

Fehlerkontrollierte adaptive FEM-BEM Kopplungsmethoden und Anwendungen

Von der Fakultät für Mathematik und Physik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Stephan Oestmann

geboren am 07.11.1975 in Hoya

2006

Referent: Prof. Dr. E. P. Stephan, Universität Hannover
Korreferent: Prof. Dr. G. Starke, Universität Hannover
Tag der Promotion: 14.07.2005

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Betrachtung von verschiedenen a posteriori Fehlerschätzern für die Galerkin FEM-BEM Kopplungsmethode und die Least-Squares FEM-BEM Kopplung für elastische Problemstellungen in 3D.

Zunächst betrachten wir die Standard FEM-BEM Kopplung für die Beschreibung eines nichtlinearen elastischen Problems mit Hencky Material in einem beschränkten Gebiet Ω und eines homogenen linear elastostatischen Problems für den unbeschränkten Außenraum $\Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. Das Außenraumproblem wird mittels gegebener Randintegralmethoden auf den Kopplungsrand Γ reduziert. Für dieses nichtlineare Kopplungsproblem werden effiziente und zuverlässige Fehlerschätzer vorgestellt. Der residuale Fehlerschätzer benutzt lokale Fehlerindikatoren, die auf den Volumenelementen, den inneren Seitenflächen sowie auf den Randelementen berechnet werden. Die Anteile auf den Randelementen erfordern eine explizite Auswertung der Randintegraloperatoren, u.a. mit Hilfe der Regularisierung der singulären Integrale, für deren Berechnung wir die Implementation in das Programmsystem *maiprogs* entwickeln und präsentieren.

Der hierarchische Fehlerschätzer beruht auf einer Saturationsannahme und der stabilen Unterraumzerlegungen für die Finiten Elemente und Randelemente. Wir zeigen ebenfalls die Effizienz und Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers und diskutieren verschiedene Methoden zur Berechnung der lokalen Fehlerindikatoren. Numerische Beispiele mit adaptiver und uniformer Verfeinerung des Gitters belegen die theoretischen Aussagen über die residualen und hierarchischen Fehlerschätzer.

Für die Least-Squares FEM-BEM Kopplungsmethode betrachten wir ein linear elastisches Problem im Innengebiet und eine homogene linear elastische Problemstellung im Außenraum. Wir führen für das Innenraumproblem eine zusätzliche Variable ein, damit auch der Fall von inkompressiblem Material berechnet werden kann. Für das System zweiter Ordnung konstruieren wir ein Least-Squares Funktional für die FEM-BEM Kopplung, das u.a. in Termen der Sobolev-Normen der Ordnung -1 und $1/2$ gegeben ist. Bei der Diskretisierung erhalten wir zusätzliche Terme gegenüber dem kontinuierlichen Fall. Wir zeigen für beide Formulierungen die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Die Berechnung der auftretenden $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ - und $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Normen realisieren wir über die Lösung eines zur jeweiligen Dualnorm äquivalenten Systems. Für diese Formulierung konstruieren wir ebenfalls einen a posteriori Fehlerschätzer.

Schließlich stellen wir noch den Einsatz von hängenden Knoten bei adaptiven Verfeinerungen für eine Triangulierung mit Hexaedern vor. Dazu benutzen wir eine Erweiterung der one-constraint-rule von Demkowicz et al (2002).

Schlagwörter. FEM-BEM Kopplung, a posteriori Fehlerschätzer, Least-Squares FEM-BEM Kopplung

Abstract

This thesis deals with several a posteriori error estimators for the standard coupling of finite elements and boundary elements and for a least-squares fe-be coupling method dealing with elastic problems in 3d.

We consider first the standard fem-bem coupling for a nonlinear elasticity problem with Hencky material and given force in the inner domain Ω and with a homogeneous linear elastostatic problem in the unbounded domain $\Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$. For given jumps on the transmission boundary Γ we reduce the outer problem to the boundary. For this nonlinear fem-bem coupling formulation we present efficient and reliable a posteriori error estimators.

The residual error estimator consists of local indicators which are defined on the volume elements, the inner faces and the faces on the boundary. The indicators on the boundary are using the boundary integral operators arising from the bem. We demonstrate the implementation of the boundary integral operators within the program system *maiprogs*.

For the hierarchical error estimator we need a saturation assumption and stable two-level decompositions for the finite elements and boundary elements to prove efficiency and reliability of the a posteriori error estimator. We discuss several ways to compute the local error indicators.

For both, the residual and hierarchical error estimators, we present some numerical examples for the adaptive mesh refinement.

Another topic is the formulation of a least-squares fem-bem coupling for a linear elastic problem with given volume force for the interior problem and homogeneous conditions in the outer domain. We introduce the pressure p as a new variable to deal also with incompressible material. We develop a least-squares formulation for the second order system. The least-squares functional is given in terms of the Sobolev norms of order -1 and $1/2$. For the discrete version of the functional we get additional terms compared with the continuous formulation. For both corresponding least-squares formulations we prove the existence and uniqueness of a solution. The implementation of the method requires the computation of the $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ - and $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -norms which we realize via the solution of equivalent systems of the dual norm. For this method we also present an a posteriori error estimate.

Finally, we describe the use of hanging nodes in the adaptive mesh refinement scheme for hexahedral elements. In order to keep a certain regularity of the mesh we use an extension of the one-constraint-rule of Demkowicz et al (2002).

Key words. fem-bem coupling, a posteriori error estimates, least-squares fem-bem coupling

Inhaltsverzeichnis

1 FEM-BEM Kopplung für ein elastisches Problem im \mathbb{R}^3	17
1.1 Elastische Problemstellung	17
1.2 Variationelle Formulierung	21
1.3 Diskrete Formulierung	23
2 Residualer Fehlerschätzer	25
2.1 A posteriori Fehlerschätzer	25
2.1.1 Effizienz des Fehlerschätzers	31
2.2 Adaptiver Algorithmus	39
2.3 Implementation	41
2.3.1 Laplace Randintegraloperatoren	42
2.3.2 Lamé Operatoren	47
3 Hierarchischer Fehlerschätzer	53
3.1 Zwei-Level Zerlegungen	54
3.1.1 Zwei-Level Zerlegungen für Hexaeder	54
3.1.2 Zwei-Level Zerlegungen für Randelemente	55
3.2 A posteriori Fehlerschätzer	58
3.3 Adaptiver Algorithmus	63
4 Numerische Ergebnisse	73
4.1 Laplace-Problem	73
4.2 Cube	75
4.3 Fichera-Cube	79
4.4 L-Block	82
4.5 Gitterdarstellungen	85
5 Least-Squares FEM-BEM Kopplung	91
5.1 Transmissionsproblem	91
5.2 Kontinuierliche Least-Squares Formulierung	93
5.3 Diskretes Least-Squares Funktional	101
5.4 A priori Fehlerabschätzung	112

5.5	A posteriori Fehlerschätzer	116
5.6	Implementation	119
5.7	Numerische Ergebnisse	122
5.7.1	FEM-BEM Kopplung	122
5.7.2	Adaptive FEM	129
6	Hängende Knoten	135
6.1	Allgemeines	135
6.2	Datenstruktur	136
6.2.1	Datenstruktur des Gitters	137
6.2.2	Datenstruktur der Splines	139
6.2.3	Spezielle Routinen bei nichtkonformen Gittern	140
6.3	Verfeinerungsgesetze	141
6.3.1	Verfeinerungen in 2D	141
6.3.2	Verfeinerungen in 3D	142
6.3.3	Algorithmus	144
6.4	Approximation der abhängigen Freiheitsgrade	145
6.5	Hängende Kanten	147

Abbildungsverzeichnis

3.1	Neue Basisfunktionen auf den Randelementen	56
3.2	lokale Anreicherung und neue Freiheitsgrade	65
3.3	Verfeinerung eines Elements in x - und y -Richtung und Verfeinerung der benachbarten Elemente	66
3.4	Verfeinerung von Ω mit jeweils drei Schichten pro Koordinatenebene . . .	67
3.5	Uniforme Verfeinerung: Auflösung eines hängenden Knotens und Entstehung zweier neuen hängenden Knoten auf der Kante	68
3.6	H^1 -Fehlerkurven für Beispiel 3.3.1 mit Richtungs- und Schichtenverfeinerung und Verfeinerung mit hängenden Knoten	69
3.7	H^1 -Fehlerkurven für Beispiel 3.3.2 mit Richtungs- und Schichtenverfeinerung und Verfeinerung mit hängenden Knoten	70
3.8	Beispiel 3.3.2 adaptive Gitterverfeinerungen mit Richtungs- (links), Schichtensteuerung (mitte) und hängenden Knoten (rechts)	71
3.9	Gitterentw. für Richtungs- (links), Schichten- (mitte) und hängende Knotenverfeinerung (rechts) mit Anzahl der Freiheitsgrade (Bsp. 3.3.1)	72
4.1	H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.2.1 . .	76
4.2	Blick von oben durch das 3D-Gitter (9. Verfeinerungsstufe); residual (links), hierarchisch (rechts) (Bsp. 4.2.1)	79
4.3	H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.3.1 . .	80
4.4	H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.4.1 . .	84
4.5	residual: adaptive Verfeinerungslevel 3, 5, 7, 9 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.2.1)	85
4.6	hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 3, 5, 7, 9 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.2.1)	86
4.7	residual: adaptive Verfeinerungslevel 2, 4, 6, 8 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.3.1)	87
4.8	hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 1, 3, 5, 7 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.3.1)	88

4.9	residual: adaptive Verfeinerungslevel 1, 3, 5, 7 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.4.1)	89
4.10	hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 2, 3, 4, 5 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.4.1)	90
5.1	L^2 -Fehlerkurven für Bsp. 5.7.1 und Konditionszahlen für versch. Vorkonditionierer	123
5.2	L^2 -Fehlerkurven für Beispiel 5.7.2 und Konditionszahlen für versch. Vorkonditionierer	125
5.3	L^2 -Fehlerkurven für Bsp. 5.7.3 und Iterationszahlen für versch. Vorkonditionierer	127
5.4	L^2 -Fehlerkurven für uniforme und adaptive Verfeinerung Least-Squares-FEM für Beispiel 5.7.4	130
5.5	adaptive Gitter nach 4 bzw. 6 Verfeinerungen und Plot der Approximationen von \mathbf{u} und p (Bsp. 5.7.4)	131
5.6	L^2 -Fehlerkurven für uniforme und adaptive Verfeinerung Least-Squares-FEM und Galerkin-FEM für Beispiel 5.7.5	132
5.7	adaptive Gitter nach 6 bzw. 8 Verfeinerungen und Plot der Approximationen von \mathbf{u} und p (Bsp. 5.7.5)	133
6.1	hängende Knoten; a, b Mittelpunkte einer Kante, c Mittelpunkt einer Fläche	136
6.2	Baumstruktur; aktuelle Elemente sind Blätter des Baumes	137
6.3	2D: mögliche Verfeinerungen	142
6.4	2D: Auflösung eines hängenden Knotens	142
6.5	3D-FEM: mögliche Verfeinerungen	143
6.6	3D-FEM: Kreuz-Situation	144
6.7	Spezialfall bei hängenden Knoten	145
6.8	Numerierung der Kanten im Referenzelement	148
6.9	hängende Kanten auf einer Fläche bzw. an einer Kante	148
6.10	Spezialfall bei hängenden Kanten	150

Tabellenverzeichnis

4.1	Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten) (Bsp. 4.2.1)	77
4.2	Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten) (Bsp. 4.3.1)	81
4.3	Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten); rechts: uniforme Verfeinerung (Bsp. 4.4.1) .	83
5.1	L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.1)	124
5.2	Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.1)	124
5.3	L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.2)	126
5.4	Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.2)	126
5.5	L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.3)	128
5.6	Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.3)	128

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von verschiedenen a posteriori Fehlerschätzern für nichtlineare und lineare elastostatische Probleme für die symmetrische Kopplung der Finite Elemente Methode (FEM) und der Randelementmethode (BEM). Wir nutzen die BEM, um ein Randwertproblem auf einem unbeschränkten Gebiet zu diskretisieren, da wir mit Hilfe der Randintegraloperatoren das Problem auf den Rand des Außenraums reduzieren können. Für das gegebene nichtlineare oder lineare Problem im beschränkten Gebiet approximieren wir die Lösung mit der FEM. Costabel [22] und Stephan [59] führten die symmetrische Kopplung der FEM und BEM ein, um die Vorteile beider Verfahren zu verbinden. Die Kopplung von FEM und BEM hat sich als gute Methode für die Lösung physikalischer und mechanischer Probleme herausgestellt (siehe z.B. [23], [24], [31], [32], [59], [66] und einen Übersichtsartikel von Stephan [60]).

Im Kapitel 1 betrachten wir ein dreidimensionales Transmissionsproblem, wobei der \mathbb{R}^3 in ein Innengebiet Ω und in das zugehörige Außengebiet $\Omega^C := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ unterteilt wird. Das Innengebiet wird durch den Lipschitz-Rand Γ berandet. Im Inneren suchen wir \mathbf{u} als Lösung der nichtlinearen Lamé-Gleichung mit Hencky-Material und gegebener Volumenkraft \mathbf{F} . Für den unbeschränkten Außenraum Ω^C betrachten wir das lineare homogene Elastizitätsproblem mit einer Abklingbedingung im Unendlichen. Auf dem Übergangsrand Γ definieren wir Sprünge \mathbf{u}_0 und \mathbf{t}_0 der Verschiebung \mathbf{u} und der Randspannung $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$. Mit Hilfe von Randintegraloperatoren (Einfachschichtpotential V , Doppelschichtpotential K , adjungiertes Doppelschichtpotential K' und hypersingulärer Operator W), der Fundamentallösung (Kelvin-Matrix), der Definition des Randspannungsoperators und den Sprungrelationen bei dem Übergang auf den Rand Γ , führen wir das Außenraumproblem auf eine Darstellung auf dem Rand Γ zurück. Diese Vorgehensweise reduziert die Dimension des Problems, da nur noch Elemente auf dem Rand zu betrachten sind, jedoch erhöht sich der Berechnungsaufwand, da sich im Gegensatz zur Finiten Element Methode voll besetzte Matrizen ergeben. In Kapitel 1.2 beschreiben wir die variationelle Formulierung des Innenraumproblems und des auf den Rand zurückgeführten Außenraumproblems. Mit Hilfe der symmetrischen Kopplung von FEM und BEM erhalten wir eine neue Formulierung des ursprünglichen Problems.

In Abschnitt 1.3 beschreiben wir die Diskretisierung der variationellen Formulierung.

Dazu führen wir diskrete Unterräume der zugrunde liegenden Sobolev-Räume ein und definieren wie in [17] die diskreten Randintegraloperatoren. Im nächsten Abschnitt stellen wir einen residualen a posteriori Fehlerschätzer η_h vor, den wir zur Steuerung eines adaptiven Gitterverfeinerungsalgorithmus nutzen. Der residuale Fehlerschätzer ist eine obere und untere Schranke des Fehlers, der bei der Approximation der exakten Lösung (\mathbf{u}, ϕ) durch die angenäherte Lösung (\mathbf{u}_h, ϕ_h) entsteht. Die Zuverlässigkeit des Fehlerschätzers wird in Theorem 2.1.2 bewiesen. Die Kopplungsformulierung liefert vier residuale Terme T_1, \dots, T_4 , die wir einzeln durch die Terme des Fehlerschätzers nach oben abschätzen. Der Volumenanteil auf den Elementen der Triangulierung wird mit einem Clément-Interpolationsoperator und zugehörigen Abschätzungen (siehe [20]) behandelt. Analog gehen wir für den Term vor, der die Sprünge der Normalenspannung $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ über den Seitenflächen im Inneren des Gebiets Ω beinhaltet. Für die verbleibenden Terme auf dem Übergangsrand Γ nutzen wir die Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren, wenden die Interpolationsoperatoren an und lokalisieren den Rand Γ auf die Elemente Γ_i der Triangulierung mit einem Ergebnis aus [18].

Die Effizienz des residualen Fehlerschätzers wird in Theorem 2.1.3 analog zu dem zweidimensionalen Ergebnis aus [16] bewiesen. Wir benutzen die Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren (siehe [21]) und für den Finite Element Anteil die Vorgehensweise aus Verfürth [62]. Mit Hilfe der L^2 -Projektion des Poincaré-Steklov Operators führen wir die Terme mit den Integraloperatoren auf Terme höherer Ordnung zurück und erhalten damit die Effizienz des Fehlerschätzers. In Abschnitt 2.2 wird der adaptive Algorithmus beschrieben, mit dessen Hilfe die Verfeinerung des Gitters automatisiert durchgeführt werden kann. Durch die Verwendung der Fehlerindikatoren lokal auf den Elementen der Triangulierung \mathcal{T}_h , kann eine adaptive Netzverfeinerung durchgeführt werden. Mit dieser adaptiven Verfeinerungen kann die Problemlösung effizienter und gezielter gestaltet werden.

Die Implementation der einzelnen Terme des Fehlerschätzers bzw. der darin auftretenden Integraloperatoren wird in Kapitel 2.3 erläutert. Die Verwendung der Integraloperatoren für das elastische Problem lässt sich teilweise auf die einfacher zu bestimmenden Operatoren für das Laplace-Problem zurückführen. Deshalb betrachten wir zunächst die Implementation der Laplace Randintegraloperatoren. Der hypersinguläre Integraloperator W muss für die Auswertung des Fehlerschätzers η_h auf Polynome (Approximation \mathbf{u}_h) und Funktionen (Sprung \mathbf{u}_0) angewendet werden. Die Darstellung des hypersingulären Operators wird auf die Darstellung des Laplace Einfachschichtpotentials mit geänderter Belegung zurückgeführt $Wu = \nabla \times V(\nabla_\Gamma u \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}$. Wir benötigen dazu die Definition des Oberflächengradientens ∇_Γ und die Definition der Oberflächenrotationen \mathbf{curl}_Γ und curl_Γ . Diese Darstellung erlaubt uns, modifizierte Standardroutinen des Programmsystems *maiprops* [44, 41, 42, 46] zu benutzen. Aufgrund der starken Singularität

des Kerns des Operators wird im so genannten Nahfeld (d.h. der Abgreifpunkt x und die Integrationsvariable y liegen nah beieinander) der Integralausdruck regularisiert (im Sinne der Hadamard-Regularisierung). Wir erreichen dadurch eine Abschwächung der Singularität und eine genauere Berechnung der Integrale in der Nähe der Singularität. Analog gehen wir für die Umformungen des Oberflächengradienten des Einfachschichtpotentials V und des Doppelschichtpotential K vor. Die Ableitung des Einfachschicht- bzw. Doppelschichtpotentials führt wiederum auf stark singuläre Integrale, die wir wieder mit regularisierten Ausdrücken bestimmen können. Die Anwendung der Operatoren auf Polynome leiten wir auf die Verwendung der analytisch integrierbaren Integrale $I_{k,l}^{-3/2}$ (siehe [46]) zurück.

Die Lamé Integraloperatoren können wir mit den Ergebnissen aus Han [39] und Kupradze [40] mittels der Laplace Einfachschicht- und Doppelschichtpotentiale und des Einfachschichtpotentials für das Lamé-Problem beschreiben. Han stellt in seinem Artikel eine neue Darstellung des hypersingulären Operators für das elastische Problem vor. Aus dem Buch von Kupradze [40] haben wir vereinfachte Darstellungen des Doppelschicht- und des adjungierten Doppelschichtpotentials. In diesen Darstellungen können wir die zuvor hergeleiteten alternativen Darstellungen für die Laplace Integraloperatoren einsetzen.

In Kapitel 3 stellen wir einen hierarchischen Fehlerschätzer vor, der für die BEM in [50], für nichtlineare Laplace FEM-BEM Kopplungsprobleme in [52] und für dreidimensionale elastische Kopplungsprobleme [51] behandelt wurde. Dieser beruht auf einer stabilen 2-Level Unterraumzerlegung der diskreten Finiten Elemente und Randelementräume. Durch die Verwendung der Saturationsannahme kann eine a posteriori Fehlerabschätzung bewiesen werden. Durch die h -hierarchische Anreicherung der diskreten Räume haben wir lokale 2-Level Verfeinerungen der Elemente. Damit können die so gewonnenen lokalen Fehlerindikatoren auf jedem Element der Triangulierung zu einer richtungsabhängigen adaptiven Steuerung der Verfeinerung des Gitters verwendet werden. Bei der Anwendung von konformen Gittern wird die Verwendung der so genannten Schichtenverfeinerung beschrieben. Demgegenüber wird die Verwendung von nichtkonformen Gittern mit hängenden Knoten (siehe Kapitel 6) beschrieben und die numerischen Ergebnisse verglichen.

Anders als bei der Standard Galerkin-Methode, die wir in den oben beschriebenen Abschnitten benutzt haben, wollen wir die Lösung des Kopplungsproblems als Minimierung eines Least-Squares Funktionals bestimmen. In den letzten Jahren wurden gemischte Methoden entwickelt, die für bestimmte Probleme bessere Verfahren darstellen, als die normale FEM (siehe z.B. [36], [34] und [11]). Der Nachteil dieser Methode ist die geeignete Wahl der finiten Elementräume, die eine diskrete inf-sup-Bedingung erfüllen müssen, um die eindeutige Lösbarkeit zu gewährleisten. Für die Least-Squares Verfahren müssen keine inf-sup-Bedingungen erfüllt werden. Least-Squares Verfahren wurden

zuerst von Bramble und Schatz [10] eingeführt. Seitdem wurde das Least-Squares Verfahren von vielen Autoren betrachtet. Für einen Übersichtsartikel siehe [4]. Fix et al [28] und [29] präsentierten in ihren Arbeiten eine Rückführung von Problemen zweiter Ordnung auf Probleme erster Ordnung, deren Lösbarkeit (Minimierung des Least-Squares Funktionals) mittels des Lax-Milgram Lemmas gezeigt werden kann. Die Systeme erster Ordnung wurden für die FEM von vielen Autoren z.B. für ein elastisches Problem oder das Stokes Problem betrachtet (siehe z.B. [30], [13], [3], [12]). Bramble und Pasziak [9], bzw. Bramble Pasziak und Lazarov [7], [8] führten ein Least-Squares Funktional ein, das ein diskretes inneres Produkt auf dem Sobolev-Raum der Ordnung -1 benutzt. Die Anwendung dieser Darstellung des Funktionals auf FEM-BEM Kopplungsprobleme wurden in letzter Zeit von Gatica, Harbrecht und Schneider [35] und Maischak und Stephan [47] für Probleme zweiter Ordnung, die auf Systeme erster Ordnung reduziert werden, vorgestellt.

In Kapitel 5 betrachten wir ein lineares elastostatisches Problem für den Innenraum Ω und dem Außenraum Ω^C . Für das Innenraumproblem führen wir die zusätzliche Größe p als Lagrange Multiplikator durch die Nebenbedingung $\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ für das Gebiet Ω ein. Mit dem Hookschen Gesetz haben wir die Beziehung zwischen dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, der Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$ und dem Druck p durch $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - pI$.

Analog zu der Vorgehensweise in Kapitel 1 führen wir das Außenraumproblem auf den Übergangsrand Γ zurück. Für die Definition der variationellen Formulierung und der Least-Squares Formulierung führen wir für den Volumenterm einen Operator $\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) : \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ ein. Durch die Verwendung einer Distribution, die Elemente aus $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ nach $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ fortsetzt, haben wir eine alternative Darstellung des Volumenterms in der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm. \mathbf{u} , p und $\boldsymbol{\phi}$ sind als Lösungen des Problems die Minima des Funktionals. Für die zu dem Least-Squares Funktional äquivalente Bilinearform und Linearform wird in Theorem 5.2.1 und Theorem 5.2.2 die Stetigkeit und Koerzivität bewiesen. Die Existenz einer eindeutigen Lösung ist nach dem Lemma von Lax-Milgram somit gegeben.

Für die Diskretisierung der variationellen Formulierung geben wir diskrete Unterräume der Finite Element und Randelementräume an. Das diskrete Least-Squares Funktional enthält gegenüber dem kontinuierlichen weitere Terme für die Sprünge der Normalen des Spannungstensors und einen weiteren Randelementanteil, der in der $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm bestimmt werden muss. Wir zeigen für das diskrete Variationsproblem, dass die diskrete Bilinearform und die diskrete Linearform stetig und koerziv sind. Dadurch haben wir ebenfalls die Existenz von eindeutigen Lösungen \mathbf{u}_h , p_h und $\boldsymbol{\phi}_h$.

Wir beweisen für die Approximationen \mathbf{u}_h , p_h und $\boldsymbol{\phi}_h$ der exakten Lösungen \mathbf{u} , p und $\boldsymbol{\phi}$ eine a priori Fehlerabschätzung mit Hilfe der Approximationseigenschaften der Elemente

der diskreten Räume, dem Spursatz und der Definition der kontinuierlichen Bilinearform. Außerdem geben wir einen a posteriori Fehlerschätzer an, der auf der kontinuierlichen Bilinearform beruht.

Die in der diskreten Bilinearform auftretenden $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukte müssen auf dem diskreten Level realisiert werden. Wir erreichen dies durch Lösen eines zur dualen Norm äquivalenten Systems. Wir stellen Lösungsoperatoren T_h , R_h und N_h vor (siehe dazu [7], [47] und [33]), mit deren Definition wir die diskreten Normen berechnen können. Wir führen spektral äquivalente Vorkonditionierer \mathfrak{B}_h , \mathfrak{C}_h und \mathfrak{D}_h ein, die die Berechnungen weiter vereinfachen. Für die Vorkonditionierer verwenden wir die Inverse oder das Multigrid Verfahren.

Im Abschnitt 5.6 wird die Implementation des Least-Squares Verfahrens beschrieben. Die vorkonditionierte diskrete Bilinearform liefert unter Verwendung der Basisfunktionen der diskreten Unterräume eine Matrixdarstellung, woraus wir ein lineares Gleichungssystem zur Lösung der diskreten variationellen Formulierung erhalten.

Numerische Beispiele zeigen die Anwendbarkeit des Least-Squares Verfahrens für das FEM-BEM Kopplungssystem sowie für das reine FEM-Problem. Außerdem untersuchen wir unterschiedliche Vorkonditionierer für das Kopplungssystem und wenden den lokalen Fehlerindikator für eine adaptive Berechnung des FEM-Problems an.

Bei der Verwendung von Hexaeder-Elementen in einer adaptiven Verfeinerungsstrategie können bei konformen Gittern lokale Singularitäten in der Lösung nicht gut aufgelöst werden. Es entstehen durch die Gitterregularitätsbedingungen Überverfeinerungen, so dass die Anzahl der Freiheitsgrade und dadurch die Kosten für die Berechnung einer neuen angenäherten Lösung unnötig steigen. Der Einsatz erweiterter Regularitätsbedingungen an die Triangulierung durch hängende Knoten ist weit verbreitet (siehe z.B. [1, 48, 25]). In [26], [57] und [58] beschreiben Rachowicz, Oden und Demkowicz den Gebrauch von hängenden Knoten für die h - und die p -Version bei Finiten Elementen. In [25] stellen Demkowicz et al die Implementation von abhängigen Freiheitsgraden in Fortran 90 für 2D vor. Demkowicz, Pardo und Rachowicz [27] erläutern in ihrem technischen Bericht die Implementation der hängenden Knoten in 3D.

In Kapitel 6 beschreiben wir die Verwendung von hängenden Knoten bzw. abhängigen Freiheitsgraden, die zu nichtkonformen Gittern führen und präsentieren die Implementation in dem in Fortran 90 geschriebenen Programmpaket *maiprogs* (siehe [45, 43]). Die hängenden Knoten liefern eine Möglichkeit, eine bessere lokale Verfeinerung durchzuführen. Wir führen dazu eine Erweiterung der in [27] eingeführten „one-constraint-rule“ ein, bei der nur ein abhängiger Freiheitsgrad auf einer Elementkante oder Fläche zugelassen wird. Es ist möglich mehrere hängende Knoten pro Kante zuzulassen, jedoch steigt dadurch der Implementationsaufwand erheblich. Daraus entstehen neue Verfei-

nerungsregeln, die wir in Kapitel 6.3.1 für 2D Elemente (also Rechtecke) und in Kapitel 6.3.2 für Hexaeder beschreiben. Für die Implementation der abhängigen Freiheitsgrade muss eine spezielle Datenstruktur für das Gitter und die Splines bereitgestellt werden. Die Elemente der Triangulierungen werden in einer Baumstruktur angeordnet, damit die Abhängigkeiten der Elemente in der aktuellen Triangulierung jederzeit ermittelt werden können. Eine Beschreibung der dazu nötigen Routinen wird in Kapitel 6.2.3 gegeben.

Die Menge der Freiheitsgrade eines Gitters unterteilt sich disjunkt in reguläre und abhängige Freiheitsgrade. Die abhängigen Freiheitsgrade werden durch die Linearkombination von regulären Freiheitsgraden des aktuellen Gitters approximiert. In Abschnitt 6.4 stellen wir die Approximation vor und beschreiben Spezialfälle, in denen die Stetigkeit der Approximationen nicht gewährleistet ist und die Abhängigkeiten angepasst werden müssen.

Im letzten Abschnitt beschäftigen wir uns mit kantenbasierten Freiheitsgraden wie sie bei der Verwendung der Nédélec-Räume auftreten.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei Prof. Dr. E.P. Stephan für die Anregung zu dieser Arbeit und für die intensive Betreuung. Insbesondere bedanke ich mich bei PD Dr. M. Maischak für die vielen interessanten und hilfreichen mathematischen Gespräche sowie für die geduldige und gute Unterstützung bei der Programmierung.

Ich danke außerdem den Mitgliedern des Graduiertenkollegs 615 für den vielfältigen Gedankenaustausch und Diskussionen während zahlreicher Seminare, Workshops und Blockkursen.

Zum Schluß danke ich den Mitgliedern des Instituts für Angewandte Mathematik für die Unterstützung, insbesondere Herrn Dipl.-Math. F. Leydecker für die Korrektur der vorliegenden Arbeit. Ein besonderer Dank geht an meine Familie und an Frau Peggy Rohlf für die Hilfe und Unterstützung während der Promotionszeit.

Die vorliegende Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) durch ein Stipendium im Graduiertenkolleg 615 „Interaktion von Modellbildung, Numerik und Software-Konzepten für technisch-wissenschaftliche Problemstellungen“ an der Universität Hannover vom 01. Februar 2002 - 31. Januar 2005 unterstützt.

1 FEM-BEM Kopplung für ein elastisches Problem im \mathbb{R}^3

Als Modellproblem wählen wir ein elasto-statische Elastizitätsproblem. Für den Innenraum nehmen wir das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das von $\Gamma = \partial\Omega$ berandet wird. Im Innengebiet Ω betrachten wir das nichtlineare elasto-statische Elastizitätsproblem mit Hencky-Material und suchen für eine gegebene Volumenkraft $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^3$ die unbekannte Verschiebung $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, wobei die vektoriellen Sobolev-Räume fettgedruckt sind (z.B. $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^3$). Für den unbeschränkten Außenraum $\Omega^C := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ wählen wir ein homogenes lineares elasto-statisches Problem mit der Unbekannten $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega^C)$. Auf dem Transmissionsrand Γ , der die beiden Gebiete miteinander verbindet, geben wir die Sprünge $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ vor.

Wir reduzieren das Außenraumproblem mit Hilfe der Randelementmethode auf den Rand Γ und koppeln diese Randintegralformulierung über die Randbedingungen an das Innenraumproblem.

1.1 Elastische Problemstellung

Aus der Theorie der Hyperelastizität [65] haben wir die variationelle Formulierung

$$\int_{\Omega} M(\gamma(\mathbf{v})) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{F}\mathbf{v} - \int_{\Gamma} T\mathbf{v} = \min. \quad \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

mit einer zusätzlichen Randbedingung für die Verschiebung \mathbf{v} , wobei M das Funktional der gespeicherten Energie ist, \mathbf{F} die Kräfte, die auf Ω und T die Kräfte, die auf dem Rand wirken. Die Minimierung der variationellen Formulierung korrespondiert zu einem Problem der Minimierung eines Energiefunktional.

Falls $M(\gamma)$ streng konvex ist, haben wir auch die Konvexität des Energiefunktional. Daraus lässt sich die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Minimierungsproblems zeigen (siehe [65]).

1 FEM-BEM Kopplung für ein elastisches Problem im \mathbb{R}^3

Die Abbildung M definieren wir mit Hilfe einer \mathcal{C}^2 Funktion $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ und des Kompressionsmoduls k als

$$M(\gamma) := \frac{1}{2}k(\operatorname{tr} \gamma)^2 + \mu\varphi(\operatorname{dev} \gamma : \operatorname{dev} \gamma). \quad (1.1)$$

Wir bezeichnen mit $\operatorname{tr}(\gamma) := \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$ die Spur des Tensors γ . Der Deviator des Tensors ist durch

$$\operatorname{dev} \gamma := \gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \gamma$$

definiert und für Tensoren ist $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{ij} \sigma_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^T)$.

Hat die Funktion φ die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi(0) = \varphi''(0) &= 0, \\ c_1 \leq \varphi'(t) \leq 1 &\quad -c_2 \leq \varphi''(t) \leq 0, \\ \frac{1}{n} \leq \varphi'(t) + 2\varphi''(t)t &\leq n, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei $t \in \mathbb{R}^+$, $c_1, c_2 > 0$ Konstanten und $n \in \mathbb{N}$, dann können wir nach [65, Sec.62] folgern, dass die Gateaux-Ableitung M' streng monoton und Lipschitz-stetig ist. D.h. es gibt eine konvexe Funktion $\alpha : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha(t)}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha(t)}{t} = \infty, \quad \frac{\alpha(t)}{t} \text{ streng monoton,}$$

so dass

$$\int_{\Omega} (M'(\zeta) - M'(\xi)) \cdot (\zeta - \xi) \, dx \geq \alpha(\|\zeta - \xi\|) \quad (1.3)$$

gilt und zusätzlich haben wir die Lipschitz-Stetigkeit

$$\int_{\Omega} (M'(\zeta) - M'(\xi)) \cdot \varrho \, dx \leq C \|\zeta - \xi\| \|\varrho\|.$$

Zum Beispiel ist $\varphi(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{(1+t)})$ für $t > 0$ eine Funktion, die die Bedingungen in (1.2) erfüllt.

Aus dem konstitutiven Gesetz folgt die Definition des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} = M'(\gamma)$, wobei $M : L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{symm}}^{3 \times 3}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion der gespeicherten Energie ist.

In diesem Abschnitt betrachten wir für M das nichtlineare Hencky-Material. Dafür setzen wir für $\gamma = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ den symmetrischen Verzerrungstensor ($\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_i})$) in (1.1) ein und erhalten das nichtlineare Hookesche Gesetz mit der Beziehung zwischen Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = M'(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \left(k - \frac{2}{3}\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u}))\right) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) I + 2\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u}))\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad (1.4)$$

mit $\Pi(\mathbf{u}) := \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$, wobei der Kompressionsmodul k und μ definiert sind durch den E-Modul $E > 0$, die Poissonzahl $0 < \nu \leq \frac{1}{2}$ und der Lamé Variablen λ

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = k - \frac{2}{3}\mu; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Im Innengebiet Ω betrachten wir zu gegebener Volumenkraft \mathbf{F} die Gleichgewichtsbedingung für das nichtlineare Hencky-Material

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) = \mathbf{F},$$

wobei der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ definiert ist als

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}_1) = \left(k - \frac{2}{3}\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u}_1))\right)\delta_{ij}\operatorname{div} \mathbf{u}_1 + 2\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u}_1))\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}_1).$$

Die Funktion $\varphi(\Pi(\mathbf{u}_1))$ erfüllt die Bedingungen in (1.2) und somit haben wir die strenge Monotonie und die Lipschitz-Stetigkeit von $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1)$.

Im Außengebiet Ω^C haben wir lineares Materialverhalten. Wir benutzen hierfür den Spezialfall $\varphi(t) = t$ in (1.1) und erhalten daraus für den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2)$ die klassische Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}_2) = \lambda_2\delta_{ij}\operatorname{div} \mathbf{u}_2 + 2\mu_2\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}_2)$$

mit den Lamé-Konstanten λ_2 und $\mu_2 > 0$ unter der Bedingung $3\lambda_2 + 2\mu_2 > 0$.

Mit den gegebenen Transmissionsbedingungen $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und einer Abklingbedingung im Unendlichen (1.9) für \mathbf{u}_2 ergibt sich nun folgendes Übergangsproblem

Transmissionsproblem

Finde $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega^C)$ mit $(l = 1, 2, 3)$

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(k - \frac{2}{3}\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u}_1)) \right) \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \sum_{j=1}^3 2\mu \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi'(\Pi(\mathbf{u}_1)) \boldsymbol{\varepsilon}_{lj}(\mathbf{u}_1) = F_l \quad \text{in } \Omega \quad (1.5)$$

$$-\mu_2 \Delta \mathbf{u}_2 - (\lambda_2 + \mu_2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{in } \Omega^C \quad (1.6)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} = T(\partial_x, \mathbf{n}) \mathbf{u}_2 + \mathbf{t}_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (1.9)$$

Die Normalspannung auf dem Transmissionsrand Γ ist gegeben durch

$$T(\partial_x, \mathbf{n}) \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 + 2\mu_2 \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{n}} + \mu_2 (\mathbf{n} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}_2). \quad (1.10)$$

1 FEM-BEM Kopplung für ein elastisches Problem im \mathbb{R}^3

Die Außenraumlösung lässt sich mit der Somigliana Darstellungsformel auf dem Rand repräsentieren

$$\mathbf{u}_2(x) = \int_{\Gamma} \{T(\partial_y, \mathbf{n})\Gamma(x-y)^T \mathbf{u}_2(y) - \Gamma(x-y)T(\partial_y, \mathbf{n})\mathbf{u}_2(y)\} dS_y \quad x \in \Omega^C, \quad (1.11)$$

wobei $\Gamma(x-y)$ die Fundamentallösung (Kelvin-Matrix)

$$\Gamma_{ij}(x-y) = \frac{1}{8\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} \left((\lambda_2 + 3\mu_2) \frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + (\lambda_2 + \mu_2) \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3} \right) \quad (1.12)$$

für das homogene linear elastische Außenraumproblem (1.6) ist. Unter Berücksichtigung der Darstellungsformel (1.11), der Normalenableitung der Darstellungsformel und den bekannten Sprungrelationen für die Integraloperatoren beim Übergang von $x \in \Omega^C$ nach $x \in \Gamma$ erhalten wir die folgende symmetrische Kopplung der Finiten Elemente und Randelemente, wobei wir $T(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2$ durch $\boldsymbol{\phi}$ ersetzen ($\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}_0$)

FEM-BEM Kopplungsformulierung

Für gegebenes $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit:

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{F} \quad \text{in } \Omega \quad (1.13)$$

$$2\boldsymbol{\phi} = -W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + (I - K')\boldsymbol{\phi} \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.14)$$

$$0 = (I - K)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + V\boldsymbol{\phi} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (1.15)$$

Wir benutzen dabei die folgenden Integraloperatoren für $x \in \Gamma$

$$V\boldsymbol{\phi}(x) = \int_{\Gamma} \Gamma(x-y)\boldsymbol{\phi}(y) dS_y, \quad \text{Einfachschichtpotential} \quad (1.16)$$

$$K\mathbf{v}(x) = \int_{\Gamma} T(\partial_y, \mathbf{n})\Gamma(x-y)^T \mathbf{v}(y) dS_y, \quad \text{Doppelschichtpotential} \quad (1.17)$$

$$K'\boldsymbol{\phi}(x) = T(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} \Gamma(x-y)^T \boldsymbol{\phi}(y) dS_y, \quad \text{adj. Doppelschichtpotential} \quad (1.18)$$

$$W\mathbf{v}(x) = -T(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} T(\partial_y, \mathbf{n})\Gamma(x-y)^T \mathbf{v}(y) dS_y, \quad \text{hypersingulärer Operator} \quad (1.19)$$

mit den Abbildungseigenschaften (siehe [21])

$$V : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \text{stetig, symmetrisch, positiv definit} \quad (1.20)$$

$$K : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \quad \text{stetig} \quad (1.21)$$

$$K' : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{stetig} \quad (1.22)$$

$$W : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{stetig, symmetrisch, positiv semi-definit.} \quad (1.23)$$

Gleichung (1.15) ist wegen der positiven Definitheit des Einfeldschichtpotentials äquivalent zu

$$\boldsymbol{\phi} = -V^{-1}(I - K)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0).$$

Dies eingesetzt in (1.14) ergibt

$$\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}[-W - (I - K')V^{-1}(I - K)](\mathbf{u} - \mathbf{u}_0).$$

Falls wir $\mathbf{u}_0 = 0$ setzen haben wir die klassische Definition des Poincaré-Steklov Operators $T(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\phi} = -S\mathbf{u}$ mit

$$S := W + (I - K')V^{-1}(I - K) : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma). \quad (1.24)$$

In [14] wird gezeigt, dass der Poincaré-Steklov Operator linear, symmetrisch und positiv definit ist.

1.2 Variationelle Formulierung

Für die variationelle Formulierung multiplizieren wir zunächst die Gleichgewichtsbedingung (1.13) für das Innenraumproblem mit einer Testfunktion $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, integrieren über das Gebiet Ω , nutzen die Symmetrie des Spannungstensors aus, wenden die Greenschen Formeln an und erhalten

$$\underbrace{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx}_{=: A(\mathbf{u}, \mathbf{v})} - \underbrace{\int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, \mathbf{v} \, ds}_{=: \langle \boldsymbol{\phi} + \mathbf{t}_0, \mathbf{v} \rangle} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \mathbf{v} \, dx \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Multiplizieren wir nun die Randintegralgleichungen (1.14) und (1.15) mit den Testfunktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, schränken \mathbf{v} auf Γ ein und integrieren über den Rand Γ , so bekommen wir insgesamt die variationelle Formulierung der Kopplungsgleichungen (1.13)-(1.15)

Finde $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) = L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (1.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx + \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}|_{\Gamma} + (K' - I) \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}, V \boldsymbol{\phi} + (I - K) \mathbf{u}|_{\Gamma} \rangle \\ &= A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}|_{\Gamma} + (K' - I) \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}, V \boldsymbol{\phi} + (I - K) \mathbf{u}|_{\Gamma} \rangle \end{aligned}$$

und

$$L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) := \int_{\Omega} \mathbf{F}\mathbf{v} \, dx + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}, (I - K)\mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2}W\mathbf{u}_0, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle.$$

Mit Hilfe des Poincaré-Steklov Operators (1.24) lässt sich $B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}))$ durch die Elimination von $\boldsymbol{\phi}$ alternativ auch beschreiben als $B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle S\mathbf{u}|_{\Gamma}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle$.

Als ein Ergebnis aus [24] haben wir, dass das Transmissionsproblem und das Kopplungsproblem äquivalent sind. D.h., falls $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ Lösung des Transmissionsproblems (1.5)-(1.9) ist, dann ist $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$ auch Lösung des Problems (1.13)-(1.15) und umgekehrt.

Mit Hilfe der Kornschen Ungleichung haben wir die Äquivalenz der Normen

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}|_{\Gamma}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \sim \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}.$$

Für den Beweis des folgenden Theorems benötigen wir die Definitionen

$$\boldsymbol{\eta} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2}V^{-1}(I - K)\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad \boldsymbol{\delta} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi} + \frac{1}{2}V^{-1}(I - K)\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

$\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\delta}$ können wir mit Hilfe von Gleichung (1.15) als Residuen auffassen.

Theorem 1.2.1 *Es gibt eine Konstante c_0 , so dass für alle $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ gilt*

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + c_0(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)})^2 \\ \leq B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})) - B((\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})), \end{aligned} \quad (1.26)$$

wobei α durch die Monotonie des nichtlinearen Operators definiert ist (siehe (1.3)).

Beweis. Mit der Definition von $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\delta}$ und der positiven Definitheit des Poincaré-Steklov Operators und des Einfachschichtpotentials und der Definitheit des hypersingulären Operators sowie der Monotonie des nichtlinearen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ haben wir

$$\begin{aligned} B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})) - B((\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}), (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})) \\ = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dx + \frac{1}{2} \langle W(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta}, V(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}) + (I - K)(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \rangle \\ = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \, dx + \frac{1}{4} \langle W(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{4} \langle S(\mathbf{u} - \mathbf{v}), \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle \\ + \frac{1}{4} \langle V(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi} \rangle \\ \geq \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u} - \mathbf{v})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + c_1 \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + c_2 \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

mit Konstanten $c_1, c_2 > 0$. □

Bemerkung 1.2.1 *Haben wir, dass $M'(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$ eine lineare Abbildung ist (z.B. ist dies der Fall für $\varphi(t) = t$ siehe 1.2), erhalten wir als direkte Konsequenz aus Theorem 1.2.1, dass die Bilinearform $B(\cdot, \cdot)$ der Babuška-Brezzi-Ladyshenskaya-Bedingung genügt. Für den linearen Fall können wir dann mit Hilfe des Theorems 1.2.1 und der Stetigkeit der Bilinearform mittels des Lax-Milgram Lemmas die eindeutige Lösbarkeit des Transmissionsproblems (1.5)-(1.9) schließen.*

Für ein nichtlineares Problem müssen wir für die Lösbarkeit die strenge Konvexität von M' zeigen (siehe [65]).

1.3 Diskrete Formulierung

Für die Diskretisierung der variationellen Formulierung (1.25) definieren wir endlich dimensionale Unterräume der verwendeten Sobolev-Räume.

Sei hierzu $V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $H_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Wir können nun die diskrete Variante der variationellen Formulierung (1.25) angeben

Finde $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in V_h \times H_h$ mit

$$B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)) = L(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in V_h \times H_h, \quad (1.27)$$

wobei die diskrete Bilinearform durch

$$\begin{aligned} B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h)) := & A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}_h|_{\Gamma} + (K' - I) \boldsymbol{\phi}_h, \mathbf{v}_h|_{\Gamma} \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}_h, V \boldsymbol{\phi}_h + (I - K) \mathbf{u}_h|_{\Gamma} \rangle \end{aligned}$$

und die diskrete Linearform

$$L(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) := \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_h \, dx + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}_h, (I - K) \mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2} W \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_h|_{\Gamma} \rangle.$$

dem kontinuierlichen Fall entsprechend gegeben sind.

Die Randintegraloperatoren werden mit Hilfe der folgenden Einbettungen i_h und j_h , ihren Dualen i_h^* und j_h^* sowie dem Spuroperator γ und seinem dualen Operator γ^* diskretisiert

$$\begin{aligned} i_h : V_h &\hookrightarrow \mathbf{H}^1(\Omega) & i_h^* : (\mathbf{H}^1(\Omega))^* &\hookrightarrow (V_h)^* \\ j_h : H_h &\hookrightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) & j_h^* : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) &\hookrightarrow (H_h)^* \\ \gamma : \mathbf{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) & \gamma^* : (\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma))^* &\rightarrow (\mathbf{H}^1(\Omega))^*. \end{aligned}$$

Für die diskreten Integraloperatoren haben wir dann folgende Darstellung

$$V_h := j_h^* V j_h : H_h \rightarrow (H_h)^* \quad (1.28)$$

$$K_h := j_h^* K \gamma i_h : V_h \rightarrow (H_h)^* \quad (1.29)$$

$$K_h' := i_h^* \gamma^* K' j_h : H_h \rightarrow (V_h)^* \quad (1.30)$$

$$W_h := i_h^* \gamma^* W \gamma i_h : V_h \rightarrow (V_h)^* \quad (1.31)$$

$$I_h := j_h^* \gamma i_h : V_h \rightarrow (H_h)^* \quad (1.32)$$

$$I_h^* := i_h^* \gamma^* j_h : H_h \rightarrow (V_h)^* \quad (1.33)$$

Der diskrete Poincaré-Steklov Operator $S_h : V_h \rightarrow (V_h)^*$ wird durch

$$\begin{aligned} S_h &:= i_h^* \gamma^* W \gamma i_h + i_h^* \gamma^* (I - K') j_h (j_h^* V j_h)^{-1} j_h^* (I - K) \gamma i_h \\ &= W_h + (I_h^* - K_h') V_h^{-1} (I_h - K_h) \end{aligned} \quad (1.34)$$

definiert. In [19] wurde gezeigt, dass der diskrete Poincaré-Steklov Operator positiv definit ist.

Mit den Definitionen der diskreten Unterräume $V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $H_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ sowie der Definition des diskreten Poincaré-Steklov Operators haben wir analog zu dem obigen Theorem 1.2.1

Theorem 1.3.1 *Es gibt eine Konstante c_0 , so dass für alle $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h) \in V_h \times H_h$ mit $\boldsymbol{\eta}_h := \frac{1}{2} \boldsymbol{\phi}_h + \frac{1}{2} V_h^{-1} (I_h - K_h) \mathbf{u}_h$ $\boldsymbol{\delta}_h := \frac{1}{2} \boldsymbol{\psi}_h + \frac{1}{2} V_h^{-1} (I_h - K_h) \mathbf{v}_h$ gilt*

$$\begin{aligned} &\alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{u}_h - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + c_0(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi}_h - \boldsymbol{\psi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)})^2 \\ &\leq B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h - \boldsymbol{\delta}_h)) - B((\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\psi}_h), (\mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h - \boldsymbol{\delta}_h)). \end{aligned} \quad (1.35)$$

Beweis. Der Beweis des Theorems lässt sich durch offensichtliche Modifikationen auf den Beweis des Theorems 1.2.1 zurückführen. \square

Analog zu dem kontinuierlichen Fall haben wir durch das Theorem 1.3.1 für ein lineares Problem den Nachweis der diskreten Babuška-Brezzi-Ladyschenskaya-Bedingung.

2 Residualer Fehlerschätzer

2.1 A posteriori Fehlerschätzer

In diesem Kapitel stellen wir unter gewissen Voraussetzungen an das Gitter einen residualen Fehlerschätzer für das in Kapitel 1 vorgestellte FEM-BEM Kopplungsproblem vor. Diesen Fehlerschätzer benutzen wir in unseren numerischen Beispielen als Steuerungsgröße eines adaptiven Verfeinerungsalgorithmus. Zunächst stellen wir folgende Annahme an das Gitter

Annahme 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit polyhedralen Rand Γ und h bezeichne die Gitterweite. $\mathcal{T}_h := \{T_1, \dots, T_N\}$ sei eine Triangulierung des Gebiets in Tetraeder- oder Hexaederelementen. Die Triangulierung heißt regulär, falls

- $\bigcup_{i=1}^N T_i = \bar{\Omega}$
- der Durchschnitt zweier Elemente entweder leer, ein Eckpunkt, eine ganze Kante oder eine ganze Seitenfläche ist
- bei Tetraedern sind die Innenwinkel der Elemente durch eine Konstante nach unten beschränkt; bei Hexaedern sind die Seitenverhältnisse beschränkt.

Das Gitter auf dem Rand Γ wird durch Bildung des Spurgitters der inneren Triangulierung \mathcal{T}_h erzeugt. D.h., die Seitenflächen der Elemente T_i , die auf dem Rand Γ liegen, bilden das Gitter auf der Oberfläche unseres Gebiets. Das Randelementgitter wird also durch das Finite Element Gitter induziert.

