

**Detektion und Identifikation  
von Nichtlinearitäten  
in mechanischen Schwingungssystemen**

Vom Fachbereich Maschinenbau  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur  
genehmigte

**Dissertation**

von

**Dipl.-Ing. Jens-Uwe Bruns**  
geb. am 31. Juli 1972 in Wittmund

**2004**

1. Referent: Prof. Dr.-Ing. K. Popp

2. Referent: Prof. Dr.-Ing. E. Reithmeier

Tag der Promotion: 10.08.2004

---

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Hannover. Die Arbeit wurde vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) im Rahmen zweier Forschungsprojekte finanziell unterstützt.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Popp für die Anregung der Forschungsarbeit und die sehr gute fachliche Betreuung sowie die hervorragenden Arbeitsbedingungen am Institut für Mechanik.

Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Reithmeier danke ich für die Übernahme des Korreferats und Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Poll für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Allen Kollegen am Institut danke ich für die ausgezeichnete Arbeitsatmosphäre und die zahlreichen fachlichen Diskussionen. Eine wichtige Grundlage dieser Arbeit sind Daten, die Kollegen aus ihren Experimenten beigesteuert haben, dafür danke ich Lars Panning, Dr. Oliver Schütte, Markus Lindner und Dr. Andreas Uhl (Curt-Risch-Institut). Ein besonderer Dank geht an Lars Panning und Lars Reicke für ihre Hilfsbereitschaft, wichtigen Ratschläge und das meiner Arbeit entgegengebrachte Interesse. Annika Schmidt-Fellner und Dr. Hanno Reckmann danke ich für die Unterstützung bei der Korrektur dieses Manuskripts.

Herrn Dr. Burkhard Grabowski gebührt mein besonderer Dank für die Einsichten aus der industriellen Praxis, die er mir im Rahmen des gemeinsamen Forschungsprojekts vermittelte.

Meiner Frau Judith danke ich für ihre endlose Geduld und den wesentlichen Anteil an der Erziehung unserer Kinder, ohne den die Fertigstellung dieser Arbeit unmöglich gewesen wäre.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern danken, die mich stets unterstützt und damit meinen akademischen Werdegang erst ermöglicht haben.

Burgdorf, im Oktober 2004

Jens-Uwe Bruns



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen</b>	<b>VIII</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Nichtlinearitäten in mechanischen Systemen . . . . .	1
1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit . . . . .	2
<b>2 TEIL I: Detektion von Nichtlinearitäten</b>	<b>4</b>
2.1 Stand des Wissens . . . . .	4
2.1.1 Linearitätstests für Ein-/Ausgangsmessungen . . . . .	5
2.1.2 Linearitätstests für Zeitreihen . . . . .	9
<b>3 Analyse freier Schwingungen</b>	<b>18</b>
3.1 Analyse mit parametrischem Ansatz . . . . .	19
3.2 Zeit-Frequenz-Transformationen . . . . .	19
3.3 Beispiel gekoppelte Schwingerketten . . . . .	23
3.4 Beispiel Schaufelpaar . . . . .	25
3.5 Beispiel Stahl/Beton-Verbundträger . . . . .	30
3.6 Fazit . . . . .	32
<b>4 Hilbert-Transformation</b>	<b>34</b>
4.1 Definition und Herleitung . . . . .	35
4.2 Wahl der Systemerregung . . . . .	38
4.3 Berechnung mit der FFT . . . . .	39
4.4 Berechnung durch Interpolation im Frequenzbereich . . . . .	46
4.5 Diskrete Formulierung der Hilbert-Transformation . . . . .	48
4.6 Anwendung auf typische Nichtlinearitäten . . . . .	50

4.7	Beispiel gekoppelte Schwingerketten . . . . .	53
4.8	Beispiel Schaufelpaar . . . . .	55
4.9	Beispiel Schleifkontakt . . . . .	57
4.10	Fazit . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers</b>	<b>60</b>
5.1	Definition der Vorhersagemodelle . . . . .	61
5.2	Schätzung der Modellparameter . . . . .	64
5.3	Wahl des Anregungssignals . . . . .	66
5.4	Wahl der Versatz- und Prädiktionszeit . . . . .	68
5.4.1	Minimierung des Einflusses von Messrauschen auf die Vorhersage . . . . .	68
5.4.2	Beurteilung des Risikos einer Ordnungsunterschätzung . . . . .	75
5.5	Definition des Kriteriums . . . . .	80
5.6	Beispiel Schwingerkette . . . . .	81
5.6.1	Schwingerkette mit drei Freiheitsgraden . . . . .	81
5.6.2	Schwingerkette mit fünf Freiheitsgraden . . . . .	85
5.7	Beispiel gekoppelte Schwingerketten . . . . .	87
5.8	Fazit . . . . .	88
<b>6</b>	<b>TEIL II: Identifikation nichtlinearer Kopplungen</b>	<b>90</b>
6.1	Stand des Wissens . . . . .	90
<b>7</b>	<b>Identifikation auf Basis des Nonlinear Normal Mode Konzepts</b>	<b>94</b>
7.1	Beispiel gekoppelte Schwingerketten . . . . .	95
7.2	Fazit . . . . .	100
<b>8</b>	<b>Parametrische Identifikation mit physikalischem Modell</b>	<b>101</b>
8.1	Systembeschreibung . . . . .	101
8.2	Näherungslösung mit der Harmonischen Balance . . . . .	102

---

8.2.1	Lösung auf Basis der modalen Amplituden . . . . .	103
8.2.2	Lösung auf Basis der Amplituden der Koppelkoordinaten . . . . .	104
8.3	Näherungslösung mit höheren Harmonischen . . . . .	104
8.4	Numerische Lösung der Gleichungen . . . . .	105
8.5	Identifikationsverfahren . . . . .	109
8.6	Beispiel gekoppelte Schwingerketten . . . . .	110
8.6.1	Reibkontaktmodell . . . . .	111
8.6.2	Identifikationsergebnisse . . . . .	114
8.7	Beispiel Schaufelpaar mit Reibelement . . . . .	115
8.7.1	Modellierung . . . . .	115
8.7.2	Reibkontaktmodell . . . . .	116
8.7.3	Vergleich der Berechnungsverfahren . . . . .	117
8.7.4	Messdaten . . . . .	119
8.7.5	Identifikationsergebnisse . . . . .	120
8.8	Fazit . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>130</b>
<b>A</b>	<b>Anhang: Reibkontaktmodelle</b>	<b>134</b>
<b>B</b>	<b>Anhang: Herleitungen zum nichtl. Vorhersagefehler</b>	<b>136</b>
B.1	Lineare LS-Schätzung . . . . .	136
B.2	Erwartungswert für gewichtete Fehlerquadratsumme . . . . .	137
	<b>Literatur</b>	<b>138</b>

## Formelzeichen

*Selten benutzte Formelzeichen und Begriffe sowie abweichende Bedeutungen werden ausschließlich im Text erläutert.*

### Besondere Kennzeichnungen

*	Symbol für Faltungsintegral
$\textcircled{n}$	Symbol für periodische diskrete Faltung
$\underline{x}$	Komplexe Größen werden unterstrichen.
$\tilde{x}$	Gestörte Größen werden durch eine Tilde gekennzeichnet.
$\hat{x}$	Geschätzte Größen werden durch eine Tilde gekennzeichnet.
$\hat{x}$	Amplituden sind durch ein ‚Dach‘ gekennzeichnet.
$\nabla f$	Gradient einer skalaren Funktion $f$
$[\cdot]^T$	Transponierte eines Vektors oder einer Matrix
$[\cdot]^{-1}$	Inverse (einer Matrix)
$[\cdot]^+$	Pseudoinverse einer Matrix
$\mathbf{M}_{[3 \times 4]}$	Matrixdimension
$M_{[3,4]}$	Matrizelement
$v_{[3]}$	Vektorelement

### Lateinische Notation

$\mathbf{0}$	Nullmatrix/-vektor
$\mathbf{1}$	Vektor/Matrix mit Einsen
$\mathbf{A}$	Systemmatrix (Zustandsraumdarstellung)
$\mathbf{A}_d$	Systemmatrix (Zustandsraumdarstellung, zeitdiskret)
$\mathbf{A}_q$	Systemmatrix (modale Zustandsraumdarstellung)
$\underline{\mathbf{A}}_q$	Systemmatrix (modale Zustandsraumdarstellung, komplex)
$\mathbf{b}$	Eingangsvektor (Zustandsraumdarstellung)
$\mathbf{b}_d$	Eingangsvektor (Zustandsraumdarstellung, zeitdiskret)
$\mathbf{b}_q$	Eingangsvektor (modale Zustandsraumdarstellung)



---

$\underline{\mathbf{b}}_q$	Eingangsvektor (modale Zustandsraumdarstellung, komplex)
$\mathbf{c}$	Ausgangsvektor (Zustandsraumdarstellung)
$\mathbf{c}_q$	Ausgangsvektor (modale Zustandsraumdarstellung)
$\underline{\mathbf{c}}_q$	Ausgangsvektor (modale Zustandsraumdarstellung, komplex)
$c_R$	Federsteifigkeit eines Elasto-Gleit-Modells
$\mathbf{D}$	Dämpfungsmatrix
$D$	Lehrsches Dämpfungsmaß
$\mathbf{D}^*$	Linearisierte Dämpfungsmatrix
$d$	Durchgangsanteil (Zustandsraumdarstellung)
$d_E$	Einbettungsdimension
$d_{E,\max}$	Maximale Einbettungsdimension
$d_{E,\min}$	Minimale Einbettungsdimension
$d_q$	Durchgangsanteil (Zustandsraumdarstellung, zeitdiskret)
$\mathbf{E}$	Einheitsmatrix
$\mathbf{F}$	Kraftvektor
$f_d$	Eigenfrequenz bei Dämpfung
$\hat{F}_E$	Kraftamplitude der Erregerkraft
$F_{\text{EGM}}$	Kraft an einem Elasto-Gleit-Element
$^{(i)}\hat{F}_{\text{EGM}}$	Komplexe Kraftamplitude am $i$ -ten Elasto-Gleit-Element
$F_N$	Normalkraft, Verbundträger
$F_R$	Haftreibungskraft eines Elasto-Gleit-Modells
$\mathcal{F}$	Symbol für Fourier-Transformation
$F_Z$	Simulierte Fliehkraft auf ein Reibelement
$\underline{\mathbf{G}}$	Komplexe Frequenzgangmatrix
$\underline{G}$	Komplexe Übertragungsfunktion
$\underline{G}_R$	Realteil von $\underline{G}$
$\underline{G}_I$	Imaginärteil von $\underline{G}$
$\underline{H}$	Komplexe HILBERT-Transformierte
$\mathcal{H}$	Symbol für HILBERT-Transformation
$j$	Imaginäre Einheit
$\mathbf{J}_f$	JACOBI-Matrix der Vektorfunktion $\mathbf{f}$
$k_{\text{harm},i}$	Faktor der $i$ -ten Kreisfrequenz

---

$k_e$	Normierter Vorhersagefehler
$k_n$	Verstärkungsfaktor für das Rauschen
$\mathbf{K}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}^*$	Linearisierte Steifigkeitsmatrix
$\ell_x$	Signallänge (bei der Wavelet-Trafo)
$\mathbf{M}$	Massenmatrix
$n_A$	Anzahl der Abschnitte (NLPE)
$n_{EGM}$	Anzahl der parallelen Reibstränge
$n_{FHG}$	Anzahl der (mechanischen) Freiheitsgrade
$n_{harm}$	Anzahl der verwendeten Harmonischen
$n_{NN}$	Anzahl nächster Nachbarn
$n_q$	Anzahl der Moden im Gesamtsystem
$n_{ref}$	Anzahl der Referenzpunkte (NLPE)
$n_{slip}$	Anzahl der gleitenden Reibelemente (Mikroschlupfmodell)
$n_T$	Anzahl linearer Teilsysteme
$n_u$	Anzahl Relativkoordinaten in nichtlinearen Koppelstellen
$n_x$	Anzahl diskreter Energiespeicher eines dynamischen Systems (Systemordnung)
$\mathbf{p}$	Parametervektor
$\mathbf{q}$	Vektor der Modalkoordinaten
$\mathbf{Q}_B$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbf{Q}_P$	Prädiktionsmatrix
$\mathbf{q}_P$	Prädiktionsvektor
$\mathbf{Q}_R$	Rekonstruktionsmatrix
$\mathbf{Q}_{invR}$	Inverse der Rekonstruktionsmatrix
$\underline{s}$	Komplexe Laplace Variable
$\mathbf{S}_{LR}$	Spiegelmatrix (links-rechts)
$T_0$	Eigenschwingungsdauer
$\mathbf{T}$	Transformationsmatrix
$\underline{\mathbf{T}}_{cR}$	Transformationsmatrix
$\mathbf{T}_K$	Transformationsmatrix
$t_S$	Abtastzeit (sampling time)
$t_V$	Versatzzeit

---

$t_{ZSI}$	Schrittweite der Zeitschrittintegration
$u$	Eingangssignal
$u_g$	(Gleit-)verschiebung in einem Coulomb-Element
$u_{krit}$	Verschiebung eines Elasto-Gleit-Modells an der Haftgrenze
$\underline{V}_N$	Mit $\underline{G}(k)$ zu faltende Folge bei der diskreten HT
$\mathbf{v}$	Eigenvektor
$\mathbf{V}$	Matrix der Eigenvektoren
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\dot{\mathbf{x}}$	Zeitliche Ableitung des Zustandsvektors
$y$	Ausgangssignal

### Griechische Notation

$\Gamma_{xu}$	Transformationsmatrix $x \rightarrow u$
$\Lambda$	Diagonalmatrix der Eigenwerte
$\Lambda_I$	Diagonalmatrix der Imaginärteile der Eigenwerte
$\Lambda_R$	Diagonalmatrix der Realteile der Eigenwerte
$\Phi$	Modalmatrix
$\Omega$	Matrix der Eigenkreisfrequenzen
$\Omega$	Kreisfrequenz der Anregung
$\Omega^2$	Matrix der Eigenkreisfrequenzquadrate
$\Omega^{*2}$	Linearisierte Matrix der Eigenkreisfrequenzquadrate

### Funktionen

$\text{abs}(\cdot)$	Absolutwert/Betrag
$\text{cond}(\cdot)$	Kondition einer Matrix
$\text{conj}(\cdot)$	Konjugiert komplex
$\text{DFT}(\cdot)$	Diskrete Fourier-Transformation
$\text{iDFT}(\cdot)$	Inverse Diskrete Fourier-Transformation
$\text{diag}(\cdot)$	Vektor der Diagonalelemente einer Matrix

$\text{Diag}(\cdot)$	Diagonal- bzw. Diagonalkblockmatrix
$E\{\cdot\}$	Erwartungswert
$\text{Im}(\cdot)$	Imaginärteil
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil
$\text{Re}$	Realteil
$\text{Im}$	Imaginärteil
$\text{sgn}(\cdot)$	Vorzeichen
$\text{tr}(\cdot)$	Spur einer Matrix

---

## Abstract

Nichtlineare Dämpfungs- und Steifigkeitseffekte treten in vielen technisch genutzten mechanischen Systemen auf. Dabei kann es sich sowohl um erwünschte als auch unerwünschte, zu vermeidende Effekte handeln. Im Fall der trockenen Reibung ist beispielsweise die Dämpfung von Schwingungen in Werkzeugmaschinen durch Trennfugen oder bei Turbinenschaufeln durch Reibelemente ein erwünschter Effekt. Reibungsselbsterregte Schwingungen bei Fahrzeugbremsen, die sich in störenden Geräuschen äußern, sind dagegen ein Beispiel für unerwünschte nichtlineare Effekte. In jedem Fall verursachen Nichtlinearitäten einen erhöhten Aufwand bei der Modellierung und Identifikation von Systemparametern.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit werden Linearitätstests für Messungen entwickelt sowie auf numerische und experimentelle Beispiele angewandt. Die dargestellten Methoden zeigen die Stärke der nichtlinearen Effekte an und erlauben zum Teil auch einen Rückschluss auf den Typ der vorliegenden Nichtlinearität. Sie unterstützen damit die Entscheidung, ob eine nichtlineare Modellierung erforderlich ist und welche Typen von Nichtlinearitäten gegebenenfalls zu berücksichtigen sind. Nach einer Literaturübersicht werden drei Linearitätstests detailliert dargestellt. Die Methode der „Analyse freier Schwingungen“ eignet sich zur Auswertung von Stoß- und Ausschwingversuchen. Als Linearitätskriterium wird die zeitliche Unveränderlichkeit der Dämpfung und/oder Frequenz der im Signal enthaltenen Schwingungen herangezogen. Zur Untersuchung gemessener Frequenzgänge wird die „Hilbert-Transformation“ verwendet, die für lineare Frequenzgänge eine Invarianz-Transformation darstellt. Abweichungen zwischen Frequenzgang und Transformierter lassen somit auf Nichtlinearitäten schließen. Die Methode des „Nichtlinearen Vorhersagefehlers“ umfasst neben dem Linearitätstest eine Schätzung der Anzahl von Zuständen des Systems. Zur Gewinnung dieser Zusatz-Information ist jedoch ein spezielles Anregungssignal erforderlich.

Der zweite Teil der Arbeit ist der Identifikation nichtlinearer mechanischer Systeme gewidmet. Zunächst wird eine Literaturübersicht zu diesem Thema gegeben. Diese beschränkt sich auf Verfahren, die auf gemessene Frequenzgänge angewendet werden. Anschließend werden zwei dieser Verfahren miteinander verglichen. Die existierende Methode auf der Basis des „Nonlinear Normal Modes“ Konzepts liefert eine modale Beschreibung des nichtlinearen Systems und erfordert einen hohen messtechnischen Aufwand. Die zweite, in dieser Arbeit entwickelte Methode geht von einer Beschreibung der Nichtlinearitäten in physikalischen Koordinaten aus. Die zugehörigen, physikalisch interpretierbaren Parameter werden durch Minimierung der Abweichungen zwischen dem Frequenzgang des Modells und der Messung bestimmt. Für eine schnelle Berechnung des Modellfrequenzgangs werden Näherungsmethoden mit wählbarer Genauigkeit eingesetzt. Harmonische und periodische Systemanregungen und -antworten können dabei berücksichtigt werden. Als experimentelles Beispiel dient ein Paar von Modellturbinenschaufeln, die durch ein Reibelement miteinander gekoppelt sind.

**Schlagwörter:** Linearitätstest, Nichtlineare Identifikation, Harmonische Balance

## Abstract

Many technical mechanical systems exhibit nonlinear damping and stiffness effects. These may be wanted or unwanted effects that are to be avoided. Dry friction is intentionally used to reduce vibrations in machine tools and turbine blades through frictional joints and friction elements, respectively. Among the unwanted effects are self-excited oscillations of vehicle brakes that manifest themselves in disturbing noises. In any case, nonlinearities cause additional effort regarding modeling and identification of system parameters.

In part one of this work, linearity tests are developed and applied to numerical and experimental examples. The methods presented indicate the strength of nonlinear effects and partly allow for identification of the type of nonlinearity present. Thereby, they support the decision whether nonlinear modeling is necessary and what types of nonlinearity have to be considered in that event. After a brief literature overview, three linearity tests are considered in detail. The method of “Analysing Free Vibrations“ can be applied to the results of impulse and free vibration experiments. Linearity is assumed if damping and/or frequencies of oscillations contained in the signal do not change with time. Measured frequency response functions can be analysed with the “Hilbert Transform“ which is an invariance transformation with regard to linear frequency response functions. Deviations between a frequency response function and the corresponding Hilbert Transform are, therefore, an indicator of nonlinear system behaviour. In addition to testing linearity, the “Nonlinear Prediction Error Method“ allows to estimate the number of states of the dynamical system. To get this additional information about the system, however, a special input signal has to be applied.

The second part is concerned with the identification of nonlinear mechanical systems. First, an overview of methods available in the literature is given. It is restricted to those applicable to measured frequency response functions. Subsequently, two methods are compared. An existing method based on the “Nonlinear Normal Mode“ concept yields a modal description of the nonlinear system and requires a large number of sensors to be used. The second method, developed in this work, is based on a description of the system’s nonlinear elements in physical coordinates. The corresponding parameters which have a physical meaning are determined by minimizing the difference between the measured and the model’s frequency response function. Approximative algorithms with adjustable accuracy are used for the calculation of the model’s frequency response function in order to speed up calculations. Harmonic as well as periodic system excitation and response can be considered. The method is applied to the experimental example of a pair of model turbine blades coupled by a friction element.

**Keywords:** Linearity test, nonlinear identification, harmonic balance

---

# 1 Einleitung

## 1.1 Nichtlinearitäten in mechanischen Systemen

Nichtlinearitäten treten in vielen mechanischen Systemen auf. Dabei erschweren sie die Aufgaben des Ingenieurs wie die Modellierung, Identifikation, Simulation und ggf. Regelung im Vergleich mit einfacheren linearen Systemen. In einigen technischen Anwendungen werden nichtlineare Effekte bewusst genutzt, in anderen Fällen als unerwünschte, vermeidbare Nebenwirkung bekämpft oder unvermeidbare Nebenwirkung in Kauf genommen.

Zu den Anwendungen, in denen Nichtlinearitäten bewusst genutzt werden, zählen die Reibungsdämpfung durch Reibelemente an Turbinenschaufeln oder in Trennfugen innerhalb von Werkzeugmaschinen. Dort ist eine genaue Modellierung der Reibungsnichtlinearität wichtig, um die resultierende Amplitudenreduzierung vorhersagen und optimale Parameter (z. B. Reibwerte, Normalkräfte) einstellen zu können.

Unerwünschte nichtlineare Effekte sind z. B. reibungsselbsterregte Schwingungen, die als unangenehme Geräusche wahrgenommen werden. Dazu zählen das „Bremsenquietschen“ bei Fahrzeugbremsen oder das „Kreischen“ von Straßenbahnradern bei der Kurvendurchfahrt. Bei Industrierobotern treten im Wesentlichen zwei störende nichtlineare Effekte auf. Die Starrkörperdynamik enthält die nichtlinearen Verkopplungen zwischen den Gliedern des Roboterarms (Zentrifugal- und Corioliskräfte sowie variable Massenträgheitsmomente). Auf Einzelachsebene beeinträchtigt Reibung (insbesondere Haftreibung) die dynamische Positioniergenauigkeit.

Interesse an der Detektion bzw. Identifikation von Nichtlinearitäten besteht vor allem im Bereich der Modellierung, etwa zum Zweck einer Schwingungsanalyse oder eines Reglerentwurfs.

Im einfachsten Fall ist dabei die Frage zu klären, ob eine lineare Modellierung zulässig ist, so dass theoretische und experimentelle Verfahren, die auf der Linearitätshypothese aufbauen, zum Einsatz kommen können. Sind die Nichtlinearitäten nicht zu vernachlässigen, müssen sie im Gesamtmodell berücksichtigt und deshalb identifiziert werden. In Ermangelung allgemeingültiger nichtlinearer Modelle, die in der Praxis handhabbar wären, kommen dabei meist spezialisierte, parametrische Methoden zum Einsatz, die eine a priori Kenntnis der Struktur des betrachteten Systems voraussetzen.

Neben dem Einsatz in der Modellierung kann insbesondere die Detektion nichtlinearen Systemverhaltens im Bereich der Systemüberwachung Verwendung finden, etwa um die Lösung einer Schraubverbindung ( $\Rightarrow$  Spiel) oder das Auftreten eines Risses ( $\Rightarrow$  asymmetrische Federkennlinie) zu erkennen.

## 1.2 Ziel und Gliederung der Arbeit

Das Ziel der Arbeit besteht darin, signalbasierte Methoden zur Detektion und Identifikation von Nichtlinearitäten in mechanischen Schwingungssystemen zur Verfügung zu stellen.

Dazu gehört die Aufbereitung und vergleichende Darstellung existierender Verfahren, sowie eine darauf aufbauende selektive Weiterentwicklung. Um die Unterschiede zwischen den verschiedenen Ansätzen transparent zu machen, sollen sie an einem durchgehenden numerischen Beispiel und zusätzlichen experimentellen Beispielen illustriert werden.

Die Detektion und Identifikation von Nichtlinearitäten stehen aus Sicht des Anwenders in enger Beziehung zueinander; ist das Vorhandensein einer Nichtlinearität bestätigt, stellt sich häufig die Frage nach ihrer Identifikation, um ihre Wirkung auf eine gegebene Systemanregung vorherzusagen; diese Arbeit ist daher beiden Fragestellungen gewidmet.

Im Bereich der Detektion von Nichtlinearitäten gibt es in der Literatur eine Fülle von Vorschlägen aus unterschiedlichen wissenschaftlichen Disziplinen. In der vorliegenden Arbeit sollen daher solche Methoden getestet und geeignet weiterentwickelt werden, die im Hinblick auf mechanische Schwingungssysteme besonders praxistauglich sind. Dazu gehört die leichte Anwendbarkeit sowie die einfache Interpretierbarkeit der Auswertungsergebnisse. Im Rahmen einer erweiterten Fragestellung soll darüber hinaus eine neue Methode entwickelt werden, die neben der Detektion nichtlinearen Verhaltens auch eine Aussage über die Anzahl der Zustandsgrößen (=diskrete Energiespeicher) des (nichtlinearen) Systems ermöglicht. Neben der Aussage über die Linearität ist dies eine weitere wichtige Information für die Identifikation. Zur Identifikation nichtlinearer mechanischer Schwingungssysteme weist die Literatur nur wenige Verfahren auf, die auch auf elastische Systeme mit vielen Freiheitsgraden anwendbar wären. Der praktischen Anwendbarkeit steht dabei häufig der hohe experimentelle Aufwand entgegen, insbesondere die große Anzahl erforderlicher Sensoren und/oder Aktoren. Ziel dieser Arbeit im Bereich der Identifikation ist daher die Entwicklung eines Verfahrens, das keinen zusätzlichen experimentellen Aufwand (im Vergleich zu Identifikationsverfahren für



lineare Systeme) erfordert und auf gemessenen Frequenzgängen aufbaut, wie sie von der Modalanalyse linearer Systeme bekannt sind.

Entsprechend den beiden Themen dieser Arbeit ist sie in zwei Hauptteile gegliedert.

Der erste Teil gibt zunächst einen Überblick existierender Verfahren zur Detektion von Nichtlinearitäten (Kapitel 2). Zwei dieser Verfahren werden anschließend detaillierter betrachtet und auf numerische sowie experimentelle Beispiele angewandt. Dabei handelt es sich um die Analyse freier Schwingungen mit parametrischen und nicht-parametrischen Methoden in Kapitel 3 und die Analyse von Frequenzgängen mit Hilfe der HILBERT-Transformation in Kapitel 4. In Kapitel 5 wird ein neues Verfahren vorgestellt, das auf der „Einbettung“ von Zeitreihen beruht, wie sie aus der „Nichtlinearen Zeitreihenanalyse“ bekannt ist. Es wird gezeigt, dass sich mit diesem neuen Verfahren nicht nur lineare und nichtlineare Systeme unterscheiden lassen, sondern außerdem ein Maß für die Komplexität des untersuchten Systems gewonnen wird.

Im zweiten Teil, welcher der Identifikation nichtlinearer Kopplungen gewidmet ist, wird zunächst wieder ein Literaturüberblick gegeben (Kapitel 6). Daran anschließend werden zwei sehr unterschiedliche Verfahren detailliert dargestellt und an Beispielen untersucht. Das erste Verfahren (Kapitel 7) basiert auf einer modalen Beschreibung und dient der getrennten Auswertung aller im interessierenden Frequenzbereich vorhandenen Resonanzfrequenzen. Das zweite Verfahren (Kapitel 8) geht von einem physikalischen Modell aus und erlaubt die Auswertung eines beliebigen Frequenzausschnitts mit mehreren Resonanzfrequenzen.

Kapitel 9 enthält die Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit.

## 2 TEIL I: Detektion von Nichtlinearitäten

### 2.1 Stand des Wissens

Die Detektion nichtlinearen Systemverhaltens auf der Basis von Messdaten beschäftigt Wissenschaftler aus den unterschiedlichsten Disziplinen. Eine grobe Einteilung in zwei Gruppen lässt sich auf Basis der vorliegenden Ausgangssituation vornehmen:

Werden bei der Messung nur Ausgangssignale aufgezeichnet, so spricht man von *Zeitreihen*. Dies kommt z. B. vor, wenn die Systemeingänge nicht zugänglich oder die äußeren Einflüsse auf das System so zahlreich sind, dass sie bei der Modellierung nicht berücksichtigt werden können. Für die Analyse liegen dann nur Ausgangssignale als Messungen vor. Diese Situation tritt häufig im Bereich der Medizin (Elektrokardiogramm [40], Atmungsfrequenz [69]), der Ökonomie (Aktienindex [15], Aktienkurse [44]) oder der Geophysik (Wetterdaten [60], Sonnenflecken [57]) aber auch im Bereich der Ingenieurwissenschaften (Anregung durch breitbandige, verteilt angreifende Fluidkräfte [22]) auf. Zeigen die Messdaten ein „komplexes“ Aussehen, so kommt als Erklärungsmodell sowohl ein linear stochastischer als auch ein nichtlinearer (chaotischer) Prozess in Betracht. Die Aufgabe eines Linearitätstests besteht dann darin, eine Entscheidung zwischen beiden Alternativen zu fällen.

Im Bereich der Ingenieurwissenschaften wird das Verhalten der betrachteten Systeme in aller Regel durch wenige, gut abzugrenzende äußere Einflüsse bestimmt, die als Systemeingänge bezeichnet werden. Zusätzliche, unbekannte Einflüsse werden durch stochastische Störungen beschrieben. Für die Anwendung ist meist das *Ein-/Ausgangsverhalten* entscheidend, so dass auch die Frage nach der Linearität auf diesen Zusammenhang zielt.

In der Literatur werden Linearitätstests für beide Situationen beschrieben. Übersichten für die Anwendung auf Zeitreihen sind in [91, 7, 85], für die Anwendung auf Ein-/Ausgangsmessungen in [36, 68, 90, 95, 70, 46] enthalten.

In den folgenden Unterkapiteln wird eine Übersicht der in Tabelle 2.1 aufgelisteten Gruppen von Linearitätstests gegeben. Die Tests sind mit einer fortlaufenden Nummer  $x$  versehen und werden durch  $\mathbf{T}_x$  referenziert. Zunächst soll auf die Tests für Ein-/Ausgangsmessungen eingegangen werden.

**Tabelle 2.1:** Linearitätstests aus der Literatur für Ein-/Ausgangsmessungen und Zeitreihen. Tests, deren Namen unterstrichen sind, werden in einem eigenen Kapitel behandelt.

Ein-/Ausgangsmessungen	Zeitreihen
<b>T1</b> Superposition [12]	<b>T16</b> Tests nach Subba Rao [81] und Hinich [38] auf der Basis des Bispektrums, siehe auch [91, 19, 5]
<b>T2</b> Proportionalität [36, 68, 46]	<b>T17</b> Trispektrum [19]
<b>T3</b> Ausgangsmittelwerttest [10, 36, 68]	<b>T18</b> Kreuzkorrelation höherer Harmonischer (Dimentberg) [22, 21, 23]
<b>T4</b> <u>Analyse freier Schwingungen</u>	<b>T19</b> Test von Keenan [41], Verfeinerung von Tsay [92, 91]
<b>T5</b> Klirrfaktor [70]	<b>T20</b> Nichtlineare Autokorrelation [10, 36, 68]
<b>T6</b> Kohärenzfunktion [8, 36, 68]	<b>T21</b> Surrogatdaten-Methode [86, 40]
<b>T7</b> Lineare Korrelation [36, 68]	<b>T22</b> Redundanzen (PALUŠ) [59, 60, 58, 57]
<b>T8</b> Nichtlin. Kreuzkorr. [36, 68]	
<b>T9</b> Inverse Nachgiebigkeit [25, 46]	
<b>T10</b> Isometr. Dämpfungs-Plot [26, 46]	
<b>T11</b> Test auf der Basis linearer Filter (Peyton Jones/Billings) [63]	
<b>T12</b> <u>HILBERT-Transformation</u> [12, 11, 20]	
<b>T13</b> Isochronenfunktionen [87]	
<b>T14</b> Nichtlinearitätsmaß [37, 2, 1, 3]	
<b>T15</b> <u>Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers</u>	

### 2.1.1 Linearitätstests für Ein-/Ausgangsmessungen

Zu den grundlegenden Eigenschaften linearer dynamischer Systeme gehört es, dass eine Skalierung oder Superposition von Eingangssignalen  $u(t)$  auf die Ausgangssignale  $y(t)$  übertragen werden kann.

Eine direkte Überprüfung dieser Eigenschaften wird daher in der Literatur als Linearitätstest vorgeschlagen, **Superposition (T1)** [12]:

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t), u_2(t) \rightarrow y_2(t) \Rightarrow u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y_1(t) + y_2(t), \quad (2.1)$$

**Proportionalität (T2)** [36, 68, 46]:

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t) \Rightarrow \gamma u_1(t) \rightarrow \gamma y_1(t). \quad (2.2)$$

Regt man ein System zunächst mit konstantem Eingang  $u_0$  und anschließend mit  $u(t) = u_0 + \Delta u(t)$  an, wobei  $\Delta u(t)$  ein mittelwertfreies stochastisches Signal repräsentiert, so gilt

$$E\{y(u(t))\} = E\{y(u_0)\} \quad (2.3)$$

nur, falls das System linear ist [10]. Ein Test, der diesen Zusammenhang ausnutzt, wird als **Ausgangsmittelwerttest (T3)** [10, 36, 68] bezeichnet.

Sehr einfach durchzuführen sind in der Praxis Impuls- und Ausschwingversuche, bei denen mechanische Systeme durch einen Kraftimpuls erregt werden bzw. aus einer Anfangsauslenkung ausschlagen. Bei unterkritischer Dämpfung führt das untersuchte System dann freie, gedämpfte Schwingungen aus, die im linearen Fall (gedämpft) harmonisch sind. Zeitlich veränderliche Eigenfrequenzen und Dämpfungsmaße können als Zeichen von Nichtlinearität interpretiert werden. Wegen der einfachen Durchführung entsprechender Versuche auch außerhalb von Testlaboren wird die **Analyse freier Schwingungen (T4)** ausführlich in Kapitel 3 behandelt.

Für den Sonderfall harmonischer Anregung ist der **Klirrfaktor (T5)** [70] definiert:

$$K = 1 - \sqrt{\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}. \quad (2.4)$$

Die Faktoren  $a_1 \dots a_n$  sind die Amplituden der Grund- bzw. Oberschwingungsanteile des periodischen Ausgangssignals  $y(t)$ . Für ein lineares, rauschfreies System gilt  $K = 0$ .

Bei stochastischer Anregung stellt die sog. **Kohärenzfunktion (T6)** [8, 36, 68]

$$\gamma_{uy}(f) = \frac{|S_{uy}(f)|^2}{S_{uu}(f)S_{yy}(f)} \leq 1 \quad (2.5)$$

den Zusammenhang zwischen den Autospektraldichten  $S_{uu}$  und  $S_{yy}$  sowie der Kreuzspektraldichte  $S_{uy}$  her. Für ein lineares, rauschfreies System gilt  $\gamma_{uy}(f) = 1$ .

Durch Beschränkung des Zusammenhangs (2.5) auf den Fall  $f = 0$  und Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Spektraldichte- und Korrelationsfunktionen folgt mit den Korrelationsfunktionen  $\Phi$  die **Methode der linearen Korrelation (T7)** [36, 68],

$$\frac{\left[ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Phi_{u'y'}(\tau) d\tau \right]^2}{\left[ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Phi_{u'u'}(\tau) d\tau \right] \left[ \int_{\tau=-\infty}^{\infty} \Phi_{y'y'}(\tau) d\tau \right]} = 1, \quad (2.6)$$

dabei wird das mittelwertbefreite Signal  $u$  als  $u'$  bezeichnet.

Im Unterschied zu (T7) wird bei der **Methode der nichtlinearen Kreuzkorrelation (T8)** [36, 68] eine Korrelation zwischen Komponenten des Eingangs- und des Ausgangssignals als Indikator *nichtlinearen* Systemverhaltens genutzt. Mit dem normierten, mittelwertfreien Quadrat

$$x(t) = \frac{u'^2(t) - E\{u'^2(t)\}}{\sigma_{u'^2}} \quad (2.7)$$

des Eingangssignals kann die Kreuzkorrelationsfunktion  $\Phi_{xy'}(\tau)$  gebildet werden, die für nichtlineare Systeme von Null abweicht. Nichtlinearitäten ungerader Ordnung werden nur detektiert, wenn das Eingangssignal einen Gleichanteil aufweist.

Nichtlinearitäten in Nachgiebigkeits-Frequenzgängen können u. a. durch die **Methode der inversen Nachgiebigkeit (T9)** [25] detektiert werden; sie wird z. B. in [46] erläutert. Die Methode setzt voraus, dass eine reelle Mode (= eine Schwingungsform) einer mechanischen Struktur isoliert betrachtet werden kann, bei viskoser Dämpfung also

$$\underline{G}(\Omega) = \frac{k}{-\Omega^2 + 2D\omega_0 j\Omega + \omega_0^2} \quad (2.8)$$

mit  $k$  reell. Durch Kehrwertbildung ergibt sich

$$\frac{1}{\underline{G}(\Omega)} = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{k} + j \frac{2D\omega_0\Omega}{k}. \quad (2.9)$$

Der Realteil des inversen Frequenzgangs hängt linear von  $\Omega^2$  ab, der Imaginärteil linear von  $\Omega$ . Abweichungen vom linearen Zusammenhang deuten unter den genannten Voraussetzungen auf Nichtlinearitäten im System hin, außerdem können Dämpfungs- und Steifigkeits-nichtlinearitäten unterschieden werden. Eine wesentliche Einschränkung ist allerdings die Voraussetzung reeller, weit separierter Moden.

Unter den gleichen Voraussetzungen lässt sich die **Methode des isometrischen Dämpfungs-Plots (T10)** [26, 46] anwenden. Für eine Mode mit hysteretischer Dämpfung

$$\underline{G}(\Omega) = \frac{k}{-\Omega^2 + (1 + j\eta)\omega_0^2} \quad (2.10)$$

lässt sich der Dämpfungsfaktor  $\eta$  durch

$$\eta = \frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\tan(\gamma_a/2) + \tan(\gamma_b/2)} \quad (2.11)$$

bestimmen. Dabei ist  $\omega_0$  die (vorab zu bestimmende) Eigenkreisfrequenz,  $\omega_a$  und  $\omega_b$  sind zwei beliebige Kreisfrequenzen ober- und unterhalb der Eigenkreisfrequenz. In dem durch  $\underline{G}(\Omega)$

in der komplexen Ebene gebildeten Kreis sind  $\gamma_a$  und  $\gamma_b$  die Winkel zwischen  $\underline{G}(\omega_a)$  bzw.  $\underline{G}(\omega_b)$  und  $\omega_0$ . Trägt man  $\eta(\omega_a, \omega_b)$  über der  $\omega_a/\omega_b$ -Ebene auf, so ergibt sich eine Ebene konstanter Höhe. Abweichungen davon deuten auf Nichtlinearitäten hin. Auch bei dieser Methode können benachbarte Moden das Ergebnis verfälschen.

PEYTON JONES UND BILLINGS schlagen einen **Test auf der Basis linearer Filter (T11)** [63] vor. Dieser Linearitätstest stützt sich auf die Identifikation eines ARMAX-Modells, das ist ein lineares zeitdiskretes Modell mit einem Steuereingang  $u(k)$ , einem Störeingang  $\zeta(k)$  für weißes Rauschen und einem Systemausgang  $y(k)$ . Im Zuge des Tests werden zunächst das Systemmodell  $G(q)$  und das Störmodell  $H(q)$  identifiziert. Nach einer linearen Filterung des Ein- und des Ausgangssignals (mit gleichem Filter) wird die Identifikation wiederholt. Lässt sich das System tatsächlich durch ein ARMAX-Modell beschreiben, sind die identifizierten Systemmodelle identisch, die Störmodelle unterscheiden sich, weil der Störeingang nicht in die Filterung einbezogen werden kann.

Zur Untersuchung von Frequenzgängen, die mit gestufter Sinusanregung ermittelt wurden, eignet sich die **Hilbert-Transformation (T12)** [12, 11, 20]. Zu ihren Vorzügen gehört die Möglichkeit, verschiedene Typen von Nichtlinearitäten unterscheiden zu können und die Anwendbarkeit auf Standard-Messdaten. Wegen ihrer Leistungsfähigkeit wird die HILBERT-Transformation in Kapitel 4 ausführlich behandelt.

Die Verzerrung des Phasenfrequenzgangs durch Nichtlinearitäten wird in einem Linearitätstest auf Basis sog. **Isochronenfunktionen (T13)** [87] genutzt. Die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Antwort bei konstanter Frequenz ist bei nichtlinearen Systemen amplitudenabhängig. Verbindet man in der komplexen Ebene Antwortamplituden mit gleicher Anregungsfrequenz und unterschiedlicher Anregungsamplitude mit einer Kurve, so bezeichnet man diese als Isochronenfunktion. Für lineare Systeme ist diese Kurve eine Gerade, Abweichungen davon lassen sich zur Charakterisierung von Nichtlinearitäten heranziehen. Im Unterschied zur HILBERT-Transformation (T12) sind hier mehrere Frequenzgangmessungen bei unterschiedlicher Amplitude notwendig. Wegen des dadurch erhöhten Messaufwands wird in Kapitel 4 stattdessen die HILBERT-Transformation als Linearitätstest für Frequenzgänge näher untersucht.

ALLGÖWER [37, 2, 1, 3] wählt für die Quantifizierung von Nichtlinearitäten einen sehr umfassenden und abstrakten Zugang. Ein nichtlineares System  $N$  antwortet auf ein Signal  $\mathbf{u}$  mit

dem Ausgang  $\mathbf{y}$ . Dabei sind  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  endliche Signale, also nicht nur Signalwerte zu einzelnen Zeitpunkten. Für die Quantifizierung der Nichtlinearität wird das System  $N$  mit Signalen  $\mathbf{u}$  aus der Menge der betrachteten Eingangssignale  $\mathcal{U}$  angeregt. Als **Nichtlinearitätsmaß (T14)**

$$\Phi_N^{\mathcal{U}} = \inf_{G \in \mathcal{G}} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \frac{\|G[\mathbf{u}] - N[\mathbf{u}]\|_{py}}{\|N[\mathbf{u}]\|_{py}} \quad (2.12)$$

definiert Allgöwer die „... größte normierte ‚Abweichung‘ des Ausgangs des nichtlinearen Systems  $N$  vom Ausgang eines linearen Systems  $G$  im Sinne einer im Ausgangsraum  $\mathcal{Y}$  gegebenen Norm  $\|\cdot\|_{py}$ “ [1]. Dabei bezieht sich die Abweichung auf das ungünstigste Eingangssignal  $\mathbf{u}$  und das beste lineare System  $G$  (bezüglich der Approximation von  $N$ ).

Zur Berechnung dieses Maßes ist ein Minimax-Problem zu lösen, das erheblichen Aufwand verursachen kann. Weiterhin hat der Anwender noch eine Reihe von Festlegungen für seine konkrete Fragestellung zu treffen (z. B. die Menge der zu untersuchenden Eingangssignale und linearen Systeme), so dass Ergebnisse nur schwer auf andere Probleme übertragbar sein dürften. In dieser Schwäche liegt aber gleichzeitig die Stärke dieses Maßes, das die Auswahl von Eingangssignalen zulässt, die sehr gut den geplanten Arbeitsbereich widerspiegeln.

Die **Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers (T15)**, die in Kapitel 5 vorgestellt wird, ist durch Analysemethoden der Nichtlinearen Zeitreihenanalyse motiviert. Mit Hilfe der Einbettungstechnik entsteht ein modellfreies nichtlineares Vorhersagemodell, das mit dem besten linearen Modell für einen gegebenen Datensatz verglichen wird. Aus dem Vergleich beider Modelle können nicht nur Rückschlüsse auf etwaige Nichtlinearitäten gezogen, sondern auch Aussagen über die Komplexität (Anzahl der Zustände) getroffen werden.

### 2.1.2 Linearitätstests für Zeitreihen

Neben den beschriebenen Linearitätstests existieren in der Literatur auch solche für den Fall ausschließlich vorliegender Ausgangsmessungen. Ein Teil dieser Tests prüft, ob das gemessene Signal  $y(t)$  auf einen linearen Prozess

$$y(t) = \int_{\tau=0}^{\infty} h(\tau)\zeta(t-\tau)d\tau \quad (2.13)$$

zurückgeführt werden kann, dabei ist  $h(t)$  die Impulsantwort des Systems und  $\zeta(t)$  weißes Rauschen.

Zu diesen Tests gehören diejenigen nach **Subba Rao [81]** und **Hinich [38]**, die auf der **Auswertung des Bispektrums (T16)** basieren. Das Bispektrum  $S_{yyy}(f_1, f_2)$  gehört zu den *Higher Order Spectra (HOS)*, den Verallgemeinerungen des Leistungsspektrums, die Funktionen mehrerer Frequenzen (zwei im Fall des Bispektrums) sind. Weist das Ausgangssignal eine symmetrische Verteilung auf, ist dessen Bispektrum für alle Frequenzkombinationen  $(f_1, f_2)$  identisch Null. Trifft dies nicht zu, kann es folglich nicht gaußverteilt sein. Ein nicht gaußverteiltes Ausgangssignal kann sowohl durch Kombination eines linearen Systems mit einem nicht gaußverteilten Eingangssignal als auch durch ein nichtlineares System mit gaußverteiltem Eingang entstehen. Wenn das System linear ist, muss ein speziell normiertes Bispektrum, die sog. Bikohärenz [82]

$$\text{bic}_{yyy} = \frac{|S_{yyy}(f_1, f_2)|}{\sqrt{S_{yy}(f_1)S_{yy}(f_2)S_{yy}(f_1 + f_2)}}, \quad 0 \leq \text{bic}_{yyy} \leq 1 \quad (2.14)$$

konstant sein. Der Umkehrschluss lautet, dass sich die Hypothese eines linearen Systems nicht verwerfen lässt, wenn die Bikohärenz seines nicht gaußverteilten Ausgangssignals konstant ist. Der Test detektiert unter anderem das sog. *Quadratic Phase Coupling (QPC)*, das sind Signalsignaturen, die durch quadratische Nichtlinearitäten verursacht werden. Die in der Praxis bedeutsamen Nichtlinearitäten ungerader Ordnung, z. B. punktsymmetrische Federkennlinien (wie beim DUFFING-Schwinger) oder Spiel, werden durch den Bispektrum Test allerdings nicht erkannt [91, 19].

Das Spektrum der nächst höheren Ordnung heißt **Trispektrum (T17)** und enthält als Argument drei Frequenzen,  $S_{yyy}(f_1, f_2, f_3)$ . Mit dem Trispektrum können Nichtlinearitäten ungerader Ordnung erkannt werden [19]. Problematisch ist beim Trispektrum die Darstellung, die als dreidimensionale Fläche in einem vierdimensionalen Raum oder durch Farbkodierung der Werte in einem dreidimensionalen Raum stattfinden müsste. Häufig werden daher nur zweidimensionale Schnitte dargestellt. Beim Bi- und Trispektrum können die geschätzten Spektren große Varianzen aufweisen und damit fälschlicherweise als ungleich Null interpretiert werden. Besonders beim Trispektrum sind große Datenmengen erforderlich, um die Varianz der Schätzungen durch Mittelung klein zu halten [19].

Die von DIMENTBERG vorgeschlagene Methode der **Kreuzkorrelation höherer Harmonischer (T18)** („Method of Internal Harmonics Cross-Correlation“) [22, 21] ist eng mit den Verfahren auf der Basis des Bispektrums verwandt; auch hier werden Korrelationen zwischen Frequenzkomponenten detektiert, die durch Nichtlinearitäten hervorgerufen werden. Der Me-



thode liegt die Annahme zugrunde, das Messsignal  $y(t)$  sei der Ausgang eines breitbandig erregten mechanischen Schwingers

$$\ddot{y}(t) + 2D\dot{y}(t) + f(y(t)) = \zeta(t) \quad (2.15)$$

mit weißem, gaußverteilten Rauschen  $\zeta(t)$  als Eingang und nichtlinearer Rückstellkraft

$$f(y) = \omega_0^2 y + g(y) \quad (2.16)$$

mit linearem Anteil  $\omega_0^2 y$ . Unter der Annahme sehr schwacher Dämpfung ( $D \ll 1$ ) kann  $y(t)$  im schwach nichtlinearen Fall als Schwingung der Kreisfrequenz  $\omega_0$  mit langsam veränderlicher Amplitude  $\hat{y}_1(t)$  interpretiert werden. Sind Nichtlinearitäten  $g(y)$  vorhanden, so verursachen diese Oberschwingungen der Kreisfrequenz  $k\omega_0$ , deren Amplituden  $\hat{y}_k(t)$  ebenfalls langsam veränderlich und mit  $\hat{y}_1(t)$  zeitlich korreliert sind. Für Anteile des gemessenen Ausgangssignals, die im Frequenzbereich der Oberschwingungen liegen, aber „lineare“ Antworten auf Anteile des Eingangssignals bei eben diesen Frequenzen sind oder durch Messrauschen verursacht wurden, trifft diese Korrelation nicht zu.

Bei der in [22] beschriebenen Methode wird das Ausgangssignal  $y(t)$  mit einer Reihe von Bandpässen gefiltert, deren Durchlassfrequenzen bei der dominanten Frequenz (Hauptfrequenz)  $\omega_0$  und seinen Vielfachen  $k\omega_0$  liegt. Anschließend werden die (langsam) zeitveränderlichen Amplituden  $\hat{y}_1(t)$  und  $\hat{y}_k(t)$  der gefilterten Signale extrahiert und ihre mittelwertbefreiten Anteile kreuzkorreliert, es ergibt sich der normierte Kreuzkorrelationsfaktor  $\rho_{1k}$  zu [22]

$$\rho_{1k} = \frac{\text{E}\{(\hat{y}_1 - \text{E}\{\hat{y}_1\})(\hat{y}_k - \text{E}\{\hat{y}_k\})\}}{\left[\text{E}\{(\hat{y}_1 - \text{E}\{\hat{y}_1\})^2\} \text{E}\{(\hat{y}_k - \text{E}\{\hat{y}_k\})^2\}\right]^{1/2}}. \quad (2.17)$$

Wegen der in der Regel mit zunehmender Frequenz abnehmenden Stärke höherer Harmonischer wird eine Beschränkung auf  $\rho_{12}$  (gerade Nichtlinearitäten) und  $\rho_{13}$  (ungerade Nichtlinearitäten) empfohlen.

Im Unterschied zum Bispektrum wird bei dieser Methode nur ein Frequenzpaar ( $\omega_0/k\omega_0$ ) ausgewertet, mit  $\rho_{13}$  können aber, im Unterschied zum Bispektrum, auch ungerade Nichtlinearitäten erkannt werden.

Der **Test von Keenan (T19)** [41] prüft das Vorhandensein quadratischer Terme  $b_{ij}$  in der allgemeinen Form einer nichtlinearen zeitdiskreten Zeitreihe

$$y_t = \bar{y} + \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} b_{ij} e_{t-i} e_{t-j} + \sum_{i,j,k=-\infty}^{\infty} b_{ijk} e_{t-i} e_{t-j} e_{t-k} + \dots, \quad (2.18)$$

dabei ist  $e_t$  eine mittelwertfreie Folge unabhängiger Zufallszahlen mit identischer Verteilung. Der Test basiert auf mehrfachen linearen Regressionsanalysen, bei denen jeweils  $t = M + 1, M + 2, \dots, N$  berücksichtigt wird,  $N$  ist die Länge der Zeitreihe. Der Test besteht aus folgenden Schritten:

1. Lineare Regression von  $y_t$  auf die Werte  $\{1, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-M}\}$  ( $M$  ist eine vorab zu wählende Modellordnung), das Ergebnis sind die Schätzungen  $\tilde{y}_t$  und die zugehörigen Schätzfehler  $\tilde{\epsilon}_t$ .
2. Lineare Regression von  $\tilde{y}_t^2$  auf die Werte  $\{1, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-M}\}$ , das Ergebnis sind die Schätzfehler  $\tilde{\xi}_t$ .
3. Lineare Regression von  $\tilde{\epsilon}_t$  auf  $\tilde{\xi}_t$ , der Regressionskoeffizient sei  $\eta_0$ .

Mit  $\eta = \eta_0 \sqrt{\left( \sum_{t=M+1}^N \tilde{\xi}_t^2 \right)}$  wird schließlich die Statistik

$$\tilde{F} = \frac{\eta^2(N - 2M - 2)}{RSS - \eta^2}, \quad RSS = \sum \tilde{\epsilon}_t^2 \quad (2.19)$$

definiert. Unter der Hypothese eines linearen Prozesses folgt  $\tilde{F}$  der sog. SNEDECORSCHEN  $F$ -Verteilung mit den Freiheitsgraden 1 und  $N - 2M - 2$ .

Durch die Vorgabe einer höchstzulässigen Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ , die Hypothese eines linearen Prozesses fälschlicherweise zu verwerfen (typisch ist  $\alpha = 5\%$ ), folgt ein  $F_{\text{krit}}$ , so dass für ein  $\tilde{F} > F_{\text{krit}}$  die lineare Hypothese mit der Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  abgelehnt werden kann.

**Tsay** [92, 91] hat KEENANS Test durch die Einbeziehung gemischter quadratischer Terme in Schritt 2 verfeinert, die resultierende Statistik  $\tilde{F}$  folgt einer  $F$ -Verteilung mit den Freiheitsgraden  $\frac{1}{2}M(M + 1)$  und  $N - \frac{1}{2}M(M + 3) - 1$ .

Bild 2.1 zeigt empirische Ablehnungsraten der linearen Prozess-Hypothese für die sechs in [41, 92] untersuchten Modelle,

$$\text{Modell 1: } y_t = e_t - 0.4e_{t-1} + 0.3e_{t-2} \quad (\text{linear}),$$

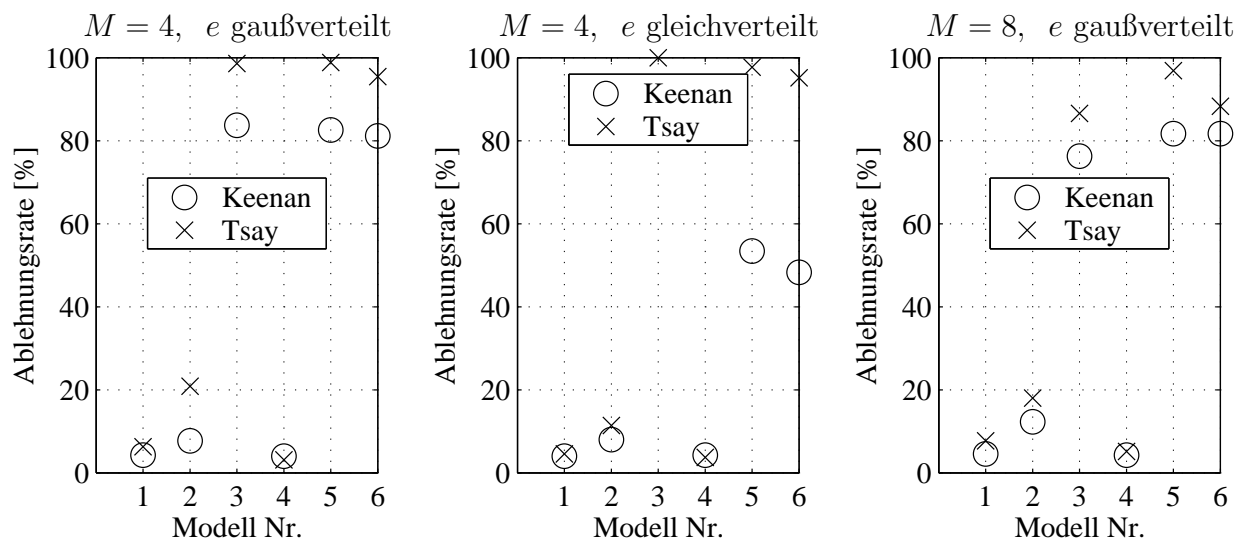
$$\text{Modell 2: } y_t = e_t - 0.4e_{t-1} + 0.3e_{t-2} + 0.5e_t e_{t-2} \quad (\text{nichtlinear}),$$

$$\text{Modell 3: } y_t = e_t - 0.3e_{t-1} + 0.2e_{t-2} + 0.4e_{t-1}e_{t-2} - 0.25e_{t-2}^2 \quad (\text{nichtlinear}),$$

$$\text{Modell 4: } y_t = 0.4y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + e_t \quad (\text{linear}),$$

$$\text{Modell 5: } y_t = 0.4y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + 0.5y_{t-1}e_{t-1} + e_t \quad (\text{nichtlinear}),$$

$$\text{Modell 6: } y_t = 0.4y_{t-1} - 0.3y_{t-2} + 0.5y_{t-1}e_{t-1} + 0.8e_{t-1} + e_t \quad (\text{nichtlinear}).$$



**Bild 2.1:** Empirische Ablehnungsraten der linearen Prozess-Hypothese für die Linearitätstests von KEENAN und TSAY für die Modelle aus [41, 92]. Länge der Zeitreihen  $N = 204$ , Modellordnung  $M = 4$  bzw.  $8$ , 350 Zeitreihen wurden ausgewertet. Die Standardabweichung der Anregung betrug  $\sigma_e = 1$ .

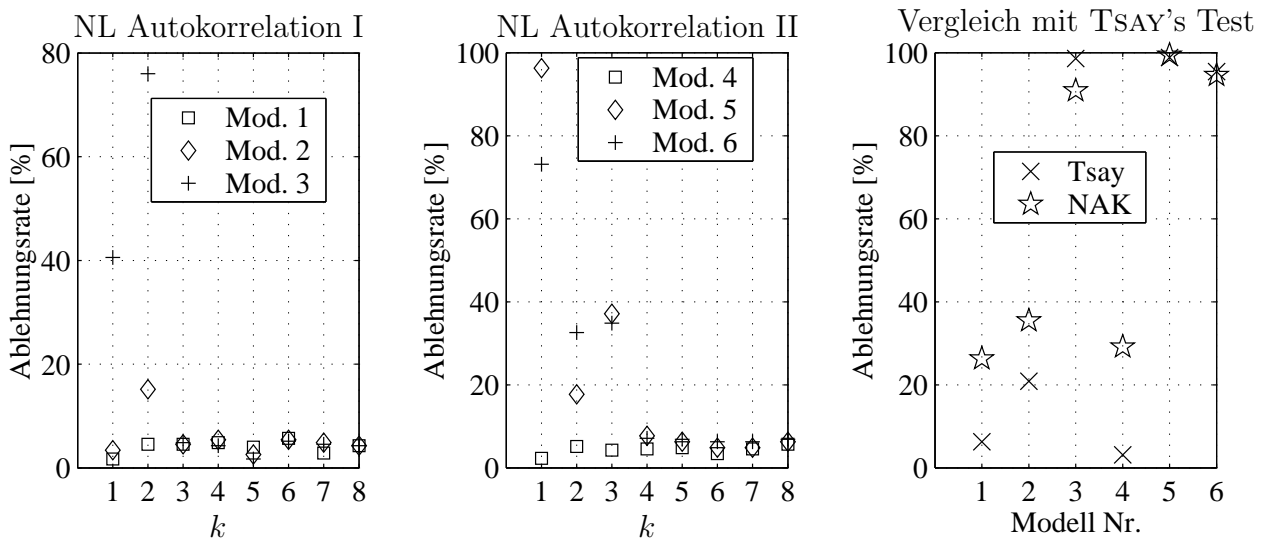
Der gewählte kritische Wert  $\tilde{F}_{\text{krit}}$  entspricht einer Irrtumswahrscheinlichkeit von  $\alpha = 5\%$  für den linearen Fall, die sich in guter Näherung in den Ergebnissen für die linearen Modelle (1,4) widerspiegelt.

Auffällig ist die unbefriedigende Detektion der Nichtlinearität in Modell 2. Weiterhin zeigt die von TSAY vorgeschlagene Statistik deutlich bessere Ergebnisse für die nichtlinearen Modelle als das Original von KEENAN. Bei Verwendung einer gleichverteilten Anregung sind die Unterschiede (außer bei Modell 2) sogar noch größer als im Fall der gaußverteilten Anregung, die in [41, 92] zugrunde gelegt wurde. Eine Erhöhung der Modellordnung auf  $M = 8$  führt zu keinen qualitativen Änderungen der Ergebnisse.

Bei der **Methode der nichtlinearen Autokorrelation (T20)** [10, 36, 68] wird die Korrelationsfunktion zwischen dem normierten mittelwertbefreiten Ausgangssignal  $y'(t) = \frac{y(t) - \bar{y}(t)}{\sigma_y}$  und dem normierten mittelwertbefreiten *quadrierten* Ausgangssignal  $v(t) = \frac{y'^2(t) - \bar{y}'^2(t)}{\sigma_{y'^2}}$  gebildet. Im Zeitdiskreten lautet die Formel

$$\hat{\Phi}_{y'v}(k) = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{r=1}^{N-1-k} y'(r+k)v(r)}{\sqrt{\hat{\Phi}_{y'y'}(0)\hat{\Phi}_{y'y'}^2(0)}}. \quad (2.20)$$

Nach [10] ist für große  $N$  unter der Nullhypothese die Standardabweichung der Korrelationsfunktionsschätzung  $\sigma_\Phi = \frac{1}{\sqrt{N}}$ , so dass die kritische Grenze für eine 95 prozentige Irrtumswahr-



**Bild 2.2:** Empirische Ablehnungsraten der linearen Prozess-Hypothese für die Methode der nichtlinearen Autokorrelation und die Modelle aus [41, 92]. Länge der Zeitreihen  $N = 204$ , es wurden 350 Zeitreihen ausgewertet. Die Standardabweichung der Anregung betrug  $\sigma_e = 1$ .

scheinlichkeit bei  $\Phi_{y'v,krit} \approx \pm \frac{1.96}{\sqrt{N}}$  (zweiseitiger Test) liegt. Für die von KEENAN und TSAY untersuchten Modelle zeigt Bild 2.2 die empirischen Ablehnungsraten in Abhängigkeit von der diskreten Versatzzeit  $k$ . Für die linearen Modelle ergibt sich die erwartete Ablehnungsrate von ca. 5%. Wie bei den Tests nach KEENAN und TSAY wird auch hier die Nichtlinearität in Modell 2 schlecht erkannt. Für die übrigen nichtlinearen Modelle ergeben sich große Ablehnungsraten des linearen Modells bei kleinen Versatzzeiten  $k$ . Bild 2.2 zeigt außerdem die Ablehnungsrate, die sich ergibt, wenn bei jedem Versuch der betragsmäßig größte Wert von  $\hat{\Phi}_{y'v}(k)$  über alle  $k$  für den Test zugrunde gelegt wird (wie in [36] vorgeschlagen). Die Ablehnungsraten für die linearen Modelle werden dadurch deutlich größer als die angestrebten 5%. Im Vergleich mit dem Test nach TSAY zeigt sich eine deutlich unschärfere Trennung zwischen linearen und nichtlinearen Systemen.

Die **Surrogatdaten-Methode (T21)** [86, 40] erlaubt im Vergleich zu den bereits beschriebenen Tests eine größere Flexibilität bei der Wahl der – linearen – Hypothese und des für den Test zugrunde gelegten Maßes, der *Statistik*. Die Grundidee besteht darin, zunächst eine Nullhypothese über den die Messdaten produzierenden Prozess aufzustellen. Anschließend werden die sog. *Surrogatdaten* aus dem gemessenen Signal hergestellt, indem sie in zufälliger Weise modifiziert werden, ohne jedoch die Nullhypothese zu verletzen. Dies bedeutet, dass bestimmte Eigenschaften, wie z. B. Mittelwert, Standardabweichung oder das Leistungsspek-

trum erhalten bleiben. Welche Eigenschaften nicht verändert werden dürfen, ist durch die Nullhypothese bestimmt. Beispiele für Nullhypothesen und zugehörige Methoden der Erzeugung von Surrogatdaten sind [86, 40]:

1. Weißes Rauschen. Durch zufällige zeitliche Vertauschung der Messdaten bleibt die Amplitudenverteilung erhalten, es ist also keine Annahme über die Verteilungsfunktion erforderlich.
2. Ornstein-Uhlenbeck Prozess. Dabei handelt es sich um einen autoregressiven Prozess erster Ordnung, AR(1), mit weißem gaußverteilterm Rauschen als Eingangssignal. Im zeitdiskreten Fall können die Parameter der Differenzgleichung über den Mittelwert, die Varianz und die Autokorrelationsfunktion für eine Einheitsverschiebung bestimmt werden. Durch numerische Lösung der Differenzgleichung lassen sich Surrogatdaten herstellen.
3. Für AR-Prozesse höherer Ordnung lässt sich die Vorgehensweise beibehalten, Fehler bei der Parameterschätzung können jedoch zu instabilen Modellen führen. Als Alternative können die Phasen der diskreten Fourier Transformierten eines Signals durch eine Zufallsfolge ersetzt werden (engl.: *phase randomization*). Man erhält auch auf diesem Weg Surrogatdaten mit unverändertem Leistungsspektrum.
4. AR-Prozess mit statisch nichtlinearer, invertierbarer Messfunktion  $f$ . Nachdem das gemessene Signal  $y(t)$  durch Anwendung von  $f^{-1}$  (kann durch Vergleich der Verteilung von  $y(t)$  mit einer Gaußverteilung geschätzt werden) eine Gaußverteilung erhalten hat, lässt sich wie in 3. fortfahren. Das Verfahren wird dann als *AAFT: Amplitude Adjusted Fourier Transform* [86] bezeichnet. Durch die Schätzung von  $f^{-1}$  ergeben sich geringe Fehler im Leistungsspektrum des linearen Prozesses, die durch ein in [71] beschriebenes iteratives Verfahren verringert werden können.

