

Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor in der Transportspektroskopie

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
– Dr. rer. nat. –
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Phys. Christian Fricke
geboren am 8. Februar 1977 in Arolsen

2009

Referent: Prof. Dr. Rolf J. Haug
Korreferent: Prof. Dr. Michael Oestreich

Tag der Promotion: 27. Januar 2009

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit werden die elektronische Struktur und die Transporteigenschaften von Quantenpunkten anhand nicht invasiver Ladungsmessung untersucht. Die Detektion der Ladung erfolgt dabei mittels eines Quantenpunktkontaktes in direkter Nähe zur Quantenpunktstruktur. Als Prozessierungstechnik wurde die lokale anodische Oxidation eingesetzt, wobei die gewählte Probengeometrie der untersuchten Strukturen eine separate Kontrolle aller Parameter der Quantenpunkte und Quantenpunktkontakte gewährleistet. Elektrisch getrennte Zuleitungen erlauben dabei eine unabhängige Leitfähigkeitsmessung an Quantenpunkt und Detektor.

Die nichtinvasive Ladungsdetektion kann dazu genutzt werden, Änderungen der Ladung auf einem Quantenpunkt zu beobachten, erlaubt aber auch die Messung von Ladungsumverteilungen bei konstanter Elektronenzahl. Dies wurde genutzt um das Verhalten eines Quantenpunktes im hohen Magnetfeld zu untersuchen, wo der Transport von Elektronen durch die Auswirkungen der Landauschalenstruktur und der Spinblockade dominiert ist. Es war möglich, bei sich änderndem Magnetfeld interne Umverteilungen von Elektronen auf dem Quantenpunkt zu beobachten, ohne dass eine Änderung der Gesamtzahl an Elektronen eintrat.

Die hohe Empfindlichkeit der Ladungsmessung, die im Rahmen dieser Arbeit erreicht wurde, ermöglichte es, Ladungsänderungen auf dem Quantenpunkt in Echtzeit mit einer Bandbreite von 100 kHz zu detektieren. So wurden einzelne Tunnelprozesse von Elektronen auf den

Quantenpunkt und von diesem herunter zu messbar. Dies wurde genutzt um die vollständige Zählstatistik (full counting statistic) des Elektronentransports über den Quantenpunkt zu gewinnen. Bei der Untersuchung des nichtlinearen Transportregimes trat unter Beteiligung angeregter Zustände superpoissonsches Rauschen auf. Die Zählstatistik zeigte in diesem Bereich ein bimodales Verhalten, das durch ein Modell langsamer Umschaltvorgänge zwischen zwei unabhängigen Transportkanälen erklärt werden kann.

Die Bandbreite der Ladungsdetektion, die in dieser Arbeit erreicht werden konnte, erlaubte es eine hinreichend große Anzahl an Tunnelereignissen zu messen, um auch die Bestimmung höherer Kumulanten der Zählverteilung zu ermöglichen. Im Speziellen wurde die Abhängigkeit der Kumulanten von der Messzeit untersucht, was der Analyse des Rauschens bei endlicher Frequenz (finite frequency noise) in der direkten Strommessung entspricht. Wie sich herausstellte, zeigen die Kumulanten in Abhängigkeit von der Zeit ausgeprägte Oszillationen, deren Magnitude faktoriell mit der Ordnung der Kumulante ansteigt. Theoretische Berechnungen stimmen hier hervorragend mit den gewonnen experimentellen Daten überein. Ähnliche Oszillationen wurden auch in Abhängigkeit von der Asymmetrie der Tunnelraten beobachtet.

Die Zählexperimente wurden auch auf einen Dreifachquantenpunkt ausgedehnt, was eine deutliche Zunahme an Komplexität bedeutete. Hier konnten Ladungsänderungen für jeden der einzelnen Quantenpunkte unterschieden und in Echtzeit detektiert werden. Dies ermöglichte die individuelle Charakterisierung der Tunnelbarrieren für jeden der drei Quantenpunkte. Darüber hinaus konnte eine zeitaufgelöste direktionale Transportmessung durch das Quantenpunktsystem demonstriert werden.

Schlagworte: Quantenpunkt, nichtinvasive Ladungsdetektion, vollständige Zählstatistik (full counting statistics)

Abstract

In this thesis the electronic structure and the transport properties of quantum dots are investigated by non-invasive charge detection. This detection is realized using a quantum point contact placed nearby. The devices are patterned by local anodic oxidation into a geometry that allows separate control of all parameters of the quantum dots and the quantum point contacts. Individual leads allow for independent conductance measurement in separate electrical circuits.

The non-invasive charge detection can be used to measure both the change of the total charge on the quantum dot and also reconfigurations of the electronic states at constant electron number. This was used to examine a quantum dot in a high magnetic field where the electronic transport is governed by the effects of Landau shells and spin blockade. It was possible to confirm internal rearrangements of electrons on the quantum dot at fixed electron number when changing the magnetic field.

The high sensitivity of the charge detector realized for this work also allows to detect changes of the quantum dot charge in real time with a bandwidth of up to 100 kHz. Thus individual tunnelling processes of electrons on and off the quantum dot become detectable. This was used to directly measure the full counting statistic of electronic transport through the quantum dot. When investigating the non-linear transport regime super-Poissonian noise was observed when excited states take part in transport. The counting statistic in this regime shows a bimodal behaviour which is explained by a model of a slow switching between

two individual channels with differing tunnelling rates.

The detection bandwidth realized in this work also allowed gathering a sufficiently large number of electron counts for the extraction of higher cumulants of the counting distribution. Special attentions was paid to the dependence of the cumulants on the measurement time which is equivalent to an analysis of finite frequency noise in direct current measurements. It was found that the cumulants display striking oscillations as function of time with magnitudes that grow factorially with the order of the cumulants. Theoretical calculations are in excellent agreement with these observations. Similar oscillations are also observed as functions of the asymmetry of the tunnelling rates on and off the quantum dot.

Increasing the complexity counting measurements were also extended to a triple quantum dot system. Here the changes in the electron number on each individual quantum dot could be distinguished and measured in real time. This allowed the characterization of the individual tunnelling barriers of each dot. Furthermore a real time directional transport measurement of individual electrons through the quantum dot system was demonstrated.

Keywords: quantum dot, non-invasive charge detection, full counting statistics

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	19
2	Theoretische Grundlagen	25
2.1	Das zweidimensionale Elektronengas	26
2.1.1	2DEG im senkrechten Magnetfeld	27
2.1.2	Magnetotransport im 2DEG	30
2.2	Quanten-Hall-Effekt	31
2.2.1	Lokalisierung	32
2.2.2	Das Randkanalbild	35
2.3	Das eindimensionale Elektronengas	39
2.3.1	Transport durch ein 1DEG	40
2.3.2	Der Quantenpunktkontakt	43
2.3.3	Abhängigkeit von Temperatur und Magnetfeld	46
2.4	Das nulldimensionale Elektronengas	49
2.4.1	Das Anregungsspektrum	49
2.4.2	Das Additionsspektrum	52
2.4.3	Die Coulombblockade	55
2.4.4	Coulombrauten	60
2.4.5	Quantenpunkte im senkrechten Magnetfeld .	62
2.5	Full Counting Statistic	65
2.5.1	Der Tunnelprozess	65
2.5.2	Die einzelne Barriere: Poissonverteilung	67
2.5.3	Die kumulatengenerierende Funktion	68

2.5.4	Momente und Kumulanten	71
2.5.5	Tunneln durch zwei Barrieren: Der Quantenpunkt	72
2.5.6	Der Einfluß der Detektorbandbreite	76
3	Experimentelle Grundlagen	79
3.1	Quantenpunktstrukturen	80
3.1.1	Der Einzelquantenpunkt	80
3.1.2	Der Doppelquantenpunkt	82
3.1.3	Der Dreifachquantenpunkt	83
3.2	Nichtinvasive Ladungsdetektion	84
3.2.1	Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor	84
3.2.2	Der Leitfähigkeitsverlauf bei Transportmessungen	87
3.3	Der Messaufbau	90
3.4	Auswertung der zeitaufgelösten Messdaten	93
3.4.1	Das Messsignal	93
3.4.2	Bestimmung der Banden und deren Grenzen .	95
3.4.3	Der Auszählalgorithmus	96
3.4.4	Die Erzeugung einer Verteilung	99
3.4.5	Berechnung der Momente	100
3.4.6	Technische Vergrößerung der Stichprobe . . .	101
3.5	Limitierungen der zeitabhängigen Ladungsmessung . .	103
4	Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor	109
4.1	Nichtinvasive Messung der Coulombblockade	111
4.2	Messung von Coulombrauten mit dem Ladungsdetektor	115
4.2.1	Einfluss der Symmetrie	117
4.2.2	Bestimmung von Systemgrößen	123
4.3	Absolute Ladungsmessung	124
4.3.1	Messung der Besetzungswahrscheinlichkeit . .	126

4.4	Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld	130
4.4.1	Das Fock-Darwin-Spektrum	131
4.4.2	Die Spinblockade	137
4.4.3	Die Umverteilung von Elektronen im senkrechten Magnetfeld	139
4.4.4	Umladelinien zweiter Art	145
4.4.5	Umladungen in einem Doppelquantenpunkt .	147
5	Zeitaufgelöste Ladungsdetektion	151
5.1	Einzelelektronentunneln	152
5.2	Charakterisierung der Detektorbandbreite	156
5.3	Die Verteilung der Tunnelereignisse	159
5.4	Transportspektroskopie mittels Zählstatistik	163
5.5	Bimodale Zählstatistik	165
5.5.1	Bimodale Verteilungen und Umschaltverhalten	168
5.5.2	Modell zweier Transportkanäle	171
5.5.3	Untersuchung des Umschaltverhaltens	174
5.5.4	Auflösbarkeit der Bimodalität	177
5.6	Oszillationen hoher Kumulanten	179
5.6.1	Zeitabhängigkeit hoher Kumulanten	179
5.6.2	Symmetrieabhängigkeit hoher Kumulanten .	186
5.7	Dreifachquantenpunkt	191
5.7.1	Detektion einzelner Tunnelereignisse am Dreifachquantenpunkt	193
5.7.2	Messung der Zählstatistik und die Charakterisierung der Tunnelbarrieren	196
5.7.3	Transport eines einzelnen Elektrons durch zwei Quantenpunkte	199
5.7.4	Einfluss des Detektorstromes	202
5.8	Weitere Anwendungen	206
5.8.1	Charakterisierung einer Störstelle	206

Inhaltsverzeichnis

5.8.2	Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit aus der zeitabhängigen Messung	214
5.8.3	Messung der Tunnelraten	217
6	Zusammenfassung	223
7	Anhang	227
	Literaturverzeichnis	241

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zustandsdichte im 2DEG	27
2.2	Besetzung der Landauniveaus im 2DEG	29
2.3	Quanten-Hall-Effekt	32
2.4	Zustandsdichte und Lokalisierung	34
2.5	Lokalisierung und Widerstände	34
2.6	Landauniveaus am Rand der Probe	36
2.7	Zustandsdichte im 1DEG	40
2.8	1D-Transport	41
2.9	1D Leitwert	44
2.10	Sattelpotential beim Quantenpunktkontakt	45
2.11	Zustandsdichte im 0DEG	50
2.12	Fock-Darwin-Spektrum	51
2.13	Das Additionsspektrum	54
2.14	Die Coulombblockade	56
2.15	Das Ladungsdiagramm	58
2.16	Coulombrauten	59
2.17	Elektronen im Fock-Darwin-Spektrum	62
2.18	Additionsspektrum im Magnetfeld	63
2.19	Der Tunnelprozess	66
2.20	Die Kumulanten	69
2.21	Die Verteilungsfunktion für den Transport durch einen QD	74
2.22	Detektion	76

2.23	Endliche Bandbreite: Verteilung der Tunnelzeiten . . .	77
3.1	Der Einzelquantenpunkt	81
3.2	Der Doppelquantenpunkt	81
3.3	Der Dreifachquantenpunkt	81
3.4	Ladungsdetektion mittels QPC	86
3.5	Leitfähigkeitsverlauf des Detektors	88
3.6	Der Messaufbau	91
3.7	Zeitaufgelöstes Messsignal des QPC Detektors	94
3.8	Grenzen der Banden bestimmen	95
3.9	Schema des Auszählalgorithmus	97
3.10	Ausgezähltes Signal	98
3.11	Erzeugen der Verteilung der Tunnelereignisse	99
3.12	Vergrößerung der Stichprobe	102
3.13	Schematisches Schaltbild der Ladungsmessung	104
3.14	Abschätzung der erreichbaren Bandbreite	106
4.1	Schemabild der Probe	110
4.2	Coulombblockademessung mit dem QPC	110
4.3	Gate-Gate-Diagramm	113
4.4	Coulombrauten	116
4.5	Coulombrauten: Abhängigkeit der QPC Leitfähigkeit von der Laderichtung	118
4.6	Die Symmetrielinie	120
4.7	Coulombrauten entlang der Symmetrielinie	122
4.8	Messung absoluter Ladungsänderungen	125
4.9	Messung der Besetzungswahrscheinlichkeit	128
4.10	Besetzungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der Tun- nelraten	129
4.11	Der QD im senkrechten Magnetfeld	132
4.12	Der QD im senkrechten Magnetfeld - Detail	133

4.13	Schwankung der Leitfähigkeit im Magnetfeld	134
4.14	Das Schalenmodell	135
4.15	Die Spinblockade	137
4.16	Umladungen im Magnetfeld	140
4.17	Umladungen im Magnetfeld - Schnitt	141
4.18	Umladungen im Magnetfeld - Das Schalenmodell . . .	143
4.19	Identifizierung der Konfiguration	144
4.20	Umladelinien zweiter Art	147
4.21	Umladungen im Magnetfeld - Doppelquantenpunkt- struktur	148
4.22	Schematische Darstellung der Umladungen mit drei Landauschalen	149
5.1	Zeitaufgelöstes Messsignal des QPC Detektors	153
5.2	Verteilung der Tunnelzeiten	155
5.3	Bestimmung der Detektorbandbreite	157
5.4	Begrenzung der Detektorbandbreite durch die Auswer- tung	158
5.5	Der statistisch verteilte Strom	160
5.6	Verteilung der Tunnelereignisse	161
5.7	Coulombrauten aus der Zählstatistik	164
5.8	Fanofaktor für Coulombrauten	166
5.9	Bimodale Verteilungen	168
5.10	Zeitliche Entwicklung zur Bimodalität	169
5.11	Verteilung der Tunnelzeiten für die beiden Transport- moden	170
5.12	Bimodalität: Modell und Experiment	173
5.13	Statistik der Umschaltvorgänge	174
5.14	Ratenmodell für die bimodale Statistik	176
5.15	Sichtbarkeit von Bimodalität	177
5.16	Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_2 , C_3 und C_4 . . .	179

5.17	Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_4 bis C_7	182
5.18	Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_8 bis C_{15}	183
5.19	Messfehler der Kumulanten C_5 bis C_{11}	184
5.20	Einfluss der Symmetrie	187
5.21	Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten C_2 bis C_{10} . .	188
5.22	Der Dreifachquantenpunkt	191
5.23	Ladungsdiagramm des Dreifachquantenpunkts	192
5.24	Zeitaufgelöste Messung an den drei Quantenpunkten .	195
5.25	Gezählte Tunnelereignisse am TQD	197
5.26	Charakterisierung der Tunnelraten des TQD	198
5.27	Transportmessung Elektron für Elektron	200
5.28	Auswirkung hohen Detektorstromes	203
5.29	Ladeverhalten einer Störstelle	207
5.30	Ladestatistik einer Störstelle	209
5.31	Anregungsenergie der Störstelle	211
5.32	Einfluß externer Störung auf die Emission	213
5.33	Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit aus zeit- aufgelöster Messung	215
5.34	Besetzungswahrscheinlichkeit aus nichtlinearer zeitauf- gelöster Messung	216
5.35	Die Tunnelraten für Coulombblockadepeaks	218
5.36	Die Tunnelraten in Abhängigkeit von der Source-Drain- Spannung	219
7.1	Zeit- und Symmetrieabhängigkeit bis C_{11} anhand ei- nes numerischen Experiments	238

Symbol- und Abkürzungsverzeichnis

Symbole

a	Asymmetriefaktor
\vec{A}	Vektorpotential
Al	Aluminium
As	Arsen
\vec{B}	Magnetfeld
B	Betrag des Magnetfelds
β	Bandbreite der Messung
β_1, β_2	Steigungen der Coulombraute
C	Kapazität
C_m	Die m -te Kumulante einer Verteilung
$D(E)$	Zustandsdichte bezüglich der Energie
ΔX	Änderung einer Messgröße X
e	Elementarladung ($1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C)
e_n	Spannungsrauschen eines Verstärkers
E	Energie
\vec{E}	Elektrisches Feld
E_F	Fermienergie
E_L	Ladeenergie
ϵ_0	Dielektrizitätskonstante
ϵ	Relative Dielektrizitätskonstante

Abbildungsverzeichnis

f	Frequenz
\mathfrak{F}	Kumulantengenerierende Funktion
F	Fermifunktion $F(E)$
g^*	effektiver Spinentartungsfaktor
G	Leitfähigkeit
Ga	Gallium
Γ	Rate, meist Tunnelrate
h	Plank'sches Wirkungsquantum
\hbar	$h/2\pi$
\hat{H}	Hamiltonoperator
He	Helium, je nach Isotop auch 4He oder 3He benannt
I	Strom
i_n	Stromrauschen eines Verstärkers
\vec{j}	Stromdichte
$\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$	Wellenvektor in x,y,z-Richtung
k	Betrag des Wellenvektors
k_B	Boltzmann-Konstante
l_B	magnetische Länge
M_m	Das m-te Moment einer Verteilung
m_e	Ruhemasse des Elektrons ($9,1095 \cdot 10^{-31}$ kg)
m^*	effektive Elektronenmasse
μ	chemisches Potential, meist mit Index z.B. μ_N
μ_B	Bohrsches Magneton ($\frac{e\hbar}{2m_e} = 9,2741 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$)
μ_e	Beweglichkeit der Elektronen
$\mu_{4.2K}$	Beweglichkeit der Elektronen bei 4.2 K
n	Anzahl in statistischen Betrachtungen
n	Hauptquantenzahl
N	Eine Gesamtanzahl
n_e	Elektronendichte
$n_{4.2K}$	Elektronendichte bei 4.2 K

n_L	Entartungsgrad eines Landau-Niveaus
ν	Füllfaktor
P	Wahrscheinlichkeitsdichte
P_b	Besetzungswahrscheinlichkeit
p_x, p_y, p_z	Impuls in x, y, z -Richtung
π	Kreiszahl $\pi = 3,14159\dots$
R	Reflexionswahrscheinlichkeit
Φ	Potential
R	Widerstand
R_H	Hall-Widerstand
R_K	von Klitzing-Konstante ($\approx 25812,807\Omega$)
r_n	klassischer Zyklotronradius
$\hat{\rho}$	Widerstandstensor
$\rho_{xx,xy,yx,yy}$	Komponenten des 2D Widerstandstensors
Si	Silizium
s	Spinquantenzahl
S	Rauschleistungsdichte
$\hat{\sigma}$	Leitfähigkeitstensor
$\sigma_{xx,xy,yx,yy}$	Komponenten des 2D Leitfähigkeitstensors
T	Temperatur
T	Transmissionswahrscheinlichkeit
t	Zeit
t_0	Intervall der Zählstatistik
τ	Eine Wartezeit, meist eine Tunnelzeit
τ_e, τ_{in}	Tunnelzeit für den Emitter
τ_c, τ_{out}	Tunnelzeit für den Kollektor
v	Geschwindigkeit
V	Spannung
V_{G1}, V_{G2}, \dots	Gatespannung an Gate $G1, G2, \dots$
V_{SD}	Spannung zwischen Source und Drain
V_{GQD}	Gatespannung an einem Gate des Quantenpunkts

Abbildungsverzeichnis

V_{GPC}	Gatespannung am Gate des Quantenpunktkontaktes
ω_c	Zyklotronfrequenz
ω_x, ω_y	Kreisfrequenz x,y-Richtung

Abkürzungen

0D	nulldimensional
1D	eindimensional
2D	zweidimensional
2DEG	zweidimensionales Elektronengas
Abb.	Abbildung
AC	Wechselstrom / -spannung
AFM	Rasterkraftmikroskop (atomic force microscope)
DAC	Digital-Analog-Wandler (digital analog converter)
DC	Gleichstrom / -spannung
DQD	Doppelquantenpunkt (double quantum dot)
<i>et al.</i>	und Coautoren (et alii)
FCS	Full Counting Statistik
Gate	Steuerelektrode
G1, G2, G3, ...	Gate Nummer 1,2,3...
LAO	lokale anodische Oxidation
QD	Quantenpunkt (quantum dot)
QHE	Quanten-Hall-Effekt
QPC	Quantenpunktkontakt (quantum point contact)
SMU	messfähige Strom-Spannungs-Quelle (source measure unit)
TQD	Dreifachquantenpunkt (triple quantum dot)

1

Kapitel 1

Einleitung

Seit ihrer Entwicklung Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts hat die Quantenmechanik unsere Vorstellungen über das Wesen der Welt grundlegend verändert. Sie widerspricht in vielem scheinbar den alltäglichen Erfahrungen und stellt klassische Vorstellungen in Frage. Auch Wissenschaftlern mit Weltruhm, wie etwa Albert Einstein, bereitete die Abkehr vom soliden deterministischen Verhalten klassischer Teilchen hin zu Aufenthaltswahrscheinlichkeiten und Wellencharakter Schwierigkeiten. Heute sind die quantenmechanischen Eigenheiten der elementaren Bausteine unserer Welt natürlich allgemein akzeptiert. Doch noch immer stehen diese ungewöhnlichen Eigenschaften im Zentrum des wissenschaftlichen Interesses.

Quantenmechanische Eigenschaften werden die meisten Leser am ehesten mit dem Atom verbinden. In der Tat ist das Atom und speziell die Spektroskopie an Atomen ein Forschungsgebiet, das unmittelbar mit der Entwicklung der Quantenmechanik verbunden ist. Die Herausforderung beim Umgang mit dem Atom ist seine unvorstellbar geringe Größe. Sein Durchmesser beträgt etwa einem Ångström, das sind

1 Einleitung

0.1 nm oder 10^{-10} m. Es ist damit, anschaulich gesprochen, schlechterdings unmöglich, Drähte an ein Atom anzuschließen.¹

Mit dem Voranschreiten der technischen Möglichkeiten im Bereich der Halbleitertechnologie entstand ein neues Feld quantenmechanischer Untersuchungen. Mit Hilfe der Molekularstrahlepitaxie wurde es möglich, Halbleitermaterialien auf Basis von Einkristallen maßzuschneidern und sogenannte Heterostrukturen zu erzeugen [3, 4]. Im Kristallgitter von geeigneten Materialien eingebettet ist die effektive Masse eines Elektrons deutlich herabgesetzt [5]. Dadurch nimmt seine de-Broglie-Wellenlänge zu [6]. Anschaulich bedeutet dies, dass die quantenmechanischen Eigenschaften von Elektronen auf größeren Längenskalen sichtbar sind.

Schränkt man etwa Elektronen innerhalb eines solchen Halbleiters räumlich ein, so treten bereits bei einigen Hundert Nanometern Strukturgröße Eigenschaften auf, wie man sie von Atomen kennt. Solche Strukturen, die man Quantenpunkte nennt, werden daher auch als künstliche Atome bezeichnet. Wie Atome bilden sich in Quantenpunkten diskrete Energiezustände, die von Elektronen besetzt werden können [7]. Es bilden sich Orbitale und Schalen [8]. Quantenpunkte lassen sich, je nach der Zahl der Elektronen die sie enthalten, sogar in einer Art Periodensystem einordnen [9] und durch das Koppeln von Quantenpunkten ist es möglich, künstliche Moleküle zu erschaffen [10]. Anders als bei Atomen ist bei Quantenpunkten aber eine direkte Einflussnahme des Experimentators möglich. Durch fortgeschrittene Bearbeitungsmethoden wie die Elektronenstrahlithographie [11–14] oder die Nanostrukturierung mittels Rasterkraftmikroskop [15] können Zuleitungen an einen Quantenpunkt herangeführt und Gatestrukturen in

¹Die Aussage muss mit Einschränkungen versehen werden. Experimente an sogenannten *break junctions* ermöglichen es, sehr kleine Strukturen elektrisch zu untersuchen [1, 2]. Auch wenn dabei kein einzelnes Atom untersucht wird, kommen die Experimente diesem Bild schon recht nahe.

seiner Nähe platziert werden. Es ist damit möglich, den Transport von Elektronen durch den Quantenpunkt zu untersuchen. Durch das Anlegen von Spannungen an Gates kann zudem die Zahl der Elektronen, die auf dem Quantenpunkt Platz finden, geändert werden. Bei solcher Art Messungen werden die diskreten Energieniveaus eines Quantenpunktes sichtbar, weshalb man in diesem Zusammenhang von Transportspektroskopie spricht. Als Anfänge der Transportspektroskopie könnte man die Untersuchungen zum Tunneln von Elektronen auf kleine metallische Strukturen sehen. In diesen Untersuchungen wurde bereits das Laden mit einzelnen Elektronen beobachtet, was zur Entwicklung des Einzelelektronentransistors führte [16].

Die Transportspektroskopie an Quantenpunkten entwickelte sich schnell zu einem breiten wissenschaftlichen Feld [7, 9]. Messungen an derart kleinen Strukturen sind jedoch ein herausforderndes Unterfangen. Speziell wenn Quantenpunkte nur schwach an die Umwelt gekoppelt werden, sind die fließenden Ströme sehr gering. So ist es zwar möglich, Quantenpunkte vollständig zu entleeren [8, 17, 18], aber häufig sinken die Ströme zuvor unter den messbaren Bereich. Als Ausweg bietet sich eine Ladungsdetektion im direkten Umfeld des Quantenpunktes an. Eine elegante - da kaum invasive - Lösung hierzu präsentierten 1993 Field *et al.*, indem sie mit einem eindimensionalen Transportkanal, einen Quantenpunktkontakt, Ladungsänderungen auf einem benachbarten Quantenpunkt detektierten [19]. Der Quantenpunktkontakt trägt selbst keine lokalisierte Ladung und ist damit ein sehr geeigneter Detektor. Mit dem Ladungsdetektor wurden so Messungen bei Besetzung mit nur einem einzelnen Elektron möglich [20–22]. Diese Technik ermöglichte aber auch eine Vielzahl neuartiger Experimente. Bei Doppelquantenpunkten etwa konnte nun auch der Ort eines Elektrons bestimmt werden, eine Voraussetzung für die Nutzung als Ladungsqubit [21, 23, 24]. Diese Fähigkeit macht man sich auch bei Dreifachquantenpunkten zunutze [25–27].

1 Einleitung

Der nächste Schritt war nun, die Ladungsdetektion in Echtzeit durchzuführen und so den Strom als Abfolge von Tunnelereignissen beobachten zu können. Eine zeitaufgelöste Messung von tunnelnden Elektronen wurde im Jahr 2003 mit einem Einzelelektronentransistor als Detektor realisiert [28]. 2004 erfolgte die Umsetzung mit dem Quantenpunktkontakt [29, 30]. Die Zeitauflösung machte unter anderem die Messung des Elektronenspins über die Umwandlung der Spinnmessung in eine Ladungsmessung [31–33] möglich. Ebenso konnte ein direktionales Elektrometer demonstriert werden [34]. Für die Transportspektroskopie eröffnete die zeitaufgelöste Messung ein neues Feld. Statt nur den Strom oder den Ladungszustand zu messen, ergibt sich damit die Möglichkeit, eine Zählstatistik des Transports zu ermitteln, was 2006 von Gustavsson *et al.* demonstriert wurde [35]. Mittels sogenannter Full Counting Statistic lassen sich damit auch Eigenschaften des Transports analysieren, die bei Gleichgewichtsmessungen verborgen bleiben, wie etwa Transport über virtuelle Prozesse [36] oder Interferenzeffekte [37].

Diese Arbeit behandelt die Nutzung des Quantenpunktkontaktes als Ladungsdetektor. Grundlage der Untersuchungen sind Strukturen auf Basis von GaAs/AlGaAs-Heterostrukturen. Die präsentierten Messungen erstrecken sich sowohl auf die Ladungsmessung im Gleichgewichtsfall, als auch auf zeitaufgelöste Untersuchungen und Zählstatistik. Der Aufbau der Arbeit folgt dabei der beschriebenen Entwicklung dieser Detektionstechnik, in deren Kontext auch die präsentierten Ergebnisse einzuordnen sind. Vor der Beschreibung der gewonnenen Erkenntnisse, werden in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen betrachtet. Ausgehend von einem zweidimensionalen Elektronensystem wird das Verhalten von eindimensionalen Kanälen und nulldimensionalen Strukturen - den Quantenpunkten - vorgestellt.

Darauf folgt mit Kapitel 3 die Vorstellung der untersuchten Strukturen und Messverfahren. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf

das Konzept der Ladungsmessung mit dem Quantenpunktkontakt gelegt, sowie auf die Auswertung des zeitaufgelösten Signals und die Umsetzung der Zählstatistik. In Kapitel 4 beginnt die Präsentation der Ergebnisse. Dieses Kapitel behandelt die Ladungsmessung mit dem Quantenpunktkontakt. Die Ladungsdetektion wird dabei zusammen mit der Strommessung am Quantenpunkt zur Untersuchung der Elektronenstruktur des Quantenpunktes genutzt. Die Besonderheiten der Ladungsdetektion werden dabei herausgestellt, wie etwa die Messung von Besetzungswahrscheinlichkeiten. Bei Messungen im Magnetfeld wird gezeigt, dass auch die Umverteilung von Elektronen auf einem Quantenpunkt messbar ist und damit ein direkter Nachweis der Schalenstruktur von Quantenpunkten erbracht.

Während Kapitel 4 Gleichstrommessungen präsentiert, wird in Kapitel 5 der Übergang zu zeitaufgelöster Ladungsdetektion gemacht. Es wird der statistische Charakter des Einzelelektronentransports demonstriert, indem die Verteilungen von Tunnelzeiten und Tunnelereignissen untersucht werden. Wie die Messung einer Zählstatistik neue Einblicke in Transportprozesse erbringen kann, wird mit der Präsentation bimodaler Verteilungen verdeutlicht. Charakterisierend für eine Zählstatistik sind ihre Kumulanten, deren Zeitabhängigkeit präsentiert und mit theoretischen Berechnungen verglichen wird. Zusammen mit darauf folgenden Untersuchungen zur Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten wird ein Ausblick auf experimentelle Limitierungen der Messung hoher Kumulanten möglich. Am Ende des Kapitels werden weitere Möglichkeiten vorgestellt, die sich aus der Messung eines zeitaufgelösten Ladungssignals ergeben. So wird die Charakterisierung des Ladeverhaltens einer Störstelle präsentiert und die Bestimmung von Tunnelraten und Besetzungen aus dem Ladungssignal demonstriert.

Abgeschlossen wird die Arbeit in Kapitel 6 mit der Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse.

Kapitel 2

2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der durchgeführten Experimente vorgestellt. Zunächst wird auf den Transport in niederdimensionalen Systemen eingegangen und die grundlegenden Eigenschaften von Quantenpunkten und Quantenpunktkontakten erläutert. Danach wird ausgehend vom Tunnelprozess die Statistik des Transports durch Quantenpunkte beleuchtet. Ein Einstieg in die Full Counting Statistik beendet dieses Kapitel.

2.1 Das zweidimensionale Elektronengas

In einem zweidimensionalen Elektronengas (2DEG) sind die Elektronen in einer Bewegungsrichtung soweit eingeschränkt, dass sich eine Quantisierung in dieser Dimension ausprägt [38]. In Analogie zu einem idealen Gas spricht man dabei von einem Elektronengas, wenn man die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigen kann. Durch die Reduktion auf zwei Bewegungsrichtungen ergibt sich die Energie eines Elektrons in einem 2DEG aus der Addition zweier kontinuierlicher Spektren. Nimmt man an, dass die Quantisierung in der z -Richtung vorliegt und die Bewegung der Elektronen in der (x, y) -Richtung stattfindet, so kann die Gesamtenergie in der Form

$$E^n(\vec{k}_x, \vec{k}_y) = \frac{\hbar^2 \vec{k}_x^2}{2m_x^*} + \frac{\hbar^2 \vec{k}_y^2}{2m_y^*} + E_z^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

geschrieben werden. Die beiden ersten Terme beschreiben mit den Wellenvektoren \vec{k}_x und \vec{k}_y die Bewegung in der Ebene, der dritte Term stellt die quantisierte Energie in der z -Ebene dar, indiziert durch die Quantenzahl n . Die effektive Masse $m_{x,y}^*$ beinhaltet den Einfluss des Kristallgitters auf die Bewegung der Elektronen in der entsprechenden Richtung. Im Materialsystem GaAs kann die effektive Masse in guter Näherung als richtungsunabhängig angenommen werden. Bei $T \sim 1.5 \text{ K}$ gilt für GaAs $m^* \simeq m_{x,y,z}^* \simeq 0.067 m_0$.

Abbildung 2.1 zeigt die Zustandsdichte eines solchen 2DEG, die durch eine Summe aus Stufenfunktionen beschrieben werden kann:

$$D(E) = \frac{m^*}{\pi \hbar^2} \sum_n \Theta(E - E_z^n). \quad (2.2)$$

Der stufenförmige Verlauf ist eine Folge der sukzessiven Besetzung der quantisierten Niveaus in z -Richtung, die in diesem Kontext auch als

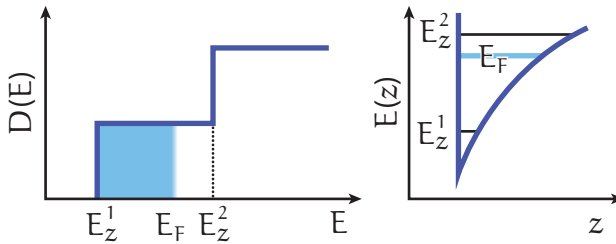


Abbildung 2.1:

Schematische Darstellung der Zustandsdichte eines zweidimensionalen Elektronengases (links). Daneben ist zudem das einschließende Potential E_z abgebildet, das zur Quantisierung in z -Richtung führt. E_F markiert jeweils das Niveau der Fermienergie.

Subbänder bezeichnet werden. Ist wie in Abbildung 2.1 nur ein einziges Subband besetzt, so kann man von einem echt zweidimensionalen System sprechen. Sind mehrere Subbänder beteiligt, wird das System auch als quasi-zweidimensional bezeichnet. In Abbildung 2.1 ist auf der rechten Seite zudem ein Beispiel für ein einschließendes Potential in z -Richtung zu sehen, wie es sich z.B. in den im Rahmen dieser Arbeit verwandten Probenmaterialien ausbildet.

2.1.1 Zweidimensionales Elektronengas im senkrechten Magnetfeld

Das Anlegen eines Magnetfeldes senkrecht zum 2DEG führt dazu, dass die beiden freien Bewegungsrichtungen der Ebene nicht länger unabhängig voneinander beschrieben werden können. In der klassischen Vorstellung zwingt die Lorentzkraft die Elektronen auf Kreisbahnen. Ein solches System mit $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = B\vec{e}_z$ erfährt ein Vektorpotential \vec{A} , das nur Komponenten senkrecht zu \vec{B} besitzt. Daraus ergibt sich

2 Theoretische Grundlagen

quantenmechanisch ein Hamilton-Operator

$$\hat{H} = \hat{H}_\perp + \frac{p_z^2}{2m^*}, \quad (2.3)$$

der zusammengesetzt ist aus einem auf x und y wirkenden Anteil \hat{H}_\perp und einem Term, der nur auf z wirkt. Hierbei wird von einem echt zweidimensionalen System ausgegangen. Für mehr als das erste Subband eines 2DEG käme noch ein Beitrag $V(z)$ für das Einschlusspotential in z -Richtung hinzu. Die Schrödingergleichung ist lösbar [39] und führt auf die Energieeigenwerte

$$E^n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.4)$$

wobei ω_c die Zyklotronfrequenz ist und sich zu

$$\omega_c = \frac{eB}{m^*} \quad (2.5)$$

ergibt. Diese Energieniveaus nennt man Landauniveaus. Bei tiefen Temperaturen ($k_B T \ll \hbar\omega_c$) werden die einzelnen Energieniveaus E_n in energetischer Reihenfolge aufsteigend besetzt. Dies ist schematisch in Abbildung 2.2 aufgezeigt.

Eine dabei bedeutungsvolle Größe ist die magnetische Länge

$$l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}. \quad (2.6)$$

Sie stellt einen Anhaltspunkt für die ungefähre Ausdehnung der Elektronenwellenfunktion dar. Der klassische Zyklotronradius der Elektronen ergibt sich dann zu

$$r_n = l_B \cdot \sqrt{2n + 1}. \quad (2.7)$$

2.1 Das zweidimensionale Elektronengas

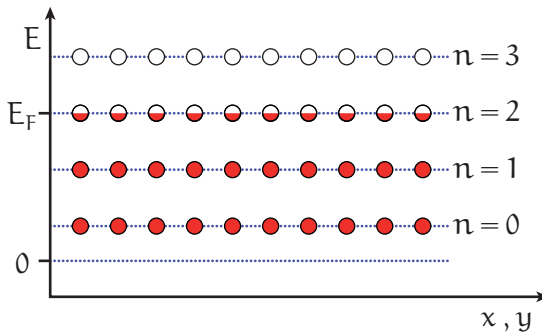


Abbildung 2.2:

Besetzung der Landau-niveaus bei niedrigen Temperaturen im senkrechten Magnetfeld. Die Fermienergie stimmt im gezeigten Fall mit dem Landau-niveau zu Landauquantenzahl $n = 2$ überein.

Berücksichtigt man außerdem die mit dem Spin verbundene Zeeman-aufspaltung, so folgt für die Energie

$$E^{n,s} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + s\mu_B g^* B. \quad (2.8)$$

Dabei bezeichnet s die Spinquantenzahl ($s = \pm\frac{1}{2}$), g^* den effektiven g -Faktor und μ_B das Bohrsche Magneton. Der Entartungsgrad der Landau-niveaus unter Berücksichtigung des Spins beträgt damit:

$$n_L = \frac{eB}{h} = D(E) dE. \quad (2.9)$$

Dies führt bei gegebener Ladungsträgerkonzentration zur Definition des Füllfaktors ν :

$$\nu = \frac{n_e}{n_L} = \frac{\hbar n_e}{eB}. \quad (2.10)$$

Der Füllfaktor ν kennzeichnet somit die Anzahl der gefüllten spin-aufgespaltenen Landau-niveaus. Die zugrundeliegende Zustandsdichte

2 Theoretische Grundlagen

des 2DEG im senkrechten Magnetfeld wird durch eine Summe aus Deltafunktionen beschrieben:

$$D(E, B) = \frac{eB}{h} \sum_{n,s} \delta(E - E^{n,s}). \quad (2.11)$$

2.1.2 Der klassische Magnetotransport im 2DEG

Existiert im 2DEG ein elektrisches Feld \vec{E} , so ruft dieses eine lokale Stromdichte \vec{j} hervor. Die Abhängigkeit der Stromdichte vom elektrischen Feld wird beschrieben durch den Leitfähigkeitstensor $\hat{\sigma}$ beziehungsweise den dazu inversen Widerstandstensor $\hat{\rho}$. Diese beiden Größen sind im zweidimensionalen Elektronensystem Tensoren zweiter Ordnung:

$$\vec{j} = \hat{\sigma} \vec{E} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = \hat{\rho} \vec{j} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\hat{\rho}} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{yy} \end{pmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Aus dieser Beschreibung eines isotropes Systems ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{-\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}. \quad (2.14)$$

Der Längsanteil ρ_{xx} ergibt sich aus der klassischen Drude-Theorie. Der Querswiderstand skaliert linear mit dem Magnetfeld, was Edwin H. Hall 1879 beschrieb [40]. Der Querswiderstand wird deshalb auch als Hallwiderstand bezeichnet.

$$\rho_{xx} = \frac{1}{en_e\mu_e} \quad \text{und} \quad \rho_{xy} = \frac{B}{en_e}. \quad (2.15)$$

Die Bestimmung des spezifischen Längs- und Querwiderstandes ermöglicht damit eine direkte Ableitung der Elektronendichte n_e sowie der Beweglichkeit μ_e . Die Beweglichkeit ist hierbei ein Maß der Streuung von Elektronen an statischen (z.B. Störstellen im Kristall) oder dynamischen (z.B. Phononen) Streupotentialen.

2.2 Der Quanten-Hall-Effekt

Während im klassischen Grenzfall ($\hbar\omega_c \ll k_B T$) eine lineare Beziehung zwischen Magnetfeld und Querwiderstand beobachtet wird, stellt man bei tiefen Temperaturen ($\hbar\omega_c \gg k_B T$) eine Quantisierung des Hallwiderstands gemäß

$$R_H = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\nu} = \frac{R_K}{\nu}, \quad \nu = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

fest. Im Längswiderstand der Probe zeigen sich Minima, die gleichzeitig mit den quantisierten Plateaus im Hallwiderstand auftreten. Dieses Verhalten wurde erstmals 1980 von Klaus von Klitzing beobachtet [41]. Die Größe $R_K \approx 25812,807 \Omega$ wird als von-Klitzing-Konstante bezeichnet. Da dieser Wert weder von den Probeneigenschaften noch von Umgebungsvariablen, wie etwa der Temperatur, abhängt, wird der Quanten-Hall-Effekt seit 1990 zur Bestimmung der Widerstandsnormale verwendet. Der Verlauf der longitudinalen Widerstandskomponente wird als Shubnikov-de-Haas-Oszillationen bezeichnet [42]. In Abbildung 2.3 ist eine typische Messung im Quanten-Hall-Regime zur Bestimmung von longitudinaler und transversaler Widerstandskomponente eines 2DEG in Abhängigkeit eines senkrecht angelegten Magnetfeldes gezeigt.

2 Theoretische Grundlagen

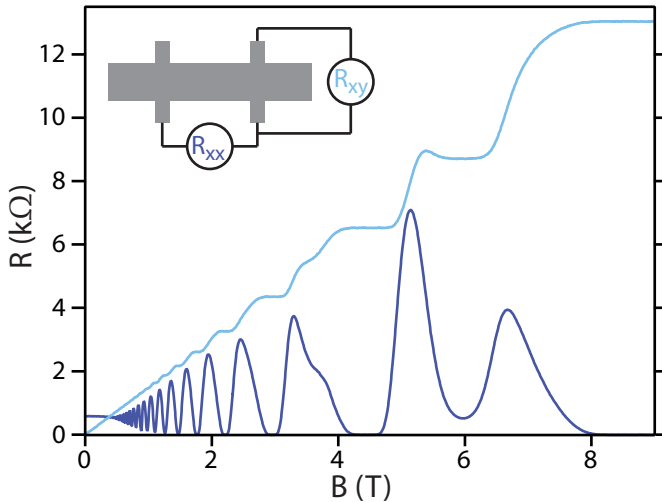


Abbildung 2.3:

Longitudinaler (R_{xx} , dunkelblau) und transversaler Widerstand (R_{xy} , hellblau) eines 2DEG in Abhängigkeit eines senkrecht angelegten Magnetfeldes.

Zur Erklärung des Auftretens der Plateaus sollen hier zwei unterschiedliche Modelle herangezogen werden. Das erste geht von der Existenz von lokalisierten und delokalisierten Zuständen aus. Das zweite Modell führt das Auftreten der Plateaus auf die Existenz von Randkanälen zurück, die in endlichen Proben durch deren räumliche Begrenzung auftreten.

2.2.1 Lokalisierte und delokalisierte Zustände

Eine Veränderung des Magnetfeldes ändert die energetische Aufspaltung $\hbar\omega_c \sim B$ der Landauniveaus (siehe (2.5)). Dabei werden die oberen Niveaus entleert und die Elektronen besetzen zunehmend die

Verweise auf
Formeln erfolgen
in Klammern. Ein
Verweis auf Formel
Nummer 2.5 wird
z.B. geschrieben
als (2.5).

unteren Zustände, da mit wachsendem Magnetfeld gleichzeitig auch der Entartungsgrad der jeweiligen Landauniveaus steigt (siehe (2.10)). Mit steigendem Magnetfeld verschieben sich die Landauniveaus also zu höheren Energien und durchlaufen nacheinander das Fermienergie E_F (siehe Abb. 2.2).

Aufgrund von Streuung an Störstellen, Phononen oder an in realen Probensystemen grundsätzlich vorhandenen Kristalldefekten werden die deltaförmigen Landauniveaus energetisch verbreitert [43]. Dies hat neben delokalisierten Zuständen im Bereich der Landauniveaus auch lokalisierte Zustände in den Bereichen zwischen den Niveaus zur Folge [44]. Eine schematische Darstellung der daraus folgenden Zustandsdichte zeigt Abbildung 2.4.

Befinden sich im Bereich des Fermienergie lokalisierte Zustände, so kann kein elektrischer Transport über die Probe stattfinden, da die verfügbaren Zustände räumlich lokalisiert und nicht über die gesamte Probe ausgedehnt sind. Die Leitfähigkeit längs der Probe sinkt auf Null ab. Im Querwiderstand ergeben sich Plateaus; solange nur lokalisierte Zustände energetisch erreichbar sind, ändert sich der Querwiderstand nicht. Im Zentrum der Landauniveaus kann der elektrische Transport dagegen über delokalisierte Zustände erfolgen und die Leitfähigkeit längs der Probe nimmt einen endlichen Wert an. Der Querwiderstand hingegen wächst, da das Landauniveau nach und nach entleert wird. Der Wert des Hallwiderstands hängt dabei vom Füllfaktor ν ab, der angibt, wieviele der Niveaus besetzt sind.

$$R_H = \frac{h}{e^2 \nu}$$

Die Shubnikov-de-Haas-Oszillationen lassen sich im Bild der ausgedehnten und lokalisierten Zustände qualitativ als Oszillationen der freien Zustandsdichte verstehen. Die Argumentation gleicht der Erklärung der Hallplateaus. Befinden sich an der Fermikante ausgedehnte Zustände, so wird Ladungstransport möglich und die Leitfähigkeit nimmt zu.

2 Theoretische Grundlagen

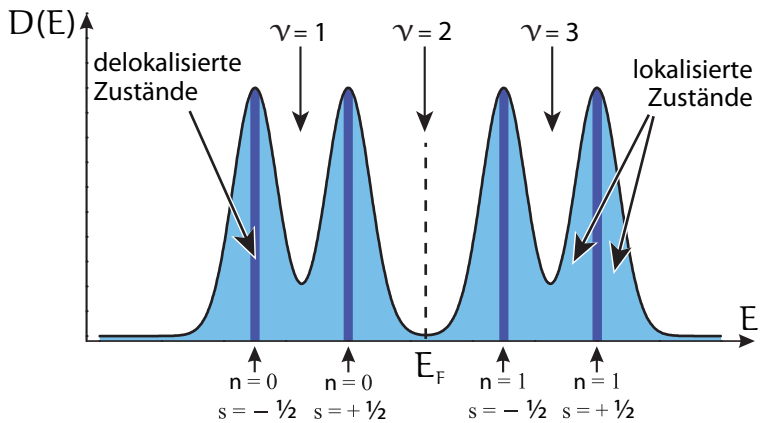


Abbildung 2.4:

Zustandsdichte eines zweidimensionalen Elektronengases im Magnetfeld. Im Bereich der spin-aufgespaltenen Landau-niveaus sind die Zustände delokalisiert, dazwischen liegen lokalisierte Zustände.

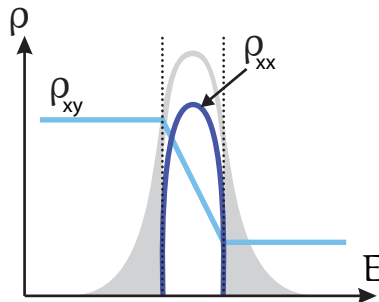


Abbildung 2.5:

Verlauf der Widerstände ρ_{xx} und ρ_{xy} unter Betrachtung lokalisierter (grau unterlegt) und delocalisierter Zustände (weiß unterlegt).

Gleichzeitig nimmt dabei auch der spezifische Widerstand ρ_{xx} zu (vergleiche (2.14)).

Befinden sich dort jedoch lokalisierte Zustände so wird der Stromfluss unterbunden. Dabei fällt zugleich auch ρ_{xx} auf Null ab. Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Für eine quantitative Beschreibung dieses Vorgangs muss außerdem die mit dem Magnetfeld variierende Anzahl der ausgedehnten Zustände, die Streulänge der Elektronen und die Oszillation der Fermienergie berücksichtigt werden. Eine detaillierte Beschreibung zu Quantenhaloeffekt und Shubnikov-de Haas-Oszillationen, insbesondere der beiden unterschiedlichen Modelle, findet sich in [44].

2.2.2 Das Randkanalbild

Im Bild lokalisierter und delokalisierter Zustände wird der Verlauf der Widerstände im Magnetfeld qualitativ verständlich. Warum jedoch die exakte Quantisierung der Hallplateaus in ganzzahligen Vielfachen von h/e^2 auftritt, lässt sich einfacher im Randkanalbild darlegen. Dabei wird im Gegensatz zum oben beschriebenen Modell lokalisierter und delokalisierter Zustände die Geometrie der Probe zur Erklärung mit einbezogen.

Die endlichen Abmessungen einer Probe führen dazu, dass die Elektronen an den Rändern ein Einschlußpotential vorfinden. Bei der Annäherung an den Rand der Probe werden die Landauniveaus kontinuierlich zu höheren Energien verbogen. Daraus folgt, dass jedes besetzte Landauniveau nun in Richtung Rand hin an einem gewissen Ort einen Schnittpunkt mit der Fermienergie besitzen muss. Für die obersten Elektronenzustände auf Höhe der Fermienergie bilden sich dadurch eindimensionale Randkanäle. Für jedes Landauniveau unterhalb der Fermienergie wird so ein Randkanal geschaffen.

Eine Skizze dieser Verformung sieht man in Abbildung 2.6. Ein

2 Theoretische Grundlagen

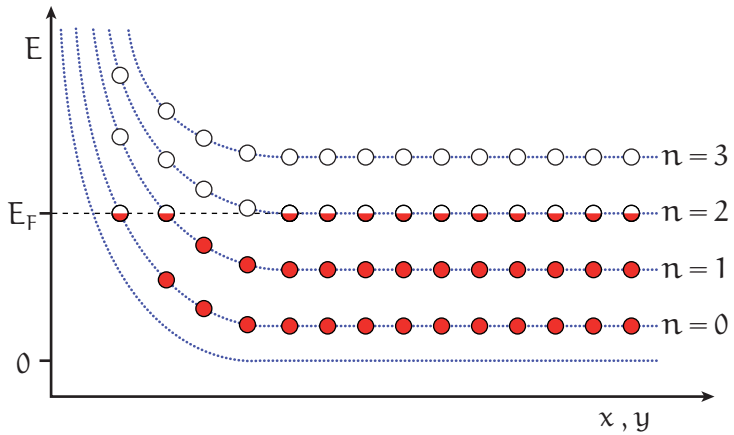


Abbildung 2.6:

Verbiegung der Landauniveaus unter Einfluß eines Einschlusspotentials am Rand der Probe. Die besetzten Niveaus durchstoßen zum Rand hin die Fermienergie, und es entstehen Randkanäle.

solcher Verlauf der Landauniveaus hätte jedoch eine unstetige und somit unphysikalische Form der Ladungsträgerdichte zur Folge. Dieses Problem lässt sich umgehen, indem man das Randkanalbild um die Wechselwirkung der Elektronen untereinander erweitert. Dies führt dann dazu, dass die Landauniveaus in Randnähe Plateaus ausbilden, innerhalb derer sich die Elektronen in y -Richtung, also in Richtung des Probenrandes, frei bewegen lassen. In den Übergangsbereichen zwischen zweier solcher Plateaus gelingt dies nur unter Aufbringung von zusätzlicher Energie. Man spricht daher im Bereich der Landauplateaus auch von kompressiblen Streifen, während die Übergänge als inkompressible Streifen bezeichnet werden [45].

Die Randkanäle, über die im Bereich ganzzahliger Füllfaktoren der Ladungstransport stattfindet, sind dabei parallel zum Probenrand ver-

laufende eindimensionale Zustände. Im Inneren des 2DEGs liegen dagegen lokalisierte Zustände vor, die in erster Näherung nicht zur Leitfähigkeit beitragen. Die Zahl der Randkanäle entspricht dabei der Anzahl der besetzten spinaufgespaltenen Landauniveaus, wie bereits Abbildung 2.6 verdeutlicht. Für den Fall $\nu = 3$ stehen also beispielsweise drei Randkanäle für den Transport zur Verfügung. Dabei sind je nach angelegtem Potential und Magnetfeldrichtung nur jeweils die Kanäle einer Probenseite am Transport beteiligt.

Das Konzept der Randkanäle lässt sich mathematisch durch den von R. Landauer [46, 47] vorgeschlagenen und von M. Büttiker [48] weiterentwickelten Landauer-Büttiker-Formalismus beschreiben. Dabei wird der Transport zwischen verschiedenen Strom- und Potentialkontakten über die Transmissionswahrscheinlichkeit eindimensionaler Kanäle charakterisiert [49–51]. Der in einen Kontakt i fließende Strom wird dabei ausgedrückt durch:

$$I_i = \frac{2e}{h} \left((N_i - R_i)\mu_i - \sum_{j(j \neq i)} \mu_j T_{j \rightarrow i} \right) \quad (2.17)$$

N_i bezeichnet hier die Anzahl der vom Kontakt i ausgehenden Kanäle. Der Anteil R_i/N_i wird in den Kontakt i zurückreflektiert. Die Summe über $T_{j \rightarrow i}$ beschreibt die Transmission der von den verschiedenen Kontakten j zum Kontakt i verlaufenden Randkanäle. Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten T und R werden noch mit den chemischen Potentialen $\mu_{i,j}$ der entsprechenden Kontakte gewichtet. Der Vorfaktor $2e/h$ wird für spinaufgespaltene Randkanäle zu einem e/h .

Nimmt man nun beispielsweise den Fall eines Füllfaktors $\nu = 3$ an, so liegen an beiden Probenrändern drei Transportkanäle vor. Da Rückstreuung aus einem Randkanal über die lokalisierten Zustände des Probeninneren bis zum gegenüberliegenden Probenrand sehr unwahr-

2 Theoretische Grundlagen

scheinlich ist, kann eine vollständige Transmission der eindimensionalen Kanäle entlang der Probe vorausgesetzt werden. Zudem wird angenommen, dass Potentialkontakte zur Messung der Querspannung keinen Strom liefern oder abziehen. Zwischen Eingangs- und Ausgangskontakt an den Enden der Probe liegt eine Potentialdifferenz $\Delta\mu$ vor.

Dann entspricht das Potential des in Stromrichtung Transport führenden Probenrandes dem des Eingangskontaktes. Der gegenüberliegende Rand, dessen Randkanäle eine Transportrichtung entgegen der Stromrichtung aufweisen, liegt dagegen auf dem Potential des Ausgangskontakts. In einem solchen Fall wird man keine Längsspannung und damit einen verschwindenden Längswiderstand messen. $\Delta\mu/e$ entspricht dann der Hallspannung U_H . Für den Strom I entlang der Probe ergibt sich aus (2.17) mit $R_i = 0$ und $T_{j \rightarrow i} = 1$:

$$I = 3 \frac{e^2}{h} U_H. \quad (2.18)$$

Jeder der Transportkanäle bringt also einen Beitrag von e^2/h zur Leitfähigkeit ein. Für den Hallwiderstand folgt damit allgemein:

$$R_H = \frac{U_H}{I} = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{h}{e^2} \quad (2.19)$$

Im Randkanalbild folgt die Quantisierung des Hallwiderstandes im Plateaubereich also direkt aus der vollständigen Transmission der eindimensionalen Kanäle, die wiederum in der räumlichen Trennung der beiden Transportrichtungen begründet liegt. Dabei werden Vielteilcheneffekte wiederum vernachlässigt. Dieses Modell kann jedoch bereits eine Vielzahl an Transportphänomenen anschaulich erklären [52, 53].

2.3 Das eindimensionale Elektronengas

Wird die freie Bewegung in einem 2DEG um eine weitere Dimension eingeschränkt, führt dies zu einem System in dem nur noch eine Bewegungsrichtung verfügbar ist: einem eindimensionalen Elektronengas (1DEG). Im Abschnitt 2.2.2 wurde hierauf bereits ein kurzer Vorgriff gemacht, als von eindimensionalen Randkanälen die Rede war. Im Folgenden sollen die Transporteigenschaften des 1DEG betrachtet werden.

Sei $V(z)$ wieder das Einschlußpotential in z -Richtung. Nun kommt zusätzlich ein Einschlußpotential $V(y) = \frac{m^*}{2}\omega_y^2 y^2$ in y -Richtung hinzu. Für die Gesamtenergie eines Elektrons erhält man hiermit:

$$E^{i,n}(\vec{k}_x) = \frac{\hbar^2 \vec{k}_x^2}{2m^*} + \left(i - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_y + E_z^n \quad (2.20)$$

Dabei bezeichnet i die neu hinzugekommene Quantenzahl der Quantisierung in y -Richtung und ω_y die Kreisfrequenz des harmonischen Potentials $V(y)$. Die Zustandsdichte eines solchen eindimensionalen Systems wird wie folgt beschrieben:

$$D(E) = \frac{2m^*}{\pi\hbar^2} \sum_{i,n} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*(E - E_y^i - E_z^n)}} \Theta(E - E_y^i - E_z^n). \quad (2.21)$$

In Abbildung 2.7 ist eine schematische Darstellung dieser Zustandsdichte zu sehen. Hierbei liegt die Annahme $E_y^i - E_y^{i-1} \ll E_z^n - E_z^{n-1}$ zugrunde. Unter dieser Voraussetzung kann sich auf der Basis eines 2DEG durch Einschnürung auf eine Dimension ein 1DEG mit verschiedenen Subbändern ausbilden. Diese Subbänder werden auch als eindimensionale Moden oder Kanäle bezeichnet.

2 Theoretische Grundlagen

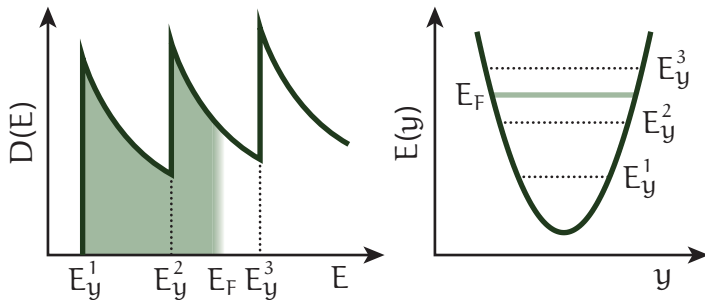


Abbildung 2.7:

Schematische Darstellung der Zustandsdichte eines eindimensionalen Elektronengases (links). Daneben ist zudem das harmonische Einschlusspotential E_y abgebildet, das zur Quantisierung in y -Richtung führt. E_F markiert jeweils das Niveau der Fermienergie.

2.3.1 Transport durch ein 1DEG

Eine schematische Darstellung des Transport von Elektronen durch ein 1DEG ist in Abbildung 2.8 zu sehen. Das 1DEG verbindet hier zwei Reservoirs mit den chemischen Potentials μ_1 und μ_2 . Diese werden im Folgenden als Source und Drain bezeichnet. Um einen Transport in eine Richtung aufzuprägen, wird eine Spannung V_{SD} zwischen diesen Reservoirs Source und Drain angelegt. Die Potentialdifferenz beträgt dann eV_{SD} . Zum Transport durch ein solches System steht dann prinzipiell eine Vielzahl von Kanälen zur Verfügung, die durch die jeweiligen Werte für ihre Transmission T und Reflexion R charakterisiert werden. Im Schemabild trägt nur ein einzelner Kanal zum Transport bei. Dieser Fall soll nun zunächst genauer betrachtet werden.

Der durch das 1DEG fließende Strom ergibt sich aus dem Differenzstrom beider Transportrichtungen.

