

# Über den Einfluss der Werkzeuggestalt auf die dynamische Stabilität des Fräsprozesses

Von der Fakultät für Maschinenbau  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades Doktor-Ingenieur  
genehmigte

Dissertation

von Dipl.-Ing. Volker Sellmeier  
geboren am 7. Juli 1980 in Osnabrück

2012

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Juni 2012  
1. Referent: Prof. Dr.-Ing. Berend Denkena  
2. Referent: Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek

Gewidmet meiner Familie.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit habe ich während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fertigungstechnik und Werkzeugmaschinen (IFW) der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover angefertigt. Herrn Prof. Dr.-Ing. Berend Denkena, dem Leiter des Instituts, gebührt mein besonderer Dank für die großzügige Förderung meiner Forschungsarbeiten und die Übernahme des Referats. Herrn Prof. Dr.-Ing. Jörg Wallaschek danke ich für die Übernahme des Koreferats. Ebenso gilt mein Dank dem Vorsitzenden der Prüfungskommission Herrn Prof. Dr.-Ing. Tobias Ortmaier.

Den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des IFW danke ich für ihre stete Hilfsbereitschaft und die gute Zusammenarbeit. Ebenfalls bedanke ich mich bei meinen studentischen Hilfskräften, Projekt- und Diplomarbeitern für ihre Unterstützung. Besonders hervorheben möchte ich stellvertretend Maik Bergmeier, Alexander Fricke, Roman Grabowski, Tobias Mörke und Oliver Pape.

Dr.-Ing. Christian Will und Wladimir Bickel danke ich für die intensive Durchsicht und ihre wertvollen Anmerkungen, die zur Aufwertung dieser Arbeit beigetragen haben. Ganz besonderer Dank gebührt Herrn Dr.-Ing. Josef Kleckner für seine wertvollen Anregungen und die fachlichen Diskussionen, die meinen Blick auf das Thema dieser Arbeit sehr geprägt haben.

Volker Sellmeier

## Kurzfassung

Aufgrund des unterbrochenen Schnitts ist das Fräsen von Natur aus durch Schwingungen des Werkzeugs, der Maschine und des Bauteils gekennzeichnet. Unter bestimmten Bedingungen werden diese Schwingungen instabil und der Prozess beginnt zu rattern. Zur Vermeidung des Ratterns müssen häufig zu Lasten der Produktivität die Prozesseinstellgrößen gesenkt werden. Neben den durch die Ratterneigung verursachten wirtschaftlichen Kosten ist es die von Nichtlinearitäten, Zeitvarianz und Totzeiten geprägte Komplexität der Systemdynamik, die das Rattern von Fräsprozessen auch nach über einem halben Jahrhundert intensiver Forschung zu einem nach wie vor aktuellen Thema macht. In dieser Arbeit wird der Einfluss von Freiflächenfasen und ungleicher Zahnteilung auf die Ratterneigung des Fräsprozesses untersucht. Von beiden Faktoren ist bekannt, dass sie einen signifikanten Einfluss auf die Ratterneigung haben. In den meisten aus der Literatur bekannten Modellen werden die Schneiden jedoch als ideal scharf und gleich geteilt angenommen. Eine auf der Diskretisierung der Systemperiode beruhende Methode zur Vorhersage der Stabilitätsgrenze wird auf ungleich geteilte Fräser erweitert. Zur Abbildung der durch Freiflächenfasen verursachten Prozessdämpfung wird ein dynamisches Prozesskraftmodell entwickelt. Dieses berücksichtigt nicht nur die dynamische Spannungsdicke, sondern auch die Verlagerungsgeschwindigkeiten des Werkzeugs und Werkstücks. Die berechneten Stabilitätskarten werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Zur Simulation der Prozessdynamik im Zeitbereich wird ein Höhenlinienmodell entwickelt, das nahezu beliebige Fräserformen abbilden kann. Durch den Einsatz der im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Modelle und Algorithmen können bestehende Fräsprozesse analysiert und optimiert und neue Fräsprozesse und -werkzeuge simulationsbasiert ausgelegt werden.

**Schlagwörter:** *Fräsen, Rattern, Prozessstabilität, Freiflächenfase, Prozessdämpfung, ungleiche Zahnteilung, Totzeit*

## Abstract

Due to the interrupted cut, vibrations of the tool, the machine tool structure and the work piece are inherent in milling processes. At certain process conditions the vibrations become unstable and the process starts to chatter. To avoid chatter often the process parameters have to be reduced at the expense of productivity. Besides the economic costs the reason, making chatter an ongoing issue even after more than half a century of intensive research, is the complexity of the system dynamics which is dominated by nonlinearities, time-variance of the system parameters and delays. In this work the influence of cutting edge chamfers and unequal tooth pitch on the chatter behavior of milling processes is investigated. It is known that both parameters have a significant influence on the chatter behavior of milling processes. However, in the literature most models assume an infinitely sharp cutting edge and an equally spaced tooth pitch. The discretization method is extended to cope for unequal tooth pitch. To model the process damping caused by chamfered cutting edges a dynamic force relationship is derived. This model takes into account the cross section of the uncut chip as well as the vibrational velocities of the tool and the work piece. The theoretically predicted stability charts are compared with experimental results. To simulate the process dynamics in time domain a level curve model is developed, which is able to account for almost arbitrary shapes of end mills. By use of the models and algorithms developed within this work existing milling processes can be analyzed and optimized and new processes and tools can be designed based on simulation results.

**Keywords:** *milling, chatter, process stability, cutting edge chamfer, process damping, unequal tooth pitch, time delay*

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>v</b>
<b>Kurzfassung/Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>viii</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>x</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Stand des Wissens</b>	<b>2</b>
2.1 Dynamik des Fräsprozesses . . . . .	3
2.2 Methoden zur Stabilitätsanalyse von Fräsprozessen . . . . .	4
2.3 Prozessdynamik ungleich geteilter Fräser . . . . .	8
2.4 Zerspankraftmodelle . . . . .	10
2.4.1 Konventionelle Zerspankraftmodelle . . . . .	11
2.4.2 Dynamische Prozesskraftmodelle und Prozessdämpfung . . . . .	13
<b>3 Zielsetzung und Vorgehensweise</b>	<b>19</b>
<b>4 Modellbildung der Dynamik des Fräsprozesses</b>	<b>21</b>
4.1 Modellierung der Strukturdynamik . . . . .	21
4.2 Methode zur Berechnung von Stabilitätskarten ungleich geteilter Fräser . .	25
4.2.1 Modellierung der Prozessdynamik . . . . .	25
4.2.2 Die regelungstechnische Behandlung von Systemen mit Totzeit nach ACKERMANN . . . . .	31
4.2.3 Erweiterung der Diskretisierungsmethode nach ACKERMANN auf Systeme mit mehreren Totzeiten . . . . .	35
4.2.4 Kombination der Diskretisierungsmethode mit der Methode der stück- weise konstanten Ersatzsysteme . . . . .	39
4.3 Dynamisches Prozesskraftmodell und Erweiterung der Methoden zur Be- rechnung der Stabilitätsgrenzen um geschwindigkeitsabhängige Effekte . . .	40
4.4 Modell zur Simulation des dynamischen Fräsprozesses im Zeitbereich . . .	46
4.5 Methode zur Identifikation der Schnittkraftkoeffizienten . . . . .	51
4.6 Methode der komplexen Kraftzeiger . . . . .	57



---

<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>60</b>
5.1	Prozessstabilität ungleich geteilter Fräser . . . . .	60
5.1.1	Experimentelle Verifikation . . . . .	63
5.1.2	Fehlerbetrachtung . . . . .	67
5.1.3	Einfluss der Zähnezahl . . . . .	68
5.1.4	Alternierende Ungleichteilung . . . . .	71
5.1.5	Lineare Ungleichteilung . . . . .	73
5.1.6	Einfluss des Drallwinkels . . . . .	75
5.1.7	Klassifikation anfachender und dämpfender Prozesskraftanteile gleich und ungleich geteilter Fräser . . . . .	79
5.2	Prozessstabilität von Fräsern mit Freiflächenfasen . . . . .	82
5.2.1	Einfluss der Freiflächengestalt auf die Scher- und Reibkraftkoeffi- zienten des Schnittkraftmodells von FRIEDRICH . . . . .	83
5.2.2	Einfluss der Freiflächengestalt auf die geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile . . . . .	86
5.2.3	Einfluss der Fasenbreite auf die Prozessstabilität . . . . .	100
5.2.4	Einfluss des Fasenwinkels auf die Prozessstabilität . . . . .	105
<b>6</b>	<b>Folgerungen für die Praxis</b>	<b>111</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>114</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>118</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>132</b>

## Symbolverzeichnis

Matrizen und Vektoren stehen in fetter aufrechter Schrift. Zeitliche Ableitungen werden durch einen Punkt und zeitlich gemittelte Größen durch einen waagerechten Strich über der Variablen gekennzeichnet. Nur kurzfristig benutzte Symbole und ggf. abweichende Bezeichnungen werden ausschließlich im Text erläutert.

$A$	Spanungsquerschnitt
$A_\alpha$	Hauptfreifläche
$a_e$	Schnittbreite
$a_p$	Schnitttiefe
$a_{p,\text{lim}}$	Grenzschnitttiefe
$\mathbf{A}(t)$	zeitvariante Systemmatrix
$\mathbf{B}(t)$	zeitvariante Eingangsmatrix
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$D$	Durchmesser des Fräasers
$d$	Dämpfungskoeffizient
$E$	Elastizitätsmodul
$f$	Vorschub
$f_0$	Eigenfrequenz
$F_c$	Schnittkraft
$F_{cN}$	Schnittnormalkraft
$F_f$	Vorschubkraft
$F_{fN}$	Vorschubnormalkraft
$F_{\mathbf{M}}^{(k)}, F_{\mathbf{D}}^{(k)}, F_{\mathbf{K}}^{(k)}, F_{\text{im}}^{(k)}, F_{\text{om},j}^{(k)}$	komplexe Kraftzeiger der strukturellen Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitskräfte sowie der inneren und äußeren Modulation (der $j$ -ten Schneide) des $k$ -ten Oszillators der Strukturdynamik
$F_p$	Passivkraft, Prüfkraft
$f_z$	Zahnvorschub
$g(\phi_j)$	Sprungfunktion, die die beiden Fräserzahnzustände <i>Im Eingriff</i> und <i>Nicht im Eingriff</i> beschreibt
$h(\phi_j)$	dynamische Spannungsdicke der $j$ -ten Schneide
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$k$	Steifigkeitskoeffizient
$K_{pd}$	Prozessdämpfungskoeffizient
$K_{tc}, K_{rc}, K_{ac}$	tangentialer, radialer und axialer Scherkraftkoeffizient

---

$K_{te}, K_{re}, K_{ae}$	tangentialer, radialer und axialer Reibkraftkoeffizient
$K_V$	volumenspezifische Kraft
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$m$	Masse, Diskretisierungsparameter
$m^*$	Diskretisierungsparameter
$n$	Drehzahl
$\mathbf{p}$	Zahnteilungsvektor: Elemente des Vektors sind die Winkelabstände zwischen den Zähnen
$P_o$	Werkzeug-Orthogonalebene
$P_s$	Werkzeug-Schneidenebene
$P_{se}$	Wirk-Schneidenebene
$\mathbf{q}_{ges}(t), \mathbf{q}_{stat}(t), \mathbf{q}_{dyn}(t) = \mathbf{q}(t)$	Vektoren der Verlagerungen der einzelnen Oszillatoren: gesamt, stationärer Anteil, dynamischer Anteil
$\mathbf{Q}_j$	Matrix der projizierten Schnittkraftkoeffizienten der $j$ -ten Schneide
$\mathbf{Q}_{pd}$	Prozessdämpfungsmatrix
$q_{xx,j}(t), q_{xy,j}(t), q_{yx,j}(t), q_{yy,j}(t)$	projizierte Schnittkraftkoeffizienten der $j$ -ten Schneide
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^m$	Menge der reellen Spaltenvektoren mit $m$ Komponenten
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Menge der reellen Matrizen mit $m$ Zeilen und $n$ Spalten
$S$	Schneidkantenlänge
$T$	Abtastintervall, Transponierte
$t$	Zeit
$T_p$	Systemperiode
$v_c$	Schnittgeschwindigkeit
$v_{eff}$	Effektivgeschwindigkeit
$v_e$	Wirkgeschwindigkeit
$\mathbf{v}_{exp,i}$	$i$ -ter Eigenvektor der expandierten Systemmatrix
$v_f$	Vorschubgeschwindigkeit
$\mathbf{x}_{exp}(k)$	expandierter zeitdiskreter Zustandsvektor
$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(kT)$	zeitdiskreter Zustandsvektor
$\mathbf{x}(t)$	zeitkontinuierlicher Zustandsvektor
$x_t(t), y_t(t)$	Verlagerungen des Werkzeugs im raumfesten Koordinatensystem
$x_w(t), y_w(t)$	Verlagerungen des Werkstücks im raumfesten Koordinatensystem
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$z$	Zähnezahl
$\alpha_f$	Fasenwinkel

---

$\alpha_o$	Werkzeug-Orthogonalfreiwinkel
$\alpha_{oe}$	Wirk-Orthogonalfreiwinkel
$\delta$	Drallwinkel
$\eta$	Wirkrichtungswinkel
$\eta_r$	Relaxationswinkel
$\mathbf{\Gamma}(k)$	zeitdiskrete Eingangsmatrix
$\gamma_o$	Werkzeug-Orthogonalspanwinkel
$\gamma_{oe}$	Wirk-Orthogonalspanwinkel
$\theta$	Totzeit
$\kappa$	axialer Eingriffswinkel
$\lambda_i$	$i$ -ter zeitkontinuierlicher Eigenwert der expandierten Systemmatrix
$\mu$	Reibkoeffizient
$\mu_i$	$i$ -ter Eigenwert der expandierten Systemmatrix
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\tau$	Integrationsvariable
$\Phi$	zeitdiskrete Systemmatrix, Fundamentalmatrix oder auch Transitionsmatrix
$\Phi_{\text{exp}}$	expandierte zeitdiskrete Systemmatrix
$\phi_a$	Zahnaustrittswinkel
$\phi_e$	Zahneintrittswinkel
$\phi_j$	Vorschubrichtungswinkel der $j$ -ten Schneide
$\xi_{t,j}(t), \eta_{t,j}(t)$	Verlagerungen des Werkzeugs im rotierenden Koordinatensystem der $j$ -ten Schneide
$\xi_{w,j}(t), \eta_{w,j}(t)$	Verlagerungen des Werkstücks im rotierenden Koordinatensystem der $j$ -ten Schneide
$\zeta$	Lehrsche Dämpfung
$\mathbf{0}_{a \times b}$	Nullmatrix mit $a$ Zeilen und $b$ Spalten
$\mathbf{1}_{a \times b}$	Einsmatrix mit $a$ Zeilen und $b$ Spalten

# 1 Einleitung

Das Zeitspanvolumen von Fräsprozessen wird durch verschiedene Faktoren begrenzt. Als erstes sind hier die Spindelleistung bzw. das maximale Drehmoment, das die Spindel zur Verfügung stellen kann, zu nennen. Aufgrund von immer leistungsfähigeren Hauptspindeln verliert dieser Aspekt jedoch an Bedeutung. Ein anderer, das Zeitspanvolumen begrenzender Faktor sind technologische Gründe hinsichtlich der Wahl der Prozessstellgrößen. So lassen sich beispielsweise Titanlegierungen aufgrund ihrer geringen Wärmeleitung und der damit verbundenen hohen thermischen Verschleißneigung der Schneidstoffe nur bei sehr geringen Schnittgeschwindigkeiten wirtschaftlich bearbeiten. Auch kann der Zahnvorschub bei der Zerspannung von Metallen nicht beliebig hoch gewählt werden, ohne ein zu hohes Risiko eines mechanischen Versagens der Schneiden in Kauf zu nehmen.

Neben den bereits genannten Aspekten wird das Zeitspanvolumen von Fräsprozessen zusätzlich durch die dynamische Stabilität des Zerspanprozesses eingeschränkt. Zwar ist das Fräsen aufgrund des unterbrochenen Schnitts von Natur aus von Schwingungen des Werkzeugs, der Maschinenstruktur und des Werkstücks geprägt, jedoch können diese Schwingungen unter bestimmten Prozessbedingungen instabil werden. Es kommt dann in der Regel zu einer schlagartigen Zunahme der Schwingungsamplituden. Solche instabilen Prozesszustände werden als Ratterschwingungen bezeichnet. Das Rattern ist nicht nur aufgrund der von Rattermarken gekennzeichneten Oberfläche unerwünscht, sondern auch aufgrund der sehr hohen dynamischen Belastungen des Werkzeugs und der Spindel, welche nicht selten zum Werkzeugbruch und unter Umständen zu Lagerschäden führen können.

Diese Arbeit widmet sich dem Einfluss der Werkzeuggestalt auf die Prozessstabilität von Fräsprozessen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf ungleichen Zahnteilungen und Freiflächenfasen. Von beiden Faktoren ist bekannt, dass sie die Stabilitätsgrenze signifikant beeinflussen. In der Theorie führen ungleich geteilte Fräser auf nichtautonome Differentialgleichungen mit mehreren konstanten, diskret verteilten Totzeiten. Diese sind in der Forschung bislang nur wenig und meist unter Vernachlässigung der Zeitvarianz der Systemparameter untersucht worden. Aus der industriellen Praxis ist bekannt, dass Freiflächenfasen die Grenzschnitttiefe deutlich erhöhen [Lan05; Lan06]. Die meisten für die Stabilitätsanalyse verwendeten Zerspankraftmodelle betrachten die Schneidkante jedoch als ideal scharf. Gefaste Schneidkanten sind in der Literatur hinsichtlich ihrer Ratterneigung bislang kaum untersucht worden. Die Ergebnisse dieser Arbeit sollen zum Verständnis der Wirkmechanismen des Ratterns und zur Weiterentwicklung von Fräswerkzeugen hinsichtlich ihrer prozessdynamischen Eigenschaften beitragen.

## 2 Stand des Wissens

Eine der ersten Erwähnungen des Problems instabiler Zerspanprozesse stammt von dem US-amerikanischen Ingenieur FREDERICK WINSLOW TAYLOR [Tay07, S. 179 ff.]. Er untersuchte bereits im Jahr 1907 das Aufschwingen des Drehprozesses, das ihm zu damaliger Zeit willkürlich und unerklärlich erschien:

*„Chatter is the most obscure and delicate of all problems facing the machinist, and in the case of castings and forgings of miscellaneous shapes probably no rules or formulae can be devised which will accurately guide the machinist in taking the maximum cuts and speeds possible without producing chatter.“*

Aufgrund der wirtschaftlichen Bedeutung und der Komplexität der Ratterproblematik ist das Thema auch heute noch Gegenstand der Forschung. Eine gute Übersicht der Forschungsarbeiten zum Thema Prozessstabilität, die sich nicht nur auf das Fräsen beschränkt, sondern auch andere Verfahren wie das Drehen, Bohren und auch das Schleifen mit einschließt, findet sich in einem von ALTINTAS und WECK 2004 veröffentlichten CIRP<sup>1</sup>-Keynote-Paper [Alt04]. Die meisten dieser Arbeiten eint die Verfolgung eines oder mehrerer der folgenden drei Ziele:

- Verständnis der Wirkmechanismen und Instabilitätsursachen,
- Vorhersage der Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit der relevanten Prozessstellgrößen,
- Ableitung von Maßnahmen zur Vermeidung des Ratterns bzw. zur Steigerung der Stabilitätsgrenze.

Da die dynamische Stabilität von Zerspanprozessen sehr stark von der Strukturdynamik des Systems, bestehend aus Werkzeug, Werkzeugaufnahme, Spindel, Maschinengestell, Werkstück und Werkstückeinspannung, abhängt, sind allgemeine Aussagen zur Ratterneigung von Werkzeugmaschinen kaum möglich. Das Bestreben der Forschung war daher, Modelle zu entwickeln, anhand derer das dynamische Verhalten und die Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit der relevanten Prozessstellgrößen beurteilt werden können.

Kapitel 2.1 widmet sich zunächst den wichtigsten Modellen zur Beschreibung der Dynamik von Fräsprozessen. Die Systemgleichungen zur Beschreibung der Fräsprozessdynamik sind üblicherweise von Zeitvarianz der Systemparameter und Totzeiten gekennzeichnet. Eine Stabilitätsanalyse ist daher nicht trivial. Auf die in der Literatur beschriebenen Verfahren zur Approximation der Stabilitätsgrenze solcher Systeme wird daher in Kapitel 2.2 eingegangen. Aus der Literatur sind verschiedene Arbeiten zum dynamischen Verhalten ungleich geteilter Fräser bekannt. Diese werden in Kapitel 2.3 vorgestellt. Die Vorhersage der Stabilitätsgrenze bedingt eine genaue Berechnung der dynamischen Zerspankraftkomponenten. Für die Simulation der Zerspankraftkomponenten existieren jedoch zahlreiche

---

<sup>1</sup>College International pour la Recherche en Productique (CIRP), auf Deutsch: Internationale Akademie für Produktionstechnik.

unterschiedliche Zerspankraftmodelle. Kapitel 2.4 stellt die für die Stabilitätsanalyse bedeutendsten vor und geht zudem auf den nur von wenigen Modellen berücksichtigten Effekt der Prozessdämpfung ein.

## 2.1 Dynamik des Fräsprozesses

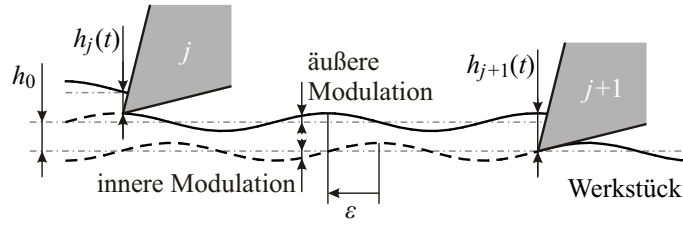
Erste Arbeiten zur Untersuchung der Wirkmechanismen, die Ratterschwingungen bei Drehprozessen hervorrufen, wurden von ARNOLD [Arn46], COOK [Coo55; Coo59], MERRIT [Mer65], HÖLKEN [Höl57] und TLUSTÝ und POLÁČEK [Tlu63] veröffentlicht. In den 1960er Jahren herrschte noch Unklarheit hinsichtlich der Ursachen des Ratterns von Werkzeugmaschinen [And61]. Heute ist jedoch der erstmalig von HAHN [Hah53] beschriebene und bald danach auch von verschiedenen anderen Autoren [Tob56; Tob61; Dan62; Pet63] aufgegriffene Regenerativeneffekt als eine der Hauptursachen für Ratterschwingungen beim Fräsen allgemein anerkannt [Alt00, S. 97; Tlu00, S. 560 ff.; Wec06, S. 202 ff.]. Prinzipiell existieren noch andere Instabilitätsmechanismen, die zu Ratterschwingungen führen können, wie z. B. die fallende Schnittkraftcharakteristik [Arn46; Tön95, S. 81 f.], bei der die mit größer werdender Schnittgeschwindigkeit abfallende Schnittkraft destabilisierend wirkt, oder Lagekopplungseffekte [Dan62, S. 187 ff.; Tön95, S. 85 f.], für deren Wirkung das System in mindestens zwei unterschiedlichen Richtungen schwingungsfähig sein muss. Diese spielen jedoch gegenüber dem Regenerativeneffekt eine untergeordnete Rolle. Nach WECK [Wec06, S. 257 ff.] verhalten sich die Grenzspannungstiefen bezüglich des Regenerativeneffekts und der Lagekopplung wie folgt:

$$b_{\text{lim,Lage}} \geq 2 b_{\text{lim,min,Regenerativ}} \quad (2.1)$$

Die Grenzspannungstiefe, die beim Drehen mit Nullüberdeckung<sup>2</sup> (Lagekopplung) erzielt werden kann, ist daher mehr als doppelt so groß wie beim Drehen mit einer Überdeckung von Eins, wie z. B. dem Orthogonaleinstechdrehen (Regenerativeneffekt).

Die Modellvorstellung beim Regenerativeneffekt ist die, dass jeder Zahn aufgrund von Prozessstörungen, wie z. B. Prozesskraftschwankungen durch Zahneingriffsstöße, keinen ideal glatten Schnitt vollführt, sondern vielmehr eine Welligkeit auf der Bauteiloberfläche hinterlässt, die auch als äußere (Spannungsdicken-) Modulation bezeichnet wird. Die dynamische Spannungsdicke des nachfolgenden Zahns setzt sich infolgedessen aus der Auslenkung des Werkzeugs in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung  $[x(t) \ y(t)]$ , die auch als innere (Spannungsdicken-) Modulation bezeichnet wird, und der äußeren Modulation  $[x(t-\theta) \ y(t-\theta)]$  sowie dem Zahnvorschub  $f_z$  zusammen. Bild 2.1 veranschaulicht den Regenerativeneffekt. Die rotatorische Bewegung des Fräasers ist hier auf eine Gerade projiziert.  $h_0$  ist die mittlere bzw. nominelle Spannungsdicke. Beim Fräsen kann sie näherungsweise als Funktion des Zahnvorschubs  $f_z$  und des Vorschubrichtungswinkels  $\phi_j$  angegeben werden:  $h_0 \approx f_z \sin(\phi_j(t))$ . Stellt sich eine Schwingung mit einer konstanten Frequenz ein, so bezeichnet  $\varepsilon$  die Phasenverschiebung zwischen innerer und äußerer Modulation. Nach [Alt00] gilt für die dynamische Spannungsdicke des  $j$ -ten Zahns eines Fräasers mit einem Drallwinkel von  $\delta = 0^\circ$ :

<sup>2</sup>Nullüberdeckung bedeutet beim Außenlängsdrehen, dass der Vorschubeingriff kleiner oder gleich dem Vorschub ist:  $a_f \leq f$ .



Se/55845 © IFW

**Bild 2.1:** Modulation der Spannungsdicke aufgrund des Regenerativeffekts.

$$h_j(t) = f_z \sin(\phi_j) - \left[ -x(t) \sin(\phi_j) - y(t) \cos(\phi_j) \right] + \left[ -x(t-\theta) \sin(\phi_j) - y(t-\theta) \cos(\phi_j) \right]. \quad (2.2)$$

Die sogenannte Totzeit  $\theta$  entspricht hierbei dem Kehrwert aus der Zahneingriffsfrequenz  $\theta = \frac{1}{z n}$ . Da je nach Modellansatz die Zerspankraftkomponenten linear oder nichtlinear von der Spannungsdicke abhängen, führt der Regenerativeffekt bei der Beschreibung der Dynamik von Fräsprozessen auf Totzeitdifferentialgleichungen. Im Gegensatz zum Drehen liegt die Besonderheit beim Fräsen darin, dass diese Totzeitdifferentialgleichungen aufgrund des sich periodisch ändernden Vorschubrichtungswinkels und des unterbrochenen Schnitts nichtautonom sind, das heißt, ihre Parameter sind Funktionen der Zeit  $t$ . Eine große Zahl in der Literatur vorhandener Modelle zur Beschreibung der Fräsprozessdynamik, wie z. B. [Thu00, S. 575 ff.; Ins00; Bal02; Wec06, S. 279 ff.], entsprechen einer nichtautonomen Totzeitdifferentialgleichung folgenden Typs:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) (\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t - \theta)) \right]. \quad (2.3)$$

Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt die Strukturdynamik durch die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  und die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ .  $\mathbf{q}(t)$  ist der Vektor der Verlagerungen. Die rechte Seite beschreibt die Prozesskräfte inklusive des Regenerativeffekts. Der um die Totzeit  $\theta$  verzögerte Verlagerungsvektor  $\mathbf{q}(t - \theta)$  entspricht somit der äußeren Modulation. Die Matrix  $\mathbf{Q}_j(t)$  ist die Matrix der projizierten Schnittkraftkoeffizienten für die  $j$ -te Schneide des Fräasers. Diese Koeffizienten werden mitunter auch als Richtungsfaktoren bezeichnet. Die Elemente dieser Matrix stellen eine Projektion der Schnittkraftkoeffizienten auf das raumfeste Koordinatensystem dar. Da die projizierten Schnittkraftkoeffizienten die Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$  der einzelnen Schneiden sowie deren Eingriff berücksichtigen, schwanken sie periodisch mit der Zahneingriffsfrequenz:  $\mathbf{Q}_j(t) = \mathbf{Q}_j(t + \theta)$ . Ihr periodischer Verlauf kann zudem unstetig sein. Für eine genaue Herleitung dieser Matrix sei auf die Literatur [Ins00; Alt95; Bud98a] verwiesen. Wird, wie z. B. in [Ins00; Bal02], ein System mit nur einem Freiheitsgrad angenommen, so reduzieren sich die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{Q}_j(t)$  sowie der Verlagerungsvektor  $\mathbf{q}(t)$  zu Skalaren.

## 2.2 Methoden zur Stabilitätsanalyse von Fräsprozessen

Die mechanisch-mathematische Beschreibung des dynamischen Fräsprozesses verfolgt letztendlich das Ziel, die Stabilität des Prozesses voraussagen zu können. Die Stabilitätsanalyse des Systems aus Gleichung (2.3) ist jedoch nicht trivial, da aufgrund der Zeitvarianz und der Totzeit diese Gleichung gegenüber herkömmlichen Stabilitätskriterien unzugänglich



ist. In der Vergangenheit wurden graphische Verfahren zur Stabilitätsanalyse von Zerspanprozessen eingesetzt [Gur61; Pet63]. Im Zuge der in den vergangenen Jahrzehnten drastisch gestiegenen Rechengeschwindigkeit von Computern haben sich jedoch rechnerische Verfahren durchgesetzt. Die bedeutendsten Verfahren sind:

- *Zeroth Order Approximation* [Alt95; Bud98a]
- *Multi Frequency Solution* [Mer04]
- *Diskretisierungsmethoden* [Kle01; Ins02; Ins04b; Ins11]
- *Temporal Finite Element Analysis* [Bay03; Man04; Pat08]
- *Cluster Treatment of Characteristic Roots* [Olg02; Olg05; Sip06]
- *Zeitliche Simulation der Prozessdynamik* [Li93; Cam03; Sur05; Mer08]

Erste Arbeiten zur Untersuchung der Stabilität des Fräsprozesses, wie die von DREGGER [Dre66a] und ROESE [Roe67], beruhen auf der Mittelung der zeitvarianten Richtungskoeffizienten  $\mathbf{Q}_j(t)$ . ROESE konnte in seiner Arbeit bereits nachweisen, dass die Mittelung der Richtungskoeffizienten bei großen Schnittbreiten und vielen Zähnen prinzipiell zulässig ist, jedoch bei starken zeitlichen Schwankungen der Richtungskoeffizienten zu Ungenauigkeiten führen kann. Die Mittelung der Richtungskoeffizienten wurde in ähnlicher Art und Weise von MINIS und YANUSHEVSKY [Min90; Min93] und ALTINTAS und BUDAK [Alt95; Bud98a; Bud98b] angewandt, indem diese durch eine Fourierreihenentwicklung, die nach dem nullten Glied abgebrochen wird, approximiert werden. Die Zeitvarianz des Systems wird somit vernachlässigt und die Systemparameter gemittelt. Die Methode zur Stabilitätskartenberechnung von ALTINTAS und BUDAK wird daher auch *Zeroth Order Approximation* (auf Deutsch: Näherung nullter Ordnung) genannt. Die Stabilitätsbetrachtung erfolgt hierbei im Frequenzbereich. Für das gekoppelte System, bestehend aus Maschinenstruktur und Prozess wird eine charakteristische Gleichung hergeleitet deren Eigenwert berechnet wird. Hieraus können schließlich die Grenzschnitttiefe  $a_{p,\text{lim}}$  als Funktion und die Drehzahlen  $n_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) als Relation der Ratterfrequenz  $\omega_c$  berechnet werden. Die Berechnung der Drehzahlen  $n_k$  ist aufgrund eines Arkustangensterms nicht eindeutig. Zu jeder Ratterfrequenz ergeben sich unendlich viele Drehzahlen. Wird die Grenzschnitttiefe  $a_{p,\text{lim}}(\omega_c)$  über den zugehörigen Drehzahlen  $n_k(\omega_c)$  aufgetragen, so ergibt sich die Stabilitätskarte des Systems mit ihrem charakteristischen peakförmigen Verlauf [Alt95; Alt00, S. 104 ff.].

Wird diese Fourierreihenentwicklung nicht nach dem nullten Glied abgebrochen, sondern werden auch höhere Harmonische der Zahneingriffsfrequenz berücksichtigt, so ergibt sich die von MERDOL und ALTINTAS in [Mer04] beschriebene *Multi Frequency Solution* (auf Deutsch: Mehrfach-Frequenz-Lösung). Die Berücksichtigung höherer Harmonischer ist insbesondere bei geringen Schnittbreiten  $a_e$  notwendig. Bei geringen Schnittbreiten ist der Fräsprozess stark zeitvariant, da die Zähne nur während eines sehr kurzen Teils der Periode der Fräserrotation im Eingriff sind. Hierdurch können zusätzliche Peaks in der Stabilitätskarte entstehen, die von der Zeroth Order Approximation in Folge der Mittelung der Richtungskoeffizienten nicht berücksichtigt werden [Mer04].

In [Ins02] wurde von INSPERGER und STÉPÁN die *Semi-Diskretisierung* als eine weitere Methode zur Stabilitätskartenberechnung von zeitvarianten Totzeitdifferentialgleichungen beschrieben. In [Ins02] wurde diese Methode zunächst zur Untersuchung der MATHIEUSchen Differentialgleichung mit Totzeit benutzt, später wurde sie in [Ins03; Man03;

Ins04b] auch zur Stabilitätskartenberechnung von Fräsprozessen angewandt. In [Gra05a] wurde gezeigt, dass zwar bei großen Schnittbreiten  $a_e$  die mit der Zeroth Order Approximation und der Semi-Diskretisierung berechneten Stabilitätsgrenzen gut übereinstimmen, dass es jedoch bei geringen Eingriffsbreiten aufgrund der zeitlich stark schwankenden Parameter zu zusätzlichen Peaks in den Stabilitätskarten kommt, die lediglich durch die Methode der Semi-Diskretisierung vorhergesagt werden können. Die Methode der Semi-Diskretisierung beruht auf der Diskretisierung der Differentialgleichung. Die Periode des Systems wird dabei in eine endliche Anzahl von äquidistanten Teilintervallen eingeteilt. In jedem Teilintervall werden die zeitvarianten Parameter durch ihre Mittelwerte approximiert. Der totzeitverzögerte Term wird durch die gewichteten totzeitverzögerten diskreten Terme angenähert. Für jedes Teilintervall ergibt sich so eine Transitionsmatrix. Die Transitionsmatrix für eine ganze Periode ist das Produkt der Transitionsmatrizen der einzelnen Teilsysteme. Letztendlich führt diese Methode auf eine zeitdiskrete Systembeschreibung, deren Stabilität anhand der Eigenwerte der Transitionsmatrix für eine ganze Periode ermittelt werden kann. Das System ist stabil wenn alle Eigenwerte ihrem Betrag nach kleiner als eins sind. Die Berechnung von Stabilitätskarten erfolgt schließlich über die punktweise Eigenwertberechnung im betrachteten Raum der relevanten Systemparameter. Je nachdem mit welcher Ordnung der Totzeiterm angenähert wird, ergibt sich die Semi-Diskretisierung nullter, erster, zweiter usw. Ordnung. Werden die zeitvarianten Parameter durch stückweise konstante Funktionen approximiert, ist es im Hinblick auf eine möglichst hohe Konvergenzordnung der Methode nicht notwendig, eine höhere Ordnung als eins zu verwenden [Ins08]. HENNINGER und EBERHARD steigerten die Effizienz der Semi-Diskretisierung, indem sie die Systemperiode in nicht-äquidistante Teilintervalle unterteilten [Hen08]. Hierdurch ist die Einsparung von Rechenaufwand insbesondere dann groß, wenn der Fräser nur während eines kleinen Teils der Systemperiode im Eingriff ist (Einzahnfräsen bei geringer Schnittbreite). Im Gegensatz zur Methode der Zeroth Order Approximation ermöglicht die Semi-Diskretisierung lediglich Stabilitätsaussagen für einzelne Arbeitspunkte. Bei Verwendung der Semi-Diskretisierung werden Stabilitätskarten daher üblicherweise durch das punktweise Scannen der relevanten Parameterebene ermittelt. Der Rechenaufwand hängt dadurch quadratisch vom gewählten Abstand der einzelnen Arbeitspunkte ab. Um das sehr rechenaufwändige Scannen der gesamten Ebene der relevanten Systemparameter zu vermeiden, haben HENNINGER und EBERHARD einen Curve-Tracking-Algorithmus entwickelt [Hen07]. Dieser ermittelt für eine bestimmte Drehzahl die Stabilitätsgrenze und folgt dieser, indem er sich auf das Scannen der Arbeitspunkte in der Nähe der im vorherigen Schritt ermittelten Stabilitätsgrenze beschränkt. Die Anwendung dieses Algorithmus setzt jedoch voraus, dass keine stabilen oder instabilen Inseln in den Stabilitätskarten auftreten. Für eine detaillierte Darstellung der Methode der Semi-Diskretisierung sei auf die Literatur [Ins02; Ins03; Man03; Ins04b; Ins08] verwiesen. Eine sehr umfassende Darstellung findet sich auch in dem Buch [Ins11] von INSPIERGER und STÉPÁN.

Ein der Semi-Diskretisierung sehr ähnliches Verfahren, welches auf der von ACKERMANN in [Ack83, S. 134 ff.] erstmalig beschriebenen Diskretisierung von Totzeitsystemen und der Expansion des Zustandsvektors um den Verlauf des totzeitverzögerten Systemeingangs beruht, hat KLECKNER bereits in [Kle01] zur Stabilitätsanalyse des dynamischen Drehprozesses angewandt. In den Kapiteln 4.2.2, 4.2.3 und 4.2.4 wird dieses Verfahren aufgegriffen und in erweiterter Form zur Stabilitätsanalyse des dynamischen Verhaltens ungleich geteilter Fräser eingesetzt.

Die *Temporal Finite Element Analysis* (auf Deutsch: Analyse durch zeitlich finite Elemente) ist eine weitere Methode zur Berechnung von Stabilitätskarten von Fräsprozessen [Bay03; Man04; Pat08]. Hierbei wird die Zeitdimension in mehrere finite Elemente unterteilt. Die Verlagerungen und Geschwindigkeiten werden am Beginn und Ende der Elemente abgeglichen. Ähnlich wie bei der Semi-Diskretisierung führt diese Methode auf eine diskrete Systemdarstellung, bei der die Stabilität über die Eigenwerte der Transitionsmatrix beurteilt wird. In [Ins03] wurde gezeigt, dass die Semi-Diskretisierung und die Temporal-Finite-Element-Analyse zur gleichen Lösung konvergieren. Ein Vorteil dieser Methode ist, dass mit ihr nicht nur die Stabilität, sondern zugleich auch der Oberflächenfehler der gefrästen Flanken ermittelt werden kann [Man05].

In [Olg02; Olg05; Sip06] entwickelten OLGAC und SIPAHI die Methode des *Cluster Treatment of Characteristic Roots* (auf Deutsch: Eigenwert-Clustering) zur Stabilitätsanalyse von Totzeitsystemen und wenden diese auf Fräsprozesse mit gleicher und ungleicher Zahnteilung an. Die von dieser Methode berechneten Stabilitätskarten stimmen mit denen durch die Methode der Zeroth Order Approximation berechneten sehr gut überein [Olg05]. Zur Analyse der Stabilität von Zerspanprozessen hat diese Methode bislang nur wenig Verbreitung gefunden.

Das rechenintensivste Verfahren zur Stabilitätsanalyse von Zerspanprozessen stellt die Simulation der Prozessdynamik im Zeitbereich dar. Eine Ausnahme bilden jedoch die in den 1960er Jahren von DREGGER [Dre66a] und ROESE [Roe67] hierfür verwendeten analogen Rechenschaltungen. Der zeitlich veränderliche Verlauf der Richtungsfaktoren wurde hierbei mit Hilfe eines Funktionsgenerators erzeugt, der von einem Sägezahngenerator angesteuert wurde. Die zu berücksichtigende Totzeitverzögerung des Verlagerungszustands wurde durch ein 2-Kanal-Tonbandgerät mit stufenlos einstellbarer Bandgeschwindigkeit realisiert. Die Ermittlung der Stabilitätskarte schildert ROESE in [Roe67, S. 23] folgendermaßen:

*„Bei der Berechnung der Stabilitätskarte ist zunächst am Sägezahngenerator und am Tonbandgerät die einer gewünschten Drehzahl entsprechende Periodendauer des Zahneingriffs einzustellen. Danach lässt sich durch Ändern der Stellung von Potentiometer 1 der Wert für die Schnittsteifigkeit ermitteln, bei dem eine einmalig angeregte Schwingung weder auf- noch abklingt. Für ein lineares System entspricht dieser Zustand den Bedingungen an der Stabilitätsgrenze, so daß [sic] die Stabilitätsgrenze sehr schnell berechnet werden kann.“*

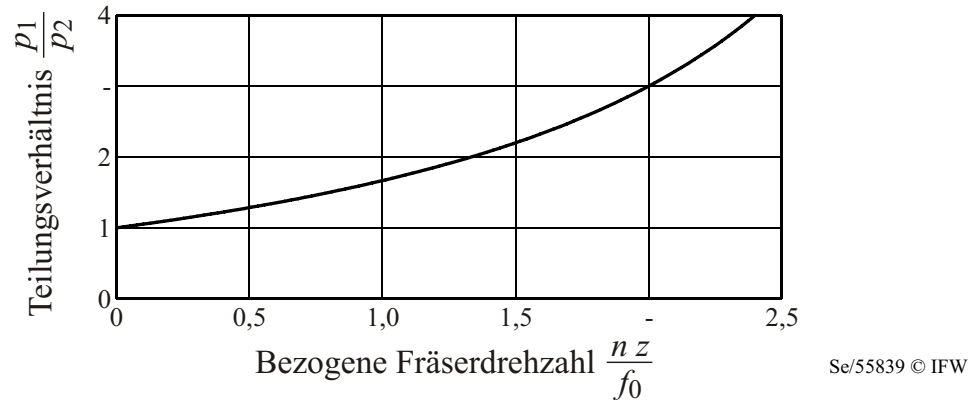
In [Smi91] geben SMITH und TLUSTÝ einen Überblick über Modellansätze zur Simulation des Fräsprozesses. Sie unterscheiden nach ihrer Komplexität insgesamt fünf unterschiedliche Arten von Modellansätzen. Lediglich die Modelle der fünften Klasse berücksichtigen den Regenerativeneffekt und sind in der Lage, die Dynamik des Prozesses und somit Ratterschwingungen abzubilden. ALTINTAS et al. [Alt92] entwickelten ein Modell zur Simulation des Flankenfräsens sehr dünner Stege. Die dynamische Nachgiebigkeit dieser Stege bilden sie über ein dynamisches Finite-Elemente-Modell ab, das die Änderung der Stegdicke durch den Fräsprozess in jedem Zeitschritt berücksichtigt. LI [Li93] entwickelte ein Programm zur Simulation des dynamischen Stirnplanfräsprozesses im Zeitbereich. Die Strukturmechanik wurde hier als Mehrmassenschwinger in drei Koordinatenrichtungen abgebildet. Die einzelnen Richtungen wiesen mehrere Eigenformen auf und waren teilweise untereinander gekoppelt. CAMPOMANES und ALTINTAS [Cam03] entwickelten

eine zeitliche Simulation, mit der sie Stabilitätskarten für (im Vergleich zum Fräserdurchmesser  $D$ ) sehr kleine Eingriffsbreiten  $a_e$  ermittelten. In ihren Untersuchungen stellten sie fest, dass sich die Stabilitätsgrenzen, je nachdem ob sie den Prozess mit oder ohne Reibkraftanteilen simulierten, unterscheiden. SURMANN [Sur05] benutzt erstmals die aus der 3D-Computergraphik und aus CAD-Programmen bekannte Technik der Constructive Solid Geometry (auf Deutsch: Konstruktive Festkörpergeometrie) zur Berechnung des Materialabtrags und der Spanungsquerschnitte beim Fräsen. Durch die Kopplung dieser Technik mit einem Mehrmassenschwingeransatz zur Abbildung der Strukturdynamik und einem Prozesskraftmodell wird neben der Simulation der Prozessdynamik auch die Vorhersage der gegebenenfalls durch Rattermarken gekennzeichneten Bauteiloberfläche ermöglicht. STAUTNER [Sta05] und REHLING [Reh08] verwendeten zur Simulation des Materialabtrags Dixel-Modelle. Bei Dixel-Modellen werden über den Knotenpunkten eines Gitters die Ober- und Unterseite des Bauteils über zwei Skalare dargestellt. Veranschaulichen lässt sich dies durch ein Nagelbrett, das durch den Prozess beschnitten wird [Den11, S. 115 f.]. Da die Genauigkeit des Materialvolumens eines einfachen Dixelfeldes stark von der betrachteten Richtung abhängt, ist es üblich, für jede Hauptachse des kartesischen Koordinatensystems ein eigenes Dixelfeld zu definieren [Sta05; Reh08; Den11, S. 115 f.]. Durch die Simulation des dynamischen Fräsprozesses im Zeitbereich lassen sich zwar prinzipiell Stabilitätskarten ermitteln, jedoch ist dies sehr rechenintensiv und somit zeitaufwändig. Die zu simulierende Prozessdauer muss zudem hinreichend lang sein, um das Stabilitätsverhalten beurteilen zu können. SIMS beschreibt in [Sim05] ein Verfahren, mit dem die für eine Stabilitätsaussage notwendige Simulationsdauer verkürzt werden kann. Die Vorteile der zeitlichen Simulation liegen in der einfachen Möglichkeit Nichtlinearitäten, wie z. B. den schwingungsbedingten Verlust des Zahneingriffs, zu berücksichtigen und die trochoidale Form der Zahnflugbahnen abzubilden. Die Simulation des dynamischen Fräsprozesses im Zeitbereich wird daher häufig als Referenz zur Beurteilung der Genauigkeit der anderen, bereits genannten Verfahren zur Stabilitätsanalyse verwendet.

### 2.3 Prozessdynamik ungleich geteilter Fräser

Eine Möglichkeit, den Regenerativeneffekt beim Fräsen zu beeinflussen, stellen ungleich geteilte Fräser dar. Erstmals zeigte SLAVÍČEK in [Sla65], dass der Einsatz alternierend ungleich geteilter Fräser zu einer Erhöhung der Stabilitätsgrenze führen kann. In seinen Untersuchungen vereinfachte er die Prozesskinematik des Fräsprozesses zu einer geradlinigen Bewegung der Schneiden, deren Verlagerungen gleich sind. Das so vereinfachte Modell entspricht einer Räumnadel mit ungleicher Schneidenteilung.

OPITZ et al. [Opi66], DREGGER [Dre66a] und DREGGER und ROESE [Dre66b; Dre66c] berücksichtigten in ihren Untersuchungen die Rotation des Fräasers. Die von ihnen untersuchten alternierend ungleich geteilten Fräser wiesen gegenüber Fräsern mit gleicher Teilung eine erheblich höhere Stabilitätsgrenze auf. Zum einen berechneten sie Stabilitätskarten mit Hilfe von Digitalrechnern. Hierfür mittelten sie die zeitvarianten Richtungskoeffizienten. Zum anderen setzten sie Analogrechner ein, die es ermöglichten die Zeitvarianz der Richtungskoeffizienten zu berücksichtigen. In ihren Untersuchungen stellten sie fest, dass sich die Stabilitätskarten in Abhängigkeit der Laufrichtung des Fräasers erheblich unterscheiden können. Für einen Fräser mit alternierender Ungleichteilung



**Bild 2.2:** Optimales Teilungsverhältnis für alternierend ungleich geteilte Fräser nach DREGGER [Dre66a, S. 50].

$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_1, p_2]$  mit  $p_1 > p_2$  gibt DREGGER [Dre66a, S. 49] folgende Formel zur Berechnung des Drehzahlbereichs mit erhöhter Stabilität an:

$$n = \frac{(p_1 - p_2) f_0 4}{z \pi} = \frac{4 f_0}{z} \frac{\frac{p_1}{p_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} + 1}. \quad (2.4)$$

In dieser Gleichung ist  $z$  die Zähnezahzahl und  $f_0$  die ungedämpfte Eigenfrequenz der Struktur. Das Umstellen dieser Gleichung liefert die Formel zur Auslegung einer alternierend ungleichen Zahnteilung:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4 + \frac{n z}{f_0}}{4 - \frac{n z}{f_0}}. \quad (2.5)$$

Bild 2.2 veranschaulicht diese Gleichung. Je größer die Zahneingriffsfrequenz gegenüber der ungedämpften Eigenfrequenz ist, desto größer sollte das Teilungsverhältnis sein.

VANHERCK [Van67] untersuchte unterschiedliche Arten von linearen und nichtlinearen Ungleichteilungen und berechnete zudem Stabilitätskarten für Fräser mit ungleich gedrahten Schneiden. VANHERCK stellte Erhöhungen der Stabilitätsgrenzen von ungleich geteilten Fräsern gegenüber gleich geteilten von über 400% fest. DOOLAN et al. [Doo75] entwickelten eine Methode zur Auslegung von ungleich geteilten Fräsern im Hinblick auf eine minimale Fremderregung des Prozesses. In [Thu83a] und [Thu83b] verglichen TLUSTÝ et al. die auf Basis gemittelter Richtungskoeffizienten berechneten Stabilitätskarten eines vierschneidigen gleich und ungleich geteilten Fräasers mit einem Drahlwinkel von  $\delta = 0^\circ$  mit Stabilitätskarten, die anhand einer zeitlichen Simulation, welche die Zeitvarianz des Systems berücksichtigt, ermittelt wurden. Während für den gleich geteilten Fräser die Stabilitätskarte, die sich aus der zeitlichen Simulation ergab, gut mit der Stabilitätskarte, die sich durch die Mittelung der Richtungskoeffizienten ergab, übereinstimmte, traten bei dem ungleich geteilten Fräser deutliche Unterschiede auf. Die Stabilitätsgrenze der zeitlichen Simulation war hier deutlich niedriger als die der gemittelten Richtungskoeffizienten.

In [Alt99a] erweiterten ALTINTAS et al. die Methode der Zeroth Order Approximation auf Fräser mit ungleicher Zahnteilung und zeigten, dass sich durch eine entsprechende Auslegung der Zahnteilung, die Stabilitätsgrenze in bestimmten Drehzahlbereichen signifikant

erhöhen lässt. Ihre Ergebnisse sicherten sie durch experimentelle Untersuchungen und Simulationen im Zeitbereich ab. In [Bud03a; Bud03b] beschreibt BUDAK eine Methode zur Auslegung von ungleichen Zahnteilungen im Hinblick auf eine Erhöhung der Stabilitätsgrenze. Anhand der gemessenen Ratterfrequenz  $f_c$  und der dazugehörigen Drehzahl  $n$  eines gleich geteilten Fräasers mit  $z$  Schneiden gibt BUDAK folgende Formel für die Auslegung einer linearen Ungleichteilung  $\mathbf{p} = [p_0, p_0 + \Delta p, p_0 + 2 \Delta p, \dots, p_0 + (z - 1) \Delta p]$  an:

$$\Delta p = \begin{cases} \frac{\pi n}{f_c}, & \text{wenn } z \text{ gerade.} \\ \frac{\pi n}{f_c} \frac{z \pm 1}{z}, & \text{wenn } z \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (2.6)$$

$$p_0 = \frac{2 \pi}{z} - \frac{(z - 1) \Delta p}{2}. \quad (2.7)$$

Die Elemente des Vektors  $\mathbf{p}$  sind die Winkelabstände zwischen den einzelnen Schneiden des Fräasers.

In [Olg05; Faz06; Olg07] wandten OLGAC et al. die Methode des Cluster Treatment of Characteristic Roots auf alternierend ungleich geteilte Fräser an. Sie berechneten Stabilitätskarten nicht wie allgemein üblich in der Parameterebene aus Drehzahl  $n$  und Schnitttiefe  $a_p$ , sondern für eine definierte Schnitttiefe  $a_p$  in Abhängigkeit der zwei auftretenden Totzeiten. Die Zeitvarianz der Richtungsfaktoren wurde hierbei gemittelt. Entlang der Geraden mit einer Steigung von -1 ist die Drehzahl  $n$  in dieser Ebene konstant. Die Punkte auf einer Ursprungsgeraden weisen jeweils die gleiche Zahnteilung auf. OLGAC et al. nutzen diese Karten zur Optimierung der Fräsprozessdynamik.

In [Sim08] stellten SIMS et al. drei verschiedene Methoden zur Stabilitätsanalyse ungleich geteilter und ungleich gedrahter Fräser vor. Neben der Erweiterung der Semi-Diskretisierungsmethode auf Schwingungsdifferentialgleichungen mit mehreren Totzeiten verwenden sie eine zeitinvariante Form dieser Methode, welche auf der Mittelung der Richtungskoeffizienten beruht. Darüber hinaus erweiterten sie die Methode der Temporal Finite Element Analysis aus [Pat08] auf ungleich geteilte Fräser.

WAN et al. [Wan10a; Wan10b] erweiterten ebenfalls die Methode der Semi-Diskretisierung auf Systeme mit mehreren Totzeiten. Neben ungleich geteilten Fräsern untersuchten sie insbesondere durch Unrundheiten bedingte Totzeit-Effekte und deren Einfluss auf die Stabilitätsgrenze. Sie zeigten, dass ein gleich geteilter Fräser mit Unrundheiten und  $z$  Zähnen maximal  $z$  verschiedene Totzeiten, und ein ungleich geteilter Fräser mit Unrundheiten und  $z$  Zähnen maximal  $z(z - 1) + 1$  verschiedene Totzeiten aufweisen kann. Sie wiesen nach, dass, wenn der Zahnvorschub  $f_z$  die Größenordnung der Unrundheit erreicht, deutliche Unterschiede zu den Stabilitätskarten auftreten, die diesen Effekt nicht berücksichtigen.

## 2.4 Zerspankraftmodelle

Für die Stabilitätsanalyse des Fräsprozesses ist die genaue Simulation der Zerspankraftkomponenten in Abhängigkeit der dynamischen Eingriffsverhältnisse von entscheidender Bedeutung. Die zu diesem Zweck in der Literatur verwendeten Modelle lassen sich in folgende zwei Kategorien unterteilen:

1. konventionelle Zerspankraftmodelle,
2. dynamische Zerspankraftmodelle.

Die konventionellen Zerspankraftmodelle wurden ursprünglich nicht für den dynamischen, sondern für den quasistatischen Zerspanprozess entwickelt. Erst später wurden sie auf dynamische Zerspanprozesse angewandt. Da sie zwar die dynamischen Verlagerungen des Werkzeugs und/oder Werkstücks berücksichtigen, nicht jedoch die Ableitungen hiervon, liegt ihnen die Annahme zugrunde, dass zwischen der Variation der Spanungsdicke  $h$  bzw. des Spanungsquerschnitts  $A$  und der Größe der Zerspankraftkomponenten keine Phasenverschiebungen auftreten. Die dynamischen Zerspankraftmodelle hingegen wurden speziell für dynamische Prozesse entwickelt. Die Zerspankraftkomponenten sind hier nicht nur Funktionen der dynamischen Verlagerungen des Werkzeugs und/oder Werkstücks sondern auch deren ersten und teilweise auch zweiten Ableitungen, also den Verlagerungsgeschwindigkeiten und -beschleunigungen. Diese Modelle sind dadurch in der Lage, Phasenverschiebungen zwischen der Spanungsdicke  $h$  bzw. des Spanungsquerschnitts  $A$  und der Größe der Zerspankraftkomponenten abzubilden. In den folgenden beiden Kapiteln wird auf diese beiden Kategorien und deren Vermögen, den Einfluss der Werkzeug- und Schneidkantengestalt auf die Prozessstabilität abzubilden, näher eingegangen.

#### 2.4.1 Konventionelle Zerspankraftmodelle

Das für die Stabilitätsanalyse des Fräsprozesses simpelste konventionelle Zerspankraftmodell, das z. B. von TLUSTÝ und MACNEIL [Tlu75] und von WECK und TEIPEL [Wec77] verwendet wurde, kann durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

$$F_i = K_i h b \quad \text{mit} \quad i = c, cN, p. \quad (2.8)$$

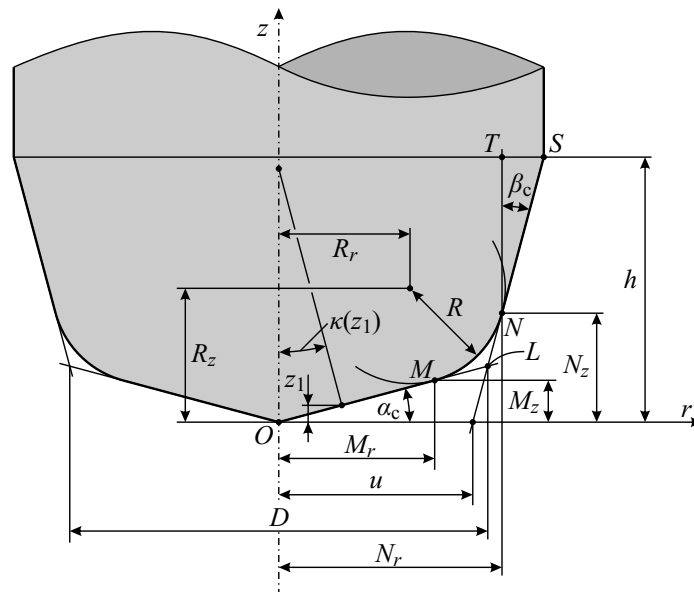
Die Zerspankraftkomponenten  $F_i$  werden hier als proportional zur Spanungsdicke  $h$  und Schnittbreite  $b$  angenommen. Die Indizes  $c$ ,  $cN$  und  $p$  stehen für die Schnitt-, Schnittnormal- und Passivkraft.

Eine Erweiterung dieses Ansatzes stellt das Zerspankraftmodell von FRIEDRICH [Fri09] dar, welches neben der dem Spanungsquerschnitt proportionalen Kraftkomponente eine weitere einführt, die zur Länge des Eingriffsbogens proportional ist und ein Reiben der Schneidkante berücksichtigt. Diese zusätzliche Reibkraft herrscht daher auch dann vor, wenn der Spanungsquerschnitt null ist und führt zu einer abfallenden Charakteristik der spezifischen Schnittkraft über der Spanungsdicke  $h$ . Dieses Modell wurde von KLEIN [Kle37a; Kle37b] unter dem Aspekt der Vereinheitlichung auf die Trennverfahren Drehen, Hobeln, Fräsen und Bohren übertragen. Im Gegensatz zu KLEIN, der lediglich zylindrische, gedrahte Walzenfräser betrachtete, übertrugen ALTINTAS und LEE [Alt96; Alt98] das Modell auf Kugelkopffräser und ENGIN und ALTINTAS [Eng01a; Eng01b] schließlich auf nahezu beliebige Fräserformen. Die Kräfte betrachten sie dazu in inkrementeller Form und integrieren diese entlang der Fräserachse. Der Fräser wird dazu in infinitesimal kleine Scheiben der Höhe  $dz$  eingeteilt. Die Modellgleichung für ein einzelnes Inkrement ist

$$dF_i = K_{ic} h db + K_{ie} dS \quad \text{mit} \quad i = t, r, a. \quad (2.9)$$

Die Zerspankraftkomponenten  $dF_i$  werden in dieser Gleichung nicht in Schnitt-, Schnittnormalen- und Passivrichtung, sondern in tangentialer ( $t$ ), radialer ( $r$ ) und axialer ( $a$ )

Richtung ausgedrückt. Durch eine entsprechende Transformation der Kräfte können diese auf die Vorschub-, Vorschubnormalen- und Passivrichtung transformiert werden. Neben der Spannungsdicke  $h$  und der auf die Richtung der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$  projizierten inkrementellen Spannungsbreite  $db = \frac{dz}{\sin(\kappa)}$  geht die Länge des sich im Eingriff befindlichen Schneideninkrements  $dS$  in die Modellgleichung mit ein. Der axiale Eingriffswinkel  $\kappa$  ist der Winkel zwischen der Fräserachse und der Tangente der Fräserkontur. Die Koeffizienten  $K_{ic}$  werden gemäß ihrer Kraftanteile, die sie abbilden, im Folgenden als Scherkraftkoeffizienten und die Koeffizienten  $K_{ie}$  als Reibkraftkoeffizienten bezeichnet. Um verschiedene Fräserformen mit diesem Kraftmodell abbilden zu können, kombinierten ENGIN und ALTINTAS [Alt99b] dieses Kraftmodell mit der allgemeinen Beschreibung der Fräserkontur aus [Kra86]. Diese Darstellung entspricht der aus [DIN 66215-1] und ist in Bild 2.3 dargestellt. ENGIN und ALTINTAS geben den für die Darstellung des Dralls der Schneiden nötigen Nacheilwinkel abschnittsweise für den ersten Konusbereich  $0 < z < M_z$ , den Bereich des Eckenradius  $M_z < z < N_z$  und den zweiten Konusbereich  $N_z < z$  an. Somit lässt sich mit diesem Modell der zeitliche Verlauf der Prozesskräfte für unterschiedliche Fräserformen, wie z. B. zylindrische Fräser ( $R = 0 \text{ mm}$ ,  $\alpha_c = \beta_c = 0^\circ$ ), Kugelkopffräser ( $R = \frac{D}{2}$ ,  $\alpha_c = \beta_c = 0^\circ$ ), Torusfräser ( $R > 0 \text{ mm}$ ,  $\alpha_c = \beta_c = 0^\circ$ ), Konusfräser ( $\beta_c > 0^\circ$ ), Igelfräser etc., simulieren.



Se/55788 © IFW

**Bild 2.3:** Modell zur Beschreibung von allgemeinen Fräserkonturen [Alt99b; Kra86; DIN 66215-1].

In [Gra04] stellten GRADIŠEK et al. eine Methode vor, mit der sich die Schnittkraftkoeffizienten  $K_{ic}$  und  $K_{ie}$  dieses Modells für das Fräsen auf Basis von Prozesskraftmessungen identifizieren lassen. Dabei sind die Mittelwerte der Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkraft  $\bar{F}_f$ ,  $\bar{F}_{fN}$  und  $\bar{F}_p$  in Abhängigkeit des Zahnvorschubs  $f_z$  zu bestimmen. In die Verläufe der Mittelwerte werden anschließend mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate Ausgleichsgeraden gelegt:

$$\bar{F}_i = \bar{F}_{ic} f_z + \bar{F}_{ie} \quad \text{mit } i = f, fN, p. \quad (2.10)$$

Anhand der Steigungen  $\bar{F}_{ic}$  dieser Geraden können die Scherkraftkoeffizienten  $K_{ic}$  und anhand der  $y$ -Achsenabschnitte  $\bar{F}_{ie}$  die Reibkraftkoeffizienten  $K_{ie}$  ermittelt werden [Gra04].



Verschiedene Autoren haben dieses Kraftmodell verwendet, um die Prozesskräfte mit hoher Genauigkeit zu simulieren [Bud96; Meh04; Den06; Eng01a; Eng01b]. In [Cui09] untersuchten CUI et al. den Einfluss der Verschleißmarkenbreite VB auf die Scher- und Reibkoeffizienten  $K_{tc}$  und  $K_{te}$  beim Fräsen des Stahls AISI 1018. Sie stellten in ihren Untersuchungen fest, dass der  $K_{tc}$ -Wert bei zunehmender Verschleißmarkenbreite VB nahezu unverändert bleibt. Der  $K_{te}$ -Wert hingegen stieg linear an. Dies steht im Einklang mit der Modellvorstellung, dass die  $K_{ic}$ -Werte der Scherung des Materials und die  $K_{ie}$ -Werte dem Reiben der Schneidkante über der Werkstückoberfläche Rechnung tragen.

Ein weiteres, insbesondere für Drehprozesse sehr verbreitetes Zerspankraftmodell ist das von KIENZLE [Kie52]:

$$F_i = b K_{i1.1} h_0 \left( \frac{h}{h_0} \right)^{1-m_{i1.1}} \quad \text{mit } i = c, cN, p \quad \text{und } h_0 = 1 \text{ mm} . \quad (2.11)$$

Aufgrund des exponentiellen Modellansatzes, der den Abfall der spezifischen Schnittkraft über der Spanungsdicke  $h$  abbildet, können für den jeweiligen Spanungsdickenbereich Geraden im doppel-logarithmischen Maßstab ermittelt werden, die durch die Hauptwerte der spezifischen Schnitt-, Schnittnormal- und Passivkraft  $K_{i1.1}$  und den Anstiegswerten  $m_{i1.1}$  beschrieben werden. Die Haupt- und Anstiegswerte lassen sich somit auch ohne den Einsatz von Computern durch Gebrauch von doppelt-logarithmisch skaliertem Papier graphisch ermitteln. VICTOR [Vic56] zeigte die Allgemeingültigkeit dieses Modells anhand eines Vergleichs zwischen dem Drehen, Hobeln und Bohren, also den spanenden Fertigungsverfahren mit gleichbleibender Spanungsdicke. Durch eine abschnittsweise Definition von Gleichung (2.11) ist die Berechnung der Prozesskräfte auch beim Fräsen möglich [Den11].

ROTT et al. geben in [Rot06] einen Überblick über die wichtigsten Zerspankraftmodelle und deren Einfluss auf die Stabilitätsgrenze beim Fräsen. Unabhängig vom verwendeten Zerspankraftmodell verlaufen die Stabilitätsgrenzen sehr ähnlich. Die nichtlinearen Modelle, wie z. B. das von KIENZLE, führen bei höheren Zahnvorschüben  $f_z$  insbesondere in den Drehzahlbereichen der lokalen Maxima der Stabilitätsgrenze zu einem geringfügigen Anstieg der Grenzschnitttiefe. Diese Untersuchungen waren jedoch rein theoretischer Natur, ein Vergleich der berechneten Stabilitätskarten mit experimentell ermittelten Daten erfolgte nicht.

STÉPÁN et al. [Sté11] entwickelten ein Verfahren zur Untersuchung der verschiedenen linearen und nichtlinearen Schnittkraftcharakteristiken in Bezug auf den dynamischen Fräsprozess. Dieses Verfahren beruht auf der Hysterese des Ratterbeginns und -endes beim Fräsen von doppelseitigen Rampen. Ihre Versuchsergebnisse ließen sich jedoch von keinem der Schnittkraftmodelle ganzheitlich erklären.

## 2.4.2 Dynamische Prozesskraftmodelle und Prozessdämpfung

Die in Kapitel 2.4.1 beschriebenen Modelle wurden ursprünglich alle für den quasistatischen Fräsprozess entwickelt, bei dem sowohl das Werkzeug als auch das Werkstück als ideal steif und nicht schwingungsfähig angenommen werden. Diese Modelle wurden von verschiedenen Autoren auch für die Simulation und Stabilitätsanalyse des dynamischen Fräsprozesses genutzt [Alt00; Tlu00; Faa03; Gra05b; Rot06]. Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass zwischen der dynamischen Spanungsdicke  $h(t)$  und den Prozesskräften  $F_i(t)$ ,

$i = c, cN, p$  keine Phasenverschiebungen auftreten. Für schwingungsfähige Zerspanprozesse wurde jedoch von DOI und KATO [Doi56], SHAW und HÖLKEN [Sha57; Höl57] und SMITH und TOBIAS [Smi61] gezeigt, dass diese Annahme unzulässig ist. Beim dynamischen Drehprozess beobachteten sie jeweils ein Nacheilen der Prozesskräfte gegenüber der Spannungsdicke. In [Das67] wurde von DAS und TOBIAS der dynamische Drehprozess erstmals hinsichtlich der drei Fälle „wave cutting“ (auf Deutsch: Welle-Schneiden), „wave removing“ (auf Deutsch: Welle-Entfernen) und „wave-on-wave cutting“ (auf Deutsch: Welle-auf-Welle-Schneiden) untersucht. Dabei stellten sie fest, dass die Prozesskräfte hinsichtlich der inneren und äußeren Modulation unabhängig voneinander sind.

Um diese besonderen Effekte des dynamischen Zerspanprozesses abbilden zu können, wurde das Modell der dynamischen Schnittkraftkoeffizienten (engl.: Dynamic Cutting Force Coefficients = DCFC) entwickelt [Pet71; Wer73]. In [Tlu78a] wurden von TLUSTÝ die Ergebnisse einer 1969 ins Leben gerufenen weltweiten CIRP-Arbeitsgruppe hinsichtlich der Messung der DCFC beim Orthogonaleinstechdrehen vorgestellt. Das besondere an diesem Zerspankraftmodell ist, dass die Kraftkoeffizienten nicht mehr als real, sondern als komplex angenommen werden und dass die innere und äußere Modulation  $Y$  und  $Y_o$  getrennt voneinander betrachtet werden. Für die dynamische Schnitt- und Schnittnormalkraft  $F_c$  und  $F_{cN}$  ergeben sich somit folgende Gleichungen für den Frequenzbereich:

$$\begin{aligned} F_c(i\omega) &= b \left[ K_{ci} Y(i\omega) - K_{co} Y_o(i\omega) \right], \\ F_{cN}(i\omega) &= b \left[ K_{di} Y(i\omega) - K_{do} Y_o(i\omega) \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da jeder dieser dynamischen Schnittkraftkoeffizienten komplex ist

$$K_{ci}, K_{co}, K_{di}, K_{do} \in \mathbb{C}, \quad (2.13)$$

ergeben sich insgesamt acht Koeffizienten, die anhand experimenteller Untersuchungen zu identifizieren sind. Die Beschreibung eines zur Messung der DCFC geeigneten Versuchsaufbaus findet sich in [Wer73; Tik78]. Das Vorgehen basiert auf der Messung der Zerspankraftkomponenten bei gleichzeitiger Messung der Verlagerung des schwingungsfähigen Schneidkeils in Richtung der Schnittnormalen. Durch gezielte Einstellung der Phasenverschiebung zwischen der äußeren und inneren Modulation können die Koeffizienten anhand der gemessenen Kräfte und Auslenkungen ermittelt werden. Wenngleich der Messaufbau zur Ermittlung der DCFC erheblich komplizierter ist als der zur Messung realwertiger Schnittkraftkoeffizienten, so bieten die komplexen Koeffizienten gegenüber den bisherigen Schnittkraftmodellen jedoch den Vorteil, Phasenverschiebungen zwischen der dynamischen Spannungsdicke  $h$  und den Zerspankraftkomponenten abzubilden. Ein besonders interessantes Ergebnis dieser CIRP-Arbeitsgruppe ist, trotz der teilweise starken Abweichungen in den Messergebnissen, der extrem starke Einfluss der Verschleißmarkenbreite auf den Imaginärteil des  $K_{di}$ -Wertes. Dieser Imaginärteil wirkt sich aufgrund der durch ihn hervorgerufenen Phasenverschiebung zwischen den Prozesskräften und der dynamischen Spannungsdicke  $h$  prozessdämpfend aus. Dies Ergebnis deckt sich somit mit der praktischen Erfahrung, dass neue scharfe Werkzeuge tendenziell eher zum Rattern neigen [Ber69, S. 93], da bei ihnen die Prozessdämpfung aufgrund eines niedrigen  $K_{di}$ -Wertes deutlich geringer ausfällt. So empfehlen OPITZ [Opi71, S. 124] und SISSON und KEGG [Sis69] das Abziehen der Schneidkante als Maßnahme zur Rattervermeidung. In [Bre07; Bre08] wird das Modell der dynamischen Schnittkraftkoeffizienten erneut aufgegriffen. Die Identifikation der Koeffizienten erfolgt hier anhand von Prozesskraftmessungen mit einem speziell hierfür entwickelten piezoaktorischen Drehmeißel. Der Vorteil

dieses Messaufbaus liegt in der sehr geringen bewegten Masse und der damit verbundenen hohen Dynamik. Anhand der gemessenen Prozesskräfte und Relativbewegungen identifizieren BRECHER et al. die komplexen dynamischen Schnittkraftkoeffizienten nach dem Modell von [Tlu78a] für den orthogonalen Drehprozess. Anschließend übertragen sie diese Koeffizienten auf das Fräsen, um so die Genauigkeit der berechneten Stabilitätskarten zu steigern.

