

# **Transport durch Nanostrukturen: Riemann-Hilbert-Zugang für zeitabhängige Störungen**

Von der Fakultät für Mathematik und Physik der  
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
– Dr. rer. nat. –

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Phys. Carsten von Zobeltitz  
geboren am 20. Juni 1980 in Bad Pyrmont

2010

Referent: Prof. Dr. Holger Frahm  
Korreferent: Prof. Dr. Manfred Lein  
Tag der Promotion: 30. Juni 2010

## Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersucht den Stromtransport durch Quantenpunkte mit Hilfe der Lösung eines Riemann-Hilbert-Problems. Experimentelle Daten zeigen eine Asymmetrie im Strom beim Wechsel der Stromflussrichtung. Ziel dieser Arbeit ist es, eine mögliche Erklärung für diesen Effekt zu finden.

Zunächst erfolgt eine Beschreibung des untersuchten Systems. Es besteht aus mehreren entkoppelten Zuleitungen, in denen sich ein wechselwirkungsfreies Elektronengas befindet, und einem Quantenpunkt mit nur einem Energieniveau. Elektronen können aus den Zuleitungen auf den Quantenpunkt und wieder zurück in die Zuleitungen tunneln. Für einen besetzten Quantenpunkt gibt es eine Coulombwechselwirkung zwischen dem Elektron auf dem Quantenpunkt und den Elektronen in den Zuleitungen, die für eine charakteristische Singularität in der Tunnelrate zwischen Zuleitungen und Quantenpunkt sorgt, bekannt als Fermikantensingularität (FES). Zur Vorstellung der verwendeten Methode des Riemann-Hilbert-Zugangs wird die Betrachtung der Fermikantensingularität nachvollzogen.

Die FES zeigt keine Asymmetrie beim Wechsel der Transportrichtung. Aus diesem Grund wird mit Hilfe der Kubo-Formel die Leitfähigkeit in der Anzahl der Tunnelprozesse entwickelt. Die führende Ordnung liefert die bekannte FES und stimmt mit den Ergebnissen aus der Anwendung von Fermis Goldener Regel überein.

Die Betrachtung der Terme höherer Ordnung in dieser Entwicklung bildet den Hauptteil dieser Arbeit. Ziel ist es dabei, diese Ordnungen durch Terme auszudrücken, die aus der führenden Ordnung bereits bekannt sind. Auf diese Weise können die Korrekturen der Leitfähigkeit durch die Lösung des Riemann-Hilbert-Problems ausgedrückt und anschließend auf Symmetrien bzgl. der Streuphasen in den einzelnen Zuleitungen untersucht werden.

Schließlich wird skizziert, wie die Methode auf ähnliche Systeme, für den Fall von endlichen Temperaturen und im Nichtgleichgewicht angewendet werden kann.

Schlagworte: Fermikantensingularität, resonantes Tunneln,  
niedrigdimensionale Systeme



## Abstract

The present work analyses the current transfer through quantum dots by solving a Riemann-Hilbert problem. Experimental data show an asymmetry under a change of the direction of the current. The aim of this work is to find a possible explanation for this effect.

First the investigated system is described. It consists of several decoupled leads which contain a non-interacting electron gas, and a quantum dot with a single energy level. Electrons can tunnel from the leads to the quantum dot and back to the leads. A Coulomb interaction between the electron on the dot and the lead electrons is present for an occupied dot, leading to a characteristic singularity in the tunneling rate between the leads and the dot. This is known as Fermi edge singularity (FES). As an introduction to the applied method – the Riemann-Hilbert approach – the Fermi edge singularity is rederived.

The FES shows no asymmetry under a change of the direction of current transfer. For this reason, the conductance is expanded in the number of tunneling processes by using the Kubo formula. The leading order gives the known FES and agrees with the results obtained by using Fermi's golden rule.

The main part of this work is the treatment of higher order terms of this expansion. The intention is to express the higher terms by expressions known from the leading order. In this way the corrections to the conductance can be obtained from the solution to the Riemann-Hilbert problem. Afterwards the symmetries with respect to the scattering phases in the individual leads are analysed.

Finally the possibility for using this method to describe similar systems, finite temperature and non-equilibrium is sketched.

Keywords: Fermi edge singularity, resonant tunneling, low-dimensional systems



---

# Inhaltsverzeichnis

---

1. Einleitung	1
2. Grundlagen	5
2.1. Beschreibung des physikalischen Systems . . . . .	5
2.2. Vom Erwartungswert zum Riemann-Hilbert-Problem . . . . .	10
2.3. Erste Anwendung: Potentialänderung ohne Teilchenzahländerung . . . . .	14
3. Korrelationsfunktionen für ausgewählte Transportprozesse	21
3.1. Ein einzelner Tunnelprozess . . . . .	22
3.1.1. Transport eines Elektrons . . . . .	22
3.1.2. Transport eines Lochs . . . . .	28
3.2. Mehrere Tunnelprozesse hintereinander . . . . .	34
3.2.1. Der elementare Transportprozess . . . . .	35
3.2.2. Zwei Tunnelprozesse hintereinander . . . . .	38
3.2.3. Übergang in die Zeitdarstellung . . . . .	45
4. Der Strom durch den Quantenpunkt	53
4.1. Leitfähigkeit in niedrigster Ordnung . . . . .	54
4.2. Leitfähigkeit in nächst höherer Ordnung . . . . .	60
4.2.1. Betrachtung der unterschiedlichen Beiträge . . . . .	60
4.2.2. Auswertung der Zeitintegrale . . . . .	68
4.2.3. Addition der einzelnen Beiträge . . . . .	76
5. Fazit und Ausblick	81

Anhang	85
A. Konventionen und Rechenregeln . . . . .	87
A.1. Transformationsregeln für die Zeitdarstellung . . . . .	87
A.2. Identitäten für das Riemann-Hilbert-Problem . . . . .	88
A.3. Regularisierung der RH-Lösung . . . . .	89
A.4. Eigenschaften der Operatoren . . . . .	93
B. Wirkung von Vielteilchenoperatoren . . . . .	95
C. Rechnungen für Determinanten . . . . .	99
C.1. Fall $j = k$ . . . . .	99
C.2. Fall $j \neq k$ . . . . .	102
D. Ergänzende graphische Darstellungen der Ergebnisse . . . . .	108
Literaturverzeichnis	111
Publikationen	113
Danksagung	115



# KAPITEL 1

---

## Einleitung

---

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Untersuchung von Transport durch Nanostrukturen. Als konkretes Beispiel dient hierzu der Stromtransport durch Quantenpunkte. Ein Phänomen, das bei diesem Transport auftritt, ist die so genannte Fermikantensingularität (FES). Auf diesen Effekt und vor allem auf Korrekturen höherer Ordnung in Form von mehrfachen Tunnelprozessen soll bei der Untersuchung das Hauptaugenmerk gerichtet werden.

Die Fermikantensingularität ist die Reaktion eines fermionischen Systems auf eine plötzliche Potentialänderung. Sie wurde erstmalig bei der Absorption von Röntgenstrahlung an Metalloberflächen beobachtet [16, 21, 23] und sorgt für eine Singularität in der Absorptionsrate  $I(\omega) \sim \theta(\omega - \omega_{th})(\omega - \omega_{th})^\gamma$ . Diese folgt für  $T = 0\text{K}$  einem Potenzgesetz und weist ein Schwellenverhalten auf. Dabei ist  $\omega_{th}$  die Energie, die benötigt wird, um ein Elektron bis zur Leitungsbandkante anzuregen. Wenn das Elektron mit  $\omega = \omega_{th}$  genau bis zur Fermikante angeregt wird, ist die Rate singular. Je nach Vorzeichen des Exponenten  $\gamma$  ist sie entweder unterdrückt oder divergent.

Das bei der FES betrachtete System ist ein Gas aus nicht-wechselwirkenden Fermionen. Zu Beginn befindet es sich im Grundzustand. Durch Absorption eines Photons mit der Energie  $\omega$  wird ein kernnahes Elektron in das Leitungsband angeregt. Das plötzlich entstehende Loch erzeugt ein Coulombpotential, an dem die Leitungselektronen gestreut werden. Nach einer Zeit  $t_f$  fällt das Elektron zurück in den kernnahen Zustand, das

Streupotential wird plötzlich wieder abgeschaltet. Im Fall eines unendlich ausgedehnten Systems sind die Grundzustände mit und ohne Potential orthogonal zueinander, bekannt als Anderson-Orthogonalitätskatastrophe [3]. Diese ist die Ursache für das beschriebene singuläre Verhalten.

Das gleiche Phänomen tritt auch beim Transport durch Quantenpunkte auf [9, 17]. Hierbei gibt es mehrere Zuleitungen, in denen sich ein freies Elektronengas befindet, und die nur über einen Quantenpunkt gekoppelt sind. Für einen Transport zwischen zwei Zuleitungen tunnelt ein Elektron auf den Quantenpunkt. Dort lokalisiert, erzeugt es das beschriebene Coulombpotential, an dem die Elektronen in den Zuleitungen gestreut werden. Die Singularität tritt in der Tunnelrate von und zu dem Quantenpunkt auf [13]. Durch Anwendung von Fermis Goldener Regel erhält man die FES. Bei dieser Beschreibung beschränkt man sich auf den dominantesten Tunnelprozess. Der so beschriebene Strom ist symmetrisch unter Umkehrung der Stromrichtung. Im Experiment wird jedoch ein asymmetrischer Verlauf beobachtet. Aus diesem Grund soll in der vorliegenden Arbeit der Strom unter Berücksichtigung des vollen Tunnelprozesses (von einer Zuleitung über den Quantenpunkt in eine andere Zuleitung) untersucht werden. Mit Hilfe der Kubo-Formel kann der Strom als Störungsreihe in der Anzahl der Tunnelprozesse geschrieben werden. Die führende Ordnung liefert die FES, die nächst höhere Ordnung, die beide Transportkanäle einbezieht, soll in dieser Arbeit studiert werden.

Zur Untersuchung von Fermikantensingularitäten bedient man sich verschiedener Methoden, wie etwa Bosonisierung [9, 23] oder konformer Feldtheorie [2]. Für einen Überblick über die etablierten Methoden siehe beispielsweise [22].

In dieser Arbeit wird die Behandlung der FES auf ein Riemann-Hilbert-Problem zurückgeführt. Die Strom-Strom-Korrelationsfunktion, welche die FES beschreibt, kann durch die Lösung dieses Hilfsproblems ausgedrückt werden. Implizit wurde sie bereits in der ursprünglichen Behandlung des Problems durch Nozières und de Dominicis [21] verwendet.

Der Vorteil dieser Methode ist ihre Flexibilität. Zum einen lassen sich sowohl mehrfache Tunnelprozesse behandeln, was der Grund für die Anwendung in dieser Arbeit ist, als auch zeitlich veränderliche Streupotentiale. Letztere ermöglichen es, Systeme im Nichtgleichgewicht zu studieren. Zum anderen ist die Methode universell anwendbar: Mit demselben Formalismus können verschiedene Arten von Systemen untersucht werden, beispielsweise auch Quantenpunktkontakte (QPC).

---

Eine Voraussetzung zur Anwendung der RH-Methode ist, dass eine Beschreibung des untersuchten Systems alleine mit Einteilchenoperatoren möglich ist. Es dürfen keine Teilchen erzeugt oder vernichtet werden, und die Teilchen dürfen nur an einem externen Potential gestreut werden. Es ist außerdem wesentlich für die Anwendbarkeit des RH-Zugangs, dass die Potentialänderung plötzlich erfolgt. Nach der Aktivierung darf sich das Potential zeitlich ändern. Außerdem darf der Teil des Systems, der für das Schalten des Potentials verantwortlich ist (in diesem Fall der Quantenpunkt), keine inneren Freiheitsgrade und folglich auch keine Eigendynamik haben. Das Verfahren eignet sich daher z. B. nicht zur Behandlung des Kondo-Problems, da hierbei die Dynamik des auf dem Quantenpunkt lokalisierten Spins die wesentliche Rolle spielt.

Die vorliegende Arbeit knüpft an die Analyse der Fermikantensingularität [9, 24] an und ist wie folgt gegliedert: Zunächst wird das untersuchte System – mehrere Zuleitungen mit wechselwirkungsfreien Elektronen, die über einen Quantenpunkt gekoppelt sind – beschrieben (Kap. 2.1). Anschließend wird der Zusammenhang zwischen der Berechnung der Korrelationsfunktion und dem Riemann-Hilbert-Problem gezeigt (Kap. 2.2). Dieses wird dann für den einfachsten Fall gelöst, bei dem sich die Teilchenzahl in den Zuleitungen nicht ändert (Kap. 2.3). In den nächsten beiden Abschnitten wird ein Elektron auf den Quantenpunkt (Kap. 3.1.1) oder davon herunter (Kap. 3.1.2) transportiert. Die bis hierhin präsentierten Ergebnisse sind aus der Literatur bekannt. Diese Kapitel dienen dazu, die verwendete Methode vorzustellen. Die Ergebnisse aus Kap. 3.1.1 wurden bereits mit anderen Methoden bestimmt (z. B. mittels Bosonisierung [9, 23]), wohingegen im Fall von Kap. 3.1.2 zwar der Riemann-Hilbert-Zugang verwendet wurde [6], die Behandlung des Beitrags von dem transportierten Elektron aber auf andere Weise erfolgte.

In dem nächsten Kapitel 3.2 wird der Transport von mehreren Elektronen hintereinander untersucht. Die Ergebnisse werden in Kapitel 4 verwendet, um die Leitfähigkeit des Quantenpunktes in Störungsrechnung zu bestimmen. Die Untersuchung der mehrfachen Tunnelprozesse, welche die Korrektur zur FES darstellen, machen den Hauptteil dieser Arbeit aus. Sie schließt mit einer zusammenfassenden Darstellung der Ergebnisse und einem Ausblick. Zugunsten einer besseren Lesbarkeit wurden lange Rechnungen und Untersuchungen in den Anhang verschoben.



# KAPITEL 2

---

## Grundlagen

---

### 2.1. Beschreibung des physikalischen Systems

Das in dieser Arbeit betrachtete System beschreibt den Strom durch einen Quantenpunkt. Es besteht aus mehreren, nicht miteinander wechselwirkenden Kanälen, in denen sich freie Elektronen befinden. Bei den Kanälen kann es sich sowohl um unterschiedliche Zuleitungen handeln, als auch um unterschiedliche Transportkanäle innerhalb der Zuleitung, beispielsweise für Elektronen mit verschiedenen inneren Freiheitsgraden.

Der Quantenpunkt selbst hat keine inneren Freiheitsgrade. Er kann nur einfach besetzt oder unbesetzt sein. Es handelt sich also um ein Zwei-Niveau-System. Seine Rolle in Bezug auf die Kanäle ist die Erzeugung eines Coulombpotentials, an dem die Leitungselektronen gestreut werden.

Die einzige Kopplung der Kanäle untereinander geschieht über den Quantenpunkt. Ein Elektron kann mit Amplitude  $W$  zwischen einer Zuleitung und dem Quantenpunkt hin- und hertunneln.  $W$  kann sich für die einzelnen Kanäle unterscheiden. Durch sequentielle Tunnelprozesse können Elektronen zwischen den Zuleitungen transportiert werden. Eine Änderung des Spins ist bei den hier betrachteten Prozessen nicht möglich. Abbildung 2.1 zeigt eine schematische Darstellung des Systems.

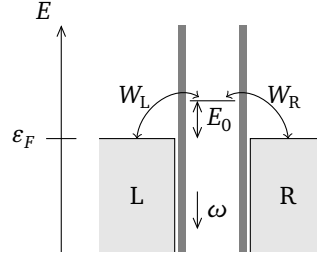


Abbildung 2.1.: Schemazeichnung des untersuchten Systems

Die zur Beschreibung verwendete Einteilchenbasis besteht aus den Eigenzuständen des Systems ohne Streupotential, so wie es vor dem ersten Tunnelprozess vorliegt. Die Besetzungsänderung des Quantenpunktes aufgrund des Tunnelns bewirkt eine Änderung des Streupotentials. Je nachdem, ob der Quantenpunkt zu Beginn besetzt oder unbesetzt war, schaltet ein Tunnelprozess ein attraktives oder repulsives Potential ein, sodass die Elektronen eine Streuphase größer bzw. kleiner als Null erhalten. Die Potentialänderung wirkt sich auf alle Kanäle aus, nicht nur auf die am Transport beteiligten. Daher sieht der Hamiltonoperator für solch ein System wie folgt aus: Er besteht aus zwei Sektoren, für die die Wechselwirkung  $M = 0$  oder  $M \neq 0$  ist, was je nach Anfangszustand einem besetzten oder unbesetzten Quantenpunkt entspricht.

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + \sum_{\substack{\alpha, \alpha' \\ k, k'}} a_{\alpha, k}^\dagger M_{\alpha, k, \alpha', k'}(t) a_{\alpha', l'} + E_0 b^\dagger b \quad (2.1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\alpha, k} \varepsilon(k) a_{\alpha, k}^\dagger a_{\alpha, k} \quad (2.2)$$

Die Zustände sind über ihren Impuls  $k$  und den Kanal  $\alpha$  gekennzeichnet. Die Erzeuger und Vernichter für die einzelnen Kanäle können als Komponenten von Vektoren aufgefasst werden. Damit ist  $M$  eine Matrix im Kanalraum.  $b$  ist der Vernichter für den Quantenpunktzustand, der die Energie  $E_0$  relativ zur Fermienergie hat.

Die untersuchten Größen, wie z. B. der Strom durch den Quantenpunkt, lassen sich durch Erwartungswerte von Operatoren  $\mathcal{A}$  ausdrücken, die die zugehörigen Übergänge erzeugen. Die Erwartungswerte werden in Bezug auf den (thermisch angeregten)

Grundzustand berechnet. Es gilt gemäß Fermis Goldener Regel:

$$I(\omega) = \sum_{f,i} |\langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 \delta(\omega + E_i - E_f) \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}, \quad Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \sum_{f,i} e^{i(\omega + E_i - E_f)t} \langle i | \mathcal{A}^\dagger | f \rangle \langle f | \mathcal{A} | i \rangle \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \sum_{f,i} e^{i\omega t} \langle i | e^{i\mathcal{H}t} \mathcal{A}^\dagger e^{-i\mathcal{H}t} | f \rangle \langle f | \mathcal{A} | i \rangle \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ausgedrückt durch die Korrelationsfunktion  $\chi$  sieht  $I(\omega)$  wie folgt aus:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \left[ \int_0^{\infty} dt e^{i\omega t} \chi(t) \right] \quad (2.5)$$

$$\text{mit } \chi(t) = \sum_i \langle i | \mathcal{A}^\dagger(t) \mathcal{A}(0) | i \rangle \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} = \text{Tr}(\mathcal{A}^\dagger(t) \mathcal{A}(0) \rho) \quad (2.6)$$

$I(\omega)$  ist die Rate für den von dem Operator  $\mathcal{A}$  erzeugten Übergang. Im Fall der Röntgenabsorptionsexperimente liefert dies das Absorptions- bzw. Emissionsspektrum, in dem hier betrachteten Fall des Tunnelns ist  $I$  proportional zum Strom durch den Quantenpunkt.

Die Rate  $I$  ist die Summe über alle Übergangswahrscheinlichkeiten aus einem gemäß Boltzmann-Verteilung besetzten Anfangszustand  $|i\rangle$  in einen Endzustand  $|f\rangle$ , deren Energien sich gerade um  $\omega$  unterscheiden. (In der gesamten Arbeit ist  $\hbar = 1$  gesetzt.)  $\mathcal{A}$  erzeugt einen Übergang zwischen den beiden Sektoren  $M = 0$  und  $M \neq 0$  des Hamiltonoperators.  $|i\rangle$  ist Eigenzustand von  $\mathcal{H}$  im Sektor mit  $M = 0$ , für  $|f\rangle$  ist  $M \neq 0$ . Die Zeitentwicklungen erfolgen dementsprechend bei vorhandenem oder nicht vorhandenem Streupotential. Abhängig davon, ob der Quantenpunkt zu Beginn besetzt oder unbesetzt ist, liefern  $|i\rangle$  oder  $|f\rangle$  einen Beitrag für die Energie des Quantenpunktes  $e^{\pm iE_0 t}$ .

Indem explizit einer der beiden Sektoren für die Zeitentwicklung verwendet wird, ist die Rolle des Quantenpunktzustands bereits berücksichtigt. Die Erzeuger und Vernichter

$b^\dagger$  und  $b$  für diesen Zustand können fortan weggelassen werden. Technisch gesehen wurde die Spur über den Hilbertraum des Quantenpunktes ausgeführt.

$\omega$  ist die Energie, die dem System bei dem Transport zugeführt wird. Sie verschiebt das Quantenpunktniveau relativ zur Fermikante. Im Fall der FES entspricht sie der extern angelegten Spannung. Ein Transport, bei dem  $|f\rangle$  keine Anregungsenergie erhält, ist dann möglich, wenn die Quantenpunktenergie auf Ferminiveau liegt. Es ist also zu erwarten, dass es eine Schwellspannung  $\omega_{th}$  gibt, unterhalb derer kein Transport möglich ist.

Die Spur in Gl. (2.6) ist über alle Vielteilchenzustände  $|i\rangle$  zu bilden, die im Grundzustand besetzt sein können. Um die Spur zu berechnen, benötigt man die Wirkung des Zeitentwicklungsoperators  $\mathcal{U}$  auf die Vielteilchenzustände.  $\mathcal{U}$  erzeugt die Zeitentwicklung im Sektor mit eingeschaltetem Streupotential,  $\mathcal{U}_0$  erzeugt die Entwicklung ohne Potential. Ihre Wirkung wird bereits vollständig durch die Wirkung auf Einteilchenzustände charakterisiert, weil  $\mathcal{H}$  quadratisch in den Erzeugern und Vernichtern ist. Eine Analyse der Wirkung von  $\mathcal{U}$  auf Vielteilchenzustände findet sich in Anhang B.

Effektiv wirkt  $\mathcal{U}$  wie ein Einteilchenoperator mit Darstellungsmatrix  $\sigma$  auf jeden einzelnen Zustand innerhalb des Vielteilchenzustands. Zur Unterscheidung bezeichnen die calligraphischen Buchstaben Vielteilchenoperatoren, während die normalen Buchstaben Darstellungsmatrizen im Einteilchensektor sind. Mit dieser Umformulierung im Einteilchenbild lässt sich die Spur eines Vielteilchenoperators  $\mathcal{R}$  in die Determinante über die Darstellungsmatrix im Einteilchensektor  $R$  umschreiben, wie die Rechnung in Anhang B zeigt.

$$\chi = \langle e^{\phi_0} \mathcal{R} \rangle_T = e^{\phi_0} \det(\mathbb{1} - f + fR) \quad \text{mit} \quad \mathcal{R} = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{A}^\dagger \mathcal{U}(t_f) \mathcal{A} \quad (2.7)$$

Die Determinante muss über alle Zustände in allen Kanälen gebildet werden.  $f$  ist die Fermifunktion. Sie berücksichtigt die Besetzung der einzelnen Zustände. Die Phase  $e^{\phi_0}$ , die den Beitrag der Quantenpunktenergie  $E_0$  beschreibt, wird aus dem Erwartungswert herausgezogen und spielt daher für die Berechnung der Determinante keine Rolle.

Im Folgenden wird, solange es nicht explizit anders angegeben ist, die Temperatur  $T = 0\text{ K}$  gesetzt. In dem Fall lässt sich Gl. (2.7) auch mittels Blockmatrizen darstellen: Links bzw. oben stehen die besetzten Zustände, rechts bzw. unten die unbesetzten.



$$f = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$\chi \sim \det(\mathbb{1} - f + fR) = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & \mathbb{1} \end{vmatrix} = \det(R_{11}) = \det'(R) \quad (2.9)$$

Hierbei bezeichnet  $\det'$  die Determinante über die besetzten Zustände.

Für die weitere Berechnung der Korrelationsfunktion  $\chi$  ist es praktisch, anstelle von  $\chi$  deren Logarithmus zu betrachten. Bei der anschließenden Vertauschung von  $\det()$  und  $\ln()$  wird die Determinante zu einer Spur, deren Auswertung erheblich einfacher ist.

$$\ln(\chi) = \ln(e^{\phi_0} \det(\mathbb{1} - f + fR)) = \text{Tr}(\ln(\mathbb{1} - f + fR)) + \phi_0 \quad (2.10)$$

Die Spur wird über alle Zustände aller Zuleitungen gebildet, auch über die, die weit weg von der Fermikante sind. Für die nicht-trivialen Effekte sind nur die Zustände im Bereich der Fermikante verantwortlich. Aus diesem Grund addiert und subtrahiert man folgenden Term:

$$\ln(\chi^{(1)}) := \text{Tr}(f \ln(R)) + \phi_0 \quad (2.11)$$

Dieser Term enthält die diagonalen Einträge von  $\ln(R)$ , summiert über alle besetzten Zustände, und die Phase  $\phi_0$ .

Gl. (2.11) liefert die Beiträge linear in  $t_f$  und hat je nach betrachtetem System eine unterschiedliche Interpretation. Im Falle der FES beschreibt er die Verschiebung der Grundzustandsenergie aufgrund des Potentials und den Beitrag der Quantenpunktenergie  $E_0$ . Im Falle des Schrotrauschens hängt er mit dem durchschnittlichen Strom durch die Tunnelbarriere zusammen[4, 6]. Seine Auswertung erfolgt am Ende dieses Kapitels.

Die folgenden Betrachtungen konzentrieren sich zunächst auf den Term

$$\ln(\chi^{(2)}) = \ln(\chi) - \ln(\chi^{(1)}) = \text{Tr}(\ln(\mathbb{1} - f + fR) - f \ln(R)), \quad (2.12)$$

der die nicht-trivialen Effekte von Gl. (2.10) beschreibt. Zustände weit weg von der Fermikante, für die  $f = 0$  oder  $f = 1$  ist, tragen zu  $\ln(\chi^{(2)})$  nicht bei.

## 2.2. Vom Erwartungswert zum Riemann-Hilbert-Problem

Die weitere Behandlung des Problems erfolgt in der Zeitdarstellung. Die entsprechenden Transformationsformeln finden sich in Anhang A.1. Um den in dieser Arbeit verwendeten Riemann-Hilbert-Zugang anwenden zu können, ist es notwendig, dass der untersuchte Operator  $R$  in der Zeitdarstellung diagonal ist. Die notwendigen Bedingungen hierfür wurden aus den Artikeln von d'Ambrumenil, Muzykantskii und Braunecker ([4, 6], siehe auch [1, 19]) übernommen und sollen kurz zusammengefasst werden.

Der Zeitentwicklungsoperator kann in Einteilchendarstellung durch  $\sigma$  ausgedrückt werden.  $\sigma$  wiederum hängt mit der Einteilchenstreuematrix  $S(t, E)$  für ein Teilchen der Energie  $E$  zusammen, wobei  $S$  die Streumatrix zu dem instantanen Wert des Potentials  $M(t)$  ist. Im Allgemeinen ist diese Beziehung sehr kompliziert. Aber unter der folgenden Bedingung (Adiabatizität) wird sie sehr einfach:

$$\frac{\partial S^{-1}}{\partial t} \cdot \frac{\partial S}{\partial E} \ll 1 \quad (2.13)$$

Diese Bedingung bedeutet, dass sich die Streumatrix während der Zeit der Streuung (Wigner delay time) nur langsam ändert. In diesem Fall lautet der Zusammenhang zwischen  $S$  und  $\sigma$

$$\sigma_{\alpha, \alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') = \tilde{S}_{\alpha, \alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') \quad (2.14)$$

mit

$$\tilde{S}_{\alpha,\alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') := \frac{1}{2\pi\sqrt{v_\alpha v_{\alpha'}}} \int dt e^{i(\varepsilon-\varepsilon')t} S_{\alpha\alpha'}(t, E), \quad E = \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}. \quad (2.15)$$

Die Einträge der Darstellungsmatrix  $\sigma$  des Zeitentwicklungsoperators sind gleich den Matrixelementen des Objekts, das man aus der Fouriertransformation (2.15) der Zeitvariablen von  $S(t, E)$  erhält. Um in die Zeitdarstellung zu gelangen, müssen die Matrixelemente mit Hilfe von Gl. (A.1) transformiert werden. Die relevanten physikalischen Prozesse passieren in der Nähe der Fermikante. Aus diesem Grund wird  $S(t, E)$  für  $E = E_F$  ausgewertet. Außerdem wird bei Integralen über die Energie die Zustandsdichte an der Fermikante  $\nu = \nu(\varepsilon_F)$  verwendet.

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\alpha,\alpha'}(t, t') &= \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \frac{\sqrt{v_\alpha v_{\alpha'}}}{2\pi} e^{i\varepsilon' t' - i\varepsilon t} \frac{1}{2\pi\sqrt{v_\alpha v_{\alpha'}}} \int d\tau e^{i(\varepsilon-\varepsilon')\tau} S_{\alpha\alpha'}(\tau, E) \\ &= \int d\tau \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{i\varepsilon(\tau-t)} \int \frac{d\varepsilon'}{2\pi} e^{i\varepsilon'(t'-\tau)} S_{\alpha\alpha'}(\tau) \\ &= S_{\alpha\alpha'}(t, E_F) \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.16)$$

Unter den genannten Bedingungen ist die Streumatrix diagonal in der Zeitdarstellung mit Diagonaleinträgen  $S(t, E = E_F) \equiv S(t)$ . Der Operator  $\tilde{S}(t, t')$  kann somit durch die skalare Funktion  $S(t)$  ersetzt werden. Gleiches gilt für den Operator  $R$ , der sich aus Kombinationen von  $\tilde{S}$  zusammensetzt. Er ist unter den obigen Bedingungen ebenfalls diagonal in der Zeit, sodass der Riemann-Hilbert-Zugang angewendet werden kann.

In der Zeitdarstellung wird die Spur zu einem Integral über  $t$ , lediglich die Spur über die unterschiedlichen Kanäle bleibt erhalten. Zur Unterscheidung von der Spur über alle Energien wird hier die Notation  $\text{tr}()$  verwendet. Außerdem wird  $R$  mit Hilfe von  $\lambda$  parametrisiert:

$$R \rightarrow R(\lambda) = \exp(\lambda \ln(R)) \quad (2.17)$$

Durch Ableitung nach diesem Parameter  $\lambda$  erhält man für  $\ln(\chi^{(2)})$  den folgenden Ausdruck:

$$\ln(\chi^{(2)}) = \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{tr} \left( \left[ (\mathbb{1} - f + fR)^{-1} f - fR^{-1} \right] \frac{dR}{d\lambda} \right) \quad (2.18)$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, einen Ausdruck für  $(\mathbb{1} - f + fR)^{-1}$  zu finden. Hierzu wird eine komplexe Hilfsfunktion  $Y(t)$  eingeführt, die das folgende Riemann-Hilbert-Problem löst.

1.  $Y(t)$  ist eine nichtsinguläre  $N \times N$ -Matrixfunktion, die analytisch und von Null verschieden ist in der ganzen komplexen Ebene, abgesehen von dem Intervall  $[0, t_f]$ .

Auf dem offenen Intervall  $(0, t_f)$  erfüllt sie die Randbedingung

$$Y_-(t)Y_+^{-1}(t) = R(t) \quad \text{mit} \quad Y_{\pm}(t) \equiv Y(t \pm i0), \quad (2.19)$$

und an den Endpunkten  $t_e = 0, t_f$  des Intervalls darf sie schwach singular sein gemäß  $|Y(t)| \sim |t - t_e|^{\varepsilon}$ , mit  $-1 < \varepsilon < 1, \varepsilon \neq 0$ .

2.  $Y(t)$  erfüllt die asymptotische Randbedingung

$$Y(t) \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad |t| \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Die  $N$  Dimensionen der Matrix entsprechen den einzelnen Kanälen. Das Intervall  $[0, t_f]$  ist die Zeit, in der das Streupotential aktiviert, also  $R(t) \neq 1$  ist.

Aus den zwei Bedingungen ergeben sich die beiden folgenden Identitäten, die in Anhang A.2 bewiesen werden.

$$f Y_+ f = Y_+ f \quad (2.21)$$

$$f Y_- f = f Y_- \quad (2.22)$$

Diese Identitäten gelten in der gleichen Form auch für die Inversen  $Y_{\pm}^{-1}$ .

Die Inverse  $(\mathbb{1} - f + fR)^{-1}$  kann nun unter Benutzung der Identitäten (2.21) und (2.22) durch die Hilfsfunktion  $Y(t)$  ausgedrückt werden:

$$(\mathbb{1} - f + fR)^{-1} = Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-^{-1}] \quad (2.23)$$

Zum Beweis wird die rechte Seite von Gl. (2.23) einmal von rechts und einmal von links mit  $(\mathbb{1} - f + fR)$  multipliziert. Für die Umformungen sind die Identitäten (A.9) und (A.11) nützlich.

$$\begin{aligned} & Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-^{-1}] \cdot (\mathbb{1} - f + fR) \\ &= Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1}(\mathbb{1} - f) + (\mathbb{1} - f)Y_+^{-1}fY_-Y_+^{-1} \\ &\quad + fY_-^{-1}(\mathbb{1} - f) + fY_-^{-1}fY_-Y_+^{-1}] \\ &= Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-^{-1}Y_-Y_+^{-1}] \\ &= \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbb{1} - f + fR) \cdot Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-^{-1}] \\ &= (\mathbb{1} - f)Y_+(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + (\mathbb{1} - f)Y_+fY_-^{-1} \\ &\quad + fY_-Y_+^{-1}Y_+(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-Y_+^{-1}Y_+fY_-^{-1} \\ &= (\mathbb{1} - f) + fY_-fY_-^{-1} \\ &= \mathbb{1} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Der Ausdruck (2.23) für die Inverse  $(\mathbb{1} - f + fR)^{-1}$  kann nun in Gl. (2.18) eingesetzt werden, um  $\chi^{(2)}$  zu berechnen. Zunächst wird der Teil in den eckigen Klammern vereinfacht.

$$\begin{aligned} & (\mathbb{1} - f + fR)^{-1}f - fR^{-1} \\ &= Y_+ [(\mathbb{1} - f)Y_+^{-1} + fY_-^{-1}]f - fR^{-1} \\ &= Y_+fY_-^{-1}f - fR^{-1} \\ &= Y_+fY_+^{-1}Y_+Y_-^{-1} - fY_+Y_+^{-1}R^{-1} \\ &= (Y_+f - fY_+)Y_+^{-1}R^{-1} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Für alle differenzierbaren Matrixfunktionen  $A$  und  $B$  gilt die folgende Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{tr}([A, f]B) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \lim_{t' \rightarrow t} \operatorname{tr} \left( \frac{i}{2\pi} \left[ \frac{A(t) - A(t')}{t - t' + i0} \right] B(t') \right) \quad (2.27)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{tr} \left( \frac{dA(t)}{dt} B(t) \right) \quad (2.28)$$

Diese Identität kann, nachdem Gl. (2.26) eingesetzt wurde, verwendet werden, um Gl. (2.18) in eine sehr kompakte Form zu bringen.

$$\ln(\chi^{(2)}) = \frac{i}{2\pi} \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{tr} \left( \frac{dY_+}{dt} Y_+^{-1} R^{-1} \frac{dR}{d\lambda} \right) \quad (2.29)$$

Dies ist die Form, die in den späteren Kapiteln verwendet wird, um  $\chi^{(2)}$  konkret auszurechnen. Eine erste Anwendung wird im Abschnitt 2.3 präsentiert.

