

Nichtklassische Zustände in Spinor-Bose-Einstein-Kondensaten

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften
- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation von

Dipl.-Phys. Manuel Scherer,
geboren am 23.04.1982 in Nastätten

2011

Referent: Wolfgang Ertmer
Korreferent: Jan Arlt

Tag der Promotion: 03.02.2012

ZUSAMMENFASSUNG

Seit der ersten Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten (BEC) haben sich diese als erfolgreiche Modellsysteme zur Untersuchung grundlegender physikalischer Fragen entwickelt, die Relevanz für viele Gebiete der Physik haben. Neben der Untersuchung der quantenphysikalischen Grundlagen von BEC geht die Forschung derzeit einen Schritt weiter, hin zum „Quanteningenieurwesen“. Hierbei werden gezielt die Quanteneigenschaften ausgenutzt, um Konzepte und Experimente hinsichtlich spezifischer Anwendungen, wie der Simulation physikalischer Systeme zu entwickeln.

Im Rahmen der vorliegenden Dissertation werden anhand von ^{87}Rb - Spinorkondensaten zwei grundlegende Effekte untersucht, welche durch die vielfältigen Wechselwirkungen hervorgerufen werden und zu einer dynamischen Besetzung der verfügbaren Spinzustände führen. Der erste Teil dieser Arbeit beschreibt die Besetzung höherer räumlicher Moden eines externen Potentials und die daraus resultierende spontane Symmetriebrechung. Es wird gezeigt, dass durch die Wahl eines gleichzeitig vorliegenden homogenen Magnetfeldes gezielt Fallenmoden besetzt werden können, die aufgrund ihrer räumlichen Dichteverteilung und Energie eindeutig identifiziert werden können. Außerdem wird dargestellt, dass eine Überlagerung mehrerer räumlicher Moden in einem zylindersymmetrischen Potential dazu führen kann, dass sowohl die räumliche als auch die lokale Symmetrie der Magnetisierung spontan gebrochen werden¹.

Im zweiten Teil der Arbeit wird das Entstehen nichtklassischer Zustände des atomaren Ensembles und deren potentielle Nutzung für interferometrische Messungen jenseits des Schrotrauschlimits untersucht. Dazu wird zunächst die Varianz der Teilchenzahldifferenz zwischen den Zeeman-Zuständen betrachtet, die durch die Spindynamik besetzt werden. Bei einer Gesamtteilchenzahl von 7800 Atomen liegt diese mit $-6,91_{-0,99}^{+0,89}$ dB unterhalb des klassischen Schrotrauschlimits und offenbart die nichtklassische Natur des Zustandes. Dieser Wert wird einzig durch das Rauschen in der Teilchenzahldetektion limitiert. Weiterhin werden Experimente vorgestellt, die zeigen, dass sich der erzeugte nichtklassische Zustand eignet, um eine interferometrische Sensitivität zu erreichen die um $-1,6_{-1,1}^{+0,98}$ dB besser ist, als es für einen vergleichbaren klassischen Zustand der Fall wäre. Wird zudem das Detektionsrauschen berücksichtigt, so ergibt sich ein Wert der um $-2,5_{-1,1}^{+0,98}$ dB besser ist, als es mit dem Experimentaufbau und unkorrelierten Teilchen möglich wäre². Somit ergibt sich aus dieser Arbeit ein neuer Ansatzpunkt zur Realisierung eines Atominterferometers mit einer Sensitivität jenseits des Schrotrauschlimits.

Schlagnworte: Bose-Einstein-Kondensat, Spindynamik, Symmetriebrechung, nichtklassische Zustände, interferometrische Sensitivität unterhalb des Schrotrauschens

¹M. Scherer et al., Phys. Rev. Lett., 105(13). 135302, (2010)

²B. Lücke et al., Science, 334(6057): 773-776 (2011)

ABSTRACT

Since the first realization of trapped atomic gases and Bose-Einstein condensates (BEC), these ultracold ensembles have evolved into a successful model system to study fundamental quantum mechanical questions with relevance in many areas of physics. In particular Bose-Einstein condensates with several spin degrees of freedom offer fascinating avenues in this sense. In addition to the investigation of the fundamental effects governing BEC current research is thus realizing a new type of “quantum engineering“. Here the special properties of quantum physics are used in order to develop concepts and experiments in terms of specific applications as for example the simulation of physical systems.

In this thesis ^{87}Rb spinor condensates are used to examine two fundamental effects. These are caused by the various interactions, which lead to a dynamical population of the available spin states. The first part of this thesis is investigating the occupation of higher spatial modes in an external trapping potential and the resulting spontaneous symmetry breaking. It is shown that, by the choice of an additional homogeneous magnetic field, targeted modes can be occupied, which can be unambiguously assigned due to their spatial density distribution and their related energy levels. It is further shown that a superposition of several spatial modes in a cylindrically symmetric potential can lead to the spontaneous breaking of the spatial and of the local symmetry of the magnetization¹.

The second effect studied is the emergence of non-classical states of matter waves and their use for interferometric measurements with a sub shot-noise sensitivity. First it is shown that the variance of the difference in the number of particles between the Zeeman-states populated by the spin dynamics are $-6,91_{-0,99}^{+0,89}$ dB below the expected shot noise at a total number of 7800 atoms. This result is only limited by the noise of the detection system. Moreover, experiments are presented which show that the generated non-classical state can be used to obtain a sensitivity of an interferometric measurement by $-1,6_{-1,1}^{+0,98}$ dB below shot noise. If the detection noise is taken into account, a sensitivity of $-2,5_{-1,1}^{+0,98}$ dB in respect to the best possible value which could have been achieved with the given experimental setup and uncorrelated particles is achievable². So this work shows a possible way towards the realization of an atom interferometer with a sensitivity beyond the shot noise limit.

Keywords: Bose-Einstein condensate, spin dynamics, symmetry breaking, non-classical states, sub shot noise interferometric sensitivity

¹M. Scherer et al, Phys. Rev. Lett, 105 (13). 135 302, (2010)

²B. Lücke et al., Science, 334 (6057): 773-776 (2011)

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	1
2	Theorie	7
2.1	Spindynamik	8
2.1.1	Anschauliche Erklärung	8
2.1.2	Der Hamiltonoperator	9
2.1.3	Das effektive Potential	12
2.1.4	Lösung des Einteilchenoperators im eindimensionalen Kastenpotential	14
2.1.5	Einteilchenlösung des zylindersymmetrischen 2D Kastenpotential	16
2.2	Zeitentwicklung und Fluktuationen	19
2.3	Fallenmoden und Symmetriebrechung	23
2.4	Nichtklassische Zustände	27
2.4.1	Teilchenzahleigenfunktion des Zweimodenquetschoperators	28
2.4.2	Phaseneigenfunktion des Zweimodenquetschoperators	29
2.5	Die verallgemeinerte Blochkugel	32
2.6	Interferometer mit nichtklassischen Zuständen	36
2.6.1	Quantenmechanische Beschreibung des Strahlteilers	37
2.6.2	Die freie Phasenentwicklung	39
2.6.3	Das Ausgangssignal des Interferometers	39
2.7	Die interferometrische Sensitivität	46
2.7.1	Bayes'sche Analyse und Fischerinformation	49
2.7.2	Einfluss des Detektionsrauschens auf die Sensitivität	52
2.8	Einfluss mehrerer Moden und Saatatome auf das Interferometersignal	53
2.8.1	Einfluss mehrerer besetzter Moden	54
2.8.2	Einfluss der Saatatome	55
3	Aufbau	57
3.1	Skizze der experimentellen Sequenz	58

3.2	Detektion von Spinorgase	59
3.2.1	Detektion der räumlichen Strukturen	60
3.2.2	Detektion der nichtklassischen Zustände	62
3.2.3	Bestimmung der absoluten Teilchenzahl	65
3.3	Die Dipolfalle	67
3.3.1	Aufbau der Dipolfalle	67
3.3.2	Charakterisierung der Dipolfalle	69
3.4	Zustandspräparation und Manipulation von Spinorgasen	75
3.4.1	Präparation durch Radiofrequenzen	75
3.4.2	Schnelle adiabatische Passagen mit Mikrowellen	76
3.4.3	Mikrowellenpulse zur Manipulation und Präparation atoma- rer Zustände	77
3.4.4	Erzeugung der Mikrowellenpulse	80
3.4.5	Charakterisierung der Mikrowellenübergänge	83
3.4.6	Beschreibung der Pulssequenzen zur Präparation der atoma- ren Zustände	84
3.5	Magnetfelder	87
3.5.1	Erzeugung der relevanten Magnetfelder	88
3.5.2	Kompensation des Offsetmagnetfeldes	90
3.5.3	Vermessung der Magnetfeld- und der Intensitätsschwankungen	92
4	Spindynamik	95
4.1	Zeitabhängigkeit der Spindynamik und parametrische Verstärkung .	95
4.1.1	Zeitabhängigkeit in der zylindrischen Falle	96
4.1.2	Zeitabhängigkeit in der elliptischen Falle	98
4.2	Magnetfeldabhängigkeit und Resonanzen	100
4.2.1	Magnetfeldabhängigkeit in der zylindrischen Falle	101
4.2.2	Magnetfeldabhängigkeit in der elliptischen Falle	102
4.3	Abhängigkeit von der Anfangsteilchenzahl für die elliptische Falle .	103
5	Räumliche Moden und spontane Symmetriebrechung	105
5.1	Räumliche Moden	105
5.1.1	Räumliche Moden in der elliptischen Falle	106
5.2	Die gemittelten Dichteverteilungen der zylindrischen Falle	108
5.2.1	Symmetriebrechung der $(1, \pm 1)$ -Mode durch externe Einflüsse	112
5.3	Die einzelnen Dichteverteilungen	114
5.4	Analyse der Symmetriebrechung	116
5.4.1	Spontane Brechung der räumlichen Symmetrie	120
5.4.2	Spontane Brechung der lokalen Spinsymmetrie	121

6	nichtklassische Zustände	125
6.1	Schwierigkeiten beim Nachweis nichtklassischer Zustände	126
6.2	Teilchenzahlfluktuationen unter dem Standardquantenlimit	127
6.2.1	Beobachtung von reduzierten Fluktuationen bei den besten Parametern	128
6.2.2	Verhalten der reduzierten Fluktuationen für unterschiedliche Spindynamikzeiten	133
6.3	Strahlteiler für den nichtklassischen Zustand	134
6.3.1	Einfluss der Spindynamikdauer auf die Verteilung nach ei- nem $\pi/2$ -Puls	140
6.4	Interferometrische Sensitivität des Zustands	141
7	Ausblick	145
7.1	Nichtklassische Interferometer	145
7.1.1	Implementierung eines Magnetometers mit nichtklassischen Zuständen	146
7.1.2	Vermessung des Uhrenübergangs mit nichtklassischen Zu- ständen	147
7.1.3	Inertialsensoren mit nichtklassischen Zuständen	149
7.2	Weiterführende Experimente zur Untersuchung der Spindynamik . .	152
7.3	Fazit	153
A	Anhang	155
A.1	Wechselwirkungsterme	155
A.2	Semi-klassische Herleitung der Unschärfe zwischen Teilchenzahl- und Phasedifferenz	156
A.3	Gemittelte Dichteverteilungen der zylindrischen Falle	157

EINLEITUNG

Seit der Entwicklung der Quantenmechanik Anfang des 20. Jahrhunderts [1–5] wurde viel über ihre Interpretation diskutiert [6–8]. Dies hing vorwiegend damit zusammen, dass die Theorie eine Vielzahl von Eigenschaften offenbart, die jeglicher Intuitionen aus der Alltagswelt widersprechen. Dies veranlasste Albert Einstein, Boris Podolski und Nathan Rosen dazu, einen gemeinsamen Artikel zu veröffentlichen, in dem sie die Frage stellten, ob die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität komplett sei, oder ob es noch lokale versteckte Variablen gäbe [9]. Der Grund für diese These war, dass sie sich die Existenz quantenmechanisch korrelierter Zustände nicht vorstellen konnten. Wie kann es sein, dass beispielsweise die Kenntnis der Polarisation eines Photons ausreicht, um die Polarisation eines zweiten Photons vollständig zu bestimmen unabhängig davon wie weit die Photonen voneinander getrennt sind (EPR-Paradox)? Einstein sprach in diesem Zusammenhang von einer spukhaften Fernwirkung. Später wurde für dieses Phänomen, zweier quantenmechanisch korrelierter Größen, der Begriff der Verschränkung (engl. Entanglement) [10] geprägt. Um überprüfen zu können, ob die Quantenmechanik vollständig ist, oder ob Einstein, Podolski und Rosen recht hatten, stellte Bell mehrere Ungleichungen auf [11]. So lässt sich durch Experimente nachweisen, dass die Quantenmechanik vollständig ist und nicht durch die postulierten lokalen versteckten Variablen erweitert werden muss [12, 13].

Eine Entwicklung, die die Experimentalphysik revolutionierte und die Tests der Bellschen Ungleichungen in greifbare Nähe rückte, war die Erfindung des ersten Lasers durch Theodore H. Maiman [14]. Die Eigenschaften des Lasers ermöglichten es erstmals gezielt Messungen quantenphysikalischer Effekte vorzunehmen. Der Laser lieferte somit einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung der Quantenoptik [15]. In diesem Zuge wurden die ersten Tests der Bellschen Ungleichungen [16–18] mittels verschränkter Photonen durchgeführt. Zwar existiert noch kein Experiment, welches alle möglichen Schlupflöcher (engl. Loopholes) gleichzeitig berücksichtigt,

dennoch wurden bisher keine Hinweise auf lokale versteckte Variablen entdeckt, da in allen Tests die Bellschen Ungleichungen gebrochen wurden. In diesen Experimenten wurden die EPR-Paare noch auf unterschiedliche Arten erzeugt. Mittlerweile hat sich jedoch die parametrische Abwärtskonversion (engl. parametric-down-conversion) als Standardwerkzeug etabliert. Dabei werden die verschränkten Photonen mit Hilfe des nichtlinearen Kerreffekts eines Kristalls erzeugt. Trifft ein Pumpphoton auf einen solchen Kristall, so kann dieses in zwei Photonen mit der halben Frequenz zerfallen, die das EPR-Paar bilden.

Neben seinem Anteil an der beschleunigten Entwicklung der Quantenoptik führte die Erfindung des Lasers auch zur Entwicklung der modernen Metrologie, in der mit Hilfe von Laserinterferometern sehr präzise Messungen möglich sind. In einem solchen Interferometer wird ein Laserstrahl mit einem Strahlteiler auf zwei unterschiedliche Pfade aufgeteilt, die anschließend auf einem zweiten Strahlteiler überlagert werden. Das Ausgangssignal hängt dann von dem Phasenunterschied ab, der sich auf den beiden Pfaden zwischen den aufgespaltenen Strahlen entwickelt. So können beispielsweise Inertialsensoren gebaut werden, mit denen die Gravitation [19] und die Erdrotation [20] präzise gemessen werden. Außerdem dienen sie zur Messung kleinster Weglängenunterschiede mit denen Gravitationswellen nachgewiesen werden sollen [21–23]. Allerdings stoßen diese Interferometer mittlerweile an fundamentale Grenzen ihrer Messgenauigkeit. Eine Begrenzung ist der quantenrauschende Strahlungsdruck, der auf die Spiegel wirkt und verhindert, dass eine Steigerung der Laserintensität die Genauigkeit noch weiter erhöht. Dies wiederum hat zur Folge, dass der Fehler durch das Schrotrauschen der Photonen, welches durch die quantenmechanischen Eigenschaften hervorgerufen wird, nicht weiter verringert werden kann.

Eine Möglichkeit die Genauigkeit dennoch zu erhöhen, ist die Verwendung von gequetschten Zuständen (eng. squeezed states) [24]. Dies sind Zustände deren konjugierten Variablen weiterhin die Heisenbergsche Unschärferelation erfüllen. Im Gegensatz zu einem kohärenten Zustand, wie er bei einem Laser vorliegt, sind die Standardabweichungen jedoch ungleich verteilt. Dadurch kann eine der beiden Variablen auf Kosten der zweiten eine Standardabweichung aufweisen, die unterhalb der des kohärenten Zustands liegt. Für solche gequetschten Zustände existiert eine Vielzahl von Vorschlägen, um die reduzierte Unschärfe der einen Variable zum Beispiel in einem Interferometer für Messungen jenseits des Schrotrauschlimits zu nutzen [24–27].

In der Optik werden diese Zustände standardmäßig durch eine parametrische Verstärkung erzeugt [28], ähnlich der beschriebenen parametrischen Abwärtskonversion zur Erzeugung verschränkter Photonen. Die Unterschiede liegen darin, dass der Pumpstrahl bedeutend stärker ist und zusätzlich ein schwacher Strahl mit der halben Frequenz auf den nichtlinearen Kristall gegeben wird. Durch die Konversion des Pumpstrahls wird der schwache Strahl verstärkt und in seinen Variablen gequetscht. Durch die Verwendung eines gequetschten Strahls ist es vor kurzem

gelingen, das Quantenrauschen im Gravitationswellendetektor Geo600 um bis zu 3,5 dB zu reduzieren [23, 29] und damit die Sensitivität zu erhöhen.

Aufgrund des Welle-Teilchen-Dualismus [30, 31] lässt sich Interferometrie nicht nur mit Licht sondern auch mit massiven Teilchen wie Elektronen oder Atomen realisieren. Insbesondere Atominterferometer werden bereits für viele metrologische Messungen verwendet [32, 33]. Die bekannteste Anwendung ist die Definition der Sekunde, die experimentell mittels Atomuhren bestimmt wird [34–36]. Neben diesem Beispiel lassen sich auch Atominterferometer realisieren, mit denen genau wie mit Lichtinterferometern, die Gravitation [37, 38] oder die Erdrotation [19, 39] gemessen werden kann.

Werden ultrakalte atomare Ensembles für die Interferometrie verwendet, so können bei geringerem Platzbedarf ähnlich hohe Sensitivitäten wie für Lichtinterferometer erzielt werden. Die dafür typischerweise benutzte Laserkühlung, ist mittlerweile eine Standardtechnik, die in vielen Laboren weltweit eingesetzt wird [40–42]. Ein Problem dieser Methode ist jedoch, dass es technisch aufwendig ist, die Teilchenzahlen immer weiter zu erhöhen. Daher wird zur Zeit untersucht, wie gequetschte Zustände auch in atomaren Ensembles realisiert werden können, um Interferometrie jenseits des Schrotrauschlimits zu erreichen. Eine Möglichkeit stellt die Verwendung zerstörungsfreier Methoden zur Bestimmung der Teilchenzahlen kalter, atomarer Ensembles dar, wie es in den Gruppen von Eugene Polzik [43], Vladan Vuletić [44], James Thompson [45] und Morgan Mitchell [46] verwendet werden. Dazu wird vor der Interferometrie die Zahl der Teilchen im Eingangszustand genau vermessen. Dieses Wissen kann bei der Auswertung verwendet werden, um eine interferometrische Sensitivität jenseits des Schrotrauschens zu erzielen.

Die zerstörungsfreien Messmethoden beruhen dabei auf der Licht-Atom-Wechselwirkung. In der Gruppe von Eugene Polzik geschieht dies, indem der Ausgang eines optischen Mach-Zehnder-Interferometers betrachtet wird, in dessen einen Pfad sich die Atome befinden. Das Ausgangssignal des Mach-Zehnder-Interferometers gibt dann Auskunft über die Anzahl der Teilchen [43]. Bei einer Atomzahl von 10^5 Atomen konnten damit gequetschte Zustände mit Fluktuationen von $-3,4 \pm 0,7$ dB unterhalb des Schrotrauschens gemessen werden. Die Gruppen von Vladan Vuletić und James Thompson nutzen einen ähnlichen Ansatz. Die kalten Atome befinden sich hier innerhalb eines Fabry-Perot-Interferometer mit hoher Finesse, dessen Ausgangssignal zur Bestimmung der Teilchenzahl dient [44, 45]. Die gemessenen Werte für die reduzierten Fluktuationen lauten $-3,8 \pm 0,4$ dB bei einer Teilchenzahl von 5×10^4 Atomen in den Arbeiten von Vladan Vuletić und $-2,6 \pm 0,3$ dB bei einer Teilchenzahl von 7×10^5 Atomen in den Arbeiten von James Thompson. In der Gruppe von Morgan Mitchell erfolgt die zerstörungsfreie Detektion durch die Analyse der Polarisation eines verstimmtten Laserstrahls, beim Durchlaufen der atomaren Wolke. Aufgrund des Faraday-Effekts ändert sich diese in Abhängigkeit der Teilchenzahlen [46, 47]. Hier werden reduzierte Fluktuationen von bis zu $-3,8$ dB bei einer Gesamtteilchenzahl von $8,4 \times 10^5$ Atomen beobachtet.

Neben dem Schrotrauschen bildet die thermische Geschwindigkeitsverteilung eine Limitierung der Atominterferometrie mit kalten Ensembles, da sie die Kohärenz- und Beobachtungszeit begrenzt. Um die Evolutionszeiten und damit die Präzision dennoch zu erhöhen, müssen die Atome weiter bis zum sogenannten Bose-Einstein-Kondensate (BEC, engl. Bose-Einstein condensate) gekühlt werden. Dabei wird der Vielteilchengrundzustand eines externen Potentials mit einer makroskopischen Zahl von Atomen besetzt, die durch eine gemeinsame kohärente Wellenfunktion beschrieben werden kann. Die Theorie dahinter geht auf Albert Einstein [48, 49] zurück, der diese Form der Materie auf Grundlage der Überlegungen von Satyendranath Bose [50] 1925 vorhergesagt hat. Erst 70 Jahre später konnten diese BECs erstmals in reiner Form in den Laboren von Eric Cornell, Carl Weiman [51] und Wolfgang Ketterle [52] realisiert werden. Ähnlich zum Fall des Laser für Licht eröffnen BECs die Möglichkeit zur Quantenoptik mit kohärenten atomaren Zuständen. Werden solche BECs unter Schwerelosigkeit hergestellt, sodass die Gravitation die Beobachtungszeit nicht mehr limitiert, so können sehr lange Entwicklungszeiten realisiert werden [53]. In Satelliten könnten diese beispielsweise zur Messung des Äquivalenzprinzips [54] oder zum Nachweis von Gravitationswellen [55] dienen.

Allerdings sind die Teilchenzahlen in BECs aufgrund der notwendigen Kühlmethoden [56, 57] noch geringer, als die lasergekühlter Atome, wodurch das Schrotrauschen die interferometrische Messung stark beeinträchtigt. Daher ist es sinnvoll, auch hier gequetschte Zustände zu verwenden. Auch hier existieren erste Experimente die zeigen, wie diese nichtklassischen Zustände in BECs erzielt werden können. In den Experimenten der Arbeitsgruppen von Markus Oberthaler [58, 59] und Phillip Treutlein [60] werden gequetschte Zustände in BECs erzeugt, indem erst eine klassische Mischung zwischen den Niveaus $|F = 1, m_F = -1\rangle$ und $|F = 2, m_F = 1\rangle$ ^{87}Rb Grundzustandes hergestellt wird. Durch die Wechselwirkung zwischen den Atomen der beiden Niveaus, die über eine Feshbachresonanz eingestellt werden kann, entsteht dann der spingequetschte Zustand. Mit diesem Verfahren sind in diesen Arbeitsgruppen reduzierte Fluktuationen in BECs von $6,9_{-0,9}^{+0,8}$ dB bei 2600 Atomen [58, 59] beziehungsweise $3,7 \pm 0,4$ dB bei 1250 Atomen [60] beobachtet worden. Um diese Werte zu erhalten, wurde allerdings das unabhängig bestimmte Photonen-Schrotrauschen der Detektion abgezogen.

Bose-Einstein Kondensate mit dem Spinzustand als Freiheitsgrad, sogenannte Spinorkondensate [61], bieten ebenfalls die Möglichkeit zur Erzeugung nichtklassischer Zustände [62–65]. Diese entstehen durch die Wechselwirkung der Atome, die dafür sorgen kann, dass zuvor unbesetzte Spinzustände dynamisch besetzt werden [66–68]. Dieser Prozess ist analog zur optischen parametrischen Verstärkung, da er durch den gleichen Hamiltonoperator beschrieben werden kann. In der vorliegenden Arbeit bildet diese dynamische Besetzung die Grundlage aller weiteren Untersuchungen. Hier dient der Zustand $|F = 2, m_F = 0\rangle$ von ^{87}Rb als Ausgangszustand. Durch die Wechselwirkung bildet sich der nichtklassische Zustand zwischen

dem $|F = 2, m_F = 1\rangle$ - und dem $|F = 2, m_F = -1\rangle$ -Zustand. Bei einer Teilchenzahl von 7800 Atomen konnte damit ein Wert für die Fluktuationen der Teilchenzahldifferenz gemessen werden der mit $-6,91_{-0,99}^{+0,89}$ dB unterhalb des Schrotrauschenlimits liegt (ohne Abzug des Photonenschrotrauschen).

In jüngster Zeit wurden darüber hinaus ähnliche Experimente in anderen Arbeitsgruppen vorgestellt [63–65]. So sind in der Gruppe von Markus Oberthaler in einem äquivalenten Prozess reduzierte Fluktuationen von -6.9 dB bei einer Teilchenzahl von ≈ 200 Atomen beobachtet worden (mit Abzug des Photonen-Schrotrauschens) [65]. In der Arbeitsgruppe von Michael S. Chapman [63, 64] wird der Anfangszustand $|F = 1, m_F = 0\rangle$ genutzt. Damit konnten reduzierte Fluktuation von -7 dB bei einer Teilchenzahl von bis zu 2000 Atomen gemessen werden.

Werden die gemessenen reduzierten Fluktuationen, die bisher in BECs erzielt worden sind, so zeigt sich, dass der Wert aus der vorliegenden Arbeit mit $-6,91_{-0,99}^{+0,89}$ dB zu den besten zählt. Ein entscheidender Vorteil ist hier, dass dieser Wert bei einer Teilchenzahl von 7800 Atomen erreicht worden ist, die deutlich über denen der anderen Arbeiten liegt.

Neben der Erzeugung nichtklassischer Zustände bieten Spinor-Bose-Einstein Kondensate die Möglichkeit, eine Vielzahl physikalischer Phänomene unter kontrollierten Bedingungen zu untersuchen [69–76]. So kann zum Beispiel die parametrische Verstärkung kleiner Fluktuationen [67, 77] oder der magnetische Grundzustand analysiert werden [61, 78–83]. Eine weitere Möglichkeit ist die Strukturbildung und die damit verbundene Symmetriebrechung anfangs homogener Systeme [68, 77, 78, 84–89]. Eine solche Untersuchung ist auch Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Dies ist besonders interessant, da Symmetriebrechungen im Allgemeinen in der Physik in den unterschiedlichsten Disziplinen, wie der Kosmologie [90], der Teilchen- [91] oder auch der Festkörperphysik [92, 93] auftauchen. Wie gezeigt wird, erlauben Spindorkondensate die Möglichkeit die Strukturbildung und unterschiedliche Formen der Symmetriebrechung unter kontrollierten experimentellen Bedingungen zu untersuchen.

THEORIE

Das folgende Kapitel legt die Grundlagen der Quantentheorie, um die Dynamik von Spinorkondensaten zu beschreiben. Nach einer anschaulichen Darstellung der Spindynamik wird der Hamiltonoperator des Systems vorgestellt. Dabei werden auftretende Wechselwirkungen und das effektive Potential näher betrachtet. Zudem werden die Näherungen präsentiert, die verwendet werden, um eine analytische Lösung der Dynamik zu erhalten. Die Theorie baut auf den Ansätzen aus [76, 77, 97–99] auf und folgt den Publikationen [66–68, 100–102]. Darin ist die Theorie um den Einfluss eines externen Potentials erweitert worden. Die Präsentation folgt in Anlehnungen an die Doktorarbeiten von Oliver Topic [103].

Die Theorie ist zum Großteil in enger Kooperation mit der Arbeitsgruppe von Luis Santos an der Leibniz Universität Hannover entwickelt worden [104, 105]. Viele Teile des folgenden Kapitels sind daher mit Hilfe der theoretischen Notizen von Frank Deuretzbacher und der Doktorarbeit von Garu Gebreyesus entstanden. Dazu zählen die Zeitentwicklung der Spindynamik im 2D-Kastenpotential, die daraus resultierende Symmetriebrechung sowie das Entstehen der nichtklassischen Zustände.

Im Anschluss wird vorgestellt, wie die Dynamik durch Vakuumfluktuationen beeinflusst wird und wie diese dafür sorgen, dass unterschiedliche Symmetrien des Systems spontan gebrochen werden können. Außerdem wird gezeigt, dass durch die Spindynamik ein nichtklassischer Zustand entsteht, der als Zwillings-Fock-Zustand [106] bezeichnet wird.

Danach wird das Bild der verallgemeinerten Blochkugel eingeführt [27]. Diese erlaubt eine geometrische Anschauung des Zwillings-Fock-Zustandes. Zudem ermöglicht diese Darstellung eine einfache Beschreibung der Wirkung eines Strahlteilers bei Anwendung auf einen solchen nichtklassischen Zustand. Dies ist insbesondere wichtig, wenn dieser verwendet werden soll, um die Sensitivität von Atominterferometern zu verbessern. Die Definition der Sensitivität, wie diese bestimmt

werden kann und wie sie durch technisches Rauschen modifiziert wird, bildet den Abschluss dieses Kapitels.

2.1 Spindynamik

Wie der Begriff Spindynamik schon ausdrückt wird hier beschrieben, wie sich die Besetzung der Spinzustände eines atomaren Ensembles mit der Zeit verändert. Die Experimente, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, sind alle mit ^{87}Rb durchgeführt worden. Als Anfangszustand für die Dynamik dient hier immer der Hyperfeinzustand des Grundzustandes $5^2S_{1/2}$ mit einem Gesamtdrehimpuls von $F = 2$ und dem Zeemanzustand $m_F = 0$. Im Folgenden wird die verkürzte Ket-Schreibweise $|F, m_F\rangle$ verwendet. Wie sich im späteren Verlauf herausstellt, kann das System auch als Kondensat mit einem Gesamtspin von $F = 1$ beschrieben werden. Somit ist die folgende Beschreibung auf beide Hyperfeingrundzustände von ^{87}Rb anwendbar.

2.1.1 Anschauliche Erklärung

Was passiert bei der Spindynamik? Eine anschauliche Erklärung ist die folgende: Befinden sich anfangs alle Atome in dem Zustand $|2,0\rangle$, so ist es durch die Drehimpulserhaltung erlaubt, dass zwei Atome miteinander stoßen und dabei ihren Zeemanzustand ändern, wie in der Abbildung 2.1 gezeigt. Nach der Kollision befindet sich somit eines der Teilchen in $|2,1\rangle$ und das andere in $|2, -1\rangle$ [107]. Wegen der Energieerhaltung kann eine solche Spin-ändernde Kollision nur stattfinden, wenn die Energie des Endzustandes mit der des Anfangszustandes übereinstimmt.

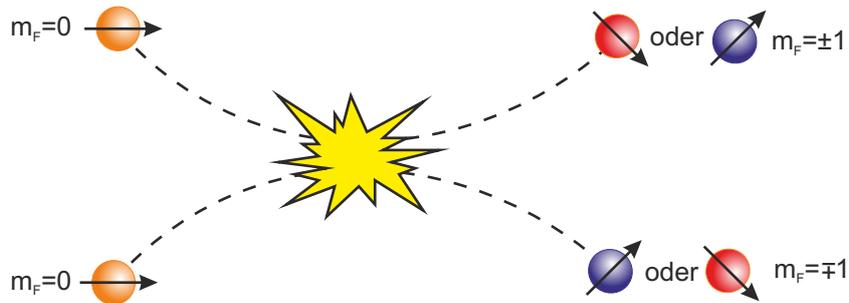


Abbildung 2.1: Intuitives Bild eines Spin-ändernden Stoßes zwischen zwei Atomen in $|2,0\rangle$ (nach [107]). Da die beiden Atome ununterscheidbar sind, wird erst bei einer Messung nach dem Stoß entschieden, welches der beiden auf $|2, +1\rangle$ und welches auf $|2, -1\rangle$ projiziert wird.

Durch Anlegen eines Magnetfeldes werden beispielsweise die Endzustände aufgrund des quadratischen Zeemaneffekts energetisch unterschiedlich stark auseinander geschoben und der spinändernde Stoß kann nicht mehr stattfinden. In dem

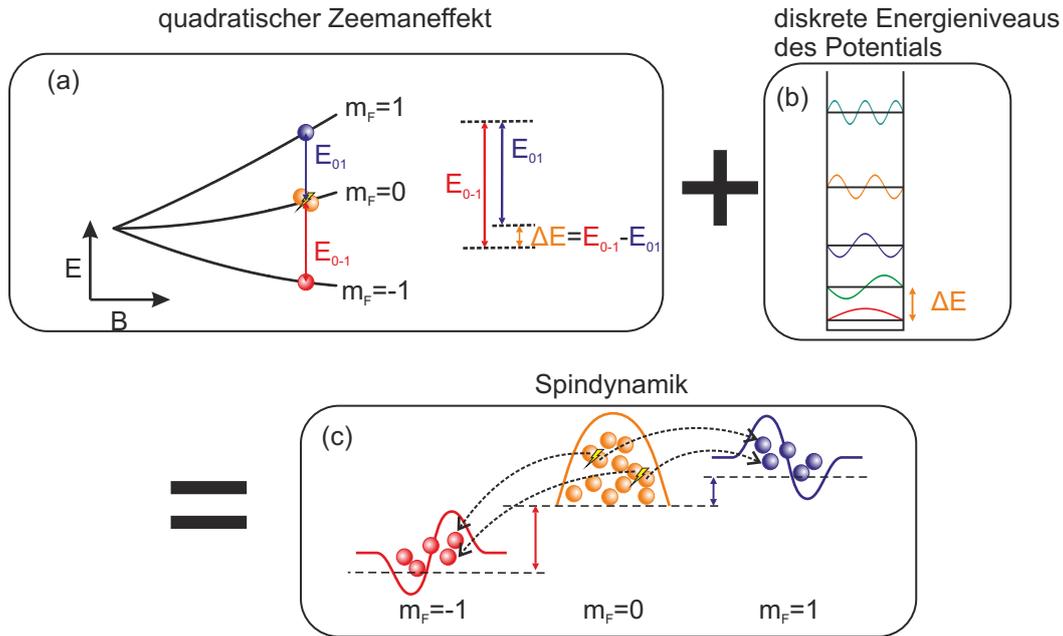


Abbildung 2.2: Anschauliche Darstellung der Zusammenhänge zwischen spinändernden Stößen, dem quadratischen Zeemaneffekt und den Energieniveaus des externen Potentials. (a) Der quadratische Zeemaneffekt führt zu einem Energieunterschied ΔE zwischen den Übergängen $|2,0\rangle \rightarrow |2,+1\rangle$ und $|2,0\rangle \rightarrow |2,-1\rangle$. (b) Wenn dieser Unterschied zu dem Abstand zwischen der Grund- und einer höheren Mode des Potentials passt, können Spin-ändernde Stöße auftreten, bei denen die $|2,\pm 1\rangle$ -Zustände höhere Potentialmoden besetzen.

Hyperfeinzustand $F = 2$ wäre die Energie nach dem spinändernden Stoß beispielsweise geringer, wie in Abbildung 2.2 (a) gezeigt. Damit die Kollision aus Abbildung 2.1 weiterhin stattfinden kann, muss die Energiedifferenz wieder abgegeben werden. Dies kann durch die Besetzung höherer Fallenmoden geschehen, wenn die Spindynamik in einem externen Potential stattfindet (Abb 2.2 (b)). Dazu muss die freiwerdende Energie des Stoßes mit dem energetischen Abstand zu einer höheren Fallenmode übereinstimmen. Beides zusammen, quadratischer Zeemaneffekt und diskrete Fallenniveaus, führen also dazu, dass spinändernde Stöße wieder erlaubt sind, wie in Abbildung 2.2 (c) gezeigt. Mit diesem einfachen Bild wird bereits deutlich, dass die Zahl der transferierten Atome in dem Zustand $|2,+1\rangle$ immer exakt der Zahl in $|2,-1\rangle$ entsprechen muss. Zudem sollten sie in derselben Fallenmode entstehen.

2.1.2 Der Hamiltonoperator

Nach der anschaulichen Darstellung der Spindynamik wird der Prozess von der theoretischen Seite her genauer betrachtet. Der Hamiltonoperator für ein allge-

meines System aus wechselwirkenden Teilchen kann beschrieben werden durch die Addition des Hamiltonoperators des Einteilchensystems und einem Operator, der die Wechselwirkung der Teilchen untereinander beschreibt,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{WW} \quad . \quad (2.1)$$

Zur weiteren Analyse werden die einzelnen Komponenten dieses Operators in zweiter Quantisierung betrachtet. Der Einteilchenoperator des vorliegenden Systems sieht folgendermaßen aus:

$$\hat{H}_0 = \int d^3r \sum_{m_F} \hat{\psi}_{m_F}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + V_{\text{ext}} + E_{m_F}^Z - \mu \right) \hat{\psi}_{m_F}. \quad (2.2)$$

Er setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie, dem externen Potential V_{ext} der verwendeten Dipolfalle, der Energieverschiebung $E_{m_F}^Z$ der Zeemanzustände, hervorgerufen durch das angelegte Magnetfeld und dem chemischen Potential μ , welches von der Teilchenzahl abhängt.

Der Wechselwirkungsoperator berücksichtigt Zweikörperstöße zwischen den jeweiligen Spinkomponenten und kann geschrieben werden als Summe der einzelnen Wechselwirkungsterme $\hat{U}_{m_F, m'_F, m_f, m'_f}$ [108]

$$\hat{H}_{WW} = \int d^3r \sum_{m_F, m'_F, m_f, m'_f} \hat{\psi}_{m_F}^\dagger \hat{\psi}_{m'_F}^\dagger \hat{U}_{m_F, m'_F, m_f, m'_f} \hat{\psi}_{m'_f} \hat{\psi}_{m_f}, \quad (2.3)$$

wobei die Spinzustände der Teilchen vor dem Stoß mit m_f , m'_f und danach mit m_F , m'_F bezeichnet werden. Diese Terme können in zwei Kategorien eingeteilt werden, die Spin-erhaltenden und Spin-ändernden Kollisionen. Die Spin-erhaltenden Terme können durch ein Molekularfeld (engl. Mean field) beschrieben werden, in dem sich die einzelnen Teilchen bewegen. Dadurch wird der Einteilchenoperator (2.2) modifiziert. Die spinändernden Stöße sorgen dafür, dass die anderen Zeemanzustände dynamische besetzt werden, wobei der Gesamtspin erhalten bleiben muss.

In dem beschriebenen System wird nur der Anfang des dynamischen Prozesses betrachtet, in diesem verhält sich die Dynamik in erster Näherung linear in den Operatoren. Dies führt zu einer deutlichen Vereinfachung des Problems, da die sogenannten Bogoliubovnäherung angewendet werden kann. Hierbei wird angenommen, dass nur kleine Störungen den Anfangszustand ändern. Der Feldoperator $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ kann in dem Fall beschrieben werden, durch einen Vektor $\vec{\psi}(\vec{r}, t)$ mit skalaren Einträgen plus einen Störoperator $\delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)$. Für das System mit Spin $F = 2$, sieht der Bogoliubovansatz folgendermaßen aus:

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \left(\psi_0(\vec{r}) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}) \right) e^{-i\mu t} = \left(\begin{pmatrix} \psi_{-2} \\ \psi_{-1} \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}(\vec{r}) + \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi}_{-2} \\ \delta\hat{\psi}_{-1} \\ \delta\hat{\psi}_0 \\ \delta\hat{\psi}_1 \\ \delta\hat{\psi}_2 \end{pmatrix}(\vec{r}) \right) e^{-i\mu t} \quad . \quad (2.4)$$

Die Zeitentwicklung der ungestörten Systems wird in dieser Gleichung durch das chemische Potential μ beschrieben. Die Transferraten von Stößen in den $|2, \pm 2\rangle$ -Zuständen sind viel geringer als die für Übergänge nach $|2, \pm 1\rangle$. In dem betrachteten Zeitraum kommt es daher zu keiner nennenswerten Besetzung der $|2, \pm 2\rangle$ -Zustände und das System kann auf ein effektives $F = 1$ -Spinsystem reduziert werden [82, 109, 110].

Weiterhin wird der $|2, 0\rangle$ -Zustand als unendlich großes Reservoir betrachtet. Änderungen dieses Zustandes sind sehr klein im Vergleich zum Anfangszustand ($n_0 \gg \langle \delta\hat{\psi}_0^\dagger \delta\hat{\psi}_0 \rangle$), bei dem sich alle Teilchen in $|2, 0\rangle$ befinden und werden vernachlässigt. Mit diesen Annahmen vereinfacht sich der Bogoliubovansatz (2.4) wie folgt:

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{n_0(\vec{r})} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi}_{-1} \\ 0 \\ \delta\hat{\psi}_1 \end{pmatrix}(\vec{r}) \right) e^{-i\mu t} . \quad (2.5)$$

Die Annahme, dass es zu keiner Population der $|2, \pm 2\rangle$ -Zustände kommt, führt außerdem dazu, dass sich die Zahl der zu berücksichtigenden Wechselwirkungsterme U_{m_F, m'_F, m_f, m'_f} auf drei reduziert. Der einzige erlaubte Kanal für spinändernde Stöße ist der $U_1 \equiv U_{1, -1, 0, 0}$. Bei diesem Prozess ändert sich der Spin des einen Atoms von $m_F = 0$ nach $m_F = 1$ und der des Anderen von $m_F = 0$ nach $m_F = -1$. Für die spinerhaltenden Stöße müssen nur der Term $U_0 \equiv U_{0, 0, 0, 0}$ für die Wechselwirkung der $m_F = 0$ -Atome untereinander und die Terme $U_{1, 0}$ und $U_{-1, 0}$ für die Wechselwirkung zwischen Atomen in $m_F = 0$ und $m_F = \pm 1$ berücksichtigt werden¹. Es kann gezeigt werden, dass die folgenden Beziehungen $U_{1, 0} = U_{-1, 0} \equiv U_{0, \pm 1, 0, \pm 1}$ und $U_{0, \pm 1, 0, \pm 1} = U_1 + U_0$ gelten [108].

Um den Hamiltonoperator für die Transferdynamik zu erhalten, wird der obige Ansatz (2.5) mit den vorgenommenen Annahmen in die Gleichung (2.1) mit (2.2) und (2.3) eingesetzt und bis zur zweiten Ordnung in der Störung $\delta\hat{\psi}_{m_F}$ entwickelt [66, 99]. Die Ortsabhängigkeit wird dabei nicht mehr explizit aufgeführt, um die Übersichtlichkeit zu verbessern. Der Hamiltonoperator für den Transfer in $|2, \pm 1\rangle$ erhält die Form:

$$\hat{H} = \int d^3r \sum_{m_F=\pm 1} \delta\hat{\psi}_{m_F}^\dagger \hat{H}_{\text{eff}} \delta\hat{\psi}_{m_F} + \Omega_{\text{eff}} \left[\delta\hat{\psi}_1^\dagger \delta\hat{\psi}_{-1}^\dagger + \delta\hat{\psi}_1 \delta\hat{\psi}_{-1} \right] . \quad (2.6)$$

Der zweite Summand in (2.6) beschreibt die spinändernden Stöße mit der effektiven Wechselwirkungsstärke $\Omega_{\text{eff}} = U_1 n_0(\vec{r})$. Der erste Summand steht für den effektiven Einteilchenoperator. Im Gegensatz zu dem Einteilchenoperator \hat{H}_0 in Gleichung (2.2) ist in \hat{H}_{eff} das durch das Molekularfeld hervorgerufen Potential berücksichtigt. Zudem taucht nur der quadratische Term $q \propto B^2$ der Zeemanenergie $E_{m_F}^Z = -m_F p + m_F^2 q$ auf. Die Energie aufgrund des linearen Zeemaneffekts bleibt bei

¹Wie diese berechnet werden können ist in Anhang A.1 dargestellt

elastischen Stößen erhalten und trägt somit nicht zur Dynamik des Systems bei. Der effektive Einteilchenoperator sieht folgendermaßen aus:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V_{\text{eff}}(\vec{r}) + q \quad . \quad (2.7)$$

Hierbei werden alle Beiträge, die zu einer Modifikation des räumlichen Potentials für die Atome in den Zuständen $|2, \pm 1\rangle$ führen, in einem effektiven Potential der Form

$$V_{\text{eff}}(\vec{r}) = V_{\text{ext}}(\vec{r}) + (U_0 + U_1)n_0(\vec{r}) - \mu \quad (2.8)$$

zusammengefasst.

2.1.3 Das effektive Potential

Um ein tieferes Verständnis der Dynamik zu bekommen, ist es sinnvoll den Hamiltonoperator (2.6) in der Basis der Eigenfunktionen des Einteilchenproblems darzustellen. In der obigen Form können die Eigenfunktionen nur durch numerische Verfahren gefunden werden. Allerdings können durch eine genauere Betrachtung des effektiven Potentials (2.8) und der Dynamik in den verschiedenen Raumdimensionen Näherungen gefunden werden, die das vorliegende System und die wesentlichen Aspekte gut beschreiben und eine analytische Lösung ermöglichen. Wie die einzelnen Terme das effektive Potential beeinflussen und wie es vereinfacht werden kann ist in der Abbildung 2.3 schematisch gezeigt und wird im Folgenden näher erläutert.

Wird der Term mit U_1 des effektiven Potentials (2.8) vernachlässigt, so gleicht der effektive Einteilchenoperator (2.7) dem für ein einkomponentiges Bose-Gas. Wie in [111] gezeigt ist, kann in diesem Fall eine Abschätzung für die Dichteverteilung $n_0(\vec{r})$ in Gleichung (2.8) angegeben werden. Unter Verwendung der Gross-Pitaevskii-Gleichung bei Vernachlässigung der kinetischen Energie (Thomas-Fermi-Näherung) ergibt sich dann,

$$n_0(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{U_0}(\mu - V_{\text{ext}}(\vec{r})) & \text{für } \mu > V_{\text{ext}}(\vec{r}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.9)$$

Dieses Ergebnis kann so interpretiert werden, dass die Atome in einem Bose-Einstein-Kondensat den Boden des externen Potentials bis zum chemischen Potential μ auffüllen, wie in Abbildung 2.3 (a) gezeigt. Dadurch ergibt sich für ein zusätzliches $|2,0\rangle$ -Atom ein flaches Potential im Bereich des Kondensates. Außerhalb des Kondensates ist das Potential weiterhin durch die externe Falle gegeben.

Für die Atome in $|2, \pm 1\rangle$ modifiziert der Term proportional zu U_1 des effektiven Potentials (2.8) den flachen Boden. Je nach Vorzeichen von U_1 hebt oder senkt sich das Potential proportional zur Dichteverteilung $n_0(\vec{r})$. Ist U_1 positiv, wie im Fall von $F = 2$, so ergibt sich eine abstoßende Wechselwirkung und das Potential wird

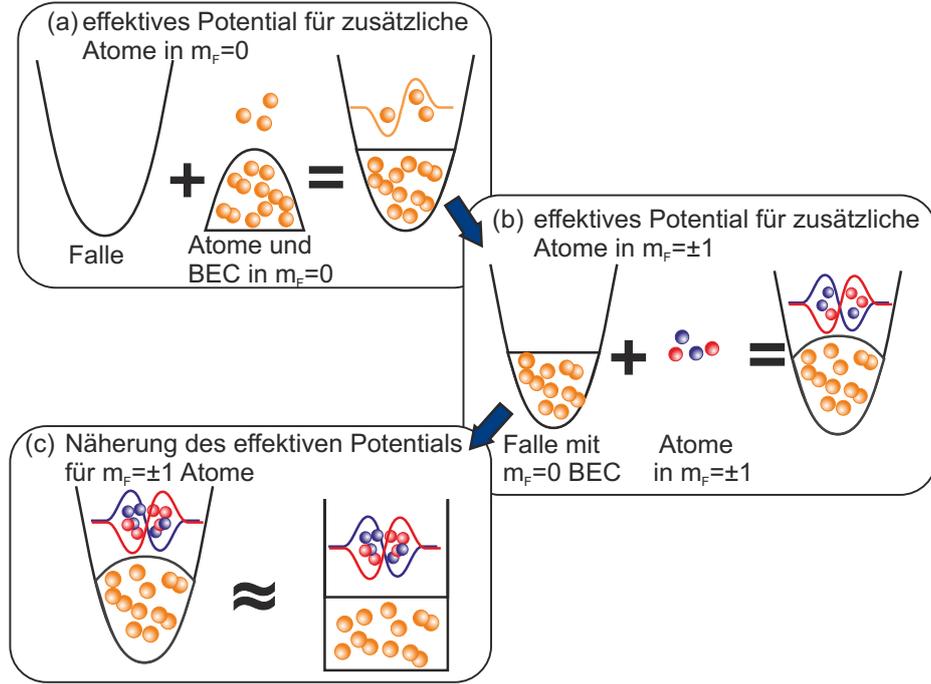


Abbildung 2.3: Skizze zur Verdeutlichung des effektiven Potentials für die Atome in $|2, \pm 1\rangle$ und der angewendeten Näherungen. (a) Zeigt wie das harmonische Potential durch die Wechselwirkung der $|2,0\rangle$ Atome untereinander modifiziert wird. Für zusätzliche Atome in $|2,0\rangle$ ergibt sich das harmonische Potential mit einem flachen Boden. (b) Kommen zusätzlich Atome in $|2, \pm 1\rangle$ hinzu, hebt sich das Potential aufgrund der unterschiedlichen Wechselwirkungsterme parabolisch an. (c) Um analytisch Lösungen berechnen zu können, wird das Potential durch ein Kastenpotential genähert.

parabolisch angehoben (vgl. Abb. 2.3 (b)). Bei negativem U_1 wie im Fall von $F = 1$, wird das Potential entsprechend abgesenkt. Im betrachteten Fall von $F = 2$, ist das Maximum der Anhebung mit $U_1 n_{0,max} \approx h \times 30$ Hz relativ klein verglichen mit der verwendeten mittleren Fallenfrequenz von $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_x \omega_y \omega_z} \approx 150$ Hz. Es ist daher möglich, diese Modifikation des Potentials für die weiteren Betrachtungen zu vernachlässigen, um eine analytische Lösung zu erhalten.

Das externe Potential V_{ext} wird in dem Experiment durch eine rotverstimmte gekreuzte Dipolfalle (siehe Kapitel 3) realisiert. In erster Ordnung kann dieses durch einen dreidimensionalen harmonischen Oszillator

$$V_{\text{ext}}(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \vec{r})^2 \quad (2.10)$$

beschrieben werden. Die Größe m bezeichnet die atomare Masse und $\vec{\omega}$ dem dreidimensionalen Vektor der Fallenfrequenzen in den drei Raumrichtungen. In diesem Fall kann die Ausdehnung des Kondensates in die verschiedenen Richtungen durch den Thomas-Fermi-Radius $R_{TF,i} = \frac{1}{\omega_i} \sqrt{\frac{2\mu}{m}}$ angegeben werden [108].

Die bisherigen Betrachtungen beziehen sich auf das effektive Potential für die $|2, \pm 1\rangle$ -Atome innerhalb des Kondensates, also $r_i < R_{TF,i}$. Außerhalb des Kondensates $r_i > R_{TF,i}$ verschwindet das Molekularfeld und das chemische Potential, sodass das effektive Potential allein durch die Dipolfalle erzeugt wird. Die Flanken des harmonischen Oszillators sind in diesem Bereich sehr steil und können somit durch unendlich hohe Wände angenähert werden (vgl. Abb. 2.3 (c)).

Mit diesen Approximationen ergibt sich für das effektive Potential ein dreidimensionales Kastenpotential mit der Breite der Thomas-Fermi-Radii \vec{R}_{TF} ,

$$V_{\text{eff}} = \begin{cases} 0 & \text{für } r_i < R_{TF,i} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Nach der Betrachtung des effektiven Potentials, ist der nächste Schritt die Betrachtung der Dimensionen des Systems. Die vorgestellten Experimente sind in unterschiedlichen Fallenkonfigurationen durchgeführt worden. Die erste Konfiguration ist die zylindrische Falle in der die beiden radialen Fallenfrequenzen nahezu gleich groß sind $\omega_r \equiv \omega_x \approx \omega_y$ und die axiale Frequenz dazu relativ klein ist $\omega_a \equiv \omega_z < \omega_r$. Wie die Experimente zeigen, bedeutet dies für die Einteilcheneigenzustände des effektiven Potentials, dass die Energieabstände der entstehenden Zustände entlang der starken Richtungen in der Regel größer sind, als die typischen Energien spinändernder Stöße. Die zugehörigen Moden können in diesem Fall energetisch aufgelöst werden. Im Gegensatz dazu liegen die Energieabstände der axialen Richtung enger beieinander und können nicht beobachtet werden. Aus diesem Grund ist das System zur Detektion der Atome so aufgebaut, dass die beiden starken Potentialachsen senkrecht zur Detektionsrichtung stehen, damit diese gut abgebildet werden können. Dies bedeutet, dass entlang der schwachen Fallachse integriert wird (siehe Kapitel 3). Daher ist es zulässig, das dreidimensionale Kastenpotential auf ein zylindersymmetrisches zweidimensionales Kastenpotential mit Radius $R_{TF,a}$ zu reduzieren.

Eine zweite Konfiguration, die in den Experimenten verwendet wird, ist die elliptische Falle mit einer starken Fallenfrequenz und zwei schwächeren $\omega_x > \omega_y, \omega_z$. In diesem Fall dominiert die starke Fallenfrequenz die Dynamik und die anderen beiden Richtungen können mit den gleichen Argumenten wie für die runde Falle vernachlässigt werden. Das effektive Potential vereinfacht sich somit auf ein eindimensionales Kastenpotential der Breite $2R_{TF,x}$.

2.1.4 Lösung des Einteilchenoperators im eindimensionalen Kastenpotential

Mit den gezeigten Näherungen des effektiven Potentials V_{eff} können analytische Lösungen des effektiven Einteilchenoperators H_{eff} aus Gleichung (2.7) angegeben werden. Für ein homogenes Kondensat ohne Potential sind die Lösungen und die

daraus resultierenden Folgen für die Spindynamik in [99] gezeigt. Die Lösungen für ein allgemeines Kastenpotential können analog hergeleitet werden und sind in [103] dargestellt. An dieser Stelle wird die Vorgehensweise wiederholt und die wichtigsten Ergebnisse kurz skizziert.

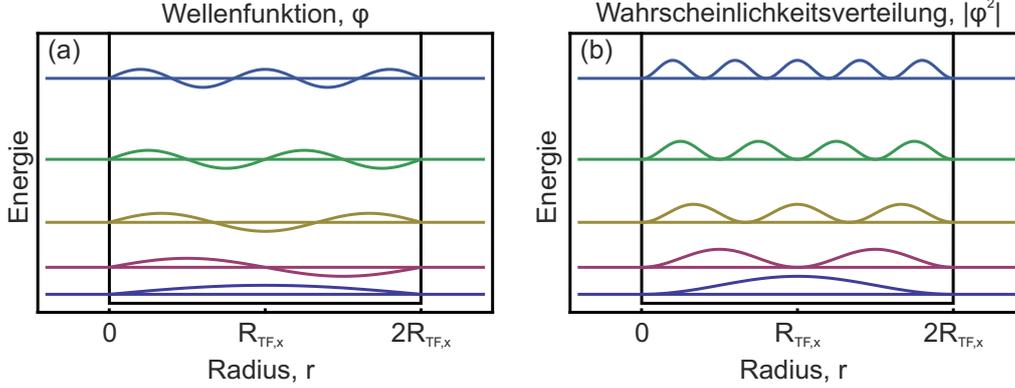


Abbildung 2.4: Darstellung der (a) Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ und der (b) Wahrscheinlichkeitsdichten $|\phi_n(x)|^2$ des 1D-Kastenpotentials.

Die Lösung des Einteilchenproblems im Kasten sind einfach zu bestimmen. Mit der Randbedingung, dass die Funktion außerhalb des Kondensates verschwinden muss $\phi_n(0) = \phi_n(2R_{TF,x}) = 0$, ergeben sich ebene Wellen als Lösung,

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{R_{TF,x}}} \sin(k_n x) \quad \text{für} \quad 0 < x < 2R_{TF,x} \quad (2.12)$$

mit der diskreten Wellenzahl $k_n = n2\pi/R_{TF,x}$ und $n \in \mathbb{N}/\{0\}$. Die zugehörigen diskreten Eigenenergien lauten $\epsilon_n = \hbar^2 k_n^2 / (2m)$. In der Abbildung 2.4 sind diese Eigenfunktionen (a) und die Wahrscheinlichkeitsdichten (b) des Kastenpotentials graphisch dargestellt.

Wird der Ansatz $\delta\hat{\psi}_{m_F=+1}(x) = \sum_n \phi_n(x)\hat{a}_n$ und $\delta\hat{\psi}_{m_F=-1}(x) = \sum_n \phi_n(x)\hat{b}_n$ für die Eigenoperatoren des wechselwirkenden Systems gemacht und in den Hamiltonoperator (2.6) eingesetzt, so kann er als Summe über die Einteilchenoperatoren $\hat{H} = \sum_n \hat{H}_n$ geschrieben werden mit,

$$\hat{H}_n = (\epsilon_n + q) \left(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n + \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n \right) + \Omega_{\text{eff}} \left[\hat{a}_n^\dagger \hat{b}_n^\dagger + \hat{a}_n \hat{b}_n \right] \quad . \quad (2.13)$$

Die Operatoren \hat{a}_n^\dagger (\hat{b}_n^\dagger) und \hat{a}_n (\hat{b}_n) sind die Erzeuger-, bzw. Vernichteroperatoren für Atome in der n -ten Fallenmode und dem Zeemanzustand $m_F = +1$ ($m_F = -1$). Mit der Heisenberg'schen Bewegungsgleichung $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A} = [\hat{A}, \hat{H}]$, wobei die eckigen Klammern den Kommutator darstellen, ergibt sich dann für die Zeitenwicklung

der Erzeuger- und Vernichtoperatoren in Matrixschreibweise das folgende Differentialgleichungssystem,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{b}_n^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_n + q & \Omega_{\text{eff}} \\ -\Omega_{\text{eff}} & -\epsilon_n - q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_n \\ \hat{b}_n^\dagger \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Durch Lösen dieser Differentialgleichung können die Zeitentwicklungen der Operatoren bestimmt werden. Daraus ergeben sich alle relevanten Parameter. An dieser Stelle wird aber auf die explizite Berechnung verzichtet, da in Abschnitt 2.2 die Herleitung der Zeitentwicklungen für die Erzeuger- und Vernichtoperatoren mit Hilfe der Quadraturen ausführlich dargestellt wird. Hier werden nur die wesentlichen Ergebnisse präsentiert. Die Eigenwerte $E_\pm = \pm \sqrt{(\epsilon_n + q)^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}$ [66, 99] der Matrix geben Auskunft über das Verhalten des Systems. Wenn $(\epsilon_n + q) \geq \Omega_{\text{eff}}$ gilt, so sind sie reell und es findet keine Besetzung der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände statt, das System ist stabil. Für den Fall $(\epsilon_n + q) \leq \Omega_{\text{eff}}$ sind die Eigenwerte imaginär und es kommt zu einem exponentiellen Anstieg der Besetzung der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände. Damit dieser Prozess überhaupt starten kann müssen sich zu Anfang bereits Atome in diesen Zuständen befinden. Diese kann entweder durch eine künstliche Erzeugung erfolgen oder aber aufgrund von Vakuumfluktuationen [67].

Die Dynamik ist am stärksten, wenn sich die Eigenenergie des effektiven Potentials und die quadratische Zeemanenergie gerade aufheben $q = -\epsilon_n$. In diesem Fall gilt $E_\pm = \pm i|\Omega_{\text{eff}}|$ Abhängig von dem angelegten Magnetfeld ist diese Bedingung für unterschiedliche Fallenmoden erfüllt und es kommt zu Resonanzen in der Transferrate [66, 101].

2.1.5 Einteilchenlösung des zylindersymmetrischen 2D Kastenpotential

Die Lösungen für die zylindrische Falle erfolgen analog zum eindimensionalen Fall. Die Wellenfunktionen des Hamiltonoperators ohne Wechselwirkung haben die folgende Form,

$$\phi_{nl}(r, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\pi} R_{TF} J_{l+1}(\beta_{nl})} J_l \left(\beta_{nl} \frac{r}{R_{TF}} \right) e^{il\varphi} \quad (2.15)$$

mit den entsprechenden Eigenenergien

$$\epsilon_{nl} = \frac{\hbar^2 \beta_{nl}^2}{2m R_{TF}^2}. \quad (2.16)$$

Dabei sind J_l die Besselfunktion erster Art und der Parameter β_{nl} repräsentiert die zugehörige n -te Nullstelle von J_l . Im Gegensatz zum 1D-Fall treten hier zwei unterschiedliche Quantenzahlen $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ und $l \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$ auf. Die Bedeutung dieser Zahlen wird klar, wenn die, sich aus Gleichung (2.15) ergebenden

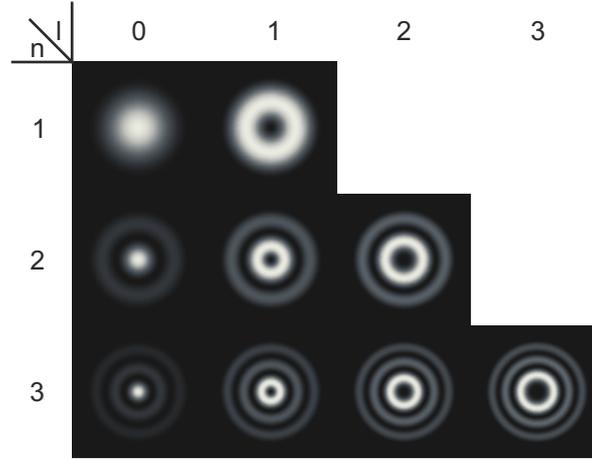


Abbildung 2.5: Simulationen der Dichteverteilung mit Gleichung (2.15) für die ersten Eigenfunktionen des 2D-Kastenpotentials. Von oben nach unten vergrößert sich die radiale Quantenzahl n und von links nach rechts die Drehimpulsquantenzahl l

Dichteverteilungen grafisch dargestellt werden, wie in Abbildung 2.5 zu sehen. Die radiale Quantenzahl n beschreibt die Anzahl der auftretenden Maxima entlang des Radius. Die Quantenzahl l hingegen entspricht einem Drehimpuls. Dies führt zur Bildung eines Vortex erkennbar an einem Minimum im Zentrum der Verteilung. Die Ausdehnung dieses Minimums ist dabei abhängig von dem Betrag $|l|$.

Es ist zu beachten, dass es bei Verteilungen mit Drehimpuls immer zu einer zweifachen Entartung kommt, da für die Nullstellen der Besselfunktion $-\beta_{n,l} = \beta_{n,-l}$ gilt. Somit ergibt sich jeweils die gleiche Energie (2.16) $\epsilon_{n,|l|} = \epsilon_{n,-|l|}$ für die gegenläufigen Drehrichtungen. Die Mode, die mit dem Uhrzeigersinn dreht $l = |l|$, wird als Vortex und die die entgegen des Uhrzeigersinns dreht als Antivortex $l = -|l|$ bezeichnet. Interferenzen zwischen diesen Moden führen zu einer veränderten Dichterverteilung. Die Stärke der Besetzung der Vortexmode im Vergleich zur Antivortexmode kann dabei stark schwanken, sofern die Spindynamik nur durch Vakuumfluktuationen [67] initiiert wird. Simulationen solcher Dichteverteilungen für eine gleiche Besetzung der Drehimpulsrichtungen sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Dort ist erkennbar, dass die Dichteverteilungen ausgezeichnete Orientierung aufweisen können und dadurch die Zylindersymmetrie des Potentials nicht mehr erhalten ist. Diese Symmetriebrechung wird in dem Abschnitt 2.3 intensiver untersucht.

Für die weitere Analyse ist es hilfreich, analog zum 1D-Fall die Gesamtwellenfunktion des Systems in den Eigenfunktionen der Einteilchenlösung $\delta\hat{\psi}_1(\vec{r}) = \sum_{nl} \phi_{nl}(\vec{r}) \hat{a}_{n,l}$, $\delta\hat{\psi}_{-1}(\vec{r}) = \sum_{nl} \phi_{nl}(\vec{r}) \hat{b}_{n,l}$ zu entwickeln und in den Hamiltonoperator einzusetzen. Wird die Entartung der Drehimpulsrichtungen berücksichtigt, so kann der Hamiltonoperator auch hier als Summe der Einteilchenoperatoren geschrieben werden $\hat{H} = \sum_{n,|l|} \hat{H}_{n,|l|}$. Für die Komponenten von \hat{H} müssen dann zwei

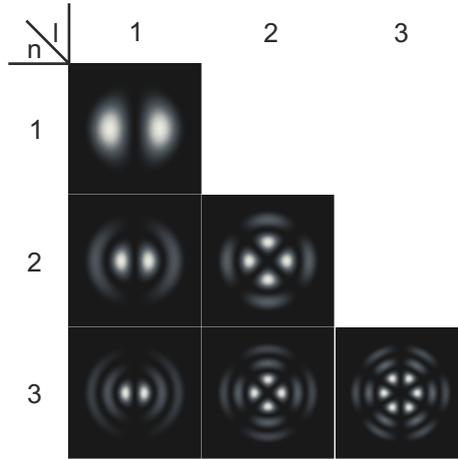


Abbildung 2.6: Simulationen der Dichte für Superpositionen der Eigenfunktionen mit gegenläufigen Drehimpulsen. Von oben nach unten vergrößert sich die radiale Quantenzahl n und von links nach rechts die Drehimpulsquantenzahl l

unterschiedliche Fälle betrachtet werden. Der erste ist der Fall ohne Drehimpuls $l = 0$. Dann gilt,

$$\hat{H}_{n,0} = (\epsilon_{n,0} + q) \left(\hat{a}_{n,0}^\dagger \hat{a}_{n,0} + \hat{b}_{n,0}^\dagger \hat{b}_{n,0} \right) + \Omega_{\text{eff}} \left(\hat{a}_{n,0}^\dagger \hat{b}_{n,0}^\dagger + \hat{a}_{n,0} \hat{b}_{n,0} \right) \quad . \quad (2.17)$$

Im zweiten Fall mit Drehimpuls $l \neq 0$ muss zusätzlich die Entartung beachtet werden. Die Gleichungen erhalten damit die folgende Form,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{n,|l|} = & (\epsilon_{n,|l|} + q) \sum_{l=\pm|l|} \left(\hat{a}_{n,l}^\dagger \hat{a}_{n,l} + \hat{b}_{n,l}^\dagger \hat{b}_{n,l} \right) \\ & + \Omega_{\text{eff}} \left(\hat{a}_{n,l}^\dagger \hat{b}_{n,-l}^\dagger + \hat{a}_{n,l} \hat{b}_{n,-l} \right) \\ & + \Omega_{\text{eff}} \left(\hat{a}_{n,-l}^\dagger \hat{b}_{n,l}^\dagger + \hat{a}_{n,-l} \hat{b}_{n,l} \right) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Analog zu Gleichung (2.14) könnten auch hier die Bewegungsgleichungen für die Zeitentwicklungen der Erzeuger- $\hat{a}_{n,l}^\dagger, \hat{b}_{n,l}^\dagger$ und Vernichteroperatoren $\hat{a}_{n,l}, \hat{b}_{n,l}$ ermittelt werden. Die Lösung dieser Gleichungen ist allerdings recht aufwendig. Eleganter geht es, wenn die Quadraturen des parametrischen Verstärkungsprozess verwendet werden, wie im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.2 Zeitentwicklung und Fluktuationen

In diesem Kapitel werden die Zeitentwicklungen der Erzeuger- und Vernichteroperatoren berechnet. Damit können die Besetzungen der einzelnen Fallenmoden und Zeemanzustände sowie deren Korrelationen ermittelt werden. Die Rechnungen für das 1D- und das zylindersymmetrische Kastenpotential sind dabei äquivalent. Zunächst werden die Quadraturen des parametrischen Verstärkungsprozesses [15]

$$\begin{aligned} \hat{X}_{n,l,m_F=1}^{(1)} &= \frac{\left(e^{+i\theta_{n,l}} \hat{a}_{n,l} + e^{-i\theta_{n,l}} \hat{b}_{n,-l}^\dagger \right)}{\sqrt{2 \sin(2\theta_{n,l})}} = \left(\hat{X}_{n,-l,-1}^{(1)} \right)^\dagger \\ \hat{X}_{n,l,1}^{(2)} &= \frac{\left(e^{-i\theta_{n,l}} \hat{a}_{n,l}^\dagger + e^{+i\theta_{n,l}} \hat{b}_{n,-l} \right)}{\sqrt{2 \sin(2\theta_{n,l})}} = \left(\hat{X}_{n,-l,-1}^{(2)} \right)^\dagger, \end{aligned} \quad (2.19)$$

mit $\cos(2\theta_{n,l}) = (\epsilon_{n,|l|} + q) / \Omega_{\text{eff}}$ eingeführt. Sie erfüllen die Vertauschungsrelationen $\left[\hat{X}_{n,l,m_F}^{(1)}, \hat{X}_{n',l',m'_F}^{(2)} \right] = i \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{m_F m'_F}$, wobei $\delta_{jj'}$ die Diracsche Deltafunktion darstellt. In Matrixschreibweise sehen die Gleichungen (2.19) folgendermaßen aus:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{X}_{n,l,1}^{(1)} \\ \hat{X}_{n,-l,-1}^{(2)} \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{\hat{X}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2 \sin(2\theta_{n,l})}} \begin{bmatrix} e^{i\theta_{n,l}} & e^{-i\theta_{n,l}} \\ e^{-i\theta_{n,l}} & e^{i\theta_{n,l}} \end{bmatrix}}_{\equiv A} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{a}_{n,l} \\ \hat{b}_{n,-l}^\dagger \end{pmatrix}}_{\equiv \vec{\hat{a}}} . \quad (2.20)$$

Der Grund für diese Darstellung wird klar, wenn der Hamiltonoperator aus Gleichung (2.18) in diesen Quadraturen geschrieben und die Zeitentwicklung bestimmt wird. Für den Hamiltonoperator ergibt sich

$$\hat{H}_{n,l} = \frac{E_{n,l}}{2} \sum_{m_F, l=\pm|l|} \left(\hat{X}_{n,l,m_F}^{(1)} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(2)} + \hat{X}_{n,l,m_F}^{(2)} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1)} \right) . \quad (2.21)$$

Die Größe $E_{n,l} = \sqrt{(\epsilon_{n,l} + q)^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}$ setzt sich aus der Einteilcheneigenenergie, dem quadratischen Zeemaneffekt und der effektive Wechselwirkung Ω_{eff} zusammen.

Die heisenbergsche Bewegungsgleichung erhält somit die einfache diagonale Form, $i\hbar \frac{d}{dt} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1,2)} = [\hat{X}_{n,l,m_F}^{(1,2)}, \hat{H}_{n,l}] = iE_{n,l} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1,2)}$. Damit können die Zeitentwicklungen der Quadraturoperatoren aus Gleichung (2.19) einfach ermittelt werden. In Matrixschreibweise lauten sie,

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1)}(t) \\ \hat{X}_{n,-l,-m_F}^{(2)}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} e^{iE_{n,l}t/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{-iE_{n,l}t/\hbar} \end{bmatrix}}_{\equiv T} \begin{pmatrix} \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1)} \\ \hat{X}_{n,-l,-m_F}^{(2)} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Um daraus die Zeitentwicklungen für die Erzeuger- und Vernichteroperatoren zu bestimmen, muss lediglich die Beziehung $\vec{\hat{a}}(t) = A^{-1} T A \vec{\hat{a}}$ angewendet werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{a}_{n,l}(t) \\ \hat{b}_{n,-l}^\dagger(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sin(2\theta_{n,l})} \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{E_{n,l}t}{\hbar} + 2\theta_{n,l}\right) & \sin\frac{E_{n,l}t}{\hbar} \\ -\sin\frac{E_{n,l}t}{\hbar} & -\sin\left(\frac{E_{n,l}t}{\hbar} - 2\theta_{n,l}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{n,l} \\ \hat{b}_{n,-l}^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} U_{n,l} & \tilde{U}_{n,l} \\ \tilde{U}_{n,l}^* & U_{n,l}^* \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{n,l} \\ \hat{b}_{n,-l}^\dagger \end{pmatrix} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Damit wiederum können die zeitabhängigen Erwartungswert der Teilchenzahlen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{m_F=\pm 1}(t) \rangle &= \langle \hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger(t) \hat{\psi}_{\pm 1}(t) \rangle \\ &= \sum_{n,l,n',l'} \phi_{n,l}^* \phi_{n',l'} \langle \text{Vak.} | \hat{a}_{n,l}^\dagger(t) \hat{a}_{n',l'}(t) | \text{Vak.} \rangle \\ &= \sum_{n,l} |\phi_{n,l}|^2 |\tilde{U}_{n,l}|^2 \\ &= \sum_{n,l} |\phi_{n,l}|^2 \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{E_{n,l}^2} \sin^2\left(\frac{E_{n,l}t}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

wobei $|\text{Vak.}\rangle$ für den Vakuumzustand steht. Der Parameter im Argument des Sinus $E_{n,l} = \sqrt{(\epsilon_{n,l} + q)^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}$ ist entscheidend für das Verhalten des Systems. Ist die Summe der Einteilcheneigenenergie größer als die effektive Wechselwirkung $\epsilon_{n,l} + q \geq \Omega_{\text{eff}}$, so ist $E_{n,l}$ reell. In diesem Fall ist der Zustand mit $m_F = 0$ stabil und es kommt zu keiner nennenswerten Besetzung der $m_F = \pm 1$ -Zustände. Wenn hingegen $\epsilon_{n,l} + q < \Omega_{\text{eff}}$ gilt, ergibt sich ein imaginärer Wert von $E_{n,l}$. In dem Fall kann der Sinus durch einen Sinus Hyperbolicus ersetzt werden und die Zeitentwicklung des Erwartungswertes der Teilchenzahl (2.24) erhält dadurch die folgende Form:

$$\langle \hat{n}_{\pm 1}(t) \rangle = \sum_{n,l} |\phi_{n,l}|^2 \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{|E_{n,l}|^2} \sinh^2\left(\frac{|E_{n,l}|t}{\hbar}\right) . \quad (2.25)$$

Es kommt damit zu einer Besetzung der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände, in dem die Anfangsbesetzungen $\langle \hat{\psi}_{\pm 1}^\dagger \hat{\psi}_{\pm 1} \rangle$ der jeweiligen Moden verstärkt werden. Diese anfängliche Besetzung kann entweder durch eine manuelle Erzeugung von Atomen in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zuständen oder wie oben gezeigt durch Vakuumfluktuationen [67] erzeugt werden. Der $|2, 0\rangle$ -Zustand ist somit nicht mehr stabil. Die Größe $|E_{n,l}|/\hbar$ wird daher im Folgenden als Instabilitätsrate bezeichnet. In Abbildung 2.7 (a) sind die Raten der ersten acht Moden des zylindrischen Potentials in Abhängigkeit der quadratischen Zeemanenergie aufgetragen. Sie werden immer dann maximal E_{\max} , wenn die quadratische Zeemanenergie $q = -\epsilon_{n,l}$ zu einer Eigenenergie des Einteilchenzustandes passt. Dies kann auch so interpretiert werden, dass der Grundzustand des Systems jeweils für unterschiedliche Magnetfelder durch unterschiedliche Fallenmoden gegeben ist [112]. In dem Fall läuft die Dynamik dieser einen Mode sehr viel schneller ab als alle anderen und dominiert die Dynamik. Abbildung 2.7 (b) zeigt daher den Verlauf der maximalen Instabilitätsrate. Durch eine bestimmte Wahl des Magnetfeldes kann also gezielt eine Mode ausgewählt werden, in der die Dynamik ablaufen soll. Wird außerdem die Zeit t lang genug gewählt, so ist es möglich, die Gleichung (2.25) weiter zu vereinfachen

$$\langle \hat{n}_{\pm 1}(t) \rangle \approx |\phi_{\max}|^2 \frac{\Omega_{\text{eff}}^2}{4E_{\max}^2} e^{2E_{\max}t/\hbar} . \quad (2.26)$$

Es ergibt sich eine exponentiell steigende Population der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände. Dieses Verhalten wird als parametrische Verstärkung bezeichnet und tritt auch in anderen Gebieten der Physik auf. In der Optik beispielsweise wenn Licht auf einen Kristall mit einem nichtlinearen Brechungsindex trifft. Durch die Wechselwirkung mit dem Kristall kommt es dazu, dass einzelne Photonen vernichtet und gleichzeitig zwei neue Photonen mit der halben Wellenlänge erzeugt werden [15, 28]. Der Hamiltonoperator für diesen Prozess ist analog zur Gleichung (2.6), wodurch sich die gleiche Zeitentwicklung für die mittlere erzeugte Photonenzahl ergibt. Auch hier können Vakuumfluktuationen oder eine Anfangsbesetzung verstärkt werden. Diese wird in der Regel durch einen Laser mit geringer Intensität vorgegeben. Dieser Prozess stellt eine Standardtechnik dar, um nichtklassische Zustände des Lichtes zu erzeugen.

