Das quasistationäre Stefan-Problem mit variablen Relaxationskoeffizienten

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Math. M.Sc. Martin Lukarevski
geboren am 11.10.1979 in Skopje

2012

Referent: Prof. Dr. Elmar Schrohe
Korreferent: Prof. Dr. Joachim Escher
Tag der Promotion: 17.07.2012

Abstract

The Stefan problem is a particular kind of a free boundary problem which models phase transition phenomena, for example melting of ice and freezing of water. We study a one-phase quasistationary Stefan problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in}\,\Omega_t \\ V + \partial_\nu u &= 0 && \text{on}\,\Gamma_t \\ u &= aV + \kappa && \text{on}\,\Gamma_t \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0 \end{aligned}$$

The new point is that the relaxation coefficient a is a function and not a constant. We first assume that a is strictly positive. We obtain a short time solution in suitable Hölder spaces. Next we address the case $a \geq 0$ which turns out to be considerably more difficult. We also obtain a short time solution under the asumption that a result of Taira on the solvability of a degenerate boundary value problem extends in a appropriate way. We use techniques and results from the theory of abstract parabolic evolution equations, theory of maximal regularity, interpolation spaces, pseudodifferential operators and bounded H^∞-calculus.

`2010 Mathematics Subject Classification`: 35R35, 35B65, 35J70

`Keywords`: Stefan problem, free boundary problem, oblique derivative problem

Zusammenfassung

Das Stefan-Problem ist ein spezielles Problem mit freiem Rand, das Phänomene der Phasenübergänge modelliert, wie zum Beispiel das Schmelzen von Eis und die Erstarrung von Wasser. Wir studieren quasistationäres ein Einphasen-Stefan-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in}\, \Omega_t \\ V + \partial_\nu u &= 0 && \text{auf}\, \Gamma_t \\ u &= aV + \kappa && \text{auf}\, \Gamma_t \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0 \end{aligned}$$

Der neue Punkt ist, dass der Relaxationskoeffizient a eine Funktion und keine Konstante ist. Zunächst nehmen wir an, dass a strikt positiv ist. Wir erhalten eine Kurzzeitlösung in geeigneten Hölderräumen. Als nächstes betrachten wir den Fall $a \geq 0$, der sich als weit schwieriger herausstellt. Wir erhalten auch eine Kurzzeitlösung unter der Annahme, dass man ein Ergebnis von Taira über die Lösbarkeit von degenerierten Randwertprobleme in geeigneter Weise erweitern kann. Wir benutzen Techniken und Ergebnisse aus der Theorie der abstrakten parabolischen Evolutionsgleichungen, Theorie der maximalen Regularität, Interpolationsräume, Pseudodifferentialoperatoren und beschränkten H^∞-Kalkül.

`2010 Mathematics Subject Classification`: 35R35, 35B65, 35J70
`Schlagwörter`: Stefan-Problem, freies Randwertproblem, Obliqe Derivative Problem

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die Transformation der Materie war schon immer ein zentrales Problem vieler wissenschaftlicher Untersuchungen. In diesem Zusammenhang steht auch das Stefan-Problem. Das Stefan-Problem ist ein in seiner mathematischen Formulierung freies Randwertproblem, das die Phasenübergänge von Schmelzen und Erstarrung eines einkomponentigen Mediums in einem Zweiphasensystem aus Festkörper und Flüssigkeit modelliert. Ursprünglich hat der slowenische Mathematiker und Physiker Josef Stefan (1835-1893) ein Modell entworfen, das die Eisbildung im Polarmeer beschreibt (siehe [68], [69]). Nach ihm wird das Problem der Beschreibung solcher Vorgänge Stefan-Problem genannt. Für detaillierte historische Darstellungen der älteren Ergebnisse verweisen wir auf die Monographie [66]. Für die neuen Ergebnisse sind die Monographien [56], [75] und die Arbeiten [20], [64] lesenswert. Zum Stefan-Problem und freien Randproblemen existiert eine riesige Literatur. Das Problem, eine vollständige Bibliographie über Ergebnisse zum Stefan-Problem anzufertigen, scheint offen zu sein. Ein guter Versuch ist in [74] gemacht.
Zur Zeit $t = 0$ sei $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, das Gebiet in dem die flüssige Phase Ω_l und die feste Phase Ω_s enthalten sind. Die beiden Phasen sind durch den Rand Γ_0 getrennt. Mit dem zeitlichen Verlauf ändert sich das Gebiet und hat zur Zeit t die Form Ω_t mit dem Rand Γ_t, der unbekannt ist. Die Temperatur, die wir mit $u(x,t)$ bezeichnen, ist ebenfalls unbekannt. Wir betrachten die Phasenübergänge in einer endlichen Zeit, d.h. wir betrachten t in einem Interval $t \in [0, T]$ für $T > 0$. Es sollen also im Stefan-Problem der freie Rand Γ_t und die Temperatur u bestimmt werden. Als nächstes geben wir die Gleichungen, die von diesen unbekannten Größen erfüllt sind. Die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c_V \partial_t u = \lambda \Delta u \tag{1.1}$$

mit $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii}^2 u$, dem Laplaceoperator und der Massendichte ρ, ist in beiden Phasen erfüllt. Wir nehmen vereinfachend an, dass die Diffusionskonstante λ und die spezifi-

sche Wärmekapazität c_V konstant und insbesondere jeweils in beiden Phasen gleich sind. Eine weitere Annahme ist, dass die Diffusionskonstante λ groß ist. In diesem Fall ist $\frac{\rho c_V}{\lambda}$ klein und wir können die Zeitableitung in (1.1) vernachlässigen. Deswegen betrachten wir die Laplacegleichung $\Delta u = 0$. In diesem Zusammenhang spricht man von einem **quasistationären Stefan-Problem.**
Wenn die Temperatur in einer der beiden Phasen identisch konstant ist, dann spricht man von dem **Einphasen-Stefan-Problem**, obwohl es tatsächlich zwei Phasen gibt. Bei dem **Zweiphasen-Stefan-Problem** ist die Temperatur in den beiden Phasen unbekannt. Wir werden uns mit dem Einphasen-Stefan-Problem beschäftigen.
Welche Gleichungen sind aber nun an der Phasengrenze Γ_t zu fordern? Hier gibt es mehrere Möglichkeiten.
Im klassischen Stefan-Problem wird vorausgestzt, dass auf der Phasengrenze Γ_t immer Gleichgewicht herrscht, d.h. die Temperatur u auf Γ_t ist konstant und gleich der Schmelztemperatur u_s. Im Fall vom Schmelzen von Eis ist das einfach

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_t.$$

Dieses Modell geht davon aus, dass in der flüssigen Phase $u > u_s$ gilt und in der festen Phase $u < u_s$. Dann ist das Problem aber sehr einfach: Haben wir die Temperatur $u(t,x)$ gefunden, so ergeben sich die feste und flüssige Phase *a posteriori* als die Mengen

$$\Omega_s(t) = \{x : u(t,x) < u_s\}$$

und

$$\Omega_l(t) = \{x : u(t,x) > u_s\}.$$

Dieses ursprüngliche Modell ist aber vor allem aus thermodynamischer Sicht problematisch, da es keine metastabilen Zustände zulässt. Es ist nämlich durchaus möglich, Flüssigkeiten zu unterkühlen und Festkörper zu überhitzen. So kann zum Beispiel in der flüssigen Phase, die sich in der Nähe der Phasengrenze befindet, die Temperatur unterhalb der Schmelztemperatur liegen. Da die Temperatur an der Phasengrenze stetig ist, ist in diesem Fall auch $u < u_s$ auf Γ_t. Wenn keine Unterkühlung oder Überhitzung beim Schmelzen gewisser Stoffe stattfindet, dann gibt es außerdem eine Region der Phasengrenze, in der der Stoff weder vollkommen flüssig noch vollkommen fest ist. Diese Region befindet sich in einem breiartigen Zustand, das heißt, feste Teilchen sind in der Flüssigkeit enthalten oder umgekehrt, und wird "mushy region"genannt. Γ_t weist dann ein Inneres auf und kann in der mathematischen Modellierung nicht mehr als eine Hyperfläche betrachtet werden. Die Annahme der konstanten Phasengrenztemperatur ist also mathematisch bequem aber physikalisch unplausibel, und wir lassen sie weg. Mushy regions sind in der Arbeit [51] untersucht worden.
Die Existenz der lokalen klassischen Lösung für das eindimensionale Zweiphasen-Stefan-Problem ist in [16] gezeigt. Die multidimensionale Version hat Meirmanov 1979 in [57]

untersucht. Das gleiche Ergebnis hat Hanzawa [44] für das Einphasen-Problem mit einer Anwendung des Satzes von Nash-Moser von der Impliziten Funktion erhalten.
Die Beobachtung von "mushy regions"hat zu schwachen Formulierungen des Stefan-Problems geführt. S. Kamenomostskaja [46] und O. Oleinik [60] haben den Begriff der schwachen Lösung für das Stefan-Problem eingeführt und deren Eindeutigkeit und globale Existenz gezeigt. Darüber hinaus haben sie auch gezeigt, dass jede klassische Lösung notwendigerweise mit der schwachen Lösung übereinstimmt. A. Friedman [38] hat mit anderen Methoden (Maximumsprinzip) diese Ergebnisse verallgemeinert. Die Physiker waren sich allerdings uneinig, ob diese schwache Formulierung wirklich physikalisch sinnvoll ist.
Bereits die schwachen Lösungen sind eindeutig und nach dem Ergebnissen von S. Kamenomostskaja und O. Oleinik gilt das gleiche dann auch für die klassischen Lösungen. Wann sind aber die schwachen Lösungen klassisch? Mit dieser Frage, also mit der Regularität der Phasengrenze beschäftigt sich die Arbeit von D. Kinderlehrer und L. Nirenberg [47] von 1978. Nach einer von G. Duvaut [25] vorgeschlagenen Umformulierung des Problems in eine Variationsungleichung, und mit Anwendung von Ergebnisse über den freien Rand von elliptischen Variationsungleichungen von L. Caffarelli [11], haben die Autoren die Existenz klassischer Lösungen gezeigt. Weitere Resultate über die Regularität des freien Rands kann man in [12] finden.
Die Stetigkeit der Temperatur für das mehrdimensionale Einphasen-Stefan-Problem ist in [14] gezeigt und das gleiche Ergebnis für das Zweiphasen-Stefan-Problem in [13]. Als Folgerung der Stefanbedingung, die unten erklärt wird, ist der Gradient der Temperatur an der Phasengrenze unstetig, und daher ist die Duvaut-Transformation erforderlich um das Stefan-Problem in eine Variationsungleichung umzuwandeln.
Man könnte fälschlicherweise glauben, dass die Zufuhr beziehungsweise Abnahme von Wärmeenergie in ein physikalisches Zweiphasen-System immer zu Temperaturänderungen in den Phasen führe. Es gibt aber Situationen, in denen dem physikalischen System Wärmeenergie zugeführt oder entnommen wird, ohne dass dabei irgendeine Temperaturänderung beobachtet wird. Bei einer solchen Situation findet aber immer ein Phasenübergang statt, d.h. die Phasengrenze Γ_t ändert sich. Das Grundgesetz der Physik über die Energie, der sogenannte **Energieerhaltungssatz**, führt uns zu einer Gleichung an der Phasengrenze.
Sei ν das äußere normale Vektorfeld an Γ_t. Eine vernünftige Quantität, die die Bewegung von Γ_t beschreibt, ist die Normalgeschwindigkeit V, d.h. die Geschwindigkeit in Richtung von ν. Mit $\partial_\nu u$ bezeichnen wir die Normalableitung von $u(x,t)$. Physikalisch gut begründet ist die Bedingung

$$V + \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_t,$$

genannt **Stefanbedingung**. Diese Bedingung folgt aus dem Energieerhaltungssatz, dem Satz von Gauß und einem Transporttheorem.

Bei den Phasenübergängen spielt die Form der Phasengrenze eine wichtige Rolle. Die Kapillareffekte, die bei einer gekrümmten Phasengrenze auftreten, sind eigentlich der Grund dafür, dass die Temperatur an der Phasengrenze von der Schmelztemperatur abweichen kann. Die Phasenübergänge sind deswegen von der Geometrie des Gebiets abhängig, und diese Geometrie wird mathematisch durch die mittlere Krümmung κ dargestellt, die als Divergenz des äußeren Einheitsnormalenfelds gegeben ist

$$\kappa = \frac{1}{n-1} \nabla \cdot \nu$$

Nach der üblichen Konvention sei das Vorzeichen von κ so gewählt, dass $\kappa > 0$ gilt, wenn die Phasengrenze des Festkörpers konvex ist. Auf dem Rand wird die Gleichung $u = 0$ von der klassischen Formulierung des Stefan-Problems, durch die Gleichung

$$u = \sigma\kappa \quad \text{auf } \Gamma_t \tag{1.2}$$

ersetzt, wobei σ der Oberflächenspannungskoeffizient ist, welcher positiv ist. In diesem Fall ist die Positivität von σ keine Konvention mehr, sondern hat eine physikalische Begründung, auf die wir an dieser Stelle eingehen wollen. Im Laufe der Phasenübergänge gibt es eine beträchtliche Aktivität von Atomen auf der Phasengrenze zwischen dem Festkörper und der Flüssigkeit. Wenn die Oberfläche konvex ist, dann sind die Atome der Oberfläche von weniger benachbarten Atomen umgeben als im Fall einer flachen Oberfläche. Daher wird für einen Phasenübergang weniger Energie gebraucht, und der Phasenübergang findet bei einer niedrigeren Temperatur statt. Die Phasengrenztemperatur ist also kleiner als die Schmelztemperatur. Im Fall von Wasser und Eis ist also $u < 0$, und da nach Voraussetzung $\kappa < 0$ ist, muss $\sigma > 0$ in (1.2) sein. Das ist die Rechtfertigung für die Wahl des Vorzeichens von σ in (1.2). Diese Gleichung ist bekannt als **Gibbs-Thomson-Bedingung**. Als Kuriosum erwähnen wir, dass als einer der Namensgeber dieser Bedingung jeder von den drei Physikern William Thomson, der spätere Lord Kelvin, sein Bruder James Thomson und noch Joseph John Thomson genannt wird. Der amerikanische Physiker Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903) ist mehr bekannt für das Gibbsche Phänomen. Die Gibbs - Thomson Bedingung ist auch als die geometrische Wärmeleitungsgleichung bekannt. Eine Herleitung dieser Bedingung als Minimum eines Energiefunktionals ist in [75], S.162 gegeben. Das ist völlig im Einklang mit dem "Prinzip der kleinsten Wirkung"von Maupertuis, nach dem sich viele natürliche Vorgänge erklären lassen. Resultate über Existenz und Regularität von Lösungen für das Stefan-Problem mit der Gibbs-Thomson Bedingung können in [36], [63], [30], [53] gefunden werden.

Das verwandte quasistationäre Stefan-Problem mit Gibbs-Thomson-Bedingung ist unter vielen Namen bekannt: **Hele-Shaw-Problem** mit Oberflächenspannung alias **Mullins-Sekerka-Problem** alias **Muskat-Problem** alias... Die Liste ist höchstwahrscheinlich unvollständig. Das Einphasen-**Hele-Shaw-Problem** mit Oberflächenspannung kommt aus der Strömungsmechanik und beschreibt das Verhalten

von inkompressiblen viskosen Strömungen zwischen zwei eng benachbarten parallelen Flächen. In [30] ist die globale Existenz bewiesen, wenn Ω_0 in der Nähe einer Kugel ist. In der Arbeit ist auch die Stabilität der Equilibrien gezeigt. In [77] wird auch eine globale Lösung bewiesen unter Anwendung des Schauderschen Fixpunktsatzes. Weitere Arbeiten, die sich mit diesem Problem beschäftigen sind [37], [31], [32]. Das **Muskat-Problem** ist ein Zweiphasen-Freirandproblem, vorgeschlagen von Muskat in 1934, das die Bewegung von zwei unvermischbaren Fluiden in porösen Medien modelliert. Mullins und Sekerka haben in [59] ein Modell vorgeschlagen, das die Ostwald-Reifung bei Phasenübergängen von Materialien mit vernachlässigbaren spezifischen Wärmemengen beschreibt. Die Krümmung des freien Rands ist von Friedman und Jensen in [42] untersucht worden.
Eine weitere Randbedingung, die anstelle der Gibbs-Thomson-Bedingung in vielen Modellierungen vorkommt, ist

$$u = \alpha V \quad \text{auf } \Gamma_t.$$

Hier ist α eine positive Konstante, und in diesem Fall spricht man von Stefan-Problem mit **kinetischer Unterkühlung.** Ergebnisse lassen sich in [33], [34], [39], [52], [36], [37] finden.
Man kann natürlich die beiden Bedingungen auf dem freien Rand zugleich betrachten

$$u = \alpha V + \sigma\kappa$$

wie zum Beispiel in den Arbeiten [18], [63], [53].
Wenn von einer Lösung des Stefan-Problems die Rede ist, denkt man meistens an eine lokale Lösung, also eine Lösung auf einem endlichen Intervall $[0, T)$. Manchmal aber existieren Lösungen für jedes vorgegebene $T > 0$. Neben den schon erwähnten Arbeiten [30] und [77], in denen die Existenz einer globalen Lösung gezeigt wird, sei auch die Arbeit [50] erwähnt, in der zum ersten Mal der leistungsstarke Schaudersche Fixpunktsatz auf ein Stefan-Problem angewandt wird. Im allgemeinen besitzt das Stefan-Problem mit Gibbs-Thomson Bedingung aber keine globale Lösung [58]. Außerdem kann es bei den Lösungen zu einem blow-up der Phasengrenze $\Gamma(t)$ kommen (siehe [5]). Die Lösung $\Gamma(t)$ existiert für alle $t \in [0, T)$, aber

$$\lim_{t \to T} \|\Gamma(t)\|_{L^\infty} = +\infty.$$

Das Ziel unserer Arbeit ist, das Stefan-Problem mit einer Randbedingung zu untersuchen, mit der die Phasenübergänge gut modelliert werden. Die Phasengrenze im Stefan-Problem Γ_t ist vorausgesetzt als eine Hyperfläche, d.h. $\{\Gamma_t\}_{t \geq 0}$ ist eine evolvierende Familie von Hyperflächen in $\mathbb{R}^n$, die diese Phasengrenze darstellt. In vielen physikalischen Prozessen, bei denen die Oberflächenspannung eine wichtige Rolle spielt, wie bei dem Stefan-Problem, ist die Evolution der Bewegung gegeben durch eine Variation des **mittleren Krümmungsflusses**

$$V(x,t) = -\kappa(x,t).$$

Die Normalgeschwindigkeit in jedem Punkt der Phasengrenze ist gleich der mittleren Krümmung in diesem Punkt. Oft wird noch ein zusätzlicher Term zugefügt, der sogenannte "forcing term" f, der die inneren Kräfte darstellt

$$V(x,t) = -\kappa(x,t) + f(x,t).$$

Wir schlagen in dieser Arbeit eine allgemeinere Relaxierungsdynamik vor, die ähnlich zu dem Modell mit kinetischer Unterkühlung ist, den Koeffizienten α aber nicht als konstant voraussetzt. Es wird die Randbedingung

$$u = aV + \kappa \tag{1.3}$$

gestellt mit einer nicht negativen Funktion

$$a(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ a \geq 0.$$

1.0.1 Bemerkung. Es sei ausdrücklich bemerkt, dass in einem Teil dieser Arbeit die Funktion $a(x,t)$ auch verschwinden darf, im Gegensatz zu der üblichen Modellierung, wo sie als strikt positiv und von Null weg beschränkt vorausgesetzt wird.

Die Anfangsgeometrie Γ_0 ist vorgegeben. Dann haben wir das System aus vier Gleichungen

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in}\,\Omega_t \\ V + \partial_\nu u &= 0 && \text{auf}\,\Gamma_t \\ u &= aV + \kappa && \text{auf}\,\Gamma_t \\ \Gamma(0) &= \Gamma_0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Als Anfangsbedingung kommt noch die bekannte Hyperfläche Γ_0 dazu. Im Gegensatz zu den klassischen Randproblemen wie dem Dirichletproblem oder dem Neumannproblem, wo nur eine Randbedingung auftritt, haben wir im Stefan-Problem zwei Randbedingungen. Dies mag das System als überdeterminiert erscheinen lassen, ist aber nicht, da sich wegen der Bewegung der Phasengrenze ein weiterer Freiheitsgrad ergibt. Das Stefan-Problem ist also ein freies Randwertproblem. Zur Lösung wird es in ein Problem auf einem festen Gebiet D mit Rand Σ transformiert. Wir müssen noch eine Regularitätsvoraussetzung an Γ_0 machen, weil wir später fordern werden, dass sich der Rand Σ des Gebiets D lokal als Graph einer Funktion darstellen läßt. Für den Fall $a > 0$ fordern wir

$$\Gamma_0 \in C^{3,\alpha}$$

und arbeiten mit Hölderräumen. Für den Fall $a \geq 0$ entartet das Problem. Wir fordern

$$\Gamma_0 \in C^\infty$$

im Fall von Sobolevräumen. Im ersten Kapitel wird die präzise mathematische Definition von Gebieten dieser Klasse gegeben. Wir müssen eine höhere Regularität an das Gebiet voraussetzen, und nicht etwa $C^{2,\alpha}$. Es wird im ersten Kapitel klar werden warum.

In der Literatur existieren mehrere Resultate über die Konvergenz der Lösungen des Stefan-Problems gegen die Lösungen des quasistationären Stefan-Problems. Das heißt, wenn man in (1.4) die erste Gleichung durch die Wärmeleitungsgleichung $\varepsilon\partial_t u = \Delta u$ für ein kleines ε ersetzt, und noch die Anfangsbedingung $u(0,\cdot) = u_0$ in Ω_0 betrachtet, dann approximieren für $\varepsilon \to 0$ die Lösungen des Stefan-Problems die Lösungen von (1.4). Der asymptotische Zusammenhang zwischen verschiedenen Modellen wie Cahn-Hilliard, Allen-Cahn, Mullins-Sekerka, Gibbs-Thomson ist in [2], [79], [78], [15] untersucht. In [62] wird gezeigt, dass das Phasenfeldmodell gegen eine schwache Lösung des Stefan-Problems mit Oberflächenspannung konvergiert. Die Eindeutigkeit der Lösung ist nicht gezeigt. Eine Untersuchung des asymptotischen Verhalten des Stefan-Problems ist von Matano in [55] gemacht worden. Er hat bewiesen, dass nach einer endlichen Zeit jede schwache Lösungen klassisch wird und dass sich die Form des freien Randes für $t \to \infty$ der Form einer Sphäre nähert.