Anschließend wird die Statistik (z. B. die Korrelationsdimension [72], Lyapunov-Exponenten, Vorhersagefehler [86, 73], Korrelation von Spektralkomponenten) sowohl für das gemessene Signal als auch für die Surrogatdaten ermittelt. Durch Berücksichtigung einer großen Zahl von Surrogatdatensätzen kann die Verteilung der Statistik unter der Nullhypothese numerisch bestimmt werden. Schließlich lässt sich die Wahrscheinlichkeit angeben, mit der die Statistik

unter der Nullhypothese den Wert annimmt, der für das gemessene Signal ermittelt wird. Ist diese Wahrscheinlichkeit gering, lässt sich die Nullhypothese des linearen Prozesses ablehnen. Zu den Nachteilen der Surrogatdaten-Methode gehört, dass die Hypothese eines linearen Systems mit nicht gaußverteiltem Eingang nicht getestet werden kann. Zudem beruht das für die Erzeugung der Surrogatdaten verwendete Leistungsspektrum auf der Schätzung desselben für die Messdaten. Es ergeben sich damit die (von der FFT bekannten) Probleme bei endlichen Signalausschnitten.

PALUŠ schlägt einen informationstheoretisch begründeten Test [59, 60, 58, 57] vor, in dem nichtlineare Korrelationen, sog. **Redundanzen (T22)** (engl.: *redundancies*), mit der bekannten linearen Korrelation zwischen zeitversetzten Werten eines Ausgangssignals  $y(t)$  verglichen werden. Im zweidimensionalen Fall wird die Redundanz als *Transinformation* (engl.: *mutual information*) bezeichnet. Sie ist, mit der Abkürzung  $y_i(t) = y(t + (i - 1)t_V)$ , über die Verbundverteilungsfunktion  $p_{y_1, y_2}$  zu

$$I_y(t_V) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left\{ \log \left( \frac{p_{y_1, y_2}}{p_{y_1} p_{y_2}} \right) \right\} \quad (2.21)$$

definiert. Sie ergibt sich aus der Summe der KOLMOGOROV-SINAI-Entropien der Einzelverteilungsfunktionen abzüglich der Entropie der Verbundverteilungsfunktion. Die nicht negative Transinformation  $I_y(t_V)$  ist ein Maß für die Abhängigkeit zwischen zeitversetzten Werten des Signals  $y(t)$ . Für  $I_y(t_V) = 0$  enthalten die zeitversetzten Werte keine Transinformation, d. h. die Kenntnis von  $y_1(t)$  führt zu keinerlei Verbesserung der Vorhersage von  $y_2(t)$ , verglichen mit der ausschließlichen Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_{y_2}$ .

Die *Redundanz* stellt eine Verallgemeinerung der Transinformation für den  $d_E$ -dimensionalen Fall dar und wird in [30] als

$$R_{d_E}(t_V) = \mathbb{E} \left\{ \log \left( \frac{p_{y_1, y_2, y_3, \dots, y_{d_E}}}{p_{y_1} p_{y_2} p_{y_3} \dots p_{y_{d_E}}} \right) \right\} \quad (2.22)$$

definiert ( $d_E$  bezeichnet die Einbettungsdimension, ein Begriff aus der Attraktorrekonstruktion in der Nichtlinearen Dynamik). Dort wird sie, wie vorher bereits die Transinformation in [31], zur Wahl geeigneter Versatzzeiten verwendet. Für den Spezialfall, dass die zeitversetzten Variablen  $y_1(t), y_2(t), \dots$  eine gaußverteilte Verbundwahrscheinlichkeitsfunktion aufweisen, gilt

$$R_{d_E}(t_V) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_E} \log(c_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_E} \log(\lambda_i), \quad (2.23)$$

dabei sind  $c_{ii}$  die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  und  $\lambda_i$  deren Eigenwerte. Weil die Kovarianzmatrix nur lineare Korrelationen widerspiegelt, definiert PALUŠ

$$L_{d_E}(t_V) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_E} \log(c_{ii}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d_E} \log(\lambda_i) \quad (2.24)$$

als *lineare Redundanz*. Der Linearitätstest besteht nun darin, die Verläufe von  $R_{d_E}(t_V)$  und  $L_{d_E}(t_V)$  für verschiedene Einbettungsdimensionen zu vergleichen. Große Abweichungen werden als Indiz für Nichtlinearität gewertet.

Die Bewertung der Abweichung ist nicht vollkommen objektiv, sie wird daher als *qualitative Methode* bezeichnet [57]. Um zu *quantitativen* Ergebnissen zu gelangen, wird sie mit der Surrogatdaten-Methode kombiniert [57]. Dort tritt die Redundanz als Statistik zum Test der linearen Hypothese auf, so dass die erweiterte Methode eigentlich den Surrogatdaten-Methoden mit den oben beschriebenen Eigenschaften zuzuordnen ist.

### 3 Analyse freier Schwingungen

Zu den einfachsten Methoden, um Informationen über die Schwingungseigenschaften (also Eigenfrequenzen und Dämpfungsmaße) linearer mechanischer Systeme zu gewinnen, gehören der Impuls- und der Ausschwingversuch. Der i.d.R. mit einem Impulshammer durchgeführte Impulsversuch eignet sich besonders für kleinere Strukturen während der Ausschwingversuch (aus einer definierten Anfangsauslenkung) vor allem bei großen Strukturen Anwendung findet.

Der *Impuls*  $p$  bezeichnet in der Mechanik das Produkt aus Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers. Wurde der Körper aus dem Stillstand durch eine Kraft  $F(t)$  beschleunigt, so ist sein *Impuls*  $p$  zum Zeitpunkt  $t_1$  gleich dem *Kraftstoß*  $\tilde{F}$ ,

$$p(t_1) = \tilde{F} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{t_1} F(t) dt. \quad (3.1)$$

Der *Kraftstoß* bezeichnet also die *Ursache* und der *Impuls* deren *Wirkung*. In der Regelungstechnik bezeichnet der *Impuls* hingegen ein (z. B. rechteckförmiges) Zeitsignal kurzer Dauer. Der *Kraftstoß* in der Mechanik entspricht damit einem *Impuls* in der Regelungstechnik. Im Folgenden wird nur noch der Begriff *Impuls* verwendet, auch für die Ursache, also den *Kraftstoß*.

Nichtlineare Einflüsse lassen sich zwar bereits durch Versuche mit unterschiedlichen Amplituden detektieren, besonders bei der Verwendung eines Impulshammers lassen sich aber Ort und Intensität der Anregung nicht immer genau reproduzieren, so dass eine Quantifizierung der Nichtlinearität auf diesem Weg problematisch ist.

Alternativ kann eine einzelne gemessene Schwingungsantwort ausgewertet und als Superposition der Ausschwingvorgänge mehrerer gedämpfter linearer Einfreiheitsgrad-Systeme betrachtet werden. Handelt es sich um die Antwort eines nichtlinearen Systems, so ändern sich die Schwingungsparameter (Frequenz/Dämpfung) mit der Zeit bzw. Amplitude. Durch die abschnittsweise Auswertung eines Zeitschriebs lässt sich so eine Nichtlinearität nachweisen. In den folgenden Unterkapiteln werden verschiedene Methoden vorgestellt, um diese Art der Auswertung vorzunehmen.

Da das erregte System im Ausschwingversuch wie auch im Impulsversuch (nach Ende des Kraftstoßes) freie Schwingungen ausführt, können diese Versuche auf die gleiche Weise ausgewertet werden.



### 3.1 Analyse mit parametrischem Ansatz

Im Fall schwacher Dämpfung ( $D < 1$ ) lässt sich die Systemantwort eines linearen Mehrfreiheitsgrad-Systems als Summe exponentiell abklingender Kosinusfunktionen

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i e^{-D_i \omega_{0i} t} \cos(\omega_{di} t + \phi_i), \quad \omega_{di} = \omega_{0i} \sqrt{1 - D_i^2} \quad (3.2)$$

mit den Phasenverschiebungen  $\phi_i$  und den Amplitudenfaktoren  $\hat{x}_i$  darstellen. Bei schwacher Nichtlinearität lässt sich die tatsächliche Systemantwort näherungsweise als Antwort eines linearen Systems mit amplituden- bzw. zeitabhängigen Eigenfrequenzen

$$f_{0i}(t) = \omega_{0i}(t)/(2\pi) \quad (3.3)$$

und Lehrschen Dämpfungsmaßen  $D_i$  interpretieren, die abschnittsweise bestimmt werden können. Bei starker Dämpfung und/oder schnell veränderlichen Eigenfrequenzen können sich durch kurze Analyse-Abschnitte in Verbindung mit Rauschen große Streuungen in den Parametern  $f_{0i}(t)/D_i(t)$  ergeben. Durch Einbeziehung eines Ansatzes für die zeitliche Veränderung von Eigenfrequenz und Dämpfung können die Abschnitte dann größer gewählt werden, allerdings müssen auch mehr Parameter bestimmt werden.

### 3.2 Zeit-Frequenz-Transformationen

Mit Zeit-Frequenz-Transformationen wie der Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT: Short Time Fourier Transform) oder der Wavelet-Transformation (WT) können qualitative Aussagen über Frequenzänderungen gemacht werden (die Lokalisierung ist durch den Abstand der ausgewerteten Frequenzen bzw. die Länge des Zeitabschnitts beschränkt).

Bei der STFT wird das zu analysierende Signal in (optional überlappende) Abschnitte unterteilt, die i.d.R. mit einer Fensterfunktion (z. B. HANNING<sup>1</sup>) gewichtet und dann mit der FFT transformiert werden. Durch farbkodierte Darstellung des Absolutwerts der komplexen Fourier-Koeffizienten in der Zeit-Frequenz-Ebene ergibt sich ein guter Überblick der zeitlichen Entwicklung der Frequenzanteile (siehe Beispiel in Bild 3.6). Während die zeitliche Auflösung durch Überlappung der Abschnitte erhöht werden kann, lässt sich die Frequenzauflösung durch Anhängen von Nullen an jeden Abschnitt vor Anwendung der FFT erhöhen.

---

<sup>1</sup>benannt nach dem österr. Meteorologen JULIUS VON HANN

Die zusätzlichen Nullen verlängern das Signal und damit die niedrigste durch die FFT ausgewertete Frequenz; wegen des äquidistanten Frequenzrasters ist dies gleichbedeutend mit einer Erhöhung der Frequenzauflösung. In beiden Fällen gilt aber, dass durch die Maßnahmen keine zusätzlichen Informationen gewonnen werden (die einfache STFT enthält bereits die gesamte Information des Zeitsignals), sondern lediglich eine spezielle Form der Interpolation durchgeführt wird.

Eine Alternative zur STFT ist die Wavelet-Transformation (eine Einführung findet sich in [54], eine sehr umfassende Darstellung z. B. in [34]). An die Stelle der harmonischen Funktionen unendlicher zeitlicher Ausdehnung treten dabei zeitlich begrenzte Ansatzfunktionen, sog. Wavelets  $\psi(t)$ . Während die Sinus- und Kosinusfunktionen nur über die Periodendauer beschrieben werden, ist ein Wavelet durch die Skale  $a$  (das Pendant der Periodendauer bei den harmonischen Funktionen) und die zeitliche Verschiebung  $b$  definiert,

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi_{1,0}\left(\frac{t-b}{a}\right). \quad (3.4)$$

Bild 3.1 zeigt als Beispiel sog. DAUBECHIES-Wavelets unterschiedlicher Skalen und Verschiebungen. Die Energie jedes Wavelets ist auf 1 normiert,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}^2(t) dt = 1. \quad (3.5)$$

Bei der diskreten Wavelet-Transformation (DWT) sind nur diskrete Skalen und Verschiebungen zugelassen,

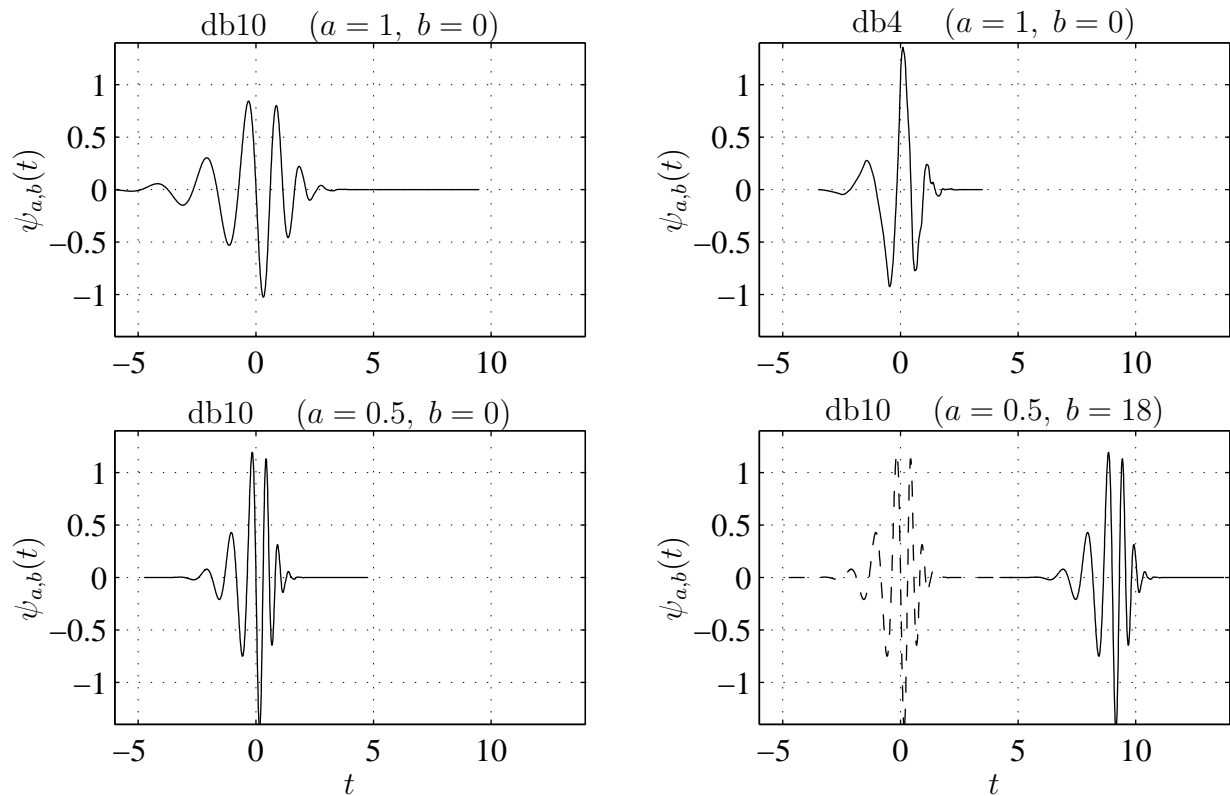
$$a_N = a_0 p^N \quad (3.6)$$

$$b_{N,m} = m p^N q, \quad N, m \text{ ganzzahlig}, \quad (3.7)$$

$N$  wird dabei als „Level“ bezeichnet. Für den Spezialfall mit orthonormaler Basis gilt

$$\int_{t=-\infty}^{+\infty} \psi_{a_{N_1}, b_{N_1, m_1}}(t) \psi_{a_{N_2}, b_{N_2, m_2}}(t) dt = \delta(N_1 - N_2) \delta(m_1 - m_2). \quad (3.8)$$

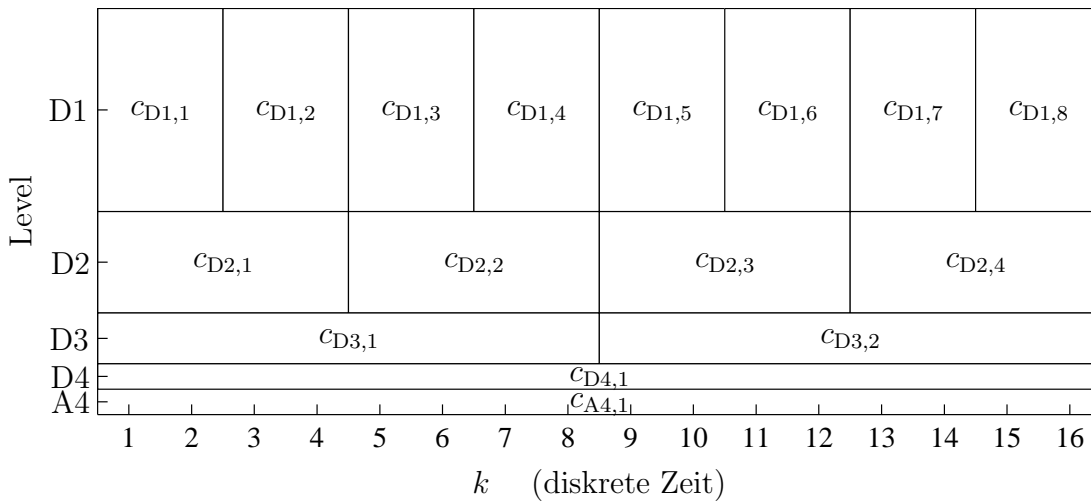
Im Unterschied zur STFT ist die zeitliche Auflösung bei der DWT durch die spezielle Wahl von  $b_{N,m}$  skalenabhängig. Die resultierende hohe Frequenz- und geringe Zeitauflösung niederfrequenter Komponenten und geringe Frequenz- sowie hohe Zeitauflösung hochfrequenter Komponenten macht die DWT in vielen Anwendungen zu einer interessanten Alternative zur STFT. Im Bereich der digitalen Signalverarbeitung werden nur diskrete Zeiten  $k$



**Bild 3.1:** DAUBECHIES-Wavelets der Ordnung zehn und vier („db10“ und „db4“) in verschiedenen Größenskalen  $a$  und Verschiebungen  $b$ . Mit zunehmender Ordnung nimmt die zeitliche Ausdehnung zu, während die Ausdehnung im Frequenzbereich abnimmt. Die Ordnung des Wavelets ist die Anzahl seiner verschwindenden Momente.

zugelassen, man erhält so die DTWT (Discrete Time Wavelet Transform). Für die Wahl  $p = 2$  existiert eine effiziente Implementation durch sog. „Multirate Filter Banks“ [47], bei denen die Wavelet-Koeffizienten durch FIR-Filterung des Signals erhalten werden. Durch eine Halbierung der Abtastfrequenz nach jedem Durchgang können die gleichen Filterkoeffizienten sukzessive auf alle Level angewendet werden. Das Ergebnis ist eine redundanzfreie Transformation, bei der die Anzahl der erhaltenen Wavelet-Koeffizienten der Anzahl  $\ell_x$  der Signalwerte entspricht und die Level  $N$  auf den endlichen Bereich  $1 \dots N_{\max}$  beschränkt sind. Um einen Vergleich mit der Fourier-Transformation zu ermöglichen, lässt sich eine Pseudofrequenz  $f_c$  als Hauptfrequenz im Spektrum des Wavelets definieren; die Pseudofrequenz für das db10 Wavelet ist z. B.

$$f_c \approx \frac{0.6842}{a}. \quad (3.9)$$



**Bild 3.2:** Aufteilung der Zeit-Level-Ebene durch die diskrete Wavelet-Transformation für zeitdiskrete Signale (DTWT).

Bild 3.2 zeigt für ein zeitdiskretes Signal der Länge  $\ell_x = 16$  die Zuordnung aller 16 Wavelet-Koeffizienten zur Zeit-Level-Ebene;  $c_{DN,i}$  ist der  $i$ -te Wavelet-Koeffizient des Levels  $N$ . Level 1 („D1“), mit den kürzesten Wavelets, weist acht Koeffizienten auf. Jedes Wavelet repräsentiert also rechnerisch zwei Signalwerte, benachbarte Wavelets können aber überlappen. Im nächst höheren Level halbiert sich jeweils die Anzahl der Koeffizienten, die rechnerische Länge jedes Wavelets verdoppelt sich. Die durch die Wavelet-Koeffizienten repräsentierten Signalanteile werden auch als Details (D) bezeichnet, die nach Abzug verbleibenden Anteile als Approximationen (A). Nach Abzug der Details D1-D4 verbleibt also Approximation A4, die, wie das Detail D4 des gleichen Levels, durch einen Koeffizienten repräsentiert wird. Bei der periodischen DTWT, d. h. das endliche Signal wird periodisch fortgesetzt, ist die Zerlegung orthogonal. Aus den insgesamt 16 Detail- und Approximationskoeffizienten kann das zeitdiskrete Signal der Länge 16 exakt rekonstruiert werden. Die dyadische Teilung der Ordinatenachse deutet die Zuordnung der Level zu Frequenzbereichen an: Die relative Bandbreite ist konstant während die absolute für kleinere Level zunimmt (Multi Resolution Analysis, MRA).

Für eine Visualisierung der Detail-Koeffizienten  $c_{DN,i}$  bietet sich die (vom Level  $N$  abhängige) „Leistungs-Normierung“

$$c_{DN,i}^* = \frac{c_{DN,i}^2}{\ell_N}, \quad \ell_N = 2^N \quad (3.10)$$

an. Dabei ist  $c_{DN,i}^*$  der Quotient aus der Energie des  $i$ -ten Wavelets des  $N$ -ten Level und seiner

rechnerischen Länge. Der Mittelwert aller  $c_{DN,i}^*$  eines Levels ist damit gleich der mittleren Leistung des durch den Level  $N$  repräsentierten Signalanteils.

### 3.3 Beispiel gekoppelte Schwingerketten

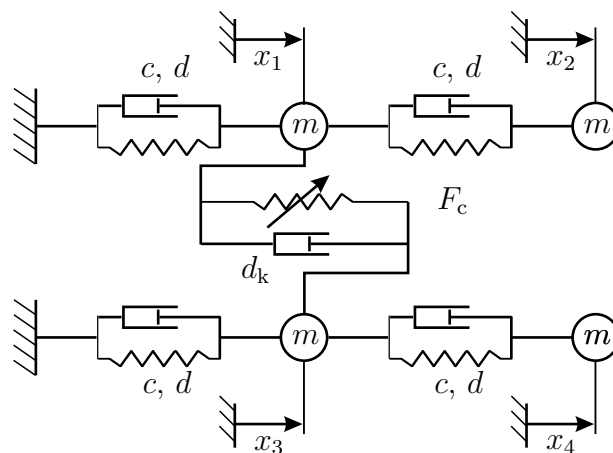
Bild 3.3 zeigt zwei mechanische Zwei-Massen-Schwinger, die durch eine nichtlineare Feder gekoppelt sind. Dieses System wird auch bei allen weiteren in dieser Arbeit beschriebenen Methoden als numerisches Beispiel wieder aufgegriffen.

Im Grenzfall infinitesimal kleiner Schwingungen weist das System die folgenden vier Eigenfrequenzen bei Dämpfung auf:

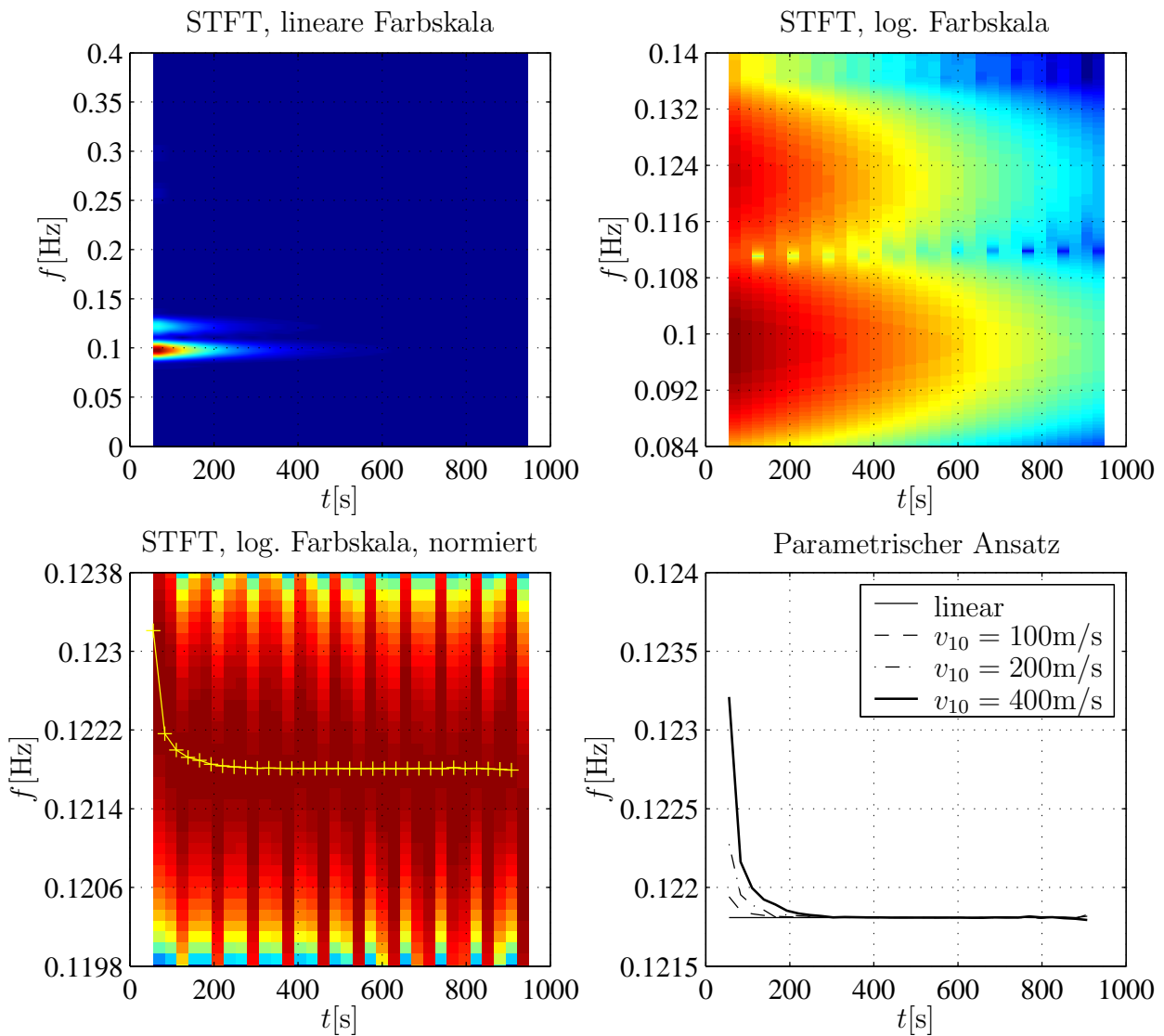
$f_{d1}$	$f_{d2}$	$f_{d3}$	$f_{d4}$	(3.11)
0.098Hz	0.122Hz	0.257Hz	0.294Hz	

Das System wird durch einen Kraftimpuls an Masse 1 (simuliert durch eine Anfangsgeschwindigkeit  $v_{10}$ ) angeregt, ausgewertet wird das Signal  $x_4(t)$ .

In Bild 3.4 sind die Ergebnisse der Auswertung mit parametrischem Ansatz sowie mit der STFT zusammengestellt. Oben links ist der Betrag der STFT in einem großen Frequenzbereich und mit linearer Farbskalierung dargestellt. Die Zeitauflösung wurde durch 80% Überlappung der Analyseabschnitte verfünffacht und die Frequenzauflösung durch Anhängen von Nullen um den Faktor 16 gesteigert ( $\ell_{\text{FFT}} = 16\ell_A$ ). Die vier Eigenfrequenzen liegen paarwei-



**Bild 3.3:** Zwei gekoppelte Zwei-Massen-Schwinger. Parameter:  $m=1$  kg,  $d=0.04$  Ns/m,  $c=1$  N/m,  $F_c(u) = c_k u + \beta u^3$ ,  $c_k=0.5$  N/m,  $\beta=0.00002$  N/m<sup>3</sup>,  $d_k=0$  Ns/m.



**Bild 3.4:** Auswertung der Impulsantwort des Systems aus Bild 3.3 mit der STFT und dem parametrischen Ansatz. Parameter der STFT oben links: Abtastzeit des Signals  $t_S = 0.034\text{s}$ , Abschnittslänge  $\ell_A = 4096$ , Überlappung 80%, Fenstertyp: Hanning, FFT-Länge  $\ell_{\text{FFT}} = 65536$  (Längen in Abtastschritten). Bei den zwei weiteren STFTs wurden abweichend folgende Parameter gewählt:  $t_S^* = t_S/4$ ,  $\ell_A^* = \ell_A/4 = 1024$ . Die Ränder in den Darstellungen sind eine Folge der erforderlichen Abschnittslänge; weil die Auswertergebnisse zeitlich jeweils der Mitte des Abschnitts zugeordnet werden, können dem Zeitpunkt Null noch keine Ergebnisse zugeordnet werden. Gleiches gilt für den rechten Rand. Das vierte Diagramm zeigt die mit dem parametrischen Ansatz ermittelte zeitveränderliche zweite Eigenfrequenz für unterschiedliche Impulsstärken, repräsentiert durch die resultierende Anfangsgeschwindigkeit der ersten Masse.

se so dicht zusammen, dass der Eindruck zweier abklingender Schwingungen entsteht. Oben rechts ist der Frequenzbereich des niederfrequenten Pärchens ausgewählt. Die Frequenzauflösung wurde durch Erhöhung der Abtastzeit  $t_s$  (nach entsprechender Tiefpassfilterung) bei beibehaltener FFT-Länge  $\ell_{\text{FFT}}$  weiter gesteigert. Die zwei Schwingungen sind nun zu unterscheiden. Durch die logarithmisch gewählte Farbskala können die Schwingungen außerdem über den gesamten dargestellten Zeitbereich verfolgt werden.

Im Diagramm unten links ist die Farbskala abschnittsweise normiert, so dass in jedem Zeitabschnitt der gesamte Farbbereich überspannt wird. Nur dadurch ist es möglich, die Frequenzänderung der zweiten Eigenfrequenz sichtbar zu machen, die durch die Nichtlinearität verursacht wird. Anderenfalls wäre der horizontale Farbgradient so groß, dass die Variation in vertikaler Richtung nicht wahrzunehmen wäre. Die dem Bild überlagerte Kurve zeigt die Eigenfrequenzen bei Dämpfung, die mit dem parametrischen Ansatz ermittelt wurden – es zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Die Eigenfrequenzen wurden mit der VATD-Funktion (*Vibration Analysis Time Domain*) der Mess- und Auswertesoftware MEDUSA<sup>2</sup> ermittelt und mit MATLAB visualisiert. Insgesamt wurde je Abschnitt ein viergliedriger Ansatz verwendet, dargestellt ist hier nur die Komponente, die in den dargestellten Frequenzbereich fällt. Die gezeigten Ergebnisse beziehen sich auf eine Simulation mit  $v_{10} = 400\text{m/s}$ . Das Diagramm unten rechts zeigt daneben die Ergebnisse für reduzierte Startgeschwindigkeiten sowie den linearen Fall mit  $\beta = 0$ . Wie zu erwarten, nehmen die Abweichungen von der linearen Eigenfrequenz mit der Schwingungsamplitude ab.

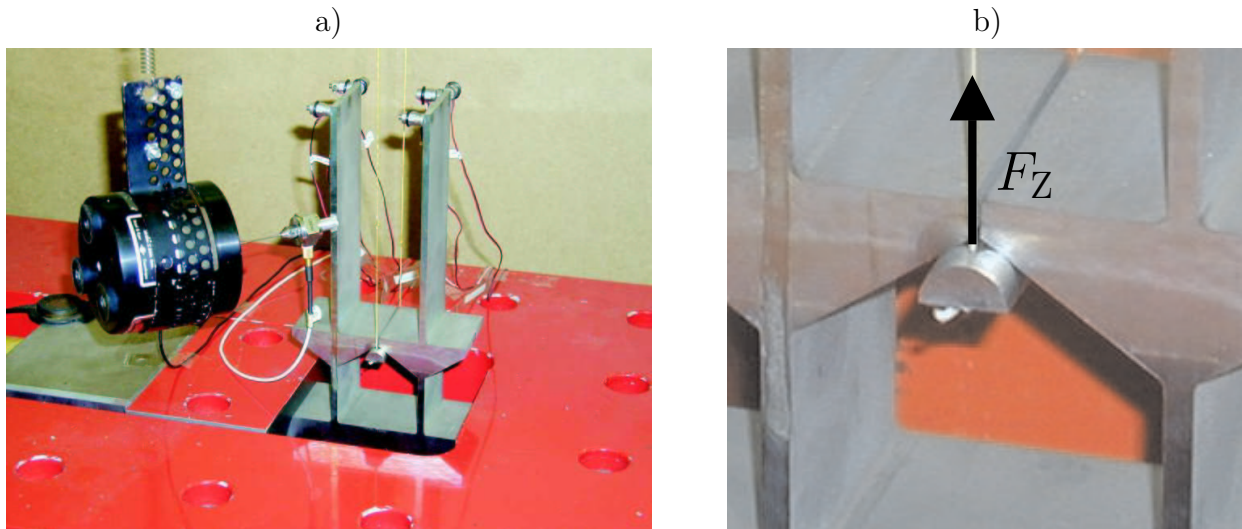
Auf eine Auswertung mit der Wavelet-Transformation wurde bei diesem Beispiel verzichtet. Anhand des folgenden experimentellen Beispiels werden die Nachteile der Wavelet-Transformation für den hier betrachteten Anwendungsfall aufgezeigt.

### 3.4 Beispiel Schaufelpaar

Aufgrund von dynamischen Belastungen kann es an den Schaufeln von Turbomaschinen zu Schäden mit schweren Folgen kommen. Zur Verringerung dieser Belastungen wird die Energiedissipation aufgrund trockener Reibung ausgenutzt. Neben anderen konstruktiven Lösungen kommen Reibelemente unterhalb der Fußplatten benachbarter Schaufeln zum Einsatz, die durch die Fliehkräfte im Betrieb gegen die Unterseiten der Fußplatten gedrückt werden.

---

<sup>2</sup>Informationen unter [www.maschinendynamik.de](http://www.maschinendynamik.de)



Quelle: L. PANNING, [61]

**Bild 3.5:** a) Versuchstand mit zwei Modell-Turbinenschaufeln; b) Ein Reibelement wird über eine Seilvorrichtung mit einer simulierten Zentrifugalkraft  $F_Z$  gegen die Schaufeln gedrückt.

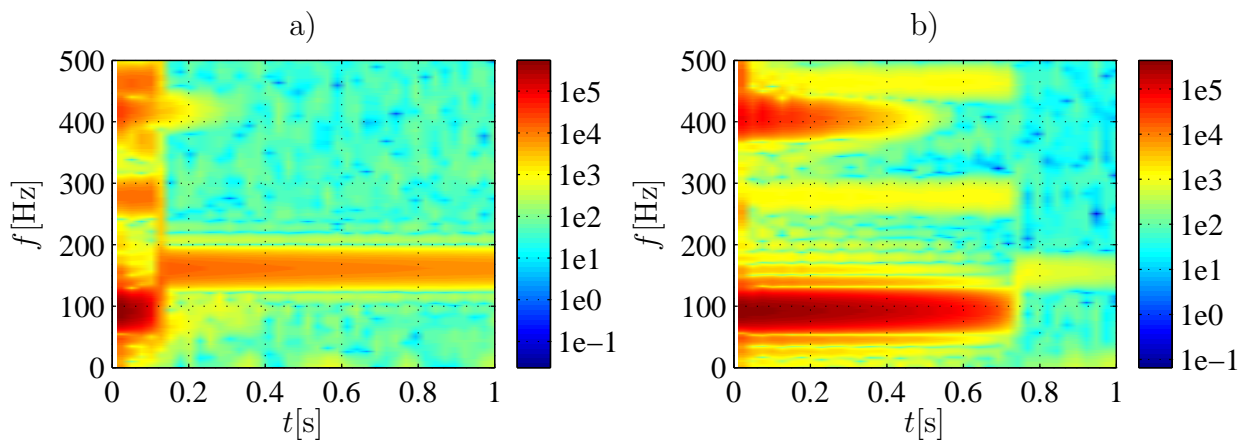
In Abhängigkeit der resultierenden Normalkräfte in den Kontaktflächen verursachen die Relativbewegungen der schwingenden Schaufeln Reibkräfte, die dem System kinetische Energie entziehen und in Wärme umsetzen.

Zur Verifikation von Rechenprogrammen, die zur Auslegung von Reibelementen verwendet werden, existiert am Institut für Mechanik der in Bild 3.5 gezeigte Versuchstand [61]. Dort sind zwei Modellschaufeln über einen Quader an den Füßen verbunden. Diese Anordnung ist aus Vollmaterial gefertigt, um Störeffekte aufgrund zusätzlicher Fügstellen zu vermeiden. Der Quader ist an den Stirnseiten fest eingespannt. Ein Reibelement kann mit definierter, einstellbarer Kraft  $F_Z$  (simulierte Zentrifugalkraft) gegen die Fußplatten des Schaufelpaars gedrückt werden. Eine ausführliche Beschreibung des Versuchstands findet sich in [61].

Die Diagramme in Bild 3.6 zeigen die STFTs von Impulsantworten der angeregten Schaufel des Schaufelpaars aus Bild 3.5. Die Anregung erfolgt mit einem Impulshammer an der Schaufelspitze auf der breiten Seite der Schaufel, so dass die niederfrequenten Biegeschwingungen angeregt werden. Die Messung erfolgt ebenfalls an der Schaufelspitze in Richtung der Anregung. Das Bild zeigt eine Anordnung mit elektrodynamischem Erreger, der während des Impulsversuchs jedoch nicht installiert war.

In beiden Diagrammen dominiert zunächst eine Frequenzkomponente etwas unterhalb von 100Hz, die nach ihrem Abklingen durch eine neue Komponente bei ca. 170Hz abgelöst wird:





**Bild 3.6:** Kurzzeit-Fourier-Transformierte der Impulsantworten der ersten Schaufel des Schaufelpaars aus Bild 3.5 bei a) starker und b) schwacher Dämpfung mit logarithmischer Farbskala. Dargestellt sind die Absolutwerte der Fourier-Koeffizienten aus der DFT. Parameter: Abtastzeit des Signals  $t_s = 50\mu\text{s}$ , Abschnittlänge  $\ell_A = 1024$ , Überlappung 50%, Fenstertyp: Hanning, FFT-Länge  $\ell_{\text{FFT}} = 32768$  (Längen in Abtastschritten).

Bei kleinen Schwingungsamplituden stellt sich Haften in den Reibkontakten ein und das System schwingt in einer höherfrequenten Schwingungsform weiter.

Diagramm a) gehört zu einem im Vergleich zu b) stark gedämpften Impulsversuch. In beiden Fällen wurde die Zeitauflösung durch 50% Überlappung der Analyseabschnitte verdoppelt und die Frequenzauflösung durch Anhängen von Nullen an die Signalabschnitte um den Faktor 32 erhöht. Die Darstellungen lassen weder Aussagen über den Verlauf der Dämpfungsmaße noch detaillierte Aussagen über den Verlauf der Eigenfrequenzen zu. Wegen der durch die Erhöhung der Auflösungen entstandenen Redundanz sowie der Anwendung des Hanning-Fensters ist die Interpretation der Beträge der Koeffizienten schwierig, so dass auf die Angabe einer Einheit verzichtet wird.

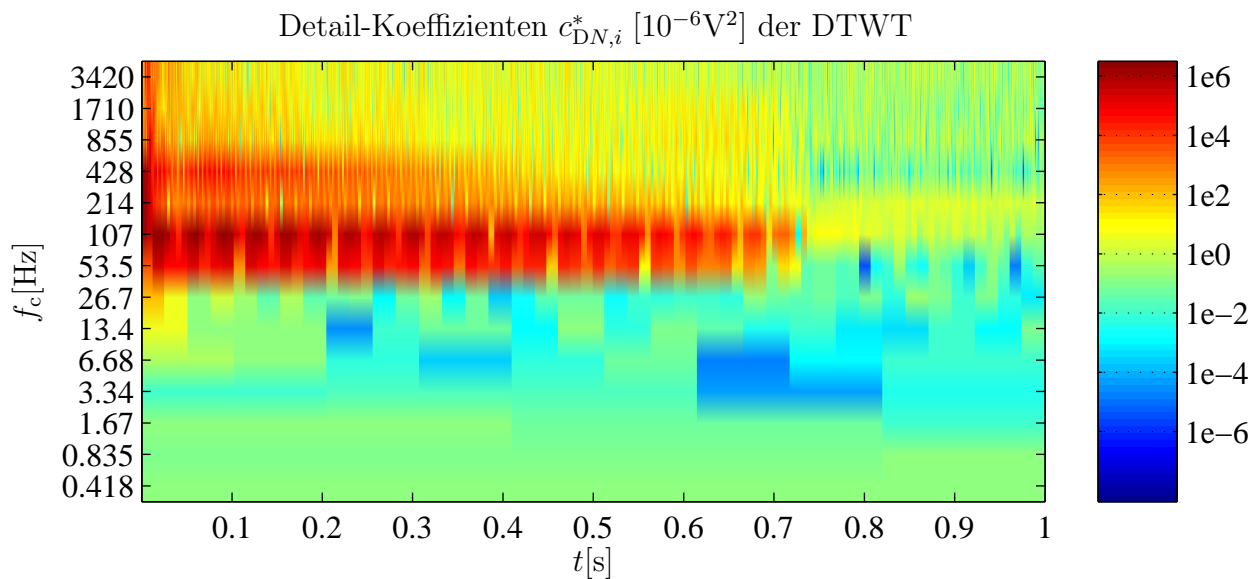
Bild 3.7 zeigt die Wavelet-Transformation der schwach gedämpften Impulsantwort. Die logarithmische Frequenzteilung führt zu einer geringen Frequenzauflösung bei hohen Frequenzen, so dass der dominierende Signalanteil nur einem breiten Frequenzband um 107Hz zugeordnet werden kann. Analoges gilt für den Anteil im Frequenzband um 428Hz. Anders als bei der Fourier-Transformation kann die Frequenzauflösung nicht durch ein Anhängen von Nullen gesteigert werden. Die höchste Frequenz hängt allein von der Abtastfrequenz ab, eine Verlängerung des Signals führt zu zusätzlichen Wavelet-Bändern unterhalb der ursprünglichen

Untergrenze. Eine Erhöhung der Abtastfrequenz, z. B. durch Interpolation, führt zu weiteren Frequenzbändern oberhalb der ursprünglichen Obergrenze.

Die diskrete Wavelet-Transformation ist bzgl. des Rechenaufwands zwar mit der Kurzzeit-Fouriertransformation (auf Basis der FFT) vergleichbar. Sie ist jedoch deutlich schlechter für das hier verfolgte Ziel der Detektion nichtlinearen Systemverhaltens geeignet. Insbesondere sind minimale Schwankungen der Schwingungsfrequenzen nicht aus dem Ergebnis der Transformation abzulesen.

Eine weitere Schwierigkeit zeigt sich in der dem Abklingen der Koeffizienten bei 107Hz überlagerten Oszillation in Bild 3.7. Sie rührt von der fehlenden Zeit-Invarianz der DTWT her: Verschiebt man den zu einem Wavelet-Level gehörenden Signalanteil um ein Vielfaches  $k$  der rechnerischen Länge  $\ell_N$  des entsprechenden Wavelets, so verschieben sich alle Koeffizienten der DTWT um  $k$  Positionen. Ist  $k$  nicht ganzzahlig, so kann dies sogar die Wavelet-Koeffizienten aller Level beeinflussen. Ein Ansatz zur Behebung dieses Problems ist die SWT (Stationary Wavelet Transform), bei der  $2^N$  verschiedene Sätze von Detail-Koeffizienten für den Level  $N$  bestimmt werden, so dass für eine Analyse der Level  $N = 1 \dots N_{\max}$  insgesamt  $\ell_x N_{\max}$  Koeffizienten bestimmt werden, wenn  $\ell_x$  die Länge des zeitdiskreten Signals  $x(k)$  ist. Neben dem erhöhten Rechenaufwand und der entstehenden Redundanz ist die Deutung der Koeffizienten problematisch.

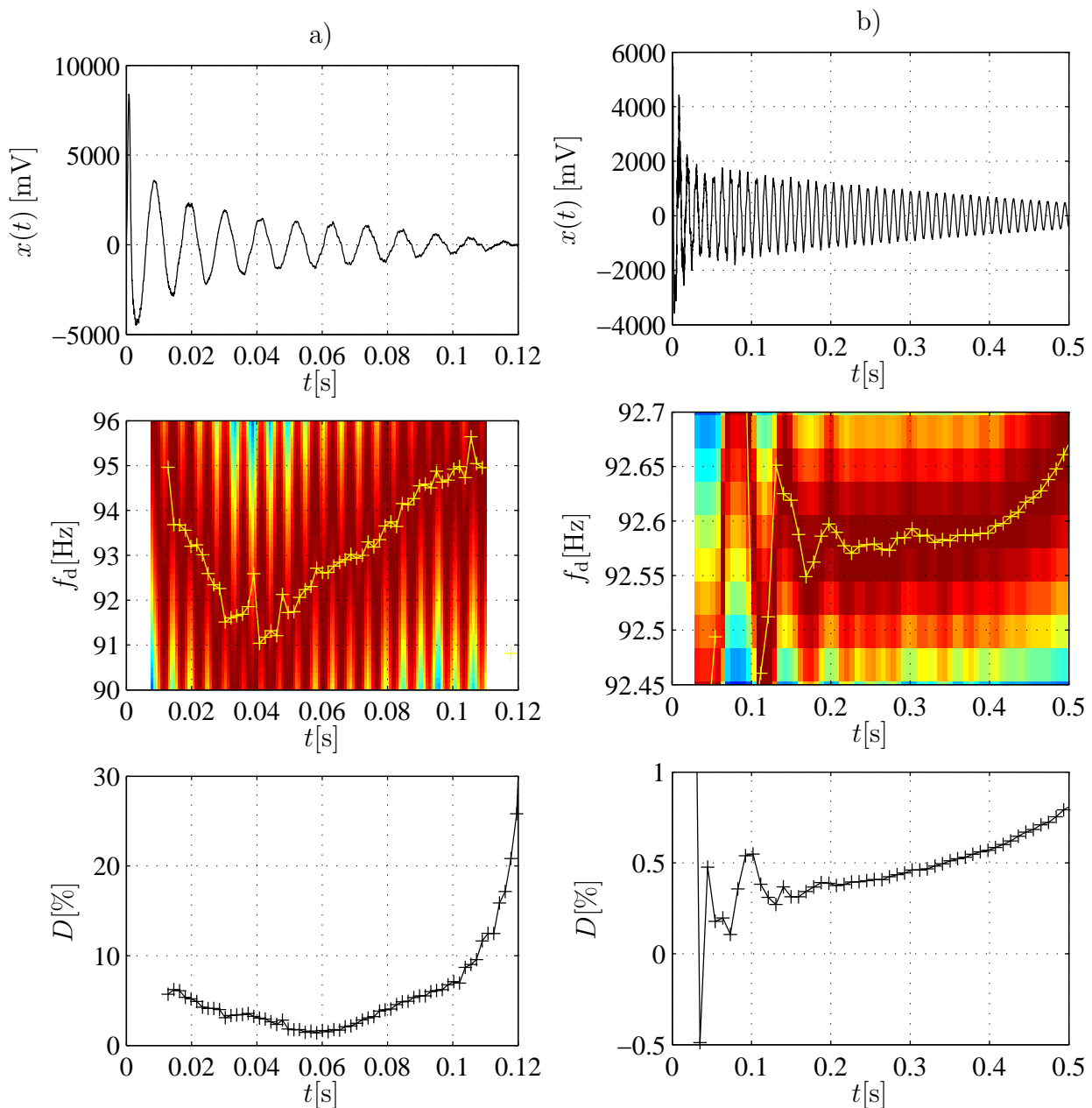
Die oberen Diagramme in Bild 3.8 zeigen Ausschnitte der Zeitverläufe der Sensorsignale während beider Ausschwingversuche. Der Verlauf der jeweils dominierenden Frequenz ist in den mittleren, der des zugehörigen Dämpfungsmaßes in den unteren Diagrammen dargestellt (Linien mit Kreuzsymbolen). Die Parameter wurden wieder mit der VATD-Funktion der Mess- und Auswertesoftware MEDUSA ermittelt. Insgesamt wurde je Abschnitt ein sechsgliedriger Ansatz verwendet, dargestellt ist hier aber nur die Hauptkomponente, deren Schwingungsparameter sich am stärksten ändern. Dem Frequenzverlauf  $f_d(t)$  ist jeweils der korrespondierende Teil der STFT unterlagert, deren Frequenz-Auflösung durch eine Erhöhung der Abtastzeit  $t_S$  (nach entsprechender Tiefpassfilterung) bei beibehaltener FFT-Länge  $\ell_{\text{FFT}}$  (zur Begrenzung des Speicher- und Rechenzeitbedarfs) weiter gesteigert wurde. Zur Sichtbarmachung des Frequenzverlaufs ist der größte Absolutwert der Fourier-Transformierten in jedem Zeitabschnitt auf „1“ normiert, die Information über den Amplitudenverlauf ist deshalb nicht mehr enthalten. Im Fall b) mit geringer Dämpfung ist darüber hinaus in jedem Zeitabschnitt



**Bild 3.7:** Diskrete Wavelet-Transformation DTWT (periodisch) der schwach gedämpften Impulsantwort aus Bild 3.6b mit dem DAUBECHIES-Wavelet „db10“. Dargestellt sind die „leistungsnormierten“ (siehe Kapitel 3.2) Detail-Koeffizienten  $c_{DN,i}^*$  der DTWT. Die Farbskala ist, wie bei den Kurzzeit-Fourier-Transformationen, logarithmisch gewählt. Der besseren Vergleichbarkeit wegen sind die Wavelet-Level in äquivalente Pseudofrequenzen  $f_c$  (siehe Kapitel 3.2) umgerechnet. Die logarithmische Frequenzteilung ist durch die Anwendung der diskreten Wavelet-Transformation bedingt.

der jeweils kleinste Absolutwert auf „0“ normiert und eine lineare Farbskala eingesetzt (der Amplitudenabfall in den ersten Zeitabschnitten ist hier so groß, dass die geringe absolute Amplitudenvariation in Frequenzrichtung in den letzten Zeitabschnitten andernfalls nicht mehr aufgelöst werden könnte).

In beiden Fällen ist die für reibungsbehaftete Schwinger typische Zunahme des Dämpfungsmaßes  $D$  bei abnehmenden Amplituden (bevor Haften eintritt) zu beobachten. Zu Beginn der betrachteten Zeitausschnitte gilt dies scheinbar nicht, die Erklärung dürfte in der noch nicht vollständig vollzogenen Trennung von Schaufel und Impulshammer liegen, die zu einer Verfälschung führt. Die Zunahme der Frequenz der Schwingung ist sehr wahrscheinlich durch eine Zunahme der haftenden Anteile in der Kontaktzone zu erklären, die zu einer Erhöhung der Steifigkeit des Kontaktes führen. Die besonders im Fall a) zunächst zu beobachtende Abnahme der Frequenz und der Dämpfung könnte durch ein Absinken der Gleitreibungskräfte unmittelbar nach Überwinden der Haftreibung zurückzuführen sein.

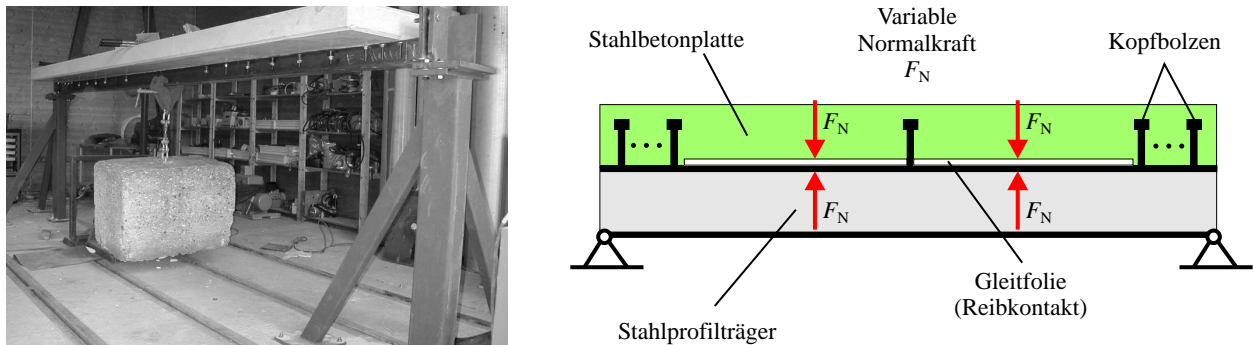


**Bild 3.8:** Impulsantworten der ersten Schaufel des Schaufelpaars bei a) starker und b) schwacher Dämpfung. Neben dem Zeitsignal  $x(t)$  sind die Eigenfrequenz  $f_d$  bei Dämpfung und das Dämpfungsmaß  $D$  der Hauptkomponente dargestellt.

### 3.5 Beispiel Stahl/Beton-Verbundträger

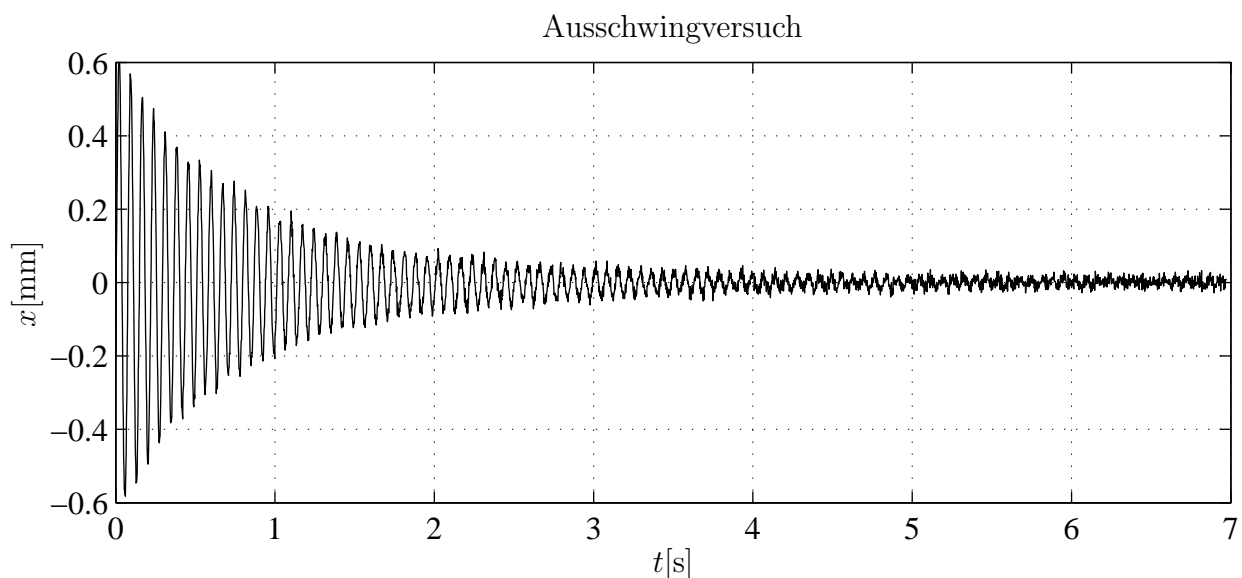
Zur Schwingungsdämpfung in Gebäuden werden u. a. Reibfugen in Stahl/Beton-Verbundträgern verwendet. Bild 3.9 zeigt die Skizze eines solchen Trägers mit einstellbaren Normalkräften  $F_N$ , der in einem Forschungsprojekt [93] zur experimentellen Untersuchung der Dämpfungswirkung genutzt wurde. Das Zeitsignal eines Ausschwingversuchs (aus einer

Anfangsauslenkung) des Trägers zeigt Bild 3.10. Für unterschiedliche Normalkräfte sind in Bild 3.11 die Verläufe des mit dem parametrischen Ansatz ermittelten Dämpfungsmaßes  $D$  und der Eigenfrequenz  $f_d$  bei Dämpfung dargestellt. Die Erhöhung der Normalkraft hat durch die verstärkte Kopplung des Verbunds eine höhere Biegesteifigkeit und damit höhere Eigenfrequenz  $f_d$  zur Folge. Dies zeigt sich bei der Auswertung in einer erhöhten mittleren Eigenfrequenz  $f_d$ , s. Bild 3.11a. Gleichzeitig nimmt durch die behinderte tangentielle Rela-

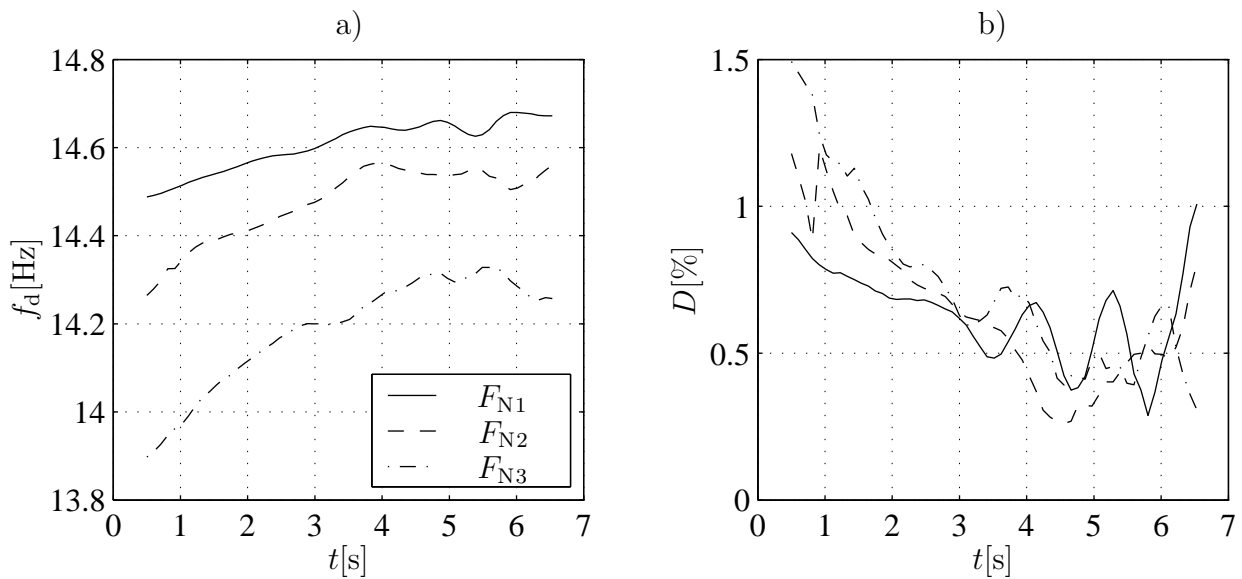


Quelle: A. UHL [93]

**Bild 3.9:** Foto und Skizze eines Stahl/Beton-Verbundträgers mit festen Verdübelungen und zusätzlichen Schraubverbindungen, durch die zusätzliche, einstellbare Normalkräfte  $F_N$  in die Trennfuge eingeleitet werden können.



**Bild 3.10:** Ausschwingversuch des Trägers aus Bild 3.9. Gemessen wurde die Auslenkung  $x$  in der Mitte des Trägers.



**Bild 3.11:** a) Eigenfrequenz  $f_d$  bei Dämpfung und b) Lehrsches Dämpfungsmaß  $D$  des Trägers als Funktion der Zeit für unterschiedliche Normalkräfte  $F_{N1} > F_{N2} > F_{N3}$ .

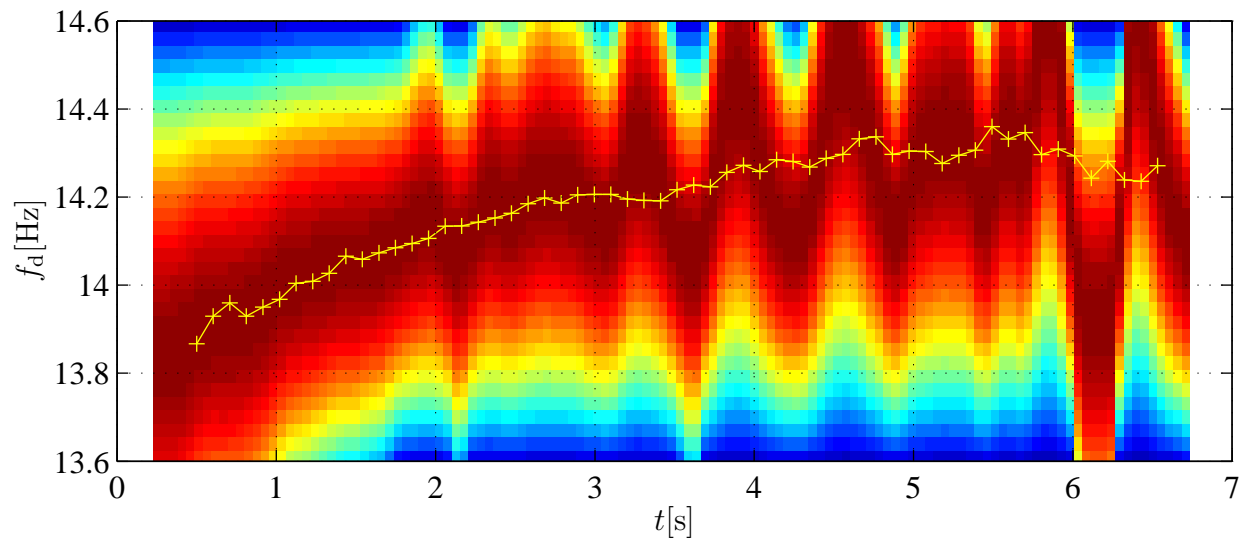
tivbewegung in der Reibfuge die Reibarbeit pro Schwingung ab. Dies zeigt sich in einer abnehmenden mittleren Dämpfung  $D$  bei zunehmender Normalkraft, vgl. Bild 3.11b. Darüber hinaus ist die Variation der Eigenfrequenz über der Zeit bei geringer Normalkraft stärker ausgeprägt als bei den größeren Normalkräften. Eine Erklärung dafür könnte sein, dass bei großen Amplituden der Anteil gleitender Bereiche in der Reibfuge für große Normalkräfte kleiner ist als für kleine Normalkräfte. Damit wäre die Variation haftender Anteile über der Zeit und folglich die Variation der Eigenfrequenz für kleine Normalkräfte größer als für große Normalkräfte.

Die mit der Zeit (bzw. mit der Amplitude) abnehmende Dämpfung lässt sich auf die mit kleiner werdenden Amplituden zunehmend größeren Haftbereiche zurückführen, die keinen Beitrag zur Dämpfung mehr leisten.

Dass der Zeitverlauf der Eigenfrequenz  $f_d$  prinzipiell auch mit der STFT analysiert werden kann zeigt Bild 3.12. Allerdings ist dazu wieder eine entsprechende Anpassung der Zeit- und Frequenzauflösung erforderlich.

### 3.6 Fazit

Impuls- und Ausschwingversuche lassen sich mit geringem Aufwand durchführen. Werden die dabei aufgenommenen Zeitsignale mit Zeit-Frequenz-Transformationen analysiert, können



**Bild 3.12:** Vergleich der mit dem parametrischen Ansatz bestimmten Eigenfrequenz  $f_d$  bei Dämpfung mit dem Ergebnis einer Kurzzeit-Fourier-Transformation. Zur besseren Visualisierung des Frequenzverlaufs wurden die Absolutwerte der Fourier-Koeffizienten in jedem Zeitabschnitt auf den Bereich  $0 \dots 1$  normiert.

die damit sichtbar gemachten Frequenzänderungen einzelner Schwingungen den Rückschluss auf zugrunde liegende Nichtlinearitäten unterstützen. Die untersuchten Beispiele zeigen, dass die Kurzzeit-Fourier-Transformation durch das abschnittsweise Anhängen von Nullen eine feinere Differenzierung im Frequenzbereich erlaubt als die Wavelet-Transformation. Insbesondere bei schnell abklingenden Schwingungen hilft eine abschnittsweise Normierung der Koeffizienten, kleine Frequenzänderungen zu verfolgen.

Für eine direktere Quantifizierung auftretender Frequenzänderungen sowie die Detektion von Dämpfungsvariationen eignet sich die abschnittsweise Auswertung der Zeitsignale mit mehrgliedrigen Ansätzen gedämpfter linearer Schwingungen.

Der Vorteil der Zeit-Frequenz-Transformationen besteht in der Gewinnung eines guten Überblicks über das gesamte Schwingungsgeschehen und in der Eindeutigkeit des Ergebnisses. Die Bestimmung der Parameter von Ansätzen gedämpfter Schwingungen führt auf ein nichtlineares Minimierungsproblem mit dem Risiko startwertabhängiger Ergebnisse. Durch Kombination beider Verfahren lässt sich ein guter Überblick mit einer genauen Quantifizierung verbinden und eine Verifizierung der Einzelergebnisse erreichen.

## 4 Hilbert-Transformation

Die Anwendung der HILBERT-Transformation<sup>3</sup> zur Erkennung von Nichtlinearitäten in mechanischen Strukturen wurde zuerst in [78], [79] und später in [89], [94], [70], [12], [11], [24] demonstriert. Dabei wird ausgenutzt, dass der Realteil der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\underline{s})$  eines linearen SISO-Systems für  $\underline{s} = j\omega$  (Frequenzgang) unter bestimmten (später beschriebenen) Voraussetzungen aus dem Imaginärteil berechnet werden kann und umgekehrt. Liegt ein nichtlineares System zugrunde (der Begriff „Übertragungsfunktion“ ist für lineare Systeme reserviert, der Begriff „Frequenzgang“ wird aber im Folgenden sowohl bei linearen als auch bei nichtlinearen Systemen angewendet), ergeben sich Abweichungen im Real- und Imaginärteil, deren Größe auf die Stärke des nichtlinearen Einflusses schließen lässt.