## 2.3. Erste Anwendung: Potentialänderung ohne Teilchenzahländerung

Dieser Abschnitt bildet die erste Anwendung für Gl. (2.29). Es wird ein System mit nur einem Kanal betrachtet, in dem die Teilchenzahl auch während der Potentialänderung konstant bleibt.

Ein Beispiel dafür sind die am Transport unbeteiligten Kanäle in einem Mehrkanalsystem. Das Hüpfen eines Elektrons zwischen einem Kanal und dem Quantenpunkt sorgt für die Potentialänderung. Das Potential wirkt auch auf die übrigen Kanäle, die nicht am Transport beteiligt sind. Auf diese Weise liefern sie auch einen Beitrag zur FES, der nun bestimmt werden soll.

In dem hier betrachteten einfachsten Fall ist das Potential zeitlich konstant und wirkt auf alle Elektronen gleichermaßen. Ein Elektron, welches an diesem Potential gestreut

wird, erfährt lediglich eine Phasenverschiebung, die u. a. von der Geometrie des Quantenpunktes, z. B. der Dicke der Tunnelbarriere, abhängt. Für die Streumatrix  $S(t, E)$ , die die Streuung solch eines Elektrons beschreibt, gilt daher

$$S(t, E) = e^{-2i\delta} \quad \text{für } 0 < t < t_f, \quad S(t, E) = 1 \quad \text{sonst.} \quad (2.30)$$

Die so definierte Phasenverschiebung  $\delta$  ist größer als Null.  $t_f$  ist die Zeit, für die der Quantenpunktzustand besetzt ist. Um die Korrelationsfunktion  $\chi$  zu berechnen, muss der Operator  $\mathcal{A}$  festgelegt werden. Der zu diesem Prozess gehörende Übergang ist die Besetzung des Quantenpunktes. Leitungselektronen sind an dem Übergang nicht beteiligt.  $\mathcal{A}$  ist daher der Erzeuger für den Quantenpunktzustand:

$$\mathcal{A} = b^\dagger \quad (2.31)$$

Weil bei expliziter Berücksichtigung der Quantenpunktbesetzung die Operatoren  $b$  und  $b^\dagger$  weggelassen werden können, ist folgender Erwartungswert zu berechnen:

$$\chi(t_f) = e^{-iE_0 t_f} \langle 0 | \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{U}(t_f) | 0 \rangle \quad (2.32)$$

Dies ist genau die Form wie in Gl. (2.7) angegeben, wobei

$$\mathcal{R} = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{U}(t_f) = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{U}_0(t_f) \mathcal{U} = \mathcal{U}. \quad (2.33)$$

Die Phase  $\phi_0 = -iE_0 t_f$  ist der Beitrag der Quantenpunktbesetzung für die Zeit der Streuung. Da sie in  $\ln(\chi^{(1)})$  enthalten ist, trägt sie in der folgenden Rechnung nichts bei. Die beiden Faktoren  $\mathcal{U}$  sorgen jeweils für eine Zeitentwicklung um  $t_f$ , einmal vorwärts und einmal rückwärts in der Zeit, so dass  $\mathcal{R}$  insgesamt keine Zeitentwicklung sondern lediglich eine Streuung der Zustände bewirkt. Dies ist auch notwendig, da die Zustände zu identischen Zeiten verglichen werden müssen.  $R$ , die Matrix im Einteilchensektor, muss nun in Zeitdarstellung betrachtet werden. Es gilt  $R(\varepsilon, \varepsilon') = \sigma(\varepsilon, \varepsilon') = \tilde{S}(\varepsilon, \varepsilon')$ . In Zeitdarstellung ist  $R$  diagonal und kann durch eine skalare Funktion ersetzt werden. Mit Gl. (2.16) folgt:

$$R(t) = S(t, E_F) \equiv S(t) \quad (2.34)$$

$S$  ist gerade die Streumatrix aus Gl. (2.30). Sie enthält den Parameter  $t_f$ , der die Dauer des eingeschalteten Potentials angibt. In Zeitdarstellung hat  $R$  gerade den Wert von  $S$  zu demselben Zeitpunkt. Durch die Parametrisierung mittels Gl. (2.17) erhält man damit folgendes Riemann-Hilbert-Problem:

$$Y_-(t)Y_+^{-1}(t) = (S(t))^\lambda, \quad Y \rightarrow 1 \quad \text{für} \quad |t| \rightarrow \infty \quad (2.35)$$

Dieses Riemann-Hilbert-Problem wird durch folgende Funktion  $Y(z)$  gelöst (siehe hierzu z. B. das Buch von Muskhelishvili [18]):

$$Y(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{z}{z-t_f}\right) \lambda \ln(S^e)\right) = \left(\frac{z}{z-t_f}\right)^{-\frac{\delta}{\pi}\lambda} \quad (2.36)$$

Beim Rechnen mit komplexen Zahlen muss beachtet werden, ob Schnitte in der komplexen Ebene auftreten, wie z. B. beim Logarithmus. In diesem Fall muss die Änderung der Phase beim Überqueren des Schnitts berücksichtigt werden. Daraus folgt beispielsweise für  $x \in \mathbb{R}$ , dass

$$\ln(x-i0) - \ln(x+i0) = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \\ -2\pi i & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Nach Konstruktion ist  $Y(z)$  analytisch für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus [0, t_f]$ . Für diese  $z$  gilt demnach  $Y_+(z) = Y_-(z) = Y(z)$  und folglich  $Y_-(z)Y_+^{-1}(z) = 1$ .

In dem Intervall  $[0, t_f]$  hat  $Y(z)$  einen Schnitt. Dort gilt:

$$\begin{aligned} Y_-(t)Y_+^{-1}(t) &= \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \left[ \ln\left(\frac{t-i0}{t+i0}\right) - \ln\left(\frac{t-t_f-i0}{t-t_f+i0}\right) \right] \lambda \ln(S^e)\right) \\ &= \exp(\lambda \ln(S^e)) = R(t) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Damit ist gezeigt, dass Gl. (2.36) das Riemann-Hilbert-Problem tatsächlich löst.

Diese Lösung kann nun in Gl. (2.29) eingesetzt werden. Hierbei ist  $\frac{dR}{d\lambda} = -2i\delta R$  für  $0 < t < t_f$  und 0 sonst. Daher läuft das Integral über  $t$  nur von 0 bis  $t_f$ . Die einzigen



verbleibenden zeitabhängigen Terme sind  $Y_+$  und dessen Ableitung, die als Ableitung des Logarithmus umgeschrieben werden können.

Die Funktion  $Y$  ist an den Integralgrenzen  $t = 0$  und  $t = t_f$  singular. Diese Singularität rührt daher, dass das Leitungsband als unendlich groß angenommen wird und damit beliebig kurze Zeiten auftreten können[6]. Tatsächlich sind die Energien aber begrenzt und die Singularität ist demnach unphysikalisch. Aus diesem Grund wird ein Cutoff-Parameter  $\xi$ , eine Energie von der Größenordnung der Leitungsbandbreite, eingeführt. Eine Betrachtung der Regularisierung findet sich in Anhang A.3. Sie führt zu einer Verschiebung der unteren Integralgrenze um  $i\xi^{-1}$  und der oberen Integralgrenze um  $-i\xi^{-1}$ .

$$\begin{aligned}
 \ln(\chi^{(2)}) &= \frac{i}{2\pi} \int_0^1 d\lambda \int_0^{t_f} dt \left( \frac{d}{dt} \ln(Y_+) \right) (-2i\delta) \\
 &= \frac{\delta}{\pi} \int_0^1 d\lambda \left[ \frac{1}{2\pi i} \ln\left(\frac{t}{t-t_f}\right) \lambda \ln(S^e) \right]_{i\xi^{-1}}^{t_f - i\xi^{-1}} \\
 &= \frac{\delta}{\pi} \frac{-2i\delta}{2\pi i} \int_0^1 d\lambda \lambda \left[ \ln\left(\frac{t_f}{t_f - i\xi^{-1} - t_f}\right) - \ln\left(\frac{i\xi^{-1}}{-t_f}\right) \right] \\
 &= -\frac{\delta^2}{\pi^2} \ln(i\xi t_f)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Dies ist das wohlbekanntes Resultat[6]. Dazu kommt noch der diagonale Anteil  $\ln(\chi^{(1)})$ , der nun berechnet werden soll.

Die Matrix  $R_{\varepsilon\varepsilon'}$  hat ihre größten Einträge auf der Hauptdiagonalen, nach außen werden die Einträge kleiner ( $R_{\varepsilon\varepsilon'} \sim \sin((\varepsilon - \varepsilon')t_f)(\varepsilon - \varepsilon')^{-1}$ ). In führender Ordnung tragen nur die Diagonalelemente von  $R$  zu  $\ln(R)$  bei. Damit darf die Fouriertransformation für die Streumatrix  $S$  aus Gl. (2.15) aus dem Logarithmus herausgezogen werden und es ist  $\ln(R)(t, E) = -2i\delta(t, E)$ . Die Phase  $\delta$  ist stückweise konstant, das Integral über  $t$  aus der Fouriertransformation ergibt demnach  $t_f$ . Auch die Phase  $\phi_0 = -iE_0 t_f$  ist linear in  $t_f$ . Der Term  $\chi^{(1)}$  ist also eine Phase und sorgt bei der anschließenden Transformation in die Energiedarstellung für eine Energieverschiebung. Dies ist die zuvor angesprochene Schwellspannung  $\omega_{th}$ . Da die einzelnen Beiträge zu  $\omega_{th}$  nicht

unterschieden werden können, soll die Auswertung von  $\ln(R)$  nur in führender Ordnung erfolgen.

In führender Ordnung kann die Auswertung von  $\chi^{(1)}$  auch wie folgt durchgeführt werden. Die Fouriertransformation für die Streumatrix  $S$  aus Gl. (2.15) kann durch eine Wignertransformation invertiert werden [19].

$$f_W(t, E) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f\left(E + \frac{\omega}{2}, E - \frac{\omega}{2}\right) \quad (2.40)$$

Die Wignertransformation eines Produkts ist in führender Ordnung das Produkt der Wignertransformierten:

$$(f g)_W(t, E) = f_W(t, E) g_W(t, E) + i\{f_W, g_W\} + \dots \quad (2.41)$$

$\{, \}$  bezeichnet hierbei Poisson Klammern, die Punkte stehen für Terme mit höheren Ableitungen nach der Energie bzw. der Zeit. Aufgrund der Adiabaticität (Gl. (2.13)) können die abgeleiteten Terme vernachlässigt werden. Dies ermöglicht es, die Wignertransformation und den Logarithmus zu vertauschen. Damit gilt (für kontinuierliche Energien sind die Matrixelemente des Zeitentwicklungsoperators  $2\pi\sqrt{v(\varepsilon)v(\vare')}\sigma(\varepsilon, \vare')$ ):

$$(\ln(R))_W(t, E) = \ln\left((2\pi\sqrt{v\nu}\sigma)_W\right)(t, E) = \ln(S)(t, E) = -2i\delta(t, E) \quad (2.42)$$

Mit diesem Ergebnis kann die Spur ausgewertet werden.

$$\begin{aligned} \text{Tr}(f \ln(R)) &= \sum_{\varepsilon} (f \ln(R))_{\varepsilon\varepsilon} \\ &= \sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon'} \theta(\varepsilon_F - \varepsilon) \delta_{\varepsilon\varepsilon'} \int dt \frac{e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)t}}{2\pi\sqrt{v(\varepsilon')v(\varepsilon)}} (\ln(R))_W\left(t, \frac{\varepsilon + \varepsilon'}{2}\right) \\ &= \sum_{\varepsilon < \varepsilon_F} \int dt \frac{-2i\delta(t, \varepsilon)}{2\pi v(\varepsilon)} \\ &= -i \sum_{\varepsilon < \varepsilon_F} \frac{\delta(\varepsilon)}{\pi v(\varepsilon)} t_f \end{aligned} \quad (2.43)$$

Dieser Term beschreibt die Änderung der Einteilchenenergien in den Zuleitungen aufgrund der Besetzung des Quantenpunktes [20], oder äquivalent dazu die Änderung

der Quantenpunktenergie aufgrund der Anwesenheit der Elektronen in den Zuleitungen [6]. Diese Änderung ist bekannt als Fumis Theorem [11], eine direkte Konsequenz der Friedelschen Summenregel [10].

Nimmt man die Phase  $\phi_0$  hinzu, erhält man das gesuchte  $\chi^{(1)}$ :

$$\chi^{(1)} = e^{-i\omega_{th}t_f} \quad \text{mit} \quad \omega_{th} = E_0 + \sum_{\varepsilon < \varepsilon_F} \frac{\delta(\varepsilon)}{\pi \nu(\varepsilon)} \quad (2.44)$$

Insgesamt erhält man damit folgenden Ausdruck für die Korrelationsfunktion  $\chi$ :

$$\chi(t_f) = e^{-i\omega_{th}t_f} (i\xi t_f)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad (2.45)$$

Um aus der Korrelationsfunktion  $\chi$  einen Ausdruck für den Strom  $I(\omega)$  zu erhalten, muss noch die Fouriertransformation aus Gl. (2.5) durchgeführt werden.

Für die Lösung kann entweder 3.761.4 und 3.761.9 aus dem Gradshteyn/Ryzhik [12] oder Kapitel 4.3, Gl. (1) aus dem Bateman [8] verwendet werden. Die Bedingung für die Anwendbarkeit der Formeln ( $0 < \delta < \pi$ ) ist erfüllt. Um das Integral konvergent zu machen, wird der Parameter  $\eta$  eingeführt, der  $\omega$  in die obere komplexe Halbebene verschiebt. Als Abkürzung wird  $\omega' = \omega - \omega_{th}$  eingeführt.

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_{th})t - \eta t} (i\xi t)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \right] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\pi} (i\xi)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} (-i\omega' + \eta)^{\frac{\delta^2}{\pi^2} - 1} \Gamma \left( 1 - \frac{\delta^2}{\pi^2} \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \xi^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \frac{i}{\pi \omega'} |\omega'|^{\frac{\delta^2}{\pi^2}} e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{\delta^2}{\pi^2} (\operatorname{sgn}(\omega') + 1)} \Gamma \left( 1 - \frac{\delta^2}{\pi^2} \right) \right] \\ &= \theta(\omega - \omega_{th}) \left( \frac{\omega - \omega_{th}}{\xi} \right)^{\frac{\delta^2}{\pi^2}} \frac{1}{\pi(\omega - \omega_{th})} \sin \left( \pi \frac{\delta^2}{\pi^2} \right) \Gamma \left( 1 - \frac{\delta^2}{\pi^2} \right) \quad (2.46) \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt das bekannte Verhalten. Es gibt eine Mindestenergie  $\omega = \omega_{th}$ , unterhalb derer kein Übergang möglich ist. Oberhalb dieser Stufe erhält man eine Potenzfunktion mit Exponent  $\frac{\delta^2}{\pi^2} - 1 < 0$ . An der Stufe ist die Übergangsrate singularär.



# KAPITEL 3

---

## Korrelationsfunktionen für ausgewählte Transportprozesse

---

Wie im vorangegangenen Kapitel gezeigt wurde, benötigt man zur Berechnung des Stroms durch einen Quantenpunkt die Korrelationsfunktion  $\chi$ , d. h. den Erwartungswert des Operators, der den untersuchten Transportprozess beschreibt.

Bei den bisherigen Betrachtungen blieb die Zahl der Teilchen in den einzelnen Zuleitungen konstant. In diesem Kapitel sollen nun Prozesse untersucht werden, bei denen Teilchen aus den Zuleitungen auf den Quantenpunkt transportiert werden. Dieses Tunneln zwischen Zuleitung und Quantenpunkt wird durch den Operator  $\mathcal{H}_X$  beschrieben.

$$\mathcal{H}_X = \sum_{\alpha} (W_{\alpha} b^{\dagger} a_{\alpha, x=0} + \text{h. c.}) = \sum_{\alpha} \sum_k \frac{1}{\sqrt{N_{\alpha}}} (W_{\alpha} b^{\dagger} a_{\alpha, k} + \text{h. c.}) \quad (3.1)$$

$\mathcal{H}_X$  vernichtet ein Elektron am Ort  $x = 0$  in einer Zuleitung und erzeugt es auf dem Quantenpunkt oder umgekehrt. Der Index  $\alpha$  zählt die einzelnen Zuleitungen ab,  $W_{\alpha}$  ist eine i. A. komplexe Hüpfamplitude. Durch Fouriertransformation kann man dies auch als Superposition für das Vernichten eines Elektrons mit Impuls  $k$  schreiben. Die Energie dieses Elektrons ist  $\varepsilon_k$ ,  $N_{\alpha}$  die Zahl der Zustände in Zuleitung  $\alpha$ .

Der Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  enthält für Transportprozesse dieser Art zum einen Operatoren mit Darstellungsmatrix  $\sigma$ , die die Streuung der Elektronen in den Zuleitungen beschreiben,

zum anderen Erzeuger und Vernichter für die Elektronen, die an dem Transport beteiligt sind. Die Betrachtung beschränkt sich auf Fälle, bei denen genau ein oder zwei Teilchen auf den Quantenpunkt transportiert werden.

Ziel dieses Kapitels ist es, die Effekte des Transports als Faktor abzuspalten und die Ausdrücke so umzuformulieren, dass nur Operatoren auftreten, die die Teilchenzahl nicht ändern. Zur Unterscheidung bezeichnet  $\hat{\mathcal{R}}$  den Operator, der den vollständigen Transportprozess inklusive der Erzeuger und Vernichter beschreibt.  $\mathcal{R}$  erzeugt dasselbe Streupotential, ändert aber nicht die Teilchenzahl. Für diesen Operator wird dann das Riemann-Hilbert-Problem gelöst. Mit dieser Lösung kann im weiteren Verlauf der umgeschriebene Erwartungswert von  $\hat{\mathcal{R}}$  berechnet werden.

## 3.1. Ein einzelner Tunnelprozess

Der Strom durch den Quantenpunkt kann entweder durch Elektronen oder durch Löcher getragen werden. Beim Elektronentransport muss der Quantenpunkt zu Anfang unbesetzt sein. Das transportierte Elektron, das aus der Zuleitung auf den Quantenpunkt hüpfet, schaltet das Streupotential ein. Dieser Prozess wird in Abschnitt 3.1.1 beschrieben.

Beim Lochtransport hingegen ist der Quantenpunkt zu Beginn besetzt. Das dort befindliche Elektron hüpfet in die Zuleitung. Umgekehrt bedeutet dies, dass ein Loch aus der Zuleitung auf den Quantenpunkt transportiert wird und dabei das Streupotential einschaltet. Eine Betrachtung dieser Situation findet in Abschnitt 3.1.2 statt.

### 3.1.1. Transport eines Elektrons

Bei dem in diesem Abschnitt beschriebenen Prozess hüpfet zu dem Zeitpunkt  $t = 0$  ein Elektron aus einer Zuleitung auf den Quantenpunkt und zum Zeitpunkt  $t = t_f$  wieder zurück. In dem Operator  $\mathcal{H}_X$  nimmt der Index  $\alpha$  dementsprechend nur einen Wert an und kann folglich weggelassen werden. Da nur ein Kanal zu dem Transport beiträgt, kann der Erwartungswert für die einzelnen Kanäle faktorisiert werden. Für die nicht am Transport beteiligten Kanäle können die Ergebnisse aus Kapitel 2.3 verwendet werden. Die Betrachtung beschränkt sich daher auf den Transportkanal. Um den Formalismus aus

dem vorigen Kapitel anzuwenden, muss der Operator  $\mathcal{A}$  festgelegt werden. Für den hier untersuchten Prozess gilt  $\mathcal{A} = \mathcal{H}_X$ . Mit Gl. (2.5) muss die folgende Korrelationsfunktion berechnet werden:

$$\begin{aligned} \chi &= \langle \mathcal{H}_X(t_f) \mathcal{H}_X(0) \rangle = \left\langle \sum_{i,j} \frac{1}{N} \mathcal{U}^\dagger(t_f) W^* a_j^\dagger b e^{-iE_0 t_f} \mathcal{U}(t_f) W b^\dagger a_i \right\rangle \\ &= e^{-iE_0 t_f} \sum_{i,j} \frac{|W|^2}{N} \langle \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_j^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_i \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Indizes  $i$  und  $j$  zählen dabei Impulszustände mit Energie  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_j$  ab. Da der Quantenpunkt im Grundzustand nicht besetzt ist, liefert nur ein Teil von  $\mathcal{H}_X$  einen nicht verschwindenden Beitrag zum Erwartungswert.

Wie in Kapitel 2 beschrieben, können die Operatoren  $b$  und  $b^\dagger$  entfallen, indem ihre Wirkung in den Zeitentwicklungsoperatoren berücksichtigt wird. Diese müssen dazu gemäß dem Sektor des Hamiltonoperators gewählt werden, der der jeweiligen Besetzung des Quantenpunktzustands entspricht. Der hier betrachtete  $\hat{\mathcal{R}}$ -Operator hat also die folgende Form:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}} &= \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_j^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_i = e^{i\varepsilon_j t_f} a_j^\dagger \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{U}_0(t_f) \mathcal{U} a_i \\ &= e^{i\varepsilon_j t_f} a_j^\dagger \mathcal{U} a_i \end{aligned} \quad (3.3)$$

Analog zum Abschnitt zuvor trägt die Phase  $\phi_0 = -iE_0 t_f$  nur zu  $\ln(\chi^{(1)})$  bei und wird zunächst vernachlässigt. Von dem Operator  $\mathcal{U}(t_f)$  wurde die Zeitentwicklung abgespalten. Durch das Vertauschen von  $\mathcal{U}_0^\dagger(t_f)$  und  $a_j^\dagger$  erhält man explizit die Streuphase  $e^{i\varepsilon_j t_f}$  (siehe Gl. (B.8)). Die beiden  $\mathcal{U}_0$  heben sich gegenseitig auf, sodass es effektiv zu keiner Zeitentwicklung kommt. Sämtliche Informationen über die Streuung der Leitungselektronen sind in dem Operator  $\mathcal{U}$  enthalten.

Der Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  wirkt nach rechts auf den Grundzustand. Um dessen Wirkung zu untersuchen, werden die einzelnen Faktoren von rechts nach links ausgewertet.

Zunächst wirkt der Operator  $a_i$ . Dieser vernichtet ein Elektron, ändert aber nichts an der grundsätzlichen Struktur des Zustandes. Es wird lediglich aus einem  $n$ -Teilchenzustand ein  $(n-1)$ -Teilchenzustand.

Der als nächstes folgende Operator  $\mathcal{U}$  wirkt demnach ebenfalls so, wie es in Gl. (B.11) gezeigt wurde. Der Unterschied zum Kapitel zuvor ist, dass der Zustand  $i$  nicht mitgestreut wird. Dieser Aspekt kann auch realisiert werden, indem in der zugehörigen Streumatrix  $\sigma$  die  $i$ -te Spalte durch Nullen ersetzt wird. Auf diese Weise wird die Wirkung von  $a_i$  bereits mit berücksichtigt.

Der dritte Operator,  $a_j^\dagger$ , stellt die Teilchenzahl wieder her, ändert aber genau wie  $a_i$  nichts an der grundsätzlichen Struktur des Zustandes. Damit dieser Zustand erzeugt werden kann, muss er unbesetzt sein. Es darf nicht in diesen Zustand gestreut werden. Das wird erreicht, indem die  $j$ -te Zeile von  $\sigma$  ebenfalls nur Nullen enthält.

Effektiv wird durch diese Operatoren ein Elektron direkt von dem Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  transportiert. Diese Auswirkung wird berücksichtigt, indem an den Kreuzungspunkt, das Matricelement  $\sigma_{ji}$ , eine 1 geschrieben wird. Dies ist auch vom mathematischen Standpunkt notwendig. Ohne diese 1 wäre die modifizierte Matrix singulär. Es muss aber ein Inverses geben, da auch der zugrundeliegende physikalische Prozess invertierbar ist. Die Phase  $e^{i\varepsilon_j t_f}$  ist die Zeitentwicklung des explizit transportierten Elektrons und wird mit dem Matricelement  $\sigma_{ij}$  zusammengefasst.

Die Darstellung  $R'$  des effektiven Prozesses, der von  $\hat{\mathcal{R}}$  beschrieben wird, sieht damit wie folgt aus (in den gefüllten Bereichen steht die Matrix  $\sigma$ ):

$$R' = \left( \begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \\ 0 \cdots 0 & * & 0 \cdots 0 \\ \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \sigma \\ \vdots \\ \sigma \end{array} \end{array} \right) \quad j \quad \text{mit } * = e^{i\varepsilon_j t_f} \quad (3.4)$$

$i$

Damit tatsächlich ein Transport zustande kommt, müssen  $i$  und  $j$  zu Zuständen gehören, die eine Energie unterhalb der Fermikante haben. Andernfalls wären diese Einteilchenzustände in dem Vielteilchengrundzustand gar nicht besetzt. Die Operatoren  $a_i$  bzw.  $a_j^\dagger$  würden den Vielteilchenzustand vernichten. Anders ausgedrückt: Die Projektion des Operators  $\hat{\mathcal{R}}$  auf den Grundzustand wäre dann Null. Diese Eigenschaft muss sich auch in der Beschreibung mittels der effektiven Streumatrix  $R'$  wiederfinden.



Zu diesen Modifikationen ist anzumerken, dass sie nur für die Auswertung des Grundzustandserwartungswertes zulässig sind, d. h. wenn die entstandene Matrix zur Berechnung der entsprechenden Determinante verwendet wird.

Sie berücksichtigen die Wirkung der zusätzlichen Erzeuger bzw. Vernichter auf den Vielteilchenzustand durch Streichen einer Zeile bzw. Spalte. Diese Wirkung kann nur in der Vielteilchenbeschreibung behandelt werden. Insbesondere kann die Matrix nicht als Darstellung des Operators  $\hat{\mathcal{R}}$  in der Einteilchenbasis verstanden werden, d. h. es gilt nicht  $R'_{mn} = \langle | a_m \hat{\mathcal{R}} a_n^\dagger | \rangle$ . ( $| \rangle$  ist das Fockvakuum.) Vielmehr erhält man  $R'_{mn}$ , indem man  $\hat{\mathcal{R}}$  auf die Zustände  $m$  und  $n$  einschränkt und hiervon das Matrixelement berechnet, analog zur Herleitung der Determinante in Anhang B. Es ist allerdings mit dieser Beschreibung möglich, einzeln auftretende Faktoren, z. B. die zusätzliche Streuphase  $e^{i\epsilon_j t_f}$ , in den veränderten Zeilen bzw. Spalten zu berücksichtigen. Dies wird auch in den nächsten Abschnitten verwendet werden.

Die Auswirkungen des Elektronentransports lassen sich wie gerade gezeigt mit einer effektiven Streumatrix  $R'$  beschreiben. Bei der Verwendung dieser effektiven Darstellung hat der Ausdruck für die Korrelationsfunktion die gleiche Struktur wie in Abschnitt 2.3: Es muss die Determinante einer Streumatrix über die im Grundzustand besetzten Zustände gebildet werden.

Ziel des folgenden Abschnitts ist es, die Modifikation der Streumatrix als einzelnen Faktor abzuspalten und mit Hilfe von  $\sigma$  auszudrücken, wodurch der Streuprozess durch einen äquivalenten Prozess für den Operator  $\mathcal{R}$  beschrieben wird. Damit können die zuvor erhaltenen Ergebnisse wiederverwendet werden.

Die gesuchte Determinante ist

$$\det(\mathbb{1} - f + fR') = \det(R') = \det(R'_{11}), \quad (3.5)$$

wobei hier wieder die Blocknotation für besetzte und unbesetzte Zustände benutzt wurde, siehe Gl. (2.8).

Da die Indizes  $i$  und  $j$  zu Zuständen unterhalb der Fermikante gehören müssen, muss die Determinante auch über die modifizierte Zeile und Spalte gebildet werden. Nach dieser Zeile bzw. Spalte kann entwickelt werden. Die verbleibende Unterdeterminante ist dieselbe, die man bei der Entwicklung von  $\sigma$  nach Spalte  $i$  und Zeile  $j$  erhalten hätte.

Für die Berechnung der Unterdeterminante kann also wieder mit der ursprünglichen Streumatrix gearbeitet werden.

Die Unterdeterminante in dieser Entwicklung ist die Adjunkte der ursprünglichen Matrix  $\sigma$ . Man kann sie mit Hilfe der Inversen von  $\sigma$  ausrechnen. Im Folgenden bezeichnet  $\text{Adj}(A)_{mn}$  die bzgl. Zeile  $m$  und Spalte  $n$  gebildete Adjunkte der Matrix  $A$ . Es gilt der folgende Zusammenhang zwischen der Adjunkten und der Inversen einer Matrix. Zu beachten ist dabei das Vertauschen der Indizes.

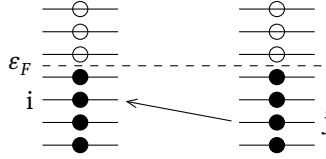
$$\text{Adj}(A)_{mn} = \det(A) (A^{-1})_{nm} \quad (3.6)$$

Daraus folgt für die Korrelationsfunktion  $\chi$ :

$$\begin{aligned} \chi &\sim \sum_{ij} \frac{|W|^2}{N} \det(R'_{11}) \\ &= \sum_{ij} \frac{|W|^2}{N} e^{i\varepsilon_j t_f} \text{Adj}(\sigma_{11})_{ji} \\ &= \sum_{ij} \frac{|W|^2}{N} e^{i\varepsilon_j t_f} \det(\mathbb{1} - f + f\sigma) \left( (\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f \right)_{ij} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wie oben bereits beschrieben, muss die Korrelationsfunktion in Gl. (3.7) Null sein, wenn  $i$  oder  $j$  zu Zuständen oberhalb der Fermikante gehören. Dies ist auch tatsächlich der Fall: Der Ausdruck  $(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f$  hat in Blocknotation nur einen Eintrag für das 1-1-Element, also für besetzte Zustände. Alle anderen Einträge sind Null. Damit kann über alle Zustände summiert werden, da alle zusätzlichen Terme keinen Beitrag zu  $\chi$  liefern.

Der gerade beschriebene Prozess lässt sich auch mit einem Diagramm veranschaulichen. Abbildung 3.1 zeigt, was in dem System passiert. Grundsätzlich werden alle Zustände so gestreut, als ob die Teilchenzahl unverändert wäre. Dieser Prozess ist nicht mit abgebildet und wird von dem Faktor  $\det(\mathbb{1} - f + f\sigma)$  beschrieben. Da jedoch ein Elektron auf den Quantenpunkt gehüpft ist, beinhaltet der Faktor eine Streuung zuviel. Zum Ausgleich muss auch ein Loch gestreut werden. Dieses Loch, dargestellt durch einen Pfeil entgegen der Transportrichtung, wird in der Abbildung gezeigt. Die


 Abbildung 3.1.:  $\hat{\mathcal{R}} = a_j^\dagger \mathcal{U} a_i$ 

Streuung des Loches wird beschrieben durch die Inverse und die zusätzliche Streuphase.

Mit Gl. (3.7) wurde die Korrelationsfunktion in eine Form gebracht, in der nur noch die Streumatrix  $\sigma$  vorkommt, die zu demselben Operator  $R$  wie in Abschnitt 2.3 gehört. Auch die zu berechnende Determinante ist in der Form von Gl. (2.7), sodass die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 direkt eingesetzt werden können. Lediglich der zusätzliche Term muss noch ausgewertet werden. Da in diesem die gleiche Inverse auftritt wie bei der Berechnung der Determinante, kann wiederum die Lösung des Riemann-Hilbert-Problems aus dem letzten Kapitel verwendet werden. Für die Auswertung wird die Summe über die Impulse  $i$  und  $j$  durch Integrale über die zugehörigen Energien  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  ersetzt, sodass eine Fouriertransformation (Gl. (A.1)) in die Zeitdarstellung durchgeführt werden kann.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} e^{i\varepsilon_j t_f} \left( (\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f \right)_{ij} \\
 &= \int d\varepsilon \nu \int d\varepsilon' \nu e^{i\varepsilon' t_f} \left( (\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f \right) (\varepsilon, \varepsilon') \\
 &= 2\pi\nu \left( Y_+ f Y_-^{-1} \right) (0, t_f)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beim Einsetzen der Argumente in die Funktion  $Y$  muss wieder beachtet werden, dass die wie in Anhang A.3 beschriebene Regularisierung durchgeführt werden muss.  $\xi_<$  ist eine Energie von der Größenordnung der Bandbreite unterhalb der Fermikante und wird in Anhang A.4 definiert.

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
 & Y_+(0)f(0, t_f)Y_-^{-1}(t_f) \\
 &= \left( \frac{z}{z - t_f} \Big|_{z=0+i\xi^{-1}} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \frac{i}{2\pi} \frac{1}{0 - t_f + i\xi} \left( \frac{z}{z - t_f} \Big|_{z=t_f-i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \\
 &= \left( \frac{i\xi^{-1}}{-t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \frac{1}{2\pi i t_f} \left( \frac{-i\xi^{-1}}{t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \\
 &= \frac{\xi}{2\pi} (i\xi t_f)^{2\frac{\delta}{\pi}-1} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Der Term  $\ln(\chi^{(1)})$  ist derselbe wie in Abschnitt 2.3. Die Phase  $\phi_0$  ist gleich, und auch  $\text{Tr}(f \ln(R))$  liefert den gleichen Beitrag, weil die Streupotentiale gleich sind.

Zusammengesetzt erhält man für die Korrelationsfunktion:

$$\chi(t_f) = \langle \mathcal{H}_X(t_f) \mathcal{H}_X(0) \rangle = |W|^2 \frac{v\xi}{N} e^{-i\omega_{th}t_f} (i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2} \tag{3.10}$$

Dieser Ausdruck hat die gleiche Form wie Gl. (2.45), lediglich der Exponent ist verändert und es gibt einen konstanten Vorfaktor. Der Strom kann daher auf die gleiche Weise wie im letzten Kapitel berechnet werden.

$$I(\omega) = |W|^2 \frac{\theta(\omega - \omega_{th})}{\pi\xi} \left( \frac{\omega - \omega_{th}}{\xi} \right)^{\frac{\delta^2}{\pi^2} - 2\frac{\delta}{\pi}} \sin\left(\pi\left(\frac{\delta}{\pi} - 1\right)^2\right) \Gamma\left(2\frac{\delta}{\pi} - \frac{\delta^2}{\pi^2}\right) \tag{3.11}$$

Die Auswirkung, die das Hüpfen des einen Elektrons hat, ist also eine Änderung des kritischen Exponenten durch eine zusätzliche Phasenverschiebung um  $-\pi$ .

### 3.1.2. Transport eines Lochs

In diesem Abschnitt soll der Fall beschrieben werden, in dem der Quantenpunkt zu Beginn besetzt ist und ein Loch die Zuleitung verlässt. Dies ist der Teilchen-Lochsymmetrische Prozess zu Abschnitt 3.1.1. Es ist also zu erwarten, dass für beide Fälle das Ergebnis gleich ist.