Definition 2.1.1 Sei \mathcal{S}_h die Menge der inneren Seitenflächen

$$\mathcal{S}_h := \{\partial T_i \cap \partial T_j : i \neq j \text{ mit } \partial T_i \cap \partial T_j \text{ ist gemeinsame Seitenfläche}\}$$

und Γ_h bezeichne die Menge aller Seitenflächen, die auf dem Rand Γ liegen

$$\Gamma_h := \{\partial T_i \cap \Gamma \neq \emptyset\}.$$

2 Residualer Fehlerschätzer

Auf einer Triangulierung \mathcal{T}_h bezeichnen wir mit h_T die Elementgröße der Elemente im Gebiet Ω , also $h_T := \text{diam}(T)$ für $T \in \mathcal{T}_h$. $h_{F_e} := \text{diam}(F_e)$ für $F_e \in \mathcal{S}_h$ sei die Größe der inneren Seitenflächen und $h_{F_i} := \text{diam}(F_i)$ für $F_i \in \Gamma_h$ die Größe der Flächen auf dem Rand.

Für den residualen Fehlerschätzer definieren wir die diskreten Räume V_h und H_h wie folgt

$$\begin{aligned} V_h &:= \{p_h \in C(\Omega) : p_h|_{T_i} \in \mathcal{P}_1 \text{ für alle } T_i \in \mathcal{T}_h\}, \\ H_h &:= \{p_h \in L^\infty(\Omega) : p_h|_E \in \mathcal{P}_0 \text{ für alle } E \in \Gamma_h\}, \end{aligned}$$

wobei V_h der Raum der stückweise linearen Funktionen auf den Elementen T_i und H_h der Raum der stückweise konstanten Funktionen auf den Randelementen ist. \mathcal{P}_i bezeichne den Raum der Polynome vom Grad $\leq i$.

Sei \mathbf{n} die äußere Normale auf dem Rand Γ und auf den Elementseitenflächen. Die Richtung der Normalen \mathbf{n} sei fixiert, so dass $[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]$ den Sprung der Normalenableitung (hier also die Randspannung) auf den inneren Seitenflächen $F_i \in \mathcal{S}_h$ bezeichnet. Es sei $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ und $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ gegeben.

Wir definieren die einzelnen Anteile des Fehlerschätzers durch

$$R_1^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{F} + \text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \quad (2.1)$$

$$R_2^2 := \sum_{F_i \in \mathcal{S}_h} h_{F_i} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F_i)}^2 \quad (2.2)$$

$$R_3^2 := \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - \frac{1}{2}(K' - I)\boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{L}^2(F_e)}^2 \quad (2.3)$$

$$R_4^2 := \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\nabla_\Gamma \{(I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - V\boldsymbol{\phi}_h\}\|_{L^2(F_e)}^2. \quad (2.4)$$

Mit diesen Termen können wir nun eine a posteriori Fehlerabschätzung analog zu dem zweidimensionalen Fall in [17] formulieren, wobei $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$ die Lösung des Problems (1.5)-(1.9) und $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$ die Lösung des diskreten Problems (1.27) darstellen. Wir benutzen den Fehlerschätzer später in einem adaptiven Algorithmus (siehe Kap. 2.2) elementweise zur Steuerung der adaptiven Verfeinerung der Triangulierung \mathcal{T}_h .

Theorem 2.1.2 *Sei $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$ die Lösung des Problems (1.5)-(1.9) und sei $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h)$ die Lösung des diskreten Problems (1.27). Dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$, unabhängig von der Gitterweite h , so dass gilt*

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4). \quad (2.5)$$

Beweis. Analog zu [17], wo der 2D Fall betrachtet wird, zeigen wir für den Beweis des Theorems zunächst, dass die Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|^2 \\ \leq \alpha^*(c(R_1 + R_2 + R_3)) + c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

gilt. Dabei ist α die streng monotone, konvexe Funktion aus (1.3) und α^* ist definiert als duale zu α

$$\alpha^*(s) := \sup_{t>0} (st - \alpha(t))$$

für $s > 0$.

Wir beginnen mit der Anwendung des Theorems 1.2.1 auf $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})$ und $(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit $\boldsymbol{\eta} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi} + \frac{1}{2}V^{-1}(I - K)\mathbf{u}$ und $\boldsymbol{\delta} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_h + \frac{1}{2}V^{-1}(I - K)\mathbf{u}_h$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \beta\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\ \leq B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})) - B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Wir haben für alle $\mathbf{e}_h \in V_h$ und $\boldsymbol{\rho}_h \in H_h$ nach Subtraktion der variationellen und der diskreten Formulierung, die Galerkin-Orthogonalität

$$B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho}_h)) = 0.$$

Sei nun $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ und $\boldsymbol{\rho} := \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h) + \frac{1}{2}V^{-1}(\frac{1}{2} - K)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$. Setzen wir in (2.7) die Galerkin-Orthogonalität ein und nutzen die Definition der variationellen Formulierung, so erhalten wir für die rechte Seite in (2.7) mit $(\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho}_h) \in V_h \times H_h$

$$\begin{aligned} B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e}, \boldsymbol{\rho})) \\ = B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e}, \boldsymbol{\rho})) - B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho}_h)) \\ = B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h)) \\ = L(\mathbf{e} - \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h) - B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h, \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h)) \\ = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx \\ + \frac{1}{2} \langle W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) + 2\mathbf{t}_0 + (K' - I)\boldsymbol{\phi}_h, \mathbf{e} - \mathbf{e}_h \rangle \\ + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h, (I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}) - V\boldsymbol{\phi}_h \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Mit der Anwendung der Greenschen Formel und der Zerlegung des Gebietes Ω und des Randes Γ können haben wir für den Anteil des Spannungstensors im Volumenintegral

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx \\ + \sum_{F_i \in \mathcal{S}_h^0} \int_{F_i} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, ds + \sum_{F_i \in \Gamma_h} \int_{F_i} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, ds. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in die Gleichung (2.8) ein und ersetzen damit die rechte Seite in (2.7), ergibt sich letztendlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \beta\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|^2 \leq & \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T (\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx \\ & - \sum_{F \in \mathcal{S}_h^0} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, ds \\ & + \frac{1}{2} \langle 2\mathbf{t}_0 - 2\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) + (K' - I)\boldsymbol{\phi}_h, (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h, (I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - V\boldsymbol{\phi}_h \rangle. \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung können wir die Anteile T_1, \dots, T_4 separieren

$$T_1 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx \quad (2.9)$$

$$T_2 := \sum_{F \in \mathcal{S}_h^0} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, ds \quad (2.10)$$

$$T_3 := \frac{1}{2} \langle 2\mathbf{t}_0 - 2\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - (K' - I)\boldsymbol{\phi}_h, \mathbf{e} - \mathbf{e}_h \rangle \quad (2.11)$$

$$T_4 := \langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h, (I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - V\boldsymbol{\phi}_h \rangle \quad (2.12)$$

Für den Beweis der Behauptung müssen wir nun zeigen, dass wir die Anteile T_1, \dots, T_4 nach oben durch R_1, \dots, R_4 abschätzen können.

Zunächst führen wir Interpolationsoperatoren ein, die globale Funktionen $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ auf der vorhandenen Triangulierung des Gebiets approximieren. Mit Hilfe der Regularitätsannahmen an die Triangulierung \mathcal{T}_h (siehe Ann. 1) können wir die Ergebnisse aus [20] benutzen und definieren einen Clément-Approximationsoperator, der uns die gewünschte Abschätzung liefert.

Sei $I_h : \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow H_h$ eine Familie von Approximationsoperatoren. Wir haben für alle Elemente der Triangulierung $T \in \mathcal{T}_h$ die Nachbarschaft des Elements $N_T := \bigcup\{T' \in \mathcal{T}_h : T' \cap T \neq \emptyset\}$. Dann gilt mit $0 \leq k \leq q \leq 2$

$$|I_h \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{\mathbf{H}^k(T)}^2 \leq c h_T^{2(q-k)} |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^q(N_T)}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^q(N_T). \quad (2.13)$$

Mit den gleichen Regularitätsannahmen können wir nun auch eine Abschätzung der L^2 -Norm über einer Fläche F durch die Berechnung von Normen über dem Element T gewinnen.

Nach [20, Lemma 4] gilt für eine Fläche F von $T \in \mathcal{T}_h$ und jedes $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(T)$

$$h_T \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \leq c (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + h_T^2 |\mathbf{u}|_{\mathbf{H}^1(T)}^2). \quad (2.14)$$

Für die Beweise der einzelnen Anteile (2.9)-(2.12) setzen wir $\mathbf{e}_h := I_h \mathbf{e} \in H_h$ und es sei $\boldsymbol{\rho}_h \in \mathbf{H}_h^{1/2}$ beliebig.

Für den Anteil T_1 benutzen wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung und wenden die Interpolationsabschätzung (2.13) mit $k = 0$ und $q = 1$ auf $\mathbf{e} - \mathbf{e}_h = \mathbf{e} - I_h \mathbf{e}$ an.

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T (\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, dx \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} \|\mathbf{e} - I_h \mathbf{e}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \\ &\leq c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} h_T |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(T)}. \end{aligned}$$

Nach der Regularitätsannahme 1 an die Triangulierungen des Gebietes Ω sind die Winkel der Elemente im Gitter beschränkt, daher ist die Anzahl der Nachbarelemente in der Nachbarschaft N_T auch beschränkt. Damit ergibt sich eine Abschätzung für T_1 durch den Anteil R_1 , der in (2.1) definiert wurde

$$T_1 \leq c |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\| = c |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} R_1. \quad (2.15)$$

Für den zweiten Teil T_2 aus (2.10) nutzen wir die Abschätzungen für die Interpolationsoperatoren auf den Elementen und auf den Elementseitenflächen. Wir haben zunächst

$$T_2 = \sum_F \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n})] (\mathbf{e} - \mathbf{e}_h) \, ds \leq \sum_F \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n})]\|_{\mathbf{L}^2(F)} \|(\mathbf{e} - I_h \mathbf{e})\|_{\mathbf{L}^2(F)}.$$

Um die rechte Seite durch den Anteil R_2 abzuschätzen, betrachten wir $\|(\mathbf{e} - I_h \mathbf{e})\|_{\mathbf{L}^2(F)}$, verwenden die Abschätzung (2.14) und ersetzen dabei $\mathbf{u} := \mathbf{e} - I_h \mathbf{e}$. Anschließend benutzen wir die Clément-Interpolation (2.13) für Elemente der Triangulierung für die \mathbf{L}^2 -Norm (mit $k = 0$, $q = 1$) und die $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -Seminorm (mit $k = 1$, $q = 1$) und erhalten

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e} - I_h \mathbf{e}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 &\leq \frac{c}{h_T} (\|\mathbf{e} - I_h \mathbf{e}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + h_T^2 |\mathbf{e} - I_h \mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(T)}^2) \\ &\leq \frac{c}{h_T} (ch_T^2 |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(N_T)}^2 + h_T^2 c |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(N_T)}^2) \\ &\leq ch_T |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(N_T)}^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Abschätzung von T_2 unter der Berücksichtigung, dass wegen der Regularität des Gitters die Anzahl der Nachbarn pro Element beschränkt ist

$$T_2 \leq c |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sum_F \sqrt{h_T} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)} = c |\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} R_2. \quad (2.16)$$

Für den dritten Teil T_3 betrachten wir zunächst die Definitionen der Funktionen, Approximationen und die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren, damit wir die duale Paarung in (2.11) durch die \mathbf{L}^2 -Norm auf dem Rand Γ abschätzen können.

Nach Voraussetzung ist $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Mit der Abbildungseigenschaft des hypersingulären Integraloperators $W : \mathbf{H}^{1/2+\epsilon}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2+\epsilon}(\Gamma)$ (siehe [21]) und der Voraussetzung, dass $(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h)|_\Gamma \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ ist $W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Mit der Abbildungseigenschaft des adjungierten Doppelschichtpotentials ist auch $(K' - I)\phi_h \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$. Für stückweise lineare Funktionen auf den Elementen ist $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, da $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)$ stückweise konstant ist. Wir wenden wie im obigen Fall für T_2 analog die Interpolationsergebnisse (2.13) und (2.14) auf $\|\mathbf{e} - \mathbf{e}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}$ an, bzgl. den Seitenflächen der Triangulierung \mathcal{T}_h , die auf dem Rand Γ liegen.

$$\begin{aligned} T_3 &= \langle \mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - (K' - I)\phi_h, \mathbf{e} - \mathbf{e}_h \rangle \\ &\leq \|\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - (K' - I)\phi_h\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \|\mathbf{e} - \mathbf{e}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ &\leq c|\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sqrt{h_T} \|\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - (K' - I)\phi_h\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ &= c|\mathbf{e}|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} R_3. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Für den letzten Anteil T_4 setzen wir $\boldsymbol{\psi} := (I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - V\phi_h$. Dann haben wir für alle $\boldsymbol{\rho}_h \in H_h$

$$\begin{aligned} T_4 &= \langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h, (I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - V\phi_h \rangle \\ &= \langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h, \boldsymbol{\psi} \rangle \\ &\leq \|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Mit einer Zerlegung der Eins auf dem Rand Γ und der Einbettung $\mathbf{H}^1(\Gamma) \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ können wir Theorem 3.2 aus [18] auf $\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$ anwenden. Sei $h_\Gamma := h_{\Gamma_j}$ für $\Gamma_j \in \Gamma_h$

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \leq C \sum_{j=1}^N \sqrt{h_\Gamma} \|\nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Gamma_j)}.$$

Sei nun $\boldsymbol{\rho}_h = 0$. Mit der Stetigkeit von $\boldsymbol{\eta}$ erhalten wir nun die gewünschte Abschätzung mit R_4 aus (2.4)

$$\begin{aligned} T_4 &\leq \|\boldsymbol{\rho}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq c(\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \sum_{j=1}^N \sqrt{h_\Gamma} \|\nabla_\Gamma \boldsymbol{\psi}\|_{L^2(\Gamma_j)} \\ &\leq c(\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \sum_{j=1}^N \sqrt{h_\Gamma} \|\nabla_\Gamma ((I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h) - V\phi_h)\|_{L^2(\Gamma_j)} \\ &= c(\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) R_4 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Setzen wir die Abschätzungen (2.15), (2.16), (2.17) und (2.18) für die einzelnen Teile T_1, \dots, T_4 zusammen, haben wir

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|^2 &\leq T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \\ &\leq c(R_1 + R_2 + R_3)\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + cR_4\|(\mathbf{e}, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Die Normäquivalenz von $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$ zu $|\cdot|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ liefert

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|^2 \\ \leq c(R_1 + R_2 + R_3)\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ + c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)\|(\mathbf{e}, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Nutzen wir $ts \leq \frac{1}{2}\alpha(t) + \frac{1}{2}\alpha^*(2s)$ für $t = \|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{e}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ und für $s = c(R_1 + R_2 + R_3)$ sowie das Standardargument $pq \leq \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2$ für $p = c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$ und $q = \|(\mathbf{e}, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$, so bekommen wir die gewünschte Abschätzung (2.6)

$$\begin{aligned} \alpha(\|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}) + \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|^2 \\ \leq \alpha^*(c(R_1 + R_2 + R_3)) + c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)^2. \end{aligned}$$

Um unser Theorem zu beweisen, müssen wir nur noch α und α^* betrachten. Wir haben nach den Annahmen an die nichtlineare Funktion, dass M' uniform monoton ist. Daher existiert eine Konstante $\tilde{\alpha} > 0$ mit

$$\int_{\Omega} (M'(\zeta) - M'(\xi))(\zeta - \xi) \geq \tilde{\alpha} \int_{\Omega} (\zeta - \xi)(\zeta - \xi).$$

Es folgt, dass $\alpha(t) = \tilde{\alpha}t^2$ (siehe (1.3)) und daraus $\alpha^*(s) = \frac{s^2}{4\tilde{\alpha}}$. Mit der Normäquivalenz erhalten wir nun die Abschätzung 2.5

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4),$$

womit das Theorem bewiesen ist. □

2.1.1 Effizienz des Fehlerschätzers

Für den Beweis der Effizienz des Fehlerschätzers (2.5) gehen wir ähnlich vor wie in [16], wo die FEM-BEM Kopplung für Laplace-Probleme im 2D Fall untersucht wird und benutzen die Resultate aus [62].

Für den Beweis des Lemmas 2.1.1 benötigen wir eine Darstellung des Referenz-Würfels $\hat{K} := [0, 1]^3$ oder eines Referenz-Simplexes $\hat{K} := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$ in Baryzentrischen Koordinaten $\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_4$.

2 Residualer Fehlerschätzer

Wir betrachten den Referenz-Simplex im \mathbb{R}^3 und bezeichnen dessen Eckpunkte mit

$$\hat{z}_1 := (1, 0, 0)^T; \quad \hat{z}_2 := (0, 1, 0)^T; \quad \hat{z}_3 := (0, 0, 1)^T; \quad \hat{z}_4 := (0, 0, 0)^T.$$

Die Mittelpunkte der Kanten definieren wir durch

$$\hat{z}_{i,j} := \frac{1}{2}(\hat{z}_i + \hat{z}_j), \quad 1 \leq i < j \leq 4,$$

die Flächenmittelpunkte

$$\hat{z}_{i,j,k} := \frac{1}{3}(\hat{z}_i + \hat{z}_j + \hat{z}_k), \quad 1 \leq i < j < k \leq 4$$

und den inneren Mittelpunkt durch

$$\hat{z}_{1234} := \frac{1}{4}(\hat{z}_1 + \hat{z}_2 + \hat{z}_3 + \hat{z}_4) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Die Baryzentrischen Koordinaten $\hat{\lambda}_1 \dots \hat{\lambda}_4$ sind als Funktionen durch

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_i(x) &:= x_i \quad 1 \leq i \leq 3 \\ \hat{\lambda}_4(x) &:= 1 - \sum_{i=1}^3 x_i \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft $\hat{\lambda}(\hat{z}_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 4$ definiert.

Auf dem Referenz-Simplex betrachten wir die Volumenfunktion \hat{b}_T und die Flächenfunktionen \hat{b}_F mit

$$\hat{b}_T := 256 \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 \hat{\lambda}_4 = x_1 x_2 x_3 (1 - x_1 - x_2 - x_3) \quad (2.19)$$

$$\hat{b}_F := 27 \hat{\lambda}_i \hat{\lambda}_j \hat{\lambda}_k. \quad (2.20)$$

\hat{b}_T hat die Eigenschaften

$$\hat{b}_T(\hat{z}_{1234}) = 1, \quad \hat{b}_T(\hat{z}_{ijk}) = 0, \quad \hat{b}_T(\hat{z}_{ij}) = 0, \quad \hat{b}_T(\hat{z}_i) = 0,$$

dass sie im Inneren existiert und auf dem Rand verschwindet. Für die Flächenfunktionen haben wir analog

$$\hat{b}_F(\hat{z}_{lmn}) = \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn}, \quad \hat{b}_F(\hat{z}_{lm}) = 0, \quad \hat{b}_F(\hat{z}_i) = 0.$$

Wir definieren für $T \in \mathcal{T}_h$ durch

$$\omega_F := \bigcup_{F \in \mathcal{F}(T')} T'$$

die Menge der Elemente, die die gleiche Seitenfläche haben.

Seien nun $\lambda_{T,1}, \lambda_{T,2}, \lambda_{T,3}, \lambda_{T,4}$ die Baryzentrischen Koordinaten des Elements $T \in \mathcal{T}_h$. Wir haben die Volumenfunktion auf T gegeben durch

$$b_T := \begin{cases} 256\lambda_{T,1}\lambda_{T,2}\lambda_{T,3}\lambda_{T,4} & \text{in } T \\ 0 & \text{auf } \Omega \setminus T. \end{cases} \quad (2.21)$$

b_T hat die oben beschriebenen Eigenschaften. Die Funktion auf den Seitenflächen F der Elemente $\omega_F = T_1 \cup T_2$ ist gegeben durch

$$b_F := \begin{cases} 27\lambda_{T_l,i}\lambda_{T_l,j}\lambda_{T_l,k} & \text{auf } T_l; \ (l = 1, 2) \\ 0 & \text{auf } \Omega \setminus \omega_F. \end{cases} \quad (2.22)$$

Für ein Element $T \in \mathcal{T}_h$ und eine Seitenfläche F haben wir für das Volumen des Elements $|T|$ und die Fläche $|F|$ von F die Eigenschaften

$$\int_T b_T = \frac{32}{105}|T|; \quad \int_F b_F = \frac{9}{20}|F|. \quad (2.23)$$

Für den Beweis der Effizienz benötigen wir zunächst das folgende Lemma

Lemma 2.1.1 *Sei $\mathbf{u}_h \in V_h$ stückweise linear. Dann ist $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)$ konstant und gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt:*

$$\eta_h(T)^2 \leq \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{N}(T))}^2 + \|h_T(\mathbf{F} - \mathbf{F}_T)\|_{\mathbf{L}^2(\mathcal{N}(T))}^2 + \|h_F^{1/2}(S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma \cap \partial T)}^2 \quad (2.24)$$

$$+ \|h_F^{1/2}W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma \cap \partial T)}^2 + \|h_F^{1/2}(K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma \cap \partial T)}^2 \quad (2.25)$$

$$+ \|h_F^{1/2}\nabla_\Gamma V(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma \cap \partial T)}^2 + \|h_F^{1/2}\nabla_\Gamma(K - I)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma \cap \partial T)}^2, \quad (2.26)$$

wobei S der Poincaré-Steklov Operator und S_F eine L^2 -Projektion des Operators bezeichnet.

Beweis. Aus (2.5) haben wir die Darstellung des Fehlerschätzers η_h mit

$$\begin{aligned} \eta_h^2(T) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \sum_{F_i \in \mathcal{S}_h} h_{F_i} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F_i)}^2 \\ &+ \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - \frac{1}{2}(K' - I)\boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{L}^2(F_e)}^2 \\ &+ \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\nabla_\Gamma \{(I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - V\boldsymbol{\phi}_h\}\|_{\mathbf{L}^2(F_e)}^2. \end{aligned}$$

2 Residualer Fehlerschätzer

Da wir annehmen, dass $\mathbf{u}_h \in V_h$, also $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)$ stückweise konstant ist, ergibt sich, dass $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = 0$ gilt.

Wir definieren zunächst die L^2 -Projektionen $\mathbf{F}_T := \frac{1}{|T|} \int_T \mathbf{F}$ und $g_F := \frac{1}{|F|} \int_F (-S\mathbf{u})$. Daraus haben wir für den Fehlerschätzer

$$\begin{aligned} \eta_h^2(T) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \sum_{F_i \in \mathcal{S}_h} h_{F_i} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F_i)}^2 \\ &+ \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\mathbf{t}_0 - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} W(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - \frac{1}{2} (K' - I) \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{L}^2(F_e)}^2 \\ &+ \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\nabla_\Gamma \{(I - K)(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h|_\Gamma) - V \boldsymbol{\phi}_h\}\|_{\mathbf{L}^2(F_e)}^2. \end{aligned}$$

Mit der oben eingeführten Abschneidefunktion b_T für das Element T definieren wir $w_T := \mathbf{F}_T b_T$. Mit dem Integralwert von b_T aus (2.23) ergibt sich für w_T

$$\int_T \mathbf{F}_T w_T = \int_T \mathbf{F}_T^2 b_T = |\mathbf{F}_T|^2 \frac{32}{105} |T| = \frac{32}{105} \|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2$$

Wir schätzen $\|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}$ mittels der Abschneidefunktion w_T , die auf dem Rand der Elemente verschwindet, der Eigenschaft, dass $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = 0$ und der partiellen Integration ab, wobei wir

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_T) = \int_\Omega \mathbf{F} w_T \implies \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_T) = \int_\Omega \mathbf{F} w_T - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_T)$$

für die exakte Lösung \mathbf{u} des Innenraumproblems ausnutzen.

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{F}_T w_T &= \int_T \mathbf{F} w_T + \int_T (\mathbf{F}_T - \mathbf{F}) w_T + \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) w_T \\ &= \int_\Omega \mathbf{F} w_T - \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_T) + \int_T (\mathbf{F}_T - \mathbf{F}) w_T \\ &= \int_T (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_T) + \int_T (\mathbf{F}_T - \mathbf{F}) w_T \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} \|\nabla w_T\|_{\mathbf{L}^2(T)} + \|\mathbf{F}_T - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(T)} \|w_T\|_{\mathbf{L}^2(T)} \\ &\leq \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} |\mathbf{F}_T| c h^{-1} \sqrt{\frac{32}{105}} |T| + \|\mathbf{F}_T - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(T)} |\mathbf{F}_T| \sqrt{\frac{32}{105}} |T| \\ &\leq \sqrt{\frac{32}{105}} \|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)} [c h^{-1} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} + \|\mathbf{F}_T - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(T)}]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)} \leq \sqrt{\frac{32}{105}} [c h^{-1} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)} + \|\mathbf{F}_T - \mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(T)}]. \quad (2.27)$$

Für den nächsten Anteil $\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F_i)}^2$ im Fehlerschätzer η_h definieren wir die Abschneidefunktion (d.h. $\text{supp } w_F \subset \omega_F$) auf den Seitenflächen F der Elemente T durch $w_F := [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] b_F$. Analog zu der obigen Vorgehensweise erhalten wir

$$\int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] w_F = [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]^2 \int_F b_F = \frac{9}{20} |F| \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2. \quad (2.28)$$

Mit den gleichen Argumenten wie oben nutzen wir die Tatsache aus, dass $\text{div } \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = 0$ und folgern mit der Abschätzung für $\|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}$ aus (2.27), dass

$$\begin{aligned} \int_F [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}] w_F &= \sum_{T' \in \omega_F} \int_{T'} \mathbf{F} w_F - \int_{\omega_F} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(w_F) \\ &\leq \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} \|w_F\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} \|\nabla w_F\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} \\ &\leq \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\| ch_F + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\| ch_F h_F^{-1} \\ &= c \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)} [h_F^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} + ch^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)}] \\ &\leq c \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)} [h_F^{1/2} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} + ch^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)}] \\ &\leq c \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)} [h_F^{1/2} \sum_{T' \subset \omega_F} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T')} + ch^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)}], \end{aligned}$$

so erhalten wir eine Abschätzung des zweiten Terms des Fehlerschätzers η_h

$$\|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{\mathbf{L}^2(F)} \leq c [h_F^{1/2} \sum_{T' \subset \omega_F} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T')} + ch^{-1/2} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)}]. \quad (2.29)$$

Für den dritten Anteil des Fehlerschätzers benutzen wir die diskrete Form der Gleichung (1.15), die uns $\boldsymbol{\phi}_h = V_h^{-1}(K_h - I_h)(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0)$ liefert und die Definition des Poincaré-Steklov Operators $S = W + (K - I)V^{-1}(K - I)$. Wir haben

$$\begin{aligned} h_F \int_F |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} W \mathbf{u}_h|_{\Gamma} + \frac{1}{2} (K' - I) \boldsymbol{\phi}_h|^2 ds \\ = h_F \int_F |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} W \mathbf{u}_h|_{\Gamma} \frac{1}{2} (K' - I) V_h^{-1} i_h^* (K - I) \mathbf{u}_h|^2 ds \\ \leq 2h_F \int_F |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + S \mathbf{u}|^2 ds \\ + 2h_F \int_F |\frac{1}{2} W \mathbf{u}_h|_{\Gamma} + \frac{1}{2} (K' - I) V_h^{-1} i_h^* (K - I) \mathbf{u}_h - S \mathbf{u}|^2 ds. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Für das erste Integral der rechten Seite definieren wir für $F \in \mathcal{F}_h$ und konstantes $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)$ und g_F , $w_F := (g_F - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}) b_F$. Wir erhalten analog zu den obigen Umformungen

$$\int_F (g_F - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}) b_F = \frac{9}{20} |F| \|g_F - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2.$$

2 Residualer Fehlerschätzer

Daraus erhalten wir mit der Abschätzung für $\|\mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}$

$$\|g_F - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{L}^2(F)} \leq c \left[h_F^{-\frac{1}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^1(\omega_F)} + h_F^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(\omega_F)} + \|g_F - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(F)} \right].$$

Setzen wir diese Abschätzung ein und schreiben $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\phi} = -S\mathbf{u}$ durch die Definitionen des Kopplungsrandes sowie $g_F = S_F\mathbf{u}$ mit $S_F\mathbf{u} := |F|^{-1} \int_F S\mathbf{u} \, ds$, erhalten wir für den ersten Teil in (2.30)

$$2h_F \int_F |\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + S\mathbf{u}|^2 \leq ch_F \int_F |S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u}|^2 \, ds + \tilde{c}h_F^2 \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \tilde{c}' \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2.$$

Der zweite Teil in (2.30) ergibt mit $\boldsymbol{\phi} = V^{-1}(K - I)\mathbf{u}$

$$\begin{aligned} 2h_F \int_F \left| \frac{1}{2} W\mathbf{u}_h|_\Gamma + \frac{1}{2} (K' - I) V_h^{-1} i_h^*(K - I)\mathbf{u}_h - S\mathbf{u} \right|^2 \, ds \\ = 2h_F \int_F |W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + (K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)|^2 \, ds \\ \leq 4h_F \int_F |W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)|^2 \, ds + 4h_F \int_F |(K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)|^2 \, ds. \end{aligned}$$

Zusammengesetzt ergibt sich für den dritten Term

$$\begin{aligned} h_F \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} W\mathbf{u}_h|_\Gamma + \frac{1}{2} (K' - I)\boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \\ \leq ch_F \int_F |S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u}|^2 \, ds + \tilde{c}h_F^2 \|\mathbf{F} - \mathbf{F}_T\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \tilde{c}' \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 \\ + 4h_F \|W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 + 4h_F \|(K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{L}^2(F)}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Den letzten Term des Fehlerschätzers η_h schätzen wir mit der Identität (1.15) und der Dreiecksungleichung ab.

$$\begin{aligned} h_F \|\nabla_\Gamma(V\boldsymbol{\phi}_h - (K - I)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 &= h_F \|\nabla_\Gamma(V(\boldsymbol{\phi}_h - \boldsymbol{\phi}) + V\boldsymbol{\phi} - (K - I)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 \\ &\leq 2h_F \|\nabla_\Gamma V(\boldsymbol{\phi}_h - \boldsymbol{\phi})\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2 + 2h_F \|\nabla_\Gamma(K - I)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(F)}^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Fassen wir nun die Abschätzungen (2.27), (2.29), (2.31) und (2.32) der einzelnen Terme zusammen, erhalten wir letztendlich unsere Behauptung (2.24). \square

Wir können nun Lemma 2.1.1 benutzen, um die Effizienz des Fehlerschätzers η_h (bis auf Terme höherer Ordnung) zu beweisen. Wir bezeichnen mit $S_h^0(\Gamma)$ den Raum der stückweise konstanten Funktionen und mit $S_h^1(\Gamma)$ den Raum der stückweise linearen Funktionen auf dem Rand Γ .

Theorem 2.1.3 Sei $\mathbf{u}_h \in V_h$ stückweise linear. Dann gibt es eine Konstante $c > 0$, unabhängig von der Elementgröße h , so dass für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 &\leq c [\|h_T(\mathbf{F} - \mathbf{F}_T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{h_{\Gamma, \max}}{h_{\Gamma, \min}} (\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2) \\ &\quad + \frac{h_{\Gamma, \max}^2}{h_{\Gamma, \min}} (\text{dist}_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}(\mathbf{u}, S_h^1(\Gamma))^2 + \text{dist}_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}(S\mathbf{u}, S_h^0(\Gamma))^2)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Beweis. In Lemma 2.1.1 haben wir eine Abschätzung für den Fehlerschätzer η_h gewonnen. Nehmen wir nun die Summe über alle Elemente $T \in \mathcal{T}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_h(T)^2 &\leq c [\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|h_T(\mathbf{F} - \mathbf{F}_T)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + h_{\Gamma, \max} \|(S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + h_{\Gamma, \max} \|W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + h_{\Gamma, \max} \|(K' - I)(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\ &\quad + h_{\Gamma, \max} \|\nabla_{\Gamma} V(\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + h_{\Gamma, \max} \|\nabla_{\Gamma}(K - I)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2]. \end{aligned}$$

Die beiden Volumenterme sind schon in der gewünschten Form, deshalb müssen wir nur noch die Randterme einzeln betrachten.

Da $S_F\mathbf{u}$ eine L^2 -Projektion von $-S\mathbf{u}$ in den Raum stw. konstanten Funktionen auf dem Rand $S_h^0(\Gamma)$ ist, ist der Abstand der Projektion S_F zu $S\mathbf{u}$: $\|S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} = \text{dist}_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}(S\mathbf{u}; S_h^0(\Gamma))$. Somit haben wir für den ersten Randintegralterm

$$h_{\Gamma, \max} \|(S\mathbf{u} - S_F\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \leq h_{\Gamma, \max} \text{dist}_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}(S\mathbf{u}; S_h^0(\Gamma))^2. \quad (2.34)$$

Dieser Term ist in der Abschätzung nach oben durch einen Term höherer Ordnung beschränkt.

Für den Anteil mit dem hypersingulären Integraloperator benutzen wir dessen Abbildungseigenschaften (hier Stetigkeit, siehe [21]) und haben somit

$$h_{\Gamma, \max} \|W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \leq ch_{\Gamma, \max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2. \quad (2.35)$$

Um $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2$ abzuschätzen, führen wir eine Approximation $\mathbf{u}_{\text{ap}} \in S_h^1(\Gamma)$ ein, die \mathbf{u} auf dem aktuellen Randgitter auf Γ approximieren soll (z.B. nehmen wir die Funktion, die \mathbf{u} in den Knoten des Randgitters exakt interpoliert). Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2 \leq 2\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ap}}\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2 + 2\|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2 \quad (2.36)$$

Wegen $\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}_h \in S_h^1$, können wir die inverse Abschätzung

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^l(\Gamma)} \leq ch^{m-l} \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^m(\Gamma)} \quad m \leq l$$

für ein $\mathbf{v}_h \in P_h$, wobei P_h endlich dimensionaler Unterraum von $\mathbf{H}^l(\Gamma) \cap \mathbf{H}^m(\Gamma)$ ist (siehe [15, 64]) benutzen und die Dreiecksungleichung erneut anwenden

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)} &\leq ch_{\Gamma, \min}^{-1/2} \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq ch_{\Gamma, \min}^{-1/2} [\|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Mit der Interpolation von $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ durch $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ und $\mathbf{H}(\Gamma)$ (siehe [2]) und den Approximationseigenschaften für \mathbf{u}_{ap} in der $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ -Norm erhalten wir

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 &\leq c \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)} \\ &\leq ch_{\Gamma, \max} \|\mathbf{u}_{\text{ap}} - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Die Abschätzungen (2.36)-(2.38) eingesetzt in die Abschätzung (2.35) des hypersingulären Operator-Anteils ergibt

$$\begin{aligned} h_{\Gamma, \max} \|W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 &\leq c \frac{h_{\Gamma, \max}}{h_{\Gamma, \min}} [\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + h_{\Gamma, \max} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ap}}\|_{\mathbf{H}^1(\Gamma)}^2] \\ &\leq c \frac{h_{\Gamma, \max}}{h_{\Gamma, \min}} [\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + h_{\Gamma, \max} \text{dist}_{\mathbf{H}(\Gamma)}(\mathbf{u}; S_h^1(\Gamma))^2]. \end{aligned}$$

Die gleichen Argumente angewandt auf die Einfeldschicht-, Doppelschicht- und adjungierte Doppelschichtpotential-Anteile ergibt die gesuchte Abschätzung (2.33). \square

Bemerkung 2.1.1 Für ein Modellproblem mit speziellen Annahmen an die Regularität der Lösungen können wir das Ergebnis aus Theorem 2.1.3 als untere Schranke korrespondierend zu der oberen Schranke aus Theorem 2.1.2 benutzen. Wir nehmen an, dass \mathbf{F} hinreichend glatt ist, so dass für die L^2 -Projektion \mathbf{F}_T die Abschätzung

$$\|h_T(\mathbf{F} - \mathbf{F}_T)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq ch_{\max}^2$$

gilt.

Für die Verfeinerung des Gitters nehmen wir eine quasi-uniforme Unterteilung des Gebietes Ω und des Randes Γ an. Dann haben wir eine vom Gitter unabhängige Konstante $c > 0$ mit

$$1 \leq \frac{h_{\Gamma, \max}}{h_{\Gamma, \min}} \leq c.$$

Haben wir außerdem glatte Lösungen \mathbf{u} und ϕ auf dem Rand, so liefert uns die Approximationseigenschaften der Elemente aus $S_h^0(\Gamma)$ und $S_h^1(\Gamma)$ für die \mathbf{L}^2 - bzw. die \mathbf{H}^1 -Norm die Abschätzung

$$h_{\Gamma, \max} \text{dist}_{\mathbf{H}(\Gamma)}(\mathbf{u}; S_h^1(\Gamma))^2 + h_{\Gamma, \max} \text{dist}_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}(S\mathbf{u}; S_h^0(\Gamma))^2 \leq ch_{\max}^3.$$

Setzen wir diese Erkenntnisse in die Abschätzung (2.33) für den Fehlerschätzer η_h ein, erhalten wir

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 \leq ch_{\max}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + c[\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2] + ch_{\max}^3.$$

Berücksichtigen wir nun, dass wir bei den meisten Gittern die Abschätzung

$$ch_{\max} \leq \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$$

gewinnen können, haben wir mit den Approximationseigenschaften der diskreten Unterräume letztendlich

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 \leq c\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

Aus den Theoremen 2.1.2 und 2.1.3 haben wir dann mit η_h einen effizienten und zuverlässigen Fehlerschätzer für das Kopplungsproblem.

$$c^{-1}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_h(T)^2 \leq c\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2.$$

2.2 Adaptiver Algorithmus

In diesem Kapitel stellen wir den adaptiven Algorithmus vor, der unter Verwendung des Fehlerschätzers aus Theorem 2.1.2 die adaptive Verfeinerung des Gitters steuern soll.

Für das Startgitter $\mathcal{T}_{h,0}$ unterteilen wir das Gebiet Ω uniform. Auf diesem so genannten Grobgitter werden nun die approximierten Lösungen $\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}_h$ des diskreten Problems (1.27) berechnet. Mit den gegebenen Volumen- und Randdaten kann nun der Fehlerschätzer $\eta_h(T)$ (2.5) mit den einzelnen Anteilen (2.1)-(2.4) auf jedem Element $T \in \mathcal{T}_h$ berechnet werden. Wir nehmen dies als lokalen Fehlerwert auf jedem Element und können dann die Elemente verfeinern, die einen bestimmten Prozentsatz $\theta \in [0, 1]$ des größten Fehlers überschreiten oder verfeinern die n -Prozent Elemente mit den größten Fehlerwerten. Dadurch wird eine neue Triangulierung \mathcal{T}_h geschaffen, auf der wiederum die nächste Approximation berechnet wird.

Wir geben hier noch mal den Algorithmus in schematischer Form an

Algorithmus

- (1) Starte mit dem Grobgitter $\mathcal{T}_{h,0}$, auf Level $k = 0$
- (2) Berechne Galerkin-Lösung $\mathbf{u}_{h,k}$

2 Residualer Fehlerschätzer

- (3) Berechne R_1, \dots, R_4 für alle $T \in \mathcal{T}_{h,k}$
- Berechne R_1 auf dem Element T
 - Berechne für R_2 die Sprünge der Randspannung auf den inneren Elementseitenflächen $F \in \mathcal{S}_{h,k}$
 - Berechne R_3 auf jedem Randelement $\Gamma_i \in \Gamma_{h,k}$ (falls vorhanden) und addiere den Wert zu T
 - Berechne R_4 auf jedem Randelement $\Gamma_i \in \Gamma_{h,k}$ (falls vorhanden) und addiere den Wert zu T
- (4) Markiere das Element $T \in \mathcal{T}_{h,k}$ zur Verfeinerung, falls:

$$\eta_{h,k}(T) \geq \theta \cdot \max_{\tilde{T} \in \mathcal{T}_{h,k}} \eta_{h,k}(\tilde{T}) \quad \theta \in [0, 1]$$

- (5) Prüfe alle Elemente auf die „1-constraint rule“ (siehe Kap. 6) oder andere Konformitätseigenschaften und markiere entsprechende Nachbarn auch zur nötigen Verfeinerung
- (6) Verfeinere alle markierten Elemente und bilde die neue Triangulierung $\mathcal{T}_{h,k+1}$
- (7) $k = k + 1$ falls (Gesamtfehlerwert $>$ Abbruchkriterium) \implies gehe zurück zu (2)

Der adaptive Algorithmus ist sowohl für konforme als auch für nichtkonforme Gitter (siehe Kapitel 6) geeignet. Da wir nur einen lokalen Gesamtfehlerwert auf den Elementen haben, wird das zu verfeinernde Element bei der Verwendung von Hexaedern in 8 kleine Hexaeder unterteilt. Falls es a priori aufgrund der Geometrie oder der Problemstellung klar ist, in welche Richtung die Verfeinerung am effektivsten ist, kann auch diese Verfeinerungsart in dem Algorithmus fest eingestellt werden.

Im Normalfall verwenden wir für das Randelementgitter die Spur des Volumengitters, d.h. die Elemente des Randgitters sind die Seitenflächen der Elemente des Volumengitters, die einen nichtleeren Schnitt mit dem Rand Γ haben. Deshalb werden die Anteile der Randelemente auch zu den Volumenelementen addiert und für die Verfeinerungsentcheidung nur die Volumenelemente betrachtet.

Das Programmpaket *maiprops* [45, 43] ist aber auch dafür ausgelegt, dass man zwei unterschiedliche Gitter für die Lösung des Problems verwendet. Um die Verfeinerung auf den beiden unabhängigen Gittern durchzuführen, müssen die Anteile R_1 und R_2 für ein Volumenelement berechnet werden und die Anteile R_3 und R_4 werden dann für die Randelemente zusammengefasst. Der obige Algorithmus kann dann mit kleineren Modifikationen separat für die Steuerung beider Gitter angewendet werden.

2.3 Implementation

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Implementation der Randintegraloperatoren, die in den Definitionen der Fehlerindikatoren auftreten.

Die Implementation der Integraloperatoren in den Anteilen R_3 und R_4 des Fehler-schätzers (2.5) verlangt eine verbesserte Darstellung der Integrale zur effizienten numerischen Berechnung. Die in dem Fehlerschätzer auftretenden stark bzw. hypersingulären Integrale können mit der normalen Vorgehensweise nicht berechnet oder nicht exakt genug berechnet werden. In diesem Kapitel stellen wir die Implementation der einzelnen (aber nicht aller) Anteile vor, wie sie im Programmpaket *maiprogs* [45, 43] in der Programmiersprache Fortran 90 realisiert wurden.

Bei der Implementation ist zu unterscheiden, auf welchen Typ von Argument die Integraloperatoren angewendet werden. In dem Anteil R_3 wird zum Beispiel der hypersinguläre Operator W auf eine Funktion \mathbf{u}_0 und auf eine Approximation (also ein Polynom) \mathbf{u}_h angewendet. Für beide gibt es unterschiedliche Strategien die benötigten Werte zu berechnen. Galerkin-Elemente können nach [44, 41, 42, 46] für Polynome auf Dreiecken und Parallelogrammen analytisch berechnet werden.

Die Lamé-Integraloperatoren führen wir zurück auf die Definitionen der Integraloperatoren für das Laplace-Problem. Wir stellen im Folgenden zunächst die Umrechnungen für die Laplace Randintegraloperatoren vor und werden dann die Lamé Randintegraloperatoren untersuchen.

Mit Hilfe der Definition des Ableitungsoperators ∇ definieren wir

Definition 2.3.1 *Sei u eine skalare Funktion und \mathbf{u} eine vektorwertige Funktion. Dann ist*

$$\nabla_{\Gamma} u := \mathbf{n} \times (\nabla u \times \mathbf{n}) = \nabla u - (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$$

der **Oberflächengradient** auf Γ und

$$\mathbf{curl}_{\Gamma} u := \nabla_{\Gamma} u \times \mathbf{n}$$

die **vektorielle Flächenrotation**.

Die **skalare Flächenrotation** auf Γ für $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ist durch

$$\mathbf{curl}_{\Gamma} \mathbf{u} := (\mathbf{curl} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$$

gegeben.

2.3.1 Laplace Randintegraloperatoren

Die Integraloperatoren für das Laplace-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 &= f & \text{in } \Omega & & \Delta u_2 &= 0 & \text{in } \Omega^C \\ u_1 &= u_2 + u_0 & & & \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}} + t_0 & \text{auf } \Gamma \end{aligned}$$

plus Abklingbedingung im Unendlichen, sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned} V\phi(x) &= \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \phi(y) dS_y, & \text{Einfachschichtpotential} \\ Kv(x) &= \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} v(y) dS_y, & \text{Doppelschichtpotential} \\ K'\phi(x) &= \frac{2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \phi(y) dS_y, & \text{adj. Doppelschichtpotential} \\ Wv(x) &= -\frac{2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} v(y) dS_y, & \text{hypersingulärer Operator.} \end{aligned}$$

Wu_0

Wir betrachten zunächst den hypersingulären Operator W . Mit Hilfe der Bilinearform des Operators $\langle W\cdot, \cdot \rangle$ erhalten wir nach [54] bzw. [38] die Überführung des hypersingulären Operators in die Bilinearform des Einfachschichtpotentials V , angewendet auf die vektorielle Flächenrotation der Testfunktion v . Eine weitere Ausnutzung des Stokeschen Integralsatzes (siehe [55])

$$\int_{\Gamma} \mathbf{curl}_{\Gamma} u \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\Gamma} u \mathbf{curl}_{\Gamma} \mathbf{v} \quad (2.39)$$

liefert

$$\begin{aligned} \langle Wu, v \rangle &= \langle V \mathbf{curl}_{\Gamma} u, \mathbf{curl}_{\Gamma} v \rangle \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{curl}_{\Gamma} u(x) \cdot \mathbf{curl}_{\Gamma} v(y)}{|x-y|} ds_x ds_y \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{curl}_{\Gamma_y}(\mathbf{curl}_{\Gamma} u(x)) \cdot v(y)}{|x-y|} ds_x ds_y \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{curl}_{\Gamma_y} \int_{\Gamma} \frac{\mathbf{curl}_{\Gamma} u(x) \cdot v(y)}{|x-y|} ds_x ds_y \\ &= \langle \mathbf{curl}_{\Gamma} V(\mathbf{curl}_{\Gamma} u), v \rangle. \end{aligned}$$

Damit können wir den hypersingulären Operator als die Rotation des Einfachschichtpotentials mit der Belegung $\mathbf{curl}_{\Gamma} u$ darstellen. Weiterhin können wir $\mathbf{curl}_{\Gamma} V(\mathbf{curl}_{\Gamma} u)$ mit mit Hilfe der Definitionen 2.3.1 umformen

$$\mathbf{curl}_{\Gamma} V(\mathbf{curl}_{\Gamma} u) = \mathbf{curl} V(\mathbf{curl}_{\Gamma} u) \cdot \mathbf{n} = \nabla \times V(\nabla_{\Gamma} u \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Weitere Umformungen des Ausdrucks ergeben eine neue Darstellung des hypersingulären Operators

$$\begin{aligned}
\nabla \times V(\nabla_\Gamma u \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} &= \frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \cdot \operatorname{curl}_x \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} (\nabla_\Gamma u \times \mathbf{n}_y) ds_y \\
&= \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \mathbf{n}_x \cdot \frac{1}{|x-y|^3} (x-y) \times (\mathbf{n}_y \times \nabla_{\Gamma_y} u) ds_y \\
&= -\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|^3} (\mathbf{n}_x \times (\mathbf{n}_y \times \nabla_{\Gamma_y})) \cdot (x-y) ds_y \\
&= -\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|^3} (\mathbf{n}_x (\mathbf{n}_y \cdot (x-y)) - (x-y) \cdot (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y)) \nabla_{\Gamma_y} u ds_y \\
&= \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \frac{((x-y) \cdot (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y) - \mathbf{n}_x \cdot (\mathbf{n}_y \cdot (x-y)))}{|x-y|^3} \nabla_\Gamma u(y) ds_y,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

wobei wir die Funktion $\nabla_\Gamma u(y)$ als Belegung eines Integraloperators mit dem Kern $K(x, y) := \frac{((x-y) \cdot (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y) - \mathbf{n}_x \cdot (\mathbf{n}_y \cdot (x-y)))}{|x-y|^3}$ gewonnen haben. Somit können wir für die Integration die gleichen Routinen (mit geänderten Kern) benutzen, die wir für die Standardoperatoren in *maiprog*s verwenden.

Das Integral (2.40) hat eine starke Singularität. Deshalb ist es notwendig, die Berechnung des Integrals zu modifizieren, wenn x und y nah beieinander sind. Sind die Punkte weit voneinander entfernt, ergibt sich kein Problem. Für das Nahfeld, d.h. die Punkte sind dicht beieinander, regularisieren wir den Ausdruck (2.40), indem wir die Null $(-\nabla_\Gamma u(x) + \nabla_\Gamma u(x))$ addieren und anschließend die Integrale auseinander ziehen

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \frac{((x-y) \cdot (\mathbf{n}_x \cdot \mathbf{n}_y) - \mathbf{n}_x \cdot (\mathbf{n}_y \cdot (x-y)))}{|x-y|^3} \nabla_\Gamma u(y) ds_y = \\
&= \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma K(x, y) (\nabla_\Gamma u(y) - \nabla_\Gamma u(x)) ds_y + \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma K(x, y) \nabla_\Gamma u(x) ds_y.
\end{aligned}$$

Im zweiten Ausdruck ist $\nabla_\Gamma u(x)$ eine Konstante. Dadurch können wir diesen Term analytisch integrieren, da sich das Integral auf ein Integral der Form

$$I_{k,l}^{-3/2}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, x) := \text{p.f.} \int_{\square} \frac{t_1^k t_2^l}{|\mathbf{a}t_1 + \mathbf{b}t_2 + x|^3} dt_1 dt_2. \tag{2.41}$$

zurückführen lässt. In [46] wird eine analytische Berechnung des Integrals $I_{k,l}^{-3/2}$ beschrieben. Der erste Ausdruck hat durch den $\nabla_\Gamma u(x)$ Term eine abgeschwächte Singularität und kann mit numerischer Quadratur berechnet werden.

Wu_h

Falls wir den hypersingulären Operator auf ein Polynom anwenden (also Wu_h), können wir wieder unsere Darstellung für W aus (2.40) benutzen. Eine Realisierung des hypersingulären Operators wird auch [61] beschrieben.