Die relativen Erwartungswerte sowie die Quadrate und Standardabweichungen

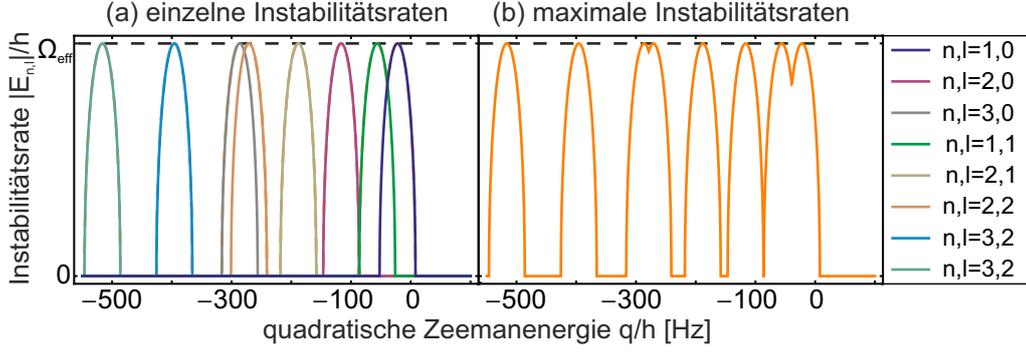


Abbildung 2.7: Verlauf der Instabilitätsraten der ersten acht einzelnen Moden (a) und der maximalen Instabilitätsrate, in Abhängigkeit der quadratischen Zeemanverschiebung.

können analog berechnet werden. Man erhält dann die folgenden Beziehungen:

$$\langle \hat{n}^- \rangle \equiv \langle (\hat{n}_1 - \hat{n}_{-1}) \rangle = 0 \quad (2.27)$$

$$\langle \hat{n}^+ \rangle \equiv \langle (\hat{n}_1 + \hat{n}_{-1}) \rangle = 2\langle \hat{n} \rangle \quad (2.28)$$

$$\langle \hat{n}_{\pm 1}^2 \rangle = 2\langle \hat{n} \rangle^2 \quad (2.29)$$

$$\langle \hat{n}_{m_F} \hat{n}_{-m_F} \rangle = \sum_{n,l,n',l'} \langle \hat{n}_{n,l} \rangle \langle \hat{n}_{n',l'} \rangle (1 + \cos 2(\theta_{n,l} - \theta_{n',l'})) \quad (2.30)$$

$$\sigma \hat{n}_{\pm 1} = \langle \hat{n} \rangle \quad (2.31)$$

$$\sigma \hat{n}^- = 0 \quad (2.32)$$

$$\sigma \hat{n}^+ = 2\langle \hat{n} \rangle \quad (2.33)$$

Interessant ist hierbei, dass die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion $\langle \hat{n}_{m_F} \hat{n}_{-m_F} \rangle$ der unterschiedlichen m_F -Zustände von den unterschiedlichen Mischungswinkeln $\theta_{n,l}$ der instabilen Moden abhängt. Dies zeigt, dass Quanteninterferenzen zu spontaner Symmetriebrechung der Magnetisierung führen können, was im nächsten Abschnitt 2.3 näher betrachtet wird.

Weiterhin fällt auf, dass der Erwartungswert $\langle \hat{n}^- \rangle$ und die Standardabweichung σn^- der Teilchenzahldifferenz verschwinden. Das heißt, dass im $|2, -1\rangle$ -Zustand immer exakt die gleiche Teilchenzahl entsteht wie in $|2, +1\rangle$. Die Fluktuationen der Teilchenzahldifferenz sind somit geringer als die eines klassischen Zustandes $\langle \hat{n}_{kl, \pm m_F} \rangle = \langle \hat{n}_{kl} \rangle$ dessen Fluktuationen $\langle \Delta(\hat{n}_{kl,1} - \hat{n}_{kl,-1}) \rangle = \sqrt{2\langle \hat{n}_{kl} \rangle}$ durch die Breite der Poissonverteilung gegeben sind. Solche Zustände werden als gequetschten Zustände (engl. squeezed state) bezeichnet. Da diese Eigenschaften nur durch die Quantennatur des Prozesses erklärt werden können werden gequetschte Zustände zu den nichtklassischen Zuständen gezählt.

Im Gegensatz dazu sind die Fluktuationen der einzelnen Teilchenzahlen $\langle \hat{n}_{m_F} \rangle$, sowie deren Summe $\langle \hat{n}^+ \rangle$ antigequetscht. Allerdings handelt es sich bei $\langle \hat{n}^+ \rangle$, $\langle \hat{n}^- \rangle$ nicht um ein Paar konjugierter Observablen, da ihre Vertauschungsrelation verschwindet $[\hat{n}^+, \hat{n}^-] = 0$. Die konjugierte Observable der Teilchenzahldifferenz n^-

(Summe n^+) ist viel mehr die Differenz $\varphi^- \equiv \varphi_1 - \varphi_{-1}$ (Summe $\varphi^+ \equiv \varphi_1 + \varphi_{-1}$) der einzelnen Phasen der $|\pm 1\rangle$ -Moden. Eine nähere Betrachtung dieser gequetschten Zustände, deren konjugierter Variablen und wie die Quanteneigenschaften genutzt werden können erfolgt in den Abschnitten 2.4 bis 2.6.

2.3 **Fallenmoden und Symmetriebrechung**

Wie in dem vorangegangenen Abschnitt dargestellt, kann es aufgrund entarteter Drehimpulszustände zu einem Bruch der räumlichen Symmetrie kommen. Diese Symmetriebrechung kann zu einer Weiteren führen. So ist es vorstellbar, dass die Dichteverteilung für den $|2, + 1\rangle$ -Zustand eine andere Orientierung aufweist als die des $|2, - 1\rangle$ -Zustandes. In diesem Fall wäre der Gesamtspin des Systems lokal von Null verschieden. Dies ist gleichbedeutend damit, dass Bereiche mit unterschiedlichen Magnetisierungen auftreten und somit die Symmetrie der lokalen Magnetisierung gebrochen ist. Diese Form der Symmetriebrechung kann hervorgerufen werden, wenn unterschiedliche instabile Moden miteinander interferieren.

In diesem Abschnitt sollen daher die Winkelverteilungen der Dichten der jeweiligen $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände, sowie deren relative Orientierung theoretisch untersucht werden. Es wird gezeigt, wie die räumlichen Korrelationen der Dichten der einzelnen Zustände und die der relativen Dichteverteilung zwischen den Zuständen aussieht und wie diese Korrelationen mit der räumlichen und der Spinsymmetrie zusammenhängen.

Analog zu dem vorangegangenen Kapiteln können die räumlichen Korrelationsfunktionen ausgerechnet werden. Im allgemeinen Fall ergibt sich der Ausdruck,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{n}_{m_F}(\vec{r}) \hat{n}_{m'_F}(\vec{r}') \rangle &= \langle \hat{\psi}_{m_F}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}_{m_F}(\vec{r}) \hat{\psi}_{m'_F}^\dagger(\vec{r}') \hat{\psi}_{m'_F}(\vec{r}') \rangle \quad (2.34) \\
&= \delta_{m_F, m'_F} \left[\sum_{i,k} |\phi_i(\vec{r})|^2 |\phi_k(\vec{r}')|^2 |\tilde{U}_i|^2 |\tilde{U}_k|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j} \phi_i^*(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \phi_j(\vec{r}') |\tilde{U}_i|^2 |\tilde{U}_j|^2 \right] \\
&\quad + \delta_{m_F, -m'_F} \left[\sum_{i,k} |\phi_i(\vec{r})|^2 |\phi_k(\vec{r}')|^2 |\tilde{U}_i|^2 |\tilde{U}_k|^2 \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i,j} \phi_i^*(\vec{r}) \phi_j(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \phi_j(\vec{r}') \tilde{U}_i^* U_i \tilde{U}_j^* U_j \right], \quad (2.35)
\end{aligned}$$

wobei die Indizes $i, j, k \in (n, l)$ aus jeweils einem Tupel der beiden Quantenzahlen bestehen, die die Mode charakterisieren. Zur besseren Übersicht ist in dieser Gleichung die Zeitabhängigkeit nicht explizit angegeben. Die erste Klammer in Gleichung 2.35 beschreibt dabei die Autokorrelationsfunktion der Dichteverteilung innerhalb eines m_F -Zustandes und die Zweite beschreibt die Kreuzkorrelation zwischen den beiden Zuständen mit entgegengesetztem Vorzeichen. Werden die Lösungen des 2D-Kastenpotential eingesetzt und wird berücksichtigt, dass nur die Moden mit den größten Instabilitätsraten relevant sind, so können verschiedene Fälle betrachtet werden.

- **1. Fall: Nur eine instabile Mode ohne Drehimpuls $l = 0$**

In diesem Fall gilt

$$\langle \hat{n}_{m_F}(\vec{r}) \hat{n}_{m_F}(\vec{r}') \rangle = \langle \hat{n}_{m_F}(\vec{r}) \hat{n}_{-m_F}(\vec{r}') \rangle \propto 2 \langle \hat{n}_{m_F}(\vec{r}) \rangle \langle \hat{n}_{m_F}(\vec{r}') \rangle. \quad (2.36)$$

Die Auto- und die Kreuzkorrelationsfunktion sind identisch und proportional zum Produkt der Dichteverteilungen. Es liegt daher keine Winkelabhängigkeit vor und das System bleibt symmetrisch.

- **2. Fall: Zwei instabile Moden mit entgegengesetztem Drehimpuls $l = \pm 1, \pm 2, \dots$**

In diesem Fall lässt sich die Korrelationsfunktion nicht mehr als Produkt der Dichten schreiben, sondern sie hat die Form

$$\langle \hat{n}_{m_F}(\rho, \phi) \hat{n}_{m_F}(\rho', \phi') \rangle \propto J_l^2(\beta_{n,l} \rho') \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos(2l(\phi' - \phi_0)) \right] e^{4|U_1| \rho \rho' / \hbar} \quad (2.37)$$

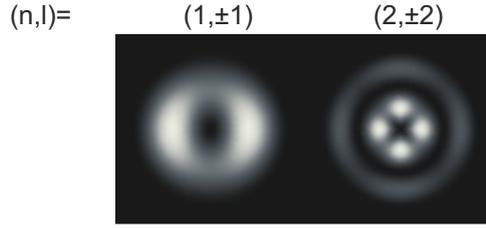


Abbildung 2.8: Simulierte Korrelationsfunktionen der $(1,\pm 1)$ und der $(2,\pm 2)$ Drehimpulsmoden nach Gleichung (2.37). Zur Erstellung der Abbildungen der Ortsvektor \vec{r} festgelegt worden.

Dabei sind die Ortsvektor (\vec{r}, \vec{r}') in Polarkoordinaten $\vec{r} = (\rho, 0)$ mit $\rho \equiv \frac{r}{R_{TF}}$ angegeben. Zudem ist der Vektor $\vec{r}' = (0, \phi_0)$ festgelegt worden. Die Kreuzkorrelation hat die gleiche Form wie die Autokorrelation. Für die $(1, \pm 1)$ - und die $(2, \pm 2)$ -Moden sind die Formen der Korrelationsfunktion in der Abbildung 2.8 dargestellt. Diese sind abhängig von dem räumlichen Winkel ϕ mit einem frei wählbaren Anfangswinkel ϕ_0 . Somit existieren ausgezeichnete Achsen der Dichteverteilungen und die räumliche Zylindersymmetrie ist gebrochen. Der Winkel ϕ_0 kann durch äußere Einflüsse oder durch Vakuumfluktuationen bestimmt werden. Im Fall der Vakuumfluktuationen sollte sich für die Verteilung des Orientierungswinkel eine Gleichverteilung ausbilden, da alle Orientierungen gleichberechtigt auftreten können.

Die Spinsymmetrie bleibt allerdings erhalten, da die Auto- und die Kreuzkorrelationen gleich sind. Dies hat zur Folge, dass die Orientierung der Mode der $|2, + 1\rangle$ -Atome identisch mit der Mode der Atome in $|2, - 1\rangle$ sein muss. Die entstehenden Dichteprofile in den Zeemanzuständen sind dementsprechend korreliert und es tritt keine lokale Struktur in der Magnetisierung auf, die die Spinsymmetrie brechen würde.

Eine zweite Möglichkeit, die Korrelation zwischen den Moden der beiden Spinzuständen und damit die Erhaltung der Spinsymmetrie zu erklären, wird im nächsten Abschnitt 2.4 erläutert. Dort wird die identische Orientierung der Dichteverteilung durch die Quetschung der Phasendifferenz $\phi^- = \phi_{+1} - \phi_{-1}$ erklärt.

- **3. Fall: Drei instabilste Moden am Beispiel für $(n,l) = (1,0), (1, + 1), (1, - 1)$**

In den Bereichen in denen die Instabilitätsraten benachbarter Moden in etwa gleich sind, wird die Dynamik nicht mehr nur durch eine einzige maximale Instabilitätsrate bestimmt. In dem Fall müssen also beide Moden berücksich-

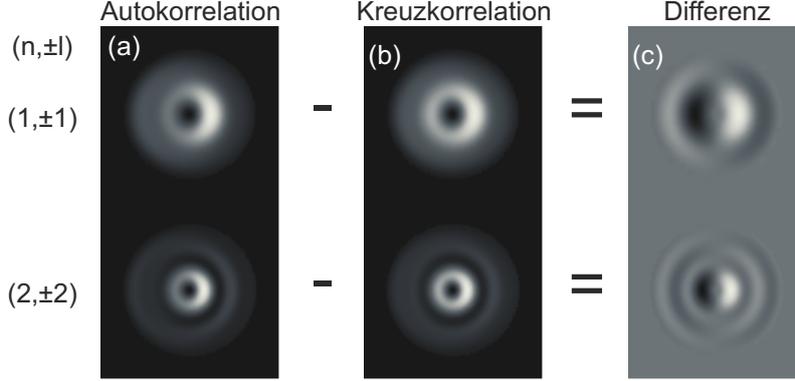


Abbildung 2.9: Auto- und Kreuzkorrelation für Überlagerungen benachbarter Moden ohne $(1,0)$, $(2,0)$ und mit Drehimpuls $(1, \pm 1)$, $(2, \pm 1)$ Drehimpulsmoden. (a) zeigt die Autokorrelation, (b) die Kreuzkorrelation und (c) die Differenz nach Gleichung (2.39)

tigt werden. Für die Autokorrelationsfunktion ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \langle \hat{n}_{m_F}(\rho, \phi) \hat{n}_{m_F}(\rho', \phi') \rangle &\propto 3J_0^2(\beta_{1,0}\rho') & (2.38) \\ &+ J_1^2(\beta_{1,1}\rho') \left[\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\phi' - \phi_0) \right] \\ &+ 2J_0(\beta_{1,0}\rho') J_1(\beta_{1,1}\rho') \cos(\phi - \phi_0). \end{aligned}$$

Der Einfachheit halber sind hier alle gemeinsamen Vorfaktoren weggelassen und ρ so gewählt, dass $J_0(\rho) = J_1(\rho)$ gilt. In dieser Gleichung tauchen zwei verschiedene Kosinusterme auf. Wobei der eine das doppelte Argument des anderen hat. Für die Dichteverteilung bedeutet dies eine axiale „links-rechts“ Asymmetrie zusätzlich zu der zylindrischen Asymmetrie. Für diesen Fall unterscheidet sich auch die Kreuzkorrelation von der Autokorrelation. Für die Differenz der beiden Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_{m_F, -m_F} &\equiv \langle \hat{n}_{m_F}(\rho, \phi) \hat{n}_{m_F}(\rho', \phi') \rangle - \langle \hat{n}_{m_F}(\rho, \phi) \hat{n}_{-m_F}(\rho', \phi') \rangle \\ &\approx J_0(\beta_{1,0}\rho) J_1(\beta_{1,1}\rho) J_0(\beta_{1,0}\rho') J_1(\beta_{1,1}\rho') \cos(\phi' - \phi_0) \\ &\quad \times \frac{(U_1 n_0)^2}{4\lambda_0^2} \frac{(E_{1,0} - E_{1,1})^2}{4\lambda_0^2} e^{4\lambda_0 t / \hbar} & (2.39) \end{aligned}$$

mit $\lambda = \sqrt{(U_1 n_0)^2 - (E_{n,l} + U_1 n_0 + q)^2}$. In Abbildung 2.9 sind die Auto- (a) und die Kreuzkorrelation (b), sowie die Differenz nach Gleichung (2.39) dargestellt. Der Unterschied führt dazu, dass sich Verschiedene räumlichen Dichteverteilungen zwischen den beiden Spinkomponenten ergeben, was gleichzusetzen ist mit einer Symmetriebrechung der Magnetisierung.

- **4. Fall: Verallgemeinerung des 3. Falls mehrerer instabiler Moden**

$$(n, l) = (n_1, \pm l_1), (n_2, \pm l_2)$$

Im Allgemeinen können benachbarte Moden unterschiedliche Drehimpulsquantenzahlen haben. In diesem Fall sieht die Verallgemeinerung der Differenz aus Gleichung (2.39) zwischen Auto- und Kreuzkorrelation folgendermaßen aus

$$\begin{aligned} \Delta_{m_F, -m_F} \approx & J_{l_1}(\beta_{n_1, l_1} \rho) J_{l_2}(\beta_{1, 1} \rho) J_{l_1}(\beta_{n_1, l_1} \rho') J_{l_2}(\beta_{n_2, l_2} \rho') \\ & \times \{ \cos [(l_1 - l_2)(\phi' - \phi_0)] + \cos [(l_1 + l_2)(\phi' - \phi_0)] \} \\ & \times \frac{(U_1 n_0)^2 (E_{1,0} - E_{1,1})^2}{8\lambda_0^2} \frac{1}{4\lambda_0^2} e^{4\lambda_0 t / \hbar} . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Für das Beispiel der Benachbarten $(2, 0)$ und $(2, \pm 1)$ -Moden ist diese Gleichung ebenfalls in Abbildung 2.9 gezeigt. Auch in diesem Fall ist erkennbar, dass Interferenzen zwischen unterschiedlichen räumlichen Moden zu einer Symmetriebrechung der Magnetisierung führen können. Diese Interferenz kann analog zu einem Schwebungssignal zwischen unterschiedlichen Drehimpulsen angesehen werden.

Durch diese Betrachtung der räumlichen Korrelationsfunktionen ist ersichtlich, dass das vorliegende System geeignet ist, um gezielt unterschiedliche Formen der Symmetriebrechung zu studieren.

2.4 Nichtklassische Zustände

Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt, kann der Prozess der Spindynamik als eine parametrische Verstärkung eines bestimmten Anfangszustands angesehen werden. Dieser Prozess existiert ganz analog auch in der Optik und ist daher wohlbekannt und ausgiebig untersucht (siehe z.B. [15]). Die dabei entstehenden Zustände haben die besondere Eigenschaft, dass sie verschränkt sind und dadurch die angesprochene Quetschung auftritt. Dies wird durch die spezielle Form des Hamiltonoperators (2.18) beziehungsweise durch dessen zugehörigen Zeitentwicklungsoperator $\hat{S}_2 \equiv e^{-iH_{n,t}/\hbar}$ hervorgerufen. Er hat die Form eines Zweimodenquetschoperators (engl. two-mode squeezing operator) $\hat{S}_2(\xi) = e^{-i\xi}$ mit dem Quetschparameter $\xi = H_{n,t}/\hbar$. Die in den Gleichungen (2.27) bis (2.33) berechneten Korrelationen sind eine direkte Konsequenz dieser Zweimodenquetschung. Die zugehörigen konjugierten Variablen sind die Superpositionen der in Gleichung (2.19) eingeführten

Quadraturen

$$\hat{X}_+^{(1,2)} = \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1,2)} + \hat{X}_{n,-l,-m_F}^{(1,2)} \quad (2.41)$$

$$= \frac{\left(e^{\pm i\theta_{n,l}} \hat{a}_{n,l} + e^{\mp i\theta_{n,l}} \hat{b}_{n,-l}^\dagger \right)}{\sqrt{2 \sin(2\theta_{n,l})}} + \frac{\left(e^{\mp i\theta_{n,l}} \hat{a}_{n,l}^\dagger + e^{\pm i\theta_{n,l}} \hat{b}_{n,-l} \right)}{\sqrt{2 \sin(2\theta_{n,l})}} \quad (2.42)$$

$$\hat{X}_-^{(1,2)} = \hat{X}_{n,l,m_F}^{(1,2)} - \hat{X}_{n,-l,-m_F}^{(1,2)} \quad (2.43)$$

Diese Zweimodenquadraturen erfüllen die Vertauschungrelationen $[\hat{X}_\pm^{(i)}, \hat{X}_\mp^{(j)}] = 0$ und $[\hat{X}_\pm^{(1)}, \hat{X}_\pm^{(2)}] = 2i$. Daraus ergeben sich, dass die Paare $\hat{X}_+^{(1)}, \hat{X}_+^{(2)}$ und $\hat{X}_-^{(1)}, \hat{X}_-^{(2)}$ jeweils konjugierte Operatoren darstellen. Nach Anwendung der Zeitentwicklung wird einer der zugehörigen Erwartungswerte $\langle (\hat{X}_\pm^{(1)})^2 \rangle = \pm \frac{1}{\sin(2\theta)} e^{-2|E_{n,l}|t/\hbar}$ gequetscht, während der andere $\langle (\hat{X}_\pm^{(2)})^2 \rangle = \pm \frac{1}{\sin(2\theta)} e^{+2|E_{n,l}|t/\hbar}$ gestreckt wird. Falls $\langle (\hat{X}_\pm^{(1,2)})^2 \rangle = 0$ gilt, ist die Varianz $(\Delta \hat{X}_\pm^{(i)})^2 = \langle (\hat{X}_\pm^{(i)})^2 \rangle$ gleich dem Erwartungswert. Daher ist die heisenbergsche Unschärferelation weiterhin für alle Zeiten erfüllt $(\Delta \hat{X}_\pm^{(1)})^2 (\Delta \hat{X}_\pm^{(2)})^2 = \frac{1}{\sin^2(2\theta)} \geq 1$.

2.4.1 Teilchenzahleigenfunktion des Zweimodenquetschoperators

In einem Experiment sind die gezeigten Zweimodenquadraturen in der Regel nicht zugänglich, so dass andere Observablen gefunden werden müssen, um den Zustand und dessen Eigenschaften zu vermessen. Eine gut messbare Größe ist die Teilchenzahl der verschiedenen Spinkomponenten. Die zugehörigen konjugierten Observablen sind die Phasen. Im Kapitel 2.2 ist gezeigt, wie sich die Erwartungswerte und Fluktuationen der einzelnen Teilchenzahlen und der Differenz verhalten. Da die Fluktuationen der Teilchenzahldifferenz verschwinden, sollten exakt gleich viele Teilchen in beiden Moden entstehen.

Die Teilchenzahlzustände werden als Fockzustände bezeichnet. Dementsprechend werden Zustände, die die Teilchenzahlen zweier Moden gemeinsam beschreiben, Zweimodenfockzustand genannt. Ein solcher wird im Allgemeinen als Tensorprodukt zweier Einmodenfockzustände $|n_a\rangle_{+1} \otimes |n_b\rangle_{-1}$ mit n_a -Teilchen in Mode +1 und n_b -Teilchen in Mode -1 dargestellt. Im Folgenden wird die verkürzte Schreibweise $|n_a, n_b\rangle_F$ verwendet.

Um die Eigenfunktion des Zweimodenquetschoperators zu erhalten wird dieser in der Basis der Zweimodenfockzustände betrachtet [15]. Dazu wird die Tatsache genutzt, dass der Vakuumzustand ein Eigenzustand des Vernichtungsoperator mit Eigenwert Null darstellt

$$\hat{a}_{n,l} |0,0\rangle_F = 0. \quad (2.44)$$

Außerdem wird durch Anwenden des Quetschoperators auf den Vakuumzustand der Zustand des gequetschten Vakuums erzeugt $|\xi\rangle_2 \equiv \hat{S}_2(E_{n,l}) |0,0\rangle_F$. Wird die

Gleichung (2.44) von links mit dem Quetschoperator multipliziert und dessen unitäre Eigenschaft verwendet, so erhält man die Eigenwertgleichung für den gequetschten Zustand

$$\hat{S}_2(\xi)\hat{a}_{n,l,m_F}\hat{S}_2^\dagger(\xi)\hat{S}_2(\xi)|0,0\rangle_F = \left(U_{n,l}\hat{a}_{n,l,m_F} + \tilde{U}_{n,l}\hat{a}_{n,l,-m_F}^\dagger\right)|\xi\rangle_2 = 0 \quad , \quad (2.45)$$

mit $U_{n,l}$ und $\tilde{U}_{n,l}$ gemäß Gleichung 2.23. Unter der Voraussetzung, dass der Vakuumzustand in der Lösung enthalten sein muss ergibt sich für den Eigenzustand mit der Normierungskonstante C_{00} ,

$$|\xi\rangle_2 = C_{00} \sum_m \left(\frac{U_{n,l}}{\tilde{U}_{n,l}}\right)^m |m,m\rangle_F \quad (2.46)$$

$$= \frac{(\epsilon_{n,l} + q)^2}{E_{n,l}^2} \frac{1}{\coth^2(E_{n,l}t/\hbar)} \times \sum_m \left[\frac{\epsilon_{n,l} + q}{\Omega} + i \frac{E_{n,l}}{\Omega} \coth(E_{n,l}t/\hbar) \right]^m |m,m\rangle_F \quad (2.47)$$

Wie aus der anschaulichen Erklärung aus Abschnitt 2.1.1 und den Überlegungen zur Zeitenentwicklungen für die Teilchenzahldifferenz (2.27) und deren Standardabweichung (2.31) erwartet, tauchen in der Summe nur Zustände $|m,m\rangle_F$ auf, bei denen sich in beiden Moden die gleiche Teilchenzahl befindet. Ein solcher Zustand wird als Zwillingsockzustand (engl. twin Fock state) bezeichnet. In einem Experimentzyklus werden immer die Teilchenzahlen in den Moden gemessen. Für den Zustand bedeutet dies, dass er immer auf einen Zwillingsockzustand projiziert wird. Diese Zustände haben kein klassisches Pendant, da sie nicht als Produkte von Einteilchenzuständen dargestellt werden können. Diese bieten daher die Möglichkeit neuartiger Anwendungen.

2.4.2 Phaseneigenfunktion des Zweimodenquetschoperators

Die Phasen der m_F -Zustände bilden wie erwähnt die konjugierten Observablen der Teilchenzahlen. Soll jetzt der gequetschte Zustand in der Basis der Eigenoperatoren der Phasen dargestellt werden, so muss beachtet werden, wie diese Phasenoperatoren eingeführt werden. Es gibt eine Vielzahl von Publikationen über dessen Existenz und Vorschläge, wie ein solcher Operator aussehen könnte (siehe z.B. [15]). An dieser Stelle wird sich auf die Veröffentlichungen von Barnett und Pegg [113–115] und deren Definition eines hermiteschen Phasenoperators beschränkt. Sie beschreiben den Phasenoperator auf einem $(s + 1)$ -dimensionalen Zustandsraum. In der Basis der Fock-Zustände ist der Phasenzustand gegeben durch

$$|\theta_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^s e^{in(\theta_m)} |n\rangle \quad . \quad (2.48)$$

Hierbei sind die $s + 1$ Eigenwerte der Phasenzustände $\theta_m = \theta_0 + 2\pi m/(s + 1)$ äquidistant verteilt und beschränken sich auf ein Intervall von θ_0 bis $\theta_0 + 2\pi$ verteilt, wobei θ_0 eine Referenzphase darstellt. Der hermitesche Phasenoperator ist dann gegeben durch

$$\hat{\phi} = \sum_{m=0}^s \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m| \quad (2.49)$$

Die Vertauschungsrelation $\langle p | [\hat{\phi}_\theta, \hat{n}] | p \rangle = -i(1 - (s + 1) |\langle p | \theta_0 \rangle|^2)$ muss unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, dass sie auf einen beliebigen Zustand $|p\rangle$ angewendet wird. Der Term $|\langle p | \theta_0 \rangle|^2$ stellt dabei die Wahrscheinlichkeit dar, dass die Phase der Zustandes dem Wert θ_0 entspricht. Im Kontinuumslimites $s \rightarrow \infty$ kann dies auch durch $P(\theta_0)2\pi/(s + 1)$ ausgedrückt werden, wobei $P(\theta_0)$ der Wahrscheinlichkeitsdichte der und $2\pi/(s + 1)$ den Abständen der Zustände entspricht. Aus der Vertauschungsrelation ergibt sich die Unschärferelation $\Delta n \Delta \hat{\theta}_\theta \geq \frac{1}{2} |1 - 2\pi P(\theta_0)|$ zwischen dem Phasen- und dem Teilchenzahloperator. Eine Besonderheit ist, dass sie von der Wahrscheinlichkeit $P(\theta_0)$ der gewählten Anfangsphase θ_0 des 2π -Intervalls abhängt. Dies wird verständlich, wenn eine periodische Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\theta)$ auf dem 2π -Intervall mit einem schmalen Maximum betrachtet wird, wie in der Abbildung 2.10 verdeutlicht. Ist θ_0 so gewählt (vgl. Abb 2.10 (a)), dass das Maximum in der Mitte des Intervall liegt, so ergibt sich eine geringe Standardabweichung. Befindet sich der Anfang des Intervalls hingegen auf dem Maximum der Verteilung (vgl. Abb 2.10 (b)), so ist die Verteilung an den Rändern des Intervalls am größten, wodurch sich eine große Standardabweichung ergibt. Bei der Verwendung des vorgestellten Phasenoperators muss daher das Intervall mit Bedacht gewählt werden. Nähere Informationen darüber können aus den Referenzen [114, 115] erhalten werden.

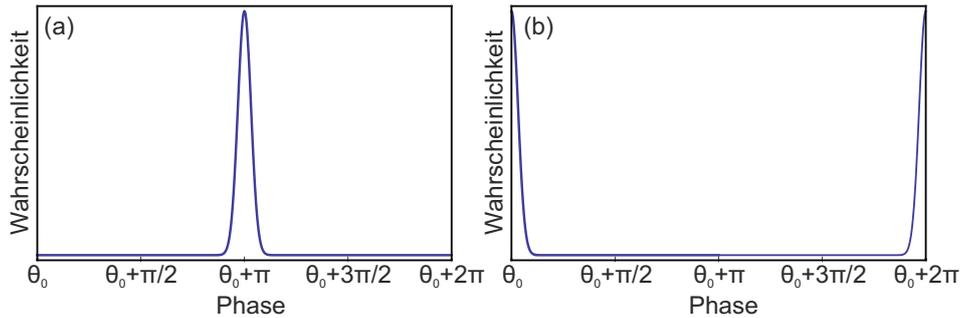


Abbildung 2.10: Diese Graphik soll verdeutlichen, dass die Standardabweichung der Phase von der Wahl des Intervalls abhängt.

Werden Phasensummen oder -differenzen gebildet, so erstreckt sich der Bereich auf ein 4π Intervall was zu weiteren Komplikationen in der Interpretation der Wahrscheinlichkeitsdichte führen kann. Werden die Summe oder Differenz relativ zu einer dritten Phase gemessen, so ist es natürlich dies in dem 4π Intervall zu

betrachten. Interessiert hingegen nur die Summe oder die Differenz zwischen den beiden Phasen, so ist es sinnvoller den Bereich auf ein 2π Intervall zu beschränken, um die Interpretation zu vereinfachen. Die Wahl eines 4π Intervalls kann ansonsten zu Artefakten führen, die für die Korrelation der relativen Phasen irrelevant sind. Wie so etwas aussehen kann, wird anhand der Abbildung 2.11 verdeutlicht. Hier ist gezeigt, wie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Summe zweier unkorrelierter Phasen auf unterschiedlichen Intervallen aussehen. Im Fall des 4π -Intervalls (vgl. Abb 2.11 (a)), ergibt sich ein Maximum bei 2π , welches physikalisch gesehen kein Bedeutung hat. Wird die Summe modulo 2π bestimmt (vgl. Abb 2.11 (b)) so ergibt sich ein Gleichverteilung, wie sie für unkorrelierte Phasen erwartet wird.

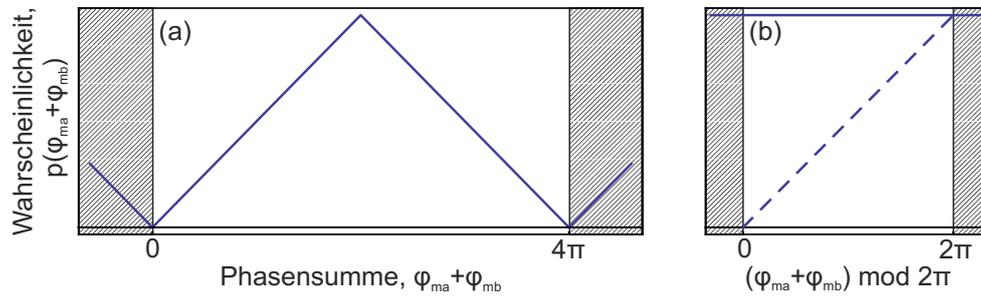


Abbildung 2.11: Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Summe zweier unkorrelierter Phasen ϕ_{ma} und ϕ_{mb} (a) auf einem 4π - und (b) auf einem 2π -Intervall (nach Ref. [113]).

Unter Beachtung der oben genannten Punkte, kann der in Gleichung (2.46) angegebene Eigenzustand, durch die Entwicklung der Fockzustände in der Basis der Einzelmodenphasenzuständen angegeben werden

$$|\xi\rangle_2 = \frac{C_{00}}{s+1} \sum_m \sum_{ma} \sum_{mb} \left(\frac{U_{n,l}}{\tilde{U}_{n,l}} e^{i(E_{n,l} - (\phi_{ma} + \phi_{mb}))} \right)^m |\phi_{ma}, \phi_{mb}\rangle. \quad (2.50)$$

Mit dieser Darstellung der gequetschten Zustände können analog zu [113] die Erwartungswerte und Fluktuationen der Phasensumme ϕ^+ und der Differenz ϕ^- ermittelt werden. Da die Gleichung (2.50) explizit von der Phasensumme nicht aber von der Differenz abhängt, ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte der Phasendifferenz eine Konstante über den gesamten 2π -Bereich. Die Differenz ist somit vollkommen unbestimmt und die Standardabweichung nimmt den größtmöglichen Wert $\Delta\phi^- = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ an. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Phasensumme hingegen ist abhängig vom Eigenwert der Phasensumme selbst und dem Quetschparameter $E_{n,l}$. Der Erwartungswert und dessen Standardabweichung werden eine Funktion dieses Quetschparameters. Für große $E_{n,l}$ beziehungsweise im Falle großer Zeiten mit dem vorgestellten Hamiltonoperator (2.18) verschwindet die Standardabweichung der Phasensumme $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta\phi^+ = 0$. Die Summe der beiden Phasen ist somit perfekt bestimmt.

Im Kapitel 2.3 ist gezeigt, dass im Fall einer besetzten Fallenmode mit Drehimpuls, die Autokorrelationsfunktion der individuellen Dichte identisch mit der Kreuzkorrelation der relativen Dichten der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände ist. Die Orientierungen sind somit gleich. Erst Mischungen zwischen mehreren Fallenmoden können zu unterschiedlichen Orientierungen führen. Mit der Erkenntnis, dass die Phasensumme der beiden Zustände gequetscht ist, kann das Auftreten der identischen Orientierungen auf eine andere Art interpretiert werden. Die ausgerichteten Dichteverteilungen entstehen aufgrund der Überlagerungen aus Vortex- und Antivortexmode. Der Phasenunterschied dieser beiden Moden gibt die Orientierung der Verteilung vor. Wird eine Fallenmode mit $l \neq 0$ angeregt, so müssen aufgrund der Drehimpulserhaltung die Vortexmode ($l=|l|$) in $|2,1\rangle$ mit der Antivortexmode $l = -|l|$ in $|2, -1\rangle$ in der Phasensumme gequetscht. Das gleiche gilt für die Vortexmode in $|2, -1\rangle$ mit der Antivortexmode in $|2,1\rangle$. Es gilt also

$$\phi_{l,m_F} + \phi_{-l,-m_F} = \xi \quad (2.51)$$

$$\phi_{l,-m_F} + \phi_{-l,m_F} = \xi \quad (2.52)$$

Die Phasensummen sind in beiden Fällen identisch zu dem Quetschoperator ξ und es gilt somit

$$\phi_{l,m_F} + \phi_{-l,-m_F} = \phi_{l,-m_F} + \phi_{-l,m_F} \quad (2.53)$$

Durch einfaches Umstellen der Gleichung lässt sich zeigen, dass die Phasendifferenzen der Vortex- und der Antivortexmode für den $|2,1\rangle$ Zustand gleich ist zu der Differenz des $|2, -1\rangle$ Zustandes

$$\phi_{l,m_F} - \phi_{-l,m_F} = \phi_{l,-m_F} - \phi_{-l,-m_F} \quad (2.54)$$

Daraus folgt, dass die Orientierungen der Dichteverteilung beider Zeemanzustände identisch ist. Erst die Überlagerung mit benachbarten Fallenmoden kann dazu führen, dass die Phasendifferenz der beiden Zustände nicht mehr übereinstimmt.

2.5 Die verallgemeinerte Blochkugel

In den vorangegangenen Abschnitten ist gezeigt, dass die Ausgangszustände der Spindynamik nichtklassische Eigenschaften aufweisen können. Diese sind besonders interessant, weil sie neuartige Anwendungen ermöglichen, die mit klassischen Systemen nicht realisierbar sind. Beispiele dafür sind die Quantenkryptographie oder die Quanteninformationsverarbeitung. Die reduzierten Fluktuationen einer Observable gequetschter Zustände können dazu verwendet werden, die Sensitivität von Interferometern zu verbessern. Dies wird beispielsweise derzeit an den Gravitationswellendetektoren mit gequetschtem Licht erfolgreich eingesetzt [29].

Der durch die Spindynamik entstehende Zustand ist in Abschnitt 2.4 als Superposition von Zwillings-Fock-Zuständen (2.46) identifiziert worden. In einen Experimentzyklus bildet sich daher immer ein Zwillings-Fock-Zustand mit exakt der gleichen Teilchenzahl in beiden m_F -Zuständen. Die Verteilung der Gesamtteilchenzahl

ist dabei durch die Wahrscheinlichkeitsdichte des gequetschten Zustandes (2.46) gegeben und unterliegt starken Schwankungen. Werden solche Zwillingsockzustände als Eingangszustände von Interferometern verwendet, so kann eine Sensitivität erreicht werden, die nicht durch das Schrotrauschen $1/\sqrt{n^+}$ limitiert ist, welches das fundamentale Limit klassischer Interferometer darstellt.

Um zu verstehen, wie sich ein Interferometer mit einem bestimmten Eingangszustand verhält ist es sinnvoll, dies in einer anderen Darstellung zu betrachten, in der der Zustand und die Operationen einer Interferometersequenz einfach dargestellt werden können. Die folgende Beschreibung bezieht sich im wesentlichen auf die Veröffentlichungen [26, 27, 106] sowie auf das Buch [15].

Die Grundlage ist die Äquivalenz zwischen der $SU(2)$ - und der $SO(3)$ -Gruppe, welche zu der verallgemeinerten Blochkugel führt. Damit können die Zustände und die Operationen einer Interferometersequenz elegant beschrieben werden. Diese Darstellung der $SO(3)$ -Gruppe wird in der Mathematik auch als Schwingerdarstellung bezeichnet. In ihr kann der Zustandsoperator als reeller dreidimensionaler Vektor dargestellt werden. Die Operationen auf diesen Zuständen werden als Rotationen des sogenannten Blochvektors \vec{J} um bestimmte Achsen angesehen, wie in Abbildung 2.12 dargestellt. Er setzt sich aus Kombinationen der Erzeuger- und Vernichteroperatoren folgendermaßen zusammen,

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \hat{J}_x \\ \hat{J}_y \\ \hat{J}_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a} \\ -i(\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{b}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b} \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Hierbei werden die Indizes für die Fallenmoden weggelassen, da das System zunächst nur für den Fall betrachtet werden soll, dass nur eine Fallenmode besetzt ist. Der Eigenwert der Komponente $J_z = \langle \hat{n}^- \rangle / 2$ beschreibt die Teilchenzahldifferenz zwischen dem beiden Zeemanzuständen. Die Größen $J_{x,y}$ beschreiben die Phasendifferenz. Das Betragsquadrat $|\vec{J}|^2 = \frac{n_1+n-1}{2} \left(\frac{n_1+n-1}{2} + 1 \right)$ des Vektors ist verbunden mit der Gesamtteilchenzahl n^+ des Systems.

Unter der Voraussetzung, dass Teilchenzahlerhaltung gilt, liegt \vec{J} immer auf der Oberfläche einer Kugel mit festem Radius. Diese Kugel wird in der Literatur als verallgemeinerte Blochkugel bezeichnet. Sie erlaubt eine anschauliche Visualisierung der quantenmechanischen Zustände und Operationen. Die Projektion des Vektors auf die z -Achse gibt die Teilchenzahldifferenz an und die Projektion auf die xy -Ebene ergibt die Phasendifferenz. An den Polen befindet sich das System also in genau einem der $|2, \pm 1\rangle$ Zustände. Auf dem Äquator liegt dementsprechend eine Überlagerung aus beiden vor.

Der Vektor \vec{J} ist analog zu einem quantenmechanischen Drehimpuls und erfüllt die Kommutatorrelationen $[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k$, mit dem Permutationssymbol ε_{ijk} . Aus dieser Vertauschungrelation folgt dann die Unschärferelation $\Delta \hat{J}_x \Delta \hat{J}_y \geq \frac{1}{2} |\langle \hat{J}_z \rangle|$.

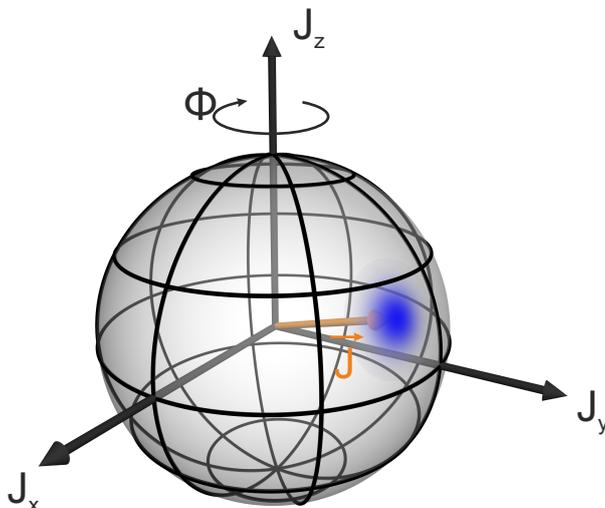


Abbildung 2.12: Geometrische Darstellung des verallgemeinerten Blochvektors auf der Blochkugel

Damit kann eine semiklassische Version der heisenbergschen Unschärferelation für die Teilchenzahl- und die Phasendifferenz $\Delta(n_1 - n_{-1})\Delta(\phi_1 - \phi_{-1}) \geq 1$ abgeleitet werden. Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel wird hier die Phasendifferenz als klassische Variable betrachtet, wodurch sich die Rechnung vereinfacht. Diese semiklassische Herleitung kann im Anhang A.2 nachgeschlagen werden.

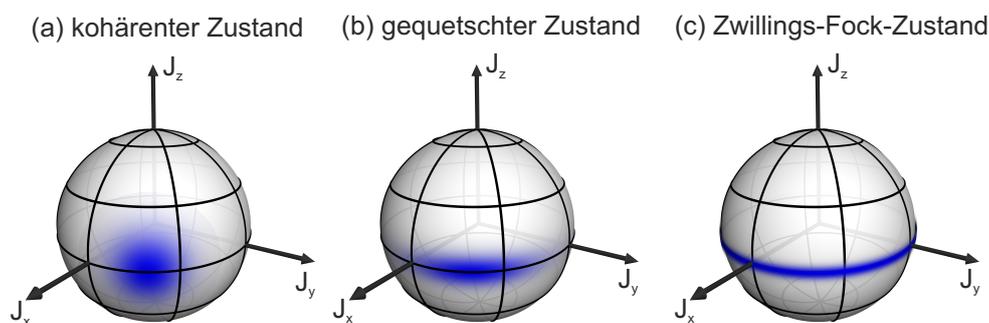


Abbildung 2.13: Blochkugeln mit Bereich der Unschärfe für (a) einen kohärenten, (b) einen gequetschten und (c) einen Zwillings-Fock-Zustand.

Auf der verallgemeinerten Blochkugel kann diese Unschärfe durch einen Bereich auf der Oberfläche dargestellt werden, in dem der Vektor enden kann. In Abbildung 2.12 ist die Unschärfe durch die blaue Scheibe dargestellt. Weitere Beispiele sind in der Abbildung 2.13 gezeigt. Abbildung 2.13 (a) zeigt einen kohärenten Zu-

stand mit $\Delta(n^-) = \Delta(\phi^-)$. Die Unschärfe beider konjugierter Variablen ist gleich groß und es ergibt sich eine kreisförmige Scheibe. Die Abbildung 2.13 (b) stellt ein Beispiel eines gequetschten Zustandes mit $\Delta(n^-) > \Delta(\phi^-)$ dar. Hierbei ist der Bereich der Unschärfe durch eine Ellipse gegeben, deren große Halbachse parallel zur J_z -Richtung des Koordinatensystems zeigt. Ein Zwilling-Fock-Zustand mit unbestimmter Phasendifferenz $\Delta(\phi^-) = \pi/\sqrt{3}$ und einer Teilchenzahldifferenz von Null ($\Delta(\phi^-) = \pi/\sqrt{3}$, $\Delta(n^-) = 0$) ist in Abbildung 2.13 (c) dargestellt. Darin ist die Unschärfe durch einen infinitesimal dünnen Ring entlang des Äquators gegeben.

Da \hat{J}^2 und \hat{J}_z vertauschen bilden sie eine geeignete Basis, um die Zustände darzustellen². Ein beliebiger Zwei-Moden-Fock-Zustand mit den Eigenwerten n_a und n_b bekommt dann die Form

$$|n_a, n_b\rangle_F = |j, \mu\rangle_z \quad (2.56)$$

mit den Eigenwerten $j(j+1)$ von \hat{J}^2 und μ von \hat{J}_z . Die Operatoren $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ sind die Leiteroperatoren für μ , es gilt,

$$J_\pm |j, \mu\rangle_z = \sqrt{(j \mp \mu)(j \pm \mu + 1)} |j, \mu \pm 1\rangle_z \quad , \quad (2.57)$$

Die Größen j und μ hängen auf folgende Weise mit den Eigenwerten der Fockbasis zusammen,

$$j = \frac{n_a + n_b}{2} = \frac{n^+}{2} \quad (2.58)$$

$$\mu = \frac{n_a - n_b}{2} = \frac{n^-}{2} \quad . \quad (2.59)$$

Der Zwillingfockzustand erhält in dieser Basis die Form,

$$\left| \frac{n^+}{2}, \frac{n^+}{2} \right\rangle_F = |j, 0\rangle_z \quad . \quad (2.60)$$

Handelt es sich um einen Zustand, bei dem nur einer der beiden Zeemanzustände besetzt ist, dann sieht er in der neuen Basis folgendermaßen aus,

$$|n^+, 0\rangle_F = |j, j\rangle_z \quad \text{bzw.} \quad |0, n^+\rangle_F = |j, -j\rangle_z \quad . \quad (2.61)$$

In diesem Fall zeigt der Blochvektor auf den oberen der beiden Pole. Dieser Zustand wird im weiteren als Einzel-Fock-Zustand bezeichnet. Der gequetschte Zustand wie aus Abbildung 2.13 (b), kann beispielsweise durch

$$|\psi_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |j, 0\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |j, 1\rangle_z \quad . \quad (2.62)$$

dargestellt werden [26].

Die Darstellung der unterschiedlichen Zustände in dieser verallgemeinerten Blochbaseis erlaubt es, die einzelnen Operationen eines Interferometers und dessen Wirkung auf den jeweiligen Eingangszustand zu veranschaulichen.

²die Wahl von J_z als Quantisierungsachse ist dabei nicht zwingend notwendig, sie erweist sich allerdings im Hinblick auf ein Interferometer als hilfreich

2.6 Interferometer mit nichtklassischen Zuständen

Der typische Ablauf einer interferometrischen Messung wird anhand der Skizze in Abbildung 2.14 am Beispiel einer sogenannten Ramseysequenz vorgestellt. Als erstes wird der Eingangszustand auf einen Strahlteiler gegeben, welcher die beiden Eingänge miteinander koppelt. Anschließend erfolgt die freie Phasenentwicklung. Dazu werden die beiden Ausgänge des ersten Strahlteilers über unterschiedliche Pfade geleitet. In diesem Bereich können sich die Phasen der beiden Pfade aufgrund äußerer Einflüsse unterschiedlich entwickeln. Diese sind es, die in der Regel gemessen werden sollen. Dabei kann es sich beispielsweise um Weglängendifferenzen [23], Rotationen [19, 39] unterschiedliche Larmorfrequenzen im Magnetfeld oder der den Einfluss der Gravitation handeln. Nach der freien Phasenentwicklung werden die beiden Pfade an einem zweiten Strahlteiler wieder kombiniert, an dessen Ausgängen sich das Interferometersignal ergibt. Dieses hängt von der Phasendifferenz der beiden Pfade ab und gibt damit Rückschlüsse auf den externen Einfluss.

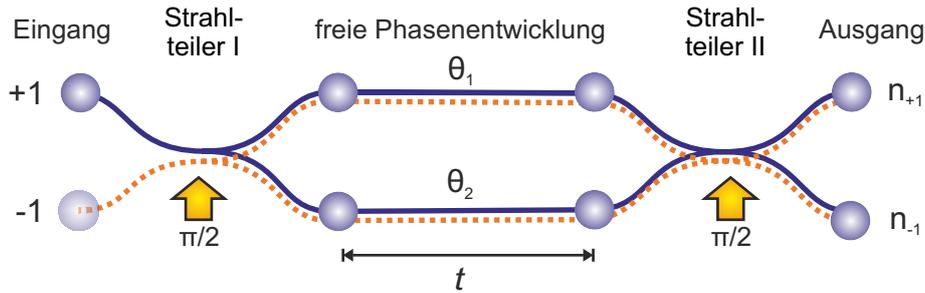


Abbildung 2.14: Schematische Skizze einer typischen Interferometersequenz. An einem Strahlteiler wird der Eingangszustand auf zwei Pfade verteilt. Bevor diese an einem zweiten Strahlteiler wieder zusammengeführt werden, erfolgt eine freie Phasenentwicklung. Aus dem Ausgangszustand lässt sich auf die Phasendifferenz $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ zurückrechnen.

Zur Beschreibung der Sequenz können die einzelnen Schritte (erster Strahlteiler, freie Phasenentwicklung und zweiter Strahlteiler) als Operationen angesehen werden, die aus jeweils zwei Eingängen zwei Ausgänge generieren. In zweiter Quantisierung lassen sich solche Transformationen allgemein durch Anwenden einer unitären 2×2 -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{out} \\ \hat{b}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin \frac{\beta}{2} e^{i(\alpha-\gamma)/2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha-\gamma)/2} & \cos \frac{\beta}{2} e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{b}_{in} \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

beschreiben. Die Größen α , β und γ stellen dabei die Eulerwinkel dar. Eine Sequenz aufeinanderfolgender Operationen lässt sich somit durch Multiplikationen der jeweiligen Matrizen der einzelnen Transformationen beschreiben. Aufgrund der Beziehungen zwischen der $SU(2)$ - und der $SO(3)$ -Gruppe ergeben sich analoge

Transformationen im Bild der verallgemeinerten Blochkugel, die als Rotationen des Blochvektors \vec{J} um bestimmte Drehachsen interpretiert werden können. Im Heisenbergbild erhält die Transformation aus Gleichung (2.63) die Form,

$$\vec{J}_{out} = e^{i\alpha\hat{J}_z} e^{i\beta\hat{J}_y} e^{i\gamma\hat{J}_z} \vec{J}_{in} e^{-i\alpha\hat{J}_z} e^{-i\beta\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z} \quad (2.64)$$

Im Schrödingerbild ergibt sich dementsprechend,

$$|\psi_{out}\rangle = e^{i\alpha\hat{J}_z} e^{i\beta\hat{J}_y} e^{i\gamma\hat{J}_z} |\psi_{in}\rangle \quad . \quad (2.65)$$

In der Abbildung 2.15 sind solche Rotationen auf der Blochkugel graphisch dargestellt. In Abbildung 2.15 (a) ist eine Drehung um die J_z -Achse zu sehen und In Abbildung 2.15 (b) wird um J_y rotiert. Es kann allerdings auch um beliebige Achsen gedreht werden.

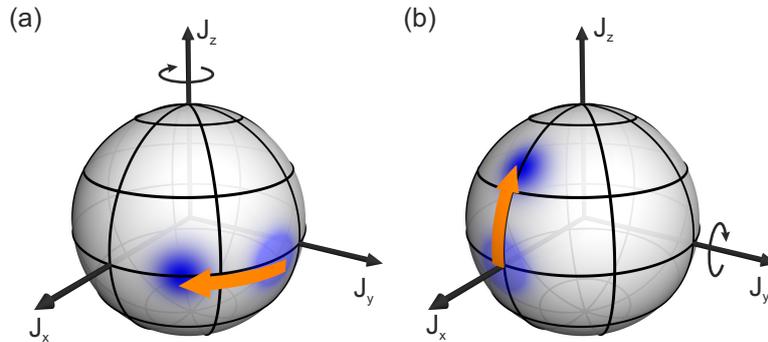


Abbildung 2.15: Rotationen auf der Blochkugel. (a) Drehung um die J_z -Achse. (b) Drehung um J_y -Achse.

2.6.1 Quantenmechanische Beschreibung des Strahlteilers

Wie gezeigt, ist der Strahlteiler ein zentrales Element des Interferometers. Seine Aufgabe besteht darin, die Eingänge miteinander zu koppeln [106, 116, 117]. Dadurch wird ihnen eine definierte Phasendifferenz aufgeprägt. Dies geschieht, indem der erste Strahlteiler die Teilchenzahldifferenz der Eingänge auf die Differenz der Phasen projiziert. Der zweite Strahlteiler kehrt diesen Vorgang wieder um. Er projiziert die Phasendifferenz nach der freien Entwicklung wieder auf eine Teilchenzahldifferenz am Ausgang des Interferometers.

Für die theoretische Beschreibung des Strahlteilers bieten sich mehrere äquivalente Möglichkeiten. Allen ist gemein, dass aus Gründen der Energieerhaltung ein Phasenunterschied von π zwischen der reflektierten und dem transmittierten Welle auftreten muss. Bei der ersten Variante, dem symmetrischen Strahlteiler wird

dieser Phasenunterschied gleichmäßig auf beide Wellen aufgeteilt [15]. Die Winkel aus Gleichung (2.63) sind dann gegeben durch $\alpha = -\gamma = \pi/2$ und $\beta = \pm\phi$. In der Literatur ist dieser am gebräuchlichsten. Die Gleichung (2.63) erhält dann die Form,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{out} \\ \hat{b}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \pm i \sin \frac{\phi}{2} \\ \pm i \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{b}_{in} \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

Dies entspricht einer Rotation des verallgemeinerten Blochvektors um die x -Achse mit dem Winkel $\pm\phi$

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x^{out} \\ \hat{J}_y^{out} \\ \hat{J}_z^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \pm \sin \phi \\ 0 & \mp \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x^{in} \\ \hat{J}_y^{in} \\ \hat{J}_z^{in} \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

In der zweiten weniger geläufige theoretische Beschreibung des asymmetrischen Strahlteilers tritt der π -Phasensprung in der Reflexion auf. Die Winkel werden dann zu $\alpha = \gamma = 0$ und $\beta = \pm\phi$. Die Gleichungen für die Vernichter und den verallgemeinerten Blochvektor werden dann zu,

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{out} \\ \hat{b}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\phi}{2} & \mp \sin \frac{\phi}{2} \\ \pm \sin \frac{\phi}{2} & \cos \frac{\phi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{b}_{in} \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x^{out} \\ \hat{J}_y^{out} \\ \hat{J}_z^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \pm \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \mp \sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x^{in} \\ \hat{J}_y^{in} \\ \hat{J}_z^{in} \end{pmatrix}, \quad (2.69)$$

was einer Rotation von $\vec{\hat{J}}$ um die y -Achse mit dem Winkel ϕ entspricht. Prinzipiell kann ein Strahlteiler auch durch Drehung um eine beliebige Achse in der xy -Ebene realisiert werden.

In allen Fällen bestimmt der Winkel ϕ wie stark die Eingänge miteinander gekoppelt werden. Für einen Winkel von $\phi = \pm\pi/2$ ergibt sich beispielsweise ein 50/50 Strahlteiler. Dies kann auch ausgedrückt werden als,

$$\hat{J}_z^{out} = e^{\pm i \frac{\pi}{2} \hat{J}_{(x,y)}} \hat{J}_z^{in} e^{\mp i \frac{\pi}{2} \hat{J}_{(x,y)}}, \quad (2.70)$$

beziehungsweise mit $|\psi_{in}\rangle = |j, \mu\rangle_z$,

$$|\psi_{out}\rangle = e^{\pm i \frac{\pi}{2} \hat{J}_{(x,y)}} |j, \mu\rangle_z. \quad (2.71)$$

Für das Ausgangssignal $\langle \hat{J}_z^{out} \rangle$ ist es also unerheblich, um welche Achse in der xy -Ebene gedreht wird.

2.6.2 Die freie Phasenentwicklung

Nach dem ersten Strahlteiler kommt die freie Entwicklung der Phasen θ_1 und θ_2 . Die Phasendifferenz, die dabei auftritt ist abhängig von der zu messenden Größe. Diese Operation lässt sich im Bild der zweiten Quantisierung durch eine 2×2 -Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{out} \\ \hat{b}_{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{b}_{in} \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

darstellen. Im Bild des verallgemeinerten Blochvektors, ist dies gleichbedeutend mit einer Rotation um die z -Achse mit einem Winkel, der der Phasendifferenz $\theta = \theta_2 - \theta_1$ entspricht,

$$\begin{pmatrix} \hat{J}_x^{out} \\ \hat{J}_y^{out} \\ \hat{J}_z^{out} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{J}_x^{in} \\ \hat{J}_y^{in} \\ \hat{J}_z^{in} \end{pmatrix} . \quad (2.73)$$

Diese Transformation kann auch dargestellt werden als,

$$\vec{J}^{out} = e^{i\theta \hat{J}_z} \vec{J}^{in} e^{-i\theta \hat{J}_z} , \quad (2.74)$$

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-i\theta \hat{J}_z} |\psi_{in}\rangle . \quad (2.75)$$

2.6.3 Das Ausgangssignal des Interferometers

Das nächste Element ist wiederum ein Strahlteiler, der die beiden Pfade wieder zusammenführt und die Phasendifferenz auf das Ausgangssignal projiziert. Das Ausgangssignal des Interferometers für einen beliebigen Eingangszustand lässt sich aus der Hintereinanderausführung der obigen Elemente zusammensetzen,

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} e^{-i\theta \hat{J}_z} e^{-i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} |\psi_{in}\rangle = e^{-i\pi \hat{J}_y} e^{-i\theta \hat{J}_z} |\psi_{in}\rangle \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^{out} &= e^{-i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} e^{-i\theta \hat{J}_z} e^{-i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} \vec{J}^{in} e^{i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} e^{i\theta \hat{J}_z} e^{i\frac{\pi}{2} \hat{J}_x} |\psi_{in}\rangle \\ &= e^{-i\pi \hat{J}_y} e^{-i\theta \hat{J}_z} \vec{J}^{in} e^{i\pi \hat{J}_y} e^{i\theta \hat{J}_z} . \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die Sequenz entspricht demnach einer Drehung mit der zu messenden Phasendifferenz θ und einem Phasensprung von π um die y -Achse. Dies wird anhand der Abbildung 2.16 verdeutlicht. Hier ist die komplette Interferometersequenz im Bild der Blochkugel für einen Einzel-Fock-Zustand $|j, j\rangle_z$ (Abb. 2.16(b)) nach Gleichung (2.61) und für den Zwillings-Fock-Zustand $|j, 0\rangle_z$ (Abb. 2.16(c)) graphisch dargestellt. Der erste Strahlteiler rotiert die Zustände hier mit einem Winkel von $\pi/2$ um die x -Achse. Während der freien Phasenentwicklung kommt es zur Rotation um die z -Achse mit dem Winkel $\theta_1 - \theta_2$. Der dritte Strahlteiler dreht den Zustand nochmals um $\pi/2$ um die x -Achse. Die gesamte Sequenz entspricht somit einer Drehung

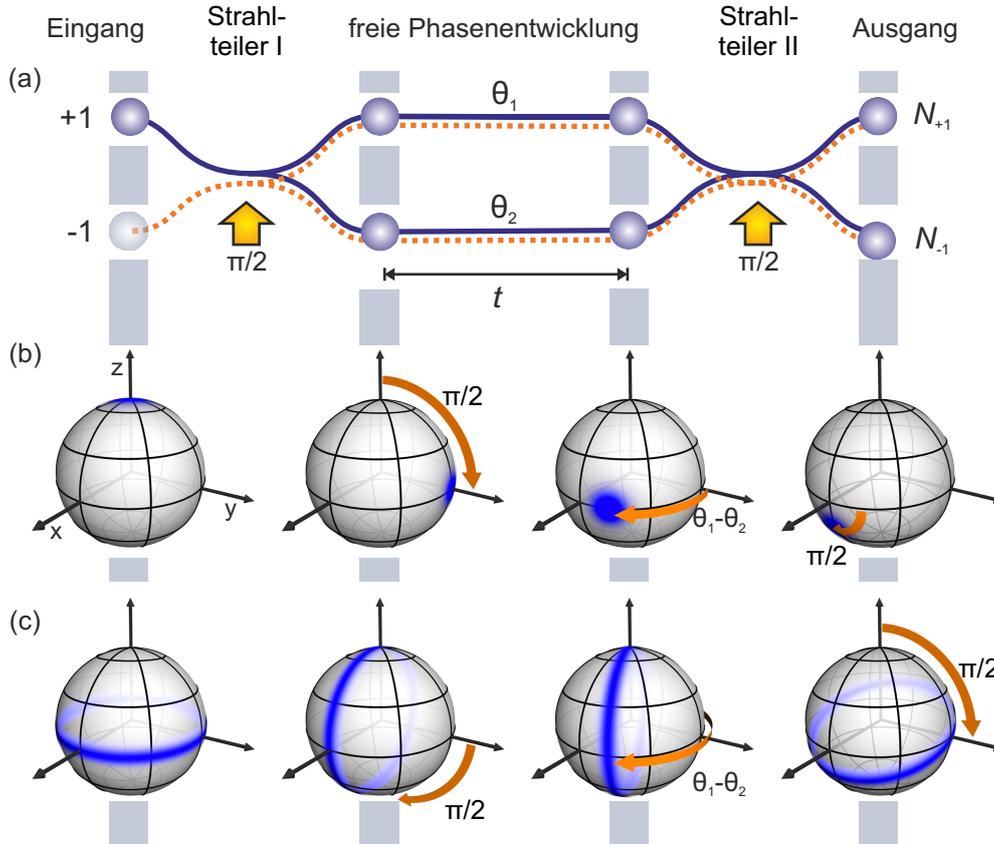


Abbildung 2.16: Verlauf der Interferometersequenz auf der Blochkugel für eine kohärenten und einen Zwillingen-Fock-Zustand. In (a) ist noch einmal der schematische Ablauf gezeigt. Darunter ist gezeigt wie sich diese auf den (b) Einzel- und (c) auf den Zwillingen-Fock-Zustand auswirkt.

um die y -Achse mit einem Wert von $-(\theta_1 - \theta_2) - \pi$. Sie ist somit identisch mit einer Strahlteileroperation aus Gleichung (2.69) mit dem Winkel $\phi = -(\theta_1 - \theta_2) - \pi$.

In der Literatur taucht der Phasensprung um π aus Gleichung (2.76) in der Regel nicht auf,

$$|\psi_{out}\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{-i\theta\hat{J}_z} e^{i\pi\hat{J}_x} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} |\psi_{in}\rangle \quad (2.78)$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{-i\theta\hat{J}_z} e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} |\psi_{in}\rangle \quad (2.79)$$

$$= e^{-i\theta\hat{J}_y} |\psi_{in}\rangle \quad (2.80)$$

Die Theorie wird ohne den Phasensprung übersichtlicher und kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Folgenden vernachlässigt werden, da diese lediglich mit der Definition des betrachteten Ausgangszustand zusammenhängt. Die Ergebnisse, für das Ausgangssignal und die interferometrische Sensitivität sind davon unbeeinflusst und somit identisch. Eine volle Interferometersequenz lässt sich in

dem Fall durch eine Rotation des Blochvektors um die y -Achse mit dem Winkel $\phi = \theta_1 - \theta_2 \equiv \theta$ darstellen.

Dies ermöglicht eine Messung der Sensitivität eines Zustandes, unabhängig von äußeren Einflüssen. Es reicht, das Ausgangssignals eines einzelnen Strahlteilers zu betrachten, der den Eingangszustand mit einem bestimmten Winkel θ um die y -Achse dreht (vgl. Abschnitt 2.6.1).

Dies hat zum einen den Vorteil, dass nur eine Operation angewendet werden muss, und sich somit der Einfluss des Strahlteilers selbst reduziert. Ein weiterer Vorteil ist die weitgehende Entkopplung von äußeren Einflüssen. Soll die interferometrische Sensitivität eines Zustandes vermessen werden, so ist es ratsam dies unabhängig von äußeren Parametern vorzunehmen. Bei einer typischen Interferometersequenz ist dies allerdings nicht möglich, da in der Regel eine Phase gemessen wird, die stark von einer externen Größe abhängt. Schließlich sollen in der Regel diese externen Größen genau bestimmt werden. Dieser Einfluss tritt bei einmaligem Anwenden des Strahlteilers ohne eine freie Phasenentwicklung nicht auf. Daher kann allein die Abhängigkeit des Zustandes auf eine kontrollierte Phase betrachtet werden.

Bevor die Sensitivität eines Zustandes betrachtet werden kann, muss erst geklärt werden, wie die Phasendifferenz anhand der Teilchenzahldifferenz des Interferometerausgangs bestimmt werden kann. In dem Abschnitt 2.5 ist bereits erwähnt, dass die Projektion \hat{J}_z des Blochvektors auf die z -Achse der halben Differenz der Teilchenzahlen der beiden Zustände entspricht. In einem Experiment ist dies eine gut bestimmbare Größe, da lediglich Teilchenzahlen gemessen und Differenzen gebildet werden müssen. Hängt diese Größe zudem noch von der Phase selbst ab, so eignet sie sich zu deren Bestimmung.

Für einen gegebenen Eingangszustand und einer gegebenen Phase ergibt sich dann eine spezifische Verteilung der Messgröße \hat{J}_z , aus der die Phase und deren Fehler bestimmt werden können. Dazu müssen die charakteristischen Größen ermittelt werden, die die Verteilung beschreiben. Diese sind beispielsweise gegeben durch den Erwartungswert $\langle \hat{J}_z \rangle$ und dessen Varianz $(\Delta \hat{J}_z)^2 = \langle \hat{J}_z^2 \rangle - \langle \hat{J}_z \rangle^2$. Der Erwartungswert der Verteilung kann über die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_z \rangle &= \langle \psi_{\text{out}} | \hat{J}_z | \psi_{\text{out}} \rangle \\ &= \langle \psi_{\text{in}} | e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{i\theta\hat{J}_z} e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} \hat{J}_z e^{i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} e^{i\theta\hat{J}_z} e^{+i\frac{\pi}{2}\hat{J}_x} | \psi_{\text{in}} \rangle \\ &= -\sin\theta \langle \psi_{\text{in}} | \hat{J}_x | \psi_{\text{in}} \rangle + \cos\theta \langle \psi_{\text{in}} | \hat{J}_z | \psi_{\text{in}} \rangle \end{aligned} \quad (2.81)$$

bestimmt werden. Um die zugehörige Varianz bestimmen zu können, wird zusätzlich noch das Quadrat des Mittelwertes benötigt,

$$\begin{aligned} \langle \hat{J}_z^2 \rangle &= \langle \psi_{\text{out}} | \hat{J}_z^2 | \psi_{\text{out}} \rangle \\ &= \sin^2\theta \langle \psi_{\text{in}} | \hat{J}_x^2 | \psi_{\text{in}} \rangle + \cos^2\theta \langle \psi_{\text{in}} | \hat{J}_z^2 | \psi_{\text{in}} \rangle \\ &\quad - \sin\theta \cos\theta \langle \psi_{\text{in}} | \hat{J}_x \hat{J}_z + \hat{J}_z \hat{J}_x | \psi_{\text{in}} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (2.82)$$

Wie zu erkennen, hängen die Erwartungswerte von der Phase θ und der Wahl der Eingangszustände $|\psi_{in}\rangle$ ab. Um zu sehen, inwieweit sich diese Größen eignen, werden sie für den Einzel-Fock-Zustand, den speziellen gequetschten Zustand aus Gleichung (2.62) und den Zwillings-Fock-Zustand exemplarische berechnet.

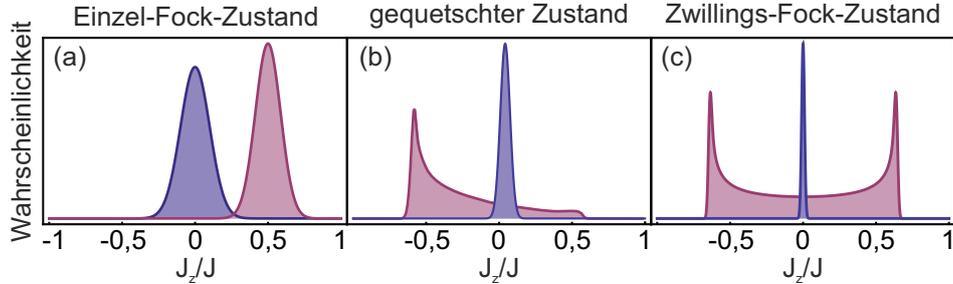


Abbildung 2.17: Wahrscheinlichkeitsverteilungen für unterschiedliche Eingangszustände. (a) Einzel-Fock-Zustand; (b) gequetschter Zustand; (c) Zwillings-Fock-Zustand

Ausgangssignal des Einzel-Fock-Zustands

Als erstes soll der Einzel-Fock-Zustand $|j, j\rangle_z$ aus Gleichung 2.61 betrachtet werden. Hierbei werden alle Teilchen auf einen der beiden Eingänge des Strahlteilers gegeben. An dem anderen Eingang liegt dementsprechend der Vakuumzustand vor. Auf der Blochkugel zeigt der Vektor auf einen der beiden Pole. Die Unschärfe des Zustandes ist gegeben durch eine kreisförmige Scheibe analog zu Abbildung 2.13 (a). Dieser Zustand entspricht einem klassischen Zustands und wird verwendet, um das Ausgangssignal des klassischen Interferometers zu beschreiben.

Wird $|\psi_{in}\rangle = |j, j\rangle_z$ in die Gleichungen (2.81) und (2.82) eingesetzt, so ergeben sich die folgenden Beziehungen der relevanten Größen

$$\langle \hat{J}_z \rangle_{kl} = j \cos \theta \quad (2.83)$$

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{kl} = \frac{1}{2} j \sin^2 \theta + j^2 \cos^2 \theta \quad (2.84)$$

$$\sigma_{\hat{J}_z, kl} = \sqrt{\frac{j}{2}} \sin \theta \quad . \quad (2.85)$$

Die zugehörige Verteilungen für zwei verschiedene Winkel sind in Abbildung 2.17 (a) dargestellt. Es ergeben sich Gaußverteilungen, mit winkelabhängigen Mittelwerten und Standardabweichungen. Wird der Mittelwert in Abhängigkeit von θ dargestellt, so ergibt sich eine theoretische Kurve, wie sie in Abbildung 2.18 (a) gezeigt ist. Die graue Fläche entspricht dem Wert der ersten Standardabweichung. Um den Verlauf besser mit den anderen Eingangszustände vergleichen zu können ist der Graph um $\pi/2$ verschoben. Anhand dieser Kurve lässt sich die Phasendifferenz des Interferometers beziehungsweise die eingestellte Phase des Strahlteilers

ermitteln. Die Genauigkeit dieser Bestimmung wird durch das Rauschen limitiert. Dies wird in dem Graph darunter deutlich, in dem eine vergrößerte Darstellung des Nulldurchgangs der Kurve in dem Intervall $\{\pi + 0,1; \pi - 0,1\}$ gezeigt ist. Die Standardabweichung in $\sigma_{\hat{J}_{z,kl}}$ sorgt für einen Fehler in der Phasenbestimmung. Wie später gezeigt wird, stellt die Sensitivität die mit diesem Zustand erreicht werden kann, ein unteres Limit für die Interferometrie mit „klassischen“ unkorrelierten Eingangszuständen dar.

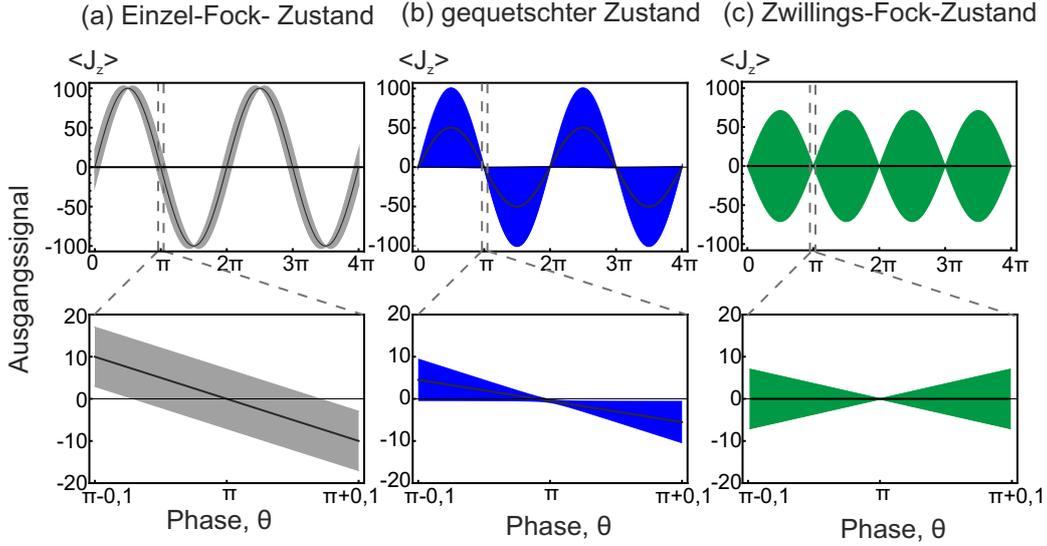


Abbildung 2.18: Theoretische Ausgangssignale $\langle \hat{J}_z \rangle$ der Interferometersequenz in Abhängigkeit der Phasendifferenz θ der unterschiedlichen Eingangszustände mit $j = 100$. Die farbige Fläche entspricht jeweils dem Bereich der Standardabweichung $\sigma_{\hat{J}_z}$.

Ausgangssignal des gequetschten Zustands

Die Betrachtung des Ausgangssignals eines gequetschten Zustandes wird am Beispiel des speziellen Eingangszustand $|\psi_{in}\rangle = |\psi_s\rangle$ aus Gleichung (2.62) erläutert. Für diesen Fall sind die relevanten Größen gegeben durch

$$\langle \hat{J}_z \rangle_s = -\frac{1}{2} \sqrt{j(j+1)} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (2.86)$$

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle_s = \frac{1}{2} \left[j(j+1) - \frac{1}{2} \right] \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \quad (2.87)$$

$$\sigma_{\hat{J}_z, s} = \frac{1}{2} \sqrt{[j(j+1) - 1] \sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \quad (2.88)$$

Für diesen Eingangszustand sind die Verteilungen unterschiedlicher Winkel in Abbildungen 2.17 (b) dargestellt. Es zeigt sich, dass die Breite der Verteilung für

kleine Winkel schmaler ist, als für die Sequenz mit nur einem Eingang. Für große Winkel nimmt die Breite und damit die Standardabweichung des Mittelwertes zu.

