

Bose-Einstein-Kondensate in ungeordneten Potenzialen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation

von
Dipl.-Phys. Thomas Schulte
geboren am 05.04.1976 in Hannover.

2006

Referent: Prof. Dr. Wolfgang Ertmer

Korreferent: Prof. Dr. Luis Santos

Tag der Promotion: 11. Juli 2006

Zusammenfassung

Unordnung ist ein integraler Bestandteil einer Vielzahl physikalischer Systeme. Sie existiert insbesondere in Festkörpern in mannigfaltiger Form und hat zum Teil dramatische Auswirkungen auf deren Eigenschaften. Die Möglichkeiten zur experimentellen Kontrolle der Unordnung sind zumeist nur sehr begrenzt, da diese in der Regel auf natürliche Weise vorliegt. Ultra-kalte Quantengase hingegen stellen äußerst reine Ensembles dar, für die Methoden zur kontrollierten Erzeugung von Unordnung verfügbar sind. Sie bieten daher einen äußerst viel versprechenden Ansatz zur Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften ungeordneter Systeme.

Zentrales Thema dieser Arbeit war die Erforschung des Einflusses kontrollierbarer Unordnungspotenziale auf die Eigenschaften von quantenentarteten Bose-Gasen. Dazu wurde ein räumlich ungeordnetes Dipolpotenzial realisiert und in die bestehende Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten aus ^{87}Rb -Atomen integriert.

Große Bedeutung kommt der Untersuchung ungeordneter Gittergase zu, da diese die experimentelle Realisierung der Modelle ermöglichen, die zur Beschreibung ungeordneter Ensembles verwendet werden. Zur Bereitstellung eines solchen Systems wurde im Rahmen dieser Arbeit ein eindimensionales optisches Gitter aufgebaut und charakterisiert. Durch die Kombination des Gitterpotenzials mit dem ungeordneten Dipolpotenzial konnte erstmals ein ungeordnetes quantenentartetes Gittergas erzeugt werden [1,2]. Das Dichteprofil des frei expandierten Kondensates weist unregelmäßige Modulationen auf, die von der Lokalisierung der Atome in den Fluktuationen des ungeordneten Potenzials herrühren. Eine zentrale Fragestellung hierbei lautete, ob in diesem System eine Anderson-artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion auftritt. In Übereinstimmung mit numerischen Untersuchungen wurden in den Messungen keine Anzeichen einer derartigen Lokalisierung festgestellt. Jedoch konnte ein experimentell zugängliches Regime identifiziert werden, in dem eine Anderson-artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion zu erwarten ist [1–3].

In metallischen Festkörpern reduzieren Störungen der periodischen Gitterstruktur die Kohärenzzeit der Elektronenbewegung und verhindern bislang die Beobachtung des elementaren Phänomens der Bloch-Oszillationen. Basierend auf der Anregung von Prof. Dr. Luis Santos wurden mittels numerischer Simulationen die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Gitterpotenzialen untersucht. Die Berechnungen zeigen, dass hierbei eine dekohärenzbedingte Dämpfung der Oszillationsamplitude auftritt. Diese kann mit dem in dieser Arbeit realisierten System zeitaufgelöst gemessen werden. Die Ergebnisse der Simulationen sind unmittelbarer Leitfaden für die derzeitigen Arbeiten am Experiment.

Die durchgeführten Messungen gehören zu den ersten experimentellen Untersuchungen von ungeordneten quantenentarteten Gasen. Die erzielten Resultate haben wesentliche Beiträge zur Etablierung der Erforschung ungeordneter Systeme mittels ultra-kalter Quantengase geleistet.

Schlagwörter: ungeordnete Systeme, Bose-Einstein-Kondensate, optische Gitter

Abstract

Disorder is an integral constituent of numerous physical systems. Especially solid bodies contain a manifold of disordered structures which can have dramatic impacts on their properties. The possibilities for experimental control are however very restricted. On the contrary, ultracold quantum gases form extremely pure ensembles for which powerful methods of control are available. Therefore, they provide a promising new approach for examining the properties of disordered systems.

The influence of controllable disorder on the features of quantum degenerate Bose gases is the central topic of this thesis. A spatially disordered dipole potential was realized experimentally and integrated into the existing apparatus for producing Bose-Einstein condensates of ^{87}Rb -atoms.

Disordered lattice gases allow for the experimental realization of theoretical models dedicated to the description of disordered ensembles. To implement such a system, a one-dimensional optical lattice was set up and characterized. By combining the lattice potential with the disordered dipole potential, a disordered quantum degenerate lattice gas was generated for the first time [1, 2]. The density profile of the freely expanded condensate shows irregular modulations which originate from atomic localization in the fluctuations of the disordered potential. A central question in this context was whether an Anderson-like localization was present in this system. In good agreement with numerical results no signs of such a localization were found in the measurements. However, an experimentally accessible regime was identified where an Anderson-like localization is expected [1–3].

Perturbations of the periodic lattice structure in metallic solid bodies reduce the coherence time of the electronic movement and have hampered the direct observation of Bloch oscillations in these systems so far. Based on the idea of Prof. Dr. Luis Santos, Bloch oscillations of Bose-Einstein condensates in disordered lattice potentials were investigated by means of numerical simulations. The calculations show that a damping of the oscillation amplitude due to decoherence occurs. Time-resolved measurements of this phenomenon are possible with the system implemented in the context of this thesis. The simulations are a direct guideline for the present experimental work.

The measurements presented in this thesis belong to the first experimental investigations of disordered quantum degenerate gases. The results have significantly contributed to establishing research of disordered systems in the field of ultracold quantum gases.

Keywords: Disordered Systems, Bose-Einstein Condensates, Optical Lattices

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Bose-Einstein-Kondensation	7
2.1. Einführung	7
2.2. Theoretische Grundlagen	9
2.2.1. Das ideale Bose-Gas in einer harmonischen Falle	9
2.2.2. Schwach wechselwirkendes Bose-Gas	10
2.2.3. Grundzustand des Kondensates und Thomas-Fermi-Regime	13
2.3. Experimentelle Erzeugung	14
3. Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gitterpotenzialen	17
3.1. Einführung	17
3.2. Theoretische Grundlagen	19
3.2.1. Das optische Dipolpotenzial	19
3.2.2. Einzelnes Teilchen im 1D-Gitter	25
3.2.3. Schwach wechselwirkendes Bose-Gas in optischen Gittern	36
3.3. Aufbau eines eindimensionalen optischen Gitters	45
3.3.1. Das Lasersystem	45
3.3.2. Aufbau des Gitterstrahlengangs	48
3.3.3. Justage des Gitterstrahls	51
3.4. Experimente zur Charakterisierung des optischen Gitters	52
3.4.1. Bestimmung der Potenzialtiefe	53
3.4.2. Besetzung des Kondensatgrundzustandes im Gitterpotenzial	58
4. Bose-Einstein-Kondensate in ungeordneten Dipolpotenzialen	65
4.1. Einführung	65
4.2. Theoretische Grundlagen	66
4.2.1. Einzelnes Teilchen in einem ungeordneten Potenzial	67
4.3. Experimentelle Realisierung eines ungeordneten Dipolpotenzials	69
4.3.1. Aufbau und Justage des Strahlengangs	69
4.3.2. Charakterisierung des Unordnungspotenzials	72
4.4. Untersuchungen mit ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten	78
4.4.1. Experimentelle Untersuchungen	80
4.4.2. Theoretische Untersuchung des Systems	83

5. Ungeordnetes ultra-kaltes Gittergas: Der Grundzustand	95
5.1. Einführung	95
5.2. Theoretische Grundlagen	96
5.2.1. Das Anderson-Modell	96
5.2.2. Das Bose-Hubbard-Modell	97
5.2.3. Die diskrete nichtlineare Schrödinger-Gleichung	99
5.3. Experimentelle und theoretische Untersuchung eines ungeordneten Gittergases	99
5.3.1. Erzeugung des ungeordneten Gittergases	100
5.3.2. Experimentelle Untersuchungen	101
5.3.3. Theoretische Untersuchung des ungeordneten Gittergases	104
5.4. Anderson-artige Lokalisierung von Bose-Einstein-Kondensaten	106
5.4.1. Wege zu einer experimentellen Realisierung	112
6. Ungeordnetes quantenentartetes Gittergas: Dynamik	115
6.1. Einführung	115
6.2. Bloch-Oszillationen: Theoretische Grundlagen	116
6.3. Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten	120
6.4. Unordnungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen	130
7. Ausblick	141
A. Numerische Technik	145
B. Das axiale Detektionssystem	149

1. Einleitung

Das Forschungsgebiet der ultra-kalten Gase hat in den letzten Jahren eine rasante Entwicklung durchlaufen. Seit der ersten Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten atomarer Gase im Jahr 1995 [4–6] hat das Interesse an quantenentarteten Systemen stark zugenommen. Insbesondere die hohe Interdisziplinarität sowie die äußerst enge Zusammenarbeit von Theorie und Experiment haben zur raschen Entwicklung dieses Feldes beigetragen. Quantenentartete Gase stellen physikalische Objekte von fundamentaler Bedeutung dar, da sie die experimentelle Überprüfung elementarer Konzepte der Quantenstatistik, Vielteilchentheorie, Quantenoptik und Theorie der kondensierten Materie erlauben. Die Möglichkeit, solche grundlegenden Systeme im Labor zu erzeugen und zu untersuchen, hat das Interesse vieler Gruppen an der Erforschung ultra-kalter Quantengase ausgelöst. Die enormen experimentellen Fortschritte, die mit dieser Entwicklung einhergegangen sind, haben dazu geführt, dass heutzutage nicht nur atomare bosonische Gase vielerlei Spezies im Labor präpariert werden, sondern haben auch die Erzeugung quantenentarteter Gase aus Fermionen [7–9] und homonuklearen Molekülen [10–12] ermöglicht. In jüngster Zeit fokussieren sich nun größte Anstrengungen auf die Realisierung quantenentarteter heteronuklearer Gase.

Von wichtiger Bedeutung für das enorme Interesse an quantenentarteten Gasen ist, dass bei ihrer Erzeugung und Untersuchung ein hohes Maß an experimenteller Kontrolle erzielt werden kann. So werden sie in magnetischen oder optischen Fallen präpariert und sind durch ein Ultrahochvakuum von störenden Umgebungseinflüssen isoliert. Des Weiteren ist ein breites Spektrum an Manipulationstechniken verfügbar, mit denen sowohl die inneren als auch die äußeren Freiheitsgrade dieser Ensembles beeinflusst werden können. Dieses reicht vom Einsatz kohärenter Zwei-Photonen-Prozesse zur Spektroskopie [13–17] oder Interferometrie [18–21] über den Einsatz optischer Dipolpotenziale zur Erzeugung eindimensionaler Wellenleiterstrukturen [22–24] bis hin zur Manipulation der interatomaren Wechselwirkung mittels Feshbach-Resonanzen [25].

Herausragende Bedeutung unter diesen Techniken hat der Einsatz optischer Gitterpotenziale erlangt [26]. Diese werden durch optische Stehwellen realisiert, welche mittels interferierender Laserstrahlen erzeugt werden. Sie spielen für eine Vielzahl von theoretischen und experimentellen Untersuchungen eine zentrale Rolle. So erlauben die periodischen Strukturen optischer Gitter die Beobachtung fundamentaler quantenmechanischer Phänomene wie das Auftreten von Blochoszillationen [27–29] oder Landau-Zener-Tunneln [28–30]. Der hohe Einschluss, der auf den einzelnen Gitterplätzen vorliegt, bietet die Möglichkeit zur Vielfachrealisierung niederdimensionaler Quantengase. So konnte beispielsweise in jüngster Zeit mittels eines eindimensionalen Gitters der vielbeachtete Kosterlitz-Thouless-Übergang in zweidimensionalen Bose-Gasen beobachtet werden [31].

Das große Potenzial optischer Gitter beruht insbesondere auf der Möglichkeit, die relevanten Systemgrößen wie Tunnel- oder Wechselwirkungsparameter über einen weiten Bereich

experimentell manipulieren zu können [32]. Hierdurch eröffnen sie beispielsweise den Zugang zur Erzeugung von Systemen, die durch starke Korrelationen geprägt sind und daher nicht im Rahmen von Mean-Field-Theorien beschrieben werden können [33, 34]. So konnte in tiefen dreidimensionalen optischen Gittern der Quanten-Phasenübergang zum bosonischen Mott-Isolator-Zustand erreicht werden [35]. Hierbei handelt es sich um einen Zustand, bei dem die Atome in Eigenzuständen des Anzahloperators auf den jeweiligen Gitterplätzen vorliegen und der durch eine charakteristische Lücke im Anregungsspektrum gekennzeichnet ist [33, 36, 37]. Die hiermit verbundene Unterdrückung von Teilchenzahlfluktuationen begründet das große Anwendungspotenzial des Mott-Isolators (MI) insbesondere für die Quanteninformationsverarbeitung [38–40].

In eindimensionalen bosonischen Gasen, die mittels zweidimensionaler optischer Gitter erzeugt wurden, konnte ein anderes stark korreliertes System realisiert werden¹ [41, 43]. Dieses ist durch ein Verschwinden des Transmissionskoeffizienten der binären Streuprozesse gekennzeichnet [44]. Ein solches eindimensionales System undurchdringlicher Bosonen ist als Tonks-Girardeau-Gas (TG) bekannt [45, 46]. Sein Spektrum und seine thermodynamischen Eigenschaften können durch eine Abbildung des Problems auf ein Gas nicht wechselwirkender spinloser Fermionen erhalten werden [46, 47]. Der erste experimentelle Nachweis des TG konnte durch die Messung seines charakteristischen Impulsspektrums geführt werden [41].

Ungeordnete Systeme

Eine bemerkenswerte Eigenschaft optischer Gitter ist das Fehlen jeglicher Störungen ihres periodischen Potenzials. Dieses stellt einen wichtigen Unterschied zu einer Vielzahl von natürlichen Gittersystemen dar. So existieren z. B. in der periodischen Struktur von Festkörpern verschiedenste Arten von Unregelmäßigkeiten. Angefangen von vereinzelt Defekten in kristallinen Festkörpern über das Auftreten von Phononen bis hin zu den amorphen Gläsern oder Legierungen liegt Unordnung inhärent und auf vielfältige Weise vor [48, 49]. Dabei verstehe ich im Folgenden unter dem Begriff Unordnung eine unregelmäßige strukturelle Störung des Hamiltonians, die keinerlei Symmetrien aufweist und die zeitlich stationär ist.

Allgemein kann die Gegenwart von Unordnung massive Konsequenzen für die Eigenschaften eines Systems haben. Ein zentrales Phänomen ist in diesem Zusammenhang das mögliche Auftreten einer exponentiellen Lokalisierung der Einteilchenzustände. Experimentell manifestiert sich dieser Effekt durch eine dramatische Veränderung der Transporteigenschaften. Das kanonische Beispiel für dieses Szenario ist der sogenannte Metall-Isolatorübergang in einem stark ungeordneten Festkörper [50, 51]. Die theoretischen Grundlagen der Lokalisation datieren auf die wegweisende Arbeit von P. W. Anderson zurück, der eine Analyse des Diffusionsverhaltens eines Teilchens auf einem ungeordneten Gitter durchführte [52]. Diese Untersuchung initiierte eine Serie von Arbeiten, die das heutige Verständnis der unordnungsinduzierten Unterdrückung des Transports als die Lokalisierung der Einteilchenzustände in dem ungeordneten Potenzial begründen [53–55]. Daher wird eine solche Lokalisierung auch als Anderson-Lokalisierung bezeichnet.

¹In [41] ist für die Erzeugung des so genannten Tonks-Girardeau-Gases (TG) der Einsatz eines dritten Gitters wesentlich. Das TG auf dem Gitter hat dabei andere Korrelationseigenschaften als auf dem Kontinuum. Eine genauere Diskussion bietet [42].

Das große Interesse an ungeordneten Quantensystemen wird durch die Tatsache bestärkt, dass sich diese nicht als eine einfache Modifikation ihrer geordneten Pendanten verstehen lassen. Die Probleme sind im Allgemeinen nicht-perturbativ und erfordern eigenständige Beschreibungen. So kann beispielsweise für ungeordnete Systeme gezeigt werden, dass in einer Dimension alle Einteilchenzustände lokalisiert sind, und zwar unabhängig von der Stärke des Unordnungspotenzials [56]. Ein überzeugender experimenteller Beleg für den nicht-perturbativen Charakter ungeordneter Systeme stellt die Messung der Leitfähigkeit in Metallen bei tiefen Temperaturen dar. Für deren Temperaturabhängigkeit liefern Rechnungen, die auf der Annahme einer einfachen Streuung der Blochwellen an den Unordnungszentren basieren und so zu einer Boltzmann-Transport-Gleichung führen, auch im Grenzfall kleiner Unordnung falsche Vorhersagen² [50]. Die Untersuchung ungeordneter Systeme verlangt weiterführende Ansätze, welche die Konsequenzen einer möglichen Lokalisierung der Einteilchenfunktionen adäquat berücksichtigen müssen. Hier haben sogenannte Scaling-Theorien wichtige Verständnisbeiträge geleistet [50, 55, 57]. Diese berücksichtigen insbesondere den Einfluss der Dimensionalität des Systems auf das mögliche Auftreten von lokalisierten Zuständen [50].

Eine Herausforderung für die experimentelle Erforschung ungeordneter Systeme stellt die gezielte Erzeugung sowie die Manipulation der Unordnung dar. So ist es beispielsweise für viele Experimente wünschenswert, ein breites Spektrum von Unordnungsgraden - von völlig geordnet bis stark ungeordnet - präparieren zu können.

Ultra-kalte Quantengase bilden aufgrund ihrer ausgezeichneten experimentellen Kontrollierbarkeit und der vielfältigen Manipulationstechniken hervorragende Modellsysteme zur Untersuchung der fundamentalen Eigenschaften ungeordneter Ensembles. Sie zeichnen sich zum einen durch ihre inhärente Reinheit aus, zum anderen sind verschiedene Methoden zur gezielten Erzeugung von Unordnung in diesen Systemen vorgeschlagen worden. Diese beruhen auf dem Einsatz optischer Dipolpotenziale [58–64], der Einbringung von Fremdatomen in die Ensembles [65] oder der lokalen Modifikation der Wechselwirkungseigenschaften des Systems [66]. Diese Methoden erlauben sowohl eine gute Kontrolle über die Form der Unordnung als auch über deren Stärke. Hervorzuheben ist, dass anhand ultra-kalter bosonischer Gase mit der Untersuchung des Zusammenspiels von Unordnung und Wechselwirkung eine der meistbeachteten Fragestellungen für ungeordnete Systeme adressiert werden kann.

Die Erforschung ungeordneter Quantengase kann dabei auf bereits durchgeführte Arbeiten mit superflüssigem Helium und Supraleitern aufbauen. Deren spezielle Transporteigenschaften sind mit langreichweitigen Korrelationen verknüpft, die direkte Konsequenzen der spontan gebrochenen Symmetrien sind, die auch in quantenentarteten Gasen auftreten [67].

Für Supraleiter werden schon seit längerem die Auswirkungen einer räumlichen Unordnung auf die Transporteigenschaften und die Bardeen-Cooper-Schrieffer-Theorie [34] diskutiert [68, 69] und experimentell untersucht [70–72]. Grundsätzlich basiert Supraleitfähigkeit auf der Existenz kohärenter Elektronen-Paar-Zustände, während Unordnung zu exponentiell lokalisierten und daher ungekoppelten Zuständen führt. Aus diesem Grund führt Unordnung

²In diesem metallischen schwach ungeordneten Regime übersteigt zwar die Lokalisationslänge die Systemgröße, dennoch werden die Transporteigenschaften durch kohärente Elektronen-Rückstreuung beeinflusst. Dieses Phänomen wird daher als schwache Lokalisation bezeichnet [51].

allgemein zu einer Reduktion der supraleitenden Transporteigenschaften, wobei deren Ausmaß von der Stärke der Unordnung abhängt.

Die Untersuchungen mit ungeordnetem Helium wurden mittels poröser Substrate aus Vycor durchgeführt, auf die das Helium aufgebracht wurde [73–75]. Durch den Einfluss der ungeordneten Substratstrukturen konnten neuartige Effekte beobachtet werden [76]. Von großem Interesse ist hierbei insbesondere die für kleine Heliumdichten beobachtete Abwesenheit der superflüssigen Eigenschaften unterhalb der λ -Temperatur³. Dieses Phänomen wird durch die Lokalisierung der Heliumatome auf der ungeordneten Substratstruktur verursacht [77, 78]. Interessanterweise konnten die Proben durch Erhöhung der Heliumdichte wieder in die superflüssige Phase gebracht werden. Dieser Prozess, für den die repulsive Wechselwirkung zwischen den Bosonen eine zentrale Rolle spielt [77, 78], hat auch für die vorliegende Arbeit große Relevanz.

Die Experimente mit Supraleitern und superflüssigem Helium haben eine Reihe von theoretischen Abhandlungen stimuliert. Insbesondere die für Bose-Systeme durchgeführten Berechnungen des Unordnungseinflusses auf die Kondensationstemperatur [79, 80], Schallgeschwindigkeit [81] und den Anteil der superflüssigen und der kondensierten Teilchen [81–83] sind dabei von unmittelbarem Interesse für Untersuchungen an ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten.

Die erste Realisierung eines ungeordneten quantenentarteten Gases wurde mit einem atomaren Bose-Einstein-Kondensat erreicht. Dazu wurde mit Hilfe eines diffusiven Substrats ein räumlich ungeordnetes Dipolpotenzial erzeugt [84]. Mit dieser Methode wurde die Auswirkung eines Unordnungspotenzials auf den Grundzustand des Kondensates und die kollektive Anregungen gemessen [84]. Sie diente ferner zur Untersuchung der Expansion eines Kondensates in einer ungeordneten Wellenleiterstruktur [85, 86]. Hierbei zeigte sich unter dem Einfluss der Unordnung eine deutliche Reduktion des eindimensionalen Transports.

Diese Arbeiten adressieren die Eigenschaften ungeordneter Bose-Einstein-Kondensate auf dem Kontinuum. Großes Potenzial verspricht jedoch insbesondere die Realisierung und Untersuchung quantenentarteter Gase in ungeordneten Gitterstrukturen. Letztere können durch die Kombination optischer Gitterpotenziale mit den vorgeschlagenen Methoden zur Erzeugung von Unordnung realisiert werden. Das Interesse an ungeordneten Gittergasen basiert zum einen auf ihrer unmittelbaren Relevanz für eine Vielzahl von natürlich vorkommenden ungeordneten Systemen. Zum anderen bieten sie die Möglichkeit zur experimentellen Realisierung von vielbeachteten theoretischen Modellen, die zur Analyse ungeordneter Systeme verwendet werden. Insbesondere sei hier auf das Anderson-Modell [52] und das Bose-Hubbard-Modell [36] verwiesen. Schließlich können Experimente von der guten Manipulierbarkeit der Tunnel- und Wechselwirkungsparameter sowie der Unordnungsstärke profitieren. Diese Möglichkeit eröffnete jüngst den Weg zur Realisierung der sogenannten Bose-Glas-Phase in einem ungeordneten dreidimensionalen Gitter [87]. Das Bose-Glas (BG) ist wie der MI ein Isolator und durch starke Korrelationen geprägt [36]. Aufgrund der Unordnung weist er jedoch keine Lücke im Anregungsspektrum auf [36]. Durch die erfolgreiche Realisierung des BG wird die Leistungsfähigkeit ungeordneter Gitterstrukturen zur Erforschung ungeordneter Systeme un-

³Die λ -Temperatur bezeichnet die Temperatur, unterhalb der sich das homogene System in der superflüssigen Phase befindet.

terstrichen.

Diese Arbeit untersucht die Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potenzialen. Einen Schwerpunkt der experimentellen Arbeiten bildete die Realisierung und die Charakterisierung eines ungeordneten quantenentarteten Gittergases [1].

Mit der Untersuchung einer möglichen exponentiellen Lokalisierung des Kondensatgrundzustandes greift die Arbeit eine fundamentale Fragestellung für ungeordnete bosonische Systeme auf. Hierbei wird insbesondere der wichtige Einfluss der Unordnungsstrukturgröße sowie der interatomaren Wechselwirkung diskutiert.

Die Grundzustandsbetrachtungen werden durch die numerische Untersuchung von Blochoszillationen auf die Diskussion der dynamischen Eigenschaften des Gittergases unter dem Einfluss eines ungeordneten Potenzials erweitert.

Gliederung der Arbeit

- Das **Kapitel 2** ist eine Einführung in die Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation. Insbesondere wird die Beschreibung des Kondensates im Rahmen der Gross-Pitaevskii-Gleichung behandelt. Des Weiteren wird die experimentelle Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten aus ^{87}Rb -Atomen erläutert.
- Als ein wichtiges Ergebnis dieser Arbeit wird in **Kapitel 3** die Realisierung eines eindimensionalen optischen Gitters als robustes Werkzeug zur Manipulation der Atome beschrieben. Dazu erfolgt zunächst eine Darstellung der theoretischen Grundlagen von Bose-Einstein-Kondensaten in eindimensionalen Gitterpotenzialen. Es werden insbesondere die Konsequenzen der Wechselwirkung sowie eines harmonischen Fallenpotenzials berücksichtigt. Im Anschluss erfolgt die Beschreibung des Aufbaus des optischen Gitters und seiner experimentellen Charakterisierung. Letztere umfasst die Bestimmung der Potenzialtiefe und die Untersuchung des Kondensatgrundzustands.
- In **Kapitel 4** wird die Erzeugung eines ungeordneten Bose-Einstein-Kondensates dargestellt. Dazu wird zunächst der Aufbau und die Charakterisierung eines kontrollierbaren optischen Unordnungspotenzials vorgestellt. Den Schwerpunkt des Kapitels bildet die Beschreibung unserer experimentellen Untersuchungen des Kondensatgrundzustands in der Magnetfalle mit überlagertem Unordnungspotenzial. Die Darstellung der experimentellen Ergebnisse ist durch umfangreiche numerische Untersuchungen ergänzt.
- Als zentrales Resultat dieser Arbeit wird in **Kapitel 5** die erstmalige Realisierung eines ungeordneten quantenentarteten Gittergases beschrieben. Dieses konnte durch die Kombination des ungeordneten Dipolpotenzials mit dem eindimensionalen optischen Gitter erzeugt werden. Im Mittelpunkt steht die Darstellung unserer Untersuchungen zum Kondensatgrundzustand im ungeordneten Gitterpotenzial. Eine wichtige Fragestellung hierbei war, ob eine Anderson-artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion in einem solchen System möglich ist. Hierbei wird insbesondere der kritische Einfluss der Unordnungsstrukturgröße sowie der Wechselwirkung analysiert. Die Ergebnisse der

theoretischen Analyse zeigen einen experimentell zugänglichen Parameterbereich auf, in dem eine Anderson-artige Lokalisierung zu erwarten ist.

- Das **Kapitel 6** beinhaltet eine numerische Untersuchung der Blochoszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten unter der Einwirkung eines ungeordneten Potentials. Die Ergebnisse der Analyse zeigen, dass die Kohärenzzeit der Oszillationen aufgrund der Gegenwart der Unordnung deutlich reduziert ist und eine Dämpfung der Oszillationsamplitude eintritt. Dieser Prozess ist mit dem im Rahmen dieser Arbeit realisierten System kontrolliert messbar. Erste Schritte zu seiner experimentellen Umsetzung wurden bereits geleistet.
- Das **Kapitel 7** gibt einen Ausblick auf mögliche Fortsetzungen der bisherigen Untersuchungen.

2. Bose-Einstein-Kondensation

Bose-Einstein-Kondensate sind von zentraler Bedeutung für diese Arbeit, da sie den Ausgangspunkt für sämtliche Untersuchungen bilden. Dieses Kapitel gibt eine Beschreibung der theoretischen Grundlagen und der experimentellen Erzeugung dieser Vielteilchensysteme. Nach einem einleitenden Abriss über die historische Entwicklung des Forschungsfeldes erfolgt eine Darstellung der theoretischen Beschreibung. Diese ist kompakt gehalten, so dass an dieser Stelle auf die exzellenten Abhandlungen [34, 88–91] zu diesem Thema verwiesen sei. Im Anschluss wird die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten mit der experimentellen Apparatur skizziert. Eine grundlegende Beschreibung der Methoden zur Erzeugung und Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten wird in [92–94] gegeben, während die Details der vorliegenden Apparatur in [95, 96] dargestellt sind.

2.1. Einführung

Die konzeptionelle Grundlage der Bose-Einstein-Kondensation wurde 1925 von A. Einstein gelegt, der die von S. N. Bose entwickelten Ideen zur Photonenzustatsstatistik [97] auf ein nicht wechselwirkendes Gas von Atomen übertrug [98]. Die Kondensation ist durch eine makroskopische Besetzung eines Einteilchenzustandes gekennzeichnet, die in drei Dimensionen für ein homogenes spinloses Gas mit periodischen Randbedingungen unter der Bedingung

$$n \lambda^3 \geq \zeta\left(\frac{3}{2}\right) = \mathcal{O}(1) \quad (2.1)$$

einsetzt [99]. Hierbei bezeichnet n die Teilchendichte, ζ die Riemannsche Zeta-Funktion [100] und λ die thermische de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (2.2)$$

Das für einige Jahre als akademisches Problem geltende Konzept der Bose-Einstein-Kondensation erlangte durch die Beobachtung der superflüssigen Eigenschaften [101] von ^4He [102, 103] große Aufmerksamkeit. Als Meilenstein ist hierbei die Arbeit von F. London zu sehen, die das Auftreten der Superfluidität als direkte Konsequenz der Bose-Einstein-Kondensation interpretierte [104]. Dies bildete einerseits den Ausgangspunkt für eine Vielzahl von grundlegenden theoretischen und experimentellen Studien, welche die Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Bose-Einstein-Kondensation und Superfluidität zum Gegenstand hatten. Insbesondere wurde aber hierdurch das Konzept der Bose-Einstein-Kondensation für wechselwirkende Vielteilchensysteme etabliert. Das heutige Verständnis dieser Systeme basiert dabei maßgeblich auf einigen theoretischen Arbeiten von fundamentaler Bedeutung, die hier besonders hervorgehoben werden sollen:

- Die Untersuchung des Anregungsspektrums des schwach wechselwirkenden Bose-Gases durch N. N. Bogoliubov [105].
- Die Etablierung eines robusten Kriteriums für Bose-Einstein-Kondensation, das unabhängig von der Stärke der Wechselwirkung des Bose-Systems ist, durch O. Penrose und L. Onsager [106].
- Die feldtheoretische Formulierung der diagrammatischen Störungstheorie in Gegenwart eines Bose-Einstein-Kondensates durch S. T. Baliaev [107] und deren Anwendung durch N. M. Hugenholtz und D. Pines [108].

Diese Arbeiten legten den Grundstein für eine große Zahl von vielbeachteten theoretischen Arbeiten aus den fünfziger und sechziger Jahren, welche meist die Untersuchung der Eigenschaften des superflüssigen Heliums zum Gegenstand hatten. Als Beispiel sei hier auf den wegweisenden Artikel von P. C. Hohenberg und P. C. Martin verwiesen [109]. Obwohl die entwickelten Theorien von großer konzeptioneller Bedeutung waren, stellte sich rasch heraus, dass ein quantitativer Vergleich mit den experimentellen Beobachtungen durch die große Stärke der Wechselwirkung in superflüssigem Helium deutlich erschwert ist.

Daher entwickelte sich ab den siebziger Jahren ein zunehmendes experimentelles Interesse, Bose-Einstein-Kondensation in einem schwach wechselwirkenden Gas zu erreichen. Dazu musste ein System identifiziert werden, bei dem die hohen Phasenraumdichten $n\lambda^3$, die zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation erforderlich sind, nicht zu einem instantanen Übergang des Gases in die flüssige oder feste Phase führen.

Unter diesen Randbedingungen galt Spin-polarisierter Wasserstoff als äußerst vielversprechend, da dieser eine sehr kleine Masse besitzt und aufgrund der Polarisierung der Spins auch bei $T = 0$ gasförmig bleibt. Jedoch erwiesen sich die bei hohen Dichten auftretenden Dreikörperstöße als äußerst erschwerend. Sie induzieren Spin-Flips und eine Rekombination des atomaren Wasserstoffs zur molekularen Form. Diese Schwierigkeiten führten dazu, dass die erstmalige Erzeugung eines gasförmigen Bose-Einstein-Kondensats nicht mit Wasserstoff gelang.

Seit den achtziger Jahren wurden effiziente Kühlmethode für neutrale Atome entwickelt, die auf dem Einsatz von Lasern beruhen. Insbesondere Alkali-Atome besitzen Termschemata, die sie für den Einsatz von Laserkühlmethoden als besonders geeignet auszeichnen. Des Weiteren stehen für sie Laserquellen zur Verfügung, deren Wellenlängen für Anregungen der atomaren Übergänge geeignet sind. Durch die Kombination der Laserkühlung mit der für Spin-polarisierten Wasserstoff entwickelten evaporativen Kühlung gelang 1995 erstmals die Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten in schwach wechselwirkenden Gasen aus Alkali-Atomen in den Gruppen von E. Cornell, W. Ketterle und R. G. Hulet [4–6].

Obwohl diese Systeme metastabil sind, besitzen sie ausreichend hohe Lebensdauern, um an ihnen ein breites Spektrum experimenteller Untersuchungen durchführen zu können. Da zudem die interatomare Wechselwirkung mit den theoretischen Methoden quantitativ behandelt werden kann, bilden diese Ensembles ideale Werkzeuge, um die fundamentalen Konsequenzen der Bose-Einstein-Kondensation theoretisch und experimentell zu untersuchen. Diese Aspekte haben die Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten zu einem Forschungsschwerpunkt der modernen Physik entwickelt.

2.2. Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die relevanten Grundlagen der Theorie der Kondensation in schwach wechselwirkenden Gasen dargestellt. Diese unterscheidet sich von der Kondensation in superflüssigem Helium in vielerlei Hinsicht. So führt das in den Experimenten verwendete Fallenpotenzial dazu, dass die Kondensate inhomogene Dichteverteilungen aufweisen. Die Kondensation tritt daher nicht nur im Impulsraum auf, sondern ist auch im Ortsraum erkennbar. Während in superflüssigem Helium nur ein kleiner Teil des atomaren Ensembles kondensiert ist, können schwach wechselwirkende Gase so präpariert werden, dass sich nahezu alle Teilchen im Kondensat befinden. Eine theoretische Beschreibung der Kondensate ist in diesem Fall in gutem Einklang mit den experimentellen Ergebnissen möglich.

Einleitend erfolgt eine Zusammenfassung der wesentlichen Eigenschaften des in einer harmonischen Falle gefangenen idealen Bose-Gases. Dieses ist durch das Fehlen jeglicher Wechselwirkung zwischen den Teilchen gekennzeichnet. Anschließend wird der Effekt einer schwachen Interpartikelwechselwirkung diskutiert und die Beschreibung des Kondensats für diesen Fall gegeben.

2.2.1. Das ideale Bose-Gas in einer harmonischen Falle

Ein Teilchen der Masse m hat im harmonischen Fallenpotenzial

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \omega_i^2 x_i^2, \quad (2.3)$$

die Energie

$$E = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2} + n_i \right) \hbar \omega_i, \quad n_i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Der Grundzustand eines Teilchens in dieser Falle besitzt ein gaußsches Profil

$$\phi_0(\mathbf{r}) = \left(\frac{m\bar{\omega}}{\hbar\pi} \right)^{\frac{3}{4}} \exp \left[-\frac{m}{2\hbar} \sum_{i=1}^3 \omega_i x_i^2 \right]. \quad (2.5)$$

Dabei ist

$$\bar{\omega} := \left(\prod_{i=1}^3 \omega_i \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.6)$$

das geometrische Mittel der Fallenfrequenzen. Ein System von N nicht wechselwirkenden Bosonen kondensiert in den Grundzustand, der durch das Produkt der Einteilchengrundzustände gegeben ist. Die Dichteverteilung des Kondensates ist

$$n(\mathbf{r}) = N |\phi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (2.7)$$

Seine Ausdehnung ist durch die harmonische Oszillatorlänge bestimmt:

$$\bar{a} = \left(\frac{\hbar}{m\bar{\omega}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Bei endlichen Temperaturen besetzt nur ein Teil der Bosonen den Grundzustand. Im großkanonischen Ensemble ist die Anzahl der Teilchen durch

$$N = \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{\exp[\beta(E(n_1, n_2, n_3) - \mu)] - 1} \quad (2.9)$$

gegeben [99], wobei $\beta = (k_B T)^{-1}$ ist und μ das chemische Potenzial und $E(n_1, n_2, n_3)$ die Einteilchenenergien (2.4) bezeichnen. Die Gesamtenergie ergibt sich zu

$$E_{ges} = \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{E(n_1, n_2, n_3)}{\exp[\beta(E(n_1, n_2, n_3) - \mu)] - 1}. \quad (2.10)$$

Aus der Summe (2.9) wird üblicherweise der zum Grundzustand gehörige Term $N_0 = N[E(n_i = 0, \forall i)]$ herausgezogen [99]. Dieser Term wird makroskopisch, d.h. die Kondensation erfolgt in den Grundzustand, wenn das chemische Potenzial in der Größenordnung der Grundzustandsenergie liegt [110]:

$$\mu \approx \frac{3}{2} \hbar \bar{\omega}. \quad (2.11)$$

Dabei ist

$$\bar{\omega} := \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \omega_i. \quad (2.12)$$

Mit der Annahme, dass für große Teilchenzahlen die Zustände quasi-dicht liegen, ergibt sich mit (2.11) [110]:

$$\begin{aligned} N - N_0 &= \sum_{(n_1, n_2, n_3) \neq 0} \frac{1}{\exp[\beta \hbar \sum_{i=1}^3 \omega_i n_i] - 1} \\ &= \int_0^\infty \frac{dn_1 dn_2 dn_3}{\exp[\beta \hbar \sum_{i=1}^3 \omega_i n_i] - 1} \\ &= \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar \bar{\omega}} \right)^3. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Unter der Annahme, dass bei der Übergangstemperatur T_c $N_0 \rightarrow 0$ gilt, folgt

$$k_B T_c = \hbar \bar{\omega} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2.14)$$

Der Anteil der kondensierten Teilchen beträgt daher

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.15)$$

2.2.2. Schwach wechselwirkendes Bose-Gas

Zur Untersuchung des Effektes einer binären Wechselwirkung wird von folgendem Vielteilchen-Hamiltonian in zweiter Quantisierung ausgegangen:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3 r \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{MF}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^3 r d^3 r' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dabei ist $V_{MF}(\mathbf{r})$ das Fallenpotenzial und $V_{int}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ das Wechselwirkungspotenzial der Teilchen. Die Operatoren $\hat{\Psi}$ und $\hat{\Psi}^\dagger$ sind bosonische Feldoperatoren und erfüllen die Kommutator-Relationen:

$$[\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad [\hat{\Psi}(\mathbf{r}), \hat{\Psi}(\mathbf{r}')] = [\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}')] = 0. \quad (2.17)$$

Für ein ultra-kaltes Gas geringer Dichte kann das Wechselwirkungspotenzial durch ein kurzreichweitiges Pseudopotenzial

$$V_{pseudo}(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

ersetzt werden [99]. Damit schreibt sich der Vielteilchen-Hamiltonian als:

$$\hat{H} = \int d^3r \left[\hat{\Psi}^\dagger \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{MF}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi} + \frac{1}{2} g \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \hat{\Psi} \right]. \quad (2.19)$$

Die Kopplungskonstante g ist über

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.20)$$

mit der s-Wellenstreulänge a verknüpft [99]. Positive Werte für g entsprechen einer effektiven repulsiven Wechselwirkung zwischen den Teilchen, negative Werte für g beschreiben eine effektiv attraktive Wechselwirkung. Der zeitabhängige Heisenberg-Operator

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}) e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \quad (2.21)$$

erfüllt die Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), \hat{H}]. \quad (2.22)$$

Dies führt auf die Operatorgleichung

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{MF}(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + g \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.23)$$

In der Bogoliubov-Approximation [105, 111] wird eine Einteilchenmode als makroskopisch besetzt angenommen und der Feldoperator in zwei Anteile aufgespalten:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}, t) + \hat{\phi}(\mathbf{r}, t). \quad (2.24)$$

Die komplexwertige Funktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$ heißt Wellenfunktion des Kondensates und beschreibt die makroskopisch besetzte Mode. Der Operator $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ repräsentiert die nicht kondensierten Teilchen. Die Dichte des Kondensates ist in dieser Konvention durch

$$n(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.25)$$

gegeben, wobei

$$N = \int d^3r |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \quad (2.26)$$

die Zahl der kondensierten Teilchen ist. In niedrigster Ordnung ergibt sich aus (2.23) die Bewegungsgleichung für die Wellenfunktion des Kondensates:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{MF}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (2.27)$$

Diese ist unter dem Namen Gross-Pitaevskii-Gleichung bekannt [112,113]. Sie kann äquivalent aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden. Dabei ergibt die Wirkung

$$E[\Psi] = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \Psi|^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right] \quad (2.28)$$

mit der Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\delta E}{\delta \Psi^*} \quad (2.29)$$

die Gross-Pitaevskii-Gleichung [110].

Wird die Wellenfunktion des Kondensates als

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)| e^{iS(\mathbf{r}, t)} \quad (2.30)$$

geschrieben, so ergibt sich für die Stromdichte $\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^* \nabla \Psi - (\nabla \Psi^*) \Psi]$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \quad (2.31)$$

wobei das rotationsfreie Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ mittels

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \quad (2.32)$$

und

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} S(\mathbf{r}, t) \quad (2.33)$$

mit der Phase des Kondensates zusammenhängt. Dieses Feld kann als das superfluide Geschwindigkeitsfeld des Kondensates identifiziert werden [34, 101, 107]. Das Einsetzen der Gleichung (2.30) in die Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.27) ergibt für Imaginär- und Realteil jeweils eine Gleichung. Aus dem Imaginärteil folgt eine Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0. \quad (2.34)$$

Die Gleichung für den Realteil ist ein Analogon zur Bernoulli-Gleichung:

$$\frac{1}{2} m v^2 + V_{MF} - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \sqrt{n} + gn + m \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad (2.35)$$

Der Unterschied zur klassischen Hydrodynamik beruht auf der Gegenwart des Terms $(2m\sqrt{n})^{-1} \hbar^2 \nabla^2 \sqrt{n}$. Wenn dieser vernachlässigbar wird, verhält sich das Quantengas wie eine klassische Flüssigkeit.

2.2.3. Grundzustand des Kondensates und Thomas-Fermi-Regime

Wird das System im großkanonischen Ensemble betrachtet, lautet der Hamiltonian [89]

$$\hat{K} = \hat{H} - \mu\hat{N}, \quad (2.36)$$

wobei

$$\hat{N} = \int d^3r \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}(\mathbf{r}) \quad (2.37)$$

der Teilchenzahloperator ist. In niedrigster Ordnung gilt:

$$K = \int d^3r \left[\Psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) - \mu \right) \Psi + \frac{1}{2} g \Psi^* \Psi^* \Psi \Psi \right]. \quad (2.38)$$

Das System befindet sich im stationären Grundzustand, wenn das Ensemble-Mittel $\langle \hat{K} \rangle$ des Hamiltonians minimal wird. Bei niedrigen Temperaturen sind nahezu alle Teilchen kondensiert und es kann in guter Näherung $\langle \hat{K} \rangle \approx K$ gesetzt werden. Das Funktional (2.38) ist stationär unter Variationen $\Psi^* \rightarrow \Psi^* + \delta\Psi^*$, wenn die Wellenfunktion des Kondensates die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) - \mu + g|\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.39)$$

erfüllt. Diese Gleichung wird als stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung bezeichnet und bestimmt den Grundzustand des Kondensates. Aus (2.27) ist erkennbar, dass für die Zeitabhängigkeit stationärer Lösungen

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(\mathbf{r}) e^{-i\frac{\mu}{\hbar}t} \quad (2.40)$$

gilt.

Im Falle repulsiver Wechselwirkung ($a > 0$) ist das Regime $\frac{Na}{a} \gg 1$ besonders interessant, da es zum einen experimentell häufig realisiert ist und zum anderen eine einfache analytische Beschreibung der Kondensatwellenfunktion erlaubt [34, 89]. Die hohe Kondensatdichte in diesem Regime führt dazu, dass der Wechselwirkungsterm $g|\Psi|^2$ stark ansteigt. Die Wellenfunktion des Kondensates ist dadurch abgeflacht und der kinetische Term hat nur noch in der Nähe der Kondensatgrenzen einen signifikanten Beitrag. Wird sie in (2.39) vollständig vernachlässigt, so ist die Dichte des Kondensates durch den einfachen Ausdruck

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{g} (\mu_{TF} - V_{MF}(\mathbf{r})) & \text{für } \mu_{TF} \geq V_{MF}(\mathbf{r}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Das so beschriebene Regime wird als Thomas-Fermi-Regime [34, 89] bezeichnet.

2.3. Experimentelle Erzeugung

Zur Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation ist gemäß (2.1) eine hohe Phasenraumdicke notwendig. In diesem Abschnitt werden die experimentelle Apparatur sowie die verschiedenen Kühl- und Fangverfahren vorgestellt, die zur Erzeugung der Kondensate eingesetzt werden. Eine schematische Darstellung der Apparatur ist in Abbildung 2.1 gezeigt. Sie ist ausführlich in den Doktorarbeiten [95] und [96] beschrieben.

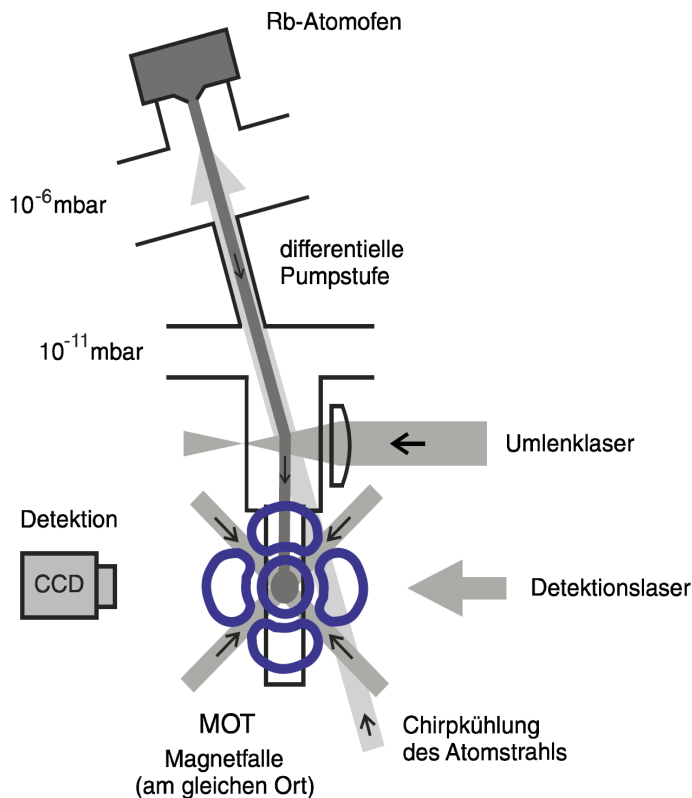


Abbildung 2.1.: Schematische Darstellung der experimentellen Apparatur. Die Kondensate werden in der Magnetfalle erzeugt und mit der CCD-Kamera detektiert.

Das im Experiment verwendete Element ist ^{87}Rb und wird in atomarer Form zur Kondensation gebracht. Das grundlegende Konzept der Apparatur besteht in dem Beladen einer magneto-optischen Falle (MOT) [114] aus einem lasergekühlten Atomstrahl und dem anschließenden Transfer der gefangenen Atome in eine konservative Magnetfalle. In dieser Falle werden die Atome durch induzierte Verdampfungskühlung zur Kondensation gebracht.

Bereitstellung eines kalten Atomstrahls

Als Teilchenquelle dient ein Atomofen, der typischerweise auf eine Temperatur von etwa 420 Kelvin geheizt wird. Dadurch bildet sich ein Rubidium-Gasdruck von $\approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ mbar}$. Die Atome treten an einer kleinen Öffnung im Ofen strahlförmig in den Hauptteil der Apparatur ein. Dieser heiße Atomstrahl wird mittels der „Chirp Slowing“-Technik [115] gekühlt,

bei welcher der Atomstrahl durch einen gegenläufigen, rotverstimzten Laserstrahl abgebremst wird. Um zu verhindern, dass der Laser während des Abbremsvorgangs aufgrund des Doppler-Effektes gegenüber der Resonanz verschoben wird, werden der Laserfrequenz mittels eines elektro-optischen Modulators (EOM) Seitenbänder aufgeprägt. Die Frequenz dieser Seitenbänder wird über eine lineare Rampe zur Kompensation des Doppler-Effektes variiert. Da dieser Vorgang während der Ladephase der MOT mit hoher Frequenz wiederholt wird, kommt es zu einem quasi-kontinuierlichen Fluss aus gekühlten Atomen. Dieser wird mit einem Umlenkklaser in den Fangbereich der MOT gerichtet. Durch die Umlenkgeometrie wird verhindert, dass ständig Atome aus dem thermischen Atomstrahl in die Region der MOT oder Magnetfalle vordringen und dort ungewollte Teilchenverluste in den gekühlten Ensembles verursachen.

Laserkühlung in der MOT und der optischen Melasse

Die Atome des umgelenkten Atomstrahls werden in der MOT [114] gefangen und gekühlt. Letztere wird durch drei zirkular polarisierte, orthogonale Strahlenpaare in Kombination mit einem inhomogenen Magnetfeld gebildet. Das kühlende Laserlicht ist gegenüber der atomaren Resonanz rotverstimzt. Durch das inhomogene Magnetfeld ergibt sich eine ortsabhängige Zeeman-Verschiebung. Daher weist auch die auf die Atome wirkende Spontankraft [114] eine Ortsabhängigkeit auf. In der MOT werden bei einer Ladedauer von 20 – 25 ms bis zu 10^9 Atome bei einer Phasenraumdichte von 10^{-7} bis 10^{-6} gefangen. Anschließend erfolgt durch eine Erhöhung des Magnetfeldgradienten eine Kompression der MOT. Diese begünstigt sowohl die folgende Phase der Polarisationsgradientenkühlung in einer optischen Melasse [114] als auch die modenangepasste Umladeprozedur in die konservative Magnetfalle [95]. Nach der Melassenphase liegt ein Ensemble mit Phasenraumdichte 10^{-5} bis 10^{-4} bei einer Temperatur von etwa $40 \mu K$ vor.

Speicherung und evaporative Kühlung in der Magnetfalle

Die Speicherung der Atome in der Magnetfalle basiert auf der Wechselwirkung des magnetischen Moments der Atome mit einem äußeren Magnetfeld. Für kleine Magnetfeldstärken ist die Kraft auf die Atome durch das konservative Potenzial

$$V_{MF}(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |B(\mathbf{r})| \quad (2.41)$$

bestimmt. Dabei bezeichnet $B(\mathbf{r})$ die Feldstärke, F den Hyperfeinzustand, m_F die magnetische Quantenzahl und g_F den Landé-Faktor. Letzterer beträgt für die beiden ^{87}Rb -Hyperfeingrundzustände $g_{F=1} = -g_{F=2} = -1/2$. Da eine Erzeugung statischer Magnetfeldmaxima im freien Raum unmöglich ist [116], können nur Zustände mit $g_F m_F > 0$ magnetisch gefangen werden. Um einen möglichst effizienten Transfer des lasergekühlten Ensembles in die Magnetfalle zu gewährleisten, werden die Atome nach der Melassenphase zunächst optisch in den $|F = 2, m_F = 2\rangle$ -Zustand gepumpt [95, 114]. Dies wird durch das Anlegen eines magnetischen Führungsfeldes in Richtung des Offsetfeldes der Magnetfalle sowie der Bestrahlung der Atome mit zirkular polarisiertem Laserlicht erreicht.

Nach dem optischen Pumpen werden die Atome zunächst in ein nahezu sphärisch-symmetrisches Magnetfallenpotenzial mit harmonisch genäherter Fallenfrequenz $\omega_r \approx 2\pi \times 14 \text{ Hz}$

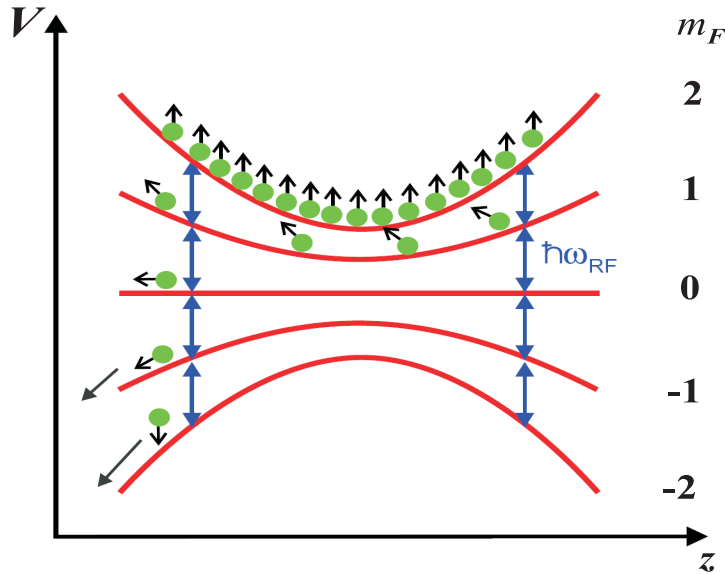


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des evaporativen Kühlens in einer harmonischen Falle.

transferiert. Das Umladen in diese Magnetfallenkonfiguration erlaubt eine hohe Transfereffizienz. Anschließend erfolgt eine radiale Kompression der Magnetfalle durch ein adiabatisches Absenken des Offsetfeldes, da sich die Atome mit dem schwachen Einschluss des kugelsymmetrischen Potentials nicht gegen die Schwerkraft halten lassen. Zudem verläuft die folgende evaporative Kühlung bei einem hohen radialen Einschluss deutlich effizienter [95]. Nach der radialen Kompression liegt ein zylindersymmetrisches Magnetfeld mit einer radialen Fallenfrequenz von $\omega_p = 2\pi \times 360\dots390 \text{ Hz}$ vor. Die axiale Magnetfallenfrequenz wird durch die radiale Kompression nicht modifiziert und bleibt bei $\omega_z \approx 2\pi \times 14 \text{ Hz}$.

In dieser Fallengeometrie wird durch Einstrahlen einer Radiowelle mit der Frequenz ω_{RF} eine erzwungene evaporative Kühlung eingeleitet, bei der Übergänge der Atome in andere m_F -Zustände induziert werden. Dieses tritt an den Positionen in der Magnetfalle auf, an denen das Magnetfeld

$$|g_F \mu_B B(\mathbf{r})| = \hbar \omega_{RF} \quad (2.42)$$

vorliegt. Die Atome werden dabei in Zustände überführt, die magnetisch nicht gefangen sind, und verlassen somit die Fallenregion. Das Prinzip der evaporativen Kühlung ist in der Abbildung 2.2 verdeutlicht. Die Radiofrequenz wird dabei so eingestellt, dass immer die Atome des Außenbereichs des gefangenen Ensembles entfernt werden. Hierbei handelt es sich um die energiereichsten Atome, da nur hochenergetische Teilchen in den Bereich großer potentieller Energie gelangen können. Durch elastische Stöße rethermalisieren die in der Falle verbleibenden Atome, so dass effektiv eine Verringerung der Temperatur eintritt. Durch eine kontinuierliche Absenkung der Radiofrequenz kann die Evaporation immer im Außenbereich des Ensembles gehalten und somit die Temperatur immer weiter abgesenkt werden. Die Temperaturreduktion überkompensiert dabei die Teilchenzahlverluste, so dass insgesamt ein Gewinn an Phasenraumdichte entsteht. Dieser Prozess führt schließlich zum Erreichen der Bose-Einstein-Kondensation.

3. Bose-Einstein-Kondensate in optischen Gitterpotenzialen

In diesem Kapitel wird das im Rahmen dieser Arbeit realisierte ultra-kalte bosonische Gittergas unter theoretischen und experimentellen Aspekten diskutiert. Nach einem einführenden Überblick zum Stand der experimentellen Forschung mit quantenentarteten Gittergasen wird auf deren theoretische Beschreibung eingegangen. Als Grundlage erfolgt dafür zunächst die Diskussion der Eigenschaften des optischen Gitterpotenzials. Anschließend wird als generisches Problem ein einzelnes Teilchen in einem periodischen Potenzial betrachtet. Um eine korrekte Beschreibung des im Experiment vorliegenden Vielteilchensystems zu geben, werden schließlich die Effekte der interatomaren Wechselwirkung berücksichtigt.

Nach diesen theoretischen Betrachtungen wird die Implementierung eines eindimensionalen optischen Gitters in das bestehende Experiment zur Bose-Einstein-Kondensation dargestellt. Dieses umfasst die Beschreibung des Aufbaus der Strahlengänge, die Untersuchung eines geeigneten Justageschemas und eine umfassende Charakterisierung der Eigenschaften des realisierten Gitterpotenzials.

3.1. Einführung

Ultra-kalte Quantengase haben sich zu einem Forschungsschwerpunkt der modernen Physik entwickelt. Von entscheidender Bedeutung ist hierbei, dass diese Systeme gezielt kontrolliert und manipuliert werden können. Dabei haben Methoden, die auf dem Einsatz elektromagnetischer Strahlung basieren, große Bedeutung erlangt. Angefangen von der unmittelbaren Erzeugung quantenentarteter Gase in optischen Dipolpotenzialen [117–122], über den Einsatz kohärenter Zwei-Photonen-Prozesse zur Spektroskopie [13–17] oder Interferometrie [18–21] bis hin zur optischen Erzeugung von eindimensionalen Wellenleiterstrukturen [22–24] steht heute ein breites Spektrum experimenteller Techniken zur Verfügung. Eine herausragende Stellung unter diesen Methoden nimmt jedoch der Einsatz optisch erzeugter periodischer Potenziale zur Manipulation quantenentarteter Gase ein. So können mit Hilfe dieser sogenannten optischen Gitter grundlegende Eigenschaften von Vielteilchensystemen wie beispielsweise ihre Dimensionalität, effektive Wechselwirkung oder Transportverhalten extern beeinflusst werden. Diese reichhaltigen Manipulationsmöglichkeiten eröffnen den experimentellen Zugang zu Modellsystemen von großem theoretischen Interesse. Hierbei handelt es sich naturgemäß oftmals um Modelle, die starke Anleihen an die Festkörperphysik nehmen oder dieser entstammen.

Den Großteil der experimentellen Untersuchungen an quantenentarteten Gittergasen bilden Experimente mit atomaren bosonischen Gasen. Typischerweise wird dabei zunächst ein Bose-

Einstein-Kondensat erzeugt und anschließend in das periodische Potenzial transferiert. Auf diese Weise wurde 1998 erstmals ein quantenentartetes Gittergas erzeugt und damit kohärente Tunnelprozesse von Atomen aus unterschiedlichen Gitterplätzen in das Kontinuum untersucht [123]. In beschleunigten optischen Gittern konnten Bloch-Oszillationen [124] und Landau-Zener-Tunneln [29, 30, 124] beobachtet werden. Es wurde sowohl die freie Expansion eines Bose-Einstein-Kondensates aus dem Grundzustand eines optischen Gitters untersucht [125] als auch die Expansion eines Kondensates innerhalb des periodischen Potentials [126, 127]. Ein tiefes eindimensionales optisches Gitter wurde als Vielfachrealisierung von Josephson-Kontakten interpretiert und dessen Dynamik untersucht [128]. Des Weiteren hat die Gegenwart des Gitterpotentials signifikante Auswirkungen auf das Spektrum der kollektiven Anregungen [128–130] oder kann zum Auftreten von Instabilitäten des Kondensates führen [131–133]. Methoden zur kohärenten Manipulation eines Bose-Einstein-Kondensates innerhalb der Bandstruktur und Techniken zur Bandspektroskopie wurden [134] entwickelt. Die Nutzung der Bandstruktur eines optischen Gitters zur Manipulation der Dispersion wurde untersucht [135, 136] und erfolgreich zur Herstellung von hellen Solitonen eingesetzt [137, 138]. Die hohen Fallenfrequenzen, die durch optische Gitter bereitgestellt werden können, wurden genutzt, um ein zweidimensionales Bose-Gas in einem eindimensionalen Gitter zu erzeugen und dessen thermodynamische Eigenschaften zu erforschen [139]. Ebenso wurden in zweidimensionalen optischen Gittern eindimensionale Bose-Gase erzeugt und deren Kohärenzeigenschaften [140] sowie das Anregungsspektrum [141] untersucht.

Die bisher aufgeführten Untersuchungen wurden im Regime schwacher Wechselwirkung durchgeführt. In diesem lässt sich das Kondensat bei hinreichend geringen Temperaturen mittels der Gross-Pitaevskii-Gleichung beschreiben. Optische Gitter stellen aber auch ideale Werkzeuge dar, um in Parameterbereiche vorzudringen, in denen die physikalischen Eigenschaften des Systems durch die Wechselwirkung dominiert werden und interatomare Korrelationen große Bedeutung erlangen. Diese liegen konsequenterweise außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Mean-Field-Beschreibung. Die ersten experimentellen Schritte in diese Richtung haben das Auftreten von Teilchenzahl-Squeezing in tiefen eindimensionalen optischen Gittern demonstriert [142]. Einen Meilenstein stellt die Realisierung des Mott-Isolator-Zustandes in dreidimensionalen optischen Gittern dar [35]. Die Phasenkohärenzeigenschaften des Mott-Isolatorzustandes wurden untersucht [143] und das Eintreten des Teilchenzahl-Squeezings während des Phasenübergangs wurde gemessen [144]. Der Mott-Isolatorzustand stellt einen vielversprechenden Ausgangszustand für die Quanteninformationsverarbeitung dar. Erste Methoden zur Qubit-Bearbeitung konnten erfolgreich demonstriert werden [38–40]. In den tiefen dreidimensionalen Gittern, die zum Erreichen des Mott-Isolatorzustandes erforderlich sind, konnten darüber hinaus der Kollaps und das Revival der Kondensatwellenfunktion gemessen werden [145].

Einen weiteren Forschungsschwerpunkt bildet die Untersuchung stark korrelierter eindimensionaler Bose-Gase. So wurden deren Anregungsspektrum [146] und die Korrelationseigenschaften [147] gemessen. Einen herausragenden Erfolg stellt die Realisierung des Tonks-Girardeau-Gases in einem dreidimensionalen optischen Gitter dar [41].

Dieses äußerst dynamische Forschungsgebiet hat mit der Erzeugung von quantenentarteten Fermi-Gasen und quantenentarteten molekularen Gasen eine zusätzliche Beschleunigung

erfahren. So wurde das Transportverhalten von Fermi-Gasen in eindimensionalen optischen Gittern untersucht [148, 149]. Auch in dreidimensionale Gitterstrukturen konnten atomare Fermi-Gase schon transferiert werden und so Abbildungen der Fermi-Flächen und der Übergang zu einem Bandisolator beobachtet werden [150]. Ferner konnten mit diesem System verschiedene Bloch-Bänder mittels Feshbach-Resonanzen gekoppelt [151] und eine Methode zur Temperaturbestimmung des fermionischen Gittergases implementiert werden [152]. In jüngster Zeit ist darüber hinaus auch die erstmalige Erzeugung eines molekularen Gittergases aus fermionischen Atomen in einem dreidimensionalen Gitter mit Hilfe von Feshbach-Resonanzen gelungen [153].

Wie beschrieben wurde der weitaus größte Teil der Untersuchung quantenentarteter Gittergase mit ultra-kalten atomaren Bose-Gasen durchgeführt. Die hierbei erzielten herausragenden Erfolge lassen für die anstehenden Untersuchungen mit fermionischen und molekularen Gasen ebenfalls aufregende Ergebnisse erwarten.

3.2. Theoretische Grundlagen

Quantenentartete Bose-Gase in optischen Gitterpotenzialen bieten die Möglichkeit zur experimentellen Realisierung von grundlegenden theoretischen Modellsystemen mit äußerst interessanten physikalischen Eigenschaften [37, 154]. Diese Eigenschaften stehen in engem Zusammenhang mit der periodischen Struktur des Gitterpotenzials. Bereits die Betrachtung eines einzelnen Teilchens in einem solchen periodischen Potenzial eröffnet das Verständnis für viele Phänomene, die auch für das Vielteilchensystem relevant sind, wie z. B. das Auftreten von Bandstrukturen [49]. Da sich das Einteilchenproblem darüber hinaus hervorragend zur Einführung vieler grundlegender Begriffe eignet, soll auf seine Diskussion nicht verzichtet werden. Andererseits ist die Berücksichtigung der interatomaren Wechselwirkung für das vollständige Verständnis eines Gittergases unerlässlich [26]. Sie führt nicht nur zu einer quantitativen Modifikation der Einteilchenresultate, sondern ist darüber hinaus auch Ursache für eine große Zahl von Effekten, die im Einteilchenproblem nicht auftreten. So verlangt ein Verständnis der Mott-Isolator-Phase oder von Instabilitäten des Kondensates die adäquate Berücksichtigung von Vielteilcheneffekten. Die Diskussion beschränkt sich hierbei auf den für diese Arbeit relevanten Fall schwacher Wechselwirkung. Vorangestellt ist zunächst ein Abschnitt zur Beschreibung des optischen Gitterpotenzials.

3.2.1. Das optische Dipolpotenzial

Die experimentelle Erzeugung des Gitterpotenzials basiert auf der Wechselwirkung der Atome mit der elektromagnetischen Strahlung eines Lasers. Diese Licht-Materie-Wechselwirkung ist Gegenstand einschlägiger Abhandlungen [155]. Grundsätzlich sind hierbei zwei Situationen zu unterscheiden. Ist die Laserfrequenz gegenüber einem atomaren Übergang nicht weit verstimmt, absorbieren die Atome Photonen aus dem Strahlungsfeld und emittieren diese anschließend wieder spontan. Diese Wechselwirkung hat aufgrund des auftretenden Impulsübertrages einen dissipativen Charakter und bildet die Grundlage für die Verfahren der Laserkühlung [114]. Dieses Szenario wird an dieser Stelle nicht näher betrachtet.

Der andere Fall liegt vor, wenn die Atome mit Laserstrahlung wechselwirken, die weit gegenüber den atomaren Übergängen verstimmt ist. Da in dieser Situation die Rate spontaner Photonen-Streuprozesse zu vernachlässigen ist, können auf diese Weise konservative optische Potenziale bereitgestellt werden. Diese sogenannten optischen Dipolpotenziale entstehen dabei durch die Wechselwirkung des induzierten atomaren Dipolmoments mit dem Strahlungsfeld.

Im Folgenden werden zunächst die grundsätzlichen Eigenschaften des Dipolpotenzials betrachtet. Dieses geschieht zunächst anhand eines atomaren Zwei-Niveau-Systems. Anschließend erfolgt die Betrachtung des Dipolpotenzials für Mehr-Niveau-Atome. Die Ortsabhängigkeit des Potenzials ist dabei durch die Intensitätsverteilung des eingesetzten Laserstrahls bestimmt. Zunächst wird das Dipolpotenzial eines einzelnen gaußschen Laserstrahls diskutiert. Nachfolgend wird die Bildung des eindimensionalen optischen Gitters durch die Retroreflektion eines gaußschen Laserstrahls vorgestellt.

Dipolpotenzial des Zwei-Niveau-Atoms

Ein Atom befinde sich im elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + c.c.$ eines Laserstrahls. Das oszillierende Feld induziert ein atomares Dipolmoment mit dem Betrag

$$|\mathbf{p}(\mathbf{r}, t)| = \alpha(\omega) |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|. \quad (3.1)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{p} das elektrische Dipolmoment und α die frequenzabhängige komplexe Polarisierbarkeit des Atoms. Das Wechselwirkungspotenzial zwischen dem induzierten Dipolmoment und dem treibenden Feld ist durch

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle_t \quad (3.2)$$

gegeben [156]. Die eckigen Klammern bezeichnen dabei den zeitlichen Mittelwert und der Faktor $1/2$ berücksichtigt den induzierten Charakter des Dipolmoments. Bei der Mittelwertbildung verschwinden die mit der Frequenz 2ω oszillierenden Terme. Unter der Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen der Feldstärke und der Intensität des Lichtfeldes $I = 2\epsilon_0 c |E^2|$ folgt aus (3.2) das konservative Dipolpotenzial

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{\Re(\alpha)}{2\epsilon_0 c} I(\mathbf{r}). \quad (3.3)$$

Dieses ist somit durch den Realteil der komplexen Polarisierbarkeit bestimmt. Die von dem Atom aus dem Strahlungsfeld absorbierte Leistung ist durch

$$P_{abs} = \langle \dot{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{E} \rangle_t = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \Im(\alpha) I(\mathbf{r}) \quad (3.4)$$

gegeben. Division durch die Photonenenergie liefert die Rate Γ_{str} der gestreuten Photonen:

$$\Gamma_{str}(\mathbf{r}) = \frac{\Im(\alpha)}{\hbar\epsilon_0 c} I(\mathbf{r}). \quad (3.5)$$

Sie ist durch den Imaginärteil der atomaren Polarisierbarkeit bestimmt. Um die allgemeinen Zusammenhänge (3.3) und (3.5) zu konkretisieren, muss die atomare Polarisierbarkeit α im

Rahmen eines atomaren Modells berechnet werden. Hier bietet das klassische Lorentzmodell einen einfachen Zugang [116]. Dabei wird eine elastische Bindung des Leuchtelektrons der Masse m_e und der Ladung e an den Kern angenommen. Eine Dämpfung entsteht durch die Berücksichtigung der Dipolstrahlung des oszillierenden Elektrons. Die Dämpfungsrate Γ ist dabei durch $\Gamma = e^2\omega^2/6\pi\epsilon_0 m_e c^3$ gegeben [156].

In einem weiterführenden Modell wird das Atom als Zwei-Niveau-System betrachtet, während das treibende elektrische Feld klassisch behandelt wird. Dämpfung tritt in diesem semiklassischen Modell als spontaner Zerfall des angeregten Zustands $|e\rangle$ in den Grundzustand $|g\rangle$ auf. Die Dämpfungsrate Γ ist durch das Dipolmatrixelement gegeben, das den atomaren Grundzustand und den angeregten Zustand koppelt:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\langle e|\hat{p}|g\rangle|^2. \quad (3.6)$$

Hierbei bezeichnet \hat{p} den elektrischen Dipoloperator und ω_0 die Resonanzfrequenz des atomaren Übergangs. Im Gegensatz zum klassischen Lorentzmodell kann es in diesem Modell zum Auftreten von Sättigungseffekten bei einer starken Population des angeregten Zustands kommen. Für den experimentell relevanten Fall einer hinreichend großen Verstimmung des Lasers gegenüber der atomaren Resonanz sind diese jedoch zu vernachlässigen. In dieser Situation liefern beide Modelle unter Berücksichtigung der jeweiligen modellspezifischen Dämpfungsrate identische Ausdrücke für das Dipolpotenzial und die Streurrate. Für das Dipolpotenzial folgt

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}), \quad (3.7)$$

während sich die Streurrate mittels

$$\Gamma_{str}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\mathbf{r}) \quad (3.8)$$

berechnet. Der Nenner des ersten Summanden in (3.7) legt das Vorzeichen des Dipolpotenzials fest. Für $\Delta := \omega - \omega_0 < 0$ ist das Dipolpotenzial attraktiv. Damit sind die Minima des optischen Potenzials mit den Maxima des Intensitätsfeldes identisch. Dieser Fall wird „rotverstimmte“ genannt. Im entgegengesetzten Fall von „blauer Verstimmung“ ($\Delta > 0$) entsprechen die Minima des Intensitätsfeldes den Minima des optischen Potenzials. Zur Realisierung einer optischen Falle ist daher im Falle roter Verstimmung die Bereitstellung eines lokalen oder globalen Intensitätsmaximums erforderlich. Umgekehrt verlangt eine blauer verstimmte Dipolfalle ein lokales Intensitätsminimum.

Dipolpotenzial eines Mehr-Niveau-Systems

Das im vorigen Abschnitt betrachtete semiklassische Modell behandelt das Atom als Zwei-Niveau-System. Für die im Experiment verwendeten Rubidium-Atome existieren ausgehend vom elektronischen Grundzustand jedoch mehrere erlaubte Dipolübergänge. Für die Ermittlung des Dipolpotenzials und der Streurrate sind die Beiträge dieser Übergänge vollständig zu berücksichtigen.