2 Residualer Fehlerschätzer

Die Elemente der Triangulierung des Gebietes Ω und deren Oberflächentriangulierung Γ_h , bestehend aus Parallelogrammen oder Dreiecken, sind eine affine Abbildung des Referenzquadrats $\square = [-1, 1]^2$ oder des Referenzdreiecks $\Delta = \{(t_1, t_2) : 0 \leq t_1 \leq 1 - t_2 \leq 1\}$. Für ein Element Γ_i bedeutet dies

$$\Gamma_i = \{\mathbf{a}_i t_1 + \mathbf{b}_i t_2 + x_i : (t_1, t_2) \in \{\square, \Delta\}\}.$$

Wir definieren die affine Transformation vom Referenzelement in das Gebiet Γ_i durch

$$F_i : \begin{cases} \{\square, \Delta\} & \implies \Gamma_i \\ t = (t_1, t_2) & \longrightarrow x = \mathbf{a}_i t_1 + \mathbf{b}_i t_2 + x_i, \end{cases}$$

mit $|\frac{\partial F_i}{\partial t}| = |\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i|$. Die Basisfunktionen ψ_i auf Γ_i für die Monome sind dann gegeben durch

$$\psi_{kl}^i(x) = t_1^k t_2^l \circ F_i^{-1}(x).$$

Aus [46, Kap. 3.4] haben wir eine alternative Darstellung für $\mathbf{n}_y \times \text{grad } v(y)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \cdot \nabla_x \times V(\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) &= -\frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \int_{\Gamma} \text{curl}_x \frac{1}{|x-y|} (\mathbf{n}_y \times \text{grad } v(y)) dS_y \\ &= -\frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \int_{\Gamma} \nabla_x \times \frac{1}{|x-y|} \underbrace{\left[\frac{1}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \{\mathbf{b} \partial_{t_1}(t_1^k t_2^l) - \mathbf{a} \partial_{t_2}(t_1^k t_2^l)\} \right]}_{=: \mathbf{f}(t)} \circ F^{-1}(y) dS_y \\ &= \frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^3} (x-y) \times \mathbf{f}(t) \circ F^{-1}(y) dS_y. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Betrachten wir den $(x-y) \times \mathbf{f}(t)$ -Anteil separat, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (x-y) \times \mathbf{f}(t) &= (x - F(t)) \times \left[\mathbf{b} \partial_{t_1}(t_1^k t_2^l) - \mathbf{a} \partial_{t_2}(t_1^k t_2^l) \right] \\ &= (x - a) \times \mathbf{a} (k t_1^{k-1} t_2^l) - \mathbf{a} \times \mathbf{b} (k t_1^k t_2^{l-1}) \\ &\quad - (x - a) \times \mathbf{a} (l t_1^k t_2^{l-1}) + \mathbf{b} \times \mathbf{a} (l t_1^k t_2^l) \\ &= (x - a) \times \mathbf{b} (k t_1^{k-1} t_2^l) - \mathbf{a} (l t_1^k t_2^{l-1}) + \mathbf{b} \times \mathbf{a} (k+l) (t_1^k t_2^l). \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in die Gleichung (2.42) gibt

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x \nabla_x \times V(\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) &= \\ &= \frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-F(t)|^3} \left[(x-a) \times (\mathbf{b} (k t_1^{k-1} t_2^l) - \mathbf{a} (l t_1^k t_2^{l-1})) + \mathbf{b} \times \mathbf{a} (k+l) (t_1^k t_2^l) \right] dt \\ &= \frac{2}{4\pi} \mathbf{n}_x \left((x-a) \times (\mathbf{b} k I_{k-1,l}^{-3/2} - \mathbf{a} l I_{k,l-1}^{-3/2}) + \mathbf{b} \times \mathbf{a} (k+l) I_{k,l}^{-3/2} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Es erscheinen in (2.43) nur noch Integrale der Form $I_{kl}^{-3/2}$ (siehe (2.41)). Da wir diese analytisch integrieren können, ergeben sich keine Schwierigkeiten bei der Auswertung des hypersingulären Operators W angewendet auf Polynome.

Die in dem Anteil R_4 des Fehlerschätzers (2.5) auftretenden Integraloperatoren können wir nicht in der standardisierten Form berechnen, da der Term den Oberflächengradienten der Operatoren benutzt. Um die Berechnung wieder zu vereinfachen, benutzen wir zunächst die Definition des Oberflächengradienten $\nabla_\Gamma u = \nabla u - (\nabla u \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ (siehe Def. 2.3.1) und können uns daher bei der Betrachtung auf den Gradienten der Operatoren beschränken.

$\nabla_\Gamma K u_0$

Für den Gradienten des Doppelschichtpotentials angewendet auf eine Funktion v benutzen wir folgende Umrechnung. Dabei gebrauchen wir die Identität

$$\Delta \mathbf{u} = \text{grad div } \mathbf{u} + \text{curl curl } \mathbf{u},$$

die Eigenschaft von $\frac{1}{|x-y|}$ als Fundamentallösung der Laplace-Gleichung und wenden den Stokesschen Integralsatz an

$$\begin{aligned} \nabla K v &= \frac{2}{4\pi} \nabla_x \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|x-y|} v(y) dS_y = \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \text{grad}_x \text{grad}_y \frac{1}{|x-y|} \cdot \mathbf{n}_y v(y) dS_y \\ &= -\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \text{grad}_x \text{div}_x \left(\frac{1}{|x-y|} \mathbf{n}_y \right) v(y) dS_y \\ &= -\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \Delta \frac{1}{|x-y|} \mathbf{n}_y v(y) dS_y - \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \text{curl curl} \frac{1}{|x-y|} \mathbf{n}_y v(y) dS_y \\ &= -\frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \nabla_x \times \left(\nabla_x \times \left[\frac{1}{|x-y|} \mathbf{n}_y v(y) \right] \right) dS_y \\ &= -\frac{2}{4\pi} \nabla_x \times \left(\int_\Gamma \mathbf{n}_y \times \nabla_y \left(v(y) \frac{1}{|x-y|} \right) dS_y - \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} (\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) dS_y \right) \\ &= \frac{2}{4\pi} \nabla_x \times \int_\Gamma \frac{1}{|x-y|} (\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) dS_y \\ &= \nabla_x \times V(\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) \\ &= \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \frac{\mathbf{n}_y ((x-y) \cdot \nabla_y v(y)) - \nabla_y v(y) ((x-y) \cdot \mathbf{n}_y)}{|x-y|^3} dS_y. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Den so gewonnenen Ausdruck formulieren wir mit Hilfe der Matrixschreibweise um, damit wir die gleiche Form von Integralberechnung wie in (2.40) erhalten. Es können dann die gleichen Routinen zur Berechnung genutzt werden. Für die Matrixdarstellung erhalten wir

$$\nabla K v = \frac{2}{4\pi} \int_\Gamma \mathcal{K} \nabla_y v(y) dS_y, \tag{2.45}$$

mit der Matrix

$$\mathcal{K} := \begin{pmatrix} -d_2n_2 - d_3n_3 & d_2n_1 & d_3n_1 \\ d_1n_2 & -d_3n_3 - d_1n_1 & d_3n_2 \\ d_1n_3 & d_2n_3 & -d_1n_1 - d_2n_2 \end{pmatrix},$$

wobei $d_i := (x_i - y_i)$. Wir haben somit für die Integralberechnung die Belegung $v(y)$ und als Kern die Matrix \mathcal{K} .

In der numerischen Berechnung des Gradienten des Doppelschichtpotentials haben wir wiederum eine Cauchy-Singularität, falls die Integrationspunkte für y nah an dem Abgreifpunkt x liegen. Für dieses Nahfeld benötigen wir, wie im hypersingulären Fall, eine Regularisierung des Integrals, um die Singularität abzuschwächen. Wir gehen analog zum hypersingulären Fall vor und addieren zu $\nabla v(y)$ den Term $(\nabla v(x) - \nabla v(x))$ und erhalten

$$\nabla K v = \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{K}(\nabla v(y) - \nabla v(x)) dS_y + \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \mathcal{K} \nabla v(x) dS_y.$$

Den ersten Teil können wir nun mit der numerischen Standard-Integrationsroutine berechnen. Der zweite Teil hat den bezüglich der Integrationsvariablen y konstanten Anteil $\nabla v(x)$, sodass wir für diesen Anteil die analytischen Integralbibliotheken in *maiprops* für die Anwendung auf Monome benutzen können.

$\nabla_{\Gamma} \mathbf{K} \mathbf{u}_h$

Die Berechnung des Oberflächengradienten des Doppelschichtpotentials K , angewendet auf Polynome, können wir mit Hilfe der Umformungen aus (2.44)

$$\nabla K v = \nabla_x \times V(\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y))$$

auf die Darstellung des hypersingulären Operators W angewendet auf Polynome in (2.43) zurückführen. Wir haben mit den obigen Definitionen der Transformationen und von $I_{k,l}^{-3/2}$

$$\nabla_x \times V(\mathbf{n}_y \times \nabla_y v(y)) = \frac{2}{4\pi} (x - a) \times (\mathbf{b}k I_{k-1,l}^{-3/2} - \mathbf{a}l I_{k,l-1}^{-3/2}) + \mathbf{b} \times \mathbf{a}(k+l) I_{k,l}^{-3/2}$$

die Reduktion der Berechnung des Ausdrucks auf die Auswertung des Integrals $I_{kl}^{-3/2}$.

$\nabla_{\Gamma} \mathbf{V} \phi_0$

Der Oberflächengradient des Einfachschichtpotentials wird bei der Anwendung auf Funktionen wie folgt dargestellt

$$\nabla_{\Gamma} V \phi = \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{-(x - y) + ((x - y) \cdot \mathbf{n}_x) \cdot \mathbf{n}_x}{|x - y|^3} \phi(y) dS_y. \quad (2.46)$$

Auch hier können wir die Routine zur numerischen Berechnung von Potentialen verwenden, die mit dem Kern $\frac{-(x-y) + ((x-y) \cdot \mathbf{n}_x) \cdot \mathbf{n}_x}{|x-y|^3}$ und der Belegung $\phi(y)$ aufgerufen wird.

Aufgrund der Singularität im Integral (2.46) müssen wir auch hier für die numerische Integration im Nahbereich eine regularisierte Fassung benutzen

$$\nabla V\phi = \frac{2}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^3} (\phi(y) - \phi(x)) dS_y + \frac{2}{4\pi} \text{p.f.} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|^3} \phi(x) dS_y.$$

$\nabla_{\Gamma} V\phi_h$

Die Berechnung des Gradienten des Einfachschichtpotentials, angewendet auf Polynome ist schon im Programmpaket *maiprops* vorhanden und wird zur Bestimmung des Oberflächengradienten des Einfachschichtpotentials benutzt.

2.3.2 Lamé Operatoren

Die Verwendung der Integraloperatoren im Fehlerschätzer (2.5) für die FEM/BEM Kopplung für das Elastizitätsproblem (1.5)-(1.9) verlangt zur vereinfachten Berechnung der Terme ebenfalls, wie im Laplace-Fall, eine andere Darstellung der auftretenden Integrale. Wir stellen hier die Repräsentationsformulierungen für das Doppelschichtpotential und des adjungierten Doppelschichtpotentials aus dem Buch von Kupradze [40] und eine alternative Darstellung für den hypersingulären Operator aus einem Artikel von Han [39] vor. Beide Repräsentationen führen die Definitionen der Integraloperatoren auf eine Darstellung mit dem Lamé Einfachschichtpotential und den Laplace Integraloperatoren zurück.

Im Folgenden seien die Integraloperatoren des Laplace-Problems vom Anfang des Kapitels 2.3.1 mit einem Δ (also V^{Δ} , K^{Δ} , K'^{Δ} , W^{Δ}) gekennzeichnet.

Für die Darstellung des hypersingulären Integraloperators W

$$W\mathbf{v}(x) = -T(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} T(\partial_y, \mathbf{n}) \Gamma(x-y)^T \mathbf{v}(y) dS_y,$$

wobei $T(\partial_x, \mathbf{n})$ die Normalspannung (1.10) und $\Gamma(x-y)$ die Fundamentallösung (1.12) darstellen, benötigen wir folgenden antisymmetrischen Matrix-Differentialoperator

Definition 2.3.2 *Es sei*

$$U(\partial_x, \mathbf{n}) = (U_{ij}(\partial_x, \mathbf{n}))_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & -\mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} & \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \end{pmatrix}$$

2 Residualer Fehlerschätzer

mit

$$U_{ij}(\partial_x, \mathbf{n}) = \mathbf{n}_j \frac{\partial}{\partial x_i} - \mathbf{n}_i \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Außerdem schreiben wir

$$S_1(x) = (0, -\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)^T; \quad S_2(x) = (\mathbf{n}_3, 0, -\mathbf{n}_1)^T; \quad S_3(x) = (-\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1, 0)^T.$$

Damit haben wir die folgenden Operatoren

$$\begin{aligned} U_{11}(\partial_x, \mathbf{n}) &= U_{22}(\partial_x, \mathbf{n}) = U_{33}(\partial_x, \mathbf{n}) \equiv 0 \\ U_{32}(\partial_x, \mathbf{n}) &= -U_{23}(\partial_x, \mathbf{n}) = \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \frac{\partial}{\partial S_1(x)} \\ U_{13}(\partial_x, \mathbf{n}) &= -U_{31}(\partial_x, \mathbf{n}) = \mathbf{n}_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \frac{\partial}{\partial S_2(x)} \\ U_{21}(\partial_x, \mathbf{n}) &= -U_{12}(\partial_x, \mathbf{n}) = \mathbf{n}_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - \mathbf{n}_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \frac{\partial}{\partial S_3(x)} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des total antisymmetrischen Tensors ε_{ijk} mit den Eigenschaften

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \{i, j, k\} \text{ gerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{falls } \{i, j, k\} \text{ ungerade Permutation von } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{falls mind. zwei Indizes gleich} \end{cases}$$

können wir die Einträge der Matrix $U(\partial_x, \mathbf{n})$ aus Definition 2.3.2 schreiben als

$$U_{ij}(\partial_x, \mathbf{n}) = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial S_k} \quad \text{für } i, j, k = 1, 2, 3.$$

Der hypersinguläre Operator W für das elastische Problem lässt sich mit den obigen Definitionen darstellen als Zerlegung in Ableitungen des harmonischen Einfachschichtpotentials V^Δ (siehe Kap. 2.3.1) und des Einfachschichtpotentials für das Lamé-Problem. Es ergibt sich also eine Vereinfachung der Berechnung des hypersingulären Operators durch die Verwendung der bekannten Darstellungen.

Theorem 2.3.3 [39, (2,12)] *Es gilt*

$$\begin{aligned} W\mathbf{v}(x) &= -T(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} T(\partial_y, \mathbf{n}) \Gamma(x-y)^T \mathbf{v}(y) dS_y \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial S_k(x)} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial \mathbf{v}(y)}{\partial S_k(y)} dS_y \\ &\quad + U(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} \left(4\mu^2 \Gamma(x-y) - \frac{\mu}{2\pi} I \frac{1}{|x-y|} \right) U(\partial_y, \mathbf{n}) \mathbf{v}(y) dS_y \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} [U(\partial_x, \mathbf{n}) \frac{1}{|x-y|} U(\partial_y, \mathbf{n})]^T \mathbf{v}(y) dS_y \\
 & = \sum_{k=1}^3 \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial S_k(x)} V^{\Delta} \left(\frac{\partial \mathbf{v}(y)}{\partial S_k(y)} \right) \\
 & \quad + 4\mu^2 U(\partial_x, \mathbf{n}) V(U(\partial_y, \mathbf{n}) \mathbf{v}(y)) - \frac{\mu}{2\pi} U(\partial_x, \mathbf{n}) V^{\Delta}(U(\partial_y, \mathbf{n}) \mathbf{v}(y)) \quad (2.48) \\
 & - \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} [U(\partial_x, \mathbf{n}) \frac{1}{|x-y|} U(\partial_y, \mathbf{n})]^T \mathbf{v}(y) dS_y.
 \end{aligned}$$

Durch Nutzung von ε_{ijk} und der Definition 2.3.1 der Oberflächenrotation mit der Eigenschaft $\mathbf{curl}_{\Gamma} u = \nabla_{\Gamma} u \times \mathbf{n} = (\mathbf{n} \times (\nabla u \times \mathbf{n})) \times \mathbf{n} = \nabla u \times \mathbf{n}$ haben wir

$$\frac{\partial v(x)}{\partial S_k(x)} = \varepsilon_{kij} n_i \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = (\mathbf{n}(x) \times \text{grad } v(x))_k = (-\mathbf{curl}_{\Gamma})_k.$$

Daraus ergibt sich eine alternative Darstellung der Gleichung (2.47) (siehe [61]), wobei wir die Gleichung (2.47) für die Bilinearform $\langle W \cdot, \cdot \rangle$ benutzen

$$\begin{aligned}
 \langle W \phi, \psi \rangle & = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \sum_{i,l=1}^3 (\mathbf{curl}_{\Gamma} \phi(x) \mathbf{curl}_{\Gamma} \psi(y))_l dS_y dS_x \\
 & \quad + \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^3 \varepsilon_{ijl} (\mathbf{curl}_{\Gamma} \phi_l(x))_j \left(4\mu^2 \Gamma(x-y) - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\delta_{in}}{|x-y|} \right) \\
 & \quad \quad \quad \varepsilon_{nkm} (\mathbf{curl}_{\Gamma} \psi_m)_k dS_y dS_x \\
 & \quad - \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{1}{|x-y|} \sum_{i,l=1}^3 (\mathbf{curl}_{\Gamma} \phi_i(x))_i (\mathbf{curl}_{\Gamma} \psi(y))_l dS_y dS_x.
 \end{aligned}$$

Das Doppelschichtpotential

$$Kv(x) = \int_{\Gamma} (T(\partial_y, n) \Gamma(x-y))^T v(y) dS_y$$

des homogenen elastischen Außenraumproblems wird in [40] mit Hilfe der Definition von $U(\partial, \mathbf{n})$ in eine alternative Darstellung mit der Auswertung des Laplace Doppelschichtpotentials, Laplace Einfachschichtpotentials und des Lamé Einfachschichtpotentials überführt.

Theorem 2.3.4 [40, (Ch. V, §6, (6.2))] Für das Doppelschichtpotential K gilt

$$Kv(x) = \frac{1}{4} K^{\Delta}(v) - \frac{1}{4\pi} V^{\Delta}(U(\partial_y, n)v) + 2\mu V(U(\partial_y, n)v).$$

Das adjungierte Doppelschichtpotential K'

$$K'\phi(x) = T(\partial_x, \mathbf{n}) \int_{\Gamma} \Gamma(x-y)\phi(y) dS_y$$

lässt sich ebenfalls wie das Doppelschichtpotential und der hypersinguläre Operator in eine Darstellung überführen, die nur noch Anteile des Laplace Einfachschicht- und Doppelschichtpotentials und das Lamé Einfachschichtpotential beinhaltet.

Wir benötigen dazu folgende

Definition 2.3.5 *Wir definieren den Operator*

$$\mathcal{D}_k(\partial_y, n) := \frac{\partial}{\partial y_k} - n_k \frac{\partial}{\partial n} \quad k = 1, 2, 3,$$

und wir bezeichnen mit

$$\mathcal{K}(y) = \sum_{j=1}^3 \mathcal{D}_j(\partial_y, \mathbf{n}) n_j$$

die mittlere Krümmung der geschlossenen Oberfläche Γ .

Für die Betrachtung des adjungierten Doppelschichtpotentials ist es wichtig, die erste Ableitung des Einfachschichtpotentials, insbesondere der Fundamentallösung $\Gamma(x-y)$, zu bestimmen. Das Potential ergibt sich dann aus der der Kombination der Ableitung mit der Normalen für den Randspannungsoperator $T(\partial, \mathbf{n})$.

In [40] wird eine Darstellung der ersten Ableitung der Kelvin-Matrix gegeben

Lemma 2.3.1 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{kj}(x-y)}{\partial x_i} &= n_i \left[-(\lambda_2 + \mu_2) \delta_{ij} + 2\mu_2 n_k n_j \right] \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{|x-y|} \\ &\quad - (\lambda_2 + \mu_2) \delta_{kj} \mathcal{D}_i(\partial_y, \mathbf{n}) \frac{1}{|x-y|} \\ &\quad + \mu_2 \mathcal{D}_j(\partial_y, \mathbf{n}) \left(\frac{\partial^2 |x-y|}{\partial y_i \partial y_k} \right) \\ &\quad + 2\mu_2 n_i n_j \mathcal{D}_k(\partial_y, \mathbf{n}) \frac{1}{|x-y|} \\ &\quad + \mu_2 n_j \sum_{i=1}^3 U_{il}(\partial_y, \mathbf{n}) \left(\frac{\partial^2 |x-y|}{\partial y_k \partial y_l} \right). \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in die Definition des Einfachschichtpotentials ergibt

Theorem 2.3.6 [40, Ch. V, §6, Thm. 6.2.] Sei Γ eine geschlossene Oberfläche. Dann kann die erste Ableitung des Einfachschichtpotentials dargestellt werden als

$$\frac{\partial V_k(\phi)(x)}{\partial x_i} = K^\Delta(\phi^i) + V^\Delta(\psi^i) + V(\chi^i),$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi_{ki} &= n_i \left(2 \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} n_k(n\phi) - \left(\lambda_2 + \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} \right) \phi_k(y) \right) \\ \psi_{ki} &= \left(\frac{(\lambda_2 + 3\mu_2)}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} + \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} \right) [\mathcal{D}_i(\partial_y, n\phi_k(y)) - \mathcal{K}(y)n_i\phi_k(y) \\ &\quad + \delta_{ki}((n\phi)\mathcal{K}(y) - \sum_{j=1}^3 \mathcal{D}_j(\partial_y, n)\phi_j(y)) + U_{ki}(\partial_y, n)(n\phi)] \\ &\quad + 2 \frac{(\lambda_2 + \mu_2)}{4\pi\mu_2(\lambda_2 + 2\mu_2)} (n_i n_k \mathcal{K}(y)(n\phi) - \mathcal{D}_k(\partial_y, n)(n_i(n\phi))) \\ \chi_{ki} &= \delta_{ki} \left(\sum_{j=1}^3 \mathcal{D}_j(\partial_y, n)\phi_j(y) - (n\phi)\mathcal{K}(y) \right) + U_{ik}(\partial_y, n)(n\phi). \end{aligned}$$

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

In diesem Kapitel präsentieren wir einen hierarchischen Fehlerschätzer für das nichtlineare Elastizitätsproblem, das wir in Kapitel 1 hergeleitet haben. Für ähnliche Aussagen für das Laplace-Problem in 2D siehe [52, 49]. Wir stellen den effizienten und zuverlässigen Fehlerschätzer vor, den wir mit der Saturationsannahme und den Eigenschaften der Zwei-Level Zerlegungen beweisen können. Außerdem präsentieren wir verschiedene Möglichkeiten der adaptiven Gitterverfeinerungen mit Hexaedern.

Die variationelle Formulierung für die Verschiebung \mathbf{u} in Ω und der Randspannung ϕ auf dem Rand Γ hat wie in Kapitel 1.2 mit den Testfunktionen $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\psi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ die Darstellung

Finde $(\mathbf{u}, \phi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$B((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)) = L(\mathbf{v}, \psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \psi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \quad (3.1)$$

wobei die Bilinearform gegeben ist durch

$$\begin{aligned} B((\mathbf{u}, \phi), (\mathbf{v}, \psi)) := & A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}|_{\Gamma} + (K' - I)\phi, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle \\ & + \frac{1}{2} \langle \psi, V\phi + (I - K)\mathbf{u}|_{\Gamma} \rangle, \end{aligned}$$

mit

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \left\{ \left(k - \frac{2}{3} \mu \varphi'(\Pi(\mathbf{u})) \right) \operatorname{div} \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v} + \sum_{i,j=1}^3 2\mu \varphi'(\Pi(\mathbf{u})) \epsilon_{ij}(\mathbf{u}) : \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) \right\} dx$$

und

$$L(\mathbf{v}, \psi) := \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, dx + \frac{1}{2} \langle \psi, (I - K)\mathbf{u}_0 \rangle + \langle \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2} W \mathbf{u}_0, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle$$

ist die Linearform der variationellen Formulierung.

Durch die positive Definitheit des Einfachschichtpotentials haben wir, dass die Norm

$$\|\psi\|_V = \langle \psi, V\psi \rangle^{1/2} \quad \forall \psi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$$

äquivalent zur $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm ist. Mit den Bedingungen an die nichtlineare Funktion in (1.2) haben wir mittels der Kornschen Ungleichung, dass die Energienorm der variationellen Formulierung äquivalent ist zu der Norm

$$\|(\mathbf{u}, \phi)\|_{\mathcal{H}} = (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\phi\|_V^2)^{1/2}, \quad (3.2)$$

die durch die Bilinearform

$$a(\mathbf{u}, \phi, \mathbf{v}, \psi) = \int_{\Omega_1} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \langle \phi, V\psi \rangle \quad (3.3)$$

induziert wird.

Für die diskrete variationelle Formulierung benötigen wir eine reguläre Unterteilung \mathcal{T}_h des Gebietes Ω_1 und eine Triangulierung Γ_h des Randes Γ . Wir definieren die diskreten Test- und Ansatzräume durch

$$T_h := \{\mathbf{u}_h \in C^0(\Omega); \mathbf{u}_h \text{ stw. trilinear bzgl } \mathcal{T}_h\}$$

und

$$\tau_h := \{\psi_h; \psi_h \text{ stw. konstant bzgl } \Gamma_h\}.$$

Die diskrete Formulierung der kontinuierlichen Formulierung (3.1) lässt sich wie folgt darstellen

Finde $(\mathbf{u}_h, \phi_h) \in T_h \times \tau_h$ mit

$$B((\mathbf{u}_h, \phi_h), (\mathbf{v}_h, \psi_h)) = L(\mathbf{v}_h, \psi_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, \psi_h) \in T_h \times \tau_h. \quad (3.4)$$

3.1 Zwei-Level Zerlegungen

Für die Zwei-Level Zerlegungen sei \mathcal{T}_H eine reguläre Unterteilung des Gebiets Ω in hexaedrische Elemente. Auf dem Rand Γ haben wir die reguläre Unterteilung Γ_H in Rechtecke (siehe [51]). Das Randgitter kann unabhängig von dem Volumengitter gestaltet werden, in unseren Beispielen verwenden wir allerdings das Randgitter stets als Spur des Volumengitters.

3.1.1 Zwei-Level Zerlegungen für Hexaeder

Sei \mathcal{T}_H die reguläre Unterteilung des Gebietes Ω . Durch uniforme Verfeinerung (also die Unterteilung aller Elemente in \mathcal{T}_H bezüglich der xy -, xz - und yz -Ebene) der Triangulierung \mathcal{T}_H erhalten wir das feinere Gitter \mathcal{T}_h . Die Test- und Ansatzräume definieren wir

als

$$T_H := \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{C}^0(\Omega); \mathbf{u}_h \text{ stw. trilinear bzgl } \mathcal{T}_H\}$$

und

$$T_h := \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{C}^0(\Omega); \mathbf{u}_h \text{ stw. trilinear bzgl } \mathcal{T}_h\}.$$

Die Freiheitsgrade des Ausgangsgitters bezeichnen wir mit n_H , die Freiheitsgrade des verfeinerten Gitters \mathcal{T}_h mit n_h . Wir haben also durch $n := n_h - n_H$ die Anzahl der durch die uniforme Verfeinerung neu geschaffenen Freiheitsgrade. Für diese neuen Freiheitsgrade x_i , $1 \leq i \leq n$ definieren wir die stückweise trilinearen Basisfunktionen b_i mit dem Wert 1 in dem neuen Knoten x_i und Null auf allen anderen Knoten in \mathcal{T}_h . Mit $T_i = \text{span}\{[b_i]^3\}$ bezeichnen wir den dreidimensionalen Raum, der durch die Basisfunktion b_i aufgespannt wird. Mit diesen Definitionen haben wir nun die Unterraumzerlegung

$$T_h = T_H \oplus D_H, \quad (3.5)$$

wobei

$$D_H := T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_n.$$

3.1.2 Zwei-Level Zerlegungen für Randelemente

Die reguläre Zerlegung Γ_H des Randes Γ in Rechteckelemente verfeinern wir uniform durch Unterteilung der Elemente in x - und y -Richtung in jeweils vier neue Elemente und erhalten das verfeinerte Gitter Γ_h . Auf den beiden Gittern haben wir dann die Räume

$$\tau_H := \{\boldsymbol{\psi}_H; \boldsymbol{\psi}_H \text{ stw. konstant bzgl. } \Gamma_H\}$$

und

$$\tau_h := \{\boldsymbol{\psi}_h; \boldsymbol{\psi}_h \text{ stw. konstant bzgl. } \Gamma_h\}.$$

Wir bezeichnen mit m die Anzahl der Randelemente der Unterteilung τ_H . Für ein Element F_i ($1 \leq i \leq m$) aus τ_H haben wir die vier neuen Elemente $F_{i,1}, \dots, F_{i,4}$ aus τ_h . Um eine Basis für die Verfeinerung τ_h zu erhalten, führen wir drei neue Basisfunktionen $\beta_{i,j}$

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3$) (siehe [50]) durch

$$\beta_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in F_{i,1} \cup F_{i,2} \\ -1 & , \text{ falls } x \in F_{i,3} \cup F_{i,4} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\beta_{i,2}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } x \in F_{i,1} \cup F_{i,4} \\ -1 & , \text{ falls } x \in F_{i,2} \cup F_{i,3} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\beta_{i,3}(x) = \beta_{i,1}(x)\beta_{i,2}(x),$$

ein, die gemäß Abbildung 3.1 gegeben sind. Bezüglich des verfeinerten Gitters werden

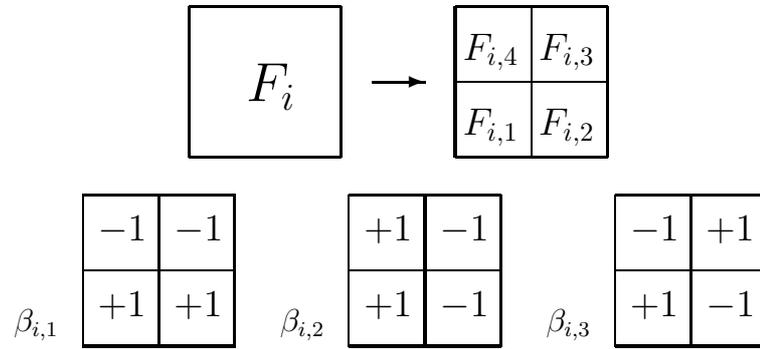


Abbildung 3.1: Neue Basisfunktionen auf den Randlelementen

die dreidimensionalen Räume $\tau_{i,j} = \text{span}\{[\beta_{i,j}]^3\}$ durch die neuen Basisfunktionen $\beta_{i,j}$ aufgespannt. Es ergibt sich damit die Zwei-Level Zerlegung

$$\tau_h = \tau_H \oplus \lambda_H, \quad (3.6)$$

wobei

$$\lambda_H := \bigoplus_{j=1}^3 \tau_{1,j} \oplus \bigoplus_{j=1}^3 \tau_{2,j} \oplus \cdots \oplus \bigoplus_{j=1}^3 \tau_{m,j}.$$

Die Galerkin-Projektoren werden nun bezüglich der folgenden Bilinearformen $b(\cdot, \cdot)$ und $V(\cdot, \cdot)$ definiert, wobei

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, dx, \quad (3.7)$$

und

$$V(\phi, \psi) := \langle \psi, V\phi \rangle. \quad (3.8)$$

Seien $P_H : T_h \rightarrow T_H$ und $P_i : T_h \rightarrow T_i$ die Galerkin-Projektoren bzgl. $b(\cdot, \cdot)$, so dass für alle $\mathbf{u} \in T_h$ gilt

$$b(P_H \mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in T_H, \quad (3.9)$$

$$b(P_i \mathbf{u}, \mathbf{v}) = b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in T_i. \quad (3.10)$$

Für alle $\phi \in \tau_h$ definieren wir die Projektoren $p_H : \tau_h \rightarrow \tau_H$ und $p_i : \tau_h \rightarrow \tau_i$ durch

$$V(p_H \phi, \psi) = V(\phi, \psi) \quad \forall \psi \in \tau_H, \quad (3.11)$$

$$V(p_i \phi, \psi) = V(\phi, \psi) \quad \forall \psi \in \tau_i. \quad (3.12)$$

Damit können wir nun die Zwei-Level Additiv-Schwarz Operatoren

$$P := P_H + \sum_{i=1}^n P_i \quad (3.13)$$

$$p := p_H + \sum_{j=1}^m p_j \quad (3.14)$$

eingeführen. Aus [49] haben wir die folgenden Aussagen für die Zwei-Level Zerlegungen für die hierarchische Basiszerlegung in T_H , dass der Operator P beschränkte Konditionszahl hat.

Lemma 3.1.1 ([49]) *Es gibt Konstanten $C_1, C_2 > 0$ unabhängig von dem Gitter, so dass gilt*

$$C_1 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \|P_H \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \|P_i \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq C_2 \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in T_h. \quad (3.15)$$

Für τ_H haben wir, dass die Eigenwerte des Operators p beschränkt sind.

Lemma 3.1.2 ([49]) *Es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$ unabhängig von h , wobei h die Größe des kleinsten Elements, so dass für $\epsilon > 0$ gilt*

$$c_1 h^\epsilon \|\psi\|_V^2 \leq \|p_H \psi\|_V^2 + \sum_{j=1}^m \|p_j \psi\|_V^2 \leq c_2 h^{-\epsilon} \|\psi\|_V^2 \quad \forall \psi \in \tau_h. \quad (3.16)$$

Mit diesen beiden Lemmata gilt, dass die Unterraumzerlegungen in (3.5) für die Volumenelemente und in (3.6) für die Randelemente stabile Unterraumzerlegungen sind.

3.2 A posteriori Fehlerschätzer

In diesem Abschnitt präsentieren wir eine effiziente und zuverlässige a posteriori Fehlerabschätzung. Durch die Saturationsannahme (Ann. 2) und die Definitionen der Galerkin-Projektoren, die wir im vorherigen Abschnitt eingeführt haben, können wir die Fehlerabschätzung für das nichtlineare Elastizitätsproblem beweisen. Die in den Schranken auftretenden lokalen Fehlerindikatoren können wir für die Steuerung des adaptiven Algorithmus benutzen.

Für den Beweis der a posteriori Fehlerabschätzung benötigen wir die folgende Saturationsannahme

Annahme 2 *Es gibt einen Index $i_0 \in \mathbb{N}_0$ und eine Konstante $0 \leq \kappa < 1$, so dass für alle $k \geq i_0$ gilt*

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{k+1}, \phi - \phi_{k+1})\|_{\mathcal{H}} \leq \kappa \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k, \phi - \phi_k)\|_{\mathcal{H}}.$$

Aus dieser Annahme und der Dreiecksungleichung erhalten wir das

Lemma 3.2.1 *Unter der Annahme 2 gelten für alle $k \geq i_0$ die Abschätzungen*

$$(1 - \kappa) \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k, \phi - \phi_k)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \phi_{k+1} - \phi_k)\|_{\mathcal{H}} \leq (1 + \kappa) \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k, \phi - \phi_k)\|_{\mathcal{H}}.$$

Lemma 3.2.1 besagt, dass es genügt, die Differenz zweier aufeinander folgenden Galerkin-Lösungen abzuschätzen.

Mit Hilfe der Saturationsannahme und den Zwei-Level Zerlegungen für die Finiten Elemente und die Randelemente erhalten wir nun einen zuverlässigen und effizienten Fehlerschätzer für den Abstand der Approximationen zu den exakten Lösungen in der Energienorm

Theorem 3.2.1 *Es gelte die Annahme 2. Dann gibt es Konstanten $c_1, c_2 > 0$ und einen Index $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass gilt*

$$c_1 h_k \left(\sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \right)^{1/2} \leq \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_k, \phi - \phi_k)\|_{\mathcal{H}} \leq c_2 h_k^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

für alle $k \geq k_0$ und Θ, θ sind definiert als

$$\Theta_{i,k} := \|\mathbf{e}_{k,i}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}, \quad \theta_{j,k} := \|\varepsilon_{j,k}\|_V.$$

$\mathbf{e}_{k,i} \in T_i^3$ ist Lösung des Problems

$$(\mathbf{e}_{k,i}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = L(\mathbf{v}, 0) - B((\mathbf{u}_H, \boldsymbol{\phi}_H), (v, 0)) \quad \forall \mathbf{v} \in T_i^3 \quad (3.18)$$

und $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,i} \in \tau_i^3$ ist Lösung des Problems

$$V(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,i}, \boldsymbol{\psi}) = L(0, \boldsymbol{\psi}) - B((\mathbf{u}_H, \boldsymbol{\phi}_H), (0, \boldsymbol{\psi})) \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in \tau_i^3. \quad (3.19)$$

Beweis. Wir haben die nichtlineare diskrete Galerkin-Formulierung aus (3.4)

$$B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (v, \boldsymbol{\psi})) = L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_h \times \tau_h,$$

wobei

$$B((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) := A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}|_{\Gamma} + (K' - I) \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}, V \boldsymbol{\phi} + (I - K) \mathbf{u}|_{\Gamma} \rangle,$$

mit

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) + 2\mu\varphi'(\Pi(\mathbf{u})) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx.$$

Wir linearisieren den nichtlinearen Ausdruck mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Für den Startwert $(\mathbf{u}_k^{(0)}, \boldsymbol{\phi}_k^{(0)})$ definieren wir

$$(\mathbf{u}_k^{(n)}, \boldsymbol{\phi}_k^{(n)}) = (\mathbf{u}_k^{(n-1)}, \boldsymbol{\phi}_k^{(n-1)}) + (\mathbf{d}_k^{(n)}, \boldsymbol{\delta}_k^{(n)}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$(\mathbf{d}_k^{(n)}, \boldsymbol{\delta}_k^{(n)})$ sind definiert als die Lösungen des linearen Problems

$$B_{\mathbf{u}_k^{(n-1)}}((\mathbf{d}_k^{(n)}, \boldsymbol{\delta}_k^{(n)}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) = L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) - B((\mathbf{u}_k^{(n-1)}, \boldsymbol{\phi}_k^{(n-1)}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_k^3 \times \tau_k^3. \quad (3.20)$$

$B_{\mathbf{u}_k^{(n-1)}}(\cdot, \cdot)$ ist hierbei definiert als

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) &:= A_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &+ \frac{1}{2} \langle W \mathbf{u}|_{\Gamma} + (K' - I) \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle + \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\psi}, V \boldsymbol{\phi} + (I - K) \mathbf{u}|_{\Gamma} \rangle, \end{aligned} \quad (3.21)$$

mit

$$A_{\mathbf{w}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} k \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) + 2\mu\tilde{\varphi}(\mathbf{w}) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx,$$

wobei $\tilde{\varphi}$ definiert ist als

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{g}) = 2\varphi''(\Pi(\mathbf{g}))\Pi(\mathbf{g}) + \varphi'(\Pi(\mathbf{g}))$$

mit $\Pi(\mathbf{g}) = \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g}) : \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{g})$.

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

Mit den Annahmen an die nichtlineare Funktion (siehe (1.2) und (1.3)) und der Stetigkeit der Integraloperatoren haben wir

$$B_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \leq c_1 \|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})\|_{\mathcal{H}} \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}} \quad (3.22)$$

für eine Konstante $c_1 > 0$ und alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und alle $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Analog zu [19] können wir aus Theorem 1.2.1 folgern, dass die folgende inf-sup-Bedingung erfüllt ist

$$\inf_{\substack{(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) \in T_k^3 \times \tau_k^3 \\ \|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})\|_{\mathcal{H}}=1}} \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_k^3 \times \tau_k^3 \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}}=1}} B_{\mathbf{w}}((\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \leq \tilde{c} \quad (3.23)$$

für eine Konstante $\tilde{c} > 0$ und alle $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$. Daraus folgt die eindeutige Lösbarkeit des linearen Problems (3.20).

Aus [56] haben wir die Konvexität des Energiefunktionals der variationellen Formulierung 3.1. Daraus können wir auf die Konvergenz des Newton-Verfahren gegen die exakte Lösung $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k)$ des nichtlinearen Problems 3.4 schließen, falls der Startwert $(\mathbf{u}_k^{(0)}, \boldsymbol{\phi}_k^{(0)})$ hinreichend nah an der exakten Lösung liegt.

Für den Fehler, der bei der Linearisierung der nichtlinearen Gleichung entsteht, definieren wir für die Lösung $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k) \in T_k^3 \times \tau_k^3$ des Galerkin-Problems die Form

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{w} - \mathbf{u}_k; \mathbf{v}) &:= B((\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\xi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) - B_{\mathbf{u}_k}((\mathbf{w} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\xi}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \\ &= \int_{\Omega} 2\mu \left[\varphi'(\Pi(\mathbf{w})) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \varphi'(\Pi(\mathbf{u}_k)) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) - \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_k) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w} - \mathbf{u}_k) \right] : \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{k+1}^3$ und alle $\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\psi} \in \tau_{k+1}^3$. Mit der Funktion φ , die die Nichtlinearität beschreibt (siehe (1.2)), haben wir, dass für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$\delta(k) := \frac{\|\varphi'(\Pi(\mathbf{u}_{k+1})) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{k+1}) - \varphi'(\Pi(\mathbf{u}_k)) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_k) - \tilde{\varphi}(\mathbf{u}_k) \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)\|_{\mathbf{L}^2}}{\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}} \rightarrow 0.$$

Dies liefert mit $\|\operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}$ die Abschätzung

$$Q(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k; \mathbf{v}) \leq \delta(k) \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (3.25)$$

Für den Beweis des Fehlerschätzers benötigen wir die Eigenschaft, dass $(\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\phi}_{k+1})$ als Lösung der diskreten variationellen Formulierung die Gleichung

$$B((\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\phi}_{k+1}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) = L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \quad (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3 \quad (3.26)$$

erfüllt.

Mit der in (3.3) eingeführten Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ definieren wir nun $(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3$ als Lösung des Problems

$$a(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) = L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \quad \forall (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3. \quad (3.27)$$

Mit den obigen Definitionen und Abschätzungen sind wir in der Lage, die folgende Abschätzung (3.28) zu beweisen. Als Konsequenz dieser Abschätzung ergibt sich mit Hilfe des Lemmas 3.2.1, dass wir $(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})$ als a posteriori Fehlerschätzer benutzen können.

Es existieren die Konstanten $c_0, c'_0 > 0$, die unabhängig von dem Verfeinerungslevel k sind, so dass gilt

$$c_0 \|(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k)\|_{\mathcal{H}} \leq \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}} \leq c'_0 \|(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k)\|_{\mathcal{H}} \quad (3.28)$$

Wir schätzen die linke Seite mit der inf-sup-Bedingung (3.23), dem Linearisierungsfehler (3.24), der Definition von $(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})$ in (3.27) und (3.26) ab

$$\begin{aligned} c_1 \|(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k)\|_{\mathcal{H}} &\leq \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3 \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}}=1}} B_{\mathbf{u}_k}((\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) \\ &= \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3 \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}}=1}} (B((\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\phi}_{k+1}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) - Q(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k; \mathbf{v})) \\ &= \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3 \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}}=1}} (L(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})) - Q(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k; \mathbf{v})) \\ &= \sup_{\substack{(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) \in T_{k+1}^3 \times \tau_{k+1}^3 \\ \|(\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi})\|_{\mathcal{H}}=1}} (a(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}) - Q(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k; \mathbf{v})) \\ &\leq \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}} + \delta(k) \|\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten nun mit den Abschätzungen (3.27), (3.26) und (3.24) eine obere Schranke für $\|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}^2 &= a(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) \\ &= B((\mathbf{u}_{k+1}, \boldsymbol{\phi}_{k+1}), (\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})) \\ &= B_{\mathbf{u}_k}((\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k), (\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})) + Q(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k; \mathbf{e}_{k+1}) \\ &\leq (c'_1 + \delta(k)) \|(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_{k+1} - \boldsymbol{\phi}_k)\|_{\mathcal{H}} \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Für ein hinreichend großes k_0 , so dass $k_0 \geq i_0$ für i_0 aus Lemma 3.2.1 und mit $\delta(k) \leq \delta_0 < c_1$ erhalten wir die Abschätzung (3.28) für $c_0 = c_1 - \delta_0$ und $c'_0 = c'_1 - \delta_0$ mit Hilfe des Lemmas 3.2.1.

Um nun die Aussage (3.17) zu beweisen, benötigen wir die Galerkin-Projektoren $P^{(k)}$, P_i , p^k und p_j um Abschätzungen für \mathbf{e}_{k+1} und $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ in der Energienorm zu bekommen.

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

Mit den Definitionen der Galerkin-Projektoren $P^{(k)} : T_{k+1} \rightarrow T_k$ und $P_i : T_{k+1} \rightarrow \text{span}\{[b_{i,k+1}]^3\}$ für die Volumenelemente bzgl. der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ sowie die Galerkin-Projektoren $p^k : \tau_{k+1} \rightarrow \tau_k$ und $p_j : \tau_{k+1} \rightarrow \text{span}\{[\beta_{j,k+1}]^3\}$ der Randelemente bzgl. $V(\cdot, \cdot)$ wenden wir die Stabilitätsaussagen aus Lemma 3.1.1 und Lemma 3.1.2 an und erhalten

$$\begin{aligned} & C_1 \|\mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + c_1 h^\epsilon \|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2 \\ & \leq \|(P^{(k)} \mathbf{e}_{k+1}, p^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}^2 + \sum_{i=1}^n \|P_i \mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \|p_j \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2 \\ & \leq C_2 \|\mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + c_2 h^{-\epsilon} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Durch die hierarchische Struktur der Anreicherungen gilt die Gleichung (3.26) auch für Elemente aus T_k . Mit der Definition von $(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})$ und den Galerkin-Projektionen haben wir

$$\begin{aligned} \|(P^{(k)} \mathbf{e}_{k+1}, p^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}^2 &= a(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}, P^{(k)} \mathbf{e}_{k+1}, p^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) \\ &= L(P^{(k)} \mathbf{e}_{k+1}, p^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) - B((\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k), (P^{(k)} \mathbf{e}_{k+1}, p^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Daraus folgt für Gleichung (3.29)

$$\begin{aligned} & C_1 \|\mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + c_1 h^\epsilon \|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2 \\ & \leq \sum_{i=1}^n \|P_i \mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \sum_{j=1}^m \|p_j \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2 \\ & \leq C_2 \|\mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + c_2 h^{-\epsilon} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V^2. \end{aligned}$$

Es gilt mit der Definition von \mathbf{e}_{k+1} in (3.27), den Eigenschaften der Projektoren P_i , der lokalen 3×3 Steifigkeitsmatrix und der Definition des Indikators (3.18)

$$\|P_i \mathbf{e}_{k+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = R_e^T (b_{i,k+1}, b_{i,k+1})_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^{-1} R_e = \Theta_{k,i}$$

mit $R_e = (L([b_{i,k+1}]^3, 0) - B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}), ([b_{i,k+1}]^3, 0)))$

Analog haben wir mit der Definition des Indikators $\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}$ in (3.19)

$$\|p_j \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}\|_V = R_\boldsymbol{\varepsilon}^T \langle V[\beta_{j,k+1}]^3, [\beta_{j,k+1}]^3 \rangle^{-1} R_\boldsymbol{\varepsilon} = \theta_{k,j},$$

wobei $R_\boldsymbol{\varepsilon} = (L(0, [\beta_{j,k+1}]^3) - B((\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\phi}), (0, [\beta_{j,k+1}]^3)))$.

Damit haben wir insgesamt für die Abschätzungen in (3.29) eine obere und untere Schranke für die Summe der lokalen Fehlerindikatoren Θ und θ

$$\min\{C_1 + c_1\} \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \leq \max\{C_2 + c_2\} \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Setzen wir diese Abschätzung in die Abschätzung (3.28) ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c'_0 \sqrt{\max\{C_2 + c_2\}}} \left(\sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \right)^{1/2} \\ \leq \|(\mathbf{e}_{k+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1})\|_{\mathcal{H}} \leq \\ \frac{1}{c_0 \sqrt{\min\{C_1 + c_1\}}} \left(\sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Die Aussage der zuverlässigen und effizienten Fehlerabschätzung für den Approximationsfehler in der Energienorm folgt dann mit dem Lemma 3.2.1. \square

3.3 Adaptiver Algorithmus

Wir formulieren nun einen Algorithmus, den wir zur adaptiven Gitterverfeinerung verwenden. Wir benutzen dabei die lokalen Fehlerindikatoren, die wir in Theorem 3.2.1 eingeführt haben. Wir vergleichen drei unterschiedliche Strategien für die Verwendung der lokalen Indikatoren anhand von Beispielen.

Für ein $k \in \mathbb{N}_0$ seien \mathcal{T}_k und Γ_k die aktuellen regulären Unterteilungen des Volumengitters und des Randgitters. Sei N_k die Anzahl der Elemente im Volumengitter \mathcal{T}_k und sei M_k die Anzahl der Randelemente. Wir definieren den globalen Fehlerindikator durch

$$\eta_k := \left(\sum_{i=1}^n \Theta_{i,k}^2 + \sum_{j=1}^m \theta_{j,k}^2 \right)^{1/2}. \quad (3.31)$$

Algorithmus 1 Sei durch \mathcal{T}_0 und Γ_0 die ursprüngliche Unterteilung des Gebietes Ω und des Randes Γ gegeben. Wir definieren durch $\vartheta \in [0, 1]$ den Prozentsatz der zu verfeinern den Elemente. Führe für $k = 0, 1, 2, \dots$ die folgenden Schritte aus

1. Berechne die Galerkin-Lösungen $(\mathbf{u}_k, \boldsymbol{\phi}_k) \in T_k \times \tau_k$ der diskreten Formulierung (3.4)
2. Berechne für jedes Element $T_i \in \mathcal{T}_k$ den lokalen Fehlerindikator $\Theta_{i,k}$ und für jedes Randelement $F_i \in \Gamma_k$ berechne den lokalen Indikator $\theta_{i,k}$
3. Berechne den globalen Fehlerindikator η_k gemäß (3.31) und stoppe, falls die Fehler-toleranzgrenze erreicht ist

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

4. Berechne $\eta_{max_1} := \max_{T_i \in \mathcal{T}_k} \{\Theta_{i,k}\}$ und $\eta_{max_2} := \max_{F_i \in \Gamma_k} \{\theta_{i,k}\}$ und unterteile die Elemente T_i bzw. F_i , falls

$$\Theta_{i,k} \geq \vartheta \eta_{max_1} \quad \text{bzw.} \quad \theta_{i,k} \geq \vartheta \eta_{max_2}$$

5. Verfeinere benachbarte Elemente gemäß der Regularitätsbedingungen an die Gitter

6. Gehe zu 1.

In Schritt 4 haben wir zwei Maxima der lokalen Fehlerindikatoren zu bestimmen, falls wir unabhängige Gitter für das Gebiet und den Rand betrachten. In unseren Fällen benutzen wir jedoch ein Spurgitter des Volumengitter auf dem Rand. Die lokalen Fehlerindikatoren $\theta_{i,k}$ werden dann zu den zugehörigen Volumenelementen addiert.

Für die Unterteilung der Elemente in Schritt 4 betrachten wir im folgenden Abschnitt mehrere Möglichkeiten der Verfeinerung. Wir haben die Möglichkeit, die elementweise Verfeinerung durch eine reguläre Verfeinerung, eine Richtungssteuerung oder eine Schichtenverfeinerung durchzuführen. Diese drei Möglichkeiten gewährleisten alle die Regularität des Gitters, dass keine hängenden Knoten auftreten. In einer weiteren Variante (die nichtkonforme Verfeinerung) lassen wir, wie in Kapitel 6 beschrieben, hängende Knoten zu und benutzen dadurch eine erweiterte Regularität des Gitters. Die ersten drei Verfahren wahren immer die Regularität des Gitters. Die Aussagen über die stabile Unterraumzerlegungen der Gitter aus den vorherigen Abschnitten sind also stets erfüllt. Bei der Verwendung von nichtkonformen Gittern ist die theoretische Grundlage nicht mehr gegeben, da wir keine stabile Unterraumzerlegung durch die vorhandenen abhängigen Freiheitsgrade haben.

Wir gehen im Folgenden davon aus, dass wir für das Randgitter das induzierte Volumengitter nehmen, d.h. die Seitenflächen F_i der Volumenelemente $T_i \in \mathcal{T}_k$, die auf dem Rand des Gebiets Ω liegen, bilden die Elemente des Randgitters. Die Anteile der lokalen Fehlerindikatoren auf den Randelementen bzw. in den Freiheitsgraden auf dem Rand werden zu den entsprechenden Freiheitsgraden in den Volumenelementen addiert. Es entstehen effektiv also nur lokale Fehlerindikatoren bezüglich der Elemente T_i .