Der Aufbau der Arbeit ist wie folgt. In **Kapitel 2** wird das Stefan-Problem mittels der Hanzawa-Transformation in ein System von Gleichungen auf einem festen Gebiet transformiert. Je nachdem ob die Funktion a in (1.4) als nichtnegativ oder als strikt positiv vorausgesetzt wird, stellt ein Teil dieses Systems ein singuläres oder reguläres "Oblique Derivative Problem" dar. In diesem Kapitel wird noch die mittlere Krümmung behandelt und die geometrischen Eigenschaften des Modells abgeleitet. Im **Kapitel 3** wird das Stefan-Problem in Hölderräumen gestellt, unter der Annahme $a > 0$ in (1.4). Die Lösung des "Oblique Derivative Problem" gibt die unbekannte Temperatur im Stefan-Problem. Diese Lösung wird dann in die letzte Gleichung des Systems eingesetzt. Die resultierende Gleichung ist eine Evolutionsgleichung. Diese Evolutionsgleichung wird dann gelöst und damit schließlich auch das Stefan-Problem. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für quasilineare parabolische Evolutionsgleichungen gezeigt und dieser dann auf das Stefan-Problem angewandt. Die Existenz einer Zentrumsmannigfaltigkeit für die Evolutionsgleichung unter einer Annahme an dem Kommutator $[a^{1/2}\Lambda, a^{1/2}]$, mit Λ dem Dirichlet-Neumann Operator, wird im vierten Abschnitt gezeigt. In **Kapitel 4** wird das Stefan-Problem in Sobolevräumen gestellt. Dabei darf die Funktion a auch verschwinden. Wir erhalten hier Existenz und Eindeutigkeit einer Kurzzeitlösung unter der Annahme, dass ein Satz von Taira aus der Arbeit [71] sich in geeigneter Weise verallgemeinern lässt. Damit ist die Lösbarkeit des quasistationären Stefan-Problems auf die Lösbarkeit eines Randwertproblems zurückgeführt. Die Ergebnisse der beiden letzten Kapiteln benutzen im Wesentlichen Techniken und Begriffe aus der Theorie der maximalen Regularität, Interpolationsräume und Operatoren mit beschränkten Potenzen. Diesen ist der **Anhang** gewidmet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Elmar Schrohe für die Vergabe, die hilfsbereite Betreuung dieser Arbeit und für die vielen wertvollen Hinweise ganz herzlich bedanken. Herrn Prof. Dr. Joachim Escher danke ich für die Übernahme des Korreferats. Mein Dank gilt auch Frau Susanne Rudolph und Frau Natascha Krienen für ihre Hilfe bei vielen Angelegenheiten. Ich bedanke mich bei allen Kollegen des Instituts für Analysis und des Graduiertenkollegs für die angenehme Zusammenarbeit. Für die Finanzierung der Stelle im Graduiertenkolleg 1463 "Analysis, Geometry and String Theory" verdanke ich Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG). Für die große Unterstützung während meiner Promotionszeit bedanke ich mich bei meiner Familie.

Kapitel 2

Das quasistationäre Stefan-Problem als ein Problem mit freiem Rand

Wie bereits in der Einleitung bemerkt, ist das Stefan-Problem ein Problem mit freiem Rand. Es wird in ein Problem auf ein festes Gebiet transformiert. Wir folgen in diesem Kapitel der Darstellung in [48].

2.1 Die Transformation auf ein festes Gebiet

Es ist bequem, die Punkte von $\mathbb{R}^n$ mit (x', x_n) zu bezeichnen, wobei x' die Abkürzung für $(x_1, ..., x_{n-1})$ ist. Gebiete im Raum sind ein natürlicher Platz zur Untersuchungen verschiedener Probleme aus der Physik und unterschiedlicher Randwertprobleme. Die Regularität des Randes spielt dabei eine bedeutende Rolle und wird durch die folgende Definition präzisiert.

2.1.1 Definition. (**Gebiete der Klasse** $C^{m,\alpha}$) Das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt von der Klasse $C^{m,\alpha}$ ($\partial\Omega \in C^{m,\alpha}$), wenn es für jeden Randpunkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung U und eine Funktion $h \in C^{m,\alpha}(\mathbb{R}^{n-1})$ gibt, so dass nach geeigneter Umnumerierung der Koordinaten

$$\partial\Omega \cap U = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = h(x')\}$$

$$\Omega \cap U = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < h(x')\}$$

$$\overline{\Omega}^c \cap U = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > h(x')\}.$$

Die Gebiete der Klasse $C^{0,1}$ heißen auch Lipschitzgebiete.
Wir nehmen an, dass die Anfangshyperfläche $\Gamma_0 \in C^{3,\alpha}$ ist.

2.1.2 Bemerkung. Nach dieser Definition befindet sich das Gebiet Ω lokal nur auf einer Seite des Randes.
Gebiete werden häufig auch mit einer Funktion definiert.

2.1.3 Definition. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Die $C^{m,\alpha}$ Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $m \geq 1$, heißt **definierende Funktion** für Ω, wenn gilt

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\}$$

$$\overline{\Omega}^c = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) > 0\}$$

$$\nabla\rho \neq 0 \quad \text{für alle}\, x \in \partial\Omega.$$

Eine einfache aber sehr nützliche Beobachtung ist die folgende:

2.1.4 Bemerkung. Ein Gebiet Ω ist genau dann von der Klasse $C^{m,\alpha}$, wenn es eine definierende Funktion $\rho \in C^{m,\alpha}$ für Ω gibt. Man sagt dann auch, dass der Rand $\partial\Omega$ von der Klasse $C^{m,\alpha}$ sei.

Wir betrachten ein fixiertes, glattes und beschränktes Gebiet D in $\mathbb{R}^n$. Dann ist der Rand Σ von D eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$. Bezeichnet ν das äußere Einheitsnormalenfeld von Σ und X die Funktion

$$X : \Sigma \times (-c, c) \to \mathbb{R}^n$$
$$(p, d) \mapsto p + d\nu(p),$$

so ist klar, dass X für hinreichend kleines c ein Diffeomorphismus auf sein Bild $\mathrm{ran}X$ ist, d.h.

$$X \in \mathrm{Diff}^\infty(\Sigma \times (-c, c), \mathrm{ran}X).$$

Wir nehmen an, dass für hinreichend kleines $T > 0$ die Ränder Γ_t, $0 \leq t < T$, alle in $\mathrm{ran}X$ liegen.

2.1.5 Bemerkung. Für festes $p \in \Sigma$ stellt die Abbildung

$$d \mapsto X(p, d)$$

eine Gerade in $\mathbb{R}^n$ dar.

Wir wollen als nächstes Γ_t als Niveaufläche, also als Bild dieser Funktion X darstellen. Auch physikalisch ist es eine plausible Annahme, dass sich Γ für kleine t, als Graph über Σ in Normalenrichtung darstellen lässt. Wir können annehmen, dass es zu jedem $t \geq 0$ Distanzfunktionen ρ_t gibt,

$$\rho_t : \Sigma \to (-c, c)$$

so dass

$$\theta_{\rho_t} : \Sigma \to \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto p + \rho_t(p)\nu(p) \tag{2.1}$$

Diffeomorphismen auf $\mathrm{ran}(\theta_{\rho_t}) = \Gamma_t$ sind.

2.1.6 Bemerkung. Die Distanzfunktion ρ_t ist von derselben Regularität wie Γ_t ([43], Lemma 14.16).

Für $J := [0, T]$ sei

$$\rho : J \times \Sigma \to \mathbb{R}$$

$$(t, x) \mapsto \rho(t, x) = \rho_t(x).$$

Wegen

$$X(p, \rho_t(p)) = p + \rho_t(p)\nu(p) = \theta_{\rho_t}(p)$$

folgt

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : x = X(p, \rho(t, p)), \quad p \in \Sigma\}. \tag{2.2}$$

Insbesondere ist

$$\Gamma_0 = X(\Sigma, \rho(0, \Sigma)).$$

Man kann Γ_t auch als Nullstellenmenge einer Funktion darstellen. Sei

$$\Pi_\Sigma : \mathrm{ran}(X) \to \Sigma$$

die Projektion auf Σ, d.h. zu jedem $x \in \mathrm{ran}(X)$ gibt es ein eindeutiges $y \in \Sigma$ mit $\mathrm{dist}(x, \Sigma)$=$\mathrm{dist}(x, y)$. Diese Abbildung ist wohldefiniert, da nach Voraussetzung X ein Diffeomorphismus ist. Dann ist $\Pi_\Sigma(x) = y$. Den mit Vorzeichen versehene Abstand von $x \in \mathrm{ran}(X)$ zu Σ bezeichnen wir mit $\Lambda(x)$.

$$\Lambda : \mathrm{ran}(X) \to (-c, c)$$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \mathrm{dist}(x, \Sigma), & x \in \mathbb{R}^n \setminus D \\ -\mathrm{dist}(x, \Sigma), & x \in D. \end{cases}$$

2.1.7 Bemerkung. Es gilt

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(x) = 0\},$$

und Λ ist eine C^∞ Funktion, da nach Voraussetzung D ein glattes Gebiet ist.

Damit ist das Paar (Π_Σ, Λ) die Inverse des Diffeomorphismus X. Wir bemerken, dass $\Pi_\Sigma \circ \theta_{\rho_t} = \mathrm{Id}_\Sigma$ für alle $t \geq 0$, aber $(\theta_{\rho_t} \circ \Pi_\Sigma)(x) = x$ genau dann, wenn $x \in \Gamma_t$. Es gilt, dass $\Lambda(\theta_{\rho_t}(x)) = \rho_t(x)$ für alle $x \in \Sigma$. Dann ist für beliebiges $x \in \mathrm{ran}(X)$, $\Lambda(\theta_{\rho_t}(\Pi_\Sigma(x))) = \rho_t(\Pi_\Sigma(x))$ und wir haben die folgende Darstellung von Γ_t:

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(x) = \rho(t, \Pi_\Sigma(x))\}$$

2.1.8 Bemerkung. Wenn $\rho \equiv 0$ ist, dann ist $\Lambda(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also $\Gamma_t = \Sigma$, für alle $t \geq 0$. In diesem Fall findet keine Evolution statt, und das freie Randproblem (1.4) entartet in ein Problem mit festem Rand.

Mit der Einführung der Funktion

$$\begin{aligned} \phi_\rho &: J \times \mathrm{ran}(X) \to \mathbb{R}, \\ &(t, x) \mapsto \Lambda(x) - \rho(t, \Pi_\Sigma(x)) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ist klar, dass Γ_t die Nullstellenmenge der Funktion $\phi_\rho(t, x)$ ist:

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \phi_\rho(t, x) = 0\}. \tag{2.4}$$

Wir bemerken, dass aus der Niveaudarstellung (2.2) von Γ_t dann folgt

$$\phi_\rho(t, X(p, \rho(t, p))) = 0. \tag{2.5}$$

Diese Funktion ϕ_ρ hat einen nicht verschwindeden Gradienten.

2.1.9 Satz. *Für alle $(t, x) \in J \times ran(X)$ gilt*

$$\nabla_x \phi_\rho(t, x) \neq 0.$$

Beweis. Sei $p \in \Sigma$ mit $x = X(p, \rho_t(p)) = p + \rho_t(p)\nu(p)$, d.h. $\Pi_\Sigma(x) = p$. Wir rechnen aus

$$\begin{aligned} & \phi_\rho(t, x + h\nu(p)) - \phi_\rho(t, x) \\ = \; & \Lambda(x + h\nu(p)) - \rho_t(\Pi_\Sigma(x + h\nu(p))) - \Lambda(x) + \rho_t(\Pi_\Sigma(x)) \\ = \; & \rho_t(p) + h - \rho_t(p) - \rho_t(p) + \rho_t(p) \\ = \; & h \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \nu}\phi_\rho(t, x) \\ = \; & \lim_{h \to 0} \frac{\phi_\rho(t, x + h\nu(p)) - \phi_\rho(t, x)}{h} \\ = \; & \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

□

Folglich ist für einen Punkt $x \in \Gamma_t$ das Einheitsnormalenfeld $\nu(t, \cdot)$ in x auf Γ_t, mit einem $p \in \Sigma$, $x = X(p, \rho(t, p))$ gegeben durch

$$\nu(t, x) = \left. \frac{\nabla \phi_\rho(t, x)}{|\nabla \phi_\rho(t, x)|} \right|_{x = X(p, \rho(t, p))}. \tag{2.6}$$

Die mittlere Krümmung von Γ_t ist

$$\kappa(t, x) = \frac{1}{n-1} \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi_\rho(t, x)}{|\nabla \phi_\rho(t, x)|} \right). \tag{2.7}$$

Wir können alle Diffeomorphismen $\theta_{\rho_t} : \Sigma \to \mathbb{R}^n$, $0 \le t \le T$, zusammenfassen mit der Funktion

$$\theta_\rho : J \times \Sigma \to \mathbb{R}^n, \qquad (t, x) \mapsto \theta_{\rho_t}(x)$$

Um das Problem in ein Problem mit festem Rand umzuformulieren, müssen wir diese Randdiffeomorphismen auf $\Sigma = \partial D$ zu Diffeomorphismen auf dem ganzen Gebiet D fortsetzen. Dazu kann man die sogenannte Hanzawa Transformation [44] benutzen.

2.1.10 Satz. *Es existiert ein Diffeomorphismus $\Theta_{\rho_t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$\Theta_{\rho_t}|_\Sigma = \theta_{\rho_t}.$$

Beweis. Siehe [48]. □

Mit der Einführung der Funktion

$$\Theta_\rho : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \Theta_\rho(t,x) := \Theta_{\rho_t}(x)$$

können wir nun die transformierten Operatoren definieren.
Die Transformation des Laplace-Operators Δ bzgl. Θ_ρ, bezeichnet mit $\mathcal{A}(\rho)$, ist definiert durch

$$\mathcal{A}(\rho)(u \circ \Theta_\rho) := (\Delta u) \circ \Theta_\rho.$$

Setzen wir $v := u \circ \Theta_\rho$, dann ist $u = v \circ \Theta_\rho^{-1}$ und

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\rho)v &= \Delta(v \circ \Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho \\ &= \Theta_\rho^* \circ \Delta(v \circ \Theta_\rho^{-1}) \\ &= \Theta_\rho^* \circ \Delta \circ \Theta_*^\rho v\end{aligned}$$

wobei Θ_ρ^* und Θ_*^ρ die **pull back** und **push forward** Operatoren

$$\begin{aligned}\Theta_\rho^* &: C(\Gamma_t) \to C(\Sigma), \quad u \mapsto u \circ \Theta_\rho \\ \Theta_*^\rho &: C(\Sigma) \to C(\Gamma_t), \quad v \mapsto v \circ \Theta_\rho^{-1}\end{aligned}$$

sind. Analog dazu ist die Transformation $\mathcal{B}(\rho)$ der Ableitung in der Normalrichtung ∂_ν definiert durch

$$\mathcal{B}(\rho)(u \circ \Theta_\rho) := \partial_\nu u \circ \Theta_\rho.$$

Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\mathcal{B}(\rho)v = \Theta_\rho^* \circ \nabla \circ \Theta_*^\rho v \cdot \frac{\nabla \phi_\rho}{|\nabla \phi_\rho|}.$$

Wir führen die transformierte mittlere Krümmung $H(\rho)$ durch

$$H(\rho) := \kappa \circ \Theta_\rho$$

ein. Die Regularität der mittleren Krümmung $H(\rho)$ spielt für die Lösbarkeit des Problems eine entscheidende Rolle. Diese Regularität hängt von der Regularität der Fläche Σ ab.

2.1.11 Satz. *Die mittlere Krümmung $H(\rho)$ ist eine $C^{1,\alpha}(\Sigma)$ oder $W^{1,s}(\Sigma)$ Funktion, wenn die Fläche Σ von der entsprechenden Klasse $C^{3,\alpha}$ oder $W^{3,s}$ ist.*

Beweis. Das folgt aus der Bemerkung 2.1.4 und (2.7). □

Sei $x \in \Gamma_t$ und sei $s \in \Sigma$ mit $x = X(s, \rho_t(s))$. Dann ist die Normalgeschwindigkeit gegeben durch (siehe [48]),

$$V(t,x) = \frac{\partial_t \rho(t,s)}{|\nabla_x \phi_\rho(t,x)|}.$$

Wir führen die Funktion $L_\rho(t,s) := |\nabla_x \phi_\rho(t,x)|_{x=X(s,\rho(t,s))}$ ein, und bemerken, dass wegen Satz 2.1.9 $L_\rho(t,s)$ eine strikt positive Funktion ist. Jetzt kehren wir zurück zu den Gleichungen.
Äquivalent zum System (1.4) ist das System

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega_t \tag{2.8}$$
$$u + a\partial_\nu u = \kappa \quad \text{auf } \Gamma_t \tag{2.9}$$
$$V + \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma_t \tag{2.10}$$
$$\Gamma(0) = \Gamma_0. \tag{2.11}$$

Wir transformieren nun dieses System auf das feste Gebiet D. Mit $v := u \circ \Theta_\rho$, und $\delta = a \circ \Theta_\rho$, hat es die Form

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \quad \text{in } J \times D \tag{2.12}$$
$$v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = H(\rho) \quad \text{auf } J \times \Sigma \tag{2.13}$$
$$\partial_t \rho + L_\rho \mathcal{B}(\rho)v = 0 \quad \text{auf } J \times \Sigma \tag{2.14}$$
$$\rho(0) = \rho_0 \quad \text{auf } \Sigma \tag{2.15}$$

2.1.12 Bemerkung. Da Θ_ρ ein Diffeomorphismus ist, hat die Funktion δ dieselben Eigenschaften wie die Funktion a. Es gilt nämlich $\delta \in C^\infty(J \times \Sigma)$, $\delta \geq 0$.

Wir werden die Operatoren $\mathcal{A}(\rho)$ und $\mathcal{B}(\rho)$ genauer untersuchen und eine explizite Darstellung geben. Dafür müssen wir die Funktion ρ präzisieren und führen die folgende Bezeichnung ein

$$\mathcal{U} := \{\rho \in C^{3,\alpha}(\Sigma) : \|\rho\|_\infty \leq b\}.$$

2.1.13 Bemerkung. Wir haben das Gebiet D als ein Gebiet der Klasse $C^{3,\alpha}$ vorausgesetzt. Deswegen ist die randbeschreibende Funktion $\rho \in \mathcal{U}$ auch von derselben Klasse.

2.1.14 Satz. *Für jedes $\rho \in \mathcal{U}$, ist der Operator $\mathcal{A}(\rho)$ ein gleichmäßig elliptischer Operator, $\mathcal{A}(\rho) : C^{2,\alpha}(D) \to C^{0,\alpha}(D)$, und es gilt*

$$\mathcal{A}(\rho)v = \frac{1}{\sqrt{g(\rho)}} \sum_{i,j} \partial_j (g^{ij}(\rho)\sqrt{g(\rho)}\partial_i v)$$

mit

$$g_{ij}(\rho) = \langle \partial_i \Theta_\rho, \partial_j \Theta_\rho \rangle, \quad g(\rho) = \det(g_{ij}(\rho)), \quad (g^{ij}(\rho)) = (g_{ij}(\rho))^{-1}$$

$$\mathcal{A} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(C^{2,\alpha}(D), C^{0,\alpha}(D))).$$

Beweis. Der Operator $\mathcal{A}(\rho)$ ist der Laplace-Beltrami Operator und seine Darstellung ist bekannt. Wir schreiben

$$\mathcal{A}(\rho)v = \sum_{i,j} g^{ij}(\rho)\partial^2_{ij} v + \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{g(\rho)}} \sum_j \partial_j (g^{ij}(\rho)\sqrt{g(\rho)} \right) \partial_i v$$

oder äquivalent

$$\mathcal{A}(\rho)v = \sum_{i,j} a_{ij}(\rho)\partial^2_{ij} v + \sum_i a_i(\rho)\partial_i v$$

mit den Bezeichnungen $a_{ij}(\rho) := g^{ij}(\rho)$ und $a_i(\rho) := \frac{1}{\sqrt{g(\rho)}} \sum_j \partial_j (g^{ij}(\rho)\sqrt{g(\rho)}$.

$\square$

2.1.15 Bemerkung. Wegen $g_{ij}(\rho) = \langle \partial_i \Theta_\rho, \partial_j \Theta_\rho \rangle$ und $\Theta_\rho \in C^{3,\alpha}(D)$, gilt für die Koeffizienten des Operators $\mathcal{A}(\rho)$

$$a_{ij}(\rho) \in C^{2,\alpha}(D),\ a_i(\rho) \in C^{1,\alpha}(D).$$

2.1.16 Satz. *Für jedes $\rho \in \mathcal{U}$ ist der Operator $\mathcal{B}(\rho)$ ein Randoperator,*

$$\mathcal{B}(\rho) : C^{2,\alpha}(D) \to C^{1,\alpha}(\Sigma),$$

und es gilt

$$\mathcal{B} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(C^{2,\alpha}(D), C^{1,\alpha}(\Sigma))).$$

Darüber hinaus hat der Operator die Darstellung

$$\mathcal{B}(\rho)v = \overrightarrow{b_\rho} \cdot \nabla v$$

für ein nirgends tangentiales und nirgends verschwindendes Vektorfeld

$$\overrightarrow{b_\rho} : \Sigma \to \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Es sei $(D\Theta_\rho^{-1})$ die Jakobi-Matrix von Θ_ρ^{-1}. Dann ist mit $v = u \circ \Theta_\rho$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}(\rho)v &= \partial_\nu(v \circ \Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho \\
&= \left[\nabla(v \circ \Theta_\rho^{-1}) \cdot \frac{\nabla\phi_\rho}{|\nabla\phi_\rho|}\right] \circ \Theta_\rho \\
&= \left\{[(\nabla v) \circ \Theta_\rho^{-1}] \cdot (D\Theta_\rho^{-1}) \cdot \frac{\nabla\phi_\rho}{|\nabla\phi_\rho|}\right\} \circ \Theta_\rho \\
&= \nabla v \cdot [(D\Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho] \cdot \left(\frac{\nabla\phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla\phi_\rho|}\right)^T .
\end{aligned}$$

Wir setzen

$$\overrightarrow{b_\rho} := [(D\Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho] \cdot \left(\frac{\nabla\phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla\phi_\rho|}\right)^T .$$

Es ist wichtig zu beobachten, dass das Vektorfeld $l := \left(\frac{\nabla\phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla\phi_\rho|}\right)^T$ nirgends tangential an den Rand Σ ist. Dann ist

$$\mathcal{B}(\rho)v = \overrightarrow{b_\rho} \cdot \nabla v$$

mit $\overrightarrow{b_\rho} \neq 0$.