Für Rubidium-Atome im $5^2S_{1/2}$ -Grundzustand gibt es elektrische Dipolübergänge in das erste angeregte P -Niveau. Dieses ist aufgrund der Spin-Bahn-Kopplung in die zwei nicht entarteten Zustände $5^2P_{1/2}$ und $5^2P_{3/2}$ aufgespalten. Diese Feinstrukturaufspaltung ergibt ein Doublett, das aus den so genannten D_1 - und D_2 -Linien besteht. Darüber hinaus liefert die Kopplung des magnetischen Kernmoments an die elektronischen Momente eine Hyperfeinstrukturaufspaltung sowohl für den Grundzustand als auch für die P -Niveaus. Aufgrund dieser Komplexität lässt sich die atomare Polarisierbarkeit nicht im Rahmen der oben beschriebenen einfachen Modelle darstellen.

Stattdessen kann eine Berechnung des Dipolpotenzials mit Hilfe von zeitunabhängiger Störungstheorie zweiter Ordnung erfolgen. Dazu wird das Atom gemeinsam mit dem quantisierten Lichtfeld im so genannten Dressed-States-Bild betrachtet [155]. Im Grundzustand des Systems enthält das Strahlungsfeld n Photonen und das Atom befindet sich in seinem Grundzustand. Durch die Absorption eines Photons aus dem Strahlungsfeld geht das Atom in den angeregten Zustand über und das Strahlungsfeld enthält ein Photon weniger. Die Benutzung dieser Dressed-States für die Störungstheorie liefert die Energieverschiebung ΔE_i des i -ten Zustands [156]

$$\Delta E_i = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3} I \times \sum_j \frac{c_{ij}^2}{\Delta_{ij}}. \quad (3.9)$$

Dabei ergibt sich Δ_{ij} mittels $\hbar\Delta_{ij} = E_i - E_j$ aus der Energiedifferenz des ungestörten i -ten und j -ten Dressed-State. Die Koeffizienten c_{ij} bezeichnen die Linienstärken des Übergangs zwischen den beteiligten atomaren Niveaus. In fernresonanten optischen Potenzialen ist die Verstimmung des Lasers typischerweise deutlich größer als die Hyperfeinstrukturaufspaltung des angeregten Niveaus. In diesem Fall kann das Dipolpotenzial für ein Atom im Grundzustand mit Gesamtdrehimpuls F und magnetischer Quantenzahl m_F störungstheoretisch berechnet werden [156]

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = - \frac{\pi c^2}{2} \frac{1 - P m_F g_F}{\omega_{D1}^3} \left[\frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} - \omega} + \frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} + \omega} \right] I(\mathbf{r}) \\ - \frac{\pi c^2}{2} \frac{2 + P m_F g_F}{\omega_{D2}^3} \left[\frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} - \omega} + \frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} + \omega} \right] I(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Dabei bezeichnet g_F den Landé-Faktor, ω_{D1} und ω_{D2} die Frequenzen der Übergänge im D-Linien Doublett und Γ_{D1} sowie Γ_{D2} deren natürlichen Linienbreiten. Über die Größe P hängt dieser Ausdruck von der Strahlpolarisation ab. Hierbei ist für linear polarisiertes Licht $P = 0$ und für σ_{\pm} -polarisiertes Licht gilt $P = \pm 1$. In dieser Arbeit wurde ausschließlich linear polarisiertes Licht zur Erzeugung der optischen Fallen verwendet. Für dieses folgt somit

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = - \underbrace{\frac{\pi c^2}{2} \left[\frac{1}{\omega_{D1}^3} \left(\frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} - \omega} + \frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} + \omega} \right) + \frac{2}{\omega_{D2}^3} \left(\frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} - \omega} + \frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} + \omega} \right) \right]}_C I(\mathbf{r}). \quad (3.11)$$

Für die Streurate gilt

$$\Gamma_{str}(\mathbf{r}) = \frac{\pi c^2}{2\hbar} \frac{1}{\omega_{D1}^3} \left(\frac{\omega}{\omega_{D1}} \right)^3 \left[\frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} - \omega} + \frac{\Gamma_{D1}}{\omega_{D1} + \omega} \right]^2 I(\mathbf{r})$$

$$+ \frac{\pi c^2}{\hbar} \frac{1}{\omega_{D2}^3} \left(\frac{\omega}{\omega_{D2}} \right)^3 \left[\frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} - \omega} + \frac{\Gamma_{D2}}{\omega_{D2} + \omega} \right]^2 I(\mathbf{r}). \quad (3.12)$$

Alle in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen von Dipolpotenzialen und Streuraten basieren auf den Ausdrücken (3.11) und (3.12).

Das Dipolpotenzial eines gaußschen Strahls

Die Realisierung einer optischen Dipolfalle verlangt je nach Vorzeichen der Laserverstimmung die Bereitstellung eines lokalen Intensitäts-Maximums bzw. -Minimums. Ein prominentes Beispiel hierfür ist der dreidimensionale Einschluss, den Atome im Fokus eines rotverstimmten gaußschen Laserstrahls erfahren. Dessen stationäres Intensitätsprofil ist durch

$$I(\rho, z) = \frac{2P}{\pi w^2(z)} e^{-2\rho^2/w^2(z)} \quad (3.13)$$

gegeben [157]. Dabei bezeichnet z die Koordinate in Propagationsrichtung und ρ den Abstand von der Strahlachse. Ferner ist P die Laserleistung und $w(z)$ der Strahlradius, bei dem die Leistung um den Faktor $1/e^2$ abgefallen ist

$$w(z) = w_0 \left(1 + (z/z_R)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.14)$$

Die so genannte Rayleigh-Länge z_R ist über $z_R = \pi\omega^2/\lambda$ definiert. Im Fokus bei $z = 0$ kann das resultierende Dipolpotenzial durch eine harmonische Näherung approximiert werden. Dieses liefert

$$V_{dip}^G(\rho, z) \approx -V_0 \left[1 - 2 \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Dabei ist V_0 das Dipolpotenzial im Ursprung, in dem die maximale Intensität $I_0 = 2P/\pi w_0^2$ vorliegt. Es beträgt entsprechend (3.11)

$$V_0 = C \frac{2P}{\pi w_0^2}. \quad (3.16)$$

Die Fallenfrequenzen des harmonisch genährten Potenzials betragen in radialer Richtung $\omega_\rho = (4V_0/mw_0^2)^{1/2}$ und in axialer Richtung $\omega_z = (2V_0/mz_R^2)^{1/2}$. Da die Rayleigh-Länge deutlich größer als der Strahlwaist ist, dominiert der radiale Einschluss gegenüber dem axialen Einschluss.

Dipolpotenzial eines 1D-Gitters

Das periodische Potenzial eines optischen Gitters wird mittels interferierender Laserstrahlen erzeugt. Die Anzahl und Ausrichtung der Strahlen ist dabei für die Topologie der gebildeten Gitterstruktur entscheidend. Dabei ist eine große Zahl von Varianten, angefangen von der Interferenz zweier Laserstrahlen unter einem Winkel bis hin zur Erzeugung nicht-kubischer Gitterstrukturen unter Verwendung mehrerer Laser möglich [26, 158, 159].

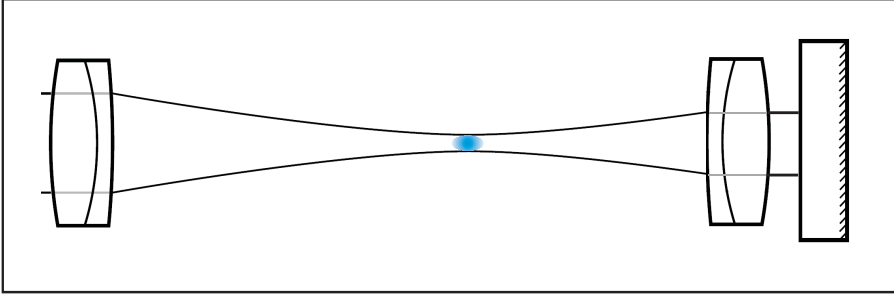


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung der Rückreflektion eines gaußschen Strahles zur Erzeugung eines eindimensionalen optischen Gitters. Die Position der Atome ist blau gekennzeichnet.

In unserem Experiment kommt eine einfache Methode zur Erzeugung eines eindimensionalen optischen Gitters zum Einsatz. Sie beruht auf der Rückreflektion eines gaußschen Laserstrahls nach Abbildung 3.1. Durch die Selbstinterferenz des Lichtfeldes ergibt sich eine stehende Welle, die das Dipolpotenzial

$$V_{dip}(\rho, z) = -V_G e^{-2\rho^2/w(z)^2} \cos^2(kz) \approx -V_G \left[1 - 2 \left(\frac{\rho}{w_0} \right)^2 - \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] \cos^2(kz). \quad (3.17)$$

erzeugt. Hierbei bezeichnet $k = 2\pi/\lambda$ die Wellenzahl des Laserlichts. Die schnelle Oszillation des Potenzials in axialer Richtung aufgrund der Interferenz ist mit einer langsamen Variation in radialer und axialer Richtung gepaart, die von der gaußschen Strahlform herrührt. Die maximale Potentialtiefe V_G ist aufgrund der konstruktiven und destruktiven Interferenz der beiden Laserstrahlen viermal so groß wie die eines einzelnen gaußschen Strahls

$$V_G = 4C \frac{2P}{\pi w_0^2}. \quad (3.18)$$

Eine harmonische Näherung des Potenzials in z -Richtung um das Zentrum eines einzelnen Gittertopfes liefert den assoziierten Einteilchen-Niveaubandabstand:

$$\hbar\omega = 2\sqrt{V_G[E_r]} E_r. \quad (3.19)$$

Die hierbei mit E_r bezeichnete Photonenrückstoßenergie $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$ stellt die geeignete Maßeinheit zur Angabe der Gittertiefe dar. In (3.19) wurde ferner die Ortsabhängigkeit der Fallenfrequenz ω , die von der gaußschen Form der Gitterstrahlen herrührt, vernachlässigt. Da sich in unserem Experiment die durch harmonische Näherung erhaltenen Gittertopffrequenzen entlang der Ausdehnung der Atomwolke um weniger als 1 % ändern, ist diese Näherung gerechtfertigt. Bei einer Gittertiefe von $10 E_r$ liefert (3.19) für unsere experimentellen Parameter eine Fallenfrequenz der einzelnen Gittertöpfe von $\omega = 134 \text{ kHz}$. Demgegenüber betragen bei dieser Gittertiefe die Fallenfrequenzen aufgrund der gaußschen Strahlform $\omega_\rho = 2\pi \times 29 \text{ Hz}$ in radialer Richtung und $\omega_z = 2\pi \times 0,04 \text{ Hz}$ in axialer Richtung.

Die Abbildung 3.2 zeigt den Potenzialverlauf eines eindimensionalen optischen Gitters der Tiefe $V_G = 5 E_r$. Für die Erstellung der Abbildung wurden die Parameter des experimentell

realisierten optischen Gitters verwendet. Der Verlauf des Magnetfallenpotenzials ist in der Abbildung berücksichtigt. Die gaußsche Form der Gitterlaserstrahlen hat auf der betrachteten Längenskala keinen signifikanten Einfluss.

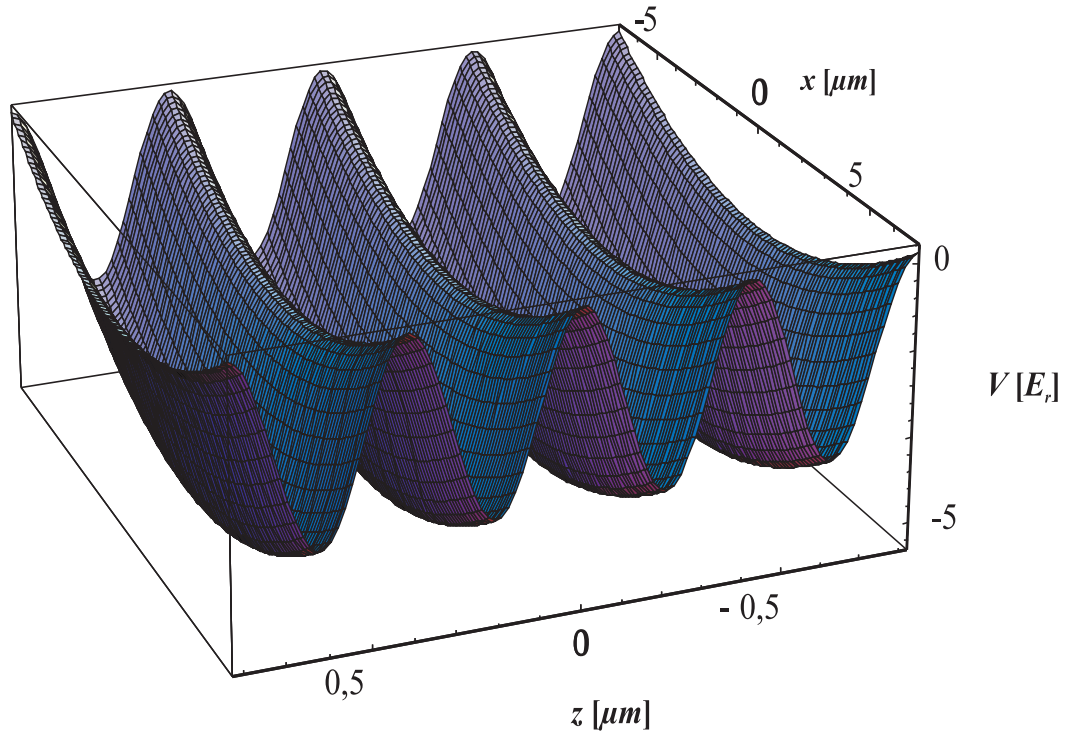


Abbildung 3.2.: Potenzialverlauf eines eindimensionalen optischen Gitters der Tiefe $V_G = 5 E_r$ für die experimentell realisierten Parameter.

3.2.2. Einzelnes Teilchen im 1D-Gitter

Im vorigen Abschnitt wurde beschrieben, wie mittels optischer Methoden ein Gitterpotenzial für ultra-kalte Atome erzeugt werden kann. Die Form und Tiefe des Potenzials stand dabei im Mittelpunkt der Betrachtungen. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist die Diskussion der physikalischen Eigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten in solchen periodischen Strukturen.

Zunächst wird dazu ein einzelnes Teilchen in einem eindimensionalen Gitterpotenzial betrachtet. Die Lösung der stationären Schrödinger-Gleichung mit periodischem Potenzial gehört zu den kanonischen Problemen der Quantenmechanik [49] und dient hier zur Vorbereitung der Diskussion des Vielteilchensystems. Insbesondere werden in diesem Abschnitt zentrale Begriffe wie Bandstruktur, Bloch- und Wannier-Zustände eingeführt.

Periodische Potenziale: Bloch-Theorem und Bloch-Funktionen

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung eines Teilchens in einer Dimension lautet:

$$H\phi(z) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_z^2 + V(z) \right) \phi(z) = E\phi(z). \quad (3.20)$$

Das betrachtete Potenzial $V(z)$ ist periodisch und erfüllt die diskrete Translationssymmetrie

$$V(z) = V(z + d). \quad (3.21)$$

Der Operator T_d der diskreten Translation ist durch

$$T_d f(z) = f(z + d) \quad (3.22)$$

für alle Funktionen f erklärt. Er vertauscht wegen der Symmetrie des Potenzials (3.21) mit dem Hamiltonian:

$$[T_d, H] = 0. \quad (3.23)$$

Die Eigenfunktionen von H und T_d können daher so bestimmt werden, dass sie ein gemeinsames Eigenfunktionensystem bilden:

$$H\phi(z) = E\phi(z), \quad T_d\phi(z) = c(d)\phi(z). \quad (3.24)$$

Dabei bezeichnet $\phi(z)$ eine gemeinsame Eigenfunktion von H und T_d . Aus (3.22) ist ersichtlich, dass die Eigenwerte $c(d)$ von T_d die Relationen

$$c(d)c(d) = c(d+d), \quad c(d)c(-d) = 1 \quad (3.25)$$

erfüllen. Des Weiteren gilt die Normierungsbedingung

$$1 = \int dz |\phi(z+d)|^2 = \int dz |c(d)|^2 |\phi(z)|^2 = |c(d)|^2. \quad (3.26)$$

Diese Eigenschaften der Eigenwerte werden durch

$$c(d) = e^{iqd} \quad (3.27)$$

erfüllt. Damit folgt aus (3.24):

$$\phi(z+d) = e^{iqd}\phi(z). \quad (3.28)$$

Um einerseits die Eigenfunktionen normieren zu können und andererseits die diskrete Translationssymmetrie im ganzen Raum zu gewährleisten, ist die Annahme periodischer Randbedingungen sinnvoll. Daher sei die Bedingung $\phi(-L/2) = \phi(L/2)$ vorausgesetzt, wobei L die Systemlänge bezeichnet. Wegen (3.28) ist damit das Spektrum von T_d quantisiert:

$$q = \frac{2\pi}{L} \nu, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.29)$$

Die Eigenfunktionen $\phi(z)$ und Eigenwerte E werden daher fortan mit der Quantenzahl q indiziert. Aus (3.28) folgt ferner, dass die Eigenfunktionen ϕ_q und $\phi_{q+2\pi l/d}$ für ganzzahlige

l denselben physikalischen Zustand bezeichnen. Die Eigenfunktionen und das zugehörige Spektrum sind periodisch in q :

$$\phi_q(z) = \phi_{q+2\pi l/d}(z), \quad (3.30)$$

$$E_q = E_{q+2\pi l/d}. \quad (3.31)$$

Die Betrachtungen können daher auf Werte für q aus dem Intervall $-\pi/d, \dots, \pi/d$ beschränkt werden. Dieses Intervall wird die erste Brillouinzone genannt. Die auf dem Rand der Brillouinzone liegende Quantenzahl q wird im Folgenden mit $q_B = \pi/d$ bezeichnet. Sie wird in (3.29) für $\nu = N/2$ erhalten, wobei N die Anzahl der Einheitszellen, die auf der Systemlänge L liegen, bezeichnet. In der Brillouinzone liegen daher $N + 1$ mögliche Lösungen. Zu jeder der Eigenfunktionen ϕ_q kann mittels

$$u_q(z) = e^{-iqz} \phi_q(z) \quad (3.32)$$

eine Funktion $u_q(z)$ definiert werden. Diese ist wegen

$$u_q(z+d) = e^{-iq(z+d)} \phi_q(z+d) = e^{-iqz} e^{-iqd} e^{iqd} \phi_q(z) = u_q(z) \quad (3.33)$$

gitterperiodisch. Die Eigenfunktionen lassen sich also als Produkte von ebenen Wellen mit gitterperiodischen Funktionen schreiben:

$$\phi_q(z) = e^{iqz} u_q(z). \quad (3.34)$$

Dieser Umstand ist als Bloch-Theorem bekannt [49]. Das Einsetzen der Eigenfunktionen in der Form (3.34) in die Schrödinger-Gleichung (3.20) liefert wegen

$$-\partial_z^2 \phi_q(z) = \left[q^2 u_q(z) - 2iq (u_q)'(z) - (u_q)''(z) \right] e^{iqz} \quad (3.35)$$

eine modifizierte Schrödinger-Gleichung für $u_q(z)$:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} (-i\partial_z + q)^2 + V(z) \right] u_q(z) = E_q u_q(z). \quad (3.36)$$

Da $u_q(z)$ gitterperiodisch ist, handelt es sich bei dieser Gleichung um eine Randwertaufgabe auf der Gittereinheitszelle. Für jedes q ist somit das Auftreten einer weiteren Quantenzahl zu erwarten, die im Folgenden mit n bezeichnet wird. Für festes n wird das Spektrum der mit q indizierten Eigenwerte von (3.36) n -tes Energieband genannt. Daher wird n auch als Bandindex bezeichnet. Die erlaubten Werte für q sind durch (3.29) gegeben und streng genommen diskret. Für hinreichend große Systeme liegen sie jedoch dicht auf der ersten Brillouinzone und die diskreten Eigenwerte E_q können als kontinuierliche Dispersionsrelation $E(q)$ aufgefasst werden.

Diese Eigenwerte können gefunden werden, indem die Funktionen $u_q^{(n)}(z)$ und $V(z)$ entsprechend ihrer Periodizität in Fourierreihen entwickelt werden:

$$V(z) = \sum_r V_r e^{ir(2\pi/d)z} = \sum_r V_r e^{i2rq_B z}, \quad (3.37)$$

$$u_q^{(n)}(z) = \sum_l c_{l,q}^{(n)} e^{il(2\pi/d)z} = \sum_l c_{l,q}^{(n)} e^{i2lq_B z}. \quad (3.38)$$

Für ein optisches Gitterpotenzial der Form (3.17) folgt unter Vernachlässigung der gaußschen Strahlform:

$$V(z) = V_G \cos^2(kz) = \frac{1}{4} V_G (e^{2ikz} + e^{-2ikz} + 2). \quad (3.39)$$

Die Wellenzahl k des Laserstrahls ist dabei wegen $2d = \lambda$ mit dem Rand der Brillouinzone identisch. Damit folgt für die Fourierkoeffizienten in der Entwicklung (3.37):

$$V_r = \begin{cases} 1/4 V_G & \text{für } r = \pm 1 \\ 1/2 V_G & \text{für } r = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Es ist also

$$\begin{aligned} V(z) u_q^{(n)}(z) &= \frac{1}{4} V_G \sum_l c_{l,q}^{(n)} [e^{2i(l+1)kz} + e^{2i(l-1)kz}] \\ &+ \frac{1}{2} V_G \sum_l c_{l,q}^{(n)} e^{2ilkz}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Andererseits gilt für den kinetischen Teil des Hamiltonians

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{2m} (-i\partial_z + q)^2 u_q^{(n)}(z) &= \frac{\hbar^2}{2m} (-i\partial_z + q)^2 \sum_l c_{l,q}^{(n)} e^{2ilkz} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_l (2lk + q)^2 c_{l,q}^{(n)} e^{2ilkz}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aus (3.36) folgt daher ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten der Fourierreentwicklung (3.38):

$$\sum_l H_{l,l'} c_l^{(n,q)} = E_q^{(n)} c_{l'}^{(n,q)}. \quad (3.42)$$

Dabei ist:

$$H_{l,l'} = \begin{cases} (2l + q/k)^2 E_r + \frac{1}{2} V_G & \text{für } l = l' \\ \frac{1}{4} V_G & \text{für } l - l' = \pm 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Als Matrixgleichung lautet (3.42):

$$H \cdot \vec{c}^{(n,q)} = E_q^{(n)} \vec{c}^{(n,q)}. \quad (3.43)$$

Die Eigenwerte der Eigenwertgleichung (3.43) geben die Energien $E_q^{(n)}$ und die Koeffizienten $c_l^{(n,q)}$ liefern über (3.38) und (3.34) die zugehörigen Eigenfunktionen. Da die Beträge der Koeffizienten $c_l^{(n,q)}$ für große Beträge von l sehr klein werden, ist eine Beschränkung der Summation in (3.42) auf endliche Werte für l möglich. Damit kann (3.42) mittels Standardroutinen gelöst werden.

In Abbildung 3.3 sind die niedrigsten Energiebänder des periodischen Potenzials $V(z) = V_G \cos^2(kz)$ für verschiedene Werte von V_G dargestellt. Wegen der Zeitumkehrsymmetrie des

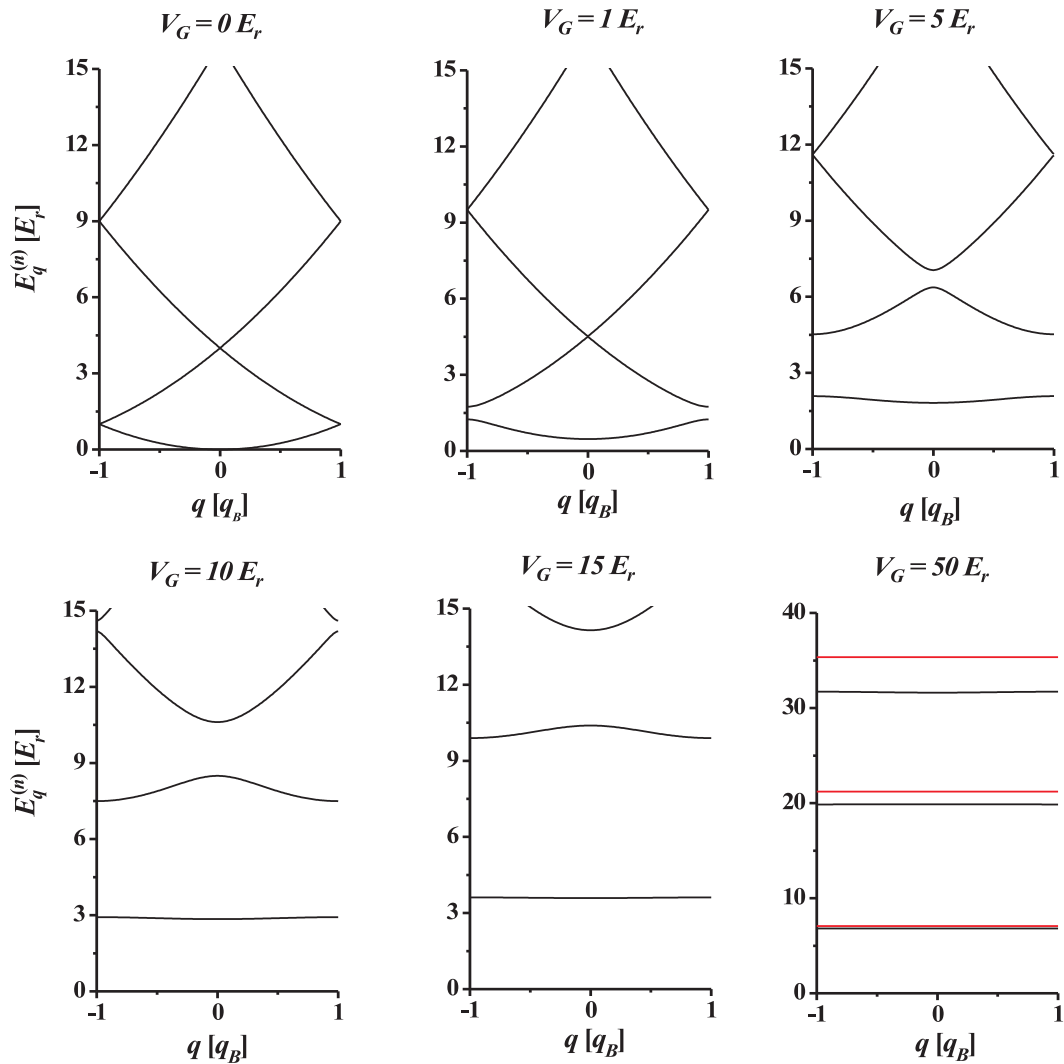


Abbildung 3.3.: Darstellung der niedrigsten Energiebänder als Funktion der Quantenzahl q für verschiedene Gittertiefen V_G . Mit zunehmender Gittertiefe flachen die Energiebänder ab und es treten Lücken im Spektrum auf. Für die größte gezeigte Gittertiefe sind zusätzlich die Energieniveaus des harmonisch genährten Gitterpotenzials rot eingezeichnet.

Hamiltonoperators ist das Spektrum für jedes q zweifach entartet [48] und die Bänder sind symmetrisch bezüglich des Ursprungs der Brillouinzone:

$$E_q^{(n)} = E_{-q}^{(n)}. \quad (3.44)$$

Für $V_G = 0$ entspricht das Spektrum erwartungsgemäß dem eines freien Teilchens, reduziert auf die erste Brillouinzone. Für $V_G \neq 0$ ist das Auftreten so genannter Bandlücken, welche die Energiebänder separieren, charakteristisch. Die Bandlücken zwischen den niedrigsten Bändern sind dabei am stärksten ausgeprägt. Mit zunehmender Gittertiefe flachen die Energiebänder als Funktion von q ab und die Größe der Bandlücken nimmt zu. Im Grenzfall $V_G \rightarrow \infty$ sind die einzelnen Gittertöpfe voneinander isoliert und die Bänder sind völlig flach. Die Bandlücken

entsprechen dabei dem Niveauabstand des um den einzelnen Gittertopf harmonisch genährten Potenzials. Diese Abhängigkeit der Bandstruktur von der Gittertiefe ist für das niedrigste Energieband besonders ausgeprägt, während der hochenergetische Teil des Spektrums durch das Gitterpotenzial weniger stark beeinflusst ist. Er ähnelt stark dem Spektrum eines freien Teilchens.

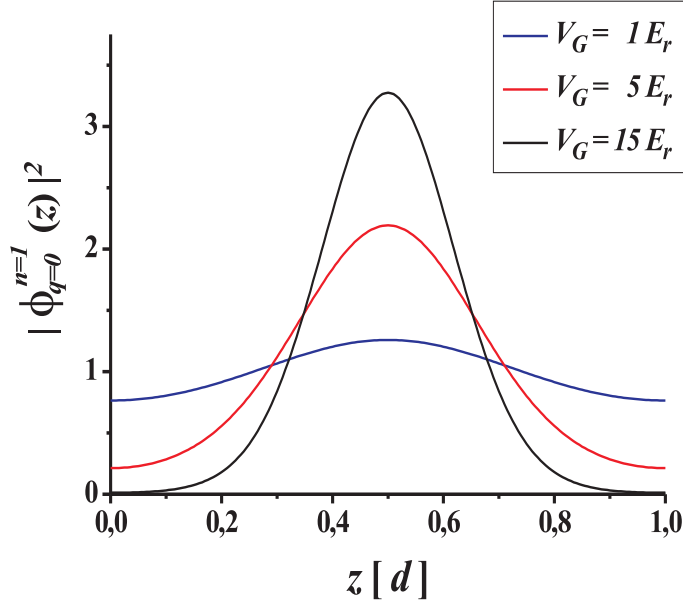


Abbildung 3.4.: Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens im niedrigsten Bloch-Zustand $\phi_{q=0}^{(n=1)}(z)$ für verschiedene Werte der Gittertiefe. Mit zunehmender Gittertiefe wird die Lokalisierung des Teilchens im Minimum des Potenzials ausgeprägter.

Abbildung 3.4 zeigt die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_q^{(n)}(z)|^2$ eines Teilchens im Grundzustand ($q = 0, n = 1$) entlang eines Gittertopfes für verschiedene Werte der Gittertiefe. Für tiefe Gitter ist eine starke Modulierung der Dichte durch das periodische Potenzial ersichtlich. Das Teilchen lokalisiert dabei im Potenzialminimum. Aus (3.28) folgt unmittelbar, dass das Betragsquadrat der Eigenfunktionen gitterperiodisch ist:

$$|\phi_q^{(n)}(z)|^2 = |\phi_q^{(n)}(z + d)|^2. \quad (3.45)$$

Mit der Betrachtung der Dichteverteilung auf einer Gittereinheitszelle kann somit durch periodische Fortsetzung die gesamte Dichteverteilung des Systems erhalten werden.

In Abbildung 3.5 ist die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_q^{(n)}(z)|^2$ von der Quantenzahl q für verschiedene Werte der Gittertiefe verdeutlicht. Im niedrigsten Band ist eine Konzentration des Teilchens im Potenzialminimum für alle Werte von q gegeben. Für sehr tiefe Gitter ist die Dichteverteilung näherungsweise unabhängig von q . Abbildung 3.6 zeigt im Gegenzug die entsprechenden Abhängigkeiten für das zweite und dritte Energieband. Die Dichteverteilung ist hier nicht auf den Bereich der Potenzialminima konzentriert. Zum anderen ist diese viel stärker von der Quantenzahl q abhängig als im niedrigsten Band. Auch in diesem Fall nimmt jedoch die Abhängigkeit von q mit zunehmender Gittertiefe ab.

Allgemein gilt, dass die zu flachen Energiebändern gehörigen Eigenfunktionen starke Lokalisierungstendenzen und eine schwache Abhängigkeit von der Quantenzahl q aufweisen. Flache Energiebänder liegen dabei für niedrige Werte des Bandindex n und für tiefe Gitterpotenziale vor. Breite Energiebänder führen dagegen zu einem Verhalten, das eher dem eines freien Teilchens ähnelt. Sie liegen für große Werte des Bandindex n und kleine Gitterpotenziale vor.

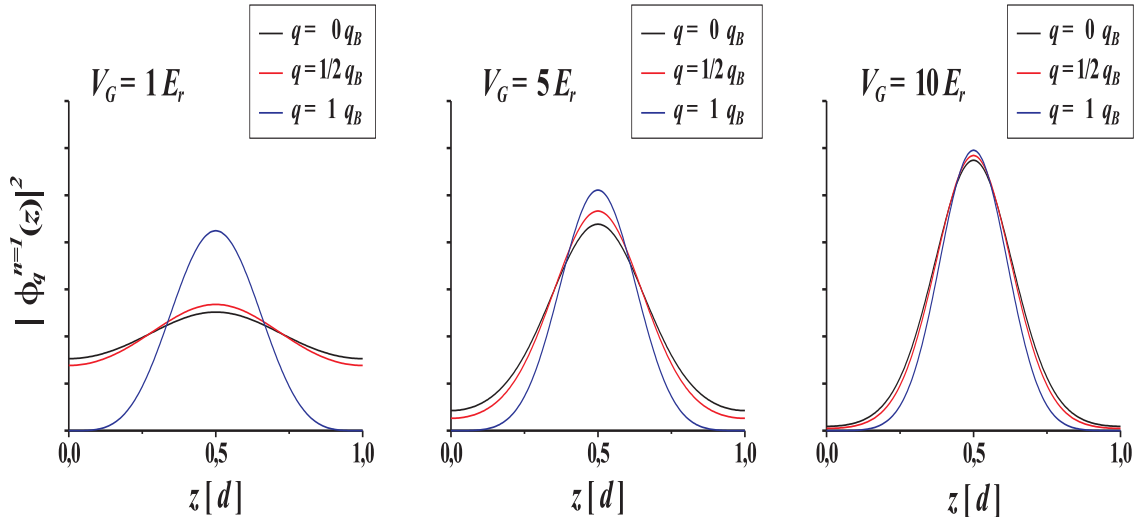


Abbildung 3.5.: Die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens im Bloch-Zustand $\phi_q^{(n=1)}(z)$ für verschiedene Werte der Gittertiefe und der Quantenzahl q . Mit zunehmender Gittertiefe hängt $|\phi_q^{(n=1)}(z)|^2$ immer schwächer von q ab.

Impulsverteilung

Der Hamiltonian vertauscht mit dem Operator der diskreten Gittertranslation T_d . Die mit dieser Symmetrie verbundene Erhaltungsgröße ist die Quantenzahl q . Aufgrund der formalen Ähnlichkeit der Eigenfunktionen (3.34) mit ebenen Wellen kann q auch als Wellenzahl aufgefasst werden. Der mit ihr assoziierte Impuls $\hbar q$ wird daher als Quasi-Impuls bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen dem Wert des Quasi-Impulses und der Impulsverteilung wird ersichtlich, wenn die Fourierentwicklung (3.38) in das Bloch-Theorem (3.34) eingesetzt wird. Dieses liefert unmittelbar die Entwicklung der Bloch-Funktionen nach ebenen Wellen:

$$\phi_q^{(n)}(z) = \sum_l c_l^{(n,q)} e^{i(2lq_B + q)z}. \quad (3.46)$$

Das Betragsquadrat des Entwicklungskoeffizienten $|c_l^{(n,q)}|^2$ liefert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teilchen im Bloch-Zustand $\phi_q^{(n)}(z)$ mit dem Impuls $\hbar(q + 2lq_B)$ gemessen werden kann¹. Aufgrund der Periodizität des Potentials ist die Impulsverteilung in Impuls-

¹Dabei ist die gewählte Normierung für die Wellenfunktion zu berücksichtigen. Wird diese entlang der Gittereinheitszelle auf eins normiert, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine entsprechende Messung $d|c_l^{(n,q)}|^2$.

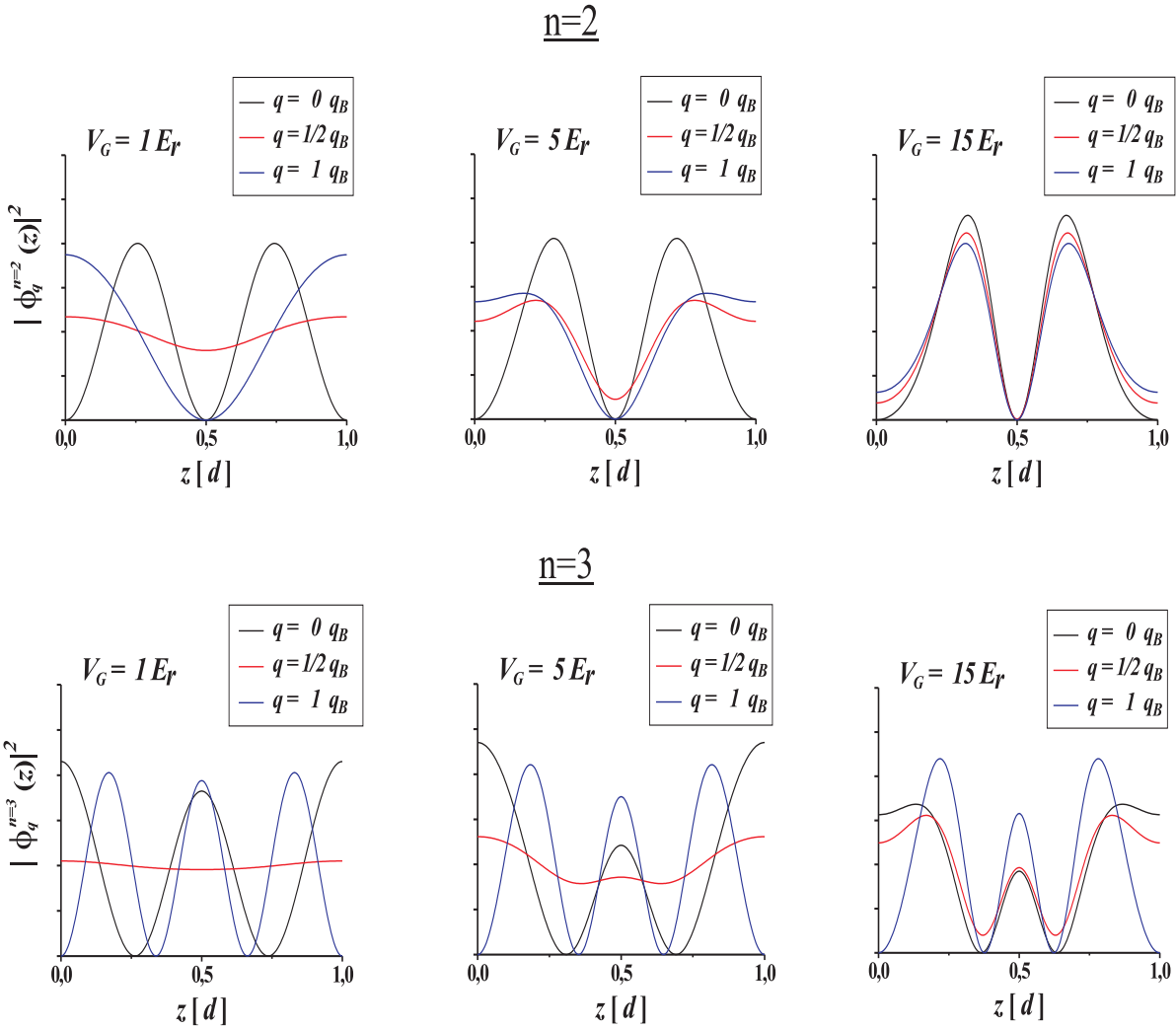


Abbildung 3.6.: Das Betragsquadrat der Bloch-Funktionen $|\phi_q^{(n \neq 0)}(z)|^2$ für verschiedene Werte der Gittertiefe und der Quantenzahl q . In den hier dargestellten höheren Bändern sind die Wahrscheinlichkeitsdichten in den Bereich der Potenzialbarrieren ausgedehnt und weisen eine sehr starke Abhängigkeit von q auf. Mit zunehmender Gittertiefe wird diese jedoch immer schwächer.

komponenten mit dem Abstand $2\hbar q_B$ aufgespalten. Die Abbildung 3.7 zeigt die Besetzungswahrscheinlichkeiten der einzelnen Impulskomponenten für $q = 0$ in Abhängigkeit von der Gittertiefe und dem Bandindex. Im niedrigsten Band sind Impulskomponenten mit $l \neq 0$ im Gegensatz zu höheren Bändern erst bei tiefen Gitterpotenzialen signifikant besetzt. Für $q \neq 0$ resultiert eine asymmetrische Besetzung der $|c_l^{(n,q)}|^2$. Diese ist in Abbildung 3.8 für ein Teilchen im niedrigsten Band bei konstanter Gittertiefe dargestellt. Es sei betont, dass aus dieser Asymmetrie in der Verteilung der $|c_l^{(n,q)}|^2$ nicht notwendigerweise auf ein asymmetrisches Impulsspektrum geschlossen werden kann. In der Tat besitzt ein Teilchen im niedrigsten Band für $q = \pm q_B$ wegen (3.46) ein symmetrisches Impulsspektrum².

²Dieses ist in der Abbildung 6.14 des Kapitels 6 dargestellt.

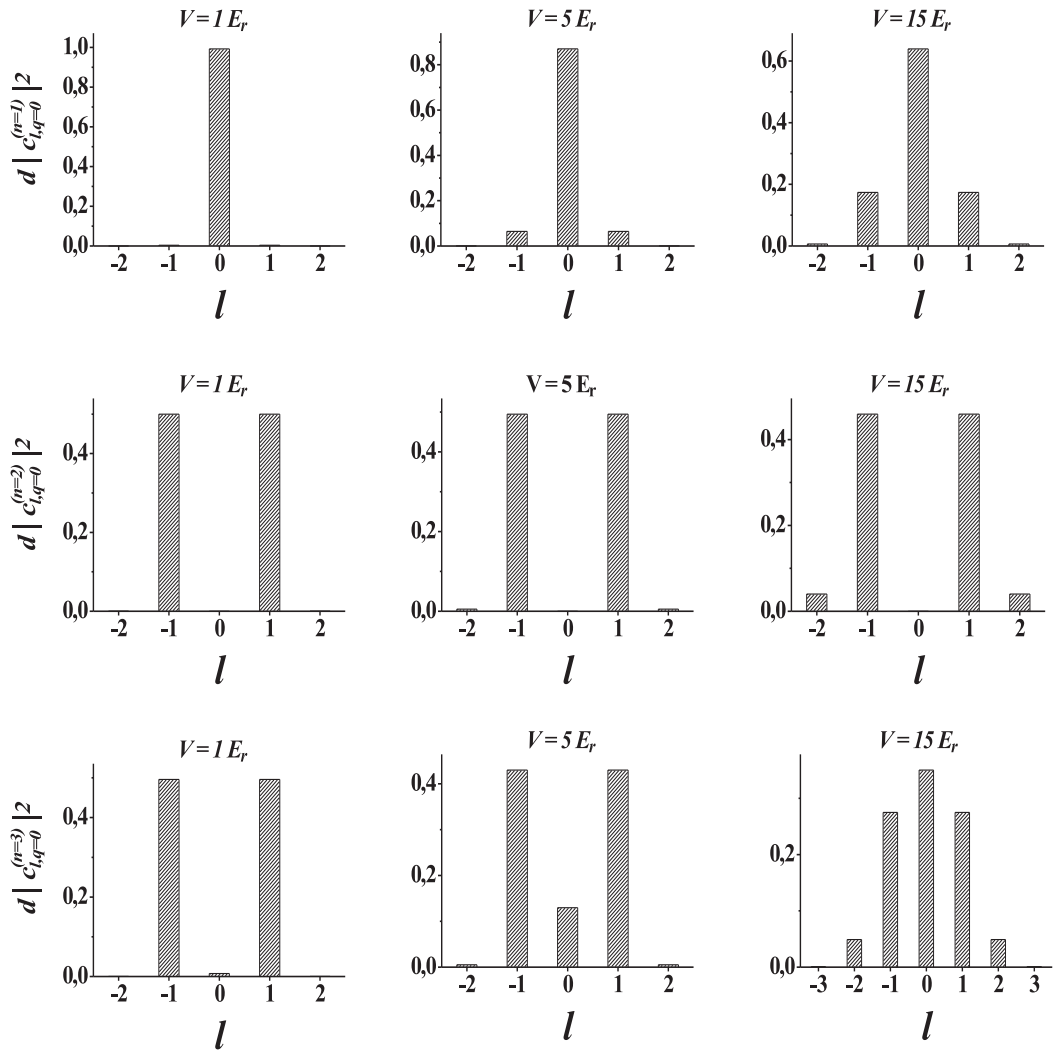


Abbildung 3.7.: Besetzungswahrscheinlichkeit $d|c_l^{(n,q=0)}|^2$ der Impulskomponente $2l \hbar q_B$ für verschiedene Gittertiefen und Bandindizes n .

Wannier-Funktionen und Tight-Binding-Näherung

Die Bloch-Funktionen sind aufgrund ihrer Translationseigenschaft (3.45) über das gesamte System ausgedehnt. Für viele Betrachtungen ist es allerdings von Vorteil, lokalisierte Zustände auf dem Gitter zu bilden. Solche lokalisierten Zustände können aus den Bloch-Funktionen durch

$$w_n(z - z_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=-q_B}^{q_B} e^{-iqz_j} \phi_q^{(n)}(z) \quad (3.47)$$

erhalten werden [49]. Die über (3.47) definierten Funktionen $w_n(z - z_j)$ heißen Wannier-Funktionen. Dabei bezeichnet N die Zahl der Gittereinheitszellen im System. Die Summation läuft über alle erlaubten Quantenzahlen q innerhalb der ersten Brillouinzone und kann für große Systeme und quasi-kontinuierliche q durch ein Integral genähert werden. Im Gegensatz zu den Bloch-Funktionen hängen die Wannier-Funktionen daher nicht mehr von q , sondern

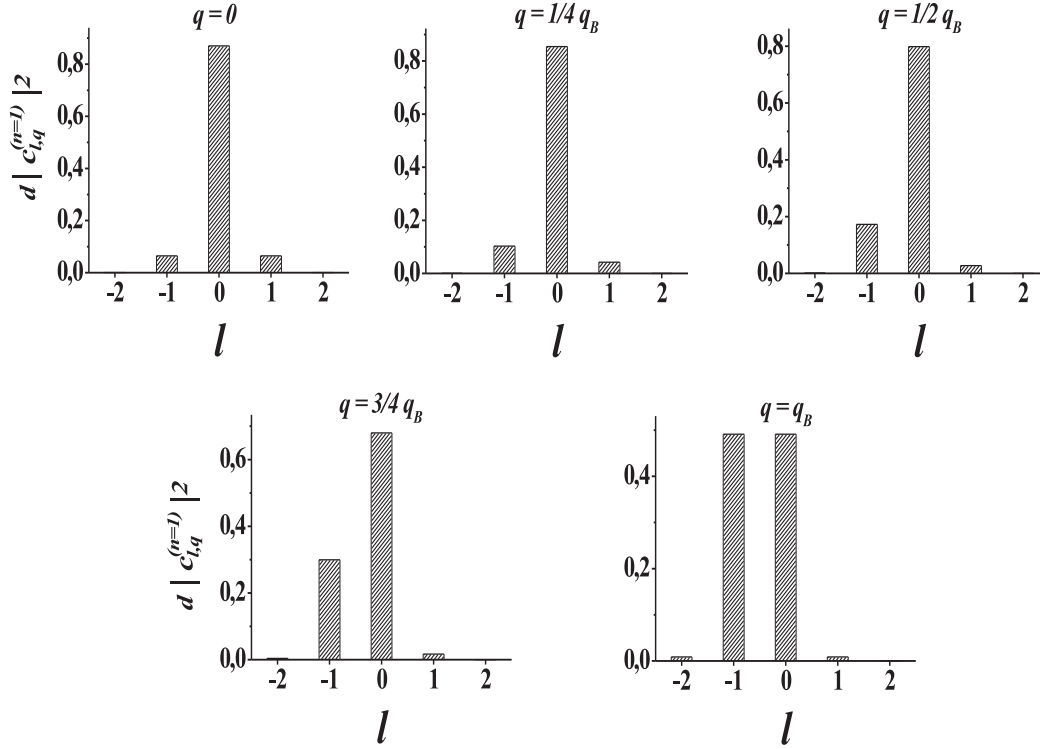


Abbildung 3.8.: Besetzungswahrscheinlichkeit $d |c_l^{(n=1, q \neq 0)}|^2$ der Impulskomponente $\hbar(q + 2l q_B)$ für ein Teilchen im niedrigsten Band für verschiedene Werte von q . Die Gittertiefe beträgt für alle Bilder $5 E_r$.

nur vom Bandindex n und dem Gitterplatz z_j , auf dem sie zentriert sind, ab. Der lokalisierte Charakter der Wannier-Funktionen wird leicht deutlich, wenn (3.47) unter der vereinfachten Annahme eines von q unabhängigen $u_q^{(n)}(z)$ berechnet wird. In diesem Fall kann wegen

$$w_n(z - z_j) = \frac{1}{\sqrt{N}} u^{(n)}(z) \sum_q e^{iq(z-z_j)} \approx \sqrt{N} u^{(n)}(z) \frac{\sin(\pi(z - z_j)/d)}{\pi(z - z_j)/d} \quad (3.48)$$

eine analytische Näherung für die Wannier-Funktion gebildet werden. Die Sinc-Funktion ist für die Zentrierung um z_j verantwortlich.

Die Wannier-Funktionen bilden ein vollständiges Orthonormalsystem:

$$\int dz w_n^*(z - z_j) w_m^*(z - z_t) = \frac{1}{N} \sum_q e^{iq(z_j - z_t)} \delta_{qq'} \delta_{nm} = \delta_{jt} \delta_{nm}. \quad (3.49)$$

Die Bloch-Funktionen lassen sich aus ihnen mittels

$$\phi_q^{(n)}(z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j e^{iqz} w_n(z - z_j) \quad (3.50)$$

entwickeln.

Grundsätzlich impliziert eine Wahl der Wannier-Funktionen als Basis zwei Nachteile. Zum

einen sind die Wannier-Funktionen für endliche Gittertiefen keine Eigenfunktionen des Hamiltonians. Zum anderen sind sie durch die Definition (3.47) nicht eindeutig festgelegt [160]. Letzteres liegt daran, dass die Bloch-Funktionen nur bis auf eine globale Phase bestimmt sind: Aus einem gefundenen Satz von Bloch-Funktionen kann mittels der Eichtransformation

$$u_q^{(n)}(z) \mapsto e^{i\theta_n(q)} u_q^{(n)}(z) \quad (3.51)$$

mit reellem θ_n ein gleichwertiger Satz von Bloch-Funktionen gefunden werden. Die Transformation (3.51) erhält zwar die Position z_j der Wannier-Funktionen Modulo der Translationslänge d , jedoch nicht ihre Breite [160]. Für den hier betrachteten Fall einzelner isolierter Bänder sind jedoch die Bedingungen zum Auffinden der maximal lokalisierten Wannier-Funktionen bekannt [161].

Trotz der genannten Schwierigkeiten sind Wannier-Funktionen in vielen Fällen von großem Nutzen, wie z. B. für die Betrachtung von Teilchen in tiefen Gitterpotenzialen. Da für hinreichend große Systeme die Energiebänder kontinuierliche periodische Funktionen von q mit Periode $2q_B$ sind, kann die Dispersionsrelation $E^{(n)}(q)$ als Fourierreihe geschrieben werden:

$$E^{(n)}(q) = \sum_l \epsilon_l^{(n)} e^{ildq}. \quad (3.52)$$

Die Koeffizienten $\epsilon_l^{(n)}$ dieser Fourierreihe sind durch die Matrixelemente des Hamiltonians in der Wannier-Basis gegeben:

$$\epsilon_{(l-p)}^{(n)} = \int dz w_n^*(z - z_l) H w_n(z - z_p). \quad (3.53)$$

In sehr tiefen Gittern sind die Bloch-Funktionen stark moduliert und die Wannier-Funktionen lokalisieren deutlich auf den einzelnen Gitterplätzen. Wenn die Lokalisierung der Wannier-Funktionen so ausgeprägt ist, dass in (3.53) nur die Matrixelemente mit $|l - p| = 0, \pm 1$ berücksichtigt werden müssen, folgt aus (3.52) ein einfacher Ausdruck für die Dispersionsrelation:

$$E^{(n)}(q) = \epsilon_0^{(n)} + 2\epsilon_1^{(n)} \cos(qd). \quad (3.54)$$

Dabei ist wegen der Symmetrie der Energiebänder $\epsilon_1^{(n)} = \epsilon_{-1}^{(n)}$. Die Größe

$$J^{(n)} := -2\epsilon_1^{(n)} = -2 \int dz w_n^*(z) H w_n(z - d) \quad (3.55)$$

wird Tunnelrate des n -ten Bandes genannt und ist für dessen Breite maßgeblich. Eine analytische Näherung für sehr tiefe Gitterpotenziale³ lautet [162]

$$J^{(n)} = (-1)^n (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{s}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}+3/4} \left(\frac{2^{4(n-1)+5}}{(n-1)!}\right) e^{-2\sqrt{s}} E_r, \quad (3.56)$$

wobei s über $V_G = s E_r$ die Tiefe des Gitters angibt. Die einfache Form der Dispersionsrelation (3.54) erlaubt die Berechnung vieler wichtiger Systemgrößen. Die Beschränkung der

³Auch wenn der Tight-Binding-Ausdruck (3.54) bereits ab $V_G = 5 E_r$ passable Ergebnisse liefert, sind für (3.56) deutlich tiefere Gittertiefen erforderlich.

Kopplung auf die nächsten Nachbarn wird als Tight-Binding-Näherung bezeichnet und stellt für hinreichend tiefe Gitter eine hervorragende Näherung dar. Wenn das Gitterpotenzial so tief wird, dass auch die Matrixelemente zwischen benachbarten Wannier-Funktionen verschwinden, ist das Energieband völlig flach. Aus (3.54) ist ersichtlich, dass in diesem Fall von verschwindender Tunnelrate die Wannier-Funktionen Eigenfunktionen des Hamiltonians sind.

3.2.3. Schwach wechselwirkendes Bose-Gas in optischen Gittern

Die in den vorhergehenden Abschnitten erfolgte Diskussion des Einteilchenproblems soll nun um die Betrachtung von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern erweitert werden. Zum einen ist dazu der Einfluss der interatomaren Wechselwirkung auf Größen wie die Dichteverteilung oder die Bandstruktur zu berücksichtigen. Zum anderen ist bei einer Vielzahl von Experimenten dem Gitterpotenzial zusätzlich das harmonische Potenzial der Magnetfalle überlagert. Dadurch ist die diskrete Translationssymmetrie des periodischen Potenzials gebrochen und die Dichteverteilung ist nicht mehr gitterperiodisch.

Zunächst werden anhand des transversal homogenen Gittergases die Effekte der interatomaren Wechselwirkung herausgestellt. Effektiv schirmt diese das Gitterpotenzial ab und reduziert auf diese Weise dessen Einfluss auf die Atome. Anschließend wird der Einfluss des harmonischen Potenzials der Magnetfalle auf den Grundzustand eines wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensates im Gitterpotenzial diskutiert.

Der Abschnitt beruht auf der Beschreibung des Bose-Gases mittels der Gross-Pitaevskii-Gleichung. Daher ist der Gültigkeitsbereich der Betrachtungen auf den Fall $T = 0$ und schwache interatomare Wechselwirkung beschränkt. Für die im Experiment vorliegenden ultra-kalten Temperaturen und die verwendeten moderaten Gittertiefen ist diese Beschreibung gerechtfertigt.

Für sehr tiefe Gitter spielt jedoch die Wechselwirkung eine dominierende Rolle für die physikalischen Eigenschaften des Systems. Durch sie erlangen interatomare Korrelationen eine große Relevanz und eine Beschreibung im Rahmen der Mean-Field-Theorie ist nicht mehr möglich.

Einfluss der Wechselwirkung

Zunächst wird ein Bose-Einstein-Kondensat betrachtet, das in transversaler Richtung homogen ist und in axialer Richtung durch das optische Gitter gefangen ist. Die stationären Zustände des Systems sind Lösungen der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung [163]:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + sE_r \sin^2(kz) + gnd |\phi(z)|^2 \right) \phi(z) = \mu \phi(z). \quad (3.57)$$

Es sei eine Klasse von Lösungen $\phi(z)$ für (3.57) gefunden, die auf eine gitterperiodische Dichteverteilung $|\phi(z)|^2$ führt. Für diese Klasse ist die Gross-Pitaevskii-Gleichung invariant unter der Koordinatentransformation $z \mapsto z + d$. Mit den gleichen Argumenten wie für den Einteilchenfall kann gezeigt werden, dass diese Lösungsklasse das Bloch-Theorem erfüllt [163]:

$$\phi_q^{(n)}(z) = e^{iqz} \tilde{u}_q^{(n)}(z). \quad (3.58)$$

Dabei ist $\tilde{u}_q^{(n)}(z)$ eine gitterperiodische Funktion, die unter Berücksichtigung der Wechselwirkung gefunden werden muß. Im Einteilchenfall wurde gezeigt, dass die Funktionen $u_q^{(n)}(z)$ die stationäre Schrödingergleichung (3.36) erfüllen. Für das wechselwirkende Gas kann völlig analog gezeigt werden, dass die Funktionen $\tilde{u}_q^{(n)}(z)$ die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left[-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + q)^2 + s E_r \sin^2(kz) + gnd \left| \tilde{u}_q^{(n)}(z) \right|^2 \right] \tilde{u}_q^{(n)}(z) = \mu^{(n)}(q) \tilde{u}_q^{(n)}(z) \quad (3.59)$$

erfüllen. Die Lösungen dieser Gleichung führen analog zum Einteilchenfall auf eine Bandstruktur für das chemische Potenzial $\mu^{(n)}(q)$. Die Energie pro Teilchen $\epsilon_q^{(n)}$ kann aus den Lösungen von (3.59) mittels

$$\epsilon_q^{(n)} = \int_{-d/2}^{d/2} dz \tilde{u}_q^{*(n)}(z) \left[-\frac{1}{2m} (-i\hbar\partial_z + q)^2 + s E_r \sin^2(kz) + \frac{1}{2} gnd \left| \tilde{u}_q^{(n)}(z) \right|^2 \right] \tilde{u}_q^{(n)}(z) \quad (3.60)$$

gewonnen werden. Im Gegensatz zum homogenen Fall zeigen $\mu^{(n)}(q)$ und $\epsilon_q^{(n)}$ nicht die gleiche q -Abhängigkeit [163, 164]. Effektiv führt die interatomare Wechselwirkung zu einer Abschirmung des Gitterpotenzials. Grundsätzlich äußert sich diese darin, dass die physikalischen Eigenschaften des Systems etwas stärker denen von freien Teilchen ähneln als im Einteilchenproblem. Beispielsweise werden bei fester Gittertiefe die Energiebänder mit zunehmender Wechselwirkung breiter.

Die Abbildung 3.9 zeigt einen Ausschnitt aus dem axialen Dichteprofil zweier Kondensate mit unterschiedlicher Teilchenzahl in einer Box mit periodischen Randbedingungen. Die Länge der Box beträgt $82,5 \mu m$. In radialer Richtung liegt ein harmonischer Einschluss mit Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200 Hz$ vor. Es ist deutlich erkennbar, dass mit zunehmender Teilchenzahl und damit interatomarer Wechselwirkung die Modulation der Wellenfunktion durch das Gitterpotenzial abgeschwächt wird.

Einfluss des harmonischen Fallenpotenzials

Dieser Abschnitt analysiert den Einfluss eines harmonischen Fallenpotenzials auf den Grundzustand des Bose-Einstein-Kondensates in einem eindimensionalen optischen Gitter. Das harmonische Potenzial wird im Experiment durch die Magnetfalle erzeugt und bricht die diskrete Translationssymmetrie in axialer Richtung. Ziel dieses Abschnittes ist die Diskussion der dreidimensionalen Dichteverteilung des Kondensates und des zugehörigen Impulsspektrums. Diese Verteilungen wurden erstmals in [125] berechnet. Auswirkungen des harmonischen Fallenpotenzials auf das Spektrum des quantenentarteten Bose-Gases wurden in [165] untersucht und werden hier nicht näher beleuchtet.

Bei hinreichend geringer Temperatur und schwacher Wechselwirkung können die stationären Zustände des Systems mittels der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{dip}(\mathbf{r}) + V_{MF}(\mathbf{r}) + g |\Psi(\mathbf{r})|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}) = \mu \Psi(\mathbf{r}) \quad (3.61)$$

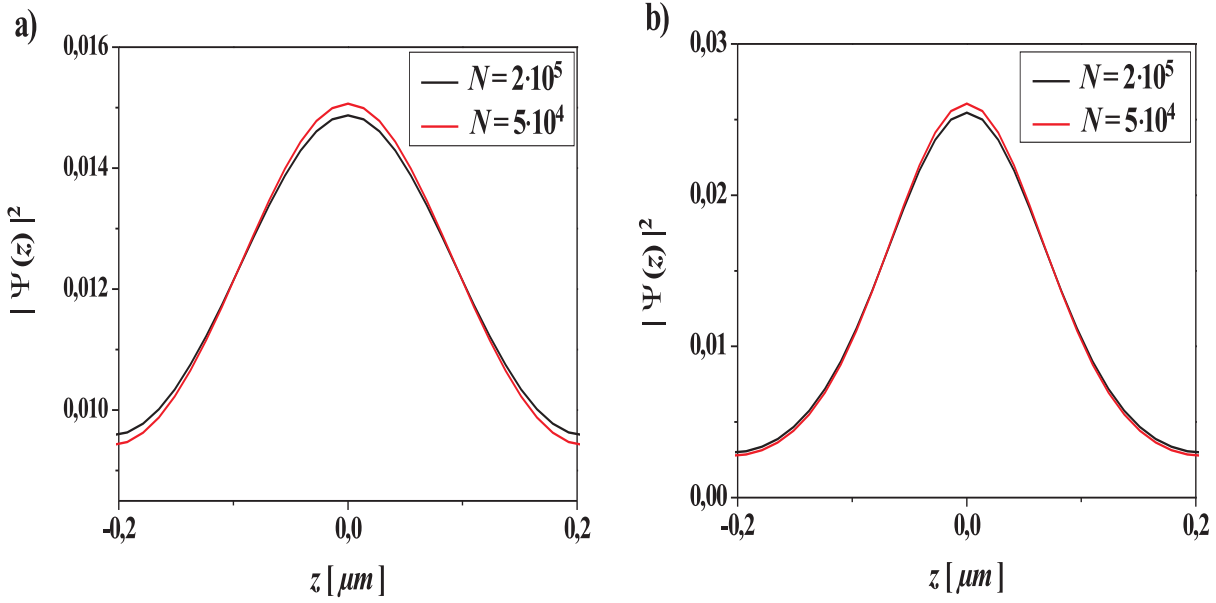


Abbildung 3.9.: Ausschnitte aus den normierten axialen Dichteprofilen von Kondensaten in einer Box der Länge $82,5 \mu\text{m}$ mit periodischen Randwertbedingungen. Über den radialen Freiheitsgrad wurde jeweils integriert. In a) beträgt die Gittertiefe $V_G = 1 E_r$, in b) $V_G = 5 E_r$. Die effektive Abschirmung des Gitterpotenzials durch die Wechselwirkung ist sichtbar.

gefunden werden. Hierbei bezeichnet $V_{dip}(\mathbf{r})$ das optische Potenzial und $V_{MF}(\mathbf{r})$ das zylindersymmetrische Potenzial der Magnetfalle:

$$V_{MF}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \omega_\rho^2 \rho^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2. \quad (3.62)$$

Für die Fallenfrequenzen ω_ρ und ω_z wird dabei

$$\omega_\rho \gg \omega_z \quad (3.63)$$

angenommen. Das optische Gitter bildet gemäß (3.17) ein periodisches Potenzial entlang der z -Achse:

$$V_{dip}(\mathbf{r}) = -V_G \cos^2(kz) = s E_r \cos^2(kz). \quad (3.64)$$

Dabei wurde der Einfluss der gaußschen Laserstrahlform auf das Fallenpotenzial vernachlässigt. Die harmonische Näherung um die einzelnen Potenzialtöpfe liefert nach (3.19) die Fallenfrequenz

$$\omega = k \sqrt{\frac{2s E_r}{m}}. \quad (3.65)$$

Diese ist typischerweise so groß, dass $\hbar\omega \gg \mu$ gilt. Zur Berechnung von Größen, die nicht vom genauen Überlapp der Wellenfunktion zwischen benachbarten Gitterplätzen abhängen, ist daher der Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_j \phi_j(\rho) \chi_j(z) \quad (3.66)$$

für die Vielteilchenwellenfunktion gerechtfertigt. Dabei ist j der Gitterplatzindex und $\chi(z)$ bezeichnet den Einteilchengrundzustand des harmonisch genährten optischen Potentials:

$$\chi_j(z) = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(z-z_j)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3.67)$$

wobei $\sigma = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$ die harmonische Oszillatorlänge bezeichnet. In der Tat werden die auf den Gitterplätzen lokalisierten Wannier-Funktionen im Grenzfall $s \mapsto \infty$ die Eigenfunktionen des harmonisch genährten Potentials. Für hinreichend tiefe Gitter stellt (3.67) eine geeignete Näherung für die z -Abhängigkeit der Wannier-Funktionen dar. Diese kann durch eine optimierte Bestimmung von σ mittels einer Variationsrechnung noch verbessert werden [125]. Zur Berechnung von Größen, die vom genauen Überlapp zwischen den Wannier-Funktionen benachbarter Gitterplätze abhängen, wie z.B. der Tunnelrate, ist der Ansatz (3.66) jedoch selbst für große Gittertiefen ungeeignet.

Der radiale Einschluss der Atome durch die Magnetfalle ist für typische experimentelle Bedingungen so schwach, dass $\mu \gg \hbar\omega_\rho$ gilt. Dieses bedeutet, dass für den transversalen Freiheitsgrad die Thomas-Fermi-Näherung verwendet werden kann. Wegen (3.63) gilt dann auch $\mu \gg \hbar\omega_z$, so dass die Magnetfalle nur eine langsame Änderung der axialen Dichteverteilung verursacht. Jedoch ist aufgrund dieser Variation der Dichte in axialer Richtung der Radialteil der Kondensatwellenfunktion vom Gitterplatz abhängig.

Bestimmung der radialen Lösung

Für die Bestimmung der radialen Lösung $\phi_j(\rho)$ für den j -ten Gitterplatz wird von folgenden Annahmen ausgegangen:

- Die makroskopische Dichteverteilung des Gases entspricht in axialer Richtung einem Thomas-Fermi-Profil.
- In axialer Richtung kann die Local-Density-Approximation [166] benutzt werden.
- Da für das lokale chemische Potenzial $\mu_j \gg \hbar\omega_\rho$ gilt, befinden sich die Atome auf jedem Gitterplatz im Thomas-Fermi-Regime hinsichtlich des radialen Freiheitsgrades.

Mit dem Ansatz (3.66) liegt auf jedem Gitterplatz ein zweidimensionales Gas vor. Für den hier betrachteten Fall schwacher Wechselwirkung und für $T = 0$ sind die in niederdimensionalen Systemen verstärkt auftretenden Fluktuationen vernachlässigbar [167]. Damit ist jedes dieser zweidimensionalen Gase weiterhin mittels der Gross-Pitaevskii-Gleichung beschreibbar. Diese vereinfacht sich aufgrund der reduzierten Dimensionalität zu

$$\begin{aligned} \mu_j^{3D} \phi_j(\rho) \chi(z) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_\rho^2 + \partial_z^2) \phi_j(\rho) \chi(z) + [V(\rho) + V(z)] \phi_j(\rho) \chi(z) \\ &\quad + g_{3D} |\phi_j(\rho)|^2 |\chi(z)|^2 \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\rho^2 \phi_j(\rho) \chi(z) + E_z^0 \phi_j(\rho) \chi(z) + V(\rho) \phi_j(\rho) \chi(z) \\ &\quad + g_{3D} |\phi(\rho)|^2 |\chi(z)|^2, \end{aligned} \quad (3.68)$$

wobei E_z^0 die Grundzustandsenergie des harmonisch genährten Potenzials bezeichnet. Da die z -Abhängigkeit der Wellenfunktion auf jedem Gitterplatz nach (3.67) identisch ist, wird hier und im Folgenden die Indizierung von χ unterdrückt. Multiplikation mit $\chi^*(z)$ und Integration über z liefert mit den Definitionen

$$\begin{aligned}\mu^{2D} &:= \mu^{3D} - E_z^0 \\ g_{2D} &:= g_{3D} \int dz |\chi(z)|^4 \\ &= \frac{g_{3D}}{\sqrt{2} \pi \sigma}\end{aligned}\quad (3.69)$$

eine zweidimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung:

$$\mu_j^{2D} \phi_j(\rho) = \left[\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_\rho^2 + V(\rho) + g_{2D} |\phi(\rho)|^2 \right] \phi_j(\rho). \quad (3.70)$$

Dabei konnte in (3.69) die Kopplungskonstante g_{2D} durch Integration über das axiale Dichteprofil erhalten werden, da für Rubidium der charakteristische Radius des interatomaren Potenzials deutlich kleiner als die Ausdehnung der Wellenfunktion σ in axialer Richtung ist. Dadurch behält die Wechselwirkung im zweidimensionalen Gas ihren dreidimensionalen Charakter und kann durch die bekannte Streulänge $a \ll \sigma$ mit dem Ergebnis (3.69) beschrieben werden [167].

Da auf jedem Gitterplatz $\mu_j \gg \hbar\omega_\rho$ gilt, kann der Radialteil in der Thomas-Fermi-Näherung gelöst werden:

$$\phi_j^{TF}(\rho) = \left[\frac{\mu_j^{2D}}{g_{2D}} \left(1 - \frac{\rho^2}{(R_\rho)_j^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.71)$$

wobei $(R_\rho)_j$ den radialen Thomas-Fermi-Radius bezeichnet. Das chemische Potenzial μ_j^{2D} hängt aufgrund des axialen harmonischen Einschlusses vom Gitterplatz ab. Da dieses jedoch nur sehr langsam variiert, kann die Local-Density-Approximation [125, 166]

$$\mu = \mu_{loc} + V(\mathbf{r}) \quad (3.72)$$

zur Berechnung der lokalen chemischen Potenziale verwendet werden. Dabei bezeichnet μ das chemische Potenzial des Gesamtsystems und μ_{loc} das lokale chemische Potenzial. Für das Gittersystem ergibt dieses:

$$\mu_{loc} = \mu_j = \frac{1}{2} m \omega_z^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 [j_{max}^2 - j^2]. \quad (3.73)$$

Dabei ist j_{max} die Indexzahl des letzten Gitterplatzes, der noch mit Atomen besetzt ist. Das lokale chemische Potenzial bestimmt mittels

$$\begin{aligned}(R_\rho)_j &= \sqrt{2\mu_j / (m\omega_\rho^2)} \\ &= \sqrt{\frac{m\omega_z^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 [j_{max}^2 - j^2]^2}{(m\omega_\rho^2)}}\end{aligned}\quad (3.74)$$

den radialen Thomas-Fermi-Radius. Der zur Bestimmung des lokalen chemischen Potentials benötigte Gitterradius j_{max} wird über die Bedingung

$$N = \sum_j N_j \quad (3.75)$$

fixiert, wobei N_j die Teilchenzahl auf dem j -ten Gitterplatz bezeichnet. Diese berechnet sich mittels der Integration über einen Gitterplatz:

$$\begin{aligned} N_j &= \int d^3r |\chi(z)|^2 |\phi_j(\rho)|^2 \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dz \int_0^{(R_\rho)_j} d\rho \rho (\pi\sigma)^{-1/2} \left(e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \right)^2 \frac{\frac{1}{2}m\omega_z^2 \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 [j_{max}^2 - j^2]}{g_{3D}/\sqrt{2}\pi\sigma} \left(1 - \frac{\rho^2}{(R_\rho)_j^2} \right) \\ &= \frac{m\pi^{3/2}\lambda^4\sigma(j^2 - j_{max}^2)^2\omega_z^4}{32\sqrt{2}g_{3D}\omega_\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} N &= \sum_{-j_{max}}^{j_{max}} N_j \\ &= \frac{m\pi^{3/2}\lambda^4\sigma j_{max}(16j_{max}^4 - 1)\omega_z^4}{480\sqrt{2}g_{3D}\omega_\rho^2} \\ &\simeq \frac{16m\pi^{3/2}\lambda^4\sigma j_{max}^5\omega_z^4}{480\sqrt{2}g_{3D}\omega_\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Dabei konnte die Näherung im letzten Schritt erfolgen, weil für typische experimentelle Bedingungen $j_{max} \gg 1$ gilt. Umstellen der obigen Gleichung nach j_{max} liefert:

$$j_{max}^2 = \left(\frac{30\sqrt{2}g_{3D}N\omega_\rho^2}{\pi^{3/2}m\lambda^4\sigma\omega_z^4} \right)^{2/5}. \quad (3.78)$$

In einer kurzen Rechnung kann nachgeprüft werden, dass dieses Ergebnis mit dem von Pedri *et al.* [125] erzielten Resultat

$$j_{max}^2 = \frac{2\hbar\bar{\omega}}{m\omega_z^2(\lambda/2)^2} \left(\frac{15}{8\sqrt{\pi}} N \frac{a}{a_{ho}} \frac{\lambda}{2\sigma} \right)^{2/5} \quad (3.79)$$

identisch ist, wobei $\bar{\omega} = (\omega_z\omega_\rho^2)^{1/3}$ die geometrische Fallenfrequenz und $a_{ho} = \sqrt{\hbar/(m\bar{\omega})}$ die geometrische Oszillatorlänge bezeichnet. Ein Vergleich der Ausdrücke für N_j und N liefert eine Formel für die Teilchenzahl auf dem zentralen Gitterplatz mit $j = 0$:

$$N_{j=0} = \frac{15}{16} \frac{N}{j_{max}}. \quad (3.80)$$

Das Einsetzen dieser Gleichung in den Ausdruck für N_j liefert eine einfache Relation zur der Teilchenzahl auf dem zentralen Gitterplatz:

$$N_j = N_0 \left(1 - \frac{j^2}{j_{max}^2}\right)^2. \quad (3.81)$$

Mit dem über (3.79) erhaltenen j_{max} kann mittels des lokalen Thomas-Fermi-Radius (3.74) und des lokalen chemischen Potentials (3.73) der Radialteil der lokalen Kondensatwellenfunktion (3.71) berechnet werden. Diese wichtigen in [125] angegebenen Resultate stellen die Generalisierung der bekannten Thomas-Fermi-Lösung in einer Magnetfalle unter Berücksichtigung des Einflusses eines eindimensionalen optischen Gitters dar.