SISSON und KEGG [Sis69; Keg69] beobachteten in ihren Arbeiten einen Anstieg der Stabilitätsgrenze bei niedrigen Schnittgeschwindigkeiten. So verdoppelte sich bei einer Schnittgeschwindigkeit von  $v_c = 23 \text{ m/min}$  die Grenzschnittbreite  $b_{\text{lim}}$  im Vergleich zum Minimum der Stabilitätsgrenze, unterhalb dessen bei keiner Drehzahl Ratterschwingungen auftreten. Da dieser Effekt stark vom Freiwinkel  $\alpha$  abhing, führten sie diese Art der Prozessdämpfung auf einen dynamischen Kontakt zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche zurück. In [Tlu78b] führen TLUSTÝ und RAO ebenfalls die Kontaktbedingungen zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche als Ursache für die Imaginärteile der dynamischen Schnittkraftkoeffizienten und die damit verbundene Prozessdämpfung an. Diese Ergebnisse decken sich mit denen von BERNARDI [Ber69, S. 93] und WECK [Wec91], die in ihren Arbeiten ebenfalls einen signifikanten Anstieg der Stabilitätsgrenze bei zunehmendem Verschleiß und kleineren Freiwinkeln beobachteten.

NIGM et al. [Nig72; Nig77b] beschreiben in ihrer Arbeit ein dynamisches Kraftmodell, welches auf der Annahme beruht, dass sich mit den Relativverlagerungen zwischen Werkzeug und Werkstück auch die Scherebene ändert. Die Koeffizienten dieses Modells lassen sich anhand von lediglich zwei quasistatischen Zerspanversuchen bei unterschiedlichen Schnittgeschwindigkeiten  $v_c$  oder Zahnvorschüben  $f_z$  identifizieren. In [Nig77a] verifizierten sie dieses Modell anhand des Orthogonaldrehprozesses und wiesen nach, dass die Scherebene in Abhängigkeit der dynamischen Schnittbedingungen oszilliert und in Bezug zur dynamischen Spanungsdicke  $h$  eine Phasenverschiebung auftritt.

WU [Wu85a; Wu85b; Wu86; Wu88; Wu89] entwickelte ein weiteres dynamisches Prozesskraftmodell, das in der Lage ist, neben dem Regenerativ- und Lagekopplungseffekt auch geschwindigkeitsabhängige Prozesskraftschwankungen abzubilden. Für die geschwindigkeitsabhängigen Effekte sieht WU zwei Ursachen. Zum einen berücksichtigt er die durch die schwankende Relativgeschwindigkeit zwischen Span und Spanfläche induzierte Änderung der Reibungsverhältnisse und die damit einhergehende dynamische Änderung des Scherwinkels und zum anderen auch dynamische zur Verlagerungsgeschwindigkeit proportionale Prozesskraftanteile, welche durch die Quetschung des Werkstückmaterials im Bereich der Schneide bedingt sind. WU beschreibt letztere Prozesskraftanteile durch

$$\begin{aligned} f_x &= f_{\text{sp}} V, \\ f_y &= \mu_c f_x. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Hierbei sind  $f_x$  und  $f_y$  die Prozessdämpfungskraftanteile.  $f_{\text{sp}}$  ist die Proportionalitätskonstante oder auch der Prozessdämpfungskoeffizient.  $V$  ist das Volumen des durch die Schneide verdrängten Bauteilvolumens und  $\mu_c$  ist ein Reibungskoeffizient, der der Ermittlung des tangentialen Anteils der Prozessdämpfungskraft dient.

LIU und LIU [Liu85] untersuchten den Einfluss des Span- und Freiwinkels auf die dynamische Stabilität des Orthogonaldrehprozesses vor dem Hintergrund, durch eine mögliche

Verkipfung der Schneide innerhalb der Werkzeug-Orthogonalebene  $P_o$  um den Kontaktpunkt zwischen Schneidkante und Werkstück während des Prozesses den Span- und Freiwinkel und dadurch die Ratterneigung des Prozesses zu beeinflussen. Sie stellten fest, dass eine Erhöhung des Spanwinkels  $\gamma$  eine horizontale und vertikale Verschiebung der Stabilitätsgrenze bewirkt. Eine Verringerung des Freiwinkels  $\alpha$  führte hingegen zu einer Änderung der Form der Stabilitätsgrenze. Bei einem hohen Freiwinkel nahm diese eine L-förmige Gestalt an mit sehr hohen Grenzschnittbreiten bei niedrigen Drehzahlen und einem horizontalen Verlauf bei höheren Drehzahlen. Für den geringsten Freiwinkel  $\alpha = 1^\circ$  verdoppelte sich die minimale Grenzschnittbreite. Oberhalb einer Drehzahl von  $n = 400 \text{ min}^{-1}$  wurde der Prozess überhaupt nicht mehr instabil, so dass die Stabilitätsgrenze eine U-förmige Gestalt annahm. LIU und LIU führten dies auf den dynamischen Kontakt zwischen der Freifläche und der Bauteiloberfläche zurück.

JEMIELNIAK und WIDOTA [Jem89] entwickelten eine nichtlineare zeitliche Simulation der Drehprozessdynamik. Sie berücksichtigten sowohl einen schwingungsbedingten Verlust des Schneideneingriffs als auch Prozessdämpfungseffekte. Sie vertraten dabei die These, dass der sich im Zuge der dynamischen Relativverlagerung  $x$  zwischen Schneide und Werkstück einstellende effektive Freiwinkel  $\alpha_{ok}$  nicht negativ werden kann. Daraus folgerten sie, dass die durch den sich ändernden Freiwinkel hervorgerufene Prozessdämpfungskraft theoretisch unendlich groß wird, wenn der effektive Freiwinkel  $\alpha_{ok}$  gegen null geht. Ihr Modellansatz für die Prozessdämpfungskraft  $F_{xh}$  lautet:

$$F_{xh} = -h_{ex} H_x \dot{x} \quad (2.15)$$

wobei

$$h_{ex} = \begin{cases} 1 - \text{LSS} \frac{\dot{x}/v_c}{\alpha_o + \dot{x}/v_c} & \text{wenn } \dot{x} < 0 \\ 1 & \text{wenn } \dot{x} \geq 0 \end{cases} . \quad (2.16)$$

In dieser Gleichung ist  $\alpha_o$  der nominelle Freiwinkel (ohne Schwingungen),  $H_x$  der Prozessdämpfungskoeffizient und LSS ein Wichtungsfaktor für die Nichtlinearität der Prozessdämpfung. Den experimentellen Nachweis eines solch drastischen Anstiegs der Prozessdämpfungskraft erbrachten sie jedoch nicht. Auf Basis der Neudefinition der Spannungsdicke  $h$  und des Span- und Freiwinkels  $\gamma$  und  $\alpha$  in einem dynamischen Koordinatensystem, welches der Relativverlagerung zwischen Werkzeug und Werkstück folgt, entwickelte JEMIELNIAK [Jem92] ein weiteres dynamisches Schnittkraftmodell. Die Koeffizienten dieses Modells lassen sich ähnlich wie bei dem Modell von NIGM et al. [Nig72; Nig77b] anhand von quasistatischen Zerspanversuchen ermitteln.

MONTGOMERY und ALTINTAS [Mon91] berechnen die durch den Eindringungseffekt bedingten Prozessdämpfungskräfte anhand des Fließdrucks des Werkstückmaterials. Hierzu projizieren sie die Fläche des Kontakts zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche zum einen auf die Richtung der relativen Verlagerungsgeschwindigkeit und zum anderen auf die Senkrechte hierzu.

KHASAWNEH et al. [Kha09] nehmen bei der Modellierung des dynamischen Zerspanprozesses anstatt einer üblicherweise punktförmigen Prozesskraft eine Verteilung der Prozesskraft entlang der Spanfläche an. Die Verteilung der Prozesskraft erfolgt über das Produkt aus einer exponentiell abfallenden Wichtungsfunktion und der auf Basis der äußeren und

inneren Modulation berechneten Prozesskraft. Dieser Ansatz führt auf eine Integrodifferentialgleichung mit einer langen diskreten Totzeit und einer kurzen verteilten Totzeit<sup>3</sup>. Die Stabilität dieser Gleichung bestimmen sie durch die Methode der Temporal Finite Element Analysis. Sie zeigen, dass die Annahme einer entlang der Spanfläche verteilten Prozesskraft in der Theorie zu einem Anstieg der Stabilitätsgrenze bei niedrigen Schnittgeschwindigkeiten führen kann. Inwiefern dies für die Erklärung des Effekts der erhöhten Stabilität bei niedrigen Drehzahlen von Bedeutung ist, kann an dieser Stelle nicht beurteilt werden, da ihre theoretischen Untersuchungen noch nicht experimentell verifiziert wurden.

Bachrathy und STÉPÁN [Bac10] zeigen, dass die Modellierung des Eindringungseffekts ebenfalls zu einer Integrodifferentialgleichung mit einer langen, diskreten Totzeit und einer kurzen, verteilten Totzeit führt. Für die Berechnung des durch eine Schneide mit einer angenommenen Verschleißmarkenbreite verdrängten Werkstückvolumens nutzen sie eine Sprungfunktion, die die Richtung der relativen Verlagerungsgeschwindigkeit berücksichtigt. Die Dämpfungsmatrix wird dadurch nichtlinear und abhängig vom Systemzustand. Um die Stabilität dieses Systems zu berechnen, kombinieren sie die Methode der Semi-Diskretisierung mit einem sogenannten Schießverfahren. Durch das Schießverfahren wird zunächst iterativ eine periodische Lösung  $\mathbf{p}(t)$  des Systems ermittelt, deren Periodendauer gleich der Totzeit  $\theta$  ist:  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t + \theta)$ . Dabei wird angenommen, dass die innere und äußere Modulation gleich groß und in Phase sind. Der Totzeiterm hebt sich dadurch auf und es verbleibt lediglich die Fremderregung. Das ursprüngliche System mit Totzeit wird anschließend um die ermittelte Lösung  $\mathbf{p}(t)$  herum linearisiert. Die Dämpfungsmatrix ist dann nicht mehr abhängig vom Systemzustand, sondern eine  $\theta$ -periodische Funktion. Diese Differentialgleichung kann dann durch die Semi-Diskretisierung hinsichtlich ihrer Stabilität überprüft werden. Ihre theoretischen Ergebnisse zeigen, dass die Stabilitätsgrenze des Systems mit nichtlinearer, zeitvarianter, geschwindigkeitsabhängiger Prozessdämpfung gegenüber der des Systems mit linearer Prozessdämpfung insbesondere an den Stellen abweicht, an denen die Fremderregung des Systems besonders stark ist. Eine experimentelle Überprüfung dieser Abweichungen erfolgte nicht.

Die Idee von WU [Wu89], die Prozessdämpfungskraft über das von der Schneide verdrängte Werkstückvolumen (Eindringungseffekt) zu berechnen, wurde von verschiedenen weiteren Autoren in zahlreichen Arbeiten aufgegriffen [Elb94; Lee95; Sha97; Chi98; Cla02; Hua07; Alt08; Bud08; Bud09; Eyn09; Eyn10; Bud10; Mor10; Ahm10; Ahm11; Tur11; Hua11]. Gegenstand dieser Arbeiten sind die Untersuchung verrundeter Schneidkanten, der Einfluss des Schneidkantenverschleißes auf die Prozessdämpfung und Ratterneigung, unterschiedliche Ansätze, das verdrängte Werkstückvolumen zu berechnen, Verfahren zur Identifikation der Prozessdämpfungskoeffizienten sowie die Vorhersage der Stabilitätsgrenze unter Berücksichtigung der Prozessdämpfung. Übereinstimmend wird in diesen Arbeiten festgestellt, dass sich die durch den Eindringungseffekt bedingte Prozessdämpfung insbesondere bei niedrigen Schnittgeschwindigkeiten auswirkt und diese bei höheren Schnittgeschwindigkeiten ihre Wirkung verliert. Bei den Untersuchungen von verrundeten Schneiden und Schneiden mit einer Verschleißmarkenbreite wird eine gewisse Ausweitung dieses Bereichs in Richtung höherer Drehzahlen festgestellt.

---

<sup>3</sup>Der Begriff *verteilte Totzeit* bedeutet, dass der Totzeiterm innerhalb eines Integrals steht. Der Begriff *diskret verteilte Totzeit* beschreibt den Fall dass der Totzeiterm innerhalb einer Summe auftritt. Diskret verteilte Totzeiten treten z. B. bei der mathematischen Beschreibung der Prozessdynamik ungleich geteilter Fräser auf.

Der stabilisierende Effekt des Freiflächenverschleißes wird in der industriellen Praxis bewusst eingesetzt. So ist nach LANGE [Lan05; Lan06] für das Hochleistungsfräsen von Aluminium-Strukturbauteilen eine Anpassung der Mikrogestalt der Schneidkante in Form einer Stützfasen (zweigeteilte Freifläche) zwingend erforderlich, um die in der Luftfahrtindustrie geforderten hohen Zeitspannvolumina ohne das Auftreten von Prozessinstabilitäten erreichen zu können. Aus Sicht der industriellen Anwendung von LANGE lassen sich durch solche Freiflächenfasen das Aufschwingen und Rattern des Prozesses wirksam unterdrücken. Er empfiehlt eine Fasenbreite je nach Auskräglänge und Durchmesser des Fräasers zwischen  $b_f = 0,1 \text{ mm}$  und  $b_f = 0,3 \text{ mm}$ . Der Winkel der Freiflächenfasen sollte nicht zu groß gewählt werden, da ansonsten deren prozessdämpfende Wirkung verloren geht. Ist der Winkel hingegen zu klein, kommt es zu einer starken Quetschung des Werkstückmaterials, welche hohe Prozesskräfte, starke Maßabweichungen aufgrund der höheren Abdrängung und eine unerwünscht hohe Gratbildung nach sich zieht. GROPPE stellte in seinen Untersuchungen [Gro06, S. 89 ff.] ebenfalls fest, dass Schneidkanten mit Freiflächenfasen auf die Schwingungen des Fräsprozesses stabilisierend wirken. Seine Untersuchungen zeigen, dass ein negativer Fasenwinkel zu sehr starker Gratbildung führt, welche eine Nachbearbeitung der gefrästen Bauteile erforderlich machen würde. Er empfiehlt daher einen leicht positiven Fasenwinkel im Bereich von  $\alpha_f = 1^\circ$ . Die Fasenbreite  $b_f$  sollte nur so breit sein, dass der Prozess auch in kritischen Bearbeitungsoperationen stabil ist, da auch sie zu einer Erhöhung der Gratbildung führt. Die Ursache hierfür sieht GROPPE in der mit der Fasenbreite zunehmenden Kontaktfläche zwischen Werkzeug und Werkstück, welche den Reibkraftanteil der Prozesskräfte erhöht. Hierdurch entstehen hohe Temperaturen, die die Verformbarkeit des Bauteilmaterials steigern. Nach GROPPE führt die erhöhte Verformbarkeit des Werkstückmaterials im Zusammenspiel mit den höheren Prozesskräften schließlich zu der verstärkten Gratbildung [Gro06, S. 89 ff.].

### 3 Zielsetzung und Vorgehensweise

In den bisherigen Modellen zur Beschreibung der Dynamik des Fräsprozesses wird die Schneidkantengestalt häufig stark vereinfacht als ideal scharf angenommen und der Kontakt zwischen Freifläche und welliger Werkstückoberfläche vernachlässigt. Untersuchungen haben jedoch gezeigt, dass die Gestalt der Schneidkante aufgrund des Eindringungseffekts einen erheblichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des Fräsprozesses haben kann. Eine weitere gängige Annahme ist die einer gleichen Zahnteilung. Diese Annahme führt bei der mathematischen Beschreibung der Prozessdynamik auf Differentialgleichungen mit lediglich einem einzigen Totzeitterm. Die Totzeit entspricht dann dem Kehrwert der Zahneingriffsfrequenz. Wird jedoch der allgemeinere Fall ungleich geteilter Fräser betrachtet, so treten mehrere diskret verteilte Totzeitsterme auf. In der Literatur finden sich zwar verschiedene Arbeiten und Modelle zur Beschreibung der Dynamik ungleich geteilter Fräser, jedoch beruhen diese meist auf der Mittelung der zeitvarianten Systemparameter. Für diese Arbeit leiten sich hieraus die folgenden Ziele ab.

Hauptziel:

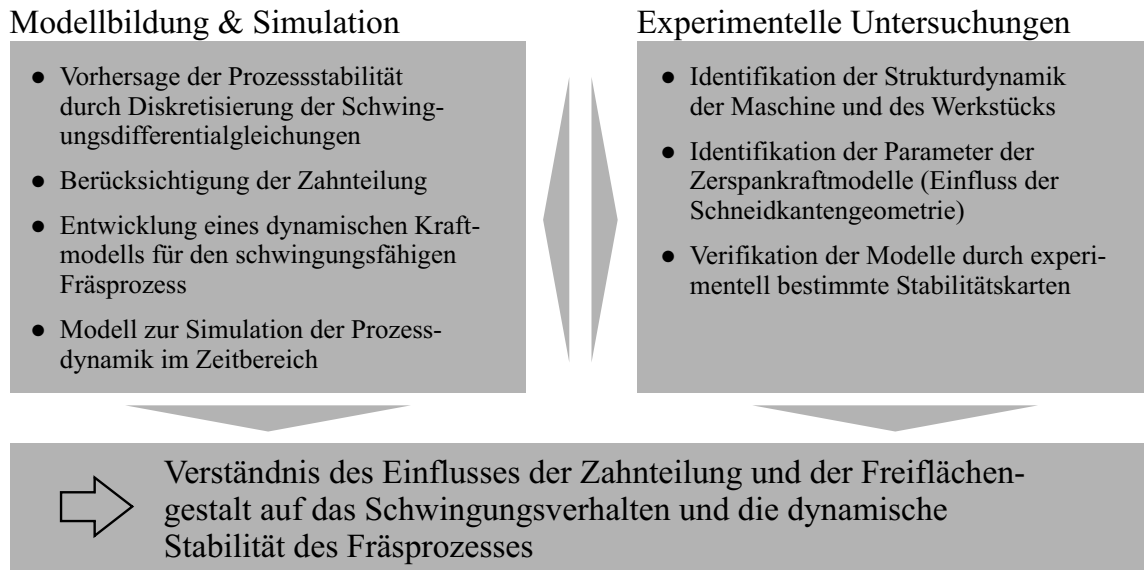
- Verständnis des Einflusses der Zahnteilung und der Freiflächengestalt auf das Schwingungsverhalten und die dynamische Stabilität des Fräsprozesses.

Teilziele:

- Entwicklung einer Methode zur Stabilitätsanalyse ungleich geteilter Fräser unter Berücksichtigung der Zeitvarianz der Systemparameter,
- Entwicklung eines dynamischen Prozesskraftmodells, das den durch die Freiflächenfasen stark begünstigten Eindringungseffekt abbildet,
- Messung der durch den Eindringungseffekt hervorgerufenen geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile,
- Analyse des Einflusses der Zahnteilung sowie der Breite und des Winkels von Freiflächenfasen auf die theoretische und experimentell ermittelte Stabilitätsgrenze des Fräsprozesses.

Die Vorgehensweise zur Erreichung dieser Ziele ist in Bild 3.1 dargestellt. Den Kern dieser Arbeit stellen die Modellbildung der Fräsprozessdynamik und die Erweiterung der bisherigen Methoden zur Stabilitätsanalyse ungleich geteilter und gefaster Fräser dar. Die experimentellen Untersuchungen dienen im Wesentlichen als Datenbasis zu Identifikation von Modellparametern und der Verifikation der Modelle.

Für die Analyse des Einflusses einer ungleichen Zahnteilung auf die Prozessstabilität wird zunächst die entsprechende Schwingungsdifferentialgleichung für den allgemeinen Fall, dass jeder Zahn einen unterschiedlichen Winkel zu seinem Nachbarzahn aufweist, hergeleitet. Die dynamische Nachgiebigkeit der einzelnen Freiheitsgrade der Strukturdynamik wird dabei durch eine beliebige, endlich große Anzahl an Oszillatoren abgebildet. Anschließend wird eine Methode aus dem Bereich der Regelungstechnik zur Beschreibung



Se/55846 © IFW

**Bild 3.1:** Vorgehensweise.

zeitinvarianter Systeme mit einem totzeitverzögerten Systemeingang auf zeitvariante Systeme mit mehreren diskret verteilten Totzeiten erweitert. Die Vorhersage der Stabilitätsgrenze des Fräsprozesses erfolgt anhand der Eigenwertanalyse der durch diese Methode ermittelten zeitdiskreten expandierten Systemmatrix.

Parallel hierzu wird eine zeitliche Simulation des dynamischen Fräsprozesses erstellt. Durch die zeitliche Simulation werden zum einen für bestimmte Arbeitspunkte die berechneten Stabilitätsaussagen überprüft und zum anderen die *a priori* unbekanntes Schnittkraftkoeffizienten identifiziert. Zur Identifikation der ebenfalls *a priori* unbekanntes Parameter der Strukturdynamik wird ein genetischer Algorithmus entwickelt.

Für die Beschreibung des Einflusses des durch Freiflächenfasen stark begünstigten Eindringeffekts wird das Prozesskraftmodell von FRIEDRICH mit dem dynamischen Kraftmodell von WU kombiniert. Die dynamischen Prozesskraftanteile werden durch ein im Rahmen dieser Arbeit entwickeltes Verfahren gemessen, bei dem der Fräser als Hobel eingesetzt wird. Die gemessenen Prozesskraftanteile werden in Bezug gesetzt zu Ergebnissen von simulierten Eindringprüfungen. Für diese Simulationen wird die Methode der Finiten Elemente eingesetzt und aufgrund der lang gezogenen Form der Freiflächenfasen ein ebener Spannungszustand angenommen. Hierauf aufbauend wird eine Formel zur näherungsweise Bestimmung des Prozessdämpfungskoeffizienten hergeleitet.

Beide Modellerweiterungen (Freiflächenfasen und Ungleichteilung) werden durch Simulationen im Zeitbereich und experimentell ermittelte Stabilitätskarten verifiziert. Das Ergebnis dieser Arbeit ist zum einen eine Methode, mit der sich die Stabilitätsgrenze von Fräsern mit ungleicher Zahnteilung und Freiflächenfasen vorhersagen lässt und zum anderen die exemplarische Darstellung des Einflusses dieser beiden Aspekte der Werkzeuggestalt und der zugrunde liegenden prozessdynamischen Wirkmechanismen.



## 4 Modellbildung der Dynamik des Fräsprozesses

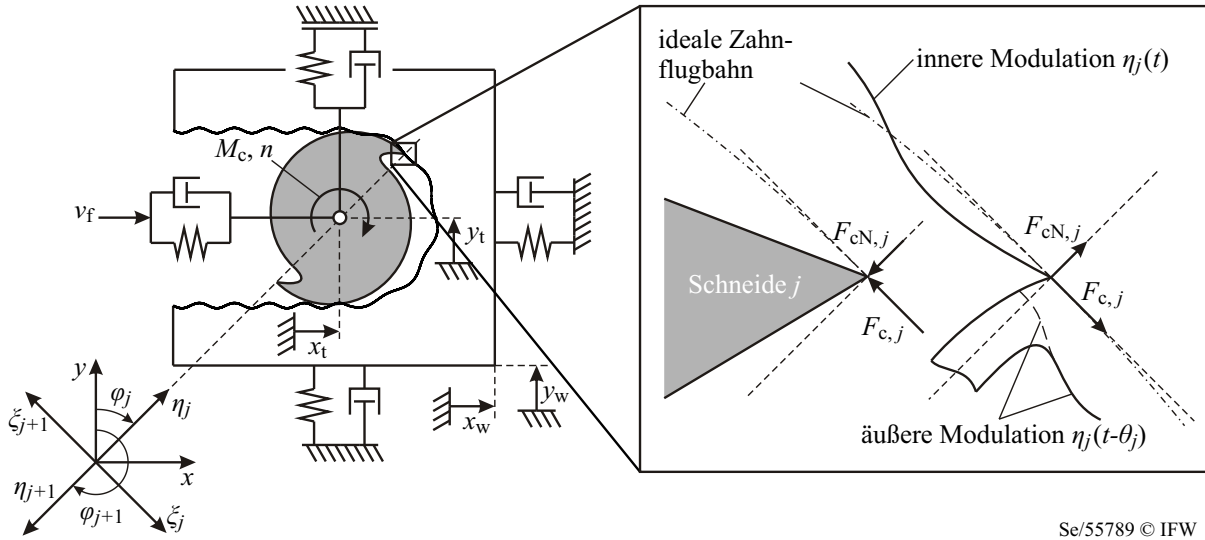
Aufbauend auf dem in Kapitel 2 beschriebenen Stand des Wissens werden in diesem Kapitel Modelle zur Simulation der Dynamik von Fräsprozessen hergeleitet, die in der Lage sind, den Einfluss von ungleich geteilten Schneiden auf die Stabilitätsgrenze zu berücksichtigen und den Effekt der Prozessdämpfung und somit den Einfluss von Freiflächenfasen auf die Stabilitätsgrenze abzubilden. Die Prozessstabilität wird im Wesentlichen von folgenden vier Faktoren beeinflusst:

1. Werkzeuggestalt,
2. Prozessstellgrößen,
3. Strukturdynamik,
4. Schnittkraftkoeffizienten.

Die ersten beiden Faktoren sind in der Regel *a priori* in Form von Sollgrößen bekannt. Die Strukturdynamik und die Schnittkraftkoeffizienten müssen hingegen anhand von geeigneten Messungen identifiziert werden. Daher wird zunächst ein Modell zur Beschreibung der Strukturdynamik und ein Algorithmus zur Identifikation der Modellparameter vorgestellt. Daran anschließend wird eine Methode zur Berechnung von Stabilitätskarten ungleich geteilter Fräser hergeleitet. Um den Einfluss von Freiflächenfasen auf die Prozessstabilität abbilden zu können, wird diese Methode um den Effekt der Prozessdämpfung erweitert. Im letzten Teil dieses Kapitels wird ein Modell zur zeitlichen Simulation des dynamischen Fräsprozesses und ein hierauf aufbauendes Verfahren zur Identifikation der Schnittkraftkoeffizienten beschrieben.

### 4.1 Modellierung der Strukturdynamik

Der dynamische Fräsprozess sei durch das in Bild 4.1 dargestellte vereinfachte mechanische Ersatzmodell beschrieben. Der Fräser, der sich auch in der  $z$ -Richtung erstreckt, ist hier lediglich im Schnitt dargestellt. Sowohl das Werkzeug (Index  $t$ ) als auch das Werkstück (Index  $w$ ) werden in Vorschub- ( $x$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y$ ) als rein translatorisch nachgiebig gelagerte Starrkörper angenommen. Das heißt, dass alle Punkte auf den beiden Körpern die jeweils gleiche Verlagerung aufweisen. Eine Verlagerung des Werkzeugs und Werkstücks in Passivrichtung ( $z$ -Richtung) und eine torsionale Nachgiebigkeit des Fräasers werden vernachlässigt, da angenommen wird, dass diese Nachgiebigkeiten gegenüber denen in  $x$ - und  $y$ -Richtung vernachlässigbar klein sind. Die werkzeugseitige Nachgiebigkeit beinhaltet dabei nicht nur das Werkzeug selbst, sondern auch Komponenten wie die Werkzeugaufnahme, die Spindel und das Maschinengestell. Die werkstückseitige Nachgiebigkeit wird sowohl durch die Gestalt des Werkstücks als auch von der Werkstückeinspannung und der Nachgiebigkeit des Maschinentisches beeinflusst. Neben dem ortsfesten Koordinatensystem ( $x, y$ ) existiert für jede der  $z$  Schneiden ein Koordinatensystem ( $\xi_j, \eta_j$ ). Diese Koordinatensysteme sind gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem



Se/55789 © IFW

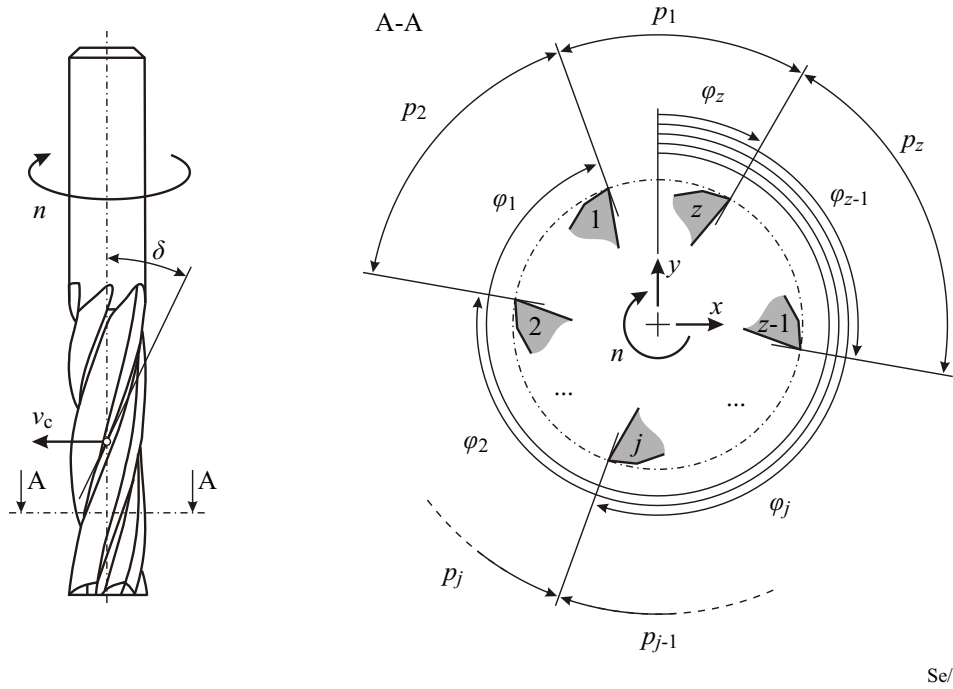
**Bild 4.1:** Vereinfachtes mechanisches Modell des dynamischen Fräsprozesses.

$(x, y)$  um die Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$  gedreht und rotieren demnach mit der Drehzahl  $n$  um die Fräseachse. Das Werkzeug bewegt sich mit der Vorschubgeschwindigkeit  $v_f$  in das Werkstück. Die Verlagerungen des Werkzeugs und Werkstücks werden im raumfesten Koordinatensystem  $(x, y)$  durch  $x_t, y_t$  und  $x_w, y_w$  beschrieben. Der Fräser wird durch das Schnittmoment  $M_c$  angetrieben. Auf der rechten Seite der Abbildung ist der Kontakt zwischen Schneide und Werkstück als Freischnitt dargestellt. Hier sind die Schnitt- und Schnittnormalkraft  $F_{c,j}$  und  $F_{cN,j}$  angetragen. Bild 4.2 veranschaulicht die ungleiche Teilung der Schneiden, welche durch die Winkelabstände  $p_j$  beschrieben wird. Diese werden durch den Zahnteilungsvektor  $\mathbf{p} = [p_1 \dots p_j \dots p_z]$  zusammengefasst. Zudem ist in Bild 4.2 der Drallwinkel  $\delta$  der Schneiden dargestellt. Der Drallwinkel ist der Winkel zwischen der Schneide und der Werkzeug-Bezugsebene  $P_r$ , welche senkrecht zum Vektor der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$  steht, gemessen in der Werkzeug-Schneidenebene, welche tangential zur Einhüllenden des Fräses liegt.

Die dynamischen Nachgiebigkeiten des Werkzeugs und des Werkstücks in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung werden üblicherweise durch die direkten Nachgiebigkeitsfrequenzgänge charakterisiert. Diese können experimentell z. B. durch die Impulshammermethode ermittelt werden. Modellhaft lassen sich die gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgänge durch Superposition der Verlagerungen einer beliebig großen endlichen Anzahl von parallel geschalteten Oszillatoren nachbilden. Durch die Superposition ergeben sich die Verlagerungen des Werkzeugs und Werkstücks aus der Summe der Verlagerungen der jeweiligen Oszillatoren:

$$x_w(t) = \sum_{i=1}^r x_{w,i}(t), \quad y_w(t) = \sum_{i=1}^s y_{w,i}(t), \quad x_t(t) = \sum_{i=1}^u x_{t,i}(t), \quad y_t(t) = \sum_{i=1}^v y_{t,i}(t). \quad (4.1)$$

Dabei ist  $x_{t,i}(t)$  z. B. die Auslenkung der  $i$ -ten Oszillators des Werkzeugs in Vorschubrichtung. Die gesamte Anzahl an Oszillatoren ist  $w = r + s + u + v$ . Jeder Oszillator (Einmassenschwinger) wird durch eine Masse  $m_i$ , einen Dämpfungskoeffizienten  $d_i$  und eine Steifigkeit  $k_i$  beschrieben. Das Vorgehen wird im Folgenden exemplarisch anhand der Verlagerung des Werkzeugs in Vorschubrichtung beschrieben. Das  $u$ -Tupel der Auslen-



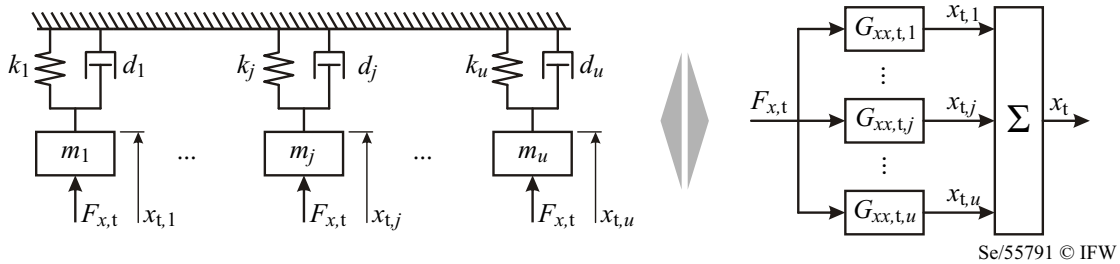
Se/55790 © IFW

**Bild 4.2:** Zahnteilung eines Fräasers.

kungen der  $u$  Oszillatoren des Werkzeugs in Vorschubrichtung wird als Vektor

$$\mathbf{x}_t(t) = [x_{t,1}(t) \dots x_{t,i}(t) \dots x_{t,u}(t)]^T \quad (4.2)$$

definiert. Auf jeden dieser  $u$  Oszillatoren wirkt dabei die gleiche Kraft  $F_{x,t}$ . In Bild 4.3 ist dies als mechanisches Ersatzmodell und Blockschaltbild veranschaulicht.



Se/55791 © IFW

**Bild 4.3:** Mechanisches Ersatzmodell und Blockschaltbild der Strukturdynamik des Werkzeugs in Vorschubrichtung.

Das Schwingungsverhalten eines einzelnen Oszillators lässt sich durch folgende Schwingungsdifferentialgleichung beschreiben:

$$m_j \ddot{x}_{t,j}(t) + d_j \dot{x}_{t,j}(t) + k_j x_{t,j}(t) = F_{x,t}(t) . \quad (4.3)$$

Mit dem LEHRschen Dämpfungsgrad  $\zeta_j = \frac{d_j}{2 m_j \omega_{0,j}}$  und der ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,j} = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}$  lässt sich diese Gleichung normieren:

$$\ddot{x}_{t,j}(t) + 2 \zeta_j \omega_{0,j} \dot{x}_{t,j}(t) + \omega_{0,j}^2 x_{t,j}(t) = \frac{1}{m_j} F_{x,t}(t) = \frac{\omega_{0,j}^2}{k_j} F_{x,t}(t) . \quad (4.4)$$

Ein einzelner Einmassenschwinger lässt sich durch die drei Parameter Masse  $m_j$ , Dämpfung  $d_j$  und Steifigkeit  $k_j$  (Gleichung (4.3)) oder durch die drei Parameter ungedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,j}$ , LEHRsche Dämpfung  $\zeta_j$  und Masse  $m_j$  (Gleichung (4.4)) beschreiben. Alternativ können auch die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz  $\omega_{0,j}$ , die LEHRsche Dämpfung  $\zeta_j$  und die Steifigkeit  $k_j$  verwendet werden (Gleichung (4.4)). Durch die Laplacetransformation von Gleichung (4.3) ergibt sich:

$$m_j s^2 X_{t,j}(s) + d_j s X_{t,j}(s) + k_j X_{t,j}(s) = F_{x,t}(s). \quad (4.5)$$

Durch Umformen lässt sich hieraus die Übertragungsfunktion

$$\begin{aligned} G_{xx,t,j}(s) &= \frac{X_{t,j}(s)}{F_{x,t}(s)} = \frac{1}{m_j s^2 + d_j s + k_j} \\ &= \frac{m_j^{-1}}{s^2 + 2 \zeta_j \omega_{0,j} s + \omega_0^2} \\ &= \frac{\omega_{0,j}^2 k_j^{-1}}{s^2 + 2 \zeta_j \omega_{0,j} s + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

berechnen. Die Übertragungsfunktion des gesamten Systems ergibt sich schließlich aus der Parallelschaltung der einzelnen Einmassenschwinger:

$$G_{xx,t}(s) = \sum_{j=1}^u G_{xx,t,j}(s) = \frac{\sum_{j=1}^u X_{t,j}(s)}{F_{x,t}(s)} = \frac{X_t(s)}{F_{x,t}(s)}. \quad (4.7)$$

Wird die Variable  $s$  durch  $i \omega = i 2 \pi f$  ersetzt, lassen sich der Amplitudenfrequenzgang  $|G_{xx,t}(i \omega)|$  und der Phasenfrequenzgang  $\arg(G_{xx,t}(i \omega))$  des Gesamtsystems berechnen. Da die Parameter ( $m_j, d_j, k_j$ ) nicht *a priori* bekannt sind, müssen diese identifiziert werden. Ein Verfahren zur Identifikation stellt die Minimierung eines Gütefunktional dar, welches die Abweichungen zwischen Messung und Modell quantifiziert. Problematisch ist jedoch die starke Nichtlinearität der gebrochen-rationalen Übertragungsfunktion  $G_{xx,t}(s)$ . Das Nennerpolynom dieser Funktion hat die Ordnung  $2u$  und das Zählerpolynom die Ordnung  $2u - 2$ . Bei Verwendung direkter Suchverfahren besteht daher die Gefahr, dass anstelle des globalen Minimums lediglich lokale Minima gefunden werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher ein genetischer Algorithmus, ähnlich dem von SURMANN et al. [Sur08], entwickelt. Dieser Algorithmus identifiziert anhand eines gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgangs die Massen, Dämpfungen und Steifigkeiten. Experimentell lassen sich die Nachgiebigkeitsfrequenzgänge z. B. durch die Impulshammermethode ermitteln. Das Gütefunktional, das der genetische Algorithmus minimiert, ist die Summe der kleinsten Fehlerquadrate des gemessenen und modellierten Nachgiebigkeitsfrequenzgangs:

$$G = \sum_{k=1}^p \left[ \left( |G_{xx,t,\text{mess}}(i \omega_k)| - |G_{xx,t,\text{sim}}(i \omega_k)| \right)^2 \right]. \quad (4.8)$$

Die gesuchten Parameter der Oszillatoren ergeben sich durch die Lösung des Minimierungsproblems:

$$\min_P(G) \quad \text{mit} \quad P = [f_{0,1}, \dots, f_{0,u}, \zeta_1, \dots, \zeta_u, k_1, \dots, k_u]. \quad (4.9)$$

Der Benutzer kann vor der Anwendung des Algorithmus eine beliebige Anzahl  $u$  an Einmassenschwingern festlegen. Zu jedem der  $u$  Einmassenschwinger wird ein Frequenzbereich  $[f_{\min,j}, f_{\max,j}]$  definiert, innerhalb dessen der genetische Algorithmus die ungedämpfte Eigenfrequenz  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  variiert. Diese Frequenzbereiche enthalten günstigerweise die lokalen Maxima (Peaks) des gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgangs. Neben den ungedämpften Eigenfrequenzen variiert der Algorithmus auf Basis der drei evolutionären Prinzipien Selektion, Mutation und Rekombination die LEHRschen Dämpfungen zwischen  $\zeta_{\min} = 0$  und  $\zeta_{\max} = 0,2$  und die Steifigkeiten zwischen  $k_{\min} = 10^5 \text{ N/m}$  und  $k_{\max} = 10^{12} \text{ N/m}$ . Diese Grenzen haben sich bei den in Kapitel 5 untersuchten Nachgiebigkeitsfrequenzgängen als günstig erwiesen. Die Anzahl an Generationen beträgt 1000 und die Populationsgröße ist 20. Anhand der ermittelten Eigenfrequenzen, der LEHRschen Dämpfungen und der Steifigkeiten können die Massen durch  $m_j = \sqrt{\frac{k_j}{2\pi f_{0,j}}}$  und die Dämpfungen durch  $d_j = \frac{\zeta_j k_j}{\pi f_{0,j}}$  berechnet werden. Die Strukturodynamik des gesamten Systems bestehend aus der dynamischen Nachgiebigkeit des Werkstücks und Werkzeugs in  $x$ - und  $y$ -Richtung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}_{\text{ges}}(t) = \mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_{x,w}(t) \mathbf{1}_{r \times 1} \\ F_{y,w}(t) \mathbf{1}_{s \times 1} \\ F_{x,t}(t) \mathbf{1}_{u \times 1} \\ F_{y,t}(t) \mathbf{1}_{v \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Der Verlagerungsvektor  $\mathbf{q}_{\text{ges}}(t)$  besteht aus den Verlagerungen der einzelnen Oszillatoren in  $x$ - und  $y$ -Richtung des Werkstücks ( $w$ ) und des Werkzeugs ( $t$ ):

$$\mathbf{q}_{\text{ges}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_w(t) \\ \mathbf{y}_w(t) \\ \mathbf{x}_t(t) \\ \mathbf{y}_t(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^w. \quad (4.11)$$

Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen enthalten auf ihren Hauptdiagonalen die Parameter der verschiedenen Oszillatoren. Da die Kreuzfrequenzgänge vernachlässigt werden, sind außer den Hauptdiagonalen alle weiteren Elemente der Matrizen gleich null.

## 4.2 Methode zur Berechnung von Stabilitätskarten ungleich geteilter Fräser

### 4.2.1 Modellierung der Prozessdynamik

Für die Modellierung der Prozessdynamik ist es notwendig, den in der Gleichung der Strukturodynamik (4.10) nicht näher beschriebenen Kraftvektor  $\mathbf{F}(t)$  als Funktion der Prozessstellgrößen und des Schwingungszustandes darzustellen. Aufgrund des dritten NEWTONschen Prinzips (*actio est reactio*) kann dieser Kraftvektor wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} +F_f \mathbf{1}_{r \times 1} \\ +F_{fN} \mathbf{1}_{s \times 1} \\ -F_f \mathbf{1}_{u \times 1} \\ -F_{fN} \mathbf{1}_{v \times 1} \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

wobei  $F_f$  und  $F_{fN}$  die Vorschub- und Vorschubnormalkraft sind. Zur Beschreibung dieser Kräfte wird das Prozesskraftmodell von FRIEDRICH [Fri09] zugrunde gelegt. Die Vektorsumme aus Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkraft ergibt die Zerspankraft  $\vec{F}_z = \vec{F}_f + \vec{F}_{fN} + \vec{F}_p$ . Die Passivkraft spielt für die Stabilitätsanalyse jedoch keine Rolle, da der Fräser in Achsrichtung als ideal steif angenommen wird. Die Zerspankraft ist keine punktuell wirkende Kraft. Vielmehr verteilt sie sich entlang der einzelnen Schneiden. Um dies abzubilden, wird der Fräser entlang seiner Rotationsachse  $z$  in infinitesimal kleine Scheiben der Dicke  $dz$  diskretisiert. Die auf eine Schneide einer solchen Scheibe wirkende Kraft ist  $dF_z$ . Diese Kraft kann in eine beliebige Richtung des Raumes zeigen. Zur Modellierung der Prozesskräfte wird die Zerspankraft in drei senkrecht stehende Komponenten  $dF_t$ ,  $dF_r$  und  $dF_a$  aufgeteilt. Folgende Definition zur räumlichen Orientierung dieser Zerspankraftkomponenten erscheint hier sinnvoll:

**Definition für die Orientierung der Zerspankraftkomponenten:**

Die Kraft  $dF_t$  steht senkrecht auf der Werkzeug-Bezugsebene  $P_r$ .

Die Kraft  $dF_r$  steht senkrecht auf der Werkzeug-Schneidenebene  $P_s$ .

Die Kraft  $dF_a$  steht senkrecht auf der Werkzeug-Orthogonalebene  $P_o$ .

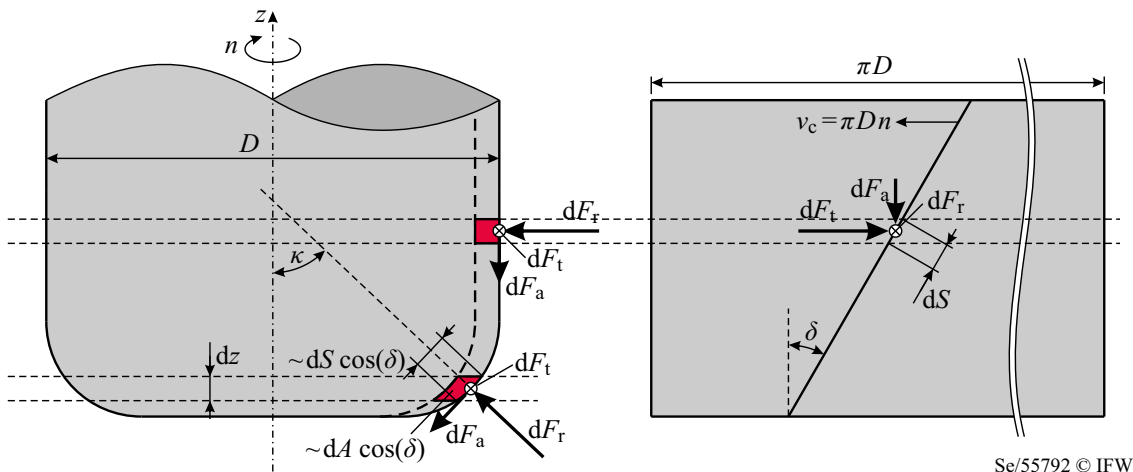
Bild 4.4 veranschaulicht diesen Ansatz. Die Transformation der Zerspankraftkomponenten in das raumfeste Koordinatensystem  $(x, y)$  geschieht über eine Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{bmatrix} dF_{f,j} \\ dF_{fN,j} \\ dF_{p,j} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} dF_{t,j} \\ dF_{r,j} \\ dF_{a,j} \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Für die Berechnung dieser Transformationsmatrix werden die beiden Drehmatrizen

$$\mathbf{T}_a(-\phi_j) = \begin{bmatrix} \cos(-\phi_j) & -\sin(-\phi_j) & 0 \\ \sin(-\phi_j) & \cos(-\phi_j) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{T}_t(\nu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\nu) & -\sin(\nu) \\ 0 & \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$



Se/55792 © IFW

**Bild 4.4:** Inkrementelle Zerspankraftkomponenten.

benötigt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  ergibt sich aus einer Drehung  $-\phi_j$  um die Rotationsachse und einer Drehung  $\nu = \kappa - \frac{\pi}{2}$  um die Schnitttrichtung:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_a(-\phi_j) \mathbf{T}_t(\nu), \quad (4.16)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(-\phi_j) & -\cos(\nu) \sin(-\phi_j) & \sin(-\phi_j) \sin(\nu) \\ \sin(-\phi_j) & \cos(\nu) \cos(-\phi_j) & -\cos(-\phi_j) \sin(\nu) \\ 0 & \sin(\nu) & \cos(\nu) \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\phi_j) & \sin(\kappa) \sin(\phi_j) & \sin(\phi_j) \cos(\kappa) \\ -\sin(\phi_j) & \sin(\kappa) \cos(\phi_j) & \cos(\phi_j) \cos(\kappa) \\ 0 & -\cos(\kappa) & \sin(\kappa) \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

Um die zwischen Werkzeug und Werkstück wirkenden dynamischen Prozesskräfte zu berechnen, werden die relativen Auslenkungen zwischen Werkzeug und Werkstück wie folgt definiert:

$$\Delta x_j = -x_w(t) + x_w(t - \theta_j) + x_t(t) - x_t(t - \theta_j), \quad (4.19)$$

$$\Delta y_j = -y_w(t) + y_w(t - \theta_j) + y_t(t) - y_t(t - \theta_j), \quad (4.20)$$

$$\Delta z_j = -z_w(t) + z_w(t - \theta_j) + z_t(t) - z_t(t - \theta_j). \quad (4.21)$$

Die Terme mit Totzeit berücksichtigen den Regenerativeneffekt. Für gleich geteilte Fräser sind die Totzeiten für alle Schneiden gleich dem Kehrwert der Zahneingriffsfrequenz  $\theta_j = \theta = \frac{1}{nz}$ . Die Totzeiten der einzelnen Schneiden für ungleich geteilte Fräswerkzeuge sind

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{\phi_{j-1} - \phi_j}{2\pi n} & \text{für } j \in \{1, \dots, z-1\} \\ \frac{2\pi - \phi_1 - \phi_z}{2\pi n} & \text{für } j = z \end{cases}. \quad (4.22)$$

Bei ungleich gedrahten Werkzeugen und kordelierten Schruppfräsern variieren die Totzeiten entlang der Fräserachse ( $\theta_j = f(z)$ ). Bei kordelierten Schruppfräsern sind die Totzeiten wie bei ungleich geteilten Fräsern diskret verteilt. Die Anzahl der verschiedenen Totzeiten entspricht dabei der Zähnezahl  $z$ . Sind die Schneiden ungleich gedraht, ist dies nicht mehr der Fall. Die Totzeiten sind dann kontinuierlich verteilt. Solche Werkzeuge sind jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Nach dem Modell von FRIEDRICH [Fri09] ergibt sich die Kraftkomponente  $dF_{t,j}$  wie folgt:

$$\begin{aligned} dF_{t,j} &= g_j \left( K_{tc} dA + K_{te} dS \right), \\ &= g_j \left( K_{tc} dz h_j + K_{te} dS \right), \\ &= g_j \left( K_{tc} dz (\Delta\eta_j + f_z \sin(\phi_j)) + K_{te} dS \right), \\ &= g_j \left( K_{tc} dz (\Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j) + f_z \sin(\phi_j)) + K_{te} dS \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

$g_j$  ist eine Sprungfunktion, die angibt, ob die  $j$ -te Schneide im Eingriff ist oder nicht:

$$g_j = g_j(\phi_j) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \phi_e \leq \phi_j \leq \phi_a \\ 0 & \text{wenn } \phi_j < \phi_e \text{ oder } \phi_j > \phi_a \end{cases}. \quad (4.24)$$

Der Spanungsquerschnitt  $dA$  kann über  $dz$  und die Spanungsdicke  $h_j$  ausgedrückt werden. Die Spanungsdicke setzt sich zum einen aus einem quasistatischen Anteil, der sich aus dem

Zahnvorschub  $f_z$  ergibt, und einem dynamischen Anteil  $\Delta\eta_j$  zusammen. Der dynamische Anteil kann über eine entsprechende Koordinatentransformation durch die im ortsfesten Koordinatensystem gemessenen Relativverlagerungen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  dargestellt werden. In analoger Weise gilt diese Gleichung für die Kraftkomponenten  $dF_r$  und  $dF_a$ . Für die weitere Betrachtung werden die Kraftkomponenten in einen dynamischen und einen stationären Teil aufgeteilt. Für die Kraftkomponente  $dF_{t,j}$  gilt dann:

$$dF_{t,j} = \underbrace{g_j K_{tc} dz \left( \Delta x \sin(\phi_j) + \Delta y \cos(\phi_j) \right)}_{dF_{t,j,dyn}} + \underbrace{g_j \left( K_{tc} dz f_z \sin(\phi_j) + K_{te} dS \right)}_{dF_{t,j,stat}}. \quad (4.25)$$

Werden die inkrementellen dynamischen Kraftanteile  $dF_{t,j,dyn}$ ,  $dF_{r,j,dyn}$  und  $dF_{a,j,dyn}$  in das raumfeste Koordinatensystem transformiert, über der Schnitttiefe  $a_p$  integriert und über alle  $z$  Zähne summiert, so ergeben sich die dynamische Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkraft wie folgt:

$$\begin{bmatrix} F_{f,dyn} \\ F_{fN,dyn} \\ F_{p,dyn} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_{xyz,j} \begin{bmatrix} \Delta x_j \\ \Delta y_j \\ \Delta z_j \end{bmatrix} \right] \quad \text{mit} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{Q}_{xyz,j} = \begin{bmatrix} q_{xx,j} & q_{xy,j} & q_{xz,j} \\ q_{yx,j} & q_{yy,j} & q_{yz,j} \\ q_{zx,j} & q_{zy,j} & q_{zz,j} \end{bmatrix} = \int_0^{a_p} g_j \mathbf{T} \begin{bmatrix} K_{tc} \\ K_{rc} \\ K_{ac} \end{bmatrix} [\sin(\phi_j) \quad \cos(\phi_j) \quad 0] dz. \quad (4.27)$$

$\mathbf{Q}_{xyz,j}$  ist die Matrix der projizierten Schnittkraftkoeffizienten der  $j$ -ten Schneide. Aufgrund der Rotation des Fräasers ändert sich der Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$  und somit auch die projizierten Schnittkraftkoeffizienten mit der Zeit. Durch den Drallwinkel  $\delta$  ändert sich der Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$  jedoch auch entlang der  $z$ -Achse. Der Vorschubrichtungswinkel der  $j$ -ten Schneide ist daher

$$\phi_j = \phi_j(t, z) = \phi_{j,0} + 2 \pi n t - \frac{2 z \tan(\delta)}{D}. \quad (4.28)$$

In dieser Gleichung ist  $\phi_{j,0}$  der Vorschubrichtungswinkel an der Werkzeugspitze und  $z$  der axiale Abstand zur Werkzeugspitze. Da der Vorschubrichtungswinkel entlang der Fräserachse variiert, ist es in Gleichung (4.27) notwendig, über der Schnitttiefe  $a_p$  zu integrieren. Da das Werkzeug und Werkstück in der  $z$ -Richtung als ideal steif angenommen werden, sind für die weitere Betrachtung lediglich die projizierten Schnittkraftkoeffizienten  $q_{xx,j}$ ,  $q_{xy,j}$ ,  $q_{yx,j}$ , und  $q_{yy,j}$  von Bedeutung. Für einen zylindrischen Fräser (axialer Eingriffswinkel  $\kappa = 90^\circ$ ) sind die projizierten Schnittkraftkoeffizienten (vgl. [Alt00, S. 106; Ins04a]):

$$\begin{aligned} q_{xx,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ K_{tc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + K_{rc} \sin^2(\phi_j) \right] dz, \\ q_{xy,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ K_{tc} \cos^2(\phi_j) + K_{rc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \right] dz, \\ q_{yx,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ -K_{tc} \sin^2(\phi_j) + K_{rc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \right] dz, \\ q_{yy,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ -K_{tc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + K_{rc} \cos^2(\phi_j) \right] dz. \end{aligned} \quad (4.29)$$



Für Fräser mit beliebiger Hüllkontur (axialer Eingriffswinkel  $\kappa = \text{var.}$ ) berechnen sich die projizierten Schnittkraftkoeffizienten mit  $\nu = \kappa - \frac{\pi}{2}$  zu

$$\begin{aligned} q_{xx,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ K_{tc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + K_{rc} \sin^2(\phi_j) \cos(\nu) \quad - K_{ac} \sin^2(\phi_j) \sin(\nu) \right] dz, \\ q_{xy,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ K_{tc} \cos^2(\phi_j) \quad + K_{rc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \cos(\nu) - K_{ac} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \sin(\nu) \right] dz, \\ q_{yx,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ -K_{tc} \sin^2(\phi_j) \quad + K_{rc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \cos(\nu) - K_{ac} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \sin(\nu) \right] dz, \\ q_{yy,j}(t) &= \int_0^{a_p} g_j \left[ -K_{tc} \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + K_{rc} \cos^2(\phi_j) \cos(\nu) \quad - K_{ac} \cos^2(\phi_j) \sin(\nu) \right] dz. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Mit  $dS = \frac{dz}{\sin(\kappa)}$  gilt für die stationären Kraftkomponenten

$$\begin{bmatrix} F_{f,\text{stat}} \\ F_{fN,\text{stat}} \\ F_{p,\text{stat}} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^z \left[ \int_0^{a_p} g_j \mathbf{T} \left( f_z \sin(\phi_j) \begin{bmatrix} K_{tc} \\ K_{rc} \\ K_{ac} \end{bmatrix} + \frac{1}{\sin(\kappa)} \begin{bmatrix} K_{te} \\ K_{re} \\ K_{ae} \end{bmatrix} \right) dz \right]. \quad (4.31)$$

Der Kraftvektor aus Gleichung (4.12) kann nun in Abhängigkeit des Vektors der Verlagerungen  $\mathbf{q}_{\text{ges}}$  angegeben werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{dyn}} + \mathbf{F}_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \left( -\mathbf{q}_{\text{ges}}(t) + \mathbf{q}_{\text{ges}}(t - \theta_j) \right) \right] + \mathbf{F}_{\text{stat}} \quad (4.32)$$

mit

$$\mathbf{Q}_j = \begin{bmatrix} +\mathbf{Q}_{xx,j}^{r \times r} & +\mathbf{Q}_{xy,j}^{r \times s} & -\mathbf{Q}_{xx,j}^{r \times u} & -\mathbf{Q}_{xy,j}^{r \times v} \\ +\mathbf{Q}_{yx,j}^{s \times r} & +\mathbf{Q}_{yy,j}^{s \times s} & -\mathbf{Q}_{yx,j}^{s \times u} & -\mathbf{Q}_{yy,j}^{s \times v} \\ -\mathbf{Q}_{xx,j}^{u \times r} & -\mathbf{Q}_{xy,j}^{u \times s} & +\mathbf{Q}_{xx,j}^{u \times u} & +\mathbf{Q}_{xy,j}^{u \times v} \\ -\mathbf{Q}_{yx,j}^{v \times r} & -\mathbf{Q}_{yy,j}^{v \times s} & +\mathbf{Q}_{yx,j}^{v \times u} & +\mathbf{Q}_{yy,j}^{v \times v} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_{\text{stat}} = \begin{bmatrix} +F_{f,\text{stat}} \mathbf{1}_{r \times 1} \\ +F_{fN,\text{stat}} \mathbf{1}_{s \times 1} \\ -F_{f,\text{stat}} \mathbf{1}_{u \times 1} \\ -F_{fN,\text{stat}} \mathbf{1}_{v \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

In dieser Gleichung sind die projizierten Schnittkraftkoeffizienten zu Matrizen erweitert, z. B.  $\mathbf{Q}_{xy,j}^{r \times s} = \mathbf{1}_{r \times s} q_{xy,j}$ . Der stationäre Kraftvektor ist periodisch mit der Fräserdrehzahl:  $\mathbf{F}_{\text{stat}}(t) = \mathbf{F}_{\text{stat}}(t - n^{-1})$ . Gleichung (4.10) kann dann wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}_{\text{ges}}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \mathbf{q}_{\text{ges}}(t - \theta_j) \right] + \mathbf{F}_{\text{stat}}. \quad (4.34)$$

Wie die Kräfte lässt sich auch die Lösung dieser Differentialgleichung in einen dynamischen und stationären Anteil aufteilen:  $\mathbf{q}_{\text{ges}} = \mathbf{q}_{\text{dyn}} + \mathbf{q}_{\text{stat}}$ . Der stationäre Anteil der Lösung ist wiederum periodisch mit der Fräserdrehzahl:  $\mathbf{q}_{\text{stat}}(t) = \mathbf{q}_{\text{stat}}(t - n^{-1})$ . Da  $\mathbf{q}_{\text{stat}}(t)$  nicht zur Instabilität des Systems beiträgt, wird im Weiteren nur der dynamische Lösungsanteil betrachtet. Zwecks einfacherer Schreibweise sei  $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_{\text{dyn}}(t)$ . Der dynamische Anteil von Gleichung (4.34) ist:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \mathbf{q}(t - \theta_j) \right]. \quad (4.35)$$

Dies ist eine nichtautonome Matrixdifferentialgleichung mit mehreren diskret verteilten Totzeiten. Durch Einführung des Vektors  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{q}(t) \ \dot{\mathbf{q}}(t)]^T$  kann diese Differentialgleichung wie folgt angegeben werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^z [\mathbf{B}'_j(t) \mathbf{x}(t - \theta_j)] , \quad (4.36)$$

mit

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{w \times w} & \mathbf{I}_{w \times w} \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix} , \quad (4.37)$$

$$\mathbf{B}'_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{w \times w} & \mathbf{0}_{w \times w} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_j(t) & \mathbf{0}_{w \times w} \end{bmatrix} .$$

Dieses System ist  $T_p$ -periodisch:  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T_p)$ .  $T_p$  hängt von der Zahnteilung ab. Für einen gleich geteilten Fräser ist die Periode  $T_p = \frac{1}{nz}$ . Bei alternierender Ungleichteilung  $\mathbf{p} = [p_0 - \Delta p, p_0 + \Delta p, \dots, p_0 - \Delta p, p_0 + \Delta p]$  ist die Periode  $T_p = \frac{p_0}{\pi n}$  und bei linear ungleich geteilten Fräsern  $\mathbf{p} = [p_0, p_0 + \Delta p, p_0 + 2\Delta p, \dots, p_0 + (z-1)\Delta p]$  ist die Periode  $T_p = \frac{1}{n}$ .

Die Matrix mit den projizierten Schnittkraftkoeffizienten kann wie folgt zerlegt werden:

$$\mathbf{Q}_j(t) = \mathbf{Q}_j^*(t) \mathbf{H} , \quad (4.38)$$

wobei

$$\mathbf{Q}_j^*(t) = \begin{bmatrix} +\mathbf{Q}_{xx,j}^{r \times 1} & +\mathbf{Q}_{xy,j}^{r \times 1} \\ +\mathbf{Q}_{yx,j}^{s \times 1} & +\mathbf{Q}_{yy,j}^{s \times 1} \\ -\mathbf{Q}_{xx,j}^{u \times 1} & -\mathbf{Q}_{xy,j}^{u \times 1} \\ -\mathbf{Q}_{yx,j}^{v \times 1} & -\mathbf{Q}_{yy,j}^{v \times 1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{1 \times r} & \mathbf{0}_{1 \times s} & -\mathbf{1}_{1 \times u} & \mathbf{0}_{1 \times v} \\ \mathbf{0}_{1 \times r} & \mathbf{1}_{1 \times s} & \mathbf{0}_{1 \times u} & -\mathbf{1}_{1 \times v} \end{bmatrix} . \quad (4.39)$$

Mit

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} x_w(t) - x_t(t) \\ y_w(t) - y_t(t) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{q}(t) = \underbrace{[\mathbf{H} \ \mathbf{0}_{2 \times w}]}_{\mathbf{L}} \mathbf{x}(t) \quad (4.40)$$

kann die Gleichung (4.35) folgendermaßen angegeben werden

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j^*(t) \underbrace{\mathbf{H} \mathbf{q}(t - \theta_j)}_{\mathbf{u}(t - \theta_j)} \right] . \quad (4.41)$$

Gleichung (4.37) ergibt sich dann zu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{B}_j(t) \underbrace{\mathbf{L} \mathbf{x}(t - \theta_j)}_{\mathbf{u}(t - \theta_j)} \right] , \quad (4.42)$$

mit

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{w \times w} & \mathbf{I}_w \\ -\mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{B}_j(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{w \times 2} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Q}_j^*(t) \end{bmatrix}.$$

Die Zerlegung der Matrix  $\mathbf{Q}_j(t)$  durch Gleichung (4.38) ist wichtig für eine schnellere Approximation der Stabilitätsgrenze durch das im folgenden Kapitel beschriebene Verfahren der zeitdiskreten expandierten Systemmatrix. Die Größe der expandierten Systemmatrix und somit die Anzahl der zu berechnenden Eigenwerte kann hierdurch insbesondere bei einer großen Zahl an Oszillatoren der Strukturodynamik deutlich gesenkt werden. Um die Stabilitätsanalyse des Systems in Gleichung (4.42) zu vereinfachen, können die Systemmatrizen durch ihre über die Periodendauer  $T_p$  bestimmten Mittelwerte

$$\bar{\mathbf{A}} = T_p^{-1} \int_0^{T_p} \mathbf{A}(t) dt \quad \text{und} \quad \bar{\mathbf{B}}_j = \bar{\mathbf{B}} = T_p^{-1} \int_0^{T_p} \mathbf{B}_j(t) dt. \quad (4.44)$$

ersetzt werden. Dies führt auf die folgende autonome Totzeitdifferentialgleichung:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \bar{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \sum_{j=1}^z [\bar{\mathbf{B}} \mathbf{L} \mathbf{x}(t - \theta_j)]. \quad (4.45)$$

Eine solche Vereinfachung reduziert den Rechenaufwand bei der Bestimmung der Stabilitätsgrenze. Die Abweichung der Stabilitätsgrenze des autonomen Systems aus Gleichung (4.45) gegenüber der des nichtautonomen Systems aus Gleichung (4.42) wird später in dieser Arbeit diskutiert. Das System aus Gleichung (4.45) kann als Regelkreis aufgefasst werden. Bild 4.5 zeigt das zugehörige Blockschaltdiagramm<sup>1</sup>. Ein Ansatz aus der Regelungstechnik wird in den folgenden Kapiteln zur Stabilitätsanalyse solcher Totzeitsysteme herangezogen.

#### 4.2.2 Die regelungstechnische Behandlung von Systemen mit Totzeit nach ACKERMANN

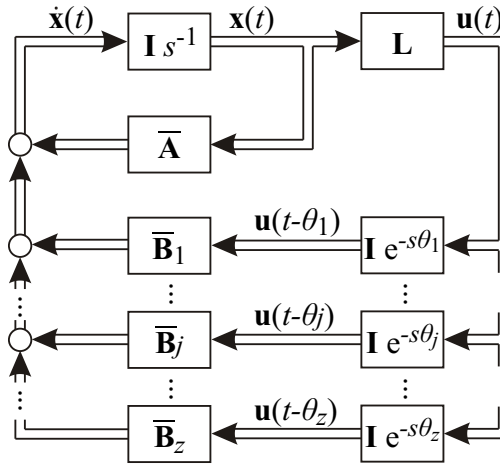
In [Ack83, S. 134-137] stellte ACKERMANN eine Methode zur regelungstechnischen Behandlung von Systemen mit Totzeit vor. Da diese Methode von fundamentaler Bedeutung für die theoretische Stabilitätsanalyse des dynamischen Fräsprozesses ist und um das Verständnis dieser Arbeit zu erleichtern, wird sie im Folgenden eingehender erläutert. Es wird das folgende autonome Zustandsraumssystem mit dem totzeitverzögerten und durch ein Halteglied erzeugten Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t - \theta) \in \mathbb{R}^l$  betrachtet<sup>2</sup>:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t - \theta), \quad (4.46)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(kT) \quad \text{für} \quad kT < t < kT + T. \quad (4.47)$$

<sup>1</sup>Achtung: In diesem Blockdiagramm wurde die Matrix  $\mathbf{L}$  vorgezogen, so dass die Verzögerung durch die Totzeiten erst anschließend angewandt werden.

<sup>2</sup>Aus Gründen der Konsistenz wird im Vergleich zu ACKERMANN [Ack83, S. 134-137] eine andere Variablennotation verwendet. Zudem wird der allgemeinere Fall betrachtet, dass der Systemeingang keine skalare Größe, sondern ein Vektor ist.



