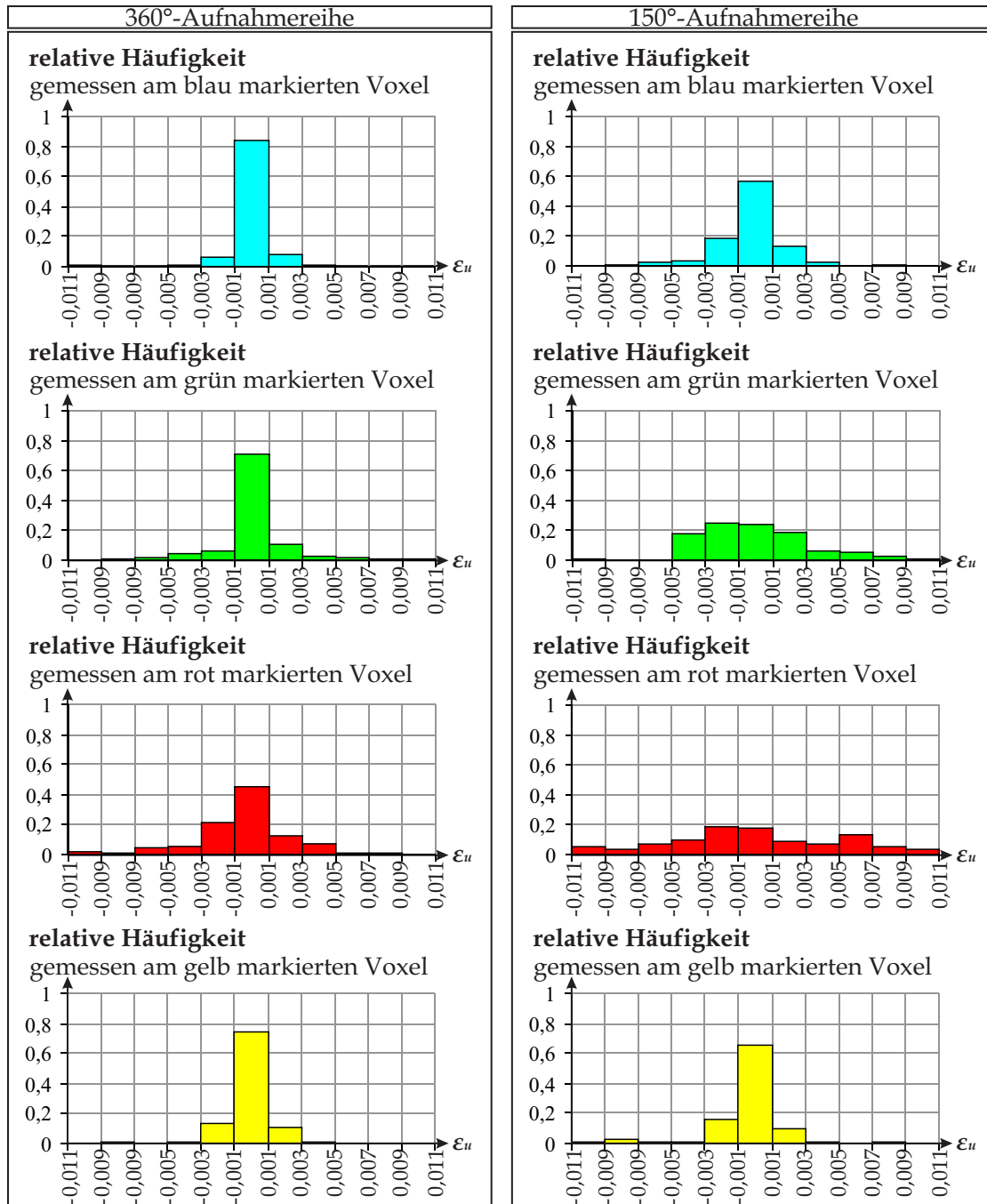


Abbildung 4.9: Histogramme der Projektionsfehler ϵ_u der einzelnen in Abbildung 4.8 markierten Beispielveoxel (in identischer Farbcodierung)

4.2.3 Herleitung eines stochastischen Gütemaßes

Die Häufigkeitsverteilung der Projektionsfehler ε_u schafft, wie im vorangegangenen Abschnitt 4.2.2 dargelegt, eine geeignete Basis zur Auswertung der Messdaten und zur Bewertung einer Rekonstruktion explizit an einem Voxel. Je „unsicherer“ der Absorptionskoeffizient des Voxels rekonstruiert ist, desto häufiger weichen die Projektionsfehler von Null ab. Im Folgenden soll zusätzlich aus dem a priori Wissen, das zur Verfügung steht, Nutzen gezogen werden.

Einbringen von a priori Wissen

Die Absorptionskoeffizienten der Materialien, aus denen das Prüfobjekt besteht, sind a priori bekannt und beschrieben durch das Formelzeichen m_d mit $d = 1..M$ bei M verschiedenen Materialien, wobei „Luft“ als Material mitgezählt wird. Grundsätzlich gilt $m_d < m_{d+1}$ für alle $d < M$.

Nur in den seltensten Fällen entspricht der mittels klassischer Verfahren rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n eines Voxels n exakt einem der zur Auswahl stehenden Materialien. Wird jetzt (testweise) an der Position des Voxels der Absorptionskoeffizient eines Materials m_d eingesetzt, so ergibt sich in einem Röntgenstrahl u , der den Interpolationsbereich des Voxels n durchquert, ein neuer Projektionsfehler $e_u(x_n = m_d)$ (4.3), der gegenüber dem ursprünglichen Projektionsfehler ε_u (4.2) um den Faktor $w_{nu}(x_n - m_d)$ verschoben ist.

$$e_u(x_n = m_d) = y_u - \sum_{\substack{v=1 \\ v \neq n}}^V (x_v \cdot w_{vu}) - m_d \cdot w_{nu} \quad (4.3)$$

Werden nacheinander die Absorptionskoeffizienten aller Materialien, die in der Aufnahmeszene vorkommen, an der Position des Voxels n eingesetzt, so lässt sich anhand der unterschiedlichen Projektionsfehler $e_u(x_n = m_1)$, $e_u(x_n = m_2)$, ..., $e_u(x_n = m_M)$ feststellen, welches Material von dem Strahl u optimal unterstützt wird. Es ist grundsätzlich das Material, dessen Projektionsfehler am nächsten bei Null liegt (siehe Abbildung 4.10).

Wie im vorangegangenen Abschnitt sollen nun alle Röntgenstrahlen betrachtet werden, die entsprechend Abbildung 4.4 den Interpolationsbereich des aktuell zu untersuchenden Voxels n durchqueren. Durch das Einsetzen eines bestimmten Absorptionskoeffizienten m_d an der Position des Voxels n wird in jedem Strahl der Faktor $w_{nu}(x_n - m_d)$ zum ursprünglichen Projektionsfehler ε_u (4.2) addiert. Dieser Faktor hat zwar für jeden Strahl das selbe Vorzeichen, aber der ursprüngliche Projektionsfehler schwankt um Null (vergleiche Histogrammanalyse in Abschnitt 4.2.2). Von daher ist anzunehmen, das nicht jeder Strahl dasselbe Material unterstützt. Diese Gegebenheit demonstriert Abbildung 4.11.

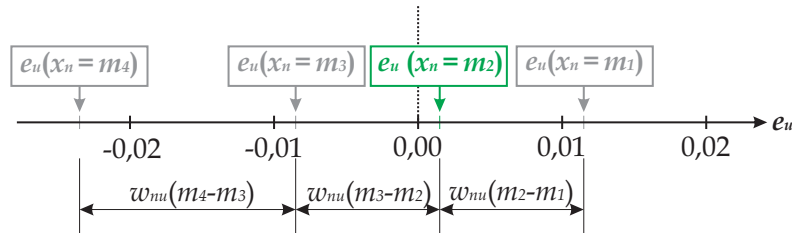


Abbildung 4.10: Projektionsfehler eines fiktiven Testvoxels n in einem Röntgenstrahl u ($w_{nu} = 1$) bei Einsetzen der Absorptionskoeffizienten vier verschiedener Materialien $m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$. Material 2 liefert den kleinsten Projektionsfehlerbetrag.

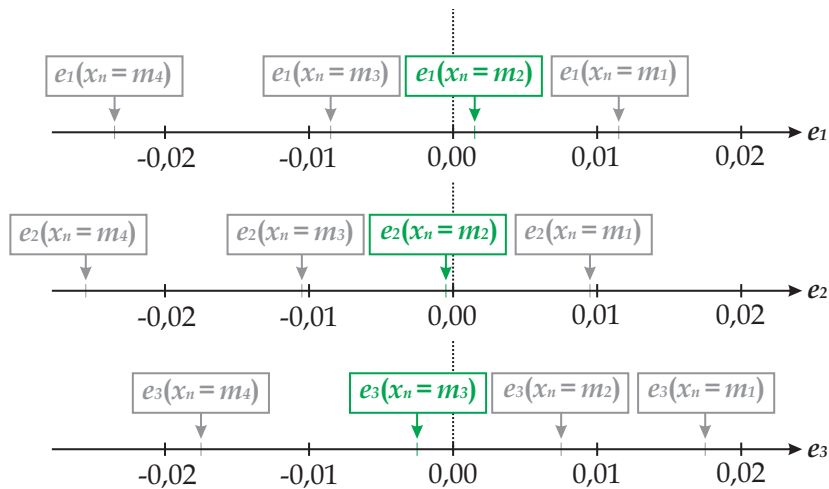


Abbildung 4.11: Beobachtung der Projektionsfehler in drei Röntgenstrahlen $u = 1$, $u = 2$ und $u = 3$, die ein fiktives Testvoxel n durchqueren. An der Position des Testvoxels werden die Absorptionskoeffizienten $m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$ eingesetzt. Zur Vereinfachung gilt $w_{n1} = w_{n2} = w_{n3} = 1$. Die Strahlen $u = 1$ und $u = 2$ zeigen für m_2 den kleinsten Projektionsfehlerbetrag, Strahl $u = 3$ dagegen für m_3 .

Die Vermutung liegt nahe, dass die Anzahl der Strahlen, die ein bestimmtes Material d unterstützen, die Rekonstruktionsqualität an der Position des ausgewählten Voxels widerspiegelt.

Definition der Unterstützung

Per Definition sei die Anzahl der Strahlen, die ein bestimmtes Material d „unterstützen“, gleichbedeutend mit der Anzahl der Strahlen, deren Projektionsfehler nach dem Einsetzen von m_d ausreichend nah bei Null liegt. „Ausreichend nah bei Null“ heißt, der Projektionsfehler liegt zwischen den Grenzen $-1/2 \cdot w_{nu}(m_d - m_{d-1})$ und $+1/2 \cdot w_{nu}(m_{d+1} - m_d)$, denn dann wird weder das Material mit dem nächst größeren Absorptionskoeffizienten m_{d+1} noch das Material mit dem

nächst kleineren Absorptionskoeffizienten m_{d-1} unterstützt. Diese alternative Zählweise veranschaulicht Abbildung 4.12.

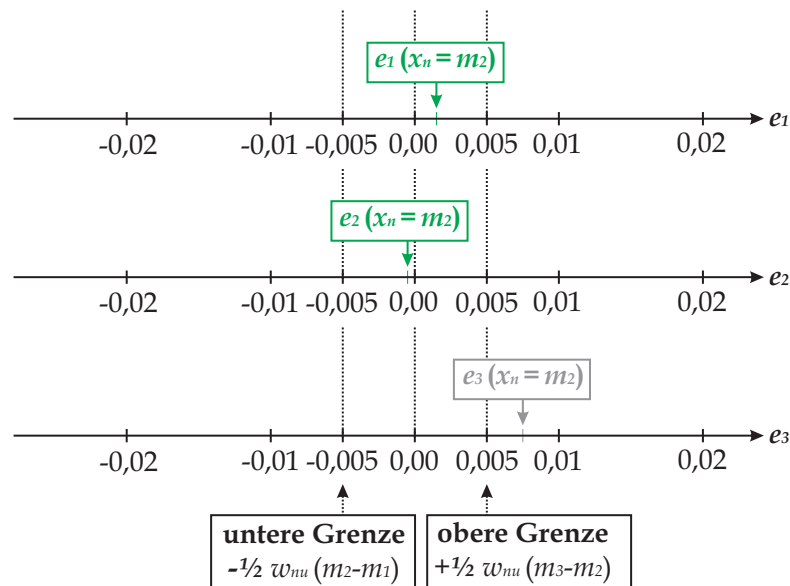


Abbildung 4.12: Beobachtung der Projektionsfehler aus dem Beispiel in Abbildung 4.11 explizit für Material 2. Die Projektionsfehler der Strahlen $u = 1$ und $u = 2$ liegen zwischen $-1/2 \cdot w_{nu}(m_2 - m_1)$ und $+1/2 \cdot w_{nu}(m_3 - m_2)$. Das heißt, diese beiden Strahlen unterstützen das Material 2. Im Strahl $u = 3$ findet das Material 2 keine Unterstützung.

Es sei darauf hingewiesen, dass die beiden Grenzen $-1/2 \cdot w_{nu}(m_d - m_{d-1})$ und $+1/2 \cdot w_{nu}(m_{d+1} - m_d)$ nur für die Prüfung der Materialien $d = 2 \dots (M - 1)$ gelten. Für das Material $d = 1$ (in der Regel „Luft“) reicht die untere Grenze bis $-\infty$, da unmöglich ein kleinerer Absorptionskoeffizient als der des Materials 1 an der Position eines untersuchten Voxels existieren kann. Das bedeutet, ein Strahl mit einem Projektionsfehler $e_u(x_n = m_1)$, der extrem weit im Negativen liegt, wird bei der Bestimmung der Anzahl der Strahlen, die das Material 1 unterstützen, mitgezählt, obwohl sein Projektionsfehler weit entfernt von Null ist, denn alle anderen Projektionsfehler $e_u(x_n = m_2)$, $e_u(x_n = m_3)$, ..., $e_u(x_n = m_M)$ befinden sich noch weiter im Negativen (Abbildung 4.13 und 4.14). Gleichermäßen wird die obere Grenze für das Material, das in der Aufnahmeszene den größten Absorptionskoeffizienten m_M besitzt, auf $+\infty$ gesetzt.

Normierung der Projektionsfehler

Die beiden Grenzen $-1/2 \cdot w_{nu}(m_d - m_{d-1})$ und $+1/2 \cdot w_{nu}(m_{d+1} - m_d)$ sind abhängig vom Wichtungsfaktor w_{nu} und damit für jeden Strahl unterschiedlich groß. Das ist richtig, schließlich fällt auch die „Verschiebung“ der Projektionsfehler beim Durchtesten der einzelnen Materialien

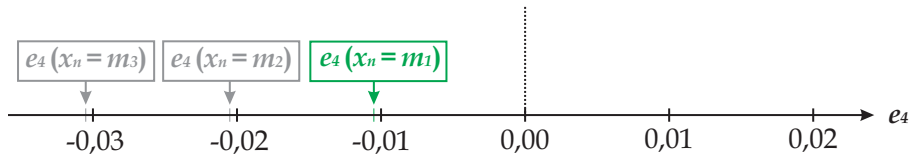


Abbildung 4.13: Projektionsfehler eines Beispielvoxels n in einem Röntgenstrahl $u=4$ ($w_{n4}=1$) bei Einsetzen der Absorptionskoeffizienten m_1 , m_2 und m_3 entsprechend dem Beispiel aus Abbildung 4.10. Material 1 liefert den kleinsten Projektionsfehlerbetrag.

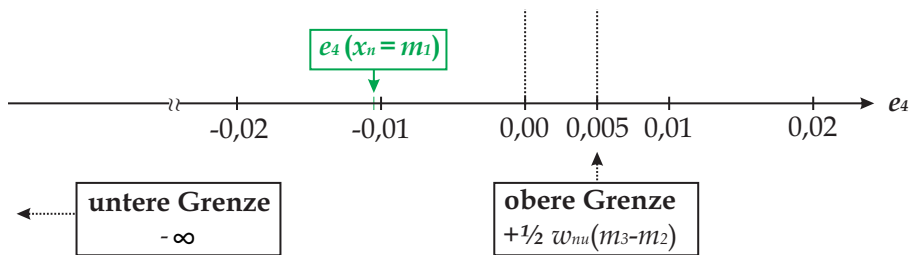


Abbildung 4.14: Verschiebung der unteren Grenze auf $-\infty$ speziell für die Prüfung von Material 1 (entsprechend dem Beispiel aus Abbildung 4.13)

abhängig von w_{nu} in jedem Strahl unterschiedlich stark aus (siehe Abbildung 4.10). Es besteht die Möglichkeit, mit festen Grenzen $-1/2(m_d - m_{d-1})$ und $+1/2(m_{d+1} - m_d)$ zu arbeiten. Dafür ist lediglich eine Normierung des Projektionsfehlers $e_u(x_n = m_d)$ erforderlich (4.4).

$$e_{u,norm}(x_n = m_d) = \frac{1}{w_{nu}} \cdot e_u(x_n = m_d) \quad (4.4)$$

Mit den festen Grenzen kann die Anzahl der Strahlen, die ein bestimmtes Material unterstützen, in anschaulicher Weise direkt aus dem Histogramm der nunmehr normierten Projektionsfehler abgelesen werden. Dies zeigt der nächste Abschnitt.

Zur Vereinfachung werden an dieser Stelle Kurzschreibweisen eingeführt:

- $e_{norm} \approx 0$ bezeichnet einen Projektionsfehler „ausreichend nach bei Null“ entsprechend der im letzten Abschnitt eingeführten Definition.
- Die relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_d)$ ergibt sich aus der Anzahl der Strahlen, deren Projektionsfehler nach dem Einsetzen des Absorptionskoeffizienten m_d „ausreichend nach bei Null“ liegt und damit das Material d unterstützt, dividiert durch die Gesamtanzahl der (gemäß Abbildung 4.4) zur Bewertung herangezogenen Strahlen.

Betrachtung der relativen Häufigkeit

Abbildung 4.15 zeigt exemplarisch für ein fiktives Beispielvoxel n die Histogramme der normierten Projektionsfehler, die aufgenommen werden, wenn die Absorptionskoeffizienten von vier verschiedenen Materialien $m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$ der Reihe nach geprüft werden. Es ist festzustellen, dass bei Einsetzen des Absorptionskoeffizienten m_2 die Verteilung der Projektionsfehler stark um Null konzentriert ist. Die grüne Fläche repräsentiert die Anzahl der Strahlen, deren Projektionsfehler innerhalb der festgelegten Grenzen liegt, und damit die relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_2)$. Sie fällt mit 0,85 verhältnismäßig groß aus. Wird ein anderes Material an der Position des Voxels n eingesetzt, verschiebt sich das Histogramm. Weniger Strahlen liegen mit ihrem Projektionsfehler dann noch innerhalb der Grenzen. Für das Material 1 liegt die relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_1)$ bei 0,04. $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_3)$ beläuft sich auf 0,11, $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_4)$ beträgt Null. Höchstwahrscheinlich existiert das Material 2 an der Position des Beispielvoxels.

Angenommen, das Voxel befindet sich an einer Stelle im Volumen, die nicht originalgetreu rekonstruiert werden kann, weil zum Beispiel die Röntgenbilder einen eingeschränkten Winkelbereich aufspannen. Die Histogramme zeigen von vornherein eine breitere Streuung. Demzufolge stellt sich, wie in Abbildung 4.16 veranschaulicht, für kein Material eine auffallend hohe relative Häufigkeit ein. In dem gewählten Beispiel ist $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_1) = 0,38$. $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_2)$ liegt bei 0,41, $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_3)$ bei 0,11 und $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_4)$ bei 0,10.

Ergebnisse, die für reale Rekonstruktionen aufgenommen werden können, zeigen die Tabellen 4.6 und 4.7. Getestet wird wieder das Prüfobjekt aus Abbildung 4.2, und zwar einmal unter Verwendung der 360° -Aufnahmereihe und einmal bei Beschränkung des Winkelbereiches auf 150° . Die linke Spalte in beiden Tabellen enthält jeweils ein Schnittbild durch das untersuchte Rekonstruktionsvolumen. Die mittlere Spalte gibt für alle Voxel im Schnittbild die entsprechende relative Häufigkeit bei Einsetzen des Absorptionskoeffizienten von Luft m_1 wieder. Eine kleinere relative Häufigkeit ist stets durch einen dunkleren Grauwert dargestellt. Werte unterhalb von 0,5 werden schwarz abgebildet. Es ist deutlich zu sehen, dass Voxel, die annähernd originalgetreu rekonstruiert sind und Luft repräsentieren, auch eine hohe relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_1)$ besitzen. Im Bereich der Kunststoffobjekte, aber auch in Bereichen, die aufgrund der Winkelbereichseinschränkung auf 150° nur „verzerrt“ rekonstruiert sind, fallen die relativen Häufigkeiten entschieden niedriger aus. Gleichermäßen zeigt die rechte Spalte die relative Häufigkeit bei Einsetzen des Kunststoffmaterials $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_2)$. Im Bereich der Luft, und in den Bereichen, in denen die Rekonstruktion verzerrt ist, überwiegen niedrige relative Häufigkeiten. In allen anderen Bereichen werden hohe relative Häufigkeiten verzeichnet. Ausreißerstrahlen, die im Gütemaßbild der lokalen Kosten (wie in Abschnitt 4.2.1 beschrieben und in den Tabellen 4.3 und 4.4 gezeigt) die Bewertung dominieren und damit unmöglich machen, tauchen im Schnittbild der relativen Häufigkeiten höchstens als Schatten auf. Sie fallen kaum ins Gewicht.

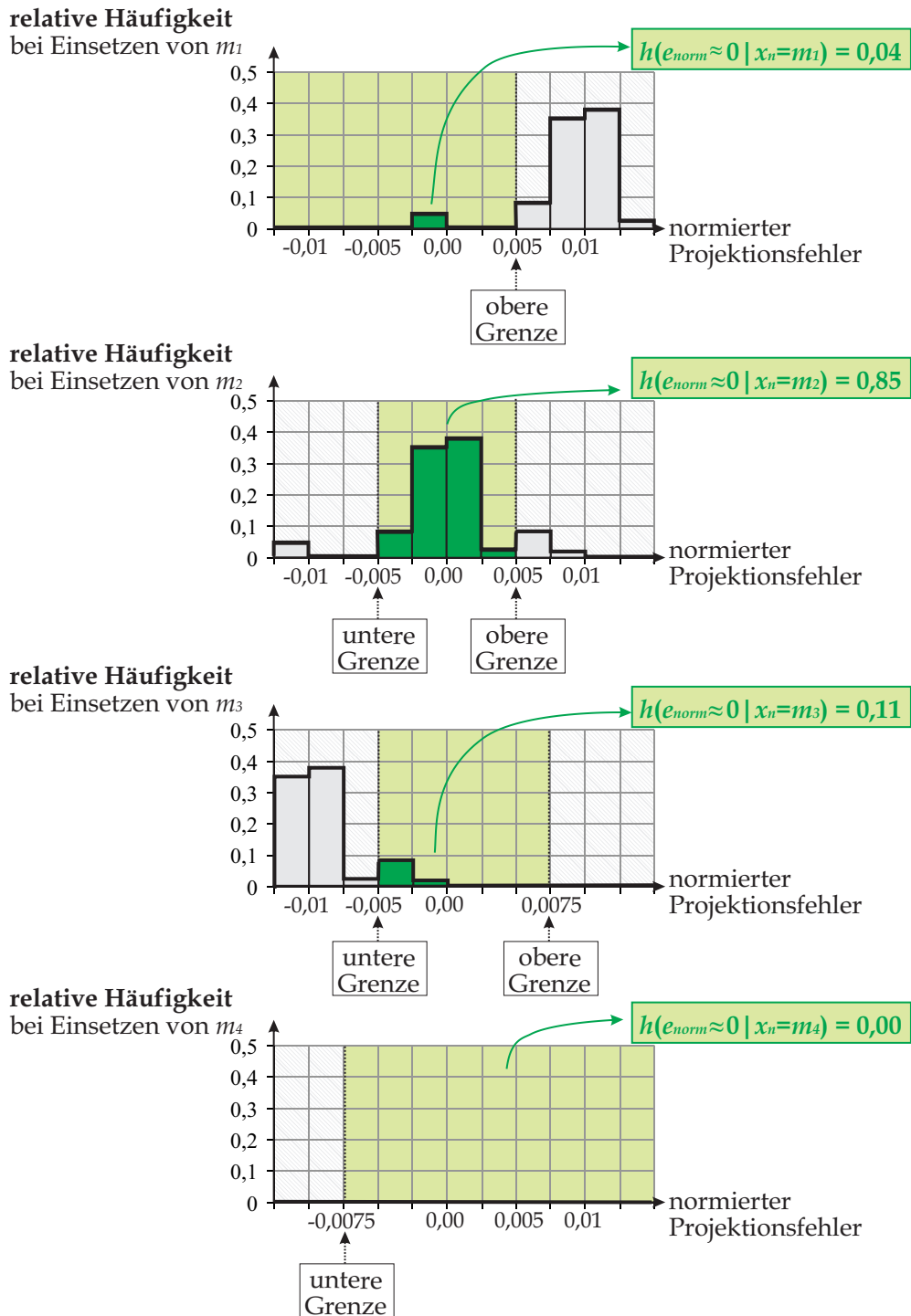


Abbildung 4.15: Histogramme der normierten Projektionsfehler bei Einsetzen der Absorptionskoeffizienten aller Materialien ($m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$) an der Position eines zu untersuchenden Testvoxels n . Die dunkelgrüne Fläche repräsentiert in jedem Histogramm die Anzahl der Strahlen, die das aktuelle Material unterstützen.

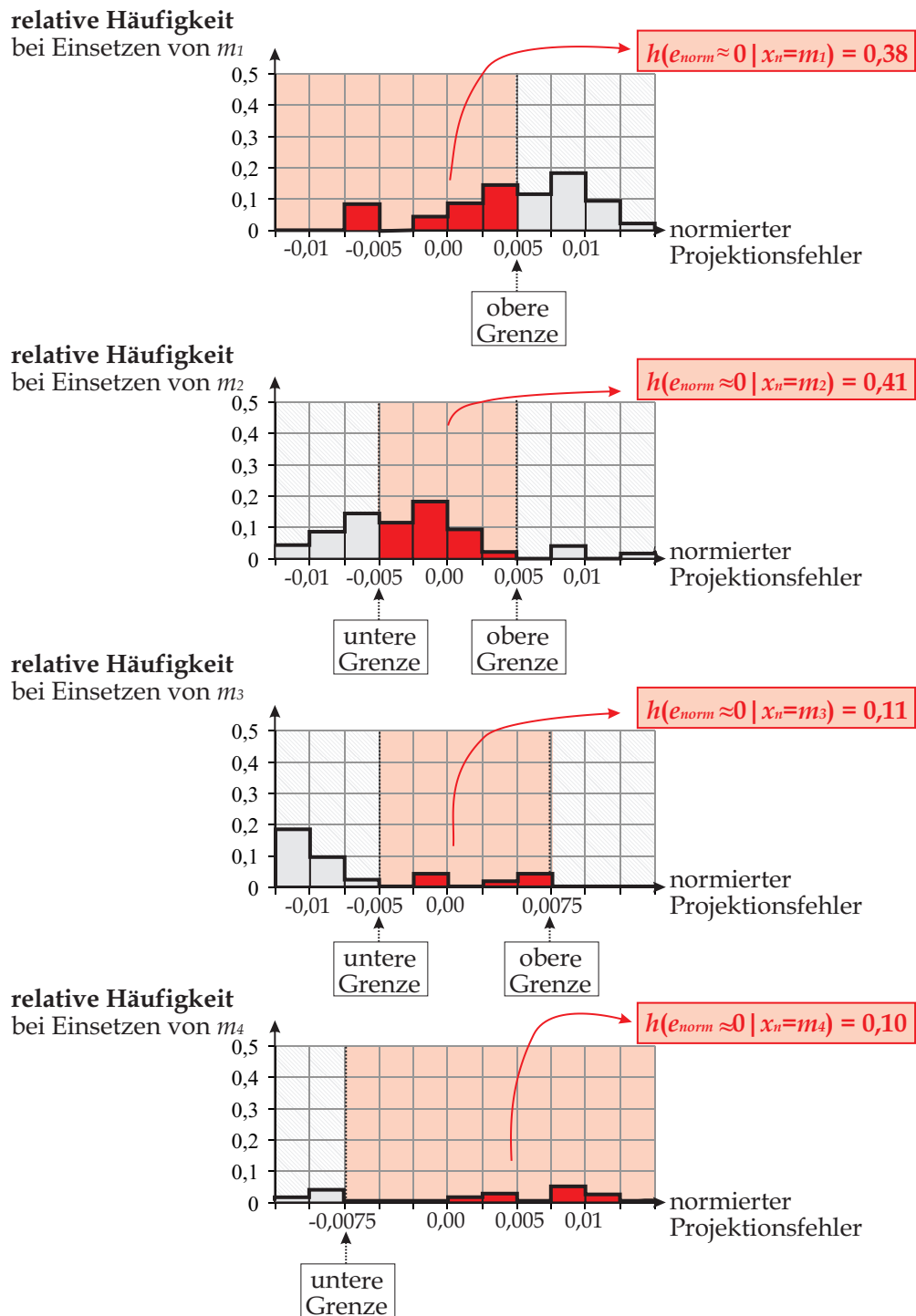


Abbildung 4.16: Histogramme der normierten Projektionsfehler bei Einsetzen der Absorptionskoeffizienten aller Materialien ($m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$) an der Position eines „unsicher“ rekonstruierten Voxels n . Die rote Fläche repräsentiert in jedem Histogramm die Anzahl der Strahlen, die das aktuelle Material unterstützen.

Tabelle 4.6: 360°-Aufnahmereihe des Prüfobjektes aus Abbildung 4.2. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Relative Häufigkeit bei Einsetzen des Absorptionskoeffizienten von Luft. Rechts: Relative Häufigkeit bei Einsetzen des Kunststoffmaterials. Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

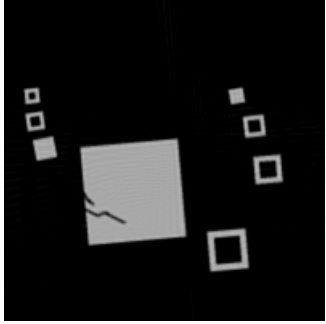
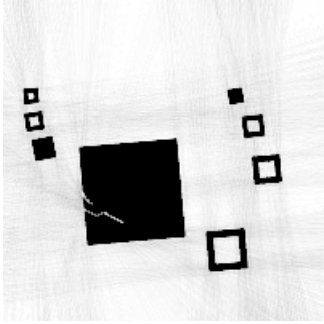
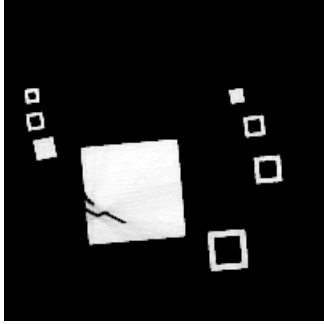
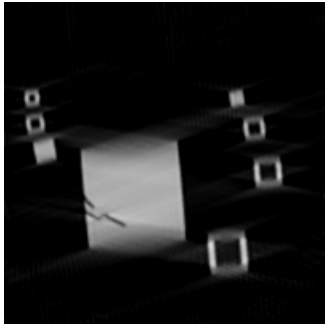
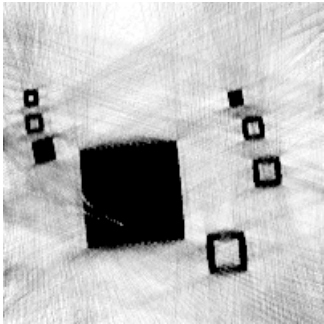
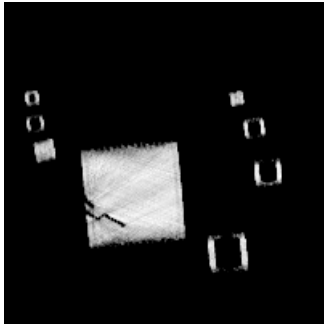
Rekonstruktion	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_1)$	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_2)$
Grauwertfenster: 0 bis 0,015 	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0 	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0 

Tabelle 4.7: 150°-Aufnahmereihe des Prüfobjektes aus Abbildung 4.2. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Relative Häufigkeit bei Einsetzen des Absorptionskoeffizienten von Luft. Rechts: Relative Häufigkeit bei Einsetzen des Kunststoffmaterials. Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

Rekonstruktion	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_1)$	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_2)$
Grauwertfenster: 0 bis 0,015 	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0 	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0 

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass Voxel, die allgemein „gut“ rekonstruiert sind, eine hohe relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_d)$ für genau das Material d aufweisen, welches sie tatsächlich repräsentieren, und niedrige relative Häufigkeiten für alle anderen Materialien. In Bereichen, die „unsicher“ rekonstruiert sind, erreicht kein Material eine auffallend hohe relative Häufigkeit. Zur Entwicklung eines Gütemaßes scheint die relative Häufigkeit gut geeignet zu sein. Die nachfolgende Simulation zeigt jedoch, dass sie überempfindlich auf Rauschen reagiert.

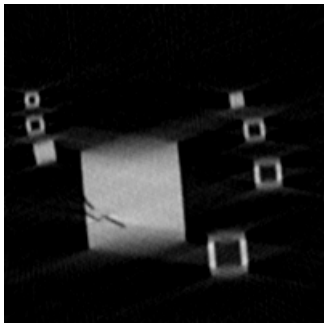
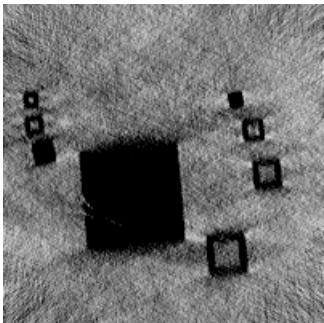
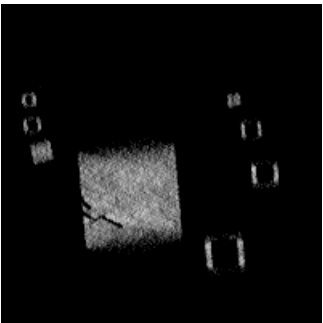
Der Versuch aus Tabelle 4.7 wird wiederholt, allerdings mit dem Unterschied, dass auf die verwendeten Röntgenbilder (gemäß dem Modell in [64]) mittelwertfreies, gaußsches Rauschen addiert wird. Das Rauschen für sich betrachtet besitzt eine Standardabweichung von $\sigma_y = 0,005$. Bezogen auf die Absorptionskoeffizienten der beiden Materialien $m_1 = 0.00$ und $m_2 = 0.01$, aus denen das Prüfobjekt besteht, gilt $\sigma_y = (m_2 - m_1)/2$.