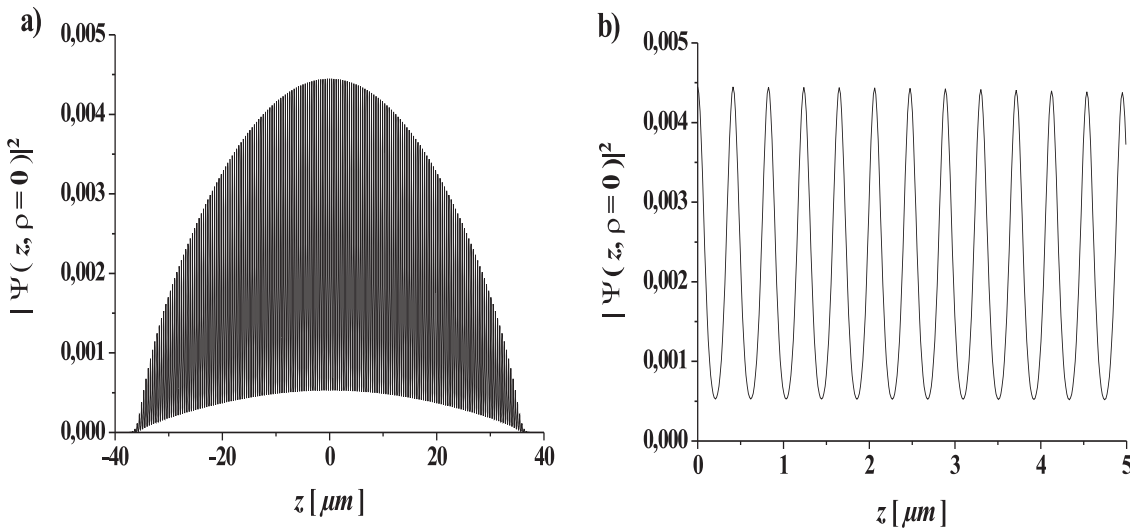


Abbildung 3.10.: Normierte axiale Dichteverteilung des Kondensat-Grundzustandes bestehend aus $5 \cdot 10^4$ Atomen. Die Fallenfrequenzen der Magnetfalle betragen $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ bzw. $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$. Das optische Gitter hat eine Tiefe von $V_G = 5 E_r$. Die Abbildung a) zeigt die volle axiale Breite der Atomwolke und spiegelt die Thomas-Fermi-Form aufgrund des magnetischen Einschlusses wieder. Die Abbildung b) zeigt einen zentralen Ausschnitt des Kondensates und verdeutlicht die durch das Gitter hervorgerufene schnelle Modulation der Dichte.

In Abbildung 3.10 ist das axiale Dichteprofil des Kondensat-Grundzustandes in dem kombinierten Potenzial aus Magnetfalle und eindimensionalen Gitter gezeigt. Für die Bestimmung der Kondensatwellenfunktion wurde die dreidimensionale Gross-Pitaevskii-Gleichung unter der Annahme zylindrischer Symmetrie numerisch gelöst. Die axiale und radiale Fallenfrequenz entsprechen mit $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ bzw. $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ den experimentellen Werten. Ebenso stellen sowohl die Zahl der kondensierten Atome mit $N = 5 \cdot 10^4$ als auch die Gittertiefe mit $V_G = 5 E_r$ typische experimentelle Parameter dar. Die Abbildung spiegelt die Ergebnisse der vorangehenden analytischen Betrachtungen deutlich wieder: Die Dichteverteilung weist eine schnelle Modulation aufgrund des optischen Gitters auf. Diese ist gepaart

mit einer langsamen Veränderung aufgrund des magnetischen Einschlusses. Dieser bewirkt, dass die Einhüllende der Dichteverteilung eine Thomas-Fermi-Form besitzt.

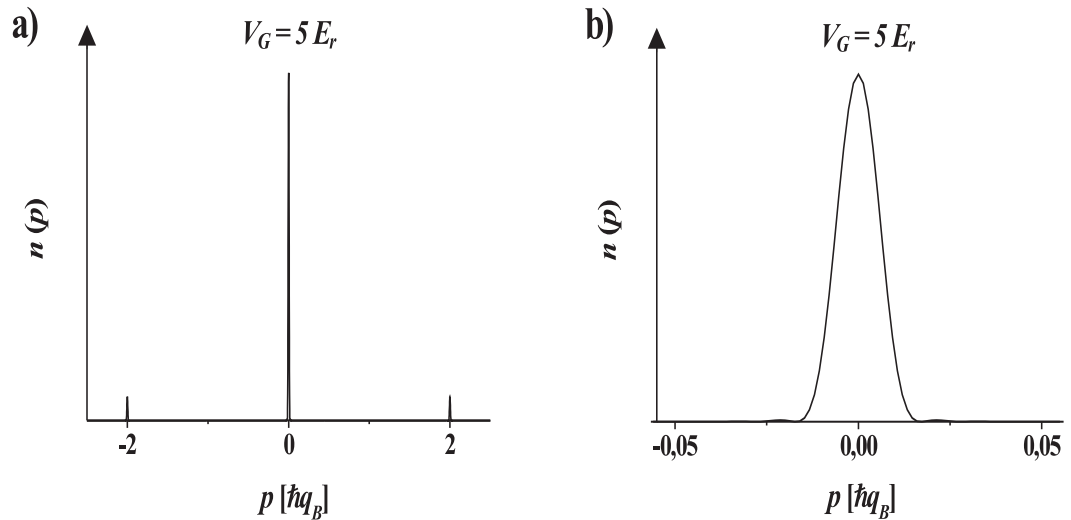


Abbildung 3.11.: Impulsverteilung eines Kondensates im Grundzustand. Die Parameter sind identisch mit denen der Abbildung 3.10. Die Verteilung spaltet in äußerst schmale Impulskomponenten mit dem Abstand $2\hbar q_B$ auf. Abbildung a) zeigt den Teil des Spektrums, der signifikant populiert ist, während Abbildung b) den zentralen Bereich vergrößert darstellt.

Abbildung 3.11 zeigt die axiale Impulsverteilung $n(p_z)$ des Kondensat-Grundzustandes. Diese wurde aus dem numerisch berechneten Grundzustand im Ortsraum $\Psi(\mathbf{r})$ mittels $n(p_z) = |\int d^3r \exp(-i p_z z/\hbar) \Psi(\mathbf{r})|^2$ gewonnen. Die Impulsverteilung ist in einzelne Komponenten mit dem Abstand $2\hbar q_B$ aufgespalten, wobei nur äußerst schmale Bereiche der Brillouinzone besetzt werden. Dieser Umstand verdeutlicht zugleich die herausragende Eignung von Bose-kondensierten Vielteilchensystemen für Experimente mit optischen Gittern. Durch die Integration der Impulsverteilung kann die Population der einzelnen mit l nummerierten Impulskomponenten ermittelt werden. Wie beim Einteilchenproblem nimmt auch hier die Besetzung der $l \neq 0$ -Komponenten mit zunehmender Gittertiefe zu. Dies ist in Abbildung 3.12 verdeutlicht.

Die Besetzungsstärke der Impulskomponenten wird nur in geringem Maße durch die interatomare Wechselwirkung und den harmonischen Einschluss modifiziert. In der Abbildung 3.13 ist diese Besetzung für das wechselwirkende, harmonisch gefangene Gas bei fester Gittertiefe gezeigt. Als Referenz dient die Besetzungswahrscheinlichkeit des Einteilchenproblems ohne harmonischen Einschluss. Die Wechselwirkung verursacht eine Abschirmung des Gitterpotenzials. Damit ist eine reduzierte Modulation der Wellenfunktion im Ortsraum und eine verringerte Besetzung der Impulskomponenten mit $l \neq 0$ verbunden. Dieser Effekt nimmt für größere Teilchenzahlen zu, da für diese die Wechselwirkungsenergie größer ist. Wie in der Abbildung erkennbar ist, bleibt der Effekt jedoch insgesamt klein.

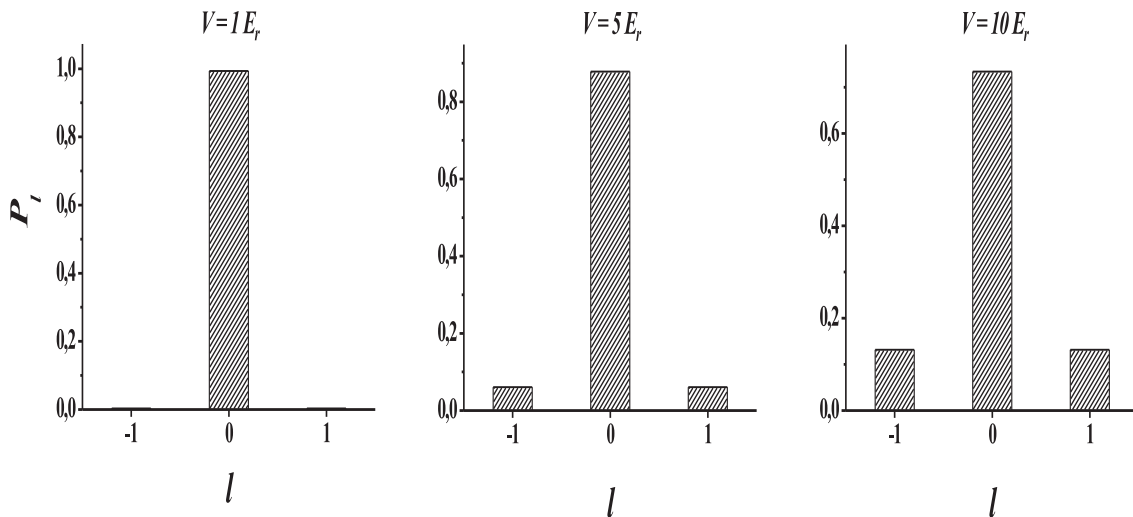


Abbildung 3.12.: Besetzung der einzelnen Impulskomponenten für verschiedene Werte der Gittertiefe. Wie beim Einteilchenproblem nimmt die Besetzung der $l \neq 0$ -Komponenten mit zunehmender Gittertiefe zu. Die Magnetfallenfrequenzen und Teilchenzahl sind identisch mit denen der Abbildung 3.10.

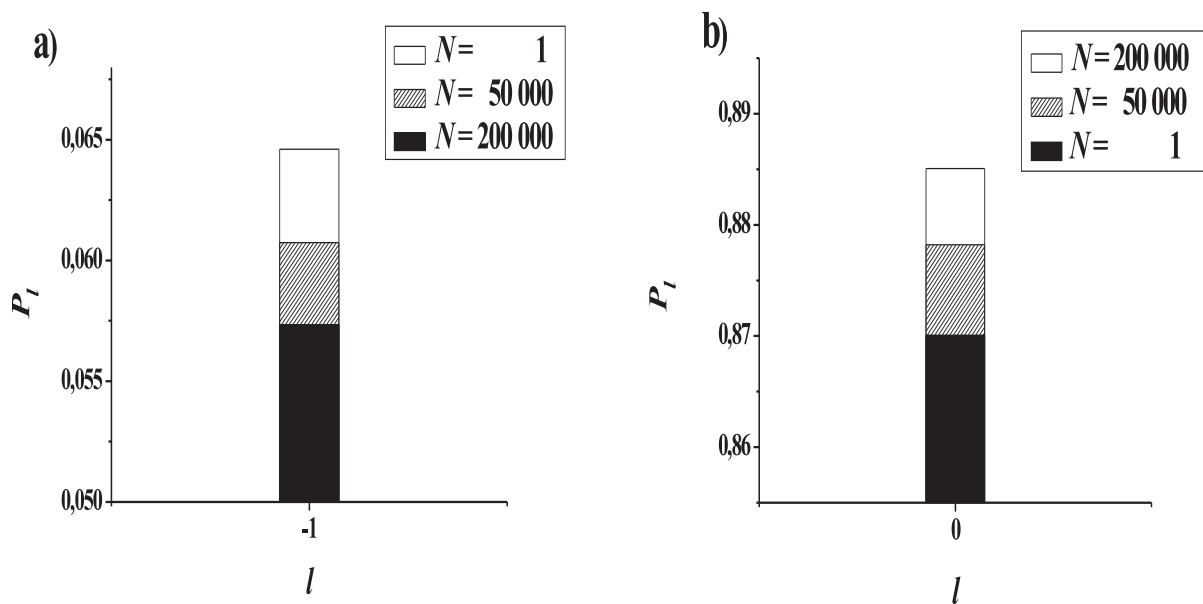


Abbildung 3.13.: Besetzung der Impulskomponenten $l = \pm 1$ (Abbildung a) und $l = 0$ (Abbildung b) für verschiedene Teilchenzahlen. Die Gittertiefe beträgt $V_G = 5 E_r$, die Fallenfrequenzen sind identisch mit denen der Abbildung 3.10. Mit zunehmender Teilchenzahl und Wechselwirkung wird das Gitterpotenzial effektiver abgeschirmt. Der Effekt ist quantitativ nicht sehr ausgeprägt.

3.3. Aufbau eines eindimensionalen optischen Gitters

Dieser Abschnitt erläutert den Aufbau eines eindimensionalen optischen Gitters und dessen Implementierung in die experimentelle Apparatur zur Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten. Zunächst wird auf das verwendete Lasersystem und dessen Eignung zur Erzeugung einer fernresonanten optischen Falle eingegangen. Anschließend erfolgt die Beschreibung des Aufbaus des Strahlengangs und eine Zusammenfassung der relevanten Laserstrahlparameter. Eine zentrale Herausforderung für die Realisierung eines optischen Gitterpotenzials stellt die Bereitstellung eines kontrollierten Schemas zur Justage der Gitterlaserstrahlen dar. Eine solche Justagemöglichkeit konnte mit Hilfe des Aufbaus eines Detektionsweges entlang der Gitterachse bereit gestellt werden.

3.3.1. Das Lasersystem

Zur Erzeugung des optischen Gitterpotenzials wird ein Titan-Saphir-Ringlaser (Firma Tecknoscan, Model TIS-SF-07e) verwendet, welcher mit einem frequenzverdoppelten Neodym-Vanadat-Laser (Firma Coherent, Model Verdi V10) gepumpt wird. Das Verstärkungsprofil des Titan-Saphir-Kristalls erlaubt bei Verwendung entsprechender Resonatorspiegel einen Laserbetrieb im Wellenlängenbereich von $650\text{ nm} - 980\text{ nm}$. Mittels verschiedener frequenzsensitiver Elemente innerhalb des Laserresonators kann die Wellenlänge der anschwingenden Lasermode selektiert werden. Bei allen in dieser Arbeit vorgestellten Experimenten war die Wellenlänge der Laserstrahlung auf 825 nm eingestellt. Die maximale Ausgangsleistung des Lasers bei dieser Wellenlänge beträgt $1,2\text{ W}$.

Der von uns realisierte Aufbau des optischen Gitters nach Abbildung 3.1 beruht auf der Selbstinterferenz des Laserstrahls durch dessen Rückreflektion an einem Endspiegel. Für die Ausbildung einer stabilen Gitterstruktur ist es dabei erforderlich, dass die Kohärenzlänge des Lasers den Gangunterschied am Ort der Atome zwischen dem einlaufenden und dem rückreflektierten Strahl deutlich übertrifft. Durch die im Resonator befindlichen frequenzselektiven Elemente wird die Linienbreite des Lasers auf weniger als ein Megahertz reduziert. Mit der hieraus folgenden Kohärenzlänge von $> 100\text{ m}$ wird diese Bedingung von dem verwendeten Lasersystem erfüllt.

Weiterhin sollten die Raten potenzieller Heizprozesse klein gegenüber der Dauer des Experiments sein, da es anderenfalls zu einer signifikanten Erwärmung der Atome kommt. Als ein möglicher Heizprozess kommt die spontane Streuung von Photonen in Betracht. Aufgrund der deutlichen Verstimmung der Laserfrequenz gegenüber den atomaren Resonanzen ist die Streurrate für die verwendeten Intensitäten vernachlässigbar. Sie beträgt gemäß Gleichung (3.12) für typische experimentelle Bedingungen $\Gamma < 0,05\text{ s}^{-1}$ und ist damit klein im Vergleich zur Verweildauer $t \approx 150\text{ ms}$ der Atome im Gitterpotenzial.

Zum anderen sind Heizprozesse aufgrund eines Amplituden- oder Frequenzrauschens des Lasers möglich [168, 169]. Durch solche Rauschprozesse werden die Fallenfrequenzen der

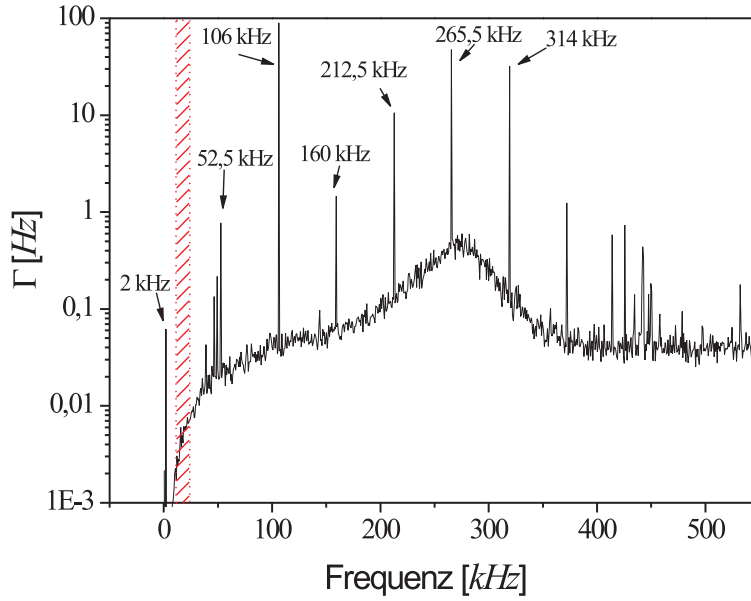


Abbildung 3.14.: Heizrate des Amplitudenrauschens in Abhängigkeit von der Gittertopffrequenz. Der typische Arbeitsbereich ist rot schraffiert gekennzeichnet.

harmonisch genährten Gitterplatzpotenziale zeitabhängig:

$$\omega(t)^2 = \omega^2 [1 + \epsilon(t)]. \quad (3.82)$$

Beträgt die Frequenz der Modulation $\epsilon(t)$ ein ganzzahliges Vielfaches der doppelten Anregungsfrequenz des harmonisch genährten Gittertopfes, so kommt es zu parametrischen Anregungen der Atome in höhere Energieniveaus⁴ [170]. Zur Beurteilung der parametrischen Heizeigenschaften des Lasersystems wurde die durch Amplitudenrauschen verursachte Heizrate bestimmt. Eine genaue Beschreibung dieser Messungen findet sich in [171]. Generell bestimmt die Heizrate die zeitliche Zunahme der mittleren Energie des Systems aufgrund parametrischer Prozesse gemäß [168, 169]

$$\langle E \rangle (t) = \langle E \rangle (0) e^{\Gamma t}. \quad (3.83)$$

Dabei bezeichnet Γ die Heizrate und $\langle E \rangle (t)$ die mittlere Energie zur Zeit t .

Abbildung 3.14 zeigt die durch das Amplitudenrauschen des Lasers bedingte Heizrate in Abhängigkeit von der Fallenfrequenz. Es ist ersichtlich, dass die Heizrate mit Ausnahme einiger scharfer Resonanzen im Sub-Hertz-Bereich liegt. Für Gitterpotenziale, deren Fallenfrequenzen nicht mit diesen Resonanzen zusammenfallen, stellt das Amplitudenrauschen des Lasers bei typischen Verweilzeiten der Atome im Gitterpotenzial von einigen 150 ms keine signifikante Heizquelle dar. Der Bereich der typischerweise vorliegenden Fallenfrequenzen des optischen Gitters ist in der Abbildung rot markiert.

⁴Da die Störung $\epsilon(t)$ die ursprüngliche Symmetrie des Hamiltonians nicht bricht, kann es nur zu Anregungen in Niveaus mit identischer Parität kommen.

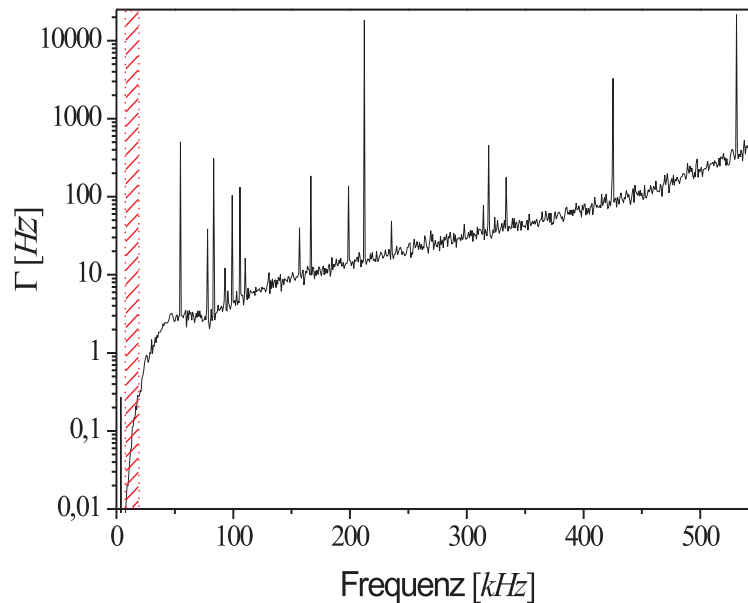


Abbildung 3.15.: Heizrate des Frequenzrauschens in Abhängigkeit von der Gittertopffrequenz. Der typische Arbeitsbereich ist rot schraffiert.

Eine weitere potenzielle Heizquelle stellt ein mögliches Frequenzrauschen des Lasers dar. Hierdurch kann es einerseits zu parametrischen Heizprozessen aufgrund einer Modulation der Fallenfrequenz gemäß Gleichung (3.82) kommen. Andererseits verursacht ein Frequenzrauschen auch einen räumlichen Versatz der Gittertöpfe, da durch den rückreflektierenden Spiegel ein Knoten der Stehwelle festgelegt ist [168, 169]. Eine solche Modulation der Gittertopfpositionen stellt ebenfalls einen Heizprozess dar⁵. Die entsprechende Heizrate ist in der Abbildung 3.15 in Abhängigkeit von der Fallenfrequenz dargestellt. Erneut sei für eine genaue Beschreibung der Messung auf [171] verwiesen. Die ermittelte Heizrate weist wie beim Amplitudenrauschen scharfe Resonanzen auf, ist aber für typische experimentelle Bedingungen klein gegenüber der Verweilzeit der Atome im Gitterpotenzial.

Insgesamt belegen die durchgeführten Untersuchungen die Eignung des Lasersystems zur Erzeugung eines stabilen optischen Gitters. Für Experimente in sehr tiefen Gitterpotenzialen stellen die betrachteten Heizprozesse jedoch eine Limitierung dar. Da zukünftig auch solche Untersuchungen durchgeführt werden sollen, wurde eine aktive Frequenz- und Intensitätsstabilisierung für den Gitterlaser aufgebaut. Eine umfassende Charakterisierung des stabilisierten Lasersystems wurde bisher jedoch noch nicht vorgenommen.

⁵Da durch den Versatz des Gitterpotenzials die ursprüngliche Symmetrie des Hamiltonians gebrochen wird, treten in diesem Fall Anregungen auf, wenn die Frequenz der Modulation gleich der einfachen Fallenfrequenz ist.

Zugang für den Gitterstrahl zu ermöglichen, war es erforderlich, zwei MOT-Spiegel sowie ein Verzögerungsplättchen mit motorisierten Halterungen zu versehen. So können während des evaporativen Kühlens die optischen Elemente der MOT entfernt und so der Weg für den Gitterlaserstrahl frei gegeben werden. Beim Aufbau der motorisierten Halterungen wurden repositionierende Klappspiegelhalter (Firma New Focus, Model 9891) sowie Modellbau Servo-Motoren (Firma Conrad, Modell S-4251) verwendet. Die Genauigkeit der Repositionierung war so gut, dass während eines typischen Messtags keinerlei Justagen am MOT-Strahlengang nötig waren. Da der Rückstellmechanismus der Spiegelhalter jedoch die neu aufgebaute Frequenzstabilisierung negativ beeinflusst, wurden diese inzwischen durch eine kommerzielle Komplettlösung (Firma New Focus, Model 8892-K) ersetzt.

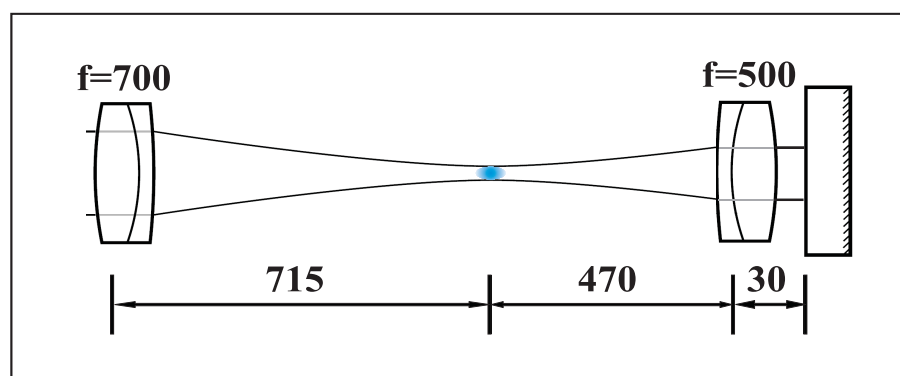


Abbildung 3.17.: Schematische Darstellung der Fokussierung des optischen Gitters. Die Brennweiten der verwendeten Achromaten und deren Abstände sind angegeben. Der Punkt markiert die Position der Atome.

Zur Erzeugung von tiefen Potenzialen ist aufgrund der begrenzten Laserleistung eine Fokussierung des Gitterstrahls erforderlich. Dabei sollten die Intensitäten des einlaufenden und rückreflektierten Strahls am Ort der Atome möglichst identisch sein, um die Ausbildung einer Stehwelle mit maximaler Modulation zu erreichen. Dies wird erreicht, indem der einlaufende Strahl so reflektiert wird, dass eine Überlagerung zwischen einlaufendem und reflektiertem Strahl entsteht. Ferner sollte der Strahlfokus im Zentrum des Kondensats liegen. Dadurch wird zum einen der Gradient des optischen Potenzials entlang der atomaren Wolke minimiert. Zum anderen fallen die Zentren des optischen und des magnetischen Potenzials zusammen. Abbildung 3.17 zeigt schematisch, wie diese Anforderungen mit Hilfe zweier Achromaten nahezu optimal erfüllt werden konnten. In Tabelle 3.1 sind die relevanten Parameter des einlaufenden und rückreflektierten Strahls zusammengefasst. Da das Laserlicht mittels einer polarisationserhaltenen Faser zum Experiment geführt wird, lassen sich die Strahlen in guter Näherung als gaußsche Strahlen beschreiben. Um die in der Tabelle 3.1 angegebenen Werte zu erhalten, wurde zunächst der Radius des kollimierten Gitterstrahls hinter der Auskopplung aus der optischen Faser gemessen. Die in der Tabelle zusammengestellten Werte ergeben sich durch die Berechnung der Strahlpropagation gemäß der gaußschen Strahloptik und stimmen

gut mit direkten Messungen der Strahlradien überein. Anhand der Tabelle wird ersichtlich, dass einlaufender und rückreflektierter Strahl nahezu identische Intensitätsprofile aufweisen und so die Realisierung eines optischen Gitters mit höchstmöglicher Modulation erlauben. Die Strahltaillen liegen darüber hinaus um weniger als eine Rayleighlänge vom Zentrum der Magnetfalle entfernt.

	einlaufender Strahl	rückreflektierter Strahl
Strahlradius am Ort der Atome	$137 \mu m$	$139 \mu m$
Strahlwaist	$131 \mu m$	$131 \mu m$
Waistposition bezüglich Position der Atome	$+ 21 mm$	$+ 23 mm$
Rayleighlänge	$65 mm$	$65 mm$

Tabelle 3.1.: Relevante Parameter der Gitterstrahlen.

Unter Ausnutzung der Formeln (3.11), (3.12) und (3.17) können mit den in Tabelle 3.1 angegebenen Werten die Gittertiefe, die Streurrate und der dreidimensionale Einschluss des optischen Gitters berechnet werden. Die in Tabelle 3.2 zusammengefassten Größen beziehen sich auf eine Gitterlaserleistung von $P = 10 mW$ und repräsentieren typische experimentelle Bedingungen.

Die Lichtleistung des Gitterstrahls wird über einen akusto-optischen Modulator (AOM) gesteuert und während der Messung mit einer Photodiode aufgezeichnet. Dazu wird gemäß Abbildung 3.16 ein geringer Teil der Leistung ($\approx 0,1 \%$) auf eine geeichte Photodiode mit einer Bandbreite von $2 MHz$ gelenkt. Auf dieser Photodiode können sowohl die Laserleistung als auch deren zeitliche Veränderung gemessen werden. Mögliche Leistungsvariationen zwischen verschiedenen Durchläufen des Experimentes, z. B. aufgrund einer Abweichung der Lichteinkopplung in die optische Faser, werden somit detektiert und können manuell ausgeglichen werden. Auf diese Weise können langsame Schwankungen in der Lichtleistung von mehr als 5% ausgeschlossen werden. Schnelle Leistungsschwankungen, die während der Dauer einer einzelnen Messung auftreten, werden durch Leistungsfluktuationen des Lasers oder des AOMs verursacht und haben eine noch kleinere Amplitude. Somit können sie zwar für parametrische Heizprozesse von Relevanz sein, tragen aber zu keiner wesentlichen Variation der Gittertiefe bei. Um langsame Leistungsschwankungen nicht mehr manuell ausgleichen zu müssen, wurde inzwischen eine aktive Stabilisierung der Gitterstrahlleistung aufgebaut.

Gittertiefe am Ort der Atome	$V_G = 6,4 E_r$
Streurrate am Ort der Atome	$\Gamma = 0,4 Hz$
radiale Fallenfrequenz	$\omega_\rho = 2\pi \times 23 Hz$
axiale Fallenfrequenz	$\omega_z = 2\pi \times 0,03 Hz$

Tabelle 3.2.: Berechnete Parameter des optischen Gitters für eine Leistung von $10 mW$.

3.3.3. Justage des Gitterstrahls

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, dass bei der optimalen Konfiguration des optischen Gitters der einlaufende und rückreflektierte Strahl perfekt überlagert sind und sich die Strahlfoki am Ort der Atome befinden. Während die Position der Foki in axialer Richtung durch die Abstände der Achromaten festgelegt ist, muss darüber hinaus eine Methodik zur Verfügung stehen, mit der die Strahlage kontrolliert eingestellt werden kann. Mögliche Fehljustagen der Strahlage, z. B. ein Versatz zwischen dem Mittelpunkt des Gitterlaserstrahls und dem Zentrum der Atomwolke, führen zu einer Verringerung der Gittertiefe am Ort der Atome oder können verhindern, dass die Atome den Grundzustand besetzen. Ferner führt eine mögliche Verkippung des optischen Gitters gegenüber den Äquipotenzialflächen des Schwerfelds zum Auftreten von Potenzialgradienten und zu einer Dephasierung der Kondensatwellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen.

Mit dem erfolgten Aufbau eines Detektionsstrahlengangs entlang der axialen Richtung der Magnetfalle wurde ein Werkzeug geschaffen, das die kontrollierte Justage der Gitterstrahlage erlaubt. Wie in der Abbildung 3.16 ersichtlich ist, wird der Schattenwurf der Atome mit der gleichen CCD-Kamera abgebildet, die auch bei der Detektion entlang der transversalen Richtung zum Einsatz kommt. Die Eigenschaften dieses Detektionssystems sind im Anhang beschrieben.

Da der Gitterstrahl mit dem axialen Detektionsstrahl überlagert werden kann, steht letzterer als Referenz für die Justage der Gitterstrahlage zur Verfügung. Dazu werden mit dem Detektionsstrahl zunächst Schattenwurfaufnahmen der gefangenen Atome genommen. Mit Hilfe dieser Aufnahmen wird der Detektionsstrahl so ausgerichtet, dass er zum einen keinerlei Verkippung zum Schwerfeld aufweist und dass sich zum anderen der Schattenwurf der Atome in seinem Zentrum befindet. Der einlaufende Gitterstrahl wird nun so justiert, dass die auf der CCD-Kamera detektierte Position der Atome in dessen Zentrum liegt. Außerdem wird mittels einer weiteren CCD-Kamera (Firma Coherent, Modell Cohu-4800; später: Firma IDS-Imaging Development Systems, Model UI-1210-MM) die perfekte Überlagerung des Gitterstrahles mit dem Detektionsstrahl unmittelbar am Ort des überlagernden Strahlteilerwürfels eingestellt. Auf diese Weise kann eine optimale Ausrichtung des einlaufenden Gitterstrahls auf das Zentrum der Magnetfalle durchgeführt werden. Beispielhafte Aufnahmen der beiden CCD-Kameras sind zur Veranschaulichung dieser Justageprozedur in Abbildung 3.18 gezeigt.

Die Justage des rücklaufenden Gitterstrahls erfolgt mit Hilfe der optischen Faser, die den einlaufenden Strahl zum Experiment führt. Der rücklaufende Strahl wird hierfür mittels des Endspiegels bestmöglich in die Faser zurückgekoppelt. Die Fasereinkopplung wird dabei mit Hilfe eines Glasplättchens und einer Photodiode optimiert. Die Photodiode detektiert den geringen Anteil des vom Glasplättchen reflektierten Laserlichts. Diese geringe Leistung ist jedoch für eine Optimierung der Lichteinkopplung in die Faser völlig ausreichend. Eine optimale Fasereinkopplung bedeutet auch eine bestmögliche Überlagerung von einlaufendem und rückreflektiertem Gitterstrahl.

Das angewandte Justageschema basiert auf der Ausrichtung der Gitterstrahlen mit Hilfe des axialen Detektionsstrahls. Eine andere Möglichkeit zur Gitterstrahljustage besteht in der

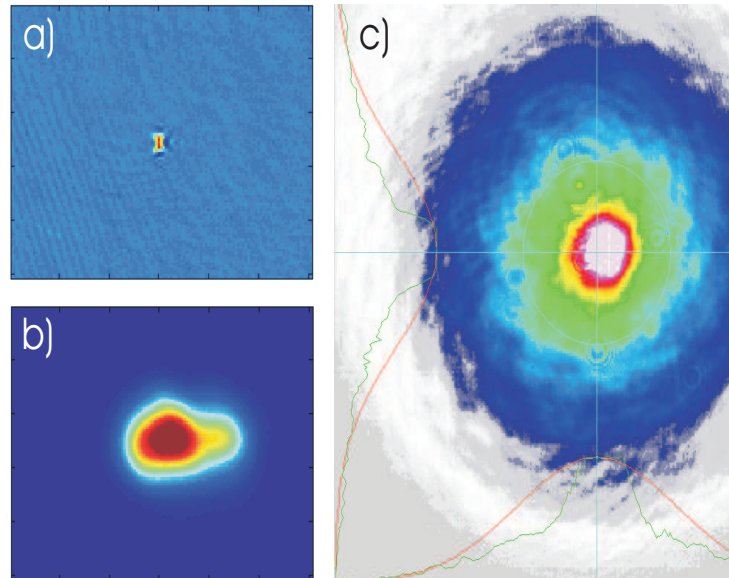


Abbildung 3.18.: Aufnahmen zur Gitterstrahljustage. a) zeigt ein axial aufgenommenes Absorptionsbild der Atomwolke in der Magnetfalle. In b) ist eine mit der gleichen Kamera detektierte Abbildung des Gitterstrahls gezeigt. Dieser ist auf die Position der Atome ausgerichtet. In c) ist schließlich die Überlagerung von Detektions- und Gitterstrahl auf der zweiten CCD-Kamera verdeutlicht. Der Gitterstrahl liegt im gesättigten Bereich.

Ausnutzung der direkten Auswirkungen des optischen Potenzials auf die Atome. In vielen Gruppen wird dabei ein Verfahren eingesetzt, bei dem der einlaufende Gitterstrahl anhand des erzeugten Versatzes der Atomposition gegenüber dem Magnetfallenzentrum ausgerichtet wird [32, 172]. Dieser Versatz verschwindet, wenn das Zentrum des optischen Potenzials mit dem Magnetfallenzentrum überlagert ist. Dieses Justageschema ist aufgrund des besonders starken radialen Einschlusses, den die verwendete Magnetfalle erzeugt, nicht effektiv einsetzbar. So war auch bei hohen Laserleistungen kein messbarer Versatz der Atomwolke gegenüber dem Magnetfallenzentrum festzustellen. Für zukünftige Experimente ist jedoch eine deutliche radiale Relaxierung der Magnetfalle geplant. Unter dieser Bedingung sollte die Justage des einlaufenden Gitterstrahles direkt anhand der Minimierung des Versatzes der Atomposition erfolgen. Die Justage des rückreflektierten Gitterstrahls kann wie bisher erfolgen.

3.4. Experimente zur Charakterisierung des optischen Gitters

Um das optische Gitter als robustes Werkzeug zur Manipulation von ultra-kalten Bose-Gasen einsetzen zu können, wurden dessen Eigenschaften umfassend charakterisiert. So ist es für die Durchführung von quantitativen Messungen unerlässlich, die Potenzieltiefe des optischen Gitters genau zu bestimmen. Da das Bose-Einstein-Kondensat in unserem Experiment in

der Magnetfalle erzeugt wird, muss es adiabatisch in den Grundzustand des kombinierten Potentials transferiert werden.

Zunächst werden unsere Experimente zur Bestimmung der Potenzialtiefe beschrieben. Anschließend werden die durchgeführten Untersuchungen zum adiabatischen Transfer des Ensembles in den Vielteilchengrundzustand vorgestellt.

3.4.1. Bestimmung der Potenzialtiefe

Mit Hilfe von Formel (3.11) kann bei bekannter Laserintensität und Wellenlänge die Tiefe des optischen Gitterpotentials berechnet werden. Die im Experiment realisierte Falltiefe erreicht jedoch im Allgemeinen aufgrund einer Vielzahl möglicher Einflüsse nicht diesen theoretisch ermittelten Wert. So besitzen beispielsweise der einlaufende und der rückreflektierte Strahl aufgrund von Leistungsverlusten an den optischen Elementen wie z. B. der Glaszelle nicht die gleiche Intensität. Außerdem lässt sich auch mit dem beschriebenen Justageschema nur eine beschränkte Präzision bei der Strahlausrichtung erreichen. Derartige Einflüsse führen zu einer Verminderung der Modulationstiefe des Potentials gegenüber dessen theoretischem Wert. Zur Charakterisierung der Eigenschaften des optischen Gitters ist es daher erforderlich, die tatsächlich erreichte Potenzialtiefe mit experimentellen Methoden zu bestimmen. Eine solche Messung liefert wichtige Information darüber, welche Potenzialtiefe mit dem realisierten Gitteraufbau und dem verwendeten Justageschema in Abhängigkeit von der Lichtleistung typischerweise erreicht wird.

Dabei stehen für die experimentelle Bestimmung der Gittertiefe eine Reihe von Methoden zur Verfügung [26]. So liefert eine Messung des Impulsspektrums des Gittergases im Grundzustand eine direkte Aussage über die Potenzialtiefe [125]. Diese Methode setzt den adiabatischen Transfer des Kondensates in den Grundzustand des optischen Gitterpotentials voraus und wird im nächsten Abschnitt vorgestellt. Eine weitere Möglichkeit stellt die Messung der Gittertiefe in einem beschleunigten optischen Gitter dar. In diesem können die Atome am Rand der Brillouinzone aus dem niedrigsten Band in höhere Bänder tunneln [29, 30]. Da die Rate dieser so genannten Landau-Zener-Tunnelprozesse [28] von der Bandlücke abhängt, stellt ihre Messung eine unmittelbare Bestimmung der Gittertiefe dar. Grundsätzlich sollte bei den genannten Messungen die abschirmende Wirkung der nichtlinearen Wechselwirkung auf das Gitterpotential beachtet werden, da durch sie das Gitter effektiv flacher erscheint.

In unserem Experiment hingegen wird die im Folgenden beschriebene Methode [134, 173] zur Bestimmung der Gittertiefe eingesetzt, welche deren direkten Einfluss auf die Bandstruktur ausnutzt und als besonders robust gilt. Dieser Einfluss ist in der Abbildung 3.3 verdeutlicht.

Zunächst wird ein Bose-Einstein-Kondensat in der Magnetfalle erzeugt und anschließend für $2,32 \text{ ms}$ frei expandiert. Während dieser Zeit fällt das Kondensat eine Strecke von $20 \mu\text{m}$ im Schwerfeld und die atomare Dichte nimmt aufgrund der Expansion deutlich ab. Mit dieser Abnahme der Dichte ist eine deutliche Reduktion der interatomaren Wechselwirkung verbunden. Abbildung 3.19 zeigt die numerisch berechnete Entwicklung der Wechselwirkungsenergie des Kondensates während der freien Expansion. Diese ist im Rahmen der Gross-Pitaevskii-

Beschreibung durch

$$E_{ww}[\Psi(\mathbf{r}, t)] = \int d^3r \frac{g}{2} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^4 \quad (3.84)$$

gegeben, wobei $\Psi(\mathbf{r}, t)$ die Kondensatwellenfunktion zur Zeit t darstellt.

Da die Breite des Impulsspektrums eines Bose-Einstein-Kondensates äußerst schmal ist und Wechselwirkungseffekte nach der Expansion vernachlässigbar sind, kann das Kondensat näherungsweise als ebene Welle mit Impuls $p = 0$ aufgefasst werden [134]. Der Zustand dieser ebenen Welle zur Zeit $t = 0$ sei $|\Psi(t = 0)\rangle \equiv |p = 0\rangle$.

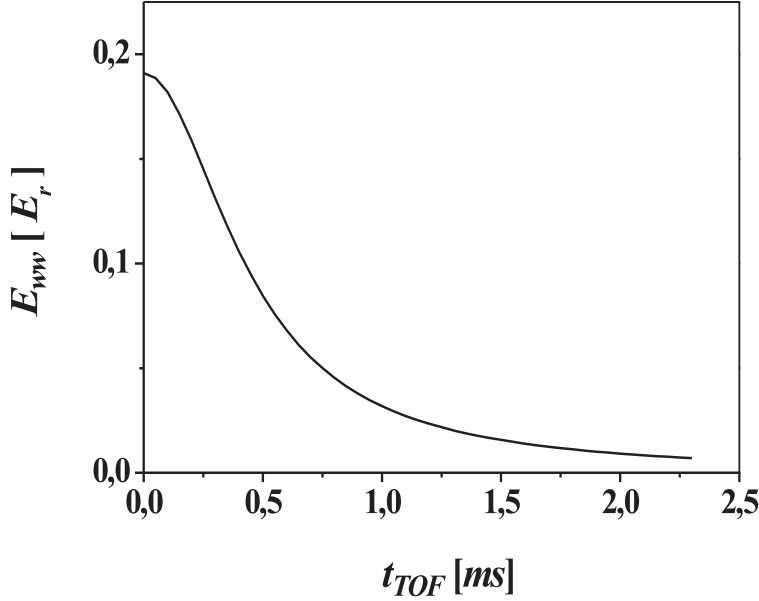


Abbildung 3.19.: Entwicklung der Wechselwirkungsenergie während der frühen Phase der freien Expansion.

Der Gitterlaser wird nun bei bekannter Leistung mittels des AOMs für eine variable Zeitdauer τ eingeschaltet. Um die Zeitentwicklung des Kondensatzustands im optischen Gitterpotenzial zu erhalten, wird dieser in der Basis der Energieeigenfunktionen des Gitterpotenzials entwickelt. Dies sind die Bloch-Zustände $|\phi_q^{(n)}\rangle$:

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_{q=0}^{(n)} | 0 \rangle |\phi_{q=0}^{(n)}\rangle. \quad (3.85)$$

In dieser Entwicklung wurden nur solche Bloch-Eigenzustände berücksichtigt, deren Quasi-Impuls mit dem Impuls der ebenen Welle identisch ist. Die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion im Gitterpotenzial kann mittels (3.85) unmittelbar als

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_{q=0}^{(n)} | 0 \rangle e^{-iE_{q=0}^{(n)} t/\hbar} |\phi_{q=0}^{(n)}\rangle \quad (3.86)$$

geschrieben werden. Nach der Zeitentwicklung im Gitterpotenzial werden die Atome für weitere 15 ms frei fallengelassen und schließlich mit Absorptionenaufnahmen detektiert. Durch

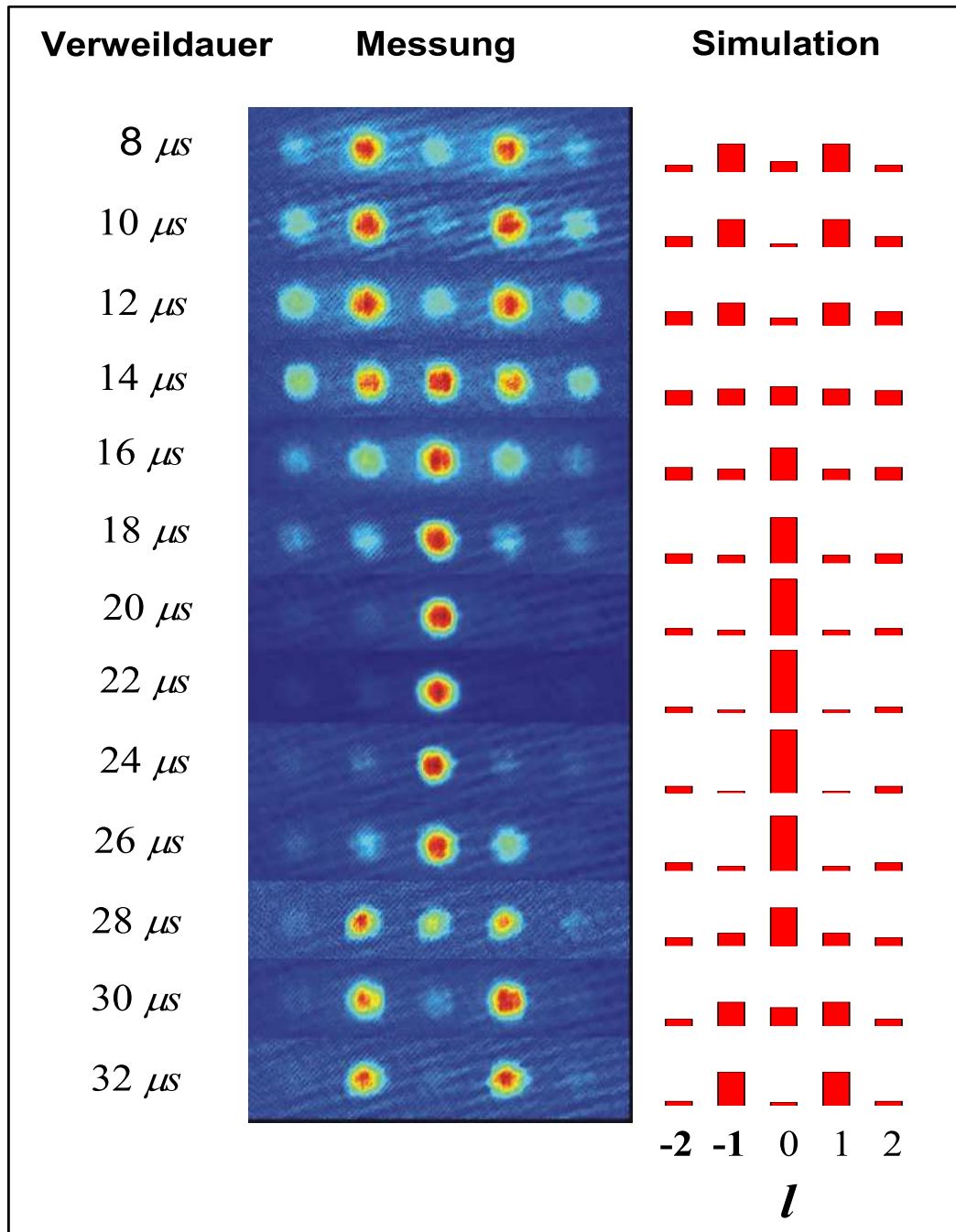


Abbildung 3.20.: Absorptionsbilder der Atome nach $17,3 \text{ ms}$ TOF für eine variable Verweilzeit im optischen Gitterpotenzial. Die Laserleistung beträgt für alle Bilder 50 mW . Die Oszillation in der Besetzung der einzelnen Impulskomponenten in Abhängigkeit von der Verweilzeit im Gitterpotenzial ist deutlich erkennbar. Rechts sind die Ergebnisse einer numerischen Berechnung der Besetzung der Impulskomponenten gezeigt.

den Einfluss des optischen Gitters spaltet das Impulsspektrum des Kondensates in mehrere Komponenten auf, die um $2\hbar k$ separiert sind. Wie anhand der Absorptionaufnahmen in Abbildung 3.20 ersichtlich ist, trennen sich diese Impulskomponenten während der freien Expansion. Die Besetzung der einzelnen Impulskomponenten kann ermittelt werden, indem die Bloch-Zustände mit Quasi-Impuls $q = 0$ nach ebenen Wellen mit Impulsen $2l\hbar k$ entwickelt werden

$$|\phi_{q=0}^{(n)}\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_{q=0}^{(n)}(l) |2l\hbar k\rangle. \quad (3.87)$$

Dabei ist $a_{q=0}^{(n)}(l) = \langle 2l\hbar k | \phi_{q=0}^{(n)} \rangle$. Einsetzen von (3.87) in (3.86) liefert schließlich die Entwicklung des Kondensatzustands nach ebenen Wellen nach abgeschlossener Evolution im optischen Gitterpotenzial

$$|\Psi(t = \tau)\rangle = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{q=0}^{(n)*}(0) a_{q=0}^{(n)}(l) e^{-iE_{q=0}^{(n)}\tau/\hbar} |2l\hbar k\rangle \quad (3.88)$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} b_{q=0}(l) |2l\hbar k\rangle. \quad (3.89)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind durch

$$b_{q=0}(l) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{q=0}^{(n)*}(0) a_{q=0}^{(n)}(l) e^{-iE_{q=0}^{(n)}\tau/\hbar} \quad (3.90)$$

gegeben. Ihre Betragsquadrate geben die Besetzung der einzelnen Impulskomponenten nach dem Time-of-Flight an. Dabei ist zu beachten, dass die Projektion des geraden Kondensatausgangszustandes auf die ungeraden Bloch-Zustände null ergibt. Für die Besetzung der nullten und ersten Impulskomponente folgt unter Berücksichtigung der Beiträge von den niederenergetischen Bändern

$$|b(0)|^2 = |a^{(1)}(0)|^4 + |a^{(3)}(0)|^4 + |a^{(1)}(0)|^2 |a^{(3)}(0)|^2 (e^{-i(E^{(1)}-E^{(3)})\tau/\hbar} + c.c.), \quad (3.91)$$

$$|b(1)|^2 = |a^{(1)}(0)|^2 |a^{(1)}(1)|^2 + |a^{(3)}(0)|^2 |a^{(3)}(1)|^2 + (a^{*(1)}(0) a^{(1)}(1) a^{(3)}(0) a^{*(3)}(1) e^{-i(E^{(1)}-E^{(3)})\tau/\hbar} + c.c.). \quad (3.92)$$

Dabei wurde zur Übersichtlichkeit die Spezifizierung $q = 0$ für den Quasi-Impuls unterdrückt. Anhand von (3.91) und (3.92) ist erkennbar, dass die Besetzung der Impulskomponenten als Funktion der Verweilzeit τ der Atome im Gitterpotenzial ein oszillierendes Verhalten mit der Periodendauer

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_{q=0}^{(3)} - E_{q=0}^{(1)}} \quad (3.93)$$

zeigt. Da die Energiedifferenz zwischen den Energiebändern durch die Gittertiefe bestimmt ist, stellt eine Messung der Periodendauer der Besetzungsozillationen eine unmittelbare Messung der Gittertiefe dar.

Abbildung 3.20 zeigt Absorptionaufnahmen der Atome nach einer Gesamtdauer der Expansion von 17,3 ms für verschiedene Verweilzeiten im optischen Gitterpotenzial bei einer

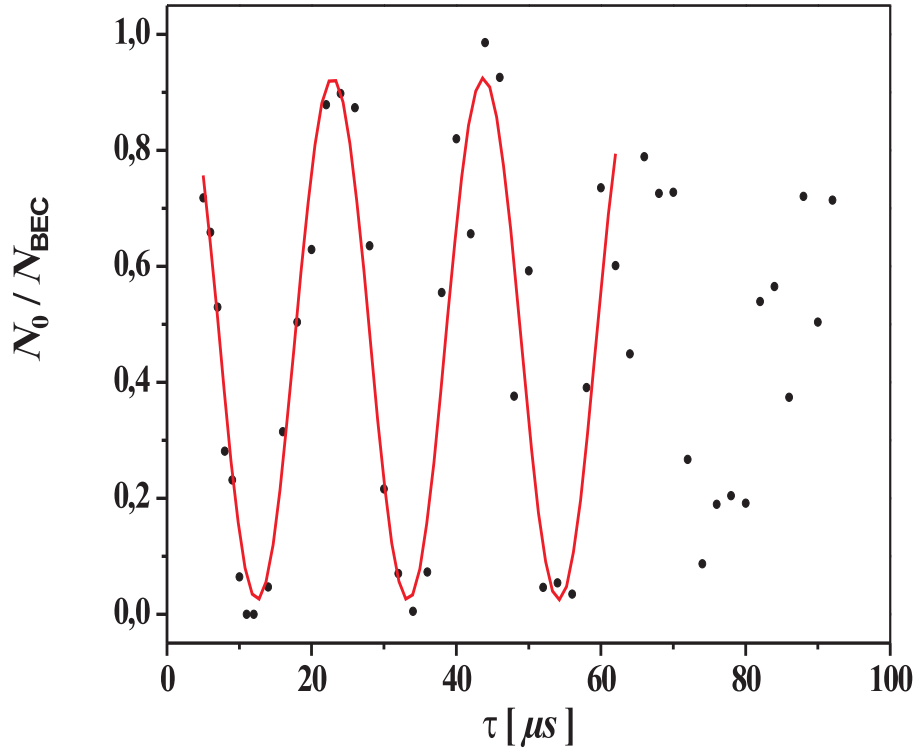


Abbildung 3.21.: Anteil der Atome in der $l = 0$ Impulskomponente in Abhängigkeit von der Verweilzeit im Gitterpotenzial für eine Laserleistung von 50 mW .

festen Laserleistung von 50 mW . Die Oszillationen in der Besetzung der einzelnen Impulskomponenten ist in diesen Bildern deutlich erkennbar.

Die Abbildungen 3.21 und 3.22 zeigen die ermittelten Besetzungen der Impulskomponenten $l = 1$ bzw. $l = 0$ in Abhängigkeit von der Verweilzeit im optischen Potenzial. Dabei ist in beiden Abbildungen die jeweilige Besetzung auf die Gesamtzahl der kondensierten Atome normiert. Gemäß Gleichung (3.91) und (3.92) sind die Besetzungen mit einer Kosinus-Funktion gefittet. Dieser Fit liefert für die Besetzungsozillation der $l = 0$ Komponente eine Periodendauer von $T_0 = 20,85 \mu\text{s}$ und für die $l = 1$ Komponente eine Periodendauer von $T_1 = 21,25 \mu\text{s}$. Aus dem Mittelwert der beiden Periodendauern $\bar{T} = 21,05 \mu\text{s}$ ergibt sich gemäß der Gleichung (3.93) eine Energiedifferenz zwischen dem ersten und dem dritten Band von

$$E_{q=0}^{(3)} - E_{q=0}^{(1)} = 14,06 E_r. \quad (3.94)$$

In Abbildung 3.23 sind die Energien der niedrigsten Bloch-Zustände für $q = 0$ als Funktion der Potenzialtiefe dargestellt. Eine Energiedifferenz zwischen dem ersten und dem dritten Band von $14,06 E_r$ liegt bei einer Gittertiefe von $V_G = 21,6 E_r$ vor.

Die auf diese Weise experimentell bestimmte Gittertiefe ist mit der theoretisch berechneten zu vergleichen. Für eine Laserleistung von 50 mW liefert die Formel (3.11) unter Berücksichtigung der in Tabelle 3.1 zusammengefassten Gitterstrahlparameter eine Gittertiefe von $31,0 E_r$. Damit erreicht die experimentell bestimmte Gittertiefe 70% des berechneten Wertes. Andere Gruppen haben eine vergleichbare Abweichung berichtet [29].

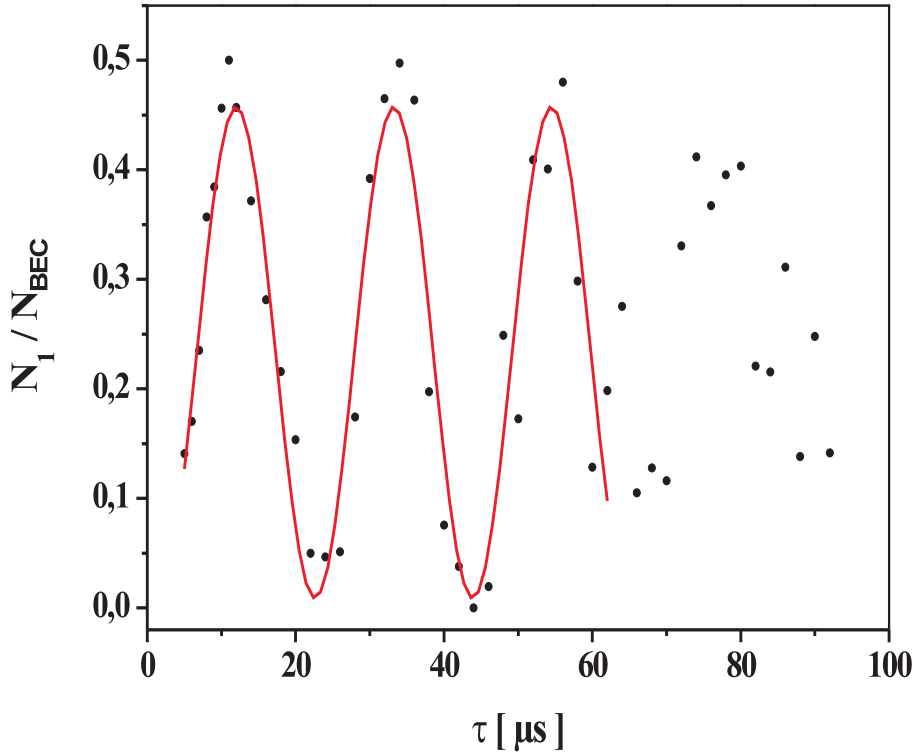


Abbildung 3.22.: Anteil der Atome in der $l = 1$ Impulskomponente in Abhängigkeit von der Verweilzeit im Gitterpotenzial für eine Laserleistung von 50 mW .

Abbildung 3.24 zeigt die gemessene Besetzungsozillation der Impulskomponente $l = 0$ im Vergleich mit einer numerischen Berechnung. Um Letztere zu erhalten, wird der Grundzustand eines Bose-Einstein-Kondensates bestehend aus $N = 10^5$ Atomen in einer harmonischen Falle mit den im Experiment vorliegenden Magnetfallenfrequenzen berechnet. Dieser Zustand wird gemäß der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung für 2 ms ohne externen Potenzialterm propagiert. Anschließend wird die Zeitentwicklung in Gegenwart eines Gitterpotenzials mit einer Tiefe von $21,6 E_r$ fortgesetzt und die Besetzung der Impulskomponenten als Funktion der Zeit berechnet. Das Ergebnis zeigt, dass in der Zeitabhängigkeit der Besetzung der nullten Impulskomponente eine Kosinus-förmige Oszillation dominierend ist. Somit ist der entsprechende Fit zur Bestimmung der Gittertiefe in erster Näherung gerechtfertigt. Abweichungen von der einfachen Kosinus-Form rühren von Beiträgen höherer Energiebänder her und werden mit zunehmender Gittertiefe relevanter.

3.4.2. Besetzung des Kondensatgrundzustandes im Gitterpotenzial

Den Ausgangspunkt für viele Experimente stellt der Grundzustand des Vielteilchensystems im überlagerten Potenzial des optischen Gitters und der Magnetfalle dar. Zur Präparation wird zunächst ein Bose-Einstein-Kondensat in der Magnetfalle erzeugt und anschließend das optische Potenzial adiabatisch erhöht. Dabei ist es für eine Besetzung des Grundzustandes ei-

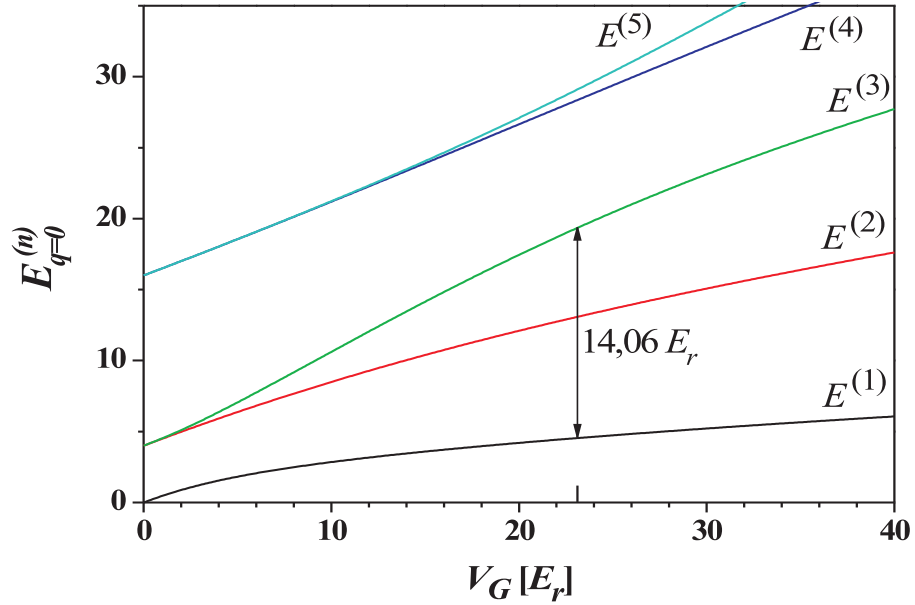


Abbildung 3.23.: Energien der niedrigsten Bloch-Zustände für Quasi-Impuls $q = 0$. Eine Energiedifferenz zwischen dem dritten und dem ersten Band von $14,06 E_r$ ergibt sich bei einer Gittertiefe von $21,6 E_r$.

nerseits von Bedeutung, dass sich die Atome im niedrigsten Bloch-Band mit einem um $q = 0$ konzentrierten Quasi-Impuls befinden. Andererseits muss es zur Anpassung der atomaren Dichteverteilung kommen, die die Energie des Gesamtsystems minimiert. Für den in dieser Arbeit betrachteten Fall schwacher interatomarer Wechselwirkung wurde die Grundzustandsdichteverteilung in Abschnitt 3.2.3 ausführlich besprochen. Für eine erfolgreiche Besetzung des Vielteilchengrundzustands ist die Erfüllung beider Kriterien notwendig, wobei sich hierfür jeweils unterschiedliche Anforderungen an die experimentelle Prozedur ableiten.

Mit der Erhöhung des Gitterpotenzials ist eine zeitliche Änderung des Hamiltonians verbunden. Um hierbei Einteilchenanregungen in höhere Eigenzustände zu vermeiden, muss die Erhöhung des Potenzials so langsam erfolgen, dass

$$|\langle i, q | \partial_t H | 1, q \rangle| \ll \Delta E^2(q, t) / \hbar \quad (3.95)$$

erfüllt ist [26, 134, 174]. Hierbei bezeichnet $\Delta E(q, t)$ die zeitabhängige Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand $|1, q\rangle$ und dem ersten angeregten Zustand $|i, q\rangle$. Da $\Delta E(q, t)$ im Zentrum der Brillouinzone am größten ist, kann die Adiabaticität hier am leichtesten gewährleistet werden. Da ferner die rigorose Beschränkung

$$|\langle i, q | \partial_t H | 1, q \rangle| \ll \frac{dV_G(t)}{dt} \quad (3.96)$$

gilt und im Zentrum $q = 0$ der Brillouinzone

$$\Delta E \geq 4E_r, \quad \forall V_G \quad (3.97)$$

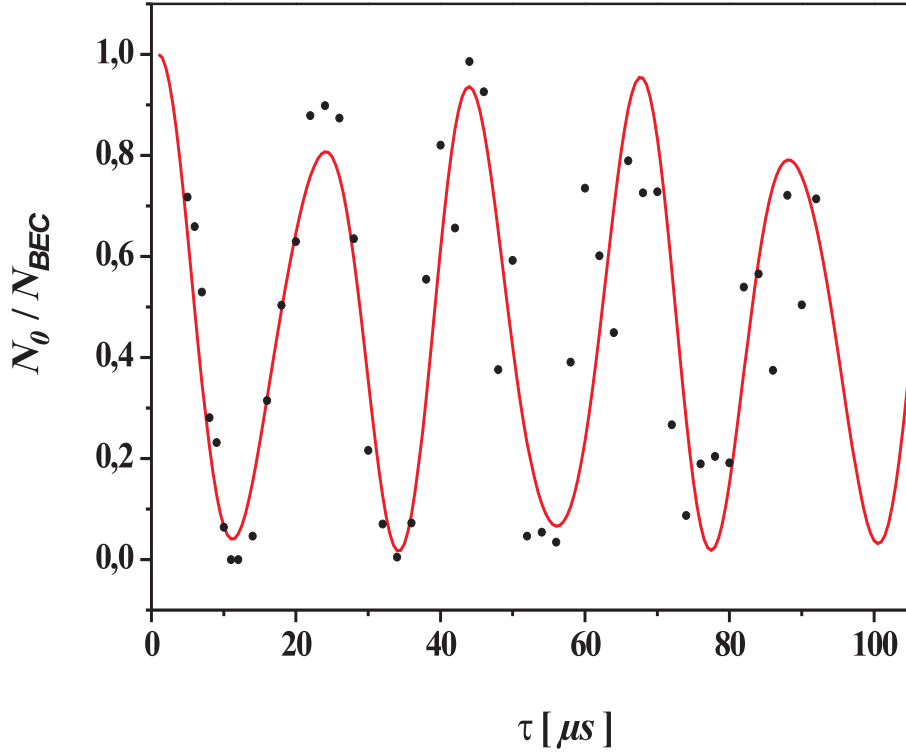


Abbildung 3.24.: Vergleich der numerisch berechneten und experimentell gemessenen Besetzungszosillation der Impulskomponente $l = 0$. Die Messdaten sind durch schwarze Kreise repräsentiert und wurden bei einer Laserleistung von 50 mW ermittelt. Den rot dargestellten Ergebnissen der numerischen Berechnung liegt eine Gittertiefe von $21,6 E_r$ zugrunde. Die Simulation zeigt, dass eine Kosinus-förmige Zeitabhängigkeit für die Besetzungszosillation dominierend ist.

erfüllt ist [134], ist (3.95) immer erfüllt, wenn

$$\frac{dV_G(t)}{dt} \ll \frac{16E_r^2}{\hbar} \quad (3.98)$$

gilt. Für die verwendete Gitterwellenlänge von 825 nm kann (3.98) als $\dot{V}_G \ll 0,4 E_r \mu\text{s}^{-1}$ geschrieben werden. Für eine Erhöhung der Gittertiefe, die in einer Zeit von über einer Millisekunde vorgenommen wird, können damit Anregungen in höhere Bänder ausgeschlossen werden.

Um die atomare Dichteverteilung zu erhalten, die dem Vielteilchengrundzustand entspricht, ist eine deutlich langsamere Steigerung des optischen Potenzials erforderlich. Der Vielteilchengrundzustand ist einerseits durch eine Lokalisierung der Atome in den Minima der optischen Stehwelle gekennzeichnet. Andererseits nimmt aufgrund des Gitterpotenzials die gesamte Ausdehnung des Kondensates zu. Bei zunehmender Gittertiefe kann dabei eine entsprechende Umverteilung der atomaren Dichte nur über Tunnelereignisse erfolgen. Da jedoch die Tunnelraten bei hoher Gittertiefe aufgrund der abgeflachten Bandstruktur deutlich reduziert sind, ist die Geschwindigkeit der Erhöhung des Potenzials entsprechend anzupassen.

Schließlich ist zu beachten, dass durch das Dipolpotenzial auch der harmonische Einschluss modifiziert wird, der ebenfalls zu einer entsprechenden Dichteverteilung führt. Um die Zeitskala zu ermitteln, auf der eine Erhöhung des optischen Potenzials zu einer Besetzung des Vielteilchengrundzustands führt, wurde eine numerische Berechnung der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung durchgeführt. Dabei wurde zunächst der Grundzustand des Bose-Einstein-Kondensates in einer harmonischen Falle berechnet, deren Frequenzen mit der im Experiment vorliegenden Magnetfalle identisch sind. Anschließend wurde in der Simulation das Gitterpotenzial in einer Zeit von 60 ms linear bis zu einem Endwert von $5 E_r$ erhöht. Dieser Wert stellt die typische Größenordnung für die eingesetzten Gittertiefen dar. Der so erhaltene Zustand wurde mit dem direkt berechneten Vielteilchengrundzustand in dem überlagerten Potenzial des Gitters und der harmonischen Falle verglichen. Der Überlapp der beiden Zustände ist größer als $99,99\%$. Basierend auf diesem Ergebnis wurde zur Erhöhung des Gitterpotenzials eine Zeit $t > 60\text{ ms}$ gewählt.

Ein alternatives Szenario zur Besetzung des Vielteilchengrundzustandes sieht die Ausführung der letzten Evaporationsphase bei bereits präsentem Gitterpotenzial vor [129]. Diese Evaporation in Gegenwart des periodischen Potenzials hat sich in unserem Experiment jedoch als nicht sehr effizient erwiesen und wird daher nicht eingesetzt.