Für das Ausgangssignal des Interferometer in Abbildung 2.18 (b) bedeutet dieses Verhalten, dass der blaue Bereich, der die Standardabweichung darstellt vom Winkel abhängt. Im Bereich um $\pi/2$ ist $\sigma_{\hat{J}_{z,s}}$ und damit der Fehler der Winkelbestimmung besonders groß. Allerdings erreicht die Standardabweichung im Bereich um π Werte, die unterhalb der des Einzel-Fock-Zustandes liegen. Wie in der vergrößerten Darstellung erkennbar. Die Genauigkeit für die Bestimmung der Phasendifferenz ist in diesem Bereich demnach erhöht.

Zwillings-Fock-Zustand

Der nächste Zustand, der betrachtet werden soll ist der Zwillings-Fock-Zustand $|n^+/2, n^+/2\rangle$, bei dem exakt die gleiche Anzahl von Teilchen an den beiden Eingängen des ersten Strahlteilers vorliegt. In der Schwingerdarstellung ist er durch $|j, 0\rangle_z$ gegeben. Dieser Zustand entspricht dem Ring entlang des Äquators auf der Blochkugel aus Abbildung 2.13 (c). Der Erwartungswert des Ausgangssignals verschwindet $\langle \hat{J}_z \rangle_{ZF} = 0$, und kann daher nicht zur Bestimmung der Phase verwendet werden. Dies wird deutlich, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Abbildung 2.17 (c) betrachtet werden. Die Verteilungen entsprechen einer Projektion des gedrehten Rings auf der Blochkugel. Dabei ist interessant, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte am Rand der jeweiligen Verteilung am größten ist. Dies bedeutete, dass beispielsweise nach einer Rotation um $\pi/2$, bevorzugt alle Atome nur in einem der beiden Zustände zu finden sind. Dies ist auch aus den rechten Graphen in Abbildung 2.18 erkennbar. Der Mittelwert verschwindet und die Standardabweichung (grüne Fläche) ändert sich deutlich in Abhängigkeit der Phase.

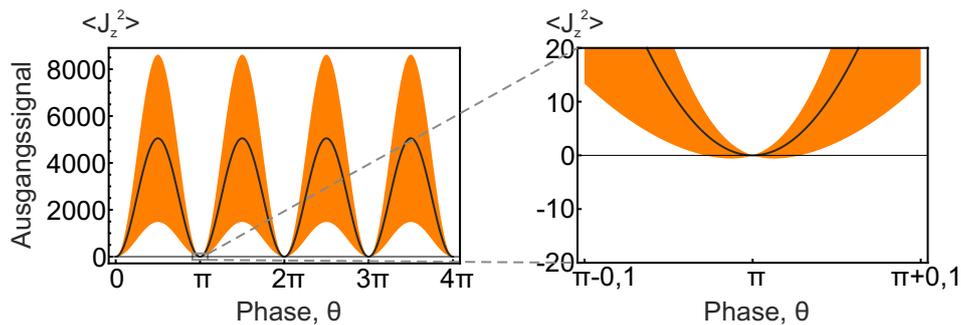


Abbildung 2.19: Theoretisches Ausgangssignal $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ des Interferometers mit dem Zwillings-Fock-Zustand.

Statt des Mittelwerts, kann also die Standardabweichung beziehungsweise die Varianz zur Bestimmung Phase θ verwendet werden. Da $\langle \hat{J}_z \rangle_{ZF}^2 = 0$ gilt, entspricht

die Varianz $(\sigma_{\hat{J}_z, ZF})^2 = \langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ dem Erwartungswert des Quadrats von \hat{J}_z, ZF

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF} = \frac{1}{2} j(j+1) \sin^2 \theta \quad (2.89)$$

$$= \frac{(n^+)^2 + 2n^+}{8} \sin^2 \theta \quad . \quad (2.90)$$

Dies kann so interpretiert werden, dass über das Rauschen von $\langle \hat{J}_z \rangle_{ZF}$ die Phase θ gemessen werden kann.

Um die Varianz der Varianz $(\Delta_{\hat{J}_z, ZF}^2)^2 = \langle \hat{J}_z^4 \rangle_{ZF} - \langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}^2$ von $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ zu bestimmen, wird weiterhin der Erwartungswert

$$\langle \hat{J}_z^4 \rangle_{ZF} = \frac{1}{8} \sin^4 \theta [2j^2 (j+1)^2 + j(j+1)(j-1)(j+2)] \quad (2.91)$$

$$+ \sin^2 \theta \cos^2 \theta [j(j+1)] \quad (2.92)$$

benötigt. Dieser ergibt sich für den allgemeinen Fall analog zu Gleichung (2.82). Wie das Ausgangssignal $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ aussieht, ist in der Abbildung 2.19 dargestellt. Auch hier zeigt die Vergrößerung, dass die Fluktuationen im Bereich um π geringer sind, als die des klassischen Einzel-Fock-Zustandes.

In der Abbildung 2.20 sind zum Vergleich alle drei Ausgangssignale im Intervall $\{\pi - 0,1; \pi + 0,1\}$ aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Fluktuationen im Fall des Zwillings-Fock-Zustands noch geringer ausfallen, als die des gequetschten Zustandes $|\psi_s\rangle$. Die Phasensensitivität eines Interferometers sollte dementsprechend am besten sein, wenn von den hier vorgestellten Zuständen ein Zwillingsfockzustand verwendet wird.

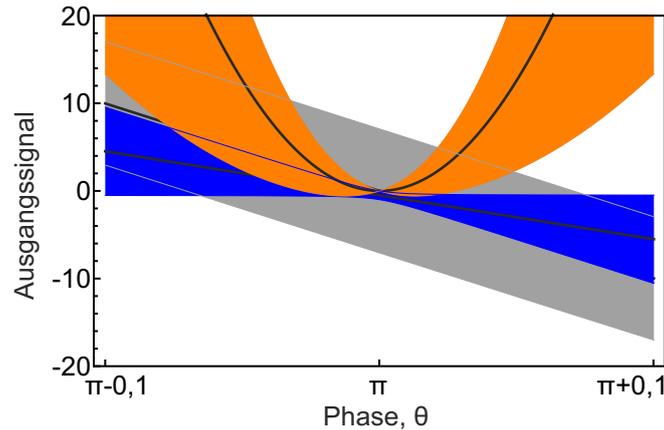


Abbildung 2.20: Vergleich der theoretischen Ausgangssignale des Einzel-Fock (grau) ($\langle \hat{J}_z \rangle_{kl}$), des gequetschten (blau) ($\langle \hat{J}_z \rangle_s$) und des Zwillings-Fock-Zustand (orange) ($\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$) im Intervall $\{\pi - 0,1; \pi + 0,1\}$.

2.7 Die interferometrische Sensitivität

Im Allgemeinen gibt die Sensitivität eines Interferometers an, wie präzise die Phase θ gemessen werden kann. Oder, bildlich gesprochen, wie groß der minimale Abstand zweier Messungen unterschiedlicher Phase sein darf, damit beide eindeutig unterscheidbar sind. Mit Hilfe der Abbildung 2.21 wird diese Anschauung klar. Hier sind der Einzel-Fock und der Zwillings-Fock-Zustand für zwei verschiedene Drehungen auf der Blochkugel und deren Projektionen auf die J_z -Achse dargestellt. In der Blochkugel des gedrehten Einzel-Fock-Zustandes (a) ist erkennbar, dass der minimale Abstand unterschiedlicher Phasen größer sein muss als für den Zwillings-Fock-Zustand (b). Als Faustregel gilt, dass zwei überlagerte Gaußverteilungen voneinander unterscheidbar sind, wenn der Abstand der beiden Maxima mindestens dem Wert der Standardabweichung entspricht. Für den Zwillings-Fock-Zustand kann eine solche Regel, nicht so direkt aufgestellt werden. Dennoch ist ersichtlich, dass sich bereits bei kleinen Phasenunterschieden die Verteilungen deutlicher voneinander unterscheiden, als es für den Einzel-Fock-Zustand der Fall ist. Wie dieser anschauliche Begriff der Sensitivität theoretisch beschrieben werden kann, wird im Folgenden gezeigt.

Eine Möglichkeit zur Bestimmung der Sensitivität ist es, den Fehler in der Phasenbestimmungen über die Gaußsche Fehlerfortpflanzung zu berechnen. Dabei wird der Fehler $\sigma S(\theta)$ des Messsignals $\langle S(\theta) \rangle$ auf den Fehler $\sigma\theta$ der zu messenden Größe θ übertragen. Die Formel dafür lautet,

$$\sigma\theta = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sigma S(\theta)}{\frac{d}{d\theta} \langle S(\theta) \rangle} . \quad (2.93)$$

Der Faktor $1/\sqrt{p}$ berücksichtigt dabei die Reduktion des Fehlers, bei Mittelung über p unabhängige Messungen. Die Ableitung des Interferometersignals im Nenner berücksichtigt, wie stark sich das Signal mit der Phase ändert. Dies kann sich leicht anhand der Graphen in Abbildung 2.22 klargemacht werden. Hier wird das Signal des Einzel-Fock-Zustandes für unterschiedliche Steigungen und gleicher Standardabweichung miteinander verglichen. Die reduzierte Steigung kann beispielsweise durch Teilchenzahlverluste hervorgerufen werden. Die eingezeichneten Linien verdeutlichen, dass der Fehler der Phasenbestimmung bedeutend größer wird, wenn sich die Steigung verringert, das Rauschen aber gleich bleibt.

Die Sensitivität des Einzel-Fock-Zustandes lässt sich mit Hilfe der Ergebnisse aus (2.83) und (2.85) bestimmen. Das Ausgangssignal ist dabei gegeben durch $S(\theta) = \langle J_z \rangle_{kl}$. Einsetzen der Größen in die Gleichung (2.93) ergibt den Fehler der Phasenbestimmung,

$$\Delta\theta_{kl} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\sigma \hat{J}_{z,kl}}{\frac{d}{d\theta} \langle \hat{J}_z \rangle_{kl}} = \frac{1}{\sqrt{p} \sqrt{n^+}} , \quad (2.94)$$

wobei verwendet wird, dass $j = N/2$ gilt. Dieses Ergebnis stellt das klassische Limit dar, welches auch als Schrorauschlimit der Sensitivität bezeichnet wird. Das

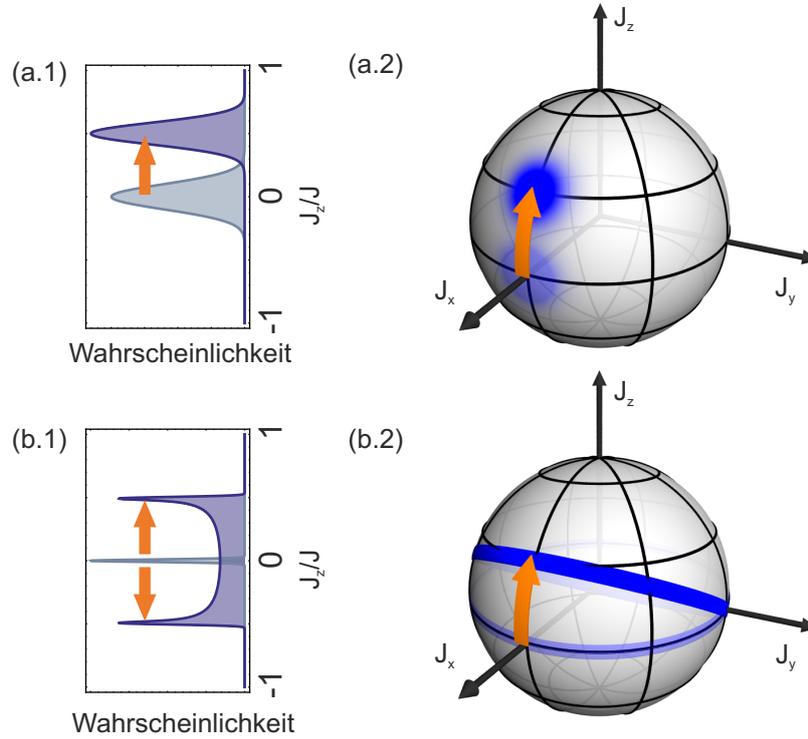


Abbildung 2.21: Bildliche Darstellung der Sensitivität. (a.1) Projektion und (a.2) Blochkugel eines Einzel-Fock-Zustand. (b.1) Projektion und (b.2) Blochkugel eines Zwillings-Fock-Zustand. Je geringer der Winkelunterschied ist, für den zwei Projektionen noch voneinander unterschieden werden können, desto sensitiver ist der Zustand.

untere Limit für die Sensitivität eines klassischen Interferometers skaliert somit mit der Wurzel der Teilchenzahl $\propto 1/\sqrt{n^+}$.

Dieses Limit der Sensitivität kann mit Hilfe gequetschter Zustände und dem Zwillings-Fock-Zustand übertroffen werden. Für den vorgestellten gequetschten Zustand $|\psi_s\rangle$ ergibt sich eine Sensitivität von

$$\Delta\theta_s = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\sigma_{\hat{J}_{z,s}}}{\frac{d}{d\theta} \langle \hat{J}_z \rangle_s} \quad (2.95)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{p} \frac{[j(j+1) - 1] \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{[\sqrt{j(j+1)} \cos \theta + \sin \theta]^2}} \quad (2.96)$$

Dieser Wert ist abhängig von der Phase selbst und hat Minima bei $\theta = (0,1,2,3,\dots)\pi$. Die Sensitivität lautet dann

$$\Delta\theta_s = \sqrt{\frac{1}{p} \frac{4}{n^+(n^+ + 1)}} \quad (2.97)$$

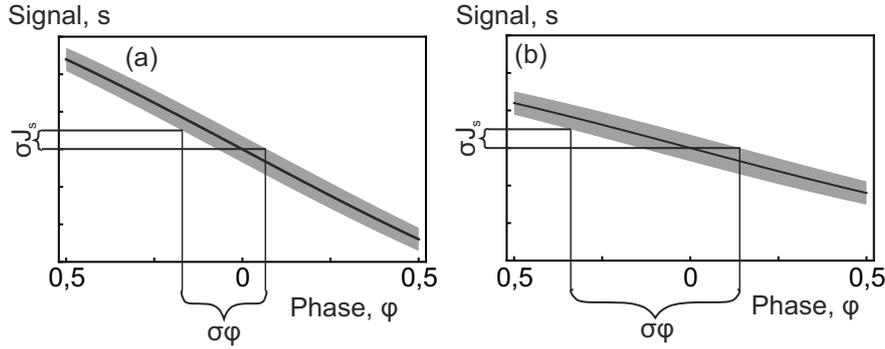


Abbildung 2.22: Anschauliche Darstellung wie die Sensitivität von der Steigung abhängt. (a) Für eine große Steigung ist der Fehler bedeutend kleiner gegenüber der Kurve (b) mit einer geringeren Steigung.

Für große Teilchenzahlen $n^+ \gg 1$ kann diese Gleichung genähert werden durch

$$\sigma_{\theta_s} = \sqrt{\frac{1}{p} \frac{2}{n^+}} \quad (2.98)$$

Die Sensitivität des hier vorgestellten gequetschten Zustandes ist also im Idealfall um den Faktor $\frac{2}{\sqrt{n^+}}$ besser, gegenüber einem vergleichbaren Einzel-Fock-Zustand.

Durch die Verwendung des Zwillingsdockzustandes kann dieser Wert nochmals verbessert werden. Wie erwähnt ist das Ausgangssignal in diesem Fall gegeben durch den Erwartungswert $S(\theta) = \langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ des Quadrats. Mit Hilfe der Gleichungen (2.89) und (2.91) kann die Phasenunsicherheit bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\Delta\theta_{ZF} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\Delta \hat{J}_{z,ZF}^2}{\frac{d}{d\theta} \langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}} \quad (2.99)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{p} \frac{[j(j+1) - 2] \tan^2 \theta + 4}{8j(j+1)}} \quad (2.100)$$

Auch hier hängt die Sensitivität von der Phase selbst ab. Die Minima liegen ebenfalls bei den Werten $\theta = (0,1,2,3,\dots)\pi$. Der kleinste Wert der Phasensensitivität lautet somit

$$\Delta\theta_{ZF} = \sqrt{\frac{2}{p} \frac{1}{n^+(n^+ + 2)}} \quad (2.101)$$

Wird auch diese Gleichung 2.101 für große Teilchenzahlen $n^+ \gg 1$ genähert, so ergibt sich

$$\Delta\theta_{ZF} = \sqrt{\frac{2}{p} \frac{1}{n^+}} \quad (2.102)$$

Dieses Ergebnis ist bei gleicher Teilchenzahl wiederum bedeutend geringer als im klassischen Fall. Gegenüber dem gequetschten Zustand ist die Sensitivität nochmal

den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ besser. Das Schrotrauschlimit kann also mit Hilfe von gequetschten und Zwillings-Fock-Zuständen unterboten werden. Die Abhängigkeit $\propto (n^+)^{-1}$ wird als Heisenberglimit bezeichnet und stellt das fundamentale untere Limit für die interferometrische Messunsicherheit dar.

2.7.1 Bayes'sche Analyse und Fischerinformation

Die Bestimmung von θ mit Hilfe der unterschiedlichen Erwartungswerte $\langle \hat{J}_z \rangle_{kl}$ und $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ zeigt bereits, dass die Nutzung von Zwillings-Fock-Zustände prinzipiell geeignet ist, um Interferometrie mit einer Sensitivität unterhalb des Standardquantenlimits zu betreiben. Allerdings erstreckt sich dabei der Bereich erhöhter Sensitivität nicht über das gesamte Winkelintervall, sondern beschränkt sich auf einen kleinen Teil. Diese Beschränkung kann durch eine Form der Bayes'schen Analyse aufgehoben werden. Im Gegensatz zu der obigen Analyse, in der nur bestimmte Kenngrößen der Projektion auf \hat{J}_z verwendet werden, um θ zu bestimmen, nutzt die Bayes'sche Analyse die komplette Form der Verteilung [118].

Im Fall des Einzel-Fock-Zustandes ändert sich nichts, da hier die Verteilung bereits vollständig durch den Mittelwert und die Varianz beschrieben wird. Im Fall des Zwillings-Fock-Zustandes hingegen ist dies nicht der Fall. Die charakteristische Verteilung mit den größten Wahrscheinlichkeiten, Werte zu messen, die an den äußeren Punkten (vgl. Abb. 2.17) liegen, enthält mehr Information über die Phase als allein aus der Breite $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ gewonnen werden kann. Die Bayes'sche Analyse nutzt genau diesen Punkt aus. Das Grundprinzip dieser Methode wird im Folgenden kurz skizziert, wobei der Veröffentlichung von [27, 106] gefolgt wird. Eine ausführliche Darlegung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Bei der Bayes'schen Analyse wird betrachtet, wie sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung bei Variation eines Parameter verhält. Anschließend wird für eine gegebene Messung die wahrscheinlichste Verteilung ermittelt, mit der dann die Phase bestimmt wird. Zunächst werden dazu die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(\mu|\theta, j)$ benötigt. Diese geben die Wahrscheinlichkeit an, bei einer Messung den Wert μ für die Projektion auf \hat{J}_z zu messen, wenn die Phase θ und die Gesamtteilchenzahl j gegeben sind.

Um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, kann der Erwartungswert aus Gleichung (2.81) in Form von Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden,

$$\langle \hat{J}_z \rangle = \sum_{\mu, \mu'} \langle \psi_{\text{out}} | j, \mu \rangle_{zz} \langle j, \mu | \hat{J}_z | j, \mu' \rangle_{zz} \langle j, \mu' | \psi_{\text{out}} \rangle \quad (2.103)$$

$$= \sum_{\mu} |{}_z \langle j, \mu | \psi_{\text{out}} \rangle|^2 \mu \quad (2.104)$$

Die einzelnen bedingten Wahrscheinlichkeiten sind demnach gegeben durch,

$$P(\mu|\theta, j) = |{}_z \langle j, \mu | \psi_{\text{out}} \rangle|^2 \quad . \quad (2.105)$$

Im Falle des Zwillings-Fock-Zustandes haben sie die folgende Form

$$\begin{aligned} P(\mu|\theta, j) &= |{}_z\langle j, \mu | e^{i\theta \hat{J}_y} | j, 0 \rangle_z|^2 \\ &= \frac{(j - \mu)!}{(j + \mu)!} [P_j^\mu(\cos \theta)]^2, \end{aligned} \quad (2.106)$$

und hängen demnach von den zugeordneten Legendrepolynome $P_j^\mu(\cos \theta)$ ab. Wie diese Verteilungen aussehen ist in Abbildung 2.23 für unterschiedliche Werte von j und θ gezeigt. Es fällt auf, dass immer nur jeder zweite Wert von μ eine endliche Wahrscheinlichkeit aufweist. Für die Werte dazwischen ist sie Null. Je nachdem ob die Teilchenzahlen an den Eingängen gerade oder ungerade sind, können auch an den Ausgängen nur gerade oder ungerade Teilchenzahlen gemessen werden. Dies ist auf Quanteninterferenzeffekte der korrelierten Teilchen zurückzuführen. Im Fall von $n^+ = 2 \rightarrow j = 1$ und $\theta = \pi/2$ wie in der Abbildung 2.23 ganz unten links gezeigt, ist dies der bekannte Hong-Ou-Mandel Effekt [119] bei dem auf jeden Eingang eines Strahlteilers nur ein Photon gegeben wird. Hinter dem Strahlteiler werden beide Photonen mal am ersten mal zweiten Ausgang detektiert. Es kommt nie vor, dass je ein Photon an jedem Ausgang vorliegt.

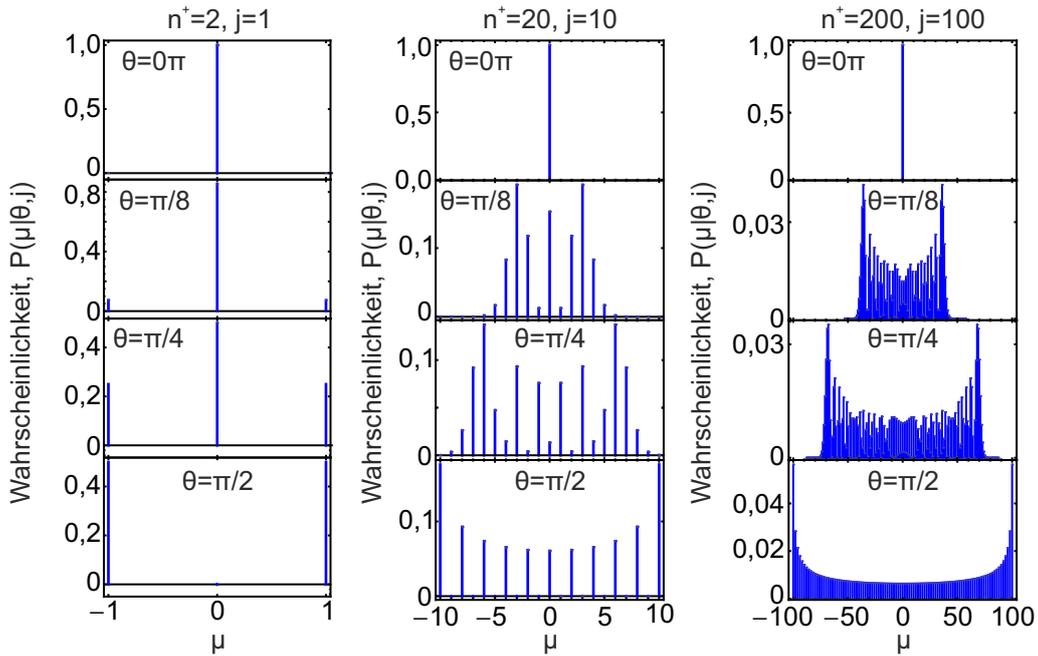


Abbildung 2.23: Wahrscheinlichkeitsverteilungen nach Gleichung (2.106) für unterschiedliche Winkel θ und Gesamtteilchenzahlen n^+ bzw. j

Diese Form der Verteilung kann allerdings nur beobachtet werden, wenn immer die gleiche Anzahl von Teilchen präpariert wird, keine Verluste auftreten und die Gesamtteilchenzahl auf einzelne Atome genau bestimmt werden kann. In dem hier

vorgestellten Experiment ist dies nicht möglich, da schon der Prozess zur Erzeugung der Zwillings-Fock-Zustände über die Spindynamik dazu führt, dass die Teilchenzahlen sehr stark schwanken. Zudem ist die Detektion von atomaren Ensembles mit einer zuverlässigen Einzelatomgenauigkeit, eine sehr schwierige Aufgabe. Zwar gibt es verschiedene Gruppen, denen es bereits gelungen ist einzelne Atome zu detektieren [120–125], aber diese Techniken sind ungeeignet um die Atomzahl größere Ensembles exakt zu bestimmen.

Um dennoch einen analogen Graphen wie in Abbildung 2.23 zu erhalten muss der Ausgang jedes Experiments auf die jeweilige Gesamtteilchenzahlen normiert werden. Dies und das Rauschen der Detektion führen dann zu einem Graphen, wie er bereits in der Abbildung 2.17 als Projektion eines Rings auf \hat{J}_z eingeführt worden ist. Es handelt sich somit lediglich um eine Näherung der eigentlichen Verteilung.

Der nächste Punkt besteht darin, aus einer experimentell gemessenen Verteilung den Wert der Phase zu bestimmen. Dazu werden die bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnet, dass der Winkel θ vorliegt, wenn für p statistisch unabhängige Messungen ein Wert von μ bestimmt worden ist. Diese Wahrscheinlichkeiten hängen mit denen aus Gleichung (2.105) über das Bayes'sche Theorem [126] zusammen

$$P(\theta|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p, j) \propto \prod_{i=1}^p P(\mu_i|\theta, j) \quad . \quad (2.107)$$

Der Wert von θ mit der größten Wahrscheinlichkeit wird dann genommen, um die Phase zu bestimmen. Da bei dieser Methode die komplette Form und das Verhalten der Verteilung eingeht, können so offensichtlich alle zur Verfügung stehenden Informationen genutzt werden. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wie in [106] gezeigt.

Ein Maß für die Information, die aus solchen bedingten Wahrscheinlichkeiten gewonnen werden kann ist die sogenannte Fisher-Information [94–96]

$$\mathcal{F} = \sum_{\mu} \frac{1}{P(\mu|\theta)} \left(\frac{d}{d\theta} P(\mu|\theta) \right)^2 \quad . \quad (2.108)$$

In der Regel ist diese abhängig von dem verwendeten Eingangszustand und der am Ausgang betrachteten Größe. Die Fisher-Information kann als das Quadrat einer „statistischen Geschwindigkeit“ angesehen werden [96]. Analog zu einer echten Geschwindigkeit $v = dx/dt$, die angibt wie sich die zurückgelegte Strecke mit der Zeit ändert, gibt die „statistische Geschwindigkeit“ an, wie stark sich die Form der Verteilung in Abhängigkeit des Parameters θ ändert.

Es kann gezeigt werden, dass im klassischen Fall n^+ unkorrelierter Teilchen, für die Fisher-Information $\mathcal{F}_{kl} = n^+$ gilt. Nur für nichtklassische korrelierte Teilchen kann diese Beziehung gebrochen werden. So ergibt sich für den Zwillings-Fock-Zustand ein Wert von $\mathcal{F}_{ZF} = \frac{n^+(n^++2)}{2}$. Die Fisher-Information ist somit auch eine

Größe um zu überprüfen, ob ein Zustand nichtklassisch korreliert ist. Sie bietet die Möglichkeit, den Grad der Verschränkung zu quantifizieren ($n^+ < \mathcal{F} \leq (n^+)^2$) [96].

Die unterschiedliche Skalierung der Fisher-Information in Abhängigkeit des verwendeten Zustandes erinnert an die Skalierung der Sensitivität. In der Tat hängen beide Größen miteinander wie folgt zusammen,

$$\sigma_{\theta_{CR}} = \frac{1}{\sqrt{p \cdot \mathcal{F}}} \quad . \quad (2.109)$$

Der Wert $\sigma_{\theta_{CR}}$ wird als Cramer-Rao-Grenze [96, 127, 128] bezeichnet und stellt die fundamentale untere Schranke der Phasensensitivität für einen gegebenen Zustand dar. Gilt in der obigen Gleichung $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{ZF}$, so ist sie identisch zur Gleichung (2.101). Der Unterschied beider Gleichungen besteht allerdings darin, dass (2.109) unabhängig von der Phase ist, während (2.101) nur in der Nähe von $\theta = 0$ gültig ist. Die Sensitivität, aus der Analyse über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung ist daher immer größer gleich diesem Wert $\sigma_{\theta_{\text{Gauß}}} \geq \sigma_{\theta_{CR}}$.

In dem vorliegenden Fall kann die Cramer-Rao-Grenze also theoretisch mit Hilfe der Bayes'schen Analyse erreicht werden. In der Realität, mit einer nicht perfekten Detektion, verschiebt sich jedoch diese Grenze, wie der nächste Abschnitt zeigt.

2.7.2 Einfluss des Detektionsrauschens auf die Sensitivität

In diesem Abschnitt soll herausgefunden werden, wie sich die Sensitivität einer Messung verhält, wenn sie unter nicht idealen Bedingungen erfolgt. Die größte Limitierung in dem vorliegenden Experiment ist dabei das Rauschen der Teilchenzahlbestimmung durch die Detektion. Die Darstellung folgt den Ausführungen in [62]. Wird angenommen, dass dieses Rauschen einer Gaußverteilung folgt (σ_{dr}), so kann es quadratisch zu dem idealen Mittelwert $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ addiert werden [129],

$$\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{\text{gdr}} = \langle J_z^2 \rangle_{ZF} + \sigma_{dr}^2 \quad . \quad (2.110)$$

Die zugehörige Varianz ändert sich in der Form

$$(\Delta \hat{J}_z^2)_{\text{gdr}}^2 = (\Delta \hat{J}_z^2)_{ZF}^2 + 4\sigma_{dr}^2 \langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF} + 2\sigma_{dr}^4 \quad . \quad (2.111)$$

Werden diese modifizierten Größen in die Gleichung (2.93) der Gaußschen Fehlerfortpflanzung eingesetzt, so divergiert die Sensitivität bei $\theta = 0$, da die Ableitung im Nenner verschwindet, der Zähler aber endlich bleibt. Dies bedeutet, dass die Sensitivität maximal schlecht wird, da die Breite der Verteilung nur durch das Detektionsrauschen bestimmt wird und keine Informationen über die Phase enthält. Abbildung 2.24 zeigt den Verlauf der Sensitivität für unterschiedliche Werte des Detektionsrauschens (durchgezogene Linien) bei einer Gesamtteilchenzahl von 7000 Atomen. Das Minimum liegt in etwa bei dem Winkel, wo der Erwartungswert des idealen Systems mit dem Detektionsrauschen übereinstimmt $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF} \sim \sigma_{dr}^2$.

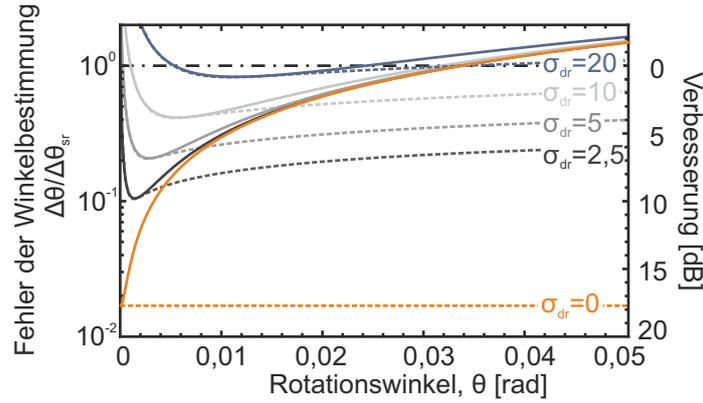


Abbildung 2.24: Verlauf der Sensitivität für unterschiedliche Werte des Detektionsrauschens. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem Verlauf der Sensitivität berechnet über die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung. Die gestrichelten Kurven stellen den Verlauf der Sensitivität der Bayes'schen Analyse dar.

Ähnliches gilt für den Fall der Bayes'schen Analyse [130] (gestrichelte Kurve). Für die bedingte Wahrscheinlichkeit mit Gauß-verteilterm Rauschen ergibt sich,

$$P_{g\text{dr}}(\mu|\theta) \propto \sum_{\mu'} e^{-(\mu-\mu')/(2\sigma_{dr}^2)} P(\mu|\theta) \quad . \quad (2.112)$$

Auch hier verschwindet die Ableitung $\frac{d}{d\theta} P_{g\text{dr}}(\mu|\theta)$ für $\theta = 0$ und die Sensitivität nach Gleichung (2.109) divergiert dementsprechend. Für ein Detektionsrauschen von $\sigma_{dr} = 20$ Atomen ist der Vorteil der Bayes'schen Analyse nur gering. Dieser tritt erst bei noch kleineren Rauschwerten hervor. In dem Fall liegt die Sensitivität über einen deutlich größeren Bereich unterhalb des Schrotrauschens.

2.8 Einfluss mehrerer Moden und Saatatome auf das Interferometersignal

Die bisherigen Betrachtungen des Ausgangssignals sind für den Fall, dass nur eine einzige Mode des Potentials mit einem Zwillings-Fock-Zustand besetzt ist. In dem Abschnitt 2.3 ist allerdings gezeigt, dass die Spindynamik dazu führen kann, dass mehrere räumliche Moden gleichzeitig besetzt werden. Wie eine Überlagerung mehrerer Moden das Ausgangssignal für einen Zwillings-Fock-Zustand ändert, wird daher in diesem Abschnitt erläutert. Außerdem wird gezeigt, was passiert, wenn Saatatome die Spindynamik und damit die Erzeugung des Zwillings-Fock-Zustandes beeinflussen [105].

2.8.1 Einfluss mehrerer besetzter Moden

Da die einzelnen Moden nicht miteinander korreliert sind, setzt sich im Fall mehrerer überlagerter Moden das Signal $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ aus Gleichung (2.89) aus einer Mischung mehrere Moden zusammen

$$\langle J_z^2 \rangle_{ZF,m} = \sum_i^m \frac{1}{2} j_i (j_i + 1) \sin^2 \theta \quad . \quad (2.113)$$

Wird angenommen, dass alle m Moden mit der gleichen Anzahl an Atomen besetzt sind ($j_i = j_0$), so kann deren Einfluss auf das Ausgangssignal relativ zum Fall einer besetzten Mode mit $j = \sum_i^m j_i = m j_0$ einfach betrachtet werden. Für das Verhältnis ergibt sich dann

$$\frac{\langle J_z^2 \rangle_{ZF,m}}{\langle J_z^2 \rangle_{ZF}} = \frac{\sum_i^m j_i (j_i + 1) \sin^2 \theta}{j(j + 1) \sin^2 \theta} \quad (2.114)$$

$$= \frac{m j_0 (j_0 + 1)}{m j_0 (m j_0 + 1)} \xrightarrow{j_0 \gg 1} \frac{1}{m} \quad . \quad (2.115)$$

Der Wert des Signals reduziert sich somit um den Kehrwert der Anzahl besetzter Moden. Aus diesem Grund ist es für die Messung wichtig, dass möglichst nur eine Mode besetzt wird.

Um abzuschätzen welcher Bereich am besten geeignet ist, um einen Zwillingfock-Zustand in nur einer Mode zu präparieren, sind in der Theoriegruppe von Luis Santos numerische Simulationen durchgeführt worden. Diese verwenden im Gegensatz zum vereinfachten Modell in Abschnitt 2.2 das vollständige dreidimensionale effektive Potential zur Berechnung der Instabilitätsraten. Die Simulationen haben gezeigt, dass die zylindrische Falle ungeeignet ist. Durch die Fallenfrequenz von 40 Hz können auch Moden entlang der schwachen Fallenachse besetzt werden, die nicht vernachlässigt werden können. Die beste Situation wird daher erreicht, wenn die Moden der unterschiedlichen Fallenachsen möglichst weit auseinander liegen und die sich ergebenden Magnetfeldresonanzen möglichst schmal sind. Die elliptische Falle mit Fallenfrequenzen von $\vec{\omega} = 2\pi(183 \text{ Hz}, 151 \text{ Hz}, 122 \text{ Hz})$ erweist sich in diesem Punkt als günstiger.

Zur Abschätzung eines geeigneten Magnetfelds, um einen Zwillingfockzustand in einer räumlichen Mode zu erzeugen, sind in der Abbildung 2.25 mehrere numerische Simulationen unterschiedlicher Parameter dargestellt. Abbildung 2.25 (a) ist die Standardabweichung nach einem $\theta = \pi/2$ -Puls, geteilt durch die mittlere Gesamtteilchenzahl $\sigma n^- / \langle n^+ \rangle = \sigma J_z / \langle J \rangle$ gegen das angelegte Magnetfeld aufgetragen. Die unterschiedlichen Kurven entsprechen unterschiedlichen Dauern der Spindynamik. Darunter in Abbildung 2.25 (b) sind die zwei stärksten Instabilitätsraten aufgetragen. Es zeigt sich, dass $\sigma J_z / \langle J \rangle$ immer dann am größten ist, wenn der Abstand zwischen den beiden Raten maximal wird und die Zeitdauer der Dynamik möglichst lang ist. In dem Fall ist die Besetzung einer Mode sehr

viel größer, als die der anderen, die nur noch in einem geringen Maße zu dem Ausgangssignal beitragen.

Alternativ zur Präparation des Zwillings-Fock-Zustandes in nur einer Mode, wäre es auch denkbar, ein Messverfahren zu entwickeln, mit dem die Teilchenzahlen separat für jede Fallenmode bestimmt werden. In diesem Fall könnte die Wirkung des Interferometers beziehungsweise des Strahlteilers, individuell für jede Mode untersucht werden. In optischen Systeme ist etwas ähnliches vor kurzem realisiert worden [131].

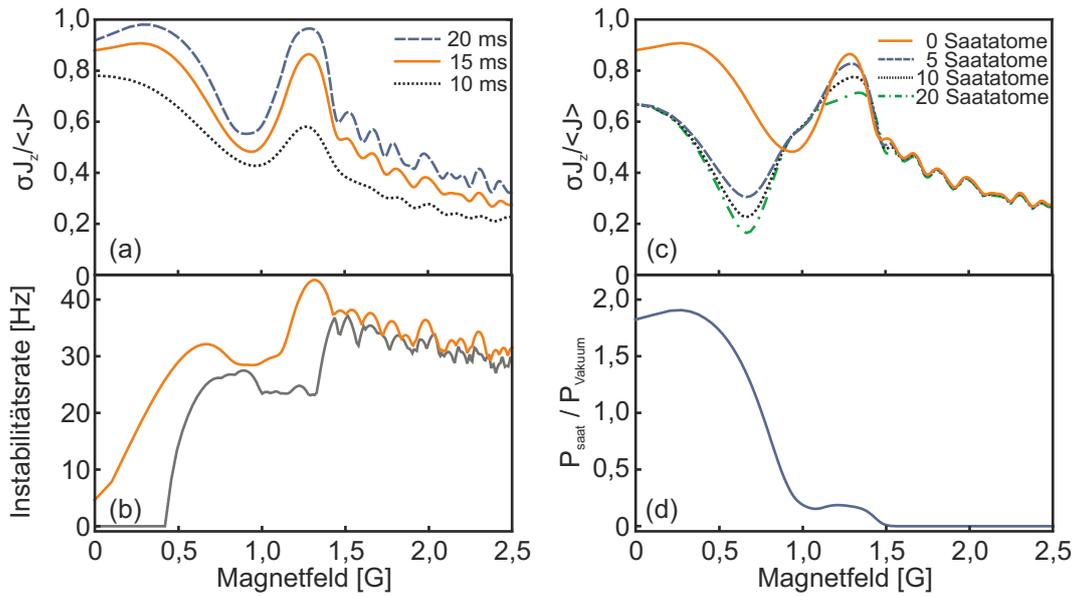


Abbildung 2.25: Einfluss mehrerer Potentialmoden und Saatatome auf das Signal eines Zwillings-Fock nach Anwenden eines $\pi/2$ -Pulses. Links oben ist der numerische simulierte Wert der Standardabweichung nach dem Puls in Abhängigkeit des Magnetfeldes für unterschiedliche Zeiten aufgetragen. Darunter sind die berechneten maximalen Instabilitätsraten dargestellt. Auf der rechten Seite oben ist die Standardabweichung für unterschiedliche Anzahlen von Saatatomen aufgetragen. Darunter ist der Quotient zwischen den Wahrscheinlichkeiten für die parametrische Verstärkung anfänglicher Saatatome und Vakuumfluktuationen dargestellt.

2.8.2 Einfluss der Saatatome

Ein weiterer Punkt, der sich negativ auf das Ausgangssignal des Zwillings-Fock-Zustandes auswirkt, ist die Anwesenheit von Saatatomen zu Beginn der Spindynamik, wie in Abbildung 2.25 (c) zu sehen. Hier reduziert sich die Standardabweichung, wenn die Anzahl der Saatatome erhöht wird. Dies wirkt sich besonders stark im Bereich bis 1 G aus. Es ist derselbe Bereich, in dem die Wahrscheinlichkeit, dass Vakuumfluktuationen verstärkt werden, deutlich verringert ist gegenüber

der Verstärkung einer kleinen Anfangsbesetzung. Dies wird durch Abbildung 2.25 (d) verdeutlicht. Dieses Verhalten lässt sich dadurch erklären, dass Saatatome bevorzugt in der ersten Fallenmode erzeugt werden, da hier der Überlapp mit dem Ursprungskondensat am größten ist. In dem Fall wird der Zustand der Saatatome parametrisch verstärkt. Der entstehende Zustand ist dann kein Zwillings-Fock-Zustand mehr, sondern höchstens ein gequetschter Zustand. Im Extremfall entsteht nur ein kohärenter Zustand und die Standardabweichung reduziert sich um den Faktor $1/\sqrt{2}$.

Aufgrund der obigen Betrachtungen ist es daher wichtig für die Experimente, dass nur eine einzige Fallenmode angeregt wird, in der sich keine Saatatome befinden. Anhand der numerischen Simulationen, sollte der Bereich um 1,3 G dafür am besten geeignet sein. Hier erreicht das Signal nach Anwenden des $\pi/2$ -Pulses ihr Maximum und der Einfluss der Saatatome hält sich in Grenzen. Hinzu kommt, dass bei diesem Wert, die Instabilitätsrate am größten ist. Dadurch kann die Gesamtteilchenzahl des Zwillings-Fock-Zustandes maximiert werden, bevor der Einfluss von Verlusten relevant wird.

AUFBAU

In diesem Kapitel werden der Aufbau und die Techniken beschrieben, die es ermöglichen ultrakalte Spinorgase zu erzeugen, zu manipulieren und präzise nachzuweisen. Der größte Teil des Aufbaus ist bereits in mehreren Veröffentlichungen [132, 133] sowie in Doktor- und Diplomarbeiten dargelegt [103, 134–138].

Ursprünglich ist das Experiment konstruiert worden, um ultrakalte Mischungen aus bosonischen ^{87}Rb und fermionischen ^{40}K herzustellen und zu Molekülen zu assoziieren. Zu diesem Aspekt sind Publikationen erschienen, die die Wechselwirkungen beider Elemente [139] sowie die Erzeugung schwach gebundener ultrakalter heteronuklearer Moleküle [140] mittlerer Radiofrequenzen behandeln.

Darüber hinaus sind bereits Untersuchungen der Spindynamik ^{87}Rb vorgenommen worden. Die ersten Beobachtungen der magnetfeldabhängigen Resonanzen des Transfers sind in der Publikation [66] erschienen. Die parametrische Verstärkung von Vakuumfluktuationen in Spinorkondensaten wird in der Veröffentlichung [67] behandelt.

In dem folgenden Kapitel wird der experimentelle Aufbau näher beschrieben. Der Fokus liegt dabei auf den benötigten Verbesserungen, um die spontane Symmetriebrechungen und das Entstehen nichtklassischer Zustände zu untersuchen. Da der Weg zum Bose-Einstein Kondensat in den Arbeiten [103, 134, 135] bereits ausführlich beschrieben ist, wird dieser im ersten Abschnitt nur kurz skizziert. Der zweite Abschnitt beschreibt die verwendeten Detektionssysteme die zur Auflösung der räumlichen Strukturen und zur präzisen Teilchenzahldetektion verwendet werden. Im Anschluss werden die unterschiedlichen Konfigurationen der Dipolfalle vorgestellt und gezeigt, wie diese charakterisiert werden. Der vierte Abschnitt beschreibt die Präparation der internen atomaren Zustände mit Hilfe von Radio und Mikrowellen. Der Abschnitt über die unterschiedlichen Magnetfelder, die einerseits zur Kompensation des Offsetfeldes und andererseits zum Anlegen homogener Magnetfelder verwendet werden, bildet den Abschluss dieses Kapitels.

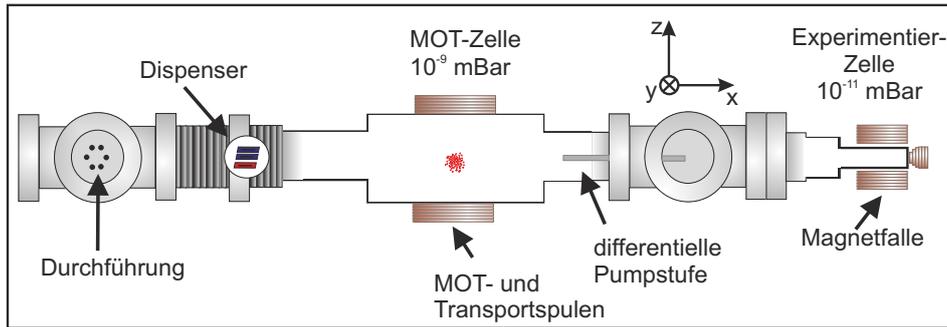


Abbildung 3.1: Aufbau des Vakuumsystems [134]

3.1 Skizze der experimentellen Sequenz

Im Folgenden werden die Schritte zur Erzeugung der BEC's und zur Untersuchung der Spindynamik vorgestellt. Die Abbildung 3.1 zeigt den Aufbau des Vakuumsystems, in dem die Experimente stattfinden. Zunächst wird ein Ensemble von Atomen in einer Vakuumzelle gefangen und gekühlt. Dies geschieht durch eine magnetooptische Falle (MOT, engl.: magneto-optical trap) [40–42], bei der sich die Atome im Zentrum eines magnetischen Quadrupolfeldes mit Hilfe der Laserkühlung aus allen drei Raumrichtungen sammeln. Als Atomquelle dienen Dispenser, die etwa alle zwei Wochen für eine Stunde angeschaltet werden, um den MOT Bereich mit ^{87}Rb -Atome zu fluten. Dies lagern sich rasch an den Wänden an. Zum Laden der MOT werden die Atome mittels lichtinduzierte Desorption (engl. Light induced atom Desorption, LIAD) [132] wieder von den Glaswänden gelöst. Dadurch erhöht sich der Hintergrundgasdruck und es können etwa 10^9 Atome in der MOT gefangen werden.

Von dort werden die Atome nach einer Melassephase in eine weitere Glaszelle mit einem geringeren Druck transportiert. Dazu werden sie durch optisches Pumpen [141] in den magnetisch fangbaren Zustand $|2,2\rangle$ gebracht. Durch eine Erhöhung der Gradienten des Quadrupolfeldes können die Atome somit rein magnetisch gefangen werden. Die Spulen für dieses Magnetfeld sind auf einem Transportschlitten montiert, der zwischen den beiden Glaszellen hin und her fahren kann. Damit werden die Atome in 1,3 s durch eine differentielle Pumpstufe hindurch in die Experimentierzelle transportiert [142]. Die differentielle Pumpstufe dient dazu, eine Druckdifferenz von zwei Größenordnungen zwischen beiden Zellen zu erreichen. So herrscht in der MOT-Zelle einen Druck von $\sim 10^{-9}$ mbar, während in der Experimentierzelle ein Druck von $\sim 10^{-11}$ mbar vorliegt.

Dort angekommen werden die Atome umgeladen in eine Magnetfalle in Quadrupol-Ioffe Konfiguration (QUIC, engl. quadrupol-Ioffe configuration) [143]. In dieser werden die Atome durch Radiofrequenzevaporation [144] bis nahe an den Punkt der Quantenentartung weiter gekühlt. Eine kontrollierte Variation der Ströme in

den Transportspulen und in den drei Spulen der QUIC-Falle erlaubt anschließend, einen rein magnetischen Transport der Atome [133]. Dieser wird verwendet, um die Atome ins Zentrum verschiedener Magnetfeldspulenpaare zu verschieben, mit denen die homogenen Magnetfelder für die Experimente erzeugt werden. In dem Zentrum sind etwaige Magnetfeldgradienten am geringsten.

Als nächstes werden die Atome in eine Dipolfalle umgeladen, die ein Fangen aller Zeemanzustände erlaubt. Die Falle besteht aus zwei gekreuzten, fokussierten, rotverstimmten Laserstrahlen [145] und wird im Abschnitt 3.3 ausführlicher beschrieben. Durch eine sukzessive Verringerung der Laserintensität können die Atome in der Falle weiter bis zur Bose-Einstein Kondensation evaporativ gekühlt werden [57].

Die anschließenden Schritte sind maßgeblich für die Spindynamik und werden daher im Folgenden ausführlicher beschrieben. Diese unterscheiden sich in einigen Details für die verschiedenen Experimente. Der grundsätzliche Ablauf bleibt aber gleich. Zunächst wird ein homogenes Magnetfeld angelegt (Abschnitt 3.5.1), bei der die Spindynamik stattfinden soll. Gleichzeitig werden die Intensitäten der Dipolfalle verändert, um die erforderlichen Fallenfrequenzen zu erhalten (Abschnitt 3.3). Im Anschluss daran werden die Atome in den benötigten Zeemanzuständen präpariert und die Spindynamik so gestartet (Abschnitt 3.4). Nach einer bestimmten Entwicklungszeit wird die Dipolfalle ausgeschaltet und die Atome zustandsselektiv detektiert (Abschnitt 3.2).

3.2 Detektion von Spinorgase

Die Detektion erlaubt es, eine Vielzahl von Informationen über die atomaren Ensembles zu erhalten. Neben der Teilchenzahl können beispielsweise die Temperatur, die Dichte, die Form, die Position und der interne Zustand bestimmt werden. Diese Daten sind die Grundlagen jeder Auswertung, die hier vorgestellt werden. Aus diesem Grund wird die Detektion als erstes beschrieben.

Die unterschiedlichen Experimente stellen verschiedene Anforderungen an den Nachweis der Atome. Die Experimente zur spontanen Symmetriebrechung erfordern eine gut aufgelöste Darstellung der räumlichen Dichteverteilung der Zustände und eine gute Bestimmung der Fallenparameter. Die genaue Bestimmung der Teilchenzahlen ist dabei nebensächlich. Die Untersuchung des nichtklassischen Zustands hingegen verlangt eine sehr präzise Bestimmung der Atomzahl. So muss beispielsweise die Teilchenzahl einer Wolke von 10000 Atomen auf unter 100 Atome beziehungsweise 1 % genau bestimmt werden, um Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschlimits nachzuweisen. Daher werden in den unterschiedlichen Experimenten verschiedene Detektionssysteme verwendet, die für die jeweilige Anwendung optimiert sind.

Das Grundprinzip der Detektion ist in beiden Fällen dasselbe und beruht auf dem Prinzip der Absorptionsdetektion [111, 134]. Dabei werden die Atome mit ei-

nem resonanten Laserstrahl beleuchtet. Der Schatten, der durch die Absorption der Atome entsteht, wird über diverse Linsen auf den CCD-Chip (engl.: charge-coupled device $\hat{=}$ ladungsgekoppeltes Element) einer Kamera abgebildet und so detektiert (Atombild). Anschließend werden noch ein Bild des Strahls ohne Atome (Strahlbild), sowie zwei Hintergrundbilder ohne Beleuchtung gemacht. Je eins der Hintergrundbilder wird dann von dem Atom- und dem Strahlbild abgezogen, bevor diese weiterverarbeitet werden, um alle relevanten Informationen zu erhalten. Näheres dazu findet sich in Abschnitt 3.2.3.

Die hier vorgestellten Experimente erfordern einen individuellen Nachweis der Teilchenzahlen der jeweiligen Zeemanzuständen. Diese zustandsselektive Detektion wird ermöglicht, indem die Zustände mit Hilfe eines so genannten Stern-Gerlach-Experiments [146] räumlich getrennt werden und somit auf unterschiedliche Bereiche des CCD-Chips abgebildet werden. Das Prinzip beruht auf den unterschiedlichen Beschleunigungen der einzelnen Spinkomponenten aufgrund eines inhomogenen Magnetfeldes. Dazu wird zunächst die Dipolfalle ausgeschaltet, so dass die Atome unter dem Einfluss der Gravitation nach unten fallen und frei expandieren. Während dieser Fallzeit (TOF, engl time-of-flight) wird für eine bestimmte Zeit durch eine Zusatzspule ein Magnetfeldgradient erzeugt, wodurch sich die einzelnen Spinkomponenten räumlich voneinander trennen. Durch eine orts aufgelöste Detektion können sie somit separat untersucht werden. Dabei muss darauf geachtet werden, dass der Gradient ausreichend stark und lang gewählt wird, damit der Abstand der Wolken groß genug ist und diese nicht überlappen.

Die verwendete Spule besteht aus 10 Windungen und ist auf die oberer Quadrupolspule der QUIC-Falle gewickelt (vgl.: Abb 3.25), was einem Radius von 4 cm entspricht. Der Strom durch die Spule wird geregelt, und liegt je nach Experiment zwischen 110 A und 200 A, was Gradienten von 37 G/cm bis 70 G/cm entspricht. Um diese hohen Ströme schnell zur Verfügung zu stellen wird als Stromquelle ein Kondensator mit 150 mF und einer Spannung von 63 V verwendet, der in der übrigen Zeit des Experimentzyklusses geladen wird. Die Dauer von 2,5 ms für den Gradienten und eine anschließende TOF von weiteren 2,5 ms bis 7,5 ms reichen aus, um die Wolken gut voneinander zu trennen.

3.2.1 Detektion der räumlichen Strukturen

Zur Identifikation der unterschiedlichen Fallenmoden und zum Nachweis der spontanen Symmetriebrechung wird wie erwähnt eine Detektion benötigt, die eine Auflösung der räumlichen Strukturen ermöglicht. Dazu wird ein Gradient der Stern-Gerlach-Detektion von 37 G/cm mit einer anschließenden TOF von 7,5 ms gewählt. Während dieser Zeit expandieren die Wolken selbstähnlich, wodurch die ursprüngliche Struktur in der Falle lediglich vergrößert wird [147, 148].

Der Aufbau dieser Detektion entlang der y -Achse ist in Abbildung 3.2 darge-

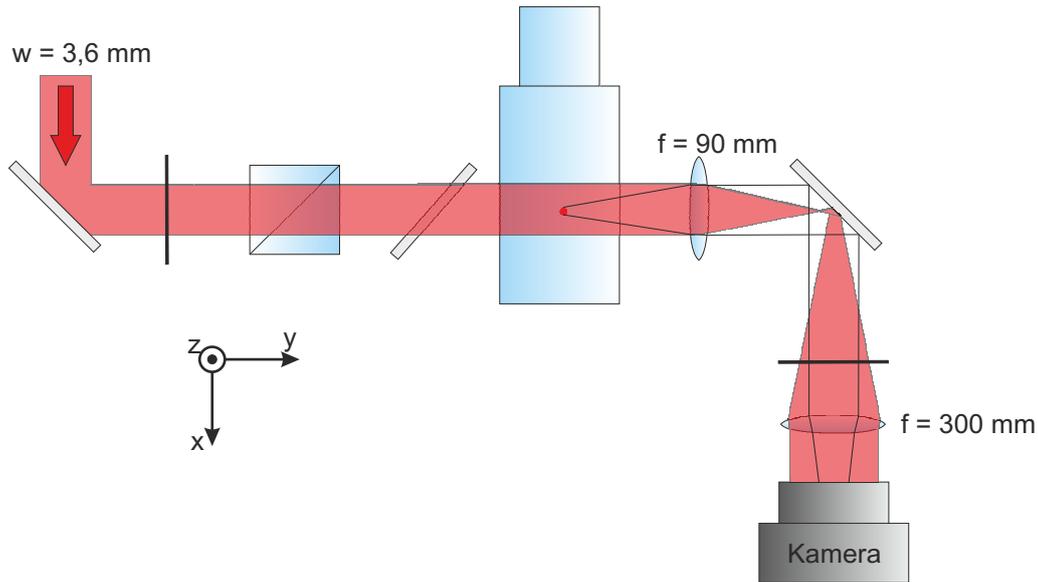


Abbildung 3.2: Aufbau zur Detektion der räumlichen Strukturen.

stellt. Der Detektionsstrahl für die Absorptionaufnahmen hat eine Strahltaile von 3,6 mm und wird aus dem Strahl ausgekoppelt, der auch zur Laserkühlung in der MOT verwendet wird. Dadurch ist die maximale Leistung des Strahls limitiert. Die Wellenlänge ist resonant zu dem Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 3$ zwischen dem Grundzustand $5^2S_{1/2}$ und dem angeregten Zustand $5^2P_{3/2}$. Über eine $\lambda/2$ -Platte und einen Polarisationsstrahlteiler wird der Strahl senkrecht polarisiert. Bevor er auf die Atome trifft, wird er noch an einem Kantenspiegel mit einem der beiden horizontalen Strahlen der Dipolfalle überlagert. Dies erlaubt eine einfache Justage der Dipolfalle. Allerdings verschlechtert der Kantenspiegel die Qualität des Strahlprofils.

Die Dauer der Belichtungszeit ist mit 20 μs recht kurz gewählt, um den Einfluss der Photonen relativ kurz zu halten und somit die Strukturen nicht zu zerstören. Der Schatten wird über eine Teleskopoptik um einen Faktor von drei vergrößert. Die Atome befinden sich dazu im Brennpunkt einer ersten Linse mit Brennweite $f_1 = 90$ mm. Über eine zweite Linse ($f_2 = 300$ mm), deren vorderer Brennpunkt mit dem hinteren der ersten Linse übereinstimmt, wird der Schatten auf der Kamera (*PCO Pixelfly 270XD*) abgebildet. Diese ist so positioniert, dass sich der CCD-Chip im hinteren Brennpunkt der zweiten Linse befindet.

Ein analoger Aufbau zur Detektion der Atome entlang der z -Richtung existiert ebenfalls [135]. Dieser dient zur Kontrolle der Strukturen in der xy -Ebene, zur Erleichterung der Dipolfallenjustage und zur Messung der Fallenfrequenz entlang der y -Richtung. Dazu kann der Detektionsstrahl über die $\lambda/2$ -Platte und den Polstrahlteiler auf einen zweiten Detektionspfad eingestellt werden. Der Strahl geht dann senkrecht von oben durch die Experimentierzelle. Durch Spiegel und Linsen

wird er dann auf eine zweite Kamera (*Theta System SIS-S285*) geführt. Damit ist es auch prinzipiell möglich die Atome aus beiden Richtungen gleichzeitig zu detektieren. Es ist zu Beachten, dass in dem Fall das Detektionssignal auf den einzelnen Bildern schwächer wird, da die Atome aus beiden Richtungen Photonen absorbieren.

3.2.2 Detektion der nichtklassischen Zustände

Zum Nachweis der nichtklassischen Zustände ist das obige System ungeeignet. Das Rauschen der Teilchenzahlbestimmung von etwa 500 Atomen ist zu groß. Ein Grund dafür ist, dass der Detektionsstrahl durch recht viele optische Elemente geht, bevor er auf die Atome und auf die Kamera trifft. Jedes dieser Elemente kann Interferenzen auf dem Strahl erzeugen. Insbesondere die Glaswände der Vakuumzelle selbst sorgen für einen starken Etaloneffekt und führen damit zu Interferenzstreifen. Diese Interferenzen wirken sich insbesondere dann störend auf die Detektion aus, wenn sie sich zwischen der Aufnahme des Atombilds und der des Strahlbilds ändern. So etwas kann bereits durch leichte Vibrationen der einzelnen Elemente verursacht werden. Eine Möglichkeit wäre, den Einfluss der Störeffekte durch geeignete Algorithmen [149] oder Nachbearbeitung der Aufnahmen zu minimieren [150–152]. Am besten ist es aber, wenn die Interferenzen erst gar nicht auftreten, oder zumindest reproduzierbar sind, so dass sie auf dem Atom- und dem Strahlbild identisch sind. Weiterhin ist es sinnvoll, eine separate Lichtquelle zu verwenden, mit dem die Intensität über einen weiten Bereich variiert werden kann, um den optimalen Wert zu ermitteln.

Die neue Detektion ist folgendermaßen aufgebaut. Als Quelle dient ein separates Lasersystem welches auf eine Rubidiumspektroskopie stabilisiert ist [137]. Ein Trapezverstärker (TA, tapered amplifier) in dem System ermöglicht einen großen Einstellbereich der Intensität [153]. Eine optische Faser dient zum einen der Reinigung der optischen Mode, sowie dem Transfer des Lichtes zum Experiment. Der Aufbau hinter der Faser ist in der Abbildung 3.3 dargestellt. Der Auskoppler erzeugt einen sauberen Gaußstrahl mit einer Strahltaile von 0,5 mm. Dahinter wird der Strahl mit Hilfe eines Spiegel in die Glaszelle auf die Atome gegeben. Um Interferenzen an den Oberflächen zu minimieren, wird er zum einen mittels einer $\lambda/4$ -Platte zirkular polarisiert und zum anderen nicht mehr senkrecht durch die Zelle sondern unter einem Winkel von 7° relativ zur ursprünglichen Richtung eingestrahlt. Der Strahl ist dadurch nicht mehr mit dem Dipolfallenstrahl überlagert und durchläuft somit nicht mehr den Kantenspiegel.

Das Abbildungssystem ist auf eine achromatische Linse der Brennweite $f = 60$ mm reduziert worden. Diese Linse hat einen Abstand von 90 mm zu den Atomen und 180 mm zur Kamera. Bei der Kamera handelt es sich um eine *iXon+ DV885* der Firma Andor. Diese verspricht eine bessere Quanteneffizienz und eine geringeres Ausleserauschen als die zuvor verwendete. Über einen Tubus sind

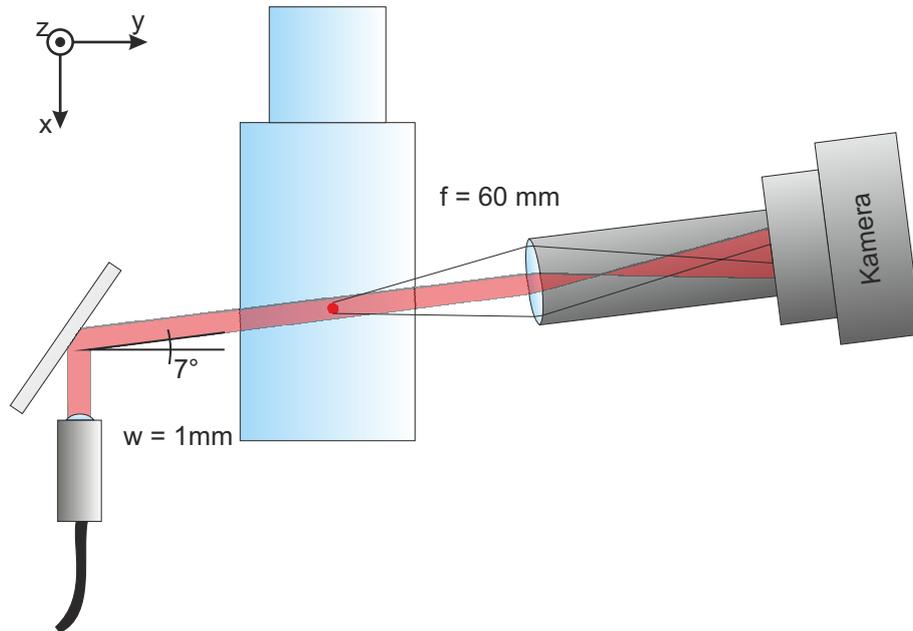


Abbildung 3.3: Aufbau zur Detektion der nichtklassischen Zustände.

Linse und Kamera direkt miteinander verbunden. Dieser Aufbau sorgt für eine bessere mechanische Stabilität des Systems. Ein Wackeln der Linse relativ zur Kamera kann ansonsten dazu führen, dass das Atom- und das Strahlbild nicht gut zueinander passen.

Der abgebildete Bereich der Atome auf dem CCD-Chip ist relativ klein. Zur Auswertung der Bilder wird daher nur ein bestimmter Ausschnitt (ROI, engl. region of interest) verwendet. Die Größe hängt dabei von der Ausdehnung und der Separation der Atomwolken ab. Zur Bestimmung der Teilchenzahlen in den einzelnen Zuständen, werden runde Masken innerhalb der ROI definiert, in denen die Signale der einzelnen Pixel addiert werden. In Abbildung 3.4 sind die Maskengröße und Position für ein typisches Detektionsbild in Falschfarben dargestellt. Um eventuelle mechanische Schwankungen der Dipolfalle oder des Abbildungssystems zu kompensieren, wird zugelassen, dass der Mittelpunkt dieser Masken um ± 1 Pixel in beide Richtungen verschoben werden kann. Das Optimum wird dabei durch das Auswerteprogramm automatisch bestimmt, indem die Teilchenzahl innerhalb der jeweiligen Maske maximiert wird. Der Bereich außerhalb der Masken dient dazu, die Intensität des Detektionsstrahls zu bestimmen. Zudem wird dieser Bereich verwendet, die Intensität des Atom- und des Strahlbildes miteinander zu vergleichen und entsprechend anzupassen.

Die verwendeten Lichtpulse sind zirkular polarisiert, haben eine Dauer von $70 \mu\text{s}$ und eine Intensität von $1,6 \text{ mW}/\text{cm}^2$. Zusätzlich liegt ein Magnetfeld von $3,6 \text{ G}$ entlang der y -Achse des Aufbaus an. Diese Werte wurden empirisch ermittelt

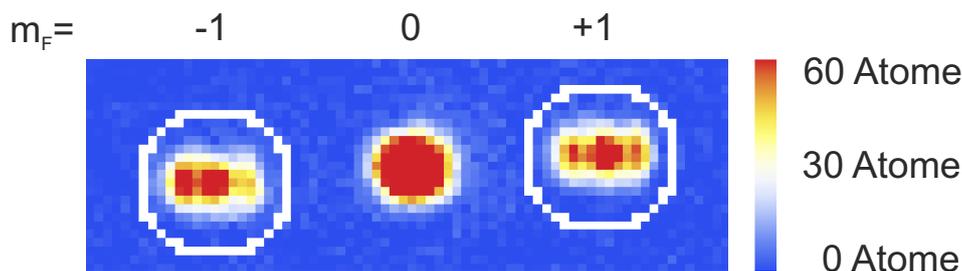


Abbildung 3.4: Typisches Bild der Atomwolken in Falschfarben. Mit Hilfe der gezeigten Farbskala kann die Atomzahl pro Pixel abgelesen werden. Die weißen Kreise entsprechen den Masken zur Bestimmung der Atomzahlen.

und ermöglichen Unsicherheit in der Bestimmung der Atomzahldifferenz zwischen den $|2, \pm 1\rangle$ Zuständen von absolut 40 Atomen, was ausreichen sollte, um Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschlimits experimentell zu beobachten. Gegenüber dem vorhergehenden Detektionssystem ist dies eine deutliche Verbesserung, wie in Abbildung 3.5 deutlich sichtbar wird. Hier werden Absorptionsoptionen atomarer Wolken mit ≈ 7000 Atomen und ≈ 1500 Atomen der beiden Detektionssysteme miteinander verglichen.

Die Unsicherheit der Atomzahlbestimmung wird ermittelt, indem über mehrere Aufnahmen ohne Atome die Teilchenzahlen bestimmt werden, die das Programm berechnet. Die Standardabweichung dieser Messreihe entspricht dann der Unsicherheit. Dieses Vorgehen ist zulässig, da sich das Schrotrauschen der Photoelektronen für die Bilder mit und ohne Atome kaum ändert. Auf die gleiche Art wird zusätzlich bei jeder Messung mit Atomen das Rauschen in Masken, über und unterhalb der ROI bestimmt. Dies erlaubt eine fortwährende Kontrolle des Detektionsrauschens.

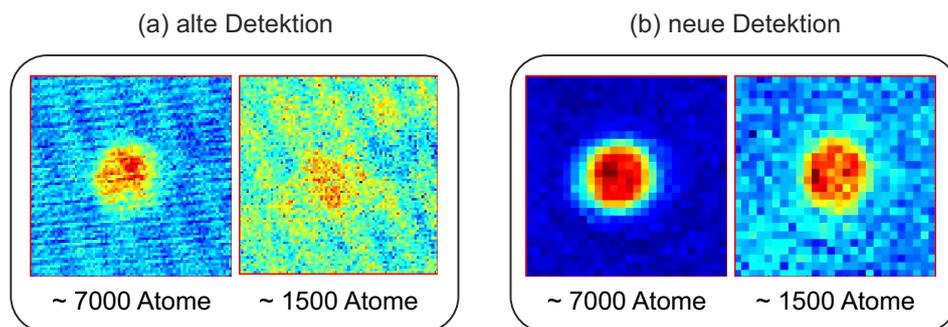


Abbildung 3.5: Vergleich der beiden Detektionssysteme durch je zwei Absorptionsoptionen atomarer Ensembles mit ≈ 7000 Atomen und mit ≈ 1500 Atomen. (a) Aufnahmen des alten Systems aus Abbildung 3.2. (b) Aufnahmen des neuen Systems aus Abbildung 3.3

Für diese neue Detektion, musste die zweite Detektionsrichtung zunächst abge-

baut werden. Diese kann aber vergleichsweise schnell wieder implementiert werden, indem über einen zweiten Auskoppler und einen Spiegel das Detektionslicht auf die Atome gegeben wird. Die Achse und der optische Aufbau hinter der Zelle kann in dem Fall beibehalten werden. Ein Umstecken der Faser ermöglicht so den Wechsel zwischen den beiden Detektionsrichtungen.

3.2.3 Bestimmung der absoluten Teilchenzahl

Die absolute Bestimmung der Teilchenzahl mit einer möglichst geringen Unsicherheit ist essentiell für den Nachweis nichtklassischer Zustände mit Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschlimits. In dem vorangegangenen Abschnitt ist gezeigt, wie die Bilder zur Detektion der Atome aufgenommen werden. Nun soll vorgestellt werden, wie sich daraus die Teilchenzahlen ermittelt lassen und wie diese Bestimmung absolut geeicht werden kann. Die Ausführungen folgen der Veröffentlichung [154] von Gaël Reinaudi aus der Gruppe von David Guery-Odelin.

Wird eine Atomewolke mit resonantem Licht entlang der z-Achse bestrahlt, so absorbiert sie dieses. Mit Hilfe des Lambert-Beer'scheen Gesetzes [155, 156] unter Berücksichtigung des Sättigungseffekt lässt sich die Änderung der Intensität I entlang der Einfallachse beschreiben,

$$\frac{dI}{dz} = -n_0(\vec{r})\sigma_0^{\text{eff}} \frac{I}{1 + I/I_{\text{sat}}^{\text{eff}}} \quad . \quad (3.1)$$

Hierbei stellt $n_0(\vec{r})$ die atomare Dichteverteilung dar. Die effektive Sättigungsintensität $I_{\text{sat}}^{\text{eff}}$ und der resonante Streuquerschnitt $\sigma_0^{\text{eff}} \propto 1/I_{\text{sat}}^{\text{eff}}$ sind durch die Eigenschaften des verwendeten Übergangs $F = 2 \rightarrow F' = 3$ sowie der Polarisation des Lichtes gegeben. Die Werte für das effektive Zweiniveausystem können in [157] nachgelesen werden.

Im Experiment wird zirkular polarisiertes Licht verwendet. Das angelegte homogene Magnetfeld sorgt zudem dafür, dass die Entartung der Zeemanzustände aufgehoben ist. Für die Bestimmung von $I_{\text{sat}}^{\text{eff}}$ müssen auch Änderungen dieses Wertes berücksichtigt werden, die durch Effekte wie die Verstimmung, die Abweichung von dem idealen Zwei-Niveausystem und den Winkel der Einstrahlrichtung von 7° relativ zum Magnetfeld hervorgerufen werden. Dafür wird der Faktor α eingeführt, mit dem die effektive Sättigungsintensität $I_{\text{sat}}^{\text{eff}} = \alpha I_{\text{sat}}^\sigma$ in Beziehung zur Sättigungsintensität I_{sat}^σ des Übergangs für reines zirkular polarisiertes Licht gestellt wird. Dieser Faktor muss auch bei dem Streuquerschnitt berücksichtigt werden ($\sigma_0^{\text{eff}} = \sigma_0/\alpha$). Wird dies in Gleichung (3.1) eingesetzt, nach der Teilchendichte aufgelöst und entlang des Strahls integriert (y -Achse), so erhält man

$$\int n_0(x,y,z)dy = -\frac{1}{\sigma_0} \int_{I_S}^{I_A} dI \left[\frac{\alpha}{I} + \frac{1}{I_{\text{sat}}^\sigma} \right] \quad (3.2)$$

$$= -\frac{\alpha}{\sigma_0} \ln \left(\frac{I_A(x,z)}{I_S(x,z)} \right) + \frac{1}{\sigma_0} \frac{I_S(x,z) - I_A(x,z)}{I_{\text{sat}}^\sigma} \quad . \quad (3.3)$$

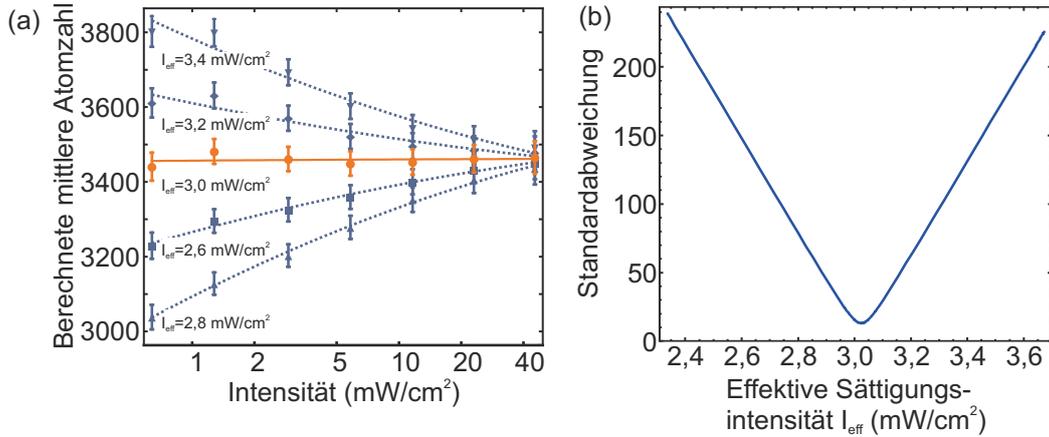


Abbildung 3.6: Messung zur Bestimmung der effektiven Sättigungsintensität. (a) zeigt die Abhängigkeit der berechneten Atomzahlen von der Detektionsintensität für unterschiedlich Sättigungsintensitäten. (b) zeigt die Standardabweichung in Abhängigkeit von Sättigungsintensitäten. Das Minimum entspricht dem Wert der orangefarbenen Kurve in (a).

Diese Gleichung entspricht der Säulendichte der Atome entlang der Detektionsrichtung. Durch Addition dieser Dichte der einzelnen Pixel kann dann die Teilchenzahl bestimmt werden. Abgesehen von α hängt diese Gleichung nur noch von bekannten Größen ab. Die Parameter I_S und I_A entsprechen den Intensitäten vor und nach der Absorption durch die Atome. Nach präziser Eichung der Kamera können sie aus dem Strahl- und dem Atombild auf jedem Pixel des CCD-Chips berechnet werden.

Um den Faktor α und damit die effektive Sättigungsintensität zu ermitteln wird ein Experiment verwendet, in dem bei gleichbleibenden Bedingungen BEC's hergestellt werden. Die Teilchenzahlen von Zyklus zu Zyklus sind so möglichst stabil.