□

2.2 Zurückführung des Problems auf eine Evolutionsgleichung

Unser Ziel ist, das System (2.12) - (2.15) auf eine einzige Evolutionsgleichung für ρ zurückzuführen. Wir behandeln zunächst die ersten beiden Gleichungen

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \qquad \text{in } J \times D \tag{2.16}$$

$$v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = H(\rho) \qquad \text{auf } J \times \Sigma. \tag{2.17}$$

Es handelt sich um ein bekanntes System, das für $\delta > 0$ in der Literatur unter den Namen "Oblique Derivative Problem", Poincaré-Problem oder Randwertproblem mit Randbedingung dritter Art bekannt ist. Hat δ Nullstellen, so entartet das Problem. Wir zeigen nun, wie man das Problem auf ein pseudodifferentiales Problem zurückführen

kann. Diese elegante Methode die von A.P.Calderón stammt, führt das Randwertproblem (2.16) - (2.17) auf eine Pseudodifferentialgleichung auf dem Rand zurück.
Sei nun $\mathcal{K}(\rho)$ der Lösungsoperator des homogenen Dirichletproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 \quad \text{in } J \times D \\ v &= g \quad \text{auf } J \times \Sigma, \end{aligned} \tag{2.18}$$

also $\mathcal{K}(\rho)g = v$. Wir führen noch die Abkürzung $\widetilde{\mathcal{B}}(\rho)v := \gamma v + \delta\mathcal{B}(\rho)v$ ein. Dann ist mit $\mathcal{T} := \widetilde{\mathcal{B}}\mathcal{K}$, (2.16) - (2.17) äquivalent zu

$$\mathcal{T}v = H(\rho) \text{ auf } J \times \Sigma.$$

Wie formulieren das Ergebnis als

2.2.1 Satz. *Für den elliptischen Operator*

$$\mathcal{A}(\rho)v = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\rho)\partial_{ij}^2 v + \sum_{i=1}^{n} a_i(\rho)\partial_i v$$

mit

$$a_{ij}(\rho) \in C^{2,\alpha}(D),\, a_i(\rho) \in C^{1,\alpha}(D),$$

hat das Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v = 0 &\qquad \textit{in } J \times D \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = H(\rho) &\qquad \textit{auf } J \times \Sigma \end{aligned}$$

eine Lösung $v \in C^{2,\alpha}(D)$ genau dann, wenn eine Lösung $\psi \in C^{2,\alpha}(D)$ der Gleichung

$$\mathcal{T}\psi = H(\rho) \;\; \textit{auf } J \times \Sigma$$

existiert.

Das "Oblique derivative problem" (2.16) - (2.17) ist genau dann elliptisch, wenn die entsprechende Funktion δ nirgends 0 ist. Wir können daher zunächst rein formal einen Lösungsoperator $\mathcal{S}(\rho)$ für das Randwertproblem (2.16) - (2.17) definieren. Sei nun

$$v = \mathcal{S}(\rho)H(\rho)$$

die Lösung von (2.16) - (2.17). Mit Einsetzen in (2.14) erhalten wir eine Evolutionsgleichung.

$$\begin{aligned} \partial_t\rho + L_\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)H(\rho) &= 0 \\ \rho(0) &= \rho_0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Damit ist das Stefan-Problem auf das Lösen einer einzigen Evolutionsgleichung mit einer Anfangsbedingung zurückgeführt.

2.3 Die Rolle der mittleren Krümmung

Wie schon erwähnt, spielt bei dem Stefan-Problem die Geometrie des Gebiets eine wichtige Rolle, und deswegen müssen wir eine genaue Koordinatendarstellung des Operators der mittleren Krümmung $H(\rho)$ haben. Eine explizite Darstellung von $H(\rho)$ ist in der Arbeit [29] gegeben. Die Berechnung von $H(\rho)$ ist mühsam, erfordert differentialgeometrische Mittel und benutzt verschiedene Metriken.
Wir werden kurz schildern, welche die wichtigsten Schritte in der Rechnung sind. Dabei werden die Eigenschaften der Funktion ϕ_ρ geschickt benutzt. Nach dem nächsten Lemma existiert eine explizite Darstellung, wenn der Rand Σ des Gebiets die Nullstellenmenge einer Funktion ist. Das ist der Fall für Γ_t und Σ ist nach der Konstruktion (2.1) diffeomorph zu Γ_t, also zu einer Hyperfläche die eine solche Darstellung besitzt. Wenn κ_{Γ_ρ} die mittlere Krümmung von Γ_t ist, dann ist der transformierte Krümmungsoperator

$$H(\rho) = \theta_\rho^* \kappa_{\Gamma_\rho} = \kappa_{\Gamma_\rho} \circ \theta_\rho,$$

θ_ρ ist der Diffeomorphismus $\theta_\rho : \Sigma \to \Gamma_t$. Aus dem folgenden grundlegenden Lemma folgt das Resultat aus [29].

2.3.1 Lemma. *Sei S eine Hyperfläche in $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) = 0\}$$

für eine C^2 Funktion φ. Wenn $\nabla\varphi \neq 0$ auf S, dann ist die mittlere Krümmung κ von S gegeben durch

$$\kappa = \frac{1}{(n-1)\|\nabla\varphi\|^3}\left(\|\nabla\varphi\|^2\Delta\varphi - \sum_{i,j=1}^n \partial_i\varphi\,\partial_j\varphi\,\partial_{ij}^2\varphi\right).$$

Beweis. Mit $\operatorname{Hess}\varphi := (\partial_{ij}^2\varphi)_{i,j=1}^n$, der Hesse-Matrix von φ, beobachten wir dass

$$\nabla\left(\|\nabla\varphi\|\right) = \frac{(\nabla\varphi)^T \cdot \operatorname{Hess}\varphi}{\|\nabla\varphi\|}.$$

Also

$$\nabla\left(\frac{1}{\|\nabla\varphi\|}\right) = -\frac{(\nabla\varphi)^T \cdot \operatorname{Hess}\varphi}{\|\nabla\varphi\|^3}.$$

Die mittlere Krümmung ist die Divergenz des Einheitsnormalenfelds

$$\begin{aligned}(n-1)\kappa &= \nabla\cdot\left(\frac{\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|}\right)\\ &= \frac{1}{\|\nabla\varphi\|}\nabla\cdot\nabla\varphi+\nabla\left(\frac{1}{\|\nabla\varphi\|}\right)\cdot\nabla\varphi\\ &= \frac{\Delta\varphi}{\|\nabla\varphi\|}-\frac{(\nabla\varphi)^T\cdot\operatorname{Hess}\varphi\cdot\nabla\varphi}{\|\nabla\varphi\|^3}.\end{aligned}$$

Mit

$$(\nabla\varphi)^T\cdot\operatorname{Hess}\varphi\cdot\nabla\varphi=\sum_{i,j=1}^{n}\partial_i\varphi\,\partial_j\varphi\,\partial_{ij}^2\varphi$$

ist das Lemma bewiesen. □

Wir benötigen den folgenden fundamentalen

2.3.2 Satz. *Die Krümmung $H(\rho)$ trägt eine quasilineare Struktur: Es gilt*

$$H(\rho)=P(\rho)\rho+Q(\rho). \tag{2.20}$$

Dabei ist für hinreichend kleines ρ, $P(\rho)$ ein gleichmäßig elliptischer positiver Differentialoperator zweiter Ordnung. In lokalen Koordinaten $s=(s_1,\dots,s_{n-1})$ auf Σ hat P die Form

$$P(\rho)=-\sum_{j,k=1}^{n-1}(p_{jk}(\rho))(s)\partial_{s_j}\partial_{s_k}+\sum_{j=1}^{n-1}(p_j(\rho))(s)\partial_{s_j}.$$

Beweis. Siehe [31, Lemma 3.2].

2.3.3 Bemerkung. p_{jk} sind analytische Funktionen von den ersten Ableitungen von ρ und die p_j analytische Funktionen von den ersten und zweiten Ableitungen von ρ. Die Koeffizientenmatrix $(p_{jk}(\rho))_{jk}$ ist gleichmäßig positiv. Ferner ist Q eine analytische Funktion von den ersten und zweiten Ableitungen von ρ. Für $\rho\in\mathcal{U}$ gilt also $p_{jk}\in C^\infty(\mathcal{U},C^{2,\alpha}(\Sigma))$, $p_j\in C^\infty(\mathcal{U},C^{1,\alpha}(\Sigma))$ und $Q\in C^\infty(\mathcal{U},C^{1,\alpha}(\Sigma))$.

Wir können nun diese quasilineare Struktur der mittleren Krümmung ausnutzen um die Evolutionsgleichung (2.19) in der Form

$$\begin{aligned}\partial_t\rho+A(\rho)\rho &= F(\rho),\\ \rho(0) &= \rho_0\end{aligned} \tag{2.21}$$

mit

$$A(\rho):=L_\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho),\quad F(\rho):=-L_\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)Q(\rho)$$

darzustellen. Unsere Aufgabe ist nun diese Evolutionsgleichung zu lösen.

2.4 Geometrische Eigenschaften des Modells

Wir werden nun zeigen, dass die eingeführte Relaxierungsfunktion δ eine *a priori* Abschätzung des Oberflächeninhalts $A(t)$ ermöglichen kann. Die Phasengrenze kann sich zeitlich nicht beliebig entwickeln. Das Modell ist **flächenverkleinernd** und **volumenerhaltend**. Um das zu zeigen, benötigen wir den

2.4.1 Satz. *Sei $|\Omega(t)|$ das Volumen des Gebiets Ω_t und $|A(t)|$ der Oberflächeninhalt des freien Randes Γ_t. Dann gilt für die zeitliche Änderung des Volumens und des Oberflächeninhalts*

$$\frac{d}{dt}|\Omega(t)| = \int_{\Gamma_t} V ds_x,$$
$$\frac{d}{dt}|A(t)| = \int_{\Gamma_t} \kappa V ds_x$$

Beweis. Siehe z.B. S.462 in [6].

2.4.2 Satz. *Für den Oberflächeninhalt $|A(t)|$ gilt*

$$\frac{d}{dt}|A(t)| = -\int_{\Gamma_t} aV^2 ds_x - \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx,$$

und dann ist $\frac{d}{dt}|A(t)| \leq 0$.

Beweis. Mit der Gibbs-Thomson-Bedingung, Stefan-Bedingung und der Greenschen Formel erhalten wir aus dem letzten Satz

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|A(t)| &= \int_{\Gamma_t} \kappa V ds_x \\
&= -\int_{\Gamma_t} aV^2 ds_x + \int_{\Gamma_t} uV ds_x \\
&= -\int_{\Gamma_t} aV^2 ds_x - \int_{\Gamma_t} u\partial_\nu u \, ds_x \\
&= -\int_{\Gamma_t} aV^2 ds_x - \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Die zweite Behauptung ist nun klar.

$\square$

Die erste Folgerung ist, dass mit dem Zeitablauf die Oberfläche nur kleiner werden kann, d.h. das Modell ist **flächenverkleinernd**.

2.4.3 Satz. *Der Oberflächeinhalt $|A(t)|$ ist eine nicht wachsende Funktion.*

Beweis. Folgt aus $\frac{d}{dt}|A(t)| \leq 0$.

□

Die zweite Folgerung zeigt, dass der Gradient des Temperaturfeldes durch die Anfangsgeometrie kontrolliert werden kann.

2.4.4 Korollar. *Es gilt*

$$\int_0^\infty \int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \, dx \, dt \leq A(0).$$

Beweis. Aus dem Satz ergibt sich

$$\frac{d}{dt}|A(t)| \leq -\int_{\Omega_t} |\nabla u|^2 \, dx.$$

Mit Integration folgt die Behauptung.

□

2.4.5 Bemerkung. Diese letzte Folgerung könnte benutzt werden, um Regularitätsergebnisse schwacher Lösungen des Stefan-Problems zu bekommen.

Außerdem ist das Modell **volumenerhaltend**, d.h. die zeitliche Änderung von $|\Omega(t)|$ ist 0.

2.4.6 Satz. *Für das Volumen $|\Omega(t)|$ gilt $\frac{d}{dt}|\Omega(t)| = 0$*

Beweis. In der Tat, nach der Stefan-Bedingung und mit dem Satz von Gauß folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\Omega(t)| &= \int_{\Gamma_t} V \, ds_x = -\int_{\Gamma_t} \partial_\nu u \, ds_x \\ &= -\int_{\Omega_t} \Delta u \, dx = 0. \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Der Fall $a > 0$

3.1 Die Lipschitz-Stetigkeit des Lösungsoperators

In diesem Kapitel untersuchen wir das quasistationäre Stefan-Problem mit einer strikt positiven Funktion $a > 0$ in (1.3). Es sei

$$\rho \in \mathcal{U} := \{\tilde{\rho} \in C^{3,\alpha}(\Sigma) : \|\tilde{\rho}\|_{C^{3,\alpha}(\Sigma)} < b\}$$

mit hinreichend kleinem $b > 0$, $\alpha > 0$. Wie schon gezeigt, führt die Transformation auf ein festes Gebiet zu dem Randwertproblem mit schiefer Ableitung

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \qquad \text{in } D \tag{3.1}$$

$$v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = H(\rho) \qquad \text{auf } \Sigma, \tag{3.2}$$

mit $H(\rho) \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$.
Es ist wohlbekannt, dass das Oblique Derivative Problem

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \qquad \text{in } D \tag{3.3}$$

$$v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = g \qquad \text{auf } \Sigma, \tag{3.4}$$

für $g \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ eine eindeutige Lösung $v \in C^{2,\alpha}(D)$ besitzt ([43, Theorem 6.31]). Wir können also einen Lösungsoperator $\mathcal{S}(\rho)$ definieren, $\mathcal{S}(\rho) : g \mapsto v$, und sind an dessen qualitativen Eigenschaften interessiert.

3.1.1 Satz. *Es sei $\delta > 0$ auf Σ. Für jedes $\rho \in \mathcal{U}$ ist der Operator*

$$\mathcal{S}(\rho) : C^{1,\alpha}(\Sigma) \to C^{2,\alpha}(D)$$

beschränkt, und es gilt $\delta\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho) = \mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S}(\rho)$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass die Funktion g global, also in dem ganzen Gebiet D definiert ist. Dann ist die Norm $\|g\|_{1,\alpha}$ wohl definiert. Die erste Behauptung folgt aus der Schauderschen Abschätzung. Es existiert nämlich eine Konstante $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, D)$, so dass

$$\|\mathcal{S}(\rho)g\|_{2,\alpha} \leq C(\|\mathcal{S}(\rho)g\|_\infty + \|g\|_{1,\alpha})$$

Die zweite Behauptung ist eine einfache, aber äußerst wichtige Beobachtung, die unmittelbar aus der zweiten Gleichung folgt, wenn man für v den Lösungsoperator $\mathcal{S}(\rho)g$ einsetzt und diese Gleichung in der äquivalente Form

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)g &= g - \gamma\mathcal{S}(\rho)g \\ &= [\mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S}(\rho)]g \end{aligned}$$

schreibt. Also gilt $\delta\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho) = \mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S}(\rho)$. □

Man sollte erwarten, dass der Operator $\mathcal{S}$ als parameterabhängiger Operator Lipschitz-stetig ist. Das zeigen wir in diesem Abschnitt.

3.1.2 Satz. *Für hinreichend kleines b ist der Lösungsoperator*

$$\mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D)),$$

$$\rho \mapsto \mathcal{S}(\rho)g$$

des folgenden Randwertproblems mit schiefer Ableitung

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v &= g \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig. Es existiert also eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|\mathcal{S}(\rho_1) - \mathcal{S}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D))} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)},$$

für alle $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{U}$.

Beweis. Wir führen die Abkürzung $\widetilde{\mathcal{B}}(\rho)v := \gamma v + \delta\mathcal{B}(\rho)v$ ein. Wir bezeichnen mit $\tilde{\mathcal{S}}(\rho)$ die Inverse zu $\binom{\mathcal{A}(\rho)}{\widetilde{\mathcal{B}}(\rho)}$. Dann ist der Operator $\binom{\mathcal{A}}{\widetilde{\mathcal{B}}}$ ein Element von $C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(C^{2,\alpha}(D), C^\alpha(D) \oplus C^{1,\alpha}(\Sigma)))$, insbesondere Lipschitz-stetig. Also ist für eine Konstante $C > 0$

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_1) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_2) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_2) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(C^{2,\alpha}(D), C^\alpha(D) \oplus C^{1,\alpha}(\Sigma))} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{\mathcal{S}}(\rho_1) - \tilde{\mathcal{S}}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(C^\alpha(D)\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D))} \\
= \; &\left\| \tilde{\mathcal{S}}(\rho_1) \left[\begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_2) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_1) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_1) \end{pmatrix} \right] \tilde{\mathcal{S}}(\rho_2) \right\|_{\mathcal{L}(C^\alpha(D)\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D))} \\
\leq \; &\|\tilde{\mathcal{S}}(\rho_1)\|_{\mathcal{L}(C^\alpha(D)\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D))} \left\| \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_2) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{A}(\rho_1) \\ \widetilde{\mathcal{B}}(\rho_1) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{L}(C^{2,\alpha}(D), C^\alpha(D)\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma))} \\
&\times \|\tilde{\mathcal{S}}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(C^\alpha(D)\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma), C^{2,\alpha}(D))} \\
\leq \; &C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)},
\end{aligned}$$

da $\rho \mapsto \tilde{\mathcal{S}}(\rho)$ lokal beschränkt ist. Insbesondere ist dann auch $\mathcal{S}(\rho) = \tilde{\mathcal{S}}(\rho)\Big|_{\{0\}\oplus C^{1,\alpha}(\Sigma)}$ Lipschitz-stetig. □

3.1.3 Satz. *Die Funktion $F : \mathcal{U} \to C^{1,\alpha}(\Sigma)$ aus der Evolutionsgleichung*

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho + A(\rho)\rho &= F(\rho), \\
\rho(0) &= \rho_0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

mit

$$A(\rho) := L_\rho \mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho)$$

und

$$F(\rho) := -L\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)Q(\rho)$$

ist Lipschitz-stetig. Es gilt

$$\|F(\rho_1) - F(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}.$$

Beweis. Wir setzen $M(\rho) := L_\rho/\delta$ ein, und erinnern daran, dass für die Funktion $\delta \geq c > 0$ gilt. Dann ist $M(\rho)$ Lipschitz-stetig als Produkt zweier Lipschitz-stetiger Funktionen. Analog sind $M(\rho)Q(\rho)$ und $M(\rho)\gamma\mathcal{S}(\rho)Q(\rho)$ Lipschitz-stetig. Also

$$\|M(\rho_1)Q(\rho_1) - M(\rho_2)Q(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}$$

und

$$\|M(\rho_1)\gamma\mathcal{S}(\rho_1)Q(\rho_1) - M(\rho_2)\gamma\mathcal{S}(\rho_2)Q(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \leq C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}.$$

Wir wenden nun Satz 3.1.1 an. Dann haben wir die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\|F(\rho_1) - F(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \\
= \ & \|L_{\rho_1}\mathcal{B}(\rho_1)\mathcal{S}(\rho_1)Q(\rho_1) - L_{\rho_2}\mathcal{B}(\rho_2)\mathcal{S}(\rho_2)Q(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \\
= \ & \|M(\rho_1)Q(\rho_1) - M(\rho_2)Q(\rho_2) - M(\rho_1)\gamma\mathcal{S}(\rho_1)Q(\rho_1) + M(\rho_2)\gamma\mathcal{S}(\rho_2)Q(\rho_2)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \\
\leq \ & C_1\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} + C_2\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} \\
\leq \ & C\|\rho_1 - \rho_2\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)}.
\end{aligned}$$

□

Analog zeigt man unter Verwendung von $P \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma)))$, den Satz

3.1.4 Satz. *Der Operator* $A(\rho) = \mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho)$,

$$A : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma))$$

ist Lipschitz-stetig.

Wir zeigen nun, dass $A(\rho) \in \mathcal{H}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma))$.

3.1.5 Satz. *Für* $\rho \in \mathcal{U}$ *gilt* $A(\rho) := L_\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho) \in \mathcal{H}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma))$.

Wir geben einen Beweis von Satz 3.1.5 der sich auf Störungstechniken stützt. Der Vorteil dabei ist, dass ähnlich auch die maximale Regularität bewiesen werden kann.

Beweis. Nach Satz 3.1.1 gilt

$$\begin{aligned}
A(\rho) &= \frac{L_\rho}{\delta}[\delta\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho)] \\
&= \frac{L_\rho}{\delta}(\mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S}(\rho))P(\rho) \\
&= \frac{L_\rho}{\delta}P(\rho) - \frac{L_\rho}{\delta}\gamma\mathcal{S}(\rho)P(\rho)
\end{aligned}$$

Der Operator $A(\rho)$ ist also eine Störung niedriger Ordnung des positiven Operators $\frac{L_\rho}{\delta}P(\rho)$. Diese Operatoren sind Erzeuger analytischer Halbgruppen (siehe Chapter 3 in [54]). Also

$$\frac{L_\rho}{\delta}P(\rho) \in \mathcal{H}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma)).$$

Störungen analytischer Erzeuger sind wieder analytische Erzeuger ([27], III.1.12) und deswegen auch

$$A(\rho) \in \mathcal{H}(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma)).$$

□

Es gilt sogar mehr für den Operator $A(\rho)$. Der hat maximale Regularität.

3.1.6 Satz. *Für $\rho \in \mathcal{U}$ gilt $A(\rho) \in \mathcal{M}_\theta(C^{3,\alpha}(\Sigma), C^{1,\alpha}(\Sigma))$.*

Beweis. Der Beweis der maximalen Regularität von $A(\rho)$ ist ähnlich zu dem letzten Beweis, wenn man bedenkt, dass $\frac{L_\rho}{\delta}P(\rho)$ maximale Regularität besitzt und dass sich die maximale Regularität auf Störungen niedriger Ordnung vererbt.

□

3.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir bezeichnen mit $J_\tau, 0 < \tau \leq T$, das Teilinterval $[0,\tau)$ von $[0,T]$.
Die Räume $\mathbb{E}_1^\theta(J)$, $\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)$ werden in Anhang A definiert, die Klasse $\mathcal{M}_\theta$ in (A.7).
Die Bedeutung der Interpolationsräume wird klar aus dem folgenden Satz, in dem lokale Existenz für quasilineare parabolische Evolutionsgleichung bewiesen wird. Wir werden eine Version des Satzes aus [67],Theorem 3.1. formulieren, beweisen und anschließend für die Lösung des Stefan-Problems anwenden.

3.2.1 Satz. *Es seien E_1 und E_0 zwei Banachräume, so dass $E_1 \hookrightarrow E_0$. Sei $0 < \theta < 1$, $V_\theta \subset \gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)$ offen und $u_0 \in V_\theta$. Ferner sei $F \in Lip(V_\theta, E_0)$, $A \in Lip(V_\theta, \mathcal{M}_\theta(E_1, E_0))$. Dann existiert ein $\tau > 0$, so dass die quasilineare parabolische Evolutionsgleichung*

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(u)u &= F(u) \quad \textit{auf } J, \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)$ hat.