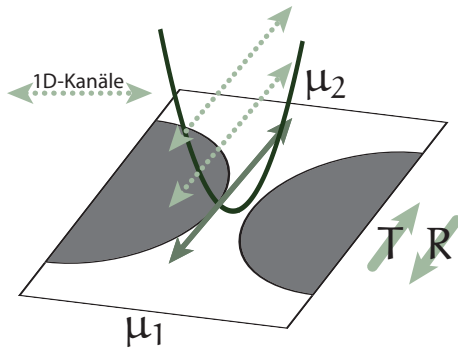


Abbildung 2.8:

Schematische Darstellung des 1D-Transportes. Der Transport zwischen zwei Reservoirs mit den Potentials μ_1 und μ_2 erfolgt über eindimensionale Kanäle. Die Transporteigenschaften der 1D-Engstelle können über deren Transmission T und Reflexion R beschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 I &= e \cdot \left(\int_0^{\infty} dE v \cdot D_{\rightarrow} \cdot T \cdot F(\mu_1) \cdot (1 - F(\mu_2)) \right) \\
 &\quad - e \cdot \left(\int_0^{\infty} dE v \cdot D_{\leftarrow} \cdot T \cdot F(\mu_2) \cdot (1 - F(\mu_1)) \right) \\
 &= e \cdot \left(\int_0^{\infty} dE v \cdot \frac{1}{2} D \cdot T \cdot (F(\mu_1) - F(\mu_2)) \right). \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Bei den Integralen ist zu bedenken, dass die Zustandsdichte D_{\leftrightarrow} und die Transmission T von der Energie E abhängen. Dabei soll gelten $D_{\rightarrow}(E) = D_{\leftarrow}(E) = \frac{1}{2}D(E)$. Ferner bezeichnet v die ebenfalls energieabhängige Geschwindigkeit und $F(\mu_{1,2})$ die Fermi-Dirac-

2 Theoretische Grundlagen

Verteilung gemäß:

$$F(\mu, E) = \left(\exp \left(\frac{E - \mu}{k_B T} \right) + 1 \right)^{-1}. \quad (2.23)$$

Die Stromgleichung (2.22) kann weiter vereinfacht werden. Zunächst kann man sich zunutze machen, dass sich Geschwindigkeit und eindimensionale Zustandsdichte bis auf konstanten Faktor gegenseitig wegheben:

$$v(E) \cdot D(E) = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{dk}{dE} = \frac{4}{\hbar} \quad (2.24)$$

Nimmt man ferner eine geringe Spannung zwischen beiden Reservoiren an, also $eU_{SD} \ll \mu_{1,2}$, so kann die Fermiverteilung entwickelt werden. In erster Ordnung in eU_{SD} folgt aus der Taylor-Entwicklung:

$$F(\mu_1, E) - F(\mu_2, E) = \frac{\partial F}{\partial E} eU_{SD}. \quad (2.25)$$

Für tiefe Temperaturen $T \rightarrow 0$ ergibt sich daraus unter Ausnutzung von $\mu \approx E_F$ für $T \approx 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial E} eU_{SD} = \delta(E_F) eU_{SD}. \quad (2.26)$$

Damit wird aus (2.22) unter Ausnutzung dieser Näherung:

$$I = \frac{2e^2}{\hbar} T(E_F) U_{SD}. \quad (2.27)$$

Der Leitwert eines 1DEG mit einem Transportkanal ist damit:

$$G = \frac{I}{U_{SD}} = \frac{2e^2}{\hbar} T(E_F). \quad (2.28)$$

Für den allgemeinen Fall von N Transportkanälen kann unter der Annahme, dass die Kanäle voneinander unabhängig Strom führen, eine einfache Addition über alle Kanäle ausgeführt werden.

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^N T_n(E_F). \quad (2.29)$$

Dies entspricht der bereits im Abschnitt 2.2.2 angesprochenen Landauerformel [51]. Für den Fall eines perfekt transmittierenden 1DEG kann nun eine Transmission $T_n = 1$ angesetzt werden und man erhält die Leitfähigkeit für den sogenannten ballistischen Transport durch das 1DEG:

$$G = N \cdot \frac{2e^2}{h} \quad (2.30)$$

Die Bezeichnung „ballistischer Transport“ beschreibt dabei genau den Fall, dass die Elektronen ohne Streuung den 1D-Kanal durchlaufen. Dies trifft insbesondere auf das Transportverhalten durch die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Quantenpunktkontakte zu.

Eine schematische Darstellung der Leitfähigkeit eines 1DEG ist in Abbildung 2.9 zu sehen. Wie aus (2.30) hervorgeht, steigt mit jedem Subband, das am Transport durch das 1DEG beteiligt ist, die Leitfähigkeit stufenweise um $2e^2/h$.

2.3.2 Der Quantenpunktkontakt

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Quantenpunktkontakte (quantum point contact, QPC) verwendet, die eine spezielle Form des 1DEG darstellen. Hergestellt wurden diese, indem innerhalb eines 2DEG eine eindimensionale Engstelle geschaffen wurde. Dies führt zu einem sehr kurzen 1D-Kanal, dessen geringe Ausdehnung sicherstellt, dass unter

2 Theoretische Grundlagen

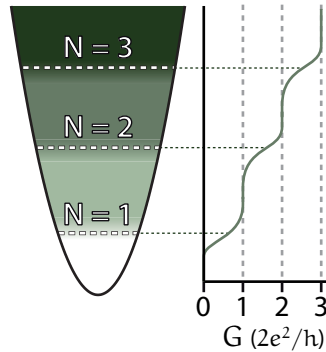


Abbildung 2.9: Schematische Darstellung der Leitfähigkeit G des 1DEG. Mit jedem neuen Subband ($N = 1, 2, 3$) steigt die Leitfähigkeit um $2e^2/h$.

den gegebenen Bedingungen der Transport durch den Quantenpunkt-kontakt ballistisch erfolgt. Im Bereich des QPCs bildet sich dabei ein Potentialverlauf aus, der in guter Näherung durch ein Sattelpotential beschrieben werden kann:

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 - \frac{1}{2}m^*\omega_x^2x^2 + \frac{1}{2}m^*\omega_y^2y^2 \quad (2.31)$$

Diese Näherung ist speziell dann gut, wenn das 1DEG sehr kurz ist und das Potential praktisch nur durch die engste Stelle definiert ist [54]. Genau dies ist beim QPC der Fall. Der QPC wird gebildet, indem das 2DEG durch Seitengates auf einen eindimensionalen Kanal verengt wird. Die „Seitengates“ sind Bereiche des 2DEG, die elektrisch isolierend von der Engstelle und den Zuleitungen abgetrennt sind, an die aber eine Spannung angelegt werden kann, um die Engstelle des QPC zu beeinflussen. Schematisch ist dies in Abbildung 2.10(a) dargestellt. Mittels der Gates kann die Zahl der verfügbaren Subbänder

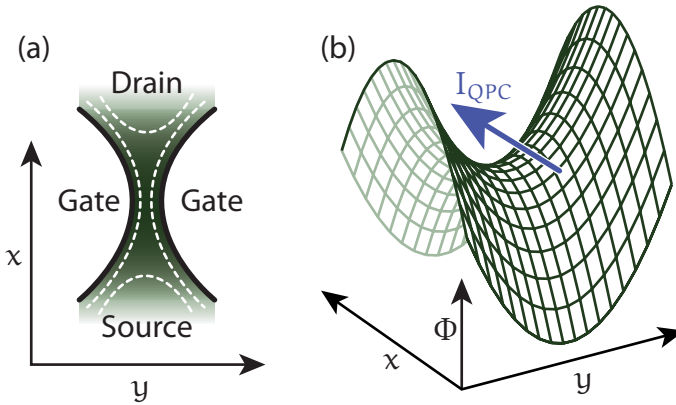


Abbildung 2.10:

Schematische Darstellung des Potentialverlaufs eines Quantenpunktkontakts. Links ist eine Aufsicht auf die x, y -Ebene dargestellt. Es prägen sich transmittierende und reflektierende Kanäle aus. Rechts sieht man das sattelförmige Potential Φ des QPCs.

variiert werden. Das Sattelpotential, dargestellt in Abbildung 2.10(b), wird durch eine Veränderung der Gatespannung anschaulich gesprochen nach oben oder unten verschoben.

Für ein solches Potential wurden von M. Büttiker in [55] die Transmissionswahrscheinlichkeiten T_n der 1D-Kanäle analytisch bestimmt:

$$T_n = \left(1 + \exp \left(-\pi \frac{2 \left(E - \left(n - \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y - \Phi_0 \right)}{\hbar \omega_x} \right) \right)^{-1} \quad (2.32)$$

Ausschlaggebend für die Transmission und damit für den Leitwert des QPC ist also der Quotient ω_y/ω_x also das Verhältnis der Krümmung des Potentials in y - und x -Richtung. Ist $\omega_y/\omega_x \gg 1$ so erhält man steile Übergänge und klare Plateaus in der Leitfähigkeit. Ist

2 Theoretische Grundlagen

dagegen $\omega_y/\omega_x \lesssim 1$ so sind die Stufen in der Leitfähigkeit zunehmend ausgewaschen und nur noch schwer zu erkennen, bis sie im Fall $\omega_y/\omega_x \ll 1$ vollständig verschwinden. Wird der QPC als Ladungsdetektor genutzt, so ist ein steiler Übergang zwischen den quantisierten Niveaus der Leitfähigkeit ausschlaggebend für eine hohe Sensitivität (Siehe hierzu Abschnitt 3.2.1). Daher ist es hierbei wünschenswert, einen möglichst großen Quotienten ω_y/ω_x zu erhalten. Dies bedeutet anschaulich, dass ein sanfter Potentialanstieg in x -Richtung und ein steiler Anstieg in y -Richtung wünschenswert ist.

2.3.3 Abhängigkeit von Temperatur und Magnetfeld

Neben der Geometrie der Engstelle haben noch weitere Parameter Einfluss auf den Verlauf der Leitfähigkeit des QPCs. Hier sollen Temperatur und Magnetfeld betrachtet werden, da deren Einfluss ebenfalls eine Limitierung der Funktionalität als Ladungsdetektor darstellt.

Eine endliche Temperatur hat eine energetische Verschmierung des Verlaufs der Leitfähigkeit zur Folge [56, 57]. Für den Fall kleiner Vorspannung gilt:

$$G = \frac{2e^2}{h} \sum_{n=1}^N \int_0^{\infty} dE \frac{\partial F}{\partial E} T_n(E). \quad (2.33)$$

Dabei beträgt die Breite des Maximums von $\partial F/\partial E \approx 3.5k_B T$. Dies limitiert die Auflösbarkeit der quantisierten Leitfähigkeitsstufen. Für einen Energieabstand der 1D-Kanäle von ΔE folgt, dass eine Temperatur

$$T = \frac{\Delta E}{3.5k_B} \quad (2.34)$$

für eine klare Identifikation von Leitfähigkeitsplateaus deutlich unterschritten werden muss. Gleichzeitig sinkt die Steilheit des Anstiegs zwischen den Plateaus. Dies begrenzt deutlich die Sensitivität des QPCs

auf Ladungsänderungen in seiner Umgebung in diesem Anstiegsbereich. Für einen typischen Energieabstand erhält man gemäß [58] eine Temperatur $T \cong 6 \text{ K}$ als Detektionsschwelle. Für eine Nutzung des QPCs als Ladungsdetektor ist dagegen eine deutlich niedrigere Temperatur wünschenswert. Eine Temperatur von etwa 1.5 K kann bei typischen QPCs bereits eine deutliche Einschränkung der Detektorqualität bedeuten.

Der Einfluss des Magnetfelds äußert sich vielfältiger. Zum einen geht der Betrag des Magnetfeldes über einen zusätzlichen Zeemanterm $E_B = s\mu_B g^* B$ in das Energiespektrum des QPC ein. Dies sorgt bei entsprechend hohem Magnetfeld für eine Aufhebung der Spinentartung und für die Ausprägung von Leitwertstufen mit einem Abstand von e^2/h anstelle der Nullfeldsituation mit $2e^2/h$ hohen Stufen in der Leitfähigkeit.

Zum anderen führt ein senkrecht angelegtes Magnetfeld zu einer effektiven Erhöhung des Einschlußpotentials $\Phi(y)$ und zu einer Modifikation der effektiven Masse. Die Gleichung (2.20) wird dann zu:

$$E^{i,n}(\vec{k}_x) = \frac{\hbar^2 \vec{k}_x^2}{2m_B} + \left(i - \frac{1}{2}\right) \hbar\omega + s\mu_B g^* B + E_z^n, \quad (2.35)$$

mit $\omega = \sqrt{\omega_y^2 + (eB/m^*)^2}$ und $m_B = m^* \omega^2 / \omega_y^2$.

Die Folge ist bei gleichbleibenden Gatepotentials eine zunehmende Entvölkerung der eindimensionalen Kanäle mit steigendem Magnetfeld. Dies zeigt sich in einer Verbreiterung der Leitfähigkeitsplateaus [59]. Zudem hat die Erhöhung des Potentials in y -Richtung einen positiven Effekt auf das Verhältnis ω_y/ω_x . Damit ist ein leicht steilerer Übergang zwischen den Plateaus zu erwarten.

Für die Funktionalität des QPCs als Detektor ist dies zunächst nicht nachteilig, die leicht steilere Flanke des Übergangs zwischen den Plateaus ist sogar vorteilhaft. Sobald jedoch eine Feldstärke erreicht ist,

2 Theoretische Grundlagen

bei der die Spinentartung soweit aufgehoben ist, dass sich auch bei e^2/h Plateaus ausbilden, hat dies Auswirkungen auf die Nutzung des QPC als Ladungsdetektor. Da das Plateau bei e^2/h eine deutliche Einschränkung der Sensitivität bedeutet, ist der Arbeitspunkt unterhalb des ersten spinaufgespaltenen Leitfähigkeitsplateaus zu wählen. Dies bedeutet eine merkliche Einschränkung des Dynamikbereichs. Dem kann durch die kontinuierliche Anpassung des Arbeitspunktes entgegengewirkt werden.

Für noch höhere Magnetfelder bilden sich in Zuleitung und Engstelle Randkanäle aus. Der QPC fungiert dann als Filter für die Anzahl der transmittierten und reflektierten Kanäle [60, 61]. Dabei ändert sich der Verlauf der Leitfähigkeit vor allem im nichtlinearen Regime [58]. Dies hat jedoch bei einem Arbeitspunkt unterhalb von e^2/h und geringer Source-Drain-Spannung keinen nennenswerten Einfluß auf die Charakteristik des QPC-Detektors. Die niedrige Leitfähigkeit, bei der der QPC dann betrieben werden muss, und die gleichzeitige Beschränkung auf niedrige Spannungen limitiert jedoch die Auflösung des Detektors.

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

Grenzt man mittels Potentialbarrieren die Beweglichkeit von Elektronen in allen drei Raumrichtungen so weit ein, dass ihre Energie nicht mehr kontinuierliche, sondern nur noch diskrete Werte annehmen kann, dann spricht man von einem 0DEG. De facto bedeutet dies, dass die räumliche Ausdehnung eines 0DEGs in der Größenordnung der Wellenlänge der Elektronen liegen muss. Ein echtes 0DEG hätte dabei nur einen einzigen energetischen Zustand. Analog zum 2DEG und 1DEG spricht man jedoch auch bei Systemen mit mehreren diskreten Zuständen von (quasi)-nulldimensionalen Systemen.

Die Zustandsdichte eines solchen Systems ist eine Abfolge von diskreten Zuständen:

$$D(E) = 2 \cdot \sum_n \delta(E - E_n). \quad (2.36)$$

Eine schematische Darstellung dieser Zustandsdichte ist in Abbildung 2.11 zu finden. Die Zustände sind als Deltafunktionen am Ort ihrer Zustandsenergie eingezeichnet. Die Zustände des 0DEG sind vollständig quantisiert und können diskreten Energien zugeordnet werden. Nur für die Energien E_n existieren Zustände.

Ein 0DEG wird häufig als Quantenpunkt (quantum dot, QD) oder künstliches Atom bezeichnet. Die Analogie zum Atom liegt durch die Quantisierung der elektronischen Zustände auf der Hand. Im Folgenden wird nun stets von Quantenpunkten die Rede sein.

2.4.1 Das Anregungsspektrum

Quantenpunkte besitzen eine diskrete Zustandsdichte, da die Bewegung der Elektronen in jeder Raumrichtung eingeschränkt ist. Diese Einschränkung erfolgt durch Potentiale. In z -Richtung erfolgt dies für die in dieser Arbeit untersuchten QDs durch das Einschlusspotential

2 Theoretische Grundlagen

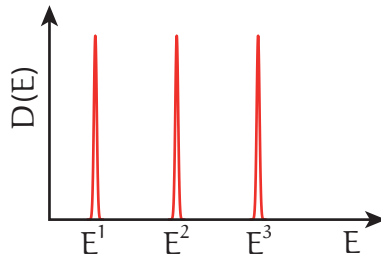


Abbildung 2.11:

Schematische Darstellung der Zustandsdichte eines nulldimensionalen Elektronengases: Die Zustände sind vollständig quantisiert.

des 2DEGs. In der x,y -Ebene werden die Elektronen durch die Strukturierung der Probe eingeschränkt. Diese Strukturierung hat in guter Näherung ein harmonisches Einschlusspotential Φ_{ext} zur Folge.

$$\Phi_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 \quad (2.37)$$

Dabei ist ω_0 die Kreisfrequenz des harmonischen Potentials und r der Radius in der x,y -Ebene. Der Hamiltonoperator eines Quantenpunktes sieht unter Berücksichtigung eines externen Magnetfeldes damit folgendermaßen aus [62]:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_0^2 r^2 + \Phi(z) \quad (2.38)$$

Fock und Darwin haben 1930 das Energiespektrum dieses Systems erstmals berechnet [63, 64]. Das Fock-Darwin-Spektrum beschreibt ein einzelnes Elektron, weshalb es auch als Anregungsspektrum bezeichnet wird.

$$E^{i,n,m,s} = (n+1)\hbar\sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2} - \frac{1}{2}\hbar\omega_c m + s g^* \mu_B B + E^i \quad (2.39)$$

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

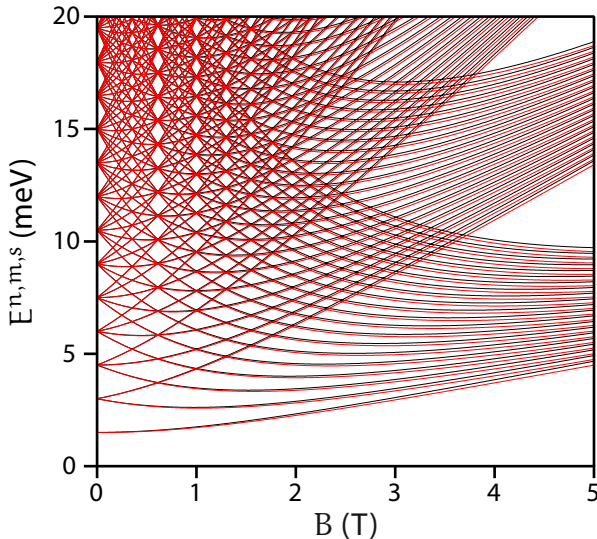


Abbildung 2.12:

Das Fock-Darwin-Spektrum berechnet für $\hbar\omega_0 = 1$ meV. Die roten Linien repräsentieren jeweils $s = \uparrow$, die schwarzen $s = \downarrow$.

Dabei ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $m = -n, -n + 2, \dots, n - 2, n$. Ersetzt man $\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{1}{4}\omega_c^2$ und betrachtet alle Energien als Abstand zur Subbandenergie E^i , so folgt:

$$E^{n,m,s} = (n + 1)\hbar\Omega - \frac{1}{2}\hbar\omega_c m + sg^*\mu_B B. \quad (2.40)$$

Dieses Spektrum ist in Abbildung 2.12 gezeigt.

Für $B = 0$ ergibt sich aus (2.40) ein äquidistantes Anregungsspektrum

$$E^n = (n + 1)\hbar\omega_0 \quad (2.41)$$

2 Theoretische Grundlagen

mit einem Energieabstand von $\hbar\omega_0$. Die Quantenzahlen s und m sorgen hier für eine $2(n+1)$ -fache Entartung der Zustände.

2.4.2 Das Additionsspektrum

Bislang wurde der Quantenpunkt im Einteilchenmodell betrachtet. Betrachtet man Quantenpunkte mit mehr als einem Elektron, so muss man die Wechselwirkung der Elektronen untereinander berücksichtigen. Die grundlegenden Transporteigenschaften eines solchen QD lassen sich mittels eines elektrostatischen Modells beschreiben, das nur die Ladung $-e$ der Elektronen für die Wechselwirkung berücksichtigt [65–67]. Dazu wird neben den Zustandsenergien des Einteilchenmodells die Ladeenergie E_L des Quantenpunktes beachtet, die die elektrostatische Abstoßung der Elektronen untereinander beschreibt. Die aufzubringende Ladeenergie erhöht sich dabei mit jedem Elektron, das auf den QD geladen wird. Insgesamt ist für die Wechselwirkung von N Elektronen dann eine Energie von $\frac{1}{2}N(N-1)E_L$ aufzubringen. Die N Elektronen werden dann nacheinander auf die Grundzustände des Fock-Darwin-Spektrums verteilt, woraus sich eine Gesamtenergie E_N von

$$E_N = \frac{1}{2}N(N-1)E_L + \sum_{n,m,s}^N E^{n,m,s} \quad (2.42)$$

ergibt. Die Summe ist dabei so zu verstehen, dass von der niedrigsten Energie des Fock-Darwin-Spektrums ausgehend die Niveaus bis zum N -ten Elektron aufsummiert werden. Der Einfachheit halber wird die entsprechende Energie für das N -te Niveau im Einteilchenspektrum im Folgenden als E^N bezeichnet. Will man die Zahl der Elektronen auf einem Quantenpunkt um ein Elektron von $N-1$ nach N erhöhen, so muss man eine Energiedifferenz μ_N aufbringen.

$$\mu_N = E_N - E_{N-1} = (N-1)E_L + E^N \quad (2.43)$$

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

Diese Differenz wird als das chemische Potential für den Übergang $(N - 1) \rightarrow N$ bezeichnet. Angeregte Zustände erhält man dabei dann, wenn das N -te Elektron nicht das quantenmechanische Energieniveau E^N einnimmt, sondern ein höheres. Diese angeregten Zustände N^* liegen dann energetisch um die Differenz zum Grundzustand N höher.

Der Abstand zweier aufeinander folgender chemischer Potentiale für die Anzahlen N und $N + 1$ ergibt sich nach (2.43) zu:

$$\mu_{N+1} - \mu_N = E_L + E^{N+1} - E^N \simeq E_L \quad (2.44)$$

Die letzte Näherung gilt, wenn die Ladeenergie erheblich größer ist, als die quantenmechanische Energiedifferenzen. Für große Quantenpunktsysteme wie die untersuchten lateralen Strukturen ist dies der Fall. Das Spektrum eines QD ist damit in erster Näherung eine Abfolge äquidistanter chemischer Potentiale, die energetisch jeweils mit einem Abstand von E_L aufeinander folgen.

Die grundlegenden Transporteigenschaften eines solchen QD lassen sich daher gut mittels eines elektrostatischen Modells beschreiben, das die Ladung $-e$ der Elektronen berücksichtigt, aber ohne deren Quanteneigenschaften auskommt. Der Quantenpunkt selbst wird nulldimensional angenommen und einzig über die Ladung Ne der N Elektronen auf dem QD und die Gesamtkapazität C_Σ des QD zu seiner Umwelt charakterisiert. Will man nun ein zusätzliches Elektron auf den Quantenpunkt bringen, so muss die Coulombabstoßung überwunden werden. Dazu ist die Ladeenergie

$$E_L = \frac{e^2}{C_\Sigma} \quad (2.45)$$

aufzubringen. Aus diesem Umstand lassen sich die Additionsspektrum genannten, äquidistanten chemischen Potentiale des QD errechnen. Ausgegangen wird dabei vom Grundzustand des Systems für ein Elektron. Das chemische Potential für das N -te Elektron ergibt sich dann

2 Theoretische Grundlagen

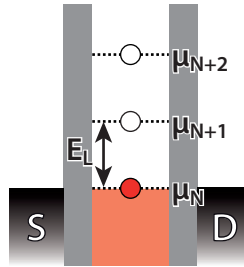


Abbildung 2.13:

Das Additionsspektrum eines Quantenpunkts schematisch dargestellt: Zwei Tunnelbarrieren (grau) grenzen den QD, dargestellt als Folge von äquidistanten Energieniveaus, gegen die Zuleitungen Source (S) und Drain (D) ab. Das N -te Niveau mit dem chemischen Potential μ_N ist mit einem Elektron besetzt. Der Energieabstand der Niveaus beträgt E_L , die Ladeenergie.

als:

$$\mu_N = (N - 1)E_L \quad (2.46)$$

Eine schematische Darstellung ist in Abbildung 2.13 zu sehen. Der QD, dargestellt als Abfolge der in (2.46) benannten Energieniveaus, wird durch Tunnelbarrieren, hier durch graue Blöcke angedeutet, von den Zuleitungen abgetrennt. Die Voraussetzung dafür, dass diese Quantisierung der Energieniveaus des QD in Transportexperimenten sichtbar wird, ist eine entsprechend niedrige Temperatur; es muss gelten $k_B T \ll E_L$. Damit die Elektronen auf dem QD lokalisiert sind, darf die Ankopplung über die Tunnelbarrieren zu den Zuleitungen nicht zu stark sein. Die Leitfähigkeit der Tunnelbarrieren muss dazu deutlich niedriger als ein Leitfähigkeitsquant sein: $G_T \ll e^2/h$.

2.4.3 Die Coulombblockade

Das äquidistante Spektrum des Quantenpunkts kann in Transportexperimenten sichtbar gemacht werden. Dies ist schematisch in Abbildung 2.14 dargestellt. Legt man eine Spannung V_{SD} zwischen zwei Zuleitung des QD, Source und Drain, so erhält man einen Energieunterschied von eV_{SD} zwischen den chemischen Potentialen der Zuleitungen. Damit entsteht ein Transportfenster (hellgrau dargestellt), das es prinzipiell Elektronen erlaubt, von Source nach Drain zu wandern. Dazu muss jedoch ein Energieniveau des QD im Transportfenster liegen. Ist dies nicht der Fall, wie in Abb. 2.14(a), dann sind die Zustände unterhalb des Transportfenster besetzt (in diesem Fall alle Zustände bis μ_N). Die Elektronen auf diesen Energieniveaus können den Quantenpunkt nicht verlassen, da sie keine freien Zustände in den Zuleitungen vorfinden. Das Niveau zu μ_{N+1} wiederum kann nicht besetzt werden, weil es energetisch zu hoch liegt. Dieser Fall wird als Coulombblockade bezeichnet, da die Coulombabstoßung der Elektronen auf dem Quantenpunkt verhindert, dass Transport durch den QD stattfinden kann. Es kann jedoch ein Gate am Quantenpunkt verwendet werden, um die Energieniveaus relativ zu den Zuleitungen zu verschieben. Der Einfluss des Gates wird beschrieben durch

$$\mu'_N = \mu_N - e \frac{C_{G_{QD}}}{C_\Sigma} V_{G_{QD}}, \quad (2.47)$$

wobei μ'_n das verschobene Niveau und μ_n das Niveau ohne Gatespannung benennt. Auf diese Weise gelingt es bei entsprechend positiver Gatespannung, das nächste Energieniveau, hier μ_{N+1} , in das Transportfenster zu verschieben.

Dieser Fall ist in Abb. 2.14(b) zu sehen. Nun können Elektronen sowohl von der Source-Seite in den QD tunneln, als auch wieder auf der Drain-Seite diesen verlassen. Die Folge ist ein Peak in der Leitfähigkeit. Die Höhe dieses Peaks hängt dabei vom Überlapp der Wellen-

2 Theoretische Grundlagen

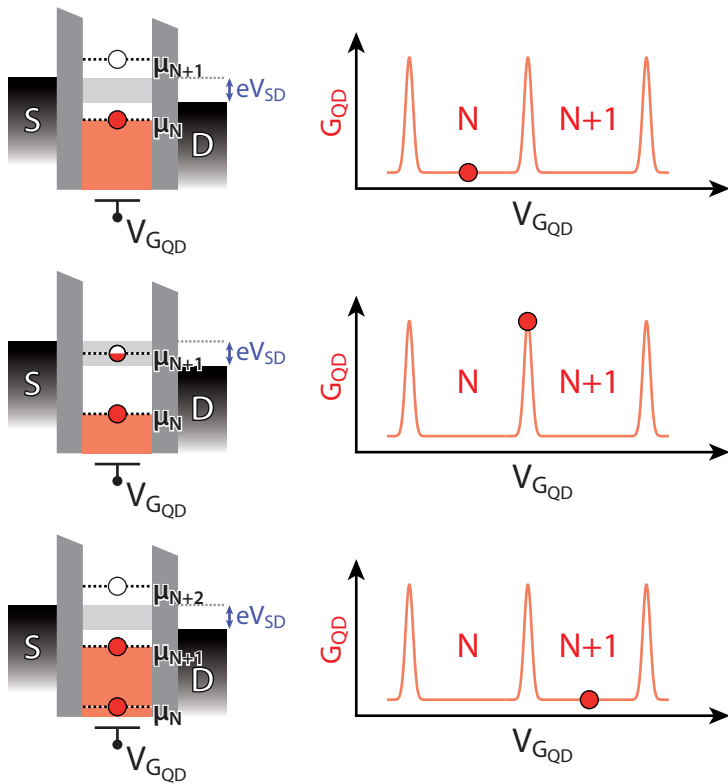


Abbildung 2.14:

Coulombblockade: Dargestellt sind drei Ladungszustände des QD. Zunächst befinden sich N Elektronen auf dem QD (links). Da kein Energieniveau innerhalb des Transportfensters eV_{SD} liegt, kann kein Elektron den QD betreten oder verlassen. Die Leitfähigkeit G_{QD} (rechts) ist Null. Wird ein Energieniveau durch eine Gatespannung $V_{G_{QD}}$ in das Transportfenster verschoben, tunneln Elektronen durch den QD, was zu einer endlichen Leitfähigkeit führt. Schiebt das Niveau wieder aus dem Transportfenster, sinkt G_{QD} wieder auf Null.

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

funktionen auf dem QD und in den Zuleitungen ab. Dieser schlägt sich in den Tunnelraten Γ_{in} und Γ_{out} nieder, die die Ankopplung an Source und Drain charakterisieren.

Wird nun die Gatespannung weiter erhöht, verschiebt sich schließlich μ_{N+1} unter das chemische Potential von Drain, wie in Abb. 2.14(c) zu sehen. Ist dies geschehen, ist μ_{N+1} dauerhaft mit einem Elektron besetzt, da dieses nicht nach Drain abfließen kann. Das nächste Niveau μ_{N+2} ist aber noch oberhalb des Transportfensters, kann also noch keinen Transport ermöglichen. Es ist damit wieder der Fall der Coulombblockade eingetreten und die Leitfähigkeit sinkt erneut auf Null. Da die Leitfähigkeit also direkt das Additionsspektrum abbildet, kann man aus einer Messung der Leitfähigkeit wichtige Größen des Systems ablesen. Insbesondere die Kapazität C_{GQD} zwischen Gate und QD lässt sich bestimmen, da sie nach (2.47) und (2.45) direkt aus der zusätzlich angelegten Gatespannung V'_{GQD} folgt, die nötig ist, um genau ein weiteres Niveau zu bevölkern. Es ergibt sich:

$$C_{\text{GQD}} = \frac{e}{V'_{\text{GQD}}} \quad (2.48)$$

Eine gleichzeitige Änderung der Spannungen V_{G1} und V_{G2} an zwei verschiedenen Gates eines Quantenpunkts lässt sich in einem zweidimensionalen Bild veranschaulichen, das Ladungsdiagramm genannt wird. Jedes einzelne Gate führt bei einer Änderung der angelegten Spannung zu einer Folge von Coulombblockadepeaks. Dies ist für Gate 1 unter Abb. 2.15① und für Gate 2 entsprechend unter Abb. 2.15② schematisch dargestellt. Bei gleichzeitiger Änderung beider Gates wirken beide Spannungen entsprechend der jeweiligen kapazitiven Ankopplung der Gates auf den Quantenpunkt.

Stellt man die Leitfähigkeit des QD nun als Funktion beider Gatespannungen dar, folgt daraus eine Schar paralleler, äquidistanter Coulombblockadelinien, wie man sie in Abb. 2.15 sieht. Die Steigung der

2 Theoretische Grundlagen

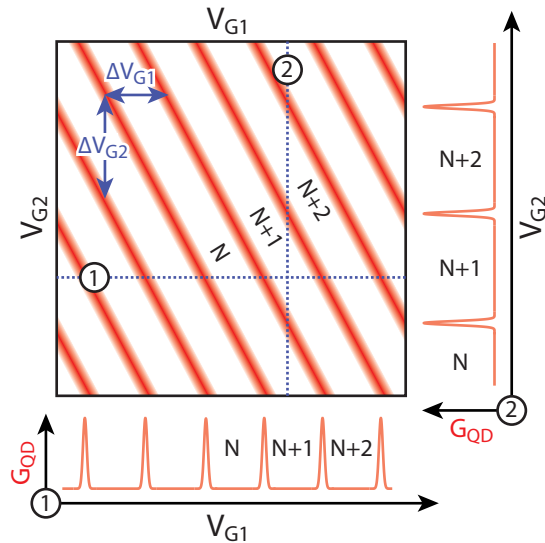


Abbildung 2.15:

Schema eines Ladungsdiagramms: Änderungen der Gatespannungen V_{G1} und V_{G2} führen jeweils zu Coulombblockadepeaks ①, ②. Eine gleichzeitige Veränderung der Spannungen führt zu parallelen Coulombblockadelinien, die die Blockadebereiche (N, N + 1, N + 2) voneinander trennen.

Linien ist dabei abhängig vom Verhältnis der Ankopplung der Gates. Im Schemabild ist die Kopplung von Gate 1 an den QD etwa doppelt so stark wie die von Gate 2. Dieses Verhältnis lässt sich bei einem gemessenen Ladungsdiagramm aus dem Verhältnis $\Delta V_{G1}/\Delta V_{G2}$ ermitteln. Gemäß (2.48) lassen sich somit gleichzeitig die Kapazitäten C_{G1} und C_{G2} bestimmen.

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

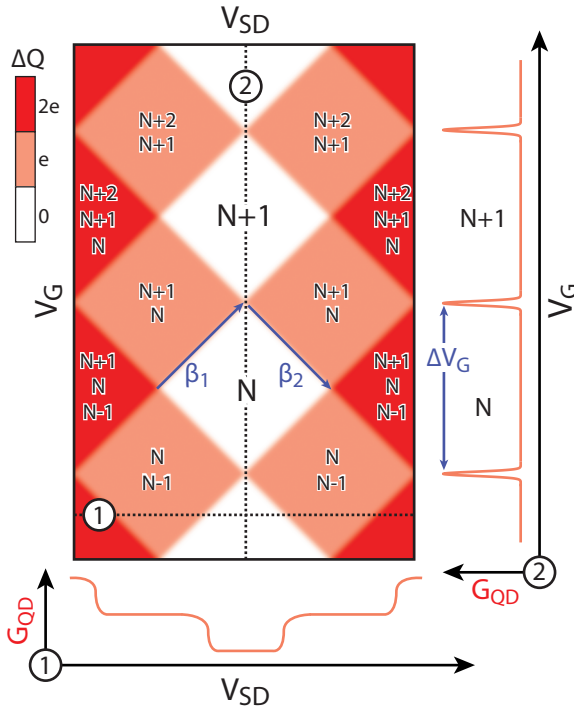


Abbildung 2.16:

Schema eine Messung von Coulombrauten: Änderungen der Gatespannungen V_G und der Spannung zwischen Source und Drain V_{SD} führen zweidimensional dargestellt zu Coulombrauten. Während bei $V_{SD} = 0$ Coulombpeaks auftreten ②, prägen sich bei Änderung von V_{SD} Leitfähigkeitsplateaus aus ①. Eine gleichzeitige Veränderung der Spannungen führt zu einem Rautenmuster, das in Blockadebereiche (N , $N+1$, $N+2$) und Transportbereiche mit unterschiedlich vielen gleichzeitig transportierten Elektronen zerfällt.

2.4.4 Coulombrauten

Eine zwischen Source und Drain angelegte Spannung V_{SD} führt, wie in Abschnitt 2.4.3 erläutert, zu einem Transportfenster eV_{SD} . Als Folge kann bei hinreichend hoher Spannung V_{SD} auch mehr als ein Zustand des Quantenpunkts zum Transport beitragen. Wird die Gatespannung V_G konstant gehalten, führt dies zu einem stufenartigen Verlauf der Leitfähigkeit, wie es in Abb. 2.16① schematisch dargestellt ist. Ohne angelegte Vorspannung V_{SD} befindet sich der QD zunächst in der Coulombblockade und die Leitfähigkeit ist gleich Null. Für $V_{SD}=0$ ist nur dann eine endliche Leitfähigkeit zu verzeichnen, wenn sich die Zuleitungen in Resonanz mit einem Niveau des QD befinden, was für den gezeigten Schnitt nicht der Fall ist. Sobald das Transportfenster durch Erhöhen von V_{SD} so groß geworden ist, dass ein Niveau des QD im Fenster liegt, nimmt die Leitfähigkeit einen endlichen Wert an. Auf dem erreichten Wert verharrt sie solange, bis ein zweites Niveau beitragen kann, um auch dort wieder zu verbleiben, bis das nächste Niveau erreicht ist.

Die Zuleitungen koppeln zudem auch kapazitiv an den Quantenpunkt, weshalb V_{SD} auch die Niveaus des Additionsspektrums um $-e(C_S/C_\Sigma)V_{SD}$ verschiebt. Es wird hier angenommen, dass die Spannung V_{SD} an Source angelegt wird. Dabei ist C_S die Kapazität zwischen Source und dem Quantenpunkt. Bei zusätzlich angelegter Gatespannung ergibt sich ein Verlauf, wie dies in Abb. 2.16 zu sehen ist. Es entstehen rautenförmige Blockadebereiche, in denen kein Energieniveau des QD im Transportfenster liegt. Die Kanten der Rauten haben dabei zwei Steigungen, die positive Steigung β_1 und die negative β_2 . Die Schnittpunkte dieser Grenzlinien liegen wiederum bei $V_{SD}=0$. Dies ist die Situation, in dem das Muster in den Fall einfacher Coulombblockadepeaks übergeht (Abb. 2.16②). Die Grenzen der Rauten markieren die Änderung in der Leitfähigkeit und damit den Punkt, an

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

dem ein Niveau des QD gerade am chemischen Potential μ_S oder μ_D von Source bzw. Drain vorbeigeführt wird. Dabei kann jeweils eine Steigung einer Zuleitung zugeordnet werden, so entspricht eine Kante mit der Steigung β_1 einer Resonanz mit Source und eine Kante der Steigung β_2 einer Resonanz mit Drain. Es lässt sich daher analog zu (2.47) für die Resonanz eines Niveaus μ_N mit Source folgende Beziehung aufstellen:

$$\mu'_N = \mu_N - e \frac{C_G}{C_\Sigma} V_G - e \frac{C_S}{C_\Sigma} V_{SD} = \mu_D - e V_{SD}. \quad (2.49)$$

Daraus ergibt sich unter Umstellung die Geradenschar:

$$V_G = \frac{C_\Sigma - C_S}{C_G} V_{SD} + \frac{C_\Sigma}{e C_G} (\mu'_N - \mu_D). \quad (2.50)$$

Damit lässt sich die positive Steigung β_1 unter Ausnutzung von $\beta_1 = \partial V_G / \partial V_{SD}$ herleiten:

$$\beta_1 = \frac{C_\Sigma - C_S}{C_G}. \quad (2.51)$$

Entsprechend lässt sich mit der Bedingung $\mu_N = \mu_S$ für Resonanzen mit Source analog β_2 bestimmen:

$$\beta_2 = -\frac{C_S}{C_G}. \quad (2.52)$$

Hieraus erhält man mit der gemäß (2.48) bestimmten Gatekapazität C_G die Kapazität zu Source C_S . Durch Umkehren der Spannungsrichtung lässt sich analog hierzu auch C_D bestimmen. Führt man die Formeln für die Steigungen β_1 und β_2 zusammen, folgt daraus:

$$C_\Sigma = C_G (\beta_1 - \beta_2). \quad (2.53)$$

Damit ist nach Einsetzen von C_G auch die Gesamtkapazität C_Σ bestimmt.

2 Theoretische Grundlagen

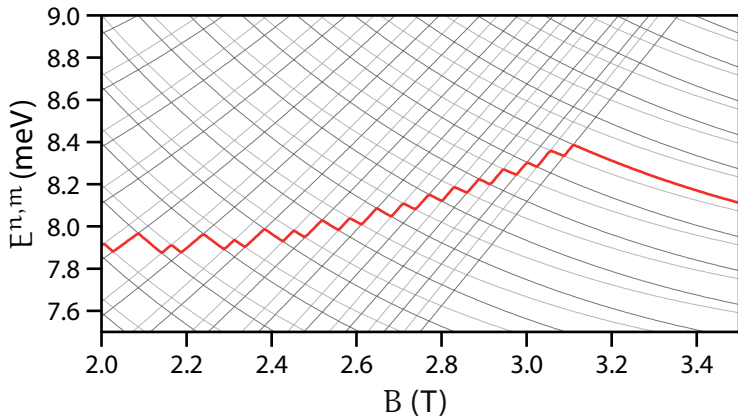


Abbildung 2.17:

Der aus dem Fock-Darwin-Spektrum folgende Verlauf des chemischen Potentials des 62sten Elektrons eines Quantenpunkts. Es wurde $\hbar\omega_0 = 1$ meV angenommen.

2.4.5 Quantenpunkte im senkrechten Magnetfeld

Das elektrostatische Modell kann als grundlegende Erklärung vieler Eigenschaften von Quantenpunkten dienen. Um den Einfluss eines externen Magnetfelds zu verstehen, ist jedoch die quantenmechanische Behandlung notwendig. Die Energiezustände eines QD im Magnetfeld folgen dem bereits vorgestellten Fock-Darwin-Spektrum (2.40). Ein solches Spektrum wurde bereits in Abbildung 2.12 dargestellt. Berechnet wurde es für $\hbar\omega_0 = 1$ meV unter Annahme eines effektiven g -Faktors $g^* = 0.3$ und einer effektiven Masse $m^* = 0.067 \cdot m_e$. Für niedrigere Magnetfelder erkennt man eine Vielzahl von sich überkreuzenden Energieniveaus, während für hohe Felder die Landauquantisierung dominiert und sich deutliche Landaufächer ausprägen. Um von den so berechneten Energieniveaus eines einzelnen Elektrons in

2.4 Das nulldimensionale Elektronengas

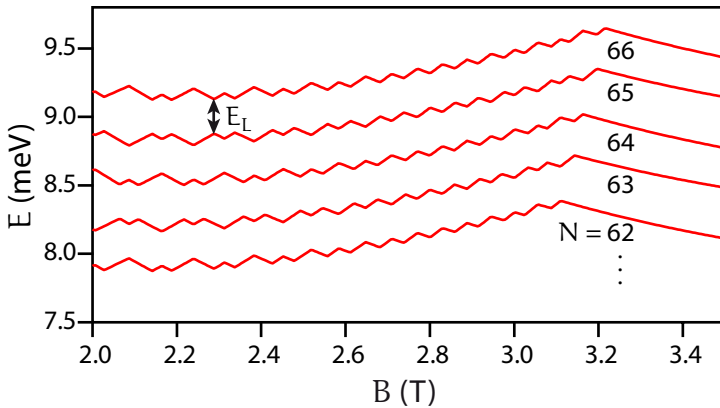


Abbildung 2.18:

Der aus dem Fock-Darwin-Spektrum folgende Verlauf des chemischen Potential des 62sten bis 66sten Elektron eines Quantenpunkts. Es wurde $\hbar\omega_0 = 1$ meV und eine Ladeenergie $E_L = 0.25$ meV angenommen. Die Ladeenergie wurde der Übersicht halber sehr niedrig gewählt, ein realistischerer Wert wäre 1-2 meV. Die Energieachse ist nur bis auf konstanten Offset gültig.

einem Quantenpunkt auf den Verlauf des chemischen Potentials μ_N des N-ten Elektrons zu schließen, muss man, wie in Abschnitt 2.4.2 erläutert, die Energieniveaus nach und nach mit Elektronen bevölkern. In Abbildung 2.17 ist als Beispiel die Energie des 62sten Elektrons gezeigt. Durch das Überkreuzen der beiden ersten Landaufächer entsteht im Bereich mittlerer Magnetfelder ein charakteristisches Zick-Zack-Muster. Das Elektron besetzt abhängig vom anliegenden Magnetfeld abwechselnd Zustände der ersten oder zweiten Landauschale. Erst wenn es dauerhaft auf in der untersten Landauschale verbleiben kann, endet dieses Muster. Dies ist zugleich der Punkt, an dem der Quantenpunkt einen Füllfaktor $\nu = 2$ besitzt.

2 Theoretische Grundlagen

Das gesamte Additionsspektrum des Quantenpunkts im Magnetfeld erhält man, wenn man den Verlauf von N für beliebige N aufträgt. Exemplarisch ist dies in Abbildung 2.18 für $N = 62..66$ gezeigt. Dies entspricht qualitativ dem, was eine Messung in Abhängigkeit von Magnetfeld und Gatespannung experimentell ergibt. Im Magnetfeld folgen die Coulomb-Blockade-Maxima den Zick-Zack-Linien des Spektrums. Experimentell ist jedoch nicht allein der Verlauf der Energieniveaus des Quantenpunktes zugänglich. Wie in Abschnitt 4.4.3 gezeigt wird, ist auch die Umverteilung der Elektronen von einer Landauschale in die andere direkt nachweisbar.

2.5 Full Counting Statistic

Bislang wurden hier Gleichgewichtssituationen eines physikalischen Systems betrachtet. Will man die Dynamik eines Systems betrachten, sind Messungen im Gleichgewicht nur beschränkt hilfreich. Untersuchung der Fluktuation einer Messgröße ermöglichen einen erheblich tieferen Einblick. Für die Transportspektroskopie bedeutet dies eine Analyse der Fluktuation des Stromes, also das Betrachten des Rauschens eines Systems. Die folgenden Abschnitte sollen daher die statistischen Eigenschaften eines Quantensystems behandeln. Statt jedoch aus dem Rauschen einer kontinuierlich gemessenen Größe Eigenschaften des Systems abzuleiten, soll der Weg beschritten werden, die einzelnen Tunnelereignisse direkt zu betrachten. Der Name dieser Herangehensweise ist „Full Counting Statistic“ (FCS). Es wird davon ausgegangen, dass der Strom durch ein System als Partikelstrom messbar ist, also als Abfolge individueller Tunnelereignisse.

2.5.1 Der Tunnelprozess

Grundlegend für das Verständnis der Transportstatistik von Quantenpunktsystemen ist der Tunnelprozess an einer Potentialbarriere. Während in zwei- oder eindimensionalen Systemen die Elektronen oft quasiklassisch betrachtet werden können, erfordert der Übergang zu null-dimensionalen Systemen einen Tunnelprozess. Der Einfachheit halber betrachten wir den verallgemeinerten Fall einer einlaufenden Welle. Abbildung 2.19 stellt diese Situation dar. Von der linken Seite läuft eine Welle A mit der Energie E auf eine Potentialbarriere der Höhe V_0 und der Breite $2a$ zu. An der Barriere wird die Welle mit einer Amplitude B reflektiert (nicht abgebildet) und mit einer Amplitude F transmittiert. Die Wellenfunktion für den gesamten Verlauf lässt sich dabei aus den drei Teilabschnitten vor, in und hinter der Barriere zusammensetzen

2 Theoretische Grundlagen

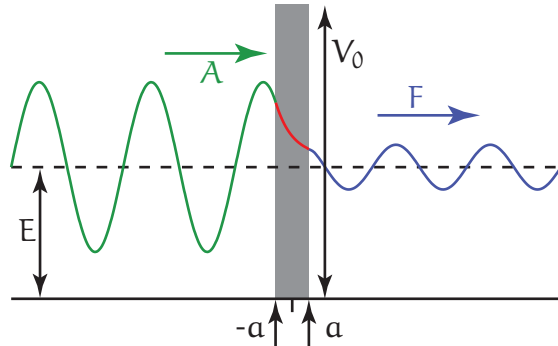


Abbildung 2.19:

Allgemeiner Fall eines Tunnelvorgangs. Dargestellt sind die einlaufende Welle A und transmittierte Welle F.

und ergibt sich zu

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & ; \quad x < -a \\ Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x} & ; \quad -a < x < a \\ Fe^{ikx} + Ge^{-ikx} & ; \quad x > a, \end{cases} \quad (2.54)$$

mit den Wellenzahlen $k = \sqrt{2mE}/\hbar$, $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Vor und hinter der Barriere liegt eine Welle vor, innerhalb der Barriere ein exponentieller Abfall der Amplitude [39]. Aus der Anwendung der Anschlußbedingungen bei $-a$ und $+a$ folgt für die Transmissionsamplitude $S(E)$ also das Verhältnis F/A :

$$S(E) \equiv \frac{F}{A} = \frac{e^{-2ika}}{\cosh 2\kappa a + (i\epsilon/2) \sinh 2\kappa a} \quad (2.55)$$

mit

$$\epsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}.$$

Die Durchlässigkeit der Barriere, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Teilchen, das auf die Barriere trifft, diese durchdringen kann, ist durch das Betragsquadrat $|S(E)|^2$ gegeben.

$$|S(E)|^2 = \frac{1}{1 + (1 + (\epsilon^2/4)) \sinh(2\kappa\alpha)^2} \quad (2.56)$$

Für den Fall sehr hoher und breiter Barrieren ist $\kappa\alpha \gg 1$ und damit $\sinh(2\kappa\alpha)^2 \cong (1/2)e^{2\kappa\alpha} \gg 1$. Damit lässt sich (2.56) weiter vereinfachen und man erhält:

$$|S(E)|^2 \cong e^{-4\sqrt{2m(V_0-E)}\frac{\alpha}{\hbar}}. \quad (2.57)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen die Tunnelbarriere durchquert, ist also ungleich Null. Im Falle von Elektronen bedeutet dies, dass bei angelegter Spannung auch über eine Tunnelbarriere ein Strom fließt. Die reale Tunnelwahrscheinlichkeit im Experiment ist jedoch nicht direkt diese Transmissionswahrscheinlichkeit. Vielmehr spielt die Zustandsdichte vor der Barriere eine Rolle, sowie die angelegte Spannung, die eine ganze Energiebande für den Tunnelprozess definiert. Die Tunnelwahrscheinlichkeit erfordert damit ein Integral über diese Energiebande. Zudem ist ein Elektron als Wellenpaket zu betrachten und die Barriere als Potentialberg. Die theoretischen Grundlagen hierfür wurden 1926 mit der Entwicklung der WKB-Methode durch Gregor Wentzel, Hendrik Anthony Kramers und Leon Brillouin gelegt [68–70]. Dennoch zeigt auch die einfache Vorstellung der stehenden Welle (2.57), dass der Transport durch Tunnelbarrieren grundsätzlich durch Transmissionswahrscheinlichkeiten (T_e) bzw. Tunnelraten (Γ) definiert ist.

2.5.2 Die einzelne Barriere: Poissonverteilung

Wie im vorangegangenen Abschnitt klar wurde, folgt aus dem Tunnelprozess ein Strom von Elektronen, der durch Tunnelwahrscheinlichkei-

2 Theoretische Grundlagen

ten charakterisiert ist. Die direkte Folge hieraus ist, dass der Strom einer gewissen Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(n)$ folgt, die angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit P eine Zahl von n Elektronen in einem gegebenen Zeitintervall t_0 die Barriere durchdringt.

Um einen unidirektionalen Transport zu gewährleisten, liegt eine Spannung V an der Barriere an, wodurch sich eine Energiedifferenz für die chemischen Potentiale vor und hinter der Barriere ergibt. Für die Elektronen, die versuchen, die Barriere zu durchqueren, nehmen wir eine energieunabhängige Transmissionswahrscheinlichkeit T_e an. Solch ein Transport ist ein Bernoulliprozess [71, 72]. Für den Fall einer 1D Tunnelbarriere versucht eine Anzahl $K = t_0 eV/h$ Elektronen voneinander unabhängig, die Tunnelbarriere während des Zeitintervalls t_0 zu passieren. Die Anzahl n der transmittierten Elektronen ist dann gegeben durch die Verteilung:

$$P(n, t_0) = \binom{K}{n} T_e^n (1 - T_e)^{K-n}. \quad (2.58)$$

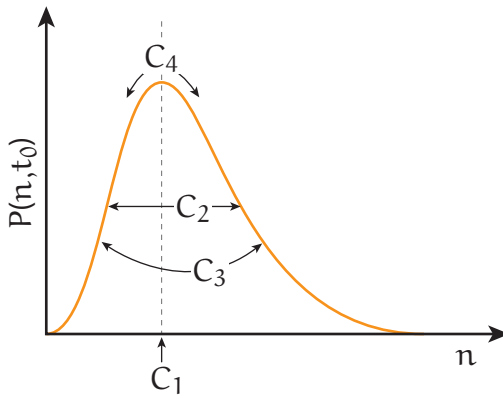
Nimmt man an, dass $T_e \ll 1$, so ist der Transport eines Elektrons ein seltenes Ereignis, und die Quantenstatistik tritt in den Hintergrund. In diesem Übergang und mit $KT_e = \langle n \rangle = t_0 \Gamma$ folgt der Transport einer Poissonverteilung:

$$P(n, t_0) = \frac{(t_0 \Gamma)^n}{n!} \cdot e^{-t_0 \Gamma} \quad (2.59)$$

Diese Verteilung beschreibt gut die Fluktuationen im Transport - das Rauschen - für eine einzelne Tunnelbarriere. Das Rauschen ist hierbei frequenzunabhängig und wird daher als weißes Rauschen bezeichnet.

2.5.3 Die kumulantengenerierende Funktion

Wie im vorangegangenen Abschnitt bereits klar wurde, ist im Ansatz der FCS die Wahrscheinlichkeit $P(n, t_0)$, dass im Zeitintervall t_0 eine

**Abbildung 2.20:**

Die Kumulanten und ihre anschauliche Bedeutung: C_1 entspricht dem Erwartungswert der Verteilung, C_2 charakterisiert die Breite, C_3 die Schiefe und C_4 die Wölbung der Verteilung.

Anzahl n Elektronen das System durchquert haben, die zentrale Größe. Sobald man diese Größe kennt, lassen sich alle Einzelheiten des stochastischen Prozesses ableiten. Die Kenngrößen der Statistik sind die sogenannten Kumulanten. Die Kumulanten der Verteilung berechnen sich aus der charakteristischen Funktion $\mathfrak{F}(\chi)$, die auch Kumulanten-generierende genannt wird. Sie ist definiert durch:

$$\mathfrak{F}(\chi) = -\ln \left(\sum_n P(n, t_0) e^{i n \chi} \right) \quad (2.60)$$

Aus der Kumulantengenerierenden können die Kumulanten der Verteilung bestimmt werden. Die k -te Kumulante C_k ergibt sich gemäß:

$$C_k = -(-i)^k \left(\frac{\partial}{\partial \chi} \right)^k \mathfrak{F}(\chi) \Big|_{\chi=0} \quad (2.61)$$

2 Theoretische Grundlagen

In Abbildung 2.20 sind die ersten vier Kumulanten und ihre anschauliche Bedeutung aufgezeigt. So ist die erste Kumulante C_1 gleichbedeutend mit dem Schwerpunkt der Verteilung. C_2 ist ein Maß für die Breite, C_3 bezeichnet die Schiefe und C_4 die Wölbung der Verteilung.

Der mittlere Strom lässt sich ebenfalls durch die Kumulanten der Verteilung ausdrücken:

$$I = \frac{e}{t_0} C_1. \quad (2.62)$$

Sind die Fluktuationen des Transports frequenzunabhängig so lässt sich auch für die Rausleistungsdichte ein einfacher Zusammenhang angeben:

$$S = \frac{2e^2}{t_0} C_2. \quad (2.63)$$

Für den Fall der Binomialverteilung (2.58) ergibt sich die Kumulantengenerierende zu

$$\tilde{\mathcal{F}}_B(\chi) = K \cdot \ln(1 + T_e(e^{i\chi} - 1)) \quad (2.64)$$

Daraus ergibt sich für die ersten beiden Kumulanten:

$$C_1 = K T_e \quad (2.65)$$

$$C_2 = K T_e (1 - T_e) \quad (2.66)$$

Im Übergang $T_e \ll 1$ ergibt sich damit analog zu Abschnitt 2.5.2:

$$I_P = \frac{e}{t_0} \langle n \rangle \quad (2.67)$$

$$S_P = \frac{2e^2}{t_0} \langle n \rangle = 2eI \quad (2.68)$$

Eine im Rahmen von Rausmessungen oft verwandte Kenngröße ist der Fanofaktor α . Dieser gibt das Verhältnis der gemessenen

Rauschleistungsdichte zur Rauschleistungsdichte eines Poissonschen Rauschprozesses (etwa der einzelnen Tunnelbarriere) an. Damit lässt sich der Fanofaktor sehr elegant durch die normierte zweite Kumulante darstellen:

$$\alpha = \frac{S}{2eI} = \frac{\frac{2e^2}{t_0} C_2}{2e \cdot \frac{e}{t_0} C_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (2.69)$$

Die Kumulantengenerierende für das Poissonsche Rauschen ergibt sich zu:

$$\mathfrak{F}_P(\chi) = t_0 \Gamma(e^{i\chi} - 1). \quad (2.70)$$

Im Übergang zu sehr großen Erwartungswerten $\langle n \rangle$ geht die Poissonverteilung in die Gaussverteilung über. Für die Gaussverteilung sind alle Kumulanten bis auf die ersten beiden gleich Null. In diesem Limit sehr langer t_0 streben daher auch alle höheren Kumulanten gegen Null. Dies hat direkte Konsequenzen für die Messung von Kumulanten, da sie für große $\langle n \rangle$ stark unterdrückt sind. Eine Bestimmung höherer Kumulanten wird daher für herkömmliche Rauschmessungen drastisch schwieriger, da man sich hier normalerweise in diesem Grenzfall wiederfindet [73, 74].

2.5.4 Momente und Kumulanten

Um von der zeitaufgelösten Messung auf die Kumulanten der Verteilung zu schließen, ist eine Bestimmung der Momente der Verteilung notwendig. Aus den Momenten lassen sich dann die Kumulanten errechnen. Die Momente bestimmen sich gemäß:

$$M_m = \langle (n - \langle n \rangle)^m \rangle \Big|_{\langle \cdot \rangle \text{ über alle } t_0} \quad (2.71)$$

Wie man erkennt, ist $M_1 = 0$. Aus den gemessenen n aller Zeitabschnitte t_0 lassen sich damit prinzipiell beliebig hohe Momente bestimm-

2 Theoretische Grundlagen

men. Der statistischen Streuung, aber auch Fehlern in n , also ausgelassenen oder zu viel gezählten Tunnelereignissen, fällt jedoch durch die immer höher werdenden Potenzen zunehmend mehr Gewicht zu. Für hohe Momente ist also eine möglichst große Stichprobe, sprich möglichst viele Zeitabschnitte t_0 , und eine möglichst fehlerfreie Detektion der Tunnelereignisse wichtig.

Aus den Momenten der Verteilung können nun die Kumulanten bestimmt werden [75]. Die Beziehung zwischen Momenten und Kumulanten ist dabei für $i > 1$:

$$C_m = M_m - \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} C_k \cdot M_{m-k} \quad (2.72)$$

Damit folgt für die ersten 6 Momente:

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle n \rangle \\ C_2 &= M_2 \\ C_3 &= M_3 \\ C_4 &= M_4 - 3C_2^2 \\ C_5 &= M_5 - 10C_3C_2 \\ C_6 &= M_6 - 15C_4C_2 - 10C_3^2 - 15C_2^3 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Mit zunehmender Ordnung werden die Kumulanten immer komplexer. Daher erfordert die Bestimmung hoher Kumulanten eine sehr große Stichprobe.

