

Zum asymptotischen Verhalten von Faltungshalbgruppen

Vom Fachbereich Mathematik der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktorin der Naturwissenschaften

Dr.rer.nat.

genehmigte Dissertation

von

Maren Schmalmack

geboren am 1. August 1969 in Wolfenbüttel

2003

Referentin: Prof.Dr.U.Schmidt-Westphal

Korreferent: Prof.Dr.H.Berens

Tag der Promotion: 4.Februar 2003

Für die Förderung und Betreuung dieser Arbeit möchte ich Frau Prof.Dr.U. Schmidt-Westphal sehr herzlich danken. Herrn Prof.Dr.H.Berens danke ich für die freundliche Bereitschaft, das Korreferat dieser Dissertation zu übernehmen.

Darüber hinaus gilt mein Dank auch meinen Lehrern Herrn Prof.Dr.E.Mues und Herrn Prof.Dr.J.Heine.

Zusammenfassung

In der Arbeit wird zunächst die n -fach iterierte Faltung $g^{*n} * U(\cdot)$ einer Wahrscheinlichkeitsdichte $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit einer Funktion $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ auf gleichmäßige Konvergenz beim Übergang $n \rightarrow \infty$ untersucht; dabei ist \mathcal{X} ein reeller oder komplexer Banachraum.

Das Ergebnis sind Forderungen an U , die notwendig und hinreichend für die Existenz des genannten Grenzwertes sind: Es zeigt sich, daß weder die Existenz noch der Limes selbst von der expliziten Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichte abhängt. Der Grenzoperator $Q_g : U \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ ist eine Projektion auf die Menge der fast überall konstanten Funktionen. Die hergestellte Verbindung zur Theorie der integrierten Halbgruppen ermöglicht es, einen Ergodensatz aus diesem Bereich heranzuziehen. Damit erhält man, daß der besagte Operator Q_g mit dem gleichmäßigen Cesàrogrenzwert $\|\cdot\|_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - x) dx$ von U übereinstimmt.

Der Übergang zur Betrachtung kontinuierlicher Faltungshalbgruppen $\{w_t : t > 0\}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten führt hier zunächst auf einen Taubersatz: Die Existenz des Cesàrogrenzwerts $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t w_u * U du$ impliziert im Falle der Meßbarkeit der Abbildung $t \mapsto w_t$ bereits die Konvergenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t * U$.

Mit der speziellen Interpretation des Falles $U(\cdot) = T(\cdot)x$ für eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe $T(t)$ und ein $x \in \mathcal{X}$ gelingt es, Konvergenzaussagen in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit solchen in \mathcal{X} zu vergleichen. Ein bekannter Ergodensatz kann um Konvergenz gewisser Faltungsprozesse erweitert werden. Zudem lassen sich Kern und Bild der Erzeuger einerseits von $T(t)$ und andererseits einer einfach integrierten Halbgruppe auf $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ miteinander in Verbindung bringen.

Die Auswertung auch des genannten Taubersatzes für solche $U(\cdot) = T(\cdot)x$ liefert Resultate über das asymptotische Verhalten nachgeordneter Halbgruppen. Insbesondere können Schlüsse über äquibeschränkte holomorphe Halbgruppen gezogen werden.

Zuletzt wird die Basis zur Verallgemeinerung der bewiesenen Sätze auf eine Klasse nicht absolut stetiger Maße gelegt.

Schlagwörter: Ergodensätze, Faltungspotenzen, C_0 -Halbgruppen

Abstract

The thesis begins with an analysis of the uniform convergence of an n -fold iterated convolution $g^{*n} * U(\cdot)$ of a probability density function $g \in L^1(\mathbb{R})$ with a function $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ when $n \rightarrow \infty$; here \mathcal{X} is a real or complex Banach space.

As a result we obtain assumptions on U which are necessary and sufficient for the existence of the afore mentioned limit: it turns out that neither the existence nor the limit itself depend on the explicit choice of the probability density function. The limit operator $Q_g : U \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ is a projection onto the set of functions which are constant almost everywhere. The established connection to the theory of integrated semigroups allows to make use of an ergodic theorem from this area. One thus obtains that the mentioned operator Q_g coincides with the uniform Cesàro limit $\|\cdot\|_\infty - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - x) dx$ of U .

The transition to the consideration of continuous convolution semigroups $\{w_t : t > 0\}$ of probability densities leads here first of all to a Tauberian theorem: The existence of the Cesàro limit average $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t w_u * U du$ implies the convergence of $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t * U$ if the mapping $t \mapsto w_t$ is measurable.