Beweis. Die Idee des Beweises ist, die Evolutionsgleichung in ein Fixpunktproblem umzuschreiben, auf das der Banachsche Fixpunktsatz angewandt werden kann. Für jedes $u \in V_\theta$ definieren wir die Operatoren A_0 und $B = B(u)$ mit $A_0 := A(u_0)$, $B(u) := A_0 - A(u)$. Dann ist (3.6) äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{u} + A_0 u &= B(u)u + F(u), \qquad \text{auf } J \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Das ist ein inhomogenes Cauchyproblem und die Lösung ist, wegen $A(u_0) \in \mathcal{M}_\theta(E_1, E_0)$, nach dem Anhang (A.1) und (A.2), gegeben durch

$$u = y_0 + J_{A_0}(B(u)u + F(u)) \tag{3.8}$$

mit $y_0(t) := e^{-tA_0}u_0$.
Wir betrachten die Abbildung Φ,

$$\Phi(u) := y_0 + J_{A_0}(B(u)u + F(u)).$$

Die Fixpunkte dieser Abbildung sind Lösungen von (3.8). Wir wählen eine kleine Umgebung $U \subset V_\theta$ von u_0, so dass $\|B(u)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \leq \varepsilon$ für alle $u \in U$, wobei das kleine ε später zu bestimmen ist. Als nächstes führen wir die Teilmenge W von $\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)$ ein:

$$W := \{u \in \mathbb{E}_1^\theta(J_\tau) : u(0) = u_0, u(J_\tau) \subset U, \|u\|_{E_0} \leq 2\|y_0\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}\}.$$

Wir behaupten, dass Φ eine Kontraktion auf W ist. Für alle $u, v \in W$ gilt:

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} \leq C\{\|B(u)u - B(v)v\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)} + \|F(u) - F(v)\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)}\}. \tag{3.9}$$

Die Konstante C ergibt sich aus der Beschränktheit der Operatornorm von J_{A_0}. Diese Norm ist nichtabnehmend in τ.
Wir wählen ein σ mit $0 < \sigma < \theta$. Für möglicherweise verkleinerte Umgebung

$$\|F(u(t)) - F(v(t))\|_{E_0} \leq M\|u(t) - v(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J_\tau)}$$

und

$$\|B(u(t)) - B(v(t))\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \leq M\|u(t) - v(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J_\tau)}$$

Mit der Einbettung 3) aus Satz (A.0.53)

$$\mathbb{E}_1^\theta(J) \hookrightarrow C^{0,\theta-\sigma}(J, \gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J))$$

und $u(0) = v(0)$ erhalten wir, dass

$$\|u(t) - v(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J_\tau)} \leq Ct^{\theta-\sigma}\|u - v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)} &= \sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}\|F(u(t))-F(v(t))\|_{E_0} \\
&\leq M\sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}\|u(t)-v(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J_\tau)} \\
&\leq MC\sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}t^{\theta-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} \\
&= MC\tau^{1-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Den ersten Term in (3.9) können wir wegen der Annahme $\|B(u)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)} \leq \varepsilon$, wie folgt abschätzen:

$$\|B(u)u-B(v)v\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)} \leq \underbrace{\|B(u)(u-v)\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)}}_{I} + \underbrace{\|(B(u)-B(v))v\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)}}_{II}$$

$$\begin{aligned}
I &= \sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}\|B(u(t))(u(t)-v(t))\|_{E_0} \\
&\leq \sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}\|B(u)\|_{\mathcal{L}(E_1,E_0)}\|u(t)-v(t)\|_{E_0} \\
&\leq \varepsilon\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Wieder mit der Einbettung 3) aus Satz (A.0.53) folgt:

$$\begin{aligned}
II &= \sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}\|(B(u(t))-B(v(t)))v(t)\|_{E_0} \\
&\leq \sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}M\|u(t)-v(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J_\tau)}\|v(t)\|_{E_0} \\
&\leq MC\sup_{t\in \dot{J}_\tau} t^{1-\theta}t^{\theta-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}\|v(t)\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} \\
&\leq MC\tau^{\theta-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Wir haben

$$\|B(u)u-B(v)v\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J_\tau)} \leq \varepsilon\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} + MC\tau^{\theta-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}$$

und aus dieser und obiger Abschätzung :

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} \leq C\{\tau^{1-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} + \varepsilon\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)} + \tau^{\theta-\sigma}\|u-v\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J_\tau)}\}.$$

Wählt man nun ε und τ genügend klein, etwa

$$\varepsilon < 1/2C, \text{ und } \tau < (1/2C)^{1/max\{1-\sigma,\theta-\sigma\}},$$

dann ist Φ tatsächlich eine Kontraktion. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt Φ einen eindeutigen Fixpunkt, der die Lösung der Gleichung (3.8) ist. Damit hat auch die Evolutionsgleichung (3.6) eine eindeutige Lösung. Der Beweis ist vollständig. □

Es gibt einen entsprechenden Satz für die maximale L^p-Regularität von dem wir im nächsten Kapitel Gebrauch werden machen.

3.3 Die Lösung des Stefan-Problems in Hölderräumen

3.3.1 Satz. *Für jede Anfangsgeometrie $\rho(0,.) = \Gamma_0$, mit $\rho(0,.) \in C^{3,\alpha}(\Sigma)$, $1 > \alpha > 0$, hat das Stefan-Problem (1.4) eine eindeutige Lösung (v, ρ) auf einem genügend kleinen Zeitintervall $J_\tau := [0, \tau)$, mit*

$$v \in C(J_\tau, C^{2,\alpha}(D))$$

und

$$\rho \in C(J_\tau; C^{3,\alpha}(\Sigma)) \cap C^1(J_\tau; C^{1,\alpha}(\Sigma))$$

mit

$$\lim_{t \to 0+} t^{1-\theta}\{\|\rho'(t)\|_{C^{1,\alpha}(\Sigma)} + \|\rho(t)\|_{C^{3,\alpha}(\Sigma)}\} = 0.$$

Beweis. Wir haben gezeigt, dass das Problem auf die Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + A(\rho)\rho &= F(\rho), \\ \rho(0) &= \rho_0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

zurückgeführt werden kann. Wir wenden den Satz 3.2.1 mit $E_0 = C^{1,\alpha}(\Sigma)$ und $E_1 = C^{3,\alpha}(\Sigma)$ an. Nach 3.1.3, 3.1.4 und 3.1.6 sind alle Bedingungen dieses Satzes erfüllt. Daher die Behauptung.

□

3.4 Die Zentrumsmannigfaltigkeit

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass für die Evolutionsgleichung, auf die das Stefan-Problem führt, (2.19), mit der Bezeichnung $\Phi(\rho) := L_\rho \mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)H(\rho)$, äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \Phi(\rho) &= 0, \\ \rho(0) &= \rho_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

eine Zentrumsmannigfaltigkeit existiert. Die Existenz einer lokal invarianten Zentrumsmannigfaltigkeit werden wir aus den Ergebnissen in [67] folgern. Wir nehmen als Referenzgebiet D die Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius R, bezeichnet mit B_R. Die Sphäre mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius R wird mit Σ_R bezeichnet. Wir betrachten den folgenden Operator L, die Linearisierung des Operators $\Phi(\rho)$ im Nullpunkt:

$$L := \dot{\Phi}(0).$$

Hier bezeichnet $\cdot$ die Ableitung nach ρ. Die Evolutionsgleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + L\rho &= g(\rho) \\ \rho(0) &= \rho_0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

mit

$$g(\rho) = L\rho - \Phi(\rho).$$

Die Zentrumsmannigfaltigkeit für (3.11) ist eine lokal invariante Mannigfaltigkeit unter dem Fluss induziert von (3.12), die tangential zum zentralen Eigenraum X^c der Eigenwerte von L ist.
Mit den Bezeichnungen $\mathcal{B} := \mathcal{B}(0)$, $\mathcal{S} := \mathcal{S}(0)$, $H = H(0)$ und $D := \dot{H}(0)$, $\alpha(0) := \alpha$, haben wir

3.4.1 Lemma. *Es gilt*

$$L = \frac{1}{a}D - \frac{1}{a}(\mathrm{Id} + a\mathcal{BK})^{-1}D.$$

Beweis. Im ersten Schritt zeigen wir, dass $\dot{\Phi}(0) = L_0\mathcal{BS}\dot{H}$. Wir rechnen aus

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(0) &= \dot{L}_0\mathcal{BS}H \\ &+ L_0(\mathcal{B}(\rho)\dot{\mathcal{S}}(\rho))H \\ &+ L_0\mathcal{BS}\dot{H}. \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass $L_0 \equiv 1$ [29, Lemma 3.1] und $\dot{L}_0 = 0$.
$\mathcal{S}(\rho)$ ist der Lösungsoperator des Oblique Derivative Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v = 0 &\quad \text{in } B_R \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = g &\quad \text{auf } \Sigma_R. \end{aligned}$$

Die mittlere Krümmung der Sphäre $H(0)$ ist $H(0) = 1/R$.
Das Problem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v = 0 &\quad \text{in } B_R \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v = 1/R &\quad \text{auf } \Sigma_R, \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung $v = 1/R$. Daher ist $\mathcal{S}(\rho)H(0) = 1/R$. Es folgt $\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)H = 0$ für alle $\rho \in U$, wobei U eine kleine Umgebung der Null ist. Daher ist $(\dot{\mathcal{BS}})H = 0$. Also $\dot{\Phi}(0) = L_0\mathcal{BS}\dot{H}$.

Nach Satz 3.1.1

$$\delta\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho) = \mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S}(\rho),$$

und Lemma 4.2.24

$$\gamma\mathcal{S} = (\mathrm{Id} + \delta\mathcal{BK})^{-1}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} L &= L_0\mathcal{BSD} = \frac{L_0}{\delta}(\delta\mathcal{BSD}) \\ &= \frac{L_0}{\delta}(\mathrm{Id} - \gamma\mathcal{S})D \\ &= \frac{L_0}{\delta}D - \frac{L_0}{\delta}(\mathrm{Id} + \delta\mathcal{BK})^{-1}D \end{aligned}$$

Es ist klar, dass für $\rho \equiv 0$, $\delta = a$. Mit $L_0 \equiv 1$ folgt die Behauptung. □

Wir können dieses Lemma anwenden, um den Kern von L zu bestimmen. Man kann ähnlich wie in [48] zeigen, dass der Operator L ein Semi-Fredholmoperator ist. Es gilt nämlich

3.4.2 Satz. *Der Kern* $\ker L$ *von* L *ist der Raum* $\mathrm{lin}\{\boldsymbol{1}, S_m^{(1)} : 1 \leq m \leq n\}$*, wobei* $S_m^{(1)}$ *die Kugelflächenfunktionen sind. Ferner ist* 0 *ein isolierter Eigenwert von* L*.*

3.4.3 Bemerkung. Dass 0 ein Eigenwert von L ist, wird in Lemma 3.4.1 mitbewiesen.

Die Kugelflächenfunktionen $S_m^{(1)}$ sind die Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators Δ_{Σ_R}. Man kann die Eigenschaften dieses Operators ausnutzen, um das Spektrum von L zu analysieren. Im nächsten Satz geben wir eine hinreichende Bedingung dafür, dass das Spektrum nicht-positive Eigenwerten hat. Λ bezeichnet den Dirichlet-Neumann Operator $\mathcal{BK}$.

3.4.4 Lemma. *Der Kommutator* $[\Lambda, \Delta_{\Sigma_R}] = \Lambda\Delta_{\Sigma_R} - \Delta_{\Sigma_R}\Lambda$ *verschwindet auf* $L^2(\Sigma_R)$*.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei Σ_R die Einheitssphäre Σ. Wir bemerken, dass die Kugelflächenfunktionen der Ordnung k Eigenfunktionen der beiden Operatoren sind, mit $k(k+n-2)$ Eigenwert für den Laplace-Beltrami Operator Δ_{Σ_R} und k Eigenwert für den Dirichlet-Neumann Operator $\Lambda = \mathcal{BK}$. Also vertauschen die Operatoren auf der linearen Hülle der Kugelflächenfunktionen. Außerdem ist die lineare Hülle dicht in $L^2(\Sigma)$, siehe [35, Theorem 2.53]. Daher die Behauptung. □

3.4.5 Satz. *Es sei* $a > 0$*, so dass für den Kommutator* $[a^{1/2}\Lambda, a^{1/2}]$ *gilt* $\|[a^{1/2}\Lambda, a^{1/2}]\| \leq 1$*. Dann besteht das Spektrum des Operators* $-L$ *nur aus Eigenwerte und es gilt* $\sigma_p(-L) \subset (-\infty, 0]$*.*

Beweis. Wegen $L \in \mathcal{H}(C^{3,\alpha}(\Sigma_R), C^{1,\alpha}(\Sigma_R))$ und der kompakten Einbettung, $C^{3,\alpha}(\Sigma_R) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Sigma_R)$, hat der Operator L kompakte Resolvente. Daher hat L nur abzählbar viele isolierte Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit.

Wir zeigen nun, dass die Eigenwerte nicht-positiv sind. Wir brauchen die Ableitung D des Operators der mittleren Krümmung H für die Sphäre Σ_R

$$D := \dot{H}(0) = -\frac{1}{R^2}\mathrm{Id} - \frac{1}{n-1}\Delta_{\Sigma_R},$$

siehe [29, Lemma 3.1].
Es sei λ ein Eigenwert von $-L$, d.h.

$$\lambda f + Lf = 0$$

Wir wenden den Operator $\mathrm{Id} + a\mathcal{BK}$ auf diese Gleichung an, und erhalten mit Lemma 3.4.1 nach kurzer Rechnung

$$\lambda f + \lambda a\mathcal{BK}f + \mathcal{BK}Df = 0$$

Wir multipliziren die Gleichung mit $\bar{f}$, integrieren über Σ_R und erhalten:

$$\lambda\langle f, f\rangle + \langle \lambda a\mathcal{BK}f, f\rangle + \langle \mathcal{BK}Df, f\rangle = 0 \tag{3.13}$$

Der dritte Term ist $\langle \mathcal{BK}Df, f\rangle \geq 0$, da die Operatoren $\mathcal{BK}$ und D positiv sind und nach Lemma 3.4.4 vertauschen auf der Sphäre.
Wir analysieren nun den zweiten Term, den wir wegen $a > 0$, in der Form

$$\langle a\mathcal{BK}f, f\rangle = -\langle [a^{1/2}\mathcal{BK}, a^{1/2}]f, f\rangle + \langle a^{1/2}\mathcal{BK}a^{1/2}f, f\rangle$$

schreiben können. Dann ist (3.13)

$$\lambda[\langle f, f\rangle + \langle a\mathcal{BK}f, f\rangle] = -\langle \mathcal{BK}Df, f\rangle$$

oder äquivalent

$$\lambda[\langle f, f\rangle - \langle [a^{1/2}\mathcal{BK}, a^{1/2}]f, f\rangle + \langle a^{1/2}\mathcal{BK}a^{1/2}f, f\rangle] = -\langle \mathcal{BK}Df, f\rangle \tag{3.14}$$

Solange $\|[a^{1/2}\mathcal{BK}, a^{1/2}]\| \leq 1$, ist der Term $\langle f, f\rangle - \langle [a^{1/2}\mathcal{BK}, a^{1/2}]f, f\rangle \geq 0$. Wegen

$$\langle a^{1/2}\mathcal{BK}a^{1/2}f, f\rangle = \langle \mathcal{BK}a^{1/2}f, a^{1/2}f\rangle \geq 0,$$

ist in diesem Fall

$$\langle f, f\rangle - \langle [a^{1/2}\mathcal{BK}, a^{1/2}]f, f\rangle + \langle a^{1/2}\mathcal{BK}a^{1/2}f, f\rangle \geq 0$$

und wir schließen aus (3.14), dass $\lambda \leq 0$.

$\square$

Es sei nun $X^c := \ker L$. Dieser endlichdimensionmale Untervektorraum von $C^{3,\alpha}(\Sigma_R)$ lässt sich komplementieren. Es existiert also eine Projektion $\pi^c : C^{3,\alpha}(\Sigma_R) \to \ker L$ und man kann insbesondere π^c als die zugehörige spektrale Projektion zum Eigenwert 0 von L nehmen. Sei $\pi^s := \mathrm{Id} - \pi^c$. Dann haben wir mit $X^s := \operatorname{ran} \pi^s$ eine topologisch direkte Zerlegung

$$C^{3,\alpha}(\Sigma_R) = X^c \oplus X^s.$$

3.4.6 Satz. *Es sei $a > 0$, mit $\|[a^{1/2}\Lambda, a^{1/2}]\| \leq 1$. Dann existiert ein $\delta > 0$ und eine Funktion $h : X^c \to X^s$ mit $h(0) = \partial h(0) = 0$, so dass der Graph $\mathcal{M}^c(0)$ dieser Funktion,*

$$\mathcal{M}^c(0) = \{(x, h(x)) : \|x\|_{3,\alpha} < \delta\}$$

eine Zentrumsmannigfaltigkeit der Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + A(\rho)\rho &= F(\rho) \\ \rho(0) &= \rho_0 \end{aligned}$$

ist.

Beweis. Wir gehen wir in der Arbeit [67] vor. Mit derselben Notation ist $X_0 = C^{3,\alpha}(\Sigma)$ und $X_1 = C^{1,\alpha}(\Sigma)$. In dieser Arbeit, genauer Theorem 4.1, ist die Existenz einer global invarianten Zentrumsmannigfaltigkeit für die modifizierte Evolutionsgleichung gezeigt. Diese Gleichung stimmt mit der ursprünglichen Evolutionsgleichung auf einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 überein. Daher folgt die Existenz einer global invarianten Zentrumsmannigfaltigkeit für die ursprüngliche Evolutionsgleichung. Die Voraussetzungen aus der Arbeit [67], (4.2) - (4.6) sind in den Ergebnisse aus Abschnitt 3.1, grenauer Sätzen 3.1.4, 3.1.3 und 3.1.6 erfüllt. Es gilt noch $\Phi(0) = 0$ und 0 ist ein isolierter Eigenwert von L nach Satz 3.4.2. Der Satz 3.4.5 entpricht den letzten zwei spektralen Voraussetzungen (4.7) und (4.8). Daraus folgt die Existenz der Funktion h und der Zentrumsmannigfaltigkeit $\mathcal{M}^c(0)$ für die Evolutionsgleichung. □

3.4.7 Bemerkung. Die Bedingung $h(0) = \partial h(0) = 0$ impliziert, dass $\mathcal{M}^c(0)$ tangential zum X^c im Nullpunkt 0 ist.

3.4.8 Bemerkung. Für die konstante Funktion $a \equiv 1$ ist natürlich $[\Lambda, 1] = 0$, so dass die Existenz einer Zentrumsmannigfaltigkeit für das Hele-Shaw-Problem oder das Stefan-Problem mit konstanten Koeffizienten als Spezialfall aus diesem Satz folgt.

Kapitel 4

Der Fall $a \geq 0$

In diesem Kapitel betrachten wir den Fall, dass die Funktion a Nullstellen haben kann. Dadurch entartet das in Abschnitt 2.2 beschriebene Randwertproblem. Wir zeigen die Existenz einer eindeutigen Kurzzeitlösung des Stefanproblems unter zwei Annahmen

(A1) In einer Umgebung von Γ_0 existiert ein Vektorfeld, das nicht tangential an Γ_0 ist und entlang dessen Flusslinien die Funktion a konstant ist.

(A2) Es gilt eine Erweiterung eines Satzes von Taira zur Lösbarkeit entarteter Randwertprobleme, die in Abschnitt 4.2. formuliert wird.

4.1 Die Koordinatentransformation

Zunächst definieren wir mit Hilfe des in (A1) postulierten Vektorfelds eine Koordinatentransformation. Wir bezeichnen mit $\mathbf{v}$ das Vektorfeld und mit Φ den von Γ_0 ausgehenden Fluss:

$$\Phi : \Sigma \times (-c, c) \to \mathbb{R}^n.$$

Φ ist die eindeutig bestimmte Abbildung mit

$$\frac{d}{ds}\Phi(p, s) = \mathbf{v}(\Phi(p, s))$$

und

$$\Phi(p, 0) = p.$$

Damit bildet Φ (für möglicherweise verkleinertes c) einen Diffeomorphismus von $\Sigma \times (-c, c)$ auf eine offene Umgebung $\mathcal{U}_\Sigma$ von Σ,

$$\Phi \in C^\infty(\Sigma \times (-c, c), \mathcal{U}_\Sigma).$$

Wir nehmen an, dass für hinreichend kleines $T > 0$ gilt: $\Gamma_t \subset \operatorname{ran}(\Phi)$ für $0 \leq t \leq T$. Daher existieren Funktionen

$$\rho_t : \Sigma \to (-c, c),$$

mit

$$\operatorname{ran} \Phi(p, \rho_t(p)) = \Gamma_t,$$

Γ_t ist die Bildmenge der Funktion $\Phi(p, \rho_t(p))$, d.h.

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \Phi(p, \rho(t,p)),\, p \in \Sigma\}.$$

Es sei

$$\begin{pmatrix} \Pi \\ d \end{pmatrix} : \mathcal{U}_\Sigma \to \Sigma \times (-c, c)$$

die Inverse von Φ. Dann ist

$$\Gamma_t = \{x : d(x) = \rho_t(\Pi(x))\}.$$

Wir definieren nun die Diffeomorphismen θ_{ρ_t}

$$\begin{aligned} \theta_{\rho_t} &: \Sigma \to \Gamma_t \\ p &\mapsto \Phi(p, \rho_t(p)) \end{aligned}$$

und führen noch die Funktion

$$\rho : [0, T] \times \Sigma \to \mathbb{R}$$

$$(t, x) \mapsto \rho(t, x) = \rho_t(x).$$

ein. Γ_t ist damit die Nullstellenmenge der Funktion

$$\phi_\rho(t, x) := d(x) - \rho(t, \Pi(x))$$

$$\Gamma_t = \{x : \phi_\rho(t, x) = 0\},$$

4.1.1 Lemma. *Für den Gradienten von $\phi_\rho(t, x)$ gilt*

$$\nabla_x \phi_\rho(t, x)|_{x=\Phi(p,\rho(t,p))} \neq 0.$$

Beweis. Es sei $y = \Phi(p, \rho_t(p) + h)$ für kleines $|h|$. Dann ist

$$d(y) = \rho_t(p) + h = d(x) + h$$

und

$$\Pi(y) = p = \Pi(x).$$

Wir rechnen aus

$$\begin{aligned} \phi_\rho(t,y) &= d(y) - \rho_t(\Pi(y)) \\ &= d(x) + h - \rho_t(\Pi(x)) \\ &= \phi_\rho(t,x) + h. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0} \frac{\phi_\rho(t,\Phi(p,\rho_t(p)+h)) - \phi_\rho(t,\Phi(p,\rho_t(p)))}{h} \\ = \; & \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Andererseits ist die linke Seite die Ableitung der Funktion

$$h \mapsto \phi_\rho(t,\Phi(p,\rho_t(p)+h))$$

und deswegen gleich

$$\nabla_x \phi_\rho(t,x)|_{x=\Phi(p,\rho(t,p))} \frac{d}{ds}\Phi(p,\rho_t(p)+s).$$

□

Wir erhalten also das Einheitsnormalenfeld ν auf Γ_t durch

$$\nu(t,x) = \left.\frac{\nabla\phi_\rho(t,x)}{|\nabla\phi_\rho(t,x)|}\right|_{x=\Phi(p,\rho(t,p))}.$$

Man kann die Diffeomorphismen $\theta_{\rho_t} : \Sigma \to \Gamma_t$ ähnlich wie im ersten Kapitel zu Diffeomorphismen $\Theta_{\rho_t} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fortsetzen und mittels dieser Diffeomorphismen das Problem mit freiem Rand auf ein Problem in einem festen Gebiet transformieren.

4.2 Die Lösung des Stefan-Problems in Sobolevräumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Stefan-Problem in Sobolevräumen $W^{m,p}(D)$. Der Existenzsatz, den wir anwenden, ist der folgende.