Reguläre Verfeinerung

Bei der regulären Verfeinerung unterteilen wir die Elemente, die zur Verfeinerung in Schritt 4 des Algorithmus 1 markiert wurden in 8 neue Elemente. Die Elemente werden also in xy -, xz - und yz -Richtung verfeinert. Diese Vorgehensweise deckt sich mit der adaptiven Verfeinerung, die wir für den residualen Fehlerschätzer aus Kapitel 2.1 im Algorithmus in Abschnitt 2.2 vorgestellt haben.

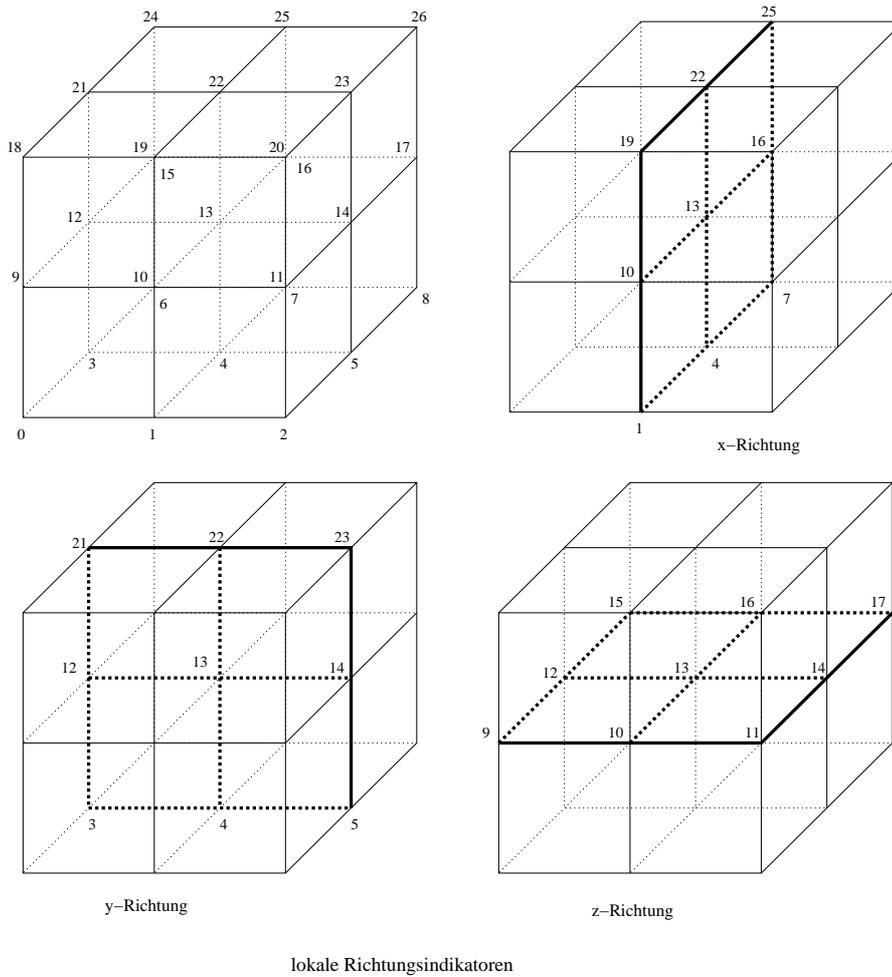


Abbildung 3.2: lokale Anreicherung und neue Freiheitsgrade

Richtungsgesteuerte Verfeinerung

Bei der richtungsgesteuerten Verfeinerung nutzen wir die lokale Anreicherung der Elemente zur Berechnung der lokalen Fehlerindikatoren. Das Hexaeder-Element wird zur Bestimmung des Indikators in 8 neue Elemente unterteilt. Die so neu entstandenen Freiheitsgrade können wir nun für eine Erweiterung des Indikators, so genannte Richtungsindikatoren, benutzen. In Abbildung 3.2 sehen wir die Freiheitsgrade der uniformen Verfeinerung eines Elements zur Berechnung des Fehlerindikator $\Theta_{i,k}$, wobei die Freiheitsgrade $\{0, 2, 6, 8, 18, 20, 24, 26\}$ die Freiheitsgrade aus \mathcal{T}_k sind und nicht zur Berechnung der Fehlerindikatoren benutzt werden. Für die Richtungsindikatoren sammeln wir die Werte des Fehlerindikator in den Freiheitsgraden der einzelnen Ebenen zusammen. Für den x -Richtungsindikator benutzen wir dann die Freiheitsgrade $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25\}$, für den y -Richtungsindikator die Freiheitsgrade $\{3, 4, 5, 12, 13, 14, 21, 22, 23\}$ und für den z -Richtungsindikator $\{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$. Wir erhalten insgesamt $3 \cdot N_k$ Feh-

lerindikatoren. Falls ein Richtungsindikator zu einer Verfeinerung des Elements führt, wird das Element entsprechend dem Richtungsindikator unterteilt. Eine Markierung durch einen x -Richtungsindikator bewirkt eine Verfeinerung des Elements in der xz -Ebene. Eine Markierung durch den y -Richtungsindikator liefert die Unterteilung in yz -Richtung und der z -Indikator eine Unterteilung parallel zur xy -Ebene. Falls es auf einem Element eine Verfeinerungsmarkierung durch mehrere Indikatoren gibt, werden diese Unterteilungen „addiert“ und das Element entsprechend in vier oder acht Elemente geteilt.

Es entstehen dadurch weniger neue Elemente als bei der regulären Verfeinerung. Die somit entstehenden adaptiven Gitterentwicklungen können sich so besser an das zu berechnende Problem anpassen.

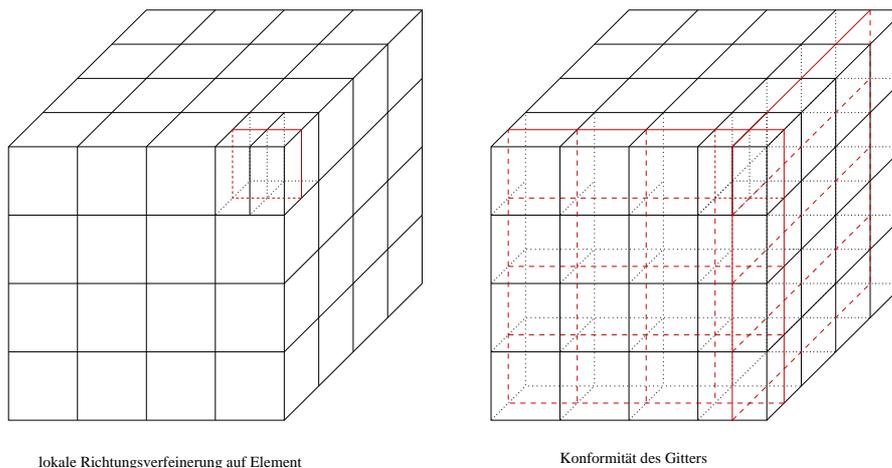


Abbildung 3.3: Verfeinerung eines Elements in x - und y -Richtung und Verfeinerung der benachbarten Elemente

Schichtenverfeinerung

Bei der Schichtenverfeinerung berücksichtigen wir die Tatsache, dass bei der Anwendung konformer hexaedrischer Gitter die benachbarten Elemente eines zu verfeinernden Elements auch mit verfeinert werden müssen. In Abbildung 3.3 wurde durch die Verwendung der oben beschriebenen Richtungsindikatoren ein Element so zur Verfeinerung markiert, dass eine Unterteilung in x - und in y -Richtung vorgenommen wird. Die Regularitätsbedingung des Gitters lässt nun keine hängenden Knoten zu, deshalb müssen alle Elemente, die in der gleichen xz - und in der yz -Ebene wie das Element liegen, halbiert werden.

Die Idee des Schichtenindikators nach [51] bzw. [49] besteht nun darin, die Richtungsindikatoren der Elemente in einer Schicht aufzusummieren und dann die Verfeinerungsentscheidung schichtenweise zu fällen. In dem adaptiven Algorithmus werden dann ϑ -Prozent der Schichten verfeinert. Dafür definieren wir eine Schicht durch

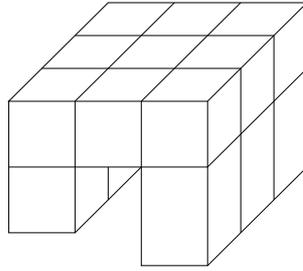


Abbildung 3.4: Verfeinerung von Ω mit jeweils drei Schichten pro Koordinatenebene

Definition 3.3.1 *Zwei Elemente $T_i, T_j \in \mathcal{T}_k$ seien benachbart in x -Richtung, falls T_i und T_j eine gemeinsame Seitenfläche haben, die parallel zur xz -Ebene ist. Analog werden die Nachbarn in y und z -Richtung definiert.*

Eine Schicht in xy -Richtung ist nun durch alle Elemente $T_i \in \mathcal{T}_k$ definiert, die bezüglich der x -Richtung und der y -Richtung benachbart sind. Analog definieren sich die xz - und yz -Schichten.

Ein Beispiel für eine Unterteilung des Gebiets Ω in jeweils drei xy -, xz - und yz -Schichten zeigt die Abbildung 3.4 nach [51].

Wir haben also für die Entscheidung der Verfeinerung in Schritt 4 des Algorithmus 1 nur noch N_k Schichten zu betrachten. Falls eine Schicht zur Verfeinerung markiert wird, wird sie gemäß ihrer Ausrichtung unterteilt. Der Schritt 5 entfällt durch die Verwendung der Schichten, da die Regularität des Gitters automatisch erhalten bleibt.

Verfeinerung mit hängenden Knoten

In den obigen drei Vorgehensweisen der Elementverfeinerung haben wir immer die Regularitätsbedingung des Gitters benutzt, so dass nur konforme Unterteilungen erlaubt sind. In der nächsten Möglichkeit beschreiben wir die Verwendung von hängenden Knoten mit der Verwendung eines erweiterten Regularitätsbegriffs, den wir ausführlich in Kapitel 6 vorstellen.

Ein Gitter mit hängenden Knoten verfeinern wir wie im konformen Fall ebenfalls durch die Unterteilung in acht neue Elemente. Aus einem hängenden Knoten auf einer Kante des Elements wird ein regulärer Knoten. Dadurch, dass aber alle Elemente des Gitters verfeinert werden, wird dieser ursprüngliche hängende Knoten auf die beiden neu entstandenen Kanten übertragen (siehe Abb. 3.5).

Da die abhängigen Freiheitsgrade nur Linearkombinationen von regulären Freiheitsgraden sind (siehe Kapitel 6.4), können wir in diesen Knoten keine Anteile zu den lokalen Fehlerindikatoren bestimmen. Für den Wert des lokalen Fehlerindicators haben wir also

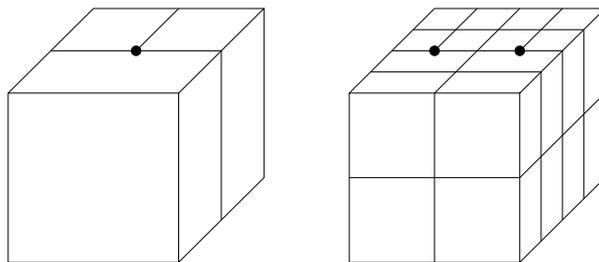


Abbildung 3.5: Uniforme Verfeinerung: Auflösung eines hängenden Knotens und Entstehung zweier neuen hängenden Knoten auf der Kante

eventuell weniger Freiheitsgrade zur Verfügung. Die Fehlerindikatoren werden, wie oben in der richtungsgesteuerten Verfeinerung beschrieben, auch richtungsweise auf den Elementen gespeichert. Die Verfeinerungsmarkierung werden somit auch adaptiv zur Richtung der größten Fehler gesetzt. Anders als bei den konformen Methoden können wir die Unterteilung des Elements nahezu ohne zusätzliche Verfeinerung der Nachbarelemente durchführen. In Schritt 5 wird nur darauf geachtet, dass die erweiterte one-constraint-rule nicht verletzt wird. Durch diese Verfeinerungsmethode verhindern wir die Überverfeinerung des Gitters in Teilgebieten, wo die Approximation mit dem bestehenden Gitter schon einen guten Grad erreicht. Somit kann Rechenzeit eingespart und die adaptive Verfeinerung des Gitters lokal noch gezielter durchgeführt werden.

Beispiele für die unterschiedlichen Verfeinerungsstrategien

In diesem Abschnitt betrachten wir numerische Beispiele zur Veranschaulichung der zuvor vorgestellten Verfeinerungsstrategien. Für das Transmissionsproblem nehmen wir die Poisson-Gleichung im Innenraum Ω und im unbeschränkten Außenraum haben wir das homogene Laplace-Problem. Wir berechnen zwei verschiedene Beispiele, um die Unterschiede der Verfeinerungsstrategien an verschiedenen Gebieten zu zeigen.

Beispiel 3.3.1 Wir nehmen als exakte Lösung der Innenraumgleichung $-\Delta u_1 = f$ auf dem Würfel $[-1, 1]^3$

$$u_1 := \frac{1}{|x - (0.0, 1.1, 0.0)|},$$

woraus $f = 0$ folgt. Für das homogene Außenraumproblem $-\Delta u_2 = 0$ wählen wir die exakte Lösung

$$u_2 := \frac{1}{|x - (0.0, 0.9, 0.0)|}.$$

Die Sprünge u_0 und t_0 ergeben sich aus den exakten Lösungen als

$$u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{|x - (0.0, 1.1, 0.0)|} - \frac{1}{|x - (0.0, 0.9, 0.0)|}$$

und

$$t_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}.$$

Abbildung 3.6 zeigt die drei Kurven der $H^1(\Omega)$ -Fehler gegen die Anzahl der Freiheitsgrade der einzelnen Verfeinerungsstrategien unter Ausnutzung der lokalen hierarchischen Fehlerindikatoren. Es lässt sich erkennen, dass die adaptive Verfeinerung des Gitters unter Benutzung der hierarchischen Fehlerindikatoren mit der richtungsgesteuerten Verfeinerung die schlechteste Strategie der drei oben vorgestellten ist. Die Schichtenverfeinerung bringt einen Vorteil gegenüber der Richtungsverfeinerung und wahrt gleichzeitig automatisch die Regularität des Gitters. Die adaptive Verfeinerung unter Zulassung von hängenden Knoten und daraus resultierenden nichtkonformen Gittern liefert das beste Ergebnis. Die exakte Lösung u_1 wird mit Hilfe weniger Freiheitsgraden als bei den anderen Strategien approximiert. Es ergibt sich dadurch eine erhebliche Zeiteinsparung.

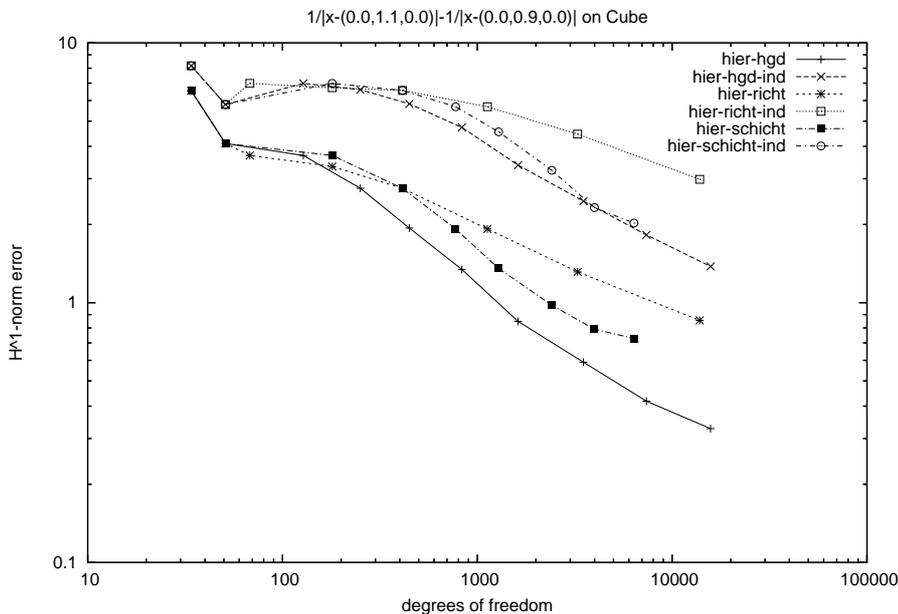


Abbildung 3.6: H^1 -Fehlerkurven für Beispiel 3.3.1 mit Richtungs- und Schichtenverfeinerung und Verfeinerung mit hängenden Knoten

In der Abbildung 3.9 werden die Gitterentwicklungen für das Beispiel für die verschiedenen Strategien gezeigt. In der linken Spalte sind die Gitter der Richtungsverfeinerung, in der Mitte die der Schichtenverfeinerung und rechts die Verfeinerung mit hängenden Knoten abgebildet. Die einzelnen Zeilen repräsentieren nahezu gleiche Anzahlen von Freiheitsgraden. Man erkennt, dass durch die Konformität der Gitter links und in der

3 Hierarchischer Fehlerschätzer

Mitte eine große Überverfeinerung in Bereichen, die entfernt von der Quasi-Singularität in dem Punkt $(0.0, -1.1, 0.0)$ sind, entstehen. Die Verfeinerung mit hängenden Knoten zeigt hier eine streng lokale Verfeinerung zu diesem Punkt hin.

Beispiel 3.3.2 In unserem zweiten Beispiel betrachten wir als Gebiet Ω den Fichera-Würfel $[-1, 1]^3 \setminus [0, 1]^3$. Die exakte Innenraumlösung wählen wir als

$$u_1 := \frac{1}{|x - (0.1, 0.1, 0.1)|}.$$

Für die Außenraumlösung u_2 nehmen wir

$$u_2 := \frac{1}{|x + (0.1, 0.1, 0.1)|}.$$

Die Sprünge u_0 und t_0 sind durch

$$u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{|x - (0.1, 0.1, 0.1)|} - \frac{1}{|x + (0.1, 0.1, 0.1)|}$$

und

$$t_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}$$

definiert.

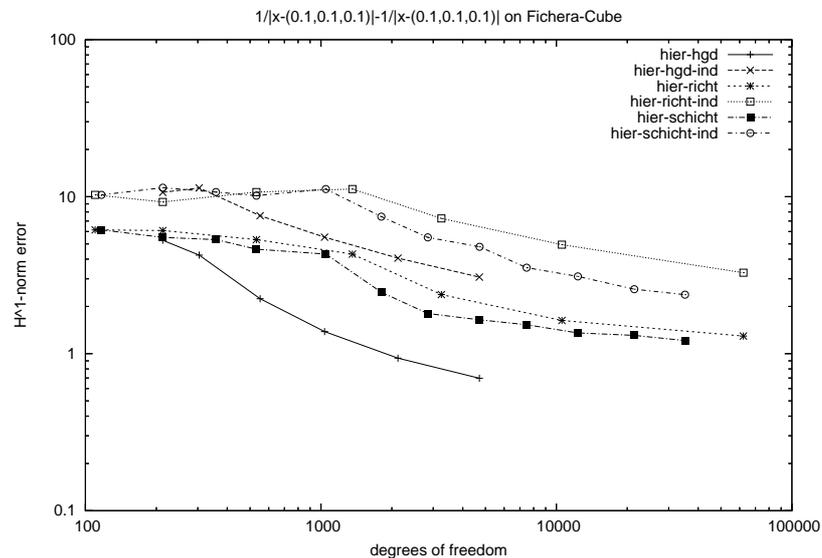


Abbildung 3.7: H^1 -Fehlerkurven für Beispiel 3.3.2 mit Richtungs- und Schichtenverfeinerung und Verfeinerung mit hängenden Knoten

Die Abbildung 3.7 zeigt die Fehlerkurven der Approximation der exakten Lösung u_1 unter Verwendung der verschiedenen Indikatorstrategien. Auch hier lässt sich erkennen, dass die Verfeinerung mit hängenden Knoten die beste Approximation bei der ungefähr gleichen Anzahl der Freiheitsgrade erreicht. Die Richtungsverfeinerung ist auch hier die schlechteste Variante. Bei der Schichtenverfeinerung wird der Regularität des Gitters schon bei der Berechnung der Indikatoren Rechnung getragen. Dadurch ergibt sich eine gezieltere Unterteilung des aktuellen Gitters. Es müssen keine Elemente zur Wahrung der Regularität unterteilt werden.

Bei der Verwendung der Richtungsindikatoren sowie der Schichtenindikatoren ergibt sich durch die ersten adaptiven Verfeinerungsschritte keine gute Approximation der Lösung. Dies lässt sich durch die Geometrie des Fichera-Würfels begründen. Die ersten Elementunterteilungen bringen nur eine feinere Unterteilung des Gebiets. Die einspringende Ecke, in deren Nähe die Quasi-Singularitäten liegen, kann zunächst nicht lokal verfeinert werden. Bei der Benutzung der nichtkonformen Gitter ist dies leichter zu realisieren. Es ergibt sich somit schnell eine Verringerung des Approximationsfehlers.

In Abbildung 3.8 zeigen wir die Approximation von u_1 und das Oberflächengitter, die nach mehreren adaptiven Verfeinerungsschritten gemäß Algorithmus 1 entstehen.

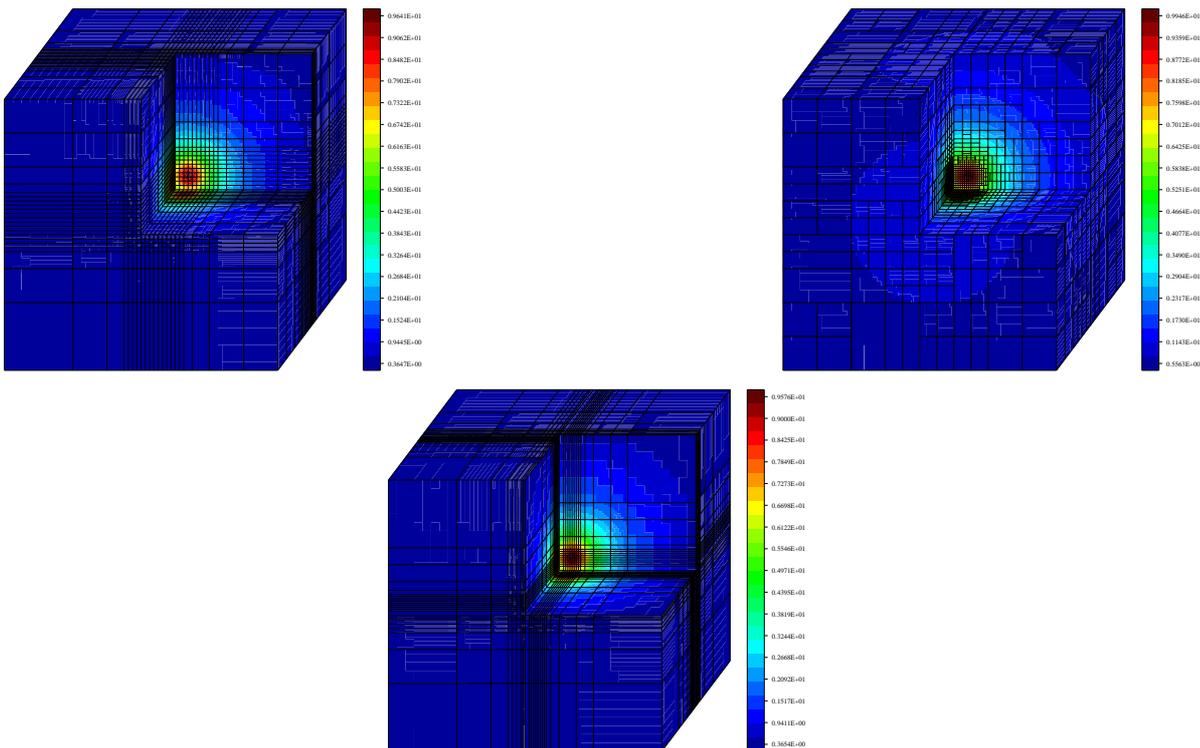


Abbildung 3.8: Beispiel 3.3.2 adaptive Gitterverfeinerungen mit Richtungs- (links), Schichtensteuerung (mitte) und hängenden Knoten (rechts)

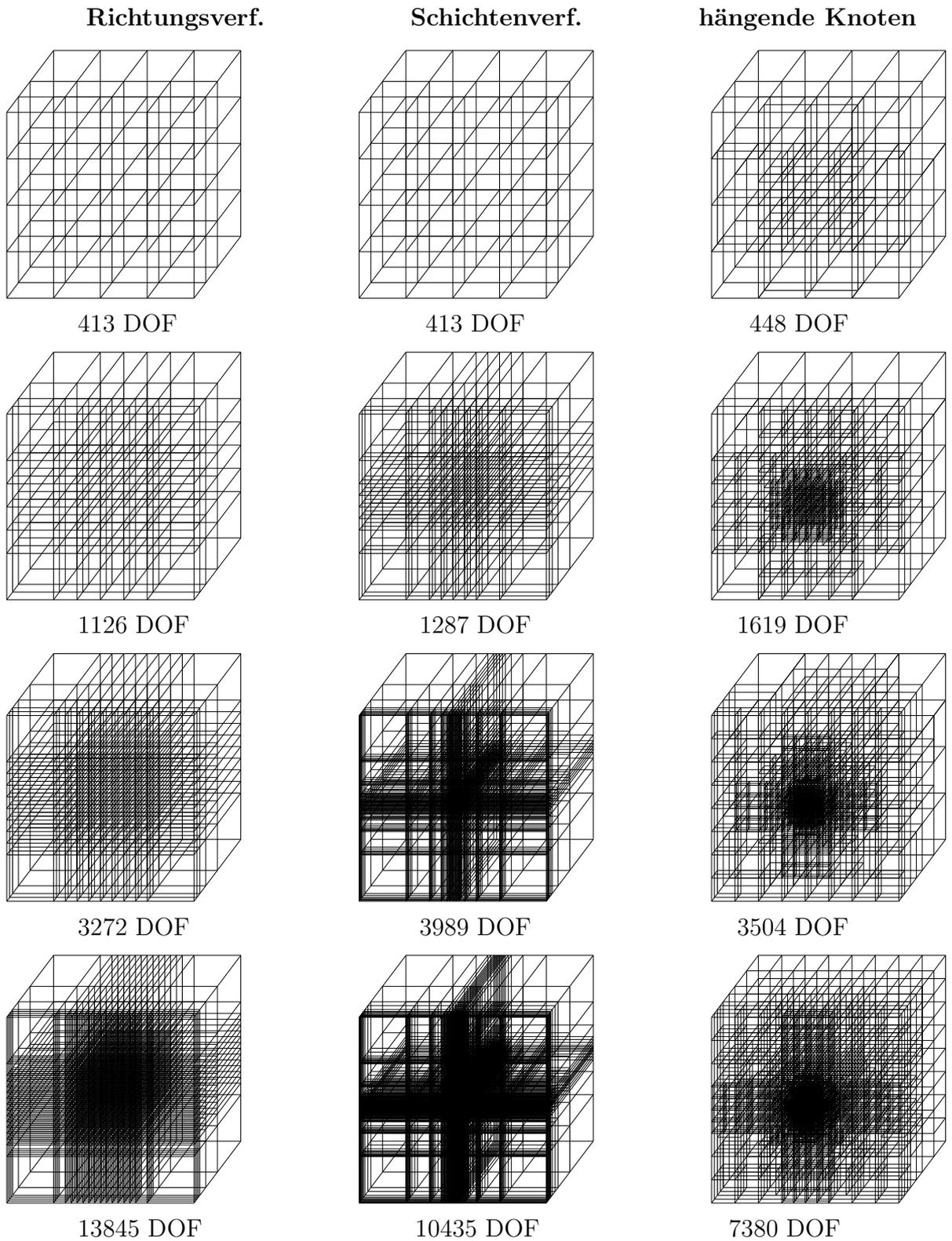


Abbildung 3.9: Gitterentw. für Richtungs- (links), Schichten- (mitte) und hängende Knotenverfeinerung (rechts) mit Anzahl der Freiheitsgrade (Bsp. 3.3.1)

4 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel wollen wir die numerischen Ergebnisse für die Approximation der exakten Lösungen der FEM-BEM Kopplungsformulierung aus Kapitel 1 präsentieren. Wir benutzen in unserem adaptiven Algorithmus sowohl die lokalen residualen Fehlerindikatoren aus Theorem 2.1.2 als auch die hierarchischen Fehlerindikatoren aus Theorem 3.2.1 zur Steuerung der adaptiven Verfeinerung des Gitters. Das Gitter auf dem Rand Γ ist in den Beispielen stets das Spurgitter der Volumenelemente.

Für die Berechnung der Beispiele betrachten wir das Laplace-Problem. Wir unterteilen unser Gebiet Ω mit Hexaeder-Elementen und verfeinern diese unter Benutzung hängender Knoten. Als Modellgebiete wählen wir den Cube, den Fichera-Cube und den L-Block. Wir vergleichen für alle Gebiete in den Beispielen jeweils die adaptive Verfeinerung (mit residualen und hierarchischen Indikatoren) mit der uniformen Verfeinerung. Konvergenzkurven und Gitterentwicklungen zeigen die Vorteile der adaptiven Berechnung.

4.1 Laplace-Problem

Für die numerischen Beispiele greifen wir an Stelle des elastischen FEM-BEM Kopplungsproblems (1.5)-(1.9) auf die FEM-BEM Kopplungsformulierung für den linearen Laplace-Fall zurück. Wir betrachten also das zugehörige lineare Transmissionsproblem mit gegebener rechten Seite f und den Sprüngen u_0 und t_0

$$-\Delta u_1 = f \quad \text{in } \Omega \quad (4.1)$$

$$-\Delta u_2 = 0 \quad \text{in } \Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \quad (4.2)$$

$$u_0 = u_1 - u_2 \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega \quad (4.3)$$

$$t_0 = \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{auf } \Gamma. \quad (4.4)$$

Wie in Kapitel 1 beschrieben, bekommen wir mit Hilfe der Randintegraloperatoren

$$V\phi(x) = \int_{\Gamma} G(x, y)\phi(y) dS_y, \quad \text{Einfachschichtpotential}$$

$$Kv(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} v(y) dS_y, \quad \text{Doppelschichtpotential}$$

$$K'\phi(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} G(x, y) \phi(y) dS_y, \quad \text{adj. Doppelschichtpotential}$$

$$Wv(x) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial \mathbf{n}_y} v(y) dS_y, \quad \text{hypersingulärer Operator}$$

die folgenden FEM-BEM Kopplungsgleichungen, wobei wir nicht wie in Kapitel 1.1 beschrieben $\phi = \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}$ setzen, sondern wir ersetzen ϕ durch $\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}$. Daraus ergibt sich eine geänderte Formulierung der Gleichungen (1.14) und (1.15):

Für gegebenes $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma)$, $t_0 \in H^{-1/2}(\Gamma)$, finde $u \in H^1(\Omega)$ und $\phi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \quad (4.5)$$

$$2(\phi - t_0) = (I - K')(\phi - t_0) - W(u - u_0) \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.6)$$

$$0 = (I - K)(u - u_0) + V(\phi - t_0) \quad \text{auf } \Gamma. \quad (4.7)$$

Basierend auf dieser Kopplungsformulierung können wir nun die beiden Fehlerschätzer präsentieren, die wir in den numerischen Beispielen betrachten wollen.

Für den residualen a posteriori Fehlerschätzer haben wir die folgende Darstellung (für den zweidimensionalen Fall siehe [19]).

$$\|(u - u_h), (\phi - \phi_h)\|_{H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)} \leq c(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) =: \eta_h, \quad (4.8)$$

mit den Anteilen:

$$R_1^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_{L^2(T)}^2$$

$$R_2^2 := \sum_{F_i \in \mathcal{S}_h} h_{F_i} \|[(\nabla u_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(F_i)}^2$$

$$R_3^2 := \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \left\| -(\nabla u_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}W(u_0 - u_h|_{\Gamma}) - \frac{1}{2}(K' - I)(\phi_h - t_0) \right\|_{L^2(F_e)}^2$$

$$R_4^2 := \sum_{F_e \in \Gamma_h} h_{F_e} \|\nabla_{\Gamma} \{(I - K)(u_0 - u_h|_{\Gamma}) - V(\phi_h - t_0)\}\|_{L^2(F_e)}^2.$$

Die Implementation der einzelnen Anteile des Fehlerschätzers, insbesondere die Implementation der Randintegraloperatoren wird in Kapitel 2.3 betrachtet. Die Verfeinerung wird durch den adaptiven Algorithmus gesteuert, der in Kapitel 2.2 beschrieben wird.

Der hierarchische Fehlerschätzer zu der oben eingeführten FEM-BEM Kopplungsformulierung können wir im Laplace-Fall schreiben als (siehe [52] für den nichtlinearen Fall)

$$c_1 h^{\epsilon} \left(\sum_{i=1}^n \Theta_i^2 + \sum_{j=1}^m \theta_j^2 \right)^{1/2} \leq \|(u - u_h, \phi - \phi_h)\|_{\mathcal{H}} \leq c_2 h^{-\epsilon} \left(\sum_{i=1}^n \Theta_i^2 + \sum_{j=1}^m \theta_j^2 \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

mit den lokalen Fehlerindikatoren

$$\Theta_i = \frac{|(f, b_{i,k+1}) + \langle t_0 + Wu_0, b_{i,k+1} \rangle - \int_{\Omega} \nabla u_h \nabla b_{i,k+1} dx - \langle Wu_h + (K' - I)\phi_h, b_{i,k+1} \rangle|}{\|b_{i,k+1}\|_{H^1(\Omega)}}$$

$$\theta_j = \frac{|V(\phi_h, \beta_{j,k+1}) + \langle \beta_{j,k+1}, (K - I)(u_0 - u_h) \rangle|}{V(\beta_{j,k+1}, \beta_{j,k+1})^{1/2}},$$

wobei der Index $k+1$ die Basisfunktionen bezüglich des verfeinerten Gitters bezeichnet. Die adaptive Verfeinerung geschieht mittels der lokalen Fehlerindikatoren bzw. der lokalen Richtungsindikatoren (siehe Kap. 3.3) unter Verwendung des Algorithmus 1.

In beiden Fällen, also bei der Verwendung des residualen und des hierarchischen Fehlerschätzers, benutzen wir in unseren numerischen Beispielen das induzierte Randgitter.

Wir definieren mit e_k den Fehler, den wir bei der Approximation der exakten Lösung u durch u_k auf der aktuellen Triangulierung \mathcal{T}_k bekommen. Mit N_k bezeichnen wir die Anzahl der Freiheitsgrade des aktuellen Gitters. Die Konvergenzrate α berechnen wir durch die Auswertung der Fehler der Approximation und Freiheitsgrade zweier aufeinander folgender Gitter

$$\alpha = \frac{\log(e_k/e_{k-1})}{\log(N_{k-1}/N_k)}.$$

Den Effektivitätsindex der Fehlerabschätzung bestimmen wir durch den Quotienten aus Fehlerindikatorwert und Fehler

$$\frac{\eta_k}{e_k}.$$

Die Variable η_k steht hier stellvertretend für den residualen oder den hierarchischen Fehlerindikator.

4.2 Cube

In unserem ersten numerischen Beispiel betrachten wir als Gebiet Ω den Einheitswürfel $\Omega = [-1, 1]^3$. Für die Berechnungen des Beispiels vergleichen wir die Verwendung des residualen Fehlerschätzers und des hierarchischen Fehlerschätzers. Wir verfeinern die Gitter jeweils uniform und adaptiv unter Berücksichtigung der vorgestellten adaptiven Algorithmen. Für die adaptive Verfeinerung nutzen wir die erweiterte Regularitätsbedingung für nichtkonforme Gitter mit hängenden Knoten. Bei der Markierung eines Elements zur Verfeinerung mittels des residualen Fehlerindikators unterteilen wir das Element jeweils in acht neue Elemente. Im Fall des hierarchischen Fehlerindikators unterteilen wir die Elemente gemäß der Indikatorrichtung (siehe Kap. 3.3). Es entstehen also 2, 4 oder 8 neue Elemente.

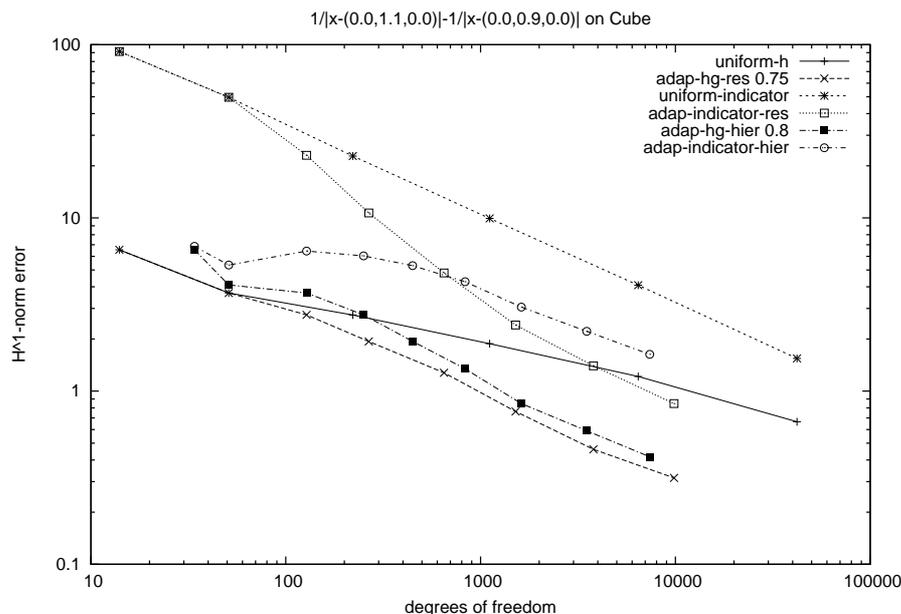


Abbildung 4.1: H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.2.1

Beispiel 4.2.1 In dem ersten Beispiel betrachten wir für die Lösung im Innengebiet des Transmissionsproblems (4.1)-(4.4) die exakte Lösung

$$u_1 := \frac{1}{|x - (0.0, 1.1, 0.0)|}.$$

Für die rechte Seite $f = -\Delta u_1$ erhalten wir $f = 0$, da u_1 eine harmonische Funktion ist.

Für die Lösung des Außenraumproblems in Ω^C benötigen wir nach der Definition unseres ursprünglichen Problems eine harmonische Funktion. Wir nehmen daher als exakte Lösung

$$u_2 := \frac{1}{|x - (0.0, 0.9, 0.0)|}$$

die bei Anwendung des Laplace-Operators verschwindet.

Die Sprungfunktion auf dem Rand Γ können wir nun einfach aus den Definitionen der exakten Lösungen u_1 und u_2 bestimmen

$$u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{|x - (0.0, 1.1, 0.0)|} - \frac{1}{|x - (0.0, 0.9, 0.0)|}.$$

Als Sprung der Normalenableitung der exakten Lösungen ergibt sich daraus auch t_0

$$t_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}.$$

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
14	6.5453999	91.325167		
51	3.6859984	49.700306	13.48	0.444
128	2.7564320	22.981763	8.338	0.316
267	1.9331828	10.681064	5.525	0.483
649	1.2754529	4.8104814	3.772	0.468
1513	0.7621123	2.4060009	3.157	0.608
3796	0.4610562	1.3986021	3.033	0.546
9840	0.3150961	0.8472700	2.689	0.400
26407	0.2356810	0.5381950	2.284	0.294

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
34	6.5453999	6.8461109		
51	4.1003257	5.3445779	1.303	1.153
128	3.6859984	6.4355118	1.746	0.116
251	2.7564320	6.0390225	2.191	0.432
448	1.9377480	5.3010328	2.736	0.608
833	1.3435567	4.2813467	3.187	0.590
1619	0.8470384	3.0541318	3.606	0.694
3504	0.5898188	2.2128713	3.752	0.469
7380	0.4177930	1.6309529	3.904	0.463

Tabelle 4.1: Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten) (Bsp. 4.2.1)

Die exakte Lösung im Inneren hat eine Singularität in dem Punkt $(0.0, 0.1, 0.0)$. Bei der Verwendung des Einheitswürfels wird dieser Punkt für das Innenproblem jedoch nicht erreicht und die Lösung ist immer noch glatt. Es entstehen in der Nähe des Punktes große Werte, so dass wir hier von einer Pseudo-Singularität sprechen.

Für das Außenraumproblem haben wir eine exakte Lösung gewählt, die die gleiche Eigenschaft aufweist, wie die Innenraumlösung. Der Singulärpunkt $(0.0, 0.9, 0.0)$ liegt im Gebiet Ω und verursacht daher ebenfalls nur eine Pseudo-Singularität. Wir erwarten somit eine adaptive Verfeinerung des Gitters in der Nähe der Singulärpunkte.

In der Abbildung 4.1 vergleichen wir die $H^1(\Omega)$ -Fehler der Approximation von u gegenüber den Freiheitsgraden der verschiedenen Verfeinerungsstrategien. Wir verfeinern das Gebiet Ω zunächst uniform. Für die adaptive Verfeinerung benutzen wir den residualen

len Fehlerschätzer (4.8) und den hierarchischen Fehlerschätzer (4.9) mit einer Verfeinerungsrate von 20% bzw. 25%. Zusätzlich tragen wir die Werte der Fehlerindikatoren auf, um das Verhalten der Indikatoren zu betrachten. Wir sehen, dass die Anwendung der uniformen Verfeinerung nicht optimal ist. Durch die Verwendung der adaptiven Steuerung der Gitterverfeinerung können wir mit weniger Freiheitsgraden die entsprechenden Fehler der uniformen Verfeinerung erreichen. Somit haben wir für die Berechnung einer gewissen Genauigkeit weniger Berechnungsaufwand.

In der Tabelle 4.1 können wir die Konvergenzraten α der einzelnen Verfeinerungsstufen ablesen. Wir erwarten für die glatte Lösung u im Innengebiet eine Konvergenzordnung von $\frac{1}{3}$ bzgl. der Freiheitsgrade N . Für die Anwendung der residualen Indikatoren ergibt sich eine Konvergenzrate von $\alpha = 0.4$. Die Konvergenzrate für die uniforme Verfeinerung liegt bei durchschnittlich 0.25 und kommt durch die letzte Verfeinerung auf einen Wert von 0.32. Der Effektivitätsindex η_N/e_{H^1} bleibt beschränkt und geht gegen eine Konstante, so dass wir das theoretische Ergebnis aus Theorem 2.1.2 durch die Rechnungen bestätigen.

Für den hierarchischen Fehlerschätzer ergibt sich in den ersten Stufen der Verfeinerung noch kein asymptotisches Verhalten. Die Verwendung der hängenden Knoten und die daraus resultierende modifizierte Berechnung der Fehlerindikatoren (siehe Kap. 3.3), bringt bei wenigen Elementen noch keine aussagekräftigen Daten, da weniger Freiheitsgrade zur Bestimmung des lokalen Indikators verwendet werden können. Nach mehreren Verfeinerungen pendeln sich Indikatorwerte und Fehlerkurve ein und wir können aus Tabelle 4.1 die Konvergenzrate $\alpha = 0.46$ ablesen, wobei die Werte zum Ende abnehmen.

Die adaptiven Strategien erreichen durch die lokalen Gitteranpassungen schneller den asymptotischen Bereich als die uniforme Verfeinerung.

Die Verfeinerung des Gitters erfolgt in beiden adaptiven Fällen mit den in Kapitel 6 beschriebenen hängenden Knoten. Durch die Wahl der exakten Lösungen u_1 und u_2 erwarten wir eine rotationssymmetrische Gitterentwicklung bezüglich der y -Achse. In der Abbildung 4.2 sieht man die adaptive Verfeinerung nach der 9. Stufe für die Verwendung des residualen und hierarchischen Fehlerschätzers. Man erkennt die problemorientierte Verfeinerung in der Nähe der Singulärpunkte. Es lässt sich außerdem erkennen, dass die hängenden Knoten ein lokal stark verfeinertes Gitter zulassen. Ohne die hängenden Knoten wäre diese Verfeinerung nur durch die Überverfeinerung in den leicht zu approximierenden Teilen möglich. Bei der Verfeinerung mit hierarchischem Fehlerschätzer und dadurch richtungsgesteuerte Unterteilung der Elemente sieht man den Vorteil der hängenden Knoten verstärkt.

In den Abbildungen 4.5 und 4.6 in dem Abschnitt 4.5 zeigen wir die Entwicklung der Gitter für die adaptive Verfeinerung mit dem residualen und dem hierarchischen Feh-

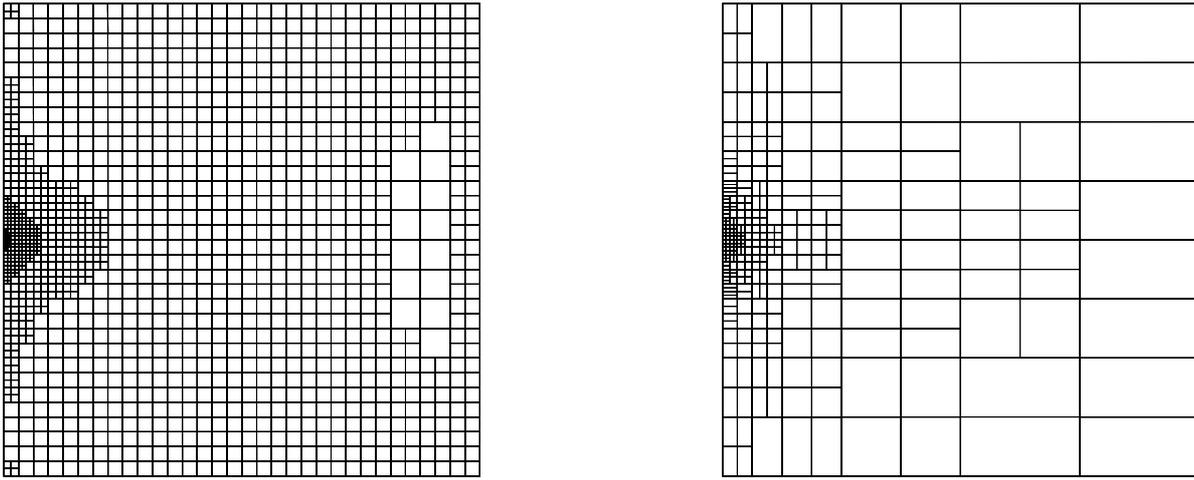
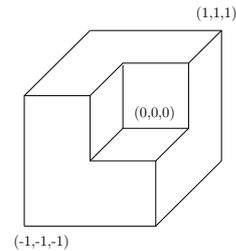


Abbildung 4.2: Blick von oben durch das 3D-Gitter (9. Verfeinerungsstufe); residual (links), hierarchisch (rechts) (Bsp. 4.2.1)

lerschätzer. Außerdem sind Oberflächenplots der approximierten Lösung u_h nach der jeweils 8. und 9. Verfeinerungsstufe dargestellt.

4.3 Fichera-Cube

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem Beispiel, das den Fichera-Würfel als Gebiet $\Omega := [-1, 1]^3 \setminus [0, 1]^3$ zugrunde liegen hat.



Beispiel 4.3.1 Für das Innenraumproblem betrachten wir die exakte Lösung u_1 mit

$$u_1 := \frac{1}{|x - (0.1, 0.1, 0.1)|}.$$

Setzen wir diese exakte Lösung in die Innenraumbedingung (4.1) ein, erhalten wir, dass die rechte Seite f verschwindet. Die homogene Laplace-Gleichung (4.2) für den unbeschränkten Außenraum Ω^C wird beschrieben durch die exakte Lösung u_2

$$u_2 := \frac{1}{|x + (0.1, 0.1, 0.1)|}.$$

Als Sprung in den Dirichlet-Daten ergibt sich wie im obigen Beispiel u_0 als Subtraktion der Innenraumlösung u_1 und der Außenraumlösung u_2 gemäß Gleichung (4.3)

$$u_0 = u_1 - u_2 = \frac{1}{|x - (0.1, 0.1, 0.1)|} - \frac{1}{|x + (0.1, 0.1, 0.1)|}.$$

Den Sprung in den Neumann-Daten beim Übergang vom Außenraum auf den Innenraum können wir wieder als Normalenableitung des Dirichlet-Sprungs u_0 berechnen

$$t_0 = \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}}.$$

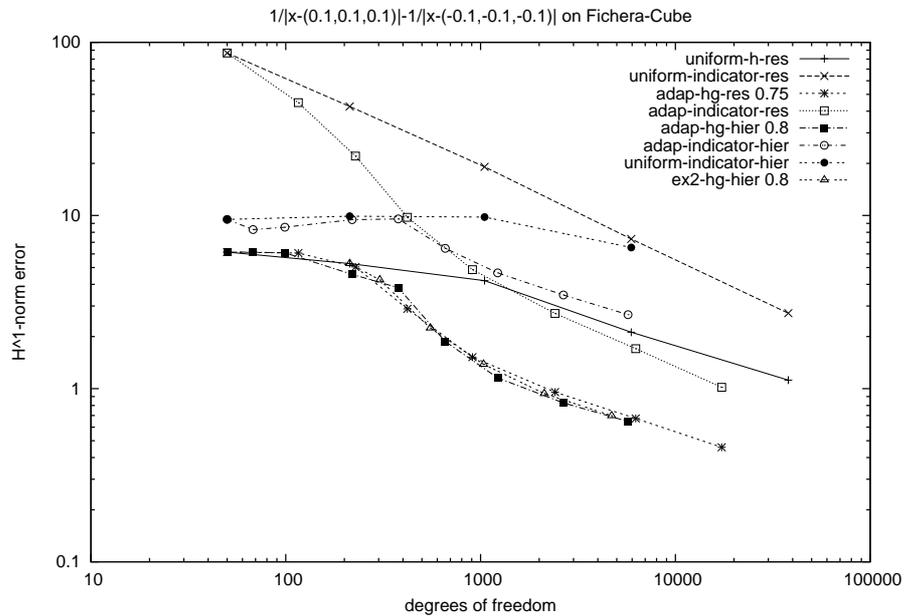


Abbildung 4.3: H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.3.1

Die exakten Lösungen u_1 und u_2 wurden so gewählt, dass wir wiederum wie im obigen Beispiel für den Einheitswürfel, keine direkte Singularität in den Berechnungen in den entsprechenden Gebieten erhalten. Als quasi-singulären Bereich des Innenraumproblems haben wir die Punkte im Gebiet Ω , die dem Punkt $(0.1, 0.1, 0.1)$ am nächsten sind. Vom Außengebiet aus ergibt sich dieses Verhalten in der Nähe des Punktes $(-0.1, -0.1, -0.1)$. Wir erwarten also eine adaptive Gitterverfeinerung in der Nähe der einspringenden Ecke. Das Gitter sollte dort eine wesentlich höhere Unterteilung erhalten als weit davon entfernt.

Wir bestimmen für die approximierte Lösung u_h auf der Triangulierung \mathcal{T}_h des FEM-BEM Kopplungsproblems 4.5-4.7 den Fehler in der H^1 -Norm mit Hilfe der exakten Lösung u_1 . In Abbildung 4.3 sind Fehler in der H^1 -Norm bezüglich der Freiheitsgrade des Kopplungsproblems doppelt logarithmisch aufgetragen. Es läßt sich der Vorteil der adaptiven Netzverfeinerung erkennen. Der Fehler bei der adaptiven Verfeinerung ist zu Beginn der Berechnungen in den ersten Verfeinerungsleveln deutlich geringer als der bei

der uniformen Verfeinerung bei vergleichbarer Anzahl der Freiheitsgrade. Für die Verfeinerung mittels des residualen Fehlerschätzers benutzen wir eine Verfeinerungsrate von 25%, bei der Anwendung des hierarchischen Fehlerschätzers unterteilen wir mindestens 20% der Elemente, unter Beachtung der Verfeinerungsregeln aus Kapitel 6.3.

