

# **Über das Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung**

Von der Fakultät für Mathematik und Physik  
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

**Dipl.-Math. Carlheinz Kneisel**  
geboren am 21.12.1977 in Kassel

2007

Referent:  
Korreferent:  
Tag der Promotion:

Prof. Dr. J. Escher  
Prof. Dr. G. Simonett  
12. Juli 2007

# Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen meinen Kollegen des Instituts für Angewandte Mathematik der Leibniz Universität Hannover für vier Jahre einer sehr angenehmen und kollegialen Zusammenarbeit bedanken. Insbesondere gebührt mein Dank Herrn Professor Dr. J. Escher, der mir schon seit Beginn meiner Studienzeit Einblicke in viele interessante Gebiete der Mathematik ermöglicht hat und mir auch beim Verfassen meiner Dissertation viele fruchtbare Anregungen gegeben hat. Ich bedanke mich auch bei Herrn Prof. Dr. G. Simonett für viele hilfreiche Korrekturvorschläge. Schließlich möchte ich an dieser Stelle das freundschaftliche Verhältnis in unserer Arbeitsgruppe hervorheben, für das ich mich bei allen Beteiligten herzlich bedanken möchte.

Hannover im August 2007

Carlheinz Kneisel

## **Abstract**

The Stefan problem is a model of phase transition in solid-liquid systems. This accounts for heat diffusion in each phase and exchange of latent heat at the solid-liquid interface. Its strong formulation is a free boundary problem, since the interface evolution is a priori unknown. We study a one-phase Stefan problem with surface tension and kinetic undercooling and its quasisteady approximation. For the quasisteady problem, we show that classical solutions exist globally and tend to spheres exponentially fast, provided that they are close to a sphere initially. For the full problem we show existence of a unique maximal classical solution. Our analysis is based on the theory of abstract parabolic evolution equations, center manifold theory, and on maximal regularity.

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 35R35, 35B35.

KEYWORDS: Stefan problem, free boundary problem, center manifold.

## **Zusammenfassung**

Das Stefan-Problem ist ein Modell, welches den Phasenübergang in einem System aus Festkörper und Flüssigkeit beschreibt. Hierbei wird die Wärmeleitung in der festen und flüssigen Phase und der Austausch von latenter Wärme an der Grenzfläche berücksichtigt. In seiner starken Formulierung ist das Stefan-Problem ein freies Randwertproblem, denn die zeitliche Entwicklung der Grenzfläche ist a priori unbekannt. Wir studieren ein Einphasen Stefan Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung sowie dessen quasistationäre Approximation. Für das quasistationäre Problem zeigen wir, dass klassische Lösungen global existieren und mit exponentieller Geschwindigkeit gegen eine Sphäre konvergieren, falls das Anfangsdatum nahe genug bei einer Sphäre liegt. Für das volle Problem zeigen wir die Existenz einer maximalen klassischen Lösung und deren Eindeutigkeit. Unsere Analyse basiert auf der Theorie der abstrakten parabolischen Evolutionsgleichungen, der Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten und maximaler Regularität.

AMS SUBJECT CLASSIFICATION: 35R35, 35B35.

STICHWÖRTER: Stefan-Problem, freies Randwertproblem, Zentrumsmannigfaltigkeit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das quasistationäre Stefan-Problem</b>	<b>9</b>
2.1	Die Problemstellung . . . . .	9
2.2	Das transformierte System . . . . .	10
2.3	Die abstrakte Evolutionsgleichung . . . . .	19
2.4	Die Linearisierung . . . . .	24
2.5	Die Zentrumsmannigfaltigkeit . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Quasilineare parabolische Evolutionsgleichungen</b>	<b>40</b>
3.1	Funktionenräume und maximale Regularität . . . . .	40
3.2	Das Cauchy-Problem . . . . .	44
3.3	Der Fortsetzungs-Operator . . . . .	46
3.4	Der Existenzsatz . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Das volle Stefan-Problem</b>	<b>54</b>
4.1	Die Problemstellung . . . . .	54
4.2	Das transformierte System . . . . .	55
4.3	Die abstrakte Evolutionsgleichung . . . . .	58
4.4	Einige nützliche Abschätzungen . . . . .	58
4.5	Eine a priori Abschätzung . . . . .	60
4.6	Eindeutige Lösbarkeit des parabolischen Randwertproblems . . . . .	63
4.7	Eigenschaften des Lösungsoperators . . . . .	66
4.8	Die eindeutige Lösbarkeit des Stefan-Problems . . . . .	76

# Kapitel 1

## Einleitung

Das Stefan-Problem ist ein Modell, welches den Phasenübergang in einem System aus Festkörper und Flüssigkeit beschreibt. Das Stefan-Problem ist nach Josef Stefan (1835-1893), einem österreichischen Physiker, benannt. Stefan hat dieses Modell in seiner ursprünglichen Form zum Beschreiben von Eisbildung im Polarmeer entwickelt, vgl. [65] und [66]. Die zu Grunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten sind die Massenerhaltung und die Energieerhaltung. Um genauer auf die physikalische Situation eingehen zu können, bezeichnen wir mit  $\Omega$  ein Gebiet, welches eine flüssige und feste Phase enthält, etwa Wasser und Eis. Die Grenzfläche zwischen Eis und Wasser wollen wir mit  $\Gamma$  bezeichnen. Durch Schmelz- und Erstarrungsprozesse wird sich die Position und das Aussehen der Grenzfläche mit der Zeit ändern. Wir haben es also mit einem freien Randwertproblem zu tun. Die unbekanntes Größen beim Stefan-Problem sind die Temperaturen  $u^s$  und  $u^l$  in der festen bzw. flüssigen Phase und die Position der Grenzfläche  $\Gamma$ . Die physikalischen Gesetze ergeben, dass sowohl in der festen Phase  $\Omega^s$  als auch in der flüssigen Phase  $\Omega^l$  die Wärmeleitungsgleichungen

$$C_V^s \partial_t u^s - k^s \Delta u^s = 0 \quad \text{in } \Omega^s \quad (1.1)$$

$$C_V^l \partial_t u^l - k^l \Delta u^l = 0 \quad \text{in } \Omega^l \quad (1.2)$$

erfüllt sind. Hierbei ist  $C_V$  die Wärmekapazität pro Volumen (d.h. die Wärme, die gebraucht wird, um die Temperatur eines Einheitsvolumens des betrachteten Stoffes um ein Grad zu erhöhen) und  $k$  ist die Wärmeleitfähigkeit. Wegen der Energieerhaltung muss außerdem eine weitere Bedingung an der Grenzfläche erfüllt sein, die sogenannte *Stefan Bedingung*. Diese Bedingung besagt physikalisch, dass die Differenz der Wärmemengen, die auf Grund von Wärmeleitung

zwischen Flüssigkeit und Festkörper ausgetauscht werden, gleich der absorbierten bzw. abgegebenen latenten Wärme ist. Sei  $\nu$  ein Normalenvektor an  $\Gamma$ , der von der flüssigen zur festen Phase zeigt, und  $V$  die Normalgeschwindigkeit von  $\Gamma_t$  zu einem Zeitpunkt  $t > 0$ , die so normiert sei, dass sie positive Werte annimmt, wenn  $\Gamma_t$  das Gebiet  $\Omega^l(t)$  lokal vergrößert. Dann lautet die Stefanbedingung

$$k^s \partial_\nu u^s - k^l \partial_\nu u^l = LV,$$

wobei  $L$  die Dichte der latenten Wärme des Phasenübergangs ist (d.h. Wärme, die durch den Phasenübergang ausgetauscht wird, bezogen auf ein Einheitsvolumen). Schließlich nimmt man beim *klassischen* Stefan-Problem an, dass die Temperatur der Grenzfläche gleich der Schmelztemperatur ist, d.h. man verlangt

$$u^s = u^l = 0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.3)$$

Hierbei ist 0 die Schmelztemperatur. Man spricht in diesem Zusammenhang von einem *Zweiphasen Problem*. Ist die Temperatur in einer Phase, sagen wir in der festen, nahezu konstant, so erhält man das klassische *Einphasen* Stefan-Problem:

$$\begin{aligned} C_V^l \partial_t u^l - k^l \Delta u^l &= 0 && \text{in } \Omega(t) \\ LV + k^l \partial_\nu u^l &= 0 && \text{auf } \Gamma(t) \\ u^l &= 0 && \text{auf } \Gamma(t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Sowohl für das Einphasen- als auch für das Zweiphasenproblem müssen Anfangsdaten vorgeschrieben werden, auf die wir aber an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen.

Das Stefan-Problem wird seit über einem Jahrhundert in der mathematischen Literatur diskutiert. Für eine ausgiebige Darstellung möchten wir auf die Monografie [53] verweisen. Es ist bekannt, dass das klassische Stefan-Problem eine eindeutige globale schwache Lösung besitzt, siehe z.B. [29], [30], [42] und [46, Seiten 496-503]. Für die Existenz schwacher Lösungen spielt das Maximumprinzip eine wesentliche Rolle, wie in den Beweisen in [29] deutlich wird. Resultate über die Regularität von schwachen Lösungen für das mehrdimensionale klassische Einphasen Stefan-Problem können in [9], [10], [12], [31], [44], [45] und [51] gefunden werden. Resultate über die Regularität der schwachen Lösung des entsprechenden Zweiphasen Problems werden u.a. in [6], [7], [11], [18], [19], [55], [62] und [73] diskutiert. Klassische Lösungen des Stefan-Problems werden in [40] und [52] nachgewiesen. Schließlich wollen wir erwähnen, dass es beim

Stefan-Problem zu “blow-up” in endlicher Zeit kommen kann. In [5] wird eine Klassifikation der Singularitäten gegeben. Dafür wird eine Transformation in eine Semilineare Gleichung benutzt, deren Eigenschaften dann analysiert werden.

Vom physikalischen Standpunkt stellt sich die Frage, was die Ursache von Phasenübergängen ist. Man könnte geneigt sein, anzunehmen, dass der Übergang einer Phase in die andere durch die Abgabe bzw. Aufnahme von latenter Wärme an der Grenzfläche zwischen fester und flüssiger Phase verursacht wird. Aber diese Interpretation ist physikalisch nicht korrekt. Die Bedingung (1.3) ist ungenau, weil Phasenübergänge durch *Unterkühlung*, bzw. *Überhitzung* verursacht werden. *Chalmers* sagt: “If the interface is not at the equilibrium temperature, then either melting or solidification occurs, at a rate which increases with the difference between the actual temperature and the equilibrium temperature <sup>1</sup>”. *Visitin* geht sogar so weit diese Aussage umzukehren: “Phase transition occurs only if the solid-liquid interface is **not** at the equilibrium temperature <sup>2</sup>”. Details zur Modellierung finden sich z.B. in den Monografien [13], [39] und [69]. Anstelle der Bedingung (1.3) wollen wir im Folgenden die Bedingung

$$u^s = u^l = \sigma\kappa + \alpha V \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.5)$$

betrachten. Hierbei ist  $\sigma$  der Oberflächenspannungskoeffizient und  $\kappa$  steht für die mittlere Krümmung von  $\Gamma$ . Wir treffen die Vorzeichenkonvention, dass  $\kappa$  positiv sei, falls das Flüssigkeitsgebiet konvex ist. Außerdem ist  $\alpha$  eine positive Konstante, die in der Literatur als Relaxationskoeffizient bezeichnet wird. Im Grenzfall  $\alpha = 0$  erhält man aus (1.5) das sogenannte *Gibbs-Thomson* Gesetz

$$u^s = u^l = \sigma\kappa \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.6)$$

Im Grenzfall  $\sigma = 0$  erhält man

$$u^s = u^l = \alpha V \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.7)$$

und spricht von *thermischer Unterkühlung*. Wir bezeichnen daher das Stefan-Problem mit Bedingung (1.5) als Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung. Die Wahl des Vorzeichens in den Bedingungen (1.5), (1.6) und (1.7) unterscheidet sich oft in der Literatur, was zu Verwirrung führen kann. Man erhält z.B. ein anderes Vorzeichen, wenn man statt der Normalen  $\nu$  die

---

<sup>1</sup>Aus [13, Seite 129].

<sup>2</sup>Aus [69, Seite 124].

Normale  $-\nu$  benutzt, bzw. wenn man das Vorzeichen von  $\kappa$  anders definiert. Daher wollen wir die Bedingungen (1.6) und (1.7), speziell im Hinblick auf die Wahl des Vorzeichens, physikalisch diskutieren. Auf molekularer Ebene findet an der Grenzfläche eine ständige Veränderung statt. Einige Moleküle lösen sich aus dem Kristall und werden Teil der Flüssigkeit. Andere Moleküle aus der Flüssigkeit kristallisieren an der Grenzfläche. Wenn die Grenzfläche so gekrümmt ist, dass das Flüssigkeitsgebiet konvex ist, so ist jedes Molekül der Grenzfläche im Durchschnitt von mehr Molekülen umgeben, die sich in der festen Phase befinden, als von solchen, die sich in der flüssigen Phase befinden. Daher muss für einen Phasenübergang der festen in die flüssige Phase mehr Energie aufgewandt werden und somit findet der Phasenübergang bei einer höheren Temperatur statt. Dies rechtfertigt die Wahl des Vorzeichens in (1.6). Kommen wir nun zu der kinetischen Bedingung (1.7). Wir betrachten das Erstarren einer Flüssigkeit und nehmen an, dass wir die Krümmung der Grenzfläche vernachlässigen können. Dieser Erstarungsvorgang wird durch eine Unterkühlung der Grenzfläche verursacht, d.h.

$$u^s = u^l < 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Weil die Normale an  $\Gamma$  von der flüssigen in die feste Phase zeigt, ist Erstarrung gleichbedeutend mit  $V < 0$ . Analog kann man beim Schmelzen argumentieren. Daher ist die Wahl des Vorzeichens in (1.7) physikalisch sinnvoll.

Für das Stefan-Problem mit der Gibbs-Thomson Bedingung (1.6) können analytische Resultate über Existenz und Regularität von Lösungen in [32], [50], [54], [56] und [20] gefunden werden. In [32] wird der Fall kleiner Oberflächenspannung  $0 < \sigma \ll 1$  betrachtet. Die Autoren linearisieren das Problem um  $\sigma = 0$  und setzen die Existenz von glatten Lösungen für das klassische Stefan-Problem voraus, um die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung für das *linearisierte* Problem zu zeigen. Außerdem wird der Effekt kleiner Oberflächenspannung auf die Form der Grenzfläche untersucht. In [50] wird die globale Existenz von schwachen Lösungen bewiesen. Die schwachen Lösungen in [50] haben zwar eine scharfe Grenzfläche, sind aber nicht eindeutig. In [54] wird untersucht, wie ein Ball aus Eis in einer Flüssigkeit schmilzt, wenn man Oberflächenspannung und kinetische Effekte mit berücksichtigt. Hierbei wird gezeigt, dass das Stefan-Problem mit Gibbs-Thomson Bedingung i.A. keine globale klassische Lösung besitzt. In [56] wird das Stefan-Problem sowohl mit Bedingung (1.5) als auch mit der Bedingung (1.6) studiert. Im Fall der Gibbs-Thomson Bedingung wird die Existenz (ohne Eindeutigkeit) von klassischen Lösungen bewiesen. Schließlich wird in [20] die Existenz und Eindeutigkeit glatter Lösungen für das Stefan-Problem

mit Gibbs-Thomson Bedingung bewiesen. Insbesondere wird gezeigt, dass die Grenzfläche eine analytische Funktion in Abhängigkeit der räumlichen und zeitlichen Variablen ist. Diese Resultate basieren auf maximaler  $L_p$ -Regularität für das zugehörige lineare Problem, die ebenfalls in der Arbeit bewiesen wird. Dieses lineare Problem ist aktuell auch in der Arbeit [34] mit Hilfe von Fourier-Laplace Multiplikatoren studiert worden.

Analytische Resultate über das Stefan-Problem mit thermischer Unterkühlung können u.a. in [24], [25], [26], [41], [27], [28], [71] und [47] gefunden werden. In [24], [25] und [26] wird das asymptotische Verhalten des Stefan-Problems mit linearer und nichtlinearer thermischer Unterkühlung untersucht. Hierbei wird hauptsächlich der eindimensionale Fall betrachtet. In [41] wird ein eindimensionales Modell betrachtet und Konvergenz (für  $t \rightarrow \infty$ ) gegen eine Wanderwellen Lösung oder eine selbstähnliche Lösung bewiesen. In [27] und [28] wird ebenfalls ein eindimensionales Stefan-Problem mit thermischer Unterkühlung betrachtet. Hier wird zusätzlich ein Dämpfungsterm mit berücksichtigt. In den Arbeiten wird die Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung bewiesen sowie die Existenz eines endlichdimensionalen Attraktors. In der Arbeit [71] wird nichtlineare Unterkühlung für ein eindimensionales Zweiphasenproblem untersucht und unter bestimmten Bedingungen globale Existenz von klassischen Lösungen bewiesen. Unter anderen Voraussetzungen wird das Auftreten von blow-up in endlicher Zeit bewiesen. Resultate für das Einphasen Problem im mehrdimensionalen Fall können in [47] gefunden werden. In dieser Arbeit wird Existenz und Eindeutigkeit klassischer Lösungen für einen zweidimensionalen Fall bewiesen. Die Autoren merken aber an, dass sich diese Ergebnisse auch auf den  $n$ -dimensionalen Fall verallgemeinern lassen.

Für das Zweiphasen Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung (1.5) wurde in [56] und [14] die lokale Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen bewiesen. In [57], [58], [59], [60], [61], [35], [36] und [37] wird das Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung zur Beschreibung von Kristallwachstum angewandt. Dafür wird in [60] und [61] die lokale Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen gezeigt, wenn das Gebiet eine polygonale Fläche ist. In [35], [36] und [37] werden qualitative Eigenschaften wie die Existenz selbstähnlicher Lösungen und die Stabilität von Lösungen untersucht.

Ersetzt man die Gleichungen (1.1) durch

$$\begin{aligned}\Delta u^s &= 0 && \text{in } \Omega^s \\ \Delta u^l &= 0 && \text{in } \Omega^l,\end{aligned}$$

so spricht man von einem *quasistationären* Stefan-Problem. Diese Gleichungen stellen eine Approximation des Stefan-Problems dar, welche sinnvoll ist, wenn die Wärmekapazität sehr klein ist, oder die Temperatur einen stationären Zustand erreicht hat. Das quasistationäre Stefan-Problem mit Gibbs-Thomson Bedingung (1.6) wird als Mullins-Sekerka Modell oder auch als Hele-Shaw Modell bezeichnet. Das Mullins-Sekerka Modell wurde als Modell für Phasenübergänge eingeführt, bei denen die Wärmekapazität sehr klein ist und daher vernachlässigt werden kann. Hingegen beschreibt das Hele-Shaw Modell das Verhalten einer Flüssigkeit zwischen zwei eng aneinanderliegenden Platten. Resultate über die Existenz und Regularität von klassischen Lösungen lassen sich in [21, 22] und [15] finden. Die Stabilität von Equilibrien wurde in [33] für das Einphasen Problem und in [23] für das Zweiphasen Problem bewiesen.

Für das quasistationäre Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und kinetischer Unterkühlung (1.5) wird in [72] die lokale Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen bewiesen. In [70] wird das Einphasen Stefan-Problem mit Bedingung (1.5) betrachtet. Es wird ein Parameter  $\varepsilon > 0$  eingeführt, der die Wärmekapazität beschreibt. Schließlich wird der Fall  $\varepsilon \rightarrow 0$  betrachtet und die Konvergenz gegen die Lösung des quasistationären Problems bewiesen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausschließlich mit dem Einphasen Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung. Um die Notation zu vereinfachen und damit die mathematischen Gesichtspunkte besser herausarbeiten zu können, normieren wir die auftretenden physikalischen Konstanten zu Eins. Freie Randwertprobleme haben die Charakteristik, dass man das unbekannte Gebiet und die physikalischen oder geometrischen Größen, beim Stefan Problem die Temperatur, gleichzeitig bestimmen muss. Außerdem haben freie Randwertprobleme eine inhärent nichtlineare Struktur. Dies wird insbesondere darin deutlich, dass man kein Superpositionsprinzip für Lösungen hat. Denn die betreffenden Lösungen sind i.A. noch nicht einmal auf demselben Gebiet definiert. Diese nichtlineare Struktur offenbart sich auch, wenn man das freie Randwertproblem auf ein festes Referenzgebiet transformiert. Wir beginnen in Kapitel 2 damit, die quasistationäre Approximation zu diskutieren. Unsere Vorgehensweise zur Lösung des quasistationären Problems ist die folgende:

Zunächst transformieren wir das freie Randwertproblem auf ein festes Referenzgebiet. Dadurch erhalten wir ein gekoppeltes System von Gleichungen, bestehend aus einem elliptischen Randwertproblem und einer Evolutionsgleichung für die Funktion  $\rho$ , welche den freien Rand parametrisiert. Durch gründliches Studium des elliptischen Randwertproblems erhalten wir einen Lösungsoperator, mit dessen Hilfe wir das gekoppelte System von Gleichungen in eine einzige abstrakte Evolutionsgleichung für die Funktion  $\rho$  reduzieren können. Wir können zeigen, dass es, ausgehend von einer Anfangsgeometrie in der Klasse  $h^{2+\beta}$ , zu einer sofortigen Regularisierung kommt und wir glatte Lösungen erhalten. Dieses Resultat stellt einen substantiellen Erkenntnisgewinn dar. Denn obwohl es schwer ist, das Einphasen Problem mit dem komplexeren Zweiphasen Problem zu vergleichen, wollen wir doch anmerken, dass der Autor in [72] mit einer Anfangsgeometrie  $\Gamma^0$  in  $C^{5+\alpha}$  startet und eine Lösung  $\Gamma(t)$  in der Klasse  $C^{4+\alpha}$  erhält, d.h. er verliert sogar Regularität. Schließlich weisen wir nach, dass Sphären stabile Equilibrien des quasistationären Stefan-Problems sind. Der Beweis basiert auf Maximaler Regularität, mit deren Hilfe sich eine Zentrumsmannigfaltigkeit konstruieren läßt. Unser Vorgehen orientiert sich an der Arbeit [23], in der mit diesen Methoden bewiesen wird, dass Sphären stabile Equilibrien für das Mullins-Sekerka Modell sind.

Der restliche Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit dem vollen Problem. Obwohl die lokale Existenz und Eindeutigkeit klassischer Lösungen für das Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung bekannt ist, interessieren wir uns für die Frage, ob man dies auch mit Methoden der Halbgruppentheorie erhalten kann (in den Arbeiten [56] und [14] wurden andere Methoden benutzt). Dies könnte insbesondere für qualitative Fragestellungen von Bedeutung sein. Da es sich als schwierig erweist, eine adäquate Evolutionsgleichung sowohl für die Temperatur  $u$  als auch für die Funktion  $\rho$ , welche den freien Rand parametrisiert, zu finden, verfolgen wir einen anderen Ansatz. Nach der Transformation des freien Randwertproblems auf ein festes Referenzgebiet erhalten wir ein gekoppeltes System von Gleichungen, bestehend aus einem parabolischen Randwertproblem und einer Evolutionsgleichung für den freien Rand. Nun gehen wir analog zum quasistationären Fall vor. Doch an Stelle des elliptischen Randwertproblems müssen wir nun ein parabolisches Randwertproblem studieren. Es gelingt auch in diesem Fall einen Lösungsoperator zu finden, mit dem sich das gekoppelte System von Gleichungen in eine einzige abstrakte Evolutionsgleichung für die Funktion  $\rho$  reduzieren läßt. Der Preis, den wir dafür zahlen müssen, ist, dass der Lösungsoperator nichtlokal in der Zeit ist. Dafür studieren wir in Kapitel 3 quasilineare abstrakte Evolutionsgleichungen mit zeitlich nichtlokaler rechter

Seite. Diese Resultate benutzen wir dann in Kapitel 4, um die lokale Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Stefan-Problems zu beweisen. Auch hier ist es uns möglich, eine Regularisierung des freien Rands  $\Gamma(t)$  zu beweisen, welche in den Arbeiten [56] und [14] nicht erhalten wird.

# Kapitel 2

## Das quasistationäre Stefan-Problem

In diesem Kapitel studieren wir die quasistationäre Approximation des Einphasen Stefan-Problems mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung. Das quasistationäre Stefan-Problem läßt sich umwandeln in eine einzige abstrakte quasilineare Evolutionsgleichung für die Funktion  $\rho$ , welche den freien Rand parametrisiert. Die Hauptresultate dieses Kapitels sind Theorem 2.3.5 und Theorem 2.5.6. In Theorem 2.3.5 wird die Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen glatten Lösung des quasistationären Stefan-Problems bewiesen. In Theorem 2.5.6 zeigen wir, dass die klassischen Lösungen global existieren und mit exponentieller Geschwindigkeit gegen Sphären konvergieren, falls das Anfangsdatum nahe bei einer Sphäre liegt.

### 2.1 Die Problemstellung

Wir normieren die auftretenden physikalischen Konstanten zu Eins. Sei  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ein Gebiet mit Rand  $\Gamma_0$ , das zur Zeit  $t = 0$  von einer Flüssigkeit ausgefüllt wird. Wir interessieren uns für den zeitlichen Verlauf des Schmelz- bzw. Erstarrungsvorgangs, d.h. wir wollen die Form  $\Omega(t)$  des Flüssigkeitsgebiets mit Rand  $\Gamma(t)$  und die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  in diesem Gebiet bestimmen. Aus (1.4) erhalten wir das folgende System von Gleichungen:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \tag{2.1}$$

$$V + \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma(t) \tag{2.2}$$

$$V + \kappa = u \quad \text{auf } \Gamma(t). \tag{2.3}$$

Schließlich muss noch die Anfangsgeometrie festgelegt werden

$$\Gamma(0) = \Gamma_0. \quad (2.4)$$

Hierbei sei  $\Omega_0$  das Gebiet zur Anfangszeit  $t = 0$  und  $\Gamma_0$  sein Rand.