Zur Detektion wird die Intensitäten über mehr als drei Größenordnungen zwischen $0,1 \text{ mW/cm}^2$ und 45 mW/cm^2 variiert. Dabei wird die Belichtungszeit jeweils so gewählt, dass die Kamera immer in etwa die gleiche Anzahl von Photonen registriert. Aus den Bildern werden dann mit Gleichung(3.3) für unterschiedliche α die Teilchenzahlen bestimmt. Diese sind in Abhängigkeit der Intensität in Abbildung 3.6 (a) für unterschiedliche Werte der effektiven Sättigungsintensität dargestellt. Aufgrund der Präparation sollte die Teilchenzahl über den gesamten Bereich konstant bleiben. Daher wird der Wert von α beziehungsweise von I_{sat}^{σ} gewählt, welcher immer die möglichst gleiche Teilchenzahl ergibt. Um diesen Wert zu ermitteln wird die Standardabweichung der Teilchenzahlbestimmung in Abhängigkeit von α bestimmt und minimiert (vgl. Abb. 3.6 (b)). Das Minimum liegt bei einem Wert von $\alpha = 1,81$. Dies entspricht einer effektiven Sättigungsintensität von $I_{\text{sat}}^{\sigma} = 3,02(6) \text{ mW/cm}^2$.

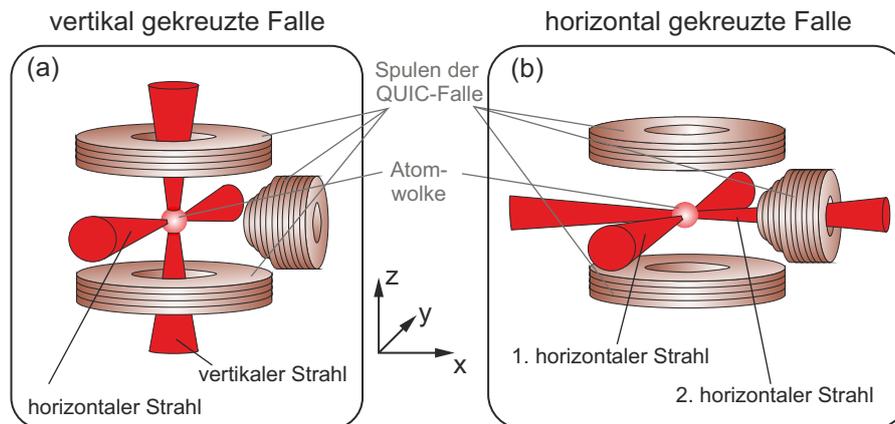


Abbildung 3.7: Verlauf der Strahlen der Dipolfalle für zwei unterschiedliche Fallenkonfigurationen. (a) Einer der Strahlen verläuft horizontal und der zweite vertikal. In (b) verlaufen beide Strahlen horizontal.

3.3 Die Dipolfalle

Das nächste Element, was in diesem Kapitel vorgestellt wird, ist die Dipolfalle. Derartige Fallen werden von vielen Arbeitsgruppen für Experimente mit ultrakalten Atomen verwendet. Das Prinzip beruht dabei auf der Kopplung eines Lichtfeldes an die atomaren Übergänge [111]. Diese Kopplung führt zu einer Verschiebung der Energieniveaus, die von der Verstimmung abhängt und proportional zur Intensität des Lichtes $U_{\text{Dip}}(\vec{r}) \propto I(\vec{r})$ ist. Ein räumliches Profil der Intensität, führt somit zu einem räumlichen Potential für die Atome. Ist die Verstimmung geringer als die atomare Übergangsfrequenz (rotverstimmt), so entsteht ein attraktives Potential um die Orte maximaler Intensität. Es gibt eine Vielzahl von Realisierungen solcher Fallen. Beispiele hierfür sind fokussierte und gekreuzte Gaußstrahlen oder durch Überlagerung gegenläufiger Laser entstehende optische Gitter.

3.3.1 Aufbau der Dipolfalle

Im vorliegenden Fall wird das Potential durch zwei senkrecht aufeinander stehende, fokussierte, gaußförmige Laserstrahlen erzeugt. Im Folgenden werden zwei Konfigurationen unterschieden, die in Abbildung 3.7 dargestellt sind. In (a) ist die vertikal gekreuzte Dipolfalle gezeigt, die aus einem horizontalen Strahl entlang der y -Achse und einem vertikalen entlang der z -Achse gebildet wird. Die Abbildung 3.7 (b) zeigt die horizontale Falle, die sich aus zwei Strahlen entlang der x -Achse und der y -Achse zusammensetzt. Durch diese beiden Konfigurationen können unterschiedliche Geometrien der Falle realisiert werden.

Als Quelle dient ein Festkörperlaser (*Innolight, Typ: Mephisto*) mit einer Wellenlänge von 1064 nm und einer maximalen Ausgangsleistung von 2 W. Dieser wird in zwei Teilstrahlen aufgespaltet, die jeweils durch einen akusto-optischen Modu-

lator (AOM) (*Crystal Technology: 3111-197*) geführt werden, welche zum Schalten und zum Stabilisieren der Laserintensität dienen. Um Interferenzen zwischen den beiden Strahlen zu minimieren, werden die entgegengesetzten Ordnungen der AOMs verwendet, so dass ein Strahl um $+110$ MHz und der andere um -110 MHz in der Frequenz verschoben wird.

Hinter den AOMs werden die Strahlen in optische Fasern eingekoppelt, um das Modenprofil des Lasers zu reinigen, so dass am Auskoppler (*Schäfter und Kirchhoff: 60FC-T-M40*) eine reine Gaußmode vorliegt. Dahinter haben die Strahlen jeweils einen Durchmesser von $7,2$ mm ($1/e^2$).

In jedem Strahl wird über eine $0,5^\circ$ -Keilplatte ein kleiner Anteil des Lichtes auf je eine Fotodiode (*Roithner Lasertechnik: PT511*) gegeben. Dieser Teil dient als Signal einer Regelschleife, mit der die Leistung über die AOMs stabilisiert wird.

Bevor die Strahlen über Linsen in das Zentrum der Glaszelle fokussiert werden, werden die Polarisierungen der Strahlen über $\lambda/2$ -Platte senkrecht zueinander eingestellt und durch Polarisationsstrahlteiler gefiltert um Interferenzeffekte weiter zu minimieren.

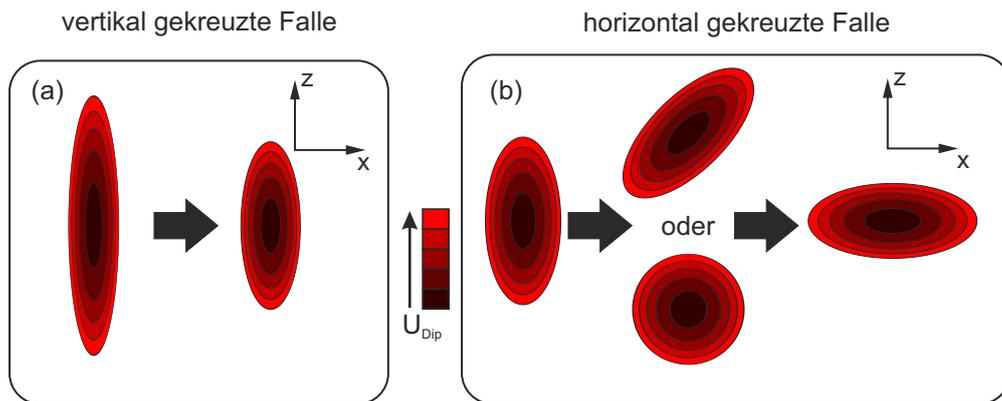


Abbildung 3.8: Mögliche Potentiale der Dipolfallenkonfigurationen in der xz -Ebene. (a) Zeigt wie sich das Potential bei Verringerung der Intensität des vertikalen Strahls verhält. Durch die Gravitation können in vertikalen Dipolfalle nur elliptische Potentiale entstehen. In (b) sind die möglichen Potentiale der horizontalen Dipolfalle dargestellt. Von links nach rechts wird dabei die Intensität des zweiten horizontalen Strahls variiert. Damit und durch die Justage können elliptische Potentiale mit gedrehten Hauptachsen und zylindrische Potentiale generiert werden.

In den Experimenten aus [66,67] wird die Konfiguration aus Abbildung 3.7 (a) verwendet. Der horizontale Strahl wird mit einer $f = 200$ mm Linse fokussiert und der vertikale mit einer $f = 600$ mm Linse. Diese Falle erlaubt die größten Unterschiede der Fallenfrequenzen und kommt so dem eindimensionalen Kastenpotential am nächsten. Durch Variation der Laserintensitäten können unterschiedliche elliptische Potentiale in der xz -Ebene erzeugt werden, wie in der Abbildung 3.8 (a) dargestellt. Entlang der y -Richtung liegt hier immer der schwächste Einschluss vor.

Diese Richtung ist deshalb in der Abbildung nicht gezeigt. Ein zylindrisches Potential mit zwei starken und einer schwachen Richtung kann aufgrund des Einflusses der Gravitation in dieser Konfiguration nicht erreicht werden.

Um eine solches zylindrischen Potential zu erzielen, wird die horizontal gekreuzte Dipolfalle aus Abbildung 3.7 (b) benötigt. Dazu wird der vertikale Strahl durch einen horizontalen Strahl entlang der x -Achse ersetzt. Dieser wird mit einer $f = 300$ mm Linse fokussiert und durch ein Loch in der QUIC-Spule auf die Atome gegeben. Diese horizontal gekreuzte Dipolfalle ermöglicht es, verschiedene Fallentypen einzustellen (vgl. Abb. 3.8 (b)). Durch Variation der Intensität und der Justage des zweiten horizontalen Strahls können neben der zylindrischen auch elliptische Fallenkonfigurationen realisiert werden, bei denen die Richtung der stärksten Fallenfrequenz gedreht werden kann. Dies wird im nächsten Abschnitt näher beleuchtet.

3.3.2 Charakterisierung der Dipolfalle

Für die Experimente ist die Kenntnis und die Kontrolle des zugrundeliegenden Potentials der Dipolfalle sehr wichtig, da es die möglichen Fallenmoden definiert, die durch die Spindynamik besetzt werden können. Zur Messung der spontanen Symmetriebrechung muss beispielsweise gewährleistet sein, dass ein zylindersymmetrisches Potential vorliegt. Für die Messungen der nichtklassischen Korrelationen hingegen ist es am besten, wenn nur eine einzige räumliche Mode besetzt wird, da es ansonsten zu einer Verringerung des Ausgangssignals hinter dem Strahlteiler kommt (vgl. Abschnitt 2.8).

Wie in [145] beschrieben, ist das Potential für ^{87}Rb in einer Dipolfalle allgemein gegeben durch

$$U_{\text{Dip}}(\vec{r}) = \frac{\pi c^2}{2} \left[\frac{1}{\omega_{D1}^3} \left(\frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} - \omega_L} + \frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} + \omega_L} \right) + \frac{2}{\omega_{D2}^3} \left(\frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} - \omega_L} + \frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} + \omega_L} \right) \right] I(\vec{r}) \quad . \quad (3.4)$$

Hierbei steht ω_L für die Frequenz des Lasers und die Größen $\Gamma_{D1,D2}$ und $\omega_{D1,D2}$ für die Streuraten und die Übergangsfrequenzen der D1- und der D2-Linie. Wie in der Gleichung zu sehen, ist das Potential proportional zur räumlichen Intensitätsverteilung $I(\vec{r})$, die durch die gekreuzten Gaußstrahlen erzeugt wird. Für die kalten Atome lässt sich das Potential in erster Näherung durch unabhängige harmonische Oszillatoren in den drei Raumrichtungen mit der atomaren Masse m beschreiben. Die relevanten Fallenfrequenzen können über die zweiten Ableitungen der Gleichung (3.4) erhalten werden,

$$\omega_i = \sqrt{\frac{\partial^2 U_{\text{Dip}}(x,y,z)}{\partial_i^2} \frac{1}{m}} \quad . \quad (3.5)$$

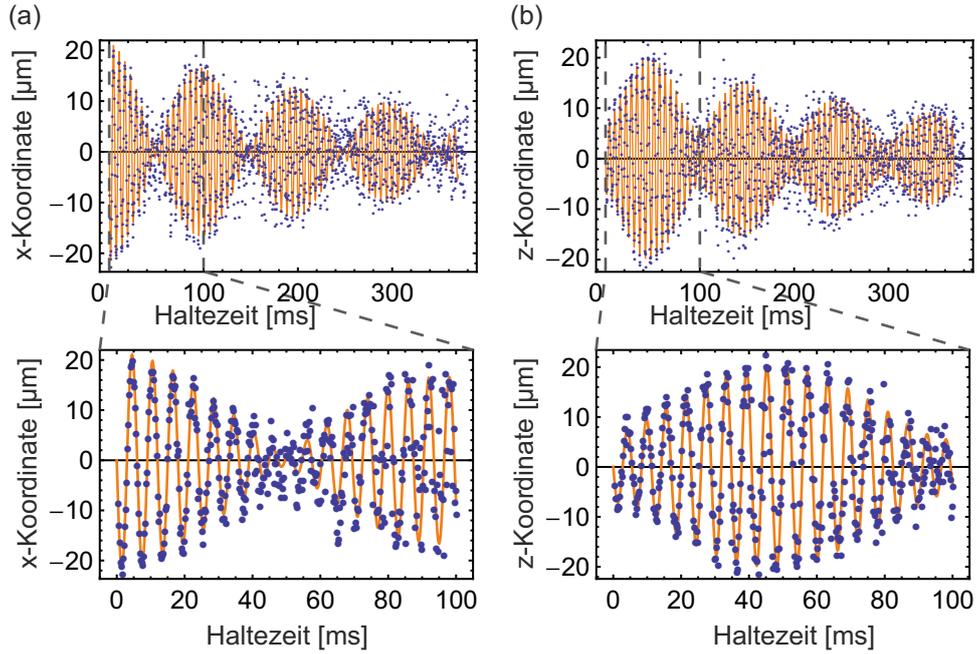


Abbildung 3.9: Graphen einer typischen Fallenfrequenzmessung. Oben sind die x - und die z -Koordinate des Schwerpunkts in Abhängigkeit der Haltezeit in der Dipolfalle nach Abschalten des Magnetfeldgradienten aufgetragen. Die Parameter der eingezeichneten Anpassung lauten $t_0 = 378$ ms, $\alpha = 38,61^\circ$, $x_0 = 18,788$ μm , $y_0 = 12,752$ μm , $\phi_{x'} = \phi_{z'} = 0^\circ$, $\omega_{x'} = 2\pi \times 171$ Hz und $\omega_{z'} = 2\pi \times 161$ Hz. Darunter ist jeweils der Bereich von 0 ms bis 100 ms vergrößert dargestellt.

Das Potential erhält dann die folgende Form,

$$U(x,y,z) = -\frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad . \quad (3.6)$$

Die Kenntnis der Fallenfrequenzen ω_i genügt demnach, um die Falle vollständig zu charakterisieren.

Zur Bestimmung wird ein einfaches Schema verwendet, welches auf der Beobachtung der Oszillation des Masseschwerpunkts in der Falle beruht [158]. Dieses erlaubt eine direkte Messung der Fallenfrequenz. Dazu wird nach der Evaporation das Bose-Einstein-Kondensat in dem magnetfeldsensitiven Zustand $|2,2\rangle$ belassen. Dann werden die Intensitäten der Dipolfalle auf die Werte gefahren, für die die Fallenfrequenz gemessen werden soll. Mit Hilfe der QUIC-Spule (siehe Abbildung 3.25) wird anschließend ein Magnetfeldgradient erzeugt, der eine Auslenkung der Atome in dem Dipolfallenpotential hervorruft. Dabei darf der Gradient nicht so stark gewählt werden, dass die Atome die Falle verlassen und die harmonische Näherung des Potentials nicht mehr angewendet werden kann. Weiterhin sollte der Gradient langsam eingeschaltet werden, damit die Atome dem kombinierten Potential aus Gradient und Dipolfalle adiabatisch folgen können. Das Ausschalten

hingegen erfolgt abrupt. Dadurch fängt die Atomwolke an, in der Dipolfalle zu oszillieren, analog zu einem ausgelenkten Pendel. Die Oszillationsfrequenz entspricht direkt der zu messenden Fallenfrequenz. Zur Auswertung wird für unterschiedliche Zeiten nach Abschalten des Gradienten die Position des Masseschwerpunktes des BECs aus den Absorptionsoptionen bestimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Auslenkung nicht parallel zu den Hauptachsen des Potentials erfolgt, können durch diese Sequenz mehrere Fallenfrequenzen gleichzeitig angeregt und gemessen werden.

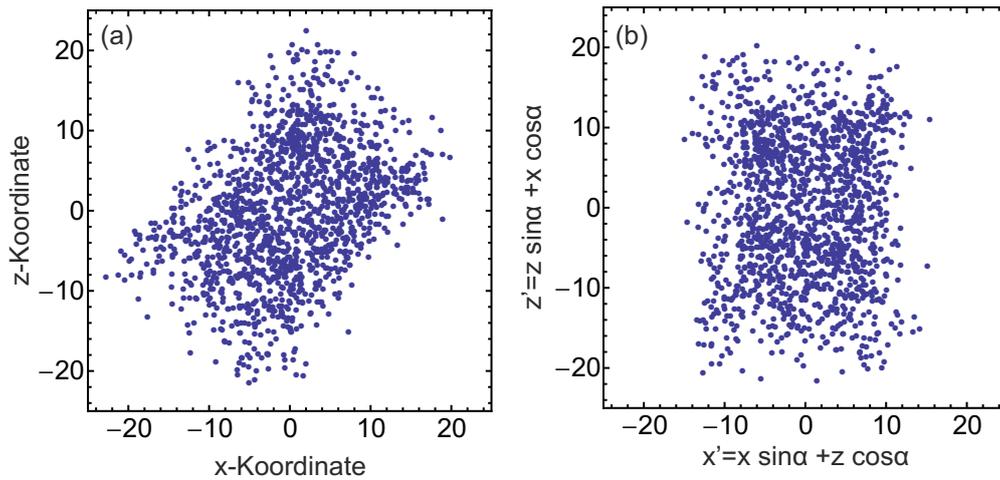


Abbildung 3.10: Bewegung des Schwerpunktes im ursprünglichen und im transformierten Koordinatensystem. Links sind die x - und die z -Koordinaten des Schwerpunktes gegeneinander aufgetragen. Auf der rechten Seite sind die transformierten Koordinaten

$$x' = x \cos \alpha + z \sin \alpha \quad \text{und} \quad z' = z \cos \alpha + x \sin \alpha$$

Die Bestimmung des Masseschwerpunktes gibt die Koordinaten relativ zum Bezugssystem der Kamera aus. Stimmt dieses System nicht mit dem Hauptachsensystem des Potentials überein, so ergibt sich eine Überlagerung zwischen den Oszillationen der beiden Richtungen. Dies ist in Abbildung 3.9 exemplarisch für eine Messung dargestellt. Oben sind die x - und die z -Koordinaten des Schwerpunktes im Bezugssystem der Kamera in Abhängigkeit der Haltezeit dargestellt. Darunter ist je eine Vergrößerung der ersten 100 ms zu sehen. Die Überlagerung führt zu einem Schwebungssignal mit einer Schwebungsfrequenz, die der Differenz der beiden Fallenfrequenzen entspricht. Die eingezeichnete Kurve ist eine Funktion der Form

$$x(t) = e^{-\frac{t}{t_0}} [x_0 \cos \alpha \sin(\omega_{x'} t + \phi_{x'}) + z_0 \sin \alpha \sin(\omega_{z'} t + \phi_{z'})] \quad , \quad (3.7)$$

die an die Daten angepasst worden ist. Die Exponentialfunktion mit der Zeitkonstante t_0 berücksichtigt die Dämpfung der Oszillation. Der Winkel α beschreibt die Orientierung des Hauptachsensystems relativ zur Kamera. Die weiteren freien Parameter der Anpassung sind die Amplituden x_0 , z_0 , sowie die Frequenzen $\omega_{x',z'}$ und Phasen $\phi_{x',z'}$ der überlagerten Oszillationen.

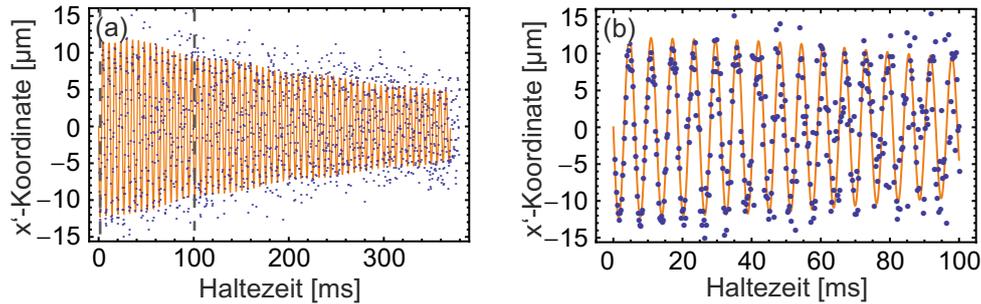


Abbildung 3.11: Fallenfrequenzmessung aus Abbildung 3.9 im gedrehten Bezugssystem der Hauptachsen für die x' -Koordinate. (a) Komplette Messung (b) Messung für die ersten 100 ms. In beiden Graphen ist keine Schwebung mehr erkennbar.

Ob die Anpassung die richtigen Werte ergeben hat, kann leicht überprüft werden. Wenn die x - und z -Koordinate gegeneinander aufgetragen werden. Es ergibt sich eine Lissajous-artige Figur, die durch ein Rechteck beschränkt ist. Diese zeigt die Abbildung 3.10 (a), in der die Messpunkte im Koordinatensystem der Kamera dargestellt sind. Die Kantenlängen des Rechtecks entsprechen den Amplituden x_0 und z_0 . Der Winkel relativ zur Koordinatenachse ist gleich dem ermittelten Winkel α aus Gleichung (3.7). Wird eine Koordinatentransformation der Form $x' = x \cos \alpha + z \sin \alpha$ und $z' = z \cos \alpha + x \sin \alpha$ vorgenommen, so entspricht dies einem Wechsel in das Koordinatensystem der Hauptachsen. Dies wird in Abbildung 3.10 (b) dargestellt. In diesem System ist die Orientierung des Rechtecks parallel zu den Achsen ausgerichtet. Die Oszillationen entlang der Richtungen x' und z' sind entkoppelt und dementsprechend verschwindet das Schwebungssignal wie in Abbildung 3.11 dargestellt.

Zylindrische Falle

Für die Untersuchungen zur spontanen Symmetriebrechung wird eine Falle mit einer Zylindersymmetrie benötigt. Das heißt, dass beispielsweise die zwei stärksten Fallenfrequenzen möglichst gleich groß sein müssen. Um die optimalen Einstellungen für das Erreichen einer solchen Konfiguration zu finden, sind für unterschiedliche Einstellungen und Justagen eine Vielzahl der in Abbildung 3.9 dargestellten Fallenfrequenzmessungen vorgenommen worden.

Dabei hat sich herausgestellt, dass die Justage der Strahlen zueinander sehr wichtig ist. Die entscheidenden Punkte sind in der Abbildung 3.12 illustriert. In (a) ist ein transversaler Versatz der Strahlen, so dass sich die Zentren der Strahlen nicht kreuzen. Abbildung 3.12 (b) zeigt einen longitudinalen Versatz, der sich dadurch äußert, dass der Kreuzungspunkt der Strahlen nicht am Ort der beiden Foki liegt. Die Abbildung 3.12 (c) zeigten einen Astigmatismus eines Strahles. In diesem Fall kommt es zu unterschiedlichen Fokuspositionen der beiden longitudinalen Achsen eines Gaußstrahls. Alle diese Effekte führen dazu, dass die Fallenfrequen-

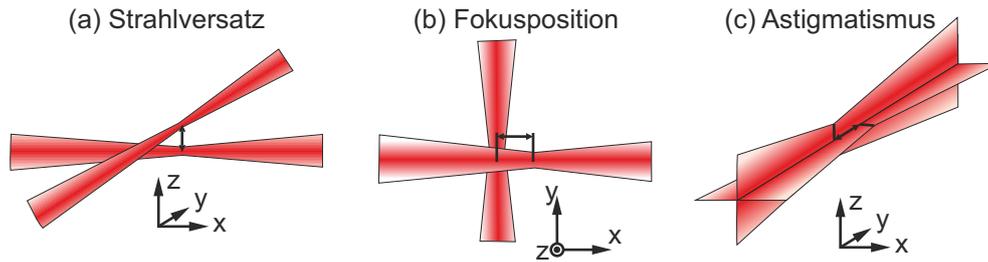


Abbildung 3.12: Illustration der Justagefehler (a) Strahlversatz, (b) Fokussposition und (c) Astigmatismus

zen durch Variation der Intensitäten nicht perfekt angeglichen werden können, da die Situation nicht mehr perfekt symmetrisch ist. Dies wird anhand der Abbildung 3.13 verdeutlicht. Hier sind für eine bestimmte Justage die Werte der beiden Fallenfrequenzen (Abb. 3.13 (a)) und die Winkel der Hauptachsen (Abb. 3.13 (b)) gegen die Intensität des zweiten horizontalen Strahls dargestellt. Wird die Intensität sukzessive erhöht, so nähern sich die Frequenzen zwar an, aber ab einem bestimmten Wert driften sie wieder auseinander. Gleichzeitig dreht sich das Hauptachsensystem des Potential und damit das Aspektverhältnis zwischen der starken und der schwächeren Fallenfrequenz. Es entsteht eine Art vermiedene Kreuzung.

Um den Bereich der vermiedenen Kreuzung zu minieren und somit die Fallenfrequenzen möglichst aneinander anzupassen, muss die Justage der Dipolfalle genau eingestellt werden. Dazu werden als erstes die Linsen so eingestellt und gedreht, dass der Fokus, der auf die Kamera abgebildet wird möglichst rund ist, um den Einfluss des Astigmatismus zu minimieren. Diese Einstellung ist noch ohne Atome möglich und geht daher recht schnell. Um den transversalen Versatz der beiden Dipolstrahlen zu ermitteln, werden die Atome ohne Evaporation in der Dipolfalle, nach der TOF betrachtet. Aufgrund der hohen Intensitäten können so Atome in den Armen der Falle gefangen werden. Dadurch sind diese auf den Absorptionenaufnahmen erkennbar und können zueinander justiert werden. Die nächste Stufe der Optimierung besteht darin, die Absorptionenaufnahmen von Bose-Einstein-Kondensaten in der xz -Ebene zu betrachten. Im Idealfall sollten die Kondensate für jede Flugzeit rund sein und nicht elliptisch werden. Danach erfolgen Messungen mit Spindynamik, um zu sehen, ob sich die erwarteten räumlichen Strukturen der zylindrischen Falle bilden.

Die letzte Stufe der Optimierung erfolgt durch Messungen der Fallenfrequenzen bei leichter Variation der Intensitäten. Die besten Parameter, die für die Realisierung einer zylindersymmetrischen Falle erreicht worden sind, lauten $\omega'_x = 2\pi \times 187$ Hz, $\omega'_z = 2\pi \times 183$ Hz und $\omega'_y = 2\pi \times 67$ Hz. Die entsprechenden Leistungen zur Erzeugung der Dipolfalle betragen 24 mW für den ersten horizontalen Strahl entlang der y -Achse und 60 mW für den zweiten in x -Richtung. Wie sich herausgestellt hat, ist der verbleibende Unterschied in den zwei starken Frequenzen

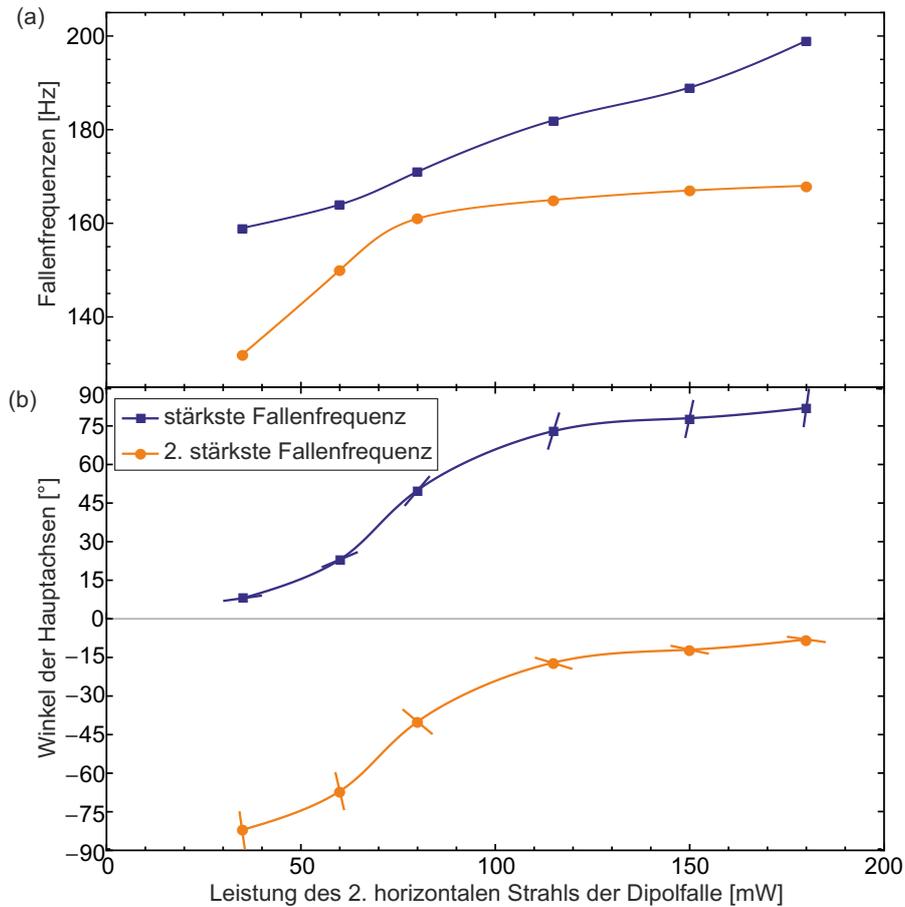


Abbildung 3.13: Fallenfrequenzen und Winkel der stärksten Fallenrichtungen für eine festgelegte Justage. In (a) sind die beiden stärksten Fallenfrequenzen in Abhängigkeit der Leistung des 2. horizontalen Strahls der Dipolfalle gezeigt. (b) Zeigt wie sich die Winkel der Hauptachsen dabei ändern. Die kleinen Linien auf den Punkten zeigen jeweils den entsprechenden Winkel an.

gering genug, um die spontane Symmetriebrechung zu beobachten.

Elliptische Falle

Wie im Abschnitt 2.8 erläutert, ist die zylindrische Falle eher ungeeignet, um die interferometrische Sensitivität zu bestimmen, da hier auch Moden entlang der schwachen Fallenrichtung angeregt werden können. Am besten ist es, wenn der Abstand der Moden entlang der drei Raumrichtungen möglichst groß ist. Dadurch sollte es möglich sein, gezielte einzelne Moden einzustellen.

Die besten Parameter sind direkt mit Hilfe der relevanten Experimente zum Strahlteiler bestimmt worden (vgl. Kapitel 6). Sie lauten $\omega'_x = 2\pi \times 183$ Hz, $\omega'_z = 2\pi \times 151$ Hz und $\omega'_y = 2\pi \times 122$ Hz. Dafür werden Intensitäten von 15 mW für den

ersten und 200 mW für den zweiten horizontalen Strahl benötigt.

3.4 Zustandspräparation und Manipulation von Spinorganen

Die Experimente zur Spindynamik setzen voraus, dass die anfängliche Besetzung der unterschiedlichen Spinzustände genau bestimmt und präpariert werden kann. Der experimentelle Ablauf ist darauf optimiert, das nach der Evaporation ein Bose-Einstein-Kondensat in dem Zustand $|2,2\rangle$ vorliegt. Dabei handelt es sich um einen gestreckten und damit stabilen Zustand. In diesem findet keine Spindynamik statt. Um diese zu starten, muss das Kondensat in den Zustand $|2,0\rangle$ präpariert werden¹.

Diese Präparation ist von großer Bedeutung und einer ständig fortschreitenden Entwicklung unterworfen. In den verschiedenen Experimenten sind daher unterschiedliche Techniken zum Einsatz gekommen. Zum einen sind das schnelle adiabatische Passagen (engl. rapid adiabatic passage) [159, 160] mit Radiofrequenzen oder Mikrowellen und zum Anderen sind es Mikrowellenpulse mit festen Frequenzen und für feste Zeiten, sogenannte Rabiübergänge [161].

3.4.1 Präparation durch Radiofrequenzen

In den ersten Experimenten zur Spindynamik sind schnelle adiabatische Passagen mit Hilfe von Radiofrequenzen im Bereich von 55 MHz verwendet worden. Dabei koppelt die Radiofrequenz an die Zeemanzustände. In dem gekoppelten Zustand ergeben sich vermiedene Kreuzungen zwischen benachbarten Zuständen (vgl. Abb. 3.14 (a)). Wird die Frequenz adiabatisch über eine solche Kreuzung variiert, so können die Atome in einen anderen Zeemanzustand transferiert werden. Der Vorteil dieser Technik ist, dass sie unsensibel auf Frequenz- oder Magnetfeldrauschen ist. Allerdings werden recht hohe Magnetfelder (≈ 80 G) benötigt, um das Kondensat in genau einem Zustand zu präparieren. Bei geringeren Magnetfeldern führen die Breiten der Übergänge dazu, dass es zu einer Mischung mit den benachbarten Zuständen kommt. Ein weiteres Problem stellt die Dauer der RF-Passage von etwa 5 ms. Diese führt dazu, dass es in dem $F = 2$ -Zustand zu einer merklichen Reduktion der Teilchenzahlen durch Hyperfeinniveau-ändernde Stöße kommt.

Die Breite der Radiofrequenzübergänge kann allerdings ausgenutzt werden, um eine gleichmäßige Besetzung der Zustände in $|F = 2, m_F = \pm 1\rangle_F$ zu erzielen. Dazu wird eine feste Radiofrequenz verwendet, die in der Mitte der Übergangsfrequenzen $|2,0\rangle_F \rightarrow |2,1\rangle$ und $|2,0\rangle_F \rightarrow |2, -1\rangle$ liegt. Durch die Wahl der Einstahldauer kann so die Teilchenzahl in den Zuständen eingestellt werden. Dies kann einerseits dazu dienen, eine Anzahl von Saatatomen [67, 101] zu erzeugen, oder um die

¹Die Spindynamik kann auch durch Präparation in den Anfangszuständen $|1,0\rangle$ [63] sowie $|2, \pm 1\rangle$ statt finden. Dies ist allerdings nicht Teil dieser Arbeit.

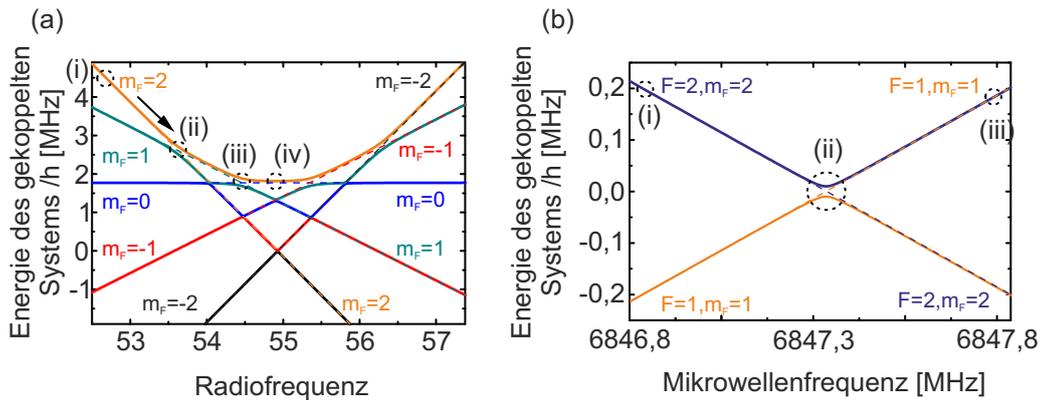


Abbildung 3.14: Schnelle adiabatische Passagen für (a) Radio- und (b) Mikrowellen

Korrelationen der Spindynamik mit denen der künstlich hergestellten Mischung zu vergleichen (siehe Kapitel 6).

Die Erzeugung der Radiofrequenz ist in der Abbildung 3.15 skizziert. Die Radiofrequenzrampen werden von einem Frequenzgenerator (*VFG-150*) der Firma Toptica erzeugt und mit einem Verstärker (*Amplifier Research, 10W1000*) auf 10 W verstärkt. Zur Stabilisierung der Ausgangsfrequenz ist der verwendete Frequenzgenerator an das 10 MHz-Signals eines Masers (*VCH-1006*, Vremya-CH) phasenstabil angebunden. Eine Stärke des Frequenzgenerators ist, dass eine Frequenzrampe einprogrammiert und auf einen TTL-Trigger hin, ausgegeben werden kann. Die so generierte Radiofrequenzrampe wird über eine Antenne auf die Atome gegeben. Diese besteht aus einer Leiterschleife mit zwei Windungen und ist direkt an der Experimentierzelle angebracht. Durch das evaneszente Feld ergibt sich eine ausreichend hohe Intensität am Ort der Atome.

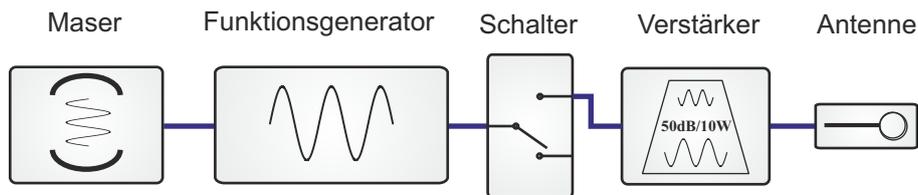


Abbildung 3.15: Radiofrequenzaufbau für die schnelle adiabatische Passage.

3.4.2 Schnelle adiabatische Passagen mit Mikrowellen

Um Verluste durch Stöße im $F = 2$ -Zustand zu verringern, kann die adiabatische Passage mittels Mikrowellen erfolgen (vgl. Abb. 3.14 (b)). Allerdings werden hierfür zwei unterschiedliche Passagen benötigt. Die erste Passage erfolgt nach dem Transfer in die Dipolfalle aus dem Zustand $|2,2\rangle$ in $|1,1\rangle$. Dort finden keine Hyperfeinniveau ändernde Stöße statt, was die Teilchenzahlen am Ende der Evaporation

bedeutend erhöht. Die zweite Passage $|1,1\rangle \rightarrow |2,0\rangle$ erfolgt im Anschluss an die Evaporation. Die Magnetfelder der Mikrowellenpassagen können gegenüber der RF-Passage geringer gewählt werden, da die Hyperfeinübergänge im Vergleich zu den Zeemanübergängen bedeutend schmäler sind. Im Experiment ist ein Feld von 6 G gewählt worden. Dementsprechend werden Frequenzrampen im Bereich von $6847,3 \pm 0,5$ MHz für den ersten und $6838,9 \pm 0,5$ MHz für den zweiten Übergang benötigt. Diese Rampen erfolgen jeweils in einer Zeit von 5 ms.

Der prinzipielle Aufbau dieser Mikrowelle ist in der Abbildung 3.16 dargestellt. Als Ausgangspunkt für die Erzeugung der Mikrowellenrampen dient der gleiche Synthesizer (*VFG-150*) wie für die Radiofrequenz. Er dient als Referenzfrequenz für einen Mikrowellenoszillator (*MITEQ M/N BCO-10-6800-0-15P*). Dieser gibt abhängig von der Referenz direkt die gewünschte Mikrowellenfrequenz aus. Über einen Verstärker (*Industrial Electronics, AM 53*) wird das Signal an eine Antenne und von dort auf die Atome gegeben. Ein Nachteil des Oszillator ist, dass er einige Zeit benötigt (≈ 5 ms) bis er sich auf die gewünschte Frequenz eingestellt hat. Außerdem ist das Rauschen relativ hoch und kann somit nicht für die Präparation durch Mikrowellenpulse eingesetzt werden (siehe nächsten Abschnitt 3.4.3). Diese adiabatischen Mikrowellenpassagen sind verwendet worden, um die Atome für die Untersuchungen der spontanen Symmetriebrechung zu präparieren.

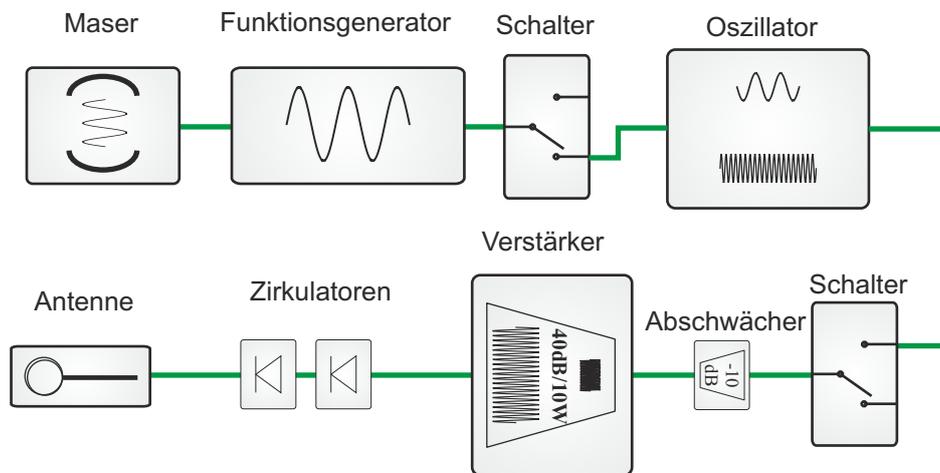


Abbildung 3.16: Mikrowellenaufbau für die schnelle adiabatische Passage.

3.4.3 Mikrowellenpulse zur Manipulation und Präparation atomarer Zustände

Gepulste elektromagnetische Wellen haben den Vorteil, dass sie wesentlich kürzer ausfallen können, gegenüber den adiabatischen Passagen. Durch bestimmte aufeinanderfolgende Pulssequenzen können zudem beliebige Anfangszustände realisiert werden.

Im Experiment werden Sequenzen mehrerer Mikrowellenübergänge zwischen verschiedenen Zeemanzuständen der beiden unteren Hyperfeinniveaus ($F = 1 \leftrightarrow F = 2$) verwendet, um die Atome in dem richtigen Anfangszustand zu präparieren. Die erlaubten Übergänge mit $\Delta m_F \in \{-1, 0, 1\}$ sind sehr schmal, so dass bereits geringe Magnetfelder von ≈ 1 G ausreichen die Entartung aufzuheben. Dadurch wird diese Technik allerdings sehr sensibel auf Magnetfeldschwankungen. Diese ändern die Energien zwischen den Zeemanzuständen und somit die atomare Übergangsfrequenz. Erst durch eine aktive Stabilisierung der verwendeten Magnetfeldrichtung (siehe Abschnitt 3.5.1) ist es gelungen die erforderliche Stabilität der Präparationssequenz zu gewährleisten.

Aufgrund der geringen Linienbreite der einzelnen Übergänge kann das System zurückgeführt werden, auf die Beschreibung der Wechselwirkung eines Zweiniveausystems mit einer Mikrowelle. Die Kopplung an die benachbarten Niveaus kann dementsprechend vernachlässigt werden. Die Behandlung kann analog zu Abschnitt 2.6 mit Hilfe der Blochkugel erfolgen.

Anfangs befinden sich die Atome in einem Zustand bei dem der Blochvektor auf den Nordpol zeigt $|j, j\rangle_z$ (vgl. Gl. (2.61)). Die Wechselwirkung mit der Mikrowelle kann durch die Rotationen des Blochvektors um eine bestimmte Achse beschrieben werden. Diese Achse ist nicht zwangsläufig durch eine der Koordinatenachse gegeben, sondern in der Regel beliebig im Raum orientiert. Eine solche allgemeine Rotation kann dargestellt werden durch

$$\hat{U}_R |j, j\rangle_z = \exp\left(-i\Omega_{\text{eff}} t \vec{J} \cdot \vec{n}\right) |j, j\rangle_z \quad . \quad (3.8)$$

Diese kann auch Analog zu Gleichung (2.65) durch die Hintereinanderausführung mehrerer Rotationen um die Koordinatenachsen beschrieben werden. In der Gleichung (3.8) bezeichnet der Parameter $\Omega_{\text{eff}} = \sqrt{\Omega_R^2 + \Delta\omega^2}$ die effektive Rabi-Frequenz. Sie setzt sich zusammen aus der quadratischen Summe der resonanten Rabi-Frequenz Ω_R und der Verstimmung $\Delta\omega \equiv \omega_0 - \omega_{\mu W}$ zwischen der atomaren Übergangsfrequenz ω_0 und der Frequenz der eingestrahlten Mikrowelle $\omega_{\mu W}$. Die Frequenz $\Omega_R \propto \sqrt{I}$ ist proportional zur Wurzel der eingestrahlten Intensität und ist abhängig von der Polarisation der Mikrowelle und den Übergangmatrixelementen. Der Einheitsvektor $\vec{n} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)^T$ stellt die Rotationsachse dar, um die der Blochvektor \vec{J} gedreht wird. Hierbei ist α der Winkel zur z -Achse. Er ist über die Beziehung $\tan \alpha = \frac{\Omega_R}{\Delta\omega}$ mit der Rabi-Frequenz und der Verstimmung verknüpft. Der Winkel β beschreibt die Phase in der xy -Ebene und wird durch die Phase der Mikrowelle vorgegeben. Eine solche Rotation kann man sich vorstellen als gleichzeitige Rotation um eine feste Achse in der xy -Ebene, mit der Frequenz Ω_R und um die z Achse mit $\Delta\omega$.

Befinden sich Anfangs alle Atome im selben Zustand so entspricht diese Rotation im resonanten Fall ($\Delta\omega = 0$) einer Oszillation der Besetzungswahrscheinlichkeiten zwischen den beteiligten Zuständen mit der Frequenz Ω_R . Dieser Vorgang

wird als Rabioszillation bezeichnet [161]. Wird die Einstrahldauer t so gewählt, dass die Pulsfläche $\Omega_R t = \pi$ einer halben Periode entspricht (π -Puls), so kann ein vollständiger Transfer von einem zum anderen Zustand erzielt werden. Zudem können durch die Wahl anderer Zeiten t beliebige Mischungen zwischen den Zuständen erzeugt werden.

Dies wird klar, wenn der Operator \hat{U}_R aus Gleichung (3.8) mit dem in Abschnitt 2.6 beschriebenen Operator (2.66) für den Strahlteiler verglichen wird. Mit $\phi = \Omega_R t$ sind beide identisch. Durch Variation der Zeit können somit Strahlteiler für unterschiedliche Mischungsverhältnisse zwischen den Zeemanzuständen der beiden Hyperfeinniveaus realisiert werden. Ein 50:50-Strahlteiler entspricht beispielsweise einer Pulsfläche von $\Omega_R t = \pi/2$. Die Zeiten t , die für einen π -Puls benötigt werden, liegen im Experiment zwischen $10 \mu\text{s}$ und $200 \mu\text{s}$ abhängig von dem verwendeten Übergang. Die Zeiten sind somit bedeutend kürzer als die der adiabatischen Passagen.

Kann zusätzlich die Phase der Mikrowelle kontrolliert werden, so ist es möglich durch sogenannte Kompositpulse [162] etwaige Störeinflüsse durch Frequenz- oder Intensitätsrauschen der Mikrowelle zu verringern. Ein Kompositpuls besteht aus einer Folge unterschiedlicher Einzelpulse mit unterschiedlichen Phasen β . Im Bild der Blochkugel entspricht dies aufeinanderfolgender Rotationen um unterschiedliche Achsen in der xy -Ebene. Werden die Pulslängen und die jeweiligen Phasen geschickt gewählt, so ist es möglich störende Einflüsse zu minimieren.

Wie sich diese für unterschiedliche π -Pulse auf der Blochkugel bemerkbar machen, ist in der Abbildung 3.17 dargestellt. Die Bilder zeigen einen einfachen Puls (Abb. 3.17 (a)) und einen speziellen $90_y 180_x 90_y$ -Kompositpuls (Abb. 3.17 (b)), wenn bei gleichbleibender Pulsdauer (Intensität) die Intensität (Pulslänge) verringert (Abb. 3.17 (1)) oder die Mikrowellenfrequenz verstimmt wird (Abb. 3.17 (2)). Der schwarze und die farbigen Pfeile stellen jeweils den gedrehten Blochvektor nach einem idealen und einem nicht idealen π -Puls dar. Die farbigen Linien auf der Blochkugel entsprechen den Pfaden der Blochvektorenden während der unterschiedlichen Pulssequenzen. Im Fall des einfachen Pulses endet der Blochvektor nach der Rotation mit verringerter Intensität nicht mehr auf dem Südpol. In der Darstellung des Kompositpulses ist zu sehen, dass die Blochvektoren mit reduzierter Intensität oder Verstimmungen näher an dem Südpol der Blochkugel sind, als dies mit einem einzelnen π -Puls der Fall wäre. Was bei diesem Kompositpuls genau passiert, ist in Abbildung 3.17 (b.1) gut zu sehen. Hier wird der Blochvektor, zuerst mit $\pi/2$ um die y -Achse gedreht. Anschließend erfolgt ein π -Puls mit einer um 90° gedrehten Phase, der den Vektor um die x -Achse dreht. Die letzte Rotation entspricht wieder einer $\pi/2$ -Drehung um die y -Achse. Im Bild 3.17 (b.2) passiert genau das Gleiche nur das hier die Drehachsen durch die Verstimmung geändert sind. Mit Hilfe von Kompositpulsen ist es demnach möglich, den Einfluss von Intensitäts, Pulslängen und Frequenzschwankungen auf den Transfer zu reduzieren.

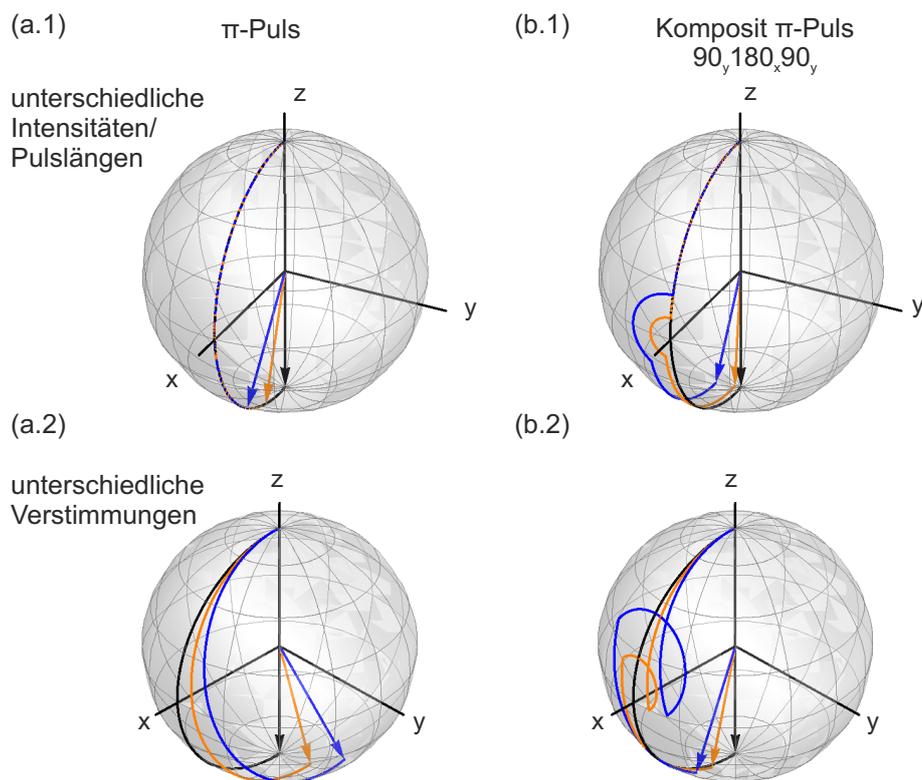


Abbildung 3.17: Vergleich eines (a) normalen π -Pulses mit einem (b) $90_y 180_x 90_y$ Komposit π -Pulses im Bild der Blochkugel. In (1) sind diese Pulse für unterschiedliche Leistungen und in (2) für unterschiedliche Verstimmungen gezeigt.

3.4.4 Erzeugung der Mikrowellenpulse

Die Erzeugung der benötigten Mikrowellenpulse hat eine Optimierung durchgemacht, in der die Frequenzgenauigkeit, die Kontrolle der Pulslängen und der Ausgangsleistung sowie die Ansteuerung sukzessive verbessert worden sind. In den ersten Experimenten zur Untersuchung der nichtklassischen Korrelationen wird die Mikrowelle für beide Pulse separat generiert. Für die Bestimmung der interferometrischen Sensitivität des nichtklassischen Zustandes wird hingegen ein anderer Aufbau verwendet, der sich durch eine große Flexibilität auszeichnet.

Erzeugung der Mikrowellenpulse für die Untersuchung der nichtklassischen Korrelationen

Im ersten Aufbau dienen zwei Synthesizer vom Typ *Marconi 2024* und *Rhode & Schwarz SMG-01* dazu, die Grundfrequenzen im Bereich von 976 MHz - 977 MHz

bereitstellen. Diese werden jeweils auf die 10 MHz Referenz des Masers stabilisiert. Um die Pulslängen präzise einstellen zu können, werden diese Frequenzen zunächst auf schnelle Mikrowellenschalter (Minicircuits *ZYSWA-2-50RD*) gegeben. Diese werden mittels Funktionsgeneratoren der Sorten *Agilent 33220A* und *Keithley 3390* angesteuert, indem sie auf einen Trigger hin, einen Rechteckpuls genau definierter Länge an den TTL-Eingang der Mikrowellenschalter geben. Die Signale werden dann über Verstärker auf Speicherschaltioden (engl. Step Recovery Diode, Herotec *GC 100RC*) gegeben. Diese erzeugen einen Kamm der höheren harmonischen Frequenzen. Durch Filterung mit einer Kombination aus Hoch- und Tiefpass kann gezielt die siebte Harmonische ausgewählt werden. Diese entspricht dann der gewünschten atomaren Übergangsfrequenz. Über einen Kombinierer (*Minicircuits, ZN2PD-9G+*) können anschließend beide Frequenzen über den Verstärker (*Industrial Electronics, AM 53*) auf 10 W verstärkt werden. Zum Schutz des Verstärkers durch Reflexionen wird das Signal durch zwei Zirkualoren an eine Antenne und so auf die Atome gegeben.

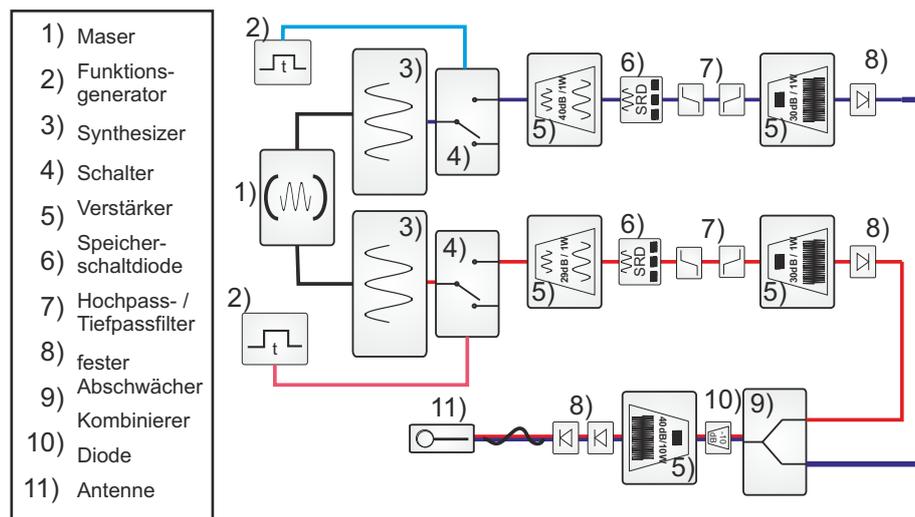


Abbildung 3.18: Aufbau für die Erzeugung der Mikrowellenpulse zur Präparation der Atome in dem Anfangszustand der Spindynamik. Dieser Aufbau ist für die Experimente zur spontanen Symmetriebrechung verwendet worden.

Erzeugung der Mikrowellenpulse für die Untersuchungen der interferometrischen Sensitivität der nichtklassischen Zustände

Zur Implementierung der Strahlteiler und zur Vermessung der interferometrischen Sensitivität werden weitere Pulse mit unterschiedlichen Frequenzen benötigt. Um dies zu ermöglichen könnte der erste Aufbau um zwei Funktionsgeneratoren und zwei Synthesizer erweitert werden. Die bessere Alternative wäre aber, wenn alle

Pulse mit den selben Geräten erzeugt werden könnten. Dazu ist ein neues System aufgebaut worden.

Ausgangspunkt der Frequenzerzeugung ist ein Synthesizer vom Typ *Marconi 2024*, der auf eine feste Frequenz von 2320,000 MHz eingestellt ist. Dieser wird an einen Frequenzverdreifacher (*Minicircuits, ZX90-3-812+*) gegeben. Der Vorteil des Verdreifachers gegenüber der Speicherschaltodiode neben dem Preis ist der, dass die anderen harmonischen Frequenzen stark unterdrückt sind. Anschließende Hoch- und Tiefpässe werden dadurch überflüssig. Das so erzeugte Mikrowellensignal ist dann ca. 145 MHz über den atomaren Resonanzen. Daher wird die Ausgangsfrequenz des Verdreifachers über einen Verstärker auf einen Mischer (*Minicircuits, ZMX-7GR*) gegeben. Dort werden die Summe und die Differenz des Mikrowellensignals und eines zusätzlichen Radiofrequenzsignal gebildet. Die Frequenz des Radiosignals wird so gewählt, dass die Differenzfrequenz der atomaren Übergangsfrequenz entspricht. Dieses Radiosignal wird mit Hilfe des *Toptica VFG-150* Frequenzgenerators erzeugt. Dieser ist wie der Synthesizer phasenstabil an die Referenz des Masers gekoppelt. Ähnlich zu den Radiofrequenzpassagen können damit vorab verschiedene feste Frequenzen von unterschiedlicher Dauer einprogrammiert werden, die dann auf einen Trigger der Experimentsteuerung hin ausgegeben werden. Weiterhin verfügt dieser Frequenzgenerator über vier Digitalausgänge, die ebenfalls mit dem eingespeichertem Programm angesteuert werden können. Zum präzisen Einstellen der Pulslänge wird einer dieser Ausgänge verwendet. Er steuert den schnellen Mikrowellenschalter der das Signal weiter an einen Verstärker und auf die Antenne gibt.

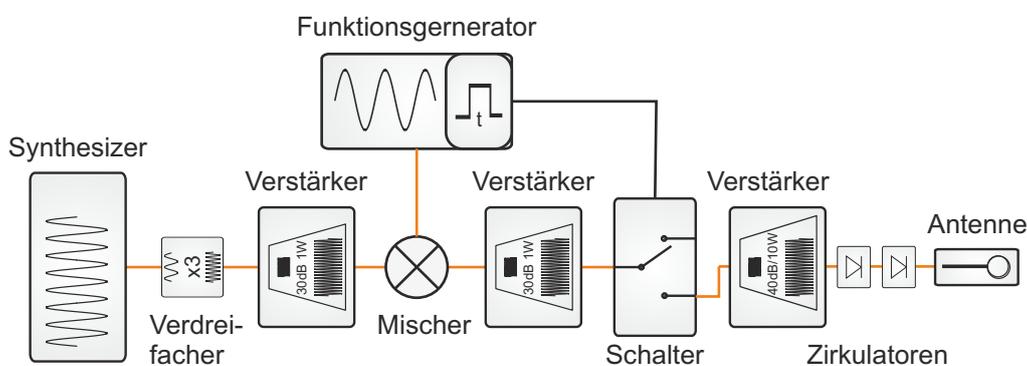


Abbildung 3.19: Neuer Aufbau für die Erzeugung der Mikrowellenpulse zur Präparation der Atome in dem Anfangszustand der Spindynamik. Dieser Aufbau ist für die Experimente zu den nichtklassische Zuständen verwendet worden.

Diese Form der Steuerung ermöglicht ein schnelles Umschalten zwischen verschiedenen Frequenzen. Die einzelnen Pulse für die Präparation und den Strahlteiler werden also vor der Sequenz an den Frequenzgenerator gesendet und an den jeweiligen Stellen des Experiments über Trigger von der Experimentsteuerung abgefragt. Somit können alle Pulse mit dem gleichen Aufbau generiert werden, wo-

durch es auch einfach wird zusätzliche Pulse hinzuzufügen. Ein weiterer Vorteil ist der, dass der Frequenzgenerator eine volle Kontrolle der Pulsphasen erlaubt. Dies ermöglicht den Einsatz von Kompositpulsen zur Fehlerkorrektur.

3.4.5 Charakterisierung der Mikrowellenübergänge

Zur Einstellung der Pulsparameter müssen die Frequenzen der unterschiedlichen Übergänge, sowie die zugehörigen Rabifrequenzen genau bestimmt werden. Die Messungen dafür erfolgen separat für jeden einzelnen Übergang.

Bestimmung der Resonanzfrequenz

Die Bestimmung der Resonanzfrequenz erfolgt nach dem folgenden Schema. Zunächst werden Mikrowellenpulse fester Länge t und variabler Frequenz ν auf die Atome gegeben. Im Anschluss erfolgt die zustandsselektive Detektion der Atome (siehe 3.2), um die Teilchenzahlen der beide relevanten Zuständen zu ermitteln. Zur Auswertung wird die Teilchenzahl eines Zustandes noch auf die Gesamtteilchenzahl normiert

$$p_a(\nu, t) = \frac{n_a}{n_a + n_b} \quad . \quad (3.9)$$

Wird dieser Wert für unterschiedliche Frequenz gemessen, so ergibt sich eine charakteristische Kurve. Der funktionale Zusammenhang zur Beschreibung kann durch Anwenden der Gleichung (3.8) auf den gegebenen Anfangszustand erhalten werden und lautet

$$p_a(\nu, t) = \frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \sin^2 \left[\frac{1}{2} t \sqrt{\Omega_R^2 + 4\pi^2(\nu - \nu_0)^2} \right] \quad . \quad (3.10)$$

Durch Anpassen dieser Funktion an die gegebenen Daten ergeben sich dann die benötigten Größen. Die Parameter zur Anpassung sind die Resonanzfrequenz ν_0 und die Rabifrequenz Ω_R . Eine typische Kurve ist in der Abbildung 3.20 (a) gezeigt. Die Messungen der Frequenz werden genauer je länger der Puls wird, da dann die Breite des zentralen Maximum und die Abstände zu den Nebenmaxima geringer werden. Alternativ kann auch eine Ramseysequenz [32] zur Messung der Resonanzfrequenz verwendet werden.

Diese Messungen dienen auch zur Bestimmung der Magnetfelder und der zugehörigen Eichkurven aus Abschnitt 3.5.1. Dafür sind in Abhängigkeit des angelegten Stroms die Resonanzfrequenz des magnetfeldsensitiven Übergangs $|2,2\rangle \rightarrow |1,1\rangle$ gemessen worden. Über die Breit-Rabi-Formel [157, 163] (vgl. Abschnitt 3.5) kann dann das Magnetfeld berechnet werden. Alle Datenpunkte die in Abschnitt 3.5.1 gezeigt werden entsprechen jeweils einer Messung der Übergangsfrequenz nach dem obigen Schema.

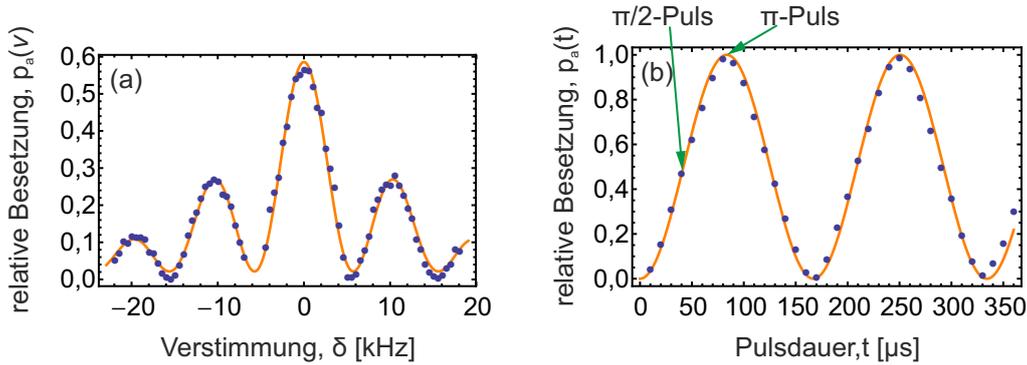


Abbildung 3.20: Typische Messung zum ermitteln der Pulsparameter. In (a) ist die Mikrowellenspektroskopie des $|1,1\rangle \rightarrow |2,0\rangle$ -Übergangs gezeigt. Die eingezeichnete Kurve entspricht einer Anpassung der Gleichung (3.10) an die Messdaten mit der vorgegebenen Pulslänge von $t = 120 \mu\text{s}$ sowie den freien Parametern $\Omega_R = 38,4 \text{ kHz}$ und $\nu_0 = 6835,54807(3) \text{ MHz}$. (b) zeigt die zugehörige resonante Rabioszillation. Daraus ergibt sich eine π -Pulslänge von $t_\pi = 83,0(1) \mu\text{s}$

Bestimmung der Pulsängen

Bei der vorhergehenden Bestimmung der Resonanzfrequenz wird auch ein Wert für die Rabifrequenz ermittelt. Allerdings ist dieser nicht genau genug. Aus diesem Grund wird zu deren Bestimmung eine andere Sequenz verwendet. Dabei wird die zuvor ermittelte Resonanzfrequenz des Pulses fest eingestellt und die Pulslänge variiert. Wird dann die Teilchenzahl eines Zustandes gegen die Zeit aufgetragen, so ergibt sich eine Oszillation mit der Rabifrequenz. Diese kann durch Anpassen einer Sinusschwingung an die Daten erhalten werden. Eine typische Rabioszillation zeigt die Abbildung 3.20 (b). Die für die Präparation wichtige Länge des π -Pulses und des $\pi/2$ -Pulses können daraus direkt abgelesen werden. Um eventuelle Fehler, durch die Flanken der Pulse zu vermeiden, kann zusätzlich noch eine Messung in einem kleinen Intervall $\{t_\pi - \varepsilon, t_\pi + \varepsilon\}$ um t_π herum gemacht werden. Eine Anpassung dieser Daten an eine Parabel ergibt dann eine genauere Bestimmung π -Pulslänge.

3.4.6 Beschreibung der Pulssequenzen zur Präparation der atomaren Zustände

Für die Präparation über Mikrowellenpulse reicht es aus, wenn das Magnetfeld im Bereich von etwa 1 G liegt. Dies erlaubt es die Pulse bei den gleichen Magnetfeldern einzustrahlen, die für die Spindynamik verwendet werden. Dadurch werden keine zusätzlichen Magnetfeldrampen benötigt. Die Zeit zwischen der Präparation und dem Start der Spindynamik kann so weiter reduziert werden, wodurch sich die nutzbare Teilchenzahl weiter erhöht. Ein weiterer Vorteil der Pulse ist der, dass sie

einen kontrollierteren Start der Spindynamik erlauben.

Das erste Schema zur Präparation der Atome ist in Abbildung 3.21 dargestellt. Nach dem Transfer in die Dipolfalle werden die Atome durch einen π -Puls von $|2,2\rangle$ in den Zustand $|1,1\rangle$ gebracht. In diesem Zustand werden die Atome weiter evaporiert zudem ist der Zustand stabil und somit findet keine Spindynamik statt. Durch den zweiten Transfer in den $|2,0\rangle$ -Zustand kann die Spindynamik gestartet werden.

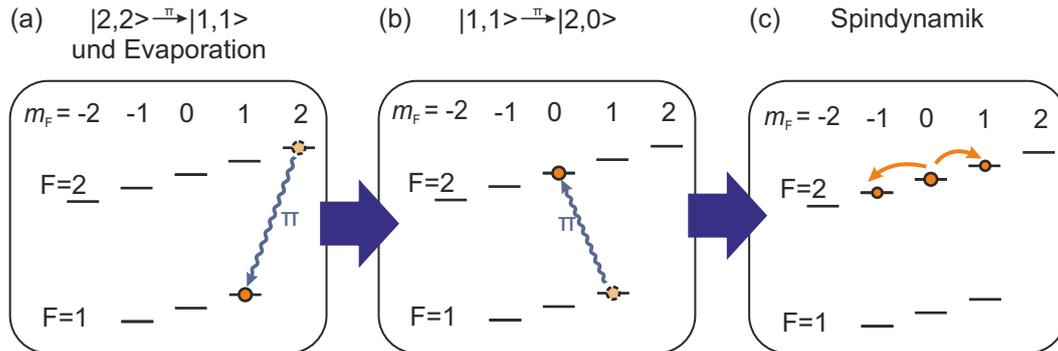


Abbildung 3.21: Skizze zur Veranschaulichung der Präparationssequenz. (a) Transfer von $|2,2\rangle$ nach $|1,1\rangle$ und Evaporation; (b) Transfer nach $|2,0\rangle$; (c) Spindynamik.

Reinigungssequenzen

Um sicher zu gehen, dass nach der Präparation alle Atome im richtigen Zustand $|2,0\rangle$ sind, sind zwei unterschiedliche Methoden entwickelt worden, um Atome in den anderen Zuständen aus der Falle zu entfernen. Dies ist besonders wichtig, da bereits kleinste Besetzungen in den $|2, \pm 1\rangle$, die Dynamik sehr stark beeinflussen wie in Abschnitt 2.8 diskutiert. Ein weiterer wichtiger Aspekt der Reinigungssequenz ist der, dass damit auch die Anfangsteilchenzahl des $|2,0\rangle$ variiert werden kann. Somit können unterschiedliche Teilchenzahlbereiche betrachtet und der jeweils günstigste für die Experimente eingestellt werden.

Bei der erste Realisierung einer Reinigungssequenz werden nach der Präparation in $|2,0\rangle$ die Atome in den falschen Zeemanzuständen mit Hilfe eines Magnetfeldgradienten aus der Falle gedrückt [103]. Dafür wird ein Strom von 30 A an die QUIC-Spule für 15 ms angelegt. Der dadurch erzeugte Gradient von 1,95 G/Am genügt, um die verbleibenden Atome in den $m_F = \pm 1$ -Zuständen aus der Dipolfalle zu entfernen. Die Atome in $m_F = 0$ bleiben dabei ungestört. Werden bewusst nicht alle Atome in $m_F = 0$ präpariert, so ist es möglich damit die Teilchenzahl für die Spindynamik zu reduzieren. Diese Technik wird auch bei der Präparation durch die schnellen adiabatischen Rampen eingesetzt.

Die Nachteile dieser Methode bestehen darin, dass sie recht viel Zeit benötigt und dass der Gradient zusätzlich relativ lange braucht, bis er vollständig abge-

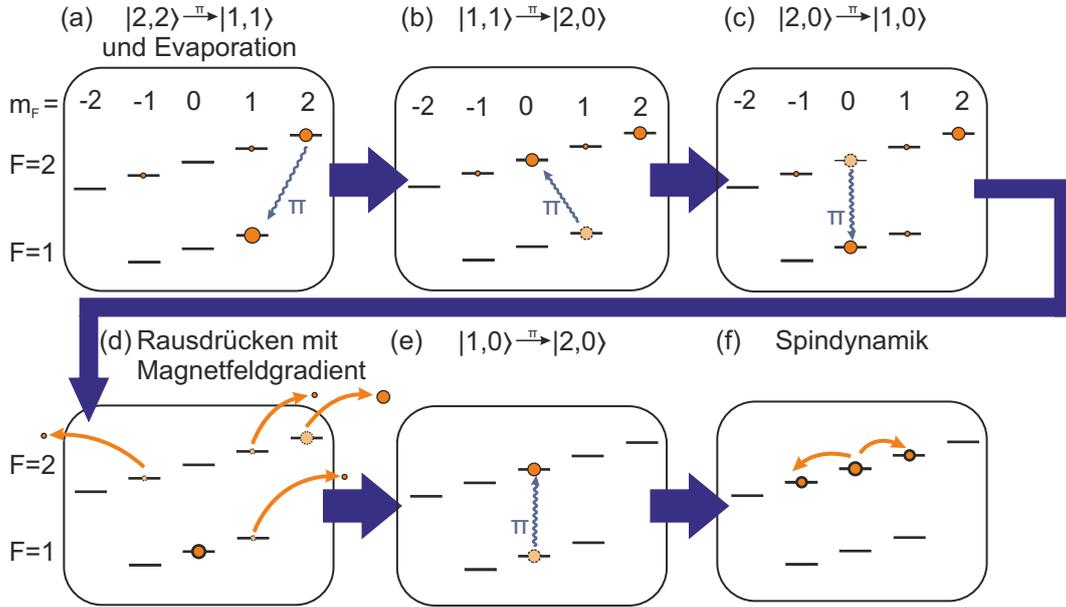


Abbildung 3.22: Präparationssequenz mit entfernen der ungewünschten Atome durch Magnetfeldgradienten. (a) Transfer von $|2,2\rangle$ nach $|1,1\rangle$ und Evaporation; (b) Transfer nach $|2,0\rangle$; (c) Transfer nach $|1,0\rangle$; (d) entfernen der Atome durch Magnetfeldgradient; (e) Transfer nach $|2,0\rangle$; (f) Spindynamik.

klungen ist. So kann es passieren, dass er noch die Spindynamik beeinflusst und es zu erhöhten Teilchenzahlverlusten kommt. Insbesondere in Verbindung mit der RF-Passage wirken sich diese Nachteile stark aus, da die Verlustrate aus dem $|2,0\rangle$ -Zustand recht hoch sind. Mit Hilfe der Mikrowellenpulse können diese Probleme verringert werden, indem die Atome vor dem Herausdrücken durch einen zusätzlichen π -Puls in den $|1,0\rangle$ -Zustand präpariert werden (vgl. Abb. 3.22). Die deutlich geringeren Verluste des Zustandes erlauben das Einfügen langer Wartezeiten. Mit einem zweiten π -Puls werden die Atome dann wieder in den Anfangszustand gebracht. Die Pulse sind so schmal, dass dadurch keine Saatatome in $|2, \pm 1\rangle$ entstehen können.

Die zweite Reinigungssequenz ist in der Abbildung 3.23 dargestellt. Hier werden resonante Lichtpulse verwendet, um die Atome in den ungewollten Zuständen zu entfernen. Nach dem ersten Mikrowellenpuls von $|2,2\rangle$ nach $|1,1\rangle$ wird für die Dauer von $40 \mu\text{s}$ ein Lichtpuls eingestrahlt, der resonant zu dem Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 3$ von ^{87}Rb ist. Der Pulsübertrag von $\hbar k$ ist ausreichend um die Atome in $F = 2$ aus der Falle zu entfernen. Die Atome in $F = 1$ hingegen bleiben unbeeinflusst. Im Anschluss daran erfolgt ein zweiter Mikrowellen- π -Puls, der die Spindynamik startet. Ist der erste Puls nur ein Bruchteil eines π -Pulses, so kann dadurch die Anfangsteilchenzahl reduziert werden.

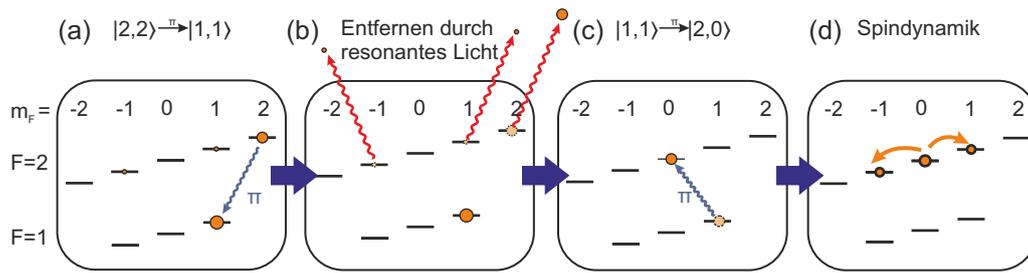


Abbildung 3.23: Präparationssequenz mit Entfernen der Atome durch einen resonanten Laserpuls. (a) Transfer von $|2,2\rangle$ nach $|1,1\rangle$ und Evaporation; (b) Entfernen der $F = 2$ -Atome durch resonantes Lichtpuls ; (c) Transfer nach $|2,0\rangle$; (d) Spindynamik.