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
50	6.1469894	86.721906		
116	6.0632190	44.794101	7.388	0.016
228	5.0455398	22.026088	4.365	0.272
421	2.8911192	9.7537464	3.374	0.908
908	1.5201312	4.8657948	3.201	0.836
2410	0.9544718	2.7174849	2.847	0.477
6258	0.6724819	1.7001051	2.528	0.367
17281	0.4584471	1.0187227	2.222	0.377

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
213	5.2725031	9.8960902		
304	4.2420059	9.9955465	2.356	0.611
552	2.2397150	6.8901423	3.076	1.071
1036	1.3818762	4.9914741	3.612	0.767
2125	0.9363773	3.6505149	3.899	0.542
4708	0.6975674	2.7464362	3.937	0.370

Tabelle 4.2: Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten) (Bsp. 4.3.1)

Aus Tabelle 4.2 haben wir die errechneten Konvergenzraten für unser Beispiel. Es ergibt sich für das residuale Verfahren eine Rate von ca. $\alpha = 0.4$, wobei der Wert bei größerer Anzahl der Freiheitsgrade kleiner wird. Dies entspricht auch den Erwartungen, dass wir bei glatter Lösung u eine Konvergenzrate von $\frac{1}{3}$ annehmen. Der Effektivitätsindex ist beschränkt, woraus wir wieder auf die Gültigkeit des Fehlerschätzers schließen können. Im hierarchischen Fall ergibt sich ein ähnliches Bild. Auch hier haben wir eine Konvergenzrate von $\alpha = 0.4$ mit abnehmender Tendenz. Bei beiden adaptiven Verfeinerungen werden die problematischeren Zonen des Gitters besser unterteilt und der Fehler wird in den ersten Stufen der Verfeinerung besser verkleinert. Wie auch im Beispiel mit dem Einheitswürfel haben wir auch hier zunächst einen steigenden Indikatorwert. Dies können wir wiederum mit der Verwendung der hängenden Knoten erklären. Die Gitter der ersten und zweiten Verfeinerungsstufe sind noch zu grob, um die Effekte der Lösung gut

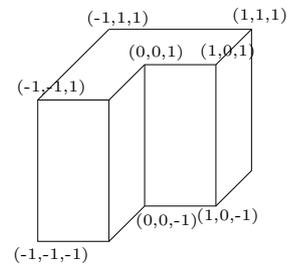
aufzulösen. Wenn das Gitter lokal feiner ist, stabilisiert sich der Effektivitätsquotient.

Die Abbildungen 4.7 und 4.8 in Abschnitt 4.5 zeigen die Entwicklungen der Gitter bei der adaptiven Steuerung durch den adaptiven Algorithmen 2.2 und 3.3 unter Verwendung der residualen Indikatoren und der hierarchischen Indikatoren. Die Gitterentwicklungen zeigen jeweils deutlich den Vorteil der hängenden Knotenstruktur. Das Gebiet um die einspringende Ecke wird lokal sehr stark verfeinert. Die Elemente, die weit davon entfernt sind, werden nur leicht verfeinert. Die Verwendung der richtungsabhängigen Unterteilung der Elemente durch den hierarchischen Fehlerschätzer in Abbildung 4.8 zeigt diesen Effekt noch verstärkt. Durch die genauere problemgesteuerte Unterteilung der Elemente brauchen in dem Postprocessing-Schritt nicht so viele Elemente aufgrund der erweiterten one-constraint-rule zusätzlich verfeinert werden.

Die unteren beiden Plots zeigen jeweils die Oberflächendarstellung der approximierten Lösung u_h . Hier zeigen sich die quasi-singulären Punkte in der Nähe der einspringenden Ecke.

4.4 L-Block

In unserem nächsten Beispiel beschäftigen wir uns mit dem L-Block als Innengebiet $\Omega := [-1, 1]^3 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \times [-1, 1]$.



Beispiel 4.4.1 Für die Gleichung (4.1) des Innenraumproblems betrachten wir die Singulärfunktion, dargestellt in Polarkoordinaten (r, ϕ)

$$u_1 := r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right).$$

Da auch die Singulärfunktion eine harmonische Funktion ist, ergibt sich $f = 0$. Als exakte Lösung des Außenraumproblems (4.2) nehmen wir

$$u_2 := \frac{1}{|x + (0.125, 0.125, 0.0)|}.$$

Der Dirichlet-Sprung u_0 ist wie in den obigen Beispielen auch die Differenz der beiden exakten Lösungen u_1 und u_2

$$u_0 = r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right) - \frac{1}{|x + (0.125, 0.125, 0.0)|}.$$

der Sprung der Normalenableitung ist dann $t_0 = \frac{\partial u_0}{\partial n}$.

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
46	0.4092850	4.8713949		
94	0.3820810	3.8347652	10.04	0.096
193	0.2781358	2.2827127	8.207	0.441
285	0.2371314	1.3022539	5.492	0.409
520	0.1850282	0.7961141	4.303	0.413
1243	0.1414924	0.4979621	3.519	0.308

N	e_{H^1}	α
46	0.4092850	
193	0.2781358	0.269
937	0.1886616	0.246

N	e_{H^1}	η_N	η_N/e_{H^1}	α
46	0.4092850	1.8900815		
193	0.2781358	1.3466448	4.842	0.269
610	0.1949588	1.0198411	5.231	0.309
1800	0.1453599	0.7681166	5.284	0.271
5612	0.1133067	0.5767285	5.090	0.219

Tabelle 4.3: Freiheitsgrade, H^1 -Fehler, Indikatorwerte, Effektivitätsindex und Konvergenzrate α für den residualen Fehlerschätzer (oben) und den hierarchischen Fehlerschätzer (unten); rechts: uniforme Verfeinerung (Bsp. 4.4.1)

Die Singulärfunktion im Innengebiet hat eine Singularität auf der einspringenden Kante des L-Blocks. Die exakte Außenraumlösung wurde wiederum so gewählt, dass wir eine Quasi-Singularität in der Nähe des Mittelpunktes der einspringenden Kante haben.

Da wir im Innengebiet eine $2/3$ -Singularität durch die Funktion u_1 haben, erwarten wir bei optimaler Verfeinerungsstrategie eine Konvergenzrate von $\alpha = \frac{2}{3}$ bezüglich der Gitterweite h bzw. eine Rate von $\alpha = \frac{2}{9}$ bzgl. der Anzahl der Freiheitsgrade N bei der uniformen Verfeinerung. Die rechte Tabelle in Tabelle 4.3 zeigt die H^1 -Fehler und die Konvergenzraten α bei der uniformen Verfeinerung. Wir haben eine Rate von ca. 0.25, was dem erwarteten Wert schon sehr nahe kommt.

Aus Tabelle 4.3 (linke Seite) können wir die numerisch erzielten Konvergenzraten ablesen. Für die adaptive Verfeinerung mittels des residualen Fehlerschätzers ergibt sich eine Konvergenzrate von $\alpha = 0.4$. Mit der Steuerung durch die hierarchischen Fehlerindikatoren haben wir eine Konvergenzrate von $\alpha = 0.3$. Da wir bei der Verwendung einer adaptiven Gitterverfeinerung eine bessere Approximation des Fehlers (Konvergenzrate maximal $\alpha = \frac{1}{3}$) als bei der uniformen Verfeinerung erwarten, stimmen die errechneten Werte mit den theoretischen Überlegungen überein.

Für beide Fehlerschätzer lässt sich erkennen, dass der Effektivitätsindex beschränkt ist und gegen eine Konstante geht. Die Fehlerindikatoren und die Fehler haben also das

4 Numerische Ergebnisse

gleiche asymptotische Verhalten und unsere theoretischen Resultate werden dadurch bestätigt. Dies liefert auch eine Betrachtung der Abbildung 4.4, wo man sehen kann, dass die jeweiligen Kurven nahezu parallel verlaufen. In den Gitterentwicklungen in

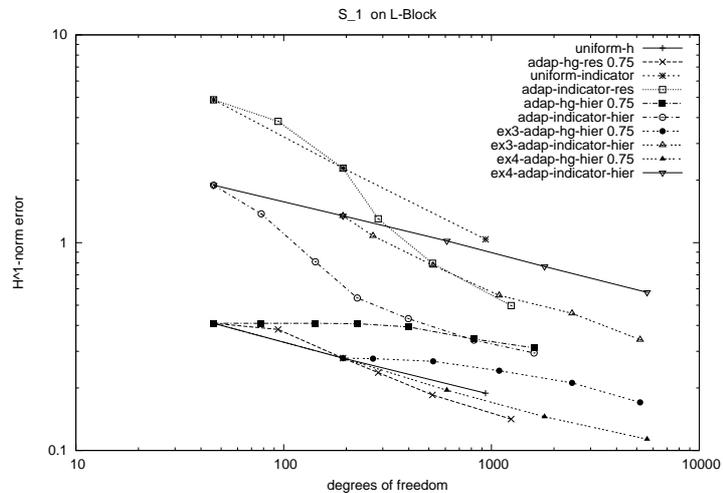


Abbildung 4.4: H^1 -Fehlerkurven für uniforme, residual adaptive und hierarchisch adaptive Verfeinerung sowie Werte der Fehlerindikatoren für Beispiel 4.4.1

Kapitel 4.5 stellen wir fest, dass der Bereich direkt an der einspringenden Kante lokal stark verfeinert wird.

Der hierarchische Fehlerschätzer liefert zusammen mit einer selbstgesteuerten Richtungsverfeinerung keine brauchbaren Ergebnisse (siehe Abb. 4.4 Kurve adap-hg-hier und ex3-adap-hg-hier). Die Elementverfeinerungen liefern in den ersten Verfeinerungsstufen nur Unterteilungen in der xz -Ebene. Deswegen wird eine lokale Auflösung der Singularität an der einspringenden Kante nicht erreicht. Bei der Berechnung der Ergebnisse aus Abbildung 4.10 wurden durch eine Verfeinerung in acht neue Elemente (also xyz -Verfeinerung) erzielt. Die einspringende Ecke konnte so besser lokalisiert werden (siehe auch Kurve ex4-adap-indicator-hier in Abb. 4.4).

4.5 Gitterdarstellungen der versch. Verfeinerungsstufen, Bsp. 4.2.1, Bsp. 4.3.1, Bsp. 4.4.1

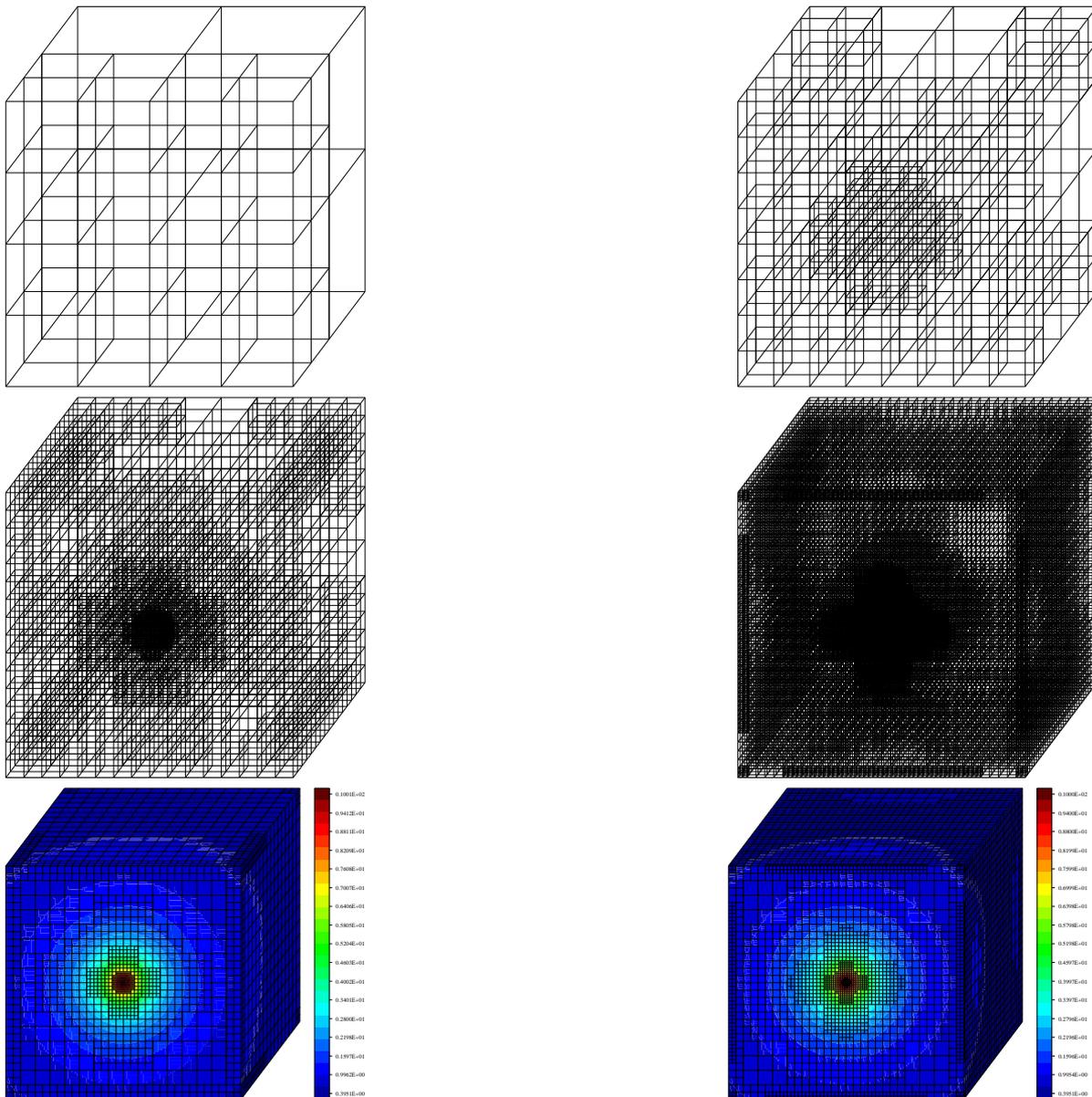


Abbildung 4.5: residual: adaptive Verfeinerungslevel 3, 5, 7, 9 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.2.1)

4 Numerische Ergebnisse

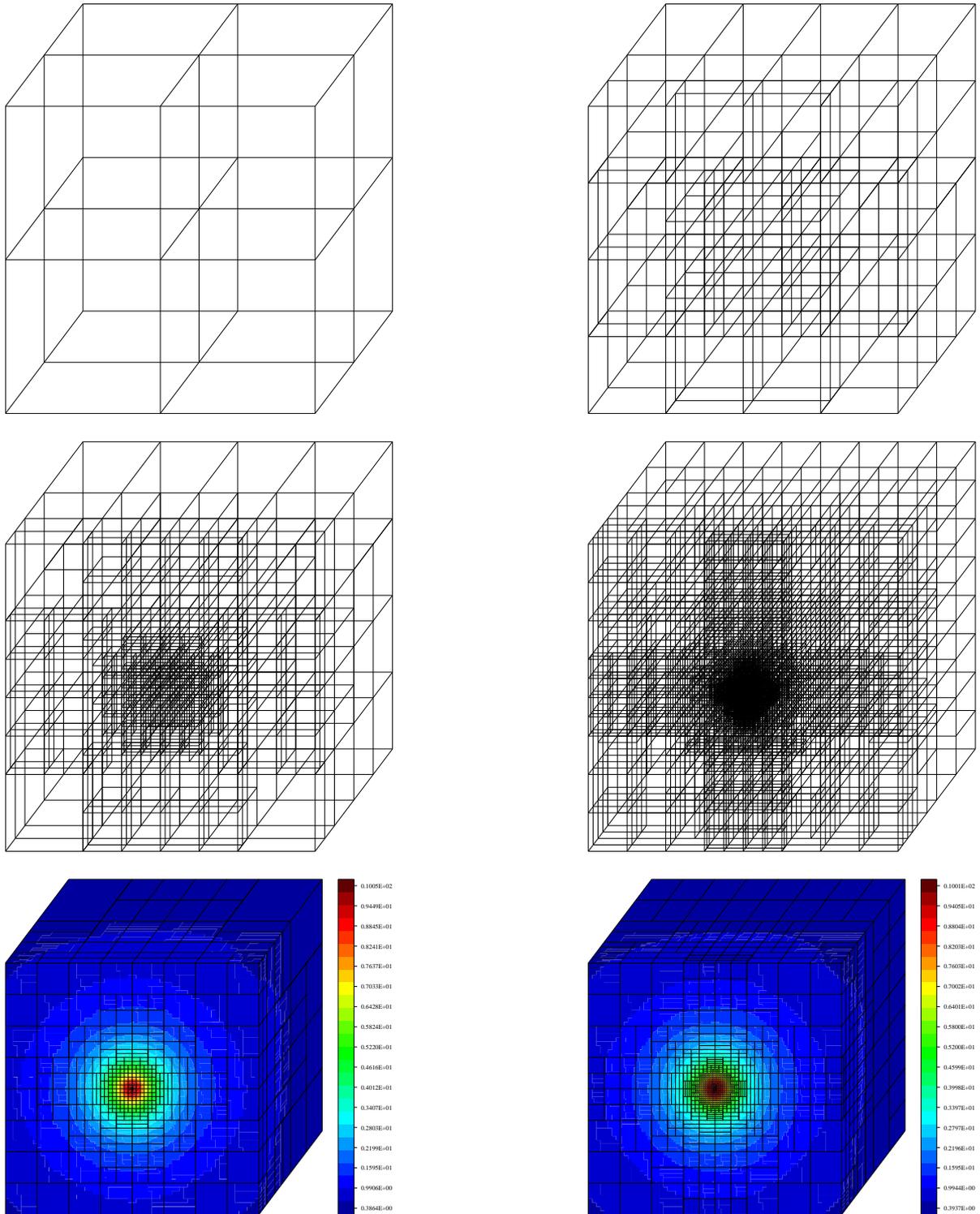


Abbildung 4.6: hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 3, 5, 7, 9 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.2.1)

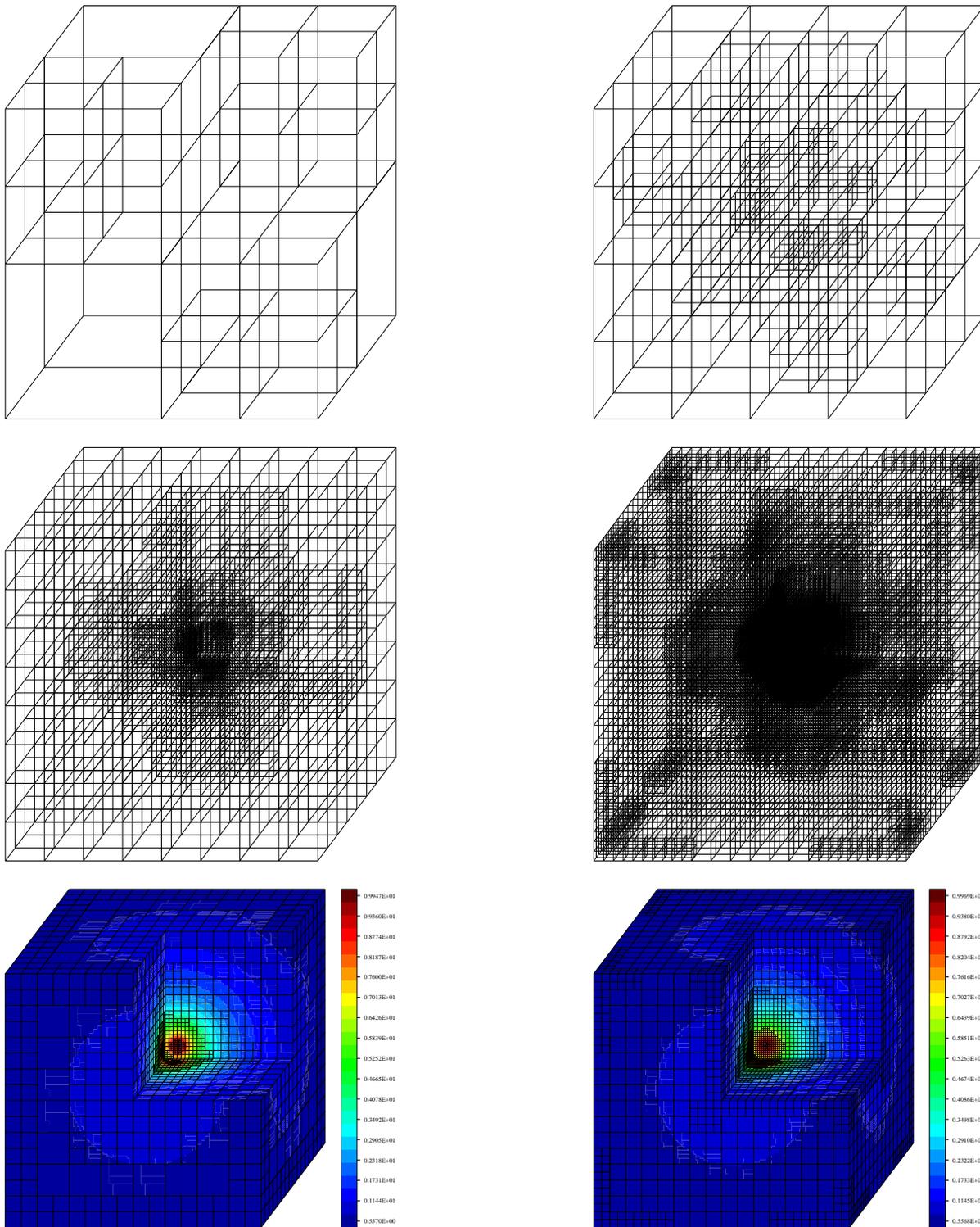


Abbildung 4.7: residual: adaptive Verfeinerungslevel 2, 4, 6, 8 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.3.1)

4 Numerische Ergebnisse

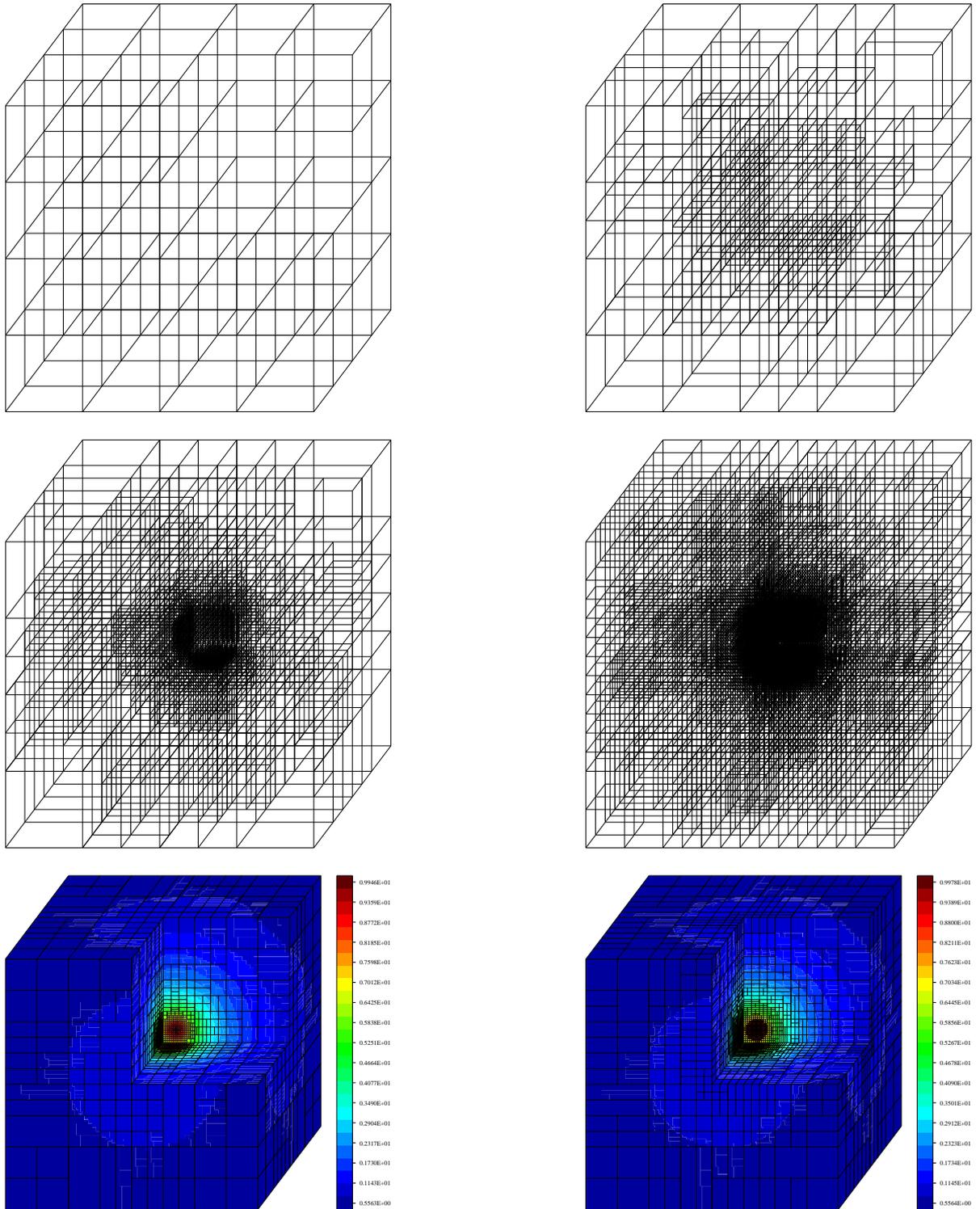


Abbildung 4.8: hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 1, 3, 5, 7 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.3.1)

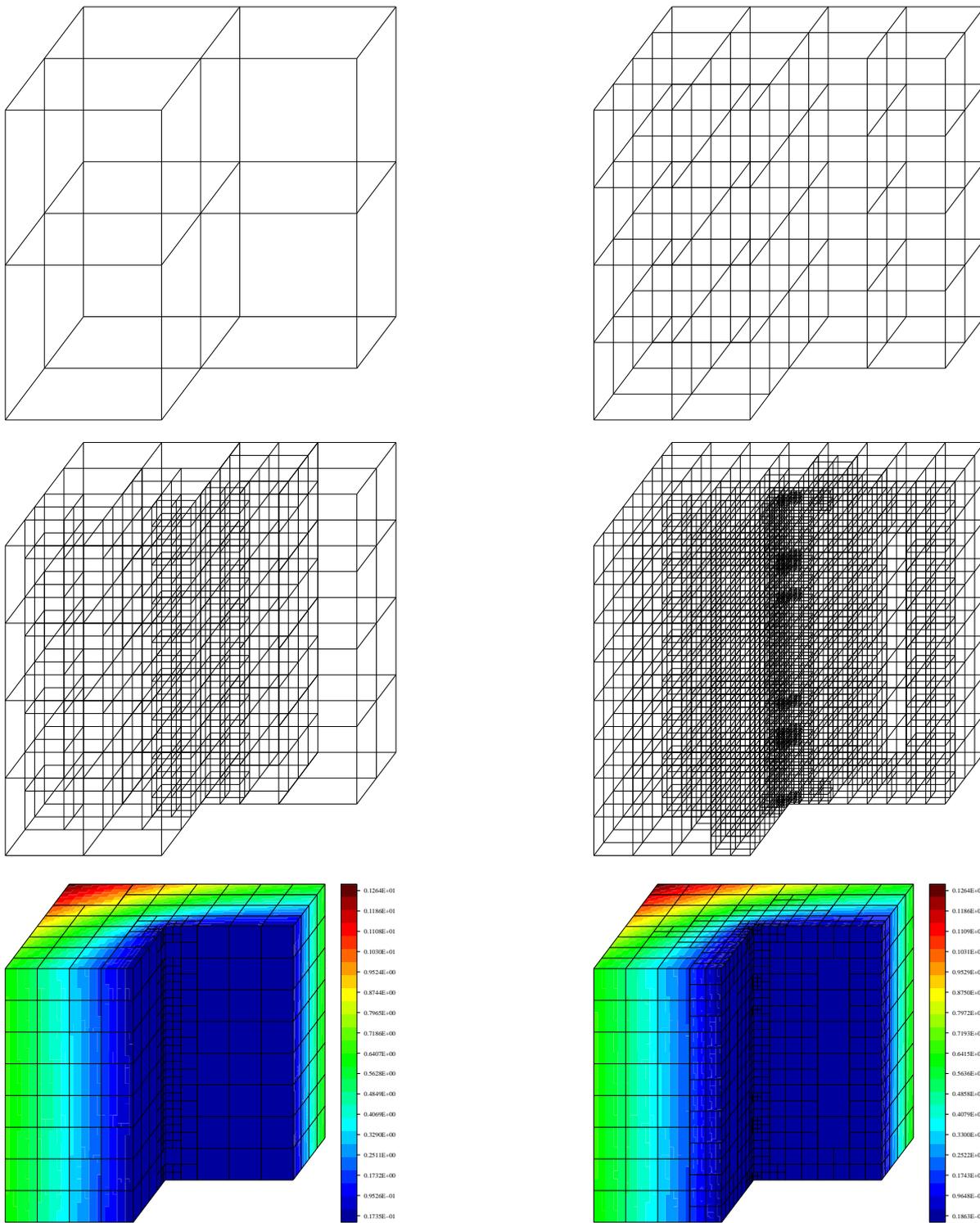


Abbildung 4.9: residual: adaptive Verfeinerungslevel 1, 3, 5, 7 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.4.1)

4 Numerische Ergebnisse

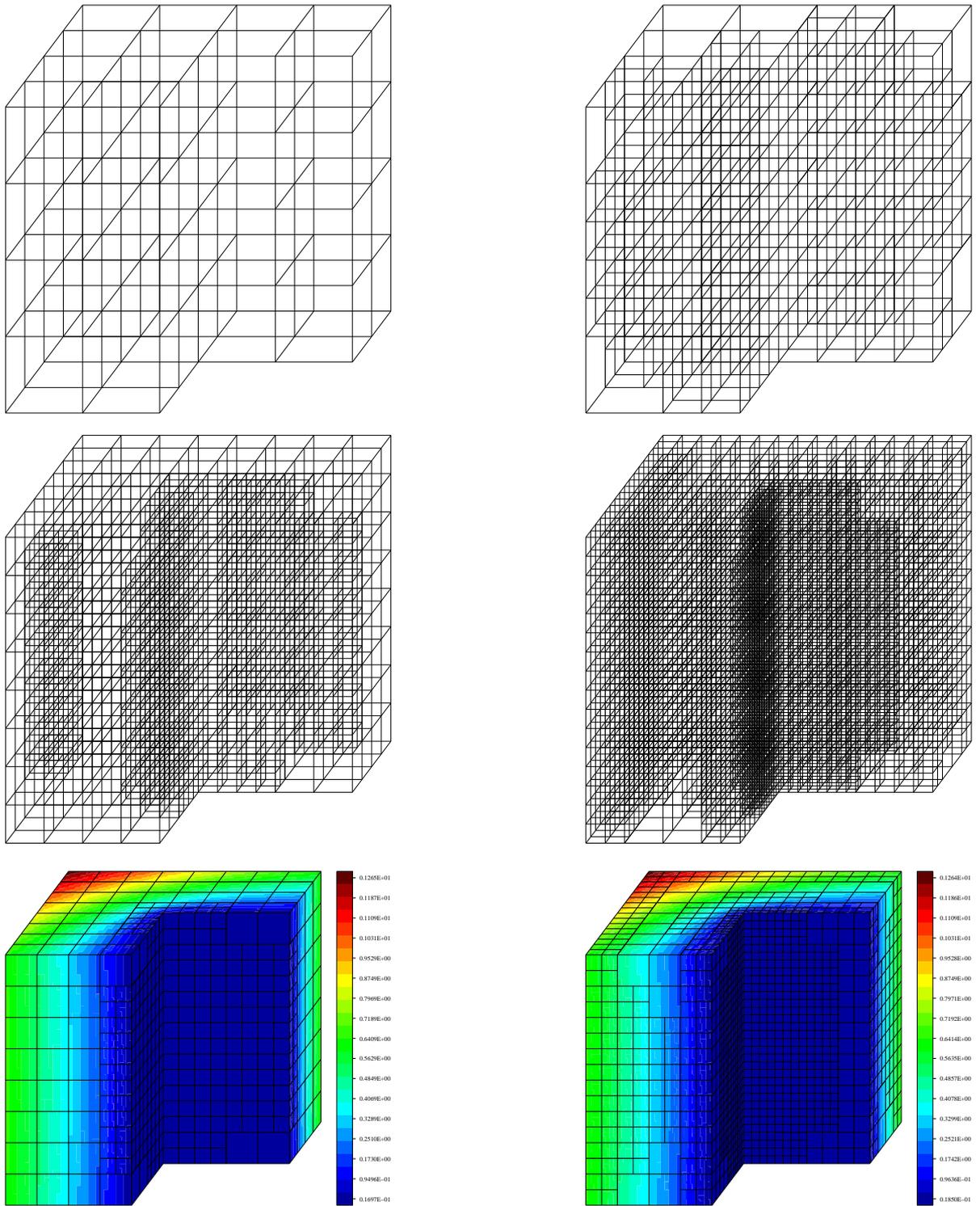


Abbildung 4.10: hierarchisch: adaptive Verfeinerungslevel 2, 3, 4, 5 und plot der Approximation u_h (Bsp. 4.4.1)

5 Least-Squares FEM-BEM Kopplung

Anders als in den vorhergehenden Kapiteln, wollen wir das FEM-BEM Kopplungsproblem nicht mit der Standard-Galerkin-Methode berechnen, sondern benutzen ein Least-Squares Funktional zur Bestimmung einer angenäherten Lösung. Für die FEM-Formulierung führen wir eine diskrete $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm analog zu Bramble, Pasziak und Lazarov ([9, 7, 8]) ein. Ähnlich zu der Vorgehensweise in [47] für ein System erster Ordnung bilden wir ein FEM-BEM Kopplung Least-Squares Funktional mit einem Problem zweiter Ordnung. Für die Anwendung der Least-Squares Methode für ein linear elastisches Problem mit der FEM orientieren wir uns an [8].

Wir betrachten in diesem Kapitel für das Innenraumproblem und das Außenraumproblem jeweils eine lineare elastostatische Problemstellung. Während wir im Außenraum Ω^C die harmonische Lamé-Gleichung approximieren wollen, haben wir im Innenraum Ω eine gegebene Volumenkraft \mathbf{F} . Da wir in Ω nahezu inkompressibles Material zulassen wollen, führen wir eine zusätzliche Variable ein, um die Effekte des Lockings zu vermeiden (siehe z.B. [5],[67]). Das Außenraumproblem wird wie in Kapitel 1 mit Hilfe von Randintegraloperatoren auf den Rand zurückgeführt. Die symmetrische Kopplung von FEM (für das Innengebiet) und BEM (auf dem Rand Γ) überführt das ursprüngliche Transmissionsproblem auf ein nichtlokales Randwertproblem.

5.1 Transmissionsproblem

Aus dem Hookschen Gesetz haben wir die Beziehung zwischen Spannung und Verzerrung: $\boldsymbol{\sigma}_{ij} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) + \lambda\delta_{ij}\text{div } \mathbf{u}$ mit dem Kronecker-Delta δ_{ij} und den Lamé-Parametern μ und λ für das lineare Elastizitätsproblem.

Falls $\lambda \rightarrow \infty$, bzw. die Poissonzahl $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \rightarrow \frac{1}{2}$, haben wir fast inkompressibles Materialverhalten. Ist ν nahe bei $\frac{1}{2}$, so haben wir, dass

$$\lambda \gg \mu$$

ist. Dies führt dazu, dass das Verhältnis der Konstanten in dem Céa-Lemma sehr groß wird. Es kommt bei der Approximation der exakten Lösung somit zum Locking und die

klassische FEM versagt.

Wir führen daher p als Lagrange-Multiplikator $p = -\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}$ ein. Setzen wir dies in die Definition des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ ein, so bekommen wir die Darstellung

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) - \delta_{ij} p.$$

Die Gleichgewichtsbedingung $-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{F}$ des elastischen Innenraumproblems ist dann

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -\mu \Delta \mathbf{u} - \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) \operatorname{grad} p = \mathbf{F} \quad (5.1)$$

mit der Nebenbedingung

$$\frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (5.2)$$

Wir können p auch als hydrostatischen Druck einführen, indem wir den linearen Verzerrungstensor in den deviatorischen und in den hydrostatischen Anteil zerlegen $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{I}$. Es ergibt sich für den Spannungstensor die Schreibweise $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = 2\mu \operatorname{dev} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - p \mathbf{I}$ mit dem hydrostatischen Druck $p = -(\lambda + \frac{2}{3}\mu) \operatorname{div} \mathbf{u}$.

Für den Fall des inkompressiblen Materialverhaltens ($\nu = \frac{1}{2}$), ergibt sich für die Nebenbedingung (5.2) die Gleichung $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. In diesem Fall haben wir ein Innenraumproblem, das eng verwandt ist mit dem Stokes-Problem.

Transmissionsproblem

Wie im Kapitel 1 sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand $\Gamma = \partial\Omega$. Mit $\Omega^C = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ bezeichnen wir den unbeschränkten Außenraum. Gegeben seien die Kraft $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ und die Sprünge $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ auf dem Rand. Wir betrachten das folgende Transmissionsproblem mit den Unbekannten $\mathbf{u}_1 \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{u}_2 \in \mathbf{H}_{\text{loc}}^1(\Omega^C)$ und dem Druck $p \in L^2(\Omega)$

$$L(\mathbf{u}_1, p) = \mathbf{F} \quad \text{in } \Omega \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.4)$$

$$-\Delta^* \mathbf{u}_2 = -\hat{\mu} \Delta \mathbf{u}_2 - (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0 \quad \text{in } \Omega^C \quad (5.5)$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1, p) \cdot \mathbf{n} = T_2(\partial, \mathbf{n}) \mathbf{u}_2 + \mathbf{t}_0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (5.7)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathcal{O}(|x|^{-1}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (5.8)$$

wobei $L(\mathbf{u}_1, p) = (L_1(\mathbf{u}_{11}, p), \dots, L_3(\mathbf{u}_{13}, p))$ mit $L_i(\mathbf{u}_{1i}, p) = -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$.

Die Normalspannung der Außenraumlösung auf dem Transmissionsrand Γ ist wie in (1.10) auf Seite 19 gegeben durch $T_2(\partial, \mathbf{n}) \mathbf{u}_2 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n} = 2\hat{\mu} \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_2 + \hat{\lambda} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{u}_2 + \hat{\mu} \mathbf{n} \times \operatorname{curl} \mathbf{u}_2$.

Die Außenraumlösung lässt sich mit der Somigliana Darstellungsformel (1.11) auf dem Rand mit Hilfe der Kelvin-Matrix (1.12) für das homogene Elastizitätsproblem darstellen. Mit den Cauchy-Daten auf dem Rand Γ und den Definitionen der Randintegraloperatoren in (1.16)-(1.19) lässt sich das Problem wie folgt präsentieren

$$\begin{aligned} 2T_2(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2 &= -W\mathbf{u}_2 + (I - K')T_2(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2 \\ 0 &= (I - K)\mathbf{u}_2 + VT_2(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in das Transmissionsproblem für \mathbf{u}_2 mit den Sprungbedingungen ein, definieren $\mathbf{u}_1 =: \mathbf{u}$, benutzen die Beziehungen (5.6) und (5.7) und ersetzen $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}$ durch ϕ , so erhalten wir die symmetrische FEM-BEM Kopplungsformulierung, auf der wir die Least-Squares Formulierung aufbauen:

Für gegebene Volumenkraft $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, Sprünge $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, finde $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in L^2(\Omega)$ und $\phi \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, p) &= \mathbf{F} && \text{in } \Omega \\ \frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} &= \phi && \text{auf } \Gamma \\ 2(\phi - \mathbf{t}_0) &= -W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + (I - K')(\phi - \mathbf{t}_0) && \text{auf } \Gamma \\ 0 &= (I - K)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + V(\phi - \mathbf{t}_0) && \text{auf } \Gamma. \end{aligned} \tag{5.9}$$

5.2 Kontinuierliche Least-Squares Formulierung

Wir betrachten nun die schwache Form für die Innenraumgleichung

$$\int_{\Omega} L(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Anwenden der Produktregel auf $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}(\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p)\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) + \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_i$ ergibt

$$- \left[\int_{\Omega} \sum_{ij}^3 \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j}(\boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{v}_i) - \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \mathbf{v}_i \right) d\mathbf{x} \right] = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

Mit dem Gaußschen Integralsatz haben wir

$$- \underbrace{\int_{\Gamma} \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) \mathbf{v}_i \, ds}_{=\phi} + \underbrace{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) \, d\mathbf{x}}_{=: A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v})} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

woraus wir die schwache Form der Innenraumgleichung

$$A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) - \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = (\mathbf{F}, \mathbf{v})$$

erhalten. Multiplizieren wir die restlichen Gleichungen der FEM/BEM Formulierung mit den Testfunktionen $q \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und integrieren über das Gebiet Ω bzw. über den Rand Γ , haben wir die kontinuierliche variationelle Formulierung

$$A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \quad (5.10)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}, q\right) = 0 \quad (5.11)$$

$$\langle (I - K)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{t}_0), \boldsymbol{\tau} \rangle_{\Gamma} = 0 \quad (5.12)$$

$$\langle -W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + (I - K')(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{t}_0), \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} = \langle 2(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{t}_0), \mathbf{v} \rangle_{\Gamma}. \quad (5.13)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $q \in L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Um das Least-Squares System zu formulieren, definieren wir den Operator

$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) : \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ durch:

$$[\mathcal{L}(\mathbf{u}, p); \mathbf{w}] = A(\mathbf{u}, p; \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\mathbf{u}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{w}) \, dx \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (5.14)$$

wobei $[P; \mathbf{w}]$ bedeutet, dass das Funktional P an der Stelle \mathbf{w} ausgewertet wird. $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) := (\mathbf{H}^1(\Omega))'$, ist der Dualraum zu $\mathbf{H}^1(\Omega)$. Die zugehörige Norm ist durch

$$\|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} := \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}.$$

definiert. Wir ersetzen in der Gleichgewichtsbedingung der Innenraumgleichung den Anteil $A(\mathbf{u}, p; \mathbf{w})$ durch $[\mathcal{L}(\mathbf{u}, p); \mathbf{v}]$ und ersetzen $\boldsymbol{\phi}$ im Randterm aus Gleichung (5.10) durch die Darstellung von $\boldsymbol{\phi}$ im Randintegralterm (5.13)

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(\mathbf{u}, p); \mathbf{v}] &= (\mathbf{F}, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma} \\ &= (\mathbf{F}, \mathbf{v}) + \left\langle \frac{1}{2}[-W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) + 2\mathbf{t}_0 + (I - K')(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{t}_0)], \mathbf{v} \right\rangle_{\Gamma} \\ &= \left[\mathbf{F} - \frac{1}{2}\delta_{\Gamma} \otimes [W(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi} - \mathbf{t}_0)], \mathbf{v} \right]_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}. \end{aligned}$$

$\delta_{\Gamma} \otimes \boldsymbol{\tau}$ ist eine Distribution, die $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ nach $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ überführt

$$(\delta_{\Gamma} \otimes \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} := \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_{\Gamma} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\phi} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Die Variationelle Formulierung (5.10)-(5.13) lässt sich dann wie folgt in einer Operator-schreibweise darstellen. Wir definieren den Operator

$$\boldsymbol{\mathcal{L}} : X := \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow X' := \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$$

durch

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}] \\ \frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u} \\ (I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

und $\mathfrak{F} \in X' := \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ durch die gegebenen Daten

$$\mathfrak{F} := \begin{pmatrix} \mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{t}_0 - (I - K')\mathbf{t}_0] \\ 0 \\ (I - K)\mathbf{u}_0 + V\mathbf{t}_0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Es ergibt sich somit das zu lösende Problem

Finde $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, so dass gilt

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) = \mathfrak{F}. \quad (5.17)$$

Mit Hilfe dieser FEM-BEM Kopplungsdarstellung des Gesamtproblems (5.3)- (5.8) bilden wir die zu dem Problem äquivalente Minimierungsaufgabe mit dem Least-Squares Funktional $J(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$. Die Minima $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})$ des Funktionals J sind die Lösungen des Kopplungsproblems (5.9).

Least-Squares Funktional

Finde $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X = \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$J(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) = \min_{(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \in X} J(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}), \quad (5.18)$$

wobei $J(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) &= \|\mathfrak{L}(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) - \mathfrak{F}\|_{X'}^2 \\ &= \|\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) - \mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t}_0)]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|(I - K)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &= \|\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{v} - (I - K')\boldsymbol{\tau}] - \mathbf{F} \\ &\quad - \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{t}_0 - (I - K')\mathbf{t}_0]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|(I - K)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Die zu $J(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ zugehörige Bilinearform $B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}))$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \\ &= (\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}], \mathcal{L}(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{v} - (I - K')\boldsymbol{\tau}])_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ & \quad + (\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + \langle (I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi}, (I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau} \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

und die Linearform $G(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ ist

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) &= (\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{v} - (I - K')\boldsymbol{\tau}], \\ & \quad \mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{t}_0 - (I - K')\mathbf{t}_0])_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ & \quad + \langle (I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau}, (I - K)\mathbf{u}_0 + V\mathbf{t}_0 \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \in X$. Mit der Definition der Bilinearform und Linearform können wir die variationelle Formulierung darstellen als

Finde $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X = \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ mit

$$B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) = G(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \quad \forall (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \in X. \quad (5.19)$$

Falls wir die Stetigkeit und Koerzivität der Bilinearform B und die Stetigkeit der Linearform G nachweisen können, ergibt sich für die variationelle Formulierung die eindeutige Lösbarkeit. Die Minima des Funktionals J wären somit ebenfalls eindeutig. In Theorem 5.2.1 werden wir zunächst die Stetigkeit der Bilinearform B zeigen, in Theorem 5.2.2 beweisen wir die Koerzivität der Bilinearform.

Theorem 5.2.1 *Die Bilinearform $B(\cdot, \cdot) \in X \times X$ ist stetig. D.h. es gibt ein $c > 0$, so dass für alle $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \in X$ gilt*

$$B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \leq c \|(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})\|_X \|(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})\|_X$$

Beweis. Für den Beweis der Stetigkeit nutzen wir die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, um die Bilinearform in einzelne Terme zu unterteilen. Die Terme mit den Randintegraloperatoren schätzen wir mit deren Abbildungseigenschaften (siehe (1.20)-(1.23)) und dem Spursatz ab.

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt:

$$B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \leq \underbrace{\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}}_{\text{(I)}} \|\mathcal{L}(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{v} - (I - K')\boldsymbol{\tau}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \quad (5.20)$$

$$+ \underbrace{\|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}}_{\text{(II)}} \|\frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.21)$$

$$+ \underbrace{\|(I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}}_{\text{(III)}} \|(I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (5.22)$$

Wir betrachten nun die Terme (I)-(III) einzeln:

(III): Mit der Stetigkeit von K und V und dem Spursatz folgt

$$\begin{aligned} \|(I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} &\leq \|(I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|V\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + c\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}). \end{aligned}$$

(II): da nach Definition des elastischen Problems $\lambda > 0$ gilt, haben wir

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\frac{1}{\lambda}p\|_{L^2(\Omega)} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c(\|p\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) \end{aligned}$$

(I):

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \leq \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}$$

Mit Hilfe der Definition der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm, der Distribution $\delta_\Gamma \otimes \cdot$ und der Stetigkeit der Integraloperatoren W und K' gilt

$$\begin{aligned} \|\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}], \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{\langle W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}, \mathbf{v}|_\Gamma \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\stackrel{\text{c-s-u}}{\leq} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{\|W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|\mathbf{v}|_\Gamma\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\leq C\|W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq C(\|W\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|(I - K')\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \\ &\leq c(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}). \end{aligned}$$

Für $\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}$ gilt nach Definition von \mathcal{L}

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^3 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) - p \delta_{ij} \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \mu \sum_{i,j=1}^3 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{v}) \, dx \\ &= 2 \int_{\Omega} \mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ &= 2(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - (p, \operatorname{div} \mathbf{v}).\end{aligned}$$

Dies eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{2(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{2(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p, p)^{1/2} (\operatorname{div} \mathbf{v}, \operatorname{div} \mathbf{v})^{1/2}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{2(\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \nabla \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)}).\end{aligned}$$

Daraus folgt für (I).

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_{\Gamma} \otimes [W \mathbf{u} - (I - K') \boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \leq \tilde{c} (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}).$$

Die Stetigkeit der Bilinearform B erhalten wir, indem wir die einzelnen Teile (I), (II) und (III) in (5.20)-(5.22) einsetzen und die obigen Abschätzungen analog auf die Terme mit $(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ anwenden.

$$\begin{aligned}B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) &\leq c (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \\ &\quad (\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|q\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}) \\ &\leq c \|(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})\|_X \|(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})\|_X.\end{aligned}$$

□

Mit der gleichen Argumentation lässt sich die Stetigkeit der Linearform $G(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ zeigen.

Theorem 5.2.2 Die Bilinearform $B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}))$ ist koerziv, d.h. es gilt

$$B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})) \geq c \|(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})\|_X^2 \quad (5.23)$$

für alle $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X$.

Beweis. Zunächst berechnen wir eine Abschätzung für den Druck p durch die Verschiebung \mathbf{u} . Diese Abschätzung nutzen wir dann in der Abschätzung von \mathbf{u} . Durch eine obere Schranke für $\boldsymbol{\phi}$, die wir aus den Eigenschaften der Randintegraloperatoren bekommen, erhalten wir dann die Abschätzung (5.23).

Es gilt für den Druck $p \in L^2(\Omega)$ analog zu dem Ergebnis aus [8]

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|p\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\ &\leq c \left[\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|(pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) - \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right. \\ &\quad \left. + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right] \\ &= c \left[\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right] \\ \|p\|_{L^2(\Omega)} &\leq c \left[\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right] \end{aligned} \quad (5.24)$$

Für die Verschiebung \mathbf{u} erhalten wir mit der Kornschen Ungleichung und mit Hilfe des Poincaré-Steklov-Operators S , dass gilt

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq 2 \int_{\Omega} \mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \, dx + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &\leq (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Da $(pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) = \int_{\Omega} pI\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \sum_{i,j}^3 p\delta_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} p\operatorname{div} \mathbf{u} = (p, \operatorname{div} \mathbf{u})$, erhalten wir

$$\begin{aligned} (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) &= (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + (pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) \\ &= (2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) + (p, \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\lambda}p) - (\frac{1}{\lambda}p, p) \\ &\stackrel{\lambda > 0}{\leq} \underbrace{(2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - pI, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))}_{A(\mathbf{u}, p; \mathbf{u})} + (p, \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\lambda}p). \end{aligned}$$

$A(\mathbf{u}, p; \mathbf{u}) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ bildet eine zur $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -Norm äquivalente Norm. Daraus folgt

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{|A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}) + \frac{1}{2}\langle S\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Einsetzen der Abschätzung (5.24) für den Druck ergibt unter Verwendung des erweiterten arithmetisch-geometrischen Mittels

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + c(\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &\quad + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}) \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\epsilon \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + c\frac{1}{2}\epsilon (\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)})^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq (\frac{1}{2\epsilon} + c\epsilon) \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + (\frac{1}{2}\epsilon + c\epsilon) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2\epsilon} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ (1 - c\epsilon) \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq (\frac{1}{2\epsilon} + c\epsilon) \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Für ϵ klein genug gewählt ($1 > c\epsilon$) ergibt sich

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \tilde{c} \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Betrachten wir nun den Anteil des Poincaré-Steklov-Operators $S = W + (I - K')V^{-1}(I - K)$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes S\mathbf{u}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} &= \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W + (I - K')V^{-1}(I - K)\mathbf{u}]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &= \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} + (I - K')\phi - (I - K')\phi + (I - K')V^{-1}(I - K)\mathbf{u}]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &= \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\phi + (I - K')V^{-1}(V\phi + (I - K)\mathbf{u})]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &\leq \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\phi]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [(I - K')V^{-1}(V\phi \\ &\quad + (I - K)\mathbf{u})]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &= \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\phi]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2} \|(I - K')V^{-1}(V\phi + (I - K)\mathbf{u})\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\leq \|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\phi]\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}c \|V\phi + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (5.25) \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Beschränktheit der Operatoren K' bzw. V^{-1} als Abbildung von $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ nach $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ bzw. von $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ nach $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Zusammengefasst ergibt sich daraus eine obere Schranke für die Norm von \mathbf{u}

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 &\leq \bar{c} \left[\left(\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \right)^2 + \left\| \frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Für die Abschätzung von $\boldsymbol{\phi}$ benutzen wir die Beschränktheit von $(I - K)$ und den Spursatz

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} &\leq c \|V\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\leq c (\|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|(I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}) \\ &\leq c (\|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Fügt man (5.25) in (5.24) und benutzt (5.26) und (5.27), ergibt sich

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \leq \\ &c \left[\left(\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + c \left[\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right]^2 + c \left[\|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right]^2 \\ &\leq c \left[\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq c \left[\|\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}]\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \|V\boldsymbol{\phi} + (I - K)\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &= c B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi})). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Koerzivität von $B((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}))$. \square

Mit der Koerzivität und Stetigkeit der Bilinearform B und der Stetigkeit der Linearform L folgt mit dem Lax-Milgram-Lemma, dass es eine eindeutige Lösung des Problems (5.18) gibt.