## 2.2 Das transformierte System

Wir nehmen an, dass  $D$  ein glattes und beschränktes Gebiet im  $\mathbb{R}^n$  ist, dessen Rand  $\Sigma$  eine orientierbare Hyperfläche ist, sodass wir  $\Gamma_0$  als Graph über  $\Sigma$  in Normalenrichtung darstellen können. Dies wird im Folgenden erläutert. Sei  $\mu$  das äußere Einheitsnormalenfeld auf  $\Sigma$ . Für  $a > 0$  hinreichend klein gewählt, ist die Abbildung

$$X : \Sigma \times (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (p, r) \mapsto p + r\mu(p) \quad (2.5)$$

ein glatter Diffeomorphismus auf ihr Bild  $\mathcal{R} := \text{im}(X)$ , d.h.  $X \in \text{Diff}^\infty(\Sigma \times (-a, a), \mathcal{R})$ , und

$$\bar{X} : \Sigma \times [-a, a] \rightarrow \bar{\mathcal{R}}, \quad (p, r) \mapsto p + r\mu(p)$$

ist ein Homöomorphismus. Wir zerlegen nun die Inverse von  $X$  in  $X^{-1} = (P, \Lambda)$  mit

$$P \in C^\infty(\mathcal{R}, \Sigma), \quad \Lambda \in C^\infty(\mathcal{R}, (-a, a)).$$

Hierbei ist  $P$  die Projektion von  $\mathcal{R}$  auf  $\Sigma$ , d.h.  $P(x)$  ist der am Nächsten zu  $x$  gelegene Punkt von  $\Sigma$ , und  $\Lambda(x)$  ist der mit Vorzeichen versehene Abstand von  $x$  zu  $\Sigma$ . Schließlich ist  $\mathcal{R}$  die Menge der Punkte, deren Abstand zu  $\Sigma$  kleiner als  $a$  ist. Für  $b \in (-a, a)$  bezeichnen wir mit

$$\text{Ad} := \text{Ad}_b := \{\rho \in C^2(\Sigma); \|\rho\|_\infty < b\} \quad (2.6)$$

die Menge der *zulässigen Funktionen*. Für  $\rho \in \text{Ad}$  definieren wir

$$\theta_\rho : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad p \mapsto p + \rho(p)\mu(p)$$

und  $\Gamma_\rho := \text{im}(\theta_\rho)$ . Somit ist  $\Gamma_\rho$  eine  $C^2$ -Hyperfläche, welche diffeomorph zu  $\Sigma$  ist, d.h.  $\theta_\rho \in \text{Diff}^2(\Sigma, \Gamma_\rho)$ . Die Annahme, dass wir  $\Gamma_0$  als Graph über  $\Sigma$  in Normalenrichtung darstellen können, bedeutet nun, dass es ein  $\rho_0 \in \text{Ad}$  gibt mit  $\Gamma_{\rho_0} = \Gamma_0$ . Wir bezeichnen mit  $\Omega_\rho$  das Gebiet, welches von  $\Gamma_\rho$  umschlossen wird (eine exakte

Definition wird weiter unten gegeben). Wir brauchen im Folgenden eine geeignete Fortsetzung  $\Theta_\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $\theta_\rho$  auf den gesamten  $\mathbb{R}^n$ . Dafür benutzen wir einen Spezialfall der sogenannten Hanzawa Transformation. Für  $b \in (0, a/4)$  wählen wir ein  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$  mit

$$\varphi(r) = \begin{cases} 1 & \text{für } |r| \leq b, \\ 0 & \text{für } |r| \geq 3b, \end{cases} \quad \text{und } \sup |\varphi'(r)| < 1/b. \quad (2.7)$$

Wir definieren nun für vorgegebenes  $\rho \in \text{Ad}$

$$\Theta_\rho(x) := \begin{cases} X(P(x), \Lambda(x) + \varphi(\Lambda(x))\rho(P(x))) & \text{für } x \in \mathcal{R}, \\ x & \text{für } x \notin \mathcal{R}. \end{cases}$$

**Lemma 2.2.1** *Für  $\rho \in \text{Ad}$  gilt  $\Theta_\rho \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .*

**Beweis:** Wir zeigen zunächst, dass  $\Theta_\rho$  ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h.  $\Theta_\rho \in \text{Diff}_{loc}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . Für einen inneren Punkt  $x$  von  $\mathcal{R}^c$  ist die Aussage klar. Wenn  $x$  Randpunkt von  $\mathcal{R}$  ist existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  mit

$$\varphi(\Lambda(y)) = 0 \text{ für alle } y \in U \cap \mathcal{R},$$

also  $\Theta_\rho|_U = \text{id}$ . Schließlich betrachten wir  $\Theta_\rho$  auf  $\mathcal{R}$ . Wir definieren die Hilfsfunktion

$$F : \Sigma \times (-a, a) \rightarrow \Sigma \times (-a, a), \quad (p, r) \mapsto (p, r + \varphi(r)\rho(p)).$$

Das Tangential von  $F$  im Punkt  $(p, r)$  hat bzgl. der kanonischen Koordinaten die Gestalt

$$T_{(p,r)}F = \begin{pmatrix} & 0 \\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}^{n-1}} & \vdots \\ & 0 \\ * & 1 + \varphi'(r)\rho(p) \end{pmatrix}.$$

Beachten wir

$$|\varphi'(r)\rho(p)| < 1 \text{ für } \rho \in \text{Ad}, p \in \Sigma \text{ und } r \in (-a, a), \quad (2.8)$$

so folgt, dass  $T_{(p,r)}F$  ein Isomorphismus ist. Wegen  $\Theta_\rho|_{\mathcal{R}} = X \circ F \circ X^{-1}$  erhalten wir aus der Kettenregel und dem Satz über die Umkehrabbildung, dass  $\Theta_\rho|_{\mathcal{R}}$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Aus (2.8) folgt außerdem, dass die Funktion  $r \mapsto r + \varphi(r)\rho(p)$  für jedes  $\rho \in \text{Ad}$  strikt wachsend ist. Somit ist  $F$  bijektiv und daher

gilt dies auch für  $\Theta_\rho|_{\mathcal{R}} = X \circ F \circ X^{-1}$ . Die Bijektivität von  $\Theta_\rho$  auf  $\mathbb{R}^n$  ist nun klar. □

Wir setzen  $\Omega_\rho := \Theta_\rho(D)$  und erhalten

$$\Theta_\rho \in \text{Diff}^2(D, \Omega_\rho), \quad \Theta_\rho|_{\Sigma} = \theta_\rho. \quad (2.9)$$

Wir betrachten nun zeitabhängige Funktionen  $\rho : J \rightarrow \text{Ad}$ , wobei  $J$  ein kompaktes Intervall der Form  $J := [0, T]$  für ein  $T > 0$  ist. Genauer gesagt erhalten wir für

$$\rho \in C^1(J, C(\Sigma)) \cap C(J, \text{Ad})$$

eine Familie

$$\mathcal{G} := \{\Gamma(t) := \Gamma_{\rho(t)}; t \in J\}$$

von Hyperflächen im  $\mathbb{R}^n$ . Die von diesen Hyperflächen umschlossenen Gebiete bezeichnen wir mit  $\Omega(t) = \Omega_{\rho(t)}$ ,  $t \in J$ . Im Folgenden wird es nützlich sein,  $\Gamma(t)$  als Nullstellenmenge einer geeigneten zeitabhängigen Funktion zu beschreiben. Hierfür definieren wir

$$\phi_\rho : J \times \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \Lambda(x) - \rho(t, P(x)).$$

Es gilt offenbar  $\Gamma(t) = \phi_\rho(t, \cdot)^{-1}(0)$ . Daher lässt sich das äußere Einheitsnormalenfeld  $\nu(t, \cdot)$  auf  $\Gamma(t)$  am Punkt  $x = X(s, \rho(t, s))$  darstellen als

$$\nu(t, s) = \frac{\nabla \phi_\rho(t, x)}{|\nabla \phi_\rho(t, x)|} \Big|_{x=X(s, \rho(t, s))} \quad \text{für } (t, s) \in J \times \Sigma. \quad (2.10)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass  $|\nabla \phi_\rho(t, x)| \neq 0$  gilt. Dies sieht man folgendermaßen ein: Für  $|h|$  klein genug gilt

$$x + h\mu(s) = s + \rho(t, s)\mu(s) + h\mu(s) = X(s, \rho(t, s) + h).$$

Dies bedeutet

$$P(x + h\mu(s)) = P(x) = s$$

und

$$\Lambda(x + h\mu(s)) = \Lambda(x) + h = \rho(t, s) + h.$$

Daher erhalten wir

$$\begin{aligned}
& \nabla\phi_\rho(t, x) \cdot \mu(s) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_\rho(t, x + h\mu(s)) - \phi_\rho(t, x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Lambda(x + h\mu(s)) - \Lambda(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(t, P(x + h\mu(s))) - \rho(t, P(x))}{h} \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{2.11}$$

und somit  $|\nabla\phi_\rho(t, x)| \neq 0$ .

Um die Normalgeschwindigkeit von  $t \mapsto \Gamma(t)$ , zur Zeit  $t \in [0, T]$  und am Ort  $x = X(s, \rho(t, s))$ , berechnen zu können, führen wir die Hilfsfunktion  $\psi$  ein mit

$$\psi(\tau, r) := \phi_\rho(t + \tau, x + r\nu(t, s)) = \Lambda(x + r\nu(t, s)) - \rho(t + \tau, P(x + r\nu(t, s)))$$

für  $(\tau, r) \in [0, T - t] \times [0, a - b]$ . Offenbar gilt  $\psi(0, 0) = 0$  und

$$\partial_2\psi(0, 0) = \nabla\phi_\rho(t, x) \cdot \nu(t, s) = |\nabla\phi_\rho(t, x)| \neq 0.$$

Nun folgt aus dem Satz über implizite Funktionen, dass es ein  $\varepsilon > 0$  gibt und eine Funktion  $h \in C^1([0, \varepsilon], \mathbb{R})$  mit  $\psi(\tau, h(\tau)) = 0$  für  $\tau \in [0, \varepsilon]$  und

$$h'(0) = \frac{-\partial_1\psi(0, 0)}{\partial_2\psi(0, 0)} = \frac{\partial_t\rho(t, s)}{|\nabla\phi_\rho(t, x)|}. \tag{2.12}$$

Es sei angemerkt, dass  $x + h(\tau)\nu(t, s)$  zu  $\Gamma(t + \tau)$  gehört. Daher ist  $h(\tau)$  der Zuwachs in  $x = X(s, \rho(t, s)) \in \Gamma(t)$  in Richtung der äußeren Normale  $\nu(t, s)$ . Somit ist die Normalgeschwindigkeit  $V(t, s)$  von  $t \mapsto \Gamma(t)$  an der Stelle  $t$  und  $x = X(s, \rho(t, s))$  durch  $h'(0)$  gegeben und wir erhalten aus (2.12)

$$V(t, s) = \frac{\partial_t\rho(t, s)}{|\nabla\phi_\rho(t, x)|_{x=X(s, \rho(t, s))}}, \quad (t, s) \in J \times \Sigma. \tag{2.13}$$

Wir definieren nun die von den Diffeomorphismen  $\theta_\rho$  und  $\Theta_\rho$  induzierten pull-back und push-forward Operatoren

$$\begin{aligned}
\theta_\rho^* &: C(\Gamma_\rho) \rightarrow C(\Sigma), \quad u \mapsto u \circ \theta_\rho, \\
\theta_\rho^* &: C(\Sigma) \rightarrow C(\Gamma_\rho), \quad v \mapsto v \circ \theta_\rho^{-1}
\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\Theta_\rho^* &: C(\bar{\Omega}_\rho) \rightarrow C(\bar{D}), & u &\mapsto u \circ \Theta_\rho, \\ \Theta_\rho^* &: C(\bar{D}) \rightarrow C(\bar{\Omega}_\rho), & v &\mapsto v \circ \Theta_\rho^{-1}.\end{aligned}$$

Wir setzen außerdem

$$L_\rho(s, t) := |\nabla \phi_\rho(t, x)| \Big|_{x=X(s, \rho(t, s))}$$

und können nach diesen Vorbereitungen die transformierten Operatoren  $\mathcal{A}(\rho)$  und  $\mathcal{B}(\rho)$ , welche auf  $C^2(\bar{D})$  wirken, einführen:

$$\mathcal{A}(\rho)v := \Theta_\rho^*(\Delta(\Theta_\rho^*v)) \quad (2.14)$$

$$\mathcal{B}(\rho)v := \gamma \Theta_\rho^*(\nabla(\Theta_\rho^*v) \cdot \nabla \phi_\rho). \quad (2.15)$$

Hierbei steht

$$\gamma : C(\bar{D}) \rightarrow C(\Sigma), \quad u \mapsto u|_\Sigma$$

für den Spuroperator. Schließlich führen wir die transformierte mittlere Krümmung

$$H(\rho) := \theta_\rho^* \kappa_{\Gamma_\rho}$$

ein, wobei  $\kappa_{\Gamma_\rho(t)}$  für die mittlere Krümmung von  $\Gamma_{\rho(t)}$  steht. Wir erhalten die Darstellung

$$H(\rho)(s, t) = \frac{1}{n-1} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi_\rho(t, x)}{|\nabla \phi_\rho(t, x)|} \right) \Big|_{x=X(s, \rho(t, s))} \quad \text{für } (t, s) \in J \times \Sigma.$$

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$G(\rho) := L_\rho H(\rho).$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir das ursprüngliche System von Gleichungen (2.1)-(2.4) mit dem freien Rand, in ein System mit festem Rand transformieren:

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \quad \text{in } J \times D, \quad (2.16)$$

$$\partial_t \rho + L_\rho \mathcal{B}(\rho)v = 0 \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (2.17)$$

$$\partial_t \rho + G(\rho) = L_\rho v \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (2.18)$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0 \quad \text{auf } \Sigma. \quad (2.19)$$

Dieses System läßt sich äquivalent umformen zu

$$\mathcal{A}(\rho)v = 0 \quad \text{in } J \times D, \quad (2.20)$$

$$v + \mathcal{B}(\rho)v = H(\rho) \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (2.21)$$

$$\partial_t \rho + G(\rho) = L_\rho v \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (2.22)$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0 \quad \text{auf } \Sigma. \quad (2.23)$$

Im Folgenden wollen wir die Differentialoperatoren  $\mathcal{A}(\rho)$  und  $\mathcal{B}(\rho)$  genauer untersuchen. Sei nun  $0 < \alpha < 1$ . Wir setzen

$$\mathcal{U} := \{\rho \in h^{2+\alpha}(\Sigma); \|\rho\|_\infty < b\}.$$

**Lemma 2.2.2** *Es gilt*

$$\mathcal{A} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D})))$$

und für jedes  $\rho \in \mathcal{U}$  ist  $\mathcal{A}(\rho)$  ein gleichmäßig elliptischer Operator.

**Beweis:** Sei  $\rho \in \mathcal{U}$ , wir setzen  $[g^{jk}(\rho)] := [g_{jk}(\rho)]^{-1}$ , wobei  $g_{jk}(\rho) := (\partial_j \Theta_\rho | \partial_k \Theta_\rho)$ ,  $1 \leq j, k \leq n$  die Komponenten des von  $\Theta_\rho$  induzierten Metrik Tensors  $g(\rho)$  bezeichnet.  $\mathcal{A}(\rho)$  ist gerade der Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta_{g(\rho)}$  bezüglich der Metrik  $g(\rho)$ . Mit  $\bar{G}(\rho) := \det[g_{jk}(\rho)]$  erhalten wir daher die folgende Darstellung von  $\mathcal{A}(\rho)$ :

$$\mathcal{A}(\rho)v = \Delta_{g(\rho)}v = \frac{1}{\sqrt{|\det \bar{G}(\rho)|}} \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{|\bar{G}(\rho)|} g^{jk}(\rho) \frac{\partial v}{\partial x^k} \right), \quad v \in C^2(\bar{D}).$$

Es ist

$$[\rho \mapsto \Theta_\rho] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{2+\alpha}(U, \mathbb{R}^n)),$$

wobei  $U$  eine offene und beschränkte Menge ist, welche  $\bar{D}$  enthält. Folglich ist

$$[\rho \mapsto g_{jk}(\rho)] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{1+\alpha}(U)), \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Daher haben wir

$$\mathcal{A}(\rho) = a_{jk}(\rho) \partial_j \partial_k + a_j(\rho) \partial_j$$

und für die Koeffizienten gilt

$$[\rho \mapsto (a_{jk}(\rho), a_j(\rho))] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{1+\alpha}(\bar{D}) \times h^\alpha(\bar{D})), \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Hieraus folgt der erste Teil der Behauptung und wegen  $a_{jk}(\rho) = g_{jk}(\rho)$  ist der zweite Teil nun ebenfalls klar.  $\square$

Wir wollen jetzt den Randoperator  $\mathcal{B}(\rho)$  untersuchen.

**Lemma 2.2.3** Für alle  $\rho \in \mathcal{U}$  existiert ein  $\vec{b}_\rho := \vec{b}(\rho) \in h^{1+\alpha}(\Sigma, \mathbb{R}^n)$  mit

$$\mathcal{B}(\rho)v = \vec{b}_\rho \cdot \nabla v, \quad v \in h^{2+\alpha}(\bar{D}) \quad \text{und} \quad \vec{b}_\rho \cdot \mu > 0.$$

Außerdem gilt

$$\mathcal{B} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))).$$

**Beweis:** Sei  $v \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  und  $s \in \Sigma$ , wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\rho)v(s) &= \Theta_\rho^*(\gamma \nabla(\Theta_\rho^* v) \cdot \nabla \phi_\rho)(s) \\ &= (\gamma \nabla(\Theta_\rho^* v) \cdot \nabla \phi_\rho)(\Theta_\rho(s)) \\ &= [\partial \Theta_\rho^{-1}(\Theta_\rho(s))]^T \nabla v(s) \cdot \nabla \phi_\rho(\Theta_\rho(s)) \\ &= [\partial \Theta_\rho^{-1}(\Theta_\rho(s))] \nabla \phi_\rho(\Theta_\rho(s)) \cdot \nabla v(s). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\vec{b}_\rho(s) := [\partial \Theta_\rho^{-1}(\Theta_\rho(s))] \nabla \phi_\rho(\Theta_\rho(s)).$$

Offenbar gilt  $\vec{b}_\rho \in h^{1+\alpha}(\Sigma, \mathbb{R}^n)$ . Damit ist der erste Teil des Lemmas bewiesen. Es gilt sogar

$$[\rho \mapsto \Theta_\rho] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{2+\alpha}(U, \mathbb{R}^n)), \quad [\rho \mapsto \phi_\rho] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{2+\alpha}(U))$$

mit  $U$  wie in Lemma 2.2.2. Daher folgt

$$[\rho \mapsto \vec{b}_\rho] \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{1+\alpha}(\Sigma, \mathbb{R}^n))$$

und somit auch

$$\mathcal{B} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))).$$

Schließlich bleibt noch  $\vec{b}_\rho \cdot \mu > 0$  zu zeigen. Wir betrachten dafür die beiden folgenden kommutativen Diagramme,

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\rho & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^n & & T_p \Gamma_\rho & \xrightarrow{T_p \iota} & T_p \Gamma_\rho \oplus N_p \Gamma_\rho \\ \theta_\rho^{-1} \downarrow & & \downarrow \Theta_\rho^{-1} & & T_p \theta_\rho^{-1} \downarrow & & \downarrow T_p \Theta_\rho^{-1} \\ \Sigma & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{R}^n & & T_s \Sigma & \xrightarrow{T_s \iota} & T_s \Sigma \oplus N_s \Sigma \end{array}$$

mit  $p \in \Gamma_\rho$  und  $s := \Theta_\rho^{-1}(p)$ . Wegen  $\Theta_\rho \in \text{Diff}^{2+\alpha}(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$  und  $\theta_\rho \in \text{Diff}^{2+\alpha}(\Sigma, \Gamma_\rho)$  erhalten wir

$$T_p \Theta_\rho^{-1} [T_p \Gamma_\rho] = T_s \Sigma \quad \text{und} \quad T_p(s) \Theta_\rho^{-1} [N_p \Gamma_\rho] \not\subseteq T_s \Sigma.$$

Somit haben wir

$$[\partial \Theta_\rho^{-1}(\Theta_\rho(s))] \nabla \phi_\rho(\Theta_\rho(s)) \cdot \mu(s) \neq 0. \quad (2.24)$$

Offenbar gilt  $\varepsilon \rho \in \mathcal{U}$  für alle  $\rho \in \mathcal{U}$  und alle  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Daher ist die Abbildung

$$B : \Sigma \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (s, \varepsilon) \mapsto [\partial \Theta_{\varepsilon \rho}^{-1}(\Theta_{\varepsilon \rho}(s))] \nabla \phi_{\varepsilon \rho}(\Theta_{\varepsilon \rho}(s))$$

wohldefiniert und man sieht leicht ein, dass

$$B \in C(\Sigma \times [0, 1], \mathbb{R}^n).$$

Aus (2.24) folgt  $B(s, \varepsilon) \cdot \mu(s) \neq 0$  für alle  $s \in \Sigma$  und alle  $\varepsilon \in [0, 1]$ . Nun ist

$$B(s, 0) \cdot \mu(s) = \nabla \phi_{\rho \equiv 0}(s) \cdot \mu(s) = |\nabla \phi_{\rho \equiv 0}(s)| > 0$$

und daher erhalten wir, wie behauptet wurde,

$$\vec{b}_\rho(s) \cdot \mu(s) = B(s, 1) \cdot \mu(s) > 0, \quad s \in \Sigma.$$

□

Wir analysieren nun die beiden Gleichungen (2.20) und (2.21). Das vorliegende elliptische Randwertproblem ist wohlbekannt in der Literatur und wird als "Regular Oblique Derivative Problem" bezeichnet. In [38, Kapitel 6.7] wird Schauder Theorie für dieses Problem entwickelt und Lösbarkeit in  $C^{2+\alpha}(\bar{D})$  untersucht. Wir zeigen im Folgenden, dass es auch wohlgestellt ist in kleinen Hölderräumen.

**Lemma 2.2.4** *Sei  $\rho \in \mathcal{U}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Dann gilt:*

$$(\mathcal{A}(\rho), \lambda \gamma + \mathcal{B}(\rho)) \in \text{Isom} (h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}) \times h^{1+\alpha}(\Sigma)).$$

**Beweis:** Es seien  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  und  $\rho \in \mathcal{U}$  beliebig aber fest,  $f \in h^\alpha(\bar{D})$  und  $\phi \in h^{1+\alpha}(\Sigma)$ . Wir betrachten für  $t \in [0, 1]$  die folgende Familie von elliptischen Randwertproblemen

$$\begin{aligned} L_t u &:= t \mathcal{A}(\rho) u + (1-t) \Delta u = f \quad \text{in } D, \\ N_t u &:= t(\lambda \gamma + \mathcal{B}(\rho)) u + (1-t)(\gamma u + \partial_\mu u) = \phi \quad \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Wir wollen anmerken, dass  $L_1 = \mathcal{A}(\rho)$ ,  $L_0 = \Delta$ ,  $N_1 = \lambda\gamma + \mathcal{B}(\rho)$  und  $N_0 = \gamma + \partial_\mu$  gilt. In [38, Theorem 6.31] wird gezeigt, dass jede Lösung  $u \in C^{2+\alpha}(\bar{D})$  von (2.25) (für ein  $t$ ) die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{2+\alpha} \leq C(\|\phi\|_{1+\alpha} + \|f\|_\alpha) \quad (2.26)$$

erfüllt. Hierbei ist die Konstante  $C$  unabhängig von  $t$ . Insbesondere folgt aus (2.26) die Injektivität der Abbildungen

$$[u \mapsto (L_t u, N_t u)] : h^{2+\alpha}(\bar{D}) \rightarrow h^\alpha(\bar{D}) \times h^{1+\alpha}(\Sigma).$$

Um die Surjektivität dieser Abbildungen zu beweisen, genügt es auf Grund der sogenannten “method of continuity” (vgl. [38, Theorem 5.2]) die Surjektivität von

$$[u \mapsto (\Delta u, \gamma u + \partial_\mu u)] : h^{2+\alpha}(\bar{D}) \rightarrow h^\alpha(\bar{D}) \times h^{1+\alpha}(\Sigma)$$

zu zeigen. Es ist wohlbekannt, dass

$$(\Delta, \gamma + \partial_\mu) \in \mathcal{L}is(C^{2+\alpha}(\bar{D}), C^\alpha(\bar{D}) \times C^{1+\alpha}(\Sigma)). \quad (2.27)$$

Es bezeichne  $u$  die  $C^{2+\alpha}(\bar{D})$  Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta v &= f && \text{in } D, \\ v + \partial_\mu v &= \phi && \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass sogar  $u \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  gilt. Dafür betrachten wir eine Folge  $(f_n, \phi_n)$  in  $C^\infty(\bar{D}) \times C^\infty(\Sigma)$  mit

$$(f_n, \phi_n) \rightarrow (f, \phi) \quad \text{in } h^\alpha(\bar{D}) \times h^{1+\alpha}(\Sigma).$$

Bezeichnen wir mit  $u_n$  die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta v &= f_n && \text{in } D, \\ v + \partial_\mu v &= \phi_n && \text{auf } \Sigma, \end{aligned}$$

dann impliziert elliptische Regularität  $u_n \in C^\infty(\bar{D})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ferner folgt aus (2.27)

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } C^{2+\alpha}(\bar{D})$$

und somit  $u \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$ . □

## 2.3 Die abstrakte Evolutionsgleichung

Das nächste Ziel ist, das transformierte System (2.20)-(2.23) mit den unbekannt-ten Funktionen  $\rho$  und  $v$  als eine einzige abstrakte Evolutionsgleichung für  $\rho$  in geeigneten Banachräumen umzuformulieren. Hierfür definieren wir für  $\rho \in \mathcal{U}$ ,

$$\mathcal{W}(\rho) := (\mathcal{A}(\rho), \gamma + \mathcal{B}(\rho))^{-1} \Big|_{\{0\}} h^{1+\alpha}(\Sigma), \quad (2.28)$$

d.h. für  $\rho \in \mathcal{U}$  und  $g \in h^{1+\alpha}(\Sigma)$  ist  $\mathcal{W}(\rho)g$  die eindeutig bestimmte  $h^{2+\alpha}$ -Lösung des elliptischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 && \text{in } D, \\ v + \mathcal{B}(\rho)v &= g && \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Also ist  $\mathcal{W}(\rho)H(\rho)$  die Lösung des elliptischen Randwertproblems (2.20)-(2.21) und wir erhalten daher aus (2.22) die Evolutionsgleichung

$$\partial_t \rho + G(\rho) = L_\rho \gamma \mathcal{W}(\rho)H(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (2.29)$$

Wir wollen nun zunächst formal aus (2.16)-(2.19) eine weitere Evolutionsgleichung herleiten. Für  $\rho \in \mathcal{U}$  bezeichne  $\mathcal{T}(\rho)$  den Lösungsoperator von

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)v &= 0 && \text{in } D, \\ v &= g && \text{auf } \Sigma. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Fassen wir nun Gleichungen (2.16) und (2.18) als elliptisches Randwertproblem auf, so ist dessen Lösung  $u$  durch

$$u = \mathcal{T}(\rho) \frac{\partial_t \rho}{L_\rho} + \mathcal{T}(\rho)H(\rho)$$

gegeben. Damit folgt aus Gleichung (2.17)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_t \rho}{L_\rho} + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho) \frac{\partial_t \rho}{L_\rho} + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)H(\rho) = 0 \\ \implies & [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)] \frac{\partial_t \rho}{L_\rho} + [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]H(\rho) - H(\rho) = 0 \\ \implies & \frac{\partial_t \rho}{L_\rho} + H(\rho) - [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}H(\rho) = 0 \\ \implies & \partial_t \rho + G(\rho) - L_\rho [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}H(\rho) = 0. \end{aligned}$$

Damit können wir (zumindest formal) das System (2.16)-(2.19) bzw. (2.20)-(2.23) in das folgende abstrakte Cauchy-Problem umschreiben,

$$\partial_t \rho + \Phi(\rho) = 0, \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (2.31)$$

mit

$$\Phi(\rho) := G(\rho) - L_\rho [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1} H(\rho).$$

Der Operator  $\mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)$  wird als (verallgemeinerter) Dirichlet-Neumann Operator bezeichnet. Im Folgenden werden wir den Zusammenhang zwischen (2.29) und (2.31) untersuchen und die formale Herleitung von (2.31) präzisieren. Für  $\rho \in \mathcal{U}$  läßt sich wieder mit Schaudertheorie zeigen, dass (2.30) für alle  $g \in h^{2+\alpha}(\Sigma)$  eine eindeutige Lösung  $u$  in  $h^{2+\alpha}(\bar{D})$  besitzt, d.h. wir haben

$$(\mathcal{A}(\rho), \gamma) \in \mathcal{L}is(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}) \times h^{2+\alpha}(\Sigma)). \quad (2.32)$$

Daher definieren wir wieder für  $\rho \in \mathcal{U}$ ,

$$\mathcal{T}(\rho) := (\mathcal{A}(\rho), \gamma)^{-1} \Big|_{\{0\} \times h^{2+\alpha}(\Sigma)}. \quad (2.33)$$

Aus Lemma 2.2.2 sowie der Tatsache, dass die Inversion eine glatte Abbildung ist, folgt

$$\mathcal{T} \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\Sigma), h^{2+\alpha}(\bar{D}))). \quad (2.34)$$

**Lemma 2.3.1** *Es gilt*

$$\gamma \mathcal{W}(\rho) = [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}.$$

**Beweis:** Sei  $g \in h^{2+\alpha}(\Sigma)$  mit  $g + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)g = 0$ . Wir setzen  $u := \mathcal{T}(\rho)g$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\rho)u &= 0 && \text{in } D, \\ u + \mathcal{B}(\rho)u &= g + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)g = 0 && \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.2.4 folgt  $u = 0$  und daher ist  $g = \gamma u = 0$ . Damit ist die Injektivität von  $[I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]$  bewiesen. Sei nun  $f \in h^{1+\alpha}(\Sigma)$ . Wir setzen  $g := \gamma \mathcal{W}(\rho)f \in h^{2+\alpha}(\Sigma)$ . Dann ist

$$f = \gamma \mathcal{W}(\rho)f + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{W}(\rho)f = g + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)g = [I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]g.$$

Daher ist  $[I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]$  surjektiv und wir erhalten

$$[I + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}f = g = \gamma\mathcal{W}(\rho)f.$$

□

Wegen Lemma 2.3.1 stimmen die Evolutionsgleichungen (2.29) und (2.31) überein. Wir werden im Folgenden die Darstellung (2.31) benutzen.