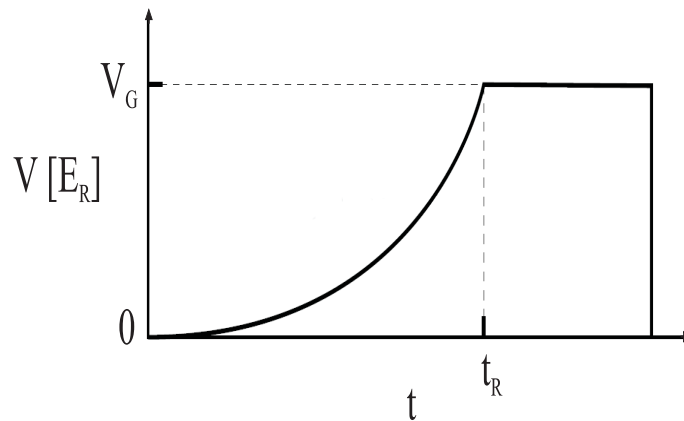


Abbildung 3.25.: Für die Besetzung des Grundzustandes wird die Gitterlaserleistung exponentiell innerhalb der Zeit $t_R > 60\text{ ms}$ erhöht.

Wie in Kapitel 2 dargestellt ist, erfolgt die Erzeugung der Bose-Einstein-Kondensate in unserem Experiment in einer stark elongierten Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_{\perp} = 2\pi \times 360\text{ Hz}$ und axialer Fallenfrequenz $\omega_z = 2\pi \times 14\text{ Hz}$. Eine direkte Überlagerung des optischen Gitters mit der Magnetfalle ist aufgrund dieses hohen Aspektverhältnisses problematisch. Dieses liegt insbesondere an der Detektion der Atome mittels einer vorhergehenden freien Expansion. Dabei bewegen sich die Atome der l -ten Impulskomponente des Gittergases mit einer Geschwindigkeit $2l \hbar q_B / m$ entlang der axialen Richtung. Bei großer atomarer Dichte und großer Ausdehnung in axialer Richtung kommt es zu einer Vielzahl von interatomaren Streuprozessen. Diese können zu einer signifikanten Umverteilung von kondensierten Atomen in den so genannten s -Wellen-Streuhalo führen [140, 175, 176]. Um diese Prozesse zu unterdrücken, wird vor der Erhöhung des Gitterpotenzials das Offsetfeld der Magnetfal-

le adiabatisch innerhalb von 150 ms erhöht. Dadurch sinkt die radiale Fallenfrequenz auf $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$. Schließlich wird das Gitterpotenzial durch eine Steigerung der Laserleistung mit Hilfe eines AOMs adiabatisch erhöht.

Der Kondensatgrundzustand im optischen Gitterpotenzial bietet eine unmittelbare Möglichkeit zur Bestimmung der Gittertiefe. In den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 wurde die unmittelbare Abhängigkeit des Impulsspektrums von der Gittertiefe dargestellt. Das Spektrum ist in Impulskomponenten aufgespalten, die um $p = 2l \hbar q_B$ zentriert sind. Dabei steigt die relative Besetzung der Impulskomponenten mit $l \neq 0$ mit zunehmender Gittertiefe an. Wenn entsprechend der Abbildung 3.25 das Gitterpotenzial zunächst adiabatisch erhöht und anschließend zeitgleich mit der Magnetfalle ausgeschaltet wird, trennen sich die verschiedenen Impulskomponenten während der freien Expansion voneinander. Eine Messung der Teilchenzahl in den einzelnen Impulskomponenten stellt somit eine Bestimmung der Gittertiefe dar. Ein Vergleich der so erhaltenen Gittertiefe mit den Ergebnissen anderer Methoden zur Bestimmung der Gittertiefe stellt zugleich einen Test für die Adiabaticität der durchgeführten Schritte dar.

Abbildung 3.26 zeigt das gemessene Verhältnis der Besetzung der $l = \pm 1$ -Impulskomponente zur $l = 0$ -Komponente in Abhängigkeit von der Gittertiefe. Um diese zu erhalten, wurde gemäß (3.11) der theoretische Wert berechnet und mit dem in Abschnitt 3.4.1 bestimmten Skalierungsfaktor 0,7 korrigiert. Die durchgezogene Linie zeigt das theoretisch berechnete relative Verhältnis der Besetzung der Impulskomponenten in Abhängigkeit von der Gittertiefe. Da eine Berechnung der Impulsverteilungen des Kondensatgrundzustandes anhand der Gross-Pitaevskii-Gleichung für sämtliche Gittertiefen sehr zeitaufwendig ist, wurde die theoretische Berechnung basierend auf den in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Einteilchenresultaten erstellt. Um den in Abschnitt 3.2.3 diskutierten Einfluss der interatomaren Wechselwirkung auf das Impulsspektrum zu berücksichtigen, wurden die Einteilchenresultate pauschal mit dem Faktor 0,95 skaliert. Wie anhand der in Abschnitt 3.2.3 dargestellten Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung für eine feste Gittertiefe ersichtlich ist, erfasst dieser Skalierungsfaktor effektiv die abschirmende Wirkung der Wechselwirkung auf das Gitterpotenzial für die experimentell relevanten Teilchenzahlen. Dieses kann mit der in Abbildung 3.13 gezeigten Impulsverteilung abgeschätzt werden.

Ein approximativer Ausdruck für die relative Besetzung der Impulskomponenten wurde zuerst in [125] gegeben. Eine verbesserte Näherung erfolgte später in [29] und lautet

$$V_G = \frac{16}{\ln(P_{\pm 1})^2} P_{\pm 1}^{-1/4}. \quad (3.99)$$

Dabei ist

$$P_{\pm 1} = \frac{N_{\pm 1}}{N_0} \quad (3.100)$$

das Verhältnis der Besetzung der $l = \pm 1$ -Komponente zur $l = 0$ -Komponente. Der transzendente Ausdruck (3.99) überschätzt jedoch die relative Besetzung der $l = \pm 1$ -Komponenten insbesondere für kleine Gittertiefen.

Die in Abbildung 3.26 ersichtliche gute Übereinstimmung der experimentellen Daten mit dem theoretischen Ergebnis bestätigt zum einen das in Abschnitt 3.4.1 erhaltene Verhältnis von experimentell bestimmter zu theoretisch berechneter Gittertiefe von 0,7. Zum anderen

sind die gemessenen Impulsverteilungen vollkommen konsistent im Rahmen einer vollständigen Population der Atome im niedrigsten Bloch-Band mit einem um $q = 0$ konzentrierten Quasi-Impuls zu erklären.

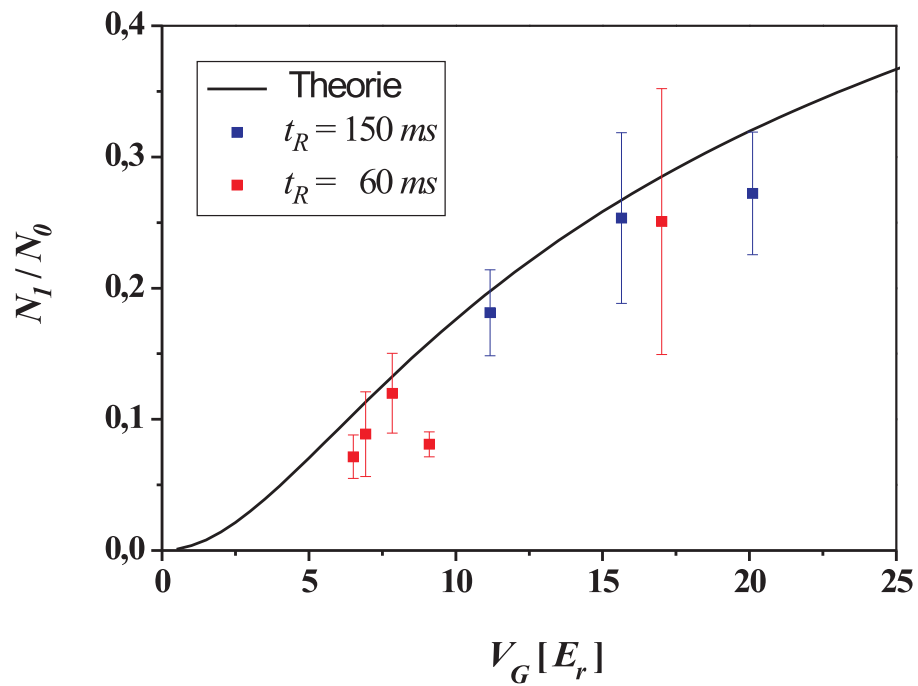


Abbildung 3.26.: Relative Besetzung der Impulskomponente $l = \pm 1$ in Abhängigkeit von der Gittertiefe für zwei verschiedene Dauern t_R der adiabatischen Rampe. Die durchgezogene Linie stellt die theoretische Vorhersage dar.

4. Bose-Einstein-Kondensate in ungeordneten Dipolpotenzialen

Dieses Kapitel stellt unsere Untersuchungen an Bose-Einstein-Kondensaten in einem räumlich ungeordneten Potenzial dar. Dieses Potenzial wurde mittels optischer Methoden erzeugt und seine Eigenschaften wurden umfassend charakterisiert. Die experimentellen und theoretischen Untersuchungen zeigen, dass der Vielteilchengrundzustand durch die Unordnung nachhaltig beeinflusst wird: Das Kondensat lokalisiert in den räumlichen Potenzialfluktuationen. Diese Lokalisierung äußert sich durch das Auftreten von unregelmäßigen Dichtemodulationen nach der freien Expansion des Gases. Durch eine numerische Analyse konnte ein gutes Verständnis der experimentellen Ergebnisse entwickelt werden.

Die hier vorgestellten Untersuchungen wurden an Bose-Einstein-Kondensaten in der Magnetfalle mit überlagertem Unordnungspotenzial durchgeführt. Die Realisierung eines Bose-Einstein-Kondensates in einem ungeordneten optischen Gitter ist Gegenstand von Kapitel 5.

Zunächst erfolgt eine Einführung zum Stand der Forschung an ungeordneten Systemen. Das Hauptaugenmerk liegt auf der Darstellung der experimentellen Arbeiten mit Bose-Einstein-Kondensaten. Eine theoretische Betrachtung des Einteilchenproblems motiviert die Untersuchung ungeordneter Systeme. Dazu werden die besonderen Eigenschaften der Eigenfunktionen in diesen Potenzialen diskutiert.

Den Hauptteil des Kapitels bildet die Darstellung der experimentellen und theoretischen Untersuchungen des Kondensatgrundzustandes in dem realisierten Unordnungspotenzial. Die experimentellen Arbeiten gehören dabei zu den ersten Messungen mit ungeordneten quantenentarteten Gasen.

4.1. Einführung

Die Untersuchung von ungeordneten Systemen spielt eine zentrale Rolle in der Physik der kondensierten Materie. Den Ausgangspunkt dieses äußerst vielseitigen Forschungsgebietes bildete dabei die Untersuchung der Transporteigenschaften in Festkörpersystemen. In diesen existiert Unordnung auf natürliche und vielfältige Weise. Angefangen von einzelnen Störstellen in der idealen Festkörperstruktur bis hin zu amorphen Gläsern und Legierungen liegt Unordnung in mannigfaltiger Form und Stärke vor [177]. Dabei kann selbst eine geringe Anzahl von Störstellen in einem ansonsten perfekten Kristall dessen Transporteigenschaften so dramatisch verändert, dass es zum Auftreten von Metall-Isolatorübergängen kommt [50]. Diese werden durch die Lokalisierung der Ladungsträger in der ungeordneten Umgebung induziert und stellen bis heute ein äußerst aktives Forschungsgebiet sowohl der theoretischen als auch der experimentellen Physik dar [50, 51]. Darüber hinaus wurden für die Hochtemperatur-

Supraleitung die Konsequenzen von Unordnung für die Bardeen-Cooper-Schrieffer Theorie experimentell [70–72] und theoretisch [68, 69] untersucht. Aber auch außerhalb der Festkörperphysik spielen unordnungsinduzierte Lokalisierungsphänomene eine wichtige Rolle. Wie in Abschnitt 4.2 erläutert wird, sind Interferenzeffekte für solche Lokalisierungsphänomene verantwortlich. Daher können sie grundsätzlich in allen Systemen auftreten, die durch Wellengleichungen bestimmt sind. So wurden Lokalisierungseffekte bereits in Streuexperimenten mit Licht [178, 179] oder Wasserwellen [180] beobachtet.

Die ersten Untersuchungen mit Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Strukturen wurden mit superflüssigem Helium durchgeführt. Dieses wurde auf poröse Substrate aus Vycor aufgebracht [73–75]. Durch den Einfluss der ungeordneten Substratstrukturen konnten eine Reihe neuartiger Effekte beobachtet werden. Eine gute Übersicht bietet [76]. Von herausragendem Interesse ist hierbei die Abwesenheit der superflüssigen Eigenschaften unterhalb der λ -Temperatur für kleine Heliumdichten. Dieser Effekt wird durch die Lokalisierung der Heliumatome in der ungeordneten Substratstruktur ausgelöst [77, 78]. Interessanterweise konnte der superflüssige Charakter des Heliums durch eine Erhöhung der Bosonendichte wieder hergestellt werden. Für diesen Prozess ist die repulsive Wechselwirkung zwischen den Heliumatomen von entscheidender Bedeutung, da diese das ungeordnete Potenzial effektiv abschirmt [77, 78].

Mit Bose-Einstein-Kondensaten atomarer Gase können unordnungsinduzierte Effekte in besonders kontrollierter Form untersucht werden. Zum einen zeichnen sich diese Systeme durch eine hohe Reinheit aus. Zum anderen steht für sie ein breites Spektrum von Manipulationsmöglichkeiten zur Verfügung, das für eine gezielte Erzeugung von Unordnung genutzt werden kann.

In ersten Experimenten mit atomaren Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Potenzialen wurden die Frequenzen von kollektiven Anregungen unter dem Einfluss eines Unordnungspotenzials untersucht [84]. Dabei zeigte sich eine Verschiebung der Oszillationsfrequenzen gegenüber dem ungestörten System. Des Weiteren wurde anhand der Expansion von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten Leiterstrukturen das Transportverhalten untersucht [84, 85]. Hierbei wurde eine deutliche Unterdrückung der Expansion des Kondensates in der Leiterstruktur festgestellt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde erstmals ein ungeordnetes quantenentartetes Gittergas realisiert und untersucht [1], was in Kapitel 5 ausführlich beschrieben ist.

4.2. Theoretische Grundlagen

Von fundamentaler Bedeutung für die außergewöhnlichen Eigenschaften ungeordneter Systeme ist das Auftreten von energetisch ungebundenen Einteilchenzuständen, die exponentiell lokalisiert sind. Zunächst werden in diesem Abschnitt die grundsätzlichen Mechanismen, die zu einer solchen Lokalisierung führen können, anhand des Einteilchenproblems qualitativ diskutiert. Das Fehlen jeglicher Symmetrien des Hamiltonians erschwert quantitative Betrachtungen deutlich. Modelle, bei denen die Unordnung als Störung einer Gitterstruktur vorliegt, haben sich als äußerst nützlicher Zugang erwiesen, was im nächsten Kapitel ausführlich dar-

gestellt ist.

4.2.1. Einzelnes Teilchen in einem ungeordneten Potenzial

Um die Besonderheiten des quantenmechanischen Problems zu betonen, wird zunächst die Bewegung eines klassischen Teilchens in einem ungeordneten Potenzial betrachtet. Im Folgenden wird dabei der Begriff Unordnung als ein räumlich unregelmäßiges Potenzial aufgefasst, das zugleich zeitlich stationär ist. Ein beispielhafter Potenzialverlauf ist in der Abbildung 4.1 gezeigt. Für das klassische Problem können anhand energetischer Betrachtungen Rückschlüsse auf die mögliche Bewegung gezogen werden. Die in der Abbildung markierte Energie E des Teilchens bestimmt die klassischen Umkehrpunkte in dem Potenzial. Für das gezeigte Beispiel mit $E < V_1$ ist die Bewegung auf das Intervall $[z_1, z_2]$ eingeschränkt. In diesem Sinn ist das Teilchen auf dem angegebenen Raumbereich lokalisiert. Andererseits kann sich das Teilchen für $E > V_2$ entlang der gesamten z -Achse bewegen.

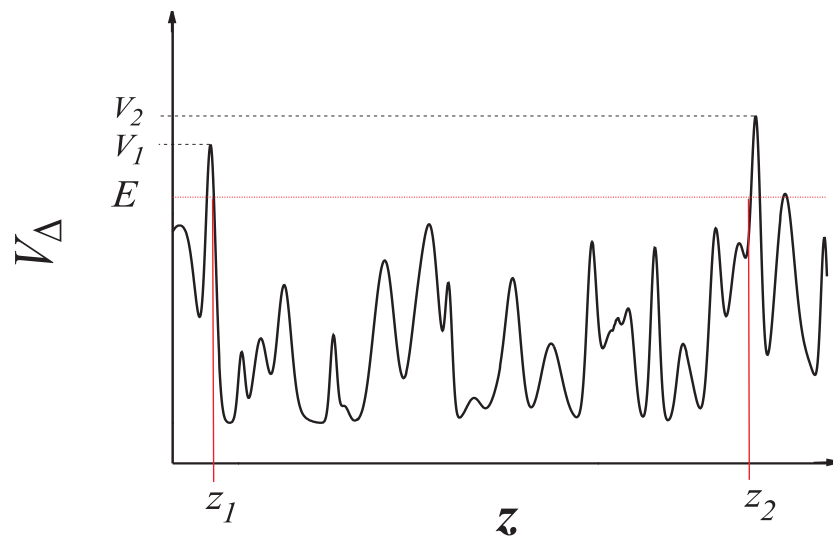


Abbildung 4.1.: Verlauf eines ungeordneten Potentials. Während für das klassische Teilchen eine mögliche Lokalisierung aus rein energetischen Betrachtungen beurteilt werden kann, ist das entsprechende quantenmechanische Problem komplexer.

Für die quantenmechanische Behandlung dieses Problems ist eine solche einfache Betrachtung nicht möglich [181]. Zwar können für viele kanonische Probleme ähnliche Folgerungen gezogen werden: So fallen die energetisch gebundenen Eigenzustände in der Regel im Unendlichen ab und sind daher quadratintegabel. Deshalb wird von lokalisierten Zuständen gesprochen. Die energetisch ungebundenen Zustände des Kontinuums fallen dagegen üblicherweise nicht im Unendlichen ab und sind daher nicht quadratintegabel. Sie sind in diesem Sinn nicht lokalisiert.

Diese Zusammenhänge sind jedoch im Gegensatz zum klassischen Problem nicht allgemein gültig. So können für das in der Abbildung 4.1 gezeigte Potenzial auch für $E < V_1$ die Zustände aufgrund von Tunnelprozessen durch die Potenzialbarrieren entlang der gesamten z -Achse ausgedehnt sein. Abbildung 4.2 a) stellt schematisch ein Beispiel für eine

solche Wellenfunktion dar. Aufgrund des ungeordneten Potenzials zeigt diese räumlich ein unregelmäßiges Verhalten.

Andererseits sind Zustände mit $E > E_2$ nicht notwendigerweise entlang der ganzen z -Achse ausgebreitet. Aufgrund von multiplen Streuprozessen der Wellenfunktion an den statistischen Fluktuationen des Potenzials kann es zu destruktiver Interferenz kommen, bei der die Oszillationen der Wellenfunktion für große z ausgelöscht werden [181]. Abbildung 4.2 b) zeigt für diesen Fall eine exponentiell abfallende Einhüllende der Wellenfunktion.

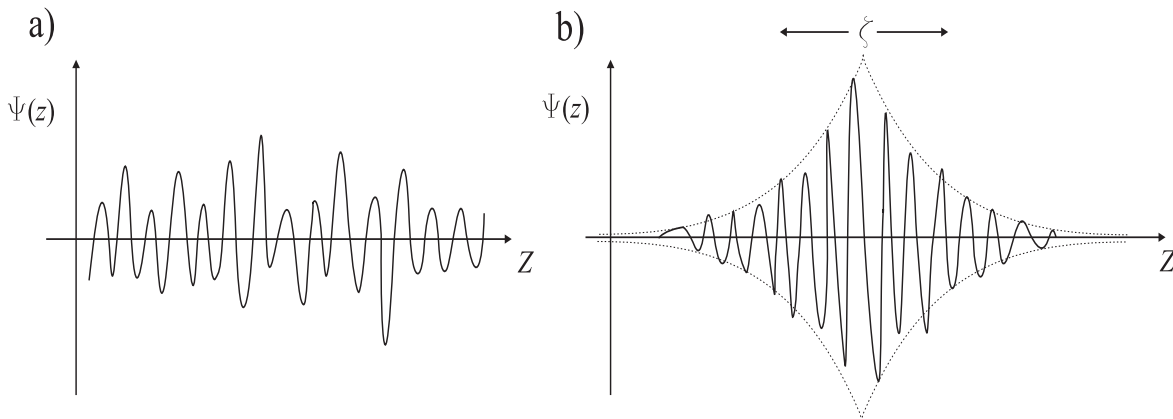


Abbildung 4.2.: In a) ist die schematische Darstellung einer nicht lokalisierten Wellenfunktion in einem ungeordneten Potenzial gezeigt. Abbildung b) zeigt eine lokalisierte Wellenfunktion schematisch. Es existiert eine exponentielle Einhüllende, die gestrichelt gezeichnet ist. Der Abfall der Wellenfunktion ist durch die Lokalisierungsgröße ζ bestimmt.

Zum einen können also quantenmechanische Tunnelprozesse zu einer Delokalisierung von energetisch gebundenen Zuständen führen. Die in Kapitel 3.2.2 diskutierten Bloch-Zustände sind ein solches Beispiel. Obwohl die niedrigsten Bloch-Zustände energetisch gebundene Eigenzustände des periodischen Potenzials darstellen, sind sie dennoch auf das ganze System ausgedehnt, wie an Gleichung (3.45) leicht erkennbar ist. Auf der anderen Seite können Interferenzeffekte eine Lokalisierung von energetisch ungebundenen Zuständen hervorrufen. Die Existenz von energetisch ungebundenen, aber lokalisierten Zuständen ist schon seit langem bekannt. So wurde von Wigner und v. Neumann eine Klasse von Potenzialen untersucht, die lokalisierte Zustände liefern, welche isoliert im Kontinuum eingebettet liegen [182]. Abbildung 4.3 zeigt ein Beispiel für solch ein so genanntes Wigner-Von-Neumann-Potenzial. Ein zugehöriger integrierbarer Zustand, der zugleich energetisch ungebunden ist, wird ebenfalls dargestellt.

Im quantenmechanischen Problem können Tunnel- und Interferenzeffekte konkurrierend auftreten. Aufgrund dieser Konkurrenz ist die Frage nach der Lokalisierung der Einteilchenzustände nicht trivial anhand ihrer Energien zu beantworten. Die besondere Eigenschaft von statistisch ungeordneten Potenzialen liegt darin begründet, dass sie lokalisierte Zustände bevorzugen. Während diese beispielsweise in Wigner-Von-Neumann-Potenzialen als isolierte Zustände im Kontinuum liegen, können sie für ungeordnete Potenziale im Spektrum dicht sein [50, 51]. So kann z. B. für eindimensionale Systeme gezeigt werden, dass alle Eigenzustände des Systems unabhängig von der Stärke der Unordnung lokalisiert sind [56].

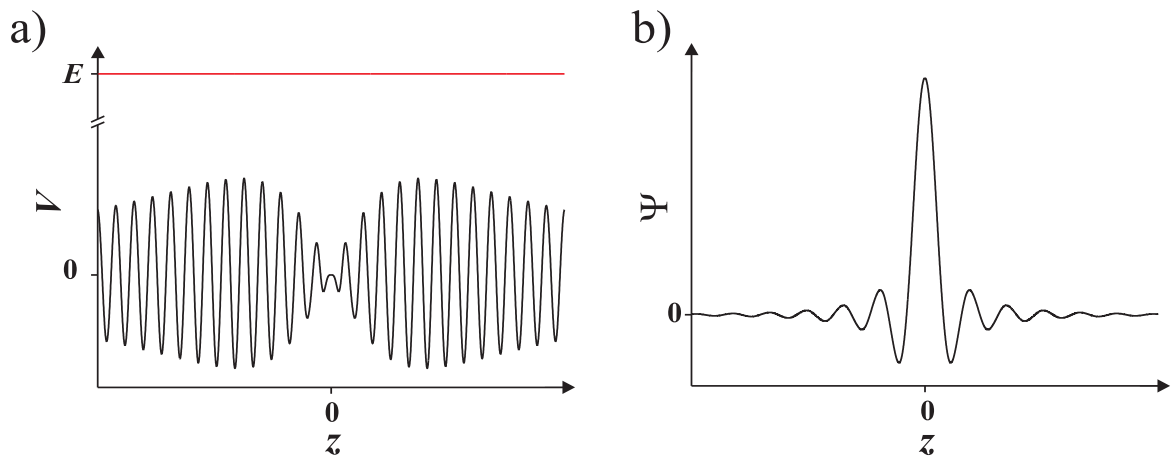


Abbildung 4.3.: In a) ist das von Wigner und v. Neumann ursprünglich untersuchte Potenzial [182] gezeigt. In Abbildung b) ist ein lokalisierter Eigenzustand dargestellt. Seine Energie ist in a) rot gekennzeichnet.

Die Existenz von lokalisierten Einteilchenzuständen in ungeordneten Systemen hat massive Konsequenzen für die Transporteigenschaften. Wenn die Energie der Teilchen, die zum Transport beitragen können, in einem Teil des Spektrums liegt, in dem nur lokalisierte Zustände existieren, kann es zu einer völligen Unterdrückung des Transportes kommen. In Festkörpern ist dieses Phänomen als Metall-Isolator-Übergang [50] bekannt.

Durch das Fehlen jeglicher Symmetrien des Hamiltonians ist die theoretische Behandlung von ungeordneten Systemen ungemein erschwert. Hier hat sich die Einführung von Modellen, in denen die Unordnung in Kombination mit einer Gitterstruktur vorliegt, als äußerst nützlich erwiesen [52]. Diese Gittermodelle stellen zugleich für eine Vielzahl von Systemen, in denen Unordnung eine wichtige Rolle spielt, eine gute Beschreibung dar. Dieses schließt insbesondere die Betrachtung von wechselwirkenden Vielteilchensystemen ein [36, 183].

4.3. Experimentelle Realisierung eines ungeordneten Dipolpotenzials

Dieser Abschnitt beschreibt die Realisierung und die Charakterisierung eines ungeordneten Dipolpotenzials zur Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten. Das ungeordnete Potenzial stellt für die durchgeführten Experimente ein zentrales Werkzeug dar. Seine Erzeugung basiert auf der Abbildung eines räumlich ungeordneten Substrates auf das Kondensat. Sie ist eng verwandt mit Ansätzen, die Speckle-Strahlung [58–60] ausnutzen und in anderen Gruppen zur Erzeugung ungeordneter Potenziale verwendet werden [84–86].

4.3.1. Aufbau und Justage des Strahlengangs

Abbildung 4.4 zeigt den schematischen Aufbau des Strahlengangs zur Erzeugung des Unordnungspotenzials. Für die Erzeugung des ungeordneten Dipolpotenzials ist gemäß (3.11)

ein räumlich variierendes Intensitätsprofil erforderlich, das durch die Verwendung zweier optischer Substrate mit inhomogener Transparenz erhalten wird. Diese kombinierte Struktur wird mit einem kollimierten Laserstrahl beleuchtet. Als ein Teil des Unordnungsmusters wird ein mit Chrom bedampftes Glasplättchen eingesetzt. Die völlig intransparente Chromschicht wurde vom Hersteller mittels lithografischer Techniken entlang mehrerer vertikaler Streifen verschiedener Breite abgetragen. Die minimale Streifenbreite liegt dabei laut Spezifikationen bei $15 \mu\text{m}$. Dieses Substrat wird mit einem Dia kombiniert, das mit einer großen Zahl vertikaler Streifen bedruckt ist. Die Schichtdicke der Streifen variiert dabei statistisch und liefert so unregelmäßige Schwankungen in der ortsabhängigen Transparenz des Dias. Das Ausmaß dieser Schwankungen beträgt $\approx 10\%$. Die minimale Breite der Streifen beträgt laut Druckerspezifikation $6 \mu\text{m}$.

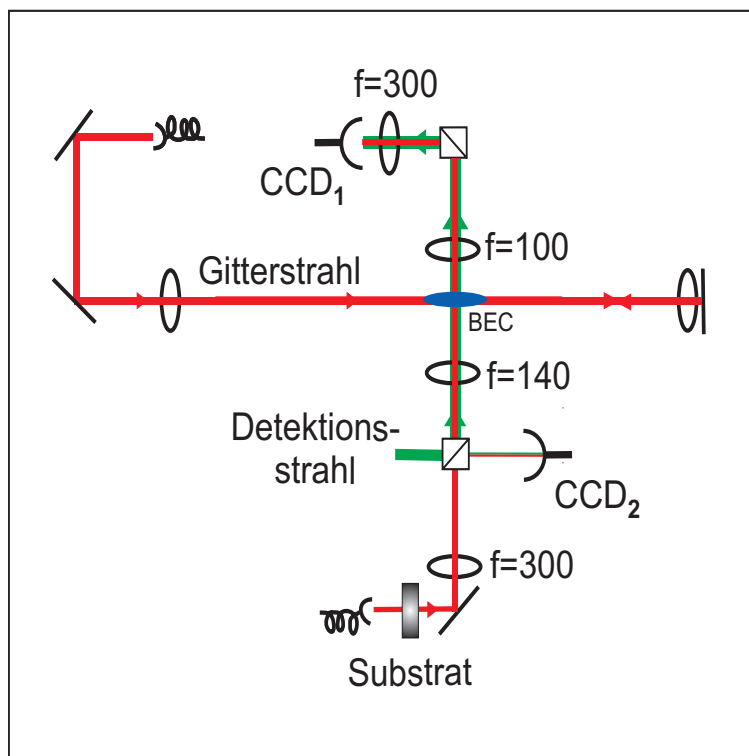


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung der Strahlverläufe zur Erzeugung der Dipolpotenziale. Die Unordnungsstruktur wird aus transversaler Richtung auf das Kondensat in der Magnetfalle abgebildet. Dadurch ergibt sich ein räumlich unregelmäßiges Dipolpotenzial entlang der axialen Richtung der Atomwolke. Der Unordnungsstrahl ist mit dem Detektionstrahl überlagert und kann auf die CCD-Kamera abgebildet werden. Das optische Gitter ist dem Kondensat axial überlagert.

Als Lichtquelle zur Ausleuchtung des Substrates dient der Ti:Sa-Laser, der auch für die Erzeugung des optischen Gitterpotenzials eingesetzt wird. Für alle vorgestellten Experimente betrug die Wellenlänge des Laserlichts 825 nm . Nach dem Durchgang durch das Substrat ist das Intensitätsprofil des Strahls räumlich unregelmäßig moduliert. Zur Verkleinerung der Längenskala der Modulation werden die Substrate mittels zweier Achromaten auf die Position

der Atome in der Magnetfalle im ungefähren Verhältnis 2 : 1 abgebildet. Dies erfolgt dabei aus der transversalen Richtung, woraus ein räumlich unregelmäßiges Dipolpotenzial entlang der axialen Richtung des Kondensates resultiert. Der gewählte Aufbau bietet den Vorteil, dass der Unordnungsstrahl mit dem Detektionsstrahl überlagert werden kann. Dieses ist für das unten beschriebene Justageschema hilfreich. Außerdem kann so der Unordnungsstrahl auf der CCD-Kamera abgebildet werden. Damit besteht die Möglichkeit, sowohl die Position der Atome im Unordnungspotenzial sowie die Potenzialtiefe zu bestimmen.

Zur Erzeugung eines feinstrukturierten Unordnungspotenzials am Ort der Atome ist eine scharfe Abbildung des Substrates erforderlich. Die Justage der Abbildungsoptik wird mit Hilfe der CCD-Kamera optimiert. Dazu wird mittels der beiden Achromaten vor der CCD-Kamera die Ebene, in der die Atome liegen, auf den Kamera-Chip abgebildet. Dies wird mit dem an unserem Experiment eingesetzten Standardverfahren zur Justage der Detektionsoptik sichergestellt [184]. Anschließend wird mit den beiden Achromaten vor den Atomen das Substrat scharf auf die Atomebene und damit auch auf den Kamera-Chip abgebildet. Die Justage dieser Abbildung wird zunächst mit Hilfe eines speziellen Resolution-Targets (Firma: Newport, Modell: RES-2) durchgeführt. Anschließend werden die Unordnungssubstrate eingesetzt und die Position der Achromaten wird so optimiert, dass die Strukturgröße des Intensitätsprofils auf der CCD-Kamera minimal wird.

Die Auflösung der Abbildung ist primär durch die numerische Apertur des Achromaten hinter den Unordnungssubstraten bestimmt. Dieser hat einen freien Radius von $r = 38 \text{ mm}$ und einen Abstand zur Unordnungsstruktur von 310 mm . Damit ergibt sich eine numerische Apertur von $NA = 0,122$. Die maximale Auflösung beträgt somit [184]

$$\Delta r = 0,51 \frac{\lambda}{NA} = 3,5 \mu\text{m}. \quad (4.1)$$

Diese maximale erzielbare Auflösung wird von einfachen Abbildungssystemen üblicherweise nicht erreicht. Für eine solche Abbildung mittels zweier Achromate ist die tatsächliche Auflösung deutlich schlechter [171, 184]:

$$\Delta r_{exp} = 3,2 \Delta r = 11,2 \mu\text{m}. \quad (4.2)$$

Diese Auflösung limitiert die minimal erreichbare Strukturgröße am Ort der Atome.

Abbildung 4.5 zeigt eine Aufnahme des Unordnungsstrahls. Das abgebildete Streifenmuster der Unordnungsstruktur ist deutlich erkennbar. Dieses führt zu einem räumlich ungeordneten Intensitätsprofil entlang der horizontalen Richtung.

Die Ausrichtung des Unordnungsstrahls auf die Atome in der Magnetfalle erfolgt analog zur Justage des Gitterstrahls. Zunächst wird der Detektionsstrahl so eingestellt, dass sich der Schattenwurf der Atome in seinem Zentrum befindet. Anschließend wird der Unordnungsstrahl so justiert, dass sein Mittelpunkt im Schattenwurf der Atome auf der Kamera liegt. Gleichzeitig wird die Überlagerung von Detektionsstrahl und Unordnungsstrahl mit Hilfe einer zweiten CCD-Kamera (CCD 2) an einer weiteren Position sichergestellt. Das dargestellte Schema stellt somit eine sehr kontrollierte Möglichkeit zur Justage des Unordnungsstrahlengangs dar.

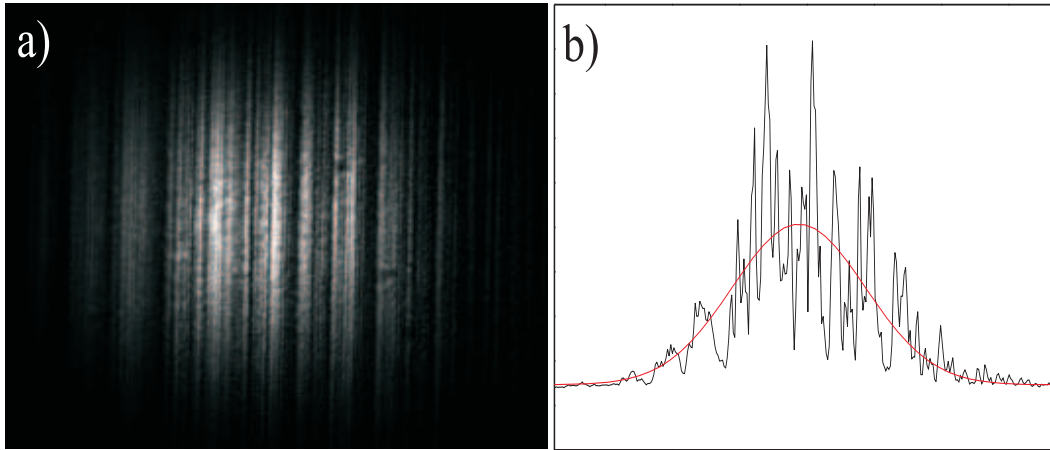


Abbildung 4.5.: In a) ist das Bild des Unordnungstrahls auf der Kamera gezeigt. Abbildung b) stellt das zugehörige Dichteprofil in horizontaler Richtung dar. Die unregelmäßige Modulation des Intensitätsprofils entlang der horizontalen Richtung ist in a) und b) deutlich erkennbar.

4.3.2. Charakterisierung des Unordnungspotenzials

Mit der Realisierung des Dipolpotenzials steht ein robustes Werkzeug zur Präparation von Bose-Einstein-Kondensaten in einem ungeordneten Potenzial zur Verfügung. Um dieses Werkzeug kontrolliert im Experiment einsetzen zu können, ist eine genaue Charakterisierung der Potenzialeigenschaften erforderlich.

Bestimmung der Potentialtiefe mittels Gaußfit

Die Tiefe des ungeordneten Dipolpotenzials ist gemäß der Gleichung (3.11) durch die Intensitätsverteilung am Ort der Atome bestimmt. Dabei ist für unsere Experimente die langsame Variation des Potenzials aufgrund der gaußschen Form des Laserstrahls von untergeordneter Bedeutung. Sie liefert nur einen unwesentlichen Beitrag zu den harmonischen Fallenfrequenzen am Ort der Atome. Das relevante Maß für die Tiefe des ungeordneten Potenzials ist vielmehr die Amplitude seiner schnellen und ungeordneten Modulation. In dieser Arbeit wird analog zu [84] mit dem Begriff Unordnungstiefe die doppelte Standardabweichung des Dipolpotenzials von seinem Mittelwert bezeichnet. Dabei werden der Mittelwert und die Standardabweichung entlang der axialen Ausdehnung des Kondensates im Unordnungspotenzial bestimmt.

Abbildung 4.6 zeigt ein typisches Beispiel für ein experimentell ermitteltes axiales Intensitätsprofil des Unordnungstrahls. Die gezeigte Struktur hat in der Ebene der Atome eine horizontale Ausdehnung von $150 \mu\text{m}$. Die typische axiale Ausdehnung des Kondensates beträgt zwischen $80 \mu\text{m}$ und $120 \mu\text{m}$. Aus Abbildung 4.5 ist erkennbar, dass das Unordnungspotenzial in vertikaler Richtung eine hohe Homogenität aufweist. Auf einer Längenskala, die der transversalen Größe des Kondensates ($5..6 \mu\text{m}$) entspricht, ist das Potenzial in dieser Richtung konstant. Daher wurde bei der Erstellung von Abbildung 4.6 nur eine einzige horizontale Reihe von Kamerapixeln verwendet.

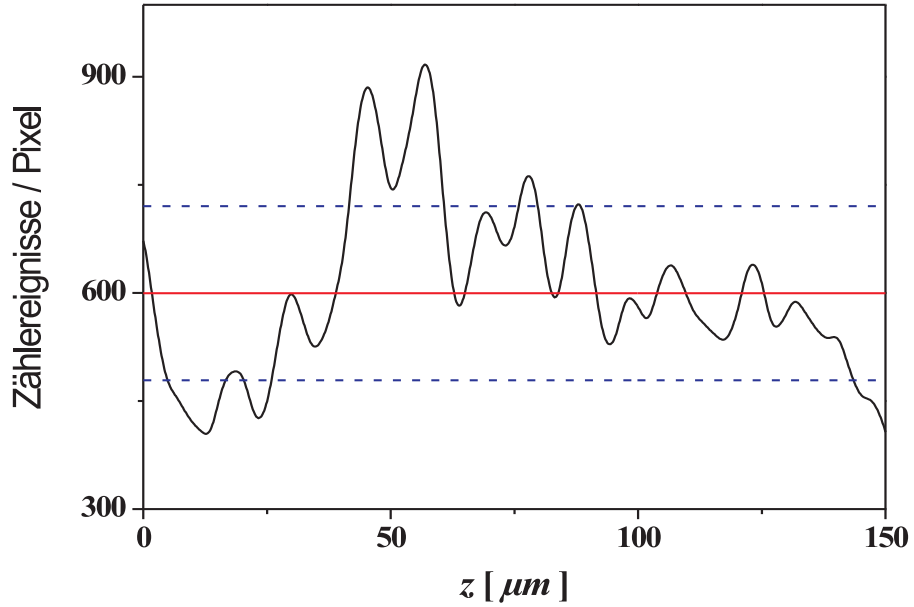


Abbildung 4.6.: Gemessenes axiales Intensitätsprofil des Unordnungsstrahls. Der Mittelwert ist rot eingezeichnet. Die blau gestrichelten Linien kennzeichnen den Bereich der Standardabweichung vom Mittelwert. Für diese ergibt sich $2\sigma_1 = 0,40 \langle I_{CCD} \rangle$.

Entlang des gezeigten Kameraausschnitts werden der Mittelwert und die Standardabweichung des Strahlprofils bestimmt. Für das gezeigte Beispiel aus Abbildung 4.6 liefert dieses

$$2\sigma_1 = 0,40 \langle I_{CCD} \rangle, \quad (4.3)$$

wobei sich die Standardabweichung σ_1 und der Mittelwert $\langle I_{CCD} \rangle$ auf die Zählereignisse pro Kamerapixel beziehen. Dieser Wert hängt kritisch von der genauen Realisierung des ungeordneten Potenzials ab. Die Abbildung 4.7 zeigt einen weiteren typischen Intensitätsverlauf des Unordnungsstrahls. Für diesen folgt für die doppelte Standardabweichung $2\sigma_2 = 0,59 \langle I_{CCD} \rangle$. Daher kann eine Bestimmung der Unordnungstiefe immer nur für eine individuelle Realisierung des Intensitätsverlaufes erfolgen.

Um anhand der Standardabweichung die Unordnungstiefe zu bestimmen, muß eine Relation zwischen dem Mittelwert $\langle I_{CCD} \rangle$ in Zählereignissen pro Pixel und der eigentlichen Intensität hergestellt werden. Diese kann mit der folgenden Überlegung erhalten werden: Der erzeugende Laserstrahl wird mittels einer Glasfaser zum Experiment geführt. Nach dem Austritt aus der optischen Faser ist er in guter Näherung als gaußscher Strahl beschreibbar. Wenn die Unordnungssubstrate aus dem Strahlengang entfernt sind, besitzt dieser Strahl am Ort der Atome einen Waist von $w_0 \approx 400 \mu\text{m}$. Bei eingesetzten Substraten wird der Strahl zum einen räumlich stark moduliert und zum anderen aufgrund von Absorptions- und Reflexionsprozessen in seiner Intensität abgeschwächt. Wie in Abbildung 4.5 erkennbar, kann dem detektierten Strahlprofil jedoch immer noch ein Gaußprofil angepasst werden. Dabei ist der Waist des Unordnungsstrahls bei eingesetzten Unordnungssubstraten nicht signifikant verändert. Bei bekannter Strahlleistung kann aus diesem Fit mittels $I = 2P/\pi w_0^2$ die Relation zwischen der Intensität im Zentrum des Gaußprofils und der Anzahl der Zählereignisse auf

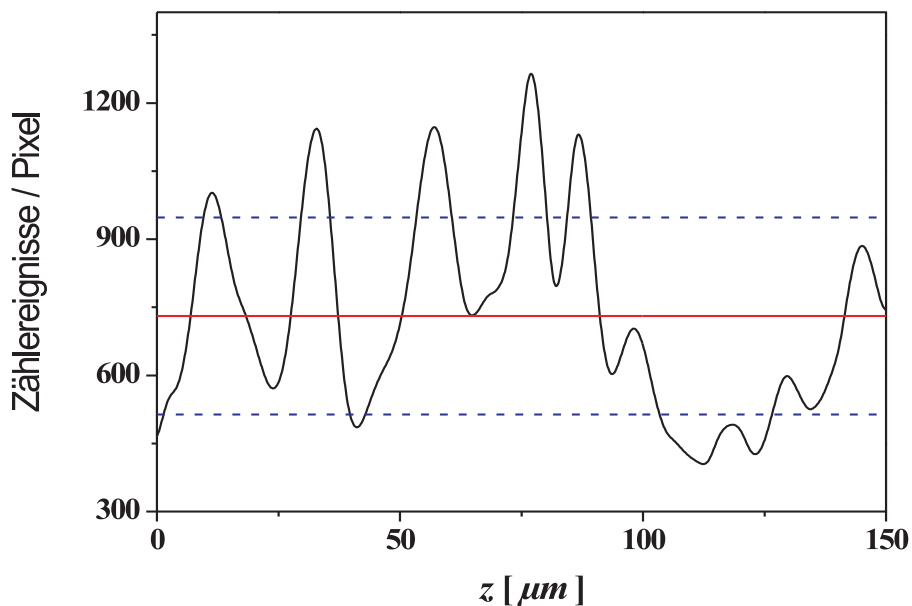


Abbildung 4.7.: Gemessenes Intensitätsprofil des Unordnungsstrahls. Der Mittelwert ist rot eingezeichnet. Die blau gestrichelten Linien kennzeichnen den Bereich der Standardabweichung vom Mittelwert. Für diese ergibt sich $2\sigma_2 = 0,59 \langle I_{CCD} \rangle$.

der Kamera berechnet werden.

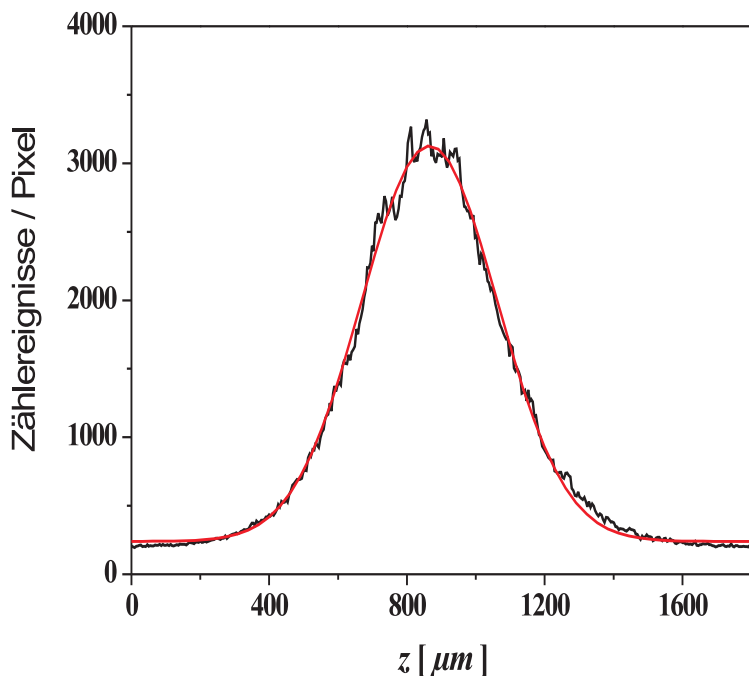


Abbildung 4.8.: Axiales Intensitätsprofil des unmodulierten Unordnungsstrahls aufgenommen mit der CCD-Kamera. Der Gaußfit liefert einen Waist von $w_0 = 395 \mu m$.

Dieses Verfahren zur Bestimmung der Unordnungstiefe ist mit einer relativ großen Ungenauigkeit behaftet. Diese liegt zum einen in der Unsicherheit bei der Anpassung der Gaußfunktion an das modulierte Strahlprofil begründet. Zum anderen wird durch die Unordnungssubstrate ein Teil der Strahlleistung aus dem gaußschen Bereich des Strahls herausgestreut und bildet einen diffusen Untergrund. Dieser Untergrund wird bei der Messung der Strahlleistung erfasst, so dass die über den Gaußfit bestimmte Intensität überschätzt wird. Daher liefert diese Methode systematisch zu große Werte für die Unordnungstiefe.

Um dieses Problem zu umgehen, wird nunmehr eine andere Methode zur Bestimmung der Unordnungstiefe eingesetzt. Dabei werden die Unordnungssubstrate aus dem Strahlengang entfernt und der unmodulierte Strahl auf der Kamera detektiert. Abbildung 4.8 zeigt eine solche Aufnahme des Unordnungsstrahls. An sein Profil kann mit hoher Genauigkeit eine Gaußfunktion angepasst werden und so eine Relation zwischen der Lichtintensität und der Anzahl der Zählereignisse pro Pixel gefunden werden. Diese Eichung kann zur Bestimmung der Unordnungstiefe verwendet werden, wenn der modulierte Unordnungsstrahl detektiert wird. Diese Methode wird als Standardverfahren zur Bestimmung der Potenzialtiefe eingesetzt.

Bestimmung der Potenzialtiefe anhand der Photonenzahl

Die oben beschriebene Methode basiert auf der Eichung der Zählereignisse auf der Kamera mittels eines Gaußfits. Alternativ kann das Dipolpotenzial direkt aus den Kamerabildern gewonnen werden. Der CCD-Chip wird dazu für eine definierte Zeit mit dem Unordnungsstrahl belichtet. Das Schalten der Lichtleistung erfolgt durch einen akusto-optischen Modulator (AOM). Dabei gelangt jedoch auch bei ausgeschaltetem AOM immer etwas Licht aus dem Unordnungsstrahl auf die Kamera. Um diese und andere Restlichteinflüsse zu eliminieren, wird bei identischer Zeitsteuerung und ausgeschaltetem AOM eine Referenzaufnahme erstellt und von der Primäraufnahme abgezogen. Aus der Anzahl ausgelöster Elektronen pro Pixel kann bei bekannter Quanteneffizienz der Kamera unmittelbar auf die Intensität im i -ten Pixel I_i geschlossen werden

$$I_i = \frac{N_i}{QE} \frac{h\nu}{At}. \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnet N_i die Anzahl der Elektronen im i -ten Pixel, QE die Quanteneffizienz, ν die Photonenfrequenz, A die Pixelfläche und t die Belichtungszeit. Die Quanteneffizienz der Kamera bei 825 nm wurde in Übereinstimmung mit ihren Spezifikationen auf $52,4\%$ bestimmt.

Durch diese Bestimmung des Intensitätsprofils an der Position des Schattenwurfs der Atome auf der Kamera kann das Intensitätsprofil am Ort der Atome erhalten werden. Hierfür ist nur noch die Vergrößerungseigenschaft der Detektionsoptik zu berücksichtigen. Diese führt dazu, dass die Intensität am Ort der Atome um den Faktor drei gegenüber der auf der Kamera bestimmten Intensität erhöht ist.

Strukturgröße und Korrelationsfunktion des Potenzials

Eine wesentliche Kenngröße zur Beurteilung des Einflusses des ungeordneten Potenzials auf die Atome stellt das Verhältnis aus der Gesamtsystemgröße zur charakteristischen Länge

der Potenzialfluktuationen dar. Zur Ermittlung der Längenskalen, auf denen das Potenzial fluktuiert, wurde eine Fourieranalyse durchgeführt. Diese ist in Abbildung 4.9 für den Intensitätsverlauf aus Abbildung 4.6 gezeigt. Die gekennzeichneten Maxima können charakteristischen Längen der Potenzialfluktuationen zugeordnet werden. Die kürzeste Länge ist dabei $8,6 \mu\text{m}$. Diese ist mit der axialen Kondensatgröße, die zwischen $80 \mu\text{m}$ und $120 \mu\text{m}$ beträgt, zu vergleichen. Somit liegen typischerweise 10 bis 14 Potenzialfluktuationen entlang der Ausdehnung des Kondensates vor.

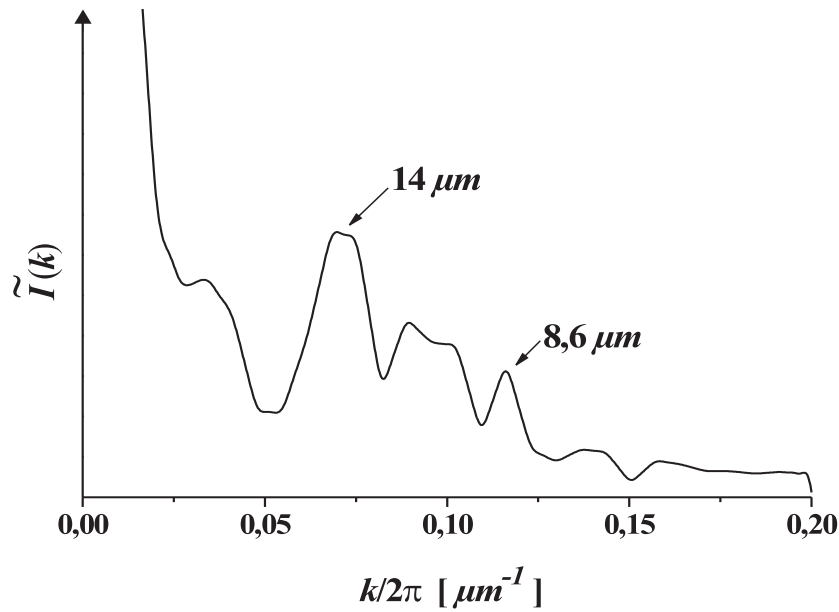


Abbildung 4.9.: Fouriertransformation des Intensitätsverlaufs aus Abbildung 4.6. Längenskalen, auf denen ausgeprägte Modulationen auftreten, sind markiert.

Eine weitere wichtige Kenngröße des Potentials stellt dessen Auto-Korrelationsfunktion dar. Sie ist mittels

$$g(L) = \frac{\langle V_{\Delta}(z) V_{\Delta}(z + L) \rangle}{\langle V_{\Delta}(z) \rangle \langle V_{\Delta}(z + L) \rangle} \quad (4.5)$$

definiert. Dabei bezeichnet $V_{\Delta}(z)$ das ungeordnete Potenzial und die eckigen Klammern die Mittelwertbildung über die Position z . Die Auto-Korrelationsfunktion bestimmt die Längenskala, auf der die räumlichen Korrelationen des Potentials zerfallen. Der Verlauf der Auto-Korrelationsfunktion ist für eine typische Realisierung des ungeordneten Potentials in Abbildung 4.10 dargestellt. Der Abfall der Korrelationsfunktion auf einer Längenskala von $10 \mu\text{m}$ ist deutlich ersichtlich und spiegelt die zufällige Struktur des Potentials wieder.

Stabilität der Unordnungsstruktur

Das Dipolpotenzial soll räumlich unregelmäßige Fluktuationen aufweisen, jedoch zeitlich möglichst stationär sein. Die Stabilität des Potentials kann dabei durch verschiedene Einflüsse gestört werden. Zum einen können Schwankungen in der Laserintensität zu Variationen des Dipolpotenzials führen. Während solche Schwankungen zu einer veränderten Modulationstiefe des Potentials führen, bleibt die räumliche Struktur der Unordnung erhalten. Demgegenüber

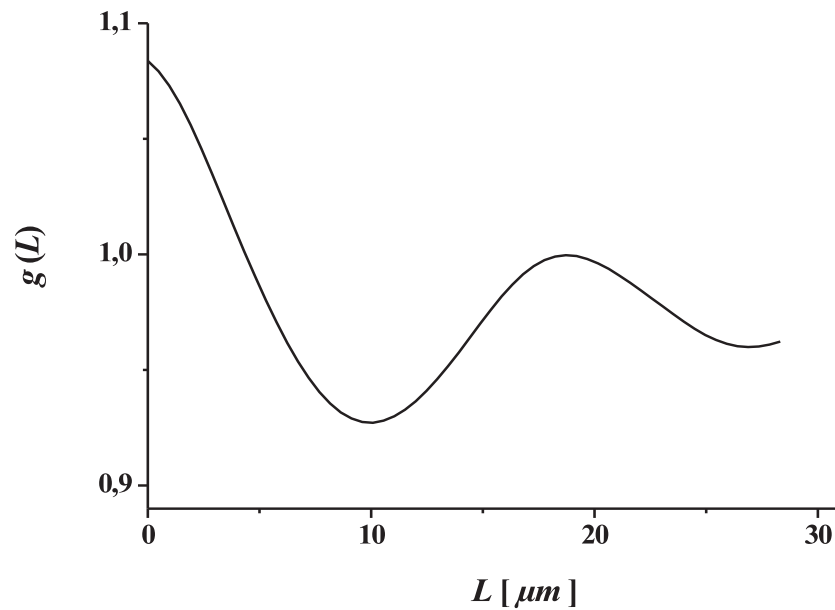


Abbildung 4.10.: Verlauf der Auto-Korrelationsfunktion für eine typische Realisierung des ungeordneten Potenzials.

verursachen Fluktuationen der Laserstrahlage oder eine mechanische Instabilität der Halterung der Substrate eine tatsächliche Variation der Potenzialform. Die Stabilität des Potenzials ist dabei auf drei verschiedenen Zeitskalen von experimenteller Relevanz zu beurteilen:

- Die Stabilität der Struktur während einer einzelnen Messung.
- Die Stabilität der Struktur während eines Messtages.
- Die Stabilität der Struktur zwischen verschiedenen Messtagen.

In jedem einzelnen Zyklus des Experimentes befinden sich die Atome nicht länger als 100 ms im Unordnungspotenzial. Mögliche Schwankungen während dieser Zeit können zu einem breiten Spektrum nachteiliger Effekte führen. Dies reicht von einer effektiven Auswaschung der Potenzialmodulationen bis hin zur Aufprägung von Phasendomänen. Die Abbildung 4.11 zeigt Intensitätsprofile des Unordnungspotenzials, die im zeitlichen Abstand von einer Minute mit der CCD-Kamera aufgenommen wurden. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Struktur auf dieser Zeitskala sehr stabil ist. Da dieses Verhalten in einer Vielzahl von Messungen bestätigt wurde, können Variationen des Potenzials während eines einzelnen Experimentzyklus ausgeschlossen werden.

Die Dauer der eigentlichen Messungen an einem Experimentiertag kann bis zu 14 Stunden betragen. Dabei werden fortlaufend Kondensate erzeugt und mit dem Dipolpotenzial manipuliert. Ein einzelner Durchlauf des Experimentes dauert dabei ungefähr eine Minute. Abbildung 4.12 zeigt Intensitätsprofile des Unordnungspotenzials, die im Abstand von mehr als einer Stunde aufgenommen wurden. Es ist zu erkennen, dass für größere Zeitabstände die Variationen des Unordnungspotenzials zunehmen. Die grundsätzliche Form der Struktur bleibt dabei aber erhalten.

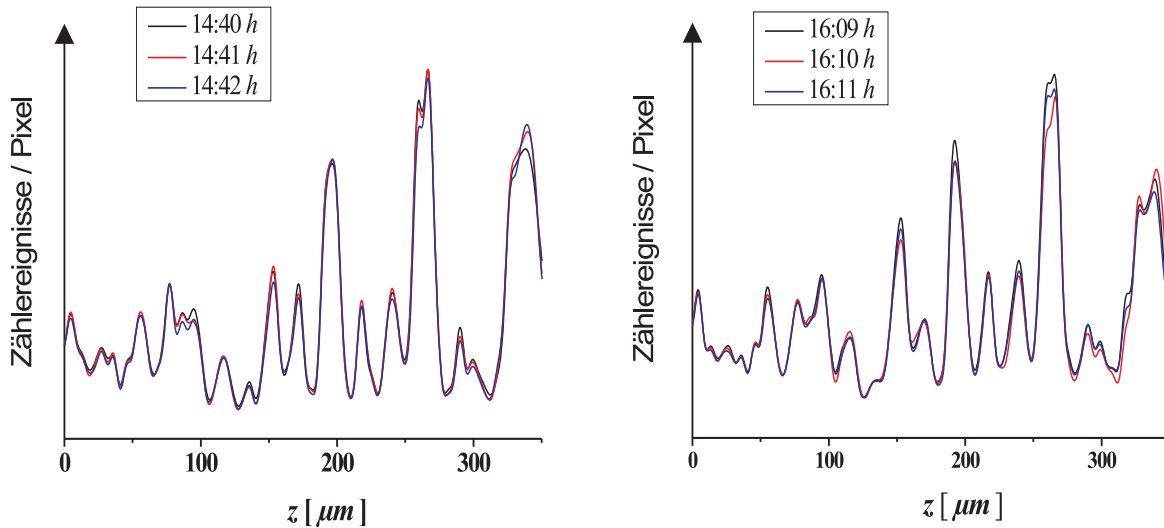


Abbildung 4.11.: Axiale Intensitätsprofile des Unordnungsstrahls detektiert mit der CCD-Kamera. Die Variationen des Potenzials sind für die hier betrachteten kurzen Zeitabstände sehr gering.

Zwischen verschiedenen Messtagen sind deutliche Variationen des Unordnungspotenzials grundsätzlich nicht zu vermeiden. Typischerweise sind kleine Justagen zur optimalen Ausrichtung des Unordnungsstrahls auf die Atome durchzuführen. Diese führen unweigerlich zu einer neuen Realisierung des ungeordneten Potenzials.

Für die Interpretation der Messungen haben sowohl die leichten Variationen im Unordnungspotenzial während eines Messtages als auch die deutlichen Veränderungen zwischen den Messtagen wichtige Bedeutung. Viele Eigenschaften des Systems hängen kritisch von der genauen Realisierung des ungeordneten Potenzials ab. Für die Experimente ist daher eine deutliche Streuung der Messwerte zu erwarten. Dieses führt zu großen statistischen Varianzen, insbesondere wenn Daten von verschiedenen Messtagen kombiniert werden.

In jüngster Zeit wurden Verbesserungen am mechanischen Aufbau vorgenommen, die dessen Stabilität deutlich erhöhen. Insbesondere durch die Platzierung der optischen Faser und der Unordnungssubstrate auf einer gemeinsamen Halterung konnte die Langzeitstabilität signifikant gesteigert werden. Abbildung 4.13 zeigt Intensitätsprofile des Unordnungsstrahls, die nach der Verbesserung des optischen Aufbaus im Abstand von mehreren Stunden aufgenommen wurden. Es ist deutlich erkennbar, dass nunmehr eine hochstabile Unordnung für einige Stunden Experimentierzeit zur Verfügung steht.

4.4. Untersuchungen mit ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten

Das Dipolpotenzial wurde von uns zur Manipulation von Bose-Einstein-Kondensaten eingesetzt. Dabei wurde eine experimentelle und numerische Analyse des Kondensatgrundzustandes vorgenommen. Die erste Realisierung eines schwach wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensates in einem ungeordneten Potenzial wurde in [84] erreicht. In dieser Arbeit wurde

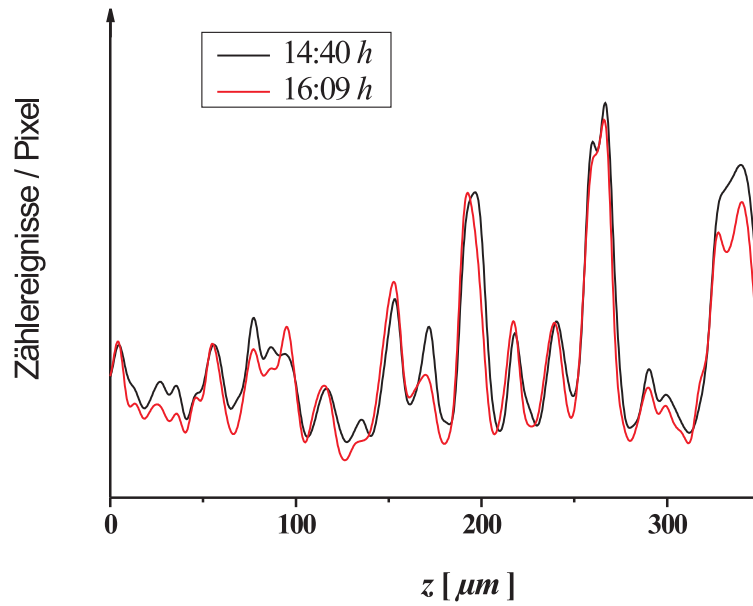


Abbildung 4.12.: Intensitätsprofile des Unordnungsstrahls. Für größere Zeitabstände weist das Unordnungspotenzial deutliche Variationen auf.

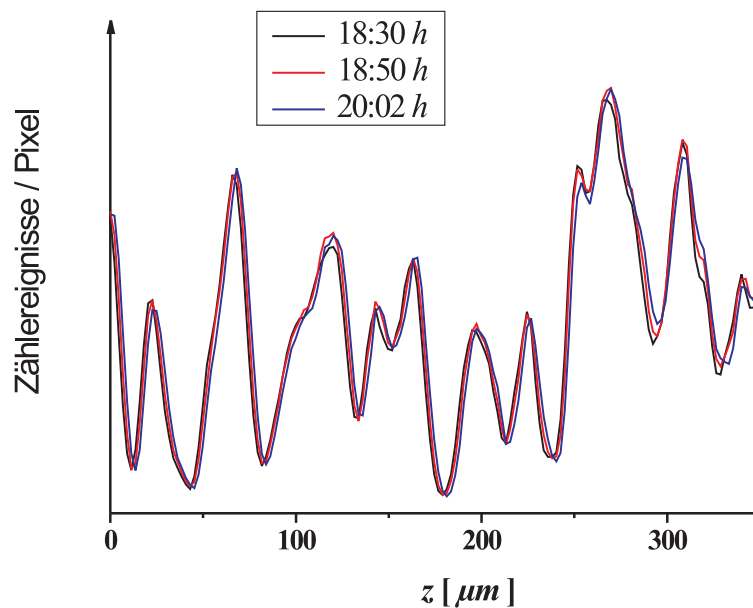


Abbildung 4.13.: Langzeitstabilität des Unordnungspotenzials nach Verbesserung des optischen Aufbaus. Die Variationen sind auch für größere Zeiträume sehr gering. Die Belichtungszeit betrug $1,6 \text{ ms}$.

die freie Expansion des Kondensates aus der ungeordneten Struktur untersucht. Die berichteten Ergebnisse wurden durch unsere Arbeiten bestätigt und durch zusätzliche Erkenntnisse erweitert.

Zunächst erfolgt die Darstellung der experimentellen Ergebnisse, die deutliche Effekte der Unordnung auf den Kondensatgrundzustand zeigen.

4.4.1. Experimentelle Untersuchungen

Wir erzeugen Bose-Einstein-Kondensate in der Magnetfalle im $|F = 2, m_f = 2\rangle$ -Zustand. Die axialen und radialen Fallenfrequenzen betragen $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ bzw. $\omega_\rho = 2\pi \times 360 \dots 390 \text{ Hz}$. Die Teilchenzahl im Kondensat variiert typischerweise zwischen $5 \cdot 10^4$ und $1,5 \cdot 10^5$ Atomen. Für einen Teil der Untersuchungen wurde die radiale Fallenfrequenz der Magnetfalle nach der Erzeugung des Kondensates durch eine Erhöhung des Offsetfeldes auf $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ verringert. Dieses sichert die Vergleichbarkeit der hier präsentierten Untersuchungen mit den im nächsten Kapitel vorgestellten Experimenten in ungeordneten optischen Gittern. Wie in Kapitel 3 dargelegt wurde, ist eine Absenkung der radialen Fallenfrequenz für Experimente mit optischen Gittern unabdingbar.

Mittels eines AOMs wird die Laserintensität und damit die Tiefe des Unordnungspotenzials bis auf dessen Endwert V_Δ adiabatisch erhöht. Das Feld der Magnetfalle wird dabei aufrechterhalten, da der dreidimensionale Einschluss des optischen Potenzials allein nicht ausreicht, um die Atome im Schwerefeld zu halten. Um den adiabatischen Transfer des Vielteilchensystems in seinen Grundzustand im kombinierten magnetischen und optischen Potenzial zu erreichen, wird die Lichtleistung innerhalb von 60 ms exponentiell gesteigert. Anschließend werden die Atome für weitere 20 ms im kombinierten Potenzial gehalten, bevor der magnetische und optische Einschluss zeitgleich beendet wird. Nach der anschließenden freien Expansion des Gases erfolgt die Detektion der Atome mittels resonanter Absorptionssaufnahmen.

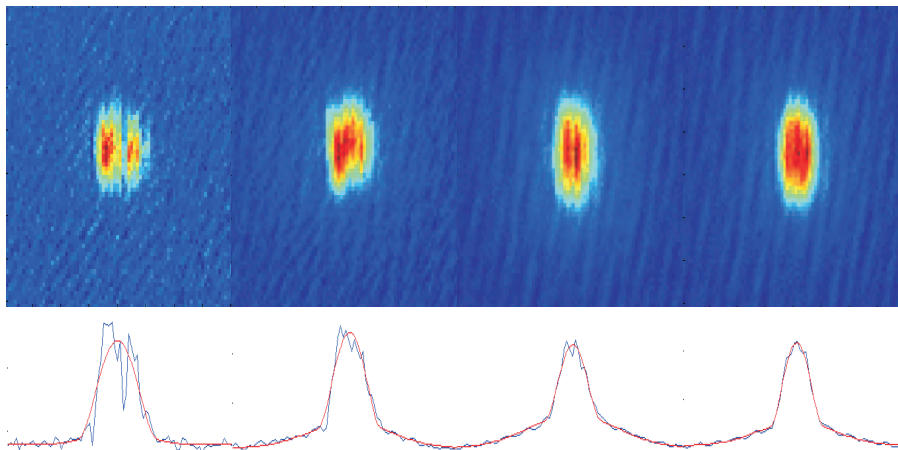


Abbildung 4.14.: Die obere Zeile zeigt Absorptionsspektren der Atome nach $20,4 \text{ ms}$ TOF mit einem Unordnungspotenzial der Tiefe $0,06 E_r$. In der unteren Zeile sind die zugehörigen axialen Dichteprofile gezeigt. Die Zahl der kondensierten Atome beträgt: a) $N_0 = 2,2 \cdot 10^4$, b) $N_0 = 4,6 \cdot 10^4$, c) $N_0 = 6,5 \cdot 10^4$ und d) $N_0 = 7,1 \cdot 10^4$. Es ist deutlich erkennbar, dass die Abweichung vom parabelförmigen Dichteprofil mit zunehmender Teilchenzahl abnimmt.

Abbildung 4.14 zeigt solche Absorptionsspektren der Atome nach $20,4 \text{ ms}$ Time-of-Flight für verschiedene Teilchenzahlen. Die abgebildeten Atome wurden zuvor gemäß des beschriebenen Schemas in der Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ und einem Unordnungspotenzial der Tiefe $0,06 E_r$ gehalten. Die Dichteprofile zeigen deutliche

Abweichungen von der selbstähnlichen Expansion [185] einer Thomas-Fermi-Dichteverteilung. Dieses äußert sich insbesondere in dem Auftreten von axialen Dichtemodulationen in den expandierten Kondensaten. Wie in der Abbildung 4.15 zu erkennen ist, treten diese Modulationen für Kondensate, die aus dem Magnetfallenpotenzial allein expandiert sind, nicht auf.

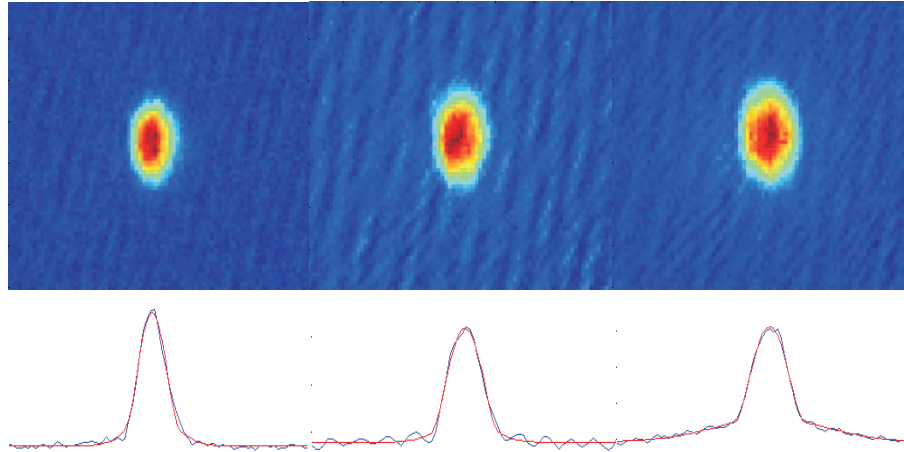


Abbildung 4.15.: Die obere Zeile zeigt Absorptionsspektren der Atome nach $20,4 \text{ ms}$ TOF aus der Magnetfalle. In der unteren Zeile sind die zugehörigen axialen Dichteprofile gezeigt. Die Zahl der kondensierten Atome beträgt für die einzelnen Bilder: a) $N_0 = 2,1 \cdot 10^4$, b) $N_0 = 4 \cdot 10^4$ und c) $N_0 = 5,6 \cdot 10^4$. Die gemessenen Dichteprofile zeigen die typische Parabelform der selbstähnlichen Expansion.

Abbildung 4.14 legt nahe, dass die Abweichung vom parabelförmigen Dichteprofil mit abnehmender Teilchenzahl signifikanter wird. Um diesen Effekt quantitativ zu untersuchen, wird die Standardabweichung der Dichte von der Parabelform bestimmt. Dazu werden den gemessenen axialen Dichteprofilen bimodale Verteilungen angepasst [184]. Die Differenz zwischen dieser Kurve und der gemessene Dichteverteilung wird auf die Kondensatdichte $n_0(z)$ normiert und zur Bildung der Standardabweichung σ integriert:

$$\sigma^2 = \int dz \left(\frac{\delta n(z)}{n_0(z)} \right)^2. \quad (4.6)$$

Dabei bezeichnet $\delta n(z)$ die Differenz zwischen dem bimodalen Fit und dem gemessenen Dichteprofil. Die Kondensatdichteverteilung $n_0(z)$ wird aus dem Parabel-Anteil der Kurven bestimmt. Die Integration in (4.6) wird dabei über die Länge des Kondensates ausgeführt.