The special interpretation of the case $U(\cdot) = T(\cdot)x$ for a uniform bounded C_0 -semigroup $T(t)$ and an $x \in \mathcal{X}$ makes it possible to compare convergence statements in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ with those in \mathcal{X} . A well-known ergodic theorem can be extended to include the convergence of certain convolution processes. Furthermore, the kernel and the image of the generator of $T(t)$ on the one hand and of a once integrated semigroup on $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ on the other hand can be associated to one another.

Evaluation of the above mentioned Tauberian theorem for such $U(\cdot) = T(\cdot)x$ yields results about the asymptotic behaviour of subordinated semigroups. In particular conclusions about equibounded holomorphic semigroups finally can be drawn.

At the end the basis is laid for generalizing the proven theorems for a class of not absolutely continuous measures.

Keywords: Ergodic theorems, convolution powers, C_0 -semigroups

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
0. Bezeichnungen	4
1. Vorbemerkungen	5
§1 Einiges zum Bochnerintegral	5
§2 Die Faltung $g * U$	6
2. Gewisse Faltungsprozesse und deren gleichmäßige Konvergenz	8
§1 Der Operator L_g und der Ergodensatz im Mittel	9
§2 Eigenschaften der Faltungspotenzen	10
§3 Vertauschbarkeit von Norm und Integral in Grenzprozessen	11
§4 Integralbeschränkte Abbildungen	14
§5 Das Grenzverhalten von $g^{*n} * U$ für integralbeschränkte Funktionen U . . .	15
§6 Zum Fall $U \notin L^\infty$	19
§7 Der Operator Q_g	19
§8 Einfach integrierte Halbgruppen	23
§9 Die Gleichheit der verschiedenen Mittelwerte	26
§10 Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten	29
§11 Ein Taubersatz für Faltungsprozesse	31
3. Ergodizität und asymptotisches Verhalten beschränkter C_0-Halbgruppen unter Faltungsprozessen	37
§1 Zu Halbgruppen von Operatoren	37
§2 Ein Ergodensatz für gleichmäßig beschränkte Halbgruppen von Operatoren	40
§3 Vorüberlegungen	41
§4 Typ(I)	42

§5 Typ (II)	43
§6 Ein Ergodensatz und Folgerungen	45
§7 Kontinuierliche Faltungsprozesse mit Halbgruppen	47
§8 Ergodizitäts- und Stabilitätsresultate für nachgeordnete Halbgruppen	49
§9 Zu gebrochenen Potenzen von Operatoren	51
§10 Folgerungen für äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppen	52
4. Verallgemeinerung auf eine Klasse nicht absolut stetiger Maße	55
Literaturverzeichnis	58

Einleitung

Sei μ ein reguläres, normiertes Borelmaß auf einer lokalkompakten Gruppe. Rekursiv lassen sich die Faltungspotenzen $\mu^{*(n+1)} := \mu^{*n} * \mu$ definieren. Deren Grenzverhalten für $n \rightarrow \infty$ sowie das ihrer erneuten Faltung mit gewissen Funktionen ist in der Vergangenheit unter unterschiedlichsten Prämissen untersucht worden. Seit langem ist bekannt, daß die Funktion $s \mapsto \mu^{*n}(s - K)$ für Kompakta $K \subseteq \mathbb{R}^d$ oder auch $K \subseteq \mathbb{Z}^d$ unter gewissen Forderungen an μ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie wurde die Konvergenzrate dieses Grenzprozesses unter anderem von P.Lévy und A.N.Kolmogoroff untersucht. P.Bougerol [6], Y.Derriennic und M.Lin [13],[14], K.Hofmann und A.Mukherjea [31], M.Lin [35] sowie M.Lin und R.Wittmann [36] verallgemeinerten die Konvergenzuntersuchungen auf Wahrscheinlichkeitsmaße zunächst auf abelschen, dann auch allgemein auf beliebigen lokalkompakten Gruppen bzw. Halbgruppen G . Dabei wurden unterschiedliche Eigenschaften des Trägers von μ vorausgesetzt, die eine hinreichende Ausbreitung bei wiederholter Faltung gewährleisten.

Vermöge einer stetigen Darstellung $T : G \rightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ durch Kontraktionen auf einem Banachraum \mathcal{X} werden insbesondere in [13], [14], [35], [36] der „ μ -Mittelwert“

$$P_\mu x := \int T(t)x d\mu(t)$$

definiert und seine Iterierten auf Konvergenz in der Normtopologie von \mathcal{X} beim Übergang $n \rightarrow \infty$ untersucht. Für aperiodische Wahrscheinlichkeitsmaße μ wurde in [35] im Falle abelscher Gruppen gezeigt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} P_\mu^n x$ genau dann existiert, wenn der diskrete

Cesàromittelwert $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n P_\mu^k x$ konvergiert; nach dem Ergodensatz im Mittel hat man daher insbesondere in reflexiven Räumen Konvergenz für alle x . In [14] wurden nichtabelsche Gruppen betrachtet und für die Potenzen P_μ^n Konvergenzaussagen in gleichmäßig konvexen Banachräumen bewiesen. Für strikt aperiodische, ergodische und topologisch rekurrende Maße μ auf der lokalkompakten Gruppe G wurde in [36] insbesondere die starke Konvergenz von $P_\mu^n(P_\mu - I)$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null gezeigt.