Se/46883 ©IFW

**Bild 4.5:** Blockschaltdiagramm des zeitkontinuierlichen Systems aus Gleichung (4.45).

$\theta \in \mathbb{R}_+$  ist die Totzeit,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^w$  ist der Zustandsvektor,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2w \times 2w}$  ist die Zustandsmatrix und  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2w \times l}$  ist die Eingangsmatrix. Ist der Anfangszustand des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t_0)$  bekannt, so ergibt sich die Lösung des Systems zu

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau - \theta) d\tau. \quad (4.48)$$

Mit  $t = kT + T$  und  $t_0 = kT$ , wobei  $k \in \mathbb{N}$ , ergibt sich diese Gleichung zu

$$\mathbf{x}(kT + T) = e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau - \theta) d\tau. \quad (4.49)$$

Die Zeit  $T$  kann als Abtastintervall aufgefasst werden. Zur anschaulichen Herleitung des allgemeinen Falls unterteilt ACKERMANN die Totzeit ihrer Größe nach in folgende drei Kategorien:

1.  $\theta \leq T$ ,
2.  $T < \theta \leq 2T$ ,
3.  $\theta = mT - \gamma T$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Zunächst wird der 1. Fall betrachtet, dass die Totzeit kleiner-gleich dem Abtastintervall ist:  $\theta \leq T$ . In Abhängigkeit der Integrationsvariablen  $\tau$  ergeben sich dann für den totzeitverzögerten Eingangsvektor  $\mathbf{u}(\tau - \theta)$  zwei verschiedene Ausdrücke:

$$\mathbf{u}(\tau - \theta) = \begin{cases} \mathbf{u}(kT - T) & \text{wenn } kT < \tau < kT + \theta \\ \mathbf{u}(kT) & \text{wenn } kT + \theta < \tau < kT + T \end{cases}. \quad (4.50)$$

Mit dieser Fallunterscheidung und durch Anwendung der Substitutionsregel ergibt sich Gleichung (4.49) zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT + T) &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+\theta} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} d\tau \mathbf{u}(kT - T) + \int_{kT+\theta}^{kT+T} e^{\mathbf{A}(kT+T-\tau)} \mathbf{B} d\tau \mathbf{u}(kT) \\ &= e^{\mathbf{A}T} \mathbf{x}(kT) + \int_{T-\theta}^T e^{\mathbf{A}v} \mathbf{B} dv \mathbf{u}(kT - T) + \int_0^{T-\theta} e^{\mathbf{A}v} \mathbf{B} dv \mathbf{u}(kT). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Durch Einführung der Matrizen

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T} \quad \text{und} \quad \Gamma(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}v} dv \mathbf{B} \quad (4.52)$$

lässt sich Gleichung (4.51) wie folgt angeben:

$$\mathbf{x}(kT + T) = \Phi(T) \mathbf{x}(kT) + [\Gamma(T) - \Gamma(T - \theta)] \mathbf{u}(kT - T) + \Gamma(T - \theta) \mathbf{u}(kT). \quad (4.53)$$

Nach Erweiterung des Zustandsvektors durch  $\mathbf{u}_1(kT) = \mathbf{u}(kT - T)$  kann Gleichung (4.53) ausgedrückt werden durch

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{u}_1(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_2 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kT), \quad (4.54)$$

mit  $\Gamma_1 = \Gamma(T) - \Gamma(T - \theta)$  und  $\Gamma_2 = \Gamma(T - \theta)$ . Ist das Abtastintervall gleich der Totzeit  $T = \theta$ , vereinfachen sich die Eingangsmatrizen zu  $\Gamma(T - \theta) = \Gamma(0) = \mathbf{0}$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma$  und  $\Gamma_2 = \mathbf{0}$ . Das besondere an dem zeitdiskreten System aus Gleichung (4.54) ist, dass im Gegensatz zum zeitkontinuierlichen System aus Gleichung (4.46) der Eingangsvektor keine Totzeit mehr aufweist. Die Verzögerung des Eingangs wird in Gleichung (4.54) durch die Erweiterung des Zustandsvektors in die expandierte Systemmatrix verlagert.

Der zweite Fall, den ACKERMANN betrachtet, ist  $T < \theta \leq 2T$ . Der Zustandsvektor ist nun durch die beiden totzeitverzögerten Eingangswerte  $\mathbf{u}_1(kT) = \mathbf{u}(kT - 2T)$  und  $\mathbf{u}_2(kT) = \mathbf{u}(kT - T)$  zu erweitern. Es ergibt sich dann folgendes zeitdiskrete System:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{u}_1(kT + T) \\ \mathbf{u}_2(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \\ \mathbf{u}_2(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kT). \quad (4.55)$$

Auch hier weist der Eingangsvektor keine Totzeit mehr auf, da diese durch die Erweiterung des Zustandsvektors in die expandierte Systemmatrix verlagert wird.

Allgemein lässt sich nach ACKERMANN die Totzeit  $\theta$  als ein ganzzahliges Vielfaches des Abtastintervalls  $T$  minus einem Differenzterme  $\gamma T$  ausdrücken (Fall 3):

$$\theta = mT - \gamma T, \quad 0 \leq \gamma < 1, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.56)$$

Die expandierte zeitdiskrete Systemgleichung ist dann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{u}_1(kT + T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{u}(kT) \quad \text{mit} \quad (4.57)$$

$$\Gamma_1 = \Gamma(T) - \Gamma(\gamma T) \quad \text{und} \quad \Gamma_2 = \Gamma(\gamma T).$$

Die zusätzlichen Elemente des expandierten Zustandsvektors sind die diskreten totzeitverzögerten Werte des Eingangsvektors  $\mathbf{u}_i(kT) = \mathbf{u}(kT - [m - i + 1]T)$ . ACKERMANN betrachtete  $\mathbf{u}$  als Systemeingang einer Regelstrecke. Ist hingegen der Eingangsvektor gleich dem Zustandsvektor  $\mathbf{u}(kT) = \mathbf{x}(kT)$ , kann Gleichung (4.57) durch die Addition einer Einheitsmatrix in der linken unteren Ecke der expandierten Systemmatrix umgeformt werden zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{x}_1(kT + T) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(kT + T) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT+T)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\Phi_{\text{exp}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{x}_1(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m(kT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT)}. \quad (4.58)$$

Der Vektor  $\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT) \in \mathbb{R}^{2w(m+1)}$  ist der expandierte Zustandsvektor. Die Stabilität dieses Systems kann schließlich anhand der Eigenwerte der expandierten Systemmatrix  $\Phi_{\text{exp}} \in \mathbb{R}^{(2w[m+1]) \times (2w[m+1])}$  bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \max(|\text{eig}(\Phi_{\text{exp}})|) < 1 &\Leftrightarrow \text{stabiles System,} \\ \max(|\text{eig}(\Phi_{\text{exp}})|) > 1 &\Leftrightarrow \text{instabiles System,} \\ \max(|\text{eig}(\Phi_{\text{exp}})|) = 1 &\Leftrightarrow \text{Stabilitätsgrenze.} \end{aligned} \quad (4.59)$$

Bei allgemeinerer Betrachtung kann der Eingangsvektor auch als lineare Abbildung des Systemvektors angenommen werden:

$$\mathbf{u}(kT) = \mathbf{L} \mathbf{x}(kT), \quad \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{l \times 2w}. \quad (4.60)$$

Anstatt der Einheitsmatrix ist dann die Matrix  $\mathbf{L}$  in der linken unteren Ecke der expandierten Systemmatrix zu addieren:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{u}_1(kT + T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l \times l} & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{I}_{l \times l} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} & \cdots & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT) \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

Ist die Dimension des Eingangsvektors  $\mathbf{u}(kT)$  kleiner als die Dimension des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(kT)$ , wird hierdurch die Größe der expandierten Systemmatrix auf  $\Phi_{\text{exp}} \in \mathbb{R}^{(2w+m) \times (2w+m)}$  reduziert. Die Eigenwerte der expandierten Systemmatrix können dann schneller berechnet werden.

Die Systeme der Gleichungen (4.58) und (4.61) lassen sich mit Hilfe einer invertierbaren Matrix  $\mathbf{V}$  auch wie folgt angeben:

$$\underbrace{\mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}(kT + T)}_{\dot{\mathbf{x}}_{\text{exp}}^*(kT+T)} = \underbrace{\mathbf{V} \Phi_{\text{exp}} \mathbf{V}^{-1}}_{\Phi_{\text{exp}}^*} \underbrace{\mathbf{V} \mathbf{x}(kT)}_{\mathbf{x}_{\text{exp}}^*(kT)}. \quad (4.62)$$

Die Matrix  $\mathbf{V}$  lässt sich nun so bestimmen, dass durch sie die totzeitverzögerten Eingänge  $\mathbf{u}_i(kT)$  des expandierten Zustandsvektors  $\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT)$  in ihrer Reihenfolge vertauscht werden:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_m(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1(kT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{exp}}^*(kT)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{w \times w} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbf{I}_{l \times l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l \times l} & & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT)}. \quad (4.63)$$

Die Matrix  $\mathbf{V}$  ist in diesem Fall eine Permutationsmatrix für die gilt:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1}$ . Mit der neuen expandierten Systemmatrix  $\Phi_{\text{exp}}^* = \mathbf{V} \Phi_{\text{exp}} \mathbf{V}^{-1}$  ist das neue System dann

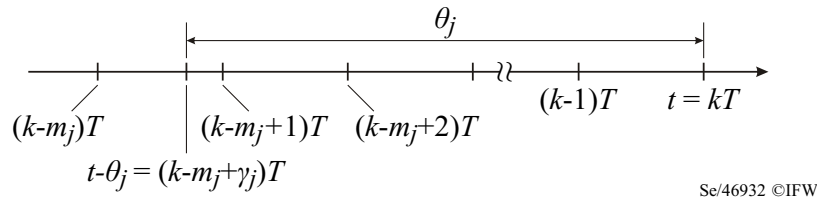
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT + T) \\ \mathbf{u}_m(kT + T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1(kT + T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} & & \cdots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{l \times l} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{I}_{l \times l} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_m(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1(kT) \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Diese Art der Darstellung ist in der Literatur ebenfalls gebräuchlich und findet sich z. B. in [Ins02; Ins04b; Har06].

### 4.2.3 Erweiterung der Diskretisierungsmethode nach ACKERMANN auf Systeme mit mehreren Totzeiten

In Kapitel 4.2.1 wurde gezeigt, dass die mathematische Modellierung der Prozessdynamik ungleich geteilter Fräser auf eine Differentialgleichung mit mehreren Totzeiten führt. Im vorhergehenden Kapitel wurde ACKERMANN'S Methode zur regelungstechnischen Behandlung von Systemen mit einem einzelnen Totzeitterm erläutert. In diesem Kapitel wird diese Methode auf Systeme mit mehreren Totzeiten erweitert. Zunächst wird das autonome System aus Gleichung (4.45) betrachtet. Diese Gleichung weist  $z$  Totzeiten auf. Durch die in Kapitel 4.2.2 beschriebene Vorgehensweise kann das System diskretisiert werden. Dazu wird das Abtastintervall  $T$  in Abhängigkeit der maximalen Totzeit  $\theta_{\text{max}} = \max\{\theta_1, \dots, \theta_z\}$  bestimmt:

$$T = \frac{\theta_{\text{max}}}{m} \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}. \quad (4.65)$$



Se/46932 ©IFW

Bild 4.6: Zeitachse.

Die zeitdiskrete Systemmatrix ist dann

$$\bar{\Phi} = e^{\bar{\mathbf{A}} T} . \quad (4.66)$$

Der verzögerte Zeitpunkt  $t - \theta_j = kT - \theta_j$  liegt zwischen den beiden Zeitpunkten  $(k - m_j)T$  und  $(k - m_j + 1)T$  mit<sup>3</sup>  $m_j = \left\lceil \frac{\theta_j}{T} \right\rceil$  (siehe Bild 4.6). Für jeden der  $z$  Totzeitterme werden zwei zeitdiskrete Eingangsmatrizen  $\bar{\Gamma}_{j,1}$  und  $\bar{\Gamma}_{j,2}$  berechnet<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{j,1} &= \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}} v} dv \bar{\mathbf{B}} - \int_0^{\gamma_j T} e^{\bar{\mathbf{A}} v} dv \bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{2w \times l} , \\ \bar{\Gamma}_{j,2} &= \int_0^{\gamma_j T} e^{\bar{\mathbf{A}} v} dv \bar{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{2w \times l} . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Mit der zeitdiskreten Systemmatrix aus Gleichung (4.66) und den zeitdiskreten Eingangsmatrizen aus Gleichung (4.67) kann Gleichung (4.45) als zeitdiskretes System angegeben werden:

$$\mathbf{x}(kT + T) = \bar{\Phi} \mathbf{x}(kT) + \sum_{j=1}^z \left[ \bar{\Gamma}_{j,1} \mathbf{L} \mathbf{x}([k - m_j] T) + \bar{\Gamma}_{j,2} \mathbf{L} \mathbf{x}([k - m_j + 1] T) \right] . \quad (4.68)$$

Bild 4.7 zeigt das dazugehörige Blockschalttdiagramm. Analog zum vorhergehenden Kapitel wird der Zustandsvektor durch  $\mathbf{u}_1(kT), \dots, \mathbf{u}_m(kT)$  expandiert:

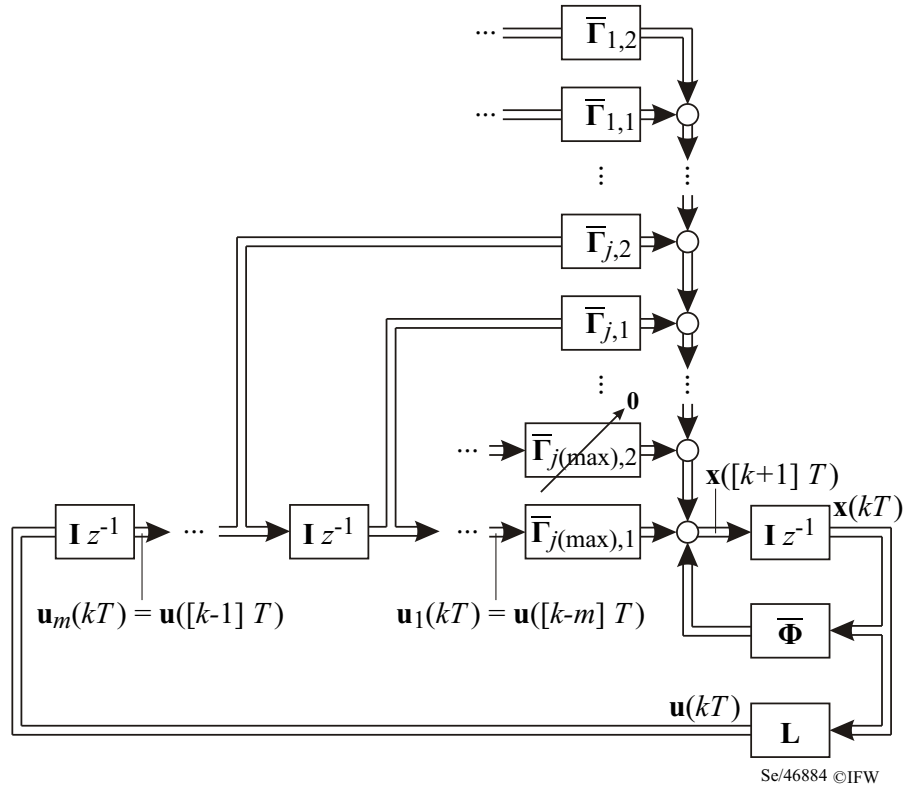
$$\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}_1(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j(kT) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m(kT) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(kT) \\ \mathbf{u}([k - m]T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}([k - j]T) \\ \vdots \\ \mathbf{u}([k - 1]T) \end{bmatrix} . \quad (4.69)$$

<sup>3</sup>Der Term  $\left\lceil \frac{\theta_j}{T} \right\rceil$  ist die Aufrundungsfunktion, die die kleinste ganze Zahl angibt, die größer oder gleich

$\frac{\theta_j}{T}$  ist:  $\lceil x \rceil := \min_{k \in \mathbb{Z}, k \geq x} (k)$ .

<sup>4</sup>Da die maximale Totzeit  $\theta_{\text{max}}$  ein ganzzahliges Vielfaches des Abtastintervalls  $T$  ist, reduziert sich die erste Eingangsmatrix für diese Totzeit zu  $\bar{\Gamma}_{j(\text{max}),1} = \int_0^T e^{\bar{\mathbf{A}} v} dv \bar{\mathbf{B}}$  und die zweite Eingangsmatrix zu  $\bar{\Gamma}_{j(\text{max}),2} = \mathbf{0}$ .





**Bild 4.7:** Blockschaltdiagramm des zeitdiskreten Systems aus Gleichung (4.68).

Mit Hilfe des expandierten Zustandsvektors kann Gleichung (4.68) wie folgt angegeben werden:

$$\mathbf{x}_{\text{exp}}(kT + T) = \underbrace{\left[ \bar{\Phi}_{\text{exp},0} + \sum_{j=1}^z \bar{\Gamma}_{\text{exp},j} \right]}_{\bar{\Phi}_{\text{exp}}} \mathbf{x}_{\text{exp}}(kT). \quad (4.70)$$

wobei

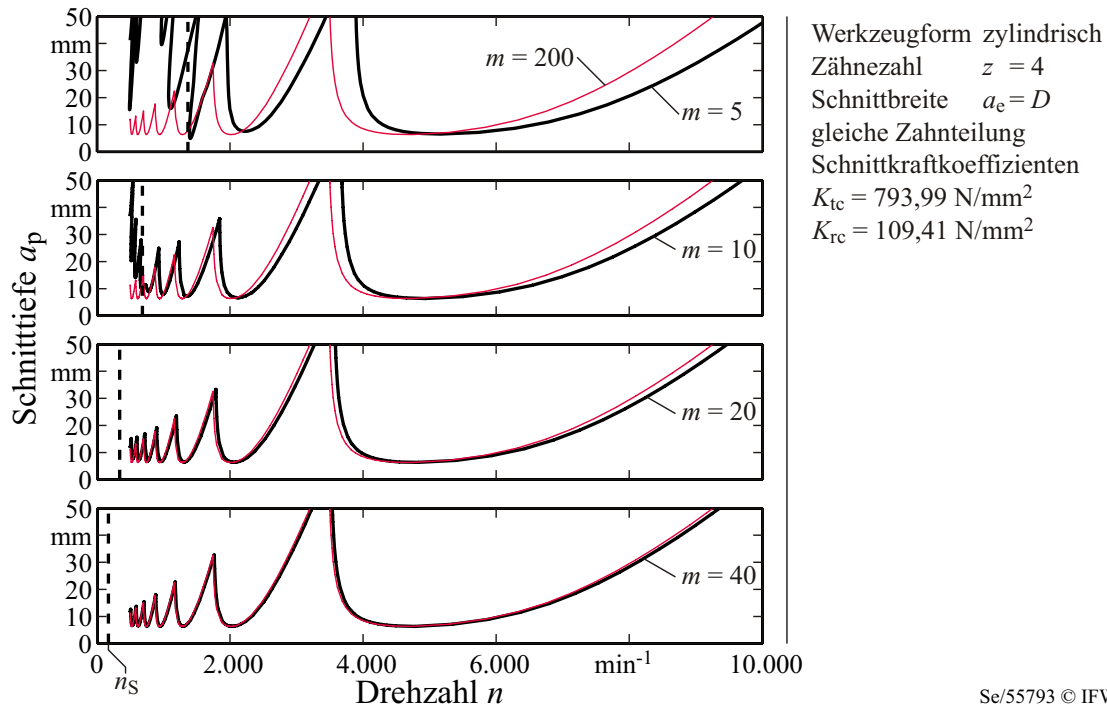
$$\bar{\Phi}_{\text{exp},0} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & & & \\ & & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{I} \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} & \cdots & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \bar{\Gamma}_{\text{exp},j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\Gamma}_{j,1} & \bar{\Gamma}_{j,2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Die horizontale Position der zeitdiskreten Eingangsmatrizen  $\bar{\Gamma}_{j,1}$  und  $\bar{\Gamma}_{j,2}$  innerhalb der expandierten zeitdiskreten Eingangsmatrizen  $\bar{\Gamma}_{\text{exp},j}$  hängt von der jeweiligen Totzeit  $\theta_j$  und der Abtastzeit  $T$  ab. Die Spalte von  $\bar{\Gamma}_{\text{exp},j}$ , in der die zeitdiskrete Eingangsmatrix  $\bar{\Gamma}_{j,1}$  beginnt, ist

$$1 + 2w + l(m - m_j). \quad (4.72)$$

Die zeitdiskrete Eingangsmatrix  $\bar{\Gamma}_{j,2}$  beginnt in der

$$1 + 2w + l(1 + m - m_j) \quad (4.73)$$



Se/55793 © IFW

**Bild 4.8:** Einfluss der Diskretisierungszahl  $m$  auf die numerische Approximation der Stabilitätsgrenze. Die gestrichelte Linie ist die Drehzahlgrenze  $n_S$ , unterhalb derer das SHANNON-Theorem gemäß Gleichung (4.74) nicht erfüllt ist. Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4.

Spalte direkt neben  $\bar{\Gamma}_{j,1}$ . Wie bereits in Kapitel 4.2.2 erwähnt wurde, kann die Stabilität des Systems durch die Berechnung der Eigenwerte der expandierten Systemmatrix  $\bar{\Phi}_{\text{exp}}$  ermittelt werden (siehe Gleichung (4.59)). Zur Ermittlung von Stabilitätskarten kann dann z. B. die Parameterebene aus Drehzahl  $n$  und Schnitttiefe  $a_p$  in äquidistanten Schritten gescannt werden.

Besondere Vorsicht ist bei der Wahl der Anzahl der Diskretisierungsintervalle  $m$  der maximalen Totzeit geboten. Eine untere Grenze ergibt sich durch das SHANNON-Abtasttheorem [Sha49]. Dieses Theorem besagt, dass ein kontinuierliches, bandbegrenztes Signal mit einer Minimalfrequenz von 0 Hz und einer Maximalfrequenz  $f_{\text{max}}$ , mit einer Frequenz größer als  $2 f_{\text{max}}$  abgetastet werden muss, damit aus dem so erhaltenen zeitdiskreten Signal das Ursprungssignal ohne Informationsverlust (aber mit unendlich großem Aufwand) exakt rekonstruiert und (mit endlichem Aufwand) beliebig genau approximiert werden kann. Zur Überprüfung der approximierten Stabilitätsgrenze anhand dieses Theorems wird im vorliegenden Fall näherungsweise die höchste Eigenfrequenz der Strukturdynamik  $f_{\text{eig,max}}$  herangezogen. Bei gegebenem Diskretisierungsparameter  $m$  lässt sich der Drehzahlbereich, in dem das SHANNON-Theorem beachtet wird, für einen gleich geteilten Fräser wie folgt angeben:

$$n > \frac{2 f_{\text{eig,max}}}{m z} = n_S . \quad (4.74)$$

Bild 4.8 zeigt Stabilitätskarten, bei denen der Diskretisierungsparameter  $m$  variiert wird. Als Referenz dient die Stabilitätskarte mit  $m = 200$ . Die anhand des SHANNON-Abtasttheorems berechnete Drehzahlgrenze ist als gestrichelte Linie eingezeichnet. Unterhalb dieser Grenze treten deutliche Abweichungen zur eigentlichen Stabilitätsgrenze auf. Die

Abweichungen oberhalb dieser Grenze sind numerisch bedingt. Mit größer werdendem Diskretisierungsparameter  $m$  nähert sich die approximierte Stabilitätsgrenze der Referenz mit  $m = 200$  sehr schnell an. Wird  $m$  zu groß gewählt, führt dies zu unnötig langen Berechnungszeiten.

#### 4.2.4 Kombination der Diskretisierungsmethode mit der Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme

Aus der Literatur ist für gleich geteilte Fräser bekannt, dass die Mittelung des zeitvarianten Systems, das den dynamischen Fräsprozess beschreibt, zu Fehlern bei der Berechnung der theoretischen Stabilitätsgrenze führen kann. Diese Fehler sind umso gravierender, je ausgeprägter die Zeitvarianz des Systems ist. Dies ist z. B. bei kleinen Verhältnissen von Schnittbreite zu Werkzeugdurchmesser  $\frac{a_e}{D} \ll 1$  der Fall [Dav00; Mer04; Gra05a].

Eine Alternative zur Mittelung des zeitvarianten Systems ist die Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme [Hsu74; Naa87]. Mit dieser Methode kann die Transitionsmatrix  $\Phi(t_0 + T_p, t_0)$  des zeitvarianten  $T_p$ -periodischen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}, \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{A}(t + T_p) \quad (4.75)$$

näherungsweise bestimmt werden. Die zeitvariante Systemmatrix wird dabei nicht über eine ganze Periode  $T_p$ , sondern über ein hinreichend kleines Zeitintervall  $h_k = t_k - t_{k-1}$  gemittelt:

$$\bar{\mathbf{A}}_k = \frac{1}{h_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{A}(\tau) d\tau \quad \text{für } t_{k-1} \leq t \leq t_k. \quad (4.76)$$

Die Transitionsmatrix für dieses Zeitintervall ist

$$\Phi(t_k, t_{k-1}) \approx e^{\bar{\mathbf{A}}_k h_k}. \quad (4.77)$$

Zur Berechnung der Transitionsmatrix für die gesamte Periode des Systems  $[t_0, t_0 + T_p]$  wird diese in  $m^*$  Intervalle  $h_k$  aufgeteilt:

$$T_p = m^* h_k. \quad (4.78)$$

Die Transitionsmatrix für die gesamte Periode des Systems lässt sich dann durch das Produkt der Transitionsmatrizen der einzelnen Intervalle approximieren [Hsu74; Naa87]:

$$\Phi(t_0, t_0 + T_p) = \Phi(t_{m^*}, t_{m^*-1}) \Phi(t_{m^*-1}, t_{m^*-2}) \dots \Phi(t_2, t_1) \Phi(t_1, t_0). \quad (4.79)$$

Diese Methode kann mit der Methode von ACKERMANN folgendermaßen kombiniert werden. Die Periode des Systems aus Gleichung (4.42) wird in  $m^*$  Intervalle  $h_k = t_k - t_{k-1}$  aufgeteilt. Für jedes dieser Intervalle wird die Systemmatrix durch ihren Mittelwert ersetzt. Dies geschieht analog zu Gleichung (4.44) mit der Besonderheit, dass die Integrationsgrenzen hier  $t_{k-1}$  und  $t_k$  sind und  $T_p$  durch  $h_k$  ersetzt wird. In jedem der Intervalle wird das nichtautonome System aus Gleichung (4.42) durch ein autonomes ersetzt. Für jedes Intervall  $h_k$  wird die expandierte Systemmatrix  $\Phi_{\text{exp},k}$  mit der in Kapitel 4.2.3 beschriebenen Methode berechnet. Das Abtastintervall ist hierbei  $T = h_k = \frac{T_p}{m^*}$ . Da das

Abtastintervall  $T$  durch die Anzahl der stückweise konstanten Ersatzsysteme  $m^*$  definiert wird, ist die maximale Totzeit  $\theta_{\max}$  nicht mehr zwangsläufig ein ganzzahliges Vielfaches des Abtastintervalls. In diesem Fall können die diskreten Eingangsmatrizen der maximalen Totzeit nicht vereinfacht werden, sondern ergeben sich durch Gleichung (4.67). Des Weiteren ergibt sich der Parameter  $m$  durch

$$m = \left\lceil \frac{\theta_{\max}}{T} \right\rceil . \quad (4.80)$$

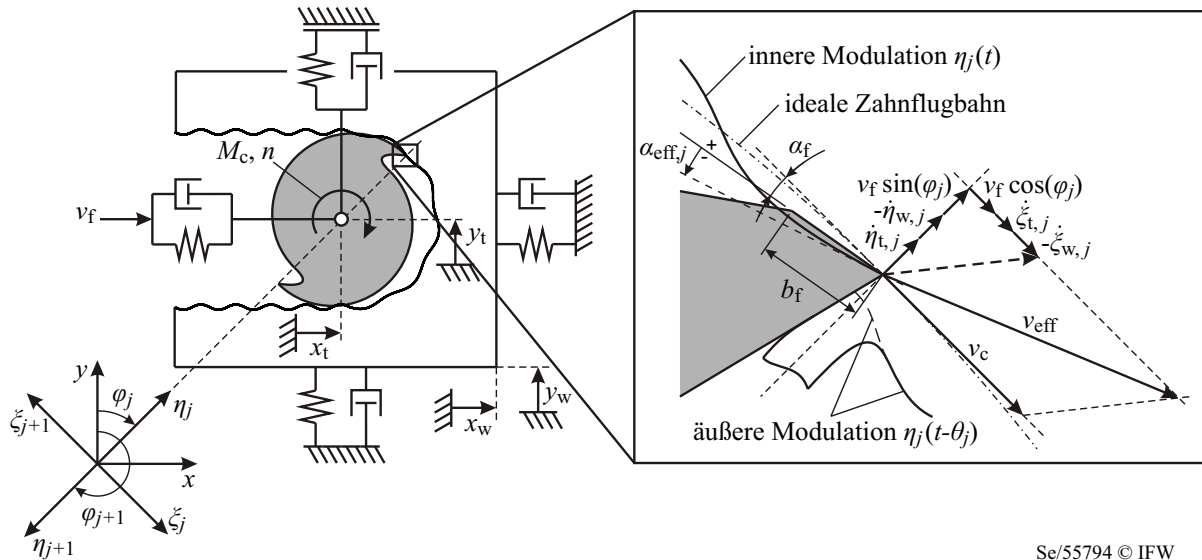
In Abhängigkeit der Anzahl der stückweise konstanten Ersatzsysteme  $m^*$  ist der Aufwand zur Berechnung einer Stabilitätskarte signifikant größer als bei der im vorhergehenden Kapitel vorgestellten Methode.  $m^*$  sollte so groß gewählt werden, dass das SHANNON-Abtasttheorem beachtet wird und der zeitvariante Charakter der Systemmatrizen hinreichend genau abgebildet wird. Eine Möglichkeit, die Geschwindigkeit der Berechnung einer Stabilitätskarte zu steigern, ist es, das Scannen der  $n$ - $a_p$ -Parameterebene durch einen sogenannten Curve-Tracking-Algorithmus zu ersetzen. HENNINGER und EBERHARD haben in [Hen07] einen für diese Zwecke geeigneten Algorithmus veröffentlicht. Einige der in Kapitel 5 präsentierten Stabilitätskarten sind mit einer abgewandelten Version dieses Algorithmus berechnet worden. Der Einsatz solcher Curve-Tracking-Algorithmen ist jedoch nur dann möglich, wenn keine stabilen oder instabilen Inseln in der Stabilitätskarte auftreten.

### 4.3 Dynamisches Prozesskraftmodell und Erweiterung der Methoden zur Berechnung der Stabilitätsgrenzen um geschwindigkeitsabhängige Effekte

Für die Berechnung der Prozessstabilität ist das verwendete Prozesskraftmodell von besonderer Bedeutung. Das Prozesskraftmodell beschreibt die in Abhängigkeit des jeweiligen Systemzustands zwischen Werkzeug und Werkstück wirkenden Prozesskräfte. Eines der verbreitetsten Modelle ist das von FRIEDRICH [Fri09] (siehe Kapitel 2.4). Zwar wird neben der durch die Scherung des Werkstoffs bedingten Prozesskraftanteile auch ein Reiben der Schneiden durch die Reibkoeffizienten  $K_{te}$ ,  $K_{re}$  und  $K_{ae}$  berücksichtigt, jedoch haben diese Reibanteile keinerlei Einfluss auf die berechneten Stabilitätsgrenzen, da sie nicht von dem Schwingungszustand des Systems abhängen, sondern lediglich von der Länge der sich im Eingriff befindenden Schneiden. Prozessdämpfungseffekte, deren Ursache in dem dynamischen Kontakt zwischen der Freifläche der Schneide und der welligen Werkstückoberfläche, also der inneren Modulation, zu suchen ist, werden von diesem Prozesskraftmodell nicht berücksichtigt. Im Folgenden wird das Prozesskraftmodell von FRIEDRICH um Prozessdämpfungseffekte unter besonderer Berücksichtigung von Freiflächenfasen erweitert. Bild 4.9 zeigt für den dynamischen Fräsprozess den Ausschnitt eines im Eingriff befindlichen Segments einer mit einer Freiflächenfase versehenen Schneide. Die Freiflächenfase wird über die Fasenbreite  $b_f$  und den Fasenwinkel  $\alpha_f$  charakterisiert. Im Folgenden werden verschiedene Definitionen des Freiwinkels benutzt (vgl. [DIN 6581], [DIN 6582] und [ISO 3002-1]):

#### **Erster Werkzeug-Orthogonalfreiwinkel $\alpha_f$**

Der erste Werkzeug-Orthogonalfreiwinkel (Fasenwinkel)  $\alpha_f = \alpha_{o1}$  ist der Win-



Se/55794 © IFW

Bild 4.9: Prozessdämpfung an der Freifläche.

kel zwischen der ersten Hauptfreifläche (Fase)  $A_{\alpha 1}$  und der Werkzeug-Schneidenebene  $P_s$ , gemessen in der Werkzeug-Orthogonalebene  $P_o$ .

#### Wirk-Orthogonalfreiwinkel $\alpha_{oe1,j}$

Der Wirk-Orthogonalfreiwinkel  $\alpha_{oe1,j}$  ist der Winkel zwischen der ersten Hauptfreifläche (Fase)  $A_{\alpha 1}$  und der Wirk-Schneidenebene  $P_{se}$ , gemessen in der Wirk-Orthogonalebene  $P_{oe}$ .

#### Effektiver Orthogonalfreiwinkel $\alpha_{eff,j}$

Der effektive Orthogonalfreiwinkel  $\alpha_{eff,j}$  ist der Winkel zwischen der ersten Hauptfreifläche (Fase)  $A_{\alpha 1}$  und einer Ebene, die tangential zur „tatsächlichen“ Werkstückoberfläche unmittelbar hinter der Schneidkante liegt, gemessen in der Werkzeug-Orthogonalebene  $P_o$ .

Der Wirkrichtungswinkel  $\eta_j$  ist nach [DIN 6580] und [ISO 3002-1] der Winkel zwischen der Wirkrichtung und der Schnitttrichtung:

$$\tan(\eta_j) = \frac{\sin(\phi_j)}{\frac{v_c}{v_f} + \cos(\phi_j)} = \frac{\sin(\phi_j)}{\frac{\pi D}{z f_z} + \cos(\phi_j)}. \quad (4.81)$$

Für zylindrische Fräser (axialer Eingriffswinkel  $\kappa = 90^\circ$ ) gilt:

$$\eta_j = \alpha_f - \alpha_{oe1,j}. \quad (4.82)$$

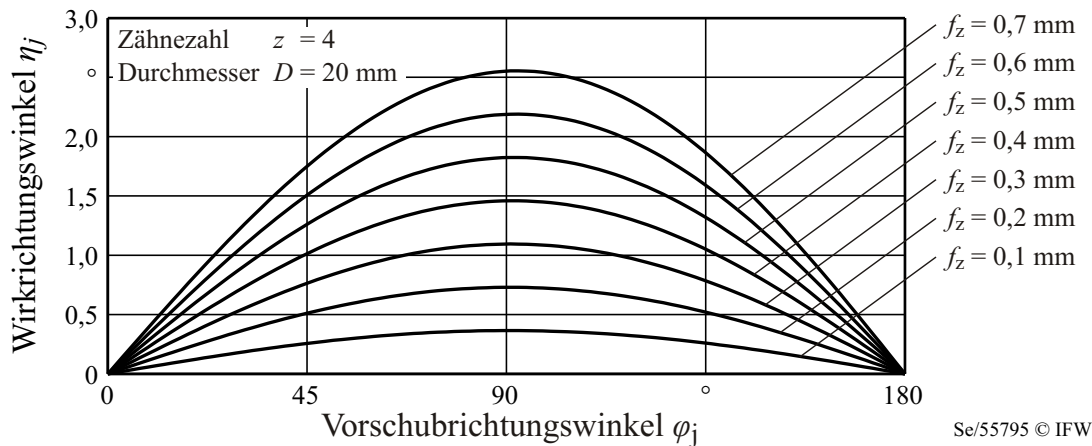
Der Wirkrichtungswinkel kann daher als vorschubbedingte Änderung des Freiwinkels interpretiert werden. Bild 4.10 zeigt den Wirkrichtungswinkel in Abhängigkeit des Vorschubrichtungswinkels für verschiedene Zahnvorschübe. In diesem Fall liegt bei einem Zahnvorschub von  $f_z = 0,3 \text{ mm}$  das Maximum des Wirkrichtungswinkels bereits über  $1^\circ$ . Würde in diesem Fall ein Fräser mit einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  eingesetzt werden, käme es im Vollnutenschnitt zu einem starken Drücken der Fase, da der Wirk-Orthogonalfreiwinkel bei einem Vorschubrichtungswinkel um  $\phi_j = 90^\circ$  negativ werden würde. Wird der Fräser hingegen nur zum Schlichten und somit bei geringen Schnittbreiten  $a_e$

eingesetzt, bleibt der Wirk-Orthogonalfreiwinkel positiv, da der Wirkrichtungswinkel in diesem Bereich klein ist. Bei der Auslegung des Fasenwinkels ist daher auf einen positiven Wirk-Orthogonalfreiwinkel zu achten. Zur Beschreibung einer möglichen elastischen Relaxation des Werkstückmaterials unterhalb der Freifläche wird der Relaxationswinkel  $\eta_r$  eingeführt. Bild 4.11 veranschaulicht diesen Winkel. Er sei wie folgt definiert:

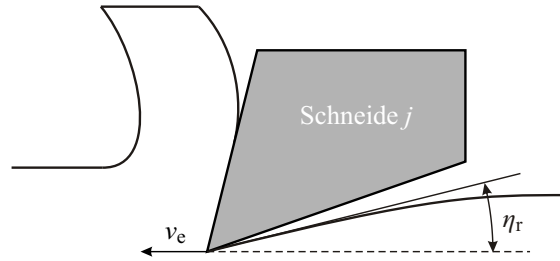
### Relaxationswinkel $\eta_r$

Der Relaxationswinkel  $\eta_r$  ist der Winkel zwischen einer Ebene, die tangential zur „tatsächlichen“ Werkstückoberfläche unmittelbar hinter der Schneidkante liegt, und der Wirk-Schneidenebene  $P_{se}$ , gemessen in der Wirk-Orthogonalebene  $P_{oe}$ .

Entscheidend für das Stabilitätsverhalten des Fräsprozesses ist der dynamische Kontakt zwischen Freifläche (Fase) und Werkstückoberfläche. Die Relativgeschwindigkeit zwischen Schneide und Werkstück, die sich im quasistatischen Fall aus der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$  und der Vorschubgeschwindigkeit  $v_f$  zusammensetzt, wird nun durch die Schwinggeschwindigkeit des Schneidensegments und des Werkstücks in Schnitt- und Schnittnormalenrichtung  $\dot{\xi}_{t,j}$  und  $-\dot{\xi}_{w,j}$  bzw.  $\dot{\eta}_{t,j}$  und  $-\dot{\eta}_{w,j}$  überlagert. Wird der effektive Freiwinkel negativ, so kommt es theoretisch zu einer Durchdringung zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche. In der Praxis drückt die Freifläche in die Werkstückoberfläche. Der Kontakt zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche erzeugt zusätzliche zwischen Werkstück und Werkzeug in Schnitt- und Schnittnormalenrichtung wirkende Kraftkomponenten  $dF_{pd,r,j}$  und  $dF_{pd,t,j}$  (siehe Bild 4.12). Im Folgenden werden diese Kraftkomponenten in Abhängigkeit des Schwingungszustands des Systems beschrieben. Da die radiale Kraftkomponente  $dF_{pd,r,j}$  der Schwingungsrichtung entgegenwirkt, werden  $dF_{pd,r,j}$  und  $dF_{pd,t,j}$  als radiale und tangentielle Komponenten der Prozessdämpfungskraft bezeichnet. Der Begriff *Prozessdämpfung* (auf Englisch: process damping) ist auch in der Literatur üblich (siehe Kapitel 2.4.2). Genau betrachtet stellen  $dF_{pd,r,j}$  und  $dF_{pd,t,j}$  jedoch geschwindigkeitsabhängige Prozesskraftanteile dar, deren dämpfende oder möglicherweise auch anfachende Wirkung des konkreten Nachweises bedarf. Dass der Begriff *Prozessdämpfung* durchaus gerechtfertigt ist, wird in Kapitel 5.2 gezeigt. Es erscheint naheliegend die Prozessdämpfungskraft wie in [Wu89] in Abhängigkeit des verdrängten Werkstückvolumens  $dV$  zu

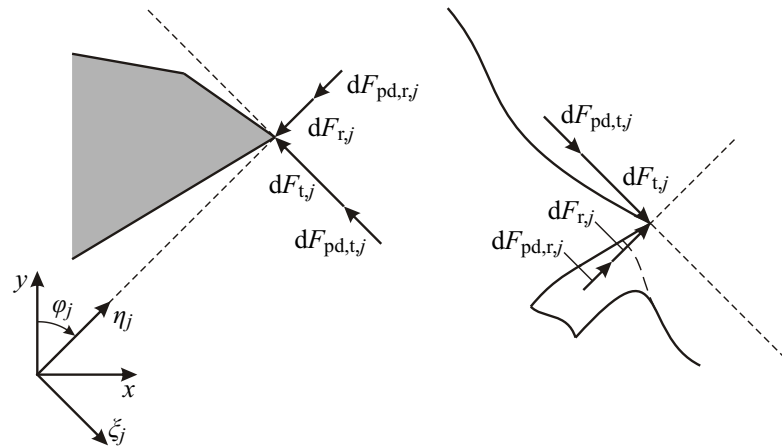


**Bild 4.10:** Wirkrichtungswinkel  $\eta_j$  in Abhängigkeit des Vorschubrichtungswinkels  $\phi_j$  für verschiedene Zahnvorschübe  $f_z$ .



Se/55796 © IFW

**Bild 4.11:** Elastische Relaxation des Werkstückmaterials unterhalb der Schneide.



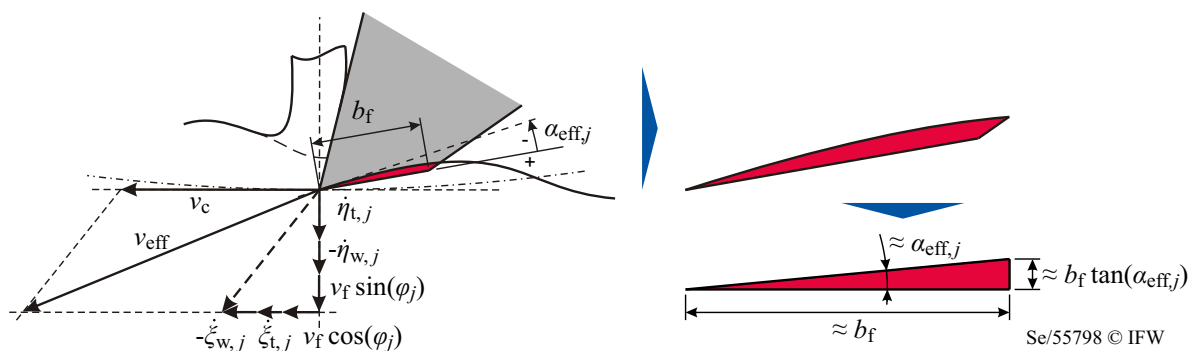
Se/55797 © IFW

**Bild 4.12:** Freikörperbild einer gefasteten Schneide und des Werkstücks.

modellieren:

$$\begin{aligned} dF_{pd,r,j} &= K_{pd} dV_j, \\ dF_{pd,t,j} &= \mu dF_{pd,r,j}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

$dF_{pd,r,j}$  ist die in Schnittnormalenrichtung zeigende Komponente der Prozessdämpfungskraft. Die in Schnittrichtung zeigende Komponente  $dF_{pd,t,j}$  ergibt sich durch die Annahme einer COULOMB'schen Reibung mit  $\mu$  als Reibungskoeffizient. Der Prozessdämpfungskoeffizient  $K_{pd}$  beschreibt das als proportional angenommene Verhältnis aus verdrängtem Werkstückvolumen  $dV_j$  und der Prozessdämpfungskraft. Zur Berechnung des verdrängten Werkstückvolumens wird der Querschnitt des Volumens, wie in Bild 4.13 dargestellt, zu einem Dreieck vereinfacht. Das verdrängte Volumen lässt sich dann wie folgt berechnen:



Se/55798 © IFW

**Bild 4.13:** Approximation des durch die Freiflächenfase verdrängten Volumens.

$$\begin{aligned}
dV_j &= g_j(\phi_j) f_j(\phi_j) \frac{1}{2} b_f^2 \tan(\alpha_{\text{eff},j}) dz, \\
&\approx g_j(\phi_j) f_j(\phi_j) \frac{1}{2} b_f^2 \alpha_{\text{eff},j} dz.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Die Funktion  $g_j$  ist die Sprungfunktion des Schneideneingriffs (siehe Gleichung (4.24)). Die Funktion  $f_j$  dient der Berücksichtigung des Vorzeichens des effektiven Freiwinkels:

$$f_j = f_j(\alpha_{\text{eff},j}) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } \alpha_{\text{eff},j} \leq 0^\circ \\ 0 & \text{wenn } \alpha_{\text{eff},j} > 0^\circ \end{cases}. \tag{4.85}$$

Der effektive Freiwinkel des  $j$ -ten Zahns  $\alpha_{\text{eff},j}$  ist eine Funktion des Fasenwinkels  $\alpha_f$ , des Relaxationswinkels  $\eta_r$ , der Schnittgeschwindigkeit  $v_c$ , der Vorschubgeschwindigkeit  $v_f$ , des Vorschubrichtungswinkels  $\phi_j$  und der ersten Ableitungen der Werkzeug- und Werkstückauslenkungen  $\dot{\eta}$  und  $\dot{\xi}$  im Werkzeugkoordinatensystem:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{eff},j} &= \alpha_f - \eta_r - \tan^{-1} \left( \frac{\dot{\eta}_{t,j} - \dot{\eta}_{w,j} + v_f \sin(\phi_j)}{\dot{\xi}_{t,j} - \dot{\xi}_{w,j} + v_f \cos(\phi_j) + v_c} \right), \\
&= \alpha_f - \eta_r - \tan^{-1} \left( \frac{[\dot{x}_{t,j} - \dot{x}_{w,j} + v_f] \sin(\phi_j) + [\dot{y}_{t,j} - \dot{y}_{w,j}] \cos(\phi_j)}{[-\dot{y}_{t,j} + \dot{y}_{w,j}] \sin(\phi_j) + [\dot{x}_{t,j} - \dot{x}_{w,j} + v_f] \cos(\phi_j) + v_c} \right).
\end{aligned} \tag{4.86}$$

Mit den Annahmen, dass die Schnittgeschwindigkeit deutlich größer als die Vorschubgeschwindigkeit ( $v_c \gg v_f$ ) und deutlich größer als die Schwinggeschwindigkeiten des Werkzeugs und Werkstücks ist ( $v_c \gg |\dot{\xi}_{t,j}|, |\dot{\eta}_{t,j}|, |\dot{\xi}_{w,j}|, |\dot{\eta}_{w,j}|$ ), lässt sich die Berechnung des effektiven Freiwinkels vereinfachen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{\text{eff},j} &\approx \alpha_f - \eta_r - \tan^{-1} \left( \frac{\dot{\eta}_{t,j} - \dot{\eta}_{w,j}}{v_c} \right), \\
&\approx \alpha_f - \eta_r - \frac{\dot{\eta}_{t,j} - \dot{\eta}_{w,j}}{v_c}.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Unter der Annahme, dass  $\alpha_f = \eta_r$ , ergeben sich die Prozessdämpfungskraftkomponenten in Bezug auf die Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung durch

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{\text{pd},f} \\ F_{\text{pd},fN} \\ F_{\text{pd},p} \end{bmatrix} &= \sum_{j=1}^z \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\text{pd},xyz,j} & \begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_j \\ \Delta \dot{y}_j \\ \Delta \dot{z}_j \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \\
\mathbf{Q}_{\text{pd},xyz,j} &= \begin{bmatrix} q_{\text{pd},xx,j} & q_{\text{pd},xy,j} & q_{\text{pd},xz,j} \\ q_{\text{pd},yx,j} & q_{\text{pd},yy,j} & q_{\text{pd},yz,j} \\ q_{\text{pd},zx,j} & q_{\text{pd},zy,j} & q_{\text{pd},zz,j} \end{bmatrix} \\
&= \int_0^{a_p} -g_j f_j \frac{b_f^2}{2 v_c} \mathbf{T} \begin{bmatrix} K_{\text{pd}} \\ \mu K_{\text{pd}} \\ 0 \end{bmatrix} [\sin(\phi_j) \quad \cos(\phi_j) \quad 0] dz.
\end{aligned} \tag{4.88}$$



$\mathbf{Q}_{\text{pd},xyz,j}$  ist die Matrix der projizierten Prozessdämpfungskoeffizienten. Für einen zylindrischen Fräser (axialer Eingriffswinkel  $\kappa = 90^\circ$ ) sind diese:

$$q_{\text{pd},xx,j} = \frac{K_{\text{pd}} b_f^2}{2 v_c} \int_0^{a_p} g_j f_j \left[ \mu \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + \sin^2(\phi_j) \right] dz, \quad (4.89)$$

$$q_{\text{pd},xy,j} = \frac{K_{\text{pd}} b_f^2}{2 v_c} \int_0^{a_p} g_j f_j \left[ \mu \cos^2(\phi_j) + \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \right] dz, \quad (4.90)$$

$$q_{\text{pd},yx,j} = \frac{K_{\text{pd}} b_f^2}{2 v_c} \int_0^{a_p} g_j f_j \left[ -\mu \sin^2(\phi_j) + \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) \right] dz, \quad (4.91)$$

$$q_{\text{pd},yy,j} = \frac{K_{\text{pd}} b_f^2}{2 v_c} \int_0^{a_p} g_j f_j \left[ -\mu \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + \cos^2(\phi_j) \right] dz. \quad (4.92)$$

Die projizierten Prozessdämpfungskoeffizienten sind im Gegensatz zu den projizierten Schnittkraftkoeffizienten nicht nur Funktionen der Zeit  $t$ , sondern hängen durch die Funktion  $f_j$  zusätzlich von der Ableitung des Verlagerungsvektors  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}$  ab. Zur Erweiterung der Gleichung (4.35) um die Kraftanteile der Prozessdämpfung wird analog zu dem Vorgehen bei den projizierten Schnittkraftkoeffizienten folgende Prozessdämpfungsmatrix gebildet:

$$\mathbf{Q}_{\text{pd},j} = \begin{bmatrix} +\mathbf{Q}_{\text{pd},xx,j}^{r \times r} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},xy,j}^{r \times s} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},xx,j}^{r \times u} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},xy,j}^{r \times v} \\ +\mathbf{Q}_{\text{pd},yx,j}^{s \times r} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},yy,j}^{s \times s} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},yx,j}^{s \times u} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},yy,j}^{s \times v} \\ -\mathbf{Q}_{\text{pd},xx,j}^{u \times r} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},xy,j}^{u \times s} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},xx,j}^{u \times u} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},xy,j}^{u \times v} \\ -\mathbf{Q}_{\text{pd},yx,j}^{v \times r} & -\mathbf{Q}_{\text{pd},yy,j}^{v \times s} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},yx,j}^{v \times u} & +\mathbf{Q}_{\text{pd},yy,j}^{v \times v} \end{bmatrix}. \quad (4.93)$$

In dieser Gleichung sind die projizierten Prozessdämpfungskoeffizienten zu Matrizen erweitert, z. B.  $\mathbf{Q}_{\text{pd},xy,j}^{r \times s} = \mathbf{1}_{r \times s} q_{\text{pd},xy,j}$ . Dadurch ergibt sich folgendes System:

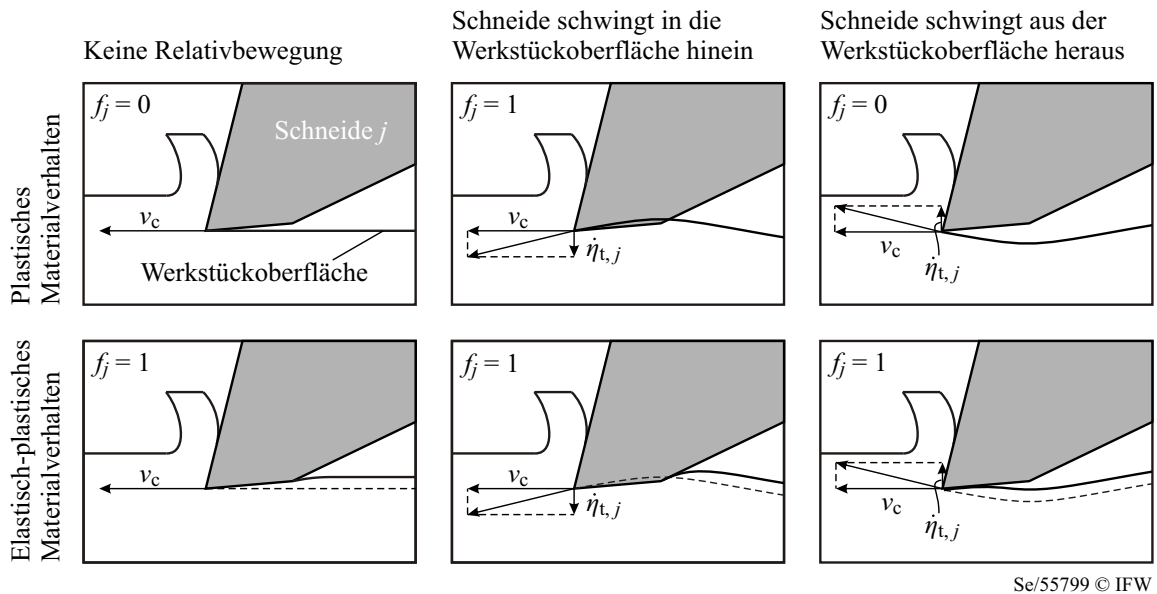
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \left[ \mathbf{D} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_{\text{pd},j}(t, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}_{\text{ges}}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \mathbf{q}_{\text{ges}}(t - \theta_j) \right] + \mathbf{F}_{\text{stat}}. \quad (4.94)$$

Da die dynamische Stabilität dieses Systems aufgrund der Abhängigkeit der Dämpfungsmatrix von der Ableitung des Verlagerungsvektors nicht mehr durch die in Kapitel 4.2 vorgestellte Methode ermittelt werden kann, wird angenommen, dass die Prozessdämpfung unabhängig vom Vorzeichen des effektiven Freiwinkels ist:  $f_j = 1$ . Mit dieser Annahme und unter Vernachlässigung des stationären Lösungsanteils ergibt sich das mit der Methode aus Kapitel 4.2 handhabbare System:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{D} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_{\text{pd},j}(t) \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \mathbf{q}(t - \theta_j) \right]. \quad (4.95)$$

Die Sprungfunktion  $f_i$  aus Gleichung (4.85) beschreibt die mögliche Nichtlinearität des Eindringungseffekts beim Herausschwingen der Schneide. Die Annahme, dass  $f_j = 1$ , lässt sich durch das Materialverhalten begründen. Wird dieses als elastisch-plastisch angenommen, erscheint es denkbar, dass zumindest bei kleinen Fasenwinkeln  $\alpha_f$  und bei kleinen

Schwankungen des effektiven Freiwinkels  $\alpha_{\text{eff},j}$  der Kontakt zwischen Freifläche (Fase) und Werkstückoberfläche aufgrund der elastischen Relaxation des Werkstückmaterials unterhalb der Schneide nicht schlagartig abreißt (Bild 4.14). Dies spräche wiederum für die Annahme, dass  $f_i = 1$ . Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen in Kapitel 5 geben hierüber weiteren Aufschluss. Das System aus Gleichung (4.95) wird in Kapitel 5.2 verwendet, um Stabilitätskarten gefaster Fräser zu berechnen.



**Bild 4.14:** Einfluss des Werkstück-Materialverhaltens auf die Prozessdämpfung.

#### 4.4 Modell zur Simulation des dynamischen Fräsprozesses im Zeitbereich

Die Simulation der Fräsprozessdynamik im Zeitbereich bietet gegenüber anderen Methoden der Stabilitätsanalyse verschiedene Vorteile. So können z. B. Nichtlinearitäten, die durch den dynamischen Verlust des Schneideneingriffs entstehen, und die trochoidale Form der Schneidenflugbahnen abgebildet werden. Zudem können neben der reinen Stabilitätsaussage weitere Prozesskenngrößen wie z. B. die Zerspankraftkomponenten ( $F_f$ ,  $F_{fN}$ ,  $F_p$ ), das Schnittmoment ( $M_c$ ), die Schnittleistung ( $P_c$ ) oder auch die dynamischen Verlagerungen des Werkzeugs und Werkstücks ( $x_t$ ,  $y_t$ ,  $x_w$ ,  $y_w$ ) ermittelt werden. Die Kenntnis dieser Größen ist für die Auslegung von Werkzeugmaschinen, Werkzeugen und Prozessen von Bedeutung. Zudem werden zeitliche Simulationen häufig als Referenz zur Beurteilung der Genauigkeit anderer Verfahren zur Stabilitätsanalyse verwendet. Aus diesem Grund wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Modell zur zeitlichen Simulation der Fräsprozessdynamik entwickelt, das in der Lage ist, nahezu beliebige Fräserformen sowie ungleich geteilte und gefaste Schneiden abzubilden. Das Modell wird im Folgenden vorgestellt.

Die Simulation der Fräsprozessdynamik im Zeitbereich basiert auf einem Höhenlinienmodell. Höhenlinienmodelle wurden in ähnlicher Form bereits von MONTGOMERY und ALTINTAS [Mon91] und SCHMIDT [Sch11] zur Simulation des Materialabtrags und der Eingriffsbedingungen verwendet. Dazu wird das Werkstück und das Fräswerkzeug über

der Schnitttiefe  $a_p$  in  $N$  Ebenen  $l = 1, 2, \dots, N$  diskretisiert. Die axiale  $z$ -Koordinate jeder Ebene ist demnach konstant ( $z_l = \text{konst.}$ ). Bild 4.15 zeigt eine solche Ebene zu den zwei Zeitpunkten  $t_k = kT$  (links) und  $t_{k+1} = kT + T$  (rechts). In den jeweiligen Ebenen wird zum Zeitpunkt  $t_k = kT$  das Werkstück über ein Polygon  $\mathbf{P}_{w,k} = (P_1, P_2, \dots, P_a)$  mit  $P_i \in \mathbb{R}^2$  und die  $j = 1, 2, \dots, z$  Schneiden des Fräswerkzeugs über jeweils zwei Punkte, den Werkzeugmittelpunkt  $O_{t,k} \in \mathbb{R}^2$  und den Punkt der Schneidenspitze  $S_{j,k} \in \mathbb{R}^2$ , beschrieben. Die Menge aller Punkte, die auf dem Kantenzug oder innerhalb des Polygons  $\mathbf{P}_{w,k}$  liegen, sei  $P_{w,k}$ . Da das Werkzeug als dynamisch nachgiebig betrachtet wird, weist der Werkzeugmittelpunkt  $O_{t,k}$  eine Verlagerung  $\Delta x_k$  und  $\Delta y_k$  gegenüber dem Sollpunkt  $Q_{t,k} \in \mathbb{R}^2$  auf. Wird auch das Werkstück als nachgiebig angenommen, kann diese Verlagerung als Relativverlagerung angegeben werden:

$$\Delta x_k = x_t(kT) - x_w(kT), \quad (4.96)$$

$$\Delta y_k = y_t(kT) - y_w(kT). \quad (4.97)$$

Somit gilt:

$$O_{t,k} = Q_{t,k} + \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ \Delta y_k \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Der Sollpunkt des Fräasers  $Q_{t,k}$  wird in jedem Zeitschritt um  $v_f T$  in Vorschubrichtung versetzt. Die Vorschubrichtungswinkel  $\phi_{j,k}$  der einzelnen Schneiden ändern sich in jedem Zeitschritt um  $\Delta\phi = 2\pi n T$ . Dabei kann die Drehzahl auch zeitlich variieren:  $n = n(t)$ . Verfahren zur Drehzahlvariation werden eingesetzt, um den Regenerativeneffekt zu beeinflussen und dadurch die Stabilitätsgrenze zu verschieben (siehe z. B. [Ins01; Sas02; Zat08; Bed09]). Die Untersuchung solcher Effekte ist durch das hier beschriebene Modell zur zeitlichen Simulation der Fräsprozessdynamik zwar möglich, jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit. Um den Materialabtrag zu berechnen, wird zunächst die von der  $j$ -ten Schneide überstrichene Fläche als Polygon dargestellt:

$$\mathbf{P}_{t,j,k} = (O_{t,k-1}, O_{t,k}, S_{j,k}, S_{j,k-1}). \quad (4.99)$$

Das neue Polygon des Werkstücks ergibt sich dann durch die Boolesche Subtraktion der  $z$  Werkzeugpolygone von dem Werkstückpolygon des vorherigen Zeitschritts:

$$\mathbf{P}_{w,k} = \mathbf{P}_{w,k-1} - \sum_{j=1}^z \mathbf{P}_{t,j,k}. \quad (4.100)$$

Diese Operation wird in jedem Zeitschritt auf alle  $N$  Diskretisierungsebenen angewandt. In den einzelnen Ebenen kann der Radius der Schneiden  $R_j$  aufgrund der Hüllkontur des Fräasers oder einer Kordelierung der Schneidkante (Schruppverzahnung) variieren. Ebenso variieren aufgrund des Drallwinkels  $\delta$  in den einzelnen Ebenen die Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$ . Korrekterweise sind die entsprechenden Größen daher mit dem Laufindex  $l$  der Diskretisierungsebenen zu versehen. Das heißt, dass z. B.  $S_{j,k,l}$  den Schneidenpunkt der  $j$ -ten Schneide zum Zeitpunkt  $t_k = kT$  in der  $l$ -ten Diskretisierungsebene darstellt. Durch ein solches Höhenlinienmodell können nun sehr einfach die für die Berechnung der Zerspankraft nötigen Prozessparameter ermittelt werden. Die Länge der im Eingriff befindlichen Schneide zwischen zwei Ebenen ergibt sich durch

$$b_{j,k,l} = \begin{cases} \overline{S_{j,k,l} S_{j,k,l+1}} & \text{wenn } (S_{j,k,l} \subseteq P_{w,k-1,l}) \wedge (S_{j,k,l+1} \subseteq P_{w,k-1,l+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4.101)$$



wandt. Die grundlegende Idee ist, dass der kontinuierliche Verlauf der Zerspankraftkomponenten durch eine Aneinanderreihung einzelner Kraftimpulse – vergleichbar einem Abtast-Halte-Glied – hinreichend genau approximiert werden kann. Der Verlauf der dynamischen Verlagerungen ergibt sich dann durch die Addition der entsprechend zeitversetzten Impulsantworten. Dieses Vorgehen stellt eine diskrete Faltung des Prozesskraftverlaufs mit der Impulsantwort der Strukturmechanik dar. Die Berechnung der Auslenkung des Werkzeugs in  $x$ -Richtung  $x_t[k]$  zu den diskreten Zeitpunkten  $t_k = kT$  geschieht dann wie folgt.  $x_{t,1N}[k]$  sei der Vektor mit den Verlagerungen des Werkzeugs in  $x$ -Richtung nach einem Rechteckimpuls der Höhe 1 N und der Dauer  $[0, T]$ .  $F_f[k]$  sei eine beliebige Folge von Werten der Vorschubkraft. Die Verlagerung des Werkzeugs in  $x$ -Richtung berechnet sich dann durch

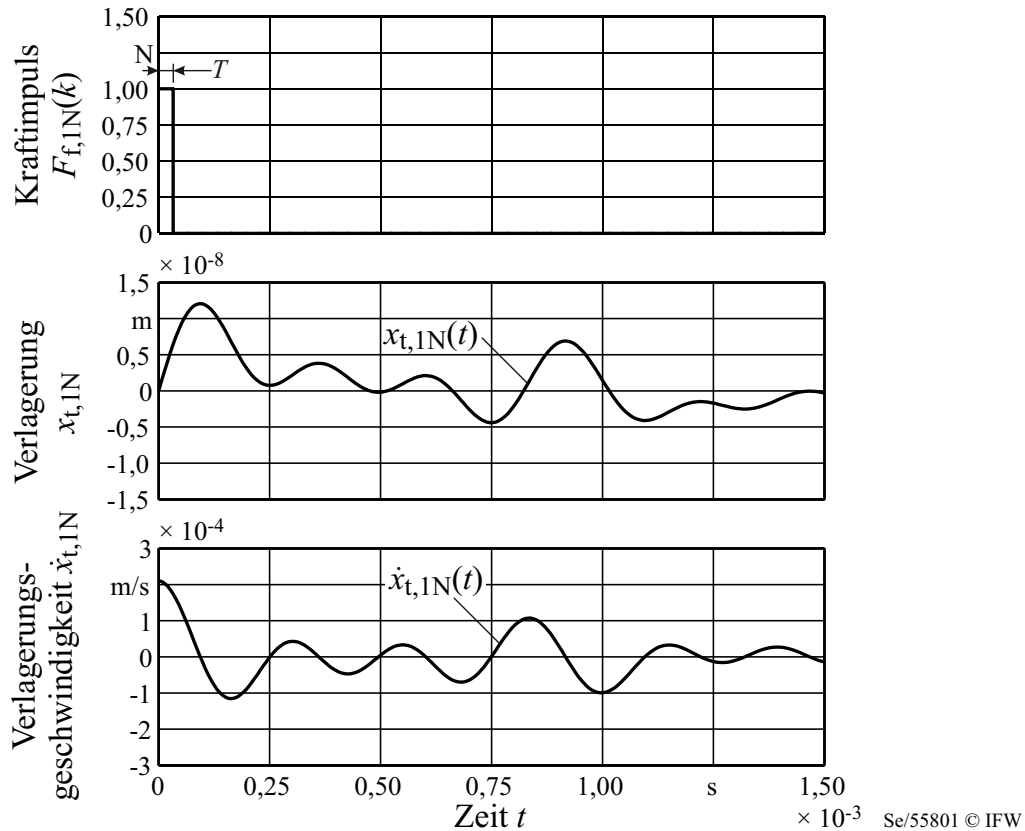
$$x_t[k] = (F_f * x_{t,1N})[k] = \sum_{m=0}^k \left[ \frac{1}{1N} F_f[m] x_{t,1N}[k-m] \right]. \quad (4.104)$$

Die weiteren Verlagerungen des Werkzeugs und des Werkstücks werden in analoger Art und Weise berechnet. Zur Einsparung von Rechenzeit werden anhand der Parameter der Strukturmechanik die vier Impulsantworten (Werkzeug und Werkstück jeweils in  $x$ - und  $y$ -Richtung) nur ein einziges Mal für einen 1 N-Kraftimpuls der Länge  $T$  berechnet und später lediglich mit den jeweiligen Kraftwerten skaliert. Für die Berechnung von geschwindigkeitsabhängigen Kräften (Prozessdämpfung) ist es notwendig, auch die Ableitungen der dynamischen Verlagerungen zu kennen. Hierzu kann auch die oben angegebene Formel verwendet werden, indem die Verlagerungsvektoren durch die Vektoren der Verlagerungsgeschwindigkeiten ersetzt werden. Der Vektor der Verlagerungsgeschwindigkeit des Werkzeugs in  $x$ -Richtung nach einem Rechteckimpuls der Höhe 1 N und der Dauer  $[0, T]$  ist  $\dot{x}_{t,1N}[k]$ . Bild 4.16 zeigt einen 1 N-Kraftimpuls zusammen mit der Verlagerung und Verlagerungsgeschwindigkeit des Werkzeugs in  $x$ -Richtung. Die Umsetzung des Modells erfolgte in MATLAB. Bild 4.17 zeigt einen Auszug aus der graphischen Benutzerschnittstelle. Die auf das Werkstück wirkenden inkrementellen Zerspankraftkomponenten sind hier als Pfeile dargestellt. Die Eingangsgrößen des Modells sind:

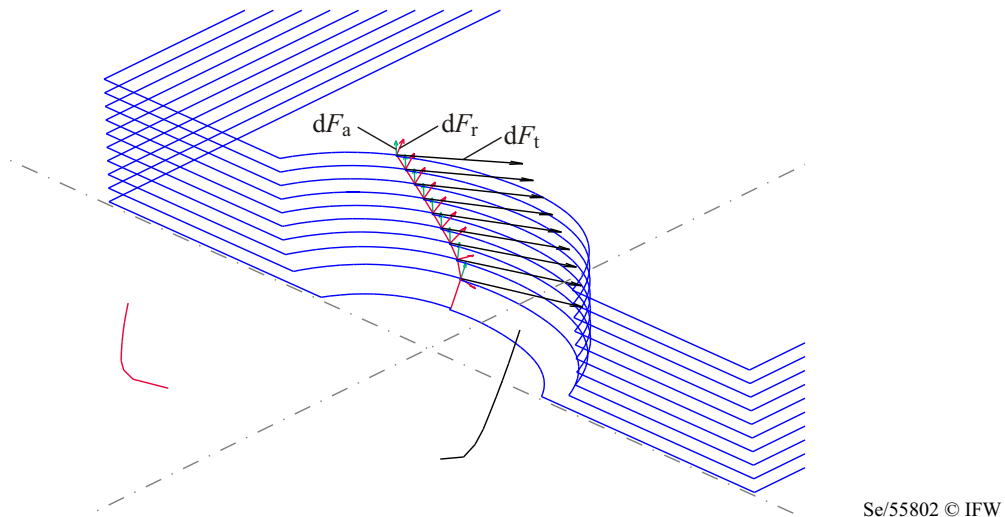
- Parameter der Fräsergestalt: Durchmesser  $D$ , Eckenradius  $R$ , Zähnezahl  $z$ , Drallwinkel  $\delta$ , Zahnteilung  $\mathbf{p}$ , Fasenbreite  $b_f$  etc.
- Tangentiale, radiale und axiale Scher- und Reibkraftkoeffizienten:  $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$ ,  $K_{ac}$ ,  $K_{te}$ ,  $K_{re}$ ,  $K_{ae}$
- Prozessstellgrößen: Drehzahl  $n$ , Schnitttiefe  $a_p$ , Schnittbreite  $a_e$ , Zahnvorschub  $f_z$
- Parameter der Strukturmechanik des Werkzeugs und Werkstücks: Massen  $m_i$ , Dämpfungen  $d_i$ , Steifigkeiten  $k_i$

Die Ausgangsgrößen sind:

- Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkraft:  $F_f$ ,  $F_{fN}$  und  $F_p$
- Aktivkraft:  $F_a$
- Schnittmoment und Schnittleistung:  $M_c$ ,  $P_c$
- Verlagerungen des Werkzeugs und Werkstücks:  $x_t$ ,  $y_t$  und  $x_w$ ,  $y_w$
- Verlagerungsgeschwindigkeiten des Werkzeugs und Werkstücks:  $\dot{x}_t$ ,  $\dot{y}_t$  und  $\dot{x}_w$ ,  $\dot{y}_w$



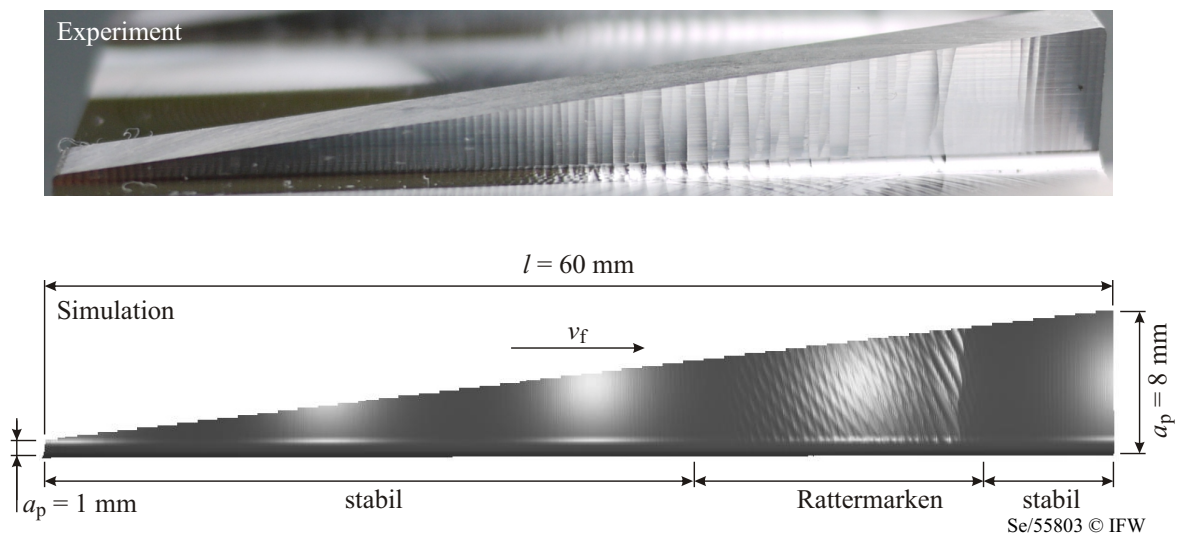
**Bild 4.16:** Kraftimpuls, Verlagerung und Verlagerungsgeschwindigkeit des Werkzeugs in  $x$ -Richtung (Abtastzeit  $T = 3,272 \cdot 10^{-5}$  s, Parameter der Strukturodynamik siehe Tabelle 5.2).