Aus den verrauschten Röntgenbildern wird das Prüfobjekt rekonstruiert, wobei identisch zu den vorangegangenen Simulationen sechs Iterationen der SART ausgeführt werden. Ein Schnittbild durch das erzeugte Rekonstruktionsvolumen ist in der Tabelle 4.8 in der linken Spalte abgebildet. Es unterscheidet sich wenig von der Rekonstruktion aus unverrauschten Röntgenbildern (Tabelle 4.7). Das heißt, das Rauschen der Röntgenbilder übt nur einen geringen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis aus. Der Grund hierfür liegt in der Eigenschaft der SART, im Fall inkonsistenter Messdaten, wie in Abschnitt 3.1.3 behandelt, eine Pseudolösung für den Absorptionskoeffizienten x_n anzustreben, die *im Mittel* zu allen Röntgenbildern passt.

Trotz der größtenteils gleichgebliebenen Rekonstruktionsqualität sind die relativen Häufigkeiten $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_1)$ und $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_2)$, wie der Tabelle 4.8 weiter zu entnehmen ist, unverhältnismäßig stark gesunken, in einzelnen gut rekonstruierten Voxeln auf bis zu 0,5. Wenn zum Beispiel für einige gut rekonstruierte Luftvoxel in artefaktfreien Bereichen die relative Häufigkeit $h(e_{norm} \approx 0 | x_n = m_1)$ auf 0,5 sinkt, so wird eine Unterscheidung von Objektvoxeln – oder fehlerbehafteten Luftvoxeln nahe der verzerrten Oberfläche der Prüfobjekte – anhand der relativen Häufigkeit schwierig.

Das Problem ist, das Rauschen der Röntgenbilder geht direkt in das Histogramm ein. Abbildung 4.17 zeigt hierzu ein Gedankenexperiment. Für ein perfekt rekonstruiertes Voxel n in einem vollkommen perfekt rekonstruierten Volumen werden – liegen unverrauschte Röntgenbilder

Tabelle 4.8: Wiederholung des Versuchs aus Tabelle 4.7 unter Verwendung künstlich verrauschter Röntgenbilder mit einem Winkelbereich von 150° .

Rekonstruktion	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_1)$	$h(e_{norm} \approx 0 x_n = m_2)$
Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
		

vor – 100% der Strahlen einen Projektionsfehler von Null aufweisen. Sind die Messwerte y_u jedoch durch Rauschen gestört, welches eine Standardabweichung von $\sigma_y = 0,005$ besitzt, und sei das Voxel immernoch perfekt rekonstruiert, so zeigen die Projektionsfehler eine Standardabweichung von exakt 0,005. Rein rechnerisch liegen nur 68% der Strahlen mit ihrem Projektionsfehler zwischen den Grenzen $-\sigma_y$ und $+\sigma_y$, beziehungsweise 84% zwischen $-\infty$ und $+\sigma_y$ [56]. Das heißt, in dem durchgeführten Versuch aus Tabelle 4.8 kann kein Voxel, und sei es noch so „gut“ rekonstruiert, einen höheren Wert für die relative Häufigkeit als 0,84 annehmen. Zusätzliche Fehler in der Rekonstruktion, zum Beispiel Verzerrungen infolge des eingeschränkten Winkelbereiches, lassen die relative Häufigkeit weiter sinken.

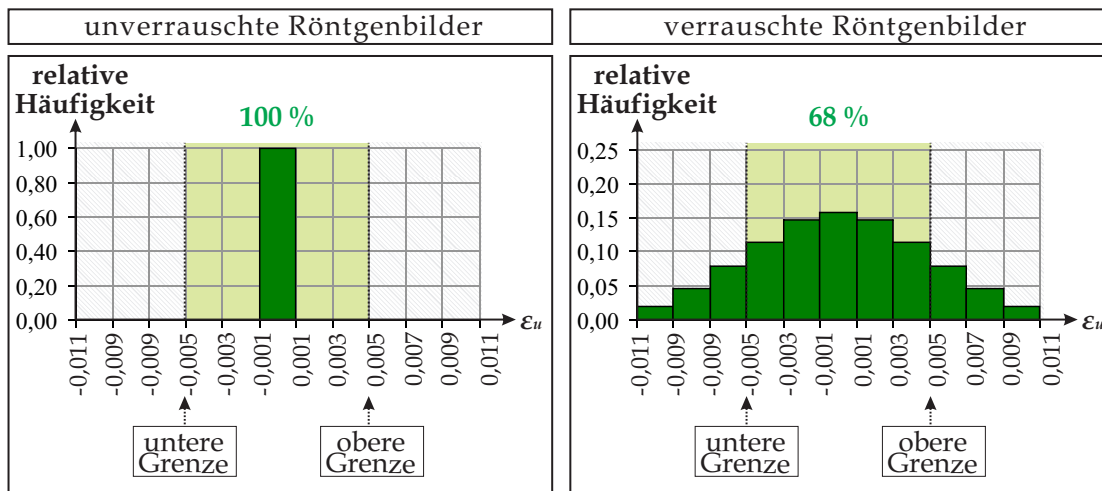


Abbildung 4.17: Histogramme der Projektionsfehler ϵ_u eines fiktiven Beispielvoxels in einem vollkommen fehlerfreien Rekonstruktionsvolumen. Links: Verwendung unverrauschter Röntgenbilder. Rechts: Verwendung verrauschter Röntgenbilder.

Bis jetzt blieb eine Eigenschaft der iterativen Rekonstruktionsverfahren ungeachtet: Die Konvergenz. Der rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n eines jeden Voxels n nähert sich bekanntlich von Iteration zu Iteration einer Lösung, die *im Mittel* zu allen Messdaten passt (vergleiche Abschnitt 3.1.3). Daher sollte konsequenterweise zur lokalen Bewertung der Rekonstruktion nicht – wie bisher – die Anzahl der einzelnen Strahlen mit „ausreichend kleinem“ Projektionsfehler im Fokus stehen, sondern der Mittelwert des normierten Projektionsfehlers (genau genommen der gewichtete Mittelwert). Der nachfolgende Abschnitt geht detailliert auf die Berechnung ein.

Der mittlere, gewichtete Projektionsfehler als Zufallsvariable

Nach wie vor werden an der Position des zu untersuchenden Voxels n die Absorptionskoeffizienten aller Materialien $d = 1 \dots M$, die in der betrachteten Aufnahmeszene vorkommen, eingesetzt.

Separat für jedes eingesetzte Material werden alle Röntgenstrahlen, die den Interpolationsbereich des Voxels durchqueren, herangezogen. Ihre normierten Projektionsfehler $e_{u,norm}$ werden fortan als Realisierung der kontinuierlichen Zufallsvariablen E_{norm} aufgefasst.

Sei N die Anzahl der Strahlen, die den Interpolationsbereich des Voxels n durchqueren und damit einen Wichtungsfaktor $w_{nu} > 0$ aufweisen. Der Mittelwert

$$\mu_{e_{norm}}(x_n = m_d) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{u=1 \\ w_{nu}>0}}^U e_{u,norm}(x_n = m_d) \quad (4.5)$$

und die Varianz

$$\sigma_{e_{norm}}^2(x_n = m_d) = \frac{1}{N-1} \sum_{\substack{u=1 \\ w_{nu}>0}}^U \left(e_{u,norm}^2(x_n = m_d) - \mu_{e_{norm}}^2(x_n = m_d) \right) \quad (4.6)$$

entsprechen näherungsweise dem Mittelwert $\mu_{E_{norm}}$ und der Varianz $\sigma_{E_{norm}}^2$ der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(E_{norm}|x_n = m_d)$ [56]. Abbildung 4.18 versinnbildlicht die Charakterisierung der Wahrscheinlichkeitsdichte über $\mu_{E_{norm}}$ und $\sigma_{E_{norm}}$.

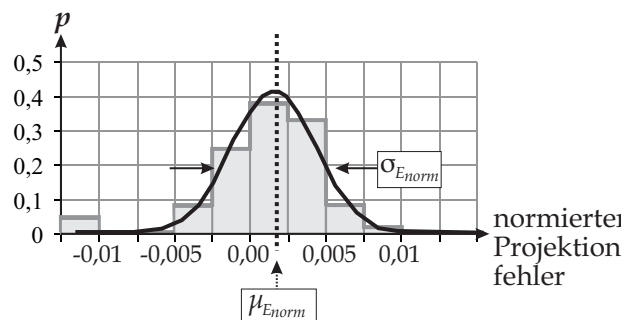


Abbildung 4.18: Grau: Gemessene Häufigkeitsverteilung der normierten Projektionsfehler.
Schwarz: Approximation mit einer Gaußverteilung und Charakterisierung über den Mittelwert $\mu_{E_{norm}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{E_{norm}}$.

Die aus der Histogrammanalyse in Abschnitt 4.2.2 gewonnenen Erkenntnisse lassen sich entsprechend übertragen: Der mittlere Projektionsfehler $\mu_{E_{norm}}$ beträgt Null, wenn die Rekonstruktion fehlerfrei ist, und weicht von Null ab, zum Beispiel wenn das falsche Material eingesetzt wurde und damit ein Fehler im Voxel provoziert wurde. Der Fehler im Voxel taucht aufgrund der Normierung in (4.4) in allen Strahlen gleichermaßen auf. Darüber hinaus schwanken die Projektionsfehler der einzelnen Strahlen um den Mittelwert $\mu_{E_{norm}}$, und zwar abhängig von der lokalen Rekonstruktionsqualität. Wenn zum Beispiel die Oberfläche eines Prüfobjektes infolge einer Winkelbereichseinschränkung verschwommen dargestellt ist, schwanken die Projektionsfehler stärker. Daraus resultiert eine höhere Varianz $\sigma_{E_{norm}}^2$. Aber auch Rauschen in den Röntgenbildern überträgt sich auf die Projektionsfehler und ihre Varianz.

Bekanntermaßen ist die Varianz des Mittelwertes um den Faktor $1/N$ kleiner als die Varianz der Einzelmessung. Zur Herleitung dieses Zusammenhanges werden, wie in [56] näher beschrieben, die Einzelmessungen – in diesem Fall die einzelnen Projektionsfehler $e_{u,norm}$ – aufgefasst als unabhängige Zufallsvariablen $E_{u,norm}$, die alle die selbe Verteilung besitzen wie E_{norm} . Gleichung (4.5) geht über in (4.7).

$$\mu_{E_{norm}}(x_n = m_d) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{u=1 \\ w_{nu}>0}}^U E_{u,norm}(x_n = m_d) \quad (4.7)$$

Die Varianz des mittleren Projektionsfehlers $\mu_{E_{norm}}(x_n = m_d)$ erfasst dabei die Rekonstruktionsqualität eines Voxels n , falls der rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n *im arithmetischen Mittel* zu allen Messdaten passt. Nun zeigen aber die Strahlen im Rekonstruktionsprozess unterschiedliche Signifikanz auf: Strahlen mit kleinen Wichtungsfaktoren w_{nu} haben weniger Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis im Voxel n als Strahlen mit großem Wichtungsfaktor. Das heißt, der Absorptionskoeffizient x_n passt *im gewichteten Mittel* zu allen Messdaten. Daher wird im Folgenden der gewichtete, mittlere Projektionsfehler Z (4.8) betrachtet. Es sei darauf hingewiesen, dass die Einführung der Gewichtung in keinem Zusammenhang steht mit der Normierung der Projektionsfehler in (4.4).

$$Z(x_n = m_d) = \frac{\sum_{u=1}^U E_{u,norm}(x_n = m_d) \cdot w_{nu}}{\sum_{u=1}^U w_{nu}} \quad (4.8)$$

Z ist eine Funktion der Zufallsvariablen $E_{u,norm}$ und damit selbst eine Zufallsvariable. Die einzelnen $E_{u,norm}$ sind statistisch unabhängig (zupal die Messwerte y_u unabhängig voneinander aufgenommen wurden) und besitzen dieselbe Verteilung wie E_{norm} .

Die Varianz der Zufallsvariablen Z

$$\sigma_Z^2(x_n = m_d) = \frac{\sum_{u=1}^U w_{nu}^2 \cdot \sigma_{e_{u,norm}}^2}{(\sum_{u=1}^U w_{nu})^2} = \frac{\sum_{u=1}^U w_{nu}^2}{(\sum_{u=1}^U w_{nu})^2} \cdot \sigma_{e_{norm}}^2 \quad (4.9)$$

ist um den Faktor $\sum(w_{nu})^2/(\sum w_{nu})^2$ kleiner als die Varianz der Einzelmessung.

Separat für jedes an der Position des Voxels n eingesetzte Material d kann nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(Z|x_n = m_d)$ geschätzt werden (siehe Abbildung 4.19). Aus der Wahrscheinlichkeitsdichte lässt sich wiederum – ähnlich wie im vorangegangenen Abschnitt – entnehmen, wie *wahrscheinlich* es ist, dass das aktuell eingesetzte Material d richtig ist. Es gilt:

$$P\left(Z \approx 0 \mid x_n = m_d\right) = P\left(-\frac{m_d - m_{d-1}}{2} < Z < +\frac{m_{d+1} - m_d}{2} \mid x_n = m_d\right) \quad (4.10)$$

für alle $d = 2 \dots (M - 1)$.

$P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass – unter der Bedingung, dass das Material d an der Position des Voxels n vorliegt – der mittlere, gewichtete Projektionsfehler Z die kritischen Grenzen $-(m_d - m_{d-1})/2$ und $+(m_{d+1} - m_d)/2$ nicht überschreitet. Wenn diese Grenzen nicht überschritten werden, ist sichergestellt, dass das Voxel nicht zu einem anderen Material wechselt, weder zum nächst größeren Material ($d + 1$) noch zum nächst kleineren ($d - 1$).

Zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Material $d = 1$ verschiebt sich die untere Grenze in gewohnter Weise bis $-\infty$.

$$P\left(Z \approx 0 \mid x_n = m_1\right) = P\left(-\infty < Z < +\frac{m_2 - m_1}{2} \mid x_n = m_1\right) \quad (4.11)$$

Entsprechend reicht für das Material $d = M$ die obere Grenze bis $+\infty$.

$$P\left(Z \approx 0 \mid x_n = m_M\right) = P\left(-\frac{m_M - m_{M-1}}{2} < Z < +\infty \mid x_n = m_M\right) \quad (4.12)$$

Die Schätzung der Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ wird an den aus den Tabellen 4.6, 4.7 und 4.8 bekannten Rekonstruktionen des künstlichen Prüfobjektes getestet. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 4.9 zusammengefasst. An „gut“ rekonstruierten Voxeln fällt die Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ für das Material d , das an der jeweiligen Voxelposition im Volumen tatsächlich richtig ist, durchweg hoch aus, und zwar sowohl in den Simulationen aus unverrauschten Röntgenbildern als auch bei Vorhandensein von Rauschen in den Röntgenbildern. Das heißt, solange das Rauschen für die Rekonstruktion eines Voxels als unkritisch anzusehen ist, beeinträchtigt es die Bewertung kaum. Die Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ drückt nicht mehr aus, wie viele Strahlen das Material d unterstützen, sondern, wie *wahrscheinlich* es ist, dass das aktuell geprüfte Material d von *allen* Strahlen (im gewichteten Mittel) unterstützt wird. Dieser Ansatz steht eng im Zusammenhang mit der Eigenschaft der iterativen Rekonstruktionsverfahren, eine Lösung anzustreben, die im gewichteten Mittel zu allen Messungen passt. „Unsicher“ rekonstruierte Voxel zeigen weiterhin für kein Material auffallend hohe Wahrscheinlichkeiten – eine Tatsache, die im folgenden Abschnitt noch verdeutlicht wird.

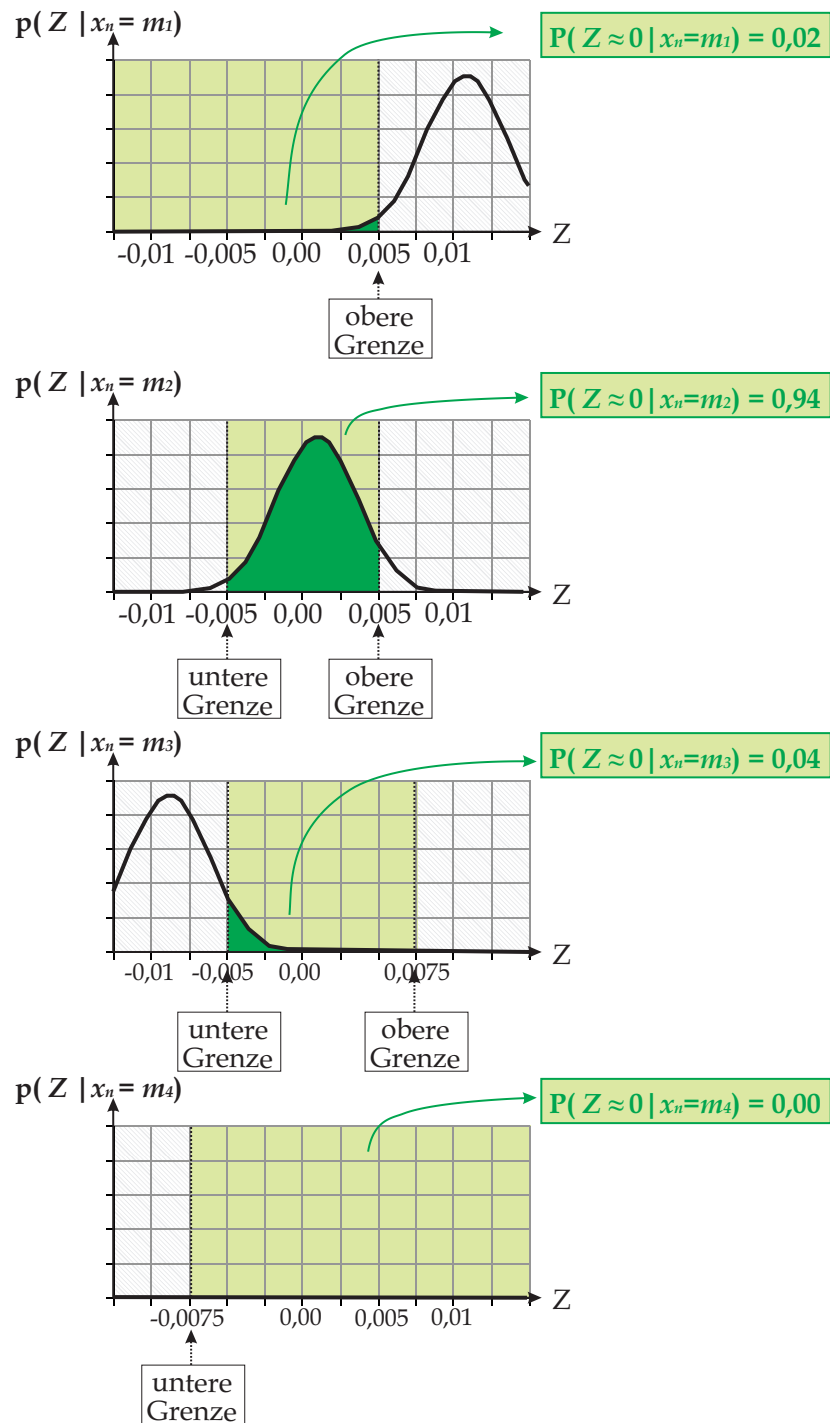
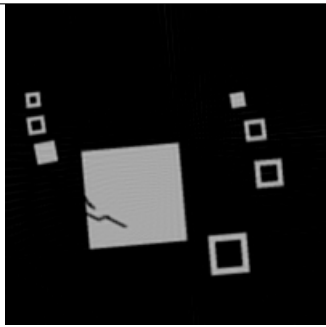
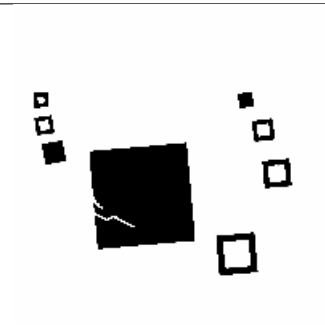
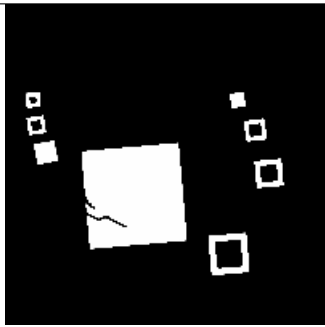
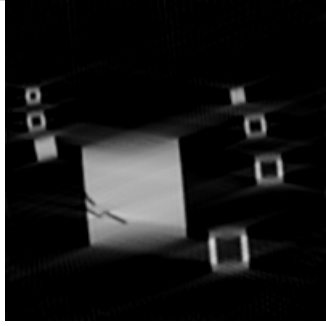
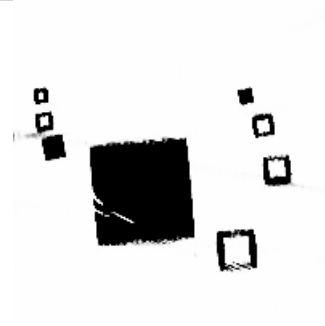
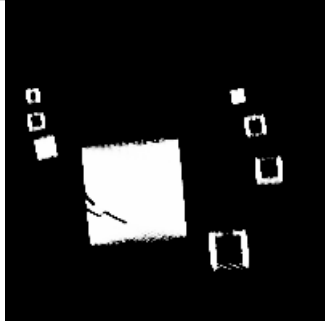
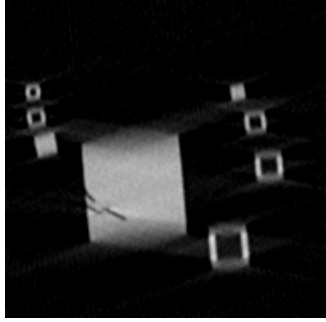
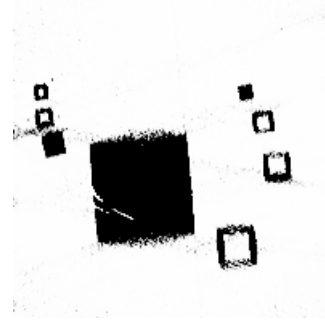
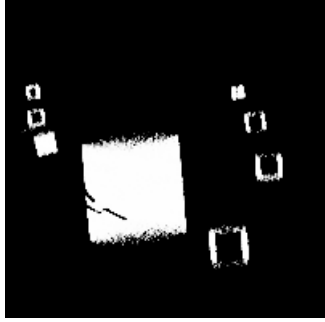


Abbildung 4.19: Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen Z bei Einsetzen der Absorptionskoeffizienten $m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,02$ und $m_4 = 0,035$ an der Position eines Testvoxels n

Tabelle 4.9: Schätzung der Wahrscheinlichkeiten gemäß (4.11) und (4.12) für verschiedene Rekonstruktionen des Prüfobjektes aus Abbildung 4.2. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Wahrscheinlichkeit für Luft. Rechts: Wahrscheinlichkeit für Kunststoff. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Rekonstruktion	$P(Z \approx 0 x_n = m_1)$	$P(Z \approx 0 x_n = m_2)$
	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
360° ohne Rauschen			
150° ohne Rauschen			
150° mit Rauschen			

Auswahl des wahrscheinlichsten Materials

Für jedes Voxel n im Rekonstruktionsvolumen lässt sich anhand der unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ der Materialien $d = 1 \dots M$ durch Anwendung der Maximum-Likelihood-Entscheidungsregel [49]

$$P(Z \approx 0 | x_n = m_q) = \max_{1 \leq d \leq M} P(Z \approx 0 | x_n = m_d) \quad (4.13)$$

das „wahrscheinlichste“ Material q finden.

Die Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ spiegelt die lokale Rekonstruktionsqualität wider. Im Falle eines originalgetreu rekonstruierten Voxels besitzt das Material, das tatsächlich an der Position des Voxels richtig ist, eine hohe Wahrscheinlichkeit. Für ein „unsicher“ rekonstruiertes Voxel liefert kein Material eine auffallend hohe Wahrscheinlichkeit. Daraus resultiert auch ein niedrigeres Maximum (4.13).

Tabelle 4.10 zeigt für die drei bekannten Aufnahmereihen des Prüfobjektes aus Abbildung 4.2 neben den Schnittbildern durch die Rekonstruktionsvolumen für jedes Voxel das jeweils wahrscheinlichste Material q sowie die dazugehörige Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$. In der 360°-Aufnahmereihe gleicht die Darstellung des wahrscheinlichsten Materials dem Phantom aus Abbildung 4.3. Die Wahrscheinlichkeiten sind hier generell hoch, außer an den Oberflächen. Wie im Vorfeld schon festgestellt werden konnte erscheinen Oberflächen in der Rekonstruktion grundsätzlich etwas unscharf. Die Ursache liegt in der Interpolation: Ein Oberflächenvoxel fällt mal in den Interpolationsbereich eines Strahles, der dicht an dem Prüfobjekt vorbeigeht und nur Luft durchquert, und ein anderes mal in den Interpolationsbereich eines Strahls, der gerade noch das Prüfobjekt durchquert. Der rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n , der sich nach einigen Iterationsdurchläufen einstellt, liegt zwischen dem des Prüfobjektmaterials und dem der angrenzenden Luft. Es ist verständlich, dass beim Durchtesten der einzelnen zur Auswahl stehenden Materialien an der Position des Oberflächenvoxels n abhängig von der „Menge“ an Luft und Prüfobjektmaterial die Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ schwankt, weshalb gerade die Quaderoberflächen im Wahrscheinlichkeitsbild gestrichelt wirken. In den beiden 150°-Aufnahmereihen zeigen die Bereiche der Rekonstruktion, die infolge der Winkelbereichseinschränkung (und teilweise auch infolge des Rauschens) stärker vom Original abweichen, niedrige Wahrscheinlichkeiten. Sie sinken bis auf 0,5 herab. Die Auswahl des wahrscheinlichsten Materials wird dadurch höchst unsicher. Voxel, die von Störungen weitgehend unberührt sind und denen das richtige Material zugeordnet wurde, besitzen durchweg hohe Wahrscheinlichkeiten.

Die beschriebene Methode zur Bewertung von Röntgenrekonstruktionen ist nicht beschränkt auf Aufnahmeszenen mit zwei Materialien. Zur Demonstration werden die hohlen Quader des

Prüfobjektes aus Abbildung 4.3 mit einem dritten Material gefüllt (Abbildung 4.20). Der Absorptionskoeffizient der Füllung beträgt $m_3 = 0,025$. Identisch zu dem zuletzt durchgeführten Test werden Röntgenbilder generiert, die einen Winkelbereich von 150° aufspannen und durch Rauschen beeinträchtigt sind. Das Rauschen weist eine Standardabweichung von $\sigma_y = 0,005$ auf. Tabelle 4.11 zeigt ein Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen der SART nach sechs Iterationen, sowie für alle Voxel im Schnittbild das jeweils wahrscheinlichste Material q und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$. Es ist festzustellen, dass die Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ die lokale Rekonstruktionsqualität nach wie vor zuverlässig beschreibt. In „schlecht“ oder „unsicher“ rekonstruierten Bereichen sinken die Wahrscheinlichkeiten auf bis zu 0,5 herab. Die Materialzuordnung wird dadurch „unsicher“. Dort, wo die Auswahl des wahrscheinlichsten Materials mit dem Phantom übereinstimmt, herrschen hohe Wahrscheinlichkeiten vor.

Bei einem genauen Vergleich der Ergebnisse aus Tabelle 4.11 mit denen aus Tabelle 4.10 (untere Zeile) fällt auf, dass, obwohl das Prüfobjekt lediglich in den fünf hohen Quadern eine Änderung erfahren hat, im Rekonstruktionsvolumen Artefakte anders ausgeprägt sind. In der Luft tauchen helle Schleier auf, die in der Rekonstruktion ohne Füllung nicht zu finden sind (Abbildung 4.21). Die Wandungen der gefüllten Quader sind dafür besser herausgebildet als in der Rekonstruktion ohne Füllung. Es ist keine neue Erkenntnis, dass unterschiedliche Prüfobjekte sich unterschiedlich gut rekonstruieren lassen. Selbst erfahrene Anwender vermögen kaum vorherzusagen, wann mit Artefakten zu rechnen ist. Aber mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ ist es möglich, die Artefakte zu detektieren. Die „neuen“ Schleier in der Luft (in Tabelle 4.11) besitzen niedrigere Wahrscheinlichkeiten. Die verbesserte Darstellung der Quaderwandungen zeichnet sich durch höhere Wahrscheinlichkeiten aus. Das bedeutet, ganz gleich, wie das Prüfobjekt beschaffen ist, aus wieviel unterschiedlichen Materialien es zusammengesetzt ist und ob die verwendete Trajektorie sinnvoll gewählt ist oder nicht: Artefakte lassen sich an ihren niedrigen Wahrscheinlichkeiten $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ erkennen. Zur Bewertung realer Rekonstruktionen und – damit einhergehend – ihrer Diskretisierung ist die beschriebene Methode eine geeignete Basis.

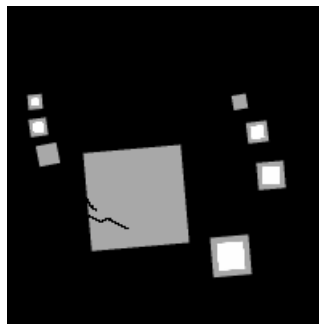


Abbildung 4.20: Schnittbild durch das Phantom des Prüfobjektes mit gefüllten Quadern entsprechend der Aufnahmeszene aus Abbildung 4.2

Tabelle 4.10: Bewertung verschiedener Rekonstruktionen des Prüfobjektes aus Abbildung 4.2 gemäß (4.13). Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Wahrscheinlichstes Material. Rechts: Dazugehörige Wahrscheinlichkeit. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

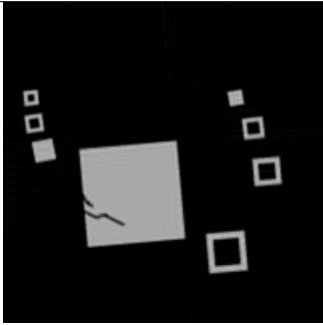
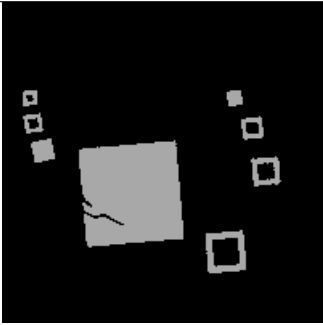
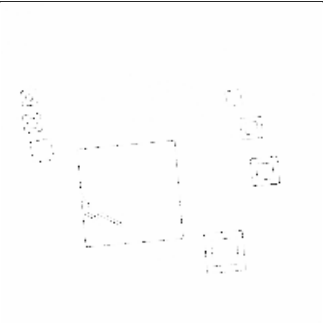
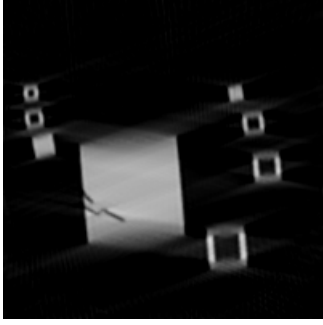
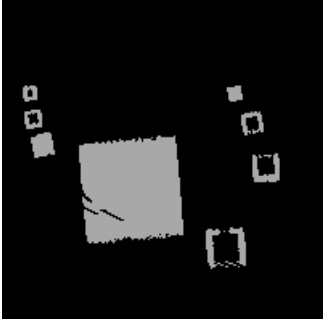
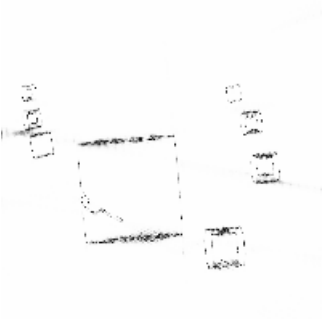
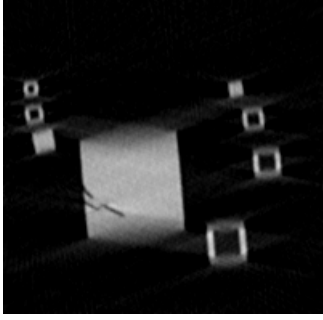
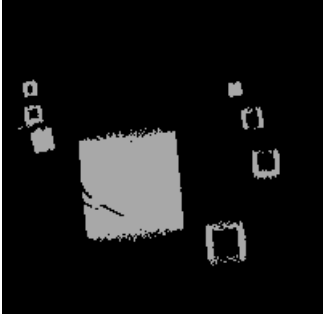
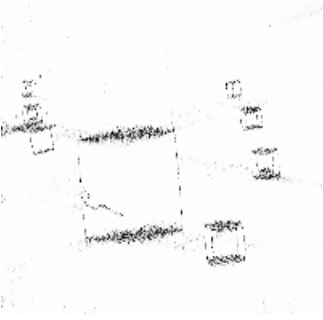
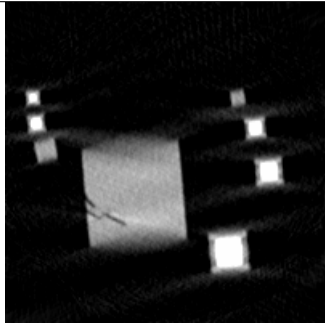
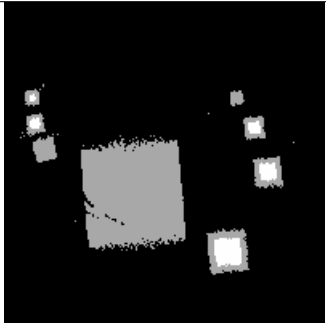
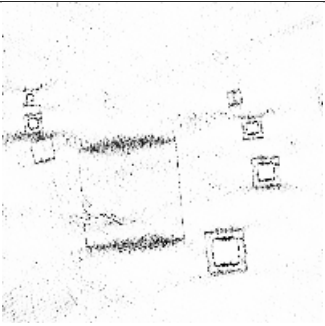
	Rekonstruktion	Material q	$P(Z \approx 0 x_n = m_q)$
	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
360° ohne Rauschen			
150° ohne Rauschen			
150° mit Rauschen			

Tabelle 4.11: Bewertung des Prüfobjektes aus Abbildung 4.20 unter Verwendung künstlich verrauschter Röntgenbilder mit einem Winkelbereich von 150° . Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Wahrscheinlichstes Material. Rechts: Dazugehörige Wahrscheinlichkeit gemäß (4.13). Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Rekonstruktion	Material q	$P(Z \approx 0 x_n = m_q)$
	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
150° mit Rauschen			

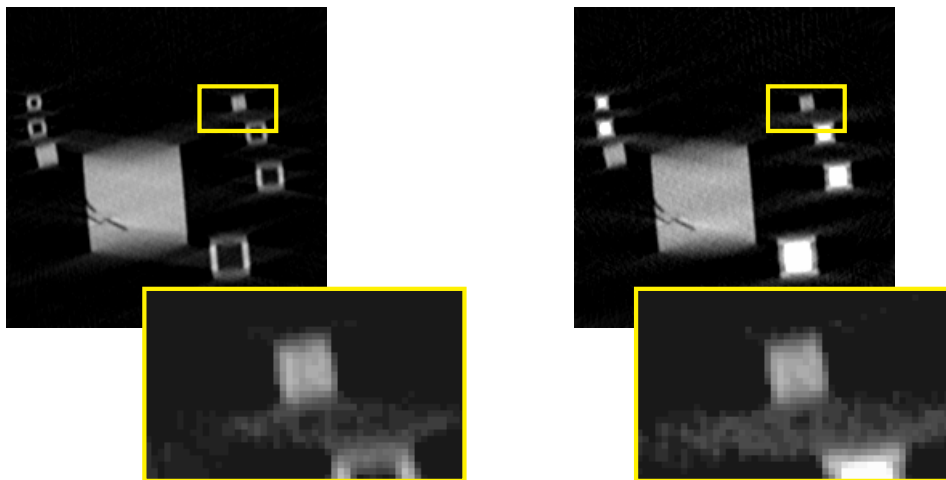


Abbildung 4.21: Rekonstruktionen aus verrauschten Röntgenbildern mit einem Winkelbereich von 150° , identisch zu den beiden Rekonstruktionen aus Tabelle 4.10 (untere Zeile) und Tabelle 4.11. Im Vordergrund: Aufgehellte und im Kontrast verstärkte Ausschnittsvergrößerung.