4.2.1 Satz. *(P. Clement, S.Li, [17]) Es seien E_1 und E_0 zwei Banachräume, so dass $E_1 \hookrightarrow E_0$ und E_1 dicht in E_0 ist. Sei $u_0 \in (E_0,E_1)_{1-\frac{1}{p},p}$. Ferner sei $F \in Lip(U,E_0)$,*

$A \in Lip(U, \mathcal{L}(E_1, E_0)), A(u_0) \in MR(p, E_0)$, wobei U eine offene, beschränkte Umgebung $U \subset (E_0, E_1)_{1-\frac{1}{p},p}$ ist. Dann existiert ein $0 < \tau \leq T$, so dass die quasilineare parabolische Evolutionsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(u)u &= F(u), \qquad \text{auf } J = (0,T) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

eine eindeutige Lösung

$$u \in L^p(J_\tau, E_1) \cap W^{1,p}(J_\tau, E_0) \cap C(J_\tau, E_{1-\frac{1}{p},p})$$

auf $J_\tau = [0, \tau)$ hat.

Für die maximale Regularität sei auf Anhang A hingewiesen.
Nach der Transformation des Problems mit freiem Rand in ein festes Gebiet erhalten wir ein Randwertproblem, das zu einer quasilinearen Evolutionsgleichung reduziert wird:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + L_\rho \mathcal{B}(\rho) \mathcal{S}(\rho) H(\rho) &= 0, \\ \rho(0) &= \rho_0. \end{aligned}$$

Die Sobolevräume auf Hyperflächen und allgemeiner auf Mannigfaltigkeiten sind analog zum Fall $\mathbb{R}^n$ definiert. Eine meßbare Funktion $u : \Sigma \to \mathbb{R}$ ist in $L^p(\Sigma)$, wenn das Randintegral

$$\left(\int_\Sigma |u|^p \, d\sigma \right)^{1/p}$$

existiert. In diesem Fall ist

$$\|u\|_{p,\Sigma} = \left(\int_\Sigma |u|^p \, d\sigma \right)^{1/p}$$

eine Norm auf $L^p(\Sigma)$.

4.2.2 Definition. (Sobolevräume auf Hyperflächen) Sei Σ eine $(n-1)-$ dimensionale Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$. Für ganzzahliges m ist der Raum $W^{m,p}(\Sigma)$ definiert als der Abschluss von $C^\infty(\Sigma)$ bezüglich der Norm

$$\|u\|_{m,p;\Sigma} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{p,\Sigma}.$$

Für nichtganzzahliges $s > 0$, $s = m + \mu$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \mu < 1$, definiert man $W^{s,p}(\Sigma)$ als Interpolationsraum zwischen $W^{m,p}(\Sigma)$ und $W^{m+1,p}(\Sigma)$.

$$W^{s,p}(\Sigma) := (W^{m,p}(\Sigma), W^{m+1,p}(\Sigma))_{\mu,p}.$$

4.2.3 Bemerkung. Für diese Räume gelten die gewöhnlichen Sobolevschen Einbettungssätze. So ist z.B. die Einbettung $W^{m,p}(\Sigma) \hookrightarrow W^{m',p}(\Sigma)$ mit $m' < m$ kompakt.

Wir benutzen später das folgende Ergebnis:

4.2.4 Lemma. *Sei $sp > n-1$. Dann ist $W^{s,p}(\Sigma)$ eine Banachalgebra.*

Beweis. Siehe [1], Theorem 4.39.

4.2.5 Definition. (Besovräume auf Hyperflächen) Der Raum $B_p^{s,q}(\Sigma)$ ist definiert als der Interpolationsraum

$$B_p^{s,q}(\Sigma) := (W^{s_0,p}(\Sigma), W^{s_1,p}(\Sigma))_{\theta,q}, \quad s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1.$$

4.2.6 Bemerkung. Für den Spezialfall $q = p = 2$, stimmen die Besovräume mit den Sobolevräumen überein: $B_p^{s,p}(\Sigma) = W^{s,p}(\Sigma)$.

4.2.7 Beispiel. Es sei $1/p + 1/p' = 1$. Dann gilt

$$(L^p(\Sigma), W^{1,p}(\Sigma))_{1/p',p} = B_p^{1/p',p}(\Sigma) = W^{1-1/p,p}(\Sigma).$$

Es gilt der folgende Satz ([1], Theorem 7.39).

4.2.8 Satz. *(Spursatz) Es sei D ein Gebiet mit glattem Rand Σ, $1 \le p < \infty, s > 1/p$. Dann gibt es einen eindeutigen stetigen linearen Operator S,*

$$S : W^{s,p}(D) \to W^{s-1/p,p}(\Sigma),$$

so dass

$$Su = u|_\Sigma$$

für alle $u \in C^\infty(\overline{D})$.
Es sei α eine nicht-negative C^∞-Funktion auf Σ. Wir führen nun die folgenden Räume ein, die wir für die Untersuchung des Randwertproblems brauchen.

$$W_{\mathcal{B}}^{s-1/p,p}(\Sigma) := \{u = \delta u_1 + u_2 : u_1 \in W^{s-1/p,p}(\Sigma), u_2 \in W^{s+1-1/p,p}(\Sigma)\}.$$

4.2.9 Bemerkung. Wir nehmen an, dass die Funktion δ konstant auf den Flusslinien von Φ ist. Daher ist $\delta = a \circ \Theta_\rho$ unabhängig von ρ. $W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma)$ hängt dann jedoch nicht von ρ ab.

Im Folgenden sei für eine Konstante $c > 0$,

$$\mathcal{U} := \{u \in W_{\mathcal{B}}^{3+s-1/p,p}(\Sigma) : \|u\|_{W_{\mathcal{B}}^{3+s-1/p,p}(\Sigma)} \le c\}.$$

mit $s > 0$ und $p > n$.
Nun kommen wir zurück zum Stefan-Problem. Wie vorher bezeichnet $\mathcal{B}(\rho)$ die transformierte normale Ableitung. $\mathcal{B}(\rho)$ ist ein Operator erster Ordnung. Für diesen Operator gilt der folgende

4.2.10 Satz. *Für jedes $\rho \in \mathcal{U}$ ist*

$$\mathcal{B}(\rho) : W^{3+s,p}(D) \to W^{2+s-1/p,p}(\Sigma),$$

stetig, und es gilt

$$\mathcal{B} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(W^{3+s,p}(D), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))).$$

Darüber hinaus hat der Operator die Darstellung

$$\mathcal{B}(\rho)v = \overrightarrow{b_\rho} \cdot \nabla v$$

für ein nirgends tangentiales und nirgends verschwindendes Vektorfeld

$$\overrightarrow{b_\rho} : \Sigma \to \mathbb{R}^n.$$

Beweis. Man berechnet $\mathcal{B}(\rho)$ analog wie in (2.1.16). Da wir aber in Sobolevräumen arbeiten, müssen wir noch sicherstellen, dass das Produkt

$$\nabla v \cdot [(D\Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho] \cdot \left(\frac{\nabla \phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla \phi_\rho|} \right)^T$$

definiert ist. Aus der Darstellung von $\mathcal{B}(\rho)$ und mit der Voraussetzung, dass $\rho \in W^{3+s-1/p,p}(\Sigma)$, folgt für die Koeffizienten b_i von $\overrightarrow{b_\rho} = (b_1, ..., b_n)$

$$\overrightarrow{b_\rho} := [(D\Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho] \cdot \left(\frac{\nabla \phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla \phi_\rho|} \right)^T$$

die folgende Regularität

$$b_i \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma). \tag{4.2}$$

Wegen $p > n$ ist $(2+s)p > n$. Dann ist $W^{2+s,p}(D)$ eine Banachalgebra und damit auch der Spurraum $W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$. Mit $\nabla v \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$ ist dann auch

$$\nabla v \cdot [(D\Theta_\rho^{-1}) \circ \Theta_\rho] \cdot \left(\frac{\nabla \phi_\rho(\Theta_\rho)}{|\nabla \phi_\rho|} \right)^T \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma).$$

$\square$

$H(\rho)$ ist der transformierte mittlere Krümmungsoperator, der nach Satz 2.3.2 eine Zerlegung

$$H(\rho) = P(\rho)\rho + Q(\rho)$$

mit einem elliptischen Operator P hat. Dann hat die Evolutionsgleichung die Form

$$\partial_t \rho + A(\rho)\rho = F(\rho)$$

mit

$$A(\rho) := L_\rho \mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)P(\rho), \quad F(\rho) := -L\rho\mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)Q(\rho).$$

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass der Operator $A(\rho)$ und die Funktion $F(\rho)$ Lipschitz-stetig sind.

Wir nehmen nun an, dass die Anfangsgeometrie für das Stefan-Problem Γ_0 von der Klasse $W^{3+s,p}$ mit $p > n$ und $s > 0$ ist. Dann gilt für die Koeffizienten des Operators

$$\mathcal{A}(\rho)v = \sum_{i,j} a_{ij}(\rho)\partial^2_{ij}v + \sum_i a_i(\rho)\partial_i v$$

von dem Randwertproblem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 && \text{in } D \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v &= H(\rho) && \text{auf } \Sigma \end{aligned} \tag{4.3}$$

die folgende Regularität:

$$a_{ij}(\rho) \in W^{2+s,p}(D),\ a_i(\rho) \in W^{1+s,p}(D).$$

Wir assoziieren zu dem Randwertproblem den oben eingeführten Raum

$$W^{1+s-1/p,p}_{\mathcal{B}}(\Sigma) = \{H = \delta H_1 + H_2 : H_1 \in W^{1+s-1/p,p}(\Sigma), H_2 \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)\}.$$

Da $\rho \in \mathcal{U}$, gilt für die mittlere Krümmung $H(\rho)$, $H(\rho) \in W^{1+s-1/p,p}_{\mathcal{B}}(\Sigma)$.

Für die weitere Untersuchung machen wir die Annahme, dass die folgende Erweiterung des Satzes von Taira aus [71] gilt.

4.2.11 Satz. *Es sei D ein beschränktes Gebiet von $\mathbb{R}^n$, seien μ und γ reelle, glatte Funktionen auf dem Rand ∂D und sei $\boldsymbol{n}$ das äußere Einheitsnormalenfeld auf ∂D. A sei ein elliptischer Operator mit reellen Koeffizienten, so dass*

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i u(x)$$

mit

$$a_{ij} \in W^{2+s,p}(D), \quad a_i \in W^{1+s,p}(D)$$

mit $s > 0$, $p > n$ *und* $sp > n$. *Für eine Konstante* $C > 0$ *sei*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2, \quad x \in D,\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

Ferner seien die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(i) $\mu(x) \geq 0$ *auf* ∂D

(ii) $\gamma(x) \geq 0$ *auf* ∂D, $\quad \gamma(x) > 0$ *auf* $M := \{x \in \partial D : \mu(x) = 0\}$.

Dann hat für $f \in W^{s,p}(D)$, $\varphi \in W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\partial D)$, *wobei*

$$W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\partial D) := \{\varphi = \mu\varphi_1 - \gamma\varphi_2 : \varphi_1 \in W^{1+s-1/p,p}(\partial D), \varphi_2 \in W^{2+s-1/p,p}(\partial D)\}$$

das Problem

$$\begin{aligned} Au &= f && \text{in } D \\ Lu &= \mu\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} + \gamma u = \varphi && \text{auf } \partial D \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $u \in W^{2+s,p}(D)$, *für die die a priori Abschätzung*

$$\|u\|_{W^{2+s,p}(D)} \leq C\left[\|f\|_{W^{s,p}(D)} + \|\varphi\|_{W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\partial D)} + \|u\|_{W^{s,p}(D)}\right]$$

gilt.

4.2.12 Bemerkung. In der ursprünglichen Formulierung des Satzes von Taira sind die Koeffizienten glatt, $a_{ij} \in C^\infty(D)$, $\quad a_i \in C^\infty(D)$, und die Funktionen f und φ haben weniger Regularität: $f \in L^p(D)$, $\varphi \in W_{\mathcal{B}}^{1-1/p,p}(\partial D)$. Die Lösung liegt dann in $W^{2,p}(D)$. Wir fordern bessere Glattheit von diesen Funktionen und vermuten, dass die Lösung auch mehr Regularität hat, vorausgesetzt sie existiert.

4.2.13 Bemerkung. Wir erhalten einen algebraischen und topologischen Isomorphismus

$$(A, L) : W^{2+s,p}(D) \to W^{s,p}(D) \oplus W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma).$$

Wir betrachten nun als Spezialfall das Randwertproblem im Stefan-Problem (4.3). Unter der Annahme, dass 4.2.11 gilt, haben wir mit $\widetilde{\mathcal{B}}(\rho)v := v + \delta\mathcal{B}(\rho)v$ für den Operator $\binom{\mathcal{A}}{\widetilde{\mathcal{B}}}$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \widetilde{\mathcal{B}} \end{pmatrix} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(W^{2+s,p}(D), W^{s,p}(D) \oplus W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma)).$$

und diese Abbildung ist glatt, da $\mathcal{A}$ und $\widetilde{\mathcal{B}}$ glatt sind:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \widetilde{\mathcal{B}} \end{pmatrix} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(W^{2+s,p}(D), W^{s,p}(D) \oplus W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma)))$$

Wir können also für das Randwertproblem im Stefan-Problem den Lösungsoperator

$$\mathcal{S}(\rho) : W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s,p}(D)$$

definieren.

4.2.14 Bemerkung. Der Einfachheit halber schreiben wir $\mathcal{S}(\rho) : W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s,p}(D)$. Ganz präzise wäre natürlich

$$\mathcal{S}(\rho) : \{0\} \oplus W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s,p}(D).$$

4.2.15 Bemerkung. Für den Operator $P(\rho)$ zweiter Ordnung gilt

$$\gamma\mathcal{S}(\rho)P(\rho) : W_{\mathcal{B}}^{3+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s-1/p,p}(\Sigma). \tag{4.4}$$

4.2.16 Bemerkung. Wegen der Voraussetzung $sp > n$, ist die Multiplikation in Sobolevräumen (Satz 4.2.4)

$$W^{2+s,p}(D) \times W^{s,p}(D) \to W^{s,p}(D)$$

stetig. Also liegen die Terme $a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x)$, die in dem Operator

$$\mathcal{A}u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x)\partial_i u(x)$$

vorkommen, in $W^{s,p}(D)$. Die Multiplikation

$$W^{1+s,p}(D) \times W^{1+s,p}(D) \to W^{s,p}(D),$$

die für die Terme $a_i(x)\partial_i u(x)$ relevant ist, ist wegen $p > n$ ohne irgendwelche Einschränkung an s stetig.
Die Eindeutigkeit der Lösung ist auch in der Arbeit [71] gezeigt, wir wollen hier aber einen kürzeren und direkten Beweis geben. Wenn das homogene Problem nur die triviale Lösung in $W^{2+s,p}(D)$ hat, d.h. wenn $g = 0$ nach sich zieht, dass $v = 0$, dann hat auch (4.3) eine eindeutige Lösung.
Es folgt der Beweis der Eindeutigkeit des homogenen Problems.

4.2.17 Lemma. *Sei $p > n/2$ und $u \in W^{2+s,p}(D)$ eine Lösung von*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 \quad && \textit{in } D \\ v + \delta\mathcal{B}(\rho)v &= 0 \quad && \textit{auf } \Sigma. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dann ist $u \equiv 0$.

Beweis. Als Folgerung aus dem Sobolevschen Einbettungssatz $W^{2+s,p}(D) \hookrightarrow C^0(\overline{D})$ für $p > n/2$, gilt $u \in C^0(\overline{D})$. Wir nehmen zunächst an, dass u einen positiven Wert in $\overline{D}$ annimmt und setzen $u(x_0) = \max_{x \in \overline{D}} u(x) > 0$. Angenommen $x_0 \in D$. Dann ist nach dem Theorem 9.6 in [43], einer Folgerung des Maximumprinzips von Aleksandrov-Bakelman,

$$u = c = const. \quad \text{in}\, \overline{D}$$

Dann ist aber $c = 0$. Widerspruch! Deswegen ist $x_0 \notin D$. Mit der Annahme $x_0 \in \Sigma$, folgt aus dem Hopfschen Randpunktlemma ([43], Lemma 3.4), dass

$$v(x_0) + \delta \mathcal{B}(\rho) v(x_0) > 0$$

was ein Widerspruch zur Randbedingung ist. Also ist $u \leq 0$. Analog schließt man, dass $u \geq 0$ ist, und so haben wir $u \equiv 0$.

□

Für jedes $g \in W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma)$ hat das Problem eine eindeutige Lösung $v \in W^{2+s,p}(D)$. Die Lösungen hängen darüber hinaus stetig von den Anfangsdaten ab, was die Lipschitzstetigkeit des Lösungsoperators zur Folge hat. Das ist eine wesentliche Tatsache, die gebraucht wird, um die Lipschitzstetigkeit der beiden Teile der Evolutionsgleichung zu zeigen.

4.2.18 Satz. *Es sei V eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{U}$ und $g \in W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma)$. Dann ist der Lösungsoperator $\mathcal{S}(.)$ des Randwertproblems*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho) v &= 0 \\ v + \delta \mathcal{B}(\rho) v &= g(\rho) \end{aligned}$$

Lipschitz-stetig. Es existiert also eine Konstante $C > 0$, so dass für den Lösungsoperator

$$\mathcal{S} : \mathcal{U} \to \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s,p}(D))$$

gilt

$$\|\mathcal{S}(\rho_1) - \mathcal{S}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s,p}(D))} \leq C \|\rho_1 - \rho_2\|_V$$

für alle $\rho_1, \rho_2 \in V$.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.1.2. □

4.2.19 Bemerkung. Wegen der Stetigkeit der Einschränkung

$$\gamma : W^{2+s,p}(D) \to W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$$

gilt

$$\begin{aligned} & \|\gamma\mathcal{S}(\rho_1) - \gamma\mathcal{S}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))} \\ \leq \quad & \|\mathcal{S}(\rho_1) - \mathcal{S}(\rho_2)\|_{\mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s,p}(D))} \\ \leq \quad & C\|\rho_1 - \rho_2\|_V. \end{aligned}$$

Sei nun $\mathcal{V}_q := \mathcal{U} \cap (W^{2+s-1/p,p}(\Sigma), W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma))_{1/q',q}$ wobei q so groß gewählt sei, dass $(W^{2+s-1/p,p}(\Sigma), W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma))_{1/q',q} \hookrightarrow W^{3+r,p}(\Sigma)$ gilt. Zwei Folgerungen aus dem letzten Satz sind:

4.2.20 Satz. *Es gilt* $F(.) = -L_\rho\mathcal{B}(.)\mathcal{S}(.)Q(.) \in Lip(\mathcal{V}_q, W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))$.

Beweis. Nach Satz 4.2.11 gilt für den Lösungsoperator

$$\mathcal{S} : \mathcal{V}_q \to \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{2+s-1/p,p}(\Sigma), W^{3+s,p}(D)).$$

Daher gilt wegen $Q \in Lip(\mathcal{V}_q, W_{\mathcal{B}}^{2+s-1/p,p}(\Sigma))$,

$$\mathcal{S}(.)Q(.) \in Lip(\mathcal{V}_q, W^{3+s,p}(D)).$$

$\mathcal{B}(\rho)$ ist ein Operator erster Ordnung mit

$$\mathcal{B}(.) \in C^\infty(\mathcal{V}_q, \mathcal{L}(W^{3+s,p}(D), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))).$$

Das ergibt

$$F(.) = -L_\rho\mathcal{B}(.)\mathcal{S}(.)Q(.) \in Lip(\mathcal{V}_q, W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)),$$

also $F \in Lip(\mathcal{V}_q, W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))$. □

Analog zeigen wir

4.2.21 Satz. *Es gilt*

$$A(.) := L_\rho\mathcal{B}(.)\mathcal{S}(.)P(.) \in Lip(\mathcal{V}_q, \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))).$$

Beweis. Für den Beweis brauchen wir einige Vorbereitungen.

Der Operator

$$\mathcal{N} : \rho \mapsto \mathcal{B}(\rho)\mathcal{S}(\rho)$$

ist ein Lipschitz-stetiger Operator. Aus Lemma 4.2.4 folgt, dass er gut erklärt ist. Mit $W^{m,p}(\Omega)$ ist auch der Spurraum $W^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$ eine Banachalgebra. Für $p > n$ ist also $W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$ eine Banachalgebra. Nach (4.2) gilt $b_i \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$. Dann ist aber wegen der Voraussetzung $p > n$ das Produkt $b_i\, \gamma\partial_i\mathcal{S}(\rho)u$ im Raum $W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$ enthalten. Wir haben gezeigt

$$\mathcal{N}(\rho)u = \vec{b_\rho} \cdot \gamma(\nabla\mathcal{S}(\rho)u) \in W^{2+s-1/p,p}(\Sigma).$$

Die Lipschitzstetigkeit dieses Operators ist eine Folgerung aus der Lipschitzstetigkeit des Randoperators $\gamma\mathcal{S}$. Die Norm des Interpolationsraums $\mathcal{V}_q = (W_{\mathcal{B}}^{2+s-1/p,p}(\Sigma), W^{4+s-1/p,p}(\Sigma))_{\theta,q}$, $\theta = 1/q' = 1 - 1/q$, bezeichnen wir weiterhin abkürzend mit $\|.\|_{E_{\theta,q}}$.

Wie schon bemerkt, $P \in C^\infty(\mathcal{V}_q, \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma), W_{\mathcal{B}}^{2+s-1/p,p}(\Sigma)))$. Mit

$$\mathcal{N}(.) = \mathcal{B}(.)\mathcal{S}(.) \in \mathit{Lip}(\mathcal{V}_q, \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{2+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma))).$$

ist dann

$$A(.) = L_\rho\mathcal{B}(.)\mathcal{S}(.)P(.) \in \ \mathit{Lip}(\mathcal{V}_q, \mathcal{L}(W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma), W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)))$$

□

Damit sind fast alle Bedingungen im Satz von Clement-Li 4.2.1 erfüllt. Es bleibt nur noch die maximale Regularität des Operators $A(\rho_0)$ zu untersuchen, also ob $A(\rho_0) \in MR(E_0)$ gilt. Tatsächlich zeigen wir nun, dass für $\rho_0 \in C^\infty(\Sigma)$ der Operator $A(\rho_0)$ einen H^∞-Kalkül besitzt, insbesondere also maximale Regularität hat. Wir benutzen dazu den unten stehenden Satz 4.2.22 von Bilyj, Schrohe und Seiler [9]. Für beliebiges $\varphi < \pi$ definieren wir den Sektor $S(\varphi)$ durch

$$S(\varphi) = \{re^{it} \in \mathbb{C} : r \geq 0, \varphi \leq t \leq 2\pi - \varphi\}.$$

4.2.22 Satz. *Es sei Σ eine kompakte Mannigfaltigkeit und $A : C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung $m \geq 0$. Für die lokalen Symbole $a \in S^m_{\rho,\delta}$ mit $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, gebe es Konstanten $c, C > 0$, so dass für $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \geq C$, das Spektrum von $a(x,\xi)$ außerhalb von $S(\varphi) \cup \{|\mu| \leq c\}$ liegt und für $\mu \in S(\varphi)$,*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|\ |(a(x,\xi) - \mu)^{-1}| \leq c_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \tag{4.6}$$

Dann besitzt der Operator $A + c$ für hinreichend großes $c > 0$ einen beschränkten H^∞-Kalkül.

4.2.23 Bemerkung. Nach C.0.58 und C.0.62 hat dann $A + c$ maximale Regularität, falls $\varphi > \pi/2$. Indem man in der Gleichung $\dot{v} + Av = g$ die Funktion v durch $e^{ct}v$ ersetzt, erhält man die maximale Regularität von A aus der von $A + c$.