Abbildung 4.16 stellt die ermittelte Standardabweichung in Abhängigkeit von der Zahl kondensierter Atome nach freier Expansion dar. Für diese Realisierungen des Unordnungspotenzials ist eine deutliche Abnahme der Abweichung von selbstähnlichen Expansion mit zunehmender Teilchenzahl zu beobachten. Die Referenzdaten für die Expansion eines Kondensates aus der Magnetfalle ohne überlagertes Unordnungspotenzial zeigen nahezu keine Dichtemodulationen oder Abhängigkeiten von der Teilchenzahl. Dies zeigt insbesondere, dass die Kondensate in diesem Regime keine signifikanten Phasenfluktuationen aufweisen, die ebenfalls Dichtemodulationen nach der freien Expansion verursachen [184].

Die beobachtete Teilchenzahlabhängigkeit der Dichtemodulationen kann durch Berücksichtigung der interatomaren Wechselwirkung auf den Kondensatgrundzustand verstanden werden. Durch die Wechselwirkung wird das ungeordnete Potenzial effektiv abgeschirmt. Dieser Mechanismus wurde bereits im Kapitel 3 für das optische Gitterpotenzial herausgestellt. Da mit größerer Teilchenzahl die Wechselwirkungsenergie im Kondensat zunimmt, wird das ungeordnete Potenzial immer stärker abgeschirmt. Dementsprechend ist der unordnungsinduzierte Einfluss auf die expandierte Dichteverteilung geringer als für kleine Teilchenzahlen.

Die Fehlerbalken in Abbildung 4.16 stellen die Standardabweichung der Messdaten dar. Da die genaue Form des Unordnungspotenzials sowohl während eines Messtages als auch zwischen verschiedenen Messtagen Variationen unterliegt, ändert sich auch die Form und Ausprägung der beobachteten Dichtemodulationen. Dieses führt zu großen statistischen Variationen der gemessenen Größen und schlägt sich in entsprechend großen Fehlerbalken nieder. Abbildung 4.17 verdeutlicht die Schwankungen in den gemessenen Dichteprofilen. Sie zeigt Absorptionaufnahmen und zugehörige Dichteprofile nach $20,4 \text{ ms}$ TOF. Diese wurden an einem anderen Messtag erstellt als die in der Abbildung 4.14 gezeigten Dichteprofile. Die Modulationen des Dichteprofiles haben eine deutlich andere Form als die in Abbildung 4.14 dargestellten.

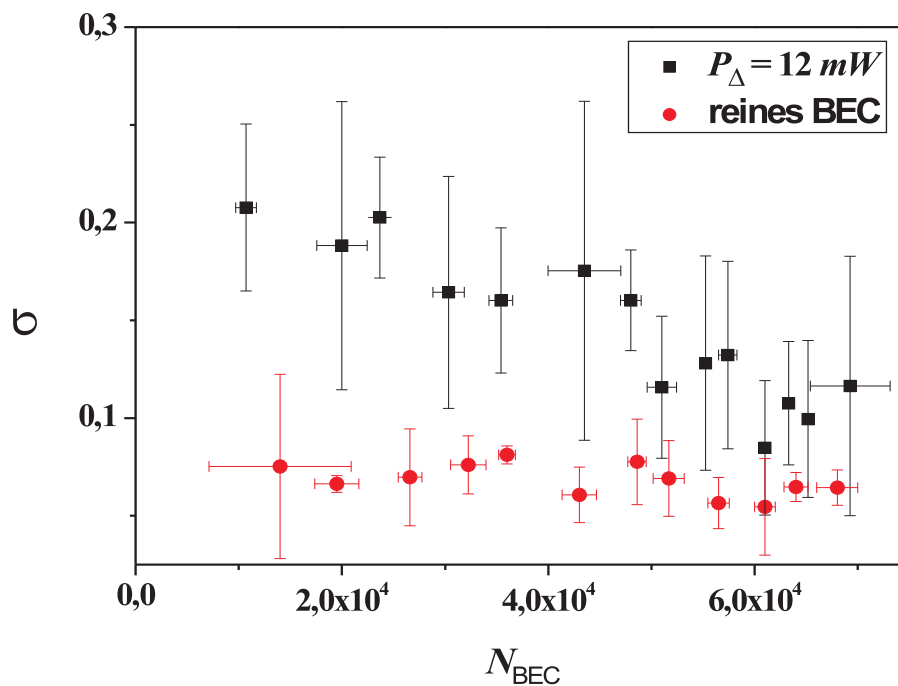


Abbildung 4.16.: Standardabweichung der axialen Dichteprofile von der Parabelform nach $20,4 \text{ ms}$ TOF. Mit zunehmender Teilchenzahl nimmt die Wechselwirkungsenergie zu und das ungeordnete Potenzial wird stärker abgeschirmt. Der Abbildung liegen Daten von zwei Messtagen zugrunde. Die Leistung des Unordnungsstrahls betrug 12 mW und entspricht einer Unordnungstiefe von $0,06 E_r$.

Die Messungen zeigen, dass die Dichteverteilung der Kondensate durch das ungeordnete Potenzial signifikant beeinflusst wird. Um die Ursachen für die beobachteten Effekte de-

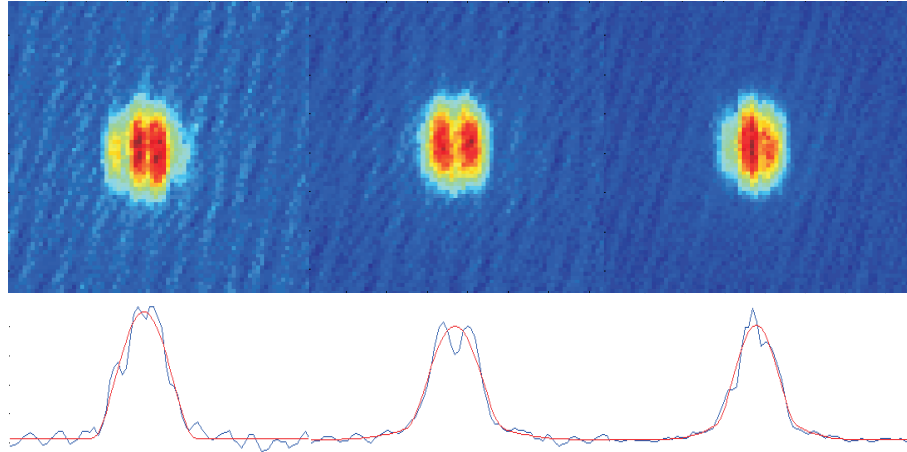


Abbildung 4.17.: Die obere Zeile zeigt Absorptionsspektren der Atome nach 20,4 ms TOF. Die Atome wurden aus einem Unordnungspotenzial der Tiefe $0,06 E_r$ entlassen. In der unteren Zeile sind die zugehörigen axialen Dichteprofile gezeigt. Die Teilchenzahl der kondensierten Atome beträgt für alle Bilder $N_0 = 4 \cdot 10^4 \dots 5 \cdot 10^4$.

taillierter zu untersuchen, wurden umfangreiche numerische Untersuchungen des Systems durchgeführt.

4.4.2. Theoretische Untersuchung des Systems

Die theoretischen Untersuchungen basieren auf der numerischen Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung. In der Gegenwart des ungeordneten Potenzials ist die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}, t)$ durch

$$i \hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_\Delta f(z) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.7)$$

bestimmt. Hierbei bezeichnet $V_{MF}(\mathbf{r})$ das Potenzial der Magnetfalle und $f(z)$ eine räumlich zufällig variierende Funktion, die das ungeordnete Potenzial repräsentiert. Dabei ist $f(z)$ so normiert, dass ihre doppelte Standardabweichung vom Mittelwert eins ist. Dementsprechend bestimmt V_Δ die Tiefe des Unordnungspotenzials. Um eine möglichst gute Modellierung der experimentellen Situation zu gewährleisten, wurden typische Verläufe für $f(z)$ aus den Abbildungen des Unordnungslaserstrahls gewonnen. Somit stellen die für die numerischen Simulationen verwendeten Unordnungspotenziale realistische Verläufe des ungeordneten Dipolpotenzials dar. Eine Lösung der Bogoliubov-de-Gennes Gleichungen [34] für typische Tiefen des Unordnungspotenzials zeigt, dass bei $T = 0$ die Zahl der nicht kondensierten Atome vernachlässigbar ist [1, 186]. Für die im Experiment vorliegenden ultra-kalten Temperaturen stellt daher eine auf der Gross-Pitaevskii-Gleichung basierende Beschreibung des Systems eine gute Näherung dar.

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung (4.7) wurde mit der im Anhang A beschriebenen numerischen Methode gelöst. Dabei kann aus (4.7) nicht nur die Zeitentwicklung der Kondensatwellen-

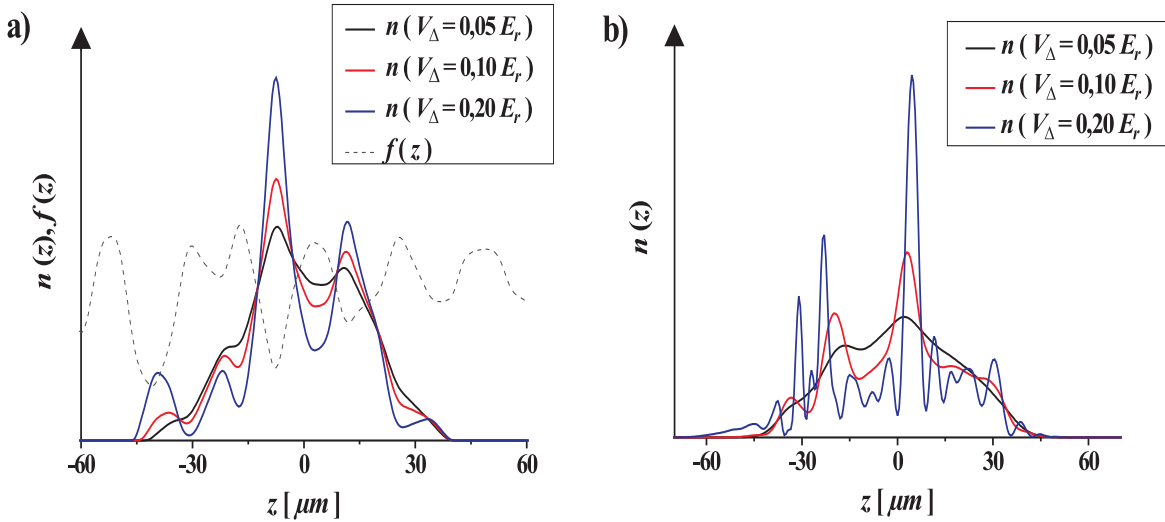


Abbildung 4.18.: In a) ist die axiale Dichteverteilung von 10^5 kondensierten Atomen innerhalb der Magnetfalle mit den Fallenfrequenzen $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ bzw. $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ für verschiedene Tiefen des ungeordneten Potenzials gezeigt. Der Verlauf des Unordnungspotenzials ist ebenfalls dargestellt. Die Abbildung b) zeigt die axiale Dichteverteilung nach $20,4 \text{ ms}$ freier Expansion. Über das radiale Dichteprofil wurde jeweils integriert.

funktion ermittelt werden, sondern auch der Grundzustand¹. Die Abbildungen 4.18 und 4.19 zeigen numerisch berechnete axiale Dichteprofile des Kondensates in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe für zwei verschiedene Realisierungen $f(z)$ des Unordnungspotenzials. Dabei ist jeweils sowohl die Dichteverteilung des Grundzustandes in der Falle als auch die Dichteverteilung nach $20,4 \text{ ms}$ freier Expansion gezeigt. Es ist erkennbar, dass mit zunehmender Unordnungstiefe eine deutliche Modulation der axialen Dichteverteilung auftritt. Die Verteilungen der gefangenen Kondensate zeigen einen Verlauf, der invers zu dem des ungeordneten Potenzials ist.

Die Lokalisierung der Atome in den Minima des ungeordneten Potenzials schlägt sich auch in einer ausgeprägten Modulation der Dichteverteilung nach der Expansion nieder. Diese wird mit zunehmender Unordnungstiefe strukturierter und komplexer. Für die größten in den Abbildungen gezeigten Unordnungstiefen beginnt das Kondensat in der Falle in mehrere Teile aufzubrechen. Bei der Expansion überlappen und interferieren diese einzelnen Teile des Kondensats und verursachen eine äußerst schnelle Modulation der Dichteverteilung. Dieser Effekt ist besonders deutlich in der Abbildung 4.19 erkennbar, in der dargestellt ist, wie das Kondensat durch das Unordnungspotenzial in der Falle in zwei Hälften geteilt wird.

Die zeitliche Entwicklung der freien Expansion ist in Abbildung 4.20 dargestellt. Gezeigt ist das axiale Dichteprofil eines Kondensates bestehend aus $N = 10^5$ Atomen für verschiedene Zeiten der freien Expansion. Dabei wurde der Kondensatgrundzustand in der Falle für eine Unordnungstiefe von $V_\Delta = 0,1 E_r$ und eine radiale Magnetfallenfrequenz von $\omega_\rho = 2\pi \times$

¹Der Grundzustand wird durch die Zeitentwicklung einer Testfunktion in imaginärer Zeit erhalten. Die Details für diese Methode sind im Anhang A beschrieben.

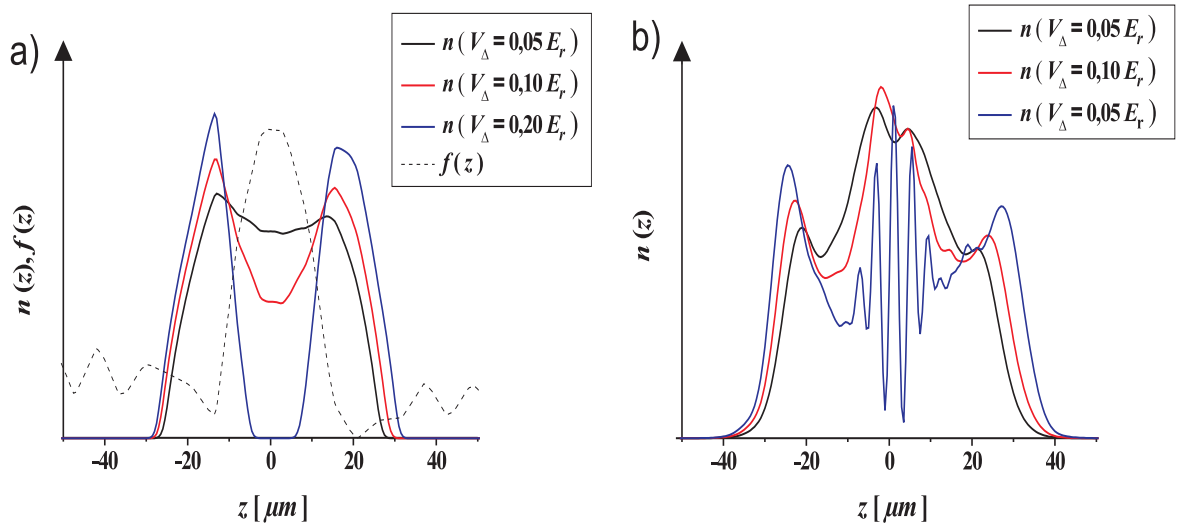


Abbildung 4.19.: In a) ist die axiale Dichteverteilung von 10^5 kondensierten Atomen innerhalb der Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ für verschiedene Tiefen des ungeordneten Potentials gezeigt. Für die Simulation wurde eine spezielle Unordnungsstruktur ausgewählt, die sich von der Abbildung 4.18 zugrunde liegenden unterscheidet. Figur b) zeigt die axiale Dichteverteilung nach $20,4 \text{ ms}$ freier Expansion. Über den radialen Freiheitsgrad wurde jeweils integriert.

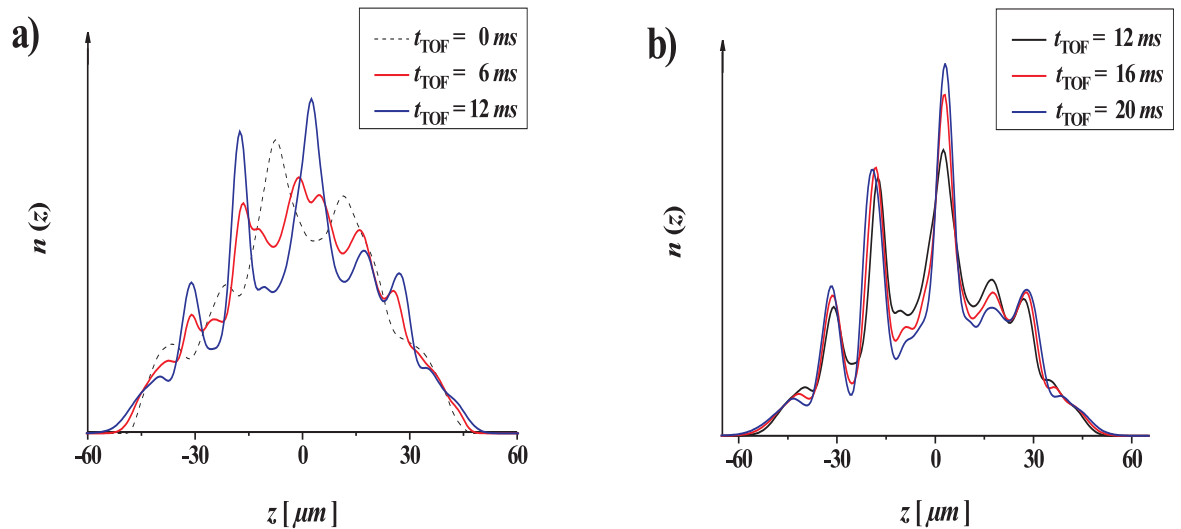


Abbildung 4.20.: Gezeigt ist das axiale Dichteprofil eines Kondensates mit 10^5 Atomen zu verschiedenen Zeiten der Expansion. Die Atome wurden zuvor in einem ungeordneten Potenzial der Tiefe $V_\Delta = 0,1 E_r$ und einer Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ gehalten. In a) ist die frühe Phase der Expansion gezeigt, bei der sich die Struktur des Dichteprofiles bildet. Dieses ändert sich während der in b) gezeigten Phase der ballistischen Expansion kaum noch. Über den radialen Freiheitsgrad wurde integriert.

360 Hz berechnet². In der Abbildung ist deutlich erkennbar, dass sich die Struktur der axialen Dichteverteilung bereits zu einer frühen Phase der freien Expansion ausbildet. Dabei treten die ausgeprägten Dichtemaxima genau zwischen den Lokalisierungszentren der Atome im gefangenen Kondensat auf. Zu Beginn der Flugzeit expandiert die Kondensatwellenfunktion in axialer Richtung aus den Potenzialminima, so dass es zu einer konstruktiven Überlagerung an den jeweiligen Zwischenstellen kommt. Nachdem sich die Struktur des axialen Dichteprofiles gebildet hat, ist die anschließende Expansion ballistisch, da die Wechselwirkungsenergie zu diesem Zeitpunkt bereits vollständig in kinetische Energie konvertiert ist. Die grundsätzliche Form der Dichteverteilung ändert sich während der Phase der ballistischen Expansion nicht mehr. Die Abbildung 4.21 bestätigt, dass die Struktur des axialen Dichteprofiles durch die Wechselwirkung bestimmt ist. Sie vergleicht die Expansion eines ungeordneten Kondensates gemäß der Gross-Pitaevskii-Gleichung mit dessen ballistischer Expansion. Um letztere zu erhalten, wurde die nichtlineare Wechselwirkung für die Zeitentwicklung vernachlässigt.

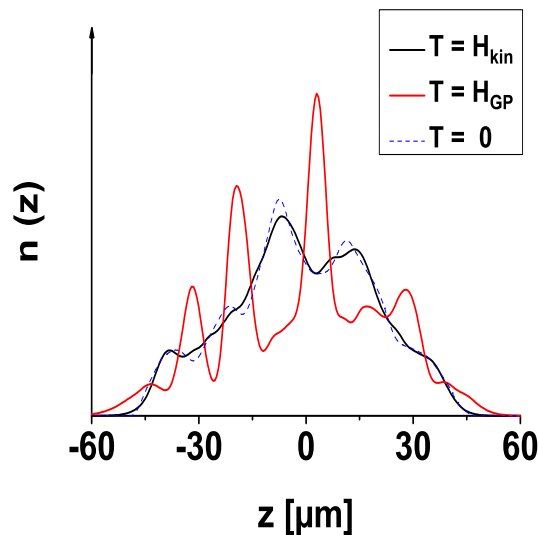


Abbildung 4.21.: Gezeigt ist das axiale Dichteprofil eines Kondensates bestehend aus 10^5 Atomen nach 20,4 ms Flugzeit für verschiedene Zeitentwicklungsoperatoren T . Das blaue Profil zeigt das Ergebnis der rein ballistischen Expansion während das rote Profil unter Berücksichtigung der Wechselwirkung erhalten wurde. Die gestrichelte Linie zeigt das Dichteprofil innerhalb der Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200$ Hz. Die Unordnungstiefe betrug $V_\Delta = 0,1 E_r$. Über den radialen Freiheitsgrad wurde integriert.

Beschreibung der Lokalisierung in der Thomas-Fermi-Näherung

In der Diskussion des Grundzustands des ungeordneten Kondensates in der Falle ist die axiale Dichteverteilung gemäß der Abbildungen 4.18 und 4.19 durch den Verlauf des Potenzials

²Bei dieser Fallenfrequenz zeigen sich keine grundsätzlichen Unterschiede zum Fall $\omega_\rho = 2\pi \times 200$ Hz.

bestimmt. Dieser Sachverhalt legte nahe, dass die Möglichkeit einer Beschreibung der Kondensatwellenfunktion im Rahmen einer modifizierten Thomas-Fermi-Näherung besteht. Diese Approximation resultiert aus der Vernachlässigung des kinetischen Terms in der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung. Um zu prüfen, ob eine solche Vernachlässigung für die experimentellen Parameter gerechtfertigt ist, wurde die der Gross-Pitaevskii-Gleichung zugrunde liegende Wirkung

$$E[\Psi] = \int d^3r \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\Psi|^2 + (V_{MF}(\mathbf{r}) + V_{\Delta} f(z)) |\Psi|^2 + \frac{g}{2} |\Psi|^4 \right] \quad (4.8)$$

für die numerisch berechneten Kondensatgrundzustände bestimmt. Sie stellt zugleich die Energie pro Teilchen dar³ [34]. Die Abbildung 4.22 zeigt die Energie pro Teilchen für ein Kondensat bestehend aus $N = 1 \cdot 10^5$ Atomen in der Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_{\rho} = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ für verschiedene Tiefen V_{Δ} des ungeordneten Potentials. Dabei wurde für die Berechnung die Unordnungsrealisierung aus Abbildung 4.18 verwendet. Die Energie pro Teilchen nimmt linear mit der Unordnungstiefe zu. Dabei ergibt sich nahezu der gesamte Energiegewinn aus dem Anstieg der potenziellen Energie. Insbesondere ist der Anteil der kinetischen Energie für den gesamten dargestellten Parameterbereich zu vernachlässigen.

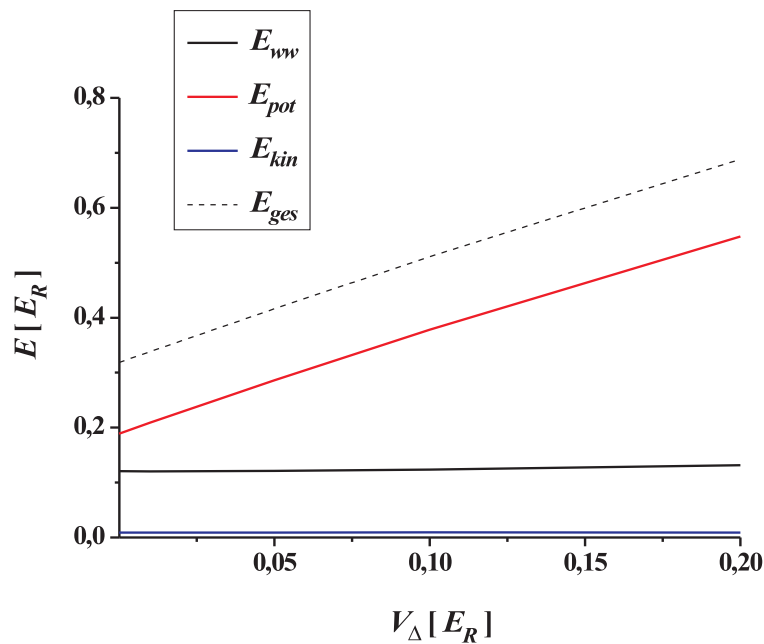


Abbildung 4.22.: Energie pro Teilchen in Abhängigkeit von der Tiefe des ungeordneten Potentials. Es sind sowohl die Gesamtenergie als auch die einzelnen Energiebeiträge dargestellt. Die Abbildung wurde für ein Kondensat bestehend aus $N = 10^5$ Atomen in einer Magnetfalle mit radialer Fallenfrequenz $\omega_{\rho} = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ erstellt.

Daher kann die Dichteverteilung in der Gegenwart des Unordnungspotentials analog zu

³In den numerischen Berechnungen ist die Norm der Kondensatwellenfunktion zu eins gewählt. Bei einer Normierung auf die Gesamtzahl der kondensierten Atome liefert (4.8) die Gesamtenergie des Systems.

der parabelförmigen Thomas-Fermi-Dichteverteilung in der Magnetfalle als

$$n(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{g} (\mu_{TF} - V_{MF}(\mathbf{r}) - V_{\Delta} f(z)) & \text{für } \mu_{TF} \geq V_{MF}(\mathbf{r}) + V_{\Delta} f(z) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

angegeben werden. Aufgrund der zufälligen Variationen von $f(z)$ ist eine analytische Berechnung des chemischen Potentials μ_{TF} oder der Thomas-Fermi-Radien jedoch in diesem Fall unmöglich. Um die Gültigkeit der Thomas-Fermi-Näherung zu zeigen, wurde das chemische Potenzial für den Grundzustand berechnet, wobei die Beiträge, der kinetischen Energie vernachlässigt wurden. Das so erhaltene chemische Potenzial wurde als Approximation für das chemische Potenzial μ_{TF} der Thomas-Fermi-Näherung verwendet und die Kondensatdichte wurde gemäß der Gleichung 4.4.2 bestimmt. In Abbildung 4.23 sind die Dichteprofile, die durch die Lösung der vollen Gross-Pitaevskii-Gleichung bzw. der Thomas-Fermi-Näherung erhalten wurden, gegenübergestellt. Die Thomas-Fermi-Näherung ist bereits für kleine Teilchenzahlen sehr gut geeignet und wird für große immer besser. Die gute Übereinstimmung mit der Lösung der vollen Gross-Pitaevskii-Gleichung wird insbesondere bei der Betrachtung der radial integrierten Dichteprofile in Abbildung 4.24 deutlich.

Schlussfolgerung aus der Thomas-Fermi-Näherung

Die Gültigkeit der Thomas-Fermi-Näherung für den experimentellen Parameterbereich hat wichtige Konsequenzen für die Interpretation der Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion in dem ungeordneten Potenzial. In der theoretischen Einleitung 4.2.1 wurden exponentiell lokalisierte Zustände besprochen, die infolge der destruktiven Selbstinterferenz der Wellenfunktion an den statistischen Fluktuationen des Potentials entstehen. Für das Auftreten dieser Streuprozesse ist das Zusammenspiel von kinetischem und potenziellem Term des Hamiltonians von essentieller Bedeutung. Die Tatsache, dass für das experimentell realisierte System der kinetische Term für die Beschreibung des Grundzustandes vernachlässigt werden kann, impliziert daher, dass dieser nicht aufgrund einer Selbstinterferenz lokalisiert ist. Die Gründe für das Ausbleiben einer solchen Lokalisierung liegen einerseits in dem realisierten Verhältnis von Systemgröße zu Fluktuationslänge des ungeordneten Potentials. Zum anderen wirkt die interatomare Wechselwirkung der Lokalisierung der Teilchen entgegen. Eine detaillierte Analyse dieser Zusammenhänge erfolgt im nächsten Kapitel.

Bestimmung der superflüssigen Komponente

Im Abschnitt 4.2.1 wurde dargelegt, dass eine exponentielle Lokalisierung der Einteilchenzustände in einem ungeordneten System dramatische Konsequenzen für dessen Transporteigenschaften hat. Als kanonisches Beispiel für eine unordnungsinduzierte Modifikation des Transportverhaltens wurde der vielbeachtete Metall-Isolatorübergang [50, 51] genannt. Obwohl die Betrachtungen der vorhergehenden Abschnitte zeigen, dass in dem realisierten System keine exponentielle Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion eintritt, hat die Gegenwart des ungeordneten Potentials dennoch wichtige Auswirkungen auf dessen Transporteigenschaften. Für ein wechselwirkendes Vielteilchensystem wird das Transportverhalten maßgeblich durch den Anteil der superflüssigen Komponente bestimmt. Dabei wird unter superflüssigem Verhalten die Eigenschaft des Systems verstanden, einen Materiefluss ohne Reibungsverluste

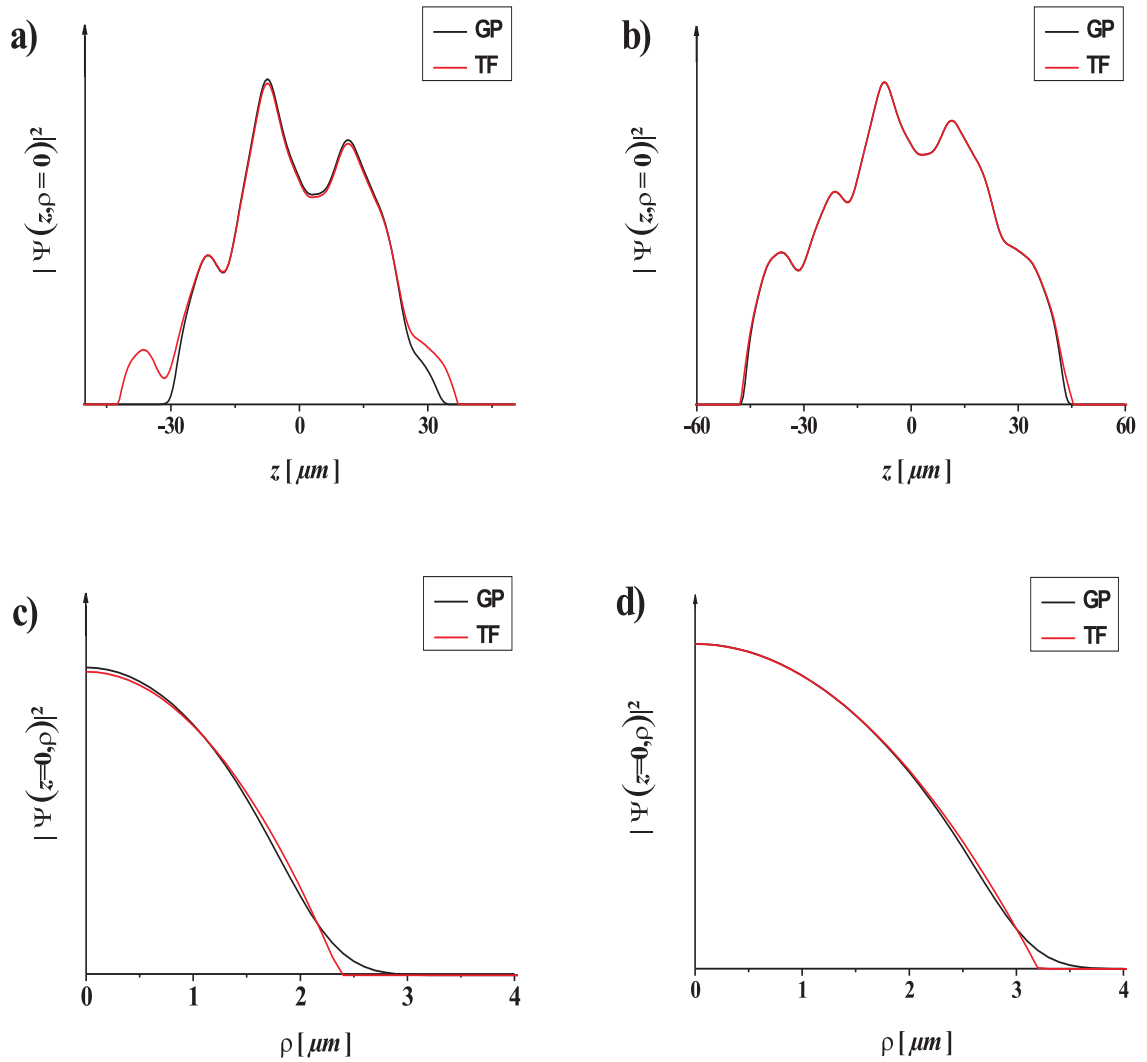


Abbildung 4.23.: Dichteprofile von Kondensaten in der Magnetfalle bei überlagertem Unordnungspotenzial der Tiefe $V_\Delta = 0, 1 E_r$. Abbildung a) zeigt das axiale Profil für $5 \cdot 10^4$ Atome, während c) das zugehörige radiale Dichteprofil zeigt. In b) und d) sind die entsprechenden Profile für $2 \cdot 10^5$ Atome dargestellt. Die gemäß 4.4.2 erhaltene Thomas-Fermi-Lösung ist ebenfalls eingezeichnet. Sie stellt für große Teilchenzahlen eine hervorragende Näherung dar.

aufrecht zu erhalten [101]. Bereits 1938 wurde entdeckt, dass ^4He ein solches Verhalten zeigt, wenn es unter eine kritische Temperatur, der so genannten λ -Temperatur, abgekühlt wird [102, 103]. Das Auftreten des Phänomens der Superflüssigkeit wurde von Landau anhand der Eigenschaften des Anregungsspektrums erklärt [187].

Für makroskopische Betrachtungen superflüssiger Systeme wird häufig das so genannte Zwei-Flüssigkeiten-Modell verwendet [34, 188]. Dabei werden die beiden Flüssigkeiten durch ihr Verhalten in Gegenwart von bewegten Systemrändern unterschieden. Auf eine Bewegung der Systemränder reagiert nur der normalflüssige Anteil der Teilchen, indem er von der Bewegung der Ränder mitgezogen wird. Der superflüssige Anteil bleibt dagegen für Ge-

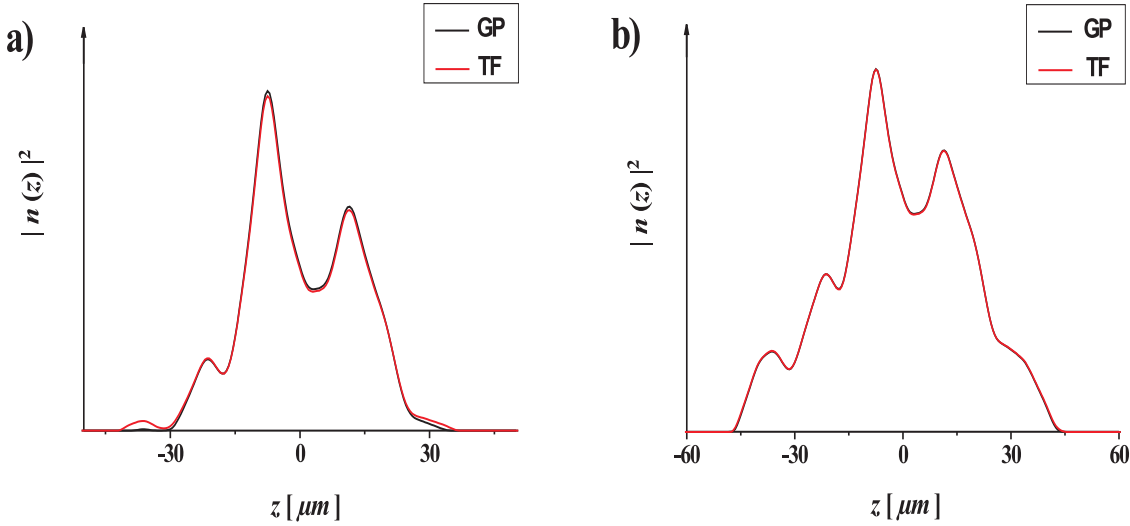


Abbildung 4.24.: Axiale Dichteprofile für die Parameter der Abbildung 4.23 nach Integration des radialen Freiheitsgrades.

schwindigkeiten der Ränder unterhalb der Landau-Geschwindigkeit v_L in Ruhe [101, 187]. Dieses liegt daran, dass die superflüssige Komponente im bewegten Bezugssystem der Systemänderungen per Definition reibungsfrei fließen kann. Aus dem Anstieg der Energie des Systems bei einer Bewegung der Ränder kann daher direkt auf den Anteil der normalflüssigen Komponente geschlossen werden.

Diese makroskopische Definition der Flüssigkeitskomponenten kann auf eine mikroskopische Betrachtungsweise erweitert werden. Dazu wird der Einfluss der bewegten Systemänderungen als eine Randwertbedingung für die Vielteilchenwellenfunktion aufgefasst. Dieses geschieht mit der Methode der so genannten Twisted-Boundary-Conditions [189–191]. Nach dieser lautet die Randwertbedingung für die Vielteilchenwellenfunktion in einer Dimension [62]

$$\psi(z_1, \dots, z_k + L, \dots, z_N) = e^{i\Theta} \psi(z_1, \dots, z_k, \dots, z_N) \quad , \quad \forall k. \quad (4.9)$$

Dabei bezeichnet Θ den so genannten Twist-Angle und L die Systemlänge. Für Bose-kondensierte Systeme sind die Konsequenzen der Randbedingung (4.9) besonders leicht erkennbar. Für den Fall, dass alle Teilchen kondensiert sind, lässt sich die Vielteilchenwellenfunktion ψ exakt als Kondensatwellenfunktion Ψ schreiben. Damit lautet (4.9):

$$\Psi(z + L) = e^{i\Theta} \Psi(z). \quad (4.10)$$

Die Randbedingung verursacht also einen Anstieg der Phase der Kondensatwellenfunktion über die Systemlänge L um den Winkel Θ . Nach Kapitel 2 ist mit diesem Phasengradienten ein superflüssiger Strom der Geschwindigkeit

$$v_s = \frac{\hbar \Theta}{m L} \quad (4.11)$$

verbunden. Die Gesamtenergie des Systems ist um den Betrag der kinetischen Energie der

superflüssigen Bewegung gegenüber der Situation ohne Phasengradienten erhöht:

$$E_{\Theta} - E_0 = \frac{1}{2} M_s v_s^2. \quad (4.12)$$

Dabei bezeichnet M_s die Gesamtmasse der superflüssigen Komponente und E_{Θ} bzw. E_0 die Energie des Systems in Gegenwart bzw. Abwesenheit des Phasengradienten. Durch Kombination von (4.11) und (4.12) kann eine einfache Relation für den Anteil der superflüssigen Teilchen f_s hergeleitet werden [62, 77, 189, 192]

$$f_s = \frac{M_s}{m N} = \frac{2mL^2}{\hbar^2 N} \frac{E_{\Theta} - E_0}{\Theta^2}, \quad \Theta \ll \pi. \quad (4.13)$$

Die superflüssige Komponente ist in dieser mikroskopischen Betrachtungsweise durch die Reaktion des Systems auf eine aufgeprägte Phasenbedingung bestimmt. Die Berechnung von (4.13) ist dabei für hinreichend kleine Winkel durchzuführen, da nur dann der Anstieg der Gesamtenergie vollständig der kinetischen Energie des superflüssigen Stroms zugeschrieben werden kann. Für große Winkel können weitere Anregungen auftreten, so dass eine Berechnung des superflüssigen Anteils mit (4.13) zu fehlerhaften Resultaten führen kann [62].

Obwohl die Berechnung der superflüssigen Komponente im Zusammenhang mit Bose-kondensierten Systemen motiviert wurde, ist die beschriebene Methode allgemein einsetzbar. So kann ψ in (4.9) die Vielteilchenwellenfunktion eines beliebigen Systems bezeichnen. In der Tat ist der Zusammenhang zwischen dem Auftreten der Bose-Einstein-Kondensation und einer superflüssigen Komponente in bosonischen Systemen noch nicht erschöpfend geklärt [193]. So gibt es Hinweise, dass beide Effekte unabhängig voneinander auftreten können. Als Beispiel sei hier auf das Tonks-Girardeau-Gas [46] verwiesen. Dieses ist im Rahmen der Definition (4.13) superflüssig [193], stellt aber dennoch kein Bose-Einstein-Kondensat dar.

Des Weiteren sollte der für Bose-kondensierte Systeme gültige Zusammenhang (4.11) nicht zu der falschen Annahme verleiten, dass der Anteil der superflüssigen Komponente mit dem Anteil der kondensierten Atome identisch ist. So ist z. B. ^4He unterhalb der λ -Temperatur zu nahezu 100 % superflüssig. Aufgrund der starken interatomaren Wechselwirkung beträgt der Kondensatanteil jedoch nur ungefähr 10 %. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass die gemäß (4.13) erfolgte Berechnung der superflüssigen Komponente nichts über die Stabilität eines superflüssigen Flusses aussagt. Dafür ist die Form des Anregungsspektrums alleine ausschlaggebend. So ist z. B. das ideale Bose-Gas im Sinne der Gleichung (4.13) zu 100 % superflüssig. Auf der anderen Seite ist die Landau Geschwindigkeit der superflüssigen Bewegung $v_L = 0$, da im nicht wechselwirkenden Bose-Gas der lineare Bogoliubov-Teil des Spektrums fehlt ⁴ [101]. Die Tatsache dass verschiedene Definitionen der superflüssigen Komponente zu unterschiedlichen Resultaten führen können, ist dabei bekannt [195].

Unter Ausnutzung der Gleichung (4.13) wurde die superflüssige Komponente des Bose-Einstein-Kondensates in dem realisierten ungeordneten Potenzial bestimmt. Dazu wurden die Energien für das System mit Phasengradienten und für das ungestörte System mittels

⁴Diese Diskrepanz sollte nicht zu der fälschlichen Annahme verleiten, dass die angeregten Zustände bei der Berechnung von (4.13) keine Rolle spielen. Siehe dazu die Diskussion in [62, 194].

des Energiefunctionals der Gross-Pitaevskii-Gleichung (4.8) berechnet. Die Grundzustände in Gegenwart des Phasengradienten haben dabei die Form

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{i \frac{\Theta}{L} z} \psi(\mathbf{r}), \quad (4.14)$$

wobei $\psi(\mathbf{r})$ ein komplexwertiges Feld ist, das in z periodische Randbedingungen erfüllt:

$$\psi(z) = \psi(z + L). \quad (4.15)$$

Um diesen Randwertbedingungen gerecht werden zu können, wurde der axiale Einschluss der Magnetfalle vernachlässigt und stattdessen das Kondensat in einem Kasten mit axialer Länge $L = 120 \mu\text{m}$ betrachtet. In radialer Richtung wird weiterhin ein harmonischer Einschluss mit der Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ verwendet. Die Ergebnisse für das betrachtete System sollten somit sehr gute Näherungen für die experimentelle Situation liefern.

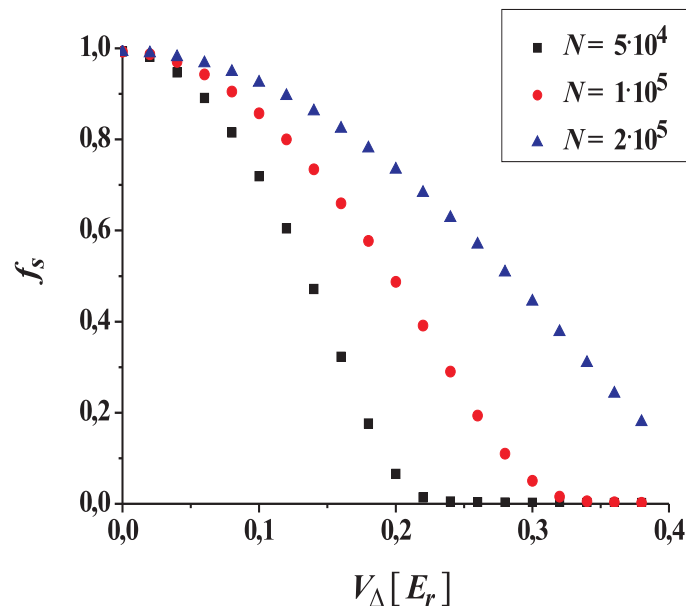


Abbildung 4.25.: Anteil der superflüssigen Atome in Abhängigkeit von der Tiefe des Unordnungspotenzials für verschiedene Teilchenzahlen im Kondensat. Für große Teilchenzahlen ist die superflüssige Komponente robuster gegenüber dem Unordnungspotenzial.

Abbildung 4.25 zeigt die superflüssige Komponente in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe für verschiedene Teilchenzahlen. In Abwesenheit des ungeordneten Potenzials ist das System erwartungsgemäß nahezu vollständig superflüssig. Mit zunehmender Unordnungstiefe beginnt der superflüssige Anteil der Atome kontinuierlich zu sinken. Dies geht mit einer zunehmenden Lokalisierung des Kondensats in den Minima des ungeordneten Potenzials einher. Diese Lokalisierung führt dazu, dass das System auf den aufgezwungenen Phasengradienten nur mit einem geringen Teilchenfluss antwortet. Da das ungeordnete Potenzial durch die interatomare Wechselwirkung abgeschirmt wird, ist die superflüssige Komponente eines Kondensates mit großer Teilchenzahl deutlich robuster.

Wenn das ungeordnete Potenzial so tief ist, dass das Kondensat in mehrere Teile aufbricht, fällt der Anteil der superflüssigen Atome auf null. Dieses ist im Rahmen eines zusammenbrechenden Teilchenflusses entlang des Gesamtsystems zu verstehen. Das Verschwinden der mittels (4.13) berechneten superflüssigen Komponente zeigt nicht an, dass die einzelnen Kondensatteile ihre superflüssigen Eigenschaften verloren haben.

Die Abbildung 4.26 zeigt die Energiedifferenz zwischen Systemen mit und ohne Phasengradienten in Abhängigkeit vom Winkel Θ . Der gemäß (4.13) zu erwartende quadratische Zusammenhang kann für den gezeigten Winkelbereich voll bestätigt werden. Dabei ist hervorzuheben, dass bei der Berechnung des superflüssigen Anteils der Atome gemäß der Gleichung (4.13) das Gross-Pitaevskii-Energiefunktional verwendet wurde. Dieses impliziert, dass die angeregten Zustände notwendigerweise bei der Berechnung von f_s keine Berücksichtigung finden. Daher kann in diesem System keine Niveau-Abstoßung mit angeregten Zuständen auftreten, so dass der quadratische Zusammenhang auch für große Winkel noch sehr gut erfüllt ist.

Andererseits kann die Form des Anregungsspektrums wesentliche Auswirkungen für (4.13) haben, wie z. B. beim Phasenübergang eines bosonischen Gittergases zum Mott-Isolator [62]. Die in der Abbildung (4.25) dargestellte Reduktion der superflüssigen Komponente ist allein der Lokalisierung der Atome im ungeordneten Potenzial zuzuschreiben.

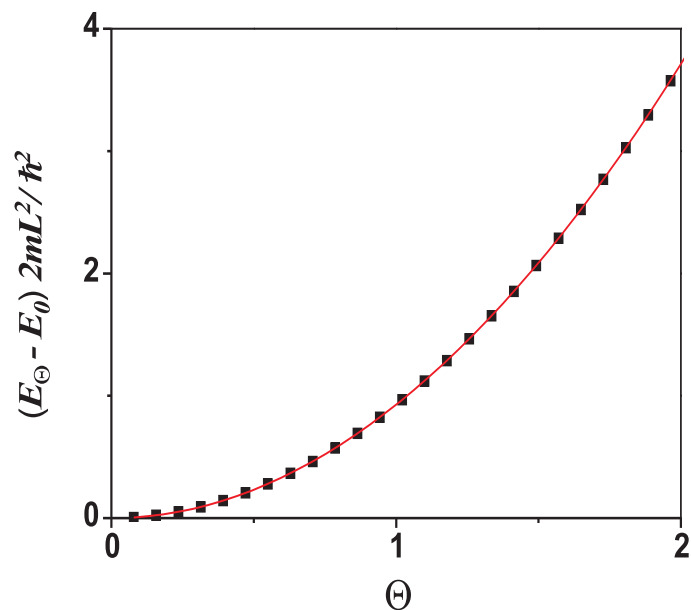


Abbildung 4.26.: Energiedifferenz zwischen den Systemen mit und ohne Phasengradienten in Abhängigkeit vom Winkel Θ . Die rote Linie zeigt den Verlauf einer Parabel.

5. Ungeordnetes ultra-kaltes Gittergas: Der Grundzustand

Durch die Kombination des optischen Gitters mit dem Unordnungspotenzial konnte im Rahmen dieser Arbeit erstmals ein ultra-kaltes ungeordnetes Gittergas realisiert werden [1]. Dieses Kapitel stellt die experimentellen und theoretischen Untersuchungen am Vielteilchengrundzustand in dem kombinierten Potenzial dar. Die Messungen zeigen, dass die Unordnung nachhaltige Effekte auf die atomare Dichteverteilung ausübt. Die durchgeführten numerischen Berechnungen stehen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

Das Kapitel beginnt mit einer Einführung zum Stand der Forschung mit ultra-kalten ungeordneten Gittergasen. Im Anschluss werden die relevanten theoretischen Grundlagen diskutiert. Insbesondere wird dabei auf das vielbeachtete Anderson-Modell [52] sowie auf das Bose-Hubbard-Modell [36,37] eingegangen. Den Schwerpunkt des Kapitels bildet die Beschreibung der experimentellen und theoretischen Untersuchungen des Grundzustands des ungeordneten Gittergases. Eine wichtige Fragestellung hierbei lautet, ob eine Anderson-artige Lokalisierung [52] der Kondensatwellenfunktion in einem ungeordneten Gitterpotenzial zu erreichen ist.

5.1. Einführung

Ungeordnete Gittersysteme stellen interessante Forschungsobjekte dar, die in verschiedenen Zusammenhängen untersucht werden. So spielen sie für den Metall-Isolatorübergang [50,196], für Spin-Gläser [197], Perkulationsphänomene [198], die Hochtemperatursupraleitung [69] und Quanten-Chaos [199] eine entscheidende Rolle. In den meisten Fällen liegen sowohl Gitter als auch Unordnung auf natürliche Weise vor. Daher sind die Möglichkeiten zur gezielten Manipulation der zugrunde liegenden Potenzialverläufe in der Regel nicht gegeben oder nur sehr beschränkt.

Im Gegensatz dazu können für ultra-kalte Quantengase ungeordnete Gitterstrukturen erzeugt werden, deren Potenzialform und -tiefe experimentell mit hoher Präzision einstellbar ist. Das reguläre Gitterpotenzial wird dabei durch ein optisches Gitter erzeugt. Für die Implementierung von Unordnungspotenzialen sind eine Reihe von Methoden vorgeschlagen worden. Ein direkter Weg ist die Verwendung von Laser-Speckle-Strahlung [58–60], die bereits erfolgreich zur Manipulation ultra-kalter Atome in einer Magnetfalle [84] und in Wellenleiterstrukturen [85,86] eingesetzt wurde. Die Erzeugung des ungeordneten Dipolpotenzials nach Kapitel 4 erfolgt nach einem ähnlichen Prinzip.

Da diese Methoden zur Erzeugung der Unordnung auf optischen Abbildungen basieren, sind die kleinsten erreichbaren Strukturgrößen beschränkt. Sie liegen bei den bisherigen Experimenten im Bereich einiger Mikrometer. Zur Erzeugung kleinerer Strukturen sind andere

Techniken vorgeschlagen worden. So kann das optische Gitter (Hauptgitter) mit weiteren Gittern (Übergittern) inkommensurabler Frequenz überlagert werden. Theoretische Untersuchungen zeigen, dass in einem solchen Gittersystem Effekte auftreten, die für ungeordnete Systeme charakteristisch sind [61–64]. Da die Übergitter eine Gitterkonstante von $\lambda/2$ besitzen, lassen sich mit ihrer Hilfe Strukturgrößen im Sub-Mikrometer-Bereich realisieren. In jüngster Vergangenheit konnte durch die Überlagerung eines dreidimensionalen Hauptgitters mit einem weiteren Gitter der Übergang in die Bose-Glas-Phase [36] experimentell realisiert werden [200].

Eine weitere Methode zur Erzeugung von Unordnung beruht auf dem Einfluss von Fremdatomen. Diese können als zufällig verteilte Streuzentren dienen [65]. Dabei konnte bereits gezeigt werden, dass die Gegenwart von Kalium-Atomen eine Auswirkung auf den Mott-Isolatorübergang eines bosonischen Gittergases hat [201]. Die Verschiebung des Phasenübergangs konnte nicht im Rahmen einer Mean-Field-Berechnung erklärt werden und wurde daher als Unordnungseffekt interpretiert.

Die beschriebenen Methoden stellen einen geeigneten Zugang dar, um anhand von ultrakalten Gittergasen unordnungsinduzierte Effekte in Vielteilchensystemen zu erforschen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen können signifikante Beiträge zum besseren Verständnis ungeordneter Systeme für viele Bereiche der Physik der kondensierten Materie liefern.

5.2. Theoretische Grundlagen

Die theoretische Behandlung ungeordneter Systeme ist durch das Fehlen jeglicher Symmetrien des Hamiltonians deutlich erschwert. In Gitterstrukturen kann die Beschreibung durch die Einführung von Modellsystemen deutlich erleichtert werden. Einige Modelle, die sich in einer Vielzahl von Untersuchungen bewährt haben, werden im Folgenden beschrieben.

5.2.1. Das Anderson-Modell

Das Anderson-Modell [52] wird zur Beschreibung eines einzelnen Teilchens oder eines Systems nicht wechselwirkender Teilchen in einer Gitterstruktur verwendet. Der Hamiltonian des Anderson-Modells lautet [63]

$$\hat{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} a_i^\dagger a_j + \sum_i E_i a_i^\dagger a_i. \quad (5.1)$$

Die Summation läuft jeweils über die Gitterplätze, wobei $\langle i, j \rangle$ die Summe über nächste Nachbarn darstellt. Dabei stellt E_i die Energie des i -ten Gitterplatzes dar und J_{ij} bezeichnet das Tunnelmatrixelement zwischen den Gitterplätzen i und j . Letzteres wird häufig als konstant über das ganze Gitter angenommen ($J_{ij} = J$). Der Hamiltonian (5.1) stellt eine realistische Beschreibung eines Gittersystems dar, wenn

- die Bewegung des Teilchens auf ein einzelnes Energieband beschränkt bleibt und
- das Gitter so tief ist, dass nur Tunnelereignisse zwischen benachbarten Gitterplätzen berücksichtigt werden müssen.

Andernfalls ist eine Kopplung zwischen den Bändern oder weiter entfernten Gitterplätzen zu berücksichtigen, wodurch die Analyse deutlich erschwert wird. Eine Repräsentation von (5.1) kann erhalten werden, wenn der Feldoperator in der Wannier-Basis entwickelt wird:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{i,n} w_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) a_i^{(n)}. \quad (5.2)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass diese Entwicklung des Feldoperators nur dann den Anderson-Hamiltonian (5.1) ergibt, wenn zum einen nur ein einziges Band n beiträgt und zum anderen nur der Überlapp benachbarter Wannier-Funktionen berücksichtigt wird. Der letzte Punkt ist mit der Tight-Binding-Näherung aus Kapitel 3 identisch.

Unordnung wird im Anderson-Modell durch eine zufällige Variation der Gitterplatz-Energien E_i eingeführt [52]. Diese ist durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(E) dE$ gegeben, die durch eine Breite Δ charakterisiert ist. Damit stellt Δ ein Maß für die Unordnung dar. Die einfachste Unordnungsrealisierung liegt vor, wenn die Werte von E_i statistisch im Intervall $[-\Delta/2, \Delta/2]$ verteilt liegen. In diesem Fall wird von „diagonaler“ Unordnung gesprochen.

Im Anderson-Modell können in Abhängigkeit von der Energie und der Unordnungsstärke die in Abschnitt 4.2.1 beschriebenen lokalisierten Zustände auftreten. Ursprünglich wurde es zur Untersuchung der Transporteigenschaften eines Teilchens in einem ungeordneten Gitter entwickelt [52]. Hierbei zeigt sich, dass das Transportverhalten eines Teilchens trotz der komplexen ungeordneten Struktur durch wenige Parameter charakterisiert werden kann. So kann ein auf dem Gitterplatz i präpariertes Teilchen nicht diffundieren, wenn die Tunnelkopplung kleiner als ein kritischer Wert J_c wird, der von der Ordnung Δ ist¹ [52]. Diese Unterdrückung des Transports tritt auf, wenn im Mittel die Tunnelkopplung J nicht ausreicht, um die Energiedifferenzen zwischen verschiedenen Gitterplätzen zu überbrücken.

5.2.2. Das Bose-Hubbard-Modell

Das Bose-Hubbard-Modell wird zur Beschreibung wechselwirkender Bosonen in einer Gitterstruktur verwendet [36, 37]. Der Hamiltonian des Modells lautet

$$\hat{H} = - \sum_{\langle i,j \rangle} J_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1) \quad (5.3)$$

und kann durch eine Präparation ultra-kalter Bosonen in das niedrigste Band eines optischen Gitterpotenzials realisiert werden. In (5.3) bezeichnet n_i den Teilchenzahloperator für den i -ten Gitterplatz. Die Wechselwirkung ist durch den Term $\frac{U}{2} \sum_i n_i(n_i - 1)$ berücksichtigt. Wieder sind die Tunnelenergien normalerweise über das gesamte Gitter konstant ($J_{ij} = J$). Eine Realisierung des Bose-Hubbard-Modells ergibt sich, wenn der Feldoperator eines über binäre Stöße wechselwirkenden Bose-Gases in der Wannier-Basis entwickelt wird [37]. Analog zum Anderson-Modell müssen für die Gültigkeit der einfachen Formulierung (5.3) sowohl

¹Die Beschränkung auf eine Kopplung zwischen nächsten Nachbarn ist für diese Unterdrückung des Transports nicht zwingend erforderlich. Es reicht aus, wenn die Tunnelkopplung J_{ij} zwischen Gitterplatz i und j schneller als $1/r^3$ abfällt [52].

Beiträge von höheren Bändern als auch Kopplungen entfernterer Nachbarn vernachlässigbar sein. Die Koeffizienten U und J ergeben sich als Integrale über Wannier-Funktionen:

$$J_{ij} = \int d^3r w^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{dip}(\mathbf{r}) \right] w(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (5.4)$$

$$U = g \int d^3r |w(\mathbf{r})|^4, \quad (5.5)$$

wobei V_{dip} das Gitterpotenzial bezeichnet. Durch diese beiden Größen sind die Eigenschaften des Gittergases bestimmt. Einerseits kann das System seine Wechselwirkungsenergie minimieren, indem die Bosonen gleichmäßig auf alle Gitterplätze verteilt werden und die Fluktuationen in der Anzahl der Teilchen pro Gitterplatz reduziert sind. Andererseits kann die kinetische Energie durch Tunnelereignisse minimiert werden. Solche Tunnelereignisse erhöhen die Teilchenzahlfluktuationen auf den einzelnen Gitterplätzen. Diese beiden Prozesse konkurrieren miteinander. Das Verhältnis U/J von Wechselwirkungsenergie zu Tunnelenergie entscheidet, welches Verhalten dominiert. Dabei ist U/J über (5.5) und (5.4) durch die Gittertiefe bestimmt. In flachen Gittern sind die Wannier-Funktionen nur schwach auf den einzelnen Gitterplätzen lokalisiert. Hier ist der relevante Parameter U/J klein, so dass die Teilchen über das gesamte System delokalisiert sind und starke Teilchenzahlfluktuationen vorliegen. In diesem Regime schwacher Wechselwirkung ist das Gas superflüssig und kann mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben werden. Dagegen sind in sehr tiefen Gittern die Wannier-Funktionen stark auf den Gitterplätzen lokalisiert. Hier nimmt U/J große Werte an und Teilchenzahlfluktuationen sind unterdrückt. Wenn die Zahl der Teilchen und der Gitterplätze kommensurabel ist, kann der Fall eintreten, dass sich auf jedem Gitterplatz dieselbe Anzahl Teilchen n befindet. Die Anregungen des Systems sind durch Teilchenzahlfluktuationen gegeben. Reicht der Gewinn an kinetischer Energie nicht aus, um die Energie für Teilchenzahlfluktuationen aufzubringen, liegt eine Lücke im Anregungsspektrum vor. Die Kompressibilität $\kappa = \partial n / \partial \mu$ ist Null und es existiert keine superflüssige Komponente [36]. Dieser Zustand wird als Mott-Isolator-Zustand bezeichnet [36, 37]. Bilden Teilchenzahl und Zahl der Gitterplätze kein ganzzahliges Verhältnis, bleibt ein Teil der Atome superflüssig und die Kompressibilität ist endlich [36].

In das Bose-Hubbard-Modell kann Unordnung implementiert werden, indem der Term

$$\hat{H}_\Delta = \sum_i E_i n_i \quad (5.6)$$

zum Hamiltonian (5.3) hinzugefügt wird [36]. Die Unordnung kann zum Auftreten einer weiteren Phase, der so genannten Bose-Glas-Phase, führen [36]. Diese Isolatorphase wird ebenso wie der Mott-Isolator für große Verhältnisse U/J erreicht. Die Bose-Glas-Phase ist dadurch gekennzeichnet, dass der superflüssige Anteil der Teilchen verschwindet, die Kompressibilität jedoch endlich [36] ist. Aufgrund des ungeordneten Potenzials existieren Teilchenzahlfluktuationen mit beliebig kleiner Energie, so dass das Anregungsspektrum keine Lücke aufweist.

Sowohl der Mott-Isolator als auch das Bose-Glas unterscheiden sich deutlich von den lokalisierten Zuständen des Anderson-Modells. Letztere stellen einen Einteilcheneffekt dar. Dagegen spielen für den Mott-Isolator und das Bose-Glas Wechselwirkungseffekte die entscheidende Rolle. Dabei setzt die Lokalisierung ein, wenn der Gewinn an kinetischer Energie nicht

ausreicht, um die für Teilchenzahlfluktuationen notwendige Energie aufzubringen. Die kritische Tunnelenergie J_c des Übergangs in die Isolatorphase skaliert bei fester Gittertiefe für große Teilchenzahlen pro Gitterplatz n wie $J_c \propto \frac{1}{n}$ [36].

Da in eindimensionalen Gittern eine große Teilchenzahl auf den Gitterplätzen vorliegt, befinden sich die Systeme für typische experimentell realisierte Gittertiefen im superflüssigen Regime und können somit mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben werden.

5.2.3. Die diskrete nichtlineare Schrödinger-Gleichung

Für schwache interatomare Wechselwirkung liefert die Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.7)$$

eine adäquate Beschreibung. Hierbei bezeichnet $V_{ext}(\mathbf{r})$ das externe Potenzial, das durch das Gitterpotenzial und eventuelle weitere Potenzialterme gebildet wird. Wenn das chemische Potenzial deutlich kleiner als die Gittertiefe ist², kann der Ansatz

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_j \psi_j(t) \Phi_j(\mathbf{r}) \quad (5.8)$$

für die Kondensatwellenfunktion gewählt werden [202]. Dabei bezeichnet Φ_j eine reelle Wellenfunktion, die im Minimum \mathbf{r}_j des j -ten Gitterplatzes zentriert ist. Der zeitabhängige Anteil $\psi_j(t) = \sqrt{N_j(t)} e^{i\phi_j(t)}$ ist durch die Anzahl der Atome pro Gitterplatz $N_j(t)$ und die lokale Phase der Wellenfunktion $\phi_j(t)$ bestimmt. Einsetzen des Ansatzes (5.8) in die Gross-Pitaevskii-Gleichung und Integration über den räumlichen Freiheitsgrad liefert eine nichtlineare diskrete Gleichung [202]:

$$i\partial_t \psi_j = -\frac{1}{2}(\psi_{j-1} + \psi_{j+1}) + (\epsilon_j + \Lambda|\psi_j|^2) \psi_j. \quad (5.9)$$

Die Parameter ϵ_j und Λ sind dabei durch die Geometrie des Fallenpotenzials bestimmt. Des Weiteren wurde in (5.9) eine Reskalierung der Zeit vorgenommen.

Unordnung kann analog zu den bisher betrachteten Modellen durch eine statistische Verteilung der ϵ_j in das Modell implementiert werden [203].

5.3. Experimentelle und theoretische Untersuchung eines ungeordneten Gittergases

Dieser Abschnitt beschreibt die experimentelle Erzeugung und Untersuchung eines ungeordneten ultra-kalten Gittergases [1]. Außerdem wurden begleitende theoretische Untersuchungen vorgenommen, die wichtige Beiträge zum Verständnis der experimentellen Resultate liefern.

²In der Literatur wird diese Situation häufig als Tight-Binding-Regime bezeichnet. In dieser Arbeit wird dieser Name jedoch im Sinne des Abschnitts 3.2.2 verwendet.

5.3.1. Erzeugung des ungeordneten Gittergases

Die experimentelle Erzeugung des ungeordneten ultra-kalten Gittergases beruht auf der Superposition des optischen Gitterpotenzials mit dem ungeordneten Dipolpotenzial. Dazu wird zunächst ein Bose-Einstein-Kondensat in der Magnetfalle mit axialer Fallenfrequenz $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und radialer Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 360 \text{ Hz}$ erzeugt. Anschließend erfolgt eine Erhöhung des Offsetfeldes der Magnetfalle, bei der innerhalb von 150 ms die radiale Fallenfrequenz auf $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ abgesenkt wird. Die folgende Steigerung der Lichtleistung des Gitterlasers erfolgt innerhalb von 60 ms . Bei dieser Leistung liegt die mit V_G bezeichnete Tiefe des Gitterpotenzials vor. Anschließend wird die Lichtleistung im Unordnungstrahl innerhalb von 60 ms erhöht. Die dann vorliegende Tiefe des Unordnungspotenzials wird mit V_Δ bezeichnet. Danach werden die Atome für weitere 20 ms im kombinierten Potenzial gehalten, bevor alle Fallenpotenziale abgeschaltet werden. Die Detektion der Atome erfolgt mittels resonanter Absorptionenaufnahmen nach einer freien Expansion von $20,4 \text{ ms}$.

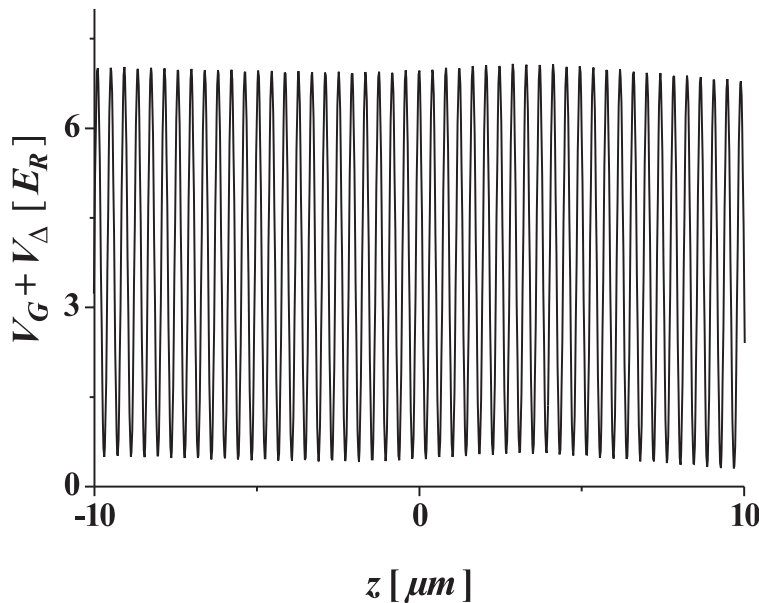


Abbildung 5.1.: Berechneter Verlauf des ungeordneten Gitterpotenzials für eine typische Realisierung der Unordnung. In der Darstellung hat das optische Gitter eine Tiefe von $V_G = 6,5 E_r$. Die Unordnungstiefe beträgt $V_\Delta = 0,2 E_r$.

Wie in Kapitel 4 beschrieben wurde, erzeugt der Unordnungstrahl ein unregelmäßig modulierte Potenzial entlang der Längsachse des Kondensates. Auch das periodische Potenzial des optischen Gitters ist in dieser Richtung orientiert. Die Kombination der beiden Dipolpotenziale führt daher zu einem ungeordnet modulierten periodischen Potenzial entlang der axialen Richtung des Kondensates. Abbildung 5.1 zeigt exemplarisch eine Berechnung des Verlaufs eines realisierten Unordnungspotenzials. Für typische experimentelle Bedingungen ist die Unordnungstiefe dabei deutlich geringer als die Gittertiefe.

5.3.2. Experimentelle Untersuchungen

Abbildung 5.2 vergleicht gemessene Dichteprofile von ungeordneten Gasen mit und ohne Gitterpotenzial. Das expandierte Dichteprofil des ungeordneten Gittergases zeigt in axialer Richtung eine dreikomponentige Struktur. Diese bildet sich, wie im Kapitel 3 geschildert, aufgrund des Impulsspektrums eines gefangenen Gittergases aus. Bei der verwendeten moderaten Gittertiefe von $V_G = 6,5 E_r$ ist die Besetzung der Nebenordnungen nur schwach ausgeprägt.

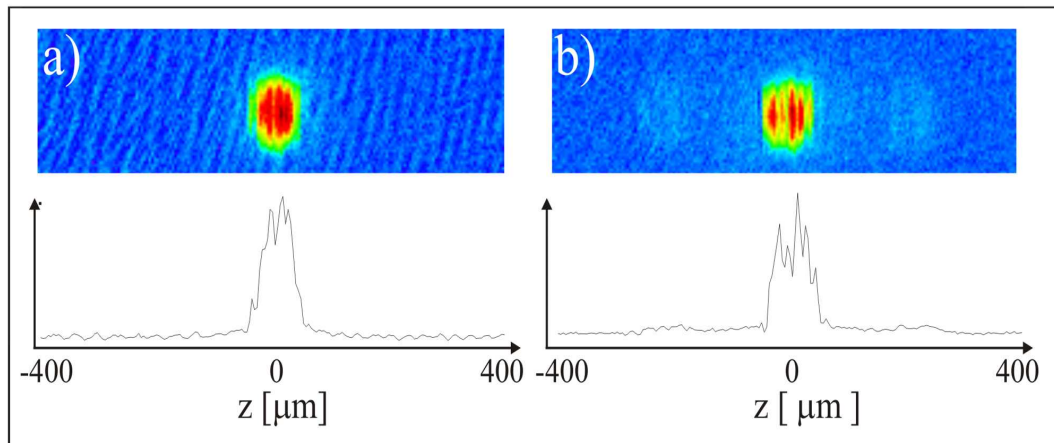


Abbildung 5.2.: Die obere Reihe zeigt Absorptionsbilder der Atome nach $20,4 \text{ ms}$ freier Expansion. In der unteren Reihe sind die entsprechenden axialen Dichteprofile dargestellt. Bild a) zeigt die Verteilung von $7 \cdot 10^4$ Atomen, die aus einem ungeordneten Potenzial der Tiefe $0,13 E_r$ expandiert sind. Bild b) stellt $7 \cdot 10^4$ Atome nach der Expansion aus einem ungeordneten Potenzial der Tiefe $0,13 E_r$ mit überlagertem Gitterpotenzial der Tiefe $6,5 E_r$ dar.

Der Einfluss des ungeordneten Potenzials macht sich durch eine unregelmäßige Modulation des axialen Dichteprofiles bemerkbar. Diese ist sowohl in der Impulskomponente $l = 0$ als auch in den beiden Nebenordnungen beobachtbar. Für die Nebenordnungen ist jedoch aufgrund des schwachen Signal-zu-Rauschverhältnisses eine quantitative Auswertung der Dichtemodulationen nicht möglich. Abbildung 5.3 zeigt die Standardabweichung σ des gemessenen Dichteprofiles der Impulskomponente $l = 0$ von einer invertierten Parabel in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe. Diese nimmt mit wachsender Unordnungstiefe deutlich zu.