Bewertung bei unvollständigem a priori Wissen

In der Praxis sind nicht immer von allen Materialien, die in einer Aufnahmeszene vorkommen, die spezifischen Absorptionskoeffizienten a priori bekannt. Bestückte Leiterplatten beispielsweise bestehen aus vielen verschiedenen Einzelkomponenten, deren Absorptionskoeffizienten teilweise unbekannt sind. In anderen Fällen wurde eine Komponente des Prüfobjektes durch ein Ersatzteil ausgetauscht, das aus einem neuen Material besteht, oder eine neue Komponente hinzugefügt, etwa ein Klebstoff oder eine Schraube mit unbekanntem Materialeigenschaften für Röntgenstrahlung (Abbildung 4.22).

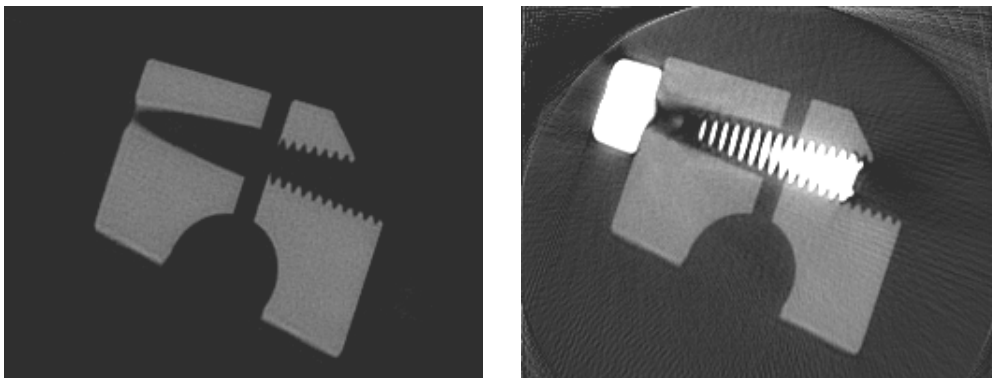


Abbildung 4.22: Rekonstruktion eines Aluminiumwerkstückes aus zwei verschiedenen Aufnahmereihen mit und ohne Schraube

Üblicherweise wird, wenn die Kenntnis der Absorptionskoeffizienten *aller* Materialien zwingend erforderlich ist (wie zum Beispiel in Anwendungen zur Diskretisierung), einfach dem Rekonstruktionsvolumen entnommen, wie hoch der Absorptionskoeffizient einer neuen Komponente ist [13] [1]. Ein präzises Ergebnis ist aber nur dann zu erwarten, wenn eine vollkommen fehlerfreie Rekonstruktion zur Verfügung steht. Beeinträchtigen dagegen Störungen die Messung, oder führen eingeschränkte Aufnahmebedingungen beim Röntgen zu Verzerrungen in der Rekonstruktion, kann der Absorptionskoeffizient nur vage angegeben werden. Das a priori Wissen ist „unvollständig“.

Trotzdem ist es möglich, zumindest für die bekannten Materialien einer Aufnahmeszene die Wahrscheinlichkeiten $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ zu bestimmen und damit eine Rekonstruktion in einer unter den gegebenen Umständen sinnvollen Weise zu bewerten. Es bedarf lediglich einer Anpassung der Grenzen in den Gleichungen (4.10) - (4.12). Dies soll an einem Beispiel demonstriert werden. Angenommen die Quader aus Abbildung 4.20 wurden mit einer unbekanntem Füllung versehen. A priori bekannt sind nach wie vor die Absorptionskoeffizienten der Luft $m_1 = 0,00$ und der Quader $m_2 = 0,01$. Über die Füllung lässt sich nur so viel sagen, als dass ihr Absorptionskoeffizient (m_3) mindestens 0,02 beträgt.

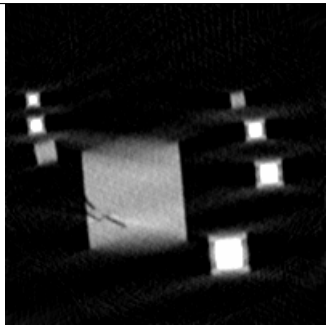
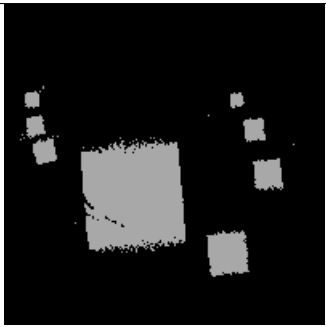
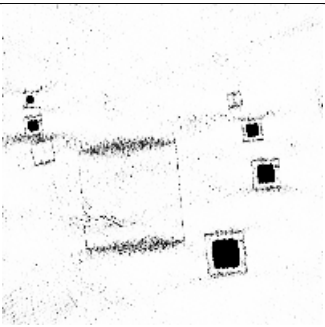
Die Schätzung der Wahrscheinlichkeit für Luft $P(Z \approx 0 \mid x_n = m_1)$ erfolgt gemäß Gleichung (4.11). An dieser Stelle können die Grenzen in gewohnter Weise berechnet werden: Die untere Grenze liegt bei $-\infty$, zumal kein Material einen kleineren Absorptionskoeffizienten hat als Luft. Zur Berechnung der oberen Grenze $+(m_2 - m_1)/2$ wird das Material mit dem nächst größeren Absorptionskoeffizienten herangezogen, in diesem Fall m_2 , und m_2 ist a priori bekannt. Die obere Grenze beträgt exakt $+(0,01 - 0,00)/2$. Die Beschaffenheit der Füllung spielt keine Rolle.

Auch bei der Schätzung der Wahrscheinlichkeit des Quadermaterials $P(Z \approx 0 \mid x_n = m_2)$ gemäß (4.10) besteht kein Zweifel an der Auslegung der unteren Grenze $-(m_2 - m_1)/2$. Für ihre Berechnung wird das Material mit dem nächst kleineren Absorptionskoeffizienten betrachtet, hier der Absorptionskoeffizient der Luft m_1 . Die untere Grenze lautet eindeutig $-(0,01 - 0,00)/2$. Aber für die obere Grenze $+(m_3 - m_2)/2$ kommen mit $m_3 \geq 0,02$ alle Werte ab $+(0,02 - 0,01)/2$ infrage. Um sicherzustellen, dass keinem Voxel eine zu hohe Wahrscheinlichkeit zugewiesen wird – um also immer auf der sicheren Seite zu sein – muss die Grenze möglichst „streng“ gewählt werden. In diesem Beispiel wird sie auf $+(0,02 - 0,01)/2$ gesetzt.

Eine Berechnung der Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 \mid x_n = m_3)$ entfällt.

Die Ergebnisse der Bewertung zeigt Tabelle 4.12. Alle Voxel, die die Füllung repräsentieren, werden falsch diskretisiert. Sie weisen aber extrem niedrige Wahrscheinlichkeiten auf. Weder Luft noch das Quadermaterial erreicht hier eine hohe Wahrscheinlichkeit. In den Bereichen, in denen Luft oder Quadermaterial im Phantom vorliegt, ähneln die Ergebnisse der Bewertung denen aus Tabelle 4.11. Unvollständiges a priori Wissen beeinträchtigt die Bewertung hier kaum.

Tabelle 4.12: Bewertung der Rekonstruktion aus Tabelle 4.11 unter der Annahme, der Absorptionskoeffizient der Füllung sei nicht exakt bekannt. Links: Schnittbild durch die Rekonstruktion nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Wahrscheinlichstes Material. Rechts: Dazugehörige Wahrscheinlichkeit gemäß (4.13). Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Rekonstruktion	Material q	$P(Z \approx 0 \mid x_n = m_q)$
	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
150° mit Rauschen			

Die beschriebene Anpassung der Grenzen führt bei M bekannten Materialien (und einer beliebigen Menge unbekannter Materialien) unweigerlich zu

$$1 - \sum_{1 \leq d \leq M} P(Z \approx 0 \mid x_n = m_d) \geq 0 \quad (4.14)$$

und damit direkt zu einer Auslegung im Sinne der von A. Dempster eingeführten und von G. Shafer weiterentwickelten Evidenztheorie [60].

Evidenztheorie

Die Wahrscheinlichkeit $P(H)$ drückt allgemein aus, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ereignis H eintritt. $1 - P(H)$ liefert allerdings in der Interpretation der Evidenztheorie keine Information über das komplementäre Ereignis. Diese Abgrenzung von der herkömmlichen Wahrscheinlichkeitslehre ist relevant in vielen Bereichen der Sensortechnik [34] [63]. Wenn beispielsweise die Aufgabe darin besteht, das Vorhandensein von Methan in der Luft festzustellen, und in einem Fallbeispiel mittels eines geeigneten Sensors mit 60%iger Wahrscheinlichkeit Methan gemessen wird, so beträgt nach der herkömmlichen Wahrscheinlichkeitslehre die Wahrscheinlichkeit für „reine“ Luft 40%. Tatsächlich aber – und so der Ansatz in der Evidenztheorie – wurde nicht aktiv gemessen, ob die Luft rein ist. Der Sensor könnte sich vermessen haben. Denkbar ist auch, dass noch eine andere gasförmige Substanz in der Luft aufgetreten ist, mit der nicht gerechnet wurde. Die 60% geben lediglich an, mit welcher Wahrscheinlichkeit speziell auf das Vorhandensein von Methan zu schließen ist.

Im gleichen Sinne drückt $P(Z \approx 0 \mid x_n = m_d)$ aus, wie wahrscheinlich es ist, dass das aktuell an der Position des Voxels n eingesetzte Material d im Volumen existierte, als das Prüfobjekt geröntgt wurde. Über andere Materialien, die vielleicht anderswo in der Aufnahmeszene vorkommen, gibt $P(Z \approx 0 \mid x_n = m_d)$ keine Auskunft.

Die Größe $1 - \sum_{1 \leq d \leq M} P(Z \approx 0 \mid x_n = m_d)$ aus (4.14) wird in der Evidenztheorie als „Unwissen“ bezeichnet. In der Simulation aus Tabelle 4.12 herrscht gerade im Bereich der Füllung, da weder das Quadermaterial noch Luft eine hohe Wahrscheinlichkeit erreicht, großes Unwissen (siehe Abbildung 4.23). Zur Ermittlung der Absorptionskoeffizienten neuer, unbekannter Komponenten könnte sich eine Auswertung des Unwissens als nützlich erweisen. Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt allerdings nicht auf der Ermittlung unbekannter Absorptionskoeffizienten, sondern auf der Entwicklung eines Gütemaßes zur Bewertung der Rekonstruktion.

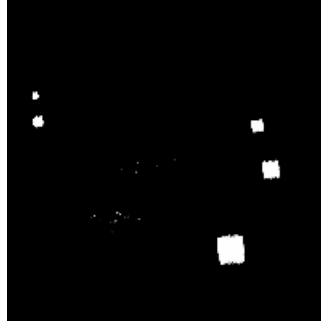


Abbildung 4.23: Unwissen in der Simulation aus Tabelle 4.12. Der dargestellte Wertebereich reicht von 0,5 bis 1,0. Ein hellerer Grauwert repräsentiert dabei höheres Unwissen.

Fusion nach Yager

Die vorausgegangenen Simulationen haben gezeigt, dass die an einem Voxel n gemessene maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ gemäß (4.13) die lokale Rekonstruktionsqualität auch unter variierenden Aufnahmebedingungen zuverlässig beschreibt. Je „unsicherer“ ein Voxel rekonstruiert ist, desto niedriger fällt $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ aus. Im Zweifelsfall, etwa bei unvollständigem a priori Wissen, ist die geschätzte Wahrscheinlichkeit eher zu niedrig als zu hoch.

Doch gerade im Fall unvollständigen a priori Wissens, da die Summe der Wahrscheinlichkeiten $\sum_{1 \leq d \leq M} P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ nicht unbedingt Eins ergibt, können durch die Extraktion des Maximums $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ entsprechend (4.13) Informationen verloren gehen, die das Durchtesten der einzelnen bekannten Materialien einer Aufnahmeszene ursprünglich lieferte. Abbildung 4.24 zeigt exemplarisch die Wahrscheinlichkeiten, die an den Positionen zweier Beispielveixel n und o aufgenommen werden, wenn nacheinander die Absorptionskoeffizienten der Materialien $d = 1 \dots 4$ eingesetzt werden. In beiden Fällen erreicht Material 2 die höchste Wahrscheinlichkeit. In beiden Fällen beträgt diese Wahrscheinlichkeit 0,25. Doch während an dem Voxel n jedes andere Material nur eine sehr niedrige Wahrscheinlichkeit vorweisen kann und somit kaum in Frage kommt, zeigt Voxel o annähernd eine Gleichverteilung. Es besteht ein sogenannter „Konflikt“ an der Position des Voxels o – ein Defizit, das nicht mehr nachweisbar ist, wenn die maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0 | x_n = m_q)$ aus der Verteilung extrahiert wird, um als Gütemaß zu fungieren.

Die Evidenztheorie bietet (in ihrer Erweiterung nach R. Yager [73]) die Möglichkeit, die einzelnen Wahrscheinlichkeiten zu fusionieren. Mit Hilfe der Fusionsformel

$$P_{fus}(Z \approx 0 | x_n = m_d) = P(Z \approx 0 | x_n = m_d) \cdot \prod_{\substack{0 \leq c \leq M \\ c \neq d}} (1 - P(Z \approx 0 | x_n = m_c)) \quad (4.15)$$

lässt sich für jedes geprüfte Material $d = 1 \dots M$ der Aufnahmeszene eine neue Wahrscheinlichkeit $P_{fus}(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ berechnen, in der nunmehr Konflikte bewahrt sind. Denn nach der Fusion ist die Wahrscheinlichkeit $P_{fus}(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ gegenüber dem ursprünglichen Wert $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ umso stärker gesunken, je höher die Wahrscheinlichkeiten der übrigen Materialien $c = 1 \dots M \wedge c \neq d$ ausgefallen sind. Anders ausgedrückt, je konfliktbehafteter ein Voxel ist, desto stärker ist die Abnahme der Wahrscheinlichkeiten. So zeigt das Beispi voxel o nach der Fusion, wie in Abbildung 4.25 veranschaulicht, für das Material 2 eine entschieden niedrigere Wahrscheinlichkeit als das Voxel n .

Es sei angemerkt, dass die Fusion nach (4.15) zwar die Höhe der Wahrscheinlichkeiten beeinflusst, nicht aber die Lage des Maximums. Die Darstellung des wahrscheinlichsten Materials bleibt infolgedessen unverändert.

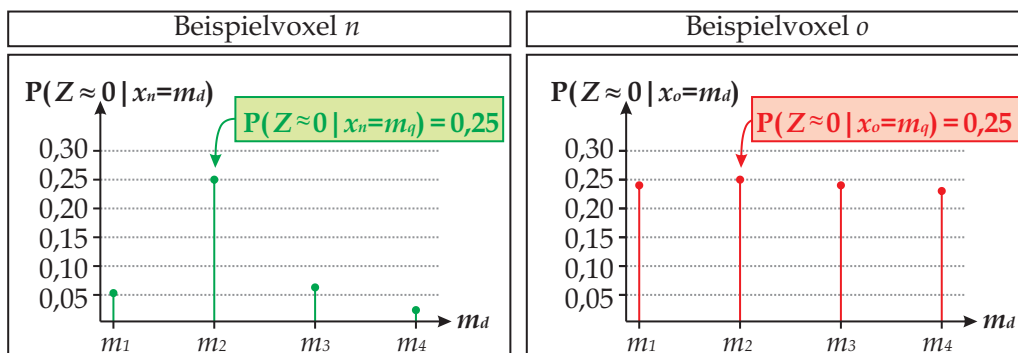


Abbildung 4.24: Wahrscheinlichkeiten $P(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ gemäß (4.10) - (4.12) bei Einsetzen der a priori bekannten Absorptionskoeffizienten der Materialien $d = 1 \dots 4$ an zwei Beispi voxeln n und o

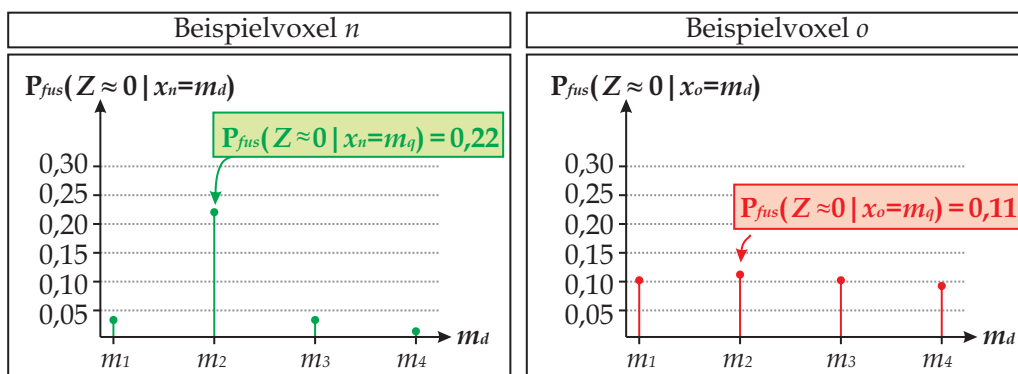


Abbildung 4.25: Fusionierte Wahrscheinlichkeiten $P_{fus}(Z \approx 0 | x_n = m_d)$ der beiden Beispi voxel aus Abbildung 4.24

Definition des Gütemaßes Averatio

Das Maximum der fusionierten Wahrscheinlichkeiten

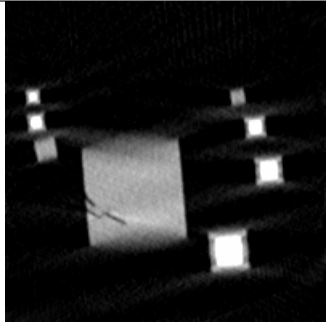
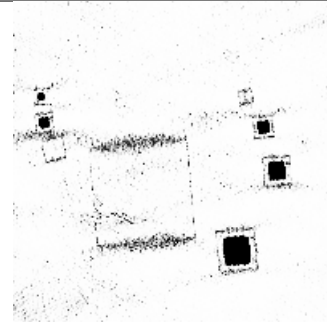
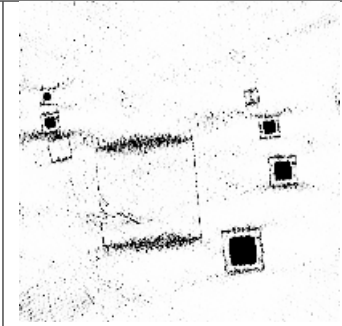
$$P_{fus}(Z \approx 0 \mid x_n = m_q) = \max_{1 \leq d \leq M} P_{fus}(Z \approx 0 \mid x_n = m_d) \quad (4.16)$$

dient fortan als Gütemaß zur lokalen Bewertung einer Rekonstruktion. Es drückt aus, wie *wahrscheinlich* es ist, dass das Material q – und allein das Material q – an der Position des aktuell untersuchten Voxels n richtig ist. $P_{fus}(Z \approx 0 \mid x_n = m_q)$ wird im Folgenden auch Averatio a_n genannt (4.17).

$$a_n = P_{fus}(Z \approx 0 \mid x_n = m_q) \quad (4.17)$$

Für die aus Tabelle 4.12 bekannte Rekonstruktion des Quader-Prüfobjektes liefert das Gütemaß Averatio das in Tabelle 4.13 in der rechten Spalte abgebildete Ergebnis. Verglichen mit der nicht fusionierten Wahrscheinlichkeit (mittlere Spalte) wirkt das Averatioschnittbild kontrastreicher. An vielen „schlecht“ rekonstruierten Voxeln sind die Wahrscheinlichkeiten durch die Fusion stärker gesunken als an „gut“ rekonstruierten Voxeln. Dass die Bewertung durch den Einsatz der Fusion quantitativ an Zuverlässigkeit gewinnt, wird im folgenden Abschnitt nachgewiesen.

Tabelle 4.13: Wiederholung des Versuches aus Tabelle 4.12. Links: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen nach sechs Iterationen der SART. Mitte: Wahrscheinlichkeit gemäß (4.13) ohne Fusion. Rechts: Wahrscheinlichkeit gemäß (4.16) mit Fusion, auch bezeichnet als Gütemaß Averatio. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Rekonstruktion	$P(Z \approx 0 \mid x_n = m_q)$	$P_{fus}(Z \approx 0 \mid x_n = m_q)$
	Grauwertfenster: 0 bis 0,015	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0	Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0
150° mit Rauschen			

Receiver Operating Characteristic

Um die Zuverlässigkeit eines Gütemaßes *quantitativ* zu erfassen, und ferner eine allgemeingültige Basis zum Vergleich verschiedener Gütemaße zu schaffen, eignet sich die Aufnahme der Receiver Operating Characteristic.

Jedem Voxel im Rekonstruktionsvolumen wird durch das Gütemaß Averatio der Absorptionskoeffizient des „wahrscheinlichsten“ Materials m_q (im Folgenden bezeichnet mit $m_q(a_n)$) zugeordnet. Dieser Absorptionskoeffizient stimmt entweder mit dem aus dem Phantom bekannten Absorptionskoeffizienten phm_n überein oder nicht. Das bedeutet, es lassen sich grundsätzlich zwei Ereignisse unterscheiden:

$$\Psi(n) = \Psi_0 \quad \text{wenn } m_q(a_n) \neq phm_n \quad (4.18)$$

$$\Psi(n) = \Psi_1 \quad \text{wenn } m_q(a_n) = phm_n \quad (4.19)$$

Unabhängig davon, wie stark eine Rekonstruktion vom Original abweicht und wie viele Voxel in einem Volumen korrekt oder inkorrekt zugeordnet wurden, sollte das Gütemaß idealerweise alle Voxel $\Psi(n) = \Psi_0$ als „fehlerhaft“ bewerten, alle übrigen Voxel als „originalgetreu“.

Der Averatiowert a_n eines Voxels n wird durch Einführung der Neyman-Pearson-Entscheidungsregel $\xi(n)$ des Entscheidungsraumes $\{\xi_0, \xi_1\}$ auf Basis eines Schwellenwertes τ binarisiert:

$$\xi(n) = \xi_0 \quad \text{wenn } a_n/(1 - a_n) \leq \tau \quad (4.20)$$

$$\xi(n) = \xi_1 \quad \text{wenn } a_n/(1 - a_n) > \tau \quad (4.21)$$

$\xi(n) = \xi_0$ stuft das betrachtete Voxel n als „fehlerhaft“ ein, $\xi(n) = \xi_1$ als „originalgetreu“.

Es ist anzunehmen, dass nicht alle Voxel im Rekonstruktionsvolumen richtig bewertet werden. Möglich ist, dass einige durch das Gütemaß als „fehlerhaft“ eingestufte Voxel das Prüfobjekt sehr wohl „originalgetreu“ darstellen. Auch sind wahrscheinlich manche als „originalgetreu“ eingestufte Voxel tatsächlich „fehlerhaft“ rekonstruiert. Abbildung 4.26 zeigt die möglichen Zuordnungen. Die Zuverlässigkeit der Bewertung eines Rekonstruktionsvolumens lässt sich über die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ und die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ erfassen. Die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ ergibt sich aus der Anzahl der Voxel, die in (4.21) durch das Gütemaß als „originalgetreu“ eingestuft wurden und tatsächlich entsprechend (4.19) das Phantom korrekt abbilden, dividiert durch die Anzahl der Voxel, die (unabhängig von der Entscheidung $\xi(n)$) gemäß (4.19) das Phantom korrekt abbilden. Gleichermaßen re-

suliert die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ aus der Anzahl der Voxel, die in ihrem Absorptionskoeffizienten entsprechend (4.18) vom Phantom abweichen und dennoch in (4.21) als „originalgetreu“ eingestuft wurden, dividiert durch die Anzahl der Voxel, die einfach die Bedingung (4.18) erfüllen. Ein zuverlässiges Gütemaß zeichnet sich durch eine möglichst hohe Detektionswahrscheinlichkeit bei gleichzeitig niedriger Fehldetektionswahrscheinlichkeit aus.

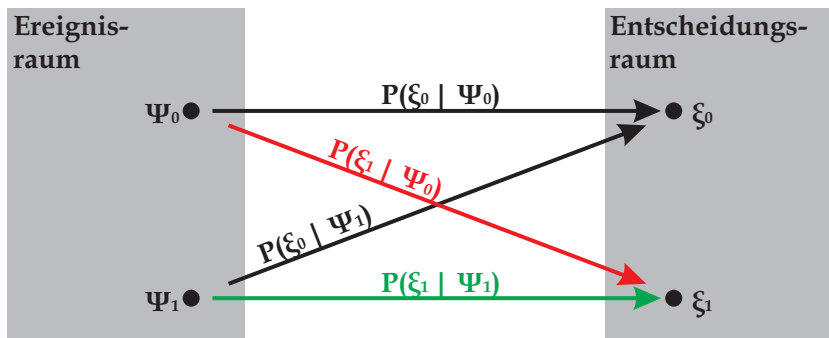


Abbildung 4.26: Flussdiagramm der Neyman-Pearson-Entscheidungsregel [49]

Je nachdem, wie der Schwellenwert τ eingestellt ist, ergeben sich unterschiedliche Wertepaare für $P(\xi_1|\Psi_1)$ und $P(\xi_1|\Psi_0)$. Ein höherer Schwellenwert stuft grundsätzlich *mehr* Voxel als „fehlerhaft“ ein und liefert damit eine niedrigere Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$. Parallel sinkt aber auch die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$.

Die Darstellung der Detektionswahrscheinlichkeit als Funktion der Fehldetektionswahrscheinlichkeit unter Variation des Schwellenwertes τ von Null bis (theoretisch) unendlich wird als Receiver Operating Characteristic (ROC) bezeichnet. Sie beginnt für $\tau = 0$ am Punkt $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1)) = (1, 1)$ und konvergiert für $\tau \rightarrow \infty$ gegen $(0, 0)$. Alle übrigen Schwellenwertentscheidungen ($0 < \tau < \infty$) liegen auf oder oberhalb der Geraden $P(\xi_1|\Psi_0) = P(\xi_1|\Psi_1)$ [39].

Abbildung 4.27 zeigt die real aufgenommenen Receiver Operating Characteristics für das Rekonstruktionsvolumen aus Tabelle 4.13. Der Schwellenwert τ wurde beginnend bei $\tau = 0$ in ganzzahligen Schritten bis 1000 inkrementiert. Somit besteht eine Kurve aus insgesamt 1001 Messpunkten $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1))$. Jedem Messpunkt liegt die Auswertung sämtlicher Voxel des Volumens (hier $200 \times 200 \times 40$ Voxel = 1600000 Voxel) zugrunde. Die Bewertung erfolgt zum einen durch das Gütemaß Averatio $a_n = P_{fus}(Z \approx 0|x_n = m_q)$ (4.17), zum anderen durch die unfusionierte Wahrscheinlichkeit $P(Z \approx 0|x_n = m_q)$ (4.13). Es ist festzustellen, dass die Bewertung durch das Gütemaß Averatio eine Receiver Operating Characteristic liefert, die dem idealen Verlauf sehr nahe kommt. Ohne Fusion ist die Bewertung unzuverlässiger. Konfliktbehaftete Voxel im Volumen werden demnach durch den Einsatz der Fusion strenger – letztendlich besser – bewertet.

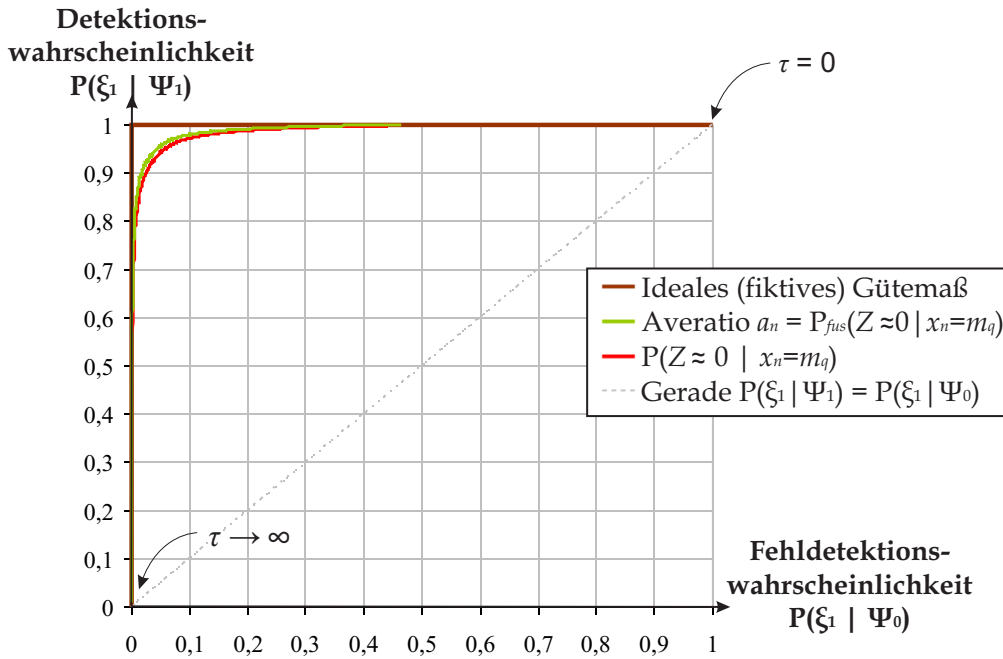


Abbildung 4.27: Receiver Operating Characteristics der Simulation aus Tabelle 4.13

4.3 Rekonstruktionsverfahren unter Berücksichtigung eines Gütemaßes

Im vorangegangenen Abschnitt 4.2 wurde die Herleitung des Gütemaßes Averatio beschrieben sowie dessen Eignung zur Bewertung realer Rekonstruktionsvolumen demonstriert. Der folgende Abschnitt knüpft an die in Kapitel 3 eingeführten Rekonstruktionsverfahren an. Es wird eine neue, iterative Methode vorgestellt, die – anders als die klassischen Verfahren – in der Lage ist, sich speziell auf die durch das Gütemaß identifizierten, fehlerhaft rekonstruierten Bereiche zu konzentrieren und diese letztendlich auch zu korrigieren.

4.3.1 Problem der klassischen Rekonstruktionsverfahren

Die klassischen Rekonstruktionsverfahren gehen stets von einem linearen Gleichungssystem aus, in dem jedes Voxel $n = 1 \dots V$ eine Unbekannte repräsentiert und jeder Messwert $u = 1 \dots U$ der Aufnahmeszene eine Gleichung. Zusammen bilden sie das Gleichungssystem (3.8).

Zur iterativen Lösung dieses Gleichungssystems werden nacheinander die Gleichungen $u = 1 \dots U$ abgearbeitet und das Rekonstruktionsvolumen Schritt für Schritt angepasst, wobei im Allgemeinen eine Minimierung der Kosten (3.18) angestrebt wird. Die Anpassung kann auf unter-

schiedliche Weise erfolgen. Bei der ART wird entsprechend (3.13) für eine aktuell betrachtete Gleichung u der Korrekturterm

$$\Delta x_{nu}^{(k)} = \frac{y_u - \sum_{v=1}^V x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v=1}^V w_{vu} \cdot w_{vu}} \cdot w_{nu} \quad (4.22)$$

berechnet und zum zuletzt rekonstruierten Absorptionskoeffizienten $x_n^{(k)}$ addiert, letzteres prinzipiell für jedes Voxel n im Volumen. Da bekanntermaßen der Wichtungsfaktor w_{nu} nur für diejenigen Voxel, deren Interpolationsbereich der betrachtete Strahl u durchquert, ungleich Null ist, erfahren logischerweise nur Voxel *im Strahl* eine Änderung des Absorptionskoeffizienten. Nach der Korrektur der Voxel ist die Bedingung (3.1) für die bearbeitete Gleichung u erfüllt.

An dieser Stelle soll der Korrekturterm Δx_{nu} (4.22) genauer analysiert werden. Im Zähler steht (neben dem Wichtungsfaktor w_{nu}) der Projektionsfehler $y_u - \sum x_v w_{vu}$. Sollte der Projektionsfehler exakt Null betragen, so resultiert daraus ein Korrekturterm von Null, schließlich ist die Bedingung (3.1) bereits erfüllt. Die Absorptionskoeffizienten bleiben in diesem Fall für alle Voxel im Strahl unverändert.

Den Nenner des Korrekturterms bildet die Summe $\sum w_{vu} w_{vu}$. Im Fall binärer Wichtungsfaktoren entspricht sie schlicht der Anzahl der Voxel, die der Strahl u durchquert. Das heißt, der Projektionsfehler wird durch die Anzahl der Voxel im Strahl geteilt und anschließend auf die Absorptionskoeffizienten aller Voxel im Strahl gleichmäßig verteilt¹ – ein durchaus sinnvoller Ansatz, wenn man annimmt, dass eine Abweichung des Projektionsfehlers von Null gleichermaßen von jedem Voxel im Strahl verursacht worden sein kann. Wenn allerdings bekannt ist, dass einige Voxel im Strahl das Prüfobjekt originalgetreu wiedergeben, so müssen – oder sollten – diese Voxel nicht mehr geändert werden. Mehr noch, wenn bekannt ist, dass die Absorptionskoeffizienten bestimmter Voxel im Strahl mit dem Original übereinstimmen, so kann eine Abweichung des Projektionsfehlers von Null nur von den übrigen Voxeln, die der Strahl durchquert hat, hervorgerufen worden sein. Die „Verteilung“ des Projektionsfehlers auf *alle* Voxel scheint hier wenig effizient.

Mithilfe des Gütemaßes *Averatio* lässt sich feststellen, welche Voxel „originalgetreu“ rekonstruiert sind und welche nicht. Originalgetreu rekonstruierte Voxel besitzen, wie die zuletzt präsentierten Simulationen zeigen, *Averatio*werte von annähernd 1,0 für genau das Material q , das sie tatsächlich repräsentieren.

¹Im Fall nicht-binärer Wichtungsfaktoren ist der Nenner $\sum w_{vu} w_{vu}$ proportional zu der Anzahl der Voxel im Strahl. Der Projektionsfehler wird gewichtet über w_{nu} auf die Absorptionskoeffizienten der Voxel im Strahl verteilt.