5.3 Diskretes Least-Squares Funktional

Für die Diskretisierung des Least-Squares Funktionals (5.18) benutzen wir endlich dimensionale Unterräume $V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$, $M_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ und $H_h \subset L^2(\Omega)$.

Für den diskreten Unterraum V_h nehmen wir stückweise Polynome vom Grad $k < r$, wobei $r \geq 2$. Für die Diskretisierung von $L^2(\Omega)$ nehmen wir als H_h den Raum der Funktionen mit Polynomgrad $k < r - 1$. M_h bestehe aus den stückweisen Polynomen vom Grad $k < r - 1$.

Wir haben die Triangulierung \mathcal{T}_h des Gebiets Ω in Hexaeder oder Tetraeder, so dass $\Omega = \bigcup_i T_i$. Dabei sind $F \in \mathcal{E}_h$ die inneren Seitenflächen, die nicht auf dem Rand Γ liegen und Γ_i bezeichnet eine Unterteilung des Randes in Vierecke oder Dreiecke. Mit h_T bezeichnen wir den Durchmesser des Volumenelementes T und mit h_F die Größe einer Seitenfläche.

Für die diskrete Form des Least-Squares Funktionals benötigen wir gewichtete L^2 -Normen auf den Elementen der Triangulierung für vektorwertiges $\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in V_h$

$$(\mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h)_{h_T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T \mathbf{v}_h(x) \cdot \mathbf{w}_h(x) dx, \quad \|\mathbf{v}_h\|_{h_T} = (\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{h_T}^{1/2} \quad \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h \in V_h$$

und für skalare $p_h, q_h \in H_h$

$$(p_h, q_h)_{h_T} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T p_h(x) q_h(x) dx, \quad \|p_h\|_{h_T} = (p_h, p_h)_{h_T}^{1/2} \quad p_h, q_h \in H_h.$$

Wir definieren für vektorwertige Funktionen $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und skalare Funktionen $p, q \in L^2(\Omega)$ analog gewichtete L^2 -Skalarprodukte

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}, \mathbf{w})_{h_T} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{w}(x) dx, & \|\mathbf{v}\|_{h_T} &= (\mathbf{v}, \mathbf{v})_{h_T}^{1/2} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ (p, q)_{h_T} &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \int_T p(x) q(x) dx, & \|p\|_{h_T} &= (p, p)_{h_T}^{1/2} \quad p, q \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Auf den Elementseitenflächen bzw. -kanten (2D) \mathcal{E}_h nutzen wir folgendes Skalarprodukt

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{h_F} = \sum_{F \in \mathcal{E}_h} h_F \int_F \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} ds, \quad \|\mathbf{u}\|_{h_F} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{h_F}^{1/2}.$$

Um das diskrete Least-Squares Funktional aufstellen zu können, diskretisieren wir den in (5.14) vorgestellten Operator $\mathcal{L}(\mathbf{v}, q)$ durch $\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q) : \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow V_h^*$ definiert durch

$$[\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q), \mathbf{w}_h] = A(\mathbf{v}, q; \mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h.$$

Es gelte die Approximationseigenschaft für $c > 0$ unabhängig von h , dass für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ ein $\mathbf{v}_h \in V_h$ existiert, so dass für die Triangulierung \mathcal{T}_h gilt

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{1}{h_T^2} \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^2(T)}^2 + \|\mathbf{v}_h - \mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(T)}^2 \right) \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2. \quad (5.28)$$

Weiterhin nehmen wir an, dass Projektionsoperatoren P_h , Q_h und O_h existieren, die unabhängig von der Gitterweite $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$ beschränkt sind

$$\begin{aligned} P_h &: \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega); & Q_h &: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma), \\ O_h &: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h^* \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma). \end{aligned}$$

Die zugehörigen adjungierten Operatoren P_h^* , Q_h^* und O_h^*

$$\begin{aligned} P_h^* &: \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow V_h^* \subset \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega); & Q_h^* &: \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h^* \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma); \\ O_h^* &: \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned}$$

sind ebenfalls beschränkt. Mit Hilfe dieser Projektionsoperatoren können wir nun die diskrete Version des Minimierungsproblems (5.18) mit dem diskreten Least-Squares Funktional \tilde{J}_h beschreiben

Diskretes Least-Squares Funktional

Finde $(\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h) \in X_h := V_h \times H_h \times M_h$ mit

$$\tilde{J}_h(\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h) = \min_{\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h} \tilde{J}_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h \in X_h, \quad (5.29)$$

wobei $\tilde{J}_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{J}_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) &= \|P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_h, q_h) - \mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0)])\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\frac{1}{\lambda}q_h + \operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|Q_h^*((I - K)(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0))\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \\ &\quad + \|L(\mathbf{v}_h, q_h) - \mathbf{F}\|_{h_T}^2 \\ &\quad + \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 \\ &\quad + \|O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}[W(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0)])\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Sei $g(\mathbf{u}_h, \phi_h) := W\mathbf{u}_h - (I - K')\phi_h$. Die diskretisierte Bilinearform $\tilde{B}^{(h)}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h), (\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h)) &= (P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{u}_h, \phi_h)), P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_h, q_h) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h)))_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\ &\quad + (\frac{1}{\lambda}p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h, \frac{1}{\lambda}q_h + \operatorname{div} \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \langle Q_h^*((I - K)\mathbf{u}_h + V\phi_h), Q_h^*((I - K)\mathbf{v}_h + V\boldsymbol{\tau}_h) \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\ &\quad + (L(\mathbf{u}_h, p_h), L(\mathbf{v}_h, q_h))_{h_T} \\ &\quad + \langle [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n}] \rangle_{h_F} \\ &\quad + \langle O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}_h, \phi_h)), O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h)) \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \end{aligned} \quad (5.30)$$

und die Linearform durch

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}^{(h)}(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) &= (P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h)), P_h^*(\mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [g(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}_0) + 2\mathbf{t}_0]))_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\
 &\quad + \langle Q_h^*((I - K)\mathbf{v}_h + V\boldsymbol{\tau}_h), Q_h^*((I - K)\mathbf{u}_0 + V\mathbf{t}_0) \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
 &\quad + (L(\mathbf{v}_h, q_h), \mathbf{F})_{h_T} \\
 &\quad + \langle O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\tau}_h)), O_h^*(\frac{1}{2}[g(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}_0) + 2\mathbf{t}_0]) \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Um die eindeutige Lösbarkeit des diskreten Minimierungsproblems (5.29) zu zeigen, beweisen wir wie im kontinuierlichen Fall die Voraussetzungen des Lax-Milgram Lemmas.

Betrachten wir zunächst die Koerzivität der diskreten Bilinearform.

Theorem 5.3.1 *Die diskrete Bilinearform $\tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h))$ ist koerziv, es gibt eine Konstante $c > 0$ unabhängig von der Gitterweite h mit*

$$\tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h)) \geq c(\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2)$$

für alle $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$.

Beweis. Wie im Beweis der Koerzivität der kontinuierlichen Bilinearform leiten wir zunächst eine Abschätzung der Norm von p_h her, die wir dann in die Abschätzung der Norm von \mathbf{u}_h einsetzen können. Bei der Abschätzung von p_h bekommen wir durch die partielle Integration die zusätzlichen Terme, im Unterschied zu der kontinuierlichen Bilinearform. Für $p_h \in H_h$ gilt

$$\begin{aligned}
 \|p_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p_h, \operatorname{div} \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
 &= \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) + (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
 &\leq \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{\overbrace{(p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2}\langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle}^{\text{I.}} + \overbrace{(p_h, \operatorname{div} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - \frac{1}{2}\langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle}^{\text{II.}}}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
 &\quad + \underbrace{\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{\frac{1}{2}\langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}}_{\leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}}.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Terme I. und II. einzeln:

I.)

$$\begin{aligned}
 (p_h, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle &\leq \|\mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|(p_h, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h \rangle|}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
 &\leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|(p_h, \operatorname{div} \mathbf{w}_h) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h \rangle|}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \\
 &\leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \left[\sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|(p_h I, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)) - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h)) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h \rangle|}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right. \\
 &\quad \left. + \sup_{\mathbf{w}_h \in V_h} \frac{|2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))|}{\|\mathbf{w}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} \right] \\
 &\leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \left[\|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\hat{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \right].
 \end{aligned}$$

 II.) wir schreiben $\boldsymbol{\sigma}$ abkürzend für $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h)$ und erhalten mit Hilfe des Spursatzes und der Approximationseigenschaft (5.28)

$$\begin{aligned}
 (p_h, \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle &\leq (p_h, \operatorname{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) + \underbrace{2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h))}_{\leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}} - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle \\
 &\leq | -A(\mathbf{u}_h, p_h; (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle | + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &= \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, dx + \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &= \int_\Omega - \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, dx + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, ds + \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle \\
 &\quad + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &\leq \int_\Omega L(\mathbf{u}_h, p_h) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, dx + \sum_{F \in \mathcal{E}} \int_F |[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)| \, ds + \left| \sum_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, ds \right| \\
 &\quad + \frac{1}{2} \langle S_h \mathbf{u}_h, (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \rangle + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{h_T} h_T \int_T L(\mathbf{u}_h, p_h) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, dx + \sum_{F \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_F} h_F \int_F |[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)| \, ds \\
 &\quad + \int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h) (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \, ds + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} h_T \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{L^2(T)} \frac{1}{h_T} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(T)} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{h_F} h_F \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{L^2(F)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{L^2(F)} \\
 &\quad + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
 &\leq c \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + c \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
& \leq c \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} [\|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T} + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}]
\end{aligned}$$

Setzen wir nun die Abschätzungen I. und II. wieder in die Abschätzung für p_h ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|p_h\|_{L^2(\Omega)} & \leq c [\|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T} + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \\
& + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}] + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Um eine Abschätzung der approximierten Verschiebung \mathbf{u}_h zu bekommen, starten wir wie im kontinuierlichen Fall mit der 2. Kornschen Ungleichung und der Positivität des diskreten Poincaré-Steklov Operators. Wir erweitern den Ausdruck ebenfalls wie im kontinuierlichen Fall um $(p_h I, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h))$ und $(p_h, \frac{1}{\lambda} p_h)$ und erhalten

$$\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 \leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{1}{\lambda} p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Setzen wir die Abschätzung für p_h aus (5.32) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 & \leq \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\
& + c [\|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T} + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \\
& + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}] \cdot \|\frac{1}{\lambda} p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Die analoge Anwendung des verallgemeinerten arithmetisch-geometrischen Mittels gibt uns eine Abschätzung für \mathbf{u}_h

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 & \leq c' [\|\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes S_h \mathbf{u}_h\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T}^2 + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 \\
& + \|\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} S_h \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\frac{1}{\lambda} p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2] \\
& \leq c' [\|P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W \mathbf{u}_h - (I - K') \phi_h])\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 \\
& + \|Q_h^*(V \phi_h + (I - K) \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T}^2 + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 \\
& + \|O_h^*(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W \mathbf{u}_h - (I - K') \phi_h])\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\
& + \|Q_h^*(V \phi_h + (I - K) \mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|\frac{1}{\lambda} p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2]. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Wir benötigen nur noch die Abschätzung für $\|\phi_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}$. Wir benutzen die Beschränk-

heit von $Q_h^*(V)$ und $Q_h^*(I - K)$ und den Spursatz.

$$\begin{aligned}
 \|\phi_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} &\leq c\|Q_h^*(V\phi_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
 &\leq c\|Q_h^*(V\phi_h + (I - K)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|Q_h^*((I - K)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
 &\leq c\|Q_h^*(V\phi_h + (I - K)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
 &\leq c\|Q_h^*(V\phi_h + (I - K)\mathbf{u}_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Setzen wir die Abschätzung (5.33) für \mathbf{u}_h in die gewonnenen Abschätzungen (5.32) für p_h und (5.34) für ϕ_h ein, erhalten wir die Koerzivität der diskreten Bilinearform.

$$\begin{aligned}
 &\|\mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\phi_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\
 &\leq \|P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h, p_h) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{u}_h, \phi_h))\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 + \|\frac{1}{\lambda}p_h + \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \|Q_h^*((I - K)\mathbf{u}_h + V\phi_h)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 + \|L(\mathbf{u}_h, p_h)\|_{h_T}^2 + \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 \\
 &\quad + \|O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h, p_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}_h, \phi_h))\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\
 &= \tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h), (\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h))
 \end{aligned}$$

□

Für die Stetigkeit der Bilinearform gehen wir wie im Beweis von Theorem 5.2.1 vor, wo die Stetigkeit der kontinuierlichen Bilinearform gezeigt wurde. Der Beweis ist nicht ganz analog zu dem von Theorem 5.2.1, da in dem diskreten Funktional weitere Terme auftreten.

Theorem 5.3.2 *Die diskrete Bilinearform $\tilde{B}^{(h)}$ ist stetig, es gibt eine von der Gitterweite h unabhängige Konstante $c > 0$ mit*

$$\tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}, p, \phi), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \leq c\|(\mathbf{u}, p, \phi)\|_X \|(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})\|_X$$

für alle $(\mathbf{u}, p, \phi), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) \in X$.

Analog lässt sich auf die Stetigkeit der diskreten Linearform $\tilde{G}^{(h)}(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})$ schließen.

Beweis. Wir benutzen wieder die Abkürzung $g(\mathbf{u}, \phi) = W\mathbf{u} - (I - K')\phi$ und erhalten mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned}
 &\tilde{B}^{(h)}((\mathbf{u}, p, \phi), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \\
 &= (P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{u}, \phi)), P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})))_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\
 &\quad + (\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v}) \\
 &\quad + \langle Q_h^*((I - K)\mathbf{u} + V\phi), Q_h^*((I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau}) \rangle_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (L(\mathbf{u}, p), L(\mathbf{v}, q))_{h_T} \\
 & + \langle [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n}] \rangle_{h_F} \\
 & + \langle O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})), O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})) \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\
 \leq & \|P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}))\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \|P_h^*(\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}))\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

$$+ \|\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\frac{1}{\lambda}q + \operatorname{div} \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.36)$$

$$+ \|Q_h^*((I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi})\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \|Q_h^*((I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau})\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \quad (5.37)$$

$$+ \|L(\mathbf{u}, p)\|_{h_T} \|L(\mathbf{v}, q)\|_{h_T} \quad (5.38)$$

$$+ \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \quad (5.39)$$

$$+ \|O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}))\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \|O_h^*(\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}))\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (5.40)$$

Die Normen in (5.35), (5.36) und (5.37) können wir mit Hilfe der Beschränktheit der diskreten Randintegraloperatoren sowie der Definition des diskreten Operators \mathcal{L}_h auf die Vorgehensweise in dem Beweis des kontinuierlichen Falls zurückführen.

Für die Terme in (5.40) benutzen wir die Dreiecksungleichung

$$\|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} + \|\frac{1}{2}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Für die zweite Norm können wir wiederum die Abbildungseigenschaften von W und K' benutzen, um eine obere Schranke $\|(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}$ zu erhalten. Der Spursatz liefert dann die richtige Norm für \mathbf{u} .

Für die Normausdrücke in (5.38) und (5.39) müssen wir die Definition der gewichteten diskreten Normen genauer betrachten. Die Anteile mit den gewichteten Normen schätzen wir mittels der Darstellung der Ableitung über die Differenzenbildung nach oben ab und erhalten die gewünschten Abschätzungen.

Setzen wir die einzelnen Teile zusammen ergibt sich die Stetigkeit der diskreten Bilinearform. \square

Durch die Koerzivität und Stetigkeit der diskreten Bilinearform sowie der Stetigkeit der diskreten Linearform sind die Voraussetzungen des Lax-Milgram Lemmas erfüllt. Dadurch haben wir bewiesen, dass die Minimierung des diskreten Least-Squares Funktionals \tilde{J}_h genau eine Lösung $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$ besitzt.

Nachdem wir gezeigt haben, dass das diskrete Least-Squares Funktional eindeutig lösbar ist, wenden wir uns nun den in den Bilinearformen (kontinuierlich und diskret) auftretenden Skalarprodukten zu. Für die Berechnung einer Approximation $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$ müssen wir eine geeignete Darstellung der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ - und $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Skalar-

produkte angeben. Mit Hilfe von Lösungsoperatoren der entsprechend zugehörigen dualen Problemstellungen erhalten wir alternative Darstellungen der auftretenden Skalarprodukte.

Für das $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ Skalarprodukt gehen wir wie in [7] vor. Sei $T : \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)$ Lösungsoperator von

$$\text{Finde } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \text{ so dass} \quad (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \quad (5.41)$$

d.h. für alle $\mathbf{f} \in \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ ist $\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ die exakte Lösung von (5.41) und wir setzen $T\mathbf{f} := \mathbf{w}$. Mit Hilfe des Lösungsoperators T lässt sich die $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ Norm wie folgt beschreiben (siehe [7, Lemma 2.1])

$$\|\mathbf{f}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2} = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)} \frac{(T\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2} = \|T\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 = (\mathbf{f}, T\mathbf{f})_{\mathbf{L}^2(\Omega)}.$$

Wir können also die $\mathbf{H}^1(\Omega)$ -Norm mit Hilfe des Lösungsoperators T realisieren, indem wir \mathbf{f} als rechte Seite in das Problem (5.41) einsetzen und die zugehörige Lösung \mathbf{w} bestimmen.

Für den diskreten Fall sei $V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$. $T_h : \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \rightarrow V_h$ sei definiert durch $T_h \mathbf{f} := \mathbf{w}_h$, wobei $\mathbf{w}_h \in V_h$ die eindeutige Lösung des diskreten Problems

$$(\nabla \mathbf{w}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h$$

ist.

Im Falle des $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukts gehen wir ähnlich zu dem Fall für die $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ Norm vor. Wir folgen der Definition aus [47] und setzen $R : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$, definiert als $R\mathbf{f} := \boldsymbol{\tau}$. $\boldsymbol{\tau} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ ist die eindeutige Lösung des Problems

$$\langle V\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Es gilt mit der positiven Definitheit des Einfachschichtpotentials V die Äquivalenz der Energienorm zur $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ -Norm. Daraus schließen wir

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2}{\|\boldsymbol{\theta}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2} \sim \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2}{\langle V\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} \rangle} = \langle \boldsymbol{\psi}, R\boldsymbol{\psi} \rangle$$

für $\boldsymbol{\psi} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Wir können also die $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ Norm durch die duale Paarung $\langle \cdot, R\cdot \rangle$ mit der Anwendung des Lösungsoperators R des Einfachschichtpotentialproblems ersetzen.

Sei $M_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ für die diskrete Situation. Wir definieren $R_h : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h$ als Lösungsoperator von

$$\langle V\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h.$$

Analog zum kontinuierlichen Fall folgt

$$\|\boldsymbol{\psi}_h\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2 \sim \langle \boldsymbol{\psi}_h, R_h \boldsymbol{\psi}_h \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{\psi}_h \in M_h^*. \quad (5.42)$$

Es bietet sich an, ähnlich zu den obigen Realisierungen der Skalarprodukte auch für das $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukt einen Lösungsoperator eines dualen Problems einzuführen. Wir legen hierzu eine Problemstellung mit dem hypersingulären Integraloperator zugrunde, die uns die Realisierung im diskreten Fall ermöglichen soll (siehe hierzu [33]). Der hypersinguläre Integraloperator W ist aber nur auf $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)/\mathcal{R}$ positiv definit, wobei \mathcal{R} gerade die Starrkörperbewegungen des Körpers beschreiben. Im zweidimensionalen Fall sind diese

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \right\}$$

und in 3D

$$\mathcal{R} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \right\}.$$

Deshalb erweitern wir im 2D Fall den hypersingulären Operator W mit den Funktionalen $P_{1,2,3} : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $P_1 := \int_{\Gamma} \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds$, $P_2 := \int_{\Gamma} \Phi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ds$, $P_3 := \int_{\Gamma} \Phi \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} ds \quad \forall \Phi \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Daraus erhalten wir einen positiv definiten Operator $\tilde{W} := W + P_1' P_1 + P_2' P_2 + P_3' P_3 : \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Für den 3D Fall ergeben sich entsprechend 6 Funktionale $P_{1,\dots,6}$.

Wir betrachten dann den Lösungsoperator $N : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ mit $N\mathbf{f} = \mathbf{w}$ des Problems:

$$\text{Finde } \mathbf{w} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma) \text{ mit } \langle \tilde{W}\mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma).$$

Es ergibt sich für die $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 = \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle^2}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2} \sim \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \tilde{W}\mathbf{Sf}, \mathbf{v} \rangle^2}{\langle \tilde{W}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \langle \tilde{W}N\mathbf{f}, N\mathbf{f} \rangle = \langle \mathbf{f}, N\mathbf{f} \rangle.$$

Im diskreten Fall sei $M_h^* \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$. Wir definieren $N_h : \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow M_h^*$ als Lösungsoperator von

$$\langle \tilde{W}\mathbf{w}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in M_h^*.$$

Analog zum kontinuierlichen Fall folgt

$$\|\boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \sim \langle \boldsymbol{\phi}_h, N_h \boldsymbol{\phi}_h \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \quad \forall \boldsymbol{\phi}_h \in M_h. \quad (5.43)$$

Durch die Lösungsoperatoren T_h , R_h und N_h haben wir Lösungsoperatoren definiert, mit deren Hilfe wir nun in der Lage sind, die Skalarprodukte der diskreten Bilinearform und der diskreten Linearform zu realisieren.

Um die numerische Effizienz des dargestellten Systems zu steigern, ersetzen wir die Lösungsoperatoren T_h , R_h und N_h durch entsprechende Vorkonditionierer. Die Berechnung der Anteile $T_h \mathbf{v}_h$, $R_h \boldsymbol{\tau}_h$ bzw. $N_h \Phi_h$ wird dadurch wesentlich günstiger.

Wir ersetzen T_h durch den Vorkonditionierer \mathfrak{B}_h mit der spektralen Äquivalenz zu T_h

$$c_0(T_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq (\mathfrak{B}_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \leq c_1(T_h \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (5.44)$$

Für das $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukt ersetzen wir R_h durch den Vorkonditionierer \mathfrak{C}_h mit $\langle R_h \cdot, \cdot \rangle \sim \langle \mathfrak{C}_h \cdot, \cdot \rangle$ und benutzen für den Lösungsoperator N_h den Vorkonditionierer \mathfrak{D}_h mit $\langle N_h \cdot, \cdot \rangle \sim \langle \mathfrak{D}_h \cdot, \cdot \rangle$.

Das diskrete Least-Squares Funktional \tilde{J}_h (5.29) wird durch das folgende Least-Squares Funktional J_h ersetzt.

Finde $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$ mit

$$J_h(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) = \min_{\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h} J_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h \in X_h, \quad (5.45)$$

wobei $J_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} & J_h(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) \\ &= \|\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\mathbf{v}_h, q_h) - \mathbf{F} + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0)])\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|\frac{1}{\lambda} q_h + \operatorname{div} \mathbf{v}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|\mathfrak{C}_h Q_h^* ((I - K)(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0))\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\ & \quad + \|L(\mathbf{v}_h, q_h) - \mathbf{F}\|_{h_T}^2 \\ & \quad + \|[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 \\ & \quad + \|\mathfrak{D}_h O_h^* (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}_h, q_h) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\mathbf{v}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\tau}_h - \mathbf{t}_0)])\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Es sei $g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi}) := W\mathbf{u} - (I - K')\boldsymbol{\phi}$. Dann haben wir die diskrete Bilinearform für $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X$

$$\begin{aligned} & B^{(h)}((\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}), (\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau})) \\ &= (\mathfrak{B}_h P_h^* [\mathcal{L}_h(\mathbf{u}, p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})], P_h^* (\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ & \quad + (\frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u}, \frac{1}{\lambda} q + \operatorname{div} \mathbf{v})_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \langle \mathfrak{C}_h Q_h^* [(I - K)\mathbf{u} + V\boldsymbol{\phi}], Q_h^* ((I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau}) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 & + (L(\mathbf{u}, p), L(\mathbf{v}, q))_{h_T} \\
 & + \langle [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n}] \rangle_{h_F} \\
 & + \langle \mathfrak{D}_h O_h^* [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{u}, \boldsymbol{\phi})], O_h^* (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.
 \end{aligned} \tag{5.46}$$

Die Linearform ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 G^{(h)}(\mathbf{v}, q, \boldsymbol{\tau}) & = (\mathfrak{B}_h P_h^* [\mathcal{L}_h(\mathbf{v}, q) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})], P_h^* (\mathbf{F} + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [g(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}_0) + 2\mathbf{t}_0]))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
 & + \langle \mathfrak{C}_h Q_h^* [(I - K)\mathbf{v} + V\boldsymbol{\tau}], Q_h^* ((I - K)\mathbf{u}_0 + V\mathbf{t}_0) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 & + (L(\mathbf{v}, q), \mathbf{F})_{h_T} \\
 & + \langle \mathfrak{D}_h O_h^* [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}, q) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}g(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau})], O_h^* (\frac{1}{2}[g(\mathbf{u}_0, \mathbf{t}_0) + 2\mathbf{t}_0]) \rangle_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Durch die Definition der Lösungsoperatoren T_h , R_h und N_h der dualen Probleme für die $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ und $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukte und die spektrale Äquivalenz der Vorkonditionierer \mathfrak{B}_h , \mathfrak{C}_h und \mathfrak{D}_h zu den entsprechenden Lösungsoperatoren folgt sofort aus dem Theorem 5.3.1 und Theorem 5.3.2 folgendes Ergebnis

Theorem 5.3.3 *Die Bilinearform $B^{(h)}$ aus (5.46) ist stetig und koerziv und die Linearform $G^{(h)}$ aus (5.47) ist stetig.*

Die Minimierungsaufgabe mit dem diskreten Least-Squares Funktional J_h besitzt genau eine Lösung $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$.

5.4 A priori Fehlerabschätzung

Im Abschnitt 5.3 haben wir die endlich dimensionalen Unterräume $X_h = V_h \times H_h \times M_h$ von X eingeführt. Für den Raum V_h nehmen wir stetige, stückweise lineare Funktionen, für H_h stückweise konstante Funktionen und auf den Elementen auf dem Rand Γ benutzen wir stückweise konstante Funktionen. Auf einem quasi-uniformen Gitter haben wir dann die üblichen Approximationseigenschaften für X_h . Es gilt

Es gibt ein $r \geq 2$, so dass für alle $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^r(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned}
 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} & \lesssim h^{r-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} \\
 \inf_{q_h \in H_h} \|p - q_h\|_{L^2(\Omega)} & \lesssim h^{r-1} \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)} \lesssim h^{r-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} \\
 \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in S_h} \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} & \lesssim h^{r-1} \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{r-3/2}(\Gamma)} \lesssim h^{r-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Mittels der Approximationseigenschaften für die diskreten Unterräume können wir folgende a priori Fehlerabschätzung für $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X$ und $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$ zeigen

Theorem 5.4.1 *Sei $(\mathbf{u}, p, \boldsymbol{\phi}) \in X$ Lösung von (5.19) und $(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \in X_h$ sei die Lösung des diskreten Problems (5.45). Dann gilt für $c > 0$ unabhängig von h*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\ \leq ch^{r-1} [\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{r-3/2}(\Gamma)}] \\ \leq ch^{r-1} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h, \tilde{\boldsymbol{\phi}}_h) \in X_h$. Dann gilt mit der Koerzivität der diskreten Bilinearform

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}_h - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\ & \lesssim \|\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)])\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ & \quad + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2 + \|\mathfrak{C}_h Q_h^* (V(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h))\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\ & \quad + \|\mathfrak{D}_h O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)])\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\ & \quad + \|\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h)\|_{h_T}^2 \\ & = (\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\tilde{\mathbf{u}}_h - (I - K')\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h]), P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h) \\ & \quad + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ & \quad + (\mathfrak{C}_h Q_h^* (V\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h + (I - K)\tilde{\mathbf{u}}_h), Q_h^* (V(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ & \quad + (L(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h))_{h_T} + ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}])_{h_F} \\ & \quad + (\mathfrak{D}_h O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W\tilde{\mathbf{u}}_h - (I - K')\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h]), \\ & \quad \quad O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ & \quad + (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h + \frac{1}{\lambda} \tilde{p}_h, \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p_h))_{L^2(\Omega)} \\ & \quad - \left[(\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathbf{F} + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{t}_0 - (I - K')\mathbf{t}_0]), \right. \\ & \quad \quad P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\ & \quad \quad + (\mathfrak{C}_h Q_h^* (V\mathbf{t}_0 + (I - K)\mathbf{u}_0), Q_h^* (V(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\ & \quad \quad + (\mathbf{F}, L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h))_{h_T} \\ & \quad \quad \left. + (\mathfrak{D}_h O_h^* (\frac{1}{2} [W\mathbf{u}_0 + 2\mathbf{t}_0 - (I - K')\mathbf{t}_0]), \right. \\ & \quad \quad \quad \left. O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W \tilde{\mathbf{u}}_h - (I - K') \tilde{\phi}_h]), \\
 &\quad P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
 &+ (\mathfrak{C}_h Q_h^* (V \tilde{\phi}_h + (I - K) \tilde{\mathbf{u}}_h), Q_h^* (V(\tilde{\phi}_h - \phi_h) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 &+ (L(\tilde{\mathbf{u}}_h, \tilde{p}_h), L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h))_{h_T} + ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}])_{h_F} \\
 &+ (\mathfrak{D}_h O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W \tilde{\mathbf{u}}_h - (I - K') \tilde{\phi}_h]), \\
 &\quad O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 &+ (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}_h + \frac{1}{\lambda} \tilde{p}_h, \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p_h))_{L^2(\Omega)} \\
 &- \underbrace{G^{(h)}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h, \tilde{\phi}_h - \phi_h)}_{=B^{(h)}((\mathbf{u}, p, \phi), (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h, \tilde{\phi}_h - \phi_h))} \\
 &= (\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi)]), \\
 &\quad P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \\
 &+ (\mathfrak{C}_h Q_h^* (V(\tilde{\phi}_h - \phi) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})), Q_h^* (V(\tilde{\phi}_h - \phi) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h)))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 &+ (L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p), L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h))_{h_T} + ([\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}], [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}])_{h_F} \\
 &+ (\mathfrak{D}_h O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi)]), \\
 &\quad O_h^* (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2} [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi_h)]))_{\mathbf{L}^2(\Gamma)} \\
 &+ (\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p), \operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p_h))_{L^2(\Omega)} \\
 &= B^{(h)}((\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p, \tilde{\phi}_h - \phi), (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h, \tilde{\phi}_h - \phi_h)).
 \end{aligned}$$

Mit der gleichen Vorgehensweise für das zweite Argument $(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h, \tilde{p}_h - p_h, \tilde{\phi}_h - \phi_h)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}_h - p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{\phi}_h - \phi_h\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\
 &\leq B^{(h)}((\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p, \tilde{\phi}_h - \phi), (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p, \tilde{\phi}_h - \phi)).
 \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der diskreten Bilinearform liefert

$$\begin{aligned}
 &B^{(h)}((\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p, \tilde{\phi}_h - \phi), (\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p, \tilde{\phi}_h - \phi)) \\
 &\leq c [\|\mathfrak{B}_h P_h^* (\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p) + \frac{1}{2} \delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\phi}_h - \phi)])\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \|\mathfrak{C}_h Q_h^* (V(\tilde{\phi}_h - \phi) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}))\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 + \|\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) + \frac{1}{\lambda} (\tilde{p}_h - p)\|_{L^2(\Omega)}^2]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\mathfrak{D}_h O_h^*(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}[W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi})])\|_{\mathbf{L}^2(\Gamma)}^2 \\
& + \|L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{h_T}^2 + \|[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}^2].
\end{aligned}$$

Für den ersten Term benutzen wir die spektrale Äquivalenz des Vorkonditionierers \mathfrak{B}_h zu T_h aus (5.44) und die Eigenschaft des Lösungsoperators T_h . Die entsprechende $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
& \|P_h^*(\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p) + \frac{1}{2}\delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi})])\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\
& \leq \|\mathcal{L}_h(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|P_h^*(\delta_\Gamma \otimes [W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi})])\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)} \\
& \leq c[\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{p}_h - p\|_{L^2(\Omega)}] + \frac{1}{2}\|P_h^*(W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}))\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\
& \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)}] + c[\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}] \\
& \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)}] + c[\|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \|\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}] \\
& \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{r-3/2}(\Gamma)}]
\end{aligned}$$

Für den zweiten Normausdruck benutzen wir die spektrale Äquivalenz des Vorkonditionierers \mathfrak{C}_h und die Eigenschaft von R_h in (5.42). Mit der Stetigkeit der Integraloperatoren und dem Spursatz gilt

$$\begin{aligned}
& \|Q_h^*(V(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}) + (I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}))\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
& \leq \|Q_h^*(V(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}))\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|(Q_h^*(I - K)(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}))\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} \\
& \leq c[\|\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}] \\
& \leq c[\|\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}] \\
& \leq ch^{r-1}[\|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{r-3/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)}]
\end{aligned}$$

Für die Terme $\|[\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F}$ und $\|L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{h_T}$ benutzen wir die Argumentation aus Bramble [8] und erhalten

$$\begin{aligned}
& \|[\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}]\|_{h_F} \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)}] \\
& \|L(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}, \tilde{p}_h - p)\|_{h_T} \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)}].
\end{aligned}$$

Den Anteil mit dem \mathfrak{D}_h Vorkonditionierer behandeln wir analog zu oben und benutzen dabei (5.43)

$$\begin{aligned}
& \|\boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{2}O_h^*([W(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) - (I - K')(\tilde{\boldsymbol{\phi}}_h - \boldsymbol{\phi})])\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} \\
& \leq ch^{r-1}[\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)} + \|\boldsymbol{\phi}\|_{\mathbf{H}^{r-3/2}(\Omega)}].
\end{aligned}$$

Für den verbliebenen Term in der L^2 Norm benutzen wir die Approximationseigenschaften und erhalten

$$\|\operatorname{div}(\tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}) + \frac{1}{\lambda}(\tilde{p}_h - p)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{r-1}(\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^r(\Omega)} + \|p\|_{H^{r-1}(\Omega)}).$$

Fügt man die einzelnen Terme zusammen, erhält man die gewünschte a priori Fehlerabschätzung. \square

5.5 A posteriori Fehlerschätzer

In diesem Abschnitt wollen wir eine a posteriori Fehlerabschätzung angeben, deren lokale Fehlerindikatoren zur Steuerung eines adaptiven Algorithmus benutzt werden können. Wir betrachten dazu den Fehler, der auftritt, wenn wir die exakte Lösung (\mathbf{u}, p, ϕ) des FEM-BEM Kopplungsproblems (5.9) mit den Approximationen $(\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h) \in X_h$ näherungsweise bestimmen. Für die gegebenen Sprünge nehmen wir an, dass $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ und $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ ist und für die rechte Seite $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Die Koerzivität der kontinuierlichen Bilinearform aus Theorem 5.2.2 und die Stetigkeit aus Theorem 5.2.1 liefert uns die Äquivalenz des Fehlers in der Energienorm zu der Bilinearform. Wir können daher das folgende Theorem aufstellen

Theorem 5.5.1 *Sei $(\mathbf{u}, p, \phi) \in X$ die exakte Lösung von (5.9) bzw. von (5.18) und sei $(\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h) \in X_h$. Dann gilt für gegebenes $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$, $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ und $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ für den Fehler der Approximation*

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h)\|_X^2 \lesssim \eta^2, \quad (5.48)$$

wobei η definiert ist durch

$$\eta^2 := \|\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)}^2 \quad (5.49)$$

$$+ \frac{1}{2} \|W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\phi_h - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \quad (5.50)$$

$$+ \|p_h + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (5.51)$$

$$+ \|(I - K)(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + V(\phi_h - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2. \quad (5.52)$$

Beweis. Für den Beweis nutzen wir die oben beschriebene Äquivalenz der Energienorm und der Bilinearform. Weiterhin verwenden wir die Definition der Least-Squares Form (5.15) und (5.16).

$$\begin{aligned} & \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h)\|_X^2 \\ & \approx B((\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h); (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h)) \\ & = (\mathcal{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h), \mathcal{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \phi - \phi_h))_{X' \times X'} \\ & = \|\mathfrak{F} - \mathfrak{L}(\mathbf{u}_h, p_h, \phi_h)\|_{X'}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= J(\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h) \\
 &\leq \|\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \|W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)}^2 \\
 &\quad + \|p_h + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &\quad + \|(I - K)(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}^2.
 \end{aligned}$$

□

Um die Abschätzung des Fehlers in Theorem 5.5.1 für die Steuerung eines adaptiven Algorithmus zu nutzen, müssen die einzelnen Terme (5.49)- (5.52) lokal auf den Elementen $T \in \mathcal{T}_h$ oder auf den Elementseitenflächen berechnet werden. Es werden somit Fehlerindikatoren auf jedem Element bestimmt und die adaptive Verfeinerung des Gitters kann automatisch durch den Algorithmus erfolgen.

Für die Berechnung der Fehler auf den Elementen der Triangulierung benötigen wir Lokalisierungen der einzelnen Normen, die in dem Fehlerschätzer η auftreten. In [63] wurde eine allgemeine Abschätzung für die $\tilde{H}^s(Q)$ -Norm beim Übergang vom gesamten Lipschitz-Gebiet Q auf die einzelnen Elemente Q_i bewiesen.

Theorem 5.5.2 (von Petersdorff [63]) *Sei $f \in \tilde{H}^s(Q)$ mit $f|_{Q_j} \in \tilde{H}^s(Q_j)$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\|f\|_{\tilde{H}^s(Q)}^2 \leq \sum_{j=1}^n \|f|_{Q_j}\|_{\tilde{H}^s(Q_j)}^2.$$

Für die Behandlung der $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ -Norm können wir auf ein Ergebnis aus [18] verweisen. In der Arbeit wird mit Hilfe einer Zerlegung der Eins eine obere Schranke für den Übergang vom Rand auf die einzelnen Randelemente gefunden. Dafür sei $\Theta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ eine Zerlegung der Eins mit geeignetem $\Gamma_j \subset \operatorname{supp} \vartheta_j$.

Theorem 5.5.3 (Carstensen, Maischak, Stephan [18]) *Sei Θ eine Zerlegung der Eins von dem Rand Γ mit Überlappung $K(\Theta)$. Dann gilt für alle $f \in H^\alpha(\Gamma)$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$*

$$\|f\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2 \leq K(\Theta) \sum_{j=1}^M \|f \cdot \vartheta_j\|_{H^\alpha(\operatorname{supp} \vartheta_j)}^2.$$

Mit Hilfe des Lokalisierungsergebnisses Theorem 5.5.3 können wir die $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ -Norm in (5.52) auf Elementebene abschätzen. Die $L^2(\Omega)$ -Norm in (5.51) wird kanonisch auf die einzelnen Elemente $T \in \mathcal{T}_h$ reduziert.

Um eine lokale Fehlerabschätzung zu beweisen, müssen wir außerdem die $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Norm lokalisieren. Es gilt $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma) = \tilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma)$, da Γ geschlossen ist. Da nach Voraussetzung $\mathbf{t}_0 \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ und $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$ sind, haben wir, dass $W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0) \in \mathbf{L}^2(\Gamma)$ liegt. Daraus haben wir sofort, dass

$$[W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)]|_{\Gamma_j} \in \mathbf{L}^2(\Gamma_j)$$

ist. Daraus haben wir, dass der obige Ausdruck für $\epsilon > 0$ in $\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2+\epsilon}(\Gamma_j)$ ist. $\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2+\epsilon}(\Gamma_j)$ ist kompakte Teilmenge von $\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma_j)$ und daher haben wir mit diesen Überlegungen die Voraussetzungen des Theorems 5.5.2 erfüllt. Es gilt also die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)\|_{\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)} &\leq \\ &\sum_{j=1}^n \| [W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)]|_{\Gamma_j} \|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma_j)}. \end{aligned}$$

Analog gehen wir für $\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ vor und erhalten als lokalisierten Anteil aus Theorem 5.5.2 den Term $\|\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(T_i)}^2$.

Damit haben wir für alle Normen aus der Abschätzung (5.48) eine Lokalisation auf die Elementebene und können folgende lokalen Fehlerindikatoren definieren

Definition 5.5.4 Sei $\mathcal{T}_h = \bigcup_{i=1}^n T_i$ Triangulierung des Gebiets Ω und $\Gamma_h = \bigcup_{j=1}^m \Gamma_j$ Triangulierung des Randes Γ . Es sei außerdem $\Theta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$ eine Zerlegung der Eins, wobei $\Gamma_j \subset \text{supp } \vartheta_j$ geeignet gewählt. Dann definieren wir die lokalen Fehlerindikatoren durch

$$\eta_{1,i}^2 := \|\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(T_i)}^2 \quad (5.53)$$

$$\eta_{2,i}^2 := \|p_h + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(T_i)}^2 \quad (5.54)$$

$$\eta_{3,j}^2 := \|W(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) - 2\mathbf{t}_0 - (I - K')(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2}(\Gamma_j)}^2 \quad (5.55)$$

$$\eta_{4,j}^2 := \|\vartheta_j \cdot \{(I - K)(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}_0) + V(\boldsymbol{\phi}_h - \mathbf{t}_0)\}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\text{supp } \vartheta_j)}^2 \quad (5.56)$$

Die Berechnung der lokalen Fehlerindikatoren η_1 und η_3 in der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}$ - bzw. der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1/2}$ -Norm können wir mit den Definitionen der diskreten Lösungsoperatoren T_h , R_h und N_h , die wir in Kapitel 5.3 eingeführt haben, auf jedem Element durchführen. Wir zerlegen dafür das Element in mehrere kleinere Elemente und Lösen das Hilfsproblem auf den lokalen Diskretisierungen.

Mit der Definition der lokalen Fehlerindikatoren können wir nun die lokale a posteriori Fehlerabschätzung formulieren, deren Beweis aus den obigen Überlegungen folgt.

Theorem 5.5.5 *Es gelten die Voraussetzungen aus Theorem 5.5.1 und Definition 5.5.4. Dann gilt für eine von der Gitterweite h unabhängige Konstante $c > 0$*

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h, \boldsymbol{\phi} - \boldsymbol{\phi}_h)\|_X^2 \leq c \eta_T^2, \quad (5.57)$$

mit

$$\eta_T^2 := \sum_{i=1}^n \eta_{1,i}^2 + \sum_{i=1}^n \eta_{2,i}^2 + \sum_{j=1}^m \eta_{3,j}^2 + \sum_{j=1}^m \eta_{4,j}^2.$$

Bemerkung 5.5.1 *Der lokale Fehlerschätzer η_T in (5.57) für das System zweiter Ordnung schlägt fehl, da wir bei Benutzung der exakten Lösung (\mathbf{u}, p) in der Definition der Fehlerindikatoren $\eta_{1,i}, \dots, \eta_{4,i}$ nicht $\eta_{k,i} = 0$ herausbekommen. Für den Anteil $\eta_{1,i}$ in (5.53) erhalten wir die Form*

$$(\mathcal{L}_h(u, p) - \mathbf{F}, \mathbf{v}_h) = A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}_h) - (\mathbf{F}, \mathbf{v}_h).$$

Wenn wir dies partiell integrieren, bleiben die Randanteile übrig. Es ergibt sich keine 0 und daher ist der Fehlerschätzer so nicht zu gebrauchen. Die numerischen Beispiele in Kapitel 5.7 belegen diesen Effekt.

Ein möglicher Ausweg wäre die Verwendung einer Überlappung von Elementen anstelle der direkten Zerlegung $\Omega = \bigcup_i T_i$. Lokal hätten wir dann den problematischen Term nicht in der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm zu berechnen, sondern in der \mathbf{H}^{-1} -Norm. Für die Realisierung hätten wir dann das Hilfsproblem im Dualraum \mathbf{H}_0^1 zu lösen, wo wir Nullrandbedingungen haben und somit die Randanteile der partiellen Integration wegfallen würden.

5.6 Implementation

Um die Berechnung der approximierten Lösungen mit der diskreten Bilinearform (5.46) und der diskreten Linearform (5.47) effizient durchführen zu können, haben wir im Kapitel 5.3 Vorkonditionierer \mathfrak{B}_h , \mathfrak{C}_h und \mathfrak{D}_h für die $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -, $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ - und $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ -Skalarprodukte eingeführt. Mit Hilfe der Präkonditionierer bzw. der Lösungsoperatoren für die einzelnen Normen haben wir eine Realisierung der diskreten Bilinearform und Linearform im Gebiet Ω und auf dem Rand Γ . Um unsere Approximationen \mathbf{u}_h , p_h und $\boldsymbol{\phi}_h$ für die exakten Lösungen \mathbf{u} , p und $\boldsymbol{\phi}$ zu bestimmen, muss das System

$$B^{(h)}((\mathbf{u}_h, p_h, \boldsymbol{\phi}_h), (\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h)) = G^{(h)}(\mathbf{v}_h, q_h, \boldsymbol{\tau}_h) \quad (5.58)$$

mit der diskreten Bilinearform (5.46) und der diskreten Linearform (5.47) gelöst werden. Wir betrachten das zu lösende Problem im Matrix-Sinne und zerlegen dafür die Bilinearform in die einzelnen Teile und benutzen für die Approximation von \mathbf{u}_h Basisfunktionen

$\{\boldsymbol{\vartheta}_i\}$ für $V_h \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$. Für p_h nehmen wir die Basis $\{\varphi_i\}$ von $H_h \subset L^2(\Omega)$ und $\{\boldsymbol{\lambda}_i\}$ als Basis von $M_h \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$. Die Definition der Basisfunktionen der diskreten Räume führt zu den Definitionen der folgenden Matrizen

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{G}_h)_{ij} &:= (\operatorname{div} \boldsymbol{\vartheta}_i, \operatorname{div} \boldsymbol{\vartheta}_j)_{L^2(\Omega)}, & (\mathbb{F}_h)_{ij} &:= (\operatorname{div} \boldsymbol{\vartheta}_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}, \\
 (\mathbb{H}_h)_{ij} &:= (\varphi_i, \varphi_j)_{L^2(\Omega)}, & (\mathbb{J}_h)_{ij} &:= (\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i), \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_j))_{L^2(\Omega), h_T}, \\
 (\mathbb{L}_h)_{ij} &:= (\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i), \nabla \varphi_j)_{L^2(\Omega), h_T}, & (\mathbb{M}_h)_{ij} &:= (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)_{L^2(\Omega), h_T}, \\
 (\mathbb{O}_h)_{ij} &:= (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i) \cdot \mathbf{n}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_j) \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Omega), h_F}, & (\mathbb{Q}_h)_{ij} &:= (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i) \cdot \mathbf{n}, \varphi_j \mathbf{I} \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Omega), h_F}, \\
 (\mathbb{P}_h)_{ij} &:= (\varphi_i \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}, \varphi_j \mathbf{I} \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Omega), h_F}, & (\mathbb{E}_h)_{ij} &:= (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_j))_{L^2(\Omega)}, \\
 (\mathbb{A}_h)_{ij} &:= (\boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_j) \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Omega)}, & (\mathbb{N}_h)_{ij} &:= (\boldsymbol{\lambda}_i, \varphi_j \mathbf{I} \cdot \mathbf{n})_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Für den Teil der Bilinearform mit den diskretisierten Randlelementoperatoren bekommen wir die voll besetzten Matrizen

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{V}_h)_{ij} &:= \langle \boldsymbol{\lambda}_i, V \boldsymbol{\lambda}_j \rangle, & (\mathbb{K}_h)_{ij} &:= \langle \boldsymbol{\lambda}_i, K \boldsymbol{\vartheta}_j \rangle, \\
 (\mathbb{W}_h)_{ij} &:= \langle \boldsymbol{\vartheta}_i, W \boldsymbol{\vartheta}_j \rangle, & (\mathbb{I}_h)_{ij} &:= \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\vartheta}_j \rangle.
 \end{aligned}$$

Für die Linearform benötigen wir noch eine Darstellung für die Volumenkraft \mathbf{F} des Innenraumproblems (5.3)

$$(\mathbb{Z}_h)_j := (\mathbf{F}, \boldsymbol{\vartheta}_j)_{L^2(\Omega)}$$

und eine Darstellung des Differentialoperators L multipliziert mit \mathbf{F}

$$(\mathbb{U}_h)_i := (\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\vartheta}_i), \mathbf{F})_{h_T}, \quad (\mathbb{Y}_h)_i := (\nabla \varphi_i, \mathbf{F})_{h_T}.$$

Die Matrixdefinitionen führen uns zu einer Darstellung der Gleichung (5.58) als ein System linearer Gleichungen, wobei $\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h, \boldsymbol{\nu}_h$ die Koeffizientenvektoren darstellen

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{pmatrix} 2\mu \mathbb{E}_h^T + \frac{1}{2} \mathbb{W}_h^T \\ -\mathbb{F}_h^T \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)^T \end{pmatrix} \mathfrak{B}_h \left(2\mu \mathbb{E}_h + \frac{1}{2} \mathbb{W}_h; \quad \mathbb{F}_h; \quad -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h) \right) \right. \\
 & + \begin{pmatrix} (\mathbb{I}_h - \mathbb{K}_h)^T \\ 0 \\ \mathbb{V}_h^T \end{pmatrix} \mathfrak{C}_h \left((\mathbb{I}_h - \mathbb{K}_h); \quad 0; \quad \mathbb{V}_h \right) + \begin{pmatrix} \mathbb{G}_h & \frac{1}{\lambda} \mathbb{F}_h^T & 0 \\ \frac{1}{\lambda} \mathbb{F}_h & \frac{1}{\lambda^2} \mathbb{H}_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & + \begin{pmatrix} 4\mu^2 \mathbb{J}_h & -2\mu \mathbb{L}_h^T & 0 \\ -2\mu \mathbb{L}_h & \mathbb{M}_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4\mu^2 \mathbb{O}_h & -2\mu \mathbb{Q}_h^T & 0 \\ -2\mu \mathbb{Q}_h & \mathbb{P}_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \left. + \begin{pmatrix} 2\mu \mathbb{A}_h^T + \frac{1}{2} \mathbb{W}_h^T \\ -\mathbb{N}_h^T \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)^T \end{pmatrix} \mathfrak{D}_h \left(2\mu \mathbb{A}_h + \frac{1}{2} \mathbb{W}_h; \quad -\mathbb{N}_h; \quad -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h) \right) \right\} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \mathbf{p}_h \\ \boldsymbol{\nu}_h \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 2\mu\mathbb{E}_h^T + \frac{1}{2}\mathbb{W}_h \\ -\mathbb{F}_h^T \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)^T \end{pmatrix} \mathfrak{B}_h \left(\mathbb{Z}_h + \frac{1}{2}[\mathbb{W}\mathbf{u}_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{K}')\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_0]_h \right) \\
&+ \begin{pmatrix} (\mathbb{I}_h - \mathbb{K}_h)^T \\ 0 \\ \mathbb{V}_h^T \end{pmatrix} \mathfrak{C}_h \left([(\mathbb{I} - \mathbb{K})\mathbf{u}_0 + \mathbb{V}\mathbf{t}_0]_h \right) \\
&+ \begin{pmatrix} -2\mu\mathbb{U}_h \\ \mathbb{Y}_h \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu\mathbb{A}_h^T + \frac{1}{2}\mathbb{W}_h^T \\ -\mathbb{N}_h^T \\ -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)^T \end{pmatrix} \mathfrak{D}_h \left(\frac{1}{2}[\mathbb{W}\mathbf{u}_0 - \frac{1}{2}(\mathbb{I} - \mathbb{K}')\mathbf{t}_0 + \mathbf{t}_0]_h \right)
\end{aligned}$$

Die so entstehende Matrix und die resultierende rechte Seite werden nicht explizit berechnet, sondern die für das CG-Verfahren benötigte Matrix-Vektor-Multiplikation wird aus den Matrix-Vektor-Multiplikation der einzelnen Matrizen und Anwendung der Vorkonditionierer zusammengesetzt. Dabei ist $\mathfrak{B}_h(2\mu\mathbb{E}_h + \frac{1}{2}\mathbb{W}_h; \mathbb{F}_h; -\frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h))(\mathbf{u}_h, \mathbf{p}_h, \boldsymbol{\nu}_h)^T$ zu verstehen als die Anwendung des Vorkonditionierers \mathfrak{B}_h auf $((2\mu\mathbb{E}_h + \frac{1}{2}\mathbb{W}_h)\mathbf{u}_h + \mathbb{F}_h\mathbf{p}_h - \frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)\boldsymbol{\nu}_h)$. Der Vektor $((2\mu\mathbb{E}_h + \frac{1}{2}\mathbb{W}_h)\mathbf{u}_h + \mathbb{F}_h\mathbf{p}_h - \frac{1}{2}(\mathbb{I}_h^* - \mathbb{K}'_h)\boldsymbol{\nu}_h)$ entsteht durch die Multiplikation der Koeffizientenvektoren mit den Matrizen. Dieser wird entsprechend der Definitionen des Lösungsoperators T (5.41) als rechte Seite des dualen Problems verwendet. Die berechnete Lösung wird anschließend mit den skalierten Matrizen $\mathbb{E}_h, \mathbb{W}_h, \mathbb{F}_h, \mathbb{I}_h, \mathbb{K}'_h$ multipliziert. Somit ist der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ Skalarproduktanteil der Bilinearform bestimmt. Analog geht man mit den übrigen vorkonditionierten Anteilen um, um alle Teile der Bilinearform bzw. Linearform zu berechnen. Die übrigen Anteile, deren zugrunde liegendes Skalarprodukt direkt berechenbar ist, werden mittels Matrix-Vektor Multiplikationen durchgeführt.