2.5.5 Tunneln durch zwei Barrieren: Der Quantenpunkt

Bislang wurden Fluktuationen betrachtet, die vom Tunneln durch eine einzelne Tunnelbarriere herrühren. Bei einem Quantenpunkt liegen jedoch zwei Barrieren vor, und die Elektronen sind zwischen den Barrieren zudem auf quantisierte Energieniveaus verteilt. Qualitativ ist damit

eine Unterdrückung in der Stärke der Fluktuationen zu erwarten, also eine Abnahme der Rauschleistungsdichte. Die Kumulantenerzeugende für einen einzelnen Quantenpunkt wird in [76, 77] entwickelt. Unter der Annahme einer hinreichend großen Spannung über den Quantenpunkt und damit eines unidirektionalen Tunnelns, sowie unter Vernachlässigung von Elektron-Elektron Wechselwirkung über das Additionsspektrum des Quantenpunkts hinaus, erhalten die Autoren:

$$\mathfrak{F}(\chi) = \frac{t_0}{2} \left(\Gamma_e + \Gamma_c - \sqrt{(\Gamma_e + \Gamma_c)^2 - 4\Gamma_e\Gamma_c(1 - e^{-i\chi})} \right) \quad (2.74)$$

Diese Kumulantengenerierende ist dabei unabhängig davon, ob kohärentes oder sequenzielles Tunneln angenommen wird [78]. Die Tunnelraten Γ_e und Γ_c beschreiben dabei die Raten vom Emitter in den Quantenpunkt bzw. vom Quantenpunkt in den Kollektor. Anschaulich werden sie auch als Γ_{in} und Γ_{out} bezeichnet. Für den Fall symmetrischer Tunnelraten $\Gamma_e = \Gamma_c = \Gamma$ ergibt sich eine Kumulantengenerierende, die der Poissonverteilung ähnelt:

$$\mathfrak{F}(\chi) = \frac{t_0}{\Gamma} \left(e^{-i\chi/2} - 1 \right) \quad (2.75)$$

Bestimmt man den Fanofaktor aus den Kumulanten dieser Erzeugenden, so erhält man $\alpha = 1/2$. Dies ist die untere Grenze für den Fanofaktor, wie er aus (2.74) folgt. Für das Bild des Transportes nicht wechselwirkender Elektronen durch einen Quantenpunkt ergibt sich also für den Fanofaktor $1/2 < \alpha < 1$. Für sehr asymmetrische Tunnelraten ($\Gamma_e \ll \Gamma_c, \Gamma_e \gg \Gamma_c$) ergibt sich wieder die Poissonsche Statistik, so dass der höchste unter diesen Bedingungen zu erwartende Fanofaktor $\alpha = 1$ ist.

Aus (2.74) lässt sich auch die zu erwartende Verteilung $P(n, t_0)$ herleiten. Die zugehörige Verteilungsfunktion zu einer beliebigen ku-

2 Theoretische Grundlagen

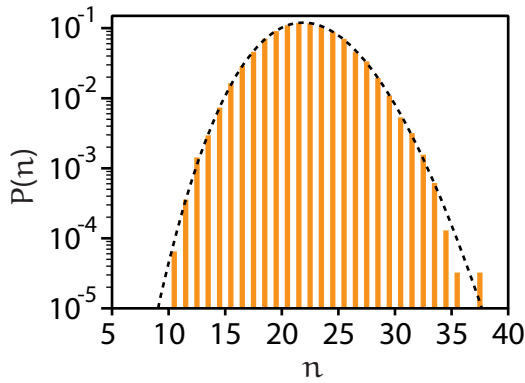


Abbildung 2.21:

Die Verteilung $P(n)$. Die Balken stammen aus einer Messung über ca. 650000 Ereignisse, die gestrichelte Linie stellt die theoretische Kurve dar.

mulatengenerierenden Funktion erhält man gemäß:

$$P(n, t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\chi e^{-\mathfrak{F}(\chi, t_0) - n\chi}. \quad (2.76)$$

Zur direkten Berechnung der Verteilung ist eine geeignete numerische Integration notwendig. Allerdings ist das Integral unter Anwendung einer Sattelpunktnäherung lösbar [78]. Die Sattelpunktnäherung ist dabei solange gültig wie $\mathfrak{F}(\chi) \gg 1$ und $\langle n \rangle \gg 1$. Bis auf Normierung ergibt sich die Verteilung zu:

$$P^*(n, t_0) = \exp \left[-t_0 \cdot \left(\Gamma_e + \Gamma_c - \sqrt{(\Gamma_e - \Gamma_c)^2 + \frac{2n}{t_0^2} (n + W)} \right) - n \ln \left(\frac{1}{2t_0^2 \Gamma_e \Gamma_c} \cdot \frac{1}{n(n + W)} \right) \right], \quad (2.77)$$

wobei W definiert ist als

$$W = \sqrt{n^2 + t_0^2 \Gamma_e^2 - 2t_0^2 \Gamma_e \Gamma_c + t_0^2 \Gamma_c^2}.$$

Zur Normierung muss P^* noch durch das Integral über alle n geteilt werden.

In Abbildung 2.21 ist die theoretische Verteilung im Vergleich mit einer Messung von ca. 650000 Ereignissen gezeigt. Die Messung, dargestellt als Balken, und die Theoriekurve, dargestellt als gestrichelte Kurve, zeigen bis in die Randbereiche der Verteilung eine hervorragende Übereinstimmung. Einzig ganz am Rande zeigt sich eine Abweichung, die jedoch daher rührt, dass hier nur noch wenige Ereignisse als Datenbasis vorliegen. Bislang wurde die Statistik analysiert, indem die Zahl der Elektronen innerhalb eines Zeitintervalls betrachtet wurde. Betrachtet man statt dessen jedoch die Verteilung $P(\tau)$ der Tunnelzeiten, also der Zeiten, die ein Elektron braucht, um auf den Quantenpunkt zu tunneln bzw. diesen wieder zu verlassen, so erhält man

$$P(\tau_{e,c}) = \frac{N}{\Gamma_{e,c}} \cdot e^{-\Gamma_{e,c} \cdot \tau_{e,c}}, \quad (2.78)$$

wobei N die Gesamtzahl der Tunnelereignisse bezeichnet und $\tau_{e,c}$, $\Gamma_{e,c}$ die Emitter bzw. Kollektor Tunnelzeiten und -raten. Direkte Folge daraus ist die Beziehung:

$$\Gamma_{e,c} = \frac{1}{\langle \tau_{e,c} \rangle}. \quad (2.79)$$

Diese Beziehung ist jedoch nur gültig, solange eine unendliche Bandbreite des Messsystems angenommen wird, mit dem die Tunnelzeiten bestimmt werden. Sobald es ein unteres Limit für die messbaren Tunnelzeiten gibt, führt die Bestimmung der Tunnelrate mittels (2.79) auf zu niedrig abgeschätzte Raten.

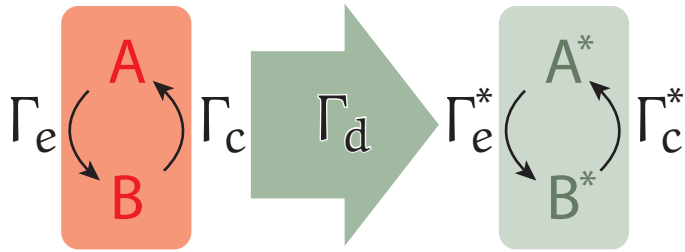


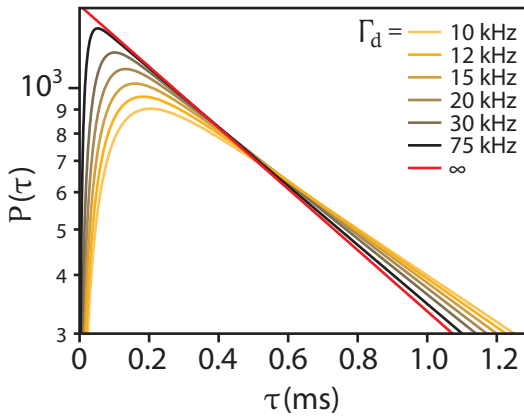
Abbildung 2.22:

Schematische Darstellung des Detektionsvorgangs. Die Tunnelvorgänge im realen System erfolgen mit den Raten $\Gamma_{e,c}$ zwischen zwei Zuständen **A** und **B**. Der Detektor hat jedoch eine endliche Bandbreite Γ_d was zu neuen Raten $\Gamma_{e,c}^*$ zwischen den Detektorzuständen **A*** und **B*** führt.

2.5.6 Der Einfluß der Detektorbandbreite

Sobald man ein reales Messsystem annimmt, kann nicht mehr davon ausgegangen werden, dass jedes Tunnelereignis in der Messung detektiert wird. Dies hat deutliche Auswirkungen auf die aus der Messung abgeleiteten Größen. Zum Vergleich von Messung und Theorie muss daher die Bandbreite bedacht werden.

In Abbildung 2.22 ist eine Schemazeichnung des Detektionsvorgangs dargestellt. Das reale System, der Quantenpunkt, wechselt beim Transport zwischen den Zuständen **A** und **B**. Der Wechsel erfolgt mit den Raten $\Gamma_{e,c}$ wie bereits in den vorangegangenen Abschnitten betrachtet. Nun hat jedoch der Detektor, mit dem die Tunnelereignisse, also die Übergänge zwischen **A** und **B**, gemessen werden, eine endliche Reaktionszeit. Tunnelereignisse, die sehr schnell stattfinden, werden nur noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit detektiert. Im Modell wird dies durch die Detektorbandbreite Γ_d beschrieben. Mit die-


Abbildung 2.23:

Theoretische Verteilung der Tunnelzeiten bei verschiedenen Werten für die Detektorbandbreite Γ_d . Es sind die Tunnelzeiten τ_e dargestellt für $\Gamma_e = 1500$ Hz und $\Gamma_c = 2800$ Hz.

ser Bandbreite bildet der Detektor die Zustandsübergänge im QD auf die Detektorzustände \mathbf{A}^* und \mathbf{B}^* ab. Die direkte Folge ist, dass experimentell nicht die Tunnelraten des QD zugänglich sind, sondern die Übergangsraten $\Gamma_{e,c}^*$ zwischen den Detektorzuständen.

Aus diesem Detektormodell, wie es in [79] theoretisch behandelt wird, ergibt sich für die Verteilung der Tunnelzeiten:

$$P(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2}(\Gamma_d + \Gamma_e + \Gamma_c + \Omega)\tau} \cdot (e^{\Omega\tau} - 1) \Gamma_d \Gamma}{\Omega} \quad (2.80)$$

mit

$$\Omega = \sqrt{-4\Gamma_d\Gamma + (\Gamma_d + \Gamma_e + \Gamma_c)^2},$$

wobei $\Gamma = \Gamma_{e,c}$ für $\tau = \tau_{e,c}$.

Die Verteilung der gemessenen Tunnelzeiten für verschiedenen Detektorbandbreiten ist in Abbildung 2.23 zu sehen. Für eine unendlich

2 Theoretische Grundlagen

schnelle Reaktion des Detektors folgt die Verteilung (2.78) (rote Linie in der Abbildung). Für endliche Bandbreite sieht man für kurze Tunnelzeiten ein Einbrechen der Ereignisse. Zudem flacht der Verlauf der Verteilung ab. Je niedriger die Bandbreite, desto deutlicher ist dieser Effekt. Die Ursache ist, dass immer mehr Tunnelereignisse zu schnell vonstatten gehen, um vom Detektor als Ereignis registriert zu werden. Da zu kurzen Zeiten zunehmend Ereignisse fehlen, ist die gesamte Verteilung zu höheren Tunnelzeiten verschoben, was zu einem flacheren Verlauf führt. In der Abbildung sind die Verteilungen auf 1 normiert, weshalb die Kurven nicht zusätzlich noch in der absoluten Zahl der Ereignisse absinken.

Durch das Verkippen der Verteilung führt eine Bestimmung der Tunnelraten aus dem Exponenten des exponentiellen Abfalls zu langen Tunnelzeiten unweigerlich auf einen zu niedrigen Wert. Für typische Tunnelraten (in der Abbildung $\Gamma_e = 1500$ Hz und $\Gamma_c = 2800$ Hz) weichen die Werte auch für eine Detektorbandbreite von 75 kHz noch erkennbar ab, was etwa dem 20-fachen der Tunnelraten des Systems entspricht.

Die gemessenen Γ^* lassen sich, sofern Γ_d bekannt ist, aus den Tunnelraten Γ berechnen. Dazu wird (2.80) logarithmiert, abgeleitet und ein Limes $\tau \rightarrow \infty$ gebildet. Die Beziehung zwischen den Tunnelraten des Systems und der Messgröße Γ^* ist dann:

$$\Gamma_{e,c}^* = \frac{1}{2} \cdot \left(\Gamma_d + \Gamma_e + \Gamma_c - \sqrt{-4\Gamma_d\Gamma_{e,c} + (\Gamma_d + \Gamma_e + \Gamma_c)^2} \right) \quad (2.81)$$

Für eine Emittiertunnelrate $\Gamma_e = 1500$ Hz würde eine Messung mit $\Gamma_d = 75$ kHz auf eine gemessene Tunnelrate $\Gamma_e^* = 1445$ Hz führen. Um von den gemessenen Tunnelraten Γ^* auf die Tunnelraten des Systems zu schließen, ist ein simultaner Fit mit (2.80) an die Verteilungen von $\tau_{e,c}$ durchzuführen.

3

Kapitel 3

Experimentelle Grundlagen

In diesem Kapitel werden die experimentellen Techniken vorgestellt. Den Anfang macht der prinzipielle Aufbau einer Transportmessung an einem Quantenpunktsystem, dann folgen die Beschreibungen der speziellen Messtechniken, die für die unterschiedlichen Experimente dieser Arbeit notwendig waren. Neben dem Messaufbau werden zudem besondere Auswerteverfahren vorgestellt, die Anwendung fanden.

3.1 Quantenpunktstrukturen

In diesem Abschnitt werden die drei unterschiedlichen Quantenpunktstrukturen vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden. Basis aller Proben sind Heterostrukturen, die bei niedrigen Temperaturen ein 2DEG ausbilden. Das Probenmaterial wurde mittels optischer Lithographie prozessiert, wobei das 2DEG vorstrukturiert und Goldkontakte zur Kontaktierung des 2DEG aufgebracht wurden. Nach der optischen Strukturierung erfolgte die Nanostrukturierung mit dem Rasterkraftmikroskop (atomic force microscope, AFM). Dabei wurde die Technik der lokalen anodischen Oxidation (LAO) genutzt [80, 81]. Hierbei wird zwischen AFM Spitze und der Probe eine Spannung angelegt. Dabei wird für eine ausreichende Luftfeuchtigkeit gesorgt, die einen Flüssigkeitsfilm auf der Probenoberfläche sicherstellt. Die Spannung zwischen Spitze und Probe sorgt für die lokale Oxidation der Oberfläche. Im Bereich unterhalb der Spitze bildet sich eine Oxidschicht von einigen Nanometern Tiefe. Damit ist es möglich, durch Verfahren der Spitze Oxidlinien auf die Oberfläche zu schreiben. Unterhalb der Oxidlinien wird die Bandstruktur der Heterostruktur verändert, was zu einer Verarmung des 2DEG unter den Oxidlinien führt. Dies ermöglicht es, auf der Skala von Nanometern das 2DEG in Bereiche zu unterteilen und so Zuleitungen, Quantenpunktbereich und Gates zu definieren.

3.1.1 Der Einzelquantenpunkt

Der Einzelquantenpunkt basiert auf der Heterostruktur C021227B. Diese Heterostruktur stammt aus dem Walter Schottky Institut München und wurde von W. Wegscheider hergestellt. Es handelt sich dabei um eine Struktur mit einem besonders flach unter der Oberfläche befindlichen 2DEG. Der Abstand des 2DEG zur Probenoberfläche be-

3.1 Quantenpunktstrukturen

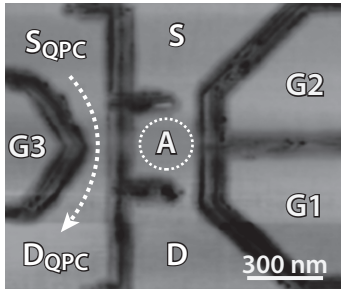


Abbildung 3.1:

Der Einzelquantenpunkt hat Source und Drain Zuleitungen und zwei Seitengates. Neben dem QD ist ein QPC platziert, der über ein Seitengate kontrolliert werden kann.

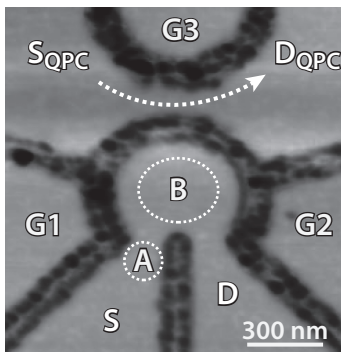


Abbildung 3.2:

Der Doppelquantenpunkt wurde als Einzelquantenpunkt konzipiert. An Source bildet sich jedoch ein zweiter Quantenpunkt, so dass die Struktur zu einem seriellen Doppelquantenpunkt wird. QD A ist an Source angeschlossen, B an Drain. Links und rechts ist ein Seitengate platziert. Oberhalb von QD B liegt ein QPC mit Seitengate.

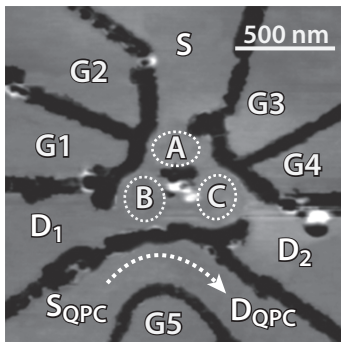


Abbildung 3.3:

Der Dreifachquantenpunkt verfügt über drei Zuleitungen. Die QDs A, B und C können mit insgesamt vier Seitengates kontrolliert werden. Unterhalb der QDs befindet sich ein QPC, der über ein fünftes Gate angesteuert wird.

3 Experimentelle Grundlagen

trägt 35 nm, wodurch die Bearbeitung mittels LAO ermöglicht wird. Die Mobilität des 2DEG beträgt $\mu_{4,2\text{K}} = 6.43 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, die Elektronendichte liegt bei $n_{4,2\text{K}} = 4.59 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Die Prozessierung der Struktur erfolgte in Zusammenarbeit mit B. Harke. In Abbildung 3.1 ist ein AFM-Bild der Probe gezeigt. Die unbehandelte Probenoberfläche ist grau. In diesen Bereichen ist das 2DEG zu finden. Die dunklen Bereiche sind oxidierte Linien, unter denen das 2DEG verarmt ist. Die Linien trennen also verschiedene Bereiche des 2DEG voneinander ab. Die Kantenlänge des QD im Zentrum der Struktur (als A bezeichnet) beträgt etwa 290 nm. Die Tunnelbarriere zu Source hat eine Breite von ca. 60 nm, die Tunnelbarriere zu Drain ist etwa 40 nm weit. Der QPC ist an der Engstelle ca. 70 nm breit. Diese Breiten sind jedoch als geometrische Breiten zu verstehen. Die Oxidlinien erzeugen zu beiden Seiten einen Verarmungsbereich, wodurch die elektrischen Breiten geringer ausfallen. Die Struktur verfügt über zwei Seitengates (G1 und G2) für den QD, mit denen die Energieniveaus des QD beeinflusst und die Tunnelraten der Tunnelbarrieren kontrolliert werden können. Direkt neben dem QD wurde die Engstelle des QPCs erzeugt. Dessen Leitfähigkeit wird mit einem dritten Seitengate (G3) eingestellt. Die Seitengates können mit Spannungen bis zu ± 500 mV belastet werden.

3.1.2 Der Doppelquantenpunkt

Der Doppelquantenpunkt wurde auf Basis der Heterostruktur 05-31-00.3 prozessiert. Die Prozessierung erfolgte in Zusammenarbeit mit I. Neumann. Das Material stammt von der Technischen Universität München und wurde von M. Bichler hergestellt. Die Heterostruktur bildet bei niedrigen Temperaturen ein 2DEG in einer Tiefe von 37 nm unter der Probenoberfläche. Die Mobilität des 2DEG beträgt $\mu_{4,2\text{K}} = 3.3 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, die Elektronendichte liegt bei $n_{4,2\text{K}} = 3.5 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Ein AFM-Bild der Struktur ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Das Zentrum der

Struktur ist der kreisförmige QD B mit einem geometrischen Durchmesser von ca. 600 nm. Die Tunnelbarriere an Source ist etwa 120 nm breit. In diesem Bereich bildet sich ein zweiter QD (A) aus. Über eine etwa 130 nm breite Barriere ist QD B an Drain angeschlossen. Dadurch, dass sich an der Sourcebarriere ein QD ausbildet, handelt es sich hierbei um eine serielle Doppelquantenpunktstruktur, obwohl sie geometrisch als Einzelquantenpunkt ausgelegt ist. An beiden Seiten des zentralen Kreises befinden sich Seitengates (G1 und G2). Der QPC im oberen Bereich ist ca. 120 nm breit und wird von Gate G3 kontrolliert. Die Oxidlinien dieser Struktur sind etwas breiter als die des Einzelquantenpunktes. Dies hat auch eine etwas breitere Verarmungszone zur Folge.

3.1.3 Der Dreifachquantenpunkt

Hergestellt wurde der Dreifachquantenpunkt von M.C. Rogge. Ausgangsmaterial ist die Heterostruktur 7-10-00.1. Das Material stammt ebenfalls von M. Bichler von der Technischen Universität München. Das 2DEG befindet sich in einer Tiefe von 33 nm. Die Mobilität des 2DEG beträgt $\mu_{4,2K} = 4.21 \cdot 10^5 \frac{\text{cm}^2}{\text{Vs}}$, die Elektronendichte liegt bei $n_{4,2K} = 3.47 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Ein AFM-Bild des Dreifachquantenpunktes zeigt Abbildung 3.2. In der Mitte befinden sich die Quantenpunkte A, B und C. Sie sind lediglich durch einen Oxidpunkt im Zentrum der Struktur voneinander getrennt. Durch vier Seitengates werden die Quantenpunkte voneinander getrennt. Dadurch bilden sich Tunnelbarrieren zwischen A und B, sowie A und C; B und C koppeln nur kapazitiv aneinander. Jeder QD verfügt außerdem über eine Tunnelbarriere zu einer Zuleitung. Der QPC unterhalb von B und C wird mit einem fünften Gate gesteuert und kann zudem selbst als Gate für die Quantenpunkte genutzt werden.

3.2 Nichtinvasive Ladungsdetektion

Die Detektion des Ladungszustandes, bzw. dessen Änderung ist eine der grundlegenden Aufgabenstellungen der Transportspektroskopie an Quantenpunkten. Der Quantenpunktkontakt hat sich hierbei in den letzten Jahren als hervorragendes Hilfsmittel herausgestellt, da er nicht nur sehr genaue Messungen von Ladungsänderungen ermöglicht, sondern dabei zusätzlich eine nichtinvasive Messmethode ermöglicht [21, 29, 31, 82–84]. In diesem Abschnitt wird nun der prinzipielle Ablauf einer Ladungsdetektion mittels Quantenpunktkontakt erläutert und die zur Analyse im Rahmen der Doktorarbeit verwandten Techniken vorgestellt.

3.2.1 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

Wie in Abschnitt 2.3.2 beschrieben bilden sich innerhalb der Engstelle des QPCs Subbänder aus, die Transportkanäle für die durchquerenden Elektronen bilden. Dies führt zu einer stufenförmigen Leitfähigkeit. Die Übergänge zwischen diesen Stufen sind bei geeignetem Potentialverlauf entlang der Engstelle steil. Ist der QPC (z.B. mittels eines Seitengates) so präpariert, dass sich sein Arbeitspunkt gerade in einer solchen Flanke befindet, reagiert er daher sehr empfindlich auf Änderungen des lokalen Potentials. Dabei ist es gleichgültig, was die Änderung des Potentials hervorruft. Diesen Umstand kann man sich nun zunutze machen und den QPC direkt neben einem Quantenpunkt platzieren. Zuerst wurde dies von Field *et al.* mittels metallischer Topgatestrukturen realisiert [19]. Später folgte die Umsetzung mittels LAO [29, 85]. Eine Detektion ist prinzipiell auch mit einem zweiten Quantenpunkt durchführbar [86, 87]. Der QPC hat jedoch den entscheidenden Vorteil, selbst keine lokalisierte Ladungen zu tragen. Damit reduziert sich sein Einfluß auf das zu vermessende Quantensystem beträchtlich. Der

3.2 Nichtinvasive Ladungsdetektion

Messvorgang kann als nahezu nichtinvasiv angenommen werden.

Wie nun ein QPC auf Ladungsänderungen des Dots reagiert, ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Zu Beginn (a) befinden sich N Elektronen auf dem QD (links dargestellt) und keines der Energieniveaus des QD befindet sich innerhalb des Transportfensters. Der QPC (in der Mitte dargestellt) ist so eingestellt, dass sich sein Arbeitspunkt (Leitfähigkeit des QPC ist rechts dargestellt) in diesem Zustand des QDs gerade im Anstieg auf das erste Leitfähigkeitsplateau befindet. Die Fermienergie E_F des QPCs liegt somit knapp unterhalb des ersten Subbands.

Werden die Energieniveaus des QDs verschoben, etwa durch Anlegen einer Gatespannung, und ein neues Energieniveau ($N + 1$) gelangt in das Transportfenster, können Elektronen den QD betreten und auch wieder verlassen. Diese Situation ist unter Abb. 3.4(b) zu sehen. Wann immer nun ein Elektron auf den QD tunnelt, verändert sich das lokale Potential am QPC um $\Delta\Phi$. Das zusätzliche Elektron übt eine zusätzliche abstoßende Wirkung auf die Leitungselektronen im QPC aus und verschiebt damit das Leitfähigkeitsplateau zu höheren Energien. Als Folge davon sinkt die Leitfähigkeit des QPCs. Verläßt das Elektron den QD wieder, verschiebt die Leitfähigkeitskurve entsprechend wieder zu niedrigeren Energien. Es tritt also eine messbare Leitfähigkeitsdifferenz ΔG zwischen geladenem und ungeladenem QD auf. Solange Elektronen auf den QD und herunter tunnelt, folgt der QPC diesen Ladungsänderungen, indem die Leitfähigkeit bei jedem Tunnelvorgang um ΔG sinkt oder steigt.

Wenn nun die Niveaus des QD noch weiter verschoben werden, wird schließlich ein Zustand erreicht, in dem das Niveau ($N + 1$) unterhalb des Transportfensters liegt und daher ständig von einem Elektron besetzt bleibt. In diesem Zustand finden wie in (a) keine Tunnelereignisse statt und somit bleibt auch das Potential am QPC konstant auf dem höheren Wert, der sich durch das zusätzliche Elektron nun dauerhaft eingestellt hat. Die Leitfähigkeit ist in Situation (c) daher um ΔG

3 Experimentelle Grundlagen

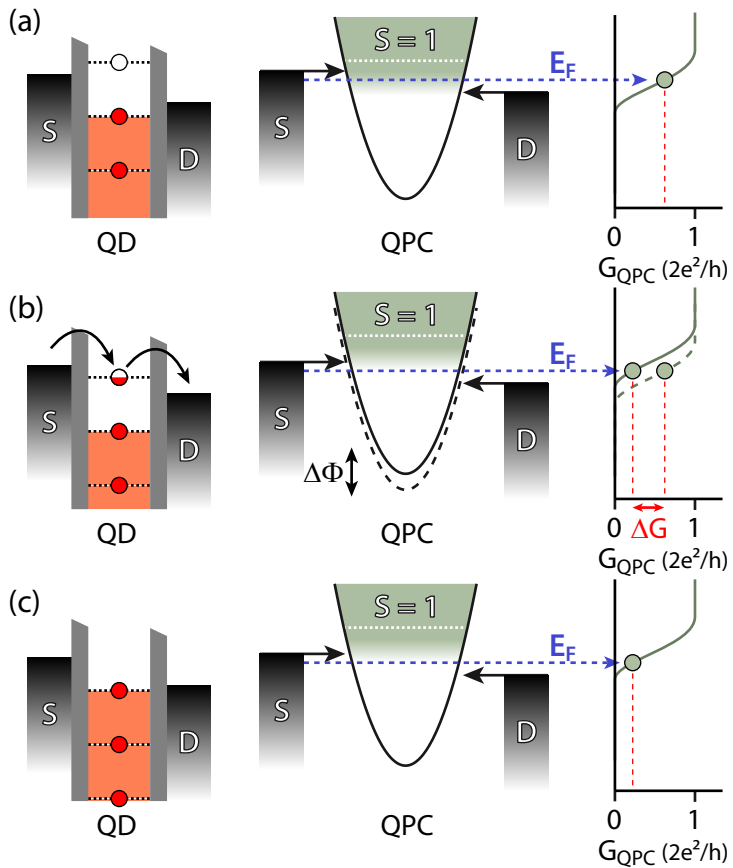


Abbildung 3.4:

Der QPC als Ladungsdetektor: Dargestellt sind drei Ladungszustände des QD. Zunächst (a) befinden sich N Elektronen auf dem QD (links), der QPC (mitte) ist so eingestellt, daß seine Leitfähigkeit G_{QPC} (rechts) im Anstieg zum ersten Plateau liegt. Tunneln Elektronen durch den QD (b), führt deren Ladung zu einer Änderung des Potentials Φ am QPC, was zu einer Änderung von G_{QPC} führt, die abgeschlossen ist, wenn dauerhaft $N+1$ Elektronen auf dem QD sind (c).

niedriger als dies in (a) der Fall war.

Eine Leitfähigkeitsmessung am QPC, die dieses Verhalten ausnutzt, sollte damit geeignet sein, sehr empfindlich Ladungsänderungen auf einem Quantenpunkt festzustellen. Es ist dazu nicht notwendig, dass der QD eine meßbare Leitfähigkeit besitzt. Eine direkte absolute Ladungsmessung ist auf diese Weise unmöglich. Das Messprinzip ermöglicht lediglich die Messung von Änderungen der Ladung im Vergleich zu einem Startzustand. Ist man jedoch in der Lage, den QD vollständig zu entleeren, so wird eine Absolutmessung möglich. Die Leitfähigkeitsänderungen können dann in Relation zum Zustand vollständiger Entleerung gemessen werden [21, 22, 26]. Die Messung ist dabei keinesfalls auf die Detektion von Elektronenladungen begrenzt. Die hohe Sensitivität ermöglicht es, auch Änderungen der Elektronenkonfiguration zu detektieren, wie im Abschnitt 4.4.3 gezeigt wird.

3.2.2 Der Leitfähigkeitsverlauf bei Transportmessungen

Das Leitfähigkeitssignal des QPC wird durch die hohe Empfindlichkeit natürlich nicht nur durch die Änderung der Elektronenzahl auf dem Quantenpunkt beeinflusst. Auch Gates, die zum Verändern des QD genutzt werden, haben deutlichen Einfluß auf die Leitfähigkeit. In Abbildung 3.5 ist der prinzipielle Verlauf der QPC Leitfähigkeit bei einer typischen Spektroskopiemessung am QD dargestellt.

Im oberen Teil der Abbildung ist links noch einmal der Leitfähigkeitsverlauf des QPC in Abhängigkeit vom lokalen Potential zu Beginn der Messung Φ_{QPC} zu sehen. Dieses Potential ist in der realen Messituation durch den Ladungszustand des QD und die am QPC angelegte Gatespannung gegeben. Der Arbeitspunkt verschiebt nun zu niedrigeren Leitfähigkeiten, wenn zusätzliche Elektronen den QD laden. Dies erreicht man jedoch typischerweise dadurch, dass über ein Gate des QD ein positives Potential an den QD angelegt wird. Die positive Gate-

3 Experimentelle Grundlagen

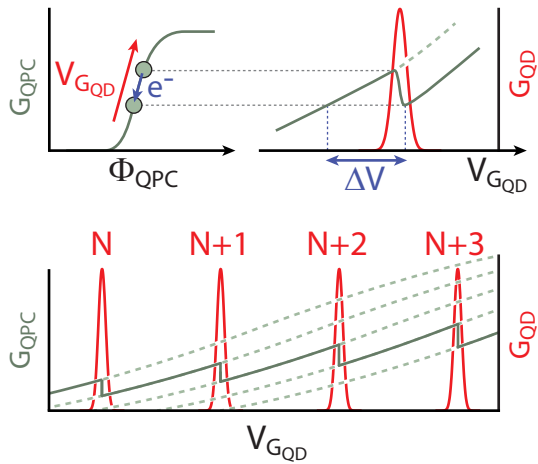


Abbildung 3.5:

Leitfähigkeitsverlauf des Detektors: (oben) Der Leitwert des QPC wird von zusätzlichen Elektronen verringert, wogegen ein positiveres QD Gate zu einer Erhöhung führt. In Kombination führt dies zu einem sägezahnartigen Verlauf der Leitfähigkeit in Abhängigkeit von V_{GQD} . (unten) Verlauf von G_{QPC} über mehrere Ladungszustände des QD hinweg.

spannung V_{GQD} wirkt natürlich auch auf den QPC. Sie verschiebt, wie in der Abbildung durch den roten Pfeil angedeutet, den Arbeitspunkt kontinuierlich in Richtung des Leitfähigkeitsplateau.

Rechts daneben ist der Leitfähigkeitsverlauf in Abhängigkeit der angelegten Gatespannung V_{GQD} dargestellt. Mit positiverer Gatespannung steigt zunächst die Leitfähigkeit des QPCs kontinuierlich an. Ohne eine Ladungsänderung des QDs würde dies stetig weitergehen und erst mit dem Erreichen des Leitfähigkeitsplateaus sättigen. Gerät jedoch durch die positivere Gatespannung ein Energieniveau des QD in das Transportfenster, so reagiert der QPC auf die zusätzliche Ladung.

3.2 Nichtinvasive Ladungsdetektion

Bei einer Gleichstrommessung, die hier angenommen wird, ist die Ladungsfluktuation, die bei Resonanz auf dem QD eintritt, nicht aufzulösen. Bei direkt messbarer Leitfähigkeit des QD (angedeutet durch den Coulombpeak in der Leitfähigkeit G_{QD}) beträgt die Frequenz der Tunnelereignisse mehrere hundert MHz. Die Gleichstrommessung bildet daher nur die mittlere Besetzung des QD ab. Daher erfolgt der Leitfähigkeitsabfall im QPC sanft und entsprechend der Verbreiterung des Coulombblockadepeaks. Nachdem das niedrigere Leitfähigkeitsniveau erreicht ist, folgt wieder der durch das Gate verursachte Aufwärtstrend. Durch die Aufladung des QD ist jedoch eine Potentialänderung eingetreten, die einer Veränderung der Gatespannung $V_{\text{G}_{\text{QD}}}$ um einen Betrag von ΔV entspräche. Der Verlauf der Leitfähigkeitskurve ist somit zu niedrigeren Gatespannungen verschoben worden.

Dies ist im unteren Teil von Abbildung 3.5 demonstriert. In grün ist die Leitfähigkeit des QPC dargestellt, in rot die des QD. Der reale Leitfähigkeitsverlauf (hellgrün, durchgezogen) lässt sich aus einer Schar von Leitfähigkeitskurven ohne Ladungsänderung (hellgrün, gestrichelt) auf dem QD zu verschiedenen Startpotentialen ableiten. Jedes zusätzliche Elektron auf dem QD entspricht dabei einer Verschiebung der idealisierten Kurve um ΔV . Zu Beginn der Messung folgt der QPC der ersten Kurve. Sobald ein zusätzliches Elektron auf den QD geladen wird, folgt die Leitfähigkeit der zweiten, verschobenen Kurve, der sie nun bis zum nächsten Coulombblockadepeak folgt. Dort steigt wiederum die Zahl der Elektronen auf dem QD um eins, weshalb nun die dritte Kurve verfolgt wird, die um $2 \Delta V$ zur ersten verschoben ist. Auf diese Weise entsteht eine Leitfähigkeitskurve die einem Sägezahnmuster gleicht.

Wie lang und steil dabei die Anstiege zwischen den Ladungszacken sind und wie weit jeweils die Leitfähigkeit beim Übergang zur nächsthöheren Elektronenzahl ist, hängt von der Ankopplung des QPC an das verwandte Steuergate und der Kopplung zwischen QPC und QD

3 Experimentelle Grundlagen

ab. Die Wahl des Arbeitspunktes hat ebenfalls starken Einfluß hierauf. Ideale Messbedingungen sind gegeben, wenn sich der QPC zur Zeit der Umladung stets am sensitivsten Arbeitspunkt befindet. Dazu muß jedoch der Einfluß des Steuergates am QD auf den QPC zwischen den einzelnen Coulombblockadepeaks gerade den Einfluß des zusätzlichen Elektrons kompensieren. Da solche Überlegungen sich jedoch bei der Probenherstellung z.B. der Funktionalität der Tunnelbarrieren und ähnlichen Probenparametern unterordnen müssen, ist diese Situation meist nicht perfekt gegeben. Dennoch kann eine solche Situation erreicht werden. Dazu muß jedoch ein linearer Ausgleich mit dem QPC Gate erfolgen. Hierzu wird die Spannung am Gate des QPC in einem festen Verhältnis zu den Gatespannungen des QD nachgefahren und deren Einfluss kompensiert.

3.3 Der Messaufbau

In diesem Abschnitt soll der Messaufbau vorgestellt werden, mit dem die Messungen an QD und QPC durchgeführt wurden. Der Messaufbau folgt für Einzel-, Doppel- und Dreifachquantenpunkt prinzipiell dem gleichen Schema. Ein Unterschied besteht nur in der Zahl der verwandten Gates und Zuleitungen. In Abbildung 3.6 ist die Messanordnung am Beispiel des Einzelquantenpunktes schematisch aufgezeigt.

Im Zentrum des Aufbaus steht die Probe. Sie ist, wie auch die Messung, in zwei Bereiche aufgeteilt: den QD (rot dargestellt) mit seinen Zuleitungen und Gates, sowie den QPC (grün) mit dem Steuergate. Die Probe befindet sich in einem Kryostaten (dargestellt durch den blauen Bereich), in dem ein Magnet ein senkrechttes Magnetfeld an die Probe anlegen kann. Als Kryostat kamen zwei ^3He - ^4He -Entmischungskryostaten der Firma Oxford Instruments zum Einsatz, die jeweils eine Basistemperatur von unter 20 mK erreichten. Außerdem wurden Messungen in einem ^4He Kryostaten (ebenfalls Oxford

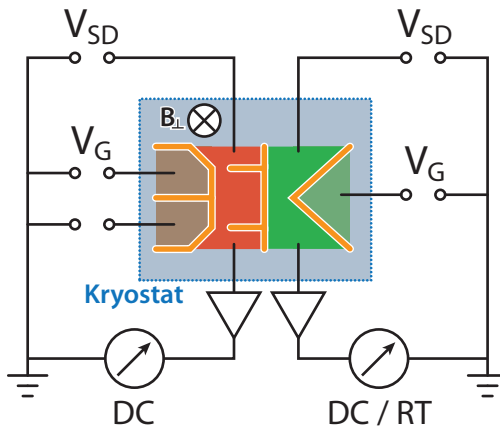


Abbildung 3.6:

Schematische Darstellung des Messaufbaus. Die Messung kann in zwei separate Messkreise unterteilt werden. Auf der einen Seite (roter Bereich der Probe) erfolgt die Messung am QD, auf der anderen (grüner Bereich) die am QPC Ladungsdetektor.

Instruments) durchgeführt.

Die Messungen an QD und QPC sind vollständig von einander getrennt, bis auf den Bereich des QPCs selbst, wo die Ladungsmessung am QD erfolgt. Am QD wird auf der Source-Seite eine Vorspannung V_{SD} angelegt. Dies erfolgt wahlweise über einen Digital-Analog-Wandler (digital analog converter, DAC) (IOtech DAC488HR/4) oder eine messfähige Strom-Spannungs-Quelle (SMU, source measure unit) (Keithley 2400). Die Gate werden mit einem DAC auf die gewünschten Gatespannungen V_G gesetzt. Am Drainkontakt des QD wird der Strom mit einem Stromverstärker in eine Spannung umgewandelt und dabei verstärkt. Als Verstärker kam hier ein rauscharmer Gleichstromverstärker (ITHACO 1211) zum Einsatz. Die Spannung wird mit ei-

3 Experimentelle Grundlagen

nem Multimeter (Keithley 2000) gemessen. Für die Messung der differentiellen Leitfähigkeit wird die Lock-In Technik genutzt [88]. Dabei wird ein kleines AC Trägersignal zu V_{SD} addiert. Die Spannung des Verstärkers wird dann zusätzlich mit einem Lock-In-Verstärker gemessen. Als Lock-In-Verstärker wurde der EG&G 7260 verwendet.

Am QPC wird ebenfalls eine Vorspannung an Source angelegt. Dies erfolgte mittels SMU. Das Gate des QPCs wird mit einem DAC gesteuert. An Source erfolgt ebenfalls eine Verstärkung. Hier kamen für die Gleichstrommessungen der ITHACO 1211 oder der FEMTO DLPCA-100 zum Einsatz. Die Messung der Spannung erfolgte wieder mittels Multimeter. Für die zeitaufgelösten Messungen wurde als Verstärker der FEMTO LCA-100K-50M genutzt.¹ Die zeitaufgelöste Messung der vom Verstärker ausgegebenen Spannung wurde mit einem Keithley KUSB-3116 Data Acquisition Module eingelesen. Der Gleichstromanteil wurde parallel mit einem Multimeter bestimmt. Die Ansteuerung aller Messgeräte erfolgte über einen Messrechner mittels der Software LabVIEW von National Instruments [89].

¹Für die zeitaufgelösten Messungen am Dreifachquantenpunkt kam dagegen ebenfalls der ITHACO 1211 zum Einsatz.

3.4 Auswertung der zeitaufgelösten Messdaten

Die zeitaufgelöste Messung des Stromes durch den QPC, liefert natürlicherweise kein ideales Signal. Um von den rohen Messdaten zu physikalisch relevanten Daten zu gelangen, muss eine Reihe von Datenverarbeitungsschritten durchgeführt werden, die in diesem Abschnitt detailliert dargestellt werden.

3.4.1 Das Messsignal

Die Strommessung erfolgt mittels eines 100 kHz Stromverstärkers und wird digital erfasst. Die Datenerfassung erfolgte mit bis zu 500 kHz. Das Messsignal liegt dann als Reihe von Stromwerten vor; für einen Zeitraum einer Sekunde hätte man also bis zu 500000 einzelne Messwerte. Findet während der Messung Transport statt, so ist im Messsignal ein klares Springen des Stromwertes zu erkennen (siehe hierzu auch Abschnitt 3.2.1). Im Bild 3.7 ist dieses Verhalten deutlich zu erkennen. Das Auge identifiziert sofort die beiden verschiedenen Banden, auf die das Signal verteilt ist. Im Histogramm über den gemessenen Strom sind zwei deutliche Peaks für die jeweiligen Banden erkennbar.

Die übliche Herangehensweise zur Identifikation der im Signal auftretenden Sprungereignisse zwischen den beiden Banden, die ja die Tunnelereignisse markieren, wäre nun die Bildung der Ableitung und damit eine Flankenerkennung. Dies ist technisch kein größeres Problem und üblicherweise eine schnelle Methode. Sie erfordert aber eine hohe Signalqualität und ist damit sehr anfällig gegen spontan auftretende Störungen des Messsystems. Effektiv bedeutet dies, dass bei dem gegebenen Verhältnis von Signal zu Rauschen eine Filterung unabdingbar wäre, um auch Messungen mit Störimpulsen zuverlässig auszuführen. Eine Filterung geht aber stets mit Einbußen in der Bandbreite des

3 Experimentelle Grundlagen

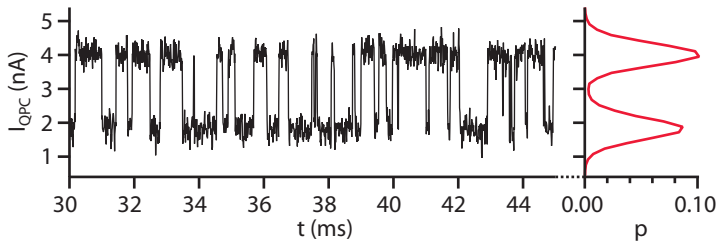


Abbildung 3.7:

Zeitaufgelöstes Signal des QPC Stromes. Es sind klar zwei Banden zu erkennen und klare Übergänge zwischen diesen. Rechts neben dem Messsignal ist ein Histogramm über I_{QPC} abgebildet. Die beiden Banden treten als zwei Peaks hervor.

Die Bedeutung der Bandbreite für die FCS wird im Theoriekapitel in Abschnitt 2.5.6 detailliert behandelt.

Messsystems einher, die mit Blick auf die Zielsetzung der FCS sehr schmerzlich sind. In dieser Arbeit wurde daher ein anderer Ansatz zur Detektion der Tunnelereignisse gewählt. Wie bereits erwähnt, vermag das Auge sofort zwischen beiden Banden zu trennen. Dies geschieht ganz natürlich, da man erkennt, dass das Signal in einem bestimmten Muster auftritt. Die Übergänge zwischen den Banden erkennt das Auge ebenfalls spielend, solange die Banden klar genug zu trennen sind. Es ist also die Feststellung, dass es Banden gibt, die das menschliche Auge selbst sehr kurze Wechsel zwischen den Banden sicher erkennen lässt. Diese Mustererkennung galt es in die Auswertung zu übertragen. Die Auszählung eines Zeitabschnitts folgt daher folgendem Fahrplan:

- Bestimmung der Banden und deren Grenzen
- Bewertung der Messwerte Punkt für Punkt
- Identifikation der Bandenwechsel
- Extraktion der relevanten Messwerte

3.4 Auswertung der zeitaufgelösten Messdaten

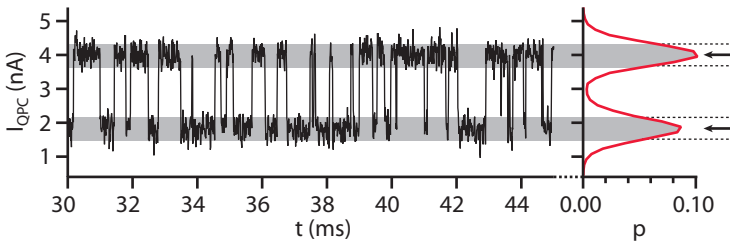


Abbildung 3.8:

Zeitaufgelöstes Signal des QPC Stromes. Anhand des Histogramms über das QPC Signal werden die Grenzen der Banden bestimmt.

Im Folgenden sollen nun die einzelnen Schritte auf dem Weg zur vollständigen Auszählung eines Datensatzes im Einzelnen erläutert werden.

3.4.2 Bestimmung der Banden und deren Grenzen

Um die Banden zu erkennen wird zunächst ein Histogramm der Messdaten erzeugt. Ein solches ist in Abbildung 3.8 zu sehen. Das Histogramm weist wie schon oben festgestellt zwei klar trennbare Peaks auf. Die Bandengrenzen werden nun aus der Breite der jeweiligen Peaks gewonnen, dies kann etwa durch die Wahl eines Schwellwertes geschehen oder durch eine fest vorgegebene Bandenbreite. Letzteres hat sich gerade bei stark asymmetrischen Tunnelbarrieren und niedrigen Tunnelraten als sinnvoll erwiesen, da in diesem Falle die beiden Peaks des Histogramms drastisch unterschiedliche Höhen aufweisen. Die Auflösung des schwächeren Histogrammpeaks nimmt durch die immer seltener auftretenden und zudem sehr kurzen Ereignisse in diesen Fällen stark ab. Eine Identifikation des Peakmaximums ist dabei aber noch möglich. Wie man in Abbildung 3.8 klar erkennt, liegt der Großteil der Messpunkte innerhalb eines der beiden durch die Grenzen definierten

3 Experimentelle Grundlagen

Niveaus (in der Abbildung als graue Balken dargestellt). Externe Störungen zeichnen sich nun dadurch aus, dass sie typischerweise das Signal stark über die Grenzen hinausschnellen lassen. Durch die Bestimmung der Bandengrenzen hat man also ein gutes Werkzeug zur Hand, um eine Zunahme externer Störungen zuverlässig von Ladungsänderungen im untersuchten System zu unterscheiden. Diese Information wäre bei einer reinen Flankendetektion nicht verfügbar.

3.4.3 Der Auszählalgorithmus

Sind die Grenzen bekannt, kann der Auszählalgorithmus auf den Datensatz angewandt werden. Ein Schemabild des Vorgangs ist in Abbildung 3.9 gezeigt. Der erste Schritt ist stets das Laden eines Datenpunktes. Dieser wird mit den Grenzen verglichen, die mittels Histogramm ermittelt wurden (siehe Abschnitt 3.4.2). Liegt der Punkt in der gleichen Bande wie sein Vorgänger, so ist das System noch im gleichen Ladungszustand. Es hat noch keine Umladung stattgefunden. Zudem wird der aktuelle Stromwert zu den vorangegangenen Werten aufaddiert. Dies ermöglicht die Bildung eines Mittelwerts, sobald ein Sprung ermittelt wird. Dann folgt der nächste Datenpunkt. Solange also die Datenpunkte innerhalb ein und derselben Bande bleiben, werden sie addiert und die Anzahl der Datenpunkte mitgezählt. Liegt ein Datenpunkt in gar keiner Bande, so handelt es sich um einen Ausreißer. Diese Punkte werden weder mit einem Mittelwert verrechnet, noch sind sie Indiz für einen möglichen Zustandswechsel. Sie sind allerdings gehäuft auftretend ein Indiz für eine externe Störung. Daher wird ein Ausreißer vom Programm gespeichert. Folgen viele Ausreißer aufeinander, wird die Auswertung zunehmend konservativer bei der Identifikation von Umladungen.

Eine Umladung kann nur dann aufgetreten sein, wenn der neue Punkt zwar innerhalb der Bandengrenzen liegt, jedoch gerade nicht in

3.4 Auswertung der zeitaufgelösten Messdaten

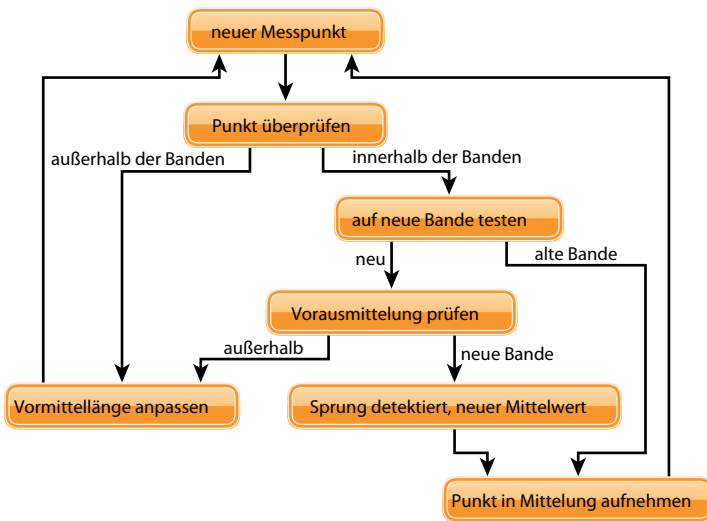


Abbildung 3.9:
Schemazeichnung des Auszählalgorithmus.

der Bande, in der die bisherigen Punkte lagen. Ist dies der Fall, erwartet das Programm eine Umladung. Um dies zu verifizieren, wird ein „Blick in die Zukunft“ gewagt. Das Programm hält in der Abarbeitung der Datenpunkte inne. Nun wird eine Anzahl von Punkten gemittelt, die direkt auf den aktuellen potentiellen Sprungpunkt folgen. Bei normalen Bedingungen wird eine Vorausmittlung von 2 weiteren Punkten vorgenommen. Sollten in letzter Zeit viele Ausreißer aufgetreten sein, so erhöht sich diese Zahl kontinuierlich. Jeder Punkt innerhalb der Grenzen verringert die Zahl wieder. Das Ergebnis der Vorausmittlung wird nun wiederum mit den Grenzen verglichen. Sollte der Mittelwert ebenfalls innerhalb der neuen Bande liegen, handelt es sich wirklich um eine Umladung. Sollte er aber außerhalb liegen, dann handelte es

3 Experimentelle Grundlagen

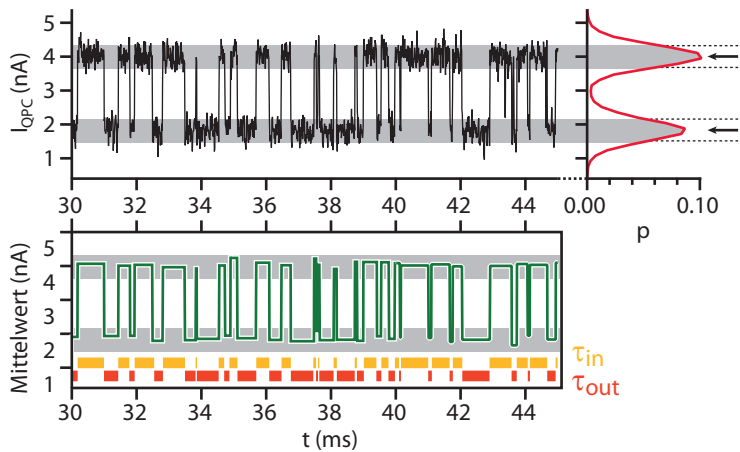


Abbildung 3.10:

Zeitaufgelöstes Signal des QPC Stromes (oben) im Vergleich mit dem quasi-digitalen Ergebnis des Auszählalgorithmus und der gewonnenen Liste der gemessenen Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} (unten).

sich doch um einen Ausreißer, der zufällig innerhalb der anderen Bande lag. Wurde eine Umladung identifiziert, so wird die Zeit seit der letzten Umladung in die Liste der Tunnelzeiten eingetragen. Dann wird mit dem Punkt des Sprungs ein neuer Mittelwert begonnen. Alle jetzt folgenden Punkte dieser Bande werden nun mit diesem verrechnet. Die neue Bande ist nun also der aktuelle Zustand, und die Prozedur geht wie gewohnt beim nächsten Punkt weiter. Zur späteren Kontrolle werden die Mittelwerte zwischen den Tunnelereignissen gespeichert. Am Ende der Prozedur erhält man damit eine quasidigitale Version der ausgewerteten Messung. Statt digitaler Werte (0 für die untere und 1 für die obere Bande) enthält sie jedoch die jeweiligen Mittelwerte. Damit ist ein direkter Vergleich mit den Rohdaten möglich. In Abbildung 3.10

3.4 Auswertung der zeitaufgelösten Messdaten

sind Signal und ausgewertetes Ergebnis im Vergleich abgebildet.

Während die Auswertung also Punkt für Punkt erfolgt, werden zwei Listen für die Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} erzeugt. Diese Listen enthalten die vollständige Information der Tunnelereignisse und ermöglichen damit zum Beispiel bereits eine Abschätzung der Tunnelraten gemäß (2.79). Auf dem Weg zu einer Untersuchung des Stromrauschens benötigt man jedoch weitere Auswerteschritte. Nachdem aus dem rohen Messsignal nun eine Abfolge von Tunnelzeiten geworden ist, beginnt die statistische Analyse.

3.4.4 Die Erzeugung einer Verteilung

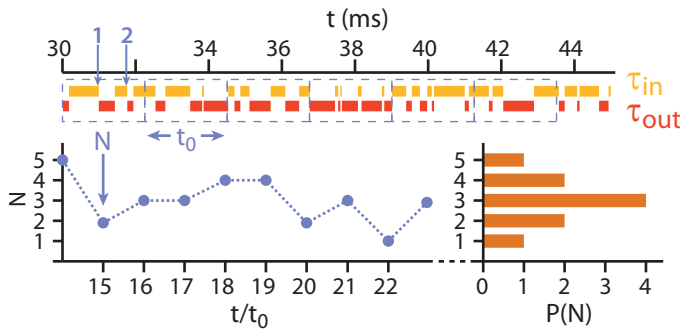


Abbildung 3.11:

Aus den gemessenen Tunnelzeiten (oben) wird die Verteilung der Tunnelereignisse abgeleitet. Dazu wird in einem Zeitfenster t_0 die Anzahl n der abgeschlossenen Eintunnelzeiten τ_{in} bestimmt. Aus der Liste der Tunnelereignisse n (unten links) wird dann mittels Histogrammbildung die Verteilung $P(n)$ gewonnen.

Der erste und naheliegendste Schritt ist es nun, die gewonnenen Tunnelzeiten zu nutzen, um aus ihnen die Statistik der Tunnelereignisse abzuleiten. Dazu wird die Messung in Zeitabschnitte t_0 aufgeteilt.

3 Experimentelle Grundlagen

Dargestellt ist dies im oberen Graphen von Abbildung 3.11. In diesen Zeitfenstern wird nun jeweils die Zahl der vollendeten Tunnelzeiten τ_{in} bestimmt, also wie oft in dem betreffenden Zeitfenster ein Elektron vom Source-Kontakt in den Quantenpunkt getunnelt ist. Die so gewonnene Anzahlen N stellen gegen die Zeit aufgetragen ein Gegenstück zu einer klassischen Strommessung dar, nämlich Anzahl n der getunnelten Elektronen pro Zeitintervall t_0 . Dargestellt ist dies links unten in Abbildung 3.11. Will man nun aus dieser gezählten Strommessung zu einer Verteilung kommen, ist nur noch die Berechnung des Histogramms der n -Werte erforderlich. Das Ergebnis ist die Verteilung $P(n)$ für ein gegebenes t_0 ; zu sehen ist dies rechts unten in Abbildung 3.11.

3.4.5 Berechnung der Momente

Aus den so bestimmten Werten n lassen sich nun die verschiedenen Momente der Tunnelstatistik berechnen. Diese sind notwendig, um die Kumulanten der Statistik zu bestimmen (siehe Abschnitt 2.5.5). Die Momente berechnen sich gemäß:

$$M_m = \langle (n - \langle n \rangle)^m \rangle$$

Experimentelle
Ergebnisse zur
Bestimmung
höherer
Kumulanten
finden sich in
Abschnitt 5.6.

Je höher das zu bestimmende Moment ist, desto größer muß hierbei die zugrundeliegende Stichprobe sein. Um möglichst viele Zeitabschnitte t_0 zu bekommen sollte zum einen t_0 ausreichend klein gewählt werden, zum anderen die Gesamtzeit t der Messung möglichst lang sein. Die minimale Länge von t_0 ist dabei durch die Tunnelraten und die Bandbreite des Systems begrenzt. Wird der Erwartungswert $\langle n \rangle$ im Zeitintervall t_0 sehr niedrig, spiegelt das Ergebnis der Auswertung nur das universelle Verhalten der Kumulanten für sehr kurze Zeiten wieder. Meist ist daher ein Erwartungswert in der Größenordnung von 1 die sinnvolle untere Grenze für die Wahl des Zeitfensters. Andererseits

besteht bei längeren Messzeiten die Gefahr, dass eine Drift der Systemtemperatur oder andere externe Einflüsse die Tunnelraten verändern. Dies ist auf jeden Fall zu vermeiden, da sonst die Statistik verfälscht wird. Ein Ausweg ist unter Umständen die Wahl einer höheren Tunnelrate. Dazu ist jedoch eine hinreichende Bandbreite des Messsystems erforderlich. Die Messung höherer Momente muss also stets mit Rücksicht auf die experimentell realisierbaren und physikalisch sinnvollen Systemparameter geschehen.

3.4.6 Technische Vergrößerung der Stichprobe

Die oben beschriebene Technik zur Bestimmung der Momente geht von einer einzelnen Liste detektierter Tunnelergebnisse n in einem Zeitintervall t_0 aus. Dies ergibt eine Stichprobe von t/t_0 Zeitabschnitten, denen jeweils eine gemessene Anzahl N zugeordnet ist. Diese Stichprobe lässt sich jedoch vergrößern, wenn man folgender Argumentation folgt:

Die Auswertung stützt sich auf die Auszählung eines zeitaufgelösten Signals der Länge t . Während der Messung wurde das System nicht verändert. Die Statistik der Tunnelereignisse ist eine direkte Folge der Transporteigenschaften des Quantenpunktes. Diese sollten sich aber während der gesamten Zeit t nicht geändert haben. Damit dürfte jeder Teilabschnitt t' der verstrichenen Zeit t zur gleichen Zählstatistik führen. Unterschiede sollten einzig und allein der endlichen Stichprobe geschuldet sein. Insbesondere kann der Startpunkt, an dem die Unterteilung des Messsignals in Zeitfenster t_0 beginnt, keinen Einfluß auf die zugrundeliegende Statistik haben.