Um den Satz auf $A(\rho_0)$ anwenden zu können, ist es nützlich, eine neue Darstellung herzuleiten. Zunächst beobachten wir:

4.2.24 Lemma. *Es sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\rho) : W_{\mathcal{B}}^{1+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s,p}(D)$ der Lösungsoperator für das semi-homogene Dirichletproblem*

$$\mathcal{A}(\rho)u = 0 \text{ in } D,\ u = g \text{ auf } \Sigma,$$

d.h. $u = \mathcal{K}g$ löst die obige Aufgabe. Dann ist die Lösung $\mathcal{S}$ von

$$\mathcal{A}(\rho)u = 0 \text{ in } D, \quad \delta\mathcal{B}u + u = g \text{ auf } \Sigma,$$

$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\rho)$, gegeben durch $g \mapsto \mathcal{K}(\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K})^{-1}g$.

Beweis. Es sei $u := \gamma\mathcal{S}\varphi$. Dann ist

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K})u &= u + \delta\mathcal{B}\mathcal{K}u = u + \delta\mathcal{B}u \\ &= \gamma\mathcal{S}\varphi + \delta\mathcal{B}\gamma\mathcal{S}\varphi = \varphi\end{aligned}$$

Also $(\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K})\gamma\mathcal{S}\varphi = \varphi$,d.h.

$$\gamma\mathcal{S} = (\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K})^{-1}$$

und daher

$$\mathcal{K}(\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K})^{-1} = \mathcal{S}$$

□

Wir zeigen nun zunächst, dass für $\rho_0 \in C^\infty(\Sigma)$ der Operator $\mathrm{Id} + \delta\mathcal{B}\mathcal{K}$ die Voraussetzungen von Satz 4.2.22 erfüllt. Dazu erweist es sich als nützlich, auf die Koordinatentransformation zu verzichten. Auf Γ_0 ist nämlich $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\rho_0) = \Delta$ und $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\rho_0) = \partial_\nu$. Ferner ist hier $\delta = a$. Somit ist $\mathcal{B}\mathcal{K} = \Lambda$, der Dirichlet-Neumann-Operator. Es ist bekannt, s. etwa [70], dass Λ ein klassischer elliptischer Pseudodifferentialoperator der Ordnung 1 ist und sein Hauptsymbol die Funktion $\lambda_1(x, \xi) = |\xi|_x$, die Länge des Covektors bezüglich der auf dem Rand des Gebiets induzierten Metrik. Wir bezeichnen mit λ ein lokales Symbol von Λ und setzen $s(x, \xi) = 1 + a\lambda(x, \xi)$.

4.2.25 Satz. *Der Operator $Id + a\Lambda$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4.2.22 für beliebiges $\varphi < \pi$, d.h. es gibt ein $R > 0$, und Konstanten $c_0 > 0$, $C_{\alpha,\beta} \geq 0$, so dass für alle Multi-Indizes α, β, alle $x, \xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ mit $|\xi| \geq R$, und alle $\mu \in S(\varphi)$ gilt* *(i)* $|s(x,\xi)-\mu| \geq c_0$

(ii) $\frac{|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta s(x,\xi)|}{|s(x,\xi)-\mu|} \leq C_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+|\beta|/2}$.

Beweis. Da λ elliptisch ist mit Hauptsymbol $|\xi|_x$, wird die Differenz $|1-\lambda/|\xi|_x|$ beliebig klein für große $|\xi|_x$. Daher gilt

$$|s(x,\xi)-\mu| \geq |1-\mu+a|\xi|_x| - a|\xi|_x\,|1-\lambda/|\xi|_x|. \tag{4.7}$$

Nun beobachten wir: Ist $r \geq 1$, so gibt es eine Konstante $c > 0$ (etwa $c = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$) so dass

$$|r-\mu| \geq cr \geq c, \quad \mu \in S(\varphi). \tag{4.8}$$

Daher ist $|1-\mu+a|\xi|_x| \geq c|1+a|\xi|_x|$, und die Differenz in (4.7) ist $\geq \frac{c}{2}|1+a|\xi|_x|$ für große $|\xi|_x$. Wir erhalten (i). Ferner sehen wir, dass es genügt, (ii) mit dem durch $1+a|\xi|_x$ ersetzten Nenner zu beweisen. Für $\alpha = \beta = 0$ folgt (ii) aus obiger Überlegung. Anderenfalls ist nach der Leibnizregel $\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta s(x,\xi)$ eine Linearkombination von Termen der Form

$$(\partial_x^{\beta_1} a)\ (\partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta_2}\lambda(x,\xi)), \quad \beta_1+\beta_2 = \beta.$$

Nun ist $\partial_\xi^\alpha\partial_x^{\beta_2}\lambda(x,\xi) = O(\langle\xi\rangle^{1-|\alpha|})$. Da a in C_b^∞ liegt, ist (ii) trivial für $|\beta| \geq 2$. Für $|\beta| = 0, 1$, verwenden wir, dass

$$2\sqrt{a}\sqrt{|\xi|_x} \leq 1 + a|\xi|_x$$

so dass

$$\begin{aligned}\frac{a}{1+a|\xi|_x} &\leq \frac{1}{|\xi|_x}\,\frac{a|\xi|_x}{1+a|\xi|_x} = O(|\xi|^{-1}) \quad \text{und}\\ \frac{|\partial_{x_j}a|}{1+a|\xi|_x} &\leq \frac{|\partial_{x_j}a|}{\sqrt{a}\sqrt{|\xi|_x}}\,\frac{\sqrt{a}\sqrt{|\xi|_x}}{1+a|\xi|_x} = O(|\xi|^{-1/2}).\end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung wurde das bekannte unten stehende Lemma 4.2.26 verwendet, s. z.B. Taira [72, Lemma 4.3].

4.2.26 Lemma. *Es sei $0 \leq f \in C^2(\mathbb{R})$ und f'' beschränkt. Dann gilt*

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2\|f''\|_{\sup} f(x)}.$$

Beweis. Aus der Taylorformel folgt

$$0 \leq f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2$$

mit einem ξ zwischen y und x. Für $z = y - x$ folgt

$$0 \leq f(x) + f'(x)z + \frac{\|f''(\xi)\|_{\sup}}{2}z^2$$

und daraus die obige Ungleichung. □

4.2.27 Bemerkung. Wir können daher zu $\mathrm{Id} + a\Lambda$ eine parameter-abhängige Parametrix konstruieren. Wir hatten angenommen, dass der Lösungsoperator zu den verallgemeinerten entarteten Randwertproblem 4.2.11 existiert. Daher existiert auch die Inverse $(\mathrm{Id} + a\Lambda)^{-1}$, und ist ein Pseudodifferentialoperator mit lokalen Symbolen in $S^0_{1,1/2}$. Klar: C unterscheidet sich von $C(0)$ nur um einen regularisierenden Operator.

4.2.28 Lemma. *Die lokalen Symbole $c(x, \xi; \mu)$ von $C(\mu)$ haben asymptotische Entwicklungen $c \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j$ mit $c_0(x, \xi; \mu) = (\mu - 1 - a(x)\lambda(x, \xi))^{-1}$, und für alle Multi-Indizes α, β und alle $j = 0, 1, \ldots$ ist $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta c_j$ eine Linearkombination von Termen der Form*

$$c_0(x, \xi; \mu)\ \partial_\xi^{\alpha_1} D_x^{\beta_1} s(x, \xi)\ b_0(x, \xi; \lambda) \ldots \partial_\xi^{\alpha_r} D_x^{\beta_r} s(x, \xi) b_0(x, \xi; \lambda)$$

mit geeigneten r und $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = j + |\alpha|$ sowie $\beta_1 + \ldots + \beta_r = j + |\beta|$. Es folgt, dass

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta c_j(x, \xi)| \le (1 + a(x)|\xi|)^{-1} \langle \xi \rangle^{-j-|\alpha|+|\beta|/2}. \tag{4.9}$$

4.2.29 Satz. *Es sei $\rho_0 \in C^\infty(\Sigma)$. Dann hat $A(\rho_0)$ einen $\mathcal{H}_\infty$-Kalkül bzgl. $S(\varphi)$ und insbesondere maximale Regularität.*

Beweis. Auch hier ist es praktischer, ohne die Koordinatentransformation zu arbeiten. Dann hat $A(\rho_0)$ die Form

$$A(\rho_0) = L_{\rho_0} \Lambda (\mathrm{Id} + a\Lambda)^{-1} P(\rho_0)$$

mit einer strikt positiven Funktion L. Wir rechnen nun nach, dass die Komposition die Annahmen von Satz 4.2.22 erfüllt. $A(\rho_0)$ ist das Produkt von vier Operatoren:

(i) dem positiven Differentialoperator $P(\rho_0)$

(ii) dem Pseudodifferentialoperator $C(0) = (\mathrm{Id} + a\Lambda)^{-1}$

(iii) dem Dirichlet-Neumann-Operator Λ

(iv) der Multiplikation mit L_{ρ_0}

Die Komposition ist daher ein Pseudodifferentialoperator mit lokalen Symbolen $p(x, \xi)$ in $S^3_{1,1/2}$. Wir wollen zeigen:
Es existieren Konstanten $c > 0$, $R \ge 0$ und, für alle Multi-Indizes α, β, Konstanten $C_{\alpha,\beta}$ so dass für alle x und ξ mit $|\xi| \ge R$ und alle $\mu \in S(\varphi)$

(i) $|p(x, \xi) - \mu| \ge c, \quad \mu \in S(\varphi)$, and

(ii) $\dfrac{|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi)|}{|p(x,\xi)-\mu|} \leq C_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|+|\beta|/2}$.

Wir wissen, dass das lokale Symbol λ von Λ das Hauptsymbol $|\xi|_x$ hat. Natürlich können wir in allen Abschätzungen $|\xi|_x$ durch $|\xi|$ ersetzen. Wir bezeichnen für den Augenblick mit $d = d(x,\xi)$ das lokale Symbol von $P(\rho_0)$ und mit d_0 das Hauptsymbol. Dann ist d_0 strikt positiv, und es gilt $d_0(x,\xi) \geq c|\xi|^2$ für hinreichend großes $|\xi|$ mit einer Konstante $c > 0$.
Die Funktion L ist für (i) und (ii) irrelevant und kann ignoriert werden. Nun sei

$$p_0(x,\xi) = |\xi|(1 + a(x)|\xi|)^{-1} d_0(x,\xi).$$

Dann ist p_0 strikt positiv für $\xi \neq 0$, da $d_0 > 0$, und $p(x,\xi)p_0^{-1}(x,\xi) \to 1$ für $|\xi| \to \infty$, gleichmäßig in x. Aus den Gleichungen (4.8) and (4.9), folgt für $|\xi| \geq 1$, dass

$$\begin{aligned} |\mu - p(x,\xi)| &\geq |\mu - p_0(x,\xi)| + |p_0(x,\xi)||p(x,\xi)p_0^{-1}(x,\xi) - 1| \\ &\geq c|p_0(x,\xi)| - \varepsilon|p_0(x,\xi)| \geq c/2|p_0(x,\xi)|. \end{aligned}$$

Wir können also in (ii) den Nenner durch p_0 ersetzen, um die Rechnungen zu vereinfachen. Da $|p_0(x,\xi)| \geq 1$ für $|\xi| \geq 1$, folgt sofort (i).
Um (ii) zu zeigen, beachten wir zunächst, dass bis auf regularisierende Terme $p = \lambda\#c(0)\#d$ das Leibnizprodukt der drei Symbole ist. Da wir für die Komposition eine asymptotische Entwicklung haben, genügt es, (ii) für die Terme der Entwicklung zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned} &\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p(x,\xi) \\ &\sim \sum \frac{1}{\sigma!\tau!}\left(\partial_\xi^{\alpha_1+\sigma}\partial_x^{\beta_1}\lambda(x,\xi)\right)\left(\partial_\xi^{\alpha_2+\tau}\partial_x^{\beta_2+\sigma}c_j(x,\xi;0)\right)\left(\partial_\xi^{\alpha_3}\partial_x^{\beta_3+\tau}d(x,\xi)\right), \end{aligned} \tag{4.10}$$

wobei sich die Summe erstreckt über alle Multi-Indizes $\sigma, \tau,\ j = 0,1,\dots$ und alle $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, die sich zu α addieren, und alle β_1,β_2,β_3 die sich zu β addieren. Nun seien $\sigma,\tau,j,\alpha_j,\beta_k$ fest. Mit Hilfe von (4.9) und den Symbolabschätzungen für λ und δ können die Terme auf der rechten Seite abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} &O\left(\langle\xi\rangle^{1-|\alpha_1|-|\sigma|}|c_0(x,\xi,0)|\langle\xi\rangle^{-j/2-|\alpha_2|-|\tau|+|\beta_2|/2+|\sigma|/2}\langle\xi\rangle^{2-|\alpha_3|}\right)\right) \\ &\qquad = O\left(\langle\xi\rangle^{3-j/2-|\alpha|-|\tau|-|\sigma|/2+|\beta|/2}|c_0(x,\xi;0)|\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Nun war $c_0(x,\xi;0) = (1 + a(x)|\xi|)^{-1}$ das Hauptsymbol von $C(0) = (1 + a\Lambda)^{-1}$. Da $|\delta(x,\xi)| \geq c\langle\xi\rangle^2$ für geeignetes $c > 0$ und großes $|\xi|$, haben wir $p_0(x,\xi) \geq c'\langle\xi\rangle^3|c_0(x,\xi;0)|$. Daraus folgt (ii).

4.2.30 Satz. *Es sei $\rho_0 \in C^\infty(\Sigma)$. Dann hat der Operator*

$$A(\rho_0) : W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma) \to W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$$

maximale L^p-Regularität.

Beweis. Wir haben gezeigt, dass der Operator $A(\rho_0) + c$ für hinreichend großes c H^∞-Kalkül besitzt. Die Behauptung folgt daher aus Bemerkung 4.2.23 im Anhang. □

Endlich können wir diese Ergebnisse zusammenfassen und den Hauptsatz dieses Abschnitts beweisen.

4.2.31 Satz. *Für jede Anfangsgeometrie $\rho(0,.) = \Gamma_0$, mit $\rho(0,.) \in C^\infty(\Sigma)$, hat das Stefan-Problem (1.4) eine eindeutige Lösung (v, ρ) auf einem genügend kleinen Zeitintervall $J_\tau := [0, \tau)$, mit*

$$v \in C(J_\tau, W^{2+s,p}(D))$$

und

$$\rho \in L^p(J_\tau, W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma)) \cap W^{1,p}(J_\tau, W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)) \cap C(J_\tau, W^{3+r-1/p,p}(\Sigma)).$$

Beweis. Die Evolutionsgleichung für das Stefan-Problem ist

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + A(\rho)\rho &= F(\rho) \\ \rho(0) &= \rho_0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Mit dem Satz von Clement-Li 4.2.1 für $E_0 := W^{2+s-1/p,p}(\Sigma)$, $E_1 := W_{\mathcal{B}}^{4+s-1/p,p}(\Sigma)$, folgt die Behauptung aus 4.2.20, 4.2.21 und 4.2.30.

Anhang A

Maximale Regularität und Interpolationsräume

Sei $\mathbf{T} = (T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit dem Erzeuger A. Für eine Funktion $f \in C(J, X)$ betrachten wir das inhomogene Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t) + f(t), \quad \text{auf J} \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die Lösung ist gegeben durch Variation der Konstanten

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Wir werden die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ noch mit e^{tA}, und $\int_0^t T(t-s)f(s)\,ds$ mit $J_A(f)(t)$ bezeichnen. Also ist in dieser Schreibweise

$$J_A(f)(t) = \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds \tag{A.2}$$

und die Lösung von (A.1) ist

$$u(t) = e^{tA}u_0 + J_A(f)(t).$$

A.0.32 Definition. Der Erzeuger A einer C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X hat **maximale stetige Regularität**, falls für alle $f \in C(J, X)$ eine eindeutige Lösung u von (A.1) mit $u \in C^1(J, X)$ und $u \in C(J, \mathcal{D}(A))$ existiert.

Also besitzen alle drei Terme in (A.1) gleiche Regularität, d.h. $\dot{u}$, Au, $f \in C(J, X)$. Daher der Name maximale Regularität. Es wird auch eine andere Art maximaler Regularität für den Operator A definiert, die in den modernen Untersuchungen wichtiger ist. Wir betrachten das inhomogene Cauchyproblem mit Anfangswert u_0 gleich Null.

$$
\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= Au(t) + f(t), \quad \text{auf J} \\
u(0) &= 0.
\end{aligned} \tag{A.3}
$$

A.0.33 Definition. Sei X ein Banachraum, $1 < p < \infty$, und der Operator A sei abgeschlossen mit dichtem Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$ in X. A hat **maximale L^p-Regularität**, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $f \in L^p(J, X)$ eine eindeutige Lösung u, $u \in L^p(J, \mathcal{D}(A))$, $u' \in L^p(J, X)$ von (A.3) existiert, und u der *a priori* Abschätzung

$$
\|u'\|_{L^p(J,X)} + \|Au\|_{L^p(J,X)} \leq C\|f\|_{L^p(J,X)}
$$

genügt. In diesem Fall schreiben wir $A \in MR(X)$.

A.0.34 Bemerkung. Dass $A \in MR(X)$ eine gute Bezeichnung ist, folgt aus der Unabhängigkeit der maximalen L^p-Regularität von p. Wenn nämlich der Operator A maximale L^p-Regularität für ein p, $1 < p < \infty$ hat, dann hat er auch maximale L^q-Regularität für alle q, $1 < q < \infty$. Dieses Ergebnis ist eine Folgerung aus dem Satz von Benedek-Calderon-Panzone ([8]).

Natürlich haben nicht alle Operatoren die Eigenschaft der maximalen L^p-Regularität. Eine notwendige Bedingung ist im folgenden Satz enthalten.

A.0.35 Satz. *Sei A ein Operator auf dem Banachraum X mit maximaler L^p-Regularität für ein $1 < p < \infty$. Dann ist $-A$ der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe auf X.*

Beweis. Der Satz ist bewiesen in [23].

A.0.36 Bemerkung. Wenn X ein Hilbertraum ist, dann ist nach dem Satz von de Simon von 1964 auch die Umkehrung richtig (siehe [21]).

Damit ein Erzeuger maximale Regularität besitzt, muss der Raum X notwendigerweise eine starke geometrische Bedingung erfüllen, denn es gilt der folgende Satz von Baillon:

A.0.37 Satz. *Es sei A ein unbeschränkter Operator mit maximaler L^p-Regularität auf einem Banachraum X. Dann X besitzt eine Kopie von c_0.*

Beweis. Für den Beweis siehe [7] oder [26].

Um die maximale L^p-Regularität zu charakterisieren, braucht man den Begriff der **$\mathcal{R}$-Beschränktheit** einer Menge von Operatoren. Diese Art von Beschränktheit stellt eine stärkere Bedingung als die gewöhnliche gleichmäßige Beschränktheit dar. Man kann sie sich als "unbedingte" Beschränktheit für Operatoren vorstellen.

A.0.38 Definition. Seien $r_n(t) := \operatorname{sign}\sin(2^n\pi t)$ die Rademacher Funktionen auf $[0,1]$. Eine Familie $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ von Operatoren heißt **$\mathcal{R}$-beschränkt**, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $T_1, ..., T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ und alle $x_1, .., x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k T_k x_k \right\|_{L^2([0,1],Y)} \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\|_{L^2([0,1],X)}.$$

A.0.39 Bemerkung. Wegen $\|x\|_X = \|r_1 x\|_{L^2([0,1],X)}$, ist klar, dass für jedes $T \in \mathcal{T}$ gilt $\|T\| \leq C$. Dann gilt auch $\sup_{T\in\mathcal{T}} \|T\| \leq C$, und die Menge $\mathcal{T}$ ist tatsächlich gleichmäßig beschränkt.

In einem Hilbertraum H ist jede gleichmäßig beschränkte Menge auch $\mathcal{R}$-beschränkt, weil $L^2([0,1],H)$ ein Hilbertraum ist und $(r_k x_k)$, $(r_k T_k x_k)$ orthogonale Folgen in $L^2([0,1],H)$ sind.
Wenn die Menge $\mathcal{T}$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist, dann gibt es für jedes $p, 1 \leq p < \infty$ ein $C > 0$, so dass

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} r_k T_k x_k \right\|_{L^p([0,1],Y)} \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} r_k x_k \right\|_{L^p([0,1],X)}.$$

Das folgt aus den tiefen Ungleichungen von Khinchine und Kahane, die in [49] bewiesen sind. Man kann also die $L^2(X)$-Norm in der Definition durch eine $L^p(X)$-Norm ersetzen. Die Charakterisierung der maximale L^p-Regularität mit Hilfe der $\mathcal{R}$-Beschränktheit ist in folgendem Satz, mit einem Beweis in [49] gegeben.

A.0.40 Satz. *Sei A der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe (T_z) auf einem UMD-Raum X mit Spektralwinkel $\omega_A < \pi/2$. A hat maximale L^p-Regularität genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist*

(i) $\{tR_{it}(A) : t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$ *ist $\mathcal{R}$-beschränkt*

(ii) $\{T_z : z \in \Sigma_\varepsilon\}$ *ist $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\varepsilon > 0$*

(iii) $\{T_t, tAT_t : t > 0\}$ *ist $\mathcal{R}$-beschränkt*

(iv) $\{\lambda R_\lambda(A) : \lambda \in \Sigma_\sigma\}$ *ist $\mathcal{R}$-beschränkt für ein $\sigma \geq \pi/2$.*

Kehren wir nun zurück zum Cauchyproblem. Es stellt sich die Frage, was der richtige Raum für den Anfangswert u_0 in (A.1) ist. Dieser Raum ist ein Spurraum, da u_0 der Wert von u im Nullpunkt ist. Es wird sich herausstellen, dass er ein Interpolationsraum zwischen $\mathcal{D}(A)$ und X ist. Betrachten wir für den Erzeuger A der Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X das homogene Cauchyproblem

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= Au(t), \quad \text{auf J} \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Dieses Problem hat eine Lösung für alle $u_0 \in X$ und nicht nur für $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, weil die analytischen Erzeuger die bemerkenswerte Eigenschaft haben, dass $\operatorname{ran}(T(t)) \subset \mathcal{D}(A)$ für alle $t > 0$ ([27], Remark 4.7). Wir sind aber an Lösungen interessiert, die maximale L^p-Regularität haben.

A.0.41 Bemerkung. Man kann zeigen, dass für die Lösung u des homogenen Cauchyproblem gegeben durch $u(t) = T(t)u_0$, genau dann $u' \in L^p(J, X)$ und $u \in L^p(J, \mathcal{D}(A))$ gilt, wenn u_0 im Interpolationsraum $(X, \mathcal{D}(A))_{\frac{1}{p'},p}$ mit $1/p' + 1/p = 1$ ist (Chapter 1, [54]).

Als nächstes werden wir diese Räume einführen und ihre wichtigsten Eigenschaften zusammenstellen.