**Bild 4.17:** Materialabtragsmodell und zeitliche Simulation der Prozessdynamik in MATLAB.

Zudem kann während der Simulation der Abtragsprozess graphisch ausgegeben werden (Bild 4.17). Die von den Vorschubriefen und im Falle instabiler Prozesse von Rattermarken gekennzeichnete Flankenoberfläche kann mit Hilfe des GOURAUD-Shading-Verfahrens [Gou71] visualisiert werden. Damit genügend Punkte zur Darstellung des Oberflächenprofils zur Verfügung stehen, ist das Zeitintervall  $T$  hierfür entsprechend klein zu wählen.

Bild 4.18 zeigt die simulierte Flanke eines Rampenschnitts mit steigender Schnitttiefe  $a_p$  im Vergleich zu einem entsprechenden Testschnitt. Im letzten Drittel des Schnitts sind Rattermarken sowohl auf der experimentell erzeugten als auch auf der simulierten Oberfläche zu erkennen. Während der Austrittsphase des Fräsers klingen die Schwingungen aufgrund der geringeren Eingriffsbreite  $a_e$  wieder ab. Die Simulation der Oberflächentopographie ist zwar kein primäres Ziel dieser Arbeit, veranschaulicht jedoch die Leistungsfähigkeit der entwickelten zeitlichen Simulation des dynamischen Fräsprozesses. Da bei instabilen Prozesszuständen sehr hohe Amplituden der Ratterschwingungen auftreten, kommt es selbst bei sehr großen Freiwinkeln zum Kontakt zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche. Dies begrenzt die Ratteramplituden und führt gegenüber der Simulation, die diesen Effekt nicht berücksichtigt, zu Unterschieden in der Ausprägung der Rattermarken.



**Bild 4.18:** Graphische Ausgabe der simulierten Flankenoberfläche.

## 4.5 Methode zur Identifikation der Schnittkraftkoeffizienten

Der Zusammenhang zwischen dynamischen Eingriffsbedingungen der einzelnen Schneiden und den dynamischen Prozesskräften ist für die Stabilitätsanalyse von besonderer Bedeutung. Dieser Zusammenhang wird in dieser Arbeit über das Schnittkraftmodell von FRIEDRICH [Fri09] beschrieben. Die Koeffizienten dieses Modells sind jedoch nicht *a priori* bekannt, sondern müssen über geeignete Verfahren anhand von Prozesskraftmessungen identifiziert werden.

Bisherige Verfahren zur Identifikation der Koeffizienten dieses Schnittkraftmodells basieren auf der Annahme, dass die Koeffizienten sich nicht in Abhängigkeit des Zahnvorschubs  $f_z$  ändern [Bud96; Gra04]. Wie in Kapitel 2 dargestellt, sind zur Identifikation der Koeffizienten bislang mehrere Versuche bei unterschiedlichen Zahnvorschüben  $f_z$  erforderlich. Im Folgenden wird eine Methode beschrieben, die für nahezu beliebige Fräserformen und Zahnteilungen die gesuchten Schnittkraftkoeffizienten anhand eines einzigen Versuchs identifiziert. Hierzu wird der Prozess unter der Annahme, dass das Werkzeug

und Werkstück ideal steif sind, für eine Fräserumdrehung mit der in Kapitel 4.4 beschriebenen Methode zeitlich simuliert. Für diese Simulation sind die Scherkraftkoeffizienten  $K_{tc} = K_{rc} = K_{ac} = 1 \text{ N/mm}^2$  und die Reibkraftkoeffizienten  $K_{te} = K_{re} = K_{ae} = 1 \text{ N/mm}$ . Innerhalb des Algorithmus werden nicht nur die gesamten Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkräfte berechnet, sondern auch die einzelnen Kraftkomponenten, die sich aus den jeweiligen Schnittkraftkoeffizienten ergeben. So ist z. B.  $F_{f,K_{tc}} = F_{f,K_{tc}}[k]$  der Anteil der Vorschubkraft  $F_f$ , der sich zum Zeitpunkt  $t_k = kT$  aus dem Schnittkraftkoeffizienten  $K_{tc} = 1 \text{ N/mm}^2$  ergibt. Insgesamt resultieren aus den sechs Koeffizienten und den drei Krafrichtungen 18 Kraftkomponenten. Sind diese 18 Kraftkomponenten für eine Fräserumdrehung bekannt, so können die Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkräfte für beliebige Kraftkoeffizienten durch folgende Linearkombination berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} F_f \\ F_{fN} \\ F_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{f,K_{tc}} & F_{f,K_{rc}} & F_{f,K_{ac}} & F_{f,K_{te}} & F_{f,K_{re}} & F_{f,K_{ae}} \\ F_{fN,K_{tc}} & F_{fN,K_{rc}} & F_{fN,K_{ac}} & F_{fN,K_{te}} & F_{fN,K_{re}} & F_{fN,K_{ae}} \\ F_{p,K_{tc}} & F_{p,K_{rc}} & F_{p,K_{ac}} & F_{p,K_{te}} & F_{p,K_{re}} & F_{p,K_{ae}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{K_{tc}}{1 \text{ N/mm}^2} \\ \frac{K_{rc}}{1 \text{ N/mm}^2} \\ \frac{K_{ac}}{1 \text{ N/mm}^2} \\ \frac{K_{te}}{1 \text{ N/mm}} \\ \frac{K_{re}}{1 \text{ N/mm}} \\ \frac{K_{ae}}{1 \text{ N/mm}} \end{bmatrix}. \quad (4.105)$$

Da der Prozess sich spätestens nach einer Umdrehung wiederholt, können mehrere Umdrehungen durch die Aneinanderreihung der für eine Umdrehung berechneten Kräfte ermittelt werden. Bild 4.19 zeigt beispielhaft den Verlauf der 18 Kraftkomponenten für einen Vollnutenschnitt mit einem Torusfräser. In jeder Zeile des Diagramms ist der jeweilige Kraftkoeffizient konstant eins und alle anderen Kraftkoeffizienten sind null. Auffällig ist, dass die radialen Scher- und Reibkraftkoeffizienten  $K_{rc}$  und  $K_{re}$  auch einen Anteil an der Passivkraft und dass die axialen Scher- und Reibkraftkoeffizienten  $K_{ac}$  und  $K_{ae}$  auch einen Anteil an der Vorschub- und Vorschubnormalkraft haben. Ursache hierfür ist der Eckenradius, in dessen Bereich der axiale Eingriffswinkel  $\kappa$  von  $90^\circ$  auf  $0^\circ$  abnimmt. Dadurch ändern sich die Richtungen der Radial- und Axialkräfte. Die Identifikation der Kraftkoeffizienten erfolgt nun durch die Minimierung des Gütefunktional

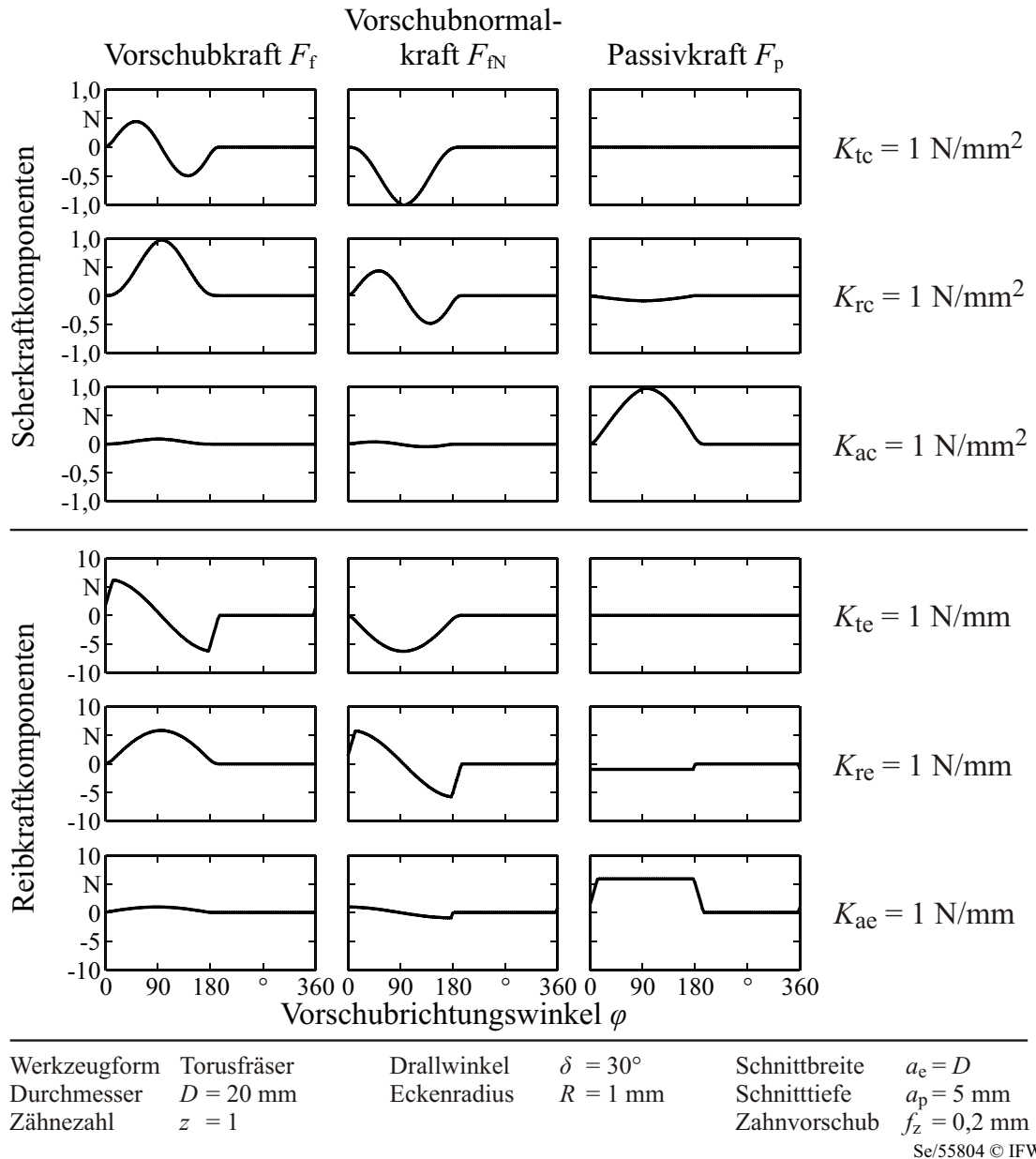
$$G = \frac{1}{3N} \sum_{k=1}^N \left[ \left( F_{f,\text{mess}}[k] - F_f[k] \right)^2 + \left( F_{fN,\text{mess}}[k] - F_{fN}[k] \right)^2 + \left( F_{p,\text{mess}}[k] - F_p[k] \right)^2 \right]. \quad (4.106)$$

Hierbei sind  $F_{f,\text{mess}}[k]$ ,  $F_{fN,\text{mess}}[k]$  und  $F_{p,\text{mess}}[k]$  die experimentell ermittelte Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkraft zum Zeitpunkt  $t_k$ . Zwischen den gemessenen und simulierten Kräften kann eine Phasenverschiebung  $\psi$  auftreten. Diese ist bei der Berechnung des Gütefunktional zu berücksichtigen, indem die simulierten Kräfte entsprechend zeitversetzt werden. Entspricht der nötige Zeitversatz keinem ganzzahligen Vielfachen des Zeitintervalls ( $\frac{\psi}{2\pi n} \neq mT$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ), so werden die nötigen Werte durch lineare Interpolation ermittelt. Die gesuchten Kraftkoeffizienten ergeben sich somit durch die Lösung des folgenden Minimierungsproblems:

$$\min_K (G) \quad \text{mit} \quad K = [K_{tc}, K_{rc}, K_{ac}, K_{te}, K_{re}, K_{ae}, \psi]. \quad (4.107)$$

Zur Lösung dieses Minimierungsproblems wird ein im Rahmen dieser Arbeit entwickelter genetischer Algorithmus eingesetzt. In Tabelle 4.1 sind einige Parameter des Algorithmus





**Bild 4.19:** Schnittkraftkoeffizientenspezifische Formen der Prozesskraftverläufe.

angegeben. Dieser Algorithmus ist prinzipiell in der Lage, die Schnittkraftkoeffizienten anhand einer einzigen Fräserumdrehung zu bestimmen. Da die Prozesskräfte jedoch immer einem gewissen Rauschen unterliegen, empfiehlt es sich, mehrere Fräserumdrehungen und verschiedene Messabschnitte zur Identifikation heranzuziehen. Das Verfahren ist dann wie folgt:

1. Zunächst wird aus den gemessenen Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkräften  $F_{f,\text{mess}}$ ,  $F_{fN,\text{mess}}$  und  $F_{p,\text{mess}}$  der Bereich ausgewählt, in dem sich der Fräser voll im Eingriff befindet. Die Abschnitte des Fräserintritts und Fräseraustritts werden entfernt.
2. Dieser Bereich wird anschließend in  $N_i = 100$  ( $i = 1, 2, \dots, N_i$ ) gleichmäßige Intervalle unterteilt.

3. Für die ersten zwei Fräserumdrehungen jedes dieser  $N_i$  Intervalle wird dann das Minimierungsproblem aus Gleichung (4.107) durch den beschriebenen genetischen Algorithmus gelöst und dadurch die Scher- und Reibkraftkoeffizienten  $K_{tc,i}$ ,  $K_{rc,i}$ ,  $K_{ac,i}$ ,  $K_{te,i}$ ,  $K_{re,i}$ ,  $K_{ae,i}$  bestimmt.
4. Da der genetische Algorithmus nicht immer das gesuchte globale Minimum findet, wird zum Schluss für jedes der  $N_i$  Intervalle überprüft, ob der Wert des Gütefunktionalen größer als das doppelte des Minimums der Werte aller Gütefunktionale ist:

$$G_i > 2 \min(G_1, G_2, \dots, G_{N_i}).$$

Ist dies der Fall, werden die für dieses Intervall bestimmten Koeffizienten verworfen.

5. Die Koeffizienten werden schließlich aus den Mittelwerten der Koeffizienten der einzelnen Intervalle berechnet<sup>5</sup>, z. B.:  $K_{tc} = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} K_{tc,i}$ .

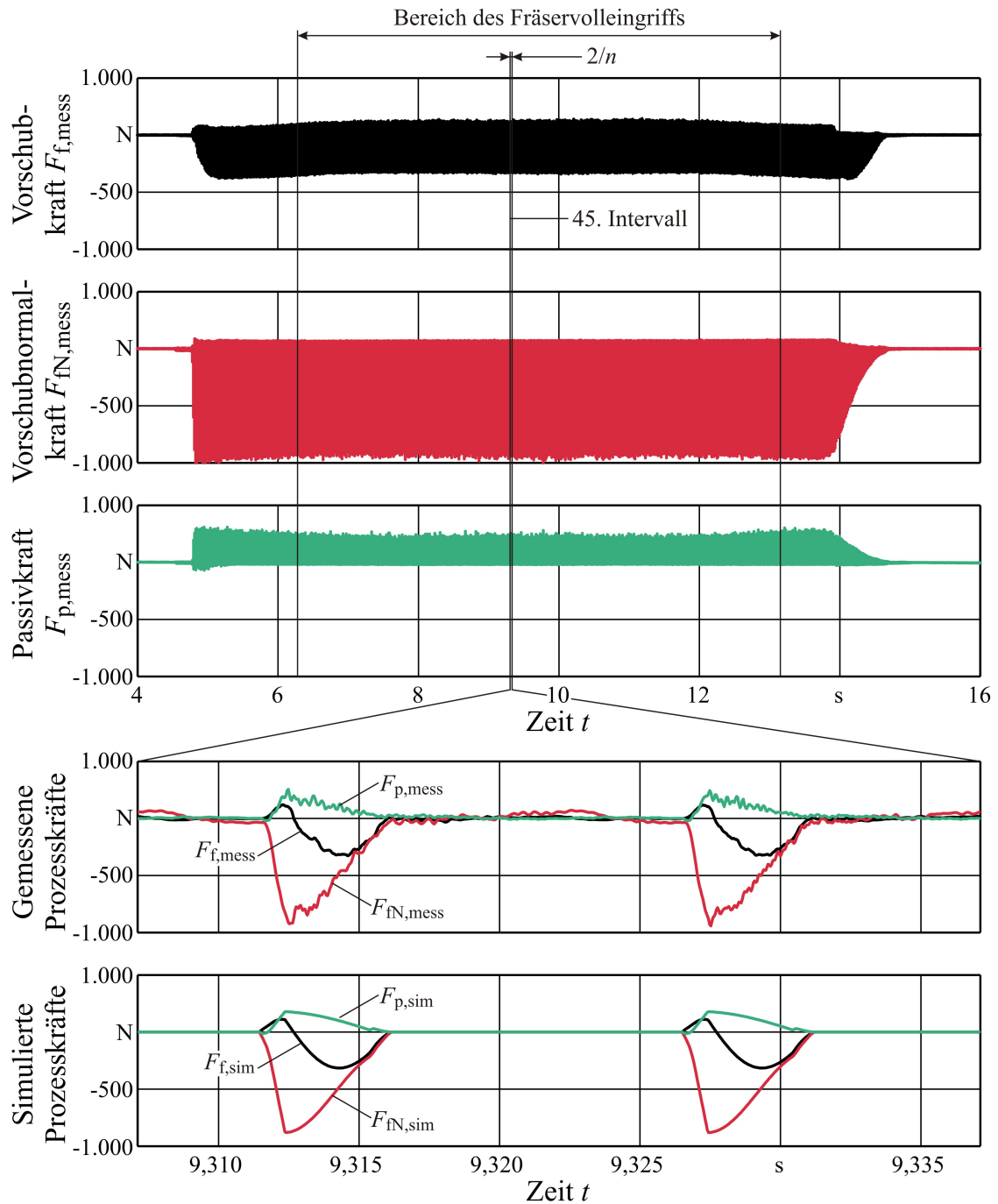
**Tabelle 4.1:** Parameter des genetischen Algorithmus zur Identifikation der Schnittkraftkoeffizienten.

Populationsgröße:	40					
Anzahl Generationen:	1.000					
Obere und untere Grenze:						
	$K_{tc}$	$K_{rc}$	$K_{ac}$	$K_{te}$	$K_{re}$	$K_{ae}$ $\psi$
$K_{\max} = [$	$2.000 \text{ N/mm}^2,$	$1.000 \text{ N/mm}^2,$	$800 \text{ N/mm}^2,$	$300 \text{ N/mm},$	$300 \text{ N/mm},$	$300 \text{ N/mm}, 2 \pi]$
$K_{\min} = [$	$-2.000 \text{ N/mm}^2,$	$-1.000 \text{ N/mm}^2,$	$-800 \text{ N/mm}^2,$	$0 \text{ N/mm},$	$-300 \text{ N/mm},$	$-300 \text{ N/mm}, 0]$

Im Folgenden wird dieses Verfahren anhand eines Beispiels erläutert. Die mit einem 3-Komponenten-Dynamometer (KISTLER, 9255B [KIS]) gemessenen Vorschub-, Vorschubnormal- und Passivkräfte sind in Bild 4.20 dargestellt. Um Aliasingeffekte zu vermeiden, wurde ein analoges Tiefpassfilter mit einer Eckfrequenz von  $f_{\text{eck}} = 10 \text{ kHz}$  eingesetzt. Die Abtastfrequenz betrug  $f = 25 \text{ kHz}$ . Mit der gegebenen Drehzahl entfielen somit 375 Abtastzeitpunkte auf eine Umdrehung des Fräsers. In den unteren beiden Diagrammen von Bild 4.20 sind zusätzlich zwei vergrößerte Darstellungen des 45. Beispielintervalls zu sehen. Die Länge des Intervalls entspricht zwei Fräserumdrehungen ( $\frac{2}{n}$ ). Das eine zeigt die gemessenen Kräfte und das andere die mit den für dieses Intervall ermittelten Schnittkraftkoeffizienten simulierten Prozesskräfte. Die geringen Abweichungen zwischen den gemessenen und simulierten (identifizierten) Kraftverläufen bestehen im Wesentlichen in einem messtechnisch bedingten Rauschen und einem Überschwingen der Kraftmessplattform. Da im Teilschnitt gefräst wurde, ist der Anstieg insbesondere der Vorschubnormalkraft  $F_{\text{FN}}$  relativ steil, was zu einer breitbandigen Anregung des Kraftmesssystems und damit einhergehenden Überschwingungseffekten führt.

Bild 4.21 zeigt die Werte der für die einzelnen Intervalle ermittelten Scher- und Reibkraftkoeffizienten. Die gestrichelten senkrechten Linien markieren Intervalle, in denen der Algorithmus nicht das globale Minimum gefunden hat. Die Werte des Gütefunktionalen liegen hier deutlich höher als in den übrigen Intervallen. Bis auf diese drei Ausreißer, die für die Auswertung ausgeschlossen wurden, liegen die ermittelten Koeffizienten in einem

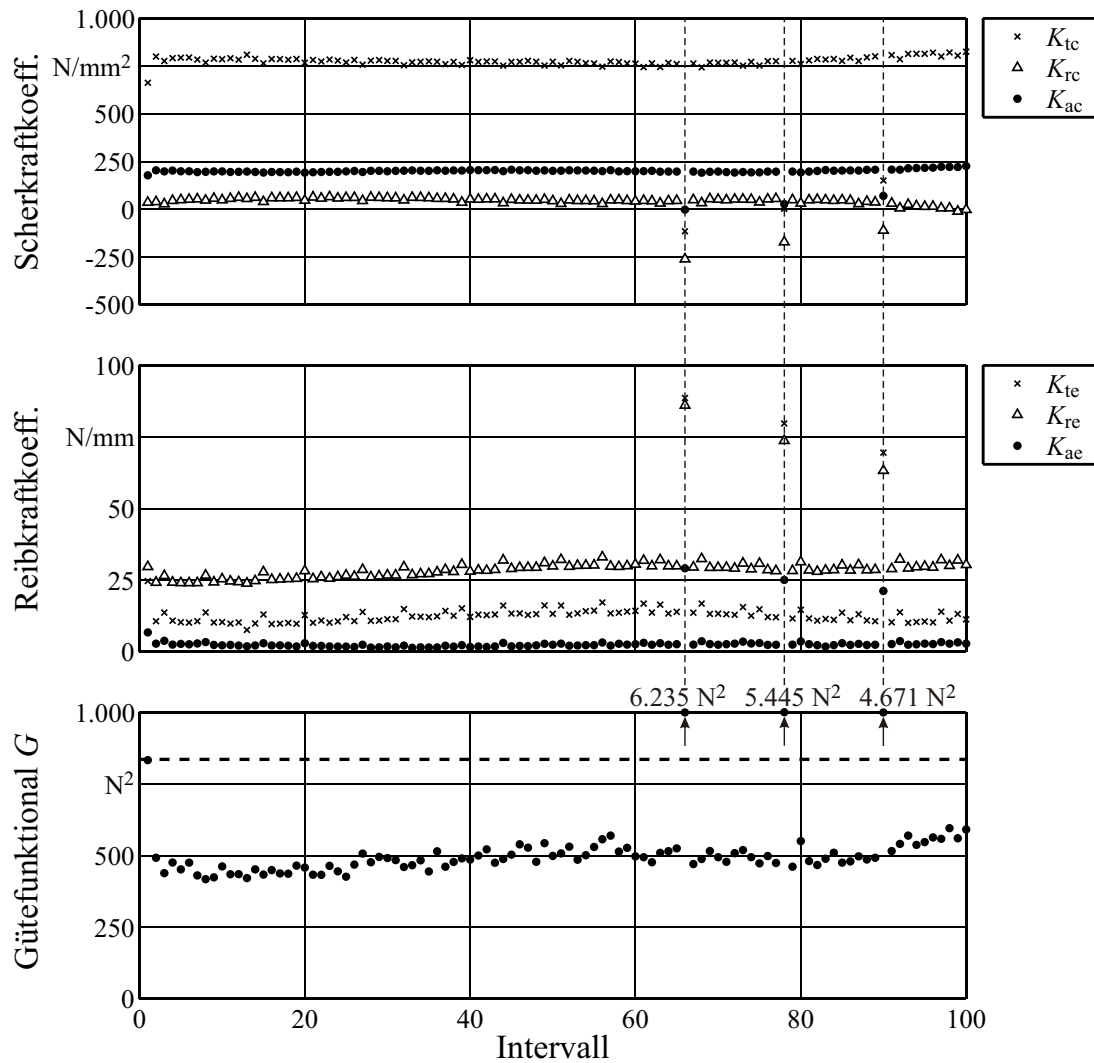
<sup>5</sup>Da es sein kann, dass Koeffizienten bestimmter Intervalle aufgrund eines zu hohen Wertes des Gütefunktionalen verworfen werden, wird diese Summe nicht immer über alle  $N_i$  Intervalle gebildet.



Werkzeugform	Torusfräser	Freiwinkel	$\alpha_0 = 14^\circ$	Schnittkraftkoeff. des 45. Interv.
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Schnittbreite	$a_e = 10 \text{ mm}$	$K_{tc} = 771,28 \text{ N/mm}^2$
		Schnitttiefe	$a_p = 5 \text{ mm}$	$K_{rc} = 50,84 \text{ N/mm}^2$
Zähnezahl	$z = 1$	Zahnvorsch.	$f_z = 0,2 \text{ mm}$	$K_{ac} = 206,66 \text{ N/mm}^2$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Drehzahl	$n = 4.000 \text{ min}^{-1}$	$K_{te} = 13,45 \text{ N/mm}$
Eckenradius	$R = 1 \text{ mm}$	KSS	trocken	$K_{re} = 29,00 \text{ N/mm}$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Gleichlauf		$K_{ae} = 1,93 \text{ N/mm}$
Spanwinkel	$\gamma_0 = 14^\circ$			

Se/55805 © IFW

**Bild 4.20:** Gemessene und simulierte Prozesskräfte des 45. Intervalls.



Werkzeugform	Torusfräser	Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Schnittbreite	$a_c = 10 \text{ mm}$
Material	HM	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Schnitttiefe	$a_p = 5 \text{ mm}$
Zähnezahl	$z = 1$	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Zahnvorschub	$f_z = 0,2 \text{ mm}$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$			Drehzahl	$n = 4.000 \text{ min}^{-1}$
Eckenradius	$R = 1 \text{ mm}$			Gleichlauf	Se/55806 © IFW

**Bild 4.21:** Scher- und Reibkraftkoeffizienten und Werte des Gütefunktionals der einzelnen Intervalle.

jeweils sehr engen Bereich. Die Standardabweichungen und die 95%-Konfidenzintervalle sind daher sehr klein (siehe Tabelle 4.2). Der Bereich, in dem der „wahre“ Erwartungswert des tangentialen Scherkraftkoeffizienten mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt, erstreckt sich um  $\pm 4,22 \text{ N/mm}^2$  um den Mittelwert. Dies entspricht weniger als 0,6% des Mittelwerts.

Es steht somit ein Identifikationsverfahren zu Verfügung, mit dem die Koeffizienten des Schnittkraftmodells von FRIEDRICH [Fri09] schnell und mit großer Genauigkeit ermittelt werden können. Für die Identifikation ist lediglich eine einzige Prozesskraftmessung nötig. Dies Verfahren wird in Kapitel 5.2.1 verwendet, um den Einfluss von Freiflächenfasen auf die Scher- und Reibkraftkoeffizienten zu untersuchen.

**Tabelle 4.2:** Identifizierte Scher- und Reibkraftkoeffizienten. Werkzeug- und Prozessparameter siehe Bild 4.20 bzw. 4.21.

	Mittelwert $\mu$	Standardabweichung $\sigma$	Konfidenzintervall $CI_{95\%}$
$K_{tc}$	776,12 N/mm <sup>2</sup>	20,93 N/mm <sup>2</sup>	$\mu \pm 4,22$ N/mm <sup>2</sup>
$K_{rc}$	45,36 N/mm <sup>2</sup>	15,00 N/mm <sup>2</sup>	$\mu \pm 3,02$ N/mm <sup>2</sup>
$K_{ac}$	201,07 N/mm <sup>2</sup>	7,24 N/mm <sup>2</sup>	$\mu \pm 1,46$ N/mm <sup>2</sup>
$K_{te}$	12,59 N/mm	2,30 N/mm	$\mu \pm 0,46$ N/mm
$K_{re}$	28,45 N/mm	2,29 N/mm	$\mu \pm 0,46$ N/mm
$K_{ae}$	2,50 N/mm	0,70 N/mm	$\mu \pm 0,14$ N/mm

## 4.6 Methode der komplexen Kraftzeiger

Die in Kapitel 4.2 beschriebene Diskretisierungsmethode ermöglicht eine Stabilitätsaussage in einzelnen Arbeitspunkten anhand der Eigenwerte der expandierten Systemmatrix. Einen Einblick in die innere Struktur des Systems, der Aufschluss über die Ursache der Instabilität gibt, gewährt sie allerdings nicht. Zu jedem Eigenwert existiert jedoch ein Eigenvektor. Dieser lässt sich für ein besseres Verständnis der Systemdynamik nutzen, indem das Paar aus kritischem Eigenwert und zugehörigem Eigenvektor wieder in das ursprüngliche System eingesetzt wird. In [Bie85; Bie87] benutzt BIELAWA diese Methode, die er als *force-phasing matrix* bezeichnet, zur Untersuchung von dynamischen Instabilitäten, die bei Rotoren von Helikoptern auftreten können. KLECKNER [Kle01] wandte dieses Verfahren erstmals auf die Dynamik des Drehprozesses mit Regenerativem Effekt an.

Im Folgenden wird beschrieben, wie sich diese Methode auf ein System gemäß Gleichung (4.95) anwenden lässt. Diese Gleichung entspricht einem ungleich geteilten Fräser mit Prozessdämpfung. Die Zeitvarianz sei jedoch vernachlässigt. Die Matrizen der projizierten Schnittkraft- und Prozessdämpfungskoeffizienten werden daher durch ihre Mittelwerte  $\bar{\mathbf{Q}}_j$  und  $\bar{\mathbf{Q}}_{pd,j}$  ersetzt. Das so gemittelte System lässt sich mit der in Kapitel 4.2.3 vorgestellten Methode auf Stabilität überprüfen. Hierzu sind die Eigenwerte  $\mu_i$  der expandierten Systemmatrix (siehe Gleichung (4.70)) zu berechnen. Zu jedem Eigenwert  $\mu_i$  existiert ein Eigenvektor

$$\mathbf{v}_{\text{exp},i} = [v_1, \dots, v_{2w+m}]^T, \quad (4.108)$$

der sich aus dem Eigenwertproblem

$$\mathbf{\Phi}_{\text{exp}} \mathbf{v}_{\text{exp},i} = \mu_i \mathbf{v}_{\text{exp},i} \quad (4.109)$$

ergibt. Der kritische Eigenwert wird nun mit dem zugehörigen Eigenvektor in die ursprüngliche Gleichung (gemittelte zeitinvariante Form der Gleichung (4.95)) eingesetzt. Hierzu wird jedoch nicht der komplette expandierte Eigenvektor benötigt, sondern lediglich dessen erste  $w$  Elemente:

$$\mathbf{v}_i = [v_1, \dots, v_w]^T. \quad (4.110)$$

Dieser Teil des Vektors entspricht dem aktuellen Verlagerungszustand des Systems. Die zeitdiskreten Eigenwerte  $\mu_i$  sind zudem in ihre zeitkontinuierliche Form umzurechnen:

$$\lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{T}. \quad (4.111)$$

Prinzipiell lässt sich jedes Paar aus Eigenwert und Eigenvektor in die gemittelte zeitinvariante Form der Gleichung (4.95) einsetzen. Dies ist insbesondere für die grenzstabilen Eigenwerte sinnvoll, da in diesem Fall die Eigenschwingungen und somit die Kräfte weder auf- noch abklingen. Im Folgenden sei  $\lambda_i$  ein grenzstabiler Eigenwert des zeitkontinuierlichen Systems ( $\text{Re}\{\lambda_i\} = 0$ ) und  $\mathbf{v}_i$  der dazugehörige Eigenvektor. Durch Einsetzen in Gleichung (4.95) ergibt sich:

$$\underbrace{\mathbf{M} \lambda_i^2 \mathbf{v}_i}_{\mathbf{F}_M} + \underbrace{\mathbf{D} \lambda_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{F}_D} + \underbrace{\sum_{j=1}^z [\bar{\mathbf{Q}}_{\text{pd},j}] \lambda_i \mathbf{v}_i}_{\mathbf{F}_{\text{pd}}} + \underbrace{\mathbf{K} \mathbf{v}_i}_{\mathbf{F}_K} + \underbrace{\sum_{j=1}^z [\bar{\mathbf{Q}}_j] \mathbf{v}_i}_{\mathbf{F}_{\text{im}}} = \sum_{j=1}^z \underbrace{[\bar{\mathbf{Q}}_j e^{-\lambda_i \theta_j} \mathbf{v}_i]}_{-\mathbf{F}_{\text{om},j}} \quad (4.112)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{F}_M$ ,  $\mathbf{F}_D$  und  $\mathbf{F}_K$  die komplexen Kraftvektoren der strukturellen Trägheits-, Dämpfungs- und Steifigkeitskräfte.  $\mathbf{F}_{\text{pd}}$ ,  $\mathbf{F}_{\text{im}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{om},j}$  sind die komplexen Kraftvektoren der Prozessdämpfungskräfte sowie der inneren und äußeren Modulation. Jeder dieser komplexen Vektoren besteht, entsprechend der Anzahl der Oszillatoren der Strukturndynamik, aus  $w$  Elementen. Gleichung (4.112) ist folglich ein Gleichungssystem mit  $w$  Gleichungen. Jede dieser Gleichungen lässt sich als Kraftzeigerdiagramm in der komplexen Ebene darstellen. Für den  $k$ -ten Oszillator der Strukturndynamik gilt:

$$F_M^{(k)} + F_D^{(k)} + F_{\text{pd}}^{(k)} + F_K^{(k)} + F_{\text{im}}^{(k)} + \sum_{j=1}^z [F_{\text{om},j}^{(k)}] = 0 \quad (4.113)$$

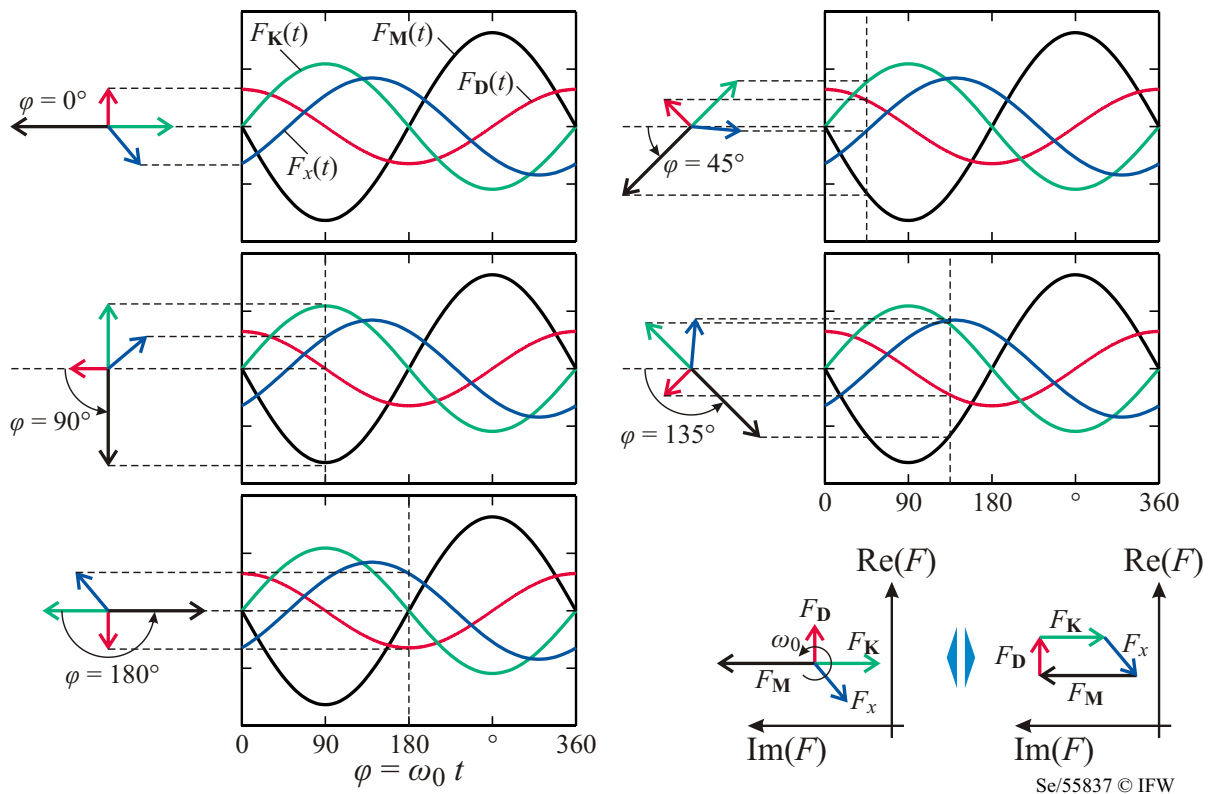
In dieser Gleichung ist  $F_M^{(k)}$  das  $k$ -te Element des Vektors der komplexen Trägheitskräfte  $\mathbf{F}_M = [F_M^{(1)}, \dots, F_M^{(k)}, \dots, F_M^{(w)}]^T$ . Werden diese Zeiger hintereinander aufgetragen, ergibt sich ein geschlossenes Polygon. Durch das Teilen von Gleichung (4.113) durch  $F_D^{(k)}$ , lässt sich der Kraftzeiger der strukturellen Dämpfung auf den rein reellen Wert von 1 normieren<sup>6</sup>:

$$\frac{F_M^{(k)}}{F_D^{(k)}} + 1 + \frac{F_{\text{pd}}^{(k)}}{F_D^{(k)}} + \frac{F_K^{(k)}}{F_D^{(k)}} + \frac{F_{\text{im}}^{(k)}}{F_D^{(k)}} + \frac{\sum_{j=1}^z [F_{\text{om},j}^{(k)}]}{F_D^{(k)}} = 0. \quad (4.114)$$

Dies erlaubt es zudem, die übrigen normierten Kraftzeiger  $F_M^{(k)*} = \frac{F_M^{(k)}}{F_D^{(k)}}$ ,  $F_D^{(k)*} = \frac{F_D^{(k)}}{F_D^{(k)}} = 1$ ,  $F_K^{(k)*} = \frac{F_K^{(k)}}{F_D^{(k)}}$ ,  $F_{\text{im}}^{(k)*} = \frac{F_{\text{im}}^{(k)}}{F_D^{(k)}}$  und  $F_{\text{om},j}^{(k)*} = \frac{F_{\text{om},j}^{(k)}}{F_D^{(k)}}$  anhand der Vorzeichen ihrer Realteile nach anfachenden und dämpfenden Kräften zu unterscheiden. Ist ihr Realteil wie der des Zeigers der strukturellen Dämpfung positiv, so wirken sie dämpfend. Ist er hingegen negativ, so wirken sie anfachend. Ist der Realteil eines normierten Kraftzeigers null, so wirkt er weder anfachend noch dämpfend.

Alternativ zur Darstellung der Kraftzeiger als geschlossenes Polygon, lassen sie sich auch im Ursprung des Koordinatensystems einzeichnen. Der Zusammenhang zu den zeitlich veränderlichen Kräften ergibt sich durch die Rotation des Kraftzeigerdiagramms um den

<sup>6</sup>Die Division zweier komplexer Zahlen entspricht einer Rotation des Zeigers und einer Skalierung der Amplitude. Durch die Exponentialdarstellung der Polarform komplexer Zahlen wird dies besonders anschaulich:  $\frac{r e^{i\phi}}{s e^{i\psi}} = \frac{r}{s} e^{i(\phi-\psi)}$ .



**Bild 4.22:** Projektion der komplexen Kraftzeiger auf die reale Achse.

Ursprung der komplexen Ebene<sup>7</sup> ( $z$ -Achse) mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$ . Bei einem selbsterregten grenzstabilen System ist  $\omega_0$  die Eigenfrequenz des Systems. Handelt es sich um ein fremderregtes System, so ist  $\omega_0$  die Erregerfrequenz. Die Projektion der Kraftzeiger auf die reale Achse entspricht den zeitlich veränderlichen Kraftanteilen. In Bild 4.22 ist dies für mehrere Zeitpunkte  $t$  bzw. Winkelstellungen  $\varphi = \omega_0 t$  für folgendes Beispiel dargestellt:

$$\underbrace{m \ddot{x}(t)}_{F_M(t)} + \underbrace{d \dot{x}(t)}_{F_D(t)} + \underbrace{k x(t)}_{F_K(t)} = \underbrace{\hat{F}_x \sin(\omega_0 t + \psi)}_{-F_x(t)} \quad (4.115)$$

Die innere Struktur des Instabilitätsmechanismus wird durch die Methode der komplexen Kraftzeiger offengelegt. Im folgenden Kapitel wird diese Methode auf gleich und ungleich geteilte Fräser angewandt.

<sup>7</sup>Bei einem konjugiert komplexen Eigenwertpaar ist die Drehrichtung um die  $z$ -Achse positiv, wenn der Imaginärteil des Eigenwerts positiv ist. Ist der Imaginärteil negativ, ist die Drehrichtung ebenfalls negativ. In diesem Fall kehrt sich jedoch auch der Umlaufsinn des Polygonzugs der komplexen Zeiger um.

## 5 Ergebnisse

In Kapitel 4 wurden folgende Methoden zur Analyse des dynamischen Fräsprozesses dargestellt:

- Genetischer Algorithmus zur Identifikation der Parameter der Strukturdynamik
- Diskretisierungsmethode zur Stabilitätsanalyse zeitinvarianter Totzeitsysteme mit mehreren diskret verteilten Totzeiten
- Diskretisierungsmethode in Kombination mit der Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme zur Stabilitätsanalyse zeitvarianter Totzeitsysteme mit mehreren Totzeiten
- Modellierung von Prozessdämpfungseffekten
- Simulation des dynamischen Fräsprozesses im Zeitbereich
- Genetischer Algorithmus zur Identifikation der Koeffizienten des Schnittkraftmodells von FRIEDRICH [Fri09] anhand einer einzigen Prozesskraftmessung
- Methode der komplexen Kraftzeiger zur Klassifikation der anfachenden und dämpfenden Prozesskraftanteile

In diesem Kapitel werden diese Methoden zum einen mit Ergebnissen aus der Literatur und zum anderen mit experimentell ermittelten Daten verglichen. Zudem werden anhand der entwickelten Modelle Zusammenhänge, Tendenzen und Wirkmechanismen aufgezeigt, die den Einfluss von ungleichen Zahnteilungen und Freiflächenfasen auf die dynamische Stabilität des Fräsprozesses charakterisieren.

### 5.1 Prozesstabilität ungleich geteilter Fräser

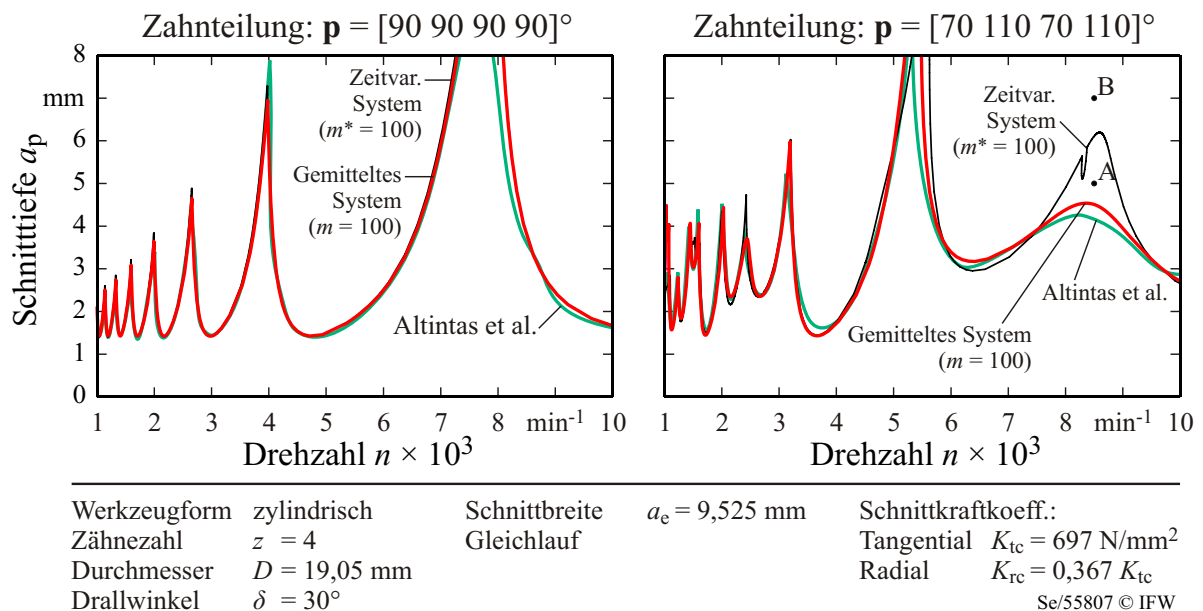
Die beiden in Kapitel 4 vorgestellten Methoden zur Stabilitätsanalyse zeitinvarianter und zeitvarianter Totzeitsysteme mit mehreren Totzeiten werden zunächst mit Stabilitätskarten gleich und ungleich geteilter Fräser aus der Literatur verglichen. ALTINTAS et al. haben in [Alt99a] eine analytische Methode zur Vorhersage der Stabilitätsgrenze ungleich geteilter Fräser veröffentlicht. Diese Methode ist eine Erweiterung der Zeroth Order Approximation [Alt95; Bud98a] auf ungleiche Zahnteilungen und beruht demnach auf der Mittelung des ursprünglich zeitvarianten Systems. Sie haben die berechneten Stabilitätskarten sowohl mit experimentellen Daten als auch mit Simulationen im Zeitbereich verglichen. Diese Ergebnisse sind auch von anderen Autoren wie z. B. OLGAC und SIPAHI [Olg05] und SIMS et al. [Sim08] zu Vergleichszwecken herangezogen worden. Die Werte der Oszillatorparameter der Fräser sind in Tabelle 5.1 angegeben. Mit diesen Parametern wurden zwei Stabilitätskarten, die eine mit der Methode der gemittelten Systemmatrizen und die andere mit der Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme, berechnet



**Tabelle 5.1:** Werte der Oszillatorparameter des Werkzeugs in Vorschub- ( $x_t$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y_t$ ) [Alt99a; Sim08].

	Nr.	Eigenfreq. $f_0$ [Hz]	Dämpfung $\zeta$ [-]	Steifigkeit $k$ [N/m]
$x_t$	1	441,64	0,028722	85.663.646,78
	2	563,60	0,055801	18.792.624,40
	3	778,56	0,058996	312.598.462,81
$y_t$	1	516,21	0,025004	12.613.387,75

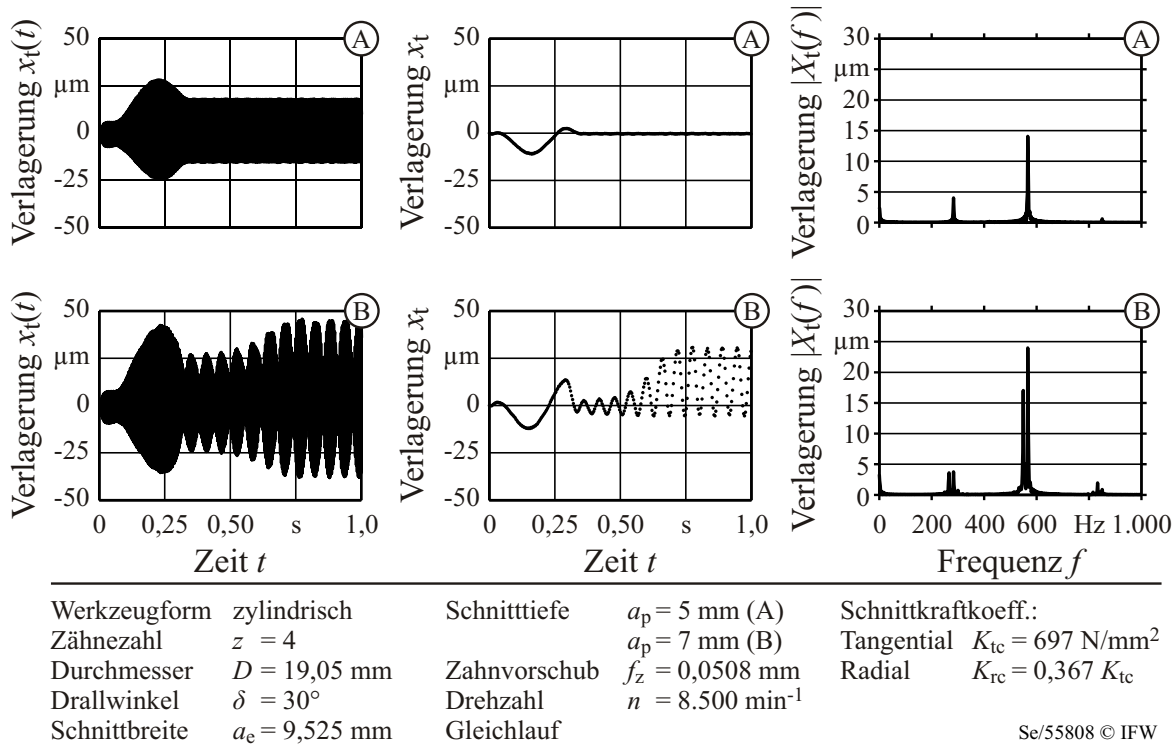
(Bild 5.1). Für das gleich geteilte Fräswerkzeug sind die Stabilitätsgrenzen der beiden Methoden identisch und stimmen mit der Stabilitätsgrenze von ALTINTAS et al. gut überein. Für das ungleich geteilte Werkzeug ergeben sich jedoch Unterschiede, insbesondere im Drehzahlbereich  $n = 8.000 \dots 9.000 \text{ min}^{-1}$ .



**Bild 5.1:** Vergleich der berechneten Stabilitätsgrenzen des zeitvarianten und zeitinvarianten Systems mit der nach ALTINTAS et al. berechneten [Alt99a]. Parameter der Strukturmechanik: Tabelle 5.1.

Um diese Abweichungen zu überprüfen, wurden die Punkte A und B im Zeitbereich simuliert. Die Simulation der Prozessdynamik im Zeitbereich berücksichtigt die trochoidalen Zahnflugbahnen, die Zeitvarianz des Systems und einen möglichen schwingungsbedingten Verlust des Schneidenkontaktes. Bild 5.2 zeigt die Verlagerung des Werkzeugs in Vorschubrichtung  $x_f$  im Zeit- (links) und Frequenzbereich<sup>1</sup> (rechts). Zudem sind mittig die POINCARÉ-Verläufe von  $x_f$  dargestellt, bei denen  $x_f$  mit der Systemperiode  $T_p = 1/2n$  abgetastet wird. Ist das System stabil, klingen die selbsterregten Schwingungen ab. Die verbleibenden fremderregten Prozessschwingungen sind  $T_p$ -periodisch. Bei einem stabilen Schnitt ordnen sich die Abtastwerte des POINCARÉ-Verlaufs daher entlang einer geraden

<sup>1</sup>Die Frequenzspektren beziehen sich auf den Teil des Schnitts, bei dem der Fräser im Volleingriff ( $a_e = D$ ) ist.

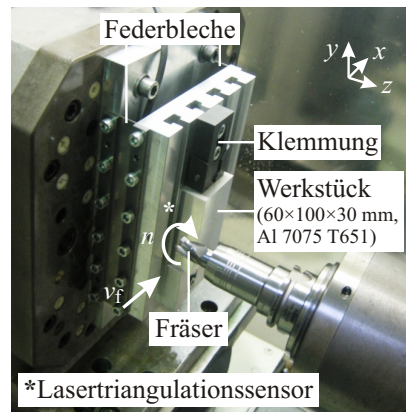


**Bild 5.2:** Simulation der Arbeitspunkte A und B. Links: Verlagerung des Werkzeugs in Vorschubrichtung  $x_t(t)$ , Mitte: POINCARÉ-Verlauf von  $x_t(t)$  (Abtastung mit  $\frac{1}{2n}$ ), Rechts: Frequenzspektrum von  $x_t(t)$ .

Linie an. Ist der Fräser instabil, dominieren hingegen die Frequenzen der selbsterregten Schwingungen, die in der Nähe der Eigenfrequenzen der Strukturmechanik liegen. Die Abtastwerte des POINCARÉ-Verlaufs verteilen sich dann über einen breiten Bereich. Anhand der Verteilung der Abtastwerte des POINCARÉ-Verlaufs kann daher sehr gut die Stabilität des Systems beurteilt werden. Der anfängliche Anstieg der Auslenkungen liegt im Eintritt des Werkzeugs in das Werkstück begründet; unterdessen steigt die Schnittbreite von null auf den nominellen Wert  $a_e = 9,525$  mm. Dieser ist nach ca. 0,33 s erreicht. Durch die Simulation zeigt sich, dass der Punkt A stabil und der Punkt B instabil ist. Dies wird lediglich durch die Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme vorausgesagt. Sowohl die hier vorgestellte Methode der gemittelten Systemmatrizen als auch die Methode aus [Alt99a] sagen voraus, dass der Punkt A stabil ist. Dazu muss angemerkt werden, dass die Parameter aus Tabelle 5.1 sich von denen aus [Alt99a] geringfügig unterscheiden, da die Imaginärteile der Residuen, bedingt durch die Diskretisierungsmethode, vernachlässigt werden. Dennoch zeigt sich, dass es bei ungleich geteilten Werkzeugen auch bei hohen Schnittbreiten  $a_e$  durch die Mittelung der Systemmatrizen (Zeroth Order Approximation) zu Fehlern in der Vorhersage der Stabilitätsgrenze kommen kann. Bei gleich geteilten Fräswerkzeugen wurden solche Abweichungen bislang vor allem dann beobachtet, wenn der Prozess stark zeitvariant ist, also insbesondere bei geringen Schnittbreiten und geringen Zähnezahlen [Dav00; Mer04; Gra05a]. Die Abweichungen zwischen gemitteltem und zeitvariantem System von ungleich geteilten Fräsern werden eingehender in den Kapiteln 5.1.3 bis 5.1.6 untersucht.

### 5.1.1 Experimentelle Verifikation

Zur Verifikation der vorgestellten Methoden wurden Frästests mit einer flexiblen Werkstückaufspannung (Bild 5.3) auf einem 4-Achs-Bearbeitungszentrum HELLER MCi 16 durchgeführt. Die Werkstückaufspannung besteht aus einer Ober- und Unterplatte, die über Blattfedern miteinander verbunden sind. Dadurch weist das Werkstück in  $x$ -Richtung eine ausgeprägte Charakteristik eines Einmassenschwingers auf. In der  $y$ -Richtung ist das Werkstück vergleichsweise starr. Ein ähnlicher Versuchsaufbau wurde auch von verschiedenen anderen Autoren [Dre66a; Roe67; Bal02] verwendet. Der Grund für den Einsatz solcher Schwingungsplattformen ist zum einen die Reduktion des Aufwandes bei der Identifikation der Strukturodynamik, da diese im Idealfall über einen einzigen Oszillator beschrieben werden kann. Zum anderen neigt das System durch die Schwächung der Strukturodynamik eher zum Rattern. Dies hat den Vorteil, dass für die experimentelle Ermittlung der Stabilitätsgrenze weniger Material verbraucht werden muss. Zudem wird das Risiko des Fräserbruchs und die dynamische Belastung der Hauptspindel gemindert.



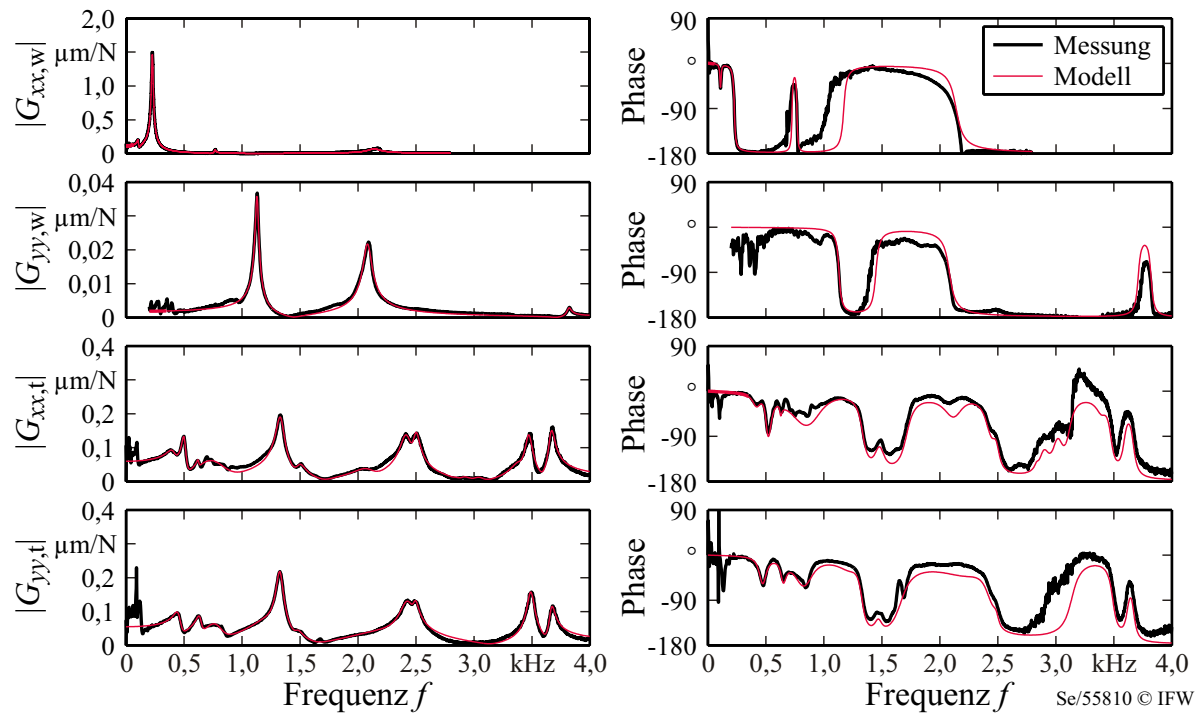
Se/55809 © IFW

**Bild 5.3:** Versuchsaufbau zur experimentellen Ermittlung der Stabilitätskarten.

Obwohl der Peak des dominanten Oszillators im Nachgiebigkeitsfrequenzgang der Schwingungsplattform ca. zwölfmal höher ist als der nächstkleinere Peak in der Strukturdynamik der Werkzeuge und Werkstücks, ließ sich mit einem Einmassenschwingermodell keine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den theoretisch berechneten und den experimentell bestimmten Stabilitätskarten erzielen. Daher wurden die Nachgiebigkeitsfrequenzgänge des Werkstücks ( $G_{xx,w}$ ,  $G_{yy,w}$ ) und Werkzeugs ( $G_{xx,t}$ ,  $G_{yy,t}$ ) in  $x$ - und  $y$ -Richtung mit der Impulshammermethode ermittelt. Jeder dieser vier Nachgiebigkeitsfrequenzgänge wurde durch eine Parallelschaltung von mehreren Oszillatoren (Einmassenschwinger,  $PT_2$ -Systeme) modelliert. Die Parameter der insgesamt 33 Oszillatoren (siehe Tabelle 5.2) wurden mit dem in Kapitel 4.1 beschriebenen genetischen Algorithmus identifiziert. Bild 5.4 zeigt den Vergleich zwischen den gemessenen und modellierten Nachgiebigkeitsfrequenzgängen. Die Anzahl an Oszillatoren zur Nachbildung der gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgänge kann prinzipiell beliebig hoch sein. Es ist jedoch zu beachten, dass mit der Anzahl an Oszillatoren die Rechenzeit zur Ermittlung der Stabilitätsgrenze zunimmt. Werden hingegen zu wenige Oszillatoren verwendet, so besteht die Gefahr, dass die Strukturdynamik nicht hinreichend genau abgebildet wird und dadurch die Prozessstabilität beeinflussende Eigenfrequenzen vom Modell nicht erfasst werden.

**Tabelle 5.2:** Werte der Oszillatorparameter des Werkstücks in Vorschub- ( $x_w$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y_w$ ) und des Werkzeugs in Vorschub- ( $x_t$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y_t$ ).

	Nr.	Masse	Dämpfung	Steifigkeit	Lehrsche Dämpfung	Eigenfreq.
		$m$ [kg]	$d$ [Ns/m]	$k$ [N/ $\mu$ m]	$\zeta$ [%]	$f_0$ [Hz]
$x_w$	1	185,58	12.848,68	83,48	5,16	106,75
	2	5,00	470,97	10,24	3,29	227,68
	3	54,01	3.796,17	1.258,16	0,73	768,19
	4	1,74	1.040,35	314,83	2,22	2.140,69
$y_w$	1	19,66	3.949,64	991,22	1,41	1.130,17
	2	7,36	3.522,03	1.259,54	1,83	2.082,74
	3	65,09	14.901,06	37.493,34	0,48	3.819,90
$x_t$	1	22,20	11.336,70	149,49	9,84	412,99
	2	13,12	3.086,64	131,72	3,71	504,22
	3	109,21	13.259,70	1.679,72	1,55	624,18
	4	2,48	4.298,74	60,50	17,55	786,30
	5	1,32	655,19	92,61	2,97	1.334,12
	6	5,49	3.282,05	487,59	3,17	1.499,27
	7	2,84	3.324,99	489,43	4,46	2.089,41
	8	0,84	557,54	193,24	2,19	2.419,54
	9	1,67	658,83	411,50	1,26	2.499,47
	10	129,81	32.671,62	41.281,65	0,71	2.838,23
	11	12,47	7.440,87	4.184,35	1,63	2.915,96
	12	11,62	6.508,96	4.239,67	1,47	3.039,76
	13	2,78	1.884,33	1.254,83	1,60	3.384,09
	14	0,90	360,39	428,95	0,92	3.473,88
	15	0,86	314,21	456,38	0,79	3.666,39
$y_t$	1	13,66	5609,33	112,78	7,15	457,36
	2	16,94	5.297,53	273,98	3,89	640,14
	3	4,42	4.615,98	109,09	10,51	790,44
	4	3,29	4.898,68	193,37	9,72	1.220,72
	5	1,41	602,11	98,18	2,56	1.327,98
	6	13,44	6.265,21	1.162,28	2,51	1.479,98
	7	0,92	3.220,04	182,61	12,40	2.237,78
	8	0,70	607,91	163,47	2,84	2.427,05
	9	3,64	1.248,23	893,81	1,09	2.494,64
	10	0,70	296,86	335,32	0,97	3.491,09
	11	1,34	447,81	713,95	0,72	3.668,65

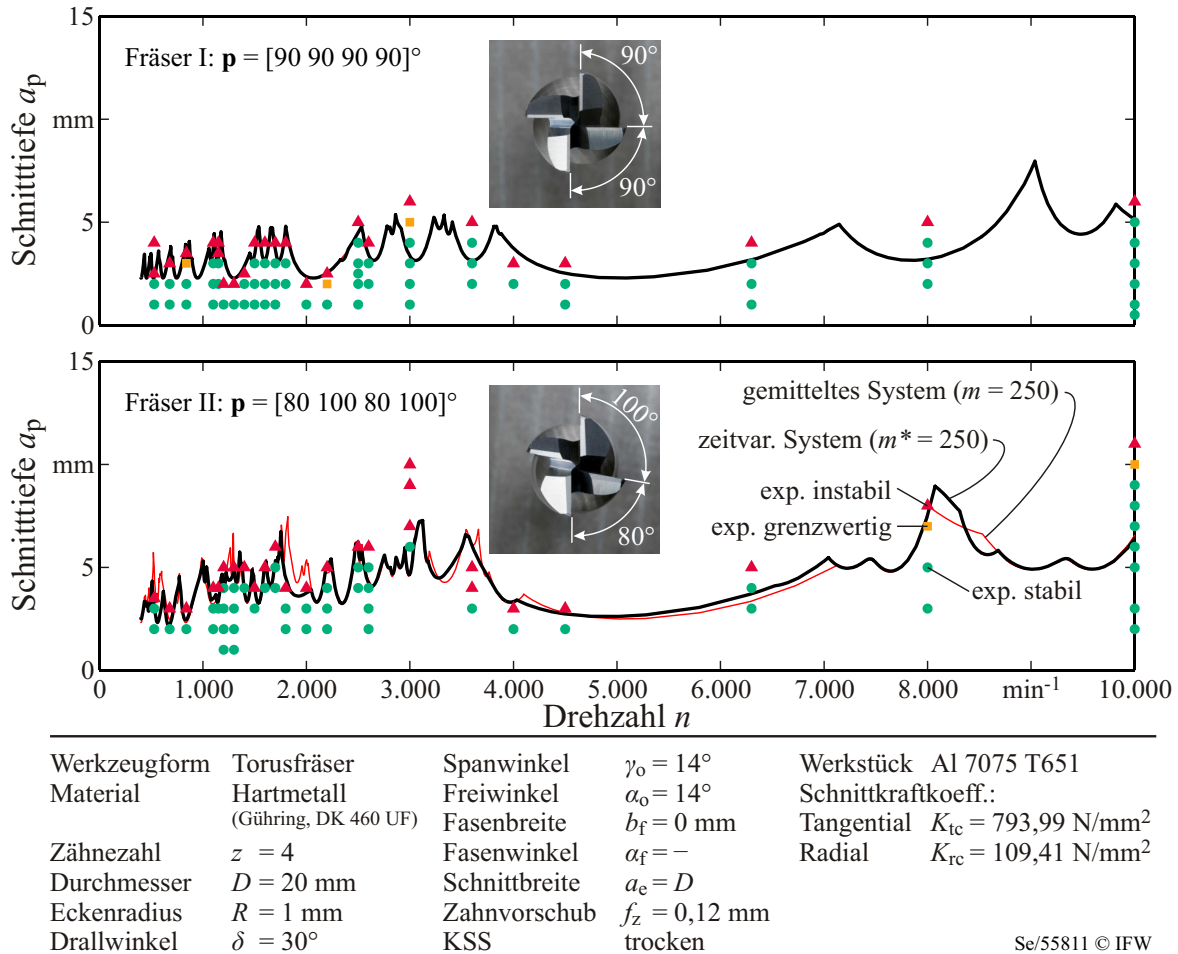


**Bild 5.4:** Gemessene und modellierte (Oszillatorparameter siehe Tabelle 5.2) Nachgiebigkeitsfrequenzgänge des Werkstücks in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung ( $G_{xx,w}$ ,  $G_{yy,w}$ ) und des Werkzeugs in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung ( $G_{xx,t}$ ,  $G_{yy,t}$ ). Es sind die unterschiedlichen Skalierungen der  $y$ -Achsen zu beachten.

Durch den Materialabtrag und der damit verbundenen Änderung der Masse und der Steifigkeit des Werkstücks ist grundsätzlich davon auszugehen, dass sich die dynamische Nachgiebigkeit des Werkstücks während der Bearbeitung ändert. In diesen Untersuchungen wurde dieser Effekt jedoch aufgrund des gewählten Versuchsaufbaus vernachlässigt. Für die Zulässigkeit dieser Vernachlässigung spricht die geringe abgetragene Masse im Vergleich zur Masse der Oberplatte der Schwingungsplattform, der Werkstückklemmung und der verbleibenden Restmasse des Werkstücks, sowie die Tatsache, dass die Steifigkeit kaum beeinflusst wird, da das abgetragene Material nicht im unmittelbaren Kraftfluss liegt. Die Berücksichtigung einer sich während der Bearbeitung ändernden Bauteilnachgiebigkeit spielt eher bei filigranen und dünnwandigen Bauteilen wie z. B. Turbinenschaukeln eine Rolle. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeiten von BUDAK et al. [Bud12] und THEVENOT et al. [The06a; The06b] verwiesen.