Dies kann man sich zunutze machen. Nachdem das Signal ausgezählt ist und die vollständige Liste der Tunnelzeiten vorliegt, beginnt man wie in Abschnitt 3.4.4 geschildert mit dem Unterteilen in Zeitintervalle t_0 und bestimmt die Tunnelereignisse N . Aus diesen werden

3 Experimentelle Grundlagen

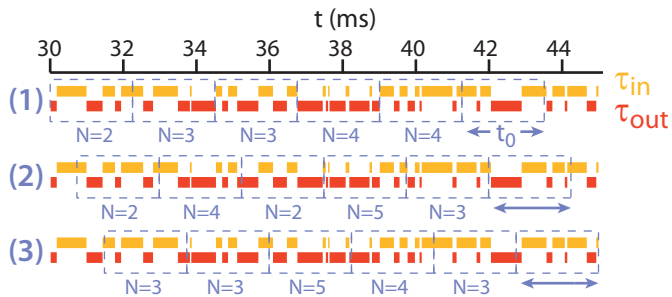


Abbildung 3.12:

Vergrößerung der Stichprobe: Aus den gemessenen Tunnelzeiten wird die Verteilung der Tunnelereignisse abgeleitet. Dazu wird in einem Zeitfenster t_0 die Anzahl N der abgeschlossenen Eintunnelzeiten τ_{in} bestimmt. Dann wird der Vorgang mehrfach wiederholt, wobei der Startpunkt des ersten Zeitfensters zu späteren Zeiten hin verschoben wird. Die Ergebnisse der einzelnen Schritte werden anschließend gemittelt.

wie in Abschnitt 3.4.5 erläutert die Momente berechnet. Dann wird der Startpunkt der Auswertung verschoben und wiederum die Liste der Tunnelereignisse pro Zeitintervall erzeugt und die Momente der Statistik bestimmt. Dieser Vorgang wird mehrfach wiederholt und die Momente der einzelnen Durchgänge werden gemittelt. Auf diese Weise lässt sich die Stichprobe, aus der die Transportstatistik berechnet wird, bei gleichbleibender Gesamtzeit t und gleichem Zeitintervall t_0 deutlich vergrößern.

3.5 Limitierungen der zeitabhängigen Ladungsmessung

Mit steigender Detektorbandbreite werden immer kürzere Tunnelzeiten messbar, was zu einer genaueren Messung der Zählstatistik führt. Experimentell ist die Erhöhung der Bandbreite jedoch ein schwieriges Unterfangen. In diesem Abschnitt sollen daher die experimentellen Limitierungen der Ladungsdetektion behandelt werden. Der Messaufbau und die Charakteristik des QPC begrenzen die Bandbreite des Detektors. Dabei sind es zwei Größen, die im Widerstreit stehen. Auf der einen Seite stehen die Steilheit des QPCs am Arbeitspunkt und die Ankopplung des QD an den QPC, die eine maximale Reaktion auf einen Tunnelprozess festlegen. Auf der anderen Seite bestimmen der Messaufbau, speziell der Anschluss des QPC an die Messelektronik, und die Güte des eingesetzten Verstärkers das technische Rauschen. Je stärker die Reaktion des QPC auf den Tunnelvorgang ausfällt, desto höher kann das technische Rauschen und damit die Bandbreite sein.

Betrachten wir zunächst die Minimalbedingungen für eine Detektion eines Tunnelereignisses. Damit ein Ereignis aufgelöst werden kann, muss die Reaktion des QPC ΔI_{QPC} auf ein zusätzliches Elektron auf dem Quantenpunkt stark genug sein, eine klare Änderung vor dem Rauschhintergrund auszulösen. Unabhängig davon, ob eine Bandendetektion erfolgt, wie sie hier vorgestellt wurde, oder aber eine komplexere Mustererkennung, ein Tunnelereignis sollte einen Sprung in der Leitfähigkeit bedeuten, der mindestens die Breite der Rauschbande ausmacht. Unterhalb dieser Sprunghöhe muss man mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit einen Verlust an Bandbreite durch den Auswertemechanismus in Kauf nehmen. Als Ursache der Rauschbande wird eine gaussförmige Streuung des RMS-(root mean square)-Rauschstromes I_{noise} angenommen. Die Breite der Rauschbande lässt sich dann mit $2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_{\text{noise}}$ abschätzen. Damit folgt, dass für eine erfolgreiche Detek-

3 Experimentelle Grundlagen

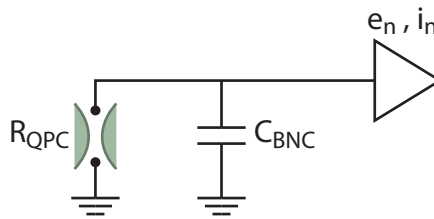


Abbildung 3.13:

Schematisches Schaltbild der Ladungsmessung: Der Stromverstärker wird durch sein Stromrauschen i_n und sein Spannungsrauschen e_n charakterisiert. Das Spannungsrauschen generiert dabei einen Strom, in Abhängigkeit vom Widerstand R_{QPC} des Quantenpunktkontaktes und der Kapazität C_{BNC} der Verkabelung.

tion von Tunnelereignissen $\Delta I_{QPC} \gtrsim 2 \cdot \sqrt{2} \cdot I_{noise}$ gelten muss.

Betrachten wir den Messaufbau. Ein schematisches Schaltbild der Ladungsmessung ist in Abbildung 3.13 gezeigt. Gemessen wird mit einem Stromverstärker der über sein Spannungsrauschen e_n und sein Stromrauschen i_n charakterisiert werden kann. Typischerweise wird die Probe in einem Kryostaten auf Temperaturen im Bereich von mK abgekühlt. Der Verstärker für den QPC Strom wird dann bei Raumtemperatur betrieben. Solange dabei keine Niederkapazitätskabel für den Anschluss des QPC an den Verstärker zum Einsatz kommen, hat man es mit einer Koaxialleitung von etwa 1.5 Metern Länge zu tun. Dies entspricht typischerweise einer Kapazität von $C_{BNC} = 150$ pF. Außerdem hat der Quantenpunktkontakt selbst einen Widerstand $R_{QPC} \simeq 30$ k Ω . Man kann nun das technische Rauschen des Stromverstärkers abschätzen, indem man das angegebene Stromrauschen des Verstärkers und den durch das Spannungsrauschen generierten Rauschstrom über Kapazität und QPC-Widerstand berechnet.

3.5 Limitierungen der zeitabhängigen Ladungsmessung

$$I_{\text{noise}} = \left(\int_0^\beta i_n^2 df + \int_0^\beta 4\pi^2 f^2 C^2 e_n^2 df + \int_0^\beta \left(\frac{e_n}{R_{\text{QPC}}} \right)^2 df \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet β die Bandbreite der Messung, e_n das Spannungsrauschen und i_n das Stromrauschen des Verstärkers (beides pro $\sqrt{\text{Hz}}$). Nach Ausführung des Integrals ergibt sich daraus:

$$I_{\text{noise}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi^2 C^2 e_n^2 \beta^3 + i_n^2 \cdot \beta + \left(\frac{e_n}{R_{\text{QPC}}} \right)^2 \cdot \beta}$$

Anhand dieser Formel lässt sich für einige Verstärker die niedrigste zu erwartende Breite der Rauschbande bestimmen.

In Abbildung 3.14 sind für vier verschiedene Messsysteme Abschätzungen der Rauschbande dargestellt. Dabei wurde in je zwei Fällen von einer gewöhnlichen Koaxialleitung (150 pF) bzw. einer Niederkapazitätsleitung (30 pF) ausgegangen. Zwei Kurven sind zu einer Bandbreite von 400 kHz und zwei zu 4 MHz bestimmt. Für 400 kHz wurde der Verstärker FEMTO LCA-400K-10M angenommen, für 4 MHz einmal der FEMTO HCA-4M-500K-C (für 150 pF) und einmal der FEMTO HCA-4M-500K (30 pF), der ein geringeres Rauschen aufweist, aber nur für niedrige Leitungskapazitäten ausgelegt ist.

Im Bereich bis 400 kHz liegt die Rauschbande des FEMTO LCA-400K-10M (blau) praktisch durchgehend unter 1 nA. Nur für die normale Koaxialleitung überschreitet die Bande diesen Wert ab ca. 200 kHz. Bei 400 kHz liegt der Maximalwert etwas über 2 nA für den Fall von 150 pF Leitungskapazität und bei etwa 0.4 nA für die Niederkapazitätsleitung. Für höhere Frequenzen zeigen die Verstärker FEMTO HCA-4M-500K-C und FEMTO HCA-4M-500K deutlich stärkeres Stromrauschen. Der FEMTO HCA-4M-500K-C erreicht bei 1 MHz

3 Experimentelle Grundlagen

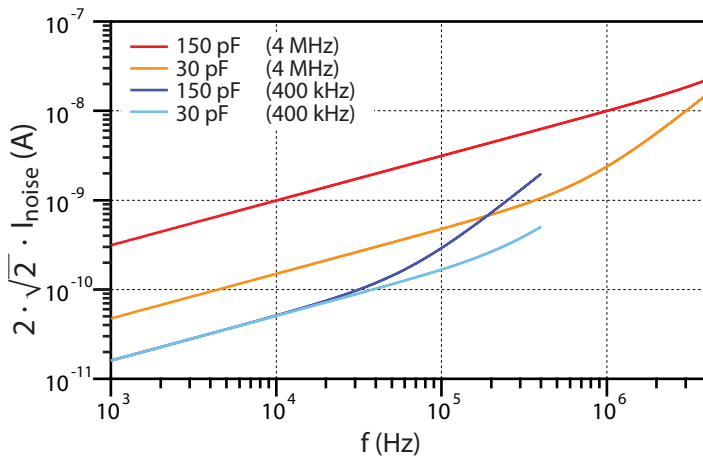


Abbildung 3.14:

Die minimale Rauschbande für vier experimentelle Konfigurationen. Rote Kurve: 4 MHz Stromverstärker FEMTO HCA-4M-500K-C mit einer Leitungskapazität von 150 pF. Orange: 30 pF Leitungskapazität und ein optimierter 4 MHz Stromverstärker (FEMTO HCA-4M-500K). Dunkelblau (150 pF) und Hellblau (30 pF): 400 kHz Verstärker FEMTO LCA-400K-10M.

eine Rauschbande von etwa 10 nA, der FEMTO HCA-4M-500K an einem Niederkapazitätsaufbau immerhin erst 2.5 nA.

Die experimentellen Ergebnisse haben gezeigt, dass eine realistische Reaktion des QPC auf ein Tunnelereignis eine Änderung des Stromes in der Größenordnung von 2 nA liegt. Eine Erhöhung dieser Stromänderung ist möglich, wenn man die Source-Drain-Spannung des QPC weiter anhebt. Dies hat jedoch unter Umständen eine Wirkung auf die Prozesse des QD [90]. Der Spielraum ist also begrenzt. Dennoch wäre eine moderate Erhöhung möglich. Für eine weitere Steigerung des Stromes wäre eine strukturspezifische Untersuchung sinnvoll, die die Änderung der Zählrate in Abhängigkeit vom QPC-Strom charakteri-

3.5 Limitierungen der zeitabhängigen Ladungsmessung

siert, wie es beispielsweise in [91] getan wurde.

Ein weiterer Parameter ist der Potentialverlauf des QPC. Auch hier wäre eine Optimierung durchaus vorstellbar. Grenzen setzt dabei die Komplexität der Quantenpunktstruktur. Außerdem muss die Länge des QPC möglichst gering gehalten werden, solange LAO als Herstellungsmethode dient. Die Oxidbarrieren machen Störstellen im Bereich der Engstelle sehr wahrscheinlich. Ein Ausweg könnte hier der Übergang zu Topgatestrukturen sein. Das Potential, das in der Optimierung des QPC Designs liegt, lässt sich allerdings nur schwer abschätzen.

Betrachtet man Abbildung 3.14 unter dem Gesichtspunkt, dass eine Rauschbande mit unter 2 nA Breite erreicht werden muss, so ist festzustellen, dass dies klare Grenzen für die Bandbreite des Messsystems bedeutet. Bereits für 400 kHz wird das technische Rauschen bei normalen Koaxialleitungen selbst im Idealfall ebenso groß wie die zu erwartende Reaktion des QPC. Dies gilt jedoch nur, wenn keine weiteren Rauschquellen von Bedeutung sind. Für 400 kHz Bandbreite ist also bereits ein Messaufbau mit niedriger Leitungskapazität wünschenswert. Damit sollte im Idealfall eine Rauschbande unterhalb von 500 pA möglich sein. Für Frequenzen oberhalb dieses Bereichs verschärft sich das Problem. Mit normalen Koaxialleitungen erreicht man bei 1 MHz bereits eine 10 nA breite Rauschbande, was selbst mit optimiertem QPC und hohen Strömen die Detektion unmöglich machen dürfte. Etwas besser stellt sich die Situation für niedrige Leitungskapazität dar. Hier liegt die Bande bei 1 MHz im Idealfall gleichauf mit der Reaktion des QPC. Dennoch wären für eine zuverlässige Messung ein sehr sauberer Messaufbau und einige Optimierungsschritte am QPC zwingend erforderlich.

Noch höhere Frequenzen sind mit Verstärkern bei Raumtemperatur realistisch betrachtet nicht zu erreichen. Statt dessen ist ein Übergang zu Tieftemperaturverstärkern notwendig. Dies hat zwei entscheidende Vorteile. Zum einen sorgt die niedrige Temperatur für ein deut-

3 Experimentelle Grundlagen

lich geringeres thermisches Rauschen. Zum anderen kann die Leitung zwischen Verstärker und Probe drastisch verkürzt werden. Damit ist eine Leitungskapazität von unter 30 pF auch in einem Entmischungskryostaten möglich.

All diese Überlegungen gelten nur dann, wenn die untersuchten Strukturen selbst kein zusätzliches Rauschen verursachen und kein zusätzliches technisches Rauschen den Quantenpunktkontakt erreicht. Werden bei der Herstellung der Proben Störstellen geschaffen, die nahe am QPC liegen und sich laden und entladen können, so kann dies beispielsweise die Messung empfindlich stören. Die Technik der lokalen anodischen Oxidation birgt hier ein gewisses Risiko, da bei der Bildung der Oxidbarrieren leicht Störstellen entstehen können. Diese wirken wie der zu untersuchende QD und verschieben bei Umladevorgängen das Potential des QPC. Derartigen Störungen kann unter Umständen durch eine Absenkung der Temperatur begegnet werden. In Abschnitt 5.8.1 wird die Temperaturabhängigkeit einer solchen Störstelle untersucht.

4

Kapitel 4

Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor ermöglicht es, den Parameterraum der Transportspektroskopie an Quantenpunkten deutlich zu erweitern. Die Messungen, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, sollen dies demonstrieren und zudem Grundlagen für das Verständnis der tiefergehenden Messungen späterer Abschnitte legen.

Zur Erinnerung ist in Abbildung 4.1 noch einmal ein Relief der Probe gezeigt. Der Quantenpunkt ist in Rot dargestellt. Der Transport wird durch zwei Tunnelbarrieren zu Source und Drain ermöglicht. Die Gates G_1 und G_2 kontrollieren die Durchlässigkeit der Tunnelbarrieren. Außerdem wird mit ihnen das Potential des QD verändert, um die Energiezustände des QD in Resonanz mit den Zuleitungen zu bringen.

In Grün dargestellt sieht man in der unteren Hälfte den QPC. Die Engstelle zwischen Source und Drainkontakt des QPC wird von einem weiteren Gate G_{QPC} bestimmt. Mit diesem Gate wird der Arbeitspunkt des QPC kontrolliert und so eingestellt, dass die Steigung der Leitfähigkeit des QPC am Arbeitspunkt möglichst steil ansteigt.

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

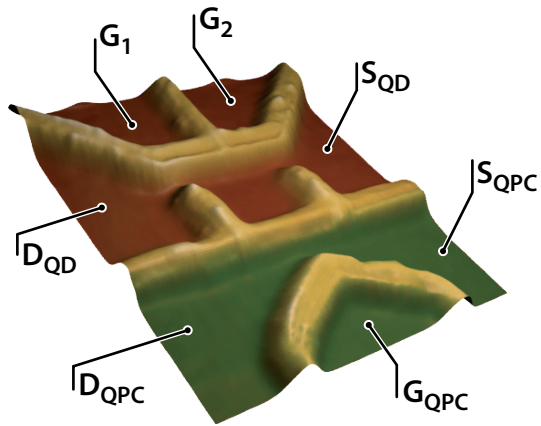


Abbildung 4.1:

Die Probe: In Rot ist im oberen Teil der Quantenpunkt zu sehen. Im unteren Teil, in Grün dargestellt, der QPC, dessen Arbeitspunkt das QPC-Gate kontrolliert.

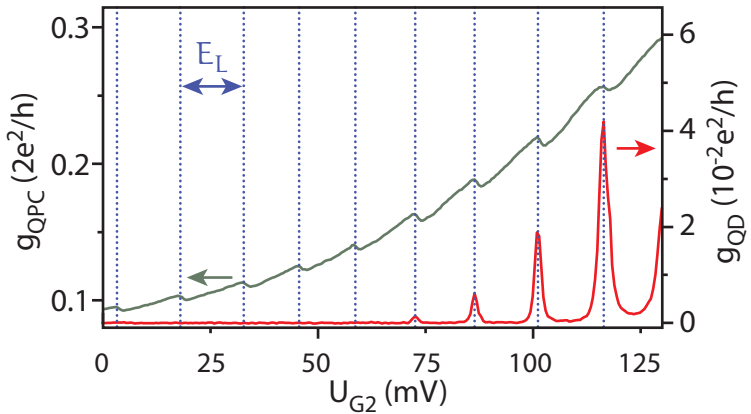


Abbildung 4.2:

Messung der Leitfähigkeit des QPC und der differentiellen Leitfähigkeit des QD im Bereich der Coulombblockade.

4.1 Nichtinvasive Messung der Coulombblockade

Nun wird die differentielle Leitfähigkeit des QD und die Leitfähigkeit des QPC gemessen, während eines der QD Gates (z.B. G2) variiert wird. Das Ergebnis einer solchen Messung ist in Abbildung 4.2 zu sehen.

Betrachten wir zunächst die differentielle Leitfähigkeit des Quantenpunktes (rote Kurve). Die Leitfähigkeit ist die meiste Zeit gleich Null, in regelmäßigen Abständen finden sich jedoch Peaks mit endlicher Leitfähigkeit. Dies ist das typische Verhalten eines QD unter Einfluss der Coulombblockade, wie es in Abschnitt 2.4.3 hergeleitet wurde. Immer wenn ein Energieniveau des QD in Resonanz mit Source und Drain kommt, steigt die Leitfähigkeit sprunghaft an. Befindet sich kein Energieniveau in Resonanz, verhindert die Coulombblockade den Transport. Über dieses Verhalten hinaus erkennt man bei sinkender Gatespannung, also in negative Gaterichtung, ein deutliches Abflachen der Coulombpeaks. Ab etwa 75 mV Gatespannung sind keine weiteren Peaks mehr zu sehen. Das bedeutet jedoch nicht etwa, dass kein Energieniveau unterhalb dieses letzten sichtbaren mehr verfügbar wäre und der QD keine Elektronen mehr beinhaltet. Vielmehr ist schlicht die Leitfähigkeit so niedrig geworden, dass sie in der direkten Strommessung nicht mehr aufgelöst werden kann.

Betrachten wir nun die Leitfähigkeit des QPC. Zunächst fällt ein generelles Ansteigen der Leitfähigkeit zu positiverer Gatespannung an G2 auf. Dies ist einfach eine Folge des elektrostatischen Einflusses von G2 auf den QPC. Der Effekt ist nicht sehr stark, da das Gate räumlich relativ weit entfernt ist. Über dieses Ansteigen hinaus erkennt man in regelmäßigen Abständen ein deutliches Einbrechen der Leitfähigkeit. Die Position dieser Zacken stimmt mit der Position der Coulombpeaks in der QD Messung überein. Die Zacken entstehen, weil sich an diesen

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

Gatespannungen die mittlere Ladung auf dem QD um ein Elektron ändert. In Abschnitt 3.2.1 ist dieser Mechanismus genauer erläutert.

Während die Leitfähigkeitsmessung am QD unterhalb von 75 mV keine weiteren Energieniveaus auflösen kann, zeigt die Leitfähigkeit des QPC deutlich weitere Niveaus. Die allmähliche Abnahme in der Deutlichkeit der Zacken ist die Folge des immer ungünstiger werdenden Arbeitspunktes. Wird der Arbeitspunkt mit Hilfe von G_{QPC} nachgeregelt, um den Einfluss von G_2 auszugleichen, bleibt die Deutlichkeit der Zacken auch für deutlich niedrigere Ströme erhalten. Die Auflösbarkeit von Energieniveaus mit Hilfe des QPC ist unabhängig vom Strom durch den QD, vorausgesetzt es findet überhaupt Ladungstransfer von einer Zuleitung in den QD statt.

Besonders deutlich wird diese Vergrößerung des Parameterraums bei der Messung eines Ladungsdiagramms. Hier werden beide Gates des QDs variiert und die Leitfähigkeit des QD als Funktion von V_{G1} und V_{G2} aufgetragen. Ein solches Diagramm ist in der oberen Hälfte von Abbildung 4.3 dargestellt. Wie in Abschnitt 2.4.3 erläutert, erhält man in solch einer Messung statt einzelnen Peaks nun Linien, die anzeigen, bei welchen Gatespannungen der QD in Resonanz mit seinen Zuleitungen kommt. Man erkennt diese Linien sehr deutlich in dem mit ① bezeichneten Bereich, jedoch werden sie für negativere Spannungen an beiden Gates rasch schwächer, da die Tunnelbarrieren undurchlässiger werden, und somit die Leitfähigkeit des QD immer geringer wird. Im Graphen ist die untere Grenze der Auflösbarkeit von Resonanzen als gestrichelte blaue Linie eingezeichnet. Nur innerhalb des Bereichs ① ist die Auflösung des Messaufbaus fein genug, um eine direkte Messung der Leitfähigkeit zu ermöglichen. Jenseits dieser ersten Linie können in einer Leitfähigkeitsmessung am QD keine weiteren Energieniveaus vermessen werden.

Anders ist dies in der Messung mit dem QPC. In der unteren Hälfte von Abbildung 4.3 ist die Leitfähigkeit des QPC abgeleitet in Richtung

4.1 Nichtinvasive Messung der Coulombblockade

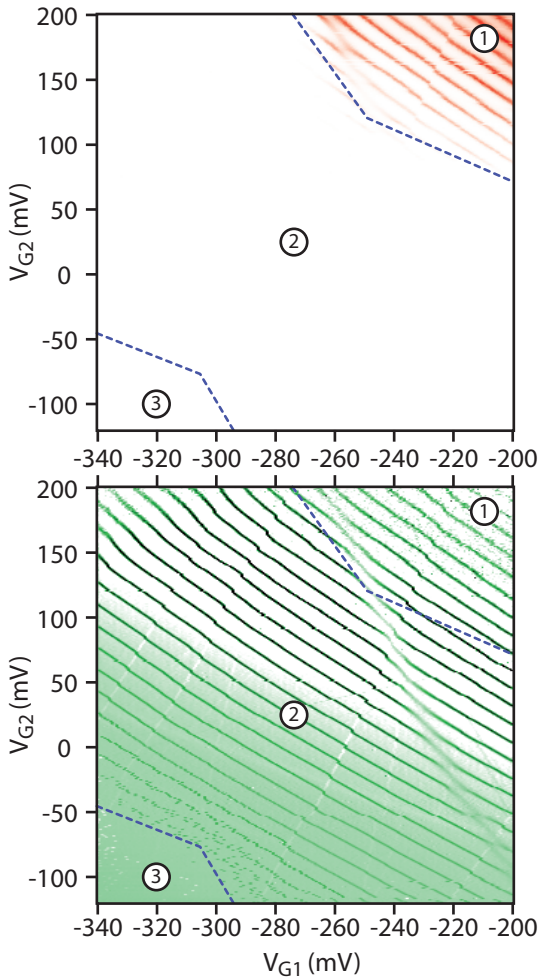


Abbildung 4.3:

Das Ladungsdiagramm des Quantenpunktes: oben die Leitfähigkeitsmessung am QD, unten die in Richtung von G_2 abgeleitete Leitfähigkeit des QPC für den gleichen Bereich.

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

G₂ gezeigt. Wie in Abbildung 4.2 gezeigt, erhält man in der Leitfähigkeit des QPC einen Sprung, sobald sich die Ladung auf dem QD ändert. Daher ist hier die Ableitung und nicht die Leitfähigkeit selbst aufgetragen. So ist auch in diesem Graphen immer dort eine Linie zu sehen, wo der QD in Resonanz mit seinen Zuleitungen ist. Das Signal des QPC zeigt dabei deutlich mehr Resonanzen. Im Bereich ① wiederholt sich das in der Leitfähigkeit des QD sichtbare Linienmuster. Es erstreckt sich jedoch erheblich weiter und so ist auch für den Bereich ② und damit für deutlich negativere Gatespannungen eine Detektion der Energieniveaus des QD möglich. Erst für erheblich negativere Gatespannungen, am unteren Rand von Bereich ②, sieht man die Linien unster werden. Hier ist die Tunnelrate durch die Barrieren zu Source und Drain des QD bereits so niedrig, dass sie in die Größenordnung der Messzeit für einen einzelnen Datenpunkt dieser Messung kommt (ca. 1 s). Da der Tunnelprozess ein statistischer ist, sind dann keine klare Linien zu erwarten, sondern das hier sichtbare Rauschen in der Position. Die niedrigen Tunnelraten kündigen den Bereich ③ an, in dem der QD komplett von den Zuleitungen abkoppelt und keine Elektronen mehr tunneln können. Dieser beginnt jenseits der zweiten gestrichelten Linie. Hier ist der Transport über die Tunnelbarrieren komplett unterdrückt. Daher bleibt die Ladung auf dem QD konstant. Die direkte Folge ist, dass nun auch mit dem QPC keine tieferen Energieniveaus mehr aufzulösen sind, da hierfür eine Änderung der Ladung zwingende Voraussetzung ist.

Eine Besonderheit in diesem Ladungsdiagramm ist die deutlich ausgeprägte Linie, die sich von oben nach rechts unten durch den Graphen zieht. Betrachtet man diese genauer, so erkennt man ein deutliches Abknicken der Coulomblinien, die zu dieser Linie führen. Die Linie besteht genau genommen aus einer Vielzahl von vermiedenen Kreuzungspunkten, so dass nur die Biegungen der Coulomblinien die Linie sichtbar machen. Dieses Verhalten nennt man Anticrossing. Ent-

4.2 Messung von Coulombrauten mit dem Ladungsdetektor

lang dieser Linie koppelt der QD an einen zweiten QD, eine Chargetrap nahe des QD, und bildet mit diesem molekulartige Zustände. Derartige Artefakte sind nicht untypisch für Strukturen, die mit Hilfe der AFM-Lithographie erzeugt wurden. Durch die Bildung eines gekoppelten Zustands variiert auch die Leitfähigkeit des QD.

Aus der Messung lassen sich die Kapazitäten der beiden Gates des QD bestimmen, wie dies in Abschnitt 2.4.3 beschrieben ist. Durch Bestimmung von ΔV_{G1} und ΔV_{G2} folgt:

$$C_{G1} = \frac{e}{\Delta V_{G1}} = 14.7 \text{ aF}$$
$$C_{G2} = \frac{e}{\Delta V_{G2}} = 10.7 \text{ aF}$$

Wie bereits die Symmetrie der Probe nahelegt, liegen beide Kapazitäten in der gleichen Größenordnung. Der leichte Unterschied zwischen der Ankopplung an G1 und G2 deutet auf eine leicht asymmetrische Position des QD hin.

4.2 Messung von Coulombrauten mit dem Ladungsdetektor

Bei Variation einer Gatespannung und der Vorspannung V_{SD} , erwartet man, wie in Abschnitt 2.4.4 beschrieben die Ausprägung von Coulombrauten. In Abbildung 4.4 ist ein Beispiel einer solchen Messung dargestellt. Unter 4.4(a) ist die Leitfähigkeit des QD in Abhängigkeit von V_{SD} und V_{G2} zu sehen. Es bilden sich dabei klar die rauteförmigen Blockadebereiche heraus. Neben den Grundzuständen sind bei endlicher Source-Drain-Spannung auch angeregte Zustände zu erkennen. Vergleicht man dies mit der Ladungsmessung mittels QPC, so fällt sofort auf, dass hier nur abfallende Linien sichtbar sind, die einer

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

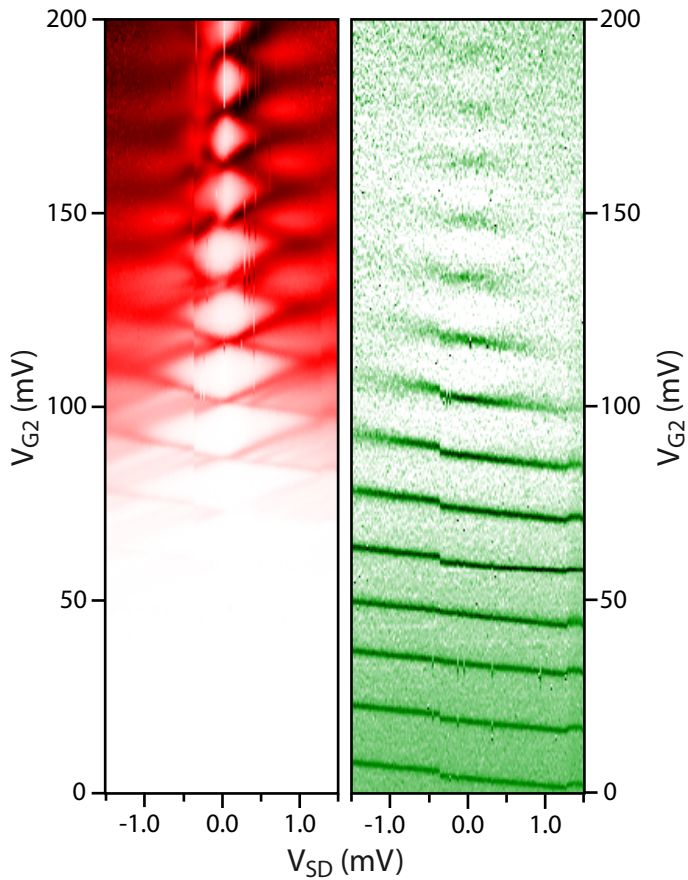


Abbildung 4.4:

Dargestellt ist die nichtlineare differentielle Leitfähigkeit des Quantenpunktes (links, rot) sowie die Änderung in der Leitfähigkeit des QPC (rechts, grün). Es prägen sich deutlich Rauten in der Leitfähigkeit des QD heraus, während in der QPC-Leitfähigkeit nur jeweils eine Kantenrichtung sichtbar ist.

Drainresonanz entsprechen, nicht jedoch ansteigende. Es scheint so, als wäre der QPC nur unter bestimmten Bedingungen in der Lage, Resonanzen für beide Zuleitungen zu detektieren. Warum dies der Fall ist, wird schnell einsichtig, wenn man sich den Messprozess veranschaulicht. Die Leitfähigkeit des QPC ist abhängig von der Ladung auf dem QD. Die Messung erfolgt jedoch mit einer großen Zeitkonstante, wodurch das Signal des QPC die mittlere Ladung auf dem QD innerhalb der Messzeit widerspiegelt. Leitfähigkeitsänderungen des QPC, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, sind immer dann sichtbar, wenn sich die mittlere Ladung auf dem QD ändert. Nimmt man nun an, dass eine Tunnelbarriere deutlich durchlässiger ist als die zweite, dann hängt die mittlere Ladung auf dem QD von der Transportrichtung ab. Liegt die Barriere mit hoher Tunnelrate am Ausgang des QD, so verlassen die Elektronen den QD sehr viel schneller, als sie durch die Barriere mit niedriger Tunnelrate nachrücken. Im QPC-Signal unterscheidet sich diese Situation praktisch nicht vom Blockadebereich, da die mittlere Ladung sich dabei nicht signifikant verändert. Liegt die Barriere mit hoher Tunnelrate am Eingang des QD, so ist der Quantenpunkt im Mittel grundsätzlich geladen, sobald ein Tunneln in den QD möglich ist, da die Elektronen deutlich längere Zeit brauchen, den Quantenpunkt zu verlassen, als nötig ist, um auf den Quantenpunkt zu tunneln.

4.2.1 Einfluss der Symmetrie

Betrachten wir für eine detailliertere Behandlung Abbildung 4.5. Hier ist wiederum die Änderung der Leitfähigkeit des QPC in Abhängigkeit von V_{SD} dargestellt, wobei nun V_{G1} variiert wird. Für Gatespannungen oberhalb von -260 mV erkennt man hier abfallende Linien, was einer Resonanz mit Drain entspricht. Warum ist dies so? Hier ist die Tunnelrate durch die Sourcebarriere deutlich niedriger als die durch die Drainbarriere. Für negative Werte von V_{SD} bedeutet dies, dass die Elek-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

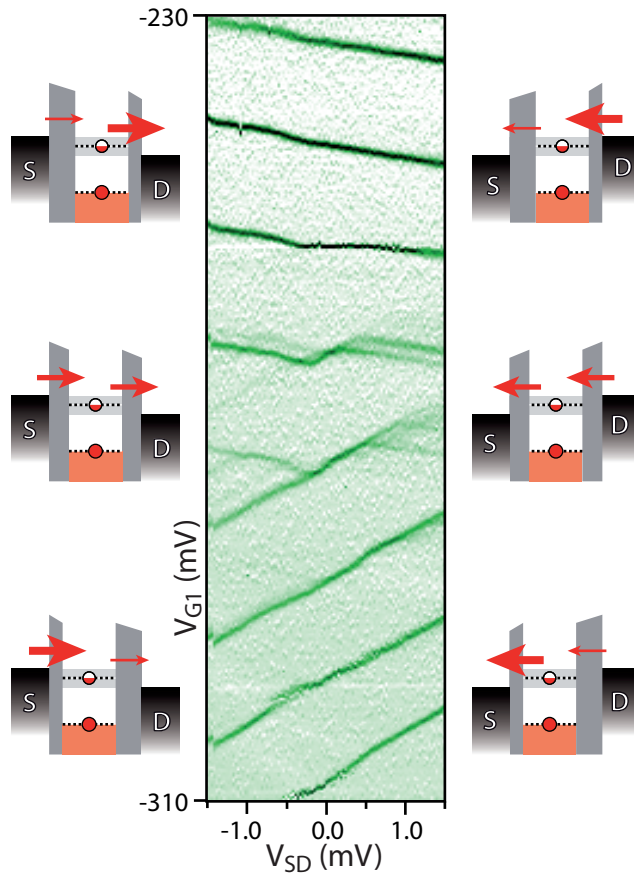


Abbildung 4.5:

Die Änderung in der Leitfähigkeit des QPC, in Abhängigkeit der Laderichtung: Abhängig von der Symmetrie der Tunnelraten des Quantenpunktes detektiert der QPC jeweils nur eine der beiden Zuleitungsresonanzen.

4.2 Messung von Coulombrauten mit dem Ladungsdetektor

tronen mit geringer Rate in den QD tunneln, dort dann aber nur kurze Zeit verbleiben und dann wieder durch die durchlässigere Drainbarriere heraustunneln. Im Mittel ist der QD damit ungeladen, erst wenn der Zustand bei zunehmender Gatespannung das Transportfenster verlässt, also bei der Resonanz mit Drain ($\mu_N = \mu_D$), ändert sich die mittlere Ladung. Für positive Werte von V_{SD} verläuft der Transport in entgegengesetzte Richtung, also von Drain nach Source. Hier hat sich die Situation umgekehrt. Die Elektronen durchqueren mit hoher Tunnelrate die durchlässigere Drainbarriere, benötigen dann aber eine längere Zeit, um durch die Sourcebarriere den QD zu verlassen. Sobald ein Zustand das Transportfenster betritt, also wiederum bei der Resonanz mit Drain, ist der QD im Mittel geladen.

Unterhalb einer Gatespannung von -280 mV hat sich die Situation umgekehrt. Nun ist die Sourcebarriere deutlich durchlässiger als die Drainbarriere. Die Folge ist, dass für den Transport von Source nach Drain, also für negative Werte von V_{SD} , die Elektronen mit hoher Rate auf den QD tunneln können, aber diesen nur mit geringer Tunnelrate verlassen. Im Mittel ist der QD damit geladen, sobald die Sourceresonanz $\mu_N = \mu_S$ passiert wird. In Gegenrichtung für positive Werte von V_{SD} tunneln die Elektronen nur mit geringer Rate von Drain auf den QD, aber mit hoher Rate vom QD zu Source. Dadurch tritt eine Änderung der mittleren Leitfähigkeit erst dann ein, wenn das Niveau des QD das Transportfenster verlässt, was wiederum bei Erreichen der Resonanz mit Source, also für $\mu_N = \mu_S$, der Fall ist.

Zwischen diesen beiden Extremen liegt ein Bereich, in dem die Tunnelraten für Source und Drain nahezu gleich sind. Hier zeigen sich dann, wie auch in der Leitfähigkeitsmessung am QD, Resonanzen für beide Zuleitungen. Zudem erkennt man hier vereinzelt auch angeregte Zustände des QD. Klare Rauten prägen sich nicht aus, da der Bereich symmetrischer Barrieren zu schmal ist.

Die Schlussfolgerung aus diesen Ergebnissen ist, dass man bei

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

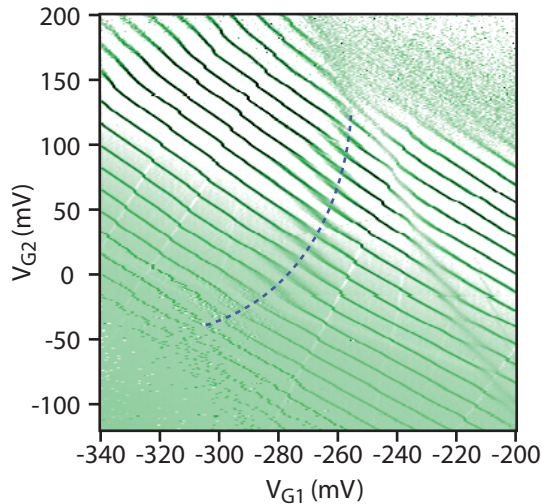


Abbildung 4.6:

Die Bestimmung der Symmetrielinie: Dargestellt ist die Änderung der Leitfähigkeit des QPC. Die Messung entspricht Abbildung 4.3, es wurde jedoch eine Source-Drain Spannung von $V_{SD} = 1$ mV angelegt. Die Linie symmetrischer Tunnelraten ist als gestrichelte Kurve eingezeichnet.

Gleichgewichtsmessungen für eine detaillierte Spektroskopie am QD nur dann wirklich das Potential des QPC ausschöpfen kann, wenn es gelingt, den QD im Bereich möglichst symmetrischer Barrieren zu halten. Die Sensitivität des QPC auf die Symmetrie der Tunnelbarrieren kann jedoch genutzt werden, um gerade diese Symmetrielinie innerhalb des Ladungsdiagramms des QDs zu finden. Da der QPC im Übergang über die Symmetrielinie zwischen Drain- und Sourceresonanz "umschaltet", muss man diese nur mittels V_{SD} hinreichend voneinander trennen, um die Symmetrielinie direkt in der Messung der QPC-Leitfähigkeit zu sehen. Dies ist in Abbildung 4.6 gezeigt. Die-

4.2 Messung von Coulombrauten mit dem Ladungsdetektor

se Messung zeigt das Ladungsdiagramm in Abhängigkeit von beiden Gatespannungen bei einer Vorspannung $V_{SD} = 1$ mV. Man erkennt deutlich, wie sich ein Band durch das Diagramm zieht, innerhalb dessen eine deutliche Auffächerung der Coulomblinien zu erkennen ist. Diese Auffächerungen rühren daher, dass hier angeregte Zustände und Resonanzen mit Source und Drain im QPC Signal sichtbar werden. Man kann also direkt ablesen, für welche Werte V_{G1} und V_{G2} die Tunnelraten der Tunnelbarrieren symmetrisch werden.

Für eine Charakterisierung des QD wurde nun eine Messung entlang dieser Symmetriekurve durchgeführt und die Vorspannung variiert. Die Ergebnisse dieser Messung sind in Abbildung 4.7 gezeigt. Es sind wieder die Leitfähigkeit des QD in Rot (linke Seite) und die Änderung der Leitfähigkeit des QPC in Grün (rechte Seite) dargestellt. In der Leitfähigkeit des QD sind wie schon in Abbildung 4.4 deutliche Rauten und eine Reihe von angeregten Zuständen zu sehen. Unterhalb von ca. -265 mV reicht die Messauflösung nicht mehr aus, um den immer niedriger werdenden Strom durch den QD zu messen.

In der Ladungsänderung des QPC ist nach einem kurzen Bereich verstimmter Tunnelraten ab der dritten Coulombraute eine Vielzahl von weiteren Rauten sehr scharf ausgeprägt. Bis der QD bei sehr negativen Gatespannungen von den Zuleitungen abkoppelt, können zwölf weitere Energieniveaus aufgelöst werden. Die Resonanzen mit beiden Zuleitungen sowie zahlreiche angeregte Zustände sind klar und deutlich erkennbar. So kann man etwa für einige Zustände bis zu 6 Anregungen vermessen.

Dabei stellt sich zunächst die Frage, warum der QPC überhaupt eine Messung angeregter Zustände ermöglicht. Die maximal erlaubte Ladung des QD ändert sich durch die Zugänglichkeit eines weiteren Zustands schließlich nicht. Bislang wurde von Ladungsmessung gesprochen. Dies ist auch korrekt, wenn man konstante Ladung auf dem QD und Übergänge zwischen zwei Ladungszuständen des QD be-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

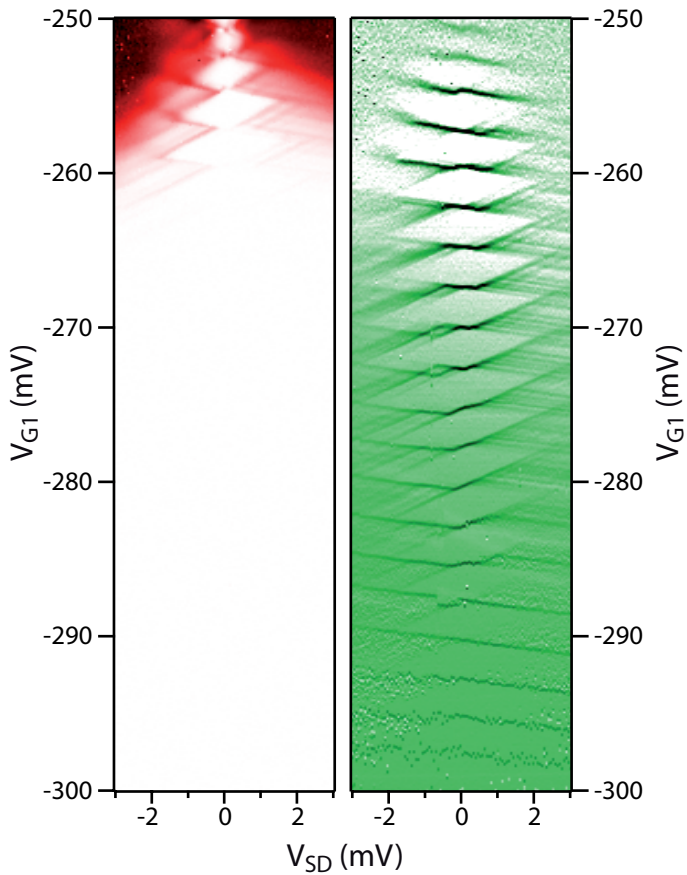


Abbildung 4.7:

Dargestellt ist die nichtlineare differentielle Leitfähigkeit des Quantenpunktes (links, rot) sowie die Änderung in der Leitfähigkeit des QPC (rechts, grün). Variiert wurde wie im Diagramm angegeben die Spannung an G1, es wurde dabei jedoch G2 soweit nachgeregelt, dass die Tunnelraten des QD symmetrisch blieben.

trachtet. Was der QPC jedoch eigentlich misst, ist die mittlere Ladung in seiner Umgebung. Die Ladung auf dem QD ändert sich natürlich ständig zwischen N und $N+1$ Elektronen, sobald Transport stattfindet. Dadurch ist die Ladungsmessung genau genommen eine Messung der mittleren Besetzung des QD mit Elektronen gemittelt über die Zeitkonstante des QPC Detektors. Wenn also ein weiterer angeregter Zustand für den Transport zur Verfügung steht, so ändert dies die mittlere Besetzung des QD und damit auch die mittlere Ladung und somit das Potential, das der QPC erfährt.

4.2.2 Bestimmung von Systemgrößen

Anhand der nichtlinearen Messungen konnten die Kapazitäten zur Zuleitung C_S und damit auch die Gesamtkapazität C_Σ bestimmt werden (siehe dazu Abschnitt 2.4.4).

$$\beta_1 = -\frac{C_S}{C_G} \Rightarrow C_S = -\beta_1 C_G = 132.4 \text{ aF}$$

Damit folgt für die Gesamtkapazität:

$$C_\Sigma = -\beta_2 C_G + C_S = 164,3 \text{ aF}$$

Der gemessene Abstand der angeregten Zustände lässt unter Annahme eines parabolischen Potentials eine Abschätzung des Durchmessers des QDs zu. Aus der Gesamtkapazität des QD folgt:

$$E_L = \frac{e^2}{C_\Sigma} = \frac{e^2}{164,3 \text{ aF}} = 1.56 \text{ meV}$$

Dies entspricht 10.54 mV Gatespannung an G1 bzw. 16.05 mV an G2. Nun lässt sich der Energieabstand der angeregten Zustände direkt ablesen. Er beträgt $\Delta\epsilon = 265 \mu\text{eV}$. Dabei entspricht $\Delta\epsilon$ dem Energieabstand $\hbar\omega$ des Anregungsspektrums. Damit lässt sich gemäß

$$\hbar\omega = \frac{2\hbar^2}{m^*r^2}$$

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

der Durchmesser des QD abschätzen zu:

$$d = 2 \cdot r = 2 \sqrt{\frac{2\hbar^2}{m^* \Delta \epsilon}} \approx 185 \text{ nm.}$$

Die geometrische Kantenlänge des durch Oxidlinien begrenzten Bereichs, in dem sich der Quantenpunkt ausbildet, beträgt etwa 290 nm. Da bei Oxidbarrieren ein Verarmungsbereich von 50 nm Breite nicht unrealistisch ist, stimmt somit der abgeschätzte Durchmesser mit der zu erwartenden Größe des Quantenpunkts gut überein.

4.3 Absolute Ladungsmessung

Der QPC ermöglicht es nicht nur, Ladungsänderungen in seiner Umgebung zu detektieren, man kann diese sogar quantitativ auswerten. Dazu ist es zunächst wichtig, sich die Funktionsweise der Ladungsdetektion zu vergegenwärtigen, wie sie in Abschnitt 3.2.1 erläutert ist. Eine Ladungsänderung nahe des QPC verändert das Potential am Ort des QPC und verschiebt damit die energetische Lage der Transportkanäle. Dies entspricht exakt der Wirkung des QPC Seitengates G_{QPC} .

Will man daher die Stärke einer Ladungsänderung quantifizieren, so kann man dies tun, indem man feststellt, wie hoch eine Spannungsänderung an G_{QPC} sein müsste, um den gleichen Effekt zu erzielen. Dies lässt zunächst relative Vergleiche von Ladungsänderungen zu. Will man absolute Messungen vornehmen, ist zudem eine Eichung des QPC nötig. Dies geschieht am leichtesten anhand einer Elektronenladung: die Verschiebung des Potentials durch das Laden des QD um ein weiteres Elektron entspricht einer detektierten Ladung von e .

Auf diesem Wege ist es nun möglich, aus der Leitfähigkeitsmessung des Quantenpunktkontaktes eine Ladungsmessung des QD abzuleiten. Dargestellt ist dies in Abbildung 4.8. Im oberen Graphen ist der Leitfähigkeitsverlauf des QPC in Abhängigkeit der Gatespannung

4.3 Absolute Ladungsmessung

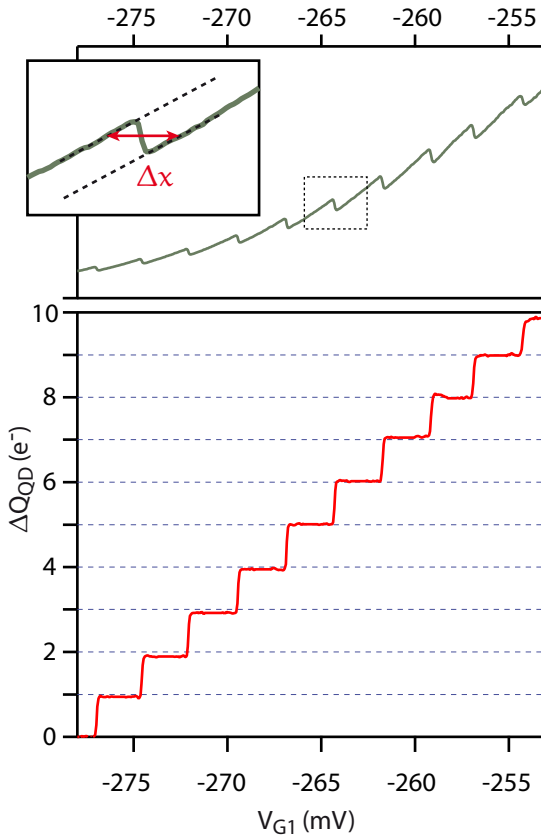


Abbildung 4.8:

Der QPC ermöglicht die Messung absoluter Ladungsänderungen. Dargestellt ist die Leitfähigkeit des QPC (oben) in Abhängigkeit von V_{G1} . Aus einem simultanen linearen Fit im Sprungbereich wird die der Ladungsänderung entsprechende Gatespannung Δx bestimmt. Nach Normierung ist damit eine absolute Angabe der Ladungsänderung in Einheiten einer Elektronenladung möglich (unten).

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

an G1 gezeigt. Der gestrichelte Bereich ist exemplarisch vergrößert. In der Vergrößerung ist dargestellt, wie für eine Resonanz die Ladungsänderung bestimmt wird. Dies geschieht durch einen simultanen Fit vor und hinter der Sprungstelle. Der Fit wird symmetrisch links und rechts der Sprungstelle x_S durchgeführt, wobei die Steigung für beide Teilbereiche gleich gehalten und Δx , der Abstand der beiden Kurven auf der Spannungs-Achse, optimiert wird.

$$G_{\text{fit}}(x) = \begin{cases} A_1 + B \cdot \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right), & \text{für } x < x_S \\ A_2 + B \cdot \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right), & \text{für } x > x_S \end{cases}$$

Weiß man von einer Ladungsstufe, dass sie einem zusätzlichen Elektron auf dem QD entspricht, kann Δx direkt in ein ΔQ_{QD} umgerechnet werden. Um auch den Übergang im Bereich des Sprungs in der QPC Leitfähigkeit korrekt abzubilden, wird in diesem Bereich für jeden Punkt ein Abstand Δx zum linearem Fit bestimmt.

Man erkennt sofort, dass die Ladungsstufen abgerundet sind. Die Ursache für diese Abrundung liegt wieder im Messprinzip des QPC Detektors. Da beim Übergang zwischen N und $N+1$ Elektronen, die Besetzungswahrscheinlichkeit für Niveau $N+1$ des QD durch die thermische Verbreiterung allmählich ansteigt, verläuft auch die Messung des QPC Detektors sanft in der Form einer Fermistufe.

4.3.1 Messung der Besetzungswahrscheinlichkeit

Wie im vorangegangenen Abschnitt geschildert wurde, kann aus der Messung der Leitfähigkeit die mittlere Ladung des Quantenpunkts bestimmt werden. Findet Transport statt, ist dies zugleich eine Messung der mittleren Besetzungswahrscheinlichkeit. Sind N Elektronen auf dem QD und kann ein weiteres Elektron das Niveau $N+1$ bevölkern, so ist die Besetzungswahrscheinlichkeit $P(N+1)$ gegeben durch:

4.3 Absolute Ladungsmessung

$$P_b(N+1) = \frac{\Gamma_e}{\Gamma_e + \Gamma_c} \sim \langle Q \rangle \quad (4.1)$$

Solange das zusätzliche Niveau noch oberhalb des chemischen Potentials des Emitters liegt, ist dabei $\Gamma_e = 0$ und damit $P(N+1) = 0$. Liegt es unterhalb des chemischen Potential des Kollektors, ist $\Gamma_c = 0$ und damit $P_b(N+1) = 1$. Für den Fall starker Asymmetrie und hinreichend hoher Tunnelraten folgt außerdem:

$$\Gamma_e \gg \Gamma_c \rightarrow P \approx 1$$

$$\Gamma_e \ll \Gamma_c \rightarrow P \approx 0$$

Dies beschreibt den in Abschnitt 4.2 erläuterten und in Abbildung 4.5 gezeigten Sachverhalt. Im Falle stark asymmetrischer Tunnelraten detektiert der QPC stets eine Besetzungswahrscheinlichkeit von 0 oder 1, nicht jedoch Zwischenwerte. Nahe der Symmetrie ermöglicht der Detektor jedoch eine detaillierte Untersuchung der Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände des QD. Eine solche Messung ist in Abbildung 4.9(a) dargestellt. Auf der z-Achse ist die detektierte mittlere Ladung aufgetragen $\langle Q \rangle$, auf der y-Achse die Gatespannung an G1 und auf der x-Achse die angelegte Source-Drain-Spannung V_{SD} . Es sind klar die rautenförmigen Coulombblockadebereiche als Plateaus erkennbar, auf denen die Ladung des QD konstant bleibt. Ein solches Plateau für N Elektronen ist in der Abbildung durch hellblaue gepunktete Linien angedeutet. Zwischen zwei solcher Plateaus bilden sich bei endlicher Vorspannung weitere Stufen aus. Hier sind, wie bereits in der Diskussion von Abbildung 4.7 beschrieben, angeregte Zustände für den Transport verfügbar. Dabei ist jedoch die mittlere Besetzung des QD abhängig von den jeweiligen Tunnelraten und damit von der Ankopplung der Zuleitungen an die Zustände des QD. Die Besetzungswahrscheinlichkeit des QD hängt damit zum einen davon ab, wieviele an-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

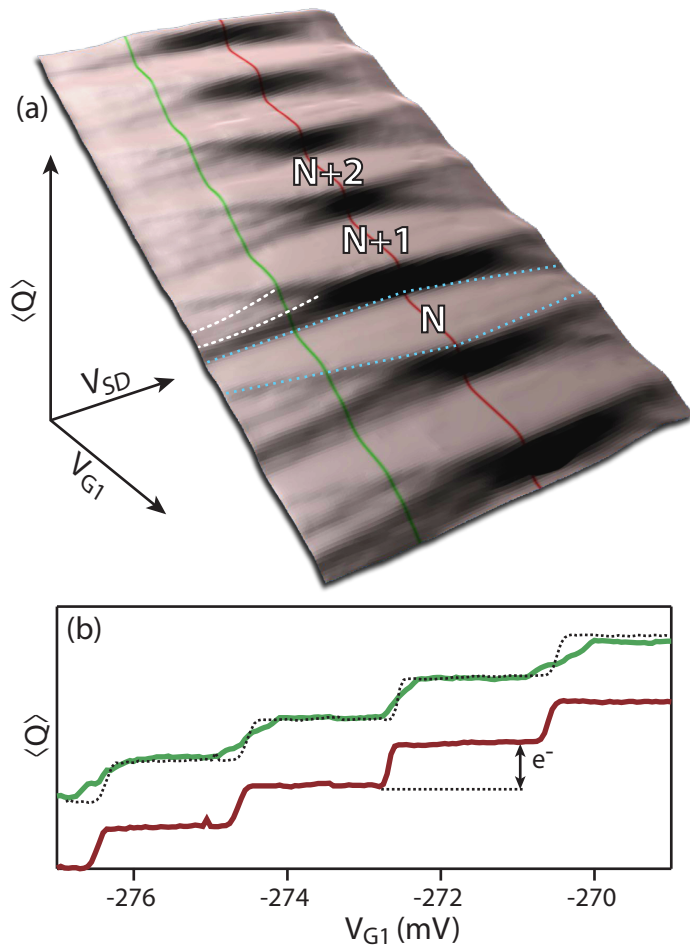


Abbildung 4.9:

(a) Dreidimensionale Darstellung der mittleren Besetzung der Niveaus des QD in Abhängigkeit von Source-Drain- und Gatespannung. (b) Zwei Schnitte bei festen Source-Drain-Spannungen im Vergleich. Die Kurve zu endlicher Spannung (grün) ist zur besseren Sichtbarkeit verschoben dargestellt. Die Kurve zu $V_{SD}=0$ (rot) ist zusätzlich als gepunktete Linie zum Vergleich hinterlegt.

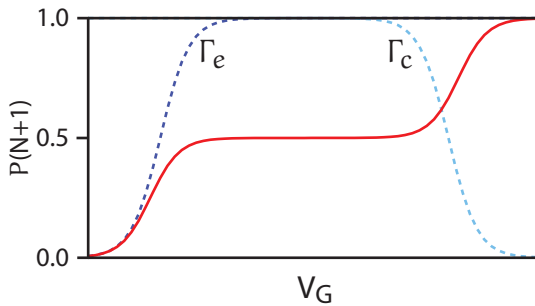


Abbildung 4.10:

Schematische Darstellung der Besetzungswahrscheinlichkeit bei endlicher Source-Drain-Spannung für symmetrische Tunnelraten.

geregte Zustände zugänglich sind, zum anderen wie diese die Tunnelraten beeinflussen. Für den Übergang zwischen N und $N+1$ sind die auftretenden Stufen in der Besetzungswahrscheinlichkeit als weiße Linien eingezeichnet. Dabei fällt auf, dass die Resonanz des Grundzustands mit Source für steigendes V_{SD} zunächst nur zu einer teilweisen Besetzung des QD führt, erst die Resonanz mit Drain lässt die Besetzungswahrscheinlichkeit auf 1 ansteigen, da dann der Grundzustand das Transportfenster verlässt. Das Verhältnis der Stufenhöhen spiegelt dabei direkt das Verhältnis der Tunnelraten Γ_e zu Γ_c wider, wobei hier Source als Emitter und Drain als Kollektor fungiert. Für den Fall symmetrischer Tunnelraten weisen beide Stufen eine Höhe von $0.5 e$ auf. Schematisch ist dies in Abbildung 4.10 dargestellt. Hier sieht man den theoretischen Verlauf der Besetzungswahrscheinlichkeit. Mit der Resonanz mit dem Emitter beginnt die Tunnelrate Γ_e entsprechend der Temperaturverbreiterung anzusteigen bis sie ihren endgültigen Wert erreicht. Die Tunnelrate Γ_c zum Kollektor dagegen startet bei eben diesem Wert und beginnt zu sinken, sobald der Zustand in die Nähe der

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

Resonanz mit dem Kollektor kommt. Die (4.1) folgende Besetzungswahrscheinlichkeit zeigt dadurch eine Doppelstufe.

Sobald ein angeregter Zustand in das Transportfenster gelangen kann, ändern sich die Besetzungswahrscheinlichkeiten in Abbildung 4.9(a) sichtbar. Nach der Stufe des Grundzustandes folgt nun eine weitere, wenn der angeregte Zustand in Resonanz mit Source gerät. Dies ist die direkte Folge der Änderung der Tunnelraten, die sich nun aus den Raten für den Grundzustand und denen für den angeregten Zustand zusammensetzen. Wie sich in Gegenwart von angeregten Zuständen die Besetzungswahrscheinlichkeit verhält, ist dabei von der jeweiligen Ankopplung an Source und Drain abhängig.