4.3.2 Variation der Menge der Unbekannten

Sei F die Menge der „fehlerhaft“ rekonstruierten Voxel im Volumen. Die Bedingung (3.1) wird neu formuliert:

$$y_u = \sum_{v \notin F} x_v \cdot w_{vu} + \sum_{v \in F} x_v \cdot w_{vu} \quad (4.23)$$

Werden fortan nur diejenigen Voxel, die der Menge F angehören, als Unbekannte im Gleichungssystem (3.8) behandelt, so lässt sich über den Kaczmarz-Ansatz (Abschnitt 3.1.3) eine neue, ART-verwandte Rekonstruktionsformel herleiten. Für alle $n \in F$ gilt

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \underbrace{\frac{y_u - \sum_{v \notin F} x_v^{(k)} w_{vu} - \sum_{v \in F} x_v^{(k)} w_{vu}}{\sum_{v \in F} w_{vu} w_{vu}}}_{\text{Korrekturterm}} \cdot w_{nu} \quad (4.24)$$

und alle $n \notin F$ sind von der Korrektur ausgeschlossen. Für sie gilt $x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)}$.

Der Projektionsfehler wird nunmehr nicht auf alle Voxel im Strahl verteilt, sondern ausschließlich auf die *fehlerhaften* Voxel im Strahl – genau die Bereiche im Volumen, die die Abweichung des Projektionsfehler von Null verursacht haben.

Die Wirkungsweise der neuen Rekonstruktionsformel (4.24) soll ein Beispiel demonstrieren. Der Röntgenstrahl u durchquert, wie in Abbildung 4.28 skizziert, 100 Voxel. Der Einfachheit halber werden binäre Wichtungsfaktoren angenommen. Für die 100 durchquerten Voxel beträgt der Wichtungsfaktor genau Eins, für alle übrigen Voxel im Rekonstruktionsvolumen Null. Von den 100 durchquerten Voxeln repräsentieren 20 Voxel ein Prüfobjekt, das aus einem homogenen Material besteht und den Absorptionskoeffizienten $m_M = 1$ besitzt. Die restlichen 80 Voxel stellen Luft dar ($m_1 = 0$). Der Messwert y_u beträgt demnach 20. Weiterhin wird angenommen, dass in der Rekonstruktion nur ein einziges, im Prüfobjekt gelegenes Voxel falsch rekonstruiert ist und einen Absorptionskoeffizienten von 0 aufweist. Der Projektionsfehler beläuft sich folglich auf $20 - 19 = 1$. Nach der klassischen ART (3.13) wird der Projektionsfehler auf alle 100 Voxel im Strahl verteilt. Der Korrekturterm beträgt $(20 - 19)/100 = 0,01$. Für das fehlerhaft rekonstruierte Voxel im Prüfobjekt ändert sich der Absorptionskoeffizient von 0 auf 0,01 (so wie für jedes Voxel im Strahl der Absorptionskoeffizient um 0,01 steigt.)

Mit der neuen Rekonstruktionsformel (4.24) wird der Projektionsfehler nicht durch die Anzahl der Voxel im Strahl, sondern nur durch die Anzahl der *fehlerhaft* rekonstruierten Voxel im Strahl geteilt. Im betrachteten Beispiel beträgt sie 1. Daraus resultiert ein Korrekturterm von $(20 - 19)/1 = 1$. Mit einem einzigen Korrekturschritt erreicht das fehlerhafte Voxel im Prüfobjekt seinen Sollwert $x_n = 0 + 1 = 1$. Eine vollständig originalgetreue Darstellung des Prüfobjektes ist damit erreicht.

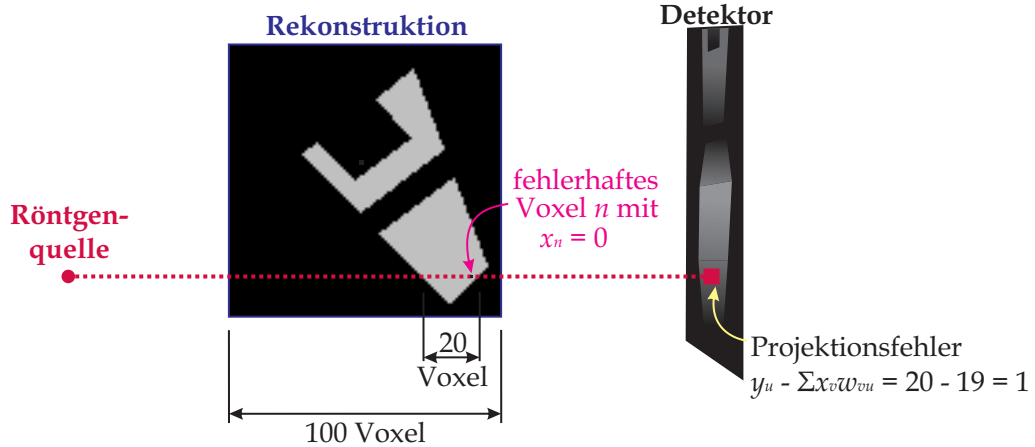


Abbildung 4.28: Rekonstruktion eines Prüfobjektes aus einem homogenen Material mit dem Absorptionskoeffizienten $m_M = 1$, umgeben von Luft ($m_1 = 0$). Der eingezeichnete Röntgenstrahl u durchquert 100 Voxel, wobei nur ein Voxel falsch rekonstruiert ist und den Absorptionskoeffizienten $x_n = 0$ trägt.

Durch den Ausschluss originalgetreu rekonstruierter Voxel aus der Menge der Unbekannten wird der Rekonstruktionsvorgang nicht nur beschleunigt. Gerade die Rekonstruktion eines Prüfobjektes aus Röntgenbildern mit eingeschränktem Winkelbereich entspricht aus mathematischer Sicht dem Versuch, ein unterbestimmtes Gleichungssystem zu lösen. Das Entfernen originalgetreuer Voxel aus der Menge der Unbekannten reduziert die Anzahl der Unbekannten. Im Idealfall wird das Gleichungssystem lösbar.

Es sei angemerkt, dass die Grundidee, originalgetreu rekonstruierte Voxel aus der Menge der Unbekannten auszuschließen, bereits in [8] Erwähnung findet. Die Arbeit [27] befasst sich mit ihrer speziellen Umsetzung (4.24) und Anwendung auf reale Rekonstruktionen aus Röntgenaufnahmen, die einer Winkelbereichseinschränkung unterliegen.

4.3.3 RegioSART

Mit der Unterscheidung „originalgetreu“ und „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel in (4.23) lässt sich auch für die SART (3.17) eine neue Rekonstruktionsformel herleiten. Für alle „fehlerhaften“ Voxel $n \in F$ gilt

$$x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)} + \lambda \cdot \frac{\sum_{u \in \Theta_r} \frac{y_u - \sum_{v \notin F} x_v^{(k)} \cdot w_{vu} - \sum_{v \in F} x_v^{(k)} \cdot w_{vu}}{\sum_{v \in F} w_{vu}} \cdot w_{nu}}{\sum_{u \in \Theta_r} w_{nu}} \quad (4.25)$$

und für alle $n \notin F$ bleibt $x_n^{(k+1)} = x_n^{(k)}$.

Nach wie vor werden, wie es für die SART eigen ist, alle Gleichungen, die zu den Messwerten eines Röntgenbildes Θ_r gehören, simultan verarbeitet. Die Korrektur der Absorptionskoeffizienten aller Voxel $n \in F$ erfolgt pro Röntgenbild einmal. Per Definition ist eine Iteration vollendet, wenn jede Gleichung einmal Berücksichtigung fand. Sie besteht bei R Röntgenbildern aus R Korrekturschritten.

Das Beispiel in Abbildung 4.28 hat gezeigt, dass in einem einzigen Korrekturschritt das fehlerhaft rekonstruierte Voxel n seinen Sollwert $x_n = 1$ erreicht. In realen Rekonstruktionsvolumen besteht die Menge F selten aus nur einem Voxel. Dann reicht ein Korrekturschritt kaum aus, um eine vollständig originalgetreue Darstellung des Prüfobjektes zu erhalten. Trotzdem ist anzunehmen, dass Teile des Volumens korrigiert werden können und schrittweise die Anzahl der fehlerhaften Voxel abnimmt. Das bedeutet, die Menge F muss im iterativen Verlauf der Rekonstruktion ständig neu überprüft werden. Abbildung 4.29 veranschaulicht den Ablauf des nunmehr als RegioSART bezeichneten Rekonstruktionsverfahrens. Rekonstruktion und Bewertung wechseln sich ab. Ein Durchlauf wird im Folgenden als Zyklus bezeichnet.

Wird zur Bewertung – und damit zur Unterscheidung „originalgetreuer“ und „fehlerhafter“ Voxel – das Gütemaß *Averatio* herangezogen, sollte sichergestellt sein, dass sich das zu bewertende Rekonstruktionsvolumen nicht mehr wesentlich ändert, schließlich basiert *Averatio* auf der Annahme, die Rekonstruktion passe im gewichteten, quadratischen Mittel zu allen Messdaten. Erfahrungsgemäß zeigt eine Rekonstruktion mit der SART bereits nach wenigen Iterationsdurchläufen keine Veränderungen mehr (Kapitel 3, Abbildung 3.11). In dieser Arbeit werden pro Zyklus grundsätzlich erst sechs Iterationen des Rekonstruktionsverfahrens ausgeführt und anschließend das komplette Volumen bewertet. Eine separate Konvergenzprüfung ist damit nicht notwendig.

Originalgetreu rekonstruierte Voxel besitzen bekanntermaßen *Averatio*werte von annähernd 1,0 für genau das Material q , das sie tatsächlich repräsentieren. Meist ist das Material q auch gleichzeitig jenes Material, das dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n wertemäßig am nächsten liegt. Zur Unterscheidung „originalgetreuer“ und „fehlerhafter“ Voxel wird beides geprüft: Erstens der *Averatio*wert a_n , zweitens das Material q . Voxel mit einem *Averatio*wert unterhalb einer definierten Schwelle (zum Beispiel $a_n \leq 0,99$) gelten dementsprechend als „fehlerhaft“, ebenso Voxel, deren rekonstruierter Absorptionskoeffizienten x_n nicht m_q , sondern einem anderen Material der Menge $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$ am nächsten kommt. Diese zweite Prüfung soll große Sprünge in der Rekonstruktion vermeiden, denn alle als „originalgetreu“ bewerteten Voxel erfahren eine Diskretisierung: Ihr rekonstruierter Absorptionskoeffizienten x_n wird ersetzt durch m_q .

Beispielhaft soll das Quader-Prüfobjekt aus Abbildung 4.20 rekonstruiert werden. Identisch zu dem Test aus Tabelle 4.11 liegen der Rekonstruktion verrauschte Röntgenbilder mit einem Winkelbereich von 150° zugrunde. Tabelle 4.14 zeigt den Verlauf der klassischen SART (3.17),

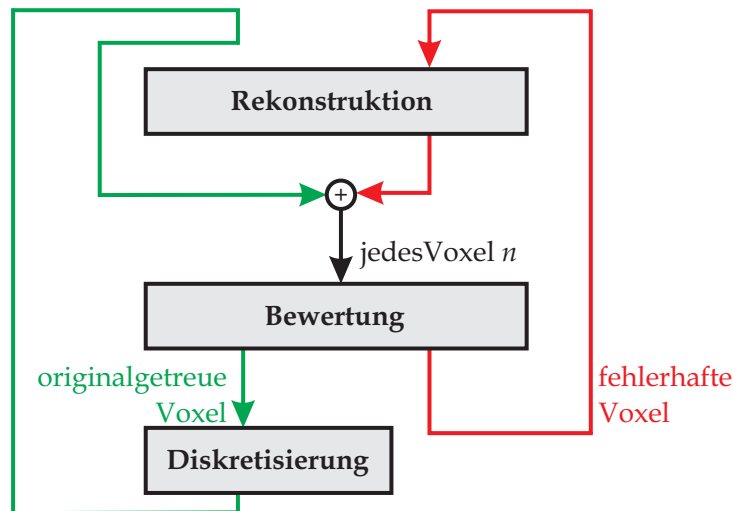


Abbildung 4.29: Ablauf der RegioSART

spricht ohne Variation der Menge der Unbekannten. Es ist festzustellen, dass sich auch in zwölf Iterationsdurchläufen kein Rückgang der für eingeschränkte Winkelbereiche charakteristischen, kegelartig verzerrten Bereiche abzeichnet.

Den Tabellen 4.15 und 4.16 sind die Ergebnisse bei Anwendung der RegioSART zu entnehmen. Die ersten sechs Iterationen stimmen mit denen der klassischen SART aus Tabelle 4.14 überein. Alle Voxel im Volumen gehören der Menge F an. Nach sechs Iterationen wird die Rekonstruktion durch das Gütemaß Averatio bewertet. In Abbildung 4.30 sind Voxel, die danach der Menge F zugeordnet wurden, rot dargestellt. Für die übrigen Voxel ist der Absorptionskoeffizient des jeweils wahrscheinlichsten Materials q abgebildet. Tabelle 4.16 zeigt die Fortsetzung der Rekonstruktion. In den nächsten Iterationsdurchläufen schrumpfen die verzerrten Bereiche. Rauschen tritt dafür stärker hervor. Die abermalige Bewertung (nach nunmehr zwölf Iterationen) stuft Rauschvoxel korrekt als „fehlerhaft“ ein (Abbildung 4.31). Im Bereich der verzerrten Würfelseiten hat die Anzahl der „fehlerhaften“ Voxel gegenüber der ersten Bewertung aus Abbildung 4.30 dafür deutlich abgenommen, die Rekonstruktionsqualität ist offensichtlich gestiegen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass mit der RegioSART eine Korrektur selbst für stark verzerrte Rekonstruktionen möglich ist. Während die klassischen Rekonstruktionsverfahren auf ihrer Lösung „festhängen“, liefert der Ausschluss originalgetreu rekonstruierter Voxel aus der Menge der Unbekannten einen neuen, besseren Ausgangspunkt zur Rekonstruktion eines Prüfobjektes aus wenigen Röntgenbildern.

Das Gelingen der RegioSART wird natürlich maßgeblich von dem verwendeten Gütemaß beeinflusst. Eine umfangreiche Analyse der Zuverlässigkeit des Gütemaßes Averatio sowie letztendlich der RegioSART beinhaltet Kapitel 5.

Tabelle 4.14: Rekonstruktion des Prüfobjektes aus Abbildung 4.3 mit der klassischen SART aus verrauschten Röntgenbildern mit 150°-Winkelbereich.

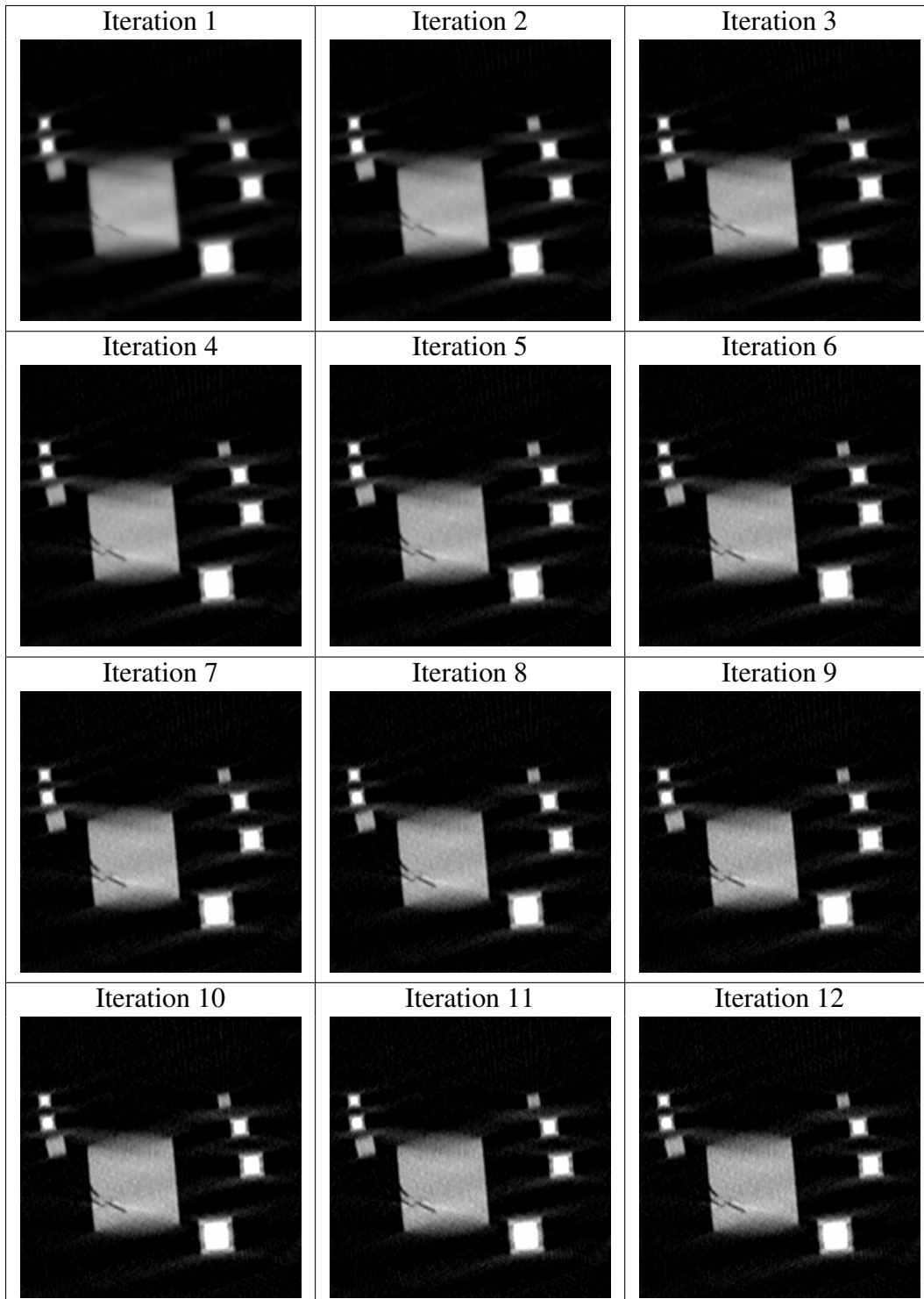


Tabelle 4.15: Wiederholung der Simulation aus Tabelle 4.14. Nach der 6. Iteration erfolgt die erste Bewertung und damit eine erste Auswahl der zur Menge F gehörenden Voxel (siehe Abbildung 4.30). Die Fortsetzung der Rekonstruktion mit der Re-gioSART ist der Tabelle 4.16 zu entnehmen.

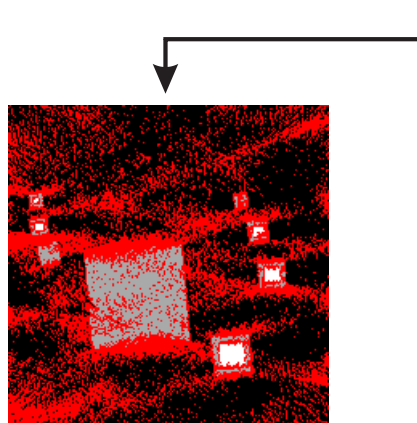
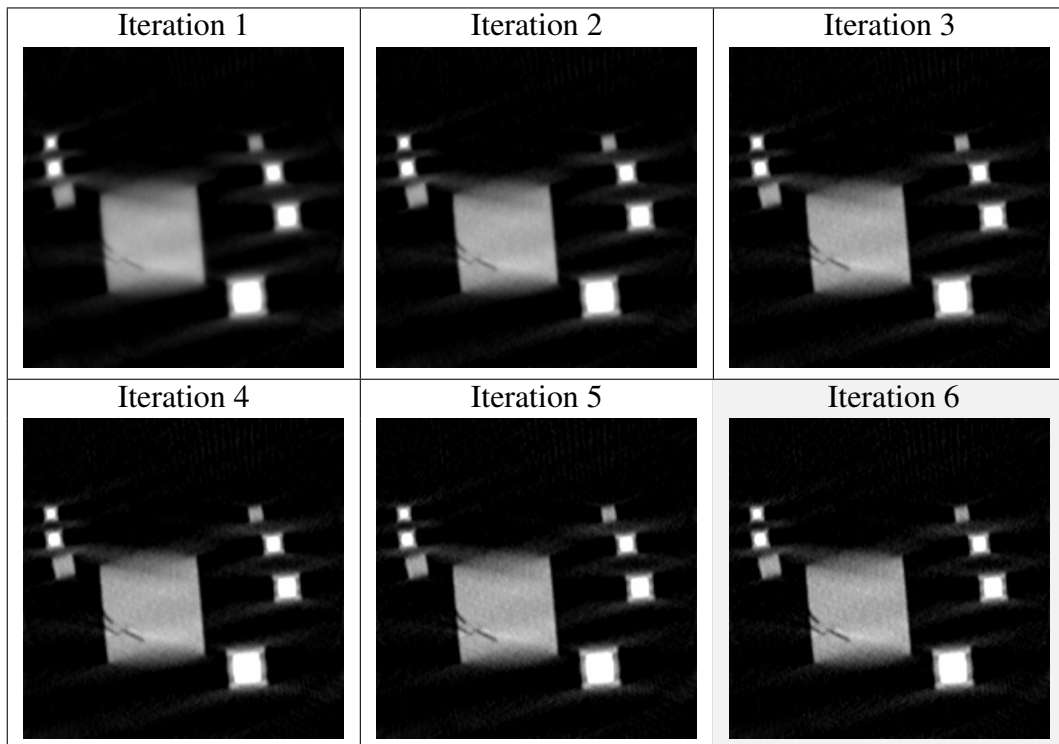


Abbildung 4.30: Bewertung der 6. Iteration aus Tabelle 4.15. „Fehlerhafte“ Voxel sind rot markiert. Für die „originalgetreuen“ Voxel ist der Absorptionskoeffizient des jeweils wahrscheinlichsten Materials q dargestellt.

Tabelle 4.16: Fortsetzung der Simulation aus Tabelle 4.15 mit der RegioSART. Die in Abbildung 4.30 rot markierten Voxel bilden in den nächsten sechs Iterationsdurchläufen (Iteration 7-12) die Menge der Unbekannten.

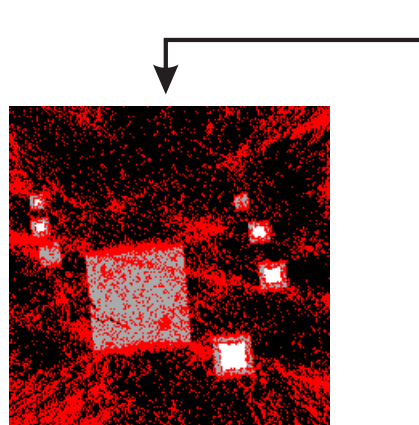
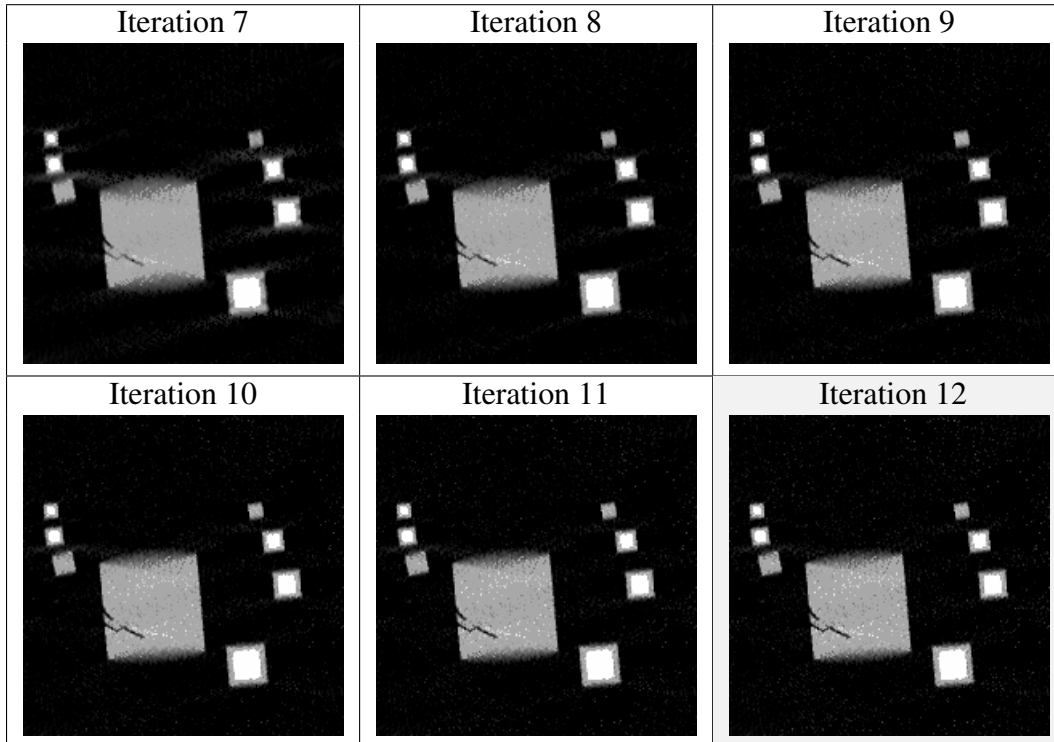


Abbildung 4.31: Bewertung der 12. Iteration aus Tabelle 4.16. „Fehlerhafte“ Voxel sind rot markiert. Für die „originalgetreuen“ Voxel ist der Absorptionskoeffizient des jeweils wahrscheinlichsten Materials q dargestellt.

5 Experimentelle Untersuchungen

In diesem Kapitel wird das Gütemaß Averatio an verschiedenen künstlichen sowie realen Aufnahmereihen unterschiedlicher Prüfobjekte getestet und in Hinblick auf seine Zuverlässigkeit bei der Erkennung und Eingrenzung von Artefakten im Rekonstruktionsvolumen untersucht. Dabei werden ausschließlich Anordnungen mit eingeschränktem Winkelbereich behandelt, keine 360°-Simulationen. **Abschnitt 5.1** stellt die einzelnen Aufnahmereihen im Detail vor.

Neben dem Gütemaß Averatio finden zwei aus der Literatur bekannte Ansätze zur lokalen Bewertung Anwendung. Diese werden in **Abschnitt 5.2** eingeführt.

Abschnitt 5.3 behandelt die Auswirkungen eines eingeschränkten Winkelbereiches auf die Zuverlässigkeit der Bewertung durch das Gütemaß Averatio sowie der beiden bekannten Ansätze zur lokalen Bewertung. Wie bereits in Kapitel 4 wird die Zuverlässigkeit jeweils mit Hilfe der Fehldetektionswahrscheinlichkeit und Detektionswahrscheinlichkeit für ein komplettes Volumen quantitativ erfasst.

Abschnitt 5.4 beleuchtet den Einfluss von Rauschen. Abermals erfolgt die Aufnahme der Fehldetektionswahrscheinlichkeit und Detektionswahrscheinlichkeit für alle künstlichen Prüfobjekte. Darüber hinaus werden Rekonstruktionen aus real aufgenommenen (und verrauschten) Röntgenbildern betrachtet und die Ergebnisse der Bewertung denen der künstlichen Aufnahmereihen gegenübergestellt.

Abschnitt 5.5 präsentiert schließlich den Einsatz der in Abschnitt 4.3 vorgestellten RegioSART.

5.1 Beschreibung der verwendeten Aufnahmereihen

Gegenstand der folgenden experimentellen Untersuchungen bilden zwei künstliche Prüfobjekte: Das erste, als Phantom A bezeichnete Prüfobjekt, stellt einen Steckverbinder dar (Abbildung 5.1). Das zweite, Phantom B, ist einem Aluminiumwerkstück mit eingelassener Stahlschraube nachempfunden (Abbildung 5.2). Maße und Materialien beider Prüfobjekte sowie die Grundeinstellungen zur Aufnahme der Röntgenbilder sind an reale Gegebenheiten angelehnt und in den Tabellen 5.1 und 5.3 aufgeführt.

Von jedem Phantom werden drei Trajektorien mit unterschiedlich stark eingeschränktem Winkelbereich betrachtet und für jede dieser Trajektorien wiederum drei Röntgenbilder-Datensätze generiert: Einen Datensatz mit idealen, das heißt unverrauschten Röntgenbildern, und zwei Datensätze mit variierendem Rauschen. Damit ergeben sich pro Phantom neun Aufnahmereihen (siehe Tabelle 5.2 und 5.4).

Jeder Aufnahmereihe liegt eine Kegelstrahlgeometrie zugrunde. Die Röntgenstrahlung wird als monochromatisch betrachtet. Strahlaufhärtung wird vernachlässigt. Das Rauschen der Röntgenbilder ist mittelwertfrei und folgt einer Gauß-Charakteristik.

Ab Abschnitt 5.4 werden zusätzlich drei reale Aufnahmereihen des aus Kapitel 3 bekannten Aluminiumwerkstückes betrachtet (Abbildung 5.3). Die Grundeinstellungen des Computertomografen sind in der Tabelle 5.5 aufgeführt, Spezifikationen der Aufnahmereihen in Tabelle 5.6.

Phantom A

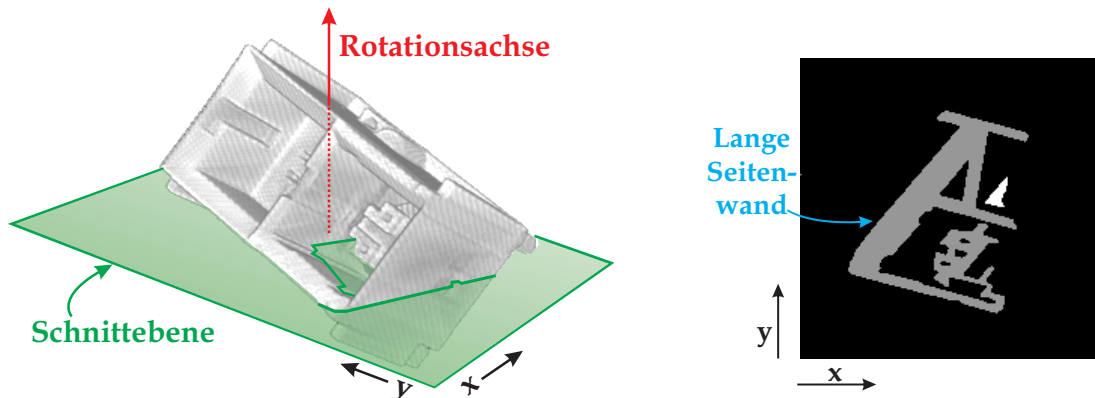
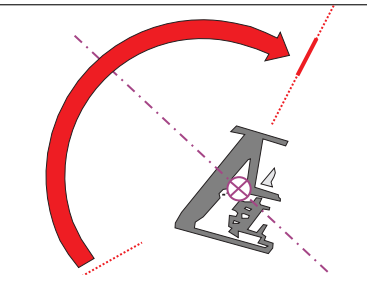
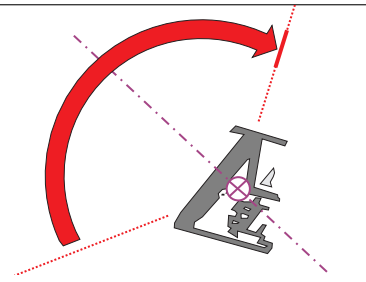
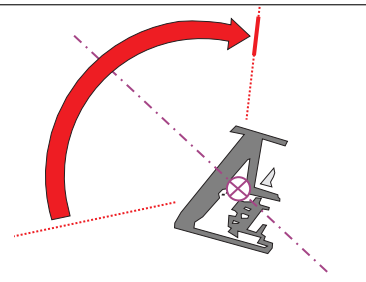


Abbildung 5.1: Phantom A. Links: 3D-Ansicht. Rechts: Schnittbild durch das Volumen in der links eingezeichneten Schnittebene, senkrecht zur Rotationsachse.

Tabelle 5.1: Maße und Materialien der Aufnahmeszene mit Phantom A

Volumen: $200 \times 200 \times 200$ Voxel $\hat{=}$ $45,88 \times 45,88 \times 45,88$ mm
Detektor: 200×200 Pixel $\hat{=}$ $199,98 \times 199,98$ mm
Abstand zwischen Quelle und Rotationsachse: 186,75 mm
Abstand zwischen Quelle und Detektor: 813,96 mm
Winkelschrittweite zwischen aufeinanderfolgenden Röntgenbildern: $1,8^\circ$
Materialien: $m_1 = 0,0$, $m_2 = 0,009$, $m_3 = 0,018$

Tabelle 5.2: Winkelbereich und Rauschen der einzelnen Testreihen mit Phantom A

149,4° Winkelbereich 83 Röntgenbilder	129,6° Winkelbereich 72 Röntgenbilder	109,8° Winkelbereich 61 Röntgenbilder
		
Reihe A1: $\sigma_y = 0,0$	Reihe A2: $\sigma_y = 0,0$	Reihe A3: $\sigma_y = 0,0$
Reihe A4: $\sigma_y = 0,001$	Reihe A5: $\sigma_y = 0,001$	Reihe A6: $\sigma_y = 0,001$
Reihe A7: $\sigma_y = 0,002$	Reihe A8: $\sigma_y = 0,002$	Reihe A9: $\sigma_y = 0,002$

Phantom B

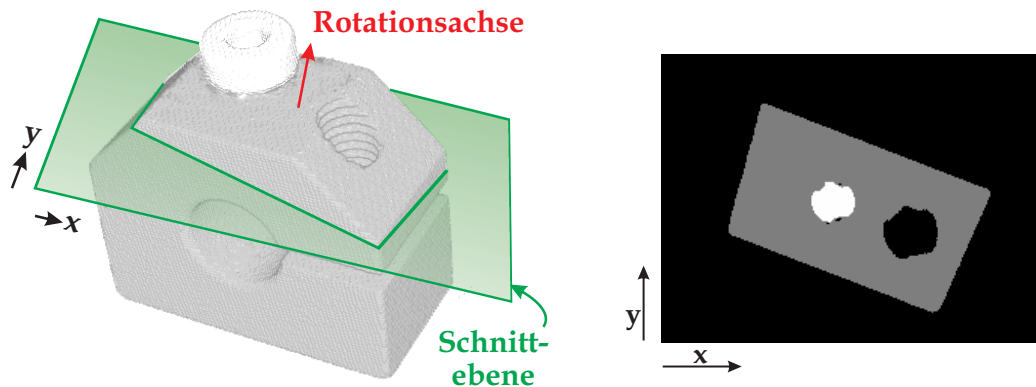


Abbildung 5.2: Phantom B. Links: 3D-Ansicht. Rechts: Schnittbild durch das Volumen in der links eingezeichneten Schnittebene, senkrecht zur Rotationsachse.