Der Vorteil des Lichtpulses ist der, dass alles bereits bei dem richtigen Magnetfeld für die Spindynamik erfolgen kann. Es werden keine zusätzlichen Zeiten gebraucht, um andere Felder an und auszuschalten. Zwar können eventuell Atome in dem $|1,1\rangle$ verbleiben, diese haben aber keinen Einfluss auf die Dynamik.

Für die Experimente zu Untersuchung der räumlichen Modenstruktur und der Symmetriebrechung wurde der Zustand durch den Gradienten gereinigt. Für die Untersuchung des nichtklassischen Zustandes kam die zweite Variante zum Einsatz. Denn insbesondere hier muss das Magnetfeld sehr stabil bleiben.

Der Mikrowellenstrahlteiler für interne Zustände

Nach der Spindynamik befinden sich gleich viele Teilchen in den Zuständen $|2,1\rangle$ und $|2, -1\rangle$. Wie in der Theorie gezeigt, sollten diese Zustände miteinander nichtklassisch korreliert sein. Um diese Eigenschaften zu analysieren, soll ein Strahlteiler zwischen diesen Zuständen realisiert werden. Eine direkte Kopplung der beiden $m_F = \pm 1$ -Zustände über Radiofrequenzen ist wegen $\Delta m_F = 2$ verboten.

Um dieses Problem zu umgehen wird ein Schema verwendet, wie es in der Abbildung 3.24 dargestellt ist. Nach der Spindynamik werden über einen π -Puls alle Atome aus dem $|2,1\rangle$ -Zustand in $|1,0\rangle$ transferiert. Dadurch werden auch die nichtklassischen Korrelationen mit $|2, -1\rangle$ auf diesen Zustand übertragen. Als nächstes folgt der eigentliche Strahlteilerpuls mit variabler Länge, der die Zustände $|2, -1\rangle$ und $|1,0\rangle$ miteinander koppelt. Damit beide Zustände gleichzeitig detektiert werden können (siehe Abschnitt 3.2) folgt dann ein weiterer π -Puls, um die Atome wieder von $|1,0\rangle$ nach $|2,1\rangle$ zu transferieren.

3.5 Magnetfelder

In dem Kapitel 2 wird deutlich gemacht, dass das anliegende Magnetfeld einen großen Einfluss auf die Spindynamik hat. Die Energie durch den quadratischen Zeemaneffekt führt zu unterschiedlichen Instabilitätsraten der Fallenmoden. Dies

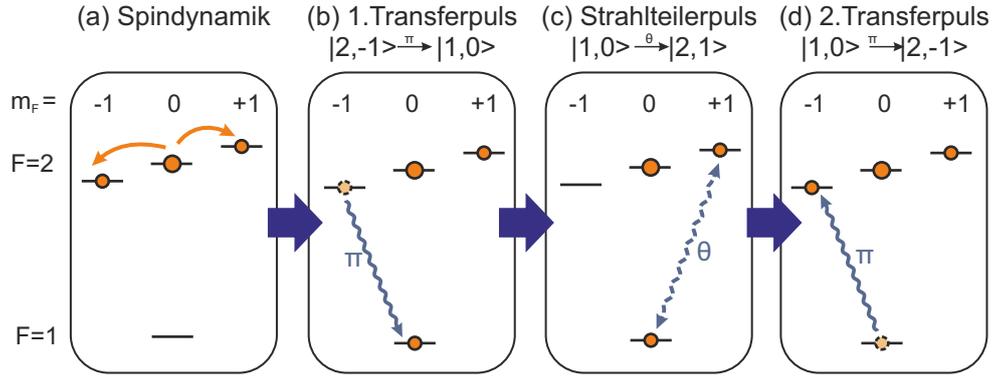


Abbildung 3.24: Pulssequenz zur Realisierung des Strahlteilers zwischen den Ausgangszuständen der Spindynamik. (a) Spindynamik; (b) erster Transferpuls von $|2, -1\rangle$ nach $|1, 0\rangle$; (c) Strahlteilerpuls zwischen $|2, 1\rangle$ und $|1, 0\rangle$; (d) zweiter Transferpuls von $|1, 0\rangle$ nach $|2, -1\rangle$

wiederum führt zu Resonanzen des Transfers durch die Spindynamik in Abhängigkeit des Magnetfeldes. Die Energieverschiebung der Zeemanzustände durch ein Magnetfeld kann über die Breit-Rabi Formel [157, 163]

$$E_{J=1/2, m_J, I, m_I} = -\frac{E_{\text{hfs}}}{2(2I+1)} + g_I \mu_B m_F B \pm \frac{E_{\text{hfs}}}{2} \left[1 + \frac{4m_F}{2I+1} x + x^2 \right]^{1/2} \quad (3.11)$$

mit

$$x = \frac{(g_J - g_I) \mu_B B}{E_{\text{hfs}}} \quad (3.12)$$

beschrieben werden. Hierbei entspricht $E_{\text{hfs}} = A_{\text{hfs}}(I + 1/2)$ der Hyperfeinstrukturaufspaltung mit der Hyperfeinstrukturkonstante A_{hfs} . Die Parameter I und J stehen für die Drehimpulse des Kerns und der Elektronen mit den jeweiligen Projektionen $m_F = m_I \pm m_J$ auf die Quantisierungsachse. Die zugehörigen Landé-Faktoren sind durch g_I bzw. g_J und das Bohr'sche Magneton durch μ_B gegeben.

Für die Untersuchung der Spindynamik und der daraus resultierenden nicht-klassischen Zustände ist die möglichst genaue Kenntnis der Zeemanaufspaltung zwischen den verschiedenen Hyperfein- und Zeemanzuständen essentiell. Die anliegenden Magnetfelder müssen daher sehr gut eingestellt und vermessen werden können. Zur Erzeugung werden eine Vielzahl unterschiedlicher passiv und aktiv geregelte Magnetfeldspulenpaare verwendet, die die erforderliche Magnetfeldkontrolle ermöglichen.

3.5.1 Erzeugung der relevanten Magnetfelder

Die Magnetfelder, die während der Spindynamik benötigt werden, können durch drei unterschiedliche Spulenpaare erzeugt werden. Deren Anordnung ist in der

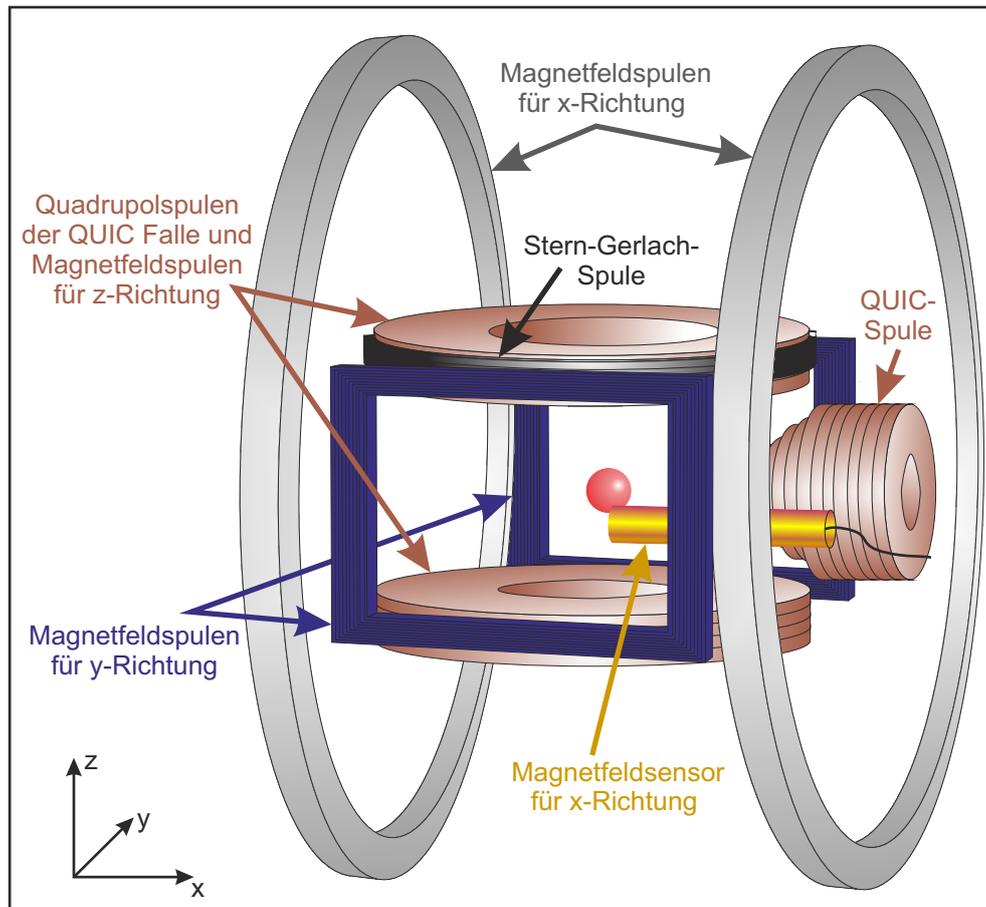


Abbildung 3.25: Skizze der verschiedenen Magnetspulenpaare

Abbildung 3.25 dargestellt. Je nach Anforderungen des Experiments kommen unterschiedliche Paare zum Einsatz. Für die ersten Untersuchungen der Spindynamikresonanzen [66] und der parametrischen Verstärkung der Vakuumfluktuationen [67] sind die Quadrupolspulen der QUIC-Falle neu verschaltet worden, um ein homogenes Magnetfeld entlang der z -Achse zu generieren. Dafür wird mit Hilfe mechanischer Relais (*Finder: 62.83.9.006.0000*) die Stromrichtung in einer Spule umgedreht, sodass beide gleich sind und sich statt des Quadrupolfeldes ein homogenes Feld am Ort der Atome ausbildet. Zudem wird auch die Stromquelle mit Hilfe von Relais gewechselt.

Für die QUIC-Falle werden stabile hohe Ströme benötigt, die von Netzteilen der Firma Heinziger (*PTNhp 16-60*) geliefert werden. Für die Erzeugung des homogenen Feldes hingegen werden geringere, schnell schaltbare Ströme benötigt. Diese werden über eine Stromquelle der Firma HighFiness (*BCSP7*) erzeugt.

Die Experimente zur spontanen Symmetriebrechung stellen andere Voraussetzungen an das Magnetfeld. Dieses sollten am besten senkrecht zu den beiden star-

ken Einschlussrichtungen der Dipolfalle stehen, um die Symmetrie zu wahren. Im Experiment liegen diese Achsen in der xz -Ebene, sodass ein homogenes Magnetfeld entlang der y -Richtung benötigt wird. Dazu sind zwei rechteckige Spulen der Dimension $37 \text{ mm} \times 80 \text{ mm}$ in einem Abstand von 95 mm an dem Halter der QUIC-Falle befestigt (vgl.: Abb. 3.25). Als Stromquelle dient hier eine selbstgebaute Schaltung, die den Strom aus Autobatterien bezieht. Dieser wird über einen Messwiderstand gemessen und mittels Regelschleife auf einen vorgegebenen Wert stabilisiert. Für die Untersuchung der nichtklassischen Zustände wird dieses Spulenpaar benutzt, um die Quantisierungsachse während der Detektion festzulegen. Die Stromquelle ist dafür durch eine kommerzielle Stromquelle der Firma HighFinesse (*UCS 30/15*) ersetzt worden.

Für die Messungen der nichtklassischen Zuständen ist ein hochstabiles Magnetfeld notwendig. Dies ist insbesondere für die Implementierung des Strahlteilers wichtig, der die beiden Eingangszustände miteinander mischt. Es muss gewährleistet sein, dass der Mikrowellenstrahlteiler immer möglichst stabil die gewünschte Kopplung zwischen den Eingangszuständen erzeugt (siehe Abschnitt 3.4).

Aus diesem Grund ist ein weiteres Spulenpaar mit einem Magnetfeld parallel zur x -Achse aufgebaut worden. Die beiden Spulen bestehen aus je einem 18-adrigen Kabel, deren einzelne Adern so miteinander verbunden ist, dass sich eine Spule mit 18 Windungen ergibt. Die Kabel sind um die Experimentierzelle herum befestigt und gebogen, so dass die Atome zentral zwischen den Spulen liegen. Sie haben einen Radius von 220 mm und einen Abstand von 200 mm zueinander. Die Spulen sind somit nahe der Helmholtzkonfiguration, wodurch ein sehr homogenes Feld zwischen den Spulen gewährleistet werden kann.

Diese Magnetfeld wird aktiv stabilisiert. Wie in Abbildung 3.25 zu sehen befindet sich daher direkt an der Experimentierzelle ein Magnetfeldsensor der Firma Bartington Instruments (*MAG03-IEv2*). Der geringe Abstand zu den Atomen und die Größe der Spulen erlaubt es, das Magnetfeld am Ort der Atome zu stabilisieren. Dazu wird aus dem Signal des Sensors und einer externen Referenz ein Fehlersignal generiert, welches über den Modulationseingang der versorgenden Stromquelle (HighFinesse *BCSP7*) an die Spulen gegeben wird. Damit ist es möglich das Magnetfeldrauschen entlang der x -Achse von vormalis $\sigma B_x = 5 \text{ mG}$ auf $\sigma B_x = 0,3 \text{ mG}$ zu reduzieren (siehe Abschnitt 3.5.3).

3.5.2 Kompensation des Offsetmagnetfeldes

Zur Kompensation der Magnetfelder am Ort der Atome wurden rechteckige Spulenpaare an einer Käfigkonstruktion mit den Dimensionen $80 \text{ cm} \times 122 \text{ cm} \times 85 \text{ cm}$ um die Experimentierzelle aufgebaut. Deren Magnetfelder stehen senkrecht aufeinander. Die Tatsache, dass die Kompensationsspulen verhältnismäßig groß sind hat mehrere Vorteile. Die Spulen versperren keinen optischen Zugang oder die Mög-

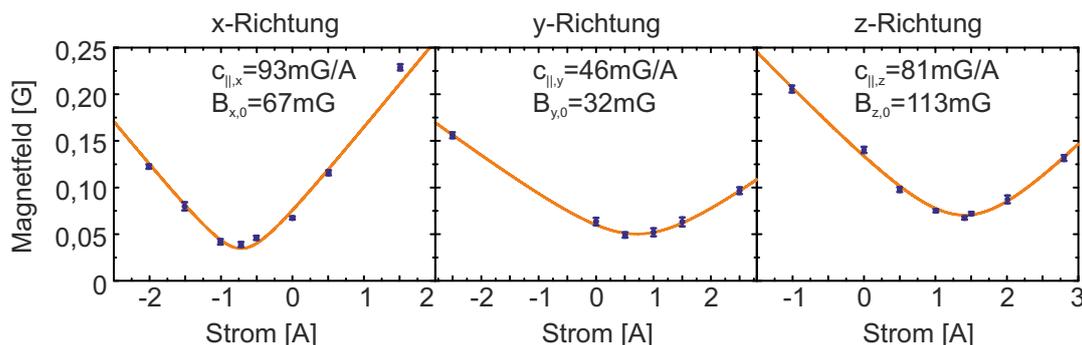


Abbildung 3.26: Eichkurven für die Kompensation der Offsetfelder. Die Kurven entsprechen der Gleichung (3.13) mit den angegebenen Parametern.

lichkeit in der Nähe der Zelle zu arbeiten. Zudem ist das erzeugte Feld im Bereich der Atome sehr homogen, sodass sie dort keine relevanten Gradienten aufweisen. Außerdem werden Vergleichsweise hohe Ströme benötigt um die erforderlichen Magnetfelder zu erzeugen, wodurch sich Stromschwankungen der verwendeten Netzgeräte nur sehr gering auf Schwankungen der Magnetfelder auswirken.

Die Magnetfelder der Kompensationsspulen sind einmalig vermessen worden. Die Eichkurven sind in Abbildung 3.26 abgebildet. Diese zeigen das Magnetfeld in Abhängigkeit des angelegten Stroms für alle drei Spulenpaare. Damit kann der benötigte Strom zur Kompensation jeder einzelnen Magnetfelrichtung bestimmt werden. Um die Punkte der Eichkurven zu erhalten ist die Frequenz des magnetfeldsensitivsten $|2,2\rangle \rightarrow |1,1\rangle$ Übergang spektroskopische ermittelt worden (vgl. Abschnitt 3.4). Aus dieser Frequenz kann das Magnetfeld mit Hilfe der Breit-Rabi-Formel (3.11) berechnet werden. Diese Form der Messung erlaubt eine sehr genau Bestimmung des Absolutbetrags des Magnetfeldes am Ort der atomaren Wolke. An die Eichkurven wird jeweils die Funktion

$$|B| = \sqrt{(c_{\parallel}I + B_{\parallel,0})^2 + B_{\perp}^2} \quad (3.13)$$

$$= \sqrt{(c_{\parallel}(I - I_{\parallel,0}))^2 + B_{\perp}^2} \quad (3.14)$$

angepasst, um den Kompensationsstrom zu ermitteln. Der angelegte Strom entspricht I , das Offsetmagnetfeld entlang der betrachteten Richtung ist durch $B_{\parallel,0}$ gegeben und die Offsetfelder senkrecht dazu sind in der Größe B_{\perp} zusammengefasst. Die Größe c_{\parallel} entspricht der Proportionalitätskonstante zwischen Strom und Magnetfeld. Für die jeweiligen Richtungen lauten sie $c_{\parallel,x} = 0,093(4) \frac{\text{G}}{\text{A}}$, $c_{\parallel,y} = 0,046(1) \frac{\text{G}}{\text{A}}$ und $c_{\parallel,z} = 0,081(2) \frac{\text{G}}{\text{A}}$. Der Strom der benötigt wird um das Offsetmagnetfeld auszugleichen ist durch $I_{\parallel,0,i} = -B_{\parallel,0}/c_{\parallel,i}$ gegeben. Mit diesen Messungen

kann das Feld vor der Kompensation bestimmt werden. Es ergeben sich die Werte

$$B_{x,0} = -67(5) \text{ mG} \quad (3.15)$$

$$B_{y,0} = -32(5) \text{ mG} \quad (3.16)$$

$$B_{z,0} = -113(5) \text{ mG} \quad (3.17)$$

Mit eingeschalteter Kompensation reduzieren sich diese auf

$$B_{x,0} = -10(5) \text{ mG} \quad (3.18)$$

$$B_{y,0} = -6(5) \text{ mG} \quad (3.19)$$

$$B_{z,0} = -29(5) \text{ mG} \quad (3.20)$$

Als Stromquellen für die Kompensationsspulen werden in der x und z das gleich Netzgerät *HP 6624A* verwendet. Die y -Richtung wird mit einer Stromquelle vom Typ *Heinzinger TN32-130* betrieben.

3.5.3 Vermessung der Magnetfeld- und der Intensitätsschwankungen

Wenn Messungen mit hoher Präzision durchgeführt werden sollen, muss überprüft werden, wie hoch die Schwankungen der experimentellen Parameter sind. In dem vorgestellten Experiment interessieren insbesondere die Stabilität des Magnetfeldes und der Mikrowellenpulse des Strahlteilers. Die Vermessung der atomaren Resonanz mittels unterschiedlicher Methoden kann Auskunft darüber geben. Dazu eignet sich beispielsweise eine statistische Analyse des Transfers bestimmter Übergänge, für feste Pulslängen und Frequenzen. Ein Vergleich mit Monte-Carlo-Simulationen erlaubt dann eine Abschätzung der Schuss-zu-Schuss Schwankungen. Dadurch lassen sich auf die Schwankungen der einzelnen Parameter zurückschließen. So äußern sich Schwankungen des Magnetfeldes in Änderungen der atomaren Resonanzfrequenzen und führen damit zu einer Verstimmung der Mikrowelle. Schwankungen in der Intensität der Mikrowelle führen zu einer geänderten Rabi-Frequenz. Die ermittelten Pulslängen stimmen so beispielsweise nicht mehr mit dem gewünschte Längen des π - oder $\pi/2$ -Pulses überein.

Um die Schwankungen zu vermessen, wird der Transfer durch bestimmte Mikrowellenpulse analysiert. Dabei wird betrachtet, wie stark der Mittelwert des Transfer schwankt, wenn mehrerer Experimente unter gleichen Bedingungen erfolgen. Besonders geeignet dafür sind Vielfache des $\pi/2$ -Pulses ($\pi/2; 3\pi/2; 5\pi/2; \dots$). Durch eine geeignete Wahl des betrachteten Übergangs kann ausgewählt werden, welche Schwankungen genauer betrachtet werden sollen. Um die Schwankungen der Intensität zu betrachten ist der $|2,0\rangle \rightarrow |1,0\rangle$ Übergang besonders geeignet, da dieser in erster Ordnung insensitiv auf Veränderungen des Magnetfeld reagiert. Der Übergang $|2,2\rangle \rightarrow |1,1\rangle$ hingegen ist besonders sensitiv auf das Magnetfeld und eignet sich damit dessen Schwankungen zu vermessen.

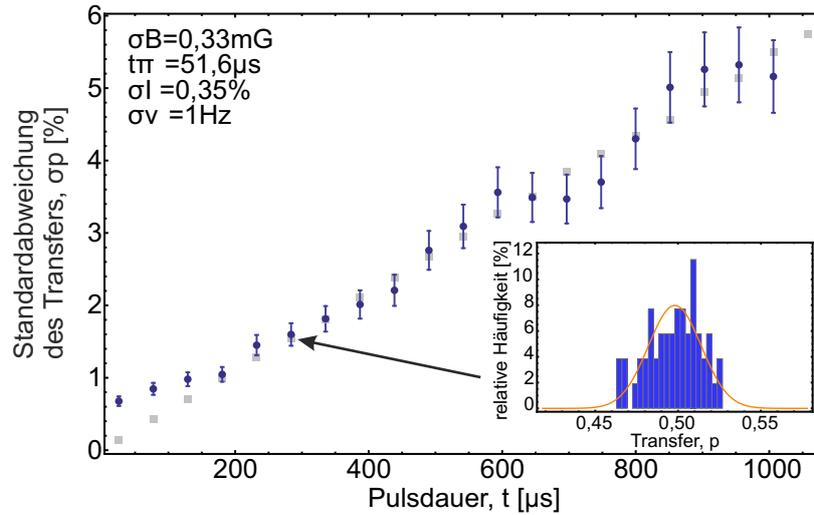


Abbildung 3.27: Messung zur Bestimmung des Magnetfeldrauschens und des Rauschens der Mikrowellenintensität

Zur Überprüfung der ermittelten Schwankungen können andere Übergänge betrachtet werden. Besonders interessant ist dabei der Strahlteilerübergang $|2,1\rangle \rightarrow |1,0\rangle$. Durch den Vergleich mit numerischen Monte-Carlo Simulationen können so die ermittelten Werte der Schuss-zu-Schuss Schwankungen bestätigt werden. Die Abbildung 3.27 zeigt eine solche Vergleichsmessung. Die blauen Punkte mit den Fehlerbalken entsprechen den gemessenen Standardabweichungen des Transfers auf dem $|2,1\rangle \rightarrow |1,0\rangle$ -Übergang für unterschiedliche $n\pi/2$ -Pulse ($n = 1; 3; 5; \dots$). Die Werte sind aus Verteilungen ermittelt worden, wie sie im Inset der Abbildung am Beispiel des $11\pi/2$ -Puls dargestellt ist. Die grauen Punkte entsprechen den Werten, die mit Hilfe einer Monte-Carlo Simulation ermittelt worden sind. Dabei ist angenommen worden, dass das Magnetfeld um $330 \mu\text{G}$ und die Intensität um $0,35\%$ schwankt. Diese Werte sind auch konsistent mit anderen durchgeführten Messungen. So können die Magnetfeldschwankungen auch mittels Ramseyspektroskopie [32, 164] bestimmt werden, bei der Intensitätsschwankungen die Messung nur minimal beeinflussen.

SPINDYNAMIK

Die Spindynamik ist die Grundlage aller hier vorgestellten Experimente. Sie hängt stark von äußeren Einflüssen ab und wird daher im folgenden Kapitel für bestimmte Fallenkonfigurationen näher betrachtet. Diese Untersuchungen sind analog zu denen aus Ref. [66,67,101,103] und charakterisieren die grundlegenden Eigenschaften der Spindynamik.

Als erstes wird die zeitliche Abhängigkeit des Transfers betrachtet. Diese erlaubt Aussagen über den Gültigkeitsbereich der vorgestellten Näherungen aus Abschnitt 2.1.2. Aus den Messungen der Zeitabhängigkeiten werden die Evolutionszeiten für die Spindynamik festgelegt, um zu gewährleisten, dass die Experimente im jeweils besten Regime ablaufen.

Der nächste Punkt ist die Untersuchung der Magnetfeldabhängigkeit. Diese ist sehr stark durch das externe Potential geprägt. Die Form gibt Auskunft über die beteiligten Fallenmoden der Dynamik. Durch eine geeignete Wahl des Magnetfeldes können damit bestimmte Moden ausgewählt und genauer untersucht werden.

4.1 Zeitabhängigkeit der Spindynamik und parametrische Verstärkung

In Gleichung (2.26) wird gezeigt, dass die zeitliche Besetzung der $|2, \pm 1\rangle$ -Niveaus einem mit einem exponentiellen Verlauf genähert werden kann. Diese wird durch die Fallenmode mit der größten Instabilitätsrate bestimmt. Zur Untersuchung des Verstärkungsprozesses wird die Zeit der Spindynamik verändert und betrachtet, wie sich die Population der einzelnen Zustände verhält.

4.1.1 Zeitabhängigkeit in der zylindrischen Falle

Die erste Fallenkonfiguration, die betrachtet werden soll, ist die zylindrische Falle. Wie in Abschnitt 3.3 erwähnt, dient diese zur Analyse der Strukturbildung und der spontanen Symmetriebrechung aufgrund der Spindynamik. Ein entscheidender Punkt für die Auswertung ist, dass die räumlichen Dichteverteilungen möglichst gut zu erkennen sind. Dementsprechend muss die Dauer der Dynamik ausreichend lange gewählt werden, so dass die betrachteten Moden mit vielen Atomen besetzt werden. Zu lang darf die Zeit allerdings nicht sein, da ansonsten die Strukturen aufgrund von Stoßprozessen verwaschen und so unscharf werden.

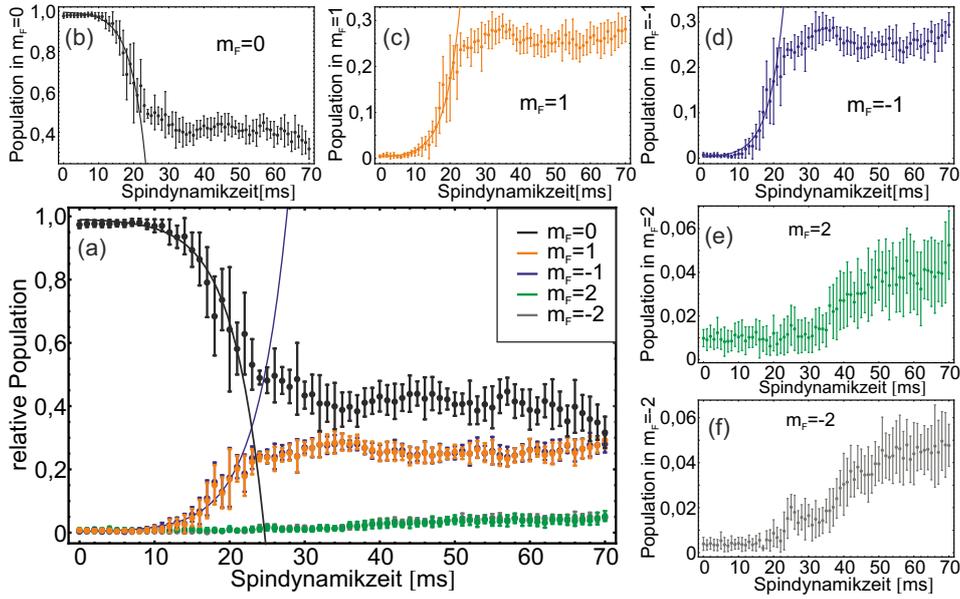


Abbildung 4.1: Zeitentwicklung des Transfers aller fünf Spinzustände für die zylindrische Falle. (a) zeigt alle in einem gemeinsamen Graph. Die Abbildungen (b)-(f) zeigen die Zeitabhängigkeit separat für jeden Spinzustand. Die gestrichelten Kurven entsprechen einer Anpassung an die Daten bis 20 ms mit der Funktion $A \sinh(t/\tau)$ mit $A = 0.005 \pm 0.002$ und $\tau = (4,6 \pm 0,4)$ ms für die blaue Kurve und $1 - 2A \sinh(t/\tau)$ für die Schwarze.

In der Abbildung 4.1 sind die Teilchenzahlen aller Spinkomponenten relativ zur Gesamtteilchenzahl gegen die Spindynamikdauer aufgetragen. Jeder Punkt entspricht einer Mittelung über 16 unabhängige Messungen. Die eingezeichneten Fehlerbalken entsprechen den zugehörigen Standardabweichungen. Das gewählte Magnetfeld von 1,06 G zeigt entlang der y -Achse und steht so senkrecht zu den beiden stärksten Fallenachsen. Zur Detektion wird das alte System verwendet, wie in Abschnitt 3.2.1 beschrieben. Dessen Detektionslimit liegt bei etwa 500 Atomen. Aus diesem Grund ist der Verlauf der Messkurve bis zu einem Wert von etwa 10 ms flach. Erst ab dort ist der aus Gleichung (2.26) erwartete, exponentielle Anstieg für die Population der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände zu erkennen (Abb. 4.1 (c),(d)).

Dieser hält bis zu einer Zeit von etwa 20 ms an. Danach hat die Population der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände einen Wert von jeweils $\approx 25\%$ erreicht und ändert sich nur noch marginal. Die Population in $|2,0\rangle$ erreicht gleichzeitig einen Wert von etwa $\approx 50\%$. Es kommt zu einer Art Sättigung, bei der sich die relative Population der Zustände kaum mehr ändert. Die eingezeichneten Kurven entsprechen einer Anpassung an die Daten bis 20 ms mit der Funktion $A \sinh(t/\tau)$ für die $|2, \pm 1\rangle$ -Komponenten und $1 - 2A \sinh(t/\tau)$ für die $|2,0\rangle$ -Komponente. Für die Parameter ergeben sich $A = 0.005 \pm 0.002$ und $\tau = (4,6 \pm 0,4)$ ms. Für andere Magnetfelder ist der Verlauf der Kurve ähnlich. Er unterscheidet sich lediglich durch die Stärke des Anstiegs und durch den Zeitpunkt der Sättigung.

Dieser Sättigungseffekt kann auf mehrere Faktoren zurückgeführt werden. Zum einen sorgt die Entleerung des $|2,0\rangle$ -Zustandes dafür, dass sich der Prozess der Spindynamik verlangsamt. Es bildet sich ein Gleichgewicht in dem die gleiche Anzahl von Atomen in $|2,0\rangle$ und in der Summe aus $|2,1\rangle$ und $|2, -1\rangle$ befinden. Die Näherung des unendlich großen Reservoirs ist somit nicht mehr legitim. Zum anderen zeigen die Transferkurven, dass es ab diesem Zeitpunkt zu einer nachweisbaren Population der $|2, \pm 2\rangle$ -Zustände kommt. Diese wird hervorgerufen, durch spinändernden Stößen zwischen den erzeugten $|2, \pm 1\rangle$ Zuständen mit dem $|2,0\rangle$ BEC.

Ein weiterer wichtiger Punkt, der zur Sättigung führt, ist der Verlust von Teilchen aufgrund Hyperfeinniveau-ändernder Stöße. Diese führen ebenfalls zu einer Reduktion der Teilchenzahl des Ursprungskondensates [80,103]. Ohne sie wäre der Prozess der Spindynamik kohärent wie in Referenz [109] für einen anderen Anfangszustand beschrieben und würde zu Oszillationen der Besetzungszahlen der Zustände führen. Anhand der Messdaten ist analog zu der genannten Publikation eine leichte Oszillation in den Populationen der Zuständen $m_F = 0$ und $m_F = \pm 1$ zu erahnen. Im Rahmen der statistischen Messfehler ist diese jedoch nicht signifikant.

Die Abbildung 4.2 zeigt die zeitliche Entwicklung der Standardabweichungen, der Messungen aus Abbildung 4.1. Es ergibt sich ein ganz ähnliches Bild wie für die Populationen der Zustände. Auch hier ist zu Anfang der erwartete exponentielle Verlauf zu sehen. Dieser weist auf ein Verhalten hin, wie es aufgrund von Gleichung (2.31) erwartet wird. Ab einem Wert von 20 ms fällt der Wert der Standardabweichung schnell ab. Dies ist derselbe Zeitpunkt, zu dem in der Abbildung 4.1 die Sättigung einsetzt. Diese sorgt neben einer maximalen relativen Population der Ausgangszustände auch für eine Reduktion der zugehörigen Fluktuationen. Auch hier repräsentieren die eingezeichneten Kurven eine Anpassung an die Daten bis 20 ms mit der Funktion $A \sinh(t/\tau)$ für $|2, \pm 1\rangle$ beziehungsweise $2A \sinh(t/\tau)$ für $|2,0\rangle$. Die Parameter stimmen mit $A = 0.004 \pm 0.002$ und $\tau = (5,5 \pm 0,7)$ ms im Rahmen des Fehlers mit den Werten der relativen Besetzungen aus Abbildung 4.1 überein, wie es von der Theorie vorhergesagt wird (vgl. Gl. (2.31)).

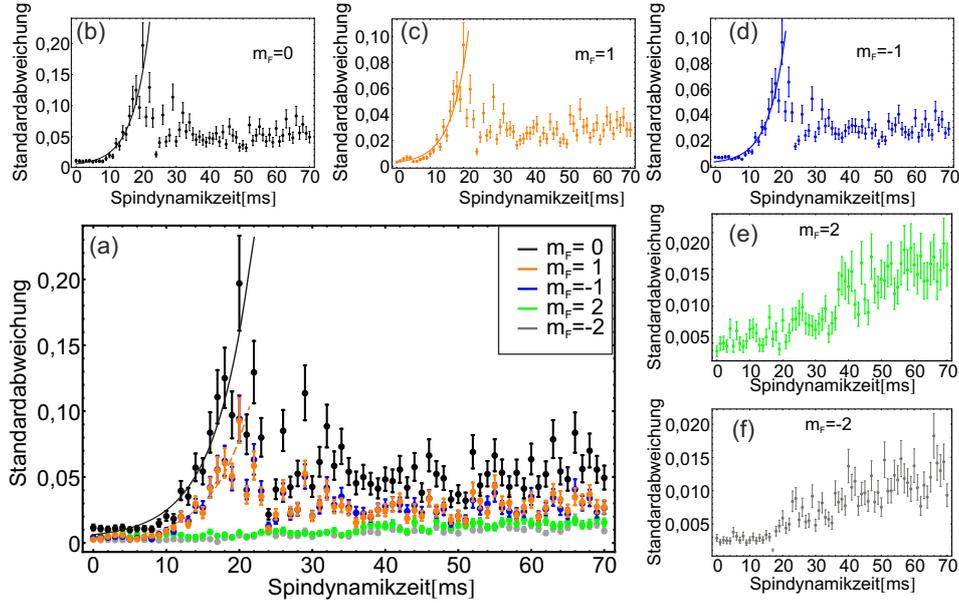


Abbildung 4.2: Zeitentwicklung der Standardabweichung des Transfers aller fünf Spin-zustände für die zylindrische Falle. (a) zeigt alle in einem gemeinsamen Graph. Die Abbildungen (b)-(f) zeigen die Zeitabhängigkeit separat für jeden Spinzustand. Die gestrichelten Kurven entsprechen einer Anpassung an die Daten bis 20 ms mit der Funktion $A \sinh(t/\tau)$ für die $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände und $2A \sinh(t/\tau)$ für den $|2,0\rangle$ -Zustand. Die so erhaltenen Parameter lauten mit $A = 0.004 \pm 0.002$ und $\tau = (5,5 \pm 0,7)$ ms

4.1.2 Zeitabhängigkeit in der elliptischen Falle

Für die elliptische Falle sieht der Verlauf der Zeitabhängigkeiten ganz analog zum zylindrischen Fall aus, wie in Abbildung 4.3 gezeigt. Auf der linken Seite ist die absolute Teilchenzahl und auf der rechten Seite ist die zugehörige Standardabweichung in Abhängigkeit der Spindynamikdauer dargestellt. Das homogene Magnetfeld dieser Messung entspricht einem Wert von 1,23 G und zeigt entlang der x -Achse. Bei diesem Feld werden auch alle weiteren Untersuchungen bezüglich der nichtklassischen Eigenschaften vorgenommen.

Im Gegensatz zu der vorherigen ist diese Messung mit dem neuen Detektionssystem aufgenommen worden, welches auf die präzise Detektion der Teilchenzahlen in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände optimiert ist. Der Verlauf des Ursprungskondensates ist hier nicht dargestellt, da in diesem Bereich fast alle Photonen des Detektionslichts absorbiert werden.

Auch in diesen Graphen ist der anfängliche exponentielle Anstieg der Gesamtteilchenzahl klar zu erkennen. Die Sättigung tritt hier bereits bei Werten größer 15 ms ein. Genau wie zuvor erreicht die zugehörige Standardabweichung ihren Maximalwert bei eben diesen 15 ms.

Jeder Punkt aus Abbildung 4.3 entspricht einer Mittelung über 100-300 Mess-

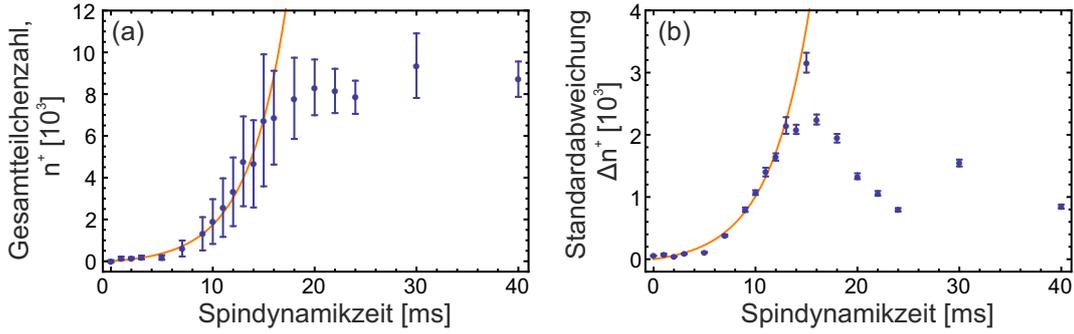


Abbildung 4.3: (a) Zeitentwicklung des Transfers der $|2, \pm 1\rangle$ Spinzustände für die elliptische Falle. Die eingezeichnete Kurve entspricht einer Anpassung an die Daten bis 15 ms mit der Funktion $A \sin(t/\tau)$ mit $A = 137 \pm 37$ und $\tau = (3,8 \pm 0,3)$ ms. (b) Zeitentwicklungen der zugehörigen Standardabweichung. Auch hier entspricht die Kurve einer Anpassung $A \sin(t/\tau)$. Daraus ergeben sich die Werte $A = 92 \pm 28$ und $\tau = (4,0 \pm 0,4)$ ms.

punkten. Dies erlaubt eine detailliertere Analyse der Verteilungen der Gesamteilchenzahlen in $|2, \pm 1\rangle$. Dafür sind diese für ausgewählte Zeiten in Abbildung 4.4 in Form von Histogrammen aufgetragen. Das zuvor diskutierte Verhalten kann anhand dieser Graphen veranschaulicht werden. Für größere Zeiten nimmt die Breite der Verteilungen immer weiter zu. Bei einem Wert von 15 ms tritt jede Teilchenzahl zwischen 0 und 12000 Atomen auf. Dementsprechend verschiebt sich mit zunehmender Zeit auch der Mittelwert zu größeren Teilchenzahlen.

Die Sättigung wird ersichtlich, wenn die Zeit weiter vergrößert wird. In dem Fall verringert sich die Wahrscheinlichkeit, dass durch die Spindynamik geringe Teilchenzahlen in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zuständen entstehen. Dementsprechend verringert sich die Breite der Verteilung und es bildet sich ein schmales Maximum. Außerdem ist die Zahl nach oben bei einem Mittelwert von etwa 8500 Atomen begrenzt. Im weiteren Verlauf ändern sich die Form und die Position der Verteilung kaum noch.

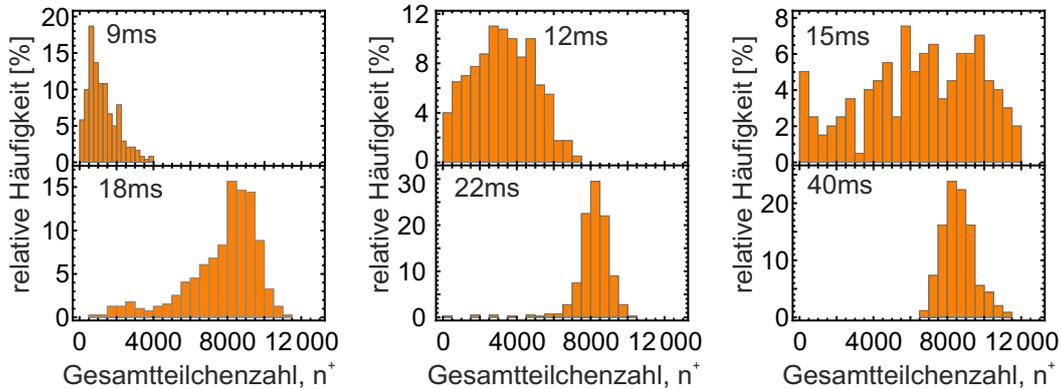


Abbildung 4.4: Verteilungen der Gesamteilchenzahlen für unterschiedliche Spindynamikzeiten

Für die Untersuchungen der nichtklassischen Eigenschaften ist es einerseits wichtig, dass die Spindynamik im Regime der exponentiellen Verstärkung liegt. Ansonsten könnte der Zustand durch den Effekt der Sättigung langsam zerstört werden. Andererseits muss die Zeit möglichst lang gewählt werden, damit sich eine dominante Mode herausbilden kann und der Einfluss schwächerer Moden möglichst gering ist. Dies hat auch den Vorteil, dass die Population in den $|2, \pm 1\rangle$ -Ausgangszuständen möglichst groß wird, um mit dem gegebenen Detektionssystem die nichtklassischen Eigenschaften nachweisen zu können. Aus diesen Gründen erfolgen die Experimente am oberen Rand der exponentiellen Verstärkung bei 15 ms.

4.2 Magnetfeldabhängigkeit und Resonanzen

Ein weiterer wichtiger Punkt, der hier untersucht wird, ist die Abhängigkeit der Spindynamik vom angelegten homogenen Magnetfeld. Bereits in den ersten Experimenten zur Spindynamik in dieser Arbeitsgruppe sind dabei interessante Phänomene entdeckt worden [66]. So hat sich gezeigt, dass für bestimmte Magnetfelder Resonanzen des Transfers in die $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände auftreten. Theoretisch ist dies bereits in Abschnitt 2.1.5 bei der Behandlung der Spindynamik im Kastenpotential diskutiert worden.

Die exakten Positionen und Höhen der Resonanzen können aus diesem einfachen Modell allerdings nicht errechnet werden. Wie bereits in Abschnitt 2.8 erwähnt, werden daher numerische Methoden verwendet, bei denen das gesamte effektive Potential berücksichtigt wird, um das Verhalten vollständig zu beschreiben [66, 67]. Kopplungen zwischen verschiedenen Fallenniveaus führen dann dazu, dass die Transfereffizienz unterschiedlich starke Maxima aufweist. Mit der Numerik kann auch die Verringerung des Transfers aufgrund von Teilchenverlusten in der Falle berücksichtigt werden. So ist es gelungen, eine gute Übereinstimmung der experimentellen Daten mit den theoretischen Simulationen zu erzielen [67]. Diese Untersuchungen haben weiterhin ergeben, dass die Stärken und die Positionen der Resonanzen stark vom effektiven Potential abhängen. So führen Änderungen der Dichte beziehungsweise der Gesamtteilchenzahl n^+ zu einer Verschiebung der Resonanzen proportional zu $(n^+)^{2/5}$. Zudem führt ein Ändern der gewählten Fallenfrequenzen zu einer anderen Form der Magnetfeldabhängigkeit.

Für die hier vorgestellten Experimente ist es demnach wichtig, wie sich die Spindynamik für die unterschiedlichen Konfigurationen verhält. Dazu wird im Vorfeld jeweils die Magnetfeldabhängigkeit ermittelt. Die Sequenz ist ähnlich zu der, wie sie in den ursprünglichen Experimenten [66, 67] verwendet werden.

Für den Start der Spindynamik müssen mehrere Bedingungen erfüllt werden. Als erstes muss ein Bose-Einstein-Kondensat im Zustand $|2, 0\rangle$ in der gewünschten Falle erzeugt werden. Zusätzlich muss ein Magnetfeld zwischen 0 G und 3 G angelegt werden. Die Reihenfolge der einzelnen Schritte kann unterschiedlich ausfallen. Im Verlauf der Untersuchungen sind mehrere Vorgehensweisen entwickelt worden,

um die Spindynamik zu starten.

Eine Möglichkeit ist, dass die Präparation der Atome über die adiabatischen Rampen bei einem Magnetfeld zwischen 6 G und 10 G geschieht, wie in Abschnitt 3.4 erklärt. Bei diesen Magnetfeldern konnte bisher keine Spindynamik beobachtet werden. Diese wird anschließend gestartet, indem das Magnetfeld auf den Sollwert heruntergefahren wird. Dieses Verfahren wird für die Untersuchungen der Magnetfeldabhängigkeit in der zylindrischen Falle verwendet. Zum Zeitpunkt dieser Untersuchungen ist die aktive Magnetfeldstabilisierung noch nicht implementiert gewesen. Erst diese ermöglicht es, die Zustände der Atome durch gezielte Mikrowellenpulse zu manipulieren (vgl. Abschnitt 3.4.3). Damit wird das zweite Verfahren erst ermöglicht.

Die Atome werden zunächst im $|1,1\rangle$ -Zustand präpariert. Dieser ist stabil und daher tritt keine Spindynamik auf. Anschließend wird der Sollwert des Magnetfeldes eingestellt. Die Dynamik wird gestartet, indem die Atome durch einen angepassten Mikrowellenpuls in den Ausgangszustand $|2,0\rangle$ transferiert werden.

Die anschließende Entwicklungszeit sollte für den ganzen Magnetfeldbereich, auf dem die Spindynamik untersucht werden soll, nicht im gesättigten Regime liegen. Für die zylindrische Falle wird daher ein Wert von 17 ms und für die elliptische ein Wert von 15 ms ausgewählt. Nach dieser Zeit wird die Dipolfalle ausgeschaltet und die Dynamik so gestoppt. Während der anschließenden Fallzeit erfolgt die zustandsselektive Detektion. Wird der Anteil der transferierten Atome gegen das Magnetfeld aufgetragen, so ergibt sich eine charakteristische Resonanzstruktur. Diese kann auf das Energiespektrum in der Falle übertragen werden, indem die Messpunkte gegen die quadratische Zeemanenergie aufgetragen werden. Der Wert für die Umrechnung lautet 72 Hz/G^2 für den Fall der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände.

4.2.1 Magnetfeldabhängigkeit in der zylindrischen Falle

Für die zylindrische Falle mit den Fallenfrequenzen 187 Hz, 183 Hz und 67 Hz ist die Magnetfeldabhängigkeit der Spindynamik in Abbildung 4.5 gezeigt. Jeder Punkt entspricht einer Mittelung über 68 Messungen. Die Struktur ähnelt dem analogen Graphen, aus der Veröffentlichung [67]. Für die zylindrische Fallengeometrie erlaubt die Symmetrie eine einfache Zuordnung der Resonanzen mit dem in Abschnitt 2.1.5 beschriebenen Modell des zweidimensionalen Kastenpotentials. Die Abstände der Eigenenergien aus (2.16) werden dazu an die Positionen der Maxima angepasst. Für den Thomas-Fermi-Radius als einzigen freien Parameter ergibt sich so ein Wert von $R_{TF} = 3,7 \mu\text{m}$. Die grauen Linien in der Abbildung entsprechen den so erhaltenen Eigenenergien, wenn die quadratische Zeemanenergie aus dem Magnetfeld berechnet wird. Die zugehörigen Zahlen entsprechen den Quantenzahlen n, l für die radiale und die Drehimpulsanregung. Der Vergleich zeigt, dass die relativen Abstände zwischen Eigenenergien recht gut zu denen der Resonanzen passen. Die Größe des Thomas-Fermi-Radius ist konsistent mit einem Wert von

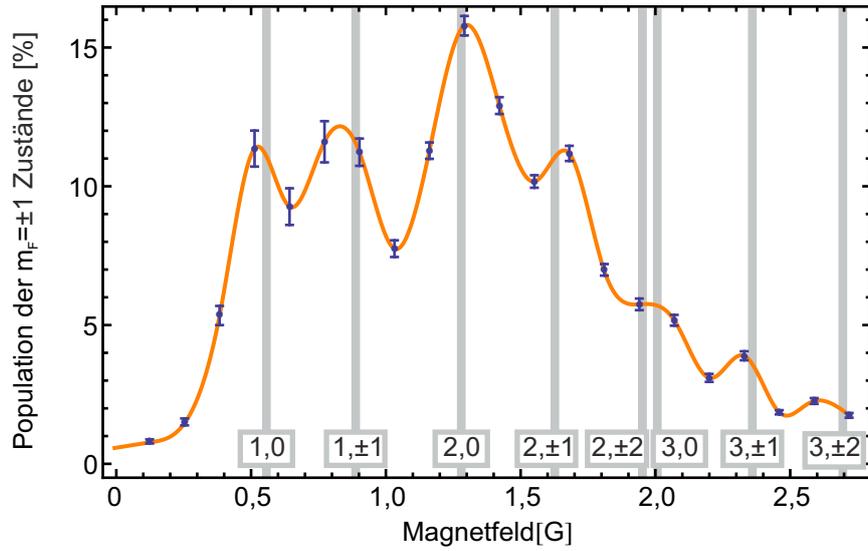


Abbildung 4.5: Magnetfeldabhängigkeit der Spindynamik in der zylindrischen Falle. Die Messpunkte sind durch die blauen Punkte gekennzeichnet, mit den entsprechenden Fehlerbalken gegeben durch den statistischen Fehler. Die orangefarbene Kurve ist ein Spline durch die Messpunkte. Die grauen Linien entsprechen den berechneten Positionen der Eigenenergien nach Gleichung (2.16) mit $R_{TF} = 3,7 \mu\text{m}$. Für jede Energie sind die Quantenzahlen (n, l) angegeben.

$3,9 \mu\text{m}$, der unabhängig mit Hilfe der Gross-Pitaevskii-Gleichung berechnet wurde. Die zugehörigen räumlichen Moden werden im Abschnitt 5.1 des nächsten Kapitel näher untersucht.

4.2.2 Magnetfeldabhängigkeit in der elliptischen Falle

Die Resonanzkurve für die elliptische Falle ist in der Abbildung 4.6 dargestellt. Wird sie mit der Kurve aus Abbildung 4.5 verglichen, so erscheint die Struktur sehr ähnlich. Dies liegt daran, dass gegenüber der Messung aus Abbildung 4.5 lediglich die Intensität eines Dipolstrahls verändert worden ist. Der Unterschied zwischen beiden besteht lediglich in den unterschiedlichen Resonanzpositionen. So hat sich die Position der stärksten Resonanz aus Abbildung 4.5 von etwa 1,4 G nach 1,23 G verschoben.

Für die elliptische Falle kann die Zuordnung der Resonanzen nicht so einfach erfolgen wie für die zylindrische Falle. Aus diesem Grund wird der Verlauf analog zu Ref. [66] mit den numerisch berechneten Instabilitätsraten verglichen. In Abbildung 4.6 (b) sind aus diesem Grund noch einmal die Graphen (b) und (e) aus Abbildung 2.25 gemeinsam in Abhängigkeit des Magnetfeldes dargestellt. Die linke y -Achse gibt den Wert der Instabilitätsraten der Moden an, die durch die durchgezogenen Linien gekennzeichnet sind. Auf der rechten Achse ist das Verhältnis

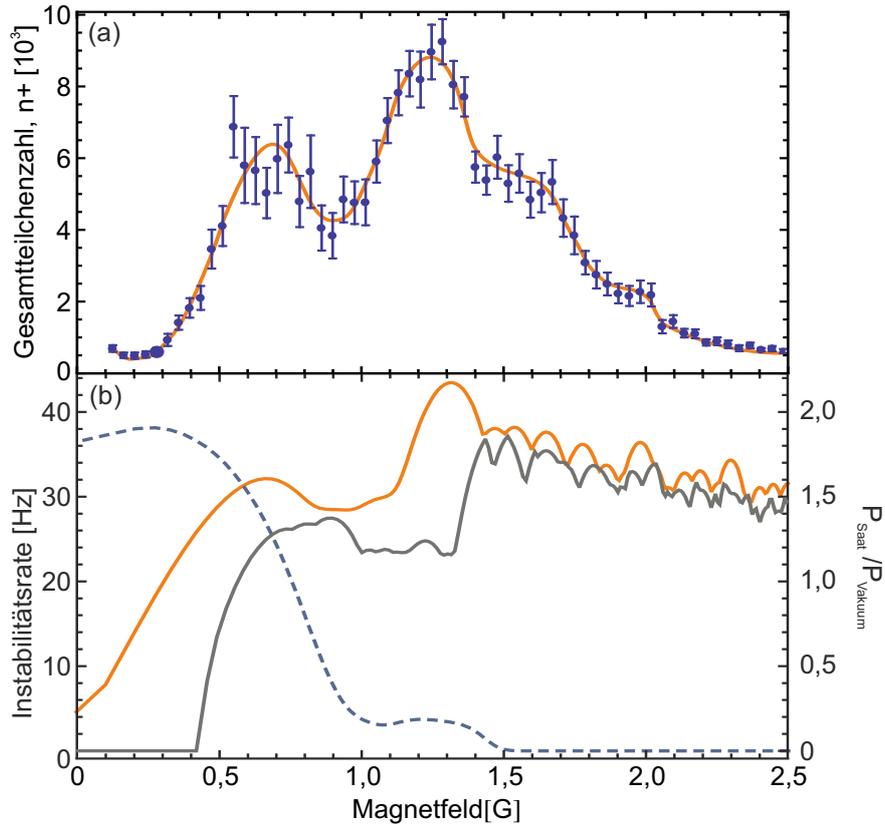


Abbildung 4.6: (a) Magnetfeldabhängigkeit der Spindynamik in der elliptische Falle. (b) Die zwei berechneten größten Instabilitätsraten (linke y -Achse) zusammen mit dem Verhältnis der Verstärkung von Saatatomen und der von Vakuumschwankungen (rechte y -Achse) aus Abbildung 2.25.

der Verstärkung von Saatatomen und Vakuumschwankungen angegeben (gestrichelte Kurve). Die Positionen der Maxima der stärksten Instabilitätsrate passen gut zu den Positionen der gezeigten Resonanzkurve. Die Experimente zu den nichtklassischen Zuständen erfordern, dass nach Möglichkeit nur eine Fallenmode angeregt wird. Zudem sollte sie weitestgehend insensitive auf Saatatome sein. Wie in Abschnitt 2.8 diskutiert, sind beide Bedingungen recht gut bei einem Magnetfeld von $\approx 1,2$ G erfüllt.

4.3 Abhängigkeit von der Anfangsteilchenzahl für die elliptische Falle

Dieser Abschnitt betrachtet das Verhalten der Spindynamik in Abhängigkeit der Anfangsteilchenzahl des ursprünglichen $|2,0\rangle$ -Kondensates. Das Verhalten der Resonanzmaxima bezüglich dieser Größe wird bereits in den Arbeiten [66, 101, 103]

eingehender behandelt. Deshalb wird an dieser Stelle nur untersucht, wie sich die Besetzung der Ausgangszustände ändert, wenn die anfängliche Größe des Ursprungskondensats $|2,0\rangle$ variiert wird.

Die Experimente dazu finden in der elliptischen Falle statt. Die Zeit der Spindynamik (15 ms) und das Magnetfeld (1,23 G) werden jeweils konstant gehalten. Zum Einstellen der Anfangsteilchenzahl wird vor der Reinigungssequenz (vgl. Abschnitt 3.4) die Länge des ersten Präparationspulses verändert. Die Anfangsteilchenzahl wird bestimmt, indem nach der Spindynamik die Atome aller drei Spinzustände addiert werden. Die Abbildung 4.7 (a) zeigt die Abhängigkeit der Anfangsteilchenzahl von der Pulslänge. Die Pulslängen liegen im Intervall von $\{\pi/4, \pi/2\}$. Der Grund für diese Wahl ist anhand der Abbildung 4.7 (b) ersichtlich. Dieser zeigt die Zahl der Atome in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände nach der Spindynamik in Abhängigkeit der Anfangsteilchenzahl. Da die Instabilitätsrate $E_n = \sqrt{(\epsilon_n + q)^2 - \Omega_{\text{eff}}^2}$ implizit über $\Omega_{\text{eff}} = U_1 n_0(\vec{r})$ von der Dichte und damit der Teilchenzahl abhängt, würde man einen exponentiellen Anstieg erwarten. Bis zu einer Anfangsteilchenzahl von ≈ 25000 Atomen in $|2,0\rangle$ ist dieser auch zu erahnen. Für höhere Teilchenzahlen verläuft die Steigung fast linear und wird ab ≈ 40000 Atomen deutlich flacher. Dies lässt darauf schließen, dass der parametrische Verstärkungsprozess ab einem Wert von ≈ 25000 Atomen hier nicht mehr im linearen Regime verläuft sondern das System bei der Zeit von 15 ms bereits im Bereich der Sättigung betrieben wird.

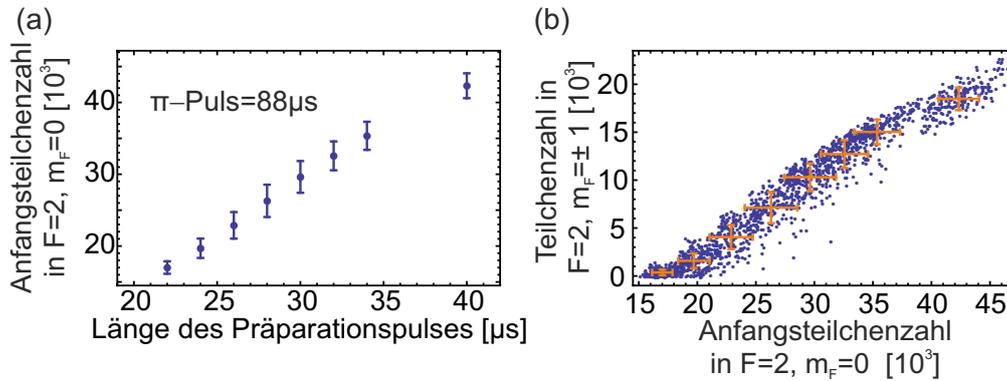


Abbildung 4.7: Teilchenzahlabhängigkeit der Spindynamik (a) Abhängigkeit der Anfangsteilchenzahl in $|2,0\rangle$ von der Länge des Präparationspulses. (b) Transferierte Atom in $|2, \pm 1\rangle$ in Abhängigkeit der Anfangsteilchenzahl in $|2,0\rangle$

RÄUMLICHE MODEN UND SPONTANE SYMMETRIEBRECHUNG

Das folgende Kapitel beschreibt die experimentellen Ergebnisse zur Ausbildung räumlicher Moden und der dabei auftretenden spontanen Symmetriebrechung. Es enthält somit den ersten Teil der Hauptresultate der vorliegenden Arbeit die auch in der Publikation [68] vorgestellt werden.

Im ersten Abschnitt werden die Beobachtungen der räumlichen Dichteverteilungen beschrieben, die sich als Folge der Spindynamik im effektiven Potential ergeben. Es wird gezeigt, wie sich die Form der Verteilungen unter Variation der Fallenfrequenzen ändert.

Anschließend werden die räumlichen Moden der zylindersymmetrischen Falle eingehender untersucht. Dazu werden ausgewählte mittlere Dichten dargestellt und mit den theoretischen Simulationen aus Abschnitt 2.1.5 verglichen. Die Anpassung einer Superposition an die Dichteverteilungen gibt dann eine Abschätzung für den Einfluss der Moden bei unterschiedlichen Magnetfeldern.

Der letzte Abschnitt des Kapitels beschreibt die Beobachtung und die Analyse der spontanen Symmetriebrechung durch die Spindynamik. Es wird gezeigt, dass sich die Dichteverteilungen mit einer klaren Orientierung bilden, die die räumliche Symmetrie brechen. Darüber hinaus treten bei bestimmten Magnetfeldern unterschiedliche Dichtenverteilungen der $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände auf, die in einer lokale Magnetisierung und damit einer Brechung der Spinsymmetrie resultieren.

5.1 Räumliche Moden

Wie im Theorieteil gezeigt, führt die Spindynamik dazu, dass unterschiedliche Eigenzustände des effektiven Potentials besetzt werden können (vgl. Abschnitt 2.1.5).

Im Experiment äußert sich dies durch unterschiedliche räumliche Dichteverteilungen. Diese können durch die Detektion nach der TOF aufgelöst und damit analysiert werden. Die Formen der Verteilungen hängen stark vom effektiven Potential ab und erlauben so eine weitere Möglichkeit die Falle qualitativ zu charakterisieren. Auf den Magnetfeldresonanzen der Spindynamik treten die reinsten Eigenmoden des effektiven Potentials auf, so dass auch hier die zugehörigen Quantenzahlen (n, l) den unterschiedlichen Resonanzpositionen zugeordnet werden können.

5.1.1 Räumliche Moden in der elliptischen Falle

Das die Spindynamik zu unterschiedlichen räumlichen Strukturen der Dichteverteilungen in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zuständen führt, zeigen bereits die Publikationen [66, 101]. In der Abbildung 5.1 sind die zugehörigen Absorptionenaufnahmen auf den Magnetfeldresonanzen nochmals dargestellt. Die Detektionsrichtung ist so gewählt, dass sie parallel zur Hauptachse der schwachen Fallenfrequenz liegt. Zu sehen sind die räumlich getrennten, atomaren Wolken der unterschiedlichen Zeemanzustände nach erfolgter Spindynamik mit anschließender Stern-Gerlach-Separation (vgl. Abschnitt 3.2). Die große Wolke in der Mitte zeigt das Ursprungskondensat in $|2, 0\rangle$, während die äußeren Wolken die transferierten Atome in $|2, \pm 1\rangle$ darstellen.

Auf der ersten Resonanz ($B = 0,65$ G) ähneln die Strukturen der $|2, \pm 1\rangle$ -Wolken der des Ursprungskondensats. Auf der zweiten Resonanz ($B = 1,29$ G) hingegen bildet sich eine Tripelstruktur mit drei in einer Reihe liegenden Maxima aus, die sich deutlich von der $|2, 0\rangle$ -Wolke unterscheidet. Um eine anschauliche Erklärung für dieses Verhalten zu bekommen, muss die verwendete Fallenkonfiguration betrachtet werden. Die hier verwendete vertikal gekreuzten Dipolfalle besitzt Fallenfrequenzen von $\omega = 2\pi(47,132,176)$ Hz. In einer ersten grobe Näherung kann diese Konfiguration als eindimensionales Kastenpotential betrachtet werden (vgl. Abschnitt 2.1.3 und Abb. 2.4). Auf der ersten Resonanz besetzen die Atome in $|2, \pm 1\rangle$ die Grundmode des Kastenpotentials, während auf der zweiten Resonanz die dritte Mode besetzt wird. Die zweite kann in dieser Konfiguration nicht beobachtet werden, da die zugehörige Instabilitätsrate wegen des geringen Überlapps dieser Mode mit dem Ursprungskondensat zu klein ist. Dies gilt auch für höhere Moden, die in dieser Konfiguration ebenfalls nicht beobachtet werden können.

Anhand der Tripelstruktur des zweiten Resonanzmaximums lässt sich das Verhalten des Potentials bei Änderung der Dipolfalle veranschaulichen. Im vorangegangenen Kapitel zur Magnetfeldabhängigkeit ist gezeigt worden, dass sich bei Änderung der Fallenfrequenzen die Form der Resonanzkurven nicht sonderlich ändert (vgl. Abb. 4.5 und Abb. 4.6). Es ergibt sich immer ein hohes Maximum im Bereich um 1,3 G, welches sich nur leicht verschiebt. Werden die Dichteverteilungen dieses Maximums für unterschiedliche Fallenkonfigurationen aufgenommen, so ergeben sich die Absorptionenbilder, wie sie in Abbildung 5.2 für den $|2, + 1\rangle$ -Zustand dargestellt sind. Die Form des $|2, - 1\rangle$ -Zustandes sieht jeweils identisch aus. Für jede

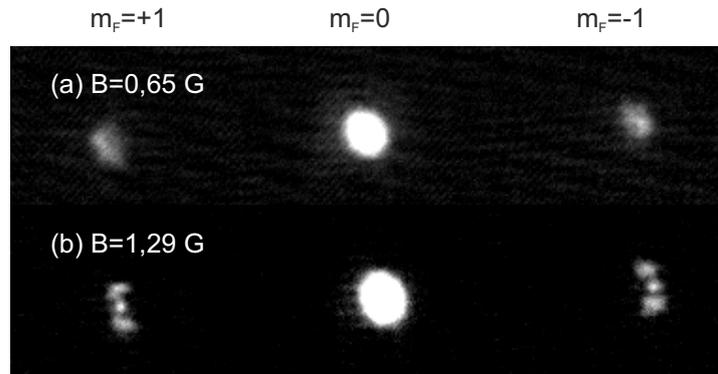


Abbildung 5.1: Gemessene räumliche Dichteprofile der Daten aus [66]. Die Bilder sind auf den Maximalwerten des Resonanzgraphen aufgenommen.

Aufnahme sind die gemessenen Fallenfrequenzen und das Verhältnis der beiden stärksten Fallenfrequenzen $\omega_{\text{med}}/\omega_{\text{max}}$ angegeben.

Abbildung 5.2 (a) ist eine Vergrößerung der Tripelstruktur des $|2, +1\rangle$ -Zustands der vorherigen Abbildung 5.1(b). Der Wechsel zur horizontalen Dipolfallenkonfiguration (vgl. 3.3) erlaubt eine Reduktion des Verhältnisses $\omega_{\text{med}}/\omega_{\text{max}}$ (Abb. 5.2 (b)). Die Tripelstruktur bleibt erhalten, die zuvor runden Maxima bekommen allerdings eine elliptische Form. Werden die Fallenfrequenzen durch Variation der Intensitäten weiter angepasst, so vergrößern sich die beiden äußeren Ellipsen und deren Enden biegen sich nach innen (Abb. 5.2 (c)). Sie bilden damit Ausschnitte eines Ringes um das zentrale Maximum. In Abbildung 5.2 (d) haben sich die beiden Ellipsen miteinander vereinigt und bilden einen symmetrischen Ring. Hier sind die beiden starken Fallenfrequenzen fast identisch. Diese Konfiguration entspricht am nächsten einem zylindersymmetrischen Potential und ist für die Untersuchungen zur spontanen Symmetriebrechung verwendet worden.

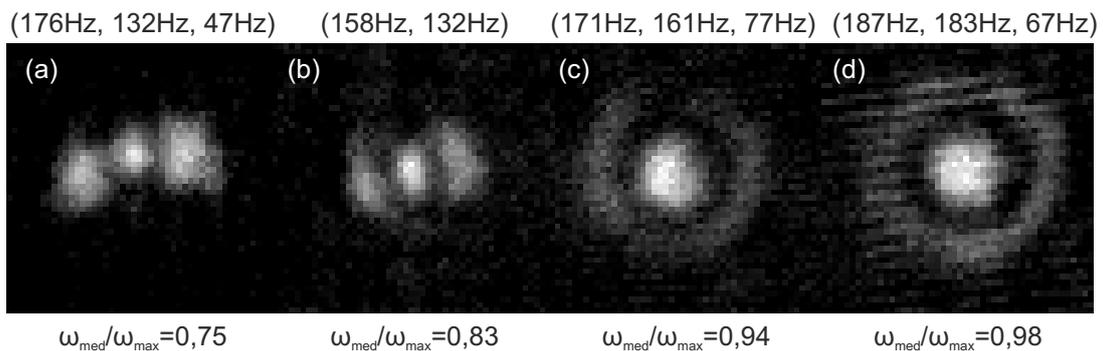


Abbildung 5.2: Entwicklung der Tripelstruktur für unterschiedliche Fallenkonfigurationen. Von links nach rechts nähert sich das Verhältnis $\omega_{\text{med}}/\omega_{\text{max}}$ der beiden stärksten Fallenfrequenzen der eins. Die Falle ähnelt daher immer mehr einem zylindrischen Potential.

Mit Hilfe der Tripelstruktur kann auch das Drehen des Aspektverhältnisses der Dipolfalle bei nicht perfekter Justage beobachtet werden (vgl. Abschnitt 3.3.2). Die Abbildung 5.3 (a) zeigt die Rotation der Tripelstruktur wenn die Leistung des schwachen Dipolstrahls sukzessive erhöht wird, während die Leistung des starken Strahls konstant bleibt. Unterhalb der Aufnahmen (Abb. 5.3 (b)) sind die Orientierungen der Hauptachse mit der größten Fallenfrequenz gegen die Leistung des schwachen Dipolstrahls aus Abbildung 3.13 aufgetragen. Die Winkel der Strukturen folgen sehr gut der Orientierung der Hauptachse mit der starken Fallenfrequenz. Dies unterstützt die Aussage, dass in der elliptischen Falle die größte Fallenfrequenz die Dynamik dominiert und das System in erster Näherung als eindimensional betrachtet werden kann.

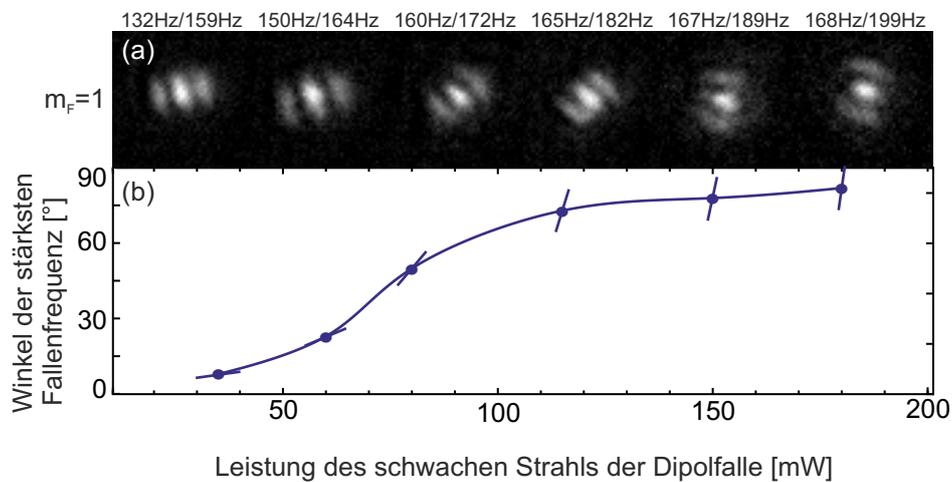


Abbildung 5.3: Hier ist gezeigt, dass die Orientierung der Tripelstruktur dem Winkel der Hauptachse mit der stärksten Fallenfrequenz folgt. (a) zeigt Absorptionsspektren der gedrehten Tripelstrukturen mit zugehörigen Fallenfrequenzen. In (b) ist noch einmal die Richtung der stärksten Hauptachse bei Änderung der Intensität des horizontalen Strahls aus Abbildung 3.13 gezeigt.

5.2 Die gemittelten Dichteverteilungen der zylindrischen Falle

Von besonderem Interesse sind die räumlichen Strukturen des zylindersymmetrischen Potentials. Die Symmetrie erlaubt eine einfache Beschreibung und Interpretation der entstehenden Moden. Die theoretischen Simulationen, entsprechend der in Abschnitt 4.2 zugeordneten Quantenzahlen (n,l) , sind in der Abbildung 5.4 (a) dargestellt. Darunter sind die gemittelten experimentellen Dichteverteilungen bei den jeweiligen Magnetfeldresonanzen zu sehen (Abb. 5.4 (b)). Zum Vergleich sind zusätzlich die Messpunkte auf der Resonanzkurve gekennzeichnet (Abb. 5.4 (c)).

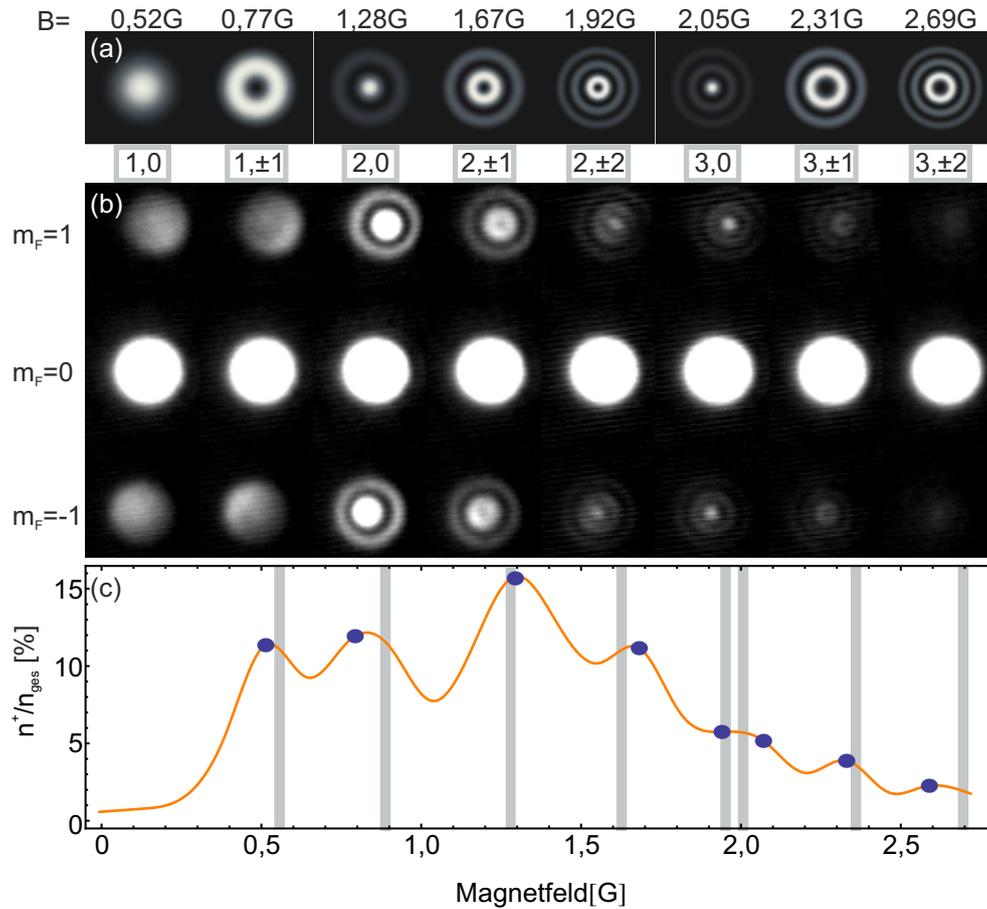


Abbildung 5.4: (a) Simulierten Dichteverteilungen für die angegebenen Quantenzahlen (n, l) . (b) Gemittelte experimentelle Absorptionenaufnahmen. (c) Resonanzkurve mit Markierungen der verwendeten Magnetfelder.

Zur Erstellung der gemittelten Dichten werden alle 68 Absorptionenaufnahmen eines Magnetfeldwertes verwendet. Die Helligkeitsskalierung aller Aufnahmen ist identisch gewählt und gibt somit Auskunft über die Stärke des jeweiligen Transfers. Ab der $(n = 3, l = \pm 2)$ -Mode ist dieser leider zu gering und erlaubt keine Beobachtung der entsprechenden räumlichen Moden. Die gemittelten Dichteverteilungen für alle Magnetfelder der Resonanzkurve können in Anhang A.3 nachgeschlagen werden.

Der Vergleich zwischen den simulierten und den gemessenen Dichten zeigt, dass sich das reale System gut durch das einfache Modell des zylindrischen Kastenpotentials beschreiben lässt. Außerdem bestätigt sich so die Zuordnung der Quantenzahlen zu den Maxima der Resonanzkurve (vgl. Abschnitt 4.2).