Es ist bekannt, dass der Mittlere Krümmungsoperator  $H(\rho)$  eine quasilineare Struktur trägt. In [22, Lemma 3.1] und [23, Lemma 3.1] wird die Existenz von Funktionen

$$P \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma))) \quad \text{und} \quad Q \in C^\infty(\mathcal{U}, h^{1+\alpha}(\Sigma)) \quad (2.35)$$

bewiesen, mit

$$H(\rho) = P(\rho)\rho + Q(\rho) \quad \text{für} \quad \rho \in \mathcal{U} \cap h^{3+\alpha}(\Sigma).$$

Wir setzen

$$F(\rho) := L_\rho[1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}Q(\rho) - L_\rho Q(\rho)$$

und

$$A(\rho) := L_\rho P(\rho) - L_\rho[1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1}P(\rho).$$

Damit trägt auch die abstrakte Evolutionsgleichung (2.29) eine quasilineare Struktur und läßt sich schreiben als

$$\partial_t \rho + A(\rho)\rho = F(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (2.36)$$

Um diese Gleichung lösen zu können werden wir im Folgenden die Funktionen  $A$  und  $F$  weiter untersuchen.

**Lemma 2.3.2**

$$(A, F) \in C^\infty(\mathcal{U}, \mathcal{L}(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)) \times h^{1+\alpha}(\Sigma)).$$

**Beweis:** Dies ist eine Konsequenz aus unseren Betrachtungen in Lemma 2.2.2 und Lemma 2.2.3, sowie von (2.34) und (2.35).

□

Wir können nun das folgende Generationsresultat beweisen:

**Proposition 2.3.3** Für  $\rho \in \mathcal{U}$  gilt:

$$A(\rho) \in \mathcal{H}(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)).$$

**Beweis:** Sei  $\rho \in \mathcal{U}$ . Der Operator  $P(\rho)$  ist ein gleichmäßig elliptischer Operator zweiter Ordnung in  $h^{1+\alpha}(\Sigma)$  mit Definitionsbereich  $h^{3+\alpha}(\Sigma)$ , und  $L_\rho$  gehört zu  $h^{1+\alpha}(\Sigma)$  und ist strikt positiv. Daher ist  $L_\rho P(\rho)$  ebenfalls gleichmäßig elliptisch und es gilt

$$L_\rho P(\rho) \in \mathcal{H}(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)).$$

Im Folgenden bezeichnet  $(\cdot, \cdot)_\theta := (\cdot, \cdot)_{\theta, \infty}^0$  den stetigen Interpolationsfunktorkon von Da Prato und Grisvard [17]. Details finden sich in [1, 2, 49]. Es ist wohlbekannt, dass die kleinen Hölderräume die Interpolationseigenschaft

$$(h^{\sigma_0}(\Sigma), h^{\sigma_1}(\Sigma))_\theta = h^{(1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1}(\Sigma) \quad \text{falls } (1-\theta)\sigma_0 + \theta\sigma_1 \notin \mathbb{N}, \quad (2.37)$$

haben, wobei  $\theta \in (0, 1)$ . Wegen

$$L_\rho [1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1} P(\rho) \in \mathcal{L}(h^{3+\sigma}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)), \quad \sigma \in (0, \alpha)$$

und (2.37) folgt die Behauptung nun aus bekannten Störungssätzen (siehe z.B. [49, Proposition 2.4.1 (i)]). Wir weisen darauf hin, dass man den Raum  $h^{3+\sigma}(\Sigma)$  als stetigen Interpolationsraum zwischen  $h^{3+\alpha}(\Sigma)$  und  $h^{1+\alpha}(\Sigma)$  erhält. Aus Gleichung (2.37) folgt nämlich

$$(h^{1+\alpha}(\Sigma), h^{3+\alpha}(\Sigma))_{\frac{2+\sigma-\alpha}{2}} = h^{3+\sigma}(\Sigma).$$

□

Wir zeigen nun, dass der Operator  $A(\rho)$  sogar maximale Regularität hat. Für eine kurze Darstellung des Konzepts der maximalen Regularität verweisen wir auf Kapitel 3.

**Proposition 2.3.4** Für  $\rho \in \mathcal{U}$  und  $\mu \in (0, 1]$  gilt:

$$A(\rho) \in \mathcal{M}_\mu(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)).$$

**Beweis:** Sei  $\sigma \in (0, \alpha)$ . Wir setzen  $E_1 := h^{3+\sigma}(\Sigma)$  und  $E_0 := h^{1+\alpha}(\Sigma)$ . Dann gilt analog zu Proposition 2.3.3

$$L_\rho P(\rho) \in \mathcal{H}(E_1, E_0), \quad \rho \in \mathcal{U}.$$

Um die Notation zu vereinfachen unterscheiden wir nicht zwischen Realisierungen von Abbildungen in verschiedenen Funktionenräumen. Wir setzen  $\theta := (\alpha - \sigma)/2$  und  $X_0 := (E_0, E_1)_\theta$ . Ferner bezeichnen wir den Definitionsbereich der maximalen  $X_0$  Realisierung von  $L_\rho P(\rho)$  mit  $X_1$ , d.h.

$$X_1 = \{x \in E_1; L_\rho P(\rho)x \in X_0\}.$$

Aus (2.37) ergibt sich

$$X_0 = (h^{1+\sigma}(\Sigma), h^{3+\sigma}(\Sigma))_\theta = h^{(1-\frac{\alpha-\sigma}{2})(1+\sigma)+\frac{\alpha-\sigma}{2}(3+\sigma)}(\Sigma) = h^{1+\alpha}(\Sigma).$$

Elliptische Regularität impliziert nun  $X_1 = h^{3+\alpha}(\Sigma)$ . Daher können wir [64, Theorem 2.2] anwenden und folgern, dass

$$L_\rho P(\rho) \in \mathcal{M}_\mu(X_1, X_0), \quad \rho \in \mathcal{U}, \quad \mu \in (0, 1].$$

Schließlich ergibt sich wegen

$$L_\rho [1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1} P(\rho) \in \mathcal{L}(h^{3+\sigma}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma))$$

die Behauptung aus bekannten Störungssätzen (siehe z.B. [64, Bemerkung 2.1b])).  $\square$

Nach diesen Vorarbeiten erhalten wir das folgende Existenz-, Eindeutigkeits- und Regularitätsresultat für die quasilineare Evolutionsgleichung (2.36). Sei  $\beta \in (\alpha, 1)$ . Wir setzen  $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cap h^{2+\beta}(\Sigma)$ . Damit ist  $\mathcal{V}$  eine offene Menge in  $h^{2+\beta}(\Sigma)$ . Außerdem setzen wir  $\eta := (1 + \beta - \alpha)/2$ .

**Theorem 2.3.5** *Für  $\rho_0 \in \mathcal{V}$  besitzt die quasilineare Evolutionsgleichung (2.36) eine eindeutige nichtfortsetzbare Lösung*

$$\rho \in C([0, t^+(\rho_0)), \mathcal{V}) \cap C^\infty(\Sigma \times (0, t^+(\rho_0))),$$

wobei wir mit  $[0, t^+(\rho_0))$  das maximale Existenzintervall bezeichnen. Schließlich definiert die Abbildung  $(t, \rho_0) \mapsto \rho(t, \rho_0)$  einen glatten Halbfluss auf  $\mathcal{V}$ .

**Beweis:** Wir stellen zunächst fest, dass

$$(h^{1+\alpha}(\Sigma), h^{3+\alpha}(\Sigma))_\eta = h^{2+\beta}(\Sigma).$$

Mit Proposition 2.3.4 erhalten wir

$$A(\rho) \in \mathcal{M}_\eta(h^{3+\alpha}(\Sigma), h^{1+\alpha}(\Sigma)), \quad \rho \in \mathcal{V}.$$

Sei  $\rho_0 \in \mathcal{V}$ . Die Existenz einer eindeutigen nichtfortsetzbaren Lösung

$$\rho \in C([0, t^+(\rho_0)), \mathcal{V}) \cap C^1((0, t^+(\rho_0)), h^\alpha(\Sigma)) \cap C((0, t^+(\rho_0)), h^{3+\alpha}(\Sigma))$$

für Problem (2.36) und die Tatsache, dass  $(t, \rho_0) \mapsto \rho(t, \rho_0)$  ein glatter Halbfluss auf  $\mathcal{V}$  ist, folgt aus [64, Theorem 3.1]. Mit einem bootstrapping Argument in der Skala  $h^{l+\alpha}(\Sigma)$ ,  $l \in \mathbb{N}$  kann man zeigen, dass die Lösung sogar glatt ist in Raum und Zeit. Wir verweisen auf [22, Abschnitt 4] für Details. □

## 2.4 Die Linearisierung

Wir wollen im Folgenden die Lösung in der Nähe von Sphären untersuchen. Wegen der Translationsinvarianz des quasistationären Stefan-Problems (2.1)-(2.4) beschränken wir unsere Analyse auf Sphären, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Wir betrachten also den Fall  $\Sigma = \mathcal{S}$ , wobei  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_R$  eine Sphäre mit Radius  $R$  um den Punkt 0 ist. Um das Langzeitverhalten der Lösung zu untersuchen, studieren wir das Verhalten der Abbildung  $\Phi$ , welche in (2.31) eingeführt wurde. Wegen

$$[\rho \mapsto \Phi(\rho)] \in C^\infty(U_1, h^{1+\alpha}(\mathcal{S})) \quad \text{mit} \quad U_1 := \mathcal{U} \cap h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$$

ist

$$K := \partial\Phi(0) \in \mathcal{L}(h^{3+\alpha}(\mathcal{S}), h^{1+\alpha}(\mathcal{S})) \tag{2.38}$$

wohldefiniert. Im Folgenden benutzen wir die Abkürzungen

$$\mathcal{B} := \mathcal{B}(0) \quad \text{und} \quad \mathcal{T} := \mathcal{T}(0),$$

wobei  $\mathcal{B}(0)$  und  $\mathcal{T}(0)$  in (2.15) bzw. (2.33) eingeführt worden sind, d.h.  $\mathcal{B}v$  ist die Ableitung von  $v$  in Richtung der äußeren Normalen  $\nu$  in  $\mathcal{S}$  und  $\mathcal{T}g$  ist die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 && \text{in } \mathbb{B}(0, R) \\ v &= g && \text{auf } \mathcal{S}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

In [23, Lemma 3.1] wird gezeigt, dass die Ableitung des Mittleren-Krümmungs Operators an der Stelle 0 durch folgenden Ausdruck gegeben ist

$$D := D_{\mathcal{S}} := \partial H(0) = -\frac{1}{n-1} \left( \frac{n-1}{R^2} + \Delta_{\mathcal{S}} \right). \quad (2.40)$$

Hierbei bezeichnet  $\Delta_{\mathcal{S}}$  den Laplace-Beltrami Operator auf  $\mathcal{S}$ .

**Lemma 2.4.1** *Es gilt*

$$K = D - [1 + \mathcal{BT}]^{-1} D.$$

**Beweis:** Aus den Gleichungen (2.10) und (2.11) erhalten wir  $L_0 \equiv 1$  und aus dem Beweis von [23, Lemma 3.1] wird ersichtlich, dass

$$\partial L_{\rho}|_{\rho=0} = 0.$$

Daher erhalten wir für  $h \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$ :

$$\begin{aligned} & Kh \\ &= Dh - \partial([1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)]^{-1})|_{\rho=0}[h, H(0)] - [1 + \mathcal{BT}]^{-1} Dh \\ &= Dh - (\partial \text{inv}(1 + \mathcal{BT}) \partial(\mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho))|_{\rho=0}(h)) H(0) - [1 + \mathcal{BT}]^{-1} Dh \\ &= Dh + (1 + \mathcal{BT})^{-1} \partial(\mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho))|_{\rho=0}(h) (1 + \mathcal{BT})^{-1} H(0) - [1 + \mathcal{BT}]^{-1} Dh. \end{aligned}$$

Nun ist  $H(0)$  die mittlere Krümmung der Sphäre  $\mathcal{S}_R$  und daher ist  $H(0) = R^{-1}$ . Das elliptische Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } D, \\ u + \partial_{\mu} u &= R^{-1} && \text{auf } \mathcal{S} \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung  $u \equiv R^{-1}$ . Aus Lemma 2.2.4 und mit der Notation von (2.28) sowie der Abkürzung  $\mathcal{W} := \mathcal{W}(0)$ , erhalten wir  $u = \mathcal{W}R^{-1}$ . Damit impliziert Lemma (2.3.1)

$$(1 + \mathcal{BT})^{-1} H(0) = \gamma \mathcal{W} R^{-1} = R^{-1}.$$

Wir folgern weiter

$$\mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho)R^{-1} = 0 \quad \text{für alle } \rho \in U.$$

Denn  $v = \mathcal{T}(\rho)R^{-1} = R^{-1}$  ist die eindeutige Lösung des elliptischen Randwertproblems (2.39) mit  $g = R^{-1}$ . Offenbar ist  $\mathcal{B}(\rho)v = 0$ . Daher erhalten wir

$$\partial(1 + \mathcal{B}(\rho)\mathcal{T}(\rho))\big|_{\rho=0}[h, R^{-1}] = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \mathcal{B}(\varepsilon h)\mathcal{T}(\varepsilon h)R^{-1} = 0.$$

Somit ist gezeigt, dass

$$Kh = Dh - [1 + \mathcal{B}\mathcal{T}]^{-1}Dh.$$

□

Wir werden nun das Spektrum von  $-K$  untersuchen. Dafür wollen wir zunächst einige Eigenschaften des Laplace-Beltrami Operators  $\Delta_{S^n}$  auf der Einheitssphäre  $S^n$  in Erinnerung rufen. Für eine detaillierte Darstellung verweisen wir auf [67]. Der Operator  $-\Delta_{S^n}$  ist ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum  $L_2(S^n)$  und hat ein reines Punktspektrum, seine Eigenwerte sind  $l(l+n-2)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ . Die Kugelflächenfunktionen  $S(\theta)$  vom Grad  $l$  bilden die Gesamtheit der Eigenfunktionen des Operators  $-\Delta_{S^n}$  zum Eigenwert  $l(l+n-2)$ . Außerdem sind die Kugelflächenfunktionen eine Orthonormalbasis des Hilbertraums  $L_2(S^n)$ . Dies bedeutet, dass jede Funktion  $\psi \in L_2(S^n)$  nach den Kugelflächenfunktionen  $S_m^{(l)}$  entwickelt werden kann,

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} (\psi | S_m^{(l)})_{L_2(S^n)} S_m^{(l)}.$$

Ab jetzt schreiben wir einfach  $(\cdot | \cdot)$  für das  $L_2$ -Skalarprodukt. Wir beweisen nun eine Abschätzung für den Operator  $D_{S^n}$ , die wir im weiteren Verlauf benötigen werden.

**Proposition 2.4.2** *Für alle  $n \geq 2$  gilt,*

$$(D_{S^n}g | g) \geq (g | g), \quad g \in h^{3+\alpha}(S^n), \quad g \perp \{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}.$$

**Beweis:** Wir setzen  $\lambda_l := l(l+n-2)$ . Sei  $\psi \in D(\Delta_{S^n})$  mit  $\psi \perp \{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$ . Dann gilt

$$\psi = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} (\psi | S_m^{(l)}) S_m^{(l)} \tag{2.41}$$

und, weil der selbstadjungierte Operator  $\Delta_{S^n}$  ein reines Punktspektrum hat, folgt (vgl. [67, Satz 21.1])

$$-\Delta_{S^n}\psi = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} (\psi|S_m^{(l)}) \lambda_l S_m^{(l)}. \quad (2.42)$$

Weiter erhalten wir aus (2.41) und (2.42) mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung

$$\begin{aligned} (D_{S^n}\psi|\psi) &= \left( -\psi - \frac{1}{n-1} \Delta_{S^n}\psi \middle| \psi \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left( -\Delta_{S^n}\psi \middle| \psi \right) - (\psi|\psi) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} \left( -\Delta_{S^n}\psi | S_m^{(l)} \right) \overline{(\psi | S_m^{(l)})} - (\psi|\psi) \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} \lambda_l (\psi | S_m^{(l)}) \overline{(\psi | S_m^{(l)})} - (\psi|\psi) \\ &\geq \frac{1}{n-1} \lambda_2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{V_n(l)} (\psi | S_m^{(l)}) \overline{(\psi | S_m^{(l)})} - (\psi|\psi) \\ &= \frac{2n}{n-1} (\psi|\psi) - (\psi|\psi) = \frac{n+1}{n-1} (\psi|\psi) \geq (\psi|\psi). \end{aligned}$$

Wegen  $h^{3+\alpha}(S^n) \subset D(\Delta_{S^n})$  folgt daher die Behauptung. □

Im weiteren Verlauf wollen wir den Dirichlet-Neumann Operator als lineare Abbildung von  $h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$  nach  $h^\alpha(\mathcal{S})$  auffassen. In den folgenden beiden Lemmata werden wir Eigenschaften des Dirichlet-Neumann Operators angeben, die wir bei der Analyse des Spektrums von  $-K$  benutzen werden.

**Lemma 2.4.3** *Mit  $\mathbf{1}(x) = 1$  für  $x \in \mathcal{S}$  gilt.*

- a)  $(\mathcal{B}Tg|\mathbf{1}) = 0$ , für alle  $g \in h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$ .
- b)  $0$  ist ein Eigenwert von  $\mathcal{B}T$  und  $\ker(\mathcal{B}T) = \text{span}\{\mathbf{1}\}$ .

**Beweis:**

a) Sei  $g \in h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$ . Dann erhalten wir mit Hilfe der Greenschen Formel

$$(\mathcal{B}\mathcal{T}g|\mathbf{1}) = \int_{\mathbb{B}(0,R)} \Delta \mathcal{T}g \, dx = 0. \quad (2.43)$$

Genauer gesagt erhält man (2.43) zunächst für glatte Funktionen mit Hilfe der Greenschen Formel. Für Funktionen in  $h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$  folgt (2.43) dann durch einen Dichteschluß.

b) Es sei  $\mathcal{B}\mathcal{T}g = 0$  für ein  $g \in h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$ . Außerdem bezeichne  $v := \mathcal{T}g$  die harmonische Fortsetzung von  $g$  auf  $\mathbb{B}(0, R)$ , mit anderen Worten:  $v$  ist die Lösung von (2.39). Wir multiplizieren  $\mathcal{B}\mathcal{T}g$  mit  $\bar{g}$  und erhalten wieder mit Hilfe der Greenschen Formel

$$(\mathcal{B}\mathcal{T}g|g) = \int_{\mathbb{B}(0,R)} |\nabla \mathcal{T}g|^2 \, dx = 0. \quad (2.44)$$

Auch hier zeigt man (2.44) zunächst für glatte Funktionen und macht dann einen Dichteschluß. Daher können wir schließen, dass  $v$  und somit auch  $g = v|_{\mathcal{S}}$  konstant ist. Offenbar ist  $\mathcal{B}\mathcal{T}\mathbf{1} = 0$ . Daher ist 0 ein Eigenwert und der zugehörige Eigenraum wird von  $\mathbf{1}$  aufgespannt.

□

Für  $r > 0$  bezeichne

$$h_0^r(\mathcal{S}) := \{g \in h^r(\mathcal{S}); \int_{\mathcal{S}} g \, d\sigma = 0\}$$

den Raum aller Funktionen in  $h^r(\mathcal{S})$  mit Mittelwert 0.

**Lemma 2.4.4** *Es ist  $\mathcal{B}\mathcal{T} \in \text{Isom}(h_0^{1+\alpha}(\mathcal{S}), h_0^\alpha(\mathcal{S}))$ . Ferner gilt,*

$$((\mathcal{B}\mathcal{T})^{-1}g|g) > 0, \quad g \in h_0^\alpha(\mathcal{S}) \setminus \{0\}.$$

Ein Beweis findet sich in [23, Lemma 5.3].

Nach diesen Vorbereitungen können wir das Spektrum von  $-K$  charakterisieren.

**Proposition 2.4.5** *Das Spektrum von  $-K$  besteht aus einer abzählbaren Menge von isolierten Eigenwerten  $\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}$  mit*

$$\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\} \subset (-\infty, 0].$$

*Jeder Eigenwert von  $-K$  hat endliche algebraische Vielfachheit. Ferner ist 0 ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit  $(n+1)$ .*

**Beweis:**

- a) Wegen  $K \in \mathcal{H}(h^{3+\alpha}(\mathcal{S}), h^{1+\alpha}(\mathcal{S}))$  und der Kompaktheit der Einbettung von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  in  $h^{1+\alpha}(\mathcal{S})$ , hat  $-K$  kompakte Resolvente. Nun folgt aus [43, Theorem 6.29], dass das Spektrum von  $-K$  aus einer abzählbaren Menge von isolierten Eigenwerten mit endlicher algebraischer Vielfachheit besteht.
- b) Wir betrachten zunächst den Fall, dass  $\mathcal{S} = S^n$  die Einheitskugel mit Mittelpunkt 0 ist. Wir zeigen, dass 0 ein Eigenwert der Vielfachheit  $(n+1)$  ist. Sei  $g \in h^{3+\alpha}(S^n)$  mit  $Kg = 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} D_{S^n}g - (1 + \mathcal{B}\mathcal{T})^{-1}D_{S^n}g &= 0 \\ D_{S^n}g + \mathcal{B}\mathcal{T}D_{S^n}g - D_{S^n}g &= 0 \\ \mathcal{B}\mathcal{T}D_{S^n}g &= 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\mathcal{B}\mathcal{T}((n-1) + \Delta_{S^n})g = 0.$$

Schließlich erhalten wir aus Lemma 2.4.3 b)

$$((n-1) + \Delta_{S^n})g = c \tag{2.45}$$

mit einer Konstanten  $c$ . Für  $c \neq 0$  ist (2.45) eine inhomogene Gleichung und eine spezielle Lösung ist gegeben durch  $g_0 = (n-1)^{-1}c$ . Die Gesamtheit der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$((n-1) + \Delta_{S^n})g = 0$$

ist durch Linearkombination der Kugelflächenfunktionen  $\{S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$  vom Grad 1 gegeben. Wir können daher schließen, dass

$$\ker(-K) = \text{span}\{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}. \tag{2.46}$$

- c) Wir zeigen nun, dass die restlichen Eigenwerte von  $-K$  in  $(-\infty, 0)$  enthalten sind. Es sei also  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $g \in h^{3+\alpha}(S^n) \setminus \{0\}$  mit

$$zg + Kg = 0 \tag{2.47}$$

dann folgt,

$$zg + D_{S^n}g - (1 + \mathcal{BT})^{-1}D_{S^n}g = 0 \quad (2.48)$$

$$zg + z\mathcal{BT}g + D_{S^n}g + \mathcal{BT}D_{S^n}g - D_{S^n}g = 0 \quad (2.49)$$

$$zg + z\mathcal{BT}g + \mathcal{BT}D_{S^n}g = 0. \quad (2.50)$$

Aus Lemma 2.4.3 a) folgt, dass  $\mathcal{BT}g$  und  $\mathcal{BT}Dg$  Mittelwert 0 haben, d.h.  $(\mathcal{BT}g|\mathbf{1}) = 0$  und  $(\mathcal{BT}D_{S^n}g|\mathbf{1}) = 0$ . Daher erhalten wir aus (2.50)  $(zg|\mathbf{1}) = 0$  und wegen  $z \neq 0$  somit auch  $(g|\mathbf{1}) = 0$ . Daher können wir den Operator  $(\mathcal{BT})^{-1}$  auf Gleichung (2.50) anwenden und erhalten

$$z(\mathcal{BT})^{-1}g + zg + D_{S^n}g = 0. \quad (2.51)$$

Wir multiplizieren Gleichung (2.51) mit  $\bar{g}$  und integrieren über  $S^n$ :

$$z((\mathcal{BT})^{-1}g|g) + z(g|g) + (Dg|g) = 0.$$

Wir können  $g$  schreiben als  $g = g_1 + g_2$  mit  $g_1 \in \text{span}\{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$  und  $g_2 \perp \text{span}\{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$ . Aus (2.46) und Gleichung (2.47) folgt  $g_2 \neq 0$  und wegen der Symmetrie von  $D_{S^n}$  auf  $L_2(S^n)$  können wir schließen, dass

$$z((\mathcal{BT})^{-1}g|g) + z(g|g) + (Dg_2|g_2) = 0.$$

Daher können wir aus Proposition 2.4.2 und Lemma 2.4.4 folgern, dass  $z \in (-\infty, 0)$ . Somit besteht das Spektrum von  $-K$  aus einer diskreten Menge von reellen Eigenwerten  $\{\lambda_k; k \in \mathbb{N}\}$  mit

$$\cdots < \lambda_{k+1} < \lambda_k < \lambda_{k-1} < \cdots < \lambda_1 < \lambda_0 = 0$$

und 0 ist ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit  $(n+1)$ .