Der Vollständigkeit halber sei aber zunächst die alternative Anwendung der HILBERT-Transformation in der Analyse amplituden- und phasenmodulierter Signale erwähnt. Die HILBERT-Transformierte eines reellen Zeitsignals  $x(t)$ , definiert als [66, 9]

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{H}[x(t)] = \int_{t^*=-\infty}^{\infty} \frac{x(t^*)}{\pi(t-t^*)} dt^*, \quad (4.1)$$

ergänzt  $x(t)$  um den Imaginärteil  $\tilde{x}(t)$  des komplexen sog. *analytischen Signals*

$$\underline{z}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t), \quad (4.2)$$

das auch in der Form

$$\underline{z}(t) = A(t)e^{j\phi(t)} \quad (4.3)$$

dargestellt werden kann. Dabei wird  $A(t)$  als Einhüllende (engl.: *envelope signal*) und  $\phi(t)$  als momentane Phase (engl.: *instantaneous phase*) bezeichnet. Für eine Schwingung mit zeitabhängigen Parametern ist damit jederzeit eine Amplitude  $A(t)$  und eine Frequenz

$$f_0(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \quad (4.4)$$

definiert.

---

<sup>3</sup>benannt nach dem deutschen Mathematiker DAVID HILBERT, 1862-1943



Bei der Anwendung auf Übertragungsfunktionen  $\underline{G}(\underline{s})$  werden sowohl Zusammenhänge zwischen Real- und Imaginärteil als auch zwischen Betrag und Phase als HILBERT-Transformationen bezeichnet [56]. Im Folgenden wird ausschließlich der Zusammenhang zwischen Real- und Imaginärteil betrachtet.

## 4.1 Definition und Herleitung

Die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\underline{s})$  (die Laplace-Transformierte der Impulsantwort  $g(t)$ ) eines linearen, asymptotisch stabilen Systems ist eine komplexe, gebrochen rationale Funktion, deren Pole sämtlich in der linken Hälfte der komplexen  $\underline{s}$ -Ebene liegen. Auf der imaginären Achse und in der rechten  $\underline{s}$ -Halbebene ist  $\underline{G}(\underline{s})$  daher differenzierbar, und damit eine analytische Funktion, so dass dort die CAUCHYSche Integralformel<sup>4</sup> [13] angewandt werden darf. Danach ist der Funktionswert an jedem beliebigen Punkt  $\underline{s} = \sigma + j\omega$  innerhalb eines analytischen Bereichs mit den Funktionswerten an seinem Rand  $\Gamma$  durch das Kurvenintegral

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \frac{\underline{G}(\underline{s}^*)}{\underline{s}^* - \underline{s}} d\underline{s}^* \quad (4.5)$$

verknüpft.

Für einen Punkt  $\underline{s} = j\omega$  zeigt Bild 4.1 einen Integrationsweg, der für  $r \rightarrow 0$  die (ausschließlich in der linken Halbebene liegenden) Pole von  $\underline{G}$  vermeidet. Teilt man den Integrationsweg, wie dargestellt, in vier Teile auf,

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4, \quad (4.6)$$

so folgt für die Übertragungsfunktion

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} \quad (4.7)$$

eines nicht sprunghafigen Systems ( $m < n$ ) für  $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\underline{G}(\underline{s}^*)}{\underline{s}^* - j\omega} d\underline{s}^* = 0, \quad (4.8)$$

sowie für  $r \rightarrow 0$

$$\int_{\Gamma_3} \frac{\underline{G}(\underline{s}^*)}{\underline{s}^* - j\omega} d\underline{s}^* = j\pi \underline{G}(j\omega) \quad (4.9)$$

---

<sup>4</sup>benannt nach A. L. CAUCHY, 1789-1857

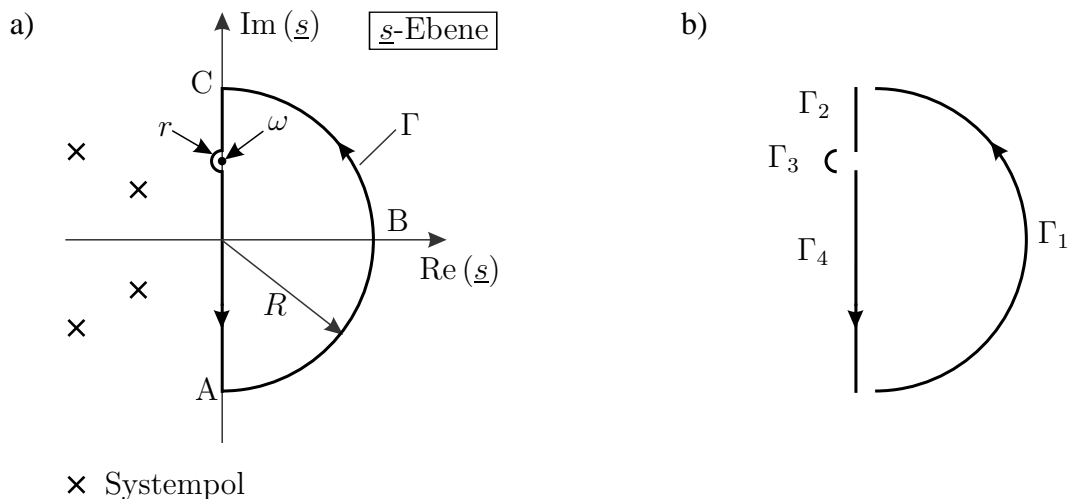
und

$$\int_{\Gamma_2} \frac{\underline{G}(\underline{s}^*)}{\underline{s}^* - j\omega} d\underline{s}^* + \int_{\Gamma_4} \frac{\underline{G}(\underline{s}^*)}{\underline{s}^* - j\omega} d\underline{s}^* = \text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{-\infty} \frac{\underline{G}(j\Omega)}{j\Omega - j\omega} (j d\Omega) = -\text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{G}(j\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad (4.10)$$

Dabei bezeichnet „V.p.“ den CAUCHYSchen Hauptwert des Integrals – zur Umgehung der Diskontinuität bei  $\Omega = \omega$  wird bei der Integration ein symmetrischer Bereich der Breite  $b$  um  $\omega$  ausgelassen. Der Grenzwert des Integrals für  $b \rightarrow 0$  wird als CAUCHYScher Hauptwert des Integrals bezeichnet. Fasst man die Teilintegrale zusammen und setzt sie in (4.5) ein, so ergibt sich die Beziehung

$$\underline{G}(j\omega) = -\frac{1}{\pi j} \text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \frac{\underline{G}(j\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega, \quad (4.11)$$

die in der Signalverarbeitung auch als HILBERT-Transformation  $\mathcal{H}\{\underline{G}(j\omega)\}$  bezeichnet wird (vgl. z.B. [79]). Da die Argumente von  $\underline{G}$  im Folgenden stets auf der imaginären (d.h. Frequenz-) Achse liegen und keine Verwechslungsgefahr besteht, wird die imaginäre Einheit im Argument nicht mehr explizit aufgeführt, d.h.  $\underline{G}(j\omega)$  wird  $\underline{G}(\omega)$  abgekürzt. So lässt sich die HILBERT-Transformation als Faltung des komplexen Frequenzgangs  $\underline{G}(\omega)$  mit der



**Bild 4.1:** a) Geschlossener Integrationsweg  $\Gamma$  zur Auswertung der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\underline{s})$  an der Stelle  $\underline{s} = j\omega$  mit der CAUCHYSchen Integralformel. Für  $r \rightarrow 0$  werden die (sämtlich in der linken Halbebene liegenden) Systempole nicht umschlossen. b) Zerlegung von  $\Gamma$ .

komplexen Funktion  $\underline{U}(\omega) = -\frac{j}{\pi\omega}$  darstellen,

$$\underline{H}(\omega) = \mathcal{H}\{\underline{G}(\omega)\} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{G}(\omega) * \underline{U}(\omega) = \text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \underline{G}(\Omega) \left( -\frac{j}{\pi(\omega - \Omega)} \right) d\Omega. \quad (4.12)$$

Der Herleitung entsprechend stellt (4.12) für die Übertragungsfunktion eines linearen, stabilen Systems eine Invarianz-Transformation dar, falls die Ordnung des Zählerpolynoms kleiner als die des Nennerpolynoms ist (dies gilt z. B. nicht für eine Beschleunigungs-Übertragungsfunktion, wenn Messung und Kraftanregung am selben Freiheitsgrad erfolgen). Eine Abweichung zwischen  $\underline{G}(\omega)$  und  $\underline{H}(\omega)$  kann daher auf eine Nichtlinearität hindeuten. In [79] wurde die HILBERT-Transformation erstmals als Linearitätstest vorgeschlagen.

Der Vollständigkeit halber soll hier eine alternative Herleitung der HILBERT-Transformation im Zeitbereich skizziert werden (eine detailliertere Darstellung findet sich in [89, 12]).

Ist ein Signal  $g(t)$  kausal, d. h.

$$g(t) = 0 \quad \text{für } t < 0, \quad (4.13)$$

so kann es durch

$$g_g(t) = \frac{1}{2}(g(t) + g(-t)) \quad (4.14)$$

$$g_u(t) = \frac{1}{2}(g(t) - g(-t)) \quad (4.15)$$

in seinen geraden (Index g) und ungeraden (Index u) Anteil zerlegt werden,

$$g(t) = g_g(t) + g_u(t). \quad (4.16)$$

Zwischen beiden Anteilen gilt mit der Vorzeichen-Funktion  $\text{sgn}(t)$  die Beziehung

$$g_g(t) = g_u(t)\text{sgn}(t), \quad g_u(t) = g_g(t)\text{sgn}(t). \quad (4.17)$$

Wenn  $g(t)$  die Impulsantwort eines stabilen linearen Systems ist, so gilt für Real- und Imaginärteil der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$

$$\begin{aligned} \text{Re}(\underline{G}(\omega)) &= \mathcal{F}\{g_g(t)\} \\ \text{Im}(\underline{G}(\omega)) &= \mathcal{F}\{g_u(t)\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Da die Multiplikation im Zeitbereich einer Faltung im Frequenzbereich entspricht, folgt durch Einsetzen von (4.17) in (4.18) und Berücksichtigung von  $\underline{U}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = -\frac{j}{\pi\omega}$  das bereits aus (4.12) bekannte Faltungsintegral

$$\underline{G}(\omega) = \underline{G}(\omega) * \underline{U}(\omega) = \text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \underline{G}(\Omega) \left( -\frac{j}{\pi(\omega - \Omega)} \right) d\Omega. \quad (4.19)$$

An einem realen System kann der Frequenzgang i.d.R. nur in einem begrenzten Frequenzbereich  $\omega_u \leq \omega \leq \omega_o$  gemessen werden. Für die in (4.19) dann nicht berücksichtigten Frequenzbereiche können sog. Korrekturterme hinzu addiert werden, die auf analytischen Lösungen der Integrale für angenommene Fortsetzungen des gemessenen Frequenzgangs beruhen. Korrekturterme nach HAOUI, FEI und SIMON werden u. a. in [12] wiedergegeben. Dabei sind die Terme nach HAOUI und FEI nur für  $\omega_u = 0$  einsetzbar. Die Terme nach SIMON unterliegen dieser Einschränkung zwar nicht, vernachlässigen aber den Dämpfungseinfluss, so dass schwache Dämpfung vorausgesetzt werden muss, um den Approximationsfehler klein zu halten (begünstigend wirkt, dass die Korrekturterme nur abseits der Resonanz eingesetzt werden).

Um diese Einschränkungen zu umgehen, werden in dieser Arbeit Korrekturterme verwendet, die auf einer Fortsetzung des Frequenzgangs mit beliebigen Frequenzgängen nicht sprungfähiger, stabiler linearer Systeme basieren. Dazu werden die Parameter des gebrochen rationalen Polynoms

$$\underline{G}(\underline{s}) = \frac{b_0 + b_1\underline{s} + \dots + b_m\underline{s}^m}{a_0 + a_1\underline{s} + \dots + a_n\underline{s}^n} \quad (4.20)$$

durch Anpassung des Modell-Frequenzgangs mit  $\underline{s} = j\omega$  an den unteren bzw. oberen Rand des gemessenen Frequenzgangs ermittelt. Nach einer Partialbruchzerlegung werden dann komponentenweise die entsprechenden Korrekturterme berechnet. Die analytischen Ausdrücke für die Korrekturterme können leicht mit Programmpaketen wie MAPLE berechnet und z. B. in das Paket MATLAB exportiert werden.

## 4.2 Wahl der Systemerregung

Der Frequenzgang eines linearen Systems lässt sich durch verschiedene Anregungssignale bestimmen, die (theoretisch) zu gleichen Ergebnissen führen. Typische Beispiele sind

- Rauschen
- Impuls
- Gestufter Sinus.

Bei nichtlinearen Systemen hängt der berechnete Frequenzgang vom Typ der Anregung ab und die Eignung der Signale zur Detektion nichtlinearen Systemverhaltens ist unterschiedlich

gut.

Die Rauschanregung hat den Nachteil, dass von Nichtlinearitäten verursachte Signalanteile im zeitlichen Mittel verschwinden und ist damit für die hier verfolgte Zielsetzung der Detektion von Nichtlinearitäten nicht geeignet.

Die Bedeutung der Impulsanregung liegt in ihrer besonders einfachen praktischen Durchführung. In Kapitel 3 wurde gezeigt, wie Impulsantworten zur Erkennung nichtlinearen Systemverhaltens verwendet werden können. Leider ist die HILBERT-Transformation als Linearitätstest nicht auf mit Hilfe der Impulsanregung gewonnene Frequenzgänge anwendbar. Eine gemessene Impulsantwort  $g(t)$  repräsentiert ein kausales Signal ( $g(t) = 0$  für  $t < 0$ ), siehe (4.13), und erfüllt damit die Bedingung, durch die die HILBERT-Transformation für den zugehörigen Frequenzgang  $\underline{G}(\omega)$  eine Invarianz-Transformation wird. Dies gilt ebenso für lineare wie für nichtlineare Systeme, so dass die Linearität auf diese Weise nicht überprüft werden kann (siehe hierzu auch Kapitel 4.5).

Bei Anregung mit gestuften Sinussignalen lässt sich der Wert des komplexen Frequenzgangs direkt aus dem Quotienten der komplexen stationären Amplituden des Antwort- und Anregungssignals bestimmen. Durch die Konzentration der Leistung auf eine Frequenz können zudem größere Amplituden als bei Rausch- oder Impulserregung erzielt werden. Auf Basis der so bestimmten Frequenzgänge lassen sich Nichtlinearitäten erkennen. Dies lässt sich zwar nicht beweisen, aber es sind keine Gegenbeispiele bekannt. Sofern im Folgenden experimentelle oder per Zeitschrittintegration bestimmte Frequenzgänge untersucht werden, wurde die Anregung mit gestuftem Sinus vorgenommen.

Für eine ausführlichere Darstellung der Auswirkung der Systemerregung sei auf [35, 12] verwiesen.

### 4.3 Berechnung mit der FFT

In der Praxis wird der Frequenzgang  $\underline{G}(\omega)$  aus (4.12) nur an diskreten Stützstellen  $\omega_k$  innerhalb eines begrenzten Frequenzbereichs  $\omega_u \dots \omega_o$  gemessen. Bei Verwendung eines regelmäßigen Rasters (Rasterweite  $\Delta\omega$ ) und  $N$  Stützstellen gilt etwa

$$\omega_u = k_u \Delta\omega, \quad \omega_o = k_o \Delta\omega, \quad k_o - k_u = N - 1. \quad (4.21)$$

Mit den Symmetrien

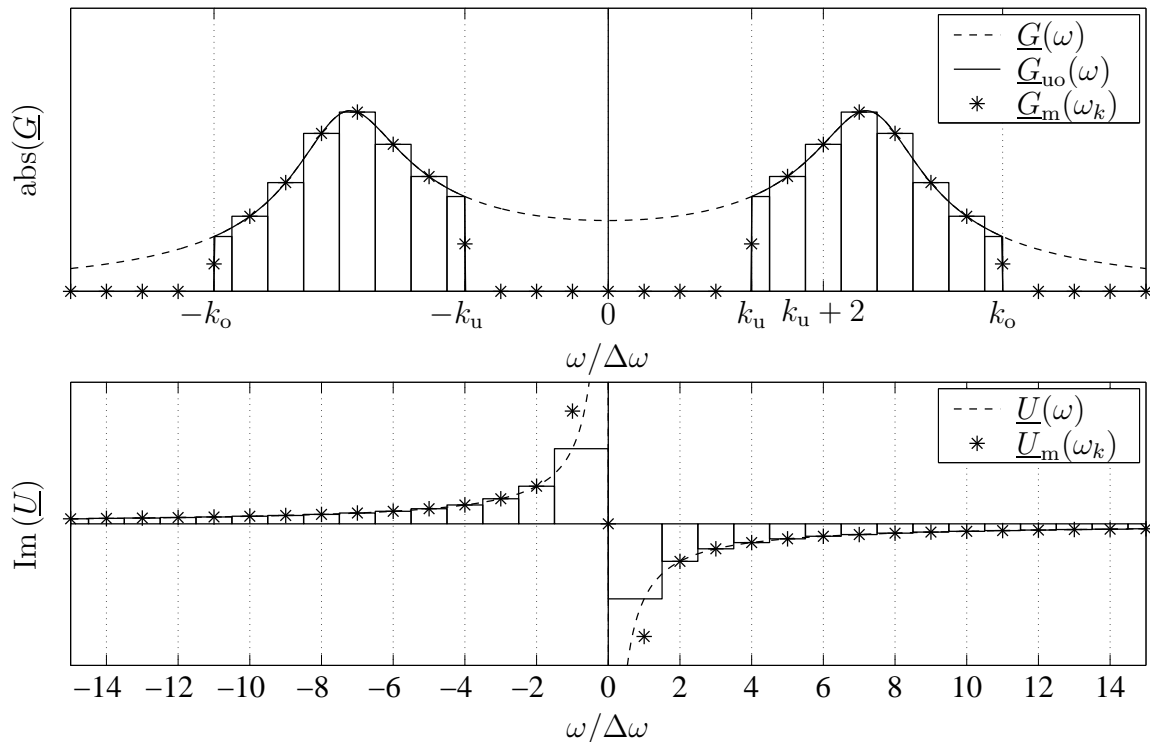
$$\operatorname{Re}(\underline{G}(-\omega)) = \operatorname{Re}(\underline{G}(\omega)) \quad (4.22)$$

$$\operatorname{Im}(\underline{G}(-\omega)) = -\operatorname{Im}(\underline{G}(\omega))$$

von Übertragungsfunktionen mit reellen und konjugiert komplexen Polen und Nullstellen ist der Frequenzgang auch im korrespondierenden negativen Frequenzbereich  $-\omega_o \dots -\omega_u$  bekannt (siehe Bild 4.2). Die nach (4.12) mit  $\underline{G}(\omega)$  zu faltende Funktion  $\underline{U}(\omega)$  ist ebenfalls in Bild 4.2 dargestellt.

Wie bereits erwähnt, werden die nicht durch Messungen abgedeckten Frequenzbereiche von  $\underline{G}(\omega)$  bei der Faltung getrennt durch Korrekturterme berücksichtigt. An dieser Stelle wird daher für die Faltung der Frequenzgang  $\underline{G}_{uo}(\omega)$  verwendet, der außerhalb des durch Messungen bekannten Bereichs zu Null gesetzt ist (siehe Bild 4.2).

Weil der Frequenzgang nur an diskreten Stützstellen  $\omega_k$  bekannt ist (im Folgenden gilt die



**Bild 4.2:** Oben: Frequenzgang  $\underline{G}(\omega)$ , Frequenzgang  $\underline{G}_{uo}(\omega)$  innerhalb der Grenzen  $\omega_u \dots \omega_o$  der Messung und diskreter, modifizierter Frequenzgang  $\underline{G}_m(\omega_k)$ . Unten: Funktion  $\underline{U}(\omega)$  (s. Text) und diskrete, modifizierte Variante  $\underline{U}_m(\omega_k)$ .

Abkürzung  $\underline{G}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{G}(\omega_k)$ , bietet sich die Approximation des Faltungsintegrals durch eine Summe von Rechteckflächen

$$\underline{H}_m(k) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \underline{G}_m(\ell) \underline{U}_m(k - \ell) \Delta\omega \approx \text{V.p.} \int_{\Omega=-\infty}^{\infty} \underline{G}_{\text{uo}}(\Omega) \underline{U}(\omega_k - \Omega) d\Omega \quad (4.23)$$

an. Dabei ist  $\underline{G}_m(k)$  der durch die Stützstellen der Messung definierte, modifizierte diskrete Frequenzgang, dessen Werte an den Rändern halbiert sind (weil sie nur mit halber Gewichtung in das Integral eingehen sollen – Trapezregel, siehe Bild 4.2).  $\underline{U}_m(k)$  ist die modifizierte diskrete Variante von  $\underline{U}(\omega)$ , deren Polstelle bei  $k = 0$  unberücksichtigt bleibt ( $\underline{U}_m(0) = 0$ ), während die benachbarten Werte  $\underline{U}_m(-1)$  und  $\underline{U}_m(+1)$  zur Kompensation um 50% vergrößert sind. Die Beschränkung der (unendlichen) Faltungssumme auf die nicht verschwindenden Summanden führt auf zwei endliche Teilsummen

$$\underline{H}_m(k) = \left( \sum_{\ell=-k_o}^{-k_u} \underline{G}_m(\ell) \underline{U}_m(k - \ell) + \sum_{\ell=k_u}^{k_o} \underline{G}_m(\ell) \underline{U}_m(k - \ell) \right) \Delta\omega, \quad (4.24)$$

vgl. auch Bild 4.3. Der Aufwand für die Berechnung aller  $N$  Faltungssummen  $\underline{H}_m(k = k_u \dots k_o)$  steigt quadratisch mit der Anzahl  $N$  der Stützstellen.

Da die *periodische* Faltung zweier (komplexer) Folgen  $\underline{g}(k)$  und  $\underline{h}(k)$  der Länge  $n$ ,

$$\underline{g}(k) \circledast \underline{h}(k) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\ell=0}^{n-1} \underline{g}(\ell) \underline{h}([k - \ell] \text{ modulo } n), \quad (4.25)$$

mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation (DFT) *exakt* durch eine Multiplikation der diskreten Fourier-Transformierten ersetzt werden kann [56],

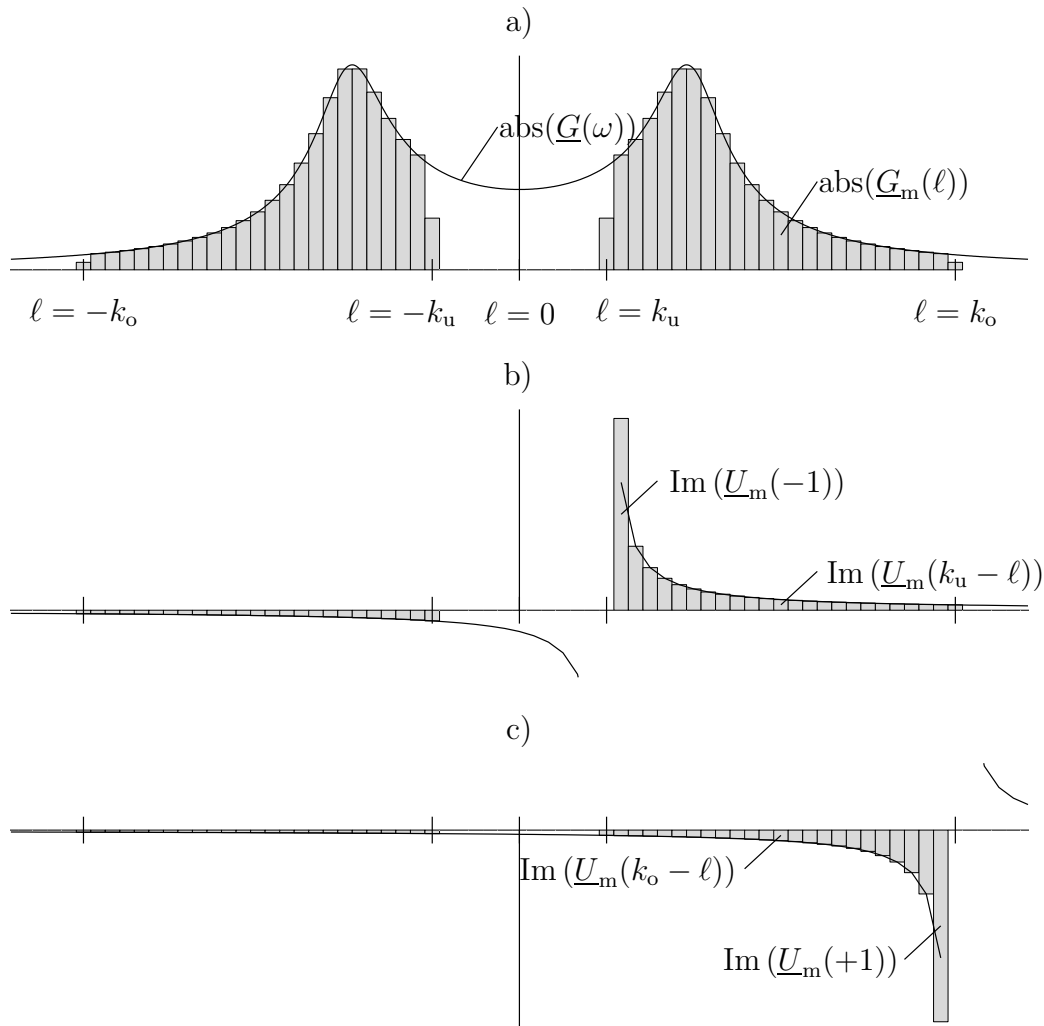
$$\underline{g}(k) \circledast \underline{h}(k) = \text{iDFT} \left( \text{DFT}(\underline{g}(k)) \text{DFT}(\underline{h}(k)) \right), \quad (4.26)$$

lohnt es, die *linearen* Faltungssummen in (4.24) durch *periodische* Faltungen zu ersetzen. Die Auswertung der Faltungssummen  $\underline{H}_m(k)$  ist dabei nur im Bereich  $k = k_u \dots k_o$  nötig, für den auch Messungen  $\underline{G}(k)$  vorliegen.

Zunächst wird die zweite Teilsumme von (4.24) (positiver Frequenzbereich) für  $k = k_u \dots k_o$  ausgewertet. Dazu ordnet man die  $N$  nicht verschwindenden Werte des positiven Frequenzgangs (Randwerte halbiert), in einer Folge

$$\underline{g}_{m+}(k) = \begin{cases} \underline{G}_m(k + k_u), & k = 0 \dots (N - 1) \\ 0, & k = N \dots (2N - 2) \end{cases} \quad (4.27)$$

an, die um  $(N - 1)$  zusätzliche Nullen erweitert wird, vgl. Bild 4.4a. Die Erweiterung ist notwendig, weil andernfalls die periodische Implementation der linearen Faltung zu ungewollten Zusatztermen führen würde. Die für die Faltung relevanten Werte der Funktion  $\underline{U}_m(k)$  wer-



**Bild 4.3:** a) Absolutwert der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$ . Die diskreten Stützstellen  $\underline{G}_m(\ell)$  sind durch Rechteckflächen repräsentiert (Randwerte halbiert). b) Die zur Auswertung der Faltungssumme  $\underline{H}_m(k = k_u)$  mit  $\underline{G}_m(\ell)$  zu multiplizierende Folge  $\underline{U}_m(k_u - \ell)$  c) Die zur Auswertung der Faltungssumme  $\underline{H}_m(k = k_o)$  mit  $\underline{G}_m(\ell)$  zu multiplizierende Folge  $\underline{U}_m(k_o - \ell)$ . Weil  $\underline{U}_m(0)$  zur Aussparung der Singulärstelle auf Null gesetzt ist, sind die Nachbarwerte  $\underline{U}_m(-1)$  und  $\underline{U}_m(+1)$  jeweils um 50% vergrößert.



den in der Folge

$$\underline{u}_{m+}(k) = \begin{cases} \underline{U}_m(k), & k = 0 \dots (N-1) \\ \underline{U}_m(k-2N+1), & k = N \dots (2N-2) \end{cases} \quad (4.28)$$

(vgl. Bild 4.4a) angeordnet. Die periodische Faltung

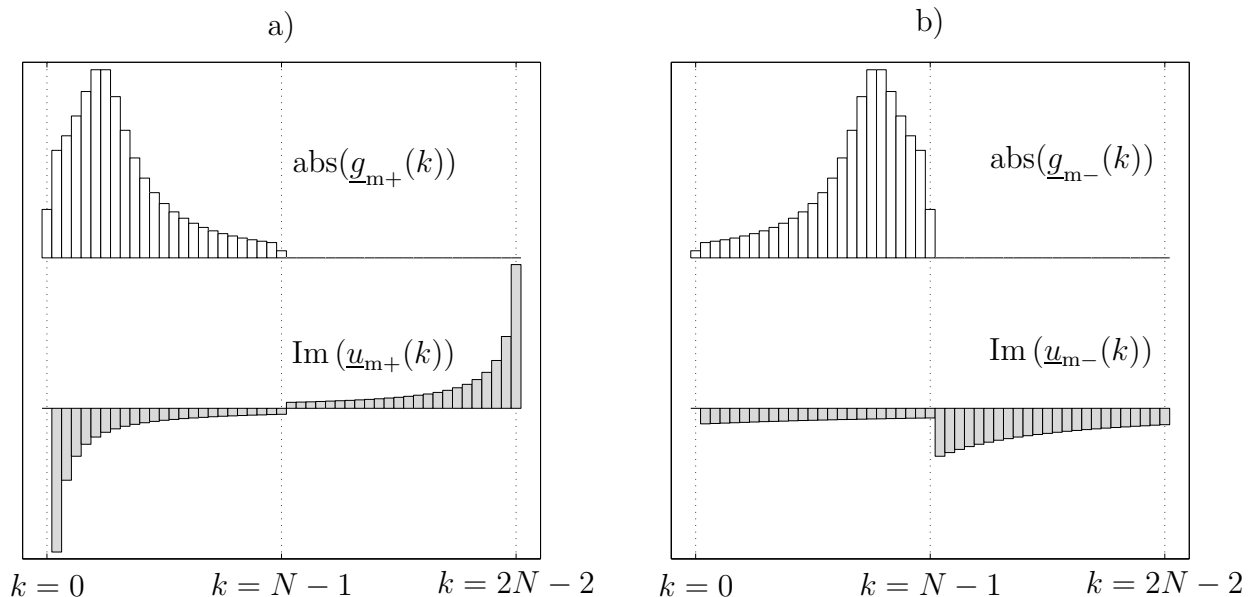
$$\underline{h}_{m+}(k) = \underline{g}_{m+}(k) \circledast \underline{u}_{m+}(k) = \text{iDFT} \left( \text{DFT}(\underline{g}_{m+}(k)) \text{DFT}(\underline{u}_{m+}(k)) \right) \quad (4.29)$$

beider Folgen (jeweils Länge  $2N-1$ ), die in Bild 4.5 näher erläutert wird, führt auf eine komplexe Folge  $\underline{h}_{m+}(k)$  (ebenfalls Länge  $2N-1$ ), deren erste  $N$  Elemente die Ergebnisse der zweiten Teilsumme aus (4.24) für  $k = k_u \dots k_o$  darstellen.

Die noch unberücksichtigte erste Teilsumme aufgrund des negativen Frequenzbereichs des Frequenzgangs ergibt sich analog durch

$$\underline{g}_{m-}(k) = \begin{cases} \underline{G}_m(k-k_o), & k = 0 \dots (N-1) \\ 0, & k = N \dots (2N-2) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\underline{u}_{m-}(k) = \begin{cases} \underline{U}_m(k+k_u+k_o), & k = 0 \dots (N-1) \\ \underline{U}_m(k-2N+1+k_u+k_o), & k = N \dots (2N-2) \end{cases} \quad (4.31)$$



**Bild 4.4:** Die periodisch zu faltenden Folgen im a) positiven Frequenzbereich ( $\underline{g}_{m+}(k)$ ,  $\underline{u}_{m+}(k)$ ) und b) negativen Frequenzbereich ( $\underline{g}_{m-}(k)$ ,  $\underline{u}_{m-}(k)$ ), siehe Text.

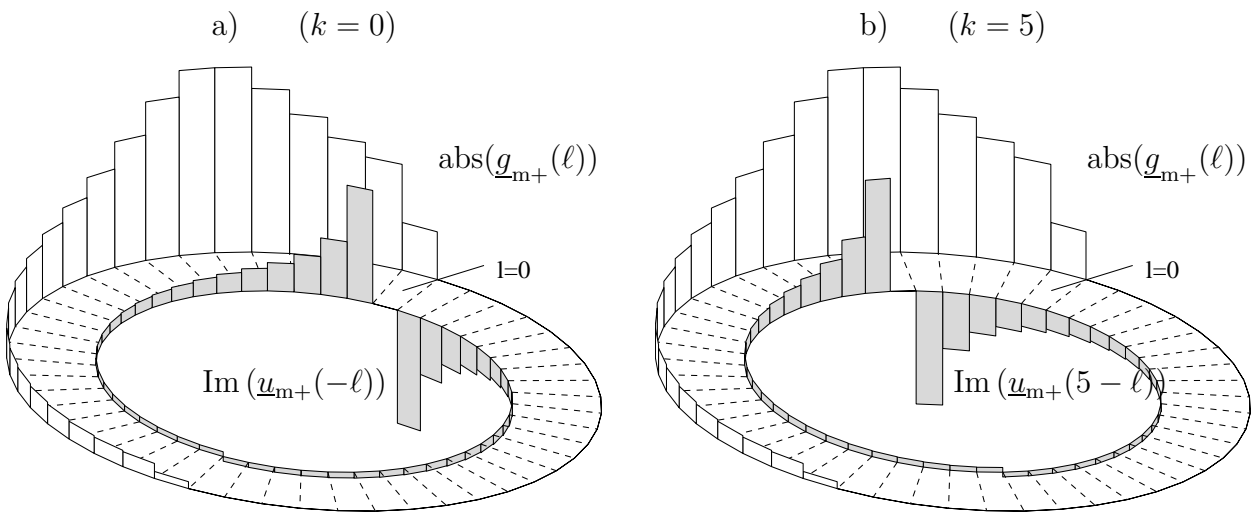
$$\underline{h}_{m-}(k) = \underline{g}_{m-}(k) \circledast \underline{u}_{m-}(k) = \text{iDFT} \left( \text{DFT} \left( \underline{g}_{m-}(k) \right) \text{DFT} \left( \underline{u}_{m-}(k) \right) \right). \quad (4.32)$$

Da der kleinste Frequenzindex im negativen Frequenzbereich,  $-k_o$ , um  $k_u + k_o$  kleiner ist als der im positiven Frequenzbereich,  $k_u$ , sind hier die Indizes für  $\underline{G}_m$  um  $k_u + k_o$  kleiner und für  $\underline{U}_m$ , aufgrund der Faltung, um  $k_u + k_o$  größer als oben.

Die gesuchte Faltungssumme  $\underline{H}_m(k)$  ergibt sich schließlich durch Addition der Teilergebnisse,

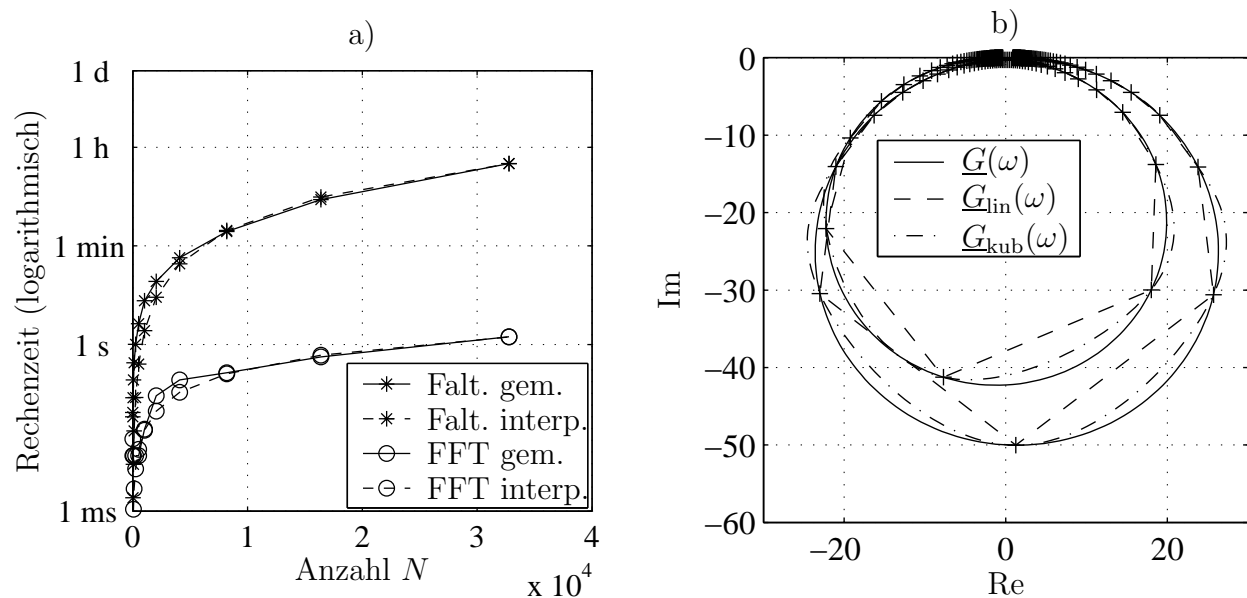
$$\underline{H}_m(k_u + k) = [\underline{h}_{m-}(k) + \underline{h}_{m+}(k)] \Delta\omega, \quad k = 0 \dots (N - 1). \quad (4.33)$$

Durch die Verwendung der FFT ist der Rechenaufwand der beschriebenen Methode näherungsweise proportional zu  $N \log(N)$ , während der Aufwand bei direkter Berechnung der Faltungssummen näherungsweise proportional zu  $N^2$  ist. Bild 4.6a zeigt den daraus resultierenden erheblichen Zeitvorteil der erstgenannten Methode. Dieser kann z. B. genutzt werden, um bei einer vorab durchgeführten Interpolation des Frequenzgangs noch vertretbare Rechenzeiten zu gewährleisten.



**Bild 4.5:** a) Zur Veranschaulichung der periodischen Faltung  $\underline{h}_{m+}(k) = \underline{g}_{m+}(k) \circledast \underline{u}_{m+}(k)$  wird  $\underline{g}_{m+}(k)$  im mathematisch positiven Sinn auf einen Zylinder gewickelt,  $\underline{u}_{m+}(k)$  im negativen Sinn auf einen kleineren, konzentrischen Zylinder. Das erste Element  $\underline{h}_{m+}(k=0)$  des Ergebnisses ergibt sich nun durch Summation über alle Produkte einander gegenüberliegender Elemente beider Folgen. Alle weiteren Elemente erhält man durch schrittweises Drehen des inneren Zylinders im positiven Sinn. b) Die Situation bei der Berechnung von  $\underline{h}_{m+}(k=5)$ .

In [89] wird eine ähnliche Beschleunigung des Rechenverfahrens durch Auswertung der HILBERT-Transformation im Zeitbereich beschrieben. Der Faltung im Frequenzbereich entspricht eine einfache Multiplikation im Zeitbereich. Im Unterschied zu der hier dargestellten Methode wird also zunächst die inverse und dann die einfache diskrete Fourier-Transformation angewendet. Die zwei Methoden unterscheiden sich dabei lediglich durch einen konstanten Faktor und das Vorzeichen des komplexen Exponenten. Vor Anwendung der inversen diskreten Fourier-Transformation muss der Frequenzgang dort für  $\omega_u > 0$  im Bereich  $\omega = 0 \dots \omega_u$  mit Nullen aufgefüllt werden, dies ist bei der hier dargestellten Methode nicht erforderlich. Weil die Argumentation in [89] sich zunächst auf kontinuierliche Zeit- und Frequenzdar-



**Bild 4.6:** a) Benötigte Rechenzeit zur Durchführung der HILBERT-Transformation in Abhängigkeit der Anzahl  $N$  der Messwerte (Implementation in MATLAB auf einem Pentium III 600Mhz). Die gemessene (gem.) Rechenzeit zur Berechnung der Faltungssummen (Falt.) ist näherungsweise proportional zu  $N^2$  (interp.), während der Zeitaufwand bei Verwendung der FFT näherungsweise proportional zu  $N \log(N)$  ist. Zur Transformation von  $N = 2^{15} = 32768$  Werten werden 1830s bzw. 1.4s benötigt. b) NYQUIST-Diagramm der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$  eines linearen 2FHG-Schwingers mit linearer ( $\underline{G}_{lin}$ ) und kubischer Spline-Interpolation ( $\underline{G}_{kub}$ ) des Real- und Imaginärteils zwischen den Stützpunkten (+).

stellungen stützt, führt die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation außerdem zu Fehlern, die durch ein „optimiertes HILBERT-Fenster“ korrigiert werden müssen. Für den Sonderfall  $\omega_u = 0$  führen beide Wege auf das gleiche Ergebnis.

Der Vorteil der hier verwendeten Ableitung besteht in

- der direkten Anwendbarkeit auf den allgemeinen Fall  $\omega_u > 0$  und
- dem Nachweis der exakten Übereinstimmung mit (4.24),

durch den die bei der diskreten Berechnung des kontinuierlichen Integrals auftretenden Näherungen sehr anschaulich werden. Die den genannten Vorteilen entsprechenden Nachteile der Darstellung in [89] sind möglicherweise die Ursache dafür, dass der Algorithmus trotz der erheblichen Geschwindigkeitsvorteile gegenüber der direkten Berechnung der Faltungsgänge in späteren Arbeiten (z. B. [12, 24]) nicht zum Einsatz kam.

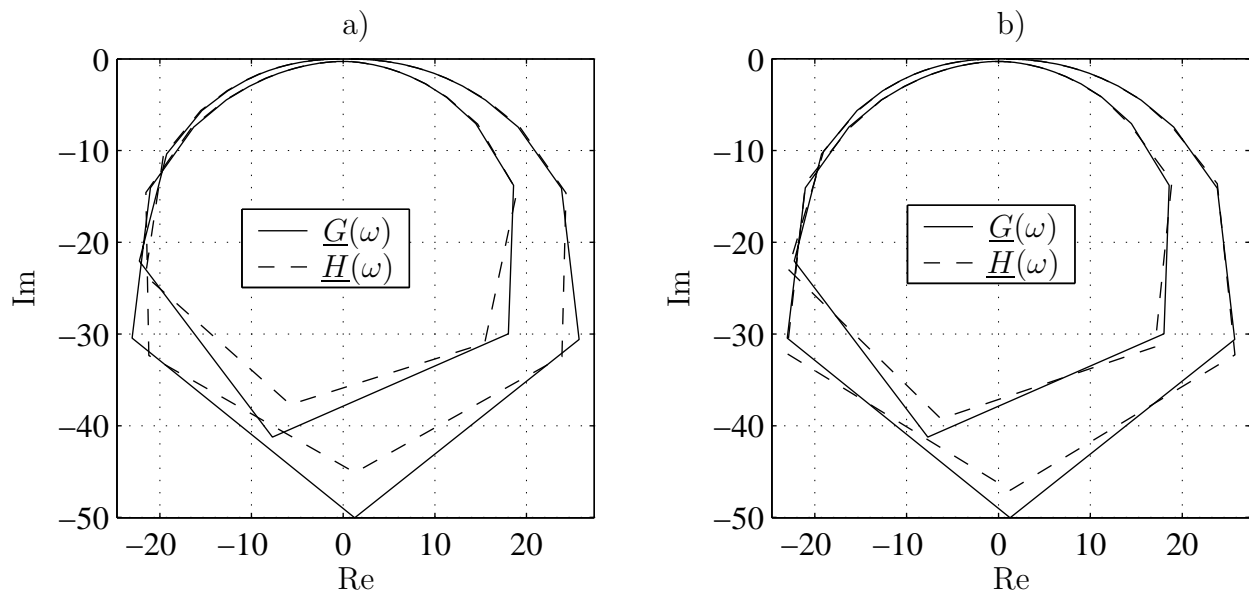
#### 4.4 Berechnung durch Interpolation im Frequenzbereich

Alternativ zur einfachen Faltungssumme (4.24) [79, 12], die, wie gezeigt, mit der FFT sehr effizient berechnet werden kann, bietet sich die Interpolation des Frequenzgangs  $\underline{G}(\omega)$  zwischen den Stützstellen an, die dann die abschnittsweise Auswertung des Faltungsganges (4.12) erlaubt. Mit den Symmetrien (4.22) des Frequenzgangs kann die Integration zunächst auf die positive Frequenzachse beschränkt werden. Durch anschließende Aufteilung von (4.12) in den Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\underline{H}(\omega)) &= -\frac{2}{\pi} \text{V.p.} \int_{\Omega=0}^{+\infty} \operatorname{Im}(\underline{G}(\Omega)) \frac{\Omega}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega \\ \operatorname{Im}(\underline{H}(\omega)) &= \frac{2\omega}{\pi} \text{V.p.} \int_{\Omega=0}^{+\infty} \operatorname{Re}(\underline{G}(\Omega)) \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Die Bestimmung der Faltungssumme (4.24) mit halber Gewichtung der Randwerte entspricht einer linearen Interpolation der *Integranden* in (4.12) bzw. (4.34).

Dabei handelt es sich um eine unnötig vereinfachte Interpolation. Jeder der Integranden in (4.34) ist das Produkt einer vollständig bekannten Funktion von  $\Omega$  und des nur an den Stützstellen  $\Omega_k$  bekannten Real- bzw. Imaginärteils von  $\underline{G}(\Omega)$ . Mit einer polynomialen Interpolation des Real- und Imaginärteils von  $\underline{G}(\Omega)$  zwischen den Stützstellen kann der Beitrag



**Bild 4.7:** NYQUIST-Diagramme der Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$  aus Bild 4.6b und die zugehörige HILBERT-Transformierte  $\underline{H}(\omega)$  bei geringer Frequenzauflösung. a) Berechnung der HILBERT-Transformierten über die Faltungssumme (4.24). b) Berechnung der HILBERT-Transformierten mit kubischer Spline-Interpolation des Real- und Imaginärteils der Übertragungsfunktion. Die „Knicke“ der Ortskurven resultieren aus der für die Darstellung gewählten linearen Interpolation zwischen den diskreten Stützstellen.

jedes Abschnitts zu den Integralen analytisch angegeben werden. Summation über alle Abschnitte ergibt schließlich den Wert des Integrals (im Bereich  $\Omega = \omega_u \dots \omega_o$  der Messung).

Bild 4.6b zeigt die Übertragungsfunktion  $\underline{G}(\omega)$  eines linearen 2FHG-Schwingers und das Resultat  $\underline{G}_{\text{kub}}(\omega)$  einer kubischen Spline-Interpolation zwischen den Stützstellen (markiert durch „+“-Symbole). Im direkten Vergleich ergeben sich bei linearer Interpolation deutlich größere Abweichungen. Zur *Darstellung* von Ortskurven, die nur an diskreten Stützstellen bekannt sind, wird jedoch im Folgenden stets die lineare Interpolation gewählt, da die „Ecken“ leicht als Stützstellen („+“) interpretierbar sind. Die Stützstellen werden, der übersichtlicheren Darstellung wegen, nicht mehr gesondert markiert. Bild 4.7 zeigt die Übertragungsfunktion aus Bild 4.6b und die zugehörige HILBERT-Transformierte. Die Berechnung über die Faltungssumme (Bild 4.7a) führt auf deutlich größere Abweichungen als die Integration auf der Basis der kubisch interpolierten Übertragungsfunktion (Bild 4.7b).

## 4.5 Diskrete Formulierung der Hilbert-Transformation

Die kontinuierliche HILBERT-Transformation (4.12) kann wegen ihrer *diskretisierten* Implementation prinzipiell nur näherungsweise berechnet werden. Eine echt *diskrete* HILBERT-Transformation im Frequenzbereich wird in [56] beschrieben.

Dazu wird der in (4.13) definierte Kausalitätsbegriff für ein kontinuierliches, unendlich ausgedehntes Signal ( $g(t) = 0$  für  $t < 0$ ) auf eine endliche Folge  $g(k = 0 \dots N - 1)$  übertragen:

$$g(k) = 0 \text{ für } N/2 < k \leq N - 1. \quad (4.35)$$

Der Zusammenhang zur Definition (4.13) entsteht durch periodische Fortsetzung der endlichen Folge, es gilt dann  $g(k) = 0$  für  $-N/2 < k < 0$ .

Für geradzahliges  $N$  folgen aus (4.35) die Zusammenhänge [56]

$$j\underline{G}_I(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \underline{G}_R(m) \underline{V}_N(k-m) \quad (4.36)$$

$$\underline{G}_R(k) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} j\underline{G}_I(m) \underline{V}_N(k-m) + g(0) + g(N/2)(-1)^k \quad (4.37)$$

zwischen dem Realteil  $\underline{G}_R(k)$  und dem Imaginärteil  $\underline{G}_I(k)$  der diskreten Fourier-Transformierten von  $g(k)$ . Dabei ist

$$\underline{V}_N(k) = \begin{cases} -j2 \cot(\frac{k\pi}{N}), & k \text{ ungerade} \\ 0, & k \text{ gerade} \end{cases}. \quad (4.38)$$

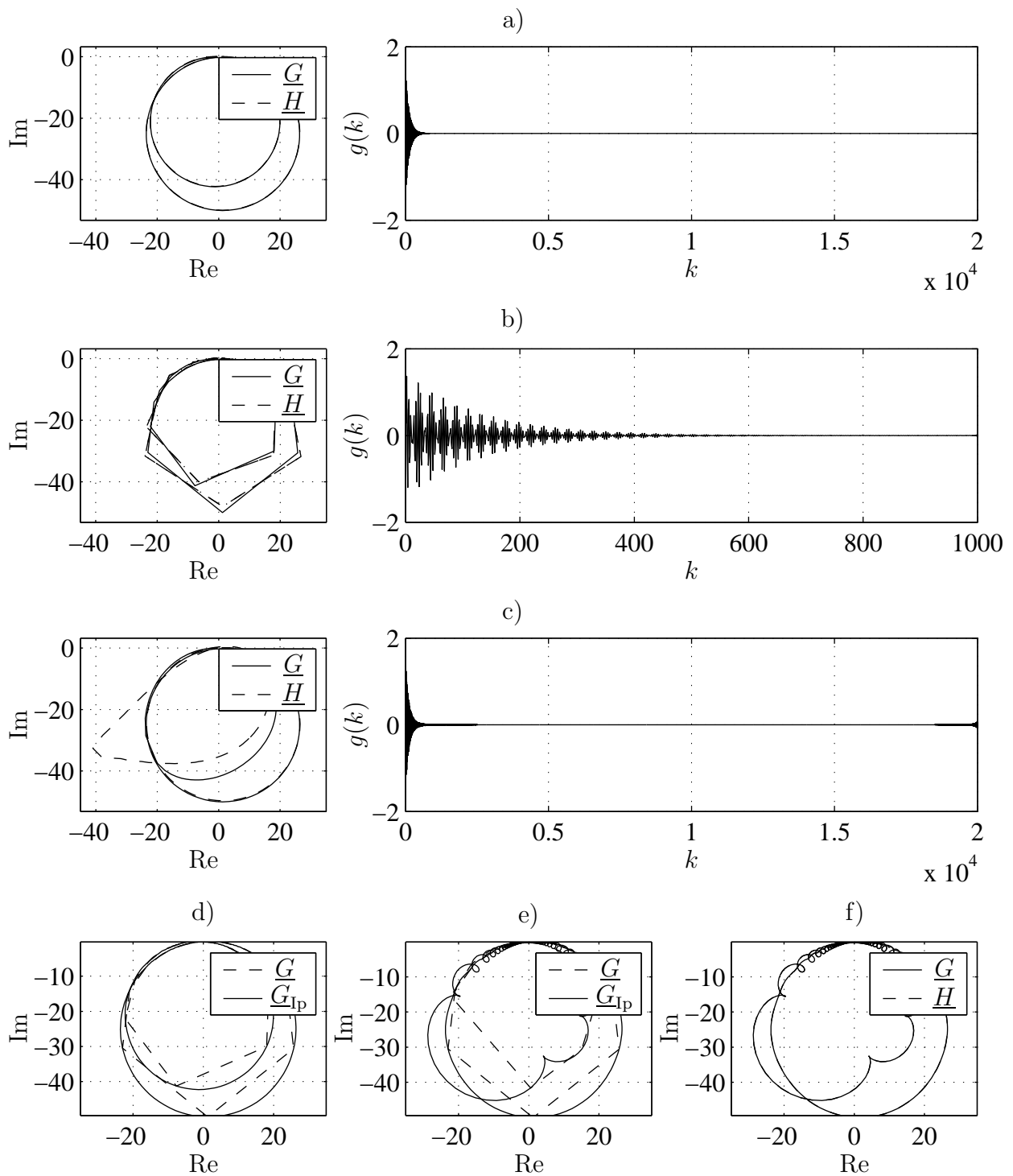
Es besteht somit eine exakte Transformationsvorschrift zwischen dem Real- und Imaginärteil einer diskreten Fourier-Transformierten, die jedoch nur gültig ist, wenn die zugehörige endliche Folge in der zweiten Hälfte identisch Null ist, vgl. (4.35).

Am Beispiel des linearen Frequenzgangs aus Bild 4.6b sollen nun die Auswirkungen endlicher Frequenzobergrenze und endlicher Frequenzauflösung auf das Ergebnis der diskreten HILBERT-Transformation dargestellt werden.

Der komplexe Frequenzgang  $\underline{G}(\omega)$  sei an  $m$  Stützstellen  $\omega_k = k\Delta\omega$ ,  $k = 0 \dots m - 1$  bekannt,  $m$  sei eine gerade natürliche Zahl. Nach Erweiterung des Frequenzgangs

$$\underline{G}(2m - 2 - k) = \text{conj}(\underline{G}(k)), \quad k = 1 \dots m - 2 \quad (4.39)$$

um die konjugiert komplexen Anteile für die Frequenzen oberhalb der Shannon-Grenze ergibt sich eine diskrete Fourier-Transformierte der Länge  $N = 2m - 2$ , aus der durch inverse DFT eine Signalfolge  $g(k)$  der Länge  $N$  (siehe Bild 4.8a) entsteht.



**Bild 4.8:** a) Komplexer, hoch aufgelöster diskreter Frequenzgang  $\underline{G}(k)$  aus Bild 4.6b und zugehörige inverse Fourier-Transformierte  $g(k)$ ; b) Einfluss einer reduzierten Frequenzauflösung; c) Einfluss einer kubisch progressiven Federkraft; d) linearer Frequenzgang  $\underline{G}(k)$  aus b) mit Interpolation  $\underline{G}_{Ip}$ ; e) nichtlinearer Frequenzgang  $\underline{G}(k)$  aus c) mit Interpolation  $\underline{G}_{Ip}$ ; f) nichtlinearer Frequenzgang  $\underline{G}$  und HILBERT-Transformierte  $\underline{H}$ .

Bild 4.8b zeigt die Auswirkung einer stark verringerten Frequenzauflösung  $\frac{1}{\Delta\omega}$ . Die Anwendung der inversen DFT auf das so erhaltene Spektrum führt im Wesentlichen zu einer Verkürzung der Signalfolge  $g(k)$ , da die tiefste im Spektrum enthaltene Frequenz (abgesehen vom Gleichanteil) vergrößert wird. Da  $g(k)$  die Impulsfolge eines gedämpften Schwingers darstellt, führt die Verkürzung dazu, dass das Signal in seiner zweiten Hälfte deutlich weniger stark abgeklungen ist. Damit wird die der diskreten HILBERT-Transformation zugrunde liegende Voraussetzung (4.35) stärker verletzt als bei hoher Frequenzauflösung. Als Konsequenz ergeben sich leichte Abweichungen zwischen Frequenzgang  $\underline{G}$  und HILBERT-Transformierter  $\underline{H}$ .

In Bild 4.8c entspricht die Frequenzauflösung wieder der in Bild 4.8a. Das zugrunde liegende System enthält jetzt eine kubisch progressive Federsteifigkeit, deren Auswirkung deutlich in der Abweichung der HILBERT-Transformierten sichtbar wird. Im Zeitbereich zeigt sich der nichtlineare Effekt in nichtkausalen Anteilen von  $g(k)$  am Ende des Zeitausschnitts.

Der Versuch einer Interpolation des Frequenzgangs durch Anhängen von Nullen im Zeitbereich zur Vermeidung des Effektes aus Bild 4.8b ist in Bild 4.8d-f dargestellt. Während der interpolierte Frequenzgang  $\underline{G}_{ip}$  im linearen Fall (Bild 4.8d) dem wahren Verlauf (Bild 4.8a) sehr nahe kommt, ergeben sich im nichtlinearen Fall (Bild 4.8e) deutliche Verzerrungen gegenüber (Bild 4.8c). Noch schwerwiegender ist jedoch die durch das Anhängen von Nullen erzwungene Kausalität der Folge im Zeitbereich. Die HILBERT-Transformation kann die Nichtlinearität nicht mehr detektieren, wie der Vergleich (Bild 4.8f) von interpoliertem Frequenzgang  $\underline{G}$  und zugehöriger HILBERT-Transformierter  $\underline{H}$  zeigt.

Die durch die begrenzte Frequenzauflösung gemessener Frequenzgänge auftretenden Schwierigkeiten bei der Anwendung der HILBERT-Transformation können also durch eine diskrete Formulierung *nicht* umgangen werden. Auch die im Zusammenhang mit der FFT oft angewandte Erhöhung der Frequenzauflösung durch Anhängen von Nullen an das Zeitsignal führt bei der HILBERT-Transformation nicht zu dem gewünschten Ergebnis.

## 4.6 Anwendung auf typische Nichtlinearitäten

Die oberen Diagramme von Bild 4.9 zeigen Frequenzgänge numerisch simulierter 1FHG-Schwinger mit kubisch progressiver/degressiver Federkraft bzw. kubisch progressiver Dämpfungskraft bei harmonischer Anregung  $u(\tau) = u_0 \cos(\eta\tau)$  für verschiedene Anregungsampli-



tuden  $u_0$ . Die Frequenzgänge sind als Funktion des Frequenzverhältnisses  $\eta$  dargestellt. Die Differentialgleichung des Schwingers mit *kubisch progressiver/degressiver Federkraft* lautet

$$x''(\tau) + 2Dx'(\tau) + x(1 + \beta x^2(\tau)) = u(\tau) \quad (4.40)$$

( $\beta > 0$ : DUFFING-Schwinger), die des Schwingers mit *kubisch progressiver Dämpfungskraft* (RAYLEIGH-Schwinger)

$$x''(\tau) + 2D(1 + \alpha[x'(\tau)]^2)x'(\tau) + x(\tau) = u(\tau). \quad (4.41)$$

Im NYQUIST-Diagramm sind Abweichungen zwischen den Übertragungsfunktionen  $\underline{G}$  und ihren HILBERT-Transformierten  $\underline{H}$  zu sehen, die für jede der betrachteten Nichtlinearitäten eine andere, charakteristische Form aufweisen. Der mit zunehmender Anregungsamplitude  $u_0$  zunehmende Einfluss der nichtlinearen Effekte spiegelt sich zudem in der Größe der Abweichungen wider.

Bild 4.10a zeigt entsprechende Ergebnisse für den einfachen Schwinger mit *Makroschlupf-Reibelement* (= 1 *Elasto-Gleit-Element*, siehe Anhang A)

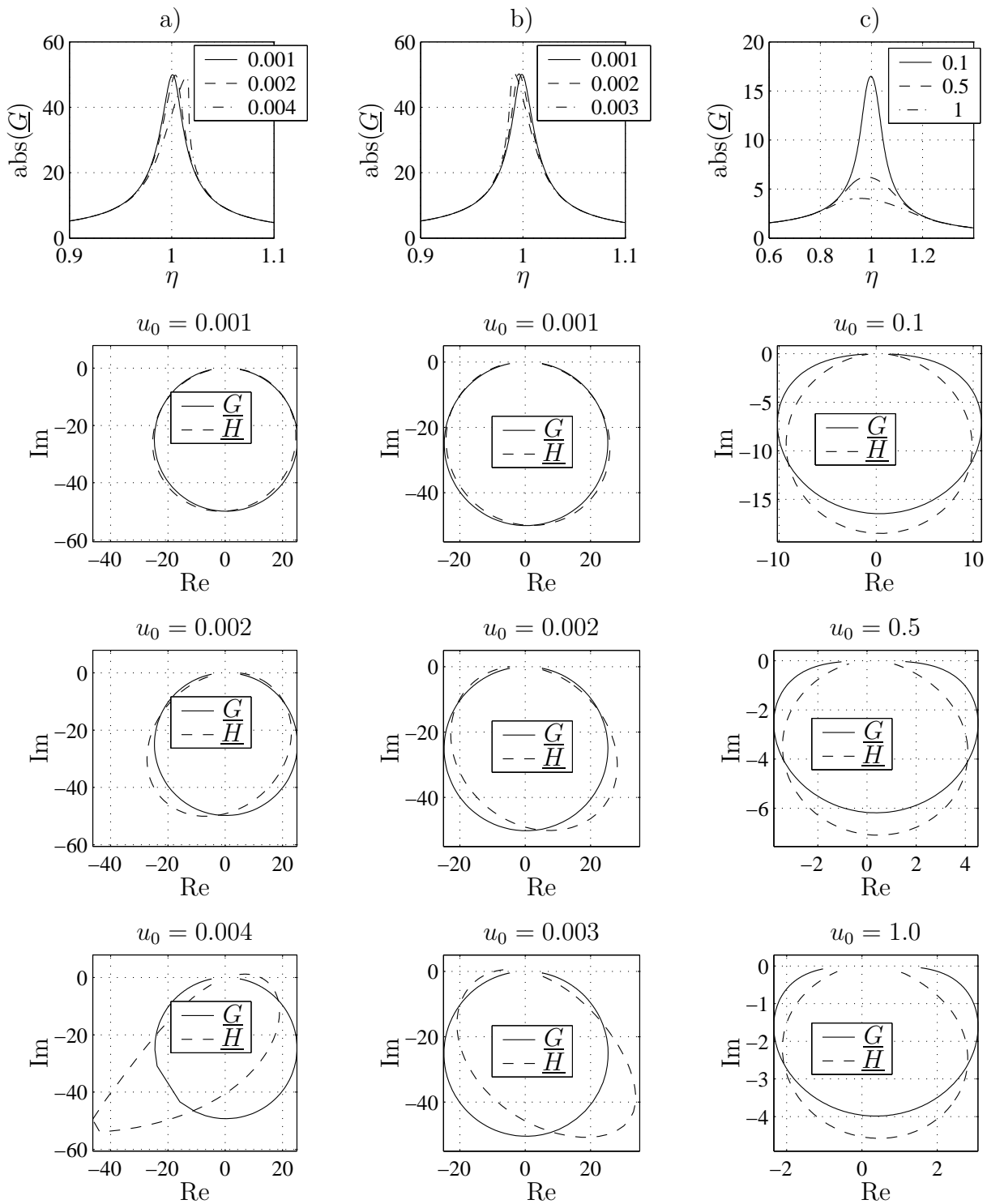
$$\begin{aligned} x''(\tau) + 2Dx'(\tau) + k_c x(\tau) + F_{\text{EGM}}(\tau) &= u(\tau) \\ 0 \leq k_c \leq 1, \quad c_R &= 1 - k_c, \quad F_R = c_R. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Die Wahl  $0 \leq k_c \leq 1$  und  $c_R = 1 - k_c$  stellt für kleine Verschiebungen und schwache Dämpfung eine Resonanzfrequenz nahe  $\eta = 1$  sicher. Bei zunehmender Anregungsamplitude zeigt sich die Nichtlinearität im Frequenzgang  $\underline{G}(\eta)$  durch eine Abflachung der Resonanzkurve, die im Haftbereich dem Frequenzgang des linearen Schwingers folgt. Die HILBERT-Transformierte zeigt im Resonanzbereich ähnliche Abweichungen wie im Fall progressiver Dämpfung, schmiegt sich außerhalb des Resonanzbereichs aber wegen des eintretenden Haftens dem Frequenzgang  $\underline{G}$  an.

Ein realer Reibkontakt wird besser durch ein sog. *Mikroschlupf-Reibelement* abgebildet, das hier durch  $n$  parallele Elasto-Gleit-Elemente mit Parametern  $c_{Ri}, F_{Ri}$  implementiert wird,

$$\sum_{i=1}^n c_{Ri} = c_R = 1 - k_c, \quad \sum_{i=1}^n F_{Ri} = F_R = c_R. \quad (4.43)$$

Die Verteilung der Parameter  $c_{Ri}, F_{Ri}$  ist in Anhang A beschrieben. Mit dem Mikroschlupf-Reibelement tritt neben einer Abflachung der Resonanz auch eine Verschiebung hin zu kleineren Frequenzen auf, siehe Bild 4.10b. Diese Verschiebung resultiert aus einer Reduktion



**Bild 4.9:** Numerisch simulierte Frequenzgänge  $\underline{G}$  (oben) und die korrespondierenden HILBERT-Transformierten  $\underline{H}$  (darunter) bei verschiedenen Anregungsamplituden  $u_0$ :  
a) Schwinger mit progressiver Federsteifigkeit nach (4.40) mit  $D = 0.01$  und  $\beta = 1$ ;  
b) Schwinger mit degressiver Federsteifigkeit nach (4.40) mit  $D = 0.01$  und  $\beta = -1$ ;  
c) Schwinger mit progressiver Dämpfung nach (4.41) mit  $D = 0.01$  und  $\alpha = 1$ .

der effektiven Federsteifigkeit bei zunehmender Amplitude aufgrund des Gleitens einer zunehmenden Anzahl elastischer Reibstränge. Die Abweichung der HILBERT-Transformierten weist in diesem Fall eine Mischung aus der Charakteristik der degressiven Federsteifigkeit und der progressiven Dämpfung auf.