Einzig im Fall der $(1, \pm 1)$ und der $(2, \pm 2)$ -Mode, scheinen die Simulationen und die gemessenen Daten nicht zueinander zu passen. Dies ist auf die Tatsache zurückzuführen, dass diese Moden energetisch gesehen nahe an den benachbarten $(1, 0)$ beziehungsweise $(3, 0)$ -Moden liegen (vgl. Abschnitt 2.2 und Abb. 2.7). Dies

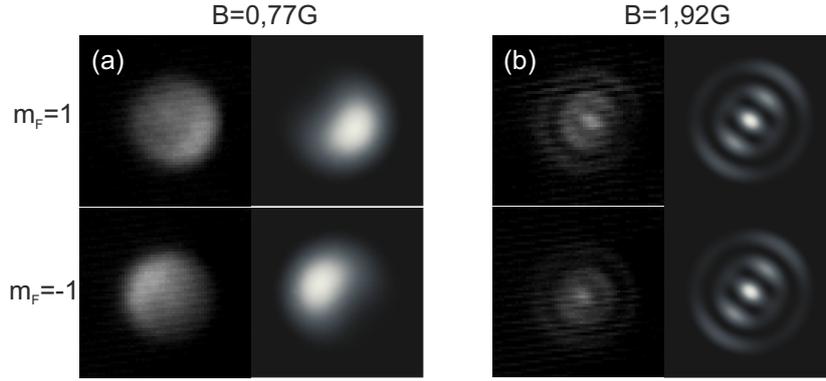


Abbildung 5.5: Vergleich der gemittelten Absorptionsoptionen bei (a) 0,77 G und (b) 1,92 G mit simulierten Superpositionen. Für die Simulation der Überlagerung der $(1, \pm 1)$ -Mode mit der $(1, 0)$ -Mode sind die Funktionen $\propto 2\phi_{1,0}(r, \varphi_{1,0}) + \phi_{1,1}(r, \varphi_{1,1})$ für den $|2, 1\rangle$ -Zustand und $\propto 2\phi_{1,0}(r, \varphi_{1,0}) + \phi_{1,-1}(r, \varphi_{1,-1})$ für den $|2, -1\rangle$ -Zustand verwendet worden. Im Fall von $(2, \pm 2)$ mit $(3, 0)$ entspricht die simulierte Verteilung in beiden Fällen der Funktion $\propto 2\phi_{3,0}(r, \varphi_{3,0}) + \phi_{2,2}(r, \varphi_{2,2}) + \phi_{2,-2}(r, \varphi_{2,-2})$.

führt zu Überlagerungen mit den benachbarten Moden. Da die zugehörigen Instabilitätsraten in dem Bereich zwischen den benachbarten Moden ähnlich hoch sind, reicht die Zeit nicht aus, damit sich eine Dominanz der $(1, \pm 1)$ - bzw. $(2, \pm 2)$ -Moden ausbilden kann. Eine Verlängerung der Zeit ist nicht möglich, da sich die Dynamik bereits nah des Sättigungsregimes bewegt.

Um die These der überlagerten Moden zu stützen, werden in der Abbildung 5.5 die gemessenen Profile mit simulierten Superpositionen benachbarter Moden verglichen. Die relativen Stärken der simulierten Superposition der $(1, 0)$ - mit den $(1, 1)$ - und $(1, -1)$ -Moden sind durch Vergleich mit der Messung bestimmt worden. Das Gleiche gilt für die Superposition der $(2, \pm 2)$ -Moden mit der $(3, 0)$ -Mode. Es ergibt sich daraus eine qualitative Übereinstimmung der theoretischen und der gemessenen Daten.

Wird dieses Konzept der überlagerten Moden weitergeführt, so können auch die Profile zwischen den Maxima durch die Simulationen reproduziert werden. Außerdem ergibt sich so eine Möglichkeit die Stärken der jeweiligen Moden auf den unterschiedlichen Maxima zu analysieren. Dafür wird bei der Auswertung der Absorptionsoptionen eine Superposition der ersten sechs räumlichen Moden durch eine Anpassungsroutine automatisch an das jeweilige Dichteprofil angepasst. Die anzupassende Funktion sieht folgendermaßen aus,

$$|\Phi_s(r, \varphi)|^2 = |A_{1,0}\phi_{1,0}(r, \varphi) + A_{1,1}e^{i\alpha_{1,1}}\phi_{1,1}(r, \varphi) + A_{1,-1}e^{i\alpha_{1,-1}}\phi_{1,-1}(r, \varphi) + \dots + A_{3,0}\phi_{3,0}(r, \varphi)|^2 \quad (5.1)$$

Die Größen r und φ sind die Variablen. Die freien Parameter sind die Wichtungen $A_{n,l}$ und die Phasen $\alpha_{n,\pm l}$ der Drehimpulszustände. Werden die Mittelwerte der

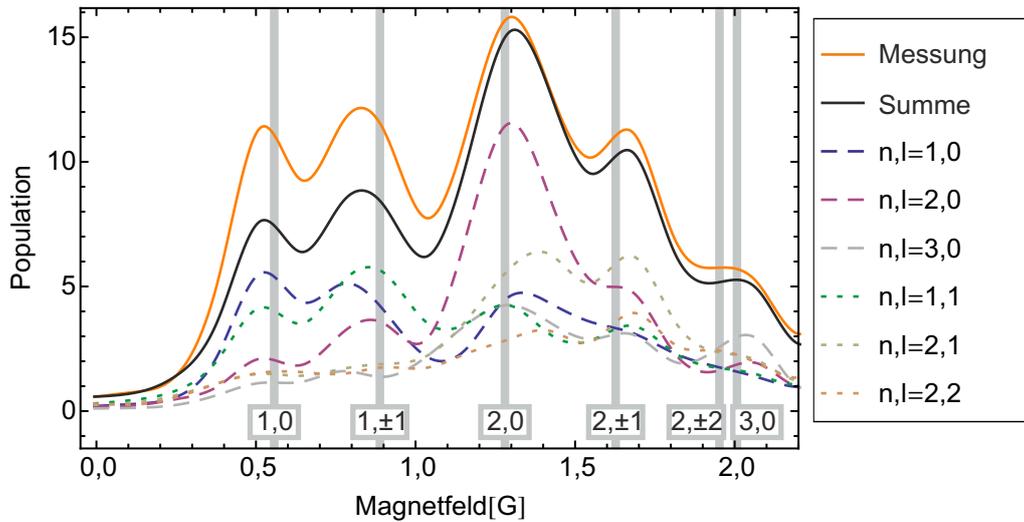


Abbildung 5.6: Gezeigt sind die Parameter der Anpassung des Superpositionszustandes $|\Phi_s(r,\varphi)|^2$ der ersten sechs Eigenmoden gemäß nebenstehender Legende (vgl. Text).

$|A_{n,l}|^2$ der unterschiedlichen Magnetfelder aufgetragen, so ergibt sich der Graph in Abbildung 5.6. Die durchgezogene orangefarbene Linie entspricht der Resonanzkurve aus Abbildung 4.5. Werden alle ermittelten Parameter quadratisch addiert, so ergibt sich die schwarze Linie. Die gestrichelten Kurven entsprechen den Moden ohne Drehimpuls. Es ist gut zu sehen, dass diese wie erwartet auf den zugeordneten Resonanzpositionen dominieren. Das Gleiche gilt auch für die Moden mit Drehimpuls, die durch die gepunkteten Kurven gekennzeichnet sind. Diese gezeigten Kurven sind quadratische Summen der entartete Moden mit l und $-l$. Die Abweichungen zwischen den beiden durchgezogenen Kurven, kann durch den größeren Fehler der Anpassungsroutine erklärt werden. Diese ist stärker von der Qualität der Aufnahmen abhängig welche durch verschiedene Effekte beeinträchtigt wird (vgl. Abschnitt 3.2.1). Zudem sind der Schwerpunkt und der Radius für die Anpassung festgelegt worden, um unsinnige Ergebnisse weitestgehend zu vermeiden. Dadurch kann es passieren, dass diese Größen leicht von den realen Werten abweichen, wodurch die angepassten Dichteverteilungen eine geringere Teilchenzahl aufweisen kann. Dennoch bietet diese Form der Auswertung einen zusätzlichen Einblick in die Struktur der Resonanzkurve. Es bestätigt sich einmal mehr die Zuordnung der Quantenzahlen zu den entsprechenden Resonanzmaxima. Um quantitativere Aussagen treffen zu können, müsste die Auswertung insensitive auf die Bildstörungen erfolgen. Dazu könnten die Strukturen zum einen über einen skaleninvarianten Algorithmus besser identifiziert werden wie in Ref. [149] gezeigt wird. Zum anderen besteht die Möglichkeit, statt des einfachen Strahlbildes, eine Überlagerung mehrerer Strahlbilder zu generieren, mit der die Bildfehler minimiert werden [150–152].

5.2.1 Symmetriebrechung der $(1, \pm 1)$ -Mode durch externe Einflüsse

Wie bereits theoretisch hergeleitet (vgl. Abschnitt 2.3), kann eine Superposition benachbarter Moden zu einer Brechung der räumlichen und der Spinsymmetrie führen. Dies fällt insbesondere bei Betrachtung der gemittelten Aufnahmen für 0,77 G in Abbildung 5.5 auf. Hier ist eine Asymmetrie in der Verteilung zwischen der $|2, + 1\rangle$ und der $|2, - 1\rangle$ -Wolke erkennbar und die räumliche Symmetrie ist somit gebrochen. Neben der räumlichen gilt dies auch für die Spinsymmetrie. Der Spin ist nicht mehr homogen über die Wolke verteilt, sondern es bilden sich Domänen, in denen eine der Spinkomponenten dominiert. Dies wird anhand von Abbildung 5.7 besonders deutlich. Hier sind die beiden Verteilungen noch einmal dargestellt (Abb. 5.7 (a),(b)), wobei der Spin gemäß der nebenstehenden Skala farblich kodiert ist. Werden diese beiden Bilder übereinander gelegt (Abb. 5.7 (c)), so entspricht dies der räumlichen Magnetisierung über die gesamte Wolke, bevor die einzelnen Zeemanzustände durch die Stern-Gerlach-Aufspaltung voneinander getrennt werden. Nach der Spindynamik ist das vormals homogene unmagnetisierte System somit in ein System mit einer dipolaren Spinverteilung übergegangen und die Spinsymmetrie ist lokal gebrochen.

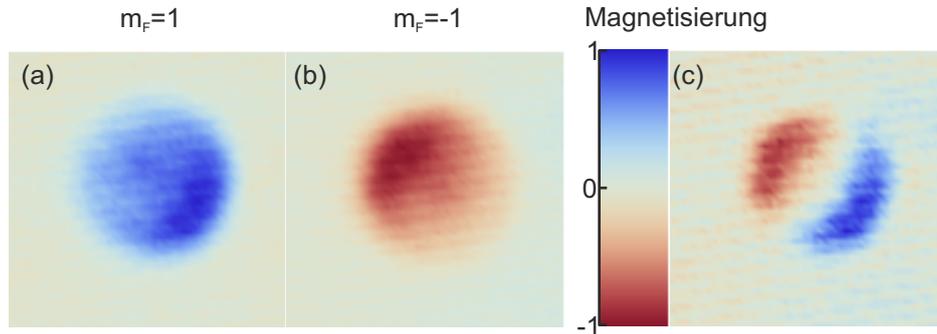


Abbildung 5.7: Magnetisierung der gemittelten Bilder auf der $(1, \pm 1)$ -Resonanz entsprechend der Farbskala. (a) Farbbild kodierte Spinverteilung der $|2, + 1\rangle$ -Wolke. (b) Farbbild kodierte Spinverteilung der $|2, - 1\rangle$ -Wolke. (c) Spinverteilung der Überlagerten Wolken. Dies entspricht der räumlichen Magnetisierung über die gesamte Wolke vor der Stern-Gerlach-Aufspaltung. Es zeigt sich eine lokale Brechung der Spinsymmetrie.

Das Auftreten dieser Asymmetrie bei den gemittelten Dichten zeigt, dass diese Symmetriebrechung nicht spontan erfolgt, sondern durch externe Einflüsse hervorgerufen wird, die bei jedem Experimentdurchlauf ähnlich sind. Im idealen Fall ist keine Vorzugsrichtung ausgezeichnet und die Symmetrie wird erst durch Vakuumfluktuationen spontan gebrochen. Gemittelt sollte dies zu einer homogenen Verteilung führen. Die Erklärung für diese Form der Symmetriebrechung sind Saa-tatome, die sich vor der Spindynamik in den $m_F = \pm 1$ -Zuständen befinden. Wie in [67] gezeigt, werden in diesem Fall nicht die Vakuumfluktuationen sondern die

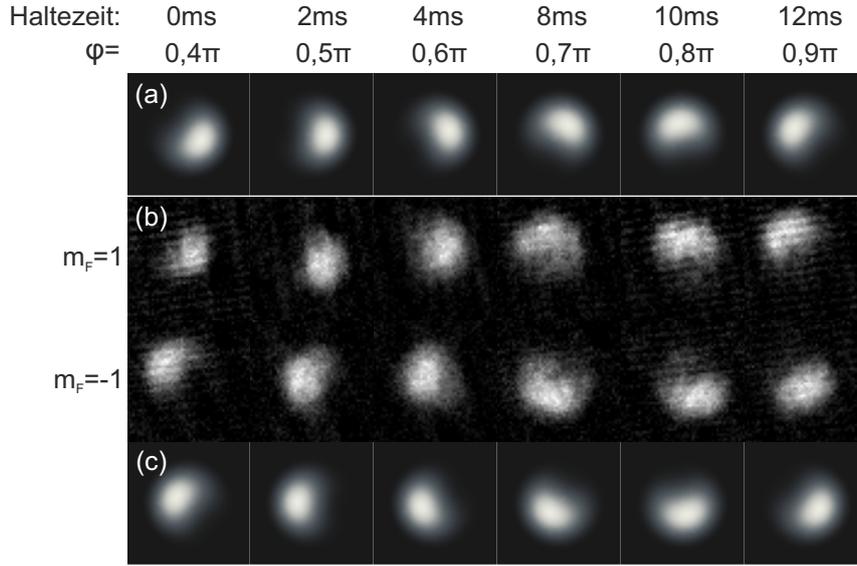


Abbildung 5.8: Sequenz zur Dichteoszillation der $(1,0),(1, \pm 1)$ -Superposition. Von links nach rechts wird die Haltezeit in der Dipolfalle nach der Spindynamik geändert. (b) Gemessene Dichteverteilungen. (a), (c) Simulationen. Für die Simulationen werden die relativen Stärken der beteiligten Moden festgehalten. Es wird lediglich die relative Phase φ zwischen den $(1,0)$ und den $(1, \pm 1)$ -Eigenfunktionen variiert. Die Funktionen für die Simulationen sehen folgendermaßen aus: $\propto 2\phi_{1,0}(r, \varphi_{1,0} + \varphi) + \phi_{1,1}(r, \varphi_{1,1} - \varphi)$ und $\propto 2\phi_{1,0}(r, \varphi_{1,0} - \varphi) + \phi_{1,1}(r, \varphi_{1,-1} + \varphi)$.

Saatatome parametrisch verstärkt. Die Erzeugung dieser geschieht vorwiegend in der $(1,0)$ -Mode, da hier der größte Überlapp mit den Ursprungskondensat besteht. Bereits kleinste Störungen, wie verbleibende Magnetfeldgradienten können dann die Symmetrie brechen, zumal die spezielle Form der Superpositionsmode aufgrund ihres dipolaren Charakters sehr sensitiv auf äußere Magnetfeldgradienten ist.

Wird diese Asymmetrie genauer betrachtet, so können Schwingung der Dichten innerhalb der Dipolfalle beobachtet werden. Dies ist in der gemessenen Bildersequenz in Abbildung 5.8 (b) dargestellt. Von links nach rechts tauschen die beiden Spinkomponenten ihre Position in der Falle. Die Aufnahmen sind entstanden, indem nach der Spindynamik bei 0,64 G das Magnetfeld auf einen Wert von 9,8 G erhöht wird, um weitere Spindynamik zu unterdrücken. Anschließend folgt eine variable Haltezeit in der Dipolfalle, bevor die Atome detektiert werden. Die beobachtbaren Schwingungen können auf eine Oszillation der relativen Phasen der beteiligten Superpositionszustände zurückgeführt werden. Dies zeigt die Simulationen, die ober- und unterhalb der gemessenen Dichten dargestellt sind (Abb. 5.8(a),(c)).

Zur Extraktion der Oszillationsfrequenz sind die Koordinaten der Schwerpunkte relativ zueinander ermittelt worden. Die zugehörigen Graphen sind in Abbildung 5.9 dargestellt. Eine Anpassung durch eine gedämpfte Sinusfunktionen ergibt Wer-

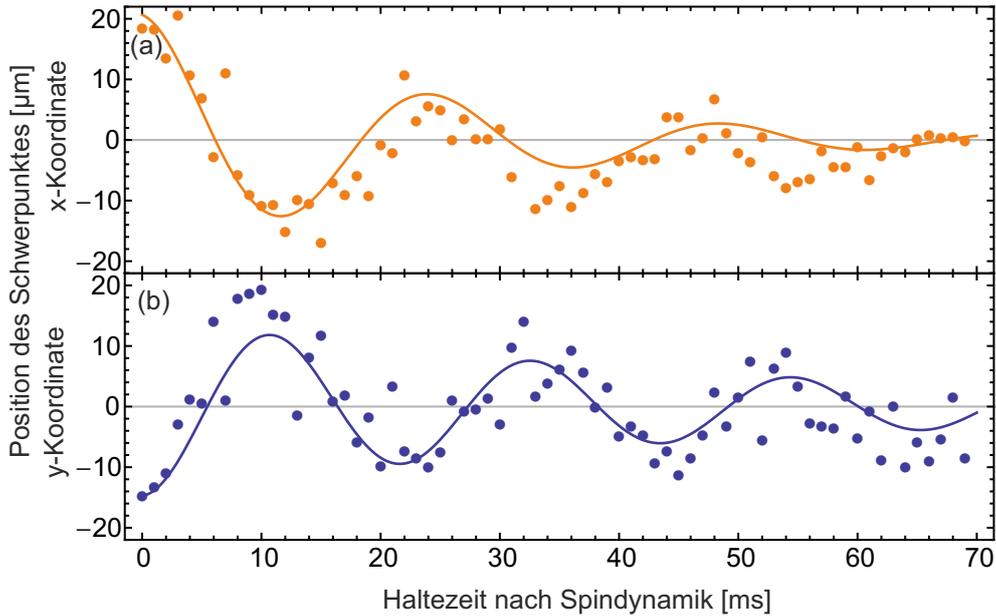


Abbildung 5.9: Schwerpunktskoordinaten der $(1,0),(1,\pm 1)$ -Superposition in Abhängigkeit der Zeit für (a) der relativen x - und (b) der relativen y - Koordinaten der Wolken. Zur Erstellung dieser Graphen, sind die der Schwerpunkte der Aufnahmen in Abbildung 5.8 bestimmt worden.

te von $\nu_x = 40 \pm 3$ Hz und $\nu_y = 45 \pm 3$ Hz für die Oszillationsfrequenz, was in etwa dem theoretisch berechneten energetischen Abstand der ersten beiden Moden von 34 Hz entspricht.

5.3 Die einzelnen Dichteverteilungen

Die Betrachtung der gemittelten Bilder gibt bereits Einblicke in die Eigenschaften der Spindynamik und die zugehörigen Symmetrien. Durch sie wird ersichtlich, in wie weit äußere Störungen die Zylindersymmetrie des effektiven Potentials beeinflussen. Mit den gemittelten Verteilungen lässt sich allerdings nicht feststellen ob spontane Symmetriebrechungen auftreten. Der Theorie nach sollten sich diese in der räumlichen Struktur spontan ausbilden, wenn nur Moden mit gleicher Quantenzahl n und gegensätzlichen Drehimpulsen miteinander interferieren. Nach obiger Analyse ist dies auf der $(1, \pm 1)$ -Resonanz durch die Überlagerung mit der $(1,0)$ -Mode und äußeren Einflüssen nicht möglich. Die Resonanzen der Quantenzahlen $(2, \pm 1)$ und $(3, \pm 1)$ hingegen erscheinen vielversprechender, da die gemittelten Dichteverteilung bei 1,66 G und 2,31 G zylindersymmetrisch sind. Auf den zugehörigen Bildern ist somit keine Symmetriebrechung aufgrund äußerer Einflüsse erkennbar.

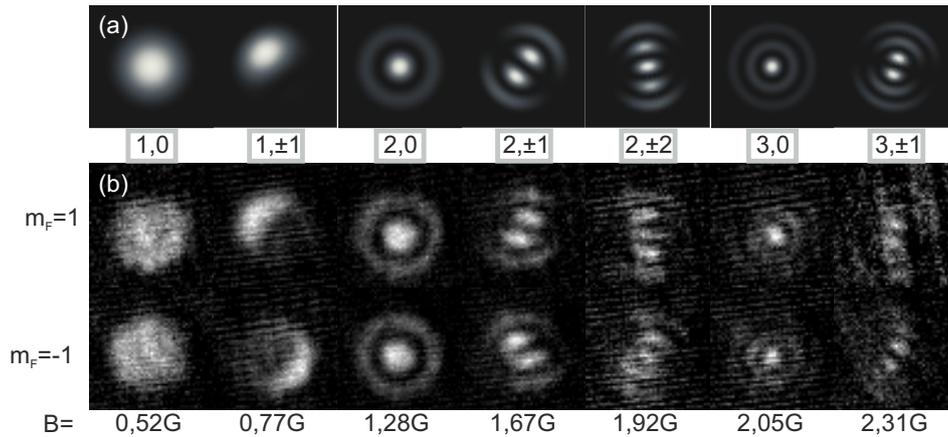


Abbildung 5.10: Vergleich zwischen (a) den theoretischen Simulationen (vgl. Text) und (b) ausgewählten einzelnen Absorptionsspektren auf den jeweiligen Resonanzpositionen.

Um diese Moden genauer zu untersuchen, werden die einzelnen Absorptionsspektren analysiert. Analog zur Abbildung 5.4 werden die simulierten Dichten (Abb. 5.10(a)) mit den gemessenen Dichten (Abb. 5.10(b)) für ausgewählte Einzelaufnahmen auf den Resonanzen dargestellt. Die Annahmen zum Erstellen der Simulationen werden weiter unten beschrieben. Ohne die Mittelung ist das Signal zu Rauschverhältnis bedeutend geringer. Aus diesem Grund sind die Bilder nachträglich individuell skaliert, um die räumlichen Strukturen hervorzuheben. Die Helligkeit der Aufnahmen trifft daher im Gegensatz zu Abbildung 5.4 keinerlei Aussage über den absoluten Transfer.

Die ungemittelten Aufnahmen der Abbildung 5.10 offenbaren, dass sich die räumlichen Strukturen der Moden ohne Drehimpuls nicht von den gemittelten Bildern unterscheiden. Wie erwartet kommt es für diese Werte zu keiner Brechung der Symmetrie. Die Simulationen der Dichten der $(1, \pm 1)$ - und der $(2, \pm 2)$ -Moden sind wie in Abbildung 5.5 Superpositionen mit den benachbarten Moden. Auf der Aufnahme der $(1, \pm 1)$ -Mode ist zudem die oben diskutierte induzierte Symmetriebrechung noch deutlicher zu erkennen.

Interessanter sind allerdings die Moden $(2, \pm 1)$ und $(3, \pm 1)$ mit Drehimpuls. Die einzelnen Aufnahmen unterscheiden sich deutlich von den gemittelten Bildern aus Abbildung 5.4. Die Strukturen der Wolken sind nicht länger zylindersymmetrisch sondern weisen eine klare Orientierung auf. Die räumliche Symmetrie ist demnach gebrochen. Dies ist auf eine Superposition der Vortex- und der Antivortexmode zurückzuführen. Die Simulationen zeigen jeweils eine solche Überlagerung, welche die Strukturen sehr gut wiedergeben. Der Orientierungswinkel der Dichte wird durch die relative Phase zwischen Vortex- und Antivortexmode gegeben und ist in der Simulation frei gewählt.

Weiterhin ist insbesondere bei $(2, \pm 1)$ -Resonanz zu erkennen, dass die Orientierung der Strukturen der $|2, + 1\rangle$ - und der $|2, - 1\rangle$ -Wolke nicht in die gleiche Richtung zeigen. Analog zur $(1, \pm 1)$ -Mode führt dies dazu, dass die lokale Magnetisierung nicht erhalten bleibt. Dies deutet daher auf einen Einfluss benachbarter Moden hin. Wie noch gezeigt wird, tragen hier keine äußeren Störungen zur Brechung der Spinsymmetrie bei. In den nächsten Abschnitten werden diese Symmetriebrechungen eingehender studiert.

5.4 Analyse der Symmetriebrechung

Aus dem obigen Vergleich der gemittelten mit den einzelnen Absorptionsoptionen geht hervor, dass die $(2, \pm 1)$ -Mode das Potential hat, um das Auftreten spontaner Symmetriebrechung zu beobachten. Dafür spricht, dass die gemittelten Bilder keinen Hinweis darauf geben, dass eine Symmetriebrechung aufgrund äußerer Einflüsse vorliegt. Weiterhin ist auf den einzelnen Aufnahmen eine Brechung der räumlichen Symmetrie und der Symmetrie der lokalen Magnetisierung erkennbar. Außerdem ist das Signal zu Rauschverhältnis gut genug, um häufig klare Strukturen detektieren zu können, die keine allzu lange Datenaufnahme erfordern und eine einfache Auswertung erlauben. Im Vergleich dazu stellt bei der $(3, \pm 1)$ -Resonanz insbesondere der letzte Punkt ein Problem dar.

Um die auftretenden Symmetriebrechungen der $(2, \pm 1)$ genauer zu untersuchen, sind bei sechs verschiedene Magnetfeldern zwischen 1,59 G und 1,85 G, jeweils 540 Messungen aufgenommen worden. Um dabei das Signal zu Rauschverhältnis zu optimieren ist die Spindynamikzeit auf 20 ms erhöht. Dadurch kann der Bereich der parametrischen Verstärkung voll ausgenutzt werden. Die Durchführung dieser Messung erfordert eine sehr hohe Stabilität und Zuverlässigkeit des Experiments, da die Daten an einem Stück, über ein komplettes Wochenende Tag und Nacht, aufgenommen worden sind.

Die Abbildung 5.11 zeigt die gemittelten Bilder der Messung für die unterschiedlichen Magnetfelder. Darunter ist ein Ausschnitt der Resonanzkurve zu sehen, auf der die Messpunkte gekennzeichnet sind. Die Aufnahme zeigen, dass die gemittelten Dichteverteilungen für alle Magnetfelder weiterhin zylindersymmetrisch sind. Die Bilder bei 1,69 G, 1,74 G und 1,79 G weisen ein klar erkennbares Minimum im Zentrum der Wolke auf. Dies lässt darauf schließen, dass dort die $(2, \pm 1)$ -Mode dominiert. Bei den anderen Feldern treten dementsprechend Überlagerungen mit den benachbarten Moden häufiger auf, wodurch aus den gemittelten Bildern nicht mehr eindeutig die dominante Mode bestimmt werden kann. Dies ist auch auf den Einzelbildern zu erkennen und ist der Grund, für die Wahl des Magnetfeldintervall. Bei größeren oder kleineren Feldern können überhaupt keine klaren Strukturen der $(2, \pm 1)$ -Mode mehr detektiert werden.

Die gemittelten Bilder geben bereits einen ersten Hinweis, über die Art der Symmetriebrechung. Hier wird keine bestimmte Orientierung bevorzugt, was dar-

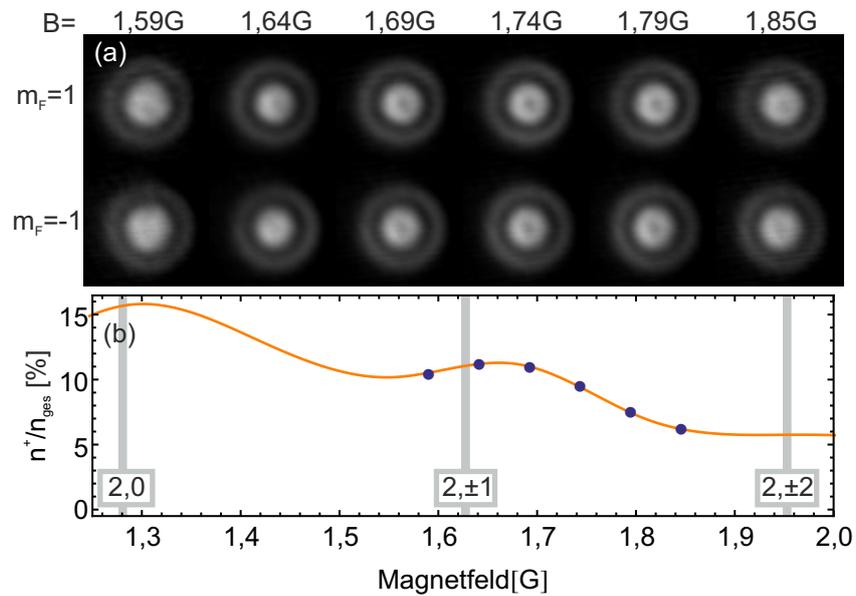


Abbildung 5.11: (a) Gemittelte Aufnahmen der Messung zur Symmetriebrechung im Bereich der $(2, \pm 1)$ -Resonanz (b) Vergrößerter Bereich des Resonanzgraphen 4.5 mit eingezeichneten Messpunkten der gezeigten Aufnahmen.

auf schließen lässt, dass alle möglichen Winkelkonstellationen während der Messung besetzt worden sind. Die zeigt, dass im Gegensatz zur $(1, \pm 1)$ -Mode bei der Symmetriebrechung, hier Saatatome und Magnetfeldgradienten keine Rolle spielen. Vielmehr sorgen Vakuumfluktuationen dafür, dass bei jeder Messung ein anderer Winkel auftreten kann.

Eine genauere Analyse bietet die Auswertung der Einzelbilder. Typische Absorptionsoptionen aus der Messreihe sind in Abbildung 5.12 gezeigt. Die meisten Bilder zeigen eine Struktur, wie in Abbildung 5.12 (a) dargestellt. Die Dichteverteilungen zeigen eine klare Orientierung an, deren Winkel bestimmt werden kann. Allerdings können auch andere Strukturen auftreten, wie die Aufnahmen (b)-(e) zeigen. Diese lassen keine eindeutige Winkelbestimmung zu. Das Bild (b) zeigt beispielsweise eine Überlagerung zwischen der $(2, \pm 1)$ mit der $(2,0)$ -Mode, die weiterhin eine Zylindersymmetrie aufweist. Ähnliches gilt in Bild (c). Auch hier bleibt die anfängliche Symmetrie erhalten und der Verteilung kann kein Winkel zugeordnet werden. Die Struktur entspricht einer reinen $(2, + 1)$ - beziehungsweise $(2, - 1)$ -Mode, in der keine Superposition der beiden Drehimpulsmoden auftritt. Dies lässt sich damit erklären, dass die relative Stärke zwischen den Vortex- und Antivortex Moden frei wählbar ist. Was dazu führen kann, dass für den $|2, + 1\rangle$ nur eine der beiden Drehimpulsmoden angesprochen wird. In dem $|2, - 1\rangle$ -Zustand wird dann Aufgrund der Drehimpulserhaltung die entsprechend andere Mode angeregt. In diesem Fall entstehen die räumlichen Verteilungen nicht aus einer Interferenz sondern aus einer reinen Vortex- und einer reinen Antivortexmode. Mit

Hilfe der Detektion können diese nicht voneinander unterschieden werden. Eine weitere Struktur, die auftreten kann, zeigt die Abbildungen (d). Bei dieser ist die Stärke des Transfers durch die Spindynamik und damit das Signal- zu Rauschverhältnis zu gering um eine Winkelbestimmung vornehmen zu können. Dies kann ebenfalls durch störende Effekte, wie ungewolltes Heizen in der Dipolfalle hervorgerufen werden. Dadurch können sich auch Bilder ohne klar erkennbare Strukturen ausbilden, wie in (e) gezeigt. Um die Symmetriebrechung zu untersuchen, werden daher nur Messungen oberhalb einer festgelegten Teilchenzahl verwendet. Zudem werden zwei unterschiedliche Verfahren angewandt, um den Winkel der Dichteverteilungen zu bestimmen. Damit können Aufnahmen, wie in Abbildung 5.12 (b)-(e) gezeigt, aussortiert werden. Die Daten, die nicht durch diese Raster aussortiert worden sind, werden verwendet um die Verteilungen der Winkel zu erstellen und so die Art der Symmetriebrechung zu analysieren.

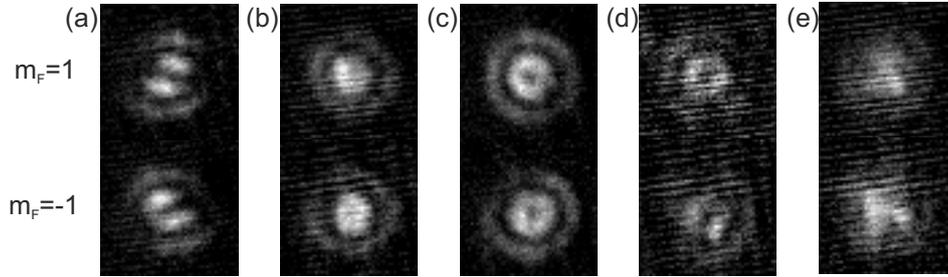


Abbildung 5.12: Typische Aufnahmen der Messung zur Symmetriebrechung im Bereich der $(2, \pm 1)$ -Resonanz

Analyse durch Anpassung der theoretischen Dichteverteilungen an die Daten

Bei der ersten Methode werden die Funktion $\Phi_{2,\pm 1}(x, \varphi) = A_{2,+1}\phi_{2,+1}(x, \varphi + \varphi_0) + A_{2,-1}\phi_{2,-1}(x, \varphi)$ der überlagerten Vortex- und Antivortexmoden an die Wolken der $|2, +1\rangle$ - und $|2, -1\rangle$ -Zustände angepasst. Die Funktion ist dieselbe, wie sie zur Simulation der Dichteverteilung der $(2, \pm 1)$ -Mode verwendet wird (vgl. Abb. 5.10). Der Parameterbereich für die Bestimmung des Mittelpunktes und der Ausdehnung der Strukturen werden stark eingeschränkt, da diese durch Position und Form des Potentials gegeben sind und für alle Messungen gleich sind. Für die Amplituden wird angenommen, dass sie gleich groß sind $A \equiv A_{2,1} = A_{2,-1}$. Diese sowie die relative Phase φ_0 zwischen den Moden, sind freie Parameter. Die Phase φ_0 legt dabei den Winkel der räumlichen Strukturen fest. Durch die Anpassungsroutine wird sie immer mit demselben absoluten Winkel verglichen und entspricht daher der Orientierung der Wolken. In der Abbildung 5.13 ist eine solche Anpassung zu sehen. Neben der ursprünglichen Absorptionaufnahme (Abb. 5.13 (a)) ist die Funktion $\Phi_{2,\pm 1}$ mit angepassten Parametern (Abb. 5.13 (b)) und die Differenz beider Bilder

gezeigt (Abb. 5.13 (c)). Diese wird durch die Anpassungsroutine minimiert. Da die Winkel der gemessenen und der angepassten Dichte gut übereinstimmen, ist die Differenz sehr flach. Eine stichpunktartige Kontrolle der angepassten Funktion und der Residuen zeigt, dass sich dieses Verfahren zur Winkelbestimmung eignet.

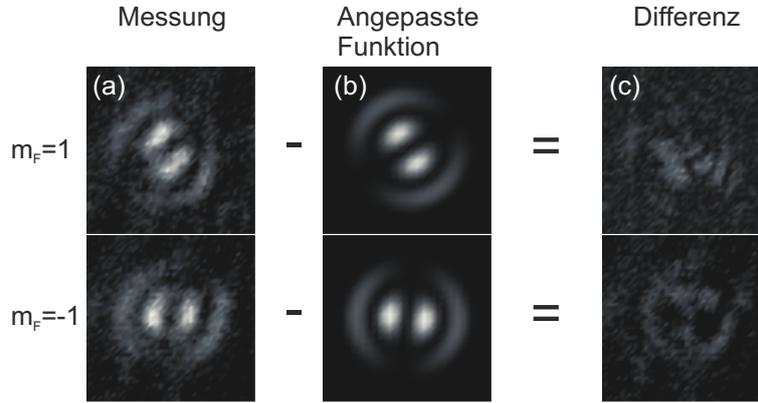


Abbildung 5.13: Hier ist ein Vergleich einer (a) gemessenen mit einer (b) angepassten Dichteverteilung dargestellt. Die angepasste Funktion dient dazu, den Winkel der Orientierung zu ermitteln. In (c) ist die Differenz zu sehen, um zu verdeutlichen, dass beide Verteilungen gut übereinstimmen.

Analyse durch Bestimmung des Quadrupoltensors

Für die zweite Methode wird ausgenutzt, dass die asymmetrische Dichteverteilung ein nicht verschwindendes Quadrupolmoment aufweist. Dies erlaubt, für jede einzelne Wolke einen zugehörigen Quadrupoltensor

$$Q_{ij} = \sum_k n_k (3(\vec{r}_k)_i(\vec{r}_k)_j - \delta_{ij}(\vec{r}_k)^2) \quad (5.2)$$

zu bestimmen. Die Summe geht über alle Pixel k der Kamera in einem festgelegten Bereich um die einzelnen Wolken. Die Größe n_k entspricht der gemessenen Teilchendichte auf dem jeweiligen Pixel und \vec{r}_k dem zugehörigen Ortsvektor. Der Ursprung ist dabei so gewählt, dass er im festgelegten Zentrum der Wolke liegt. Die Indizes $i, j \in \{x, y\}$ repräsentieren die einzelnen Komponenten des Tensors und des Ortsvektors. Um daraus den Winkel der Dichteverteilung zu bestimmen, werden die Eigenwerte und Eigenvektoren des Tensors berechnet. Diese geben Auskunft über die Orientierung der räumlichen Mode. Der Eigenvektor mit dem größten Eigenwert zeigt entlang der Richtung mit der größten Intensität. Beispielhaft wird dies in Abbildung 5.14 für die dargestellten Aufnahmen verdeutlicht, in denen die ermittelten Eigenvektoren des Quadrupoltensors eingezeichnet sind. Der Winkel des Eigenvektors des größten Eigenwertes (orangefarbener Pfeil) relativ zur x -Achse der Kamera entspricht der Phase, die auch schon durch die erste Methode bestimmt worden ist. Somit lassen sich beide Ergebnisse miteinander vergleichen.

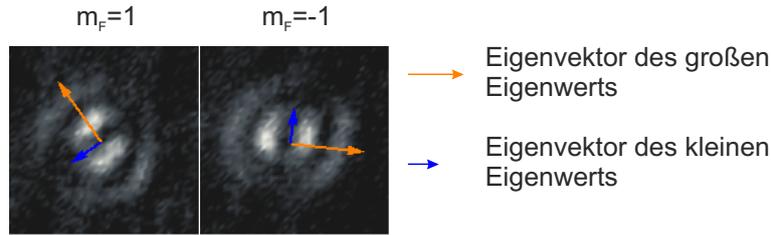


Abbildung 5.14: Bestimmung der Orientierung der Wolken durch Berechnung des Quadrupolmoments. Die eingezeichneten Pfeile entsprechen dem Eigenvektoren des größten (orange) und des kleinsten (blau) Eigenwertes.

Vergleich der Methoden zur Winkelbestimmung

Im Idealfall ergeben beide Methoden jeweils den gleichen Winkel. Dies ist allerdings aufgrund der stark unterschiedlichen Qualität der Aufnahmen der Spindynamik wie in Abbildung 5.12 nicht immer der Fall. Um unbrauchbare Bilder auszusortieren, sind beide Methoden miteinander verglichen worden. Für beide Zeemanzustände sind in Abbildung 5.15 die Ergebnisse der zwei Messverfahren zur Winkelbestimmungen gegeneinander aufgetragen. Aufgrund der Symmetrie der überlagerten Vortex- /Antivortexmoden bei Rotation um 180° sind die ermittelten Winkel jeweils auf das Intervall von -90° bis 90° beschränkt. Wie erwartet, ist eine klare Korrelation zwischen beiden Methoden zu erkennen. Allerdings gibt es auch Ausreißer, bei denen die Winkel stark voneinander abweichen. Die Standardabweichung der Winkeldifferenzen des Datensatzes hat einen Wert von $\sigma_\varphi = 15^\circ$. Für die weiteren Untersuchungen werden nur die Experimentdurchläufe verwendet, bei denen der Unterschied zwischen den Bestimmungsmethoden kleiner als $\Delta\varphi = 40^\circ$ ist. Diese Daten sind in der Graphik 5.15 durch blaue Punkte gekennzeichnet. Deren Anteil entsprechen einem Wert von 78 % aller Messungen. Die verbleibenden 22 % sind durch die schwarzen Quadrate gekennzeichnet und werden für die weitere Auswertung ausgeschlossen. Eine Verringerung des Winkelintervalls $\Delta\varphi$ zur Datenauswahl hat gezeigt, dass die im Folgenden gezeigten Ergebnisse bezüglich der Winkelverteilung stabil sind. Somit bietet die Kombination der Winkelbestimmung mittels zweier unabhängiger Verfahren eine gute Möglichkeit zur Datenauswertung und zur Diskriminierung unbrauchbarer Messpunkte.

5.4.1 Spontane Brechung der räumlichen Symmetrie

Nach Bestimmung der Orientierungen der einzelnen Wolken in den $|2, \pm 1\rangle$ - Zuständen, können deren statistische Verteilungen analysiert werden. Diese sind in Abbildung 5.16 (a), (b) für die unterschiedlichen Magnetfelder dargestellt. Wie bereits bei Betrachtung der gemittelten Dichten vermutet (vgl. Abb. 5.11), ergeben sich für die Orientierungen der individuellen Wolken Gleichverteilungen der Winkel über das gesamte Intervall zwischen -90° und 90° für alle sechs Magnetfelder.

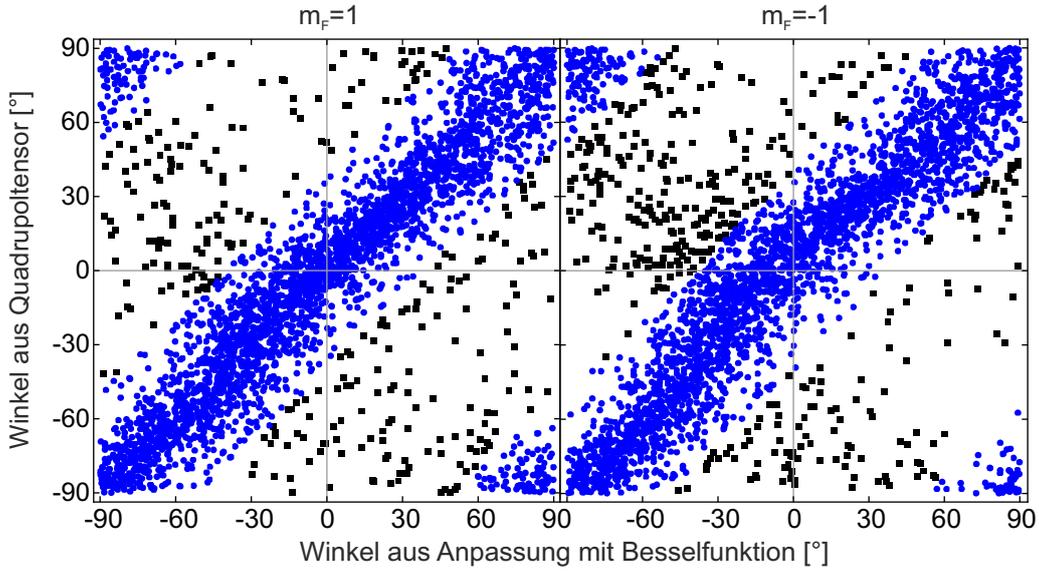


Abbildung 5.15: Vergleich der beiden Methoden zur Winkelbestimmung. Hier sind die ermittelten Winkel beider Methoden gegeneinander aufgetragen. Auf der linken Seite ist das Ergebnis für die Wolke in $|2, +1\rangle$ und auf der rechten Seite für die Wolke in $|2, -1\rangle$ dargestellt.

Dies lässt den Schluss zu, dass die Winkel jeder Messung rein zufällig sind und durch Vakuumfluktuationen bestimmt werden. Folglich ist die Symmetrie hier im Gegensatz zu der $(1, \pm 1)$ -Mode spontan gebrochen und wird nicht durch äußere Einflüsse gestört.

Das leichte Maximum in der Winkelverteilung um 0° , welches insbesondere bei dem Magnetfeld von 1,74 G erkennbar ist, kann auf die kleine verbleibende Asymmetrie zwischen den beiden starken Fallenfrequenzen zurückgeführt werden. Die Abweichung dieses Maximalwertes vom Mittelwert liegt allerdings noch innerhalb einer Standardabweichung und ist daher nicht signifikant.

5.4.2 Spontane Brechung der lokalen Spinsymmetrie

Die Betrachtung der Winkeldifferenzen gibt Auskunft darüber, in wie weit die lokale Symmetrie der Magnetisierung gebrochen ist. Ist die Differenz der Winkel zwischen der $|2, +1\rangle$ - und der $|2, -1\rangle$ -Wolke Null, so haben sie die gleiche Orientierung und es treten keine Strukturen der Magnetisierung auf. Unterscheidet sich die Differenz hingegen von Null, so ist die Magnetisierung nicht mehr homogen über die gesamte Wolke, sondern es kommt zu Domänen in denen eine Spinkomponente überwiegt. Durch diese Strukturbildung ist die Spinsymmetrie lokal innerhalb der Wolke gebrochen. Die Abbildung 5.16 (c) zeigt die Verteilung der Winkeldifferenzen zwischen den $|2, +1\rangle$ und der $|2, -1\rangle$ -Wolken für unterschiedliche Magnetfelder.

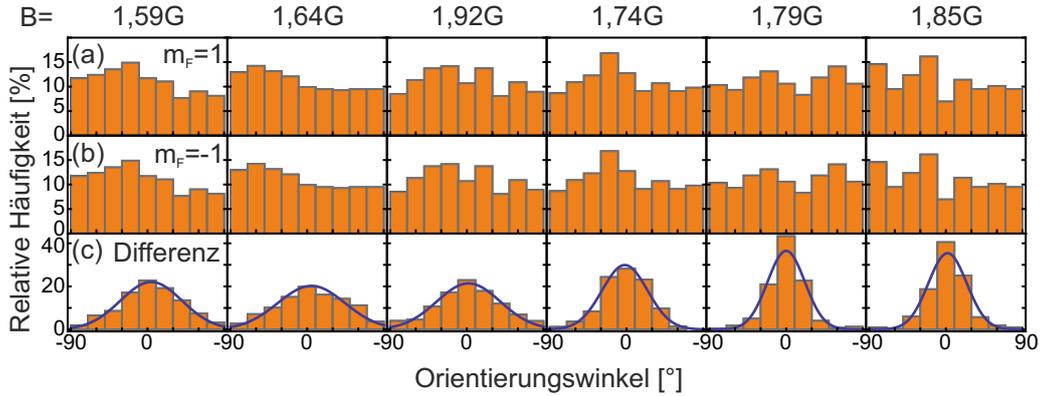


Abbildung 5.16: Winkelverteilungen der $(2, \pm 1)$ -Mode bei unterschiedlichen Magnetfeldern. (a) Histogramme der Winkelverteilung des $|2, + 1\rangle$ -Zustands (b) Histogramme der Winkelverteilung des $|2, - 1\rangle$ -Zustands. (c) Verteilungen der Winkeldifferenzen zwischen den beiden Wolken.

Hierbei ist die Verteilung aus Symmetriegründen auf das Intervall von -90° bis 90° beschränkt.

Es ist deutlich zu sehen, dass es für alle Magnetfelder zu einem Maximum um 0° kommt. Das bedeutet, dass beide Dichteverteilungen bevorzugt die gleiche Orientierung aufweisen und die Spinsymmetrie daher meistens erhalten bleibt. Allerdings fällt auf, dass sich die Verteilungen der einzelnen Magnetfelder deutlich in der Breite unterscheiden. In Abbildung 5.17 ist dieser Umstand explizit dargestellt. Hier sind die Standardabweichungen der Winkeldifferenzen gegen das Magnetfeld aufgetragen. Bei einem Feld von 1,79 G erreicht die Breite mit 22° ein Minimum. Dieses stimmt mit der Unsicherheit bei der Winkelbestimmung überein. Bei den anderen Feldern steigt jedoch die Wahrscheinlichkeit, dass die Orientierungen der Wolken unterschiedliche Winkel haben. Das bedeutet auch, dass räumliche Strukturen in der Magnetisierung der Wolken auftreten können und die lokale Spinsymmetrie somit gebrochen wird. In Abbildung 5.18 ist eine Messung gezeigt, bei der diese Form der Symmetriebrechung besonders deutlich aufgetreten ist (Abb. 5.18 (a), (b)). Die Magnetisierung ist wie in Abbildung 5.7 gemäß der gezeigten Farbskala kodiert. Auch hier ist die Magnetisierung der Gesamtwolke vor der Trennung der einzelnen Zeemanzustände gezeigt (Abb. 5.18 (c)). Für diese spezielle Messung ergibt sich eine Verteilung, die Ähnlichkeiten mit einem Quadrupol hat.

Mit den theoretischen Überlegungen der Symmetriebrechung aus Kapitel 2.3 können die obigen Beobachtung mit Hilfe der gequetschten Zustände interpretiert werden. Dort ist gezeigt, dass die Phasensumme der beiden Zustände gequetscht ist, falls nur zwei Moden mit gegenläufigen Drehimpulsen ($\pm l$) angeregt werden. In diesem Fall sind die Winkel beider Dichteverteilungen gleich. Mischungen mit benachbarten Moden hingegen führen zu einer weiteren Phase, wodurch sich unterschiedliche Orientierungen ergeben können. Daraus lässt sich folgern, dass bei

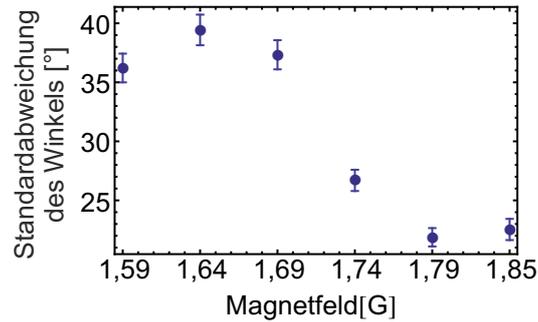


Abbildung 5.17: Standardabweichung der Verteilung der Winkeldifferenz der $(2, \pm 1)$ -Moden zwischen den beiden Wolken in Abhängigkeit des Magnetfeldes.

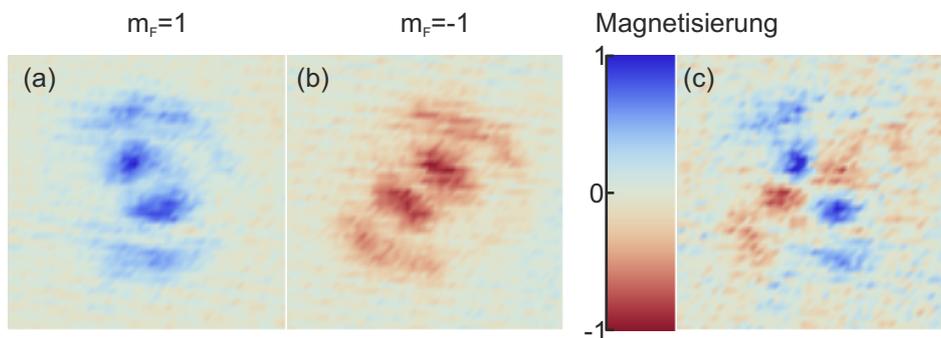


Abbildung 5.18: Spontan gebrochene lokale Magnetisierung der $(2, \pm 1)$ -Mode. Ist (a) die Struktur der Wolke im $|2, + 1\rangle$ -Zustand gegen (b) die in $|2, - 1\rangle$ gedreht, so kommt es zu (c) einer Struktur in der räumlichen Magnetisierung. Diese ursprüngliche lokale Symmetrie wird hier spontan gebrochen.

einem Magnetfeld von 1,79 G die reinsten Moden angeregt werden und der Einfluss benachbarter Moden minimal ist. Auf den anderen Magnetfeldern wird der Anteil der benachbarten Moden an dem Zustand immer größer. Dies führt dazu, dass sich die Verteilung der Winkeldifferenz verbreitert. Da aber weiterhin die $(2, \pm 1)$ -Mode dominiert, kommt es zu dem Maximum um den Winkel 0° .

Leider ist der Einfluss benachbarter Moden und die Unsicherheit der Winkelbestimmung zu hoch, als dass eine Quetschung der Phasen beobachtet werden könnte. Um dies zu erreichen, müssten zum einen die Abstände der Moden durch Änderung der Falle vergrößert werden. Zum anderen müsste die Genauigkeit der Winkelbestimmung verbessert werden. Wie präzise diese mindestens sein muss, kann mit der Formel $(\sigma\phi)^2 = \frac{1}{4n^+}$ aus Ref. [115] für die Phasenvarianz eines kohärenten Zustandes abgeschätzt werden. Bei einer Teilchenzahl von beispielsweise 10000 Atomen müsste die Winkeldifferenz demnach auf unter $2,8^\circ$ genau bestimmbar sein, damit Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschens aufgelöst werden könnten. Das bedeutet, dass das Verfahren zur Winkelbestimmung um mindestens einen Faktor zehn verbessert werden müsste. Ein erster Schritt zur Verbesserung, wäre die

Reduktion der Abbildungsfehler, wie es mit dem Detektionssystem zum Nachweis der nichtklassischen Zustände bereits gelingt. Einer stärkere Vergrößerung und eine verbesserten Bildauswertung wie in Ref [150–152], könnten ebenso dazu beitragen, dass die Methoden zur Winkelbestimmung bessere Ergebnisse liefern.

NICHTKLASSISCHE ZUSTÄNDE

Das folgende Kapitel enthält den zweiten Teil der Hauptresultate, deren Ergebnisse in der Veröffentlichung [62] beschrieben werden. Hier wird der Zustand, der durch die Spindynamik entsteht, bezüglich seiner nichtklassischen Eigenschaften experimentell untersucht. Im ersten Abschnitt werden die Voraussetzungen gezeigt, die zur exakten Bestimmung des nichtklassischen Zustands benötigt werden und welche technischen Schwierigkeiten dabei auftreten.

Im zweiten Abschnitt wird nachgewiesen, dass es sich bei dem erzeugte Zustand um einen nichtklassischen handelt. Dazu wird die Korrelation zwischen den Teilchenzahlen der beiden Ausgangszustände genau analysiert. Es wird gezeigt, dass die Fluktuationen der Teilchenzahldifferenzen über einen weiten Bereich unterhalb des Schrotrauschens liegen. Die Qualität dieser Messungen ist dabei lediglich durch das verbleibende Rauschen in der Detektion limitiert. Wie sich die reduzierten Fluktuationen unter Änderung bestimmter Parameter verhalten, ist ebenfalls Teil der Untersuchungen.

Im dritten Abschnitt wird beschrieben, wie sich die Anwendung des Strahlteilers (siehe Abschnitt 3.4.3) auf die Teilchenzahldifferenz der Ausgangszustände auswirkt. Es wird gezeigt, dass die theoretischen Vorhersagen durch die Daten gestützt werden. Damit wird bestätigt, dass der Zustand prinzipiell geeignet ist, um eine interferometrische Phasenbestimmung unterhalb des Schrotrauschens vorzunehmen. Es wird gezeigt welche experimentellen Bedingungen herrschen müssen, damit die Form des Ausgangssignals möglichst gut mit der Theorie übereinstimmt und wie sich das Signal ändert, wenn einige Parameter variiert werden.

Anschließend zeigt der vierten Abschnitt, wie die Unsicherheit der Phasenbestimmung ermittelt wird. Für bestimmte Phasenwinkel erreicht sie einen Wert, der unterhalb des Standardquantenlimits liegt. Der Zustand eignet sich demnach, um die Unsicherheit interferometrischer Messungen zu reduzieren.

6.1 Schwierigkeiten beim Nachweis nichtklassischer Zustände

Im Kapitel 2 ist gezeigt, dass durch den Prozess der Spindynamik ein Zwillings-Fock-Zustand entsteht. Um diesen experimentell mit Atomensembles von bis zu 10^4 Teilchen eindeutig nachzuweisen, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die alle ähnlich sind und derzeit durch die gleichen technischen Schwierigkeiten limitiert werden. So müssten beispielsweise die Zweimodenquadraturen und deren zeitlicher Verlauf nach Gleichung (2.41) gemessen werden. Dazu wäre denkbar, analog zur Optik eine Homodynmessung [165] vorzunehmen, die die Wolken mit einem lokalen Referenzoszillator vergleicht, wie es vor kurzem in Heidelberg in der Gruppe von Markus Obertahler demonstriert worden ist [65]. Eine andere Möglichkeit ist, eine Zustandstomographie durchzuführen. Aus der Messung der konjugierten Observablen der relativen Größen $\langle \hat{n}^- \rangle$, $\langle \phi^- \rangle$ und $\langle \hat{n}^+ \rangle$, $\langle \phi^+ \rangle$ können direkt die Fluktuationen untersucht werden. Daraus lässt sich dann die Wignerfunktion ableiten [60, 166]. Damit verbunden ist die exakte Messung der Verteilung der J_z Komponente aus Abbildung 2.17 nach Anwendung eines Strahlteilers. Auch daraus lässt sich auf das Vorhandensein des Zwillings-Fock-Zustandes zu schließen.

Bei all diesen Methoden treten allerdings technische Schwierigkeiten auf, die den Nachweis des Zwillings-Fock-Zustandes derzeit noch limitieren. Zum einen müssen die Messungen sehr genau sein. Ein Fehler von nur einem Atom in der Atomzahlbestimmung führt bereits dazu, dass beispielsweise Δn^- nicht exakt bestimmt wird, was eine nicht-exakte Reproduktion der Verteilung aus Abbildung 2.17 zur Folge hat. Im Rahmen der Messgenauigkeit kann also lediglich die Aussage getroffen werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Zwillings-Fock-Zustand vorliegt.

Zum anderen führen auch Verluste von Atomen in den $|2, \pm 1\rangle$ -Zuständen dazu, dass die nichtklassischen Korrelationen des Zwillings-Fock-Zustandes verringert werden. In einem solchen Zustand $|n_{+1}, n_{-1}\rangle_F = |n^+/2, n^+/2\rangle_F$ befinden sich Anfangs jeweils exakt $n^+/2$ -Teilchen in den beiden Zuständen (vgl. Kapitel 2). Verluste führen dazu, dass nach einer bestimmten Zeit die Anzahl der Atome $n_{+1} = n^+/2 - \langle n_{\text{loss},+1}(t) \rangle$ und $n_{-1} = n^+/2 - \langle n_{\text{loss},-1}(t) \rangle$ zufällig reduziert werden. Für den Erwartungswert der Differenz und der zugehörigen Standardabweichung gelten dann die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle n_{\text{loss}}^- \rangle &= \langle n_{\text{loss},-1}(t) \rangle - \langle n_{\text{loss},+1}(t) \rangle \\ \sigma n_{\text{loss}}^- &= \sqrt{\sigma n_{\text{loss},-1}(t)^2 + \sigma n_{\text{loss},+1}(t)^2} \\ &= \sqrt{\langle n_{\text{loss},-1}(t) \rangle + \langle n_{\text{loss},+1}(t) \rangle} \end{aligned} \quad (6.1)$$

Im Gegensatz zu den Gleichungen 2.25 sind diese Größen somit von Null verschieden. Die gemessenen Fluktuationen steigen demnach mit der zeitabhängigen An-

zahl der mittleren Verluste. Dies geht solange, bis das Niveau des Schrotrauschens $\sigma n_{\overline{SR}} = \sqrt{n^+}$ erreicht ist.

Trotz dieser Einschränkungen erlauben es die derzeitigen technischen Möglichkeiten, einen Einblick in die Natur des entstehenden Zustands zu erhalten. So können analog zu [44–46, 58, 60] Korrelationen nachgewiesen werden, die sich nur durch das Vorhandensein nichtklassischer Zustände erklären lassen. Weiterhin kann der Zustand dahingehend getestet werden, ob er sich eignet, um interferometrische Messungen mit einer Genauigkeit jenseits des Standardquantenlimits durchzuführen.

Zwei Eigenschaften, die einen Hinweis darauf geben, dass bei dem Prozess der Spindynamik ein nichtklassischer Zustand entsteht, sind bereits in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellt worden. Da sind zum einen die Fluktuationen der Gesamtteilchenzahlen $\langle n^+ \rangle$ aus Kapitel 4 in den Abbildungen 4.2 und 4.3. Diese sind eindeutig größer, als es ein schrotrauschlimitierter Prozess erwarten ließe. Dieser Hinweis auf einen nichtklassischen Zustand ist allerdings eher schlecht, da sich von einem erhöhten Rauschen nur schwer auf einen nichtklassischen Zustand schließen lässt. Schließlich kann nie ganz ausgeschlossen werden, dass die erhöhten Fluktuationen nicht doch durch eine technische Rauschquelle hervorgerufen werden.

Besser wäre es, das reduzierte Rauschen der konjugierten Observable ϕ^+ zu messen. Wie dies funktionieren könnte, ist bereits in Kapitel 5 gezeigt. Die starke Korrelation der Winkel der Dichteverteilungen bei einem Magnetfeld von 1,78 G, lässt sich wie gezeigt durch das Quetschen der Phasensumme ϕ^+ erklären. Wie erwähnt müsste dafür allerdings die Messgenauigkeit um einen Faktor zehn verbessert werden, um diese Quetschung zu zeigen.

6.2 Teilchenzahlfluktuationen unter dem Standardquantenlimit

In den Experimenten ist bisher das zweite Paar konjugierter Observablen, bestehend aus $\langle n^- \rangle$ und $\langle \phi^- \rangle$ nicht betrachtet worden. Durch das Messen der zugehörigen Fluktuationen sollten hier nichtklassische Korrelationen beobachtet werden können. Die Observable $\langle \phi^- \rangle$ ist dafür ähnlich wie die Gesamtteilchenzahl $\langle n^+ \rangle$ eher ungeeignet, da auch hier erhöhte Fluktuationen gemessen werden müssten.

Zum Nachweis der nichtklassischen Fluktuationen ist die Teilchenzahldifferenz $\langle n^- \rangle$ oder äquivalent $\langle \hat{J}_z \rangle$ besser geeignet. Der Erwartungswert $\langle \hat{J}_z \rangle = 0$ und die zugehörigen Fluktuationen $\sigma \hat{J}_z = 0$ sollten jeweils verschwinden. Um sie zu bestimmen, muss lediglich die Anzahl der Atome in den beiden Zuständen gemessen und daraus die Differenz gebildet werden. Das Rauschen der vorgestellten Detektion von $\sigma_{sr} = 20$ Atome (vgl. Abschnitt 3.2), ist ausreichend gering, um ab einer Gesamtteilchenzahl von $n^+ > 1600$ Atome Fluktuationen unterhalb des Schro-

trauschlimits zu beobachten.

Eine weitere wichtige Anforderung an die experimentelle Apparatur ist die Stabilität. Schließlich wird eine hohe Zahl an Datenpunkten bei gleichbleibenden Bedingungen benötigt, um die statistische Unsicherheit der Messung zu reduzieren und den nichtklassischen Zustand zweifelsfrei nachzuweisen.

6.2.1 Beobachtung von reduzierten Fluktuationen bei den besten Parametern

In diesem Abschnitt werden die Experimente in der elliptischen Falle mit den Frequenzen $\vec{\omega} = 2\pi$ (183 Hz, 151 Hz, 122 Hz) durchgeführt. Diese haben sich im Verlauf der Untersuchungen als besonders günstig erwiesen. Die zylindrische Falle aus dem vorangegangenen Kapitel hingegen eignet sich nur bedingt für die Messung reduzierter Fluktuationen und der interferometrischen Sensitivität, wie später gezeigt wird.

Für das anliegende Magnetfeld wird ein Wert von 1,23 G gewählt. Bei diesem Feld erreicht die Transferrate der Spindynamik in der elliptischen Falle ihr Maximum (vgl. Abb. 4.3). Die gewählte Dauer von $t = 15$ ms entspricht dem maximalen Punkt, der noch im Regime des exponentiellen Verlaufs liegt. Am Ende der Spindynamik erfolgt der Nachweis über die zustandsselektive und kalibrierte Detektion aus Abschnitt 3.2.

Werden zur Auswertung die Teilchenzahlen der beiden Zustände gegeneinander aufgetragen, so sollten im Idealfall alle Punkte exakt auf der Winkelhalbierenden liegen. Ein solcher Graph mit insgesamt 200 Messpunkten ist in der Abbildung 6.1 (a) dargestellt. Bis auf wenige Ausnahmen liegen alle Punkte innerhalb des orangefarbenen Bereiches im Hintergrund. Das markierte Areal, entspricht der ersten Standardabweichung, das für eine unkorrelierte Mischung beider Zustände erwartet würde. In diesem Fall sollten dementsprechend 68 % der Messpunkte innerhalb und 32 % außerhalb des orangefarbenen Bereichs liegen. Wie später noch gezeigt wird, ist die Streuung der Messpunkte um die Winkelhalbierende auf das Rauschen der Detektion zurückzuführen.

Eine solche unkorrelierte Mischung ist in der Abbildung 6.1 auf der rechten Seite gezeigt. Sie ist hergestellt worden, indem ein Bose-Einstein-Kondensat zunächst im Anfangszustand $|2,0\rangle$ präpariert wird. Statt über die Spindynamik wird ein Teil der Atome mit Hilfe einer Radiofrequenz in die $|2, \pm 1\rangle$ -Zustände transferiert (vgl. Abschnitt 3.4.1). Die Frequenz ist so gewählt, dass beide Zeemanzustände möglichst gleichmäßig besetzt werden. In der Abbildung ist dies nicht ganz gegeben. Das Verhältnis von 48,6 % : 51,4 % ist aber dennoch ausreichend gut. Der Vergleich der beiden Graphen in Abbildung 6.1 zeigt, dass die Fluktuationen im Fall der Spindynamik bedeutend geringer ausfallen als für die klassisch hergestellte Mischung.

Um dies weiter zu analysieren, wird jeweils die Differenz beider Teilchenzahlen

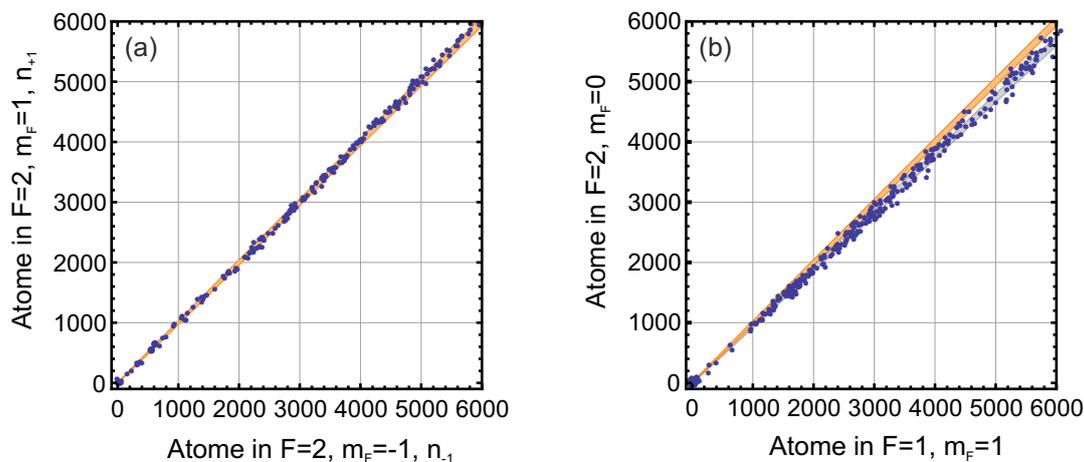


Abbildung 6.1: Teilchenzahlen in $|2, \pm 1\rangle$ nach Spindynamik und für die klassische Mischung gegeneinander aufgetragen. (a) Anzahl der gemessene Atome n_{+1} im $|2, + 1\rangle$ Zustand aufgetragen gegen die Atomzahl n_{-1} im $|2, - 1\rangle$ -Zustand nach Spindynamik. (b) Gleiche Messung wie zuvor nur mit klassisch hergestellter Mischung

einer Messung gebildet und ihre Häufigkeit in einem Histogramm aufgetragen. Die Abbildungen 6.2 (a.1), (b.1) zeigen die Graphen für den Spindynamik- (rot) und den klassischen Fall (blau), unter Verwendung aller Punkte aus Abbildung 6.1. Im Gegensatz dazu zeigen die Abbildung 6.2 (a.2)-(a.4) und (b.2)-(b.4) die gleichen Graphen für unterschiedliche Intervalle der Gesamtteilchenzahl. Die Teilchenzahldifferenzen sind dabei für jeden Punkt durch die Gesamtteilchenzahl geteilt. Die Höhen der Balken entsprechen den prozentualen Häufigkeiten. Die eingezeichneten Kurven sind Gaußfunktionen, zentriert um den gemittelten Wert $\overline{n^-}/\overline{n^+} \hat{=} \langle \hat{J}_z \rangle / J$, mit $1/e$ -Breiten gegeben durch die Standardabweichungen entsprechend $\sigma_{\hat{J}_z} / J$. Zum besseren Vergleich der Verteilung für die Spindynamik mit der für den klassischen Fall, sind diese Gaußkurven jeweils in Abbildung 6.2 (c.1)-(c.4) gemeinsam dargestellt. Das Zentrum der Kurven ist dabei auf die Null verschoben. Die zusätzlichen schwarzen Kurven entsprechen den Wahrscheinlichkeitsdichten wie sie theoretisch für schrotrauschlinitierten Verteilungen erwartet werden. Wird zusätzlich noch das Rauschen in der Detektion berücksichtigt, so ergeben sich die gestrichelten orangefarbene Kurven.

Das erste Histogramm aller Teilchenzahlbereiche zeigt bereits, dass die Spindynamik zu einer schmaleren Verteilung führt als durch das Schrotrauschen erwartet. Dies ist somit ein erster Beweis für die nichtklassischen Eigenschaften des Zustandes. Diese Form der Darstellung, bei der der gesamte Teilchenzahlbereich betrachtet wird, gibt allerdings nur eine qualitative Aussage über die reduzierten Fluktuationen von J_z relativ zu einem gemittelten Schrotrauschen $\langle \sigma_{st} \rangle$. Das Schrotrauschen $\propto \sqrt{n^+}$ hängt allerdings stark von der Gesamtteilchenzahl ab. Da der Prozess der Spindynamik bereits zu einer breiten Verteilung der Gesamtteilchen-

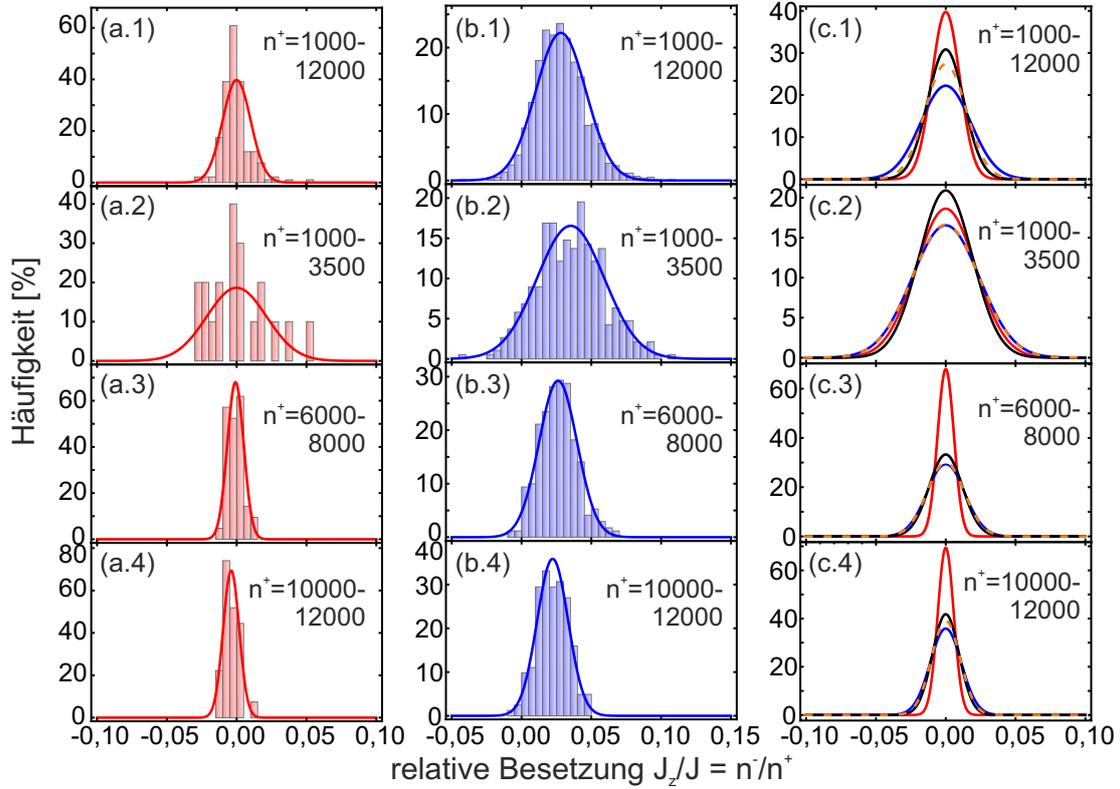


Abbildung 6.2: Histogramme der gemessenen Verteilung der Differenz für unterschiedliche Bereiche der Gesamtteilchenzahl. (a) Histogramme für die Spindynamik mit ermittelter Gaußkurve (vgl. Text). (b) Histogramme für die klassische hergestellte Mischung mit ermittelter Gaußkurve. (c) Gemeinsame Auftragung der ermittelten Gaußkurven zum Vergleich untereinander und mit dem Schrotrauschen.

zahl führt (vgl. Abb. 4.3), ist es sinnvoller, kleinere Intervalle zu betrachten, auf denen die Grenze des Schrotrauschens klarer definiert ist. Dieses Problem führt dazu, dass die Breite der klassischen Verteilung größer ist als erwartet. Hinzu kommt, dass das absolute Rauschen der Detektion teilchenzahlunabhängig ist (vgl. Abb. 3.6). Daher wirkt es sich für den Nachweis reduzierter Fluktuationen bei kleinen Teilchenzahlen stärker aus als bei großen.

Aus diesen Gründen sind in den Abbildungen 6.2(a.2-a.4) und (b.2-b.4) die Histogramme für verschiedene Teilchenzahlbereiche gezeigt. Der Vergleich der Histogramme untereinander zeigt, dass sich nach der Spindynamik die Standardabweichungen σJ_z und damit die Breiten der Verteilungen für die verschiedenen Teilchenzahlen kaum ändern. Sie stimmen gut mit dem Wert für das Detektorrauschen von $\sigma_{DR} = 20$ Atome überein (vgl. Abschnitt 3.2). Erst im letzten Histogramm ($n^+ \in \{10000; 12000\}$) fällt die Breite mit 30 Atomen etwas größer aus. Insgesamt wird deutlich, dass das Rauschen der Detektion die Beobachtung der nichtklassischen Eigenschaften limitiert. Für kleine Teilchenzahlen liegt das De-

tektionrauschen im Bereich des Schrotrauschens erst bei größeren Teilchenzahlen liegt es deutlich darunter, wodurch sich der relative Einfluss verringert. Verluste scheinen erst ab Teilchenzahlen über 9000 Atome eine Rolle zu spielen. In dieser teilchenzahlselektiven Betrachtung folgen die Kurven der klassischen Verteilungen recht gut den gestrichelten theoretischen Kurven, die sich aus der Kombination von Schrot- und Detektionsrauschen ergeben.

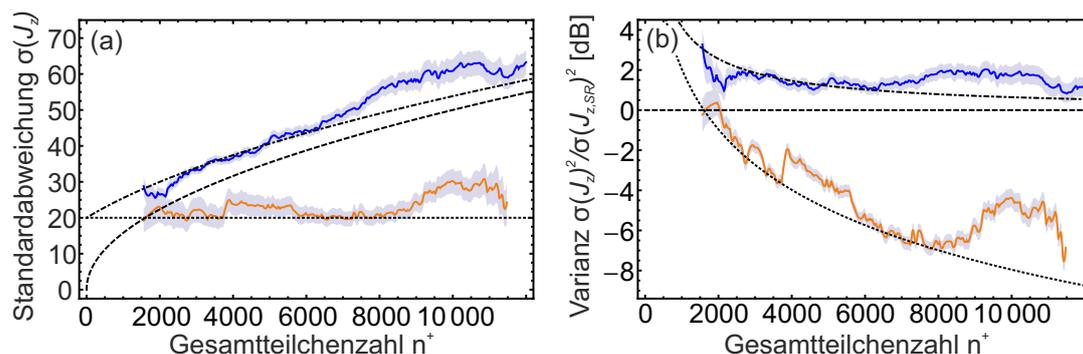


Abbildung 6.3: Rauschen der Teilchenzahldifferenzen aufgetragen gegen den jeweiligen Mittelwert der Gesamtteilchenzahl. (a) Absolutes Rauschen der Teilchenzahldifferenzen der einzelnen Intervalle ausgedrückt durch die Standardabweichung. (b) Rauschen der Teilchenzahldifferenz relativ zum Schrotrauschen ausgedrückt durch die Varianz, aufgetragen in logarithmischer Skala.