Tabelle 5.3: Maße und Materialien der Aufnahmeszene mit Phantom B

Volumen: $192 \times 256 \times 256$ Voxel $\hat{=} 26,25 \times 35 \times 35$ mm
Detektor: 256×256 Pixel $\hat{=} 204,8 \times 204,8$ mm
Abstand zwischen Quelle und Rotationsachse: 136,35 mm
Abstand zwischen Quelle und Detektor: 779,09 mm
Winkelschrittweite zwischen aufeinanderfolgenden Röntgenbildern: $1,406^\circ$
Materialien: $m_1 = 0,0$, $m_2 = 0,006109$, $m_3 = 0,026181$

Tabelle 5.4: Winkelbereich und Rauschen der einzelnen Testreihen mit Phantom B

150,47° Winkelbereich 107 Röntgenbilder	130,78° Winkelbereich 93 Röntgenbilder	98,44° Winkelbereich 70 Röntgenbilder
Reihe B1: $\sigma_y = 0,0$	Reihe B2: $\sigma_y = 0,0$	Reihe B3: $\sigma_y = 0,0$
Reihe B4: $\sigma_y = 0,002$	Reihe B5: $\sigma_y = 0,002$	Reihe B6: $\sigma_y = 0,002$
Reihe B7: $\sigma_y = 0,003$	Reihe B8: $\sigma_y = 0,003$	Reihe B9: $\sigma_y = 0,003$

Reales Prüfobjekt

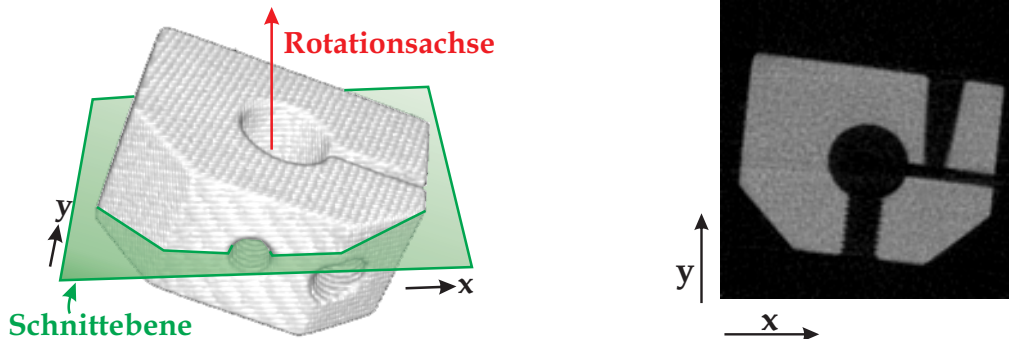


Abbildung 5.3: Reales Prüfobjekt. Links: 3D-Ansicht. Rechts: Schnittbild durch das Rekonstruktionsvolumen einer 360°-Aufnahmereihe in der links eingezeichneten Schnittebene, senkrecht zur Rotationsachse.

Tabelle 5.5: Maße und Materialien der Aufnahmeszene des realen Prüfobjektes

Volumen: $124 \times 124 \times 124$ Voxel $\hat{=} 31 \times 31 \times 31$ mm
Detektor: 168×128 Pixel $\hat{=} 67,2 \times 51,2$ mm
Abstand zwischen Quelle und Rotationsachse: 485,0 mm
Abstand zwischen Quelle und Detektor: 775,1 mm
Winkelschrittweite zwischen aufeinanderfolgenden Röntgenbildern: $2,195^\circ$
Materialien: $m_1 = 0,0$, $m_2 = 0,006109$

Tabelle 5.6: Winkelbereich der einzelnen Testreihen mit dem realen Prüfobjekt

151,46° Winkelbereich 69 Röntgenbilder	138,29° Winkelbereich 63 Röntgenbilder	90,00° Winkelbereich 41 Röntgenbilder
Reihe C1: $\sigma_y \approx 0,003$	Reihe C2: $\sigma_y \approx 0,003$	Reihe C3: $\sigma_y \approx 0,003$

5.2 Alternative Methoden zur Bewertung

Die ausgewählten, alternativen Methoden zur lokalen Bewertung von Rekonstruktionsvolumen basieren wie Averatio auf dem a priori Wissen über die Absorptionskoeffizienten der Materialien, die in einer Aufnahmeszene vorkommen. Kenntnisse von der Bauteilform fließen nicht ein.

5.2.1 Differenz

In den Abschnitten 3.3 und 4.1 wurden verschiedene Ansätze aus der Literatur vorgestellt, die zur Korrektur von Artefakten in einer Rekonstruktion eine Diskretisierung anstreben. Der aktuell rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n eines Voxels n wird entweder mit definierten Schwellen oder – sofern vorhanden – den a priori bekannten Absorptionskoeffizienten der Materialien $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_M\}$ verglichen. Im letzteren Fall bildet die Differenz

$$dif_n = \min_{1 \leq d \leq M} |x_n - m_d| \quad (5.1)$$

die Grundlage für eine lokale Bewertung. Je größer dif_n in einem Voxel n ausfällt, desto weniger vertrauenswürdig ist die Diskretisierung [17].

Der Wertebereich der Differenz dif_n (5.1) reicht von Null bis $+\infty$. Zur besseren Vergleichbarkeit mit Averatio wird dif_n auf den Wertebereich $[0, 1]$ normiert und wie folgt invertiert:

$$dif'_n = \begin{cases} 1 - \frac{dif_n}{|m_{D2} - m_{D1}|} & \text{wenn } \frac{dif_n}{|m_{D2} - m_{D1}|} < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.2)$$

In (5.2) bezeichnet $D1$ eben jenes Material, welches mit seinem Absorptionskoeffizienten m_{D1} dem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n am nächsten liegt, $D2$ das „zweitnächste“ Material gemäß folgender Festlegung:

$$m_{D2} = \begin{cases} m_{(D1)+1} & \text{wenn } x_n > m_{D1} \wedge 1 < D1 < M \vee D1 = 1 \\ m_{(D1)-1} & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.3)$$

Wenn x_n mit einem a priori gegeben Material-Absorptionskoeffizienten übereinstimmt, so ergibt sich dif_n zu Null und folglich dif'_n zu Eins. Mit zunehmenden dif_n sinkt dif'_n . Liegt x_n genau zwischen zwei Materialien, so wird für dif'_n ein Wert von 0,5 erzielt (veranschaulicht in Abbildung 5.4).

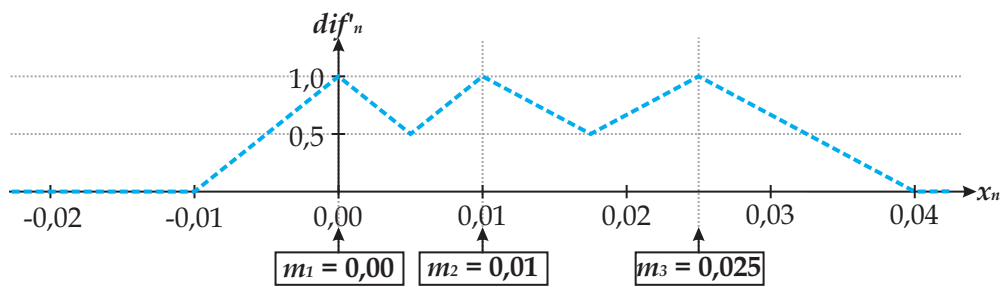


Abbildung 5.4: Gütemaß dif_n^l als Funktion des rekonstruierten Absorptionskoeffizienten x_n für eine Aufnahmeszene mit drei Materialien $m_1 = 0,00$, $m_2 = 0,01$, $m_3 = 0,025$

5.2.2 Binarisierter Gradient

Eine andere Methode zur Unterscheidung „sicher“ und „unsicher“ beziehungsweise „originalgetreu“ und „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel setzen [8], [9] und [16] ein. Ein komplettes Rekonstruktionsvolumen wird diskretisiert, indem jedem Voxel (entsprechend Abschnitt 5.2.1) der nächstgelegene Absorptionskoeffizient m_{D1} zugeordnet wird. Als „fehlerhaft“ werden ausschließlich diejenigen Voxel bezeichnet, die sich nach der Diskretisierung des Volumens in ihrem Absorptionskoeffizienten von ihrer Nachbarschaft unterscheiden. Es gilt folgende Definition für die Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten:

$$bin_n = \begin{cases} 1 & \text{wenn } grad_n = 0 \\ 0 & \text{wenn } grad_n > 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$grad_n$ ist dabei der Gradientenbetrag in der $3 \times 3 \times 3$ er Nachbarschaft des Voxels n im diskretisierten Rekonstruktionsvolumen [3]. Er beläuft sich auf Null, wenn alle Voxel der Nachbarschaft sowie das zentrale Voxel n bei der Diskretisierung dem selben Material zugeordnet wurden. In diesem Fall beträgt $bin_n = 1$ und das Voxel n wird als „originalgetreu“ eingestuft. Sobald auch nur ein Voxel im Wert von den übrigen Voxeln abweicht, ist der Gradientenbetrag positiv und die Entscheidung fällt auf $bin_n = 0$, sprich „fehlerhaft“.

5.3 Untersuchungen zur Detektierbarkeit schlecht rekonstruierter Volumenbereiche

In diesem Abschnitt werden die Gütemaße Averoatio a_n (4.17), Differenz dif'_n (5.2) und die Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4) hinsichtlich ihrer Zuverlässigkeit bei der Detektion von Artefakten, die durch einen eingeschränkten Winkelbereich im Rekonstruktionsvolumen entstehen, untersucht. Gegenstand der Untersuchung bilden zunächst die sechs unverrauschten Aufnahmereihen A1, A2 und A3 sowie B1, B2 und B3 (Tabelle 5.2 und 5.4).

Identisch zu den vorangegangenen Tests an dem Quader-Prüfobjekt in Kapitel 4 wird von jeder Aufnahmereihe die Rekonstruktion nach sechs Iterationen der klassischen SART ($\lambda = 0,5$) bewertet. Schnittbilder durch die Rekonstruktionsvolumen zeigen die Tabellen 5.7 und 5.8.

Tabelle 5.7: Schnittbilder durch die zu bewertenden Rekonstruktionsvolumen der Aufnahmereihen A1, A2 und A3 (entsprechend Tabelle 5.2)



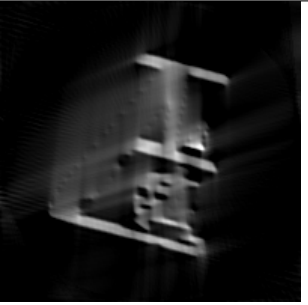
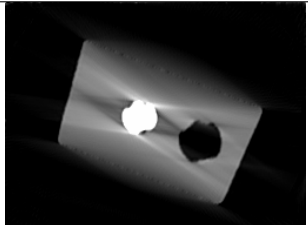
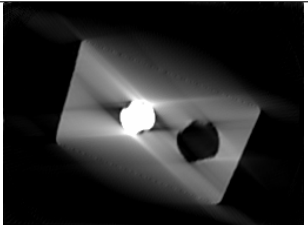
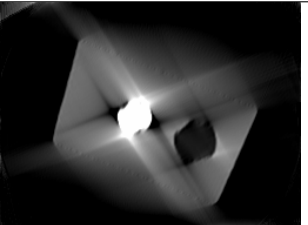
Reihe A1 149,4° Winkelbereich	Reihe A2 129,6° Winkelbereich	Reihe A3 109,8° Winkelbereich
		

Tabelle 5.8: Schnittbilder durch die zu bewertenden Rekonstruktionsvolumen der Aufnahmereihen B1, B2 und B3 (entsprechend Tabelle 5.4)

Reihe B1 150,47° Winkelbereich	Reihe B2 130,78° Winkelbereich	Reihe B3 98,44° Winkelbereich
		

5.3.1 Subjektive Betrachtung der Bewertung

Den Tabellen 5.9 und 5.10 sind die Ergebnisse der Diskretisierung sowie Bewertung durch den Binarisierten Gradienten zu entnehmen. Im Wesentlichen liefert die Diskretisierung zusammenhängende Regionen, innerhalb derer ein homogener Absorptionskoeffizient vorliegt. Ausschließlich Voxel an den Grenzen dieser Regionen weisen einen Gütemaßwert von $bin_n = 0$ auf und werden als „fehlerhaft“ eingestuft. Alle übrigen Voxel gelten als „originalgetreu“ ($bin_n = 1$). Es ist festzustellen, dass sich die Regionen mit abnehmendem Winkelbereich in ihrer Form mehr und mehr verändern, wodurch die Grenzen von der eigentlichen Objektoberfläche abwandern und häufiger falsch diskretisierte Voxel als „originalgetreu“ bewertet werden.

Das Gütemaß dif'_n verzeichnet generell niedrigere Werte, wenn der rekonstruierte Absorptionskoeffizient eines Voxels stärker von dem Ergebnis der Diskretisierung abweicht. Artefakte lassen sich bis zu einem gewissen Grad an ihrer stärkeren Abweichung erkennen. So ist zum Beispiel in der Aufnahmereihe A1 (Tabelle 5.11) zu beobachten, dass die meisten Voxel im Inneren der langen, von links unten nach rechts oben verlaufenden Seitenwand noch korrekt dem Material 2 zugeordnet werden und sich durch relativ hohe Gütemaßwerte auszeichnen. Voxel nahe der Oberfläche (derselben Seitenwand) sind dagegen unscharf rekonstruiert. Sie besitzen niedrigere Gütemaßwerte. In der Aufnahmereihe A2 ist die Diskretisierung infolge des verkleinerten Winkelbereiches auch innerhalb der Seitenwand schlechter, falsch diskretisierte Voxel lassen sich an ihren gesunkenen Gütemaßwerten erkennen. In der Aufnahmereihe A3 indes versagt die Bewertung: Alle Voxel, die eigentlich die Seitenwand repräsentieren, kommen mit ihrem rekonstruierten Absorptionskoeffizienten dem Absorptionskoeffizienten m_1 (Luft) so nahe, dass sie fälschlicherweise der Luft zugeordnet werden und wieder höhere Gütemaßwerte erhalten, was eine bessere Rekonstruktionsqualität suggeriert. Auch die Tests mit Phantom B (Tabelle 5.12) ergeben, dass die Rekonstruktion der Aufnahmereihe B1 noch zuverlässig bewertet wird, in den Aufnahmreihen B2 und B3 zunehmend falsch diskretisierte Voxel nicht erkannt werden.

Anders als das Gütemaß dif'_n zeigt die Bewertung durch Averatio in der langen Seitenwand von Phantom A in allen Aufnahmreihen – einschließlich A3 – niedrige Gütemaßwerte in Bereichen, die nicht dem richtigen Material zugeordnet werden konnten (Tabelle 5.13). Die Messdaten, die bei der Bestimmung der Gütemaße dif'_n und bin_n keine Berücksichtigung finden, tragen ganz offensichtlich wichtige Informationen zur lokalen Bewertung bei. In den Averatioschnittbildern fällt andererseits auch auf, dass in manchen scheinbar gut rekonstruierten Bereichen niedrige Averatiowerte vorherrschen. Es bilden sich „schwarze Flecken“. Wenn ein Rekonstruktionsvolumen infolge eines beschränkten Winkelbereiches großflächig vom Original abweicht, so durchqueren die einzelnen Röntgenstrahlen viele fehlerbehaftete Voxel. Die Projektionsfehler schwanken stärker um Null. Diese Tatsache ermöglicht die zuverlässige Detektion schlecht rekonstruierter Voxel, macht es aber schwierig, einzelne gut rekonstruierte Voxel noch zu lokalisieren, wenn die Umgebung extrem vom Original abweicht. Für einen Einsatz in allen sicherheitsre-

levanten Anwendungen ist dieser Ausfall vertretbar, denn es handelt sich um einen Fehler *zur sicheren Seite*: Fehlerhaft rekonstruierte Voxel werden nach wie vor als „fehlerhaft“ eingestuft. Die Bewertung ist lediglich zu kritisch.

Tabelle 5.14 beinhaltet die entsprechenden Tests mit Phantom B. In den Aufnahmereihen B1 und B2 werden schlecht rekonstruierte und falsch diskretisierte Bereiche an ihren niedrigen Averatiowerten erkennbar. Erst in der Aufnahmereihe B3 stößt die Bewertung an ihre Grenzen: Einige Luftvoxel (im Randbereich des Volumens) werden dem falschen Material zugeordnet und besitzen dennoch hohe Averatiowerte.

Zusammengefasst lässt sich sagen, *jedes* Gütemaß verliert an Zuverlässigkeit, wenn der Winkelbereich, den die Röntgenbilder aufspannen, reduziert wird. Je kleiner der Winkelbereich ist, desto größer ist die Anzahl der Lösungen für das Rekonstruktionsproblem. In Abschnitt 3.3 wurde darauf hingewiesen, dass das Einbringen von a priori Wissen zwar die Anzahl der Lösungen reduziert, allerdings nicht zwangsläufig dazu führt, dass das Rekonstruktionsproblem eindeutig wird.

5.3.2 Quantitative Betrachtung der Bewertung

Nach der subjektiven Betrachtung der Schnittbilder soll nun eine quantitative Auswertung der Zuverlässigkeit der Gütemaße bei der Detektion von Artefakten im gesamten Volumen erfolgen. Dafür wird wie schon in Kapitel 4 für jedes einzelne Gütemaßvolumen unter Variation des Schwellenwertes τ die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ sowie die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ – sprich die Receiver Operating Characteristic – aufgenommen. Der Binarisierte Gradient bin_n liefert anders als die Gütemaße Averatio a_n und dif'_n keine Kurve, sondern nur einen Messpunkt $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1))$.

Die Abbildungen 5.5 bis 5.10 zeigen die Resultate. Bei der Bewertung durch den Binarisierten Gradienten bin_n ergibt sich in jeder der sechs Aufnahmereihen eine hohe Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ und eine hohe Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$, zumal verhältnismäßig wenig Voxel überhaupt als „fehlerhaft“ eingestuft werden. Zudem steigt die Fehldetektionswahrscheinlichkeit bei kleiner werdendem Winkelbereich, da, wie bereits den Schnittbildern entnommen werden konnte, die Grenzen stärker von der eigentlichen Prüfobjektoberfläche abwandern und infolgedessen häufiger falsch diskretisierte Voxel als „originalgetreu“ eingestuft werden.

Auch die Receiver Operating Characteristics der Gütemaße Averatio a_n und dif'_n weichen umso stärker vom idealen Verlauf ab, je kleiner der Winkelbereich ist. Die verminderte Zuverlässigkeit der Bewertung bei kleineren Winkelbereichen wird bestätigt. Bei genauer Betrachtung der beiden

Tabelle 5.9: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.7. Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe A1 149,4° Winkelbereich	Reihe A2 129,6° Winkelbereich	Reihe A3 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.10: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.8. Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe B1 150,47° Winkelbereich	Reihe B2 130,78° Winkelbereich	Reihe B3 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.11: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.7. Obere Zeile: Differenz dif'_n .
 Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert
 grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

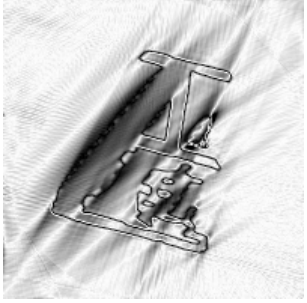
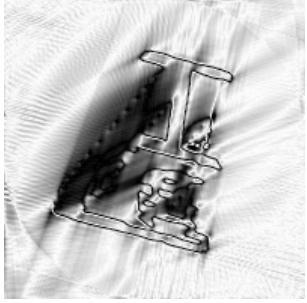
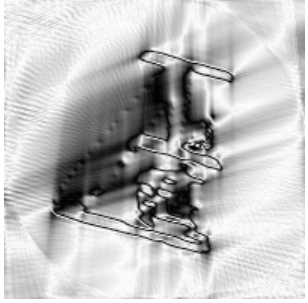



	Reihe A1 149,4° Winkelbereich	Reihe A2 129,6° Winkelbereich	Reihe A3 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.12: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.8. Obere Zeile: Differenz dif'_n .
 Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert
 grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

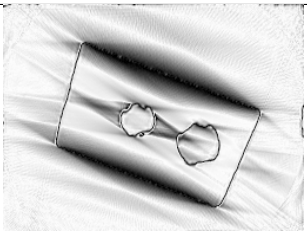
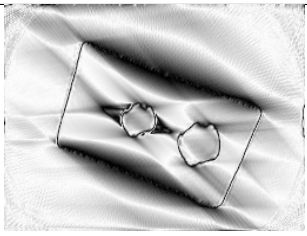
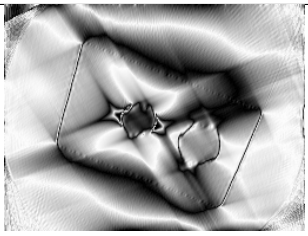
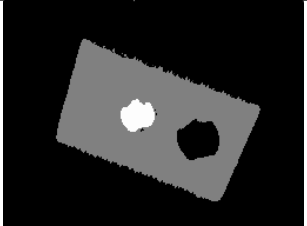


	Reihe B1 150,47° Winkelbereich	Reihe B2 130,78° Winkelbereich	Reihe B3 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.13: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.7. Obere Zeile: Averatio a_n .
Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert re-
präsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

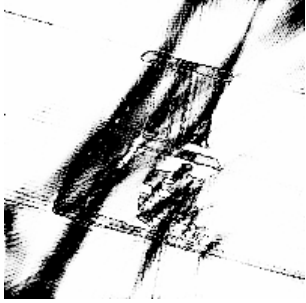
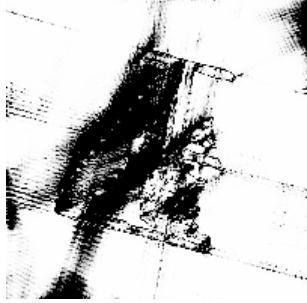

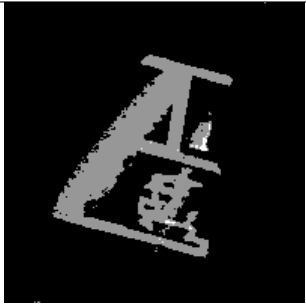
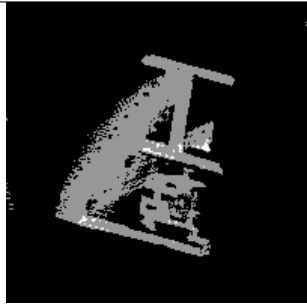
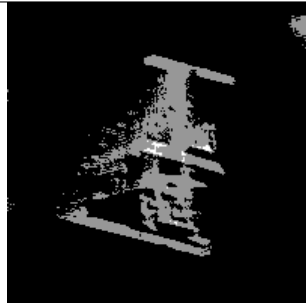
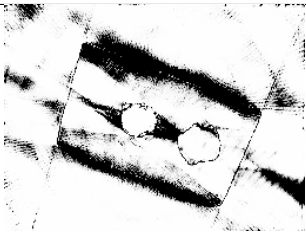
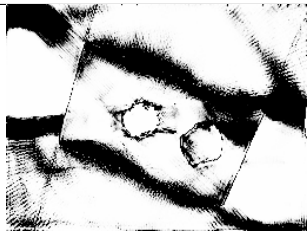

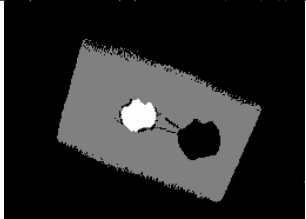
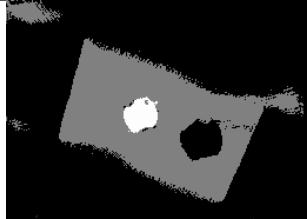
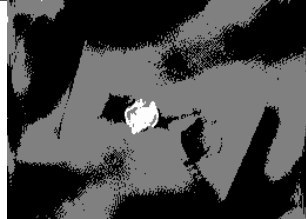
	Reihe A1 149,4° Winkelbereich	Reihe A2 129,6° Winkelbereich	Reihe A3 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.14: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.8. Obere Zeile: Averatio a_n .
Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert re-
präsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe B1 150,47° Winkelbereich	Reihe B2 130,78° Winkelbereich	Reihe B3 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

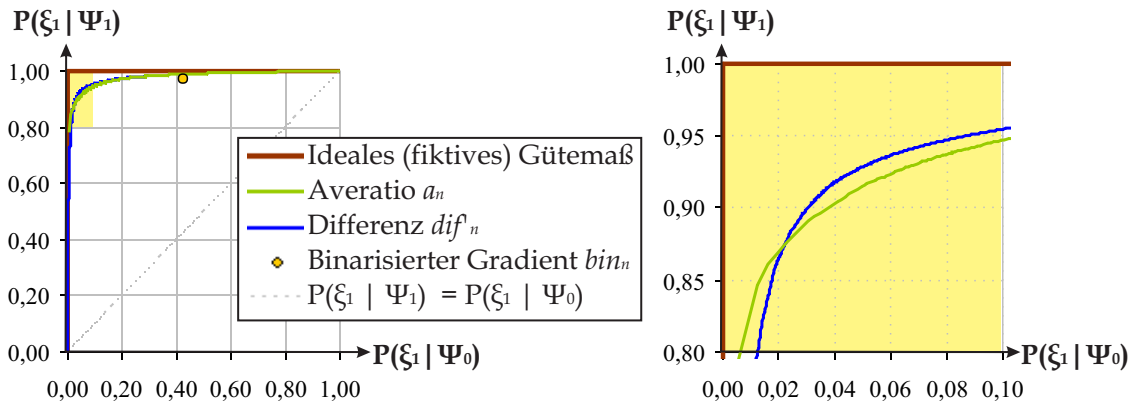


Abbildung 5.5: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe A1

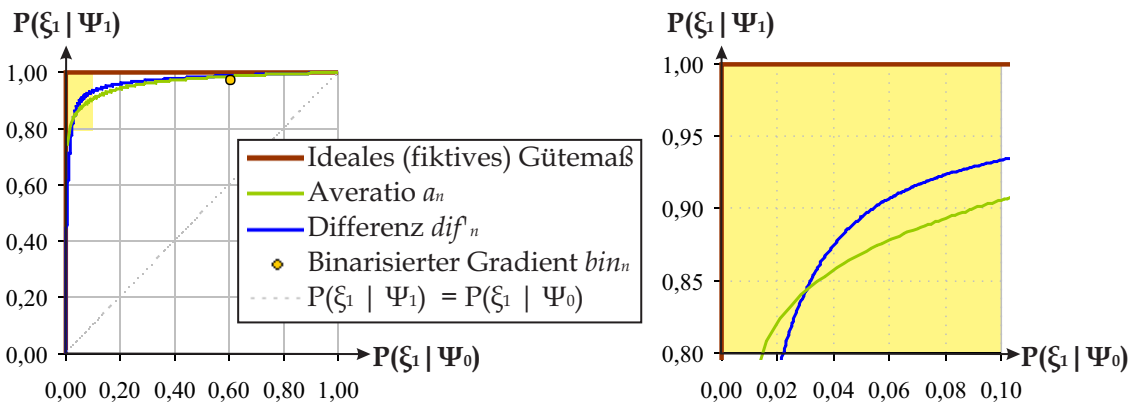


Abbildung 5.6: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe A2

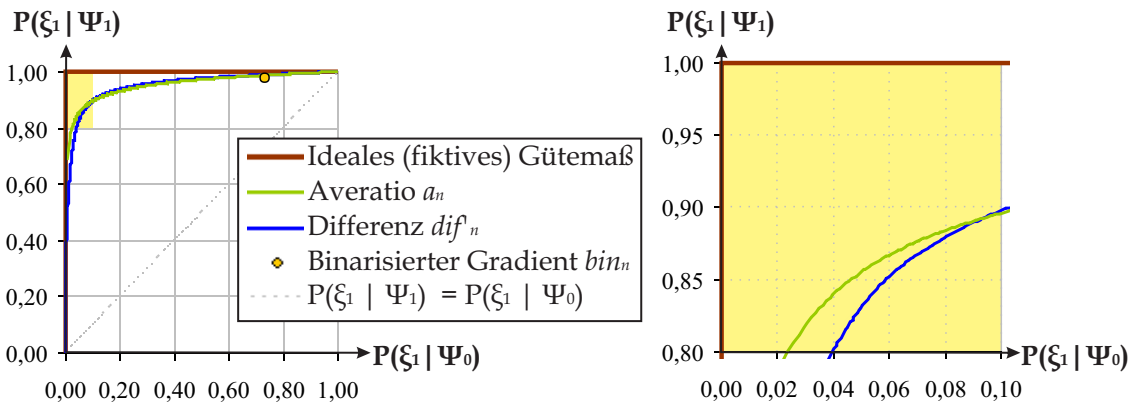


Abbildung 5.7: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe A3

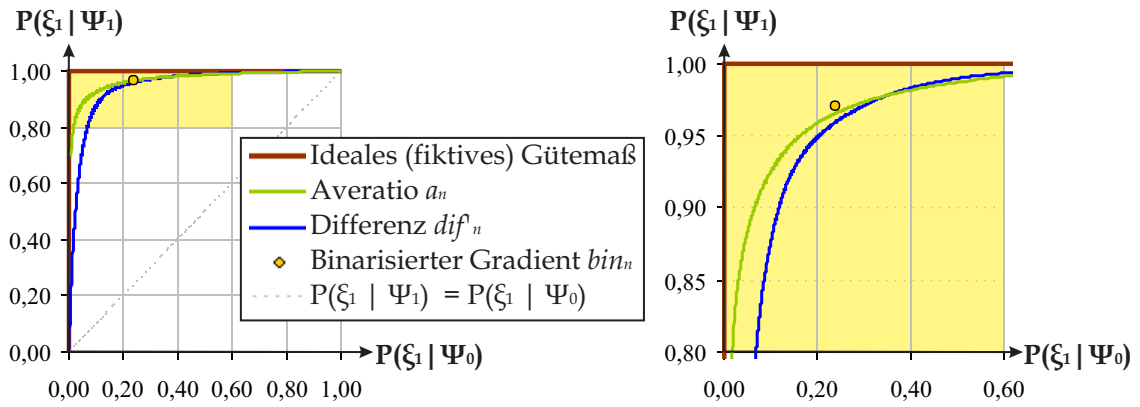


Abbildung 5.8: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe B1

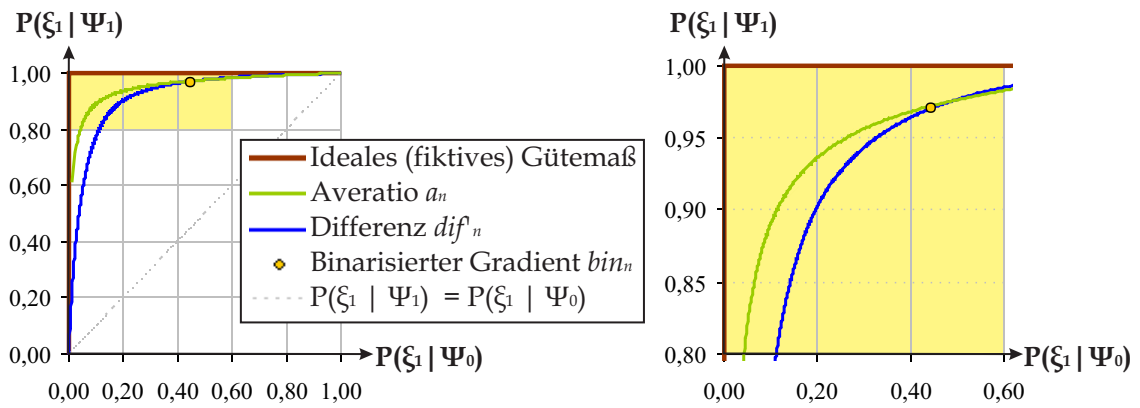


Abbildung 5.9: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe B2

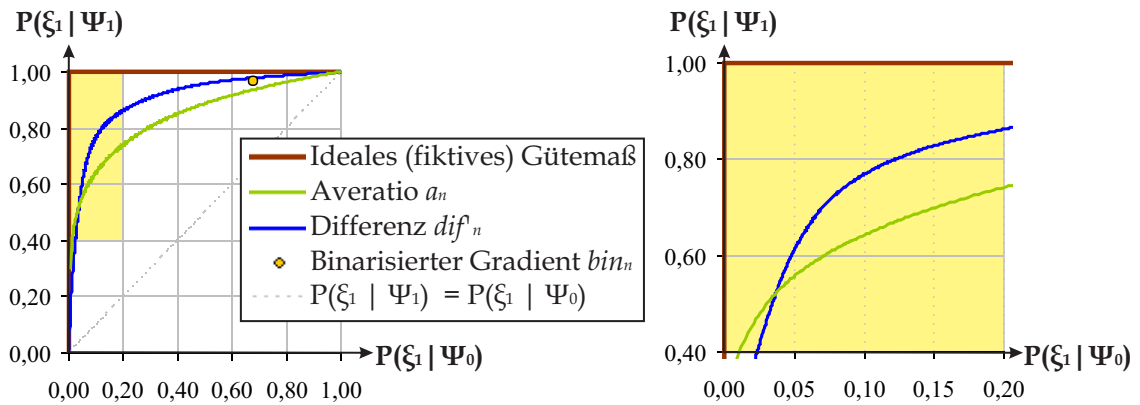


Abbildung 5.10: Receiver Operating Characteristics der Aufnahmereihe B3

Gütemaße Averatio a_n und dif'_n fällt auf, dass ihre Receiver Operating Characteristics in jeder der sechs Aufnahmereihen wie in Abbildung 5.11 skizziert einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen: Für niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeiten (links des Schnittpunktes) verzeichnet Averatio stets höhere Detektionswahrscheinlichkeiten, für hohe Fehldetektionswahrscheinlichkeiten (rechts des Schnittpunktes) niedrigere Detektionswahrscheinlichkeiten als das Gütemaß dif'_n .

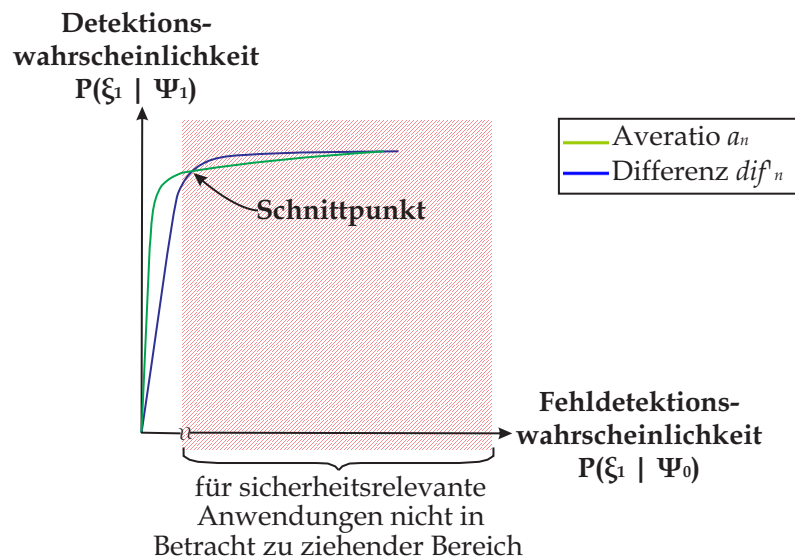


Abbildung 5.11: Prinzipieller Verlauf der Receiver Operating Characteristics der Gütemaße Averatio a_n und dif'_n

Zwei Effekte verursachen diese Verschiebung:

1. Grundsätzlich steigt die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1 | \Psi_0)$ in einem Volumen, wenn vermehrt Voxel dem falschen Material zugeordnet werden und dennoch einen vergleichsweise hohen Gütemaßwert besitzen. Dieser Fall tritt bei der Bewertung mit dem Gütemaß dif'_n auf, sobald an einem Voxel der Absorptionskoeffizient eines gegebenen Materials – allerdings des falschen Materials – rekonstruiert wurde. Bei der Bewertung mit Averatio besteht zumindest die Chance, solche Fehltreffer zu detektieren: Unstimmigkeiten in den Messdaten werden erfasst und senken den Averatiowert. Folglich zeigt Averatio in der Receiver Operating Characteristic eine weniger starke Tendenz hin zu hohen Fehldetektionswahrscheinlichkeiten als das Gütemaß dif'_n (siehe Abbildung 5.12, links).
2. Die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1 | \Psi_1)$ nimmt ab, wenn gut rekonstruierte Bereiche zu kritisch bewertet werden. Wie bereits erläutert produziert Averatio häufiger „schwarze Flecken“ in gut rekonstruierten Bereichen als das Gütemaß dif'_n und damit in der Receiver Operating Characteristic eine stärkere Tendenz hin zu niedrigen Detektionswahrscheinlichkeiten (Abbildung 5.12, rechts).