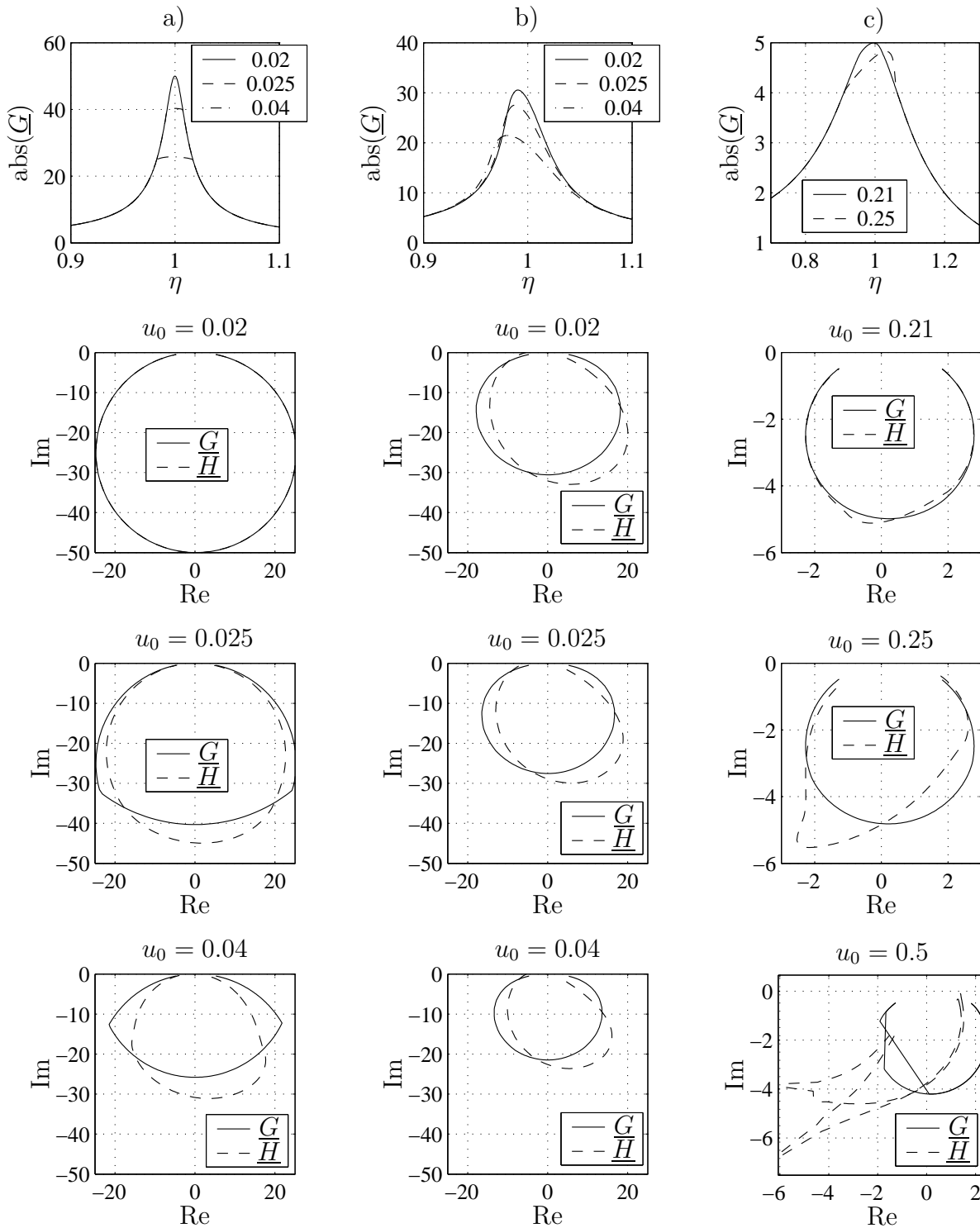
Die Ergebnisse für einen Schwinger mit abschnittsweise linearer, punktsymmetrischer Federkennlinie,

$$x''(\tau) + 2Dx'(\tau) + f(x(\tau)) = u(\tau), \quad f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ k_c x + 1 - k_c, & |x| \geq 1, \quad k_c = 2 \end{cases} \quad (4.44)$$

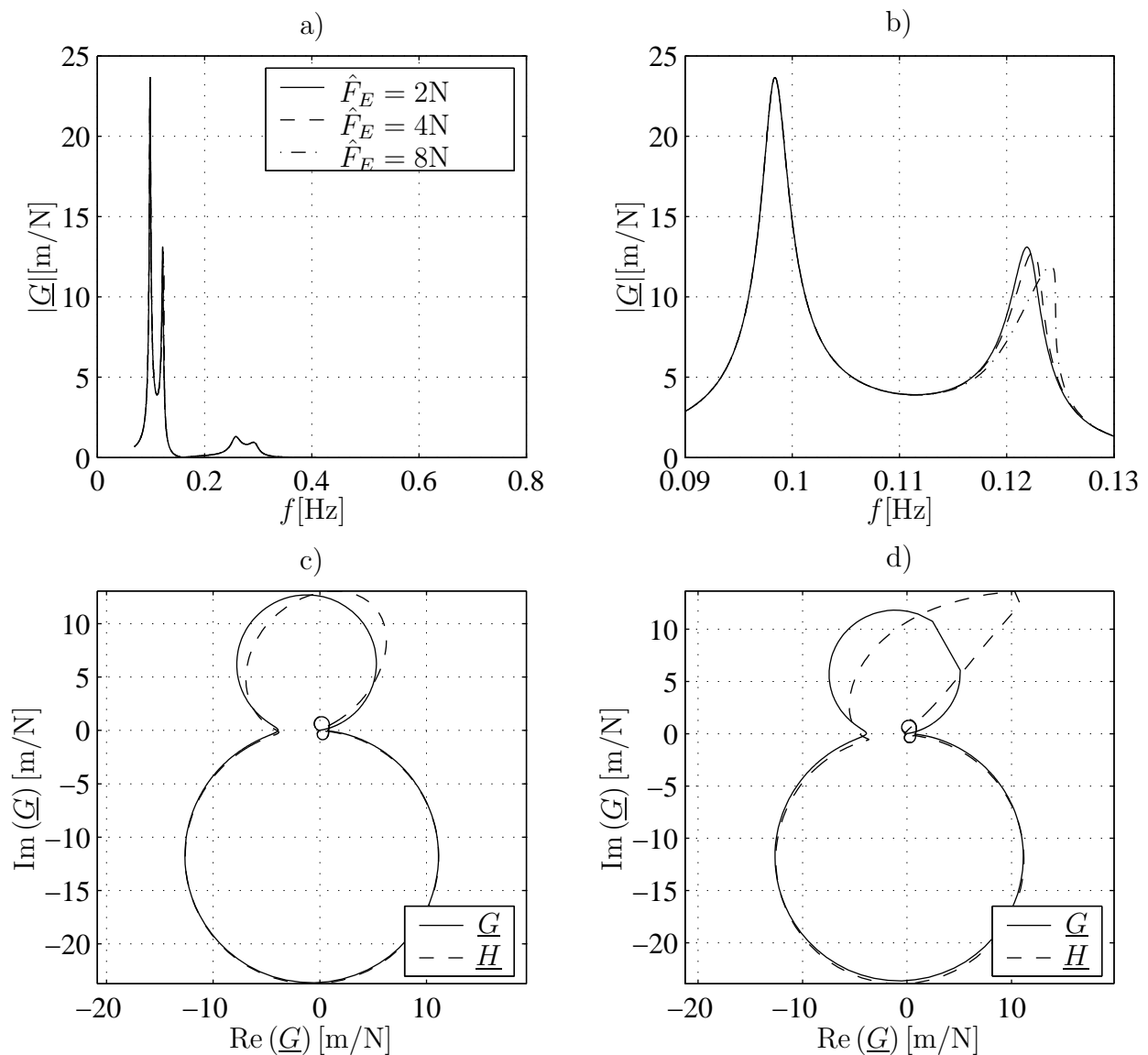
zeigt Bild 4.10c. Bei kleinen Auslenkungen  $x$  beträgt die Federsteifigkeit  $c = 1$ , für  $|x| > 1$  beträgt sie  $c = 2$ . Wegen der mit der Amplitude zunehmenden Federsteifigkeit zeigt die HILBERT-Transformation bei diesem Schwinger ähnliche Abweichungen wie im Fall kubisch progressiver Federkraft. Allerdings koexistieren bei dieser Nichtlinearität im betrachteten Amplitudenbereich bereits mehrere Lösungen der Differentialgleichung. Der Frequenzgang  $\underline{G}(\eta)$  ist dadurch nicht mehr unabhängig von der Durchstimm-Richtung, d. h. von kleinen zu großen Frequenzen bzw. umgekehrt. Im unteren Diagramm von Bild 4.10c sind für die Anregungsamplitude  $u_0 = 0.5$  die Frequenzgänge  $\underline{G}$  mit ihren HILBERT-Transformierten  $\underline{H}$  aus beiden Durchstimm-Richtungen dargestellt. Wegen der sehr unterschiedlichen Ergebnisse ist die Anwendung der HILBERT-Transformation hier nicht mehr befriedigend, obwohl die Abweichungen noch gemeinsame Charakteristika aufweisen.

## 4.7 Beispiel gekoppelte Schwingerketten

Nachdem die Wirkung verschiedener Nichtlinearitäten auf das Ergebnis der HILBERT-Transformation am Beispiel einfacher Schwinger demonstriert wurde, wird im Folgenden die Anwendung auf die nichtlinear gekoppelten Schwingerketten aus Bild 3.3 gezeigt. Die Impulsanregung der ersten Masse ist durch eine gestufte Sinusanregung ersetzt, der resultierende Frequenzgang ist in Bild 4.11a für verschiedene Anregungsamplituden dargestellt. Der vergrößerte Ausschnitt in Bild 4.11b zeigt die nichtlineare Verzerrung der zweiten Resonanz, in der beide Schwingerketten gegenläufig schwingen. Ohne Frequenzgänge bei anderen Anregungsamplituden heranziehen zu müssen, lässt sich mit der HILBERT-Transformation die Nichtlinearität detektieren, Bild 4.11c und Bild 4.11d. Die Abweichungen beschränken sich auf den Bereich der zweiten Resonanz, dies entspricht dem Ergebnis der Untersuchung aus



**Bild 4.10:** Numerisch simulierte Frequenzgänge  $\underline{G}$  (oben) und die korrespondierenden HILBERT-Transformierten  $\underline{H}$  (darunter) bei verschiedenen Anregungsamplituden  $u_0$ :  
a) Schwinger mit Makroschlupf-Reibelement nach (4.42) mit  $D = 0.01$  und  $k_c = 0.5$ ;  
b) Schwinger mit Mikroschlupf-Reibelement nach (4.43) mit  $D = 0.01$  und  $k_c = 0.5$ ;  
c) Schwinger mit abschnittsweise linearer Federkennlinie nach (4.44) mit  $D = 0.1$ .



**Bild 4.11:** a),b) Amplitudengänge des Systems aus Bild 3.3 bei verschiedenen Anregungsamplituden  $\hat{F}_E$ . c),d) Frequenzgänge  $\underline{G}(f)$  und zugehörige HILBERT-Transformierte  $\underline{H}(f)$  bei c)  $\hat{F}_E = 4\text{N}$  und d)  $\hat{F}_E = 8\text{N}$ .

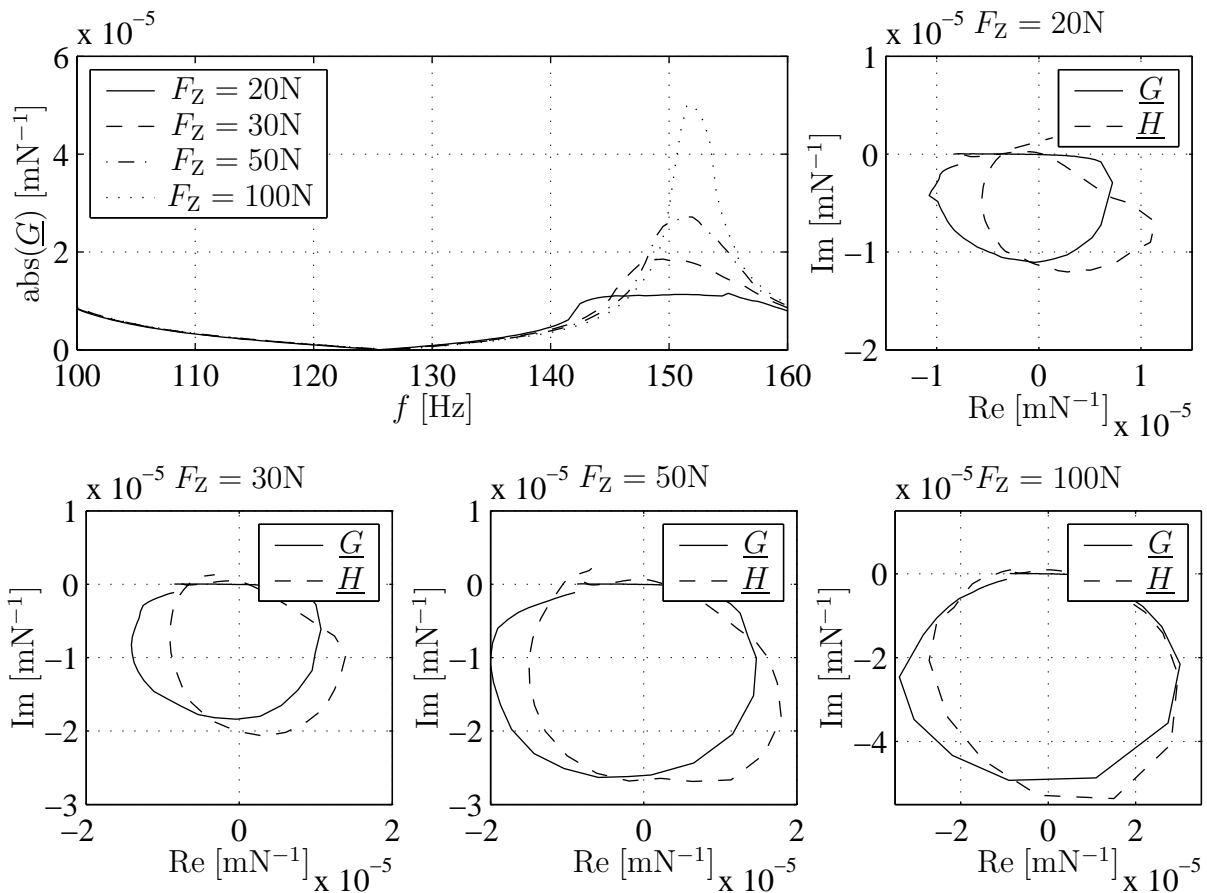
Kapitel 3, die eine Abnahme der Eigenfrequenz während des Ausschlagens ergeben hatte. Die charakteristische Verzerrung der Resonanz im Uhrzeigersinn entspricht dem Ergebnis für den in Kapitel 4.6 untersuchten einfachen Schwinger mit kubisch nichtlinearer Federkraft.

## 4.8 Beispiel Schaufelpaar

Für das bereits in Kapitel 3.4 untersuchte Schaufelpaar zeigt Bild 4.12 den Frequenzgang  $\underline{G}(\omega)$  der ersten Schaufel bei harmonischer Kräfteerregung mit der Amplitude  $\hat{F}_E = 5\text{N}$  für

verschiedene, experimentell simulierte Zentrifugalkräfte  $F_Z$ .

Die Abweichung der HILBERT-Transformierten  $\underline{H}(\omega)$  weist in allen vier Fällen eine ähnliche Charakteristik auf, jedoch vermindert sich die Größe der Abweichung mit zunehmender Kraft  $F_Z$ . Lässt man dynamische Anteile der Normalkraft im Kontakt außer Acht, so nimmt diese proportional zur Kraft  $F_Z$  zu. Damit steigt auch die Dauer der Haftphasen und/oder die Größe der Haftzone zwischen dem Reibelement und den Turbinenschaufeln, so dass nach



**Bild 4.12:** Frequenzgänge  $\underline{G}(\omega)$  und zugehörige HILBERT-Transformierte  $\underline{H}(\omega)$  der ersten Schaufel des Schaufelpaars aus Bild 3.5 bei unterschiedlichen simulierten Zentrifugalkräften  $F_Z$  und harmonischer Anregung der ersten Schaufel. Für die Berechnung der Korrekturterme wurde jeweils am unteren und oberen Rand des durch Messungen abgedeckten Frequenzbereichs ein lineares 1FHG-System angepasst. Zwischen den Stützstellen wurde der Frequenzgang für die Berechnung der HILBERT-Transformierten mit kubischen Spline-Funktionen interpoliert.

diesem sehr einfachen Modell für  $F_Z \rightarrow \infty$  der Grenzfall des „verschweißten“ Kontaktes erreicht wird, in dem sich der Kontakt rein elastisch verhielte.

Im Vergleich mit den numerischen Beispielen in Kapitel 4.6 entspricht die Form der Abweichung zwischen  $\underline{G}$  und  $\underline{H}$  am genauesten dem Fall des Schwingers mit Mikroschlupf-Reibkontakt. Dieses Ergebnis steht in Übereinstimmung mit der physikalisch motivierten Modellbildung für dieses System in anderen Arbeiten, z. B. [61].

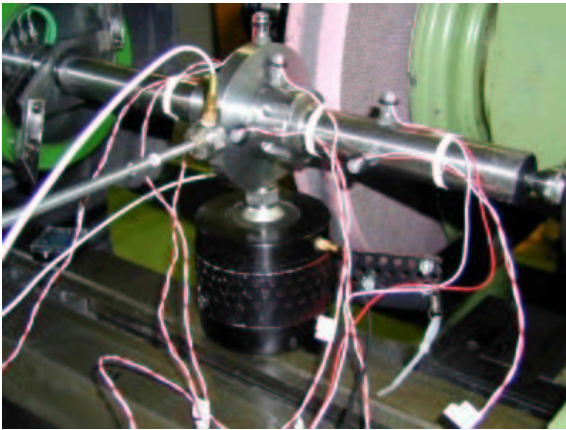
## 4.9 Beispiel Schleifkontakt

Bei der spanenden Bearbeitung von Werkstücken mit Drehmaschinen oder Schleifmaschinen können sog. *Ratterschwingungen* auftreten, die zu periodischen Störungen auf der Werkstückoberfläche führen. Die resultierenden Probleme reichen von einer rein optischen bis hin zu funktionalen Beeinträchtigungen des Werkstücks.

Die automatische Detektion und ggf. Unterdrückung sowie die dazu erforderliche Modellierung der Ratterschwingungen ist bis heute Gegenstand zahlreicher Forschungsarbeiten. Im Rahmen einer solchen Arbeit [88] wurde u. a. eine Schwingungsanalyse an einer Außenrund-Schleifmaschine durchgeführt. Bild 4.13 zeigt das mit Beschleunigungsaufnehmern versehene, eingespannte Werkstück, das mit Krafterregern harmonisch angeregt wird. Der resultierende Beschleunigungs-Amplitudengang in vertikaler Richtung ist in Bild 4.14 dargestellt. Der Versuch wurde zunächst mit frei schwingendem Werkstück ( $F_N = 0\text{N}$ ) und dann bei einer Normalkraft  $F_N = 120\text{N}$  zwischen Werkstück und Schleifscheibe durchgeführt.

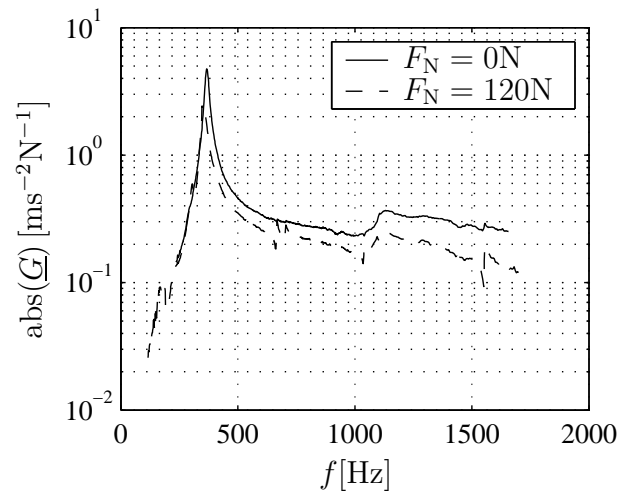
Die Anwendung der HILBERT-Transformation auf beide Messungen führt auf die in Bild 4.15 gezeigten Ergebnisse. Die gemessenen Daten wurden zunächst in Weg-Frequenzgänge umgerechnet, da die Anwendung der HILBERT-Transformation auf Beschleunigungs-Frequenzgänge zu Fehlern führen kann (siehe Kapitel 4.1).

Es ist deutlich zu erkennen, dass das frei schwingende Werkstück ein annähernd lineares Verhalten zeigt. Bei Kontakt zwischen Werkstück und Schleifscheibe hingegen führen nicht-lineare Effekte zu einer deutlichen Abweichung zwischen gemessenem Frequenzgang und der HILBERT-Transformierten. Die hier beobachtete Charakteristik der Abweichung entspricht keiner der in Kapitel 4.6 festgestellten. Am ehesten ähnelt das Verhalten aber der einer degressiven Federkraft. Diese Beobachtung lässt sich auch qualitativ erklären:

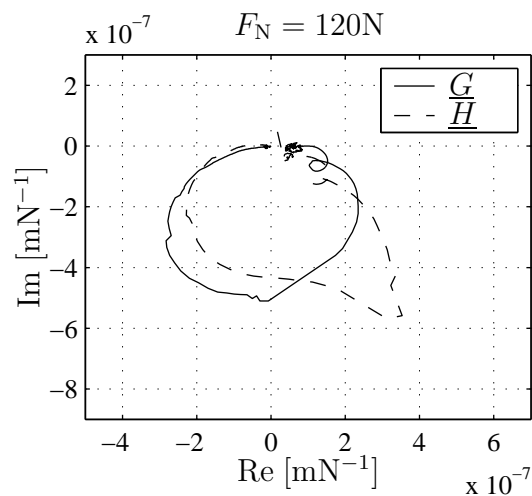
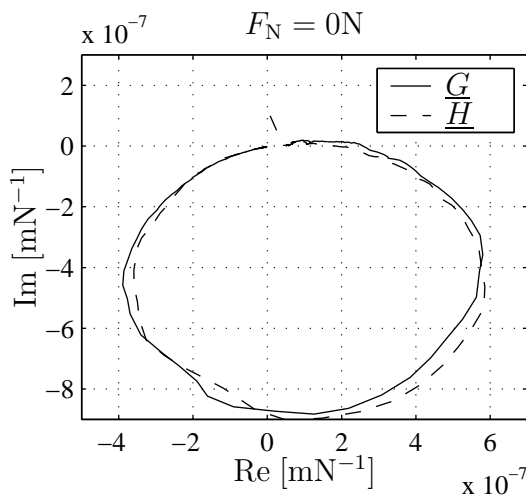


Quelle: O. SCHÜTTE, [88]

**Bild 4.13:** Anordnung der Krafterreger und Beschleunigungsaufnehmer bei einer Schwingungsmessung an einem Schleifkontakt.



**Bild 4.14:** Betrag des Frequenzgangs der Beschleunigung in vertikaler Richtung bei Kraftanregung in vertikaler Richtung.



**Bild 4.15:** Nyquist-Diagramme der in Weg-Frequenzgänge  $\underline{G}(\omega)$  umgerechneten Beschleunigungs-Frequenzgänge aus Bild 4.14 und ihrer HILBERT-Transformierten  $\underline{H}(\omega)$ .

Bei kleinen Schwingungsamplituden tritt im Reibkontakt zwischen Werkstück und Schleifscheibe keine Relativbewegung auf. Die hohe Kontaktsteifigkeit leistet damit einen großen Beitrag zur Gesamtsteifigkeit des Schwingungssystems. Bei größeren Schwingungsamplituden löst sich der Kontakt zumindest zeitweilig und führt so zu einer Reduktion der effektiven Steifigkeit.



Die Charakteristik dieses Haft-Gleit-Übergangs unterscheidet sich jedoch deutlich von derjenigen der numerisch untersuchten Makro- und Mikroschlupf-Reibschwinger.

## 4.10 Fazit

Die HILBERT-Transformation erlaubt die Detektion nichtlinearer Effekte in gemessenen Frequenzgängen. Dazu reicht ein einzelner Frequenzgang, Messungen bei unterschiedlichen Amplituden sind nicht notwendig.

Außerhalb des gemessenen Frequenzbereichs ist dieser zu extrapolieren und durch Korrekturterme zu berücksichtigen. Im Unterschied zu Vorgängerarbeiten werden hier beliebige lineare Frequenzgänge berücksichtigt, d. h. Dämpfung wird zugelassen und die Ordnung ist frei wählbar.

Zur Durchführung der Transformation im gemessenen Frequenzbereich steht eine FFT-basierte Methode zur Verfügung, die besonders bei einer großen Anzahl von Stützstellen kurze Rechenzeiten ermöglicht. Daneben kann auf eine direkte Methode zurückgegriffen werden, die auf einer impliziten kubischen Interpolation des Frequenzgangs zwischen den Stützstellen aufbaut.

Die aufgrund der endlichen Auflösung und Bandbreite gemessener Frequenzgänge auftretenden Schwierigkeiten (Lösung: Interpolation bzw. Korrekturterme) lassen sich auch mit einer diskreten Formulierung der HILBERT-Transformation nicht umgehen.

Numerische Beispiele zeigen, dass verschiedene Typen von Nichtlinearitäten zu charakteristischen Abweichungen zwischen Frequenzgang und HILBERT-Transformierter führen und so eine Unterscheidung zulassen.

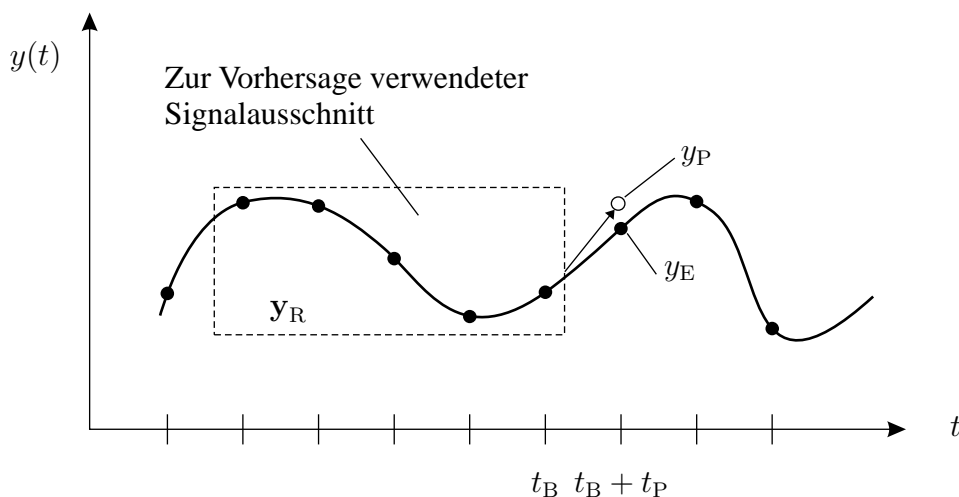
Die experimentellen Beispiele bestätigen die Fähigkeit der Transformation, Nichtlinearitäten zu detektieren und ihre Stärke widerzuspiegeln. Im Fall der Turbinenschaufeln ergibt sich zudem eine gute Zuordnung zu numerisch simulierten Nichtlinearitäten, im Fall des Schleifkontakts gelingt dies nur teilweise.

## 5 Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers

Nach den zwei oben ausführlich dargestellten Nichtlinearitätstests, die im Zusammenhang mit traditionellen ingenieurwissenschaftlichen Versuchen Anwendung finden, wird im Folgenden ein Linearitätstest vorgestellt, der durch die moderne Disziplin der *Nichtlinearen Dynamik* motiviert ist. Im Sinne einer erweiterten Fragestellung wird dabei geprüft, ob ein gemessenes Zeitsignal  $y(t)$  von einem linearen oder nichtlinearen dynamischen System mit einer endlichen Zahl von Zustandsgrößen generiert worden sein kann. Neben der Linearitätsaussage liefert der Test also ein Maß für die Komplexität des untersuchten Systems.

Ausgehend von einem zufällig gewählten Bezugszeitpunkt  $t_B$  wird dazu ein zukünftiger Signalwert  $y(t_B + t_P)$  vorhergesagt (siehe Bild 5.1). Durch Vergleich der tatsächlichen Entwicklung (Evolution)  $y_E = y(t_B + t_P)$  und der Vorhersage (Prädiktion)  $y_P$  kann die Qualität des Prädiktionsmodells bewertet werden.

Zur Bestimmung des Prädiktionsmodells wird der gesamte zur Verfügung stehende Datensatz verwendet, angewendet wird dieses auf den begrenzten Signalausschnitt, der dem Bezugszeitpunkt unmittelbar vorausgeht. Da digital verarbeitete Signale immer auch zeitlich diskretisiert sind, lassen sich die Werte des Signalausschnitts in einem Vektor  $\mathbf{y}_R$  zusammenfassen (siehe Bild 5.1).



**Bild 5.1:** Vorhersage  $y_P$  innerhalb eines Signals  $y(t)$  auf Basis des vorausgegangenen Signalausschnitts, dessen Werte im Vektor  $\mathbf{y}_R$  zusammengefasst sind. Vorhersage  $y_P$  und wahre Evolution  $y_E$  stimmen i.d.R. nicht exakt überein.

Grundvoraussetzung für eine erfolgreiche Vorhersage ( $y_P = y_E$ ) ist, dass der zur Vorhersage verwendete Signalausschnitt ausreichend Information enthält (bei zeitdiskreten Signalen hängt dies von der Anzahl und dem zeitlichen Abstand der Signalwerte ab). Nur dann kann der Zustand des das Signal generierenden Systems rekonstruiert werden — die Voraussetzung für eine erfolgreiche Vorhersage.

Um die Linearität des betrachteten Systems zu bewerten, wird die Vorhersagequalität eines linearen und eines nichtlinearen Vorhersagemodells verglichen. Die theoretischen Grundlagen des Vorhersagemodells sollen im Folgenden zunächst für den linearen Fall erläutert werden.

## 5.1 Definition der Vorhersagemodelle

Ein lineares, zeitinvariantes, zeitkontinuierliches SISO-System mit Eingang  $u(t)$ , Ausgang  $y(t)$  und Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  ( $n_x$  Zustände) kann in der Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

beschrieben werden. Die Betrachtung diskreter Zeitpunkte  $t_k = kt_S$  ( $t_S$ : *Sampling Time*) führt auf die diskrete Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t_{k+1}) &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}(t_k) + \mathbf{b}_d u(t_k), \quad \mathbf{A}_d = \mathbf{\Psi}(t_S) = e^{\mathbf{A}t_S} \\ y(t_k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t_k) + du(t_k)\end{aligned}\tag{5.2}$$

(siehe z. B. [39]) mit  $\mathbf{b}_d = \int_{t=0}^{t_S} \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{b} dt$ , falls dem Eingang ein  $H_0$ -Glied (Halteglied nullter Ordnung) vorgeschaltet ist, das den Eingang zwischen  $t_k$  und  $t_{k+1}$  konstant hält.

Im autonomen Fall ( $u(t) \equiv 0$ ) gilt

$$\mathbf{x}(t + t_S) = \mathbf{\Psi}(t_S)\mathbf{x}(t)\tag{5.3}$$

für die Evolution des Zustandsvektors.

Mit Hilfe von  $n_x$  um die Versatzzeit  $t_V$  zeitversetzten Messungen

$$\mathbf{y}_R(t)^T = [y(t), y(t - t_V), \dots, y(t - (n_x - 1)t_V)]\tag{5.4}$$

kann der aktuelle Zustand  $\mathbf{x}(t)$  mit der Rekonstruktionsmatrix  $\mathbf{Q}_R$  entsprechend

$$\mathbf{x}(t)^T = \mathbf{y}_R(t)^T \mathbf{Q}_R(t_V), \quad \mathbf{Q}_R(t_V) = [\mathbf{c}, \mathbf{\Psi}(-t_V)^T \mathbf{c}, \dots, \mathbf{\Psi}(-(n_x - 1)t_V)^T \mathbf{c}]^{-1}\tag{5.5}$$

aus dem Messsignal abgeleitet werden. In der *Nichtlinearen Dynamik* hat sich daher der Begriff *Pseudozustandsvektor* für  $\mathbf{y}_R(t)$  eingebürgert.

Umgekehrt lässt sich der Vektor  $\mathbf{y}_{\ell_P}(t) = [y(t + t_P), y(t + 2t_P), \dots, y(t + \ell_P t_P)]^T$  mit  $\ell_P$  zukünftigen Systemantworten mit der Prädiktionsmatrix  $\mathbf{Q}_P$  durch

$$\mathbf{y}_{\ell_P}(t)^T = \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q}_P(t_P), \quad \mathbf{Q}_P(t_P) = [\Psi(t_P)^T \mathbf{c}, \Psi(2t_P)^T \mathbf{c}, \dots, \Psi((\ell_P - 1)t_P)^T \mathbf{c}] \quad (5.6)$$

aus dem aktuellen Zustand  $\mathbf{x}(t)$  berechnen. Durch Kombination von (5.5) und (5.6) kann mit

$$\mathbf{y}_{\ell_P}(t)^T = \mathbf{y}_R(t)^T \mathbf{Q}_{RP}(t_V, t_P), \quad \mathbf{Q}_{RP}(t_V, t_P) = \mathbf{Q}_R(t_P) \mathbf{Q}_P(t_V) \quad (5.7)$$

die Zukunft von  $y(t)$  aus der Vergangenheit vorhergesagt werden.

Fasst man (5.7) für  $n_B$  verschiedene Bezugszeitpunkte  $t = t_{B,i}$  zusammen, so erhält man durch Gruppierung der Zeilenvektoren  $\mathbf{y}_R(t_{B,i})^T$  und  $\mathbf{y}_{\ell_P}(t_{B,i})^T$  den Zusammenhang

$$\mathbf{Y}_E = \mathbf{Y}_R \mathbf{Q}_{RP} \quad \text{mit} \quad \mathbf{Y}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\ell_P}(t_{B,1})^T \\ \mathbf{y}_{\ell_P}(t_{B,2})^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\ell_P}(t_{B,n_B})^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_R(t_{B,1})^T \\ \mathbf{y}_R(t_{B,2})^T \\ \vdots \\ \mathbf{y}_R(t_{B,n_B})^T \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

zwischen der Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_R$  und der Evolutionsmatrix  $\mathbf{Y}_E$ , welcher sich im Falle der Einschnittprädiktion mit dem Evolutionsvektor  $\mathbf{y}_E$  (erste Spalte von  $\mathbf{Y}_E$ ) und dem Prädiktionsvektor  $\mathbf{q}_P$  (erste Spalte von  $\mathbf{Q}_P$ ) zu

$$\mathbf{y}_E = \mathbf{Y}_R \mathbf{Q}_R \mathbf{q}_P = \mathbf{Y}_R \mathbf{q}_{RP} \quad (5.9)$$

reduziert. Stammen  $\mathbf{y}_E$  und  $\mathbf{Y}_R$  aus Messungen, so wird der lineare Zusammenhang (5.9) aufgrund von Nichtlinearitäten sowie verschiedensten Störungen bestenfalls näherungsweise,

$$\mathbf{y}_E \approx \mathbf{y}_P = \mathbf{Y}_R \mathbf{q}_{RP}, \quad (5.10)$$

erfüllt sein. Unter der Annahme weißen Messrauschens sind sowohl  $\mathbf{y}_E$  als auch  $\mathbf{Y}_R$  gestört und es ergibt sich ein lineares Schätzproblem mit dem Parametervektor  $\mathbf{q}_{RP}$ , dem Messvektor  $\mathbf{y}_E$  und der Informationsmatrix  $\mathbf{Y}_R$ , das z. B. mit einem LS-Schätzer gelöst werden kann.

Bei einem nichtlinearen zeitkontinuierlichen System wird auch der Zusammenhang (5.7) nichtlinear,

$$\mathbf{y}_{\ell_P}(t) = \mathbf{f}_{RP}(t_V, t_P, \mathbf{y}_R(t)). \quad (5.11)$$

Selbst wenn die zeitkontinuierliche Beschreibung des nichtlinearen Systems in Form eines gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungssystems bekannt ist, lässt sich  $\mathbf{f}_{\text{RP}}$  i.d.R. nicht geschlossen analytisch angeben.

Die im Bereich der *Nichtlinearen Dynamik* verbreitete eingesetzte modellfreie Methode der *Einbettung* von Zeitreihen, die ohne ein physikalisch motiviertes Systemmodell auskommt, greift für die Prädiktion (5.11) auf umfangreiche Messungen  $(\mathbf{y}_{\text{E}}, \mathbf{Y}_{\text{R}})$  zurück. Für einen gegebenen Pseudozustandsvektor  $\mathbf{y}_{\text{R,ref}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{y}_{\text{R}}(t_{\text{ref}})$  wird die Prädiktion auf Basis eines lokal im rekonstruierten Zustandsraum gültigen Prädiktionsmodells durchgeführt. Dazu wird die Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_{\text{R}}$  nach  $n_{\text{NN}}$  ähnlichen Pseudozustandsvektoren  $\mathbf{y}_{\text{R,NN}}$ , „nächsten Nachbarn“ im Sinne des euklidischen Abstands

$$d_{\text{NN}} = \|\mathbf{y}_{\text{R,NN}} - \mathbf{y}_{\text{R,ref}}\| \quad (5.12)$$

durchsucht, die in einer neuen Matrix  $\mathbf{Y}_{\text{R,NN}}$  zusammengefasst werden. Zusammen mit dem zugehörigen Evolutionsvektor  $\mathbf{y}_{\text{E,NN}}$  (der die wahre zeitliche Entwicklung der nächsten Nachbarn enthält) kann durch lineare Regression ein in der Nähe von  $\mathbf{y}_{\text{R,ref}}$  gültiges Prädiktionsmodell

$$\mathbf{y}_{\text{E,NN}} \approx [\mathbf{Y}_{\text{R,NN}}, \mathbf{1}] \mathbf{q}_{\text{RP,ref}} \quad (5.13)$$

bestimmt werden. Der mit Einsen besetzte Spaltenvektor „ $\mathbf{1}$ “ erweitert das Prädiktionsmodell um einen konstanten Anteil, wie er bei der Linearisierung einer nichtlinearen Funktion um einen „Arbeitspunkt“ erforderlich ist. Die Elemente von  $\mathbf{q}_{\text{RP,ref}}$  (Parameter des Modells) lassen sich wie in (5.10) durch ein lineares Schätzverfahren berechnen.

Voraussetzung für die näherungsweise Gültigkeit des lokalen Modells in der Nähe von  $\mathbf{y}_{\text{R,ref}}$  ist wie beim linearen System die Beobachtbarkeit, d. h. von  $\mathbf{y}_{\text{R}}(t)$  kann eindeutig auf seine Zustände  $\mathbf{x}(t)$  geschlossen werden. Weiterhin muss die Abbildung  $\mathbf{f}_{\text{RP}}$  in (5.11) stetig nach  $\mathbf{y}_{\text{R}}$  differenzierbar sein, damit sie lokal linearisierbar ist.

Mit den global (5.10) bzw. lokal (5.13) gültigen Zusammenhängen lassen sich nun ein lineares (GLM: Globales Lineares Modell) und ein nichtlineares (LLM: Lokales Lineares Modell) Prädiktionsmodell

$$\begin{aligned} \text{GLM:} \quad & y_{\text{P,ref}} = \mathbf{y}_{\text{R,ref}}^{\text{T}} \mathbf{q}_{\text{RP}} \\ \text{LLM:} \quad & y_{\text{P,ref}} = [\mathbf{y}_{\text{R,ref}}^{\text{T}}, 1] \mathbf{q}_{\text{RP,ref}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

für die Evolution  $y_{E,\text{ref}}$  definieren. Da die Systemordnung  $n_x$  nicht a priori bekannt ist, muss die Modellordnung (Dimension des Pseudozustandsvektors  $\mathbf{y}_{R,\text{ref}}$ ) variiert werden. Diese Zahl wird wegen der als *Einbettung* bezeichneten Prozedur der Zustandsrekonstruktion als *Einbettungsdimension*  $d_E$  bezeichnet. Bei der Durchführung der hier beschriebenen Methode wird  $d_E$  von  $d_{E,\text{min}}$  bis  $d_{E,\text{max}}$  variiert.

## 5.2 Schätzung der Modellparameter

Zur Schätzung der Modellparameter in (5.10) und (5.13) müsste eigentlich ein TLS-Schätzer (engl.: *Total Least Squares*) zum Einsatz kommen, der im Unterschied zum einfachen LS-Schätzer neben dem Messvektor auch die Informationsmatrix als gestört ansieht (siehe dazu Anhang B.1). Weil die Elemente beider Komponenten hier aus dem gleichen (i.d.R. gestörten) Messkanal  $y(t)$  stammen, ist diese Annahme berechtigt.

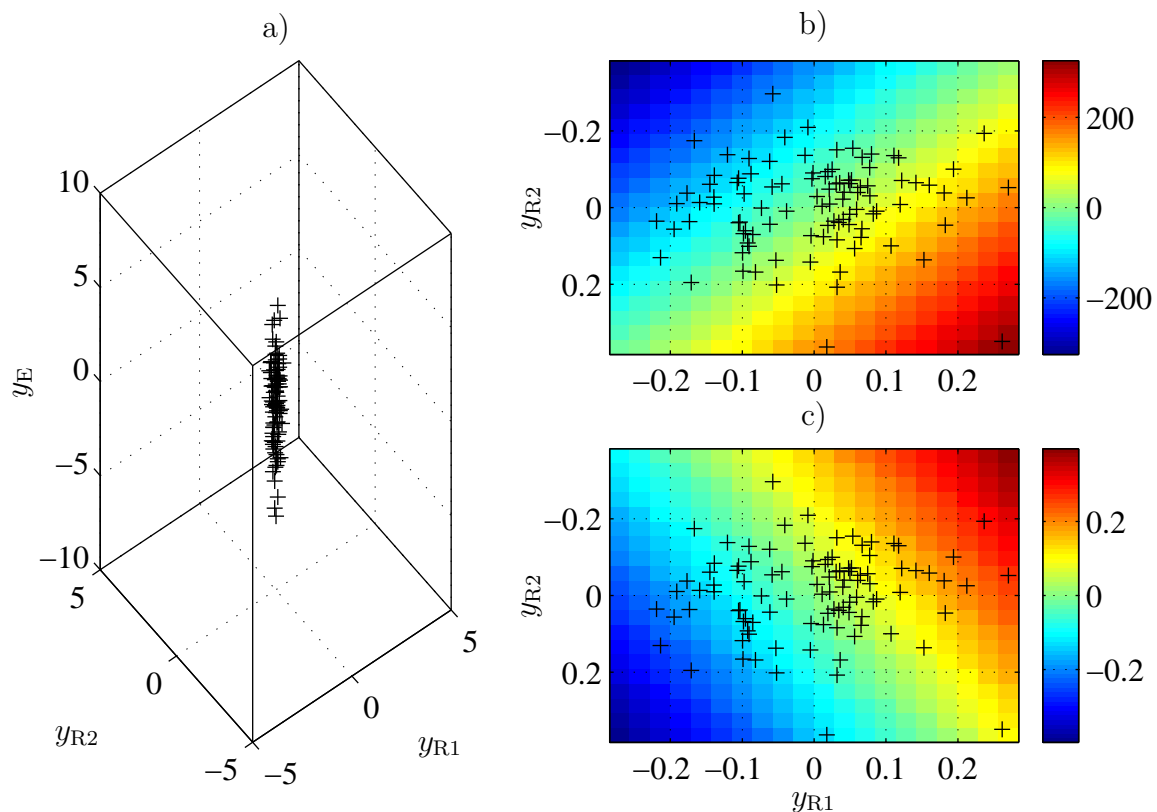
Bei Anwendung auf das LLM-Modell ergeben sich für die TLS-Schätzung bei zu geringer Einbettungsdimension  $d_E$  jedoch Probleme: Konstruktionsbedingt liegen die rekonstruierten Pseudozustandsvektoren der Informationsmatrix  $\mathbf{Y}_{R,NN}$  dicht beieinander. Für den Fall  $d_E = 2$  ist dies in Bild 5.2a veranschaulicht. Die beiden Komponenten  $y_{R1}$ ,  $y_{R2}$  der nächsten Nachbarn eines Referenzpunkts sind dort mit ihren jeweiligen Evolutionen  $y_E$  als Punkte im dreidimensionalen Raum visualisiert. Ihre Projektionen auf die  $y_{R1}/y_{R2}$ -Ebene sind konstruktionsgemäß dicht benachbart während ihre Evolutionen  $y_E$  wegen der zu geringen Einbettungsdimension  $d_E$  weit auseinander liegen und auch nur schwach linear mit  $y_{R1}/y_{R2}$  korreliert sind.

Die Punkte aus Bild 5.2a bilden damit eine Wolke, die in  $y_E$ -Richtung gestreckt ist.

Die lineare TLS-Schätzung minimiert die Quadratsumme der senkrechten Abstände der Punkte der erweiterten Informationsmatrix zu der durch die gesuchten Parameter  $\mathbf{q}_{RP}$  definierten (Hyper-)Ebene. Sie führt damit in diesem Fall auf eine Ebene, deren Normale nahezu senkrecht zur Achse der Evolutionskoordinate  $y_E$  steht.

Die einfache LS-Schätzung minimiert in diesem Anwendungsfall dagegen die Quadratsumme der Abstände der Punkte der erweiterten Informationsmatrix zur gesuchten (Hyper-)Ebene *in Richtung der Evolutionskoordinate*.

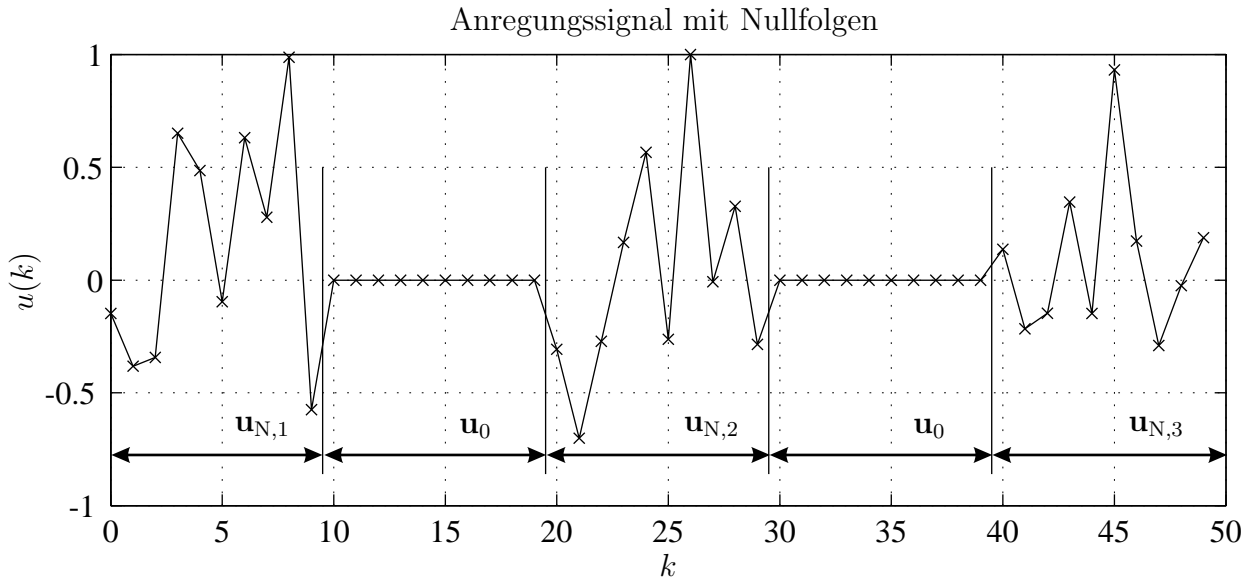
Den Unterschied zwischen der TLS- und der LS-Schätzung bei Anwendung auf das LLM



**Bild 5.2:** a) Punktwolke mit 100 Punkten; b) Draufsicht mit farbkodierter Regressionsebene aus TLS-Schätzung; c) Draufsicht mit farbkodierter Regressionsebene aus LS-Schätzung. (Skalierung beachten!)

bei zu geringer Modellordnung demonstrieren Bild 5.2b und Bild 5.2c am Beispiel von 100 Punkten  $[y_{R1}, y_{R2}, y_E]$  mit  $y_E = y_{R1} + y_{R2} + y_{R3} + y_{R4} + y_{R5} + y_{R6}$ . Dabei sind  $y_{R1...6}$  normalverteilt und unkorreliert. Die Standardabweichung von  $y_{R3...6}$  ist zehnmal größer gewählt als die von  $y_{R1...2}$ , um Punkte zu betrachten, die bzgl. der Koordinaten  $y_{R1}$  und  $y_{R2}$  benachbart sind. Bild 5.2b und Bild 5.2c zeigen die Draufsicht auf die Punktwolke aus Bild 5.2a mit der aus TLS- bzw. LS-Schätzung ermittelten Ebene  $y_E = a y_{R1} + b y_{R2}$ , deren Höhe  $y_E$  farblich kodiert ist. Deutlich ist die beschriebene größere Neigung bei der TLS-Schätzung abzulesen. Die starke Neigung der geschätzten Ebene im TLS-Fall kann zu Prädiktionsfehlern führen, die weitaus größer sind als die der trivialen Vorhersage  $y_P = 0$ . Die TLS-Schätzung führt damit auf kein geeignetes Prädiktionsmodell.

Alternativ könnte die TLS-Schätzung beibehalten und statt des Prädiktionsfehlers der totale Schätzfehler (also das Minimierungskriterium selbst) zur Bewertung der Modellqualität herangezogen werden. Bei unvollständiger linearer Korrelation (durch Messrauschen, Nichtli-



**Bild 5.3:** Zeitdiskretes Anregungssignal mit Zufallsfolgen  $\mathbf{u}_{N,i}$  und Nullfolgen  $\mathbf{u}_0$ .

nearität oder zu geringer Einbettungsdimension) ergäben sich aber wegen der konstruktionsbedingten Nachbarschaft der Zeilenvektoren von  $\mathbf{Y}_{R,NN}$  für das LLM-Modell stets geringere Modellfehler als für das GLM-Modell, dessen Informationsmatrix  $\mathbf{Y}_R$  *nicht* ausschließlich dicht benachbarte Zeilenvektoren enthält. Effekte, die nicht auf Nichtlinearität zurückzuführen sind, führten somit auf ein scheinbar überlegenes nichtlineares (LLM-)Modell und ständen damit dem Einsatz des Modellvergleichs als Linearitätstest entgegen.

Für die Schätzung der Modellparameter kommt daher trotz der gestörten Informationsmatrix nur der einfache LS-Schätzer in Betracht.

### 5.3 Wahl des Anregungssignals

Die Anwendung der Prädiktionsmodelle (5.14) ist nur bei autonomen Systemen, d. h. Systemen ohne äußere Erregung und ohne zeitabhängige Parameter zulässig. Ein asymptotisch stabiles System ohne Erregung bewegt sich aber auf einer eindimensionalen Trajektorie von seinem Anfangszustand in seine Ruhelage und liefert dabei nur sehr unvollständige Informationen über sein Verhalten im gesamten Zustandsraum.

Um ausreichend Daten für das LLM-Modell zu generieren, ist daher eine breitbandige Anregung erforderlich, die jedoch mit der Forderung nach Autonomie des Systems in Widerspruch steht. Durch eine gemischte Anregung kann dieser Widerspruch gelöst werden. Dazu wird



das Anregungssignal  $u(t)$  zu äquidistanten Zeitpunkten  $t_k = k t_S$  abgetastet und als Vektor

$$\mathbf{u} = \left[ \mathbf{u}_{N,1}^T, \mathbf{u}_0^T, \mathbf{u}_{N,2}^T, \mathbf{u}_0^T, \dots, \mathbf{u}_{N,n_A}^T, \mathbf{u}_0^T \right]^T \quad (5.15)$$

mit  $n_A$  Abschnitten der Länge  $\ell_A$  beschrieben, die jeweils aus einer Zufallsfolge  $\mathbf{u}_{N,i}$  der Länge  $\ell_N$  (N: Noise) und einer Nullfolge  $\mathbf{u}_0 = [0, 0, \dots, 0]$  der Länge  $\ell_0$  bestehen, siehe Bild 5.3 mit  $\ell_N = 10$  und  $\ell_0 = 10$ . Damit ergibt sich eine breitbandige Anregung, die von Abschnitten unterbrochen ist, in denen das System als autonom angesehen werden kann.

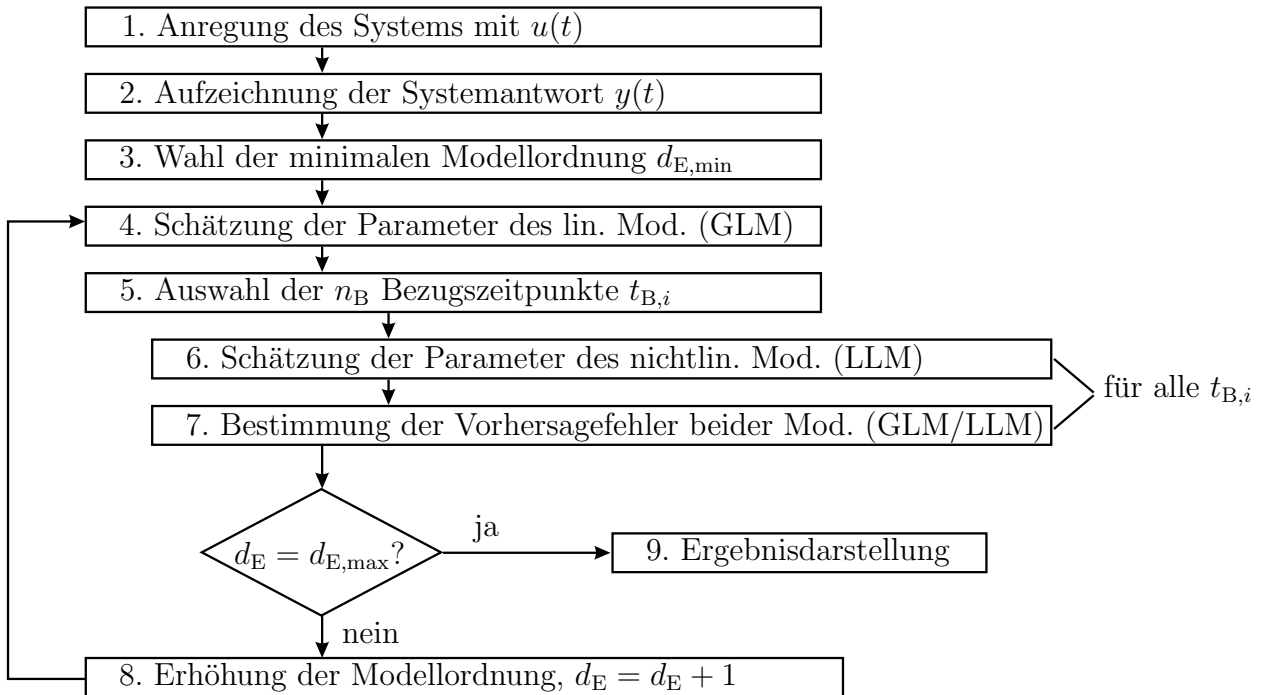
In Bild 5.4 sind die Abschnitte des Anregungssignals zeilenweise in einer  $[n_A \times \ell_A]$ -Matrix  $\mathbf{U}$  abgelegt; die gleich große Matrix  $\mathbf{Y}$  enthält die entsprechenden Werte des Ausgangssignals. Für die Auswertung werden die Teilmatrizen  $\mathbf{Y}_{0R}$  und  $\mathbf{Y}_{0E}$  verwendet. Eine Auswahl der  $\ell_E$  Spalten von  $\mathbf{Y}_{0R}$  kann für die Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_R$  herangezogen werden und die Evolutionsmatrix  $\mathbf{Y}_E$  kann aus den Spalten der Matrix  $\mathbf{Y}_{0E}$  zusammengesetzt sein. Die Bezugszeitpunkte  $t_{B,i}$  der Zustandsrekonstruktion korrespondieren mit der letzten Spalte von  $\mathbf{Y}_{0R}$ . Die Teilmatrix  $\mathbf{Y}_N$  bleibt unberücksichtigt, weil die korrespondierenden Signalwerte  $y(t)$  von der Rauschanregung beeinflusst sind.

Das in Bild 5.5 gezeigte Ablaufschema fasst die bisher besprochene Prozedur zusammen. Die endgültige Definition des Linearitätskriteriums erfolgt im Anschluss an die nun folgenden Betrachtungen zur Wahl der Versatz- und Prädiktionszeit.

$$\mathbf{U}_{[n_A \times \ell_A]} = \left[ \begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ \mathbf{u}_{N,i-1}^T & \mathbf{u}_0^T \\ \mathbf{u}_{N,i}^T & \mathbf{u}_0^T \\ \mathbf{u}_{N,i+1}^T & \mathbf{u}_0^T \\ \vdots & \vdots \\ \ell_N & \ell_0 \end{array} \right], \quad \ell_A = \ell_N + \ell_0$$

$$\mathbf{Y}_{[n_A \times \ell_A]} = \left[ \begin{array}{c|c|c} \mathbf{Y}_N & \mathbf{Y}_{0R} & \mathbf{Y}_{0E} \\ \ell_N + 1 & \ell_E & \ell_P \end{array} \right]$$

**Bild 5.4:** Darstellung des Anregungs- und Messsignals in Matrixform ( $\mathbf{U}$  bzw.  $\mathbf{Y}$ ).



**Bild 5.5:** Ablaufschema der Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers.

## 5.4 Wahl der Versatz- und Prädiktionszeit

Wichtige Parameter der oben beschriebenen Methode sind die zur Rekonstruktion verwendete Versatzzeit  $t_V$  und die Prädiktionszeit  $t_P$ . Sinnvolle Kriterien für deren Wahl sind die Minimierung des Einflusses von Messrauschen sowie der Gefahr einer Unter- bzw. Überschätzung der Systemordnung  $n_x$  entsprechend einer falschen Einbettungsdimension  $d_E$ . Im Folgenden werden beide Kriterien konkretisiert und anhand linearer Systeme untersucht.

### 5.4.1 Minimierung des Einflusses von Messrauschen auf die Vorhersage

Eine dem Ausgangssignal  $y(t)$  überlagerte Störung führt bei Anwendung der Zustandsrekonstruktion (5.5) zu einem Prädiktionsfehler. Sind das Systemmodell sowie die Eigenschaften der Störung bekannt, kann deren Auswirkung auf die Prädiktion durch geschickte Wahl der Versatzzeit  $t_V$  minimiert werden.

#### Modellgestütztes Kriterium

Mit dem gestörten Vektor  $\tilde{\mathbf{y}}_{\ell_P}(t) = \mathbf{y}_{\ell_P}(t) + \mathbf{e}_{\ell_P}(t)$  der Systemevolution, dem gestörten Pseudozustandsvektor  $\tilde{\mathbf{y}}_R(t) = \mathbf{y}_R(t) + \mathbf{e}_R(t)$  und dem als ungestört angenommenen Modell  $\mathbf{Q}_{RP}$

folgt mit (5.7) der scheinbare Prädiktionsfehler (Differenz zwischen gestörter gemessener Entwicklung und auf Basis gestörter Messung durchgeführter Prädiktion)

$$\tilde{\mathbf{y}}_{\ell_P}(t)^T - \tilde{\mathbf{y}}_R(t)^T \mathbf{Q}_{RP} = -\mathbf{e}_R(t)^T \mathbf{Q}_{RP} + \mathbf{e}_{\ell_P}(t)^T. \quad (5.16)$$

Davon ist bei gegebener Prädiktionszeit  $t_P$  und gegebenen Dimensionen der Prädiktionsmatrix und der Rekonstruktionsmatrix nur der auf fehlerhafte Rekonstruktion zurückzuführende Anteil

$$\mathbf{e}_{RP}(t)^T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_R(t)^T \mathbf{Q}_{RP} \quad (5.17)$$

über  $\mathbf{Q}_{RP}$  durch die Wahl der Versatzzeit  $t_V$  zu beeinflussen und wird im Folgenden vereinfachend als Prädiktionsfehler bezeichnet.

Mit der Matrix  $\mathbf{Q}_{RR} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_{RP} \mathbf{Q}_{RP}^T$  und der Kovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{e_R}$  des Messfehlervektors  $\mathbf{e}_R(t)$  ergibt sich

$$\overline{\sigma_{e_{RP}}^2} = \frac{1}{\ell_P} \mathbb{E} \{ \mathbf{e}_{RP}(t)^T \mathbf{e}_{RP}(t) \} = \frac{1}{\ell_P} \mathbb{E} \{ \mathbf{e}_R(t)^T \mathbf{Q}_{RR} \mathbf{e}_R(t) \} = \frac{1}{\ell_P} \text{tr} (\mathbf{Q}_{RR} \mathbf{P}_{e_R}) \quad (5.18)$$

als mittlere Varianz des Vorhersagefehlers (Erläuterung der letzten Umformung in Anhang B.2).

Für identisch verteilte, unkorrelierte Messfehler folgt

$$\overline{\sigma_{e_{RP}}^2} = \frac{1}{\ell_P} \text{tr} (\mathbf{Q}_{RR}) \sigma_{e_y}^2 \quad (5.19)$$

mit der Varianz  $\sigma_{e_y}^2$  des skalaren Messfehlers  $e_y(t) = \tilde{y}(t) - y(t)$ .

Unter dieser Annahme ergibt sich die im Sinne eines minimalen mittleren quadratischen Vorhersagefehlers optimale Versatzzeit durch Minimierung der Spur von  $\mathbf{Q}_{RR}(t_V)$ . Durch Normierung lässt sich

$$k_n(t_V) = \frac{\sqrt{\overline{\sigma_{e_{RP}}^2}(t_V)}}{\sigma_{e_y}} = \sqrt{\frac{\text{tr} (\mathbf{Q}_{RR})}{\ell_P}} \quad (5.20)$$

als Verstärkungsfaktor des Messfehlers definieren.