Ausgangspunkt ist wieder die Korrelationsfunktion  $\langle \mathcal{H}_X(t_f) \mathcal{H}_X(0) \rangle$ , nur mit dem Unterschied, dass diesmal im Grundzustand der Quantenpunkt besetzt ist. Es muss also der folgende Ausdruck ausgewertet werden:

$$\chi(t_f) = \langle \mathcal{H}_X(t_f) \mathcal{H}_X(0) \rangle = e^{iE_0 t_f} \sum_{ij} \frac{|W|^2}{N} \langle \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_j \mathcal{U}(t_f) a_i^\dagger \rangle \quad (3.12)$$

Im Grundzustand, also bei einem besetzten Quantenpunkt, findet keine Streuung in andere Zustände statt. Sobald das Elektron den Quantenpunkt verlässt, wird das Streupotential eingeschaltet. Die Phasenverschiebung bei diesem Prozess ist  $-\delta$ , da die Ladungsänderung das entgegengesetzte Vorzeichen hat,

Die einzelnen Operatoren wirken genau so, wie bereits in Abschnitt 3.1.1 beschrieben. Der Unterschied ist, dass sich ein Elektron mehr in der Zuleitung befindet und dass  $\mathcal{U}(t_f)$  demnach auf einen  $(n+1)$ -Teilchenzustand wirkt. Außerdem hat die zusätzliche Phase durch das Vertauschen von  $\mathcal{U}_0^\dagger$  und  $a_j$  das entgegengesetzte Vorzeichen. Der untersuchte Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  sieht daher wie folgt aus:

$$\hat{\mathcal{R}} = e^{-i\epsilon_j t_f} a_j \mathcal{U} a_i^\dagger \quad (3.13)$$

Wie in den vorangegangenen Abschnitten kann die Phase  $\phi_0 = iE_0 t_f$  zunächst vernachlässigt werden. Sie hat das entgegengesetzte Vorzeichen, da bei diesem Prozess der Quantenpunkt zu Beginn besetzt ist. Die Wirkung der Operatoren lässt sich wie zuvor durch eine Modifikation der Streumatrix  $\sigma$  berücksichtigen. Da in diesem Fall jedoch ein Elektron mehr gestreut wird, müssen weitere Einträge hinzugefügt werden, während im Fall zuvor Einträge Null gesetzt wurden.

Das zusätzlich gestreute Elektron befindet sich im Zustand  $i$ , der oberhalb der Fermikante liegen muss. Die Determinante muss auch über diesen Zustand gebildet werden. Dazu werden die Einträge der  $i$ -ten Spalte der vollen Streumatrix als zusätzliche Spalte an  $\sigma_{11}$  angefügt. Außerdem muss auch in den  $j$ -ten Zustand gestreut werden, da dieser anschließend explizit vernichtet wird. Die Determinante muss demnach auch über diesen Zustand gebildet werden. Dazu wird die  $j$ -te Zeile der vollen Streumatrix als zusätzliche Zeile angefügt.

Die Matrix, die den Transport eines Loches beschreibt, sieht damit folgendermaßen aus. Die zusätzliche Streuphase  $e^{-i\varepsilon_j t_f}$  wird der  $j$ -ten Zeile zugeordnet.

$$R' = \left( \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \sigma_{11} \\ \vdots \\ \sigma_{oi} \end{array} & \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \\ \hline \dots e^{-i\varepsilon_j t_f} \sigma_{j_o} \dots & e^{-i\varepsilon_j t_f} \sigma_{ji} \end{array} \right) \quad (3.14)$$

Für die Berechnung der Determinante wird zunächst nach der zusätzlichen Zeile und Spalte entwickelt. Die verbleibende Unterdeterminante wird dann über Zustände berechnet, die unterhalb der Fermikante liegen. Für diese Unterdeterminante können dann Ergebnisse aus den vorigen Abschnitten verwendet werden.

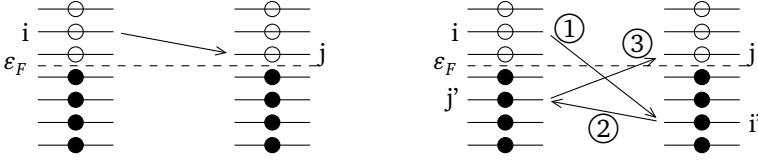
Zuerst wird nach der  $j$ -ten Zeile entwickelt. Für die bei der Entwicklung beteiligte Spalte  $j'$  gibt es zwei Möglichkeiten: Erstens kann  $j' = i$  sein. Dann ist auch die zusätzliche Spalte bereits berücksichtigt, und die Unterdeterminante ist dieselbe wie im Fall ohne Teilchentransport. Zweitens kann  $j'$  zu einem Zustand unterhalb der Fermikante gehören. In diesem Fall muss noch nach der  $i$ -ten Spalte entwickelt werden. Für  $i'$  gibt es nur die Möglichkeit, dass der zugehörige Zustand unterhalb der Fermikante liegt. Ausgedrückt durch Adjunkte erhält man damit für  $\det(R')$ :

$$\det(R') = e^{-i\varepsilon_j t_f} \sigma_{ji} \det(\sigma_{11}) + e^{-i\varepsilon_j t_f} \sum_{j'}' \sigma_{jj'} \text{Adj}(R')_{jj'} \quad (3.15)$$

$$= e^{-i\varepsilon_j t_f} \left( \sigma_{ji} \det(\sigma_{11}) + \sum_{j'}' \sigma_{jj'} \sum_{i'}' \sigma_{i'i} \text{Adj}(R')_{\{jj'\},\{i'i-1\}} \right) \quad (3.16)$$

Das  $\sum'$  bedeutet, dass die Summe über alle Zustände unterhalb der Fermikante gebildet wird.  $\text{Adj}(R')_{\{ij\},\{kl\}}$  ist so zu lesen, dass von  $R'$  zunächst Zeile  $i$  und Spalte  $j$  gestrichen wird, und anschließend von der neuen Matrix Zeile  $k$  und Spalte  $l$ . Von dieser wird dann die Determinante berechnet.

Bei der Rechnung ist zu beachten, dass bei der Entwicklung nach der  $j$ -ten Zeile bereits eine Spalte gestrichen wurde und deshalb im zweiten Schritt nach der  $(i - 1)$ -ten Spalte entwickelt werden muss. Diese enthält die Einträge der  $i$ -ten Spalte von  $\sigma$ . Da durch die Entwicklung die zusätzlichen Einträge explizit berücksichtigt wurden, kann für die


 Abbildung 3.2.:  $\hat{\mathcal{R}} = a_j \mathcal{U} a_i^\dagger$ 

weitere Betrachtung wieder  $\sigma_{11}$  verwendet werden. Effektiv bedeutet dies, dass bei der Bildung der Adjunkten die Zeilen und Spalten in einer anderen Reihenfolge gestrichen werden: Zuerst werden  $i$  und  $j$  gestrichen, dann  $i'$  und  $j'$ . Gemäß Rechenregeln für Determinanten muss das Vorzeichen getauscht werden, weil nach einer benachbarten Spalte entwickelt wird.

$$\text{Adj}(R')_{\{jj'\},\{i'i-1\}} = -\text{Adj}(R')_{\{ji\},\{i'j'\}} = -\text{Adj}(\sigma_{11})_{i'j'} \quad (3.17)$$

Die verbleibende Adjunkte kann wie im Abschnitt zuvor mit Hilfe der Inversen ausgedrückt werden. Diese ist, wie bereits gezeigt, nur für Zustände unterhalb der Fermikante von Null verschieden, sodass die Summen über  $i'$  und  $j'$  auf alle Zustände in der Zuleitung ausgedehnt werden dürfen.

$$\begin{aligned} \det(R') &= \det(\sigma_{11}) e^{-ie_j t_f} \left( \sigma_{ji} - \sigma_{jj'} \left( (\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f \right)_{j'i'} \sigma_{i'i} \right) \\ &= \det(\mathbb{1} - f + f\sigma) e^{-ie_j t_f} \left( \sigma - \left( \sigma(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1} f\sigma \right) \right)_{ji} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Auch dieser Prozess lässt sich mit Hilfe eines Diagramms veranschaulichen, siehe dazu Abbildung 3.2. Wie zuvor ist in dieser Abbildung die Streuung des Fermisees nicht enthalten, lediglich die zusätzlichen Streuprozesse werden dargestellt.

Es gibt in diesem Fall zwei Beiträge. Zum einen kann das zusätzliche Elektron direkt vom Zustand  $i$  in den Zustand  $j$  gestreut werden, dargestellt durch einen Pfeil in Transportrichtung. Zum Anderen kann das Elektron auch in einen Zustand  $i'$  unterhalb der Fermikante gestreut werden. In dem Fall hüpft zusätzlich ein Elektron-Loch-Paar aus dem Zustand  $j'$ , der ebenfalls unterhalb der Fermikante liegt. Das Loch hüpft in den Zustand  $i'$ , um das überschüssige Elektron zu kompensieren, das Elektron hüpft in den Zustand  $j$ .

Abschließend soll noch geprüft werden, ob Gl. (3.18) nur für erlaubte Werte von  $i$  und  $j$ , also für Zustände oberhalb der Fermikante, von Null verschieden ist. Nach Konstruktion der Inversen gelten folgende Beziehungen, die in Blocknotation dargestellt sind:

$$(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1}f\sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1}f = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Hieraus sieht man, dass  $(\sigma(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1}f\sigma)_{ji} = \sigma_{ji}$  ist, wenn  $i$  oder  $j$  zu Zuständen unterhalb der Fermikante gehört. Damit verschwindet der Klammerausdruck in Gl. (3.18) und die geforderte Eigenschaft gezeigt.

Wie im Abschnitt zum Elektronentransport wurde die Korrelationsfunktion vollständig durch die Streumatrix  $\sigma$  für den Operator  $\mathcal{R}$  aus Abschnitt 2.3 ausgedrückt. Die Terme aus Gl. (3.18) sind somit alle aus den vorangegangenen Abschnitten bekannt, sodass die Summen über  $i$  und  $j$  ausgewertet werden können.

$$\begin{aligned} & \sum_{ij} e^{-i\varepsilon_j t_f} \left( \sigma_{ji} - (\sigma(\mathbb{1} - f + f\sigma)^{-1}f\sigma)_{ji} \right) \\ &= \int d\varepsilon \nu \int d\varepsilon' \nu e^{-i\varepsilon t_f} (R - RY_+ f Y_-^{-1} R)(\varepsilon, \varepsilon') \\ &= 2\pi\nu (R - Y_- f Y_+^{-1})(t_f, 0) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bei der letzten Umformung wurde die Beziehung zwischen  $Y$  und  $R = \sigma = S$  (2.19) ausgenutzt.  $R$  ist nach Voraussetzung diagonal in  $t$ . Der einzelne Term  $R$  liefert also nur einen Beitrag für  $t_f = 0$ . In diesem Fall ist die Zeitdarstellung singular, da die Deltafunktion in  $R(t, t') = R(t)\delta(t - t')$  an der Stelle Null betrachtet werden muss. Man kann diesen Term aber direkt auswerten. Hierzu wird die Wirkung der Streumatrix auf die Zustände, Gl. (2.15), eingesetzt.

$$\begin{aligned} & \int d\varepsilon \nu \int d\varepsilon' \nu \frac{1}{2\pi\nu} \int dt e^{i(\varepsilon - \varepsilon')t} S(t) = \int d\varepsilon \nu \int dt e^{i\varepsilon t} \delta(t) S(t) \\ &= S(0) \int d\varepsilon \nu = \nu \xi \end{aligned} \quad (3.21)$$

Das Elektron tunnelt sofort ( $t_f = 0$ ) wieder zurück in die Zuleitung. Es gibt daher kein



Streupotential und folglich ist  $S(0) = 1$ . In diesem Fall ist  $Y(z) = 1$  und der zweite Term liefert  $v\xi_{<}$ . Die Auswertung der Energieintegrale mit Hilfe der Cutoff-Parameter findet sich in Anhang A.4. Insgesamt wird Gl. (3.20) für  $t_f = 0$  zu  $v\xi(1 - \xi_{<}/\xi)$  und ist damit ein Maß für die Füllung der Zuleitung.

Für  $t_f \neq 0$  erhält man für den zweiten Term den folgenden Ausdruck. Beim Einsetzen der Grenzen haben die Cutoff-Parameter das umgekehrte Vorzeichen, weil die Streumatrix  $e^{+2i\delta}$  ist, siehe Anhang A.3.

$$\begin{aligned}
 & Y_-(t_f) f(t_f, 0) Y_+^{-1}(0) \\
 &= \left( \frac{z}{z - t_f} \Big|_{z=t_f+i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \frac{i}{2\pi} \frac{1}{t_f - 0 + i\xi_{<}} \left( \ln \left( \frac{z}{z - t_f} \right) \Big|_{z=0-i\xi^{-1}} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \\
 &= \left( \frac{t_f}{i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \frac{i}{2\pi t_f} \left( \frac{-t_f}{-i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \\
 &= \frac{\xi}{2\pi} (-i\xi t_f)^{2\frac{\delta}{\pi}-1} \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Der Term  $\text{Tr}(f \ln(R))$  und die Phase  $\phi_0$  in  $\ln(\chi^{(1)})$  liefern den gleichen Beitrag wie zuvor, allerdings mit entgegengesetztem Vorzeichen. Damit gilt:

$$\chi^{(1)} = e^{i(E_0 + \sum_{e < e_F} \frac{\delta(e)}{\pi v(e)}) t_f} = e^{i\omega_{th} t_f} \tag{3.23}$$

Zusammengenommen erhält man für die Korrelationsfunktion:

$$\langle \mathcal{H}_X(t_f) \mathcal{H}_X(0) \rangle = -|W|^2 \frac{v\xi}{N} e^{i\omega_{th} t_f} (-i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2} \tag{3.24}$$

Das Ergebnis hat also tatsächlich die gleiche Form wie bei dem Transport eines Elektrons, Gl. (3.10). Einzig  $t_f$  ist durch  $-t_f$  ersetzt, was auf den Transport eines Loches statt eines Elektrons zurückzuführen ist. Durch Fouriertransformation erhält man schließlich  $I(\omega)$ :

$$I(\omega) = -|W|^2 \frac{\theta(-\omega - \omega_{th})}{\pi\xi} \left( \frac{|\omega + \omega_{th}|}{\xi} \right)^{\frac{\delta^2}{\pi^2} - 2\frac{\delta}{\pi}} \sin\left(\pi\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2\right) \Gamma\left(2\frac{\delta}{\pi} - \frac{\delta^2}{\pi^2}\right) \tag{3.25}$$

## 3.2. Mehrere Tunnelprozesse hintereinander

In den vorangegangenen Abschnitten wurde beschrieben, dass der Effekt eines einzelnen Tunnelprozesses eine Änderung des kritischen Exponenten ist. Dabei wurde gezeigt, dass der Transport eines Elektrons und eines Lochs, sofern es sich um zueinander symmetrische Situationen handelt, zu denselben Ergebnissen führen.

In diesem Abschnitt soll nun auf mehrfache Tunnelprozesse eingegangen werden. Aufgrund der Teilchen-Loch-Symmetrie beschränkt sich die Betrachtung auf den Transport von Elektronen. Es werden Bausteine für sequentielle Tunnelprozesse von Teilchen mit definiertem Impuls beschrieben und die gewonnenen Ausdrücke in die Zeitdarstellung umgeschrieben. Die Anwendung dieser Ergebnisse im Rahmen von konkreten Fragestellungen erfolgt dann im nächsten Kapitel.

Bei einem einzelnen Tunnelprozess ist immer nur ein Kanal am Transport beteiligt, alle anderen Kanäle sind sozusagen nur Zuschauer. Es gibt keine Wechselwirkung zwischen den Kanälen. Die auszuwertende Determinante zerfällt daher in das Produkt von Determinanten für jeweils nur einen Kanal. Mehrkanalprobleme können demnach gelöst werden, indem jeder Kanal einzeln betrachtet wird und die Ergebnisse miteinander multipliziert werden. Darum war es in den vorigen Abschnitten ausreichend, nur einen einzelnen Kanal zu betrachten.

Bei der Untersuchung mehrerer Tunnelprozesse hintereinander können allerdings auch mehrere Kanäle am Transport beteiligt sein. In diesem Abschnitt ist es deshalb notwendig, mehrere Kanäle gleichzeitig zu betrachten. Der Index  $\alpha$ , der die einzelnen Kanäle abzählt, kann nicht mehr weggelassen werden. Erzeuger können zu Vektoren von Erzeugern und Operatoren zu Matrizen von Operatoren zusammengefasst werden. Auch hier kann eine Darstellung in Blocknotation erfolgen, z. B. für die Streumatrix für einen linken und einen rechten Kanal.

$$\Sigma = \Sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \Sigma_{LL} & \Sigma_{LR} \\ \Sigma_{RL} & \Sigma_{RR} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Die Notation wird hierbei so verwendet, dass die Streumatrix  $\Sigma$  alle Kanäle berücksichtigt, während  $\sigma$  eine Streumatrix für einen einzelnen Kanal ist.

Für die hier behandelten Probleme findet eine Wechselwirkung zwischen unterschiedlichen Kanälen nur über das Tunneln von und zu dem Quantenpunkt statt. Diese

Tunnelprozesse werden in Form der Erzeuger und Vernichter explizit behandelt. Damit gibt es keine Streuprozesse zwischen Zuständen in unterschiedlichen Kanälen und es ist

$$\Sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.27)$$

Aufgrund dieser Eigenschaft wird als Kurznotation eingeführt, dass die zwei benachbarten gleichen Indizes durch einen Index ersetzt werden. Da es sich hierbei um die Streuung innerhalb eines Kanals handelt, wird als Notation  $\sigma$  verwendet:

$$\Sigma_{\alpha\alpha} \equiv \sigma_{\alpha} \quad (3.28)$$

### 3.2.1. Der elementare Transportprozess

Der Transport kann in einzelne Teilprozesse zerlegt werden, wobei jeder Teilprozess durch folgenden Operator beschrieben wird:

$$\mathcal{O}(\beta, j, \alpha, i; t', t) = \mathcal{U}_0(t') a_{\beta, j}^{\dagger} \mathcal{U}(t) a_{\alpha, i} \quad (3.29)$$

Dieser Operator beschreibt den Transport eines Elektrons aus dem Kanal  $\alpha$  in den Kanal  $\beta$ . Weil tatsächlich die Elektronen durch den Operator  $\mathcal{H}_x$  am Ort  $x = 0$  erzeugt bzw. vernichtet werden, muss später über die Impulse  $i$  und  $j$  summiert werden.

Zuerst wird das zu transportierende Elektron in der Zuleitung  $\alpha$  vernichtet. Dies aktiviert das Streupotential, die Zeitentwicklung erfolgt durch den Operator  $\mathcal{U}$ . Nach der Zeit  $t$  wird das Elektron in einer möglicherweise anderen Zuleitung  $\beta$  wieder erzeugt. Das Potential ist wieder abgeschaltet. Die weitere Zeitentwicklung um  $t'$  geschieht mit  $\mathcal{U}_0$ .

Die Operatoren  $b^{\dagger}$  und  $b$ , die das Elektron auf dem Quantenpunkt erzeugen und wieder vernichten, werden wie in den Abschnitten zuvor nicht explizit betrachtet, da ihre Wirkung, das Schalten des Potentials, in den Zeitentwicklungsoperatoren enthalten ist. Auch die Phase  $\phi_0 = -iE_0 t$  wird zunächst vernachlässigt, weil sie nur für die Betrachtung von  $\ln(\chi^{(1)})$  benötigt wird.



Da die Streuung nach Voraussetzung diagonal in der Zeit ist, müssen sich die beiden Zeitargumente um die Wirkungsdauer von  $\bar{\Sigma}$  unterscheiden, was durch eine  $\delta$ -Funktion ausgedrückt werden kann.

$$(\bar{\Sigma}(t))(\hat{t}, \hat{t}') = \Sigma(\hat{t}')\delta(t + \hat{t} - \hat{t}') \quad \text{mit} \quad \Sigma(\hat{t}') = \begin{cases} S^e & \text{für } 0 < \hat{t}' < t_f \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.33)$$

Als Beispiel soll der Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  aus Gl. (3.3) in dieser Notation angegeben werden. Für ihn und die zugehörige unmodifizierte Streumatrix gilt  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{O}(\alpha, j, \alpha, i; -t_f, t_f)$  und  $R(\hat{t}, \hat{t}') = (\bar{\sigma}(0))(\hat{t}, \hat{t}') = \sigma(\hat{t}')\delta(\hat{t} - \hat{t}')$ . (In Abschnitt 3.1.1 wurde nur ein Kanal betrachtet. Deshalb ist in diesem Fall  $\Sigma = \sigma$ .)

Der Erwartungswert eines solchen Operators  $\mathcal{O}$  für  $\alpha \neq \beta$  ist Null, da die Teilchenzahl in den einzelnen Kanälen geändert wird. Es wird also mindestens ein weiterer solcher Operator benötigt, der den Transport in die umgekehrte Richtung beschreibt. Das Produkt dieser beiden Operatoren erhält die Teilchenzahl in den Kanälen, sodass der Grundzustandserwartungswert endlich ist.

Die Zeitentwicklungen, die nach der Erzeugung bzw. Vernichtung eines Elektrons stattfinden, werden dem Operator  $\mathcal{O}$  zugeordnet, siehe Gl. (3.29). Wenn vor dem ersten Tunnelprozess ebenfalls eine Zeitentwicklung stattfindet, kann diese keinem Operator  $\mathcal{O}$  zugeordnet werden und wird deshalb separat berücksichtigt. Da während dieser Zeit kein zusätzliches Potential wirkt, geschieht die Zeitentwicklung mit  $\mathcal{U}_0$ ; die Streumatrix ist gleich der Identität. Für die separate Zeitentwicklung wird daher folgende Notation gewählt:

$$\mathcal{U}_0(t) = \bar{\mathbb{1}} \quad (3.34)$$

Dieser Operator bewirkt keine Streuung zwischen unterschiedlichen Zuständen. Er ändert also nicht die Struktur eines Operators  $\mathcal{O}$ , wenn er von rechts an diesen herangemultipliziert wird. Er sorgt lediglich für eine zusätzliche Phase. Für die Umschreibung der Determinante mit Hilfe von Inversen, die als nächstes folgt, kann daher die  $\bar{\mathbb{1}}$  zusammen mit dem benachbarten  $\bar{\Sigma}$  betrachtet werden.

### 3.2.2. Zwei Tunnelprozesse hintereinander

Im Folgenden soll ein Produkt von zwei solchen Operatoren  $\mathcal{O}$  näher untersucht werden. Um dies möglichst allgemein zu halten, werden unterschiedliche Entwicklungsoperatoren  $\check{U}$  und  $\tilde{U}$  sowie entsprechend unterschiedliche Streumatrizen  $\check{\Sigma}$  und  $\tilde{\Sigma}$  betrachtet.

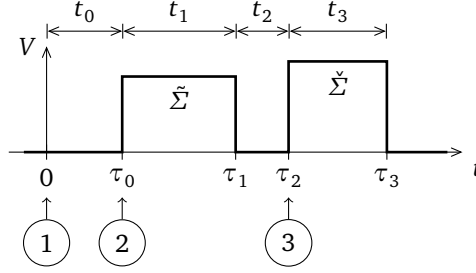
$$\mathcal{O}^{(2)} := \check{O}(\alpha, l, \beta, k; t_4, t_3) \tilde{O}(\beta, j, \alpha, i; t_2, t_1) \mathbb{1}(t_0) \quad (3.35)$$

Die Indizes  $i$  und  $l$  bezeichnen fortan (Impulseigen-)Zustände aus dem Kanal  $\alpha$ , während  $j$  und  $k$  Zustände aus dem Kanal  $\beta$  bezeichnen.

*Anmerkung:*

Für die weitere Behandlung muss die  $n$ -Teilchendeteminante der Darstellungsmatrix von  $\mathcal{O}^{(2)}$  berechnet werden. Wenn  $\mathcal{O}^{(2)}$  bereits der gesamte untersuchte Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  ist, dann ist dies die Determinante über alle Zustände unterhalb der Fermikante. Wenn es jedoch noch weitere Operatoren gibt, dann muss auf alle möglichen Zustände, nicht nur auf den Grundzustand, projiziert werden. Dies ist zwar auch eine  $n$ -Teilchendeteminante, diese lässt sich aber nicht mit Hilfe der Fermifunktion auf eine Determinante über den ganzen Raum umschreiben. Darum soll dieser Fall nicht betrachtet werden. Dies führt zu der Bedingung, dass  $t_4 = -(t_0 + t_1 + t_2 + t_3)$  ist, da  $\hat{\mathcal{R}}$  keine Zeitentwicklung bewirken darf. Die Zustände, bzgl. derer der Erwartungswert berechnet wird, müssen zu identischen Zeiten verglichen werden. Dass diese Anforderung an  $t_4$  tatsächlich erfüllt ist, wird bei der Anwendung der Ergebnisse im folgenden Kapitel gezeigt und folgt aus der Tatsache, dass die Gesamtenergie bei der Streuung erhalten ist. Die folgenden Umformungen können allerdings für den allgemeineren Fall analog durchgeführt werden.

Für die verwendeten Parameter ergibt sich der in Abbildung 3.3 dargestellte zeitliche Verlauf des Streupotentials. Als kürzere Notation werden die Zeiten  $\tau_i$  eingeführt. Die Markierungen in der Abbildung bezeichnen die Zeitpunkte, zu denen die einzelnen Operatoren zu wirken beginnen. Da die Zeitdarstellung der  $\tilde{\Sigma}$  so gewählt wurde, dass das Einschalten des Potentials zum Zeitpunkt  $t = 0$  passiert, müssen die Argumente der  $\check{\Sigma}$  entsprechend verschoben werden.



**Abbildung 3.3.:** Zeitlicher Verlauf des Streupotentials für  $\mathcal{R} = \mathcal{O}^{(2)}$

Der Referenzzeitpunkt  $t = 0$  ist mit ① markiert. Hier beginnt der erste Operator, die Identität, zu wirken. Das Streupotential ist Null. Er sorgt für eine Zeitentwicklung um  $t_0$ . Der Referenzzeitpunkt für das Wirken des nächsten Operators wird also zu ② verschoben. Hier wird für die Zeit  $t_1$  das Streupotential eingeschaltet, sodass mit der Matrix  $\check{\Sigma}$  gestreut wird. Anschließend wird der Referenzzeitpunkt zu ③ verschoben. Dasselbe passiert für den letzten Operator mit einem ggf. anderen Potential, das zu der Streumatrix  $\check{\Sigma}$  gehört. Aufgrund der Bedingung an  $t_4$  wird der Referenzzeitpunkt am Schluss wieder zu ① verschoben.

Der Operator  $\mathcal{R}$ , der die Streuung ohne Transport beschreibt, hat die folgende Zeitdarstellung. An der letzten Zeile sieht man die erwähnte Verschiebung der Argumente aufgrund der Zeitentwicklung.

$$\begin{aligned}
 R_\alpha(\hat{t}, \hat{t}') &\equiv (\check{\Sigma} \check{\Sigma} \check{\mathbb{I}})_\alpha(\hat{t}, \hat{t}') \\
 &= (\check{\sigma}_\alpha(t_3 + t_4) \check{\sigma}_\alpha(t_1 + t_2) \check{\mathbb{I}}(t_0))(\hat{t}, \hat{t}') \\
 &= \int d\bar{t} \int d\bar{t}' \check{\sigma}_\alpha(\bar{t}) \delta(t_3 + t_4 + \hat{t} - \bar{t}) \\
 &\quad \check{\sigma}_\alpha(\bar{t}') \delta(t_1 + t_2 + \bar{t} - \bar{t}') \delta(t_0 + \bar{t}' - \hat{t}') \\
 &= \check{\sigma}_\alpha(\hat{t}' - \tau_2) \check{\sigma}_\alpha(\hat{t}' - \tau_0) \delta(\hat{t} - \hat{t}')
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Die Erzeuger und Vernichter können wie in Abschnitt 3.1.1 als Modifikationen der Streumatrizen berücksichtigt werden, indem die entsprechenden Zeilen und Spalten durch Nullen ersetzt werden.

Die Darstellungsmatrix  $R'$  des Produkts  $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{O}^{(2)} = \check{\mathcal{O}}\check{\mathcal{O}}$  hat folgende Struktur:

$$R' = \left( \begin{array}{ccc|cccc} \text{■} & 0 & \text{■} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & * & 0 & \cdots & 0 \\ \text{■} & 0 & \text{■} & B_{k_1} & \cdots & B_{k_o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ A_{1j} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ A_{oj} & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ i & & & & & \end{array} \right) \quad (3.37)$$

$$A_{oj} = e^{-i(\varepsilon_i t_0 + \varepsilon_j t_2)} (\check{\sigma}_\beta)_{oj}$$

$$B_{k_o} = e^{-i\varepsilon_l t_4} (\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{k_o}$$

$$* = e^{-i(\varepsilon_i t_0 + \varepsilon_j t_2 + \varepsilon_l t_4)} \delta_{kj}$$

Die Diagonalelemente der Blockmatrix sind die Produkte  $\check{\sigma}_\alpha \cdot \check{\sigma}_\alpha \cdot \bar{\mathbb{1}}$  bzw.  $\check{\sigma}_\beta \cdot \check{\sigma}_\beta \cdot \bar{\mathbb{1}}$ , wobei zu beachten ist, dass die  $k$ -te Spalte von  $\check{\sigma}_\beta$  und die  $j$ -te Zeile von  $\check{\sigma}_\beta$  Null gesetzt sind. Letzteres hat zur Folge, dass die Nebendiagonalblöcke nur Nullen enthalten, wenn  $k = j$  ist. Die Phasen in  $A_{oj}$ ,  $B_{k_o}$  und  $*$  sind die expliziten Phasen aus  $\bar{\mathbb{1}}$  und der Vertauschung von  $\mathcal{U}_0$  und  $a$ , die einzelnen Zeilen bzw. Spalten von  $R'$  zugeordnet wurden.

Für die Berechnung der Determinante müssen zwei Fälle unterschieden werden. Wenn  $k = j$  ist, dann ist  $R'$  blockdiagonal und die Determinante kann in Anteile für die einzelnen Kanäle faktorisiert werden. Der  $R'_{\alpha\alpha}$ -Anteil hat dabei die Form aus Abschnitt 3.1.1 und ist daher bekannt. An dem  $R'_{\beta\beta}$ -Anteil muss zunächst noch eine Umformung durchgeführt werden. Zur Berücksichtigung der Teilchenzahländerung wurden Zeilen bzw. Spalten Null gesetzt, über die in dem Matrizenprodukt summiert wird. Diese Modifikation lässt sich nicht wie im Fall von  $R'_{\alpha\alpha}$  als Faktor abspalten. Allerdings ändert sie auch nicht den Wert der Determinante, wie die Rechnung in Anhang C.1 zeigt. Es kann also fortan für diesen Block mit den unmodifizierten Matrizen weitergearbeitet werden.



Mit diesen Überlegungen erhält man den folgenden Ausdruck für den Erwartungswert von  $\hat{\mathcal{R}}$ :

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathcal{R}} \rangle &= \det' (R'_{\alpha\alpha}) \cdot \det' (R'_{\beta\beta}) \\
 &= \Phi \text{Adj}' (R_\alpha)_{li} \cdot \left( \det' (\check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}}) - (\check{\sigma}_\beta)_{mj} \text{Adj}' (\check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{mn} (\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{jn} \right) \\
 &= \Phi \det' (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\alpha \check{\sigma}_\alpha \bar{\mathbb{1}}) \left( (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\alpha \check{\sigma}_\alpha \bar{\mathbb{1}})^{-1} f \right)_{il} \\
 &\quad \cdot \det' (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}}) \left( (\mathbb{1} - \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})^{-1} f \check{\sigma}_\beta) \right)_{jj} \quad (3.38) \\
 \text{mit } \Phi &= e^{-i(\varepsilon_i t_0 + \varepsilon_j t_2 + \varepsilon_l t_4)} \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde ausgenutzt, dass die Determinante im Grundzustand ausgewertet wird. Andernfalls ist das Umschreiben der Adjunkten in die Inverse so nicht möglich. Für die Identitäts- und Fermifunktionen wurden zugunsten einer besseren Lesbarkeit die Kanalindizes weggelassen. Sie wirken in den gleichen Kanälen wie die entsprechenden Streumatrizen.

Für den Fall  $j \neq k$  soll die Determinante zunächst nach den modifizierten Einträgen, Zeile  $l$  und Spalte  $i$ , entwickelt werden. Nach der Streichung dieser Einträge hat  $R'$  wieder Blockdiagonalform und die Determinante kann faktorisiert werden. Bei der Faktorisierung wird wie im Abschnitt zuvor effektiv nach einer anderen Zeile bzw. Spalte entwickelt und man erhält einen zusätzlichen Faktor  $(-1)$ . Die Summen über  $m$  und  $n$  laufen über die Zustände, über die die Determinante berechnet werden soll.

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{\mathcal{R}} \rangle &= \Phi \sum_{m,n} (\check{\sigma}_\beta)_{mj} (\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{kn} \text{Adj}' (R')_{\{mi\}, \{ln-1\}} \\
 &= -\Phi \text{Adj}' (R'_{\alpha\alpha})_{li} \sum_{m,n} (\check{\sigma}_\beta)_{mj} (\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{kn} \text{Adj}' (R'_{\beta\beta})_{mn} \\
 &= -\Phi \text{Adj}' (\check{\sigma}_\alpha \check{\sigma}_\alpha \bar{\mathbb{1}})_{li} \sum_{m,n} (\check{\sigma}_\beta)_{mj} (\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{kn} \text{Adj}' (\check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})_{mn} \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Die Rechnung für den letzten Umformungsschritt, bei dem die modifizierten Streumatrizen durch die ursprünglichen ersetzt wurden, wird in Anhang C.2 gezeigt. Die

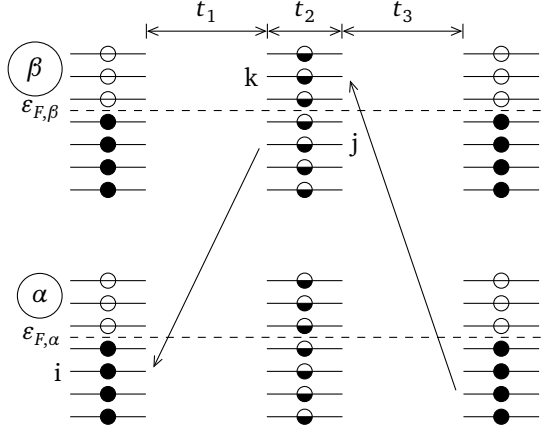


Abbildung 3.4.:  $\hat{\mathcal{R}} = a_{\alpha,i}^\dagger \check{\mathcal{U}} a_{\beta,k} a_{\beta,j}^\dagger \check{\mathcal{U}} a_{\alpha,i}$ , Transport gemäß Operatoren

Adjunkten können erneut durch Inverse ausgedrückt werden.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{R}} \rangle = & \Phi \det(\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\alpha \check{\sigma}_\alpha \bar{\mathbb{1}}) \left( (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\alpha \check{\sigma}_\alpha \bar{\mathbb{1}})^{-1} f \right)_{il} \\ & \cdot \det(\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}}) \left( -\check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f \check{\sigma}_\beta \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}})^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right)_{kj} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Die beiden Fälle lassen sich in einem Ausdruck zusammenfassen. Außerdem kann das Produkt der Determinanten wieder als Determinante über alle Kanäle geschrieben werden.