Um den Einfluss des ungeordneten Potenzials auf die Expansion zu untersuchen, wurde die axiale Breite der Atomwolke nach einer Flugzeit von $20,4 \text{ ms}$ bestimmt. Dazu wurde an das axiale Dichteprofil der zentralen Impulskomponente eine invertierte Parabel angepasst und deren Breite ermittelt. Zur Untersuchung der Einflüsse der verschiedenen Potenziale wurden die Experimente für unterschiedliche Potenzialkombinationen durchgeführt. So wurden ungeordnete Gittergase mit den Parametern $V_G = 6,5 E_r$ und $V_\Delta = 0,13 E_r$, geordnete Gittergase mit $V_G = 6,5 E_r$ sowie ungeordnete Gase mit $V_\Delta = 0,13 E_r$ untersucht. Als Referenz diente die Messung der Expansion von Bose-Einstein-Kondensaten aus der Magnetfalle

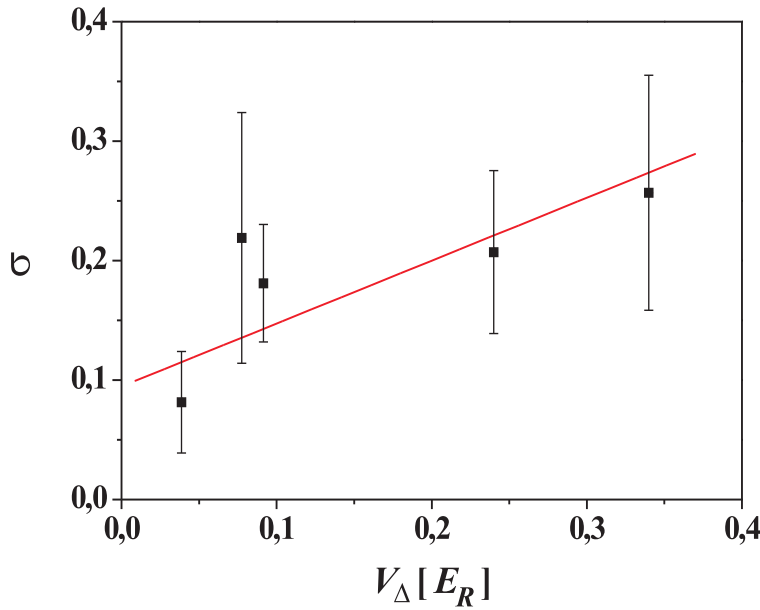


Abbildung 5.3.: Standardabweichung der Impulskomponente $l = 0$ von einer invertierten Parabel in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe. Die rote Linie zeigt einen linearen Fit an die Messpunkte.

ohne zusätzliches Potenzial.

In Abbildung 5.4 ist die halbe Breite b der ermittelten Parabel in Abhängigkeit von der Teilchenzahl gezeigt. Es ist deutlich erkennbar, dass die Expansion des Gases aus den verschiedenen Potenzialformen heraus zu unterschiedlichen Breiten in Abhängigkeit von der Teilchenzahl führt. Die verschiedenen Fälle werden im Einzelnen diskutiert.

Die roten Kreise in der Abbildung zeigen die ermittelten Breiten für Bose-Einstein-Kondensate, die vor der Expansion allein in der Magnetfalle gefangen waren. Die rote Linie zeigt die theoretische Vorhersage gemäß der selbstständigen Expansion eines Kondensates im Thomas-Fermi-Regime. Danach beträgt der axiale Thomas-Fermi-Radius nach der freien Expansion für elongierte Kondensate [185]

$$R_z(t) = R_z(0) \left[1 + \lambda^2 \left(\omega_\rho t \arctan(\omega_\rho t) - \ln \left(\sqrt{1 + \omega_\rho^2 t^2} \right) \right) \right]. \quad (5.10)$$

Dabei bezeichnet $\lambda = \omega_z/\omega_\rho$ das Aspektverhältnis der Falle und $R_z(0)$ den Thomas-Fermi-Radius des gefangenen Kondensates. Da dieser proportional zu $N^{1/5}$ ist, zeigt der Radius nach der Expansion dieselbe Abhängigkeit. Die erhaltenen Breiten entsprechen mit hoher Genauigkeit der theoretischen Vorhersage. Eine typische Standardabweichung ist gekennzeichnet.

Die blauen Dreiecke markieren die ermittelten Breiten für Kondensate, die zuvor in dem kombinierten Potenzial aus Magnetfalle und optischem Gitter gefangen waren. Gegenüber der Situation ohne Gitter ist eine Zunahme der Breite um ungefähr 10% festzustellen. Die blaue Kurve wurde in Anlehnung an die selbstständige Expansion im Thomas-Fermi-Regime gemäß folgender Überlegung erstellt. Wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben wurde, zeigt das axiale

Dichteprofil eines Bose-Einstein-Kondensats in einem optischen Gitter mit überlagertem harmonischen Potenzial eine Thomas-Fermi-Form. Der Thomas-Fermi-Radius ist gegenüber der reinen Magnetfalle in Abhängigkeit von der Gittertiefe erhöht [125]. Wenn die Fallenpotenziale entfernt werden und das Kondensat frei expandieren kann, spielt die Wechselwirkung für die Expansion eine dominierende Rolle. Innerhalb der ersten Millisekunde nimmt dieser Einfluss rapide ab, wie in Abbildung 3.19 erkennbar ist. In dieser Zeit legen die Teilchen in den $l = \pm 1$ Impulskomponenten eine Strecke von $\approx 11 \mu\text{m}$ zurück. Damit sind sie noch nicht von der nullten Ordnung getrennt und ihre Mean-Field-Wechselwirkung trägt nahezu vollständig zur Expansion bei. Nach dem Abbau der Wechselwirkungsenergie ist die folgende Expansion rein ballistisch. Aufgrund dieser Überlegungen wurde der gemäß Gleichung (3.79) erhaltene Thomas-Fermi-Radius in den Ausdruck (5.10) für die selbstähnliche Expansion eingesetzt und so die blaue Kurve erstellt. Die axiale Verbreiterung nach der Expansion entspricht in dieser Näherung unmittelbar der Verbreiterung innerhalb der Falle. Auf eine numerische Simulation der Expansionsdynamik wurde verzichtet, da sie für die verwendete Flugzeit äußerst zeitaufwendig ist³. Wie in Abbildung 5.4 erkennbar ist, stehen die experimentellen Daten jedoch bereits mit diesen einfachen Annahmen im zufriedenstellenden Einklang.

Die schwarzen Quadrate in Abbildung 5.4 kennzeichnen die ermittelten Breiten für Kondensate, die aus der Magnetfalle mit überlagertem Unordnungspotenzial expandiert sind. Die schwarz gestrichelte Linie dient der Strukturierung der Graphik und wurde durch einen Fit an die Daten mit der Abhängigkeit $b \propto N^{1/5}$ erhalten. Für diesen Fall der Expansion kann die gemäß Gleichung (5.10) erhaltene rote Linie als Referenzkurve aufgefasst werden. Ihr gegenüber ergibt sich eine Verbreiterung für die zugrunde liegenden Realisierungen des Unordnungspotenzials von $\approx 25\%$. Dieses stellt eine deutliche Modifikation des Thomas-Fermi-Resultats dar. In der Tat zeigen die numerischen Untersuchungen aus Kapitel 4, dass das Dichteprofil des Kondensats im ungeordneten Potenzial selbst bei geringen Unordnungstiefen deutliche Abweichungen von der Parabelform aufweist. Diese führen zu einer modifizierten Expansionsdynamik, deren numerische Untersuchung ebenfalls in Kapitel 4 dargelegt ist. Sowohl in den experimentellen als auch in den numerischen Untersuchungen stellte sich dabei heraus, dass die genaue Form des Dichteprofiles nach der freien Expansion kritisch von der genauen Realisierung des Unordnungspotenzials abhängig ist. Dementsprechend unterliegen die gemessenen Breiten einer großen statistischen Streuung. Die Daten der Abbildung 5.4 wurden an zwei aufeinander folgenden Messtagen erhalten und repräsentieren die größte gemessene Abweichung von der Thomas-Fermi Vorhersage (5.10). In numerischen Simulationen konnte in Abhängigkeit vom verwendeten Unordnungspotenzial das beobachtete Verhalten qualitativ bestätigt werden. Für keine der verwendeten Realisierungen konnte jedoch die in Abbildung 5.4 dargestellte, maximale gemessene Verbreiterung gefunden werden.

Die grünen Dreiecke stellen die ermittelten Breiten für die Kondensate dar, die aus der Magnetfalle mit überlagertem optischen Gitter und Unordnungspotenzial expandiert sind. Auch in diesem Fall wurden die Messdaten mit der Abhängigkeit $b \propto N^{1/5}$ gefittet. Die resultie-

³Die Simulation der dreidimensionalen Expansion ist für das optische Gitter aufgrund der hohen Zahl benötigter Stützstellen erschwert. Eine genauere Diskussion der numerischen Arbeiten findet sich in Anhang A.

rende Linie ist grün gestrichelt gezeichnet. Die zur Expansion des Gittergases gehörige blaue Kurve stellt für diesen Datensatz die natürliche Referenz dar. Ihr gegenüber ergibt sich eine unordnungsinduzierte Verbreiterung von $\approx 28\%$. Der nächste Abschnitt zeigt, dass das parabelförmige Dichteprofil des harmonisch gefangenen Gittergases in der Falle durch das ungeordnete Potenzial deutlich modifiziert wird (Abbildung 5.5). Daher ist auch für diesen Fall eine veränderte Expansionsdynamik zu erwarten. Unsere Messungen zeigen, dass diese stark von der exakten Realisierung des Unordnungspotenzials abhängen. Die in die Abbildung eingeflossenen Daten liefern auch für das ungeordnete Gittergas die maximale gemessene Verbreiterung gegenüber der Referenzkurve. Wie bereits dargestellt, wurde für das ungeordnete Gittergas auf eine numerische Untersuchung der dreidimensionalen Expansionsdynamik verzichtet.

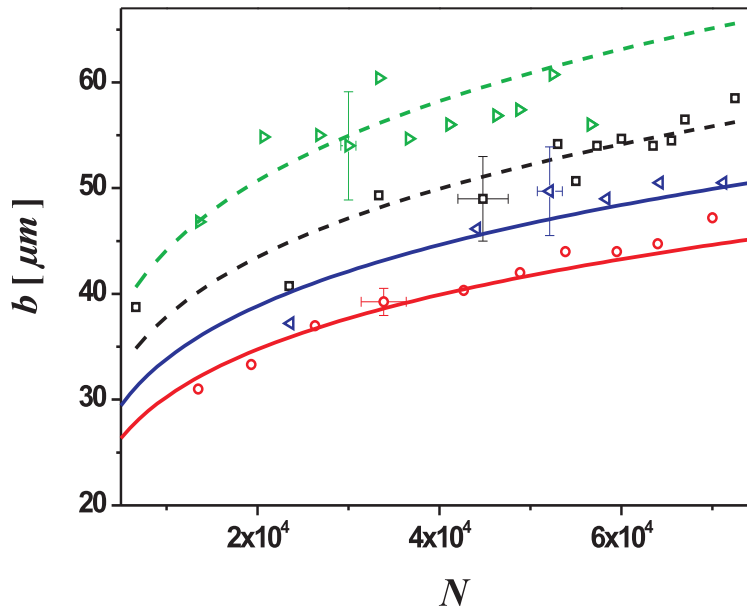


Abbildung 5.4.: Halbe Breite b des Parabelfits an die Dichteverteilung nach $20,4 \text{ ms}$ freier Expansion in Abhängigkeit von der Teilchenzahl. Die Atome wurden aus folgenden Potenzialen entlassen: Magnetfalle (MF) (○), MF und Unordnungspotenzial (UP) (□), MF und optisches Gitter (OG) (◁), MF und UP und OG (▷). Die Kurven zeigen theoretische Vorhersagen oder Fitfunktionen (siehe Text). Die Gittertiefe betrug $6,5 E_r$, die Unordnungstiefe $0,1 E_r$.

5.3.3. Theoretische Untersuchung des ungeordneten Gittergases

Durch das im Abschnitt 5.3.1 beschriebene experimentelle Vorgehen wird das Bose-Einstein-Kondensat adiabatisch in den Vielteilchengrundzustand des ungeordneten Gittersystems überführt. Um diesen numerisch zu bestimmen, wird der Grundzustand der Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i \hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_G \sin^2(kz) + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_\Delta f(z) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.11)$$

unter der Annahme zylindrischer Symmetrie berechnet⁴. In (5.11) bezeichnet $V_{MF}(\mathbf{r})$ das Potenzial der Magnetfalle und $V_{\Delta} f(z)$ das ungeordnete Potenzial, so wie es in Kapitel 4.4.2 eingeführt wurde. Zur Berechnung von (5.11) wird der Verlauf $f(z)$ einer typischen experimentellen Realisierung des ungeordneten Dipolpotenzials verwendet. Die Abbildung 5.5 zeigt die berechnete Dichteverteilung des Grundzustandes in der Falle. Es ist deutlich erkennbar, dass die axiale Dichteverteilung aufgrund des Gitterpotenzials einer schnellen Modulation unterliegt. Darüber hinaus verursacht das ungeordnete Potenzial eine unregelmäßige räumliche Variation der Dichte. Dieser liegt eine deutlich größere Längenskala zugrunde. Die Form der Dichteverteilung auf dieser größeren Längenskala wird dabei ausschließlich durch das ungeordnete Potenzial bestimmt. Dieses wird leicht durch den Vergleich mit der entsprechenden Dichteverteilung bei Abwesenheit des optischen Gitters ersichtlich. Sie ist in der Abbildung 5.5 als rote Linie eingezeichnet.

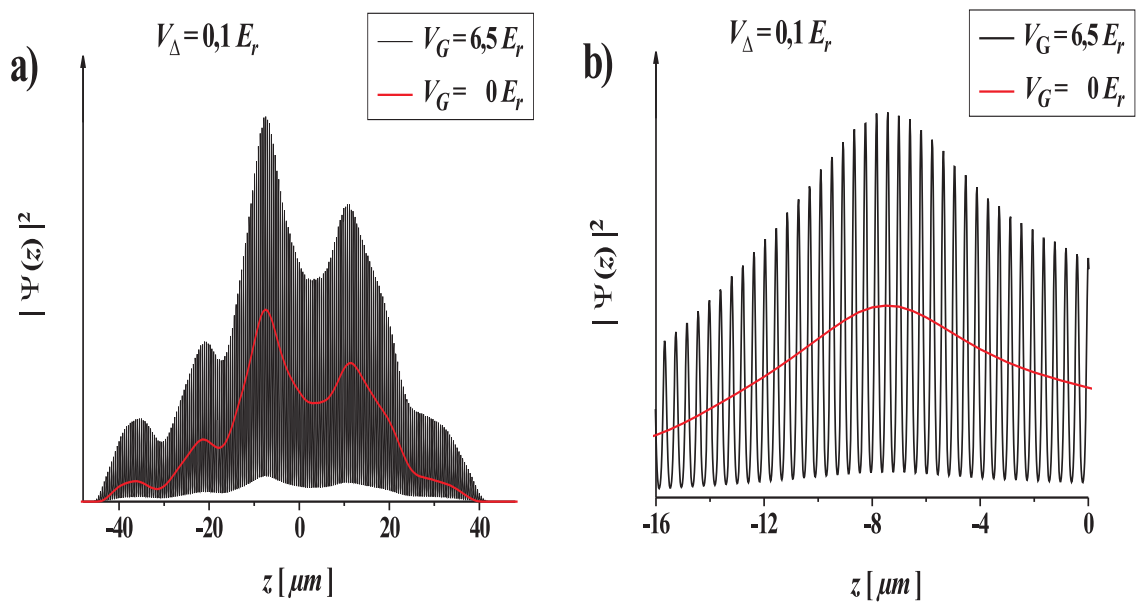


Abbildung 5.5.: Axiale Dichteverteilung des Grundzustandes des ungeordneten Gittergases. Über den radialen Freiheitsgrad wurde integriert. Die Abbildung a) zeigt die gesamte Breite der Wolke, während die Abbildung b) einen Ausschnitt vergrößert darstellt. Es ist sowohl die schnelle Modulation aufgrund des Gitterpotenzials als auch die langsamere unregelmäßige Variation aufgrund des Unordnungspotenzials erkennbar. Die Unordnungstiefe beträgt $V_{\Delta} = 0,1 E_r$.

Die zentrale Fragestellung lautet, ob eine Anderson-artige Realisierung der Kondensatwellenfunktion in dem ungeordneten Gittersystem auftritt. Ein Übergang in die Bose-Glas-Phase ist aufgrund der schwachen Wechselwirkung nicht zu erwarten. Aus der Tatsache, dass die Dichteverteilungen im ungeordneten Potenzial mit und ohne optischem Gitter dieselbe Form der langsamen Modulation aufweisen, können wichtige Schlussfolgerungen für die Eigenschaften des Systems gezogen werden.

⁴Dazu wird eine Testfunktion entsprechend (5.11) in imaginärer Zeit propagiert. Die Details dieser Methode sind in Anhang A beschrieben.

In Abschnitt 4.4.2 wurde gezeigt, dass eine Beschreibung der Kondensatdichte im ungeordneten Potenzial im Rahmen einer Thomas-Fermi-Näherung möglich ist. Da in dieser Näherung der kinetische Term der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung vernachlässigt wird, kann in diesem Regime keine interferenzbedingte Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion vorliegen, denn für diese ist ein Zusammenspiel der potenziellen und kinetischen Terme erforderlich.

Die Abbildung 5.5 zeigt, dass die Dichteverteilung im ungeordneten Gittersystem, abgesehen von der schnellen Modulation, demselben Verlauf folgt. Daher existiert für sie ebenfalls keine exponentiell abfallende Einhüllende. Diese stellt nach Abschnitt 4.2.1 jedoch ein charakteristisches Merkmal für unordnungsinduzierte Lokalisierung dar.

Das Ausbleiben einer interferenzbedingten Lokalisierung hat vielfältige Gründe. Zum einen ist die sogenannte Healing-Length $\eta = 1/\sqrt{8\pi n a}$ [34] deutlich kleiner als die Modulationen des ungeordneten Potentials. Diese Größe entspricht der Länge, auf der die Kondensatwellenfunktion bei einer lokalen Störung zurück auf ihren ungestörten Wert „ausheilt“ und ergibt sich aus der Balancierung der kinetischen Energie und des Mean-Field-Terms. Das Kondensat kann somit auf die lokalen Störungen durch das ungeordnete Potenzial mit einer Anpassung seiner Dichte reagieren. Die Gültigkeit der Thomas-Fermi-Beschreibung ist ein eindeutiger Beleg hierfür.

Zum anderen ist die Längenskala der zufälligen Variation des ungeordneten Potentials relativ klein im Vergleich mit der Größe des Systems. So liegen entlang der Länge des Kondensates typischerweise ca. zehn Modulationen vor. Aufgrund dieser geringen Zahl ungeordneter Potenzialfluktuationen treten signifikante Interferenzeffekte für die Wellenfunktion nicht auf.

Im Gegensatz dazu ist das Auftreten von lokalisierten Zuständen im Anderson-Modell bekannt. Diesem Modell liegen statistische Variationen des Potentials zwischen benachbarten Gitterplätzen zugrunde. In dem experimentell realisierten Gittergas hingegen variiert das Potenzial benachbarter Gitterplätze nicht statistisch. Vielmehr treten unkorrelierte Variationen des Potentials auf einer Längenskala auf, die ca. 20 Gitterplätze involviert.

Die gezeigten Ergebnisse der numerischen Simulationen beruhen auf der Gültigkeit der Gross-Pitaevskii-Gleichung für das betrachtete Regime. Durch Lösung der Bogoliubov-de-Gennes-Gleichungen [34] für typische experimentelle Parameter wurde die Zahl der nicht kondensierten Atome bei $T = 0$ ermittelt. Diese ist äußerst gering, so dass die Anwendbarkeit der Gross-Pitaevskii-Gleichung gegeben ist [1, 186].

5.4. Anderson-artige Lokalisierung von Bose-Einstein-Kondensaten

Die Untersuchungen des vorigen Abschnitts zeigen, dass eine Anderson-artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion mit dem realisierten Unordnungspotenzial bei realistischen Kondensatgrößen nicht zu erreichen ist. Um eine derartige Lokalisierung beobachten zu können, muss notwendigerweise ein Potenzial erzeugt werden, das eine deutlich schnellere zufällige räumliche Modulation aufweist als das ungeordnete Dipolpotenzial.

Eine Methode zur Erzeugung eines solchen Potentials beruht auf der Überlagerung des bestehenden Hauptgitters mit so genannten Übergittern, die eine inkommensurable Wellenlänge besitzen [61–64]. Um die Auswirkungen eines solchen Übergitters auf die Grundzustandseigenschaften eines Bose-Einstein-Kondensates zu untersuchen, wurden numerische Berechnungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung unter Berücksichtigung eines Übergitter-Potentials $V_{SL}(z)$ der Form

$$V_{SL}(z) = V_{\Delta 1} \sin^2(k_1 z + \phi_1) + V_{\Delta 2} \sin^2(k_2 z + \phi_2) \quad (5.12)$$

durchgeführt. Die Wellenlänge des Hauptgitters betrug $\lambda = 825 \text{ nm}$. Für die Übergitter wurden $\lambda_1 = 960 \text{ nm}$ und $\lambda_2 = 1060 \text{ nm}$ verwendet. Für die hier gezeigten Ergebnisse wurde die Phasenbeziehungen zwischen den Gitterstrahlen durch $\phi_1 = \pi/10$ und $\phi_2 = \pi/3$ fixiert. Für eine andere Wahl der Phasenbeziehung ergaben sich keine prinzipiellen Unterschiede bei den Berechnungen. Die Abbildung 5.6 zeigt den Verlauf eines solchen Übergitter-Potentials. Insbesondere in der Abbildung b) wird deutlich, dass statistische Potentialschwankungen zwischen den Gitterplätzen des Hauptgitters auftreten. Das Potenzial (5.12) kann daher zur Realisierung des Anderson-Modells dienen.

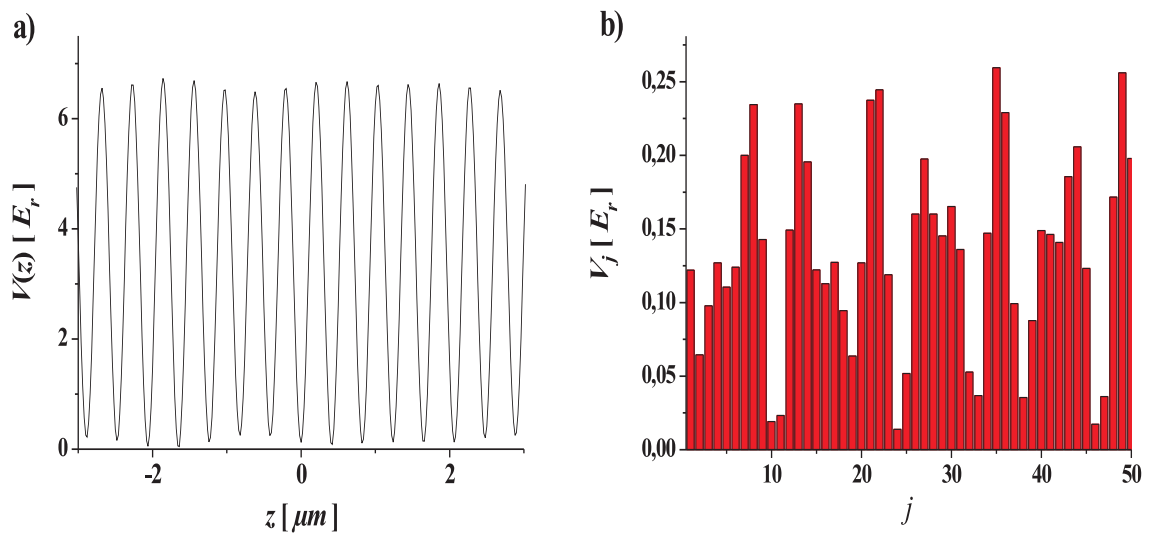


Abbildung 5.6.: Verlauf des Potentials aus Hauptgitter und Übergitter (5.12). Die Gittertiefen lauten $V_G = 6,5 E_r$, $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$. In a) ist der kontinuierliche Verlauf des Gesamt-Potentials (5.12) gezeigt. Abbildung b) stellt den Wert des Potentials $V_{SL}(z)$ auf dem j -ten Hauptgitterplatz dar.

Für ein einzelnes Teilchen im Potenzial (5.12) ist zu erwarten, dass der Grundzustand lokalisiert ist. Nicht wechselwirkende Bosonen kondensieren bei $T = 0$ in diesen lokalisierten Einteilchenzustand [77, 204]. Auf der anderen Seite wirkt eine repulsive interatomare Wechselwirkung der Kondensation in den niederenergetischsten Zustand entgegen [77, 204]. Sie hat die Tendenz die Teilchen zu delokalisieren⁵. Für die Untersuchung, ob eine Anderson-

⁵Im stark wechselwirkenden Regime dagegen hat die interatomare Wechselwirkung einen lokalisierenden Charakter. Sie führt zum Auftreten der Mott-Isolator-Phase oder des Bose-Glases.

artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion in dem Potenzial (5.12) möglich ist, wurde daher der Fall sehr schwacher interatomarer Wechselwirkung analysiert. Der Grundzustand der Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i \hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_G \sin^2(kz) + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_{SL}(z) + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (5.13)$$

wurde hierfür durch Propagation in imaginärer Zeit unter der Annahme von Rotationssymmetrie bestimmt. Dabei wurde für das Potenzial der Magnetfalle $V_{MF}(\mathbf{r})$ die axiale Fallenfrequenz $\omega_z = 2\pi \times 4 \text{ Hz}$ und die radiale Fallenfrequenz $\omega_\rho = 2\pi \times 40 \text{ Hz}$ verwendet. Die Abbildung 5.7 zeigt die erhaltenen axialen Dichteprofile für verschiedene Teilchenzahlen. Es ist deutlich erkennbar, dass es zu einer Lokalisierung der Wellenfunktion kommt. Dabei steigt die Zahl der Lokalisierungszentren mit zunehmender Teilchenzahl an. Aus den stückweise linearen Verläufen der Dichteverteilung in logarithmischer Darstellung wird ersichtlich, dass an die einzelnen Lokalisierungszentren exponentiell abfallende einhüllende Kurven gelegt werden können.

Die Lokalisierung der Wellenfunktion hat wichtige Konsequenzen für das Impulsspektrum des Systems. Dieses ist in der Abbildung 5.8 gezeigt. Selbst für die größten berechneten Teilchenzahlen ist das Impulsspektrum deutlich gegenüber dem des ungestörten Gittergases durch das Auftreten weiterer Impulskomponenten modifiziert. Da mit abnehmender Teilchenzahl die Anzahl der Lokalisierungszentren abnimmt, wächst die Besetzung dieser Impulskomponenten an. Für den nicht wechselwirkenden Fall existiert ein einziges Lokalisierungszentrum, in dem nur noch vier Potenzialtöpfe des Hauptgitters signifikant besetzt sind. In diesem Fall ist das Impulsspektrum nicht mehr in scharfe Komponenten zerlegt. Diese Situation ist als das Analogon der Lichtbeugung am Doppelspalt bzw. an einem Gitter zu verstehen.

Die Lokalisierung der Wellenfunktion setzt dabei das Zusammenspiel von Hauptgitter und Übergittern voraus. In der Abbildung 5.9 ist das axiale Dichteprofil für 10^3 Teilchen in dem alleinigen Potenzial des Übergitters gezeigt. Es ist deutlich erkennbar, dass die exponentielle Lokalisierung in diesem Fall nicht auftritt. Dieses liegt in der in Abbildung 5.10 dargestellten quasi-periodischen Struktur des Übergitterpotenzials begründet. Die Wellenfunktion „spürt“ die in der Abbildung 5.6.b) dargestellte ungeordnete Struktur effektiv erst dann, wenn sie durch ein tiefes Hauptgitter lokalisiert wird.

Für große Teilchenzahlen verschwindet der exponentiell lokalisierte Charakter der Wellenfunktion aufgrund der Zunahme der Wechselwirkung. Dieses Verhalten wird in der Abbildung 5.11 deutlich.

Diskussion der numerischen Ergebnisse

Die Betrachtungen des vorigen Abschnitts zeigen, dass eine unordnungsinduzierte Lokalisierung der Grundzustandswellenfunktion durch eine Überlagerung des Gitterpotenzials mit einem Übergitterpotenzial erreicht werden kann. Hierbei treten Lokalisierungszentren auf, deren Zahl von der Stärke der nichtlinearen Wechselwirkung abhängt. Für kleine Wechselwirkung können exponentiell abfallende Kurven als Einhüllende an die Lokalisierungszentren

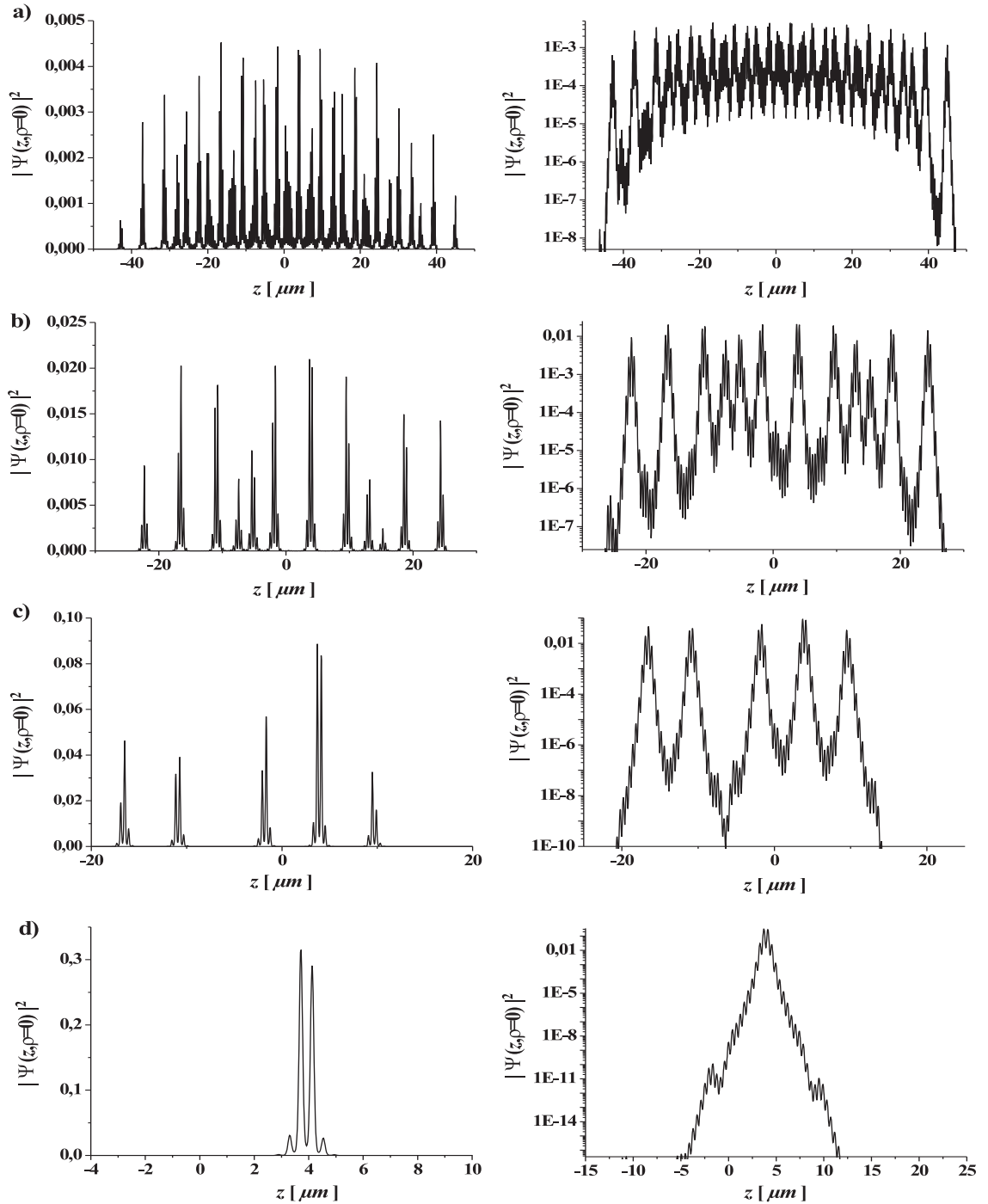


Abbildung 5.7.: Normierte axiale Dichteverteilung des Grundzustands der Gross-Pitaevskii-Gleichung für verschieden Teilchenzahlen. Die linke Spalte zeigt eine lineare Skalierung. Für die rechte Spalte wurde eine logarithmische Darstellung gewählt. Die Gittertiefen sind $V_G = 6,5 E_r$, $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$. Die Teilchenzahlen betragen: a) $N = 10^4$, b) $N = 10^3$, c) $N = 10^2$. In d) ist der nicht wechselwirkende Fall gezeigt.

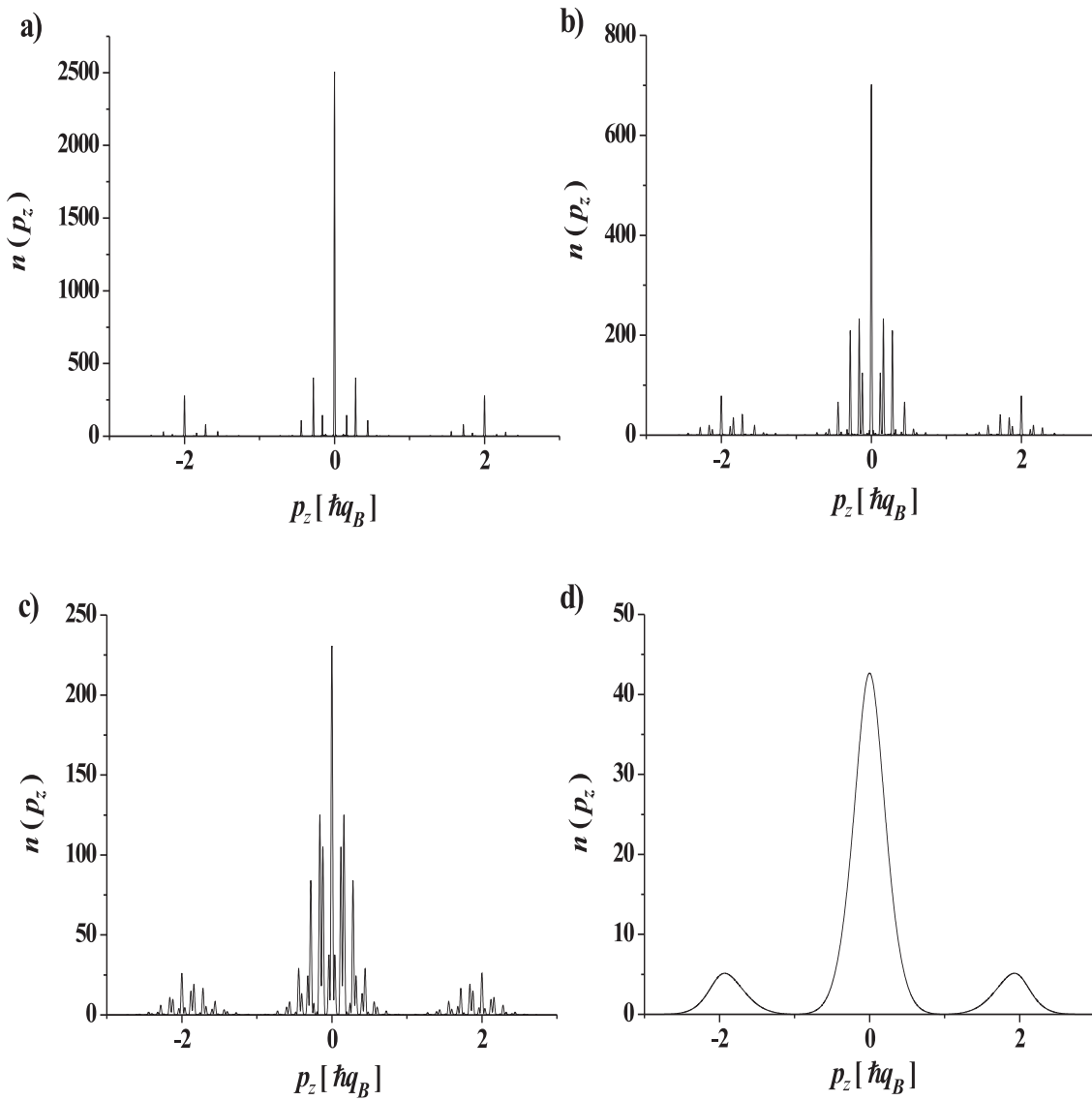


Abbildung 5.8.: Axiales Impulsspektrum für verschiedene Teilchenzahlen. Die Potenziertiefen sind $V_G = 6,5 E_r$, $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$. Die Teilchenzahlen betragen: a) $N = 10^4$, b) $N = 10^3$, c) $N = 10^2$. In d) ist der nicht wechselwirkende Fall gezeigt. Der Quasi-Impuls q_B bezieht sich auf die Wellenlänge des Hauptgitters.

gelegt werden. Mit zunehmender Wechselwirkung tritt die exponentielle Lokalisierung immer stärker in den Hintergrund, da diese eine delocalisierende Wirkung auf die Teilchendichte hat.

Die Ergebnisse des Abschnitts beruhen auf der Berechnung des Kondensatgrundzustands mittels der Gross-Pitaevskii-Gleichung. Diese Beschreibung kann für geringe Teilchenzahlen zu falschen Ergebnissen führen, da sich in diesem Regime die Anwendung einer Mean-Field-Theorie als problematisch erweisen kann. Insbesondere werden durch die Beschreibung des Systems im Rahmen der Gross-Pitaevskii-Gleichung Effekte von Quantenfluktuationen und

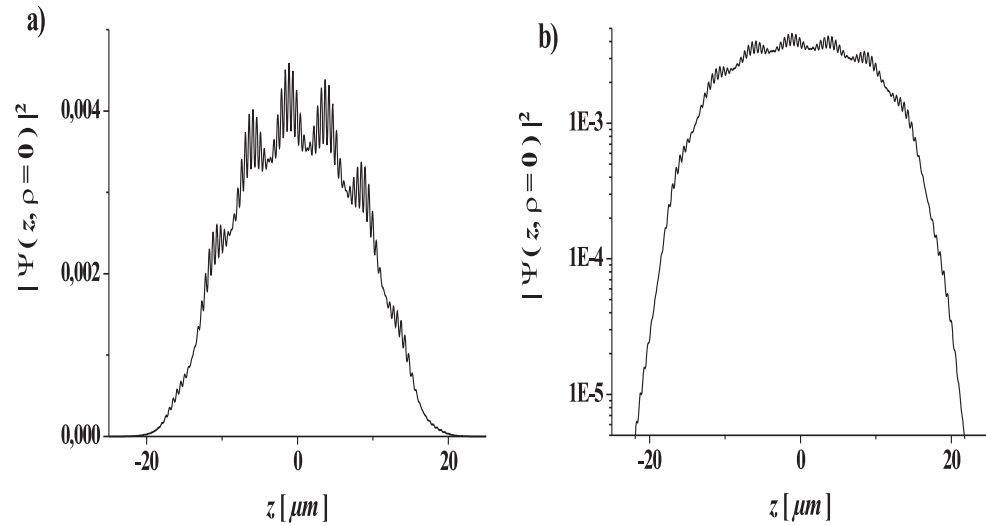


Abbildung 5.9.: Axiale Dichteverteilung für $N = 10^3$ Teilchen im Potenzial des Übergitters und der Magnetfalle. Die Gittertiefen betragen $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$.

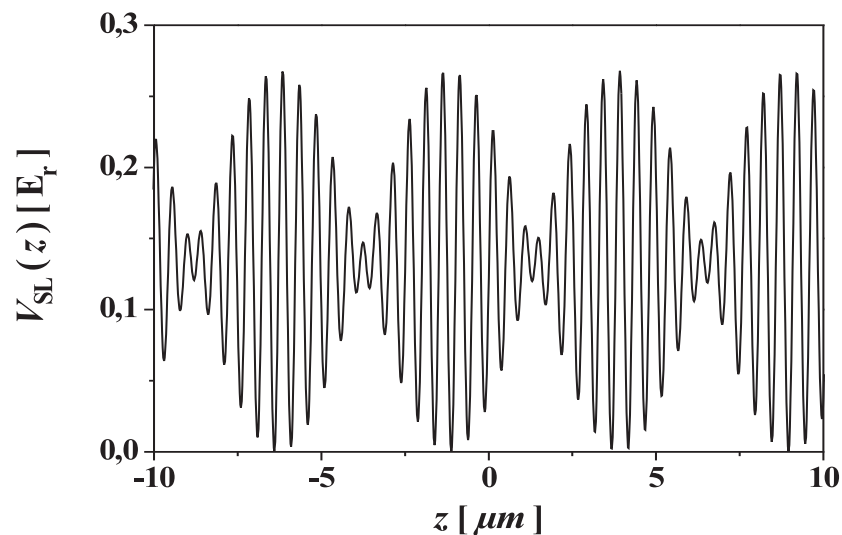


Abbildung 5.10.: Potenzialverlauf des Übergitters für $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$.

Beiträge von angeregten Zuständen nicht erfasst. Die theoretischen Untersuchungen sind daher nicht in jedem der betrachteten Regime uneingeschränkt gültig. Sie stellen vielmehr eine rigorose Diskussion der Lokalisierungseigenschaften des Grundzustands einer nichtlinearen Schrödinger-Gleichung dar. Als solche zeigen sie insbesondere die Abhängigkeit der Lokalisierung von der Stärke der Nichtlinearität. Untersuchungen nichtlinearer Gleichungen unter dem Einfluss von Unordnung sind dabei bereits durchgeführt worden [203, 205, 206]. Für ausreichend große Teilchenzahlen $N \approx 1000$ sollten die Betrachtungen eine gute Beschreibung für die Lokalisierungseigenschaften von Bose-Einstein-Kondensaten liefern.

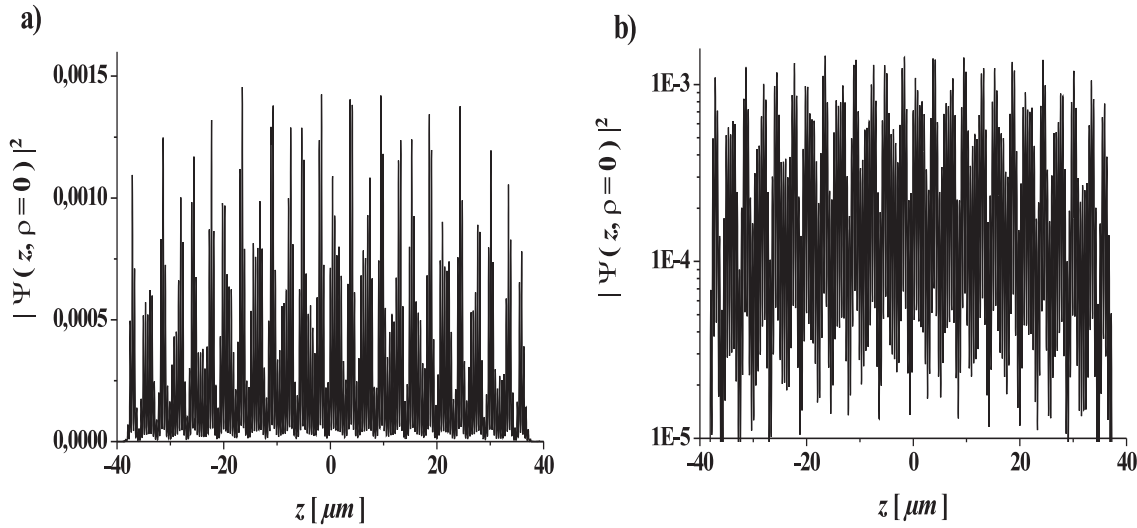


Abbildung 5.11.: Normierte axiale Dichteverteilung des Grundzustands der Gross-Pitaevskii-Gleichung für $5 \cdot 10^4$ Teilchen. Die linke Spalte zeigt eine lineare Skalierung. Für die rechte Spalte wurde eine logarithmische Darstellung gewählt. Die Tiefen der Gitterpotenziale lauten $V_G = 6,5 E_r$, $V_{\Delta 1} = 0,2 E_r$ und $V_{\Delta 2} = 0,2 E_r$.

5.4.1. Wege zu einer experimentellen Realisierung

Für eine experimentelle Realisierung des untersuchten Systems ist der Aufbau von zwei weiteren optischen Gittern notwendig. Für die bei den Simulationen verwendeten Wellenlängen von 960 nm und 1060 nm sind Halbleiter-Lasersysteme verfügbar. Die Justage eines solchen Gitter-Systems kann durch die Zuführung des Laserlichts durch eine gemeinsame Faser erheblich erleichtert werden. In diesem Fall ist effektiv nur einer der Gitterstrahlen auszurichten. Grundsätzlich ist es dabei nicht zu vermeiden, dass die Lichtfelder der Laser interferieren. Aufgrund der großen Verstimmung der Laserwellenlängen untereinander führt dieses im zeitlichen Mittel jedoch nicht zu Konsequenzen für die Atome.

Eine experimentelle Herausforderung stellt die Forderung nach geringer Wechselwirkung dar. Diese kann prinzipiell über den Einsatz einer Feshbachresonanz erhalten werden. Deren Ausnutzung stellt für die experimentell eingesetzten Rubidium-Atome jedoch eine große technische Herausforderung dar. Alternativ kann bei geringen atomaren Dichten gearbeitet werden. In der Abbildung 5.7 zeigen Kondensate bestehend aus $N = 10^4$ Atomen in einer Falle mit den Frequenzen $\omega_z = 2\pi \times 4 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 40 \text{ Hz}$ noch Anzeichen einer exponentiellen Lokalisierung. Fallenfrequenzen dieser Größenordnung können experimentell erreicht werden. So wurde eine Absenkung der axialen Fallenfrequenz auf $\omega_z = 2\pi \times 4 \text{ Hz}$ bereits erfolgreich demonstriert [184]. Dazu wurde der Strom durch die so genannten Dipolspulen [95] reduziert. Die radiale Fallenfrequenz kann durch eine Anhebung des Magnetfallenbodens gesenkt werden. Hierzu ist eine Absenkung des Stroms in den Helmholtzspulen [95] durch eine geregelte Parallelschaltung möglich.

Die Detektion der exponentiellen Lokalisierung kann auf der axialen Impulsverteilung nach Abbildung 5.8 beruhen. Diese zeigt eine deutliche Verbreiterung bzw. das Auftreten weiterer Impulskomponenten gegenüber dem geordneten Gittergas. Während einer freien Expansion separieren die einzelnen Impulskomponenten, so dass zu erwarten ist, dass sich die unordnungsinduzierte Modifikation des Impulsspektrums in der resultierenden Dichteverteilung widerspiegelt.

6. Ungeordnetes quantenentartetes Gittergas: Dynamik

Ungeordnete Potenziale beeinflussen nicht nur die Form des Grundzustands des Gittergases, sondern haben auch wichtige Konsequenzen für seine Dynamik. In einem periodischen Potenzial treten bei der Zeitentwicklung eines Quantensystems unter dem Einfluss einer konstanten Kraft Bloch-Oszillationen auf. Unordnung verursacht einen Kohärenzverlust des Systems, der mit einer Dämpfung der Oszillationsamplitude einher geht.

In diesem Kapitel werden Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in einem ungeordneten Gitterpotenzial theoretisch analysiert. Zunächst erfolgt eine Einführung zum Stand der experimentellen Untersuchungen der Bloch-Oszillationen. Anschließend werden die theoretischen Grundlagen des Problems dargestellt. Es zeigt sich, dass aufgrund der interatomaren Wechselwirkung die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten auch ohne Unordnung gedämpft sind. Dieser Effekt kann die unordnungsbedingte Dämpfung überdecken. In den theoretischen Untersuchungen konnte ein Parameterbereich identifiziert werden, in dem eine Messung der unordnungsinduzierten Dämpfung mit dem bestehenden System möglich ist. Die erzielten Resultate stellen einen unmittelbaren Leitfaden für die derzeitigen Arbeiten am Experiment dar.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Resultate beruhen auf einer Anregung von Prof. Dr. Luis Santos und wurden in Kooperation mit ihm entwickelt.

6.1. Einführung

Die quantenmechanische Behandlung eines einzelnen Teilchens in einem periodischen Potenzial unter dem Einfluss einer konstanten Kraft basiert auf den wegweisenden Arbeiten von Bloch [27] und Zener [28]. Sie liefert ein nicht intuitives Ergebnis: Das Teilchen führt eine kohärente Oszillation auf einem endlichen Raumbereich aus, anstatt eine beschleunigte Bewegung durch den ganzen Raum zu durchlaufen. [207]. Diese Oszillation wird als Bloch-Oszillation bezeichnet. Den Hintergrund für die theoretischen Arbeiten bildete die Untersuchung der Bewegung eines Kristallelektrons unter dem Einfluss eines statischen elektrischen Feldes. In metallischen Festkörpern konnte das Auftreten von Bloch-Oszillationen jedoch noch nicht direkt nachgewiesen werden, da für experimentell realisierbare Feldstärken die Periodendauer der Oszillationen deutlich größer als die Kohärenzzeit der Elektronenbewegung ist. In Halbleitergittern [208] können aufgrund der hohen Strukturgröße die Periodendauern der Bloch-Oszillationen deutlich kürzer als in kristallinen Festkörpern sein. Tatsächlich konnten in diesen Systemen Bloch-Oszillationen bereits durch eine Messung der Strahlung der

oszillierenden Elektronen nachgewiesen werden [208].

Die Störungseinflüsse, die eine Messung der Bloch-Oszillationen in Festkörpersystemen bisher erschwert oder verhindert haben, treten in Experimenten mit ultra-kalten Atomen in optischen Gittern nicht auf. So sind optische Gitter frei von Störstellen oder Phononen. Interbandübergänge können durch die Wahl einer ausreichend großen Gittertiefe nahezu vollständig unterdrückt werden. Schließlich profitieren diese Experimente von der geringen Impulsbreite der Ensembles. Die Atome besetzen daher nur einen sehr schmalen Bereich der Brillouinzone und die theoretische Beschreibung des Systems ist somit deutlich vereinfacht.

Die ersten Bloch-Oszillationen ultra-kalter (nicht kondensierter) Atome wurden in den Gruppen von C. Salomon [209] und M. G. Raizen [210] erzeugt. In diesen Experimenten wurden die Oszillationen durch die Trägheitskraft in einem beschleunigten optischen Gitter getrieben. Die enormen Kohärenzzeiten der Ensembles ermöglichten die Beobachtung von Bloch-Oszillationen mit Periodendauern, die diejenigen in Halbleitergittern um bis zu zehn Größenordnungen übertrafen.

Nach der ersten Präparation eines Bose-Einstein-Kondensates in einem optischen Gitter [123] kristallisierte sich rasch großes theoretisches und experimentelles Interesse an der Untersuchung von Bloch-Oszillationen in diesem System heraus. Dies liegt zum einen in der schmalen Impulsbreite der Ensembles begründet. Des Weiteren bietet sich die Möglichkeit, den Einfluss einer interatomaren Wechselwirkung auf die Bloch-Oszillationen zu erforschen. Schließlich ist das Kondensat während der Oszillation Gegenstand von Instabilitäten, die von grundlegender Bedeutung für das Verständnis von Vielteilchensystemen in periodischen Potenzialen sind. Die erste Erzeugung von Bloch-Oszillationen in Bose-Einstein-Kondensaten wurde in der Gruppe von E. Arimondo durchgeführt [29, 124].

In jüngster Zeit wurden darüber hinaus auch Bloch-Oszillationen in quantenentarteten Fermigasen beobachtet [211]. Das Fehlen der Wechselwirkung in dem fermionischen System ermöglichte hierbei eine Beobachtung besonders langlebiger Oszillationen.

6.2. Bloch-Oszillationen: Theoretische Grundlagen

Als Grundlage der Betrachtungen von Bloch-Oszillationen wechselwirkender Bose-Einstein-Kondensate wird in diesem Abschnitt zunächst die Dynamik eines einzelnen Wellenpakets in einem periodischen Potenzial unter dem Einfluss einer konstanten Kraft beschrieben. Um die Zeitentwicklung zu erhalten, wird das Wellenpaket zur Zeit $t = 0$ nach Bloch-Funktionen entwickelt:

$$\psi(z, t = 0) = \sum_n \int_{-q_B}^{q_B} dq f_n(q) \phi_q^{(n)}(z). \quad (6.1)$$

In der Bloch-Basis ist die Zeitentwicklung über

$$\psi(z, t) = \sum_n \int_{-q_B}^{q_B} dq f_n(q) \phi_q^{(n)}(z) e^{-i E_q^{(n)} t / \hbar} \quad (6.2)$$

durch die Bandstruktur bestimmt. Die Impulsbreite eines ultra-kalten Ensembles ist stark eingeeengt. Für ein entsprechendes Wellenpaket verschwinden die Entwicklungskoeffizienten $f_n(q)$ nur auf einem sehr schmalen Bereich der Brillouinzone nicht. Aus diesem Grund bietet

sich eine Taylor-Entwicklung für das Energieband an, das hierfür als eine kontinuierliche Funktion von q aufgefasst wird:

$$E(q) = E(q_0) + (q - q_0) \left. \frac{\partial E(q)}{\partial q} \right|_{q_0} + \frac{(q - q_0)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} \right|_{q_0} + \dots \quad (6.3)$$

Dabei bezeichnet $\hbar q_0$ den Quasi-Impuls, um den die Taylorentwicklung ausgeführt wird. Weiterhin vereinfacht eine alleinige Berücksichtigung des niedrigsten Bandes die folgenden Betrachtungen signifikant. Da ultra-kalte Teilchen im niedrigsten Band des Gitterpotenzials präpariert werden können, ist diese Einschränkung eine realistische Beschreibung. Aus diesem Grund wird hier und im Folgenden der Bandindex nicht mitgeschrieben. Die schmale Besetzung der Brillouinzone führt ferner auf die Annahme [26]:

$$\phi_q(z) \approx u_{q_0}(z) e^{iq_0 z}. \quad (6.4)$$

Einsetzen von (6.3) und (6.4) in (6.2) liefert

$$\begin{aligned} \psi(z, t) = & u_{q_0}(z) e^{-i E(q_0) t / \hbar} \\ & \times \int_{-q_B}^{q_B} dq f(q) \exp \left[-i \left((q - q_0)(z - v_g^{q_0} t) + \frac{\hbar (q - q_0)^2}{2 m_{q_0}^*} t \right) \right], \end{aligned} \quad (6.5)$$

wobei die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g^{q_0} = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E(q)}{\partial q} \right|_{q_0} \quad (6.6)$$

sowie die effektive Masse

$$m_{q_0}^* = \hbar^2 \left(\left. \frac{\partial^2 E(q)}{\partial q^2} \right|_{q_0} \right)^{-1} \quad (6.7)$$

verwendet wurden. Gleichung (6.5) zeigt, dass sich das Wellenpaket mit der Gruppengeschwindigkeit (6.6) bewegt und seine Dispersion im Gitterpotenzial durch die effektive Masse (6.7) modifiziert ist. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen die Gruppengeschwindigkeit sowie die effektive Masse als Funktion des Quasi-Impulses.

Unter dem Einfluss einer konstanten Kraft F ist die Dynamik des Wellenpaketes durch die zeitliche Entwicklung des Quasi-Impulses $\hbar q_0(t)$ bestimmt. Diese ist nach dem so genannten Beschleunigungstheorem [27, 28, 207] durch

$$q_0(t) = q_0(t=0) + \frac{F}{\hbar} t \quad (6.8)$$

gegeben. Ein rigoroser Beweis des Beschleunigungstheorems findet sich in [212]. Gemäß (6.8) bewegt sich der Quasi-Impuls mit linearer Geschwindigkeit, wobei die Betrachtungen aufgrund der Periodizität auf die erste Brillouinzone reduziert werden können. Aufgrund der Bewegung des Quasi-Impulses ändert sich gemäß (6.6) die Gruppengeschwindigkeit. Anhand der Abbildung 6.1 ist erkennbar, dass dieses zu einer oszillierenden Bewegung des Wellenpaketes,

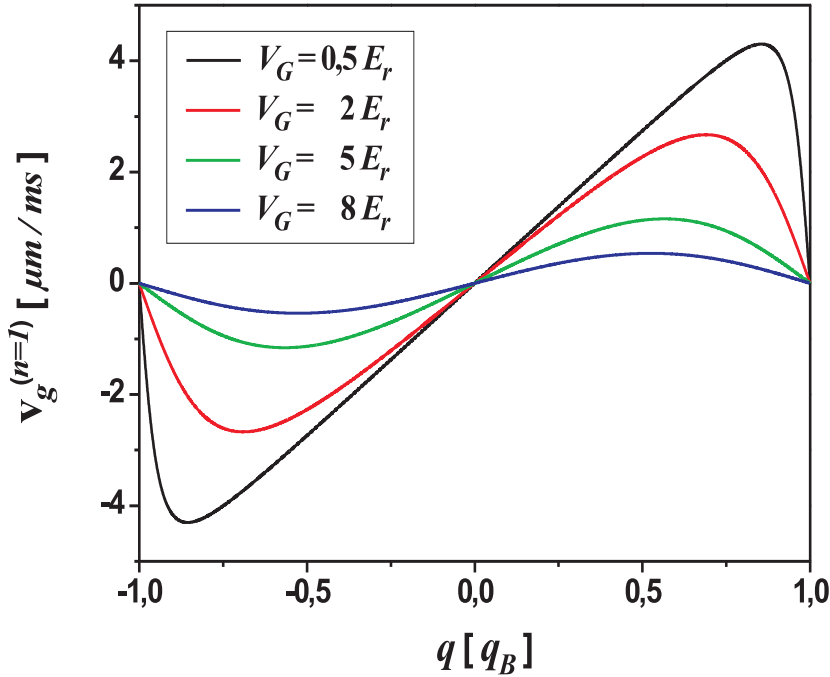


Abbildung 6.1.: Die Gruppengeschwindigkeit als Funktion des Quasi-Impulses für verschiedene Gittertiefen.

den so genannten Bloch-Oszillationen, führt. Die Periodendauer T der Bloch-Oszillationen ist nach Gleichung (6.8) durch die Zeit gegeben, in der sich der Quasi-Impuls einmal durch die gesamte Brillouinzone bewegt

$$T = \frac{2\pi\hbar}{Fd}, \quad (6.9)$$

wobei d die Gitterkonstante angibt. Somit ist die Periodendauer bei gegebener Gitterkonstante durch die beschleunigende Kraft bestimmt. Die Amplitude der Oszillation der Gruppengeschwindigkeit ist dagegen nach Gleichung (6.6) durch die Form des Energiebandes bestimmt. Für große Gittertiefen flachen die Energiebänder ab und die Maximalwerte der Gruppengeschwindigkeit werden kleiner. Dieser Zusammenhang wird insbesondere in der Abbildung 6.1 deutlich. Für hinreichend tiefe Gitter kann in sehr guter Näherung die Tight-Binding-Näherung (3.54) für die Dispersionsrelation verwendet werden. Sie liefert für die Gruppengeschwindigkeit

$$v_{g,q}^{tb} = \frac{Jd}{\hbar} \sin(qd). \quad (6.10)$$

Die Amplitude der Oszillation der Gruppengeschwindigkeit beträgt im Rahmen der Tight-Binding-Näherung Jd/\hbar und ist somit durch die Gittertiefe bestimmt. Der Tunnelparameter kann aus der effektiven Masse erhalten werden. Diese lautet in der Tight-Binding-Näherung

$$m_q^* = \frac{\hbar^2}{d^2 J \cos(qd)}. \quad (6.11)$$

Bei bekannter effektiver Masse im Zentrum der Brillouinzone ist der Tunnelparameter somit

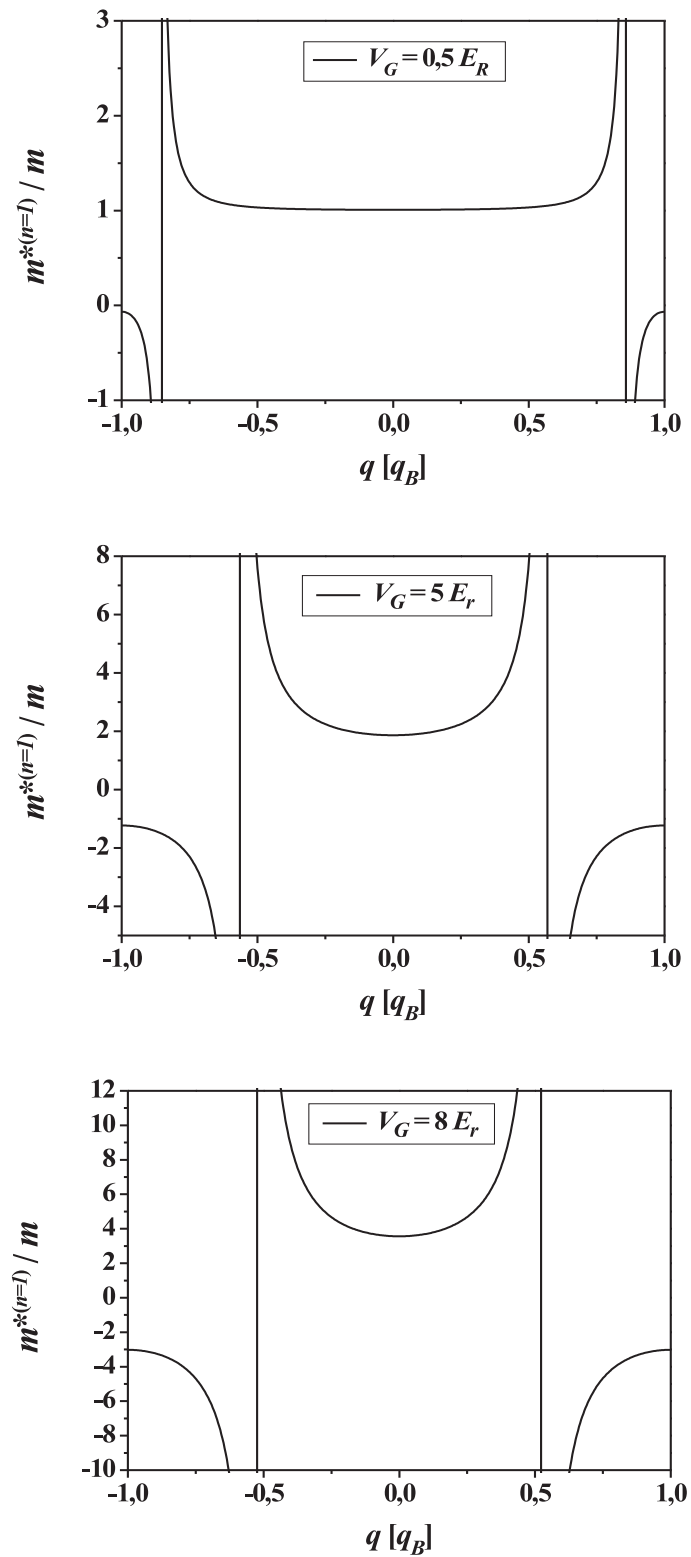


Abbildung 6.2.: Die effektive Masse als Funktion des Quasi-Impulses für verschiedene Gittertiefen.

durch

$$J = \frac{\hbar^2}{d^2 m_{q=0}^*} \quad (6.12)$$

gegeben. Die effektive Masse kann dabei aus der numerisch berechneten Bandstruktur erhalten werden. Die Abbildung 6.3 zeigt, dass bereits für eine Gittertiefe von $V_G = 8 E_r$ der Tight-Binding-Ausdruck (6.10) eine gute Näherung für die Gruppengeschwindigkeit darstellt.

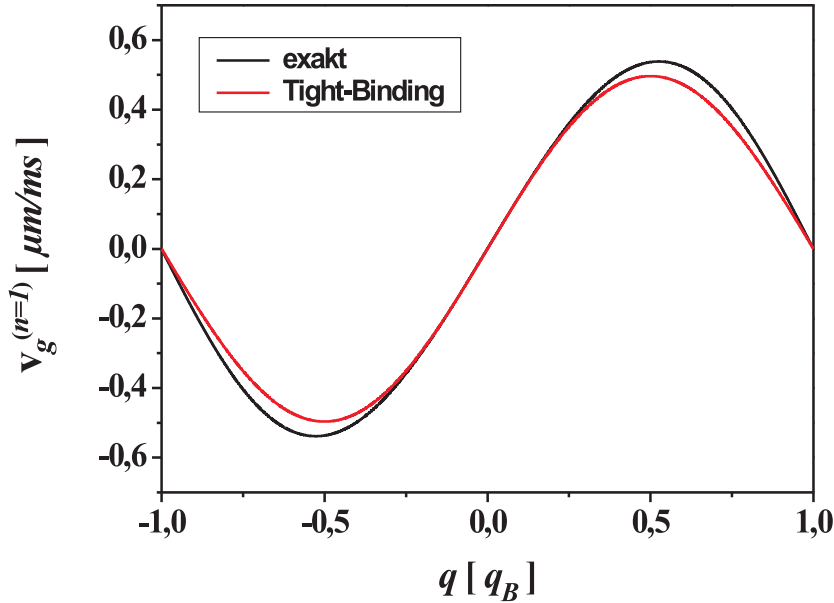


Abbildung 6.3.: Vergleich der exakt berechneten Gruppengeschwindigkeit (6.6) mit der Tight-Binding-Approximation (6.10) für eine Gittertiefe von $V_G = 8 E_r$.

Die Dynamik des Wellenpakets ist in der perfekten Gitterstruktur völlig kohärent. Wenn keine Interbandübergänge stattfinden, gibt es für die Lebensdauer der Bloch-Oszillationen keine Beschränkung. Die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten sind gegenüber dem Fall eines einzelnen Wellenpaketes deutlich komplexer. Sie werden im folgenden Abschnitt behandelt.

6.3. Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten

Die theoretischen Untersuchungen der Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten basierten auf einer Beschreibung des Systems im Rahmen der Gross-Pitaevskii-Gleichung. Wie im Kapitel 3 dargelegt wurde, setzt diese hinreichend tiefe Temperaturen und moderate Gittertiefen voraus. In Anwesenheit einer konstanten Kraft ist die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion durch

$$i \hbar \partial_t \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{MF}(\mathbf{r}) + V_G \cos^2(kz) + Fz + g |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right] \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.13)$$

bestimmt. Dabei bezeichnet $V_{MF}(\mathbf{r})$ das Potenzial der Magnetfalle, V_G die Gittertiefe und F die in axiale Richtung beschleunigende Kraft. Die numerischen Berechnungen wurden unter Berücksichtigung des Magnetfallenpotenzials ausgeführt, da bei einer experimentellen Realisierung die Atome nicht mit dem optischen Gitterpotenzial alleine gegen die Schwerkraft gehalten werden können. Da die Periodendauer der Bloch-Oszillationen für typische experimentell erzeugbare Kräfte einige Millisekunden beträgt, würden die ungefangenen Atome vor Beendigung einer Periode aus dem Wirkungsbereich des Gitterpotenzials fallen.

Die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion wird numerisch ermittelt (siehe Anhang A). Dazu wird zunächst der Grundzustand des Kondensats im kombinierten Potenzial aus optischem Gitter und Magnetfalle bestimmt und anschließend gemäß der Gleichung (6.13) zeitlich propagiert. Mit der erhaltenen Lösung $\Psi(\mathbf{r}, t)$ wird die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes der axialen Geschwindigkeit

$$\langle v_z \rangle = \int d^3r \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{im} \partial_z \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.14)$$

und des Ortes

$$\langle z \rangle = \int d^3r \Psi^*(\mathbf{r}, t) z \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (6.15)$$

bestimmt.

Die Erwartungswerte in Abbildung 6.4 zeigen das für Bloch-Oszillationen charakteristische oszillatorische Verhalten. Dabei wurden für diese Abbildung Parameter verwendet, wie sie mit der vorliegenden experimentellen Apparatur erreicht werden können. So betragen die axialen und radialen Fallenfrequenzen des harmonischen Einschlusses $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$. Die Gitterkonstante wurde in allen Simulationen mit $825/2 \text{ nm}$ angesetzt. Der Term $V_T(z) = Fz$ wurde so gewählt, dass er eine Potenzialdifferenz von $\delta E = 0,05E_r$ zwischen benachbarten Gitterplätzen verursacht. Dieses entspricht einer klassischen Beschleunigung von $a = 1,87 \text{ ms}^{-2}$.

Abbildung 6.4 zeigt eine charakteristische Asymmetrie in dem Verlauf des Erwartungswertes der axialen Geschwindigkeit für geringe Gittertiefen. Diese tritt gleichermaßen im Verhalten der Gruppengeschwindigkeit nach Abbildung 6.1 auf und ist unter Beachtung von (6.6) anhand der Form der Bandstruktur zu verstehen. Für das Einteilchenproblem sind die Bandstrukturen für verschiedene Gittertiefen in der Abbildung 3.3 gezeigt. Der Quasi-Impuls bewegt sich unter dem Einfluss der Kraft mit konstanter Geschwindigkeit \dot{q} durch die Brillouinzone. In deren Zentrum und an den Rändern lassen sich die Bandstrukturen jeweils durch Parabeln approximieren. Dieses führt nach (6.6) auf eine lineare Zeitabhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit, deren Steigung durch die Krümmung des Bandes gegeben ist. Für kleine Gittertiefen ist diese im Zentrum der Brillouinzone klein und positiv und am Rand groß und negativ. Ferner lässt sich die quadratische Approximation des Bandes vom Zentrum aus bis zu deutlich größeren Werten von q fortsetzen als dies für die Ränder der Fall ist. Anhand dieser Asymmetrie der Bandstruktur ist die Asymmetrie der Bloch-Oszillationen für kleine Gittertiefen leicht verständlich. Wenn die Krümmung des Bandes verschwindet, ist die effektive Masse (6.7) unendlich und die zeitliche Ableitung der Gruppengeschwindigkeit ist Null.

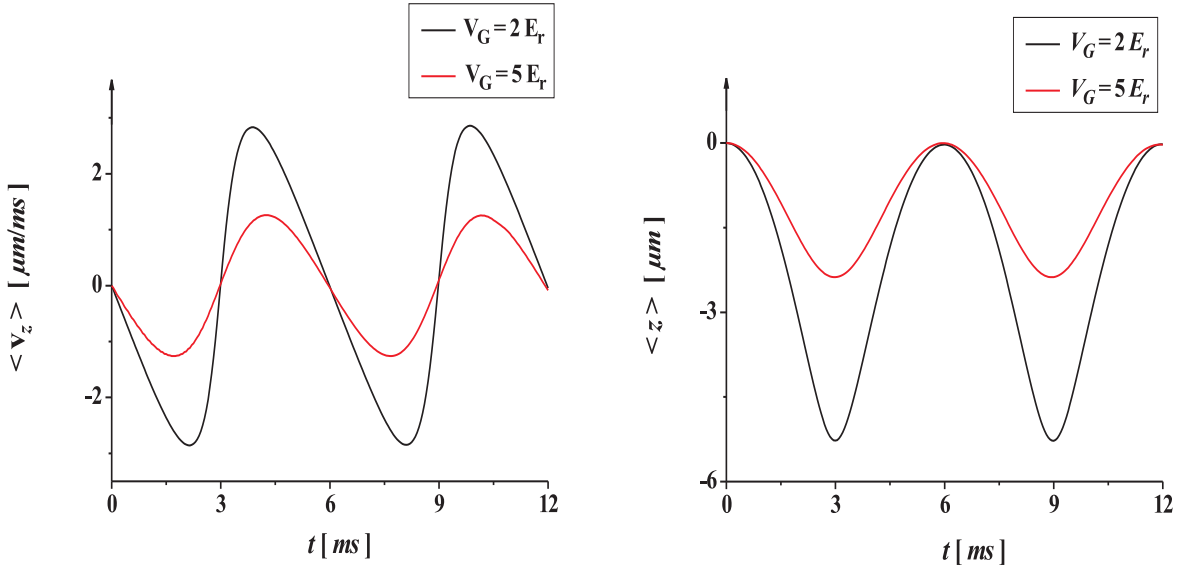


Abbildung 6.4.: Erwartungswerte der Geschwindigkeit (6.14) und des Ortes (6.15) in Abhängigkeit von der Zeit für verschiedene Gittertiefen. Die Berechnung wurde für Kondensate mit $N = 5 \cdot 10^4$ Teilchen in der Magnetfalle bei einer beschleunigenden Kraft von $a = 1,87 \text{ ms}^{-2}$ ausgeführt.