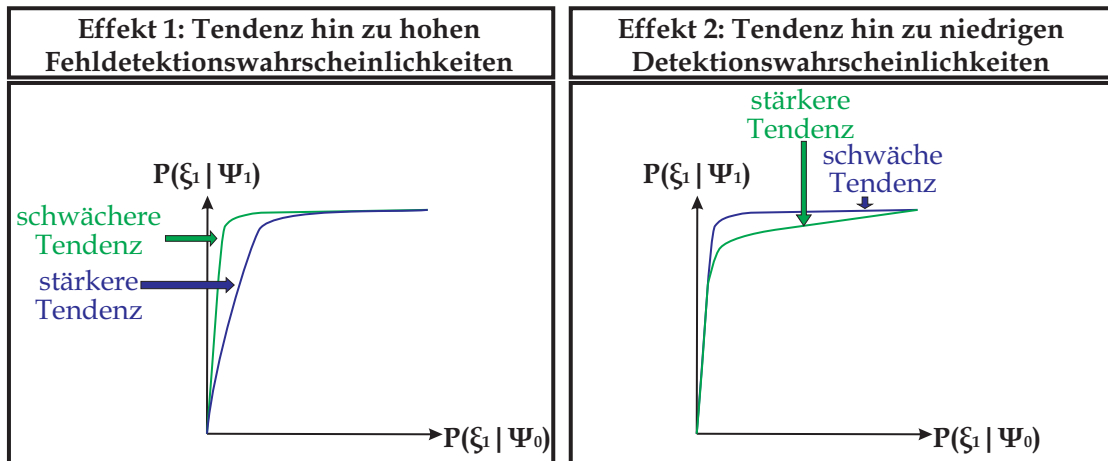


Abbildung 5.12: Verschiebung der Receiver Operating Characteristics

Beschaffenheit und Form der Prüfobjekte aber auch die Trajektorie, die zur Aufnahme der Röntgenbilder Einsatz findet, beeinflussen die Ausprägung der Artefakte im Rekonstruktionsvolumen und damit auch die Anzahl der Voxel, die falsch oder richtig bewertet werden. So kommt es, dass mal der eine, mal der andere Effekt stärker wiegt. Doch unabhängig davon, welcher Effekt dominanter ist, steht fest: Für Anwendungen, in denen eine niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit gefordert ist, eignet sich das Gütemaß $Averatio$ a_n . Mit dem Gütemaß dif'_n lässt sich eine niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit meist nur unter Inkaufnahme einer niedrigeren Detektionswahrscheinlichkeit, mit dem Binarisierten Gradienten bin_n gar nicht realisieren.

5.3.3 Stabilität eines festen Schwellenwertes

Die vorangegangene Auswertung der Receiver Operating Characteristics brachte die Erkenntnis, dass das Gütemaß $Averatio$ speziell im Bereich niedriger Fehldetektionswahrscheinlichkeiten vergleichsweise gute Detektionseigenschaften aufweist und damit geeignet ist für Anwendungen, die keine hohen Fehldetektionswahrscheinlichkeiten erlauben. Hierzu zählt auch die RegioSART: Es sollten möglichst wenig (idealerweise keine) fehlerbehafteten Voxel als „originalgetreu“ eingestuft werden, denn alle als „originalgetreu“ eingestuften Voxel werden aus der Menge der Unbekannten entfernt und damit von einer möglichen Korrektur im anschließenden Iterationsdurchlauf des Rekonstruktionsverfahrens ausgeschlossen (siehe Abbildung 4.29). Ein Fehler in einem fälschlicherweise als „originalgetreu“ bewerteten Voxel wird festgehalten. Zusätzlich kann er sich auf umliegende Voxel übertragen (sofern diese der Menge der Unbekannten angehören), denn das Rekonstruktionsverfahren stebt eine Minimierung der Kosten Φ_{mess} (3.18) an. Hat ein Voxel zum Beispiel einen zu hohen Absorptionskoeffizienten und wird aus der Menge der Unbekannten entfernt, müssen umliegende Voxel zum Ausgleich einen entsprechend niedrigeren Absorptionskoeffizienten annehmen. Das heißt, nicht erkannte Artefakte produzieren neue

Artefakte. (Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 5.5.1 eingehender behandelt.) Weniger fatale Folgen hat eine niedrige Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$. Wenn originalgetreu rekonstruierte Voxel als „fehlerhaft“ eingestuft werden, verbleiben sie in der Menge der Unbekannten. Im Extremfall, wenn alle Voxel als „fehlerhaft“ eingestuft werden, ist die RegioSART identisch mit der klassischen SART.

Für den Einsatz des Gütemaßes Averatio in der RegioSART muss ein fester Schwellenwert eingestellt werden, der das Gütemaß binarisiert und damit für jedes Voxel eine endgültige Entscheidung für „fehlerhaft“ oder „originalgetreu“ trifft. Im Abschnitt 4.3 wurde bereits mit der Schwelle 0,99 experimentiert. Nun stellt sich die Frage, ob ein fester Schwellenwert für verschiedene Aufnahmeszenarien eine *konstant* niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ ermöglicht.

Abbildung 5.13 zeigt für die sechs bekannten Aufnahmereihen A1-A3 und B1-B3 jeweils den Messpunkt $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1))$ bei $\tau = 99$ (entspricht einem Averatiowert von $a_n = 0,99$). Es ist festzustellen, dass die Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ abnimmt, wenn der Winkelbereich reduziert wird. Die Abnahme verläuft nicht unbedingt kontinuierlich, da die Ausprägung der Artefakte im Rekonstruktionsvolumen von der Prüfobjektform und der Trajektorie abhängen und sich ungünstig überlagern können. Die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bleibt unterdessen für alle Aufnahmereihen niedrig. In keinem Test übersteigt sie 4 %. Das heißt, das Gütemaß Averatio ist universell einsetzbar. Mit einem festen Schwellenwert liefert es für unterschiedliche Aufnahmeszenarien eine relativ konstant zuverlässige Detektion artefaktbehafteter Bereiche im Rekonstruktionsvolumen.

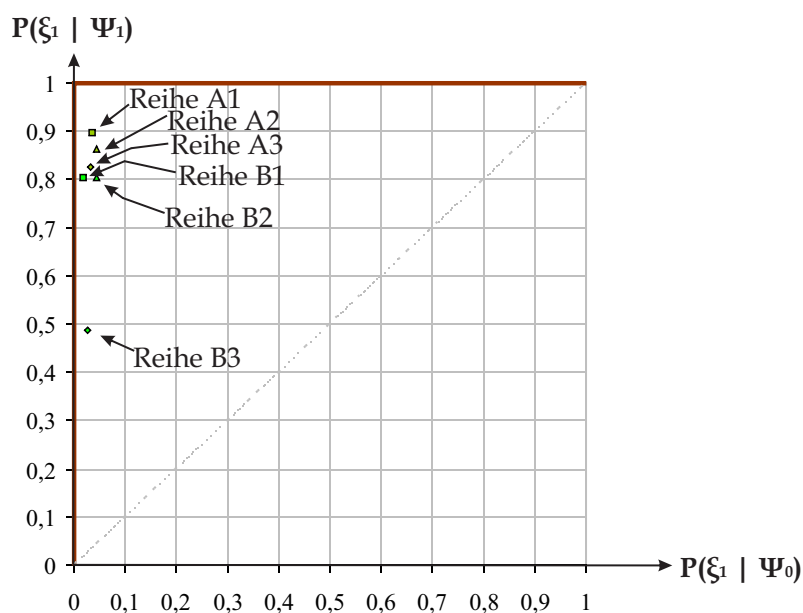


Abbildung 5.13: Messpunkt $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1))$ bei $\tau = 99$ für die Bewertung der sechs Aufnahmereihen A1-A3 und B1-B3 durch das Gütemaß Averatio

5.4 Untersuchungen der Bewertung bei Rauschen

In der Praxis sind Röntgenbilder durch Rauschen beeinträchtigt. Dieser Abschnitt behandelt den Einfluss des Rauschens auf die Gütemaße a_n (4.17), Differenz dif'_n (5.2) sowie die Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4).

Zur Analyse herangezogen werden die in den Tabellen 5.2 und 5.4 aufgeführten Aufnahmereihen A4-A9 sowie B4-B9. Die hier gewählte Größenordnung (Standardabweichung σ_y), mit der das Rauschen der einzelnen Aufnahmereihen variiert, orientiert sich eng an reale Gegebenheiten. So zeigt der Messwert y_u realer Röntgenbilder eines Kunststoffobjektes (ähnlich dem Phantom A aus Abbildung 5.1) durchschnittlich eine rauschbedingte Standardabweichung von $\sigma_y = 0,001$ ¹. Dieser Wert entspricht ungefähr dem 0,125-fachen des Absorptionskoeffizienten des Kunststoffmaterials. In der realen Aufnahmereihe des Aluminiumwerkstückes aus Abbildung 5.3 bewegt sich die rauschbedingte Standardabweichung zwischen $\sigma_y = 0,0015$ und $0,003$, sprich in der Größenordnung des 0,25-fachen bis 0,5-fachen Aluminium-Absorptionskoeffizienten m_2 . Auf Basis dieser Messwerte für σ_y wird für die Aufnahmereihen A4-A6 die Standardabweichung auf $\sigma_y = 0,001$ eingestellt, für A7-A9 auf $\sigma_y = 0,002$. In B4-B6 beträgt $\sigma_y = 0,002$. Mit den Aufnahmereihen B7-B9 wird die höchste gemessene Standardabweichung $\sigma_y = 0,003$ simuliert.

Aus den verrauschten Röntgenbildern wird identisch zu den bisherigen Tests das Volumen in sechs Iterationen der klassischen SART ($\lambda = 0,5$) rekonstruiert. Bekanntermaßen konvergiert die SART im gewichteten quadratischen Mittel. Dadurch überträgt sich das Rauschen der Röntgenbilder nicht eins zu eins auf das Rekonstruktionsvolumen, sondern wird gedämpft. Rauschen der Größenordnung $\sigma_y = 0,5 \cdot m_2$ beispielsweise ist im Rekonstruktionsvolumen visuell kaum auszumachen (siehe Abschnitt 4.2.3, insbesondere Tabelle 4.8 und Tabelle 4.7). Trotzdem ist klar, dass die Rekonstruktionen verrauschter Röntgenaufnahmen nicht vollkommen identisch sind zu Rekonstruktionen, die aus unverrauschten Aufnahmen gewonnen werden können.

5.4.1 Subjektive Betrachtung der Bewertung

Die Tabellen 5.15 bis 5.18 zeigen die Ergebnisse der Diskretisierung sowie Bewertung durch den Binarisierten Gradienten bin_n (5.4). Da das Rauschen der Röntgenbilder auf die Rekonstruktion wenig Einfluss ausübt, ist das Diskretisierungsergebnis nahezu unverändert. Unterschiede zu den Resultaten der unverrauschten Aufnahmereihen aus Abschnitt 5.3 (Tabelle 5.9 und 5.10) tauchen nur vereinzelt auf und zumeist in Bereichen, die aufgrund des eingeschränkten Winkelbereiches bereits artefaktbehaftet sind. So wirkt zum Beispiel die verzerrte Ober- und Unterseite des

¹Die Messung der Standardabweichung erfolgt üblicherweise in einem als homogen angenommenen Ausschnitt eines Bildes. In dieser Arbeit werden Bereiche gewählt, die ausschließlich „Luft“ abbilden, da die Projektion des Prüfobjektes auf den Detektor im Röntgenbild selten homogen ist.

Aluminiumwerkstückes (Phantom B) bei stärkerem Rauschen etwas ausgefranster. Infolgedessen weisen geringfügig mehr Voxel den Wert $bin_n = 1$ auf, doch sie fallen kaum ins Gewicht: Bei kleinen Winkelbereichen ist und bleibt die Bewertung durch den Binarisierten Gradienten unzuverlässig.

Auch die Ergebnisse des Gütemaßes dif'_n zeigen bei Variation des Rauschens der Röntgenaufnahmen, wie in den Tabellen 5.19 bis 5.22 zu erkennen ist, kaum Veränderungen. Die Schnittbilder durch das Gütemaßvolumen sind etwas verrauschter, insgesamt betrachtet aber nicht heller oder dunkler.

Die Tabellen 5.23 bis 5.26 dokumentieren die Ergebnisse der Bewertung durch das Gütemaß Averatio a_n sowie die dazugehörige Auswahl des wahrscheinlichsten Materials $m_q(a_n)$. Die Schnittbilder gleichen denen der unverrauschten Aufnahmereihen aus Tabelle 5.13 und 5.14. Allerdings ist zu beobachten, dass bei Rauschzunahme „schwarze Flecken“ häufiger werden. Mit σ_y nimmt auch die Standardabweichung der Zufallsvariablen Z (4.9) zu. Dadurch sinken zwangsläufig die Averatiowerte.

Tabelle 5.15: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,001$). Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

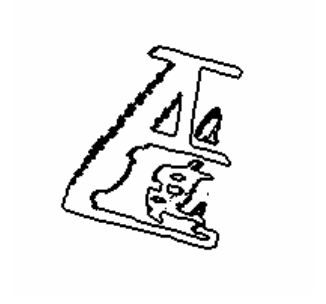





	Reihe A4 149,4° Winkelbereich	Reihe A5 129,6° Winkelbereich	Reihe A6 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.16: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

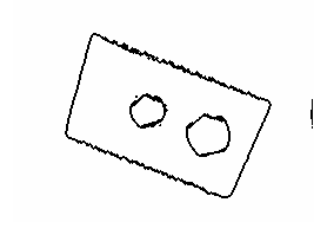
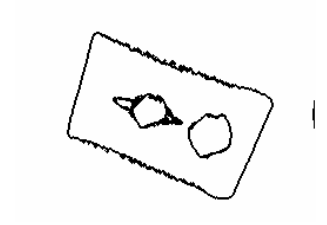




	Reihe B4 150,47° Winkelbereich	Reihe B5 130,78° Winkelbereich	Reihe B6 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.17: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.







	Reihe A7 149,4° Winkelbereich	Reihe A8 129,6° Winkelbereich	Reihe A9 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.18: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,003$). Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

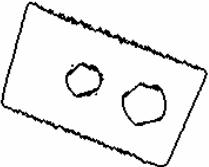





	Reihe B7 150,47° Winkelbereich	Reihe B8 130,78° Winkelbereich	Reihe B9 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.19: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,001$). Obere Zeile: Differenz dif'_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

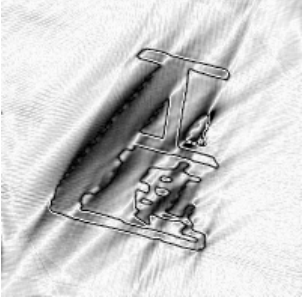
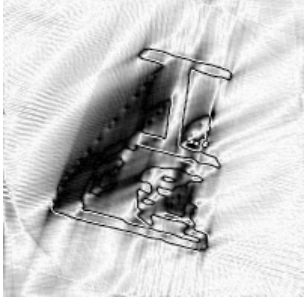
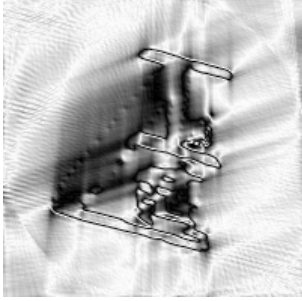



	Reihe A4 149,4° Winkelbereich	Reihe A5 129,6° Winkelbereich	Reihe A6 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.20: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Differenz dif'_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

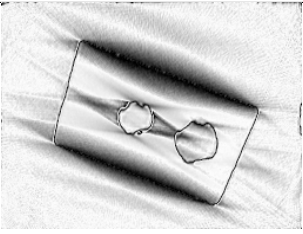
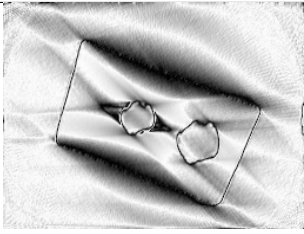
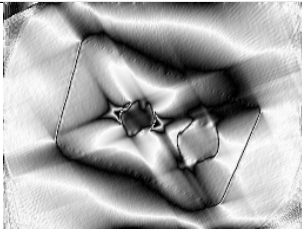



	Reihe B4 150,47° Winkelbereich	Reihe B5 130,78° Winkelbereich	Reihe B6 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.21: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Differenz dif'_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

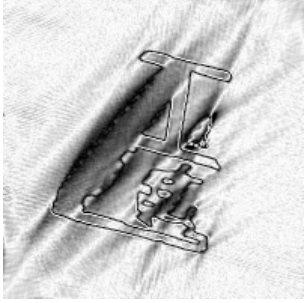
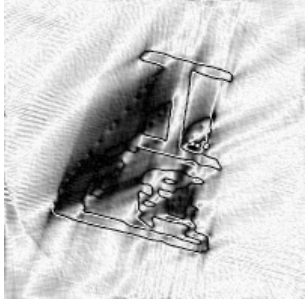
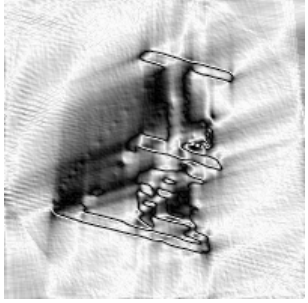



	Reihe A7 149,4° Winkelbereich	Reihe A8 129,6° Winkelbereich	Reihe A9 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.22: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,003$). Obere Zeile: Differenz dif'_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

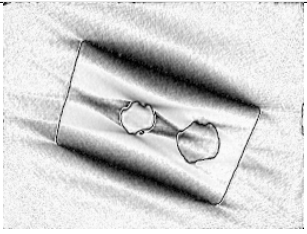
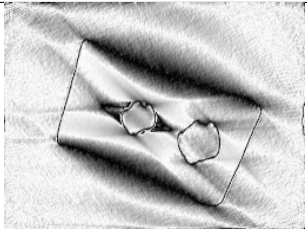
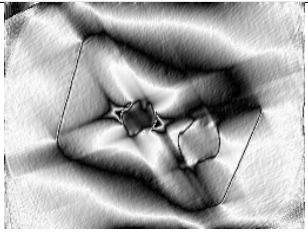



	Reihe B7 150,47° Winkelbereich	Reihe B8 130,78° Winkelbereich	Reihe B9 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.23: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,001$). Obere Zeile: Averatio a_n . Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Reihe A4 149,4° Winkelbereich	Reihe A5 129,6° Winkelbereich	Reihe A6 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.24: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Averatio a_n . Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Reihe B4 150,47° Winkelbereich	Reihe B5 130,78° Winkelbereich	Reihe B6 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.25: Bewertung Phantom A bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,002$). Obere Zeile: Averatio a_n . Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Reihe A7 149,4° Winkelbereich	Reihe A8 129,6° Winkelbereich	Reihe A9 109,8° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,015			

Tabelle 5.26: Bewertung Phantom B bei Vorhandensein von Rauschen ($\sigma_y = 0,003$). Obere Zeile: Averatio a_n . Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert.

	Reihe B7 150,47° Winkelbereich	Reihe B8 130,78° Winkelbereich	Reihe B9 98,44° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

5.4.2 Quantitative Betrachtung der Bewertung

Zur quantitativen Erfassung des Rauscheinflusses auf die Zuverlässigkeit der Bewertung der Aufnahmereihen A1-A9 sowie B1-B9 werden die Detektionswahrscheinlichkeiten $P(\xi_1|\Psi_1)$ und Fehldetektionswahrscheinlichkeiten $P(\xi_1|\Psi_0)$ gemäß (4.18) - (4.21) aufgenommen.

In den Tabellen 5.27 und 5.28 sind die Fehldetektionswahrscheinlichkeiten der einzelnen Aufnahmereihen bei Bewertung durch den Binarisierten Gradienten aufgelistet. Es ist festzustellen, dass bei Rauschzunahme die Fehldetektionswahrscheinlichkeit um wenige Prozentpunkte sinkt. Zum Beispiel zeigt Phantom B in den drei Simulationen mit $150,47^\circ$ (erste Spalte in Tabelle 5.28) im unverrauschten Fall eine Fehldetektionswahrscheinlichkeit von 0,237. Bei Vorhandensein von Rauschen der Größenordnung $\sigma_y = 0,002$ fällt der Wert auf 0,231 und für $\sigma_y = 0,003$ auf 0,215. In jeder Spalte der beiden Tabellen 5.27 und 5.28 ist ein ähnlicher Abfall zu bemerken. Die Ursache liegt in den ausgefransten Objektoberflächen speziell in Bereichen, die schlecht rekonstruiert sind (Tabelle 5.15 bis 5.18). Das Ausfransen bewirkt, dass mehr Voxel als „fehlerhaft“ bewertet werden. Das heißt, im Endeffekt hat Rauschen einen positiven Einfluss auf die Zuverlässigkeit bei der Erkennung von Artefakten. Die Tabellen 5.29 und 5.30 zeigen, dass die Detektionswahrscheinlichkeit des Binarisierten Gradienten bei Rauschzunahme nur marginal sinkt.

Zur Untersuchung des Rauscheinflusses auf das Gütemaß dif'_n werden Fehldetektions- und Detektionswahrscheinlichkeit, die sich für einen festen Schwellenwert $\tau = 4$ (entspricht einer Differenz von $dif'_n = 0,8$) ergeben, betrachtet. Der Wahl des Schwellenwertes wird keine besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Das Augenmerk dieser Untersuchung liegt nicht auf der Optimierung des Schwellenwertes, sondern auf der *Veränderung* der Fehldetektions- und Detektionswahrscheinlichkeiten in den einzelnen unterschiedlich verrauschten Aufnahmereihen. Die Tabellen 5.31 bis 5.34 dokumentieren nur geringfügige Veränderungen um weniger als einen Prozentpunkt. Rauschen beeinträchtigt die Bewertung durch das Gütemaß dif'_n kaum.

Für die Analyse des Gütemaßes Averatio a_n wird entsprechend den bisherigen Experimenten der Schwellenwert auf $\tau = 99$ (entspricht einem Averatiowert von $a_n = 0,99$) gesetzt. Wie in den Tabellen 5.35 bis 5.38 zu beobachten ist, sinkt die Fehldetektionswahrscheinlichkeit bei Rauschzunahme nur unwesentlich. Die Detektionswahrscheinlichkeit nimmt demgegenüber stärker ab, in den Testreihen mit Phantom B um bis zu 8 Prozentpunkte. Bei stärkerem Rauschen tauchen in gut rekonstruierten Bereichen des Volumens die schon in den Tabellen 5.23 bis 5.26 festgestellten „schwarzen Flecken“ häufiger auf. Dies bewirkt das Sinken der Detektionswahrscheinlichkeit. Das Gütemaß Averatio wird kritischer.

Tabelle 5.27: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch den Binarisierten Gradienten

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,420	Reihe A2: 0,606	Reihe A3: 0,730
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,418	Reihe A5: 0,603	Reihe A6: 0,729
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,410	Reihe A8: 0,595	Reihe A9: 0,726

Tabelle 5.28: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch den Binarisierten Gradienten

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,237	Reihe B2: 0,442	Reihe B3: 0,674
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,231	Reihe B5: 0,430	Reihe B6: 0,662
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,215	Reihe B8: 0,402	Reihe B9: 0,633

Tabelle 5.29: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch den Binarisierten Gradienten

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,971	Reihe A2: 0,974	Reihe A3: 0,978
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,971	Reihe A5: 0,974	Reihe A6: 0,978
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,971	Reihe A8: 0,974	Reihe A9: 0,978

Tabelle 5.30: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch den Binarisierten Gradienten

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,971	Reihe B2: 0,971	Reihe B3: 0,970
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,970	Reihe B5: 0,970	Reihe B6: 0,969
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,970	Reihe B8: 0,969	Reihe B9: 0,967

Tabelle 5.31: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch das Gütemaß dif'_n und Entscheidung mittels der Schwelle $dif'_n = 0,80$

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,056	Reihe A2: 0,083	Reihe A3: 0,145
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,056	Reihe A5: 0,083	Reihe A6: 0,145
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,057	Reihe A8: 0,084	Reihe A9: 0,146

Tabelle 5.32: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch das Gütemaß dif'_n und Entscheidung mittels der Schwelle $dif'_n = 0,80$

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,113	Reihe B2: 0,140	Reihe B3: 0,104
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,112	Reihe B5: 0,139	Reihe B6: 0,104
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,108	Reihe B8: 0,136	Reihe B9: 0,103

Tabelle 5.33: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch das Gütemaß dif'_n und Entscheidung mittels der Schwelle $dif'_n = 0,80$

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,933	Reihe A2: 0,925	Reihe A3: 0,921
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,933	Reihe A5: 0,925	Reihe A6: 0,921
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,933	Reihe A8: 0,925	Reihe A9: 0,921

Tabelle 5.34: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch das Gütemaß dif'_n und Entscheidung mittels der Schwelle $dif'_n = 0,80$

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,896	Reihe B2: 0,847	Reihe B3: 0,776
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,896	Reihe B5: 0,847	Reihe B6: 0,776
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,895	Reihe B8: 0,846	Reihe B9: 0,775

Tabelle 5.35: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch das Gütemaß Averatio und Entscheidung mittels der Schwelle $a_n = 0,99$

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,035	Reihe A2: 0,044	Reihe A3: 0,036
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,032	Reihe A5: 0,039	Reihe A6: 0,032
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,024	Reihe A8: 0,029	Reihe A9: 0,027

Tabelle 5.36: Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch das Gütemaß Averatio und Entscheidung mittels der Schwelle $a_n = 0,99$

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,018	Reihe B2: 0,044	Reihe B3: 0,028
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,016	Reihe B5: 0,040	Reihe B6: 0,026
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,014	Reihe B8: 0,031	Reihe B9: 0,024

Tabelle 5.37: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms A durch das Gütemaß Averatio und Entscheidung mittels der Schwelle $a_n = 0,99$

	149,4°	129,6°	109,8°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe A1: 0,896	Reihe A2: 0,862	Reihe A3: 0,827
$\sigma_y = 0,001$	Reihe A4: 0,891	Reihe A5: 0,856	Reihe A6: 0,822
$\sigma_y = 0,002$	Reihe A7: 0,872	Reihe A8: 0,836	Reihe A9: 0,802

Tabelle 5.38: Detektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_1)$ bei Bewertung der Rekonstruktionen des Phantoms B durch das Gütemaß Averatio und Entscheidung mittels der Schwelle $a_n = 0,99$

	150,47°	130,78°	98,44°
$\sigma_y = 0,0$	Reihe B1: 0,806	Reihe B2: 0,804	Reihe B3: 0,489
$\sigma_y = 0,002$	Reihe B4: 0,787	Reihe B5: 0,785	Reihe B6: 0,477
$\sigma_y = 0,003$	Reihe B7: 0,721	Reihe B8: 0,721	Reihe B9: 0,440

5.4.3 Verifizierung anhand realer Aufnahmereihen

An dieser Stelle sollen die Gütemaße Averatio a_n (4.17), Differenz dif'_n (5.2) sowie die Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4) auf die Rekonstruktionen der drei realen Aufnahmereihen des Aluminiumwerkstückes aus Abbildung 5.3 angewendet werden. Tabelle 5.39 zeigt Schnittbilder durch die zu bewertenden Rekonstruktionsvolumen, die Tabellen 5.40 bis 5.42 die entsprechenden Ergebnisse der Bewertung. Es lassen sich die selben Eigenschaften und Tendenzen, die schon die Tests mit den künstlichen Aufnahmeszenen erbrachten, beobachten.

So liefert die Diskretisierung bei Bewertung durch den Binarisierten Gradienten (Tabelle 5.40) nach wie vor zusammenhängende Regionen, innerhalb derer ein homogener Absorptionskoeffizient vorliegt. Bei Einschränkung des Winkelbereiches verformen sich die Regionen teilweise so stark, dass der Luftspalt rechts im Prüfobjekt verschwindet. Folglich wird die Bewertung unzuverlässig.

Das Gütemaß dif'_n zeigt in der 151° -Aufnahmereihe (Tabelle 5.41, linke Spalte) für alle offensichtlich schlecht rekonstruierten Voxel korrekt niedrige Werte, bei stärkerer Einschränkung des Winkelbereiches (mittlere und rechte Spalte) nehmen Fehldetektionen zu. Im Luftspalt beispielsweise herrscht ein vergleichsweise hoher Gütemaßwert vor, obwohl fast alle Voxel fälschlicherweise dem Aluminium zugeordnet wurden.

Averatio a_n liefert, wie der Tabelle 5.42 zu entnehmen ist, in allen drei Aufnahmereihen für falsch zugeordnete Voxel überwiegend niedrige Gütemaßwerte und ermöglicht damit eine zuverlässige Detektion der Artefakte im Rekonstruktionsvolumen. Die bekannten „schwarzen Flecken“ in scheinbar gut rekonstruierten Bereichen tauchen wieder auf, sie senken die Detektionswahrscheinlichkeit.

Tabelle 5.39: Schnittbilder durch die zu bewertenden Rekonstruktionsvolumen der Aufnahmereihen C1, C2 und C3 (entsprechend Tabelle 5.6)

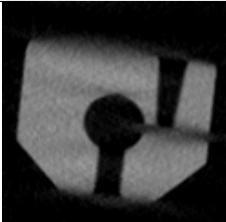
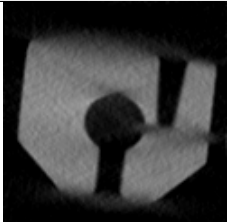
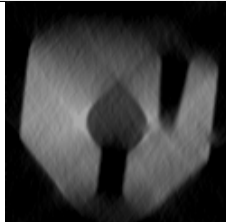
Reihe C1 151,46° Winkelbereich	Reihe C2 138,29° Winkelbereich	Reihe C3 90,00° Winkelbereich
		







Tabelle 5.40: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.39. Obere Zeile: Binarisierter Gradient bin_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe C1 151,46° Winkelbereich	Reihe C2 138,29° Winkelbereich	Reihe C3 90,00° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0 bis 1			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.41: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.39. Obere Zeile: Differenz dif'_n . Untere Zeile: Nächstes Material m_{D1} . Ein hellerer Grauwert repräsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe C1 151,46° Winkelbereich	Reihe C2 138,29° Winkelbereich	Reihe C3 90,00° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,5 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

Tabelle 5.42: Bewertung der Rekonstruktionen aus Tabelle 5.39. Obere Zeile: Averatio a_n .
Untere Zeile: Wahrscheinlichstes Material $m_q(a_n)$. Ein hellerer Grauwert re-
präsentiert grundsätzlich einen höheren Zahlenwert.

	Reihe C1 151,46° Winkelbereich	Reihe C2 138,29° Winkelbereich	Reihe C3 90,00° Winkelbereich
Grauwertfenster: 0,95 bis 1,0			
Grauwertfenster: 0,0 bis 0,012			

5.5 Einsatz der Bewertung in der RegioSART

Dieser Abschnitt beinhaltet experimentelle Untersuchungen zu der in Abschnitt 4.3 vorgestellten RegioSART.

Da das Gelingen der RegioSART maßgeblich von dem im Bewertungsschritt (Abbildung 4.29) verwendeten Gütemaß beeinflusst wird, und kein Gütemaß ein ideales Bewertungsergebnis liefert, sollen zunächst die Folgen von Fehldetektionen für die Rekonstruktion demonstriert werden. Anschließend werden die Prüfobjekte A, B und C jeder einzelnen Testreihe (entsprechend den Tabellen 5.2, 5.4 und 5.6) mit der RegioSART unter Verwendung der verschiedenen, geeigneten Gütemaße rekonstruiert und die Ergebnisse analysiert.

5.5.1 Folgen einer Fehldetektion

Die zuletzt präsentierten Tests der Abschnitte 5.3 und 5.4 zeigten, dass Fehldetektionen bei der Bewertung artefaktbehafteter Rekonstruktionsvolumen praktisch unvermeidlich sind. Die Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4) bringt für Aufnahmeszenarien mit eingeschränktem Winkelbereich stets hohe Fehldetektionswahrscheinlichkeiten $P(\xi_1|\Psi_0)$ in einer Größenordnung von 0,2 bis 0,7 mit sich. Die Gütemaße Averatio a_n (4.17) und dif'_n (5.2) liefern Receiver Operating Characteristics, die dem idealen Verlauf zwar nahe kommen, allerdings den

Punkt $(P(\xi_1|\Psi_0), P(\xi_1|\Psi_1)) = (0, 1)$ nicht erreichen. Bei geeigneter Wahl des Schwellenwertes τ kann schon eine niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit von nur wenigen Prozentpunkten eingestellt werden, aber keine Fehldetektionswahrscheinlichkeit von exakt Null, außer am Punkt $(0, 0)$, sprich bei einer Detektionswahrscheinlichkeit von $P(\xi_1|\Psi_1) = 0$. An diesem Punkt werden *alle* Voxel im Volumen als „fehlerhaft“ bewertet.

Dieser Abschnitt behandelt die Folgen von Fehldetektionen für die Rekonstruktion mit der RegioSART. Als Testobjekt dient das reale Werkstück aus der Aufnahmereihe C3 (siehe Tabelle 5.6).