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathcal{R}} \rangle = & \Phi \det(\mathbb{1} - f + f R) \cdot \left( (\mathbb{1} - f + f R_\alpha)^{-1} f \right)_{il} \\ & \cdot \left( \mathbb{1} - \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right)_{kj} \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\text{mit } R \equiv \check{\Sigma} \check{\Sigma} \bar{\mathbb{1}} \quad \text{und} \quad \Phi = e^{-i(\varepsilon_i t_0 + \varepsilon_j t_2 + \varepsilon_l t_4)} \quad (3.43)$$

Auch dieser Transportprozess lässt sich schematisch darstellen, wie in Abbildung 3.4 gezeigt. Wie in den Darstellungen zuvor sind die Unterschiede zur Streuung des gefüllten Fermisees gezeigt. Die mittlere Spalte zeigt das Zeitintervall zwischen den beiden Streuungen. Hier können alle Zustände, oberhalb oder unterhalb der Fermikante, besetzt oder unbesetzt sein, was durch die halbgefüllten Kreise veranschaulicht wird. Lediglich die Anzahl der besetzten Zustände,  $N_\alpha - 1$  bzw.  $N_\beta + 1$ , ist festgelegt.

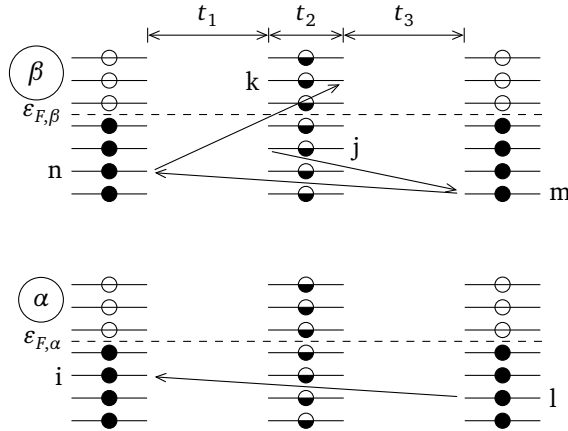


Abbildung 3.5.:  $\hat{\mathcal{R}} = a_{\alpha,i}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_{\beta,k} a_{\beta,j}^\dagger \tilde{\mathcal{U}}_{\alpha,i}$ , effektiver Transport

Zunächst hüpft ein Loch von Kanal  $\alpha$  in Kanal  $\beta$ , anschließend hüpft es zurück. Wie Gl. (3.42) zeigt, kann dieser Transport auf einen effektiven Prozess zurückgeführt werden, bei dem die Teilchen ihren jeweiligen Kanal nicht verlassen. Der effektive Prozess kann außerdem mit Hilfe der unmodifizierten Streumatrix  $\Sigma$  und damit durch die Matrix  $R$  beschrieben werden, bei der die Teilchenzahl nicht geändert wird.

Der effektive Prozess ist in Abbildung 3.5 dargestellt und spiegelt die Änderung der Teilchenzahl in den beiden Kanälen wider. In Kanal  $\alpha$  wird ein einzelnes Loch direkt vom Zustand  $i$  in den Zustand  $l$  transportiert. In diesem Kanal befindet sich während der gesamten Streuung ein Elektron weniger als im Grundzustand.

In Kanal  $\beta$  befinden sich für die Zeit des eingeschalteten Streupotentials keine zusätzlichen Elektronen oder Löcher. Dies zeigt sich darin, dass Elektron-Loch-Paare gestreut werden, die Gesamtzahl der Teilchen also konstant bleibt. Dieser Paar-Transport ist vergleichbar mit dem Prozess in Abschnitt 3.1.2, bei dem ein zusätzliches Elektron-Loch-Paar an der Streuung innerhalb des Fermisees beteiligt war. Nur für die Dauer  $t_2$ , in der das Potential während des Transports ausgeschaltet ist, befindet sich ein zusätzliches Elektron in Kanal  $\beta$ .

Die Streuung in Kanal  $\beta$  kann auch folgendermaßen interpretiert werden: Ein Elektron hüpft von Zustand  $j$  in einen Zwischenzustand  $m$ , der unterhalb der Fermikante liegen

muss. Von da hüpft es rückwärts in der Zeit in den Zustand  $n$ , ebenfalls unterhalb der Fermikante. Dies entspricht dem Transport eines Loches vorwärts in der Zeit. Zum Schluss hüpft das Elektron in Zustand  $k$ .

Die dargestellten Prozesse bilden Platzhalter für die explizite Erzeugung bzw. Vernichtung von Elektronen durch die Operatoren. Das Loch, das den Zustand  $k$  verlässt, ist der Platzhalter für die explizite Vernichtung des Elektrons in diesem Zustand. Damit muss der Zustand zuvor besetzt gewesen sein und an der Streuung teilnehmen, was in dem effektiven Prozess berücksichtigt wird. Wenn ein Loch in den Zustand  $j$  hüpft, dann reserviert es den Platz für das dort explizit erzeugte Elektron. Dieses muss fortan an der Streuung teilnehmen, der Zustand muss besetzt sein, was ebenfalls in dem effektiven Prozess berücksichtigt wird. Da in den expliziten Tunnelprozessen Elektronen transportiert werden, müssen die Zwischenzustände  $m$  und  $n$  unterhalb der Fermikante liegen.

An dieser Stelle sei eine Anmerkung zu dem  $(\mathbb{1}-)$  im dritten Faktor gemacht. Der hier betrachtete Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  beschreibt den Transport von Elektronen, im Kanal  $\beta$  muss also ein Loch als Platzhalter explizit betrachtet werden. Der zweite Summand in dem  $\beta$ -Faktor beschreibt jedoch Elektronenstreuung. Die Füllung des Leitungsbandes muss daher invertiert werden, was durch das  $(\mathbb{1}-)$  geschieht.

Für ein leeres Band kann das Elektron aus dem Quantenpunkt ungehindert in Kanal  $\beta$  tunneln. In diesem Fall gilt

$$f = 0 \quad \Rightarrow \quad \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta = 0 \quad (3.44)$$

Der dritte Faktor ist also  $\mathbb{1}$ .

Im Fall eines vollständig gefüllten Bandes ( $f = 1$ ) kann das Elektron gar nicht in Kanal  $\beta$  tunneln. Der betrachtete Ausdruck muss daher Null sein.

$$\begin{aligned} f = 1 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} &= \bar{\mathbb{1}}^{-1} \check{\sigma}_\beta^{-1} \check{\sigma}_\beta^{-1} \\ &\Rightarrow \quad \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta = \mathbb{1} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Der dritte Faktor ist also in der Tat Null.

Im allgemeinen Fall beschreibt er also die Korrekturen an der Korrelationsfunktion durch den Transport in den Kanal  $\beta$  hinein und wieder heraus.

### 3.2.3. Übergang in die Zeitdarstellung

In diesem Abschnitt sollen die einzelnen Faktoren in Gl. (3.42) in die Zeitdarstellung gebracht werden, um mit Hilfe der Lösung des Riemann-Hilbert-Problems die Korrelationsfunktion auszudrücken. Hierzu muss die Summation über die Impulse der transportierten Elektronen erfolgen. Mit Hilfe der Dispersionsrelation erhält man Integrale über die zugehörigen Energien, die zur Fouriertransformation in die Zeitdarstellung verwendet werden.

Die ersten beiden Faktoren in Gl. (3.42),  $\det(\mathbb{1} - f + fR) \cdot \left( (\mathbb{1} - f + fR_\alpha)^{-1} f \right)_{il}$ , sind dabei von der gleichen Form wie in den Abschnitten zuvor. In dem letzten Faktor,  $\left( \mathbb{1} - \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right)_{kj}$ , treten die Streumatrizen allerdings in geänderter Reihenfolge auf, sodass der zeitliche Ablauf verändert ist. Zuerst wirkt der Operator  $\check{\sigma}_\beta$ . Die Zeitargumente müssen daher auf diesen Operator bezogen und die Argumente der anderen Operatoren entsprechend verschoben werden:

$$\begin{aligned} & \left( \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right) (\hat{t}, \hat{t}') \\ &= \check{\sigma}(\hat{t} + t_1 + t_2) \left( (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \right) (\hat{t} + \tau_2, \hat{t}' + \tau_2) \check{\sigma}(\hat{t}') \end{aligned} \quad (3.46)$$

Die Form des Streupotentials für den Operator  $R$  wurde in Abbildung 3.3 dargestellt. Für diesen Operator soll nun das Riemann-Hilbert-Problem gelöst werden.  $R$  ist eine diagonale, stückweise konstante  $2 \times 2$ -Matrix und für  $|t| \rightarrow \infty$  ist  $R = \mathbb{1}$ . Diese Matrix kann in zwei Faktoren zerlegt werden, wobei jeder Faktor einen der beiden Streuprozesse beschreibt. Der jeweils andere Faktor ist für diese Zeiten  $\mathbb{1}$ . Die einzelnen Faktoren haben damit die gleiche Form wie in Kapitel 2.3. Da  $R$  und somit auch die beiden Faktoren diagonal sind, ist die Lösung des RH-Problems das Produkt der Lösungen für die beiden Faktoren, Gl. (2.36).

$$Y(t) = \left( \frac{t - t_0}{t - (t_0 + t_1)} \right)^{-\frac{\delta}{\pi} \lambda} \left( \frac{t - (t_0 + t_1 + t_2)}{t - (t_0 + t_1 + t_2 + t_3)} \right)^{-\frac{\delta}{\pi} \lambda} \quad (3.47)$$

$$\equiv \left( \frac{t - \tau_0}{t - \tau_1} \right)^{-\frac{\delta}{\pi} \lambda} \left( \frac{t - \tau_2}{t - \tau_3} \right)^{-\frac{\delta}{\pi} \lambda} \quad (3.48)$$

Das  $\delta$  in den Exponenten ist eine diagonale  $2 \times 2$ -Matrix mit den Streuphasen für die jeweiligen Kanäle als Diagonalelemente. Diese Lösung wird im Folgenden zur Umformung der einzelnen Faktoren von Gl. (3.42) verwendet.

*Erster Faktor*

Zur Auswertung der Determinante wird diese wie in den Abschnitten zuvor logarithmiert. Zunächst wird der Teil linear in  $t$  betrachtet. Für den Rest kann Gl. (2.29) verwendet werden. Ab hier muss die Phase  $\phi_0$  wieder berücksichtigt werden. Die Ableitung von  $R$  nach  $\lambda$  bestimmt die Grenzen für die Zeitintegration.

$$R^{-1}(t) \frac{dR(t)}{d\lambda} = \begin{cases} -2i\check{\delta} & \tau_0 < t < \tau_1 \\ -2i\check{\delta} & \tau_2 < t < \tau_3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.49)$$

Der Quantenpunkt ist zweimal besetzt, beides trägt zu der Phase  $\phi_0 = -iE_0(t_1 + t_3)$  bei. Der Term  $\text{Tr}(f \ln(R))$  kann wie im Abschnitt zuvor ausgewertet werden, auch hier gibt es zwei Beiträge, jeweils einen für jeden Streuprozess. Außerdem sind jetzt mehrere Kanäle beteiligt. Daher muss die Spur über die Diagonalmatrix  $\check{\delta}$  gebildet werden.

$$\ln(\chi^{(1)}) = -i\check{\omega}_{th}t_1 - i\check{\omega}_{th}t_3 \quad (3.50)$$

$$\text{mit } \check{\omega}_{th} = E_0 + \sum_{\varepsilon < \varepsilon_F} \sum_{\mu=\alpha,\beta} \frac{\check{\delta}_{\mu}(\varepsilon)}{\pi v_{\mu}(\varepsilon)} \quad \text{und} \quad \check{\omega}_{th} = E_0 + \sum_{\varepsilon < \varepsilon_F} \sum_{\mu=\alpha,\beta} \frac{\check{\delta}_{\mu}(\varepsilon)}{\pi v_{\mu}(\varepsilon)} \quad (3.51)$$

Für den restlichen Teil der Determinante erhält man den folgenden Ausdruck. Beim Einsetzen der Integrationsgrenzen wird, wie in Anhang A.3 beschrieben, die Konvention verwendet, dass  $t$  bei dem Einschalten des Potentials um  $+i\xi^{-1}$ , bei dem Abschalten um  $-i\xi^{-1}$  verschoben wird. Relevant ist dabei das Schalten des Potentials, das durch den jeweiligen Faktor beschrieben wird.

$$\begin{aligned} & \ln(e^{\phi_0} \det(\mathbb{1} - f + fR)) - \ln(\chi^{(1)}) \\ &= \int_0^1 d\lambda \text{tr} \left( \frac{\check{\delta}}{\pi} \int_{\tau_0}^{\tau_1} dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} + \frac{\check{\delta}}{\pi} \int_{\tau_2}^{\tau_3} dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^1 d\lambda \lambda \operatorname{tr} \left( \frac{\check{\delta}^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{t - \tau_0}{t - \tau_1} \right) \Big|_{\tau_0 + i\xi^{-1}}^{\tau_1 - i\xi^{-1}} + \frac{\check{\delta}\check{\delta}}{\pi^2} \ln \left( \frac{t - \tau_2}{t - \tau_3} \right) \Big|_{\tau_2}^{\tau_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\check{\delta}\check{\delta}}{\pi^2} \ln \left( \frac{t - \tau_0}{t - \tau_1} \right) \Big|_{\tau_2}^{\tau_3} + \frac{\check{\delta}^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{t - \tau_2}{t - \tau_3} \right) \Big|_{\tau_2 + i\xi^{-1}}^{\tau_3 - i\xi^{-1}} \right) \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( \frac{\check{\delta}^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{t_1}{-i\xi^{-1}} \cdot \frac{-t_1}{i\xi^{-1}} \right) + \frac{\check{\delta}^2}{\pi^2} \ln \left( \frac{t_3}{-i\xi^{-1}} \cdot \frac{-t_3}{i\xi^{-1}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + 2 \frac{\check{\delta}\check{\delta}}{\pi^2} \ln \left( \frac{t_2}{t_2 + t_3} \cdot \frac{t_1 + t_2 + t_3}{t_1 + t_2} \right) \right) \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Weil die  $\delta$ 's diagonal sind, kann die Spur einfach ausgeführt werden. Durch Exponenzieren erhält man schließlich den Ausdruck für die Determinante.

$$(\text{I}) := e^{\phi_0} \det(\cdot) = \chi^{(1)} \prod_{\mu=\alpha,\beta} (i\xi t_1)^{-\frac{\check{\delta}_\mu^2}{\pi^2}} (i\xi t_3)^{-\frac{\check{\delta}_\mu^2}{\pi^2}} \left( \frac{t_2(t_1 + t_2 + t_3)}{(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)} \right)^{-\frac{\check{\delta}_\mu \check{\delta}_\mu}{\pi^2}} \quad (3.54)$$

### Zweiter Faktor

Für die weitere Behandlung des zweiten Faktors von Gl. (3.42) wird zunächst die Fouriertransformation ausgeführt. Außerdem wird die Inverse durch die Lösung des RH-Problems ausgedrückt (siehe Gl. (2.23)).

$$\begin{aligned}
 (\text{II}) &:= \int d\varepsilon_i d\varepsilon_l \frac{v_\alpha^2}{N_\alpha} e^{-i\varepsilon_i t_0 - i\varepsilon_l t_4} \left( (\mathbb{1} - f + f R_\alpha)^{-1} f \right) (\varepsilon_i, \varepsilon_l) \\
 &= \frac{2\pi v_\alpha}{N_\alpha} \left( (\mathbb{1} - f + f R_\alpha)^{-1} f \right) (t_0, -t_4) \\
 &= \frac{2\pi}{\xi_\alpha} \left( Y_+ f Y_-^{-1} \right) (\tau_0, \tau_3) \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Beziehung zwischen Teilchenzahl und Bandbreite genutzt. Eine Parametrisierung der Lösung durch  $\lambda$  ist in diesem Fall nicht nötig. Beim Einsetzen der Argumente gilt die gleiche Konvention für den Cutoff wie bei der Determinante. Die Parameter gehören alle zu dem Kanal  $\alpha$ .

Für eine bessere Lesbarkeit wird der entsprechende Index daher weggelassen.

$$\begin{aligned}
 \text{(II)} &= \frac{2\pi}{\xi} \left( \frac{i\xi^{-1}}{-t_1} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{-t_1 - t_2}{-t_1 - t_2 - t_3} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \\
 &\quad \cdot \frac{i/2\pi}{-t_1 - t_2 - t_3 + i\xi_{<}^{-1}} \left( \frac{t_1 + t_2 + t_3}{t_2 + t_3} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{t_3}{-i\xi_{<}^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \quad (3.56)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (i\xi t_1)^{\frac{\delta}{\pi}} (i\xi t_3)^{\frac{\delta}{\pi}} \frac{1}{i\xi(t_1 + t_2 + t_3) + \xi/\xi_{<}} \\
 &\quad \cdot \left( \frac{t_1 + t_2 + t_3}{t_1 + t_2} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{t_1 + t_2 + t_3}{t_2 + t_3} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \quad (3.57)
 \end{aligned}$$

### Dritter Faktor

Auch für diesen Faktor muss die Fouriertransformation durchgeführt werden. Außerdem muss hier die zuvor beschriebene geänderte zeitliche Abfolge berücksichtigt werden, siehe Gl. (3.46). Hierfür wird die Zeitdarstellung der  $\check{\sigma}$  aus Gl. (3.33) explizit eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} &:= \int d\varepsilon_j d\varepsilon_k \frac{v_\beta^2}{N_\beta} e^{-i\varepsilon_j t_2} \left( \mathbb{1} - \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right) (\varepsilon_k, \varepsilon_j) \\
 &= \delta_{t_2} - \frac{2\pi}{\xi_\beta} \left( \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + f R_\beta)^{-1} f \check{\sigma}_\beta \right) (0, -t_2) \\
 &= \delta_{t_2} - \frac{2\pi}{\xi_\beta} \left( \int d^3 \bar{t} \check{\sigma}_\beta(0, \bar{t}_1) \bar{\mathbb{1}}(\bar{t}_1, \bar{t}_2) (Y_+ f Y_-^{-1})(\bar{t}_2, \bar{t}_3) \check{\sigma}_\beta(\bar{t}_3, -t_2) \right) \\
 &= \delta_{t_2} - \frac{2\pi}{\xi_\beta} \left( \int d^3 \bar{t} \check{\sigma}_\beta(\bar{t}_1) \delta(t_1 + t_2 - \bar{t}_1) \delta(t_0 + \bar{t}_1 - \bar{t}_2) \right. \\
 &\quad \left. \cdot (Y_+ f Y_-^{-1})(\bar{t}_2, \bar{t}_3) \check{\sigma}_\beta(-t_2) \delta(t_3 + t_4 + \bar{t}_3 + t_2) \right) \\
 &= \delta_{t_2} - \frac{2\pi}{\xi_\beta} \left( \check{\sigma}_\beta(t_1 + t_2) (Y_+ f Y_-^{-1})(\tau_2, \tau_1) \check{\sigma}_\beta(-t_2) \right) \quad (3.58)
 \end{aligned}$$

Diese zeitliche Abfolge entspricht der Abbildung 3.5. Der Prozess beginnt um  $t_2$  vor der Aktivierung des Potentials für  $\check{\Sigma}$  und endet um  $t_2$  nach Abschalten des Potentials für  $\check{\Sigma}$ . Beide Streumatrizen haben zu diesen Zeitpunkten den Wert  $\mathbb{1}$ .



Der Term  $\delta_{t_2}$  entsteht aus der Fouriertransformation des Identitätsoperators. Er wird in Anhang A.4 bestimmt und hat den Wert 1 für  $t_2 = 0$ , sonst ist er Null. Da die Funktionen und Parameter alle zu dem Kanal  $\beta$  gehören, wird der entsprechende Index für eine bessere Lesbarkeit wieder weggelassen.

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} &= \delta_{t_2} - \frac{2\pi}{\xi} \left( \frac{t_1 + t_2}{t_2} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{i\xi^{-1}}{-t_3} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \\
 &\quad \cdot \frac{i/2\pi}{t_2 + i\xi_{<}^{-1}} \left( \frac{t_1}{-i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{-t_2}{-t_2 - t_3} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \\
 &= \delta_{t_2} + (i\xi t_1)^{\frac{\delta}{\pi}} (i\xi t_3)^{\frac{\delta}{\pi}} \frac{1}{i\xi t_2 - \xi/\xi_{<}} \left( \frac{t_2}{t_1 + t_2} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{t_2}{t_2 + t_3} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \quad (3.59)
 \end{aligned}$$

Als nächstes sollen diese Ergebnisse in einigen Grenzfällen getestet werden. Im Fall  $t_2 \rightarrow 0$  und  $\check{\delta} = \delta$  sollte das Ergebnis aus Abschnitt 2.3 bzw. 3.1.1 erhalten werden, da es in diesem Grenzfall nur noch ein Streupotential für die Dauer  $t_1 + t_3$  gibt. Das Elektron tunnelt zwar in den Kanal  $\beta$  hinein, tunnelt aber sofort wieder heraus. Die Elektronenzahl in diesem Kanal ist also konstant, lediglich der Füllungsgrad wird gemessen.

In diesem Limes ist  $\tau_1 = \tau_2$ . Daher müssen beim Einsetzen der Zeitparameter in Gl. (3.52) und Gl. (3.58) weitere Terme regularisiert werden. Dies führt dazu, dass die einzelnen Faktoren  $t_2$  in (I) und (III) durch  $-i\xi^{-1}$  ersetzt werden.

$$\text{(I)} \rightarrow e^{-i\omega_{th}(t_1+t_3)} \prod_{\mu=\alpha,\beta} (i\xi(t_1+t_3))^{-\frac{\delta_\mu^2}{\pi^2}} \quad (3.60)$$

$$\text{(II)} \rightarrow (i\xi(t_1+t_3))^{2\frac{\delta_\alpha}{\pi}-1} \quad (3.61)$$

$$\text{(III)} \rightarrow 1 - \frac{\xi_{<}}{\xi} \quad (3.62)$$

Bei der Umformung des dritten Faktors wurde  $\delta_{t_2}$  aus Gl. (A.25) eingesetzt. Insgesamt erhält man für die Korrelationsfunktion

$$\langle e^{\phi_0 \hat{\mathcal{R}}} \rangle = \frac{\xi_{>}}{\xi} e^{-i\omega_{th}(t_1+t_3)} (i\xi(t_1+t_3))^{-\left(\frac{\delta_\alpha}{\pi}-1\right)^2 - \frac{\delta_\beta^2}{\pi^2}}. \quad (3.63)$$

Dies stimmt mit den Ergebnissen aus den vorangegangenen Abschnitten überein.

Für den zweiten Grenzfall,  $t_2 \rightarrow \infty$ , sollte das Ergebnis in ein Produkt von zwei unabhängigen Streuvorgängen übergehen.

$$(I) \rightarrow e^{-i\check{\omega}_{th}t_1 - i\check{\omega}_{th}t_3} \prod_{\mu=\alpha,\beta} (i\xi t_1)^{-\frac{\delta_\mu^2}{\pi^2}} (i\xi t_3)^{-\frac{\delta_\mu^2}{\pi^2}} \quad (3.64)$$

$$(II) \rightarrow (i\xi t_1)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} (i\xi t_3)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} \frac{1}{i\xi t_2} \quad (3.65)$$

$$(III) \rightarrow (i\xi t_1)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} (i\xi t_3)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} \frac{1}{i\xi t_2} \quad (3.66)$$

Zusammengenommen sieht die Korrelationsfunktion wie folgt aus:

$$\langle e^{\phi_0 \hat{\mathcal{R}}} \rangle = \left( \frac{1}{i\xi t_2} \right)^2 e^{-i\check{\omega}_{th}t_1} e^{-i\check{\omega}_{th}t_3} \prod_{\mu=\alpha,\beta} (i\xi t_1)^{\frac{\delta_\mu}{\pi} (1 - \frac{\delta_\mu}{\pi})} (i\xi t_3)^{\frac{\delta_\mu}{\pi} (1 - \frac{\delta_\mu}{\pi})} \quad (3.67)$$

Man erhält also tatsächlich ein Produkt von zwei unabhängigen Streuvorgängen, jedoch mit anderen Exponenten als in den vorangegangenen Abschnitten. Allerdings handelt es sich auch nicht um abgeschlossene Streuprozesse wie bei den Betrachtungen zuvor. Der Zustand vor der Streuung ist ein anderer als nach der Streuung, weil sich das transportierte Elektron im jeweils anderen Kanal befindet. Dadurch hängen beide Streuungen miteinander zusammen, weshalb das  $t_2$  nicht vollständig herausfällt.

In der weiteren Betrachtung soll die vereinfachende Annahme gemacht werden, dass  $\check{\delta} = \delta$  ist. Da es sich um eine Streuung an demselben Quantenpunkt handelt, ist es plausibel, diese Vereinfachung durchzuführen.

$$\begin{aligned} \langle e^{\phi_0 \hat{\mathcal{R}}} \rangle &= \chi^{(1)} \prod_{\mu=\alpha,\beta} \left( (i\xi t_1)(i\xi t_3) \frac{t_2(t_1+t_2+t_3)}{(t_1+t_2)(t_2+t_3)} \right)^{-\frac{\delta_\mu^2}{\pi^2}} \\ &\quad \cdot \left( (i\xi t_1)(i\xi t_3) \frac{(t_1+t_2+t_3)^2}{(t_1+t_2)(t_2+t_3)} \right)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} [i\xi(t_1+t_2+t_3)]^{-1} \\ &\quad \cdot \left( (i\xi t_1)(i\xi t_3) \frac{t_2^2}{(t_1+t_2)(t_2+t_3)} \right)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} (i\xi t_2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\langle e^{\phi_0 \hat{\mathcal{R}}} \rangle = e^{-i\omega_{th}(t_1+t_3)} \left( \frac{t_1 t_3}{(t_1+t_2)(t_2+t_3)} \right)^x \cdot (i\xi t_2)^{x-y-1} (i\xi(t_1+t_2+t_3))^{x+y-1} \quad (3.68)$$

$$\text{mit } x := \frac{\delta_\alpha}{\pi} \left( 1 - \frac{\delta_\alpha}{\pi} \right) + \frac{\delta_\beta}{\pi} \left( 1 - \frac{\delta_\beta}{\pi} \right) \quad \text{und} \quad y := \frac{\delta_\alpha}{\pi} - \frac{\delta_\beta}{\pi} \quad (3.69)$$

Um einen Strom aus diesem Ausdruck zu berechnen, muss über die  $t_i$  integriert werden. Diese Integrale werden für konkrete Fälle im nächsten Abschnitt ausgewertet.

Zum Schluss soll der Fall betrachtet werden, dass es weitere Kanäle gibt, die nicht an dem Transport beteiligt sind, also Kanäle wie in Abschnitt 2.3. Solche Kanäle erfahren dasselbe Streupotential, aber keine Teilchenzahländerung. Dieser Aspekt wird gerade von Faktor (I) beschrieben. Die weiteren Kanäle tragen daher so bei, dass das Produkt über  $\mu$  auch diese Kanäle beinhaltet. Die Form von Gl. (3.68) bleibt erhalten, lediglich im Exponenten  $x$  gibt es für jeden zusätzlichen Kanal einen Term  $-\delta_\mu^2/\pi^2$ . Analog dazu wird in  $\omega_{th}$  auch über die zusätzlichen Kanäle summiert.

### 3. Korrelationsfunktionen für ausgewählte Transportprozesse

---

# KAPITEL 4

---

## Der Strom durch den Quantenpunkt

---

In diesem Abschnitt sollen konkrete Ausdrücke für den Strom durch einen Quantenpunkt mit Hilfe der Ergebnisse aus den Abschnitten zuvor erarbeitet werden.

Der Stromoperator ist gegeben durch

$$\mathcal{J} = \sum_{k,\alpha} \left( \frac{i}{\sqrt{N_\alpha}} W_\alpha b^\dagger a_{\alpha,k} + \text{h. c.} \right). \quad (4.1)$$

Gemäß Kubo-Formel (siehe beispielsweise Bruus/Flensberg [5]) erhält man die Leitfähigkeit in linear response aus der retardierten Strom-Strom-Korrelationsfunktion  $C(t - t')$ :

$$C(t - t') = -i\theta(t - t') \langle [\mathcal{J}(t), \mathcal{J}(t')] \rangle \quad (4.2)$$

Der Erwartungswert wird für den Grundzustand  $|\tilde{0}\rangle$  des vollen Hamiltonoperators  $\mathcal{H} + \mathcal{H}_x$  berechnet. In der vorliegenden Arbeit wird die Hüpfamplitude  $W$  als klein angenommen. Dadurch gibt es zu jedem Zeitpunkt eine definierte Zahl von Elektronen in jeder Zuleitung und auf dem Quantenpunkt. Mit Hilfe dieses kleinen Parameters kann

$|\tilde{0}\rangle$  in Störungsrechnung aus  $|0\rangle$  gewonnen werden:

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} (G^+ \mathcal{H}_X)^l |0\rangle \quad (4.3)$$

$$G^+ = \frac{1}{\mathcal{E}_0 - \mathcal{H} + i\eta} \quad (4.4)$$

$\mathcal{E}_0$  ist die Energie von  $|0\rangle$  bzgl.  $\mathcal{H}$ . Für den Parameter  $\eta$  muss später der Übergang  $\eta \rightarrow 0$  durchgeführt werden. Er kann zur Umformung von  $G^+$  in eine Integraldarstellung benutzt werden.

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \left( (-i) \int_0^{\infty} d\tau e^{i(\mathcal{E}_0 - \mathcal{H})\tau - \eta\tau} \mathcal{H}_X \right)^l |0\rangle =: \sum_{l=0}^{\infty} |l\rangle \quad (4.5)$$

In der Form (4.5) sieht man, was die Störungsrechnung bewirkt: Es werden  $l$  Hüpfprozesse ausgehend von  $|0\rangle$  durchgeführt, die irgendeinen zeitlichen Abstand voneinander haben.  $|\tilde{0}\rangle$  ist die Superposition dieser Prozesse für alle  $l$ .

Die Korrelationsfunktion  $C$  kann nun für verschiedene Ordnungen in  $W$  ausgewertet werden. Hierbei tragen nur gerade Ordnungen bei. Für ungerade Ordnungen ist die Teilchenzahl in den einzelnen Zuleitungen nicht erhalten und der Erwartungswert verschwindet.  $C$  hängt nur von der Differenz der Zeiten ab,  $|\tilde{0}\rangle$  ist zeitunabhängig. Daher wird  $t' = 0$  gewählt.