- d) Wir betrachten nun den Fall, dass  $\mathcal{S}$  eine Sphäre mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Koordinatenursprung ist. Es gilt die Beziehung

$$D_{\mathcal{S}}g = R^{-2}[\theta_R^*]^{-1}(D_{S^n}\theta_R^*g), \quad g \in C^2(\mathcal{S}),$$

hierbei steht  $\theta_R$  für die Streckung um den Faktor  $R$  und

$$\theta_R^* \in \text{Isom}(h^{3+\alpha}(\mathcal{S}), h^{3+\alpha}(S^n)), \quad [\theta_R^*g](x) := g(Rx)$$

bezeichnet den zugehörigen pull-back Operator. Ersetzt man Proposition 2.4.2 durch

$$(D_S g|g) \geq R^{-2}(g|g), \quad g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S}), \quad g \perp \{\mathbf{1}, S_{m,R}^{(1)}; 1 \leq m \leq n\},$$

wobei wir mit  $S_{m,R}^{(1)}$  die Kugelflächenfunktionen auf der  $R$ -Sphäre bezeichnen, so bleibt der Beweis von a) und b) richtig.

□

## 2.5 Die Zentrumsmannigfaltigkeit

In diesem Abschnitt beweisen wir die Existenz einer lokal invarianten,  $(n + 1)$ -dimensionalen Zentrumsmannigfaltigkeit für die Evolutionsgleichung (2.31). Außerdem zeigen wir, dass diese Mannigfaltigkeit Lösungen exponentiell anzieht. Schließlich beweisen wir die Eindeutigkeit dieser Mannigfaltigkeit und die Tatsache, dass sie ausschließlich aus Equilibrien besteht. Jede Sphäre ist ein Equilibrium für das quasistationäre Stefan-Problem. Wie im vorherigen Abschnitt sei  $\Sigma = \mathcal{S}$  eine feste Sphäre mit Radius  $R$ , die den Koordinatenursprung als Mittelpunkt hat. Damit ist  $0$  ein Equilibrium der Evolutionsgleichung (2.31). Wir können (2.31) umschreiben als

$$\partial_t \rho + K\rho = g(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0, \quad (2.52)$$

mit

$$g(\rho) = K\rho - \Phi(\rho),$$

wobei  $K$  die Linearisierung der Abbildung  $[\rho \mapsto \Phi(\rho)]$  ist, vgl. Lemma 2.4.1. Die Gleichung (2.52) ist als eine voll nichtlineare Evolutionsgleichung zu betrachten. Bei der Konstruktion der lokal invarianten Zentrumsmannigfaltigkeit werden wir die Theorie der maximalen Regularität zu Hilfe nehmen. Wie bereits gezeigt worden ist, ist der Kern von  $K$  gegeben durch den Raum  $X^c := \text{span}\{\mathbf{1}, S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$ , der aufgespannt wird von  $\mathbf{1}$  und den  $n$  linear unabhängigen Kugelflächenfunktionen  $S_m^{(1)}$  vom Grad 1, siehe Beweis von Proposition 2.4.5. Wir haben

$$S_m^{(1)} = R^{-1}p_m|_{\mathcal{S}}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (2.53)$$

Hierbei ist  $p_m$  ein harmonisches Polynom vom Grad 1, welches gegeben ist durch  $p_m(x) = x_m$  für  $x \in \mathbb{R}^n$ , und  $p_m|_{\mathcal{S}}$  bezeichnet die Einschränkung von  $p_m$  auf  $\mathcal{S}$ . Der Raum  $X^c$  ist ein endlichdimensionaler Untervektorraum von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  und ist daher ein topologisch direkter Summand. Es läßt sich sogar ein zu  $X^c$  komplementärer Untervektorraum von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  finden, sodass die entsprechende topologisch direkte Summe den Operator  $K$  zerlegt.

**Lemma 2.5.1** *Es existiert eine auf  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  stetige Projektion  $P$  mit  $\text{im}(P) = X^c$ , sodass  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S}) = X^c \oplus \text{im}(I - P)$  eine topologisch direkte Summe ist, die  $K$  reduziert.*

**Beweis:**

a) Mit der Darstellung (2.53) sehen wir

$$\int_{\mathcal{S}} S_m^{(1)} d\sigma = 0, \quad \text{für } 1 \leq m \leq n. \quad (2.54)$$

Somit haben die Kugelflächenfunktionen  $S_m^{(1)}$  Mittelwert 0 und daher ist  $H := \text{span}\{S_m^{(1)}; 1 \leq m \leq n\}$  ein Untervektorraum von  $h_0^{3+\alpha}(\mathcal{S})$ . Lemma 2.4.4 zeigt, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : h^{3+\alpha}(\mathcal{S}) \times h_0^{3+\alpha}(\mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \langle g, f \rangle := (g|(\mathcal{B}\mathcal{T})^{-1}f) + (g|f), \quad (2.55)$$

wohldefiniert ist, wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt in  $L_2(\mathcal{S})$  bezeichnet. Insbesondere definiert die Einschränkung dieser Abbildung auf  $H$  ein Skalarprodukt. Sei  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $H$  bezüglich des von (2.55) induzierten Skalarprodukts. Dann definiert die Abbildung  $P_H$  mit

$$P_H g := \sum_{m=1}^n \langle g, \eta_m \rangle \eta_m, \quad g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S}),$$

eine stetige Projektion von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  auf  $H$ . Wir zeigen nun  $P_H K g = 0$  für alle  $g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$ . Tatsächlich folgt aus Lemma 2.4.1 und der Symmetrie

von  $\mathcal{BT}$  und  $D$

$$\begin{aligned}
P_H K g &= \sum_{m=1}^n (K g, (\mathcal{BT})^{-1} \eta_m) \eta_m + \sum_{m=1}^n (K g, \eta_m) \eta_m \\
&= \sum_{m=1}^n (K g, (I + \mathcal{BT})(\mathcal{BT})^{-1} \eta_m) \eta_m \\
&= \sum_{m=1}^n (\mathcal{BT} D g, (\mathcal{BT})^{-1} \eta_m) \eta_m \\
&= \sum_{m=1}^n (D g, \eta_m) \eta_m \\
&= \sum_{m=1}^n (g, D \eta_m) \eta_m.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun wegen  $D \eta_m = 0$  für  $1 \leq m \leq n$ . Für jedes  $g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  ist  $P_H g$  ein Element von  $\ker K$ , also  $K P_H g = 0$ . Somit ist gezeigt, dass  $P_H K = K P_H$ .

b) Wir definieren eine weitere Projektion  $P_1$  durch

$$P_1 g := \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\mathcal{S}} g \, d\mathbf{1}, \quad g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S}),$$

wobei  $|\mathcal{S}|$  für das Maß von  $\mathcal{S}$  steht. Damit ist  $P_1$  eine stetige Projektion von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  auf  $\text{span}\{\mathbf{1}\}$ . Wir zeigen  $P_1 K g = 0$  für alle  $g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$ . Wir rufen in Erinnerung, dass  $u := \mathcal{W} D g$  die Lösung von

$$\begin{aligned}
\Delta v &= 0 && \text{in } \mathbb{B}(0, R), \\
v + \partial_\nu v &= D g && \text{auf } \mathcal{S}
\end{aligned}$$

ist. Nun folgt aus Lemma 2.3.1

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} (I + \mathcal{BT})^{-1} D g \, d\mathbf{o} &= \int_{\mathcal{S}} u \, d\mathbf{o} = \int_{\mathcal{S}} D g \, d\mathbf{o} - \int_{\mathcal{S}} \partial_\nu u \, d\mathbf{o} \\
&= \int_{\mathcal{S}} D g \, d\mathbf{o} - \int_{\mathbb{B}(0, R)} \Delta u \, dx = \int_{\mathcal{S}} D g \, d\mathbf{o}
\end{aligned}$$

und daher

$$P_1 K g = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{\mathcal{S}} K g \, d\mathbf{o} = \int_{\mathcal{S}} (D g - (I + \mathcal{BT})^{-1} D g) \, d\mathbf{o} = 0, \quad g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S}).$$

Für jedes  $g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  ist  $P_1g$  ein Element von  $\ker K$ , also  $KP_1g = 0$ . Somit ist gezeigt, dass  $P_1K = KP_1$ .

c) Aus (2.54) folgt  $P_1\eta_m = 0$  für  $1 \leq m \leq n$  und mit Lemma 2.4.4 erhalten wir auch

$$\begin{aligned} P_H \mathbf{1} &= \sum_{m=1}^n \langle \mathbf{1}, \eta_m \rangle \eta_m \\ &= \sum_{m=1}^n (\mathbf{1} | (\mathcal{B}T)^{-1} \eta_m) \eta_m + \sum_{m=1}^n (\mathbf{1} | \eta_m) \eta_m = 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass  $P_1P_H = P_HP_1 = 0$ . Folglich ist die Abbildung  $P$  mit

$$Pg := P_Hg + P_1g, \quad g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$$

eine stetige Projektion von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  auf  $X^c$ . Aus Schritt a) und b) folgt nun  $PKg = KPg$  für alle  $g \in h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$ . Daher schließen wir, dass  $X^c \oplus \text{im}(I - P)$  eine topologisch direkte Summe ist, die  $K$  reduziert.

□

**Bemerkung 2.5.2** *Es bezeichne  $\pi^c$  die zum Eigenwert 0 von  $K$  gehörende spektrale Projektion. Dann gilt*

$$\pi^c(h^{3+\alpha}(\mathcal{S})) = X^c.$$

**Beweis:** Proposition 2.4.5 zeigt, dass 0 ein Eigenwert von  $K$  mit endlicher algebraischer Vielfachheit ist. Daher ist die zugehörige spektrale Projektion wohldefiniert und

$$\dim \pi^c(h^{3+\alpha}(\mathcal{S})) < \infty.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\pi^c(h^{3+\alpha}(\mathcal{S})) \supset X^c,$$

(ein Beweis findet sich in [49, Proposition A.2.2]). Die spektrale Projektion reduziert ebenfalls den Operator  $K$ . Bezeichnet  $K_c$  den Teil von  $K$  in  $\pi^c(h^{3+\alpha}(\mathcal{S}))$ ,

so ist  $\sigma(K_c) = \{0\}$ , also  $K_c$  nilpotent. Mit Lemma 2.5.1 folgt daher auch die umgekehrte Inklusion

$$\pi^c(h^{3+\alpha}(\mathcal{S})) \subset X^c.$$

□

Wir setzen  $\pi^s := I - \pi^c$  und  $X_1^s := \pi^s(h^{3+\alpha}(\mathcal{S}))$ . Damit ist

$$h^{3+\alpha}(\mathcal{S}) = X^c \oplus X_1^s$$

eine topologisch direkte Summe, die  $K$  reduziert. Bezeichne  $K_s$  den Teil von  $K$  in  $X_1^s$ , so ist  $\sigma(-K_s) = \sigma(-K)/\{0\}$ . Daher nennt man  $X_1^s$  den stabilen Unterraum von  $-K$ .

Für  $\rho_0 \in \mathcal{V}$  bezeichne  $\rho(\cdot, \rho_0)$  die Lösung der quasilinearen Evolutionsgleichung (2.36) und  $[0, t^+(\rho_0))$  bezeichne ihr maximales Existenzintervall. Wir rufen in Erinnerung, dass  $0 < \alpha < \beta < 1$ . Sei außerdem  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  beliebig aber fest. Wir setzen wieder  $\eta := (1 + \beta - \alpha)/2$ .

**Proposition 2.5.3** *a) Es existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{O}$  von 0 in  $X^c$  und eine Abbildung*

$$\sigma \in C^k(\mathcal{O}, X_1^s) \quad \text{mit } \sigma(0) = 0, \quad \partial\sigma(0) = 0, \quad (2.56)$$

*sodass die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^c := \text{graph}(\sigma) \subset h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  lokal invariant ist für die Evolutionsgleichung (2.36) oder (2.52). Die Mannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^c$  enthält alle kleinen globalen Lösungen von (2.52).*

*b) Sei  $\omega \in (0, -\lambda_1)$ , wobei wir mit  $\lambda_1$  den ersten von Null verschiedenen Eigenwert von  $-K$  bezeichnen (siehe Proposition 2.4.5). Dann existiert eine Konstante  $c = c(\omega, \alpha, \beta) > 0$ , sodass*

$$\|\pi^s \rho(t, \rho_0) - \sigma(\pi^c \rho(t, \rho_0))\|_{3+\alpha} \leq \frac{c}{t^{1-\eta}} e^{-\omega t} \|\pi^s \rho_0 - \sigma(\pi^c \rho_0)\|_{2+\beta} \quad (2.57)$$

*für jedes  $\rho_0$  aus einer hinreichend kleinen Umgebung der 0 in  $h^{2+\beta}(\mathcal{S})$ . Die Abschätzung (2.57) ist richtig für alle  $t \in (0, t^+(\rho_0))$  mit  $\pi^c \rho(t, \rho_0) \in \mathcal{O}$ .*

**Beweis:** Im Folgenden weisen wir nach, dass die Voraussetzungen von [64, Abschnitt 4] erfüllt sind. Wir rufen in Erinnerung, dass

$$\mathcal{U} := \{\rho \in h^{2+\alpha}(\Sigma); \|\rho\|_\infty < b\}, \quad \mathcal{V} := \{\rho \in h^{2+\beta}(\Sigma); \|\rho\|_\infty < b\}.$$

Die Menge  $\mathcal{U}$  entspricht der Menge  $U_\beta$  und die Menge  $\mathcal{V}$  entspricht der Menge  $U$  aus [64, Abschnitt 4]. Außerdem ist in dieser Notation  $X_1 = h^{3+\alpha}(\Sigma)$  und  $X_0 = h^{1+\alpha}(\Sigma)$ . Unsere Resultate aus Abschnitt 2.3 implizieren nun die in [64, Abschnitt 4] vorausgesetzten Bedingungen über maximale Regularität. Genauer gesagt garantieren Lemma 2.3.2, Proposition 2.3.3 und Proposition 2.3.4 sowie deren Beweise, dass die Voraussetzungen (4.1)-(4.4) in [64, Abschnitt 4] erfüllt sind. Mit Proposition 2.4.5 und Bemerkung 2.5.2 erkennen wir, dass 0 ein isolierter Eigenwert von  $K$  mit algebraischer Vielfachheit  $(n + 1)$  ist. Schließlich sind wegen  $\Phi(0) = 0$  die restlichen Voraussetzungen von [64, Abschnitt 4] ebenfalls erfüllt. Die Existenz einer lokal invarianten Zentrumsmanifoldigkeit erhalten wir daher aus [64, Theorem 4.1]. Genauer gesagt, wird in [64] die Evolutionsgleichung zunächst mit einer Abschneidefunktion multipliziert und dann die Existenz einer global invarianten Zentrumsmanifoldigkeit für diese modifizierte Evolutionsgleichung bewiesen. Für eine hinreichend kleine Umgebung der 0 stimmt die ursprüngliche Evolutionsgleichung mit der modifizierten Evolutionsgleichung überein. Daher impliziert die Existenz einer global invarianten Zentrumsmanifoldigkeit für die modifizierte Evolutionsgleichung die Existenz einer lokal invarianten Zentrumsmanifoldigkeit für die ursprüngliche Evolutionsgleichung. Die Abschätzung (2.57) ist nun ein Konsequenz aus [64, Theorem 5.8].

□

**Bemerkung 2.5.4** a)  $\mathcal{M}^c$  ist eine  $C^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n + 1$ , denn sie ist der Graph einer  $C^k$ -Funktion, die auf einer offenen Teilmenge von  $X^c$  definiert ist. Die Abbildung  $x \mapsto (x, \sigma(x))$  ist eine Parametrisierung von  $\mathcal{M}^c$ . Daher ist der Tangentialraum von  $\mathcal{M}^c$  im Punkt 0 gegeben durch  $T_0(\mathcal{M}^c) = \text{im}(id_{X^c}, \partial\sigma(0))$ , und aus (2.56) folgt

$$T_0(\mathcal{M}^c) = X^c \times \{0\} \cong X^c.$$

Mit anderen Worten ist  $X^c$  tangential zu  $\mathcal{M}^c$  im Punkt 0.

b) Schon bei gewöhnlichen Differentialgleichungen sind Zentrumsmanifoldigkeiten im allgemeinen nicht eindeutig, wie das folgende Beispiel von A. Kelley (vgl. [68, Beispiel 13.7]) zeigt: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

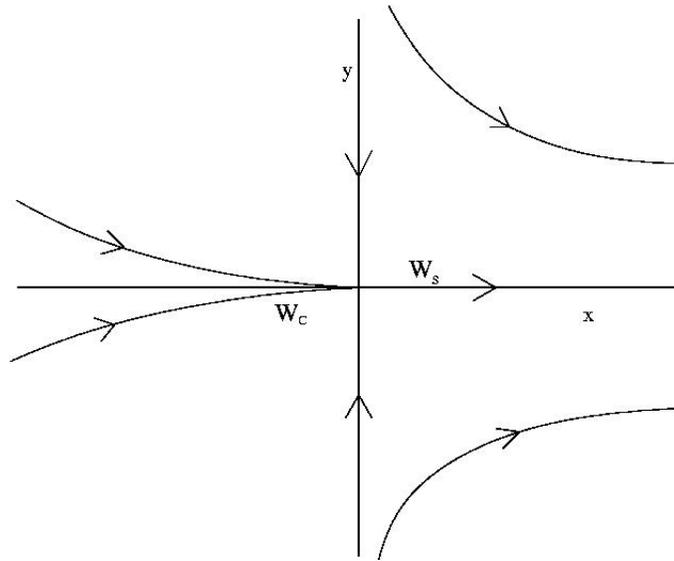


Abbildung 2.1: Orbits im Phasenraum zu b)

In diesem Fall besteht der stabile Unterraum  $X^s$  aus der  $y$ -Achse und der Raum  $X^c$  besteht aus der  $x$ -Achse. Eine mögliche Zentrumsmannigfaltigkeit ist durch die  $x$ -Achse selbst gegeben. Wir finden die Orbits im Phasenraum durch Integration

$$y(x) = Ce^{1/x}.$$

Wobei die Konstante  $C$  durch den Anfangswert bestimmt wird. Daher gibt es unendlich viele invariante Untermannigfaltigkeiten, die tangential zu  $X^c$  im Punkt  $0$  sind.

- c) Wir möchten an dieser Stelle betonen, dass wir exponentielle Attraktivität der lokalen Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^c$  in der Topologie von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  für Anfangsdaten  $\rho_0 \in h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  bekommen. Dieses Ergebnis ist nahezu optimal, denn es berücksichtigt bereits den regularisierenden Effekt der quasilinearen Evolutionsgleichung (2.36).
- d) Wir möchten noch kurz erläutern, was gemeint ist, wenn wir sagen,  $\mathcal{M}^c$  enthalte alle kleinen globalen Lösungen von (2.36). Sei  $\rho(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  eine globale Lösung von (2.36), wobei  $\rho(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  in einer hinreichend kleinen Nullumgebung bezüglich der Topologie von  $h^{3+\alpha}(\mathcal{S})$  enthalten sei.

Dann ist

$$\pi^s \rho(t) = \sigma(\pi^c \rho(t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

und  $\pi^c \rho(\cdot)$  ist Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{z}(t) + K_c z(t) = \pi^c g(z(t) + \sigma(z(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(0) = \pi^c \rho(0).$$

Wir bezeichnen mit  $\mathcal{C}$  die Menge der Sphären, die kleine Störungen von  $\mathcal{S}$  sind. Weil Sphären Equilibrien des quasistationären Stefan-Problems sind, folgt mit Proposition 2.5.3 a)  $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}^c$ . Jede Sphäre  $C \in \mathcal{C}$  ist vollständig durch  $n + 1$  Parameter, nämlich durch den Radius und die  $n$  Koordinaten des Mittelpunkts, beschrieben. Es gilt sogar  $\mathcal{C} = \mathcal{M}^c$ . Dies bedeutet:

**Proposition 2.5.5** *Die lokale Zentrumsmannigfaltigkeit  $\mathcal{M}^c$  besteht nur aus Equilibrien.*

Für einen Beweis verweisen wir auf [23, Proposition 6.4].

Wie oben sei  $\eta := (1 + \beta - \alpha)/2$ . Das folgende Theorem zeigt, dass für Anfangswerte, die kleine Störungen einer Sphäre sind, die Lösung global existiert und gegen eine Sphäre konvergiert.

**Theorem 2.5.6** *a) Es existiert eine Umgebung  $V$  von 0 in  $h^{2+\beta}(\mathcal{S})$ , sodass die Lösung der quasilinearen Evolutionsgleichung (2.36) für jeden Anfangswert  $\rho_0 \in V$  global existiert.*

*b) Sei  $\omega \in (0, -\lambda_1)$  und  $\rho_0 \in V$ . Dann existiert eine Konstante  $c = c(\omega, \alpha, \beta) > 0$  und ein eindeutiges  $z_0 = z_0(\rho_0) \in \mathcal{O}$ , sodass für alle  $t > 0$  gilt*

$$\|(\pi^c \rho(t, \rho_0), \pi^s \rho(t, \rho_0)) - (z_0, \sigma(z_0))\|_{3+\alpha} \leq \frac{c}{t^{1-\eta}} e^{-\omega t} \|\pi^s \rho_0 - \sigma(\pi^c \rho_0)\|_{2+\beta}.$$

**Beweis:** Es folgt aus Proposition 2.5.5, dass die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung in  $X^c$ ,

$$\dot{z}(t) + K_c z(t) = \pi^c g(z(t) + \sigma(z(t))), \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(0) = z_0, \quad (2.58)$$

gegeben ist durch  $z(t) \equiv z_0$  für  $z_0 \in \mathcal{O}$ . Daher ist 0 ein stabiles Equilibrium der Gleichung (2.58). Deswegen erhalten wir aus [63, Theorem 3.3a)], dass  $(0, \sigma(0)) = (0, 0)$  ein in  $h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  stabiles Equilibrium der quasilinearen Evolutionsgleichung (2.36) ist. Der Vollständigkeit halber wollen wir an dieser Stelle kurz die Definition von *Stabilität* in Erinnerung rufen. Sei  $X$  ein metrischer Raum

und  $\varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$  sei ein (lokaler) Halbfluss. Eine Teilmenge  $M \subset X$  heißt stabil, wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $M$  eine weitere Umgebung  $V$  von  $M$  gibt mit  $t^+(x) = \infty$  und  $\gamma^+(x) \subset U$  für jedes  $x \in V$ . Damit haben wir insbesondere, dass für Anfangswerte in einer hinreichend kleinen Umgebung  $V$  von  $0$  in  $h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  die Lösung von (2.36) global existiert. Wir können [63, Theorem 3.3] tatsächlich auf die vorliegende Situation anwenden, denn wir haben es mit einer parameterunabhängigen Gleichung zu tun. Daher können wir in der Notation von [63]  $\Lambda = F = \{0\}$  annehmen. In diesem Fall stimmen die Voraussetzungen von [63] mit denen von [64, Abschnitt 4] überein, die wir im Beweis von Proposition 2.5.3 verifiziert haben. Schließlich können wir  $X = h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  in [63, Theorem 3.3] wählen, weil (2.36) einen glatten Halbfluss auf  $\mathcal{V} \subset h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  definiert (vgl. Theorem 2.3.5). Damit folgt Behauptung a). Basierend auf unserer Proposition 2.5.3 verläuft nun der Beweis des Teils b) der Behauptung wortwörtlich zum Beweis von [23, Theorem 6.5(b)].

□

Sei  $l \in \mathbb{N}$ . Man kann zeigen, dass  $A(\rho) \in \mathcal{H}(h^{l+3+\alpha}(\mathcal{S}), h^{l+1+\alpha}(\mathcal{S}))$  für  $\rho \in \mathcal{U}_l$  mit  $\mathcal{U}_l := \mathcal{U} \cap h^{l+2+\alpha}(\mathcal{S})$ . Die Resultate in Abschnitt 2.3 und Abschnitt 2.4 bleiben richtig, wenn man  $\alpha$  durch  $l + \alpha$  ersetzt. Schließlich erhalten wir das folgende Resultat, dessen Beweis analog zum Beweis von [23, Proposition 6.6] verläuft.