### Modale Transformation

Weitere Einsicht kann durch die Beschränkung auf schwach gedämpfte ( $D < 1$ ) lineare mechanische Schwingungssysteme gewonnen werden. Dann hat die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  aus

(5.1) für ein System mit  $n_{\text{FHG}}$  mechanischen Freiheitsgraden konjugiert komplexe Eigenwerte  $(\lambda_i, \text{conj}(\lambda_i))$ , die sich in der Diagonalmatrix

$$\underline{\mathbf{A}} = \text{Diag} \left( \lambda_1, \text{conj}(\lambda_1), \dots, \lambda_{n_{\text{FHG}}}, \text{conj}(\lambda_{n_{\text{FHG}}}) \right) \quad (5.21)$$

zusammenfassen lassen. Mit der komplexen Matrix

$$\underline{\mathbf{V}} = \left[ \mathbf{v}_1, \text{conj}(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2, \text{conj}(\mathbf{v}_2), \dots, \mathbf{v}_{n_{\text{FHG}}}, \text{conj}(\mathbf{v}_{n_{\text{FHG}}}) \right] \quad (5.22)$$

der zugehörigen konjugiert komplexen Eigenvektoren lässt sich  $\mathbf{A}$  auf komplexe Diagonalgestalt

$$\underline{\mathbf{A}}_q = \underline{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{A} \underline{\mathbf{V}} = \underline{\mathbf{A}} \quad (5.23)$$

bringen, für die übrigen Systemmatrizen gilt

$$\underline{\mathbf{b}}_q = \underline{\mathbf{V}}^{-1} \mathbf{b}, \quad \underline{\mathbf{c}}_q = \mathbf{c} \underline{\mathbf{V}}, \quad d_q = d. \quad (5.24)$$

Der zur Mode  $i$  gehörige Teil  $\underline{\mathbf{A}}_{q,i}$  der Systemmatrix und  $\underline{\mathbf{c}}_{q,i}$  der Ausgangsmatrix haben die Form

$$\underline{\mathbf{A}}_{q,i} = \begin{bmatrix} \lambda_{R,i} + j\lambda_{I,i} & 0 \\ 0 & \lambda_{R,i} - j\lambda_{I,i} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{c}}_{q,i}^T = \begin{bmatrix} c_{R,i} + jc_{I,i} & c_{R,i} - jc_{I,i} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

und die komplexe Matrix  $\underline{\mathbf{A}}_{q,i}$  lässt sich in die reelle Form

$$\mathbf{A}_{qR,i} = \underline{\mathbf{T}}_{cR,i}^{-1} \underline{\mathbf{A}}_{q,i} \underline{\mathbf{T}}_{cR,i} = \begin{bmatrix} \lambda_{R,i} & \lambda_{I,i} \\ -\lambda_{I,i} & \lambda_{R,i} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

([29], S.401) bringen. Die Transformationsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}_{cR,i}$  ist durch (5.26) nicht eindeutig bestimmt, man kann z. B. zusätzlich eine bestimmte Form

$$\mathbf{c}_{qR,i}^T = \underline{\mathbf{c}}_{q,i}^T \underline{\mathbf{T}}_{cR,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

der Ausgangsmatrix fordern, damit wird

$$\underline{\mathbf{T}}_{cR,i} = \frac{1}{2(c_{R,i}^2 + c_{I,i}^2)} \begin{bmatrix} (c_{R,i} - jc_{I,i}) & -(c_{I,i} + jc_{R,i}) \\ (c_{R,i} + jc_{I,i}) & (-c_{I,i} + jc_{R,i}) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

und es folgt die Transformationsmatrix für das Gesamtsystem als Blockdiagonalmatrix

$$\underline{\mathbf{T}}_{cR} = \text{Diag} \left( \underline{\mathbf{T}}_{cR,1}, \underline{\mathbf{T}}_{cR,2}, \dots, \underline{\mathbf{T}}_{cR,n_{\text{FHG}}} \right) \quad (5.29)$$

der Teilmatrizen  $\underline{\mathbf{T}}_{\text{cR},i}$ . Mit einer weiteren Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{\text{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \mathfrak{t}_{\text{K}[i,j]} \right], \quad \begin{cases} \mathfrak{t}_{\text{K}[2(i-1)+1,i]} & = 1 \\ \mathfrak{t}_{\text{K}[2(i-1)+2,i+n_{\text{FHG}}]} & = 1 \\ \mathfrak{t}_{\text{K}[i,j]} & = 0 \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (5.30)$$

zur Veränderung der Koordinatengruppierung ergibt sich die besonders übersichtliche *reelle* Formulierung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{qR}} &= \mathbf{T}_{\text{K}}^{-1} \underline{\mathbf{T}}_{\text{cR}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}_{\text{q}} \underline{\mathbf{T}}_{\text{cR}} \mathbf{T}_{\text{K}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{\text{R}} & \boldsymbol{\Lambda}_{\text{I}} \\ -\boldsymbol{\Lambda}_{\text{I}} & \boldsymbol{\Lambda}_{\text{R}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_{\text{qR}} &= \mathbf{T}_{\text{K}}^{-1} \underline{\mathbf{T}}_{\text{cR}}^{-1} \underline{\mathbf{b}}_{\text{q}} \\ \mathbf{c}_{\text{qR}}^{\text{T}} &= \underline{\mathbf{c}}_{\text{q}}^{\text{T}} \underline{\mathbf{T}}_{\text{cR}} \mathbf{T}_{\text{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{[1 \times n_{\text{FHG}}]} & \mathbf{0}_{[1 \times n_{\text{FHG}}]} \end{bmatrix} \\ \mathbf{d}_{\text{qR}} &= \mathbf{d}_{\text{q}} \end{aligned} \quad (5.31)$$

der Zustandsraumdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{qR}}(t) = \mathbf{A}_{\text{qR}} \mathbf{x}_{\text{qR}}(t) + \mathbf{b}_{\text{qR}} u(t) \quad (5.32)$$

$$y(t) = \mathbf{c}_{\text{qR}}^{\text{T}} \mathbf{x}_{\text{qR}}(t) + \mathbf{d}_{\text{qR}} u(t), \quad (5.33)$$

bei der die Systemmatrix durch die Diagonalmatrizen

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\text{R}} = \text{Diag}(\lambda_{\text{R},1}, \lambda_{\text{R},2}, \dots, \lambda_{\text{R},n_{\text{FHG}}}) \quad (5.34)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\text{I}} = \text{Diag}(\lambda_{\text{I},1}, \lambda_{\text{I},2}, \dots, \lambda_{\text{I},n_{\text{FHG}}}) \quad (5.35)$$

der Real- bzw. Imaginärteile der Eigenwerte des Systems gebildet wird.

Ist das System konservativ,  $\boldsymbol{\Lambda}_{\text{R}} = \mathbf{0}$ , so beschreiben bei fehlender Anregung,  $u(t) \equiv 0$ , jeweils die beiden zu einer Mode  $i$  gehörenden Systemzustände  $[x_{\text{q}[i]}, x_{\text{q}[i+n_{\text{FHG}}]}]$  einen Kreis, dessen Radius der Amplitude der von dieser Mode am Ausgang verursachten Schwingung entspricht.

Wegen der Normierung des Ausgangsvektors  $\mathbf{c}_{\text{qR}}$  enthalten daher die Zeilen der Prädiktionsmatrix  $\mathbf{Q}_{\text{P}}$  (5.6) in diesem Fall jeweils ein abgetastetes Sinus- und Kosinussignal pro Mode. Für zunehmenden Vorhersagezeitraum ( $t_{\text{P}} \ell_{\text{P}} \rightarrow \infty$ ) und zunehmende Rasterdichte ( $t_{\text{P}} \rightarrow 0$ ) strebt  $\mathbf{Q}_{\text{P}} \mathbf{Q}_{\text{P}}^{\text{T}}$  daher gegen den Grenzwert

$$\lim_{t_{\text{P}} \ell_{\text{P}} \rightarrow \infty} \lim_{t_{\text{P}} \rightarrow 0} \mathbf{Q}_{\text{P}} \mathbf{Q}_{\text{P}}^{\text{T}} = \frac{\ell_{\text{P}}}{2} \mathbf{E}, \quad (5.36)$$

so dass der Grenzwert für den Fehlerverstärkungsfaktor  $k_{\text{n}}$  bei fehlender Dämpfung und Prädiktion der „gesamten Zukunft“

$$k_{\text{n}}^{\infty}(t_{\text{V}}) = \sqrt{\frac{\text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{RR}})}{\ell_{\text{P}}}} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{R}} \mathbf{Q}_{\text{P}} \mathbf{Q}_{\text{P}}^{\text{T}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{\text{T}})}{\ell_{\text{P}}}} = \sqrt{\frac{\text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{R}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{\text{T}})}{2}} \quad (5.37)$$

lautet. Eine Minimierung dieses Faktors ist gleichbedeutend mit der Minimierung der mittleren Varianz des Zustandsvektors aufgrund des Messfehlers.

### Signalgestütztes Kriterium

Im Anwendungsfall liegt die als bekannt angenommene Systembeschreibung (5.1) nicht vor. Im Folgenden wird daher der Zusammenhang zwischen dem oben beschriebenen Faktor  $k_n$  und der aus der Messung bekannten Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_R$  diskutiert.

Über die Matrix  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}(t_{B,1}), \mathbf{x}(t_{B,2}), \dots, \mathbf{x}(t_{B,n_B})]^T$  der Systemzustände zu den Bezugszeitpunkten  $t_{B,i}$  kann der Zusammenhang

$$\mathbf{Y}_R = \mathbf{X}\mathbf{Q}_R^{-1} \Rightarrow \mathbf{Y}_R^T \mathbf{Y}_R = \mathbf{Q}_R^{-1T} \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{Q}_R^{-1} \quad (5.38)$$

zur Rekonstruktionsmatrix  $\mathbf{Q}_R$  hergestellt werden. Im stationären Zustand und für  $n_B \rightarrow \infty$  gilt per Definition

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = n_B \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}(t_{B,i}) \mathbf{x}(t_{B,i})^T \right\}. \quad (5.39)$$

Entnimmt man jedem Abschnitt aus (5.15), in dem das System ohne Anregung ist (vgl. Bild 5.4), eine „Messung“  $\mathbf{x}(t_{B,i})$  des Systemzustands, so sind diese  $t_{B,i+1} - t_{B,i} = \ell_A t_S$  zeitlich voneinander entfernt und es gilt mit der Matrix  $\mathbf{A}_d$  und dem Vektor  $\mathbf{b}_d$  der zeitdiskreten Systembeschreibung die Mehrschrittprädiktion

$$\mathbf{x}(t_{B,i+1}) = \mathbf{A}_{dM} \mathbf{x}(t_{B,i}) + \sum_{j=1}^{\ell_N} \mathbf{b}_{dM,j} \mathbf{u}_{N,i}(j) \quad (5.40)$$

$$\mathbf{A}_{dM} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_d^{\ell_A} \quad (5.41)$$

$$\mathbf{b}_{dM,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_d^{\ell_E} \mathbf{A}_d^{(\ell_N-j)} \mathbf{b}_d \quad (5.42)$$

mit dem  $j$ -ten Element  $\mathbf{u}_{N,i}(j)$  des  $i$ -ten Anregungsabschnittes. Dabei vergehen  $\ell_E$  Abtastschritte zwischen dem Abschalten der Erregung und der „Messung“ des Systemzustands  $\mathbf{x}(t_{B,i})$ , während derer sich das System ohne Anregung entwickelt.

Definiert man  $\mathbf{P}_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}(t_{B,i}) \mathbf{x}(t_{B,i})^T \right\} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{x}(t_{B,i+1}) \mathbf{x}(t_{B,i+1})^T \right\}$  als die Kovarianzmatrix der Systemzustände zu den Bezugszeitpunkten, so folgt

$$\mathbf{P}_{xx} = \mathbf{A}_{dM} \mathbf{P}_{xx} \mathbf{A}_{dM}^T + \mathbf{Q} \sigma_u^2, \quad \mathbf{Q} = \sum_{j=1}^{\ell_N} \mathbf{b}_{dM,j} \mathbf{b}_{dM,j}^T, \quad (5.43)$$

eine als diskrete LYAPUNOV-Gleichung bezeichnete Matrix-Gleichung, zu deren Lösung numerische Verfahren (z. B. die MATLAB-Funktion `dlyap`) auf Basis der Schur-Zerlegung der

Matrix  $\mathbf{A}_{\text{dM}}$  zum Einsatz kommen. Bei (5.43) handelt es sich *nicht* um die Standardgleichung zur Berechnung der Kovarianzmatrix eines zeitdiskreten Systems, da die Rauschanregung hier nur abschnittsweise stattfindet und nur ein Zustandsvektor je Abschnitt berücksichtigt wird.

Aus (5.43) ergibt sich ein lineares Gleichungssystem in den Koeffizienten von  $\mathbf{P}_{\text{xx}}$ . Die analytische Darstellung der Lösung für  $\mathbf{P}_{\text{xx}}$ , die zur weiteren Umformung von (5.38) notwendig wäre, ist aber zu unübersichtlich, um sie hier wiederzugeben.

Bei Verwendung der reellen modalen Form (5.31) der Zustandsraumbeschreibung überträgt sich die Besetzung der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{\text{qR}}$  mit vier Diagonalmatrizen auf  $\mathbf{A}_{\text{dM}}$ , so dass (5.43) in  $n_{\text{FHG}}^2$  Matrix-Gleichungen der Dimension  $[2 \times 2]$  zerfällt.

*Sonderfall:*

Für sehr schwache Dämpfung ( $\mathbf{\Lambda}_{\text{R}} \ll \mathbf{\Lambda}_{\text{I}}$ ) im System (5.31) wird  $\mathbf{P}_{\text{xx}}$  nahezu diagonal,  $\mathbf{P}_{\text{xx}} \approx \text{Diag}(\mathbf{p}_{\text{xx}}^{\text{T}}, \mathbf{p}_{\text{xx}}^{\text{T}})$ , dabei sind oberer und unterer Teil der Diagonalen, zusammengefasst im Vektor  $\mathbf{p}_{\text{xx}}$ , identisch. Nimmt man weiterhin die gleiche Varianz  $\sigma_x^2$  für alle Zustände an,

$$\mathbf{P}_{\text{xx}} \approx \sigma_x^2 \mathbf{E}, \quad (5.44)$$

so wird aus (5.38)

$$\mathbf{Y}_{\text{R}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{R}} = \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1\text{T}} \mathbf{X}^{\text{T}} \mathbf{X} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1} = \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1\text{T}} (n_{\text{B}} \mathbf{P}_{\text{xx}}) \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1} \approx n_{\text{B}} \sigma_x^2 \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1\text{T}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1} \quad (5.45)$$

und wegen  $(\mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1\text{T}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{-1})^{-1} = \mathbf{Q}_{\text{R}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{\text{T}}$

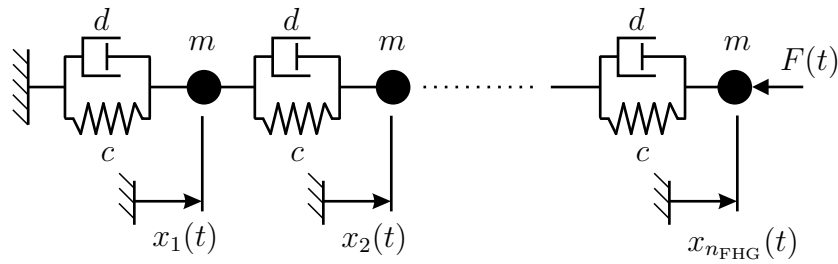
$$\text{tr}(\mathbf{Q}_{\text{R}} \mathbf{Q}_{\text{R}}^{\text{T}}) \approx n_{\text{B}} \sigma_x^2 \text{tr}\left(\left(\mathbf{Y}_{\text{R}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{R}}\right)^{-1}\right). \quad (5.46)$$

Eingesetzt in (5.37) folgt

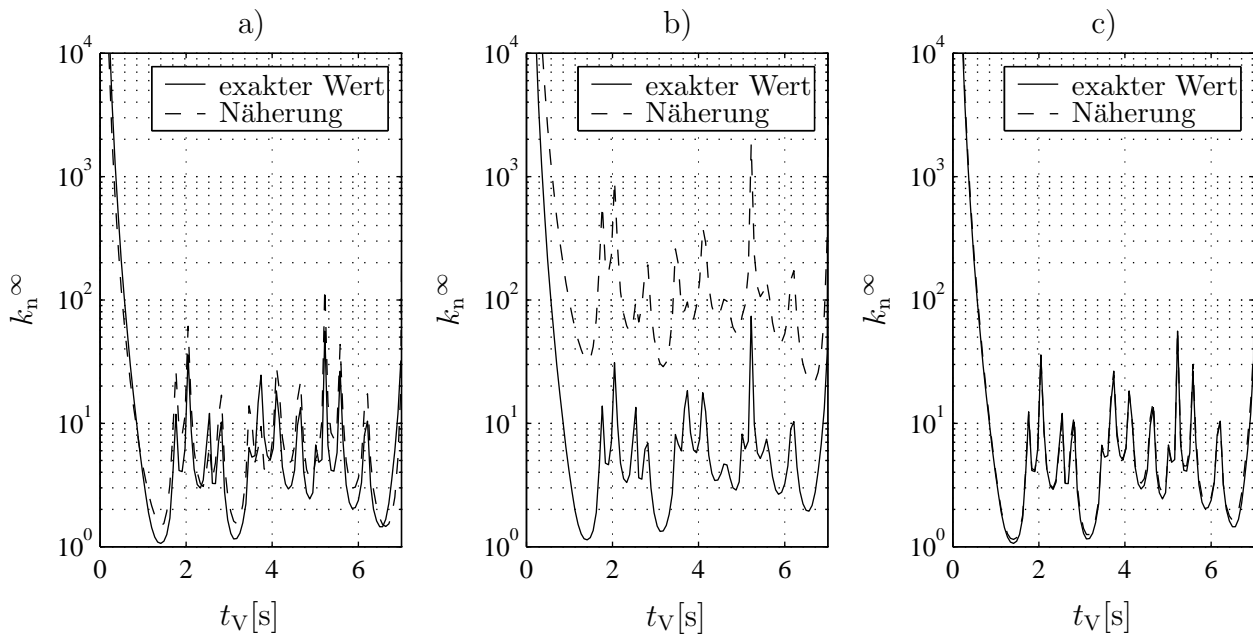
$$k_{\text{n}}^{\infty}(t_{\text{V}}) \approx \sigma_x \sqrt{\frac{n_{\text{B}}}{2}} \sqrt{\text{tr}\left(\left(\mathbf{Y}_{\text{R}}^{\text{T}} \mathbf{Y}_{\text{R}}\right)^{-1}\right)}. \quad (5.47)$$

*Beispiel Schwingerkette*

Für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  Freiheitsgraden und sehr schwacher Dämpfung ( $D = 0.0001$  für einen Einzelschwinger aus Masse, Feder und Dämpfer) zeigt Bild 5.7a den auf Basis des Modells nach (5.37) berechneten Fehlerverstärkungsfaktor  $k_{\text{n}}^{\infty}(t_{\text{V}})$  sowie die Näherung entsprechend (5.47) auf Basis der Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_{\text{R}}$ . Die Abweichungen zwischen den Kurven sind im Wesentlichen auf ungleiche Varianzen der entsprechend (5.31) definierten (modalen) Zustandsvariablen zurückzuführen.



**Bild 5.6:** Schwingerkette mit  $n_{\text{FHG}}$  Freiheitsgraden. Eingang  $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t)$  und Ausgang  $y(t) \stackrel{\text{def}}{=} x_1(t)$ . Parameter:  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1\text{Nm}^{-1}$ , Dämpfung  $d$  variabel.



**Bild 5.7:** Fehlerverstärkungsfaktoren  $k_n^\infty$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  Freiheitsgraden und variabler Dämpfung: a)  $d = 0.0002$ ; b)  $d = 0.02$ ; c)  $d = 0.0002$  und näherungsweise gleiche Varianz aller modalen Zustandsvariablen (s. Text) durch Manipulation des Eingangsvektors in der Simulation.

Bild 5.7b demonstriert die Zunahme der Abweichungen durch stärkere Dämpfung ( $D = 0.01$ ), die zu einer Vergrößerung der Außerdiagonalelemente von  $\mathbf{P}_{\text{xx}}$  führt.

In der Bild 5.7c zugrunde liegenden Simulation wurde gleiche Varianz aller Systemzustände durch entsprechende Manipulation der Eingangsmatrix  $\mathbf{b}_{\text{qR}}$  in (5.31) erzwungen. Gleichung (5.47) ist folglich nahezu erfüllt und die Abweichungen zwischen beiden Kurven entsprechend gering.

Ein Vergleich der drei Diagramme aus Bild 5.7 zeigt, dass die Position der lokalen Minima des Fehlerverstärkungsfaktors robust gegenüber Veränderungen des Dämpfungsfaktors und der



Anregung im hier untersuchten Bereich ist. Die Lage des absoluten Minimums des über die Näherung (5.47) berechneten Fehlerverstärkungsfaktors verschiebt sich beim Übergang von Bild 5.7a zu Bild 5.7b zu größeren Versatzzeiten  $t_V$ . Ursache ist das schnellere Abklingen der höherfrequenten Signalanteile, das sich erst bei nennenswerter Dämpfung bemerkbar macht. Mit (5.47) steht eine signalbasierte Fehlerfunktion zur Verfügung, die den Einfluss von Messrauschen auf die Vorhersage widerspiegelt. Ihr Minimum entspricht näherungsweise dem der exakten, modellbasierten Fehlerfunktion (5.37), wie am Beispiel gezeigt werden konnte.

Im Folgenden wird geprüft, inwieweit das Risiko einer Ordnungsunterschätzung durch geschickte Wahl der Versatz- und der Prädiktionszeit beeinflusst werden kann.

#### 5.4.2 Beurteilung des Risikos einer Ordnungsunterschätzung

Bei reduzierter Modellordnung wird in (5.9) nur ein Teil  $\mathbf{Y}_{R1}$  der Einbettungsmatrix  $\mathbf{Y}_R$  entsprechend

$$\mathbf{y}_E = \mathbf{Y}_R \mathbf{q}_{RP} = [\mathbf{Y}_{R1}, \mathbf{Y}_{R2}] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{RP1} \\ \mathbf{q}_{RP2} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

für die Prädiktion berücksichtigt, es gilt dann mit dem zu schätzenden Parametervektor  $\tilde{\mathbf{q}}_{RP1}$

$$\mathbf{y}_E = \mathbf{Y}_{R1} \tilde{\mathbf{q}}_{RP1} + \mathbf{e}_P, \quad (5.49)$$

dabei entspricht die Modellordnung  $d_E$  der Spaltenzahl von  $\mathbf{Y}_{R1}$ .

Wird  $\tilde{\mathbf{q}}_{RP1}$  durch einfache LS-Schätzung mit der Pseudoinversen  $\mathbf{Y}_{R1}^+$  bestimmt,

$$\tilde{\mathbf{q}}_{RP1} = \mathbf{Y}_{R1}^+ \mathbf{y}_E, \quad \mathbf{Y}_{R1}^+ = \left( \mathbf{Y}_{R1}^T \mathbf{Y}_{R1} \right)^{-1} \mathbf{Y}_{R1}^T, \quad (5.50)$$

folgt für den Vektor  $\mathbf{e}_P$  der Prädiktionsfehler

$$\mathbf{e}_P = \left( \mathbf{E} - \mathbf{Y}_{R1} \mathbf{Y}_{R1}^+ \right) \mathbf{y}_E. \quad (5.51)$$

Für die Fehlerquadratsumme gilt damit:

$$\mathbf{e}_P^T \mathbf{e}_P = \mathbf{y}_E^T \left( \mathbf{E} - \mathbf{Y}_{R1}^+{}^T \mathbf{Y}_{R1}^T \right) \left( \mathbf{E} - \mathbf{Y}_{R1} \mathbf{Y}_{R1}^+ \right) \mathbf{y}_E \quad (5.52)$$

sowie nach einigen Umformungen

$$\mathbf{e}_P^T \mathbf{e}_P = \mathbf{y}_E^T \left( \mathbf{E} - \mathbf{Y}_{R1} \mathbf{Y}_{R1}^+ \right) \mathbf{y}_E. \quad (5.53)$$

Mit  $\mathbf{y}_E = \mathbf{X}\mathbf{q}_P$  und

$$\mathbf{Y}_{R1} = \mathbf{X}\mathbf{Q}_{\text{invR1}} \quad \left( [\mathbf{Q}_{\text{invR1}}, \mathbf{Q}_{\text{invR2}}] = \mathbf{Q}_{\text{invR}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Q}_R^{-1} \right) \quad (5.54)$$

kann die Fehlerquadratsumme in Abhängigkeit der Matrix  $\mathbf{X}$  der Systemzustände geschrieben werden,

$$\mathbf{e}_P^T \mathbf{e}_P = \mathbf{q}_P^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \left( \mathbf{E} - \mathbf{Q}_{\text{invR1}} \left( \mathbf{Q}_{\text{invR1}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{Q}_{\text{invR1}} \right)^{-1} \mathbf{Q}_{\text{invR1}}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \right) \mathbf{q}_P \quad (5.55)$$

und durch Normierung folgt der dimensionslose Faktor

$$k_o = \sqrt{\frac{\mathbf{e}_P^T \mathbf{e}_P}{\mathbf{y}_E^T \mathbf{y}_E}}, \quad \mathbf{y}_E^T \mathbf{y}_E = \mathbf{q}_P^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{q}_P. \quad (5.56)$$

Für den Sonderfall (5.44) mit  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = n_B \sigma_x^2 \mathbf{E}$  folgt mit der Pseudoinversen  $\mathbf{Q}_{\text{invR1}}^+$

$$k_o = \sqrt{\frac{\mathbf{q}_P^T (\mathbf{E} - \mathbf{Q}_{\text{invR1}} \mathbf{Q}_{\text{invR1}}^+) \mathbf{q}_P}{\mathbf{q}_P^T \mathbf{q}_P}} \quad (5.57)$$

für  $n_B \rightarrow \infty$ .

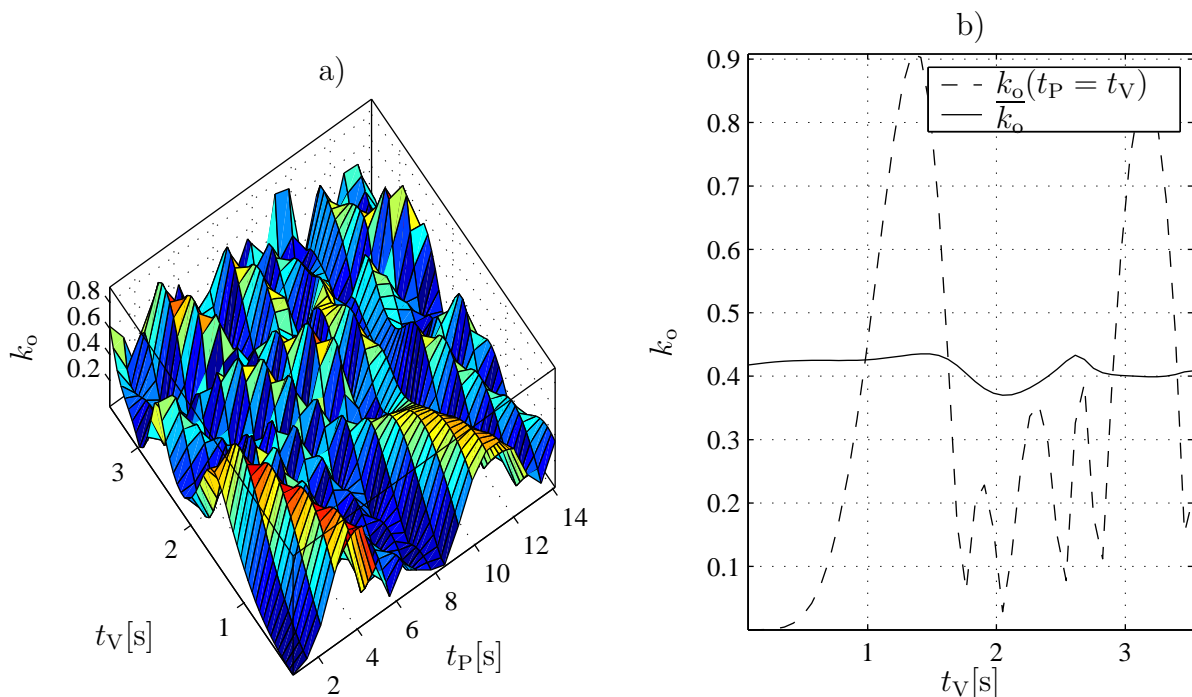
Die ersten  $d_E$  Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{Q}_{\text{invR1}} \mathbf{Q}_{\text{invR1}}^+$  sind gleich Eins, alle anderen identisch Null. Liegt nun  $\mathbf{q}_P$  vollständig in dem von den ersten  $d_E$  Eigenvektoren aufgespannten Raum, so wird der Vorhersagefehler (5.57) gleich Null und die Systemordnung damit unterschätzt.

Bild 5.8 zeigt den normierten Prädiktionsfehler  $k_o$  nach (5.57) für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit drei Freiheitsgraden ohne Dämpfung bei (zu geringer) Modelldimension  $d_E = 5$ . Dabei wurde die in (5.31) definierte reelle modale Zustandsraumbeschreibung zugrunde gelegt, so dass die Annahme  $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = n_B \sigma_x^2 \mathbf{E}$  gleichbedeutend ist mit identischer Varianz der Anteile aller Moden im Ausgangssignal.

Der normierte Prädiktionsfehler  $k_o$  schwankt deutlich in Abhängigkeit von  $t_V$  und  $t_P$ , Bild 5.8a. Die Beschränkung auf den Sonderfall  $t_P = t_V$ , Bild 5.8b, zeigt die Gefahr der Ordnungsunterschätzung aufgrund sehr kleiner Prädiktionsfehler bei bestimmten Versatzzeiten. Eine quadratische Mittelung

$$\overline{k_o} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_o^2(t_{P,i})} \quad (5.58)$$

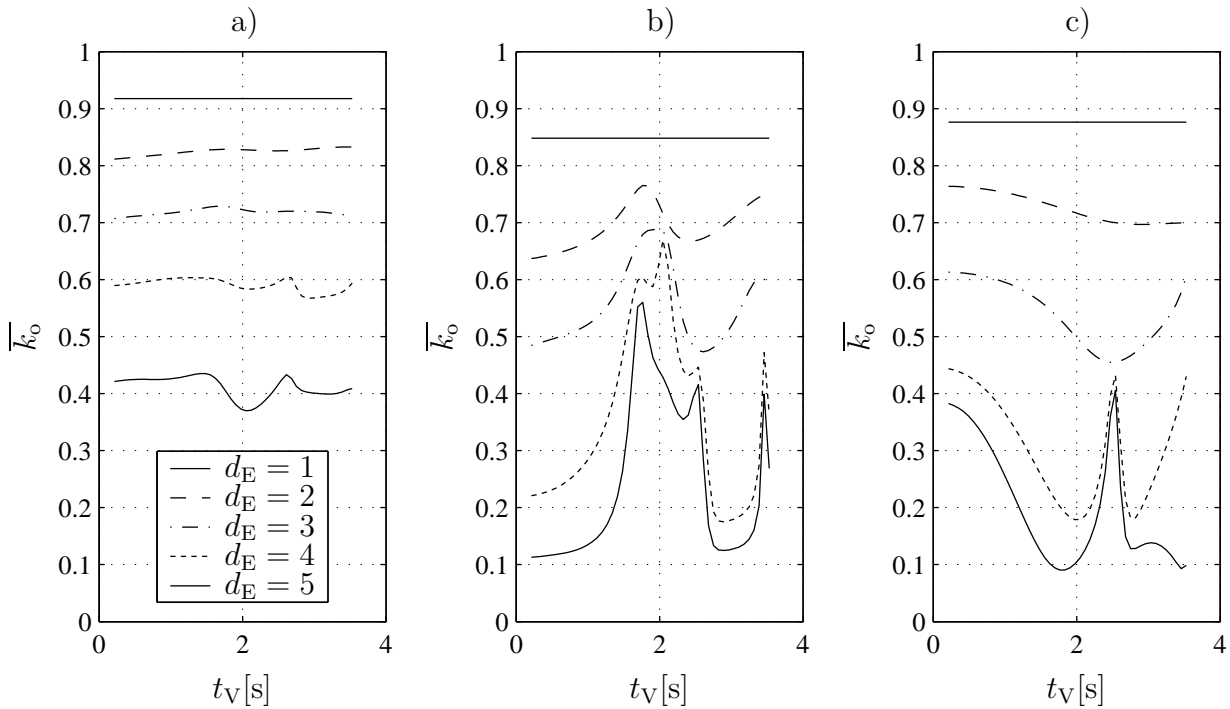
über alle in Bild 5.8a dargestellten Prädiktionszeiten führt zu einer deutlich verringerten Abhängigkeit des Prädiktionsfehlers von der Versatzzeit und damit zu einem reduzierten Risiko einer Ordnungsunterschätzung.



**Bild 5.8:** Normierter Vorhersagefehler  $k_o$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  Freiheitsgraden ohne Dämpfung ( $d = 0$ ), Eigenschwingungsdauern  $T_0 = [3.5 \ 5.0 \ 14.1]$  s: a)  $k_o$  in Abhängigkeit der Versatzzeit  $t_V$  und der Prädiktionszeit  $t_P$ ; b)  $k_o$  für den Sonderfall  $t_P = t_V$  sowie als Mittelung  $\bar{k}_o$  über mehrere Prädiktionszeiten  $t_P$ .

Die Abhängigkeit des Fehlerfaktors  $\bar{k}_o$  von der gewählten Einbettungsdimension ist in Bild 5.9a dargestellt. Der Fehler steigt mit sinkender Modellordnung  $d_E$  an, bleibt aber stets kleiner als Eins, dem Grenzwert für die triviale Prädiktion  $\mathbf{y}_P = \mathbf{0}$  bei Modellordnung  $d_E = 0$ . Für  $d_E = 1$  ist  $\bar{k}_o$  unabhängig von der Versatzzeit  $t_V$ , weil dann für die „Rekonstruktion“ des Zustands  $\mathbf{x}(t)$  nur der aktuelle Ausgangswert  $y(t)$  herangezogen wird ( $\mathbf{Q}_R \neq f(t_V)$ ).

In Bild 5.9b wurden die Varianzen der Systemzustände im Verhältnis 1.95/1.0/0.05, beginnend mit der höchstfrequenten Mode, gewichtet. Die resultierenden Prädiktionsfehler bei zu geringer Modellordnung sinken bei fast allen Versatzzeiten. Dies ist schlüssig, wenn man davon ausgeht, dass bei der Approximation durch das Modell zunächst die am stärksten vertretenen Moden berücksichtigt werden. Weiterhin ist im Unterschied zu Bild 5.9a ein sprunghaftes Absinken des Fehlers bei geradzahligen Modellordnungen zu erkennen, die bei mechanischen Systemen einer ganzzahligen Anzahl von Freiheitsgraden entsprechen. Ein letzter Unterschied besteht in der stärkeren Abhängigkeit des Prädiktionsfehlers von der Versatzzeit, einem unerwünschten Effekt, denn die Erkennung einer zu geringen Modell-

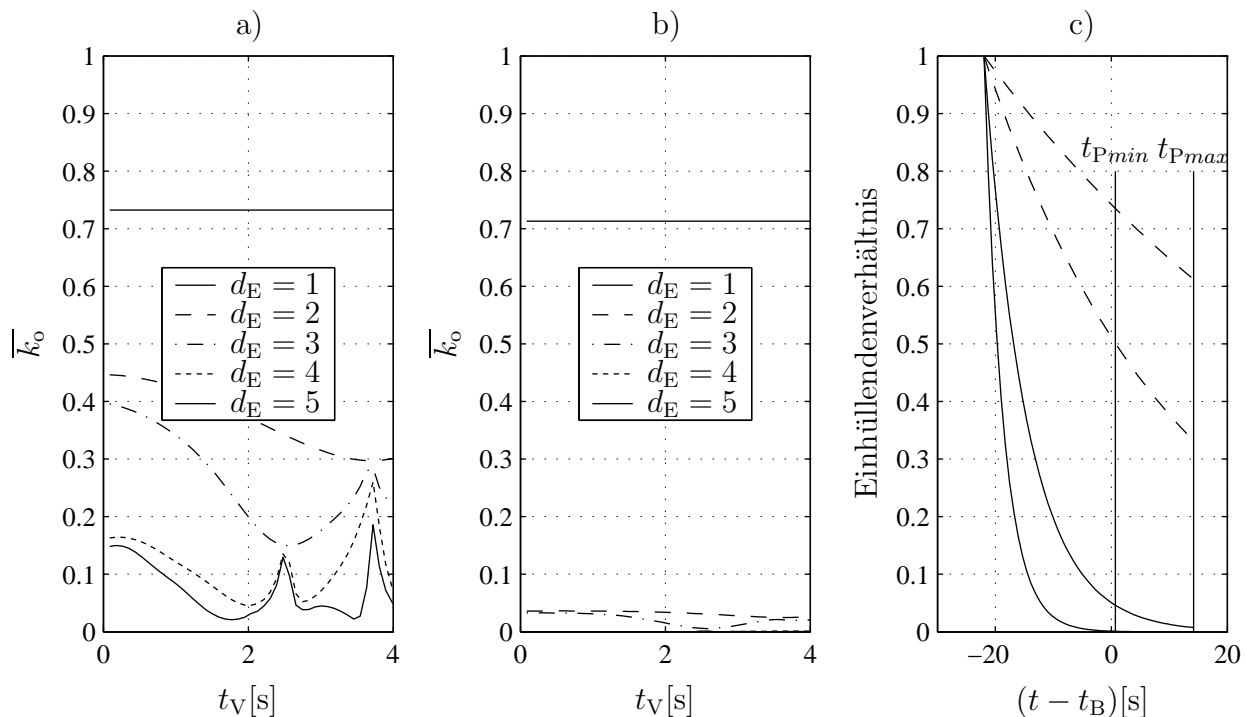


**Bild 5.9:** Normierter Vorhersagefehler  $\bar{k}_o$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 ohne Dämpfung ( $d = 0$ ) mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  Freiheitsgraden bei unterschiedlichen Einbettungsdimensionen  $d_E$ . Gewichtung der modalen Varianzen: a) 1.0 / 1.0 / 1.0; b) 1.95 / 1.0 / 0.05; c) 0.05 / 1.0 / 1.95.

ordnung sollte möglichst nicht von derartigen Auswerteparametern abhängen. Der größte Prädiktionsfehler tritt in der Nähe von  $t_V = 1.75\text{s}$ , der halben Periodendauer der höchstfrequenten und hier am stärksten gewichteten Eigenschwingung auf. Bei dieser Versatzzeit sind für ein harmonisches Signal die Komponenten des Pseudozustandsvektors gerade um  $180^\circ$  phasenverschoben und damit vollständig (anti-)korreliert.

In Bild 5.9c wurde die Gewichtung der Moden umgekehrt. Das Fehlermaximum bei  $t_V \approx 1.75\text{s}$  verschwindet und wird durch eines bei  $t_V \approx 2.5\text{s}$  (der halben Eigenschwingungsdauer der zweiten Mode) ersetzt. Als lokales Maximum ist dieses auch in Bild 5.9b schon zu erkennen.

Bei den Auswertungen in Bild 5.10 wurde die tatsächliche Kovarianzmatrix, die aus einer Anregung der letzten Masse der gedämpften Schwingerkette resultiert, berücksichtigt und damit auf die idealisierenden Annahmen (Dämpfungsfreiheit, diagonale Kovarianzmatrix) verzichtet. In Bild 5.10a wurde die Dämpfungskonstante  $d$  entsprechend eines LEHRschen Dämpfungsmaßes  $D = 0.01$  für den Einzelschwinger gewählt. Das Ergebnis ähnelt dem aus Bild 5.9c, weil eine Anregung mit weißem Rauschen naturgemäß zu einer stärkeren Anregung der tieffrequenten Moden führt. Der schnellere Abfall des Fehlers mit zunehmender



**Bild 5.10:** Normierter Vorhersagefehler  $\overline{k}_0$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  Freiheitsgraden bei unterschiedlichen Einbettungsdimensionen  $d_E$ . Variation der Dämpfung eines Einzelschwingers: a)  $D = 0.01$ ; b)  $D = 0.1$ . Diagonale der Kovarianzmatrix: a)  $\text{diag}(\mathbf{P}_{xx}) = [0.0013, 0.0415, 0.929, 0.0012, 0.040, 0.923]$ ; b)  $\text{diag}(\mathbf{P}_{xx}) = [7.9 \cdot 10^{-10}, 2.7 \cdot 10^{-5}, 7.1 \cdot 10^{-2}, 9.4 \cdot 10^{-10}, 2.1 \cdot 10^{-5}, 7.1 \cdot 10^{-2}]$ , Anregungs- und Auswertungsparameter:  $t_S = 8.86 \cdot 10^{-2}$ s,  $\ell_N = 160$ ,  $\ell_E = 240$ ,  $\ell_P = 160$ ; c) Einhüllendenverhältnis (beim Ausschwingvorgang) der höherfrequenten Moden zur niederfrequentesten.

$D = 0.01$ : gestrichelte Linien,  $D = 0.1$ : durchgezogene Linien.

Einbettungsdimension ist auf die, im Vergleich zu Bild 5.9c, stärkere Ungleichgewichtung der Moden im Ausgangssignal zurückzuführen. Bei Erhöhung der Dämpfung auf  $D = 0.1$  resultiert ein sehr viel schnellerer Abfall des Prädiktionsfehlers mit der Einbettungsdimension, weil die höherfrequenten Schwingungsanteile bezogen auf den niederfrequentesten bei höherer Dämpfung schneller abfallen. Bild 5.10c zeigt die Einhüllenden der Ausschwingkurven der höherfrequenten Moden bezogen auf die Einhüllende der niederfrequentesten Mode für  $D = 0.01$  (gestrichelte Kurven) und  $D = 0.1$  (durchgezogene Kurven). Die eingezeichneten Zeitpunkte  $t_{Pmin}$  und  $t_{Pmax}$  markieren den Bereich der verwendeten Prädiktionszeiten in Relation zum Bezugszeitpunkt  $t_B$ .

## 5.5 Definition des Kriteriums

Analog zur Definition des Vorhersagefehlers aufgrund einer Ordnungsunterschätzung  $k_o$  (5.56) wird der Vorhersagefehler für das Linearitätskriterium als

$$k_e = \sqrt{\frac{\mathbf{e}_P^T \mathbf{e}_P}{\mathbf{y}_P^T \mathbf{y}_P}} \quad (5.59)$$

definiert. Dabei ist  $\mathbf{y}_P$  der Evolutionsvektor und

$$\mathbf{e}_P = \mathbf{y}_P - \tilde{\mathbf{y}}_P \quad (5.60)$$

der Vektor der Vorhersagefehler zwischen  $\mathbf{y}_P$  und den Vorhersagen  $\tilde{\mathbf{y}}_P$ . Um den Rechenaufwand (besonders für das nichtlineare Modell) zu begrenzen, werden die Vorhersagefehler nur für  $n_{\text{ref}}$  zufällig ausgewählte Referenzpunkte bestimmt,  $\mathbf{e}_P$  und  $\mathbf{y}_P$  haben entsprechend  $n_{\text{ref}}$  Elemente.

Als Folgerung aus der Betrachtung des Risikos einer Ordnungsunterschätzung wird das endgültige Kriterium als quadratisches Mittel

$$\bar{k}_e = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_e^2(t_{P,i})} \quad (5.61)$$

über verschiedene Prädiktionszeiten  $t_{P,i}$  definiert.

Durch einen Vergleich von  $\bar{k}_e$  für das lineare und das nichtlineare Modell erhält man ein Maß für die Stärke der Nichtlinearität des untersuchten Systems.

Für ein lineares System ist die Anzahl der Systemzustände  $n_x$  außerdem gleich der minimalen Einbettungsdimension  $d_E$ , ab der die Vorhersagefehler (und damit  $\bar{k}_e$ ) zu Null werden. Bei nichtlinearen Systemen kann diese Einbettungsdimension größer sein. Nach dem Einbettungstheorem von TAKENS [84] ist jedoch

$$d_E = 2n_x + 1, \quad (5.62)$$

in jedem Fall ausreichend, d. h. es existiert eine obere Grenze für das minimal erforderliche  $d_E$ . Umgekehrt kann damit bei bekanntem  $d_E$  eine untere Grenze für  $n_x$  angegeben werden:

$$n_x \geq \frac{d_E - 1}{2}. \quad (5.63)$$

Ist das System vollständig beobachtbar und wurden zudem alle Zustände statistisch unabhängig angeregt, so gilt zudem

$$d_E \geq n_x, \quad (5.64)$$

wie bei den Beispielen linearer Systeme bereits gesehen. Umgekehrt gilt also

$$n_x \leq d_E. \quad (5.65)$$

Zusammenfassend kann damit auf Basis der für eine fehlerfreie Vorhersage minimal erforderlichen Einbettungsdimension  $d_E$  die Aussage

$$\frac{d_E - 1}{2} \leq n_x \leq d_E \quad (5.66)$$

über die Anzahl  $n_x$  der Systemzustände getroffen werden.

## 5.6 Beispiel Schwingerkette

### 5.6.1 Schwingerkette mit drei Freiheitsgraden

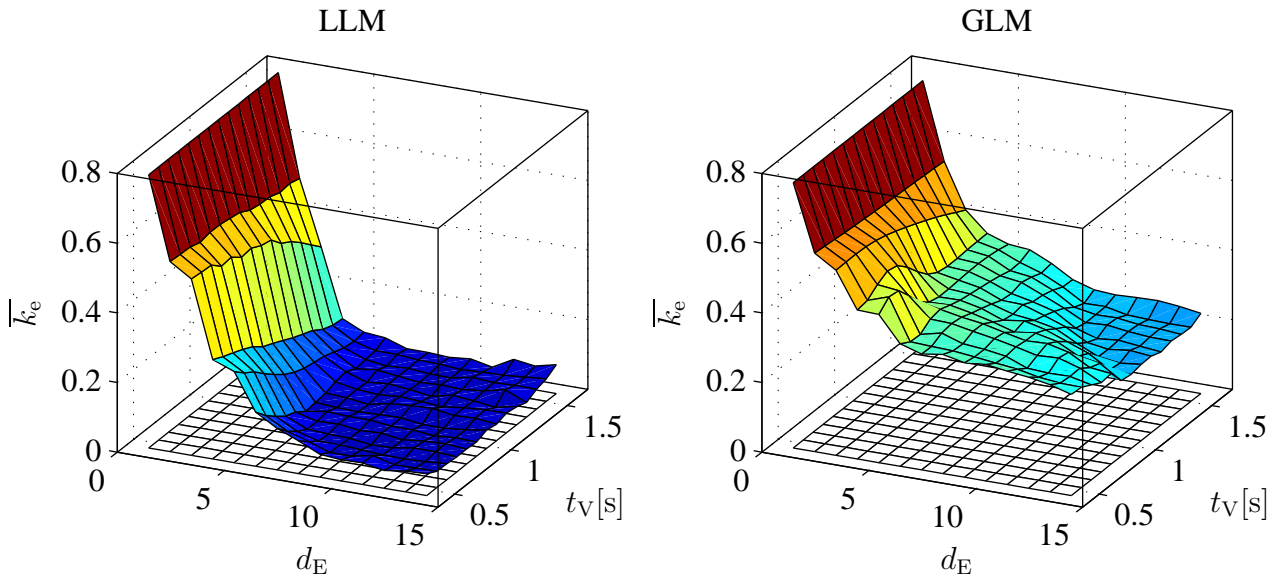
Zur Demonstration des Linearitätskriteriums wird die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 3$  verwendet. Durch Austausch der linearen Federn gegen kubisch nichtlineare mit der Federkraft

$$F_c(x) = c(1 + \beta x^2)x \quad (5.67)$$

wird nichtlineares Systemverhalten erzeugt. In den folgenden Simulationsergebnissen ist  $c = 1\text{Nm}^{-1}$  und  $\beta = 1\text{m}^{-2}$  gewählt, der Einfluss der Nichtlinearität wird durch die Standardabweichung  $\sigma_u$  der Anregung variiert. Bei der Simulation und der folgenden Auswertung sind die Abtastzeit  $t_S$ , die Schrittweite  $t_{\text{ZSI}}$  der Zeitschrittintegration und die Versatzzeit  $t_V$  zu unterscheiden. Die Abtastzeit ist die Zeitkonstante des Haltegliedes am Systemeingang sowie die Schrittweite, mit der die Ausgangsdaten für die Auswertung gespeichert werden. Die Versatzzeit ist der für die Einbettung verwendete Zeitversatz ( $t_V = kt_S$ ) und  $t_{\text{ZSI}}$  ist bei dem verwendeten Integrationsalgorithmus variabel, es gilt aber stets  $t_{\text{ZSI}} \leq t_S$ .

Bild 5.11 zeigt den normierten Vorhersagefehler  $\overline{k_e}$  für das lineare (GLM) und das nichtlineare (LLM) Modell (5.14) als Funktion der Einbettungsdimension  $d_E$  und der Versatzzeit  $t_V$  bei  $\sigma_u = 0.5\text{N}$ .

Bei beiden Modellen fällt der Vorhersagefehler mit zunehmender Einbettungsdimension  $d_E$  deutlich ab, verbleibt aber beim linearen (GLM) Modell auf deutlich höherem Niveau als beim nichtlinearen (LLM). Im Falle eines linearen Systems müsste der Fehler bei  $d_E = 6$  auf



**Bild 5.11:** Gemittelte Vorhersagefehler  $\overline{k_e}$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  und der Versatzzeit  $t_V$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit nichtlinearen Federn. Parameter:  $m = 1\text{kg}$ ,  $c = 1\text{Nm}^{-1}$ ,  $d = 0.02\text{Nsm}^{-1}$ ,  $\beta = 1\text{m}^{-2}$ ,  $\sigma_u = 0.5\text{N}$ ,  $t_S = 0.086\text{s}$ ,  $n_{\text{ref}} = 100$ ,  $n_{\text{NN}} = 20$ .

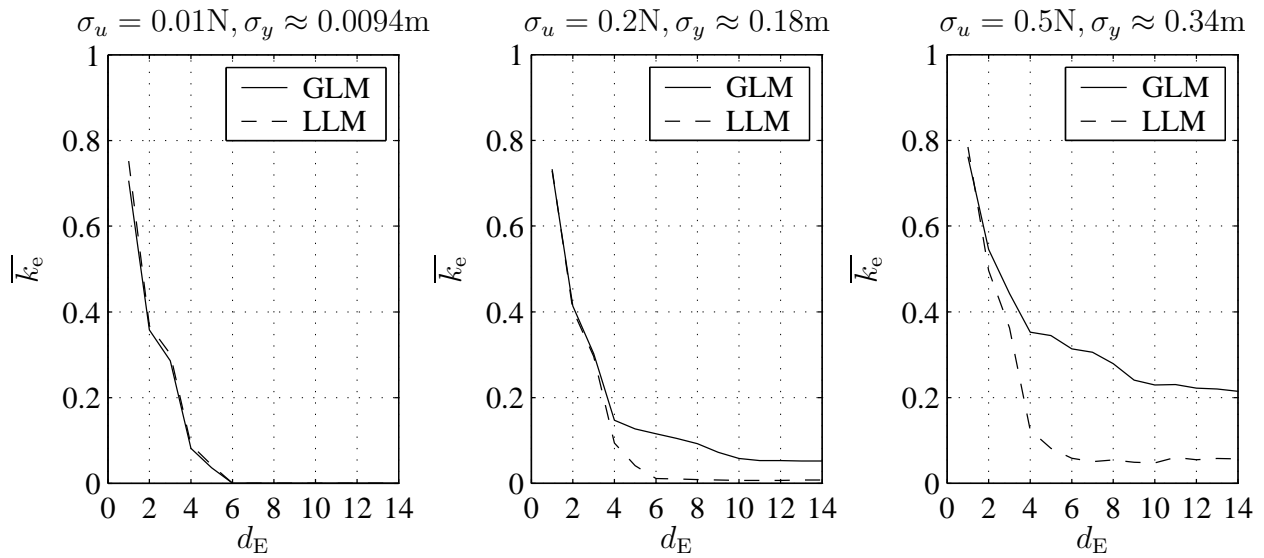
Null abfallen, da dies gerade der Dimension des Zustandsvektors der Schwingerkette mit drei Massen entspricht.

Die Diskussion in Kapitel 5.4.1 zeigte die Abhängigkeit des Einflusses von Messrauschen auf die Zustandsrekonstruktion von der gewählten Versatzzeit  $t_V$  auf. Aus Bild 5.7 folgt für die Schwingerkette  $t_V = 1.42\text{s}$  als Versatzzeit mit geringem Einfluss von Messrauschen. Für die Ergebnisse in Bild 5.12 mit variiertem Anregungsintensität  $\sigma_u$  ist daher  $t_V = 1.42\text{s}$  zugrunde gelegt.

Bild 5.12 zeigt deutlich, dass sich der aufgrund der variierten Anregung veränderliche Einfluss der nichtlinearen Federn stärker auf das lineare (GLM) als das nichtlineare (LLM) Modell auswirkt. Der Unterschied in den Vorhersagefehlern beider Modelle kann daher zur Bewertung der Abweichung vom linearen Systemverhalten herangezogen werden.

Die Frage der minimal erforderlichen Einbettungsdimension  $d_E$  für eine fehlerfreie Vorhersage ist weniger eindeutig zu beurteilen. Für  $\sigma_u = 0.01\text{N}$  und  $\sigma_u = 0.2\text{N}$  zeigt Bild 5.12 für das nichtlineare Modell noch ein ausgeprägtes niedriges Niveau ab  $d_E = 6$ . Bei Erhöhung der Anregungsintensität auf  $\sigma_u = 0.5\text{N}$  verbleibt ein großer Fehler und ein geeignetes  $d_E$  lässt sich nicht mehr angeben. Der Unterschied zwischen linearem und nichtlinearem Modell wächst



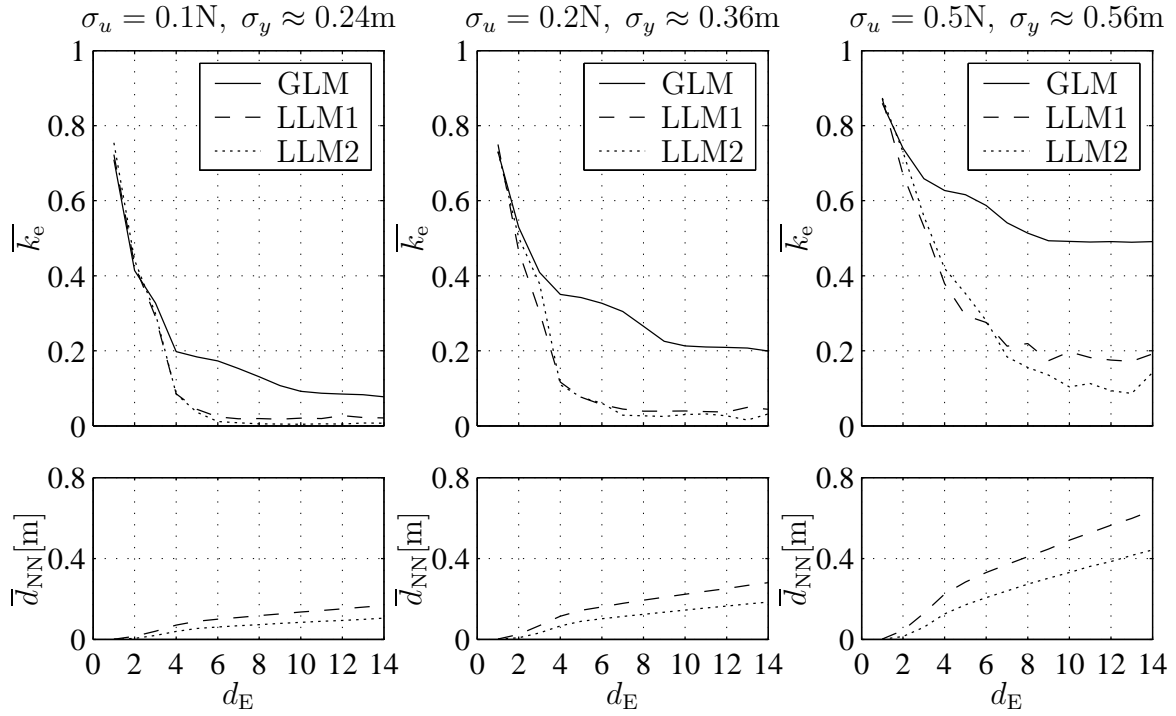


**Bild 5.12:** Nichtlineare Schwingerkette mit drei Freiheitsgraden: gemittelte Vorhersagefehler  $\bar{k}_e$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  bei  $t_S = 0.086s$ ,  $t_V = 16t_S$  für unterschiedliche Standardabweichungen  $\sigma_u$  der Anregung.

gleichwohl weiter, so dass die gewünschte Anzeige des nichtlinearen Verhaltens nach wie vor gegeben ist.

Der verbleibende Fehler des nichtlinearen Modells ist durch die nur näherungsweise Beschreibung des nichtlinearen Systems mit Hilfe lokal gültiger linearer Modelle zu erklären. Es ist zu erwarten, dass der Fehler mit zunehmender Datenmenge (beschrieben durch  $n_A$ ) abnimmt, da der rekonstruierte Zustandsraum dann dichter besetzt ist. Bei fest gewählter Anzahl nächster Nachbarn zur Erzeugung eines lokalen linearen Modells sinkt dann die Größe der Punktwolke, die von den Nachbarn gebildet wird. Das lokale Verhalten des nichtlinearen Systems kann somit besser abgebildet werden.

In Bild 5.13 wurde die Abtastzeit auf  $t_S = 0.7088s$  vergrößert, dadurch kann die Anzahl  $n_A$  auszuwertender Signalabschnitte bei gleichbleibender Datenmenge erhöht werden. Durch die mit  $t_S$  vergrößerte Haltezeit am Systemeingang nimmt die Breite des Anregungsspektrums ab und die Standardabweichung  $\sigma_y$  der Systemantwort aufgrund des Tiefpassverhaltens der Schwingerkette bei gleichem  $\sigma_u$  zu (vgl. Bild 5.12 und Bild 5.13). Folglich steigt der Einfluss der Nichtlinearität bei gleichem  $\sigma_u$ . Bild 5.13 zeigt die erwartete Verringerung des Vorhersagefehlers für das nichtlineare Modell bei Erhöhung der Anzahl  $n_A$  ausgewerteter Signal-



**Bild 5.13:** Nichtlineare Schwingerkette mit drei Freiheitsgraden. Oben: gemittelte Vorhersagefehler  $\bar{k}_e$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  bei  $t_S = 0.7088\text{s}$ ,  $t_V = 2t_S$  für unterschiedliche Standardabweichungen  $\sigma_u$  der Anregung. LLM1:  $n_A = 10^4$ , LLM2:  $n_A = 10^5$ . Unten: mittlerer Abstand der Referenzpunkte und ihrer nächsten Nachbarn für LLM1 und LLM2.

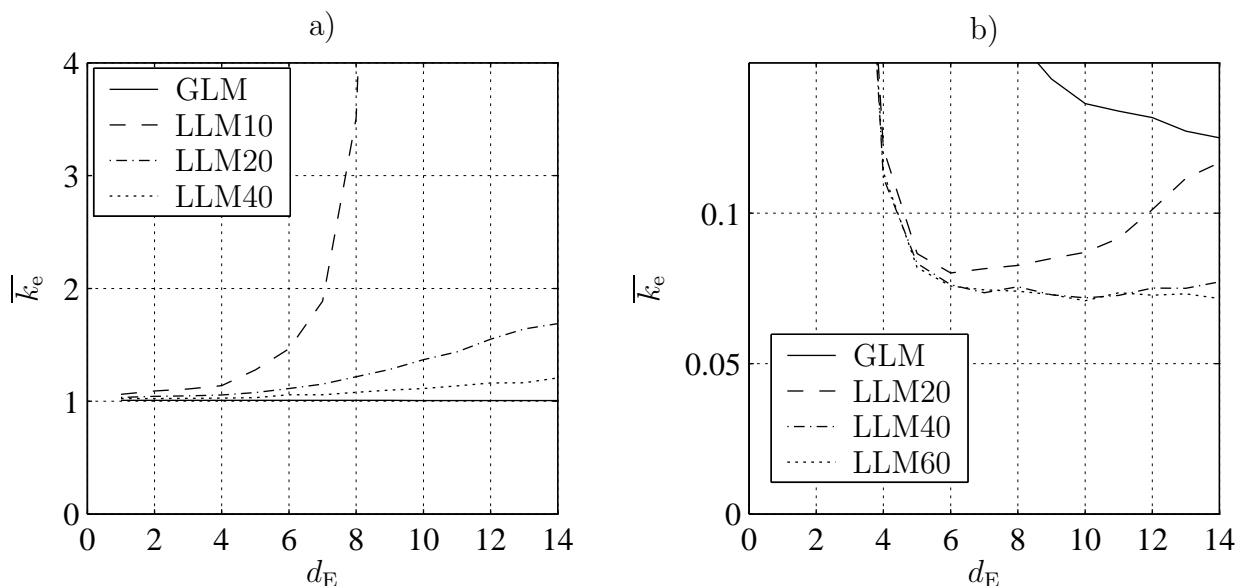
abschnitte (vgl. LLM1 mit  $n_A = 10^4$  und LLM2 mit  $n_A = 10^5$ ). Die erwartete Verringerung des mittleren Abstands

$$\bar{d}_{\text{NN}} = \frac{1}{n_{\text{ref}} n_{\text{NN}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{ref}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{NN}}} d_{\text{NN},i,k} \quad (5.68)$$

(vgl. (5.12)) der nächsten Nachbarn zum Referenzpunkt ist ebenfalls in Bild 5.13 dargestellt. Eine deutliche Verbesserung bzgl. der Angabe einer minimal notwendigen Einbettungsdimension  $d_E$  lässt sich jedoch bei starker Anregung nicht erzielen.

Die Auswertung eines reinen (hier gaußverteilten) Zufallssignals in Bild 5.14a belegt, dass der Vorteil des nichtlinearen Vorhersagemodells tatsächlich nur bei *nichtlinearen deterministischen Systemen* zum Tragen kommt. Eine Deutung von Rauschen als Abweichung von linearem Systemverhalten, wie sie bei anderen Linearitätstests auftreten kann, ist damit hier auszuschließen.

Umgekehrt kann aber Rauschen den Vorteil des nichtlinearen Modells gegenüber dem li-

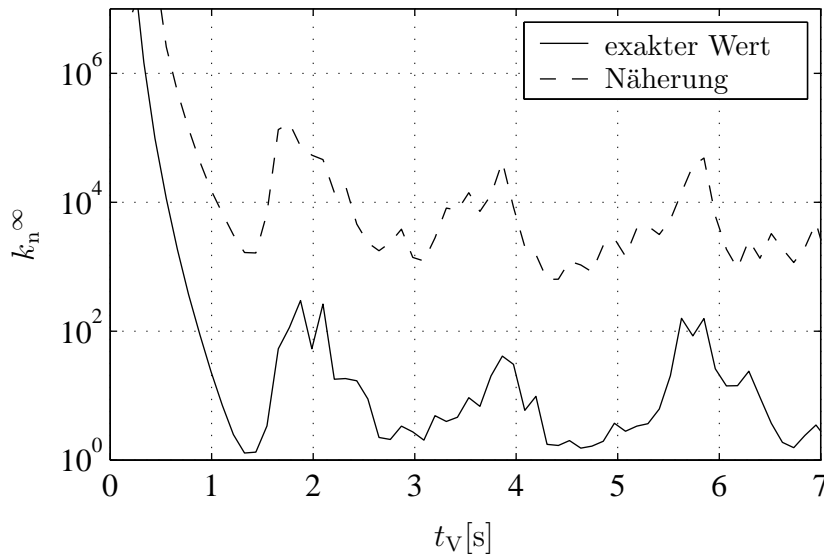


**Bild 5.14:** Gemittelte Vorhersagefehler  $\overline{k_e}$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  für a) ein gaußverteilttes Zufalls-signal und b) die mit 5% additivem gaußverteilttem Rauschen gestörten Daten aus Bild 5.13 ( $\sigma_u = 0.1N$ ,  $n_A = 10000$ ). Für das nichtlineare Modell wurde jeweils die Anzahl  $n_{NN}$  der nächsten Nachbarn variiert (20/40/60).

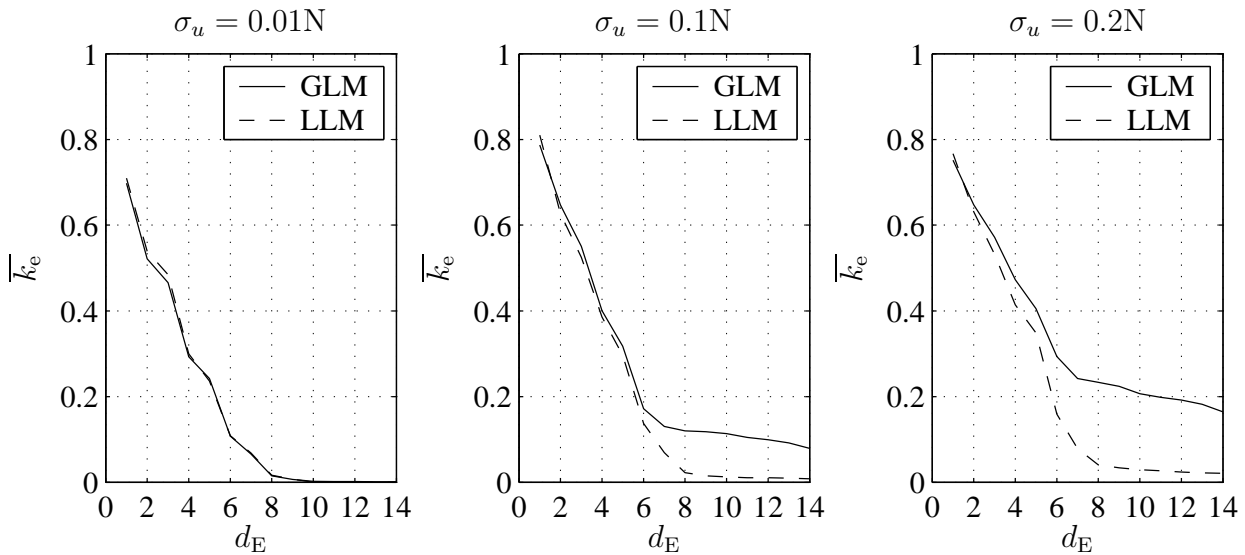
nearen Modell vermindern, wie eine Wiederholung einer Auswertung aus Bild 5.13 mit 5% additivem gaußverteilttem Rauschen zeigt. Diesem Effekt kann durch die Wahl einer ausreichend großen Anzahl  $n_{NN}$  nächster Nachbarn bei der Auswertung entgegengewirkt werden (vgl. Bild 5.14b). Weil auch der vorherzusagende Wert selbst gestört ist, verbleibt jedoch ein nennenswerter Fehler, der auch durch weitere Erhöhung der Anzahl nächster Nachbarn im nichtlinearen Vorhersagemodell nicht zu reduzieren ist.

### 5.6.2 Schwingerkette mit fünf Freiheitsgraden

Der Einfluss einer erhöhten Anzahl an Zustandsgrößen auf die Auswertung soll nun am Beispiel der Schwingerkette aus Bild 5.6 mit jetzt fünf Freiheitsgraden gezeigt werden. Dazu muss zunächst wieder eine geeignete Versatzzeit  $t_V$  entsprechend einem Minimum von  $k_n^\infty$  gewählt werden. Aus der in Bild 5.15 wiedergegebenen Rechnung folgt die Wahl  $t_V = 1.4349s$ . Analog zum Beispiel mit drei Freiheitsgraden ist in Bild 5.16 der Faktor  $\overline{k_e}$  als Funktion der Einbettungsdimension  $d_E$  bei verschiedenen Anregungsstärken  $\sigma_u$  dargestellt. Für schwache Anregung ergibt sich nahezu lineares Systemverhalten, bei  $d_E = 10$  (der Systemordnung des



**Bild 5.15:** Fehlerverstärkungsfaktoren  $k_n^\infty$  für die Schwingerkette aus Bild 5.6 mit  $n_{\text{FHG}} = 5$  Freiheitsgraden. Als optimale Versatzzeit für das 5FHG-Modell wird  $t_V = 1.4349\text{s}$  gewählt.