## 4.1. Leitfähigkeit in niedrigster Ordnung

In niedrigster Ordnung erhält man für  $C$  den Prozess aus Abschnitt 3.1:

$$C^{(0)}(t_f) = -i \langle 0 | [\mathcal{J}(t_f), \mathcal{J}(0)] | 0 \rangle = -i \langle 0 | \mathcal{J}(t_f) \mathcal{J}(0) | 0 \rangle + \text{c. c.} \quad (4.6)$$

Von den beiden Stromoperatoren  $\mathcal{J}$  trägt jeweils nur derselbe Kanal bei. Der Kanalindex kann daher entfallen. Wie zuvor können die Erzeuger und Vernichter für den Quantenzustand  $b^\dagger$  und  $b$  weggelassen werden. Die Auswertung des Erwartungswertes soll

nun noch einmal kurz zusammengefasst werden. Der zu berechnende Erwartungswert ist (Gl. (3.2))

$$\chi(t_f) = \langle 0 | \mathcal{J}(t_f) \mathcal{J}(0) | 0 \rangle \rightarrow e^{-iE_0 t_f} \sum_{i,j} \langle 0 | \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_j^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_i | 0 \rangle. \quad (4.7)$$

Der zugehörige Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  ist (Gl. (3.3))

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_j^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_i = e^{i\epsilon_j t_f} a_j^\dagger \mathcal{U} a_i, \quad \mathcal{R} = \mathcal{U}. \quad (4.8)$$

$\mathcal{R}$  beschreibt dasselbe Streupotential, aber keine Teilchenzahländerung. Umgeschrieben in Einteilchendarstellung mit Darstellungsmatrix  $R$  muss dann der folgende Ausdruck ausgewertet werden (Gl. (3.7)):

$$\begin{aligned} \chi(t_f) &\sim \langle 0 | e^{\phi_0} \hat{\mathcal{R}} | 0 \rangle \\ &\sim e^{\phi_0} \sum_{i,j} e^{i\epsilon_j t_f} \det(\mathbb{1} - f + fR) \left( (\mathbb{1} - f + fR)^{-1} f \right)_{ij} \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\text{mit } R(t) = S(t) = e^{-2i\delta} \quad \text{und} \quad \phi_0 = -iE_0 t_f \quad (4.10)$$

Der obige Ausdruck wird in Zeitdarstellung ausgewertet.  $S(t)$  ist die Streumatrix für die Streuung am Coulombpotential des Quantenpunktes. Der Logarithmus der Determinante kann in einen diagonalen und einen nicht diagonalen Beitrag aufgeteilt werden. Der letztere lässt sich mit Hilfe der Lösung des RH-Problems für  $R$ , welches mit  $\lambda$  parametrisiert wird, ausdrücken (Gl. (2.12), (2.17), (2.29), (2.36), (2.39), (2.44), (2.45)).

$$\ln(e^{\phi_0} \det(\cdot)) - \ln(\chi^{(1)}) \sim \frac{i}{2\pi} \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{tr} \left( \frac{d \ln(Y_+)}{dt} \frac{d \ln(R)}{d\lambda} \right) \quad (4.11)$$

$$Y(z) = \left( \frac{z}{z - t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \quad (4.12)$$

$$\Rightarrow e^{\phi_0} \det(\cdot) \sim e^{-i\omega_{th} t_f} (i\xi t_f)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad (4.13)$$

Durch den Übergang in die Zeitdarstellung kann auch der zusätzliche Faktor ausgewertet werden (Gl. (3.8), (3.9)).

$$\sum_{i,j} e^{i\epsilon_j t_f} \left( (\mathbb{1} - f + fR)^{-1} f \right)_{ij} \sim (Y_+ f Y_-^{-1})(0, t_f) \sim (i\xi t_f)^{2\frac{\delta}{\pi}-1} \quad (4.14)$$

Insgesamt erhält man für die Korrelationsfunktion

$$\chi(t_f) = \langle 0 | \mathcal{J}(t_f) \mathcal{J}(0) | 0 \rangle = |W|^2 e^{-i\omega_{th} t_f} (i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2}. \quad (4.15)$$

Man kann den komplex konjugierten Ausdruck in Gl. (4.6) ebenfalls direkt ausrechnen. Hierfür benötigt man die Wirkung des adjungierten Zeitentwicklungsoperators  $\mathcal{U}^\dagger(t_f)$ . Dieser Operator tritt auch in den höheren Ordnungen der Leitfähigkeit auf. Seine Wirkung soll daher hier kurz gezeigt werden.

$$\mathcal{U}^\dagger(t_f) = (\mathcal{U}_0(t_f) \mathcal{U})^\dagger = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \quad (4.16)$$

$$\langle | a_j \mathcal{U}^\dagger a_i^\dagger | \rangle = \left( \langle | a_i \mathcal{U} a_j^\dagger | \rangle \right)^* = (\sigma_{ij})^* = (\sigma^\dagger)_{ji} \quad (4.17)$$

$$\sigma^\dagger(t, t') = S^\dagger(t) \delta(t - t') \quad (4.18)$$

Die abgespaltene, freie Zeitentwicklung steht in diesem Fall rechts von der Streumatrix. Aus diesem Grund wird eine Verallgemeinerung des Operators  $\mathcal{O}$  (Gl. (3.29)) und der (Mehrkanal-)Matrix  $\bar{\Sigma}$  (Gl. (3.33)) für inverse Zeitentwicklungen eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(\beta, j, \alpha, i; t_1, -t_2) &= \mathcal{U}_0(t_1) a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}^\dagger(t_2) a_{\alpha,i} \\ &= e^{-i\epsilon_j t_1} a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}_0(t_1) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}_0^\dagger(t_2) a_{\alpha,i} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für die zu  $\mathcal{U}_0(t_1) \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U}_0^\dagger(t_2)$  gehörende Zeitdarstellung im Einteilchensektor gilt:

$$\left( \bar{\Sigma}^\dagger(t_1 | -t_2) \right) (t, t') = \left( \Sigma^\dagger \right) (t' + t_2) \delta(t_1 - t_2 + t - t') \quad (4.20)$$

$$\text{mit } \left( \Sigma^\dagger \right) (t) = \begin{cases} S^\dagger & \text{für } 0 < t < t_2 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.21)$$



Mit diesen Definitionen kann nun der zweite Term in Gl. (4.6) ausgewertet werden. (Da nur ein Kanal betrachtet wird, ist  $\Sigma = \sigma$ .)

$$\chi^*(t_f) = \langle 0 | \mathcal{J}(0) \mathcal{J}(t_f) | 0 \rangle \rightarrow e^{iE_0 t_f} \sum_{i,j} \langle 0 | a_i^\dagger \mathcal{U}^\dagger(t_f) a_j \mathcal{U}_0(t_f) | 0 \rangle \quad (4.22)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = a_i^\dagger \mathcal{U}^\dagger(t_f) a_j \mathcal{U}_0(t_f) = e^{-ie_j t_f} a_i^\dagger \mathcal{U}^\dagger a_j \quad (4.23)$$

$$\mathcal{R} = \mathcal{U}^\dagger(t_f) \mathcal{U}_0(t_f) = \mathcal{U}^\dagger \quad (4.24)$$

$$\chi^*(t_f) \sim e^{\phi_0} \sum_{i,j} e^{-ie_j t_f} \det(\mathbb{1} - f + fR) \left( (\mathbb{1} - f + fR)^{-1} \right)_{ji} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } R(t, t') &= \left( \bar{\sigma}^\dagger(0 | -t_f) \bar{\mathbb{1}}(t_f) \right) (t, t') \\ &= \int d\hat{t} \sigma^\dagger(\hat{t} + t_f) \delta(-t_f + t - \hat{t}) \delta(t_f + \hat{t} - t') \\ &= \sigma^\dagger(t) \delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\text{und } \sigma^\dagger(t) = S^\dagger(t) = e^{2i\delta} \quad \text{für } 0 < t < t_f \quad (4.27)$$

$$\text{und } \phi_0 = iE_0 t_f \quad (4.28)$$

Das RH-Problem ist von der gleichen Form wie zuvor: Ein konstantes Streupotential, das zwischen  $t = 0$  und  $t = t_f$  aktiv ist. Die Streuphase hat allerdings das entgegengesetzte Vorzeichen. Die Lösung des RH-Problems ist demnach gegeben durch:

$$Y(z) = \left( \frac{z}{z - t_f} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \quad (4.29)$$

Für die Auswertung der Determinante muss bei der Regularisierung für den Imaginärteil das entgegengesetzte Vorzeichen gewählt werden, da die Streuphase  $+2i\delta$  ist. Aus dem gleichen Grund hat auch der Term  $\text{Tr}(f \ln(R))$  in  $\ln(\chi^{(1)*})$  das entgegengesetzte Vorzeichen.

$$\begin{aligned} \ln(e^{\phi_0} \det(\cdot)) - \ln(\chi^{(1)*}) &\sim -\frac{\delta}{2\pi} \ln(Y_+) \Big|_0^{t_f} \\ &= -\frac{\delta^2}{2\pi^2} \left[ \ln\left(\frac{t_f}{i\xi^{-1}}\right) - \ln\left(\frac{-i\xi^{-1}}{-t_f}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\Rightarrow e^{\phi_0} \det(\cdot) \sim e^{i\omega_{th} t_f} (-i\xi t_f)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad (4.31)$$

Der zusätzliche Faktor sieht ausgewertet folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} e^{-i\epsilon_j t_f} \left( (1 - f + fR)^{-1} f \right)_{ji} &\sim (Y_+ f Y_-^{-1})(t_f, 0) \\ &\sim \left( \frac{t_f}{i\xi^{-1}} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \frac{i}{t_f + i\xi_{<}^{-1}} \left( \frac{-i\xi^{-1}}{-t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \sim (-i\xi t_f)^{2\frac{\delta}{\pi}-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Insgesamt erhält man also wie erwartet das komplex konjugierte Ergebnis.

$$\chi^*(t_f) = \langle 0 | \mathcal{J}(0) \mathcal{J}(t_f) | 0 \rangle = |W|^2 e^{i\omega_{th} t_f} (-i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2} \quad (4.33)$$

Um die Leitfähigkeit als Funktion der Energie zu erhalten, müssen die Beiträge addiert und eine Fouriertransformation durchgeführt werden. Das Integral über  $t_f$  läuft aufgrund der  $\theta$ -Funktion nur von 0 bis  $\infty$ . Mit  $\omega_{\pm} \equiv \omega \pm i\eta$  erhält man:

$$\begin{aligned} C^{(0)}(\omega) &= \int_0^{\infty} dt_f e^{i\omega_+ t_f} \left( -i \langle 0 | \mathcal{J}(t_f) \mathcal{J}(0) | 0 \rangle + \text{c. c.} \right) \\ &= |W|^2 \int_0^{\infty} dt_f \left( -ie^{i(\omega_+ - \omega_{th})t_f} (i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2} \right) \\ &\quad + \left( -ie^{i(-\omega_- - \omega_{th})t_f} (i\xi t_f)^{-\left(\frac{\delta}{\pi}-1\right)^2} \right)^* \end{aligned} \quad (4.34)$$

Zu beachten ist hierbei, dass das  $\omega_+$  aus der Fouriertransformation in dem zweiten Summanden durch  $-\omega_-$  ersetzt wurde, da es mit der komplexen Konjugation vertauscht wurde.

Das Integral kann wie in Gl. (2.46) gelöst werden.

$$C^{(0)}(\omega) = -\frac{|W|^2 \Gamma\left(2\frac{\delta}{\pi} - \frac{\delta^2}{\pi^2}\right)}{\xi} \left[ \left( \frac{\omega_{th} - \omega_+}{\xi} \right)^{\frac{\delta^2}{\pi^2} - 2\frac{\delta}{\pi}} + \left( \frac{\omega_{th} + \omega_+}{\xi} \right)^{\frac{\delta^2}{\pi^2} - 2\frac{\delta}{\pi}} \right] \quad (4.35)$$

Die auf diese Weise bestimmte Leitfähigkeit beschreibt sowohl den Transport eines Elektrons aus Abschnitt 3.1.1 (erster Summand), als auch den Transport eines Loches

aus Abschnitt 3.1.2 (zweiter Summand).  $-\text{Im}(C^{(0)}(\omega))$  liefert die Ausdrücke aus Kapitel 3, der Realteil beschreibt die Dissipation des Systems.

Gl. (4.35) zeigt das bekannte Potenzverhalten der Fermikantensingularität. Sie beschreibt den Tunnelprozess des Kanals mit der größeren Phasenverschiebung. Konkret soll nun ein Transport von links ( $=\beta$ ) nach rechts ( $=\alpha$ ) betrachtet werden. Wenn die Phasenverschiebung im linken Kanal größer ist, beschreibt Gl. (4.35) den Transport auf den Quantenpunkt, also die Situation aus Abschnitt 3.1.1, wobei  $\beta$  der Transportkanal ist. Im umgekehrten Fall, wenn die Phasenverschiebung im rechten Kanal größer ist, wird der Tunnelprozess vom Quantenpunkt herunter (Abschnitt 3.1.2) beschrieben, der Transportkanal ist  $\alpha$ . Da diese Beschreibung aus Sicht des rechten Kanals erfolgt ist, muss für einen Vergleich in diesem Fall  $-C^{(0)}(-\omega)$  betrachtet werden. Die Ergebnisse sind damit in beiden Fällen gleich. Für den linearen Beitrag im Exponenten,  $-2\frac{\delta}{\pi}$ , muss in beiden Fällen die größere Phasenverschiebung eingesetzt werden, unabhängig davon, ob diese zu dem linken oder dem rechten Kanal gehört. Ausgedrückt durch die Parameter in Kapitel 3.2 lautet damit der Exponent  $\frac{\delta^2}{\pi^2} - 2\frac{\delta}{\pi} = -x - |y|$ . Die „Zuschauerkanäle“ tragen mit einem zusätzlichen Term  $\frac{\delta^2}{\pi^2}$  zum Exponenten bei, was in dem  $x$  enthalten ist.

Eine Umkehrung der Transportrichtung im Experiment entspricht einer Vertauschung des linken und rechten Kanals und damit einer Vertauschung, welche der beiden Phasenverschiebungen größer ist. Weil dies keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, ist der Transport symmetrisch unter Änderung der Transportrichtung.

Ein typischer experimentell gefundener Exponent ist  $-x - |y| \approx -0.5$  [9]. Unter Annahme einer Asymmetrie in den Phasenverschiebungen erhält man typische Werte für die Exponenten,  $x \approx 0.3$  und  $y \approx 0.2$ , die im nächsten Abschnitt für graphische Darstellungen der Ergebnisse benutzt werden sollen.

## 4.2. Leitfähigkeit in nächst höherer Ordnung

Die nächst höhere Ordnung, die zur Leitfähigkeit beiträgt, ist die zweite Ordnung, proportional zu  $|W|^4$ .

$$\begin{aligned}
 C^{(2)}(t_f) &= -i \left( \langle 0 | [\mathcal{J}(t_f), \mathcal{J}(0)] | 2 \rangle + \langle 2 | [\mathcal{J}(t_f), \mathcal{J}(0)] | 0 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + \langle 1 | [\mathcal{J}(t_f), \mathcal{J}(0)] | 1 \rangle \right) \\
 &= -i \left( \langle 0 | \mathcal{J}_\alpha(t_f) \mathcal{J}_\beta(0) | 2 \rangle + \langle 2 | \mathcal{J}_\alpha(t_f) \mathcal{J}_\beta(0) | 0 \rangle \right. \\
 &\quad \left. - \langle 1 | \mathcal{J}_\beta(0) \mathcal{J}_\alpha(t_f) | 1 \rangle \right) + \text{c. c.}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Zur Unterscheidung der beiden Stromoperatoren wurden sie mit Indizes  $\alpha$  und  $\beta$  versehen. Diese stehen für die beteiligten Transportkanäle. Für einen Transport von links nach rechts ist  $\alpha = R$  und  $\beta = L$ . Die drei Terme in Klammern werden einzeln ausgewertet und entsprechend mit Term I, Term II und Term III bezeichnet. Bei dem dritten Term wird der negative Anteil des Kommutators verwendet, um die Rechnung einheitlicher zu machen. Dies wird bei der Auswertung des Terms deutlich.

### 4.2.1. Betrachtung der unterschiedlichen Beiträge

*Term I*

Zunächst soll der Ausdruck

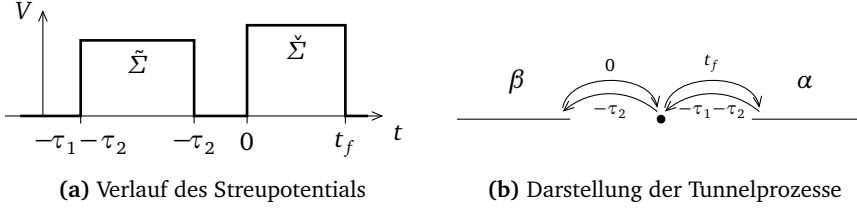
$$\chi^I(t_f) = \langle 0 | \mathcal{J}_\alpha(t_f) \mathcal{J}_\beta(0) | 2 \rangle \tag{4.37}$$

ausgewertet werden. Dazu wird die Definition von  $|2\rangle$  eingesetzt.

$$\chi^I(t_f) = (-i)^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-\eta(\tau_1 + \tau_2)} \zeta^I \tag{4.38}$$

$$\zeta^I := e^{\phi_0} \langle 0 | \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{J}_\alpha \mathcal{U}(t_f) \mathcal{J}_\beta \mathcal{U}_0(\tau_2) \mathcal{H}_X \mathcal{U}(\tau_1) \mathcal{H}_X \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_1 + \tau_2) | 0 \rangle \tag{4.39}$$

$$\phi_0 = -iE_0(t_f + \tau_1) \tag{4.40}$$


 Abbildung 4.1.: Schematischer Ablauf des Prozesses für  $\chi^I$ 

Für die Zeitentwicklung wurden hierbei die Operatoren gemäß der Besetzung des Quantenpunktes verwendet. Im Grundzustand  $|0\rangle$  ist der Quantenpunkt unbesetzt. Jedes Wirken der Operatoren  $\mathcal{H}_X$  bzw.  $\mathcal{J}$  ändert die Besetzung. Nur der Teil dieser Operatoren, der die entsprechende Besetzungsänderung erzeugt, liefert einen nicht verschwindenden Beitrag. Darüber hinaus tragen die einzelnen Kanäle von  $\mathcal{H}_X$  so bei, dass für den Gesamtprozess die Teilchenzahl in den einzelnen Kanälen erhalten bleibt. Mit diesen Überlegungen lässt sich  $\zeta^I$  wie folgt vereinfachen:

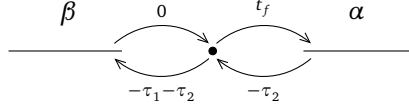
$$\zeta^I = \sum_{i,j,k,l} \frac{|W_\alpha|^2}{N_\alpha} \frac{|W_\beta|^2}{N_\beta} e^{\phi_0} \langle 0 | \hat{\mathcal{R}} | 0 \rangle \quad (4.41)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_{\alpha,l}^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_{\beta,k} \mathcal{U}_0(\tau_2) a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}(\tau_1) a_{\alpha,i} \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_1 + \tau_2) = \tilde{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{I}} \quad (4.42)$$

Bei diesem  $\hat{\mathcal{R}}$  handelt es sich genau um den Operator, der in Abschnitt 3.2, Gl. (3.35) betrachtet wurde. Die erhaltenen Ergebnisse können also direkt angewendet werden. Dabei gelten die folgenden Beziehungen:  $t_0 = -\tau_1 - \tau_2$ ,  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_2$ ,  $t_3 = t_f$  und  $t_4 = -t_f = -(t_0 + t_1 + t_2 + t_3)$ . Die Randbedingung für  $t_4$  ist also erfüllt. Den zeitlichen Verlauf des Streupotentials zeigt Abbildung 4.1a, in Abbildung 4.1b sind die einzelnen Tunnelprozesse und die jeweiligen Zeitpunkte dargestellt. Das Ergebnis für  $\zeta^I$  aus Gl. (3.68) lautet:

$$\zeta^I = |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 e^{-i\omega_{th}(t_f + \tau_1)} \left( \frac{\tau_1 t_f}{(\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 + t_f)} \right)^x \cdot (i\xi\tau_2)^{x-y-1} (i\xi(\tau_1 + \tau_2 + t_f))^{x+y-1} \quad (4.43)$$

$$\text{mit } x := \frac{\delta_\alpha}{\pi} \left( 1 - \frac{\delta_\alpha}{\pi} \right) + \frac{\delta_\beta}{\pi} \left( 1 - \frac{\delta_\beta}{\pi} \right) \quad \text{und} \quad y := \frac{\delta_\alpha}{\pi} - \frac{\delta_\beta}{\pi} \quad (4.44)$$



**Abbildung 4.2.:** Darstellung der Tunnelprozesse für  $\chi^{II}$ .

Die Tunnelprozesse des  $|0\rangle$  sind oberhalb der Linien eingezeichnet, die Tunnelprozesse des  $\langle 0|$  unterhalb. Bei den letztgenannten findet der Transport entgegen der Pfeilrichtung statt.

*Term II*

Der Ausdruck

$$\chi^{II}(t_f) = \langle 2 | \mathcal{J}_\alpha(t_f) \mathcal{J}_\beta(0) | 0 \rangle \quad (4.45)$$

soll nun analog ausgewertet werden. Hierbei treten die inversen Zeitentwicklungen  $\mathcal{U}^\dagger$  auf, wie  $\zeta^{II}$  zeigt.

$$\chi^{II}(t_f) = (i)^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-\eta(\tau_1 + \tau_2)} \zeta^{II} \quad (4.46)$$

$$\zeta^{II} := e^{\phi_0} \langle 0 | \mathcal{U}_0(\tau_1 + \tau_2) \mathcal{H}_X \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) \mathcal{H}_X \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_2) \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{J}_\alpha \mathcal{U}(t_f) \mathcal{J}_\beta | 0 \rangle \quad (4.47)$$

$$\phi_0 = iE_0(\tau_1 - t_f) \quad (4.48)$$

Wie schon bei Term I tragen nur Teile der Operatoren  $\mathcal{H}_X$  und  $\mathcal{J}$  bei. Die Zeitentwicklungsoperatoren wurden gemäß der Quantenpunktbesetzung gewählt.

$$\zeta^{II} = \sum_{i,j,k,l} \frac{|W_\alpha|^2}{N_\alpha} \frac{|W_\beta|^2}{N_\beta} e^{\phi_0} \langle 0 | \hat{\mathcal{R}} | 0 \rangle \quad (4.49)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_0(\tau_1 + \tau_2) a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) a_{\alpha,i} \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_2 + t_f) a_{\alpha,l}^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_{\beta,k} \quad (4.50)$$

Der Ablauf der einzelnen Tunnelprozesse ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Die inversen Zeitentwicklungen können als Entwicklung von  $\langle 0|$  vorwärts in der Zeit aufgefasst werden. Bei dieser Interpretation findet der Transport entgegen der Pfeilrichtung statt, weil es sich um den adjungierten Prozess handelt. Es wird also zum Zeitpunkt  $-\tau_1 - \tau_2$  ein Elektron aus Kanal  $\beta$  auf den Quantenpunkt transportiert und von dort zum Zeitpunkt  $-\tau_2$  in Kanal  $\alpha$ .

Der Operator  $\hat{\mathcal{R}}$  ist wiederum das Produkt zweier Operatoren  $\mathcal{O}$ ,  $\hat{\mathcal{R}} = \check{\mathcal{O}}\check{\mathcal{O}}$ , mit der verallgemeinerten Definition aus Gl. (4.19).

$$\check{\mathcal{O}} \equiv \check{\mathcal{O}}(\beta, j, \alpha, i; \tau_1 + \tau_2, -\tau_1) = \mathcal{U}_0(\tau_1 + \tau_2) a_{\beta, j}^\dagger \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) a_{\alpha, i}, \quad \check{\Sigma} = S^\dagger \quad (4.51)$$

$$\check{\mathcal{O}} \equiv \check{\mathcal{O}}(\alpha, l, \beta, k; -\tau_2 - t_f, t_f) = \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_2 + t_f) a_{\alpha, l}^\dagger \mathcal{U}(t_f) a_{\beta, k}, \quad \check{\Sigma} = S \quad (4.52)$$

Für die globale Phase  $\Phi$ , die aus der Vertauschung der Zeitentwicklungsoperatoren mit den Erzeugern für die transportierten Elektronen folgt, gilt:

$$\Phi = e^{-i\varepsilon_j(\tau_1 + \tau_2) + i\varepsilon_l(\tau_2 + t_f)} \quad (4.53)$$

Damit erhält man die folgende Zeitabhängigkeit für  $R(t, t')$ :

$$\begin{aligned} R(t, t') &= \left( \check{\Sigma}(\tau_1 + \tau_2 | -\tau_1) \check{\Sigma}(-\tau_2) \right) (t, t') \\ &= \int d\bar{t} \check{\Sigma}(\bar{t} + \tau_1) \delta(\tau_1 + \tau_2 - \tau_1 + t - \bar{t}) \check{\Sigma}(t') \delta(-\tau_2 + \bar{t} - t') \\ &= \check{\Sigma}(t' + \tau_1 + \tau_2) \check{\Sigma}(t') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (4.54)$$

Es ist also zu den gleichen Zeiten ein Streupotential aktiviert wie bei Term I. Der Unterschied ist, dass eine der beiden Streuphasen das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Damit erhält man die folgende Lösung für das Riemann-Hilbert-Problem:

$$Y(z) = \left( \frac{z + \tau_1 + \tau_2}{z + \tau_2} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{z}{z - t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \quad (4.55)$$

Durch Benutzung der  $\check{\Sigma}$ -Matrizen können die Auswirkungen des Elektronentransports genauso berücksichtigt werden wie bei Term I. Analog zu Gl. (3.42) muss damit der folgende Ausdruck ausgewertet werden. Zu beachten ist, dass die Indizes in anderer Reihenfolge auftreten als bei Term I.

$$\begin{aligned} \zeta^{II} \sim e^{\phi_0} \sum_{i, j, k, l} \Phi \det(\mathbb{1} - f + fR) \cdot \left( (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \right)_{kj} \\ \cdot \left( \mathbb{1} - \check{\mathcal{O}}_\alpha (\mathbb{1} - f + fR_\alpha)^{-1} f \check{\mathcal{O}}_\alpha \right)_{il} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Die Auswertung der Faktoren erfolgt wie in den Fällen zuvor:

$$\begin{aligned}
 & \ln(e^{\phi_0} \det(\mathbb{1} - f + fR)) - \ln(\chi^{(1)}) \\
 &= \int_0^1 d\lambda \operatorname{tr} \left( -\frac{\delta}{\pi} \int_{-\tau_1 - \tau_2}^{-\tau_2} dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} + \frac{\delta}{\pi} \int_0^{t_f} dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} \right) \\
 &= -\frac{\operatorname{tr}(\delta^2)}{\pi^2} \ln \left( (-i\xi \tau_1) (i\xi t_f) \frac{(\tau_1 + \tau_2)(t_f + \tau_2)}{\tau_2(t_f + \tau_1 + \tau_2)} \right) \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

$$\ln(\chi^{(1)}) = i\omega_{th}(\tau_1 - t_f) \quad (4.58)$$

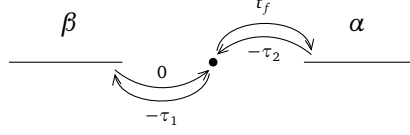
$$\begin{aligned}
 & \sum_{j,k} e^{-i\epsilon_j(\tau_1 + \tau_2)} \left( (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \right)_{kj} \\
 &= 2\pi v_\beta (Y_+ f Y_-^{-1})_{\beta}(0, -\tau_1 - \tau_2) \\
 &= N_\beta (-i\xi \tau_1)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} (i\xi t_f)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} \left( \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{\tau_2(\tau_1 + \tau_2 + t_f)} \right)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} \frac{1}{-i\xi(\tau_1 + \tau_2)} \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,l} e^{i\epsilon_l(\tau_2 + t_f)} \left( \mathbb{1} - \check{\sigma}_\alpha (\mathbb{1} - f + fR_\alpha)^{-1} f \check{\sigma}_\alpha \right)_{il} \\
 &= \delta_{\tau_2 + t_f} - 2\pi v_\alpha \check{\sigma}_\alpha(-\tau_2) (Y_+ f Y_-^{-1})_\alpha(-\tau_2, t_f) \check{\sigma}_\alpha(\tau_1 + \tau_2 + t_f) \\
 &= -N_\alpha (-i\xi \tau_1)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} (i\xi t_f)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} \left( \frac{(\tau_2 + t_f)^2}{\tau_2(\tau_1 + \tau_2 + t_f)} \right)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} \frac{1}{i\xi(\tau_2 + t_f)} \quad (4.60)
 \end{aligned}$$

Der Term  $\delta_{\tau_2 + t_f}$  ist nur für  $\tau_2 + t_f = 0$  von Null verschieden und dient analog zu Gl. (3.58) zur Regularisierung. Zusammen erhält man bei Benutzung der gleichen Abkürzungen für die Exponenten wie bei Term I:

$$\begin{aligned}
 \zeta^{II} = & -|W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 e^{i\omega_{th}(\tau_1 - t_f)} \left( \frac{\tau_1 t_f}{\tau_2(\tau_1 + \tau_2 + t_f)} \right)^x \\
 & \cdot (\xi(\tau_1 + \tau_2))^{x-y-1} (\xi(\tau_2 + t_f))^{x+y-1} \quad (4.61)
 \end{aligned}$$




 Abbildung 4.3.: Darstellung der Tunnelprozesse für  $\chi^{III}$ .

Term III

Für den dritten Term erhält man mit denselben Überlegungen:

$$\chi^{III} = \langle 1 | \mathcal{J}_\beta(0) \mathcal{J}_\alpha(t_f) | 1 \rangle = i(-i) \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 e^{-\eta(\tau_1 + \tau_2)} \zeta^{III}$$

$$\zeta^{III} := e^{\phi_0} \langle 0 | \mathcal{U}_0(\tau_1) \mathcal{H}_X \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) \mathcal{J}_\beta \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) \mathcal{J}_\alpha \mathcal{U}(t_f) \mathcal{U}(\tau_2) \mathcal{H}_X \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_2) | 0 \rangle \quad (4.62)$$

$$\phi_0 = iE_0(\tau_1 - t_f - \tau_2) \quad (4.63)$$

Daraus ergibt sich der zu untersuchende Operator  $\hat{\mathcal{R}}$ .

$$\zeta^{III} = \sum_{i,j,k,l} \frac{|W_\alpha|^2}{N_\alpha} \frac{|W_\beta|^2}{N_\beta} e^{\phi_0} \langle 0 | \hat{\mathcal{R}} | 0 \rangle \quad (4.64)$$

$$\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{U}_0(\tau_1) a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) a_{\beta,k} \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_{\alpha,l}^\dagger \mathcal{U}(t_f + \tau_2) a_{\alpha,i} \mathcal{U}_0^\dagger(\tau_2) \quad (4.65)$$

An seiner Form sieht man den Grund, weshalb für Term III diese Reihenfolge der  $\mathcal{J}$  gewählt wurde. Die Beiträge der  $\mathcal{J}$  vernichten das Elektron in Kanal  $\alpha$  und erzeugen es in Kanal  $\beta$ , so wie bei Term I und Term II. Bei den komplex konjugierten Termen sind die Kanäle vertauscht. Durch diese Gruppierung der Terme findet der Transport jeweils in die gleiche Richtung statt. Die Abfolge der Tunnelprozesse ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

$\hat{\mathcal{R}}$  lässt sich über  $\hat{\mathcal{R}} = \tilde{\mathcal{O}} \tilde{\mathcal{O}}^\dagger$  durch die Operatoren  $\mathcal{O}$  ausdrücken:

$$\tilde{\mathcal{O}} \equiv \mathcal{O}(\beta, j, \beta, k; \tau_1, -\tau_1) = \mathcal{U}_0(\tau_1) a_{\beta,j}^\dagger \mathcal{U}^\dagger(\tau_1) a_{\beta,k}, \quad \tilde{\Sigma} = S^\dagger \quad (4.66)$$

$$\tilde{\mathcal{O}} \equiv \mathcal{O}(\alpha, l, \alpha, i; -t_f, t_f + \tau_2) = \mathcal{U}_0^\dagger(t_f) a_{\alpha,l}^\dagger \mathcal{U}(t_f + \tau_2) a_{\alpha,i}, \quad \tilde{\Sigma} = S \quad (4.67)$$

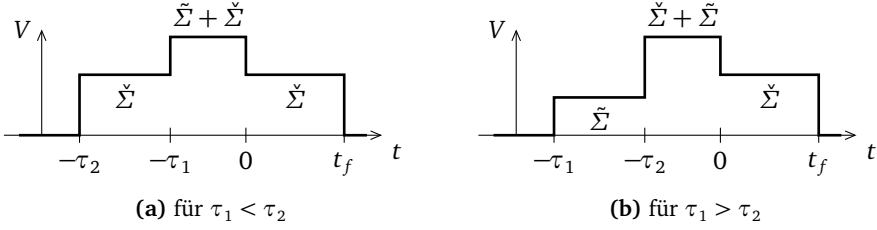


Abbildung 4.4.: Zeitlicher Verlauf der Streupotentiale  $\chi^{III}$ .

Anders als bei den Termen zuvor werden die Modifikationen aufgrund des Teilchentransports hier an den Diagonalblöcken durchgeführt. Bei  $\check{O}_{\alpha\alpha}$  wird die  $i$ -te Spalte und  $l$ -te Zeile Null gesetzt. Im Matrizenprodukt fehlt daher diese Zeile. Die  $i$ -te Spalte des Produkts enthält die  $l$ -te Spalte von  $\check{O}$ . Nach dieser Spalte kann bei der Berechnung der Determinante entwickelt werden. Eine Rechnung analog zu der in Anhang C zeigt, dass bei der Berechnung der Determinante die fehlende  $l$ -te Zeile von  $\check{O}$  hinzugefügt werden darf, ohne das Ergebnis zu verändern. In dem anderen Diagonalblock fehlt die  $j$ -te Zeile und  $k$ -te Spalte von  $\check{O}_{\beta\beta}$ . Mit den gleichen Überlegungen kann hier nach der  $j$ -ten Zeile entwickelt und die  $k$ -te Spalte hinzugefügt werden. Insgesamt muss damit für den Erwartungswert der folgende Ausdruck bestimmt werden:

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{R}} | 0 \rangle = \Phi \det(\mathbb{1} - f + fR) \left( \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \right)_{kj} \cdot \left( (\mathbb{1} - f + fR_\alpha)^{-1} f \check{\sigma}_\alpha \right)_{il} \quad (4.68)$$

$$\text{mit } R = \check{\Sigma} \check{\Sigma} \bar{\mathbb{1}} \quad \text{und} \quad \Phi = e^{-ie_j \tau_1 + ie_i t_f + ie_i \tau_2} \quad (4.69)$$

Die Zeitabhängigkeit von  $R(\hat{t}, \hat{t}')$  ist

$$\begin{aligned} R(\hat{t}, \hat{t}') &= \left( \check{\Sigma}(\tau_1 | -\tau_1) \check{\Sigma}(\tau_2) \bar{\mathbb{1}}(-\tau_2) \right) (\hat{t}, \hat{t}') \\ &= \check{\Sigma}(\hat{t}' + \tau_1) \check{\Sigma}(\hat{t}' + \tau_2) \delta(\hat{t} - \hat{t}') . \end{aligned} \quad (4.70)$$

An  $R(\hat{t}, \hat{t}')$  sieht man einen weiteren Unterschied zu den Termen zuvor: Die Streuprozesse sind nicht zeitlich voneinander getrennt. Für einige Zeit sind, bezogen auf das RH-Problem, beide Potentiale aktiviert, wie Abbildung 4.4 zeigt. Dies rührt daher, dass durch die Störungsrechnung sowohl in  $\langle 0 |$  als auch in  $| 0 \rangle$  ein Transportprozess vor

dem Zeitpunkt  $t = 0$  stattfindet und das Streupotential aktiviert. Bei der Projektion der Zustände aufeinander werden die Potentiale miteinander multipliziert, was zu dem Überlappen der Potentiale führt. Weil es sich um das Produkt der Potentiale aus  $\langle 0|$  und  $|0\rangle$  handelt, kann das RH-Problem weiterhin faktorisiert und für die einzelnen Potentiale gelöst werden:

$$Y(z) = \left( \frac{z + \tau_1}{z} \right)^{\frac{\delta}{\pi}} \left( \frac{z + \tau_2}{z - t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}} \quad (4.71)$$

Die Auswertung der einzelnen Faktoren erfolgt wie bei den anderen Termen.

$$\begin{aligned} & \ln(e^{\phi_0} \det(\mathbb{1} - f + fR)) - \ln(\chi^{(1)}) \\ &= \int_0^1 d\lambda \operatorname{tr} \left( \frac{\delta}{\pi} \int_{-\tau_2}^{t_f} dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} - \frac{\delta}{\pi} \int_{-\tau_1}^0 dt \frac{d \ln(Y_+)}{dt} \right) \\ &= -\frac{\operatorname{tr}(\delta^2)}{\pi^2} \ln \left( (i\xi(t_f + \tau_2)) (-i\xi\tau_1) \frac{t_f |\tau_2 - \tau_1|}{\tau_2(t_f + \tau_1)} \right) \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\ln(\chi^{(1)}) = i\omega_{th}(\tau_1 - t_f - \tau_2) \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k} e^{-i\varepsilon_j \tau_1} \left( \check{\sigma}_\beta \bar{\mathbb{1}} (\mathbb{1} - f + fR_\beta)^{-1} f \right)_{kj} \\ &= 2\pi v_\beta \check{\sigma}_\beta(\tau_2) (Y_+ f Y_-^{-1})_\beta(0, -\tau_1) \\ &= N_\beta (-i\xi\tau_1) 2^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} \left( \frac{t_f |\tau_2 - \tau_1| e^{-i\pi\theta(\tau_1 - \tau_2)}}{\tau_2(t_f + \tau_1)} \right)^{\frac{\delta_\beta}{\pi}} \frac{1}{-i\xi\tau_1} \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i,l} e^{i\varepsilon_l t_f + i\varepsilon_l \tau_2} \left( (\mathbb{1} - f + fR_\alpha)^{-1} f \check{\sigma}_\alpha \right)_{il} \\ &= 2\pi v_\alpha (Y_+ f Y_-^{-1})_\alpha(-\tau_2, t_f) \check{\sigma}(t_f + \tau_1) \\ &= N_\alpha (i\xi(t_f + \tau_2)) 2^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} \left( \frac{t_f |\tau_2 - \tau_1| e^{-i\pi\theta(\tau_1 - \tau_2)}}{\tau_2(t_f + \tau_1)} \right)^{\frac{\delta_\alpha}{\pi}} \frac{1}{i\xi(t_f + \tau_2)} \end{aligned} \quad (4.75)$$

Bei dem Term  $\tau_2 - \tau_1$  muss beachtet werden, dass er beim Ausführen der Zeitintegrale das Vorzeichen wechselt. Aus diesem Grund wird er als  $\tau_2 - \tau_1 = |\tau_2 - \tau_1| \operatorname{sgn}(\tau_2 - \tau_1)$  umgeschrieben und  $\ln(\operatorname{sgn}(\tau_2 - \tau_1) \pm i0) = \pm i\pi\theta(\tau_1 - \tau_2)$  verwendet.

In Gl. (4.74) ist  $\check{\sigma}_\beta(\tau_2) = e^{-2i\delta_\beta}$ . Dies sorgt dafür, dass für den  $\check{\sigma}$ -Anteil, den zweiten Faktor von  $Y(z)$ ,  $Y_-$  statt  $Y_+$  ausgewertet werden muss.