Während der Frästests wurde die Auslenkung der Oberplatte mit einem Lasertriangulationssensor (Firma KEYENCE, Modell LK-G32) gemessen, der zwischen Ober- und Unterplatte montiert ist. Die Abtastfrequenz betrug  $f = 25$  kHz. Das Signal wurde bei einer Eckfrequenz von  $f_{eck} = 5$  kHz tiefpassgefiltert.

Das Material der  $60 \times 30 \times 100$  mm Werkstücke war Al 7075 T651, eine hochfeste Aluminiumlegierung. Es wurden zwei unterschiedliche Werkzeuge eingesetzt. Beide Werkzeuge hatten bis auf die Zahnteilung die gleiche Gestalt. Die Schneidkanten waren scharf und wiesen keine Freiflächenfasen auf. Die Werkzeugaufnahme war ein HSK 63-Hydraulikspannfutter. Die Zähne des Werkzeugs I waren gleich geteilt ( $\mathbf{p} = [90 \ 90 \ 90 \ 90]^\circ$ ). Das Werkzeug II wies eine ungleiche Zahnteilung auf ( $\mathbf{p} = [80 \ 100 \ 80 \ 100]^\circ$ ). Die Stabilität der



**Bild 5.5:** Berechnete und experimentell bestimmte Stabilitätskarten für einen gleich und einen ungleich geteilten Fräser. Parameter der Strukturodynamik: Tabelle 5.2.

Frästests wurde anhand einer Sichtprüfung der gefrästen Oberfläche beurteilt. Tests, die nicht eindeutig als stabil oder instabil kategorisiert werden konnten, sind als grenzwertig gekennzeichnet. Die durch die beiden Methoden berechneten Stabilitätsgrenzen sind zusammen mit den experimentellen Ergebnissen in Bild 5.5 dargestellt. Durch die sehr hohe Anzahl an Oszillatoren ist die Berechnung der Eigenwerte der expandierten Systemmatrix sehr rechenintensiv. Das punktweise Scannen der  $n$ - $a_p$ -Parameterebene ist daher sehr zeitaufwendig. Um die Berechnung der Stabilitätskarten zu beschleunigen und die Präzision der Stabilitätsgrenze zu erhöhen, wurde der *Curve-Tracking*-Algorithmus von HENNINGER und EBERHARD [Hen07] verwendet. Dieser folgt der Stabilitätsgrenze, indem lediglich die Punkte in der Nähe der im vorherigen Berechnungsschritt ermittelten Stabilitätsgrenze betrachtet werden. Für eine detaillierte Beschreibung dieses Algorithmus sei auf die Literatur verwiesen.

Für den gleich geteilten Fräser I sind die durch die beiden Methoden berechneten Stabilitätsgrenzen identisch. Dies liegt daran, dass bei einem vierschneidigen, gleich geteilten Fräser im Vollnutenschnitt die Summe der Matrizen der projizierten Schnittkraftkoeffizienten zeitinvariant ist:

$$\sum_{j=1}^4 [\mathbf{Q}_j(t)] = \text{konst.} \quad \text{wenn} \quad a_e = D \quad \text{und} \quad \mathbf{p} = [90 \ 90 \ 90 \ 90]^\circ. \quad (5.1)$$

Somit stellt ihre Mittelung keine Vereinfachung mehr dar. Die berechneten Stabilitätsgrenzen des ungleich geteilten Fräsers weisen hingegen Unterschiede zwischen dem ursprünglich zeitvarianten System und dem gemittelten auf. Solche Unterschiede sind für gleich geteilte Fräser insbesondere bei stark zeitvarianten Prozessen bekannt, also z. B. bei im Verhältnis zum Fräserdurchmesser  $D$  geringen radialen Schnittbreiten  $a_e$  und bei geringen Zähnezahlen (siehe z. B. [Gra05a]). Für den alternierend ungleich geteilten Fräser können die Matrizen der projizierten Schnittkraftkoeffizienten lediglich paarweise, entsprechend der zwei unterschiedlichen Totzeiten, aufsummiert werden:

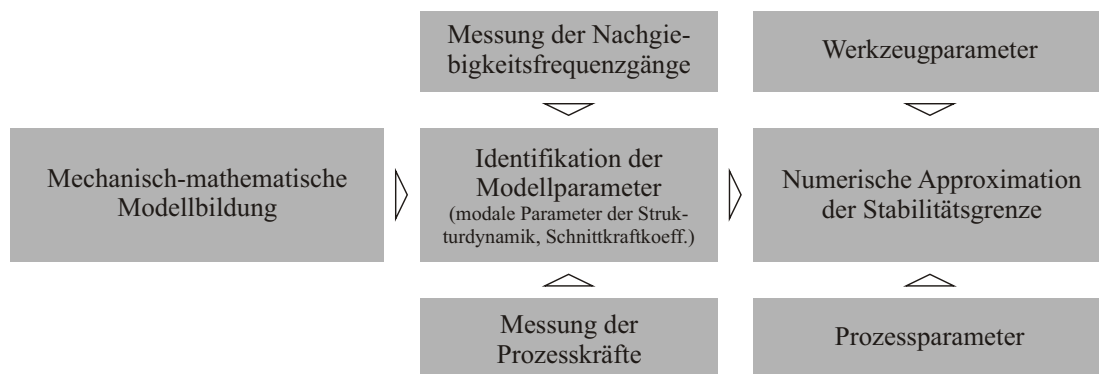
$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{1,3}(t) &= \mathbf{Q}_1(t) + \mathbf{Q}_3(t), \\ \mathbf{Q}_{2,4}(t) &= \mathbf{Q}_2(t) + \mathbf{Q}_4(t).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Die Matrizen  $\mathbf{Q}_{1,3}(t)$  und  $\mathbf{Q}_{2,4}(t)$  sind im Allgemeinen zeitvariant. Lediglich bei bestimmten Schnitttiefen werden sie aufgrund des Drallwinkels zeitinvariant. Auf diesen Effekt wird in Kapitel 5.1.6 eingegangen.

Die Übereinstimmung zwischen berechneten und experimentell ermittelten Stabilitätskarten der gleich und ungleich geteilten Fräser ist gut. Die experimentellen Ergebnisse bestätigen somit die in Kapitel 4.2 vorgenommene Erweiterung der Diskretisierungsmethode auf ungleich geteilte Fräser.

### 5.1.2 Fehlerbetrachtung

Zwischen der theoretisch berechneten und der experimentell ermittelten Stabilitätsgrenze treten in der Regel Abweichungen auf. Diese Abweichungen können verschiedene Ursachen haben. In Bild 5.6 ist die Vorgehensweise zur theoretischen Stabilitätsanalyse graphisch dargestellt. In jedem Schritt der Stabilitätsanalyse können Fehler auftreten. Mögliche Fehler in der mechanisch-mathematischen Modellbildung betreffen insbesondere die getroffenen vereinfachenden Annahmen. So bleiben z. B. etwaige Unwuchten, gyroskopische Effekte und drehzahlabhängige Effekte in dieser Arbeit unberücksichtigt. Zudem wird angenommen, dass die strukturellen Steifigkeiten linear und die Kreuzübertragungsfrequenzgänge (Anregung in  $x$ -Richtung, Verlagerung in  $y$ -Richtung und umgekehrt) null sind. Bei der Messung der Nachgiebigkeitsfrequenzgänge können zum einen Messfehler auftreten, z. B. aufgrund einer fehlerhaften Kalibrierung der Kraft- und Verlagerungssensoren oder einer unzureichenden Impulsanregung. Zum anderen kann die dynamische Nachgiebigkeit



Se/55849 © IFW

**Bild 5.6:** Vorgehensweise zur theoretischen Analyse der Prozessstabilität.

aufgrund von messtechnischen Beschränkungen stets nur für einen begrenzten Frequenzbereich ermittelt werden, wodurch zwangsläufig die Eigenfrequenzen außerhalb dieses Bereichs vernachlässigt werden müssen. Bei der Messung der Prozesskräfte können ebenfalls Messfehler, z. B. aufgrund einer fehlerhaften Kalibrierung der Kraftsensoren oder der Anregung des Kraftmesssystems in seinen Eigenfrequenzen auftreten. Die Identifikation der Modellparameter basiert dadurch auf fehlerbehafteten Messdaten. Jedoch können auch bei der Identifikation selbst Fehler auftreten. In dieser Arbeit wurden hierzu genetische Algorithmen eingesetzt, die aufgrund ihrer heuristischen Funktionsweise das prinzipielle Risiko aufweisen, statt dem gesuchten globalen Minimum des Optimierungsproblems nur ein lokales Minimum zu finden. Zudem wurden mögliche Abweichungen zwischen den Soll- und Ist-Größen der Fräsergestalt und der Prozessparameter vernachlässigt. Die Approximation der Stabilitätsgrenze basiert auf dem in Kapitel 4.2 beschriebenen numerischen Näherungsverfahren. Wird der Diskretisierungsparameter hierbei zu klein gewählt, können auch durch das numerische Verfahren selbst Fehler auftreten (siehe Bild 4.8).

Es existiert daher eine Vielzahl an möglichen Fehlerquellen. Für bestimmte Parameter können jedoch Tendenzen angegeben werden. Für die Beurteilung des Einflusses einer fehlerhaft identifizierten Eigenfrequenz der Strukturmechanik ist es wichtig zu wissen, dass bei einem zeitinvarianten Ein-Freiheitsgrad-System eines gleich geteilten Fräasers die lokalen Maxima der Stabilitätsgrenze, durch folgende Gleichung angegeben werden können:

$$n_k = \frac{f_0}{kz} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}. \quad (5.3)$$

Ist die tatsächlich Eigenfrequenz nun kleiner als die identifizierte, so verschieben sich diese besonders stabilen Drehzahlbereiche hin zu niedrigeren Drehzahlen und umgekehrt. Eine zu niedrig identifizierte Dämpfung führt zu einer Unterschätzung der tatsächlichen Stabilitätsgrenze. Das gleiche gilt für die Schnittkraftkoeffizienten. Bei Systemen mit einer Vielzahl an Eigenmoden ist es jedoch nicht ohne Weiteres möglich, den Einfluss der verschiedenen Eigenmoden auf die Stabilitätsgrenze zu erfassen. Manche Eigenmoden können die Stabilitätsgrenze sehr stark beeinflussen, andere tun dies nur kaum bis gar nicht. Dies erschwert die Ursachenanalyse der auftretenden Abweichungen.

Wegen der Komplexität der Stabilitätsproblematik und der Vielzahl an möglichen Fehlerquellen sollten theoretisch berechnete Stabilitätskarten daher nur als Richtwert verstanden werden. Die gute Übereinstimmung der in Bild 5.5 dargestellten theoretisch berechneten und experimentell ermittelten Stabilitätskarten deutet darauf hin, dass die wesentlichen Einflussgrößen durch das in dieser Arbeit entwickelte und parametrisierte Modell korrekt abgebildet werden. Für eine eingehendere Betrachtung von Modellfehlereffekten sei auf die Literatur [Kle08; Sim10] verwiesen.

### 5.1.3 Einfluss der Zähnezahl

In Bild 5.1 wurde gezeigt, dass im Falle von ungleich geteilten Fräsern das Ersetzen der zeitvarianten Systemmatrizen durch ihre Mittelwerte auch bei im Verhältnis zum Durchmesser hohen Schnittbreiten zu Unterschieden der approximierten Stabilitätsgrenzen führen kann. Dieser Einfluss der Zeitvarianz wird im Folgenden, ausgehend von dem in Tabelle 5.3 definierten Referenzfräsersystem, in Abhängigkeit

- der Zähnezahl  $z$ ,



- verschiedener alternierender und linearer Ungleichteilungen  $\mathbf{p}$  und
- des Drallwinkels  $\delta$

anhand des Minimalbeispiels eines Einmassenschwingers untersucht. In diesem Kapitel wird zunächst der Einfluss der Zähnezahzahl betrachtet. Zur Vereinfachung der Struktur-  
dynamik wird lediglich der dominante Oszillator der Schwingungsplattform berücksichtigt.  
Die Parameter dieses Oszillators sind der Tabelle 5.4 zu entnehmen<sup>2</sup>.

**Tabelle 5.3:** Parameter des Fräswerkzeugs.

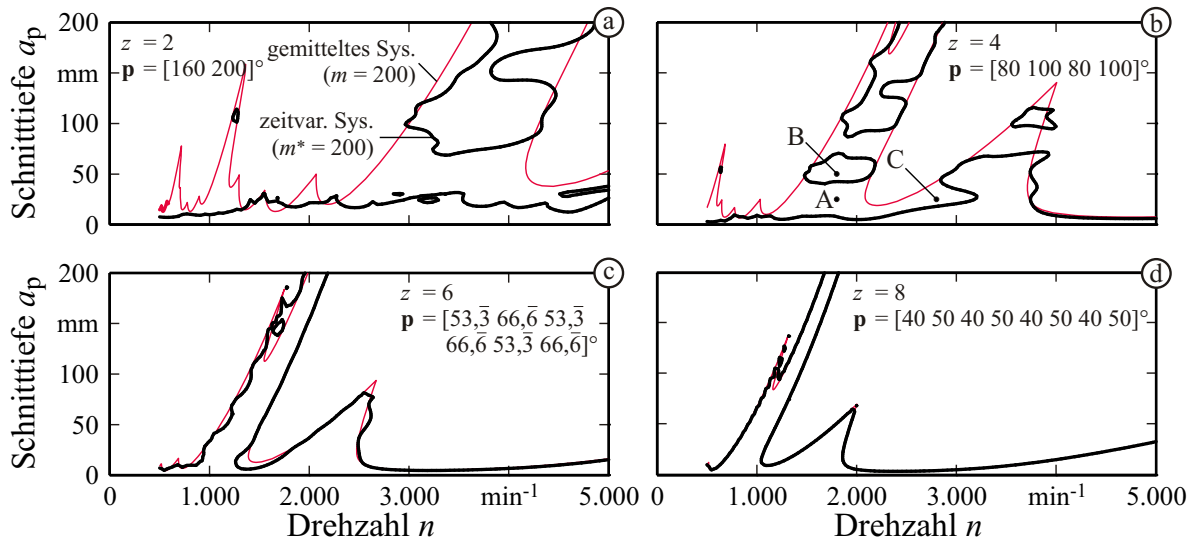
Werkzeugform	zylindrisch
Durchmesser	$D = 20$ mm
Zähnezahl	$z = 4$
Zahnteilung	$\mathbf{p} = [90 \ 90 \ 90 \ 90]^\circ$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$
Schneidkante	scharf

**Tabelle 5.4:** Werte der Oszillatorparameter des Werkstücks in Vorschubrichtung ( $x_w$ ).

Nr.	Masse	Dämpfung	Steifigkeit	Lehrsche Dämpfung	Eigenfreq.	
	$m$ [kg]	$d$ [Ns/m]	$k$ [N/ $\mu$ m]	$\zeta$ [%]	$f_0$ [Hz]	
$x_w$	1	5,08	468,75	10,39	3,23	227,66

Die alternierende Zahnteilung ist so gewählt, dass das Verhältnis der Teilung zweier aufeinanderfolgender Zähne konstant  $\frac{p_0 - \Delta p}{p_0 + \Delta p} = \frac{4}{5}$  ist. Bild 5.7 zeigt die berechneten Stabilitätskarten der vier unterschiedlichen Fräser. Aufgrund der stark vereinfachten Struktur-  
dynamik ist die Grenzspantiefe für bestimmte Drehzahlen im Vergleich zu realen Prozessen unrealistisch hoch. Die an dieser Stelle dargestellten Stabilitätskarten dienen jedoch nicht dem Zweck das reale Verhalten eines bestimmten Prozesses widerzuspiegeln, sondern vielmehr dazu, den Einfluss der ungleichen Zahnteilung auf das Stabilitätsverhalten des mathematischen Systems darzustellen. Hierdurch sollen die grundlegenden Wirkmechanismen ungleicher Zahnteilungen veranschaulicht werden. Für die Übertragung der in dieser Arbeit dargestellten Methoden auf den realen Anwendungsfall ist stets die genaue Kenntnis der Struktur-  
dynamik des jeweiligen Werkzeugs und Werkstücks und ihrer Modellparameter notwendig (siehe Kapitel 5.1.1). Die Stabilitätsgrenze des gemittelten Systems nähert sich der des zeitvarianten Systems mit zunehmender Zähnezahl an. Der Grund hierfür ist, dass die Zeitvarianz des Systems mit zunehmender Zähnezahl bis  $z = 8$  abnimmt und die Vereinfachung der Mittelung der Systemmatrizen dadurch weniger ins Gewicht fällt. Bei der Zähnezahl  $z = 8$  ist das im Allgemeinen zeitvariante System zeitinvariant. Die mit den beiden Methoden berechneten Stabilitätsgrenzen sind daher identisch. Für gleich geteilte Fräser stimmen die Stabilitätsgrenzen von zeitvarianten und gemittelten Systemen auch schon bei nur einer Schneide und einer Schnittbreite von  $a_e = 0,5 D$  sehr gut überein (siehe [Gra05a]). Für ungleich geteilte Fräser ist dies nicht der Fall. Bei

<sup>2</sup>Diese Parameter unterscheiden sich geringfügig von denen des zweiten Oszillators des Werkstücks in  $x$ -Richtung aus Tabelle 5.2, da sie durch den in Kapitel 4.1 beschriebenen genetischen Algorithmus erneut anhand des gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgangs identifiziert wurden.



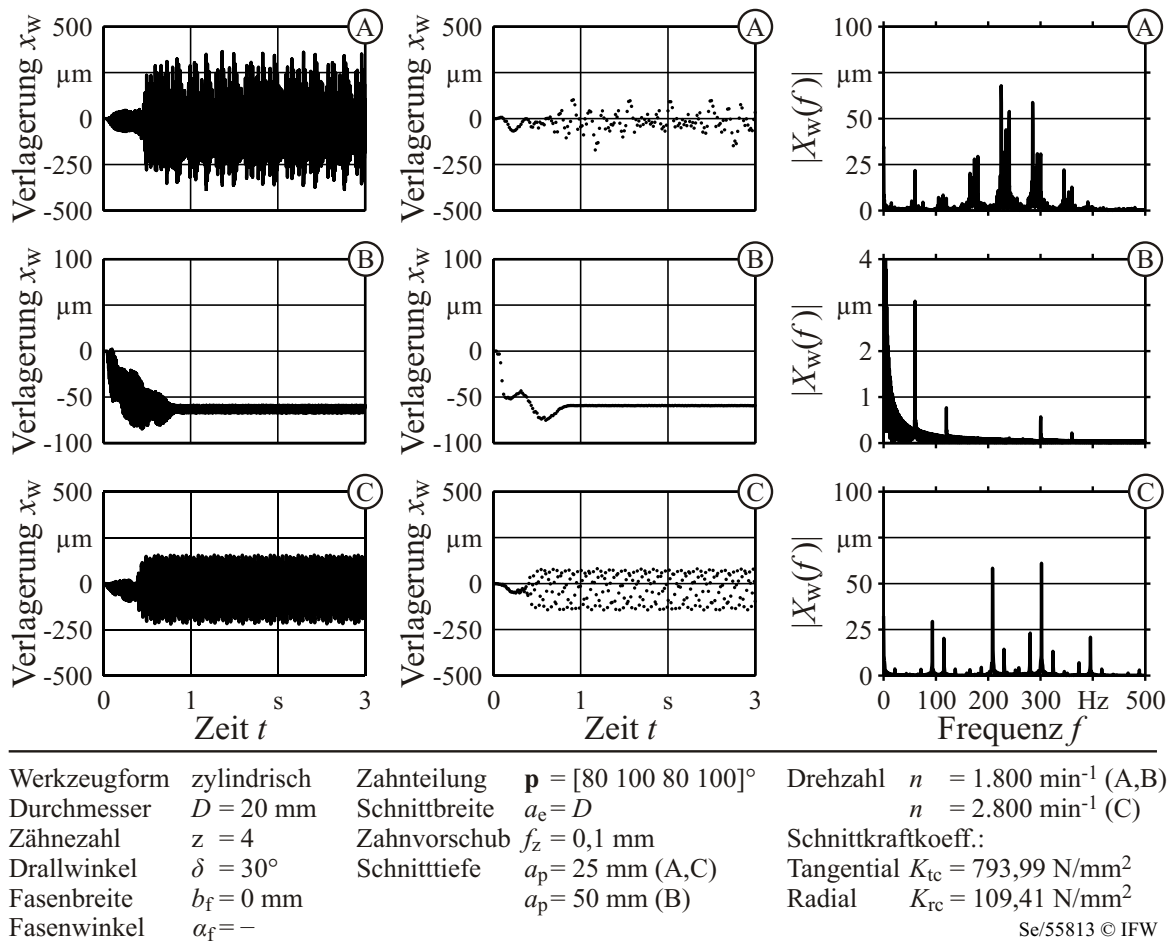
Werkzeugform	zylindrisch	Fasensbreite	$b_f = 0$ mm	Schnittkraftkoeff.:
Durchmesser	$D = 20$ mm	Fasenswinkel	$\alpha_f = -$	Tangential $K_{tc} = 793,99$ N/mm <sup>2</sup>
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Schnittbreite	$a_e = D$	Radial $K_{rc} = 109,41$ N/mm <sup>2</sup>

Se/55812 © IFW

**Bild 5.7:** Stabilitätskarten alternierend ungleich geteilter Fräser mit unterschiedlichen Zähnezahlen  $z$ . Das Teilungsverhältnis zweier aufeinanderfolgender Zähne ist konstant  $\frac{4}{5}$ . Parameter der Strukturodynamik: Tabelle 5.4.

den Fräsern mit zwei und vier Zähnen weist das zeitvariante System stabile Inseln auf. Diese Inseln liegen im Wesentlichen innerhalb der stabilen Peaks der Stabilitätskarten des gemittelten Systems. Bei geringen Schnitttiefen sind die stabilen Inseln relativ klein. Je größer die Schnitttiefe wird, desto stärker verschmelzen die stabilen Inseln und desto besser stimmen die Grenzspannungstiefen des gemittelten mit denen des zeitvarianten Systems überein. Auch dies lässt sich wiederum durch die Zeitvarianz des Systems erklären. Diese nimmt aufgrund des Drallwinkels von  $\delta = 30^\circ$  mit zunehmender Schnitttiefe ab. Zur Absicherung der Ergebnisse wurden die in Bild 5.7 b markierten Punkte A, B und C mit der in Kapitel 4.4 beschriebenen Methode im Zeitbereich simuliert. Bild 5.8 zeigt die Verlagerungen des Werkstücks in Vorschubrichtung  $x_w$  im Zeitbereich (links) und die dazugehörigen Frequenzspektren<sup>3</sup> (rechts). Zudem sind mittig die Poincaré-Diagramme der Verlagerungen des Werkstücks in Vorschubrichtung dargestellt. Die Abtastfrequenz der Poincaré-Diagramme entspricht dem Kehrwert der Periode des Systems  $\frac{1}{T_p} = \frac{1}{2n}$ . Die Punkte A ( $n = 1.800$  min<sup>-1</sup>,  $a_p = 25$  mm) und C ( $n = 2.800$  min<sup>-1</sup>,  $a_p = 25$  mm) zeigen eindeutig instabiles Verhalten. Wird die Schnitttiefe bei der Drehzahl von  $n = 1.800$  min<sup>-1</sup> auf  $a_p = 50$  mm erhöht (Punkt B), stabilisiert sich der Prozess. Dieses Stabilitätsverhalten bestätigt die Stabilitätsgrenze des zeitvarianten Systems. Die Stabilitätsgrenze des gemittelten System gibt alle Punkte A-C als stabil an. Es zeigt sich demnach, dass für eine korrekte Berechnung der Stabilitätsgrenze in diesem Fall die Zeitvarianz des Systems nicht vernachlässigt werden darf.

<sup>3</sup>Die Frequenzspektren beziehen sich auf den Teil des Schnitts, bei dem der Fräser im Volleingriff ( $a_e = D$ ) ist.



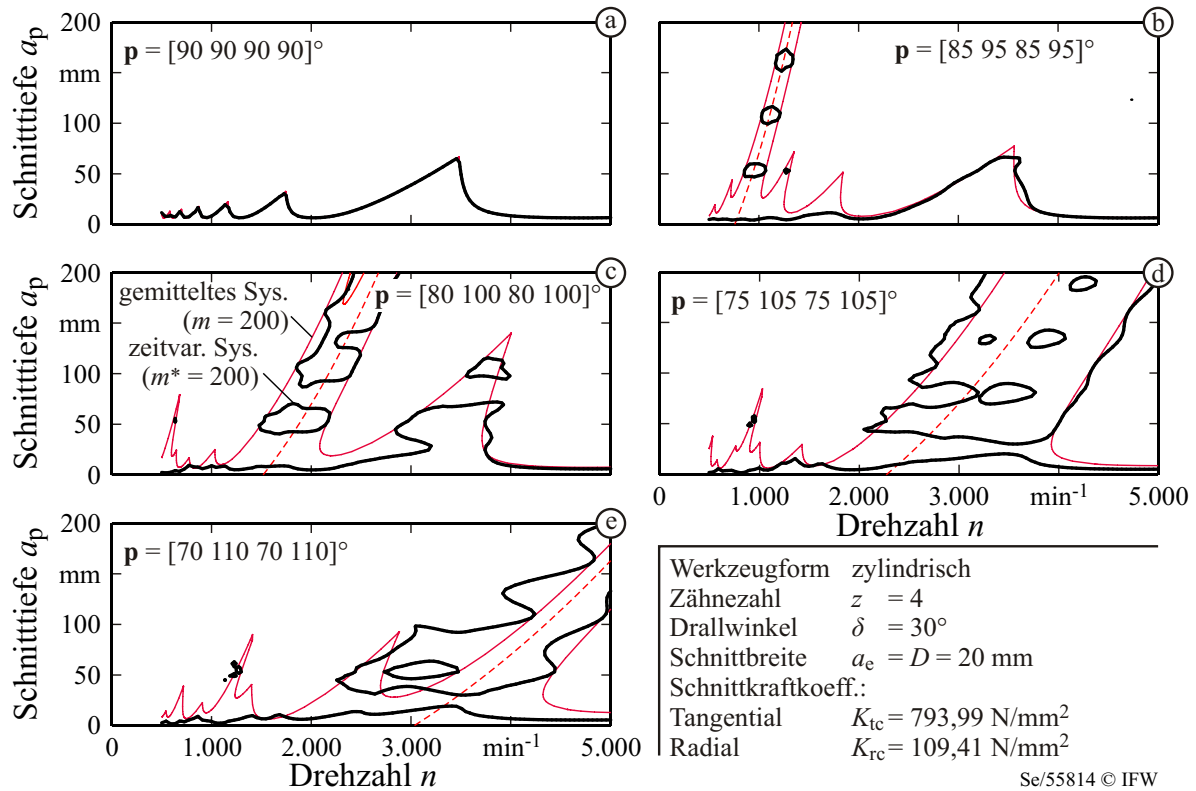
**Bild 5.8:** Simulation der Arbeitspunkte A, B und C. Links: Verlagerung des Werkzeugs in Vorschubrichtung  $x_t(t)$ , Mitte: Poincaré-Verlauf von  $x_t(t)$  (Abtastung mit  $\frac{1}{2n}$ ), Rechts: Frequenzspektrum von  $x_t(t)$ . Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4. Es sind die unterschiedlichen Skalierungen der Ordinatenachsen zu beachten.

### 5.1.4 Alternierende Ungleichteilung

In diesem Kapitel werden die beiden Methoden zur Vorhersage der Stabilitätsgrenze für verschiedene alternierende Ungleichteilungen untersucht. Alternierend ungleich geteilte Fräser bieten den Vorteil, dass aufgrund der Punktsymmetrie durch die Ungleichteilung keine Unwucht erzeugt wird. Die Werkzeugparameter und Prozessstellgrößen sind die gleichen wie im vorhergehenden Kapitel, jedoch ist die Zähnezahl nun konstant  $z = 4$ . Die alternierende Ungleichteilung

$$\mathbf{p} = [p_0 - \Delta p, p_0 + \Delta p, p_0 - \Delta p, p_0 + \Delta p] \quad (5.4)$$

wird im Bereich  $\Delta p \in \{0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ\}$  variiert. Die mit den beiden Methoden berechneten Stabilitätskarten sind in Bild 5.9 dargestellt. Die Stabilitätsgrenzen des gleich geteilten Fräasers sind identisch (Bild 5.9 a). Weist der Fräser eine ungleiche Zahnteilung auf, unterscheiden sich die Stabilitätsgrenzen des gemittelten Systems von der des zeitvarianten deutlich (Bild 5.9 b-e). In den Stabilitätskarten des zeitvarianten Systems bilden sich durch die Ungleichteilung wiederum stabile Inseln aus. Bei den beiden stärksten Ungleichteilungen (Bild 5.9 d und e) entstehen auf den stabilen Inseln sogar wieder



**Bild 5.9:** Stabilitätskarten mit verschiedenen alternierenden Ungleichteilungen  $\mathbf{p}$ . Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4.

instabile Einschlüsse. Zwar liegen die stabilen Gebiete des zeitvarianten Systems auch hier größtenteils innerhalb der stabilen Gebiete des zeitinvarianten Systems, jedoch ist bei der größten Ungleichteilung (Bild 5.9 e) auch ein gegenteiliger Effekt zu beobachten. Im Drehzahlbereich  $n = 3.000 \dots 4.000 \text{ min}^{-1}$  führt die Zeitvarianz im Vergleich zum gemittelten System bei Schnitttiefen um  $a_p = 25 \text{ mm}$  zu einer Destabilisierung und bei Schnitttiefen um  $a_p = 75 \text{ mm}$  zu einer Stabilisierung des Systems.

Es fällt zudem auf, dass jeweils ein Peak in den Stabilitätskarten des gemittelten Systems der ungleich geteilten Fräser ein zu hohen Schnitttiefen hin offenes stabiles Gebiet bildet. Die Drehzahlbereiche dieser Peaks lassen sich nach DREGGER durch Gleichung (2.4) berechnen. In dieser Formel wird jedoch die mit der Schnitttiefe  $a_p$  aufgrund der inneren Modulation steigende Systemsteifigkeit nicht berücksichtigt. Die Gleichung (2.4) gilt daher nur für niedrige Schnitttiefen. Die Verschiebung der besonders stabilen Drehzahlbereiche mit höherer Schnitttiefe vermag sie nicht vorherzusagen. Zur Abbildung der Drehzahlverschiebung kann diese Gleichung erweitert werden, indem bei der Berechnung der Frequenz nicht nur die strukturelle Steifigkeit herangezogen wird, sondern die Summe aus struktureller Steifigkeit und Schnittsteifigkeit:

$$n(a_p) = \frac{2 \sqrt{\frac{k + a_p \sum_{j=1}^z [\bar{q}_j]}{m}}}{\pi z} \frac{\frac{p_1}{p_2} - 1}{\frac{p_1}{p_2} + 1}. \quad (5.5)$$

In dieser Gleichung ist  $\bar{q}_j$  der jeweilige gemittelte Richtungskoeffizient der  $j$ -ten Schneide. Durch die Berücksichtigung der Schnittsteifigkeit steigt die Frequenz mit größer werdender

Schnitttiefe, was eine Verschiebung des besonders stabilen Drehzahlbereichs hin zu höheren Drehzahlen bewirkt. Die nach Gleichung (5.5) berechnete Drehzahl ist als Funktion der Schnitttiefe  $a_p$  in den Stabilitätskarten in Bild 5.9 als gestrichelte Linie eingezeichnet. Für die Berechnung des Teilungsverhältnisses kann die Gleichung (5.5) nach  $\frac{p_1}{p_2}$  umgestellt werden:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{4 + \frac{2 \pi n z}{\sqrt{\frac{k + a_p \sum_{j=1}^z [\bar{q}_j]}{m}}}}{4 - \frac{2 \pi n z}{\sqrt{\frac{k + a_p \sum_{j=1}^z [\bar{q}_j]}{m}}}}. \quad (5.6)$$

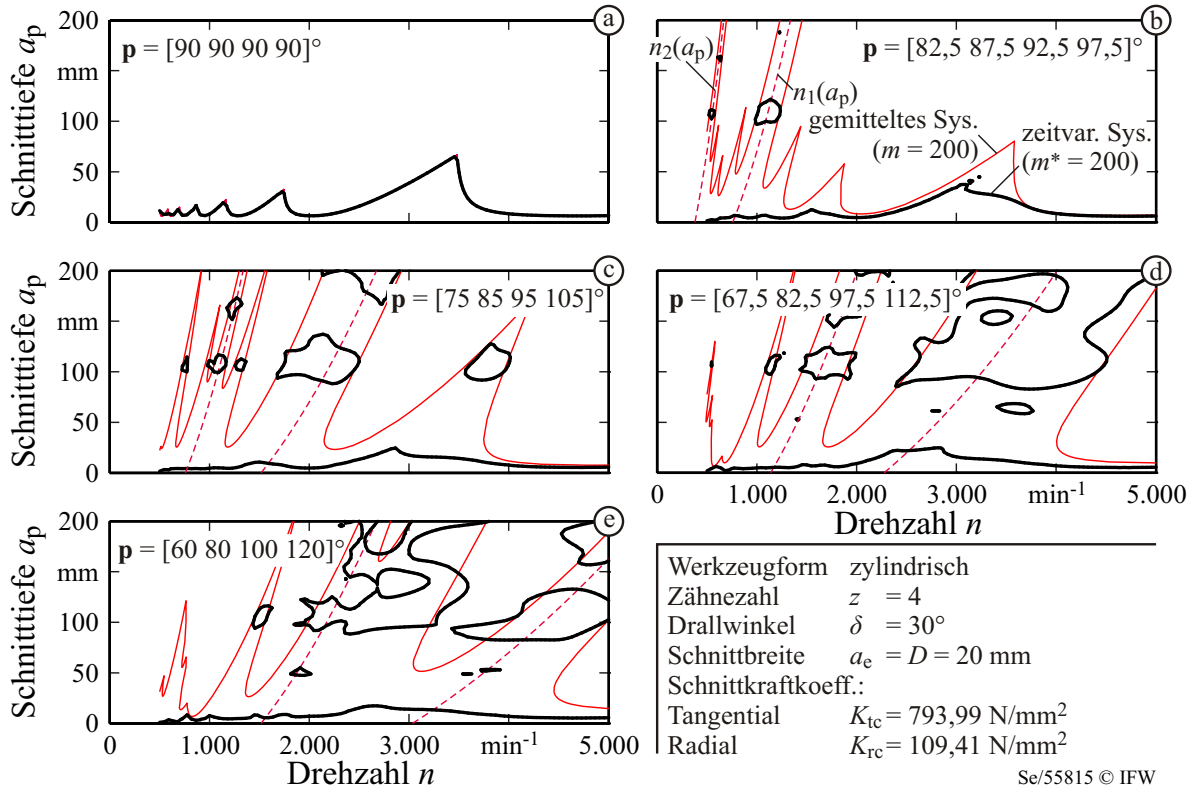
### 5.1.5 Lineare Ungleichteilung

Neben alternierend ungleich geteilten Fräsern sind aus der Literatur weitere, asymmetrische Formen von Ungleichteilungen bekannt. BUDAK berichtet in [Bud03a], dass im Vergleich zu einem gleich geteilten Fräser eine lineare Form der ungleichen Zahnteilung

$$\mathbf{p} = [p_0, p_0 + \Delta p, p_0 + 2 \Delta p, \dots, p_0 + (z - 1) \Delta p] \quad (5.7)$$

zu einer stärkeren Aufweitung des stabilen Drehzahlbereichs führt als eine alternierende Ungleichteilung. Aus diesem Grund wird in diesem Kapitel diese Art der Ungleichteilung betrachtet. Wird die Änderung der linearen Zahnteilung  $\Delta p$  vorgegeben, so berechnet sich  $p_0$  gemäß Gleichung (2.7). Um den Einfluss der linearen Zahnteilung auf die Stabilitätsgrenze zu untersuchen, wird sie mit  $\Delta p \in \{0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ\}$  variiert. Außer der Zahnteilung sind die Werkzeugparameter und Prozessstellgrößen die gleichen wie in den beiden vorhergehenden Kapiteln. Die Stabilitätskarten sind in Bild 5.10 dargestellt. Die Stabilitätsgrenzen des zeitvarianten und zeitinvarianten Systems unterscheiden sich stark voneinander. Wie bei der im vorhergehenden Kapitel betrachteten alternierenden Ungleichteilung treten auch hier wieder stabile Inseln auf, die größtenteils innerhalb der stabilen Peaks des gemittelten Systems liegen. Die durch die lineare Ungleichteilung hervorgerufene Aufweitung des besonders stabilen Drehzahlbereichs des zeitinvarianten Systems ist größer als die bei alternierender Ungleichteilung. Dies bestätigt die Ergebnisse von BUDAK [Bud03a], welche auf der Mittelung der Zeitvarianz der Systemparameter beruhen. Es ist jedoch anzumerken, dass die von BUDAK angegebene Formel (2.6) zur Auslegung linear ungleich geteilter Fräser auf der Mittelung der Systemdynamik basiert und somit nur eingeschränkte Gültigkeit hat. Um die Gültigkeit im Einzelfall nachzuweisen, ist es daher zu empfehlen, die Stabilitätskarte eines ungleich geteilten Fräasers unter Berücksichtigung der Zeitvarianz nach der in Kapitel 4.2 beschriebenen Methode zu berechnen.

Analog zu Gleichung (5.5) können auch für die gemittelten Systeme linear ungleich geteilte Fräser besonders stabile Drehzahlen angegeben werden. Die Überlegung von DREGGER war, dass wenn bei alternierend ungleich geteilten Fräsern die Phasenverschiebung zwischen der äußeren Modulation der Schneiden mit kleinem Teilungswinkel gegenüber der äußeren Modulation der Schneiden mit großem Teilungswinkel  $\varepsilon = \pi$  ist, sich diese

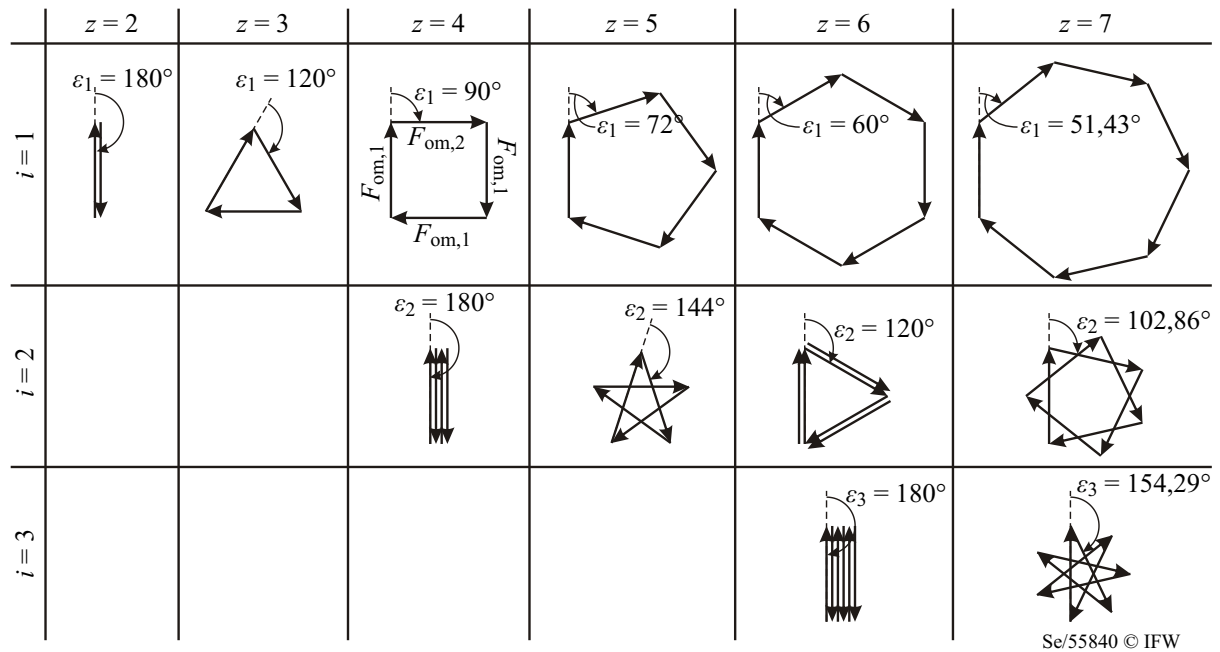


**Bild 5.10:** Stabilitätskarten mit verschiedenen linearen Ungleichteilungen  $\mathbf{p}$ . Parameter der Strukturtechnik: Tabelle 5.4.

Kraftanteile gegenseitig auslöschen. Diese Phasenverschiebung lässt sich mit der Methode der komplexen Kraftzeiger veranschaulichen. Die Summe der komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation ist in den besonders stabilen Arbeitspunkten näherungsweise null:  $\sum_{j=1}^z F_{om,j} \approx 0$ . Bei linear ungleich geteilten Fräsern ergeben sich jedoch mehrere Möglichkeiten zur gegenseitigen Kompensation der äußeren Modulation der  $z$  Schneiden. Bei einem linear ungleich geteilten Fräser mit vier Schneiden kann die Phasenverschiebung zum einen  $\varepsilon = \pi$  betragen oder alternativ  $\varepsilon = \pi/2$ . Im ersten Fall liegen die komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation der vier Schneiden alle auf einer Geraden. Der Kraftzeiger der ersten und dritten Schneide zeigen in die gleiche Richtung und die Kraftzeiger der zweiten und vierten Schneide genau in die entgegengesetzte. Beim zweiten Fall ( $\varepsilon = \pi/2$ ) formen die Kraftzeiger ein Quadrat. Dieser Zusammenhang ist in Bild 5.11 für Fräser mit bis zu sieben Schneiden graphisch dargestellt. Bei  $z = 7$  Schneiden ergeben sich drei Phasenverschiebungen  $\varepsilon_i$ , bei denen die Summe der komplexen Kraftzeiger null ergibt. Die komplexen Kraftzeiger bilden dann ein Heptagon ( $\varepsilon_1 = 51,43^\circ$ ) oder eines der beiden möglichen Heptagramme ( $\varepsilon_2 = 102,68^\circ$ ,  $\varepsilon_3 = 154,43^\circ$ ). Die Formel für die besonders stabilen Drehzahlen des gemittelten Systems linear ungleich geteilter Fräser lautet daher:

$$n_i(a_p) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k + a_p \sum_{j=1}^z [\bar{q}_j]}{m}} \frac{\Delta p}{\varepsilon_i} \quad (5.8)$$

Der Winkel  $\varepsilon_i$  ist die relative Phasenverschiebung zwischen der äußeren Modulation der einzelnen Schneiden, die zu einem gegenseitigen Auslöschen der Kräfte der äußeren Mo-



**Bild 5.11:** Komplexe Kraftzeiger der äußeren Modulation linear ungleich geteilter Fräser mit verschiedenen Zähnezahlen  $z$  für die Arbeitspunkte gemäß Gleichung (5.8).

dulation führt<sup>4</sup>:

$$\varepsilon_i = \frac{2\pi i}{z} \quad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3, \dots, \left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor. \quad (5.9)$$

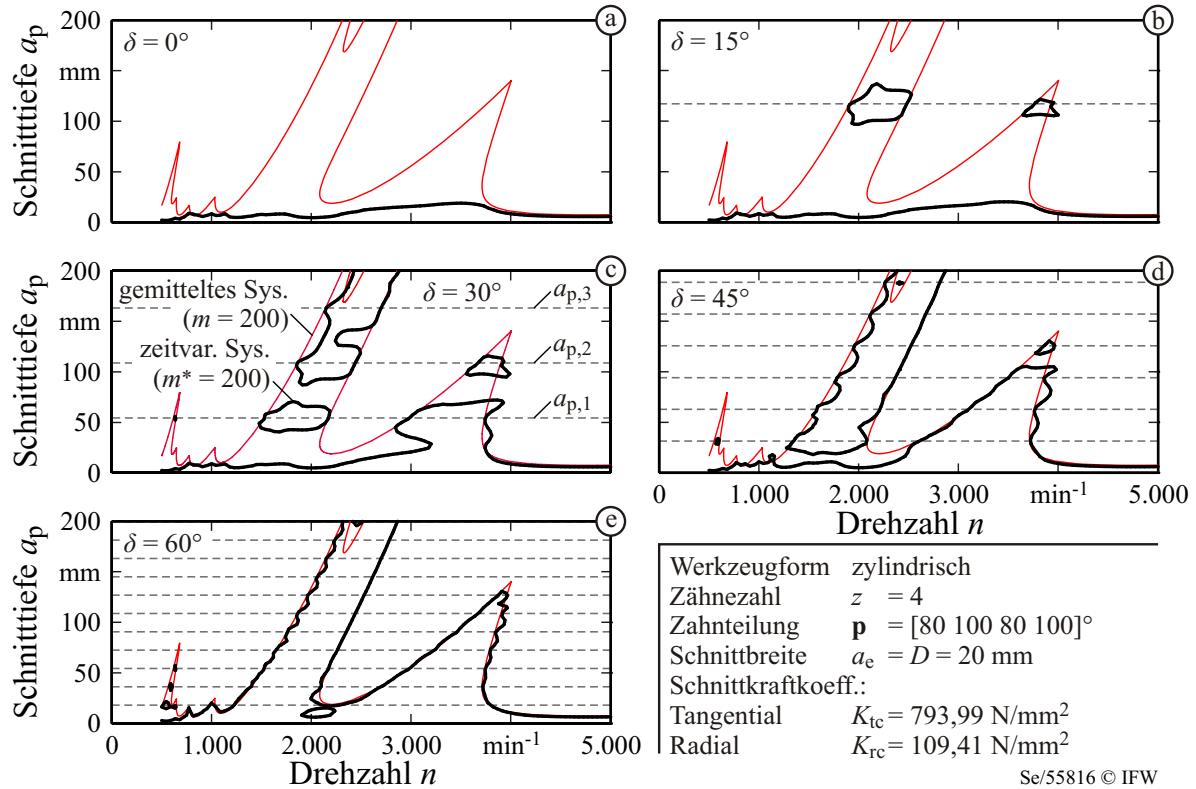
Die nach Gleichung (5.8) berechneten Drehzahlen sind als gestrichelte Linien in Bild 5.10 eingezeichnet. Im Gegensatz zu den im vorhergehenden Kapitel untersuchten alternierend ungleich geteilten Fräsern, sind es bei dem hier betrachteten vierschneidigen linear ungleich geteilten Fräser stets zwei Drehzahlbereiche, die ein zu hohen Schnitttiefen hin offenes stabiles Gebiet bilden.

### 5.1.6 Einfluss des Drallwinkels

In den vorhergehenden Kapiteln wurde gezeigt, dass das Maß der Übereinstimmung von den durch die beiden Methoden berechneten Stabilitätskarten von der Zeitvarianz der Systemparameter abhängt. Eine Erhöhung der Zähnezahl  $z$  und die damit einhergehende Verringerung der zeitlichen Varianz der projizierten Schnittkraftkoeffizienten bewirkt eine bessere Übereinstimmung. Einen ähnlichen Effekt hat der Drallwinkel  $\delta$ . Hohe Drallwinkel führen zu einer Verringerung der zeitlichen Varianz der projizierten Schnittkraftkoeffizienten. Wie die beiden Stabilitätsgrenzen sich mit größer werdendem Drallwinkel annähern, ist in Bild 5.12 dargestellt.

In [Zat06; Ins06] wurde gezeigt, dass sich bei gleich geteilten Werkzeugen durch eine Zu-

<sup>4</sup>Der Term  $\left\lfloor \frac{z}{2} \right\rfloor$  ist die Abrundungsfunktion, die die größte ganze Zahl angibt, die kleiner oder gleich  $\frac{z}{2}$  ist:  $\lfloor x \rfloor := \max_{k \in \mathbb{Z}, k \leq x} (k)$ .



**Bild 5.12:** Stabilitätskarten mit alternierender Ungleichteilung  $\mathbf{p} = [80 \ 100 \ 80 \ 100]^\circ$  und verschiedenen Drallwinkeln  $\delta$ . Parameter der Strukturodynamik: Tabelle 5.4.

nahme des Drallwinkels die bei geringen Schnittbreiten aufgrund von Flip-Bifurkationen<sup>5</sup> auftretenden zusätzlichen Peaks zu geschlossenen instabilen Inseln umformen. Diese instabilen Inseln sind durch horizontale Linien getrennt, die ganzzahligen Vielfachen der Drallsteigung entsprechen. Ähnliches gilt für die stabilen Inseln, die bei ungleich geteilten Werkzeugen auftreten können. Da die Fräser eine alternierende Ungleichteilung haben, treten nicht  $z$ , sondern lediglich zwei verschiedene Totzeiten ( $\theta_1 = \theta_3$ ,  $\theta_2 = \theta_4$ ) in der den Fräsprozess beschreibenden Differentialgleichung auf. Dies bedeutet, dass die Eingangsmatrizen des ersten und dritten und die des zweiten und vierten Zahns aufaddiert werden können. Dadurch kann Gleichung (4.42) wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \underbrace{[\mathbf{B}_1(t) + \mathbf{B}_3(t)]}_{\mathbf{B}_{1,3}(t)} \mathbf{L} \mathbf{x}(t - \theta_1) + \underbrace{[\mathbf{B}_2(t) + \mathbf{B}_4(t)]}_{\mathbf{B}_{2,4}(t)} \mathbf{L} \mathbf{x}(t - \theta_2). \quad (5.10)$$

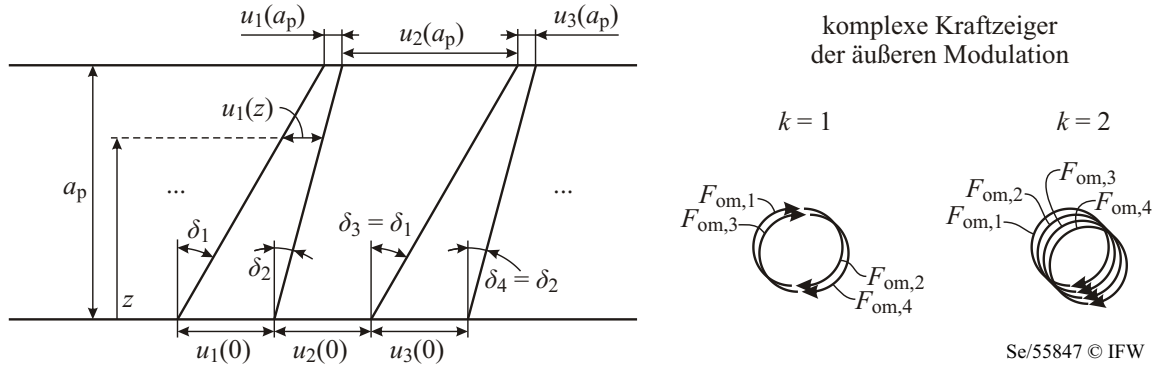
Die Matrizen  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}_{1,3}(t)$  und  $\mathbf{B}_{2,4}(t)$  sind bei den Schnitttiefen

$$a_{p,k} = \frac{k \ 2 \ \pi \ D}{z \ \tan(\delta)}, \quad \text{mit } k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.11)$$

konstant. Diese Schnitttiefen sind als graue gestrichelte Linien in den Stabilitätskarten b–e in Bild 5.12 dargestellt. Bei diesen Schnitttiefen ist das im Allgemeinen zeitvariante System zeitinvariant. Es wird bei diesen Schnitttiefen daher exakt durch das autonome System aus Gleichung (4.45) beschrieben. Die Folge ist, dass die durch die beiden Methoden berechneten Stabilitätsgrenzen bei diesen Schnitttiefen zusammenfallen. Dies

<sup>5</sup>Eine Flip-Bifurkation tritt auf, wenn der betragsmaximale, kritische Eigenwert der expandierten Systemmatrix  $\mu_{\max} = -1$  ist (siehe [Man04]).





**Bild 5.13:** Abgewickelte Schneiden eines zylindrischen, vierschneidigen, alternierend ungleich gedrahten Fräasers und gekrümmte Kraftzeiger für die Fälle  $k = 1$  und  $k = 2$ .

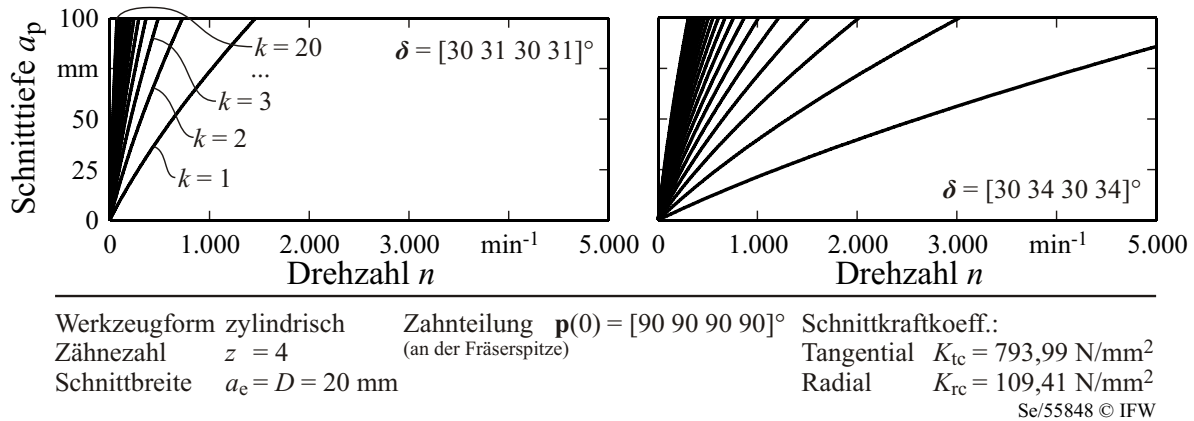
bedeutet, dass die stabilen Inseln insbesondere bei Schnitttiefen auftreten, bei denen die Zeitvarianz des Systems gering ist. Beispielhaft wird dies auch an dem simulierten zeitlichen Verlauf des Arbeitspunkts B in Bild 5.8 deutlich. Da die Schnitttiefe von  $a_p = 50$  mm sehr nah an der ersten Vielfachen der Drallsteigung  $a_{p,1} = 54,41$  mm liegt, ist die Schnittkraftschwankung und damit die Amplitude der Werkstückverlagerung  $x_w(t)$  gering.

Einen besonderen Einfluss gewinnt der Drallwinkel, wenn dieser von Schneide zu Schneide unterschiedlich ist. Die Zahnteilung verändert sich dadurch kontinuierlich entlang der Fräserachse. Dies führt auf Schwingungsdifferentialgleichungen mit kontinuierlich verteilten Totzeiten. Zwar sind solche Fräser nicht Gegenstand dieser Arbeit, jedoch kann mit der Methode der komplexen Kraftzeiger deren Wirkweise sehr gut veranschaulicht werden. Da sich der Teilungswinkel der Schneiden über der Schnitttiefe kontinuierlich zu- bzw. abnimmt, ändert sich auch die Richtung des komplexen Kraftzeigers der äußeren Modulation dieser Schneide kontinuierlich in Abhängigkeit der Höhe  $z$ . Die Kraftzeiger  $F_{om,j}$  eines ungleich gedrahten Fräasers sind daher kreisbogenförmig gekrümmt. Wie bereits beschrieben wurde, sind die vereinfachten zeitinvarianten dynamischen Systeme alternierend und linear ungleich geteilter Fräser gerade bei den Parameterkombinationen aus Schnitttiefe und Drehzahl stabil, bei denen sich die komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation gegenseitig aufheben und deren Summe null ergibt. Das gleiche gilt für ungleich gedrahte Fräser. Hierzu sei ein zylindrischer, alternierend ungleich gedrahter Fräser mit einer geraden Zähnezahl und einer gleichen Zahnteilung an der Fräuserspitze betrachtet:  $\boldsymbol{\delta} = [\delta_1, \delta_2, \delta_1, \dots, \delta_2]$ ,  $\delta_1 \neq \delta_2$ ,  $p_j(0) = \frac{2\pi}{z}$  für  $j \in \{1, 2, \dots, z\}$ . Die Mantelfläche eines solchen Fräasers ist in Bild 5.13 links dargestellt. Hier ist  $u_j(z)$  die Zahnteilung der  $j$ -ten Schneide im Abstand  $z$  von der Fräuserspitze. Diese Größe ist die Länge des entsprechenden Kreisbogens. Es gilt daher  $u_j(z) = \frac{p_j(z) D}{2}$ , wobei  $p_j(z)$  den Zahnteilungswinkel bezeichnet. Die komplexen Kraftzeiger löschen sich gegenseitig aus, wenn gilt:

$$(p_j(0) - p_j(a_p)) \frac{\omega_p}{2\pi n_k} = k\pi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5.12)$$

mit

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{k + a_p \sum_{j=1}^z [\bar{q}_j]}{m}}. \quad (5.13)$$



**Bild 5.14:** Stabile Parameterkombinationen zweier unterschiedlich alternierend ungleich gedrahter Fräser gemäß Gleichung (5.15). Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4.

Ist  $k = 1$ , so beschreiben die Kraftzeiger der  $z$  Schneiden jeweils einen Halbkreis. Die Halbkreise zweier aufeinanderfolgender Schneiden bilden einen ganzen Kreis, so dass die Summe der Kraftzeiger null ergibt. Bei  $k = 2$  beschreibt jeder Kraftzeiger einen ganzen Kreis. Bei  $k = 3$  sind es jeweils das Eineinhalbfache eines Kreises usw. Die beiden Fälle für  $k = 1$  und  $k = 2$  sind in Bild 5.13 rechts dargestellt. Die Summe der komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation ist für diese Fälle stets null, wodurch das vereinfachte zeitinvariante dynamische System eines solchen Fräfers stabil ist. Der Zahnteilungswinkel für die Schnitttiefe  $a_p$  lässt sich in Abhängigkeit der beiden Drallwinkel wie folgt berechnen:

$$p_2(a_p) = p_2(0) - \frac{2 a_p (\tan(\delta_2) - \tan(\delta_1))}{D}. \quad (5.14)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in Gleichung (5.12) ergeben sich die besonders stabilen Drehzahlbereiche in Abhängigkeit der Schnitttiefe  $a_p$  durch

$$n_k = \frac{f_p 2 a_p (\tan(\delta_2) - \tan(\delta_1))}{k \pi D}. \quad (5.15)$$

Die Drehzahlen gemäß dieser Gleichung sind exemplarisch für zwei unterschiedlich alternierend ungleich gedrahtete Fräser in Bild 5.14 für  $k \in \{1, 2, \dots, 20\}$  dargestellt. Ist der Unterschied der beiden Drallwinkel klein, so steigen die Kurven sehr stark an. Wird der Unterschied zwischen den beiden Drallwinkeln größer, so verlaufen die Kurven flacher. Ein solches zeitinvariantes System wird durch den ungleichen Drall also insbesondere bei niedrigen Drehzahlen stabilisiert. Für die weitere Erforschung dieser Zusammenhänge empfiehlt es sich, die in Kapitel 4.2 beschriebene Methode zur Stabilitätsanalyse auf zeitinvariante und zeitvariante Systeme ungleich gedrahter Fräser zu erweitern, um dann entsprechende Rechnungen durchführen zu können.

Anhand des Minimalbeispiels eines Einmassenschwingers wurde mit den in Kapitel 4.2 beschriebenen Methoden der Einfluss verschiedener alternierender und linearer Ungleichteilungen auf die Stabilität des Fräsprozesses veranschaulicht. Hierbei zeigte sich, dass sich die Zeitvarianz bei ungleich geteilten Fräsern in besonderem Maße und somit deutlich stärker als bei gleich geteilten Fräsern auf die Stabilitätsgrenze auswirkt. Da die Zeitvarianz stark von der Zähnezahl  $z$  und vom Drallwinkel  $\delta$  beeinflusst wird, sind dies entscheidende

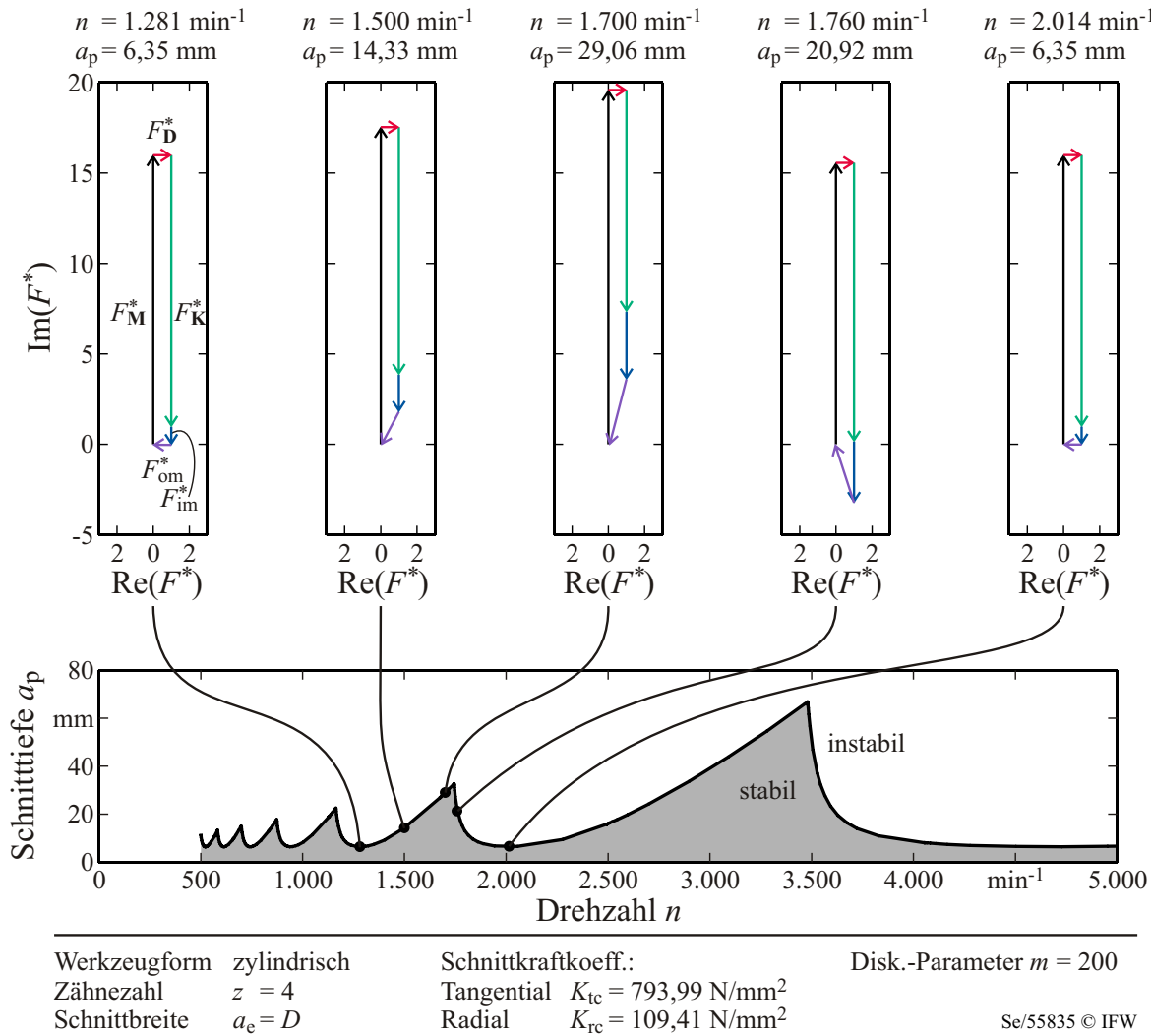
Einflussfaktoren. Es ist jedoch anzumerken, dass der Unterschied hinsichtlich der Stabilität des gemittelten Systems gegenüber dem zeitvarianten System bei dem experimentell untersuchten Beispiel aus Kapitel 5.1.1 deutlich geringer ausfällt. Die Strukturdynamik wurde hier jedoch nicht nur durch einen einzelnen Oszillator, sondern durch 33 Oszillatoren abgebildet. Dadurch zeigt sich, dass der Einfluss der Zeitvarianz des Systems auf die Stabilitätsgrenze durch die Strukturdynamik beeinflusst wird. Dennoch empfiehlt es sich, bei der Vorhersage der Stabilitätsgrenze ungleich geteilter Fräser die Zeitvarianz des Systems durch die in Kapitel 4.2 vorgestellte Methode stets zu berücksichtigen, um eventuelle Fehler, die durch die Mittelung der Systemparameter entstehen können, zu vermeiden.

### 5.1.7 Klassifikation anfachender und dämpfender Prozesskraftanteile gleich und ungleich geteilter Fräser

Durch die ungleiche Zahnteilung kommt es gegenüber einem gleich geteilten Fräser zu sehr großen Verschiebungen der Stabilitätsgrenze. Bei bestimmten Drehzahlen steigt die Stabilitätsgrenze sehr stark an, bei anderen Drehzahlen ist sie hingegen niedriger als die des gleich geteilten Fräasers. Für das Verständnis der Wirkmechanismen, die diese Änderungen der Stabilitätsgrenze hervorrufen, ist es wichtig, die auftretenden dynamischen Prozesskräfte hinsichtlich der anfachenden und dämpfenden Anteile zu unterscheiden. Exemplarisch wird daher die in Kapitel 4.6 beschriebene Methode der komplexen Kraftzeiger auf einen gleich, einen alternierend ungleich und einen linear ungleich geteilten Fräser angewandt.

Bild 5.15 zeigt die normierten komplexen Kraftzeigerdiagramme für verschiedene grenzstabile Arbeitspunkte eines gleich geteilten Fräasers. Die Arbeitspunkte sind entlang eines Peaks der Stabilitätskarte zwischen zwei Stabilitätstälern verteilt. Durch die Normierung zeigt der Kraftzeiger der strukturellen Dämpfung  $F_{\mathbf{D}}^*$  in allen Diagrammen in die positive Richtung der reellen Achse und hat einen Betrag von eins. Die Kraftzeiger, die hier, statt im Ursprung der komplexen Ebene, hintereinander aufgetragen sind, bilden ein geschlossenes Polygon. Dies liegt daran, dass die Summe der komplexen Kraftzeiger gemäß Gleichung (4.114) null ergeben muss. Da die betrachteten Arbeitspunkte auf der Stabilitätsgrenze liegen, sind die Realteile der normierten Trägheits- und Steifigkeitskraftzeiger null:  $\operatorname{Re}\{F_{\mathbf{M}}^*\} = \operatorname{Re}\{F_{\mathbf{K}}^*\} = 0$ . In den beiden Stabilitätstälern ist der normierte Kraftzeiger der äußeren Modulation  $F_{\text{om}}^*$  rein reel und negativ. Das bedeutet, dass in diesen Arbeitspunkten der Regenerativeneffekt seine maximale Anfachungswirkung erreicht. Bei Erhöhung der Drehzahl, zeigt  $F_{\text{om}}^*$  mehr und mehr in Richtung der negativen imaginären Achse. Bei Überschreitung des Stabilitätspeaks klappt der Zeiger schlagartig nach oben, so dass sein Realteil positiv wird. In allen kritischen Arbeitspunkten wird die strukturelle Dämpfung von der anfachenden Wirkung des Kraftzeigers der äußeren Modulation kompensiert. Der Regenerativeneffekt ist hier somit die alleinige Ursache der Instabilität.

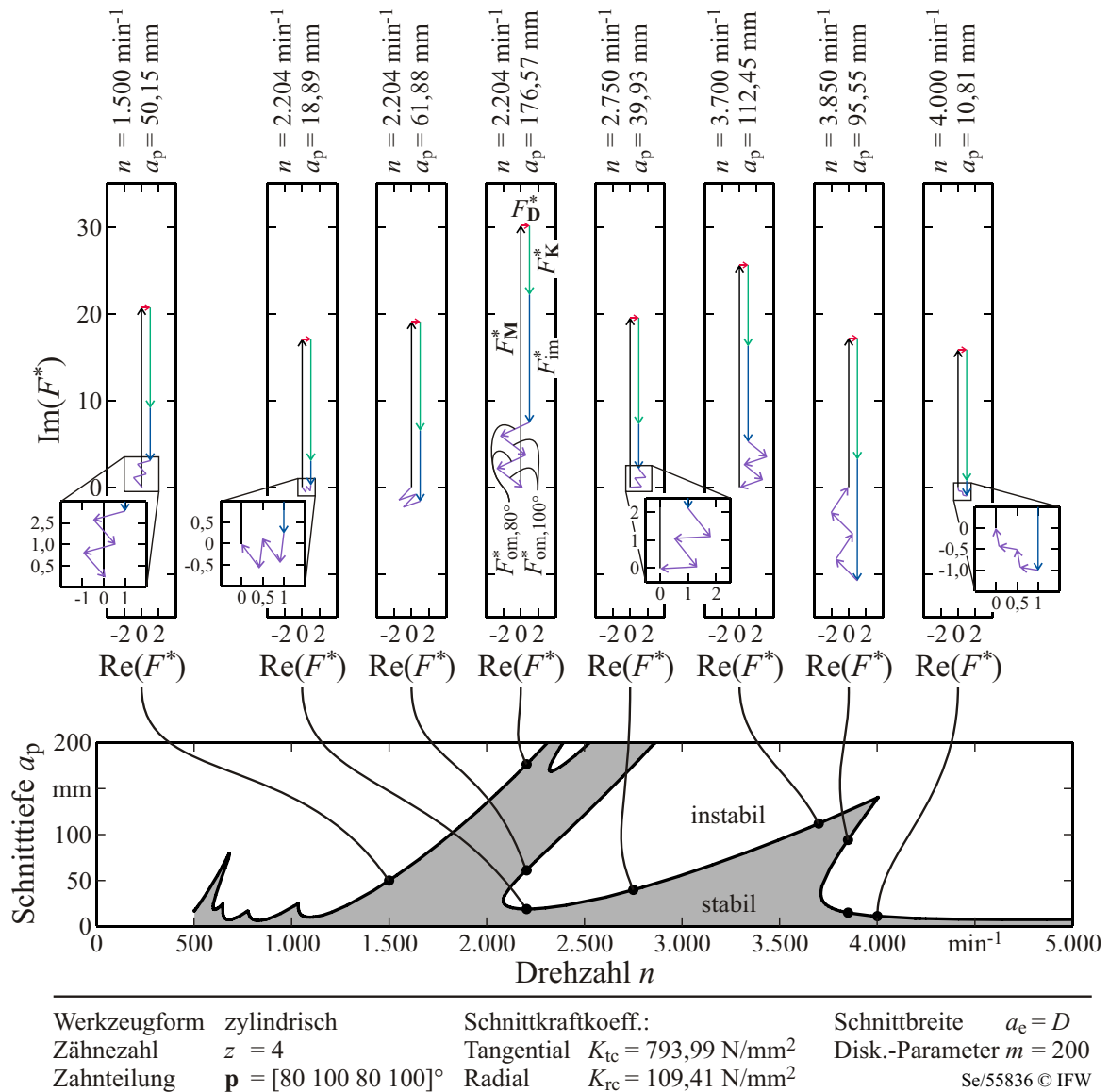
In Bild 5.16 sind die normierten komplexen Kraftzeigerdiagramme verschiedener kritischer Arbeitspunkte eines alternierend ungleich geteilten Fräasers dargestellt. Dieser Fräser entspricht dem gemittelten System aus Bild 5.12. Die Kraftzeiger der äußeren Modulation sind hier getrennt für jeden Zahn bzw. Teilungswinkel  $p_j$  aufgetragen. In bestimmten Arbeitspunkten wirken sowohl die Kraftzeiger der kleinen Teilung  $F_{\text{om},80^\circ}^*$  als auch die der



**Bild 5.15:** Normierte komplexe Kraftzeiger für verschiedene grenzstabile Arbeitspunkte. Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4.

großen Teilung  $F_{om,100}^*$  aufgrund ihres negativen Realteils anfachend. In anderen Arbeitspunkten wirkt  $F_{om,80}^*$  anfachend und  $F_{om,100}^*$  dämpfend und in wieder anderen Arbeitspunkten ist das Umgekehrte der Fall. Aufgrund der ungleichen Zahnteilung wirkt der Regenerativeneffekt somit nicht nur anfachend, sondern je nach Arbeitspunkt auch teilweise dämpfend und erhöht hierdurch die Grenzschnitttiefe.