**Bild 5.16:** Nichtlineare Schwingerkette mit fünf Freiheitsgraden: gemittelte Vorhersagefehler  $\bar{k}_e$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  bei  $t_V = 1.4349\text{s}$ ,  $t_S = t_V/4$  für unterschiedliche Standardabweichungen  $\sigma_u$  der Anregung.  $n_A = 10^5$ ,  $n_{\text{NN}} = 40$ .

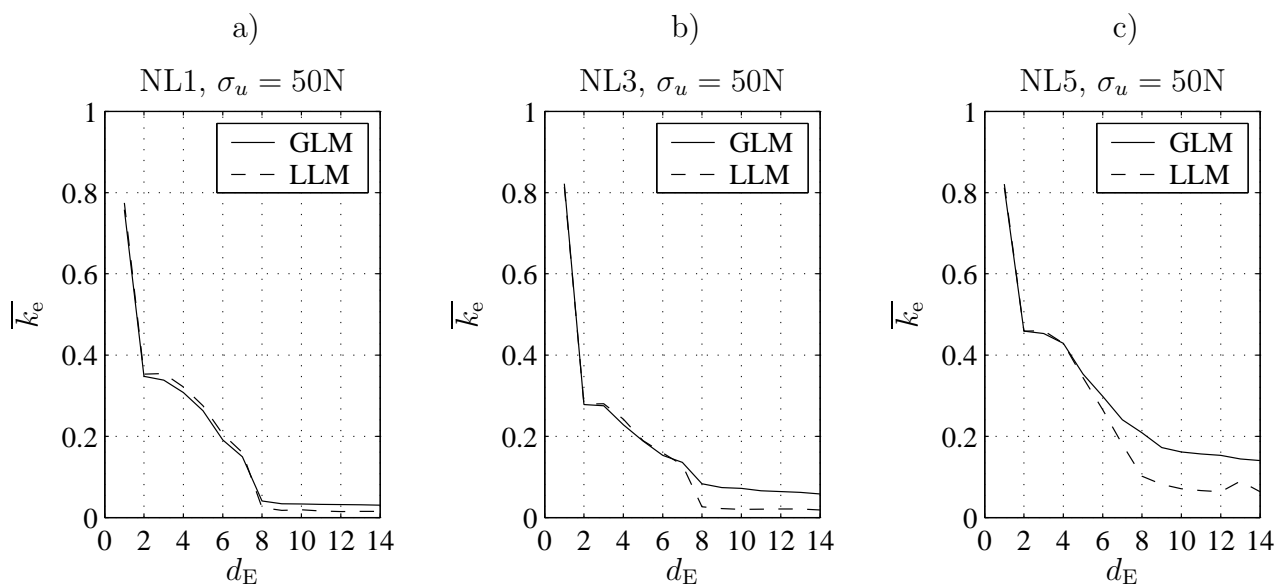
5FHG-Systems) ist der Vorhersagefehler auf Null abgefallen. Bei Erhöhung der Anregungsintensität nimmt der Vorteil des nichtlinearen Modells gegenüber dem linearen stetig zu und gestattet damit einen Rückschluss auf die Nichtlinearität des Systems.

## 5.7 Beispiel gekoppelte Schwingerketten

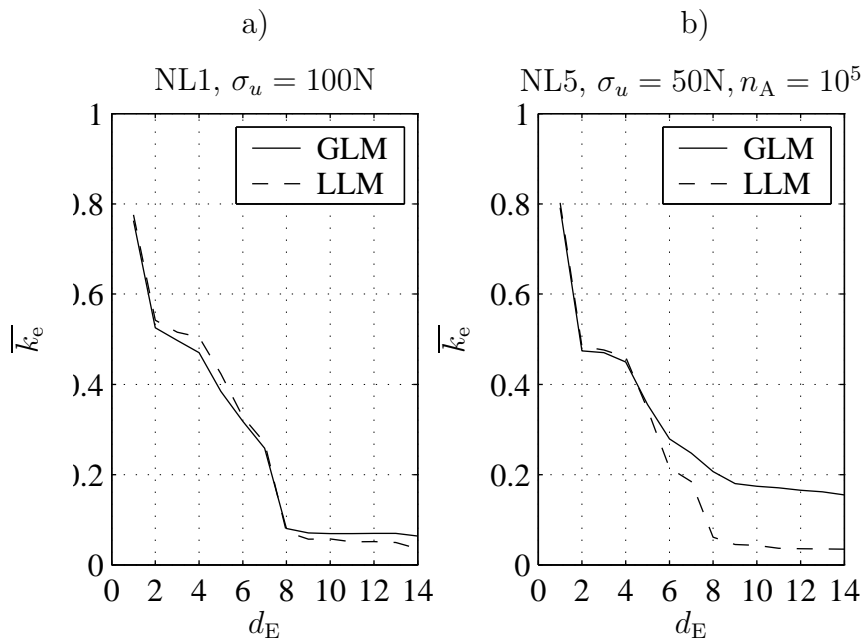
Die vorgestellte Methode wird nun auf das durchgängige Beispiel der nichtlinear gekoppelten Schwingerketten aus Bild 3.3 angewandt. Die gewählte Anregungsintensität an der ersten Masse (Koordinate  $x_1$ ) beträgt  $\sigma_u = 50\text{N}$ , das verwendete Messsignal ist wieder die Antwort  $x_4$  der vierten Koordinate. Neben der Ausgangskonfiguration mit nur einer nichtlinearen Steifigkeit (Konfiguration NL1) zwischen  $x_1$  und  $x_3$  werden Konfigurationen mit zwei zusätzlichen kubischen Steifigkeiten zwischen  $x_1$  bzw.  $x_3$  und dem Inertialsystem (Konfiguration NL3) und insgesamt fünf kubischen Steifigkeiten (Konfiguration NL5), d. h. parallel zu allen linearen Federn, untersucht.

Die Ergebnisse sind in Bild 5.17 dargestellt. Auffällig ist die sehr schlechte Detektion der Nichtlinearität in der Ausgangskonfiguration (NL1), die sich bei Hinzunahme weiterer kubischer Steifigkeiten (NL3/NL5) verbessert, während sich die Erkennung der Anzahl von Systemzuständen verschlechtert (abnehmende Deutlichkeit des Abknickens der Kurve ab  $d_E = 8$ ).

Eine Verdopplung der Anregungsintensität  $\sigma_u$  bringt in der Konfiguration NL1 keine sichtbar



**Bild 5.17:** Durchgängiges Beispiel aus Bild 3.3: gemittelte Vorhersagefehler  $\bar{k}_e$  des nichtlinearen (LLM) und linearen (GLM) Modells in Abhängigkeit von der Einbettungsdimension  $d_E$  bei  $t_V = 0.85\text{s}$ ,  $t_S = t_V$  für unterschiedliche Anzahlen nichtlinearer Steifigkeiten (NL1/3/5).  $n_A = 10^4$ ,  $n_{\text{NN}} = 40$ ,  $n_{\text{ref}} = 100$ .



**Bild 5.18:** a) Ergebnis aus Bild 5.17a bei verdoppelter Anregungsintensität  $\sigma_u = 100N$ ; b) Ergebnis aus Bild 5.17c bei zehnfacher Datenmenge  $n_A = 10^5$ .

verbesserte Detektion der Nichtlinearität, Bild 5.18a, die Vorhersagefehler des nichtlinearen und linearen Modells nehmen gleichermaßen zu.

Die Erkennung der Anzahl von Systemzuständen in Konfiguration NL5 kann durch eine Vergrößerung der Datenbasis auf  $n_A = 10^5$  jedoch deutlich verbessert werden. Für das nichtlineare Vorhersagemodell ergibt sich bei  $d_E = 8$  ein sehr viel deutlicheres Abknicken der Kurve als für das lineare Modell.

## 5.8 Fazit

Die dargestellte Methode erlaubt die Detektion nichtlinearen Systemverhaltens durch Auswertung von Zeitsignalen. Daneben ermöglicht sie eine zusätzliche Aussage über die Komplexität des betrachteten Systems, d. h. die Anzahl seiner dynamischen Zustände. Diese Eigenschaft unterscheidet sie von den anderen diskutierten Linearitätstests.

Um eine Unterschätzung der Systemordnung zu vermeiden, wird eine gleichzeitige Vorhersage des Signalverlaufs für unterschiedliche Prädiktionshorizonte durchgeführt. Zur Minimierung der Auswirkung von Messrauschen kann eine optimierte Versatzzeit gewählt werden, zu deren Bestimmung ein modell- und ein signalbasiertes Kriterium vorgestellt werden.

Es wird gezeigt, dass Messrauschen nicht als nichtlineares Systemverhalten missinterpretiert werden kann. Es besteht jedoch die Gefahr, dass die Vorhersagequalität des nichtlinearen Modells durch Rauschen beeinträchtigt wird. Dem kann durch Auswahl einer ausreichend großen Anzahl nächster Nachbarn (=Datenbasis für das nichtlineare Modell) entgegengewirkt werden.

Ein kritischer Punkt bei diesem Linearitätstest, insbesondere wenn die Ordnung des betrachteten Systems groß wird, ist die erforderliche Datenmenge, um gute Vorhersagen mit dem nichtlinearen (=lokal linearen) Modell zu erzielen. Eine Möglichkeit zur Weiterentwicklung der Methode, die diesen Bedarf an Daten reduzieren könnte, besteht in dem Ersatz der lokal linearen Modelle durch solche höherer Ordnung.

Die Beispiele zeigen, dass die Methode nichtlineare Effekte detektieren kann, und, bei einer ausreichenden Datenbasis, auch eine Aussage über die Systemordnung liefert. Eine Ausnahme bilden die gekoppelten Schwingerketten mit nur einer kubischen Steifigkeit. Warum in diesem Fall (auch bei Erhöhung der Anregungsintensität, und damit des Einflusses der Nichtlinearität) keine deutlichere Detektion zu erzielen ist, ist bisher unklar.

Im Vergleich mit den anderen Linearitätstests beschränkt sich die vorgestellte Methode nicht ausschließlich auf die Negativaussage fehlender Linearität. Es wird vielmehr positiv aufgezeigt, wie gut das beobachtete Systemverhalten mit einem einfachen nichtlinearen Modell zu beschreiben ist und welcher Vorteil sich gegenüber einem linearen Modell ergibt. Dabei wird das nichtlineare Modell automatisch generiert, d. h. es ist kein Vorab-Wissen des Anwenders erforderlich.

## 6 TEIL II: Identifikation nichtlinearer Kopplungen

### 6.1 Stand des Wissens

Methoden zur Identifikation linearer dynamischer Modelle für mechanische Strukturen sind sowohl in der Forschung als auch der industriellen Praxis weit verbreitet. Die Extraktion der Eigenfrequenzen und zugehörigen Schwingungsformen wird als *experimentelle Modalanalyse* bezeichnet, siehe z. B. [27, 46]. Durch die Beschränkung auf eine endliche Anzahl von Moden (i.d.R. die tiefstfrequenten), erhält man ein auch für numerische Untersuchungen (z. B. Zeitschrittintegration) verwendbares Modell.

Grundlage für die Identifikation sind meist Frequenzgänge, da sie bereits ein leicht interpretierbares nichtparametrisches Modell darstellen und die gezielte Beschränkung auf relevante Eigenfrequenzen oder Schwingungsformen gestatten. Bei schwach gedämpften Systemen können außerdem Wechselwirkungen zwischen den Moden vernachlässigt werden, so dass das Gesamtproblem in kleinere Teilprobleme zerlegt werden kann.

Werden die Frequenzgänge darüber hinaus durch gestufte Sinusanregung ermittelt, so ergeben sich weitere Vorteile:

- Beliebige Wahl der Frequenzschrittweite  $\Rightarrow$  Konzentration im Bereich der Eigenfrequenzen möglich.
- Großer Signal-Rauschabstand wegen extremer Bandbegrenzung des Signals.
- Verstärkungsfaktoren der Messgeräte können für jede Frequenz angepasst werden  $\Rightarrow$  optimale Ausnutzung des Messbereichs.
- Bei nichtlinearen Systemen ist das Verhalten anregungsabhängig. Ein Sinussignal bedeutet eine eindeutig definierte, reproduzierbare Anregung.

Methoden zur Identifikation nichtlinearer Modelle mechanischer Strukturen beschränken sich bisher auf die Forschung. Wohl wegen der oben beschriebenen Vorteile von Frequenzgangmessungen und um Kompatibilität zu den linearen Methoden zu gewährleisten, legen auch die meisten nichtlinearen Methoden gemessene Frequenzgänge zugrunde. Die folgende Übersicht beschränkt sich daher auf Methoden für gemessene Frequenzgänge. Die beschriebenen Verfahren sind in Tabelle 6.1 aufgelistet.



**Tabelle 6.1:** Verfahren aus der Literatur zur Identifikation nichtlinearer Kopplungen in mechanischen Schwingungssystemen. Verfahren, deren Namen unterstrichen sind, werden in einem eigenen Kapitel behandelt.

- 
- I1** Lokalisierung nichtlin. Steifigkeiten in Mehrfreiheitsgrad-Systemen [45, 46]
  - I2** Lokalisierung und Identifikation nichtlin. Steifigkeiten in Mehrfreiheitsgrad-Systemen [80]
  - I3** Force Appropriation for Non-Linear Systems (FANS) [4]
  - I4** Methode auf Basis des Nonlinear Normal Mode (NNM) Konzepts [17, 18, 74]
  - I5** Parametrische Identifikation mit physikalischem Modell [64, 65, 50, 49]

**Lokalisierung nichtlin. Steifigkeiten in Mehrfreiheitsgrad-Systemen (I1)** In [45, 46] wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem bei einem Mehrfreiheitsgrad-System der Ort einer lokalen Steifigkeits-Nichtlinearität ermittelt werden kann. Dazu müssen die Massen- und Steifigkeits-Matrix des als ungedämpft und bei kleinen Schwingungen linear angenommenen Systems bekannt sein. Darüber hinaus fließen in das Verfahren ein gemessener Eigenvektor  $\phi$  sowie die zugehörige Eigenfrequenz  $\omega$  ein, die an *einer* Resonanzstelle bestimmt werden. Durch Ermittlung dieser Parameter für eine kleine  $(\phi_1, \omega_1)$  und eine große  $(\phi_2, \omega_2)$  Schwingungsamplitude gehen Informationen über die Nichtlinearität in das Verfahren ein. Unter der Annahme, dass sich die linearisierte Systemdarstellung bei großen Amplituden von der bei kleinen Amplituden nur durch eine zusätzliche Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_N$  unterscheidet, ergibt sich der Ort der lokalen Steifigkeits-Nichtlinearität aus der Besetzung der Matrix  $\mathbf{K}_N$ , auf die indirekt geschlossen werden kann.

Nicht gemessene Koordinaten werden nach einem auf KIDDER zurückgehenden Verfahren [42] aus den gemessenen Koordinaten bestimmt. Der Zusammenhang wird über die für kleine Amplituden als bekannt angenommene Systemdarstellung hergestellt.

Demonstriert wird die Methode anhand des numerischen Beispiels einer Schwingerkette und eines Experiments mit einem Metallrahmen, an dem an einer Stelle über einen elektrodynamischen Shaker eine nichtlineare Federsteifigkeit simuliert wird.

**Lokalisierung und Identifikation nichtlin. Steifigkeiten in Mehrfreiheitsgrad-Systemen (I2)** Zur Lokalisierung nichtlinearer Kopplungen in Mehrfreiheitsgrad-

Systemen wird hier [80] wie in [45] die Veränderung der Steifigkeitsmatrix bei Amplitudenänderung verwendet. Eine analoge Betrachtung für nichtlineare Dämpfungseffekte ist ebenfalls enthalten.

Aus der Veränderung der Matrixelemente in Abhängigkeit der Schwingungsamplituden an den entsprechenden Stellen wird außerdem eine Identifikation der nichtlinearen Kopplungen auf Basis polynomialer Ansätze vorgeschlagen. Unterschiedliche Schwingungsamplituden können dabei durch leichte Variation der Anregungsfrequenz im Bereich einer Resonanz oder durch Veränderung der Anregungsamplitude erreicht werden.

Wie in [45] wird auch in dieser Arbeit die Messung aller Schwingungskordinaten vorausgesetzt, so dass ggf. auch die dort verwendete Interpolationsmethode [42] eingesetzt werden muss.

Die Methode wird an einer numerisch simulierten Schwingerkette mit sechs Freiheitsgraden demonstriert, bei der mittig ein nichtlineares Feder-/Dämpferpaar eingefügt ist.

**Force Appropriation for Non-Linear Systems (I3)** Eine Erweiterung des von linearen Systemen bekannten Phasenresonanzverfahrens (engl.: *phase resonance, normal mode tuning, force appropriation*) stellt die in [4] vorgestellte *Force Appropriation for Non-Linear Systems (FANS)* Methode dar. Die modalen Parameter einer Struktur werden für jede betrachtete Mode getrennt ermittelt, indem diese durch Anregung an mehreren Punkten zu einer harmonischen Schwingung in genau einer Eigenschwingungsform (des linearen Systems) gezwungen wird. Im Unterschied zum linearen Fall enthält der Anregungsvektor bei nichtlinearen Systemen keine rein harmonischen, sondern periodische Signale, die durch eine endliche Summe harmonischer Anteile approximiert wird. Die harmonischen Anteile höherer Ordnung sind nötig, um nichtlineare Rückstellkräfte zu eliminieren. Aus dem Anregungsvektor und der als bekannt vorausgesetzten linearen Systembeschreibung lässt sich dann auf die nichtlinearen inneren Kräfte schließen (jedoch nur für die betrachtete Schwingungsamplitude).

Sind sämtliche Systemparameter bekannt, so kann der Vektor äußerer Kräfte direkt bestimmt werden, der zur Anregung des Systems in der gewünschten Eigenschwingungsform erforderlich ist. Da im Rahmen einer Identifikation aber zumindest einige Parameter unbekannt sind, muss der Kraftvektor im Experiment iterativ bestimmt werden. Mit der Anzahl  $n_x$  physikalischer Koordinaten und der Anzahl  $n_{\text{harm}}$  berücksichtigter Harmonischer sind dazu  $2 n_x n_{\text{harm}}$

Werte einzustellen – die Amplitude und Phase jeder berücksichtigten Harmonischen an jeder physikalischen Koordinate. In einem numerischen Beispiel aus [4] mit zwei Freiheitsgraden und zwei Harmonischen waren dazu (im Fall des günstigsten Optimierungsalgorithmus) für eine Schwingungsform 457 Iterationen erforderlich. Für eine größere Anzahl an Freiheitsgraden dürfte der Aufwand daher schnell unverträglich groß werden. Dies gilt insbesondere, weil bei einer realen Anwendung jede Iteration aus der Einstellung neuer Anregungsparameter und dem Abwarten des eingeschwungenen Zustands besteht. Neben dem hohen Zeitaufwand für experimentelle Arbeiten erfordert diese Methode nicht nur mehrere Sensoren, sondern auch mehrere Aktoren zur Aufprägung des gewünschten Kraftvektors.

**Methode auf Basis des Nonlinear Normal Mode (NNM) Konzepts (I4)** Hier handelt es sich um ein modales Verfahren, das die Parameter einer einzelnen Mode als amplitudenabhängig (und daher nichtlinear) annimmt und identifiziert. Die Auswertung erfolgt abschnittsweise, getrennt für jede Resonanz im interessierenden Frequenzbereich. Das Verfahren setzt keine Informationen über den Typ der vorliegenden Nichtlinearität voraus, erlaubt daher jedoch auch keine Rückschlüsse auf physikalische Systemparameter. Es wird in Kapitel 7 näher untersucht und mit dem im Folgenden beschriebenen Verfahren (I5) verglichen, das physikalische Systemparameter identifiziert.

**Parametrische Identifikation mit physikalischem Modell (I5)** Im Unterschied zu (I4) wird hier der Identifikation ein nichtlineares Modell mit *physikalischen* Parametern zugrunde gelegt. Die Identifikation erfolgt durch Parametervariation zur Minimierung der Abweichungen zwischen gemessenen und berechneten Frequenzgängen. Zur Verringerung der Rechenzeit werden die Frequenzgänge des nichtlinearen Modells durch Näherungsverfahren berechnet.

Identifikationsverfahren nach diesem Schema werden in [50, 49] und parallel in [64, 65] vorgestellt. Während sich die Beispiele in [49] auf einfache polynomiale Nichtlinearitäten beschränken, werden in [64, 65] auch Reibkontakte mit Mikro- und Makroschlupf untersucht. In Kapitel 8 wird das Verfahren in einer erweiterten Version vorgestellt, bei der die Berechnung des eingeschwungenen Zustands nicht mehr von einfachen harmonischen Zeitverläufen ausgeht (Harmonische Balance), sondern periodische Verläufe mit mehreren harmonischen Anteilen zulässt.

## 7 Identifikation auf Basis des Nonlinear Normal Mode Konzepts

Ein Identifikationsverfahren für nichtlineare Strukturen, das jeweils einzelne Resonanzen betrachtet, wird in [17, 18] unter dem Namen *Variable Modal Parameter Identification for Non-Linear Systems* (I4) vorgestellt. Es überträgt die von linearen Systemen bekannte Superposition von Moden (Eigenschwingungsformen) auf nichtlineare Systeme und nutzt dies als Grundlage für ein parametrisches Identifikationsverfahren. Das Verfahren basiert auf einer früheren Arbeit [74] und wurde um die Identifikation von Dämpfungstermen erweitert. Für das harmonisch erregte nichtlineare System

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}) = \hat{\mathbf{F}}_E \cos(\Omega t) \quad (7.1)$$

gestattet es die näherungsweise Berechnung der stationären (und als harmonisch angenommenen) Systemantwort  $\mathbf{x}(t)$ . Bei dem Verfahren wird von der Vorstellung eines *zugrunde liegenden linearen Modells* ausgegangen (Systemmatrizen  $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}$ ), das das System bei kleinen Amplituden exakt beschreibt. Nach einer Modaltransformation kann die Systemantwort dann als Superposition der Antworten aller Schwingungsmoden dargestellt werden. Bei größeren Amplituden wird angenommen, dass nur die  $j$ -te Schwingungsmode (Eigenvektor  $\phi_j$ ) von Nichtlinearitäten beeinflusst wird, deren Eigenfrequenz  $\omega_j$  der Anregungsfrequenz  $\Omega$  am nächsten ist ( $\Rightarrow$  *Nonlinear Single-Degree of Freedom Approach* [83]) und dass sich alle anderen Moden weiterhin linear verhalten. Die *nichtlineare Schwingungsmode* wird als *Nonlinear Normal Mode* bezeichnet.

Weiterhin wird angenommen, dass sich der nichtlineare Eigenvektor  $\tilde{\phi}_j$  als (von der zugehörigen modalen Amplitude  $\hat{q}_j$  abhängige) Linearkombination aller Eigenvektoren des linearen Systems darstellen lässt,

$$\tilde{\phi}_j(\hat{q}_j) = \sum_{i=1}^{n_q} b_{ij}(\hat{q}_j) \phi_i, \quad b_{jj} = 1 \forall \hat{q}_j, \quad (7.2)$$

die Linearfaktoren  $b_{ij}$  werden als *Nonlinear Mode Participation Factors* bezeichnet. Durch die Tilde ( $\tilde{\cdot}$ ) wird der nichtlineare Eigenvektor  $\tilde{\phi}_j(\hat{q}_j)$  von dem entsprechenden Eigenvektor  $\phi_j \neq \mathbf{f}(\hat{q}_j)$  des zugrunde liegenden linearen Systems unterschieden.

Für die zugehörige Eigenkreisfrequenz  $\omega_j$  und modale Dämpfung  $D_j$ , die im linearen Fall amplitudenunabhängig sind,

$$\omega_j = \phi_j^T \mathbf{K} \phi_j, \quad D_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{D} \phi_j}{2\omega_j}, \quad (7.3)$$

wird ebenfalls eine Amplitudenabhängigkeit  $\tilde{\omega}_j(\hat{q}_j), \tilde{D}_j(\hat{q}_j)$  angenommen.

Die Identifikation der amplitudenabhängigen Modalparameter wird für jede interessierende Resonanz  $j$  getrennt durchgeführt. Dabei werden die Parameter  $b_{ij}$ ,  $\tilde{\omega}_j$  und  $\tilde{D}_j$  als Funktion der modalen Amplitude  $\hat{q}_j$  bestimmt. Auf Messungen mit verschiedenen Anregungsamplituden kann verzichtet werden, da sich  $\hat{q}_j$  im Bereich der Resonanz  $j$  stark ändert, so dass ein einzelner Frequenzgang ausreicht, um die Amplitudenabhängigkeit zu erfassen.

Zur Ermittlung der Parameter wird die Antwort des nichtlinearen Modells auf eine harmonische Erregung an mehreren Stützstellen des Frequenzgangs mit der Messung verglichen. Die komplexe Antwortamplitude des Systems an der Koordinate  $m$  auf eine Anregung an der Koordinate  $i$  lautet

$$\hat{\underline{x}}_m = \left[ \tilde{\underline{G}}_{im}(\Omega, \hat{q}_j) + \underline{G}_{im}(\Omega) \right] \hat{F}_{E,i} \quad (7.4)$$

mit dem Anteil

$$\underline{G}_{im}(\Omega) = \sum_{k \neq j} \frac{\phi_{mk} \phi_{ki}}{(\omega_k^2 - \Omega^2) + j 2D_k \omega_k \Omega} \quad (7.5)$$

der sich linear verhaltenden Moden und dem Anteil

$$\tilde{\underline{G}}_{im}(\Omega, \hat{q}_j) = \frac{\tilde{\phi}_{mj}(\hat{q}_j) \tilde{\phi}_{ji}(\hat{q}_j)}{(\tilde{\omega}_j^2(\hat{q}_j) - \Omega^2) + j 2\tilde{D}_j(\hat{q}_j) \tilde{\omega}_j(\hat{q}_j) \Omega} \quad (7.6)$$

der nichtlinearen Mode  $j$ . Die Amplitude  $\hat{q}_j$  der nichtlinearen Mode beträgt

$$\hat{q}_j = \left| \frac{\tilde{\phi}_{ji}(\hat{q}_j)}{(\tilde{\omega}_j^2(\hat{q}_j) - \Omega^2) + j 2\tilde{D}_j(\hat{q}_j) \tilde{\omega}_j(\hat{q}_j) \Omega} \right| \hat{F}_{E,i}. \quad (7.7)$$

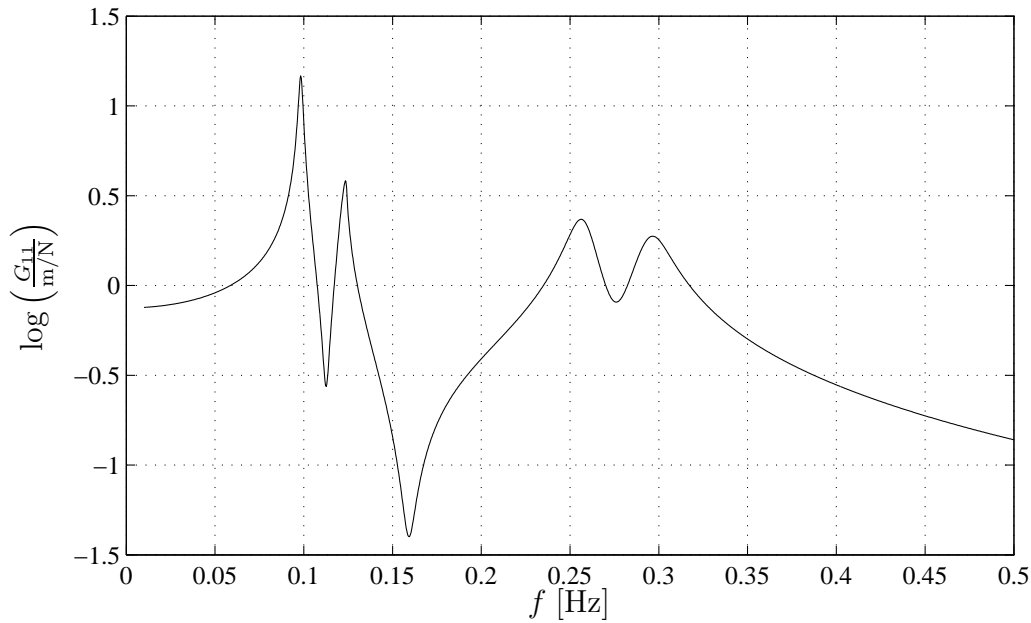
Durch Minimierung der Abweichung zwischen den gemessenen Amplituden  $\hat{\underline{y}}_m$  und den korrespondierenden Amplituden der Modellausgänge  $\hat{\underline{x}}_m$  werden die Parameter  $\tilde{\omega}_j$ ,  $\tilde{D}_j$  und  $b_{ij}$  der nichtlinearen Mode  $j$  bestimmt. Die Abweichung wird dabei im Sinne der quadratischen Fehlersumme

$$e = \sum_{m=1}^{n_x} \text{Re} \left( \hat{\underline{x}}_m - \hat{\underline{y}}_m \right)^2 + \text{Im} \left( \hat{\underline{x}}_m - \hat{\underline{y}}_m \right)^2 \quad (7.8)$$

über alle gemessenen Koordinaten  $m$  definiert.

## 7.1 Beispiel gekoppelte Schwingerketten

Zum Test der beschriebenen Methode wird diese auf das Beispiel aus Bild 3.3 angewendet. Der Koeffizient des Koppeldämpfers wird hier aber zu  $d_k = 0.02 \text{Ns/m}$  gewählt, damit die Eigenvektoren des gedämpften Systems denen des konservativen Systems entsprechen (proportionale Dämpfung).



**Bild 7.1:** Frequenzgang  $G_{11}$  der ersten Masse aus dem Beispiel in Bild 3.3 bei Anregung an der ersten Masse ( $\hat{F}_{E,1} = 8\text{N}$ ). Abweichend von Bild 3.3 wurde hier  $d_k = 0.02\text{Ns/m}$  gewählt.

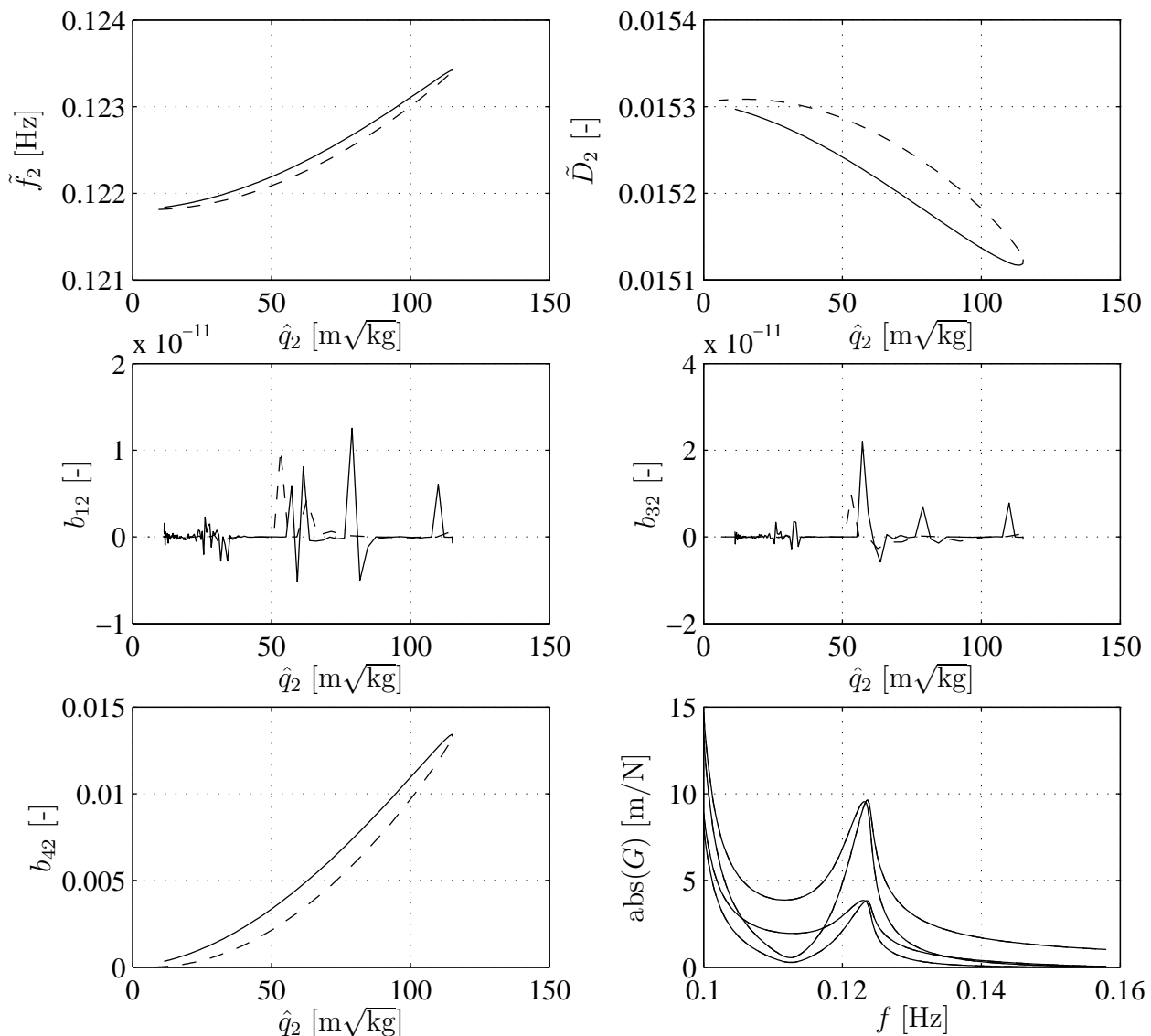
Bild 7.1 zeigt den Frequenzgang der ersten Masse bei Anregung an der ersten Masse. Der Frequenzgang stellt eine Näherungslösung dar, die mit Hilfe der HARMONISCHEN BALANCE berechnet wurde (eine detaillierte Darstellung der Methode erfolgt in Kapitel 8.2).

Für die Identifikation wird die zweite Mode ( $j = 2$ ) herangezogen, da sich hier die Nichtlinearität besonders stark zeigt. Der zur Auswertung herangezogene Frequenzbereich ist in Bild 7.2 (unten rechts) dargestellt. Die identifizierten Parameter finden sich ebenfalls in Bild 7.2. Sie sind in Abhängigkeit der Amplitude  $\hat{q}_2$  der zweiten Mode dargestellt. Die durchgezogene Linie repräsentiert Ergebnisse für Frequenzen unterhalb, die gestrichelte Linie Ergebnisse für Frequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz. In einem Teilbereich der modalen Amplitude liegen daher jeweils zwei identifizierte Werte für jeden Parameter vor.

Die Eigenfrequenz  $\tilde{f}_2 = \tilde{\omega}_2/(2\pi)$  steigt erwartungsgemäß aufgrund der kubischen Steifigkeitsnichtlinearität mit der modalen Amplitude an. Als Folge daraus nimmt das Dämpfungsmaß  $\tilde{D}_2$  ab, da bei dessen Definition (7.3) die Eigenkreisfrequenz  $\tilde{\omega}_2$  im Zähler steht.

Die identifizierten *Nonlinear Mode Participation Factors*  $b_{12}$  und  $b_{32}$  sind in guter Näherung Null, die zufälligen Schwankungen sind auf das Erreichen des Abbruchkriteriums des Suchalgorithmus zurückzuführen. Der Parameter  $b_{42}$  steigt signifikant mit  $\hat{q}_2$ , d. h. die Schwingungsform der zweiten Mode verändert sich mit zunehmender modaler Amplitude.

Die Abweichungen zwischen den durchgezogenen und gestrichelten Kurven zeigen, dass die Parameter nicht ausschließlich von der Amplitude abhängen, sondern dass auch die Frequenz

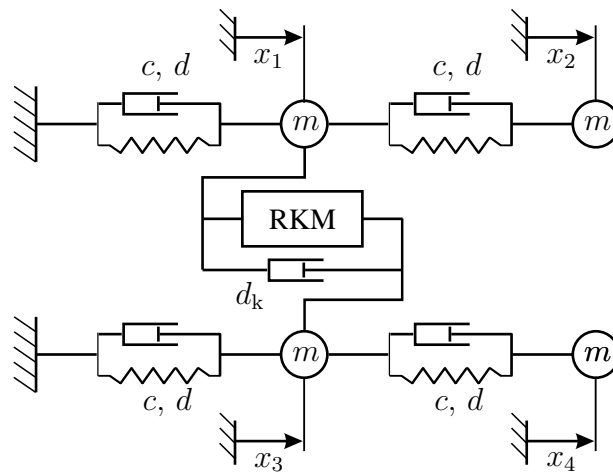


**Bild 7.2:** Identifikationsergebnisse zum Beispiel aus Bild 3.3 (mit  $d_k = 0.02\text{Ns/m}$ ,  $\hat{F}_{E,1} = 8\text{N}$ ).

eine Rolle spielt.

Das Diagramm rechts unten in Bild 7.2 zeigt die vier Frequenzgänge (eine Anregung, vier Messungen) in dem Frequenzbereich, der der Identifikation zugrunde liegt. Die mit Hilfe des identifizierten Modells berechneten Frequenzgänge sind den „Messungen“ als gestrichelte Kurven überlagert. Abweichungen sind in diesem Maßstab nicht zu erkennen, der Nachweis für eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Modell und „Messung“.

In Bild 7.3 ist die einfache kubische Steifigkeitsnichtlinearität aus Bild 3.3 durch ein Reibkontaktmodell (RKM) ersetzt. Dahinter verbergen sich ein oder mehrere sog. Elasto-



**Bild 7.3:** Zwei mit einem Reibkontaktmodell (RKM) gekoppelte Zwei-Massen-Schwinger. Parameter:  $m=1$  kg,  $d=0.04$  Ns/m,  $c=1$  N/m,  $d_k = 0.02$ Ns/m. Die Steifigkeit und die Haftreibungskraft des Reibkontaktmodells betragen  $c_R = 0.5$ N/m und  $F_R = 1$ N.

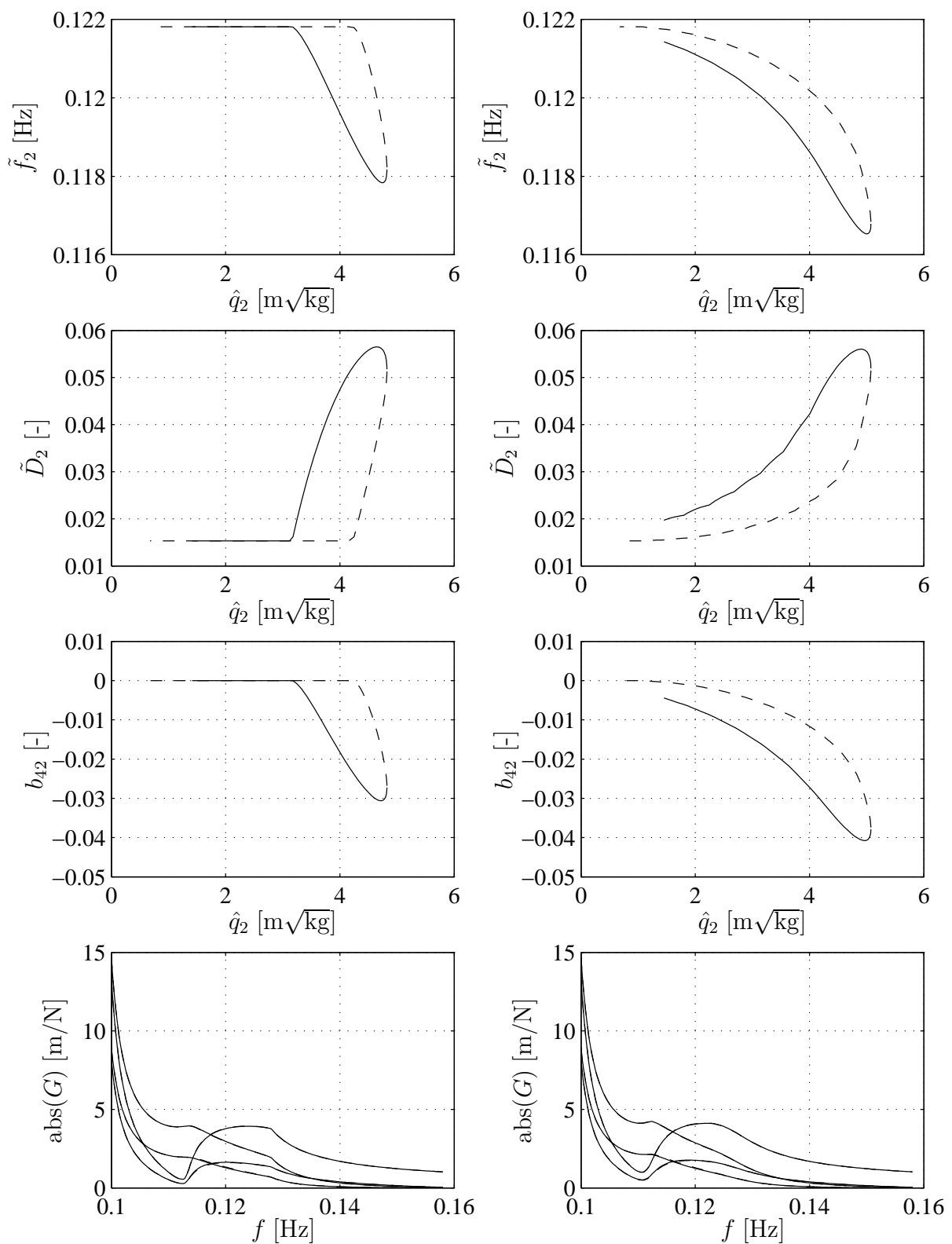
Gleit-Modelle (EGM), die als *Makroschlupf*- bzw. *Mikroschlupf*modelle bezeichnet (siehe Anhang A) und über die Parameter  $c_R$  (Tangentialsteifigkeit) und  $F_R$  (Haftreibungskraft) parametrisiert werden.

Wie im Beispiel oben wurde der Frequenzgang bei Anregung an der ersten Masse ( $\hat{F}_{E,1} = 1$ N) mit dem Näherungsverfahren der Harmonischen Balance berechnet und der Frequenzbereich um die zweite Mode ausgewertet. Die Ergebnisse sind in Bild 7.4 für ein Makroschlupf- und ein Mikroschlupfmodell dargestellt. Im Unterschied zur kubischen Steifigkeit ist hier ein Absinken der Eigenfrequenz mit zunehmender modaler Amplitude festzustellen. Die modale Dämpfung nimmt hingegen zu, weil der zeitliche Anteil der Gleitbewegung (während der Energie dissipiert wird) steigt. Wie im Beispiel oben sind auch hier die Ergebnisse für  $b_{12}$  und  $b_{32}$  regellos und um Größenordnungen kleiner als die für  $b_{42}$ , so dass auf eine Wiedergabe verzichtet werden kann. Die Unterschiede zwischen „Messung“ und Rechnung sind wieder sehr gering.

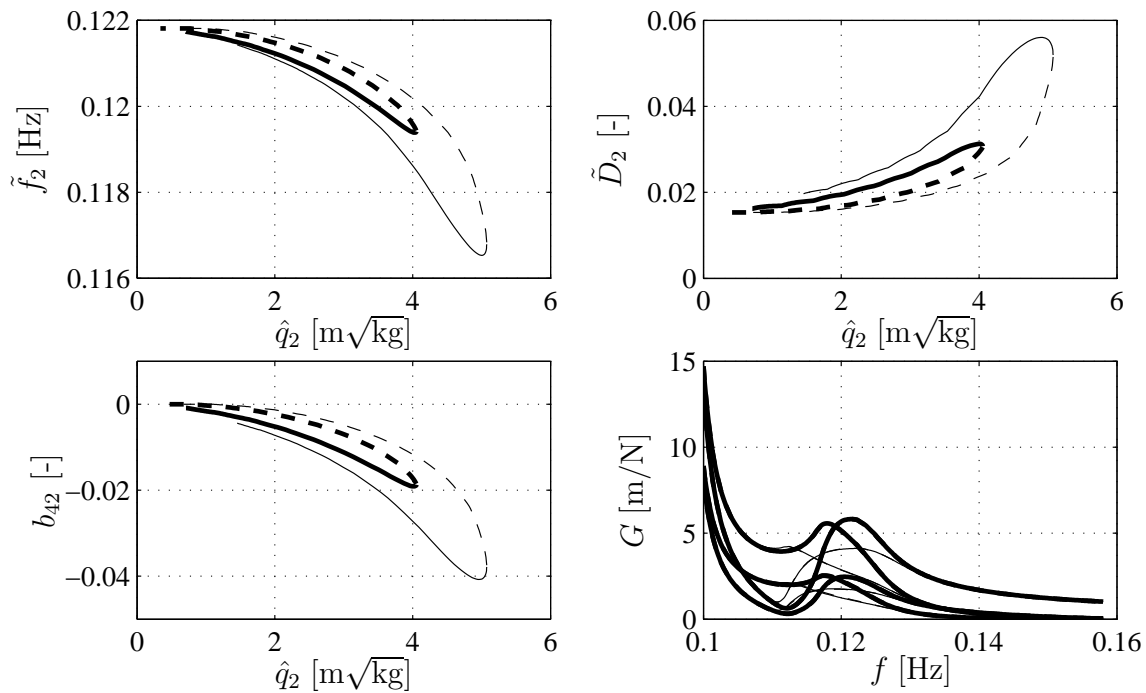
Die unterschiedliche Charakteristik des Makroschlupf- und des Mikroschlupfmodells spiegelt sich deutlich in den identifizierten Parametern wider. Während die Parameter für das System mit Makroschlupfmodell bis zum Erreichen einer kritischen Amplitude denen des zugrunde liegenden linearen Systems entsprechen, setzen die Abweichungen beim System mit Mikroschlupfmodell früher ein und nehmen dann kontinuierlich zu.

Den Einfluss der Anregungsamplitude auf die identifizierten Ergebnisse zeigt Bild 7.5. Die Ergebnisse aus Bild 7.4 (rechte Hälfte) sind dort wiederholt und den entsprechenden Ergeb-





**Bild 7.4:** Identifikationsergebnisse zum Beispiel aus Bild 7.3 mit Makroschlupfmodell (links: ein Elasto-Gleit-Modell) bzw. Mikroschlupfmodell (rechts: zehn Elasto-Gleit-Modelle). Harmonische Kraft-Anregung an der ersten Masse mit  $\hat{F}_{E,1} = 1\text{N}$ .



**Bild 7.5:** System mit Mikroschlupfmodell, Einfluss der Anregungsamplitude. Dünne Linien:  $\hat{F}_{E,1} = 1\text{N}$  (wie in Bild 7.4, rechte Hälfte), dicke Linien:  $\hat{F}_{E,1} = 0.5\text{N}$ .

nissen für eine halbierte Anregungsamplitude ( $\hat{F}_{E,1} = 0.5\text{N}$ ) gegenübergestellt. Bei gleicher modaler Amplitude  $\hat{q}_2$  liegen die Ergebnisse für Frequenzen ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz dichter beieinander, im Mittel ergibt sich aber die gleiche Amplitudenabhängigkeit.

## 7.2 Fazit

Das untersuchte Verfahren zeichnet sich durch große Flexibilität aus. Wie an zwei Systemen mit sehr unterschiedlichen Nichtlinearitäten gezeigt, gibt es die Frequenzgänge äußerst präzise wieder. Eine direkte Extrapolation der Systemparameter für veränderte Anregungsamplituden ist i. Allg. jedoch nicht möglich, da eine zusätzliche Frequenzabhängigkeit vorliegt, die bei der Identifikation nicht erfasst wird. Als weiterer Nachteil kann empfunden werden, dass die identifizierten Parameter sich auf die modale Beschreibung des Systems beziehen und damit keine unmittelbare physikalische Interpretation und Lokalisierung der Nichtlinearitäten gestatten.

Im folgenden Kapitel wird dieser Methode daher ein Verfahren gegenübergestellt, das von einem physikalischen Modell ausgeht und dessen Parameter identifiziert.

## 8 Parametrische Identifikation mit physikalischem Modell

Das im Folgenden beschriebene Identifikationsverfahren dient zur Parameteridentifikation bei nichtlinearen mechanischen Schwingungssystemen auf der Basis gemessener Frequenzgänge. Nach der Vorstellung einer allgemeinen Form zur Darstellung nichtlinearer Schwingungssysteme werden Näherungsverfahren unterschiedlicher Genauigkeit zur Berechnung der Modell-Frequenzgänge aufgeführt. Die Parameteridentifikation erfolgt durch numerische Lösung eines nichtlinearen Minimierungsproblems.

### 8.1 Systembeschreibung

Gegenstand des Identifikationsverfahrens sind mechanische Schwingungssysteme, die sich aus  $n_T$  linearen Teilsystemen mit endlich vielen Freiheitsgraden zusammensetzen und über nichtlineare Kopplungen miteinander verbunden sind. Für die linearen Teilsysteme wird eine modale Beschreibung zugrunde gelegt, so dass neben linearen Mehrkörpersystemen auch diskrete Beschreibungen linear-elastischer Strukturen berücksichtigt werden können.

Jedes lineare Teilsystem  $i$  wird durch das Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{E}_i \ddot{\mathbf{q}}_i(t) + \mathbf{D}_i \dot{\mathbf{q}}_i(t) + \mathbf{\Omega}_i^2 \mathbf{q}_i(t) = \mathbf{Q}_i(t) \quad (8.1)$$

beschrieben, dabei ist  $\mathbf{E}_i$  die Einheitsmatrix,  $\mathbf{D}_i$  die Dämpfungsmatrix und  $\mathbf{\Omega}_i^2$  die Matrix der Eigenkreisfrequenzen. Die Modalkoordinaten sind im Vektor  $\mathbf{q}_i(t)$  und die modalen Kräfte im Vektor  $\mathbf{Q}_i(t)$  zusammengefasst. Über die Beziehungen

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{\Phi}_i \mathbf{q}_i(t) \quad \text{und} \quad \mathbf{Q}_i(t) = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{F}_i(t) \quad (8.2)$$

wird mit der Modalmatrix  $\mathbf{\Phi}_i$  (mit massennormierten Eigenvektoren) der Zusammenhang zu den physikalischen Koordinaten  $\mathbf{x}_i(t)$  des Teilsystems bzw. dort angreifenden äußeren Kräften  $\mathbf{F}_i(t)$  hergestellt.

Die Zusammenfassung aller Teilsysteme und Einführung eines Vektors  $\mathbf{F}_E(t)$  äußerer Kräfte und eines Vektors  $\mathbf{F}_K(t)$  innerer (nichtlinearer) Koppelkräfte führt auf eine Gesamtbeschreibung

$$\mathbf{E} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}^T (\mathbf{F}_E(t) + \mathbf{F}_K(t)) \quad (8.3)$$

$$\mathbf{x}(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (8.4)$$

mit den Diagonalblockmatrizen

$$\mathbf{E} = \text{Diag}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_{n_T}), \quad \mathbf{D} = \text{Diag}(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \dots, \mathbf{D}_{n_T}), \quad (8.5)$$

$$\mathbf{\Omega}^2 = \text{Diag}(\mathbf{\Omega}_1^2, \mathbf{\Omega}_2^2, \dots, \mathbf{\Omega}_{n_T}^2), \quad \Phi^T = \text{Diag}(\Phi_1^T, \Phi_2^T, \dots, \Phi_{n_T}^T) \quad (8.6)$$

und den Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T(t) &= [\mathbf{q}_1^T(t), \mathbf{q}_2^T(t), \dots, \mathbf{q}_{n_T}^T(t)], \\ \mathbf{x}^T(t) &= [\mathbf{x}_1^T(t), \mathbf{x}_2^T(t), \dots, \mathbf{x}_{n_T}^T(t)], \\ \mathbf{F}_E^T(t) &= [\mathbf{F}_{E_1}^T(t), \mathbf{F}_{E_2}^T(t), \dots, \mathbf{F}_{E_{n_T}}^T(t)], \\ \mathbf{F}_K^T(t) &= [\mathbf{F}_{K_1}^T(t), \mathbf{F}_{K_2}^T(t), \dots, \mathbf{F}_{K_{n_T}}^T(t)]. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Die Koppelkräfte  $\mathbf{F}_K(t)$  sollen nur von den aus den physikalischen Koordinaten hervorgehenden Relativkoordinaten

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{xu}} \mathbf{x}(t) \quad (8.8)$$

und deren zeitlichen Ableitungen  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  abhängen. Die Elemente von  $\mathbf{u}(t)$  werden i.d.R. Differenzen der Koordinaten zweier Teilsysteme sein, die Formulierung (8.8) lässt aber beliebige Linearkombinationen der physikalischen Koordinaten  $\mathbf{x}(t)$  des Gesamtsystems zu.

Um Hystereseeffekte der Koppelkräfte beschreiben zu können, ist auch die Geschichte der Relativbewegung zu berücksichtigen,

$$\mathbf{F}_K(t) = \mathbf{F}_K(\mathbf{u}(0 \dots t), \dot{\mathbf{u}}(0 \dots t)). \quad (8.9)$$

## 8.2 Näherungslösung mit der Harmonischen Balance

Wird das nichtlinear gekoppelte System harmonisch mit der Kreisfrequenz  $\Omega$  erregt und geht man weiterhin von einer näherungsweise harmonischen Antwort des Systems im eingeschwungenen Zustand aus, so weisen auch die Relativkoordinaten  $\mathbf{u}(t)$  eine näherungsweise harmonische Zeitabhängigkeit

$$\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{u}} e^{j\Omega t} + \text{conj}(\hat{\mathbf{u}}) e^{-j\Omega t} \right) \quad (8.10)$$

auf. Nach dem auf KRYLOV und BOGOLJUBOV zurückgehenden Verfahren der *Harmonischen Balance* wird nun lediglich die Grundharmonische der Koppelkräfte berücksichtigt, so dass sich diese in die lineare Form

$$\mathbf{F}_K(t) = \mathbf{D}_x^*(\hat{\mathbf{u}}, \Omega) \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_x^*(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{x}(t) \quad (8.11)$$

bringen lassen. Dabei enthalten die Matrizen  $\mathbf{D}_x^*$  und  $\mathbf{K}_x^*$  die Dämpfungs- und Steifigkeitskoeffizienten, die von den komplexen Amplituden  $\hat{\mathbf{u}}$  der Relativkoordinaten sowie der Anregungsfrequenz  $\Omega$  abhängen. Der Index „x“ der Matrizen soll andeuten, dass die zugehörigen Kräfte und Verschiebungen in physikalischen Koordinaten formuliert sind.

Durch Berücksichtigung komplexer Amplituden  $\hat{\mathbf{u}}$  bleibt neben den Amplituden in den einzelnen Relativkoordinaten auch die Information über die Phasenlage der Schwingungen zueinander erhalten. Dies ist z.B. im Fall des zweidimensionalen Reibkontakts [75] wichtig, bei dem die linearisierten Kräfte in beiden Richtungen auch von der Phasenlage beider Schwingungen zueinander abhängen.

Wegen des linearen Zusammenhangs zwischen den Relativamplituden und den Modalkoordinaten der beteiligten linearen Teilsysteme führt die Linearisierung der Kontaktkräfte auf die linearisierte modale Gesamtdarstellung

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}}(t) + [\mathbf{D} + \mathbf{D}^*(\hat{\mathbf{u}}, \Omega)] \dot{\mathbf{q}}(t) + [\Omega^2 + \Omega^{*2}(\hat{\mathbf{u}})] \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{F}_E(t) \quad (8.12)$$

des gekoppelten Systems mit den zusätzlichen Matrizen

$$\mathbf{D}^*(\hat{\mathbf{u}}, \Omega) = -\Phi^T \mathbf{D}_x^*(\hat{\mathbf{u}}, \Omega) \Phi \quad \text{und} \quad \Omega^{*2}(\hat{\mathbf{u}}) = -\Phi^T \mathbf{K}_x^*(\hat{\mathbf{u}}) \Phi. \quad (8.13)$$

### 8.2.1 Lösung auf Basis der modalen Amplituden

Die stationäre Lösung  $\mathbf{q}(t)$  von (8.12) bei harmonischer Erregung

$$\mathbf{F}_E(t) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{F}}_E e^{j\Omega t} + \text{conj}(\hat{\mathbf{F}}_E) e^{-j\Omega t}) \quad (8.14)$$

kann durch Einsetzen des harmonischen Ansatzes

$$\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{q}} e^{j\Omega t} + \text{conj}(\hat{\mathbf{q}}) e^{-j\Omega t}) \quad (8.15)$$

in (8.12) berechnet werden. Unter Berücksichtigung des bekannten Zusammenhangs (8.8) resultiert das komplexwertige nichtlineare Gleichungssystem

$$\left\{ -\Omega^2 \mathbf{E} + j\Omega [\mathbf{D} + \mathbf{D}^*(\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{q}}), \Omega)] + [\Omega^2 + \Omega^{*2}(\hat{\mathbf{u}}(\hat{\mathbf{q}}))] \right\} \hat{\mathbf{q}} = \Phi^T \hat{\mathbf{F}}_E \quad (8.16)$$

in  $\hat{\mathbf{q}}$ . Aufgeteilt in Real- und Imaginärteil ergeben sich insgesamt  $2n_q$  nichtlineare Gleichungen, die mit verschiedenen numerischen Standardmethoden (siehe Kapitel 8.4) gelöst werden können. In [75] wird diese Aufgabe beispielsweise mit Hilfe des gedämpften NEWTON-Verfahrens unter Berücksichtigung eines Näherungsausdrucks für die dabei benötigte JACOBI-Matrix gelöst.

### 8.2.2 Lösung auf Basis der Amplituden der Koppelkoordinaten

Wenn die Anzahl  $n_q$  der berücksichtigten Modalkoordinaten groß ist im Vergleich zur Anzahl  $n_u$  der in den nichtlinearen Koppelstellen auftretenden Relativkoordinaten, bietet sich eine alternative Formulierung an.

Wäre der Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  der komplexen Relativschwingungsamplituden vorab bekannt, so könnte mit der komplexen Frequenzgangmatrix

$$\underline{\mathbf{G}}_{qF}^*(\Omega, \hat{\mathbf{u}}) = \left\{ -\Omega^2 \mathbf{E} + j\Omega [\mathbf{D} + \mathbf{D}^*(\hat{\mathbf{u}}, \Omega)] + [\Omega^2 + \Omega^{*2}(\hat{\mathbf{u}})] \right\}^{-1} \Phi^T \quad (8.17)$$

der Vektor

$$\hat{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{G}}_{qF}^*(\Omega, \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{F}}_E \quad (8.18)$$

der komplexen *modalen* Schwingungsamplituden und mit

$$\hat{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{G}}_{xF}^*(\Omega, \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{F}}_E = \Phi \underline{\mathbf{G}}_{qF}^*(\Omega, \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{F}}_E \quad (8.19)$$

der Vektor der komplexen Amplituden der *physikalischen* Koordinaten des Gesamtsystems bestimmt werden.

Wegen (8.8) kann mit (8.19) ein neues nichtlineares Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{u}} = \Gamma_{xu} \Phi \underline{\mathbf{G}}_{qF}^*(\Omega, \hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{F}}_E \quad (8.20)$$

in  $\hat{\mathbf{u}}$  formuliert werden. Im Falle  $n_u < n_q$  wird durch diese Formulierung die Anzahl der Gleichungen gegenüber (8.16) reduziert. Zurückzuführen ist diese Reduzierung auf die Ausnutzung des bekannten Übertragungsverhaltens linearer Systeme durch (8.19) und damit auf die lineare Beschreibung der Teilsysteme. Hängen die linearisierten Matrizen  $\mathbf{D}^*$  und  $\Omega^{*2}$  in (8.12) nicht von den komplexen Amplituden  $\hat{\mathbf{u}}$ , sondern nur den Beträgen  $\text{abs}(\hat{\mathbf{u}})$  ab, so kann (8.20) reell formuliert werden. Dadurch wird die Anzahl der zu lösenden reellen Gleichungen halbiert.

### 8.3 Näherungslösung mit höheren Harmonischen

Die im Fall der *Harmonischen Balance* getroffene Annahme einer näherungsweise harmonischen Systemantwort auf eine harmonische Erregung kann zu großen Fehlern führen. Dies gilt insbesondere bei Vorhandensein starker Nichtlinearitäten wie Spiel oder Reibung.

Der Fehler der Näherungslösung kann jedoch durch Hinzunahme höherer Harmonischer reduziert werden. Wegen der gegenseitigen Beeinflussung der harmonischen Anteile ist eine Beibehaltung des in 8.2 verwendeten Konzepts linearisierter Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen nicht möglich.

In [67] wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem alle *nichtlinearen Koppelkräfte*, wie in (8.3), als *äußere Kräfte* des ungekoppelten linearen Gesamtsystems betrachtet werden; sie werden als multiharmonische Funktionen der Zeit angenommen. Nach Addition der „echten“ äußeren Kräfte kann die Antwort des ungekoppelten linearen Systems leicht berechnet werden. Mit der Kreisfrequenz

$$\Omega_i = k_{\text{harm},i} \Omega, \quad i = 1 \dots n_{\text{harm}}, \quad \Omega_1 \equiv \Omega \quad (8.21)$$

des  $i$ -ten von insgesamt  $n_{\text{harm}}$  berücksichtigten harmonischen Anteilen gilt für die komplexe Antwortamplitude  ${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{q}}}$  bei dieser Frequenz

$${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{q}}} = \underline{\mathbf{G}}_{\text{qF}}(\Omega_i) \left( {}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{E}} + {}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{K}}({}^{(1)}\hat{\underline{\mathbf{u}}}, {}^{(2)}\hat{\underline{\mathbf{u}}}, \dots, {}^{(n_{\text{harm}})}\hat{\underline{\mathbf{u}}}) \right) \quad (8.22)$$

$$\underline{\mathbf{G}}_{\text{qF}}(\Omega) = \left\{ -\Omega^2 \mathbf{E} + j\Omega \mathbf{D} + \Omega^2 \right\}^{-1} \Phi^{\text{T}}. \quad (8.23)$$

Dabei hängen die komplexen Koppelkraftamplituden  ${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{K}}$  bei der  $i$ -ten Harmonischen aufgrund der Nichtlinearität von den komplexen Verschiebungsamplituden  ${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{u}}}$  bei allen berücksichtigten Frequenzen ab.

Aus (8.8) folgt  ${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\Gamma}_{\text{xu}} \Phi {}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{q}}}$  für jede Harmonische  $i$  und es resultiert das gekoppelte nichtlineare komplexe Gleichungssystem

$${}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\Gamma}_{\text{xu}} \Phi \underline{\mathbf{G}}_{\text{qF}}(\Omega_i) \left( {}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{E}} + {}^{(i)}\hat{\underline{\mathbf{F}}}_{\text{K}}({}^{(1)}\hat{\underline{\mathbf{u}}}, {}^{(2)}\hat{\underline{\mathbf{u}}}, \dots, {}^{(n_{\text{harm}})}\hat{\underline{\mathbf{u}}}) \right), \quad i = 1 \dots n_{\text{harm}} \quad (8.24)$$

mit insgesamt  $2 \times n_{\text{u}} \times n_{\text{harm}}$  reellen Gleichungen.

## 8.4 Numerische Lösung der Gleichungen

Die drei oben dargestellten Formulierungen zur näherungsweise Lösung des nichtlinearen Differentialgleichungssystems (8.3) mit periodischen Ansätzen führen auf Systeme reeller nichtlinearer Gleichungen, die i.d.R. nur iterativ zu lösen sind, d. h. durch eine Folge  $\mathbf{x}_k$  von Zwischenlösungen, die gegen die Lösung konvergiert.

Die Real- und Imaginärteile der Amplituden der Harmonischen und höheren Harmonischen der Systemantwort können in einem reellen  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{x}$  zusammengefasst werden. Die Defekte aller reellen nichtlinearen Gleichungen ergeben eine  $n$ -dimensionale vektorielle Fehlerfunktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Damit lässt sich die Aufgabe als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (8.25)$$

formulieren.

Durch Summation der quadratischen Fehler aller Gleichungen kann die Gleichungslösung auf das skalare Minimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (8.26)$$

in den reellen Variablen  $\mathbf{x}$  zurückgeführt werden.

Die zahlreichen Verfahren zur Lösung dieses numerischen Standardproblems lassen sich danach unterscheiden, ob Ableitungen der Fehlerfunktion  $F(\mathbf{x})$  benötigt werden oder nicht.

Das NELDER-MEAD *Simplex-Verfahren* [53] ist der bekannteste Lösungsalgorithmus, der keine Ableitungsinformation über  $F(\mathbf{x})$  benötigt. Ein Simplex im  $n$ -dimensionalen Parameterraum ist durch  $n + 1$  Eckpunkte definiert, an denen die Funktion  $F(\mathbf{x})$  ausgewertet wird. Nach Hinzunahme eines weiteren, durch eine geeignete Suchstrategie festgelegten Eckpunkts, wird der Punkt mit dem größten Funktionswert  $F(\mathbf{x})$  gelöscht. Der Vorgang wird bis zum Erreichen eines Abbruchkriteriums wiederholt, das sich auf die Größe des Simplex oder den verbleibenden Fehler beziehen kann. Da ausschließlich Funktionswerte benötigt werden, ist das Verfahren sehr robust und kann auch bei verrauschten, langsam zeitveränderlichen oder diskontinuierlichen Funktionen eingesetzt werden.