Mit den gleichen Abkürzungen wie zuvor erhält man daraus insgesamt:

$$\zeta^{III} = |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 e^{i\omega_{th}(\tau_1 - t_f - \tau_2)} \left( \frac{t_f |\tau_2 - \tau_1|}{\tau_2 (t_f + \tau_1)} \right)^x \cdot (-i\xi\tau_1)^{x-y-1} (i\xi(t_f + \tau_2))^{x+y-1} e^{-i(\delta_\alpha + \delta_\beta)\theta(\tau_1 - \tau_2)} \quad (4.76)$$

#### 4.2.2. Auswertung der Zeitintegrale

Der letzte Schritt zur Berechnung der Leitfähigkeit  $C$  ist die Auswertung der Zeitintegrale. Die Leitfähigkeit soll als Funktion der Frequenz bestimmt werden, es muss also zusätzlich noch eine Fouriertransformation durchgeführt werden. Hierfür wird nur von 0 bis  $\infty$  integriert, da  $C(t_f < 0) = 0$  ist. Die drei Zeitintegrale werden gemeinsam ausgeführt.

*Term I*

Wie in Kapitel 3.2.3 gezeigt wurde, ist die Korrelationsfunktion endlich durch eine Regularisierung mit  $\xi$ , wenn einer der Zeitparameter Null wird. Die Zeitintegrale können daher bei einem kleinen Parameter  $\epsilon$  abgeschnitten werden, für den später der Grenzübergang nach Null durchgeführt wird. Außerdem wird wieder die Abkürzung  $\omega' = \omega - \omega_{th}$  verwendet.

$$\chi^I(\omega) = -|W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau_2 e^{i\omega' t_f - i\omega_{th}\tau_1 - \eta(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{\tau_1 t_f}{(\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 + t_f)} \right)^x (i\xi\tau_2)^{x-y-1} (i\xi(\tau_1 + \tau_2 + t_f))^{x+y-1} \quad (4.77)$$

$$= |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 i^{2x} \xi^{-3} \tilde{\zeta}^I \quad (4.78)$$

$$\tilde{\zeta}^I = \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau_2 e^{i\bar{\omega}'t_f - i\bar{\omega}_{th}\tau_1 - \bar{\eta}(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{\tau_1 t_f}{(\tau_1 + \tau_2)(\tau_2 + t_f)} \right)^x \cdot (\tau_2)^{x-y-1} (\tau_1 + \tau_2 + t_f)^{x+y-1} \quad (4.79)$$

$$\text{mit } \bar{\omega} = \frac{\omega}{\xi}, \quad \bar{\omega}_{th} = \frac{\omega_{th}}{\xi} \quad \text{und} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\xi} \quad (4.80)$$

Zuerst wird die Variablentransformation  $\tau_2 \rightarrow \tau - \tau_1$  durchgeführt, sodass das Integral über  $\tau_1$  nur bis  $\tau$  läuft. Der Parameter  $\epsilon$  wird bei diesem Integral Null gesetzt. Anschließend wird die Transformation  $\tau_1 \rightarrow \tau_1 \cdot \tau$  durchgeführt. Nun kann das Integral über  $\tau_1$  ausgeführt werden. Dazu wird Kapitel 4.3, Gl. (24) aus dem Bateman [8] verwendet.

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}^I &= \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau e^{i\bar{\omega}'t_f - \bar{\eta}\tau} t_f^x \tau^{-y} (\tau + t_f)^{x+y-1} \\ &\quad \cdot \int_0^1 d\tau_1 e^{-i\bar{\omega}_{th}\tau\tau_1} \left( \frac{\tau_1}{1 - \tau_1 + t_f/\tau} \right)^x (1 - \tau_1)^{x-y-1} \\ &= B(1+x, x-y) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau e^{i\bar{\omega}'t_f - \bar{\eta}\tau} t_f^x \tau^{x-y} (t_f + \tau)^{y-1} \\ &\quad \cdot \Phi_1 \left( 1+x, x, 1+2x-y; \frac{\tau}{t_f + \tau}, -i\bar{\omega}_{th}\tau \right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

$\Phi_1$  ist die konfluente hypergeometrische Funktion, B ist die Beta-Funktion. Für die Anwendbarkeit dieser Formel muss  $x > y$  sein. Der Term, der zu dieser Einschränkung führt, ist  $(1 - \tau_1)^{x-y-1}$ . Er ist aber nur divergent, weil das Integral bis 1 läuft. Tatsächlich wird aber nur bis  $1 - \epsilon$  integriert, sodass die Divergenz nicht auftritt. Führt man die Integration bis  $1 - \epsilon$  durch, erhält man als Ergebnis anstelle von  $\Phi_1$  die Appell-Funktion  $F_1$ . Für diese konnte keine analytische Lösung für die weiteren Integrale gefunden werden. Die Auswertung des Bereichs  $x > y$  muss daher numerisch erfolgen. Ein Vergleich mit den numerischen Ergebnissen zeigt, dass die Funktion  $\Phi_1$  im Bereich  $x > y$  das falsche Vorzeichen für  $\tilde{\zeta}^I$  liefert. Diese Arbeit beschränkt sich deshalb auf den Bereich  $x < y$ .

Als nächstes wird die Transformation  $t_f \rightarrow t_f \cdot \tau$  durchgeführt. Das Integral über  $\tau$  kann dann mit Kapitel 4.24, Gl. (1) aus dem Bateman [8] berechnet werden. Hierfür wird  $\epsilon$  Null gesetzt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}^I &= B(1+x, x-y) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f t_f^x (t_f+1)^{y-1} \\
 &\quad \cdot \int_0^{\infty} d\tau e^{-(\tilde{\eta}-i\tilde{\omega}'t_f)\tau} \tau^{2x} \Phi_1\left(1+x, x, 1+2x-y; \frac{1}{t_f+1}, -i\tilde{\omega}_{th}\tau\right) \\
 &= B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f t_f^x (t_f+1)^{y-1} (\tilde{\eta}-i\tilde{\omega}'t_f)^{-1-2x} \\
 &\quad \cdot F_1\left(1+x, x, 1+2x, 1+2x-y; \frac{1}{t_f+1}, \frac{-i\tilde{\omega}_{th}}{\tilde{\eta}-i\tilde{\omega}'t_f}\right) \quad (4.82)
 \end{aligned}$$

$F_1$  ist die Appell-Funktion. In dem Term  $(\tilde{\eta}-i\tilde{\omega}'t_f)^{-1-2x}$  kann nun der Limes  $\eta \rightarrow 0$  durchgeführt werden. In dem Argument der Appell-Funktion wird der Parameter noch benötigt, damit das Argument nicht reell wird, da die Appell-Funktion für reelle Argumente größer als 1 einen Schnitt hat. Außerdem wird die Transformation  $t_f \rightarrow 1/t_f$  durchgeführt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}^I &= B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) (-i\tilde{\omega}')^{-1-2x} \int_0^{1/\epsilon} dt_f t_f^{x-y} (t_f+1)^{y-1} \\
 &\quad \cdot F_1\left(1+x, x, 1+2x, 1+2x-y; \frac{t_f}{t_f+1}, \frac{\tilde{\omega}_{th}t_f}{\tilde{\omega}'+i\tilde{\eta}t_f}\right) \\
 &= B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) (-i\tilde{\omega}')^{-1-2x} \int_0^{1/\epsilon} dt_f t_f^{x-y} (t_f+1)^{x+y} \\
 &\quad \cdot F_1\left(1+x, -x-y, 1+2x, 1+2x-y; -t_f, -t_f \left[1 - \frac{\tilde{\omega}_{th}(1+t_f)}{\tilde{\omega}'+i\tilde{\eta}t_f}\right]\right) \quad (4.83)
 \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Transformation aus Kapitel 5.11, Gl. (2) im Bateman [7] verwendet.

Das verbleibende Integral kann numerisch ausgewertet werden, siehe dazu Abbildung 4.5a.  $\tilde{\zeta}^I$  hat seinen größten Wert für  $\bar{\omega}_{th} = 0$  und fällt für endliche  $\bar{\omega}_{th}$  schnell ab. Der Schnitt der Appell-Funktion macht eine numerische Auswertung für  $\frac{\bar{\omega}_{th}}{\bar{\omega}'} > 0$  problematisch. Für  $t_f > \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}_{th}}$  wird der Realteil des zweiten Zeitarguments größer als 1. Die Auswertung der Appell-Funktion wird dadurch extrem langsam und die Resultate scheinen im Limes  $\eta \rightarrow 0$  nicht korrekt zu sein: Die Ergebnisse springen von großen Werten schlagartig auf Null (Abbildung D.1c im Anhang). Folgendes kann für  $\eta \rightarrow 0$  festgehalten werden: Für  $t_f < \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}_{th}}$  ist die Appell-Funktion reell und divergiert im Grenzfall  $t_f \nearrow \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}_{th}}$ . Für  $t_f > \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}_{th}}$  ist die Appell-Funktion komplexwertig. Ihr Imaginärteil divergiert für  $t_f \searrow \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}_{th}}$ , der Realteil kann aber endlich bleiben, siehe dazu Abbildung D.1 im Anhang.

Für  $\bar{\omega}_{th} = 0$  gibt es auch eine analytische Lösung, wenn zusätzlich noch eine Näherung durchgeführt wird. Für gleiche Argumente lässt sich die Appell-Funktion auf eine hypergeometrische Funktion zurückführen (Kapitel 5.10, Gl. (11) im Bateman [7]). Mit  $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$  folgt:

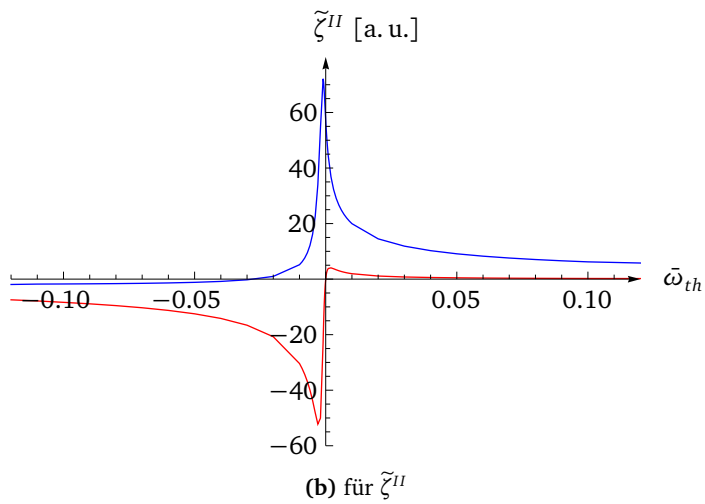
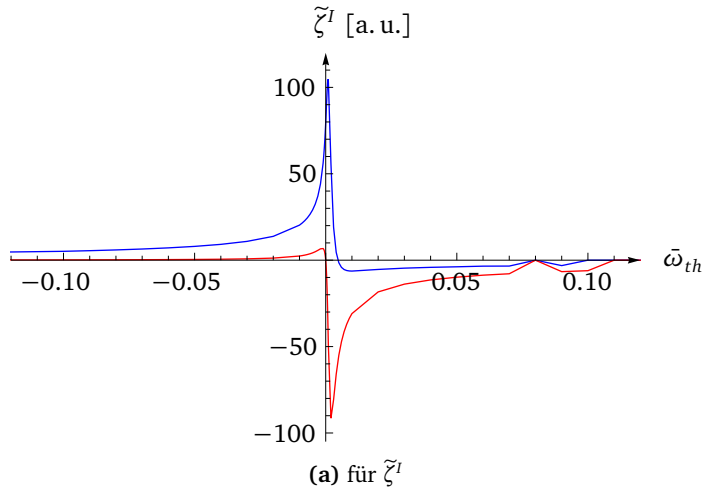
$$\tilde{\zeta}^I = B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega})^{-1-2x} \cdot \int_0^{1/\epsilon} dt_f t_f^{x-y} (t_f+1)^{x+y} {}_2F_1(1+x, 1+x-y, 1+2x-y; -t_f) \quad (4.84)$$

Als Näherung wird nun  $t_f + 1$  durch  $t_f$  ersetzt. Ein Vergleich mit numerischen Rechnungen zeigt, dass der Fehler hierdurch wenige Prozent beträgt (Abbildung D.2 im Anhang).

$$\tilde{\zeta}^I = B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega})^{-1-2x} \cdot \frac{\epsilon^{-1-2x}}{1+2x} {}_3F_2\left(1+x, 1+x-y, 1+2x, 1+2x-y, 2+2x; -\frac{1}{\epsilon}\right) \quad (4.85)$$

Die hypergeometrische Funktion  ${}_3F_2$  kann für kleine  $\epsilon$  entwickelt werden. In führender Ordnung erhält man

$$\tilde{\zeta}^I = \frac{\Gamma(1+2x)}{(-i\bar{\omega})^{1+2x}} \left( \frac{B(1+x, -y)}{\epsilon^x x} + \frac{B(x-y, y)}{\epsilon^{x+y} (x+y)} + B(x-y, -x) B(1+2x, -x-y) \right). \quad (4.86)$$



**Abbildung 4.5.:** Numerische Integration für  $\tilde{\zeta}^I$  und  $\tilde{\zeta}^{II}$  für  $\tilde{\omega}' = 1$ ,  $x = 0.3$ ,  $y = 0.2$ ,  $\eta = 0.001$  und  $\epsilon = 0.001$ .

Die blaue Kurve zeigt den Realteil, die rote Kurve den Imaginärteil. Ab etwa  $\tilde{\omega}_{th} = 0.4$  ( $-0.4$ ) werden die Ergebnisse für  $\tilde{\zeta}^I$  ( $\tilde{\zeta}^{II}$ ) unpräzise.



Eine graphische Darstellung dieser Funktion zeigt Abbildung D.3 im Anhang. Sie ist divergent für  $x = y$ . Diese Divergenz ist Ausdruck der zuvor diskutierten Einschränkung bei der Integration über  $\tau_1$ .

*Term II*

Der zweite Term kann auf analoge Weise ausgewertet werden. Es werden dieselben Transformationen durchgeführt, und es können die gleichen Formeln aus den Integraltafeln benutzt werden.

$$\chi^{II} = |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 \xi^{-3} \zeta^{II} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \zeta^{II} &= \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau_2 e^{i\bar{\omega}'t_f + i\bar{\omega}_{th}\tau_1 - \bar{\eta}(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{\tau_1 t_f}{\tau_2(\tau_1 + \tau_2 + t_f)} \right)^x \\ &\quad \cdot (\tau_1 + \tau_2)^{x-y-1} (t_f + \tau_2)^{x+y-1} \\ &= B(1+x, 1-x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau e^{i\bar{\omega}'t_f - \bar{\eta}\tau} t_f^x (t_f + \tau)^{y-1} \tau^{x-y} \\ &\quad \cdot \Phi_1 \left( 1+x, 1-x-y, 2; \frac{\tau}{t_f + \tau}, i\bar{\omega}_{th}\tau \right) \\ &= B(1+x, 1-x) \Gamma(1+2x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f t_f^x (t_f + 1)^{y-1} (\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f)^{-1-2x} \\ &\quad \cdot F_1 \left( 1+x, 1-x-y, 1+2x, 2; \frac{1}{t_f + 1}, \frac{i\bar{\omega}_{th}}{\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f} \right) \\ &= B(1+x, 1-x) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega}')^{-1-2x} \int_0^{1/\epsilon} dt_f t_f^{x-y} (t_f + 1)^{x+y} \\ &\quad \cdot F_1 \left( 1+x, -x+y, 1+2x, 2; -t_f, -t_f \left[ 1 + \frac{\bar{\omega}_{th}(1+t_f)}{\bar{\omega}' + i\bar{\eta}t_f} \right] \right) \quad (4.88) \end{aligned}$$

Hierbei wurde der Limes  $\eta \rightarrow 0$  bei der Potenzfunktion durchgeführt. Das Integral kann numerisch ausgewertet werden (siehe Abbildung 4.5b). Für endliche  $\bar{\omega}_{th}$  gibt es die gleichen Probleme bei der Auswertung wie bei Term I, diesmal allerdings für  $\frac{\bar{\omega}_{th}}{\bar{\omega}'} < 0$ . Die Aussagen über Term I gelten hier analog.

Im Folgenden wird  $\bar{\omega}_{th} = 0$  gesetzt. Mit den gleichen Transformationen wie zuvor erhält man:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}^{II} &= \text{B}(1+x, 1-x) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega})^{-1-2x} \\
 &\quad \cdot \int_0^{1/\epsilon} dt_f t_f^{x-y} (t_f+1)^{x+y} {}_2F_1(1+x, 1+x+y, 2; -t_f) \\
 &\approx \text{B}(1+x, 1-x) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega})^{-1-2x} \\
 &\quad \cdot \frac{\epsilon^{-1-2x}}{1+2x} {}_3F_2\left(1+x, 1+x+y, 1+2x, 2, 2+2x; -\frac{1}{\epsilon}\right) \\
 &\approx \frac{\Gamma(1+2x)}{(-i\bar{\omega})^{1+2x}} \left( \frac{\text{B}(x, y)}{\epsilon^x (x+y)} + \frac{\text{B}(1-x, -y)}{\epsilon^{x-y} (x-y)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{B}(-x, -x) \text{B}(1+2x, -x+y) \right)
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\tag{4.90}$$

### Term III

Die Auswertung dieses Terms erfolgt im Wesentlichen wie bei den Termen zuvor. Es entfällt aber die Transformation  $\tau_2 \rightarrow \tau - \tau_1$ . Stattdessen wird das Integral über  $\tau_1$  bei  $\tau_2$  geteilt, um die Betragsfunktion auswerten zu können.

$$\chi^{III} = |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 1^{2y-2} \left( \frac{\delta_\alpha + \delta_\beta}{\pi} \right)^{\theta(\tau_1 - \tau_2)} \xi^{-3} \tilde{\zeta}^{III} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}^{III} &= \int_\epsilon^\infty dt_f \int_0^\infty d\tau_1 \int_\epsilon^\infty d\tau_2 e^{i\bar{\omega}'t_f + i\bar{\omega}_{th}(\tau_1 - \tau_2) - \eta(\tau_1 + \tau_2)} \left( \frac{t_f |\tau_2 - \tau_1|}{\tau_2 (t_f + \tau_1)} \right)^x \\
 &\quad \cdot (\tau_1)^{x-y-1} (t_f + \tau_2)^{x+y-1}
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_1^{III} &= \int_\epsilon^\infty d\tau_2 \int_0^{\tau_2 - \epsilon} d\tau_1 \dots \\
 &= \text{B}(1+x, x-y) \int_\epsilon^\infty dt_f \int_\epsilon^\infty d\tau e^{i\bar{\omega}'t_f - (\bar{\eta} + i\bar{\omega}_{th})\tau} (t_f + \tau)^{x+y-1} \tau^{x-y} \\
 &\quad \cdot \Phi_1\left(x-y, x, 1+2x-y; -\frac{\tau}{t_f}, i\bar{\omega}_{th}\tau\right)
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

Der Parameter  $\eta$  ist bei dem Integral über  $\tau_1$  nicht zur Konvergenzerzeugung nötig und kann daher Null gesetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_1^{III} &= B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f (t_f+1)^{x+y-1} (\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f + i\bar{\omega}_{th})^{-1-2x} \\
 &\quad \cdot F_1\left(x-y, x, 1+2x, 1+2x-y; -\frac{1}{t_f}, \frac{i\bar{\omega}_{th}}{\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f + i\bar{\omega}_{th}}\right) \\
 &= B(1+x, x-y) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega}')^{-1-2x} \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f (t_f+1)^{x+y} t_f^{-2-2x} \\
 &\quad \cdot F_1\left(1+x, -x-y, 1+2x, 1+2x-y; -\frac{1}{t_f}, \frac{\bar{\omega}_{th}(1+t_f)}{t_f(\bar{\omega}'t_f + i\bar{\eta})} - \frac{1}{t_f}\right) \\
 &= \tilde{\zeta}^I
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Bei den Umformungen wurde Kapitel 5.11, Gl. (4) im Bateman [7] verwendet und  $t_f$  durch  $1/t_f$  ersetzt.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\zeta}_2^{III} &= \int_0^{\infty} d\tau_2 \int_{\tau_2+\epsilon}^{\infty} d\tau_1 \cdots = \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\tau_1-\epsilon} d\tau_2 \cdots \\
 &= B(1-x, 1+x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f \int_{\epsilon}^{\infty} d\tau e^{i\bar{\omega}'t_f - (\bar{\eta} - i\bar{\omega}_{th})\tau} t_f^{2x+y-1} (t_f + \tau)^{-x} \tau^{x-y} \\
 &\quad \cdot \Phi_1\left(1-x, 1-x-y, 2; -\frac{\tau}{t_f}, -i\bar{\omega}_{th}\tau\right) \\
 &= B(1-x, 1+x) \Gamma(1+2x) \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f (t_f+1)^{-x} (\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f - i\bar{\omega}_{th})^{-1-2x} \\
 &\quad \cdot t_f^{2x+y-1} F_1\left(1-x, 1-x-y, 1+2x, 2; -\frac{1}{t_f}, \frac{-i\bar{\omega}_{th}}{\bar{\eta} - i\bar{\omega}'t_f - i\bar{\omega}_{th}}\right) \\
 &= B(1-x, 1+x) \Gamma(1+2x) (-i\bar{\omega}')^{-1-2x} \int_{\epsilon}^{\infty} dt_f t_f^{-2-2x} (t_f+1)^{x+y} \\
 &\quad \cdot F_1\left(1+x, -x+y, 1+2x, 2; -\frac{1}{t_f}, -\frac{\bar{\omega}_{th}(1+t_f)}{t_f(\bar{\omega}'t_f - i\bar{\eta})} - \frac{1}{t_f}\right) \\
 &= \tilde{\zeta}^{II}
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

### 4.2.3. Addition der einzelnen Beiträge

Nachdem die Integrale ausgewertet wurden, können die einzelnen Beiträge addiert werden.

$$\chi^I + \chi^{II} - \chi^{III} = |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 \xi^{-3} \left( i^{2x} \tilde{\zeta}^I + \tilde{\zeta}^{II} - i^{2y} \tilde{\zeta}^I - i^{2(y - \frac{\delta_\alpha}{\pi} - \frac{\delta_\beta}{\pi})} \tilde{\zeta}^{II} \right) \quad (4.96)$$

Bei der Berechnung der komplex konjugierten Terme können wie in Abschnitt 4.1 die bisherigen Ergebnisse verwendet werden, indem  $\omega$  durch  $-\omega$  ersetzt wird. Die Terme hängen dann von  $\omega + \omega_{th}$  ab und beschreiben demnach den Transport eines Loches. Sie sollen deshalb hier nicht weiter berücksichtigt werden.

Um den nicht-dissipativen Teil der Leitfähigkeit zu erhalten, müssen die Terme noch mit  $-i$  multipliziert und der Imaginärteil betrachtet werden. Äquivalent dazu kann auch direkt der Realteil ausgewertet werden.

$$\begin{aligned} C^{(2)} &= -\text{Im}(-i(\chi^I + \chi^{II} - \chi^{III})) = \text{Re}(\chi^I + \chi^{II} - \chi^{III}) \\ &= \text{Re} \left\{ |W_\alpha|^2 |W_\beta|^2 \xi^{-3} |\bar{\omega}|^{-1-2x} \Gamma(1+2x) i^{(1+2x)\text{sgn}(\bar{\omega})} \cdot \right. \\ &\quad \left[ (i^{2x} - i^{2y}) \left( \frac{B(1+x, -y)}{e^x x} + \frac{B(x-y, y)}{e^{x+y} (x+y)} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. + B(x-y, -x) B(1+2x, -x-y) \right) \\ &\quad \left. + (1 - i^{-4\frac{\delta_\beta}{\pi}}) \left( \frac{B(x, y)}{e^x (x+y)} + \frac{B(1-x, -y)}{e^{x-y} (x-y)} \right) \right. \\ &\quad \quad \left. \left. + \frac{1}{2} B(-x, -x) B(1+2x, -x+y) \right) \right] \left. \right\} \quad (4.97) \end{aligned}$$

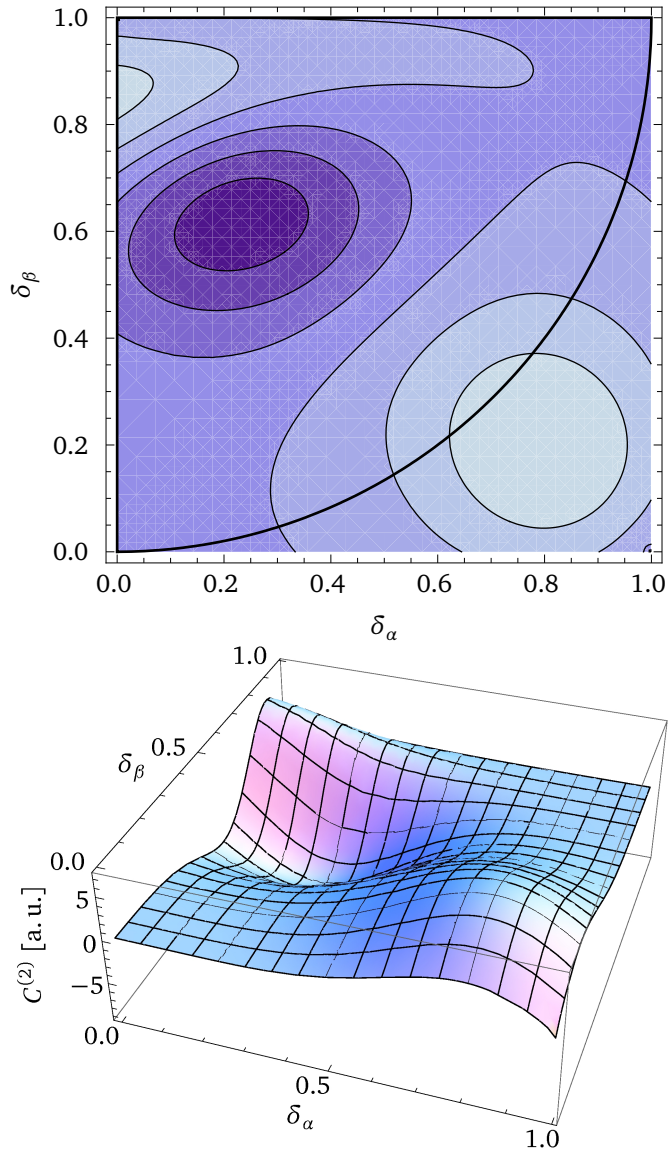
Der Term  $C^{(2)}$  zeigt ebenfalls eine Potenzabhängigkeit von  $\bar{\omega}$ , allerdings mit einem anderen Exponenten als  $C^{(0)}$ . Nach Konstruktion der Exponenten ist  $|y| - x < 1$  und damit  $x + |y| < 1 + 2x$ .  $C^{(2)}$  ist demnach stärker divergent als  $C^{(0)}$ .

Der Parameter  $x$  ist symmetrisch in den Phasenverschiebungen  $\delta_\alpha$  und  $\delta_\beta$ ,  $y$  ist antisymmetrisch.  $C^{(2)}$  hat keine Symmetrie bzgl.  $x$  oder  $y$ . Diese Korrektur zur Leitfähigkeit ist demnach asymmetrisch unter einer Vertauschung von  $\delta_\alpha$  und  $\delta_\beta$ , also einer Änderung

der Transportrichtung. Dies zeigen auch die Abbildungen 4.6 und 4.7, in denen  $C^{(2)}$  für  $\bar{\omega} = 1$  und  $\bar{\omega} = -1$  als Funktion der Phasenverschiebungen  $\delta_\alpha$  und  $\delta_\beta$  dargestellt ist. Die Parameter  $W_\alpha$ ,  $W_\beta$  und  $\xi$  sind hierbei 1.  $C^{(2)}$  ist einmal als Konturplot und einmal als dreidimensionaler Plot gezeigt. Die hellen Bereiche in dem Konturplot stehen für große, positive Werte, die dunklen Bereiche für kleine, negative Werte. Die schwarze Linie grenzt den Bereich ein, in dem  $x > y$  ist, für den also die durchgeführten Betrachtungen gültig sind. Es ist festzustellen, dass der Graph entlang der Linie  $x = y$  keine Divergenz aufweist. Der Grund hierfür ist der Vorfaktor  $i^{2x} - i^{2y}$  des divergenten Terms, der entlang dieser Linie Null ist. Trotzdem sind die Ergebnisse außerhalb des markierten Bereichs nicht verlässlich.

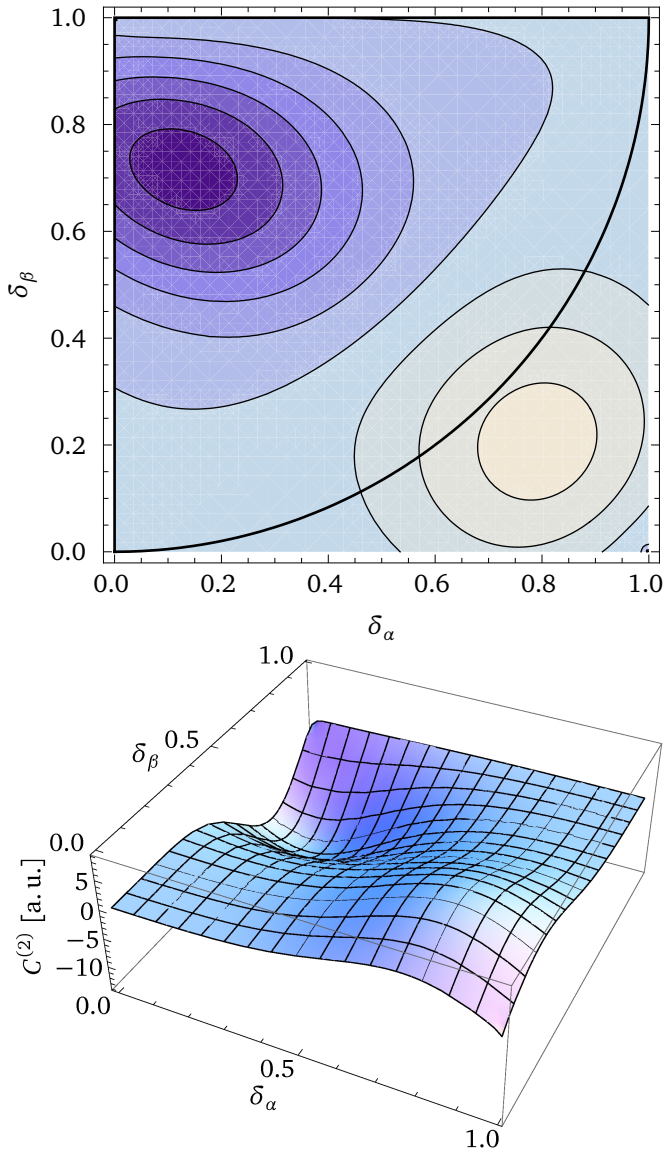
Ein quantitativer Vergleich von  $C^{(0)}$  und  $C^{(2)}$  ist an dieser Stelle nicht möglich, weil die Tunnelamplituden  $W_\alpha$  und  $W_\beta$  nicht bekannt sind. Es kann daher keine Aussage über die Größenordnung von  $C^{(2)}$  im Verhältnis zu  $C^{(0)}$  gemacht werden.

Es ist allerdings erkennbar, dass  $C^{(2)}$  Bereiche mit positivem und negativem Vorzeichen hat. Abhängig von den Phasenverschiebungen wird demnach die Leitfähigkeit durch diese Korrektur erhöht oder verringert. Insbesondere bei Vertauschung von  $\delta_\alpha$  und  $\delta_\beta$  kann es zu solch einer Änderung des Vorzeichens von  $C^{(2)}$  kommen. Die Ursache für die Asymmetrie kann wie folgt gesehen werden: Während das Streupotential vorhanden ist, befindet sich in einem Kanal ein Elektron weniger als im Grundzustand, weil es auf den Quantenpunkt getunnelt ist. In dem anderen Kanal befinden sich genauso viele Elektronen wie im Grundzustand. Das Fehlen eines Elektrons sorgt für einen zusätzlichen Beitrag zu der Korrelationsfunktion  $\chi$  abhängig von der Phasenverschiebung  $\delta$  des entsprechenden Kanals. Wenn sich  $\delta_\alpha$  und  $\delta_\beta$  unterscheiden, z. B. durch eine asymmetrische Geometrie des Quantenpunktes, unterscheidet sich auch der zusätzliche Beitrag für verschiedene Transportrichtungen. Dies ist eine mögliche Erklärung für die experimentell beobachtete Asymmetrie der Leitfähigkeit bei Änderung der Transportrichtung.



**Abbildung 4.6.:**  $C^{(2)}$  als Funktion der Phasenverschiebungen für  $\bar{\omega} = 1$

Im oberen Bild sind die Daten als Konturplot aufgetragen. Helle Bereiche bedeuten große Werte, dunkle Bereiche bedeuten kleine Werte. Das untere Bild zeigt dieselben Daten als dreidimensionaler Plot. Die schwarze Linie markiert den Gültigkeitsbereich, für den  $x < y$  ist.



**Abbildung 4.7.:**  $C^{(2)}$  als Funktion der Phasenverschiebungen für  $\bar{\omega} = -1$   
 Im oberen Bild sind die Daten als Konturplot aufgetragen. Helle Bereiche bedeuten große Werte, dunkle Bereiche bedeuten kleine Werte. Das untere Bild zeigt dieselben Daten als dreidimensionaler Plot. Die schwarze Linie markiert den Gültigkeitsbereich, für den  $x < y$  ist.

#### 4. Der Strom durch den Quantenpunkt

---



# KAPITEL 5

---

## Fazit und Ausblick

---

In dieser Arbeit wurde der Stromtransport durch einen Quantenpunkt mit Hilfe des Riemann-Hilbert-Zugangs untersucht. Dabei wurde gezeigt, dass die Beiträge des Transports, das explizite Hüpfen von und zu dem Quantenpunkt, durch Terme ausgedrückt werden können, bei denen die Teilchenzahl in den Zuleitungen unverändert ist. Zunächst wurden bekannte Ergebnisse für die Fermikantensingularität reproduziert und damit die verwendete Methode demonstriert. Anschließend wurden Korrekturen zur Leitfähigkeit bestimmt. Hierzu wurde der volle Transportprozess von einer Zuleitung über den Quantenpunkt in eine andere Zuleitung berücksichtigt. Es wurde gezeigt, dass der Riemann-Hilbert-Zugang auch auf solche mehrfachen Transportprozesse anwendbar ist. Die gefundene Korrektur zur Leitfähigkeit weist im Gegensatz zur FES eine Asymmetrie in den Beiträgen der Phasenverschiebungen in den einzelnen Kanälen auf. Je nach Kombination der Verschiebungen kann die Leitfähigkeit erhöht oder verringert sein, was eine mögliche Erklärung für die experimentell beobachtete Asymmetrie beim Wechsel der Transportrichtung ist.