Seien E_0 und E_1 zwei normierte Räume. Wir versehen die Räume $E_0 \cap E_1$ und $E_0 + E_1$ mit den Normen

$$\|x\|_{E_0\cap E_1} := \max\{\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1}\}$$

und

$$\|x\|_{E_0+E_1} := \inf_{\substack{x=x_0+x_1,\\ x_0\in E_0, x_1\in E_1}} (\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1})$$

Bemerke, dass

$$E_0 \cap E_1 \subseteq E_i \subseteq E_0 + E_1, \quad i = 0, 1,$$

und diese Einbettungen sind stetig, da

$$\|x\|_{E_0+E_1} \leq \|x\|_{E_i} \leq \|x\|_{E_0\cap E_1}.$$

Wenn $E_1 \subseteq E_0$, dann ist $E_0 \cap E_1 = E_1$ und $E_0 + E_1 = E_1$.

Es gibt eine allgemeine Methode, wie man aus zwei normierten Räumen E_0 und E_1 eine Familie von normierten Räumen

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

konstruieren kann. Jeder dieser Räumen befindet sich zwischen E_0 und E_1, in dem Sinn dass

$$E_0 \cap E_1 \subseteq (E_0, E_1)_{\theta,p} \subseteq E_0 + E_1.$$

Für $x \in E_0 + E_1$ und $t > 0$ definiert man das K **- Funktional**,

$$K : (0, \infty) \times (E_0 + E_1) \to [0, \infty]$$

durch

$$K(t, x) := \inf_{\substack{x = x_0 + x_1, \\ x_0 \in E_0, x_1 \in E_1}} (\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}).$$

Für festes $t > 0$ ist das K-Funktional eine äquivalente Norm auf $E_0 + E_1$. In der Tat:

$$K(t, \lambda x) = |\lambda| K(t, x), \quad K(t, x + y) \leq K(t, x) + K(t, y)$$

und

$$\min(1, t)\|x\|_{E_0+E_1} \leq K(t, x) \leq \max(1, t)\|x\|_{E_0+E_1}$$

Fixiert man x, dann ist $K(t, x)$ eine nicht abnehmende Funktion von t. Es gilt

$$\min(1, t/s)K(s, x) \leq K(t, x) \leq \max(1, t/s)K(s, x).$$

Als nächstes definieren wir die gewichtete L_p -Norm,

$$\|f\|_{\theta,p} := \left(\int_0^\infty |t^{-\theta} f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq p < \infty,$$

und für $p = \infty$

$$\|f\|_{\theta,\infty} := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |t^{-\theta} f(t)|.$$

A.0.42 Definition. Für $0 < \theta < 1$ und $1 \leq p \leq \infty$ ist der **reelle Interpolationsraum** $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ definiert als

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} := \{x \in E_0 + E_1 : \|K(\cdot, x)\|_{\theta,p} < \infty\},$$

oder äquivalent dazu

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} := \left\{ x \in E_0 + E_1 : t^{-\theta} K(t, x) \in L^p \left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t} \right) \right\}.$$

Die Norm auf $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ ist

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} := \|K(\cdot, x)\|_{\theta,p}.$$

Ausführlich,

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} = \|t^{-\theta}K(t,x)\|_{L^p\left(\mathbb{R}_+,\frac{dt}{t}\right)}.$$

Im Fall $p = \infty$

$$(E_0, E_1)_{\theta,\infty} := \{x \in E_0 + E_1 : t^{-\theta}K(t,x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)\},$$

mit der Norm

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,\infty}} := \|K(\cdot,x)\|_{\theta,\infty}.$$

Seien also E_0, E_1 Banachräume mit $E_1 \subset E_0$, dann existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit

$$\|x\|_{E_0} \leq C_1\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}}, \quad \forall x \in (E_0, E_1)_{\theta,p} \tag{A.4}$$

und eine Konstante $C_2 > 0$ mit

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq C_2\|x\|_{E_1}, \quad \forall x \in E_1. \tag{A.5}$$

Für $X \cap E_\theta$ setzen wir $X_\eta := X \cap E_\eta$ für $\theta \leq \eta \leq 1$.

A.0.43 Bemerkung. Für $0 < \theta < 1$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt die stetige Einbettung

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,q}.$$

Für $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ und $1 \leq p, q \leq \infty$, gilt die stetige Einbettung,

$$(E_0, E_1)_{\theta_2,p} \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta_1,q}.$$

Wenn $E_1 \subset E_0$, von Bedeutung sind die **stetige Interpolationsräume**

$$E_\theta := \text{Abschluss von}\,(E_0, E_1)_{\theta,\infty}\,\text{in}\,E_0,$$

eingeführt von Da Prato und Grisvard in [19].
Neben diesen zwei Klassen von Interpolationsräumen, ist noch die Klasse der komplexen Interpolationsräume bekannt, die ihren Ursprung im Interpolationssatz von Riesz-Thorin hat. Wir bezeichnen mit S den Streifen

$$S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re} z < 1\}$$

und mit $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ den Raum aller stetigen Funktionen $f : \overline{S} \to E_0 + E_1$, die auf S analytisch sind, so dass $f(it)$ beschränkt in E_0 und $f(1+it)$ beschränkt in E_1 ist. Setze

$$M_j := \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(j + it)\|_{E_j}, \quad j = 0, 1.$$

Dann ist $\mathcal{F}(E_0, E_1)$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} := \max\{M_0, M_1\}$$

ein Banachraum. Für $0 < \theta < 1$ definiert man den **komplexen Interpolationsraum** $[E_0, E_1]_\theta$ mit

$$[E_0, E_1]_\theta := \{x \in E_0 + E_1 : \exists f \in \mathcal{F}(E_0, E_1),\ x = f(\theta)\}.$$

Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|x\|_{[E_0,E_1]_\theta} := \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(E_0,E_1)} : f \in \mathcal{F}(E_0, E_1),\ x = f(\theta)\}$$

ein Banachraum.

A.0.44 Bemerkung. Für $0 < \alpha < \theta < \beta < 1$ und $1 \leq p < \infty$ besteht zwischen den drei Interpolationsräume: stetigen, reellen und komplexen, der folgende Zusammenhang

$$(E_0, E_1)_{\beta,p} \hookrightarrow E_\beta \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\theta,1} \hookrightarrow [E_0, E_1]_\theta \hookrightarrow E_\theta \hookrightarrow (E_0, E_1)_{\alpha,p}$$

Da wir in stetigen Interpolationsräumen arbeiten, ist für uns die vierte Einbettung besonders wichtig.

A.0.45 Beispiel. (Die Sobolevräume $W^{s,p}(\Omega)$ nicht ganzzahliger Ordnung)
Für nichtganzzahliges $s > 0$, $s = m + \mu$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $0 < \mu < 1$ und ein beschränktes Gebiet Ω, definiert man $W^{s,p}(\Omega)$ als Interpolationsraum zwischen $W^{m,p}(\Omega)$ und $W^{m+1,p}(\Omega)$.

$$W^{s,p}(\Omega) := (W^{m,p}(\Omega), W^{m+1,p}(\Omega))_{\mu,p}.$$

Dann ist

$$(W^{m-1,p}(\Omega), W^{m,p}(\Omega))_{\frac{1}{p'},p} = W^{m-1/p,p}(\Omega).$$

Es gibt eine äquivalente Definition von $W^{s,p}(\Omega)$ die ohne Interpolation auskommt. Für $1 \leq p < \infty$, $0 < \mu < 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, definieren wir die Slobodeckii-Halbnorm

$$|u|_{\mu,p;\Omega} := \left(\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\mu p}}\, dx\, dy \right)^{1/p}.$$

Für $s = m + \mu$ erklären wir

$$W^{s,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : |D^\alpha u|_{\mu,p;\Omega} < \infty \text{ für } |\alpha| = m\}$$

und statten diesen Raum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^p_{\mu,p;\Omega} \right)^{1/p}$$

aus.

A.0.46 Beispiel. Wenn $A : E_0 \supset \mathcal{D}(A) \to E_0$ ein analytischer Erzeuger einer beschränkten Halbgruppe auf einem Banachraum E_0 ist, dann gilt die folgende Charakterisierung des Interpolationsraumes $(E_0, \mathcal{D}(A))_{\theta,p}$, der mit $\mathcal{D}_A(\theta, p)$ bezeichnet wird (siehe [54], Prop.2.2.2)

$$(E_0, \mathcal{D}(A))_{\theta,p} = \left\{ x \in E_0 : \|t \mapsto t^{1-\theta} A e^{tA} x\|_{L^p\left(\mathbb{R}_+, \frac{dt}{t}, E_0\right)} < \infty \right\}.$$

Wichtig ist noch die folgende **Interpolationsungleichung** ([54], Corollary 1.2.7).

A.0.47 Satz. *Sei $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ der reelle Interpolationsraum für das Paar (E_0, E_1). Dann gibt es eine Konstante $C = C(\theta, p) > 0$, so dass für alle $x \in E_0 \cap E_1$ gilt*

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}} \leq C \|x\|_{E_0}^{1-\theta} \|x\|_{E_1}^{\theta}$$

.

Das wohl wichtigste Ergebnis aus der Interpolationstheorie ist der **Satz von der Reiteration** ([54], 1.2.15).

A.0.48 Satz. *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \eta < 1$, und seien $(E_0, E_1)_{\theta_0,p}$, $(E_0, E_1)_{\theta_1,p}$ zwei Interpolationsräume zu dem Paar (E_0, E_1). Dann ist für $\theta_0 \neq \theta_1$*

$$((E_0, E_1)_{\theta_0,p}, (E_0, E_1)_{\theta_1,p})_{\eta,p} = (E_0, E_1)_{\theta,p}$$

mit $\theta = (1 - \eta)\theta_0 + \eta\theta_1$.

A.0.49 Beispiel. Setze $X_0 := E_0$ und $X_1 := (E_0, E_1)_{\theta,p}$. Dann ist

$$(X_0, X_1)_{\eta,p} = (E_0, E_1)_{\eta\theta,p}.$$

A.0.50 Bemerkung. Eine weitere grundlegende Eigenschaft von Interpolationsräumen ist die **Interpolationseigenschaft.** Wenn T gleichzeitig ein beschränkter linearer Operator von E_0 nach F_0, und von E_1 nach F_1 ist, dann ist T für $0 < \theta < 1$ automatisch beschränkt als Operator vom Interplationsraum $[E_0, E_1]_\theta$ nach $[F_0, F_1]_\theta$ mit der Abschätzung

$$\|T\|_{\mathcal{L}([E_0,E_1]_\theta,[F_0,F_1]_\theta)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E_0,F_0)}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(E_1,F_1)}^{\theta}.$$

Das Cauchyproblem (A.1) kann man auch für eine größere Klasse von Anfangswerten als $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ betrachten. Dafür braucht man eine scwächere Definition für die Lösung von (A.1). Zunächst definieren wir für das Banachsche Paar $E_1 \subset E_0$, mit E_1 dicht in E_0, und für $0 < \theta \leq 1$ zwei Familien von Räumen, $\mathbb{E}_0^\theta$ und $\mathbb{E}_1^\theta$. Der Zweck dieser Räume ist zweifach. Erstens sind dies Räumen auf denen die bekannten und unbekannten Daten aus (A.1) definiert sind. Zweitens können sie verwendet werden, um

Interpolationsräume für das Banachsche Paar (E_0, E_1) zu definieren. Für $T > 0$ und $\dot{J} := (0, T]$, betrachten wir

$$\mathbb{E}_0^\theta(J) := \{u \in C(\dot{J}, E_0) : \lim_{t\to 0+} \|t^{1-\theta}u(t)\|_{E_0} = 0\}$$

und

$$\mathbb{E}_1^\theta(J) := \{u \in C^1(\dot{J}, E_0) \cap C(\dot{J}, E_1) : \lim_{t\to 0+} t^{1-\theta}(\|u'(t)\|_{E_0} + \|u(t)\|_{E_1}) = 0\}.$$

Wir statten diese Räume mit den folgenden Normen

$$\|u\|_{\mathbb{E}_0^\theta(J)} := \sup_{t\in\dot{J}} \|t^{1-\theta}u(t)\|_{E_0},$$

$$\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)} := \sup_{t\in\dot{J}} t^{1-\theta}(\|u'(t)\|_{E_0} + \|u(t)\|_{E_1})$$

aus, die sie zu Banachräumen machen. Eine einfache Bemerkung ist, dass es für jedes $u \in \mathbb{E}_1^\theta(J)$ ein $C > 0$ gibt mit $\|u'(t)\|_{E_0} \leq Ct^{1-\theta}$.
Wir definieren noch folgende Banachräume, die von Da Prato und Grisvard in [19] eingeführt worden sind.

$$\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J) := \{u(0) : u \in \mathbb{E}_1^\theta(J)\},$$

$u(0)$ ist natürlich $\lim_{t\to 0+} u(t)$, und dieser Grenzwert existiert wegen der obigen Bemerkung und der Darstellung

$$u(t) = u(T) - \int_t^T u'(x)\,dx.$$

Die Norm ist

$$\|x\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)} := \inf\{\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)} : u \in \mathbb{E}_1^\theta(J), u(0) = x\}.$$

Es gilt $E_1 \subset \gamma\mathbb{E}_1^\theta(J) \subset E_0$ und die Einbettungen sind stetig. Das ist der Grund warum diese Räume auch stetige Interpolationsräume genannt sind.
Die Abbildung $\gamma : \gamma\mathbb{E}_1^\theta \to E_0, \quad u \mapsto u(0)$ ist also wohldefiniert, linear und stetig. Man kann zeigen, dass $\gamma\mathbb{E}_1^\theta$ der Abschluss von E_1 in $(E_0, E_1)_{\theta,\infty}$ ist (siehe [54], Prop.1.2.12 wo $\gamma\mathbb{E}_1^\theta$ mit $(X, Y)_\theta$ bezeichnet ist).
Wenn es ein Erzeuger $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ einer beschränkten Halbgruppe gibt, dann ist nach der obigen Charakterisierung von Interpolationsräume mit

$$\sup_{t\in\dot{J}} t^{1-\theta}\|Ae^{tA}x\|_{E_0}$$

eine äquivalente Norm zu $\|x\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)}$ gegeben. Man kann eine weitere äquivalente Norm zu $\|.\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)}$ mit einem beliebigen Operator $A \in (E_1, E_0)$ geben, wenn man folgenden Begriff einführt.

A.0.51 Definition. Die Halbgerade $l = \{re^{i\phi} : r \geq R\}$ heißt **Strahl minimalen Wachstums** für $A \in (E_1, E_0)$, falls $(\lambda - A)^{-1}$ existiert und eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in l,\, |\lambda| > \|A\|$$

Jedes $x \in E_0$ gehört zu $\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)$ genau dann, wenn

$$\lim_{\lambda \in l, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^\theta \|A(\lambda - A)^{-1}x\|_{E_0} = 0.$$

Die Zahl

$$\lim_{\lambda \in l, |\lambda| \to \infty} |\lambda|^\theta \|A(\lambda - A)^{-1}x\|_{E_0} \tag{A.6}$$

ist dann wieder eine äquivalente Norm auf $\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)$. Für den Beweis sei auf [19] verwiesen.

A.0.52 Bemerkung. Wenn der Operator A ein analytischer Erzeuger ist, dann ist für jedes $\phi < \omega_A$ die Halblinie $l = \{re^{i\phi} : r > \|A\|\}$ ein Strahl minimalen Wachstums für A.

Der Raum $\mathbb{E}_1^\theta(J)$ lässt sich besonders gut in Räumen stetiger und Hölderstetiger Funktionen auf J einbetten.

A.0.53 Satz. *Sei $\mathcal{H}(E_1, E_0) \neq \varnothing$ und sei $0 < \sigma < \theta < 1$. Dann gelten die folgenden Einbettungen:*

1) $\mathbb{E}_1^\theta(J) \hookrightarrow C^{0,\theta}(J, E_0)$

2) $\mathbb{E}_1^\theta(J) \hookrightarrow C(J, \gamma\mathbb{E}_1^\theta(J))$

3) $\mathbb{E}_1^\theta(J) \hookrightarrow C^{0,\theta-\sigma}(J, \gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J))$.

Beweis. Wir werden die **Konstantenkonvention** verwenden, die besagt, dass die in einer Ungleichungskette beschränkende Konstante immer mit C bezeichnet wird, obwohl es sich in jedem Schritt um eine neue Konstante handeln kann.

zu 1): Sei $u \in \mathbb{E}_1^\theta(J)$ und $s, t \in J$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\|u(s)-u(t)\|_{E_0} &= \left\|\int_t^s u'(\tau)\,d\tau\right\|_{E_0}\\
&\le \int_t^s \tau^{\theta-1}\sup_{\tau\in J}\tau^{1-\theta}(\|u'(\tau)\|_{E_0}+\|u(\tau)\|_{E_1})\,d\tau\\
&\le \|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}\frac{|s^\theta-t^\theta|}{\theta}\\
&\le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}|s-t|^\theta.
\end{aligned}$$

zu 2): Sei $u\in\mathbb{E}_1^\theta(J)$ und $s\in J$. Sei ohne Einschränkung $u(0)=0$ und $A\in\mathcal{H}(E_1,E_0)$ ein Erzeuger einer beschränkten Halbgruppe. Dann gilt für alle t mit $t\le s$

$$\begin{aligned}
t^{1-\theta}\|Ae^{tA}u(s)\|_{E_0} &\le Cs^{1-\theta}\|u(s)\|_{E_1}\\
&\le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}.
\end{aligned}$$

Aus der Darstellung $u(t)=\int_0^t\tau^{\theta-1}\tau^{1-\theta}u'(\tau)\,d\tau$ folgt, dass

$$\|u(t)\|_{E_0}\le\frac{t^\theta}{\theta}\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}.$$

Dann ist im Fall $s<t$

$$\begin{aligned}
t^{1-\theta}\|Ae^{tA}u(s)\|_{E_0} &= t^{-\theta}\|tAe^{tA}u(s)\|_{E_0}\\
&\le t^{-\theta}C\|u(s)\|_{E_0}\\
&\le C\frac{(s/t)^\theta}{\theta}\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}.
\end{aligned}$$

Auf jeden Fall gilt mit der äquivalenten Norm zu $\|x\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)}$

$$\begin{aligned}
\|u(s)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)} &= \sup_{t\in\dot{J}}t^{1-\theta}\|Ae^{tA}u(s)\|_{E_0}\\
&\le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

zu 3): Sei $u \in \mathbb{E}_1^\theta(J)$ und $s,t \in J$. Aus dem Satz von der Reiteration folgt, dass $\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J) \doteq (E_0, \gamma\mathbb{E}_1^\theta(J))_{\frac{\sigma}{\theta}}$. Mit der Interpolationsungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|u(s)-u(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J)} &= \|u(s)-u(t)\|_{(E_0,\mathbb{E}_1^\theta(J))_{\frac{\sigma}{\theta}}} \\ &\le C\|u(s)-u(t)\|_{E_0}^{1-\sigma/\theta}\|u(s)-u(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)}^{\sigma/\theta}\end{aligned}$$

Aus 1) ist

$$\|u(s)-u(t)\|_{E_0}^{1-\sigma/\theta} \le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}^{1-\sigma/\theta}|s-t|^{\theta-\sigma}$$

und aus 2)

$$\|u(s)-u(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\theta(J)}^{\sigma/\theta} \le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}^{\sigma/\theta}$$

Also, mit diesen beiden Ungleichungen folgt

$$\|u(s)-u(t)\|_{\gamma\mathbb{E}_1^\sigma(J)} \le C\|u\|_{\mathbb{E}_1^\theta(J)}|s-t|^{\theta-\sigma}$$

und damit die Behauptung.

□

Wenn man den Anfangswert u_0 in (A.1) nun in dem größeren Raum $\gamma\mathbb{E}_1^\theta$ betrachtet, dann muss der analytische Erzeuger A noch eine weitere Bedingung erfüllen. Das führt uns zu der Klasse $\mathcal{M}_\theta(E_1,E_0)$.

$$\mathcal{M}_\theta(E_1,E_0) := \{A \in \mathcal{H}(E_1,E_0) : (\partial_t + A, \gamma) \in Isom(\mathbb{E}_1^\theta, \mathbb{E}_0^\theta \oplus \gamma\mathbb{E}_1^\theta)\} \tag{A.7}$$

Mit anderen Worten, $\mathcal{M}_\theta(E_1,E_0)$ enthält jene analytischen Erzeuger A, für welche (A.1) eine eindeutige Lösung $u \in \mathbb{E}_1^\theta$ für alle $f \in \mathbb{E}_0$ und alle $u_0 \in \gamma\mathbb{E}_1^\theta$ besitzt. Da die Lösung durch $J_A f$ gegeben ist, kann man die Bedingung der maximalen Regularität auch mit der Implikation

$$f \in \mathbb{E}_0 \Longrightarrow J_A f \in \mathbb{E}_1^\theta$$

ausdrücken. Wir bemerken, dass wegen $\mathbb{E}_0^\theta \subset C(J, E_0)$ und

$$\mathbb{E}_1^\theta \subset C^1(J, E_0) \cap C(J, E_1),$$

jedes $A \in \mathcal{M}_\theta(E_1, E_0)$ maximale Regularität hat.

Anhang B

Maximale Regularität und beschränkter H^∞-Kalkül

Es ist nicht ganz einfach, die maximale Regularität eines Operators A zu erkennen. Es gibt einige nützliche hinreichende Bedingungen für die sogenannten sektoriellen Operatoren, d.h. Operatoren, deren Spektrum in einem Sektor

$$\Sigma_\phi := \{z \in \mathbb{C} : |arg(z)| < \phi,\, z \neq 0\}$$

der komplexen Ebene liegt und deren Resolvente $R_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1}$ auf jedem komplementären Teilsektor $O(1/\lambda)$ ist. Eine solche Bedingung ist die Existenz eines beschränkten H^∞-Kalküls von A. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Tatsachen über H^∞-Kalkül zusammengestellt.

B.0.54 Definition. Sei A ein dicht definierter abgeschlossener Operator auf einem Banachraum X. A heißt **sektoriell**, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind

1) $\sigma(A) \subset \Sigma_\omega$ für ein $\omega \in (0, \pi)$
2) $\|\lambda R_\lambda(A)\| \leq C_\alpha$ für alle $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \Sigma_\alpha$, $\Sigma_\alpha \supset \Sigma_\omega$.

Die Menge der sektoriellen Operatoren in X wird mit $\mathcal{S}(X)$ bezeichnet.
Der Sektorwinkel ω_A ist definiert als das Infimum aller Winkel ω für welche 1) und 2) gelten. Es ist wohlbekannt, dass der sektorielle Operator $-A$ genau dann der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe ist, wenn $\omega_A < \pi/2$ ist (siehe [27], Theorem 4.6). Mit $H^\infty(\Sigma_\phi)$ bezeichnen wir die mit der Supremumsnorm versehene Banachalgebra der beschränkten analytischen Funktionen auf dem Sektor Σ_ϕ. Sei

$$H_0^\infty(\Sigma_\phi) := \left\{ h \in H^\infty(\Sigma_\phi) : |h(z)| \leq C \frac{|z|^s}{1 + |z|^{2s}}, \quad \text{für } C, s > 0 \right\}.$$

Es sei nun A ein sektorieller Operator auf dem Banachraum X mit Sektorwinkel ω_A und sei $\phi > \theta > \omega_A$. Dann kann man für eine Funktion $h \in H_0^\infty(\Sigma_\phi)$ und eine Kurve

$$\Gamma := \{te^{i\theta} : 0 < t < \infty\} \cup \{te^{-i\theta} : 0 \le t < \infty\}$$

einen Operator $h(A) \in \mathcal{L}(X)$ über das Dunfordsche Integral definieren:

$$h(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma h(\lambda) R_\lambda(A) \, d\lambda$$

Das Integral ist absolut konvergent. In der Tat

$$\|h(A)x\| \le C \int_0^\infty \frac{t^s}{t(1+t^{2s})} \|x\| \, dt \le C\|x\|, \quad x \in X.$$

Das ergibt $h(A) \in \mathcal{L}(X)$. Die Abbildung $h \mapsto h(A)$ ist ein Algebrenhomomorphismus von $H_0^\infty(\Sigma_\phi)$ nach $\mathcal{L}(X)$. Dieser Algebrenhomomorhismus wird oft mit $\Phi : H_0^\infty(\Sigma_\phi) \to \mathcal{L}(X)$ bezeichnet.