Dem Vorteil der Robustheit steht bei den Simplex-Verfahren eine langsame Konvergenz gegenüber, die durch Berücksichtigung von Ableitungsinformationen erhöht werden kann. Dies führt im einfachsten Fall auf das *Gradienten-Verfahren*, das auch als Methode des steilsten Abstiegs (engl.: *steepest descent*) bezeichnet wird. Als Suchrichtung  $\mathbf{h}$  wird der negative Gradient von  $F(\mathbf{x})$  gewählt,

$$\mathbf{h} = -\nabla F(\mathbf{x}). \quad (8.27)$$

Die nächste Iteration  $\mathbf{x}_{k+1}$  ergibt sich mit der Schrittweite  $\alpha$  durch

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{h} \quad (8.28)$$



aus der aktuellen Iteration  $\mathbf{x}_k$ . Die Wahl der Schrittweite in der vorgegebenen Richtung (engl.: *line search*) kann z. B. durch das Auffinden des Minimums in der Suchrichtung mit Inter- oder Extrapolationsverfahren erfolgen.

Als NEWTON-Verfahren werden in der Optimierung solche bezeichnet, bei denen der Iterationsschritt  $\mathbf{h}$  in Richtung des Minimums eines lokal gültigen quadratischen Modells

$$F(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H}_F \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} + b \quad (8.29)$$

mit der positiv definiten HESSE-Matrix  $\mathbf{H}_F$  festgelegt wird. Mit dem Gradienten  $\nabla F$  folgt

$$\mathbf{h} = -\mathbf{H}_F^{-1} \nabla F. \quad (8.30)$$

Da die Berechnung von Ableitungen häufig einen großen numerischen Aufwand bedeutet, verzichten sog. Quasi-NEWTON-Verfahren auf die exakte Berechnung der HESSE-Matrix und konstruieren fortlaufend Näherungen unter Berücksichtigung von  $F$  und  $\nabla F$ . Die bekannteste Methode zur Aktualisierung der HESSE-Matrix ist das BFGS-Verfahren, benannt nach Broyden [14], Fletcher [28], Goldfarb [32] und Shanno [77].

Für den häufigen Fall der Minimierung von Fehlerquadratsummen nimmt die Kriteriumsfunktion  $F(\mathbf{x})$  die Form

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (8.31)$$

an, dabei enthält der Vektor  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  die Einzelfehler. Für den Gradienten und die HESSE-Matrix von  $F(\mathbf{x})$  folgt dann

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (8.32)$$

$$\mathbf{H}_F(\mathbf{x}) = \mathbf{J}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}_f(\mathbf{x}) + \mathbf{Q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}_i(\mathbf{x}) \quad (8.33)$$

mit der JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x})$  der Vektorfunktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  und deren Komponenten  $f_i(\mathbf{x})$  sowie den zugehörigen HESSE-Matrizen  $\mathbf{H}_i(\mathbf{x})$ . Sind die Fehlerkomponenten  $f_i(\mathbf{x})$  nahezu lineare Funktionen von  $\mathbf{x}$  oder in der Nähe der Lösung sehr klein (wie im Anwendungsfall der Gleichungslösung), so kann  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$  vernachlässigt werden und mit  $\mathbf{H}_F(\mathbf{x}) \approx \mathbf{J}_f^T(\mathbf{x}) \mathbf{J}_f(\mathbf{x})$  eine gute Näherung der HESSE-Matrix erhalten werden.

Das auf dieser Vereinfachung basierende Verfahren wird als GAUSS-NEWTON-Verfahren bezeichnet. Es konvergiert schnell nahe der Lösung, während das Gradienten-Verfahren zwar langsamer, dafür aber weit entfernt von der Lösung robuster ist.

Die Idee des LEVENBERG-MARQUARDT-Verfahrens [43, 48] besteht in der Kombination beider Vorteile durch *Regularisierung*. Die Näherung der HESSE-Matrix des GAUSS-NEWTON-Verfahrens wird durch  $\mathbf{J}_f^T(\mathbf{x})\mathbf{J}_f(\mathbf{x}) + \mu\mathbf{E}$  ersetzt, so dass die Summe für ausreichend großes  $\mu$  positiv definit wird. Mit dem sog. MARQUARDT-(Dämpfungs-)Parameter  $\mu$  kann die Suchrichtung zwischen der GAUSS-NEWTON-Richtung ( $\mu = 0$ ) und der Richtung des Gradienten-Verfahrens ( $\mu = \infty$ ) bei gleichzeitiger Verringerung der Schrittweite variiert werden. Bei großen Werten für  $\mu$  ist das Verfahren sehr robust, da ein kurzer Schritt in Richtung des steilsten Abstiegs sicher zu einer Verminderung des Funktionswertes  $F(\mathbf{x})$  führt.

Die effizientesten der beschriebenen Verfahren benötigen neben den Funktionswerten auch die JACOBI-Matrix  $\mathbf{J}_f$ . Da diese i.d.R. nicht analytisch vorliegt, muss sie durch Differenzen-Quotienten angenähert werden. Wegen des geringeren Aufwands werden diese meist einseitig berechnet, d. h.  $F'(x) \approx (F(x + \Delta x) - F(x))/\Delta x$ . Um den Einfluss numerischen Rauschens nicht zu verstärken, dürfen die Schritte dabei nicht zu klein gewählt werden. Andererseits müssen die Schritte klein genug sein, um eine gute lokale Approximation der JACOBI-Matrix zu erhalten.

Eine ausführliche Übersicht der dargestellten und weiterer Verfahren findet sich in [55].

### Gewählte Implementation

Mit einer kommerziellen Implementation des LEVENBERG-MARQUARDT-Verfahrens aus der *Optimization-Toolbox* des Softwarepakets MATLAB konnten keine befriedigenden Resultate erzielt werden. Dies spricht aber nicht grundsätzlich gegen eine Eignung des Verfahrens für den hier betrachteten Anwendungsfall, alternative Implementierungen könnten durchaus zu besseren Ergebnissen führen. Da solche aber im Rahmen dieser Arbeit nicht zur Verfügung standen, wurden stattdessen die folgenden zwei Verfahren verwendet:

- (a) Gedämpftes GAUSS-NEWTON-Verfahren (mit Schrittweiten-Steuerung), das bei Misserfolg (keine Verbesserung in Suchrichtung möglich) auf die Suchrichtung des Gradienten-Verfahrens umschaltet,
- (b) NELDER-MEAD Simplex-Verfahren aus der *Optimization-Toolbox* von MATLAB.

Der Gleichungslöser zur Berechnung der Frequenzantwort wird innerhalb einer äußeren Identifikationsschleife verwendet, die große Änderungen der Parameter in den zu lösenden Glei-

chungen bewirken kann. Der Lösungsalgorithmus muss daher äußerst robust sein und vollautomatisch ablaufen. Zu diesem Zweck hat sich folgende gestufte Strategie bewährt:

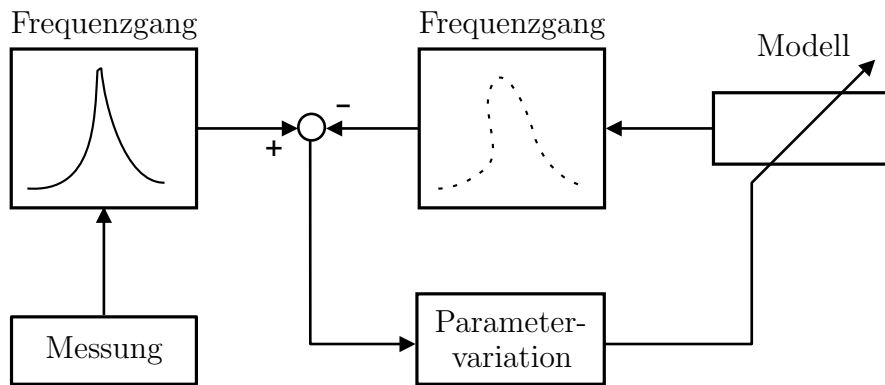
1. Direkte Lösung des Gleichungssystems mit allen zu berücksichtigenden Harmonischen mit Verfahren (a). Als Startwert wird jeweils die Lösung der vorausgehenden Frequenz berücksichtigt.
2. Iterative Lösung mit zunehmender Anzahl Harmonischer mit Verfahren (a). Die Lösung wird jeweils als Startwert bei der nächst größeren Anzahl Harmonischer berücksichtigt.
3. Direkte Lösung des Gleichungssystems mit allen zu berücksichtigenden Harmonischen mit Verfahren (b).

Begonnen wird jeder Lösungsversuch mit Stufe 1, kann kein Erfolg erzielt werden, wird die jeweils nächste Stufe verwendet. Durch die Kombination zweier unterschiedlicher Optimierungsverfahren und zweier unterschiedlicher Startwerte wird ein sehr hohes Maß an Robustheit erzielt.

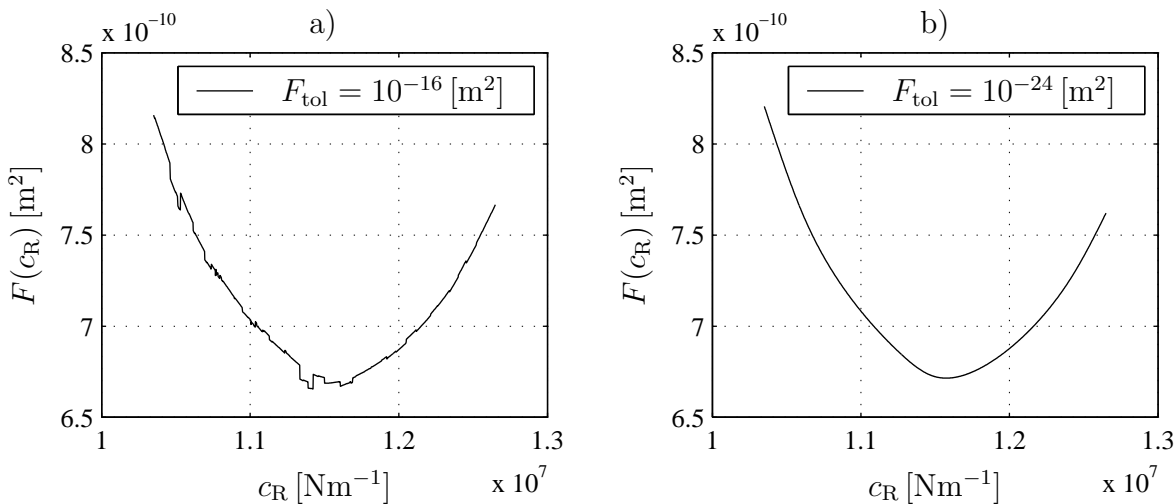
## 8.5 Identifikationsverfahren

Die Identifikation der Modellparameter  $\mathbf{p}$  erfolgt durch Minimierung der Fehlerfunktion  $F(\mathbf{p})$ , die sich aus der Quadratsumme der Abweichungen zwischen den gemessenen und berechneten Frequenzantworten an den Stützstellen des Frequenzgangs ergibt (siehe Bild 8.1). Die quadratischen Abweichungen der Real- und Imaginärteile werden dazu getrennt bestimmt und dann addiert.

Das Minimierungsproblem kann mit allen in 8.4 vorgestellten Verfahren durchgeführt werden. Besonders die auf Ableitungsinformationen angewiesenen Verfahren reagieren empfindlich auf eine Verletzung der stetigen Differenzierbarkeit oder gar Stetigkeit der Fehlerfunktion  $F(\mathbf{p})$ . Weil berechnete Frequenzgänge in die Fehlerfunktion eingehen, die selbst durch iterative Lösungsverfahren mit endlicher Genauigkeit bestimmt werden, sind die Abbruchtoleranzen der dort verwendeten Lösungsverfahren entsprechend klein zu wählen. Bild 8.2 zeigt eine Fehlerfunktion zur Identifikation der Kontaktparameter des Schaufelpaars (siehe Kapitel 8.7) in Abhängigkeit der Kontaktsteifigkeit  $c_R$ . In Bild 8.2a wurde die Fehlertoleranz des Gleichungslösers für die Berechnung der Frequenzantwort sehr groß gewählt. Die resultierende



**Bild 8.1:** Schematische Darstellung der Parameteridentifikation durch Minimierung der Abweichung zwischen dem gemessenen und mit dem Modell berechneten Frequenzgang.

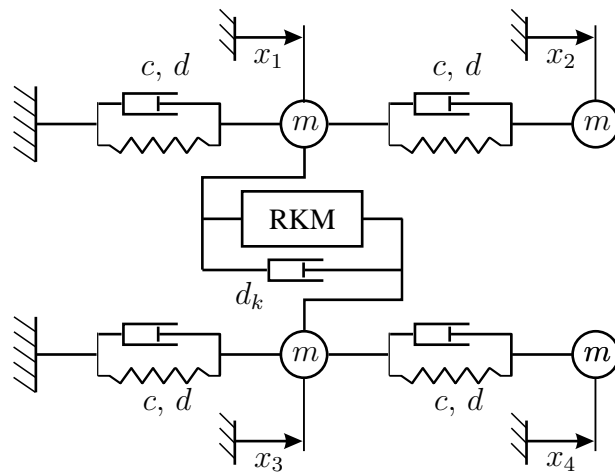


**Bild 8.2:** Fehlerfunktion  $F$  für die Identifikation in Abhängigkeit des Parameters  $c_R$ . Die Fehlertoleranz des Gleichungslösers für die Harmonische Balance beträgt in a)  $F_{\text{tol}} = 10^{-16}$   $\text{m}^2$  und in b)  $F_{\text{tol}} = 10^{-24}$   $\text{m}^2$ .

Fehlerfunktion weist Unstetigkeiten auf, die zum Versagen insbesondere gradientenbasierter Optimierungsverfahren führen können.

## 8.6 Beispiel gekoppelte Schwingerketten

Zur Demonstration des beschriebenen Identifikationsverfahrens wird zunächst wieder das Beispiel der gekoppelten Schwingerketten herangezogen, die hier jedoch durch ein Reibkontaktmodell (RKM) gekoppelt werden, siehe Bild 8.3. Im Folgenden wird zunächst die Berech-



**Bild 8.3:** Zwei mit einem Reibkontaktmodell (RKM) gekoppelte Zwei-Massen-Schwinger. Parameter:  $m=1$  kg,  $d=0.04$  Ns/m,  $c=1$  N/m,  $d_k=0$  Ns/m.

nung der Kraftamplituden des Reibkontaktmodells für harmonische und multiharmonische Verschiebungen erläutert. Anschließend werden Identifikationsergebnisse für dieses Modell präsentiert.

### 8.6.1 Reibkontaktmodell

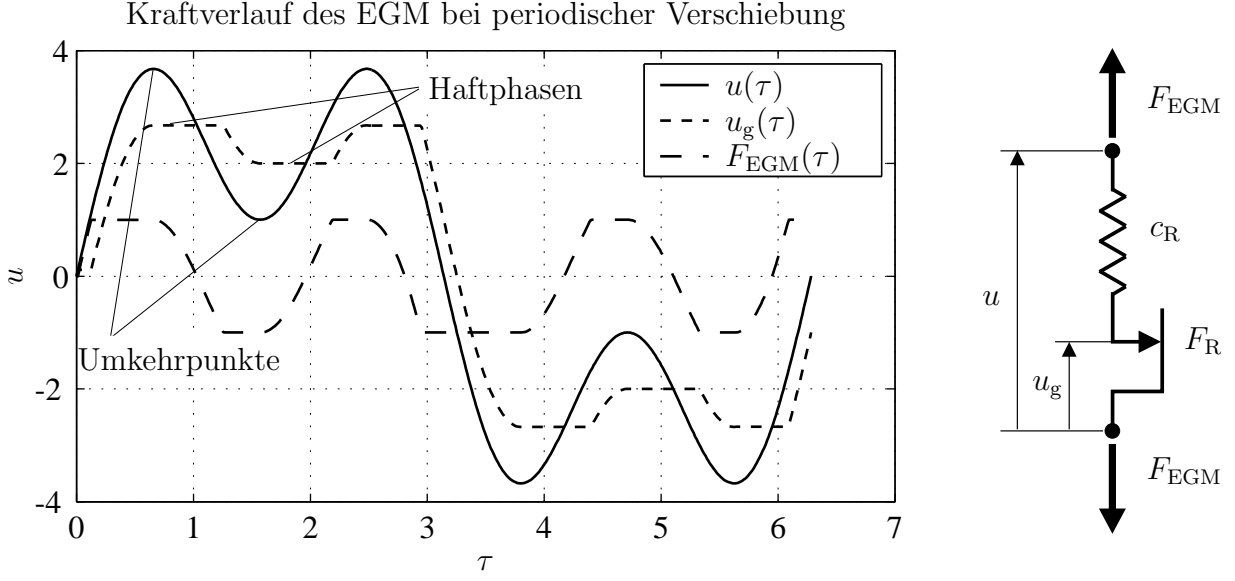
Die durch das Reibelement bewirkte Kopplung zwischen den beiden Ketten wird durch ein oder mehrere sog. Elasto-Gleit-Modelle (EGM) abgebildet. Sie werden als *Makroschlupf*- bzw. *Mikroschlupf*-Modelle bezeichnet, siehe Bild A.1 in Anhang A.

Mit dem Vektor  $\mathbf{x}$  aller physikalischen Koordinaten ergibt sich die Relativkoordinate

$$u(t) = x_3(t) - x_1(t) = \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}u} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}u} = [-1, 0, 1, 0], \quad (8.34)$$

die in diesem Fall ein Skalar ist. Die innerhalb jedes Elasto-Gleit-Elements im Reibelement auftretende Verschiebung (die während der Haftphase konstant und während der Gleitphase variabel ist) wird mit  $u_g$  (vgl. Bild A.1) bezeichnet.

**Harmonische Verschiebung** Bei *monofrequenter* Relativverschiebung mit der Amplitude  $\hat{u}$ , wie sie bei der Harmonischen Balance vorausgesetzt wird, lassen sich die Feder- und Dämpferkoeffizienten  $c_{\text{EGM}}$  und  $d_{\text{EGM}}$  des linearen Ersatzelements für das EGM geschlossen



**Bild 8.4:** Kraftverlauf  $F_{\text{EGM}}(\tau)$  des Elasto-Gleit-Modells bei periodischer Verschiebung  $u(\tau)$ . Bei Überschreitung der Haftreibungskraft ( $F_{\text{EGM}}(\tau) > F_{\text{R}}$ ) verschiebt sich das COULOMB-Element, Koordinate  $u_{\text{g}}(\tau)$ . Die Differenz  $u - u_{\text{g}}$  der äußeren Verschiebung  $u(\tau)$  und der inneren Verschiebung  $u_{\text{g}}(\tau)$  bestimmt die Auslenkung der Feder und damit die von einem Elasto-Gleit-Element ausgeübte Kraft  $F_{\text{EGM}} = c_{\text{R}}(u - u_{\text{g}})$ . Parameter:  $c_{\text{R}} = 1$ ,  $F_{\text{R}} = 1$ .

analytisch darstellen, siehe z. B. [6]. Mit der normierten Verschiebung

$$\hat{u}^* = \frac{\hat{u}}{u_{\text{krit}}}, \quad u_{\text{krit}} = \frac{F_{\text{R}}}{c_{\text{R}}} \quad (8.35)$$

(die kritische Verschiebung  $u_{\text{krit}}$  markiert den Beginn des Gleitens) und der Anregungsfrequenz  $\Omega$  ergibt sich für den Fall vollständigen Haftens

$$\left. \begin{array}{l} c_{\text{EGM}} = c_{\text{R}} \\ d_{\text{EGM}} = 0 \end{array} \right\} \hat{u}^* < 1 \quad (8.36)$$

und für den Fall teilweisen Gleitens

$$\left. \begin{array}{l} c_{\text{EGM}} = \frac{c_{\text{R}}}{\pi} \left( \arccos \left( 1 - \frac{2}{\hat{u}^*} \right) - \frac{2}{\hat{u}^*} \left( 1 - \frac{2}{\hat{u}^*} \right) \sqrt{\hat{u}^* - 1} \right) \\ d_{\text{EGM}} = \frac{4c_{\text{R}}}{\pi\Omega\hat{u}^*} \left( 1 - \frac{1}{\hat{u}^*} \right) \end{array} \right\} \hat{u}^* \geq 1. \quad (8.37)$$

**Periodische Verschiebung** Werden höhere Harmonische berücksichtigt, so ergibt sich bei Verwendung der dimensionslosen Zeit  $\tau = \Omega_1 t$  eine *periodische* Relativverschiebung (Bild 8.4)

$$u(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_{\text{harm}}} {}^{(i)}\underline{\hat{u}} e^{j k_{\text{harm},i} \tau} + \text{conj}({}^{(i)}\underline{\hat{u}}) e^{-j k_{\text{harm},i} \tau}. \quad (8.38)$$

Dabei sind die Zeitpunkte der Haft-Gleit-Übergänge und mit ihnen der Kraftverlauf des EGM nicht mehr geschlossenen analytisch darstellbar. Stattdessen muss eine Periode ( $2\pi$ ) der Relativverschiebung in  $n_A$  Abschnitte unterteilt werden, in denen jeweils nur Haften oder nur Gleiten auftritt. Die komplexen Fourierkoeffizienten des Kraftsignals ergeben sich dann durch Summation

$${}^{(i)}\hat{F}_{\text{EGM}} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n_A} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} F_{\text{EGM}}(\tau) e^{j k_{\text{harm},i} \tau} \delta\tau \quad (8.39)$$

der Fourierteilintegrale, deren Ergebnis für jeden Abschnitt analytisch, z.B. mit einer Software für symbolische Mathematik wie MAPLE angegeben werden kann.

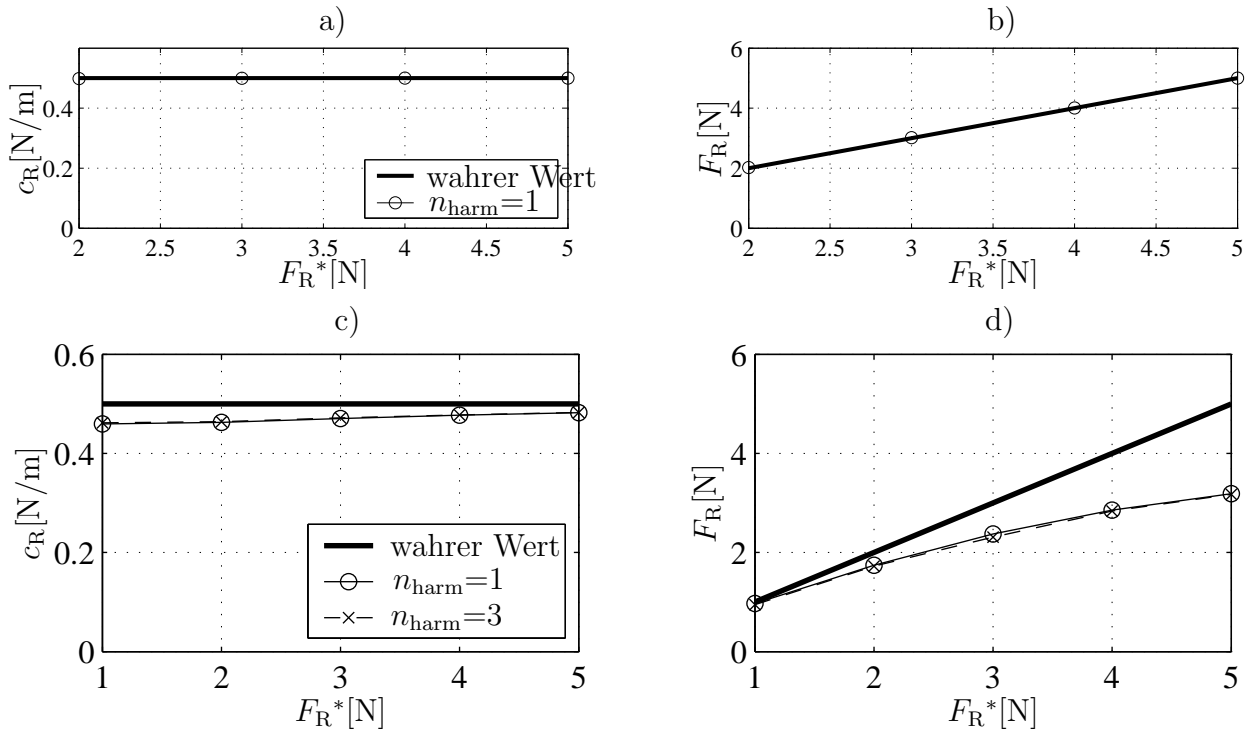
Als Grenzen der Teilabschnitte bieten sich zunächst die Zeitpunkte  $\tau_k$  der Extrema von  $u(\tau)$  (=Umkehrpunkte) an, auf die wegen der Entlastung der Feder  $c_R$  zunächst jeweils eine Phase mit haftendem COULOMB-Element ( $u_g = \text{const}$ ) folgt (vgl. Bild 8.4). Die Extrema können im allgemeinen Fall nur numerisch ermittelt werden. Wird vor Erreichen des nächsten Umkehrpunkts die Haftreibungskraft überschritten, so muss der Abschnitt an dieser Stelle in zwei Teilabschnitte unterteilt werden. Im zweiten Teilabschnitt tritt dann ausschließlich Gleiten auf.

Die Berechnung des Kraftverlaufs für den Abschnitt  $k$  folgt demnach folgendem Algorithmus:

1. Aktualisierung der Verschiebung  $u_g$  im COULOMB-Element am Ende  $\tau_k$  des vorangegangenen Abschnitts ( $k - 1$ ) entsprechend  $u_g = u(\tau_k) - F_{\text{EGM}}(\tau_k)/c_R$ . (Diese Aktualisierung ist nur bei Überschreiten der Haftreibungskraft im vorangegangenen Abschnitt *nötig*, da nur dann eine Änderung von  $u_g$  stattgefunden hat. Sie führt aber zu keinem Fehler, sofern es sich um einen reinen Haftabschnitt handelte).
2. Bestimmung (numerisch), falls existent, des Zeitpunkts  $\tau_g$  der Überschreitung der Haftreibungskraft innerhalb des aktuellen Abschnitts  $k$ .
3. Bestimmung des Kraftverlaufs

$$F_{\text{EGM}}(\tau) = \begin{cases} (u(\tau) - u_g) c_R & \tau_g \text{ existiert nicht, } \tau \in ]\tau_k \dots \tau_{k+1}] \\ (u(\tau) - u_g) c_R & \tau_g \text{ existiert, } \tau \in ]\tau_k \dots \tau_g] \\ F_R \operatorname{sgn}\left(\frac{\delta u(\tau)}{\delta \tau}\right) & \tau_g \text{ existiert, } \tau \in ]\tau_g \dots \tau_{k+1}] \end{cases}$$

des Elasto-Gleit-Elements im aktuellen Abschnitt unter Beachtung eventuellen Gleitens.



**Bild 8.5:** Identifizierte Kontaktparameter  $c_R, F_R$  als Funktion der wahren Reibkraft  $F_R^*$  für das Beispiel aus Bild 8.3 mit Mikroschlupf-Reibelement. Bei den Ergebnissen a) und b) wurde zur Identifikation ebenfalls ein Mikroschlupf-Reibelement, bei den Ergebnissen c) und d) ein Makroschlupf-Reibelement zugrunde gelegt.

Die Anzahl der berücksichtigten Abschnitte  $n_A$  ist so zu wählen, dass die Integration (8.39) insgesamt genau eine Periode ( $2\pi$ ) umfasst. Damit bereits im ersten Abschnitt der Integration die Verschiebung  $u_g$  des COULOMB-Elements dem eingeschwungenen Zustand entspricht (Hysterese!), muss die Berechnung des Kraftverlaufs für eine halbe Periode der Integration vorangestellt werden.

### 8.6.2 Identifikationsergebnisse

Anhand des numerischen Beispiels sollen zwei Effekte untersucht werden: 1. Der Einfluss der Anzahl höherer Harmonischer auf das Identifikationsergebnis und 2. der Einfluss eines vereinfachten Modellansatzes für das Reibkontaktmodell.

Die „Messdaten“ wurden mit einem Mikroschlupfmodell (siehe Anhang A) mit  $n = 10$  parallelen Reibsträngen generiert, neben der Anregungsfrequenz wurden zwei höhere Harmonische verwendet ( $n_{\text{harm}}=3$ ). Die „wahren“ globalen Parameter betragen  $c_R^* = 0.5\text{N/m}$ ,



$F_R^* = 1, 2, 3, 4, 5\text{N}$ .

Zur Identifikation wurde zunächst das identische Modell mit Mikroschlupf verwendet. Bei der Berechnung wurde jedoch nur die Grundharmonische verwendet, um Rechenzeit zu sparen. Das Identifikationsergebnis ist in Bild 8.5a und Bild 8.5b über der wahren Reibkraft  $F_R^*$  dargestellt. Trotz der vereinfachten Berechnung mit der Grundharmonischen liegen die identifizierten Werte sehr nahe an den wahren Werten.

In einem zweiten Durchgang wurde bei der Identifikation ein Makroschlupf-Reibelement berücksichtigt. Die resultierenden Ergebnisse in Bild 8.5c und Bild 8.5d weichen zum Teil deutlich von den wahren Werten ab. Bei großen wahren Reibkräften wird  $F_R$ , bei kleinen  $c_R$  unterschätzt. Die Anzahl der berücksichtigten Harmonischen hat jedoch auch hier keinen nennenswerten Einfluss.

## 8.7 Beispiel Schaufelpaar mit Reibelement

Als experimentelles Beispiel für das dargestellte Identifikationsverfahren dient der bereits in Kapitel 3.4 gezeigte Schaufel-Versuchstand. Die der Identifikation zugrunde gelegten Frequenzgänge werden durch Anregung der linken Schaufel mit dem in Bild 3.5 gezeigten elektrodynamischen Shaker erzeugt. Die Antwort beider Schaufeln wird durch jeweils mehrere Beschleunigungsaufnehmer aufgezeichnet. Zu identifizieren ist ein parametrisches Modell für die durch das Reibelement bewirkte Kopplung zwischen den Schaufeln.

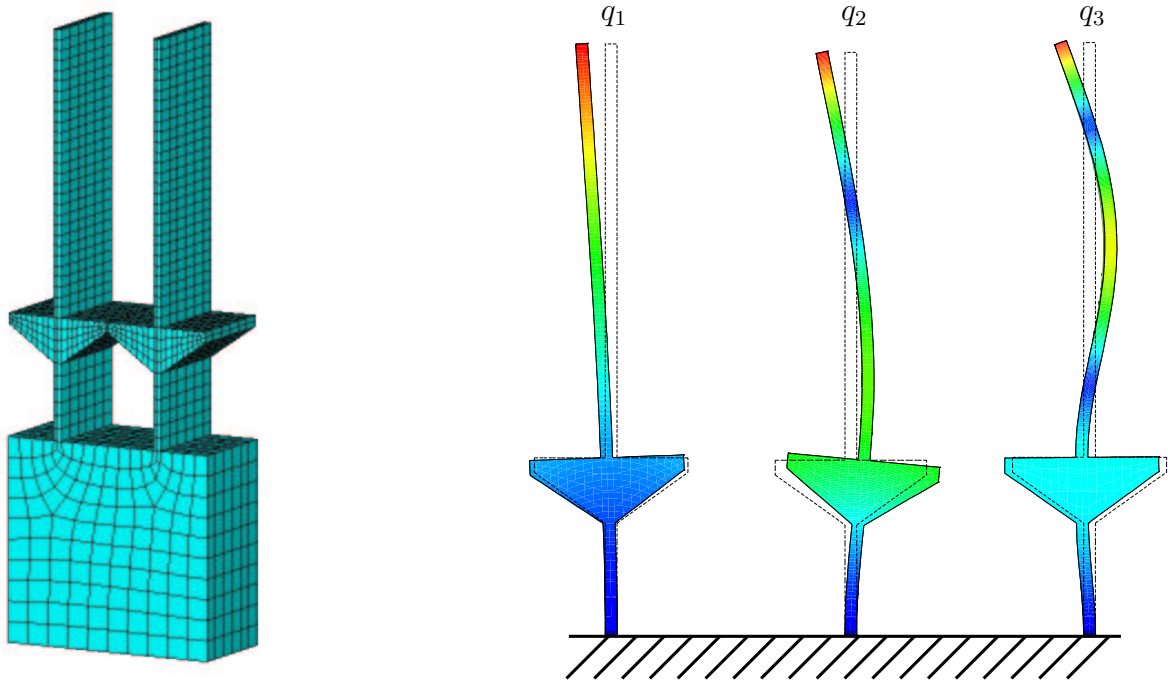
### 8.7.1 Modellierung

Die elastische Anordnung aus zwei Schaufeln und dem Quader wird durch eine wählbare Anzahl von Modalkoordinaten  $n_q$  beschrieben. Die zugehörigen Eigenformen und -frequenzen stammen aus einem FE-Modell [62] (siehe Bild 8.6) mit 2473 Elementen. Bild 8.6 zeigt die ersten drei Eigenformen einer Einzelschaukel.

Von den aus dem FE-Modell erhaltenen Eigenvektoren werden je Schaufel lediglich die Koordinaten

$$\mathbf{x}_S = [x_1, y_1, z_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, x_2, z_2, x_3, x_4, z_5]^T \quad (8.40)$$

(siehe Bild 8.7a) für die Beschreibung verwendet; am Bezugspunkt  $P_1$  für den Kontakt werden alle translatorischen und rotatorischen Koordinaten berücksichtigt, bei  $P_2$  wird in der



**Bild 8.6:** FE-Netz [62] des über einen Quader verbundenen Schaufelpaars. Details des ANSYS-Modells: 3787 Knoten, 2473 Elemente, Elementtyp SOLID73 - Volumenelement mit acht Knoten und je drei translatorischen und drei rotatorischen Freiheitsgraden an den Knoten.

$x - z$ -Ebene angeregt, an  $P_3$  und  $P_4$  wird die Beschleunigung in  $x$ -Richtung und an  $P_5$  in  $z$ -Richtung gemessen (siehe Bild 8.7). Die Beschränkung auf nur einen sog. „Kontrollpunkt“ (P1) je Kontaktfläche entspricht der in [76] beschriebenen Vorgehensweise.

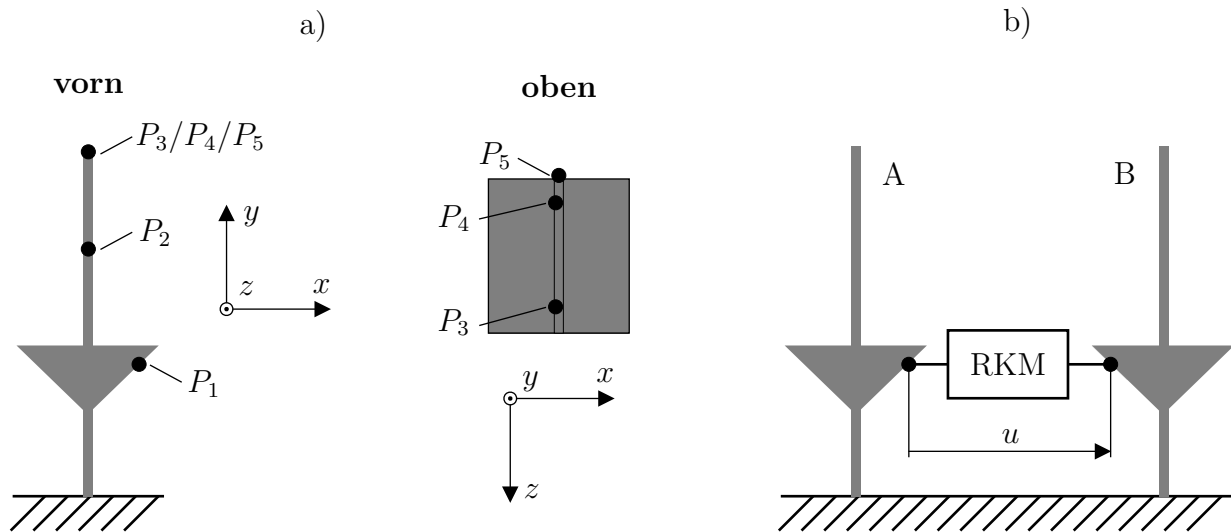
Insgesamt ergibt sich damit

$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{x}_{SA}^T, \mathbf{x}_{SB}^T] \quad (8.41)$$

als Vektor der physikalischen Koordinaten des Gesamtsystems, bestehend aus den Koordinaten der Schaufeln A und B.

### 8.7.2 Reibkontaktmodell

Die durch das Reibelement bewirkte Kopplung zwischen den beiden Schaufeln wird durch ein oder mehrere sog. Elasto-Gleit-Modelle (EGM) abgebildet. Sie werden als *Makroschlupf*- bzw. *Mikroschlupf*-Modelle bezeichnet, siehe Bild A.1 in Anhang A.



**Bild 8.7:** a) Ausgewählte Punkte der Schaufelmodelle ( $P_1$ : Kontaktpunkt,  $P_2$ : Anregungspunkt,  $P_3, P_4, P_5$ : Messpunkte); b) Anbindung des Reibkontaktmodells (RKM).

Mit dem Vektor  $\mathbf{x}$  aller physikalischen Koordinaten ergibt sich die Relativkoordinate

$$u(t) = x_{1B}(t) - x_{1A}(t) = \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}u} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{x}u} = [-1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0], \quad (8.42)$$

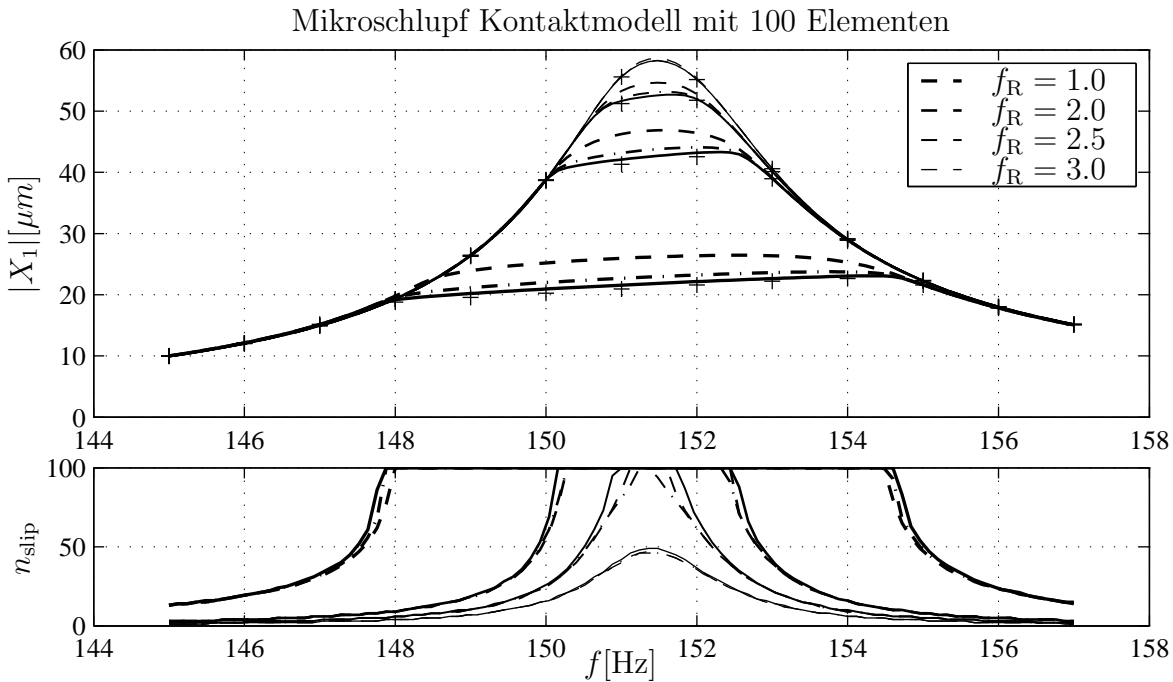
die in diesem Fall ein Skalar ist.

Die Berechnung der Kraftamplituden bei (multi-)harmonischer Verschiebung, die für die näherungsweise Lösung der Differentialgleichungen benötigt werden, ist in Kapitel 8.6.1 dargestellt.

### 8.7.3 Vergleich der Berechnungsverfahren

Besonders bei starken Nichtlinearitäten, die bei harmonischer Anregung große Oberwellenanteile in ihrem Ausgangssignal aufweisen, kann das Näherungsverfahren der *Harmonischen Balance* zu erheblichen Fehlern führen. Dies trifft bei einem Elasto-Gleitmodell besonders dann zu, wenn während einer Schwingungsperiode lange Gleitzeiten auftreten. Im Falle eines Mikroschlupfmodells ist im Mikroschlupfbereich wegen der nur teilweise gleitenden Reibelemente mit besseren Ergebnissen zu rechnen.

Bild 8.8 zeigt einige mit typischen Parameterwerten berechnete Frequenzgänge für das Modell aus Bild 8.7b bei Anregung und Messung an der Schaufel A (Koordinate  $x_{2A}$  bzw.  $x_{1A}$ ). Das Reibkontaktmodell besteht aus 100 parallelen Reibsträngen mit identischen Federstei-



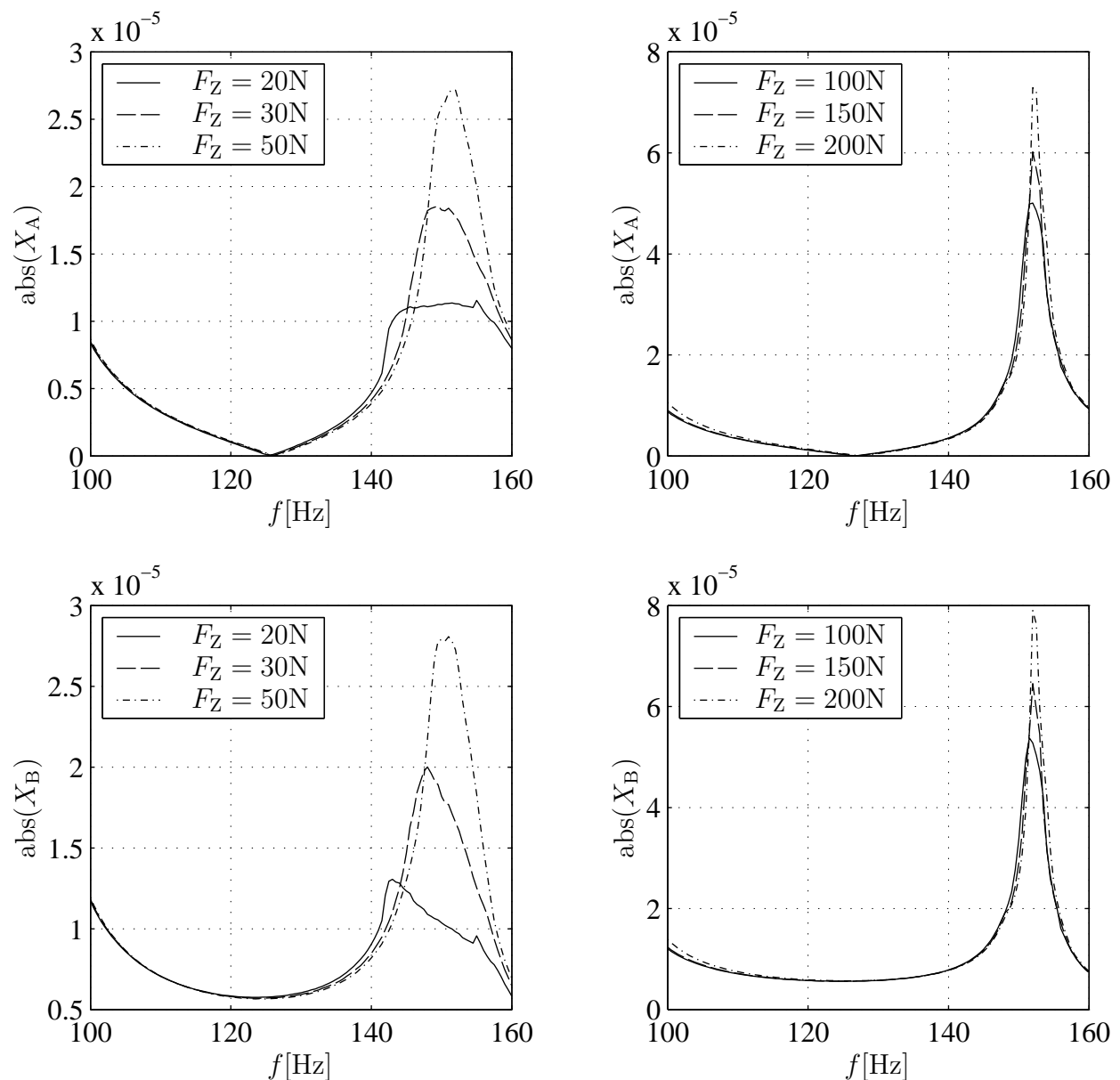
**Bild 8.8:** *Oben: Ausschnitt aus berechneten Frequenzgängen mit verschiedenen Haftreibungskräften  $F_R^* = f_R F_{R0}^*$  bei Verwendung der Harmonischen Balance mit einer (---), zwei (-·-) und drei (-) Harmonischen. Die Näherungsergebnisse konvergieren gegen die mit Hilfe der Zeitschrittintegration ermittelten Ergebnisse (+). Linien gleicher Strichstärke liegt die gleiche Haftreibungskraft zugrunde. Unten: Anzahl der während einer Schwingungsperiode nicht durchgängig haftenden Reibelemente.*

figkeiten  $c_{Ri}$  und elliptisch verteilten Haftreibungskräften  $F_{Ri}$ ,

$$c_{Ri} = \frac{c_{Ri}^*}{100}, \quad F_R^* = \sum_{i=1}^{100} F_{Ri}. \quad (8.43)$$

Die Haftreibungskraft  $F_R^*$  wurde gegenüber einem Ausgangswert  $F_{R0}^*$  um einen Faktor  $f_R$  variiert, um den Einfluss von Mikro- und Makroschlupf zu untersuchen.

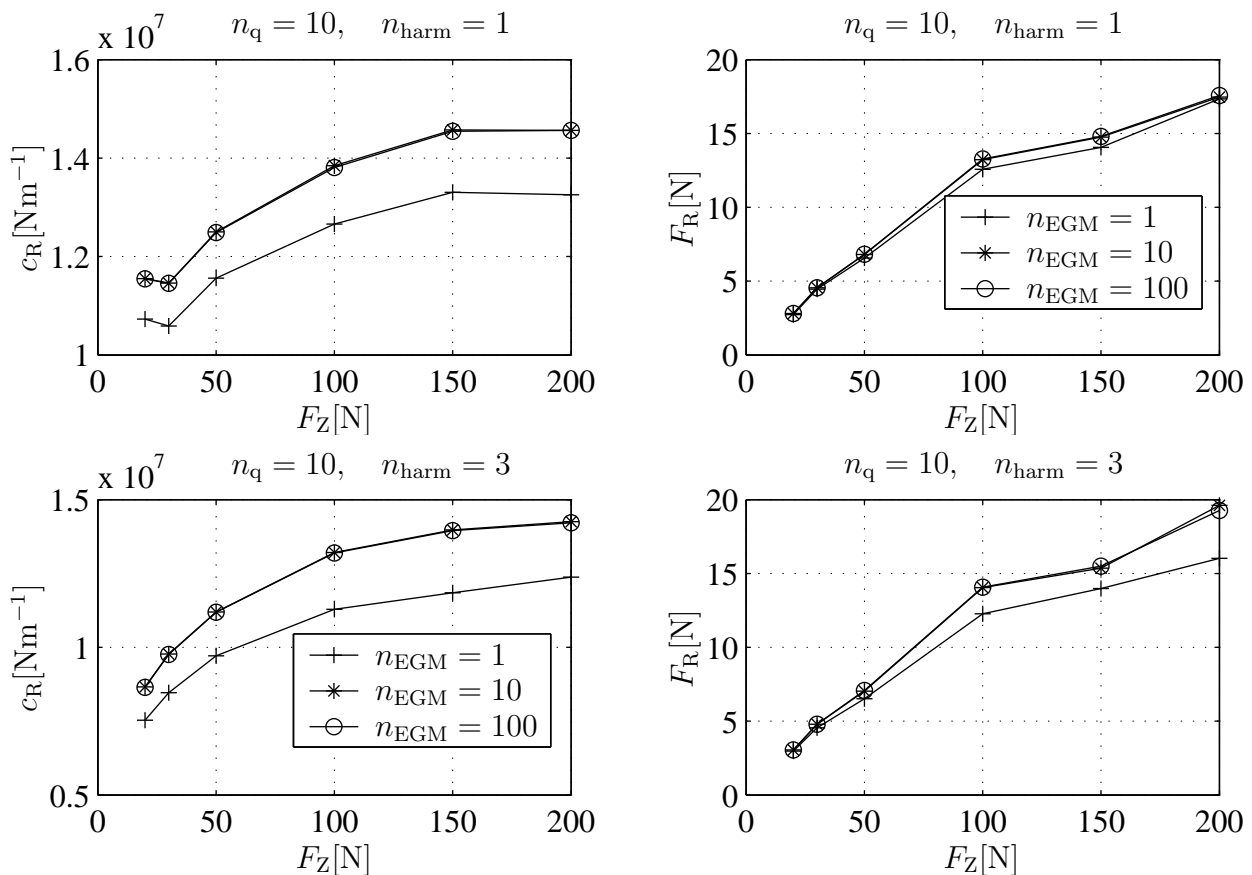
Bei Erhöhung der Haftreibungskraft sinkt, wie zu erwarten, die Anzahl  $n_{\text{slip}}$  der Reibelemente, bei denen Gleiten auftritt (Bild 8.8, unten), während gleichzeitig die Resonanzüberhöhung aufgrund verringerter Dissipation zunimmt (Bild 8.8, oben). Insbesondere bei geringer Haftreibungskraft führt die Anwendung der einfachen Harmonischen Balance zu Amplitudenfehlern von mehr als 20 Prozent. Bei Hinzunahme höherer Harmonischer konvergieren die Näherungslösungen aber schnell gegen die Lösung aus der Zeitschrittintegration.



**Bild 8.9:** Frequenzgänge  $X_A(f)$  und  $X_B(f)$  der Schwingungsamplituden beider Schaufelspitzen. Dargestellt ist jeweils der Mittelwert der Schwingungsamplituden der Punkte  $P_3$  und  $P_4$  aus Bild 8.7 in  $x$ -Richtung.

#### 8.7.4 Messdaten

Für die Identifikation werden die in Bild 8.9 dargestellten gemessenen Frequenzgänge [61] zugrunde gelegt. Die beiden oberen Diagramme zeigen die gemittelten Schwingungsamplituden in  $x$ -Richtung der Messpunkte  $P_3$  und  $P_4$  (vgl. Bild 8.7) der angeregten Schaufel (A). Die unteren Diagramme zeigen die gleiche Messung für die nicht angeregte Schaufel (B). Die Messungen wurden für sechs verschiedene simulierte Zentrifugalkräfte  $F_Z$  im Bereich



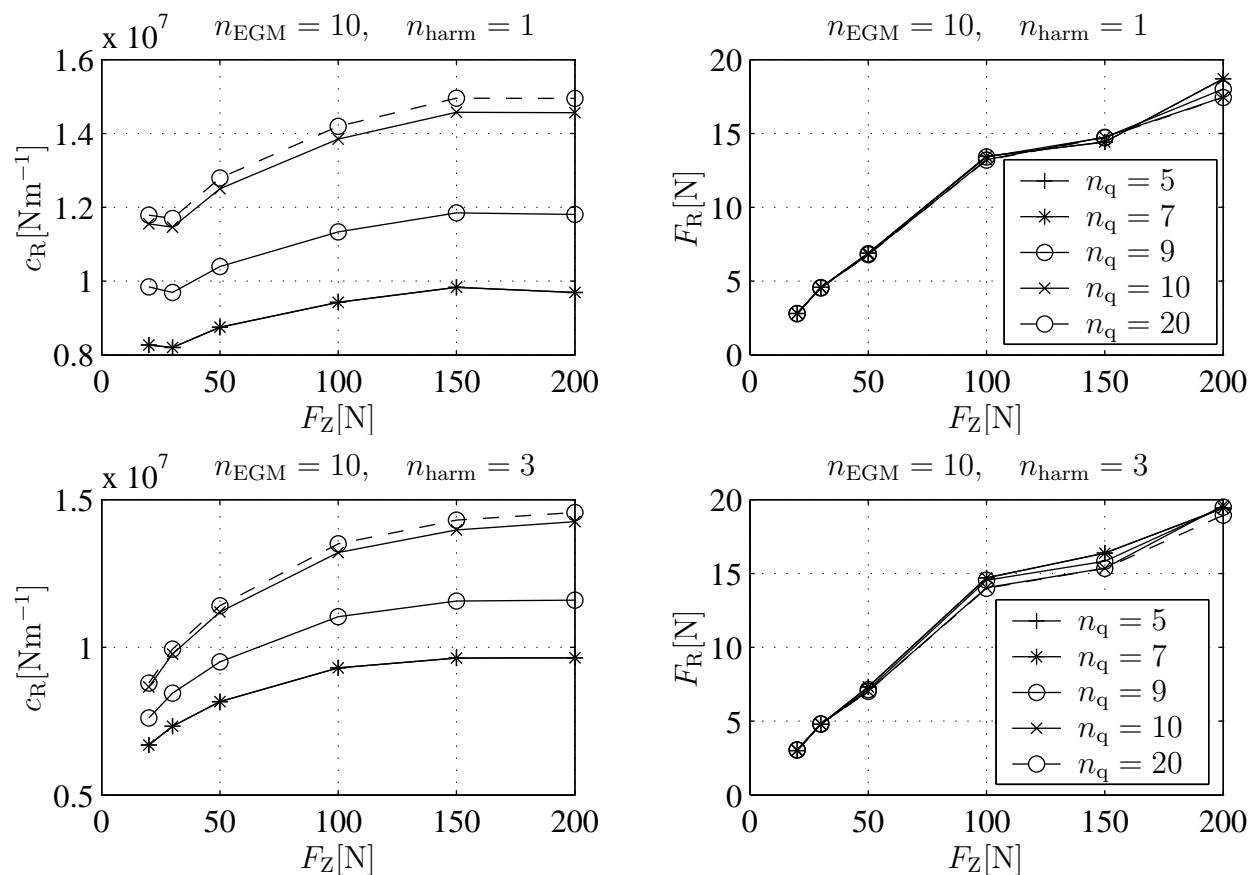
**Bild 8.10:** Untersuchung des Einflusses der Anzahl  $n_{\text{EGM}}$  der im Mikroschlupfmodell verwendeten parallelen Reibstränge auf das Identifikationsergebnis. Oben: bei Verwendung der einfachen Harmonischen Balance. Unten: bei Berechnung einer Näherungslösung mit insgesamt drei Harmonischen.

20N...200N durchgeführt. Der besseren Übersichtlichkeit wegen sind diese in jeweils zwei Diagramme aufgeteilt. Im Frequenzgang der angeregten Schaufel A ist deutlich die Antiresonanz zwischen 120Hz und 140Hz zu erkennen.

### 8.7.5 Identifikationsergebnisse

Bevor später weitere Kontaktmodelle für die Kopplung zwischen den beiden Turbinenschaukeln untersucht werden, sollen zunächst unter Verwendung des Mikroschlupfmodells die Einflüsse mehrerer Modell- und Berechnungsparameter auf das Identifikationsergebnis untersucht werden.

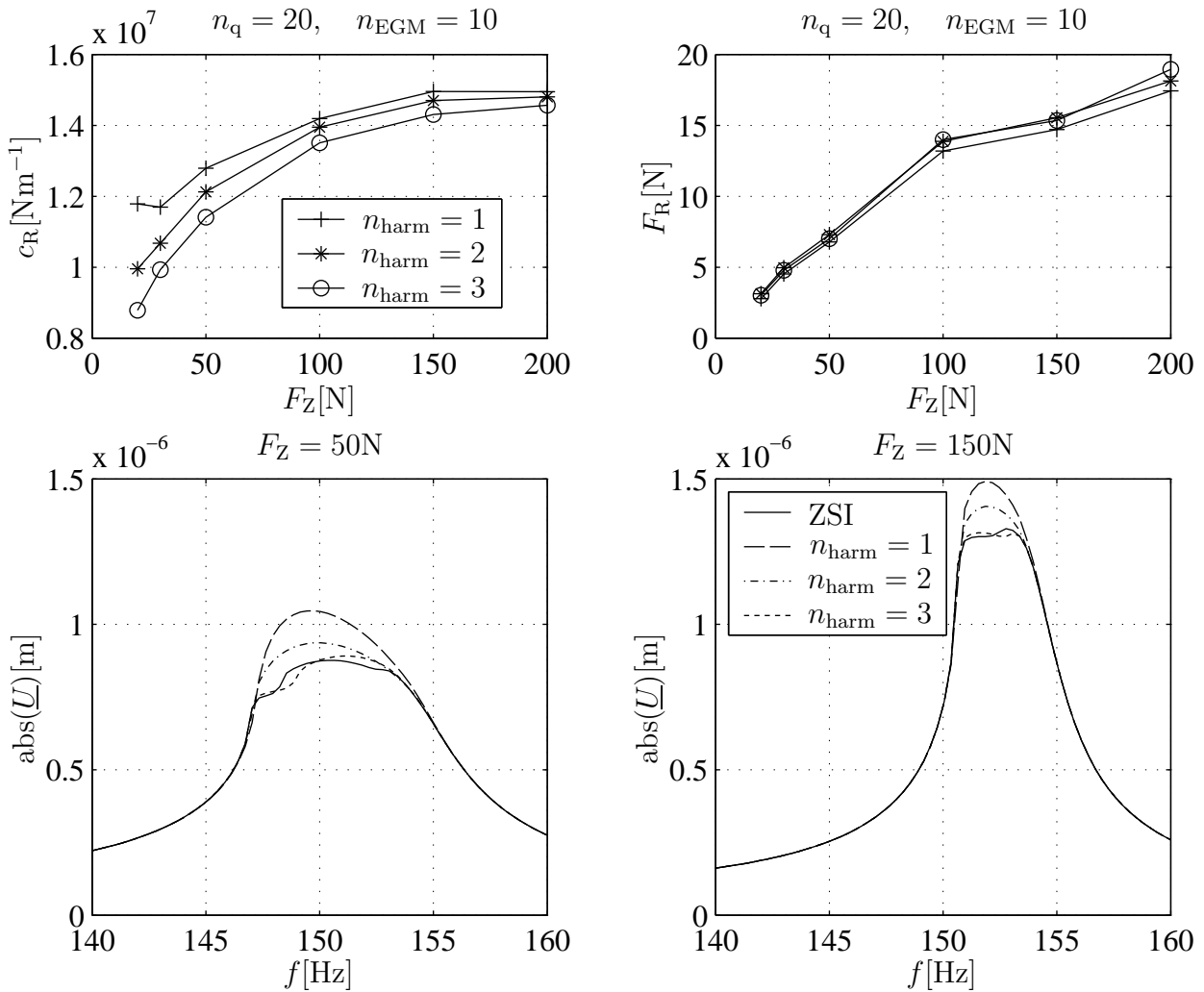
Dazu gehört die Anzahl  $n_{\text{EGM}}$  der im Mikroschlupfmodell berücksichtigten parallelen Reibstränge. In Bild 8.10 sind  $n_q = 10$  Moden für den linearen Systemanteil zugrun-



**Bild 8.11:** Untersuchung des Einflusses der Anzahl  $n_q$  berücksichtigter Moden des linearen Systemteils.

de gelegt, die Kurven zeigen die identifizierten Werte  $c_R$  und  $F_R$  des Reibmodells für  $n_{\text{EGM}} = 1, 10$  und  $100$  parallele Reibstränge. In den oberen Diagrammen wurde die einfache Harmonische Balance zur Berechnung verwendet, in den unteren Diagrammen wurden zwei höhere Harmonische hinzugefügt. In beiden Fällen erweisen sich übereinstimmend bereits  $n_{\text{EGM}} = 10$  Reibstränge als ausreichend, weil bei Erhöhung auf  $n_{\text{EGM}} = 100$  kaum noch Änderungen bei den identifizierten Parametern wahrnehmbar sind.

Auf dieser Grundlage ist in Bild 8.11 die Anzahl  $n_q$  berücksichtigter Moden des linearen Systemanteils variiert. Während die identifizierte Haftreibungskraft  $F_R$  kaum von  $n_q$  abhängt, vergrößert sich die identifizierte Kontaktsteifigkeit  $c_R$  teilweise sprunghaft bei Hinzunahme weiterer Moden. Dieser Effekt beruht auf der Erhöhung der Nachgiebigkeit zwischen den beiden Kontaktpunkten durch die modale Beschreibung bei Erhöhung der Anzahl berücksichtigter Moden. Ein näherungsweise äquivalentes gekoppeltes System muss daher über eine entsprechend steifere Kontaktfeder zwischen beiden Koppelpunkten verfügen. Die durch die



**Bild 8.12:** Oben: Einfluss von  $n_{\text{harm}}$  auf die identifizierten Parameter. Unten: Schwingungsamplitude  $\underline{U}$  im Reibkontakt bei variierter Anzahl Harmonischer  $n_{\text{harm}}$  im Vergleich zum Ergebnis der Zeitschrittintegration (ZSI).

Kontaktfeder abgebildete Kontaktsteifigkeit kompensiert also u. a. die reduzierte Nachgiebigkeit aufgrund der endlichen Zahl verwendeter Moden. Identifizierte Parameter für die Kontaktsteifigkeit sind daher stets im Zusammenhang mit der modalen Beschreibung zu sehen. Im Folgenden wird  $n_q = 20$  gewählt.

Neben den schon diskutierten Systemparametern dürfte die Anzahl  $n_{\text{harm}}$  der zur Approximation der erzwungenen Schwingung verwendeten Harmonischen Einfluss auf die Identifikationsergebnisse haben. Zur Untersuchung dieses Effekts wurde die Parameteridentifikation für dasselbe Modell mit  $n_{\text{harm}} = 1, 2, 3$  durchgeführt. Die erhaltenen Parameter zeigt Bild 8.12 (oben). Um Rechenzeit zu sparen, wurden die mit  $n_{\text{harm}} = 1$  identifizierten Pa-



parameter als Startwerte für die Durchgänge mit  $n_{\text{harm}} = 2$  und  $n_{\text{harm}} = 3$  verwendet. Für  $n_{\text{harm}} = 1$  wurden allerdings zehn verschiedene, zufällig gestörte Anfangswerte verwendet, um die Wahrscheinlichkeit suboptimaler Lösungen zu verringern.

Wegen der erheblich längeren Rechenzeit wurde keine Identifikation durchgeführt, bei der die berechneten Frequenzgängen mit der Zeitschrittintegration ermittelt wurden. Stattdessen veranschaulichen die unteren Diagramme in Bild 8.12 (unten) den verbleibenden Unterschied zwischen den Näherungslösungen und dem Ergebnis der Zeitschrittintegration für zwei unterschiedliche simulierte Zentrifugalkräfte  $F_Z$ . Die Rechnungen basieren auf den mit  $n_{\text{harm}} = 3$  identifizierten Parametern. Wie schon in Bild 8.8 verbleiben auch bei diesen Parameterkombinationen nur geringe Abweichungen zwischen der Zeitschrittintegration und der Näherungslösung mit  $n_{\text{harm}} = 3$ .