Für tiefere Gitter tritt die Asymmetrie der Bandstruktur immer stärker in den Hintergrund. Dieses wird insbesondere anhand der völlig symmetrischen Tight-Binding-Näherung (3.54) offensichtlich. Daher weisen die Bloch-Oszillationen für größere Gittertiefen keine Asymmetrie auf. Dieses Verhalten ist in der Abbildung 6.4 deutlich erkennbar. Für den Erwartungswert des Ortes gelten die getroffenen Aussagen entsprechend.

Am Verlauf des Erwartungswertes des Ortes ist erkennbar, dass die Oszillationen den Schwerpunkt der Wolke nur um wenige Mikrometer verschiebt. Aus diesem Grund hat das axiale Magnetfallenpotenzial keinen merklichen Einfluss auf die Bloch-Oszillationen. Ein gegensätzliches Verhalten ergibt sich, wenn die Kraft auf die Atome als Trägheitskraft in einem beschleunigten optischen Gitter ausgeübt wird [29, 124]. Hierbei wird das Kondensat mit dem Gitter mitbewegt, wobei die Bloch-Oszillationen in dem Bezugssystem stattfinden, in dem das Gitter ruht. Bei einer Durchführung dieser Experimente innerhalb der Magnetfalle ist aufgrund der großen Bewegung des Kondensates ein signifikanter Einfluss auf die Frequenzen der Bloch-Oszillationen zu erwarten [213].

Die Ergebnisse der numerischen Simulation können mit der auf dem Beschleunigungstheorem (6.8) basierenden Einteilchen-Rechnung verglichen werden. Dazu wird die über (6.8) erhaltene Zeitabhängigkeit des Quasi-Impulses verwendet, um die zeitabhängige Gruppengeschwindigkeit

$$v_g^{q_0(t)} = \frac{1}{\hbar} \left. \frac{\partial E(q)}{\partial q} \right|_{q_0(t)} \quad (6.16)$$

zu berechnen. Sie wird in Abbildung 6.5 mit den Ergebnissen der numerischen Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung verglichen. Die hervorragende Übereinstimmung der Resultate

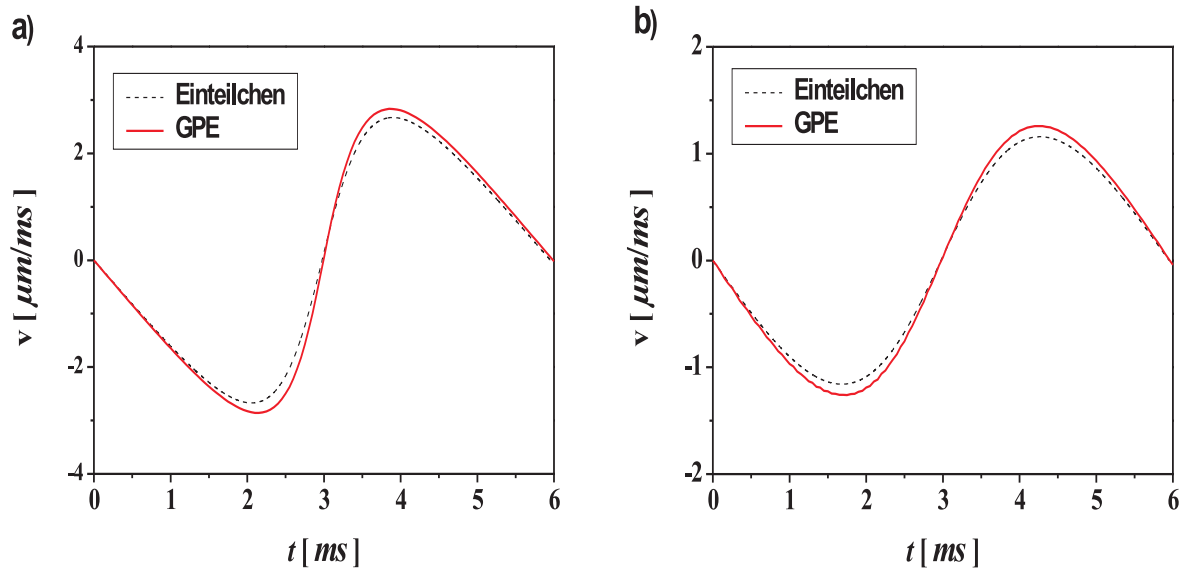


Abbildung 6.5.: Vergleich der mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung berechneten Erwartungswerte der Geschwindigkeit aus Abbildung 6.4 mit der zeitabhängigen Gruppengeschwindigkeit (6.16). Abbildung a) zeigt die Resultate für eine Gittertiefe von $V_G = 2 E_r$, während in b) die Oszillation für $V_G = 5 E_r$ dargestellt ist. Die leichte Abweichung der Kurven wird durch die interatomare Wechselwirkung verursacht.

zeigt, dass aufgrund der geringen Impulsbreite des Kondensates die in Abschnitt 6.2 dargestellte einfache Beschreibung der Banddynamik anwendbar ist. Die geringe Abweichung wird dabei durch die interatomare Wechselwirkung verursacht. Diese schirmt wie im Abschnitt 3.2.3 beschrieben das Gitterpotenzial effektiv ab, so dass die resultierenden Energiebänder weniger flach als im Einteilchenfall sind.

Signifikante Abweichungen von der Einteilchen-Bewegung zeigen sich jedoch bei längeren Entwicklungszeiten. In der Abbildung 6.6 ist der mit der Gross-Pitaevskii-Gleichung berechnete Erwartungswert der axialen Geschwindigkeit für verschiedene Teilchenzahlen gezeigt. Es ist eine starke Dämpfung der Oszillation erkennbar, die nach zwei Perioden einsetzt und sich mit zunehmender Teilchenzahl weiter ausprägt.

Eine wechselwirkungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen wurde von Trombettoni und Smerzi im Rahmen einer diskretisierten nichtlinearen Schrödinger-Gleichung (DNLSG) untersucht [202]. Dazu wurde die DNLSG in einer Dimension sowohl numerisch als auch im Rahmen eines Variationsansatzes gelöst. In der Variationsrechnung wurde als Ursache für die Dämpfung die zeitliche Zunahme der effektiven Masse identifiziert¹. Diese manifestierte sich in den numerischen Rechnungen als eine Dephasierung der zu den verschiedenen Gitterplätzen gehörigen Wellenfunktionen [202].

Wechselwirkungsinduzierte Dekohärenzprozesse wurden bereits bei der ersten experimentellen Untersuchung von Bose-Einstein-Kondensaten in einem optischen Gitter beobach-

¹Die hier angesprochene effektive Masse ist nicht identisch zu der in (6.7) über die Bandstruktur definierten. Sie ergibt sich vielmehr als zweite Ableitung des Hamiltonians nach einem Variationsparameter [202].

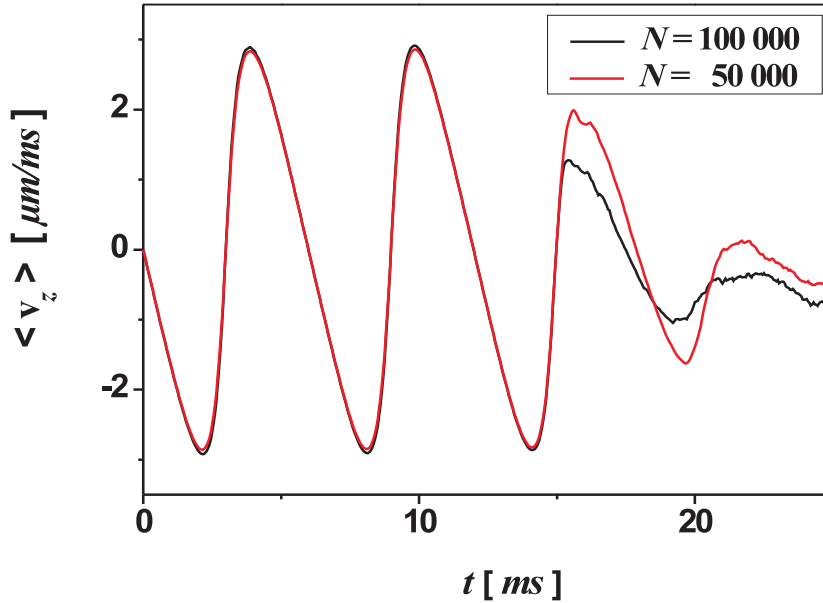


Abbildung 6.6.: Erwartungswert der axialen Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit. Für große Zeiten ist eine teilchenzahlabhängige Dämpfung der Bloch-Oszillationen zu beobachten. Der Abbildung liegen dieselben Parameter zugrunde, die auch für die Abbildung 6.4 verwendet wurden.

tet [123]. Hierbei kam es für große Teilchenzahlen bei der Auskopplung der Atome durch Tunnelprozesse mit der Bloch-Periode zu einem Kohärenzverlust.

Die numerische Lösung der dreidimensionalen Gross-Pitaevskii-Gleichung (6.13) zeigt neben der Dämpfung der Oszillationsamplitude auch Unregelmäßigkeiten im zeitlichen Verlauf der Erwartungswerte. Diese gehen mit dem Auftreten einer turbulenten Dynamik der Kondensatwellenfunktion einher. So zeigt Abbildung 6.8, dass im zeitlichen Verlauf komplexe radiale Anregungen gebildet werden². Die Ursache für diese Anregungen liegt in einer dynamischen Instabilität der Bewegungsgleichung gegenüber kleinen Störungen und wird im nächsten Abschnitt besprochen. Die Dephasierung der Kondensatwellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen ist in Abbildung 6.7 gezeigt.

Dynamische und energetische Instabilität

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, dass die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten für kurze Zeiten in guter Näherung durch quasi-klassische Bewegungsgleichungen beschrieben werden können. Dabei bewegt sich der Quasi-Impuls gemäß dem Beschleunigungstheorem (6.8) durch die Brillouinzone. Für Bose-Einstein-Kondensate in periodischen Potenzialen ist dabei bekannt, dass es für große Werte des Quasi-Impulses zum Auftreten von zwei verschiedenen Arten von Instabilitäten kommen kann [214–218].

²Die Stabilität des numerischen Algorithmus wurde durch eine Verringerung der zeitlichen Diskretisierung geprüft. Die Details der Numerik werden in Anhang A erläutert.

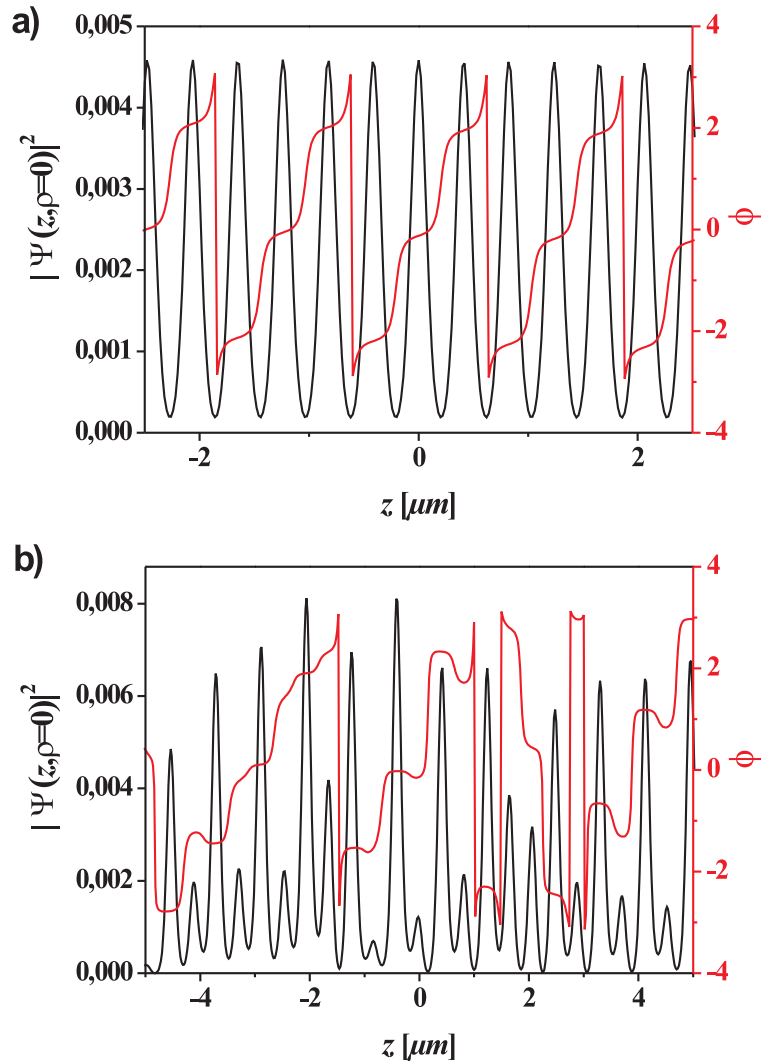


Abbildung 6.7.: Ausschnitte aus der axialen Dichte- und Phasenverteilung während der in Abbildung 6.6 gezeigten Bloch-Oszillationen. Die Teilchenzahl beträgt $N = 5 \cdot 10^4$ Atome. Abbildung a) zeigt die Situation nach 4 ms . Es existiert eine intakte Phasenbeziehung zwischen den einzelnen Gitterplätzen. In b) sind die Verteilungen nach 14 ms dargestellt. Die Phasenbeziehung zwischen den Gitterplätzen ist gestört und die Dichteverteilung ist ungleichmäßig.

Einerseits kann es zu einer so genannten energetischen Instabilität kommen. Diese liegt vor, wenn für eine Lösung $\Psi_0(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}$ der stationären Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) + g|\phi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \phi_0(\mathbf{r}) = \mu \phi_0(\mathbf{r}) \quad (6.17)$$

Anregungen

$$\delta\Psi(\mathbf{r}, t) = \delta\phi(\mathbf{r}, t) e^{-i\mu t/\hbar} \quad (6.18)$$

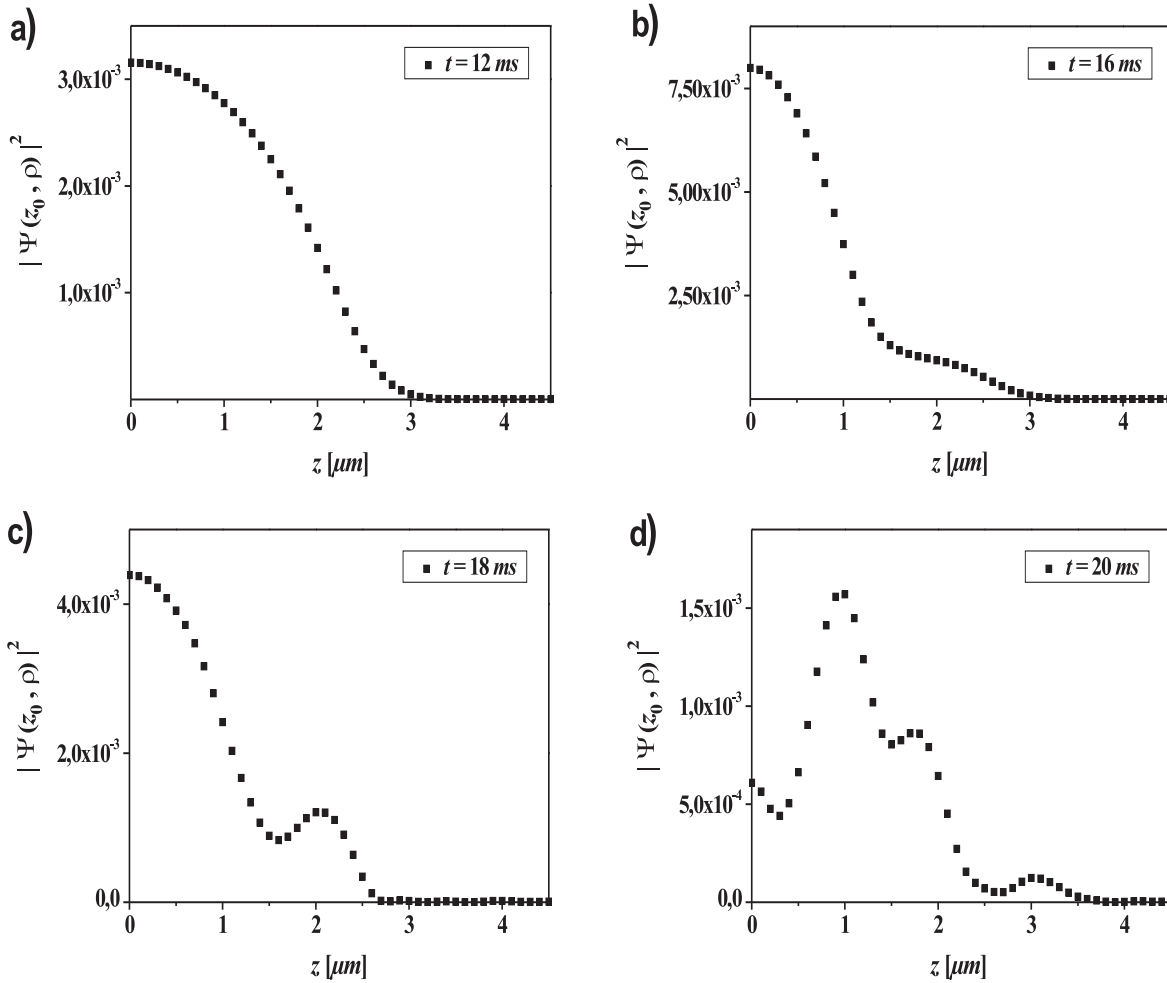


Abbildung 6.8.: Radiale Dichteprofile zu verschiedenen Zeiten während der Bloch-Oszillation. Es ist deutlich erkennbar, dass sich eine komplexe radiale Dynamik bildet. Die hiermit verbundenen Turbulenzen verursachen eine schnelle Dephasierung der Wellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen und führen zu einer massiven Dämpfung der Bloch-Oszillationen. Das radiale Profil ist an der axialen Position der maximalen Kondensatdichte z_0 gezeigt. Die Berechnung wurde für $N = 5 \cdot 10^4$ Atome ausgeführt. Die übrigen Parameter sind mit denen der Abbildung 6.6 identisch.

des Kondensates existieren, die die Gesamtenergie

$$E[\phi] = E[\phi_0] + \int d^3r (\delta\phi^*, \delta\phi) M \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

minimieren [214–216]. Dabei bezeichnet $E[\phi_0]$ die Energie der stationären Lösung

$$E[\phi_0] = \int d^3r \left[\phi_0^* H_0 \phi_0 + \frac{g}{2} |\phi_0(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (6.20)$$

und M eine 2×2 Matrix

$$M = \begin{pmatrix} H_0 + 2g|\phi_0|^2 & g\phi_0^2 \\ g\phi_0^{*2} & H_0 + 2g|\phi_0|^2 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

mit

$$H_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V - \mu \right). \quad (6.22)$$

Anhand von (6.19) ist ersichtlich, dass das System die Gesamtenergie gegenüber der stationären Lösung durch Fluktuationen $\delta\phi$ minimieren kann, wenn das Spektrum von M negative Eigenwerte enthält. Diese Situation steht im engen Zusammenhang mit der in Kapitel 4 besprochenen Stabilität einer superflüssigen Bewegung. Wenn sich die Flüssigkeit mit einer größeren Geschwindigkeit als die Landau-Geschwindigkeit bewegt, kann das System durch Erzeugung elementarer Anregungen seine Energie dissipieren. Daher wird die energetische Instabilität auch als Landau-Instabilität bezeichnet. Da die Gross-Pitaevskii-Gleichung die Gesamtenergie des Systems erhält, kann die dissipative Dynamik, die mit der energetischen Instabilität verbunden ist, mit ihrer Hilfe nicht erfasst werden.

Eine andere Art von Instabilität tritt auf, wenn eine kleine Störung $\delta\phi(\mathbf{r}, t)$ mit der Zeit unbeschränkt anwächst und das System sich so von der stationären Lösung beliebig weit entfernt [214–216]. Diese Situation kann erfasst werden, wenn die Störung (6.18) in die Gross-Pitaevskii-Gleichung eingesetzt wird. Dieses liefert unter der Berücksichtigung der Terme bis zur ersten Ordnung in der Störung

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} = \sigma_z M \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} = \hbar\omega \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} \quad (6.23)$$

mit

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6.24)$$

Anhand von (6.23) ist ersichtlich, dass Frequenzen mit nicht verschwindendem Imaginärteil $\Im(\omega)$ im Spektrum von $\sigma_z M$ zu einem exponentiellen Anwachsen der Störung mit der Rate $|\Im(\omega)|$ führen. Obwohl gezeigt werden kann, dass diese Instabilität notwendigerweise die energetische Instabilität voraussetzt [214, 215], ist sie eine Konsequenz der Bewegungsgleichung. Aus diesem Grund wird sie auch dynamische Instabilität genannt. Eine ausführliche Diskussion der spektralen Eigenschaften von M und $\sigma_z M$ wird in [214, 215] gegeben.

Abbildung 6.9 zeigt schematisch den Verlauf der Stabilitätsbereiche eines Kondensates in einem Gitterpotenzial in Abhängigkeit von Gittertiefe und Quasi-Impuls. Eine Berechnung ist beispielsweise in [216, 217] gegeben. Die Abbildung zeigt, dass die instabilen Bereiche jeweils für große Werte von q beginnen.

Für die durchgeführten numerischen Simulationen ist ausschließlich die dynamische Instabilität von Bedeutung. Die energetische Instabilität wird an dieser Stelle nicht näher betrachtet. Unter dem Einfluss der Kraft bewegt sich der Quasi-Impuls während der Bloch-Oszillation in den dynamisch instabilen Bereich. Dessen Grenze q_D ist durch die Instabilität der niederenergetischsten radialen Mode bestimmt [216]. Diese weist keinen Knoten auf. Für größere Werte

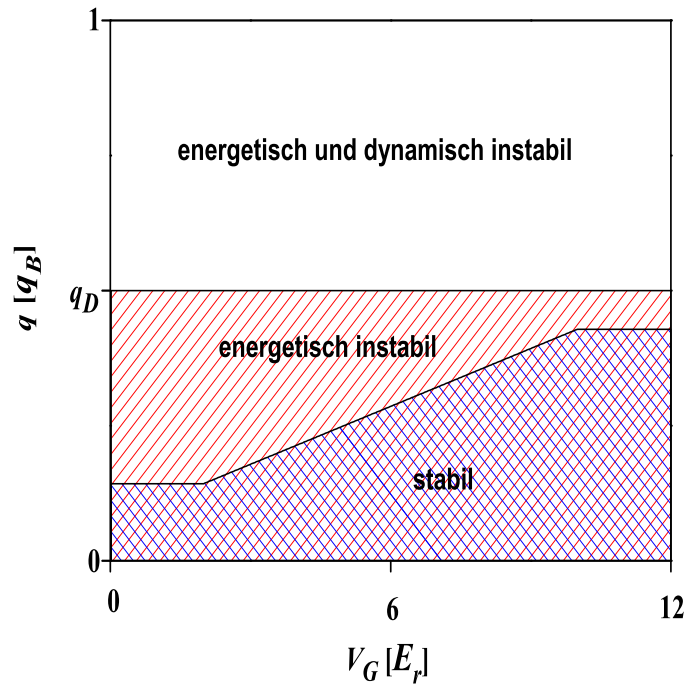


Abbildung 6.9.: Schematische Darstellung des Verlaufs der Instabilitätsbereiche eines Kondensates in einem periodischen Potenzial als Funktion des Quasi-Impulses und der Gittertiefe. Eine Berechnung dieses Diagramms wird in [216, 217] gegeben.

von q werden jedoch auch radiale Moden instabil, die Knoten aufweisen [216]. Das exponentielle Anwachsen der Besetzung dieser Moden führt auf eine komplexe radiale Dynamik, wie sie in der Abbildung 6.8 dargestellt ist. Insgesamt entwickelt sich eine turbulente Dynamik der Kondensatwellenfunktion. Dieses führt zu einer raschen Dephasierung der Wellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen, da sich die Phase im wechselwirkenden System aufgrund der unregelmäßigen Dichteverteilung sehr unterschiedlich entwickelt.

Die dynamische Instabilität ist als Mechanismus zur Dämpfung von Bloch-Oszillationen bekannt [215, 218]. Anhand von (6.21) ist erkennbar, dass für das mögliche Auftreten von imaginären Eigenwerten von $\sigma_z M$ die nichtlineare Wechselwirkung verantwortlich ist. Stabile Bloch-Oszillationen sollten daher nur für geringe atomare Dichten vorliegen. Tatsächlich zeigt ein Kondensat bestehend aus $N = 1 \cdot 10^4$ Atomen in einer harmonischen Falle mit den Fallenfrequenzen $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 35 \text{ Hz}$ bei einer Beschleunigung von $a = 1,87 \text{ m/s}^2$ langlebige Bloch-Oszillationen. Diese sind in der Abbildung 6.10 dargestellt.

Abschließend sei angemerkt, dass ein weiteres Szenario für das instabile Verhalten von Bose-Einstein-Kondensaten in optischen Gittern vorhergesagt wurde [213]. In diesem bildet sich im Kondensat ein dunkles Soliton [219], wenn der Quasi-Impuls am Rand der Brillouinzone liegt. Dieses dunkle Soliton zerfällt über die so genannte Snake-Instability [220] in einen Vortexring [221]. Hierbei kommt es ebenfalls zu starken Turbulenzen und einem Verlust der Kondensatstruktur. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Simulationen zeigen jedoch für die untersuchten Parameter keine Anzeichen von Solitonen oder Vortexzu-

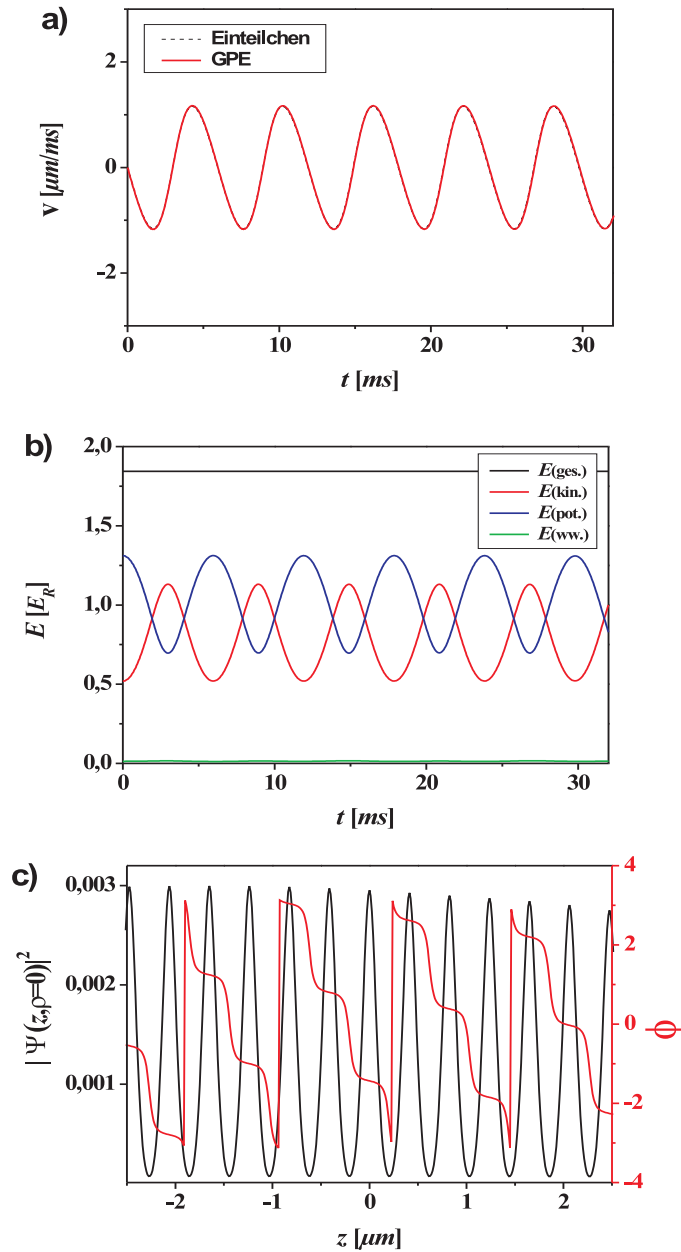


Abbildung 6.10.: Bloch-Oszillationen eines Kondensates mit $N = 1 \cdot 10^4$ Teilchen in einer harmonischen Falle mit Fallenfrequenzen $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 35 \text{ Hz}$ in einem optischen Gitter der Tiefe $V_G = 5 E_r$. a) zeigt langlebige Bloch-Oszillationen im Erwartungswert der Geschwindigkeit. Diese sind wegen der geringen Wechselwirkung vom Einteilchenresultat (6.16) nicht unterscheidbar. In b) ist die Oszillation anhand der Zeitentwicklung von kinetischer und potenzieller Energie dargestellt. c) zeigt einen Ausschnitt aus der axialen Dichte- und Phasenverteilung nach 20 ms Oszillation. Nach dieser Zeit existiert immer noch eine feste Phasenbeziehung zwischen den Gitterplätzen.

ständen. Diese könnten jedoch sehr kurze Lebenszeiten aufweisen oder in dem turbulenten Kondensat nur sehr schwer zu identifizieren sein.

Das Auftreten von dynamischen Instabilitäten hat wichtige Konsequenzen für die Untersuchung unordnungsinduzierter Einflüsse auf die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten. Diese werden im nächsten Abschnitt diskutiert.

6.4. Unordnungsinduzierte Dämpfung der Bloch-Oszillationen

Störungen der perfekten Gitterstruktur führen zu einem Kohärenzverlust und einer endlichen Lebensdauer der Bloch-Oszillationen. Im Rahmen der Tight-Binding-Näherung wurden bereits die Auswirkungen von Unordnung auf die Bloch-Oszillationen eines einzelnen Elektrons untersucht [222]. Hierbei wurde das Auftreten einer starken Dämpfung gefunden.

Während in Festkörpern Unordnung auf natürliche Weise vorliegt, stellen optische Gitter perfekte periodische Potenziale dar. Einen möglichen Dekohärenzprozess für ein Ensemble ultra-kalter Atome in einem solchen Gitterpotenzial stellt die spontane Streuung von Photonen aus dem Laserfeld dar. Deren Auswirkungen wurden in [223] theoretisch untersucht. Auch in diesem Fall wurde eine Dämpfung der Bloch-Oszillationen festgestellt, die durch die Rate der spontanen Streuprozesse bestimmt ist. Da die Streurrate in fernresonanten Gittern extrem gering ist, stellen solche Prozesse für die Lebensdauer von Bloch-Oszillationen keine signifikante Beschränkung dar. In der Tat wurden mit neutralen Atomen in optischen Gittern Bloch-Oszillationen mit Lebensdauern von vielen Millisekunden beobachtet.

Das experimentell realisierte ungeordnete Potenzial (vgl. Kapitel 4) bietet die Möglichkeit, den Einfluss einer Störung auf die Lebensdauer von Bloch-Oszillationen kontrolliert zu untersuchen. Dazu sollten die Experimente in einem Parameterbereich ausgeführt werden, in dem der Einfluss der Wechselwirkung auf die Oszillationen nicht dominant ist. Dieses wird für

- geringe Teilchenzahlen,
- geringe Fallenfrequenzen und
- große Kräfte zur Beschleunigung der Atome

erreicht. Die beiden ersten Punkte führen zu einer langen Lebenszeit der Bloch-Oszillationen des ungestörten Systems, da sie eine geringe interatomare Wechselwirkung implizieren. Der zuletzt genannte Punkt führt gemäß der Gleichung (6.9) zu einer kurzen Periodendauer. Daher ist eine Beobachtung über mehrere Perioden möglich, bevor die Dämpfung der Oszillationen einsetzt.

Teilchenzahlen von $N = 5 \cdot 10^4$ sowie Magnetfallenfrequenzen von $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 35 \text{ Hz}$ sind experimentell zugängliche Parameter für die bestehende Apparatur. Für diese Werte sind die Amplituden der Bloch-Oszillationen bei einer Beschleunigung von $a = 1,87 \text{ ms}^{-2}$ über einige Perioden nahezu ungedämpft. Daher ist diese Konfiguration ein geeigneter Ausgangspunkt zur Untersuchung unordnungsinduzierter Effekte auf die Oszillationsamplituden.

Um in den numerischen Simulationen den Einfluss eines Unordnungspotenzials zu analysieren, wird zunächst der Kondensatgrundzustand im gemeinsamen Potenzial der Magnetfalle und des optischen Gitters berechnet. Dieser wird anschließend gemäß der Gross-Pitaevskii-Gleichung unter dem Einfluss eines ungeordneten Potenzialgradienten

$$V(z) = Fz + V_{\Delta}f(z) \quad (6.25)$$

unter Beibehaltung des harmonischen Potenzials und des Gitterpotenzials in der Zeit entwickelt. In (6.25) bezeichnet $V_{\Delta}f(z)$ ein ungeordnetes Potenzial, so wie es in Kapitel 4 eingeführt wurde. Für die Ortsabhängigkeit $f(z)$ wird dabei eine typische Realisierung des im Experiment vorliegenden ungeordneten Dipolpotenzials verwendet. Die Tiefe V_{Δ} des Unordnungspotenzials³ liegt in den Simulationen zwischen $1 \cdot 10^{-3} E_r$ und $50 \cdot 10^{-3} E_r$. Die kürzeste Länge, auf der das ungeordnete Dipolpotenzial schwankt, beträgt $\approx 10 \mu m$. Hieraus resultieren typische Potenzialdifferenzen zwischen benachbarten Gitterplätzen, die um ca. drei Größenordnungen kleiner sind als die durch Fz erzeugten ($50 \cdot 10^{-3} E_r$). Daher stellt das ungeordnete Potenzial nur eine kleine Störung für das beschleunigende lineare Potenzial dar.

In Abbildung 6.11 ist der Verlauf der Bloch-Oszillationen für verschiedene Stärken des ungeordneten Potenzials zu sehen. Es ist deutlich erkennbar, dass die Amplituden der Erwartungswerte von Ort und Geschwindigkeit durch das ungeordnete Potenzial deutlich gedämpft werden. Die Dämpfung nimmt dabei mit der Unordnungstiefe zu. Nach dem Zusammenbruch der Oszillation wird der Schwerpunkt des Kondensates unter dem Einfluss der Kraft in negative z -Richtung bewegt.

Die auftretende Dämpfung kann mit einer einfachen Überlegung anhand des Einteilchen-Problems qualitativ verstanden werden. In einem geordneten Gittersystem führt ein Potenzialgradient dazu, dass sich die Phase der Wellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen unterschiedlich entwickelt. Die relative Phase zwischen benachbarten Gitterplätzen ist dabei durch

$$\Delta\phi(t) = \frac{\delta E}{\hbar} t \quad (6.26)$$

gegeben. Dabei bezeichnet δE die Potenzialdifferenz zwischen benachbarten Gitterplätzen. Anhand (3.28) ist erkennbar, dass mit diesem Phasengradienten ein von null verschiedener zeitabhängiger Wert für den Quasi-Impuls einher geht. Gemäß der Bandstruktur ist hiermit eine endliche Gruppengeschwindigkeit (6.1) verbunden, die ihr Vorzeichen ändert, wenn der Quasi-Impuls im Zentrum oder auf den Rändern der Brillouinzone liegt. Nach (3.28) beträgt die Phasendifferenz zwischen benachbarten Gitterplätzen dann gerade 0 bzw. π . Daher folgt eine Periodendauer für die Bewegung von

$$T = \frac{2\pi\hbar}{\delta E}. \quad (6.27)$$

Wegen $\delta E = Fd$ ist dieses Resultat mit (6.9) identisch. Insbesondere ist unter dem Einfluss des Potenzialgradienten die Phasendifferenz zwischen benachbarten Gitterplätzen im gesamten Gitter konstant.

³Die Tiefe des Unordnungspotenzials ist gemäß Kapitel 4 als die doppelte Standardabweichung vom Mittelwert definiert.

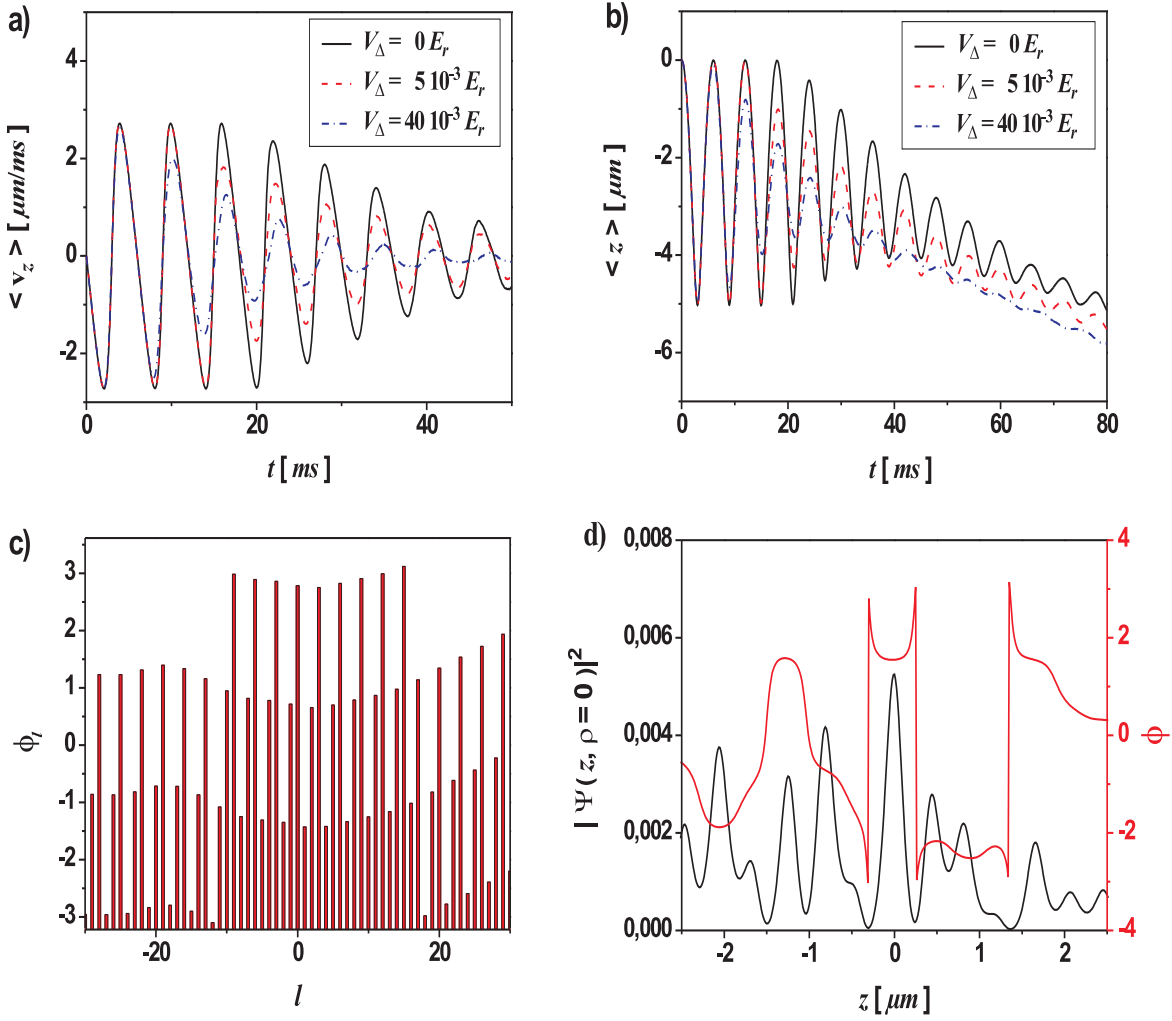


Abbildung 6.11.: Gedämpfte Bloch-Oszillationen in einem ungeordneten Potenzial. In a) und b) sind die Erwartungswerte der Geschwindigkeit und des Ortes gezeigt. Abbildung c) zeigt die Phase der Kondensatwellenfunktion im Zentrum des Gitterplatzes l nach $4 ms$ Entwicklungszeit für $V_\Delta = 5 \cdot 10^{-3} E_r$. Die Phasendifferenz zwischen benachbarten Gitterplätzen ist nicht konstant im gesamten System. In d) ist die Phasen- und Dichteverteilung nach $30 ms$ Entwicklungszeit für dieselbe Unordnungstiefe gezeigt. Die einzelnen Gitterplätze sind bereits stark dephasiert. Die Gittertiefe beträgt jeweils $V_G = 2 E_r$.

Dagegen werden in der Gegenwart des ungeordneten Potenzials die Phasendifferenzen zwischen benachbarten Gitterplätzen ortsabhängig. Daher kann die kohärente Phasenbeziehung (6.9) nicht mehr mit einem einzigen zeitabhängigen Quasi-Impuls aufrecht erhalten werden. Dadurch wird die Bewegung, die durch die quasi-klassischen Gleichungen (6.8) und (6.16) beschrieben ist, beendet. Die Zeitskala T_Δ , auf der das ungeordnete Potenzial eine völlige Dephasierung der Wellenfunktion auf benachbarten Gitterplätzen verursacht, ist durch

$$T_\Delta \approx \frac{2\pi\hbar}{\delta E_\Delta} \quad (6.28)$$

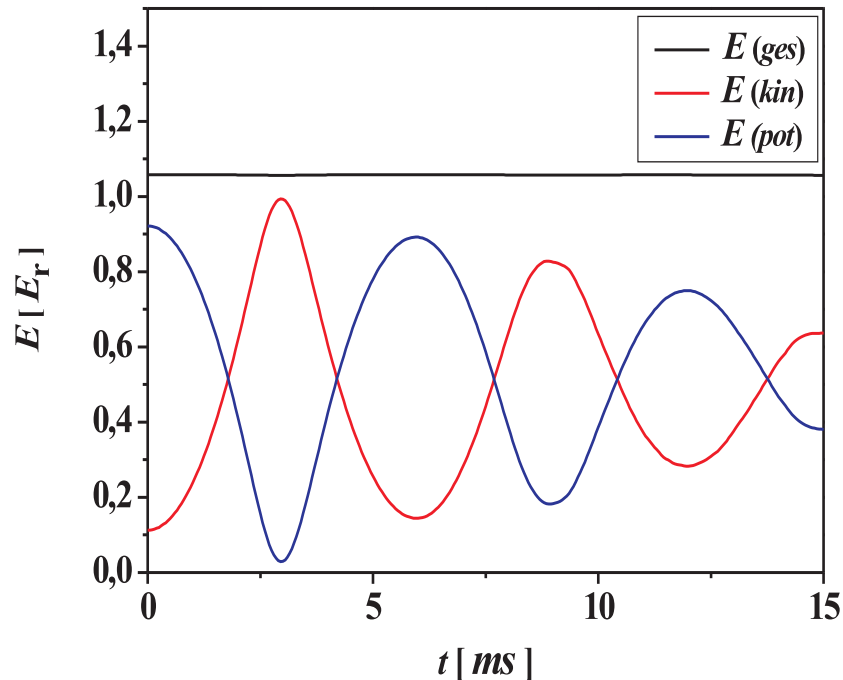


Abbildung 6.12.: Zeitliche Entwicklung der Energie pro Teilchen bei der Dämpfung der Bloch-Oszillationen. Die Berechnung wurde für ein Kondensat bestehend aus $5 \cdot 10^4$ Teilchen in einer Falle mit den Frequenzen $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ und $\omega_\rho = 2\pi \times 35 \text{ Hz}$ ausgeführt; die Tiefe des ungeordneten Potentials betrug $60 \cdot 10^{-3} E_r$ und die Gittertiefe $V_G = 2 E_r$.

gegeben. Dabei bezeichnet δE_Δ den Potenzialunterschied benachbarter Gittertöpfe, der durch das ungeordnete Potenzial hervorgerufen wird.

Dieser für das Einteilchenproblem beschriebene Effekt kann auch bei den Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten beobachtet werden. So zeigt die Abbildung 6.11.c) die Phasen der Kondensatwellenfunktion auf den einzelnen Gitterplätzen nach einer Entwicklungszeit von 4 ms . Es ist deutlich erkennbar, dass durch das ungeordnete Potenzial die starren Phasenrelationen innerhalb des Gitters aufgehoben werden. Dieses führt nach einer längeren Entwicklungszeit zu einer völligen Dephasierung des Systems, wie sie in Abbildung 6.11.d) dargestellt ist. Dabei zeigt die Abbildung 6.12, dass bei der Dämpfung der Bloch-Oszillationen die Gesamtenergie erhalten bleibt. Die unordnungsinduzierte Dekohärenz ist mit der Dephasierung aufgrund der interatomaren Wechselwirkung gepaart. Die Teile a) und b) von Abbildung 6.11 zeigen jedoch, dass sich die zeitliche Entwicklung der Oszillationsamplituden des ungeordneten Systems deutlich von der des geordneten unterscheidet.

Die unordnungsbedingte Dämpfung ist umso besser isolierbar, je geringer die Wechselwirkung im Kondensat ist. Die bestehende Magnetfallenkonfiguration mit einer radialen Fallenfrequenz von $\omega_\rho = 2\pi \times 200 \text{ Hz}$ und einer axialen Fallenfrequenz von $\omega_z = 2\pi \times 14 \text{ Hz}$ liefert bei einer Teilchenzahl von $5 \cdot 10^4$ Atomen eine Lebensdauer der ungedämpften Bloch-Oszillationen von $\approx 20 \text{ ms}$. Bei einer Beschleunigung von $a = 1,87 \text{ ms}^{-2}$ sind dabei mehr als zwei Perioden

ohne signifikante Dämpfung beobachtbar. Abbildung 6.13 zeigt, dass in diesem Zeitfenster unter dem Einfluss der Unordnung bereits deutliche Effekte auf die Oszillationsamplituden zu erwarten sind. Daher ist eine Messung der unordnungsinduzierten Dämpfung bereits mit dem bestehenden System möglich.

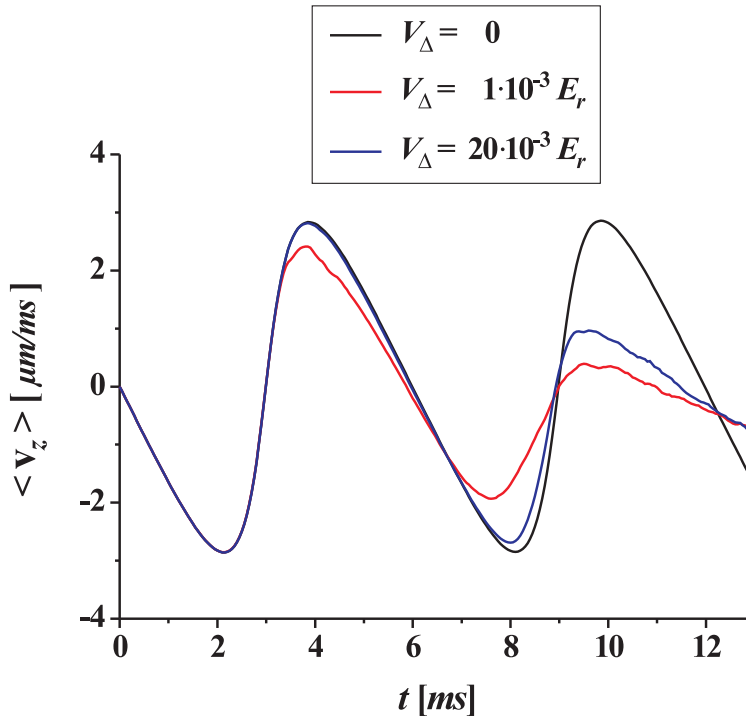


Abbildung 6.13.: Erwartungswert der axialen Geschwindigkeit als Funktion der Zeit für verschiedene Tiefen des ungeordneten Potentials. Die Gittertiefe beträgt $V_G = 2 E_r$.

Wege zur experimentellen Messung gedämpfter Bloch-Oszillationen

Eine unmittelbare Messung der Amplitudendämpfung während der Oszillation ist aus mehreren Gründen unvorteilhaft. Erstens ist eine verlässliche Teilchenzahlbestimmung in der Magnetfalle unmöglich, so dass keinerlei Kontrolle über die Wechselwirkungseinflüsse besteht. Des Weiteren gibt es für das gefangene Ensemble keine verlässliche Möglichkeit zur Bestimmung der Temperatur. Der wichtigste Grund ist jedoch, dass gemäß der Abbildung 6.11 die Oszillationsamplituden im Ortsraum zu klein sind, um ihre Dämpfung messen zu können.

Eine experimentelle Beobachtung des Effektes kann hingegen nach einer freien Expansion erfolgen. Die resultierende axiale Dichteverteilung ist maßgeblich durch das Impulsspektrum bestimmt, da die einzelnen Impulskomponenten des Gittergases in axialer Richtung separieren. Die Abbildung 6.14 zeigt das Impulsspektrum eines Kondensates zu verschiedenen Zeitpunkten der Bloch-Oszillation ohne ungeordnetes Potenzial. Unter dem Einfluss der Kraft

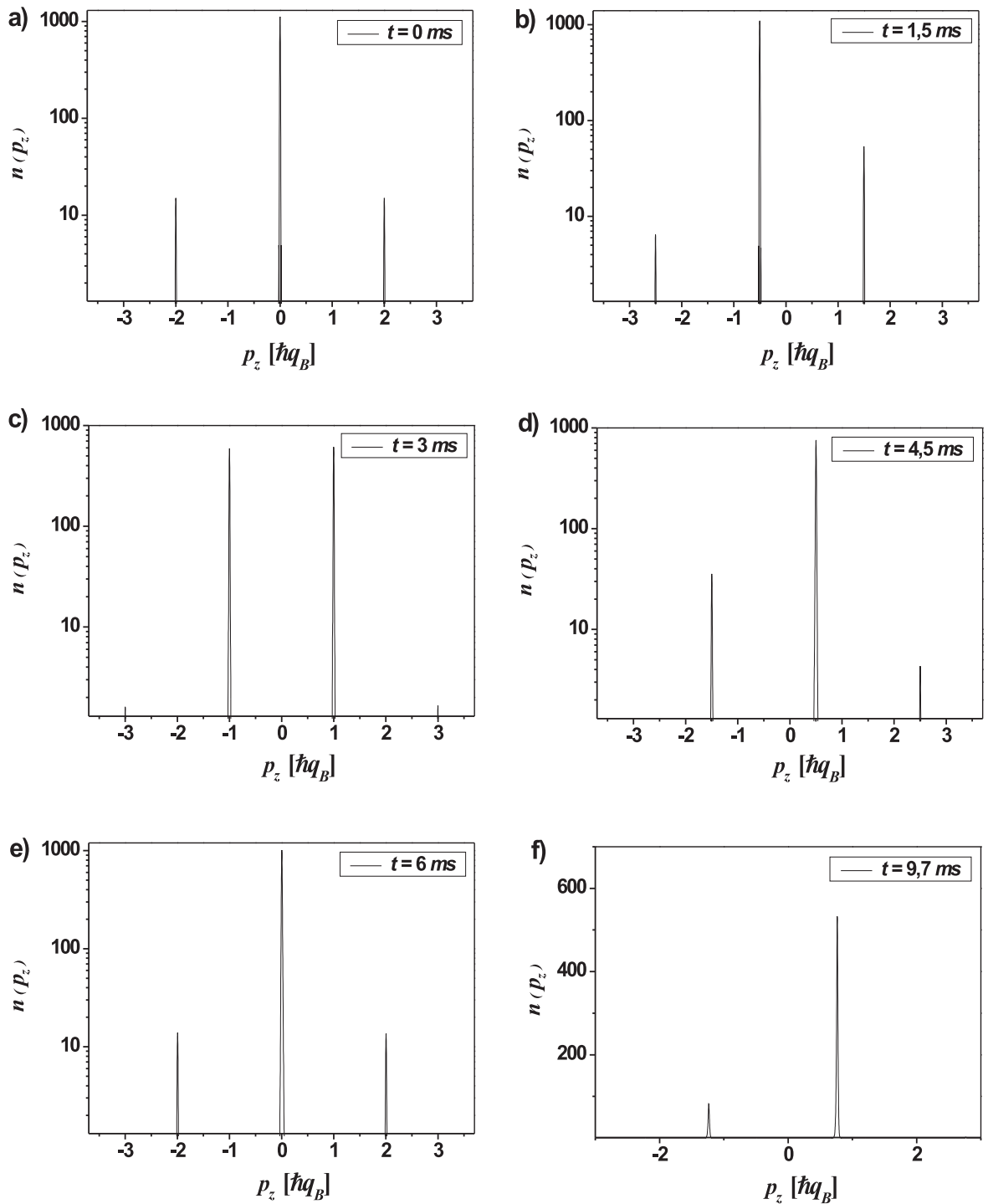


Abbildung 6.14.: Impulsspektrum des Kondensates zu verschiedenen Zeiten der Bloch-Oszillation. In der Simulation wurde kein ungeordnetes Potenzial verwendet. Die übrigen Parameter sind mit denen der Abbildung 6.13 identisch. Zur deutlichen Darstellung aller Impulskomponenten wurde in den Figuren a) - e) eine logarithmische Skala verwendet. In f) ist eine lineare Skala gewählt.

bewegt sich der Quasi-Impuls gemäß des Beschleunigungstheorems (6.8) durch die Brillouinzone. Wie in Abbildung 3.8 für den Einteilchenfall verdeutlicht wurde, hat dies unmittelbare Konsequenzen für das Impulsspektrum. Für einen Quasi-Impuls im Zentrum oder auf dem Rand der Brillouinzone ist das Spektrum symmetrisch. Dies geht mit einer verschwindenden Gruppengeschwindigkeit nach Gleichung (6.1) einher. Für andere Werte des Quasi-Impulses resultiert ein unsymmetrisches Impulsspektrum und eine von Null verschiedene Gruppengeschwindigkeit. Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Quasi-Impuls und Impuls spiegeln sich die Bloch-Oszillationen daher unmittelbar in einer Oszillation des Impulsspektrums wieder. Abbildung 6.14 verdeutlicht insbesondere, dass für das geordnete Gittersystem das Impulsspektrum über einen langen Zeitraum in äußerst schmale Impulskomponenten zerlegt bleibt. Eine leichte Verbreiterung der Komponenten tritt aufgrund der interatomaren Wechselwirkung auf.

In Abbildung 6.15 ist das Impulsspektrum des Kondensates zu verschiedenen Zeiten der Bloch-Oszillation unter dem Einfluss eines ungeordneten Potentials der Tiefe $V_{\Delta} = 5 \cdot 10^{-3} E_r$ dargestellt. Im Gegensatz zum geordneten System tritt eine deutliche Verbreiterung der Impulskomponenten auf. Nach einer Entwicklungszeit von $\approx 10 \text{ ms}$ ist das Spektrum unregelmäßig über die gesamte Brillouinzone ausgebreitet. Zu diesem Zeitpunkt ist nach der Abbildung 6.13 der Erwartungswert der axialen Geschwindigkeit deutlich gedämpft. Die unregelmäßige Form des Impulsspektrums spiegelt die vollständige Dephasierung der Kondensatwellenfunktionen auf den einzelnen Gitterplätzen wieder und zeigt, dass eine Beschreibung des Systems mittels eines scharfen Quasi-Impulses nicht mehr möglich ist.

Der signifikante Unterschied in der Form des Impulsspektrums nach dem Durchlaufen der Bloch-Oszillationen erlaubt eine Diskriminierung des geordneten und ungeordneten Falls mit Hilfe der freien Expansion des Gases. Werden alle Potentiale nach einer Entwicklungszeit Null gesetzt, trennen sich die Impulskomponenten während der freien Expansion. So zeigt die Abbildung 6.14.f) das axiale Impulsspektrum nach $\approx 10 \text{ ms}$ Bloch-Oszillationen in der Magnetfalle ohne Unordnungspotenzial. Die Separation der scharf getrennten Impulskomponenten ist in der Abbildung 6.16.a) dargestellt⁴. Im ungeordneten System ist nach Abbildung 6.15.f) das Impulsspektrum unregelmäßig und die Aufspaltung in einzelne Komponenten aufgehoben. Die Expansion einer solchen Verteilung führt gemäß Abbildung 6.16.b) zu einem breiten unregelmäßigem Dichteprofil. Dabei ist eine endliche Auflösung der Abbildungsoptik nicht berücksichtigt. Diese würde zu einem breiten, gauß-ähnlichen Dichteprofil führen.

Die unterschiedliche Form des Impulsspektrums macht sich bei der Expansion außer in der Form der atomaren Dichteverteilung auch in der Schwerpunktsbewegung bemerkbar. Abbildung 6.17 zeigt den Erwartungswert des Ortes für das geordnete und das ungeordnete System als Funktion der Zeit. Während die Amplituden der Bloch-Oszillationen sehr gering sind, zeigt sich die auftretende Dämpfung in der Expansion als große Differenz in den Erwartungswerten des Ortes. Dabei wurde in der Simulation die freie Expansion für 12 ms berechnet. Der Effekt kann jedoch durch längere Flugzeiten beliebig vergrößert werden. Eine Messung der Dichteverteilung nach der Expansion bietet somit eine experimentell zugängli-

⁴Die Unregelmäßigkeiten im Dichteprofil, insbesondere in dem der ausgekoppelten Impulskomponente, rühren beim geordneten System von dem großen Aspektverhältnis der Magnetfalle her.

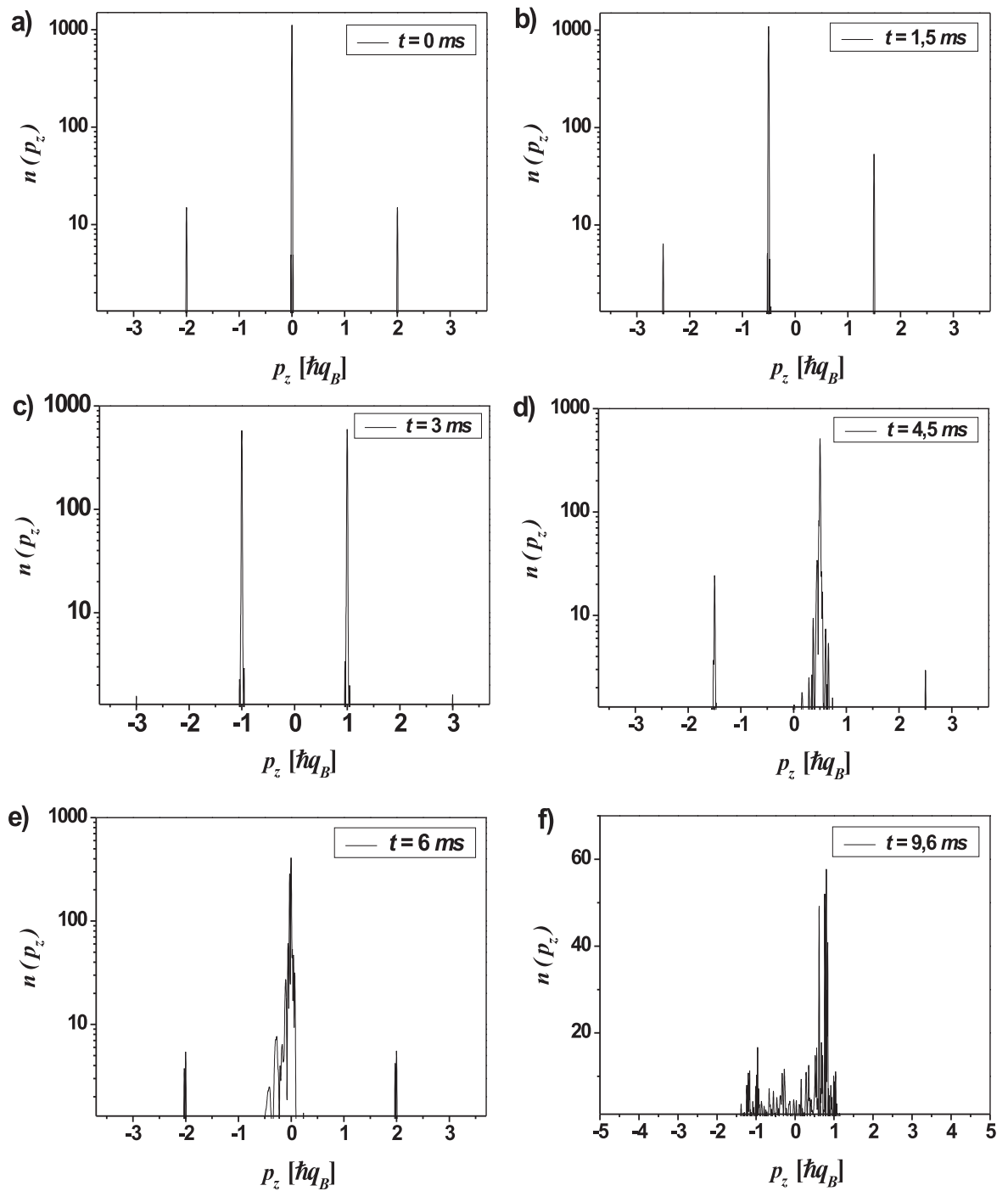


Abbildung 6.15.: Impulsspektrum des Kondensates zu verschiedenen Zeiten der Bloch-Oszillation. In der Simulation wurde ein ungeordnetes Potenzial der Tiefe $V_{\Delta} = 5 \cdot 10^{-3} E_r$ verwendet. Die anderen Parameter sind mit denen der Abbildung 6.14 identisch. Zur deutlichen Darstellung aller Impulskomponenten wurde in den Figuren a) - e) eine logarithmische Skala verwendet. In f) ist eine lineare Skala gewählt.

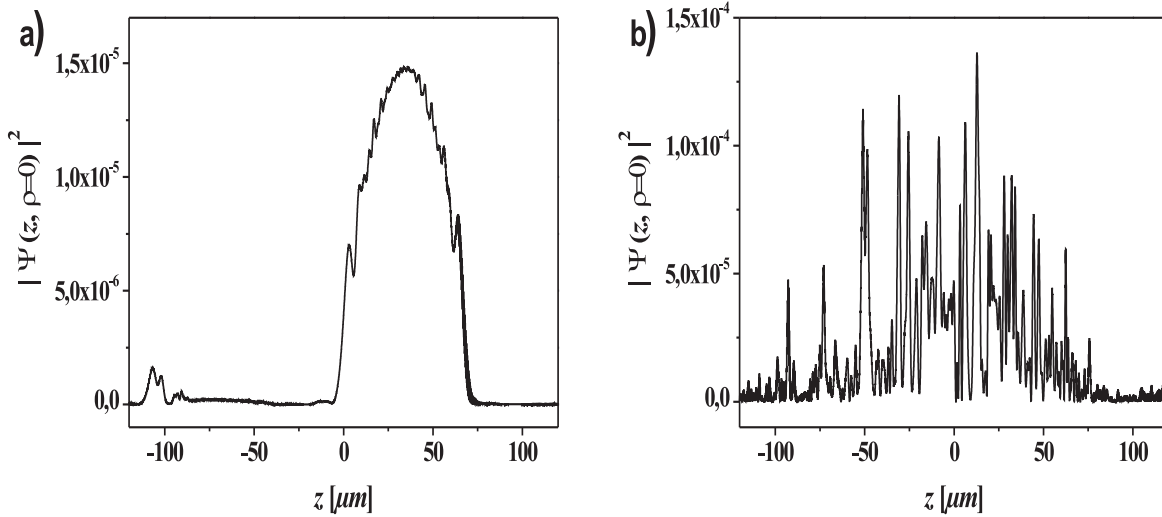


Abbildung 6.16.: Axiale Dichteprofile nach 12 *ms* freier Expansion. Die Atome haben zuvor Bloch-Oszillationen für 10 *ms* durchlaufen. Das in a) gezeigte Profil resultiert aus den Bloch-Oszillationen in einem geordneten Gitterpotenzial. Für b) wurden die Bloch-Oszillationen in einem ungeordneten Potenzial der Tiefe $V_{\Delta} = 5 \cdot 10^{-3} E_r$ berechnet. Die übrigen Parameter sind mit denen der Abbildung 6.13 identisch.

che Möglichkeit zur Messung des Einflusses des ungeordneten Potenzials. Eine systematische Variation der Zeitdauer der Bloch-Oszillationen mit anschließender freier Expansion erlaubt somit die zeitaufgelöste Untersuchung des Dämpfungs- und Dekohärenzprozesses.

Diskussion der Resultate und experimentelle Umsetzung

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, ist eine Messung der Dämpfung der Bloch-Oszillationen mit dem bestehenden ungeordneten Potenzial möglich. Zur Erzeugung der Bloch-Oszillationen ist eine beschleunigende Kraft erforderlich. Da das optische Gitter durch die Rückreflektion des Gitterlaserstrahls an einem Endspiegel entsteht, ist die Ausnutzung der Trägheitskraft in einem beschleunigten optischen Gitter mit dem derzeitigen Aufbau nicht möglich.

Stattdessen kann die Kraft mittels eines magnetischen Potenzialgradienten erzeugt werden. Dazu wurde ein Spulenpaar mit jeweils 65 Windungen von 8 *cm* Durchmesser gewickelt. Jeder der beiden Spulenhalter wurde im Abstand von $\approx 13,8 \text{ cm}$ von der Position der Atome platziert. Diese Spulen können mit einem Strom von 33 *A* durchflossen werden, der in weniger als einer Millisekunde ausgeschaltet werden kann. Die Einschaltzeit beträgt $\approx 3 \text{ ms}$. Der berechnete Magnetfeldverlauf bei einer Anti-Helmholtz-Schaltung der Spulen ist in der Abbildung 6.18 dargestellt. Theoretisch übt der berechnete Potenzialgradient eine Beschleunigung von $1,87 \text{ ms}^{-2}$ auf die Atome aus. Dieser Wert wurde für sämtliche hier gezeigten numerischen Resultate verwendet. Durch eine Vergrößerung des Potenzialgradienten könnte eine noch bessere Ausgangsbasis für eine Messung geschaffen werden. Dies würde zu einer Verkürzung der Periodendauer der Bloch-Oszillationen führen, so dass effektiv mehr Perioden beobachtet werden könnten. Insbesondere eine Optimierung der Spulenposition könnte den

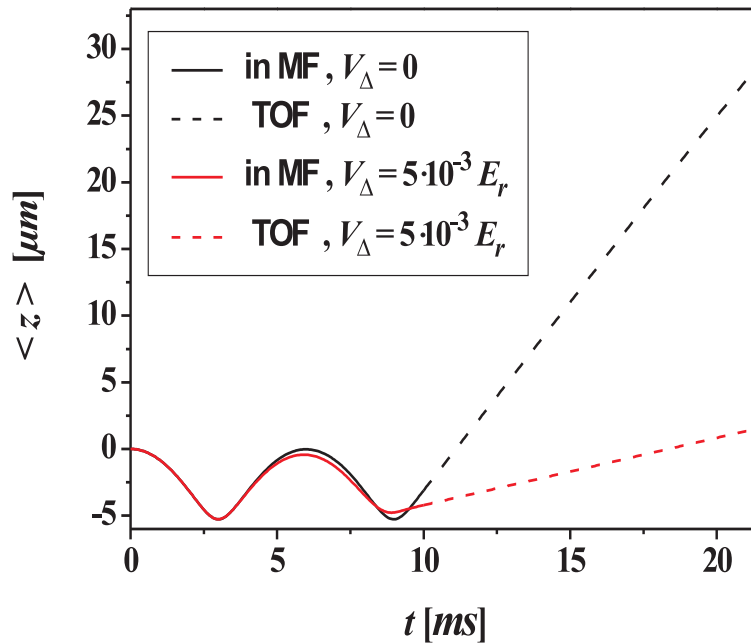


Abbildung 6.17.: Erwartungswert des Ortes in Abhängigkeit von der Zeit. Während der ersten 10 ms führen die Atome Bloch-Oszillationen aus. Anschließend werden alle Potenziale Null gesetzt und es erfolgt eine freie Expansion. Der schwarz gekennzeichnete geordnete Fall unterscheidet sich deutlich vom rot markierten ungeordneten Verlauf. Die Parameter sind identisch mit denen aus Abbildung 6.13.

Potenzialgradienten deutlich erhöhen. Hierbei stellt jedoch der geometrische Zugang eine Limitierung dar.

Eine weitere Optimierung der experimentellen Parameter kann durch eine Verringerung des radialen Magnetfalleneinschlusses erfolgen, da dieses zu geringeren Wechselwirkungseffekten führt. Eine solche Dekompression kann durch eine Erhöhung des Offsetfeldes erfolgen. Dabei wird derzeit das Magnetfallen-Offsetfeld durch ein Helmholtzspulen-Paar abgesenkt. Durch eine geregelte Parallelschaltung könnten die Helmholtzspulen kontrolliert überbrückt werden. Hiermit sind die der Abbildung 6.10 zugrunde liegenden Magnetfallenfrequenzen erreichbar, wodurch eine deutlich längere Lebensdauer der ungedämpften Bloch-Oszillationen resultiert.

Eine wichtige Frage stellt die optimale Wahl der Gittertiefe dar. Grundsätzlich sollte diese so klein wie möglich gewählt werden, da auf diese Weise starke Bandkrümmungen realisiert werden. Diese Krümmungen gehen gemäß Gleichung (6.1) mit großen Oszillationsamplituden einher. Allerdings zeigt die schematische Darstellung der Instabilitätsbereiche nach Abbildung 6.9, dass sich die Grenze zum energetisch instabilen Bereich bei kleinen Gittertiefen in Richtung des Zentrums der Brillouinzone bewegt. In diesem Fall halten sich die Atome lange im instabilen Bereich auf, was eine massive Störung der Bloch-Oszillationen verursachen kann. Die Konsequenzen der energetischen Instabilität können dabei mit der verwendeten numerischen Methode nicht vorhergesagt werden. Die Gittertiefe sollte als ein geeigneter

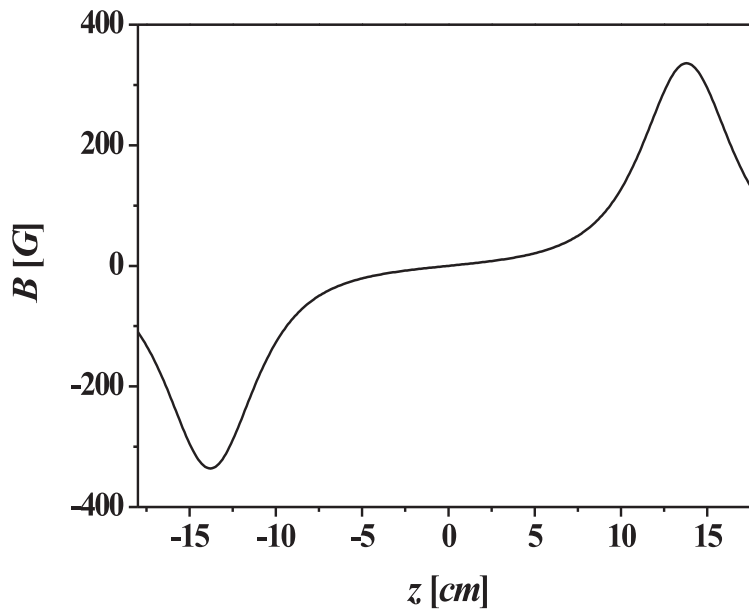


Abbildung 6.18.: Berechneter Verlauf des Magnetfeldes für die realisierte Spulenkonfiguration bei einem Strom von 33 A.

Kompromiss zwischen hoher Stabilität und großer Oszillationsamplitude experimentell optimiert werden.

In den numerischen Simulationen wurden Effekte einer signifikanten Kopplung an eine thermische Wolke nicht berücksichtigt. Sie können grundsätzlich durch hinreichend kalte Ensembles unterdrückt werden. Eine interessante Fragestellung in diesem Zusammenhang ist jedoch das mögliche Aufheizen des Ensembles durch die dynamische Instabilität. Diese verursacht eine turbulente Dynamik des Kondensates, mit der eine deutliche Reduktion des Anteils kondensierter Atome einher gehen kann. In dem Regime extrem starker Turbulenz ist daher die Gültigkeit der Beschreibung des Systems durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung nicht zweifelsfrei gegeben. Dennoch gelten auch in diesem Regime die getroffenen Aussagen über das Auftreten der Dämpfung und deren Beobachtung qualitativ.

7. Ausblick

Ultra-kalte Quantengase eignen sich aufgrund ihrer ausgezeichneten experimentellen Kontrollierbarkeit hervorragend für die Erforschung der grundlegenden Eigenschaften ungeordneter Systeme. Die durchgeführten theoretischen Untersuchungen bilden hierbei ein gutes Fundament für das Verständnis von ungeordneten Quantengasen. Dagegen steht die experimentelle Bearbeitung dieses Forschungsgebietes gerade erst am Anfang ihrer Entwicklung. Die vorliegende Arbeit hat insbesondere durch die erstmalige Realisierung eines ungeordneten quantenentarteten Gittergases wesentliche Beiträge dazu geleistet.