Abbildung 5.14 veranschaulicht den Rekonstruktionsverlauf der RegioSART, wenn zur Bewertung das Gütemaß Averatio a_n herangezogen wird. Identisch zu den bisherigen Tests erfolgt die erste Bewertung nach sechs Iterationen der klassischen SART. Um die Auswirkungen von Fehldetektionen zu verdeutlichen wird der Schwellenwert zur Unterscheidung „originalgetreu“ und „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel bewusst sehr niedrig eingestellt, und zwar auf $\tau = 1$ (entspricht einem Averatiowert von 0,5). Als „fehlerhaft“ gelten danach Voxel mit $a_n \leq 0,5$ (rot eingeblendet). Viele im Luftspalt gelegene Voxel werden, obwohl sie dem Aluminium zugeordnet wurden, fälschlicherweise als „originalgetreu“ eingestuft. Es folgen sechs Iterationsdurchläufe des Rekonstruktionsverfahrens. Bei der nächsten Bewertung (nach nunmehr 12 Iterationen) zeigt sich, dass für viele Voxel vor allem im rechten Teil des Volumens der Averatiowert auf unter 0,5 sinkt. Das Gütemaß hat erkannt, dass bei der Diskretisierung und anschließenden Rekonstruktion unter

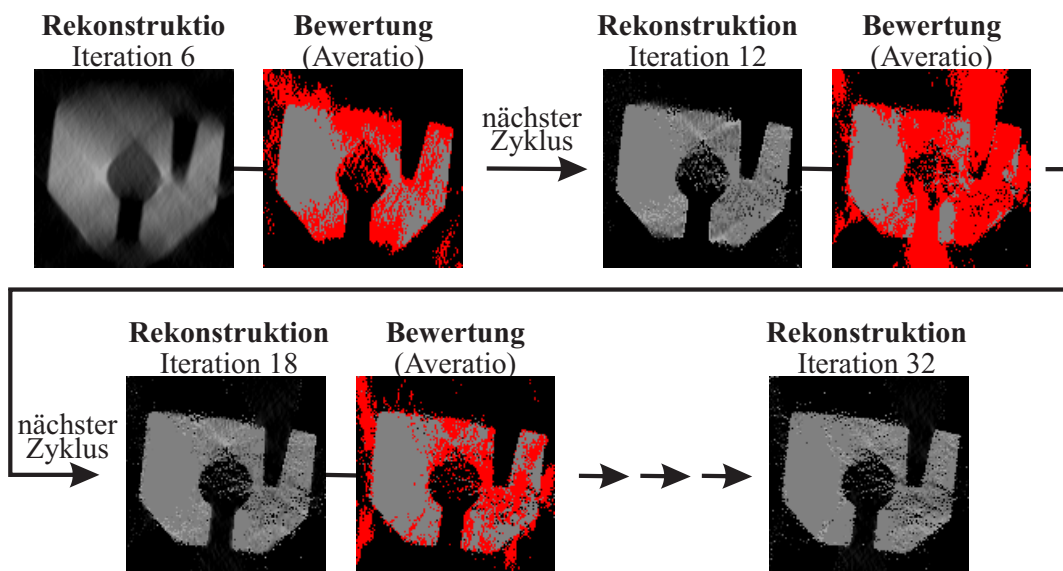


Abbildung 5.14: Folgen einer Fehldetektion in der RegioSART bei Verwendung des Gütemaßes Averatio a_n (4.17) mit dem Schwellenwert $\tau = 1$ (entspricht einem Averatiowert von $a_n = 0,5$) zur Unterscheidung „originalgetreu“ und „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel.

Ausschluss eigentlich fehlerbehafteter Voxel aus der Menge F größere Unstimmigkeiten entstanden sind. Das heißt, vorausgegangene Fehldetektionen lassen sich bis zu einem gewissen Grad korrigieren (wenn das Rekonstruktionsergebnis auch nicht wesentlich an Qualität gewinnt).

Die besondere Fähigkeit, vormalig als „originalgetreu“ eingestufte Voxel wieder auf „fehlerhaft“ setzen zu können und auf diese Weise Fehldetektionen im späteren Verlauf der Rekonstruktion zu erkennen besitzt das Gütemaß dif'_n (5.2) nicht. Ein einmal als „originalgetreu“ bewertetes Voxel n kann nicht wieder auf „fehlerhaft“ wechseln, zumal nur der rekonstruierte Absorptionskoeffizient x_n bei der Bewertung Berücksichtigung findet. Die Entscheidung für „originalgetreu“ ist endgültig. Die Auswirkungen veranschaulicht Abbildung 5.15. Abermals wird das Werkstück aus der Aufnahmereihe C3 rekonstruiert. Die erste Bewertung findet nach der sechsten Iteration der klassischen SART statt. Als „fehlerhaft“ gelten Voxel mit $dif'_n \leq 0,8$ (rot dargestellt). Viele Voxel im Luftspalt werden dem Aluminium zugeordnet und als „originalgetreu“ eingestuft. Für die meisten Röntgenstrahlen, die den Luftspalt durchqueren, ist daraufhin die Summe $\sum x_v w_{vu}$ entschieden größer als der Messwert y_u . Dies hat zwangsläufig zur Folge, dass in der nachfolgenden Rekonstruktion als „fehlerhaft“ eingestufte Voxel zum Ausgleich einen niedrigeren Absorptionskoeffizienten annehmen, als sie ihn eigentlich repräsentieren. Wie in der Abbildung 5.15 zu sehen ist, bildet sich unterhalb des Luftspaltes im Aluminiumobjekt ein falscher Luftspalt aus.

Natürlich ließe sich mit einem höher gewählten Schwellenwert die Fehldetektionswahrscheinlichkeit $P(\xi_1|\Psi_0)$ reduzieren. Wegen der Endgültigkeit der Entscheidung des Gütemaßes dif'_n ist allerdings eine Fehldetektionswahrscheinlichkeit von Null unabdingbar. Da diese in der Praxis

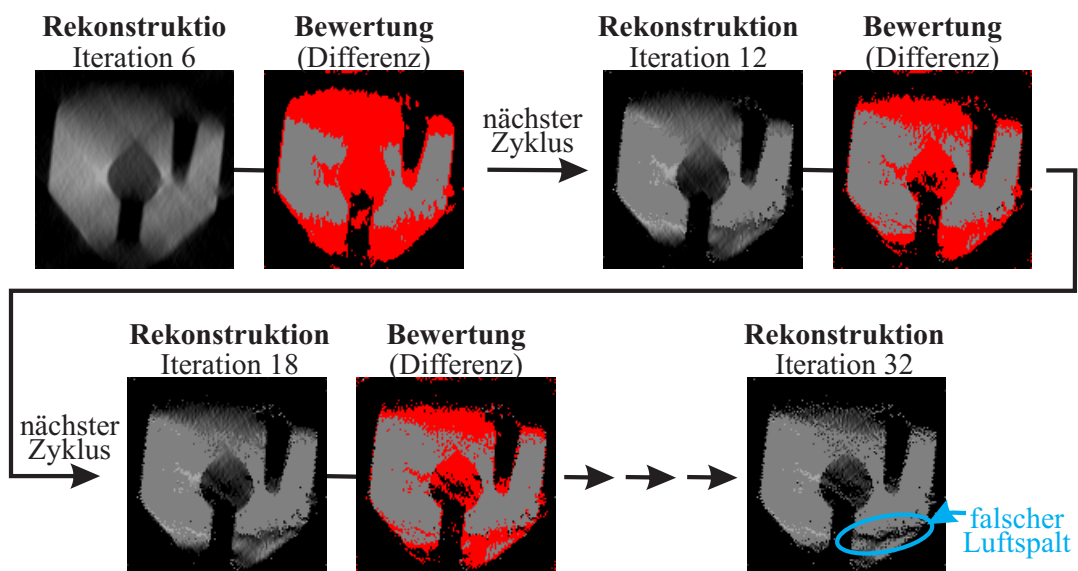


Abbildung 5.15: Folgen einer Fehldetektion in der RegioSART bei Verwendung des Gütemaßes dif'_n (5.2) mit dem Schwellenwert $\tau = 4$ (entspricht $dif'_n = 0,8$) zur Unterscheidung „originalgetreuer“ und „fehlerhafter“ Voxel

nicht zu realisieren ist, kommt das Gütemaß dif'_n für einen Einsatz in der RegioSART nicht in Betracht. Auf weitere Tests wird verzichtet.

Im Gegensatz zum Gütemaß dif'_n ist der Binarisierte Gradient bin_n (5.4) in seiner Entscheidung nicht endgültig. Ein einmal als „originalgetreu“ bewertetes Voxel n kann durchaus wieder auf „fehlerhaft“ wechseln, wenn ein Nachbarvoxel (in der $3 \times 3 \times 3$ er Nachbarschaft) als „fehlerhaft“ eingestuft ist und sich der Absorptionskoeffizient dieses Nachbarvoxels so stark verändert, dass er im Diskretisierungsschritt zu einem anderen Material wechselt. Der Gradientenbetrag $grad_n$ wird dadurch positiv und das zentrale Voxel n als „fehlerhaft“ eingestuft. Das heißt, die Grenzen zwischen den Regionen mit homogenen Absorptionskoeffizienten können im iterativen Verlauf der RegioSART noch wandern, wenn auch nur um einen Voxel pro Zyklus. (Es sei angemerkt, dass jeder Zyklus nur eine Iteration des Rekonstruktionsverfahrens beinhaltet. Anders als beim Gütemaß Averatio muss mit dem Binarisierten Gradienten auf Konvergenz keine Rücksicht genommen werden. Die erste Bewertung findet nach wie vor nach der sechsten Iteration statt.) Abbildung 5.16 zeigt die Rekonstruktion des Werkstückes aus der Aufnahmereihe C3 unter Ver-

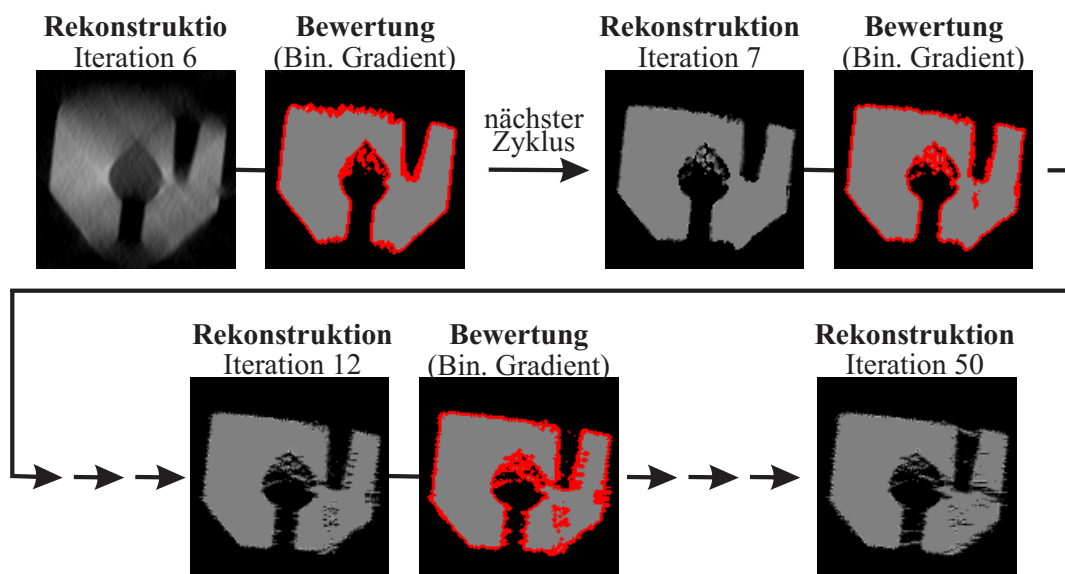


Abbildung 5.16: Folgen einer Fehldetektion in der RegioSART bei Verwendung des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4) zur Unterscheidung „originalgetreu“ und „fehlerhaft“ rekonstruierter Voxel

wendung des Binarisierten Gradienten. Der anfangs geschlossene Luftspalt öffnet sich langsam von den Seiten her.

Zusammengefasst lässt sich sagen, dass die Fähigkeit, als „originalgetreu“ eingestufte Voxel wieder auf „fehlerhaft“ zu setzen, sowohl mit dem Gütemaß Averatio als auch mit dem Binarisierten Gradienten gegeben ist. Damit ist die Möglichkeit geschaffen, Fehldetektionen zu korrigieren und die Gefahr, mit der RegioSART in eine falsche Richtung zu laufen, eingedämmt.

Trotz der Korrektur des eigenen Bewertungsergebnisses wird eine gute Rekonstruktion des geröntgten Prüfobjektes in den hier gezeigten Beispielen nicht erreicht. Für das Gütemaß Averatio ist der Schwellenwert $\tau = 1$ zu niedrig. Fehldetektionen sind stark ausgeprägt, und das grundsätzlich in jedem Zyklus. Es ist sinnvoll, von vornherein eine niedrigere Fehldetektionswahrscheinlichkeit einzustellen. Diese ist mit Averatio für den Schwellenwert $\tau = 99$ ($a_n = 0,99$) gegeben.

5.5.2 Rekonstruktionsergebnisse der RegioSART

Im Folgenden werden die Prüfobjekte A, B und C aus den Röntgenbildern jeder einzelnen Aufnahmereihe (der Tabellen 5.2, 5.4 und 5.6) mit der RegioSART entsprechend dem in Abbildung 4.29 veranschaulichten Ablauf rekonstruiert. Die Rekonstruktion erfolgt dabei identisch zu den Simulationen am Quader-Prüfobjekt in Abschnitt 4.3, das heißt unter Verwendung des Gütemaßes Averatio und des Schwellenwertes $\tau = 99$ (entspricht einem Averatiowert von $a_n = 0,99$) zur Unterscheidung „originalgetreuer“ und „fehlerhafter“ Voxel.

Parallel wird das Ergebnis der RegioSART bei Einsatz der Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten bin_n (5.4) (anstelle der Bewertung auf Basis des Gütemaßes Averatio) betrachtet.

Basis der quantitativen Vergleiches der generierten Rekonstruktionsvolumen bildet mit

$$PFRV = \frac{\text{Anzahl der Voxel mit } m_{D1} \neq phm_n}{\text{Anzahl der Voxel im Volumen}} \cdot 100\% \quad (5.5)$$

der Prozensatz Fehlerhaft Rekonstruierter Voxel. Auf eine erneute Aufnahme von Detektions- und Fehldetektionswahrscheinlichkeiten, anhand derer in vorangegangenen Abschnitten die Zuverlässigkeit der Gütemaße erfasst wurde, wird verzichtet. Die Zuverlässigkeit der Gütemaße steht nicht weiter im Vordergrund. Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die schlussendlich erreichte Rekonstruktionsqualität, beziehungsweise – bei einer Betrachtung der *PFRV*-Werte – der prozentualen „Fehlermenge“ in jedem Volumen.

Für jede Testreihe werden 120 Iterationen des Rekonstruktionsverfahrens durchgeführt. Diese vergleichsweise hohe Anzahl begründet sich aus der langsamen Konvergenz bei Verwendung des Binarisierten Gradienten im Bewertungsschritt der RegioSART. Wie im Abschnitt 5.5.1 dargestellt wandern die Grenzen zwischen Regionen mit homogenen Absorptionskoeffizienten um maximal einen Voxel pro Zyklus. Für die in dieser Arbeit betrachteten Aufnahmegeometrien sind prinzipiell 80 - 120 Iterationsdurchläufe erforderlich, um zu einer originalgetreuen Rekonstruktion der Prüfobjektform zu gelangen (sofern dies überhaupt möglich ist) beziehungsweise den Zustand zu erreichen, in dem sich im Rekonstruktionsvolumen keine Veränderungen mehr

abzeichnen². Abbildung 5.17 zeigt hierzu exemplarisch den Rekonstruktionsverlauf der Aufnahmereihe A3. Im Diagramm ist der *PFRV*-Wert (5.5) nach jedem durchlaufenen Zyklus aufgenommen. Bei Verwendung des Binarisierten Gradienten stellt sich nach circa 100 Iterationen ein *PFRV*-Wert von 1,73% ein. Die Durchführung weiterer Iterationen führt zu keiner Verbesserung der Rekonstruktion. Bei Einsatz des Gütemaßes *Averatio* im Bewertungsschritt wird bereits nach 48 Iterationen der Zustand erreicht, in dem im Rekonstruktionsvolumen keine wesentlichen Änderungen mehr zu verzeichnen sind. Die Rekonstruktion gleicht dem Original bis auf 0,39%. Da das Ergebnis allgemein stabil ist, spricht sich in seiner Qualität nicht *verschlechtert*, wenn weitere Iterationen durchgeführt werden, kann für die folgenden Testreihen einheitlich die jeweils 120te Iteration betrachtet werden, sowohl bei Verwendung des Binarisierten Gradienten als auch bei einer Bewertung auf Basis des Gütemaßes *Averatio*. Die Tabelle 5.43 fasst die Einstellungen der Rekonstruktionsverfahren zusammen.

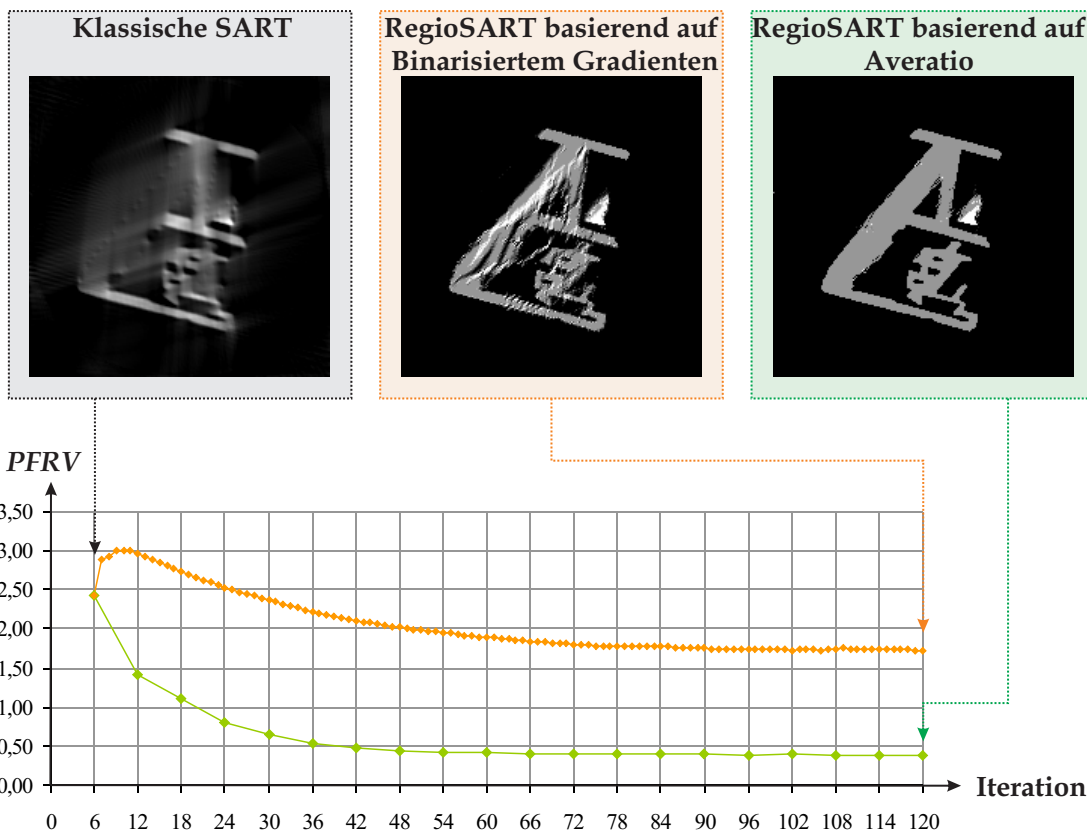


Abbildung 5.17: Rekonstruktion der Aufnahmereihe A3 (Tabelle 5.2) mit der RegioSART auf Basis der Entscheidungsregel des Binarisierten Gradienten sowie des Gütemaßes *Averatio* mit $\tau = 99$. Oben: Schnittbilder durch die generierten Rekonstruktionsvolumen. Unten: *PFRV* (5.5) im iterativen Verlauf.

²Trotz des eingebrachten a priori Wissens wird das Rekonstruktionsproblem nicht unbedingt eindeutig. Immernoch können mehrere Lösungen die Kosten minimieren (versinnbildlicht in Abbildung 3.13).

Tabelle 5.43: Spezifikationen der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren

	Klassische SART	RegioSART basierend auf bin_n	RegioSART basierend auf a_n
Rekonstruktionsformel	(3.17)	(4.25)	(4.25)
Identifizierung „originalgetreuer“ Voxel	entfällt	$bin_n = 0$	$a_n > 0,99$ und $m_q(a_n) = m_{D1}$
Diskretisierung „originalgetreuer“ Voxel	entfällt	mit m_{D1}	mit $m_q(a_n)$
Iterationen pro Zyklus	6	im ersten Zyklus: 6 danach: 1	6
Gesamtanzahl Iterationen	6	120	120
Gesamtanzahl Zyklen	1	114	20

Subjektive Betrachtung der Rekonstruktionsergebnisse

Den Tabellen 5.44 bis 5.50 sind die Ergebnisse der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren zu entnehmen. Die jeweils erste Zeile zeigt Schnittbilder durch die aus den vorherigen Abschnitten 5.3 und 5.4 bekannten Rekonstruktionsvolumen der klassischen SART. Die zweite Zeile gibt die entsprechenden Rekonstruktionen der RegioSART bei Verwendung des Binarisierten Gradienten im Bewertungsschritt wieder. Bereits an dieser Stelle ist deutlich zu sehen, dass durch den Einsatz der RegioSART die für die klassische SART charakteristischen, kegelförmigen Artefakte schrumpfen, in der Aufnahmereihe A1 (Tabelle 5.44) sogar so weit, dass das Prüfobjekt bis auf wenige Voxel originalgetreu abgebildet wird. Bei stärkerer Einschränkung des Winkelbereiches (beispielsweise in den Aufnahmereihen A2 und A3) kommen die Schwächen des Binarisierten Gradienten zutage. Die lange, von links unten nach recht oben verlaufende Seitenwand des Prüfobjektes ist in der Rekonstruktion der klassischen SART so stark verschwommen, dass sie bei der Bewertung durch den Binarisierten Gradienten der Luft zugeordnet wird und verschwindet (vergleiche Tabelle 5.9). Die Fortsetzung der Rekonstruktion mit der RegioSART bewirkt zwar, ähnlich wie bei der Rekonstruktion des Luftspaltes im Werkstück C (Abbildung 5.16), ein langsames Wiederaufbauen der Seitenwand von ihren Enden her, allerdings mit gravierenden Mängeln. Im Endergebnis ist die Seitenwand mehrfach gespalten.

Unproblematischer verläuft die Rekonstruktion des Prüfobjektes B. Bei der ersten Bewertung durch den Binarisierten Gradienten sind die Grenzen zwischen Regionen mit homogenen Absorptionskoeffizienten bekanntlich nicht immer deckungsgleich mit der tatsächlichen Oberfläche des Prüfobjektes, aber keine Komponente *verschwindet* (siehe Tabelle 5.10). Diese besondere Sachlage ermöglicht es, im iterativen Verlauf der RegioSART Schritt für Schritt die Grenzen zu verschieben und, wie Tabelle 5.47 zeigt, sogar in der Aufnahmereihe B3 die Prüfobjektform dem Original anzugleichen. Spuren hinterlässt die vormals fehlgeschlagenen Bewertung trotzdem. In der Rekonstruktionen bleiben schmale Linien, die im Phantom nicht vorkommen.

Beeinträchtigt zusätzlich Rauschen die Röntgenbilder, so wirkt sich dies, wie in Abschnitt 5.4 behandelt, weniger auf Voxel im Inneren eines Materials aus. Durch Rauschen hervorgerufene Schwankungen der Absorptionskoeffizienten sind so gering, dass sie bei der Diskretisierung (als Teil der Bewertung durch den Binarisierten Gradienten) an dieser Stelle nicht ins Gewicht fallen. Dahingegen zeigen Oberflächen Veränderungen. Sie wirken nach der Diskretisierung leicht ausgefranst. Auch in der Rekonstruktion der RegioSART erscheinen die Oberflächen bei Rauschzunahme ausgefranst (Tabelle 5.49).

Die jeweils unterste Zeile der Tabellen 5.44 bis 5.50 zeigt Ergebnisse der RegioSART, wenn zur Bewertung das Gütemaß *Averatio* Anwendung findet. Abermals werden durch den Einsatz der RegioSART Artefakte im Rekonstruktionsvolumen reduziert. In den Aufnahmereihen A1 (Tabelle 5.44), B1 und B2 (Tabelle 5.47), da bereits die gradientenbasierte RegioSART eine annähernd originalgetreue Abbildung der Prüfobjekte lieferte, gelingt auch mit dem *Averatio*-basierten Ansatz eine originalgetreue Rekonstruktion. Des Weiteren lässt sich aus den Testreihen ablesen, dass die Rekonstruktionen des *Averatio*-basierten Ansatzes zumeist eine höhere subjektive Qualität aufweisen als Ergebnisse der gradientenbasierten RegioSART. Besonders deutlich machen dies die Aufnahmereihen A2 und A3 (Tabelle 5.44). Verzerrungen im Bereich der linken Seitenwand werden bei der ersten Bewertung durch das Gütemaß *Averatio* komplett als „fehlerhaft“ eingestuft (vergleiche Tabelle 5.13). Weniger Fehldetektionen bedeuten eine geringere Gefahr, in nachfolgenden Iterationen mit der RegioSART in eine falsche Richtung zu steuern. Gravierende Fehler im Volumen, wie sie die gradientenbasierte RegioSART mit sich bringt, bleiben daher aus. Tatsächlich wird – abgesehen von vereinzelt falsch rekonstruierten Voxeln – das Prüfobjekt hier originalgetreu dargestellt.

Schwierigere Aufnahmebedingungen, sprich Szenarien mit kleineren Winkelbereichen und stärkerem Rauschen, erschweren im Allgemeinen die Rekonstruktion. Im Extremfall, etwa in der Aufnahmereihe B9, ist kein Verfahren imstande eine vollständig fehlerfreie Rekonstruktionen zu generieren. Jedoch zeigt das Gütemaß *Averatio* grundlegend andere Eigenschaften als der Binarisierte Gradient. Das Rekonstruktionsergebnis der Reihe B9 (Tabelle 5.49, unten rechts) sieht „unfertig“ aus. Die ehemals großflächigen Verzerrungen des Aluminiumbauteils, die das Schnittbild der klassischen SART dominieren, sind bis auf einen „harten Kern“ geschrumpft. Im Kern herrschen niedrige *Averatio*werte vor, weshalb keine Diskretisierung erfolgt und der Kern verschwommen bleibt. Gleichzeitig bedeutet das Vorherrschen niedriger *Averatio*werte, dass die Anzahl der Voxel, die als „fehlerhaft“ eingestuft sind, nicht stark genug abnimmt, um eine weitere Verbesserung der Rekonstruktion zu bewirken. Trotzdem scheint die *Averatio*-basierte RegioSART auch in diesem Extremfall insgesamt eine bessere Rekonstruktionsqualität zu erzielen als der gradientenbasierte Ansatz. Eine quantitative Auswertung der Rekonstruktionsqualität folgt im nächsten Abschnitt.

Anhand der Tests am realen Werkstück C in Tabelle 5.50 lassen sich die gewonnenen Erkenntnisse über die Charakteristik der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren verifizieren. In der Aufnahmereihe C1 ermöglicht die RegioSART bei Verwendung des Binarisierten Gradienten eine Rekonstruktion der groben Form des Werkstückes. Die Oberflächen sind dabei stark ausgefranst. Außerdem bilden sich horizontale Linien in der Luft. Die Averatio-basierte RegioSART liefert eine weniger artefaktbehaftete, wenn auch an den Oberflächen eher unscharfe Abbildung des Werkstückes. Aus den Aufnahmereihen C2 und C3 gelingt keinem Rekonstruktionsverfahren eine brauchbare Abbildung des Prüfobjektes. Der Luftspalt in C3 wird unter Einsatz des Gütemaßes Averatio gar nicht, mit dem Binarisierten Gradienten an falscher Stelle rekonstruiert.

Quantitative Betrachtung der Rekonstruktionsergebnisse

Die Abbildung 5.18 gibt zusammenfassend die *PFRV*-Werte der in den Tabellen 5.44 bis 5.49 dargestellten Rekonstruktionsvolumen wieder. Es ist festzustellen, dass die Rekonstruktionen der Averatio-basierten RegioSART nicht nur weniger Abweichungen vom Original beinhalten als die der klassischen SART, sondern auch als die der gradientenbasierten RegioSART – und dies sowohl in den Testreihen, in denen bereits die Schnittbilder der Rekonstruktionsvolumen vor Augen führten, dass die Averatio-basierte RegioSART die beste Qualität zeigt (wie beispielsweise in den Aufnahmereihen A2 und A3), als auch in den Testreihen, da beide Varianten der RegioSART optisch ähnliche Abbildungen der Prüfobjekte rekonstruierten (etwa in Aufnahmereihe A1), als auch schlussendlich in den Extremfällen, die durch Winkelbereichseinschränkung und Rauschen so stark beeinträchtigt sind, dass kein Rekonstruktionsverfahren imstande ist die Prüfobjekte originalgetreu wiederzugeben (Aufnahmereihen A9 und B9). Kurzum, in ausnahmslos jeder im Rahmen dieser Arbeit getesteten Aufnahmereihe liefert die Averatio-basierte RegioSART die zuverlässigste Korrektur von Artefakten. Das beste Ergebnis lässt sich aus der Aufnahmereihe A1 generieren. Hier beträgt der *PFRV*-Wert 0,02%. Das heißt, lediglich zwei von zehntausend Voxel besitzen einen falschen Absorptionskoeffizienten. Die Rekonstruktion der Aufnahmereihe B9 birgt den höchsten *PFRV*-Wert von 0,72%.

Tabelle 5.44: Rekonstruktionen des Prüfobjektes A aus den Aufnahmereihen A1, A2 und A3 (entsprechend Tabelle 5.2 mit $\sigma_y = 0,0$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,015.


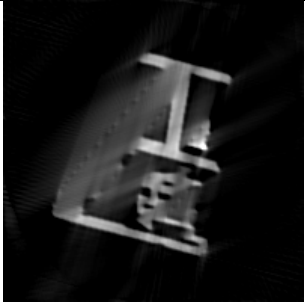
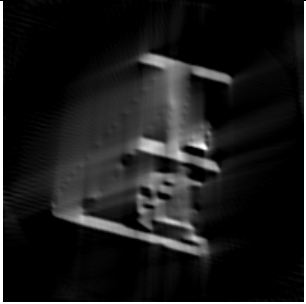






	Reihe A1 149,4° Winkelbereich	Reihe A2 129,6° Winkelbereich	Reihe A3 109,8° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.45: Rekonstruktionen des Prüfobjektes A aus den Aufnahmereihen A4, A5 und A6 (entsprechend Tabelle 5.2 mit $\sigma_y = 0,001$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,015.


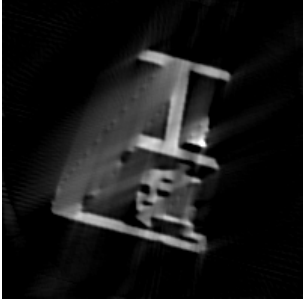
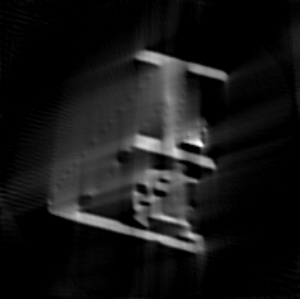
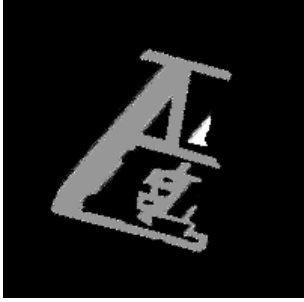
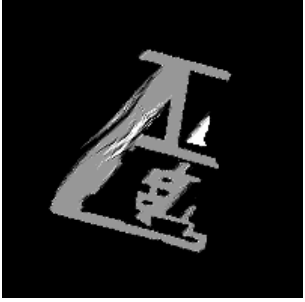
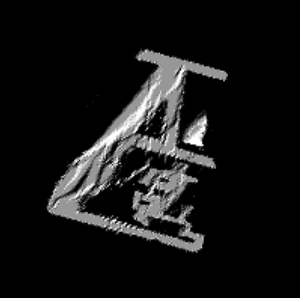



	Reihe A4 149,4° Winkelbereich	Reihe A5 129,6° Winkelbereich	Reihe A6 109,8° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.46: Rekonstruktionen des Prüfobjektes A aus den Aufnahmereihen A7, A8 und A9 (entsprechend Tabelle 5.2 mit $\sigma_y = 0,002$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,015.

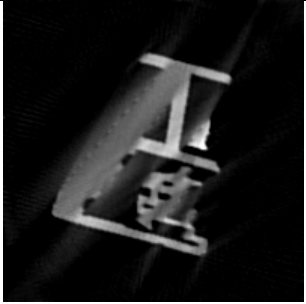
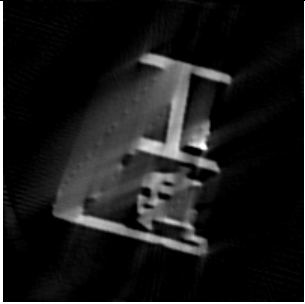
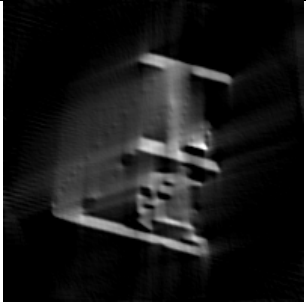
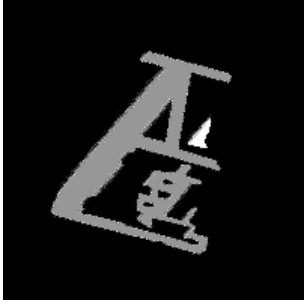
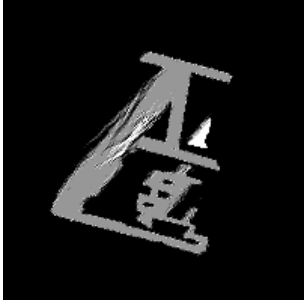
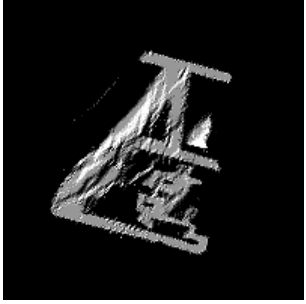


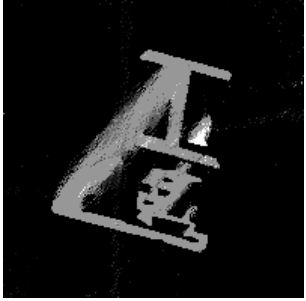
	Reihe A7 149,4° Winkelbereich	Reihe A8 129,6° Winkelbereich	Reihe A9 109,8° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.47: Rekonstruktionen des Prüfobjektes B aus den Aufnahmereihen B1, B2 und B3 (entsprechend Tabelle 5.4 mit $\sigma_y = 0,0$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,012.

	Reihe B1 150,47° Winkelbereich	Reihe B2 130,78° Winkelbereich	Reihe B3 98,44° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.48: Rekonstruktionen des Prüfobjektes B aus den Aufnahmereihen B4, B5 und B6 (entsprechend Tabelle 5.4 mit $\sigma_y = 0,002$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,012.