Für die Realisierung des $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ Skalarproduktes müssen wir das Problem (5.41) lösen. Dabei ist \mathfrak{B}_h der Präkonditionierer für die \mathbb{E}_h -Matrix, stabilisiert durch die Massenmatrix $\text{Mass} = (\boldsymbol{\vartheta}_i, \boldsymbol{\vartheta}_j)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$. \mathfrak{C}_h ist der Vorkonditionierer für die Lösung des Einfachschichtpotentialproblems mit der Matrix \mathbb{V}_h . Für beide Vorkonditionierer verwenden wir einerseits die Inverse der Matrizen $(\mathbb{E}_h + \text{Mass})^{-1}$ und \mathbb{V}_h^{-1} . Andererseits benutzen wir für die effizientere Berechnung der Lösung des dualen Problems für den FEM Vorkonditionierer \mathfrak{B}_h das Standard-Multigrid mit dem V-Zyklus (siehe hierzu [6]). Für den Vorkonditionierer \mathfrak{C}_h mit dem Einfachschichtpotential verwenden wir das Multigrid-Verfahren wie in [37]. Im Fall des \mathfrak{D}_h Vorkonditionierers benutzen wir in unseren numerischen Tests nur die Inverse der \tilde{W} -Matrix.

Die Lösung des Gesamtsystems berechnen wir aufgrund der positiven Definitheit der Gesamtmatrix mit Hilfe des CG-Verfahrens. Zur Beschleunigung bzw. effizienteren Berechnung der Lösung wenden wir für das „äußere“ Gleichungssystem als Vorkonditionierer für das CG-Verfahren Multigrid oder die Blockinverse an.

5.7 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel wollen wir numerische Ergebnisse für die zuvor angegebene Least-Squares Methode in 2D angeben. Zunächst werden wir in Kapitel 5.7.1 verschiedene Beispiele für die Least-Squares FEM-BEM Kopplung präsentieren, die die Anwendbarkeit der vorgestellten Methode dokumentieren. In Kapitel 5.7.2 werden zwei Beispiele für die Least-Squares Methode bei reiner FEM vorgestellt, wo wir zusätzlich zu der uniformen Verfeinerung auch eine adaptive Verfeinerung mittels des Fehlerschätzers aus Kapitel 5.5 durchführen. Sämtliche Beispiele wurden mit dem erweiterten Programmpaket *maiprogs* berechnet.

5.7.1 FEM-BEM Kopplung

Bei der Berechnung der numerischen Beispiele für die Least-Squares FEM-BEM Kopplungsmethode approximieren wir die exakten Lösungen \mathbf{u} , p und ϕ des Kopplungsproblems (5.9) auf Seite 93 bzw. des Least-Squares Funktionals J (5.18) von Seite 95. Die Beispiele zeigen die Vergleichbarkeit mit der Standard FEM-BEM Kopplung (1.13)-(1.15) sowie die Vorteile der Verwendung der Least-Squares Methode. Die ersten beiden Beispiele belegen, dass die Least-Squares Methode ein gleiches Lösungsverhalten wie die Galerkin FEM-BEM Kopplung hat. In Beispiel 5.7.1 haben wir eine glatte Innenraumlösung auf dem Einheitsquadrat $\Omega = [-1, 1]^2$, die Außenraumlösung setzen wir gleich Null. Beispiel 5.7.2 beschäftigt sich mit einer Singulärfunktion im Inneren auf dem L-Shape $\Omega = [-1, 1]^2/[0, 1]^2$. Für das Außenraumproblem benutzen wir als exakte Lösung die erste Spalte der Fundamentallösung des homogenen Lamé-Problems (5.5) in 2D. Sie erfüllt die Abklingbedingung (5.8).

Um die Vorteile der vorgestellten Methode zu präsentieren wollen wir im dritten Beispiel 5.7.3 inkompressibles Materialverhalten simulieren. Wir definieren dazu die Innenraumlösung \mathbf{u}_1 so, dass die Divergenz von \mathbf{u}_1 verschwindet. Somit haben wir, dass die Bedingung (5.4) $\frac{1}{\lambda}p + \operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$ für sehr großes λ erfüllt ist. Das Beispiel zeigt, dass die Standard FEM-BEM Kopplung keine brauchbare Lösung des Problems liefert, jedoch die Least-Squares Methode weiterhin konvergiert.

Das globale Gleichungssystem wird stets mittels des CG-Verfahrens gelöst. Dabei benutzen wir das reine CG-Verfahren, wie auch das mit Multigrid oder den Blockinversen vorkonditionierte CG-Verfahren. Als Vorkonditionierer für die $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ und $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukte des diskreten Least-Squares Funktionals J_h benutzen wir in allen Beispielen sowohl die Inverse der Matrix als auch das Multigrid Verfahren. Für das $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ Skalarprodukt verwenden wir stets die Inverse.

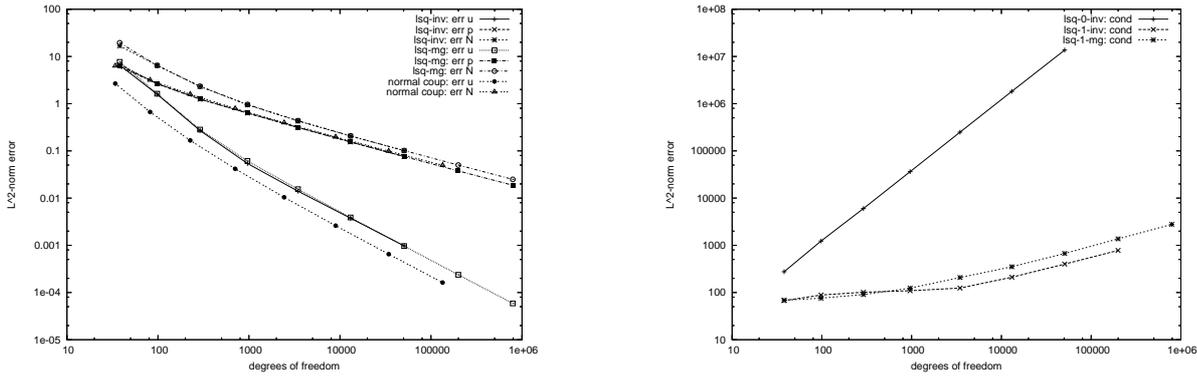


Abbildung 5.1: L^2 -Fehlerkurven für Bsp. 5.7.1 und Konditionszahlen für versch. Vorkonditionierer

Beispiel 5.7.1 Wir betrachten ein Problem, bei dem die Außenraumlösung verschwindet, d.h. $\mathbf{u}_2 = 0.0$ in unserem ursprünglichen Transmissionsproblem. Die Sprünge auf dem Rand sind somit durch

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} x^2 + 2y^2 \\ 3x^2 + 4y^2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{t}_0 = \mu \begin{pmatrix} 2x & 4y \\ 6x & 8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix} (2x + 8y) + \mu \begin{pmatrix} 2x & 6x \\ 4y & 8y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \end{pmatrix}$$

gegeben und für die rechte Seite \mathbf{F} haben wir

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} 8\mu + 2\lambda \\ 22\mu + 8\lambda \end{pmatrix}.$$

Für die Lamé Konstanten nehmen wir $\lambda = \mu = 1.0$.

Da wir im ersten Beispiel ein sehr glattes Beispiel gewählt haben, erwarten wir eine gute Approximation der Variablen \mathbf{u} , p und ϕ des Kopplungsproblems. Abbildung 5.1 zeigt auf der linken Seite die Konvergenzkurven der L^2 -Fehler für \mathbf{u} , p und ϕ für die Least-Squares Methode bei Benutzung der Inversen und des Multigrid Vorkonditionierers für die Skalarprodukte sowie die Kurven für die Approximation von \mathbf{u} und ϕ für die Standard FEM-BEM Kopplung. Die Abbildung zeigt, dass die Least-Squares Methode das gleiche Approximationsverhalten wie die Galerkin FEM-BEM Kopplung in den beiden Variablen \mathbf{u} und ϕ liefert. Die Minimierung des Least-Squares Funktionals ist daher gleichwertig anwendbar.

In Tabelle 5.1 sind die Freiheitsgrade des Systems, die L^2 -Fehler der einzelnen Variablen und deren Konvergenzraten aufgelistet. Man erkennt für die Annäherung von \mathbf{u} , dass

DOF	$L^2\text{err } u$	α_u	$L^2\text{err } p$	α_p	$L^2\text{err } N$	α_N
38	7.6877		6.2651		19.489	
98	1.6235	1.6414	2.6440	0.9106	6.4541	1.1665
290	0.2827	1.6111	1.2480	0.6920	2.3341	0.9375
962	0.0610	1.2786	0.6327	0.5665	0.9611	0.7400
3458	0.0154	1.0740	0.3137	0.5483	0.4359	0.6179
13058	0.0039	1.0370	0.1542	0.5347	0.2076	0.5584
50690	0.0010	1.0282	0.0760	0.5218	0.1013	0.5291
199682	0.0002	1.0217	0.0376	0.5125	0.0500	0.5145
792578	.6E-04	1.0159	0.0187	0.5067	0.0249	0.5072

Tabelle 5.1: L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.1)

DOF	I_1	κ_1	T_1	I_2	κ_2	T_2	I_3	κ_3	T_3
38	23	275.255	0.0000	20	67.3934	0.0100	20	68.5467	0.0100
98	87	1233.63	0.0500	41	88.5319	0.0400	40	75.8100	0.0200
290	290	6006.40	0.7600	54	101.576	0.2600	57	90.6713	0.0800
962	653	.36E+05	9.7700	60	109.153	1.7200	68	123.606	0.3900
3458	1382	.25E+06	159.08	70	124.165	16.960	79	207.838	1.9200
13058	3084	.18E+07	2737.0	82	211.080	159.94	98	350.848	11.030
50690	6989	.14E+08	.4E+05	101	399.457	1499.7	122	670.947	63.030
199682	-	-	-	127	777.933	.1E+05	160	1368.35	394.23
792578	-	-	-	-	-	-	222	2778.13	4256.7

Tabelle 5.2: Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.1)

wir eine Konvergenzrate von 1 erhalten, die wir auch theoretisch erwarteten. Für p bzw. ϕ erhalten wir wie gewünscht eine Rate von 0.5.

Der rechte Plot in Abbildung 5.1 zeigt die Entwicklung der Konditionszahlen bei der Lösung des Least-Squares Systems. Dabei betrachten wir drei verschiedene Arten für die Vorkonditionierung des „äußeren“ Systems (globales Gleichungssystem) und des „inneren“ Systems (Berechnung der Skalarprodukte $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ und $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$). Das Lösen des Systems ohne äußeren Vorkonditionierer und mit der Inversen im Inneren (lsq-0-inv) liefert eine stark ansteigende Konditionszahl. Die beiden anderen Kurven steigen dagegen nicht so stark an, die Konditionszahl κ wächst nur langsam. Die Berechnungen wurden einerseits mit der Inversen außen und der Inversen innen (lsq-1-inv) als Vorkonditionierer andererseits mit Multigrid Außen und Multigrid innen (lsq-1-mg) durchgeführt.

Die Beobachtungen lassen sich auch in den Iterationszahlen des globalen CG-Verfahrens in Tabelle 5.2 erkennen. Für das nichtvorkonditionierte System steigen die Iterationszah-

len I_1 sehr schnell. Das mit der Inversen vorkonditionierte System I_2 hat nur langsam wachsende Iterationszahlen, wie auch das Multigrid vorkonditionierte System I_3 . Den großen Vorteil der Verwendung des Multigrid Vorkonditionierers erkennt man bei dem Vergleich der Rechenzeiten T_1 - T_3 . Die vorkonditionierten Systeme mit T_2 und T_3 haben zwar vergleichbare Konditions- und Iterationszahlen, doch ist die Berechnung mittels der Multigrid Vorkonditionierung wesentlich schneller. Diese ist also die effizienteste Berechnungsmethode der hier vorgestellten Methoden.

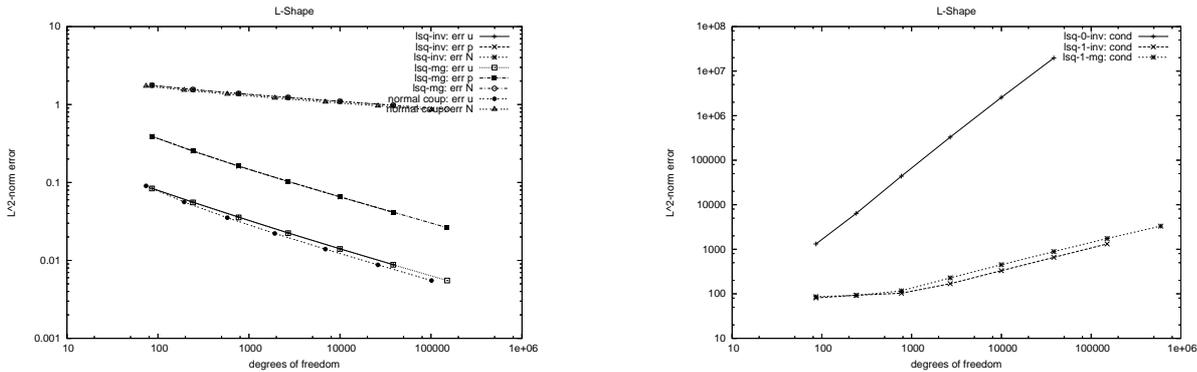


Abbildung 5.2: L^2 -Fehlerkurven für Beispiel 5.7.2 und Konditionszahlen für versch. Vorkonditionierer

Beispiel 5.7.2 Als Gebiet Ω nehmen wir das L-Shape. Wir wählen für die Innenraumlösung \mathbf{u}_1 die Singulärfunktion

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\phi\right),$$

wobei (r, ϕ) Polarkoordinaten sind und für die Außenraumlösung die erste Spalte der Fundamentallösung für das homogene Lamé-Problem (5.5)

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \begin{pmatrix} \frac{(\mathbf{a}_1 - x)^2}{|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2} - \log|\mathbf{a} - \mathbf{x}| \\ \frac{(\mathbf{a}_1 - x)(\mathbf{a}_2 - y)}{|\mathbf{a} - \mathbf{x}|^2} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{x} = (x, y)^t$ und \mathbf{a} ein Punkt im Gebiet Ω ist. In diesem Beispiel wählen wir $\mathbf{a} = 0.0$.

Für die Sprünge haben wir dann

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_0 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_1, p) \cdot \mathbf{n} - T_2(\partial, \mathbf{n})\mathbf{u}_2.$$

Die rechte Seite des Innenraumproblems ist dann

$$\mathbf{F} = -\text{div } \mathbf{u}_1.$$

DOF	$L^2\text{err } u$	α_u	$L^2\text{err } p$	α_p	$L^2\text{err } N$	α_N
86	0.0837		0.3908		1.7653	
242	0.0555	0.3974	0.2536	0.4180	1.5583	0.1205
770	0.0356	0.3828	0.1623	0.3854	1.3856	0.1015
2690	0.0224	0.3717	0.1033	0.3610	1.2334	0.0930
9986	0.0140	0.3569	0.0656	0.3465	1.0983	0.0884
38402	0.0088	0.3461	0.0416	0.3386	0.9783	0.0859
150530	0.0055	0.3398	0.0263	0.3345	0.8715	0.0846

Tabelle 5.3: L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.2)

DOF	I_1	κ_1	T_1	I_2	κ_2	T_2	I_3	κ_3	T_3
86	116	1317.01	0.0700	45	80.9587	0.0400	48	85.9816	0.0300
242	346	6416.15	0.9400	58	92.9330	0.2700	64	92.1756	0.1000
770	760	.44E+05	11.520	66	103.245	1.7200	73	116.766	0.4500
2690	1672	.33E+06	179.09	77	168.801	15.720	86	227.964	2.2600
9986	4138	.26E+07	4410.3	98	331.488	204.65	109	450.839	13.950
38402	9207	.20E+08	.8E+05	120	659.246	1904.5	139	886.505	86.640
150530	-	-	-	152	1315.79	.2E+05	192	1743.31	572.94
595970	-	-	-	-	-	-	251	3313.57	4750.2

Tabelle 5.4: Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.2)

In dem Beispiel haben wir für das Lamé Problem in Ω die Singulärfunktion \mathbf{u}_1 als exakte Lösung vorgegeben. Im Außenraum haben wir einen Teil der Fundamentallösung des homogenen Lamé Problems. Da die Funktion im Inneren eine $2/3$ Singularität auf dem Transmissionsrand Γ des Gebiets besitzt, erwarten wir eine schlechtere Approximation der zu bestimmenden Variablen im Vergleich zum vorigen Beispiel. Speziell für die Randvariable ϕ erwarten wir eine sehr geringe Konvergenzrate, da sich die Singularität auf dem Rand befindet. In Tabelle 5.3 läßt sich erkennen, dass wir für die Approximation von ϕ nur eine Konvergenzrate von 0.09 bekommen. Die Konvergenzrate für die Annäherung an \mathbf{u} liegt erwartungsgemäß bei ungefähr $1/3$.

Dieses Beispiel zeigt wieder in Abbildung 5.2, dass die normale FEM-BEM Kopplung und die Least-Squares FEM-BEM Kopplung für die Berechnung einer Lösung bei normalen Lamé Konstanten anwendbar sind und nahezu die gleichen Ergebnisse liefern. Bei der Verwendung des normalen CG-Verfahrens ohne globale Vorkonditionierung sieht man in Tabelle 5.4 (I_1 , κ_1 , T_1), dass die Konditionszahl der Matrix sehr schnell stark ansteigen. Die Iterationszahlen I_1 sind nach wenigen Verfeinerungsschritten des Gitters sehr hoch, so dass die Berechnung einer Lösung viel Zeit in Anspruch nimmt (siehe T_1). Dagegen

nur leicht ansteigende Konditions- und Iterationszahlen liefern wiederum die vorkonditionierten Löser (κ_2, κ_3), die wieder mit der Inversen bzw. Multigrid vorkonditioniert wurden. Die Verwendung des Multigrid Vorkonditionierers für das CG Verfahren außen und der mit Multigrid vorkonditionierten Realisierungen der Skalarprodukte liefert sehr kurze Rechenzeiten. Da sich die Rechengenauigkeit beider präkonditionierten Least-Squares Systeme nur unwesentlich unterscheidet (siehe Abb. 5.2), ist das mit Multigrid innen und außen vorkonditionierte Verfahren vorzuziehen.

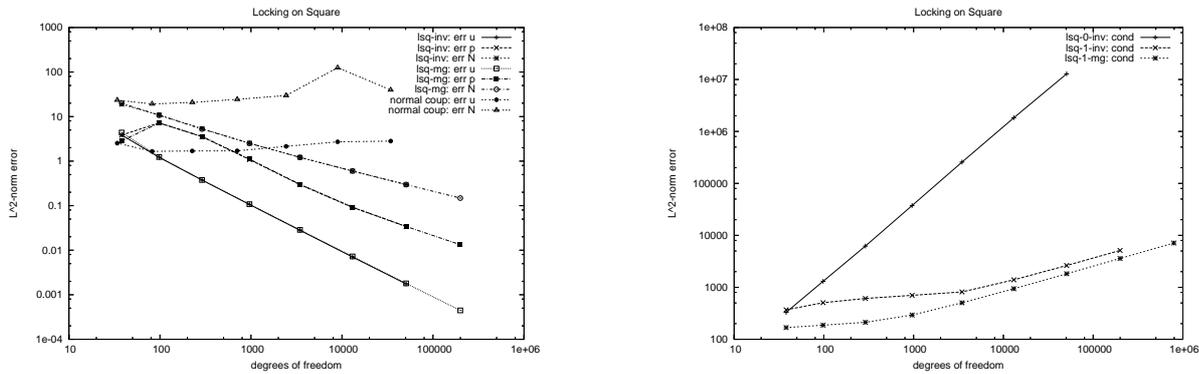


Abbildung 5.3: L^2 -Fehlerkurven für Bsp. 5.7.3 und Iterationszahlen für versch. Vorkonditionierer

Beispiel 5.7.3 Sei $v = x^3(2 - y^3)$. Wir wählen die Innenraumlösung \mathbf{u}_1 als Rotation der Funktion v

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} v,y \\ -v,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x^2y^2 \\ -3x^2(2 - y^3) \end{pmatrix}.$$

Durch die spezielle Wahl der Lösung \mathbf{u}_1 wird $\text{div } \mathbf{u}_1 = 0$ erfüllt, d.h. \mathbf{u}_1 ist divergenzfrei. Somit können wir mit sehr großem λ ein inkompressibles Materialverhalten simulieren. Für den Außenraum nehmen wir wieder als exakte Lösung \mathbf{u}_2 die erste Spalte der Fundamentallösung, wie in Beispiel 5.7.2.

In dem letzten Beispiel nehmen wir im Inneren als exakte Lösung eine Funktion, deren Divergenz verschwindet. Für ein inkompressibles Materialverhalten im Inneren benötigen wir ein sehr großes Verhältnis zwischen λ und μ . Da $\text{div } \mathbf{u} = 0.0$ ist, setzen wir $\lambda = 1000000$ und $\mu = 1.0$; damit wird die Bedingung (5.2) erfüllt. Es ergibt sich also eine Querkontraktionszahl von ungefähr 0.5. Bei Verwendung der Standard FEM-BEM Kopplungsformulierung kommt es zum Locking Effekt und die Approximation der gesuchten Variablen schlägt fehl. Die Standard Kopplungsmethode ist also in diesem Fall nicht anwendbar. Abbildung 5.3 zeigt dieses Verhalten, die Fehlerkurven der Variablen \mathbf{u} und p konvergieren nicht gegen Null. Im Gegensatz dazu konvergiert die Least-Squares

5 Least-Squares FEM-BEM Kopplung

Methode auch bei inkompressiblem Materialverhalten. Anders als bei gemischten FE Methoden benutzen wir hierbei weiterhin normale Standardelemente zur Approximation.

Tabelle 5.5 zeigt, dass wir für die Approximation von \mathbf{u} auch bei inkompressiblem Material die erwartete Konvergenzrate von ungefähr 1 erhalten. Für die Approximation von p und ϕ erhalten wir eine Konvergenzrate von ungefähr 0.5. Diese Konvergenzraten decken sich mit denen aus Beispiel 5.7.1, da auch hier (bis auf die Lamé-Parameter) ein glattes Beispiel approximiert werden soll.

Die rechte Abbildung in Abbildung 5.3 dokumentiert wieder das Verhalten der verschiedenen Vorkonditionierungsstrategien. Ohne Vorkonditionierung haben wir schnell anwachsende Konditionszahlen und die Berechnung der Lösung ist sehr langsam. Die Verwendung des CG Verfahrens mit Multigrid für die Skalarprodukte und das globale System ergibt eine leicht anwachsende Konditionszahl (Abb. 5.3) und eine sehr schnelle Lösung des Gesamtsystems (siehe Tabelle 5.6, T_3).

DOF	$L^2\text{err } u$	α_u	$L^2\text{err } p$	α_p	$L^2\text{err } N$	α_N
38	4.3883		2.8534		19.868	
98	1.2329	1.3400	7.1823	-0.974	10.749	0.6484
290	0.3773	1.0914	3.5771	0.6425	5.2594	0.6589
962	0.1080	1.0429	1.1071	0.9781	2.5098	0.6170
3458	0.0286	1.0395	0.3020	1.0152	1.2184	0.5649
13058	0.0072	1.0336	0.0925	0.8908	0.5993	0.5340
50690	0.0018	1.0268	0.0341	0.7349	0.2971	0.5173
199682	0.0004	1.0191	0.0133	0.6871	0.1479	0.5087

Tabelle 5.5: L^2 -Fehler und Konvergenzraten für \mathbf{u} , p und ϕ (Bsp. 5.7.3)

DOF	I_1	κ_1	T_1	I_2	κ_2	T_2	I_3	κ_3	T_3
38	30	330.326	0.0100	26	369.650	0.0100	25	168.359	0.0000
98	97	1303.74	0.0600	61	506.772	0.0500	56	186.745	0.0200
290	304	6219.86	0.9700	107	609.801	0.5100	86	212.475	0.1200
962	715	.38E+05	11.330	125	701.394	3.5100	101	292.740	0.5800
3458	1606	.26E+06	198.29	149	815.514	28.300	118	504.576	2.8700
13058	3775	.18E+07	3825.6	173	1391.80	272.87	147	940.228	17.360
50690	8395	.13E+08	.6E+05	202	2632.59	2497.7	195	1824.25	102.72
199682	-	-	-	270	5136.98	.2E+05	255	3591.31	652.97
792578	-	-	-	-	-	-	348	7130.53	5955.6

Tabelle 5.6: Iterations-, Konditionszahlen und Rechenzeit (Bsp. 5.7.3)

5.7.2 Adaptive FEM

In diesem Abschnitt präsentieren wir numerische Ergebnisse unter der Verwendung des in Kapitel 5.5 vorgestellten lokalen a posteriori Fehlerschätzer. Wir betrachten dabei nur das reine FEM-Problem, also das Innenraumproblem (5.3) in 2D. Die beiden FEM Fehlerschätzeranteile (5.49) und (5.50) nutzen wir für die Steuerung eines adaptiven Algorithmus zur Verfeinerung des Gitters. Wir betrachten das Gebiet Ω mit dem elastischen Problem

Finde (\mathbf{u}, p) in $\mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, so dass gilt

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \mathbf{F} \quad \text{in } \Omega \quad (5.59)$$

$$\frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5.60)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma. \quad (5.61)$$

Die Least-Squares Operatoren \mathfrak{L} und \mathfrak{F} definiert in (5.15) bzw. (5.16) für die FEM-BEM Kopplung reduzieren sich in dem FEM Problem zu

$$\mathfrak{L} : \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

mit

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, p) := \begin{pmatrix} \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) \\ \frac{1}{\lambda} p + \operatorname{div} \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (5.62)$$

und $\mathfrak{F} \in X' := \tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ durch

$$\mathfrak{F} := \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.63)$$

Es ergibt sich somit das zu lösende Problem

Finde $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, so dass gilt

$$\mathfrak{L}(\mathbf{u}, p) = \mathfrak{F}. \quad (5.64)$$

Wir untersuchen zwei Beispiele, bei denen wir die Aussage aus Bemerkung 5.5.1 untersuchen wollen. In dem ersten Beispiel nehmen wir die Singulärfunktion mit der Singularität in der einspringenden Ecke des L-Shapes, die wir bereits in Beispiel 5.7.2 für die Innenraumgleichung verwendet haben, multipliziert mit einer Abschneidefunktion. Das zweite Beispiel benutzt wie in Beispiel 5.7.3 eine divergenzfreie Funktion als exakte Lösung wobei wir inkompressibles Materialverhalten vorgeben.

Die adaptiven Beispiele benutzen für die reine FEM-Berechnung nur die Anteile $\eta_1 := \|\mathcal{L}(\mathbf{u}_h, p_h) - \mathbf{F}\|_{\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(T_i)}^2$ aus (5.53) und $\eta_2 := \|p_h + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(T_i)}^2$ aus (5.54).

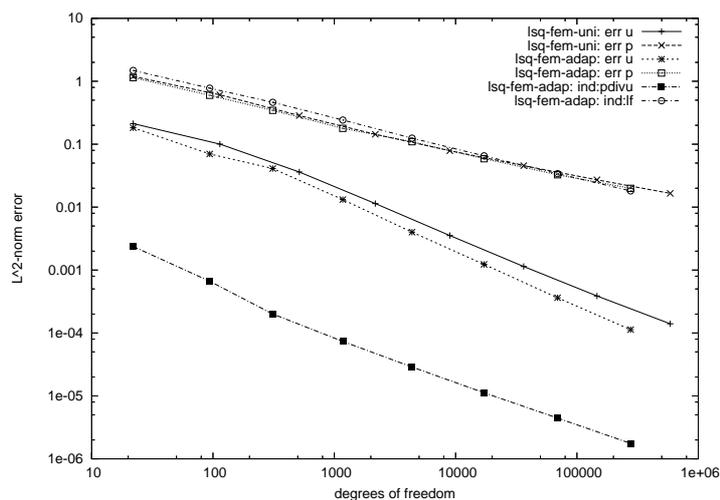


Abbildung 5.4: L^2 -Fehlerkurven für uniforme und adaptive Verfeinerung Least-Squares-FEM für Beispiel 5.7.4

Beispiel 5.7.4 Für das erste Beispiel betrachten wir das L-Shape als Gebiet $\Omega := [-1, 1]^2 \setminus [0, 1]^2$. Die exakte Lösung \mathbf{u} wählen wir so, dass wir in der einspringenden Ecke am Punkt $(0, 0)$ eine Singularität haben

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\varphi\right)(1-x^2)(1-y^2),$$

wobei (r, φ) Polarkoordinaten sind.

In Abbildung 5.4 haben wir die L^2 -Fehlerkurven für die uniforme und die adaptive Verfeinerungsmethode dargestellt. Zusätzlich geben wir die Kurven der beiden lokalen Fehlerindikatoren an. In diesem Beispiel erkennen wir den Effekt, dass der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}$ -Fehlerterm nicht so stark sinkt wie der Term in der L^2 -Norm. Die adaptive Verfeinerung ist somit nicht optimal, da die größten lokalen Fehler nicht richtig lokalisiert werden. Die adaptive Verfeinerung bringt gegenüber der uniformen Verfeinerung keinen Vorteil. Würde man nur den L^2 -Term als Steuerungsgröße benutzen, so könnte eventuell das Gitter noch gezielter verfeinert werden, so dass wir eine bessere Konvergenz mit der adaptiven Methode haben.

Durch die Singularität in der einspringenden Ecke erwarten wir eine adaptive Gitterverfeinerung zu dieser Ecke hin. Da wir in unseren Beispielen mit Rechteckelementen und konformen Gittern arbeiten, ist die adaptive Verfeinerung nicht optimal. In Abbildung 5.5 sehen wir die adaptiven Gitterverfeinerungen nach dem 4. und 6. Level. Die Verwendung der lokalen Indikatoren bewirkt zwar eine Verfeinerung in der Nähe der

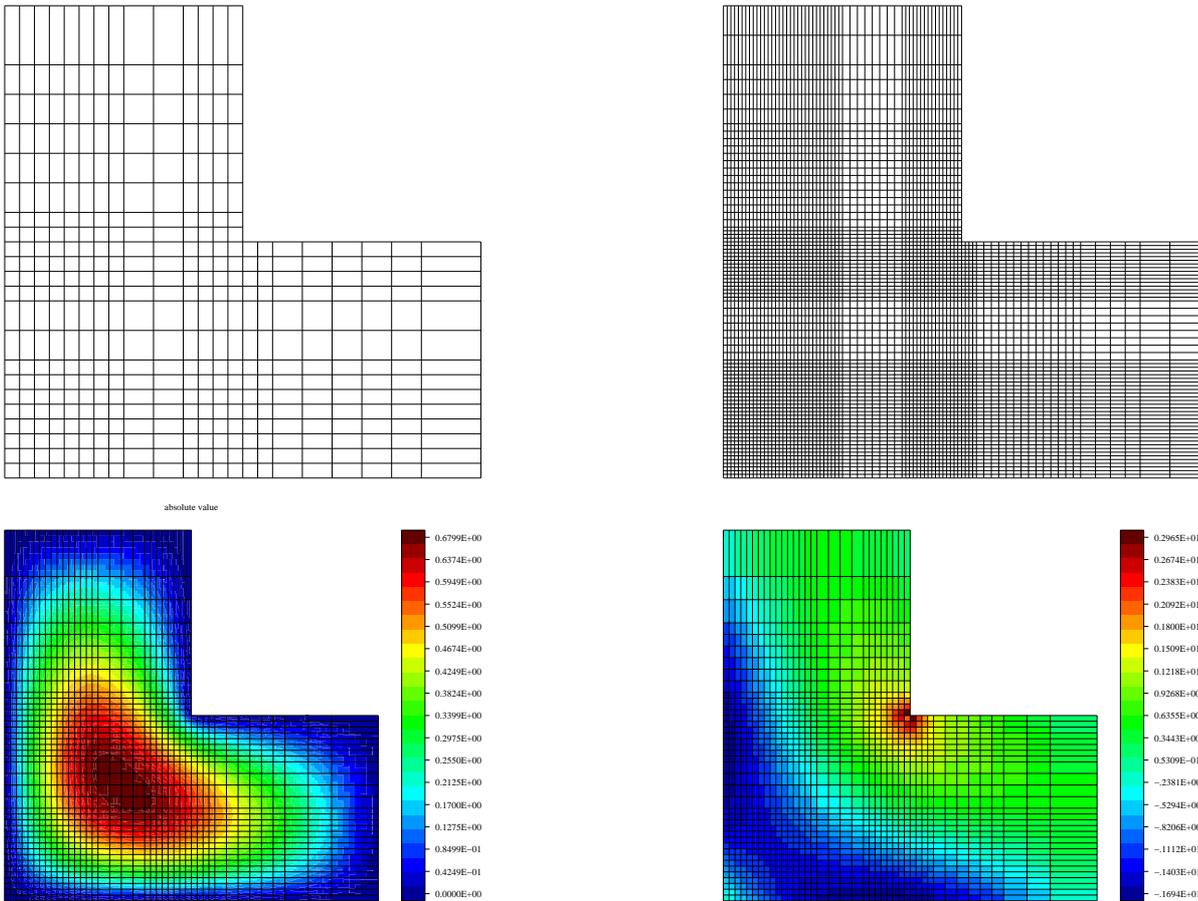


Abbildung 5.5: adaptive Gitter nach 4 bzw. 6 Verfeinerungen und Plot der Approximationen von \mathbf{u} und p (Bsp. 5.7.4)

Singularität, aber auch in der unteren linken Ecke. Die Gitterentwicklung ist somit nicht optimal. In den unteren beiden Plots in Abbildung 5.5 sind die Approximationen für \mathbf{u} und für p dargestellt.

Als zweites Beispiel betrachten wir das Least-Squares System für ein nahezu inkompressibles Materialverhalten.

Beispiel 5.7.5 Sei $v = (1 - x^2)^2(1 - y^2)^2$. Wir definieren die exakte Lösung \mathbf{u} als Rotation von v

$$\mathbf{u} = \text{curl } v = \begin{pmatrix} -4y(1 - x^2)^2(1 - y^2) \\ 4x(1 - x^2)(1 - y^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Da $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ist und wir für das inkompressible Materialverhalten ein sehr großes λ verwenden, können wir p frei wählen, so dass die Bedingung (5.60) dennoch erfüllt ist.

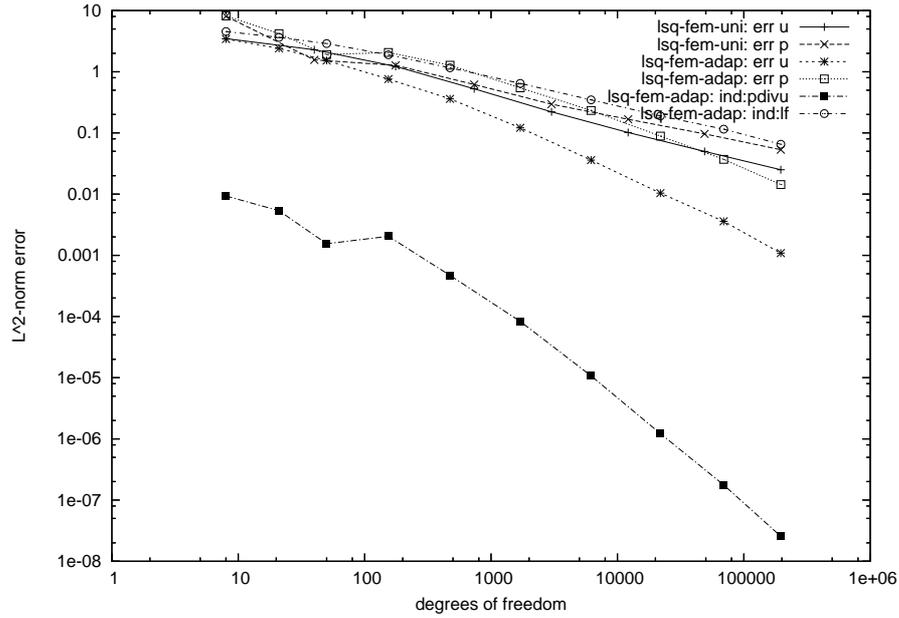


Abbildung 5.6: L^2 -Fehlerkurven für uniforme und adaptive Verfeinerung Least-Squares-FEM und Galerkin-FEM für Beispiel 5.7.5

Wir nehmen für p die exakte Lösung

$$p = y^2 \sin(\pi x).$$

Für \mathbf{F} ergibt sich

$$-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} -16\mu[(1-x^2) - 2x^2]y(1-y^2) - 24\mu y(1-x^2)^2 + \pi y^2 \cos(\pi x) \\ 16\mu x(1-x^2)[(1-y^2) - 2y^2] + 24\mu x(1-y^2)^2 + 2y \sin(\pi x) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\lambda = 1000000$ und $\mu = 1.0$. Weiterhin zerlegen wir den Rand Γ des Quadrats $\Omega = [-1, 1]^2$ in einen Dirichlet-Rand Γ_D und einen Neumann-Randanteil $\Gamma_N = \{-1\} \times [-1, 1]$.

Bei den gewählten Lamé Parametern ergibt sich eine Poissonzahl von $\nu \approx 0.5$. Bei diesem nahezu inkompressiblen Material ist es bekannt, dass die Standard Galerkin-FEM versagt (siehe z.B. [5],[67]). Es kommt zum Locking, wie es auch in dem Beispiel 5.7.3 des vorigen Kapitels zu beobachten war.

Bei der Anwendung der Least-Squares Methode hingegen ergibt die Verfeinerung des Gitters eine Fehlerreduktion. Das Verfahren konvergiert auch bei nahezu inkompressiblem Materialverhalten.

Die adaptive Gitterverfeinerung mittels eines adaptiven Algorithmus, der die Elementverkleinerung selbständig durchführt zeigt in diesem Beispiel nach einigen Verfeinerungsstufen eine leicht bessere Approximation der Lösungen. Die Konvergenzrate der adaptiven Verfeinerung ist nicht optimal, da auch hier der Fehlerterm in der $\tilde{\mathbf{H}}^{-1}(\Omega)$ -Norm nicht die gewünschte Rate erfüllt. Die adaptive Verfeinerung mit konformen Rechteckelementen ist darüberhinaus nicht optimal. Eine bessere Strategie wäre der Einsatz hängender Knoten (siehe Kapitel 6). Die Abbildung 5.7 zeigt die Verdichtung des Gitters, die eine große Überverfeinerung aufweist. Die Plots der Approximation von \mathbf{u} bzw. p verdeutlichen die Annäherung der approximierten Lösung an die exakte Lösung.

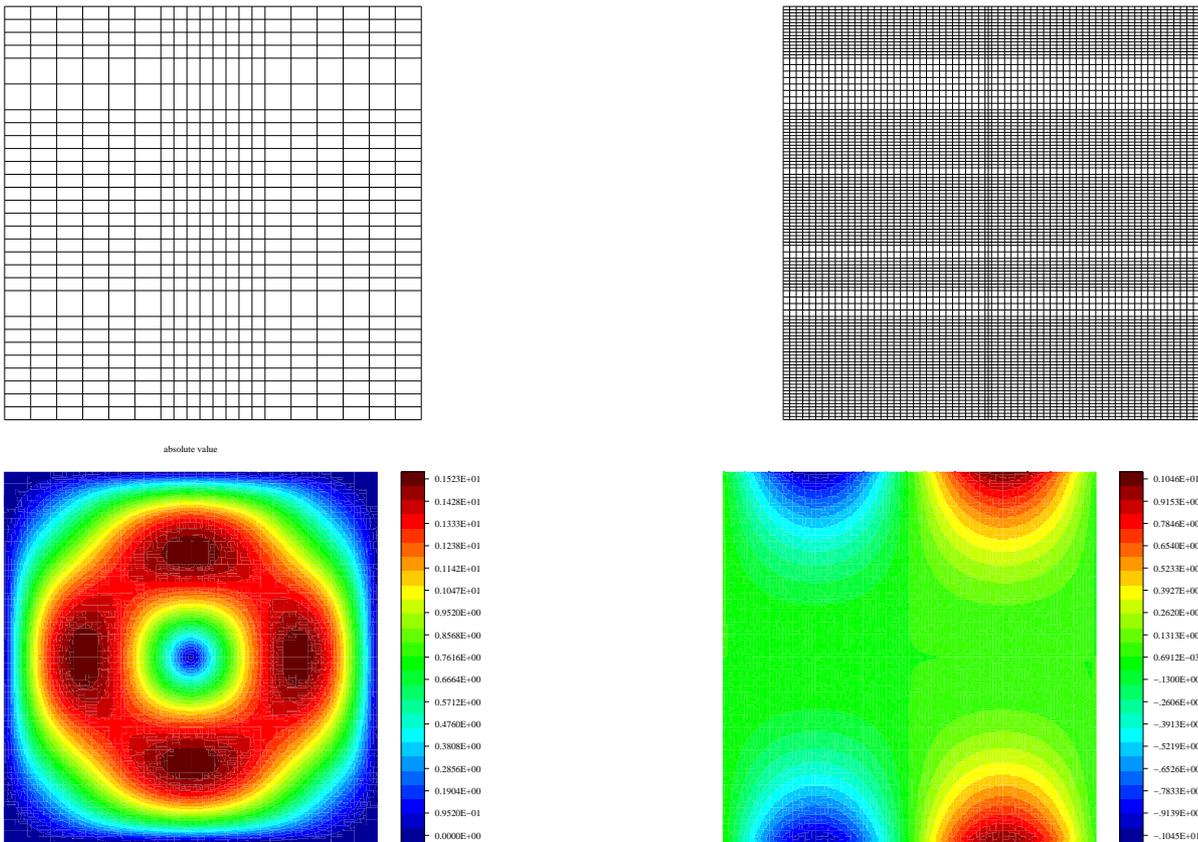


Abbildung 5.7: adaptive Gitter nach 6 bzw. 8 Verfeinerungen und Plot der Approximationen von \mathbf{u} und p (Bsp. 5.7.5)

6 Hängende Knoten

In diesem Kapitel stellen wir die Verwendung von nichtkonformen Gittern für Triangulierungen mit Hexaeder Elementen vor. Für die adaptive Verfeinerung eines Gitters mit Hexaedern ergeben sich für reguläre Gitter starke Überverfeinerungen in Teilen des Gebiets, deren Lösung bereits auf groben Gittern hinreichend gut approximiert werden kann. Möchte man diese Überverfeinerungen reduzieren, bietet sich an, einen erweiterten Regularitätsbegriff für die Elemente zu benutzen. Wir führen dazu sogenannte hängende Knoten (abhängige Freiheitsgrade) ein, deren Werte aus regulären Freiheitsgraden interpoliert werden. Die Verwendung der hängenden Knoten für die hp -Finite Element Methode wird in [26, 57, 58] vorgestellt. Die Autoren führen den Begriff der „one-constraint-rule“ ein, der besagt, dass es auf einer Kante eines Elements höchstens einen abhängigen Freiheitsgrad geben darf. In [25] wird eine Implementation in Fortran 90 der erweiterten Regularität für den zweidimensionalen Fall beschrieben. Die Implementation in 3D wird in [27] dargestellt.

Wir benutzen eine Erweiterung der „one-constraint-rule“ von Demkowicz et al. [27] für die Implementation in 3D. Es wird das in [27] eingeführte Konzept in einer etwas verallgemeinerten Form verwendet, wobei wir uns bei der Verwendung der hängenden Knoten für die h -Version beschränken. Wir definieren zunächst die erforderlichen Begriffe, präsentieren die Datenstruktur und Verfeinerungsgesetze und beschreiben die Zusammensetzung der abhängigen Freiheitsgrade. Zusätzlich geben wir noch eine Beschreibung der Implementation bei kantenorientierten Freiheitsgraden.

6.1 Allgemeines

Wir beginnen mit der Definition der regulären und hängenden Knoten einer Triangulierung des Gebiets Ω .

Definition 6.1.1 Sei $\mathcal{T}_h = \{T_1, \dots, T_N\}$ eine Triangulierung des Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Dabei sei \mathcal{T}_h entweder die ursprüngliche Aufteilung des Gebiets (Grob-gitter) oder sei durch l -fache adaptive Verfeinerung hervorgegangen.

6 Hängende Knoten

Wir bezeichnen mit \mathcal{N} die Menge aller Knoten des aktuellen Gitters.

Es sei $n \in \mathcal{N}$ ein **Knoten** des Gitters, falls n Endpunkt einer Kante eines Elements $T_i \in \mathcal{T}_h$ ist. Ein Knoten n heißt **regulär**, falls der Knoten auf allen zugehörigen Elementen $\{T_i : n \text{ Eckpunkt von } T_i; T_i \cap T_j \neq \emptyset, 1 \leq i, j \leq N\}$ Endpunkt einer Kante ist.

Die Menge der regulären Knoten bezeichnen wir mit \mathcal{N}_r .

Ein Knoten $n \in \mathcal{N}$ heißt **hängend**, falls es zu dem Knoten eine benachbarte Kante eines Nachbarelements gibt, so dass n kein Endpunkt ist. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn der Knoten n des Elements T_i Mittelpunkt auf einer Kante des Nachbarelements T_j ist (siehe Abb. 6.1 Knoten a und b) oder der Knoten ist Mittelpunkt einer Seitenfläche auf einem Nachbarelement (siehe Abb. 6.1 Knoten c).

Die Menge der hängenden Knoten bezeichnen wir mit \mathcal{N}_h .

Jeder Knoten des Gitters ist entweder ein regulärer oder ein hängender Knoten, d.h. $\mathcal{N} = \mathcal{N}_r \cup \mathcal{N}_h$.

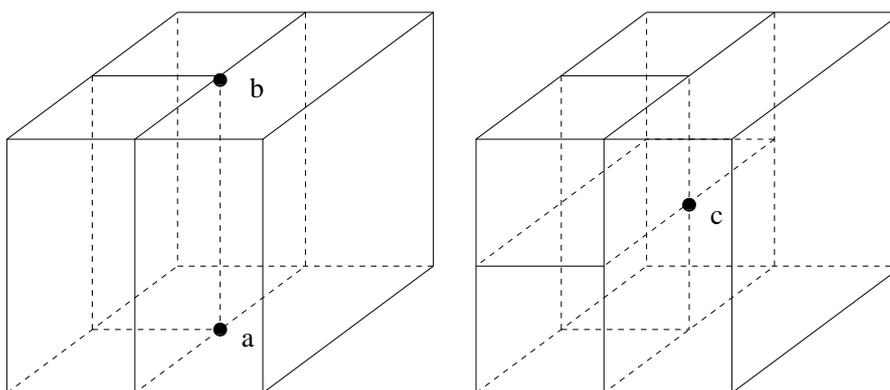


Abbildung 6.1: hängende Knoten; a, b Mittelpunkte einer Kante, c Mittelpunkt einer Fläche

6.2 Datenstruktur

Wir stellen die Datenstruktur der Implementation der hängenden Knoten im Programmpaket *maiprops* [45, 43], das in Fortran 90 geschrieben ist, vor, die wir für die Verwendung der hängenden Knoten benötigen. Es werden dafür zwei Hauptdatentypen definiert. Ein Datentyp beinhaltet alle Daten, die wir für die Darstellung und Verfeinerung des

Gitters brauchen, der andere Datentyp sammelt die Informationen, die die abhängigen und regulären Freiheitsgrade benötigen, um die Approximationen zu berechnen.

6.2.1 Datenstruktur des Gitters

Für das Arbeiten mit hängenden Knoten ist eine besondere/geänderte Datenstruktur erforderlich. Da es im Gegensatz zum regulärem Gitter nun mehrere (1-4) Nachbarn auf einer Seitenfläche geben kann, und sich diese Anzahl in verschiedenen Verfeinerungsstufen verändern kann, können die Nachbarschaftsinformationen nicht mehr wie im regulären Fall abgespeichert werden. Die Elemente werden daher in einer Baumstruktur angeordnet (siehe Abb. 6.2). Die aktuellen Elemente des Gitters sind die Endpunkte des Baumes, die so genannten Blätter des Baumes (in Abb. 6.2 in Fettdruck). Für jedes Element werden die Verfeinerungsinformationen, das Element, aus dem es entstanden ist und die Söhne, die durch die Verfeinerung des Elements entstanden sind, gespeichert.