In Abbildung 4.9(b) sind zwei Schnitte durch die dreidimensionale Darstellung der mittleren Ladung gezeigt. Die rote Linie entspricht einer Sourcedrainspannung von $V_{SD} = 0$ mV, die grüne $V_{SD} = 0.75$ mV. Während ohne angelegte Vorspannung die Stufen einer vollen Elektronenladung entsprechen, sind für den Schnitt bei 0.75 mV deutlich mehrere Zwischenstufen zu sehen, da für zwei der Ladungsstufen bereits angeregte Zustände verfügbar sind. Die erste und die dritte Stufe zeigen noch keinen angeregten Zustand, hier sind nur die beiden Stufen für Source- und Drainresonanz festzustellen. Für die zweite und die vierte ist die zu erwartende Zwischenstufe deutlich erkennbar. Die Stufe für Source und Drainresonanz sind dabei jeweils gleich hoch (ca. $0.3 e$), die des angeregten Zustandes etwas ausgeprägter ($0.4 e$).

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

Wie im Abschnitt 2.4.5 bereits theoretisch behandelt, folgen die chemischen Potentiale des Quantenpunktniveaus im senkrechten Magnetfeld dem Fock-Darwin-Spektrum. Im Bereich mittlerer Magnetfelder,

wo sich verschiedene Landaufächer kreuzen, ist dabei ein zickzackförmiger Verlauf der Energieniveaus in Abhängigkeit vom Magnetfeld zu erwarten. Dieses Zickzackmuster ist von vielen Gruppen demonstriert worden [18, 92, 93]. In diesem Abschnitt soll dieses Transportverhalten im Magnetfeld in Transport- und Ladungsmessung vorgestellt und die etablierten Modelle erläutert werden. Im Anschluß folgen Messungen mit dem QPC als Ladungsdetektor, die Umverteilungen von Elektronen auf dem QD direkt sichtbar machen.

4.4.1 Das Fock-Darwin-Spektrum

In Abbildung 4.11(a) ist die Leitfähigkeit des QD in Abhängigkeit von Gatespannung und Magnetfeld dargestellt. Die Resonanzen des QD zeigen zunächst einen relativ konstanten Verlauf, der jedoch einer Vielzahl an unregelmäßigen Richtungsänderungen unterworfen ist. Ab 2 T ist zudem eine wellenförmige Entwicklung festzustellen, auf der ab etwa 3.5 T ein regelmäßiges Zickzack erkennbar ist. Dieses endet bei etwa 5.5 T und die Resonanzen folgen einem generellen Abwärtstrend. Betrachtet man die Änderung der Leitfähigkeit des QPC, so wird deutlich, dass sich dieses Verhalten auch für die in der Leitfähigkeit des QD nicht mehr auflösbaren Resonanzen fortsetzt. Diese Entwicklung hat zweierlei Ursachen. Zunächst ändert sich die Zustandsdichte der Zuleitungen im magnetischen Feld. Dies ist die Ursache der allmählichen wellenförmigen Modulation der Peakposition, die besonders zwischen 2 und 4 Tesla deutlich zu Tage tritt. Des Weiteren wird der Verlauf der Resonanzen durch die sich bei steigendem Magnetfeld kreuzenden Landaniveaus des QD bestimmt. Wie man Abbildung 2.12 in Abschnitt 2.4.5 entnehmen kann, sind dabei für niedrige Magnetfelder eine Vielzahl von Energieniveaus beteiligt, die sich jeweils unterschiedlich im Magnetfeld entwickeln.

Ab einem Magnetfeld von 3 T wird das Muster jedoch regelmäßig.

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

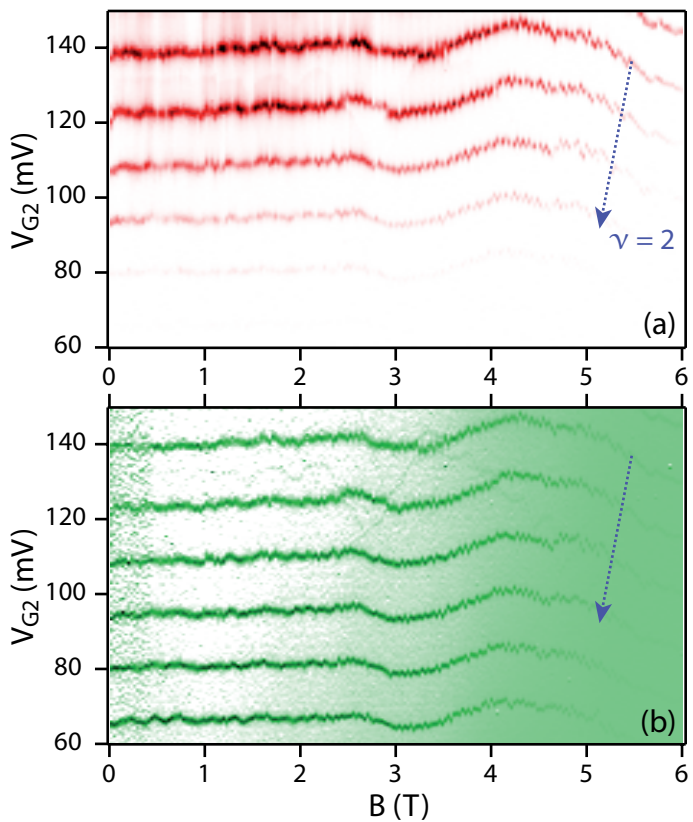


Abbildung 4.11:

(a) Leitfähigkeit des QD in Abhängigkeit von der Gatespannung V_{G2} und dem magnetischen Feld B . (b) dG/dV des QPC für den gleichen Bereich. Der Übergang zu Füllfaktor $\nu=2$ ist in beiden Graphen markiert.

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

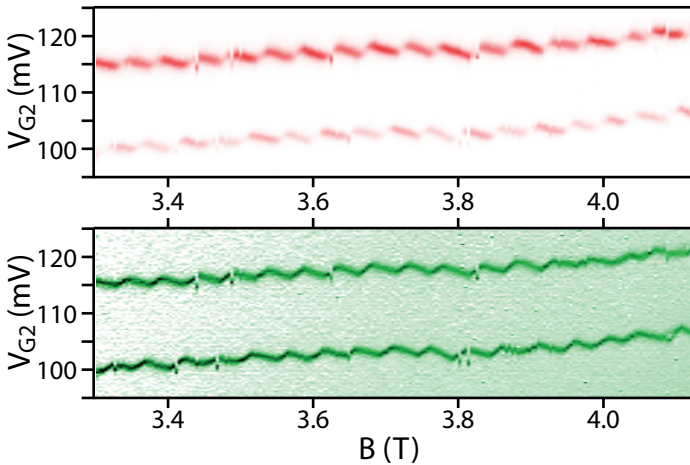


Abbildung 4.12:

Leitfähigkeit des QD in Abhängigkeit von der Gatespannung V_{G2} und dem magnetischen Feld B . Darunter dG/dV des QPC für den gleichen Bereich. Dargestellt ist eine Detailmessung zu Abb. 4.11.

Hier ist der Bereich erreicht, in dem das Spektrum nur noch von zwei Landaufächern bestimmt wird. Die Position der Resonanzen folgt hier abwechselnd den abfallenden Zuständen des ersten und den aufsteigenden Zuständen der zweiten Landauschale. Erst wenn kein Zustand der zweiten Landauschale mehr verfügbar ist, endet das Zickzack und die Resonanzen folgen dem Abwärtstrend der ersten Landauschale. Der Quantenpunkt hat nun den Füllfaktor $\nu = 2$ erreicht.

In Abbildung 4.12 ist der Bereich zwischen 3.3 und 4.1 Tesla detaillierter dargestellt. Es sind wiederum QD Leitfähigkeit und dG/dV des QPC gegen magnetisches Feld und Gatespannung aufgetragen. Man erkennt hier deutlich das regelmäßige Zickzack der Peakposition. Darüber hinaus fällt eine Modulation der Leitfähigkeit des QD entlang der

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

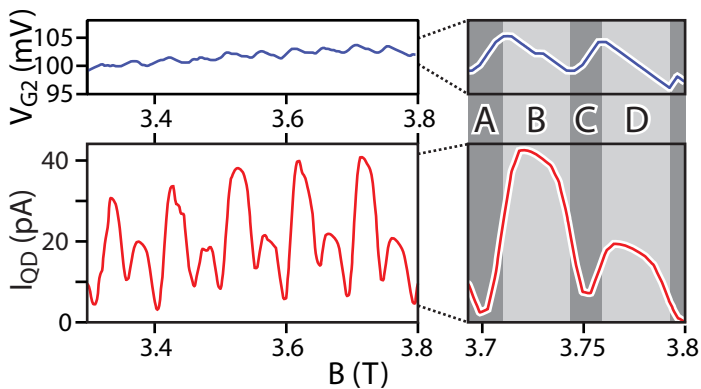


Abbildung 4.13:

Dargestellt ist ein Schnitt durch Abb. 4.12 entlang einer Resonanzlinie. Oben (blau) ist zum Vergleich die Position der Resonanz im Magnetfeld aufgetragen, unten (rot) die Leitfähigkeit direkt auf der Resonanz. Es treten deutlich Schwankungen der Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Magnetfeld auf. Rechts ist die letzte Periode vergrößert dargestellt, wobei vier unterscheidbare Bereiche markiert sind.

Coulomblinien auf. Bereiche höherer Leitfähigkeit wechseln sich mit Bereichen deutlich niedrigerer Leitfähigkeit ab. Ein Schnitt entlang der Resonanz wie in Abbildung 4.13 zeigt dies sehr deutlich. Dargestellt ist im oberen Bereich der Abbildung die Position der Resonanz in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Es ist wieder deutlich das Zickzackmuster zu erkennen. Darunter ist die Leitfähigkeit des QD direkt auf der Resonanz aufgetragen, ebenfalls in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Sie zeigt eine Abfolge von Bereichen hoher und niedriger Leitfähigkeit, getrennt durch Abschnitte mit stark unterdrückter Leitfähigkeit. Eine einzelne Periode dieses Verlaufs ist im rechten Teil der Abbildung 4.13 gezeigt. Man kann deutlich vier Bereiche unterscheiden. In Bereich A steigt die Position der Resonanz mit steigendem Magnetfeld. Die Leitfähig-

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

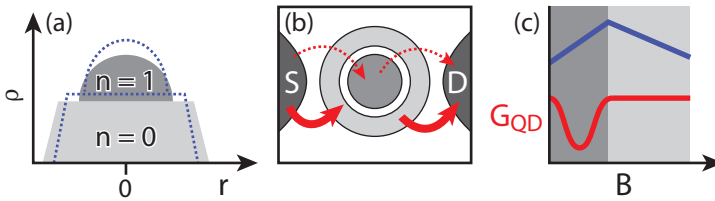


Abbildung 4.14:

(a) Schematische Darstellung der Ladungsdichteverteilung ρ im QD. Das erste Landauniveau ($n=0$) ist komplett gefüllt, das zweite ($n=1$) teilweise. Die gestrichelte Form zeigt die Entwicklung bei leichter Erhöhung des Magnetfeldes. (b) Schematische Darstellung des Transports im Modell der Landauschalen. Die Tunnelrate für Transport durch die innere Landauschale ist deutlich geringer als die für den Transport durch die äußere. (c) Verlauf von Position der Resonanz und Leitfähigkeit durch den QD. Für ansteigende Resonanzposition findet Transport durch die innere Schale statt und G_{QD} sinkt ab.

keit durchläuft dabei ein Minimum. Im darauf folgenden Abschnitt B fällt die Position der Resonanz ab, während die Leitfähigkeit maximal wird. Es folgt im Abschnitt C ein weiteres Minimum in der Leitfähigkeit bei wiederum ansteigender Peakposition. Abgeschlossen wird die Periode mit Abschnitt D, in dem die Position der Resonanz wieder fällt und die Leitfähigkeit deutlich höher liegt, wenn sie auch klar unterhalb des Maximums in Abschnitt B bleibt. Zur Erklärung dieses Ergebnisses sind zweierlei Modellvorstellungen heranzuziehen, von denen die eine den QD, die andere die Zuleitungen betrifft. Betrachten wir zunächst den QD. Im Magnetfeld bilden sich im Quantenpunkt Landauschalen aus. Diese entsprechen den Landauniveaus, die sich im 2DEG im senkrechten Magnetfeld ausprägen. Zwischen den kompressiblen Landauschalen bilden sich inkompressible Streifen aus. McEuen *et al.* zogen diese Analogie heran, um die Unterschiede der Leitfähigkeit zwischen Bereichen aufsteigender und absteigender Peakposition

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

zu erklären [92]. Die Bereiche steigender Peakposition entsprechen einem Transport durch ein Niveau aus der zweiten Landauschale, die Bereiche sinkender Position entsprechen dem Transport durch ein Niveau der ersten Landauschale. Analog zum 2DEG sind die erste und zweite Landauschale räumlich im QD getrennt. Die erste Landauschale liegt dabei außen, die zweite weiter im Innern des QD. Eine Schemazeichnung der beiden Schalen ist in Abbildung 4.14 zu sehen. Die Ergebnisse von McEuen *et al.* zeigten, dass nur eine selbstkonsistente Betrachtung der Zustände des QD eine hinreichende Erklärung für die Leitfähigkeitsunterschiede für Zustände der beiden Landauschalen liefern konnte. Das Ergebnis war die in Abbildung 4.14(a) dargestellte Ladungsdichteverteilung für die beiden untersten Landauniveaus. Eine Erhöhung des Magnetfeldes führt zu einer stärkeren Entartung der Landauniveaus. Solange keine Elektronen den QD verlassen, hat dies zur Folge, dass das elektrostatische Potential im Zentrum des untersten Landauniveaus mit steigendem Magnetfeld zunimmt, während es am Rand abnimmt.

In Bereichen steigender Peakposition liegt der für den Transport genutzte Zustand in der zweiten Landauschale, also räumlich betrachtet im Innern des QD. Für Bereiche sinkender Position liegt der Zustand in der ersten Landauschale, also am Rand des QD. Beim Übergang von einem ansteigenden zu einem absteigenden Teil der Resonanzkurve findet also ein Wechsel der Transportschale von der inneren auf die äußere statt. Dabei wird allerdings kein im QD gebundenes Elektron umverteilt, es ändert sich nur das Niveau, durch das der Transport stattfindet. Beim Übergang von einer fallenden zu einer ansteigenden Flanke der Coulombpeakposition wird dagegen ein gebundenes Elektron aus der Inneren in die äußere Schale umverteilt. Der Transport findet daraufhin wieder durch einen Zustand im Inneren des QD statt. Die Tunnelrate für beide Bereiche ist deutlich unterschiedlich. Die Tunnelrate ins Innere des QD ist stark vermindert, was in einer deutlich geringeren

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

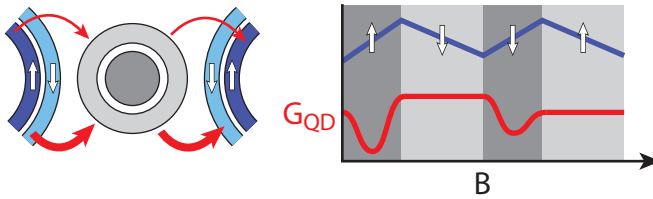


Abbildung 4.15:

Die Spinblockade: Im hohen Magnetfeld bilden sich in den Zuleitungen Randkanäle aus, die zu einer räumlichen Trennung von Spin up (↑) und Spin down (↓) tragenden Zuständen in den Zuleitungen führen. Daneben ist der Verlauf der Position des Coulombpeaks sowie die Leitfähigkeit G_{QD} auf der Resonanz in Abhängigkeit vom Magnetfeld skizziert. Im Verlauf der Position ist auch der Spin des Transportzustands im QD angegeben. Für Spin up ist dabei eine generelle Abnahme der Leitfähigkeit zu erwarten.

Leitfähigkeit resultiert. Dieses erweiterte Schalenmodell erklärt gut die Unterschiede zwischen den Bereichen A / C und B / D.

4.4.2 Die Spinblockade

Im Modell der räumlich getrennten Landauschalen lässt sich die unterschiedliche Leitfähigkeit erklären, die für einen Transport durch die erste bzw. zweite Landauschale gemessen wird. Sie erklärt jedoch noch nicht, warum für den Transport durch die äußere Landauschale im ansteigenden Magnetfeld abwechselnd hohe und weniger hohe Leitfähigkeit auftritt. Um auch diesen Effekt zu erklären, erweiterten Ciorga *et al.* das Modell von McEuen *et al.* um die Annahme von Randkanälen in den Zuleitungen [18]. Schematisch ist dies in Abbildung 4.15 gezeigt. Nimmt man auch in den Zuleitungen eine räumliche Trennung der Randkanäle an, so hat dies zur Folge, dass in den Zuleitungen die Elektronen mit Spin down näher am Quantenpunkt liegen als solche

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

mit Spin up. Im Fock-Darwin-Spektrum folgen nun aber für die beiden Landaufächer abwechselnd Spin-up- und Spin-down-Zustände aufeinander (vergleiche Abb. 2.17). Wann immer nun der Transportzustand auf dem QD Spin up aufweist, ist die zu überbrückende Distanz für die Elektronen aus den Zuleitungen größer, da der Randkanal für Spin up weiter vom QD entfernt liegt. Damit sinkt auch die Tunnelrate und damit die Leitfähigkeit des QD. Die Blockade des Transports wird auch als Spinblockade bezeichnet, da sie eine Modulation des Stromes in Abhängigkeit vom Spin des Transportelektrons darstellt. Diese Bezeichnung ist jedoch nicht eindeutig. Auch Spin-Auswahlregeln können in Quantenpunkten zu einem Einfluß des Spins auf die Leitfähigkeit führen [94].

Die Kombination von räumlich getrennten Landauschalen und Randkanälen in den Zuleitungen ermöglicht also ein Verständnis des in Abbildung 4.13 bzw. 4.12 dargestellten experimentellen Befundes. Damit ist es nun auch möglich, den Spin des tunnelnden Elektrons zu bestimmen. Betrachten wir dazu erneut Abbildung 4.13. In Abschnitt A ist die Leitfähigkeit unterdrückt, da der Transport durch das Innere des QD stattfindet. Eine weitere Verminderung ist im Vergleich zu C feststellbar, was sich dadurch erklärt, dass der Transport über einen Spin-up-Zustand stattfindet. In Abschnitt B ist die Leitfähigkeit hoch, da der Transportzustand am Rand des QD liegt. Er ist zudem höher als in Abschnitt D, da es sich um einen Spin-down-Zustand handelt. Für C ist der Transport unterdrückt, da wiederum durch das Zentrum des QD getunnelt wird, aber die Unterdrückung ist nicht so stark wie für A, da für C das Transportelektron ebenfalls Spin down trägt. D bringt letztendlich wieder eine relativ hohe Leitfähigkeit, da der Transport erneut über den Rand der Probe läuft. Die Leitfähigkeit ist aber geringer als in Abschnitt B, denn es liegt wieder Transport von Spin-up-Elektronen vor.

4.4.3 Die Umverteilung von Elektronen im senkrechten Magnetfeld

Das in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Schalenmodell postuliert eine räumliche Umverteilung von Ladung innerhalb des Quantenpunktes. Der Übergang von der inneren in die äußere Landauschale ist hier gleichbedeutend mit der Umladung eines Elektrons vom Zentrum des Quantenpunktes an den Rand. Dies sollte prinzipiell eine Veränderung des Potentials am QPC zur Folge haben. Mittels des QPC als Ladungsdetektor könnte damit ein direkter Beleg für dieses etablierte Modell erbracht werden.

Betrachtet man die bisher präsentierten Messungen am QPC im Bereich des Zickzackmusters (z.B. in Abb. 4.12), so ist keinerlei Besonderheit zu erkennen. Die Coulombpeaks werden deutlich abgebildet, allerdings kann keine besondere Veränderung am Übergang der beiden Landauschalen festgestellt werden. Speziell zwischen den Resonanzlinien, wo sich die Zahl der Elektronen nicht ändert, ist keinerlei Effekt der Umladung feststellbar. Es stellt sich die Frage, warum dies so ist.

Zunächst einmal ist der erwartete Effekt klein, deutlich geringer als die Änderung durch ein einzelnes Elektron. Die Messungen haben jedoch gezeigt, dass der Detektor durchaus sensitiv genug ist, um auch Ladungsänderungen im Bereich von einem Zehntel einer Elektronenladung zu detektieren. Desweiteren muss hier die Messtechnik berücksichtigt werden. Es wurde bislang eine Änderung der Leitfähigkeit des QPC in Abhängigkeit von der angelegten Gatespannung betrachtet. Da bislang Ladungsänderungen aufgrund der Besetzung eines weiteren Zustandes des QD untersucht wurden, war dies die logische Vorgehensweise, da die Gatespannung die Energieachse definiert. Der nun gesuchte Effekt ist jedoch mit der Änderung des Magnetfeldes verbunden. Die Position, an der eine Umladung erwartet wird, liegt jeweils in einem relativ engen Bereich des Magnetfeldes. Die Messung

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

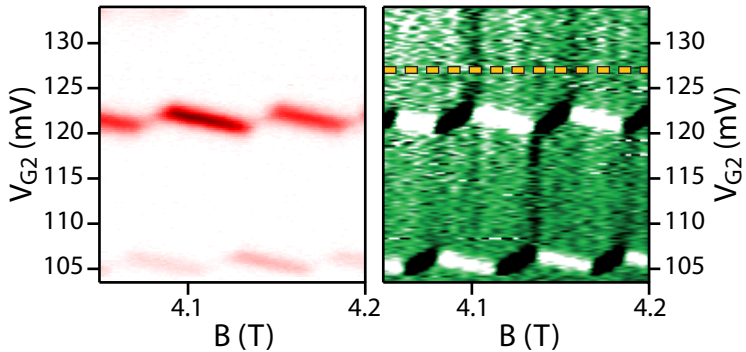


Abbildung 4.16:

Ladungsänderungen im Magnetfeld: Links (rot) ist die Leitfähigkeit des QD in Abhängigkeit vom Magnetfeld B dargestellt. Die Gatespannung an $G2$ wurde dabei schrittweise erhöht. Rechts daneben ist die Änderung der Leitfähigkeit des QPC für den gleichen Bereich gezeigt. Die gestrichelte Linie markiert die Position des Schnitts, der in Abb. 4.17 gezeigt ist.

der Leitfähigkeit des QPC in Abhängigkeit von der Gatespannung und schrittweiser Erhöhung des Magnetfeldes ist damit kein probates Mittel. Stattdessen wird im Folgenden die Änderung der Leitfähigkeit des QPC in Abhängigkeit vom magnetischen Feld, also dG/dB , betrachtet.

In Abbildung 4.16 ist eine Messung der Leitfähigkeit des QD und der Leitfähigkeitsänderung des QPC in Abhängigkeit des Magnetfeldes dargestellt, wobei nun die Gatespannung schrittweise erhöht wurde. Die Messung wurde also als eine Abfolge von Messungen unter Änderung des Magnetfeldes durchgeführt, für die jeweils eine feste Gatespannung an $G2$ angelegt wurde. Auf der linken Seite ist in Rot die Leitfähigkeit des QD dargestellt. Man erkennt erneut das typische Zickzackmuster. Die Messung schließt vom Magnetfeldbereich an die Messung aus Abbildung 4.12 an.

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

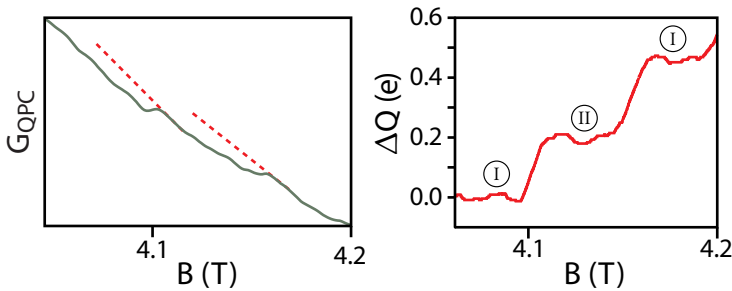


Abbildung 4.17:

Schnitt durch das QPC Signal aus Abb. 4.16. Links ist die Leitfähigkeitsmessung am QPC zu sehen. Zur Veranschaulichung ist der theoretischen Verlauf der QPC Leitfähigkeit ohne Ladungsänderung als gestrichelte Linie angedeutet. Rechts daneben ist die daraus berechnete mittlere Ladung dargestellt, die am QPC detektiert wird. Normiert wurde die Ladung an einer Ladungsstufe eines Coulombpeaks.

Die Messung am QPC unterscheidet sich dagegen deutlich von den bislang gezeigten, da hier dG/dB gezeigt ist und nicht wie bislang dG/dV . Zunächst fällt auf, dass die Coulomblinie eine alternierende Färbung von Weiß und Schwarz aufweist. Dies ist eine Folge der Messung in Magnetfeldrichtung. Bei der Erhöhung des Magnetfeldes ändert sich für die Linienbereiche, die im Magnetfeld abfallen, die Zahl der Elektronen von N zu $N+1$. Das bedeutet, dass der QPC hier eine Erhöhung der Ladung detektiert, was zu einer Verringerung der Leitfähigkeit des QPC führt. Dies entspricht einer hellen Färbung im Graphen. Für das Passieren der ansteigenden Bereiche der Coulomblinie wird bei Erhöhung des Magnetfeldes dagegen eine Verringerung der Ladung auf dem QD von $N+1$ zu N gemessen. Hierdurch erhöht sich die Leitfähigkeit des QPC, was einer dunklen Färbung im Graphen entspricht. Ob Weiß oder Schwarz, es wird bei der Kreuzung der Cou-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

lomblinie jeweils eine Ladungsänderung um ein Elektron gemessen.

Zwischen den Coulomblinien ist die Ladung auf dem QD dagegen konstant. Durch die Coulombblockade können keine weiteren Elektronen den QD betreten, und es steht auch keine Energie für die gebundenen Elektronen zur Verfügung, um den QD zu verlassen. In der Messung treten bei Erhöhung des Magnetfeldes dennoch Bereiche auf, in denen der QPC eine Änderung der Ladung anzeigt. Diese Bereiche verlaufen als Linien jeweils von einem lokalen Maximum in der Peakposition aufwärts zu einem lokalen Minimum der darüberliegenden Coulomblinie. Die detektierte Ladungsänderung ist deutlich geringer als für die Coulomblinien.

Betrachten wir den Schnitt entlang der gestrichelten Linie. Dieser ist in Abbildung 4.17 zu sehen. Auf der linken Seite ist zunächst die Leitfähigkeit des QPC gezeigt. Man erkennt einen generellen Abfall der Leitfähigkeit. Dies ist die Folge des steigenden Magnetfeldes. Zudem sind aber deutlich Stufen zu erkennen, eine bei 4.1 T, eine weitere bei etwa 4.17 T. Bei diesen Magnetfeldstärken erhöht sich sprunghaft die Leitfähigkeit des QPC, was einer Abnahme des Potentials am Ort des QPC entspricht. Berechnet man aus der Leitfähigkeit des QPC die absolute Ladungsänderung, erhält man den im rechten Teil gezeigten Verlauf. Bei 4.1 T verringert sich die gemessene Ladung um 0.2 und bei 4.17 T noch einmal um 0.3 Elektronenladungen.

Obwohl also die Zahl der Elektronen auf dem QD konstant bleibt, verringert sich das Potential am Ort des QPC. Die naheliegende Erklärung hierfür ist eine Änderung der Ladungsanordnung auf dem QD. Wann immer sich dabei die Ladung auf dem QD umverteilt, wird in der Leitfähigkeitsänderung des QPC eine Umladelinie sichtbar. In diesem Falle ist die Umverteilung der Elektronen auf dem QD derart, dass der QPC effektiv weniger Ladung detektiert.

Diese Umladungen folgen in Ort und Verlauf dem in Abschnitt 4.4 vorgestellten Schalenmodell. Folgen wir hierzu der schematischen

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

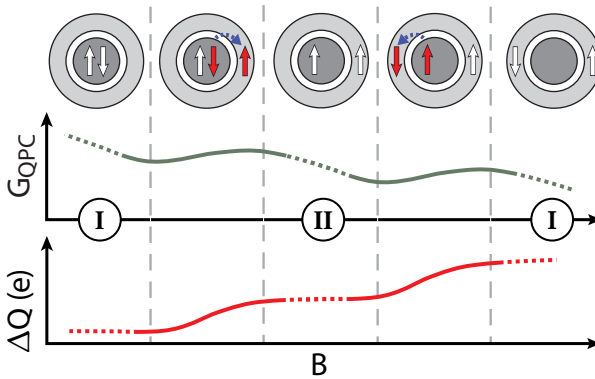


Abbildung 4.18:

Die Änderung der effektiven Ladung als Folge der Umverteilung von Elektronen im Modell der Landauschalen.

Darstellung in Abbildung 4.18. In der Ausgangssituation ① befindet sich das energetisch höchste Elektron im Innern des QD. Sobald nun die innere Landauschale ($n=1$) für das Spin up tragende Elektron energetisch höher liegt als der nächste freie Zustand der äußeren Landauschale ($n=0$), wird das Elektron an den Rand des QD umverteilt. Dies ändert das Potential am QPC und damit seine Leitfähigkeit. Die effektive Ladung, die der QPC detektiert, hat sich um ΔQ verändert. Danach bleibt die detektierte Ladung konstant, die QPC Leitfähigkeit folgt weiter ihrem Verlauf im steigenden Magnetfeld. Der für den Transport genutzte Zustand wechselt von der Randschale zurück in das Zentrum des QD. Dies hat jedoch keine Auswirkung auf die effektive Ladung, da dieser Zustand bereits besetzt war. In dieser Situation ② befindet sich ein Spin up Elektron in der äußeren Landauschale und eines in der inneren. Im weiter steigenden Magnetfeld wird schließlich der Punkt erreicht, an dem der innere Zustand energetisch zu hoch liegt,

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

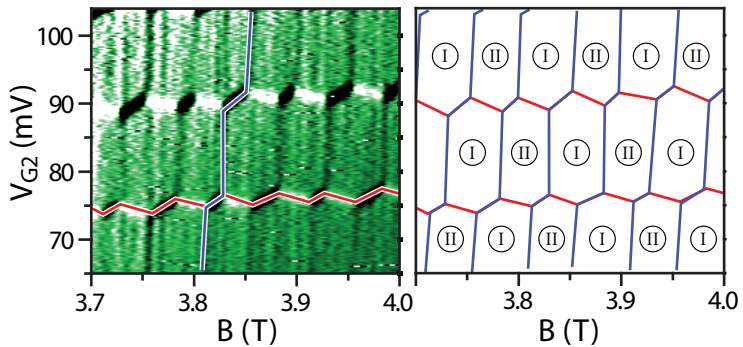


Abbildung 4.19:

Die Umladungen im Magnetfeld können zur Identifizierung der Konfiguration des QD genutzt werden. Links ist die Leitfähigkeitsänderung des QPC in Abhängigkeit vom Magnetfeld unter allmählicher Änderung der Gatespannung an G_2 gezeigt. Rechts ist das Muster der Coulomblinien und der Umladelinien zu sehen. Zusammen mit der Leitfähigkeit des QD (nicht gezeigt) kann jeder Zelle eine Konfiguration zugeordnet werden (siehe Abb. 4.18).

um besetzt zu sein. Sobald dann das nächste Elektron von der inneren in die äußere Landauschale umgeladen wird, erscheint ein weiterer Sprung in der QPC Leitfähigkeit, denn wieder hat sich die effektive Ladung geändert. Im Endzustand befinden sich nun Spin up und Spin down Elektronen in der äußeren Schale. Diese Situation entspricht damit wieder der Ausgangssituation, denn in der inneren Schale stehen erneut zwei Elektronen für die Umladung bereit.

Der Effekt der Spinblockade (Abschnitt 4.4.2) ermöglicht es die Spinkonfiguration auf dem QD zu bestimmen. Damit ist es nun möglich, die im Modell beschriebenen Situationen in der Messung zu identifizieren. Die Leitfähigkeit auf der absteigenden Resonanz ist maximal, wenn auf dem QD ein Spin down Elektron den Transport trägt. Dies

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

entspricht im beschriebenen Modell der Situation ①. Abbildung 4.16 ist zu entnehmen, dass dieser Fall für den Schnitt aus Abbildung 4.17 zwischen 4.1 T und 4.7 T vorliegt. Davor und danach befindet sich der QD jeweils in Situation ①.

In Abbildung 4.19 ist dies für einen größeren Parameterraum zu sehen. Es ist wiederum die Leitfähigkeitsänderung des QPC in Abhängigkeit vom magnetischen Feld aufgetragen. Die Spannung an G2 wurde dabei ebenfalls schrittweise erhöht. Es sind eine Vielzahl an Umladelinien zu identifizieren. Das Muster der Coulomblinien und der Umladelinien wurde daraus extrahiert und ist daneben als zweiter Graph zu sehen. Es bildet sich ein Wabenmuster aus sechseckigen Zellen. Auch hier kann mittels der Leitfähigkeitsmessung am QD und der dort auftretenden Spinblockade auf den Resonanzen ein Startpunkt für die Zuordnung der Konfigurationen des QD gefunden werden. Die Folge ist eine genaue Karte der Elektronenverteilung auf die Landauschalen und deren Übergänge. Die eingezeichneten Konfigurationen entsprechen den in Abbildung 4.18 eingeführten und im Modell beschriebenen Situationen ① (ein Elektron im Zentrum, eines in der äußeren Schale) und ② (beide Elektronen in der gleichen Schale).

4.4.4 Umladelinien zweiter Art

Die Untersuchungen zur Umverteilung der Elektronen wurden auch auf der Symmetrielinie des Quantenpunktes durchgeführt. Hierzu werden beide Gates des Quantenpunktes gleichzeitig verändert, und die Tunnelbarrieren zu Source und Drain so möglichst symmetrisch gehalten (siehe Abschnitt 4.2). Das Ergebnis ist in Abbildung 4.20 zu sehen. Dargestellt ist wieder dG/dB des QPC in Abhängigkeit von Magnetfeld und Gatespannung. Wie auch in Abbildung 4.16 erkennt man die Umladungslinien. Hier sind sie hell, was einer Zunahme der detektierten effektiven Ladung entspricht. In Abbildung 4.16 war eine Ab-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

nahme detektiert worden. Dieser Unterschied kommt wahrscheinlich durch einen Unterschied in der Position und geometrischen Form des Quantenpunkts zustande. In Abbildung 4.16 befindet sich der Quantenpunkt deutlich abseits der Symmetrielinie. Hier ist die Messung direkt auf der Symmetrielinie ausgeführt.

Während in beiden Messungen also die Umladelinien für die Umladung eines Elektrons in die äußere Landausgabe beobachtet werden kann, treten hier weitere Linien auf, die in Bezug auf Gatespannungen und Magnetfeld eine entgegengesetzte Steigung aufweisen. Auch diese Linien scheinen von einem Maximum der Peakposition auszugehen und zu einem Minimum in der Peakposition der darüberliegenden Coulomblinie zu verlaufen. Da diese Linien etwas breiter und unschärfer sind, ist der Ausgangspunkt nicht zweifelsfrei feststellbar. Die Linien verlaufen dabei jedoch quer durch die Waben, die von den Umladelinien aufgespannt werden.

Die Ladungsänderung für diese neuen Linien ist dabei in die entgegengesetzte Richtung. Während also am Ort der Umladung eines Elektrons auf die äußere Schale eine Zunahme der effektiven Ladung detektiert wird, wird an diesen quer verlaufenden Linien eine Abnahme gemessen. Die Ursache für diese zusätzliche Ladungsänderung ist ungeklärt. Die Änderung ist in der gleichen Größenordnung wie die Umladung selbst, allerdings scheint sie weniger scharf auf einen Wert des Magnetfelds festgelegt zu sein. Eine mögliche Erklärung der Änderung des Potentials am QPC, die am Ort dieser Linien stattfindet, könnte eine Umstrukturierung der Elektronen auf dem Quantenpunkt sein. Bislang wurde stets nur das energetisch höchste Elektron betrachtet. Es befinden sich jedoch viele Elektronen auf dem Quantenpunkt. Eine Umkonfiguration der Elektronen auf dem Quantenpunkt zur Minimierung der Gesamtenergie könnte eine solche Änderung der QPC Leitfähigkeit verursachen.

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

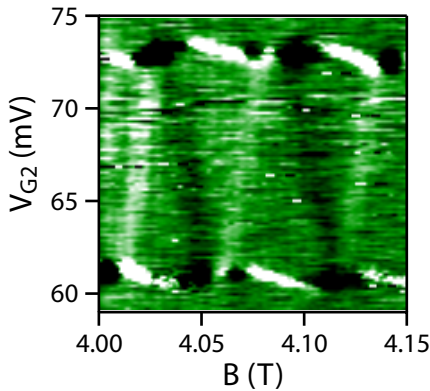


Abbildung 4.20:

dG/dB des QPC. Die Gatespannung an G1 und G2, wurde dabei schrittweise entlang der Symmetrielinie des Quantenpunkts erhöht. Anders als in Abb. 4.16 treten hier zwei Arten von Umladelinien auf.

4.4.5 Umladungen in einem Doppelquantenpunkt

Die Untersuchungen zu Umladungen im Magnetfeld wurden zusätzlich auch an der Doppelquantenpunktstruktur (siehe Abschnitt 3.1.2) durchgeführt. Die Tatsache, dass es sich um zwei Quantenpunkte in Reihe handelt, ist in diesem Zusammenhang unerheblich. Die Zahl der Elektronen auf dem ersten Quantenpunkt liegt etwa bei 10, die des zweiten bei mehr als 50. Die Folge ist, dass bei den Magnetfeldern, zu denen für den größeren QD Umladungen zu erwarten sind, für den kleinen QD bereits alle Elektronen im untersten Landau-niveau angekommen sind. Umladungen für den kleinen QD konnten nicht untersucht werden, da dieser räumlich zu weit vom QPC entfernt liegt und dadurch die Kopplung und somit die Messauflösung zu gering ist.

In Abbildung 4.21 ist eine Messung an der Doppelquantenpunktstruktur im für die Umladungen relevanten Bereich mittlerer Magnet-

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

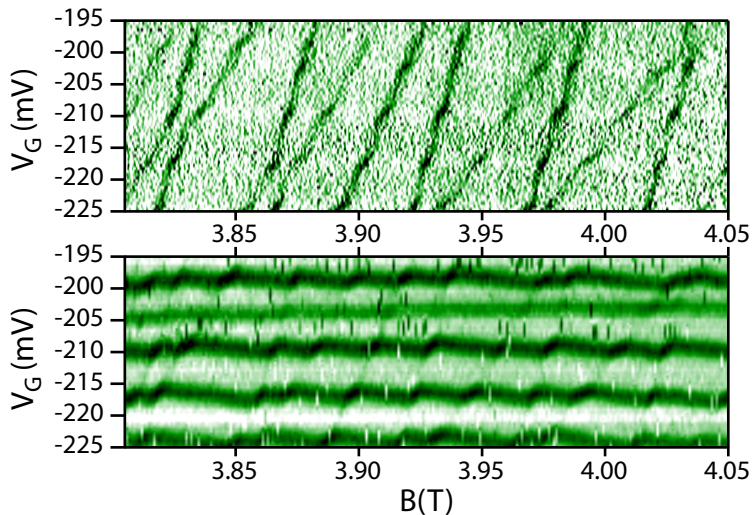


Abbildung 4.21:

Ladungsänderungen im Magnetfeld: Oben ist die Leitfähigkeitsänderung des QPC in Richtung des Magnetfelds B dargestellt. Die Gatespannung an G_2 wurde dabei schrittweise erhöht. Darunter ist die Änderung der Leitfähigkeit des QPC in Richtung der Gatespannung für den gleichen Bereich gezeigt.

felder gezeigt. Betrachten wir zunächst den unteren Graphen. Hier ist die Änderung der QPC-Leitfähigkeit in Richtung der Gatespannung dargestellt, wobei das Magnetfeld schrittweise erhöht wurde. Man erkennt deutlich das Zickzack der Coulomblinien im Magnetfeld. Bei etwa -205 mV Gatespannung ist zudem eine etwas schwächer ausgeprägte Linie zu sehen, die kein Zickzackmuster aufweist. Diese Coulomblinie gehört zum kleinen QD des Doppelquantenpunkts. Für diesen sind bereits alle Elektronen in das unterste Landau-niveau gewechselt.

Bereits in dieser Messung lassen sich zwischen den Coulombblocka-

4.4 Der Quantenpunkt im senkrechten Magnetfeld

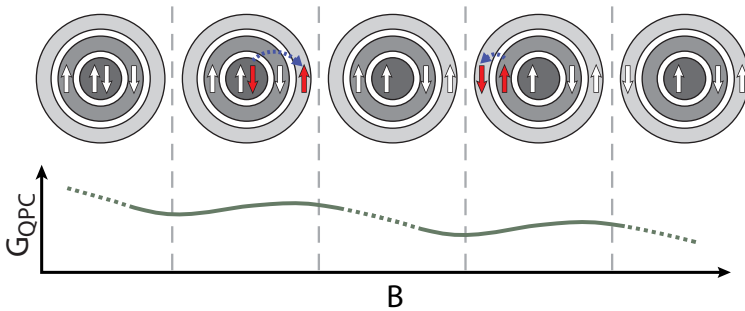


Abbildung 4.22:

Die Änderung der effektiven Ladung als Folge der Umverteilung von Elektronen unter Berücksichtigung von drei Landauschalen.

den Umladelinien ausmachen. Die Signatur dieser Linien ist erheblich deutlicher als es für den Einzelquantenpunkt der Fall war. Im oberen Graphen ist die Leitfähigkeitsänderung in Abhängigkeit vom Magnetfeld dargestellt. Wie angesichts der Messung in Gaterichtung bereits zu erwarten war, sind hier die Umladungen als deutliche Linien über mehrere Coulombpeaks hinweg klar erkennbar. Interessanterweise sind sogar zwei unterschiedliche Steigungen auszumachen. Die Linien weisen abwechselnd eine höhere und eine flachere Steigung auf.

Charakterisierungsmessungen am größeren QD, von dem hier die Umladelinien zu sehen sind, legen die Vermutung nahe, dass die Zahl der Elektronen auf dem QD deutlich höher ist, als es für den Einzelquantenpunkt der Fall war. Es ist daher naheliegend, die unterschiedlichen Steigungen den Landauniveaus $n=1$ und $n=2$ zuzuordnen. Im Gegensatz zum Einzelquantenpunkt können hier scheinbar Umladungen aus zwei inneren Landauschalen beobachtet werden. Eine schematische Darstellung hierzu ist in Abbildung 4.22 gezeigt. Statt zwei sind nun drei Landauschalen beteiligt, aus denen abwechselnd Elektronen

4 Der Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor

in die äußere Landauschale umgeladen werden (vergleiche hierzu auch Abb. 2.12).

In der absoluten Ladungsmessung ist allerdings kein deutlicher Unterschied zwischen beiden Linientypen zu erkennen. Die Ladungsänderung, die der QPC detektiert, ist im Rahmen der Messgenauigkeit nicht zu unterscheiden. Offensichtlich ändert sich das Potential für den QPC weitestgehend gleich stark, unabhängig davon, ob ein Elektron aus der dritten oder der zweiten Landauschale umgeladen wird.

Ein Problem dieser Erklärung sind jedoch die Materialeigenschaften der Probe. Da das Probenmaterial bei niedrigen Temperaturen eine Elektronendichte n_e von $3.3 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ besitzt, müsste der Füllfaktor $\nu=4$ bereits bei 3.7 T eintreten. In der Messung scheint dies aber erst bei über 4 T der Fall zu sein. Ursache für die Abweichung könnte sein, dass während des Abkühlvorgangs eine höhere Elektronendichte erreicht wurde.

5

Kapitel 5

Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Die bislang betrachteten Ergebnisse behandelten Messungen der QPC-Leitfähigkeit mit langer Zeitkonstante, üblicherweise in der Größenordnung einer Sekunde. Im Rahmen solcher Messungen wird im Normalfall der Gleichgewichtszustand eines Quantenpunktsystems abgebildet. Die Ladungsmessung entspricht dabei der mittleren Ladung, die sich innerhalb der Zeitkonstante auf dem QD befindet.

Im Folgenden werden nun zeitaufgelöste Messungen betrachtet, deren Zeitkonstante deutlich unterhalb von Sekunden liegt. Die Bandbreite des Messsystems liegt typischerweise bei etwa 100 KHz. Im Rahmen dieser Messungen sind also auch solche Prozesse beobachtbar, die auf Zeitskalen unterhalb einer Millisekunde stattfinden.

Die zeitaufgelöste Ladungsmessung mit dem QPC als Detektor ist ein junges und sehr beachtetes Feld. Realisiert wurde die Echtzeitmessung von Tunnelereignissen auf Quantenpunkten 2003 von Lu *et al.* [28]. Die Methode wurde schnell auch in anderen Gruppen etabliert und verfeinert [30, 34]. Mit den Methoden der FCS öffnete sich da-

mit ein vollkommen neues Feld der Transportspektroskopie. Die erste Umsetzung der zeitaufgelösten Detektion von Tunnelereignissen zur Untersuchung der Transportstatistik gelang Gustavsson *et al.* [35].

5.1 Einzelelektronentunneln

In Abbildung 5.1 ist exemplarisch ein kurzer Ausschnitt einer zeitaufgelösten Messung des Stromes durch den QPC gezeigt. Für diese Messung wurde ein Niveau des QD in Resonanz mit den Zuleitungen gebracht und eine Spannung $V_{SD}=700\ \mu\text{V}$ angelegt. Damit ist sichergestellt, dass kontinuierlich Elektronen von Source den QD betreten und diesen dann Richtung Drain wieder verlassen. Die Vorspannung stellt dabei den unidirektionalen Transport sicher. Die Abbildung zeigt nun einen Ausschnitt des Stromes durch den QPC für einen Zeitraum von 10 ms. Es fällt dabei sofort ins Auge, dass der Strom durch den QPC sprunghaften Änderungen unterworfen ist. Es bilden sich zwei Banden aus. Die Banden lassen sich den zwei möglichen Ladungszuständen des QD zuordnen. Für N Elektronen auf dem QD fließen ca. 4 nA durch den QPC, befinden sich hingegen $N+1$ Elektronen auf dem QD, so fällt der Strom durch den QPC auf 2 nA. Diese Leitfähigkeitsänderung kommt zustande, da das zusätzliche Elektron das Potential des QPC verändert (vergleiche Abschnitt 3.2.1).

Die zeitaufgelöste Messung bietet also einen detaillierten Einblick in die Tunnelprozesse, die zum Strom durch den QD führen. So lassen sich z.B. die Tunnelereignisse für einen gegebenen Zeitabschnitt zählen und so eine sehr genaue Strommessung durchführen. Auch die Tunnelprozesse selbst können genau untersucht werden. Charakteristisch für einen Tunnelprozess ist die Tunnelrate. Sie definiert, wie viel Zeit ein einzelnes Elektron durchschnittlich benötigt, um die Barriere zu durchdringen. Diese Zeit wird als Tunnelzeit τ bezeichnet, wobei der Transport durch den Quantenpunkt über zwei Tunnelbarrieren

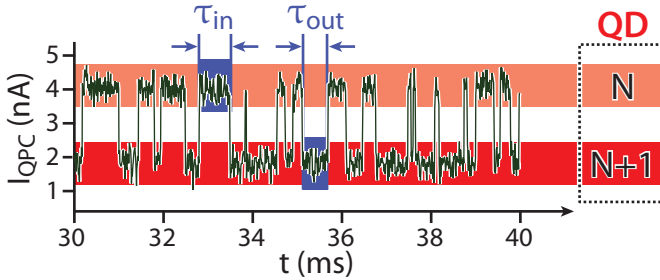


Abbildung 5.1:

Zeitaufgelöstes Signal des QPC Stromes. Es sind zwei Banden zu erkennen und klare Übergänge zwischen diesen. Die Banden lassen sich den Ladungszuständen des QD zuordnen. Es sind zudem die Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} markiert.

auch durch zwei Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} charakterisiert wird. Die Tunnelzeit τ_{in} bezeichnet dabei die Zeit, die ein Elektron benötigt, um den Quantenpunkt von Source kommend zu betreten. Die Tunnelzeit τ_{out} gibt an, wie lange es dauert, bis ein zusätzliches Elektron auf dem QD diesen in Richtung Drain wieder verlässt. In der Messung lassen sich diese Tunnelzeiten ablesen. Die Tunnelzeit τ_{in} entspricht dabei der Zeit, während der Strom durch den QPC in der Bande für N Elektronen auf dem QD liegt. Die Zeit τ_{out} erhält man entsprechend aus der Zeit, die der Strom in der Bande für $N+1$ Elektronen verweilt. In der Abbildung 5.1 sind die Tunnelzeiten für zwei Tunnelvorgänge beispielhaft eingezeichnet.

Unter der Annahme eines perfekten Detektors lassen sich aus den gemessenen Tunnelzeiten die Tunnelraten bestimmen. Der Zusam-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

menhang ist gemäß (2.79):

$$\Gamma_{\text{in,out}} = \frac{1}{\langle \tau_{\text{in,out}} \rangle}$$

Als Grundlage für eine exemplarische Bestimmung der Tunnelraten soll eine Langzeitmessung über ca. 15 Minuten dienen. Für die gesamte Messzeit wurden die einzelnen Tunnelzeiten ausgewertet. Es handelt sich dabei um 853284 Tunnelereignisse. Der Mittelwert der Tunnelzeiten betrug dabei:

$$\begin{aligned}\langle \tau_{\text{in}} \rangle &= 389.3 \mu\text{s} \\ \langle \tau_{\text{out}} \rangle &= 778.0 \mu\text{s}.\end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich als Tunnelraten:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{in}} &= \frac{1}{389.3} \mu\text{s}^{-1} = 2568 \text{ Hz} \\ \Gamma_{\text{out}} &= \frac{1}{778.0} \mu\text{s}^{-1} = 1285 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Wie in Abschnitt 2.5.6 dargelegt wurde, hat die Bandbreite der Strommessung am QPC jedoch einen entscheidenden Einfluss. Ist diese nämlich nach oben begrenzt, so werden Tunnelereignisse, die kürzer sind als die Zeitkonstante der Messung, nicht registriert [95]. Damit wird ein zu hoher Mittelwert $\langle \tau_{\text{in,out}} \rangle$ ermittelt. Dieser Effekt tritt auch auf, wenn die Tunnelrate signifikant geringer ist als die Bandbreite der Messung.

Zur genaueren Bestimmung der Tunnelrate ist es notwendig, die Verteilung der Tunnelzeiten zu untersuchen. Aus dem exponentiellen Abfall der Wahrscheinlichkeitsdichte kann dann die Tunnelrate gewonnen werden. In Abbildung 5.2 ist die Verteilung der Tunnelzeiten für die beschriebene Messung abgebildet, wobei auf der x-Achse die Zeit und auf y-Achse der dazu gehörige Wert der Wahrscheinlichkeitsdichte auf logarithmischer Skala aufgetragen sind. Die Wahrscheinlichkeit,

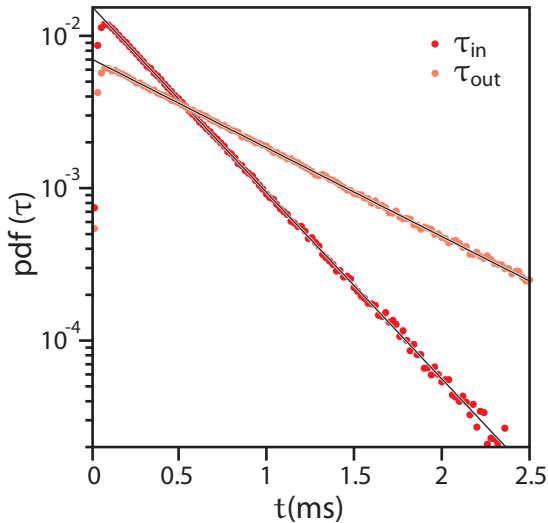


Abbildung 5.2:

Verteilung der Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} . Dargestellt ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}(\tau)$ über der Zeit (Punkte). Zusätzlich sind Fits an den exponentiellen Bereich der Verteilung gezeigt (Linien).

dass nach einer Zeit t_0 ein Elektron getunnelt ist, ergibt sich dann aus dem Integral der Wahrscheinlichkeitsdichte bis t_0 . Zu kurzen Zeiten ist ein Einbrechen der Messwerte zu beobachten. Dies ist die Folge des oben beschriebenen Bandbreiteneffekts. Man erkennt hier auch, warum dies einen so starken Einfluss auf den Mittelwert der Tunnelzeiten hat: die Wahrscheinlichkeit, eine Tunnelzeit zu beobachten, nimmt exponentiell mit der Zeit ab. Kurze Tunnelprozesse sind also drastisch häufiger als lange. Im Mittelwert schlägt sich eine untere Grenze der beobachtbaren Tunnelzeiten damit deutlich nieder.

Gemäß (2.78) entspricht der Exponent der Verteilung direkt der

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Tunnelrate. Um diesen zuverlässig zu bestimmen, wurde ein exponentieller Fit vorgenommen, wobei nur Tunnelzeiten eingingen, die im linearen Bereich der abgebildeten Verteilung liegen. Der exponentielle Fit entspricht dabei hervorragend den gemessenen Werten. Die so gewonnen Tunnelraten sind naturgemäß höher als die Abschätzung über den Kehrwert der mittleren Tunnelzeiten:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{in}} &= 2823 \text{ Hz} \\ \Gamma_{\text{out}} &= 1344 \text{ Hz}.\end{aligned}$$

Die so gewonnenen Tunnelraten liegen erheblich dichter an den wahren Tunnelraten des QD als der einfache Mittelwert über alle Tunnelzeiten. Wie in Abschnitt 2.5.6 erläutert wurde, liegt aber auch dieser Wert für endliche Bandbreite noch zu niedrig.

5.2 Charakterisierung der Detektorbandbreite

Die bestmögliche Bestimmung der Tunnelraten des QD erfordert die Berücksichtigung der Detektorbandbreite Γ_d . Um aus den experimentellen Ergebnissen die Tunnelraten Γ_{in} , Γ_{out} und Γ_d zu bestimmen, wird für die Verteilungen von τ_{in} und τ_{out} ein simultaner Fit mit der Formel (2.80) durchgeführt. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.3 zu sehen. Der Fit beschreibt sehr gut den Verlauf der Kurve, sowohl das allmähliche Einbrechen der Wahrscheinlichkeit zu kurzen Tunnelzeiten, wie auch der exponentielle Abfall zu langen Zeiten wird sehr gut angenähert. Die Tunnelrate sowie die Bandbreite des Detektors sind die einzigen Fitparameter und ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{in}} &= 2935 \text{ Hz} \\ \Gamma_{\text{out}} &= 1440 \text{ Hz} \\ \Gamma_d &= 42.8 \text{ kHz}.\end{aligned}$$

5.2 Charakterisierung der Detektorbandbreite

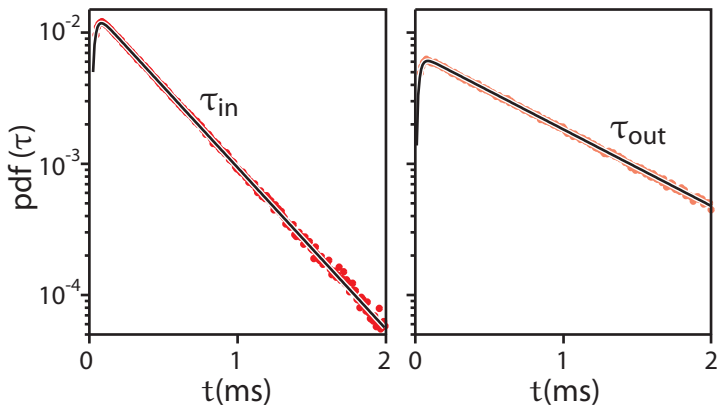


Abbildung 5.3:

Verteilung der Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} . Dargestellt ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}(\tau)$ über der Zeit (Punkte). Dargestellt ist außerdem ein Fit mit dem in Abschnitt 2.5.6 diskutierten Detektormodell. (Linien).

Diese Werte der Tunnelraten liegen wie erwartet etwas oberhalb der Ergebnisse für den Fit des exponentiellen Abfalls der Verteilung. Der Unterschied ist jedoch vergleichsweise gering. In diesem Experiment bei einer Stichprobe von mehreren Hunderttausend Tunnelereignissen, ist der Unterschied messbar. Typische Stichproben von Spektroskopiemessungen liegen jedoch allein aus zeitlichen Gründen deutlich niedriger, meist in der Größenordnung von 1000 Ereignissen pro Messpunkt. Bei diesen Stichprobengrößen liegt der statistische Fehler in der gleichen Größenordnung wie der Fehler, der aus der endlichen Bandbreite resultiert.

Als dritter Fitparameter ergibt sich aus dem Fit der Tunnelzeiten die Bandbreite des Detektors. Mit etwas über 40 kHz liegt sie hinreichend deutlich unterhalb der Grenzfrequenz des verwendeten Verstärkers (100 kHz). Bei der Beurteilung des Detektors muss jedoch nicht

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

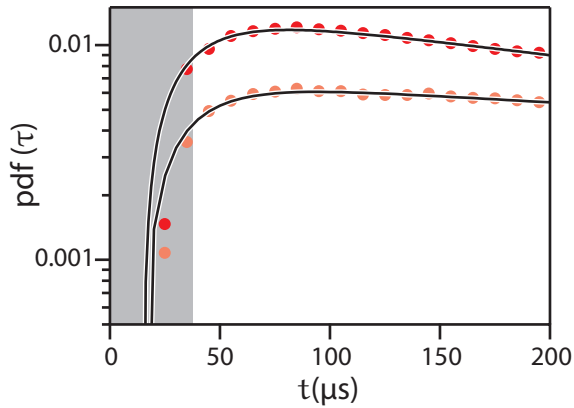


Abbildung 5.4:

Verteilung der Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} . Dargestellt ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $\text{pdf}(\tau)$ über der Zeit (Punkte). Für kurze Zeiten (grauer Bereich) weist die Messung eine deutliche Diskrepanz zum Detektormodell (Linien) auf.

nur die Detektion des Signals, sondern auch die Verarbeitung der Messdaten berücksichtigt werden. In Abbildung 5.4 ist hierzu der Bereich kurzer Zeiten im Detail dargestellt. Man erkennt deutlich, dass für Zeiten länger als $40 \mu\text{s}$ der Verlauf der Fitfunktion die Entwicklung sehr gut widerspiegelt. Für kürzere Zeiten verhält sich die Messung jedoch vollkommen anders als die theoretische Beschreibung, der der Fit Rechnung trägt. Der dem Fit zugrundeliegende theoretische Ansatz geht von einem Detektormodell aus, das analog zu den Tunnelzeiten eine exponentielle Wahrscheinlichkeitsverteilung der Detektionswahrscheinlichkeit postuliert. Die Detektorbandbreite geht dabei als Exponent ein. Die Detektorbandbreite konnte damit gegenüber bisherigen Publikationen [96, 97] deutlich vergrößert werden.

Die experimentellen Ergebnisse zeigen jedoch für kurze Zeiten ein

deutlich schnelleres Einbrechen der Tunnelzeiten, also eine deutlich verminderte Detektionswahrscheinlichkeit. Die Ursache hierfür ist der Auszählalgorithmus, mit dessen Hilfe die Tunnelereignisse identifiziert werden. Die technische Untergrenze für die Detektion eines Tunnelvorgangs ist durch den Auswertevorgang in diesem Experiment $20 \mu\text{s}$, was zwei zeitlich getrennten Messpunkten bei 100 kHz Abtastrate entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, sehr kurze Ereignisse zu detektieren, wird daher von Seiten der Auswertung nach unten begrenzt. Für eine Abtastrate von 100 kHz muss man also für kurze Tunnelzeiten von einer Bandbreite von etwa 30 kHz ausgehen. Erst für Zeiten deutlich oberhalb des durch die Auswertung bestimmten Zeitbereichs entspricht die Detektorbandbreite den ca. 40 kHz , die sich aus dem Fit ergeben.

Vergleiche hierzu Abschnitt 3.4.3. Dort ist im Detail dargelegt, wie die Auswertung des zeitaufgelösten Signals realisiert wurde.