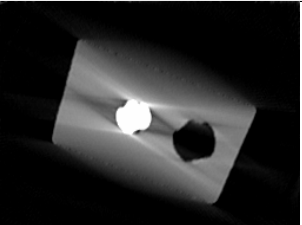
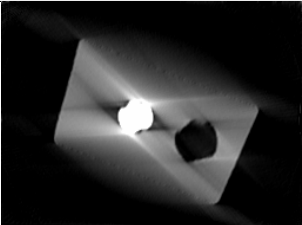
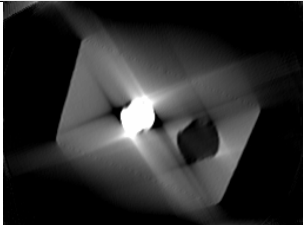
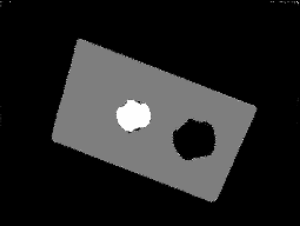
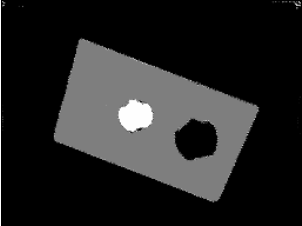
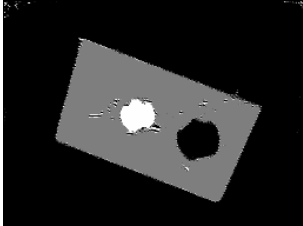
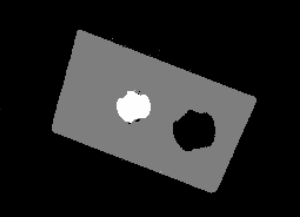
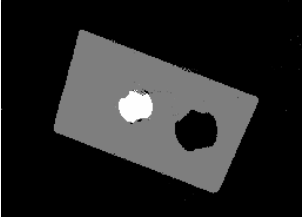
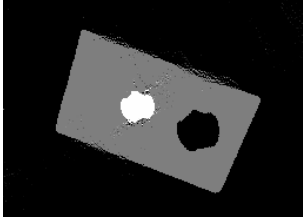
	Reihe B4 150,47° Winkelbereich	Reihe B5 130,78° Winkelbereich	Reihe B6 98,44° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.49: Rekonstruktionen des Prüfobjektes B aus den Aufnahmereihen B7, B8 und B9 (entsprechend Tabelle 5.4 mit $\sigma_y = 0,003$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,012.

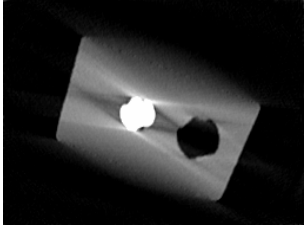
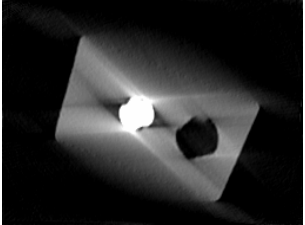
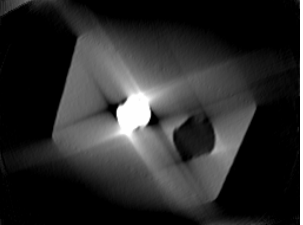
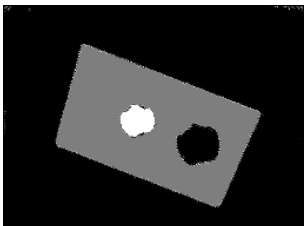
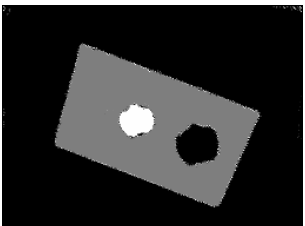
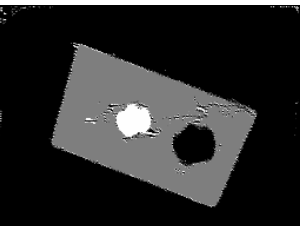
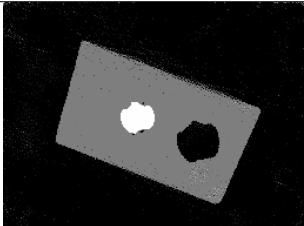
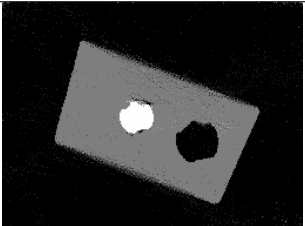
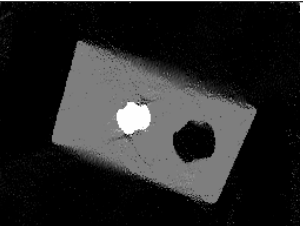

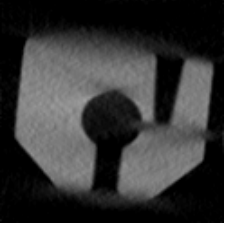
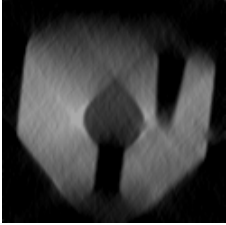



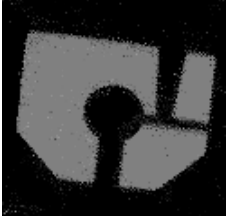

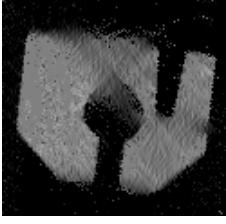
	Reihe B7 150,47° Winkelbereich	Reihe B8 130,78° Winkelbereich	Reihe B9 98,44° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

Tabelle 5.50: Rekonstruktionen des realen Prüfobjektes aus den Aufnahmereihen C1, C2 und C3 (entsprechend Tabelle 5.6 mit $\sigma_y \approx 0,003$) bei Anwendung der verschiedenen Rekonstruktionsverfahren. Ein hellerer Grauwert repräsentiert einen höheren Zahlenwert. Das Grauwertfenster reicht von 0 bis 0,012.

	Reihe C1 151,46° Winkelbereich	Reihe C2 138,29° Winkelbereich	Reihe C3 90,00° Winkelbereich
Klassische SART			
RegioSART basierend auf bin_n			
RegioSART basierend auf a_n			

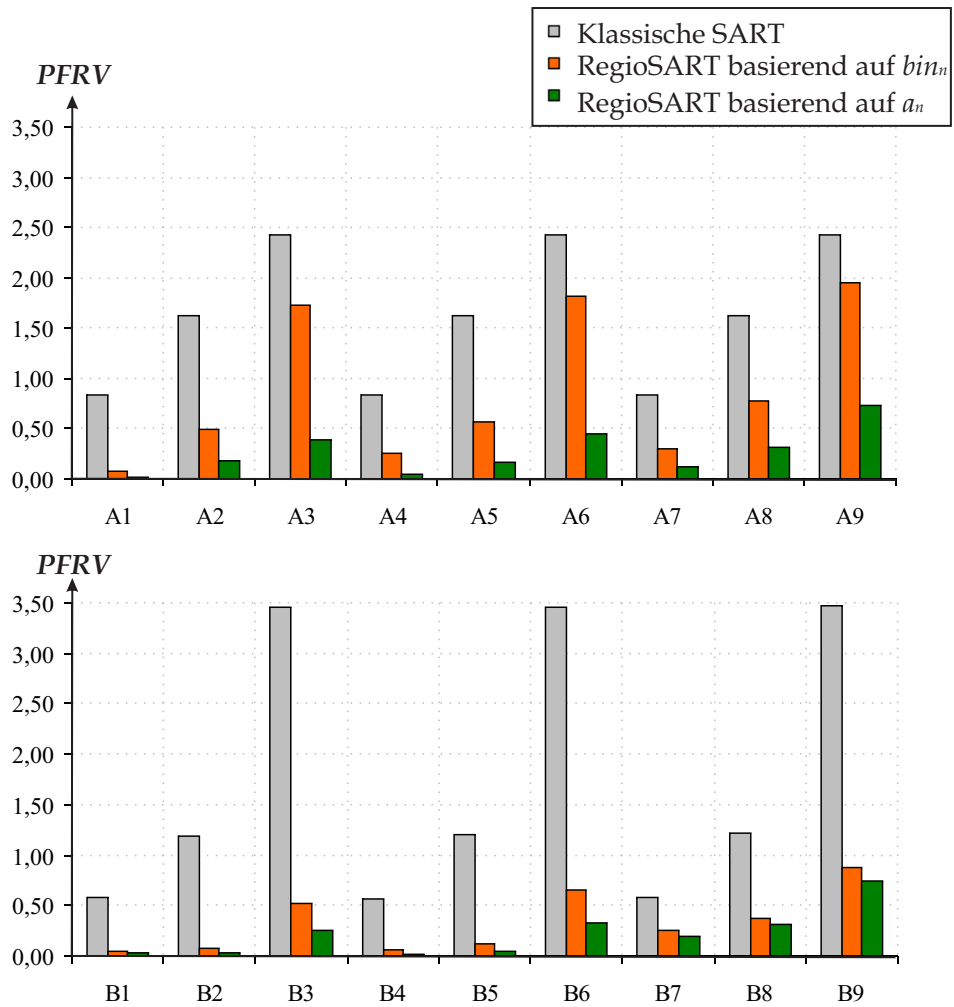


Abbildung 5.18: PFRV-Werte (5.5) der in den Tabellen 5.44 bis 5.49 dargestellten Rekonstruktionsvolumen

6 Zusammenfassung

Die Computertomografie hat sich in vielen industriellen Anwendungen etabliert. Anhand der Rekonstruktionsvolumen, die aus Röntgenbildern eines Werkstückes berechnet werden, lassen sich zerstörungsfrei umfangreiche Form- und Materialprüfungen realisieren. Mathematisch betrachtet entspricht die Berechnung des Rekonstruktionsvolumens der Lösung eines linearen Gleichungssystems, wobei die Röntgenbilder die Gleichungen bilden und die Voxel des Volumens die Unbekannten.

Blockiert ein Bauteil aufgrund seiner sperrigen Form die Rotationsbewegung im Computertomografen, fehlen Röntgenbilder aus bestimmten Richtungen. Der Winkelbereich, den die aufgenommenen Röntgenbilder aufspannen, ist eingeschränkt, das Gleichungssystem unterbestimmt. Die Rekonstruktion wird nur geschätzt, in manchen Bereichen des Volumens richtig, in anderen falsch.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde mit dem Gütemaß *Averatio* ein neues, stochastisches Verfahren eingeführt, das es ermöglicht, die Qualität einer Rekonstruktion durch einen Wahrscheinlichkeitswert auszudrücken – explizit für jedes Voxel im Volumen. Zur Berechnung des Wahrscheinlichkeitswertes wird a priori Wissen über die Absorptionskoeffizienten der Materialien, die in einer Aufnahmeszene vorkommen, eingebracht: An der Position eines zu untersuchenden Voxels wird testweise jeder Material-Absorptionskoeffizient eingesetzt und durch Abfrage aller Röntgenstrahlen, die das Voxel durchqueren, ermittelt, wie *wahrscheinlich* es ist, dass das aktuell eingesetzte Material richtig ist. Durch dieses Vorgehen spannt sich pro Voxel eine diskrete, bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung über die Materialien der Aufnahmeszene auf. Für originalgetreu rekonstruierte Voxel besitzt das Material, das tatsächlich an der Position des Voxels im realen Bauteil vorlag, als dieses geröntgt wurde, eine hohe Wahrscheinlichkeit, während alle anderen Materialien niedrige Wahrscheinlichkeiten aufzeigen. Je schlechter oder – aus Sicht der Röntgenstrahlen – je unsicherer ein Voxel rekonstruiert ist, desto gleichförmiger erscheint die Verteilung. Kurzum, die Verteilung spiegelt die lokale Rekonstruktionsqualität wider. In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten im Sinne der Evidenztheorie interpretiert und fusioniert werden können, womit aus der Verteilung schließlich *ein* Gütemaßwert extrahiert wird: Der *Averatio*wert. Er beträgt eins für Voxel, die aller Wahrscheinlichkeit nach das geröntgte Bauteil korrekt wiedergeben, und fällt in artefaktbehafteten und unsicher rekonstruierten Bereichen niedriger aus. Anhand des *Averatio*wertes wird ersichtlich, wo der Rekonstruktion

zu trauen ist und wo nicht. Artefakte lassen sich objektiv einschätzen und eingrenzen, verschiedene Rekonstruktionen eines Bauteils, die beispielsweise aus unterschiedlichen Aufnahmereihen generiert wurden, miteinander vergleichen. Ferner schafft das Gütemaß die Basis, Prozesse zu automatisieren.

In dieser Arbeit wurde das Gütemaß in der RegioSART eingesetzt – einem iterativen Rekonstruktionsverfahren, welches imstande ist mit einer variierenden Menge an Unbekannten im Gleichungssystem umzugehen. Diejenigen Voxel, die aller Wahrscheinlichkeit nach das Prüfobjekt originalgetreu wiedergeben, werden aus der Menge der Unbekannten entfernt. Dadurch reduziert sich die Anzahl der Unbekannten. Die übrigen Voxel verbleiben in der Menge der Unbekannten und werden im iterativen Verlauf der RegioSART gezielt nachgebessert. Im Idealfall gelingt eine vollständig originalgetreue Rekonstruktion des geröntgten Prüfobjektes.

Zur Überprüfung der theoretischen Überlegungen wurden 21 Testreihen mit unterschiedlich stark eingeschränkten Winkelbereichen und variierendem Rauschen betrachtet. Neben dem Gütemaß Averatio fanden zwei aus der Literatur bekannte Methoden zur lokalen Bewertung von Rekonstruktionsvolumen Anwendung, die (wie Averatio) a priori Wissen über die Materialien, die in einer Aufnahmeszene vorkommen, nutzen, allerdings keinen stochastischen Ansatz haben. Zusammenfassend lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

- Originalgetreu rekonstruierte Voxel besitzen überwiegend hohe Averatiowerte. Das dem Averatiowert zugehörige „wahrscheinlichste“ Material stimmt in aller Regel mit dem Original überein. In schlechter rekonstruierten Bereichen eines Volumens dominieren niedrigere Averatiowerte, die Materialzuordnung wird gleichermaßen unsicherer. Averatiobilder visualisieren die lokale Rekonstruktionsqualität.
- Mit Hilfe von Receiver Operating Characteristics wurde die Zuverlässigkeit des Gütemaßes Averatio quantitativ belegt. Es zeigt sich, dass die Receiver Operating Characteristics speziell im Bereich niedriger Fehldetektionswahrscheinlichkeiten sehr nahe am idealen Verlauf liegen. Vergleichbar niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeiten sind mit den nicht-stochastischen Methoden zur lokalen Bewertung entweder gar nicht oder nur unter Inkaufnahme niedrigerer Detektionswahrscheinlichkeiten realisierbar. Das heißt, in sicherheitsrelevanten Anwendungen, da eine niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit unabdingbar ist, empfiehlt sich die Verwendung des Gütemaßes Averatio.
- Für einen festen Schwellenwert liefert das Gütemaß Averatio in allen Testreihen eine annähernd *konstant* niedrige Fehldetektionswahrscheinlichkeit von maximal 4%. Sowohl Rauschen als auch eine Verkleinerung des Winkelbereiches, den die Röntgenbilder aufspannen, bewirkt – ganz im Gegensatz zur Bewertung mit den nicht-stochastischen Methoden – keine Zunahme der Fehldetektionswahrscheinlichkeit, sondern eher ein Sinken der Detektionswahrscheinlichkeit. Das Gütemaß

wird kritischer, es zeigt einen Ausfall zur sicheren Seite. Das bedeutet, die Detektion von Artefakten ist bei variierenden Aufnahmebedingungen konstant zuverlässig.

- Die Zuverlässigkeit des Gütemaßes ist ausschlaggebend für das Gelingen der RegioSART. Die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Rekonstruktionen zeigen, dass in ausnahmslos jeder Testreihe die RegioSART die beste Artefaktkorrektur bewirkt, wenn zur Unterscheidung „fehlerhafter“ und „originalgetreuer“ Voxel das Gütemaß *Averatio* herangezogen wird.
- Unter extremen Aufnahmebedingungen, wenn die Röntgenbilder nur einen sehr kleinen Winkelbereich aufspannen und durch starkes Rauschen beeinträchtigt sind, gehen die nicht-stochastischen Methoden zur Bewertung mit einer hohen Fehldetektionswahrscheinlichkeit einher, wodurch die Rekonstruktion in der RegioSART in eine falsche Richtung steuert und neue Artefakte entstehen. Mit *Averatio* als kritisches Gütemaß steuert die RegioSART nicht in eine falsche Richtung. Eine Verschlechterung der Rekonstruktion ist nahezu ausgeschlossen.
- Unter weniger extremen, dennoch eingeschränkten Aufnahmebedingungen gelingt mit der *Averatio*-basierten RegioSART eine annähernd originalgetreue Rekonstruktion der Prüfobjekte. Umspannen die Röntgenbilder beispielsweise einen Winkelbereich von 150° , so verbleiben in den im Rahmen dieser Arbeit rekonstruierten Volumen durchschnittlich 0,06% fehlerhafte Voxel.

Von der jeweiligen Anwendung hängt ab, ob eine Fehlermenge von 0,06% als kritisch einzustufen ist oder nicht. Doch unabhängig davon steht fest: Die Menge der fehlerhaft rekonstruierten Voxel nimmt im Vergleich zum herkömmlichen Rekonstruktionsverfahren (ohne Ausschluss originalgetreu rekonstruierter Voxel aus der Menge der Unbekannten) im Schnitt um die zehnfache, in der Spitze um die sechzigfache Menge ab. In keiner Testreihe hat sich die Rekonstruktionsqualität durch den Einsatz der *Averatio*-basierten RegioSART verschlechtert.

Für das Gütemaß *Averatio* bieten sich in der industriellen Praxis weitere Einsatzgebiete, die zu behandeln über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehen. So besteht das Interesse nicht immer darin, ein komplett originalgetreues Rekonstruktionsvolumen zu generieren. Manchmal ist nur in ein bestimmtes Detail, etwa eine Gewindebohrung oder eine Schweißnaht, von Bedeutung. Dann ist vollkommen ausreichend, wenn in diesem Bereich der Rekonstruktion eine hohe Qualität nachgewiesen werden kann. Das Gütemaß *Averatio* ist in der Lage, diesen Nachweis zu erbringen.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass eine Einschränkung des Winkelbereiches zu Artefakten im Rekonstruktionsvolumen führt. Die Ausprägung dieser Artefakte hängt von der inneren

und äußeren Form des geröntgten Prüfobjektes ab. In ähnlicher Weise hat die Ausrichtung des Prüfobjektes im Computertomografen Einfluss auf die Rekonstruktionsqualität, selbst dann, wenn die Röntgenbilder einen Winkelbereich von 360° umfassen. Die Seiten würfelförmiger Objekte werden ungünstig durchstrahlt, wenn sie senkrecht zur Drehachse liegen. In der Rekonstruktion entstehen Artefakte. Schon eine leichte Neigung der Drehachse (oder des Würfels) vermeidet zu einem großen Teil das Auftreten dieser Artefakte. Mit Hilfe des Gütemaßes wird sich jetzt für jedes Prüfobjekt exakt die Einstellung finden lassen, die die bestmögliche – oder für die jeweilige Anwendung ausreichende – Rekonstruktionsqualität gewährt.

Teilergebnisse dieser Arbeit wurden von der Autorin in verschiedenen Veröffentlichungen publiziert [24] [25] [26] [27] [28]. Die entwickelten Methoden sind zudem zu Patenten angemeldet und eingetragen worden [52] [53] [54] [55].

Literaturverzeichnis

- [1] *VGStudio MAX 1.2.1 User's Manual*. Volume Graphics GmbH, 2005
- [2] *Bauteilqualifizierung und Werkzeugkorrektur mit CT: Komplette Oberfläche mit einem Scan*. QZ, 5 2012
- [3] ABMAYR, W.: *Einführung in die digitale Bildverarbeitung*. Teubner, 1994
- [4] ALEXANDER, J. ; KALENDER, W. ; LINKE, G.: *Computertomographie: Bewertungsmerkmale, Gerätetechnik, Anwendungen*. Siemens-Aktiengesellschaft, 1985. – ISBN 3800914336
- [5] ANDERSEN, A.H. ; KAK, A.C.: Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART): A Superior Implementation of the ART Algorithm. In: *Ultrasonic imaging 6* (1984), Nr. 1, S. 81–94
- [6] BACKFRIEDER, W.: *Computertomografie / Institut für Biomedizinische Technik und Physik Universität Wien*. 1999. – Forschungsbericht
- [7] BARBUZZA, R. ; CLAUSSE, A.: Metropolis Monte Carlo for tomographic reconstruction with prior smoothness information. In: *Image Processing, IET 5* (2011), Nr. 2, S. 198–204
- [8] BATENBURG, KJ ; SIJBERS, J.: DART: a fast heuristic algebraic reconstruction algorithm for discrete tomography. In: *Image Processing, 2007. ICIP 2007. IEEE International Conference on Bd. 4 IEEE, 2007*, S. 133–136
- [9] BATENBURG, K.J. ; SIJBERS, J.: DART: A practical reconstruction algorithm for discrete tomography. In: *Image Processing, IEEE Transactions on 20* (2011), Nr. 9, S. 2542–2553
- [10] BENAMEUR, S. ; MIGNOTTE, M. ; LABELLE, H. ; DE GUISE, J.A.: A hierarchical statistical modeling approach for the unsupervised 3-D biplanar reconstruction of the scoliotic spine. In: *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on 52* (2005), Nr. 12, S. 2041–2057
- [11] BENAMEUR, S. ; MIGNOTTE, M. ; PARENT, S. ; LABELLE, H. ; SKALLI, W. ; DE GUISE, J.A.: 3D Biplanar Reconstruction of Scoliotic Vertebrae Using Statistical Models. In: *Computer Vision and Pattern Recognition Bd. 2, 2001*, S. 577–582

- [12] BENEKE, K.: Wilhelm Conrad Röntgen. In: *Mitteilungen der Kolloid-Gesellschaft* Bd. VII. Verlag Reinhard Knof, Nehnten, 2004, S. 60–83
- [13] BLESSING, N.: *Segmentierung von industriellen 3D-CT-Voxelmodellen durch dynamische Schwellwertberechnung*, Universität Stuttgart, Diss., 2008
- [14] BUZUG, T.M.: *Einführung in die Computertomographie: Mathematisch-physikalische Grundlagen der Bildrekonstruktion*. Springer Verlag Berlin, 2005
- [15] CAI, W. ; MA, L.: Comparison of approaches based on optimization and algebraic iteration for binary tomography. In: *Computer Physics Communications* 181 (2010), Nr. 12, S. 1974–1981
- [16] CASTEELE, E. Van d. ; BATENBURG, K.J. ; SALMON, P. ; SIJBERS, J.: Bone segmentation using discrete tomography / University of Antwerp. 2011. – Forschungsbericht
- [17] CENSOR, Y.: Binary steering in discrete tomography reconstruction with sequential and simultaneous iterative algorithms. In: *Linear algebra and its applications* 339 (2001), Nr. 1, S. 111–124
- [18] CENSOR, Y. ; ELFVING, T.: Block-iterative algorithms with diagonally scaled oblique projections for the linear feasibility problem. In: *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 24 (2002), Nr. 1, S. 40–58
- [19] CENSOR, Y. ; MATEJ, S.: Binary Steering of Nonbinary Iterative Algorithms. In: *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications* (1999), S. 285–296
- [20] CHAN, M.T. ; HERMAN, G.T. ; LEVITAN, E.: Probabilistic Modeling of Discrete Images. In: *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications* (1999), S. 213–235
- [21] DE PIERRO, A.: Multiplicative Iterative Methods in Computed Tomography. In: *Mathematical methods in Tomography* (1991), S. 167–186
- [22] FISHBURN, P. ; SCHWANDER, P. ; SHEPP, L. ; VANDERBEI, R.J.: The Discrete Radon Transform and Its Approximate Inversion via Linear Programming. In: *Discrete Applied Mathematics* 75 (1997), Nr. 1, S. 39–61
- [23] FLANNERY, B.P. ; PRESS, W.H. ; TEUKOLSKY, S.A. ; VETTERLING, W.T.: *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, 1995
- [24] FROST, A.: *Oberflächenprüfung bei der automatischen Vermessung von Volumen*, Fachhochschule Hannover, Diplomarbeit, 2006
- [25] FROST, A.: *Ermittlung von Objektoberflächen*. 2. Workshop der Forschungsnetze Bildge-

bende Sensortechnik und Industrial Informatics INDIN, 2007

- [26] FROST, A. ; HÖTTER, M.: Discrete Steering: Eine statistisch orientierte Diskretisierung von dreidimensionalen Rekonstruktionen aus Röntgenaufnahmen. In: *Forum Bildverarbeitung:[2.-. 3. Dezember 2010 in Regensburg]* KIT Scientific Publishing, 2010, S. 365–376
- [27] FROST, A. ; RENNERS, E. ; HÖTTER, M.: Iterative Discrete Steering of Three-Dimensional Reconstructions from X-Ray Images with Limited Angle. In: *VISAPP'12: Proceedings of the 7th International Conference on Computer Vision Theory and Applications*, 2012
- [28] FROST, A. ; RENNERS, E. ; HÖTTER, M. ; OSTERMANN, J.: Probabilistic Evaluation of Three-Dimensional Reconstructions from X-Ray Images Spanning a Limited Angle. In: *Sensors* 13 (2013), Nr. 1, S. 137–151
- [29] GORDON, R. ; BENDER, R. ; HERMAN, G.T.: Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for Three-Dimensional Electron Microscopy and X-Ray Photography. In: *Journal of theoretical Biology* 29 (1970), Nr. 3, S. 471–481
- [30] GRECU, L. ; NICOLA, A.: Some Results on Simultaneous Algebraic Techniques in Image Reconstruction from Projections. In: *ROMAI* (2009), S. 79–96
- [31] HERMAN, G.T. ; KUBA, A.: *Discrete Tomography: Foundations, Algorithms, and Applications*. Birkhäuser Boston:, 1999
- [32] HERMAN, G.T. ; KUBA, A.: Discrete Tomography in Medical Imaging. In: *Proceedings of the IEEE* 91 (2003), Nr. 10, S. 1612–1626
- [33] HERMAN, G.T. ; KUBA, A.: *Advances in discrete tomography and its applications*. Birkhäuser Boston:, 2007
- [34] IKE, T.: *Evidenzbasierte Analyse interner Konflikte bei der Fusion komplementärer Fahrzeugumfeldbeschreibungen*, Leibniz Universität Hannover, Diss., 2011
- [35] JÄHNE, B.: *Digitale Bildverarbeitung*. Springer, 2005
- [36] JIANG, M. ; WANG, G.: Convergence of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART). In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 12 (2003), Nr. 8, S. 957–961
- [37] KACHELRIESS, M.: *Reduktion von Metallartefakten in der Röntgen-Computer-Tomographie*, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 1998
- [38] KOHLER, T. ; PROKSA, R. ; NIELSEN, T.: SNR-weighted ART Applied to Transmission Tomography. In: *Nuclear Science Symposium Conference Record, 2003 IEEE* Bd. 4 IEEE,

- 2003, S. 2739–2742
- [39] KRZANOWSKI, W. J. ; HAND, D. J.: *ROC Curves for Continuous Data*. Chapman & Hall/CRC, 2009
- [40] KUBA, A. ; RUSKÓ, L. ; RODEK, L. ; KISS, Z.: Preliminary studies of discrete tomography in neutron imaging. In: *Nuclear Science, IEEE Transactions on* 52 (2005), Nr. 1, S. 380–385
- [41] KUNZE, H.: *Iterative Rekonstruktion in der medizinischen Bildverarbeitung*, Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2007
- [42] LAMECKER, H. ; WENCKEBACH, T.H. ; HEGE, H.-C.: Atlas-based 3D-Shape Reconstruction from X-Ray Images. In: *18th International Conference on Pattern Recognition, 2006*. Bd. 1 IEEE, 2006, S. 371–374
- [43] LEHR, C.: *Tomographische Rekonstruktion von Volumendefekten aus wenigen Röntgenaufnahmen*, Universität Hannover, Diss., 1999
- [44] LIAO, H.Y. ; HERMAN, G.T.: A Coordinate Ascent Approach to Tomographic Reconstruction of Label Images from a Few Projections. In: *Discrete applied mathematics* 151 (2005), Nr. 1, S. 184–197
- [45] MAESTRE-DEUSTO, F.J. ; SCAVELLO, G. ; PIZARRO, J. ; GALINDO, P.L.: ADART: An Adaptive Algebraic Reconstruction Algorithm for Discrete Tomography. In: *IEEE Transactions on Image Processing* 20 (2011), Nr. 8, S. 2146–2152
- [46] MEWES, D. ; RENZ, R.: Meß- und Rekonstruktionsmethoden für tomografische Messungen. In: *Chemie Ingenieur Technik* 63 (1991), Nr. 7, S. 699–715
- [47] MUELLER, K.: *Fast and Accurate Three-Dimensional Reconstruction from Cone-Beam Projection Data Using Algebraic Methods*, The Ohio State University, Diss., 1998
- [48] MÜLLER-MERBACH, J.: Simulation of X-ray projections for experimental 3D tomography / Image Processing Laboratory, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden. 1996. – Forschungsbericht
- [49] MUSMANN, H.G. ; OSTERMANN, J.: Statistische Methoden der Nachrichtentechnik / Leibniz Universität Hannover. 2005. – Forschungsbericht
- [50] NEUMAYER, D. ; MODRICH, K.-U. ; MAISL, M. ; KASPERL, S.: Computed Tomography as a tool for industrial measurement / Fraunhofer Institut Produktionstechnik und Automatisierung, Stuttgart, Germany. – Forschungsbericht

- [51] NEUSER, E. ; SUPPES, A.: NanoCT Visualizing internal 3D structures with submicrometer resolution. In: *Internal Symposium on Digital Industrial Radiology and computed Tomography (Lyon, France)*, 2007
- [52] NEUSER, E. ; SUPPES, A. ; ROTHE, N. ; HÖTTER, M. ; FROST, A.: *Computed Tomography Method, Computer Software, Computing Device and Computed Tomography System for Determining a Volumetric Representation of a Sample*. November 24 2010. – US Patent App. 12/953,700
- [53] NEUSER, E. ; SUPPES, A. ; ROTHE, N. ; HÖTTER, M. ; FROST, A.: *Computed Tomography Method, Computer Software, Computing Device and Computed Tomography System for Determining a Volumetric Representation of a Sample*. Juni 22 2011. – EP Patent 2,336,974
- [54] NEUSER, E. ; SUPPES, A. ; ROTHE, N. ; HÖTTER, M. ; FROST, A.: *Computed Tomography Method, Computer Program, Computing Device and Computed Tomography System*. Januar 13 2012. – WO Patent 2,012,003,850
- [55] NEUSER, E. ; SUPPES, A. ; ROTHE, N. ; HÖTTER, M. ; FROST, A.: *Computed Tomography Method, Computer Software, Computing Device and Computed Tomography System for Determining a Volumetric Representation of a Sample*. Dezember 7 2012. – WO Patent 2,012,163,367
- [56] PAPULA, L.: *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Bd. 3. Vieweg + Teubner Verlag, 2008. – ISBN 978-3-8348-0255-5
- [57] RIBEIRO, E.S. ; MASCARENHAS, N.D.A. ; SALINA, F.V. ; CRUVINEL, P.E.: Noise Reduction on CT Set of Projections by Wiener Filtering and Wavelet Thresholding. In: *6th Workshop on Computer Vision, Brazil (2010)*, S. 138–143
- [58] SADOWSKY, O. ; LEE, J. ; SUTTER, E.G. ; WALL, S.J. ; PRINCE, J.L. ; TAYLOR, R.H.: Hybrid cone-beam tomographic reconstruction: incorporation of prior anatomical models to compensate for missing data. In: *IEEE Transactions on Medical Imaging* 30 (2011), Nr. 1, S. 69–83
- [59] SCHÜLE, T. ; SCHNÖRR, C. ; WEBER, S. ; HORNEGGER, J.: Discrete tomography by convex-concave regularization and DC programming. In: *Discrete Applied Mathematics* 151 (2005), Nr. 1, S. 229–243
- [60] SHAFER, G.: *A mathematical theory of evidence*. University Press Princeton, 1976
- [61] SHAW, D. ; KAO, S.C. ; CHEN, S.L.: Methods of Improving the Quality of X-Ray Image Reconstruction with Limited Projection Data. In: *Microsystems, Packaging, Assembly & Circuits Technology Conference, 2008. IMPACT 2008. 3rd International IEEE*, 2008, S.

- 212–215
- [62] SLANEY, M. ; KAK, A.: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. SIAM, Philadelphia, 1988. – ISBN 0–89871–494–X
- [63] SOMMER, K.D. ; PUENTE LEÓN, F.: Informationsfusion in der Mess-und Sensortechnik. In: *TM-Technisches Messen* 74 (2007), Nr. 3, S. 89–92
- [64] SOMPEL, D. Van d. ; BRADY, M.: A Systematic Performance Analysis of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART) for Limited Angle Tomography. In: *Engineering in Medicine and Biology Society, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE*, 2008, S. 2729–2732
- [65] SOURBELLE, K.: *Performance Evaluation of Exact and Approximate Cone Beam Algorithms in Spiral Computed Tomography*, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2002
- [66] SOURBELLE, K. ; KUDO, H. ; LAURITSCH, G. ; TAM, K.C. ; DEFRISE, M. ; NOO, F.: Performance Evaluation of Exact Cone Beam Algorithms for the Long Object Problem in Spiral Computed Tomography. In: *Proceedings of the International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine, Pacific Grove, CA, USA*, 2001, S. 153–156
- [67] SOUSSEN, C. ; MOHAMMAD-DJAFARI, A.: Polygonal and polyhedral contour reconstruction in computed tomography. In: *Image Processing, IEEE Transactions on* 13 (2004), Nr. 11, S. 1507–1523
- [68] STROHMER, T. ; VERSHYNIN, R.: A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence. In: *Journal of Fourier Analysis and Applications* 15 (2009), Nr. 2, S. 262–278
- [69] VARDI, Y. ; LEE, D.: Discrete Radon Transform and Its Approximate Inversion via the EM Algorithm. In: *International journal of imaging systems and technology* 9 (1998), Nr. 2-3, S. 155–173
- [70] VARGA, L. ; BALÁZS, P. ; NAGY, A.: Projection Selection Algorithms for Discrete Tomography. In: *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems* Springer, 2010, S. 390–401
- [71] VLASOV, V.V. ; KONOVALOV, A.B. ; UGLOV, A.S.: An a Priori Information Based Algorithm for Artifact Preventive Reconstruction in Few-View Computed Tomography. In: *Communications Control and Signal Processing (ISCCSP), 2012 5th International Symposium on IEEE*, 2012, S. 1–5
- [72] WANG, B. ; BARNER, K. ; LEE, D.: Algebraic Tomosynthesis Reconstruction. In: *Medical*

Imaging 2004 International Society for Optics and Photonics, 2004, S. 711–718

- [73] YAGER, R.R.: On the Dempster-Shafer framework and new combination rules. In: *Information sciences* 41 (1987), Nr. 2, S. 93–137
- [74] YOON, S. ; PINEDA, A.R. ; FAHRIG, R.: Simultaneous Segmentation and Reconstruction: A level set method approach for limited view computed tomography. In: *Medical physics* 37 (2010), Nr. 5, S. 2329–2340