**Korollar 2.5.7** *Sei  $\omega \in (0, -\lambda_1)$  und  $r > 0$ . Dann existiert eine Umgebung  $V = V(\omega, r)$  von  $0$  in  $h^{2+\beta}(\mathcal{S})$  und für jedes  $\rho_0 \in V$  existiert ein eindeutiges  $z_0 = z_0(\rho_0) \in \mathcal{O}$  sowie eine Konstante  $c = c(\omega, r) > 0$ , sodass für alle  $t \geq 1$  gilt*

$$\|(\pi^c \rho(t, \rho_0), \pi^s \rho(t, \rho_0) - (z_0, \sigma(z_0)))\|_r \leq ce^{-\omega t} \|\pi^s \rho_0 - \sigma(\pi^c \rho_0)\|_{2+\beta}.$$

*Also zieht das Equilibrium  $(z_0, \sigma(z_0))$  die Lösung  $\rho(t, \rho_0)$  exponentiell in der Topologie von  $h^r(\mathcal{S})$  an.*

# Kapitel 3

## Quasilineare parabolische Evolutionsgleichungen

Abstrakte quasilineare parabolische Evolutionsgleichungen wurden schon von vielen Autoren untersucht. Wir verweisen an dieser Stelle exemplarisch auf die Werke [2] und [3] und die darin enthaltenen Literaturangaben. Im Kontext von maximaler Regularität in stetigen Interpolationsräumen werden quasilineare parabolische Gleichungen in der Arbeit [16] studiert. Wir müssen die Resultate dieser Arbeit etwas modifizieren, um sie auf das Stefan-Problem anwenden zu können. So werden wir rechte Seiten  $F$  betrachten, die auf einer Menge definiert sind, in der auch die Lösung gesucht wird. Insbesondere kann  $F$  auch nichtlokal in der Zeit sein. Quasilineare parabolische Probleme mit solch allgemeinen Nichtlinearitäten, die gewissermaßen auf dem kleinstmöglichen Raum definiert sind, werden auch in der Arbeit [4] mit Hilfe von maximaler  $L_p$ -Regularität studiert. Hauptresultat dieses Kapitels ist Satz 3.4.1, in dem wir lokale Existenz für eine quasilineare parabolische Evolutionsgleichung beweisen.

### 3.1 Funktionenräume und maximale Regularität

Im folgenden sei  $\mu \in (0, 1]$ ,  $E$  ein (reeller oder komplexer) Banach Raum und  $J = [0, T]$  mit einer Zahl  $T > 0$ . Wir betrachten Funktionen, die auf  $\dot{J} := J \setminus \{0\}$  definiert sind und eine vorgeschriebene Singularität in der 0 haben. Sei

$$BUC_{1-\mu}(J, E) := \{u \in C(\dot{J}, E); [t \mapsto t^{1-\mu}u] \in BUC(\dot{J}, E), \lim_{t \rightarrow 0+} t^{1-\mu}\|u(t)\| = 0\}$$

$$\|u\|_{C_{1-\mu}} := \sup_{t \in \dot{J}} t^{1-\mu}\|u(t)\|_E, \quad \mu \in (0, 1).$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass  $BUC_{1-\mu}(J, E)$ , ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_{C_{1-\mu}}$ , ein Banachraum ist. Wir führen nun den folgenden Untervektorraum von  $BUC_{1-\mu}(J, E)$  ein:

$$BUC_{1-\mu}^1(J, E) := \{u \in C^1(J, E); u, \dot{u} \in BUC_{1-\mu}(J, E)\}.$$

Außerdem setzen wir

$$BUC_0(J, E) := BUC(J, E), \quad BUC_0^1(J, E) := BUC^1(J, E).$$

Sind  $E_1$  und  $E_0$  zwei Banachräume, sodass  $E_1$  stetig in  $E_0$  eingebettet ist, so setzen wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0(J) &:= BUC_{1-\mu}(J, E_0), \quad \mu \in (0, 1], \\ \mathbb{E}_1(J) &:= BUC_{1-\mu}^1(J, E_0) \cap BUC_{1-\mu}(J, E_1), \end{aligned}$$

wobei wir  $\mathbb{E}_1(J)$  mit der Norm

$$\|u\|_{\mathbb{E}_1(J)} := \sup_{t \in J} t^{1-\mu} (\|\dot{u}(t)\|_{E_0} + \|u(t)\|_{E_1})$$

ausstatten, die diesen Raum zu einem Banachraum macht. Jede Funktion  $v \in \mathbb{E}_1(J)$  hat eine Spur, wie die folgende Bemerkung zeigt.

### Bemerkung 3.1.1

- a) Die Abbildung  $\gamma : \mathbb{E}_1(J) \rightarrow E_0$ ,  $\gamma v := v(0)$ , ist wohldefiniert, linear und stetig.
- b) Wir setzen

$$\begin{aligned} \gamma \mathbb{E}_1(J) &:= \text{im}(\gamma) \\ \|x\|_{\gamma \mathbb{E}_1(J)} &:= \inf \{\|v\|_{\mathbb{E}_1(J)}; v \in \mathbb{E}_1(J), \gamma v = x\}. \end{aligned}$$

Der Raum  $\gamma \mathbb{E}_1(J)$  heißt **Spurraum** von  $\mathbb{E}_1(J)$ . Die Topologie auf  $\gamma \mathbb{E}_1(J)$  ist die Quotiententopologie des Banachraums  $\mathbb{E}_1(J)/\ker \gamma$ . Daher ist  $\gamma \mathbb{E}_1(J)$  selbst ein Banachraum und es gilt  $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1(J), \gamma \mathbb{E}_1(J))$ .

**Beweis:** Teil a) wird in [16, Remark 2.1] bewiesen und Teil b) ist eine unmittelbare Konsequenz aus a).

□

**Lemma 3.1.2 (Lemma 2.2 in [16])** Sei  $\mathcal{H}(E_1, E_0) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

a)  $\gamma \mathbb{E}_1(J) = E_\mu$ .

b)  $\mathbb{E}_1(J) = BUC_{1-\mu}^1(J, E_0) \cap BUC_{1-\mu}(J, E_1) \hookrightarrow BUC(J, E_\mu)$ .

c) Es existiert eine Konstante  $c := c(\mu) > 0$  unabhängig von  $J$ , sodass

$$\|u\|_{BUC(J, E_\mu)} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)}, \quad u \in \mathbb{E}_1(J), \quad \gamma u = 0.$$

d)  $\mathbb{E}_1(J) = BUC_{1-\mu}^1(J, E_0) \cap BUC_{1-\mu}(J, E_1) \hookrightarrow BUC^{\mu-\sigma}(J, E_\sigma), \quad \sigma \in [0, \mu]$ .

**Beweis:** In [16, Lemma 2.2] findet man eine Referenz zu den Teilen a) und b) sowie einen Beweis der Teile c) und d). □

In Kapitel 4 werden wir weitere Abschätzungen benötigen, die wir hier zusammenstellen und beweisen wollen.

**Korollar 3.1.3** Sei  $\mathcal{H}(E_1, E_0) \neq \emptyset$ . Dann gilt:

a) Es existiert eine Konstante  $c := c(\mu) > 0$  unabhängig von  $J$ , sodass für alle  $u \in \mathbb{E}_1(J)$  gilt

$$\sup_{s, t \in J, s \neq t} \frac{\|u(t) - u(s)\|_{E_0}}{|t - s|^\mu} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)}, \quad \mu \in (0, 1).$$

b) Es existiert eine Konstante  $c := c(\mu, \sigma) > 0$  unabhängig von  $J$ , sodass

$$\|u\|_{BUC^{\mu-\sigma}(J, E_\sigma)} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)}, \quad u \in \mathbb{E}_1(J), \quad \gamma u = 0, \quad \sigma \in [0, \mu].$$

**Beweis:**

a) Sei  $u \in \mathbb{E}_1(J)$  und seien  $s, t \in J$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\|_{E_0} &= \left\| \int_s^t \dot{u}(\tau) d\tau \right\|_{E_0} \\
&= \left\| \int_s^t \tau^{\mu-1} \tau^{1-\mu} \dot{u}(\tau) d\tau \right\|_{E_0} \\
&\leq \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)} \left| \int_s^t \tau^{\mu-1} d\tau \right| \\
&= \frac{1}{\mu} |t^\mu - s^\mu| \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)} \\
&\leq c(\mu) \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)} |t - s|^\mu.
\end{aligned}$$

b) Sei  $u \in \mathbb{E}_1(J)$  mit  $\gamma u = 0$  und seien  $s, t \in J$ . Für  $\sigma = \mu$  folgt die Behauptung aus Lemma 3.1.2 Teil c). Sei also  $\sigma \in [0, \mu)$ . Dann folgt aus dem Reiterations Theorem für die stetige Interpolationsmethode, vgl. [2, Abschnitt I.2.8], dass  $E_\sigma = (E_0, E_\mu)_{\sigma/\mu}$ . Mit Hilfe der Interpolationsungleichung erhalten wir

$$\|u(t) - u(s)\|_{E_\sigma} \leq c \|u(t) - u(s)\|_{E_0}^{1-\sigma/\mu} \|u(t) - u(s)\|_{E_\mu}^{\sigma/\mu}. \quad (3.1)$$

Den ersten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.1) können wir mit Hilfe von Teil a) abschätzen. Wir erhalten nämlich

$$\|u(t) - u(s)\|_{E_0}^{1-\sigma/\mu} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)}^{1-\sigma/\mu} |t - s|^{\mu-\sigma}. \quad (3.2)$$

Den zweiten Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.1) schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned}
\|u(t) - u(s)\|_{E_\mu}^{\sigma/\mu} &\leq (\|u(t)\|_{E_\mu} + \|u(s)\|_{E_\mu})^{\sigma/\mu} \\
&\leq (2\|u\|_{BUC(J, E_\mu)})^{\sigma/\mu} \\
&\leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J)}^{\sigma/\mu},
\end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei wir im letzten Schritt Lemma 3.1.2c) benutzt haben. Die Behauptung folgt nun aus den Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) sowie Lemma 3.1.2c).

□

**Definition 3.1.4 (Maximale Regularität)** Seien  $E_1$  und  $E_0$  zwei Banachräume, sodass  $E_1 \xrightarrow{d} E_0$  und  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ . Außerdem sei  $J = [0, T]$  für ein  $T > 0$  und  $\mu \in (0, 1]$ . Wir definieren

$$A \in \mathcal{M}_\mu(E_1, E_0) : \iff \left( \frac{d}{dt} + A, \gamma \right) \in \text{Isom}(\mathbb{E}_1(J), \mathbb{E}_0(J) \times E_\mu).$$

Für  $A \in \mathcal{M}_\mu(E_1, E_0)$  heißt  $(\mathbb{E}_1(J), \mathbb{E}_0(J))$  ein **Paar von maximaler Regularität** für  $A$ .

**Bemerkung 3.1.5** a) Sei  $(\mathbb{E}_1(J), \mathbb{E}_0(J))$  ein Paar von maximaler Regularität für ein  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$  und sei  $(f, x) \in \mathbb{E}_1(J) \times E_\mu$  gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} + A, \gamma \right)^{-1} (f, x) &= e^{-tA}x + \int_0^t e^{-(t-\tau)A} f(\tau) d\tau \\ &=: e^{-tA}x + (J_A f)(t). \end{aligned}$$

b) Sei  $(\mathbb{E}_1(J), \mathbb{E}_0(J))$  ein Paar von maximaler Regularität für ein  $A \in \mathcal{H}(E_1, E_0)$ . Dann gilt entweder  $E_1 = E_0$  oder  $E_0$  enthält einen abgeschlossenen Unterraum, der isomorph ist zum Raum  $c_0$  der Nullfolgen. Hieraus folgt insbesondere, dass, wenn  $E_0$  reflexiv ist und  $E_1 \neq E_0$ , die Menge  $\mathcal{M}_\mu(E_1, E_0)$  leer ist.

**Beweis:** Teil a) ist ein wohlbekanntes Resultat in der Halbgruppentheorie siehe z.B. [49, Proposition 4.1.2]. Die Resultate in Teil b) folgen aus [8] und [16, Lemma 2.6].

□

## 3.2 Das Cauchy-Problem

In diesem Kapitel betrachten wir quasilineare parabolische Evolutionsgleichungen der Form

$$\begin{aligned} \dot{u} + A(u)u &= F(u) \quad \text{auf } J, \\ u(0) &= x. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbei ist  $F$  auf einer Teilmenge des Raums  $\mathbb{E}_1(J)$  definiert. Der Raum  $\mathbb{E}_1(J)$  ist gewissermaßen der kleinste Raum, auf dem man  $F$  definieren kann, denn in ihm wird auch die Lösung gesucht. Wir wollen (3.4) mit sehr allgemeinen Funktionen  $F$  studieren. Insbesondere kann  $F$  auch nichtlokal in der Zeit sein. Um eine sinnvolle Evolutionsgleichung zu erhalten, müssen wir verlangen, dass  $F$  eine Volterra Abbildung ist, d.h. für jedes  $\sigma \in \dot{J}$  hängt die Einschränkung von  $F(u)$  auf  $\dot{J}_\sigma$  nur von  $u|_{\dot{J}_\sigma}$  ab.

**Definition 3.2.1** Seien  $X$  und  $Y$  nichtleere Mengen und  $W$  eine nichtleere Teilmenge von  $X^{\dot{J}}$ . Eine Funktion  $f : W \rightarrow Y^{\dot{J}}$  heißt **Volterra Abbildung** (oder hat die *Volterra Eigenschaft*), wenn für jedes  $\sigma \in \dot{J}$  und jedes Paar  $u, v \in X^{\dot{J}}$  mit  $u|_{\dot{J}_\sigma} = v|_{\dot{J}_\sigma}$  die Beziehung  $f(u)|_{\dot{J}_\sigma} = f(v)|_{\dot{J}_\sigma}$  richtig ist.

Das wohl prominenteste Beispiel einer Volterra Abbildung ist der klassische Volterrasche Integraloperator. Ein Kern  $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$  erzeugt einen Integraloperator  $K : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ , definiert durch

$$(Kx)(s) := \int_0^1 k(s, t)x(t) dt.$$

Der Operator  $K$  ist i.allg. kein Volterra Operator, d.h. der Operator besitzt i.allg. nicht die Volterra Eigenschaft. Hat aber der Kern  $k$  die Eigenschaft

$$k(s, t) = 0 \quad \text{für } t > s,$$

so ist

$$(Kx)(s) = \int_0^s k(s, t)x(t) dt.$$

und man nennt  $K$  Volterraschen Integraloperator. In diesem Fall hat  $K$  offensichtlich die Volterra Eigenschaft.

Kommen wir nun auf das quasilineare Cauchy-Problem (3.4) zurück. Unter einer Lösung auf  $J$  verstehen wir eine Funktion  $u \in \mathbb{E}_1(J)$ , die Lösung des linearen Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} \dot{v} + A(u)v &= F(u) \quad \text{auf } \dot{J}, \\ v(0) &= x \end{aligned} \tag{3.5}$$

ist.

### 3.3 Der Fortsetzungs-Operator

Sei  $\tau \in \dot{J}$ . Damit wir von einer Lösung auf  $J_\tau$  sprechen können, wird es nötig sein, Funktionen aus  $\mathbb{E}_1(J_\tau)$  zu Funktionen aus  $\mathbb{E}_1(J)$  fortzusetzen. Wir definieren

$$\mathbb{E}_1^0(J) := \ker \gamma = \{u \in \mathbb{E}_1(J); u(0) = 0\}.$$

Das folgende Lemma zeigt, dass eine solche Fortsetzung existiert, wobei die Fortsetzung von Funktionen aus  $\mathbb{E}_1^0(J_\tau)$  zu Funktionen aus  $\mathbb{E}_1^0(J)$  besonders schöne Eigenschaften hat.

**Lemma 3.3.1** Sei  $\mathcal{M}_\mu(E_1, E_0) \neq \emptyset$ . Für jedes  $\tau \in \dot{J}$  existiert eine Abbildung

$$\text{ext}_\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1(J_\tau), \mathbb{E}_1(J))$$

mit  $\text{ext}_\tau u \supset u$  für  $u \in \mathbb{E}_1(J_\tau)$ . Außerdem existiert eine Konstante  $c \geq 1$ , sodass für alle  $\tau \in \dot{J}$  und alle  $u \in \mathbb{E}_1^0(J_\tau)$  die Abschätzung

$$\|\text{ext}_\tau u\|_{\mathbb{E}_1(J)} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}$$

richtig ist.

**Beweis:** Wir wählen  $A \in \mathcal{M}_\mu(E_1, E_0)$ , d.h.

$$\left(\frac{d}{dt} + A, \gamma\right) \in \text{Isom}(\mathbb{E}_1(J), \mathbb{E}_0(J) \times E_\mu).$$

Für  $f \in \mathbb{E}_0(J_\tau)$  setzen wir

$$(\mathcal{E}f)(t) := \begin{cases} f(t), & 0 < t \leq \tau \\ \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1-\mu} f(\tau), & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Es ist leicht zu sehen, dass  $\mathcal{E} \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_0(J_\tau), \mathbb{E}_0(J))$  mit  $\|\mathcal{E}\| = 1$ . Wir definieren nun

$$\text{ext}_\tau u := \left( \left(\frac{d}{dt} + A, \gamma\right)^{-1} \circ (\mathcal{E}, \text{id}) \circ \left(\frac{d}{dt} + A, \gamma\right) \Big|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right) u, \quad u \in \mathbb{E}_1(J_\tau).$$

Damit ist

$$\text{ext}_\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1(J_\tau), \mathbb{E}_1(J)).$$

Wir zeigen nun, dass  $\text{ext}_\tau u$  eine Fortsetzung von  $u$  ist. Zur Abkürzung sei

$$(f, u_0) := \left( \frac{d}{dt} + A, \gamma \right) \Big|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} u \in \mathbb{E}_0(J_\tau) \times E_\mu.$$

Dann ist

$$\text{ext}_\tau u = \left( \frac{d}{dt} + A, \gamma \right)^{-1} (\mathcal{E}f, u_0),$$

und folglich löst  $\text{ext}_\tau u$  das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) + Av(t) &= \mathcal{E}f(t), & 0 \leq t \leq T \\ v(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Also löst  $\text{ext}_\tau u \Big|_{J_\tau}$  das Cauchy-Problem

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) + Av(t) &= f(t), & 0 \leq t \leq \tau \\ v(0) &= u_0, \end{aligned}$$

woraus wir  $\text{ext}_\tau u \Big|_{J_\tau} = u$  schließen können.

Für den Beweis des letzten Teils der Behauptung genügt es zu zeigen, dass es eine von  $\tau$  unabhängige Konstante  $c \geq 0$  gibt mit

$$\left\| \left( \frac{d}{dt} + A, \gamma \right) u \right\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau) \times E_\mu} \leq c \|u\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \quad \text{für alle } u \in \mathbb{E}_1^0(J_\tau).$$

Sei also  $u \in \mathbb{E}_1^0(J_\tau)$ . Es gilt

$$\|\gamma u\|_{E_\mu} = 0 = \|\gamma u\|_{\gamma \mathbb{E}_1(J_\tau)} \leq \|u\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}$$

und

$$\left\| \left( \frac{d}{dt} + A \right) u \right\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} \leq \sup_{t \in J_\tau} t^{1-\mu} (\|\dot{u}(t)\|_{E_0} + \|Au(t)\|_{E_0}) \leq c \|u\|_{\mathbb{E}(J_\tau)},$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Korollar 3.3.2** Sei  $x \in E_\mu$  und  $A_0 \in \mathcal{M}_\mu(E_1, E_0)$ . Für  $u(t) := e^{-tA_0}x$ ,  $t \in J$  kann  $\text{ext}_\tau$  so gewählt werden, dass

$$\text{ext}_\tau(u \Big|_{J_\tau}) = u.$$

**Beweis:** Setze  $A := A_0$  in Lemma 3.3.1. Dann ist

$$\left(\frac{d}{dt} + A_0\right)u(t) = -A_0e^{-tA_0}x + A_0e^{-tA_0}x = 0, \quad t \in \dot{J}$$

und daher

$$\text{ext}_\tau(u|_{J_\tau}) = \left(\frac{d}{dt} + A_0, \gamma\right)^{-1}(0, x) = u.$$

□

Mit [16, Remark 2.1(c) & Lemma 2.2] erhalten wir für  $x \in E_\mu$  und  $A \in \mathcal{M}_\mu(E_1, E_0)$

$$(t \mapsto e^{-tA}x) \in \mathbb{E}_1(J) \hookrightarrow C(J, E_\mu).$$

Wir definieren,

$$W_{x,r}(J) := \{v \in \mathbb{E}_1(J); v(0) = x, \|v - e^{-tA}x\|_{C(J, E_\mu)} \leq r\} \cap \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}_1(J)}(e^{-tA}x, \frac{r}{2}).$$

Dann ist  $W_{x,r}(J)$  eine abgeschlossene und nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{E}_1(J)$ . Sei nun

$$F : W_{x,r}(J) \rightarrow BUC(\dot{J}, E_0) \cong C(J, E_0)$$

eine Abbildung mit der Volterra-Eigenschaft. Für  $\tau \in \dot{J}$  erklären wir die Abbildung

$$\begin{aligned} F_\tau : W_{x,\bar{r}}(J_\tau) &\rightarrow C(J_\tau, E_0) \\ u &\mapsto F(\tilde{u})|_{J_\tau}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{u} \in W_{x,r}(J)$  für eine Fortsetzung von  $u$  steht. Wegen der Volterra-Eigenschaft ist die Abbildung  $F_\tau$  wohldefiniert, vorausgesetzt, wir können sicherstellen, dass eine Fortsetzung  $\tilde{u} \in W_{x,r}(J)$  von  $u$  überhaupt existiert. Das folgende Lemma zeigt, dass dies der Fall ist, wenn wir  $\bar{r}$  geeignet wählen.

**Lemma 3.3.3** *Sei  $r > 0$  beliebig.*

$$\exists K \geq 1 \forall 0 < \bar{r} \leq \frac{r}{K} \forall \tau \in \dot{J} \forall v \in W_{x,\bar{r}}(J_\tau) \exists \tilde{v} \in W_{x,r}(J) : \tilde{v} \supset v.$$

**Beweis:** Setze  $u(t) := e^{-tA}x$ ,  $t \in J$ . Wegen Lemma 3.3.1 und Korollar 3.3.2 existiert ein Operator

$$\text{ext}_\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{E}_1(J_\tau), \mathbb{E}_1(J))$$

und eine Konstante  $c \geq 1$  mit

$$\text{ext}_\tau(u|_{J_\tau}) = u$$

und

$$\|\text{ext}_\tau v\|_{\mathbb{E}_1(J)} \leq c\|v\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \quad \forall \tau \in \dot{J}, \forall v \in \mathbb{E}_1^0(J_\tau).$$

Außerdem folgt aus [16, Lemma 2.2 (c)] die Existenz einer Konstanten  $M \geq 1$  mit

$$\|v\|_{C(J_\tau, E_\mu)} \leq M\|v\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \quad \forall \tau \in \dot{J}, \forall v \in \mathbb{E}_1^0(J_\tau). \quad (3.6)$$

Wir setzen  $K := cM$ . Sei nun  $0 < \bar{r} \leq \frac{r}{K}$  und  $v \in W_{x, \bar{r}}(J_\tau)$ . Offenbar gilt  $\text{ext}_\tau v(0) = x$ . Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \|\text{ext}_\tau v - u\|_{\mathbb{E}_1(J)} &= \|\text{ext}_\tau(\underbrace{v - u|_{J_\tau}}_{\in \mathbb{E}_1^0(J_\tau)})\|_{\mathbb{E}_1(J)} \\ &\leq c\|v - u|_{J_\tau}\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \leq c\bar{r} \leq r \end{aligned}$$

und damit auch

$$\|\underbrace{\text{ext}_\tau v - u}_{\in \mathbb{E}_1^0(J)}\|_{C(J, E_\mu)} \leq M\|\text{ext}_\tau v - u\|_{\mathbb{E}_1(J)} \leq M c \bar{r} \leq r.$$

Also ist  $\text{ext}_\tau v \in W_{x, r}(J)$ . □

Sind keine Missverständnisse zu befürchten, schreiben wir wieder  $F$  statt  $F_\tau$ .

### 3.4 Der Existenzsatz

Im folgenden Satz beweisen wir lokale Existenz für die quasilineare parabolische Evolutionsgleichung (3.4).

**Satz 3.4.1** *Sei  $\alpha \in (0, 1)$ ,  $E_\alpha := (E_0, E_1)_\alpha$  ein stetiger Interpolationsraum,  $V_\alpha \subset E_\alpha$  offen und  $x \in V_\alpha$ . Ferner sei*

$$A \in C^{1-}(V_\alpha, \mathcal{M}_\alpha(E_1, E_0)). \quad (3.7)$$

Mit  $A_0 := A(x)$  setzen wir für  $r > 0$

$$W_{x,r}(J) := \{v \in \mathbb{E}_1(J); v(0) = x, \|v - e^{-tA_0}x\|_{C(J,E_\alpha)} \leq r\} \cap \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}_1(J)}(e^{-tA_0}x, \frac{r}{2}).$$

Außerdem sei eine Volterra-Abbildung  $F : W_{x,r}(J) \rightarrow C(J, E_0)$  gegeben. Schließlich wollen wir voraussetzen, dass es ein  $0 < \bar{r} \leq \frac{r}{K}$  sowie ein  $L > 0$  gibt, sodass für alle  $\tau \in \dot{J}$  und alle  $v_1, v_2 \in W_{x,\bar{r}}(J_\tau)$  gilt

$$\|F(v_1) - F(v_2)\|_{C(J_\tau, E_0)} \leq L\|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (3.8)$$

Dann existiert eine positive Zeit  $\tau$ , sodass (3.4) eine Lösung

$$u(\cdot, x) \in BUC_{1-\alpha}^1([0, \tau], E_0) \cap BUC_{1-\alpha}([0, \tau], E_1) \cap BUC([0, \tau], V_\alpha) \quad (3.9)$$

hat.