Um das Verhalten der Teilchenzahldifferenz in Abhängigkeit der Gesamtteilchenzahl näher zu untersuchen, können die ermittelten Standardabweichungen der obigen Verteilungen gegen den jeweiligen Mittelwert der Gesamtteilchenzahl aufgetragen werden. Eine detailliertere Betrachtung über alle Teilchenzahlen kann erhalten werden, indem neben den oben gezeigten disjunkten Intervallen, auch Zwischenintervalle berücksichtigt werden, die durchaus überlappen können. Die Intervallbreite von $\Delta = 2000$ Atome wird dabei konstant gehalten. In der Auswertung wird weiterhin darauf geachtet, dass in jedem Intervall mindestens acht Messpunkte liegen, um einen Wert für die Standardabweichung σJ_z und für deren Fehler $\Delta(\sigma J_z) = \frac{\sigma J_z}{\sqrt{2(s-1)}}$ bestimmen zu können. Hierbei ist s die Anzahl der Messpunkte des betrachteten Teilchenzahlintervalls. Die so erhaltenen Werte werden dann gegen den Mittelwert der Gesamtteilchenzahl des jeweiligen Intervalls aufgetragen. Das Ergebnis dieses Vorgehens ist in der Abbildung 6.3 (a) dargestellt. Das teilchenzahlabhängige Schrotrauschen $\sigma_{SR} = \sqrt{n^+}/2$ ist im Graph durch die gestrichelte Kurve gekennzeichnet. Die gepunktete Kurve entspricht dem ermittelten Detektionsrauschen von $\sigma_{DR} = 20$ Atomen und die Strichpunktlinie der Kombination aus Schrot- und Detektionsrauschen $\sigma_{SD} = \sqrt{(\sigma_{SR})^2 + (\sigma_{DR})^2}$. Diese entspricht daher dem Rauschen, welches man bei einem Experiment mit dem gegebenen Detektionssystem erwarten würde. Der Schnittpunkt des Detektorrauschens mit der Schrotrauschkurve liegt bei $\bar{n}^+ = 1600$ Atomen. Erst ab diesem

Punkt ist es mit dem bestehenden System technisch möglich reduzierte Fluktuationen zu messen. Die Standardabweichungen der Verteilungen für die Spindynamik sind durch die orangefarbenen Kurve dargestellt. Die blaue Kurve stellt die unkorrelierte Mischung der Zustände dar, die mit Hilfe der Radiofrequenz präpariert worden ist. Die schattierten Flächen um die Kurven entsprechen jeweils den zugehörigen statistischen Fehlern $\Delta(\sigma J_z)$.

Das zuvor diskutierte Verhalten der Verteilungen kommt in dem Graph noch deutlicher zur Geltung. Die Kurve der durch die Radiofrequenz erzeugten Mischung folgt, wie erwartet, der Linie für die Kombination aus Schrot- und Detektionsrauschen. Die Kurve der Spindynamik hingegen ist im Wesentlichen konstant und stimmt bis zu einer mittleren Gesamtteilchenzahl von etwa 9000 Atomen im Rahmen des Fehlers mit dem Detektionsrauschen überein. Dadurch vergrößert sich zunehmend der Unterschied zwischen dem beobachteten Rauschen und dem Schrotrauschen. Dies wird noch klarer, wenn wie in Abbildung 6.3 (b) dieselbe Kurve auf einer logarithmischen Skala in Form der Varianz relativ zum Schrotrauschen aufgetragen wird. Die schwarzen Linien entsprechen denen aus der linken Darstellung. Zu Anfang fällt die Messkurve ab und erreicht bei einem Wert von etwa 7800 Atomen ihr Minimum. Dort ist die gemessene Varianz $(\sigma J_z / \sigma J_{z,SR})^2 = -6,91_{-0,99}^{+0,89}$ dB unterhalb des Schrotrauschens. In der Standardabweichung ausgedrückt bedeutet dies, dass die Fluktuationen nur noch $45 \pm 5\%$ des Schrotrauschens betragen. In der Literatur ist es gebräuchlich, den logarithmischen Wert der relativen Varianz anzugeben. Der Vergleich dieser Werte mit anderen BEC-Experimente zeigt, dass die relativen Fluktuationen hier vergleichbar gut sind. Allerdings wird er bei einer deutlich höheren Teilchenzahl erreicht (vgl. Kapitel 1).

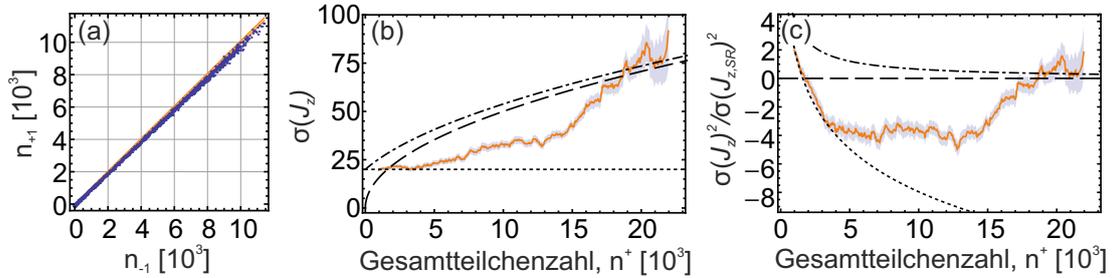


Abbildung 6.4: Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Anfangsteilchenzahl. (a) Teilchenzahlen in $|2, \pm 1\rangle$ nach Spindynamik gegeneinander aufgetragen. (b) Absolutes Rauschen der Teilchenzahldifferenzen ausgedrückt durch die Standardabweichung. (c) Rauschen der Teilchenzahldifferenz relativ zum Schrotrauschen ausgedrückt durch die Varianz auf logarithmischer Skala.

Dieser lässt sich zudem noch erweitern, wie in Abbildung 6.4 gezeigt ist. Zum Erstellen dieses Graphen, sind die gleichen Daten benutzt worden wie für Abbildung 4.7, mit der die Abhängigkeit der Spindynamik von der Anfangsteilchenzahl untersucht worden ist. Die Messung ist nicht so gut wie die aus Abbildung 6.3, was

zum einen daran liegt, dass die Spindynamik aufgrund der hohen Teilchenzahlen teilweise im Bereich der Sättigung abläuft. Zum anderen ändert sich das effektive Potential, und das System wird nicht mehr im Bereich der optimalen Parameter betrieben. Um dies zu erreichen, müsste nochmals die Magnetfeld- und die Zeitabhängigkeit der Spindynamik betrachtet und die entsprechenden Parameter variiert werden. An dieser Stelle wird darauf allerdings verzichtet, da sich kein zusätzlicher Erkenntnisgewinn daraus ergeben würde. Trotzdem zeigt diese Messung, dass bei einer Gesamtteilchenzahl von bis zu 15000 Atomen reduzierte Fluktuationen in der Größenordnung von -3 dB beobachtet werden können. Nichtklassische Zustände mit noch größeren Teilchenzahlen lassen sich derzeit nur in kalten, thermischen, atomaren Ensembles erzielen (vgl. Kapitel 1).

6.2.2 Verhalten der reduzierten Fluktuationen für unterschiedliche Spindynamikzeiten

Nach der Betrachtung der besten Parameter soll nun untersucht werden, wie sich das System verhält, wenn die Dauer der Spindynamik verändert wird. Interessant ist dabei insbesondere die Zeitabhängigkeit der Fluktuationen für die unterschiedlichen Teilchenzahlen. Zur Untersuchung werden dieselben Daten verwendet, mit denen die Graphen aus Abbildung 4.3 erstellt worden sind. Nur werden hier die relativen Teilchenzahlen der beiden Zustände genauer betrachtet.

Die Abbildung 6.5 zeigt analog zu Abbildung 6.3 die Fluktuationen gegen die Gesamtteilchenzahlen für eine unterschiedliche Dauer der Spindynamik. Für kleine Zeiten verhindert das Detektionsrauschen die Beobachtungen reduzierter Fluktuationen. Dies ist erst ab einer Zeit von 9 ms möglich. Für noch größere Zeiten ist die Standardabweichung immer noch durch die Detektion limitiert und die Teilchenzahl schwankt über einen größeren Bereich. Bei 15 ms ist dieser maximal. Relativ zur Teilchenzahl betrachtet erreichen die Fluktuationen ihr Minimum. Für noch längere Zeiten verringert sich der Bereich, in dem die Teilchenzahl schwankt und die gemessenen Fluktuationen sind nicht mehr durch das Detektionslimit beschränkt. Dies sind auch die Zeiten, bei denen der Transfer durch die Spindynamik nicht mehr exponentiell ansteigt und der Bereich der Sättigung beginnt (vgl. Abb. 4.3). Die Verluste führen also dazu, dass sich die nichtklassischen Korrelationen verringern, wie in den Gleichungen (6.1) motiviert. Bei einem Wert von 40 ms für die Spindynamik erreichen die Fluktuationen fast den Wert des Schrotrauschens.

Zum direkten Vergleich sind in der Abbildung 6.6 die Fluktuationen in Abhängigkeit der Teilchenzahl für Spindynamikzeiten von 9 ms, 15 ms und 40 ms in einem gemeinsamen Graph gezeigt. Die Kurve für eine Spindynamikzeit von 15 ms erstreckt sich über den gesamten Teilchenzahlbereich und die Standardabweichung ist durch das Rauschen der Detektion limitiert. Dagegen sind die Bereiche für 9 ms und 40 ms deutlich kleiner. Bei 40 ms kommt hinzu, dass sich die Standardabweichung fast auf dem Niveau des Schrotrauschens befindet.

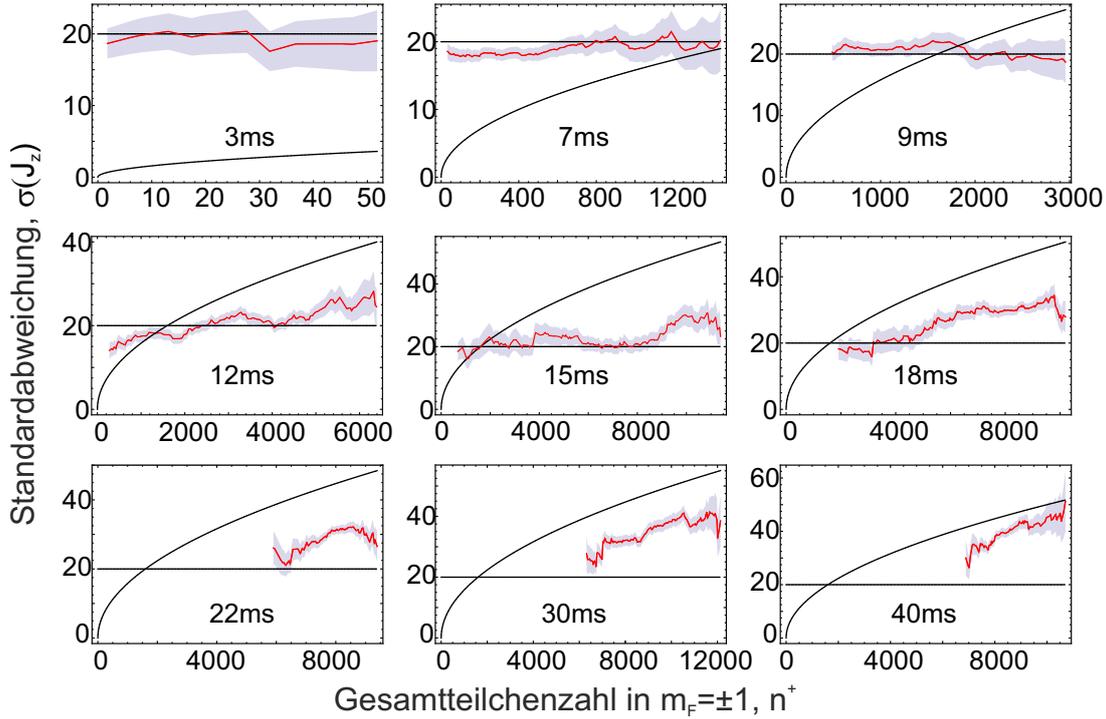


Abbildung 6.5: Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Spindynamikzeit. Für 9 ms Spindynamikdauer ist der Transfer durch die Spindynamik hoch genug, dass Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschens (gestrichelte Linie) beobachtet werden können. Bei kleineren Werten, wird dies durch das Detektionsrauschen (gepunktete Linie) verhindert. Bis zu einem Wert von 15 ms sind die beobachtbaren Fluktuationen durch das Detektionsrauschen limitiert.

6.3 Strahlteiler für den nichtklassischen Zustand

Nachdem experimentell gezeigt ist, dass der erzeugte Zustand Fluktuationen in der Teilchenzahldifferenz zeigt, die unterhalb des Schrotrauschens liegen, besteht die nächste Aufgabe darin, zu prüfen, wie der Zustand für interferometrische Messungen genutzt werden kann. Dazu wird untersucht, wie sich das Anwenden des Mikrowellenstrahlteilers aus der Abbildung 3.24 auf den Zustand auswirkt. Im Bild der verallgemeinerten Blochkugel entspricht die Anwendung eines Strahlteilers der Rotation des Zustandes um die J_x -Achse mit einem Winkel θ . Es wird gezeigt, wie dieser Phasenwinkel über die Messung der Standardabweichung $\sigma J_z/J$ bestimmt werden kann.

Die Experimente verlaufen so, dass direkt nach der Spindynamik vor dem Abschalten der Dipolfalle und bei gleichbleibendem Magnetfeld die Mikrowellenpulse für die Strahlteilersequenz eingestrahlt werden (vgl. Abschnitt 3.4.3).

Der eigentlich interessante Puls ist der mittlere Mikrowellenpuls, welcher den eigentlichen Strahlteiler darstellt. Um auszuschließen, dass die beiden π -Pulse

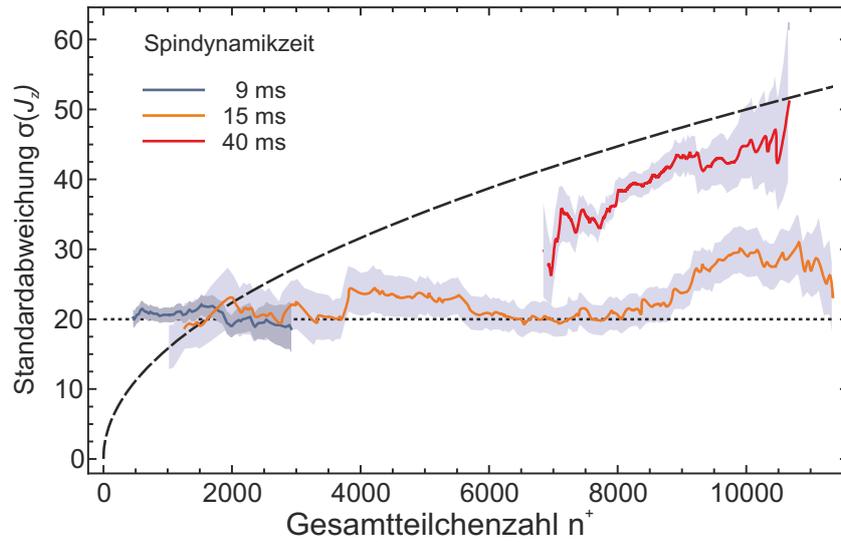


Abbildung 6.6: Direkter Vergleich Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Spindynamikzeit. Eingezeichnet sind die Messungen für 9 ms, 15 ms und 40 ms aus Abbildung 6.5

den nichtklassischen Zustand nicht zerstören, wird zunächst deren Einfluss untersucht. Hierzu wird nach der Spindynamik ein 2π -Puls zwischen den Zuständen $|F = 2, m_F = -1\rangle$ und $|F = 1, m_F = 0\rangle$ eingestrahlt (vgl. Abbildung 6.7 (a)). Anschließend werden die sich ergebenden Fluktuationen der Teilchenzahlen gemessen. Analog zu Abschnitt 6.2.1 sind in Abbildung 6.7 (b) und (c) die Graphen für die Standardabweichung und die Varianz in Abhängigkeit der Gesamtteilchenzahlen gezeigt. Hierin ist zu sehen, dass die Messkurven mit einem kleinen Offset parallel zum Detektionsrauschen verlaufen. Dieser hat seinen Ursprung im zusätzlichen Rauschen durch den Puls. Dementsprechend fällt auch der Fehler der Standardabweichung etwas Größer aus. Dennoch sind die Fluktuationen der relativen Teilchenzahlen weiterhin signifikant unterhalb des Schrotrauschens und liegen immer noch bei ca. 20 Atomen.

Der Einfluss der Transferpulse ist also gering und beeinflusst den nichtklassischen Zustand nur minimal. Somit kann die Wirkung des eigentlichen Strahlteilerpulses auf den nichtklassischen Zustand betrachtet werden. Dieser erfolgt nach dem ersten π -Puls und koppelt die beiden Zustände $|F = 1, m_F = 0\rangle$ und $|F = 2, m_F = -1\rangle$ miteinander. Die komplette Pulssequenz ist noch einmal in der Abbildung 6.9 (a) skizziert. Wie in 3.4.3 gezeigt, kann der Drehwinkel $\theta = \Omega_R \tau$ des Strahlteilers über die Einstrahldauer τ des Mikrowellenpulses variiert werden. Für unterschiedliche Längen dieses Strahlteilerpulses ergeben sich die Graphen, wie sie in Abbildung 6.8 gezeigt sind. Für die angegebenen Winkel sind dort zum einen die Teilchenzahlen der beiden Zustände gegeneinander aufgetragen (Abb. 6.8(a.1)-(a.8)) und zum anderen werden analog zu Abbildung 6.2 die resultierenden Histo-

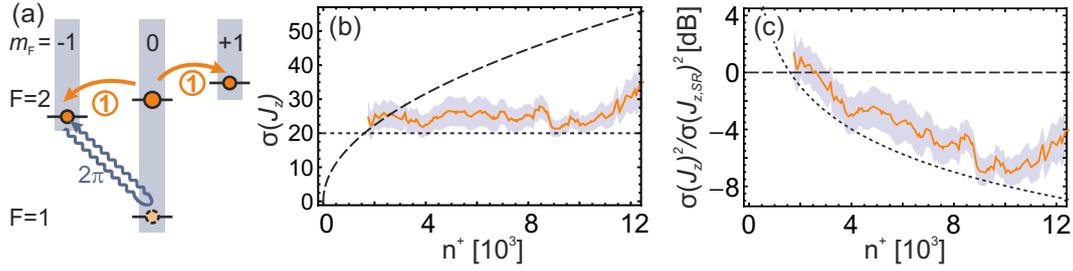


Abbildung 6.7: Verhalten absoluten und der relativen Fluktuationen des nichtklassischen Zustandes nach Anwenden eines 2π -Pulses zwischen $|F = 2, m_F = -1\rangle$ und $|F = 1, m_F = 0\rangle$. (a) Schematische Darstellung der Pulsesequenz (b) Absolutes Rauschen der Teilchenzahldifferenzen ausgedrückt durch die Standardabweichung. (c) Rauschen der Teilchenzahldifferenz relativ zum Schrotrauschen ausgedrückt durch die Varianz auf logarithmischer Skala

gramme der Teilchenzahldifferenz für einen Bereich von $n^+ = 3000 - 8000$ Atome gezeigt (Abb. 6.8(b.1)-(b.8)). Die dargestellten Blochkugeln geben an, wie der gedrehte Zwilling-Fock-Zustand für die unterschiedlichen Winkel aussehen sollte.

In den Graphen der gegeneinander aufgetragenen Teilchenzahlen ist gut zu erkennen, dass die absolute Streuung um die Winkelhalbierende stark von dem Drehwinkel und der Teilchenzahl abhängen. Bis zu einem Wert von $\theta = \pi/2$ werden die Fluktuationen größer, bevor sie sich dahinter wieder verringern. Die relativen Schwankungen der Teilchenzahlen bei einem festen Winkel bleiben gleich. Dies ist daran zu erkennen, dass die Messpunkte in einem Bereich schwanken, der nach oben und nach unten beschränkt ist und linear von der Teilchenzahl abhängt. Dieses Verhalten ist auch auf den Histogrammen der relativen Besetzung zu sehen. Der Mittelwert bleibt immer Null, allerdings variiert die Ausdehnung und die Form der Verteilungen mit verschiedenen Winkeln. Die Graphen folgen recht gut den theoretischen Verteilungen, die im Hintergrund der Histogramme als schattierte Fläche dargestellt sind. Das Histogramm für $\theta = \pi/2$ ist besonders interessant, da es einem 50:50 Strahlteiler entspricht, der entscheidend für die Implementierung eines nichtklassischen Interferometers wäre. Außerdem entspricht diese Verteilung einer Erweiterung des Hong-Ou-Mandel Experiments auf viele Teilchen (vgl. Abb 2.23). Leider verhindert aber das Rauschen in der Detektion, dass entweder nur gerade oder nur ungerade Werte der Teilchenzahldifferenz beobachtet werden. Interessant ist auch der letzte Punkt für $\theta = 7\pi/8$. Das Histogramm setzt sich aus vergleichsweise wenig Messpunkten zusammen, dennoch passt es zu der theoretischen Erwartung. Dadurch wird verdeutlicht, dass nicht viele Punkte benötigt werden, um von einem gemessenen Histogramm den Wert eines unbekanntes Winkel abzuschätzen. Dies ist von besonderem Interesse bezüglich einer möglichen Bayes'schen Analyse.

Werden die Standardabweichungen der Teilchenzahldifferenzen gegen den eingestellten Winkel aufgetragen, so ergibt sich der Graph aus Abbildung 6.9. Der

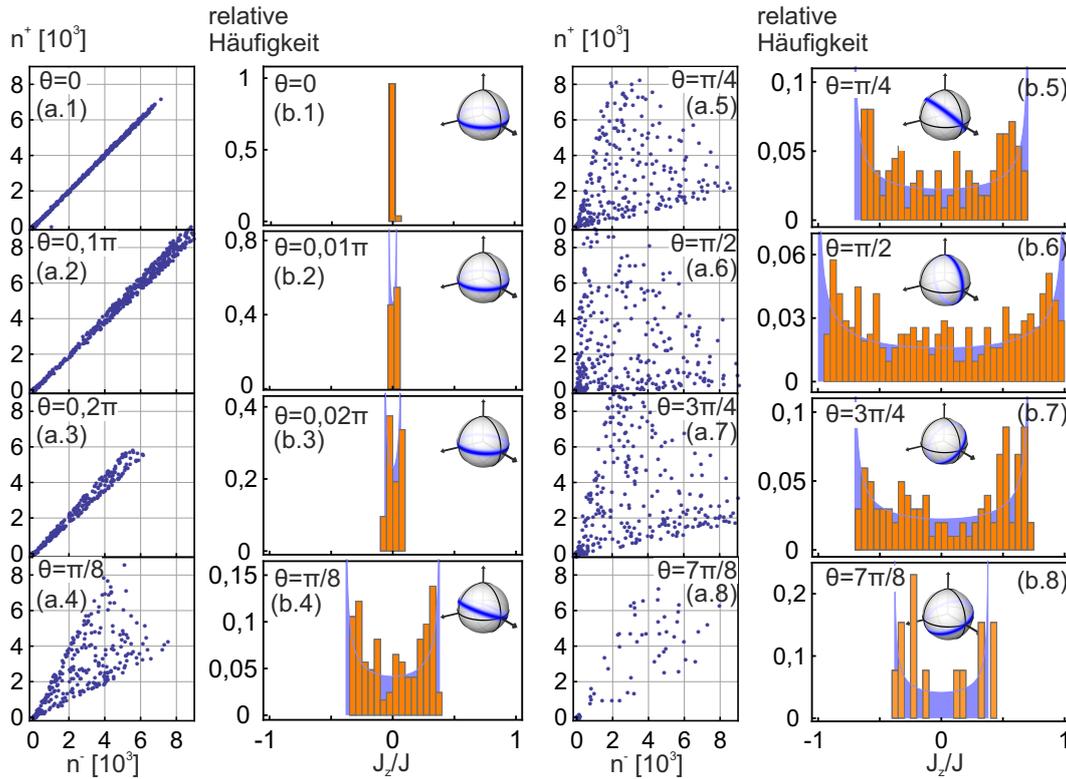


Abbildung 6.8: Verhalten der Teilchenzahlen und Histogramm der Differenzen nach Anwenden des Strahlteilers für die angegebenen unterschiedlichen Winkeln θ . (a.1)-(a.8) Teilchenzahlen der beiden Zustände gegeneinander aufgetragen (b.1)-(b.8) Resultierende Histogramme der Teilchenzahldifferenz für einen Bereich von $n^+ = 3000 - 8000$ Atome gezeigt mit Darstellung der zugehörigen Rotation auf der Blochkugeln.

Verlauf der Messpunkte entspricht recht gut der orangefarbenen Kurve. Diese entspricht dem theoretisch erwarteten $|\sin(\theta)|/\sqrt{2}$ -Verlauf. Der Vergleich zeigt, dass das Maximum der Theoriekurve von $1/\sqrt{2} \approx 0,71$ im Rahmen des Fehlers des gemessenen Maximalwertes von $\sigma_{J_z}/J = 0,67 \pm 0,04$ liegt. Die starke Abhängigkeit des Signals vom aufgeprägten Winkel zeigt, dass sich diese Methode prinzipiell eignet, um eine Phase zu bestimmen. Schließlich resultieren die unterschiedlichen Schritte einer interferometrischen Phasenmessung in einer Rotation des Anfangszustandes um die J_y -Achse mit einem bestimmten Winkel. Wie in der Theorie gezeigt ergibt sich die gleiche Projektion auf die J_z -Achse, wie bei einer einfachen Rotation durch den Strahlteiler um den gleichen Winkel. Durch gezieltes Einstellen dieses Winkel kann so das mögliche Ausgangssignal unabhängig analysiert werden (vgl. Abschnitt 2.6.1). Die hier gezeigte Messung trifft noch keine Aussage über die Sensitivität dieser Winkelbestimmung.

Das nicht zwangsläufig der Maximalwert von $1/\sqrt{2}$ erreichen werden muss, zeigt die Abbildung 6.10. Hier ist der gleiche Graph wie in Abbildung 6.9 aufgetragen,

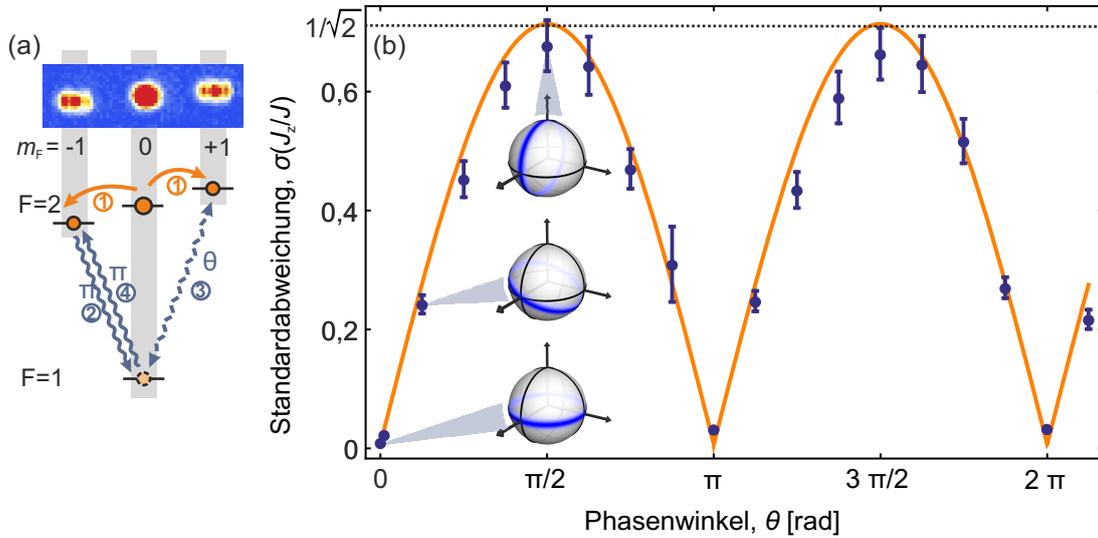


Abbildung 6.9: Verhalten der Standardabweichung σ_{J_z}/J in Abhängigkeit des Rotationswinkels θ . (a) Darstellung der verwendeten Pulssequenz zur Implementierung des Strahlteilers (b) Standardabweichungen der Teilchenzahldifferenzen aufgetragen gegen den eingestellten Winkel. Die orangefarbene Kurve entspricht dem theoretisch erwarteten $|\sin(\theta)|/\sqrt{2}$ -Verlauf.

allerdings für die zylindersymmetrische Falle ($\omega = 2\pi(187,183,67)$ Hz) und mit einer Spindynamikdauer von 16 ms. Diese Messungen sind mit den räumlichen ($n = 2, l = 0$)-Moden aufgenommen worden.

Die Abbildung 6.10 (a) zeigt, dass die Messpunkte in diesem Fall nicht auf der orangefarbenen Theoriekurve liegen. Mit einer angepassten Amplitude (schwarze Kurve) von $0,17 \pm 0,01$ ist der Maximalwert hier deutlich geringer. Auch die zugehörigen Histogramme unterscheiden sich deutlich von den theoretischen Erwartungen, wie auf der rechten Seite von Abbildung 6.10 zu sehen. Für alle Werte von θ ist lediglich eine Verteilung mit einem zentralen Maximum erkennbar. Für $\theta = \pi/4$ und $\theta = \pi/2$ verbreitert sich die Verteilung leicht, die theoretisch erwarteten, steilen Flanken an den Außenseiten sind jedoch nicht zu erkennen.

Eine Erklärung für dieses Verhalten besteht darin, dass in der Spindynamik mehrere Moden angeregt werden. Diese interferieren dann unabhängig voneinander, was zu dem gezeigten Verhalten führen würde (vgl. Abschnitt 2.8). Eine solche Anregung mehrerer Moden ist für die zylindrische Falle durchaus denkbar, da Moden mit Drehimpuls auftreten können, auf denen es immer zu einer Entartung der gegenläufigen Drehimpulse kommt. Dies sollte durch die Wahl der (2,0)-Mode weitestgehend unterdrückt sein. Denkbar ist aber auch, dass es zusätzlich zu Anregungen entlang der schwachen Fallenfrequenz (67 Hz) kommen kann, da hier die Moden energetisch nah beieinander liegen. Diese könnten zusätzlich zu den beobachteten Moden (Abb. 5.4) angeregt werden. Ein Nachweis gestaltet sich schwierig,

da sie parallel zu Detektionsrichtung liegen. Andererseits können sie auch nicht indirekt, über die Magnetfeldabhängigkeit aus Abbildung 4.5, nachgewiesen werden. Die Resonanzen der Spindynamik entlang der starken Richtungen beinhalten mehrere schwache Moden. Diese können nicht einzeln identifiziert werden. Wenn es trotzdem gelingen könnte, alle angeregten Moden gleichzeitig und eindeutig zu identifizieren, so sollte sich für jede einzelne Mode die Verteilung ergeben, wie sie in Abbildung 6.8 gezeigt ist. Wie so etwas funktionieren kann ist in der Referenz [131] gezeigt. Hier ist es möglich, die einzelnen TEM-Moden eines nichtklassischen Lasers voneinander zu unterscheiden und das nichtklassische Verhalten der einzelnen Moden parallel zu untersuchen.

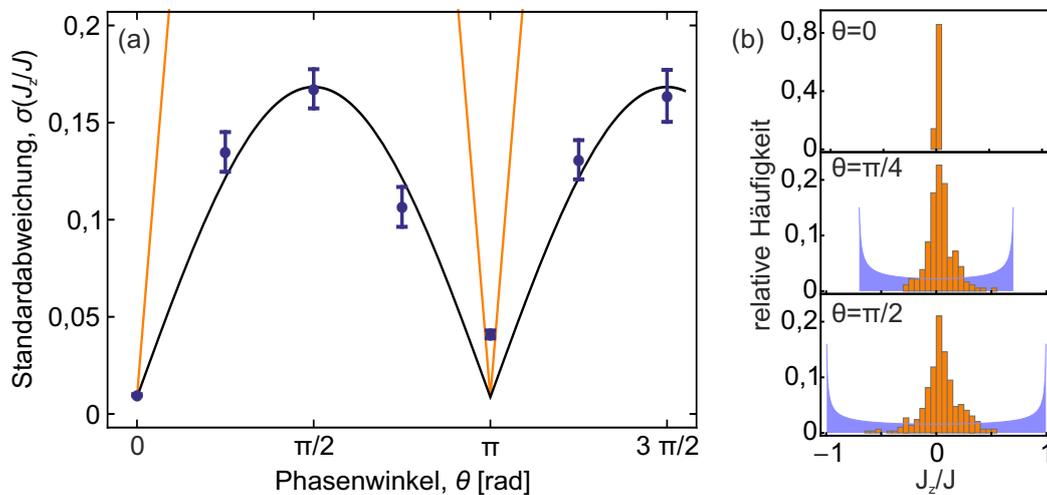


Abbildung 6.10: Verhalten der Standardabweichung $\sigma J_z/J$ in Abhängigkeit des Rotationswinkels θ in der zylindrischen Falle. (a) Standardabweichungen der Teilchenzahldifferenzen aufgetragen gegen den eingestellten Winkel. Die orangefarbenen Kurve entspricht dem theoretisch erwarteten $|\sin(\theta)|/\sqrt{2}$ -Verlauf die schwarze Kurve entspricht dem gleichen Verlauf mit angepasster Amplitude. (b) Zeigt die Histogramme der Verteilungen für die ersten drei Winkel mit den theoretischen Erwartungen

Ein weitere Grund, der die Messungen aus Abbildung 6.10 erklären könnte, ist dass hier vermehrt Verluste auftreten, die zu einer Verringerung der nichtklassischen Korrelationen nach Gleichung (6.1) führen. Der Einfluss von Verlusten auf die Verteilung nach dem $\pi/2$ -Strahlteilerpuls wird im nächsten Abschnitt näher betrachtet.

Zusammenfassend ist zu sagen, dass sich durch die Messung des Rauschens der Teilchenzahldifferenz, ein Wert für den Winkel θ bestimmen lässt. Dafür ist es am besten, wenn nur eine einzige Mode vorliegt, da eine Überlagerung mehrerer Moden zu einer Reduktion der Amplitude des Messsignals führt.

6.3.1 Einfluss der Spindynamikdauer auf die Verteilung nach einem $\pi/2$ -Puls

Bevor die Sensitivität des Zustandes untersucht wird, soll gezeigt werden, wie sich der $\pi/2$ -Puls auswirkt, wenn die Spindynamikdauer nicht optimal gewählt ist. Die Messungen dazu laufen genauso ab, wie zuvor, nur dass hier unterschiedliche Zeiten für die Spindynamik gewählt werden, bevor die Stahlteilersequenz mit $\theta = \pi/2$ erfolgt. Die zugehörigen Graphen sind in der Abbildung 6.11 gezeigt. Der Teilchenzahlbereich für die Histogramme ist hier so gewählt, dass die Messpunkte im Intervall von $\{\langle n^+ \rangle - 2000 \text{ Atome}; \langle n^+ \rangle + 2000 \text{ Atome}\}$ liegen, wobei $\langle n^+ \rangle$ für den Mittelwert der Gesamtteilchenzahl der jeweiligen Messung steht.

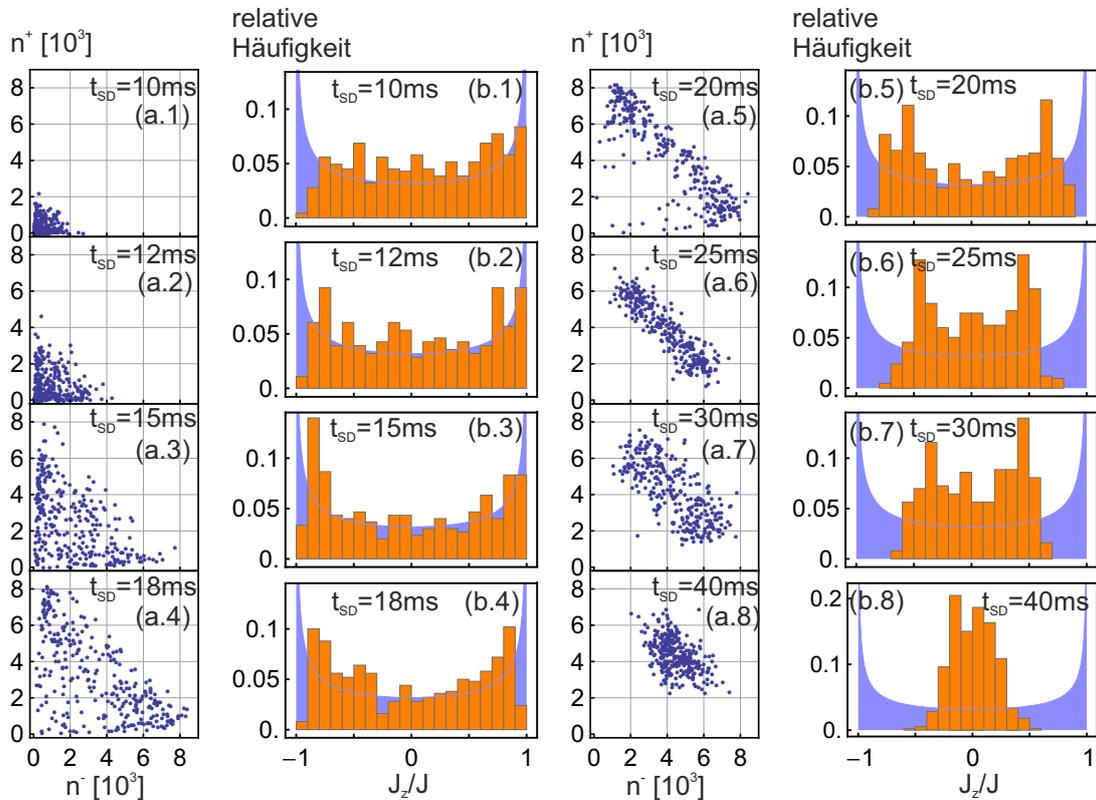


Abbildung 6.11: Verhalten der relativen Besetzung nach einem $\pi/2$ -Strahlteilerpuls für unterschiedliche Zeiten der Spindynamik.(a.1)-(a.8) Teilchenzahlen der beiden Zustände gegeneinander aufgetragen (b.1)-(b.8) Resultierende Histogramme der Teilchenzahldifferenz und Vergleich mit theoretischer Erwartung

Für kurze Zeiten und damit geringe Teilchenzahlen ähneln die Histogramme eher einer Gleichverteilung, was vermutlich am Detektionslimit liegt. Es ist aber auch denkbar, dass sich zu dem jeweiligen Zeitpunkt der Spindynamik noch keine eindeutig dominante Mode ausgebildet hat, ähnlich wie im Fall der zylindrischen

Falle. Das betrachtete Signal setzt sich also aus einer Überlagerung mehrere Moden zusammen, was zu einer geringeren Standardabweichung des Messsignals führt.

Für einen Wert von 15 ms stimmt das Histogramm am ehesten mit der Theoriekurve überein. Für größere Zeiten führen die Verluste zur Sättigung der Gesamtteilchenzahl (vgl. Abb. 4.3) und damit zu einer Reduktion der nichtklassischen Korrelationen (vgl. Abb. 6.5). Dies hat auch Auswirkungen auf die Verteilungen nach dem $\pi/2$ -Puls, deren äußere Flanken mit zunehmender Zeit immer weiter in die Mitte wandern, bis diese gar nicht mehr erkennbar sind. Dementsprechend reduziert sich die Standardabweichung, wie in Abbildung 6.12 deutlich zu sehen ist. Der Wert der Standardabweichung ist hier gegen die Dauer der Spindynamik aufgetragen. Die Kurve hat wie erwartet ein Maximum bei 15 ms und fällt anschließend ab. Das bedeutet, dass für größere Spindynamikzeiten die Amplitude einer Winkelmessung ähnlich wie in Abbildung 6.10 reduzieren würde. Das Maximum fällt in Abbildung 6.12 mit $0,66 \pm 0,03$ geringer aus als in Abbildung 6.9, was daran liegt, dass die Messungen mehrere Wochen auseinanderliegen. In dieser Zeit können sich einige Parameter wie die Justage der Dipolfalle leicht ändern, so dass in dieser Messung nicht die optimalen Bedingungen geherrscht haben.

Anhand dieser Messung wird die Beobachtung aus Abschnitt 6.2.2 bestätigt. In der Sättigung der Spindynamik für große Zeiten, führen die unkorrelierten Verluste dazu, dass sich die gemessenen Fluktuationen $\sigma J_z/J = \sigma J_z(t)/\langle J(t) \rangle$ mit der Zeit vergrößern, bis sie die Grenze des Schrotrauschens erreichen (vgl. Gl (6.1)). Dies führt unter anderem dazu, dass sich der Zustand nur noch bedingt für interferometrische Messungen eignet.

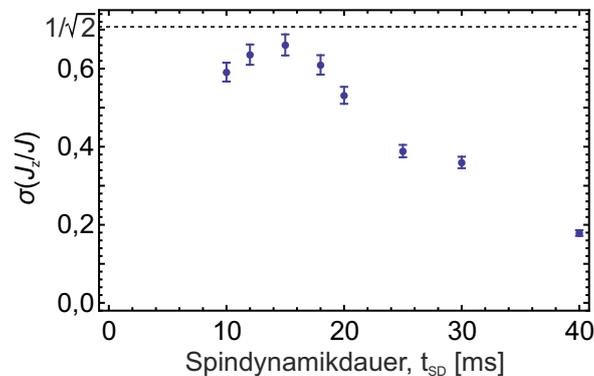


Abbildung 6.12: Verhalten der Standardabweichung nach einem $\pi/2$ -Strahlteilerpuls in Abhängigkeit der Dauer der Spindynamik.

6.4 Interferometrische Sensitivität des Zustands

Nachdem jetzt gezeigt ist, wie mit dem erzeugten nichtklassischen Zustand der aufgeprägte Winkel gemessen werden kann, lautet die nächste Frage, wie gut die

Sensitivität dieser Messung ist. Reichen die experimentellen Bedingungen aus, um eine Sensitivität unterhalb des Standardquantenlimits zu messen, wie es von der Theorie vorhergesagt wird?

Im Abschnitt 2.7.2 ist gezeigt, dass das Minimum der Phasenunsicherheit in dem Bereich liegt, wo das Ausgangssignal der Phasenmessung in etwa mit dem Wert des Detektionsrauschens übereinstimmt. Für eine mittlere Teilchenzahl von 7000 Atomen und einem Detektionsrauschen von $\sigma_{DR} = 20$ Atomen bedeutet dies, dass im Bereich von etwa $5 - 40$ mrad eine Sensitivität unterhalb des Standardquantenlimit beobachtet werden könnte (vgl. Abb. 2.24). Daher werden für dieses Intervall von θ analog zu Abschnitt 6.3 Messungen vorgenommen, in denen der Wert von $\langle J_z^2 \rangle$ in Abhängigkeit des Winkels bestimmt wird. Zur Auswertung werden nur die Punkte verwendet, die im Intervall zwischen 6400 Atomen und 7600 Atomen liegen, damit unter anderem das Schrotrauschlimit klarer definiert ist. Der zugehörige Graph ist in Abbildung 6.13 gezeigt. Im Gegensatz zu Abbildung 6.9 ist hier nicht die normierte Standardabweichung $\sigma(J_z/J)$ eingezeichnet sondern der absolute Erwartungswert $\langle J_z^2 \rangle$. Diese Größe ist aufgrund des verschwindenden Mittelwerts $\langle J_z \rangle = 0$ gleich der Varianz $(\sigma J_z)^2 = \langle J_z^2 \rangle$.

Für die Bestimmung der Sensitivität nach Gleichung (2.93) wird die Ableitung $d\langle J_z^2 \rangle/d\theta$ benötigt. Dazu werden als erstes die Messdaten mit Hilfe der Bootstrap-Methode [167] an die Funktion der Form

$$f_{\langle J_z^2 \rangle}(\theta) = a_1 \sin^2 \theta + b_1 \quad (6.2)$$

mit den freien Parametern a_1 und b_1 angepasst. Bei dieser Methode werden Zufallszahlen mit den Mittelwerten und Standardabweichungen der Messpunkte erzeugt. Anschließend erfolgt eine Standardroutine zur Anpassung der erhaltenen Zufallszahlen an die Funktion (6.2). Dieser Vorgang wird mehrfach wiederholt. Das Ergebnis ist eine statistische Verteilung verschiedener angepasster Funktionen. Ihr Mittelwert dient zur Abschätzung der freien Parameter $a_1 = (6,7 \pm 0,6) \times 10^6$ und $b_1 = (260 \pm 100)$. Der Vorteil dieser Methode gegenüber einer einfachen Anpassungsroutine ist, dass zusätzlich der statistische Fehler der Funktion ermittelt wird. Die zugehörige Kurve ist in Abbildung 6.13 als durchgezogene Linie eingezeichnet. Die schattierte Fläche markiert dabei den Bereich der ersten Standardabweichung. Aus dieser Funktion kann leicht die Ableitung gebildet werden, die für die Bestimmung der Sensitivität benötigt wird.

Mit Hilfe der Gleichungen (2.110) und (2.82) können aus den Parametern a_1 und b_1 Werte von $\langle n^+ \rangle = 7320 \pm 330$ Atome für die mittlere Gesamtteilchenzahl und $\sigma_{DR} = 16 \pm 3$ Atome für das Detektionsrauschen errechnet werden. Diese sind konsistent mit den unabhängig ermittelten Werten von $\langle n^+ \rangle = 6989 \pm 200$ Atome und $\sigma_{DR} = 20 \pm 1$ Atome (vgl. Abschnitt 3.2). Für diese Werte zeigt die gestrichelte Kurve in Abbildung 6.13 den erwarteten Verlauf.

Die nächste Größe, die zur Bestimmung der Sensitivität benötigt wird, ist die Varianz $\langle (\Delta J_z^2)^2 \rangle$. Die dafür notwendigen Daten werden aus derselben Messung

bestimmt. Sie sind gemeinsam mit einer angepassten (durchgezogene Linie mit schattierter Fläche) und der erwarteten Kurve (gestrichelte Linie) auf der rechten Seite von Abbildung 6.13 eingezeichnet. Die angepasste Kurve ist wie zuvor das Ergebnis eines Bootstrap-Verfahrens mit der Funktion $f_{\langle(\Delta J_z^2)\rangle}(\theta) = a_2 \sin^4(\theta) + b_2 \sin^2(\theta) + c_2$. Die Parameter, die sich daraus ergeben, lauten $a_2 = (3,3 \pm 0,7) \times 10^{13}$, $b_2 = (2,5 \pm 6,6) \times 10^9$ und $c_2 = (1,9 \pm 0,7) \times 10^6$.

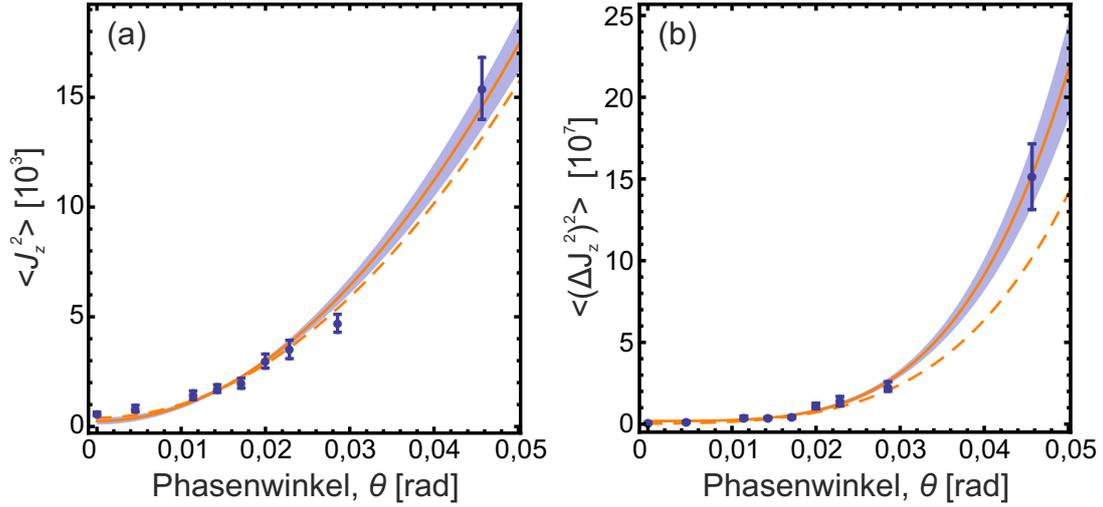


Abbildung 6.13: (a) Erwartungswert $\langle J_z^2 \rangle$ und (b) Varianz $\langle (\Delta J_z^2)^2 \rangle$ in Abhängigkeit der Phase für kleine Winkel.

Jetzt sind alle Größen bestimmt, um die Phasenunsicherheit

$$\Delta\theta = \frac{\Delta J_z^2}{\sqrt{p} |d\langle J_z^2 \rangle / d\theta|} \quad (6.3)$$

$$= \frac{\sqrt{a_2 \sin^4 \theta + b_2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + c_2}}{2a_1 \sin \theta \cos \theta} \quad (6.4)$$

des Zustandes ermitteln zu können. Die Abbildung 6.14 zeigt den Fehler der Phasenbestimmung relativ zum Schrotrauschen $\Delta\theta / \Delta_{sr}\theta$ in Abhängigkeit der Phase. Die durchgezogene, orangefarbene Kurve ist die entsprechende Form der Gleichung (6.4) mit den oben ermittelten Parametern. Die schattierte Fläche gibt auch hier die erste Standardabweichung des Mittelwertes an und die orangefarbene gestrichelte Kurve entspricht dem erwarteten Verlauf errechnet aus den Idealkurven aus Abbildung 6.13. Die experimentell bestimmte Kurve ist zwischen $\theta = 10$ mrad und $\theta = 25$ mrad kleiner als eins. In diesem Intervall liegt sie somit unterhalb des Schrotrauschlimits, welches durch die schwarze gestrichelten Linie dargestellt ist.

Die minimale Unsicherheit wird bei einem Wert von $\theta = 15$ mrad erreicht und beträgt $\Delta\theta / \Delta_{sr}\theta = 0,83 \pm 0,1$. Dies entspricht einem Wert von $-1,61_{-1,1}^{+0,98}$ dB unterhalb des Schrotrauschlimits. Wenn zusätzlich das Detektionsrauschen berücksichtigt wird, so liegt die Unsicherheit sogar $-2,5_{-1,1}^{+0,98}$ dB unterhalb dessen, was mit

dem vorgestellten System und einem unkorrelierten Zustand möglich wäre. Diese Grenze ist durch die schwarze Strichpunktlinie in der Abbildung gekennzeichnet. Das Ergebnis einer Sensitivitätsmessung mit einem klassischen Zustand ist in der Abbildung 6.13 durch die blaue Kurve gezeigt. Der Fehler ist hier wieder durch die grau schattierte Fläche gegeben.

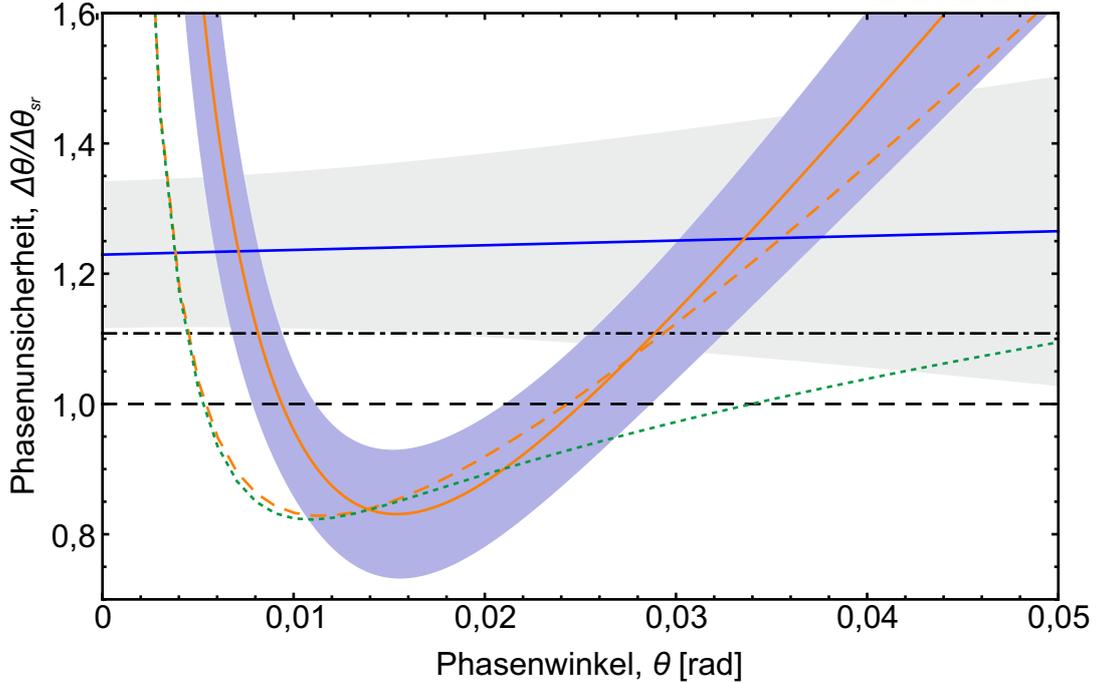


Abbildung 6.14: Phasenunsicherheit relativ zum Schrotrauschlimit in Abhängigkeit der Phase

Die gepunktete grüne Kurve entspricht der Cramer-Rao-Grenze unter Berücksichtigung des Detektionsrauschens (vgl. Abb. 2.24, blaue Kurve). Mit Hilfe einer Bayes'schen Analyse könnte dieses Limit erreicht werden. Da der Vorteil gegenüber der Analyse mittel Gauß'scher Fehlerfortpflanzung nur gering ist, wird hier auf die Bayes'sche Analyse verzichtet. Ihre Vorzüge kämen erst richtige zum Tragen, wenn es gelänge, das Detektionsrauschen auf $\sigma_{DR} = 5$ Atome zu verringern. In dem Fall wäre es möglich, eine Phasenunsicherheit von $-13,6$ dB unterhalb des Schrotrauschlimits zu messen, wie in der Abbildung 2.24 gezeigt worden ist.

Aus dem gemessenen Wert von $\Delta\theta/\Delta_{SR}\theta = 0,83 \pm 0,1$ kann eine untere Schranke von $\mathcal{F}/\langle n^+ \rangle \geq 1,45_{-0,29}^{+0,42}$ für den Wert der Fischerinformation abgeschätzt werden. Dieser Wert ist größer als eins und damit ein Zeichen dafür, dass es sich tatsächlich um einen nichtklassischen Zustand handelt, der eine nutzbare Form der Verschränkung aufweist. Er eignet sich somit prinzipiell, um interferometrische Messungen durchzuführen, die eine bessere Sensitivität aufweisen, als eine vergleichbare Messung, in der klassische Zustände verwendet werden.

AUSBLICK

Die in dieser Arbeit gezeigten Ergebnisse liefern grundlegende Erkenntnisse über die Natur der Spindynamik in Bose-Einstein-Kondensaten. Insbesondere die Untersuchungen des entstehenden nichtklassischen Zustandes legen die Grundlage für mögliche Anwendungen und weiterführende Untersuchungen. Im ersten Abschnitt dieses Ausblicks werden unterschiedliche Realisierungsmöglichkeiten für Interferometer gezeigt, bei denen der erzeugte nichtklassische Zustand als Eingangszustand dient. Diese Interferometer ermöglichen Messungen unterschiedlicher Größen mit einer Sensitivität jenseits des Schrotrauschens.

Der zweite Abschnitt zeigt Vorschläge zu weiteren Untersuchungen der Spindynamik. Dort werden mögliche Experimente präsentiert, die zu verschränkten Atomlasern und zur Beobachtung von EPR-Paaren führen können. Diese könnten dann verwendet werden, um zum Beispiel einen Test der Bellschen Ungleichung mittels neutraler Atome durchzuführen.

7.1 Nichtklassische Interferometer

Als erstes wird hier ein Ramseyinterferometer gezeigt, bei dem direkt die Ausgangszustände $|2, \pm 1\rangle$ der Spindynamik als Eingangszustände des Interferometers dienen. Da die beiden Zustände $|2, \pm 1\rangle$ eine unterschiedliche Zeemanverschiebung aufweisen, würde sich dieses Interferometer zum Messen von Magnetfeldern eignen. Soll hingegen der Uhrenübergang von ^{87}Rb $|2,0\rangle \rightarrow |1,0\rangle$ vermessen werden, so muss der nichtklassische Zustand zwischen diesen Zuständen realisiert werden. Wie dies mit dem vorgestellten Experiment erreicht werden kann, wird durch zwei unterschiedliche Realisierungen gezeigt. Im letzten Teil werden zwei weitere mögliche Interferometer beschrieben, die eine Messung von Beschleunigungen und Rotationen ermöglichen.

7.1.1 Implementierung eines Magnetometers mit nichtklassischen Zuständen

Zur Realisierung eines Magnetometers müssen keine Umbaumaßnahmen getroffen werden. Wie eine solche Sequenz aussehen könnte ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Nach der Spindynamik erfolgt die gleiche Sequenz, wie bei der Vermessung des Strahlteilers mit dem Winkel $\theta = \pi/2$. Anschließend erfolgt eine Wartezeit t_θ , in der sich die Phasen der beiden Zustände unterschiedlich entwickeln. Dann folgt eine zweite $\pi/2$ -Strahlteilersequenz, mit der das Ausgangssignal des Interferometers generiert wird.

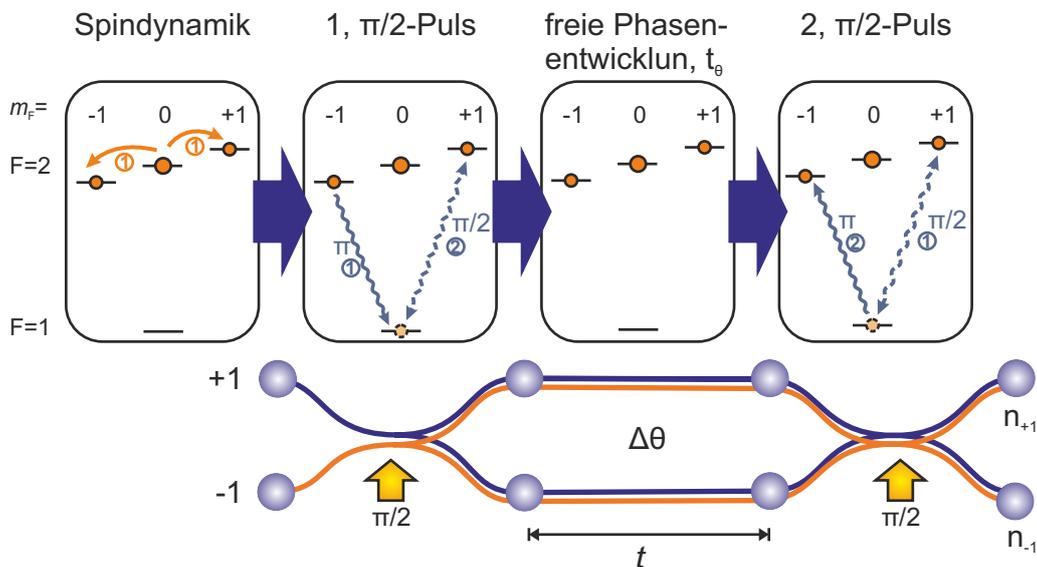


Abbildung 7.1: Interferometersequenz eines Magnetometers mit den erzeugten nichtklassischen Zuständen. Nach der Spindynamik erfolgt ein $\pi/2$ -Strahlteilerpuls. Anschließend erfolgt eine Wartezeit t_θ , in der sich die Phasen der beiden Zustände unterschiedlich entwickeln. Dann folgt eine zweite $\pi/2$ -Strahlteilersequenz, um das Interferometer zu schließen.

Setzt man die Entwicklungszeit $t_\theta = 0$ ms, so entspricht diese Sequenz nichts anderes als einem einfachen π -Puls. Dieser ist bereits Teil der Abbildung 6.9. Für einen solchen π -Puls sollten die Standardabweichung σJ_z wieder unterhalb der Schrotrauschgrenze liegen. Bisher konnte dies allerdings nicht beobachtet werden, wie in der Abbildung 7.2 zu sehen ist. Auf der linken Seite ist hier die relative Standardabweichung $\sigma J_z / \sigma J_{z,SR}$ für Frequenzen in der Nähe der Resonanz des Strahlteilerpulses aufgetragen. Auf der rechten Seite ist $\sigma J_z / \sigma J_{z,SR}$ im Bereich um die unabhängig ermittelte π -Pulslänge von $t_\pi = 48,3 \mu\text{s}$ aufgetragen. In beiden Fällen liegt das Minimum bei etwa 150 % und damit leicht oberhalb der Schrotrauschgrenze.

Den Berechnungen nach sollten die Schwankungen des Magnetfeldes und der Mikrowellenintensität jedoch hinreichend klein sein, um auch hier Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschens messen zu können. Es ist jedoch jüngst eine Langzeitdrift in dem Transfer durch die Pulse beobachtet worden, die derzeit die Messung von Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschens nach einem π -Puls verhindert. Durch Umbaumaßnahmen und eine aktive Stabilisierung der Mikrowellenleistung [168] wird derzeit versucht, diese Langzeitdrift zu vermeiden. Durch weitere Verbesserungen sollte es in naher Zukunft möglich sein, für einen solchen Puls, Fluktuationen unterhalb des Schrotrauschens zu beobachten und das Magnetfeld präzise zu bestimmen.

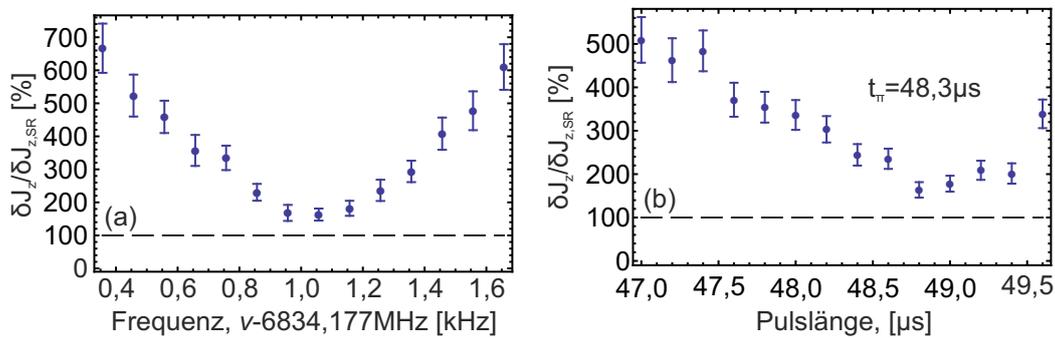


Abbildung 7.2: Relative Standardabweichung $\sigma J_z / \sigma J_{z,SR}$ aufgetragen gegen (a) unterschiedliche Frequenzen und (b) unterschiedliche Zeiten des Strahlteilerpulses. Die gestrichelte Linie gibt jeweils die Grenze des Schrotrauschens an.

7.1.2 Vermessung des Uhrenübergangs mit nichtklassischen Zuständen

Es ist denkbar, dass sich mit Hilfe des hier gezeigten Zustands auch die Sensitivität von Rubidiumatomuhren verbessern lässt. Dies ist besonders interessant, da der Übergang $|2,0\rangle \rightarrow |1,0\rangle$ von ^{87}Rb als sekundärer Frequenzstandard international anerkannt ist. Im folgenden werden zwei mögliche Realisierungen gezeigt, wie dieser Übergang unter Verwendung der nichtklassischen Zustände vermessen werden kann.

In der ersten Realisierung wird der nichtklassische Zustand in den (in erster Ordnung) magnetfeldinsensitiven Zuständen des Uhrenübergangs präpariert. Dies kann wieder mit Hilfe von Mikrowellenpulsen geschehen. Wie eine solche Sequenz aus Präparation und Interferometrie aussehen könnte, ist in der Abbildung 7.3 dargestellt. Dabei muss berücksichtigt werden, dass zunächst das Kondensat in $|2,0\rangle$ in einen anderen Zustand transferiert werden muss, damit es nicht zum Interferometersignal beiträgt. Zudem müssen alle Pulse präzise sein, da ansonsten der

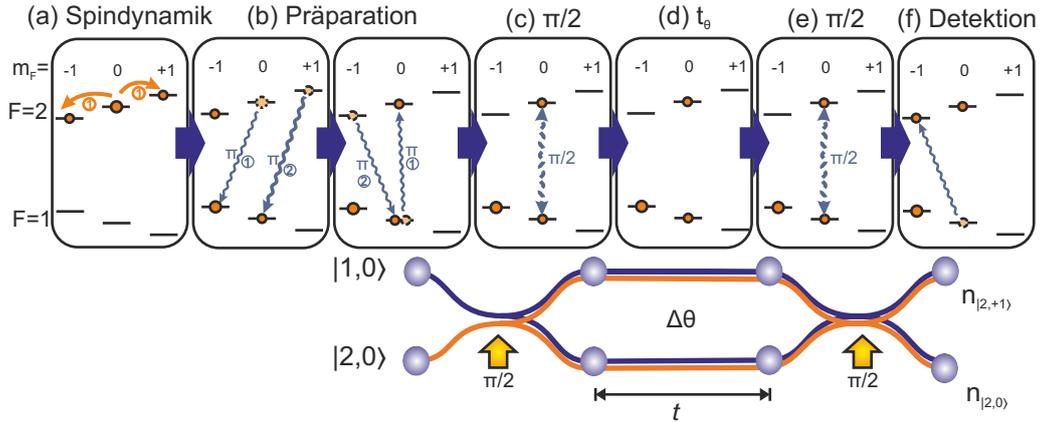


Abbildung 7.3: Präparation zur Vermessung des Uhrenübergangs von ^{87}Rb mit dem nichtklassischen Zustand. (a) Spindynamik; (b) Präparation des Uhrenübergangs; (c) Erster Strahlteilerpuls; (d) Freie Entwicklungszeit; (e) zweiter Strahlteilerpuls, (f) Präparation zur zustandsselektiven Detektion

nichtklassische Zustand beeinträchtigt werden könnte, wodurch sich die Sensitivität verschlechtern würde.

In der zweiten Realisierung wird der Uhrenübergang auf eine andere Art und Weise gemessen, die ebenfalls zu einer Sensitivität jenseits des Schrotrauschens führen kann. Wie in der Veröffentlichung [169] von Luca Pezze und Augusto Smerzi gezeigt, reicht es aus, wenn nur die Teilchenzahl eines Interferometereingangs durch einen Fock- oder einen gequetschten Zustand gegeben ist. Der andere Eingang kann in diesem Fall durch einen kohärenten Zustand gegeben sein. Mit Hilfe der Dichtematrix lässt sich ein solcher Eingangszustand durch

$$\hat{\rho}_{\text{inp}} = |N\rangle_a \langle N| \otimes \sum_n \rho_n |n\rangle_b \langle n| \quad (7.1)$$

darstellen. Am Eingang a liegt hier also ein Fock-Zustand mit exakt N -Teilchen vor. Für die Teilchenzahl am Eingang b hingegen kann nur ein Mittelwert $\langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho_n n$ angegeben werden. Wie in [169] weiter gezeigt wird, ist die interferometrische Sensitivität in dem Fall gegeben durch

$$\Delta\theta = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{2N\langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}} + N + \langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}}}} \quad (7.2)$$

Hierbei steht p wieder für die Anzahl unabhängiger Messungen. Wenn keine Teilchen an Eingang b ($\rho_n = \delta_{n,0}$) anliegen, dann ergibt sich kein Gewinn für die Sensitivität und diese wäre wieder durch das Schrotrauschen limitiert $\Delta\theta = 1/\sqrt{pN}$. Liegt an dem Eingang b allerdings ein kleine Population $\langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}} \ll N$ vor, so ergibt sich für die Sensitivität $\Delta\theta \approx \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{\sqrt{2\langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}} + 1\sqrt{N}}}$. Diese wäre somit unterhalb des

Schrotrauschlimits. Der Idealfall wäre, wenn der Erwartungswert gleich der Teilchenzahl des Fockzustandes $N = \langle \hat{n}_b \rangle_{\text{inp}}$ wäre. In dem Fall wäre die Sensitivität durch $\Delta\theta \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\rho}N}$ gegeben. Es ergibt sich demnach die gleiche Sensitivität, wie in Gleichung 2.101 für den Zwillings-Fock-Zustand.

Wie dieser Interferometertyp experimentell mittels Spindynamik realisiert werden könnte, zeigt Abbildung 7.4. Nach dem Entstehen des nichtklassischen Zustandes werden die Atome von $|2, +1\rangle$ nach $|1,0\rangle$ transferiert. Im Anschluss erfolgt die Interferometersequenz zwischen dem $|1,0\rangle$ - und dem $|2,0\rangle$ -Zustand. Am Ende werden die Atome in $|2,0\rangle$ und $|2, -1\rangle$ gemessen. Bei dieser Sequenz ist die anfängliche Teilchenzahl in $|2, +1\rangle$ zu Beginn unbekannt. Diese kann aber ermittelt werden, indem bei der Detektion die Teilchenzahl in $|2, -1\rangle$ gemessen wird. Diese ist aufgrund des erzeugten Zwillings-Fock-Zustands identisch zu der anfänglichen Teilchenzahl in $|2, +1\rangle$. Dadurch ist es möglich, den Uhrenübergang interferometrisch mit einer Sensitivität jenseits des Schrotrauschs zu vermessen, die im Idealfall genauso gut ist wie für einen Zwillings-Fock-Zustand.

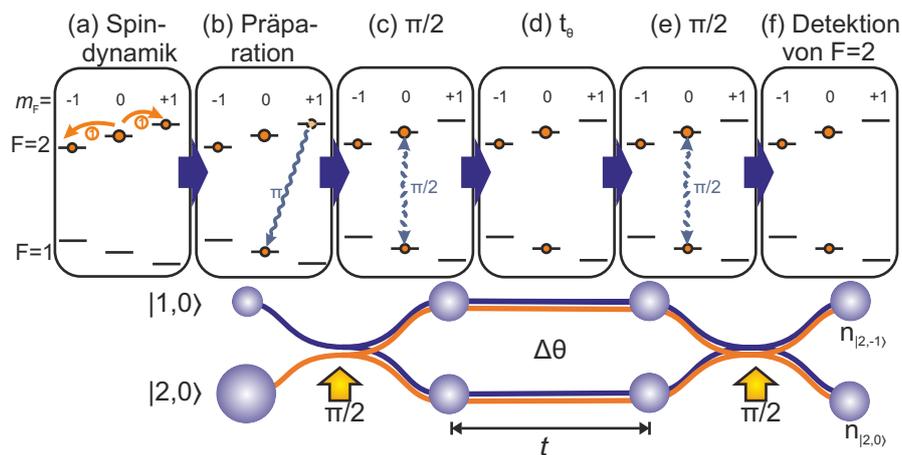


Abbildung 7.4: Implementierung des Protokolls aus [169] zur Vermessung des Uhrenübergangs von ^{87}Rb mit dem nichtklassischen Zustand. (a) Spindynamik; (b) Transfer der Atome in $|2, +1\rangle$ nach $|1,0\rangle$; (c)-(e) Interferometersequenz zwischen dem $|1,0\rangle$ - und $|2,0\rangle$; (f) zustandsselektive Detektion der Atome in $F = 2$.

7.1.3 Inertialsensoren mit nichtklassischen Zuständen

Damit Beschleunigungen in einem Interferometer gemessen werden können müssen die beiden Pfade während der freien Evolution räumlich voneinander getrennt sein. Spannen sie zudem eine Fläche auf, so können auch Rotationen gemessen werden. Mikrowellenübergänge sind in Atominterferometern daher ungeeignet, da der Photonenrückstoß zu gering ist, um eine Trennung zu erzielen. Es ist besser, die Übergänge mittels optischer Wellenlängen zu treiben, die einen bedeutend höheren

Photonenrückstoß $\hbar k$ aufweisen. Um die Hyperfeinübergänge optisch miteinander zu koppeln, können sogenannte Ramanübergänge verwandt werden [170, 171]. Wie in Abbildung 7.5 dargestellt ist. Dabei werden zwei Photonen verwendet, um den Übergang $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ zu treiben, wobei die Frequenzdifferenz $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2$ der atomaren Übergangsfrequenz entspricht. Über eine Kopplung an ein weiteres Niveau $|i\rangle$ kann so der gewünschte Übergang getrieben werden. Die Verstimmung Δ der Laser gegenüber $|i\rangle$ sollte dabei so gewählt werden, dass dieses nicht nennenswert bevölkert wird. In diesem Fall kann der Ramanübergang auf ein effektives Zwei-niveausystem reduziert werden, wie auf der rechten Seite der Abbildung gezeigt.

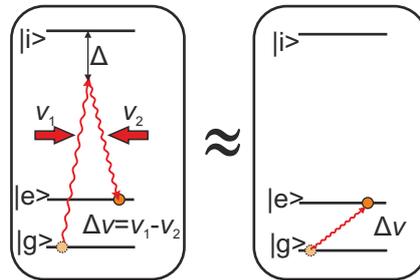


Abbildung 7.5: Skizze eines Zwei-Photonen-Raman-Übergangs und Näherung mit einem einfachen Übergang

Verlaufen die Strahlen antiparallel zueinander, so wird neben dem internen Zustand auch der Impulszustand verändert $|g\rangle \otimes |0\hbar k\rangle \rightarrow |e\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$. Bei parallelen Strahlen kompensieren sich die Rückstöße durch die Photonen wieder zu Null. Durch geeignete Wahl der Orientierungen und der Laserfrequenzen können so die Atome in den gewünschten internen und (externen) Impulszuständen präpariert und manipuliert werden. Schematisch ist dies in Abbildung 7.6 gezeigt. Der nicht-klassische Zustand zwischen den $|2, \pm 1\rangle$ -Niveaus wird hier mit Hilfe von Ramanlasern auf die Impulszustände $|2, -1\rangle \rightarrow |1,0\rangle \otimes |0\hbar k\rangle$ und $|2, +1\rangle \rightarrow |1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$ übertragen. Um diese Impulszustände in einer Interferometersequenz nutzen zu können, müssen Bragg-Pulse eingesetzt werden. Diese funktionieren analog zu den Pulsen der Ramanlaser, mit dem Unterschied, dass dabei nur der Impuls- und nicht der interne Zustand geändert wird. Dafür muss die Differenzfrequenz der Bragg-Pulse dem Energieunterschied zwischen den beiden Impulszuständen entsprechen. Für eine Wellenlänge der Bragg-Laser im Bereich von 780 nm würde der Impuls $2\hbar k$ einem Frequenzunterschied von 15 kHz entsprechen.

Zur Messung der Erdbeschleunigung oder der Rotation kann die Interferometersequenz zum Beispiel in der Fallzeit erfolgen. Dazu werden nach Abschalten der Dipolfalle die beiden Impulszustände über einen ersten $\pi/2$ -Bragg-Puls miteinander gekoppelt. Danach nehmen sie unterschiedliche Pfade, wie es für die Messung benötigt wird. Um diese Pfade wieder zusammenzuführen, erfolgt auf halber Strecke ein π -Bragg-Puls, der die Impulse invertiert. Sind die beiden Zustände wieder

überlagert, erfolgt der zweite $\pi/2$ -Bragg-Puls, um das Interferometer zu schließen. Nach einer weiteren Fallzeit lassen sich die Besetzungen der beiden Impulszustände durch eine orts aufgelöste Detektion bestimmen.