5.3 Die Verteilung der Tunnelereignisse

Bislang wurden nur die aus Messung der QPC-Leitfähigkeit gewonnene Tunnelzeiten betrachtet. Mit ihrer Hilfe lassen sich die Tunnelraten und damit die Besetzungswahrscheinlichkeit sowie die Symmetrie eines QD sehr genau bestimmen. Will man nicht die Besetzung der QD-Niveaus, sondern direkt den Transport durch den QD untersuchen, betrachtet man die Verteilung der Tunnelereignisse. Der Auswertevorgang vom Messsignal zur Verteilung ist in Abschnitt 3.4.4 beschrieben. Prinzipiell ist die Vorgehensweise, dass die gesamte Messung in Zeitintervalle t_0 unterteilt wird. Für jedes Zeitintervall wird die Zahl der in diesem Zeitraum detektierten Tunnelereignisse bestimmt. Das Resultat ist eine zeitliche Abfolge von Tunnelereignissen pro Zeitintervall t_0 . Dies entspricht einer zeitabhängigen Messung des Stromes durch den Quantenpunkt. In Abbildung 5.5 ist eine solche Strommessung dargestellt. Man erkennt sofort, dass der Strom keineswegs eine konstante Größe ist. Die genaue Zahl der Tunnelereignisse für die verschiedenen

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

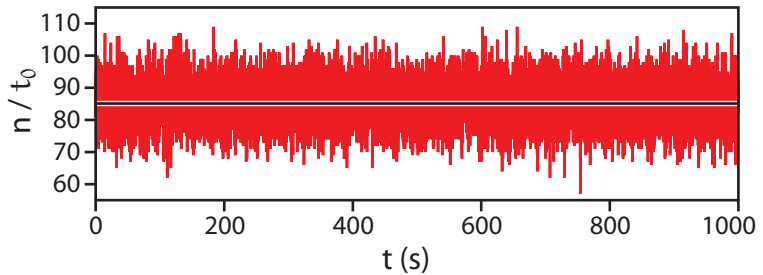


Abbildung 5.5:

Der Strom als statistische Größe: Dargestellt ist die Anzahl n Elektronen, die pro Zeitintervall t_0 den QD passieren über einen Zeitraum von 1000 Sekunden. t_0 beträgt 100 ms, es wurden 10000 Intervalle ausgewertet. Der Mittelwert der Elektronen pro Zeitintervall entspricht dem klassischen Strom durch das System und ist als Linie eingezeichnet.

Zeitintervalle zeigt klar ein statistisches Verhalten und variiert zwischen 60 und 110 Tunnelereignissen pro 100 ms.

Aus der Statistik des Stromes lassen sich nun eine Vielzahl von Systemeigenschaften ableiten. Die naheliegendste Größe ist vielleicht der mittlere Strom, wie man ihn in einer Gleichgewichtsuntersuchung ermitteln würde. Der Gleichstrom durch den QD ergibt sich aus dem Mittelwert der Zählstatistik:

$$I = \frac{\langle n \rangle \cdot e}{t_0}$$

wobei $\langle n \rangle$ der Mittelwert der Tunnelereignisse ist, e die Elementarladung des Elektrons und t_0 die Länge eines einzelnen Zeitintervalls. In der betrachteten Messung liegt der Mittelwert bei 85.11 Elektronen pro Zeitintervall. Das entspricht einem Strom von 136.1 aA. Hierbei ist jedoch die Strommessung durch die Bandbreite des Detektors verfälscht.

5.3 Die Verteilung der Tunnelereignisse

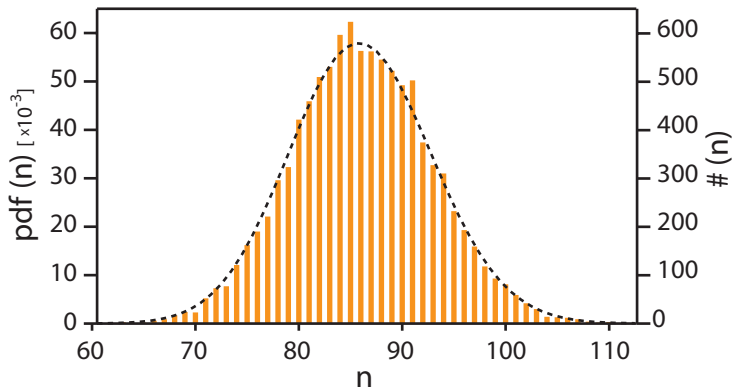


Abbildung 5.6:

Dargestellt ist die Verteilung der Tunnelereignisse zu 10000 Zeitintervallen der Länge $t_0=100$ ms. Auf der linken Achse ist die Wahrscheinlichkeitsdichte aufgetragen, auf der rechten zum Vergleich die absolute Zahl der gezählten Ereignisse. Die experimentellen Daten (orange Balken) stehen im Vergleich zur theoretischen Kurve (schwarze Linie).

Ein genaueres Ergebnis erhält man aus den Tunnelraten [98]:

$$I = \frac{\Gamma_{in}\Gamma_{out}}{\Gamma_{in} + \Gamma_{out}} \cdot e \quad (5.1)$$

Mit den Tunnelraten aus Abschnitt 5.2 ergibt sich ein wahrer Strom von 154.7 aA. Der Mittelwert der Tunnelereignisse ist jedoch nur das erste Moment der statistischen Verteilung. Um auch höhere Momente anschaulich zu machen, ist es sinnvoll, die Verteilung der Tunnelereignisse darzustellen. Dies ist in Abbildung 5.6 getan. Die x-Achse entspricht Anzahlen von Tunnelereignissen, die innerhalb des Zeitintervalls t_0 gemessen wurden. Auf der y-Achse ist die Wahrscheinlichkeitsdichte sowie die absolute Menge der zur Anzahl n gehörigen Zeitintervalle aufgetragen.

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Die Verteilung der Tunnelereignisse (orange Balken) gleicht einer gaussförmigen Verteilung. Dies ist eine Folge des relativ hohen Mittelwerts von über 80, bei der die Poissonverteilung sich bereits weitgehend der Gaussverteilung angeglichen hat. Mit den Tunnelraten, die aus der Messung extrahiert wurden, kann der theoretische Verlauf der Verteilung berechnet werden. Da in der Verteilung der Tunnelereignisse natürlich nur die wirklich detektierten Ereignisse erfasst sind, ist es nicht sinnvoll, für diese Berechnung die durch die Bandbreite korrigierten Werte zu nutzen, da die perfekte Verteilung natürlich einen höheren Mittelwert aufweisen muss. Stattdessen wurden als Tunnelraten direkt die Kehrwerte der gemessenen mittleren Tunnelzeiten eingesetzt. Das Ergebnis ist als schwarze Linie in Abbildung 5.6 eingezeichnet.

Wie man erkennt, entspricht die theoretische Kurve in ihrem Verlauf sehr gut den experimentellen Daten. Die Abweichungen sind die Folge des hohen Mittelwerts und damit der breiten Verteilung der begrenzten Stichprobe. Die gute Übereinstimmung der Form lässt darauf schließen, dass für die ersten Momente (Mittelwert, Breite, Verkipfung) keine drastische Auswirkung der Bandbreite zu erwarten sein sollte. Vorsicht ist dagegen bei höheren Momenten geboten.

Aus der Verteilung lässt sich als nächste Messgröße der Fanofaktor extrahieren. Wie in Abschnitt 2.5.2 erläutert, errechnet sich der Fanofaktor direkt aus dem zweiten Moment der Verteilung:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}.$$

Er ist ein Maß dafür, wie weit die Fluktuationen eines gemessenen Stromes vom Fall der Poissonschen Verteilung abweichen. Für den Transport durch Quantenpunkte ist ein Fanofaktor zwischen 0.5 und 1 der normale Fall. Für die betrachtete Messung ergibt er sich zu:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle}{\langle n \rangle} = 0.536.$$

5.4 Transportspektroskopie mittels Zählstatistik

Die Zählstatistik kann als Mittel der Transportspektroskopie eingesetzt werden. Sie verspricht tiefere Einblicke in die Vorgänge auf dem Quantenpunkt. Dies ist unter anderem bei nichtlinearen Untersuchungen von Interesse, etwa um den Einfluß des Anregungsspektrums zu untersuchen. Die Vorgehensweise gleicht dem der Gleichgewichtsmessungen. Es wird eine Gatespannung und die Vorspannung des QD variiert. Für diesen Parameterraum wird dann an jedem Messpunkt eine gewisse Zeit lang das zeitaufgelöste Signal des QPC aufgenommen. Für jeden der Punkte kann anschließend die Statistik ausgewertet werden und die Kumulanten als Funktion der variierten Spannungen dargestellt werden. Da das QD System für den Zeitraum der Messung keinesfalls durch externe Einflüsse gestört und verändert werden darf, ist die Zeit pro Messpunkt deutlich geringer, als dies in der einleitenden Beispielmessung der Fall war. Übliche Messzeiten pro Punkt liegen im Bereich weniger Sekunden. Dies schränkt die Auswertung der Kumulanten deutlich ein. Meist sind hier nur die ersten drei Kumulanten mit annehmbarer Genauigkeit zu bestimmen.

In Abbildung 5.7 ist eine nichtlineare Messung präsentiert. Auf der linken Seite ist das aus der Zählstatistik gewonnene Bild zu sehen (blau), auf der rechten Seite zum Vergleich die gleichzeitig aufgenommene Gleichstrommessung am QPC (grün). Die x -Achse entspricht der Vorspannung V_{SD} , die y -Achse der Gatespannung V_{G2} . Für die Zählstatistik wurde an jedem Punkt der Mittelwert der Statistik ermittelt und als z -Wert aufgetragen. Die Messung entspricht damit einer Strommessung, wie sie in Abschnitt 4.2 besprochen wurde, nur dass hier der Strom mittels Zählen einzelner Tunnelereignisse ermittelt wird. Aus der Änderung der QPC Leitfähigkeit im Gleichgewichtsfall wurden die Positionen der Resonanzen gewonnen und als Hilfslinien

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

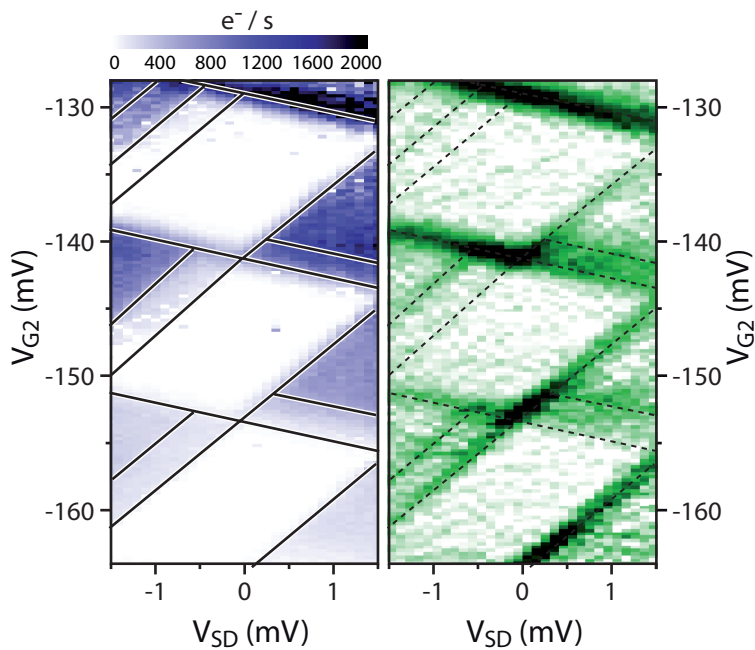


Abbildung 5.7:

Auf der linken Seite ist die Zählrate in Elektronen pro Sekunde gegenüber der Gatespannung V_{G2} und der Vorspannung V_{SD} aufgetragen. Zum Vergleich ist rechts daneben die Änderung der Leitfähigkeit des QPC für den Gleichgewichtsfall gezeigt. Beide Messungen wurden simultan aufgenommen. Die Resonanzen der Gleichgewichtsmessung sind als Hilfslinien in die gezählte Transportmessung eingezeichnet.

in die gezählte Transportmessung eingetragen.

Zunächst ist festzustellen, dass die Tunnelraten des QD innerhalb des gezeigten Bereichs stark ansteigen. Während unterhalb von -160 mV Gatespannung unter 200 Elektronen pro Sekunde den QD passieren, sind es oberhalb von -140 mV bereits deutlich mehr als 1000 Elektronen. Dieser Schritt in der Gatespannung entspricht dabei nur zwei zusätzlichen Elektronen auf dem QD. Die Gatespannung hat einen sehr starken Einfluss auf die Durchlässigkeit der Tunnelbarrieren. Der Parameterraum für die Gatespannungen ist damit auf den gezeigten Bereich begrenzt, da bei Transportraten oberhalb von 2 kHz bereits deutlich Auswirkungen der Bandbreite zu verzeichnen sind.

Vergleicht man die Zählrate mit den eingezeichneten Positionen der Resonanzen, so fällt auf, dass die Tunnelraten sehr empfindlich auf die Zahl der zum Transport beitragenden Zustände reagieren. Die Transportrate nimmt z.B. für den Bereich zwischen -150 und -140 mV Gatespannung sprunghaft zu, sobald der erste angeregte Zustand in das Transportfenster gelangt.

5.5 Bimodale Zählstatistik

Bislang gleicht die Messung der konventionellen Transportspektroskopie, nur dass sie auf sehr niedrige Ströme im Bereich von Attoampere ausgedehnt wurde. Da jedoch für jeden Messpunkt eine zeitaufgelöste Transportmessung durchgeführt wurde, kann man auch höhere Kumulanten der Stromverteilung betrachten.

In Abbildung 5.8 ist die normierte zweite Kumulante für den gleichen Parameterraum dargestellt. Links ist wiederum die Zählrate gezeigt, also der Mittelwert der Verteilung, rechts C_2/C_1 , der Fanofaktor des Systems. Der Fanofaktor liegt für die Bereiche endlicher Zählrate in den meisten Fällen nahe 0.5. Für die Grundzustandsbereiche, die eine sehr niedrige Zählrate aufweisen, nähert sich der Fanofaktor 1, was dem

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

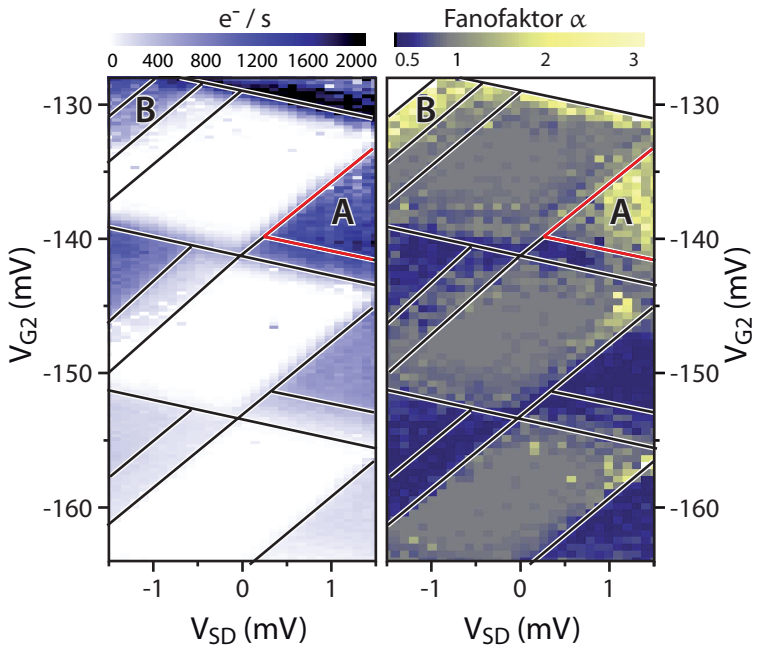


Abbildung 5.8:

Auf der linken Seite ist wiederum die Zählrate in Elektronen pro Sekunde gegenüber der Gatespannung V_{G2} und der Vorspannung V_{SD} aufgetragen. Daneben ist der aus der Zählstatistik berechnete Fanofaktor α für den gleichen Spannungsbereich gezeigt. Zwei Bereiche A und B sind markiert, in denen ein superpoissonisches Rauschen ($\alpha > 1$ gemessen wurde). Die Hilfslinien markieren die Resonanzen des QD, wie sie aus der Gleichgewichtsmessung extrahiert wurden.

Fall einer einzelnen Barriere entspräche. In den übrigen Bereichen, also auch dort, wo viele angeregte Zustände zur Verfügung stehen, wird fast durchgehend die 0.5 erreicht. Dies entspricht der Erwartung für einen weitgehend symmetrischen QD beim Transport über Einzelelektronentunneln.

Eine deutliche Ausnahme ist in den beiden rot umrandeten Bereichen zu verzeichnen. Hier ist klar erkennbar, dass der Fanofaktor Werte über 1 erreicht. In beiden Fällen handelt es sich um Bereiche in denen bereits angeregte Zustände am Transport beteiligt sind. In den jeweiligen Grundzuständen ist dagegen ein Fanofaktor kleiner 1 zu finden, wobei der Grundzustand zu Bereich B nur sehr niedrige Tunnelraten ermöglicht, so dass dort der Fanofaktor nahe 1 liegt. Ein Fanofaktor $\alpha > 1$ bedeutet, dass die Fluktuationen des Stromes hier größer sind, als es für einen Poissonprozess der Fall wäre. Deshalb wird in diesen Fällen auch von superpoissonschem Rauschen gesprochen. Im Bild der Verteilung der Tunnelereignisse bedeutet dies, dass die Verteilung breiter ausfällt als eine Poissonverteilung.

Poissonsches Rauschen erhält man beispielsweise für den vollkommen zufallsbestimmten Transport durch eine einzelne Tunnelbarriere. Für zwei Barrieren liegt die normierte zweite Kumulante unter der alleinigen Annahme der Coulombblockade zwischen 0.5 und 1. Um einen Fanofaktor zu erhalten, der größer ist, muss ein Prozess wirken, der eine zusätzliche Streuung der Ereignisse zur Folge hat. Da dieses Verhalten zudem zusammen mit dem Transport über angeregte Zustände einsetzt, liegt die Vermutung nahe, dass hier ein direkter Zusammenhang besteht. Im Mittelwert der Verteilung, also im Gleichgewichtsstrom durch das System, ist keine deutliche Auswirkung zu erkennen. Einzige Besonderheit ist hier, dass sich die Zählrate für den Bereich A nicht deutlich steigert, sobald angeregte Zustände erreichbar sind. In einer Gleichgewichtsmessung wäre also dieses Verhalten überhaupt nicht feststellbar.

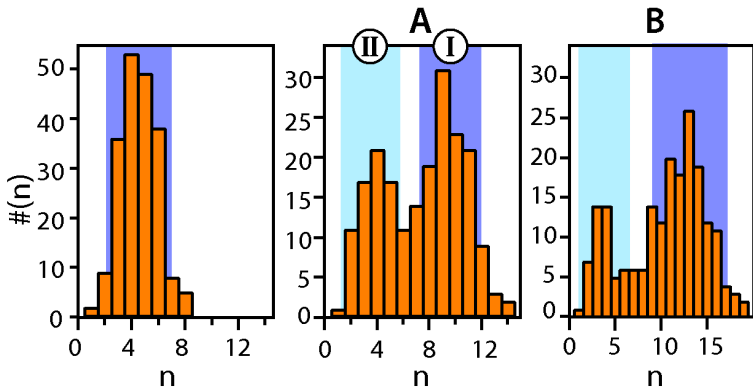


Abbildung 5.9:

Dargestellt sind Verteilungen aus drei Bereichen von Abbildung 5.8. Links ist eine Verteilung für den Grundzustand unterhalb von Bereich A gezeigt, daneben eine Verteilung aus Bereich A. Ganz rechts ist eine Verteilung aus Bereich B zu sehen. Für die Bereiche A und B ist die Verteilung bimodal, während für den Grundzustand eine unimodale Verteilung gemessen wird.

5.5.1 Bimodale Verteilungen und Umschaltverhalten

Um zu untersuchen, was genau in den Bereichen erhöhten Rauschens geschieht, ist es sinnvoll, die Verteilungen der Tunnelereignisse selbst zu betrachten. In Abbildung 5.9 sind die Verteilungen für die Bereiche A und B, sowie zum Vergleich die Verteilung für den Bereich des Grundzustandes unterhalb von Bereich A dargestellt. Auf der y-Achse sind hier absolute Ereignisse aufgetragen, um eine Einschätzung der Stichprobe zu ermöglichen. Für den Grundzustand erhält man die erwartete Glockenform, wie sie auch schon in Abbildung 5.6 zu sehen war. Anders sieht das Bild für die Verteilungen von Bereich A und B aus. Hier bildet sich statt einer Glockenform eine Doppelhöckerstruktur.

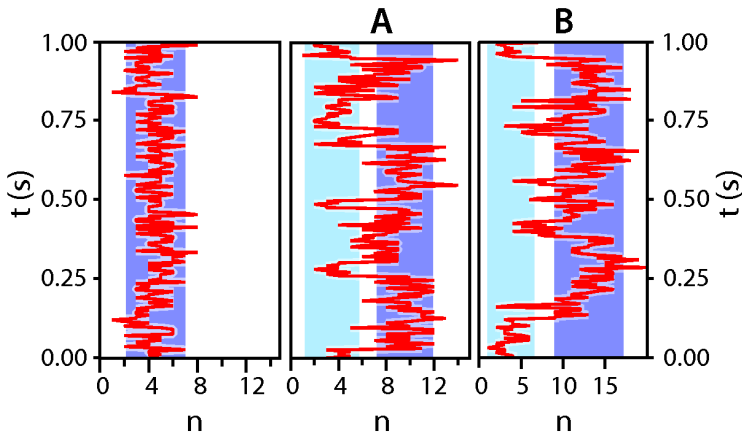


Abbildung 5.10:

Dargestellt ist die zeitliche Entwicklung der Tunnelereignisse, die zu den Verteilungen der drei Bereiche aus Abbildung 5.9 gehören. Die Zeit ist auf der y -Achse, die Zahl der detektierten Tunnelereignisse auf der x -Achse aufgetragen. Links ist wiederum die Entwicklung für den Grundzustand unterhalb von Bereich A gezeigt, die keine Bimodalität aufweist. Daneben folgt die Entwicklung für die Bereiche A und B. Für die Bereiche A und B erkennt man ein Umschaltverhalten zwischen einem schnellen und einem langsamen Kanal.

tur aus. Die Verteilungen in diesem Bereich sind bimodal. Zwischen zwei Abschnitten mit hoher Wahrscheinlichkeitsdichte ist ein Mittelbereich zu erkennen, der deutlich geringere Wahrscheinlichkeiten aufweist. Für Abschnitt A beispielsweise findet der Transport von Elektronen also bevorzugt mit 4 oder 9 Elektronen pro Zeitintervall statt, während der Transport mit 6 Elektronen pro Zeitintervall ein lokales Minimum darstellt.

Die bimodale Verteilung legt nahe, dass es sich um einen Transportprozess handelt, der über zwei Transportpfade erfolgt. Um ein besseres

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

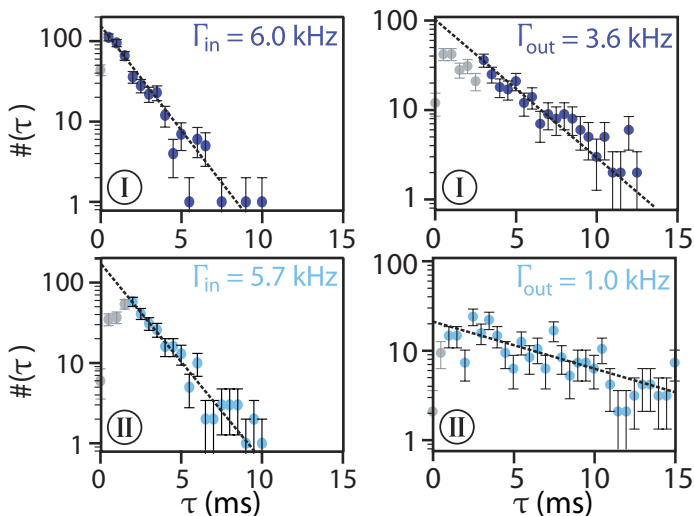


Abbildung 5.11:

Für die Transportmoden ① und ② ist jeweils die Verteilung der Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} dargestellt. Die Tunnelzeiten wurden aus dem Bereich A aus Abbildung 5.8 entnommen. Die angegebenen Tunnelraten wurden durch den Fit an den exponentiellen Abfall der Verteilung gewonnen. Für kurze Tunnelzeiten kann man deutlich den Einfluss der Bandbreite erkennen.

Verständnis für die Entstehung der Bimodalität zu erlangen, wurde die zeitliche Entwicklung der gezählten Ereignisse untersucht. Hierzu werden wie in Abbildung 5.5 die Anzahlen aller ausgezählten Zeitintervalle in zeitlicher Reihenfolge abgebildet. Dies ist für alle drei Bereiche in Abbildung 5.10 zu sehen. Auf der y-Achse ist die Zeit aufgetragen, wobei ein Zeitraum von einer Sekunde dargestellt ist. Die Werte der x-Achse markieren wie in Abbildung 5.9 die Zahl der gezählten Ereignisse. Die Entwicklung für den Grundzustand (ganz links) entspricht

einer typischen statistischen Streuung. Dies war in Anbetracht der unauffälligen Verteilung zu erwarten. Anders sieht es für die Bereiche A (Mitte) und B (rechts) aus. Für beide Bereiche erhöhten Fanofaktors sieht man deutlich ein Umschaltverhalten. Die gezählten Ereignisse liegen für einen Zeitraum von einigen Zehn bis Hundert Millisekunden innerhalb einer Bande und wechseln dann sprunghaft in die andere. Die Banden entsprechen dabei den Moden der bimodalen Verteilung. Bezeichnen wir sie mit ① und ②. Das Umschalten zwischen den beiden Transportmoden gleicht dem Umschalten des QPC im zeitaufgelösten Transportsignal. Auch hier lassen sich Zeiten τ_s identifizieren, in denen sich der QD in Transportmode ① oder ② befindet.

5.5.2 Modell zweier Transportkanäle

Zur Analyse der einzelnen Transportkanäle wurden nun die Moden separat untersucht und für jede Mode einzeln die Tunnelraten bestimmt. Dazu wurden zunächst die Tunnelzeiten nach Moden ① und ② unterschieden und dann jeweils die Verteilung der Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} erzeugt. Aus dem exponentiellen Fit an die Verteilungen können dann die Tunnelraten für die Moden bestimmt werden. In Abbildung 5.11 ist diese Analyse für den Bereich A aus Abbildung 5.8 durchgeführt. Das Verhalten in Bereich B ist vergleichbar, die Streuung der Ergebnisse jedoch zu groß für eine saubere Untersuchung des Umschaltverhaltens.

Oben sind die Verteilungen für die Transportmode ① zu sehen, darunter die für ②. Für kurze Zeiten ist ein deutlicher Einfluß der Bandbreite zu erkennen. Dieser fällt in dieser Messung deutlicher aus, als dies für die bislang präsentierten Messungen der Fall war. Die Ursache hierfür ist die Weise, auf die die Tunnelzeiten den Moden ① und ② zugeordnet wurden. Hierbei wurden nur solche Bereiche der Messung herangezogen, die sich klar einer der beiden Moden zuordnen ließen. Das hat zur Folge, dass schnelle Änderungen besonders für die

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

langsame Mode deutlich seltener ausgewählt wurden. Es handelt sich also um einen systematischen Auswertefehler, der künstlich die Bandbreite beschränkt. Für die Bestimmung der Tunnelraten ist daher der exponentielle Fit das Mittel der Wahl. Die Ergebnisse für die Transportmoden waren dabei:

$$\begin{aligned} \textcircled{\text{I}} & \begin{cases} \Gamma_{\text{in}} = 6.0 \text{ kHz} \\ \Gamma_{\text{out}} = 3.6 \text{ kHz} \end{cases} \\ \textcircled{\text{II}} & \begin{cases} \Gamma_{\text{in}} = 5.7 \text{ kHz} \\ \Gamma_{\text{out}} = 1.0 \text{ kHz} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Tunnelraten Γ_{in} sind dabei für beide Moden praktisch identisch. Für beide Transportmoden scheint sich die Ankopplung an Source nicht nennenswert zu unterscheiden. Die unterschiedliche Leitfähigkeit folgt aus einem deutlichen Einbrechen von Γ_{out} . Γ_{out} sinkt um fast 2 kHz beim Übergang von der schnellen in die langsame Transportmode. Beide Moden unterscheiden sich also deutlich in ihrer Ankopplung an Drain. Verglichen werden diese Ergebnisse mit dem Grundzustand unterhalb von Bereich A. Die Tunnelraten dort betragen $\Gamma_{\text{in}} = 2.8 \text{ kHz}$ und $\Gamma_{\text{out}} = 3.4 \text{ kHz}$. Wenn also der angeregte Zustand zum Transport beitragen kann, steigt die Tunnelrate auf den QD deutlich. Für Mode $\textcircled{\text{I}}$ ändert sich die Rate zu Drain dabei kaum. Für $\textcircled{\text{II}}$ sinkt sie dagegen verglichen mit dem Grundzustand deutlich ab.

Als Ursache der Bimodalität kann ein Modell zweier Transportkanäle entwickelt werden. Ausgehend von der FCS ist die Verteilung eines solchen Systems für n Elektronen, die den QD passieren, gegeben durch:

$$P(n) = q \int_{-\pi}^{\pi} e^{-S_1(\chi) - n\chi} \frac{d\chi}{2\pi} + (1 - q) \int_{-\pi}^{\pi} e^{-S_2(\xi) - n\xi} \frac{d\xi}{2\pi}, \quad (5.2)$$

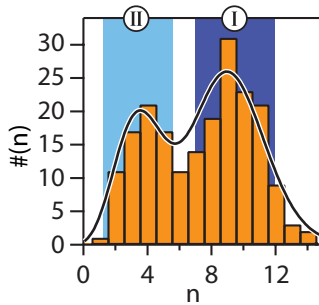


Abbildung 5.12:

Erwartete Verteilung der Tunnelereignisse nach dem Modell zweier unabhängiger Transportkanäle (schwarze Linie) im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen (Balken) für Bereich A aus Abbildung 5.8.

S_1 und S_2 sind hierbei die kumulantenerzeugenden Funktionen für die jeweilige Transportmode. Eine Wechselwirkung der Moden untereinander wird nicht berücksichtigt. Als kumulantengenerierende Funktion wird, wie in Abschnitt 2.5.5 dargelegt, (2.74) angenommen. Da die Raten beider Moden bestimmt sind, bleibt nur der Gewichtungsfaktor q als freier Parameter. Die beste Übereinstimmung zwischen Experiment und theoretischer Kurve wird für $q = 0.51$ erreicht.

In Abbildung 5.12 ist der Vergleich zwischen Modell und Experiment gezeigt. Die nach dem Modell zu erwartende Verteilung ist als schwarze Linie eingezeichnet, die experimentellen Daten aus Bereich A liegen als Balken dahinter. Man erkennt, dass eine gute qualitative und auch eine annehmbare quantitative Übereinstimmung zwischen Modell und Experiment vorliegt. Der Prozess lässt sich damit als Umschalten zweier Einzelprozesse beschreiben, die jeweils der Theorie des QD Transports über ein Transportniveau folgen. Die einzelnen Pro-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

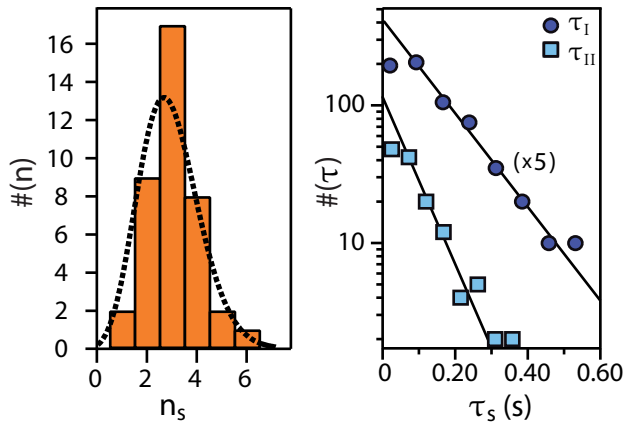


Abbildung 5.13:

Links ist die Verteilung der Umschaltvorgänge n_s dargestellt. Rechts daneben die Verteilung der Umschaltzeiten τ_s . Aus dem exponentiellen Verlauf der Verteilung von τ_s lassen sich zwei Umschaltraten bestimmen. Aus diesen lässt sich analog zum Tunnelvorgang eine theoretische Verteilung der Umschaltvorgänge berechnen. Diese ist als gestrichelte Linie auf der linken Seite eingezeichnet.

zesse führen einzeln nicht zu einem superpoissonschen Rauschen. Erst das Umschalten zwischen beiden Prozessen hebt den Fanofaktor über 1 hinaus. Damit unterscheidet sich diese Situation deutlich von Situationen mit unimodaler Verteilung und erhöhtem Rauschen [99, 100].

5.5.3 Untersuchung des Umschaltverhaltens

Um ein besseres Verständnis für den Umschaltvorgang zu gewinnen, wurde auch die Statistik der Umschaltvorgänge untersucht. Dazu wurden die Umschaltzeiten τ_s in den einzelnen Moden für eine möglichst große Zahl an Umschaltvorgängen ermittelt. Damit ist es nun mög-

lich, die Verteilung der Umschaltzeiten und die Verteilung der Umschaltvorgänge n_s zu analysieren. Dargestellt sind beide Verteilungen in Abbildung 5.13. Auf der linken Seite ist zunächst die Verteilung der Umschaltvorgänge gezeigt (Balken). Sie hat wie die Verteilung der Tunnelereignisse eine Glockenform. Dies ist nicht unerwartet, da es sich ebenfalls um einen statistischen Wechsel zwischen zwei Zuständen eines Systems handelt. Die Verteilung der Umschaltzeiten τ_s (rechte Seite) ist dementsprechend auch durch einen exponentiellen Abfall zu langen Zeiten gekennzeichnet. Die Umschaltvorgänge spielen sich allerdings bei deutlich längeren Zeiten ab. Die längsten Umschaltzeiten, die gemessen wurden, betragen über 500 ms. Aus dem Abfall der Umschaltzeiten können zwei Umschalraten ermittelt werden. Sie betragen $\Gamma_I = 7.7$ Hz und $\Gamma_{II} = 13.3$ Hz. Die mittleren Umschaltzeiten sind damit $\langle \tau_I \rangle = 130$ ms und $\langle \tau_{II} \rangle = 75$ ms.

Diese Werte kann man nun ihrerseits auf das Modell anwenden, das für die einzelnen Transportkanäle zur Anwendung kam. Das Ergebnis ist in Abbildung 5.13 als gestrichelte Kurve in der Verteilung der Umschaltvorgänge eingezeichnet. Modell und experimenteller Befund passen qualitativ gut zueinander. Hierbei ist zu bedenken, dass die Statistik der Umschaltvorgänge auf einer relativ kleinen Stichprobe basiert und damit die Umschalraten einer recht großen Unsicherheit unterworfen sind. Dennoch kann mit Sicherheit festgestellt werden, dass es sich auch beim Umschaltvorgang um einen subpoissonschen Prozess handelt. Damit steht fest, dass der Befund superpoissonschen Rauschens durch eine Kombination von subpoissonschen Transportprozessen zustandekommt, zwischen denen in einem subpoissonschen Vorgang hin und her geschaltet wird. Es war also möglich, das ungewöhnliche Transportverhalten in einzelne, behandelbare Teilprozesse zu unterteilen.

Zur Erklärung des Umschaltverhaltens kann ein Ratenmodell aufgestellt werden. Eine schematische Darstellung des Ratenmodells ist in

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

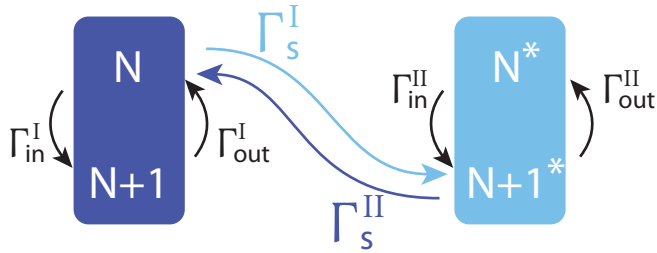


Abbildung 5.14:

Schematische Darstellung eines Ratenmodells zur Erklärung der zwei Transportmoden.

Abbildung 5.14 zeigt. Im Bereich der Bimodalität werden vier Zustände des Quantenpunkts angenommen: N , $N+1$, N^* und $N+1^*$. Der Transport für ① wird vom Übergang $N \rightleftharpoons N+1$ getragen, in Bereich ② vom Übergang $N^* \rightleftharpoons N+1^*$. Der Transport erfolgt solange über $N \rightleftharpoons N+1$, bis das System via $N \rightarrow N+1^*$ in einen angeregten Zustand übergeht. Ab diesem Moment erfolgt der Transport dann über $N^* \rightleftharpoons N+1^*$. Dort bleibt das System, bis es vom angeregten Zustand via $N+1^* \rightarrow N$ wieder in den Grundzustand übergeht.

Die Raten entsprechen direkt den gemessenen Tunnel- und Umschaltraten. Der Übergang $N \rightleftharpoons N+1$ wird durch $\Gamma_{in,out}^I$ bestimmt, der Übergang $N^* \rightleftharpoons N+1^*$ von den Raten $\Gamma_{in,out}^{II}$. Die Übergangsraten zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand $N \rightleftharpoons N+1^*$ entspricht den gemessenen Umschaltraten Γ_I und Γ_{II} .

Der Umschaltvorgang ist damit eine Folge einer Umkonfigurierung des QD. Als Ursache der beiden Konfigurationen kommen Spin und Ladung in Frage. Die Messung ergibt, dass die Bimodalität bei einer Anregungsenergie von 0.3 meV auftritt. Diese relativ hohe Energie legt eher Ladung denn Spin als Ursache nahe. Für einen Spineffekt wür-

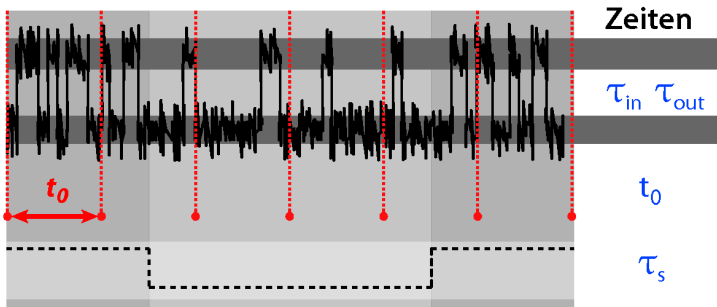


Abbildung 5.15:

Schematische Darstellung der Zeitskalen eines bimodalen Systems. Nur dann, wenn die Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} klein gegen das Messintervall t_0 sind und dieses wiederum kleiner als die Umschaltzeiten τ_s , wird eine bimodale Statistik messbar.

de man zudem eine Änderung der Tunnelrate von Source auf den QD erwarten. Diese Rate ändert sich allerdings kaum beim Wechsel der Konfiguration. Stattdessen ist eine deutliche Änderung der Kopplung an Drain festzustellen. Damit handelt es sich sehr wahrscheinlich bei den beiden Transportmoden um zwei unterschiedliche Ladungskonfigurationen auf dem QD.

5.5.4 Auflösbarkeit der Bimodalität

Im letzten Teil dieses Abschnitts soll es um die systemeigenen und experimentellen Voraussetzungen der Detektion von Bimodalität gehen. Prinzipiell wird der Themenkomplex von drei Zeitskalen dominiert. Da sind zum einen die Tunnelzeiten τ_{in} und τ_{out} des QD. Diese bewegen sich üblicherweise im Bereich von einigen Zehn bis einigen Hundert Mikrosekunden. Zudem gibt es die Übergangzeiten τ_s zwischen zwei Konfigurationen des QD. Die letzte wichtige Zeit ist die Länge eines

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Zeitintervalls t_0 der Analyse der Messdaten.

In Abbildung 5.15 sind die Zeitskalen in einer Schemazeichnung veranschaulicht. Grundvoraussetzung zur Messung einer sinnvollen Transportstatistik ist zunächst $\tau_{in,out} \ll t_0$. Damit sich nun ein Umschalten als Bimodalität in der Statistik niederschlägt, müssen die Umschaltzeiten ihrerseits signifikant länger sein als das Messintervall t_0 . Schaltet nämlich innerhalb eines t_0 mehrfach die Konfiguration um, so hat dies zwar eine Verbreiterung der Verteilung zur Folge, nicht aber eine Bimodalität. Nur dann, wenn es mehrere t_0 innerhalb einer Konfiguration gibt, trennen sich die beiden Transportmoden in der Verteilungsfunktion. Dies ist sehr wahrscheinlich einer der Gründe, warum dies experimentell zuvor nicht realisiert werden konnte. Erst eine hohe Bandbreite (zur Auflösung schneller Tunnelereignisse) und ein langsamer Umschaltmechanismus ermöglichen die Wahl eines geeigneten Zeitintervalls.

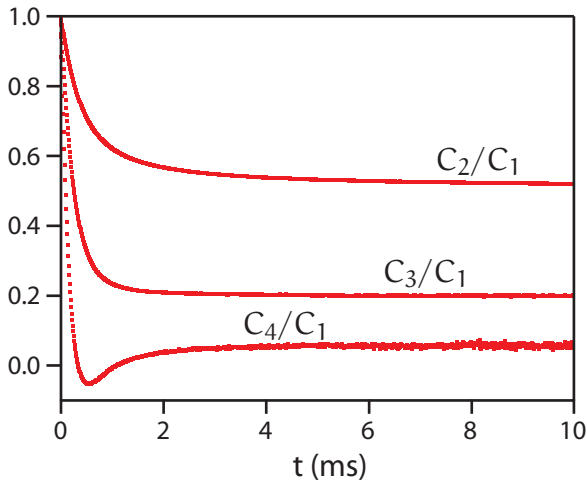


Abbildung 5.16:
Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_2 , C_3 und C_4 .

5.6 Oszillationen hoher Kumulanten

In Abhängigkeit von verschiedenen Parametern, wie etwa Zeit oder Symmetrie, zeigen die höheren Kumulanten von Zählstatistiken ein oszillierendes Verhalten. Dieses Verhalten soll in diesem Abschnitt anhand experimenteller Ergebnisse untersucht und mit theoretischen Modellen verglichen werden.

5.6.1 Zeitabhängigkeit hoher Kumulanten

Bislang wurden Kumulanten stets für ein festes Zeitintervall t_0 betrachtet, wobei t_0 stets so gewählt wurde, dass eine hinreichende Zahl von Tunnelereignissen innerhalb dieser Zeit beobachtet werden konnten. Der Wert einer Kumulante hängt jedoch direkt von t_0 ab. Geht

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

man zum Beispiel zu einem sehr kurzen Zeitintervall, in dem nur noch ab und an einmal ein Tunnelereignis gemessen wird, so wird sich die Statistik immer mehr einer Poissonverteilung annähern. Die Folge ist, dass im Übergang $t_0 \rightarrow 0$ alle Kumulanten den Wert von C_1 annehmen. Die normierten Kumulanten beginnen damit für $t_0 = 0$ allesamt mit einem Wert von 1. Auf der anderen Seite nähert sich die Poissonverteilung für extrem große Zeitabschnitte einer Gaussverteilung an. Im Limes langer Zeiten sollten dabei alle Kumulanten einen Wert von Null erreichen, sofern keine Abweichungen vom Poissonschen Verhalten auftreten.¹ Die Möglichkeiten der FCS erstrecken sich zwischen diesen beiden Extremen. Üblicherweise wird in theoretischen Betrachtungen das Langzeitverhalten, das sogenannte *zero-frequency-limit*, betrachtet, welches das Startverhalten zu kurzen Zeiten vernachlässigt. Physikalisch entspricht dies z.B. für die zweite Kumulante dem *zero-frequency-noise*. Durch die Verfügbarkeit von höheren Kumulanten besteht die Möglichkeit, auch Effekte zu betrachten, die sich in der zweiten Kumulante noch nicht niederschlagen. Das Rauschen für endliche Frequenzen ist dagegen im Bereich mittlerer Zeitintervalle zu suchen. Über das Verhalten höherer Kumulanten der Verteilung in diesem Zeitfenster, das dank zeitaufgelöster Messungen zugänglich ist, wurden bislang kaum experimentelle Erkenntnisse veröffentlicht [96]. Gerade für diesen Bereich mittlerer Zeiten ist allerdings ein interessantes Verhalten zu erwarten. Flindt *et al.* entwickelten einen theoretischen Formalismus [101], der in Abhängigkeit von verschiedensten Systemparametern, wie etwa der Symmetrie der Tunnelraten, Oszillationen in den hohen Kumulanten beschreibt. Hierzu wurde die Behandlung der FCS im Rahmen einer generalisierten Master Equation Formulierung erwei-

¹Eine Abweichung kann technische Gründe haben, z.B. die Bandbreite des Detektors, aber auch, was natürlich weit interessanter ist, durch physikalische Prozesse innerhalb des Quantenpunkts verursacht werden, die über das Einzelteilchenbild hinausgehen.

tert [78, 102, 103]. Prinzipiell sollten derartige Oszillationen auch in der Zeitabhängigkeit sichtbar werden.

In Abbildung 5.16 sind die normierten Kumulanten bis C_4 in ihrer Zeitabhängigkeit dargestellt. Grundlage ist eine Messung mit ca. 670000 Tunnelereignissen, die in einer Zeitspanne von 770 Sekunden detektiert wurden. Dazu wurde eine Vorspannung von $330 \mu\text{V}$ am Quantenpunkt angelegt. Die Tunnelraten des Systems entsprechen denen, der in Abschnitt 5.2 gezeigten Messung. In der Auswertung wurde kontinuierlich das Zeitintervall t_0 erhöht. Zu sehen ist die Entwicklung bis 10 ms. Für sehr kurze Zeiten erkennt man gut den Übergang zur Poissonverteilung, alle Kumulanten nähern sich für $t = 0$ der 1 an. Für die zweite und die dritte Kumulante sieht man zudem, wie diese monoton abfallen, um dann auf einem Wert zu sättigen. Ab etwa 4 ms haben beide Kumulanten weitestgehend ihren Langzeitwert erreicht, wobei die Annäherung bei C_2 etwas langsamer vonstatten geht. Oszillationen sind für diese Kumulanten nicht zu beobachten. Anders sieht das Ergebnis für C_4 aus. Hier fällt die Kumulante zunächst steil ab, um dann ein Minimum zu durchlaufen und sich aus negativer Richtung an das Langzeitlimit anzuschmiegen.

Dieses oszillierende Verhalten verstärkt sich für höhere Kumulanten. In den Abbildungen 5.17 und 5.18 sind die Kumulanten bis C_{15} gezeigt. Dargestellt sind sie im Vergleich mit einer von C. Flindt berechneten theoretischen Kurve, die die Bandbreite des Messsystems berücksichtigt. In Abbildung 5.17 sind die Kumulanten von C_4 bis C_7 zu sehen. Während für die vierte Kumulante nur ein Minimum auftritt, entwickelt C_5 bereits ein Minimum, das bereits zu kürzeren Zeiten auftritt, und ein darauf folgendes Maximum. Für die sechste Kumulante ist das Maximum ausgeprägter, für die siebte erscheint ein zweites Minimum. Die Minima und Maxima der Kurven verschoben generell mit steigender Ordnung der Kumulante zu kürzeren Zeiten. Zudem erscheinen immer neue Oszillationen und die Amplitude der Oszillatio-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

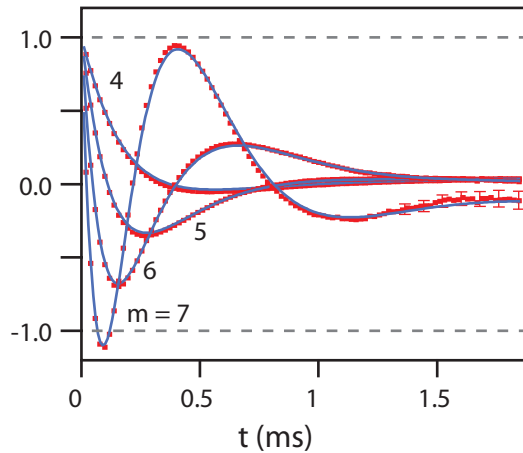


Abbildung 5.17:

Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_4 bis C_7 . Die Punkte stellen die experimentellen Ergebnisse dar, die Linien entsprechen der theoretischen Berechnung.

nen nimmt rasch zu. Zum Vergleich mit den höheren Kumulanten sind zwei graue Linien in den Graphen eingezeichnet. Im oberen Graphen von Abbildung 5.18 sind diese Grenzen als grauer Kasten hinterlegt. Man erkennt deutlich, wie stark die Amplitude zunimmt. Während die Skala von Abbildung 5.17 sich noch von -1 bis 1 erstreckte, erreichen für die elfte Kumulante Minima und Maxima bereits Werte von ± 40 . Das erste Minimum der Kumulanten schiebt sich zudem bereits in den experimentell nicht mehr zugänglichen Bereich von $t_0 < 10 \mu\text{s}$, während immer neue Oszillationsperioden auftreten. Für die höchste dargestellte Kumulante C_{15} erreichen die Extrema der Oszillation eine Amplitude von etwa 10000.

5.6 Oszillationen hoher Kumulanten

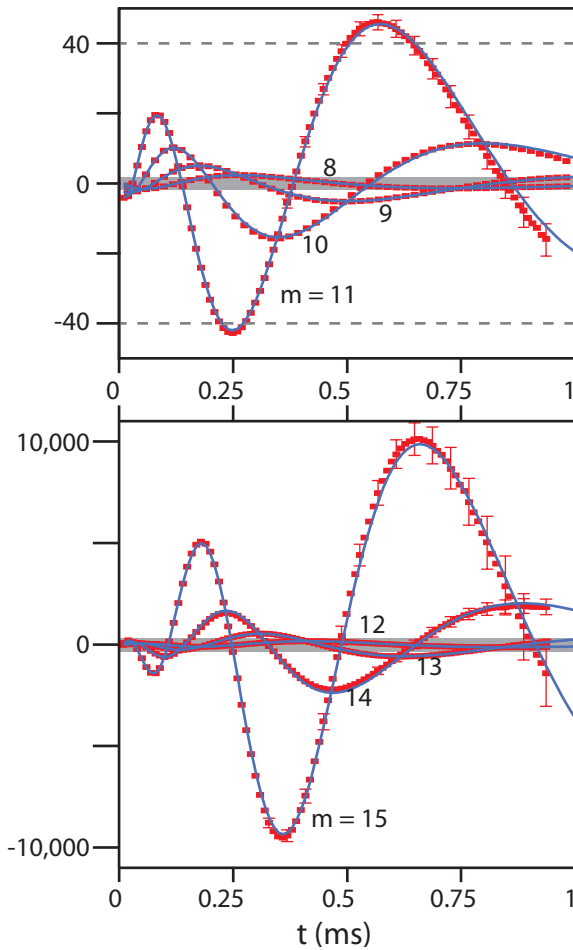


Abbildung 5.18:

Zeitabhängigkeit der Kumulanten C_8 bis C_{15} . Die Punkte stellen die experimentellen Ergebnisse dar, die Linien entsprechen der theoretischen Berechnung. Die grauen Bereiche entsprechen der y -Skala des jeweils vorangegangenen Graphen.

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

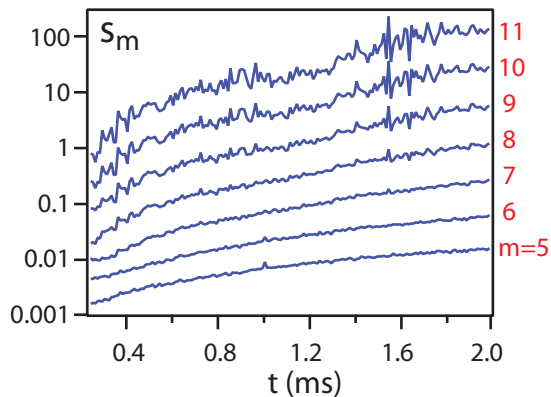


Abbildung 5.19:

Darstellung des zeitabhängigen Messfehlers s_m der Kumulanten C_5 bis C_{11} . Ermittelt wurde der Fehler aus einem numerischen Experiment.

Für die Kumulanten oberhalb von C_8 sind die Daten nur mehr bis zu einem t_0 von 1 ms dargestellt, da der Fehler zu längeren Zeiten aufgrund der begrenzten Stichprobe deutlich zunimmt. Der rein auf der Stichprobengröße und der Bandbreite basierende statistische Fehler ist jeweils als Fehlerbalken gezeigt. Der Fehler wurde aus einem numerischen Experiment errechnet. Dazu wurden 100 simulierte Datensätze mit exakt gleicher Zahl von Tunnelereignissen erzeugt, zu denen jeweils mit der gleichen Auswertetechnik ein Satz zeitabhängiger Kumulanten berechnet wurde. Aus den 100 verschiedenen simulierten Kumulanten wurde dann die Standardabweichung bestimmt. Diese Streuung berücksichtigt damit die begrenzte Zahl der Tunnelereignisse und eventuelle Artefakte, die aus der diskreten Zeitskala der Auswertung entstehen könnten. Die ermittelten Werte für den Messfehler s_m sind in Abbildung 5.19 für C_5 bis C_{11} zur Veranschaulichung dargestellt. Der Index m markiert die Ordnung der Kumulante. Man erkennt dass der

Fehler stark mit der Länge des Zeitintervalls t_0 steigt. Der Verlauf des Fehlers lässt sich in etwa beschreiben als

$$s_m \sim e^{\alpha_m \cdot \sqrt{t_0}},$$

wobei α_m mit der Ordnung der Kumulante ansteigt. Für steigende Ordnung ist also eine immer längere Messzeit erforderlich, um das Verhalten zu langen Zeiten zu ermitteln. Eine weitere Fehlerquelle, die Bandbreite des Systems, wurde in der Theorie bereits berücksichtigt. Sie wurde für die theoretische Berechnung als ca. 40 kHz angenommen (siehe Abschnitt 5.2). Die theoretischen Kurven passen im Rahmen der Messgenauigkeit für alle Kumulanten hervorragend zu den Messdaten.

Die beobachteten Oszillationen sind aus mehreren Gründen interessant. Zum einen zeigen die Ergebnisse von Messung und Theorie sehr deutlich, dass für höhere Kumulanten das oszillierende Verhalten sehr ausgeprägte Folgen für den Wert einer Kumulante hat. Daher ist es zwingend erforderlich, bei theoretischen Berechnungen im Rahmen der FCS die Zeitabhängigkeit der Kumulanten zu berücksichtigen, was bedeutet, dass nicht allein der *zero-frequency* Fall betrachtet werden kann. Andererseits ist zum Vergleich experimenteller Zählstatistiken mit theoretischen Analysen des *zero-frequency* Falles stets zu bedenken, dass der Bereich der Oszillationen existiert. Dieser muss in Richtung langer Zeitintervalle t_0 hinter sich gebracht werden, um das Langzeitlimit abschätzen zu können. Die Stichprobe, die dafür nötig ist, nimmt zu hohen Kumulanten dramatisch zu. Die bereits sehr umfangreiche Stichprobe der präsentierten Messung ließe etwa nur bis zur fünften Kumulante eine Abschätzung des Langzeitlimits zu. Andererseits ist gerade für sehr seltene Abweichungen in einem statistischen Prozess durchaus eine Untersuchung höherer Kumulanten notwendig. Dies führt auf eine weitere interessante Schlussfolgerung dieser Ergebnisse. Die gefundenen Limitierungen der Zählstatistik sind genereller Natur und nicht allein auf Transportmessungen beschränkt. Sie gelten

für jede Art von Zählmessung, etwa im Bereich der Quantenoptik, der Teilchenphysik, aber auch für Statistiken der Medizin oder Biologie. Das zugrundeliegende mathematische Prinzip [104, 105] ist von absolut genereller Natur.

5.6.2 Symmetrieabhängigkeit hoher Kumulanten

Neben der Zeitabhängigkeit wurde auch die Abhängigkeit der Kumulanten von der Symmetrie der Tunnelbarrieren betrachtet. Experimentell wurde dies realisiert, indem ein einzelner Coulombpeak in sehr kleinen Schritten von einem Blockadebereich zum anderen abgerastert wurde und zu jedem Punkt ein Zählsignal aufgenommen wurde. Für jeden Punkt wurde dann nicht nur ein Satz Kumulanten berechnet, sondern auch der Asymmetriefaktor a bestimmt. Der Zusammenhang von a und den Tunnelraten ist gegeben durch:

$$\Gamma_{\text{in}} = \Gamma_{\text{out}} \cdot \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Eine Messung der Symmetrieabhängigkeit ist in Abbildung 5.20(a) dargestellt. Der Verlauf der Tunnelraten und des Asymmetriefaktors entlang des Coulombpeaks ist zum Vergleich in Abbildung 5.20(b) gezeigt. Die Gesamtzeit an jedem einzelnen Messpunkt beträgt nur wenige Sekunden. Durch die geringe Stichprobe streuen die Werte der Kumulanten relativ stark. Auch musste t_0 relativ kurz gewählt werden, was bedeutet, dass sich höhere Kumulanten im Bereich starker Oszillationen befinden, was die Streuung weiter verstärkt. Es steht jedoch eine große Anzahl von Punkten auf der Asymmetrieachse zur Verfügung. Zur Analyse wurde daher ein Savitzky-Golay-Filter [106] zur Glättung der Daten verwendet. In Abbildung 5.20(a) ist der Vergleich der experimentellen Daten mit dem geglätteten Signal gezeigt. Die direkten Messdaten sind als Punkte, die Glättung als Linie über der Asymmetrie a aufgetragen. Die Glättung erfolgte mit einem Polynom zweiter

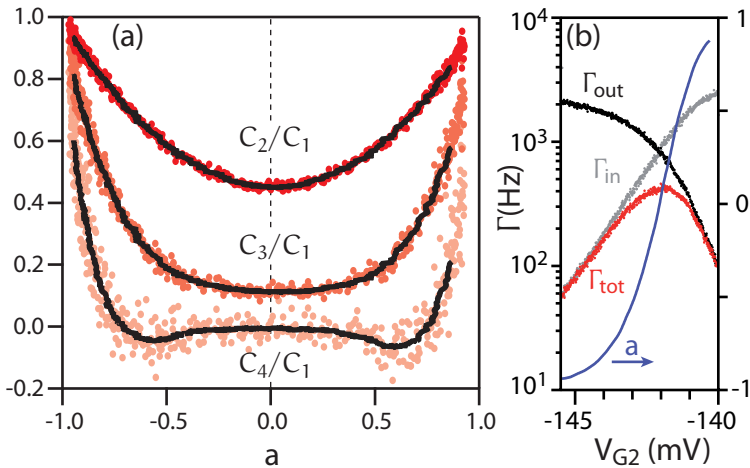


Abbildung 5.20:

(a) Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten C_2 bis C_4 . Die Punkte stellen die experimentellen Ergebnisse dar, die Linien entsprechen einer Glättung mittels Savitzky-Golay-Filter. Daneben (b) ist die zugrunde liegende Messung eines Coulombblockadepeaks gezeigt. Dargestellt sind die gemessenen Tunnelraten Γ_{in} , Γ_{out} , die Gesamttunnelrate Γ_{tot} , sowie der Verlauf des Asymmetriefaktors a . Das Zeitintervall $t_0 = 2.5$ ms wurde für die Messung konstant gehalten, wodurch $\langle n \rangle \sim \Gamma_{tot}$ im Verlauf der Messung variiert.

Ordnung auf einem Intervall von 91 Punkten. Man sieht gut, dass die Glättung den Verlauf der Messpunkte sehr gut darstellt. Bei Aussagen über die Absolutwerte der Kumulanten muss die Streuung berücksichtigt werden, der qualitative Verlauf wird durch die geglättete Kurve aber sehr gut wiedergegeben.