**Beweis:** (3.4) ist äquivalent zu der Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{u} + A_0 u &= B(u)u + F(u), \\ u(0) &= x \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit  $B(z) := A(x) - A(z)$ ,  $z \in V_\alpha$ . Es gilt

$$B \in C^{1-}(V_\alpha, \mathcal{M}_\alpha(E_1, E_0)) \quad \text{und} \quad B(x) = 0.$$

Zur Abkürzung setzen wir  $\|J_{A_0}\| := \|J_{A_0}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0(J), \mathbb{E}_1(J))}$ . Aus [16, Lemma 2.7] erhalten wir

$$\|J_{A_0}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{E}_0(J_\tau), \mathbb{E}_1(J_\tau))} \leq \|J_{A_0}\|, \quad \forall \tau \in \dot{J}.$$

Es existieren Konstanten  $\rho > 0$  und  $\tilde{L} \geq 1$  mit  $\mathbb{B}_{E_\alpha}(x, 2\rho) \subset V_\alpha$ , sodass

$$\begin{aligned} \|B(z)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} &\leq \frac{1}{4\|J_{A_0}\|M} \quad \forall z \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(x, \rho), \\ \|B(z_1) - B(z_2)\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} &\leq \tilde{L}\|z_1 - z_2\|_{E_\alpha} \quad \forall z_1, z_2 \in \bar{\mathbb{B}}_{E_\alpha}(x, \rho). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hierbei ist  $M$  die Konstante aus (3.6). Als Nächstes zeigen wir die Beschränktheit der Abbildung  $F$  für alle  $\tau \in J$ , wobei wir eine obere Schranke  $b > 0$  finden, die unabhängig von  $\tau$  ist. Sei also  $v \in W_{x,\bar{r}}(J_\tau)$ . Es ist

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_{C(J_\tau, E_0)} &\leq \|F(v) - F(e^{-tA_0}x)\|_{C(J_\tau, E_0)} + \|F(e^{-tA_0}x)\|_{C(J_\tau, E_0)} \\ &\leq L\|v - e^{-tA_0}x\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \|F(e^{-tA_0}x)\|_{C(J_\tau, E_0)} \\ &\leq L\bar{r} + \|F(e^{-tA_0}x)\|_{C(J, E_0)} =: b. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Wir setzen  $\varepsilon := \min\{\frac{\rho}{2}, \bar{r}, \frac{1}{4\|J_{A_0}\|M\bar{L}}\}$ . Dann finden wir eine positive Zeit  $T_1 \in \dot{J}$  mit

$$\begin{aligned} \|e^{-tA_0}x - x\|_{E_\alpha} &\leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad t \in J_1 := [0, T_1] \\ \|e^{-tA_0}x\|_{\mathbb{E}_1(J_1)} &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die erste Ungleichung in (3.13) folgt aus der starken Stetigkeit der Halbgruppe  $\{e^{-tA_0}; t \geq 0\}$  auf  $E_\alpha$  und die zweite Ungleichung ist eine Konsequenz aus [16, Remark 2.1 (c)]. Wir definieren für  $\tau \in \dot{J}_1$ :

$$W_x(J_\tau) := \{v \in \mathbb{E}_1(J_\tau); v(0) = x, \|v - e^{-tA_0}x\|_{C(J_\tau, E_\alpha)} \leq \varepsilon\} \cap \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}(e^{-tA_0}x, \frac{\varepsilon}{2})$$

und statten diese Menge mit der von  $\mathbb{E}_1(J_\tau)$  induzierten Topologie aus. Damit ist  $W_x(J_\tau)$ , als nichtleere und abgeschlossene Teilmenge des Banachraums  $\mathbb{E}_1(J_\tau)$  ein vollständiger metrischer Raum. Sei  $v \in W_x(J_\tau)$ . Dann gilt für alle  $t \in J_\tau$  die Abschätzung

$$\|v(t) - x\|_{E_\alpha} \leq \|v(t) - e^{-tA_0}x\|_{E_\alpha} + \|e^{-tA_0}x - x\|_{E_\alpha} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \leq \rho. \quad (3.14)$$

Offenbar ist  $[t \mapsto B(v(t))v(t)] \in C(\dot{J}_\tau, E_0)$ . Mit (3.11) und (3.14) erhalten wir für  $t \in \dot{J}_\tau$

$$t^{1-\alpha}\|B(v(t))v(t)\|_{E_0} \leq \frac{1}{4\|J_{A_0}\|M}t^{1-\alpha}\|v(t)\|_{E_1}$$

und wir finden somit  $B(v)v \in \mathbb{E}_0(J_\tau)$ . Außerdem ist  $F(v) \in C(J_\tau, E_0) \subset \mathbb{E}_0(J_\tau)$ . Daher ist die Abbildung

$$K_x : W_x(J_\tau) \rightarrow \mathbb{E}_1(J_\tau), \quad v \mapsto e^{-tA_0}x + J_{A_0}(B(v)v + F(v))$$

wohldefiniert. Wir zeigen nun, dass  $K_x$  eine Selbstabbildung ist, wenn  $\tau$  klein genug gewählt wird.

Für  $v \in W_x(J_\tau)$  folgt aus (3.13)

$$\|v\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \leq \|v - e^{-tA_0}x\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \|e^{-tA_0}x\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \leq \varepsilon. \quad (3.15)$$

Für  $t \in \dot{J}_\tau$  bekommen wir aus (3.11), (3.12), (3.14) und (3.15)

$$\begin{aligned} t^{1-\alpha}\|B(v(t))v(t) + F(v)(t)\|_{E_0} &\leq \frac{1}{4\|J_{A_0}\|M}t^{1-\alpha}\|v(t)\|_{E_1} + t^{1-\alpha}\|F(v)(t)\|_{E_0} \\ &\leq \frac{1}{4\|J_{A_0}\|M}\|v\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \tau^{1-\alpha}b \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4\|J_{A_0}\|M} + \tau^{1-\alpha}b. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für  $v \in W_x(J_\tau)$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\|K_x v - e^{-tA_0} x\|_{C(J_\tau, E_\alpha)} &= \|J_{A_0}(B(v)v + F(v))\|_{C(J_\tau, E_\alpha)} \\
&\leq M \|J_{A_0}(B(v)v + F(v))\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
&\leq M \|J_{A_0}\| \|B(v)v + F(v)\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} \\
&\leq M \|J_{A_0}\| \left( \frac{\varepsilon}{4 \|J_{A_0}\| M} + \tau^{1-\alpha} b \right) \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|K_x v - e^{-tA_0} x\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} &= \|J_{A_0}(B(v)v + F(v))\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
&\leq \|J_{A_0}\| \left( \frac{\varepsilon}{4 \|J_{A_0}\| M} + \tau^{1-\alpha} b \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

für  $\tau$  klein genug.

Wegen  $K_x(v)(0) = x$  ist somit gezeigt, dass  $K_x$  eine Selbstabbildung ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $K_x$  eine Kontraktion ist, wenn  $\tau$  klein genug gewählt wird.

Für  $v_1, v_2 \in W_x(J_\tau)$  gilt

$$\begin{aligned}
&\|K_x v_1 - K_x v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
&= \|J_{A_0}(B(v_1)v_1 + F(v_1)) - J_{A_0}(B(v_2)v_2 + F(v_2))\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
&\leq \|J_{A_0}\| (\|B(v_1)v_1 - B(v_2)v_2\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} + \|F(v_1) - F(v_2)\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)}) \\
&\leq \|J_{A_0}\| (\|B(v_1)(v_1 - v_2)\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} + \|(B(v_1) - B(v_2))v_2\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} \\
&\quad + \tau^{1-\alpha} \|F(v_1) - F(v_2)\|_{C(J_\tau, E_0)}) \\
&\leq \|J_{A_0}\| \left( \frac{1}{4 \|J_{A_0}\| M} \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \tilde{L} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, E_\alpha)} \|v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right. \\
&\quad \left. + \tau^{1-\alpha} L \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right) \\
&\leq \|J_{A_0}\| \left( \frac{1}{4 \|J_{A_0}\| M} \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \tilde{L} M \varepsilon \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right. \\
&\quad \left. + \tau^{1-\alpha} L \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right) \\
&\leq 1/2 \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \|J_{A_0}\| \tau^{1-\alpha} L \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
&\leq 3/4 \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \tag{3.16}
\end{aligned}$$

für  $\tau$  klein genug. Wir möchten noch kurz eine in (3.16) benutzte Abschätzung erläutern:

$$\begin{aligned}
\|(B(v_1) - B(v_2))v_2\|_{\mathbb{E}_0(J_\tau)} &= \sup_{t \in J_\tau} t^{1-\alpha} \|(B(v_1(t)) - B(v_2(t)))v_2(t)\|_{E_0} \\
&\leq \sup_{t \in J_\tau} t^{1-\alpha} (\|B(v_1(t)) - B(v_2(t))\|_{\mathcal{L}(E_1, E_0)} \|v_2(t)\|_{E_1}) \\
&\leq \sup_{t \in J_\tau} t^{1-\alpha} (\tilde{L} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{E_\alpha} \|v_2(t)\|_{E_1}) \\
&\leq \tilde{L} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, E_\alpha)} \|v_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Wir können nun den Banachschen Fixpunktsatz benutzen, um zu folgern, dass die Abbildung  $K_x$  einen eindeutigen Fixpunkt

$$u(\cdot, x) \in W_x(J_\tau) \subset BUC_{1-\alpha}^1([0, \tau], E_0) \cap BUC_{1-\alpha}([0, \tau], E_1)$$

hat.

□

# Kapitel 4

## Das volle Stefan-Problem

In diesem Kapitel studieren wir das volle Einphasen Stefan-Problem mit Oberflächenspannung und thermischer Unterkühlung. Das Stefan-Problem läßt sich umwandeln in eine einzige abstrakte quasilineare Evolutionsgleichung für die Funktion  $\rho$ , welche den freien Rand parametrisiert. Den Preis, den wir dafür zahlen müssen, ist dass die rechte Seite der Evolutionsgleichung aus einer Nichtlinearität besteht, die nichtlokal in der Zeit ist. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist Theorem 4.8.1. In Theorem 4.8.1 wird die Existenz und Eindeutigkeit einer lokalen klassischen Lösung des Stefan-Problems bewiesen. Der Beweis dieses Theorems beruht auf Satz 3.4.1. Daher besteht der größte Teil dieses Kapitels darin, nachzuweisen, dass die Voraussetzungen von Satz 3.4.1 tatsächlich erfüllt sind. An dieser Stelle wollen wir betonen, dass die Resultate in diesem Kapitel in fundamentaler Weise von der a priori Abschätzung aus [48, Theorem 1.4] und von den Resultaten aus [16, Lemma 2.2] (siehe Lemma 3.1.2) und Korollar 3.1.3 Gebrauch machen.

### 4.1 Die Problemstellung

Wir normieren die auftretenden physikalischen Konstanten zu Eins. Sei  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  ein Gebiet mit Rand  $\Gamma_0$ , das zur Zeit  $t = 0$  von einer Flüssigkeit ausgefüllt wird. Wir wollen wieder die Form  $\Omega(t)$  des Flüssigkeitsgebiet mit Rand  $\Gamma(t)$  und die Temperaturverteilung  $u(x, t)$  in diesem Gebiet bestimmen. Aus (1.4) erhalten

wir diesmal das folgende System von Gleichungen:

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega(t) \quad (4.1)$$

$$V + \partial_\nu u = 0 \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (4.2)$$

$$V + \kappa = u \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (4.3)$$

Schließlich muss noch die Anfangsgeometrie und Anfangstemperatur festgelegt werden

$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \quad u(0, \cdot) = u_0. \quad (4.4)$$

Wieder sei  $\Omega_0$  das Gebiet zur Anfangszeit  $t = 0$  und  $\Gamma_0$  dessen Rand. Außerdem bezeichne auch hier  $V$  die Normalgeschwindigkeit der Familie  $\Gamma(t)$  und  $\kappa$  die mittlere Krümmung von  $\Gamma(t)$ .

## 4.2 Das transformierte System

Wir verwenden die Notation aus Kapitel 2. Für Funktionen

$$v \in C^1(\bar{D}), \quad \rho \in Ad$$

führen wir eine Abbildung  $R(v, \rho)$  auf  $D$  ein durch

$$R(v, \rho)(y) := \begin{cases} -[\varphi \circ \Lambda] \cdot [L_\rho \mathcal{B}(\rho)v \circ P] \cdot [\mathcal{B}_\mu(\rho)v](y) & \text{für } y \in \mathcal{R}_D, \\ 0 & \text{für } y \in D \setminus \mathcal{R}_D, \end{cases}$$

mit  $\mathcal{B}_\mu(\rho)v := (\Theta_\rho^*(\nabla \Theta_\rho^* v)|_{\mu \circ P})$  und  $\mathcal{R}_D := \mathcal{R} \cap D$ .  $R$  hat die folgende Abbildungseigenschaft:

### Proposition 4.2.1

$$R \in C^\infty(h^{1+\alpha}(\bar{D}) \times \mathcal{U}, h^\alpha(\bar{D})).$$

**Beweis:** Dies ist eine Konsequenz aus unseren Betrachtungen in Abschnitt 2.2. □

Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert, können wir auch hier das System von Gleichungen (4.1)-(4.4) durch die Transformation  $v := \Theta_\rho^* u$  in ein System von Gleichungen auf

dem festen Referenzgebiet  $D$  umwandeln. Wir erhalten nämlich

$$\partial_t v - \mathcal{A}(\rho)v = R(v, \rho) \quad \text{in } J \times D, \quad (4.5)$$

$$\partial_t \rho + L_\rho \mathcal{B}(\rho)v = 0 \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (4.6)$$

$$\partial_t \rho + G(\rho) = L_\rho v \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (4.7)$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (4.8)$$

$$v(0, \cdot) = v_0 \quad \text{in } D. \quad (4.9)$$

Hierbei haben wir  $v_0 := \Theta_\rho^* u_0$  gesetzt. Damit wir im Folgenden unsere Notation verkürzen können, führen wir einen neuen Randoperator  $\tilde{\mathcal{B}}(\rho)$  ein durch

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho)v := \gamma v + \mathcal{B}(\rho)v, \quad v \in C^1(\bar{D}). \quad (4.10)$$

Hierbei bezeichnet  $\gamma$  wieder den Spuroperator. Mit Hilfe von Gleichung (4.10) können wir analog zu unserem Vorgehen in Abschnitt 2.2 das System von Gleichungen (4.5)-(4.9) äquivalent umformen zu

$$\partial_t v - \mathcal{A}(\rho)v = R(v, \rho) \quad \text{in } J \times D, \quad (4.11)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho)v = H(\rho) \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (4.12)$$

$$\partial_t \rho + G(\rho) = L_\rho v \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (4.13)$$

$$\rho(0, \cdot) = \rho_0 \quad \text{auf } \Sigma, \quad (4.14)$$

$$v(0, \cdot) = v_0 \quad \text{in } D. \quad (4.15)$$

**Proposition 4.2.2** *Es sei*

$$(v, \rho) \in (C^1(\dot{J}, C(\bar{D})) \cap C(J, C^2(\bar{D}))) \times (C^1(\dot{J}, C(\Sigma)) \cap C(J, Ad))$$

eine Lösung von (4.11)-(4.15). Dann erfüllt das Paar  $(u, \Gamma)$  mit  $u := \Theta_\rho^* v$  und  $\Gamma(t) := \Gamma_{\rho(t)}$ ,  $t \in J$  die Gleichungen (4.1)-(4.4) punktweise auf  $\bigcup_{t \in J} \{t\} \times \bar{\Omega}_{\rho(t)}$ .

**Beweis:** Sei  $(t_0, x_0) \in J \times \mathcal{R}$ . Wir setzen  $y_0 := \Theta_{\rho(t)}^{-1}(x_0) \in D$ . Außerdem definieren wir für  $(t, y) \in \dot{J} \times \mathcal{R}_D$  die Hilfsfunktion

$$\hat{H}(t, y) := P(y) + [\Lambda(y) + \varphi(\Lambda(y))\rho(t, P(y))]\mu(P(y)) - x_0.$$

Wegen  $\rho \in C^1(\dot{J} \times \Sigma, \mathbb{R})$  ist  $\hat{H} \in C^1(\dot{J} \times \mathcal{R}_D, \mathbb{R})$ . Wir stellen fest, dass

$$\hat{H}(t, y) = \Theta_{\rho(t)}(y) - x_0, \quad (t, y) \in \dot{J} \times \mathcal{R}_D.$$

Daher ist  $\hat{H}(t_0, y_0) = 0$  und

$$\partial_2 \hat{H}(t_0, y_0) = D\Theta_{\rho(t_0)}(y_0) \in \mathcal{L}is(\mathbb{R}^n).$$

Somit folgt aus dem Satz über implizite Funktionen die Existenz eines  $\varepsilon > 0$  und einer eindeutigen Funktion  $\pi \in C^1(I_\varepsilon, \mathcal{R}_D)$  mit  $I_\varepsilon := (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ , sodass  $\hat{H}(t, \pi(t)) = 0$  für alle  $t \in I_\varepsilon$ . Dies impliziert

$$\pi(t) = \Theta_{\rho(t)}^{-1}(x_0) \in \mathcal{R}_D \quad \text{für } t \in I_\varepsilon.$$

Außerdem ist

$$\pi'(t) = -\varphi(\Lambda(\pi(t)))\partial_t \rho(t, P(\pi(t)))[D\Theta_{\rho(t)}(\pi(t))]^{-1}\mu(P(\pi(t))) \quad (4.16)$$

für  $t \in I_\varepsilon$ . Wegen

$$u(t, x_0) = \Theta_*^\rho v(t, x_0) = v(t, \Theta_{\rho(t)}^{-1}(x_0)) = v(t, \pi(t)), \quad t \in I_\varepsilon$$

erhalten wir

$$\partial_t u(t, x_0) = v'(t)(\pi(t)) + (\nabla_y v(t)(\pi(t))|\pi'(t)), \quad t \in I_\varepsilon.$$

Mit Gleichung (4.6) und Gleichung (4.16) folgt

$$(\nabla_y v(t)(\pi(t))|\pi'(t)) = -R(v, \rho)(\pi(t)), \quad t \in I_\varepsilon.$$

Daher sehen wir, dass

$$\partial_t u(t, x_0) = [\Theta_*^{\rho(t)} v'(t)](x_0) - [\Theta_*^{\rho(t)} R(v, \rho)](x_0), \quad t \in I_\varepsilon.$$

Benutzen wir schließlich Gleichung (4.11), so erhalten wir

$$\begin{aligned} \Theta_*^{\rho(t)} v'(t) &= \Theta_*^{\rho(t)} \mathcal{A}(\rho)v + \Theta_*^{\rho(t)} R(v, \rho) \\ &= \Delta u(t) + \Theta_*^{\rho(t)} R(v, \rho) \end{aligned}$$

und somit ist

$$\partial_t u(t_0, x_0) = \Delta u(t_0, x_0).$$

Die Verifikation von Gleichung (4.2) und Gleichung (4.3) ist nun mit unseren Vorarbeiten aus Kapitel 2 leicht möglich. □

### 4.3 Die abstrakte Evolutionsgleichung

Vom analytischen Standpunkt kann man die Situation in Kapitel 2 so beschreiben, dass ein elliptisches Randwertproblem mit einer Evolutionsgleichung für den sich bewegenden Rand gekoppelt wird. Aus diesem Blickwinkel betrachtet ist die hier vorliegende Situation anders. Denn hier wird ein parabolisches Randwertproblem (Gleichungen (4.11), (4.12) und (4.15)) mit einer Evolutionsgleichung für den sich bewegenden Rand gekoppelt (Gleichungen (4.13) und (4.14)). Es bezeichne  $\Psi(\rho) := \Psi(\rho, v_0)$  die (formale) Lösung von

$$\partial_t v - \mathcal{A}(\rho)v = R(v, \rho) \quad \text{in } J \times D, \quad (4.17)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho)v = H(\rho) \quad \text{auf } J \times \Sigma, \quad (4.18)$$

$$v(0, \cdot) = v_0 \quad \text{in } D. \quad (4.19)$$

Damit läßt sich das System von Gleichungen (4.11)-(4.15) in eine einzige abstrakte Evolutionsgleichung für  $\rho$  umformen. Wir erhalten nämlich

$$\dot{\rho} + G(\rho) = L_\rho \gamma \Psi(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (4.20)$$

Dies ist eine nichtlineare Evolutionsgleichung, die nichtlokal in der Zeit ist. Wir wollen zunächst das parabolische Randwertproblem (4.17)-(4.19) studieren. Dabei werden wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für (4.17)-(4.19) beweisen. Außerdem werden wir bestimmte Abbildungseigenschaften des Lösungsoperators  $\Psi$  beweisen, die garantieren werden, dass die abstrakte Evolutionsgleichung (4.20) eindeutig lösbar ist.

### 4.4 Einige nützliche Abschätzungen

Für das Studium des parabolischen Randwertproblems (4.17)-(4.19) wollen wir zunächst einige Details über die Operatoren  $\mathcal{A}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$  und die Funktionen  $H$  und  $R$  bereitstellen. Wir beginnen mit etwas Notation. Sei  $1/2 + \alpha/2 < \theta < 1$ ,  $E_1 := h^{4+\alpha}(\Sigma)$ ,  $E_0 := h^{2+\alpha}(\Sigma)$  und  $E_\theta := (h^{2+\alpha}(\Sigma), h^{4+\alpha}(\Sigma))_\theta$ . Damit haben wir die Einbettung  $E_\theta \hookrightarrow h^{3+\alpha}(\Sigma)$ . Schließlich seien Anfangsdaten  $\rho_0 \in V_\theta := E_\theta \cap \text{Ad}$  und  $v_0 \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  vorgegeben. Es existiert eine Konstante  $c > 0$ , sodass für geeignete Umgebungen  $U_\alpha \subset h^{2+\alpha}(\Sigma) \cap \text{Ad}$  und  $V_\alpha \subset h^{3+\alpha}(\Sigma) \cap \text{Ad}$  von  $\rho_0$  gilt

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\rho) - \mathcal{A}(\psi)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}))} &\leq c \|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|\mathcal{A}(\rho)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}))} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho) - \tilde{\mathcal{B}}(\psi)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha,\end{aligned}\tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho) - \tilde{\mathcal{B}}(\psi)\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho)\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha,\end{aligned}\tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\|\partial\tilde{\mathcal{B}}(\rho) - \partial\tilde{\mathcal{B}}(\psi)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\Sigma), \mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma)))} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|\partial\tilde{\mathcal{B}}(\rho)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\Sigma), \mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma)))} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha.\end{aligned}\tag{4.24}$$

Es existiert ein  $r > 0$  mit

$$\begin{aligned}\|R(v, \rho) - R(w, \psi)\|_{h^\alpha(\Sigma)} &\leq c(\|v - w\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} + \|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}), \\ \|R(v, \rho)\|_{h^\alpha(\Sigma)} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha \quad \forall v, w \in \bar{\mathbb{B}}_{1+\alpha}(v_0, r),\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\|H(\rho) - H(\psi)\|_{h^\alpha(\Sigma)} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|H(\rho)\|_{h^\alpha(\Sigma)} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha,\end{aligned}\tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\|\partial H(\rho) - \partial H(\psi)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\Sigma), h^\alpha(\Sigma))} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|\partial H(\rho)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\Sigma), h^\alpha(\Sigma))} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in U_\alpha\end{aligned}\tag{4.27}$$

und

$$\begin{aligned}\|H(\rho) - H(\psi)\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} &\leq c\|\rho - \psi\|_{h^{3+\alpha}(\Sigma)}, \\ \|H(\rho)\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} &\leq c \quad \forall \rho, \psi \in V_\alpha.\end{aligned}\tag{4.28}$$

Wir setzen außerdem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(J) &:= BUC_{1-\theta}^1(J, E_0) \cap BUC_{1-\theta}(J, E_1) \\ \mathbb{E}_0(J) &:= BUC_{1-\theta}(J, E_0).\end{aligned}$$

Wir erhalten aus [16, Lemma 2.2 (a) und (d)] die beiden Einbettungen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1(J) &\hookrightarrow BUC(J, E_\theta), \\ \mathbb{E}_1(J) &\hookrightarrow BUC^\theta(J, E_0).\end{aligned}$$

Für  $\tau \in (0, T]$  wird der Raum  $\mathbb{E}_1(J_\tau)$  analog definiert. Schließlich sei

$$W_{\rho_0, r}(J_\tau) := \{\rho \in \mathbb{E}_1(J_\tau); \rho(0) = \rho_0, \|\rho - e^{-tA_0}\rho_0\|_{C(J_\tau, E_\theta)} \leq r\} \cap \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}_1(J)}(e^{-tA_0}\rho_0, \frac{r}{2}),$$

mit  $A(\rho) := L_\rho P(\rho)$  und  $A_0 := A(\rho_0)$ . Für  $\bar{r}$  klein genug ist

$$\rho(t) \in U_\alpha \cap V_\alpha, \quad \forall \rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau), \quad \forall t \in J_\tau.$$

## 4.5 Eine a priori Abschätzung

**Lemma 4.5.1** Für  $u \in C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$  mit  $u' \in C(J, h^\alpha(\bar{D}))$  haben wir  
a)  $u \in h^{1/2}(J, h^{1+\alpha}(\bar{D}))$  mit

$$\|u\|_{h^{1/2}(J, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \leq c(\|u\|_{C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} + \|u'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))}),$$

b)  $u \in h^{(1+\alpha)/2}(J, C^1(\bar{D}))$  mit

$$\|u\|_{h^{(1+\alpha)/2}(J, C^1(\bar{D}))} \leq c(\|u\|_{C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} + \|u'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))}).$$

**Beweis:** a) Seien  $s, t \in J$  mit  $s \neq t$ . Mit [49, Corollary 1.2.7] folgt, dass

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(s)\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} &\leq c\|u(t) - u(s)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})}^{1/2} \|u(t) - u(s)\|_{h^\alpha(\bar{D})}^{1/2} \\ &= c\|u(t) - u(s)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})}^{1/2} \left\| \frac{u(t) - u(s)}{|t - s|} \right\|_{h^\alpha(\bar{D})}^{1/2} |t - s|^{1/2} \\ &\leq c\|u(t) - u(s)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})}^{1/2} \|u'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))}^{1/2} |t - s|^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Wegen  $u(t) - u(s) \rightarrow 0, |t - s| \rightarrow 0$  folgt daher aus (4.29)  $u \in h^{1/2}(J, h^{1+\alpha}(\bar{D}))$  und

$$\begin{aligned} \sup_{s, t \in J, s \neq t} \frac{\|u(t) - u(s)\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})}}{|t - s|^{1/2}} &\leq c(\|u\|_{C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \|u'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))})^{1/2} \\ &\leq c(\|u\|_{C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} + \|u'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt der Teil a) der Behauptung. Der Teil b) folgt leicht aus [48, Remark 1.6]. □

Wir betrachten nun

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))v(t) + f(t), \quad t \in J \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))v(t) &= g(t), \quad t \in J \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit  $f \in C(J, h^\alpha(\bar{D}))$ ,  $g \in h^{1/2+\alpha/2}(J, C(\Sigma)) \cap C(J, h^{1+\alpha}(\Sigma))$ ,  $v_0 \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  und  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$ . Außerdem sei die Kompatibilitätsbedingung  $\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v_0 = g(0)$  erfüllt. Dann gilt:

**Satz 4.5.2** *Es existiert eine Konstante  $c > 0$  sowie eine Zeit  $\tau \in \dot{J}$ , sodass für alle  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  und alle Lösungen  $v$  von (4.30) die folgende Abschätzung richtig ist:*

$$\begin{aligned} \|v'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} &\leq c(\|f\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_0\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\ &\quad + \|g\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} + \|g\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

**Beweis:** Wir schreiben (4.30) um als

$$\begin{aligned} v' &= \mathcal{A}(\rho_0)v(t) + (\mathcal{A}(\rho(t)) - \mathcal{A}(\rho_0))v(t) + f(t), \quad t \in J \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v(t) &= (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t)))v(t) + g(t), \quad t \in J \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aus ([48], Theorem 1.4) folgt die Existenz einer Konstanten  $\tilde{c} > 0$  unabhängig von  $\rho$  mit

$$\begin{aligned} &\|v'\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v\|_{C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq \tilde{c} \left( \underbrace{\|(\mathcal{A}(\rho(\cdot)) - \mathcal{A}(\rho_0))v(\cdot)\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))}}_I + \|f\|_{C(J, h^\alpha(\bar{D}))} \right. \\ &\quad \left. + \|v_0\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(\cdot)))v(\cdot)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J, C(\Sigma))}}_{II} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(\cdot)))v(\cdot)\|_{C(J, h^{1+\alpha}(\Sigma))}}_{III} \right. \\ &\quad \left. + \|g\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J, C(\Sigma))} + \|g\|_{C(J, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Im Folgenden betrachten wir die Terme I-III. Hierbei gehen Korollar 3.1.3 und die Tatsache, dass  $W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  beschränkt ist in  $\mathbb{E}_1(J)$ , wesentlich ein.