Unsere bisherigen Arbeiten mit ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten können auf verschiedene Weise fortgesetzt werden. Zunächst ist die Untersuchung der Transporteigenschaften ungeordneter Systeme von großem Interesse. Für ein quantenmechanisches Teilchen in einem periodischen Potenzial führt ein Potenzialgradient zum Auftreten von Bloch-Oszillationen [27, 28]. Diese können als eine spezielle Form des Transports in periodischen Strukturen aufgefasst werden. Unter dem Einfluss von Unordnung tritt hierbei eine dekohärenzbedingte Dämpfung der Oszillationsamplitude auf [223]. In Kapitel 6 wurde durch numerische Untersuchungen gezeigt, dass eine solche Dämpfung auch für die Bloch-Oszillationen von Bose-Einstein-Kondensaten in ungeordneten optischen Gittern zu erwarten ist. Das vorhandene System eignet sich hervorragend für eine zeitaufgelöste Messung dieser Dämpfung. Erste Schritte zur experimentellen Umsetzung der numerischen Untersuchungen wurden bereits im Rahmen dieser Arbeit geleistet und werden derzeit fortgesetzt.

Eine wichtige Erweiterung der experimentellen Möglichkeiten zur Erforschung ungeordneter Quantengase stellt die Realisierung eines Unordnungspotenzials mit Korrelationslängen im Submikrometer-Bereich dar. Dazu kann das bestehende optische Gitter (Hauptgitter) mit zwei weiteren optischen Gittern (Übergitter) überlagert werden. Wenn die Wellenlängen der Gitterlaser inkommensurabel sind, kommen aufgrund der endlichen Systemgröße die langreichweitigen Korrelationen des quasi-periodischen Potenzials nicht zum tragen. In diesem Fall erzeugt ein solches Übergitter ähnliche Effekte wie ein völlig ungeordnetes Potenzial [63]. Die Längenskala der ungeordneten Schwankungen des Gesamtpotenzials ist dabei von der Größenordnung der Gitterkonstante des Hauptgitters. Die Justage eines solchen Drei-Farben-Gitters kann sehr einfach erfolgen, wenn das Laserlicht zur Erzeugung des Hauptgitters und der Übergitter durch dieselbe optische Faser zugeführt wird.

In Kapitel 5 wurde untersucht, ob der Kondensatgrundzustand in einem solchen kurzreichweitig ungeordneten Gitterpotenzial eine Anderson-artige Lokalisierung aufweist. Diese Fragestellung ist für das Verständnis von ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten von fundamentaler Bedeutung. Die Analyse zeigt, dass eine solche Lokalisierung nur für sehr schwache nichtlineare Wechselwirkung auftritt. Mit der bestehenden Apparatur könnte dieses Regime schwacher

Wechselwirkung durch eine Relaxation der Magnetfallenfrequenzen erreicht werden. In Kapitel 5 konnte gezeigt werden, dass bei einer Teilchenzahl von $N = 10^4$, einer axialen Fallenfrequenz von $\omega_z = 2\pi \times 4 \text{ Hz}$ und einer radialen Fallenfrequenz $\omega_r = 2\pi \times 40 \text{ Hz}$ der Kondensatgrundzustand Anderson-artig lokalisiert ist. Diese Parameter sind experimentell erreichbar. Eine weitere Möglichkeit zur Reduktion der Wechselwirkung besteht in der Ausnutzung einer Feshbach-Resonanz. Diese kann zur Unterdrückung der interatomaren Wechselwirkung genutzt werden. Auf diese Weise ist das Anderson-Modell [52] für nicht wechselwirkende Teilchen realisierbar. Die niedrigste bekannte Feshbach-Resonanz wird für ^{87}Rb bei einem Magnetfeld von $\approx 1007 \text{ G}$ erreicht [224]. Daher stellt ihre Ausnutzung eine große technische Herausforderung dar.

Eine wichtige Fragestellung ist, wie eine Anderson-artige Lokalisierung der Kondensatwellenfunktion experimentell nachgewiesen werden kann. Den generischen Nachweis einer unordnungsinduzierten Lokalisierung stellt die Unterdrückung des Transports in einer Wellenleiterstruktur dar. In dieser sollte ein expandierendes Kondensat in Abhängigkeit von der Unordnungstiefe ballistischen, diffusiven, schwach lokalisierten sowie stark lokalisierten Transport zeigen. Das Regime der starken (Anderson-) Lokalisierung ist dadurch ausgezeichnet, dass auch Kondensate, deren chemisches Potenzial größer als die Fluktuationen des Unordnungspotenzials ist, eine völlige Unterdrückung des Transports aufweisen.

Neben der Untersuchung von Anderson-artigen Lokalisierungseffekten kann der Einfluss der Unordnung auf die kritische Temperatur, die Schallgeschwindigkeit sowie die Anteile der kondensierten und superflüssigen Atome erforscht werden. Die Abhängigkeit dieser Größen von der Tiefe des Unordnungspotenzials ist theoretisch bereits untersucht worden [77, 79, 81–83]. Unter experimentellen Gesichtspunkten ist die Bestimmung der kritischen Temperatur und des Anteils der kondensierten Atome am einfachsten zugänglich. Für eine Messung der Schallgeschwindigkeit können Phononen im ungeordneten Kondensat erzeugt werden, deren Propagation beobachtet werden kann. Diese Methode ist für geordnete Bose-Einstein-Kondensate bereits gezeigt worden [225]. Die Messung des Anteils superflüssiger Atome erscheint als die größte Herausforderung. Hierfür könnte eine Bestimmung des dynamischen Strukturfaktors erwogen werden [226]. Dieser hängt unmittelbar vom Anregungsspektrum des Vielteilchensystems ab und sollte daher Informationen über den superflüssigen Charakter des Gases liefern.

Von besonderem Interesse ist die Untersuchung stark korrelierter ungeordneter Systeme. So wurde jüngst die erfolgreiche Realisierung der Bose-Glas-Phase in einem dreidimensionalen ungeordneten Gitter berichtet [87]. Zur Erzeugung des Bose-Glases (BG) wurde ein dreidimensionales Hauptgitter mit einem eindimensionalen Übergitter inkommensurabler Wellenlänge überlagert. Hierbei konnte gezeigt werden, dass in Abhängigkeit von der Tiefe des Übergitters das diskrete Anregungsspektrum des Mott-Isolators in das kontinuierliche Anregungsspektrum des BG übergeht.

Ein solches stark korreliertes System eignet sich für eine Vielzahl von Untersuchungen. So könnte experimentell die seit langem kontrovers diskutierte Frage geklärt werden, ob in Gegenwart von Unordnung ein direkter Übergang von der superflüssigen Phase in die Mott-Phase existiert, oder ob ein solcher Übergang immer eine intermediäre BG-Phase involviert [36]. Eine andere interessante Messung stellt die Bestimmung der Kompressibilität des Gases in der MI-Phase oder in der BG-Phase dar.

Mit dem vorhandenen eindimensionalen Gitter ist die Erzeugung eines stark korrelierten Gittergases nur schwer zu erreichen. Aufgrund der großen Teilchenzahl pro Gitterplatz sind hierfür extrem große Gittertiefen erforderlich [36,37]. Diese können mit dem verwendeten Lasersystem zwar prinzipiell bereitgestellt werden, jedoch ist hiermit ein dramatisches Absinken der Tunnelraten verbunden. Eine adiabatische Überführung des Vielteilchensystems in den MI oder in das BG erscheint damit für realistische Lebenszeiten des Ensembles unmöglich. Für die Erzeugung eines stark korrelierten Gittergases ist daher der Einsatz zusätzlicher Gitterstrahlen erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit konnte der Aufbau der MOT-Strahlengänge so modifiziert werden, dass der optische Zugang für den Einbau eines dreidimensionalen optischen Gitters zur Verfügung steht.

Die bisherigen Experimente mit ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten wurden mit eindimensionalen Unordnungspotenzialen durchgeführt. Eine interessante Perspektive bietet die Erweiterung der Untersuchungen auf mehrdimensionale Unordnungsstrukturen. Ein zweidimensionales Unordnungspotenzial kann z. B. durch den Einsatz von Laserspecklestrahlung erzeugt werden [84–86]. Für die Diffusion nicht wechselwirkender Materiewellen in einem solchen Specklepotenzial wurden jüngst die lokalisierungsbedingten Korrekturen berechnet [227].

Für eine experimentelle Messung dieser Korrekturen müssen einige kritische Punkte bedacht werden. Einerseits ist es mit den derzeit am Experiment verfügbaren Techniken nicht möglich, das Kondensat in nur zwei Dimensionen expandieren zu lassen. Aus diesem Grunde sollte zunächst die dreidimensionale Expansion in einer zweidimensionalen Unordnungsstruktur theoretisch untersucht werden. Weiterhin kann die atomare Diffusion unter dem Einfluss der Schwerkraft deutlich beeinflusst werden, wenn diese zu einem Anwachsen der Materiewellen-Impulse führt. In diesem Fall kann zum einen die freie Weglänge der Materiewellen sehr groß werden. Zum anderen weist der maximale Streuwinkel der zweidimensionalen Streuprozesse eine explizite Impulsabhängigkeit auf. Diese favorisiert für große Impulse eine Vorwärtsstreuung [227]. Beide Sachverhalte können dazu führen, dass es unter dem Einfluss der Schwerkraft zu einem Übergang von diffusiver zu ballistischer Expansion kommt und so die Beobachtung von Lokalisierungseffekten verhindert wird. Ein Anwachsen der Impulse könnte experimentell durch eine Levitation der Atome im Schwerfeld oder eine Beschränkung der Messung auf die Anfangszeit der Expansion vermieden werden. Es bleibt jedoch zu berücksichtigen, dass Wechselwirkungseffekte in der theoretischen Untersuchung bisher nicht bedacht wurden.

Interessante Untersuchungen an ungeordneten quantenentarteten Gasen können darüber hinaus auch mit Systemen durchgeführt werden, die nicht mit unserer experimentellen Apparatur realisierbar sind. Beispielsweise bieten quantenentartete Fermionen die Möglichkeit zur kontrollierten Untersuchung des Einflusses von Unordnung auf die BCS-Theorie. Quantenentartete Mischungen eignen sich zur effizienten Erzeugung ungeordneter Systeme. So können beispielsweise fermionische Atome zufällig positionierte Streuzentren in einem bosonischen Gas bilden. In diesem System wurde vor kurzem der Einfluss der Fermionen auf den Übergang zum bosonischen MI untersucht [201].

Die experimentelle Untersuchung ungeordneter Quantengase stellt einen äußerst vielverspre-

chendes Forschungsgebiet dar, dass gerade am Anfang einer spannenden Entwicklung steht. In den nächsten Jahren sind interessante Untersuchungen zu erwarten, die das physikalische Verständnis ungeordneter Systeme deutlich bereichern können. Die vorliegende Arbeit gehört zu den ersten Untersuchungen ungeordneter quantenentarteter Systeme und hat als solche wichtige Beiträge zur Entwicklung dieses Feldes geleistet.

A. Numerische Technik

In diesem Anhang werden die verwendeten Methoden zu den numerischen Berechnungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung dargestellt. Zunächst erfolgt eine Erläuterung des grundlegenden Prinzips des Algorithmus. Anschließend wird diskutiert, wie mit seiner Hilfe die Grundzustände des Kondensates in einem externen Potenzial berechnet werden können.

Der Crank-Nicholson-Algorithmus

Die in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Lösungen der Gross-Pitaevskii-Gleichung basieren auf dem Crank-Nicholson-Algorithmus [228, 229]. Dieser bietet den Vorteil, dass er sehr gut an Probleme, die Gegenstand von Symmetrien sind, angepasst werden kann.

Grundlagen

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Psi(\mathbf{r}, t)$$

hat die Form einer nichtlinearen Schrödinger-Gleichung mit dem unitären Gross-Pitaevskii-Hamiltonian

$$H_{GP}(t) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext}(\mathbf{r}) + g|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (\text{A.1})$$

Die Zeitentwicklung der Kondensatwellenfunktion ist durch

$$\Psi(t + \Delta t) = \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\Delta t} dt' H_{GP}(t') \right) \Psi(t). \quad (\text{A.2})$$

gegeben. Wird in der numerischen Rechnung ein hinreichend kleines Zeitinkrement Δt gewählt, kann in guter Näherung die Zeitabhängigkeit des Hamiltonians, die durch den nichtlinearen Term verursacht wird, vernachlässigt werden:

$$\Psi(t + \Delta t) = e^{-\frac{i}{\hbar} \Delta t H_{GP}} \Psi(t) \quad (\text{A.3})$$

$$\approx \left(1 - \frac{i}{\hbar} \Delta t H_{GP} \right) \Psi(t). \quad (\text{A.4})$$

Diese Form der expliziten zeitlichen Entwicklung hat für numerische Methoden den Nachteil, dass sie instabil ist [228]. Dagegen ist die implizite Form

$$\Psi(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t H_{GP}} \Psi(t + \Delta t) \quad (\text{A.5})$$

$$\approx \left(1 + \frac{i}{\hbar} \Delta t H_{GP} \right) \Psi(t + \Delta t) \quad (\text{A.6})$$

stabil [228]. Das Abbrechen der Reihen in (A.4) und (A.6) führt dazu, dass beide Formen der zeitlichen Entwicklung mangels Unitarität nicht die Norm der Kondensatwellenfunktion erhalten. Dagegen ist die Cayley-Darstellung, welche einen Mittelwert zwischen (A.3) und (A.5) darstellt, sowohl stabil als auch unitär [228, 229]:

$$\Psi(t + \Delta t) = \left(e^{\frac{i}{2\hbar} \Delta t H_{GP}} \right)^{-1} e^{-\frac{i}{2\hbar} \Delta t H_{GP}} \quad (\text{A.7})$$

$$\approx \left(1 + \frac{i}{2\hbar} \Delta t H_{GP} \right)^{-1} \left(1 - \frac{i}{2\hbar} \Delta t H_{GP} \right) \Psi(t). \quad (\text{A.8})$$

Für die in dieser Arbeit behandelten Probleme kann eine Rotationssymmetrie der Lösung angenommen werden. Um den Algorithmus optimal daran anzupassen, werden Zylinderkoordinaten verwendet. Hierbei verschwindet der Winkelanteil des Laplace-Operators, so dass das Problem effektiv auf zwei Dimensionen beschränkt wird:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 + \partial_z^2. \quad (\text{A.9})$$

Mit den Abkürzungen

$$T_r := -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r} \partial_r + \partial_r^2 \right] \Delta t \quad (\text{A.10})$$

$$T_z := -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_z^2 \Delta t \quad (\text{A.11})$$

$$V' := V_{ext} \Delta t + g |\Psi|^2 \Delta t \quad (\text{A.12})$$

schreibt sich der Hamiltonian als

$$H_{GP}(t) \Delta t = T_r + T_z + V'(t). \quad (\text{A.13})$$

Allgemein gilt für Operatoren A und B , die beide von der Ordnung $\mathcal{O}(\delta)$ sind:

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_n \frac{1}{n!} (A+B)^n \\ &= 1 + A + B + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} BA + \mathcal{O}(\delta^3) \\ &= \left(1 + \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{4} + \mathcal{O}(\delta^3) \right) \left(1 + B + \frac{1}{2} B^2 + \mathcal{O}(\delta^3) \right) \left(1 + \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \frac{A^2}{4} + \mathcal{O}(\delta^3) \right) \\ &= e^{\frac{1}{2}A} e^B e^{\frac{1}{2}A} + \mathcal{O}(\delta^3). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Die Operatoren T_r , T_z und V' sind alle $\mathcal{O}(\Delta t)$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \Psi(t + \Delta t) &= e^{-\frac{i}{\hbar} (T_r + T_z + V')} \Psi(t) \\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar} (T_r + T_z)} e^{-\frac{i}{\hbar} V'} e^{-\frac{i}{2\hbar} (T_r + T_z)} \Psi(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &= e^{-\frac{i}{2\hbar} T_r} e^{-\frac{i}{2\hbar} T_z} e^{-\frac{i}{\hbar} V'} e^{-\frac{i}{2\hbar} T_r} e^{-\frac{i}{2\hbar} T_z} \Psi(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Dabei wurde im letzten Schritt $[T_r, T_z] = 0$ ausgenutzt. Der kinetische Anteil des Hamiltonians führt dazu, dass die Wellenfunktion zur Zeit t abwechselnd in axialer und radialer

Richtung propagiert wird. Dieses Verfahren wird Alternating-Direction-Implicit (ADI) genannt [228, 229]. Jeder einzelne Propagationsschritt in (A.15) wird entsprechend der Cayley-Approximation (A.8) ausgeführt.

Numerisch wird der Algorithmus implementiert, indem die Wellenfunktion in Raum und Zeit mit Schrittweiten Δr , Δz und Δt diskretisiert wird:

$$r_j := j \Delta r, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.16})$$

$$z_l := l \Delta z, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.17})$$

$$t_n := n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.18})$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Psi^{t=t_n}(r = r_j, z = z_l) =: \Psi^n(j, l). \quad (\text{A.19})$$

Die Operatoren schreiben sich damit wie folgt:

$$T_r \Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r_j} \frac{\Psi^n(j+1, l) - \Psi^n(j-1, l)}{2\Delta r} + \frac{\Psi^n(j+1, l) - 2\Psi^n(j, l) + \Psi^n(j-1, l)}{(\Delta r)^2} \right] \Delta t \quad (\text{A.20})$$

$$T_z \Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Psi^n(j, l+1) - 2\Psi^n(j, l) + \Psi^n(j, l-1)}{(\Delta z)^2} \Delta t \quad (\text{A.21})$$

$$V' \Psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow V_{ext}(j, l) \Psi^n(j, l) + g |\Psi^n(j, l)|^2 \Psi^n(j, l) \Delta t. \quad (\text{A.22})$$

Am Ursprung erfordert die Behandlung des ersten Terms der radialen Ableitung besondere Vorsicht. Um das Auftreten von Singularitäten zu verhindern, kann die Approximation der Ableitungen durch Differenzenbildung dynamisch angepasst werden. Hierzu kann eine gewichtete Mischung von Vorwärts- und Zentralfdifferenzenbildung verwendet werden [230].

Eine alternative Lösung besteht in der Ausnutzung der Tatsache, dass für die meisten rotationssymmetrischen Probleme die erste radiale Ableitung im Ursprung verschwindet. Unter der Verwendung der l'Hospitalschen Regel:

$$\frac{\partial_r \Psi(\mathbf{r}, t)}{r} \rightarrow \partial_r^2 \Psi(\mathbf{r}, t) \quad (\text{A.23})$$

kann somit das Auftreten von Singularitäten verhindert werden.

Das Ausführen der Propagationen in (A.15) reduziert sich mit (A.20-A.22) in der Cayley-Approximation auf das Lösen von tridiagonalen Gleichungssystemen. Es ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Theta(t') := e^{-\frac{i}{\hbar} T_j} \Psi(t) &= \left(e^{\frac{i}{4\hbar} T_j} \right)^{-1} e^{-\frac{i}{4\hbar} T_j} \Psi(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ &\approx \left(1 + \frac{i}{4\hbar} T_j \right)^{-1} \left(1 - \frac{i}{4\hbar} T_j \right) \Psi(t) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{i}{4\hbar} T_j \right) \Theta(t') &= \left(1 - \frac{i}{4\hbar} T_j \right) \Psi(t). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Einsetzen der diskreten Repräsentation (A.16-22) liefert ein tridiagonales Gleichungssystem, das bei gegebener Wellenfunktion $\Psi^n(j, l)$ zum Zeitpunkt $t = t_n$ mit Lösungsvektor $\Theta^{n'}(j, l)$ durch Standardroutinen gelöst werden kann. Auf die gleiche Art und Weise werden auch die anderen Propagationen ausgeführt.

Berechnung des Grundzustandes des Kondensates

Der Grundzustand eines Kondensates in einem Potenzial $V_{ext}(\mathbf{r})$ kann mit Hilfe des Crank-Nicholson-Algorithmus berechnet werden [229]. Dazu wird die Propagation in imaginärer Zeit ausgeführt:

$$t \rightarrow -i\tau. \quad (\text{A.25})$$

Die zeitliche Entwicklung ist durch

$$\Psi(\mathbf{r}, \tau + \Delta\tau) = e^{-\frac{\Delta\tau}{\hbar} H_{GP}} \Psi(\mathbf{r}, \tau) \quad (\text{A.26})$$

bestimmt. Wird $\Psi(\mathbf{r}, \tau)$ in der Eigenbasis von H_{GP} entwickelt

$$\Psi(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(\mathbf{r}), \quad (\text{A.27})$$

und diese Entwicklung in (A.25) eingesetzt, so folgt:

$$\Psi(\mathbf{r}, \tau + \Delta\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{-\frac{\Delta\tau}{\hbar} \epsilon_k} \phi_k(\mathbf{r}). \quad (\text{A.28})$$

Hierbei sind die Entwicklungskoeffizienten c_k durch $c_k = \phi_k \cdot \Psi(\tau)$ gegeben und die ϵ_k sind Eigenenergien des Hamiltonians $H_{GP}\phi_k = \epsilon_k\phi_k$. Wird ein Zustand in imaginärer Zeit propagiert, so ist mangels Unitarität die Norm der Wellenfunktion nicht erhalten; sie fällt exponentiell ab. Dabei wird in der Entwicklung (A.27) der Koeffizient zur Eigenfunktion mit niedrigster Energie am wenigsten gedämpft. Dieses ist der gesuchte Grundzustand.

Zur Bestimmung des Grundzustandes wird dabei zunächst eine Anfangsfunktion gewählt und diese in imaginärer Zeit propagiert. Da die Wellenfunktion selbst in den Hamiltonian eingeht, muss sie nach jedem Zeitschritt normiert werden. Während die Propagation ausgeführt wird, konvergiert die Wellenfunktion gegen den gesuchten Grundzustand, da sein Gewicht c_0 in der Entwicklung (A.26) immer größer wird. Die Konvergenz kann durch eine Berechnung des chemischen Potentials geprüft werden:

$$\mu(\tau) = \Psi(\tau) \cdot H_{GP} \Psi(\tau). \quad (\text{A.29})$$

Wenn sich das chemische Potenzial im Rahmen der gewünschten Genauigkeit nicht mehr ändert, kann die Propagation abgebrochen werden. Eine gute Wahl der Ausgangswellenfunktion verkürzt die Zeit zum Erreichen der Konvergenz.

B. Das axiale Detektionssystem

Zur kontrollierten Justage des optischen Gitters wurde ein Detektionsstrahlengang entlang der axialen Richtung des Kondensates aufgebaut. Dessen Strahlverlauf ist schematisch in der Abbildung 3.16 gezeigt. In diesem Anhang werden die Vergrößerung und Auflösung der neuen Detektionsoptik beschrieben.

Vergrößerung

Das Vergrößerungsverhalten der Detektionsoptik ist durch die Brennweiten der Achromaten bestimmt, die zur Abbildung der Atome auf die CCD-Kamera verwendet werden. Diese betragen $f_1 = 200 \text{ mm}$ bzw. $f_2 = 300 \text{ mm}$. Zur experimentellen Bestimmung der Vergrößerung werden Atomwolken aus der Magnetfalle fallengelassen und jeweils nach verschiedenen Flugzeiten detektiert. Die Position des Schattenwurfs der Atome auf der CCD-Kamera in Abhängigkeit von der Fallzeit kann in direkte Relation zur beschleunigten Fallbewegung $s = \frac{1}{2}gt^2$ gesetzt werden. Dieses liefert die gesuchte Vergrößerung.

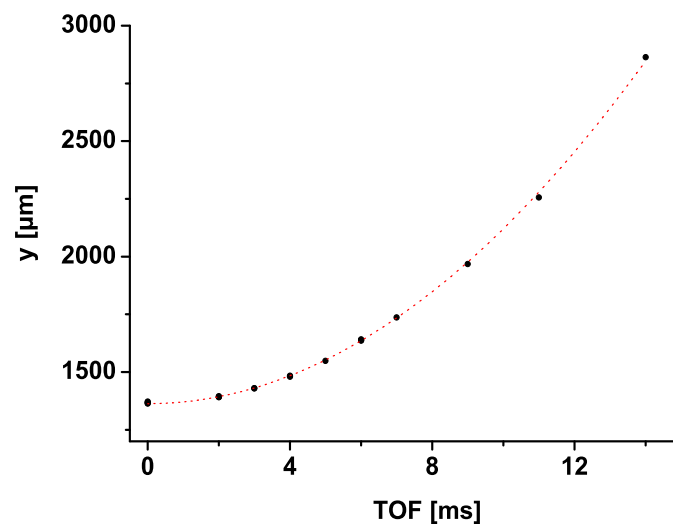


Abbildung B.1.: Vertikale Position des Schattenwurfs der Atome nach verschiedenen Fallzeiten.

Abbildung B.1 zeigt die mit der Kamera detektierte Position der Atome in Abhängigkeit von der Fallzeit. Die Punkte sind mit einer Parabel gefittet, die der Gleichung $y(t) = M \frac{1}{2}gt^2$

genügt, wobei M als Fitparameter unmittelbar die Vergrößerung der Detektionsoptik liefert. Aus dem Fit wurde ein Vergrößerungsfaktor von $M = 1,54$ für das aufgebaute Detektionssystem ermittelt.

Auflösung

Die axiale Detektionsoptik wurde zur Justage des optischen Gitters aufgebaut und wird ausschließlich zur Bestimmung der Position der Atome in der Magnetfalle eingesetzt. Aus diesem Grunde ist eine hohe Auflösung oder Tiefenschärfe, die für eine Beobachtung von Strukturen in der atomaren Dichteverteilung von großer Wichtigkeit sind, für diesen Detektionsweg von untergeordneter Bedeutung. Dennoch soll die Auflösung an dieser Stelle abgeschätzt werden.

Für eine beugungsbegrenzte Abbildung berechnet sich die Auflösung mittels [184]

$$\Delta r = 0,51 \frac{\lambda}{NA}, \quad (\text{B.1})$$

wobei NA die numerische Apertur des ersten Achromaten angibt. Dieser hat einen freien Radius von 26 mm und einen Abstand von den Atomen von 190 mm . Damit folgt eine numerische Apertur von $NA = 0,136$. Somit ergibt sich eine beugungsbegrenzte Auflösung von $\Delta r = 3,1 \text{ }\mu\text{m}$. Diese wird jedoch für einfache Linsensystem in der Regel nicht erreicht. Für die Abbildungsoptik des transversalen Detektionsweges wurde durch eine experimentelle Bestimmung der Auflösung ein Korrekturfaktor zum beugungsbegrenzten Fall von $3,2$ ermittelt [184]. Die radiale Detektionsoptik wird dabei durch ein ähnliches Linsensystem gebildet wie die axiale Detektionsoptik. Die Verwendung des gemessenen Korrekturfaktors liefert als grobe Abschätzung für die Auflösung der axialen Detektionsoptik $\Delta r_{ax} = 9,9 \text{ }\mu\text{m}$.

Literaturverzeichnis

- [1] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski und M. Lewenstein: *Routes Towards Anderson-like Localization of Bose-Einstein Condensates in Disordered Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **95**, 170411 (2005).
- [2] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, R. Tiemeyer, K. Sacha, J. Zakrzewski, M. Lewenstein, W. Ertmer und J. J. Arlt: *Analysis of Localization Phenomena in Weakly Interacting Disordered Lattice Gases*. In Vorbereitung.
- [3] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J.J. Arlt, A. Kantian, L. Sanchez-Palencia, L. Santos, A. Sanpera, K. Sacha, P. Zoller, M. Lewenstein und J. Zakrzewski: *Cold Atomic Gases in Optical Lattices with Disorder*. In: L. Sirko, S. Bauch (Herausgeber): *Acta Physica Polonica A, Proceedings of the 2nd Workshop on Quantum Chaos and Localisation Phenomena, Warsaw*, Band 109, Seite 89 (2006).
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell: *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*. Science **269**, 198 (1995).
- [5] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn und W. Ketterle: *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*. Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [6] C. C. Bradley, C. A. Sacket und R. G. Hulet: *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*. Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [7] B. DeMarco und D. S. Jin: *Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas*. Science **285**, 1703 (1999).
- [8] A. G. Truscott, K. E. Strecker, W. I. McAlexander, G. P. Partridge und R. G. Hulet: *Observation of Fermi pressure in a gas of trapped atoms*. Science **291**, 2570 (2001).
- [9] F. Schreck, L. Khaykovich, K. L. Corwin, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles und C. Salomon: *Quasipure Bose-Einstein Condensate Immersed in a Fermi Sea*. Phys. Rev. Lett. **87**, 080403 (2001).
- [10] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker-Denschlag und R. Grimm: *Bose-Einstein condensation of molecules*. Science **302**, 2101 (2003).

- [11] M. Greiner, C. A. Regal und D. S. Jin: *Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas*. Nature (London) **426**, 537 (2003).
- [12] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, S. Gupta, Z. Hadzibabic und W. Ketterle: *Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules*. Phys. Rev. Lett. **91**, 250401 (2003).
- [13] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston und W. D. Phillips: *Coherent Splitting of Bose-Einstein Condensed Atoms with Optically Induced Bragg Diffraction*. Phys. Rev. Lett. **82**, 871 (1999).
- [14] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard und W. Ketterle: *Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **82**, 4569 (1999).
- [15] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard und W. Ketterle: *Erratum: Bragg Spectroscopy of a Bose-Einstein Condensate [Phys. Rev. Lett. 82, 4569 (1999)]*. Phys. Rev. Lett. **84**, 2283 (2000).
- [16] J. M. Vogels, K. Xu, C. Raman, J. R. Abo-Shaeer und W. Ketterle: *Experimental Observation of the Bogoliubov Transformation for a Bose-Einstein Condensed Gas*. Phys. Rev. Lett. **88**, 060402 (2002).
- [17] S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer und A. Aspect: *Momentum Spectroscopy of 1D Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
- [18] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, M. Trippenbach, Y. B. Band, M. Edwards, M. Doery, P. S. Julienne, K. Helmerson, S. L. Rolston und W. D. Phillips: *Measurement of the Coherence of a Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **83**, 3112 (1999).
- [19] J. E. Simsarian, J. Denschlag, M. Edwards, C. W. Clark, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, S. L. Rolston und W. D. Phillips: *Imaging the Phase of an Evolving Bose-Einstein Condensate Wave Function*. Phys. Rev. Lett. **85**, 2040 (2000).
- [20] S. Gupta, K. Dieckmann, Z. Hadzibabic und D. E. Pritchard: *Contrast Interferometry using Bose-Einstein Condensates to Measure \hbar/m and α* . Phys. Rev. Lett. **89**, 140401 (2002).
- [21] D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer und J. J. Arlt: *Measurement of the Spatial Correlation Function of Phase Fluctuating Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **91**, 010406 (2003).
- [22] K. Bongs, S. Burger, S. Dettmer, D. Hellweg, J. Arlt, W. Ertmer und K. Sengstock: *Waveguide for Bose-Einstein condensates*. Phys. Rev. A **63**, 031602(R) (2001).
- [23] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin und C. Salomon: *Formation of a Matter-Wave Bright Soliton*. Science **296**, 1290 (2002).

- [24] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott und R. G. Hulet: *Formation and propagation of matter-wave soliton trains*. Nature (London) **417**, 150 (2002).
- [25] W. C. Stwalley: *Stability of Spin-Aligned Hydrogen at Low Temperatures and High Magnetic Fields: New Field-Dependent Scattering Resonances and Predissociations*. Phys. Rev. Lett. **37**, 1628 (1976).
- [26] O. Morsch und M. Oberthaler: *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*. Rev. Mod. Phys. **78**, 179 (2006).
- [27] F. Bloch: *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*. Z. Phys. **52**, 555 (1928).
- [28] C. Zener: *A Theory of the Electrical Breakdown of Solid Dielectrics*. Proc. R. Soc. A **145**, 523 (1934).
- [29] M. Christiani, O. Morsch, J. H. Müller, D. Ciampini und E. Arimondo: *Experimental properties of Bose-Einstein condensates in one-dimensional optical lattices: Bloch oscillations, Landau-Zener tunneling, and mean-field effects*. Phys. Rev. A **65**, 063612 (2002).
- [30] M. Jona-Lasinio, O. Morsch, M. Christiani, N. Malossi, J. H. Müller, E. Courtade, M. Anderlini und E. Arimondo: *Asymmetric Landau-Zener tunneling in a periodic potential*. Phys. Rev. Lett. **91**, 230406 (2003).
- [31] Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Cheneau, B. Battelier und J. B. Dalibard: *Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Crossover in a Trapped Atomic Gas*. Preprint : cond-mat / **0605291**.
- [32] M. Greiner: *Ultracold quantum gases in three-dimensional optical lattice potentials*. Doktorarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität München (2003).
- [33] W. Zwerger: *Mott-Hubbard transition of cold gases in an optical lattice*. J. Opt. B **5**, 9 (2003).
- [34] L. Pitaevskii und S. Stringari: *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press (2003).
- [35] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Quantum Phase Transition from a Superfluid to a Mott Insulator in a gas of ultracold atoms*. Nature (London) **451**, 39 (2002).
- [36] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein und D. S. Fisher: *Boson localization and the superfluid-insulator transition*. Phys. Rev. B **40**, 546 (1989).
- [37] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner und P. Zoller: *Cold Bosonic Atoms in Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **81**, 3108 (1998).

- [38] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Coherent Transport of Neutral Atoms in Spin-Dependent Optical Lattice Potentials*. Phys. Rev. Lett. **91**, 010407 (2003).
- [39] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms*. Nature (London) **425**, 937 (2003).
- [40] A. Widera, O. Mandel, M. Greiner, S. Kreim, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Entanglement Interferometry for Precision Measurement of Atomic Scattering Properties*. Phys. Rev. Lett. **92**, 160406 (2004).
- [41] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*. Nature (London) **429**, 277 (2004).
- [42] M. A. Cazalilla: *Differences between the Tonks regimes in the continuum and on the lattice*. Phys. Rev. A **70**, 041604 (2004).
- [43] T. Kinoshita, T. Wenger und D. S. Weiss: *Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas*. Science **305**, 1125 (2004).
- [44] M. Olshanii: *Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons*. Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998).
- [45] L. Tonks: *The Complete Equation of State of One, Two and Three-Dimensional Gases of Hard Elastic Spheres*. Phys. Rev. **50**, 955 (1936).
- [46] M. Girardeau: *Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension*. J. Math. Phys. **1**, 516 (1960).
- [47] A. Lenard: *One-dimensional impenetrable bosons in thermal equilibrium*. J. Math. Phys. **7**, 1268 (1966).
- [48] C. Kittel und C. Y. Fong: *Quantentheorie der Festkörper*. R. Oldenbourg Verlag München Wien (1988).
- [49] G. Czycholl: *Theoretische Festkörperphysik*. Vieweg & Sohn (2000).
- [50] P. A. Lee und T. V. Ramakrishnan: *Disordered electronic Systems*. Rev. Mod. Phys. **57**, 287 (1985).
- [51] B. Kramer und A. MacKinnon: *Localization: theory and experiment*. Rep. Prog. Phys. **56**, 1469 (1993).
- [52] P. W. Anderson: *Absence of Diffusion in Certain Random Lattices*. Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [53] N. F. Mott: *Electrons in disordered structures*. Adv. Phys. **16**, 49 (1967).

- [54] N. F. Mott: *Conduction in glasses containing transition metal ions*. J. Non-Cryst. Solids **1**, 1 (1968).
- [55] D. J. Thouless: *Electrons in Disordered Systems and the Theory of Localization*. Phys. Rep. **13**, 93 (1974).
- [56] N. F. Mott und W. D. Twose: *The theory of impurity conduction*. Adv. Phys. **10**, 107 (1961).
- [57] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello und T. V. Ramakrishnan: *Scaling Theory of Localization: Absence of Quantum Diffusion in Two Dimensions*. Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [58] L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk und G. Grynberg: *Quasiperiodic Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **79**, 3363 (1997).
- [59] P. Horak, J.-Y. Courtois und G. Grynberg: *Atom cooling and trapping by disorder*. Phys. Rev. A **58**, 3953 (1998).
- [60] L. Guidoni und P. Verkerk: *Direct observation of atomic localization in optical superlattices*. Phys. Rev. A **57**, R1501 (1999).
- [61] R. Roth und K. Burnett: *Ultracold bosonic atoms in two-colour superlattices*. J. Opt. B **5**, 50 (2003).
- [62] R. Roth und K. Burnett: *Phase diagram of bosonic atoms in two-color superlattices*. Phys. Rev. A **68**, 023604 (2003).
- [63] B. Damski, J. Zakrzewski, L. Santos, P. Zoller und M. Lewenstein: *Atomic Bose and Anderson Glasses in Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **91**, 080403 (2003).
- [64] L. Sanchez-Palencia und L. Santos: *Bose-Einstein condensates in optical quasicrystal lattices*. Phys. Rev. A **72**, 053607 (2005).
- [65] U. Gavish und Y. Castin: *Matterwave localization in disordered cold atom lattices*. Phys. Rev. Lett. **95**, 020401 (2005).
- [66] H. Gimpelrein, S. Wessel, J. Schmiedmayer und L. Santos: *Ultracold Atoms in Optical Lattices with Random On-Site Interactions*. Phys. Rev. Lett. **95**, 170401 (2005).
- [67] D. Forster: *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions*. The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc. (1975).
- [68] M. A. Paalanen, A. F. Hebard und R. R. Ruel: *Low-temperature insulating phases of uniformly disordered two-dimensional superconductors*. Phys. Rev. Lett. **69**, 1640 (1992).
- [69] S. Maekawa und H. Fukuyama: *Localization Effects in Two-Dimensional Superconductors*. J. Phys. Soc. Jpn. **51**, 1380 (1982).

- [70] Y. Liu, K. A. McGreer, B. Nease, D. B. Haviland, G. Martinez, J. W. Halley und A. M. Goldman: *Scaling of the insulator-to-superconductor transition in ultrathin amorphous Bi films*. Phys. Rev. Lett. **67**, 2068 (1998).
- [71] N. Markovic, A. M. Mack, G. Martinez-Arizala, C. Christiansen und A. M. Goldman: *Evidence of Vortices on the Insulating Side of the Superconductor-Insulator Transition*. Phys. Rev. Lett. **81**, 701 (1998).
- [72] K. A. Parendo, K. H. Sarwa, B. Tan, A. Bhattacharya, M. Eblen-Zayas, N. E. Staley und A. M. Goldman: *Electrostatic Tuning of the Superconductor-Insulator Transition in Two Dimensions*. Phys. Rev. Lett. **94**, 197004 (2005).
- [73] J. D. Reppy: *^4He as a dilute bose gas*. Physica B **126**, 335 (1984).
- [74] M. H. W. Chan, K. I. Blum, S. Q. Murphy, G. K. S. Wong und J. D. Reppy: *Disorder and the Superfluid Transition in Liquid ^4He* . Phys. Rev. Lett. **61**, 1950 (1988).
- [75] D. Finotello, K. A. Gillis, A. Wong und M. H. W. Chan: *Sharp Heat-Capacity Signature at the Superfluid Transition of Helium Films in Porous Glasses*. Phys. Rev. Lett. **61**, 1954 (1988).
- [76] J. D. Reppy: *Superfluid helium in porous media*. J. Low Temp. Phys. **87**, 205 (1992).
- [77] K. G. Singh und D. S. Rokhsar: *Disordered bosons: Condensate and excitations*. Phys. Rev. B **49**, 9013 (1994).
- [78] D. K. K. Lee und J. M. F. Gunn: *Bosons in a random potential: condensation and screening in a dense limit*. J. Phys. C **2**, 7753 (1990).
- [79] A. V. Lopatin und V. M. Vinokur: *Thermodynamics of the Superfluid Dilute Bose Gas with Disorder*. Phys. Rev. Lett. **88**, 235503 (2002).
- [80] O. Zobay: *Condensation temperature of interacting Bose gases with and without disorder*. Phys. Rev. A **73**, 023616 (2006).
- [81] S. Giorgini, L. Pitaevskii und S. Stringari: *Effects of disorder in a dilute Bose gas*. Phys. Rev. B **49**, 12938 (1994).
- [82] G. E. Astrakharchik, J. Boronat, J. Casulleras und S. Giorgini: *Superfluidity versus Bose-Einstein condensation in a Bose gas with disorder*. Phys. Rev. A **66**, 023603 (2002).
- [83] M. Kobayashi und M. Tsubota: *Bose-Einstein condensation and superfluidity of a dilute Bose gas in a random potential*. Phys. Rev. B **66**, 174516 (2002).
- [84] J. E. Lye, L. Fallani, M. Modugno, D. S. Wiersma, C. Fort und M. Inguscio: *Bose-Einstein Condensate in a Random Potential*. Phys. Rev. Lett. **95**, 070401 (2005).

- [85] D. Clément, A. F. Varón, M. Hugbart, J. A. Retter, P. Bouyer, L. Sanchez-Palencia, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov und A. Aspect: *Suppression of Transport of an Interacting Elongated Bose-Einstein Condensate in a Random Potential*. Phys. Rev. Lett. **95**, 170409 (2005).
- [86] C. Fort, L. Fallani, V. Guarrera, J. E. Lye, M. Modugno, D. S. Wiersma und M. Inguscio: *Effect of Optical Disorder and Single Defects on the Expansion of a Bose-Einstein Condensate in a One-Dimensional Waveguide*. Phys. Rev. Lett. **95**, 170410 (2005).
- [87] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort und M. Inguscio: *Onset of a Bose-Glass of ultracold atoms in a disordered crystal of light*. Preprint : cond-mat / **0603655**.
- [88] C. J. Pethick und H. Smith: *Bose-Einstein Condensation in Dilute Bose Gases*. Cambridge University Press, Cambridge U.K. (2002).
- [89] A. L. Fetter: *Theory of a dilute low-temperature trapped Bose condensate*. In: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman (Herausgeber): *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, Seite 201. IOS Press (1999).
- [90] A. J. Leggett: *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*. Rev. Mod. Phys. **73**, 307 (2001).
- [91] A. L. Fetter und J. D. Walecka: *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw Hill (1971).
- [92] W. Ketterle, D. S. Durfee und D. M. Stamper-Kurn: *Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates*. In: M. Inguscio, S. Stringari und C. E. Wieman (Herausgeber): *Proceedings of the International School of Physics - Enrico Fermi*, Seite 67. IOS Press (1999).
- [93] H. J. Lewandowski, D. M. Harber, D. L. Whitaker und E. A. Cornell: *Simplified System for Creating a Bose-Einstein Condensate*. J. Low Temp. Phys. **132**, 309 (2003).
- [94] E. W. Streed, A. P. Chikkatur, T. L. Gustavson, M. Boyd, Y. Torii, D. Schneble, G. K. Campbell, D. E. Pritchard und W. Ketterle: *Large atom number Bose-Einstein Condensate machines*. Preprint : cond-mat / **0507348**.
- [95] K. Bongs: *Atomoptische Experimente mit Bose-Einstein Kondensaten*. Doktorarbeit, Universität Hannover (1999).
- [96] S. Burger: *Erzeugung und Untersuchung dunkler Solitonen in Bose-Einstein Kondensaten*. Doktorarbeit, Universität Hannover (2000).
- [97] S. N. Bose: *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*. Z. Phys. **26**, 178 (1924).
- [98] A. Einstein: *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1925).
- [99] K. Huang: *Statistical Mechanics*. Wiley & Sons (1987).

- [100] P. M. Morse und H. Feshbach: *methods of theoretical physics, part 1 and part 2*. McGraw Hill (1953).
- [101] E. M. Lifshitz und L. P. Pitaevskii: *Statistical Physics, Part 2*. Pergamon Press, Oxford U.K. (1980).
- [102] J. F. Allen und A. D. Misener: *Flow of liquid helium II*. Nature (London) **141**, 75 (1938).
- [103] P. L. Kapitza: *Viscosity of liquid helium below the λ -point*. Nature (London) **141**, 74 (1938).
- [104] F. London: *The α -phenomenon of liquid helium and the Bose-Einstein degeneracy*. Nature (London) **141**, 643 (1938).
- [105] N. N. Bogoliubov: *On the Theory of Superfluidity*. J. Phys. USSR **11**, 23 (1947).
- [106] O. Penrose und L. Onsager: *Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium*. Phys. Rev. **104**, 576 (1956).
- [107] S. T. Baliaev: *Application of the Methods of Quantum Field Theory to a System of Bosons*. Soviet Phys. JETP **34**, 289 (1958).
- [108] N. M. Hugenholtz und D. Pines: *Ground-State Energy and Excitation Spectrum of a System of Interacting Bosons*. Phys. Rev. **116**, 489 (1959).
- [109] P. C. Hohenberg und P. C. Martin: *Microscopic Theory of Superfluid Helium*. Ann. Phys. **34**, 291 (1965).
- [110] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii und S. Stringari: *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*. Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [111] A. L. Fetter: *Nonuniform States of an Imperfect Bose Gas*. Ann. Phys. **70**, 67 (1972).
- [112] E. P. Gross: *Structure of a quantized vortex in boson systems*. Ann. Phys. **20**, 454 (1961).
- [113] L. P. Pitaevskii: *Vortex Lines in an Imperfect Bose Gas*. Soviet Phys. JETP **13**, 451 (1961).
- [114] H. J. Metcalf und P. van der Straten: *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, New York (1999).
- [115] W. Ertmer, R. Blatt, J. L. Hall und M. Zhu: *Laser Manipulation of Atomic Beam Velocities: Demonstration of Stopped Atoms and Velocity Reversal*. Phys. Rev. Lett. **54**, 996 (1985).
- [116] J. D. Jackson: *Classical electrodynamics*. Wiley & Sons (1962).
- [117] M. D. Barrett, J. A. Sauer und M. S. Chapman: *All-Optical Formation of an Atomic Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **87**, 010404 (2001).

- [118] S. R. Granade, M. E. Gehm, K. M. O'Hara und J. E. Thomas: *All-Optical Production of a degenerate Fermi Gas*. Phys. Rev. Lett. **88**, 120405 (2002).
- [119] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler und M. Weitz: *Bose-Einstein condensation in a CO₂-laser optical dipole trap*. Appl. Phys. B **77**, 773 (2003).
- [120] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki und Y. Takahashi: *Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms*. Phys. Rev. Lett. **91**, 040404 (2003).
- [121] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-C. Nägerl und R. Grimm: *Bose-Einstein Condensation of Cesium*. Science **299**, 232 (2003).
- [122] T. Kinoshita, T. Wenger und D. S. Weiss: *All-optical Bose-Einstein condensation using a compressible crossed dipole trap*. Science **305**, 1125 (2004).
- [123] B. P. Anderson und M. A. Kasevich: *Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays*. Science **282**, 1686 (1998).
- [124] O. Morsch, J. H. Müller, M. Christiani, D. Ciampini und E. Arimondo: *Oscillations and Mean-Field Effects of Bose-Einstein Condensates in 1D Optical Lattices*. Phys. Rev. Lett. **87**, 140402 (2001).
- [125] P. Pedri, L. Pitaevskii, S. Stringari, C. Fort, S. Burger, F. S. Cataliotti, P. Maddaloni, F. Minardi und M. Inguscio: *Expansion of a Coherent Array of Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **87**, 220401 (2001).
- [126] O. Morsch, M. Christiani, J. H. Müller, D. Ciampini und E. Arimondo: *Free expansion of a Bose-Einstein condensate in a one-dimensional optical lattice*. Phys. Rev. A **66**, 021601 (2002).
- [127] O. Morsch, M. Christiani, J. H. Müller, D. Ciampini und E. Arimondo: *Dynamics and phase evolution of Bose-Einstein condensates in one-dimensional optical lattices*. Las. Phys. **13**, 594 (2003).
- [128] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi und M. Inguscio: *Josephson junction array with Bose-Einstein condensates*. Science **293**, 843 (2001).
- [129] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M. L. Chiofalo und M. P. Tosi: *Superfluid and Dissipative Dynamics of a Bose-Einstein Condensate in a Periodic Optical Potential*. Phys. Rev. Lett. **86**, 4447 (2001).
- [130] C. Fort, F. S. Cataliotti, L. Fallani, F. Ferlaino, P. Maddaloni und M. Inguscio: *Collective Excitations of a Trapped Bose-Einstein Condensate in the Presence of a 1D Optical Lattice*. Phys. Rev. Lett. **90**, 140405 (2003).
- [131] F. S. Cataliotti, L. Fallani, F. Ferlaino, C. Fort, P. Maddaloni und M. Inguscio: *Superfluid current disruption in a chain of weakly coupled Bose-Einstein condensates*. New J. Phys. **5**, 71 (2003).

- [132] M. Cristiani, O. Morsch, N. Malossi, M. Jona-Lasinio, M. Anderlini, E. Courtade und E. Arimondo: *Instabilities of a Bose-Einstein condensate in a periodic potential: an experimental investigation*. Opt. Express **12**, 4 (2004).
- [133] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort und M. Inguscio: *Observation of Dynamical Instability for a Bose-Einstein Condensate in a Moving 1D Optical Lattice*. Phys. Rev. Lett. **93**, 140406 (2004).
- [134] J. H. Denschlag, J. E. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, D. Cho, K. Helmerson, S. L. Rolston und W. D. Phillips: *A Bose-Einstein condensate in an optical lattice*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **35**, 3095 (2002).
- [135] B. Eiermann, P. Treutlein, T. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, K. P. Mazlin und M. K. Oberthaler: *Dispersion management for atomic matter waves*. Phys. Rev. Lett. **91**, 060402 (2003).
- [136] L. Fallani, F. S. Cataliotti, J. Catani, C. Fort, M. Modugno, M. Zawada und M. Inguscio: *Optically-induced lensing effect on a Bose-Einstein condensate expanding in a moving lattice*. Phys. Rev. Lett. **91**, 240405 (2003).
- [137] T. Anker, M. Albiez, B. Eiermann, M. Taglieber und M. K. Oberthaler: *Linear and nonlinear dynamics of matter wave packets in periodic potentials*. Opt. Express **12**, 11 (2003).
- [138] B. Eiermann, T. Anker, M. Albiez, M. Taglieber, P. Treutlein, K.-P. Marzlin und M. K. Oberthaler: *Bright Bose-Einstein Gap Solitons of Atoms with Repulsive Interactions*. Phys. Rev. Lett. **92**, 230401 (2004).
- [139] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi und M. Inguscio: *Quasi-2D Bose-Einstein condensation in an optical lattice*. Europhys. Lett. **57**, 1 (2002).
- [140] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch und T. Esslinger: *Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
- [141] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl und T. Esslinger: *Exciting Collective Oscillations in a Trapped 1D Gas*. Phys. Rev. Lett. **91**, 250402 (2003).
- [142] C. Orzel, A. K. Tuchmann, M. L. Fenselau, M. Yasuda und M. A. Kasevich: *Squeezed States in a Bose-Einstein Condensate*. Science **291**, 2386 (2001).
- [143] F. Gerbier, A. Widera, S. Fölling, O. Mandel, T. Gericke und I. Bloch: *Phase Coherence of an Atomic Mott Insulator*. Phys. Rev. Lett. **95**, 050404 (2005).
- [144] F. Gerbier, S. Fölling, A. Widera, O. Mandel und I. Bloch: *Probing the number statistics of ultracold atoms across the superfluid-Mott insulator transition*. Preprint : cond-mat / **0511080**.

- [145] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch und I. Bloch: *Collapse and Revival of the Matter Wave Field of a Bose-Einstein condensate*. Nature (London) **419**, 51 (2002).
- [146] C. Schori, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhl und T. Esslinger: *Excitations of a Superfluid in a Three-Dimensional Optical Lattice*. Phys. Rev. Lett. **93**, 240402 (2004).
- [147] B. L. Tolra, K. M. O'Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston und J. V. Porto: *Observation of Reduced Three-Body Recombination in a Correlated 1D Degenerate Bose Gas*. Phys. Rev. Lett. **92**, 190401 (2004).
- [148] G. Modugno, F. Ferlaino, R. Heidemann, G. Roati und M. Inguscio: *Production of a Fermi gas of atoms in an optical lattice*. Phys. Rev. A **68**, 011601(R) (2003).
- [149] H. Ott, E. de Mirandes, F. Ferlaino, G. Roati, G. Modugno und M. Inguscio: *Collisionally Induced Transport in Periodic Potentials*. Phys. Rev. Lett. **92**, 160601 (2004).
- [150] M. Köhl, H. Moritz, T. Stöferle, K. Günter und T. Esslinger: *Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice: Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions*. Phys. Rev. Lett. **94**, 080403 (2005).
- [151] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, K. J. Günter, M. Köhl und T. Esslinger: *Fermionic Atoms with Tunable Interactions in a 3D Optical Lattice*. Preprint : cond-mat / **0601045**.
- [152] M. Köhl: *Thermometry of fermionic atoms in an optical lattice*. Phys. Rev. A **73**, 031601(R) (2006).
- [153] T. Stöferle, H. Moritz, K. Günter, M. Köhl und T. Esslinger: *Molecules of Fermionic Atoms in an Optical Lattice*. Phys. Rev. Lett. **96**, 030401 (2006).
- [154] D. Jaksch und P. Zoller: *The cold atom Hubbard toolbox*. Ann. Phys. **315**, 52 (2005).
- [155] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc und G. Grynberg: *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. Wiley & Sons (1992).
- [156] R. Grimm, M. Weidemüller und Y. Ovchinnikov: *Optical dipole traps for neutral atoms*. Adv. At. Mol. Opt. Phys. **42**, 95 (2000).
- [157] W. T. Silvast: *Laser Fundamentals*. Cambridge University Press (1996).
- [158] K. I. Petsas, A. B. Coates und G. Grynberg: *Crystallography of optical lattices*. Phys. Rev. A **50**, 5173 (1994).
- [159] L. Santos, M. A. Baranov, J. I. Cirac, H.-U. Everts, H. Fehrmann und M. Lewenstein: *Atomic Quantum Gases in Kagomé Lattices*. Phys. Rev. Lett. **93**, 030601 (2004).
- [160] N. Marzari und D. Vanderbilt: *Maximally localized generalized Wannier functions for composite energy bands*. Phys. Rev. B **56**, 12847 (1997).

- [161] W. Kohn: *Analytic Properties of Bloch Waves and Wannier Functions*. Phys. Rev. **115**, 809 (1959).
- [162] K. K. Likharev und A. B. Zorin: *Theory of the Bloch-Wave-Oscillations in Small Josephson Junctions*. J. Low Temp. Phys. **59**, 347 (1985).
- [163] M. Krämer, C. Menotti, L. Pitaevskii und S. Stringari: *Bose-Einstein condensates in 1D optical lattices. Compressibility, Bloch bands and elementary excitations*. Eur. Phys. J. D **27**, 247 (2003).
- [164] M. Krämer: *Bose-Einstein Condensates in Rotating Traps and Optical Lattices*. Doktorarbeit, Università degli Studi di Trento (2004).
- [165] A. M. Rey, G. Pupillo, C. W. Clark und C. J. Williams: *Ultracold atoms confined in an optical lattice plus parabolic potential: A closed-form approach*. Phys. Rev. A **72**, 033616 (2005).
- [166] J. Oliva: *Density profile of the weakly interacting Bose gas confined in a potential well: Nonzero temperature*. Phys. Rev. B **39**, 4197 (1989).
- [167] D. S. Petrov, M. Holzmann und G. V. Shlyapnikov: *Bose-Einstein Condensation in Quasi-2D Trapped Gases*. Phys. Rev. Lett. **84**, 2551 (2000).
- [168] T. A. Savard, K. M. O'Hara und J. E. Thomas: *Laser-noise-induced heating in far-off resonance optical traps*. Phys. Rev. A **56**, R1095 (1997).
- [169] M. E. Gehm, K. M. O'Hara, T. A. Savard und J. E. Thomas: *Dynamics of noise-induced heating in atom traps*. Phys. Rev. A **58**, 3914 (1998).
- [170] A. B. Pippard: *The Physics of Vibration*. Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1978).
- [171] J. Kruse: *Manipulation eines Bose-Einstein-Kondensates in einem eindimensionalen optischen Gitter*. Diplomarbeit, Universität Hannover (2005).
- [172] J. Kruse: *private communication*.
- [173] Y. B. Ovchinnikov, J. H. Müller, M. R. Doery, E. J. D. Vredenburg, K. Helmersson, S. L. Rolston und W. D. Phillips: *Diffraction of a Released Bose-Einstein Condensate by a Pulsed Standing Light Wave*. Phys. Rev. Lett. **83**, 284 (1999).
- [174] L. Schiff: *Quantum Mechanics*. McGraw Hill (1968).
- [175] Y. B. Band, Marek Trippenbach, Jr. J. P. Burke und P. S. Julienne: *Elastic Scattering Loss of Atoms from Colliding Bose-Einstein Condensate Wave Packets*. Phys. Rev. Lett. **84**, 5462 (2000).
- [176] A. P. Chikkatur, A. Görlitz, D. M. Stamper-Kurn, S. Inouye, S. Gupta und W. Ketterle: *Suppression and Enhancement of Impurity Scattering in a Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **85**, 483 (2000).

- [177] N. E. Cusack: *The Physics of Structurally Disordered Matter: An Introduction*. Adam Hilger, Bristol and Philadelphia (1987).
- [178] P.-E. Wolf und G. Maret: *Weak Localization and Coherent Backscattering of Photons in Disordered Media*. Phys. Rev. Lett. **55**, 2696 (1985).
- [179] M. P. v. Albada und A. Lagendijk: *Observation of Weak Localization of Light in a Random Medium*. Phys. Rev. Lett. **55**, 2692 (1985).
- [180] P. E. Lindelof, J. Nørregaard und J. Hanberg: *New light on the scattering mechanisms in Si inversion layers by weak localization experiments*. Phys. Scr. **T14**, 17 (1986).
- [181] B. Kramer und A. MacKinnon: *Anderson Localization*. In: H. Fritzsche und D. Adler (Herausgeber): *Localization and Metal-Insulator Transitions*, Seite 299. Plenum Press (1985).
- [182] J. v. Neumann und E. Wigner: *Über merkwürdige diskrete Eigenwerte*. Physik. Zeitschr. **30**, 465 (1929).
- [183] R. Freedman und J. A. Hertz: *Theory of a Fermi Glass*. Phys. Rev. B **15**, 2384 (1977).
- [184] D. Hellweg: *Phasenfluktuationen in Bose-Einstein-Kondensaten*. Doktorarbeit, Universität Hannover (2003).
- [185] Y. Castin und R. Dum: *Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps*. Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996).
- [186] K. Sacha: *private communication*.
- [187] L. Landau: *Theory of superfluidity of He II*. J. Phys. USSR **5**, 71 (1941).
- [188] E. Zaremba, A. Griffin und T. Nikuni: *Two-fluid hydrodynamics for a trapped weakly interacting Bose gas*. Phys. Rev. A **57**, 4695 (1998).
- [189] M. E. Fisher, M. N. Barber und D. Jasnow: *Helicity Modulus, Superfluidity, and Scaling in Isotropic Systems*. Phys. Rev. A **8**, 1111 (1973).
- [190] D. Poilblanc: *Twisted boundary conditions in cluster calculations of the optical conductivity in two-dimensional lattice models*. Phys. Rev. B **44**, 9562 (1991).
- [191] B. S. Shastry und B. Sutherland: *Twisted boundary conditions and effective mass in Heisenberg-Ising and Hubbard rings*. Phys. Rev. Lett. **65**, 243 (1990).
- [192] W. Krauth: *Bethe ansatz for the one-dimensional boson Hubbard model*. Phys. Rev. B **44**, 9772 (1991).
- [193] E. H. Lieb, R. Seiringer und J. Yngvason: *Superfluidity in dilute trapped Bose gases*. Phys. Rev. B **66**, 134529 (2002).

- [194] A. M. Rey, K. Burnett, R. Roth, M. Edwards, C. J. Williams und C. W. Clark: *Bogoliubov approach to superfluidity of atoms in an optical lattice*. J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **36**, 825 (2003).
- [195] N. V. Prokof'ev and B. V. Svistunov: *Two definitions of superfluid density*. Phys. Rev. B **61**, 11282 (2000).
- [196] Y. Nagaoka und H. Fukuyama: *Anderson Localization*, Band 39. Springer Series in Solid State Sciences (Springer, Heidelberg) (1982).
- [197] M. Mezard, G. Parisi und M. A. Virasoro: *Spin Glass Theory and Beyond*. World Scientific, Singapore (1993).
- [198] Aharony, A. und D. Stauffer: *Introduction to Percolation*. Taylor & Francis, London (1994).
- [199] F. Haake: *Quantum Signatures of Chaos*. Springer Verlag (2004).
- [200] L. Fallani, J. E. Lye, V. Guarrera, C. Fort und M. Inguscio: *Onset of a Bose-Glass of ultracold atoms in a disordered crystal of light*. Preprint : cond-mat / **0603655**.
- [201] S. Ospelkaus, C. Ospelkaus, O. Wille, M. Succo, P. Ernst, K. Sengstock und K. Bongs: *Localization of bosonic atoms by fermionic impurities in a 3d optical lattice*. Preprint : cond-mat / **0604179**.
- [202] A. Trombettoni und A. Smerzi: *Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **86**, 2353 (2000).
- [203] A. Trombettoni, A. Smerzi und A. R. Bishop: *Superfluidity versus Disorder in the Discrete Nonlinear Schrödinger Equation*. Phys. Rev. Lett. **88**, 173902 (2002).
- [204] L. Zhang: *Disordered boson Systems: A perturbative study*. Phys. Rev. B **47**, 14364 (1993).
- [205] K. Rasmussen, D. Cai, A. R. Bishop und N. Gronbech-Jensen: *Localization in a nonlinear disordered system*. Europhys. Lett. **47**, 421 (1999).
- [206] F. K. Abdullaev: *Nonlinearity with Disorder*. Springer Verlag (1992).
- [207] M. Holthaus: *Bloch oscillations and Zener breakdown in an optical lattice*. J. Opt. B **2**, 589 (2000).
- [208] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz und K. Köhler: *Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice*. Phys. Rev. Lett. **70**, 3319 (1993).
- [209] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin und C. Salomon: *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*. Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).

- [210] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu und M. G. Raizen: *Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential*. Phys. Rev. Lett. **76**, 4512 (1996).
- [211] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno und M. Inguscio: *Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases*. Phys. Rev. Lett. **92**, 230402 (2004).
- [212] V. Grecchi und S. Sacchetti: *Acceleration theorem for Bloch oscillators*. Phys. Rev. B **63**, 212303 (2001).
- [213] R. G. Scott, A. M. Martin, S. Bujkiewicz, T. M. Fromhold, N. Malossi, O. Morsch, M. Cristiani und E. Arimondo: *Transport and disruption of Bose-Einstein condensates in optical lattices*. Phys. Rev. A **69**, 033605 (2004).
- [214] B. Wu und Q. Niu: *Landau and dynamical instabilities of the superflow of Bose-Einstein condensates in optical lattices*. Phys. Rev. A **64**, 061603(R) (2001).
- [215] B. Wu und Q. Niu: *Superfluidity of Bose-Einstein condensate in an optical lattice: Landau-Zener tunneling and dynamical instability*. New J. Phys. **5**, 104 (2003).
- [216] M. Modugno, C. Tozzo und F. Dalfovo: *Role of transverse excitations in the instability of Bose-Einstein condensates moving in optical lattices*. Phys. Rev. A **70**, 043625 (2004).
- [217] M. Modugno, C. Tozzo und F. Dalfovo: *Erratum: Role of transverse excitations in the instability of Bose-Einstein condensates moving in optical lattices [Phys. Rev. A 70, 043625 (2004)]*. Phys. Rev. A **71**, 019904 (2005).
- [218] C. Menotti, A. Smerzi und A. Trombettoni: *Superfluid dynamics of a Bose-Einstein condensate in a periodic potential*. New J. Phys. **5**, 112 (2003).
- [219] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov und M. Lewenstein: *Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **83**, 5198 (1999).
- [220] D. L. Feder, M. S. Pindzola, L. A. Collins, B. I. Schneider und C. W. Clark: *Dark-soliton states of Bose-Einstein condensates in anisotropic traps*. Phys. Rev. A **62**, 053606 (2000).
- [221] R. J. Donnelly: *Quantized Vortices in Helium II*. Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1991).
- [222] F. Domínguez-Adame, V. A. Malyshev, F. A. B. F. de Moura und M. L. Lyra: *Bloch-Like Oscillations in a One-Dimensional Lattice with Long-Range Correlated Disorder*. Phys. Rev. Lett. **91**, 197402 (2003).
- [223] A. R. Kolovsky, A. V. Ponomarev und H. J. Korsch: *Damped Bloch oscillations of cold atoms in optical lattices*. Phys. Rev. A **66**, 053405 (2002).

- [224] S. Dürr, T. Volz, A. Marte und G. Rempe: *Observation of Molecules Produced from a Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **92**, 020406 (2004).
- [225] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye und W. Ketterle: *Propagation of Sound in a Bose-Einstein Condensate*. Phys. Rev. Lett. **79**, 553 (1997).
- [226] D. M. Stamper-Kurn, A. P. Chikkatur, A. Görlitz, S. Inouye, S. Gupta, D. E. Pritchard und W. Ketterle: *Excitation of Phonons in a Bose-Einstein Condensate by Light Scattering*. Phys. Rev. Lett. **83**, 2876 (1999).
- [227] R. C. Kuhn, C. Miniatura, D. Delande, O. Sigwarth und C. A. Müller: *Localization of Matter Waves in Two-Dimensional Disordered Optical Potentials*. Phys. Rev. Lett. **95**, 250403 (2005).
- [228] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery: *Numerical Recipes in Fortran* (1986).
- [229] J. E. Williams: *The Preparation of Topological Modes in a Strongly-Coupled Two-Component Bose-Einstein Condensate*. Doktorarbeit, University of Colorado (1999).
- [230] M. J. Holland, D. S. Jin, M. L. Chiofalo und J. Cooper: *Emergence of Interaction Effects in Bose-Einstein Condensation*. Phys. Rev. Lett. **78**, 3801 (1997).

Danksagung

Die zurückliegende Zeit am Institut für Quantenoptik stellt für mich eine große Bereicherung dar, denn ich hatte hier die Gelegenheit, auf einem äußerst spannenden und vitalen Forschungsgebiet zu arbeiten. Insbesondere hatte ich das Glück, mit vielen Menschen zusammenzuarbeiten, deren Bekanntschaft ein großer Gewinn für mich ist. Denen, die mich auf besondere Weise unterstützt haben, möchte ich hier danken.

An erster Stelle bedanke ich mich bei meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr. Wolfgang Ertmer dafür, dass er mir die Möglichkeit gegeben hat, auf diesem interessanten Forschungsgebiet unter hervorragenden Rahmenbedingungen tätig zu sein. Darüber hinaus bedanke ich mich für die motivierende Atmosphäre in der Arbeitsgruppe, die durch seinen Enthusiasmus sehr gefördert wird.

Ein großer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Jan Arlt für die persönliche Betreuung, die ich durch ihn erfahren habe. Bedanken möchte ich mich auch für die vielfältigen Anregungen und Ideen zum Experiment sowie für das Vertrauen, das er mir bei der Ausgestaltung der experimentellen Vorgehensweise entgegengebracht hat.

Herrn Prof. Dr. Luis Santos danke ich zum einen für die Übernahme des Koreferates. Zum anderen ist es mir ein Anliegen mich für zahlreiche Diskussionen zu bedanken, die mein theoretisches Verständnis ultra-kalter Materie maßgeblich geprägt haben.

Herrn Prof. Dr. Maciej Lewenstein, Herrn Dr. Krzysztof Sacha und Herrn Prof. Dr. Jakub Zakrzewski danke ich für die fruchtbare Kollaboration sowie für viele Diskussionen über ungeordnete Bose-Einstein-Kondensate.

Besonders bedanke ich mich bei Sascha Drenkelforth sowohl für die hervorragende Zusammenarbeit am Experiment als auch für die gute Freundschaft, die uns verbindet. Gleiches gilt für unseren ehemaligen Diplomanden Jens Kruse. Die gemeinsame Arbeit habe ich immer als großes Privileg empfunden.

Auch den neuen Kollegen Rainer Tiemeyer und Georg Kleine Büning danke ich für ihre Unterstützung und wünsche ihnen viel Erfolg für ihre weiteren Arbeiten am IQO.

Bei Carsten Klempt, Oliver Topic und Thorsten Henninger bedanke ich mich für die ausgezeichnete Zusammenarbeit und die angenehme Stimmung in unserer Sub-Gruppe.

Darüber hinaus danke ich allen Doktoranden und Diplomanden der Arbeitsgruppe Prof. Dr. Wolfgang Ertmer für ihre kollegiale Hilfsbereitschaft und die gute Arbeitsatmosphäre. Eine große Unterstützung waren für mich darüber hinaus Frau Gunhild Faber, Herr Dr. Rudolf Gaul, Herr Leo Heidekrüger, Frau Katrin Pfennig, Frau Elke Hünitzsch sowie Herr Andreas Schramm. Auch Ihnen möchte ich danken.

Herzlich möchte ich mich bei meinen Eltern sowie meinem Bruder für ihre fortwährende Unterstützung bedanken. Dieses gilt auch für meine Freunde.

Einen besonderen Dank aber sage ich Anna-Lena; der ist für ihre Liebe.

Publikationsliste

- *Cold Atomic Gases in Optical Lattices with Disorder*
T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. J. Arlt, A. Kantian, L. Sanchez-Palencia, L. Santos, A. Sanpera, K. Sacha, P. Zoller, M. Lewenstein, and J. Zakrzewski, *Acta Physica Polonica A* **109**, 89 (2006).
- *Routes Towards Anderson-Like Localization of Bose-Einstein Condensates in Disordered Optical Lattices*
T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).
- *Collective excitation of Bose-Einstein condensates in the transition region between three and one dimensions*
M. Kottke, T. Schulte, L. Cacciapuoti, D. Hellweg, S. Drenkelforth, W. Ertmer, and J. J. Arlt
Phys. Rev. A **72**, 053631 (2005).
- *Second-order correlation function of a phase fluctuating Bose-Einstein condensate*
L. Cacciapuoti, D. Hellweg, M. Kottke, T. Schulte, W. Ertmer, J. J. Arlt, K. Sengstock, L. Santos, and M. Lewenstein
Phys. Rev. A **68**, 053612 (2003).
- *Measurement of the Spatial Correlation Function of Phase Fluctuating Bose-Einstein Condensates*
D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, W. Ertmer, and J.J. Arlt,
Phys. Rev. Lett. **91**, 010406 (2003).
- *Characterization and control of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates*
H. Kreuzmann, A. Sanpera, L. Santos, and M. Lewenstein, D. Hellweg, L. Cacciapuoti, M. Kottke, T. Schulte, K. Sengstock, J. J. Arlt, and W. Ertmer,
Appl. Phys. B **76**, 165 (2003).
- *Vortex-vortex interactions in toroidally trapped Bose-Einstein condensates*¹
T. Schulte, L. Santos, A. Sanpera, and M. Lewenstein,
Phys. Rev. A **66**, 033602 (2002).
- *Generation and evolution of vortex-antivortex pairs in Bose-Einstein condensates*¹
J.-P. Martikainen, K.-A. Suominen, L. Santos, T. Schulte, and A. Sanpera,
Phys. Rev. A **64**, 063602 (2001).

¹Veröffentlichung ist im Rahmen der Diplomarbeit entstanden.

Lebenslauf

Persönliche Daten

05.04.1976 geboren in Hannover als Sohn von Harald Schulte und Monika Schulte, geborene Zacher

Schulbildung

1982 - 1986 Grundschule Arnum

1986 - 1988 Orientierungsstufe der Carl-Friedrich-Gauß-Schule Hemmingen

1988 - 1995 Gymnasium der Carl-Friedrich-Gauß-Schule Hemmingen

19.05.1995 Abitur

Wehrdienstzeit

10/1995-07/1996 Wehrdienst

Studium

10/1996 Beginn des Physikstudiums an der Universität Hannover

15.10.1998 Vordiplom in Physik

11.01.2002 Diplom in Physik

Diplomarbeit am Institut für Theoretische Physik in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Maciej Lewenstein; Titel der Diplomarbeit: „Vortextdynamik in toroidal gefangenen Bose-Einstein-Kondensaten“

Promotions-Studium

seit 02/2002 Doktorarbeit am Institut für Quantenoptik der Universität Hannover in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Wolfgang Ertmer; Thema: „Bose-Einstein-Kondensate in ungeordneten Potenzialen“