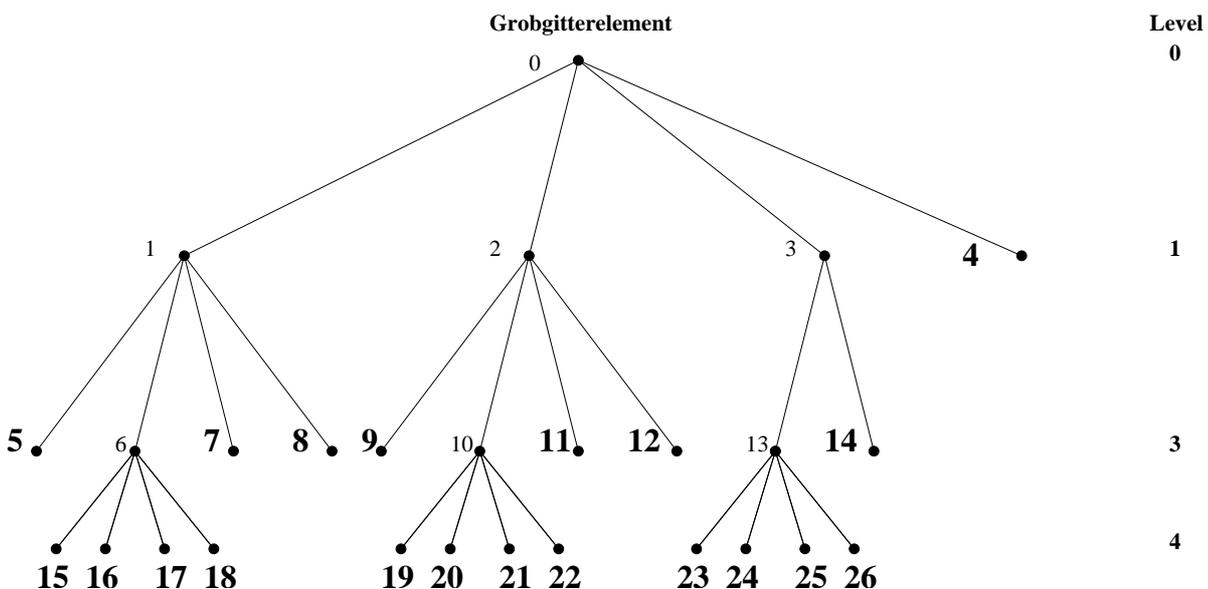


Abbildung 6.2: Baumstruktur; aktuelle Elemente sind Blätter des Baumes

Für die Gitterinformationen, die in einem *mesh*-Datentyp gesammelt werden, müssen nun mehr Daten gespeichert werden, als im regulären Fall. Der *mesh*-Datentyp enthält neben den Standardeinträgen für reguläre Gitter auch den Datentypen *elem3*, der speziell für die Verwendung von nichtkonformen Gittern eingerichtet wurde. Der *mesh3* Datentyp enthält die Einträge

6 Hängende Knoten

```
type mesh3
  real(kind=dp), dimension(:,:) :: nodes
  integer :: nnodes
  integer :: ng, nelem
  integer, dimension(:,:) :: rnodes, rc
  character(len=32) :: name
  integer, dimension(:) :: acc
  type(elem3), dimension(:) :: elem
end type mesh3
```

wobei der *elem3* Datentyp definiert ist durch

```
type elem3
  integer, dimension(0:8) :: rnodes
  integer, dimension(0:2) :: rp
  integer, dimension(0:5) :: rc, rct
  integer :: father, ref
  integer, dimension(1:8) :: sons
end type elem3
```

Die einzelnen Einträge des *mesh3* Datentyps beinhalten die Informationen für reguläre Gitter, die teilweise auch bei hängenden Knotengittern verwendet werden.

Für konforme sowie nichtkonforme Gitter werden die Variablen *nodes*, *nnodes*, *ng*, *name*, *acc* benutzt. Die Variable *nodes* enthält die Koordinaten der Knoten und *nnodes* die Anzahl aller Knoten. *ng* speichert die Anzahl der aktuellen Gitterelemente. In *name* wird der Name des Gitters gespeichert, da in einem numerischen Beispiel mit mehreren Gittern (z.B. Volumengitter und Randgitter) gearbeitet werden muss. *acc* stellt eine Abbildung der Nummer des aktuellen Elements zu der Elementnummer im Gitter dar. Für ein Element in einem hängende Knoten-Gitter (also in Baumstruktur) gibt die Nummer des Element mit dem *acc*-Vektor die Nummer des Blattes in dem Baum wieder. Bei der Verwendung eines konformen Gitters ist *acc* die Identität.

Bei der Verwendung eines regulären Gitters haben wir auf jedem Element zu jeder Seitenfläche in dem *rc*-Feld die Informationen über das Nachbarlement. Das Feld *rnodes* gibt zu jedem Element die Nummern der zugehörigen globalen Knoten.

Falls ein Gitter mit hängender Knoten-Struktur für die Berechnungen benutzt wird, werden für jedes Element des Baumes folgende Variablen bzw. Vektoren angelegt. *rnodes* speichert, wie im konformen Fall, die globalen Knotennummern des Elements. Der lokale Polynomgrad auf dem Element wird in *rp* notiert. Falls das Element zum initialisierten Grobgitter gehört, enthalten die Einträge *rc* und *rct* die Informationen über die

(eindeutigen) Nachbarn zu den Seitenflächen sowie die Informationen der zugehörigen Nachbarflächen. Die Verfeinerungsinformationen, die für die Identifizierungen innerhalb der Baumstruktur benötigt werden, werden in den Variablen *father*, *ref* und in dem Vektor *sons* abgelegt. *father* enthält das Element, aus dem das untersuchte Element hervorgegangen ist. In *sons* stehen die 1-8 Elemente, die aus der Verfeinerung eines Elements mit der Verfeinerungsinformation *ref* entstanden sind.

6.2.2 Datenstruktur der Splines

Die Informationen, die vom Gitter gesehen für die Approximation der Lösung benötigt werden, legen wir in dem Datentyp *spline3* ab. Der Datentyp enthält folgende Einträge

```

type spline3
  integer, dimension(:) :: rci,ri,hgi
  integer, dimension(:,:) :: rp
  real(kind=dp), dimension(:) :: rcw,hgw
  integer :: hgn
  character(len=32) :: name
  type(mesh3) :: mh
end type spline3

```

Für die eindeutige Zuweisung der Freiheitsgrade des Gitters werden die beiden Vektoren *ri* und *rci* benötigt. *ri* enthält die lokale Numerierung der Knoten im Gitter. Z.B. gibt es in einem hexaedrischen Gitter mit dem Polynomgrad $p = 1$ (also die Eckpunkte der Elemente sind Freiheitsgrade) auf jedem Element 8 lokale Freiheitsgrade. Die lokalen Freiheitsgrade werden in dem Vektor *rci* zu den eindeutigen, globalen Freiheitsgraden abgebildet. Es ist möglich, jedem globalen Freiheitsgrad einen Gewichtungsfaktor zuzuordnen. Diesen enthält der Vektor *rcw*. Der Polynomgrad in jeder Raumdimension auf jeden Element des Gitters wird in dem Feld *rp* gespeichert.

Der Name des Splines befindet sich in *name*. *mh* ist vom Datentyp *mesh3* und enthält die aktuellen Gitterinformationen, wie sie in Kapitel 6.2.1 beschrieben sind.

Für nichtkonforme Gitter mit hängenden Knoten sind weitere Informationen nötig, die die Approximation der abhängigen Freiheitsgrade bereitstellen. In *hgi* werden die Informationen gespeichert, die für die Approximation eines hängenden Knoten benötigt werden. Es wird zunächst die Anzahl n_r der regulären Freiheitsgrade gespeichert, die zur Bestimmung des Wertes an dem hängenden Knoten gebraucht werden. Die nächsten n_i Einträge enthalten dann die globalen Freiheitsgrade, von denen die Approximation des hängenden Knotens abhängt. Mit der gleichen Numerierung wird der Vektor *hgw* gebildet, der die Gewichtungsfaktoren der regulären Freiheitsgrade, die zu dem hängenden Knoten gehören, beinhaltet.

6.2.3 Spezielle Routinen bei nichtkonformen Gittern

Für den Umgang mit der Baumstruktur und der Auflösung der abhängigen Knoten sind spezielle Routinen nötig. Diese Routinen ordnen den Einträgen der oben beschriebenen Datenstrukturen die Informationen zu, die für die Berechnung einer approximierten Lösung benötigt werden.

nextelem: Die Routine `nextelem` „hangelt“ sich durch den Baum aller Elemente des Gitters, die entweder Teil des aktuellen Gitters sind oder vorher zu der Triangulierung des Gebiets gehört haben. Die Routine sucht nach und nach die aktuellen Elemente, die so genannten Blätter des Gitterbaumes. Dabei wird der Baum zunächst für das Startelement vom ersten Grobgitterelement nach unten durchlaufen, indem man immer den ersten Sohn nimmt, bis ein aktuelles Element erreicht ist. Danach werden alle (falls vorhanden) Söhne durchlaufen. Falls keine weiteren Söhne vorhanden sind, wird der Baum nach oben zum Großvater durchlaufen und zu dessen nächsten Sohn. Somit werden alle aktuellen Elemente (Blätter) durchlaufen und erfasst.

neighbour3: Die Routine `neighbour3` bestimmt den oder die Nachbarn des aktuellen Elements zu einer bestimmten Seitenfläche. Diese Routine ist notwendig, da auf dem aktuellen Gitter keine Nachbarschaftsinformationen direkt vorhanden sind. Um die Nachbarn von Element i zur Fläche k zu finden, wird der Gitterbaum entweder bis zur Wurzel (Groggitter) oder bis zu einer eindeutigen Verfeinerungssituationen nach oben durchlaufen. Auf dem Grobgitter wurden bei der Initialisierung des Gitters und der Elemente die Nachbarschaftsinformationen gesetzt, da bei dem Ursprungsgitter noch keine hängenden Knoten auftreten. Somit können wir auf dem Grobgitter die benötigten Informationen aus dem rc - und dem rct -Feld auslesen. Die andere Variante tritt auf, wenn die betrachtete Fläche eines Sohnes eine Innenfläche im Vaterelement im j -ten Level des Baumes ist. Falls dies der Fall ist kann durch die Verfeinerungsinformationen und die Information, welcher Sohn das Element vom Vater im j -ten Level ist auf den Nachbarn geschlossen werden.

Falls einmal die Nachbarschaftsinformationen (Nachbar und Nachbarfläche) erkannt wurden, wird der Baum wieder nach unten durchlaufen, bis wir den oder die Nachbarn des aktuellen Blattes des Baumes gefunden haben.

opthgi3: In der Routine `opthgi3` werden die nötigen Informationen der Freiheitsgrade ermittelt und festgelegt. In einer knotenbasierten Darstellung der Freiheitsgrade, wie zum Beispiel bei linearen Standard Finite Element Ansatzfunktionen, müssen wir die Informationen für jeden Knoten definieren und setzen. Es gibt dabei drei verschiedene Arten von Knoten zu unterscheiden: reguläre Knoten (globale Freiheitsgrade), hängende Knoten (siehe Def. 6.1.1) und Knoten auf dem Rand. Die Knoten auf dem Rand sind ent-

weder durch vorgeschriebene Randdaten fixiert und daher keine globalen Freiheitsgrade, oder wie z.B. bei der Kopplung von Finite Element Methode und Randelementmethode, haben wir den Rand als Transmissionsrand gegeben und daher keine fixierten Randknoten. In diesem Fall sind die Randknoten auch entweder reguläre oder abhängige Freiheitsgrade.

Nachdem der Typ des Knoten festgelegt ist, werden die regulären Knoten mit den Freiheitsgradnummern durchnummeriert. Die möglichen fixierten Randknoten bekommen alle den höchsten Freiheitsgrad. Die hängenden Knoten werden mit negativen Zahlen beziffert. Für die abhängigen Freiheitsgrade werden die nötigen regulären Freiheitsgrade herausgefunden, die zur Auflösung des Knotens benötigt werden. Die Informationen werden dazu in speziellen Feldern gespeichert (siehe Kap. 6.2.2). Für die Auflösung des hängenden Knotens werden die Kanten aller an der Kante des hängenden Knotens anliegenden Elemente untersucht. Stellt sich so eine Abhängigkeit eines Mittelknotens von den Endpunkten der Kante heraus, werden die Endpunkte mit dem hängenden Knoten verknüpft. Nach Beendigung eines Durchlaufs über alle Elemente und alle Kanten und der Auflösung eines hängenden Knotens wird der Durchlauf noch einmal gestartet, damit eventuelle Abhängigkeiten von hängenden Knoten von hängenden Knoten gefunden werden können. Dies wird wiederholt, bis nach und nach alle Informationen für den Spline gesetzt sind.

6.3 Verfeinerungsgesetze

Bei der Verwendung der irregulären Gitter geben wir uns Verfeinerungsgesetze vor, damit die Gitter nicht zu sehr entartet sind. Die Verfeinerung des aktuellen Gitters soll durch einen adaptiven Algorithmus gesteuert werden, der aufgrund der Daten eines Fehlerschätzers, der auf jedem Element berechnet wird, entscheidet, wie das Element verfeinert werden soll.

Eine gewisse Regularität des Gitters wird festgelegt, damit die Implementation effizient gestaltet werden kann. In der Implementation der hängenden Knoten Struktur in *maiprogs* orientieren wir uns an der in [25] beschriebenen „one-constraint-rule“.

6.3.1 Verfeinerungen in 2D

In 2D haben wir die Möglichkeit, das Parallelogramm in x -, in y - oder in xy -Richtung zu verfeinern (siehe Abb. 6.3). Dadurch ergeben sich entweder zwei oder vier Söhne für den Gitterbaum. Für die Einhaltung der „one-constraint-rule“ ist es nur notwendig

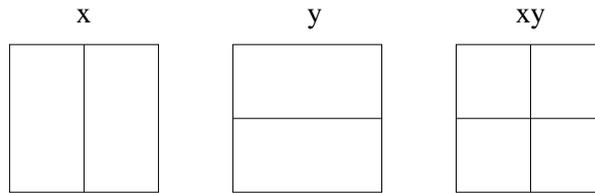


Abbildung 6.3: 2D: mögliche Verfeinerungen

die von der geplanten Verfeinerung betroffenen Kanten zu überprüfen. Man betrachtet die gemeinsamen Kanten der Nachbarelemente zu dem zu unterteilenden Elements und prüft, ob diese schon vor der Verfeinerung eine lange Kante waren. Falls dies bei einer Kante der Fall ist, würde durch eine erneute Unterteilung der kleinen Kante ein zweiter hängender Knoten entstehen. Dieser wird durch die Unterteilung des großen Nachbarelements durch eine entsprechende x - oder y -Verfeinerung in einem Postprocessing-Schritt vermieden, da der erste hängende Knoten dann zu einem regulärem Knoten wird (siehe hierzu Abb. 6.4). Es ist also nur eine Überprüfung der Nachbarkanten des betrachteten Elements notwendig. Sobald ein Element für die Verfeinerung markiert wurde, müssen alle Elemente nochmals auf die Einhaltung der Regularitätsregel überprüft werden.

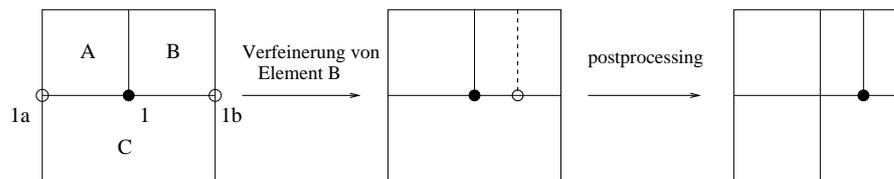


Abbildung 6.4: 2D: Auflösung eines hängenden Knotens

6.3.2 Verfeinerungen in 3D

Für die Verfeinerungen in 3D benutzen wir für Hexaeder eine erweiterte one-constraint-rule. In [27] beschreiben die Autoren, dass sie die so genannte Kreuz-Situation (siehe Abb. 6.6) vermeiden. Wir lassen diese Elementkonstellation zu, um die Verfeinerungsmöglichkeiten nicht zu sehr zu beschränken.

Für die Verfeinerungen eines hexaedrischen Elements stehen sieben verschiedene Strategien zur Verfügung (siehe Abb. 6.5). Bei der Unterteilung eines Hexaeders wird das Element bzgl. der achsenparallelen Ebenen (xy -, xz - und yz -Ebene) unterteilt. Es entstehen dadurch zwei neue Elemente oder durch die kombinierte Anwendung bis zu acht neue Elemente. In 3D entstehen mehrere Möglichkeiten hängende Knoten zu erzeugen.

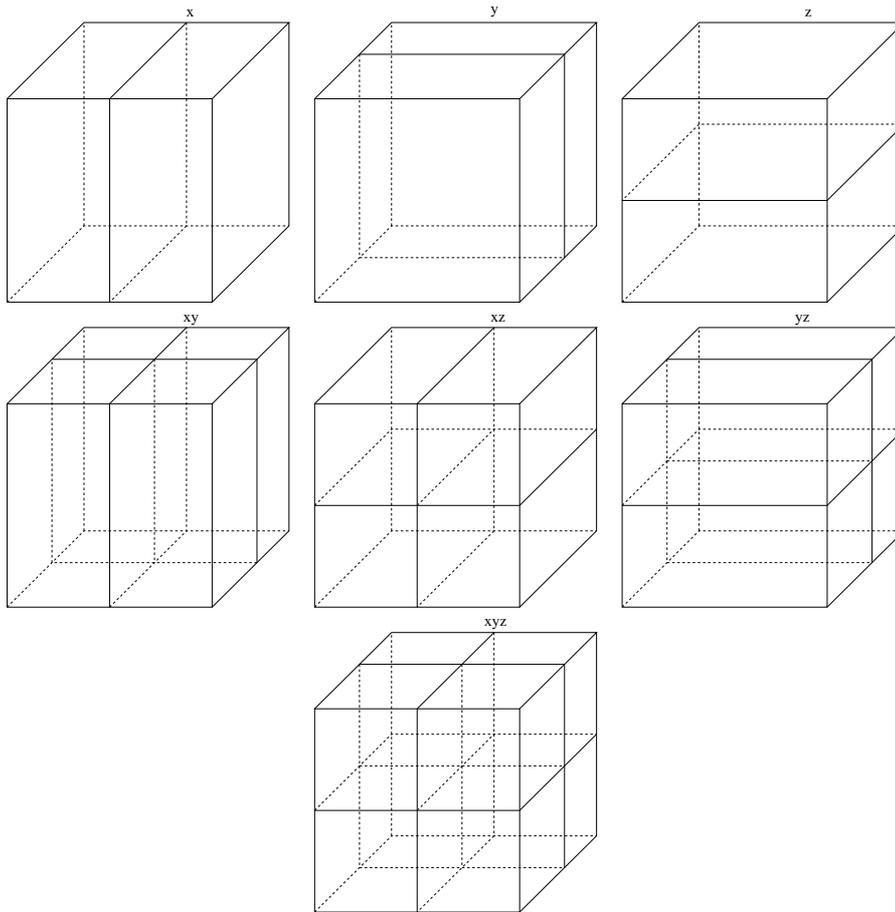


Abbildung 6.5: 3D-FEM: mögliche Verfeinerungen

Anders als in 2D gibt es nicht nur hängende Knoten auf den Kanten der Nachbarelemente, sondern wir müssen auch hängende Knoten auf den Seitenflächen der Elemente beachten (siehe Abb. 6.1).

Wie auch im 2D-Fall betrachten wir für die Detektion eines zweiten hängenden Knotens die von der Verfeinerung betroffenen Elementkanten des Hexaeders. Es wird dazu die Kante umlaufen, d.h. man sucht und erkennt alle Elemente, die diese Kante teilen. Ist eine von diese Nachbarkanten eine große Kante, muss der Nachbar auch verfeinert werden, um die Quasi-Regularität des Gitters zu erhalten.

Für die Auflösung eines zweiten hängenden Knotens werden die nötigen Informationen zur Verfeinerung des Nachbarelements gesammelt und die eventuell verschiedenen Richtungen der benötigten Verfeinerungen „addiert“. So entstehen für das Nachbarelemente die möglichen Verfeinerungen in 2, 4 oder 8 Elemente.

Dadurch, dass wir nur eine „Kantenregel“ verwenden, können durch die selbständige

Verfeinerung sehr spezielle Situationen auftreten. Anders als im Artikel von Demkowicz et al [27] lassen wir auch so genannte „Kreuz-Situationen“ zu (siehe Abb. 6.6). Bei dieser Situation kreuzen sich zwei Kanten, die Mittelkanten auf einer Fläche sind. Es sollen dadurch weniger Abhängigkeiten durch hängende Knoten entstehen. Mit Hinblick auf die dadurch entstehenden mehr Möglichkeiten der Verfeinerung bei der adaptiven Gitterunterteilung, ist diese Situation erlaubt. Bei der Betrachtung der Stetigkeit der

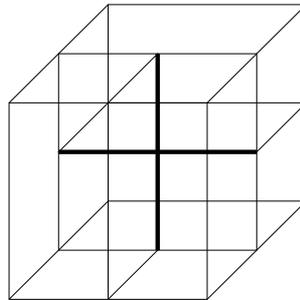


Abbildung 6.6: 3D-FEM: Kreuz-Situation

Splines haben wurde festgestellt, dass es eine Spezialsituation gibt, in der die Stetigkeit nicht mehr gegeben ist. In Abbildung 6.7 ist dieser Fall dargestellt. In der Darstellung des Spezialfalls sind die Knoten mit abhängigen Freiheitsgraden durch einen Punkt gezeichnet, die regulären Freiheitsgrade sind durch ein Quadrat markiert. Die lange Kante a des vorderen oberen Elements hat als Nachbarkante nach hinten gesehen nur eine kleine Kante. Die Endpunkte der Kante a sind je ein hängender Knoten und ein regulärer Knoten. Die Zusammensetzung des Splines produziert dadurch eine nichtstetige Approximation. Wir lösen diesen Spezialfall dadurch auf, dass wir den regulären Freiheitsgrad A der Kante a ebenfalls als abhängig markieren.

6.3.3 Algorithmus

Die oben in den Kapiteln 6.3.1 und 6.3.2 definierten Verfeinerungsregeln können wir nun schematisch zu einem Algorithmus zusammenfassen.

- Algorithmus 2**
1. *Initialisiere das Grobgitter (nur reguläre Freiheitsgrade vorhanden)*
 2. *Berechne lokale Fehlerindikatoren auf jedem Element i*
 3. *Bestimme für jedes i mit Hilfe der Fehlerindikatorwerte die Verfeinerungsart und markiere die Elemente*

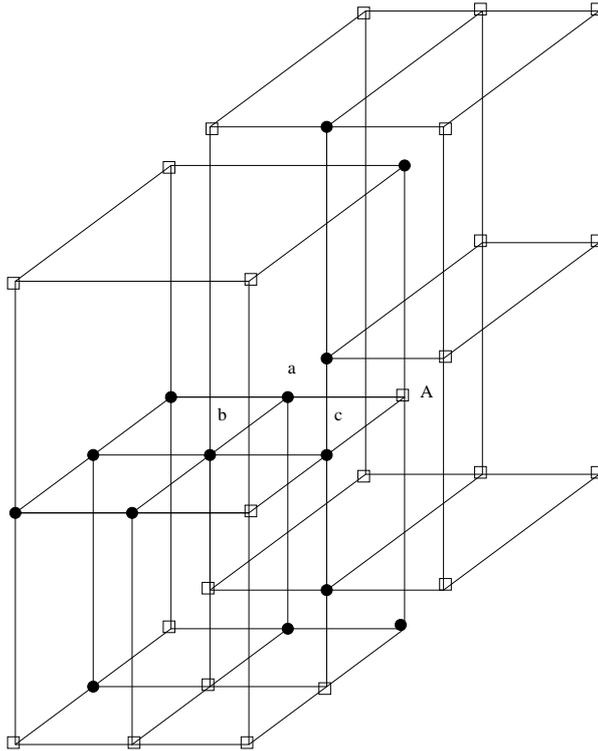


Abbildung 6.7: Spezialfall bei hängenden Knoten

4. *Untersuche für jede geplante Unterteilung des Elements, ob die erweiterte one-constraint-rule gewahrt wird*
5. *Ergeben sich durch Verfeinerung zwei hängende Knoten auf einer Kante, markiere Nachbarelemente zur Unterteilung*
6. *Gehe zu 4., bis keine zusätzlichen Verfeinerungen nötig sind*
7. *Initialisiere neues Gitter*
8. *Berechne die neue Approximation und gehe zu 2.*

6.4 Approximation der abhängigen Freiheitsgrade

Die Menge der Freiheitsgrade eines aktuellen Gitters \mathcal{T}_h können wir für knotenbasierte Formfunktionen mit Hilfe der Definition 6.1.1 in zwei verschiedene Teilmengen unterteilen. Die globalen Knoten des Gitters werden in reguläre und hängende Knoten unterschieden. Sei \mathcal{N}^r die Menge der regulären Freiheitsgrade und sei \mathcal{N}^a die Menge der abhängigen Freiheitsgrade.

6 Hängende Knoten

Die regulären Freiheitsgrade sind die unabhängigen Freiheitsgrade des Gitters. Es sei $S_h^1(\mathcal{T}_h)$ der Raum der stückweisen linearen Funktionen bzgl. der Triangulierung \mathcal{T}_h . Eine Basis von $S_h^1(\mathcal{T}_h)$ ist definiert durch die stückweisen Funktionen ϕ_{x_i} für die regulären Freiheitsgrade $x_i \in \mathcal{N}^r$ mit

$$\phi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall x_j \in \mathcal{N}^r.$$

Für eine Funktion $u_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h)$ mit $N = \dim S_h^1(\mathcal{T}_h)$ haben wir dann die Darstellung für ein reguläres Gitter

$$u_h(x) = \sum_{k=1}^N u_k \phi_{x_k}(x),$$

wobei u_k die Funktionswerte in den Punkten x_k sind.

In einem Gitter mit hängenden Knoten können wir nicht mehr in jedem Knoten des Gitters eine Formfunktion definieren. Zu jedem abhängigen Freiheitsgrad $x_i \in \mathcal{N}^a$ existiert eine Menge I_j von regulären Freiheitsgraden $x_j \in \mathcal{N}^r$ ($j = 1, \dots, N^a$) und ein Vektor w_j mit Gewichtungsfaktoren, so dass gilt

$$\phi_{x_i} = \sum_{j=1}^{N^a} w_j \phi_{x_j}.$$

Die abhängigen Freiheitsgrade sind Linearkombinationen der benachbarten regulären Freiheitsgrade. Für den abhängigen Freiheitsgrad x_1 in Abbildung 6.4 haben wir z.B. die Darstellung

$$\tilde{\phi}_{x_1} = \frac{1}{2} u_{x_{1a}} \phi_{x_{1a}} + \frac{1}{2} u_{x_{1b}} \phi_{x_{1b}},$$

mit den Gewichten $w_{1a} = w_{1b} = \frac{1}{2}$ für die Endpunkte der Kante. Diese Gewichtung gilt auch in 3D für die kantenbasierten hängenden Knoten. Falls wir einen hängenden Knoten bzw. einen abhängigen Freiheitsgrad auf einer Seitenfläche haben, setzt sich der abhängige Freiheitsgrad aus den vier Eckpunkten der Seitenfläche zusammen

$$\tilde{\phi}_{x_1} = \frac{1}{4} u_{x_{1a}} \phi_{x_{1a}} + \frac{1}{4} u_{x_{1b}} \phi_{x_{1b}} + \frac{1}{4} u_{x_{1c}} \phi_{x_{1c}} + \frac{1}{4} u_{x_{1d}} \phi_{x_{1d}}.$$

Falls die Eckpunkte der Kante bzw. der Seitenfläche ebenfalls abhängige Freiheitsgrade sind (und dies noch der „one-constraint-rule“ genügt), werden die regulären Freiheitsgrade, die den Eckpunkt definieren zur Bestimmung des abhängigen Freiheitsgrades hinzuaddiert. Die zugehörigen Gewichte werden multipliziert.

Für eine Funktion $u_h \in S_h^1(\mathcal{T}_h)$ bzgl. einer Triangulierung mit hängenden Knoten haben wir dann die Darstellung

$$u_h(x) = \sum_{x_i \in \mathcal{N}^r} u_i \phi_i(x) + \sum_{x_j \in \mathcal{N}^a} u_j \phi_j(x) = \sum_{x_i \in \mathcal{N}^r} u_i \phi_i(x) + \sum_{x_j \in \mathcal{N}^r} \sum_{x_k \in I_j} w_k u_k \phi_j(x)$$

aus den regulären Freiheitsgraden und den Linearkombinationen der regulären Freiheitsgrade, um die abhängigen Freiheitsgrade aufzulösen.

6.5 Hängende Kanten

Für die Diskretisierung z.B. von Maxwell-Problemen werden Elemente benötigt, die die Freiheitsgrade auf den Elementkanten, statt in den Eckpunkten der Elemente haben. für die Diskretisierung des $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ -Raumes werden in [53] die so genannten Nédélec-Basisfunktionen definiert. $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ -konforme Basisfunktionen haben stetige Tangentialkomponenten zwischen den Elementgrenzen.

Die Implementation der hängenden Kanten beschränkt sich hier zunächst auf Nédélec-Elemente niedrigster Ordnung. Für ein hexaedrisches Gitter definiert man den lokalen Finite-Element-Raum niedrigster Ordnung durch

$$\mathcal{N}\mathcal{D}_1(T) := \{\mathbf{u} : u_1 \in \mathbb{P}_{0,1,1}(T), u_2 \in \mathbb{P}_{1,0,1}(T), u_3 \in \mathbb{P}_{1,1,0}(T)\}.$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{P}_{a,b,c}$ den Raum der Polynome mit den Polynomgraden a für x , b für y und c für z . Die lokalen Freiheitsgrade sind dann so definiert, dass sie auf der ganzen Kante konstant sind. Die Basisfunktionen sind wie folgt definiert

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_1 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-y)(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_2 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+y)(1-z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1-y)(1+z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_4 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} (1+y)(1+z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_5 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_6 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+x)(1-z) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_7 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1-x)(1+z) \\ 0 \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_8 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ (1+x)(1+z) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_9 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)(1-y) \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_{10} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+x)(1-y) \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{b}}_{11} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-x)(1+y) \end{pmatrix}, & \hat{\mathbf{b}}_{12} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+x)(1+y) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die Numerierung der Kanten siehe Abbildung 6.8.

Da die Freiheitsgrade auf den Kanten liegen, sprechen wir hier von hängenden Kanten bzw. von abhängigen Kanten. Wir benutzen für den Umgang mit diesen Freiheitsgraden die gleiche Datenstruktur wie für die oben beschriebenen hängenden Knoten.

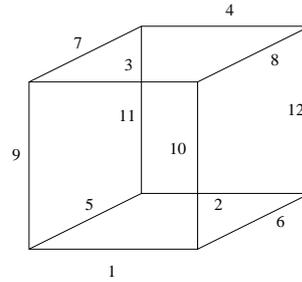


Abbildung 6.8: Numerierung der Kanten im Referenzelement

Definition 6.5.1 Eine Kante k eines Gitters \mathcal{T}_h ist eine **reguläre** Kante, falls alle Elemente, die mit der Kante k verbunden sind, die Kante mit der gleichen Größe aufweisen.

Eine Kante l heißt **hängend** oder **abhängig**, falls die Kante bei einem zugehörigen Nachbarelement eine größere Kante entgegenstehen hat oder eine freistehende Kante auf einer Seitenfläche eines Nachbarelements ist (siehe Abb. 6.9).

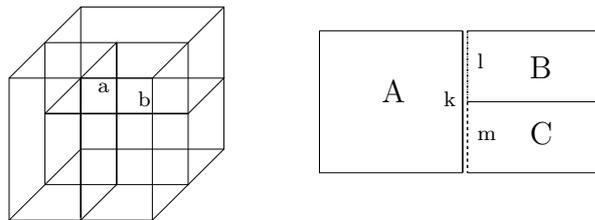


Abbildung 6.9: hängende Kanten auf einer Fläche bzw. an einer Kante

In Abbildung 6.9 haben wir die verschiedenen Arten der hängenden Kanten dargestellt. Im linken Bild sind die beiden Kanten a und b hängend, da sie eine Mittelkante auf der Fläche des jeweiligen Nachbarn sind (dies ist natürlich nur in 3D möglich). In der rechten Darstellung sind die Kanten l und m der Elemente B bzw. C abhängige Kanten, da sie an eine lange Kante k des Elements A angrenzen.

Das Verfeinerungsgesetz bei den kantenorientierten Freiheitsgraden lässt sich einfach durch die Regel, dass eine Kante nur höchstens zwei kleine Kanten auf einem zugehörigen Nachbarelement haben darf, beschreiben. Wird ein Element durch einen adaptiven Verfeinerungsalgorithmus zur Unterteilung markiert, müssen die zu halbierenden Kanten untersucht werden. Ist eine Kante bereits eine kleine Kante zu einer großen Nachbarkante, müssen alle Elemente, die diese große Kante teilen ebenfalls verfeinert werden. Dadurch können lokal stark verfeinerte Gitter zur besseren Approximation z.B. einer Singularität erzeugt werden.

Für die Implementation der hängenden Kanten benutzen wir teilweise die gleichen Routinen wie im Knotengitter und teilweise ähnliche Routinen, die wir von der Verwendung der hängenden Kanten adaptieren (siehe Kap. 6.2.3). Da die Datenstruktur auch in diesem Fall gleich ist, benutzen wir die gleichen Daten für die Gitter und die Splines wie für den Knotenfall.

Für die kantenbasierten Freiheitsgrade haben wir nicht von vornherein eine eindeutige Numerierung. Deswegen wird in der Routine **opthgi3ND** zunächst jeder Kante, die ein Freiheitsgrad ist (regulär oder abhängig), eine globale Nummer zugeordnet. Danach werden die Kanten auf ihre Regularität oder ihre Abhängigkeit überprüft und dies entsprechend markiert. Abhängige Kanten bekommen, wie bei den Knoten, einen negativen Eintrag. Danach werden die Abhängigkeiten von regulären Kanten erfasst und die Informationen in dem Feld *hgi* gesammelt. In *hgw* werden ebenfalls die Gewichtungsfaktoren gesichert, mit denen die regulären Kanten gewichtet werden müssen, um den Wert auf der abhängigen Kante zu interpolieren. Dazu gibt es unterschiedliche Situationen für abhängige Kanten zu beachten (siehe Abb. 6.9).

Liegen zwei hängende Kanten als kleine Kanten an einer großen Kante (siehe Abb. 6.9 rechts), so wird der konstante Wert des Koeffizienten der Nédélec-Basisfunktion auf der großen Kante mit dem Faktor 0.5 auf die kleinen übertragen (also mit dem Gewicht 0.5).

Ist eine hängende Kante eine Mittelkante zwischen zwei regulären Kanten gleicher Größe (siehe Abb. 6.9 Kante *a*), setzt sich der Wert des Koeffizienten aus der Hälfte der beiden Werte der regulären Kanten zusammen. D.h. es gilt $c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.

Durch die adaptive Verfeinerung kann es vorkommen, dass es Kanten gibt, die zwischen zwei regulären Kanten liegen, aber nur die halbe Länge haben. Es ergibt sich dann eine Linearkombination von $c = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b$.

Diese drei Fälle sind die einzigen Fälle, die bei der Verwendung der hängenden Kanten auftreten. Es kann natürlich passieren, dass sich durch die Verfeinerungsentwicklung eines Gitters Abhängigkeiten von abhängigen Kanten ergeben kann. In diesem Fall werden zur Auflösung des abhängigen Freiheitsgrades alle regulären Freiheitsgrade gesammelt, die alle zugehörigen abhängigen Freiheitsgrade auflösen. Die Gewichte werden dann multiplikativ übertragen.

Bei der Betrachtung der Stetigkeit fällt ein Spezialfall einer Gitter- bzw. Elementkonstellation auf (siehe Abb. 6.10), in der die Stetigkeit nicht mehr gewährleistet ist. Die abhängige lange Kante *a* des Elements *A* muss durch die Kanten links und rechts davon definiert werden. Da aber die Kante rechts von *a* keine lange Kante eines Elements ist, sondern zwei Kanten *b* von *C* und *c* von *B* vorhanden sind, müsste eine Linearkombination aus drei Kanten gebildet werden. Da aber *b* und *c* reguläre Kanten sind, müssen

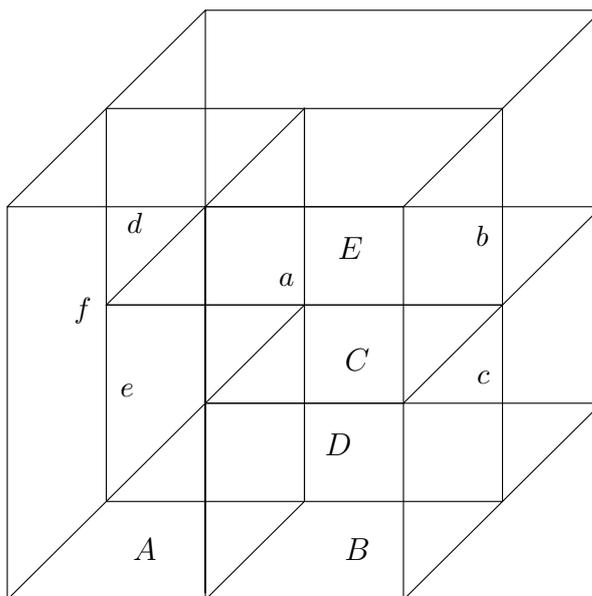


Abbildung 6.10: Spezialfall bei hängenden Kanten

diese nicht den gleichen konstanten Wert haben. Würden wir also nur eine der beiden Kanten zur Bestimmung des Koeffizienten auf der Kante a benutzen, würden die nötigen Informationen nicht richtig gesetzt. Beide Kanten können wir auch nicht benutzen, da dann a nicht mehr den gleichen konstanten Wert über die ganze Kante haben würde.

Wir verhindern diesen Spezialfall, indem wir im Test der erweiterten Regularität des Gitters diese Situation auflösen. Für die Konfiguration in Abbildung 6.10 muss das Element A zusätzlich horizontal verfeinert werden. Die langen Kanten a und f werden also in jeweils zwei kleine Kanten unterteilt. Aus der Kante f entstehen so zwei neue reguläre Kanten. Die Gewichtsverteilung auf den neuen abhängigen Kanten von a können wir nun mit der oben beschriebenen Vorgehensweise für die Mittelkantensituation gleicher Größe vornehmen.

Literaturverzeichnis

- [1] R. BECKER AND M. BRAACK, *Multigrid techniques for finite elements on locally refined meshes*, Numer. Linear Algebra Appl., 7 (2000), pp. 363–379. Numerical linear algebra methods for computational fluid flow problems.
- [2] J. BERGH AND J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces*, vol. 223 of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [3] M. BERNDT, T. A. MANTEUFFEL, AND S. F. MCCORMICK, *Local error estimates and adaptive refinement for first-order system least squares (FOSLS)*, Electron. Trans. Numer. Anal., 6 (1997), pp. 35–43 (electronic). Special issue on multilevel methods (Copper Mountain, CO, 1997).
- [4] P. B. BOCHEV AND M. D. GUNZBURGER, *Finite element methods of least-squares type*, SIAM Rev., 40 (1998), pp. 789–837 (electronic).
- [5] D. BRAESS, *Finite Elemente*, Springer Verlag, 1997.
- [6] J. BRAMBLE, *Multigrid Methods*, Pitman Research Notes in Mathematics Series 294, Longman Scientific & Technical, 1993.
- [7] J. BRAMBLE, R. LAZAROV, AND J. PASCIAK, *A least-squares approach based on a discrete minus one inner product for first order systems*, Math. Comp., 66 (1997), pp. 935–955.
- [8] ———, *Least-squares methods for linear elasticity based on a discrete minus one inner product*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 191 (2001), pp. 727–744.
- [9] J. BRAMBLE AND J. PASCIAK, *Least-squares methods for stokes equations based on a discrete minus one inner product*, J. Comp. Appl. Math., 74 (1996), pp. 155–173.
- [10] J. H. BRAMBLE AND A. H. SCHATZ, *Least squares methods for 2mth order elliptic boundary-value problems*, Math. Comp., 25 (1971), pp. 1–32.
- [11] U. BRINK, C. CARSTENSEN, AND E. STEIN, *Symmetric coupling of boundary elements and raviart-thomas type mixed finite elements in elastostatics*, Numerische Mathematik, 75 (1996), pp. 153–174.

- [12] Z. CAI, C.-O. LEE, T. A. MANTEUFFEL, AND S. F. MCCORMICK, *First-order system least squares for the Stokes and linear elasticity equations: further results*, SIAM J. Sci. Comput., 21 (2000), pp. 1728–1739 (electronic). Iterative methods for solving systems of algebraic equations (Copper Mountain, CO, 1998).
- [13] Z. CAI, T. A. MANTEUFFEL, S. F. MCCORMICK, AND S. V. PARTER, *First-order system least squares (FOSLS) for planar linear elasticity: pure traction problem*, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), pp. 320–335 (electronic).
- [14] C. CARSTENSEN, *Interface problem in holonomic elastoplasticity*, Math. Methods. Appl. Sci., 16 (1993), pp. 819–835.
- [15] ———, *Efficiency of a posteriori BEM-error estimates for first kind integral equations on quasi-uniform meshes*, Math. Comp., 65 (1996), pp. 69–84.
- [16] C. CARSTENSEN, *A posteriori error estimate for the symmetric coupling of finite elements and boundary elements*, Computing, 57 (1996), pp. 301–322.
- [17] C. CARSTENSEN, S. A. FUNKEN, AND E. P. STEPHAN, *On the adaptive coupling of fem and bem in 2-d elasticity*, Numer. Math. 77 (1997), pp. 187–221.
- [18] C. CARSTENSEN, M. MAISCHAK, AND E. P. STEPHAN, *A posteriori error estimate and h-adaptive algorithm on surfaces for Symm’s integral equation*, Numer. Math., 90 (2001), pp. 197–213.
- [19] C. CARSTENSEN AND E. P. STEPHAN, *Adaptive coupling of boundary and finite element methods*, Math. Modelling Num. Analysis, 29 (1995), pp. 779–817.
- [20] P. CLÉMENT, *Approximation by finite element functions using local regularisation*, R.A.I.R.O. Anal. Numer., 9 (1975), pp. 77–84.
- [21] M. COSTABEL, *Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results*, SIAM J. Math. Anal., 19(3) (1988), pp. 613–626.
- [22] ———, *A symmetric method for the coupling of finite elements and boundary elements*, in The mathematics of finite elements and applications, VI, MAFELAP 1987, J. Whiteman, ed., London: Academic Press, 1988, pp. 281–288.
- [23] M. COSTABEL AND E. P. STEPHAN, *Coupling of finite elements and boundary elements for inhomogeneous transmission problems in \mathbb{R}^3* , in MAFELAP IV, J. Whiteman, ed., Academic Press, London, 1988, pp. 289–296.
- [24] ———, *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem*, SIAM J. Numer. Anal., 27 (1990), pp. 1212–1226.

- [25] L. DEMKOWICZ, K. GERDES, C. SCHWAB, A. BAJER, AND T. WALSH, *HP90: A general and flexible Fortran 90 hp-FE code*, *Comp. Vis. Sci.*, 1 (1998), pp. 145–163.
- [26] L. DEMKOWICZ, J. T. ODEN, W. RACHOWICZ, AND O. HARDY, *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. I. Constrained approximation and data structure*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 77 (1989), pp. 79–112.
- [27] L. DEMKOWICZ, D. PARDO, AND W. RACHOWICZ, *3D hp-adaptive finite element package (3Dhp90)*, tech. rep., Texas Institute for Computational and Applied MATHematics, University of Texas, Austin, 2002.
- [28] G. J. FIX AND G. D. GUNZBURGER, *On least squares approximation to indefinite problems of the mixed type*, *Intl. Journal for Numer. Mtd. in Eng.*, 12 (1978), pp. 453–470.
- [29] G. J. FIX, M. D. GUNZBURGER, AND R. A. NICOLAIDES, *Least squares finite element methods*, *Math. and Comp. with Appls.*, 5 (1979), pp. 87–98.
- [30] L. P. FRANCA AND R. STENBERG, *Error analysis of Galerkin least squares methods for the elasticity equations*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 (1991), pp. 1680–1697.
- [31] G. GATICA AND G. HSIAO, *The coupling of boundary element and finite element methods for a nonlinear exterior boundary value problem*, *Z. Anal. Anw.*, 8 (1989), pp. 377–387.
- [32] ———, *Boundary-Field Equation Methods for a Class of Nonlinear Problems*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 331, 1995.
- [33] G. GATICA, M. MAISCHAK, AND E. P. STEPHAN, *Mixed fem and bem coupling for a transmission problem with Signorini contact*. ifam preprint 58 (submitted), 2002.
- [34] G. N. GATICA, L. F. GATICA, AND E. P. STEPHAN, *A FEM-DtN formulation for a nonlinear exterior problem in incompressible elasticity*, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 26 (2003), pp. 151–170.
- [35] G. N. GATICA, H. HARBRECHT, AND R. SCHNEIDER, *Least squares methods for the coupling of FEM and BEM*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 (2003), pp. 1974–1995 (electronic).
- [36] G. N. GATICA AND E. P. STEPHAN, *A mixed fem-formulation for nonlinear incompressible elasticity in the plane*, *Numer. Methods Partial Diff. Eqns.*, 18 (2002), pp. 105–128.

- [37] M. HAHNE, M. MAISCHAK, E. STEPHAN, AND A. WATHEN:, *Efficient preconditioners for coupled fem – bem equations*, preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 1995.
- [38] M. A. HAMDI, *Une formulation variationnelle par équations intégrales pour la résolution de l'équation de Helmholtz avec des conditions aux limites mixtes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre, 292 (1981), pp. 17–20.
- [39] H. HAN, *The boundary integro-differential equations of three-dimensional neumann problem in linear elasticity*, Numer. Math., 68 (1994), pp. 269–281.
- [40] V. KUPRADZE, ed., *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [41] M. MAISCHAK, *The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz equation in 2d-bem*, preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 1995.
- [42] ———, *The analytical computation of the Galerkin elements for the Laplace, Lamé and Helmholtz equation in 3d-bem*, preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 1995.
- [43] ———, *Technical manual of the program system maiprogs*, preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 1996.
- [44] ———, *Galerkin elements of FEM in 2D and 3D*, preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 2001.
- [45] ———, *Manual of the software package maiprogs*, technical report ifam48, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 2001. <ftp://ftp.ifam.uni-hannover.de/pub/preprints/ifam48.ps.Z>.
- [46] ———, *Analytical evaluation of potentials and computation of Galerkin integrals on triangles and parallelograms*, tech. rep., Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 2002.
- [47] M. MAISCHAK AND E. P. STEPHAN, *A least squares coupling method with finite elements and boundary elements for transmission problems*, Comput. Math. Appl., 48 (2004), pp. 995–1016.
- [48] P. K. MOORE, *An adaptive finite element method for parabolic differential systems: some algorithmic considerations in solving in three space dimensions*, SIAM J. Sci. Comput., 21 (1999/00), pp. 1567–1586 (electronic).

- [49] P. MUND, *Zwei-Level-Verfahren für Randintegralgleichungen mit Anwendungen auf die nichtlineare FEM-BEM-Kopplung*, PhD thesis, Hannover, 1997.
- [50] P. MUND AND E. STEPHAN, *Two-level adaptive boundary element methods for the laplace, lamé and helmholtz equations*, in Proceedings of 1st UK conference on boundary integral methods, Leeds, 1997, pp. 236–245.
- [51] P. MUND AND E. P. STEPHAN, *An adaptive two-level method for coupled fem/bem equations in nonlinear 3d elasticity*. Preprint, Univ. Hannover, 1999.
- [52] ———, *An adaptive two-level method for the coupling of nonlinear fem-bem equations*, SIAM J.Numer.Analysis, 36 (1999), pp. 1001–1021.
- [53] J. NEDELEC, *Mixed finite elements in \mathbb{R}^3* , Numer. Math., (1980), pp. 315–341.
- [54] ———, *Integral equations with nonintegrable kernels*, Integral Equations and Operator Theory, 5 (1982), pp. 562–572.
- [55] ———, *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*, Springer-Verlag, 2001.
- [56] J. NEČAS, *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations*, Wiley-Interscience, Chichester, 1986.
- [57] J. T. ODEN, L. DEMKOWICZ, W. RACHOWICZ, AND T. A. WESTERMANN, *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. II. A posteriori error estimation*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 77 (1989), pp. 113–180.
- [58] W. RACHOWICZ, J. T. ODEN, AND L. DEMKOWICZ, *Toward a universal h-p adaptive finite element strategy. III. Design of h-p meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 77 (1989), pp. 181–212.
- [59] E. P. STEPHAN, *Coupling of finite elements and boundary elements for some nonlinear interface problems*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg., 101 (1992), pp. 61–72.
- [60] E. P. STEPHAN, *Coupling of Boundary Element Methods and Finite Element Methods*, vol. 1 of Encyclopedia of Computational Mechanics, John Wiley & Sons, 2004. Edited by Erwin Stein, René de Borst and Thomas J.R. Hughes.
- [61] E. P. STEPHAN, M. MAISCHAK, F. LEYDECKER, AND S. OESTMANN, *On the hp-versions BEM for first kind integral equations on surfaces - error analysis, adaptivity, preconditioners*, tech. rep., Institut für Angewandte Mathematik, Universität Hannover, 2002.

- [62] R. VERFÜRTH, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*, Wiley-Teubner, 1996.
- [63] T. VON PETERSDORFF, *Randwertprobleme der Elastizitätstheorie für Polyeder – Singularitäten und Approximation mit Randelementmethoden*, PhD thesis, Darmstadt, 1989.
- [64] W. L. WENDLAND, *On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM*, in Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view, vol. 301 of CISM Courses and Lectures, Springer, Vienna, 1988, pp. 273–333.
- [65] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications IV*, Springer, New York, 1988.
- [66] O. C. ZIENKIEWICZ, D. W. KELLY, AND P. BETTESS, *Marriage à la mode — the best of both worlds (finite elements and boundary integrals)*, in Energy methods in finite element analysis, R. Glowinski, E. Y. Rodin, and O. Z. Zienkiewicz, eds., J. Wiley, 1979, pp. 81–107.
- [67] O. C. ZIENKIEWICZ AND R. TAYLOR, *The finite element method*, McGraw-Hill, London, 1989.

Lebenslauf

Geburtsdatum/-ort	07. November 1975 in Hoya
Schulbildung	07/88–06/92 Gymnasium Hoya 07/92–06/95 Gymnasium am Wall Verden
Schulabschluss	06/95 Abitur
Studium	10/95–01/02 Diplom Mathematik mit Nebenfach BWL, Universität Hannover 10/98 Diplomvorprüfung 07/01–01/02 Diplomarbeit „A posteriori Fehlerschätzer der hp-Version bei FEM und BEM“
Promotion	02/02–01/05 Stipendiat im Graduiertenkolleg 615 „Interaktion von Modellbildung, Numerik und Software-Konzepten für technisch- wissenschaftliche Problemstellungen“ seit 02/05 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hannover