Alle diese Betrachtungen fanden im Gleichgewicht und bei Temperatur  $T = 0\text{ K}$  statt. Die verwendete Methode ist allerdings auch auf allgemeinere Fälle anwendbar. Für die Berechnung der Erwartungswerte und die Umschreibung als Determinante war es nicht notwendig, dass nur die niederenergetischsten Zustände besetzt waren. Die Umformungen gelten für beliebige  $n$ -Teilchenzustände. Indem die Besetzung der Zustände mittels der Fermifunktion beschrieben wird, bleiben die erhaltenen Ausdrücke wie

Gl. (2.12) auch für endliche Temperaturen gültig. Die Fermifunktion für endliche Temperaturen sieht wie folgt aus:

$$f(t, t') = \frac{i/2\pi}{\frac{\beta}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi}{\beta}(t - t' + i0)\right)} \quad (5.1)$$

Hierbei ist  $\beta$  die inverse Temperatur. Die Funktion ist antiperiodisch in imaginärer Zeitrichtung mit Periode  $\beta$ :  $f(t + i\beta, t') = f(t, t' + i\beta) = -f(t, t')$ . Die Identitäten für das RH-Problem, Gl. (2.21) und (2.22), können verallgemeinert werden, ohne die Darstellung von  $(\mathbb{1} - f + fR)^{-1}$  durch  $Y_{\pm}$  zu verändern [4]:

$$\begin{aligned} fY_+f &= Y_+f + F \\ fY_-f &= fY_- + F \end{aligned} \quad (5.2)$$

Wenn die gleiche Antiperiodizität für die verallgemeinerten Identitäten gefordert wird, muss  $Y$  periodisch in imaginärer Zeitrichtung sein. Für endliche Temperaturen kann das RH-Problem demnach auf einem Streifen der Breite  $\beta$  betrachtet werden.  $F$  ist das Integral über  $fY_+f$  entlang der oberen Kante des Streifens,  $\text{Im}(t) = \beta/2$ . Durch diese Konstruktion bleiben auch die Gleichungen gültig, in denen die Inverse  $(\mathbb{1} - f + fR)^{-1}$  durch  $Y$  ausgedrückt wird, z. B. Gl. (2.29) und (3.8). Man kann den Streifen der Breite  $\beta$  mit der Abbildung

$$t \rightarrow w = \tanh\left(\frac{\pi}{\beta}t\right) \quad (5.3)$$

auf die geschlitzte Ebene  $\{w \in \mathbb{C} | w \notin (-\infty, -1], w \notin [1, \infty)\}$  abbilden und dadurch auch die  $T = 0$  K Lösung für das RH-Problem wiederverwenden. Auf diese Weise können die Ergebnisse dieser Arbeit auch für endliche Temperaturen verwendet werden. Einzig die Zeitintegrale müssen neu berechnet werden, nachdem die Ersetzung (5.3) durchgeführt wurde.

Auf ähnliche Weise lassen sich auch Systeme im Nichtgleichgewicht behandeln. Wenn eine endliche Spannung an die Zuleitungen angelegt wird, unterscheiden sich die chemischen Potentiale  $\mu$ . Durch eine Eichtransformation können die unterschiedlichen  $\mu$  als zeitabhängige Phase der Erzeuger und Vernichter  $a^{\dagger}$  und  $a$  berücksichtigt werden [4, 19]. Dies hat zur Folge, dass die Matrix  $R$ , für die das RH-Problem gelöst werden

---

muss, zeitabhängig wird. Für diesen Fall ist keine explizite Lösung  $Y$  bekannt. Es kann allerdings im Grenzfall sehr hoher oder niedriger Temperatur eine näherungsweise Lösung gefunden werden. Dies führt zu geänderten Identitäten für die Lösung  $Y$ , analog zu Gl. (5.2), aber mit einer Funktion  $F$ , die von der angelegten Spannung abhängt. Die Beziehungen zwischen  $Y$  und der Inversen von  $R$  bleiben weiterhin unverändert. So können auch Nichtgleichgewichtssituationen zumindest näherungsweise mit den Ergebnissen dieser Arbeit beschrieben werden.

Eine dritte Erweiterung ist die Behandlung höherer Ordnungen der Störungstheorie für die Leitfähigkeit  $C$ . Für jede weitere Ordnung findet dabei ein Hüpfprozess mehr statt, sodass in den Streumatrizen eine Zeile bzw. Spalte mehr modifiziert werden muss. Die Formulierung mit den Operatoren  $\mathcal{O}$  und die Darstellung als Streumatrix  $\Sigma'$  aus Kapitel 3.2.1 sind auch für höhere Ordnungen gültig. Das Problem besteht darin, die Modifikationen an den Streumatrizen als Faktor abzuspalten. Solange jeder Kanal höchstens einmal an dem Transport beteiligt ist, solange also für diesen Kanal nur eine Zeile und Spalte modifiziert sind, kann die Änderung als Adjunkte und damit als Matrixelement der Inversen von  $R$  behandelt werden. Für den Fall, dass mehr als eine Zeile und Spalte verändert sind, ist eine solche Formulierung nicht bekannt. Wenn es gelingt, solche Änderungen als Faktoren abzuspalten, können auch mehrfache Transportprozesse und damit höhere Ordnungen für  $C$  mit dieser Methode bestimmt werden.

Darüber hinaus können andere, ähnliche Systeme mit dem Riemann-Hilbert-Zugang behandelt werden, beispielsweise ein Quantenpunktkontakt. Dies ist ein zusammengesetztes System aus einem Quantenpunkt und Zuleitungen mit schaltbarer Kopplung. Die Basiszustände können so gewählt werden, dass die Transportkanäle zu Beginn entkoppelt sind. Eine spätere Besetzung des Quantenpunktes führt zu einer Kopplung der Kanäle. Die zugehörige Streumatrix ist nicht diagonal. Solche Systeme sind bereits untersucht worden (sowohl mit dem RH-Zugang [19], als auch mit anderen Methoden [14, 15]), um beispielsweise die volle Zählstatistik (FCS) zu bestimmen, aus der u. a. das Rauschspektrum gewonnen werden kann. Im Rahmen des RH-Zugangs kann der Quantenpunktanteil mit den Methoden aus Kapitel 3 behandelt werden. In den Zuleitungen bleibt die Gesamtzahl der Elektronen unverändert, sodass eine Behandlung wie in Kapitel 2.3 möglich ist. Da die Streumatrix für die gekoppelten Zuleitungen nicht diagonal ist, muss ein matrixwertiges RH-Problem gelöst werden. Die zu berechnende Korrelationsfunktion ist  $\chi = \langle \mathcal{U}^\dagger(t_f) e^{-i\lambda \mathcal{Q}} \mathcal{U} e^{i\lambda \mathcal{Q}} \rangle$ , wobei  $\mathcal{Q}$  die Ladung in einer der Zuleitungen

misst. Aus ihr erhält man die Erzeugendenfunktion für Momente der Ladungsverteilung [4, 19], aus der das Rauschspektrum bestimmt werden kann.

Insgesamt konnte gezeigt werden, dass die hier vorgestellte Methode ein vielseitiges Werkzeug zur Behandlung von zeitabhängigen Störungen ist. Sie funktioniert in unterschiedlichen Zusammenhängen (z. B. Röntgenabsorption, Ladungstransport, Rauschen) und kann auch bei endlichen Temperaturen und im Nichtgleichgewicht angewendet werden. Außerdem wurde ein Erklärungsversuch für die Asymmetrie beim Transport durch Quantenpunkte geliefert.

# Anhang



## A. Konventionen und Rechenregeln

### A.1. Transformationsregeln für die Zeitdarstellung

In diesem Abschnitt werden die Formeln für die Transformation von der Energie- darstellung zur Zeitdarstellung und umgekehrt angegeben. Die Notation orientiert sich an d'Ambrumenil und Muzykantskii[6]. Allerdings werden zum Benennen der Kanäle griechische Indizes verwendet, lateinische Indizes bezeichnen Impulse.

Der Faktor  $1/2\pi$  in der Fouriertransformation wird symmetrisch auf die Hin- und Rück- transformation verteilt.

$\nu_\alpha$  ist die Zustandsdichte in der Zuleitung  $\alpha$ . Die in der vorliegenden Arbeit beschrie- benen Prozesse werden durch die Zustände im Bereich um die Fermikante bestimmt. Daher wird  $\nu$  durch die Zustandsdichte an der Fermikante ersetzt und es wird über alle Energien von  $-\infty$  bis  $+\infty$  integriert. Die dadurch entstehenden Divergenzen müssen durch geeignete Cutoff-Parameter regularisiert werden (siehe dazu auch Anhang A.4).

$$A_{\alpha\alpha'}(t, t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon' \sqrt{\nu_\alpha \nu_{\alpha'}} A_{\alpha\alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') e^{i\varepsilon' t' - i\varepsilon t} \quad (\text{A.1})$$

$$A_{\alpha\alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{1}{2\pi \sqrt{\nu_\alpha \nu_{\alpha'}}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' A_{\alpha\alpha'}(t, t') e^{i\varepsilon t - i\varepsilon' t'} \quad (\text{A.2})$$

Funktionen, die nur von einem Argument abhängen, können als Funktionen von zwei Argumenten betrachtet werden, indem sie mit einer  $\delta$ -Funktion multipliziert werden, z. B.

$$A(t) \rightarrow A(t, t') = A(t) \cdot \delta(t - t'), \quad (\text{A.3})$$

wobei die folgende Darstellung für die  $\delta$ -Funktion verwendet wird:

$$\delta(t) = \int \frac{d\varepsilon}{2\pi} e^{i\varepsilon t} \quad (\text{A.4})$$

Im Produkt mit anderen Funktionen ist die Umschreibung nicht nötig. Bei Operationen wie dem Wechsel zwischen Energie- und Zeitdarstellung muss sie jedoch berücksichtigt werden.

Für die Fermifunktion gilt:

$$f_{\alpha,\alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{\sqrt{v_\alpha v_{\alpha'}}} \delta_{\alpha\alpha'} \theta(-\varepsilon) \quad (\text{A.5})$$

$$\Leftrightarrow f_{\alpha\alpha'}(t, t') = \frac{i}{2\pi} \frac{\delta_{\alpha\alpha'}}{t - t' + i0} \quad (\text{A.6})$$

## A.2. Identitäten für das Riemann-Hilbert-Problem

Dieser Abschnitt zeigt einige Identitäten, die für die Lösung des RH-Problems gelten. Sie folgen direkt aus den Bedingungen an diese Lösung, Gl. (2.19) und Gl. (2.20), und der Form der Fermifunktion  $f$ , Gl. (A.6).

$$\begin{aligned} (f Y_+ f)(t, t') &= \int d\bar{t} \frac{i/2\pi}{t - \bar{t} + i0} Y(\bar{t} + i0) \frac{i/2\pi}{\bar{t} - t' + i0} \\ &= 2\pi i (-i/2\pi) Y(t + i0) \frac{i/2\pi}{t - t' + i0} \\ &= (Y_+ f)(t, t') \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Da der Schnitt von  $Y_+$  unterhalb der reellen Achse liegt, kann das Integral in der oberen Halbebene geschlossen werden, um anschließend den Residuensatz anzuwenden. Der zusätzliche Pfad liefert aufgrund der Bedingung Gl. (2.20) keinen Beitrag. In dem umschlossenen Gebiet liegt ein einfacher Pol bei  $\bar{t} = t + i0$ .

Für  $Y_-$  kann die Rechnung analog durchgeführt werden. Diesmal muss das Integral in der unteren Halbebene geschlossen werden, so dass es einen einfachen Pol bei  $\bar{t} = t' - i0$  gibt. Damit erhält man die folgende Identität für  $Y_-$ .

$$(f Y_- f)(t, t') = (f Y_-)(t, t') \quad (\text{A.8})$$

Unter der Annahme, dass  $Y^{-1}$  die gleichen Bedingungen erfüllt wie  $Y$ , gelten dieselben Identitäten auch für die Inverse.



Aus diesen Identitäten lassen sich direkt die folgenden ableiten, die für das Arbeiten mit  $Y$  sehr nützlich sind.

$$(\mathbb{1} - f)Y_+f = Y_+f - fY_+f \stackrel{(A.7)}{=} Y_+f - Y_+f = 0 \quad (A.9)$$

$$\Rightarrow (\mathbb{1} - f)Y_+(\mathbb{1} - f) = (\mathbb{1} - f)Y_+ \quad (A.10)$$

$$fY_-(\mathbb{1} - f) = fY_- - fY_-f \stackrel{(A.8)}{=} fY_- - fY_- = 0 \quad (A.11)$$

$$\Rightarrow (\mathbb{1} - f)Y_-(\mathbb{1} - f) = Y_-(\mathbb{1} - f) \quad (A.12)$$

### A.3. Regularisierung der RH-Lösung

Die Greensche Funktion für den Quantenpunktzustand muss eine Form haben, für die die zugehörige spektrale Dichte  $z(\varepsilon)$  reell ist. Gemäß Nozières und de Dominicis [21] gilt für die Greensche Funktion  $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G}(t - t') = \langle 0 | \mathcal{T} \{ b(t) b^\dagger(t') \} | 0 \rangle \quad (A.13)$$

$$\mathcal{G}(t) = e^{-i(E_0 + \Delta)t} (i\xi t)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \times \begin{cases} \theta(t) & R = e^{-2i\delta}, \quad \text{Emission} \\ -\theta(-t) & R = e^{2i\delta}, \quad \text{Absorption} \end{cases} \quad (A.14)$$

$\mathcal{T}$  ist der Zeitordnungsoperator.  $\Delta$  ist die Verschiebung der Energien der einzelnen Zustände durch Anwesenheit des Coulombpotentials und entspricht  $\text{Tr}(f \ln(R))$  in dieser Arbeit.

Die Verwendung für Emission und Absorption bezieht sich dabei auf das beschriebene Röntgenabsorptionsexperiment. Im Fall der Emission ist ein kernnaher Zustand zu Anfang unbesetzt. Der Zustand entspricht dem Quantenpunktzustand in dem hier beschriebenen Experiment. Unter Emission eines Photons besetzt ein Leitungselektron den kernnahen Zustand. Dies entspricht dem in Abschnitt 3.1.1 beschriebenen Prozess des Elektronentransports.

Im Fall der Absorption ist der kernnahe Zustand zu Beginn besetzt. Unter Absorption eines Photons wird das Elektron in das Leitungsband angeregt. Dies entspricht dem Lochtransport aus Abschnitt 3.1.2.

Die oben angegebenen Greenschen Funktionen erhält man für folgende reelle spektrale Dichte [21]:

$$z(\varepsilon) = \frac{\xi^{-1}}{\Gamma(\frac{\delta^2}{\pi^2})} \left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)^{1-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \quad (\text{A.15})$$

Im Folgenden soll die Greensche Funktion mit den in dieser Arbeit verwendeten Größen berechnet und die nötige Regularisierung gezeigt werden. Die verwendete Zeit  $t_f$  ist immer größer als Null.

Zunächst soll der Emissionsfall betrachtet werden. Es ist

$$\chi(t_f) = \langle 0 | b(t_f) b^\dagger(0) | 0 \rangle = \mathcal{G}(t_f) \quad (\text{A.16})$$

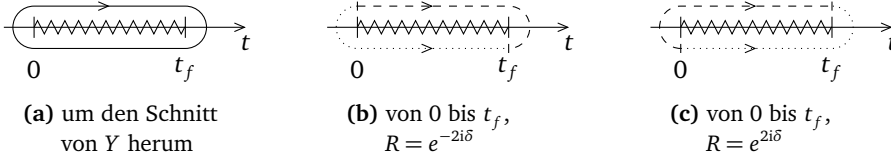
und

$$\begin{aligned} \ln(\chi(t_f)) &= -i\omega_{th}t_f + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt \left( \frac{d\ln(Y_+)}{dt} \frac{d\ln(R)}{d\lambda} \right) \\ &= -i\omega_{th}t_f + \frac{\delta}{\pi} \int_0^1 d\lambda \int_0^{t_f} dt \left( \frac{d\ln(Y_+)}{dt} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{mit } Y(z) = \left( \frac{z}{z-t_f} \right)^{-\frac{\delta}{\pi}\lambda} \quad (\text{A.18})$$

$\ln(Y)$  hängt linear von  $\lambda$  ab, sodass das Integral darüber den Wert  $1/2$  hat.

Damit  $Y(z)$  gemäß Gl. (2.19) einen Schnitt zwischen 0 und  $t_f$  hat, muss der Logarithmus einen Schnitt entlang der negativen reellen Achse haben. Für die Phase  $\varphi$  einer komplexen Zahl  $z$  gilt damit  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Um einmal um den Schnitt von  $Y$  herum zu integrieren, wird eine Kontur wie in Abbildung A.1a verwendet [21]. Die Grenzen des Integrals über  $t$  in Gl. (A.17) werden daher durch  $0 - \xi^{-1}$  und  $t_f + \xi^{-1}$  ersetzt. Die Kontur des Integral verläuft wegen  $Y_+$  oberhalb der reellen Achse.



**Abbildung A.1.:** Kontur für die Integration; die gestrichelte Linie gilt für  $Y_+$ , die gepunktete für  $Y_-$ .

Man erhält

$$\begin{aligned}
\ln(\chi(t_f)) &= -i\omega_{th}t_f - \frac{\delta^2}{2\pi^2} \ln\left(\frac{z}{z-t_f}\right) \Bigg|_{0-\xi^{-1}}^{t_f+\xi^{-1}} \\
&= -i\omega_{th}t_f - \frac{\delta^2}{2\pi^2} \left( \ln\left(\frac{t_f}{\xi^{-1}}\right) - \ln\left(\frac{-\xi^{-1}}{-t_f}\right) \right) \\
&= -i\omega_{th}t_f - \frac{\delta^2}{\pi^2} \ln(\xi t_f)
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Ein Vergleich mit Gl. (A.14) zeigt, dass der Cutoff  $\xi$  rein imaginär sein muss. Es wird daher  $\xi$  durch  $i\xi$  ersetzt. Effektiv wird damit die in Abbildung A.1b gezeigte Kontur für die  $t$ -Integration verwendet.

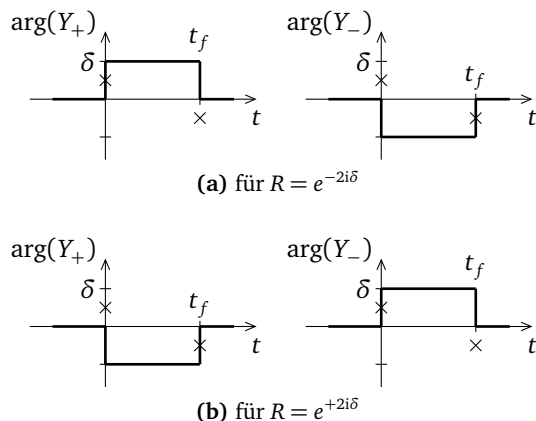
Der Absorptionsfall kann analog behandelt werden. Es ist

$$\chi(t_f) = \langle 0 | b^\dagger(t_f) b(0) | 0 \rangle = -\mathcal{G}(-t_f) = e^{i\omega_{th}t_f} (-i\xi t_f)^{-\frac{\delta^2}{\pi^2}} \tag{A.20}$$

und

$$\begin{aligned}
\ln(\chi(t_f)) &= i\omega_{th}t_f - \frac{\delta}{\pi} \int_0^1 d\lambda \int_0^{t_f} dt \left( \frac{d \ln(Y_+)}{dt} \right) \\
&= i\omega_{th}t_f - \frac{\delta^2}{\pi^2} \ln(\xi t_f)
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\text{mit } Y(z) = \left( \frac{z}{z-t_f} \right)^{\frac{\delta}{\pi} \lambda} \tag{A.22}$$



**Abbildung A.2.:** Resultierende Phase von  $Y_{\pm}$

Der Vergleich zeigt, dass im Fall der Absorption  $\xi$  durch  $-i\xi$  ersetzt werden muss. Der Integrationsweg verläuft also wie in Abbildung A.1c.

Ein Integral über  $Y_-$  liefert dieselben Ergebnisse.  $\ln(Y)$  enthält zwei einfache Pole mit entgegengesetzt gleichem Residuum. Das geschlossene Integral um den Schnitt herum ergibt Null. Die geschlossene Kontur ist die Differenz der Integrale über  $Y_+$  und  $Y_-$ , die demnach gleich sein müssen. Dies Ergebnis lässt sich auch mit folgender Überlegung erklären: Die regularisierten Integrationsgrenzen  $0 - \xi^{-1}$  und  $t_f + \xi^{-1}$  liegen in dem Bereich, in dem  $Y$  analytisch ist. Dort ist folglich  $Y_+ = Y_-$ . Die anschließend durchgeführten Substitutionen  $\xi \rightarrow \pm i\xi$  sind in beiden Fällen gleich.

Zusammengefasst erhält man die folgenden effektiven Regeln für die Auswertung von  $Y(z)$  an den Rändern des Schnittes. Im Emissionsfall,  $R = e^{-2i\delta}$ , wird am linken Rand des Schnittes das Argument um  $+i\xi^{-1}$ , am rechten Rand um  $-i\xi^{-1}$  verschoben. Im Absorptionsfall,  $R = e^{2i\delta}$ , ist die Verschiebung am linken Rand  $-i\xi^{-1}$ , am rechten Rand  $+i\xi^{-1}$ . Dies führt zu dem in Abbildung A.2 gezeigten effektiven Phasenverlauf von  $Y(t)$ .

#### A.4. Eigenschaften der Operatoren

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften der betrachteten Operatoren zusammengefasst werden. Zum einen werden Normierungen beim Wechsel zwischen Energie- und Zeitdarstellung angegeben, zum anderen wird die jeweilige Dimension der Operatoren aufgeführt. Außerdem werden die Cutoff-Parameter bestimmt, die zur Regularisierung verwendet werden.

##### Normierung der Operatoren

Für die Fouriertransformierte eines Vernichters am Ort  $x = 0$  gilt

$$a_{x=0} = \sum_k \frac{a_k}{\sqrt{N}}. \quad (\text{A.23})$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} 1 = \{a_{x=0}, a_{x=0}^\dagger\} &= \sum_{k,l} \frac{1}{N} \{a_k, a_l^\dagger\} = \frac{N}{N} \\ &= \int d\varepsilon v \int d\varepsilon' v \frac{1}{N} \{a_\varepsilon, a_{\varepsilon'}^\dagger\} = \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \frac{v^2}{N} \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{v} =: \frac{v\xi}{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$\xi$  ist von der Größenordnung der Kanalbandbreite und darüber definiert, dass für  $v$  die Zustandsdichte an der Fermikante verwendet wird.

Der Ausdruck  $\delta_{t_2}$  aus Gl. (3.58) ist wie folgt zu verstehen. Zur Berechnung der Korrelationsfunktion muss für den Identitätsoperator eine Fouriertransformation durchgeführt werden. Nur für gleiche Zeitargumente erhält man einen nicht verschwindenden Beitrag.

$$\begin{aligned} \delta_{t_2} &= \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \frac{v^2}{N} e^{ie't' - i\varepsilon t} \mathbb{1} \\ &\stackrel{t \equiv t'}{=} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' \frac{v^2}{N} e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)t} \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{v} \stackrel{(\text{A.24})}{=} \mathbb{1} \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Analog dazu kann der Cutoff für die Fermifunktion bestimmt werden, wenn diese für gleiche Zeitargumente ausgewertet wird.

$$\begin{aligned}
 & \int d\varepsilon \int d\varepsilon' v^2 e^{i\varepsilon' t' - i\varepsilon t} f(\varepsilon, \varepsilon') \\
 &= \frac{2\pi N}{\xi} \frac{i/2\pi}{t - t' + i0} \\
 &\stackrel{t=t'}{=} \int d\varepsilon \int d\varepsilon' v^2 e^{i(\varepsilon' - \varepsilon)t} \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{v} \theta(-\varepsilon) =: v \xi_{<} = N \frac{\xi_{<}}{\xi} \quad (\text{A.26})
 \end{aligned}$$

$$\curvearrowright f(t, t') = \frac{i/2\pi}{t - t' + i\xi_{<}^{-1}} \quad (\text{A.27})$$

$\xi_{<}$  ist analog zu  $\xi$  eine Energie von der Größenordnung der Kanalbandbreite unterhalb der Fermikante.

#### *Dimension der Operatoren*

In der folgenden Übersicht sind die Operatoren und die zugehörige Normierung dargestellt. In der Zeitdarstellung haben die Operatoren die Dimension Energie, in der Energiedarstellung sind sie dimensionslos.

Zeitdarstellung (dim: $\varepsilon$ )	Energiedarstellung (dim: 1)
$\sigma(t, t') = e^{\pm 2i\delta} \delta(t - t')$	$\sigma(\varepsilon, \varepsilon')$
$\mathbb{1}_t = \delta(t - t')$	$\mathbb{1}_\varepsilon = \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{v}$
$f_{\alpha, \alpha'}(t, t') = \delta_{\alpha, \alpha'} \frac{i}{2\pi(t - t' + i\xi_{<}^{-1})}$	$f_{\alpha, \alpha'}(\varepsilon, \varepsilon') = \delta_{\alpha, \alpha'} \frac{\delta(\varepsilon - \varepsilon')}{v} \theta(-\varepsilon)$

## B. Wirkung von Vielteilchenoperatoren

Zunächst soll der Zeitentwicklungsoperator und seine Wirkung auf Einteilchenzustände bestimmt werden. Dabei wird die Matrixdarstellung im Einteilchenbild definiert. Im Anschluss wird die Wirkung eines solchen Vielteilchenoperators auf einen Vielteilchenzustand mit Hilfe der Matrixdarstellung beschrieben.

Zur Notation sei angemerkt, dass die Operatoren über den Impuls oder die Energie benannt werden können. Die Verwendung der diskreten Impulse als Index ist praktisch, wenn Matrixoperationen wie die Entwicklung nach einer Zeile durchgeführt werden. Die Energie als kontinuierliches Argument wird beim Übergang in die Zeitdarstellung verwendet. Da es über die Dispersionsrelation eine feste Beziehung zwischen Impuls und Energie gibt, sind diese Notationen äquivalent.

Der Zeitentwicklungsoperator  $\mathcal{U}(t)$  wird durch die folgende Gleichung definiert:

$$i \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \mathcal{H}(t)\mathcal{U}(t), \quad \mathcal{U}(0) = \mathbb{1} \quad (\text{B.1})$$

Für einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator  $\mathcal{H}$  ist eine formale Lösung dieser Differentialgleichung gegeben durch

$$\mathcal{U}(t) = e^{-i\mathcal{H}t}. \quad (\text{B.2})$$

Die Wirkung des Zeitentwicklungsoperators ist vollständig durch die Wirkung auf Einteilchenzustände charakterisiert, da der betrachtete Hamiltonoperator quadratisch in den Erzeugern und Vernichtern ist. Es gilt

$$\mathcal{U}(t)a_{k'}^\dagger | \rangle = \sum_k e^{-i\epsilon_k t} \sigma(k, k') a_k^\dagger | \rangle \quad (\text{B.3})$$

Die Matrix  $\sigma$  beschreibt die Streuung eines Zustands mit Impuls  $k'$  in den Zustand mit Impuls  $k$ . (Für eine bessere Lesbarkeit bezeichnet der Index  $k$  in diesem Abschnitt sowohl Impulse als auch Kanäle.) Der Phasenfaktor stammt von der freien Zeitentwicklung des gestreuten Zustands.

Für den Fall, dass  $\mathcal{U}(t)$  auf einen Zustand mit besetztem Quantenpunkt wirkt, liefert es noch einen weiteren Term:  $e^{-iE_0 t}$ . Dieser Term ist die Zeitentwicklung des Teilchens auf dem Quantenpunkt und beeinflusst die Wirkung auf die Zustände in den Zuleitungen nicht. Es ist daher praktisch, diesen Faktor bereits zu Beginn der Rechnung vor den Erwartungswert zu ziehen, damit man ihn im weiteren Verlauf der Rechnung nicht mehr berücksichtigen muss.

Für das Rechnen mit  $\mathcal{U}(t)$  ist es nützlich, den Operator  $\mathcal{U}$  ohne Zeitabhängigkeit zu definieren. Dieser beschreibt ausschließlich die Streuung der Zustände. Die Zeitentwicklung ist damit als Faktor  $\mathcal{U}_0$ , den Zeitentwicklungsoperator für den freien Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$ , abgespalten.

$$\mathcal{U}(t) =: \mathcal{U}_0(t)\mathcal{U} \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}a_{k'}^\dagger|\rangle = \sum_k \sigma(k, k')a_k^\dagger|\rangle \quad (\text{B.4})$$

Außerdem ist es nützlich, die Vertauschungsrelationen von  $\mathcal{U}_0$  mit den Erzeugern und Vernichtern zu betrachten.

$$[\mathcal{H}_0, a_i] = \sum_j \varepsilon_j [a_j^\dagger a_j, a_i] = -\sum_j \varepsilon_j \{a_j^\dagger, a_i\} a_j = -\varepsilon_i a_i \quad (\text{B.5})$$

$$[\mathcal{H}_0, a_i^\dagger] = \sum_j \varepsilon_j [a_j^\dagger a_j, a_i^\dagger] = \sum_j \varepsilon_j a_j^\dagger \{a_j, a_i^\dagger\} = \varepsilon_i a_i^\dagger \quad (\text{B.6})$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_0 a_i = a_i(\mathcal{H}_0 - \varepsilon_i), \quad \mathcal{H}_0 a_i^\dagger = a_i^\dagger(\mathcal{H}_0 + \varepsilon_i) \quad (\text{B.7})$$

$$\curvearrowright \mathcal{U}_0(t)a_i = e^{i\varepsilon_i t} a_i \mathcal{U}_0(t), \quad \mathcal{U}_0(t)a_i^\dagger = e^{-i\varepsilon_i t} a_i^\dagger \mathcal{U}_0(t) \quad (\text{B.8})$$

Im Folgenden soll die Wirkung eines Vielteilchenoperators  $\mathcal{R}$  auf einen Vielteilchenzustand  $|\Psi\rangle$  mit  $n$  Teilchen untersucht werden. Bei  $\mathcal{R}$  kann es sich beispielsweise um  $\mathcal{U}$  oder Kombinationen davon handeln. Entscheidend ist, dass  $\mathcal{R}$  die Teilchenzahl nicht ändert.  $\mathcal{R}$  wirkt auf  $|\Psi\rangle$ , indem auf jeden Einteilchenzustand nur die Einschränkung von  $\mathcal{R}$  auf diesen Zustand wirkt [4]. Im Fall von  $\mathcal{U}$  kann man die Exponentialfunktion in gewisser Weise für die einzelnen Einteilchenzustände faktorisieren. Die Zustände werden sozusagen nur von einem Teil von  $\mathcal{U}$  „gesehen“.



Da jeder der (fermionischen) Einteilchenzustände höchstens einmal auftritt, ist diese Aufteilung eindeutig.

$$\mathcal{R}a_k^\dagger | \rangle = \mathcal{R}_k a_k^\dagger | \rangle = \sum_{k'} R_{k'k} a_{k'}^\dagger | \rangle \quad \text{bzw.} \quad (\text{B.9})$$

$$\langle | a_{k'} \mathcal{R} a_k^\dagger | \rangle = \langle | a_{k'} \mathcal{R}_{k'k} a_k^\dagger | \rangle = R_{k'k} \quad (\text{B.10})$$

$\mathcal{R}_k$  ist die Einschränkung von  $\mathcal{R}$  auf den Zustand  $k$ ,  $R$  ist die Darstellungsmatrix im Einteilchensektor.

Auf einen Vielteilchenzustand  $|\Psi\rangle$  wirkt  $\mathcal{R}$  damit wie folgt. Das Produkt über  $m$  läuft über alle in  $|\Psi\rangle$  besetzten Einteilchenzustände.

$$\mathcal{R} |\Psi\rangle = \mathcal{R} \left( \prod_m a_{k_m}^\dagger \right) | \rangle = \prod_m \left( \mathcal{R}_{k_m} a_{k_m}^\dagger \right) | \rangle = \prod_m \left( \sum_{k'_m} R_{k'_m k_m} a_{k'_m}^\dagger \right) | \rangle \quad (\text{B.11})$$

Wenn man den Erwartungswert eines solchen Vielteilchenoperators ausrechnen möchte, muss man wieder auf  $|\Psi\rangle$  projizieren. Hierbei zeigt sich, wie man einen Erwartungswert mit Hilfe einer Determinante ausdrücken kann.

$$\langle \Psi | \mathcal{R} | \Psi \rangle = \langle | \left( \prod_o a_{k_o} \right) \left( \prod_m \left( \sum_{k'_m} R_{k'_m k_m} a_{k'_m}^\dagger \right) \right) | \rangle \quad (\text{B.12})$$

Die  $a_{k_o}$  werden alle ganz nach rechts durchgezogen. Hierbei können sie mit jedem der  $a_{k'_m}^\dagger$  kontrahiert werden. Dabei erhält man Kronecker-Deltas. Welches  $a$  mit welchem  $a^\dagger$  kontrahiert wird, wird durch die Permutation  $\pi$  abgezählt.  $k'_m$  durchläuft alle Werte, jedes Kronecker-Delta wird also genau einmal 1.

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \mathcal{R} | \Psi \rangle &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_m \sum_{k'_m} \delta_{k_{\pi(m)} k'_m} R_{k'_m k_m} = \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_m R_{k_{\pi(m)} k_m} \\ &= \det'(R) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

$\det'$  bezeichnet hierbei die Determinante über die im Zustand  $|\Psi\rangle$  besetzten Einteilchenzustände.

Im Grundzustand  $|0\rangle$  bzgl.  $\mathcal{H}_0$  sind bei  $T = 0\text{K}$  alle Einteilchenzustände unterhalb der Fermikante besetzt. Mit Hilfe der Fermifunktion  $f$  kann so die Determinante über alle besetzten Zustände zu einer Determinante über alle Zustände umgeschrieben werden.

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{T=0\text{K}} = \langle 0 | \mathcal{R} | 0 \rangle = \det(1 - f + fR) \quad (\text{B.14})$$

Für einen thermischen Erwartungswertes muss die Spur von  $\mathcal{R}_\varrho$  berechnet werden. Jeder Summand liefert eine Determinante von der Form (B.13), gewichtet mit einem Boltzmann-Faktor. Dieser besteht aus Gewichtungsfaktoren  $e^{-\beta\varepsilon(k)}$  für jeden besetzten Einteilchenzustand mit Impuls  $k$ . Durch die Spur werden diese zur Fermifunktion aufsummiert, so dass Gl. (B.14) auch für endliche Temperaturen gültig ist.

## C. Rechnungen für Determinanten

Ziel dieses Anhangskapitels ist es, eine Nebenrechnung zur Betrachtung in Kapitel 3.2 vorzuführen.

In dieser Betrachtung treten Streumatrizen auf, die durch das Herausnehmen und Hinzufügen von Elektronen aus den bzw. in die einzelnen Kanäle verändert werden. Die Veränderung besteht in diesem Fall aus der Ersetzung von einzelnen Zeilen oder Spalten durch Nullen. Bei der konkreten Berechnung der Determinante eines Produkts solcher modifizierten Streumatrizen können die Nullen wieder durch ihre ursprünglichen Werte ersetzt werden ohne das Ergebnis zu verändern. Dies vereinfacht die weitere Berechnung der Determinante.

Die Begründung, warum die modifizierten Zeilen bzw. Spalten wieder durch ihre ursprünglichen Werte ersetzt werden können, erfolgt in diesem Kapitel. Die Erklärung erfolgt getrennt für die beiden Fälle, in denen zum einen das Elektron im Kanal  $\beta$  aus dem gleichen Zustand herausgenommen wird, in den es auch hinzugefügt wurde ( $j = k$ ), und zum anderen wenn das Herausnehmen aus einem anderen Zustand geschieht ( $j \neq k$ ).

Für eine bessere Lesbarkeit wird eine vereinfachte Notation für die  $\sigma$ 's verwendet.