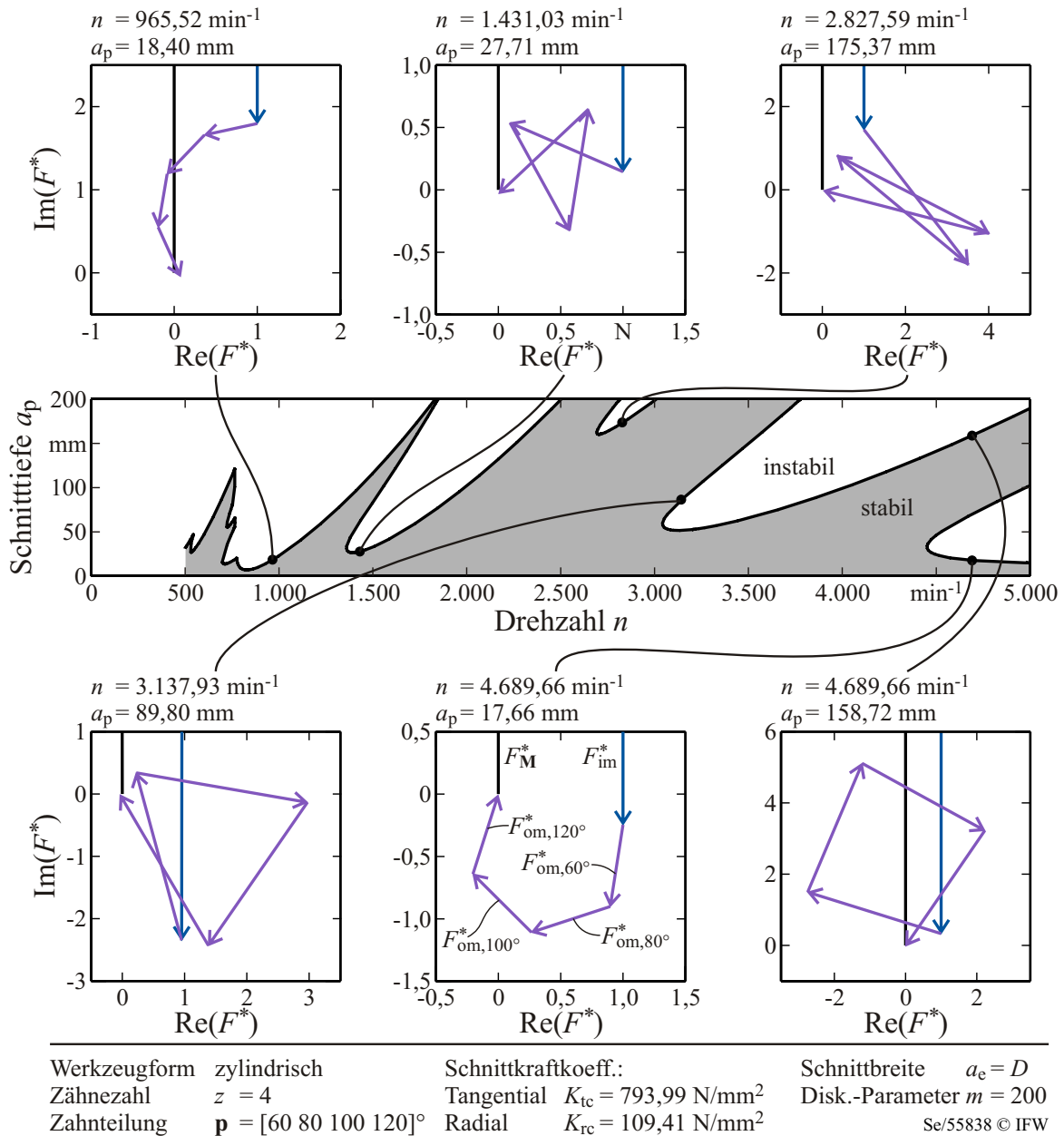
Dass je nach Arbeitspunkt und Teilungswinkel der Regenerativeneffekt mal dämpfend und mal anfachend wirkt, gilt auch für linear ungleich geteilte Fräser. Bild 5.17 zeigt die Ausschnitte der normierten komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation  $F_{om,j}$  eines Fräasers mit linearer Ungleichteilung für verschiedene grenzstabile Arbeitspunkte. Im Gegensatz zu dem zickzackförmigen Verlauf der Kraftzeiger der äußeren Modulation eines alternierend ungleich geteilten Fräasers, sind die Zeiger bei dem linear ungleich geteilten Fräser je nach Arbeitspunkt mal bogenförmig, mal ähnlich einem Pentagramm, einem Dreieck, einem offenen Sechseck oder einem Viereck angeordnet. Da der Zahnteilungswinkel linear zunimmt, ist der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kraftzeigern der äußeren Modulation konstant. In dem grenzstabilen Arbeitspunkt  $n = 4.689,66 \text{ min}^{-1}$ ,  $a_p = 158,72 \text{ mm}$ , der eine vergleichsweise hohe Grenzschnitttiefe aufweist, wirken die Kraftkomponenten



**Bild 5.16:** Normierte komplexe Kraftzeiger für verschiedene grenzstabile Arbeitspunkte eines alternierend ungleich geteilten Fräasers. Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4.

$F_{om,60^\circ}^*$  und  $F_{om,120^\circ}^*$  anfachend und die Komponenten  $F_{om,80^\circ}^*$  und  $F_{om,100^\circ}^*$  dämpfend. In dem Arbeitspunkt  $n = 4.689,66 \text{ min}^{-1}$ ,  $a_p = 17,66 \text{ mm}$ , der eine deutlich geringere Grenzschnitttiefe hat, wirken hingegen alle Kraftkomponenten der äußeren Modulation bis auf  $F_{om,120^\circ}^*$  anfachend.

Da die in Kapitel 4.6 beschriebene Methode der komplexen Kraftzeiger nur für zeitinvariante System gilt, kann mit ihr nicht die in den Kapiteln 5.1.3, 5.1.4 und 5.1.5 beschriebene Inselbildung bei Stabilitätskarten ungleich geteilter Fräser untersucht werden, die auftritt, wenn die Zeitvarianz des Systems berücksichtigt wird. Die Erweiterung der Methode auf zeitvariante Totzeitsysteme erscheint jedoch denkbar.



**Bild 5.17:** Normierte komplexe Kraftzeiger für verschiedene grenzstabile Arbeitspunkte eines linear ungleich geteilten Fräasers. Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.4. Es sind die unterschiedlichen Achsskalierungen zu beachten.

## 5.2 Prozessstabilität von Fräsern mit Freiflächenfasen

Aus der industriellen Praxis ist bekannt, dass freiflächenseitig an der Schneide angebrachte Fasen eine stark stabilisierende Wirkung entfalten [Lan05; Lan06]. Neben der Untersuchung ungleicher Zahnteilungen ist der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit daher der Einfluss solcher Fasen auf die dynamische Stabilität des Fräsprozesses. Hierfür ist die genaue Kenntnis und Simulation der dynamischen Zerspankraftkomponenten der unterschiedlich gefasteten Fräser erforderlich. In den folgenden Unterkapiteln wird zunächst mit dem in Kapitel 4.5 beschriebenen genetischen Identifikationsalgorithmus der Einfluss solcher Fasen auf die Scher- und Reibkraftkoeffizienten des Prozesskraftmodells von FRIEDRICH [Fri09]

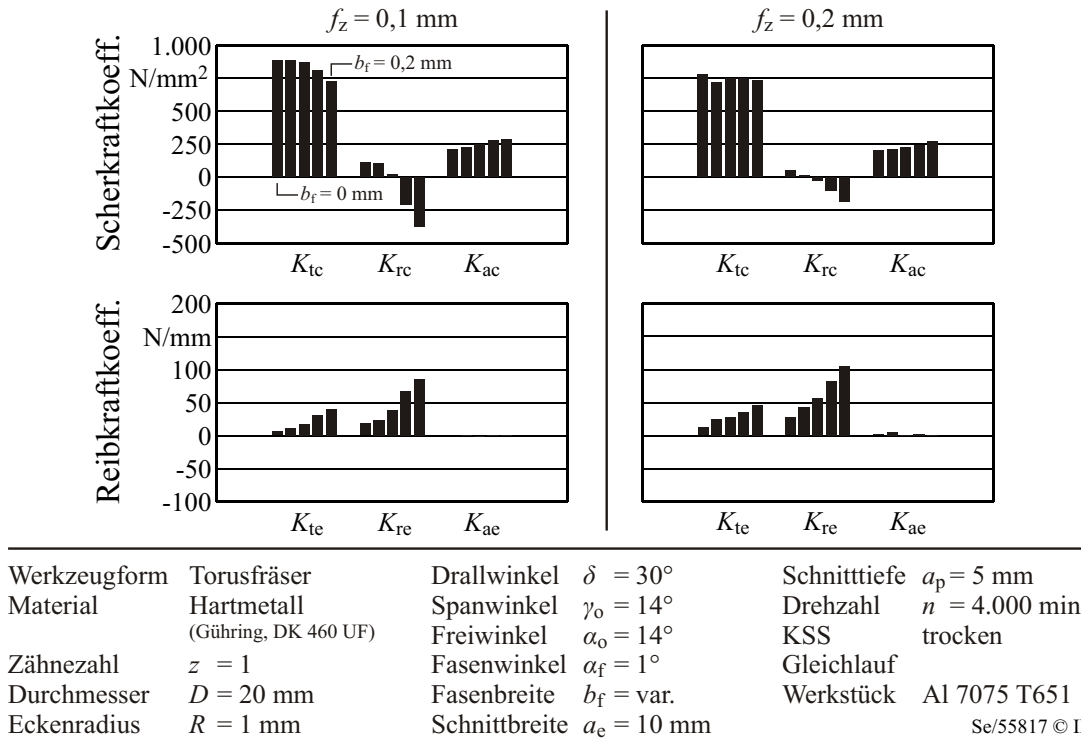
untersucht. Aufgrund des Eindringungseffekts führen Freiflächenfasen jedoch zu zusätzlichen geschwindigkeitsabhängigen<sup>6</sup> Prozesskraftanteilen. Diese Prozesskraftanteile können mit dem Modell von FRIEDRICH nicht abgebildet werden. Das Modell wurde daher in Kapitel 4.3 mit dem Modell von WU kombiniert. Die Messung der geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile ist jedoch nicht trivial, da der rotierende Fräser im Eingriff definiert angeregt werden muss. Zur Messung dieser Prozesskraftanteile wurden daher zwei neue Methoden entwickelt, deren Ergebnisse anschließend vorgestellt werden. Schließlich wird der Einfluss der Fasenbreite  $b_f$  und des Fasenwinkels  $\alpha_f$  auf die Stabilitätsgrenze experimentell und simulativ untersucht.

### 5.2.1 Einfluss der Freiflächengestalt auf die Scher- und Reibkraftkoeffizienten des Schnittkraftmodells von FRIEDRICH

Analog zu dem in Kapitel 4.5 beschriebenen Beispiel wurden die Scher- und Reibkraftkoeffizienten des Prozesskraftmodells von FRIEDRICH für Vollhartmetall-Schaftfräser mit unterschiedlichen Freiflächenfasen anhand der Prozesskraftmessung jeweils eines Teilnutenchnittes identifiziert. Die in Kapitel 4.5 beschriebene, auf einem genetischen Algorithmus und der zeitlichen Simulation des Prozesses basierende Methode ermöglicht eine erhebliche Reduktion des Versuchsumfangs, da lediglich ein einzelner Schnitt zur Identifikation der Koeffizienten ausreicht und nicht mehr wie bisher [Gra04] der Zahnvorschub variiert werden muss. Der Versuchsaufbau ist der gleiche wie in dem Beispiel aus Kapitel 4.5. Bild 5.18 zeigt die identifizierten Scherkraftkoeffizienten  $K_{tc}$ ,  $K_{rc}$  und  $K_{ac}$  und Reibkraftkoeffizienten  $K_{te}$ ,  $K_{re}$  und  $K_{ae}$  für die Fräser mit einem konstanten Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  und unterschiedlichen Fasenbreiten, die zwischen  $b_f = 0$  mm und  $b_f = 0,2$  mm variieren. Die Koeffizienten wurden für zwei verschiedene Zahnvorschübe  $f_z = 0,1$  mm und  $f_z = 0,2$  mm ermittelt. Bei beiden Zahnvorschüben sind eindeutige, ähnliche Tendenzen zu erkennen. Am deutlichsten ist hier die mit der Zunahme der Fasenbreite einhergehende Erhöhung des radialen Reibkraftkoeffizienten  $K_{re}$  ausgeprägt. Auffällig ist, dass der radiale Scherkraftkoeffizient  $K_{rc}$  mit zunehmender Fasenbreite abfällt und bei einem Zahnvorschub von  $f_z = 0,1$  mm zwischen  $b_f = 0,1$  mm und  $b_f = 0,15$  mm und bei einem Zahnvorschub von  $f_z = 0,2$  mm zwischen  $b_f = 0,05$  mm und  $b_f = 0,1$  mm in den negativen Bereich fällt. Auch der tangentialen Reibkraftkoeffizient  $K_{te}$  nimmt für beide Zahnvorschübe mit der Fasenbreite zu. Ein gewisser Abfall des tangentialen Scherkraftkoeffizienten  $K_{tc}$  ist vorhanden, jedoch ist dieser im Vergleich zu dem radialen Scherkraftkoeffizienten  $K_{rc}$  und insbesondere bei dem höheren Zahnvorschub weniger stark ausgeprägt.

Neben der Fasenbreite  $b_f$  wurde auch der Einfluss des Fasenwinkels  $\alpha_f$  auf die Scher- und Reibkraftkoeffizienten untersucht. Die Koeffizienten wurden wieder für die zwei Zahnvorschübe  $f_z = 0,1$  mm und  $f_z = 0,2$  mm ermittelt (Bild 5.19). Bis auf die Gestalt der Freiflächenfasen sind die Werkzeugparameter und Prozessstellgrößen die gleichen wie in Bild 5.18. Die Scher- und Reibkraftkoeffizienten werden durch den Fasenwinkel  $\alpha_f$  kaum beeinflusst. Lediglich der radiale Scherkraftkoeffizient  $K_{rc}$  und der radiale Reibkraftkoeffizient  $K_{re}$  des Werkzeugs mit dem kleinsten Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  weichen von dem Niveau der anderen Koeffizienten etwas ab. Die Verdopplung des Zahnvorschubs von  $f_z = 0,1$  mm auf  $f_z = 0,2$  mm lässt das Niveau des tangentialen und radialen Scherkraftkoeffizienten  $K_{tc}$  und  $K_{rc}$  sinken. Bei den Reibkraftkoeffizienten ist dies umgekehrt.

<sup>6</sup>Gemeint sind die Verlagerungsgeschwindigkeiten des Werkzeugs und Werkstücks.



**Bild 5.18:** Scher- und Reibkraftkoeffizienten in Abhängigkeit der Fasenbreite  $b_f \in \{0, 0,05, 0,10, 0,15, 0,20\}$  mm.

Diese Veränderung der Koeffizienten mit dem Zahnvorschub ist auch bei der Variation der Fasenbreite  $b_f$  in Bild 5.18 zu sehen. Die in den Bildern 5.18 und 5.19 vorhandene Abhängigkeit der Schnittkraftkoeffizienten vom Zahnvorschub widerspricht bisherigen Annahmen in der Literatur [Bud96; Gra04]. Zur Absicherung wurden daher die Scher- und Reibkraftkoeffizienten für den ungefasten Fräser ( $b_f = 0 \text{ mm}$ ) und den Fräser mit der größten Fasenbreite von  $b_f = 0,2 \text{ mm}$  und dem kleinsten Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  für verschiedene Zahnvorschübe, die zwischen  $f_z = 0,1 \dots 0,3 \text{ mm}$  variiert wurden, ermittelt (Bild 5.20). Sowohl die tangentialen und radialen Reibkraft- als auch die tangentialen und radialen Scherkraftkoeffizienten hängen vom Zahnvorschub ab. Die axialen Scher- und Reibkraftkoeffizienten ändern sich kaum und sind nahezu null. Eine mögliche Ursache für die Abhängigkeit der tangentialen und radialen Scher- und Reibkraftkoeffizienten vom Zahnvorschub  $f_z$  ist die mit der Variation des Zahnvorschubs einhergehende Änderung des Wirk-Orthogonalspanwinkels und -freiwinkels. Bei einer Vergrößerung des Zahnvorschubs  $f_z$  wird der Wirk-Orthogonalspanwinkel  $\gamma_{oe}$  größer und der Wirk-Orthogonalfreiwinkel  $\alpha_{oe}$  kleiner. Ein größerer Spanwinkel führt im Allgemeinen zu geringeren Prozesskräften. Ein kleinerer Freiwinkel führt zu einer stärkeren Druckbelastung an der Freifläche. Die Änderung dieser Winkel entspricht dem Wirkrichtungswinkel  $\eta$  (siehe Gleichung (4.81)). Für den kleinsten Zahnvorschub von  $f_z = 0,1 \text{ mm}$  ergibt sich ein maximaler Wirkrichtungswinkel von  $\eta_{\max} = 0,0912^\circ$ . Bei einem Zahnvorschub von  $f_z = 0,3 \text{ mm}$  steigt der Wirkrichtungswinkel auf das Dreifache an:  $\eta_{\max} = 0,2736^\circ$ .



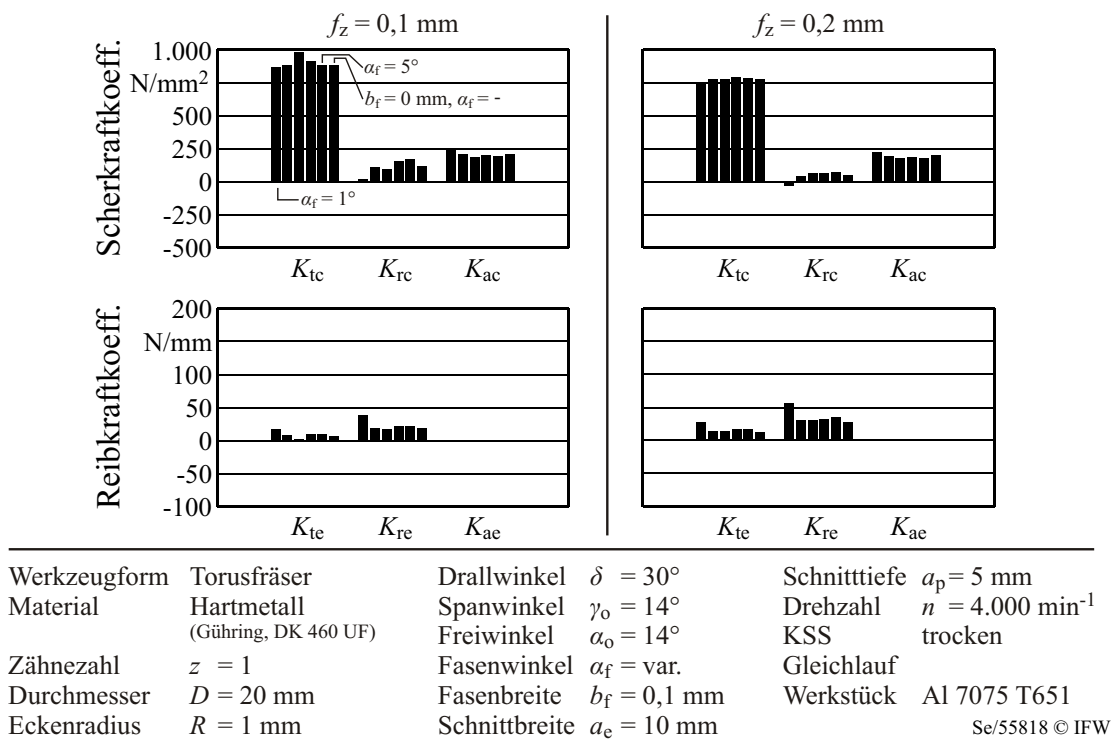


Bild 5.19: Scher- und Reibkraftkoeffizienten in Abhängigkeit des Fasenwinkels  $\alpha_f \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^\circ$ .

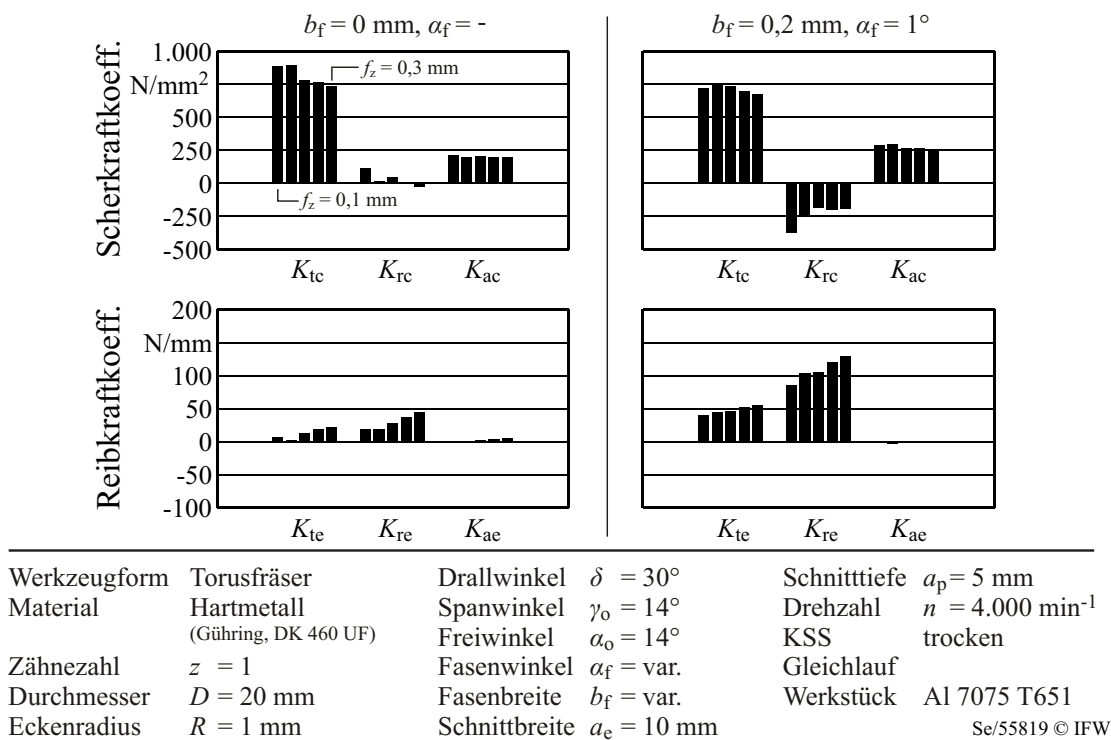
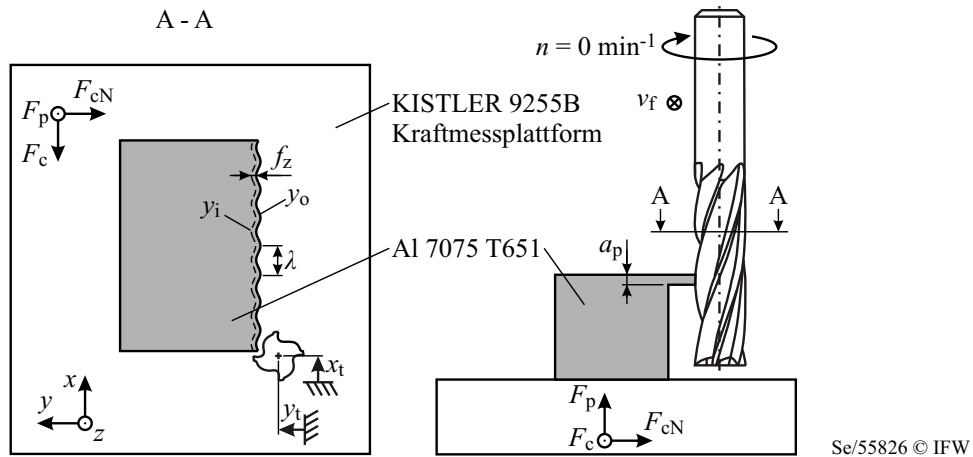


Bild 5.20: Scher- und Reibkraftkoeffizienten in Abhängigkeit des Zahnvorschubs  $f_z \in \{0,10, 0,15, 0,20, 0,25, 0,30\} \text{ mm}$ .

### 5.2.2 Einfluss der Freiflächengestalt auf die geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile

In Kapitel 4.3 wurde das Prozesskraftmodell von FRIEDRICH mit dem Modell von WU kombiniert und so um geschwindigkeitsabhängige Prozesskraftanteile, die durch den dynamischen Kontakt zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche (Eindringungseffekt) entstehen, erweitert. Zur Messung der geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile ist es erforderlich, während des Fräsprozesses eine definierte sinusförmige Relativverlagerung zwischen Werkzeug und Werkstück einzustellen. Die maximalen Verfahrensgeschwindigkeiten und Beschleunigungen der Achsantriebe konventioneller Fräsmaschinen reichen hierfür jedoch nicht aus. Um dennoch die geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile messen zu können, wurde die Wave-On-Wave-Hobelmethode entwickelt. Im Folgenden wird diese Methode beschrieben und auf die in den beiden vorherigen Kapiteln verwendeten, unterschiedlich gefasteten Werkzeuge angewandt.



**Bild 5.21:** Versuchsaufbau der Wave-On-Wave-Hobelmethode.

Die grundlegende Idee dieser Methode ist, den Fräser als Hobelwerkzeug einzusetzen und die innere bzw. äußere Modulation der Spannungsdicke durch den NC-Code vorzugeben. Der Versuchsaufbau ist in Bild 5.21 skizziert. Das mit einem 1 mm-Steg versehene Werkstück wird auf einer Drei-Komponenten-Kraftmessplattform befestigt. Die Spindel ist geklemmt (Drehzahl  $n = 0 \text{ min}^{-1}$ ) und die Schneide, die als Hobel fungiert, ist so ausgerichtet, dass ihr Vorschubrichtungswinkel  $\phi = 0^\circ$  ist. Dazu wird die untere Kante des Werkstücks mit einem Messtaster angetastet. Der Mittelpunkt des Werkzeugs wird auf die ermittelte  $x$ -Koordinate und nah an die rechte Kante des Werkstücks positioniert. Anschließend wird der Fräser von Hand im Uhrzeigersinn gedreht, bis die Schneide auf der unteren Kante des Werkstücks aufliegt. In dieser Position wird die Spindel geklemmt. Der Fräser wird in  $z$ -Richtung so zugestellt, dass der zylindrische Teil des Fräasers und nicht der des Eckenradius im Eingriff ist. Die Bewegung des Werkzeugs ist:

$$x_t = v_f t \quad \text{und} \quad y_t = y_i = \hat{y}_t \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_t\right). \quad (5.16)$$

Die Bewegung des Werkzeugs in  $x$ -Richtung ist gleichmäßig. In  $y$ -Richtung oszilliert das Werkzeug (innere Modulation  $y_i$ ). Die Amplitude  $\hat{y}_t$  und die Wellenlänge  $\lambda$  werden variiert. Der effektive Freiwinkel kann über die erste Ableitung der inneren Modulation

$$y'_t = \frac{dy_t}{dx_t} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{y}_t \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x_t\right) \quad (5.17)$$

berechnet werden:

$$\alpha_{\text{eff}} = \tan^{-1}(y'_t) + \alpha_f - \eta_r. \quad (5.18)$$

Der minimale effektive Freiwinkel ist

$$\alpha_{\text{eff,min}} = \underbrace{\tan^{-1}\left(\frac{-2\pi\hat{y}_t}{\lambda}\right)}_{-\hat{\alpha}_{\text{eff}}} + \alpha_f - \eta_r. \quad (5.19)$$

$\hat{\alpha}_{\text{eff}}$  ist die maximale Änderung (Amplitude) des effektiven Freiwinkels. Um einen konstanten Spannungsquerschnitt zu gewährleisten, muss jeder Schnitt zweimal durchgeführt werden. Da die Werkzeugbahn durch den NC-Code definiert ist, hat die äußere Modulation  $y_o$  die gleiche Wellenlänge wie die innere Modulation  $y_i$  und ist mit dieser in Phase (Wave-On-Wave).

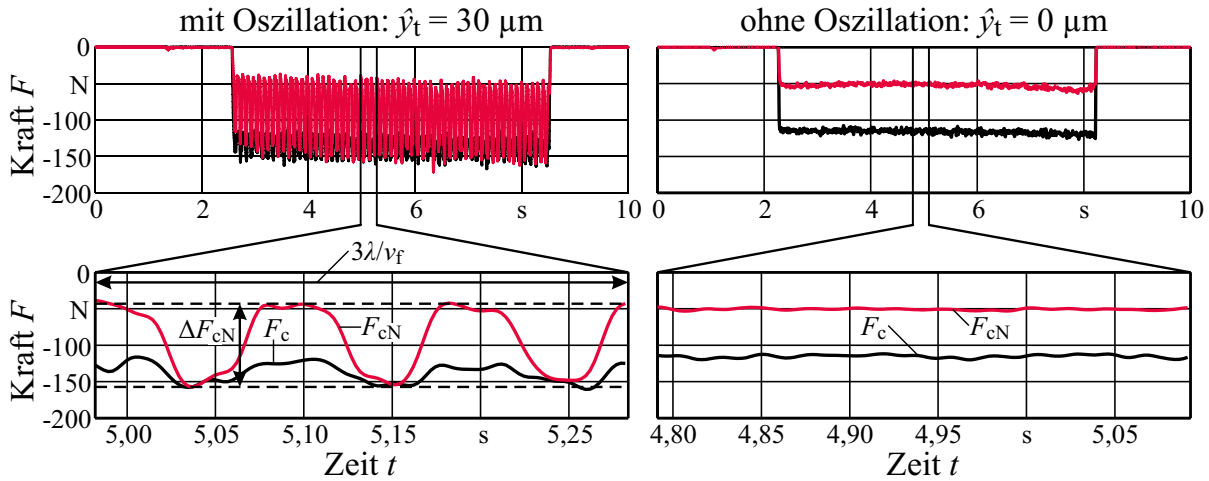
Die gemessenen Kraftverläufe wurden digital mit einem Butterworth-Filter vierter Ordnung doppeltinvers gefiltert. Die Eckfrequenz des Filters wurde so gewählt, dass sie dem Fünffachen der Wellenlänge der Werkzeugoszillation entsprach. Durch die doppeltinverse Filterung wird eine Phasenverschiebung gegenüber dem ungefilterten Signal vermieden. Bild 5.22 zeigt beispielhaft die Kraftverläufe zweier Wave-On-Wave-Hobelversuche mit einem gefasten Werkzeug. Im einen Fall oszillierte das Werkzeug mit einer Amplitude von  $\hat{y}_t = 30 \mu\text{m}$  im anderen Fall nicht ( $\hat{y}_t = 0 \mu\text{m}$ ). Beim Schnitt mit oszillierendem Werkzeug ist, obgleich der Spannungsquerschnitt konstant ist, sowohl die Schnittkraft  $F_c$  als auch die Schnittnormalkraft  $F_{\text{cN}}$  von deutlichen Kraftschwankungen gekennzeichnet. Das untere Diagramm zeigt einen Ausschnitt des Kraftverlaufs. Die Länge des Ausschnitts entspricht genau dem dreifachen der Wellenlänge  $\lambda$ . In dem Abschnitt sind genau drei Perioden der Kraftschwankung zu erkennen. Die Schwankungen der Schnitt- und Schnittnormalkraft sind in Phase. Ein Vergleich dieses Kraftverlaufs mit dem des gleichen Fräasers ohne Oszillation zeigt, dass die Kraftschwankungen, ausgehend von dem stationären Niveau der Schnittnormalkraft von ca.  $-50 \text{ N}$ , lediglich in negativer Richtung während des Teils der Periode auftreten, wenn sich die Schneide in das Material hineinbewegt. Wenn die Schneide sich aus dem Material herausbewegt, kommt es zu keiner sichtbaren Veränderung der Schnittnormalkraft gegenüber dem Niveau von  $-50 \text{ N}$ . Der Prozessdämpfungseffekt ist für diesen Fall demzufolge nichtlinear. Dies lässt sich durch die in Gleichung (4.85) beschriebene nichtlineare Abhängigkeit des verdrängten Werkstückvolumens von dem effektiven Freiwinkel erklären. Zur Überprüfung der Annahme, dass sich die Prozessdämpfungskraft gegenüber dem verdrängten Werkstückvolumen linear verhält, wurden mehrere Wave-On-Wave-Hobelversuche mit unterschiedlichen Wellenlängen  $\lambda$  mit einem Fräser mit einer Fasenbreite von  $b_f = 0,2 \text{ mm}$  und einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  durchgeführt. Für jeden Test wird die Schwankungsbreite der Schnittnormalkraft (siehe Bild 5.22)

$$\Delta F_{\text{cN}} = \max(F_{\text{cN}}) - \min(F_{\text{cN}}) \quad (5.20)$$

und das maximale durch die Freifläche verdrängte Werkstückvolumen

$$V_{\text{max}} \approx -\frac{1}{2} \tan(\alpha_{\text{eff,min}}) b_f^2 a_p \quad (5.21)$$

berechnet. Der für die Berechnung dieses Volumens zugrunde gelegte minimale effektive Freiwinkel wurde nach Gleichung (5.19) zum einen mit einem Relaxationswinkel von



Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_0 = 14^\circ$	Wellenlänge	$\lambda = 4,189 \text{ mm}$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_0 = 14^\circ$	Schnitttiefe	$a_p = 1 \text{ mm}$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenbreite	$b_f = 0,2 \text{ mm}$	Zustellung	$f_z = 0,1 \text{ mm}$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Fasenwinkel	$\alpha_f = 1^\circ$	Vorschubgeschw.	$v_f = 2.500 \text{ mm/min}$
		Amplitude	$\hat{y}_t = 30 \text{ }\mu\text{m}$		Se/55827 © IFW

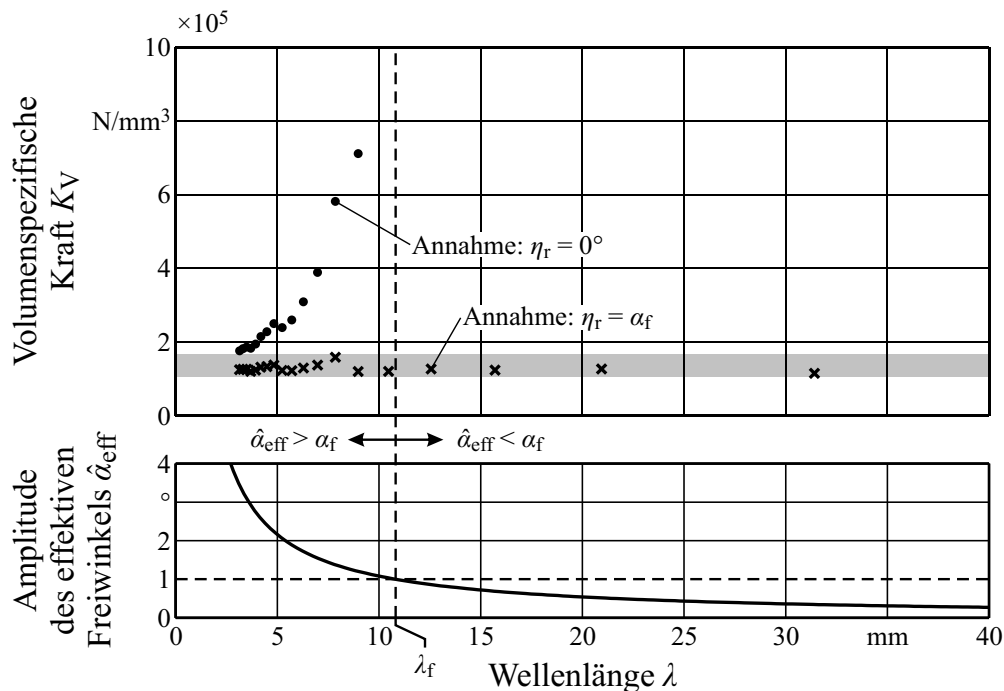
**Bild 5.22:** Kraftverläufe zweier Wave-On-Wave-Hobelschnitte mit und ohne Oszillation des Werkzeugs.

$\eta_r = 0^\circ$  und zum anderen mit  $\eta_r = \alpha_f$  berechnet. Letzteres vernachlässigt gleichermaßen den Fasenwinkel. Der Berechnung des verdrängten Werkstückvolumens mit  $\eta_r = 0^\circ$  liegt ein rein plastisches Materialverhalten zugrunde. Verhält sich das Material hingegen nicht rein plastisch, sondern elastisch-plastisch, so ist es denkbar, dass sich das Werkstückmaterial, während es unter der Schneide herfließt, soweit elastisch entspannt, dass es trotz des positiven Fasenwinkels die Freiflächenfase berührt (siehe Bild 4.14). Wird die Schwankungsbreite der Schnittnormalkraft durch das maximale durch die Freifläche verdrängte Volumen geteilt, ergibt sich die volumenspezifische Kraft

$$K_V = \frac{\Delta F_{cN}}{V_{\max}}. \quad (5.22)$$

Das obere Diagramm in Bild 5.23 zeigt die so berechnete volumenspezifische Kraft in Abhängigkeit der Wellenlänge  $\lambda$ . In dem unteren Diagramm der Abbildung ist die Amplitude  $\hat{\alpha}_{\text{eff}}$  des effektiven Freiwinkels über der Wellenlänge  $\lambda$  aufgetragen. Die gestrichelte senkrechte Linie markiert die Wellenlänge  $\lambda_f = \frac{2\pi \hat{y}_t}{\tan(\alpha_f)} = 10,7989 \text{ mm}$ . Bei dieser Wellenlänge ist die Amplitude des effektiven Freiwinkels gleich dem Fasenwinkel  $\hat{\alpha}_{\text{eff}} = \alpha_f = 1^\circ$ . Die unter der Annahme, dass  $\eta_r = \alpha_f$ , berechneten Koeffizienten liegen in einem relativ schmalen horizontalen Band. Werden die Koeffizienten mit der Annahme, dass  $\eta_r = 0^\circ$ , berechnet, so ergibt sich bis zur Wellenlänge  $\lambda_f$  ein stark ansteigender Verlauf. Für größere Wellenlängen ist die Oszillation des Werkzeugs so langwellig, dass die maximale Änderung des effektiven Freiwinkels  $\hat{\alpha}_{\text{eff}}$  kleiner als der Fasenwinkel  $\alpha_f$  ist. Theoretisch bedeutet dies, dass trotz der Oszillation des Werkzeugs durch die Freiflächenfase kein Werkstückvolumen verdrängt wird. Die Berechnung der volumenspezifischen Kraft nach Gleichung (5.22) ist dann nicht mehr möglich. Der horizontale Verlauf von  $K_V(\lambda)$ , der sich mit der Annahme  $\eta_r = \alpha_f$  ergibt, spricht für ein elastisch-plastisches Verhalten des Werkstückmaterials.

Zur Überprüfung dieser These wurden stabile Vollnutenschnitte mit vier Fräsern unterschiedlicher Fasenbreite durchgeführt. Der Fasenwinkel der Fräser war  $\alpha_f = 1^\circ$ . Die Schnei-



Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Wellenlänge	$\lambda = \text{var.}$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Schnitttiefe	$a_p = 1 \text{ mm}$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenbreite	$b_f = 0,2 \text{ mm}$	Zustellung	$f_z = 0,1 \text{ mm}$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Fasenwinkel	$\alpha_f = 1^\circ$	Vorschubgeschw.	$v_f = 2.500 \text{ mm/min}$
		Amplitude	$y'_t = 30 \mu\text{m}$		Se/55828 © IFW

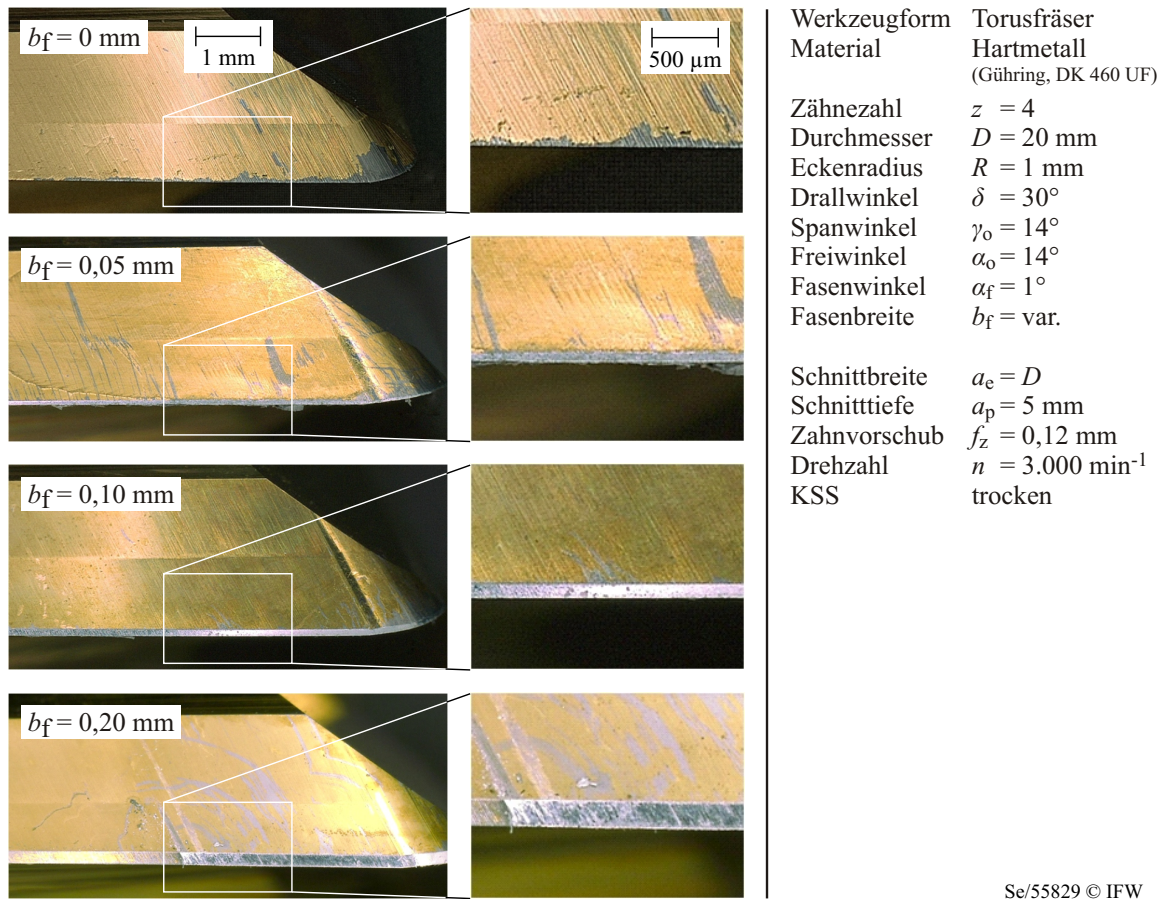
**Bild 5.23:** Volumenspezifische Kraft von Wave-On-Wave-Hobelversuchen mit unterschiedlichen Wellenlängen  $\lambda$ .

den der Fräser wurden mit Gold besputtert. Durch den Abrieb der Goldschicht während des Schnitts wurde sichtbar, an welchen Stellen das Werkstückmaterial an der Freifläche reibt. Bild 5.24 zeigt die Aufnahme der besputterten Schneiden nach den stabilen Vollnutenschnitten. Im Bereich der Fase ist bei den drei gefasteten Fräsern die Goldschicht gleichmäßig abgerieben. Beim Fräser ohne Freiflächenfase ist dies nicht der Fall. Der hier nur geringfügig vorhandene Abrieb der Goldschicht fällt im Vergleich zu den gefasteten Fräsern deutlich unregelmäßiger aus, was darauf hindeutet, dass dieser durch abgetrennte Späne verursacht wurde. Das Ergebnis bestätigt die These, dass sich das Werkstückmaterial durch sein elastisch-plastisches Verhalten ausdehnt, während es unter der Schneide herfließt.

Die Hauptursache der geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile gefaster Fräser ist der Eindringungseffekt. Die Schnittnormalkraft wird durch diesen Effekt deutlich mehr beeinflusst als die Schnittkraft. Eine weitere Ursache, die zu geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteilen führt, ist die dynamische Schwankung des effektiven Spanwinkels

$$\gamma_{\text{eff}} = \tan^{-1}(-y'_t) + \gamma_o. \quad (5.23)$$

$\gamma_o$  ist der Werkzeug-Orthogonalspanwinkel. Es ist bekannt, dass eine Erhöhung des Spanwinkels zu niedrigeren Kräften führt (siehe Kapitel 2.4.2). Verringert sich der effektive Spanwinkel dadurch, dass die Schwingungsrichtung der Schneide in das Material zeigt, so verringert sich die Prozesskraft. Bild 5.25 zeigt einen Vergleich zwischen den gemessenen Schnitt- und Schnittnormalkräften zweier Wave-On-Wave-Hobelversuche mit den

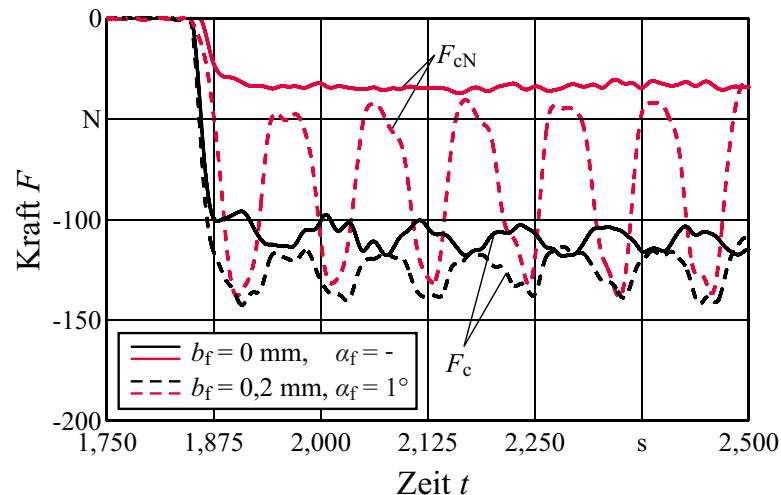


Se/55829 © IFW

**Bild 5.24:** Freiflächen der mit Gold besputterten Schneiden nach einem stabilen Vollnuttenschnitt.

gleichen Prozessstellgrößen. In dem einen Fall wurde ein Fräser ohne Freiflächenfase benutzt und in dem anderen Fall ein gefastetes Werkzeug. Die Kräfte wurden so aufgetragen, dass der Zeitpunkt des Eintritts der Schneide in das Werkstück gleich ist. Die Oszillation der beiden Werkzeuge ist dadurch in Phase. Der Verlauf der Schnittnormalkraft des gefasteten Fräasers ist von deutlichen Schwankungen geprägt. Die Schwankungen in Schnittrichtung sind etwas kleiner, aber in Phase mit denen der Schnittnormalkraft. Beim Fräser ohne Freiflächenfase zeigen sich lediglich Schwankungen in der Schnittkraft. Diese Schwankungen sind gegenüber den Schnittkraftschwankungen des gefasteten Werkzeugs um  $180^\circ$  phasenverschoben: Schwingt das ungefastete Werkzeug in das Material, verringert sich die Schnittkraft. Da die Ursache hierfür die Änderung des effektiven Spanwinkels  $\gamma_{\text{eff}}$  ist, führt dieser Effekt auch bei Fräsern ohne Freiflächenfasen zu geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteilen. Bei dem gefasteten Fräser überlagert sich der Eindringungseffekt mit dem Effekt des effektiven Spanwinkels, wobei der Eindringungseffekt überwiegt. Der Effekt des effektiven Spanwinkels scheint jedoch keinen signifikanten Einfluss auf die Stabilitätsgrenze zu haben, da auch ohne dessen Berücksichtigung sehr gute Übereinstimmungen zwischen theoretisch berechneten und experimentell ermittelten Stabilitätskarten erzielt werden können (siehe Bild 5.5).

Mit dem beschriebenen Wave-On-Wave-Hobelverfahren wurden die volumenspezifischen Kräfte in Abhängigkeit der Fasenbreite  $b_f$  und des Fasenwinkels  $\alpha_f$  untersucht. Die Wellenlänge der inneren und äußeren Modulation war hierbei  $\lambda = 4,488 \text{ mm}$ . Die volumenspezifischen



Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Schnitttiefe	$a_p = 1 \text{ mm}$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Zustellung	$f_z = 0,1 \text{ mm}$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenbreite	$b_f = \text{var.}$	Vorschubgeschw.	$v_f = 2.500 \text{ mm/min}$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Amplitude	$y_i = 30 \mu\text{m}$		
		Wellenlänge	$\lambda = 4,488 \text{ mm}$		Se/55830 © IFW

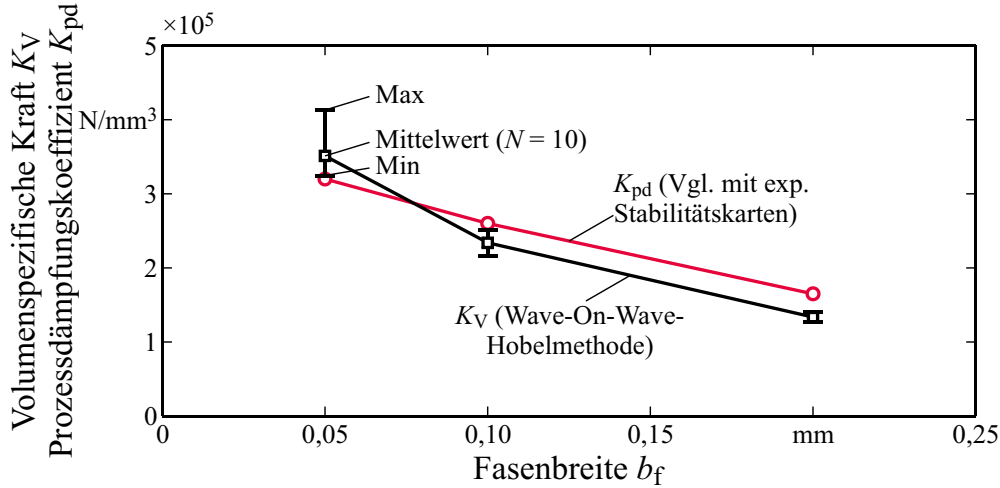
**Bild 5.25:** Kraftverläufe von Wave-On-Wave-Hobelschnitten mit einem Werkzeug mit und ohne Freiflächenfase.

schen Kräfte wurden wieder nach Gleichung (5.22) berechnet. Dabei wurde angenommen, dass der Relaxationswinkel gleich dem Fasenwinkel ist:  $\eta_r = \alpha_f$ . Für jede Fasenbreite wurden jeweils  $N = 10$  Abschnitte des gemessenen Kraftverlaufs analysiert. Die Länge dieser Abschnitte entspricht dem Dreifachen der Wellenlänge ( $3\lambda$ ).

Die ermittelten volumenspezifischen Kräfte  $K_V$  sind in Abhängigkeit der Fasenbreite in Bild 5.26 und in Tabelle 5.5 dargestellt. Zusätzlich sind hier auch die Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$  angegeben, welche heuristisch durch Vergleich von experimentell ermittelten und berechneten Stabilitätskarten ermittelt wurden (siehe Kapitel 5.2.3, Bild 5.33). Mit steigender Fasenbreite sinken sowohl die volumenspezifische Kraft  $K_V$  als auch der Prozessdämpfungskoeffizient  $K_{pd}$ . Für die Fasenbreite  $b_f = 0,05 \text{ mm}$  liegt der  $K_V$ -Wert etwas oberhalb und für die anderen beiden Fasenbreiten leicht unterhalb der Werte von  $K_{pd}$ . Beide Verläufe stimmen gut überein. Der starke Abfall der beiden Werte mit der Fasenbreite zeigt, dass diese nicht allein vom Werkstückmaterial abhängen. Als Ursache für diesen Abfall kommt zum einen eine mögliche stärkere Erwärmung des Werkstücks durch eine breite Fase in Betracht, die zu einer Entfestigung des Werkstückmaterials und somit zu niedrigeren  $K_V$ - und  $K_{pd}$ -Werten führt. Zum anderen ist denkbar, dass die Gestalt der Fase selbst die auf das verdrängte Volumen bezogene Kraft beeinflusst. Dadurch dass die Fasenbreite  $b_f$  quadratisch in die Gleichung zur Berechnung der Prozessdämpfungskraft (4.88) eingeht, steigt die Stabilitätsgrenze mit zunehmender Fasenbreite trotz sinkendem Prozessdämpfungskoeffizienten.

Die durch die Wave-On-Wave-Hobelmethode ermittelten volumenspezifischen Kräfte sind jedoch zu niedrig, da ein Fehler aufgrund des Drallwinkels auftritt. Durch den Drall der Schneiden ändert sich der Span- und Freiwinkel des zum Hobel umfunktionierten Fräasers entlang der Fräserachse  $z$ . Die maximale Änderung für eine bestimmte Schnitttiefe ist:

$$\Delta\phi = \frac{2 a_p \tan(\delta)}{D} . \quad (5.24)$$



Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Wellenlänge	$\lambda = 4,488 \text{ mm}$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Schnitttiefe	$a_p = 1 \text{ mm}$
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenbreite	$b_f = \text{var.}$	Zustellung	$f_z = 0,1 \text{ mm}$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Fasenwinkel	$\alpha_f = 1^\circ$	Vorschubgeschw.	$v_f = 2.500 \text{ mm/min}$
		Amplitude	$\hat{y}_t = 30 \text{ }\mu\text{m}$		Se/55831 © IFW

**Bild 5.26:** Volumenspezifische Kraft bei Wave-On-Wave-Hobelversuchen mit unterschiedlichen Fasenbreiten  $b_f$ .

**Tabelle 5.5:** Volumenspezifische Kräfte  $K_V$  und Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$  für verschiedene Fasenbreiten  $b_f$ .

$b_f$ [mm]	$K_V$ [N/mm <sup>3</sup> ] (Hobelvers. $\eta_r = \alpha_f$ )	$K_{pd}$ [N/mm <sup>3</sup> ] (Vgl. mit Exp.)
0,05	351.000	320.000
0,10	234.000	260.000
0,20	134.000	165.000

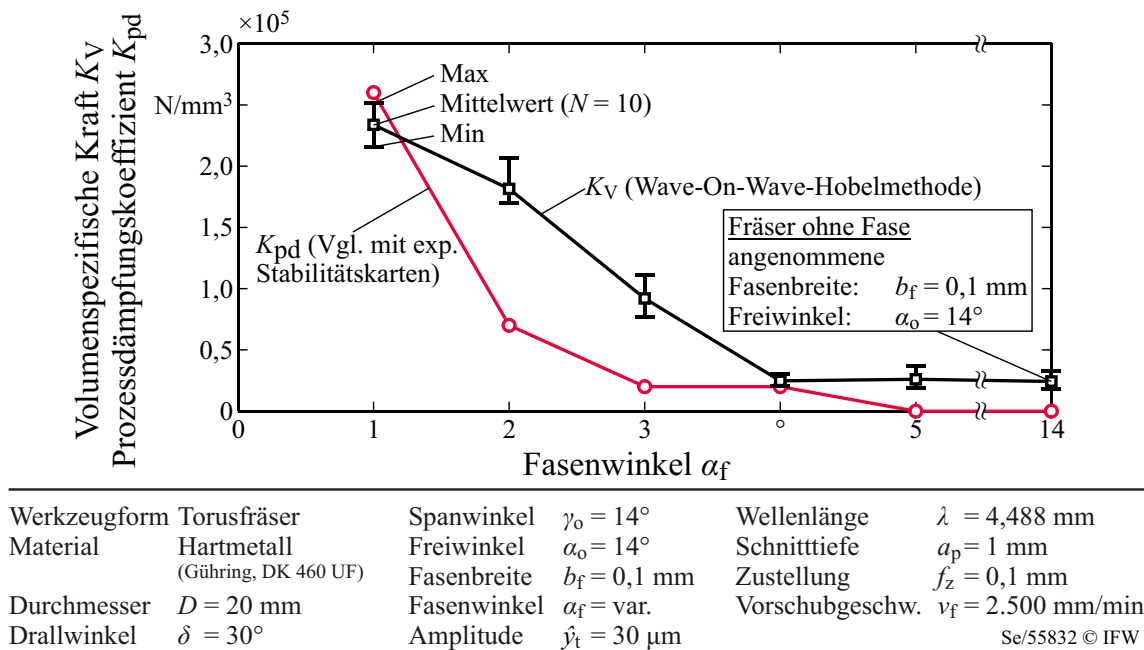
In diesem Fall ( $D = 20 \text{ mm}$ ,  $\delta = 30^\circ$ ) beträgt die Änderung  $\Delta\phi = 3,308^\circ$ . Im Vergleich zum Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  und zum Spanwinkel von  $\gamma_o = 14^\circ$  ist diese Änderung sehr groß und wird zu Abweichungen führen. Durch den Einsatz ungedrallter Fräser ließe sich dieser Fehler vermeiden. Bei der Berechnung des maximalen durch die Freiflächenfase verdrängten Werkstückvolumens durch Gleichung (5.21) wird dieser Zusammenhang vernachlässigt. Um diesen Effekt zu berücksichtigen, muss in axialer Richtung bis zu der Schnitttiefe  $a_{p,0}$  integriert werden, bei der aufgrund des Drallwinkels auch beim Hereinschwingen der Schneide in das Werkstück kein Kontakt zwischen Fase und Werkstückoberfläche mehr erfolgt. Diese Schnitttiefe kann ermittelt werden, indem die Summe aus minimalem effektiven Freiwinkel und der Änderung des Vorschubrichtungswinkels gleich null gesetzt wird:

$$\alpha_{\text{eff,min}} + \Delta\phi = 0 \quad (5.25)$$

$$\Rightarrow a_{p,0} = \frac{-\alpha_{\text{eff,min}} D}{2 \tan(\delta)} \quad (5.26)$$

$$= \frac{-\left(\tan^{-1}\left(\frac{-2 \pi \hat{y}_t}{\lambda}\right) + \alpha_f - \eta_r\right) D}{2 \tan(\delta)} \quad (5.27)$$





**Bild 5.27:** Volumenspezifische Kraft bei Wave-On-Wave-Hobelversuchen mit unterschiedlichen Fasenwinkeln  $\alpha_f$ .

Da es vorkommen kann, dass  $a_{p,0} > a_p$ , ist die obere Integrationsgrenze das Minimum der beiden Werte. Das maximale durch die Freiflächenfase verdrängte Werkstückvolumen ergibt sich dann durch folgendes Integral:

$$V_{\max}^* \approx -\frac{1}{2} b_f^2 \int_0^{\min(a_p, a_{p,0})} \tan(\alpha_{\text{eff,min}} + \Delta\phi) dz, \quad (5.28)$$

$$\approx -\frac{1}{2} b_f^2 \int_0^{\min(a_p, a_{p,0})} \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{-2\pi\hat{y}_t}{\lambda}\right) + \alpha_f - \eta_r + \frac{2 \tan(\delta)}{D} z\right) dz. \quad (5.29)$$

Die entsprechende volumenspezifische Kraft ist

$$K_V^* = \frac{\Delta F_{cN}}{V_{\max}^*}. \quad (5.30)$$

Die volumenspezifischen Kräfte wurden zudem für verschiedene Fasenwinkel  $\alpha_f$  bestimmt. Die Fasenbreite war hierbei konstant  $b_f = 0,1 \text{ mm}$ . In Bild 5.27 und Tabelle 5.6 ist der  $K_V$ -Wert in Abhängigkeit des Fasenwinkels dargestellt. Auch hier sind wieder die anhand des Vergleichs von experimentell ermittelten und berechneten Stabilitätskarten bestimmten Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$  (siehe Kapitel 5.2.4, Bild 5.37) mit dargestellt. Der anhand der Wave-On-Wave-Hobelmethode ermittelte Verlauf des  $K_V$ -Werts fällt zunächst linear ab und verläuft ab  $\alpha_f = 4^\circ$  horizontal. Die  $K_V$ -Werte für  $\alpha_f = 4^\circ$  und  $\alpha_f = 5^\circ$  sind nahezu identisch mit dem des scharfen, ungefasten Werkzeugs. Dass die  $K_V$ -Werte nicht ganz auf null abfallen, liegt an einer geringfügigen Grundschwankung der gemessenen Kraftverläufe, die auch durch das Butterworth-Filter nicht gänzlich beseitigt werden konnte. Der Verlauf der Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$ , die durch den Vergleich mit den experimentellen Stabilitätskarten ermittelt wurden, fällt eher ab. Die  $K_{pd}$ -Werte bei

**Tabelle 5.6:** Volumenspezifische Kräfte  $K_V$  und Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$  für verschiedene Fasenwinkel  $\alpha_f$ .

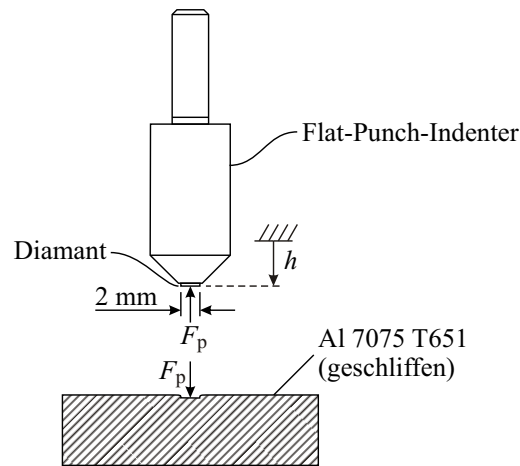
$\alpha_f$ [°]	$K_V$ [N/mm <sup>3</sup> ] (Hobelvers. $\eta_r = \alpha_f$ )	$K_{pd}$ [N/mm <sup>3</sup> ] (Vgl. mit Exp.)
1	234.000	260.000
2	182.000	70.000
3	92.000	20.000
4	25.000	20.000
5	26.000	0
14	24.000	0

$\alpha_f = 2^\circ$  und  $\alpha_f = 3^\circ$  liegen deutlich unterhalb der Werte, die durch die Wave-On-Wave-Hobelmethode ermittelt wurden. Bei der eingestellten Wellenlänge  $\lambda = 4,488$  mm und der Amplitude der inneren und äußeren Modulation  $\hat{y}_t = 30$   $\mu$ m beträgt die maximale Änderung des effektiven Freiwinkels in diesem Fall  $\hat{\alpha}_{\text{eff}} = 2,405^\circ$ . Das bedeutet, dass bereits für den Fasenwinkel  $\alpha_f = 3^\circ$  die innere Modulation derart langwellig ist, dass es unter der Voraussetzung eines rein plastischen Materialverhaltens zu keinem Kontakt zwischen Freifläche und Werkstückoberfläche kommt. Dass der durch die Wave-On-Wave-Hobelmethode ermittelte  $K_V$ -Wert für  $\alpha_f = 3^\circ$  dennoch deutlich oberhalb des Niveaus der scharfen Schneide liegt, spricht für ein elastisch-plastisches Materialverhalten und einen Relaxationswinkel  $\eta_r > \alpha_f - \hat{\alpha}_{\text{eff}} = 3^\circ - 2,405^\circ = 0,595^\circ$ .

Ein Nachteil der Wave-On-Wave-Hobelmethode ist, dass die erreichbare Schnittgeschwindigkeit durch die maximalen Verfahrensgeschwindigkeiten der Maschinenachsen beschränkt wird. Die Vorschub- bzw. Schnittgeschwindigkeit der Hobelversuche entspricht bei einem Fräserdurchmesser von  $D = 20$  mm lediglich einer Drehzahl von  $n = 39,79$   $\text{min}^{-1}$ . Aufgrund der unrealistisch niedrigen Schnittgeschwindigkeit und des durch den Drallwinkel bedingten Fehlers lassen die durch dieses Verfahren ermittelten volumenspezifischen Kräfte  $K_V$  keine quantitativen Rückschlüsse auf das eigentliche Prozessdämpfungsverhalten zu. Die qualitativen Tendenzen der für unterschiedliche Fasenbreiten und Fasenwinkel ermittelten  $K_V$ -Werte werden jedoch durch die anhand des Vergleichs zwischen experimentell ermittelten und berechneten Stabilitätskarten bestimmten Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$  bestätigt.

Da der Prozessdämpfungskoeffizient eine volumenspezifische Kraft ist, stellt sich die Frage, ob dieser Koeffizient möglicherweise durch eine Eindringprüfung, wie sie von Härteprüfverfahren bekannt ist, ermittelt werden kann. Von den bestehenden Härteprüfverfahren ist das nach dem deutschen Physiker ADOLF MARTENS benannte und in [ISO 14577-1] genormte Martens-Härteprüfverfahren (auch bekannt als Universalhärte) besonders interessant, da während des Eindringvorgangs des Indenters die Eindringtiefe und die Kraft kontinuierlich gemessen werden. Die Martenshärte berechnet sich gemäß [ISO 14577-1] durch den Quotienten aus der Prüfkraft  $F$  und der aus der Eindringtiefe  $h$  berechneten Oberfläche  $A_S(h)$  des Eindringkörpers. Für eine Vickers-Pyramide mit einem Öffnungswinkel von  $\alpha = 136^\circ$  gilt demnach:

$$HM = \frac{F}{A_S(h)} = \frac{F_p}{\frac{4 \sin(0,5 \alpha)}{\cos^2(0,5 \alpha)} h^2} = \frac{F_p}{26,43 h^2} \quad (5.31)$$



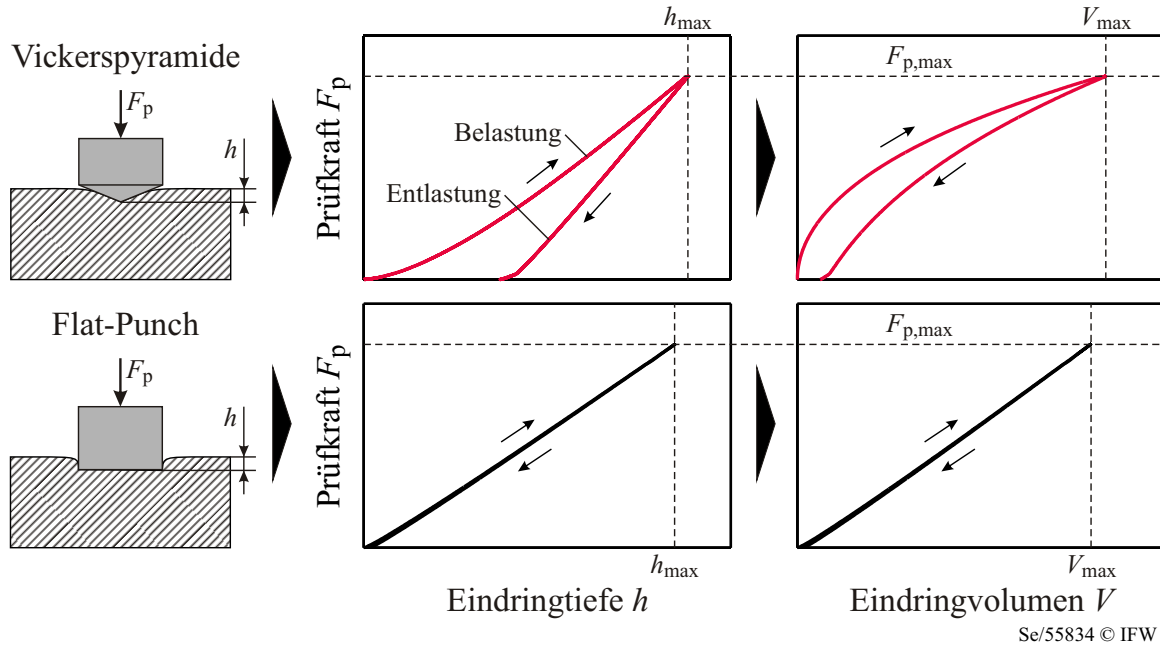
Se/55833 © IFW

**Bild 5.28:** Versuchsaufbau (Freikörperbild) zur Eindringprüfung mit einem Flat-Punch-Indenter.

In [ISO 14577-1] sind verschiedene weitere anhand der Messwerte der Martenshärteprüfung bestimmbare Werkstoffparameter definiert. Im Einzelnen sind dies

- die aus der Steigung der Kraft/Eindring-Kurve bestimmte Martenshärte  $HM_S$ ,
- die Eindringhärte  $H_{IT}$ ,
- der elastische Eindringmodul  $E_{IT}$ ,
- das Eindringkriechen  $C_{IT}$ ,
- die Eindringrelaxation  $R_{IT}$  und
- der elastische Anteil der Eindringarbeit  $\eta_{IT}$ .