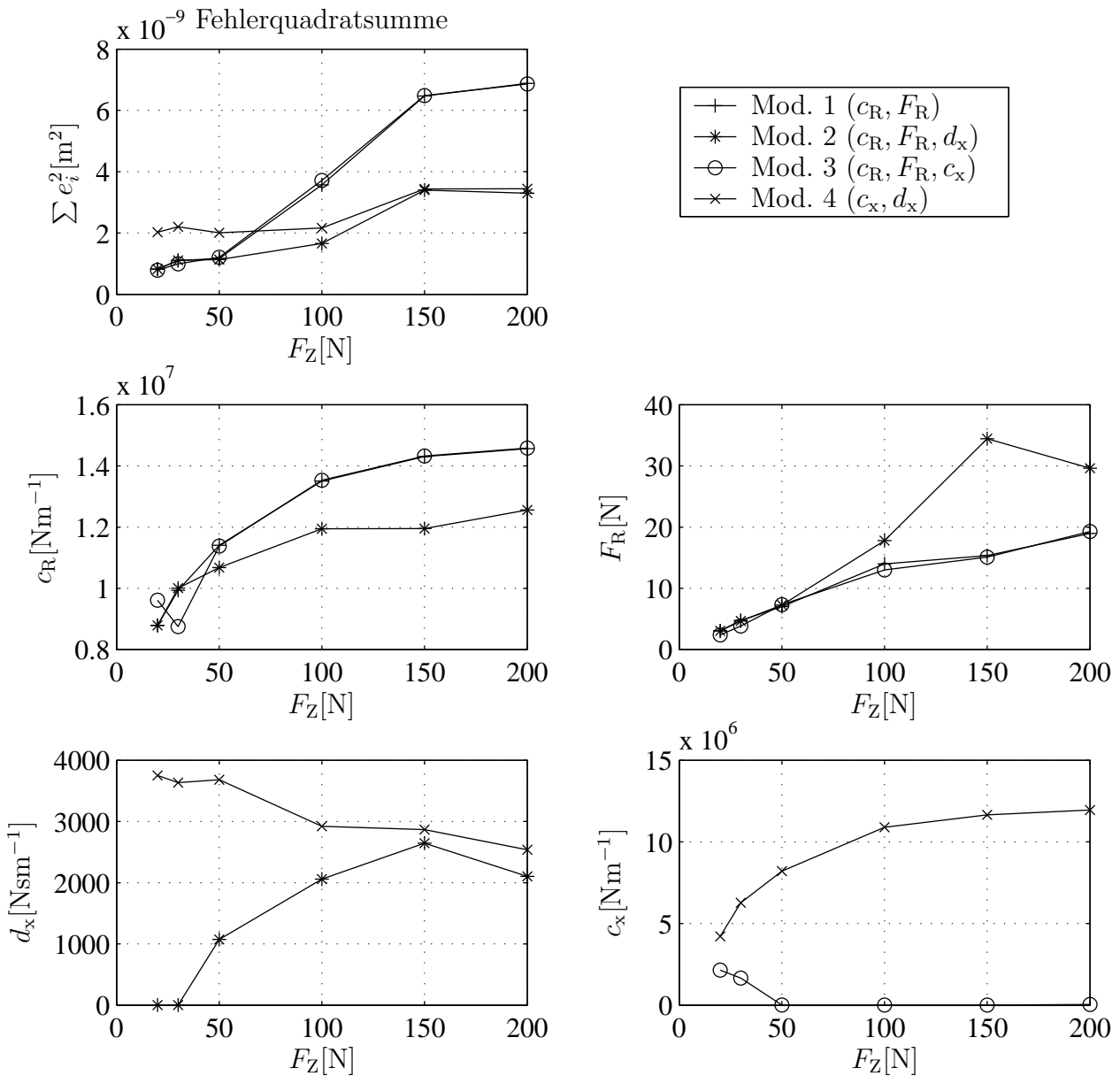
Aufgrund der dargestellten Voruntersuchungen liegen den im Folgenden präsentierten Identifikationsergebnissen nachstehende Parameter zugrunde:  $n_{\text{EGM}} = 10$ ,  $n_{\text{q}} = 20$ ,  $n_{\text{harm}} = 3$ . Bild 8.13 zeigt vergleichend die Identifikationsergebnisse für vier verschiedene Kontaktmodelle:

- Modell 1: Mikroschlupfmodell ( $c_{\text{R}}, F_{\text{R}}$ )
- Modell 2: Mikroschlupfmodell plus paralleler linearer Dämpfer ( $c_{\text{R}}, F_{\text{R}}, d_{\text{x}}$ )
- Modell 3: Mikroschlupfmodell plus parallele lineare Feder ( $c_{\text{R}}, F_{\text{R}}, c_{\text{x}}$ )
- Modell 4: Kein Reibkontakt, nur lineares Feder-Dämpfer-Modell ( $c_{\text{x}}, d_{\text{x}}$ )

Das Diagramm links oben (in Bild 8.13) zeigt den Verlauf der nach der Identifikation verbleibenden Fehlerquadratsumme zwischen gemessenem und berechnetem Frequenzgang als Funktion der simulierten Zentrifugalkraft  $F_Z$ . Besonders bei großen  $F_Z$  zeigt sich für das einfache Mikroschlupfmodell (Modell 1) ein vergleichsweise großer verbleibender Fehler.

Dieser Fehler wird durch Hinzunahme eines parallel zum Reibmodell angeordneten linearen Dämpfers (Modell 2) für große  $F_Z$  etwa halbiert. Bei diesem Modell ergeben sich für große  $F_Z$  kleinere Federsteifigkeiten  $c_{\text{R}}$  und größere Hafttreibkräfte  $F_{\text{R}}$  (gegenüber Modell 1) bei gleichzeitiger Zunahme des Dämpferkoeffizienten  $d_{\text{x}}$ . Offensichtlich übernimmt der lineare Dämpfer einen Teil der Dämpfungswirkung des Reibmodells.

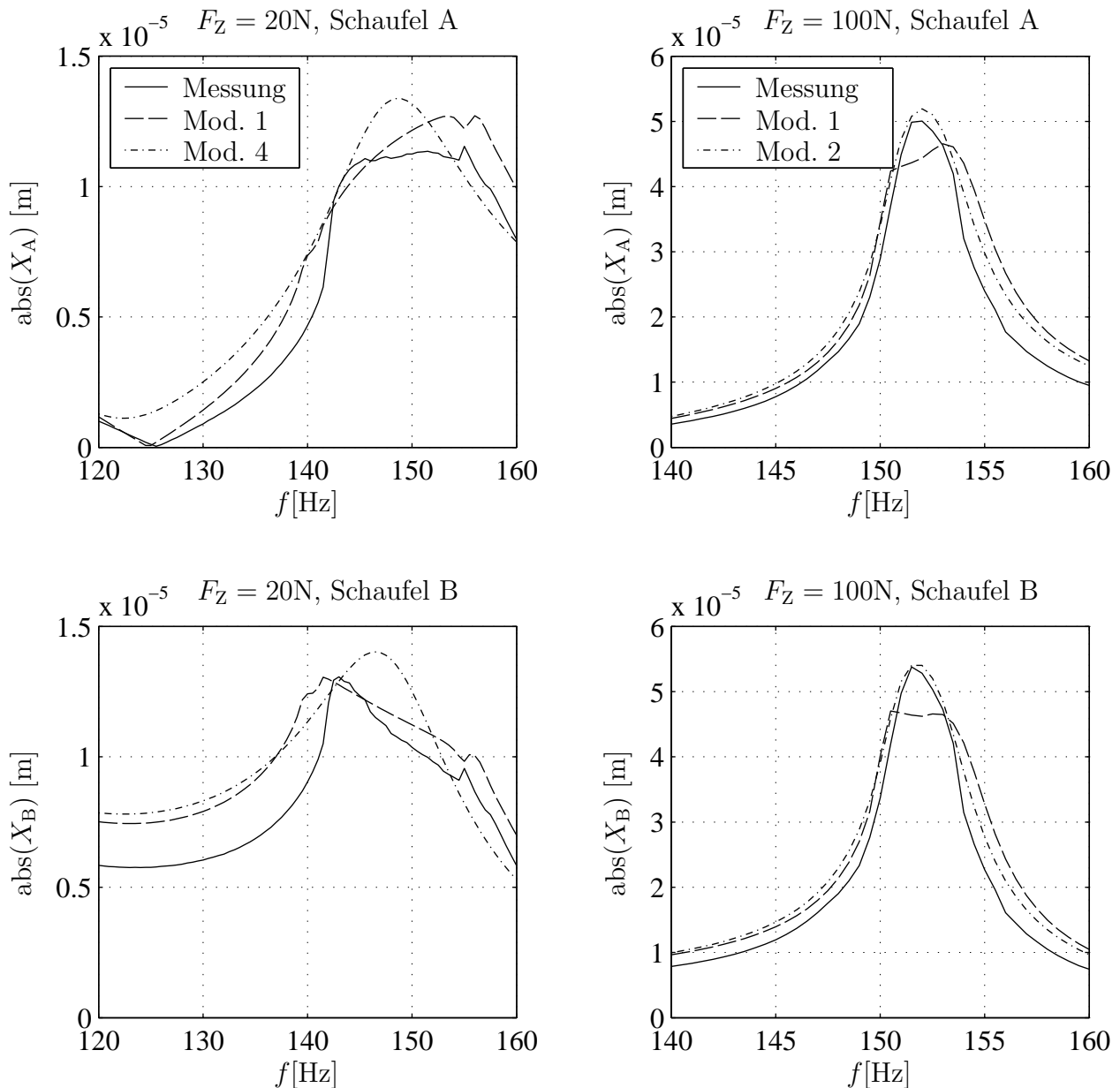
Das Modell mit parallel zum Reibmodell angeordneter linearer Feder (Modell 3) führt zu keiner nennenswerten Verringerung des Modellfehlers.



**Bild 8.13:** Verbleibender Modellfehler  $\sum e_i^2 [m^2]$  für vier verschiedene Kontaktmodelle mit den zugehörigen identifizierten Parametern.

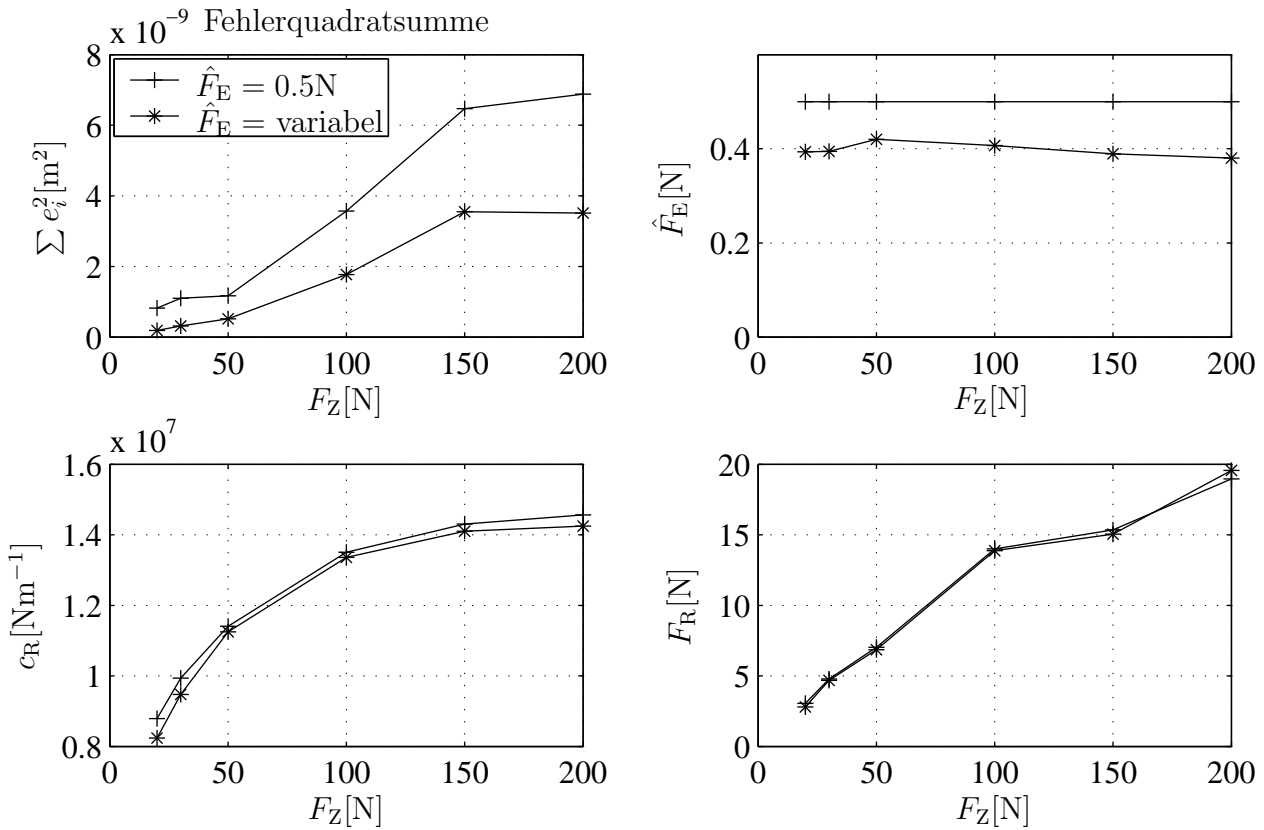
Das rein lineare Kontaktmodell (Modell 4) beschreibt die Messungen bei *großen*  $F_Z$  sehr gut, deutlich besser als das einfache Reibmodell (Modell 1). Bei großen Normalkräften, bei denen im Reibkontakt Mikroschlupfeffekte überwiegen, lässt sich der vorliegende Reibkontakt also durch ein rein lineares Kontaktmodell besser beschreiben als durch ein einfaches Reibmodell. Dieses Ergebnis steht im Einklang mit dem Ergebnis aus der HILBERT-Transformation in Kapitel 4.8, wonach das Systemverhalten bei Erhöhung von  $F_Z$  zunehmend linear wird.

Bild 8.14 stellt einen Teil der gemessenen und berechneten Frequenzgänge einander gegen-



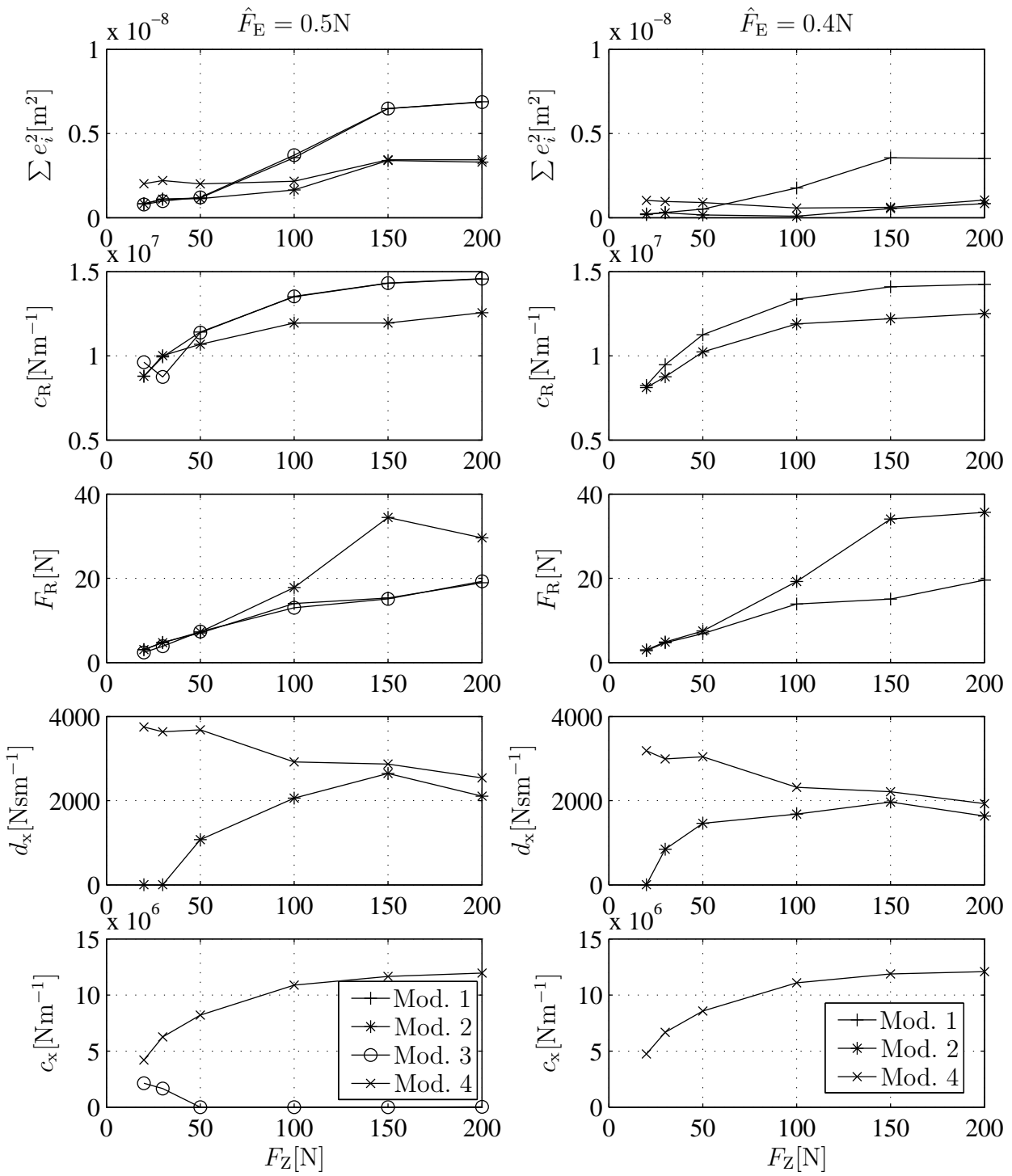
**Bild 8.14:** Gegenüberstellung gemessener und mit den identifizierten Parametern berechneter Frequenzgänge mit  $\hat{F}_E = 0.5\text{N}$ .

über. Die linken Diagramme entsprechen einer simulierten Zentrifugalkraft von  $F_Z = 20\text{N}$ , für die rechten gilt  $F_Z = 100\text{N}$ . Die oberen Diagramme zeigen die Ergebnisse für die Messung an der angeregten Schaufel A, die unteren Diagramme die der Schaufel B. Im Fall  $F_Z = 20\text{N}$  sind neben der Messung die Frequenzgänge für das dort relativ gut abschneidende Modell 1 und das deutlich schlechtere Modell 4 (rein linearer Kontakt) dargestellt. Bei der höheren Andruckkraft  $F_Z = 100\text{N}$  kann das einfache Reibmodell (Modell 1) die sehr spitze Form der gemessenen Resonanz nur schlecht abbilden, mit dem zusätzlichen Dämpferelement



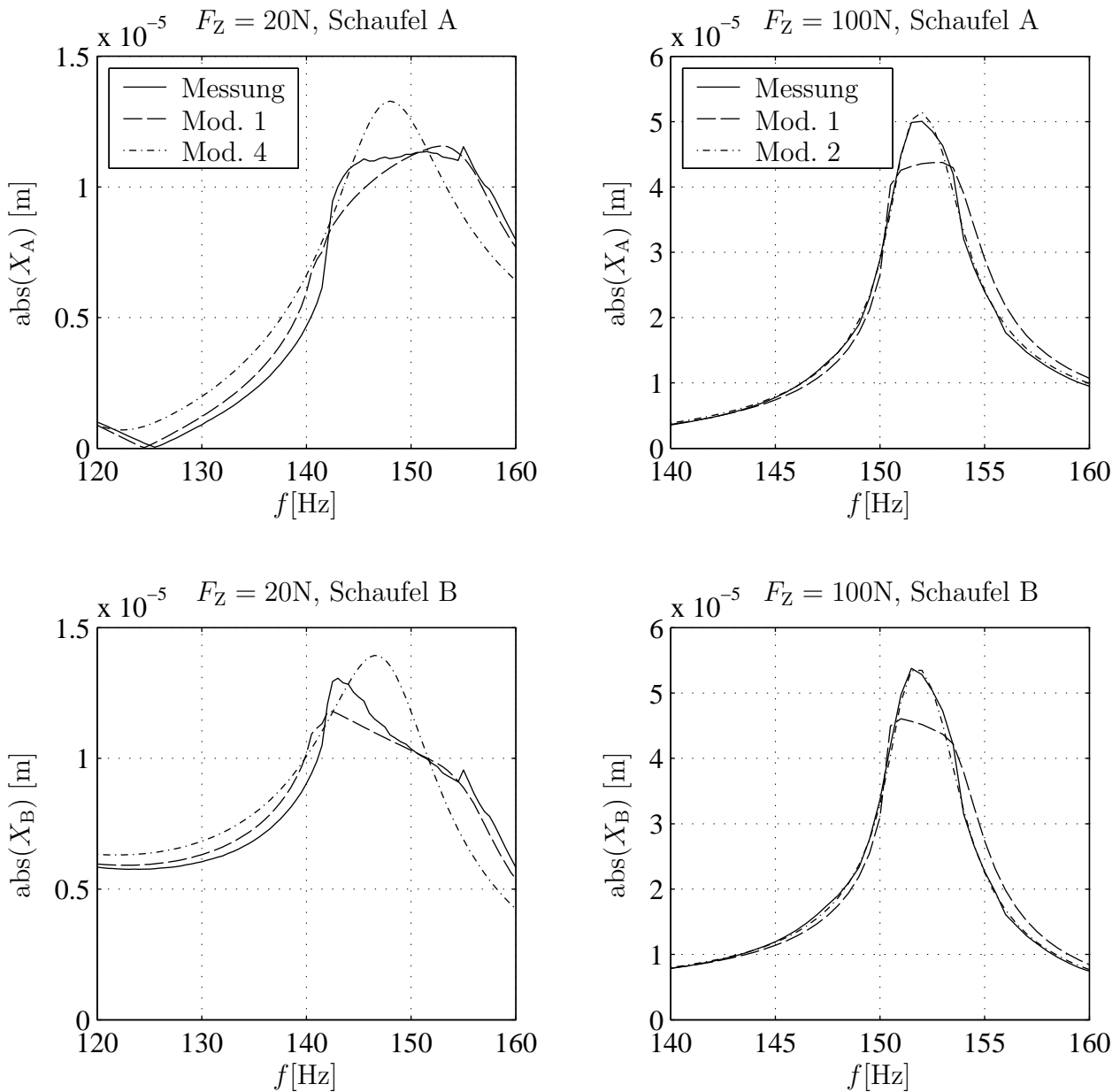
**Bild 8.15:** Identifikationsergebnisse für das einfache Reibmodell bei vorgegebener und identifizierter (variabler) Anregungsamplitude  $\hat{F}_E$ .

(Modell 2) gelingt dies deutlich besser. An den Rändern der Resonanzüberhöhung verbleibt jedoch ein auffällig großer Fehler, der durch eine zu große rechnerische Anregungsamplitude  $\hat{F}_E$  erklärt werden könnte. Ein solcher Effekt kann z. B. durch falsche Kalibrierungsdaten der Sensoren verursacht werden. Zur Untersuchung dieses Fehlers wurde das einfache Reibmodell (Modell 1) erneut identifiziert, unter Einbeziehung der Anregungsamplitude als zu identifizierendem (variablen) Parameter. Für alle Messungen ergibt sich übereinstimmend  $\hat{F}_E \approx 0.4\text{N}$ . Alle drei Parameter ( $\hat{F}_E$ ,  $c_R$ ,  $F_R$ ) sind in Bild 8.15 zusammen mit dem verbleibenden Modellfehler dargestellt und dem ursprünglichen Ergebnis mit der Annahme  $\hat{F}_E = 0.5\text{N}$  (Information aus der Messung) gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die Hinzunahme des weiteren Parameters kaum Auswirkungen auf die anderen identifizierten Parameter hat, während der Modellfehler stark reduziert wird. Aufgrund dieser Erkenntnis wurde die Identifikation mit der Annahme  $\hat{F}_E = 0.4\text{N}$  wiederholt. Das Modell 3 wurde wegen der unbefriedigenden Ergebnisse aus dem ersten Durchgang nicht betrachtet. Die Ergebnisse sind in Bild 8.16 den ursprünglichen Ergebnissen (mit  $\hat{F}_E = 0.5\text{N}$ ) gegenübergestellt. Während die identifizierten



**Bild 8.16:** Verbleibender Modellfehler  $\sum e_i^2 [m^2]$  und zugehörige identifizierte Parameter wie in Bild 8.13 (links) und bei veränderter Anregungsamplitude (rechts).

Parameter sich nur im Detail unterscheiden, sind die verbleibenden Fehler überall deutlich reduziert. Bild 8.17 zeigt die zugehörigen resultierenden Frequenzgänge (analog zu Bild 8.14). Für die Messung bei  $F_Z = 20N$  ergibt sich bereits mit dem einfachen Reibmodell (Modell 1),



**Bild 8.17:** Gegenüberstellung gemessener und mit den identifizierten Parametern berechneter Frequenzgänge mit  $\hat{F}_E = 0.4\text{N}$ .

bei  $F_Z = 100\text{N}$  nach Hinzunahme eines parallel angebrachten linearen Dämpfers (Modell 2) eine sehr gute Übereinstimmung. Das rein lineare Kontaktmodell (Modell 4) zeigt weiterhin bei  $F_Z = 20\text{N}$  eine schlechte Übereinstimmung mit der Messung.

## 8.8 Fazit

Das vorgestellte Identifikationsverfahren basiert auf dem Abgleich gemessener Frequenzgänge mit denen eines nichtlinearen physikalischen Modells. Zu ihrer effizienten Berechnung werden

Implementationen von Näherungsverfahren präsentiert, die sowohl harmonische (Harmonische Balance) als auch periodische Ansätze für den Zeitverlauf von Anregung und Antwort des Systems zulassen. Die Möglichkeit, auch periodische Ansätze verwenden zu können, unterscheidet das beschriebene Verfahren von dem in [50, 49] dargestellten. Darüber hinaus wird die Methode anhand einer komplexen, physikalisch motivierten Nichtlinearität (tangentialer Reibkontakt mit Mikroschlupf) statt einer einfacheren, polynomialen Nichtlinearität demonstriert.

Im Vergleich zur Zeitschrittintegration ergeben sich durch die Näherungsverfahren deutliche Zeitvorteile bei der Berechnung der Frequenzgänge. Weil diese im Rahmen der Identifikationsroutine vielfach zu berechnen sind, ist die beschleunigte Berechnung hier von besonderer Bedeutung. Mit der einfachsten Näherungsrechnung, der Harmonischen Balance, können vorläufige Parameter identifiziert werden, die dann als Startpunkt für eine Identifikation mit mehrgliedrigen Ansätzen dienen können.

Zur Modellierung des im numerischen und auch im experimentellen Beispiel auftretenden Reibkontakts wird ein Makroschlupf- und ein Mikroschlupfmodell gewählt. Das Mikroschlupfmodell besteht aus mehreren parallel wirkenden Makroschlupfelementen mit unterschiedlichen kritischen Verschiebungen. Bei der Identifikation der Reibkontaktparameter eines Schaufelpaars zeigt sich eine rasche Konvergenz der Identifikationsergebnisse bei Steigerung der Zahl parallel wirkender Reibelemente im Mikroschlupfmodell.

Im experimentellen Beispiel wird darüber hinaus der Einfluss der Anzahl berücksichtigter Moden untersucht. Erwartungsgemäß ergibt sich eine Zunahme der identifizierten Kontaktsteifigkeit mit der Anzahl Moden, da die elastische Wirkung fehlender Moden durch eine größere Kontaktnachgiebigkeit kompensiert wird. Auch hier zeigt sich eine rasche Konvergenz.

## 9 Zusammenfassung

Nichtlineare Effekte spielen in zahlreichen technischen Anwendungen eine bedeutende Rolle. Dabei kann es sich um erwünschte Einflüsse handeln, die gezielt ausgenutzt werden, etwa die Reduzierung von Schwingungsamplituden durch Dämpfung mittels trockener Reibung. Häufig handelt es sich aber um störende Nebenwirkungen, etwa die Gelenkreibung und die nichtlineare Starrkörpermechanik bei Robotern oder das „Quietschen“ von Fahrzeugbremsen aufgrund reibungsselbsterregter Schwingungen.

Bei der Modellierung und Identifikation, etwa zum Zweck einer Schwingungsanalyse oder Reglerauslegung, führen Nichtlinearitäten in aller Regel zu erhöhtem Aufwand. Die Auswirkung nichtlinearer Elemente auf ein Gesamtsystem ist amplitudenabhängig und die genauen Parameter des Elements sind meist nicht bekannt. Im ersten Hauptteil dieser Arbeit werden daher Methoden dargestellt, weiter- und z.T. neu entwickelt, die eine signalbasierte Bewertung der Stärke eines nichtlinearen Einflusses gestatten. Durch die Wahl einer geeigneten Anregung kann dabei die reale Lastsituation berücksichtigt werden. Auf der Basis des Auswertungsergebnisses kann über die Notwendigkeit einer nichtlinearen Modellierung entschieden und damit ein unverhältnismäßiger Aufwand vermieden werden.

Nach einer Übersicht zum Stand des Wissens bei Linearitätstests werden drei unterschiedliche Verfahren im Detail untersucht.

Zur Auswertung von Impuls- oder Ausschwingversuchen bieten sich als erste Verfahren Zeit-Frequenzanalysen wie die Kurzzeit-Fouriertransformation oder die Wavelet-Transformation sowie die Analyse mit parametrischen Ansätzen gedämpfter linearer Schwingungen an. In allen diesen Verfahren wird das Signal abschnittsweise ausgewertet und das Ziel besteht in der Detektion von Frequenzänderungen freier Schwingungen als Hinweis auf Nichtlinearitäten. Die diskrete Wavelet-Transformation, bzgl. der Auswertungsgeschwindigkeit mit der FFT vergleichbar, erweist sich zur Erkennung kleiner Frequenzänderungen als ungeeignet. Bei der Kurzzeit-Fouriertransformation hingegen lassen sich durch das Anhängen von Nullen an jeden Analyseabschnitt auch kleinste Frequenzänderungen auflösen. Durch die Signalanalyse mit parametrischen Ansätzen lassen sich sowohl sehr kleine Frequenzänderungen als auch Änderungen des Dämpfungsmaßes erkennen. So erhält man eine zusätzliche Information, allerdings nicht die gute Gesamtübersicht in der Zeit-Frequenz-Ebene. Optimal ist daher eine Kombination der Kurzzeit-Fouriertransformation und der Analyse mit parametrischen



---

Ansätzen.

Ein zweiter, für gemessene Frequenzgänge geeigneter Linearitätstest, kann mit der HILBERT-Transformation durchgeführt werden. Bei linearen Systemen sind der Frequenzgang und seine HILBERT-Transformierte identisch, so dass Abweichungen auf Nichtlinearitäten hinweisen.

Hauptfehlerquelle bei der praktischen Durchführung ist der nur an einer endlichen Zahl diskreter Frequenzen bekannte Frequenzgang. Da die Transformation einen kontinuierlichen Frequenzgang im Bereich von 0 bis  $\infty$  voraussetzt, erfordert dies die Interpolation zwischen und die Extrapolation außerhalb der bekannten Stützstellen. Im Unterschied zu Vorgängerarbeiten können bei der im Rahmen dieser Arbeit entstandenen Implementation gedämpfte lineare Frequenzgänge beliebiger Ordnung für die Extrapolation verwendet werden, so dass der außerhalb des gemessenen Frequenzbereichs entstehende Fehler verringert wird. Außerdem wird bei der Berechnung des Faltungsintegrals zwischen den Stützstellen erstmals eine Interpolation des Frequenzgangs berücksichtigt, welches den innerhalb des gemessenen Frequenzbereichs entstehenden Fehler reduziert. In Vorgängerarbeiten wird stattdessen der gesamte Integrand linear interpoliert, obwohl dieser, bis auf den darin enthaltenen Frequenzgang, lückenlos bekannt ist.

Schließlich wird eine FFT-basierte, effizientere Implementation des Faltungsintegrals verallgemeinert, so dass eine direkte Anwendung auf Frequenzgänge möglich wird, die nicht bei  $f = 0\text{Hz}$  beginnen. Daneben kann die exakte Übereinstimmung des Ergebnisses mit dem der direkten Implementation des Faltungsintegrals auf einfachem Wege gezeigt werden.

Die Abweichungen zwischen Frequenzgang und HILBERT-Transformierter zeigen für verschiedene Nichtlinearitäten jeweils unterschiedliche, charakteristische Formen. Durch den Vergleich von Ergebnissen aus experimentellen Beispielen mit solchen aus numerischen Rechnungen lassen sich Rückschlüsse auf den Typ der vorliegenden Nichtlinearität ziehen. Dies kann an mehreren experimentellen Beispielen mit Reibkontakten gezeigt werden.

Als dritter Linearitätstest wird die neu entwickelte „Methode des nichtlinearen Vorhersagefehlers“ präsentiert. Die Besonderheit dieses Tests besteht in der Eigenschaft, nicht nur lineares und nichtlineares Verhalten unterscheiden zu können, sondern außerdem ein Maß für die Komplexität des Systems zu liefern. Für lineare Systeme ist dieser Wert gleich der Zahl von Systemzuständen (Zahl diskreter Energiespeicher), für nichtlineare Systeme (vorausgesetzt, dass alle Zustände angeregt wurden und im Ausgangssignal beobachtbar sind)

eine obere Grenze dafür. Der Test erfordert ein spezielles Anregungssignal aus künstlichem Rauschen, das von Nullsequenzen unterbrochen wird.

Anhand numerischer Beispiele kann erfolgreich gezeigt werden, dass der Test sowohl die Linearitätsaussage liefert als auch die Schätzung der Zahl von Systemzuständen ermöglicht. Für komplexere Systeme mit einer hohen Anzahl an relevanten Systemzuständen sind allerdings die erforderlichen Datenmengen sehr groß. Dies ist eine direkte Folge des nahezu modellfreien Ansatzes der Methode und wird auch als „Curse of Dimension“ bezeichnet.

Muss die Linearitätshypothese eines Systems aufgrund eines der oben beschriebenen Tests verworfen werden, so ist die Identifikation eines nichtlinearen Systemmodells der konsequente nächste Schritt und deshalb Thema des zweiten Teils dieser Arbeit. Die Betrachtungen beschränken sich dabei auf Methoden zur Identifikation nichtlinearer mechanischer Strukturen auf der Basis gemessener Frequenzgänge.

Die in der Literatur zu diesem Thema beschriebenen Methoden erfordern teilweise einen hohen experimentellen Aufwand, sowohl gerätetechnisch als auch zeitlich. Die Identifikation auf Basis des „Nonlinear Normal Mode“ Konzepts erfordert nur einen Anregungspunkt sowie eine Anregungsamplitude. Es setzt die Kenntnis des zugrunde liegenden linearen Systems voraus und liefert eine nichtlineare modale Beschreibung. Ein Vorteil der Methode besteht in der universellen Anwendbarkeit und der an einem numerischen Beispiel geprüften genauen Wiedergabe vorgegebener Frequenzgänge. Nachteilig ist zum einen der fehlende Rückschluss auf physikalisch deutbare Parameter. Zum anderen lässt sich die Systemantwort i. Allg. nicht direkt auf veränderte Anregungsamplituden übertragen, weil eine dann zu berücksichtigende Frequenzabhängigkeit der Parameter im Konzept der Methode nicht vorgesehen ist.

Als in Kombination mit einem physikalischen Modell verwendbare Alternative wird ein Verfahren entwickelt, das auf der Frequenzgangberechnung für nichtlinear gekoppelte lineare Strukturen aufbaut. Dieses Verfahren bedient sich des Näherungsverfahrens der Harmonischen Balance und wird z. B. bei der Auslegung von Reibelementen für Turbinenschaufeln genutzt. Um die Berechnung, besonders bei Modellen mit vielen elastischen Moden, zu beschleunigen, wird ein Berechnungsalgorithmus implementiert, der den stationären Schwingungszustand des Systems über die (Relativ-)Koordinaten der nichtlinearen Kopplungselemente anstelle der elastischen Moden ermittelt. Auf diese Weise kann die Anzahl der nichtlinearen Gleichungen, die numerisch zu lösen sind, teilweise drastisch reduziert werden. Im

Fall des untersuchten Paares von Turbinenschaufeln z. B. nur zwei Gleichungen für eine Koppelkoordinate statt 40 Gleichungen für 20 elastische Moden.

Darüber hinaus wird die näherungsweise Berechnung des Schwingungszustands durch die Hinzunahme von höheren Harmonischen verbessert. Deren Anzahl ist nicht begrenzt und so lässt sich die Genauigkeit des Ergebnisses (sofern die Lösung periodisch ist) beliebig steigern. Für den Reibkontakt mit Mikroschlupf kann die Abweichung der Näherungslösung von dem Ergebnis einer Zeitschrittintegration dadurch von 24% auf 3% reduziert werden.

Durch Minimierung der Abweichungen zwischen gemessenem und berechnetem Frequenzgang werden die unbekannt Systemparameter bestimmt. Für das experimentelle Beispiel der durch ein Reibelement gekoppelten Turbinenschaufeln wird so eine normalkraftabhängige Tangentialsteifigkeit und Reibkraft ermittelt. Die identifizierten Parameter hängen weiterhin im Wesentlichen von der Anzahl modellierter elastischer Moden sowie von der Art des Reibkontakts ab (Makro-/Mikroschlupfmodell). Für große Normalkräfte kann die Übereinstimmung von Modell und Messung durch einen parallel zum Reibelement modellierten linearen Dämpfer wesentlich verbessert werden.

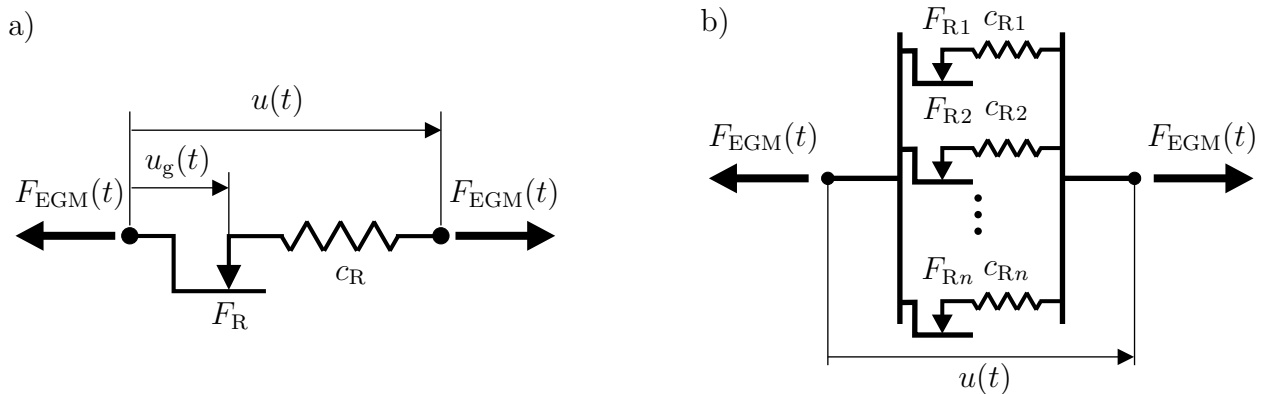
Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Modellierung nichtlinearer mechanischer Systeme, indem sie den Weg von der signalgestützten Detektion nichtlinearer Effekte bis hin zu ihrer Identifikation beleuchtet. Dabei werden sowohl bestehende Verfahren weiterentwickelt als auch neue Methoden vorgestellt. Durch die Veranschaulichung anhand numerischer und experimenteller Beispiele wird dem Leser die Anwendung und der Nutzen der vorgestellten Methoden vermittelt.

## A Anhang: Reibkontaktmodelle

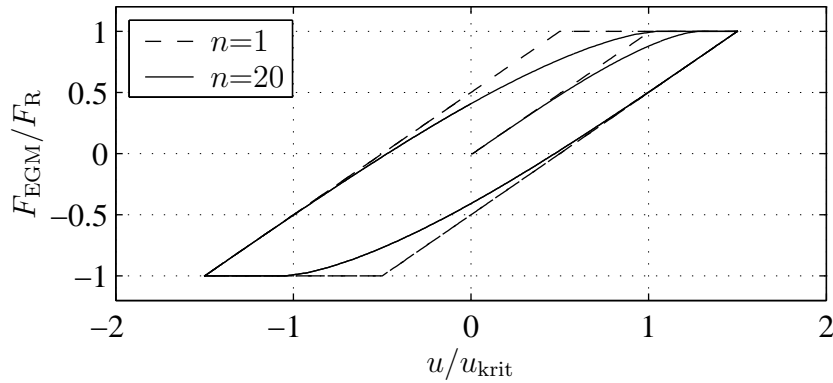
Ein sehr einfaches Modell für einen tangentialen Reibkontakt ist das Elasto-Gleit-Modell, Bild A.1a, eine Reihenschaltung eines Coulomb-Elements mit der Gleit- und Hafttreibkraft  $F_R$  und eines Federelements mit der (Kontakt-)Steifigkeit  $c_R$ . Für  $u_g = 0$  überträgt das Modell bis zum Erreichen der kritischen Verschiebung  $u_{\text{krit}} = F_R/c_R$  die Kraft  $F_{\text{EGM}} = c_R u$ . In der folgenden Gleitphase gilt  $F_{\text{EGM}} = F_R \text{sgn}(\dot{u})$ . Beendet wird eine Gleitphase durch eine Richtungsumkehr der Bewegung  $u(t)$ , also durch ein Extremum von  $u(t)$ . Spätestens zu Beginn der folgenden Haftphase muss die Verschiebung des Coulomb-Elements im Rechenmodell entsprechend  $u_g = u - F_{\text{EGM}}/c_R$  aktualisiert werden.

In technischen Reibkontakten findet der Übergang vom Haften zum Gleiten beim tangentialen Verschieben der Kontaktflächen in der Regel nicht sprunghaft (*Makroschlupf*), sondern stetig (*Mikroschlupf*) statt. Bewirkt werden kann dieser Effekt z. B. durch eine variable Normalspannung in der Kontaktfläche aufgrund der Makrogeometrie bzw. Oberflächenrauheiten oder auch durch eine variable Tangentialspannung, insbesondere bei ausgedehnten Reibflächen.

Mikroschlupf kann durch eine Parallelschaltung  $n$  einfacher Elasto-Gleit-Modelle (EGM) mit unterschiedlichen kritischen Verschiebungen  $u_{\text{krit}}$  abgebildet werden, siehe Bild A.1b. Wirken die parallelen Modelle zwischen denselben zwei Kontaktpunkten, so werden sie über dasselbe Eingangssignal  $u(t)$  gespeist und ihre Kraftwirkungen können an den Kontaktpunkten additiv überlagert werden.



**Bild A.1:** a) Makroschlupfmodell: Elasto-Gleit-Modell (EGM); b) Mikroschlupfmodell: Parallelschaltung aus  $n$  Elasto-Gleit-Modellen.



**Bild A.2:** Kraft-Verschiebungs-Diagramm  $F_{\text{EGM}}(u)$  eines Makroschlupf- ( $n = 1$ ) und eines Mikroschlupf-Reibelements ( $n = 20$ ). Die Belastung startet bei  $u = 0$ ,  $F_{\text{EGM}} = 0$  und bewegt sich dann jeweils auf einer Hysterese-Schleife.

Im Kontakt zweier Zylinder mit parallelen Achsen stellt sich nach der HERTZschen Theorie eine elliptische Verteilung der Normalspannung ein [75]. Bei Annahme einer konstanten Verteilung der Tangentialsteifigkeit in der Kontaktfläche ergibt sich daraus ein Mikroschlupf-Verhalten, das in Bild A.2 mit  $n = 20$  parallelen Reibsträngen angenähert wird. Gezeigt ist der Verlauf der normierten Kraft  $F_{\text{EGM}}(t)/F_{\text{R}}$  über der normierten Verschiebung  $u(t)/u_{\text{krit}}$  bei harmonischer Verschiebung  $u(t)$ . Zur Berechnung von  $u_{\text{krit}} = F_{\text{R}}/c_{\text{R}}$  seien dabei die „globale“ Federsteifigkeit  $c_{\text{R}}^* = \sum_i c_{\text{R}i}$  bei vollständigem Haften und die „globale“ Reibkraft  $F_{\text{R}}^* = \sum_i F_{\text{R}i}$  bei vollständigem Gleiten zugrunde gelegt. Bild A.2 zeigt im Vergleich auch das Verhalten des korrespondierenden Makroschlupf-Modells mit  $n = 1$ .

Durch eine gleichmäßige Verteilung der kritischen Verschiebungen

$$u_{\text{krit},i} = \frac{i}{n} u_{\text{krit,max}} \quad (\text{A.1})$$

anstelle, z. B. identischer Steifigkeiten  $c_{\text{R}i} = \frac{c_{\text{R}}}{n}$ , wird eine niedrigere Ansprechschwelle  $u_{\text{krit},1}$  des Mikroschlupf-Modells erzielt.

Für den Fall des Kontakts zweier Kugeln geben CATTANEO [16] und MINDLIN [51, 52] analytische Ausdrücke für das Kraft-Verschiebungs-Verhalten an, ohne auf eine diskretisierte Darstellung zurückgreifen zu müssen. Bei der Zeitschrittintegration erfordert dieses Modell wegen der zu berücksichtigenden Verschiebungs-Geschichte einen hohen numerischen Aufwand [6]. Für die harmonische Näherung des Kraftverlaufs bei harmonischer Verschiebung (wird bei der Harmonischen Balance benötigt) existieren aber analytische Ausdrücke [6].

## B Anhang: Herleitungen zum nichtl. Vorhersagefehler

### B.1 Lineare LS-Schätzung

Ausgehend von dem linearen Gleichungssystem

$$\mathbf{y}_{[m \times 1]} = \mathbf{A}_{[m \times n]} \mathbf{p}_{[n \times 1]} \quad (\text{B.2})$$

mit Messvektor  $\mathbf{y}$ , Informationsmatrix  $\mathbf{A}$  und Parametervektor  $\mathbf{p}$  können die Fälle mit gestörtem Messvektor

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{p} + \mathbf{y}_e \quad (\text{B.3})$$

und zusätzlich gestörter Informationsmatrix

$$\mathbf{y} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}_e) \mathbf{p} + \mathbf{y}_e \quad (\text{B.4})$$

unterschieden werden.

**Im Fall (B.3)** ergibt sich durch Minimierung der Quadratsumme

$$e = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}})^T (\mathbf{y} - \mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}) \quad (\text{B.5})$$

(**L**east **S**quares) die Schätzung

$$\tilde{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y}. \quad (\text{B.6})$$

**Im Fall (B.4)** wird die Quadratsumme der Abstände der durch die Zeilen der Matrix  $[\mathbf{A}, \mathbf{y}]$  definierten Punkte zu der durch  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{p}}$  definierten (Hyper-)Ebene (**T**otal **L**east **S**quares) minimiert. Die TLS-Lösung ergibt sich mit der Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T = [\mathbf{A}, \mathbf{y}], \quad \mathbf{\Sigma} = \text{Diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+1}) \quad (\text{B.7})$$

der erweiterten Informationsmatrix  $[\mathbf{A}, \mathbf{y}]$  über den zum kleinsten Singulärwert  $\sigma_{\min}$  gehörenden rechten Singulärvektor  $\mathbf{v}_{\min}$ . Die Lösung existiert, wenn  $\sigma_{\min} > 0$  gilt, und ist eindeutig, wenn kein weiterer gleich großer Singulärwert existiert.

Mit

$$\mathbf{v}_{\min} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\min, n} \\ v_{\min, n+1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

lautet die TLS-Lösung ([33], S.596)

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{v}_{\min, n}}{v_{\min, n+1}}. \quad (\text{B.9})$$

## B.2 Erwartungswert für gewichtete Fehlerquadratsumme

Aus

$$\mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}\} = \mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{q}\} \quad (\text{B.10})$$

folgt wegen

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_i x_i y_i = \text{tr}(\mathbf{x} \mathbf{y}^T) \quad (\text{B.11})$$

der Zusammenhang

$$\mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}\} = \mathbb{E}\{\text{tr}(\mathbf{e} \mathbf{q}^T)\} = \text{tr}(\mathbb{E}\{\mathbf{e} \mathbf{e}^T \mathbf{Q}^T\}) \quad (\text{B.12})$$

$$= \text{tr}(\mathbf{P}_e \mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{P}_e^T) \quad (\text{B.13})$$

$$= \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{P}_e) \quad (\text{B.14})$$

und wegen  $\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_e^T$

$$\mathbb{E}\{\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}\} = \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{P}_e). \quad (\text{B.15})$$

## Literatur

- [1] ALLGÖWER, F.: Nichtlinearitätsmaße - Ein Werkzeug zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelkreise. In: ENGELL, S. (Hrsg.): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. München : R. Oldenbourg Verlag, 1995, S. 309–331.
- [2] ALLGÖWER, F.: *Näherungsweise Ein-/Ausgangs-Linearisierung nichtlinearer Systeme*. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1996.
- [3] ALLGÖWER, F. ; MENOLD, P.H. ; PEARSON, R.K.: Nonlinear Structure Identification of Chemical Processes. In: *Computers chem. Engng.* 21, Suppl. (1997), S. 137–142.
- [4] ATKINS, P.A. ; WRIGHT, J.R. ; WORDEN, K.: An Extension of Force Appropriation to the Identification of Non-Linear Multi-Degree of Freedom Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 237 (2000), Nr. 1, S. 23–43.
- [5] BALACHANDRAN, B.: Spectral Analyses of Non-Linear Interactions. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 10 (1996), Nr. 6, S. 711–727.
- [6] BALMER, B.: *Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente*. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1993.
- [7] BARNETT, W. A. ; GALLANT, A. R. ; HINICH, M. J. ; JUNGEILGES, J. A. ; KAPLAN, D. T. ; JENSEN, M. J.: Robustness of nonlinearity and chaos tests to measurement error, inference method, and sample size. In: *Journal of economic behavior and organization* 27 (1995), Nr. 2, S. 301–320.
- [8] BENDAT, J. S. ; PIERSOL, A. G.: *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. New York : John Wiley & Sons, 1980.
- [9] BENDAT, J.S.: *The Hilbert Transform and Applications to Correlation Measurements*. Naerum, Denmark : Brüel & Kjaer, 1984.
- [10] BILLINGS, S.A. ; VOON, W.S.F.: Structure detection and model validity tests in the identification of nonlinear systems. In: *IEE Proceedings, Vol.130, Part D, 4*, 1983, S. 193–199.
- [11] BLOHM, P. W.: Numerische Verfahren zur Durchführung der Hilbert-Transformation. In: *ZAMM Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 71 (1991), Nr. 4, S. 170–172.
- [12] BLOHM, P. W.: *Untersuchung des nichtlinearen Übertragungsverhaltens von Strukturen mit lokalen Fügestellen*. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1991.
- [13] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Stuttgart : Teubner, 1991.



- 
- [14] BROYDEN, C.G.: The Convergence of a Class of Double-rank Minimization Algorithms. In: *J. Inst. Maths. Applics.* 6 (1970), S. 76–90.
- [15] BURGESS, A. N.: Non-linear model identification and statistical significance tests and their application to financial modelling. In: *Institution of Electrical Engineers: IEE conference publication No. 409*, 1995.
- [16] CATTANEO, C.: Sul Contatto di Due Corpi Elastici: Distribuzione Locale degli Sforzi. In: *Rend. Accad. Naz. Lincei* 27 (1938), Nr. 6, S. 342–348, 434–436, 474–478.
- [17] CHONG, Y.H. ; IMREGUN, M.: Variable Modal Parameter Identification for Nonlinear MDOF Systems - Part I: Formulation and numerical validation. In: *Journal of Shock and Vibration* 7 (2000), Nr. 4, S. 217–227.
- [18] CHONG, Y.H. ; IMREGUN, M.: Development and Application of a Nonlinear Modal Analysis Technique for MDOF Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 7 (2001), S. 167–179.
- [19] COLLIS, W.B. ; WHITE, P.R. ; HAMMOND, J.K.: Higher-Order Spectra: The Bispectrum and Trispectrum. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (1998), Nr. 3, S. 375–394.
- [20] COPPOLINO, R. N.: Evaluation of Structural Integrity Using Integrated Testing and Analysis / The MacNeal-Schwendler Corporation. 0. – Forschungsbericht.
- [21] DIMENTBERG, M. F. ; HAENISCH, H. G.: Method of Internal Harmonics Cross-Correlation for On-Line Detection of Structural Nonlinearities. In: *Proceedings of the 12th Engineering Mechanics Conference*, 1998, S. 1529–1532.
- [22] DIMENTBERG, M. F. ; SOKOLOV, A. A.: Identification of restoring force non-linearity from a system's response to a white-noise excitation. In: *International Journal of Non-Linear Mechanics* 26 (1991), Nr. 6, S. 851–855.
- [23] DIMENTBERG, M.F. ; MENYAILOV, A.I. ; SOKOLOV, A.A. ; HAYRETDINOV, V.H. ; USANOV, A.I.: Flow-induced vibrations and noises as useful signals for on-line internal state monitoring and estimating safety of PWR components. In: *Structural safety & reliability : proceedings of ICOSSAR '93, the International Conference on Structural Safety and Reliability*. Innsbruck, Austria, 1994, S. 777–781.
- [24] DÖLKER, Armin: Beurteilung der Nichtlinearität von Übertragungssystemen mittels der Hilbert-Transformation / Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik, Universität Stuttgart. 1991. – Diplomarbeit: Beurteilung der Nichtlinearität von Übertragungssystemen mittels der Hilbert-Transformation.

- [25] DOBSON, B.J.: A Straight-Line Technique For Extracting Modal Properties From Frequency Response Data. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 1 (1987), Nr. 1, S. 29–40.
- [26] EWINS, D. J. ; SIDHU, J.: Modal Testing and the Linearity of Structures. In: *Mécanique Matériaux Électricité* 389-390-391 (1982), S. 297–302.
- [27] EWINS, D.J.: *Modal testing: Theory & Practice*. Taunton : Research Studies Press Ltd., 1984.
- [28] FLETCHER, R.: A New Approach to Variable Metric Algorithms. In: *Computer Journal* 13 (1970), S. 317–322.
- [29] FÖLLINGER, O.: *Regelungsrechnik*. Heidelberg : Hüthig Buch Verlag GmbH, 1990.
- [30] FRASER, A. M.: Reconstructing attractors from scalar time series; a comparison of singular system and redundancy criteria. In: *Physica D* 34 (1989), S. 391–404.
- [31] FRASER, A. M. ; SWINNEY, H. L.: Independent coordinates for strange attractors from mutual information. In: *Physical Review A* 33 (1986), Nr. 2, S. 1134–1140.
- [32] GOLDFARB, D.: A Family of Variable Metric Updates Derived by Variational Means. In: *Mathematics of Computing* 24 (1970), S. 23–26.
- [33] GOLUB, G.H. ; LOAN, Ch. F.: *Matrix Computations*. Baltimore : The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [34] GOSWAMI, J.C. ; CHAN, A.K.: *Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms and Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1999.
- [35] GYGAX, P. E.: Experimentelle Testprozeduren: Übersicht über Probleme und Verfahren bei Frequenzgangmessungen. In: *Symposium Nichtlineare Strukturdynamik*. ETH Zürich, 1986.
- [36] HABER, R.: Nonlinearity tests for dynamic processes. In: *IFAC Symp. on Identification and System Parameter Estimation*. York, UK, 1985, S. 409–414.
- [37] HELBIG, A ; MARQUARDT, W. ; ALLGÖWER, F.: Nonlinearity measures: Definition, computation and applications. In: *Journal of Process Control* 10 (2000), Nr. 2-3, S. 113–123.
- [38] HINICH, M.: Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series. In: *J. Time Ser. Anal.* 3 (1982), S. 169–176.
- [39] ISERMANN, R.: *Digitale Regelsysteme Bd.1*. Berlin : Springer-Verlag, 1988.

- [40] KANTZ, H. ; SCHREIBER, T.: *Nonlinear time series analysis*. Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
- [41] KEENAN, D. M.: A Tukey nonadditivity-type test for time series nonlinearity. In: *Biometrika* 72 (1985), Nr. 1, S. 39–44.
- [42] KIDDER, R.L.: Reduction of structural frequency equations. In: *AIAA Journal* 11 (1973), S. 892.
- [43] LEVENBERG, K.: A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares. In: *Quart. Appl. Math.* 2 (1944), S. 164–168.
- [44] LIMA, P. J. F. d.: On the robustness of nonlinearity tests to moment condition failure. In: *Journal of econometrics* 76 (1997), Nr. 1-2, S. 251–280.
- [45] LIN, R.M. ; EWINS, D.J.: Location of Localised Stiffness Non-Linearity using Measured Modal Data. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 9 (1995), Nr. 3, S. 329–339.
- [46] MAIA, N.M.M. ; SILVA, J.M.M. ; HE, J. ; LIEVEN, N.A.J. ; LIN, R.M. ; SKINGLE, G.W. ; TO, W.-M. ; URGUEIRA, A.P.V.: *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Taunton : Research Studies Press Ltd., 1997.
- [47] MALLAT, S.: A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. In: *IEEE Pattern Anal. and Machine Intell.* 11 (1989), Nr. 7, S. 674–693.
- [48] MARQUARDT, D.: An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. In: *SIAM J. Appl. Math.* 11 (1963), S. 431–441.
- [49] MEYER, S ; LINK, M.: Modelling and Updating of Local Non-Linearities Using Frequency Response Residuals. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 17 (2003), Nr. 1, S. 219–226.
- [50] MEYER, S. ; WEILAND, M. ; LINK, M.: Modelling and updating of local non-linearities using frequency response residuals. In: *Proceedings of the International Conference on Structural System Identification*. University of Kassel, 2001, S. 151–160.
- [51] MINDLIN, R.D.: Compliance of Elastic Bodies in Contact. In: *Trans. ASME, J. Appl. Mech.* 16 (1949), S. 259–268.
- [52] MINDLIN, R.D. ; MASON, W.P. ; OSMER, J.F. ; DERESIEWICZ, H.: Effects of an Oscillating Tangential Force on the Contact Surfaces of Elastic Spheres. In: *ASME First US National Congress of Appl. Mechanics*. Chicago, 1951, S. 203–208.
- [53] NELDER, J. A. ; MEAD, R.: A Simplex Method for Function Minimization. In: *Computer Journal* 7 (1965), S. 308–313.

- [54] NEWLAND, D. E.: *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Harlow : Longman Scientific & Technical, 1993.
- [55] NOCEDAL, J. ; WRIGHT, S.J.: *Numerical Optimization*. New York : Springer-Verlag, 1999.
- [56] OPPENHEIM, A. V.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. München : Oldenbourg, 1995.
- [57] PALUS, M.: Testing for nonlinearity using redundancies: quantitative and qualitative aspects. In: *Physica D* 80 (1995), Nr. 1/2, S. 186–205.
- [58] PALUS, M.: Detecting nonlinearity in multivariate time series. In: *Physics letters A* 213 (1996), Nr. 1, S. 138.
- [59] PALUS, M. ; ALBRECHT, V. ; DVORAK, I.: Information theoretic test for nonlinearity in time series. In: *Physics letters A* 175 (1993), Nr. 3-4, S. 203.
- [60] PALUS, M. ; NOVOTNA, D.: Testing for nonlinearity in weather records. In: *Physics letters A* 193 (1994), Nr. 1, S. 67.
- [61] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: Optimization of Interblade Friction Damper Design. In: *Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress and Exh., München, ASME paper GT-2000-541*, 2000.
- [62] PANNING, L. ; SEXTRO, W. ; POPP, K.: Spatial Dynamics of Tuned and Mistuned Bladed Disk Assemblies with Cylindrical and Wedge Shaped Friction Dampers. In: *Proc. of ISROMAC-9, The 9th International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, Hawaii, 2002.
- [63] PEYTON JONES, J. C. ; BILLINGS, S. A.: Testing for nonlinearity using a prediction error filter / Department of Control Engineering, University of Sheffield. 1988 ( 332). – Research Report.
- [64] POPP, K. ; BRUNS, J.-U.: Entwurf und Verifikation von Methoden zur Identifikation nichtlinearer Koppelemente / Institut für Mechanik, Universität Hannover. 2002. – 1. Zwischenbericht zum BMBF-Verbundprojekt: Experimentelle Analyse nichtlinearer gekoppelter Systeme.
- [65] POPP, K. ; SCHMIDT-FELLNER, A. ; BRUNS, J.-U.: Entwurf und Verifikation von Methoden zur Identifikation nichtlinearer Koppelemente / Institut für Mechanik, Universität Hannover. 2003. – 2. Zwischenbericht zum BMBF-Verbundprojekt: Experimentelle Analyse nichtlinearer gekoppelter Systeme.
- [66] RANDALL, R. B.: Hilbert transform techniques in machine diagnostics. In: *The International Conference on Rotordynamics*. Tokyo, 1986.

- [67] REN, Y. ; BEARDS, C. F.: A New Receptance-Based Perturbative Multi-Harmonic Balance Method for the Calculation of the Steady State Response of Non-Linear Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 172 (1994), Nr. 5, S. 593–604.
- [68] REUTER, H.: Verfahren zur Untersuchung der Nichtlinearität dynamischer Systeme / Meß-, Steuer- und Regelungstechnik, Universität - GH - Duisburg. 1992. – Forschungsbericht Nr. 03/92.
- [69] RIGNEY, D.R. ; GOLDBERGER, A.L. ; OCASIO, W. ; ICHIMARU, Y. ; MOODY, G.B. ; MARK, R.: Multi-channel physiological data: Description and Analysis. In: WEIGEND, A.S. (Hrsg.) ; GERSHENFELD, N.A. (Hrsg.): *Time Series Prediction: Forecasting the future and understanding the past*. Reading : Addison-Wesley, 1993.
- [70] SABOTKE, J.: *Erkennen und erfassen von Nichtlinearitäten im dynamischen Verhalten von Werkzeugmaschinen*. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1987.
- [71] SCHREIBER, T. ; SCHMITZ, A.: Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests. In: *Physical review letters* 77 (1996), Nr. 4, S. 635.
- [72] SCHREIBER, T. ; SCHMITZ, A.: Discrimination power of measures for nonlinearity in a time series. In: *Physical Review Letters E* 55 (1997), Nr. 5, S. 5443–5447.
- [73] SCHREIBER, T. ; SCHMITZ, A.: Constrained Randomisation of Time Series for Nonlinearity Tests. In: MEES, A. (Hrsg.): *Nonlinear Dynamics and Statistics*. Boston : Birkhäuser, 2000.
- [74] SETIO, S. ; SETIO, H.D. ; JEZEQUEL, L.: A Method of Nonlinear Modal Identification from Frequency Response Tests. In: *Journal of Sound and Vibration* 158 (1992), Nr. 3, S. 497–515.
- [75] SEXTRO, W.: *Schwingungsverhalten von Schaufelkränzen mit Reibelementen bei Frequenzverstimmung*. Düsseldorf : VDI Verlag GmbH, 1997.
- [76] SEXTRO, W. ; POPP, K. ; WOLTER, I.: Improved Reliability of Bladed Disks Due to Friction Dampers. ASME paper 97-GT-189. In: *Int. Gas Turbine & Aeroeng. Congress and Exh.* München, 2000.
- [77] SHANNO, D.F.: Conditioning of Quasi-Newton Methods for Function Minimization. In: *Mathematics of Computing* 24 (1970), S. 647–656.
- [78] SIMON, M.: *Developments in the modal analysis of linear and non-linear structures*. University of Manchester, Ph.D. Thesis, 1983.
- [79] SIMON, M. ; TOMLINSON, G. R.: Use of the Hilbert transform in modal analysis of linear and non-linear structures. In: *Journal of Sound and Vibration* 96 (1984), Nr. 4, S. 421–436.

- [80] SONG, H.W. ; WANG, W.L.: Non-Linear System Identification using Frequency Domain Measurement Data. In: *Proceedings of the International Modal Analysis Conference - IMAC, VI*. Santa Barbara, CA, USA, 1998, S. 746–752.
- [81] SUBBA RAO, T. ; GABR, M. M.: A test for linearity of stationary time series. In: *J. Time Ser. Anal.* 1 (1980), S. 145–158.
- [82] SWAMI, A. ; MENDEL, J.M. ; NIKIAS, C.L.: *Higher-Order Spectral Analysis Toolbox For Use with Matlab*. Natick, MA : The MathWorks, Inc., 1998.
- [83] SZEMPLINSKA-STUPNICKA, W.: The Modified Single Mode Method in the Investigations of the Resonant Vibration of Nonlinear Systems. In: *Journal of Sound and Vibration* 104 (1979), Nr. 2, S. 475–489.
- [84] TAKENS, F.: *Detecting strange attractors in turbulence*. New York : Lecture Notes in Math. Vol. 898, Springer, 1980.
- [85] TERÄSVIRTA, T.: Testing Linearity and Modelling Nonlinear Time Series. In: *Kybernetika* 30 (1994), Nr. 3, S. 319–330.
- [86] THEILER, J. ; EUBANK, S. ; LONGTIN, A. ; GALDRIKIAN, B. ; FARMER, J. D.: Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data. In: *Physica D* 58 (1992), S. 77–94.
- [87] TÖNSHOFF, H.-K. ; AHLBORN, D.: Nichtlinearitäten im Schwingungsverhalten von Werkzeugmaschinen. In: TÖNSHOFF, H.-K. (Hrsg.): *Geräusch- und Schwingungsvorgänge an Maschinen : Ergebnisse aus dem gleichnamigen Sonderforschungsbereich an der Universität Hannover*. Weinheim : VCH-Verlag, 1993, S. 72–86.
- [88] TÖNSHOFF, H.-K. ; KUMMETZ, J. ; SCHÜTTE, O. ; HEIMANN, B. ; GRUDZINSKI, K. ; BODNAR, A.: On the Nonlinear Dynamics in External Cylindrical Grinding - Experimental and Analysis and Simulation of Process, Structure and Feed Drives. In: *3rd International Symposium on Nonlinear Dynamic Effects in Systems of Production Engineering*. Cottbus, 2000.
- [89] TOMLINSON, G. R.: Developments in the use of the Hilbert Transform for detecting and quantifying non-linearity associated with frequency response functions. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* 1 (1987), Nr. 2, S. 151–171.
- [90] TOMLINSON, G. R.: Linear or Nonlinear - that is the question. In: *Tools for noise and vibration analysis : proceedings ISMA19*. Leuven, 1994, S. 11–32.
- [91] TONG, H.: *Non-linear time series: a dynamical system approach*. Oxford : Oxford University Press, 1990.

- 
- [92] TSAY, Ruey S.: Nonlinearity tests for time series. In: *Biometrika* 73 (1986), Nr. 2, S. 461–466.
- [93] UHL, A.: Friction Damped Composite Floors. In: POPP, K. (Hrsg.): *Detection, Utilization and Avoidance of Nonlinear Dynamical Effects in Engineering Applications - Final Report of a Joint Research Project sponsored by the German Federal Ministry of Education and Research*. Aachen, Germany : Shaker Verlag, 2001, S. 245–261.
- [94] VINH, T.: Identification of nonlinearities. In: *Symposium Nichtlineare Strukturdynamik*. ETH Zürich, 1986.
- [95] ZAMIROWSKI, M.: *Einige zeitdiskrete Parameterschätzmethoden zur Identifikation nichtlinearer mechanischer Systeme*, Universität Hannover, Diss., 1992.

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name Jens-Uwe Bruns  
Geburtsdatum 31.7.1972 (in Wittmund)  
Familienstand verheiratet, zwei Kinder

## Schullaufbahn

1978 - 1984 Grundschule und Orientierungsstufe Wiesmoor  
1984 - 1988 Realschule Wiesmoor  
1988 - 1991 Gymnasium Ulricianum Aurich

## Studium

10/91 - 09/93 Grundstudium Maschinenbau an der Universität Dortmund  
10/93 - 09/97 Hauptstudium Maschinenbau an der Universität Hannover  
10/94 - 06/95 Auslandsstudium an der University of Bristol, Großbritannien

## Berufliche Tätigkeit

10/97 - 12/02 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik  
der Universität Hannover  
04/03 - heute Baker Hughes INTEQ GmbH, Celle