B.0.55 Definition. (Beschränkter H^∞-Kalkül, McIntosh, 1986) Der sektorielle Operator A auf dem Banachraum X besitzt beschränkten **$H^\infty(\Sigma_\phi)$-Kalkül**, wenn ein ϕ mit $\phi > \omega_A$ existiert, so dass

$$\|h(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \le C\|h\|_\infty, \quad \forall h \in H_0^\infty(\Sigma_\phi) \tag{B.1}$$

gilt. Der Winkel $\phi_A^\infty := \inf\{\phi \in (\omega_A, \pi) : (B.1)\,\text{gilt}\}$ heißt H^∞-Winkel von A. Mit $\mathcal{H}^\infty(X)$ bezeichnen wir die Menge aller sektorieller Operatoren auf X die einen beschränkten H^∞-Kalkül besitzen.

B.0.56 Bemerkung. Der folgende Zusammenhang besteht zwischen dem H^∞-Kalkül auf L^p Räumen und den klassischen L^p-Multiplikatoren. Sei E ein UMD-Raum und $X := L^p(\mathbb{R}, E), 1 < p < \infty$. Sei weiter A ein Fouriermultiplikator auf X mit Symbol p. A hat genau dann beschränkten $H^\infty(\Sigma_\phi)$-Kalkül, wenn $h \circ p$ ein klassischer L^p-Multiplikator für alle $h \in H^\infty(\Sigma_\phi)$ ist.

B.0.57 Beispiel. Für einen UMD-Raum X, hat der Differentialoperator $A := \frac{d}{dt}$ beschränkten H^∞-Kalkül auf $L^p(\mathbb{R}, X), 1 < p < \infty$, und es gilt $\phi_{d/dt}^\infty = \pi/2$. A ist ein Operator mit Symbol $i\xi$, d.h. $\frac{df}{dt} = \mathcal{F}^{-1}(i\xi\,\mathcal{F}f(t))$. Sei $h \in H^\infty(\Sigma_\phi)$ mit $\phi > \pi/2$. Wir setzen

$$\Phi(h)f := \mathcal{F}^{-1}[h(i\cdot)\mathcal{F}f(\cdot)].$$

Da die Mengen

$$\{|h(it)| : t \in \mathbb{R}\}, \quad \{|th'(it)| : t \in \mathbb{R}\}$$

beschränkt sind, folgt aus einer operatorwertigen Version von Weis des klassischen Mikhlin-Multiplikatorensatzes (siehe [76]), dass der Operator $\Phi(h)f$ beschränkt auf $L^p(\mathbb{R}, X)$ ist.

Anhang C

Beschränkte imaginäre Potenzen und Interpolation

Eine der wichtigsten Eigenschaften eines Operators A mit beschränktem H^∞-Kalkül ist, dass A **beschränkte imaginäre Potenzen** hat, d.h. $A^{it} \in \mathcal{L}(X)$, und es existieren $C, \theta > 0$ mit

$$\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Ce^{\theta|t|}, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{C.1}$$

Um das einzusehen bemerke, dass $|z^{it}| \leq e^{-|t||arg\, z|}$. Dann ist für die Funktion $h(z) := z^{it}$ nach (B.1)

$$\|A^{it}\|_{\mathcal{L}(X)} = \|h(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C\|h\|_\infty \leq Ce^{|t||arg\, z|}.$$

Der Winkel $\theta_A := \inf\{\theta \in (\omega_A, \phi_A^\infty) : (C.1)\, \text{gilt}\}$ heißt **Potenzwinkel** von A. Der Potenzwinkel θ_A ist eigentlich der Typ der C_0-Gruppe $(A^{it})_{t\in\mathbb{R}}$. Die Menge der Operatoren mit beschränkten imaginären Potenzen auf X bezeichnen wir mit $BIP(X)$. Wir haben gezeigt

$$\mathcal{H}^\infty(X) \subset BIP(X) \subset \mathcal{S}(X).$$

Dann gilt für die entsprechenden Winkel

$$\phi_A^\infty \geq \theta_A \geq \omega_A.$$

C.0.58 Bemerkung. Falls X ein Hilbertraum ist, dann gilt auch $BIP(X) \subset \mathcal{H}^\infty(X)$, [49, Theorem 11.9]. Es gibt jedoch auch im Hilbertraumfall sektorielle Operatoren ohne beschränkten H^∞-Kalkül. Für ein solches Beispiel mit $X = L^p$, siehe [49, Example 10.17].

C.0.59 Bemerkung. Das Interesse an BIP-Operatoren kommt auch aus ihrem Zusammenhang zu der komplexen Interpolationstheorie. Wenn

$$A : E_0 \supset \mathcal{D}(A) \to E_0$$

ein abgeschlossener Operator ist, so dass $-A$ der Erzeuger der analytischen Halbgruppe e^{-tA} auf E_0 ist, dann kann man für jedes $\alpha > 0$ die Operatoren

$$A^{-\alpha} := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-tA}\, dt$$

definieren (siehe [61], S. 69 - 70), die sogenannten gebrochenen Potenzen von A . Man zeigt nun, dass $A^{-\alpha} \in \mathcal{L}(E_0)$ und dass dieser Operator invertierbar ist. Die Inverse von $A^{-\alpha}$ bezeichnen wir mit A^α. Der Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^\alpha)$ des abgeschlossenen Operators A^α, $\mathcal{D}(A^\alpha) = \operatorname{ran}(A^{-\alpha})$ ist ein Banachraum mit der Graphennorm. Wichtig ist nun der folgende Satz (siehe [49], Theorem 15.28 oder [3], Theorem V.1.5.4):

C.0.60 Satz. *Wenn A ein BIP-Operator auf X ist, dann gilt für den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, der gebrochenen Potenzen von A,*

$$\mathcal{D}(A^\alpha) = [X, \mathcal{D}(A)]_\alpha,$$

wobei $[\cdot,\cdot]_\alpha$ der komplexe Interpolationsraum ist.

C.0.61 Bemerkung. Dann ist nach dem Reiterationssatz (A.0.48), der auch für komplexe Interpolation gilt,

$$\mathcal{D}(A^\gamma) = [\mathcal{D}(A^\alpha), \mathcal{D}(A^\beta)]_\theta,$$

mit $\gamma = (1-\theta)\alpha + \theta\beta$.

C.0.62 Bemerkung. Es ist eine wohlbekannte Folgerung aus dem berühmten Satz von Dore-Venni ([24]), dass die BIP Operatoren A mit Potenzwinkel $\theta_A < \pi/2$ auf UMD-Räumen maximale L^p-Regularität haben. Insbesondere wenn A beschränkten H^∞-Kalkül mit Winkel $\phi_A^\infty \leq \pi/2$ auf einem UMD-Raum hat, dann hat A auch maximale L^p-Regularität.

Der Satz von Dore-Venni von der Abgeschlossenheit zweier Operatoren A und B macht symmetrische Voraussetzung in dem Sinne, dass die beiden Operatoren BIP Operatoren sind. Ein für die Anwendungen flexibler Satz gibt dasselbe Ergebnis mit einer schwächeren Voraussetzung an den ersten und stärkeren Voraussetzung an den zweiten Operator.

C.0.63 Satz. *(Kalton-Weis, 2001) Seien A und B zwei abgeschlossene Operatoren auf X mit kommutierenden Resolventen. A habe $H^\infty(\Sigma_\phi)$-Kalkül und B sei $\mathcal{R}$-sektoriell mit Winkel θ, so dass $\phi + \theta < \pi$. Dann ist $A + B$ abgeschlossen auf $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$.*

Für den Beweis siehe [45], Theorem 6.3.

Es ist an der Zeit, die Definition diesen häufig auftretenden UMD Räume zu geben.

C.0.64 Definition. Ein Banachraum X heißt **UMD-Raum** (uniform martingale differences) (oder $\mathcal{HT}$ Raum), wenn die **Hilberttransformation**

$$Hf(t) := \frac{1}{\pi} \operatorname{PV} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(s)}{t-s} \, ds, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$$

für ein p, $1 < p < \infty$, (a posteriori für alle p) zu einem beschränkten linearen Operator $L^p(\mathbb{R}, X)$ fortgesetzt werden kann.

C.0.65 Bemerkung. Bemerke, dass wegen $\mathcal{F}(Hf) = -isign(\cdot)\mathcal{F}(f)$, X genau dann ein UMD-Raum ist, wenn $m(\cdot) := isign(\cdot) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}, X)$, d.h. $isign(\cdot)$ ein Fouriermultiplikator auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ ist.

C.0.66 Beispiel. Beispiele von UMD-Räumen sind Hilberträume und auch L^p-Räume für $1 < p < \infty$. Da die Hilberttransformation nicht beschränkt auf L^1 und L^∞ ist, sind diese zwei Räume dagegen keine UMD-Räume.

C.0.67 Bemerkung. UMD-Räume sind gleichmäßig konvex und daher nach dem Satz von Milman-Pettis auch reflexiv ([10], [65]). Wenn X ein UMD-Raum ist, dann vererbt sich diese Eigenschaft auf seinen Dualraum X^*, die abgeschlossenen Unterräume von X, die Quotienten von X und $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$.

Literaturverzeichnis

[1] R. Adams: *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, Second edition 2003

[2] N. D. Alikakos, P.W. Bates, X. Chen: Convergence of the Cahn-Hilliard equation to the Hele-Shaw model. *Arch. Rational Mech. Anal.* 128 (1994), no. 2, 165-205.

[3] H. Amann: *Linear and Quasilinear Parabolic Problems I*, Birkhäuser, Basel, 1995

[4] H. Amann: Nonhomogenous linear nad quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in H.J. Scmeisser, H. Triebel, editors, *Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis,* Teubner, Stuttgart, Leipzig, 9-126, (1993)

[5] D. Andreucci, M. Herrero, J. Velázquez: The classical one-phase Stefan-Problem: a catalog of interface behaviors. *Surveys Math. Indust.* 9 (2001), no. 4, 247-337.

[6] S. Angenent: Parabolic equations for curves on surfaces I. Curves with p-integrable curvature, *Ann. Math.* **132**, 451-483, (1990)

[7] J. B. Baillon: Caractère borné de certains générateurs de semi-groupes linéaires dans les espaces de Banach, *C.R. Acad. Sc. Paris* **290** (1980), 757-760

[8] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone: Convolution operators on Banach space valued functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 48 (1962), 356-365.

[9] O. Bilyj, E. Schrohe, J. Seiler. H_∞-calculus for hypoelliptic pseudodifferential operators. *Proc. Amer. Math. Soc.* **139** (2010), 1645-1656.

[10] D.L. Burkholder: Martingale transforms and the geometry of Banach spaces, *Probability in Banach spaces, III* (Medford, Mass, 1980), Springer, Berlin, 1981, pp.35-50

[11] L. A. Caffarelli: The regularity of free boundaries in higher dimensions. *Acta Math.* 139 (1977), no. 3-4, 155-184.

[12] L. A. Caffarelli: Some aspects of the one-phase Stefan-Problem. *Indiana Univ. Math. J.* 27 (1978), no. 1, 73-77.

[13] L. A. Caffarelli, L. C. Evans: Continuity of the temperature in the two-phase Stefan-Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 81 (1983), no. 3, 199-220.

[14] L. A. Caffarelli, A. Friedman: Continuity of the temperature in the Stefan-Problem. *Indiana Univ. Math.* J. 28 (1979), no. 1, 53-70.

[15] G. Caginalp: The dynamics of a conserved phase field system: Stefan-like, Hele-Shaw, and Cahn-Hilliard models as asymptotic limits. *IMA J. Appl. Math.* 44 (1990), no. 1, 77-94

[16] J. R. Cannon, D. B. Henry, D. B. Kotlow: Classical solutions of the one-dimensional, two-phase Stefan-Problem. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 107 (1975), 311-341 (1976).

[17] P. Clement, S. Li: Abstract parabolic quasilinear equation and application to a groundwater flow problem, *Adv. Math. Sci. Appl.* **3** (1993/94), 17-32

[18] X. Chen, F. Reitich: Local existence and uniqueness of solutions of the Stefan-Problem with surface tension and kinetic undercooling. *J. Math. Anal. Appl.* 164 (1992), no. 2, 350-362

[19] G. Da Prato, P. Grisvard: Equations d'évolution abstraites non linéaires de type parabolique, *Ann. Mat. Pura Appl.* (IV) **120** (1979), 329-396

[20] I. I. Danilyuk: The Stefan-Problem, *Usp. Mat. Nauk*, 40, No. 5, 133-185 (1985).

[21] L. De Simon: Un'applicazione della teoria degli integrali singolari allo studio dell equazioni differenziali lineari astratte del primo ordine, *Rend. Sem. Univ. Padova* 34 (1964), pp. 547-558.

[22] R. Denk, M. Hieber, J.Prüss: *R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type.* Memoirs Amer. Math. Soc. 166 no. 788 (2003)

[23] G. Dore: L^p regularity for abstract differential equations, *Functional analysis and related topics*, 1991(Kyoto), Springer, Berlin, 1993, pp. 25-38

[24] G. Dore, A. Venni: On the closedness of the sum of two closed operators. *Math. Z.*, 196(1987): 189-201

[25] G. Duvaut: Résolution d'un problème de Stefan (fusion d'un bloc de glace à zéro degré). (French) *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 276 (1973), A1461-A1463.

[26] B. Eberhardt, G. Greiner: Baillon's Theorem on Maximal Regularity, *Acta Applicandae Mathematicae* **27** (1992), 47-54

[27] K-J. Engel, R.Nagel: *A Short Course on Operator Semigroups*, Springer, 2006

[28] J. Escher, G. Simonett: Analiticity of the interface in a free boundary problem, *Math. Ann.*, **305**, 439-459 (1996)

[29] J. Escher, G. Simonett: A Center Manifold Analysis for the Mullins-Sekerka Model, *J. Differential Equations* **143** (1998), 267-292

[30] J. Escher, J. Prüss, G. Simonett: Analytic solutions for a Stefan-Problem with Gibbs-Thomson correction. *J. Reine Angew. Math.* 563 (2003), 1-52.

[31] J. Escher, G. Simonett, Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension, *Adv. Differential Equations* **2** (1997), 619-642

[32] J. Escher, G. Simonett: On Hele-Shaw models with surface tension. *Math. Res. Lett.* 3 (1996), no. 4, 467-474

[33] J.D. Evans, J.R. King: Regularization by kinetic undercooling of blow-up in the ill-posed Stefan-Problem, *SIAM J. Appl. Math.* 65 (2005), pp. 1677-1707

[34] J.D. Evans, J.R. King: Asymptotic results for the Stefan-Problem with kinetic undercooling, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 53 (2000), 449-473

[35] G. B. Folland: *Introduction to Partial Differential Equation*, Princeton University Press 1995

[36] M. L. Frankel, V. Roytburd: Finite dimensional attractor for a one-phase Stefan-Problem with kinetics. *J. Dynam. Differential Equations* 15 (2003), no. 1, 87-106.

[37] M. L. Frankel, V. Roytburd: Compact attractors for a Stefan-Problem with kinetics. *Electron. J. Differential Equations* 2002, No. 15, 27 pp

[38] A. Friedman: The Stefan-Problem in several space variables, *Trans. Amer. Math. Soc* 133 (1968), 51-87.

[39] A. Friedman, B. Hu: The Stefan-Problem with kinetic condition at the free boundary. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) 19 (1992), no. 1, 87-111.

[40] A. Friedman, F. Reitich: The Stefan-Problem with small surface tension. *Trans. Amer. Math. Soc.* 328 (1991), no. 2, 465-515.

[41] A. Friedman, F. Reitich: Nonlinear stability of a quasi-static Stefan-Problem with surface tension: a continuation approach. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4) 30 (2001), no. 2, 341-403.

[42] A. Friedman, R. Jensen: Convexity of the free boundary in the Stefan-Problem and in the dam problem. *Arch. Rational Mech. Anal.* 67 (1978), no. 1, 1-24.

[43] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin, 2001

[44] E. I. Hanzawa: Classical solutions of the Stefan-Problem, *Tohoku Math. J.* **33**(1981), 297 - 335

[45] N. J. Kalton, L. Weis: The H^∞-calculus and sums of closed operators. *Math. Ann.* 321 (2001), no. 2, 319-345.

[46] S. Kamenomostskaja: On the Stefan-Problem, *Mat. Sb.*, v. **53**, 1961

[47] D. Kinderlehrer, L. Nirenberg: The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan-Problem. *Comm. Pure Appl. Math.* 31 (1978), no. 3, 257-282.

[48] C. Kneisel: *Über das Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung,* Dissertation, Leibniz Universität Hannover, 2007

[49] P. Kunstmann, L. Weis: Maximal L_p-Regularity for Parabolic Equations, Fourier Multiplier Theorems and H^∞-functional Calculus, *LNM* 1855, pp.65-311, Springer 2004

[50] W. T. Kyner: An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan-Problem, *J. Math. Mech.* 8 (1959), 483-498

[51] A. A. Lacey, A. B. Tayler: A mushy region in a Stefan-Problem. *IMA J. Appl. Math.* 30 (1983), no. 3, 303-313

[52] Z. H. Liu, G. W. Yuan: The multi-dimension one-phase Stefan-Problem with kinetic condition. *J. Math. Res. Exposition* 14 (1994), no. 4, 479-486

[53] S. Luckhaus: Solutions for the two-phase Stefan-Problem with the Gibbs-Thomson law for the melting temperature. *European J. Appl. Math.* 1 (1990), no. 2, 101-111

[54] A. Lunardi: *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995

[55] H. Matano: Asymptotic behavior of the free boundaries arising in one-phase Stefan-Problems in multidimensional spaces. *Nonlinear partial differential equations in applied science* (Tokyo, 1982), 133-151, North-Holland Math. Stud., 81, North-Holland, Amsterdam, 1983,

[56] A.M. Meirmanov: *The Stefan-Problem*, Walter de Gruyter, Berlin, 1992.

[57] A. M. Meirmanov: On the classical solution of the multidimensional Stefan-Problem for quasilinear parabolic equations, *Mat. Sb. (N.S.)*, **112** (1980), 170-192

[58] A. M. Meirmanov: The Stefan-Problem with surface tension in the three-dimensional case with spherical symmetry: nonexistence of the classical solution. *European J. Appl. Math.* 5 (1994), no. 1, 1-19.

[59] W. W. Mullins, R.F. Sekerka: Morphological Stability of a Particle Growing by Diffusion or Heat Flow, *J. Appl. Phys.* 34, 323 (1963).

[60] O. A. Oleinik: A method of solution of the general Stefan-Problem, *Soviet Math. Dokl.* **1** (1960), 1350-1354.

[61] A. Pazy: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer 1983

[62] P. I. Plotnikov, V. N. Starovoitov: The Stefan-Problem with surface tension as a limit of the phase field model. *Differential Equations* 29 (1993), no. 3, 395-404

[63] E. V. Radkevich: Conditions for the existence of a classical solution of a modified Stefan-Problem (the Gibbs-Thomson law). (Russian) *Mat. Sb.* 183 (1992), no. 2, 77-101; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. 75 (1993), no. 1, 221-246

[64] J-F. Rodrigues: The variational inequality approach to the one-phase Stefan-Problem. *Acta Appl. Math.* 8 (1987), no. 1, 1-35

[65] J.L. Rubio de Francia: Martingale and integral transforms of Banach space valued functions, *Lecture Notes in Math.* 1221 (1986), pp 195-22

[66] L. Rubinstein: The Stefan-Problem, "*A.M.S. Translation of Mathematical Monographs*,"Vol.27, Providence, RI, 1971

[67] G. Simonett: Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems. *Differential Integral Equations* 8 (1995), no. 4, 753-796.

[68] J. Stefan: Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere, *Sitzungsber. der kais. Acad. der Wiss. in Wien math. - natur. Cl* **98** (1889), 269 - 286

[69] J. Stefan: Über die Theorie der Eisbildung, *Monatshefte für Mathematik* **1** (1890), 1-6

[70] J. Sylvester and G. Uhlmannn. Inverse boundary value problems at the boundary—continuous dependence. *Comm. Pure Appl. Math.* 41:197–219, 1988.

[71] K. Taira: Boundary value problems for elliptic integro-differential operators. *Math. Z.* 222 (1996), no. 2, 305-327.

[72] K. Taira: Boundary Value Problems and Markov Processes, *Lecture Notes in Mathematics* 1499

[73] K. Taira: On the existence of Feller semigroups with discontinuous coefficients. II. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 25 (2009), no. 5, 715-740.

[74] D. A. Tarzia: A bibliography on moving-free boundary problems for the heat-diffusion equation. The Stefan and related problems. *MAT. Serie A: Conferencias, Seminarios y Trabajos de Matemática* [MAT. Series A: Mathematical Conferences, Seminars and Papers], 2. Universidad Austral, Facultad de Ciencias Empresariales (FCE-UA), Departamento de Matemática, Rosario, 2000. 16 pp, 35R35

[75] A. Visintin: *Models of Phase Transitions*, Birkhäuser, 1996.

[76] L. Weis: Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal L_p-regularity, *Math. Ann.* **319** (2001), no.4, 735 -758

[77] F. Yi: Global classical solution of quasi-stationary Stefan free boundary problem. *Appl. Math. Comput.* 160 (2005), no. 3, 797-817

[78] F. Yi: Asymptotic behaviour of the solutions of the supercooled Stefan-Problem. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 127 (1997), no. 1, 181-190

[79] F. Yi, Y. Tao, Z. Liu: Quasi-stationary Stefan-Problem as limit case of Mullins-Sekerka problem. *Sci. China Ser. A* 40 (1997), no. 2, 151-162.

Curriculum Vitae

Persönliche Daten

Name	Martin Lukarevski
Geburtsdatum	11.10.1979
Geburtsort	Skopje, Mazedonien
Staatsangehörigkeit	mazedonisch

Ausbildung

Dezember 2008 -	Leibniz Universität Hannover, Promotionsstudium in Mathematik DFG Graduiertenkolleg 1463, *Analysis, Geometry and String Theory*
April 2008	M.Sc. in Mathematik
2005 - 2008	Masterstudiengang in Mathematik an der Universität in Skopje
Januar 2005	Diplom in Mathematik
2002 - 2003	Aufenthalt an der Universität in Augsburg
1998 - 2004	Studium der Mathematik an der Universität in Skopje