Term I: Sei  $t \in \dot{J}_\tau$ .

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}(\rho(t)) - \mathcal{A}(\rho_0))v(t)\|_{h^\alpha(\bar{D})} &\leq \|\mathcal{A}(\rho(t)) - \mathcal{A}(\rho_0)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}))} \|v(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\ &\leq c\|\rho(t) - \rho_0\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq c\tau^\theta \frac{\|\rho(t) - \rho(0)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq c\tau^\theta \|\rho\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq c\tau^\theta \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{c} \|(\mathcal{A}(\rho(\cdot)) - \mathcal{A}(\rho_0))v(\cdot)\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \leq \frac{1}{4} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}$$

für  $\tau$  klein genug.

Term II: Seien  $s, t \in J_\tau$  mit  $s \neq t$ . Wegen  $\theta - (1/2 + \alpha/2) > 0$  erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t)))v(t) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(s)))v(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \leq \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(s)))(v(t) - v(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} + \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t)))v(t)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \leq c \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(s))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} \frac{\|v(t) - v(s)\|_{C^1(\bar{D})}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \quad + c |t - s|^{\theta - (1/2+\alpha/2)} \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{|t - s|^\theta} \|v(t)\|_{C^1(\bar{D})} \\ & \leq c \|\rho_0 - \rho(s)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \|v\|_{h^{(1+\alpha)/2}(J, C^1(\bar{D}))} \\ & \quad + c \tau^{\theta - (1/2+\alpha/2)} \frac{\|\rho(t) - \rho(s)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{|t - s|^\theta} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c \tau^\theta \|\rho\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v\|_{h^{(1+\alpha)/2}(J, C^1(\bar{D}))} + c \tau^{\theta - (1/2+\alpha/2)} \|\rho\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c \tau^\theta \|v\|_{h^{(1+\alpha)/2}(J, C^1(\bar{D}))} + c \tau^{\theta - (1/2+\alpha/2)} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt mit  $t \in J_\tau$

$$\begin{aligned} & \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t)))v(t)\|_{C(\Sigma)} \\ & \leq \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t)))v(t)\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} \\ & \leq c t^\theta \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))}}{t^\theta} \|v(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\ & \leq c \tau^\theta \frac{\|\rho_0 - \rho(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c \tau^\theta \|\rho\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c \tau^\theta \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 4.5.1 b) folgt daher

$$\tilde{c} \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(\cdot)))v(\cdot)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} \leq \frac{1}{4} (\|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} + \|v'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))})$$

für  $\tau$  klein genug.

Term III: Wie die Rechnung unter II gezeigt hat, erhalten wir auch hier

$$\tilde{c} \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho(\cdot)))v(\cdot)\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \leq \frac{1}{4} \|v\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}$$

für  $\tau$  klein genug. Nun folgt die Behauptung leicht aus (4.33). □

## 4.6 Eindeutige Lösbarkeit des parabolischen Randwertproblems

Im folgenden wollen wir stets voraussetzen, dass  $\rho_0 \in V_\theta$  und  $v_0 \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  die Kompatibilitätsbedingung

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v_0 = H(\rho_0)$$

erfüllen.

**Satz 4.6.1** *Es existiert ein  $\tau \in (0, T]$ , sodass das parabolische Randwertproblem*

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))v(t) + R(v(t), \rho(t)), & 0 \leq t \leq \tau \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))v(t) &= H(\rho(t)), & 0 \leq t \leq \tau \\ v(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{4.34}$$

für alle  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  eine eindeutige Lösung

$$v \in C^1(J_\tau, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$$

hat.

**Beweis:** Es sei zunächst  $\tau \in (0, T]$  beliebig und  $r > 0$  mit

$$R \in C^{1-}(\bar{\mathbb{B}}_{1+\alpha}(v_0, r) \times U_\alpha, h^\alpha(\bar{D})).$$

Wir definieren

$$Y := Y_\tau := \{v \in h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D})); v(0) = v_0, \|v - v_0\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \leq r\}.$$

Für  $v \in Y$  gilt  $t \mapsto R(v(t), \rho(t)) \in C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))$ . Beachten wir auch insbesondere, dass  $H(\rho) \in h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))$ , so können wir aufgrund von [48, Theorem 1.8] schließen, dass das parabolische Randwertproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))u(t) + R(v(t), \rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))u(t) &= H(\rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau \\ u(0) &= v_0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

eine eindeutige Lösung

$$u := \Phi(v) := \Phi(\rho, v) \in C^1(J_\tau, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$$

besitzt. Wir zeigen zuerst  $\Phi(v) \in Y$  für  $\tau$  geeignet gewählt. Aus Lemma 4.5.1 folgt  $\Phi(v) \in h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))$ . Für  $t \in J_\tau$  gilt:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v_0\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} &\leq c \|u(t) - v_0\|_{h^\alpha(\bar{D})}^{1/2} \|u(t) - v_0\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})}^{1/2} \\ &= ct^{1/2} \left( \frac{\|u(t) - u(0)\|_{h^\alpha(\bar{D})}}{t} \right)^{1/2} \|u(t) - v_0\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})}^{1/2} \\ &\leq c\tau^{1/2} \|u'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}^{1/2} (\|u\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} + \|v_0\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))})^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Gemäß Satz 4.5.2 existiert eine Konstante  $c$  (unabhängig von  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$ ) sowie eine Zeit  $\tau > 0$  (unabhängig von  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$ ) mit

$$\begin{aligned} &\|u'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|u\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq c \left( \underbrace{\|R(v(\cdot), \rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}}_I + \|v_0\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \right) \\ &\quad + \underbrace{\|H(\rho(\cdot))\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))}}_{II} + \underbrace{\|H(\rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))}}_{III}. \end{aligned}$$

Wir zeigen als Nächstes, dass es eine Konstante  $c > 0$  gibt, welche unabhängig von  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  gewählt werden kann, mit

$$\|u'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|u\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \leq c. \quad (4.37)$$

Dafür schätzen wir die Terme I-III ab.

I: Wegen  $\|v - v_0\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \leq r$  und  $\rho(t) \in U_\alpha$  für alle  $t \in J_\tau$  und  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  finden wir eine Konstante  $c > 0$  (unabhängig von  $\rho$  und  $v$ ) mit

$$\|R(v(\cdot), \rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \leq c.$$

II: Wegen  $\rho(t) \in U_\alpha$  für alle  $t \in J_\tau$  und  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  haben wir

$$\|H(\rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, C(\Sigma))} \leq c$$

für ein  $c > 0$ . Seien  $s, t \in J_\tau$  mit  $s \neq t$ . Weil  $W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  beschränkt ist in  $\mathbb{E}_1(J)$  und wegen Korollar 3.1.3 erhalten wir für die folgende Abschätzung,

$$\begin{aligned} \frac{\|H(\rho(s)) - H(\rho(t))\|_{C(\Sigma)}}{|s - t|^{1/2+\alpha/2}} &\leq |s - t|^{\theta-(1/2+\alpha/2)} \frac{\|H(\rho(s)) - H(\rho(t))\|_{h^\alpha(\Sigma)}}{|s - t|^\theta} \\ &\leq c\tau^{\theta-(1/2+\alpha/2)} \frac{\|\rho(s) - \rho(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{|s - t|^\theta} \\ &\leq c\tau^{\theta-(1/2+\alpha/2)} \|\rho\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \leq c. \end{aligned}$$

Daher haben wir

$$\|H(\rho(\cdot))\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} \leq c.$$

III: Wegen  $\rho(t) \in V_\alpha$  für alle  $t \in J_\tau$  und  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J)$  erhalten wir

$$\|H(\rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \leq c$$

für ein  $c > 0$ . Damit folgt aus (4.36) und (4.37) die Existenz einer Konstanten  $c > 0$  mit

$$\|\Phi(v) - v_0\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \leq c\tau^{1/2}.$$

Für  $\tau$  klein genug erhalten wir daher  $\Phi(v) \in Y$ . Wir zeigen nun, dass  $\Phi$  eine Kontraktion ist, falls  $\tau$  klein genug gewählt wird. Seien  $v, w \in Y$ . Dann löst  $\Phi(v) - \Phi(w)$  das folgende parabolische Randwertproblem:

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))u(t) + R(v(t), \rho(t)) - R(w(t), \rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))u(t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq \tau \\ u(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Wenden wir nun Lemma 4.5.1 und Satz 4.5.2 an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} &\leq c(\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\quad + \left\| \frac{d}{dt} (\Phi(v) - \Phi(w)) \right\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}) \\ &\leq c\|R(v(\cdot), \rho(\cdot)) - R(w(\cdot), \rho(\cdot))\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \\ &\leq c\|v - w\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \|v(t) - w(t)\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} &\leq \tau^{1/2} \frac{\|v(t) - w(t) - (v(0) - w(0))\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})}}{t^{1/2}} \\ &\leq \tau^{1/2} \|v - w\|_{h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \end{aligned}$$

für  $t \in \dot{J}_\tau$ , erhalten wir

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))} \leq c\tau^{1/2} \|v - w\|_{h^{1/2}(J_\tau, h^{1+\alpha}(\bar{D}))}. \quad (4.39)$$

Für  $\tau$  klein genug ist also  $\Phi$  eine Kontraktion. Daher existiert ein eindeutiger Fixpunkt in  $Y$ , welcher die Lösung von (4.34) ist.  $\square$

## 4.7 Eigenschaften des Lösungsoperators

Für  $\rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau)$  bezeichnen wir mit  $v := \Psi(\rho) := \Psi(\rho, v_0)$  den eindeutigen Fixpunkt der Abbildung  $\Phi(\rho, \cdot)$  aus Abschnitt 4.6.

**Proposition 4.7.1** *Die Abbildung*

$$\Psi : W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau) \rightarrow C^1(J_\tau, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$$

*hat die Volterra Eigenschaft.*

**Beweis:** Sei  $\sigma \in \dot{J}_\tau$  und  $\rho_1, \rho_2 \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau)$  mit  $\rho_1|_{J_\sigma} = \rho_2|_{J_\sigma} =: \rho$ . Wir setzen

$$v_1 := \Psi(\rho_1, v_0), v_2 := \Psi(\rho_2, v_0) \in C^1(J_\tau, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D})).$$

Dann sind  $v_1|_{J_\sigma}, v_2|_{J_\sigma} \in C^1(J_\sigma, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J_\sigma, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$  Lösungen des parabolischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))v(t) + R(v(t), \rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \sigma \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))v(t) &= H(\rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \sigma \\ v(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist  $\Phi : Y_\tau \rightarrow Y_\tau$  eine Kontraktion, d.h.  $c\tau^{1/2} < 1$ , wobei  $c$  die Konstante aus Gleichung (4.39) ist. Aus  $v_1, v_2 \in Y_\tau$  folgt  $v_1|_{J_\sigma}, v_2|_{J_\sigma} \in Y_\sigma$ .

Sei  $\tilde{\Phi}(v)$  für jedes  $v \in Y_\sigma$  erklärt als die eindeutige Lösung des parabolischen Randwertproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= \mathcal{A}(\rho(t))u(t) + R(v(t), \rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \sigma \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho(t))u(t) &= H(\rho(t)), \quad 0 \leq t \leq \sigma \\ u(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Der Beweis von Satz 4.6.1 zeigt, dass  $\tilde{\Phi} : Y_\sigma \rightarrow Y_\sigma$  ebenfalls eine Kontraktion ist. Mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes folgt nun  $v_1|_{J_\sigma} = v_2|_{J_\sigma}$ .  $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass  $\Psi$  als Funktion von  $\rho$  Lipschitz-stetig ist, d.h. wir beweisen den folgenden Satz:

**Satz 4.7.2** *Es existiert eine Konstante  $c > 0$  und eine positive Zeit  $\tau^* > 0$ , sodass für alle  $0 < \tau \leq \tau^*$  gilt*

$$\|\Psi(\rho_1) - \Psi(\rho_2)\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \quad \forall \rho_1, \rho_2 \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau).$$

**Beweis:** Nach Definition sind  $v_1 := \Psi(\rho_1)$  und  $v_2 := \Psi(\rho_2)$  für  $\rho_1, \rho_2 \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau)$  Lösung von

$$\begin{aligned} v' &= \mathcal{A}(\rho_1)v + R(v, \rho_1) \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1)v &= H(\rho_1) \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

bzw. von

$$\begin{aligned} v' &= \mathcal{A}(\rho_2)v + R(v, \rho_2) \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2)v &= H(\rho_2) \\ v(0) &= v_0. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Wir können (4.40) und (4.41) äquivalent umformen zu

$$\begin{aligned} v' &= \mathcal{A}(\rho_0)v + (\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_0))v + R(v, \rho_1) \\ \tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v &= (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v + H(\rho_1) \\ v(0) &= v_0 \end{aligned} \tag{4.42}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
v' &= \mathcal{A}(\rho_0)v + (\mathcal{A}(\rho_2) - \mathcal{A}(\rho_0))v + R(v, \rho_2) \\
\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v &= (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))v + H(\rho_2) \\
v(0) &= v_0.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
(v_1 - v_2)' &= \mathcal{A}(\rho_1)v_1 + R(v_1, \rho_1) - \mathcal{A}(\rho_2)v_2 - R(v_2, \rho_2) \\
&= \mathcal{A}(\rho_0)(v_1 - v_2) + (\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_2))v_2 \\
&\quad + (\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_0))(v_1 - v_2) + R(v_1, \rho_1) - R(v_2, \rho_2)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

sowie

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)(v_1 - v_2) = (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v_1 + (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))(v_1 - v_2) + H(\rho_1) - H(\rho_2). \tag{4.45}$$

Beachten wir noch

$$(v_1 - v_2)(0) = 0,$$

so folgt aus (4.44) und (4.45) sowie der a priori Abschätzung aus [48, Theorem 1.4]

$$\begin{aligned}
&\|v_1' - v_2'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\
&\leq c \left( \underbrace{\|(\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_2))v_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}}_I + \underbrace{\|(\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_0))(v_1 - v_2)\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}}_{II} \right. \\
&\quad + \underbrace{\|R(v_1, \rho_1) - R(v_2, \rho_2)\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))}}_{III} + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v_1\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))}}_{IV} \\
&\quad + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))(v_1 - v_2)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))}}_V + \underbrace{\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))}}_{VI} \\
&\quad + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v_1\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))}}_{VII} + \underbrace{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))(v_1 - v_2)\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))}}_{VIII} \\
&\quad \left. + \underbrace{\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))}}_{IX} \right). \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Wir schätzen nun die Terme I-IX ab. Diese Abschätzungen basieren auf zwei zentralen Punkten, nämlich zum einen der Tatsache, dass  $W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau)$  beschränkt ist in

$\mathbb{E}_1(J_\tau)$  und zum anderen der Tatsache, dass  $\Psi(\rho)$  sowie  $\Psi(\rho)'$  beschränkt sind, genauer gesagt zeigt der Beweis von Satz 4.6.1

$$\|\Psi(\rho)'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|\Psi(\rho)\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \leq c \quad \text{für alle } \rho \in W_{\rho_0, \bar{r}}(J_\tau).$$

I: Sei  $t \in J_\tau$ :

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}(\rho_1(t)) - \mathcal{A}(\rho_2(t)))v_2(t)\|_{h^\alpha(\bar{D})} \\ & \leq c\|\mathcal{A}(\rho_1(t)) - \mathcal{A}(\rho_2(t))\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}))}\|v_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\ & \leq c\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}\|v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}. \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\|(\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_2))v_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (4.47)$$

II: Sei  $t \in \dot{J}_\tau$ .

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}(\rho_1(t)) - \mathcal{A}(\rho_0))(v_1(t) - v_2(t))\|_{h^\alpha(\bar{D})} \\ & \leq \|\mathcal{A}(\rho_1(t)) - \mathcal{A}(\rho_0)\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^\alpha(\bar{D}))}\|v_1(t) - v_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\ & \leq c\|\rho_1(t) - \rho_1(0)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}\|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c\tau^\theta \frac{\|\rho_1(t) - \rho_1(0)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c\tau^\theta \|\rho_1\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ & \leq c\tau^\theta \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\|(\mathcal{A}(\rho_1) - \mathcal{A}(\rho_0))(v_1 - v_2)\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \leq c\tau^\theta \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}. \quad (4.48)$$

III: Um den nächsten Term analysieren zu können, stellen wir die folgende Abschätzung voran, die wir leicht aus Lemma 4.5.1 erhalten. Sei  $t \in \dot{J}_\tau$ , dann gilt,

$$\begin{aligned} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} & \leq \tau^{1/2} \frac{\|(v_1(t) - v_2(t)) - (v_1(0) - v_2(0))\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})}}{t^{1/2}} \\ & \leq \tau^{1/2} \|v_1 - v_2\|_{h^{1/2}(J_\tau, C^2(\bar{D}))} \\ & \leq c\tau^{1/2} (\|v_1' - v_2'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}). \end{aligned}$$

Daher folgt für  $t \in J_\tau$ ,

$$\begin{aligned} & \|R(v_1(t), \rho_1(t)) - R(v_2(t), \rho_2(t))\|_{h^\alpha(\bar{D})} \\ & \leq c(\|v_1(t) - v_2(t)\|_{h^{1+\alpha}(\bar{D})} + \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}) \\ & \leq c\tau^{1/2}(\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}) + c\|\rho_1 - \rho_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} & \|R(v_1, \rho_1) - R(v_2, \rho_2)\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} \\ & \leq c\tau^{1/2}(\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}) + c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \end{aligned} \tag{4.49}$$

IV und VII: Im nächsten Schritt werden wir den Term

$$\frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))v_1(t) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s)))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}}$$

betrachten. Wir nehmen O.B.d.A. an, dass  $t > s$  gilt und machen die folgende Fallunterscheidung:

**1. Fall:**  $t - s \geq s > 0$ . Damit haben wir insbesondere  $s \leq t/2$ , dies bedeutet  $t - s \geq t - t/2 = t/2$  und wir erhalten

$$\frac{1}{t - s} \leq \frac{2}{t} \leq \frac{1}{s}.$$

Wir erhalten daher die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))v_1(t) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s)))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \leq \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))v_1(t)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} + \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s)))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \leq 2^{1/2+\alpha/2} \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{t^{1/2+\alpha/2}} \|v_1(t)\|_{C^1(\bar{D})} \\ & \quad + \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{s^{1/2+\alpha/2}} \|v_1(s)\|_{C^1(\bar{D})} \\ & \leq c \frac{\|\rho_2(t) - \rho_1(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v_1\|_{C(J_\tau, C^1(\bar{D}))} \\ & \quad + c \frac{\|\rho_2(s) - \rho_1(s)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{s^\theta} \|v_1\|_{C(J_\tau, C^1(\bar{D}))} \\ & \leq c\|\rho_2 - \rho_1\|_{C^\theta(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} \\ & \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \end{aligned}$$

2. Fall:  $t - s < s, s > 0$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))v_1(t) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s)))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))(v_1(t) - v_1(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \quad + \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s))))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten die beiden letzten Terme separat. Mit Hilfe von Lemma 4.5.1 erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}
& \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))(v_1(t) - v_1(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} \frac{\|v_1(t) - v_1(s)\|_{C^1(\bar{D})}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq c\|\rho_2(t) - \rho_1(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \|v_1\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C^1(\bar{D}))} \\
& \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} (\|v_1'\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}) \\
& \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Für  $\xi \in (s, t)$  gilt

$$|t - s|^{1-(1/2+\alpha/2)} \leq \xi^{1-(1/2+\alpha/2)} = \frac{\xi^{1-(1/2+\alpha/2)}}{\xi^{1-\theta}} \xi^{1-\theta} = \xi^{\theta-(1/2+\alpha/2)} \xi^{1-\theta} \leq c(\tau) \xi^{1-\theta}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}
& \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s))))v_1(s)\|_{C(\Sigma)}}{|t-s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq |t-s|^{1-(1/2+\alpha/2)} \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(s)))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{|t-s|} \\
& \quad \cdot \|v_1(s)\|_{C^1(\bar{D})} \\
& \leq |t-s|^{1-(1/2+\alpha/2)} \sup_{\xi \in (s,t)} \|\partial \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(\xi))\rho'_2(\xi) - \partial \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(\xi))\rho'_1(\xi)\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} \\
& \quad \cdot \|v_1(s)\|_{C^1(\bar{D})} \\
& \leq c \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|\partial \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(\xi))(\rho'_2(\xi) - \rho'_1(\xi))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} \\
& \quad + c \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|(\partial \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(\xi)) - \partial \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(\xi)))\rho'_1(\xi)\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))} \\
& \leq c \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|\rho'_2(\xi) - \rho'_1(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\
& \quad + c \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|\rho_2(\xi) - \rho_1(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \|\rho'_1(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + c \|\rho_1 - \rho_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} \|\rho_1\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

**3. Fall:**  $s = 0$ . Wie im 1. Fall gezeigt wurde, gilt

$$\frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)))v_1(t)\|_{C(\Sigma)}}{|t|^{1/2+\alpha/2}} \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.$$

Schließlich haben wir für  $t \in J_\tau$

$$\begin{aligned}
& \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))v_1(t)\|_{C(\Sigma)} \\
& \leq \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))v_1(t)\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} \\
& \leq \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_1(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t))\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))} \|v_1(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\
& \leq c \|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \|v_1\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

Damit wurde gezeigt:

$$\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v_1\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \quad (4.50)$$

sowie

$$\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_1))v_1\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (4.51)$$

V und VIII: Wir betrachten nun

$$\frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)))(v_1(s) - v_2(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}}.$$

Dafür verwenden wir die folgende Identität

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)))(v_1(s) - v_2(s)) \\ &= (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t) - (v_1(s) - v_2(s))) \\ & \quad + (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) + \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)))(v_1(s) - v_2(s)) \\ &= (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t) - (v_1(s) - v_2(s))) \\ & \quad + (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(s) - v_2(s)). \end{aligned}$$

Wir erhalten nun für  $t, s \in \dot{J}_\tau$  mit  $t \neq s$

$$\begin{aligned} & \frac{\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t)) - (\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)))(v_1(s) - v_2(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ &\leq \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \frac{\|v_1(t) - v_2(t) - (v_1(s) - v_2(s))\|_{C^1(\bar{D})}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\ & \quad + \frac{\|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(s)) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t))\|_{\mathcal{L}(C^1(\bar{D}), C(\Sigma))}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \|v_1(s) - v_2(s)\|_{C^1(\bar{D})} \\ &\leq c\tau^\theta \frac{\|\rho_2(0) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v_1 - v_2\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C^1(\bar{D}))} \\ & \quad + c\tau^{\theta-(1/2+\alpha/2)} \frac{\|\rho_2(t) - \rho_2(s)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{|t - s|^\theta} \tau^{1/2+\alpha/2} \frac{\|v_1(s) - v_2(s)\|_{C^1(\bar{D})}}{s^{1/2+\alpha/2}} \\ &\leq c\tau^\theta \|\rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v_1 - v_2\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C^1(\bar{D}))} \\ &\leq c\tau^\theta (\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir wieder Lemma 4.5.1 benutzt. Man sieht leicht ein, dass die gleiche Abschätzung auch im Fall  $s = 0$  richtig bleibt. Schließlich haben

wir für  $t \in J_\tau$

$$\begin{aligned}
& \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t))\|_{C(\Sigma)} \\
& \leq \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t)))(v_1(t) - v_2(t))\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} \\
& \leq \|\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2(t))\|_{\mathcal{L}(h^{2+\alpha}(\bar{D}), h^{1+\alpha}(\Sigma))} \|v_1(t) - v_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\bar{D})} \\
& \leq c\tau^\theta \frac{\|\rho_2(0) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\
& \leq c\tau^\theta \|\rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\
& \leq c\tau^\theta \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}.
\end{aligned}$$

Damit wurde insgesamt gezeigt

$$\|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))(v_1 - v_2)\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \leq c\tau^\theta \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \quad (4.52)$$

und

$$\begin{aligned}
& \|(\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0) - \tilde{\mathcal{B}}(\rho_2))(v_1 - v_2)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} \\
& \leq c\tau^\theta (\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}). \quad (4.53)
\end{aligned}$$

VI und IX: Schließlich betrachten wir den Term

$$\frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t)) - (H(\rho_1(s)) - H(\rho_1(s)))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}}.$$

Wir nehmen wieder O.B.d.A. an, dass  $t > s$  gilt und machen die folgende Fallunterscheidung:

1. Fall:  $t - s \geq s > 0$ . In diesem Fall haben wir

$$\frac{1}{t - s} \leq \frac{2}{t} \leq \frac{1}{s}.$$

Daher erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
& \frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t)) - (H(\rho_1(s)) - H(\rho_1(s)))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq \frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} + \frac{\|H(\rho_1(s)) - H(\rho_2(s))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq 2^{1/2+\alpha/2} \frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t))\|_{h^\alpha(\Sigma)}}{t^{1/2+\alpha/2}} + \frac{\|H(\rho_1(s)) - H(\rho_2(s))\|_{h^\alpha(\Sigma)}}{s^{1/2+\alpha/2}} \\
& \leq c \frac{\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{t^\theta} + c \frac{\|\rho_1(s) - \rho_2(s)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)}}{s^\theta} \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{C^\theta(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

**2. Fall:**  $t - s < s$ ,  $s > 0$ .

$$\begin{aligned}
& \frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t)) - (H(\rho_1(s)) - H(\rho_1(s)))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|^{1/2+\alpha/2}} \\
& = |t - s|^{1-(1/2+\alpha/2)} \frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t)) - (H(\rho_1(s)) - H(\rho_1(s)))\|_{C(\Sigma)}}{|t - s|} \\
& \leq |t - s|^{1-(1/2+\alpha/2)} \sup_{\xi \in (s,t)} \|\partial H(\rho_1(\xi))\rho'_1(\xi) - H(\rho_2(\xi))\rho'_2(\xi)\|_{C(\Sigma)} \\
& \leq \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|\partial H(\rho_1(\xi))(\rho'_1(\xi) - \rho'_2(\xi))\|_{C(\Sigma)} \\
& \quad + \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|(\partial H(\rho_1(\xi)) - \partial H(\rho_2(\xi)))\rho'_2(\xi)\|_{C(\Sigma)} \\
& \leq c \left( \sup_{\xi \in (s,t)} \xi^{1-\theta} \|\rho'_1(\xi) - \rho'_2(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \right. \\
& \quad \left. + \sup_{\xi \in (s,t)} \|\rho_1(\xi) - \rho_2(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \xi^{1-\theta} \|\rho'_2(\xi)\|_{h^{2+\alpha}(\Sigma)} \right) \\
& \leq c \left( \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \|\rho_1 - \rho_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\Sigma))} \|\rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} \right) \\
& \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.
\end{aligned}$$

**3. Fall:**  $s = 0$ . Wie im 1. Fall gezeigt wurde gilt

$$\frac{\|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t))\|_{C(\Sigma)}}{t^{1/2+\alpha/2}} \leq c \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}.$$

Schließlich gilt für  $t \in J_\tau$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t))\|_{C(\Sigma)} &\leq \|H(\rho_1(t)) - H(\rho_2(t))\|_{h^{1+\alpha}(\Sigma)} \\ &\leq c\|\rho_1(t) - \rho_2(t)\|_{h^{3+\alpha}(\Sigma)} \\ &\leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{C(J_\tau, h^{3+\alpha}(\Sigma))} \\ &\leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_{C(J_\tau, h^{1+\alpha}(\Sigma))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (4.54)$$

und

$$\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_{h^{1/2+\alpha/2}(J_\tau, C(\Sigma))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (4.55)$$

Aus (4.46) sowie den Abschätzungen (4.47-4.55) erhalten wir nun

$$\begin{aligned} &\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \\ &\leq c(\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)} + \tau^\theta \|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \tau^\theta \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))}). \end{aligned}$$

Wählen wir  $\tau$  klein genug, etwa  $c\tau^\theta \leq 1/2$ , finden wir für ein  $c > 0$

$$\|v'_1 - v'_2\|_{C(J_\tau, h^\alpha(\bar{D}))} + \|v_1 - v_2\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}. \quad (4.56)$$

Wir haben also insbesondere

$$\|\Psi(\rho_1) - \Psi(\rho_2)\|_{C(J_\tau, h^{2+\alpha}(\bar{D}))} \leq c\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbb{E}_1(J_\tau)}, \quad (4.57)$$

womit die Lipschitz-Stetigkeit von  $\Psi$  gezeigt ist. □

## 4.8 Die eindeutige Lösbarkeit des Stefan-Problems

Wir nutzen nun wie in Kapitel 2 aus, dass die mittlere Krümmung eine quasilineare Struktur trägt, d.h.

$$H(\rho) = P(\rho)\rho + Q(\rho) \text{ für } \rho \in V_\theta.$$

Wir setzen

$$A(\rho) := L_\rho P(\rho) \quad \text{und} \quad F(\rho) := L_\rho \gamma \Psi(\rho) - L_\rho Q(\rho).$$

Damit trägt auch die abstrakte Evolutionsgleichung (4.20) eine quasilineare Struktur und läßt sich schreiben als

$$\dot{\rho} + A(\rho)\rho = F(\rho), \quad \rho(0) = \rho_0. \quad (4.58)$$

Um den folgenden Existenz- und Eindeigkeitssatz für das System (4.11)-(4.15) formulieren zu können, führen wir noch die folgende Notation ein. Es sei  $J \subset \mathbb{R}^+$  ein rechtsoffenes Intervall, welches die 0 enthält. Außerdem sei  $\mu \in (0, 1]$  und  $E$  ein Banachraum. Wir definieren

$$\begin{aligned} C_{1-\mu}(J, E) &:= \{v \in C(\dot{J}, E); v \in BUC_{1-\mu}([0, T], E), \quad T < \sup J\}, \\ C_{1-\mu}^1(J, E) &:= \{v \in C^1(\dot{J}, E); v, \dot{v} \in C_{1-\mu}(J, E)\}. \end{aligned}$$

**Theorem 4.8.1** *Erfüllen  $\rho_0 \in V_\theta$  und  $v_0 \in h^{2+\alpha}(\bar{D})$  die Kompatibilitätsbedingung*

$$\tilde{\mathcal{B}}(\rho_0)v_0 = H(\rho_0),$$

*so hat das System (4.11)-(4.15) eine eindeutige, nichtfortsetzbare Lösung  $(v, \rho)$  mit*

$$v \in C^1(J(\rho_0, v_0), h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J(\rho_0, v_0), h^{2+\alpha}(\bar{D}))$$

*und*

$$\rho \in C_{1-\theta}^1(J(\rho_0, v_0), h^{2+\alpha}(\Sigma)) \cap C_{1-\theta}(J(\rho_0, v_0), h^{4+\alpha}(\Sigma)).$$

*Hierbei bezeichnet  $J(\rho_0, v_0) := [0, t^+(\rho_0, v_0))$  das maximale Existenzintervall. Außerdem gilt*

$$\rho \in C(J(\rho_0, v_0), V_\theta).$$

**Beweis:** Analog zu Proposition 2.3.4 erhalten wir

$$A(\rho) \in \mathcal{M}_\mu(h^{4+\alpha}(\Sigma), h^{2+\alpha}(\Sigma)), \quad \rho \in V_\theta, \quad \mu \in (0, 1].$$

Wir setzen  $A_0 := A(\rho_0)$ . Außerdem sei, wie im Beweis von Satz 3.4.1,

$$W_{\rho_0}(J_\tau) := \{\rho \in \mathbb{E}_1(J_\tau); \rho(0) = \rho_0, \|\rho - e^{-tA_0}\rho_0\|_{C(J_\tau, E_\theta)} \leq \varepsilon\} \cap \bar{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}_1(J)}(e^{-tA_0}\rho_0, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Wegen Proposition 4.7.1 und Satz 4.7.2 können wir Satz 3.4.1 benutzen und schließen, dass für eine positive Zeit  $\tau$  Gleichung (4.58) eine Lösung

$$\rho \in BUC_{1-\theta}^1([0, \tau], E_0) \cap BUC_{1-\theta}([0, \tau], E_1) \cap BUC([0, \tau], V_\theta) \quad (4.59)$$

hat. Damit hat das parabolische Randwertproblem (4.34) die Lösung

$$v := \Psi(\rho) \in C^1([0, \tau], h^\alpha(\bar{D})) \cap C([0, \tau], h^{2+\alpha}(\bar{D})). \quad (4.60)$$

Seien nun  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zwei Lösungen von (4.58) in der Klasse (4.59). Wir setzen

$$\tau_1 := \sup\{t \in [0, \tau]; \rho_1(s) = \rho_2(s) \quad \forall 0 \leq s < t\}.$$

Weil  $\rho_1$  und  $\rho_2$  zu der Klasse (4.59) gehören, liegen für ein hinreichend kleines  $\tau^*$  sowohl  $\rho_1$  als auch  $\rho_2$  in der Menge  $W_{\rho_0}(J_{\tau^*})$ . Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert eine eindeutige Lösung in dieser Menge und daher ist  $\tau_1 > 0$ . Wir nehmen an, dass  $\tau_1 < \tau$ . Offenbar ist  $\rho_1(\tau_1) = \rho_2(\tau_1) =: \xi$  und daher auch  $\Psi(\rho_1)(\tau_1) = \Psi(\rho_2)(\tau_1) =: w$ . Insbesondere ist die Kompatibilitätsbedingung

$$\tilde{\mathcal{B}}(\xi)w = H(\xi)$$

erfüllt. Wir setzen  $\psi_j(t) := \rho_j(t + \tau_1)$ ,  $j = 1, 2$ , mit  $t \in J_2 := [0, \tau_2]$  für ein  $\tau_2 \in (0, \tau - \tau_1]$ . Damit ist  $\psi_1, \psi_2 \in C^1(J_2, E_0) \cap C(J_2, E_1)$  und  $\psi_1, \psi_2$  lösen das Cauchy-Problem

$$\dot{\rho} + A(\rho)\rho = F(\rho), \quad \rho(0) = \xi.$$

Für  $\tau_2$  klein genug gehören  $\psi_1, \psi_2$  zu der Menge  $W_\xi(J_2)$  (diese Menge wird mit  $A_0 := A(\xi)$  wie oben definiert). Wir schließen wieder mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass  $\psi_1 = \psi_2$ . Daher stimmen  $\rho_1$  und  $\rho_2$  auf dem Intervall  $[0, \tau_1 + \tau_2]$  überein und dies ist ein Widerspruch zur Definition von  $\tau_1$  und daher ist  $\tau_1 = \tau$ . Es bezeichne im Folgenden  $\rho_1$  die eindeutige Lösung von (4.58) auf dem Intervall  $[0, \tau_1]$ . Wir setzen  $\xi_1 := \rho_1(\tau_1)$  und  $w_1 = \Psi(\rho_1)(\tau_1)$ . Dann ist  $\xi_1 \in V_\theta \cap E_1$  und die Kompatibilitätsbedingung

$$\tilde{\mathcal{B}}(\xi_1)w_1 = H(\xi_1)$$

ist erfüllt. Daher können wir wegen Proposition 4.7.1 und Satz 4.7.2 wieder Satz 3.4.1 mit  $\Psi(\rho) = \Psi(\rho, w_1)$  benutzen und schließen, dass die Gleichung

$$\dot{\rho} + A(\rho)\rho = F(\rho), \quad \rho(0) = \xi_1$$

eine eindeutige Lösung  $\rho_2 \in \mathbb{E}_1(J_2) \cap C(J_2, V_\theta)$ ,  $J_2 := [0, \tau_2]$  hat. Damit löst  $\rho_2$  auch das lineare inhomogene Cauchy-Problem

$$\dot{\rho} + A_2(t)\rho = F_2(t), \quad \rho(0) = \xi_1, \quad (4.61)$$

wobei wir  $A_2(t) := A(\rho_2(t))$  und  $F_2(t) := F(\rho_2)(t)$  mit  $t \in J_2$  gesetzt haben. Aus den Abbildungseigenschaften von  $(A, F)$  erhalten wir

$$(A_2, F_2) \in BUC(J_2, \mathcal{L}(E_1, E_0) \times E_0). \quad (4.62)$$

Insbesondere ist  $F_2 \in BUC(J_2, E_0) \subset \mathbb{E}_0(J_2)$ . Wir erhalten aus [16, Lemma 2.8(a)], dass  $\rho_2$  die eindeutige Lösung von (4.61) in  $\mathbb{E}_1(J_2)$  ist. Andererseits erhalten wir aus [16, Lemma 2.6], dass  $A_2(s) \in \mathcal{M}_1(E_1, E_0)$  für  $s \in J_2$ , und damit folgt wieder mit [16, Lemma 2.8(a)]

$$\psi := \left( \frac{d}{dt} + A_2(\cdot, \gamma) \right)^{-1} (F_2, \xi_1) \in C^1(J_2, E_0) \cap C(J_2, E_1) \subset \mathbb{E}_1(J_2)$$

aufgrund der Tatsache, dass  $(F_2, \xi_1) \in C(J_2, E_0) \times E_1$ . Wegen der Eindeutigkeit der Lösung von (4.61) in  $\mathbb{E}_1(J_2)$  folgern wir, dass

$$\rho_2 = \psi \in C^1(J_2, E_0) \cap C(J_2, E_1). \quad (4.63)$$

Wir setzen nun

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_1(t) & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ \rho_2(t - \tau) & \text{für } \tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2 \end{cases}$$

und  $J := [0, \tau_1 + \tau_2]$ . Aus (4.59) und (4.63) folgt  $\rho \in BUC_{1-\theta}(J, E_1)$ . Außerdem ist

$$\dot{\rho}_1(\tau_1) = -A(\xi_1)\xi_1 + F(\rho_1)(\tau_1) = -A(\xi_1)\xi_1 + F(\rho_2)(0) = \dot{\rho}_2(0).$$

Wir haben daher

$$\rho \in BUC_{1-\theta}^1(J, E_0) \cap BUC_{1-\theta}(J, E_1) \cap BUC(J, V_\theta)$$

und  $\rho$  ist die Lösung von (4.58) auf  $J$ . Außerdem setzen wir

$$v(t) = \begin{cases} v_1(t) := \Psi(\rho_1)(t) & \text{für } 0 \leq t \leq \tau_1, \\ v_2(t) := \Psi(\rho_2)(t - \tau) & \text{für } \tau_1 \leq t \leq \tau_1 + \tau_2. \end{cases}$$

Dann ist  $v_1(\tau_1) = w_1 = v_2(0)$  und

$$\begin{aligned} v_1'(\tau_1) &= \mathcal{A}(\rho_1(\tau_1))v_1(\tau_1) + R(v_1(\tau_1), \rho_1(\tau_1)) \\ &= \mathcal{A}(\rho_2(0))v_2(0) + R(v_2(0), \rho_2(0)) = v_2'(0). \end{aligned}$$

Also ist

$$v \in C^1(J, h^\alpha(\bar{D})) \cap C(J, h^{2+\alpha}(\bar{D}))$$

und  $(\rho, v)$  ist die eindeutige Lösung von System (4.11)-(4.15) auf  $J$ . Schließlich setzen wir

$$J(\rho_0, v_0) := \bigcup \{[0, \tau]; (4.58) \text{ hat eine eindeutige Lösung auf } [0, \tau]\}.$$

Es ist klar, dass  $J(\rho_0, v_0)$  rechts offen ist, weil wir sonst die oben beschriebenen Schritte wiederholen und so die Lösung fortsetzen könnten, was aber der Definition von  $J(\rho_0, v_0)$  widerspräche.

□

# Literaturverzeichnis

- [1] S. ANGENENT, *Nonlinear analytic semiflows*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115** (1990), 91-107.
- [2] H. AMANN, "Linear and Quasilinear Parabolic Problems", Birkhäuser, Basel, 1995.
- [3] H. AMANN, *Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems*, in "Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis" (H.J. Schmeisser and H. Triebel, Eds.), pp. 9-126, Teubner, Stuttgart/Leipzig, 1993.
- [4] H. AMANN, *Quasilinear parabolic problems via maximal regularity*, Adv. Differential Equations **10** (2005), 1081-1110.
- [5] D. ANDREUCCI, M. A. HERRERO & J. J. L. VELÁZQUEZ, *The classical one-phase Stefan Problem: a catalog of interface behaviors*, Surveys Math. Indust. **9** (2001), 247-337.
- [6] I. ATHANASOPOULOS, L. CAFARELLI & S. SALSA, *Regularity of the free boundary in in parabolic phase-transition problems*, Acta Math. **176** (1996), 245-282.
- [7] I. ATHANASOPOULOS, L. CAFARELLI & S. SALSA, *Phase transition problems of parabolic type: flat free boundaries are smooth*, Comm. Pure Appl. Math. **51** (1998), 77-112.
- [8] J. B. BAILLON, *Caractère borné de certains générateurs de semigroupes linéaires dans les espaces de Banach*, C.R. Acad. Sc. Paris **290** (1980), 757-760.
- [9] L. A. CAFARELLI, *The regularity of the free boundaries in higher dimensions*, Acta Math. **139** (1977), 155-184.

- [10] L. A. CAFARELLI, *Some aspects of the one-phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 73-77.
- [11] L. A. CAFARELLI & L. C. EVANS, *Continuity of the temperature in the two-phase Stefan problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **81** (1983), 199-220.
- [12] L. A. CAFARELLI & A. FRIEDMAN, *Continuity of the temperature in the Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1983), 53-70.
- [13] B. CHALMERS, "Principles of Solidification", Wiley, New York, 1964.
- [14] X. CHEN & F. REITICH, *Local Existence and Uniqueness of Solutions of the Stefan Problem with Surface Tension and Kinetic Undercooling*, J. Math. Anal. Appl. **164** (1992), 350-362.
- [15] X. CHEN, J. HONG & F. YI, *Existence, uniqueness, and regularity of classical solutions of the Mullins-Sekerka problem*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 1705-1727.
- [16] P. CLÉMENT & G. SIMONETT, *Maximal regularity in continuous interpolation spaces and quasilinear parabolic equations*, J. Evol. Equ. **1** (2001), 39-67.
- [17] G. DA PRATO & P. GRISVARD, *Équations d'évolution abstraites non-linéaires de type parabolique*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **120** (1979), 329-396.
- [18] E. DIBENEDETTO, *Regularity properties of the solution of an n-dimensional two-phase Stefan problem*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. (1980), 129-152.
- [19] E. DIBENEDETTO, *Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations*, Boll. Un. Mat. Ital. Suppl. (1980), 129-152.
- [20] J. ESCHER, J. PRÜSS & G. SIMONETT, *Analytic solutions for a Stefan problem with Gibbs-Thomson correction*, J. reine angew. Math. **563** (2003), 1-52.
- [21] J. ESCHER & G. SIMONETT, *On Hele-Shaw models with surface tension*, Math. Res. Lett. **3** (1996), 467-474.
- [22] J. ESCHER & G. SIMONETT, *Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension*, Adv. Differential Equations **2** (1997), 619-642.

- [23] J. ESCHER & G. SIMONETT, *A Center Manifold Analysis for the Mullins-Sekerka Model*, J. Differential Equations **143** (1998), 267-292.
- [24] J. D. EVANS & J. R. KING, *Regularization by kinetic undercooling of blow-up in the ill-posed Stefan problem*, SIAM J. Appl. Math. **65** (2005), 1677-1707.
- [25] J. D. EVANS & J. R. KING, *The Stefan problem with nonlinear kinetic undercooling*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **56** (2003), 139-161.
- [26] J. D. EVANS & J. R. KING, *Asymptotic results for the Stefan problem with kinetic undercooling*, Quart. J. Mech. Appl. Math. **53** (2000), 449-473.
- [27] M. L. FRANKEL & V. ROYTBURD, *Finite dimensional attractor for a one-phase Stefan problem with kinetics*, J. Dynam. Differential Equations **15** (2003), 87-106.
- [28] M. L. FRANKEL & V. ROYTBURD, *Compact attractors for a Stefan problem with kinetics*, Electron. J. Differential Equations **2002** (2002), 1-27.
- [29] A. FRIEDMAN, *The Stefan problem in several space variables*, Trans. Amer. Math. Soc. **133** (1968), 51-87.
- [30] A. FRIEDMAN, "Variational Principles and Free-Boundary Problems", Wiley-Interscience, New York, 1982.
- [31] A. FRIEDMAN & D. KINDERLEHRER, *A one phase Stefan problem*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 1005-1035.
- [32] A. FRIEDMAN & F. REITICH, *The Stefan problem with small surface tension*, Trans. Amer. Math. Soc. **328** (1991), 465-515.
- [33] A. FRIEDMAN & F. REITICH, *Nonlinear stability of a quasi-static Stefan problem with surface tension: a continuation approach*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **30** (2001), 341-403.
- [34] M. GEISSERT, B. GREC, M. HIEBER & E. RADKEVICH, *The model-problem associated to the Stefan problem with surface tension: an approach via Fourier-Laplace multipliers*, Differential equations: inverse and direct problems, 171-182, Lect. Notes Pure Appl. Math., **251**, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

- [35] Y. GIGA & P. RYBKA, *Stability of facets of crystals growing from vapor*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **14** (2006), 689-706.
- [36] Y. GIGA & P. RYBKA, *Stability of facets of self-similar motion of crystal*, Adv. Differential Equations **10** (2005), 601-634.
- [37] Y. GIGA & P. RYBKA, *Existence of self-similar evolution of crystals grown from supersaturated vapor*, Interfaces Free Bound. **6** (2004), 405-421.
- [38] D. GILBARG & N. S. TRUDINGER, “Elliptic Partial Differential Equations of Second Order”, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2001.
- [39] S. C. GUPTA, “The Classical Stefan Problem Basic concepts, modelling and analysis”, Elsevier, 2003.
- [40] E. I. HANZAWA, *Classical solutions of the Stefan problem*, Tôhoku Math. J. **328** (1991), 465-515.
- [41] D. HILHORST, F. ISSARD-ROCH & J. M. ROQUEJOFFRE, *Large time behavior of the solution to a one-dimensional Stefan problem with a kinetic condition at the free boundary*, European J. Appl. Math. **15** (2004), 297-313.
- [42] S. L. KAMENOMOSTSKAJA, *On Stefan’s problem*, Math. Sbornik **53** (1965), 485-514.
- [43] T. KATO, “Perturbation Theory for Linear Operators”, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1995.
- [44] D. KINDERLEHRER, L. NIRENBERG, *Regularity in free boundary problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **4** (1977), 373-391.
- [45] D. KINDERLEHRER, L. NIRENBERG, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem*, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 257-282.
- [46] O. A. LADYŽENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV & N. N. URAL’CEVA, “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic type”, Trans. Math. Monogr. **23**, Amer. Math. Soc. 1968.
- [47] Z. H. LIU & G. W. YUAN, *The multi-dimension one-phase Stefan problem with kinetic condition*, J. Math. Res. Exposition **14** (1994), 479-486.

- [48] A. LUNARDI, *Maximal space regularity in nonhomogeneous initial boundary value parabolic problem*, Numer. Funct. Anal. And Optimz. **10** (1989), 323-349.
- [49] A. LUNARDI, "Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems", Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1995.
- [50] S. LUCKHAUS, *Solutions for the two-phase Stefan problem with Gibbs-Thomson law for the melting temperature*, Europ. J. Appl. Math. **1** (1990), 101-111.
- [51] H. MATANO, *Asymptotic behavior of the free boundaries arising in one phase Stefan problems in multidimensional spaces*, Lect. Notes Num. Appl. Anal. **5**, Kinokuniya, Tokyo (1982), 133-151.
- [52] A. M. MEIRMANOV, *On the classical solution of the multidimensional Stefan problem for quasilinear parabolic equations*, Math Sb. **112** (1980), 170-192.
- [53] A. M. MEIRMANOV, "The Stefan Problem", De Gruyter, Berlin 1992.
- [54] A. M. MEIRMANOV, *The Stefan problem with surface tension in the three dimensional case with spherical symmetry: non-existence of the classical solution*, Europ. J. Appl. Math. **5** (1994), 1-20.
- [55] R. H. NOCHETTO, *A class of nondegenerate two-phase Stefan problems in several space variables*, Comm. Part. Diff. Equ. **12** (1987), 21-45.
- [56] E. V. RADKEVICH, *On conditions for the existence of a classical solution of the modified Stefan problem (The Gibbs-Thomson law)* (Russian), Mat. Sb. **183** (1992), 77-101, Translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. **75** (1993), 221-246.
- [57] P. RYBKA, *On the modified crystalline Stefan problem with singular data*, J. Differential Equations **181** (2002), 340-366.
- [58] P. RYBKA, *The modified crystalline Stefan problem: evolution of broken facets*, Free boundary problems (Japanese) (Kyoto, 2000), 142-155.
- [59] P. RYBKA, *On convergence of solutions of the crystalline Stefan problem with Gibbs-Thomson law and kinetic undercooling*, Interfaces Free Bound. **2** (2000), 361-379.

- [60] P. RYBKA, *The crystalline version of the modified Stefan problem in the plane and its properties*, SIAM J. Math. Anal. **30** (1999), 756-786.
- [61] P. RYBKA, *Crystalline version of the Stefan problem with Gibbs-Thomson law and kinetic undercooling*, Adv. Differential Equations **3** (1998), 687-713.
- [62] P. E. SACKS, *Continuity of solutions of a singular parabolic equation*, Nonlin. Anal. **7** (1983), 387-409.
- [63] G. SIMONETT, *Invariant manifolds and bifurcation for quasilinear reaction-diffusion systems*, Nonlinear Anal. **23** (1994), 753-796.
- [64] G. SIMONETT, *Center manifolds for quasilinear reaction-diffusion systems*, Differential Integral Equations **8** (1995), 753-796.
- [65] J. STEFAN, *Ueber die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere*, Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien math.-naturw. Cl. **98** (1889), 269-286.
- [66] J. STEFAN, *Ueber die Theorie der Eisbildung*, Monatshefte für Mathematik **1** (1890), 1-6.
- [67] H. TRIEBEL, "Höhere Analysis", Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1972.
- [68] F. Verhulst, "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems", Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- [69] A. VISITIN, "Models of Phase Transitions", Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1996.
- [70] F. YI, *Asymptotic behaviour of the solutions of the supercooled Stefan problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 181-190.
- [71] H.-M. YIN, *Blow-up and global existence for a non-equilibrium phase change process*, Variational and free boundary problems, 195-204, IMA Vol. Math. Appl., **53**, Springer, New York (1993).
- [72] W. YU, *A quasisteady Stefan problem with curvature correction and kinetic undercooling*, J. Partial Diff. Eqs. **9** (1996), 55-70.

- [73] W. P. ZIEMER, *Interior and boundary continuity of weak solutions of degenerate parabolic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982), 733-748.