Hierbei findet sich jedoch kein Parameter, der die Kraftänderung auf das verdrängte Werkstoffvolumen bezieht. Aus der gemessenen Eindringtiefe  $h$  kann jedoch das verdrängte Volumen berechnet werden. Wird die Prüfkraft  $F_p$  über dem Volumen aufgetragen so ergibt sich die volumenspezifische Kraft aus der Ableitung dieser Kurve:  $K_V = F'_p(V)$ . Es wurden daher zwei Eindringversuche mit einer Vickerspyramide (Öffnungswinkel  $\alpha = 136^\circ$ ) und einem zylindrischen, an der Stirnseite flachen, sogenannten Flat-Punch-Indenter durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist in Bild 5.28 für den Flat-Punch-Indenter dargestellt. Der Eindringkörper des Flat-Punch-Indenters ist ein zylindrischer Diamant mit einem Durchmesser von  $D = 2$  mm. Der Werkstoff ist dieselbe Aluminiumlegierung Al 7075 T651, die in den vorhergehenden Zerspanuntersuchungen verwendet wurde. Bild 5.29 zeigt den Vergleich der beiden gemessenen Prüfkraftverläufe. Bei der Vickers-Pyramide nimmt die Prüfkraft mit der Eindringtiefe progressiv zu und weist beim Herausfahren aufgrund des Anteils der plastischen Verformung des Werkstückmaterials eine ausgeprägte Hysterese auf. Wird die Prüfkraft über dem berechneten verdrängten Werkstückvolumen  $V$  aufgetragen, verläuft diese degressiv. Eine volumenspezifische Kraft ist dann nur als eine sich permanent ändernde Ableitung des Prüfkraftverlaufs bestimmbar. Die Prüfkraft des Flat-Punch-Indenters verläuft über der Eindringtiefe und dem berechneten verdrängten Werkstoffvolumen linear und weist nahezu keine Hysterese auf. Die volumenspezifische Kraft ist in diesem Fall konstant. Bei den Wave-On-Wave-Hobelversuchen und dem Vergleich der experimentell ermittelten Stabilitätskarten mit den theoretisch berechneten wurde festgestellt, dass der Prozessdämpfungskoeffizient mit zunehmender Fasenbreite



Se/55834 © IFW

**Bild 5.29:** Prüfkraft über Weg und Volumen des Vickers- und Flat-Punch-Indenters. Maximale Prüfkraft:  $F_{\max} = 1.000 \text{ N}$ .

sinkt. Dies wird durch die Prüfkraftkurve der Vickerspyramide bestätigt. Die berechnete Kontaktfläche zwischen der Vickers-Pyramide und dem Material  $A_S$  wächst quadratisch mit der Eindringtiefe  $h$  (siehe Gleichung (5.31)) und gleichzeitig sinkt die volumenspezifische Kraft bzw. die Steigung des Prüfkraftverlaufs  $F'_p(V)$ . Der Prüfkraftverlauf des Flat-Punch-Indenters zeigt, dass bei einer flachen Stirn des Eindringkörpers die volumenspezifische Kraft konstant ist. Dies bestätigt den in dieser Arbeit verwendeten Modellansatz von WU, die durch den Eindringungseffekt hervorgerufenen zusätzlichen Prozesskraftanteile über das verdrängte Volumen zu beschreiben.

In diesem Zusammenhang ist es besonders interessant, dass zur Bestimmung der Steigung  $F'_p(V)$  bei bekannten Werkstoffen kein Eindringversuch notwendig ist, da diese durch den E-Modul abgeleitet werden kann. Auf Basis der Arbeit von SNEDDON [Sne65] entwickelten OLIVER, PHARR und BROTZEN [Oli92; Pha92; Oli04] eine Formel, mit der sich aus der Steigung der Prüfkraftkurve eines rotationssymmetrischen Indenters der E-Modul des Werkstoffs bestimmen lässt. Für die Steigung des oberen Teils der Entlastungskurve gilt folgende Gleichung [Oli92]:

$$\frac{dF}{dh} = \frac{2 E_r \sqrt{A_S}}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.32)$$

In dieser Gleichung ist  $A_S$  die projizierte Kontaktfläche zwischen Indenter und Werkstück und  $E_r$  der reduzierte Elastizitätsmodul, der sich aus dem E-Modul und der Querkontraktionszahl des Werkstückmaterials ( $E$ ,  $\nu$ ) und des Materials des Indenterkörpers ( $E_i$ ,  $\nu_i$ ) berechnet:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1 - \nu^2}{E} + \frac{1 - \nu_i^2}{E_i}. \quad (5.33)$$

Die volumenspezifische Kraft eines zylindrischen Flat-Punch-Indenters kann ermittelt werden, indem Gleichung (5.32) durch  $A_S$  geteilt wird und für  $A_S$  die Formel der Kreisfläche

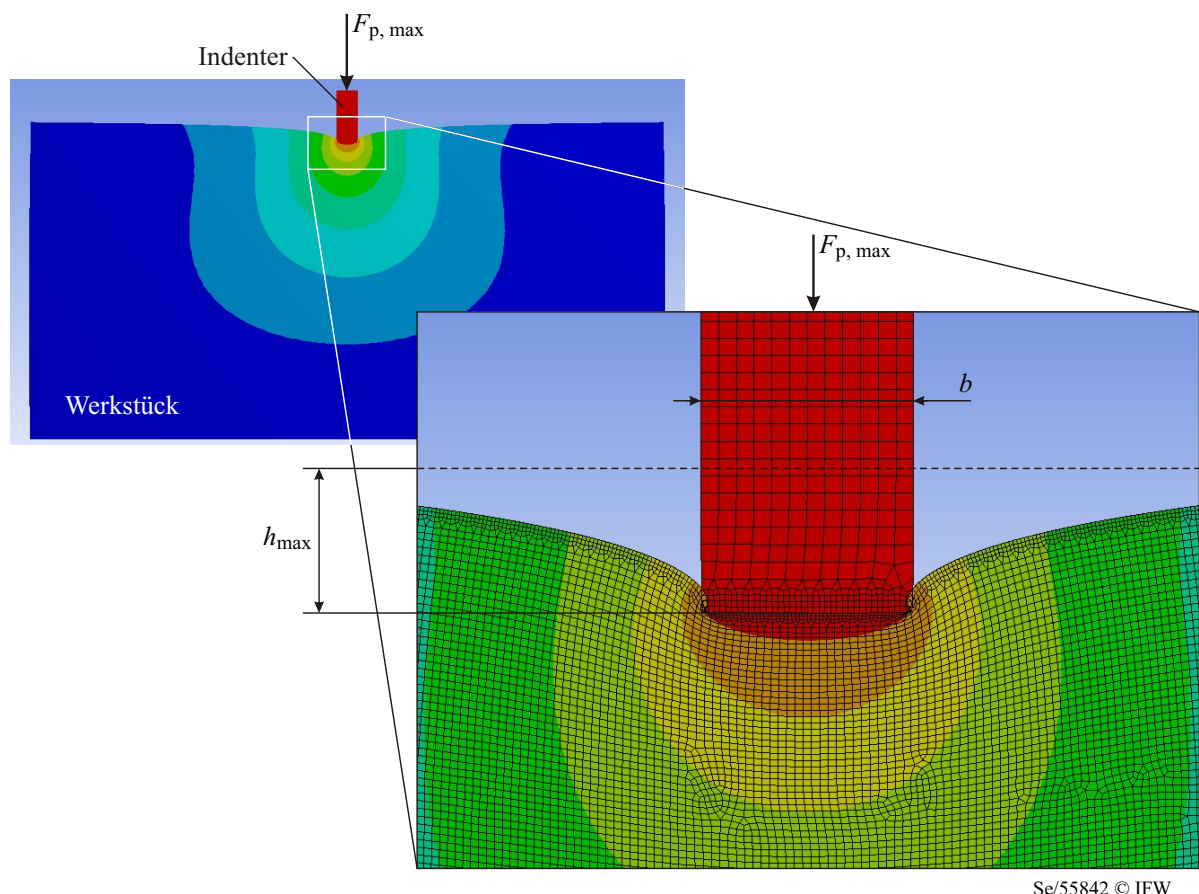
eingesetzt wird:

$$K_V = \frac{dF}{dh A_S} = \frac{2 E_r}{\sqrt{\pi} \sqrt{A_S}}, \quad (5.34)$$

$$= \frac{2 E}{\sqrt{\pi} \sqrt{\frac{D^2 \pi}{4}}}, \quad (5.35)$$

$$= \frac{4 E_r}{\pi D}. \quad (5.36)$$

Diese Formel lässt sich jedoch nicht ohne Weiteres auf den Eindringungseffekt von gefaserten Fräs Werkzeugen übertragen, da die Freiflächenfasen nicht kreisförmig sind. Die Fasen winden sich vielmehr helixförmig um den Fräser. Durch das „Abwickeln“ dieser Helix entspricht die Fase eher einem sehr schmalen und langen, rechteckförmigen Eindringkörper. Ein solcher Eindringkörper ist jedoch nicht kommerziell verfügbar und ließe sich nicht ohne erhebliche Umbaumaßnahmen in konventionelle Martenshärteprüfmaschinen einbauen. Aus diesen Gründen wurde eine solcher Eindringversuch durch die Finite-Elemente-Methode (FEM) simuliert (Bild 5.30).



**Bild 5.30:** Finite-Elemente-Simulation eines Flat-Punch-Eindringversuchs im ebenen Spannungszustand. Die Verlagerungen sind um den Faktor 24 vergrößert dargestellt.

Es wurde hierbei von einem linear-elastischen Materialmodell ausgegangen. Da davon ausgegangen werden kann, dass die Länge der Faser deutlich länger ist als deren Breite,

wurde der ebene Spannungszustand betrachtet. In den Simulationen wurden die Breite des Eindringkörpers  $b$ , der E-Modul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$  des Werkstückmaterials variiert. Anhand der simulierten Eindringtiefe  $h_{\max}$  wurde das verdrängte Volumen  $V_{\max} = b h_{\max} l$  bestimmt. In dieser Gleichung bezeichnet  $l$  die angenommene Länge des Eindringkörpers. In den Simulationen war diese konstant  $l = 4 \text{ mm}$ . Die volumenspezifische Kraft ist  $K_V = \frac{F_{p,\max}}{V_{\max}}$ . Die Simulationsergebnisse sind in Tabelle 5.7 angegeben.

**Tabelle 5.7:** Durch die Finite-Elemente-Methode simulierte Eindringtiefen  $h$  und berechnete volumenspezifische Kräfte  $K_V$  bei verschiedenen Breiten  $b$ , E-Moduln  $E$  und Querkontraktionszahlen  $\nu$  des Werkstücks. Länge des Eindringkörpers  $l = 4 \text{ mm}$ .

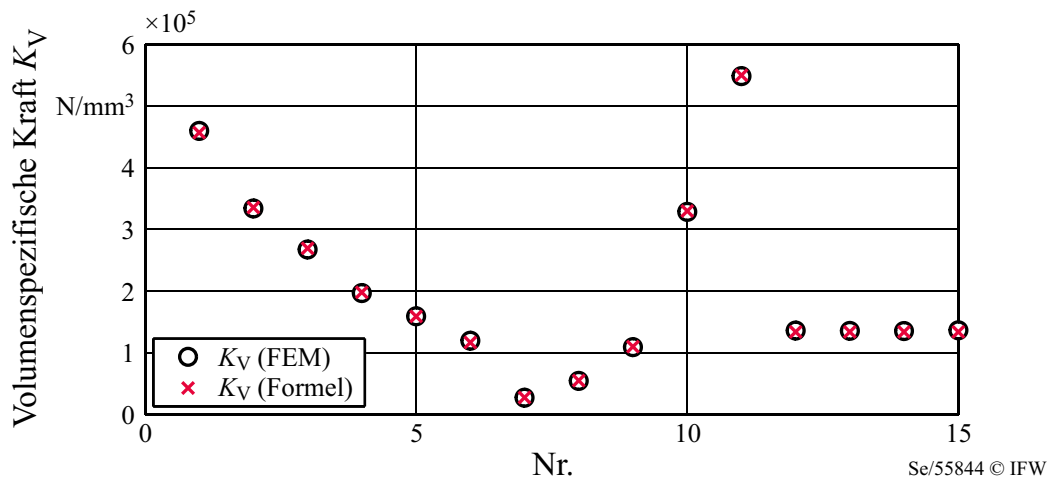
Nr.	Prüfkraft $F_p$ [N]	Breite $b$ [mm]	E-Modul $E$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Querkontr. $\nu$ [–]	max. Eindringtiefe $h_{\max}$ [ $\mu\text{m}$ ]	vol.-spez. Kraft $K_V$ [N/mm <sup>3</sup> ]
1	1.000	0,05	72.000	0,33	1,0881	459.516,5885
2	1.000	0,075	72.000	0,33	9,9884	333.720,4491
3	1.000	0,1	72.000	0,33	9,3505	267.365,3815
4	1.000	0,15	72.000	0,33	8,4729	196.705,575
5	1.000	0,2	72.000	0,33	7,8543	159.148,4919
6	1.000	0,3	72.000	0,33	6,9624	119.690,5282
7	1.000	0,15	10.000	0,33	61,112	27.272,33058
8	1.000	0,15	20.000	0,33	30,547	54.560,73155
9	1.000	0,15	40.000	0,33	15,265	109.182,2251
10	1.000	0,15	120.000	0,33	5,0772	328.264,9229
11	1.000	0,15	200.000	0,33	3,0402	548.209,5476
12	1.000	0,25	72.000	0	7,3543	135.974,8718
13	1.000	0,25	72.000	0,1	7,3837	135.433,4548
14	1.000	0,25	72.000	0,2	7,3879	135.356,4612
15	1.000	0,25	72.000	0,4	7,3244	136.529,9547

Auf Basis dieser Simulationsergebnisse wurde durch die Methode der symbolischen Regression eine Funktion ermittelt, die die volumenspezifische Kraft  $K_V$  in Abhängigkeit der Breite  $b$  und des E-Moduls  $E$  beschreibt. Hierzu wurde der von SCHMIDT und LIPSON in [Sch09] beschriebene Algorithmus verwendet. Dieser Algorithmus ist in Form der vom Cornell Creative Machines Lab der Cornell University in Ithaca, New York (USA) frei zur Verfügung gestellten Software *Eureqa* (Version 0.84 beta, siehe <http://creativemachines.cornell.edu/eureqa>, Stand: 26.11.2011) verfügbar. *Eureqa* ist in der Lage, versteckte mathematische Zusammenhänge anhand von Messdaten zu ermitteln. Hierbei ist es nicht notwendig, den mathematischen Zusammenhang in Form einer Ansatzfunktion vorzugeben. Vielmehr generiert die Software selbstständig eigene Ansatzfunktionen und identifiziert deren Parameter. Die Software gibt daher eine ganze Reihe an Modellen aus, die den gemessenen Zusammenhang wiedergeben. Für die Auswahl des „richtigen“ bzw. geeigneten Modells ist zum einen eine geringe Komplexität des Modells und zum anderen eine möglichst geringe Abweichung gegenüber den gemessenen Daten

entscheidend. Folgende Formel wurde unter diesen Gesichtspunkten ausgewählt:

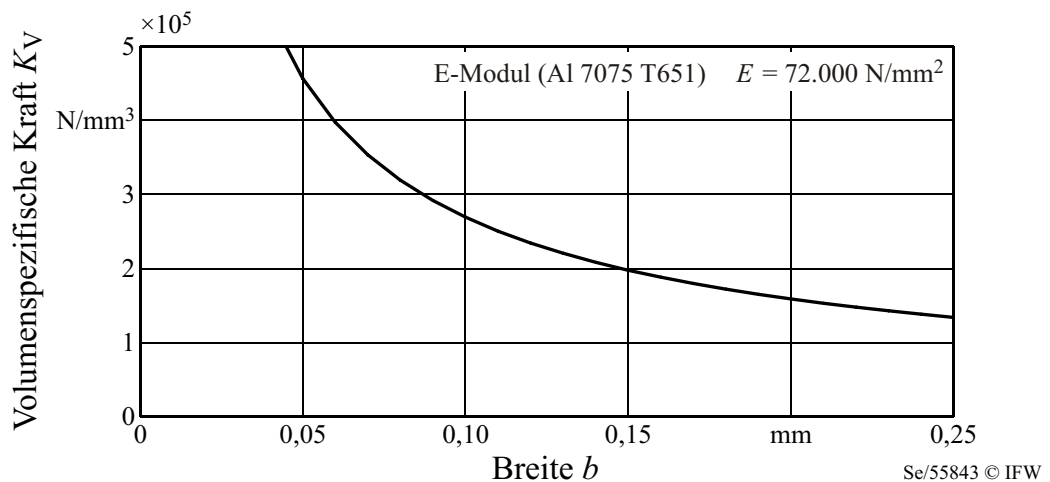
$$K_V = \frac{0,647 E}{1 \text{ mm}} \left( \frac{b}{1 \text{ mm}} \right)^{-0,762} \quad (5.37)$$

In Bild 5.31 sind die Simulationsergebnisse zusammen mit den durch diese Gleichung berechneten Werten dargestellt.



**Bild 5.31:** Durch die Finite-Elemente-Methode simulierte volumenspezifische Kraft  $K_V$  (siehe Tabelle 5.7) und durch die Software Eureka [Sch09] identifiziertes Modell (Gleichung (5.37)).

Die  $K_V$ -Werte der FEM-Simulationen sind mit denen durch diese Gleichung berechneten nahezu identisch. Das Bestimmtheitsmaß beträgt  $R^2 \approx 0,99985$ . In Bild 5.32 ist die nach Gleichung (5.37) berechnete volumenspezifische Kraft  $K_V$  in Abhängigkeit der Breite  $b$  für den E-Modul der in dieser Arbeit verwendeten Aluminiumlegierung Al 7075 T651  $E = 72.000 \text{ N/mm}^2$  dargestellt.



**Bild 5.32:** Volumenspezifische Kraft berechnet nach Gleichung (5.37).

Der Verlauf liegt in einer ähnlichen Größenordnung wie die Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$ , die durch den Vergleich der experimentell ermittelten mit den berechneten

Stabilitätskarten ermittelt wurden, und wie die durch die Wave-On-Wave-Hobelmethode identifizierten volumenspezifischen Kräfte  $K_V$  (siehe Bild 5.26). Daraus lässt sich die Hypothese ableiten, dass sich der Prozessdämpfungskoeffizient durch Gleichung (5.37) berechnen lässt. Diese Hypothese wird im folgenden Kapitel überprüft und anhand eines Vergleichs mit experimentell ermittelten Stabilitätskarten diskutiert.

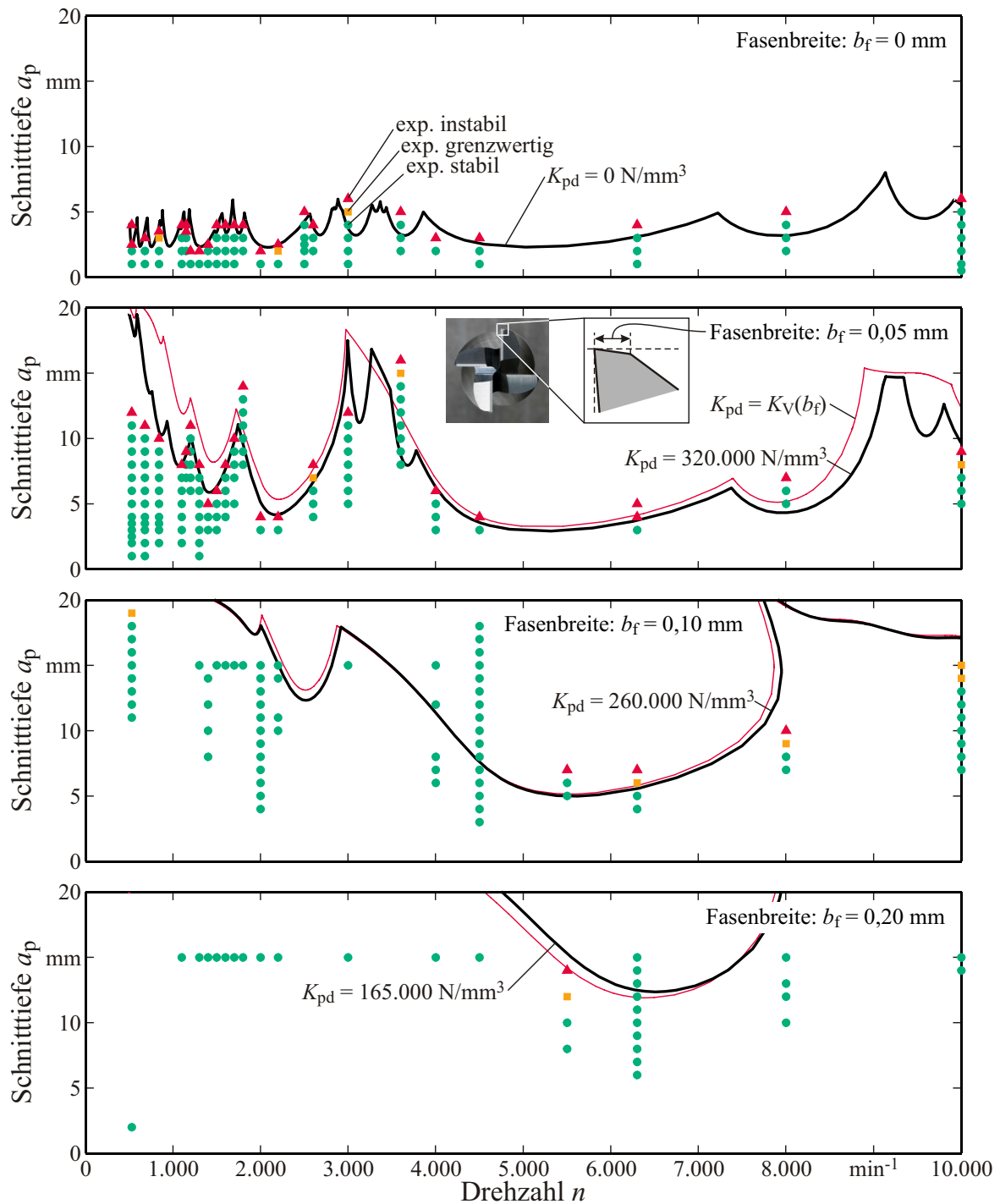
### 5.2.3 Einfluss der Fasenbreite auf die Prozessstabilität

Um den Einfluss der Fasenbreite auf die Prozessstabilität zu ermitteln, wurden Stabilitätskarten für vier bis auf die Fasenbreite  $b_f$  identische Fräser experimentell bestimmt. Der Versuchsaufbau war hierbei der gleiche wie in Kapitel 5.1.1. Der Fasenwinkel war konstant  $\alpha_f = 1^\circ$ . Die Fasenbreite wurde im Bereich  $b_f = 0 \dots 0,2 \text{ mm}$  variiert. Alle vier Fräser waren gleich geteilt:  $\mathbf{p} = [90 \ 90 \ 90 \ 90]^\circ$ . Die experimentellen Ergebnisse sind zusammen mit den theoretisch berechneten Stabilitätskarten in Bild 5.33 dargestellt. Der Reibkoeffizient der Prozessdämpfung  $\mu = 0,3$  wurde aus [Wu89] übernommen. Durchgeführte Simulationen haben gezeigt, dass der Reibkoeffizient einen eher geringen Einfluss auf die Stabilitätsgrenze hat. Da für die Prozessdämpfungskoeffizienten beim Fräsen bisher keine Identifikationsmethode vorhanden ist, wurden diese heuristisch durch Vergleich der simulierten mit den experimentell bestimmten Stabilitätsgrenzen ermittelt. Die so berechneten Stabilitätsgrenzen sind als dicke schwarze Linien in den Diagrammen von Bild 5.33 dargestellt. Zusätzlich wurden die Stabilitätsgrenzen mit der Annahme berechnet, dass der Prozessdämpfungskoeffizient gleich der volumenspezifischen Kraft  $K_V$  gemäß Gleichung (5.37) ist. Diese Stabilitätsgrenzen sind als dünne rote Linien in den Diagrammen eingezeichnet.

Für den scharfen Fräser stimmt die theoretisch berechnete Stabilitätskarte mit den experimentell ermittelten Daten sehr gut überein. Für den Fräser mit der Fasenbreite  $b_f = 0,05 \text{ mm}$  wird mit dem heuristisch ermittelten Prozessdämpfungskoeffizienten eine ähnlich gute Übereinstimmung erzielt. Mit dem nach Gleichung (5.37) berechneten Prozessdämpfungskoeffizienten liegt die Stabilitätsgrenze etwas zu hoch. Bei den Fräsern mit den Fasenbreiten  $b_f = 0,1 \text{ mm}$  und  $b_f = 0,2 \text{ mm}$  werden nur noch sehr wenige Punkte in den experimentell ermittelten Stabilitätskarten instabil. Dies erschwert eine Beurteilung der Übereinstimmung mit den theoretischen Vorhersagen. Da bei diesen Fasenbreiten sehr hohe Schnitttiefen bis zu  $a_p = 18 \text{ mm}$  erzielt werden, ist es denkbar, dass die Biegeeigenformen der Werkzeugseite nicht mehr vernachlässigt werden können. Das bedeutet, dass sich der Nachgiebigkeitsfrequenzgang an der Fräterspitze gegenüber dem in einem bestimmten Abstand von der Fräterspitze entfernt liegenden Punkt ermittelten Nachgiebigkeitsfrequenzgang in Amplitude und Phase unterscheidet. Da das in dieser Arbeit entwickelte Modell der Strukturodynamik diesen Effekt nicht berücksichtigt, ist dies möglicherweise eine Erklärung für die bei diesen Fasenbreiten auftretenden Abweichungen zwischen experimenteller und theoretisch berechneter Stabilitätsgrenze.

Als weitere Ursachen der festgestellten Abweichungen kommen die bei der Modellierung der Fräsprozessdynamik getroffenen, vereinfachenden Annahmen in Frage. So wurde der Eindringungseffekt linearisiert und der Querschnitt des verdrängten Werkstückvolumens durch ein Dreieck approximiert (siehe Bild 4.13). Ferner wurde angenommen, dass der Relaxationswinkel gleich dem Fasenwinkel ist ( $\eta_r = \alpha_f = 1^\circ$ ). Denkbar wäre hingegen auch, dass der Relaxationswinkel größer oder kleiner als der Fasenwinkel ist und von den Spannungen in der Scher- und Verformungsvorlaufzone abhängt. Dies würde bedeuten, dass





Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Disk.-zahl	$m = 250$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Reibwert	$\mu = 0,3$
Zähnezahl	$z = 4$	Fasenbreite	$b_f = \text{var.}$	Werkstück	Al 7075 T651
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenwinkel	$\alpha_f = 1^\circ$	Schnittkraftkoeff.:	
Eckenradius	$R = 1 \text{ mm}$	Schnittbreite	$a_e = D$	Tangential	$K_{tc} = 793,99 \text{ N/mm}^2$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Zahnvorschub	$f_z = 0,12 \text{ mm}$	Radial	$K_{rc} = 109,41 \text{ N/mm}^2$
		KSS	trocken		Se/55820 © IFW

**Bild 5.33:** Berechnete und experimentell bestimmte Stabilitätskarten für unterschiedliche Fasenbreiten  $b_f$ . Parameter der Strukturdynamik: Tabelle 5.2.

der Relaxationswinkel von der Spannungsdicke  $h$  und somit vom Zahnvorschub  $f_z$  und Vorschubrichtungswinkel  $\phi_j$  abhängt. Im folgenden Kapitel wird näher darauf eingegangen, wie sich solche Effekte in der Stabilitätsanalyse berücksichtigen lassen.

Weitere mögliche Fehlerquellen sind höherfrequente Eigenmoden, die bei der Messung und Identifikation der Strukturodynamik nicht berücksichtigt wurden. Der für die Anregung der Strukturodynamik verwendete Impulshammer erzeugt keinen idealen Kraftimpuls. Dadurch fällt selbst bei Verwendung sehr harter, metallischer Impulshammerspitzen das Anregungsspektrum des Impulses zu höheren Frequenzen stets ab. Es ist also denkbar, dass oberhalb von 4.000 Hz weitere für die Berechnung der Stabilitätskarten relevante Eigenmoden existieren, die durch den endlichen Impuls nicht hinreichend angeregt wurden und bei der Identifikation der Parameter der Strukturodynamik somit nicht berücksichtigt werden konnten. Dass noch eine oder mehrere weitere Eigenmoden oberhalb von 4.000 Hz existieren, ist in Bild 5.4 daran zu erkennen, dass die Phase des Modells der Strukturodynamik gegenüber der Messung bei hohen Frequenzen zu niedrig ist. Die Vorhersage der Stabilitätsgrenze des ungefasten Fräasers scheint hierdurch offensichtlich nicht beeinträchtigt zu werden. Da die durch die Fasen hervorgerufene Prozessdämpfung nicht von den Verlagerungen, sondern von den Verlagerungsgeschwindigkeiten abhängt, welche mit den Schwingungsfrequenzen linear zunehmen, haben Eigenmoden mit hohen Eigenfrequenzen für gefaste Fräser möglicherweise eine stärkere, nicht zu vernachlässigende Bedeutung.

Die in Bild 5.33 dargestellten, experimentell ermittelten Stabilitätskarten zeigen, dass die von KHASAWNEH et al. [Kha09] formulierte Hypothese einer entlang der Spanfläche verteilt wirkenden Zerspankraft die auftretenden Prozessdämpfungseffekte nicht ganzheitlich erklären kann. In dem Modell von KHASAWNEH et al. entspricht die Verteilung der Zerspankraft entlang der Spanfläche der gewichteten äußeren Modulation. Hierdurch kommt es zu einer zusätzlichen, kurzen, verteilten Totzeit in der das System beschreibenden Differentialgleichung, die prinzipiell zu einem Anstieg der Stabilitätsgrenze führen kann. Es ist offensichtlich, dass der von KHASAWNEH et al. postulierte theoretische Effekt den immensen Stabilitätsgewinn mit ansteigender Fasenbreite nicht abbilden kann, da dieser Effekt nicht von der Gestalt der Freifläche abhängt. Es kann umgekehrt jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass dieser Effekt generell nicht existiert. Für das Fräsen scheint er jedoch vernachlässigbar zu sein, da selbst bei dem scharfen Fräser ohne Freiflächenfase kein Anstieg der Stabilitätsgrenze bei niedrigen Drehzahlen auftritt.

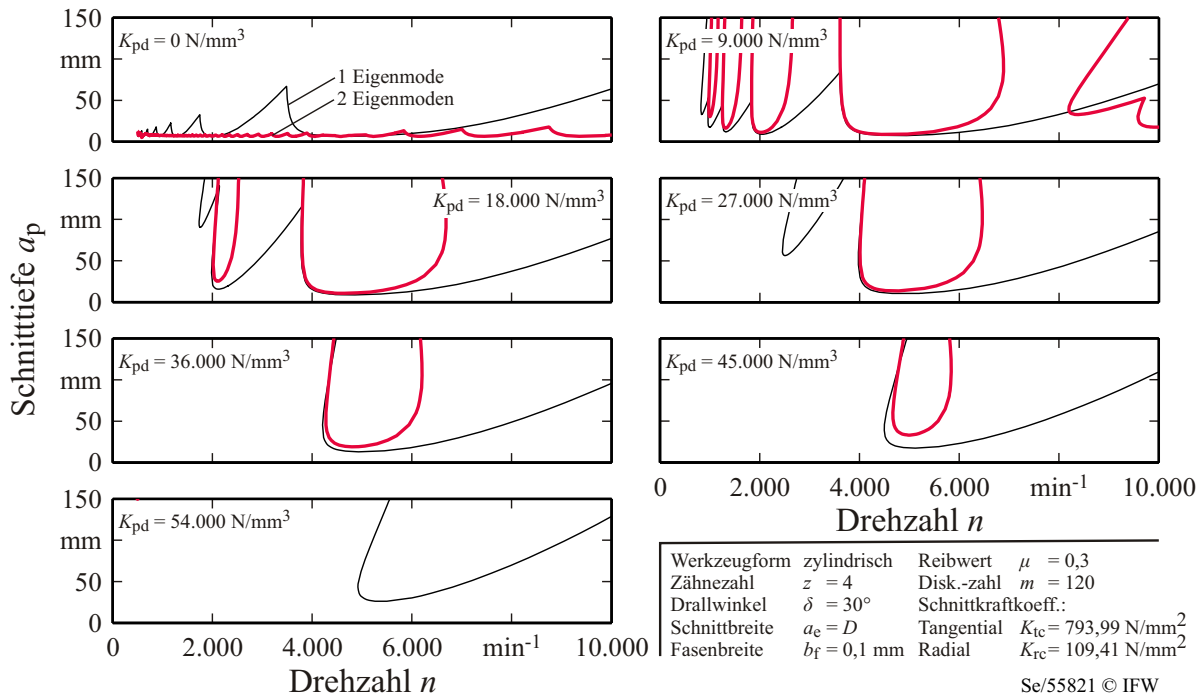
Entgegen der in der Literatur vorherrschenden Annahme, dass sich die durch den Eindringungseffekt bedingte Prozessdämpfung auf den Bereich niedriger Drehzahlen beschränkt, steigt die Stabilitätsgrenze in Bild 5.33 auch im hohen Drehzahlbereich deutlich an. Aus Gleichung (4.88) ist ersichtlich, dass die Prozessdämpfungskraft mit zunehmender Schnittgeschwindigkeit  $v_c$  sinkt. Es ist jedoch denkbar, dass dies zu einem gewissen Grad durch die mit der Drehzahl  $n$  sägezahnförmig ansteigende Ratterfrequenz [Wec06, S. 253] kompensiert wird. Bisher wurden die meisten Untersuchungen des Prozessdämpfungseffekts bei Drehprozessen durchgeführt. Bei Drehprozessen liegen die einzelnen Peaks der Stabilitätskarte sehr dicht beieinander. Nach WECK und BRECHER [Wec06, S. 253] ist die Ordnungszahl  $m = \frac{f_{\text{eig}}}{z n}$  beim Drehen üblicherweise  $m \geq 5$ . Dies bedeutet, dass die auftretenden Ratterfrequenzen beim Drehen sehr dicht bei den Eigenfrequenzen liegen. Beim Fräsen sind die Ordnungszahlen aufgrund des kurzen Abstands zwischen den Schneiden eher klein:  $m \leq 5$ . Dadurch können die auftretenden Ratterfrequenzen die Eigenfrequenzen deutlich übersteigen. Ein weiterer Grund oder vielmehr eine Voraussetzung

**Tabelle 5.8:** Fiktive Werte der Oszillatorparameter des Werkstücks in Vorschubrichtung ( $x_w$ ) für ein System mit zwei Oszillatoren.

	Nr.	Masse	Dämpfung	Steifigkeit	Lehrsche Dämpfung	Eigenfreq.
		$m$ [kg]	$d$ [Ns/m]	$k$ [N/ $\mu$ m]	$\zeta$ [%]	$f_0$ [Hz]
$x_w$	1	5,08	468,75	10,39	3,23	227,66
	2	0,0508	46,88	10,39	3,23	2.276,63

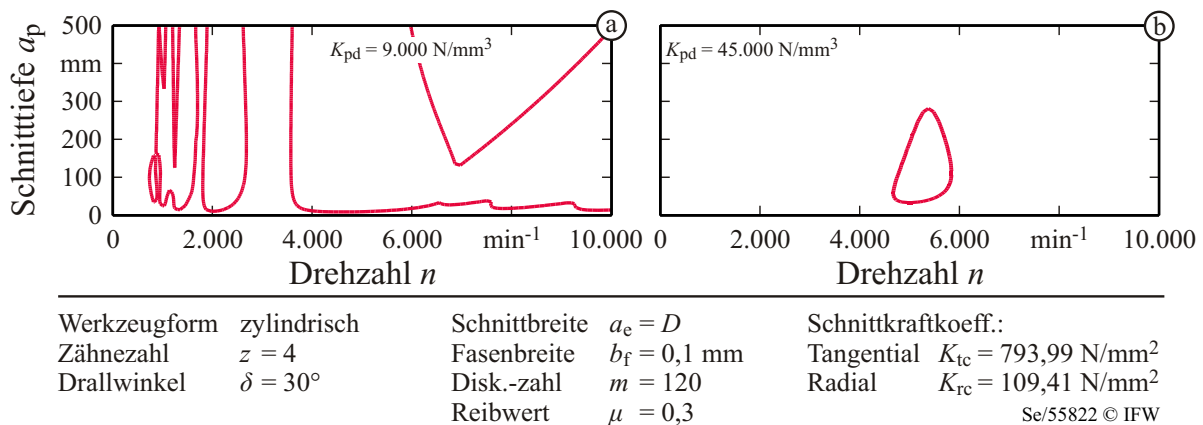
für die Prozessdämpfung im Hochgeschwindigkeitsbereich sind Freiflächenfasen mit einem sehr kleinen Fasenwinkel. Theoretisch betrachtet tritt Prozessdämpfung dann auf, wenn die Steigung der inneren Modulation den ersten Wirk-Orthogonalfreiwinkel  $\alpha_{oe,1}$  überschreitet. Bei hohen Drehzahlen steigt die Wellenlänge der Ratterschwingungen an. Dadurch sinkt die Steigung der inneren Modulation. Damit diese dennoch den ersten Wirk-Orthogonalfreiwinkel übersteigt, muss der Fasenwinkel entsprechend klein sein. Ein elastisch-plastisches Materialverhalten und der damit verbundenen Relaxation des Werkstückmaterials unterhalb der Schneide (siehe Bild 4.14) verstärkt diesen Effekt.

Die Hauptursache für den Effekt der Hochgeschwindigkeitsprozessdämpfung ist jedoch eine wechselseitige Beeinflussung der nieder- und höherfrequenten Eigenmoden. Diese wechselseitige Beeinflussung entsteht dadurch, dass die Prozessdämpfungsmatrix  $\mathbf{Q}_{pd,j}$  voll besetzt ist. Wird die Stabilitätsgrenze eines Systems mit einem einzelnen Oszillator für verschiedene Prozessdämpfungskoeffizienten berechnet, so beschränkt sich der Anstieg der Stabilitätsgrenze auf den niedrigen Drehzahlbereich. Wird jedoch ein weiterer Oszillator mit einer höheren Eigenfrequenz hinzugenommen, so steigt die Stabilitätsgrenze auch im hohen Drehzahlbereich. Bild 5.34 veranschaulicht diesen Effekt der gegenseitigen Beeinflussung der Moden. Der Prozessdämpfungskoeffizient wurde im Bereich  $K_{pd} = 0 \dots 54.000 \text{ N/mm}^3$  variiert. Die dünne Linie ist die Stabilitätsgrenze des Systems mit nur einem Oszillator (Tabelle 5.4). Die dicke Linie ist die Stabilitätsgrenze des Systems mit zwei Oszillatoren (Tabelle 5.8). Die Eigenfrequenz des zweiten Oszillators ist zehnmal so groß wie die des ersten. Die Lehrsche Dämpfung  $\zeta$  und die Steifigkeit  $k$  sind identisch. Da die strukturelle Nachgiebigkeit des Systems durch die Hinzunahme des zweiten Oszillators deutlich geschwächt wird, ist die Stabilitätsgrenze dieses Systems gegenüber der des Systems mit nur einem Oszillator deutlich geringer. Dies trifft jedoch nur zu, wenn keine Prozessdämpfung vorhanden ist. Die Prozessdämpfung führt dazu, dass das nachgiebigere System mit zwei Oszillatoren eine höhere Stabilitätsgrenze aufweist als das System mit nur einem Oszillator. Die Diagramme zeigen, dass aufgrund des zweiten Oszillators auch bei sehr geringen Werten des Prozessdämpfungskoeffizienten die Stabilitätsgrenze im höheren Drehzahlbereich zunimmt. Bei einem Prozessdämpfungskoeffizienten von  $K_{pd} = 9.000 \text{ N/mm}^3$  steigt die Stabilitätsgrenze des Systems mit nur einem Oszillator lediglich bei geringen Drehzahlen an. Das System mit zwei Oszillatoren weist hingegen auch einen immensen Anstieg bei einer Drehzahl von  $n = 8.000 \text{ min}^{-1}$  auf. Es ist auffällig, dass diese Ausweitung des stabilen Gebiets trichterförmig mit steigender Schnitttiefe zunimmt. Normalerweise (ohne Prozessdämpfung) ist das Gegenteil der Fall. Im Gegensatz zur strukturellen Dämpfung steigt die Prozessdämpfung mit der Schnitttiefe linear an, da das von der Freifläche verdrängte Werkstückvolumen proportional zum axialen Eingriff ist. Dies bedeutet, dass durch die Erhöhung der Schnitttiefe nicht nur der Totzeitterm verstärkt wird, was das System im Allgemeinen destabilisiert, sondern auch die Prozessdämp-



**Bild 5.34:** Stabilitätskarten für das System mit einem (Tabelle 5.4) und zwei Oszillatoren (Tabelle 5.8) für verschiedene Werte des Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$ .

fung erhöht wird, welche das System stabilisiert. Aus diesen beiden gegenläufigen Effekten resultieren solche trichterförmigen Formen der Stabilitätsgrenze. Bild 5.35a zeigt diesen Effekt für einen etwas kleineren Wert des Prozessdämpfungskoeffizienten. Der Bereich der Stabilitätskarte geht bis zu einer Schnitttiefe von  $a_p = 500 \text{ mm}$ . Dies ist unrealistisch hoch, jedoch dient es der Veranschaulichung des genannten Effekts und des Verhaltens des mathematischen Systems. Diese Stabilitätskarte musste ohne die Verwendung eines Tracking-Algorithmus berechnet werden, da sich hier das trichterförmige stabile Gebiet zwischen  $n = 6.000 \text{ min}^{-1}$  und  $n = 10.000 \text{ min}^{-1}$  vom Rest der Stabilitätsgrenze losgelöst hat und eine stabile Insel bildet. Neben stabilen Inseln kann die Prozessdämpfung auch instabile Inseln hervorrufen. Ein Beispiel hierfür zeigt Bild 5.35b. Hier ist die Stabilitätsgrenze für den Prozessdämpfungskoeffizienten von  $K_{pd} = 45.000 \text{ N/mm}^3$  für einen größeren

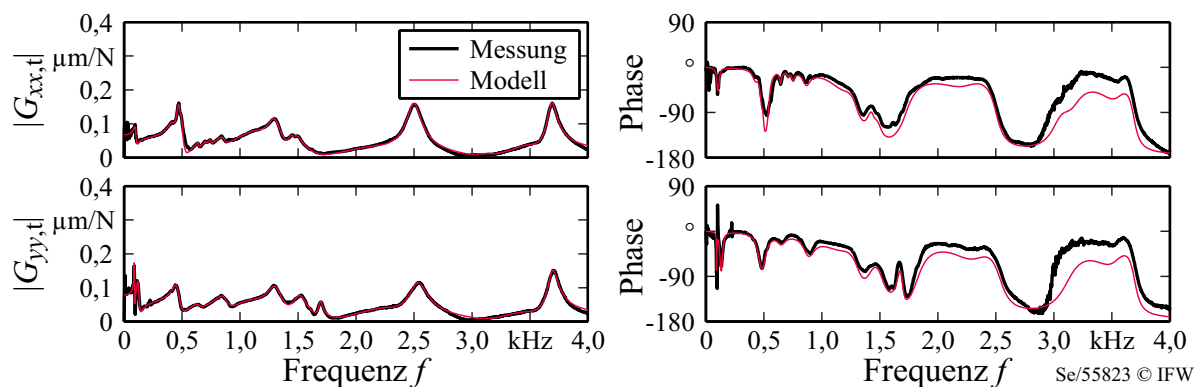


**Bild 5.35:** Stabilitätskarten für das System mit zwei Oszillatoren (Tabelle 5.8) für verschiedene Werte des Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$ .

Bereich der Schnitttiefe dargestellt. Bei einer Drehzahl von  $n = 5.000 \text{ min}^{-1}$ , welche im Bereich des ersten Stabilitätstals des ersten Oszillators liegt (Ordnungsnummer  $m = 1$ ), scheint die Destabilisierung durch den Regenerativeneffekt demnach sehr hoch zu sein.

#### 5.2.4 Einfluss des Fasenwinkels auf die Prozessstabilität

Neben dem Einfluss der Fasenbreite wurde auch der Einfluss des Fasenwinkels  $\alpha_f$  auf die Prozessstabilität untersucht. Der Versuchsaufbau war hierbei der gleiche wie in Kapitel 5.1.1. Die Fasenbreite war konstant  $b_f = 0,1 \text{ mm}$ . Der Fasenwinkel wurde im Bereich  $\alpha_f \in \{1, 2, 3, 4, 5\}^\circ$  variiert. Da die Hauptspindel in dem Fräsbearbeitungszentrum ausgetauscht wurde, mussten die Parameter der Strukturodynamik der Werkzeugseite neu bestimmt werden. Bild 5.36 zeigt die an der Fräterspitze gemessenen und modellierten Nachgiebigkeitsfrequenzgänge in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung. In Tabelle 5.9 sind die dazugehörigen identifizierten Werte der Parameter der einzelnen Oszillatoren aufgeführt.



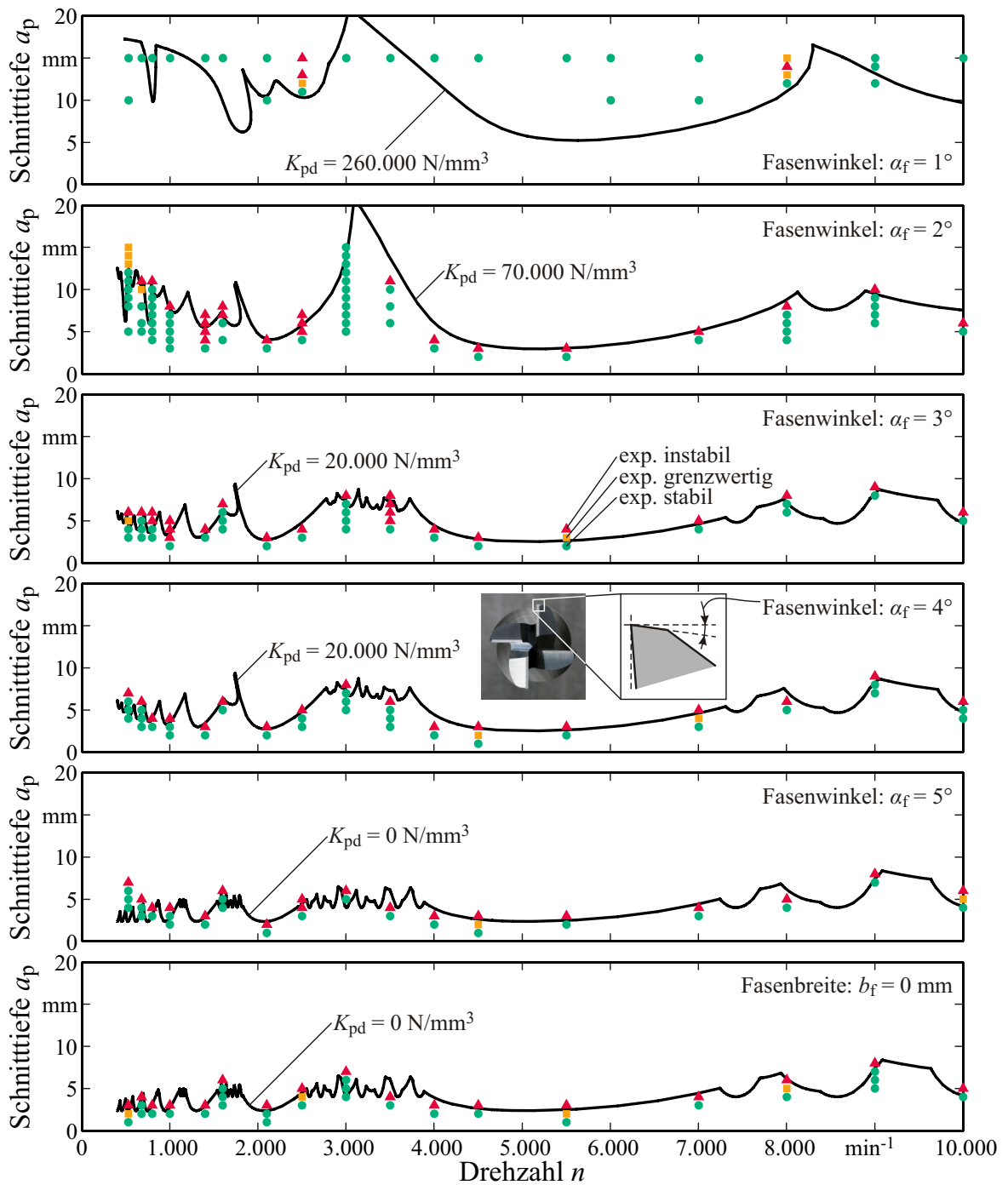
**Bild 5.36:** Gemessene und modellierte (Parameter der Strukturodynamik siehe Tabelle 5.9) Nachgiebigkeitsfrequenzgänge des Werkzeugs in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung ( $G_{xx,t}$ ,  $G_{yy,t}$ ) nach Wechseln der Hauptspindel.

In Bild 5.37 sind die für die unterschiedlichen Fasenwinkel experimentell ermittelten Stabilitätskarten zusammen mit den theoretisch berechneten Stabilitätsgrenzen dargestellt. Zusätzlich zu den fünf unterschiedlich gefassten Fräsern wurde als Referenz ebenfalls der scharfe Fräser ohne Freiflächenfase (Fasenbreite  $b_f = 0 \text{ mm}$ ) untersucht. Anhand der experimentellen Daten wird deutlich, dass die durch die Fase hinzugewonnene Prozessstabilität mit größer werdendem Fasenwinkel  $\alpha_f$  sehr schnell abnimmt. Bei einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  treten lediglich bei zwei der untersuchten Drehzahlen Ratterschwingungen auf. Bei den restlichen Drehzahlen ist der Prozess bis zur Schnitttiefe von  $a_p = 15 \text{ mm}$  stabil. Bei einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 2^\circ$  treten im Vergleich zu dem scharfen Fräser insbesondere bei den sehr niedrigen Drehzahlen und bei den Drehzahlen  $n = 3.000 \text{ min}^{-1}$  und  $n = 3.500 \text{ min}^{-1}$  deutliche Erhöhungen der Stabilitätsgrenze auf. Beträgt der Fasenwinkel  $\alpha_f \geq 3^\circ$ , so besteht jedoch kaum noch ein Unterschied gegenüber dem Fräser ohne Freiflächenfase.

Für die theoretische Berechnung der Stabilitätsgrenze wurde der gleiche Reibkoeffizient  $\mu = 0,3$  wie in Kapitel 5.2.3 verwendet (siehe [Wu89]). Die Prozessdämpfungskoeffizienten

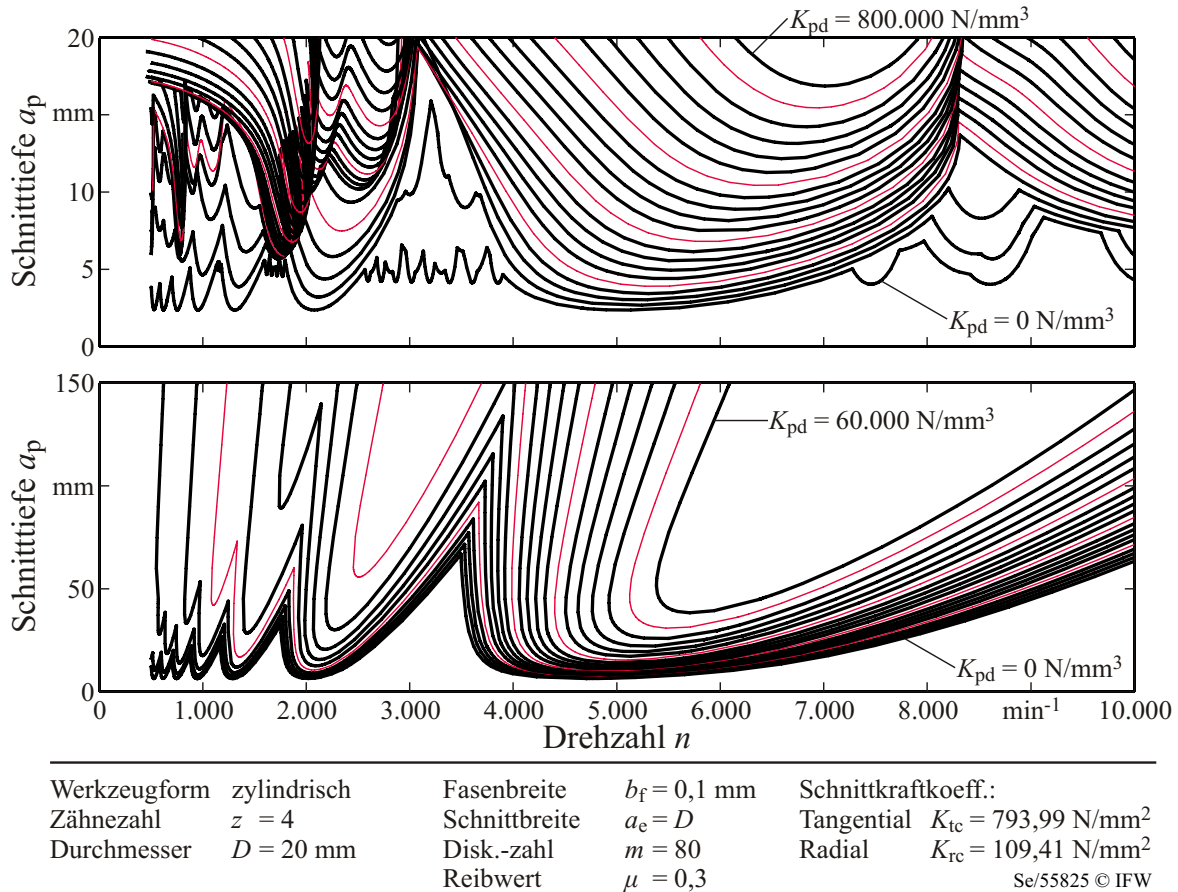
**Tabelle 5.9:** Werte der Oszillatorparameter des Werkstücks in Vorschub- ( $x_w$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y_w$ ) und des Werkzeugs in Vorschub- ( $x_t$ ) und Vorschubnormalenrichtung ( $y_t$ ) nach Wechseln der Hauptspindel.

	Nr.	Masse	Dämpfung	Steifigkeit	Lehrsche Dämpfung	Eigenfreq.
		$m$ [kg]	$d$ [Ns/m]	$k$ [N/ $\mu\text{m}$ ]	$\zeta$ [%]	$f_0$ [Hz]
$x_w$	1	185,58	12.848,68	83,48	5,16	106,75
	2	5,00	470,97	10,24	3,29	227,68
	3	54,01	3.796,17	1.258,16	0,73	768,19
	4	1,74	1.040,35	314,83	2,22	2.140,69
$y_w$	1	19,66	3949,64	991,22	1,41	1.130,17
	2	7,36	3.522,03	1.259,54	1,83	2.082,74
	3	65,09	14.901,06	37.493,34	0,48	3.819,90
$x_t$	1	228,15	30.449,79	91,68	10,53	100,89
	2	30,14	11.231,29	213,69	7,00	423,78
	3	13,13	2.802,19	116,99	3,58	475,15
	4	40,92	4.844,64	396,06	1,90	495,16
	5	125,44	17.209,88	2.036,61	1,70	641,29
	6	272,16	27.666,89	5.393,39	1,14	708,50
	7	90,55	15.368,81	2.007,15	1,80	749,31
	8	17,92	8.165,27	520,54	4,23	857,86
	9	2,06	3.497,60	109,93	11,63	1.163,53
	10	1,74	1.368,05	116,67	4,80	1.302,21
	11	13,70	4.729,77	1.122,41	1,91	1.440,47
	12	4,78	2.893,73	419,28	3,23	1.490,83
	13	1,75	4.851,81	329,49	10,11	2.186,11
	14	0,54	413,96	133,80	2,43	2.501,73
	15	8,98	10.968,38	3.433,45	3,12	3.111,92
	16	0,94	1.790,83	451,37	4,35	3.491,41
	17	0,54	292,49	288,82	1,17	3.687,55
$y_t$	1	567,44	11488,31	184,55	1,78	90,76
	2	98,58	13.784,36	59,61	8,99	123,76
	3	10,59	4.365,34	88,96	7,11	461,30
	4	34,40	18.044,67	562,78	6,48	643,73
	5	7,48	4.836,68	222,70	5,92	868,26
	6	2,34	5.229,38	121,38	15,52	1.146,44
	7	1,85	1.568,29	125,90	5,13	1.311,83
	8	2,17	1.704,32	197,69	4,11	1.517,69
	9	9,77	2.223,55	1.107,32	1,07	1.694,07
	10	1,11	2.896,34	224,37	9,16	2.258,75
	11	0,64	603,99	161,68	2,98	2.535,79
	12	1,03	2.350,16	485,16	5,26	3.456,11
	13	0,55	304,28	294,60	1,20	3.695,64



Werkzeugform	Torusfräser	Spanwinkel	$\gamma_o = 14^\circ$	Disk.-zahl	$m = 250$
Material	Hartmetall (Gühring, DK 460 UF)	Freiwinkel	$\alpha_o = 14^\circ$	Reibwert	$\mu = 0,3$
Zähnezahl	$z = 4$	Fasenbreite	$b_f = 0,1 \text{ mm}$	Werkstück	Al 7075 T651
Durchmesser	$D = 20 \text{ mm}$	Fasenwinkel	$\alpha_f = \text{var.}$	Schnittkraftkoeff.:	
Eckenradius	$R = 1 \text{ mm}$	Schnittbreite	$a_e = D$	Tangential	$K_{tc} = 793,99 \text{ N/mm}^2$
Drallwinkel	$\delta = 30^\circ$	Zahnvorschub	$f_z = 0,12 \text{ mm}$	Radial	$K_{rc} = 109,41 \text{ N/mm}^2$
		KSS	trocken		Se/55824 © IFW

Bild 5.37: Stabilitätskarten für unterschiedliche Fasenwinkel  $\alpha_f$ . Parameter der Struktur­dynamik: Tabelle 5.9.



**Bild 5.38:** Stabilitätskarten für unterschiedliche Werte des Prozessdämpfungskoeffizienten  $K_{pd}$ . Oberes Diagramm: Abbildung der Strukturdynamik durch 37 Oszillatoren (siehe Tabelle 5.9), Erhöhung von  $K_{pd} = 0 \text{ N/mm}^3$  auf  $K_{pd} = 800.000 \text{ N/mm}^3$  in Schritten von  $40.000 \text{ N/mm}^3$ . Unteres Diagramm: Beschreibung der Strukturdynamik durch einen einzelnen Oszillator (siehe Tabelle 5.4), Erhöhung von  $K_{pd} = 0 \text{ N/mm}^3$  auf  $K_{pd} = 60.000 \text{ N/mm}^3$  in Schritten von  $3.000 \text{ N/mm}^3$ .

wurden wiederum heuristisch durch Vergleich der simulierten mit den experimentell bestimmten Stabilitätsgrenzen ermittelt. Der Wert für den Prozessdämpfungskoeffizienten des Fräasers mit einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  wurde aus dem vorherigen Kapitel übernommen. Die mit diesem Wert berechnete Stabilitätsgrenze liegt jedoch insbesondere im Drehzahlbereich  $4.000 \text{ min}^{-1} < n < 7.000 \text{ min}^{-1}$  deutlich unterhalb der experimentell ermittelten Stabilitätsgrenze. Eine mögliche Ursache hierfür ist die bereits in Kapitel 5.2.3 diskutierte Vernachlässigung der Biegeeigenformen des Fräasers. Zudem können die Abweichungen wiederum mit der Vernachlässigung höherfrequenter Eigenmoden zusammenhängen, da auch bei den neu bestimmten Nachgiebigkeitsfrequenzgängen der Phasengang des Modells gegenüber dem gemessenen Phasengang bei hohen Frequenzen zu niedrig ist (siehe Bild 5.36).

Um zu veranschaulichen, wie sich die Stabilitätsgrenze mit steigendem Wert des Prozessdämpfungskoeffizienten ändert, sind in Bild 5.38 mehrere Stabilitätsgrenzen für die identifizierte Strukturdynamik aus Tabelle 5.9 und den idealisierten Einmassenschwinger aus Tabelle 5.4 gegenübergestellt. Damit die Stabilitätsgrenzen einander besser zugeord-



net werden können, ist jede fünfte als dünne Linie gezeichnet. Auch hier wird deutlich, dass das System mit nur einem Oszillator durch die Prozessdämpfung im Wesentlichen bei niedrigen Drehzahlen stabilisiert wird. Das System mit der identifizierten Strukturmechanik der für die experimentellen Untersuchungen verwendeten Fräsmaschine mit insgesamt 37 Oszillatoren wird hingegen auch bei hohen Drehzahlen stabilisiert.

Die Abnahme der Stabilitätsgrenze mit steigendem Fasenwinkel kann durch die Verringerung des Prozessdämpfungskoeffizienten zwar gut abgebildet werden, eine physikalische Erklärung stellt sie hingegen nicht dar. Dass der Prozessdämpfungskoeffizient mit der Fasenbreite abnimmt, kann durch die FEM-Simulationen eines Eindringversuchs im ebenen Spannungszustand sehr gut erklärt werden. Eine physikalisch interpretierbare Modellierung des Einflusses des Fasenwinkels setzt jedoch die Berücksichtigung der Nichtlinearität des Eindringungseffekts voraus. Die Stabilität des nichtlinearen Systems aus Gleichung (4.94) kann jedoch nicht ohne Weiteres durch die Diskretisierungsmethode ermittelt werden, da die Prozessdämpfungsmatrix in dieser Gleichung nicht nur eine Funktion der Zeit ist, sondern zusätzlich vom Vektor der Verlagerungsgeschwindigkeiten der Oszillatoren  $\dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}$  abhängt. Wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben wurde, haben BACHRATHY und STÉPÁN [Bac10] zur Stabilitätsanalyse von Systemen mit einer solchen nichtlinearen Prozessdämpfung die Methode der Semi-Diskretisierung mit einem sogenannten Schießverfahren kombiniert und auf ein System mit zwei Freiheitsgraden/Oszillatoren angewandt. Zur Veranschaulichung dieses Verfahrens sei das System aus Gleichung (4.94) betrachtet. Es gelte die zusätzliche Annahme, dass es sich um einen gleich geteilten Fräser handelt. Die Schwingungsdifferentialgleichung dieses Systems ist dann:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \left[ \mathbf{D} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_{\text{pd},j}(t, \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_{\text{ges}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}_{\text{ges}}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}_{\text{ges}}(t - \theta) + \mathbf{F}_{\text{stat}}. \quad (5.38)$$

Die Totzeit dieses System ist gleich der Zahneingriffsfrequenz  $\theta = \frac{1}{z n}$ . Der Vektor der stationären Kräfte ist  $\theta$ -periodisch:  $\mathbf{F}_{\text{stat}}(t) = \mathbf{F}_{\text{stat}}(t - \theta)$ . Somit ist auch die stationäre Lösung dieses Systems  $\theta$ -periodisch:  $\mathbf{q}_{\text{stat}}(t) = \mathbf{q}_{\text{stat}}(t - \theta)$ . In der Schwingungsdifferentialgleichung der stationären Lösung heben sich die Kraftanteile der inneren und äußeren Modulation daher gegenseitig auf:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{\text{stat}}(t) + \left[ \mathbf{D} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_{\text{pd},j}(t, \dot{\mathbf{q}}_{\text{stat}}) \right] \dot{\mathbf{q}}_{\text{stat}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}_{\text{stat}}(t) = \mathbf{F}_{\text{stat}}. \quad (5.39)$$

Da die Prozessdämpfungsmatrix von dem Vektor der Verlagerungsgeschwindigkeiten abhängt, muss die Lösung dieser Gleichung über ein iteratives Verfahren bestimmt werden. Ist die Lösung  $\mathbf{q}_{\text{stat}}(t)$  bekannt, kann sie in die Funktion der Prozessdämpfung der Differentialgleichung des dynamischen Anteils  $\mathbf{q}_{\text{dyn}} = \mathbf{q}$  von Gleichung (5.38) eingesetzt werden:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{D} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_{\text{pd},j}(t, \dot{\mathbf{q}}_{\text{stat}}(t)) \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[ \mathbf{K} + \sum_{j=1}^z \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^z \left[ \mathbf{Q}_j(t) \right] \mathbf{q}(t - \theta). \quad (5.40)$$

Die Stabilität dieses um die stationäre Lösung  $\mathbf{q}_{\text{stat}}(t)$  herum linearisierten Systems kann durch die in Kapitel 4.2 beschriebene Diskretisierungsmethode analysiert werden. Für jede Parameterkombination aus Drehzahl  $n$  und Schnitttiefe  $a_p$  muss die stationäre Lösung einzeln ermittelt werden, was den ohnehin großen Rechenaufwand zusätzlich erhöht. Möglicherweise kann bei der iterativen Ermittlung der stationären Lösung einer  $n$ - $a_p$ -Parameterkombination auf die bereits ermittelte Lösung einer „in der Nähe liegenden“ Parameterkombination als Startwert der Iteration zurückgegriffen werden, wodurch die notwendige Anzahl an Iterationen gesenkt wird. Durch die Kombination der Diskretisierungsmethode mit einem Schießverfahren wird der Fasenwinkel  $\alpha_f$  und der Relaxationswinkel  $\eta_r$  explizit im Modell berücksichtigt. Bei der Stabilitätsanalyse des nichtlinearen Systems ließen sich für den Relaxationswinkel verschiedene Annahmen treffen:

- $\eta_r = 0^\circ$
- $\eta_r = \text{konst.} > 0^\circ$
- $\eta_r = f(\phi_j)$
- $\eta_r = f(h_j)$

Ein Relaxationswinkel von  $\eta_r = 0^\circ$  entspricht einem rein plastischen Materialverhalten. Im zweiten Fall wäre die elastische Ausdehnung des Materials hinter der Schneide konstant größer null. Die letzten beiden Fälle sind in der Lage, einer möglichen Abhängigkeit des Relaxationswinkels vom Spannungsquerschnitt Rechnung zu tragen. Diese Abhängigkeit könnte dadurch entstehen, dass die Ausdehnung des Materials hinter der Schneide von den Spannungen in der Scher- und Verformungsvorlaufzone abhängt. Denkbar ist auch, den Relaxationswinkel durch eine geeignete FEM-Simulation des Zerspanprozesses zu ermitteln. Dies würde jedoch voraussetzen, dass die Spannungen und Verformungen in der Scher- und Verformungsvorlaufzone durch die Simulation korrekt abgebildet werden, was nur sehr schwer nachzuweisen ist. Es bleibt zu überprüfen, ob durch die Kombination der Diskretisierungsmethode mit einem Schießverfahren und die verschiedenen denkbaren Annahmen für den Relaxationswinkel die experimentell ermittelten Stabilitätskarten mit einem von dem Fasenwinkel  $\alpha_f$  unabhängigen Prozessdämpfungskoeffizienten vorhergesagt werden können und inwiefern hierdurch die Genauigkeit der Vorhersage erhöht wird.

## 6 Folgerungen für die Praxis

Die in dieser Arbeit entwickelten und beschriebenen Modelle ermöglichen die Berechnung von Stabilitätskarten, die Vorhersage der dynamischen Prozesskräfte und die Simulation der dynamischen Verlagerungen des Werkstücks und Werkzeugs und können zur Auslegung und Optimierung von Fräsprozessen und -werkzeugen eingesetzt werden. Die durchgeführten Untersuchungen haben gezeigt, dass ungleiche Zahnteilungen gegenüber gleich geteilten Fräsern den Prozess je nach Arbeitspunkt sowohl stabilisieren als auch destabilisieren können. Die Verwendung eines ungleich geteilten Fräsers als Maßnahme zur Stabilisierung des Prozesses empfiehlt sich insbesondere dann, wenn die Struktur- dynamik von einer einzelnen Eigenmode dominiert wird. Als Faustformel zur Auslegung des optimalen Teilungsverhältnisses eines alternierend ungleich geteilten Fräsers für eine bestimmte Drehzahl kann Gleichung (5.6) herangezogen werden. Da diese Formel nur für zeitinvariante Systeme mit einem einzigen Oszillator gilt, sollte sie nur als grober Richtwert verstanden werden. Eine genaue Stabilitätsanalyse, die die Zeitvarianz des Systems berücksichtigt, ist mit der in dieser Arbeit beschriebenen Diskretisierungsmethode und der zeitlichen Simulation möglich. Dies bedingt jedoch einen relativ hohen messtechnischen Aufwand, da die Schnittkraftkoeffizienten und die Parameter der Oszillatoren für den jeweiligen Fall zunächst identifiziert werden müssen. Linear ungleich geteilte Fräser lassen sich mit Gleichung (5.8) überschlägig auslegen.