### C.1. Fall $j = k$

In diesem Abschnitt wird der Fall  $j = k$  betrachtet, also die Umformung in Gl. (3.38). Ausgehend von dem zu beweisenden Ergebnis wird gezeigt, dass bestimmte Terme sich zu Null addieren. Folglich können diese ganz weggelassen werden. Bei diesen Termen handelt es sich um genau die Zeile und Spalte, die als Modifikation der Streumatrizen Null gesetzt wurden. In gewisser Weise erfolgt die Rechnung also rückwärts. Die Indizes  $l$ ,  $m$  und  $n$  laufen über die Zustände, über die die Determinante gebildet wird,  $i$  läuft über alle Zustände des Hilbertraums.  $j$  ist ein fester Index. Für eine kürzere Notation wird die Summe über  $i$  nicht ausgeschrieben, wenn  $i$  alle möglichen Werte annimmt. Es gilt dann Summenkonvention.

$$\begin{aligned}
&= \det(\check{\sigma}\tilde{\sigma}) - \sum_{m,n} \check{\sigma}_{mj} \text{Adj}(\check{\sigma}\tilde{\sigma})_{mn} \tilde{\sigma}_{jn} \\
&= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_l (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)}) - \sum_m \sum_n \sum_{\pi(m)=n} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \tilde{\sigma}_{jn} \prod_{l \neq m} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)})
\end{aligned}$$

Die erste Summe über Permutationen wird aufgeteilt in Permutationen, für die  $\pi(1)$  einen festen Wert  $n$  hat. Über diese  $n$  wird summiert. In der zweiten Summe wird der Summand  $m = 1$  abgespalten und mit der ersten Summe zusammengefasst.

$$\begin{aligned}
&= \sum_n \sum_{\pi(1)=n} (-1)^{\pi} \left( (\check{\sigma}_{1i} \tilde{\sigma}_{i\pi(1)}) \prod_{l \neq 1} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)}) - \check{\sigma}_{1j} \tilde{\sigma}_{jn} \prod_{l \neq 1} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)}) \right) - \sum_{m>1} \dots \\
&= \sum_n \sum_{\pi(1)=n} (-1)^{\pi} \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{1i} \tilde{\sigma}_{i\pi(1)} \right) \prod_{l \neq 1} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)}) \\
&\quad - \sum_{m>1} \sum_n \sum_{\pi(m)=n} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \tilde{\sigma}_{jn} \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{1i} \tilde{\sigma}_{i\pi(1)} + \underline{\check{\sigma}_{1j} \tilde{\sigma}_{j\pi(1)}} \right) \prod_{l \neq 1, m} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi(l)})
\end{aligned}$$

Der unterstrichene Term fällt wie oben angesprochen heraus:

Der Index  $m$  wird festgehalten. Für jede Kombination von Index  $n$  und Permutation  $\pi$  gibt es einen eindeutigen Partnerterm. Dieser hat den Index  $n' = \pi(1)$  und Permutation  $\pi'$ , die mit  $\pi$  übereinstimmt abgesehen von  $\pi'(m) = n' = \pi(1)$  und  $\pi'(1) = n = \pi(m)$ . Damit ist  $(-1)^{\pi} = -(-1)^{\pi'}$ . Der Partnerterm für die Kombination  $n'$ ,  $\pi'$  lautet explizit

$$(-1)^{\pi'} \check{\sigma}_{mj} \tilde{\sigma}_{jn'} \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{1i} \tilde{\sigma}_{i\pi'(1)} + \underline{\check{\sigma}_{1j} \tilde{\sigma}_{j\pi'(1)}} \right) \prod_{l \neq 1, m} (\check{\sigma}_{li} \tilde{\sigma}_{i\pi'(l)})$$

Für festes  $m$  fällt also bei allen Produkten in dem Faktor mit  $l = 1$  der Term in dem Matrizenprodukt mit  $i = j$  heraus. Dieses Verfahren wird für alle  $m > 1$  wiederholt, sodass für alle  $m, n$  und  $\pi$  im Faktor mit  $l = 1$  der Term mit  $i = j$  entfallen kann.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_{l=1}^1 \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \prod_{l>1} \left( \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \\
 &\quad - \sum_{m>1} \sum_n \sum_{\pi(m)=n} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{jn} \prod_{l=1}^1 \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \prod_{l \neq 1, m} \left( \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \\
 &= \sum_n \sum_{\pi(2)=n} (-1)^{\pi} \left( \left( \check{\sigma}_{2i} \check{\sigma}_{i\pi(2)} \right) - \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{jn} \right) \prod_{l=1}^1 \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \prod_{l>2} \left( \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) - \sum_{m>2} \dots
 \end{aligned}$$

Die erste Summe über Permutationen wurde wieder aufgeteilt, diesmal für ein festes  $\pi(2) = n$ . Von der zweiten Summe wird der Summand  $m = 2$  abgespalten und mit der ersten Summe zusammengefasst.

Die Rechnung erfolgt nun analog zum Fall  $m = 1$ . In der ersten Summe wird der Term  $i = j$  direkt abgezogen, in der zweiten Summe addieren sich für festes  $m$  jeweils zwei Terme zu Null. Auch im Faktor mit  $l = 2$  kann damit in dem Matrizenprodukt der Term mit  $i = j$  weggelassen werden.

Dieses Verfahren wird nun für alle weiteren Faktoren iteriert. Für jeden Schritt gibt es in dem zweiten Term einen Summanden weniger, so dass es nach dem letzten Schritt gar keinen Summanden mehr gibt. Dafür ist in dem ersten Term in allen Faktoren der Term mit  $i = j$  entfallen.

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \prod_l \left( \sum_{i \neq j} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} \right) \\
 &= \det' \left( R'_{\beta\beta} \right)
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

C.2. Fall  $j \neq k$ 

Dieser Teil behandelt den Fall  $j \neq k$ , der für die Umformung in Gl. (3.40) benötigt wird. Der Beweis erfolgt, indem zu jedem Summanden die fehlenden Terme hinzugefügt und wieder abgezogen werden. Den abgezogenen Termen sieht man an, dass sie Null sind. Zunächst wird der Index  $n$  der festgehalten, also jeder Summand einzeln betrachtet, um den ersten Teil der fehlenden Terme (Zeile  $j$  von  $\check{\sigma}$ ) zu ergänzen. Dann wird ein fester Index  $m$  betrachtet, um die restlichen Terme (Spalte  $k$  von  $\check{\sigma}$ ) hinzuzufügen.  $l$ ,  $m$  und  $n$  sind aus dem Bereich der Zustände, über die die Determinante gebildet wird,  $j$  und  $k$  sind feste Indizes.

$$\langle \hat{\mathcal{R}} \rangle \propto \sum_{m,n} \check{\sigma}_{kn} \check{\sigma}_{mj} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \prod_{\substack{l \\ l \neq m}} \sum_{i \neq j,k} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)} =: \sum_n \check{\sigma}_{kn} S_n$$

$$\begin{aligned} S_n = & \sum_{\substack{\pi \\ \pi(1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{1j} \left( \sum_{i \neq k} \check{\sigma}_{2i} \check{\sigma}_{i\pi(2)} - \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{j\pi(2)} \right) \prod_{l>2} (i \neq j,k) \\ & + \sum_{m>1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \left( \sum_{i \neq k} \check{\sigma}_{1i} \check{\sigma}_{i\pi(1)} - \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j\pi(1)} \right) \prod_{l \neq 1,m} (i \neq j,k) \end{aligned}$$

Von der Summe über  $m$  wird der erste Term explizit ausgeschrieben. In diesem Summanden wird der Faktor mit  $l = 2$  abgespalten, in allen anderen Summanden der Faktor mit  $l = 1$ . In den abgespaltenen Faktoren erfolgt nun das Addieren und Subtrahieren des fehlenden Summanden mit  $i = j$ .

Anmerkung zur Notation:

$$(i \neq j,k) \quad \text{bedeutet dabei} \quad \sum_{i \neq j,k} \check{\sigma}_{li} \check{\sigma}_{i\pi(l)}$$

Das Argument in den Klammern spezifiziert den Laufbereich der Summation.

$$S_n = \sum_{\pi(1)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{1j} \left[ \prod_{l=2}^2 (i \neq k) \left( \sum_{i \neq k} \check{\sigma}_{3i} \check{\sigma}_{i\pi(3)} - \check{\sigma}_{3j} \check{\sigma}_{j\pi(3)} \right) \prod_{l>3} (i \neq j, k) - \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{j\pi(2)} \prod_{l>2} (i \neq j, k) \right]$$

$$+ \sum_{m>1} \sum_{\pi(m)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{l \neq 1, m} (i \neq j, k) - \sum_{m>1} \sum_{\pi(m)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j\pi(1)} \prod_{l \neq 1, m} (i \neq j, k)$$

Behandlung des Terms  $m = 1$ :

Nacheinander wird in allen Faktoren der Summand mit  $i = j$  addiert und subtrahiert. Für den addierten Term wird mit dem nächsten Faktor fortgefahren, der subtrahierte Term bleibt unverändert (dies ist der zweite Term in der eckigen Klammer).

$$= \sum_{\pi(1)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{1j} \left[ \prod_{l \neq 1} (i \neq k) - \sum_{m>1} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{1 < l < m} (i \neq k) \prod_{l > m} (i \neq j, k) \right]$$

$$+ \sum_{m>1} \sum_{\pi(m)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) - \sum_{m>1} \sum_{\pi(m)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j\pi(1)} \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k)$$

Nebenrechnung:

Seien  $m, l_1$  fest,  $l_2$  beliebig fest. Betrachte folgenden Ausdruck:

$$\sum_{\pi(m)=n}^{\pi} (-1)^{\pi} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{l_1 j} \check{\sigma}_{j\pi(l_1)} \left( \sum_{i \neq k} \check{\sigma}_{l_2 i} \check{\sigma}_{i\pi(l_2)} - \check{\sigma}_{l_2 j} \check{\sigma}_{j\pi(l_2)} \right) \prod_{l \neq m, l_1, l_2} (\dots)$$

Der unterstrichene Ausdruck  $\check{\sigma}_{l_1 j} \check{\sigma}_{l_2 j} \check{\sigma}_{j\pi(l_1)} \check{\sigma}_{j\pi(l_2)}$  ist symmetrisch in  $l_1, l_2$ . In der Permutation  $\pi$  wird keine Einschränkung an  $\pi(l_1)$  und  $\pi(l_2)$  gemacht, d. h. zu jeder Permutation  $\pi$  gibt es eine passende Permutation  $\pi'$ , die mit  $\pi$  übereinstimmt

außer für  $l_1$  und  $l_2$ , für die die Werte vertauscht sind. Aufgrund der Symmetrie ist der unterstrichene Ausdruck für  $\pi$  und  $\pi'$  derselbe, und der restliche Ausdruck ist per Konstruktion gleich. Da  $\pi$  und  $\pi'$  eine unterschiedliche Signatur haben, addieren sich die Terme zu Null. (Dies sind die eingangs erwähnten Terme.) Sie dürfen also auch weggelassen werden.

Mit diesem Argument können für festes  $l_2$  die  $(i = j)$ -Terme für alle Permutationen weggelassen werden, da es zu jedem  $\pi$  ein eindeutiges  $\pi'$  gibt und die anderen Permutationen unverändert bleiben. Das Argument kann also wiederholt werden. Dieses Verfahren wird nun sukzessive für alle weiteren Faktoren im Produkt über  $l$  wiederholt. Die genaue Form der restlichen Faktoren, d. h. in welchen Faktoren der  $(i = j)$ -Term bereits weggelassen wurde, spielt keine Rolle, sie muss nur für alle Permutationen gleich sein. Diese Eigenschaft bleibt erhalten, da dies Verfahren in einem Schritt immer auf alle Permutationen angewendet wird.

Mit diesem Argument kann nun in allen Teilausdrücken von  $S_n$ , die einen solchen Faktor  $\check{\sigma}_{l_1 j} \check{\sigma}_{j \pi(l_1)}$  für festes  $l_1$  enthalten, auch über  $i = j$  summiert werden. Dies gilt insbesondere für die beiden abgezogenen Summen.

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{\substack{\pi \\ \pi(1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{1j} \left[ \prod_{l \neq 1} (i \neq k) - \sum_{m > 1} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j \pi(m)} \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq k) \right] \\
 &\quad + \sum_{m > 1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) - \sum_{m > 1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j \pi(1)} \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq k) \\
 &= \underbrace{\sum_{\substack{\pi \\ \pi(1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{1j} \prod_{l \neq 1} (i \neq k)}_{=: (1)} + \sum_{m > 1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) \\
 &\quad - \sum_{m > 1} \left[ \sum_{\substack{\pi \\ \pi(1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j \pi(m)} \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq k) + \sum_{\substack{\pi' \\ \pi'(m)=n}} (-1)^{\pi'} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j \pi'(1)} \prod_{\substack{l > 1 \\ l \neq m}} (i \neq k) \right]
 \end{aligned}$$



$$S_n = \dots - \sum_{m>1} \sum_{n' \neq n} \left[ \sum_{\substack{\pi(1)=n \\ \pi(m)=n'}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{\substack{l>1 \\ l \neq m}} (i \neq k) + \sum_{\substack{\pi'(m)=n \\ \pi'(1)=n'}} (-1)^{\pi'} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{1j} \check{\sigma}_{j\pi'(1)} \prod_{\substack{l>1 \\ l \neq m}} (i \neq k) \right]$$

Im letzten Schritt wurden die Permutationen so gruppiert, dass  $\pi(m)$  und  $\pi'(1)$  den Wert  $n'$  annehmen, und anschließend über  $n'$  summiert.

Für festes  $n'$  werden damit die gleichen Einschränkungen an  $\pi$  und  $\pi'$  gemacht: Für 1 und  $m$  werden die Werte  $n$  und  $n'$  angenommen. Zu jedem  $\pi$  gibt es daher genau ein  $\pi'$ , das außer in 1,  $m$  mit  $\pi$  übereinstimmt:  $\pi(i) = \pi'(i) \forall i \neq 1, m$ ,  $\pi(1) = \pi'(m)$ ,  $\pi(m) = \pi'(1)$ . Dies bedeutet, dass  $(-1)^\pi = -(-1)^{\pi'}$ .

Da über alle Permutationen summiert wird, ist die eckige Klammer Null.

$$= (1) + \sum_{m>1} \sum_{\pi(m)=n} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{\substack{l>1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k)$$

Der ( $m = 2$ )-Term wird von der Summe abgespalten. Für ihn werden wie zuvor nacheinander in den einzelnen Faktoren die Terme mit  $i = j$  addiert und wieder subtrahiert. Die subtrahierten Terme werden in einer Summe zusammengefasst (zweiter Term in den eckigen Klammern). Die restliche Summe über  $m$  wird wie zuvor in zwei Summen aufgeteilt.

$$= (1) + \sum_{\substack{\pi(2)=n \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{2j} \left[ \prod_{l \neq 2} (i \neq k) - \sum_{m>2} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{\substack{1 \leq l < m \\ l \neq 2}} (i \neq k) \prod_{\substack{l > m \\ l \neq 2}} (i \neq j, k) \right]$$

$$+ \sum_{m>2} \sum_{\pi(m)=n} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^2 (i \neq k) \prod_{\substack{l>2 \\ l \neq m}} (i \neq j, k)$$

$$- \sum_{m>2} \sum_{\pi(m)=n} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{j\pi(2)} \prod_{l=1}^1 (i \neq k) \prod_{\substack{l>2 \\ l \neq m}} (i \neq j, k)$$

$$\begin{aligned}
S_n \stackrel{!}{=} & (1) + \sum_{\substack{\pi \\ \pi(2)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{2j} \prod_{l \neq 2} (i \neq k) + \sum_{m>2} \sum_{\pi(m)=n} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^2 (i \neq k) \prod_{\substack{l>2 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) \\
& - \sum_{m>2} \left[ \sum_{\substack{\pi \\ \pi(2)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{l \neq 2, m} (i \neq k) + \sum_{\substack{\pi' \\ \pi'(m)=n}} (-1)^{\pi'} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{2j} \check{\sigma}_{j\pi'(2)} \prod_{l \neq 2, m} (i \neq k) \right]
\end{aligned}$$

Die eckige Klammer kann wie zuvor behandelt werden und ist Null.

Bisher wurden in den Termen mit  $m = 1$  und  $m = 2$  die Summanden mit  $i = j$  hinzugefügt. Dies wird nun für alle weiteren Terme iteriert: Der nächste Summand  $m_0 + 1$  wird abgespalten, die restliche Summe über  $m$  wird in zwei Teile geteilt.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m=1}^{m_0} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l \neq m} (i \neq k) + \sum_{m>m_0} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^{m_0} (i \neq k) \prod_{\substack{l>m_0 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) \\
&\stackrel{!}{=} (2) \\
&= (2) + \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m_0+1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{(m_0+1)j} \left[ \prod_{l \neq m_0+1} (i \neq k) - \sum_{m>m_0+1} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq m_0+1}}^{m-1} (i \neq k) \prod_{\substack{l>m \\ l \neq m_0+1}} (i \neq j, k) \right] \\
&\quad + \sum_{m>m_0+1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^{m_0+1} (i \neq k) \prod_{\substack{l>m_0+1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) \\
&\quad - \sum_{m>m_0+1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{(m_0+1)j} \check{\sigma}_{j\pi(m_0+1)} \prod_{l=1}^{m_0} (i \neq k) \prod_{\substack{l>m_0+1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{m=1}^{m_0+1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l \neq m} (i \neq k) + \sum_{m > m_0+1} \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l=1}^{m_0+1} (i \neq k) \prod_{\substack{l > m_0+1 \\ l \neq m}} (i \neq j, k) \\
 &\quad - \sum_{m > m_0+1} \left[ \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m_0+1)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{(m_0+1)j} \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{j\pi(m)} \prod_{l \neq m_0+1, m} (i \neq k) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \check{\sigma}_{(m_0+1)j} \check{\sigma}_{j\pi(m_0+1)} \prod_{l \neq m_0+1, m} (i \neq k) \right] \\
 &\quad \vdots \\
 &= \sum_m \sum_{\substack{\pi \\ \pi(m)=n}} (-1)^\pi \check{\sigma}_{mj} \prod_{l \neq m} (i \neq k)
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

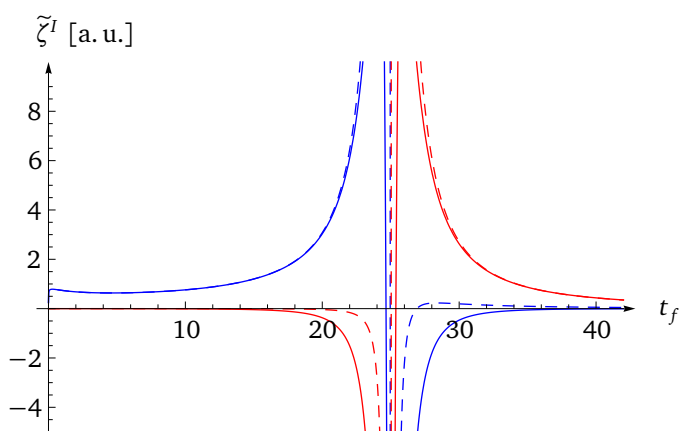
Auf diese Weise wurden nun in allen Termen die Summanden mit  $(i = j)$  hinzugefügt. Das gleiche Verfahren kann nun angewendet werden, um die Terme mit  $(i = k)$  hinzuzufügen. Hierfür wird die Symmetrie mit  $\check{\sigma}_{kn}$  ausgenutzt. Im Gegensatz zu vorher wird der Index  $m$  festgehalten und  $\check{\sigma}_{mj}$  herausgezogen,  $\check{\sigma}_{kn}$  erhält die Funktion von  $\check{\sigma}_{mj}$ . Ansonsten verläuft die Rechnung analog.

Grob skizziert läßt sich die Umformung auch wie folgt beschreiben: In dem Matrizenprodukt ist es äquivalent, Zeile  $j$  von  $\check{\sigma}$  und Spalte  $k$  von  $\check{\sigma}$  oder Zeile  $k$  von  $\check{\sigma}$  und Spalte  $j$  von  $\check{\sigma}$  Null zu setzen. Die Werte der Zeile bzw. Spalte, die Null gesetzt wurden, stehen gerade in der zusätzlichen Zeile bzw. Spalte, nach der entwickelt wird. Bei einer Determinante dürfen beliebige Vielfache von Zeilen bzw. Spalten zu einer anderen addiert werden. Man kann also die Zeile bzw. Spalte, nach der entwickelt wird, zu der Null gesetzten addieren und damit wieder die ursprüngliche Matrix erhalten.

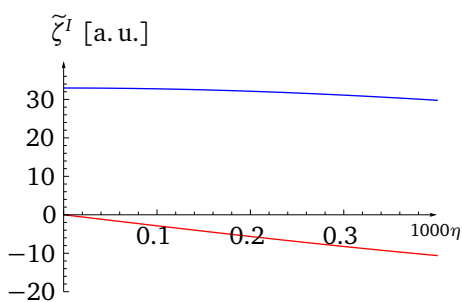
Diese Betrachtung ist nicht mathematisch korrekt, weil die Zeilen-/Spaltenumformung nur für einen einzelnen Faktor erfolgt und nicht für die gesamte Matrix, von der die Determinante berechnet wird. Sie beschreibt aber qualitativ die Grundlage für die hier beschriebene Umformung.

## D. Ergänzende graphische Darstellungen der Ergebnisse

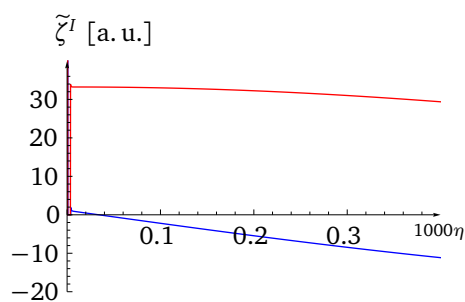
In diesem Abschnitt werden Graphen für ausgewählte Parameter zur Veranschaulichung der Gleichungen aus dem Hauptteil gezeigt. Für alle Graphen wird sofern nicht anders angegeben  $x = 0.3$ ,  $y = 0.2$  und  $\bar{\omega}' = 1$  verwendet.



(a) Plot als Funktion von  $t_f$ . Die durchgezogene Linie ist für  $\eta = 0.001$ , die gestrichelte für  $\eta = 0.0001$

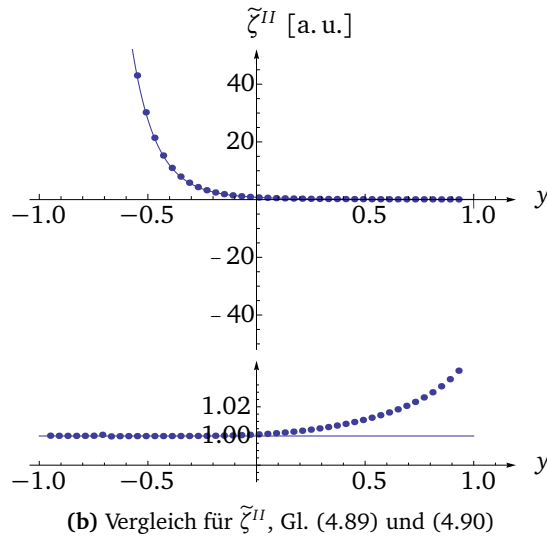
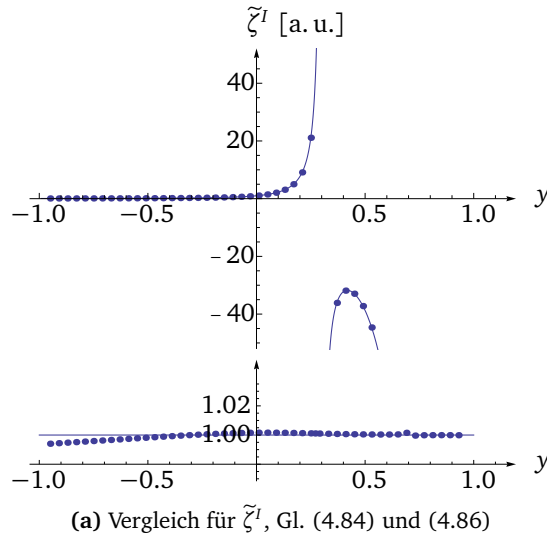


(b) Plot als Funktion von  $\eta$  für  $t_f = 24$

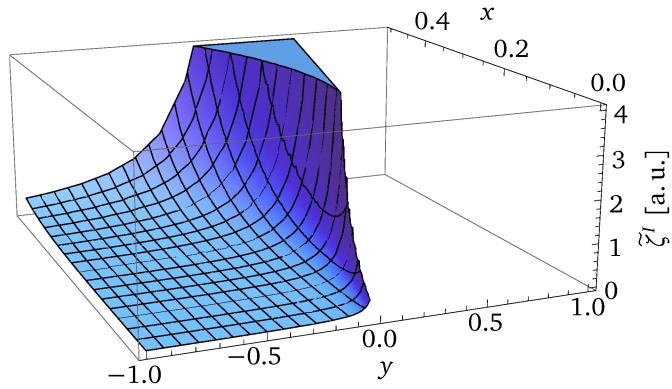


(c) Plot als Funktion von  $\eta$  für  $t_f = 26$

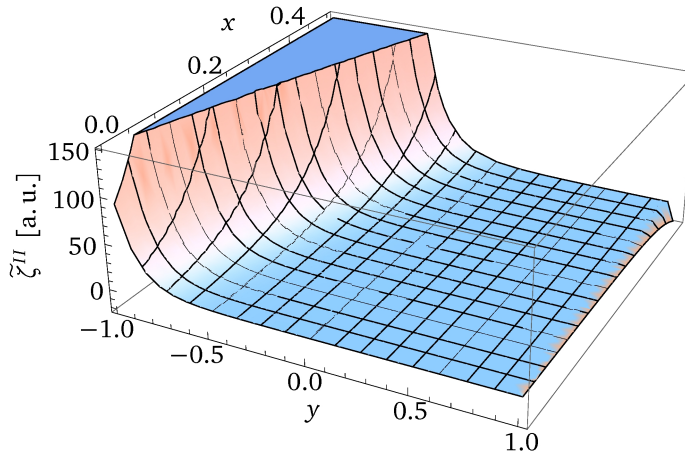
**Abbildung D.1.:** Plot der Appell-Funktion aus  $\tilde{\zeta}^I$ , Gl. (4.83) für  $\epsilon = 0.001$ ,  $\bar{\omega}' = 1$  und  $\bar{\omega}_{th} = 0.04$ . Der Realteil ist in blau dargestellt, der Imaginärteil in rot.



**Abbildung D.2.:** Vergleich der numerischen Daten für  $\epsilon = 0.00001$  mit der genäherten analytischen Lösung. Im jeweils unteren Teil ist das Verhältnis zwischen numerischen und analytischen Daten aufgetragen



(a) Plot für  $\tilde{\zeta}^I$  aus Gl. (4.86)



(b) Plot für  $\tilde{\zeta}^{II}$  aus Gl. (4.90)

**Abbildung D.3.:** Plot der Funktionen  $\tilde{\zeta}$  für  $\bar{\omega}_{th} = 0$ . Der Vorfaktor  $(-i\bar{\omega}')^{-1-2x}$  wird 1 gesetzt.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] Y. ADAMOV UND B. MUZYKANTSKII: *Fermi gas response to the nonadiabatic switching of an external potential*. Phys. Rev. B **64** 245318 (2001).
- [2] I. AFFLECK UND A. W. W. LUDWIG: *The Fermi edge singularity and boundary condition changing operators*. J. Phys. A **27** 5375–5392 (1994).
- [3] P. W. ANDERSON: *Infrared catastrophe in Fermi gases with local scattering potentials*. Phys. Rev. Lett. **18** 1049–1051 (1967).
- [4] B. BRAUNECKER: *Response of a Fermi gas to time-dependent perturbations: Riemann-Hilbert approach to nonzero temperatures*. Phys. Rev. B **73** 075122 (2006).
- [5] H. BRUUS UND K. FLENSBERG: *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*. Oxford University Press, Oxford (2004).
- [6] N. D'AMBRUMENIL UND B. MUZYKANTSKII: *Fermi gas response to time-dependent perturbations*. Phys. Rev. B **71** 045326 (2005).
- [7] A. ERDÉLYI (Hrsg.): *Higher Transcendental Functions*, Band I des Bateman Manuscript Project. McGraw-Hill Book Company Inc., New York (1953).
- [8] A. ERDÉLYI (Hrsg.): *Tables of Integral Transforms*, Band I des Bateman Manuscript Project. McGraw-Hill Book Company Inc., New York (1954).
- [9] H. FRAHM, C. VON ZOBELTITZ, N. MAIRE UND R. J. HAUG: *Fermi-edge singularities in transport through quantum dots*. Phys. Rev. B **74** 035329 (2006).
- [10] J. FRIEDEL: *The distribution of electrons round impurities in monovalent metals*. Philos. Mag. **43** 153 (1952).
- [11] F. G. FUMI: *Vacancies in monovalent metals*. Philos. Mag. **46** 1007 (1955).

- [12] I. S. GRADSHTEYN UND I. M. RYZHIK: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 4. Auflage (1965).
- [13] I. HAPKE-WURST, U. ZEITLER, H. FRAHM, A. G. M. JANSEN, R. J. HAUG UND K. PIERZ: *Magnetic-field-induced singularities in spin-dependent tunneling through inas quantum dots*. Phys. Rev. B **62** 12621–12624 (2000).
- [14] L. INHESTER UND K. SCHÖNHAMMER: *Full counting statistics for noninteracting fermions: joint probability distributions*. J. Phys.: Condens. Matter **21** 474209 (2009).
- [15] L. S. LEVITOV UND G. B. LESOVIK: *Charge distribution in quantum shot noise*. JETP Lett. **58** 230 (1993).
- [16] G. D. MAHAN: *Excitons in Metals: Infinite Hole Mass*. Phys. Rev. **163** 612–617 (1967).
- [17] K. A. MATVEEV UND A. I. LARKIN: *Interaction-induced threshold singularities in tunneling via localized levels*. Phys. Rev. B **46** 15337–15347 (1992).
- [18] N. I. MUSKHELISHVILI: *Singular Integral Equations*. Noordhoff International Publishing, Leyden (1958).
- [19] B. MUZYKANTSKII UND Y. ADAMOV: *Scattering approach to counting statistics in quantum pumps*. Phys. Rev. B **68** 155304 (2003).
- [20] B. MUZYKANTSKII, N. D’AMBRUMENIL UND B. BRAUNECKER: *Fermi-edge singularity in a nonequilibrium system*. Phys. Rev. Lett. **91** 266602 (2003).
- [21] P. NOZIÈRES UND C. T. DE DOMINICIS: *Singularities in the X-ray absorption and emission of metals. III. One-body theory exact solution*. Phys. Rev. **178** 1097–1107 (1969).
- [22] K. OHTAKA UND Y. TANABE: *Theory of the soft-X-ray edge problem in simple metals: historical survey and recent developments*. Rev. Mod. Phys. **62** 929–991 (1990).
- [23] K. D. SCHOTTE UND U. SCHOTTE: *Tomonaga’s model and the threshold singularity of X-ray spectra of metals*. Phys. Rev. **182** 479–482 (1969).
- [24] C. VON ZOBELTITZ: *Fermikantensingularitäten von Quantenpunkten*. Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Universität Hannover (2005).



---

## Publikationen

---

Die folgende Publikation steht mit dieser Arbeit im Zusammenhang.

- [A] H. FRAHM, C. VON ZOBELTITZ, N. MAIRE UND R. J. HAUG: *Fermi-edge singularities in transport through quantum dots*. Phys. Rev. B **74** 035329 (2006).

Weitere Publikationen des Autors:

- [B] F. SCHULZE-WISCHELER, U. ZEITLER, C. v. ZOBELTITZ, F. HOHLS, D. REUTER, A. D. WIECK, H. FRAHM UND R. J. HAUG: *Measurement of the specific heat of a fractional quantum hall system*. Phys. Rev. B **76** 153311 (2007).



---

## Danksagung

---

An dieser Stelle möchte ich meinen Dank an all diejenigen aussprechen, die mich bei meiner Arbeit unterstützt haben und ohne die eine Erstellung dieser Arbeit gar nicht möglich gewesen wäre

Vor allem möchte ich mich bei meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Frahm, bedanken. Er hat mir die Möglichkeit gegeben, mich mit einem interessanten und vielseitigen Thema zu beschäftigen. Bei Fragen und Problemen hatte er immer Zeit für mich und stand mir mit sehr hilfreichen Antworten und Anregungen zur Seite. Er hat mir aber auch den Freiraum gelassen, der zu einer Ausbildung zum selbständigen Arbeiten nötig ist.

Außerdem möchte ich Herrn Prof. Dr. Lein für seine Bereitschaft danken, diese Arbeit als Koreferent zu begutachten.

Mein Dank gilt auch den Kollegen aus der Arbeitsgruppe Frahm, Jörn Bröer, Peter Finch, André Grabinski, Jan Grelik, Sönke Niekamp, Andreas Osterloh, Guillaume Palacios, Tobias Wirth und allen voran Alexander Seel. Die vielen Diskussionen und Gespräche haben mir immer wieder neue Erkenntnisse und Sichtweisen ermöglicht. Ich danke ihnen auch für das Korrekturlesen von Teilen meiner Arbeit und für Kaffee und Kuchen. Ich möchte auch Carsten Luckmann, Henning Fehrmann, Alex Cojuhovschi und Jan Grelik für die Zusammenarbeit bei der Betreuung des Computersystems danken. Sie haben bereitwillig meinen Teil der Arbeit übernommen, wenn die Physik mehr Zeit erforderte.

Danken möchte ich auch den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Kondensierte Materie und dem Institut für Theoretische Physik für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die schöne Zeit hier im Institut.

Meine Arbeit wurde zeitweise finanziert vom Graduiertenkolleg Nr. 282, Quantenfeldtheoretische Methoden in der Teilchenphysik, Gravitation, Statistischen Physik und Quantenoptik, wofür ich sehr dankbar bin.

Mein größter Dank gilt meiner Familie und meinen Freunden, vor allem meinen Eltern Anne und Gerd, und meinem Bruder André, die mich in der gesamten Zeit unterstützt und mir Kraft gegeben haben. Besonders danken möchte ich meiner Frau Mandy. Ohne ihre Liebe, ihre Unterstützung und ihr Verständnis wäre diese Arbeit undenkbar gewesen.



---

## Curriculum Vitae

---

### **Carsten von Zobeltitz**

20.06.1980                      geboren in Bad Pyrmont

### **Allgemeine Schulbildung**

1986 - 1990                      Grundschule Groß Berkel  
1990 - 1992                      Orientierungsstufe Aerzen  
1992 - 1999                      Viktoria-Luise-Gymnasium Hameln  
1999                                Allgemeine Hochschulreife

### **Zivildienst**

07/1999 - 08/2000              Zivildienst beim Deutschen Roten Kreuz Hameln

### **Wissenschaftlicher Werdegang**

10/2000 - 08/2005              Studium Physik an der Universität Hannover  
06/2004 - 06/2005              Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik zu dem  
Thema „Fermikantensingularitäten von Quantenpunkten“  
Betreuer: Prof. Dr. Holger Frahm  
08/2005                              Diplom in Physik an der Universität Hannover  
seit 08/2005                        Promotion am Institut für Theoretische Physik der  
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
Betreuer: Prof. Dr. Holger Frahm