Mit einem solchen Interferometer wäre es zum einen möglich den Anteil der Erdrotation $\Omega_R = \Omega_{\text{Erde}} \cos \beta$ zu messen, der senkrecht auf der eingeschlossenen Fläche steht. Der Winkel β steht hier für die Koordinate des Breitengrades. Zum anderen wäre ein solches Interferometer auch sensitiv auf die Gravitationsbeschleunigung $|\vec{g}|$. Dazu müssen die Bragg-Pulse parallel zur Gravitation eingestrahlt werden. Das System wird dadurch insensitive auf Rotationen und sensitiv auf die Gravitation.

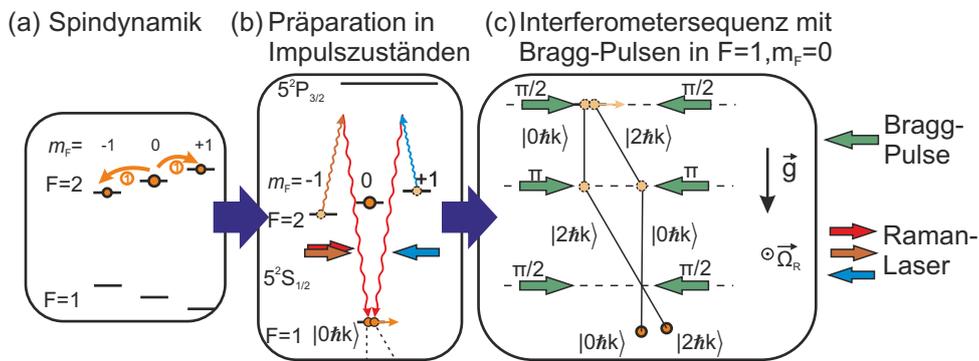


Abbildung 7.6: 1. Möglichkeit zur Realisierung eines nichtklassischen Inertialsensors zur Messung von Beschleunigungen. Hier wird der nichtklassische Zustand zwischen den $|2, \pm 1\rangle$ Niveaus mit Hilfe von Ramanlasern auf die Impulszustände $|2, -1\rangle \rightarrow |1,0\rangle \otimes |0\hbar k\rangle$ und $|2, +1\rangle \rightarrow |1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$ übertragen. In der Interferometersequenz dienen Bragg-Pulse zwischen den Impulszuständen als Strahlteiler und Spiegel.

Eine andere Möglichkeit, um ein beschleunigungssensitives Interferometer zu implementieren, ist in der Abbildung 7.7 gezeigt. Hier werden die Atome zunächst mittels Ramanübergang aus dem Zustand $|2, -1\rangle$ in den Zustand $|1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$ überführt. Analog zu Abbildung 7.4 dienen diese Atome zusammen mit den Atomen des Kondensates in $|2,0\rangle$ als Eingänge des Interferometers. Die Atome in $|2, -1\rangle$ dienen wieder dazu, die Anfangsteilchenzahl in $|1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$ zu bestimmen. Als Strahlteiler und Spiegel können hier Raman-Pulse verwandt werden, die neben den Impulszuständen auch die internen Zustände ändern. Auch hier könnten wieder die Rotation und die Fallbeschleunigung gemessen werden.

Außer den hier gezeigten Möglichkeiten, sind noch eine Reihe weiterer Realisierungen denkbar. So könnte auch ein Interferometer zwischen den Zuständen $|2, +1\rangle$ und $|1, -1\rangle$ realisiert werden. Dies ist interessant, da beide Zustände den gleichen Zeemaneffekt aufweisen und der Übergang daher insensitive auf Magnetfelder und Magnetfeldschwankungen reagiert.

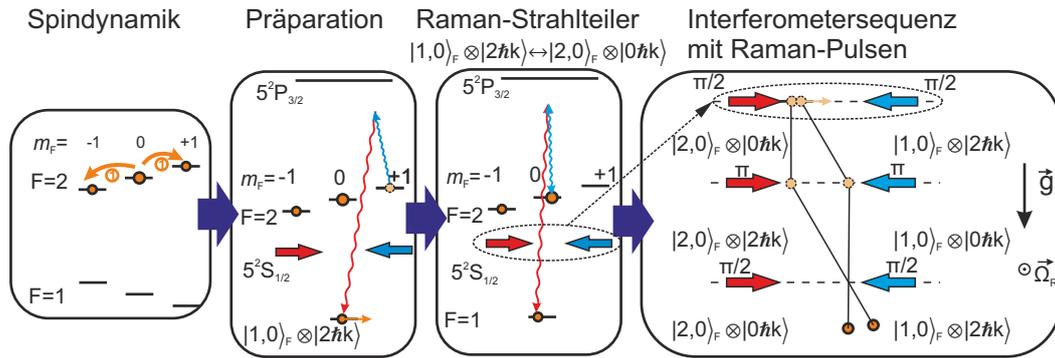


Abbildung 7.7: 2. Möglichkeit zur Realisierung eines nichtklassischen Inertialsensors zur Messung von Beschleunigungen. Die Interferometrie läuft hier ähnlich zu Abbildung 7.4 zwischen den Zuständen $|1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$ und $|2,0\rangle \otimes |0\hbar k\rangle$ ab. Die Atome in $|2, -1\rangle$ dienen wieder zur Bestimmung der Anfangsteilchenzahl in $|1,0\rangle \otimes |2\hbar k\rangle$.

7.2 Weiterführende Experimente zur Untersuchung der Spindynamik

Neben der interferometrischen Anwendung der nichtklassischen Zustände können die Ergebnisse auch zu weitergehenden grundlegenden Untersuchungen der Quantenmechanik verwendet werden. Eine Möglichkeit wäre die Betrachtung der räumlichen Moden und der Symmetriebrechung für weitere Potentialkonfigurationen. Besonders Interessant wäre die Implementierung einer kugelsymmetrischen Falle mit drei gleich großen Fallenfrequenzen. Bei einer gleichzeitigen Detektion aus zwei Richtungen könnte die dreidimensionale Dichteverteilung rekonstruiert werden, um zu sehen wie hier die räumliche Symmetrie gebrochen wird. Denkbar wäre auch mit Hilfe von räumlichen Lichtmodulatoren (engl. spatial light modulators) beliebige Fallenkonfigurationen zu realisieren [172–174], die zur Simulation unterschiedlicher Festkörperstrukturen dienen können. Durch die Spindynamik könnten auch diese Potentiale hinsichtlich ihrer unterschiedlichen räumlichen Moden und ihrer Symmetrien untersucht werden.

Von großem Interesse wären auch elongierte Dipolpotentiale oder optische Gitter. In Referenz [71, 175] wird beschrieben, dass elongierte Dipolfallen einen spinunabhängigen Auskoppelmechanismus der durch die Spindynamik erzeugten Atome in $|2, \pm 1\rangle$ bieten. Wenn die Fallenfrequenz entlang der schwachen Richtung gering genug ist, könnte die durch den Stoß freiwerdende Energie ausreichen, damit das verschränkte Atompaar das Potential verlassen kann. Aufgrund der Impulserhaltung müsste dann je ein Atom an einem der Fallenenenden ausgekoppelt werden. Ähnliches gilt auch für optische Gitterpotentiale, wo durch die Spindynamik höhere Bänder besetzt werden könnten. In beiden Fällen würden zwei verschränkte Atomlaserstrahlen entstehen, die wiederum zur nichtklassischen Interferometrie verwendet werden könnten [176]. So könnte sogar ein kontinuierliches Ramseyin-

terferomter realisiert werden. Durch einen kohärenten Pumpprozess, der zusätzlich Atome in das Ursprungskondensat hinein lädt [177, 178], könnte die Zeit der kontinuierlichen Interferometrie sogar noch verlängert werden.

Der Auskoppelprozess mittels elongierter Falle oder optischem Gitter kann auch für grundlegendere Experimente genutzt werden. Ist die Rate sehr gering, so dass immer nur einzelne Atompaare ausgekoppelt werden, wären diese miteinander verschränkt. Mit Hilfe einer zuverlässigen und zustandssensitiven Einzelatomdetektion könnten diese EPR-Paare [9] nachgewiesen werden. Dies würde einen Test der Bellschen Ungleichungen [11] mit neutralen Atomen ermöglichen.

7.3 Fazit

Die in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse zeigen, dass sich eine Vielzahl von Perspektiven für weiterführende grundlegende Experimente und konkrete Anwendungen ergeben. So bieten Spinorkondensate die Möglichkeit unterschiedliche Potentiale bezüglich ihrer Dichteverteilungen und Symmetrien zu analysieren. Weiterhin kann der Prozess der parametrischen Verstärkung in Spinorkondensaten, ähnlich wie in der Quantenoptik, zur Erzeugung nichtklassischer Zustände dienen. Damit könnten dann eine Vielzahl von Experimenten die mit verschränkten Photonen und gequetschtem Licht durchgeführt wurden, mit atomaren Systemen realisiert werden. Weiterhin haben die nichtklassischen Zustände das Potential in zukünftigen Atominterferometer zum Einsatz zu kommen, um Sensitivitäten jenseits des Schrotrauschens zu ermöglichen.

ANHANG

A.1 Wechselwirkungsterme

Hier werden die benötigten Wechselwirkungsterme U_1 und U_0 aus Abschnitt 2.1.2 genauer dargestellt (Vergleich auch Ref. [103]). Dazu werden zunächst die Streulängen a_F für verschiedene Gesamtspins F für ^{87}Rb benötigt. Diese sind von Prof. Tiemann aus spektroskopischen Daten und den Positionen von Feshbach-Resonanzen bestimmt worden und lauten in Einheiten des Bohrradius a_B :

$$F = 1 : \quad a_0 = 101,6(2)a_B; \quad a_2 = 100,3(2)a_B \quad (\text{A.1})$$

$$F = 2 : \quad a_0 = 879(2)a_B; \quad a_2 = 91,2(2)a_B; \quad a_4 = 99,0(2)a_B \quad (\text{A.2})$$

Mit der atomaren Masse m und den Streulängen lassen sich die zugehörigen Wechselwirkungsparameter

$$g_F = \frac{4\pi\hbar^2 a_F}{m} \quad (\text{A.3})$$

berechnet [108]. Unter Berücksichtigung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten ergeben sich schließlich die folgenden Gleichungen für die Wechselwirkungsterme:

$$F = 1 : \quad U_0 = \frac{g_0 + 2g_2}{3} \quad (\text{A.4})$$

$$U_1 = \frac{g_2 - g_0}{3} \quad (\text{A.5})$$

$$F = 2; \quad U_0 = \frac{7g_0 + 10g_2 + 18g_4}{35} \quad (\text{A.6})$$

$$U_1 = \frac{-7g_0 - 5g_2 + 12g_4}{35} \quad (\text{A.7})$$

A.2 Semi-klassische Herleitung der Unschärfe zwischen Teilchenzahl- und Phasendifferenz

Hier soll die Unschärferelation zwischen der Teilchenzahl- n^- und der Phasendifferenz ϕ^- hergeleitet werden. Dabei wird die Phasendifferenz als klassische Größe betrachtet.

Beweis. Für den Kommutator der Komponenten des verallgemeinerten Blochvektors gilt:

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad . \quad (\text{A.8})$$

Daraus ergibt sich die Unschärferelation:

$$\Delta \hat{J}_i \Delta \hat{J}_j \geq \frac{1}{2} \langle \hat{J}_k \rangle \quad . \quad (\text{A.9})$$

Außerdem gilt $\langle \hat{J}^2 \rangle = j(j+1)$ mit $j = n^+/2$. In Kugelkoordinaten kann der Blochvektor auch geschrieben werden als

$$\langle \vec{\hat{J}} \rangle = j \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi^- \\ \sin \theta \cos \phi^- \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

wobei ϕ^- der Phasendifferenz der Zwei-Moden-Fock-Basis entspricht. Im weiteren wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass der Blochvektor entlang der J_y -Richtung zeigt und daher $\langle \hat{J}_x \rangle = 0$ gilt. Daraus folgen die Gleichungen:

$$\Delta \hat{J}_x \Delta \hat{J}_z = j [(\Delta \sin \theta) \sin \phi^- + \sin \theta (\Delta \sin \phi^-)] \Delta \hat{J}_z \quad (\text{A.11})$$

$$= j \sin \theta (\Delta \sin \phi^-) \langle \hat{J}_z \rangle \quad (\text{A.12})$$

$$\langle \hat{J}_y \rangle = j \sin \theta \cos \phi^- \quad (\text{A.13})$$

$$(\text{A.14})$$

Für die Unschärferelation aus Gleichung (A.9) ergibt sich dann:

$$j \sin \theta (\Delta \sin \phi^-) \langle \hat{J}_z \rangle \geq \frac{1}{2} j \sin \theta \cos \phi^- \quad (\text{A.15})$$

$$\Delta \sin \phi^- \Delta \hat{J}_z \geq \frac{1}{2} \cos \phi^- \quad (\text{A.16})$$

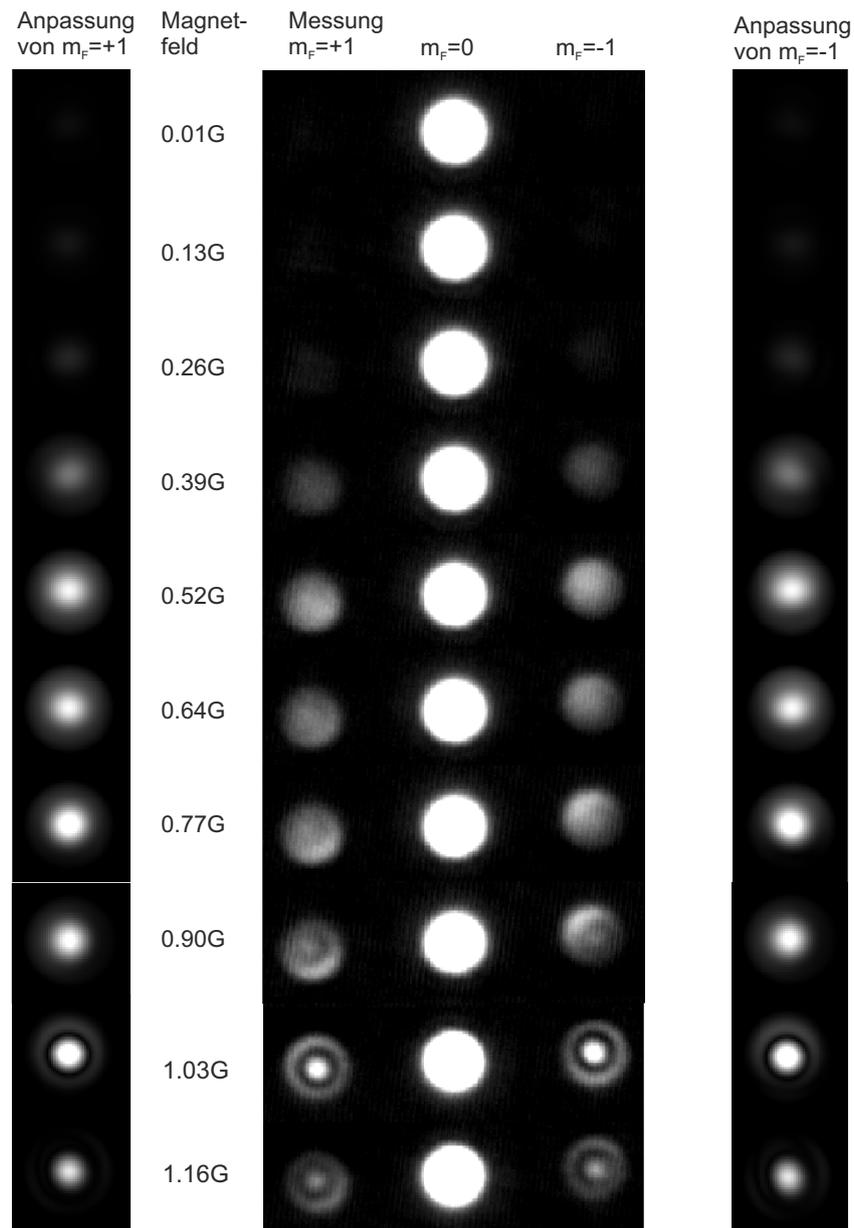
Mit der Kleinwinkelnäherung $\sin \phi^- \approx \phi^-$, $\cos \phi^- \approx 1$ und $\langle \hat{J}_z \rangle = n^-/2$ wird daraus:

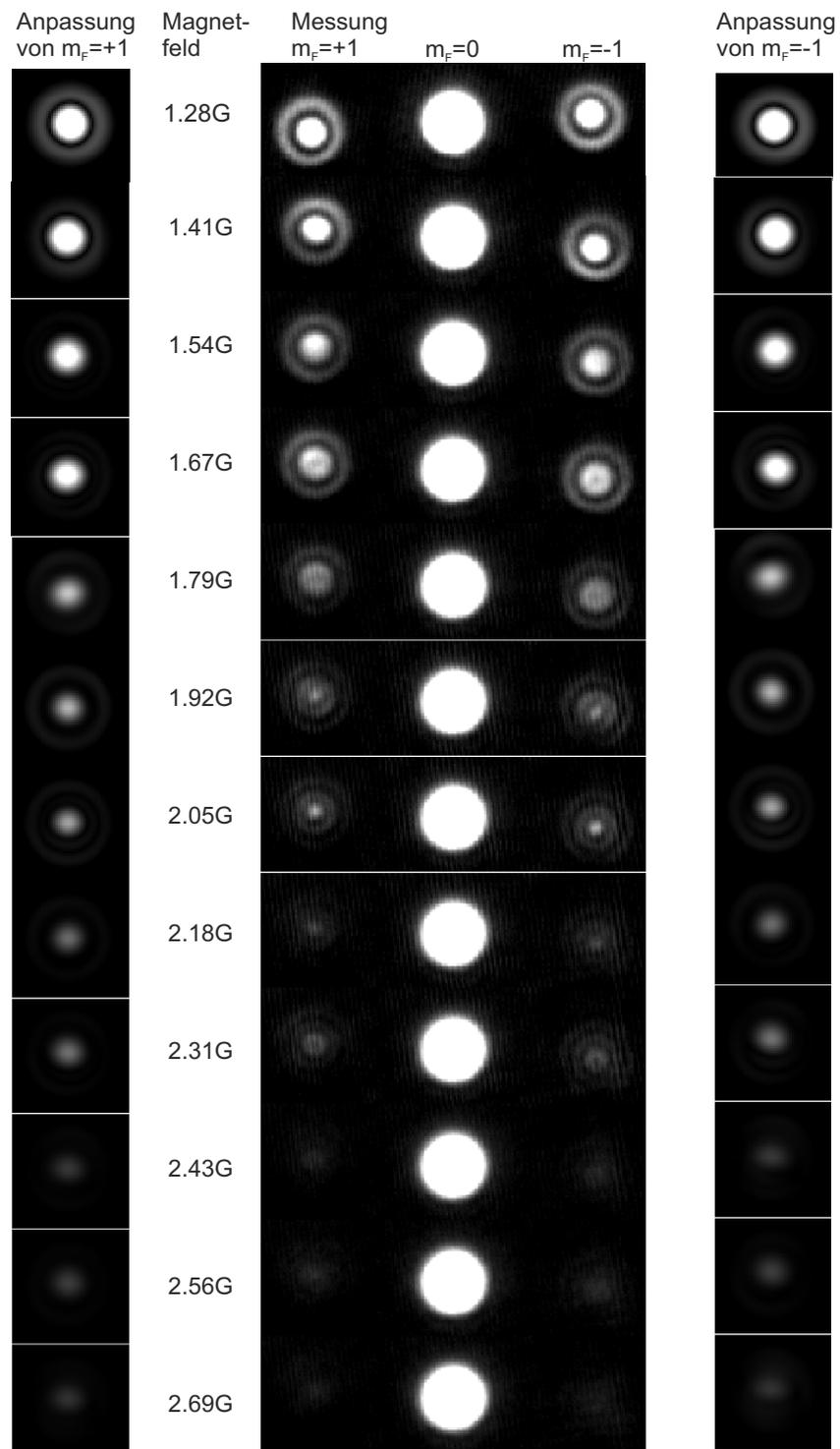
$$\Delta \phi^- \Delta n^- \geq 1 \quad (\text{A.17})$$

□

A.3 Gemittelte Dichteverteilungen der zylindrischen Falle

Hier sind alle gemittelten Dichteverteilung für die unterschiedlichen Messpunkte des Resonanzgraphen in Abbildung 4.5 gezeigt. Zusätzlich sind die gemittelte Anpassungen nach Gleichung (5.1) dargestellt, die zur Erstellung der Abbildung 5.6 gedient haben.





LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PLANCK, MAX: *Ueber irreversible Strahlungsvorgänge.*
Ann. Phys., 306(1):69–122, 1900.
- [2] HEISENBERG, W.: *Über quantentheoretische Kinematik und Mechanik.*
Mathematische Annalen, 95:683–705, 1926.
10.1007/BF01206633.
- [3] BORN, M. und P. JORDAN: *Zur Quantenmechanik.*
Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 34(1):858–888, Dezember 1925.
- [4] BORN, M., W. HEISENBERG und P. JORDAN: *Zur Quantenmechanik. II.*
Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 35(8):557–615, 1926-08-01.
- [5] SCHRÖDINGER, E.: *Quantisierung als Eigenwertproblem.*
Annalen der Physik, 384(6):489–527, 1926.
- [6] BORN, MAX: *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge.*
Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 37(12):863–867, 1926-12-01.
- [7] BOHR, N.: *Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik.*
Naturwissenschaften, 16(15):245–257, 1928-04-01.
- [8] HEISENBERG, W.: *Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen
Kinematik und Mechanik.*
Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, 43(3):172–198, 1927-03-01.
- [9] EINSTEIN, A., B. PODOLSKY und N. ROSEN: *Can quantum-mechanical de-
scription of physical reality be considered complete?*
Phys. Rev., 47(10):777–780, May 1935.
- [10] SCHRÖDINGER, E.: *Discussion of Probability Relations between Separated
Systems.*
Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 31:555–
563, 1935.
- [11] BELL, J. S.: *On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox.*
Physics, 1:195, 1964.

-
- [12] CLAUSER, JOHN F., MICHAEL A. HORNE, ABNER SHIMONY und RICHARD A. HOLT: *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories*.
Phys. Rev. Lett., 23:880–884, Oct 1969.
- [13] CLAUSER, J F und A SHIMONY: *Bell's theorem. Experimental tests and implications*.
Reports on Progress in Physics, 41(12):1881–, 1978.
- [14] MAIMAN, T. H.: *Stimulated Optical Radiation in Ruby*.
Nature, 187(4736):493–494, August 1960.
- [15] GERRY, C. C. und P.L. KNIGHT: *Introductory Quantum Optics*.
Cambridge University Press, 2005.
- [16] FREEDMAN, STUART J. und JOHN F. CLAUSER: *Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories*.
Phys. Rev. Lett., 28:938–941, Apr 1972.
- [17] ASPECT, ALAIN, JEAN DALIBARD und GÉRARD ROGER: *Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers*.
Phys. Rev. Lett., 49(25):1804–1807, Dec 1982.
- [18] WEIHS, GREGOR, THOMAS JENNEWEIN, CHRISTOPH SIMON, HARALD WEINFURTER und ANTON ZEILINGER: *Violation of Bell's Inequality under Strict Einstein Locality Conditions*.
Phys. Rev. Lett., 81(23):5039–5043, Dec 1998.
- [19] GUSTAVSON, T. L., P. BOUYER und M. A. KASEVICH: *Precision Rotation Measurements with an Atom Interferometer Gyroscope*.
Phys. Rev. Lett., 78:2046–2049, Mar 1997.
- [20] CAMP, M. VAN, T. CAMELBEECK und P. RICHARD: *The FG5 absolute gravimeter: metrology and Geophysics*.
Physicalia Magazine (Journal of the Belgian Physical Society), 25(3):161–174, 2003.
- [21] EINSTEIN, A.: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*.
Ann. Phys., 354(7):769–822, 1916.
- [22] FRITSCHER, P. und THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION: *LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*.
Reports on Progress in Physics, 72(7):076901–, 2009.
- [23] GROTE, H und THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION: *The GEO 600 status*.
Classical and Quantum Gravity, 27(8):084003–, 2010.
- [24] WALLS, D. F.: *Squeezed states of light*.
Nature, 306(5939):141–146, November 1983.

-
- [25] YUEN, HORACE P.: *Two-photon coherent states of the radiation field.*
Phys. Rev. A, 13:2226–2243, Jun 1976.
- [26] YURKE, BERNARD, SAMUEL L. MCCALL und JOHN R. KLAUDER: *SU(2) and SU(1,1) interferometers.*
Phys. Rev. A, 33(6):4033–4054, Jun 1986.
- [27] KIM, TAESOO, OLIVIER PFISTER, MURRAY J. HOLLAND, JAEWOO NOH und JOHN L. HALL: *Influence of decorrelation on Heisenberg-limited interferometry with quantum correlated photons.*
Phys. Rev. A, 57(5):4004–4013, May 1998.
- [28] WU, LING-AN, H. J. KIMBLE, J. L. HALL und HUIFA WU: *Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion.*
Phys. Rev. Lett., 57:2520–2523, Nov 1986.
- [29] SCHNABEL, R. und THE LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION: *A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit.*
Nature Physics, 7:962–965, 2011.
- [30] BROGLIE, LOUIS DE: *Waves and Quanta.*
Nature, 112:540, 1923.
- [31] BROGLIE, LOUIS VICTOR PIERRE RAYMOND DE: *Recherches sur la théorie des quanta.*
Dissertation, Paris Univ., 1924.
- [32] RAMSEY, NORMAN F.: *A New Molecular Beam Resonance Method.*
Phys. Rev., 76(7):996, Oct 1949.
- [33] BORDÉ, CH.J.: *Atomic interferometry with internal state labelling.*
Physics Letters A, 140(1-2):10–12, September 1989.
- [34] ESSEN, L. und J. V. L. PARRY: *An Atomic Standard of Frequency and Time Interval: A Caesium Resonator.*
Nature, 176(4476):280–282, August 1955.
- [35] CLEMENCE, G. M.: *Definition of the Second of Time.*
Nature, 176(4495):1230–1230, Dezember 1955.
- [36] WYNANDS, R und S WEYERS: *Atomic fountain clocks.*
Metrologia, 42(3):S64–, 2005.
- [37] MCGUIRK, J. M., G. T. FOSTER, J. B. FIXLER, M. J. SNADDEN und M. A. KASEVICH: *Sensitive absolute-gravity gradiometry using atom interferometry.*
Phys. Rev. A, 65:033608, Feb 2002.
- [38] ANGELIS, M DE, A BERTOLDI, L CACCIAPUOTI, A GIORGINI, G LAMPORESI, M PREVEDELLI, G SACCOROTTI, F SORRENTINO und G M TINO: *Precision gravimetry with atomic sensors.*

- Measurement Science and Technology, 20(2):022001, 2009.
- [39] MÜLLER, T., M. GILOWSKI, M. ZAISER, P. BERG, CH. SCHUBERT, T. WENDRICH, W. ERTMER und E. M. RASEL: *A compact dual atom interferometer gyroscope based on laser-cooled rubidium*.
The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics, 53(3):273–281, Juni 2009.
- [40] CHU, STEVEN: *Nobel Lecture: The manipulation of neutral particles*.
Rev. Mod. Phys., 70:685–706, Jul 1998.
- [41] COHEN-TANNOUJDI, CLAUDE N.: *Nobel Lecture: Manipulating atoms with photons*.
Rev. Mod. Phys., 70:707–719, Jul 1998.
- [42] PHILLIPS, WILLIAM D.: *Nobel Lecture: Laser cooling and trapping of neutral atoms*.
Rev. Mod. Phys., 70:721–741, Jul 1998.
- [43] APPEL, J., P. J. WINDPASSINGER, D. OBLAK, U. B. HOFF, N. KJÆRGAARD und E. S. POLZIK: *Mesoscopic atomic entanglement for precision measurements beyond the standard quantum limit*.
Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(27):10960–10965, 2009.
- [44] SCHLEIER-SMITH, M. H., I. D. LEROUX und V. VULETIĆ: *States of an Ensemble of Two-Level Atoms with Reduced Quantum Uncertainty*.
Phys. Rev. Lett., 104:073604, Feb 2010.
- [45] CHEN, Z., J. G. BOHNET, S. R. SANKAR, J. DAI und J. K. THOMPSON: *Conditional Spin Squeezing of a Large Ensemble via the Vacuum Rabi Splitting*.
Phys. Rev. Lett., 106:133601, Mar 2011.
- [46] SEWELL, R. J., M. KOSCHORRECK, M. NAPOLITANO, B. DUBOST, N. BEHBOOD und M. W. MITCHELL: *Spin-squeezing of a large-spin system via QND measurement*.
ArXiv e-prints, November 2011.
- [47] KUBASIK, M., M. KOSCHORRECK, M. NAPOLITANO, S. R. DE ECHANIZ, H. CREPAZ, J. ESCHNER, E. S. POLZIK und M. W. MITCHELL: *Polarization-based light-atom quantum interface with an all-optical trap*.
Phys. Rev. A, 79:043815, Apr 2009.
- [48] EINSTEIN, A.: *Quantentheorie des idealen einatomigen Gases*.
Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. Bericht, 22:261, 1924.
- [49] EINSTEIN, A.: *Quantentheorie des idealen einatomigen Gases II*.
Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl. Bericht, 3:18, 1925.

- [50] BOSE, S.: *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*.
Z. Phys., 26(1):178–181, 1924.
- [51] CORNELL, E. A. und C. E. WIEMAN: *Nobel Lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments*.
Rev. Mod. Phys., 74(3):875–893, Aug 2002.
- [52] KETTERLE, WOLFGANG: *Nobel lecture: When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*.
Rev. Mod. Phys., 74(4):1131–1151, Nov 2002.
- [53] ZOEST, T. VAN, N. GAALOUL, Y. SINGH, H. AHLERS, W. HERR, S. T. SEIDEL, W. ERTMER, E. RASEL, M. ECKART, E. KAJARI, S. ARNOLD, G. NANDI, W. P. SCHLEICH, R. WALSER, A. VOGEL, K. SENGSTOCK, K. BONGS, W. LEWOCZKO-ADAMCZYK, M. SCHIEMANGK, T. SCHULDT, A. PETERS, T. KÖNEMANN, H. MÜNTINGA, C. LÄMMERZAHN, H. DITTUS, T. STEINMETZ, T. W. HÄNSCH und J. REICHEL: *Bose-Einstein Condensation in Microgravity*.
Science, 328(5985):1540–1543, Juni 2010.
- [54] TINO, G.M., L. CACCIAPUOTI, K. BONGS, CH.J. BORDÉ, P. BOUYER, H. DITTUS, W. ERTMER, A. GÖRLITZ, M. INGUSCIO, A. LANDRAGIN, P. LEMONDE, C. LAMMERZAHN, A. PETERS, E. RASEL, J. REICHEL, C. SALOMON, S. SCHILLER, W. SCHLEICH, K. SENGSTOCK, U. STERR und M. WILKENS: *Atom interferometers and optical atomic clocks: New quantum sensors for fundamental physics experiments in space*.
Nuclear Physics B - Proceedings Supplements, 166(0):159–165, April 2007.
- [55] DIMOPOULOS, SAVAS, PETER W. GRAHAM, JASON M. HOGAN, MARK A. KASEVICH und SURJEET RAJENDRAN: *Gravitational wave detection with atom interferometry*.
Physics Letters B, 678(1):37–40, Juli 2009.
- [56] PETRICH, W., M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER und E. A. CORNELL: *Stable, Tightly Confining Magnetic Trap for Evaporative Cooling of Neutral Atoms*.
Physical Review Letters, 74(17):3352–3355, 1995.
- [57] ADAMS, CHARLES S., HEUN JIN LEE, NIR DAVIDSON, MARK KASEVICH und STEVEN CHU: *Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap*.
Phys. Rev. Lett., 74:3577–3580, May 1995.
- [58] ESTÉVE, J., C. GROSS, A. WELLER, S. GIOVANAZZI und M. K. OBERTHALER: *Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate*.
Nature, 455(7217):1216–1219, Oktober 2008.
- [59] GROSS, C., T. ZIBOLD, E. NICKLAS, J. ESTÉVE und M. K. OBERTHALER: *Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit*.

- Nature, 464(7292):1165–1169, April 2010.
- [60] RIEDEL, M. F., P. BÖHI, Y. LI, T. W. HÄNSCH, A. SINATRA und P. TREUTLEIN: *Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology*.
Nature, 464(7292):1170–1173, April 2010.
- [61] STENGER, J., S. INOUE, D. M. STAMPER-KURN, H.-J. MIESNER, A. P. CHIKKATUR und W. KETTERLE: *Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates*.
Nature, 396(6709):345–348, 1998.
- [62] LÜCKE, B., M. SCHERER, J. KRUSE, L. PEZZÉ, F. DEURETZBACHER, P. HYLLUS, O. TOPIC, J. PEISE, W. ERTMER, J. ARLT, L. SANTOS, A. SMERZI und C. KLEMPT: *Twin Matter Waves for Interferometry Beyond the Classical Limit*.
Science, 334(6057):773–776, November 2011.
- [63] BOOKJANS, EVA M., CHRISTOPHER D. HAMLEY und MICHAEL S. CHAPMAN: *Strong Quantum Spin Correlations Observed in Atomic Spin Mixing*.
Phys. Rev. Lett., 107:210406, Nov 2011.
- [64] HAMLEY, C. D., C. S. GERVING, T. M. HOANG, E. M. BOOKJANS und M. S. CHAPMAN: *Spin-Nematic Squeezing in a Quantum Gas*.
ArXiv e-prints, November 2011.
- [65] GROSS, C., H. STROBEL, E. NICKLAS, T. ZIBOLD, N. BAR-GILL, G. KURIZKI und M. K. OBERTHALER: *Atomic homodyne detection of continuous-variable entangled twin-atom states*.
Nature, advance online publication:–, November 2011.
- [66] KLEMPT, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS und J. J. ARLT: *Multiresonant Spinor Dynamics in a Bose-Einstein Condensate*.
Phys. Rev. Lett., 103(19):195302, Nov 2009.
- [67] KLEMPT, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS und J. J. ARLT: *Parametric Amplification of Vacuum Fluctuations in a Spinor Condensate*.
Phys. Rev. Lett., 104(19):195303, May 2010.
- [68] SCHERER, M., B. LÜCKE, G. GEBREYESUS, O. TOPIC, F. DEURETZBACHER, W. ERTMER, L. SANTOS, J. J. ARLT und C. KLEMPT: *Spontaneous Breaking of Spatial and Spin Symmetry in Spinor Condensates*.
Phys. Rev. Lett., 105(13):135302, Sep 2010.
- [69] HO, TIN-LUN: *Spinor Bose condensates in optical traps*.
Phys. Rev. Lett., 81(4):742–745, Jul 1998.

- [70] OHMI, TETSUO und KAZUSHIGE MACHIDA: *Bose-Einstein condensation with internal degrees of freedom in alkali atom gases.*
Journal of the Physical Society of Japan, 67(6):1822–1825, 1998.
- [71] PU, H. und P. MEYSTRE: *Creating macroscopic atomic Einstein-Podolsky-Rosen states from Bose-Einstein condensates.*
Phys. Rev. Lett., 85(19):3987–3990, Nov 2000.
- [72] KOASHI, MASATO und MASAHITO UEDA: *Exact Eigenstates and Magnetic Response of Spin-1 and Spin-2 Bose-Einstein Condensates.*
Physical Review Letters, 84(6):1066–1069, Feb 2000.
- [73] BURKE, JAMES P., CHRIS H. GREENE und JOHN L. BOHN: *Multichannel Cold Collisions: Simple Dependences on Energy and Magnetic Field.*
Physical Review Letters, 81(16):3355–3358, Oct 1998.
- [74] KLAUSEN, NILLE N., JOHN L. BOHN und CHRIS H. GREENE: *Nature of spinor Bose-Einstein condensates in rubidium.*
Physical Review A, 64(5):053602, Oct 2001.
- [75] KEMPEN, E. G. M. VAN, S. J. J. M. F. KOKKELMANS, D. J. HEINZEN und B. J. VERHAAR: *Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments.*
Physical Review Letters, 88:093201, Feb 2002.
- [76] UEDA, M. und Y. KAWAGUCHI: *Spinor Bose-Einstein condensates.*
ArXiv e-prints, Januar 2010.
- [77] LESLIE, S. R., J. GUZMAN, M. VENGALATTORE, JAY D. SAU, MARVIN L. COHEN und D. M. STAMPER-KURN: *Amplification of fluctuations in a spinor Bose-Einstein condensate.*
Phys. Rev. A, 79(4):043631, 2009.
- [78] MIESNER, H.-J., D. M. STAMPER-KURN, J. STENGER, S. INOUE, A. P. CHIKKATUR und W. KETTERLE: *Observation of metastable states in spinor Bose-Einstein condensates.*
Phys. Rev. Lett., 82:2228–2231, 1999.
- [79] SCHMALJOHANN, H., M. ERHARD, J. KRONJÄGER, M. KOTTKE, S. VAN STAA, L. CACCIAPUOTI, J. J. ARLT, K. BONGS und K. SENGSTOCK: *Dynamics of $F = 2$ spinor Bose-Einstein condensates.*
Phys. Rev. Lett., 92:040402, 2004.
- [80] TOJO, S., A. TOMIYAMA, M. IWATA, T. KUWAMOTO und T. HIRANO: *Collision dynamics between stretched states of spin-2 ^{87}Rb Bose-Einstein condensates.*
Applied Physics B: Lasers and Optics, 93(2):403–407, November 2008.

- [81] CHANG, M.-S., C. D. HAMLEY, M. D. BARRETT, J. A. SAUER, K. M. FORTIER, W. ZHANG, L. YOU und M. S. CHAPMAN: *Observation of spinor dynamics in optically trapped ^{87}Rb Bose-Einstein condensates.* Phys. Rev. Lett., 92(14):140403, Apr 2004.
- [82] KUWAMOTO, T., K. ARAKI, T. ENO und T. HIRANO: *Magnetic field dependence of the dynamics of ^{87}Rb spin-2 Bose-Einstein condensates.* Phys. Rev. A, 69(6):063604, Jun 2004.
- [83] BLACK, A. T., E. GOMEZ, L. D. TURNER, S. JUNG und P. D. LETT: *Spinor dynamics in an antiferromagnetic spin-1 condensate.* Phys. Rev. Lett., 99(7):070403, 2007.
- [84] STAMPER-KURN, D. M., H.-J. MIESNER, A. P. CHIKKATUR, S. INOUE, J. STENGER und W. KETTERLE: *Quantum tunneling across spin domains in a Bose-Einstein condensate.* Phys. Rev. Lett., 83:661–665, 1999.
- [85] SADLER, L. E., J. M. HIGBIE, S. R. LESLIE, M. VENGALATTORE und D. M. STAMPER-KURN: *Spontaneous symmetry breaking in a quenched ferromagnetic spinor Bose-Einstein condensate.* Nature, 443(7109):312–315, September 2006.
- [86] KRONJÄGER, JOCHEN, CHRISTOPH BECKER, PARVIS SOLTAN-PANAHI, KAI BONGS und KLAUS SENGSTOCK: *Spontaneous Pattern Formation in an Antiferromagnetic Quantum Gas.* Phys. Rev. Lett., 105(9):090402, Aug 2010.
- [87] VENGALATTORE, M., S. R. LESLIE, J. GUZMAN und D. M. STAMPER-KURN: *Spontaneously modulated spin textures in a dipolar spinor Bose-Einstein condensate.* Phys. Rev. Lett., 100(17):170403, 2008.
- [88] VENGALATTORE, M., J. GUZMAN, S. R. LESLIE, F. SERWANE und D. M. STAMPER-KURN: *Periodic spin textures in a degenerate $F = 1$ ^{87}Rb spinor Bose gas.* Phys. Rev. A, 81:053612, May 2010.
- [89] BOOKJANS, E. M., A. VINIT und C. RAMAN: *Quantum Phase Transition in an Antiferromagnetic Spinor Bose-Einstein Condensate.* Phys. Rev. Lett., 107:195306, Nov 2011.
- [90] KIBBLE, T. W. B.: *Topology of cosmic domains and strings.* J. Phys. A, 9(8):1387, 1976.
- [91] TUROK, NEIL und JOHN ZADROZNY: *Dynamical generation of baryons at the electroweak transition.* Phys. Rev. Lett., 65(19):2331–2334, Nov 1990.

- [92] CHUANG, I., R. DURRER, N. TUROK und B. YURKE: *Cosmology in the Laboratory: Defect Dynamics in Liquid Crystals*.
Science, 251(4999):1336–1342, 1991.
- [93] ZUREK, W. H.: *Cosmological experiments in superfluid Helium?*
Nature, 317(6037):505–508, 1985.
- [94] PRATT, JOHN W.: *F. Y. Edgeworth and R. A. Fisher on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation*.
Annals of Statistics, 4(3):501–514, 1976.
- [95] BRAUNSTEIN, SAMUEL L. und CARLTON M. CAVES: *Statistical distance and the geometry of quantum states*.
Phys. Rev. Lett., 72:3439–3443, May 1994.
- [96] PEZZÉ, LUCA und AUGUSTO SMERZI: *Entanglement, Nonlinear Dynamics, and the Heisenberg Limit*.
Phys. Rev. Lett., 102:100401, Mar 2009.
- [97] ZHANG, WENXIAN, SU YI und LI YOU: *Mean field ground state of a spin-1 condensate in a magnetic field*.
New Journal of Physics, 5(1):77–, 2003.
- [98] ZHANG, WENXIAN, D. L. ZHOU, M.-S. CHANG, M. S. CHAPMAN und L. YOU: *Dynamical instability and domain formation in a spin-1 Bose-Einstein condensate*.
Phys. Rev. Lett., 95(18):180403, Oct 2005.
- [99] LAMACRAFT, AUSTEN: *Quantum quenches in a spinor condensate*.
Phys. Rev. Lett., 98(16):160404, 2007.
- [100] KLEMP, C., O. TOPIC, M. SCHERER, T. HENNINGER, G. GEBREYESUS, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS und J. ARLT: *Resonant amplification of quantum fluctuations with a spinor gas*.
In: *2009 Conference on Lasers & Electro-Optics Europe & 11th European Quantum Electronics Conference (CLEO/EQEC)*, Seite 1 pp., Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE.
2009 Conference on Lasers & Electro-Optics Europe & 11th European Quantum Electronics Conference (CLEO/EQEC), 14-19 June 2009, Munich, Germany.
- [101] TOPIC, O., M. SCHERER, G. GEBREYESUS, T. HENNINGER, P. HYLLUS, C. KLEMP, W. ERTMER, L. SANTOS und J. J. ARLT: *Resonant amplification of quantum fluctuations in a spinor gas*.
Laser Physics, Volume 20, Number 5(5):1156–1162, 2010.
- [102] KLEMP, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS und J. ARLT: *Observation of vacuum fluctuations in a spinor Bose-Einstein condensate*.

- In: KATORIA, H., H. YONEDA, K. NAKAGAWA und F. SHIMIZU (Herausgeber): *Proceedings of the 29th International Conference on Laser Spectroscopy*, Seiten 39–48, Singapore, Singapore, 2010. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- XIX International Conference on Laser Spectroscopy, 7-12 June 2009, Kushiro, Hokkaido, Japan.
- [103] TOPIC, OLIVER: *Resonante Spindynamik in Bose-Einstein-Kondensaten*. Dissertation, Leibniz Universität Hannover, 2010.
- [104] HAGOSS, GEBREMEDHN GEBREYESUS: *Parametric Amplification in Spinor Bose-Einstein Condensates*. Dissertation, Leibniz Universität Hannover, 2010.
- [105] DEURETZBACHER, F.: *private Kommunikation*. Handschriftliche Notizen, 2011.
- [106] HOLLAND, M. J. und K. BURNETT: *Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit*. Phys. Rev. Lett., 71:1355–1358, Aug 1993.
- [107] BIGELOW, NICHOLAS: *Bose-Einstein condensates: Spins mixed up*. Nature Phys., 1(2):89–90, November 2005.
- [108] DALFOVO, FRANCO, STEFANO GIORGINI, LEV P. PITAEVSKII und SANDRO STRINGARI: *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys., 71(3):463–512, Apr 1999.
- [109] KRONJÄGER, J., C. BECKER, M. BRINKMANN, R. WALSER, P. NAVEZ, K. BONGS und K. SENGSTOCK: *Evolution of a spinor condensate: Coherent dynamics, dephasing, and revivals*. Phys. Rev. A, 72(6):063619, Dec 2005.
- [110] KRONJÄGER, J., C. BECKER, P. NAVEZ, K. BONGS und K. SENGSTOCK: *Magnetically tuned spin dynamics resonance*. Phys. Rev. Lett., 97(11):110404, 2006.
- [111] KETTERLE, W., D.S. DURFEE und D.M. STAMPER-KURN: *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*. In: *In Bose-Einstein condensation in atomic gases, Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi", Course CXL*, 1999.
- [112] SAITO, HIROKI, YUKI KAWAGUCHI und MASAHITO UEDA: *Breaking of Chiral Symmetry and Spontaneous Rotation in a Spinor Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett., 96(6):065302, Feb 2006.
- [113] BARNETT, STEPHEN M. und D. T. PEGG: *Quantum theory of optical phase correlations*. Phys. Rev. A, 42(11):6713–6720, Dec 1990.

-
- [114] PEGG, D. T. und S. M. BARNETT: *Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field.*
Phys. Rev. A, 39(4):1665–1675, Feb 1989.
- [115] BARNETT, S.M. und D.T. PEGG: *On the Hermitian Optical Phase Operator.*
Journal of Modern Optics, 36(1):7–19, 1989.
- [116] CAMPOS, RICHARD A., BAHAA E. A. SALEH und MALVIN C. TEICH: *Quantum-mechanical lossless beam splitter: $SU(2)$ symmetry and photon statistics.*
Phys. Rev. A, 40:1371–1384, Aug 1989.
- [117] LALOË, F. und W. MULLIN: *Quantum Properties of a Single Beam Splitter.*
Foundations of Physics, OnlineFirst:1–15, 2011.
- [118] PEZZÉ, L., A. SMERZI, G. KHOURY, J. F. HODELIN und D. BOUWMEESTER: *Phase Detection at the Quantum Limit with Multiphoton Mach-Zehnder Interferometry.*
Phys. Rev. Lett., 99:223602, Nov 2007.
- [119] HONG, C. K., Z. Y. OU und L. MANDEL: *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference.*
Phys. Rev. Lett., 59:2044–2046, Nov 1987.
- [120] ALKEMADE, C. TH. J.: *Single-Atom Detection.*
Appl. Spectrosc., 35(1):1–14, Januar 1981.
- [121] ÖTTL, ANTON, STEPHAN RITTER, MICHAEL KÖHL und TILMAN ESSLINGER: *Correlations and Counting Statistics of an Atom Laser.*
Phys. Rev. Lett., 95:090404, Aug 2005.
- [122] TEPER, IGOR, YU-JU LIN und VLADAN VULETIĆ: *Resonator-Aided Single-Atom Detection on a Microfabricated Chip.*
Phys. Rev. Lett., 97:023002, Jul 2006.
- [123] BÜCKER, R, A PERRIN, S MANZ, T BETZ, CH KOLLER, T PLISSON, J ROTTMANN, T SCHUMM und J SCHMIEDMAYER: *Single-particle-sensitive imaging of freely propagating ultracold atoms.*
New Journal of Physics, 11(10):103039–, 2009.
- [124] BAKR, WASEEM S., JONATHON I. GILLEN, AMY PENG, SIMON FOLLING und MARKUS GREINER: *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice.*
Nature, 462(7269):74–77, November 2009.
- [125] SHERSON, JACOB F., CHRISTOF WEITENBERG, MANUEL ENDRES, MARC CHENEAU, IMMANUEL BLOCH und STEFAN KUHR: *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator.*
Nature, 467(7311):68–72, September 2010.

- [126] BAYES, T: *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*.
Phil. Trans. Roy. Soc., 53:370–418, 1764.
- [127] CRAMÉR, HARALD: *Mathematical methods of statistics*.
Princeton University Press, Princeton, 1999.
- [128] RAO, CALYAMPUDI RADHAKRISHNA: *Selected papers of C. R. Rao 1*.
Wiley [u.a.], New York [u.a.], 1994.
- [129] ECKERT, K., P. HYLLUS, D. BRUSS, U. V. POULSEN, M. LEWENSTEIN,
C. JENTSCH, T. MÜLLER, E. M. RASEL und W. ERTMER: *Differential
atom interferometry beyond the standard quantum limit*.
Phys. Rev. A, 73(1):013814, Jan 2006.
- [130] ROWE, D. J., H. DE GUISE und B. C. SANDERS: *Asymptotic limits of $SU(2)$
and $SU(3)$ Wigner functions*.
J. Math. Phys., 42(5):2315–2342, 2001.
- [131] MORIZUR, J.-F., S. ARMSTRONG, N. TREPS, J. JANOUSEK und H.-A.
BACHOR: *Spatial reshaping of a squeezed state of light*.
The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma
Physics, 61(1):237–239, Januar 2011.
- [132] KLEMP, C., T. VAN ZOEST, T. HENNINGER, O. TOPIC, E. RASEL,
W. ERTMER und J. ARLT: *Ultraviolet light-induced atom desorption for
large rubidium and potassium magneto-optical traps*.
Phys. Rev. A, 73:13410, 2006.
- [133] KLEMP, C., T. HENNINGER, O. TOPIC, J. WILL, ST. FALKE, W. ERTMER
und J. ARLT: *Transport of a quantum degenerate heteronuclear Bose-
Fermi mixture in a harmonic trap*.
Eur. Phys. J. D, 48:121, 2008.
- [134] HENNINGER, T.: *Ultrakalte heteronukleare Feshbach Moleküle*.
Dissertation, Leibniz Universität Hannover, 2008.
- [135] KLEMP, C.: *Wechselwirkung in Bose-Fermi-Quantengasen*.
Dissertation, Leibniz Universität Hannover, 2007.
- [136] WILL, J.: *Realisierung einer magneto-optischen Falle für ^{41}K* .
Diplomarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2007.
- [137] KULOSA, A. P.: *Aufbau eines Lasersystems zur Detektion und Manipulation
von Atomen*.
Staatsexamensarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2009.
- [138] KATTNER, L.: *Detection and Stabilization of ultracold Feshbach-Molecules*.
Masterarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2008.

- [139] KLEMPT, C., T. HENNINGER, O. TOPIC, J. WILL, W. ERTMER, E. TIEMANN und J. ARLT: *KRb Feshbach resonances: Modeling the interatomic potential*.
Phys. Rev. A, 76:020701, 2007.
- [140] KLEMPT, C., T. HENNINGER, O. TOPIC, M. SCHERER, L. KATTNER, E. TIEMANN, W. ERTMER und J. J. ARLT: *Radio-frequency association of heteronuclear Feshbach molecules*.
Phys. Rev. A, 78(6):061602, 2008.
- [141] HAPPER, WILLIAM: *Optical Pumping*.
Rev. Mod. Phys., 44:169–249, Apr 1972.
- [142] LEWANDOWSKI, H. J., D. M. HARBER, D. L. WHITAKER und E. A. CORNELL: *Simplified System for Creating a Bose-Einstein Condensate*.
J. Low Temp. Phys., 132(5):309–367, 2003.
- [143] ESSLINGER, TILMAN, IMMANUEL BLOCH und THEODOR W. HÄNSCH: *Bose-Einstein condensation in a quadrupole-Ioffe-configuration trap*.
Phys. Rev. A, 58(4):R2664–R2667, Oct 1998.
- [144] KETTERLE, WOLFGANG und N.J. VAN DRUTEN: *Evaporative Cooling of Trapped Atoms*.
In: BEDERSON, BENJAMIN und HERBERT WALTHER (Herausgeber): *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Band 37 der Reihe *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Seiten 181 – 236. Academic Press, 1996.
- [145] GRIMM, R., M. WEIDEMÜLLER und Y. B. OVCHINNIKOV: *Optical dipole traps for neutral atoms*.
Adv. At. Mol. Opt. Phys., 42:95, 2000.
- [146] GERLACH, W. und O. STERN: *Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld*.
Zeitschrift für Physik, 9:349–352, Dezember 1922.
- [147] CASTIN, Y. und R. DUM: *Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps*.
Phys. Rev. Lett., 77(27):5315–5319, Dec 1996.
- [148] KAGAN, YU., E. L. SURKOV und G. V. SHLYAPNIKOV: *Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential*.
Phys. Rev. A, 54(3):R1753–R1756, Sep 1996.
- [149] CORDES, KAI, OLIVER TOPIC, MANUEL SCHERER, CARSTEN KLEMPT, BODO ROSENHAHN und J/ÖRN OSTERMANN: *Classification of Atomic Density Distributions Using Scale Invariant Blob Localization*.
In: KAMEL, MOHAMED und AURÉLIO CAMPILHO (Herausgeber): *Image*

- Analysis and Recognition*, Band 6753 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 161–172. Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
10.1007/978-3-642-21593-3_17.
- [150] ERHARD, MICHAEL: *Experimente mit mehrkomponentigen Bose-Einstein-Kondensaten*.
Dissertation, Universität Hamburg, 2004.
- [151] KRONJÄGER, JOCHEN: *Coherent Dynamics of Spinor Bose-Einstein Condensates*.
Dissertation, Universität Hamburg, 2007.
- [152] OCKELOEN, C. F., A. F. TAUSCHINSKY, R. J. C. SPREEUW und S. WHITLOCK: *Detection of small atom numbers through image processing*.
Phys. Rev. A, 82:061606, Dec 2010.
- [153] PEISE, JAN: *Methoden zur Untersuchung von Dekohärenz und Frequenzverschiebungen in ultrakalten Atomen*.
Diplomarbeit, Leibnitz Universität Hannover, 2010.
- [154] REINAUDI, G., T. LAHAYE, Z. WANG und D. GUÉRY-ODELIN: *Strong saturation absorption imaging of dense clouds of ultracold atoms*.
Opt. Lett., 32(21):3143–3145, Nov 2007.
- [155] LAMBERT, J.H.: *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae (Photometry, or, On the measure and gradations of light, colors, and shade)*.
Augsburg (Augusta Vindelicorum), 1760.
- [156] BEER: *Bestimmung der Absorption des rothen Lichts in farbigen Flüssigkeiten*.
Ann. Phys., 162(5):78–88, 1852.
- [157] STECK, D.A.: *Rubidium 87 D line data*.
Tech. report, Los Alamos National Laboratory,, 2001.
available online at <http://steck.us/alkalidata> (revision 2.1.4, 23 December 2010).
- [158] JIN, D. S., J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN und E. A. CORNELL: *Collective Excitations of a Bose-Einstein Condensate in a Dilute Gas*.
Phys. Rev. Lett., 77(3):420–423, Jul 1996.
- [159] CAMPARO, J. C. und R. P. FRUEHOLZ: *Parameters of adiabatic rapid passage in the 0-0 hyperfine transition of ^{87}Rb* .
Physical Review A, 30(2):803–811, 1984.
- [160] MARTIN, A. G., K. HELMERSON, V. S. BAGNATO, G. P. LAFYATIS und D. E. PRITCHARD: *rf Spectroscopy of Trapped Neutral Atoms*.
Physical Review Letters, 61(21):2431–2434, 1988.

- [161] RABI, I. I., S. MILLMAN, P. KUSCH und J. R. ZACHARIAS: *The Molecular Beam Resonance Method for Measuring Nuclear Magnetic Moments. The Magnetic Moments of ${}^6_3\text{Li}$, ${}^7_3\text{Li}$ and ${}^{19}_9\text{F}$* .
Phys. Rev., 55:526–535, Mar 1939.
- [162] LEVITT, MALCOLM H.: *Composite pulses*.
Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy, 18(2):61 – 122, 1986.
- [163] BREIT, G. und I. I. RABI: *Measurement of Nuclear Spin*.
Phys. Rev., 38(11):2082–2083, 1931.
- [164] RAMSEY, NORMAN F.: *Experiments with separated oscillatory fields and hydrogen masers*.
Rev. Mod. Phys., 62:541–552, Jul 1990.
- [165] WALKER, N. G. und J. E. CARROLL: *Multipoint homodyne detection near the quantum noise limit*.
Optical and Quantum Electronics, 18(5):355–363, September 1986.
- [166] SCHMIED, ROMAN und PHILIPP TREUTLEIN: *Tomographic reconstruction of the Wigner function on the Bloch sphere*.
New Journal of Physics, 13(6):065019–, 2011.
- [167] EFRON, B und RJ TIBSHIRANI: *An introduction to the bootstrap*.
Chapman & Hall, New York, 1993.
- [168] ALBERS, HENNING: *Eine Leistungsstabilisierte Mikrowellenquelle für die Atominterferometrie*.
Bachelorarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2011.
- [169] PEZZE, L. und A. SMERZI: *Ultrasensitive Atomic clock with single-mode number-squeezing*.
ArXiv e-prints, April 2010.
- [170] KULAS, SASCHA: *Lasersysteme zur Präparation und Manipulation ultrakalter Ensembles für die Atominterferometrie*.
Masterarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2011.
- [171] DREYER, ROUVEN: *Aufbau einer Absolutfrequenzstabilisierung für ein Raman-Lasersystem*.
Bachelorarbeit, Leibniz Universität Hannover, 2011.
- [172] BERGAMINI, SILVIA, BENOÎT DARQUIÉ, MATTHEW JONES, LIONEL JACUBOWIEZ, ANTOINE BROWAEYS und PHILIPPE GRANGIER: *Holographic generation of microtrap arrays for single atoms by use of a programmable phase modulator*.
J. Opt. Soc. Am. B, 21(11):1889–1894, November 2004.
- [173] BOYER, V., R. M. GODUN, G. SMIRNE, D. CASSETTARI, C. M. CHANDRASHEKAR, A. B. DEB, Z. J. LACZIK und C. J. FOOT: *Dynamic manipulation of Bose-Einstein condensates with a spatial light modulator*.

- Phys. Rev. A, 73:031402, Mar 2006.
- [174] GAUNT, A. L und Z. HADZIBABIC: *Robust Optical Sculpting For Manipulating Ultracold Atoms*.
ArXiv e-prints, November 2011.
- [175] DUAN, L.-M., A. SØRENSEN, J. I. CIRAC und P. ZOLLER: *Squeezing and entanglement of atomic beams*.
Phys. Rev. Lett., 85(19):3991–3994, Nov 2000.
- [176] DÖRING, D, J. E. DEBS, N. P. ROBINS, C. FIGL, P. A. ALTIN und J. D. CLOSE: *Ramsey interferometry with an atom laser*.
Opt. Express, 17(23):20661–20668, Nov 2009.
- [177] ROBINS, NICHOLAS P., CRISTINA FIGL, MATTHEW JEPPESEN, GRAHAM R. DENNIS und JOHN D. CLOSE: *A pumped atom laser*.
Nat Phys, 4(9):731–736, September 2008.
- [178] DÖRING, D., G. R. DENNIS, N. P. ROBINS, M. JEPPESEN, C. FIGL, J. J. HOPE und J. D. CLOSE: *Pulsed pumping of a Bose-Einstein condensate*.
Phys. Rev. A, 79:063630, Jun 2009.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

2.1	Spinändernder Stoß	8
2.2	Anschaulische Darstellung der Zusammenhänge zwischen spinändernden Stößen, dem quadratischen Zeemaneffekt und den Energieniveaus des externen Potentials	9
2.3	Effektives Potential	13
2.4	Eigenfunktionen des 1D-Kastenpotentials	15
2.5	Simulierte Dichteverteilung des zylindrischen 2D-Kastenpotentials	17
2.6	Superpositionen der Drehimpulsmoden des zylindrischen 2D-Kastenpotentials	18
2.7	Instabilitätsraten	22
2.8	Korrelationsfunktionen 1	25
2.9	Korrelationsfunktionen 2	26
2.10	Phasenintervall	30
2.11	Phasensummen	31
2.12	Blochkugel	34
2.13	Zustände auf Blochkugel	34
2.14	Interferometersequenz	36
2.15	Rotationen auf der Blochkugel	37
2.16	Interferometersequenz auf der Blochkugel	40
2.17	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	42
2.18	Theoretische Ausgangssignale $\langle \hat{J}_z \rangle$ eines Interferometers	43
2.19	Theoretisches Ausgangssignal $\langle \hat{J}_z^2 \rangle_{ZF}$ des Interferometers mit dem Zwillings-Fock-Zustand	44
2.20	Vergleich der theoretischen Ausgangssignale	45
2.21	Sensitivität	47
2.22	Sensitivität und Steigung	48
2.23	Wahrscheinlichkeitsverteilungen des Zwillings-Fock-Zustands	50
2.24	Verlauf der Sensitivität für unterschiedliche Werte des Detektorrauschen	53
2.25	Einfluss mehrerer Potentialmoden und Saatatome auf das Interferometersignal des Zwillings-Fock-Zustands	55

3.1	Vakuumsystem	58
3.2	Detektion der räumlichen Strukturen	61
3.3	Detektion der nichtklassischen Zustände	63
3.4	Atomwolken in Falschfarben	64
3.5	Vergleich der Detektionssysteme	64
3.6	Messung zur Bestimmung der effektiven Sättigungsintensität	66
3.7	Dipolfalle	67
3.8	Mögliche Potentiale der Dipolfallen	68
3.9	Fallenfrequenzmessung	70
3.10	Bewegung des Schwerpunktes bei einer Fallenfrequenzmessung	71
3.11	Fallenfrequenzmessung im Hauptachsensystem	72
3.12	Mögliche Justagefehler der Dipolfalle	73
3.13	Fallenfrequenzen und Winkel der stärksten Fallenrichtungen für eine festgelegte Justage	74
3.14	adiabatische Passagen	76
3.15	Radiofrequenzaufbau für die schnelle adiabatische Passage	76
3.16	Mikrowellenaufbau für die schnelle adiabatische Passage	77
3.17	Kompositpuls	80
3.18	Aufbau zur Erzeugung der Mikrowellenpulse 1	81
3.19	Aufbau zur Erzeugung der Mikrowellenpulse 2	82
3.20	Mikrowellenspektroskopie und Rabifrequenz	84
3.21	Präparationssequenz	85
3.22	Präparationssequenz mit entfernen der ungewünschten Atome durch Magnetfeldgradienten	86
3.23	Präparationssequenz mit Entfernen der Atome durch einen resonanten Laserpuls	87
3.24	Pulssequenz zur Realisierung des Strahlteilers	88
3.25	Skizze der verschiedenen Magnetspulenpaare	89
3.26	Eichkurven für die Kompensation der Offsetfelder	91
3.27	Messung zur Bestimmung des Magnetfeldrauschens und des Rauschens der Mikrowellenintensität	93
4.1	Zeitentwicklung des Transfers aller fünf Spinzustände für die zylindrische Falle	96
4.2	Zeitentwicklung der Standardabweichung des Transfers aller fünf Spinzustände für die zylindrische Falle	98
4.3	Zeitentwicklung des Transfers und der Standardabweichung in der elliptischen Falle	99
4.4	Verteilungen der Gesamtteilchenzahlen	99
4.5	Magnetfeldabhängigkeit der Spindynamik in der zylindrischen Falle	102
4.6	Magnetfeldabhängigkeit der Spindynamik in der elliptische Falle	103
4.7	Teilchenzahlabhängigkeit der Spindynamik	104

5.1	Gemessen räumliche Dichteprofile der Daten aus [66]	107
5.2	Entwicklung der Tripelstruktur	107
5.3	Gedrehte Orientierung der Tripelstruktur	108
5.4	Gemittelte Dichteverteilungen der zylindrischen Falle	109
5.5	Vergleich der gemittelten Absorptionenaufnahmen bei 0,77 G und 1,92 G	110
5.6	Wichtungen aus Anpassung an die Dichteverteilungen	111
5.7	Magnetisierung der gemittelten Bilder auf der $(1, \pm 1)$ -Resonanz . .	112
5.8	Sequenz zur Dichteoszillation der $(1,0),(1, \pm 1)$ -Superposition	113
5.9	Schwerpunktskoordinaten der $(1,0),(1,\pm 1)$ -Superposition in Abhän- gigkeit der Zeit	114
5.10	Einzelne Dichteverteilungen	115
5.11	Gemittelte Aufnahmen der Messung zur Symmetriebrechung	117
5.12	Typische Aufnahmen der Messung zur Symmetriebrechung	118
5.13	Vergleich einer gemessenen mit der angepassten Dichteverteilung . .	119
5.14	Bestimmung der Orientierung der Wolken durch Berechnung des Quadrupolmoments	120
5.15	Vergleich der Methoden zur Winkelbestimmung	121
5.16	Winkelverteilungen	122
5.17	Standardabweichung der Verteilung der Winkeldifferenz	123
5.18	Spontan gebrochene lokale Magnetisierung der $(2, \pm 1)$ -Mode	123
6.1	Teilchenzahlen in $ 2, \pm 1\rangle$ nach Spindynamik und für die klassische Mischung gegeneinander aufgetragen	129
6.2	Histogramme der Teilchenzahldifferenzen	130
6.3	Rauschen der Teilchenzahldifferenzen gegen Gesamtteilchenzahl . .	131
6.4	Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Anfangsteil- chenzahl	132
6.5	Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Spindynamikzeit	134
6.6	Direkter Vergleich Abhängigkeit der reduzierten Fluktuationen von der Spindynamikzeit	135
6.7	Verhalten absoluten und der relativen Fluktuationen des nichtklas- sischen Zustandes nach Anwenden eines 2π -Pulses	136
6.8	Verhalten der Teilchenzahlen und Histogramm der Differenzen nach anwenden des Strahlteilers mit unterschiedlichen Winkeln θ	137
6.9	Verhalten der Standardabweichung $\sigma J_z/J$ in Abhängigkeit des Ro- tationswinkel θ	138
6.10	Verhalten der Standardabweichung $\sigma J_z/J$ in Abhängigkeit des Ro- tationswinkel θ in der zylindrischen Falle	139
6.11	Relativen Besetzung nach $\pi/2$ -Strahlteilerpuls für unterschiedliche Spindynamikzeiten	140

6.12	Verhalten der Standardabweichung nach einem $\pi/2$ -Strahlteilerpuls in Abhängigkeit der Dauer der Spindynamik.	141
6.13	Erwartungswert $\langle J_z^2 \rangle$ und Varianz $\langle \Delta(J_z^2)^2 \rangle$ in Abhängigkeit der Phase für kleine Winkel	143
6.14	Phasenunsicherheit relativ zum Schrotrauschlimit in Abhängigkeit der Phase	144
7.1	Interferometersequenz eines nichtklassischen Magnetometers	146
7.2	Relative Standardabweichung $\sigma_{J_z}/\sigma_{J_{z,SR}}$ aufgetragen gegen unterschiedliche Frequenzen und unterschiedliche Zeiten des Strahlteilerpulses	147
7.3	1. Möglichkeit zur Vermessung des Uhrenübergangs mit dem nichtklassischen Zustand	148
7.4	2. Möglichkeit zur Vermessung des Uhrenübergangs mit dem nichtklassischen Zustand	149
7.5	Raman-Übergang	150
7.6	1. Möglichkeit eines nichtklassischen Inertialsensors	151
7.7	2. Möglichkeit eines nichtklassischen Inertialsensors	152

DANKSAGUNG

Das Ende dieser Arbeit möchte ich dazu nutzen ein paar persönliche Worte an alle zu richten, die mich in den letzten Jahren begleitet und unterstützt haben. Ohne euch wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Wolfgang Ertmer und meinem Koreferenten Prof. Jan Arlt bedanken, die mir gemeinsam die Möglichkeit gegeben haben, meine Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik anzufertigen. Zudem haben sie dafür gesorgt, dass sich das Experiment weiterentwickeln konnte, indem für optimale Forschungsbedingung gesorgt haben und mit Rat und Tat zur Seite standen.

Ganz besonders möchte ich mich bei Dr. Carsten Klempt bedanken, der nach dem Weggang von Jan nach Dänemark meine Betreuung und die des Experiments als Gruppenleiter übernommen hat. Ich möchte mich dafür bedanken, dass er immer wieder neue Ideen und Lösungsvorschläge für die aktuellen Probleme und die Zukunft des Experiments hat. Zudem möchte ich ihm und Dr. Thorsten Henninger dafür danken, dass ich an einem perfekten Experiment anfangen durfte, welches in meiner bisherigen Zeit am Institut immer regelmäßig und ohne größere Schwierigkeiten BECs erzeugt hat. Dabei darf ich natürlich auch nicht Dr. Oliver Topić vergessen, der ebenfalls sehr viel zum Aufbau und dem Gelingen der Experimente beigetragen hat. Er hat mich freundlich als seinen Kollegen aufgenommen und es mir sehr leicht gemacht, mich im Experiment zurecht zu finden und mich in Hannover einzuleben. Die Zeit mit ihm innerhalb und außerhalb des Labors möchte ich nicht missen. Das Selbe gilt auch für meine Nachfolger Bernd Lücke und Jan Peise, mit denen nicht nur das Zusammenarbeiten sondern auch die Freizeit viel Spaß gemacht hat. Ich bin mir sicher, dass sie dafür sorgen werden, dass das Experiment weiterhin so tolle Ergebnisse liefert wie bisher.

Einen großen Dank geht auch an alle weiteren, die mehr oder weniger lang teils des KRb-Teams waren. Im einzelnen sind dies Dr. Jens Kruse, der uns einige Zeit als Postdoc begleitet und motiviert hat, sowie unser Masterrand Sascha Kulas, unser Examand Andre Kulosa und unseren Bachelorranden Christian Waltermann, Henning Albers, Rouven Dreyer.

Ganz besonders möchte ich mich auch bei unseren theoretischen Kooperations-

partnern bedanken. Da ist besonders Prof. Luis Santos zu nennen, der mit seinen Ideen eine neue Forschungsrichtung für unser Experiment angestoßen hat. Dazu gehört natürlich auch sein Team Dr. Frank Deuretzbacher, Dr. Phillip Hyllus und Dr. Garu Gebreyesus, die mit ihren Rechnungen sehr zu Verständnis der Experimente beigetragen haben. Weiter möchte ich mich bei Prof. Augusto Smerzi und Luca Pezzé bedanken, die uns bei der Bestimmung der Sensitivität des nichtklassischen Zustands unterstützt haben. Mit allen war es eine sehr schöne und angenehme Partnerschaft, die gezeigt hat, wie erfolgreiche die Zusammenarbeit zwischen Theorie und Experiment funktionieren kann.

Neben den Leuten, mit denen ich direkt zusammengearbeitet habe, möchte ich mich bei allen anderen aktuellen und ehemaligen Kollegen der Arbeitsgruppe bedanken. Da wäre zum einen das Mix-Team Dr. Georg Kleine-Büning und Johannes Will sowie das Team Chip bestehend aus Stefan Jöllenbeck, Jan Mahnke, Ilka Geisel und Manuela Hanke. Natürlich bedanke ich mich auch bei allen anderen Kollegen am Institut aus den Arbeitsgruppen von Prof. Ernst Rasel sowie Prof. Silke und Prof. Christian Ospelkaus. Sie sorgen stets für ein sehr gutes Arbeitsklima und man findet immer jemanden, der einem Helfen kann, wenn man mal nicht mehr weiter weis.

Nicht vergessen möchte ich hier die „Grundpfeiler“ des Instituts, die unverzichtbar sind. Dazu gehört die gesamte Verwaltung Frau Faber, Frau Hünitzsch und Frau Pfennig, Frau Ohlendorf, Frau Thiehle-Bode, Herr Dr. Scholz, Herrn Dr. Pfalz und Herren Dr. Barthold. Weiterhin ist da und unsere Elektroniker Dr. Knaak und das ganze Werkstattteam unter Leitung von Herrn Witzlau. Für meine Probleme und Projekte hatten sie immer ein offenes Ohr und vor allem eine freie Hand.

Außerdem möchte ich mich bei allen meinen Freunden danken, mit denen ich trotz der Entfernung immer in Kontakt geblieben bin. Zu guter letzt geht mein Dank an meine Familie, die mir das alles erst ermöglicht haben, die mir einen starken Rückhalt geben haben und mir immer mit Rat und Tat zur Seite stehen.

Danke!

Publikationsliste

- LÜCKE, B., M. SCHERER, J. KRUSE, L. PEZZÉ, F. DEURETZBACHER, P. HYLLUS, O. TOPIC, J. PEISE, W. ERTMER, J. ARLT, L. SANTOS, A. SMERZI UND C. KLEMPT:
Twin Matter Waves for Interferometry Beyond the Classical Limit.
Science, 334(6057):773-776, November 2011
- SCHERER, M., B. LÜCKE, G. GEBREYESUS, O. TOPIC, F. DEURETZBACHER, W. ERTMER, L. SANTOS, J. J. ARLT UND C. KLEMPT:
Spontaneous Breaking of Spatial and Spin Symmetry in Spinor Condensates.
Phys. Rev. Lett., 105(13):135302, Sep 2010
- CORDES, KAI, OLIVER TOPIC, MANUEL SCHERER, CARSTEN KLEMPT, BODO ROSENHAHN UND JÖRN OSTERMANN:
Classification of Atomic Density Distributions Using Scale Invariant Blob Localization.
In: Kamel, Mohamed und Aurélio Campilho (Herausgeber): Image Analysis and Recognition, Band 6753 der Reihe Lecture Notes in Computer Science, Seiten 161-172. Springer Berlin / Heidelberg, 2011. 10.1007/978-3-642-21593-3 17.
- TOPIC, O., M. SCHERER, G. GEBREYESUS, T. HENNINGER, P. HYLLUS, C. KLEMPT, W. ERTMER, L. SANTOS UND J. J. ARLT:
Resonant amplification of quantum fluctuations in a spinor gas.
Laser Physics, Volume 20, Number 5(5):1156-1162, 2010.
- KLEMPT, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS UND J. J. ARLT:
Parametric Amplification of Vacuum Fluctuations in a Spinor Condensate.
Phys. Rev. Lett., 104(19):195303, May 2010.
- KLEMPT, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS UND J. ARLT:
Observation of vacuum fluctuations in a spinor Bose-Einstein condensate.
In: Katoria, H., H. Yoneda, K. Nakagawa und F. Shimizu (Herausgeber): *Proceedings of the 29th International Conference on Laser Spectroscopy*, Seiten 39-48, Singapore, Singapore, 2010. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

- KLEMPPT, C., O. TOPIC, G. GEBREYESUS, M. SCHERER, T. HENNINGER, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS UND J. J. ARLT:
Multiresonant Spinor Dynamics in a Bose-Einstein Condensate
Phys. Rev. Lett., 103(19):195302, Nov 2009.
- KLEMPPT, C., O. TOPIC, M. SCHERER, T. HENNINGER, G. GEBREYESUS, P. HYLLUS, W. ERTMER, L. SANTOS UND J. ARLT:
Resonant amplification of quantum fluctuations with a spinor gas.
In: 2009 *Conference on Lasers & Electro-Optics Europe & 11th European Quantum Electronics Conference (CLEO/EQEC)*, Seite 1 pp., Piscataway, NJ, USA, 2009. IEEE.
- KLEMPPT, C., T. HENNINGER, O. TOPIC, M. SCHERER, L. KATTNER, E. TIEMANN, W. ERTMER UND J. J. ARLT:
Radio-frequency association of heteronuclear Feshbach molecules.
Phys. Rev. A, 78(6):061602, 2008.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Manuel Scherer
Geburtstag	23. April 1982
Geburtsort	Nastätten/RLP, Deutschland
Familienstand	Ledig, keine Kinder

Promotionsstudium

seit April 2008	Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik an der Leibniz Universität Hannover <i>Arbeitsgruppe:</i> Prof. Dr. Wolfgang Ertmer <i>Thema:</i> „Nichtklassische Zustände in Spinor-Bose-Einstein-Kondensaten“
-----------------	--

Studium

10/2002 - 03/2008	Studium der Physik an der Technischen Universität Darmstadt <i>Abschluss:</i> Diplom <i>Thema der Diplomarbeit:</i> „Aufbau eines Ramanlasersystems zur kohärenten Manipulation von ^{85}Rb für die Quanteninformation“ unter der Leitung von Prof. Dr. Gerhard Birkl
-------------------	--

Tätigkeiten

05/2002 - 07/2002	Aushilftätigkeit bei der Firma Schott Glas in Mainz
07/2002 - 09/2002	Industriepraktikum bei der Firma Hüller Hille GmbH Werk Hessap in Taunusstein

Zivildienst

07/2001 - 04/2002	Zivildienst im Seniorenzentrum Katzenelnbogen <i>Bereich:</i> „Freizeit und Betreuung“
-------------------	---

Schulabschluss

09/1998-06/2001	Peter-Paul-Cahensly Schule in Limburg, Berufliches Gymnasium mit Fachrichtung Elektrotechnik <i>Abschluss:</i> Abitur
1988-1998	Grund- und Realschule in Katzenelnbogen