Freiflächenfasen führen aufgrund des Eindringungseffekts gegenüber ungefasten Fräsern zu einem sehr starken Anstieg der Stabilitätsgrenze. Treten relativ zwischen Schneide und Werkstück Schwingungen auf, so drückt die Fase in Abhängigkeit der relativen Verlagerungsgeschwindigkeit in das Werkstückmaterial. Der hierdurch hervorgerufene zusätzliche Prozesskraftanteil wirkt der Schwingbewegung entgegen und somit schwingungsdämpfend. Im Gegensatz zu ungleich geteilten Fräsern beschränkt sich der durch Freiflächenfasen hervorgerufene Anstieg der Stabilitätsgrenze nicht auf einzelne Drehzahlbereiche. Prinzipiell gilt, je kleiner der Fasenwinkel  $\alpha_f$  und je größer die Fasenbreite  $b_f$ , desto stärker wird der Prozess stabilisiert. Die Fasenbreite kann jedoch nicht beliebig groß gewählt werden, da die Fase sonst zu sehr hohen Reibkraftanteilen, Maßabweichungen sowie einer zu hohen Wärmeentwicklung und Gratbildung führt. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Fräsern (Durchmesser  $D = 20$  mm) reichte bereits eine Fasenbreite von  $b_f = 0,2$  mm aus, um den Prozess im untersuchten Drehzahlbereich  $n = 0 \dots 10.000 \text{ min}^{-1}$  bis zu einer Schnitttiefe von  $a_p = 15$  mm nahezu komplett zu stabilisieren (siehe Bild 5.33).

Das Gleiche gilt für die Auslegung des Fasenwinkels. Ist er zu klein, drückt die Fase zu sehr und es kommt zu den genannten unerwünschten Effekten. Ist der Fasenwinkel zu groß, verliert die Fase ihre prozessdämpfende Wirkung. In dem in dieser Arbeit untersuchten Beispiel war dies bereits bei einem Fasenwinkel von  $\alpha_f \geq 3^\circ$  der Fall (siehe Bild 5.37). Bei der Auslegung von Freiflächenfasen sollte beachtet werden, dass der Wirk-Orthogonalfreiwinkel im Bereich der Fase stets größergleich null ist:  $\alpha_{oe1,j} \geq 0^\circ$ . Der erste Wirk-Orthogonalfreiwinkel ist die Differenz aus Fasenwinkel und Wirkrichtungswinkel:  $\alpha_{oe1,j} = \alpha_f - \eta_j(t)$ . Durch die Vorschubbewegung wird der Freiwinkel um den

Wirkrichtungswinkel verkleinert. Daraus folgt die Forderung, dass

$$\alpha_f \geq \max(\eta_j(t)) . \quad (6.1)$$

Der Wirkrichtungswinkel kann gemäß Gleichung (4.81) berechnet werden. In Tabelle 6.1 ist der maximale Wirkrichtungswinkel für den Fräserdurchmesser  $D = 20$  mm in Abhängigkeit der Zähnezahl  $z$ , des Verhältnisses der Eingriffsbreite zum Durchmesser  $a_e/D$  und verschiedener Zahnvorschübe  $f_z$  angegeben. Für einen vierschneidigen Fräser beträgt dieser bei einer Eingriffsbreite von  $a_e = D/2$  und einem Zahnvorschub von  $f_z = 0,4$  mm bereits  $\max(\eta) = 1,46^\circ$ . Um ein zu starkes Drücken der Fase zu vermeiden, sollte der Fasenwinkel demnach  $\alpha_f \geq 1,46^\circ$  sein. Dadurch dass  $\max(\eta_j(t))$  mit kleinen Eingriffsbreiten sinkt, können für Schlichtoperationen kleinere Fasenwinkel als bei der Schrubbearbeitung eingesetzt werden.

Bislang werden in der Industrie hauptsächlich Fräser mit Freiflächenfasen versehen. Es erscheint jedoch denkbar, diese auch bei anderen spanenden Bearbeitungsverfahren wie dem Drehen oder Bohren einzusetzen. Insbesondere beim Bohren stellt sich das Problem, dass das Rattern kaum abgestellt werden kann, da beim Bohren ins Volle der Durchmesser des Werkzeugs zugleich die Schnittbreite definiert. Rattern kann beim Bohren sowohl als translatorische als auch rotatorische Schwingung auftreten, welche eine Modulation der Spannungsdicke bewirkt. Werden die Hauptschneiden von Bohrwerkzeugen mit Freiflächenfasen versehen, so ist zu beachten, dass der Wirkrichtungswinkel vom radialen Abstand  $R$  des betrachteten Punkts auf der Hauptschneide von der Bohrerachse abhängt. Bei Bohrwerkzeugen empfiehlt es sich daher Freiflächenfasen so anzuschleifen, dass der Wirk-Orthogonalfreiwinkel entlang der Schneide konstant ist:  $\alpha_{oe} = \text{konst.} \geq 0^\circ$ . Der Fasenwinkel ist in diesem Fall

$$\alpha_f(R) = \alpha_{oe} + \tan^{-1} \left( \frac{z f_z \sin\left(\frac{\sigma}{2}\right)}{2 \pi R} \right) . \quad (6.2)$$

In dieser Gleichung bezeichnet  $\sigma$  den Spitzenwinkel. Es zeigt sich, dass die Fase auf einen bestimmten Vorschub pro Umdrehung auszulegen ist. Diese Idee einer lokal angepassten Gestalt der Hauptschneiden von Bohrwerkzeugen wurde in DE 10 2010 026947 B3 [Sel11] patentiert.

**Tabelle 6.1:** Maximaler Wirkrichtungswinkel  $\eta_{\max}$  in  $[\circ]$  bei einem Fräserdurchmesser von  $D = 20$  mm und Gleichlauf.

$f_z$ [mm]	$z = 1$					$z = 2$					$z = 3$					$z = 4$										
	$a_e/D =$					$a_e/D =$					$a_e/D =$					$a_e/D =$										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5						
0,02	0,01	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,03	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,04	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,04	0,02	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,09	0,1	0,11	0,11	0,11	0,11	0,09	0,12	0,13	0,14	0,15
0,06	0,03	0,04	0,05	0,05	0,05	0,05	0,07	0,09	0,1	0,11	0,11	0,11	0,11	0,11	0,1	0,13	0,15	0,16	0,16	0,16	0,13	0,18	0,2	0,21	0,22	0,22
0,08	0,04	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,09	0,12	0,13	0,14	0,14	0,15	0,15	0,15	0,13	0,18	0,2	0,21	0,22	0,22	0,18	0,23	0,27	0,29	0,29	0,29
0,1	0,05	0,07	0,08	0,09	0,09	0,09	0,11	0,15	0,17	0,18	0,18	0,18	0,18	0,18	0,16	0,22	0,25	0,27	0,27	0,22	0,22	0,29	0,34	0,36	0,36	0,36
0,12	0,07	0,09	0,1	0,11	0,11	0,11	0,13	0,18	0,2	0,21	0,22	0,22	0,22	0,22	0,2	0,26	0,3	0,32	0,33	0,22	0,26	0,35	0,4	0,43	0,44	0,44
0,14	0,08	0,1	0,12	0,13	0,13	0,13	0,15	0,2	0,23	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,23	0,31	0,35	0,38	0,38	0,27	0,31	0,41	0,47	0,5	0,51	0,51
0,16	0,09	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15	0,18	0,23	0,27	0,29	0,29	0,29	0,29	0,29	0,26	0,35	0,4	0,43	0,44	0,29	0,35	0,47	0,54	0,57	0,58	0,58
0,18	0,1	0,13	0,15	0,16	0,16	0,16	0,2	0,26	0,3	0,32	0,33	0,33	0,33	0,33	0,3	0,4	0,45	0,48	0,49	0,33	0,4	0,53	0,6	0,64	0,66	0,66
0,2	0,11	0,15	0,17	0,18	0,18	0,18	0,22	0,29	0,34	0,36	0,36	0,36	0,36	0,36	0,33	0,44	0,5	0,54	0,55	0,22	0,44	0,59	0,67	0,72	0,73	0,73
0,22	0,12	0,16	0,18	0,2	0,2	0,2	0,24	0,32	0,37	0,39	0,4	0,4	0,4	0,4	0,36	0,48	0,55	0,59	0,6	0,44	0,65	0,74	0,79	0,8	0,8	0,8
0,24	0,13	0,18	0,2	0,21	0,22	0,22	0,26	0,35	0,4	0,43	0,44	0,44	0,44	0,44	0,4	0,53	0,6	0,64	0,66	0,29	0,53	0,71	0,81	0,86	0,88	0,88
0,26	0,14	0,19	0,22	0,23	0,24	0,24	0,29	0,38	0,44	0,47	0,47	0,47	0,47	0,47	0,43	0,57	0,66	0,7	0,71	0,47	0,77	0,87	0,93	0,95	0,95	0,95
0,28	0,15	0,2	0,23	0,25	0,26	0,26	0,31	0,41	0,47	0,5	0,51	0,51	0,51	0,51	0,46	0,62	0,71	0,75	0,77	0,26	0,62	0,83	0,94	1	1,02	1,02
0,3	0,16	0,22	0,25	0,27	0,27	0,27	0,33	0,44	0,5	0,54	0,55	0,55	0,55	0,55	0,5	0,66	0,76	0,81	0,82	0,33	0,67	0,89	1,01	1,08	1,09	1,09
0,32	0,18	0,23	0,27	0,29	0,29	0,29	0,35	0,47	0,54	0,57	0,58	0,58	0,58	0,58	0,53	0,71	0,81	0,86	0,88	0,35	0,71	0,95	1,08	1,15	1,17	1,17
0,34	0,19	0,25	0,28	0,3	0,31	0,31	0,38	0,5	0,57	0,61	0,62	0,62	0,62	0,62	0,57	0,75	0,86	0,91	0,93	0,38	0,76	1,01	1,15	1,22	1,24	1,24
0,36	0,2	0,26	0,3	0,32	0,33	0,33	0,4	0,53	0,6	0,64	0,66	0,66	0,66	0,66	0,6	0,8	0,91	0,97	0,98	0,4	0,8	1,07	1,21	1,29	1,31	1,31
0,38	0,21	0,28	0,32	0,34	0,35	0,35	0,42	0,56	0,64	0,68	0,69	0,69	0,69	0,69	0,63	0,84	0,96	1,02	1,04	0,44	0,85	1,13	1,28	1,36	1,39	1,39
0,4	0,22	0,29	0,34	0,36	0,36	0,36	0,44	0,59	0,67	0,72	0,73	0,73	0,73	0,73	0,67	0,89	1,01	1,08	1,09	0,46	0,89	1,19	1,35	1,44	1,46	1,46
0,42	0,23	0,31	0,35	0,38	0,38	0,38	0,46	0,62	0,71	0,75	0,77	0,77	0,77	0,77	0,7	0,93	1,06	1,13	1,15	0,48	0,94	1,25	1,42	1,51	1,53	1,53
0,44	0,24	0,32	0,37	0,39	0,4	0,4	0,49	0,65	0,74	0,79	0,8	0,8	0,8	0,8	0,73	0,98	1,11	1,18	1,2	0,49	0,98	1,31	1,49	1,58	1,6	1,6
0,46	0,25	0,34	0,39	0,41	0,42	0,42	0,51	0,68	0,77	0,82	0,84	0,84	0,84	0,84	0,77	1,02	1,16	1,24	1,26	0,51	1,03	1,37	1,56	1,65	1,68	1,68
0,48	0,26	0,35	0,4	0,43	0,44	0,44	0,53	0,71	0,81	0,86	0,88	0,88	0,88	0,88	0,8	1,07	1,21	1,29	1,31	0,53	1,12	1,49	1,69	1,73	1,75	1,75
0,5	0,28	0,37	0,42	0,45	0,46	0,46	0,55	0,74	0,84	0,9	0,91	0,91	0,91	0,91	0,84	1,11	1,27	1,35	1,37	0,55	1,37	1,82	2,04	2,16	2,19	2,19
0,52	0,29	0,38	0,44	0,47	0,47	0,47	0,58	0,77	0,87	0,93	0,95	0,95	0,95	0,95	0,87	1,16	1,32	1,4	1,42	0,57	1,55	1,76	1,87	1,9	1,9	1,9
0,54	0,3	0,4	0,45	0,48	0,49	0,49	0,6	0,8	0,91	0,97	0,98	0,98	0,98	0,98	0,9	1,2	1,37	1,45	1,48	0,59	1,61	1,83	1,94	1,97	1,97	1,97
0,56	0,31	0,41	0,47	0,5	0,51	0,51	0,62	0,83	0,94	1	1,02	1,02	1,02	1,02	0,94	1,25	1,42	1,51	1,53	0,64	1,67	1,9	2,01	2,04	2,04	2,04
0,58	0,32	0,43	0,49	0,52	0,53	0,53	0,64	0,86	0,98	1,04	1,06	1,06	1,06	1,06	0,97	1,29	1,47	1,56	1,59	0,66	1,73	1,97	2,09	2,11	2,11	2,11
0,6	0,33	0,44	0,5	0,54	0,55	0,55	0,67	0,89	1,01	1,08	1,09	1,09	1,09	1,09	1,01	1,34	1,52	1,62	1,64	0,68	1,85	2,1	2,23	2,26	2,26	2,26
0,62	0,34	0,45	0,52	0,56	0,57	0,57	0,69	0,92	1,04	1,11	1,13	1,13	1,13	1,13	1,04	1,38	1,57	1,67	1,7	0,69	1,91	2,1	2,23	2,26	2,26	2,26
0,64	0,35	0,47	0,54	0,57	0,58	0,58	0,71	0,95	1,08	1,15	1,17	1,17	1,17	1,17	1,08	1,43	1,62	1,73	1,75	0,71	1,91	2,17	2,3	2,33	2,33	2,33
0,66	0,36	0,48	0,55	0,59	0,6	0,6	0,73	0,98	1,11	1,18	1,2	1,2	1,2	1,2	1,11	1,47	1,68	1,78	1,8	0,73	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,68	0,38	0,5	0,57	0,61	0,62	0,62	0,76	1,01	1,15	1,22	1,24	1,24	1,24	1,24	1,15	1,52	1,73	1,83	1,86	0,75	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,7	0,39	0,51	0,59	0,63	0,64	0,64	0,78	1,04	1,18	1,26	1,28	1,28	1,28	1,28	1,18	1,56	1,78	1,89	1,91	0,77	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,72	0,4	0,53	0,6	0,64	0,66	0,66	0,8	1,07	1,21	1,29	1,31	1,31	1,31	1,31	1,22	1,61	1,83	1,94	1,97	0,79	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,74	0,41	0,54	0,62	0,66	0,67	0,67	0,83	1,1	1,25	1,33	1,35	1,35	1,35	1,35	1,25	1,65	1,88	2	2,02	0,8	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,76	0,42	0,56	0,64	0,68	0,69	0,69	0,85	1,13	1,28	1,36	1,39	1,39	1,39	1,39	1,28	1,7	1,93	2,05	2,08	0,81	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,78	0,43	0,57	0,66	0,7	0,71	0,71	0,87	1,16	1,32	1,4	1,42	1,42	1,42	1,42	1,32	1,75	1,98	2,11	2,13	0,82	1,97	2,24	2,38	2,41	2,41	2,41
0,8	0,44	0,59	0,67	0,72	0,73	0,73	0,89	1,19	1,35	1,44	1,46	1,46	1,46	1,46	1,35	1,79	2,04	2,16	2,19	0,83	1,82	2,41	2,73	2,89	2,92	2,92

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Rattern von Werkzeugmaschinen ist aufgrund seiner negativen Auswirkungen auf die Fertigungsqualität und die Wirtschaftlichkeit sowie aufgrund der komplexen Wechselwirkungen zwischen Prozess und Maschine ein nach wie vor hochaktuelles und interessantes Forschungsgebiet. Im Rahmen dieser Arbeit wurden der Einfluss von ungleichen Zahnteilungen und der Einfluss von Freiflächenfasen auf die dynamische Stabilität des Fräsprozesses mechanisch-mathematisch modelliert sowie theoretisch und experimentell untersucht. Die Modellierung der Dynamik von Fräsprozessen führt im Allgemeinen auf nichtautonome Totzeitdifferentialgleichungen. Ist der Fräser gleich geteilt, entspricht die Totzeit dem Kehrwert der Zahneingriffsfrequenz. Bei ungleich geteilten Fräsern treten hingegen mehrere diskret verteilte Totzeiten auf. Die Stabilitätsanalyse solcher Systeme ist aufgrund des unendlichdimensionalen Lösungsraums nicht trivial. Zur Approximation der Stabilitätsgrenze solcher Systeme wurde die Diskretisierungsmethode zur Behandlung von Totzeitsystemen nach ACKERMANN auf Systeme mit mehreren Totzeiten erweitert. Um die Zeitvarianz der Systemparameter zu berücksichtigen, wurde die so erweiterte Diskretisierungsmethode mit der Methode der stückweise konstanten Ersatzsysteme kombiniert. Dies vergrößert jedoch den Rechenaufwand. Als weniger rechenintensive Alternative können die Systemparameter durch ihre Mittelwerte ersetzt werden. Voraussetzung hierfür ist, dass diese nur eine geringe Zeitvarianz aufweisen.

Freiflächenfasen beeinflussen die dynamische Stabilität durch den sogenannten Eindringungseffekt. Durch die Prozessschwingungen kommt es zu einem dynamischen Kontakt zwischen der Fase und der welligen Werkstückoberfläche. Hierdurch entstehen zusätzliche geschwindigkeitsabhängige Prozesskraftanteile, die aufgrund ihrer Phasenlage gegenüber der Schwingbewegung des Systems prozessdämpfend wirken. Zur Modellierung des Eindringungseffekts wurde das Prozesskraftmodell von FRIEDRICH mit dem dynamischen Prozesskraftansatz von WU kombiniert. In diesem Modell werden die Nichtlinearität des Eindringungseffekts sowie die Fasenbreite und der Fasenwinkel der einzelnen Schneiden berücksichtigt. Die Diskretisierungsmethode zur Stabilitätskartenberechnung wurde um diese Prozessdämpfungseffekte erweitert.

Zusätzlich wurde eine zeitliche Materialabtrags- und Prozesskraftsimulation des dynamischen Fräsprozesses entwickelt. Diese basiert auf einem Höhenlinienmodell und bietet gegenüber der Diskretisierungsmethode den Vorteil, dass sie die trochoidale Form der Schneidenflugbahnen und Nichtlinearitäten, wie z. B. den schwingungsbedingten Verlust des Schneideneingriffs oder die Nichtlinearität des Eindringungseffekts, berücksichtigt. Die Simulation kann nahezu beliebige Fräserformen, wie z. B. zylindrische Fräser, Torusfräser, Kugelkopffräser, Konusfräser, Schruppfräser mit kordelierten Schneiden, ungleich geteilte/gedrallte Fräser usw., abbilden. Die Berechnung der Relativverlagerungen zwischen Werkstück und Werkzeug erfolgt in der Simulation durch die diskrete Faltung des Prozesskraftverlaufs mit den normierten Impulsantworten der Strukturdynamik in Vorschub- und Vorschubnormalenrichtung. Als Ausgangsgrößen können neben den dynamischen Prozesskräften, dem Schnittmoment, der Schnittleistung und den Verlagerungen des Werkstücks

und Werkzeugs auch die simulierten Oberflächen der gefrästen Flanken ausgegeben werden. Auf Basis dieser Simulation wurde ein Verfahren zur Identifikation der für die Stabilitätsanalyse benötigten Schnittkraftkoeffizienten des Prozesskraftmodells von FRIEDRICH entwickelt, das im Gegensatz zu bisher aus der Literatur bekannten Verfahren in der Lage ist, die Scher- und Reibkraftkoeffizienten anhand einer einzelnen Prozesskraftmessung zu identifizieren. Kern dieses Verfahrens ist ein genetischer Algorithmus, der die Koeffizienten mit sehr engen Konfidenzintervallen ermittelt.

Zur Verifikation der auf ungleich geteilte Fräser erweiterten Diskretisierungsmethode wurden zwei Stabilitätskarten eines gleich und eines alternierend ungleich geteilten Fräasers für einen weiten Drehzahlbereich experimentell ermittelt. Die mit der Diskretisierungsmethode berechneten Stabilitätskarten lieferten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Experimenten. Hierfür war es notwendig, die Strukturodynamik des Werkstücks und Werkzeugs sehr präzise abzubilden. Im Gegensatz zu in der Literatur häufig verwendeten Modellen mit nur einer oder wenigen Eigenmoden wurden in dieser Arbeit zur Nachbildung der gemessenen Nachgiebigkeitsfrequenzgänge der Strukturodynamik 33 Oszillatoren verwendet. Da die Identifikation der Parameter dieser Oszillatoren ein hochgradig nichtlineares Optimierungsproblem darstellt, wurde hierzu ein eigens entwickelter genetischer Algorithmus verwendet.

Um die Wirkmechanismen ungleicher Zahnteilungen eingehender zu untersuchen, wurden für das Minimalbeispiel eines Einmassenschwingers verschiedene Stabilitätskarten zum einen unter Berücksichtigung und zum anderen unter Vernachlässigung (Mittelung) der Zeitvarianz der Systemparameter berechnet. Hierbei wurden die Art der Ungleichteilung (alternierend, linear), die Zähnezahl und der Drallwinkel variiert. Dabei zeigte sich, dass die Stabilität des zeitvarianten von der des gemittelten Systems erheblich abweichen kann. Je stärker die Zeitvarianz ausgeprägt ist, z. B. durch einen geringen Drallwinkel und/oder eine geringe Zähnezahl, desto stärker weichen die Stabilitätskarten voneinander ab. In den Stabilitätskarten des zeitvarianten Systems kann es zudem zur Ausbildung von stabilen Inseln kommen. Diese liegen im Wesentlichen, aber nicht ausschließlich, innerhalb der stabilen Bereiche der lokalen Maxima der Stabilitätsgrenze des gemittelten zeitinvarianten Systems und im Bereich von Schnitttiefen, bei denen das im Allgemeinen zeitvariante System aufgrund des axialen Eingriffs zeitinvariant wird (harmonisches Fräsen). Die Stabilitätskarten nehmen dadurch eine zerklüftete Form an. Durch die Methode der komplexen Kraftzeiger konnte nachgewiesen werden, dass aufgrund der ungleichen Zahnteilung der Regenerativeneffekt je nach Teilungswinkel der jeweiligen Schneide und je nach Arbeitspunkt einmal dämpfend und einmal anfachend wirken kann. Die ungleiche Zahnteilung bewirkt zudem, dass für bestimmte Drehzahlen die Stabilitätsgrenze ein zu hohen Schnitttiefen offenes stabiles Gebiet bildet. Diese Gebiete sind der Arbeitsbereich, in dem die komplexen Kraftzeiger der äußeren Modulation ein nahezu geschlossenes Polygon bilden und sich dadurch gegenseitig kompensieren. Bei alternierend ungleich geteilten Fräsern existiert lediglich ein solcher Bereich. Bei linear ungleich geteilten Fräsern sind es hingegen  $[0,5 z]$  Bereiche. Die Kraftzeiger der äußeren Modulation eines linear ungleich geteilten Fräasers mit  $z = 7$  Schneiden können entweder ein Heptagon oder eines der zwei möglichen Heptagramme bilden, so dass sie sich gegenseitig kompensieren. Für die Stabilisierung von Fräsprozessen scheinen ungleiche Zahnteilungen jedoch nur bedingt geeignet. Die Art und Größe der Ungleichteilung ist immer auf eine bestimmte Schwingfrequenz und einen bestimmten Drehzahlbereich auszulegen. Dies funktioniert insbesondere dann gut, wenn die Strukturodynamik von einer einzigen Eigenmode dominiert wird.

Zur Vermeidung von Ratterschwingungen in einem weiten Drehzahlbereich sind Schneiden mit Freiflächenfasen eher geeignet. Im Rahmen dieser Arbeit wurden mehrere Stabilitätskarten für unterschiedliche Fasenbreiten und Fasenwinkel experimentell und rechnerisch ermittelt. Je kleiner der Fasenwinkel und je größer die Fasenbreite, desto mehr Prozessdämpfung entsteht und desto mehr weiten sich die stabilen Gebiete in den Stabilitätskarten aus. Im Gegensatz zu der in der Literatur vorherrschenden Ansicht, dass der Eindringungseffekt lediglich bei niedrigen Drehzahlen zum Tragen kommt, konnte experimentell und theoretisch nachgewiesen werden, dass sich bei gefasteten Werkzeugen durch die Interaktion der niederfrequenten mit den höherfrequenten Eigenmoden die Prozessdämpfung auch im Hochgeschwindigkeitsbereich auf die Stabilitätsgrenze auswirkt. Bei einem Fasenwinkel von  $\alpha_f = 1^\circ$  und einer Fasenbreite von  $b_f = 0,2$  mm wurde der in dieser Arbeit untersuchte Prozess nahezu global stabilisiert. Es wurde gezeigt, dass die Prozessdämpfung zu sehr ungewöhnlichen Formen der Stabilitätsgrenze führen kann, wie stabilen als auch instabilen Inseln und sich mit steigender Schnitttiefe trichterförmig ausweitenden stabilen Gebieten. Letztere sind durch den linearen Anstieg der Prozessdämpfung mit der Schnitttiefe bedingt.

Für die Berechnung der Stabilitätskarten gefaster Werkzeuge wurde der theoretisch nicht-lineare Eindringungseffekt linearisiert. Dabei wurde angenommen, dass sich das Material nicht rein plastisch, sondern elastisch-plastisch verhält und daher unterhalb der Schneide zu einem gewissen Grad zurückfedert. Dieser Effekt wurde als Relaxation bezeichnet und durch den Relaxationswinkel  $\eta_r$  charakterisiert. Aktuelle Forschungsergebnisse aus der Literatur zeigen jedoch, dass es prinzipiell möglich ist, die Nichtlinearität des Eindringungseffekts zu berücksichtigen, indem die Diskretisierungsmethode mit einem sogenannten Schießverfahren kombiniert wird. Durch das Schießverfahren wird zunächst die periodische Lösung des rein fremderregten Systems iterativ ermittelt. Anschließend wird die periodische Lösung in die ursprüngliche Totzeitdifferentialgleichung eingesetzt und um sie herum linearisiert. Durch die Anwendung eines solchen Schießverfahrens ließe sich klären, ob die Abweichungen zwischen theoretisch berechneten und experimentell ermittelten Stabilitätskarten durch die Vernachlässigung der Nichtlinearität hervorgerufen werden. Um den Einfluss der Fasenwinkels auf die Stabilitätsgrenze in dem linearisierten Modell abbilden zu können, musste der Prozessdämpfungskoeffizient mit steigendem Fasenwinkel reduziert werden. Dies ist physikalisch jedoch nur schwer zu begründen. In Zukunft ist daher zu überprüfen, ob die geringere Stabilität bei großen Fasenwinkeln weniger durch das Sinken des Prozessdämpfungskoeffizienten, sondern vielmehr durch die Nichtlinearität des Eindringungseffekts bedingt ist. Der bislang als konstant angenommene Relaxationswinkel ließe sich dann auch als ein Funktion der Spannungsdicke modellieren  $\eta_r = f(h_j)$ . Die Hypothese dabei ist, dass die Stärke der Relaxation von den Spannungen in der Trenn- und Verformungsvorlaufzone und somit von der Spannungsdicke abhängt.

Die für die Stabilitätsanalyse benötigten Prozessdämpfungskoeffizienten der gefasteten Fräser wurden heuristisch durch Vergleich der simulierten mit den gemessenen Stabilitätskarten ermittelt, da bislang keine verlässliche Methode zu deren Identifikation existiert. Hierbei ist das Hauptproblem die Messung der geschwindigkeitsabhängigen Prozesskraftanteile, da der Fräser in Vorschub- und/oder Vorschubnormalenrichtung definiert angeregt werden muss. Aus diesem Grund und zur Absicherung der heuristisch ermittelten Prozessdämpfungskoeffizienten wurde in dieser Arbeit die Wave-On-Wave-Hobelmethode entwickelt. Der Fräser wird dazu als Hobel mit einer sinusförmigen Schnittbewegung eingesetzt. Die innere und äußere Spannungsdickenmodulation sind dabei in Phase (Wave-On-Wave),



so dass die Spannungsdicke konstant ist. Auftretende Schwankungen der Prozesskraftkomponenten können dadurch auf geschwindigkeitsabhängige Effekte zurückgeführt werden. Wird die Amplitude der Schnittnormalkraft auf das durch die Fase theoretisch verdrängte Volumen bezogen, so ergibt sich die volumenspezifische Kraft  $K_V$ . Die so für verschiedene Fasenbreiten ermittelten Werte stimmen mit den heuristisch bestimmten Prozessdämpfungskoeffizienten gut überein. Darüber hinaus wurden Eindringversuche eines an der Stirnseite flachen Eindringkörpers mit der Finiten-Elemente-Methode im ebenen Spannungszustand bei verschiedenen Elastizitätsmoduln des Werkstücks und Breiten des Eindringkörpers simuliert. Auf Basis der simulierten Eindringtiefe und der aufgebracht Kraft wurde eine Formel zur Berechnung der volumenspezifischen Kraft  $K_V$  in Abhängigkeit der Breite des Eindringkörpers und des Elastizitätsmoduls ermittelt. Die durch diese Formel berechneten  $K_V$ -Werte stimmen ebenfalls mit den heuristisch bestimmten Prozessdämpfungskoeffizienten gut überein. Bei allen drei Verfahren sinkt der Prozessdämpfungskoeffizient bzw. die volumenspezifische Kraft mit steigender Fasenbreite bzw. Breite des Eindringkörpers. Da die Fasenbreite jedoch quadratisch in die Formel zur Berechnung der Prozessdämpfungskraft eingeht, steigt diese mit steigender Fasenbreite dennoch an. Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass sich der Prozessdämpfungskoeffizient allein anhand des Elastizitätsmoduls des Werkstückmaterials und der Fasenbreite näherungsweise berechnen lässt. Für die theoretische Stabilitätsanalyse hätte dies den Vorteil, dass bei gefasteten Werkzeugen durch den Eindringungseffekt kein zusätzlicher Identifikationsaufwand entsteht. Zukünftiger Forschungsbedarf wird insbesondere in der Untersuchung gefaster Werkzeuge in Bezug auf andere Materialien wie z. B. Titan- und Stahlwerkstoffe und unter Berücksichtigung der Nichtlinearität des Eindringungseffekts gesehen.

## Literaturverzeichnis

- [Ack83] Ackermann, J.: Abtastregelung - Band 1: Analyse und Synthese. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1983.
- [Ahm10] Ahmadi, K.; Ismail, F.: Experimental investigation of process damping nonlinearity in machining chatter. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 50(2010), Nr. 11, S. 1006–1014. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2010.07.002.
- [Ahm11] Ahmadi, K.; Ismail, F.: Analytical stability lobes including nonlinear process damping effect on machining chatter. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 51(2011), Nr. 4, S. 296–308. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2010.12.008.
- [Alt92] Altintas, Y.; Montgomery, D.; Budak, E.: Dynamic Peripheral Milling of Flexible Structures. *ASME Journal of Engineering for Industry* 114(1992), Nr. 2, S. 137–145. DOI: 10.1115/1.2899766.
- [Alt95] Altintas, Y.; Budak, E.: Analytical Prediction of Stability Lobes in Milling. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 44(1995), Nr. 1, S. 357–362. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62342-7.
- [Alt96] Altintas, Y.; Lee, P.: A General Mechanics and Dynamics Model for Helical End Mills. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 45(1996), Nr. 1, S. 59–64. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)63017-0.
- [Alt98] Altintas, Y.; Lee, P.: Mechanics and Dynamics of Ball End Milling. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 120(1998), Nr. 4, S. 684–692. DOI: 10.1115/1.2830207.
- [Alt99a] Altintas, Y.; Engin, S.; Budak, E.: Analytical Stability Prediction and Design of Variable Pitch Cutters. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 121(1999), Nr. 2, S. 173–178. DOI: 10.1115/1.2831201.
- [Alt99b] Altintas, Y.; Engin, S.: Generalized modeling of milling mechanics and dynamics: part 1 - helical end mills. *American Society of Mechanical Engineers, Manufacturing Engineering Division, MED* 10(1999), S. 345–352.
- [Alt00] Altintas, Y.: *Manufacturing Automation*. Cambridge University Press. 2000.
- [Alt04] Altintas, Y.; Weck, M.: Chatter Stability of Metal Cutting and Grinding. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 53(2004), Nr. 2, S. 619–642. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)60032-8.

- [Alt08] Altintas, Y.; Eynian, M.; Onozuka, H.: Identification of dynamic cutting force coefficients and chatter stability with process damping. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 57(2008), Nr. 1, S. 371–374. DOI: 10.1016/j.cirp.2008.03.048.
- [And61] Andrew, C.; Tobias, S. A.: A critical comparison of two current theories of machine tool chatter. *International Journal of Machine Tool Design and Research* 1(1961), Nr. 4, S. 325–335. DOI: 10.1016/0020-7357(61)90010-5.
- [Arn46] Arnold, R. N.: The Mechanism Of Tool Vibration in the Cutting of Steel. In: *Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers*, S. 261–276. 1946.
- [Bac10] Bachrathy, D.; Stépán, G.: Time-periodic velocity-dependent process damping in milling processes. In: *2nd International Conference Process Machine Interactions*. 2010.
- [Bal02] Baly, P. V.; Mann, B. P.; Schmitz, T. L.; Peters, D. A.; Stépán, G.; In-sperger, T.: Effects of Radial Immersion and Cutting Direction on Chatter Instability in End-Milling. In: *ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition*, S. 1–13. 2002.
- [Bay03] Bayly, P. V.; Halley, J. E.; Mann, B. P.; Davies, M. A.: Stability of Interrupted Cutting by Temporal Finite Element Analysis. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 125(2003), Nr. 2, S. 220–225. DOI: 10.1115/1.1556860.
- [Bed09] Bediaga, I.; Muñoa, J.; Hernández, J.; de Lacalle, L. L.: An automatic spindle speed selection strategy to obtain stability in high speed milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 49(2009), Nr. 5, S. 384–394. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2008.12.003.
- [Ber69] Bernardi, F.: Untersuchung und Berechnung des Ratterverhaltens von Dreh- und Fräsmaschinen. Dr.-Ing.-Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1969.
- [Bie85] Bielawa, R. L.: Notes Regarding Fundamental Understandings of Rotorcraft Aeroelastic Instability. In: *11th European Rotorcraft Forum*, City University London, 62. 1985.
- [Bie87] Bielawa, R. L.: Notes Regarding Fundamental Understandings of Rotorcraft Aeroelastic Instability. *Journal of the American Helicopter Society* 32(1987), Nr. 4, S. 4–15.
- [Bre07] Brecher, C.; Witt, S.; Esser, M.: Simulation of the Process Stability of HPC Milling Operations under Consideration of the nonlinear Behaviour of the Machine Tool and the Cutting Process. In: *10th CIRP International Workshop on Modeling in Machining Operations*, Reggio Calabria, Italy, 27-28 August 2007. 2007.
- [Bre08] Brecher, C.; Esser, M.: The Consideration of Dynamic Cutting Forces in the Stability Simulation. In: *Proceedings of the 1st International Conference of Process Machine Interactions*. 2008.

- [Bud96] Budak, E.; Altintas, Y.; Armarego, E. J. A.: Prediction of Milling Force Coefficients From Orthogonal Cutting Data. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 118(1996), Nr. 2, S. 216–224. DOI: 10.1115/1.2831014.
- [Bud98a] Budak, E.; Altintas, Y.: Analytical Prediction of Chatter Stability in Milling—Part I: General Formulation. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120(1998), Nr. 1, S. 22–30. DOI: 10.1115/1.2801317.
- [Bud98b] Budak, E.; Altintas, Y.: Analytical Prediction of Chatter Stability in Milling—Part II: Application of the General Formulation to Common Milling Systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 120(1998), Nr. 1, S. 31–36. DOI: 10.1115/1.2801318.
- [Bud03a] Budak, E.: An Analytical Design Method for Milling Cutters With Non-constant Pitch to Increase Stability, Part 1: Theory. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 125(2003), Nr. 1, S. 29–34. DOI: 10.1115/1.1536655.
- [Bud03b] Budak, E.: An Analytical Design Method for Milling Cutters With Non-constant Pitch to Increase Stability, Part 2: Application. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 125(2003), Nr. 1, S. 35–38. DOI: 10.1115/1.1536656.
- [Bud08] Budak, E.: A New Method for Identification and Modeling of Process Damping in Machining. In: *Proceedings of the 1st International Conference of Process Machine Interactions*. 2008.
- [Bud09] Budak, E.; Tunc, L. T.: A New Method for Identification and Modeling of Process Damping in Machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 131(2009), Nr. 5, S. 051019–1–10. DOI: 10.1115/1.4000170.
- [Bud10] Budak, E.; Tunc, L.: Identification and modeling of process damping in turning and milling using a new approach. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 59(2010), Nr. 1, S. 403–408. DOI: 10.1016/j.cirp.2010.03.078.
- [Bud12] Budak, E.; Tunc, L.; Alan, S.; Özgüven, H. N.: Prediction of workpiece dynamics and its effects on chatter stability in milling. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 61(2012), Nr. 1, S. 339–342. DOI: 10.1016/j.cirp.2012.03.144.
- [Cam03] Campomanes, M. L.; Altintas, Y.: An Improved Time Domain Simulation for Dynamic Milling at Small Radial Immersions. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 125(2003), Nr. 3, S. 416–422. DOI: 10.1115/1.1580852.
- [Chi98] Chiou, R. Y.; Liang, S. Y.: Chatter stability of a slender cutting tool in turning with tool wear effect. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 38(1998), Nr. 4, S. 315–327. DOI: 10.1016/S0890-6955(97)00079-5.

- [Cla02] Clancy, B. E.; Shin, Y. C.: A comprehensive chatter prediction model for face turning operation including tool wear effect. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 42(2002), Nr. 9, S. 1035–1044. DOI: 10.1016/S0890-6955(02)00036-6.
- [Coo55] Cook, N. H.: Self-excited vibrations in metal cutting. Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering. 1955.
- [Coo59] Cook, N. H.: Self-excited vibrations in metal cutting. *Journal of Engineering for Industry* 81(1959), S. 183–186.
- [Cui09] Cui, Y.; Fussell, B. K.; Jerard, R. B.; Esterling, D. M.: Tool Wear Monitoring for Milling by Tracking Cutting Force Model Coefficients. *Transactions of the North American Manufacturing Research Institution of the Society of Manufacturing Engineers (NAMRI/SME)* 37(2009), S. 613–620.
- [Dan62] Daněk, O.; Poláček, M.; Špaček, L.; Thustý, J.: *Selbsterregte Schwingungen an Werkzeugmaschinen*. VEB Verlag Technik Berlin. 1962.
- [Das67] Das, M. K.; Tobias, S. A.: The Relation Between the Static and the Dynamic Cutting of Metals. *International Journal of Machine Tool Design and Research* 7(1967), Nr. 2, S. 63–89. DOI: 10.1016/0020-7357(67)90026-1.
- [Dav00] Davies, M. A.; Pratt, J. R.; Dutterer, B. S.; Burns, T. J.: The Stability of Low Radial Immersion Milling. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 49(2000), Nr. 1, S. 37–40. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)62891-1.
- [Den06] Denkena, B.; Tracht, K.; Schmidt, C.: A Flexible Force Model for Predicting Cutting Forces in End Milling. *Production Engineering* 13/2(2006), S. 15–20.
- [Den11] Denkena, B.; Tönshoff, H. K.: *Spanen, Grundlagen*. Springer Verlag, 3. Aufl. DOI: 10.1007/978-3-642-19772-7. 2011.
- [DIN 6580] DIN 6580 - Begriffe der Zerspantechnik, Bewegungen und Geometrie des Zerspanvorganges.
- [DIN 6581] DIN 6581 - Bezugssysteme und Winkel am Schneidteil des Werkzeuges.
- [DIN 6582] DIN 6582 - Ergänzende Begriffe am Werkzeug, am Schneidkeil und an der Schneide.
- [DIN 66215-1] DIN 66215-1 - Programmierung numerisch gesteuerter Arbeitsmaschinen; CLDATA, Allgemeiner Aufbau und Satztypen.
- [Doi56] Doi, S.; Kato, S.: Chatter Vibrations of Lathe Tools. *Transactions of the ASME* 78(1956), S. 1127–1133.
- [Doo75] Doolan, P.; Phadke, M. S.; Wu, S. M.: Computer Design of a Vibration-Free Face-Milling Cutter. *ASME Journal of Engineering for Industry* 97(1975), Nr. 3, S. 925–930. DOI: 10.1115/1.3438705.
- [Dre66a] Dregger, E. U.: *Untersuchungen des instabilen und stabilen Fräsprozesses*. Dr.-Ing.-Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1966.

- [Dre66b] Dregger, E. U.; Roese, H.: Möglichkeiten zur Berechnung und Erhöhung der Stabilitätsgrenze beim Fräsen (Teil 1). *Industrie-Anzeiger* 88(1966), Nr. 15, S. 291–296.
- [Dre66c] Dregger, E. U.; Roese, H.: Möglichkeiten zur Berechnung und Erhöhung der Stabilitätsgrenze beim Fräsen (Teil 2). *Industrie-Anzeiger* 88(1966), Nr. 24, S. 487–490.
- [Elb94] Elbestawi, M.; Ismail, F.; Du, R.; Ullagaddi, B.: Modelling Machining Dynamics Including Damping in the Tool-Workpiece Interface. *ASME Journal of Engineering for Industry* 116(1994), Nr. 4, S. 435–439. DOI: 10.1115/1.2902125.
- [Eng01a] Engin, S.; Altintas, Y.: Mechanics and dynamics of general milling cutters.: Part I: helical end mills. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 41(2001), Nr. 15, S. 2195–2212. DOI: 10.1016/S0890-6955(01)00045-1.
- [Eng01b] Engin, S.; Altintas, Y.: Mechanics and dynamics of general milling cutters.: Part II: inserted cutters. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 41(2001), Nr. 15, S. 2213–2231. DOI: 10.1016/S0890-6955(01)00046-3.
- [Eyn09] Eynian, M.; Altintas, Y.: Chatter Stability of General Turning Operations With Process Damping. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 131(2009), Nr. 4, S. 041005–1–10. DOI: 10.1115/1.3159047.
- [Eyn10] Eynian, M.; Altintas, Y.: Analytical Chatter Stability of Milling With Rotating Cutter Dynamics at Process Damping Speeds. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 132(2010), Nr. 2, S. 021012–1–14. DOI: 10.1115/1.4001251.
- [Faa03] Faassen, R. P. H.; van de Wouw, N.; Oosterling, J. A. J.; Nijmeijer, H.: Prediction of regenerative chatter by modelling and analysis of high-speed milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43(2003), Nr. 14, S. 1437–1446. DOI: 10.1016/S0890-6955(03)00171-8.
- [Faz06] Fazelinia, H.; Olgac, N.: Optimum Conditions for Variable Pitch Milling. *ASME Conference Proceedings* 2006(2006), S. 151–156. DOI: 10.1115/IMECE2006-13228.
- [Fri09] Friedrich, H.: Ueber den Schnittwiderstand bei der Bearbeitung der Metalle durch Abheben von Spänen. *Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure* 53(1909), S. 860–866.
- [Gou71] Gouraud, H.: Continuous Shading of Curved Surfaces. *IEEE Transactions on Computers* C-20(6)(1971), S. 623–629. DOI: 10.1109/T-C.1971.223313.
- [Gra04] Gradišek, J.; Kalveram, M.; Weinert, K.: Mechanistic Identification of Specific Cutting Force Coefficients for a General End Mill. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 44(2004), Nr. 4, S. 401–414. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2003.10.001.

- [Gra05a] Gradišek, J.; Govekar, E.; Grabec, I.; Kalveram, M.; Weinert, K.; Insperger, T.; Stépán, G.: On Stability Prediction for Low Radial Immersion Milling. *Machining Science and Technology* 9(2005), Nr. 1, S. 117–130. DOI: 10.1081/MST-200051378.
- [Gra05b] Gradišek, J.; Kalveram, M.; Insperger, T.; Weinert, K.; Stépán, G.; Govekar, E.; Grabec, I.: On stability prediction for milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 45(2005), Nr. 7-8, S. 741–991. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2004.11.015.
- [Gro06] Groppe, M.: Prozessauslegung für die Hochleistungsfräsbearbeitung von Aluminium-Strukturbauteilen. Dr.-Ing.-Dissertation, Universität Hannover. 2006.
- [Gur61] Gurney, J. P.; Tobias, S. A.: A Graphical Method for the Determination of the Dynamic Stability of Machine Tools. *International Journal of Machine Tools Design and Research* 1(1961), S. 148.
- [Hah53] Hahn, R. S.: Metal-Cutting Chatter and Its Elimination. *Transactions of the ASME* 75(1953), S. 1073–1080.
- [Har06] Hartung, F.; Insperger, T.; Stépán, G.; Turi, J.: Approximate stability charts for milling processes using semi-discretization. *Applied Mathematics and Computations* 174(2006), Nr. 1, S. 51–73. DOI: 10.1016/j.amc.2005.05.008.
- [Hen07] Henninger, C.; Eberhard, P.: A New Curve Tracking Algorithm for Efficient Computation of Stability Boundaries of Cutting Processes. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 2(2007), Nr. 4, S. 360–365. DOI: 10.1115/1.2756077.
- [Hen08] Henninger, C.; Eberhard, P.: Improving the computational efficiency and accuracy of the semi-discretization method for periodic delay-differential equations. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 27(2008), Nr. 6, S. 975–985. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.01.006.
- [Höl57] Hölken, W.: Untersuchung von Ratterschwingungen an Drehbänken. Dr.-Ing.-Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1957.
- [Hsu74] Hsu, C. S.: On Approximating a General Linear Periodic System. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 45(1974), Nr. 1, S. 234–251. DOI: 10.1016/0022-247X(74)90134-6.
- [Hua07] Huang, C. Y.; Wang, J. J. J.: Mechanistic Modeling of Process Damping in Peripheral Milling. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 129(2007), Nr. 1, S. 12–20. DOI: 10.1115/1.2335857.
- [Hua11] Huang, C.; Wang, J.-J. J.: Effects of cutting conditions on dynamic cutting factor and process damping in milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 51(2011), Nr. 4, S. 320–330. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2010.12.004.

- [Ins00] Insperger, T.; Stépán, G.: Stability of the Milling Process. *Periodica Polytechnica Ser. Mech. Eng.* 44(2000), Nr. 1, S. 47–57.
- [Ins01] Insperger, T.; Stépán, G.; Namachchivaya, S. N.: Comparison of the Dynamics of Low Immersion Milling and Cutting with Varying Spindle Speed. In: *Proceedings of DETC'01, ASME 2001 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, Pittsburgh, Pennsylvania. 2001.
- [Ins02] Insperger, T.; Stépán, G.: Semi-discretization method for delayed systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55(2002), Nr. 5, S. 503–518. DOI: 10.1002/nme.505.
- [Ins03] Insperger, T.; Mann, B. P.; Stépán, G.; Bayly, P. V.: Stability of up-milling and down-milling, Part 1: Alternative analytical methods. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43(2003), Nr. 1, S. 25–34. DOI: 10.1016/S0890-6955(02)00159-1.
- [Ins04a] Insperger, T.; Gradišek, J.; Kalveram, M.; Stépán, G.; Weinert, K.; Govekar, E.: Machine tool chatter and surface quality in milling processes. In: *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Conference and Exposition*. 2004.
- [Ins04b] Insperger, T.; Stépán, G.: Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61(2004), Nr. 1, S. 117–141. DOI: 10.1002/nme.1061.
- [Ins06] Insperger, T.; Muñoa, J.; Zatarain, M.; Peigné, G.: Unstable Islands in the Stability Chart of Milling Processes Due to the Helix Angle. In: *CIRP – 2nd International Conference on High Performance Cutting (HPC)*. 2006.
- [Ins08] Insperger, T.; Stépán, G.; Turi, J.: On the higher-order semi-discretizations for periodic delayed systems. *Journal of Sound and Vibration* 313(2008), Nr. 1-2, S. 334–341. DOI: 10.1016/j.jsv.2007.11.040.
- [Ins11] Insperger, T.; Stépán, G.: *Semi-Discretization for Time-Delay Systems - Stability and Engineering Applications*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London. DOI: 10.1007/978-1-4614-0335-7. 2011.
- [ISO 14577-1] DIN EN ISO 14577-1 - Instrumentierte Eindringprüfung zur Bestimmung der Härte und anderer Werkstoffparameter.
- [ISO 3002-1] ISO 3002-1 - Basic quantities in cutting and grinding; Part 1: Geometry of the active part of the cutting tools; General terms, reference systems, tool and working angles, chip breakers. 1982.
- [Jem89] Jemielniak, K.; Widota, A.: Numerical Simulation of Non-Linear Chatter Vibration in Turning. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 29(1989), Nr. 2, S. 239–247. DOI: 10.1016/0890-6955(89)90035-7.
- [Jem92] Jemielniak, K.: Modelling of Dynamic Cutting Coefficients in Three-Dimensional Cutting. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 32(1992), Nr. 4, S. 509–519. DOI: 10.1016/0890-6955(92)90042-F.



- [Keg69] Kegg, R. L.: Chatter Behaviour at Low Cutting Speed. *Annals of the CIRP* 17(1969), S. 97–106.
- [Kha09] Khasawneh, F. A.; Mann, B. P.; Insperger, T.; Stépán, G.: Increased Stability of Low-Speed Turning Through a Distributed Force and Continuous Delay Model. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* 4(2009), Nr. 4, S. 041003–1–12. DOI: 10.1115/1.3187153.
- [Kie52] Kienzle, O.: Die Bestimmung von Kräften und Leistungen an spanenden Werkzeugmaschinen. *VDI-Z* 94(1952), Nr. 11/12, S. 299–305.
- [KIS] KISTLER Instrumente AG, Eulachstr. 22, CH-8408 Winterthur: 3-Komponenten-Dynamometer  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  (Typ 9255B) - Datenblatt.
- [Kle37a] Klein, W.: Der zeitliche Verlauf der Umfangskraft bei einem Walzenfräser. *Ingenieur-Archiv* VIII(1937), Nr. 6, S. 425–432. DOI: 10.1007/BF02086023.
- [Kle37b] Klein, W.: Versuch einer einheitlichen Darstellung der Kraftverhältnisse bei verschiedenen Zerspanungsarten. Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Hochschule Berlin. 1937.
- [Kle01] Kleckner, J.: Ein Beitrag zur Analyse dynamischer Interaktionen bei selbst-erregungsfähigen Drehbearbeitungsprozessen. Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Universität Darmstadt. 2001.
- [Kle08] Kleckner, J.: Abweichungen in der theoretischen Stabilitätsgrenze als Folge einer nur hinreichend genauen linearen Approximation der Prozess- und Strukturdynamik. In: K. Weinert (Hg.), *Spanende Fertigung*. Vulkan Verlag, 5. Aufl. 2008.
- [Kra86] Kral, I. H.: *Numerical control programming in APT*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, NJ. 1986.
- [Lan05] Lange, M.: Hochleistungsfräsen von Aluminiumbauteilen für den Flugzeugbau. In: K. Weinert (Hg.), *Spanende Fertigung*, Bd. 4. Vulkan Verlag. 2005.
- [Lan06] Lange, M.: Hochleistungsfräsen von Aluminium-Strukturbauteilen. In: 7. Schmalkalder Werkzeugtagung. 2006.
- [Lee95] Lee, B. Y.; Tarn, Y. S.; Ma, S. C.: Modeling of the Process Damping Force in Chatter Vibration. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 35(1995), Nr. 7, S. 951–962. DOI: 10.1016/0890-6955(94)00046-M.
- [Li93] Li, H.: Analytische und experimentelle Untersuchungen des dynamischen Stirnplanfräsprozesses mit Hilfe der Rechnersimulation im Zeitbereich. Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Universität Berlin. 1993.
- [Liu85] Liu, C. R.; Liu, T. M.: Automated Chatter Suppression by Tool Geometry Control. *ASME Journal of Engineering for Industry* 107(1985), Nr. 2, S. 95–98. DOI: 10.1115/1.3185989.

- [Man03] Mann, B. P.; Insperger, T.; Bayly, P. V.; Stépán, G.: Stability of up-milling and down-milling, Part 2: Experimental verification. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 43(2003), Nr. 1, S. 35–40. DOI: 10.1016/S0890-6955(02)00160-8.
- [Man04] Mann, B. P.; Bayly, P. V.; Davies, M. A.; Halley, J. E.: Limit cycles, bifurcations, and accuracy of the milling process. *Journal of Sound and Vibration* 277(2004), Nr. 1-2, S. 31–48. DOI: 10.1016/j.jsv.2003.08.040.
- [Man05] Mann, B. P.; Young, K. A.; Schmitz, T. L.; Dilley, D. N.: Simultaneous Stability and Surface Location Error Predictions in Milling. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 127(2005), Nr. 3, S. 446–453. DOI: 10.1115/1.1948394.
- [Meh04] Mehdi, K.; Rigal, J.-F.: A Numerical Model for Cutting Process Simulation and Prediction of Cutting Forces in Peripheral Milling. *IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)* (2004), S. 734–740.
- [Mer65] Merrit, H.: Theory of self-excited machine tool chatter. *Journal of Engineering for Industry* 87(1965), S. 447–454.
- [Mer04] Merdol, S. D.; Altintas, Y.: Multi Frequency Solution of Chatter Stability for Low Immersion Milling. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 126(2004), Nr. 3, S. 459–466. DOI: 10.1115/1.1765139.
- [Mer08] Merdol, S. D.; Altintas, Y.: Virtual Simulation and Optimization of Milling Operations—Part I: Process Simulation. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 130(2008), Nr. 5, S. 051004–12. DOI: 10.1115/1.2927434.
- [Min90] Minis, I.; Yanushevsky, R.; Tembo, A.: Analysis of Linear and Nonlinear Chatter in Milling. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 39(1990), Nr. 1, S. 459–462. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)61096-8.
- [Min93] Minis, I.; Yanushevsky, R.: A New Theoretical Approach for the Prediction of Machine Tool Chatter in Milling. *ASME Journal of Engineering for Industry* 115(1993), Nr. 1, S. 1–8. DOI: 10.1115/1.2901633.
- [Mon91] Montgomery, D.; Altintas, Y.: Mechanism of Cutting Force and Surface Generation in Dynamic Milling. *ASME Journal of Engineering for Industry* 113(1991), Nr. 2, S. 160–168. DOI: 10.1115/1.2899673.
- [Mor10] Moradi, H.; Bakhtiari-Nejad, F.; Movahhedy, M. R.; Ahmadian, M. T.: Nonlinear behaviour of the regenerative chatter in turning process with a worn tool: Forced oscillation and stability analysis. *Mechanism and Machine Theory* 45(2010), Nr. 8, S. 1050–1066. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2010.03.014.
- [Naa87] Naab, K.; Weyh, B.: Näherungsverfahren zur Berechnung von Fundamentalmatrizen parametererregter Systeme. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 67(1987), Nr. 4, S. T113–T115. DOI: 10.1002/zamm.19870670403.

- [Nig72] Nigm, M. M.; Sadek, M. M.; Tobias, S. A.: Prediction of Dynamic Cutting Coefficients from Steady State Cutting Data. *Annals of the CIRP* 21(1972), Nr. 1, S. 97–98.
- [Nig77a] Nigm, M. M.; Sadek, M. M.: Experimental Investigation of the Characteristics of Dynamic Cutting Process. *ASME Journal of Engineering for Industry* 99(1977), Nr. 2, S. 410–418. DOI: 10.1115/1.3439252.
- [Nig77b] Nigm, M. M.; Sadek, M. M.; Tobias, S. A.: Determination of dynamic cutting coefficients from steady state cutting data. *International Journal of Machine Tool Design and Research* 17(1977), Nr. 1, S. 19–37. DOI: 10.1016/0020-7357(77)90024-5.
- [Olg02] Olgac, N.; Sipahi, R.: An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant (LTI) systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 47(2002), Nr. 5, S. 793–797. DOI: 10.1109/TAC.2002.1000275.
- [Olg05] Olgac, N.; Sipahi, R.: A Unique Methodology for Chatter Stability Mapping in Simultaneous Machining. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 127(2005), Nr. 4, S. 791–800. DOI: 10.1115/1.2037086.
- [Olg07] Olgac, N.; Sipahi, R.: Dynamics and Stability of Variable-pitch Milling. *Journal of Vibration and Control* 13(2007), Nr. 7, S. 1031–1043. DOI: 10.1177/1077546307078754.
- [Oli92] Oliver, W. C.; Pharr, G. M.: An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. *Journal of Materials Research* 7(1992), Nr. 6, S. 1564–1583. DOI: 10.1557/JMR.1992.1564.
- [Oli04] Oliver, W. C.; Pharr, G. M.: Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advances in understanding and refinements to methodology. *Journal of Materials Research* 19(2004), Nr. 1, S. 3–20. DOI: 10.1557/JMR.2004.0002.
- [Opi66] Opitz, H.; Dregger, E. U.; Roese, H.: Improvement of the Dynamic Stability of the Milling Process by Irregular Tooth Pitch. *Proceedings of the Adv. MTDR Conference* 7(1966), S. 213–227.
- [Opi71] Opitz, H. (Hg.): *Moderner Werkzeugmaschinenbau*. W. Giradet, Essen. 1971.
- [Pat08] Patel, B.; Mann, B.; Young, K.: Uncharted islands of chatter instability in milling. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 48(2008), Nr. 1, S. 124–134. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2007.06.009.
- [Pet63] Peters, J.; Vanherck, P.: Ein Kriterium für die dynamische Stabilität von Werkzeugmaschinen. *Industrie-Anzeiger* 85(1963).
- [Pet71] Peters, J.; Vanherck, P.; van Brussel, H.: The Measurement of the Dynamic Cutting Coefficient. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* (1971), S. 129–136.

- [Pha92] Pharr, G. M.; Oliver, W. C.; Brotzen, F. R.: On the generality of the relationship among contact stiffness, contact area, and elastic modulus during indentation. *Journal of Materials Research* 7(1992), Nr. 3, S. 613–617. DOI: 10.1557/JMR.1992.0613.
- [Reh08] Rehling, S.: Technologische Erweiterung der Simulation von NC-Fertigungsprozessen. Dr.-Ing.-Dissertation, Universität Hannover. 2008.
- [Roe67] Roese, H.: Untersuchung der dynamischen Stabilität beim Fräsen. Dr.-Ing.-Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1967.
- [Rot06] Rott, O.; Hömberg, D.; Mense, C.: A Comparison of Analytical Cutting Force Models. Preprint, Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik 1151(2006).
- [Sas02] Sastry, S.; Kapoor, S. G.; DeVor, R. E.: Floquet Theory Based Approach for Stability Analysis of the Variable Speed Face-Milling Process. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 124(2002), Nr. 1, S. 10–17. DOI: 10.1115/1.1418695.
- [Sch09] Schmidt, M.; Lipson, H.: Distilling Free-Form Natural Laws from Experimental Data. *Science* 324(2009), S. 81–85. DOI: 10.1126/science.1165893.
- [Sch11] Schmidt, C.: Einflussgrößensensitive Simulation und Überwachung von Fräsprozessen. Dr.-Ing.-Dissertation, Leibniz Universität Hannover. 2011.
- [Sel11] Sellmeier, V.; Denkena, B.: Schutzrecht – Bohrwerkzeug, Verwendung dieses Bohrwerkzeugs und mit dem Bohrwerkzeug durchgeführtes Bohrvorverfahren. Angemeldet am 12.07.2010, veröffentlicht am 08.12.2011. Patentinhaber: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover, Erfinder: Sellmeier, V; Denkena, B. *Deutsches Patent- und Markenamt* (2011), Nr. DE 10 2010 026 947 B3.
- [Sha49] Shannon, C. E.: Communication in the Presence of Noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers* 37(1949), Nr. 1, S. 10–21. DOI: 10.1109/JRPROC.1949.232969.
- [Sha57] Shaw, M. C.; Hölken, W.: Über selbsterregte Schwingungen bei der spannenden Bearbeitung. *Industrie-Anzeiger* 63(1957), S. 959(185)–964(190).
- [Sha97] Shawky, A.; Elbestawi, M.: An Enhanced Dynamic Model in Turning Including the Effect of Ploughing Forces. *ASME Journal of Manufacturing Science and Engineering* 119(1997), Nr. 1, S. 11–20. DOI: 10.1115/1.2836546.
- [Sim05] Sims, N. D.: The Self-Excitation Damping Ratio: A Chatter Criterion for Time-Domain Milling Simulations. *Journal of Manufacturing Science and Engineering* 127(2005), Nr. 3, S. 433–445. DOI: 10.1115/1.1948393.
- [Sim08] Sims, N.; Mann, B.; Huyanan, S.: Analytical prediction of chatter stability for variable pitch and variable helix milling tools. *Journal of Sound and Vibration* 317(2008), Nr. 3-5, S. 664–686. DOI: 10.1016/j.jsv.2008.03.045.

- [Sim10] Sims, N. D.; Manson, G.; Mann, B.: Fuzzy stability analysis of regenerative chatter in milling. *Journal of Sound and Vibration* 329(2010), Nr. 8, S. 1025–1041. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.10.024.
- [Sip06] Sipahi, R.; Olgac, N.: A unique methodology for the stability robustness of multiple time delay systems. *Systems and Control Letters* 55(2006), Nr. 10, S. 819–825. DOI: 10.1016/j.sysconle.2006.03.010.
- [Sis69] Sisson, T. R.; Kegg, R. L.: An Explanation of Low-speed Chatter Effects. *ASME Journal of Engineering for Industry* 91(1969), S. 951–558.
- [Sla65] Slavíček, J.: The effect of irregular tooth pitch on stability of milling. In: *Proceedings of the 6th M.T.D.R. Conference*, S. 15–22. 1965.
- [Smi61] Smith, J. D.; Tobias, S. A.: The dynamic cutting of metals. *International Journal of Machine Tool Design and Research* 1(1961), Nr. 4, S. 283–292. DOI: 10.1016/0020-7357(61)90008-7.
- [Smi91] Smith, S.; Tlustý, J.: An Overview of Modeling and Simulation of the Milling Process. *ASME Journal of Engineering for Industry* 113(1991), Nr. 2, S. 169–175. DOI: 10.1115/1.2899674.
- [Sne65] Sneddon, I. N.: The Relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile. *International Journal of Engineering Science* 3(1965), Nr. 1, S. 47–57.
- [Sta05] Stautner, M.: Simulation und Optimierung der mehrachsigen Fräsbearbeitung. Dr.-Ing.-Dissertation, Universität Dortmund. 2005.
- [Sté11] Stépán, G.; Dombovari, Z.; Muñoa, J.: Identification of cutting force characteristics based on chatter experiments. *CIRP Annals - Manufacturing Technology* 60(2011), Nr. 1, S. 113–116. DOI: 10.1016/j.cirp.2011.03.100.
- [Sur05] Surmann, T.: Geometrisch-physikalische Simulation der Prozessdynamik für das fünfachsiges Fräsen von Freiformflächen. Dr.-Ing.-Dissertation, Universität Dortmund. 2005.
- [Sur08] Surmann, T.; Biermann, D.; Kehl, G.: Oscillator Model of Machine Tools for the Simulation of Self Excited Vibrations in Machining Processes. In: *Proceedings of the 1st International Conference of Process Machine Interactions*, S. 23–29. 2008.
- [Tay07] Taylor, F. W.: On the art of cutting metals. *Transactions of the ASME* 28(1907), S. 31–350.
- [The06a] Thevenot, V.; Arnaud, L.; Dessen, G.; Cazenave-Larroche, G.: Influence of Material Removal on the Dynamic Behavior of Thin-Walled Structures in Peripheral Milling. *Machining Science and Technology* 10(2006), Nr. 3, S. 275–287. DOI: 10.1080/10910340600902082.
- [The06b] Thevenot, V.; Arnaud, L.; Dessen, G.; Cazenave-Larroche, G.: Integration of dynamic behaviour variations in the stability lobes method: 3D lobes construction and application to thin-walled structure milling. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 27(2006), Nr. 7-8, S. 638–644. DOI: 10.1007/s00170-004-2241-1.

- [Tik78] Tikal, F.: Beitrag zur Ermittlung der dynamischen Schnittsteifigkeitskoeffizienten. Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Universität München. 1978.
- [Thl63] Tlustý, J.; Poláček, M.: The Stability of the Machine Tool Against Self-Excited Vibrations in Machining. In: Proceedings of the International Production Engineering Research Conference, S. 465–474. The American Society of Mechanical Engineers. 1963.
- [Thl75] Tlustý, J.; MacNeil, P.: Dynamics of Cutting Forces in End Milling. *Annals of the CIRP* 24(1975), Nr. 1, S. 21–28.
- [Thl78a] Tlustý, J.: Analysis of the State of Research in Cutting Dynamics. *Annals of the CIRP* 27(1978), Nr. 2, S. 583–589.
- [Thl78b] Tlustý, J.; Rao, B. S.: Verification and Analysis of some Dynamic Cutting Force Coefficient Data. In: 6th North American Manufacturing Research Conference (NAMRC), University of Florida, FL, USA. 1978.
- [Thl83a] Tlustý, J.; Ismail, F.; Zaton, W.: Use of Special Milling Cutters Against Chatter. In: 11th NAMRC, University of Wisconsin - Madison, S. 408–415. 1983.
- [Thl83b] Tlustý, J.; Zaton, W.; Ismail, F.: Stability Lobes in Milling. *Annals of the CIRP* 32(1983), Nr. 1, S. 309–313. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)63411-8.
- [Thl00] Tlustý, J.: Manufacturing Processes and Equipment. Prentice Hall. 2000.
- [Tob56] Tobias, S. A.; Fishwick, W.: Eine Theorie des regenerativen Ratterns an Werkzeugmaschinen. *Maschinenmarkt* 17(1956), S. 15–30.
- [Tob61] Tobias, S. A.: Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Hanser, München. 1961.
- [Tön95] Tönshoff, H.: Werkzeugmaschinen, Grundlagen. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. 1995.
- [Tur11] Turkes, E.; Orak, S.; Neselic, S.; Yaldiz, S.: A New Process Damping Model For Chatter Vibration. *Measurement* 44(2011), Nr. 8, S. 1342–1348. DOI: 10.1016/j.measurement.2011.04.004.
- [Van67] Vanherck, P.: Increasing Milling Machine Productivity by Use of Cutters with Non-Constant Cutting-Edge Pitch. In: Proceedings of the 8th International M.T.D.R. Conference, S. 947–960. 1967.
- [Vic56] Victor, H.: Beitrag zur Kenntnis der Schnittkräfte beim Drehen, Hobeln und Bohren. Dr.-Ing.-Dissertation, Technische Hochschule Hannover. 1956.
- [Wan10a] Wan, M.; Wang, Y.; Zhang, W.; Dang, J.: Effect of Cutting Conditions on the Stability Lobes for End Milling Process. *Advanced Materials Research* 139-141(2010), S. 748–751. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.139-141.748.
- [Wan10b] Wan, M.; Zhang, W.-H.; Dang, J.-W.; YunYang: A unified stability prediction method for milling process with multiple delays. *International Journal of Machine Tools and Manufacture* 50(2010), Nr. 1, S. 29–41. DOI: 10.1016/j.ijmachtools.2009.09.009.

- [Wec77] Weck, M.; Teipel, K.: Dynamisches Verhalten spanender Werkzeugmaschinen. Springer-Verlag. 1977.
- [Wec91] Weck, M.: Dynamisches Verhalten von Dreh-, Fräs- und Bohrmaschinen. In: Handbuch zum Seminar Schwingungen an Werkzeugmaschinen. Aachen. 1991.
- [Wec06] Weck, M.; Brecher, C.: Werkzeugmaschinen 5 - Messtechnische Untersuchung und Beurteilung, dynamische Stabilität. Springer, Berlin, 7. Aufl. DOI: 10.1007/3-540-32951-X. 2006.
- [Wer73] Werntze, G.: Dynamische Schnittkraftkoeffizienten – Bestimmung mit Hilfe des Digitalrechners und Berücksichtigung im mathematischen Modell zur Stabilitätsanalyse. Dr.-Ing.-Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen. 1973.
- [Wu85a] Wu, D. W.; Liu, C. R.: An Analytical Model of Cutting Dynamics. Part 1: Model Building. ASME Journal of Engineering for Industry 107(1985), Nr. 2, S. 107–111. DOI: 10.1115/1.3185972.
- [Wu85b] Wu, D. W.; Liu, C. R.: An Analytical Model of Cutting Dynamics. Part 2: Verification. ASME Journal of Engineering for Industry 107(1985), Nr. 2, S. 112–118. DOI: 10.1115/1.3185973.
- [Wu86] Wu, D. W.: Governing Equations of the Shear Angle Oscillation in Dynamic Orthogonal Cutting. ASME Journal of Engineering for Industry 108(1986), Nr. 4, S. 280–287. DOI: 10.1115/1.3187078.
- [Wu88] Wu, D. W.: Comprehensive Dynamic Cutting Force Model and Its Application to Wave-Removing Processes. ASME Journal of Engineering for Industry 110(1988), Nr. 2, S. 153–161. DOI: 10.1115/1.3187864.
- [Wu89] Wu, D.: A New Approach of Formulating the Transfer Function for Dynamic Cutting Processes. ASME Journal of Engineering for Industry 111(1989), Nr. 1, S. 37–47. DOI: 10.1115/1.3188730.
- [Zat06] Zatarain, M.; Muñoa, J.; Peigné, G.; Insperger, T.: Analysis of the Influence of Mill Helix Angle on Chatter Stability. CIRP Annals - Manufacturing Technology 55(2006), Nr. 1, S. 365–368. DOI: 10.1016/S0007-8506(07)60436-3.
- [Zat08] Zatarain, M.; Bediaga, I.; Muñoa, J.; Lizarralde, R.: Stability of milling processes with continuous spindle speed variation: Analysis in the frequency and time domains, and experimental correlation. CIRP Annals - Manufacturing Technology 57(2008), Nr. 1, S. 379–384. DOI: 10.1016/j.cirp.2008.03.067.

# Lebenslauf

## Persönliches

Name Volker Sellmeier  
Geboren 7. Juli 1980, Osnabrück  
Familienstand verheiratet, zwei Kinder

## Schule

1999 Abitur,  
Graf-Stauffenberg-Gymnasium Osnabrück

## Zivildienst

1999 – 2000 Niedersächsisches Landeskrankenhaus Osnabrück

## Studium

2000 – 2006 Studium des Maschinenbaus an der Leibniz Universität Hannover  
2003 Auslandsstudium an der University of Wollongong, Australien  
2006 Abschluss: Diplom-Ingenieur

## Beruf

2007-2012 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Fertigungstechnik  
und Werkzeugmaschinen der Leibniz Universität Hannover  
seit 2012 Leiter Technologieentwicklung, INDEX-Werke GmbH & Co. KG  
Hahn & Tessky, Esslingen am Neckar