Mit dieser Methode der Datenauswertung wurden nun auch höhere Kumulanten bestimmt. Die Kumulanten bis C_{10}/C_1 sind in Abbildung 5.21 dargestellt. Wie bereits in Abbildung 5.20 sichtbar wur-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

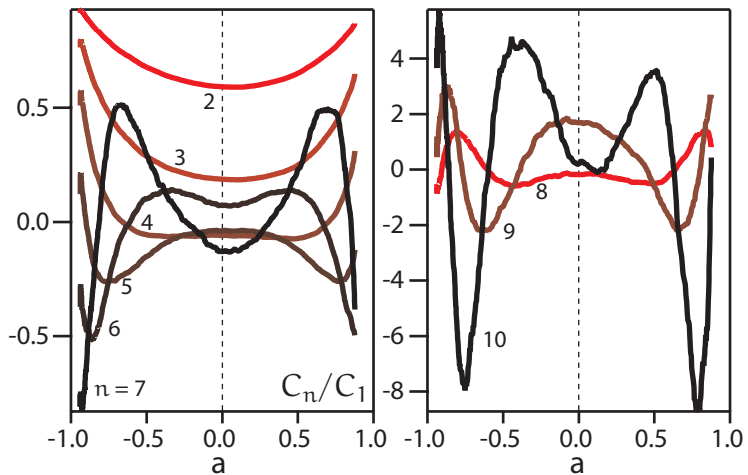


Abbildung 5.21:

Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten C_2 bis C_{10} . Dargestellt ist die geglättete Kurve nach Anwendung eines Savitzky-Golay-Filters.

de, treten auch in Abhängigkeit vom Asymmetriefaktor a mit steigender Ordnung der Kumulanten zunehmend Oszillationen auf. C_2 und C_3 verlaufen noch ohne Maxima, wobei der Parabelverlauf den C_2 beschreibt, schon für C_3 deutlich deformiert wird. Die Flanken zu hohen Absolutwerten von a ($a \cong \pm 1$) werden steiler und es bildet sich ein Plateubereich um $a = 0$ aus. Dieses Verhalten verstärkt sich für C_4 und C_5 . Zusätzlich bilden sich am Rand des Plateubereichs Minima aus. Dieses Verhalten entspricht den Ergebnissen von Gustavsson et al., die das Verhalten bis C_5 untersuchten [96]. Die auftretenden Oszillationen sind prinzipiell von der gleichen Natur wie das in der Zeitabhängigkeit beobachtete Verhalten. Für den *zero-frequency*-Fall, also wenn das oszillierende Verhalten in Zeitrichtung abgeklungen ist, erwartet die Theorie Oszillationen nahe $a = \pm 1$, die mit zunehmender Ordnung der

Kumulanten in der Amplitude und Frequenz zunehmen. In der Messung beobachtet man jedoch, dass auch im Bereich $a \simeq 0$ das Plateau aufgelöst wird und die Oszillationen hier nur ein Minimum ausprägen. Dieses Verhalten setzt bereits für C_6 ein, ab C_7 ändert sich dabei der Wert für $a=0$. Frequenz und Amplitude der Oszillationen nehmen dabei wie von Seiten der Theorie erwartet deutlich zu. So erreicht C_{10} bereits Werte unterhalb von -8 und entwickelt auf beiden Hälften der Kurve zwei Minima und zwei Maxima (von denen das erste Minimum nahe $a = \pm 1$ im Rahmen der Messgenauigkeit nicht aufgelöst werden konnte).

Das Verhalten der höheren Kumulanten bis C_{10} ist in direktem Zusammenhang mit den Ergebnissen für die Zeitabhängigkeit zu betrachten. Während die Theorie die Oszillationen in Abhängigkeit von t_0 üblicherweise nicht berücksichtigt, wirken sie sich deutlich auf die Messung der Kumulanten aus. Die Folge ist, dass der Bereich nahe der Symmetrielinie $a=0$ kein Plateau ausbildet und je nach Kumulante unterschiedliche Werte annimmt. Einen Einfluss auf diesen Bereich hat auch der unterschiedliche Wert für $\langle n \rangle \sim \Gamma_{\text{tot}}$ bei verschiedenen Asymmetriewerten a (siehe Abb. 5.20(b)). Die Rate Γ_{tot} ändert sich während die Gatespannung verändert wird, um den Coulombpeak abzutasten. Da $\langle n \rangle$ in der Messung von a abhängt, verformt der glockenförmige Verlauf von $\langle n \rangle$ den Plateaubereich der höheren Kumulanten. Die Zeitabhängigkeit der Kumulanten ist abhängig von $t_0 \Gamma_{\text{tot}}$, womit die Periode der Oszillationen zu verschiedenen Werten von a unterschiedlich ist.

Die Abhängigkeit des Mittelwerts von a zeigt sich noch an anderer Stelle: Für negative Werte von a liegen die Werte etwas höher als auf der positiven Seite. Dieser Unterschied tritt auf, weil die ansteigende und die abfallende Flanke des Peaks nicht völlig symmetrisch sind. Das führt dazu, dass Γ_{tot} für negative und positive a einen unterschiedlichen Verlauf nimmt, da die negativen Werte auf der aufsteigenden, die posi-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

tiven Werte aber auf der abfallenden Flanke auftreten. Dies schlägt sich im Wert der Kumulanten nieder und führt zu einer Asymmetrie um $a=0$. Außerdem verschiebt diese Asymmetrie das zentrale Minimum von $a=0$ zu positiven Werten von a , was sich ebenfalls in Abbildung 5.21 nachvollziehen lässt.

5.7 Zeitaufgelöste Messungen an einem Dreifachquantenpunkt

Neben den Messungen am Einzelquantenpunkt, wurden auch zeitaufgelöste Untersuchungen an einem Dreifachquantenpunkt (triple quantum dot, TQD) durchgeführt. Der Dreifachquantenpunkt wurde von M.C. Rogge hergestellt und charakterisiert [26, 27]. In Abbildung 5.22 ist ein Bild der Struktur zu sehen, das mittels Rasterkraftmikroskop (atomic force microscope, AFM) aufgenommen wurde. Die Struktur wurde wie die bisher besprochenen Proben mittels der LAO mit dem AFM hergestellt.

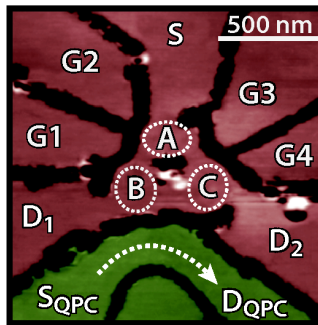


Abbildung 5.22:

AFM Bild des Dreifachquantenpunkts. Der TQD (oben, roter Bereich) wird über vier Seitengates kontrolliert und verfügt über eine Source- und zwei Drain-Zuleitungen. Daneben (unten, grüner Bereich) ist ein QPC platziert, mit dem die Ladungsänderungen auf den drei Quantenpunkten A, B und C detektiert werden.

Der Dreifachquantenpunkt (roter Bereich) verfügt über vier Seitengates, mit deren Hilfe die drei einzelnen Quantenpunkte A, B und C kontrolliert werden. Außerdem bestimmen die Gates die Ankopplung

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

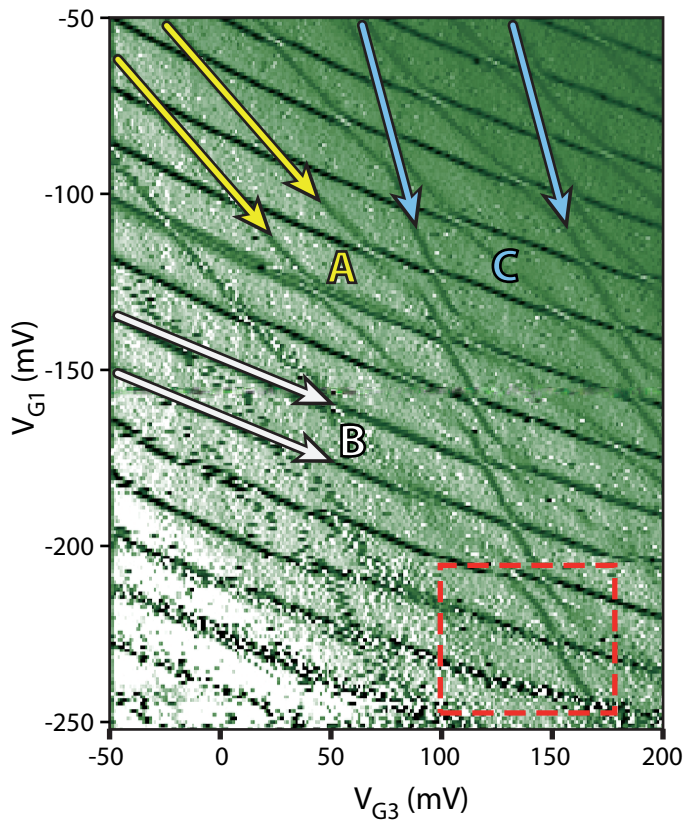


Abbildung 5.23:

Ladungsdiagramm des Dreifachquantenpunkts. Dargestellt ist die Leitfähigkeitsänderung des QPC. Die x-Achse markiert die Spannung an G_3 , die y-Achse entsprechend die an G_1 anliegende Spannung. Es sind Resonanzen aller drei QDs zu erkennen. Der rot markierte Bereich entspricht den Grenzen von Abbildung 5.25.

lung an die drei Zuleitungen des TQD. Ein QPC liegt direkt neben dem TQD, um als Detektor Ladungsänderungen der einzelnen QDs zu messen.

Der TQD ist durch die Vielzahl der Gates ein sehr komplexes System. In diesem Abschnitt werden jedoch nur die Gates G_1 und G_3 variiert. Die anderen Gatespannungen bleiben konstant. Ein Ladungsdiagramm des TQD ist in Abbildung 5.23 gezeigt. Dargestellt ist eine Gleichgewichtsmessung der Ladungsänderung des QPCs unter Änderung der Spannung an G_1 und G_3 .

Es lassen sich deutlich die Resonanzen aller drei QDs ausmachen. Die Steigung der Linien ermöglicht es, im Vergleich mit der Geometrie der Struktur die QDs den jeweiligen Linienscharen zuzuordnen. So koppelt B deutlich stärker an G_1 als an G_3 , A etwa symmetrisch und C stärker an G_3 als an G_1 . An den Kreuzungspunkten der Resonanzen ist ein deutliches Anticrossing der Niveaus zu erkennen. Dies ist die Folge von molekülartigen Bindungen der QDs untereinander.

Eine Besonderheit der Messung offenbart sich, wenn man die zu C gehörigen Resonanzen verfolgt. Nach der linken der beiden durch blaue Pfeile markierten Coulomblinien taucht keine weitere Linie mehr auf. Da der QPC die Coulomblinien unabhängig von der Leitfähigkeit des jeweiligen QDs detektiert und die Tunnelkopplung der QDs untereinander und zu den Zuleitungen noch ausreichend hoch ist, um Elektronentunneln zuzulassen, ist dies ein klares Zeichen dafür, dass mit der linken Linie wirklich das letzte Elektron C verlassen hat und der QD vollkommen entleert wurde.

5.7.1 Detektion einzelner Tunnelereignisse am Dreifachquantenpunkt

Für eine zeitaufgelöste Messung wurde ein Bereich niedriger Tunnelraten ausgewählt. Er ist mit einem roten Kasten in der Abbildung mar-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

kiert. Im markierten Bereich sind Resonanzen für alle drei Quantenpunkte zu sehen und zudem Resonanzen der QDs miteinander, bei denen ein Transport durch die Struktur Elektron für Elektron messbar sein sollte. Für eine Transportmessung mit endlicher Vorspannung würde man nur dann Leitfähigkeit erwarten, wenn die in Reihe geschalteten QDs in Resonanz sind, also für die sogenannten Tripelpunkte, an denen sich Molekülbindungen ausbilden. Für die zeitaufgelöste Messung wurde jedoch keine Spannung zwischen Source- und Drain-Kontakten angelegt. Dadurch sollten für jede Resonanz eines QD mit der jeweiligen Zuleitung Ladungsänderungen messbar sein.

In Abbildung 5.24 sind zeitaufgelöste Ladungsänderungen für alle drei Quantenpunkte gezeigt. Die Messungen wurden jeweils auf den Resonanzen der Quantenpunkte mit der benachbarten Zuleitung durchgeführt. Für alle drei lassen sich Ladungsänderungen detektieren, allerdings ist die damit verbundene Änderung des QPC-Stromes deutlich unterschiedlich. Dies spiegelt die unterschiedlich starke Ankopplung des QPC an die Quantenpunkte wieder. Für jede Ladungsänderung auf A ist ein Sprung um ca. 4 nA im Strom des QPC zu verzeichnen. Die angelegte Vorspannung am Detektor beträgt dabei 5 mV. Quantenpunkt B koppelt deutlich stärker an den Detektor. Hier bedeutet eine Änderung der Ladung um ein Elektron eine Änderung von etwa 14 nA bei gleicher Vorspannung. Am schwächsten koppelt Quantenpunkt C an den QPC. Hier ist nur eine Änderung von etwas mehr als 1 nA zu beobachten.

Vergleicht man diese Wert mit der Geometrie der Struktur (siehe Abb. 5.22), so wird klar, dass der QPC sich deutlich weiter links ausbilden muss, als es auf den ersten Blick den Anschein hat. Nahe der Stelle, wo in der Abbildung der Schaft des Pfeils beginnt, sind einige Ausbuchtungen in den Oxidlinien auszumachen. Es ist wahrscheinlich, dass sich an dieser Stelle der eigentliche Quantenpunktkontakt ausprägt. Da C noch geringeren Einfluss auf das QPC-Potential hat als

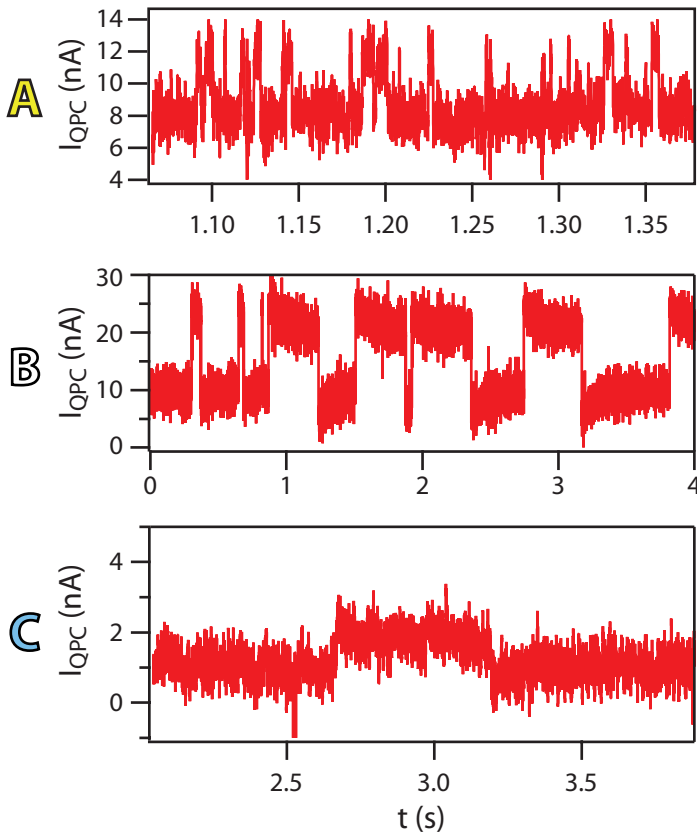


Abbildung 5.24:

Zeitaufgelöste Messung an den drei Quantenpunkten: Für Resonanzen der drei Quantenpunkte A, B und C mit der jeweiligen Zuleitung sind zeitaufgelöste Messungen des QPC Stromes gezeigt. Die Messungen wurden bei einer Source-Drain-Spannung von 5 mV am QPC durchgeführt. Der Strom durch den QPC ist mit einem Offset behaftet und daher nur relativ zu betrachten. Für A und C wurde eine stärkere Filterung angewandt, um die Tunnelereignisse sichtbar zu machen.

A, liegt der rechte Quantenpunkt sehr wahrscheinlich weiter entfernt. Vermutlich ist C nahe an G4 lokalisiert, auf halber Strecke zwischen A und D₂. Dies könnte auch eine Erklärung dafür sein, warum in Spektroskopieuntersuchungen [26, 26] keine Tunnelkopplung zwischen B und C festgestellt werden konnte.

Insgesamt ist die Empfindlichkeit des Detektors damit deutlich schwächer, als dies beim Einzelquantenpunkt der Fall war. Dadurch wurde eine starke Filterung des Signals notwendig. Effektiv sind die messbaren Tunnelraten dadurch auf einige 100 Hz begrenzt.

5.7.2 Messung der Zählstatistik und die Charakterisierung der Tunnelbarrieren

In Abbildung 5.25 ist die ausgezählte Messung und die Gleichgewichtsmessung im direkten Vergleich dargestellt. Auf der linken Seite ist das Zählsignal aus der zeitaufgelösten Messung gezeigt, auf der rechten der vergrößerte Bereich aus Abbildung 5.23. Man erkennt im Zählsignal und Gleichgewichtsmessung deutlich die flachen Resonanzen von B, wobei die unterste Coulomblinie in der Tunnelrate derart niedrig liegt, dass sie nicht im Zählsignal sichtbar ist. Von A ist eine Coulomblinie sichtbar, die schräg durch den unteren linken Bereich verläuft. Sie ist allerdings in der Gleichgewichtsmessung ausgesprochen schwach und praktisch nicht sichtbar. Die darauf folgende Resonanz mit C ist im Zählsignal nicht zu erkennen. Dies liegt daran, dass die Tunnelraten von C dort bereits äußerst niedrig sind. Sie liegen in der Größenordnung von wenigen Tunnelereignissen pro Sekunde, was innerhalb der Messzeit nicht mehr auflösbar ist. Man erkennt die Resonanz mit C aber indirekt an den Anticrossings der Resonanzen von B. In der Gleichgewichtsmessung ist die Resonanzlinie von C sichtbar. Die nächste Coulomblinie gehört wieder zu A. Sie ist in der Gleichgewichtsmessung sichtbar, nicht aber in der zeitaufgelösten Messung. Der Grund ist da-

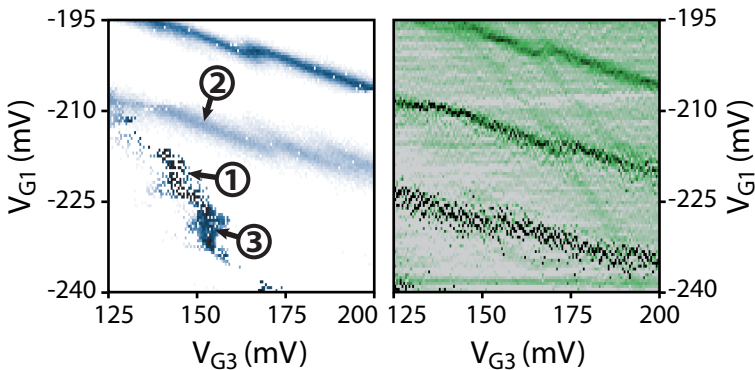


Abbildung 5.25:

Detailbereich aus Abbildung 5.23. Auf der rechten Seite ist die Änderung der QPC-Leitfähigkeit gezeigt. Auf der linken Seite die Ergebnisse der zeitlich aufgelösten Messung bei $V_{SD}=0$. Gezählt wurden alle registrierten Tunnelereignisse unabhängig vom QD.

bei genau konträr zur Situation für C. Für die zweite Coulomblinie von A liegen die Tunnelraten bereits oberhalb der Bandbreite des Detektors. Dadurch lässt sich keine Zählrate bestimmen.

Drei interessante Bereiche der Messung sind markiert. An den mit ① und ② bezeichneten Positionen lässt sich für die Quantenpunkte A und B einzeln die Tunnelrate bestimmen. An Position ③ sind A und B in Resonanz, so dass ein Transport Elektron für Elektron durch zwei in Reihe geschaltete Quantenpunkte messbar ist.

In Abbildung 5.26 ist die Bestimmung der Tunnelraten für die Quantenpunkte A und B präsentiert. In Situation ① ist A in Resonanz mit Source des TQD. B und C sind jedoch durch die Coulombblockade gesperrt. Die Tunnelereignisse finden also nur in Richtung Source statt. Dies ermöglicht es, die Ankopplung an Source genau zu charakterisieren. Dazu wird eine Verteilung der Tunnelzeiten gebildet. Aus

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

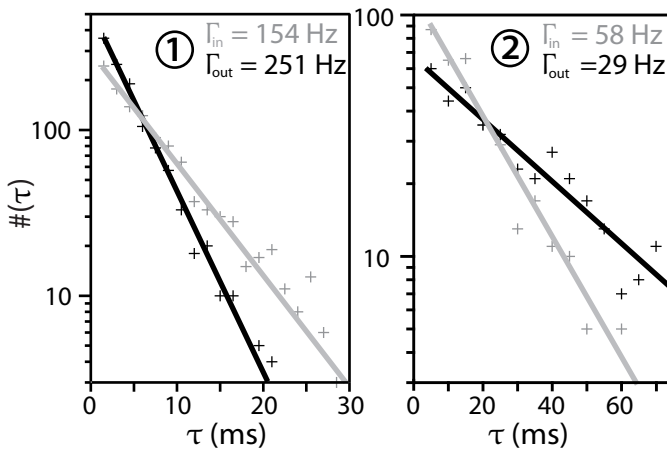


Abbildung 5.26:

Bestimmung der Tunnelraten für die Quantenpunkte A und B. Für die Situationen ① und ② wurden die Tunnelzeiten bestimmt. Aus dem Fit an den exponentiellen Abfall der Verteilung lassen sich die Tunnelraten der QD zu ihren Zuleitungen bestimmen.

derem exponentiellen Abfall zu langen Zeiten kann dann die Tunnelrate Γ_{in} von A zu Source und Γ_{out} von Source zu A bestimmt werden (siehe Abschnitt 2.5.5). Der exponentielle Fit ergibt:

$$\textcircled{1} \begin{cases} \Gamma_{in} = 154 \text{ Hz} \\ \Gamma_{out} = 251 \text{ Hz.} \end{cases}$$

Es fällt auf, dass beide Raten unterschiedlich hoch sind. Der Grund dafür ist, dass die Messung nicht exakt auf dem Maximum des Coulombpeaks durchgeführt wurde, sondern noch in der aufsteigenden Flanke.

Daneben ist das Ergebnis der gleichen Prozedur für Situation ② gezeigt. Bei diesen Gatespannungen befinden sich alle QDs bis auf B im

Bereich der Coulombblockade. **B** und der angrenzende Drainkontakt **D**₁ befinden sich in Resonanz. Die Tunnelraten Γ_{in} von **B** zu Drain und Γ_{out} von Drain zu **B** ergeben sich zu:

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} \Gamma_{\text{in}} = & 58 \text{ Hz} \\ \Gamma_{\text{out}} = & 29 \text{ Hz.} \end{cases}$$

Auch hier sind die Raten nicht symmetrisch. Die Messung wurde statt direkt auf der Resonanz leicht verschoben auf der absteigenden Flanke des Coulombpeaks durchgeführt.

Für die Resonanz von **C** und **D**₂ ist die Charakterisierung aufgrund der sehr langen Tunnelzeiten nicht auf die gleiche Weise durchführbar. Aus den Messdaten lassen sich aber auch hier die Raten zu

$$\Gamma_{\text{in,out}} \lesssim 10 \text{ Hz}$$

abschätzen. Die Messungen zeigen, dass über die Detektion der einzelnen Tunnelereignisse eine detaillierte Untersuchung des Systems möglich ist, die deutlich über die Möglichkeiten der Gleichgewichtsmessung hinausgeht.

5.7.3 Transport eines einzelnen Elektrons durch zwei Quantenpunkte

Wenden wir uns Situation $\textcircled{3}$ zu. In dieser Situation sind zwei der drei Quantenpunkte in Resonanz. Es ist ein Transport zwischen **S** und **D**₁ über **A** und **B** möglich, während **C** in der Coulombblockade verweilt und den Transport Richtung **D**₂ sperrt. Da Ladungsänderungen für **A** und **B** im QPC zu deutlich unterschiedlichen Leitfähigkeitsänderungen führen, sollte damit eine Transportmessung Elektron für Elektron möglich sein. Da es sich um eine Reihe von zwei QDs handelt, ist nicht einmal eine Vorspannung notwendig, denn auch die Richtung des Tunnelvorgangs kann ermittelt werden.

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

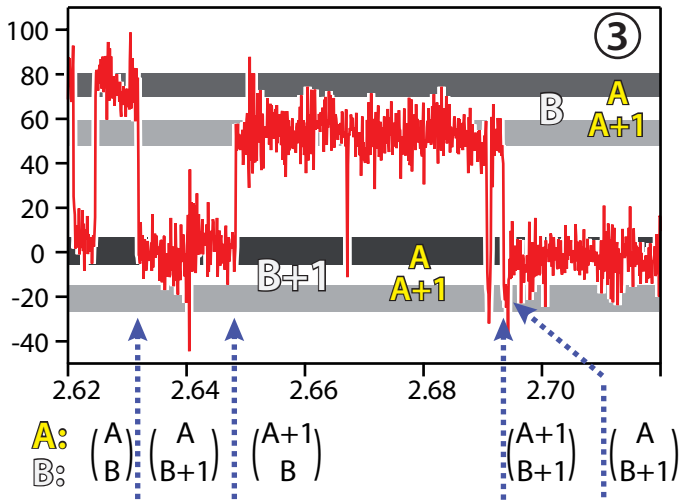


Abbildung 5.27:

Dargestellt ist ein Tunnelvorgang eines Elektrons von D_1 nach S im Leitfähigkeitssignal des QPC. Da QD A deutlich schwächer an den QPC kopplert, sind die Ladungsstufen von A klein, B dagegen erzeugt deutlich höhere Änderungen. Die verschiedenen Ladungszustände sind als graue Bänder eingezeichnet. Die blauen Pfeile markieren Änderungen des Ladungszustandes für ein Elektron, dass die beiden QDs passiert.

In Abbildung 5.27 ist die Abfolge der Tunnelvorgänge eines Elektrons beim Transport von D_1 nach S dargestellt. Gezeigt ist die Leitfähigkeitsmessung am QPC für einen Zeitraum von 10 ms. Man erkennt nun nicht mehr zwei Bänder, wie dies für den Transport durch einen Einzelquantenpunkt der Fall war. Stattdessen sind zwei Bänder für jeden der beiden Quantenpunkte zu sehen, wobei die Ladungsänderungen von A deutlich geringeren Einfluss auf den QPC haben als die von B. Insgesamt sind damit vier verschiedene Ladungszustände

denkbar. Ohne Vorspannung ist der Zustand $\binom{A+1}{B+1}$ eigentlich ausgeschlossen. Er tritt allerdings dennoch auf. Die Ursache hierfür könnte der QPC selbst sein. Khrapai *et al.* zeigen in [90, 107], dass ein hoher Strom durch einen QPC Einfluss auf das Transportverhalten benachbarter Quantenpunkte oder Quantenpunktkontakte hat. Der Strom durch den QPC lag für die zeitaufgelösten Messungen bei 2 mV Vorspannung in einer Größenordnung, die diesen Effekt durchaus wahrscheinlich macht. Der hohe Strom war jedoch aufgrund der geringen Ankopplung der QDs an den QPC zwingend erforderlich.

Betrachten wir den in Abbildung 5.27 gezeigten Transport im Detail. Als Anfangspunkt soll die Konfiguration $\binom{A}{B}$ vor dem ersten blauen Pfeil dienen. Hier ist auf keinem der QDs ein zusätzliches Elektron. Dann, an der Zeitmarke, die der erste Pfeil markiert, tunnelt ein Elektron in QD B. Da sich auf A die Konfiguration nicht geändert hat, muss es von D_1 auf den QD getunnelt sein. Das System ist nun im Zustand $\binom{A}{B+1}$. Etwa eine Millisekunde später ändert sich der Zustand nach $\binom{A+1}{B}$. Das Elektron ist von B aus weiter zu A getunnelt. Eine weitere Millisekunde später sieht man eine sehr kurze Umladung, in der das Elektron kurz auf B zurücktunnelt, dann aber sofort wieder zu A wechselt. Wiederum etwa eine Millisekunde darauf ist ein Übergang zur Konfiguration $\binom{A+1}{B+1}$ festzustellen. Diese wird aber nur sehr kurz gehalten und dann wieder $\binom{A+1}{B}$ eingenommen. Hier ist ein zweites Elektron in das System getunnelt, und zwar von D_1 auf B, hat diesen Quantenpunkt kurz darauf wieder Richtung D_1 verlassen. Wenig später tunnelt wieder ein zweites Elektron von D_1 auf B. Nun verlässt aber nicht das zweite Elektron das System, sondern es wird die Konfiguration $\binom{A}{B+1}$ eingenommen. Das erste Elektron verlässt A in Richtung S, während das zweite Elektron auf B verbleibt.

Innerhalb der Zeitspanne von etwa 6 ms hat also ein einzelnes Elektron beide Quantenpunkte passiert und damit einen Strom von 1 e in 6 ms erzeugt, was in etwa 25 aA entspricht. Der reale Strom durch das

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

System ist allerdings im zeitlichen Mittel Null, da keine Spannung anliegt. Dies ist auch der Grund, warum es zu verschiedenen Umladungen kam, bevor das Elektron am Source-Kontakt ankam.

Die gezeigte Messung zeigt, dass mittels QPC eine direkte Strommessung Elektron für Elektron durchführbar ist. An einem Doppelquantenpunkt wurde diese Art von Strommessung bereits von Fujisawa *et al.* demonstriert [108]. Für das vorliegende System wäre zudem eine solche Transportmessung an einem Quadrupelpunkt denkbar, da innerhalb dieser Struktur alle drei Quantenpunkte in Resonanz gebracht werden können. Für eine derartige Messung wäre jedoch eine Steigerung der Detektionsbandbreite notwendig, da im Bereich des letzten Quadrupelpunktes vor der vollständigen Leerung von C die Tunnelraten für A zu hoch für eine Messung lagen.

5.7.4 Einfluss des Detektorstromes

Der Strom, der durch den Quantenpunktkontakt fließt, kann auf verschiedene Arten die Prozesse auf einem Quantenpunkt beeinflussen. Zum einen erzeugt der Strom Wärme. Dies äußert sich in Form von Gitterschwingungen, Phononen. Zum anderen ist der QPC selbst eine Rauschquelle. Abhängig vom Strom strahlt der QPC ein Rauschspektrum von Photonen im Mikrowellenbereich ab [91]. Derartige Effekte wurden bereits experimentell an Quantenpunkten demonstriert. Khrapai *et al.* [90] zeigten an einer Doppelquantenpunktstruktur, dass Phononen, Photonen oder Plasmonen, die ein benachbarter QPC erzeugt, zu einem gerichteten Strom durch einen Doppelquantenpunkt führen. Gustavsson *et al.* zeigten ebenfalls anhand eines Doppelquantenpunktes, dass Photonen, die von einem benachbarten QPC abgestrahlt wurden, zu Tunnelereignissen im Coulombblockadebereich führen. Zeitaufgelöst messbar waren dabei Ereignisse, in denen ein zusätzliches Elektron auf den Doppelquantenpunkt geladen wurde. Für Anregun-

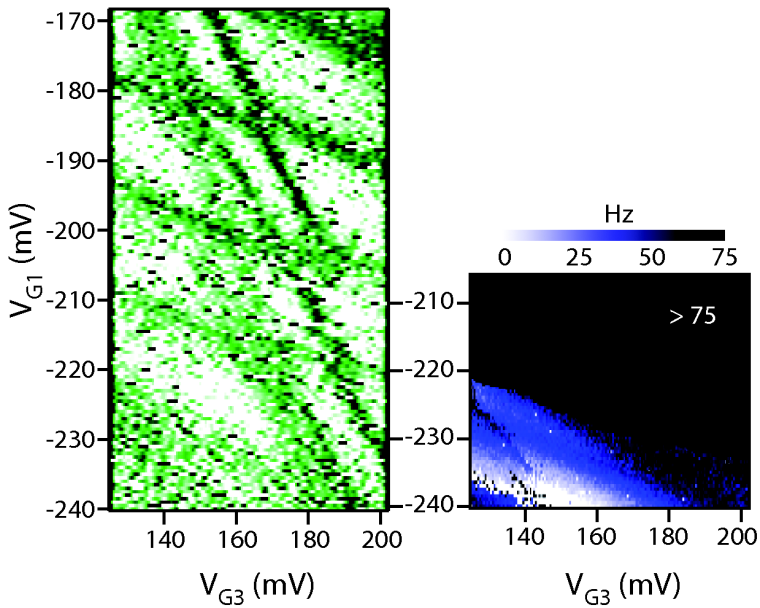


Abbildung 5.28:

Auswirkung hohen Detektorstromes: Dargestellt ist eine Messung bei einer Vorspannung von 10 mV am QPC. Die Art der Messung gleicht Abbildung 5.25. Die Spannungen an G1 und G3 wurden variiert, während das Gleichstromleitwert und zeitaufgelöstes Stromsignal des QPC gemessen wurde. Das ausgezählte Detektorsignal konnte aufgrund der geringen Bandbreite nur bis zu einer Rate von 75 Hz untersucht werden. Bereiche höherer Raten sind ebenfalls schwarz dargestellt.

Bereits in der Gleichstrommessung ist eine Verbreiterung und Zerfaserung der Resonanzen zu verzeichnen. Zudem sind angeregte Zustände sichtbar. Im Zählsignal wird deutlich, dass die Coulombblockade in weiten Bereichen aufgehoben ist.

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

gen eines Elektrons auf höhere Niveaus des Nachbarquantenpunktes liegen die Zeitkonstanten im Bereich von Nanosekunden, so dass diese nicht aufgelöst wurden. In Abbildung 5.27 wurde bereits die Situation gezeigt, dass der Dreifachquantenpunkt mit einem zusätzlichen Elektron geladen wird, obwohl das System blockiert sein sollte. Die gatespannungsabhängige Messung in Abbildung 5.25 weist im Bereich der Resonanz von Quantenpunkt A und B auch bereits eine erkennbare Verbreiterung auf. Die Messauflösung ist jedoch nicht hoch genug, um die Form der Verbreiterung mit den zitierten Publikationen zu vergleichen. In Abbildung 5.28 ist eine Messung mit deutlich erhöhtem Strom durch den QPC gezeigt. Die Vorspannung des QPC wurde hierzu auf 10 mV gesetzt.

Bereits in der Gleichstrommessung, die auf der linken Seite zu sehen ist, wird eine Verbreiterung der Resonanzen deutlich. Zudem sind zusätzliche parallel zu den erwarteten Resonanzen verlaufende Linien sichtbar. Hierbei handelt es sich sehr wahrscheinlich um angeregte Zustände. Betrachtet man das ausgezählte Signal, so ist auch hier eine deutliche Verbreiterung festzustellen. Es lassen sich kaum noch einzelne Resonanzlinien ausmachen. Statt dessen lassen sich auch in weiten Bereichen des Coulombblockadebereichs Tunnelereignisse feststellen. Die Bandbreite des Detektors liegt unter diesen Bedingungen deutlich niedriger. Zwar steigt die Änderung des Stromes durch die Erhöhung der Vorspannung, das Rauschen der Messung nimmt jedoch ebenfalls deutlich zu.

Die Ursache könnten schnelle Umladevorgänge zwischen den Quantenpunkten sein. Tunnelereignisse bis zu einer Rate von 75 Hz konnten noch identifiziert werden, Bereiche höherer Raten sind in der Abbildung schwarz dargestellt. Im Bereich unterhalb von 140 mV an G3 sind Anzeichen einer Resonanz der Quantenpunkte A und B auszumachen. Ein dreieckiger Bereich erhöhter Raten fällt hier auf, der zu höheren Spannungen an G3 und niedrigeren an G1 an einen Blockade-

debereich angrenzt. Qualitativ ähnelt dies den in [91] gezeigten Ergebnissen.

Eine systematische Untersuchung der Auswirkungen des Detektorstromes war nicht möglich. Zum einen liegt der Mindeststrom durch die geringe Sensitivität bereits sehr hoch. Eine Absenkung des Stromes sorgt dabei für eine rasche Abnahme der Detektorqualität. Zum anderen haben die Änderungen der Vorspannungen im Bereich von einzelnen Millivolt schon deutlichen elektrostatischen Einfluss auf die chemischen Potentiale der drei Quantenpunkte. Das komplexe Gesamtsystem des Dreifachquantenpunktes wird dabei verstimmt, und die Tunnelraten sämtlicher Tunnelbarrieren verändern sich.

5.8 Weitere Anwendungen der zeitaufgelösten Ladungsdetektion

Die zeitaufgelöste Ladungsdetektion bietet eine große Palette an Anwendungsbereichen. In diesem Abschnitt sollen zwei Messungen vorgestellt werden, die dies verdeutlichen. Zum einen kann der QPC Detektor zum Charakterisieren einer *charge trap* genutzt werden. Dabei wird die Messung der Zählstatistik bei Temperaturen oberhalb von 4 K durchgeführt und damit der QPC an der Grenze des Detektionsvermögens betrieben. Neben der Zählstatistik kann das zeitabhängige Signal des Detektors auch für eine sehr genaue Messung der mittleren Besetzung eines Quantenpunktes genutzt werden. Die Messgenauigkeit ist dabei erheblich höher, als es bei den reinen Gleichgewichtsmessungen der Fall ist. Gleichzeitig ist der zugängliche Frequenzbereich für die Tunnelraten erheblich breiter als für die Zählstatistiken.

5.8.1 Charakterisierung einer Störstelle

Bei der Herstellung von Nanostrukturen mit dem Rasterkraftmikroskop kommt es zuweilen zur Bildung von sogenannten *charge traps*, Störstellen im Material, die lokale Potentialminima für Elektronen bilden. Liegt eine solche Störstelle nahe am QPC, so kann ihre Besetzung ebenfalls zeitaufgelöst untersucht werden.

Für den untersuchten Einzelquantenpunkt ist eine solche Störstelle beobachtbar. In einem temperaturabhängigen Experiment wurde das Lade- und Entladeverhalten untersucht. In Abbildung 5.29 ist die Temperaturabhängigkeit dargestellt. Auf der linken Seite sind die Laderate Γ_L und die Entladerate Γ_U in Abhängigkeit von der Temperatur aufgetragen. Extrahiert wurden die Werte aus der rechts daneben gezeigten Messung. In mehreren Schritten wurde die Temperatur des Messsystems allmählich abgesenkt. Während der Messzeit von etwa einer

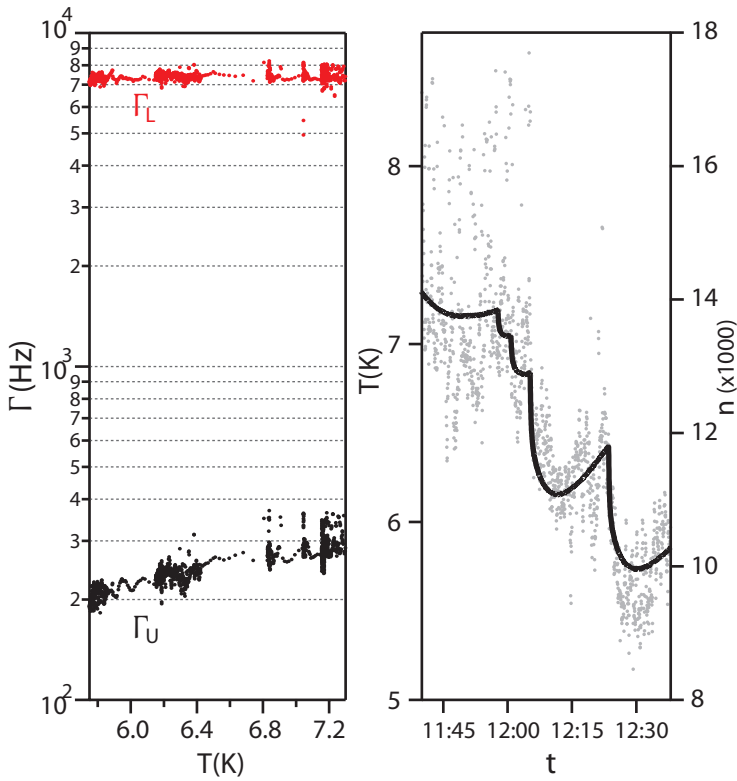


Abbildung 5.29:

Ladeverhalten einer Störstelle in der Nähe des Detektors. Auf der linken Seite ist die Entwicklung der Laderate Γ_L und Entladerate Γ_U in Abhängigkeit der Temperatur gezeigt. Rechts ist die zugrundeliegende Messung zum Vergleich dargestellt. Über einen Zeitraum von etwa einer Stunde wurde die Temperatur des Systems schrittweise abgesenkt (schwarze Linie) und die Ladevorgänge gemessen (graue Punkte).

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Stunde wurde die zeitaufgelöste Leitfähigkeit des QPC gemessen. Aus den Messungen konnte direkt die Anzahl der detektierten Umladungen der Störstelle festgestellt werden. Diese Anzahl ist im rechten Graphen als graue Punkte eingezeichnet. Man erkennt deutlich, dass die Umladevorgänge direkt dem Verlauf der Temperatur folgen. Die Temperaturmessung ist jedoch fehlerbehaftet, da sie in einiger räumlicher Entfernung (ca. 10-15 cm) von der Probe im Gasstrom bestimmt wurde.

Die Lade- und Entladeraten können nun für jeden einzelnen Datenpunkt bestimmt werden. Trägt man diese nun gegen die jeweils gemessene Temperatur auf, erhält man den linken Graphen. Zunächst fällt hierbei auf, dass die Entladerate drastisch niedriger ist als die Laderate. Γ_U liegt für 7.2 K etwa bei 300 Hz und sinkt für eine Temperatur von 5.6 K auf 200 Hz ab, was einer Abnahme um 30% entspricht. Die Laderate Γ_L bleibt über den Temperaturbereich konstant bei etwa 7.5 kHz.

Das Verhältnis der beiden Raten legt die Vermutung nahe, dass die Störstelle energetisch unterhalb der Fermienergie liegt. Damit das Elektron die Störstelle verlassen kann, muss es eine thermische Anregung erfahren. Die Wahrscheinlichkeit hierfür wird geringer, wenn die Temperatur sinkt. Anschaulich gesprochen, friert das Elektron auf der Störstelle aus.

Neben den Laderaten wurde auch die Statistik der Ladevorgänge untersucht. Im oberen Graphen von Abbildung 5.30 sind wieder die Laderaten Γ_L und Γ_U gezeigt, diesmal für den gesamten zugänglichen Bereich zwischen 1.5 und 7.5 K. Darunter ist die normierte zweite Kumulante der Ladestatistik C_2/C_1 dargestellt. Für eine Strommessung wäre dies der Fanofaktor des Systems. Für den Ladevorgang ist die Bedeutung nicht direkt zu übertragen. Die zweite Kumulante ist allerdings natürlich auch hier ein Maß dafür, ob die Statistik Poissonschen Charakter hat.

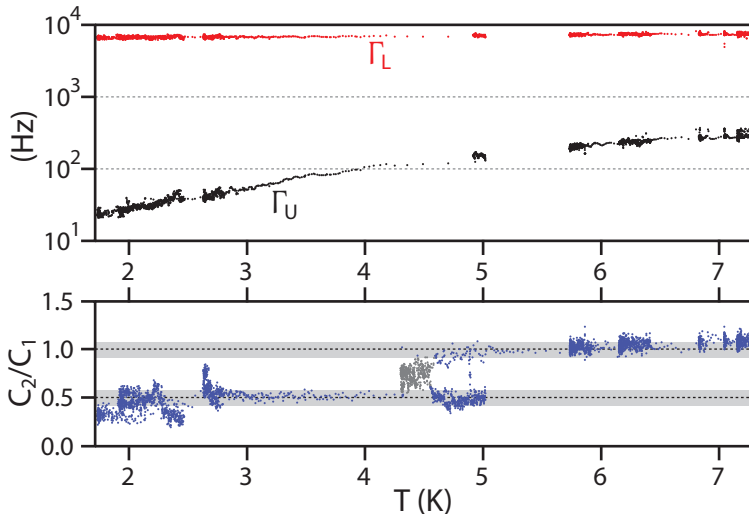


Abbildung 5.30:

Ladeverhalten einer Störstelle in der Nähe des Detektors. Im oberen Graphen ist die Entwicklung der Laderate Γ_L und Entladerate Γ_U in Abhängigkeit der Temperatur gezeigt. Darunter ist die normierte zweite Kumulante der Ladestatistik gezeigt.

Für Temperaturen oberhalb von 5 K weist die Ladestatistik eine zweite Kumulante von 1 auf. Die Ladevorgänge folgen hier wie einer Poissonstatistik. Dies ist aufgrund der extrem asymmetrischen Laderaten auch durchaus zu erwarten. Für Temperaturen unterhalb von 5 K nimmt die zweite Kumulante dagegen einen Wert von 0.5 an. Im Bereich zwischen 4 und 5 K sind beide Werte zu finden, und es treten auch Zwischenwerte auf. Hier ist jedoch die Temperaturmessung ungenau. Der Grund für die Ungenauigkeit in der Temperatur ist in der Messtechnik zu finden. Die Temperatur des Systems wurde verringert, indem kaltes Heliumgas in den Probenraum strömte. Da der

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

Siedepunkt von Helium bei 4.2 K liegt, liegt unterhalb von 4 K flüssiges Helium vor. Im Übergangsbereich kommt es dazu, dass der Messsensor die Temperatur im Gasstrom misst, während die Probe bereits in flüssiges Helium getaucht ist. Diese Messpunkte (im Graphen grau eingefärbt) sind daher schwer zu interpretieren.

Der Wert 0.5 für die zweite Kumulante im Bereich tiefer Temperaturen überrascht, da die Laderaten auch in diesem Bereich deutlich verschieden sind ($\Gamma_L = 7$ kHz, $\Gamma_U < 100$ Hz). Trotz der starken Asymmetrie weicht hier die Statistik deutlich von einem Poissonprozess ab. Ein Wert unterhalb von 1 bedeutet anschaulich, dass das Ladeverhalten trotz stark asymmetrischer Raten eine deutliche Korrelation aufweist. Dies ist eigentlich nur dann zu erwarten, wenn die Tunnelraten in der gleichen Größenordnung liegen. Dann kommt es dazu, dass die Tunnelprozesse sich gegenseitig beeinflussen. Die Tatsache, dass die Störstelle praktisch immer geladen ist, lässt zunächst vermuten, dass eine Korrelation nicht auftreten sollte. Der Ladeprozess sollte von der Entladerate dominiert sein und daher eigentlich einer Poissonstatistik folgen.

Um das Verhalten der Störstelle genauer zu untersuchen, wurde die Anregungsenergie bestimmt, die notwendig ist, um ein Elektron von der Störstelle zu lösen. Die Emission von Elektronen aus einer *charge-trap* erfolgt mit einer Rate von [109]:

$$\Gamma_U = \nu_0 \cdot e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}. \quad (5.3)$$

Der energetische Abstand zum nächsten freien Zustand wird durch ΔE angegeben. Der Proportionalitätsfaktor ν_0 kann dabei als ein Maß für die Ankopplung der *charge-trap* an ein benachbartes Reservoir verstanden werden. Aus der Beziehung (5.4) erhält man nach Logarithmieren und Umstellung die Relation:

$$\ln(\Gamma_U) \sim -\frac{\Delta E}{k_B} \cdot \frac{1}{T}$$

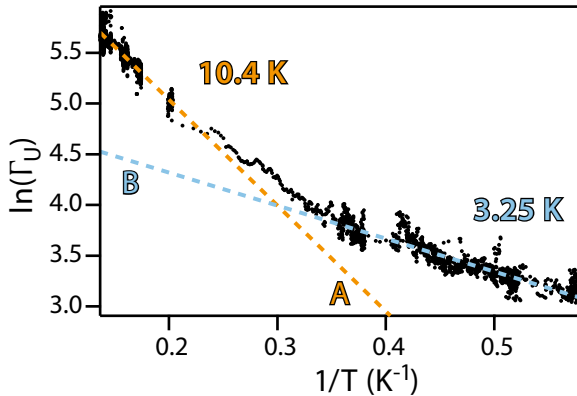


Abbildung 5.31:

Dargestellt ist die logarithmische Entladerate Γ_U in Abhängigkeit vom Kehrwert der Temperatur. Es bilden sich zwei lineare Bereiche heraus.

In Abbildung 5.31 sind die gemessenen Werte $\ln(\Gamma_U)$ gegen $1/T$ aufgetragen. Dabei tritt nicht eine einzelne Linie auf, sondern es sind zwei lineare Bereiche auszumachen. Diese Bereiche wurden linear gefittet. Aus den Steigungen kann direkt $\frac{\Delta E}{k_B}$, die Anregungsenergie in Kelvin, abgelesen werden. Für hohe Temperaturen (kleine Werte von $1/T$) dominiert ein Emissionsprozess mit einer Anregungsenergie von 10.4 K. Das entspricht 0.9 meV. Für niedrige Temperaturen ist dieser Prozess unterdrückt und ein Emissionsprozess mit einer Anregungsenergie von 3.25 K wird maßgebend, was 0.3 meV entspricht. Der Übergangsbereich der beiden Prozesse liegt bei etwa 4 bis 5 K und damit in dem Bereich, in dem auch ein Umschalten der zweiten Kumulante zu beobachten ist.

Aus den sehr geringen Anregungsenergien lässt sich schließen, dass es sich sehr wahrscheinlich um Störstellen im Bereich der Oxidlinien

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

handelt, also um Inseln im 2DEG, die sich am Rand des Verarmungsbereichs der Oxidbarrieren ausbilden. Die Anregungsenergien von Dotieratomen liegen deutlich höher. Für Si als Akzeptor in GaAs beispielsweise wäre eine Anregungsenergie von 35 meV zu erwarten [11].

Die Tatsache, dass zwei unterschiedliche Energien bestimmt werden und zudem der Übergang mit der Änderung der zweiten Kumulante zusammenfällt, bietet einen Ansatz zur Erklärung der unerwartet niedrigen Werte von C_2/C_1 zu niedrigen Temperaturen. Vermutlich handelt es sich nicht um eine, sondern um zwei Störstellen. Eine davon, in der Abbildung 5.31 mit A bezeichnet, hat eine hohe Anregungsenergie, koppelt stark an das 2DEG und dominiert zu hohen Temperaturen. Eine zweite mit geringerer Anregungsenergie, hier B genannt, koppelt dagegen schwächer an das 2DEG, ist aber noch zu niedrigeren Temperaturen sichtbar, bei denen die Emission der ersten Störstelle bereits unterdrückt ist. Die Störstelle A zeigt, wie man es für stark asymmetrische Raten erwarten würde, einen Wert von 1 für C_2/C_1 . Für die Störstelle B erhält man dagegen einen geringeren Wert, obwohl auch hier die Raten sehr asymmetrisch sind.

Eine mögliche Erklärung ergibt sich aus der Messtechnik. Es ist durchaus denkbar, dass dadurch das chemische Potential des 2DEG durch externe Rauschquellen, besonders im Bereich der Netzfrequenz, moduliert wurde. Wie stark eine solche Modulation den Emissionsprozess beeinflusst, hängt dann von der Amplitude der Störung und der Anregungsenergie der Störstelle ab. Ist die Anregungsenergie in der Größenordnung der externen Störung, so wirkt sich das externe Signal auf die Tunnelprozesse aus. Schematisch ist dies in Abbildung 5.32 gezeigt. Wenn das 2DEG einer zeitabhängigen Modulation unterworfen ist, hier als Sinus dargestellt, dann hängt die Anregungsenergie ΔE davon ab, ob sich das chemische Potential des 2DEG gerade in einem Wellental oder auf einem Wellenberg befindet. In einem Wellental ist dann die Entladerate Γ_U höher als auf einem Wellenberg. Dies führt zu

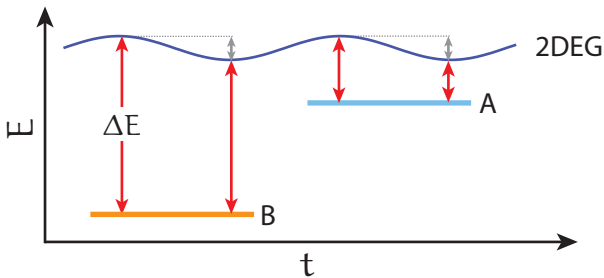


Abbildung 5.32:

Schematische Darstellung der Auswirkung einer zeitabhängigen Störung des 2DEG auf die Anregungsenergien zweier Störstellen A und B mit verschiedenen Anregungsenergien.

einer zeitlichen Korrelation der Entladevorgänge. Der Einfluss, den die Störung auf die Tunnelrate hat, hängt exponentiell von der Energie ab (siehe Formel (5.4)). Ist ΔE also groß verglichen mit der Störung, so hat dies nur geringe Auswirkung auf die Tunnelrate. Damit sollte ein Wert von 1 für C_2/C_1 gemessen werden. Nähert sich ΔE der Größenordnung der Störung an, so sollte der Einfluss der zeitlichen Korrelation der Entladeereignisse messbar werden. In der Zählstatistik äußert sich eine solche Korrelation in einer Verringerung der Streuung, also in einer Abnahme der zweiten Kumulante.

Im Bereich niedriger Temperaturen kommt in der Messung die Entladerate in die Größenordnung der zu vermutenden Störfrequenz von 50 Hz. Für die ermittelte Anregungsenergie von 0.3 meV, wie sie Störstelle B zeigt, ist für eine feststellbare Modulation der Tunnelraten auch kein starkes externes Signal notwendig. Dies macht ein externes Netzsignal, das als Rauschquelle das chemische Potential des 2DEG zeitabhängig moduliert, als Ursache der niedrigen Werte für C_2/C_1 plausibel.

5.8.2 Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit aus der zeitabhängigen Messung

In Abschnitt 4.3.1 wurde eine Bestimmung der mittleren Besetzungswahrscheinlichkeit aus der Messung der QPC Leitfähigkeit vorgestellt. Hier soll nun gezeigt werden, wie man die Besetzungswahrscheinlichkeit anhand der zeitaufgelösten Messung ermitteln kann.

Das zeitabhängige Stromsignal des QPCs weist bei Transport durch den QD eine Vielzahl von Sprüngen auf. Dabei prägen sich zwei Banden aus, eine für N Elektronen und eine für $N+1$ Elektronen auf dem QD (siehe hierzu Abschnitt 3.4.2). Bildet man ein Histogramm des zeitabhängigen Signals, erhält man für jede der Banden ein Maximum. Die Breite der Peaks hängt dabei von der Breite der Banden ab und spiegelt die Bandbreite des Systems und das technische Rauschen wieder.

In Abbildung 5.33 ist ein solches Histogramm gezeigt. Der linke Peak entspricht $N+1$ Elektronen auf dem QD, der rechte N . An jeden Messpunkt, der zum linken Peak beiträgt, war damit ein zusätzliches Elektron auf dem QD; an jeden Messpunkt, der zum rechten Peak beiträgt, waren nur N Elektronen zugegen. Die Besetzung des QD für die Zeit der Messung erhält man damit aus dem Verhältnis der Flächen A_1 und A_2 , die durch die Peaks definiert werden:

$$P(N+1) = \frac{A_1}{A_2} \quad (5.4)$$

Für den Fall einer klaren Trennung der Peaks, lassen sich die Flächen direkt durch Summation bestimmen. Überschneiden sich beide Peaks, so können die Flächen über einen simultanen Fit mit zwei Gausskurven ermittelt werden. Die Fitkurve wurde zur Veranschaulichung in Abbildung 5.33 als schwarze Linie eingezeichnet. Diese Methode ist bei hinreichender Messzeit sehr genau, wobei sie auch noch etwas oberhalb der Detektorbandbreite anwendbar ist, sofern sich noch zwei Banden

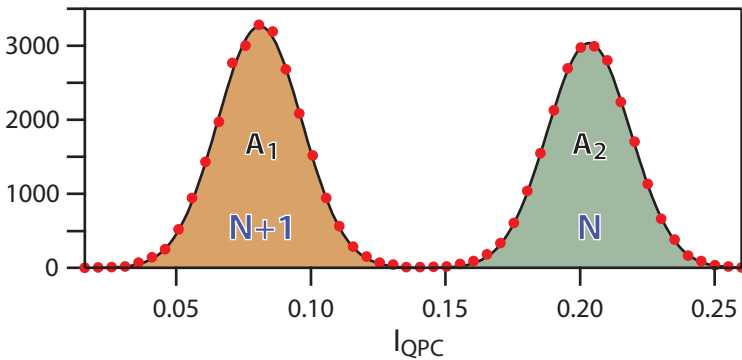


Abbildung 5.33:

Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit anhand der zeitaufgelösten Messung. Das Histogramm des QPC Stromes (rote Punkte) weist zwei Maxima auf. Das Verhältnis der Flächen A_1 zu A_2 ergibt die Besetzungswahrscheinlichkeit. Die Flächen können mittels Fit mit zwei Gaussfunktionen bestimmt werden (schwarze Linie).

identifizieren lassen. In Abbildung 5.34(a) ist eine solche Messung in Abhängigkeit von Gate- und Source-Drain-Spannung gezeigt.

Die Messung ist vergleichbar mit Abbildung 4.9(a), allerdings handelt es sich um einen anderen Zustand des QD, und die Messung wurde nicht entlang der Symmetrielinie durchgeführt. Auch hier sind klare Ladungsstufen sichtbar. Auch angeregte Zustände lassen sich für endliche Vorspannung erkennen (links und rechts der roten Linie). Allerdings weist nur das mittlere Coulombplateau angeregte Zustände zu beiden Richtungen von V_{SD} auf. Dies liegt daran, dass die Messung nur in diesem Bereich bei symmetrischen Tunnelraten stattgefunden hat. Man erkennt gut, wie die unterste und die oberste Stufe jeweils nur in einer Richtung detektiert werden. Für die unterste Stufe etwa erkennt man auf der rechten Seite noch schwach sehr kleine Stufen

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

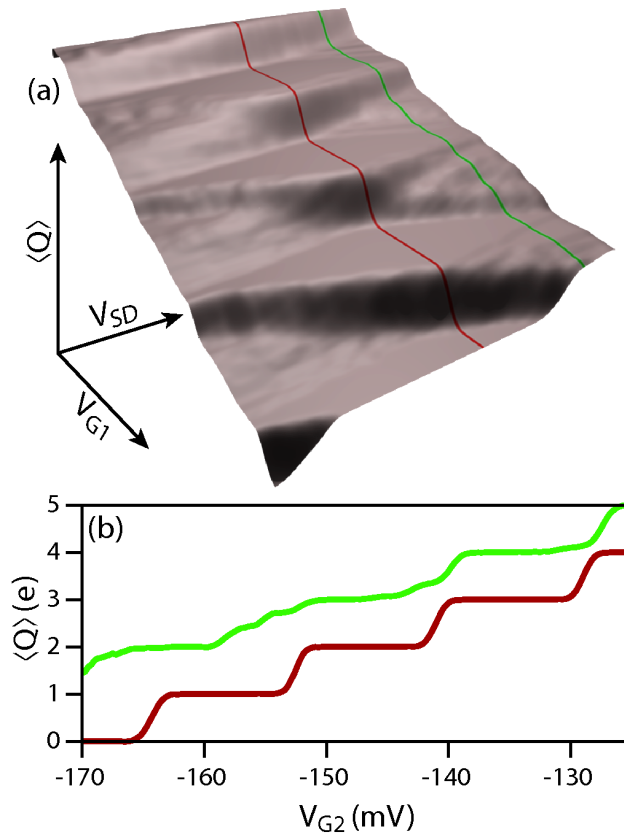


Abbildung 5.34:

(a) Dreidimensionale Darstellung der mittleren Besetzung der Niveaus des QD in Abhängigkeit von Source-Drain- und Gatespannung. (b) Zwei Schnitte entlang der markierten Linien.

für Resonanzen mit Source. Durch die starke Asymmetrie ist aber die Besetzung dort bereits fast auf 1 angestiegen.

Abbildung 4.9(b) zeigt zwei Schnitte, einen bei $V_{SD}=0$ (rote Linie) und einen bei $V_{SD}= -1$ mV (grüne Linie). Ohne Vorspannung sind deutliche steile Stufen zu erkennen. Für endliche Source-Drain-Spannung bilden sich kleine Stufen für die angeregten Zustände des QD. Zwischen -160 und -150 mV, das ist der Bereich, in dem die Messung nahe der Symmetrielinie des QD stattgefunden hat, sind statt einer großen drei kleine Stufen sichtbar. Die Messung erscheint im Vergleich zu 4.9(b) deutlicher. Die Messauflösung in Richtung der Gate-Spannung ist jedoch nicht feiner. Das genauere Messergebnis ist eine Folge der Messmethode. Während für die Gleichstrommessung die Sprungweite bestimmt werden muss, erhält man hier das Ergebnis aus dem Verhältnis der beiden Banden eines Histogramms. Das ermöglicht eine deutlich feinere und weniger fehleranfällige Bestimmung der Besetzung.

5.8.3 Messung der Tunnelraten

Die Tunnelraten des Transports ergeben sich praktisch automatisch bei der Auswertung des zeitaufgelösten QPC-Signals. Die auftretenden Fehler der verschiedenen Möglichkeiten, die Raten zu bestimmen, wurde bereits diskutiert. In diesem Abschnitt sollen nun zwei Beispiele für absolute Messungen der Tunnelraten gezeigt werden.

In Abbildung 5.35 sind die Tunnelraten Γ_{in} (grau) und Γ_{out} (schwarz) über den Bereich von drei Coulombblockadepeaks gezeigt. Die daraus berechnete Gesamttunnelrate Γ_{tot} , die proportional zum Strom durch den Quantenpunkt ist ($\Gamma_{tot} = I/e$, siehe (5.1)), ist in Rot eingezeichnet. Die Messung wurde bei $V_{SD}= 1$ mV durchgeführt, wodurch der Transport nur in einer Richtung stattfinden konnte.

Im Blockadebereich zwischen den Resonanzen findet kein Trans-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

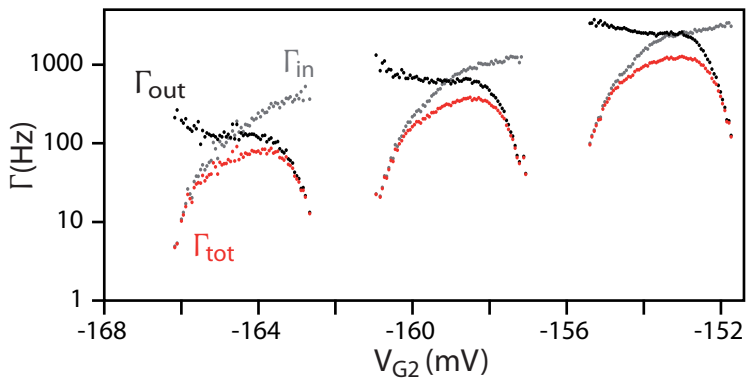
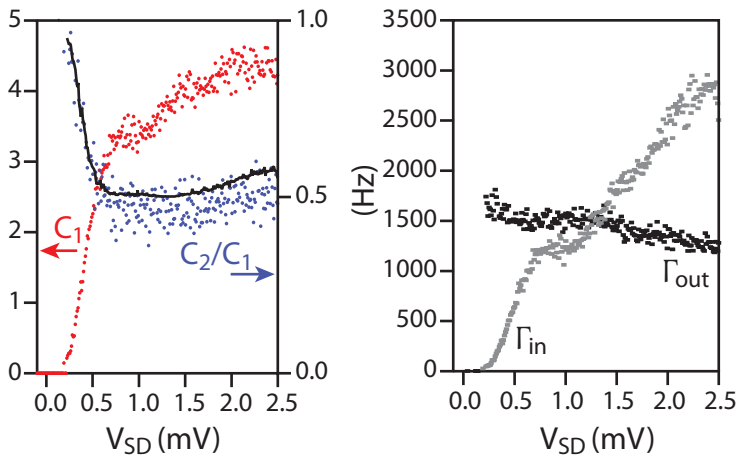


Abbildung 5.35:

Die Tunnelraten für drei aufeinander folgende Coulombblockadepeaks. Dargestellt sind die Raten Γ_{in} , Γ_{out} und Γ_{tot} über der Gatespannung V_{G2} . Die Messung wurde bei $V_{SD} = 1$ mV durchgeführt.

port statt, womit auch eine Bestimmung der Raten unmöglich ist. Sobald ein Zustand des QD in Resonanz mit Source kommt, beginnt ein endlicher Strom zu fließen. Die Rate Γ_{in} nimmt dabei zunächst deutlich zu, je weiter die Gatespannung (in positive Spannungsrichtung) erhöht wird. Dieser Anstieg ist eine direkte Folge der schnell stärker werdenden Tunnelkopplung zwischen Source und QD Zuständen. Die Rate sättigt dann allmählich, wird aber nicht konstant. Dies ist eine Folge von angeregten Zuständen, die zum Tunneln verfügbar werden. Die thermische Energie der Elektronen verschmiert dabei die zu erwartenden Stufen. Für $V_{G2} \approx -160$ mV kann man den Stufencharakter im Verlauf von Γ_{in} bei Erreichen eines angeregten Zustands erkennen. Für Γ_{out} ist der Verlauf umgekehrt. Γ_{out} beginnt auf einem Plateau. Bei Resonanz mit Drain nimmt die Rate dann rapide ab, bis sie auf Null abgesunken ist. Man sieht hier also direkt, wie die Tunnelraten den Strom bestimmen. Solange der Zustand oberhalb von Source liegt,

**Abbildung 5.36:**

Die Tunnelraten in Abhängigkeit von der Source-Drain-Spannung. Auf der linken Seite sieht man den Mittelwert der Zählstatistik (rot, $t_0 = 5$ ms) und den Fanofaktor (blau) in Abhängigkeit von der Source-Drain-Spannung V_{SD} . Daneben sind die Raten Γ_{in} und Γ_{out} über ebenfalls gegen V_{SD} dargestellt. Aus den Raten lässt sich ebenfalls der theoretische Fanofaktor bestimmen (schwarze Linie, linke Seite).

haben die Elektronen nicht genug Energie, um den QD zu betreten. Damit ist $\Gamma_{in} = 0$, wodurch kein Transport möglich ist. Nach der Resonanz mit Drain ist dagegen kein Zustand in Drain mehr verfügbar, in den das Elektron auf dem QD tunneln könnte. Daher ist $\Gamma_{out} = 0$, was ebenfalls den Transport unterbindet.

Eine solche Messung kann auch bei fester Gatespannung und unter Variation der Vorspannung durchgeführt werden. In Abbildung 5.36 ist dies gezeigt. Auf der linken Seite ist zunächst der Schwerpunkt der gemessenen Zählstatistik (rot) gezeigt, die Entsprechung eines klassischen Stroms durch den QD. Außerdem ist der Fanofaktor (blau) ge-

5 Zeitaufgelöste Ladungsdetektion

zeigt, der ebenfalls aus der Zählstatistik gewonnen wurde. Für $V_{SD} = 0$ mV befindet sich der QD im Blockadebereich. Durch Erhöhen der Vorspannung verschieben sich auch die Zustände im QD, bis bei etwa 0.25 mV Transport einsetzt. Der Strom steigt schnell an und nach einer steilen Flanke sind schwach ausgeprägte Stufen für angeregte Zustände zu erkennen. Der Fanofaktor startet im Blockadebereich bei einem Wert von 1 und sinkt dann bei einsetzendem Transport auf etwa 0.5.

Betrachtet man die Tunnelraten, die aus der gleichen Messung extrahiert wurden, so beginnt wiederum Γ_{in} bei 0 Hz, da sich der QD im Blockadebereich befindet. Γ_{out} hat einen endlichen Wert, etwa 1.5 kHz. Die steigende Vorspannung sorgt bei Erreichen der Resonanz für ein Ansteigen von Γ_{in} . Die Verschiebung der Zustände auf dem QD geht dabei jedoch deutlich weniger zügig vonstatten. Γ_{out} ändert sich im gemessenen Bereich nur wenig. Die Verschiebung der Zustände lässt Γ_{out} leicht absinken.

Diese Messung ist vergleichbar mit Rauschexperimenten, wie sie von Nauen *et al.* und Maire *et al.* [110–112] durchgeführt wurden. Dort wurden selbstorganisierte Quantenpunkte eingesetzt. Die einzige extern variierte Spannung ist dabei V_{SD} . Es handelt sich bei diesen Messungen jedoch um ein Ensemble von Quantenpunkten, deren Grundzustände durch Erhöhen von V_{SD} einzeln in Resonanz mit den Zuleitungen gebracht werden können. Die Zuleitungen sind außerdem dreidimensional. Die in Abbildung 5.36 gezeigte Messung weist also durchaus Unterschiede zu den dort gefundenen Ergebnissen auf, etwa die geringeren Energieabstände der angeregten Zustände.

Da die Tunnelraten direkt gemessen wurden, kann der gemessene Fanofaktor mit dem theoretisch zu erwartenden Verlauf verglichen werden [113]:

$$\frac{C_2}{C_1} = \alpha = \frac{\Gamma_{in}^2 + \Gamma_{out}^2}{(\Gamma_{in} + \Gamma_{out})^2} \quad (5.5)$$

5.8 Weitere Anwendungen

Die berechnete Kurve ist als schwarze Linie im linken Graphen eingezeichnet. Man erkennt, dass der Verlauf der Fanofaktoren aus der Zählstatistik und die berechneten Kurve qualitativ gut übereinstimmen. Der berechnete Fanofaktor liegt allerdings etwas höher als das Ergebnis der Zählstatistik. Ursache für diese Abweichung dürfte der Transport durch angeregte Zustände sein, den (5.5) nicht berücksichtigt.

6

Kapitel 6

Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden Untersuchungen an Quantenpunkten durchgeführt, wobei ein Quantenpunktkontakt als Ladungsdetektor zum Einsatz kam. Die untersuchten Strukturen basieren auf *GaAs/AlGaAs*-Heterostrukturen, die mittels optischer Lithographie und lokaler anodischer Oxidation strukturiert wurden.

Anhand eines kombinierten Quantenpunkt/Quantenpunktkontakt-Systems konnte eine minimalinvasive Ladungsdetektion realisiert werden. Es wurden Gleichstrommessungen an diesem System vorgenommen, wobei verschiedene charakteristische Merkmale von Quantenpunkten mittels der Ladungsdetektion untersucht wurden. Ausgehend von dem Coulombblockadeverhalten, das in Ladungsmessung und Strommessung am Quantenpunkt das Additionsspektrum des Quantenpunktes abbildet, wurden Ladungsdiagramme und Coulombrautenmessungen durchgeführt. Dabei zeigten sich die speziellen Eigenheiten und Vorzüge des Quantenpunktkontakts als Ladungsdetektor. So ist für die Ladungsmessung nicht der absolute Wert der Tunnelraten des Quantenpunktes relevant, sondern viel-

6 Zusammenfassung

mehr deren Verhältnis. Bei symmetrischer Tunnelankopplung des Quantenpunktes an seine Zuleitungen konnten Grundzustände und angeregte Zustände in der Ladungsmessung dargestellt und deren mittlere Besetzung bestimmt werden.

Die besondere Sensitivität des Quantenpunktkontaktes als Ladungsdetektor wurde bei Messungen im senkrechten Magnetfeld demonstriert. Bei steigendem Magnetfeld werden durch sich überkreuzende Energieniveaus des Quantenpunktes Elektronen aus dem Inneren des Quantenpunktes in die äußere Landauschale umverteilt. Dies führt in Transportmessungen zu einem Zickzack-Muster im Verlauf der Coulombblockadelinien. Mit Hilfe des Quantenpunktkontaktes war es nun möglich, diese Umverteilung in eine Ladungsmessung direkt sichtbar zu machen. Die Messung dieser Umladungen konnte an einem Doppelquantenpunkt wiederholt werden. Zudem ergaben sich bei Messungen entlang der Symmetrie des Quantenpunktes Anzeichen für einen weiteren Umordnungsprozess.

Aufbauend auf diesen Gleichstromuntersuchungen konnte eine zeitaufgelöste Ladungsmessung umgesetzt werden. Ziel einer solchen Messung ist es, Tunnelereignisse einzeln zu detektieren. Neben der messtechnischen Realisierung und dem Ladungsdetektor selbst, erforderte diese Messung die Entwicklung eines möglichst fehlerresistenten Auszählalgorithmus. Anhand der zeitaufgelösten Messung am Quantenpunktkontakt konnte so der Strom als Abfolge einzelner Tunnelereignisse aufgenommen werden. Dies ermöglicht eine direkte Messung von Tunnelzeiten und damit die Charakterisierung von Tunnelraten. Anhand der statistischen Verteilung der Tunnelzeiten war eine Bestimmung der Detektorbandbreite möglich. Dies ist von Bedeutung, da diese Bandbreite für die Interpretation der Zählstatistik eine wichtige Größe ist. Die direkte Messung der Tunnelereignisse ermöglicht es, den statistischen Charakter des Transports zu untersuchen. Diese Untersuchungen, *Full Counting Statistic* genannt, erfolgen auf der Basis

der Kumulanten, die die Zählstatistik des Stromes charakterisieren. So ist etwa die normierte zweite Kumulante der Zählstatistik der aus frequenzabhängigen Rauschmessungen bekannte Fanofaktor.

Es wurden mit dieser Technik transportspektroskopische Untersuchungen am Quantenpunkt durchgeführt. Bei der Untersuchung angeregter Zustände des Quantenpunktes wurde dabei ein erhöhter Fanofaktor festgestellt. Bei der Untersuchung ergab sich hier eine bimodale Verteilung der Tunnelereignisse. Der bimodale Charakter konnte auf ein Umschalten zwischen zwei Transportprozessen zurückgeführt werden. Beide Prozesse zeigten ein unimodales Verhalten und keinen erhöhten Fanofaktor. Erst der Umschaltprozess, der ebenfalls untersucht werden konnte, führt zur Bimodalität und damit zu einer Superpoissonschen Statistik.

Es wurde außerdem in Langzeitmessungen das Verhalten hoher Kumulanten in Abhängigkeit von der Zeit und der Symmetrie der Tunnelraten untersucht. In beiden Fällen wurden Oszillationen beobachtet, die mit der Ordnung der Kumulanten stark zunehmen. Dieses Verhalten konnte mit theoretischen Berechnungen verglichen werden, wobei sich bis hin zur 15ten Kumulante eine hervorragende Übereinstimmung mit der Theorie ergab. Auf Basis dieser Ergebnisse wurde zudem die Bedeutung der zeitabhängigen Betrachtung der Zählstatistik klar, da die experimentelle Bestimmung des Langzeitlimits für hohe Kumulanten rasch extremen Zeitaufwand erfordert.

Neben den Untersuchungen am Einzelquantenpunkt wurden auch an einem Dreifachquantenpunkt zeitaufgelöste Messungen durchgeführt. Es war dabei möglich, Ladungsänderungen auf allen drei Quantenpunkten des Systems aufzulösen. Dies ermöglichte eine Charakterisierung der Tunnelbarrieren des Systems. Außerdem konnte der Transport eines einzelnen Elektrons ohne angelegte externe Spannung vermessen werden, indem dessen Weg durch die Struktur anhand der zeitaufgelösten Ladungsänderungen der beteiligten Quantenpunkte ver-

6 Zusammenfassung

folgt wurde.

Neben der statistischen Untersuchung von Quantenpunkten ergaben sich weitere Möglichkeiten aus der Analyse zeitaufgelöster Tunnelereignisse. So konnte etwa das Ladeverhalten einer Störstelle untersucht werden. Auch eine sehr genaue Bestimmung der Besetzungswahrscheinlichkeit eines Quantenpunktzustandes ist mit dieser Technik möglich. Die Bestimmung der Tunnelraten ermöglichte zudem den Brückenschlag zu frequenzabhängigen Untersuchungen des Stromrauschens.



Kapitel 7

Anhang

Hohe Kumulanten

Im Folgenden werden zur Veranschaulichung die Kumulanten bis zur 15ten Ordnung aufgelistet:

$$\begin{aligned}
 C_7 &= M_7 - 21 C_5 C_2 + 105 C_2^2 C_3 + 35 C_4 C_3 \\
 C_8 &= M_8 - 28 C_6 C_2 + 210 C_4 C_2^2 + 105 C_2^4 + 280 C_2 C_3^2 \\
 &\quad + 56 C_5 C_3 + 35 C_4^2 \\
 C_9 &= M_9 - 36 C_7 C_2 + 378 C_5 C_2^2 + 1260 C_2^3 C_3 \\
 &\quad + 1260 C_2 C_4 C_3 + 84 C_6 C_3 + 280 C_3^3 + 126 C_4 C_5 \\
 C_{10} &= M_{10} - 45 C_8 C_2 + 630 C_6 C_2^2 + 3150 C_4 C_2^3 + 945 C_2^5 \\
 &\quad + 6300 C_2^2 C_3^2 + 2520 C_2 C_5 C_3 + 1575 C_2 C_4^2 \\
 &\quad + 120 C_7 C_3 + 2100 C_4 C_3^2 + 210 C_4 C_6 + 126 C_5^2 \\
 C_{11} &= M_{11} - 34650 C_2^2 C_4 C_3 + 4620 C_2 C_6 C_3 + 6930 C_2 C_4 C_5 \\
 &\quad + 15400 C_2 C_3^3 + 6930 C_5 C_2^3 + 17325 C_2^4 C_3 + 990 C_7 C_2^2 \\
 &\quad + 165 C_8 C_3 + 55 C_9 C_2 + 4620 C_5 C_3^2 + 5775 C_3 C_4^2 \\
 &\quad + 330 C_4 C_7 + 462 C_5 C_6 \\
 C_{12} &= M_{12} - 27720 C_3 C_4 C_5 + 7920 C_2 C_7 C_3 + 66 C_{10} C_2 \\
 &\quad + 138600 C_2 C_4 C_3^2 + 13860 C_2 C_4 C_6 + 83160 C_2^2 C_5 C_3 \\
 &\quad + 220 C_9 C_3 + 1485 C_8 C_2^2 + 5775 C_4^3 + 13860 C_6 C_2^3 \\
 &\quad + 51975 C_4 C_2^4 + 138600 C_2^3 C_3^2 + 51975 C_2^2 C_4^2 \\
 &\quad + 8316 C_2 C_5^2 + 9240 C_6 C_3^2 + 495 C_4 C_8 + 792 C_5 C_7 \\
 &\quad + 462 C_6^2 + 10395 C_2^6 + 15400 C_3^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &= M_{13} - 900900 C_2^3 C_4 C_3 + 600600 C_2^2 C_3^3 \\
&\quad + 270270 C_2^5 C_3 + 135135 C_5 C_2^4 + 25740 C_7 C_2^3 \\
&\quad + 36036 C_2 C_5 C_6 + 360360 C_2 C_5 C_3^2 + 78 C_{11} C_2 \\
&\quad + 60060 C_3 C_4 C_6 + 450450 C_2 C_3 C_4^2 + 12870 C_2 C_8 C_3 \\
&\quad + 180180 C_2^2 C_6 C_3 + 25740 C_2 C_4 C_7 + 286 C_{10} C_3 \\
&\quad + 17160 C_7 C_3^2 + 200200 C_4 C_3^3 + 36036 C_3 C_5^2 \\
&\quad + 45045 C_4^2 C_5 + 1287 C_5 C_8 + 1716 C_6 C_7 + 2145 C_9 C_2^2 \\
&\quad + 715 C_4 C_9 + 270270 C_2^2 C_4 C_5 \\
C_{14} &= M_{14} - 72072 C_2 C_5 C_7 + 45045 C_2 C_4 C_8 + 91 C_{12} C_2 \\
&\quad + 840840 C_2 C_6 C_3^2 + 20020 C_2 C_9 C_3 + 630630 C_2^2 C_4 C_6 \\
&\quad + 6306300 C_2^2 C_4 C_3^2 + 2522520 C_2^3 C_5 C_3 + 1716 C_7^2 \\
&\quad + 168168 C_3 C_5 C_6 + 120120 C_3 C_4 C_7 + 45045 C_8 C_2^3 \\
&\quad + 3003 C_{10} C_2^2 + 315315 C_6 C_2^4 + 525525 C_2 C_4^3 \\
&\quad + 945945 C_4 C_2^5 + 42042 C_2 C_6^2 + 1401400 C_2 C_3^4 \\
&\quad + 378378 C_2^2 C_5^2 + 30030 C_8 C_3^2 + 560560 C_5 C_3^3 \\
&\quad + 1051050 C_3^2 C_4^2 + 1001 C_4 C_{10} + 105105 C_4^2 C_6 \\
&\quad + 2002 C_5 C_9 + 3003 C_6 C_8 + 2522520 C_2 C_3 C_4 C_5 \\
&\quad + 3153150 C_2^4 C_3^2 + 1576575 C_2^3 C_4^2 + 364 C_{11} C_3 \\
&\quad + 360360 C_2^2 C_7 C_3 + 135135 C_2^7 + 126126 C_4 C_5^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{15} = & M_{15} - 180180 C_2 C_6 C_7 + 135135 C_2 C_5 C_8 + 105 C_{13} C_2 \\ & + 4729725 C_2 C_4^2 C_5 + 75075 C_2 C_4 C_9 + 126126 C_5^3 \\ & + 21021000 C_2 C_4 C_3^3 + 1801800 C_2 C_7 C_3^2 + 455 C_{12} C_3 \\ & + 30030 C_2 C_{10} C_3 + 1351350 C_2^2 C_4 C_7 + 2837835 C_5 C_2^5 \\ & + 6306300 C_2^3 C_6 C_3 + 675675 C_2^2 C_8 C_3 + 6435 C_7 C_8 \\ & + 23648625 C_2^2 C_3 C_4^2 + 9459450 C_2^3 C_4 C_5 \\ & + 18918900 C_2^2 C_5 C_3^2 + 1891890 C_2^2 C_5 C_6 \\ & + 23648625 C_2^4 C_4 C_3 + 630630 C_4 C_5 C_6 + 5005 C_6 C_9 \\ & + 225225 C_3 C_4 C_8 + 6306300 C_3^2 C_4 C_5 + 675675 C_7 C_2^4 \\ & + 75075 C_9 C_2^3 + 4095 C_{11} C_2^2 + 50050 C_9 C_3^2 \\ & + 2627625 C_3 C_4^3 + 1401400 C_6 C_3^3 + 210210 C_3 C_6^2 \\ & + 1365 C_4 C_{11} + 21021000 C_2^3 C_3^3 + 225225 C_4^2 C_7 \\ & + 3003 C_5 C_{10} + 6306300 C_2 C_3 C_4 C_6 + 4729725 C_2^6 C_3 \\ & + 1401400 C_3^5 + 360360 C_3 C_5 C_7 + 3783780 C_2 C_3 C_5^2 \end{aligned}$$

Der Auszählalgorithmus

Im Folgenden ist das Kernstück der Auswertung zeitaufgelöster Messsignale abgedruckt, der Auszählalgorithmus:

```
int counttrace(long * Signal, long size,
  float * counted, long * tau1, long * tau2)
{
  // *Signal:      Messsignal
  // size:         Anzahl der Messpunkte
  // *counted      Zielarray für das ausgewertete Signal
  // *tau1 / *tau2: Zielarrays für die Tunnelzeiten

  struct PUNKT Cur;
  struct PUNKT Last;
  struct PUNKT LastLast;

  Last.Avg   = 0;    // Summe der Mittelung
  Last.N     = 0;    // Punktzahl der gemittelten Messwerte
  Last.State = 0;    // Niveau

  Cur       = Last; // Alle struct auf Null setzen
  LastLast = Last;

  long Events = 0; // Events auf Null setzen
  long Events2 = 0; // Events2 auf Null setzen
  float MinN = 3; // Minimale Abschnittslänge für
                  // Vorausmittelung bei neuem Sprung

  int PointState; // Niveau des aktuellen Punkts
  num_tau = 0;

  // Übergebenes Signal und die daraus gewonnenen Größen
  long *Signal_Dif = new long[size];
  long *Signal_Noise = new long[size];
  long *Signal_State = new long[size];
  long *Signal_Max = new long[size];
```

7 Anhang

```
// Zähler
long i = 0;
long i_Avg = 0;
long DeltaSignal = 0;
long j=0;

int tausorte=0;

// Vorsummiervariable und Zähler des letzten und aktuellen Steps
long Signaltest, LastStep = 0, CurStep = 0;

////////// S I G N A L   D U R C H L A U F E N
//////////

PointState = GetState(Signal[0]);

while(GetState(Signal[i]) < 0 && i < size)
{
    i++;
    PointState = GetState(Signal[i]);
}

Last.State = PointState;
Cur.State = PointState;

for(i=0; i<size; i++)           // die Auszähl Schleife beginnt
{
    // Die aktuelle Vermittlungslänge wird in Signal_Diff eingetragen.
    Signal_Dif[i] = MinN;

    PointState = GetState(Signal[i]);

    // Wenn der aktuelle Datenpunkt außerhalb der beiden Niveaugrenzen
    // liegt, dann wird er ignoriert.
    if (PointState > 0)
    {
        // Sonst wird überprüft ob der State sich geändert hat
```

```

if(PointState == Cur.State)
{
    // ...dann wird Cur.Avg und Cur.N aufaddiert
    Cur.Avg += Signal[i];
    Cur.N += 1;
    // Da der Punkt nicht als Rauschen gezählt werden soll,
    // wird die Vormittellänge ein wenig verringert
    MinN -= 0.5;
    // Sollte diese schon unter 3 gefallen sein,
    // dann bleibt sie fix bei 2
    if (MinN < 4) MinN = 3;
}
// Wenn der State nicht der gleiche war,
// dann liegt scheinbar eine Stufe vor...
else
{
    Signaltest = 0;
    // Nun wird überprüft ob es wirklich eine Stufe ist
    for(j=i; j<i+MinN; j+=1)
    {
        // Die nächsten MinN Punkte aufsummieren
        Signaltest += Signal[j];
    }
    // Ist der Mittelwert der nächsten MinN Punkte denn
    // auch im neuen State?
    if(GetState(Signaltest/MinN) == PointState)
    {
        Last.State = Cur.State;
        LastStep = CurStep;
        // Der letzte Step wird nun vergessen und
        // der aktuell gefundene wird der LastStep
        CurStep = i;
        Last = Cur;

        if (Last.N != 0)
        {
            float tempcount = float(Last.Avg)/float(Last.N);
            for(int k=0; k<CurStep-LastStep; k++)

```

```
{
    //Mittelwert in Array eintragen
    counted[LastStep+k] = tempcount/1000;
}
}

// Ist der Sprung nach oben?
if (Last.State < PointState )
{
    // der Abstand seit dem letzten Sprung wird eingefügt
    tau1[num_tau] = CurStep-LastStep;
    // und Null bei tau2
    tau2[num_tau] = 0;
    // Events hochzählen
    Events += 1;
    // tau hochzählen
    num_tau += 1;

    tausorte=1;
}

// Wenn das nicht nach oben ging, muß es nach unten
// gegangen sein, also ein Wert für Tau_in
else
{
    tau2[num_tau] = CurStep-LastStep;
    tau1[num_tau] = 0;
    Events2 += 1;
    num_tau += 1;
    tausorte=2;
}

// Der letzte Step wird nun vergessen und der aktuell
// gefundene wird der LastStep
LastStep = CurStep;

// Die Position des Letzten wird in den Vorletzten übertragen
LastLast = Last;
```

```

    // Die Position des gerade Gefundenen ist nun in Last vermerkt
    // Dann müssen die Variablen für die neue aktuelle
    // Mittelung wieder auf Null
    Cur.Avg    = 0;
    Cur.N      = 0;
    Cur.State  = PointState;

    }
}
}
// der Punkt liegt nicht in einem Intervall...
// dann ist er Rauschen
else
{
    // darum wird MinN um zwei angehoben,
    // um dem Rauschen entgegenzuwirken
    MinN += 2;
    // Sollte der Wert schon bei 25 liegen,
    // dann bleibt er da und wird nicht noch höher
    if (MinN > 10) MinN = 10;
}
}

////////// E N D K O R R E K T U R //////////
// Für den letzten Abschnitt muß noch etwas eingetragen werden

float tempcount = float>Last.Avg)/float>Last.N);
for(int k=0; k<CurStep-LastStep; k++)
{
    counted[LastStep+k] = tempcount/1000;
}
tempcount = float(Cur.Avg)/float(Cur.N);
for(int k=0; k<size-CurStep; k++)
{
    counted[CurStep+k] = tempcount/1000;
}
if (tausorte == 1)

```

7 Anhang

```
{
    tau2[num_tau] = size-CurStep; tau1[num_tau]=0; num_tau += 1;
}
if (tausorte == 2)
{
    tau1[num_tau] = size-CurStep; tau2[num_tau]=0; num_tau += 1;
}

delete [] Signal_Dif;
delete [] Signal_Noise;
delete [] Signal_State;
delete [] Signal_Max;

return Events;
}
```

Ein numerisches Experiment zur Abschätzung der experimentellen Grenzen für die Messung hoher Kumulanten

Die Messungen zu Zeit- und Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten legen Überlegungen nahe, inwieweit höhere experimentell bestimmte Kumulanten mit theoretischen Betrachtungen im *zero-frequency-limit* verglichen werden können. Anders formuliert könnte man fragen: Bis zu welcher Kumulante kann ein Experiment das *zero-frequency-limit* erreichen. Die Fehlerbetrachtung in Abbildung 5.19 zeigte bereits, dass die Größe der notwendigen Stichprobe sowohl mit der Ordnung der Kumulante als auch mit der Länge des Zeitintervalls t_0 stark zunimmt.

Um eine Vorstellung von den experimentellen Voraussetzungen und Möglichkeiten zu erhalten, wurden in einem numerischen Experiment für eine feste Gesamttunnelrate $\Gamma_{\text{tot}}=1500$ Hz kontinuierlich der Asymmetriefaktor von -1 zu 1 verschoben. Für jeden Zwischenwert wurden 500000 Tunnelereignisse simuliert und ein Satz Kumulanten samt ihrer Zeitabhängigkeit berechnet. Die Ergebnisse sind in Abbildung 7.1 zu sehen. Für die normierten Kumulanten bis C_{11} ist für einen Zeitraum bis 3 ms die Zeitabhängigkeit für Asymmetriewerte zwischen -1 und 1 dargestellt.

Die in Abschnitt 5.6.2 beschriebenen Phänomene lassen sich in der Abbildung gut identifizieren. Für Kumulanten niedriger Ordnung erhält man zunächst keine Oszillationen, weder in Zeitrichtung, noch in Abhängigkeit von der Symmetrie. Ab der vierten Kumulante prägt sich für beide Richtungen die erste Oszillation aus. Die Oszillationen manifestieren sich in dieser Darstellung als Wechsel von roten und blauen Bereichen, wobei Blau einem Maximum und Rot einem Minimum entspricht. Bei steigender Ordnung werden immer mehr Oszillationsperioden sichtbar und die Amplitude der Oszillationen nimmt deutlich

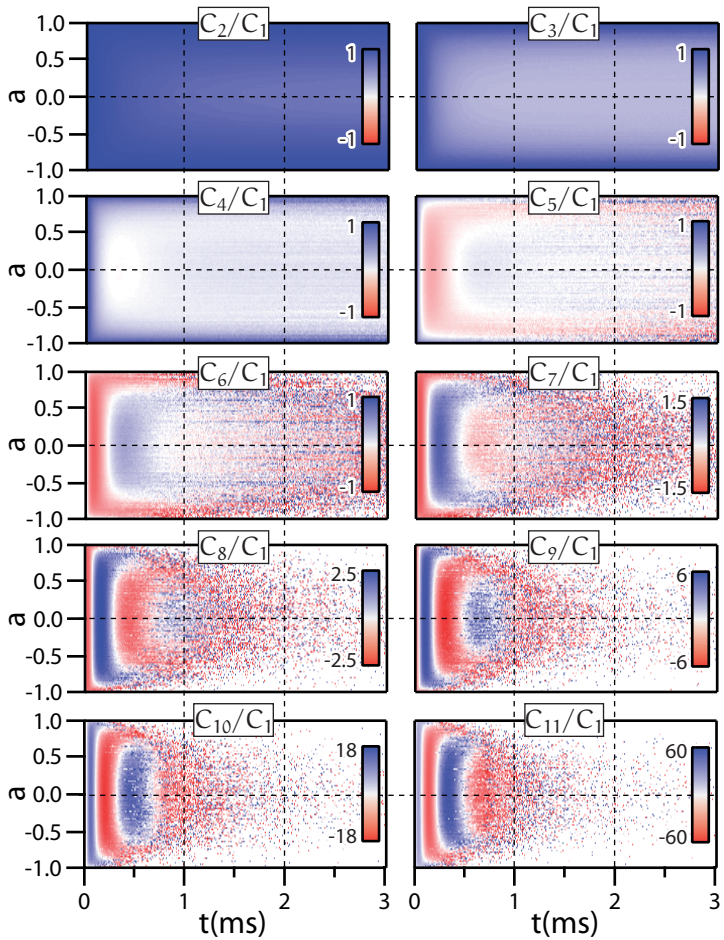


Abbildung 7.1:

Zeit- und Symmetrieabhängigkeit der Kumulanten C_2 bis C_{11} für ein numerisches Experiment mit 500000 Ereignissen. Für die Simulation wurde eine konstante Gesamttunnelrate $\Gamma_{\text{tot}}=1500$ Hz angesetzt.

zu. Man erkennt auch, dass der Plateaubereich nahe der Symmetrie erst für Zeiten deutlich über 1 ms auftritt. Da die Tunnelrate Γ_{tot} konstant gehalten wurde, liegt eine verhältnismäßig deutliche Trennung beider Oszillationen vor. Im Experiment trat durch die Veränderung der Tunnelraten ein sanfterer Übergang zwischen Zeit- und Symmetrieoszillationen auf.

Für die Möglichkeiten der experimentellen Untersuchungen kann man aus den Simulationen mehrere Informationen ableiten. Zum einen ist festzustellen, dass sich beide Phänomene auch mit verhältnismäßig überschaubarer Stichprobe darstellen lassen. Das numerische Experiment entspricht einer Messung von etwa fünf bis sechs Minuten QPC-Signal für 100 verschiedene Einstellungen der Symmetrie, also einer Messzeit von insgesamt etwa 10 Stunden. Die untersuchten QD-Systeme sind im Bereich dieser Zeitspannen hinreichend stabil, um eine solche Messung zu realisieren. Allerdings erkennt man auch deutlich die Begrenzungen, die die limitierte Stichprobe von 500000 Ereignissen steckt. Das *zero-frequency* Limit lässt sich konservativ betrachtet nur bis zur fünften Kumulante bestimmen, im Falle relativ symmetrischer Tunnelraten auch noch für die sechste und evtl. siebte Kumulante. An der zunehmenden statistischen Streuung der hohen Kumulanten erkennt man deutlich, dass erheblich größere Stichproben notwendig werden, um zuverlässig das Langzeitverhalten abzubilden. Diesem Problem durch längere Messzeiten entgegenzutreten ist spätestens für Kumulanten jenseits der zehnten Ordnung ein zum Scheitern verurteiltes Unterfangen. Die Simulationsergebnisse unterstreichen also deutlich die Notwendigkeit, das oszillative Verhalten in die theoretischen Betrachtungen hoher Kumulanten aufzunehmen.

Literaturverzeichnis

- [1] C. J. Muller, J. M. van Ruitenbeek und L. J. de Jongh, *Experimental observation of the transition from weak link to tunnel junction*, Physica C: Superconductivity **191**, 485 (1992). 20
- [2] M. A. Reed, C. Zhou, C. J. Muller, T. P. Burgin und J. M. Tour, *Conductance of a Molecular Junction*, Science **278**, 252 (1997). 20
- [3] S. Mantl und H. L. Bay, *New method for epitaxial heterostructure layer growth*, Applied Physics Letters **61**, 267 (1992). 20
- [4] R. Dingle, H. L. Störmer, A. C. Gossard und W. Wiegmann, *Electron mobilities in modulation-doped semiconductor heterojunction superlattices*, Appl. Phys. Lett. **33**, 665 (1978). 20
- [5] D. Meschede, C. Gerthsen und H. Vogel, *Gerthsen Physik* (Springer-Verlag, 2002). 20
- [6] L. de Broglie, *Waves and Quanta*, C.R. Acad. Sci. **177**, 507 (1923). 20
- [7] L. P. Kouwenhoven, C. M. Marcus, P. L. McEuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt und N. S. Wingreen, *Electron Transport in Quantum Dots*, Mesoscopic Electron Transport, NATO Advanced Study Institute Series E: Applied Sciences **345**, 105 (1997). 20, 21

- [8] S. Tarucha, D. G. Austing, T. Honda, R. J. van der Hage und L. P. Kouwenhoven, *Shell Filling and Spin Effects in a Few Electron Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3613 (1996). 20, 21
- [9] L. Kouwenhoven und C. Marcus, *Quantum dots*, Physics World **June**, 35 (1998). 20, 21
- [10] R. H. Blick, R. J. Haug, J. Weis, D. Pfannkuche, K. v. Klitzing und K. Eberl, *Single-electron tunneling through a double quantum dot: The artificial molecule*, Phys. Rev. B **53**, 7899 (1996). 20
- [11] S. M. Sze, *Semiconductor Devices - Physics and Technology* (John Wiley & Sons, 1985). 20, 212
- [12] T. Heinzel, *Mesoscopic Electronics in Solid State Nanostructures* (Wiley-VCH, 2003).
- [13] H. Beneking, *Halbleitertechnologie - Einführung in die Prozesstechnik von Silizium und III-V-Verbindungen* (B. G. Teubner Stuttgart, 1991).
- [14] M. Köhler, *Nanotechnologie - Eine Einführung in die Nanotechnik* (Wiley-VCH, 2001). 20
- [15] G. Binnig, C. F. Quate und C. Gerber, *Atomic force microscope*, Phys. Rev. Lett. **56**, 930 (1986). 20
- [16] T. A. Fulton und G. J. Dolan, *Observation of single-electron charging effects in small tunnel junctions*, Phys. Rev. Lett. **59**, 109 (1987). 21
- [17] R. C. Ashoori, H. L. Stormer, J. S. Weiner, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin und K. W. West, *N-Electron Ground State Energies of a Quantum Dot in Magnetic Field*, Phys. Rev. Lett. **71**, 613 (1993). 21

- [18] M. Ciorga, A. S. Sachrajda, P. Hawrylak, C. Gould, P. Zawadzki, S. Jullian, Y. Feng und Z. Wasilewski, *Addition spectrum of a lateral dot from Coulomb and spin-blockade spectroscopy*, Phys. Rev. B **61**, R16315 (2000). 21, 131, 137
- [19] M. Field, C. G. Smith, M. Pepper, D. A. Ritchie, J. E. F. Frost, G. A. C. Jones und D. G. Hasko, *Measurements of Coulomb blockade with a noninvasive voltage probe*, Phys. Rev. Lett. **70**, 1311 (1993). 21, 84
- [20] R. Hanson, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen, L. H. W. van Beveren, J. M. Elzerman und L. P. Kouwenhoven, *Zeeman Energy and Spin Relaxation in a One-Electron Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **91**, 196802 (2003). 21
- [21] J. M. Elzerman, R. Hanson, J. S. Greidanus, L. H. Willems van Beveren, S. De Franceschi, L. M. K. Vandersypen, S. Tarucha und L. P. Kouwenhoven, *Few-electron quantum dot circuit with integrated charge read out*, Phys. Rev. B **67**, 161308 (2003). 21, 84, 87
- [22] J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. W. van Beveren, L. M. K. Vandersypen und L. P. Kouwenhoven, *Excited-state spectroscopy on a nearly closed quantum dot via charge detection*, Applied Physics Letters **84**, 4617 (2004). 21, 87
- [23] J. R. Petta, A. C. Johnson, C. M. Marcus, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Manipulation of a Single Charge in a Double Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **93**, 186802 (2004). 21
- [24] L. DiCarlo, H. J. Lynch, A. C. Johnson, L. I. Childress, K. Crockett, C. M. Marcus, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Differential Charge Sensing and Charge Delocalization in a Tunable Double Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **92**, 226801 (2004). 21

- [25] A. Muhle, W. Wegscheider und R. J. Haug, *Quantum dots formed in a GaAs/AlGaAs quantum ring*, Applied Physics Letters **92**, 013126 (2008). 21
- [26] M. C. Rogge und R. J. Haug, *Two-path transport measurements on a triple quantum dot*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **77**, 193306 (2008). 87, 191, 196
- [27] M. C. Rogge und R. J. Haug, *Noninvasive detection of molecular bonds in quantum dots*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **78**, 153310 (2008). 21, 191
- [28] W. Lu, Z. Ji, L. Pfeiffer, K. W. West und A. J. Rimberg, *Real-time detection of electron tunnelling in a quantum dot*, Nature **423**, 422 (2003). 22, 151
- [29] R. Schleser, E. Ruh, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Time-resolved detection of individual electrons in a quantum dot*, Applied Physics Letters **85**, 2005 (2004). 22, 84
- [30] L. M. K. Vandersypen, J. M. Elzerman, R. N. Schouten, L. H. W. van Beveren, R. Hanson und L. P. Kouwenhoven, *Real-time detection of single-electron tunneling using a quantum point contact*, Applied Physics Letters **85**, 4394 (2004). 22, 151
- [31] J. M. Elzerman, R. Hanson, L. H. Willems van Beveren, B. Witkamp, L. M. K. Vandersypen und L. P. Kouwenhoven, *Single-shot read-out of an individual electron spin in a quantum dot*, Nature **430**, 431 (2004). 22, 84
- [32] J. R. Petta, A. C. Johnson, J. M. Taylor, E. A. Laird, A. Yacoby, M. D. Lukin, C. M. Marcus, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots*, Science **309**, 2180 (2005).

- [33] F. H. L. Koppens, C. Buizert, K. J. Tielrooij, I. T. Vink, K. C. Nowack, T. Meunier, L. P. Kouwenhoven und L. M. K. Vandersypen, *Driven coherent oscillations of a single electron spin in a quantum dot*, Nature **442**, 766 (2006). 22
- [34] T. Fujisawa, T. Hayashi, Y. Hirayama, H. D. Cheong und Y. H. Jeong, *Electron counting of single-electron tunneling current*, Applied Physics Letters **84**, 2343 (2004). 22, 151
- [35] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Counting Statistics of Single Electron Transport in a Quantum Dot*, Physical Review Letters **96**, 076605 (2006). 22, 152
- [36] S. Gustavsson, M. Studer, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Detecting single-electron tunneling involving virtual processes in real time*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **78**, 155309 (2008). 22
- [37] S. Gustavsson, R. Leturcq, M. Studer, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Time-Resolved Detection of Single-Electron Interference*, Nano Letters **8**, 2547 (2008). 22
- [38] T. Ando, A. B. Fowler und F. Stern, *Electronic properties of two-dimensional systems*, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982). 26
- [39] F. Schwabl, *Quantenmechanik*, 4. Auflage (Springer-Verlag, 1993). 28, 66
- [40] E. Hall, *On a New Action of the Magnet on Electric Currents*, Amer. Jour. Math. **2**, 287 (1879). 30
- [41] K. v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980). 31

- [42] W. d. H. L. Shubnikov, Leiden Comm. **207 a**, 1030 (1930). 31
- [43] C. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik.*, 8. (Oldenbourg, 1989). 33
- [44] *The Quantum Hall Effekt*, Herausgeber: R. Prange und S. M. Girvin (Springer-Verlag, New York, 1990). 33, 35
- [45] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii und L. I. Glazman, *Electrostatics of edge channels*, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992). 36
- [46] R. Landauer, IBM J. Res. Dev. **1**, 223 (1957). 37
- [47] R. Landauer, IBM J. Res. Dev **32**, 306 (1988). 37
- [48] M. Büttiker, *Four-Terminal Phase-Coherent Conductance*, Phys. Rev. Lett. **57**, 1761 (1986). 37
- [49] *Nanowires*, Herausgeber: P. Serena und N. Garcia (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997). 37
- [50] R. Landauer, *Conductance determined by transmission: probes and quantised constriction resistance*, Journal of Physics: Condensed Matter **1**, 8099 (1989).
- [51] Y. Imry und R. Landauer, *Conductance viewed as transmission*, Rev. Mod. Phys. **71**, S306 (1999). 37, 43
- [52] R. J. Haug, *Edge-state transport and its experimental consequences in high magnetic fields*, Semicond. Sci. Technol. **8**, 131 (1993). 38
- [53] R. J. Haug, *Quantum Hall effect experiments*, Quantum Transport In Semiconductor Submicron Structures **326**, 21 (1996). 38

- [54] L. I. Glazman und M. Jonson, *Cross-over to global adiabatics in 2D ballistic transport*, Journal of Physics: Condensed Matter **1**, 5547 (1989). 44
- [55] M. Büttiker, *Quantized transmission of a saddle-point constriction*, Phys. Rev. B **41**, 7906 (1990). 45
- [56] E. Tekman und S. Ciraci, *Theoretical study of transport through a quantum point contact*, Phys. Rev. B **43**, 7145 (1991). 46
- [57] P. F. Bagwell und T. P. Orlando, *Landauer's conductance formula and its generalization to finite voltages*, Phys. Rev. B **40**, 1456 (1989). 46
- [58] J. Regul, *Eindimensionaler Elektronentransport in Halbleiterheterostrukturen: Quantenpunktkontakt und Randkanäle*, Dissertation, Universität Hannover, 2003. 47, 48
- [59] M. Büttiker, *Quantized transmission of a saddle-point constriction*, Phys. Rev. B **41**, 7906 (1990). 47
- [60] B. J. van Wees, E. M. M. Willems, L. P. Kouwenhoven, C. J. P. M. Harmans, J. G. Williamson, C. T. Foxon und J. J. Harris, *Suppression of Shubnikov - de Haas resistance oscillations due to selective population or detection of Landau levels: Absence of inter-Landau-level scattering on macroscopic length scales*, Phys. Rev. B **39**, 8066 (1989). 48
- [61] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, E. M. M. Willems, C. J. P. M. Harmans, J. E. Mooij, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson und C. T. Foxon, *Quantum ballistic and adiabatic electron transport studied with quantum point contacts*, Phys. Rev. B **43**, 12431 (1991). 48

- [62] L. Jacak, P. Hawrylak und A. Wojs, *Quantum dots* (Springer, Berlin, 1998). 50
- [63] V. Fock, *Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **47**, 446 (1928). 50
- [64] C. G. Darwin, *The Diamagnetism of the Free Electron.*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **27**, 86 (1931). 50
- [65] C. W. J. Beenakker, *Theory of Coulomb-blockade oscillations in the conductance of a quantum dot*, Phys. Rev. B **44**, 1646 (1991). 52
- [66] L. P. Kouwenhoven, D. G. Austing und S. Tarucha, *Few-electron quantum dots*, Reports on Progress in Physics **64**, 701 (2001).
- [67] M. A. Kastner, *The single-electron transistor*, Rev. Mod. Phys. **64**, 849 (1992). 52
- [68] G. Wentzel, *Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellenmechanik*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **38**, 518 (1926). 67
- [69] L. Brillouin, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger: une méthode générale de résolution par approximations successives*, Comptes Rendus de l'Academie des Sciences **183**, 24 (1926).
- [70] H. A. Kramers, *Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung*, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei **39**, 828 (1926). 67
- [71] L. S. Levitov und G. B. Lesovik, *Charge distribution in quantum shot noise*, JETP Lett. **58**, 230 (1993). 68

- [72] L. S. Levitov, H. Lee und G. B. Lesovik, *Electron counting statistics and coherent states of electric current*, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996). 68
- [73] B. Reulet, J. Senzier und D. E. Prober, *Environmental Effects in the Third Moment of Voltage Fluctuations in a Tunnel Junction*, Phys. Rev. Lett. **91**, 196601 (2003). 71
- [74] Y. Bomze, G. Gershon, D. Shovkun, L. S. Levitov und M. Reznikov, *Measurement of Counting Statistics of Electron Transport in a Tunnel Junction*, Physical Review Letters **95**, 176601 (2005). 71
- [75] *Handbook of Mathematical Functions*, Herausgeber: M. Abramowitz und I. A. Stegun (Dover Publications, New York, 1972). 72
- [76] M. J. M. de Jong, *Distribution of transmitted charge through a double-barrier junction*, Phys. Rev. B **54**, 8144 (1996). 73
- [77] *Quantum Noise in Mesoscopic Physics*, Herausgeber: Y. V. Nazarov (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2003). 73
- [78] D. A. Bagrets und Y. V. Nazarov, *Full counting statistics of charge transfer in Coulomb blockade systems*, Phys. Rev. B **67**, 085316 (2003). 73, 74, 181
- [79] T. Brandes, *Waiting times and noise in single particle transport*, Annalen der Physik **17**, 477 (2008). 77
- [80] U. F. Keyser, H. W. Schumacher, U. Zeitler, R. J. Haug und K. Eberl, *Fabrication of a single-electron transistor by current-controlled local oxidation of a two-dimensional electron system*, Applied Physics Letters **76**, 457 (2000). 80

- [81] R. Held, T. Vancura, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland und W. Wegscheider, *In-plane gates and nanostructures fabricated by direct oxidation of semiconductor heterostructures with an atomic force microscope*, Applied Physics Letters **73**, 262 (1998). 80
- [82] L. DiCarlo, H. J. Lynch, A. C. Johnson, L. I. Childress, K. Crockett, C. M. Marcus, M. P. Hanson und A. C. Gossard, *Differential Charge Sensing and Charge Delocalization in a Tunable Double Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **92**, 226801 (2004). 84
- [83] S. Tarucha, D. G. Austing, T. Honda, R. J. van der Hage und L. P. Kouwenhoven, *Shell Filling and Spin Effects in a Few Electron Quantum Dot*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3613 (1996).
- [84] J. Petta, A. Johnson, J. Taylor, E. Laird, A. Yacoby, M. Lukin, C. Marcus, M. P. Hanson und A. Gossard, *Coherent Manipulation of Coupled Electron Spins in Semiconductor Quantum Dots*, Science **309**, 2180 (2005). 84
- [85] R. Nemetudi, N. J. Curson, N. J. Appleyard, D. A. Ritchie und G. A. C. Jones, *Modification of a shallow 2DEG by AFM lithography*, Microelectron. Eng. **57-58**, 967 (2001). 84
- [86] M. H. Devoret und R. J. Schoelkopf, *Amplifying quantum signals with the single-electron transistor*, Nature **406**, 1039 (2000). 84
- [87] A. M. van den Brink, *Quantum-efficient charge detection using a single-electron transistor*, EPL (Europhysics Letters) **58**, 562 (2002). 84
- [88] P. A. Temple, *An introduction to phase-sensitive amplifiers: An inexpensive student instrument*, American Journal of Physics **43**, 801 (1975). 92

- [89] NI LabVIEW, <http://www.ni.com/labview/>, [Online]. 92
- [90] V. S. Khrapai, S. Ludwig, J. P. Kotthaus, H. P. Tranitz und W. Wegscheider, *Double-Dot Quantum Ratchet Driven by an Independently Biased Quantum Point Contact*, Physical Review Letters **97**, 176803 (2006). 106, 201, 202
- [91] S. Gustavsson, M. Studer, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Frequency-Selective Single-Photon Detection Using a Double Quantum Dot*, Physical Review Letters **99**, 206804 (2007). 107, 202, 205
- [92] P. L. McEuen, E. B. Foxman, J. Kinaret, U. Meirav, M. A. Kastner, N. S. Wingreen und S. J. Wind, *Self-consistent addition spectrum of a Coulomb island in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **45**, 11419 (1992). 131, 136
- [93] A. Fuhrer, S. Lüscher, T. Heinzel, K. Ensslin, W. Wegscheider und M. Bichler, *Transport properties of quantum dots with steep walls*, Phys. Rev. B **63**, 125309 (2001). 131
- [94] D. Weinmann, W. Häusler und B. Kramer, *Spin Blockades in Linear and Nonlinear Transport through Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett. **74**, 984 (1995). 138
- [95] O. Naaman und J. Aumentado, *Poisson Transition Rates from Time-Domain Measurements with a Finite Bandwidth*, Physical Review Letters **96**, 100201 (2006). 154
- [96] S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn, K. Ensslin, M. Reinwald und W. Wegscheider, *Measurements of higher-order noise correlations in a quantum dot with a finite bandwidth detector*, Phys. Rev. B **75**, 075314 (2007). 158, 180, 188

- [97] E. V. Sukhorukov, A. N. Jordan, S. Gustavsson, R. Leturcq, T. Ihn und K. Ensslin, *Conditional statistics of electron transport in interacting nanoscale conductors*, Nat Phys **3**, 243 (2007). 158
- [98] L. Y. Chen und C. S. Ting, *Coulomb staircase in the I-V characteristic of an ultrasmall double-barrier resonant-tunneling structure*, Phys. Rev. B **44**, 5916 (1991). 161
- [99] W. Belzig, *Full counting statistics of super-Poissonian shot noise in multilevel quantum dots*, Phys. Rev. B **71**, 161301 (2005). 174
- [100] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, P. Studerus, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll und A. C. Gossard, *Counting statistics and super-Poissonian noise in a quantum dot: Time-resolved measurements of electron transport*, Phys. Rev. B **74**, 195305 (2006). 174
- [101] C. Flindt, T. Novotný, A. Braggio, M. Sasseti und A.-P. Jauho, *Counting Statistics of Non-Markovian Quantum Stochastic Processes*, Phys. Rev. Lett. **100**, 150601 (2008). 180
- [102] C. Flindt, T. Novotný und A.-P. Jauho, *Full counting statistics of nano-electromechanical systems*, Europhysics Letters **69**, 475 (2005). 181
- [103] A. Braggio, J. König und R. Fazio, *Full Counting Statistics in Strongly Interacting Systems: Non-Markovian Effects*, Physical Review Letters **96**, 026805 (2006). 181
- [104] M. V. Berry, *Universal oscillations of high derivatives*, Proc. R. Soc. A **461**, 1735 (2005). 186
- [105] G. E. Andrews, R. Askey und R. Roy, *Special Functions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1999). 186

- [106] A. Savitzky und M. J. E. Golay, *Smoothing and Differentiation of Data by Simplified Least Squares Procedures*, Anal. Chem. **36**, 1627 (1964). 186
- [107] V. S. Khrapai, S. Ludwig, J. P. Kotthaus, H. P. Tranitz und W. Wegscheider, *Counterflow of Electrons in Two Isolated Quantum Point Contacts*, Physical Review Letters **99**, 096803 (2007). 201
- [108] T. Fujisawa, T. Hayashi, R. Tomita und Y. Hirayama, *Bidirectional Counting of Single Electrons*, Science **312**, 1634 (2006). 202
- [109] A. Ambrozy, *Electronic noise* (McGraw-Hill, 1982). 210
- [110] A. Nauen, I. Hapke-Wurst, F. Hohls, U. Zeitler, R. J. Haug und K. Pierz, *Shot noise in self-assembled InAs quantum dots*, Phys. Rev. B **66**, 161303 (2002). 220
- [111] A. Nauen, F. Hohls, J. Königmann und R. J. Haug, *Shot noise in resonant tunneling through a zero-dimensional state with a complex energy spectrum*, Phys. Rev. B **69**, 113316 (2004).
- [112] N. Maire, F. Hohls, T. Ludtke, K. Pierz und R. J. Haug, *Noise at a Fermi-edge singularity in self-assembled InAs quantum dots*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **75**, 233304 (2007). 220
- [113] Y. M. Blanter und M. Buttiker, *Shot noise in mesoscopic conductors*, Physics Reports **336**, 1 (2000). 220

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all denen meinen Dank aussprechen, die mich im Verlauf der letzten Jahre unterstützt haben und mit Rat und Tat zu dieser Arbeit beitrugen.

Mein besonderer Dank gilt Professor Dr. Rolf J. Haug für die Gelegenheit, in seiner Gruppe diese Dissertation anfertigen zu können, und für die gute und umsichtige Betreuung dieser Arbeit. Zu jeder Zeit konnte ich auf seine Unterstützung und seinen Rat bauen.

Auch danke ich Professor Dr. Michael Oestreich für die freundliche Übernahme des Korreferats und das Interesse an dieser Arbeit.

Ebenfalls besonderen Dank möchte ich Priv.-Doz. Dr. Frank Hohls aussprechen, der zu wirklich jeder Zeit ein Ohr für Sorgen und Nöte hatte und zudem immer mit Rat und mit Hilfe zur Stelle war. Seine Anregungen haben diese Arbeit stark befördert.

Außerdem danke ich Yvonne Griep, Klara Tetzlaff, Ronny Hüther, Hartmut Lehmann und Manfred Marquardt für ihre hervorragende Unterstützung in organisatorischen und technischen Belangen. Der Geduld, mit der sie den oft ungewöhnlichen Anforderungen des Institutsalltags begegnen, muss Dank und Anerkennung gezollt werden.

Des Weiteren möchte ich mich bei allen meinen aktuellen und ehemaligen Kollegen für die gute Zusammenarbeit und die angenehme Atmosphäre in der Abteilung bedanken. Speziell gilt mein Dank Niels Ubbelohde, der nicht nur einen Großteil der Verantwortung als Administrator von meinen Schultern genommen hat – was das Schreiben ungemein erleichterte – sondern auch sonst immer bereit war seine Hilfe anzubieten. Ebenso gilt besonderer Dank Dr. Alexander Mühle für die Hilfsbereitschaft, die er sich bewahrt hat, seit wir uns durch die Übungszettel im ersten Semester des Studiums gekämpft haben. Ebenso erwähnt werden müssen meine beiden anderen Kommilitonen und langjährigen Mitdoktoranden Niels Maire und Maximilian Rogge,

sowie meine ehemaligen Bürokollegen Patrick Barthold und Thomas Lüdtkke.

Wirklich großer Dank gilt natürlich meinen Eltern Ingrid und Gerhard Fricke, die mir den Weg hierher bereitet haben, sowie meinem Bruder Sebastian und meiner ganzen Familie. Und ganz besonders möchte ich Kira danken, für die liebevolle Unterstützung, das Vertrauen und den Rückhalt.

Lebenslauf

Name: Christian Fricke
Geburtsdatum: 08. Februar 1977
Geburtsort: Arolsen

1983 – 1987 Besuch der Grundschule Winsen (Aller)

1987 – 1989 Besuch der Orientierungsstufe am Schulzentrum
Burgstraße, Celle

1989 – 1996 Besuch des Gymnasiums Ernestinum, Celle
1996 Abschluss: Abitur

1996 – 1997 Wehrdienst

1997 – 2003 Studium der Physik an der Universität Hannover
Diplomarbeit:
„Zeitaufgelöste Transportmessungen
in Corbinogeometrie“
betreut von Prof. Dr. Rolf J. Haug

Januar 2003 Abschluss: Diplom

seit März 2003 Vorbereitung der Dissertation
am Institut für Festkörperphysik der
Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
bei Prof. Dr. Rolf J. Haug

Publikationen

Teile dieser Arbeit sind in folgenden Veröffentlichungen erschienen:

- *Noninvasive Detection of Charge Rearrangement in a Quantum Dot in High Magnetic Field*, C. Fricke, M.C. Rogge, B. Harke, M. Reinwald, W. Wegscheider, F. Hohls und R. J. Haug, *Physical Review B* **72**, 193302 (2005)
- *Coupling Symmetry of Quantum Dot States*, M.C. Rogge, B. Harke, C. Fricke, F. Hohls, M. Reinwald, W. Wegscheider und R. J. Haug, *Physical Review B* **72**, 233402 (2005)
- *Tuning of tunneling rates in quantum dots using a quantum point contact*, M. C. Rogge, C. Fricke, B. Harke, F. Hohls, R. J. Haug und W. Wegscheider, *Physica E* **34**, 500 (2006)
- *Noninvasive detection of charge rearrangement in a quantum dot*, C. Fricke, M. C. Rogge, B. Harke, M. Reinwald, W. Wegscheider, F. Hohls und R. J. Haug, *AIP Conference Proceedings* **893**, 793 (2007)
- *Bimodal counting statistics in single-electron tunneling through a quantum dot*, C. Fricke, F. Hohls, W. Wegscheider und R. J. Haug, *Physical Review B* **76**, 155307 (2007)
- *Single electron counting statistics for atto-Ampere currents through a semiconductor quantum dot*, F. Hohls, C. Fricke, W. Wegscheider und R. J. Haug, *AIP Conference Proceedings* **922**, 212 (2007)
- *Bimodal statistic on a single dot device*, C. Fricke, F. Hohls, W. Wegscheider und R. J. Haug, *Physica E* **40**, 1055 (2008)

-
- *Shot noise and electron counting measurements on coupled quantum dot systems*, F. Hohls, N. Maire, C. Fricke und R. J. Haug, J. Phys: Condens. Matter **20**, 454204 (2008)

Weitere Publikationen:

- *Transport spectroscopy of a quantum point contact created by an atomic force microscope*, C. Fricke, J. Regul, F. Hohls, D. Reuter, A.D. Wieck und R. J. Haug, Physica E **34**, 519 (2006)
- *Admittance of a quantum point contact*, F. Hohls, C. Fricke und R. J. Haug, Physica E **40**, 1760-1762, (2008)