Eine besondere Rolle spielt in den genannten Arbeiten die spezielle Darstellung der Gruppe G durch Translationen auf Funktionenräumen. So konnte in [13] für eine nichtkompakte, abelsche Gruppe G und ein aperiodisches Maß μ gezeigt werden, daß für alle $f \in L^p(G)$ ($1 < p < \infty$) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu^{*n} * f\|_p = 0$. In [14] wurden entsprechende Aussagen für den nichtabelschen Fall unter stärkeren Voraussetzungen an das Maß μ in den Räumen $\mathcal{C}_0(G)$ und $L^2(G)$ bewiesen.

Eine besondere Rolle spielt in den genannten Arbeiten die spezielle Darstellung der Gruppe G durch Translationen auf Funktionenräumen. So konnte in [13] für eine nichtkompakte, abelsche Gruppe G und ein aperiodisches Maß μ gezeigt werden, daß für alle $f \in L^p(G)$ ($1 < p < \infty$) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu^{*n} * f\|_p = 0$. In [14] wurden entsprechende Aussagen für den nichtabelschen Fall unter stärkeren Voraussetzungen an das Maß μ in den Räumen $\mathcal{C}_0(G)$ und $L^2(G)$ bewiesen.

Da Faltungspotenzen μ^{*n} Markoffkerne sind und auf skalarwertigen Funktionenräumen positive Operatoren (sog. Markoffoperatoren) definieren, lassen sich die obigen Ergebnisse auch in diesem allgemeineren Kontext interpretieren. Zur umfangreichen Literatur auf diesem Gebiet sei auf [33] verwiesen, wo diese Operatoren auf $\mathcal{C}(K)$ (K ein kompakter Hausdorffraum) und verschiedenen L^p -Räumen ($1 \leq p < \infty$) studiert werden.

Für wesentlich beschränkte, meßbare Funktionen auf nichtkompakten Räumen schei-

nen bisher nur Einzelergebnisse zur Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*n} * f$ in der Normtopologie $\|\cdot\|_\infty$ bekannt gewesen zu sein: In [35] wird für aperiodische Maße μ und fastperiodische Funktionen f geschlossen, daß $\mu^{*n} * f$ gleichmäßig gegen eine Konstante konvergiert, in [13] wird für $f \in \mathcal{C}_0(G)$ die gleichmäßige Konvergenz gegen die Nullfunktion bewiesen. Dabei wurde jeweils wesentlich mit dualen Methoden argumentiert.

In der vorliegenden Arbeit wird das Konvergenzproblem der Faltungen $\mu^{*n} * f$ für $n \rightarrow \infty$ bezüglich der Normtopologie von L^∞ -Räumen diskutiert, und zwar nicht nur für skalarwertige, sondern für hier mit U bezeichnete Abbildungen von \mathbb{R} in einen beliebigen Banachraum \mathcal{X} . In $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ bilden die Translationen keine stetige Halbgruppe von Operatoren. Hier ist der durch die Faltung definierte Operator $\mu * U$ im allgemeinen nicht ergodisch im Mittel. Es gelingt zunächst eine vollständige Charakterisierung derjenigen $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ -Funktionen, für die der genannte $\|\cdot\|_\infty$ -Grenzwert im Falle der absoluten Stetigkeit von μ existiert. Dazu wird der Begriff der Integralbeschränktheit eingeführt: Eine Funktion $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ heißt integralbeschränkt, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt derart, daß für alle $\alpha < \beta$ gilt $\|\int_\alpha^\beta U(x) dx\| \leq L$. Mit ganz anderen Methoden als in den genannten Quellen wird bewiesen, daß für solche Funktionen $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U\|_\infty = 0$ ist; dabei ist g die Dichte zu μ . Danach wird gezeigt, daß der durch den Grenzprozeß $U \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ definierte Operator Q_g eine Projektion auf die Menge der fast überall konstanten Funktionen und unabhängig von der speziellen Wahl von g ist. Mit der expliziten Angabe des Definitionsbereichs von Q_g wird die Klasse der Funktionen, für die bisher Konvergenz bekannt war, vergrößert.

Mit Hilfe eines Ergodensatzes für integrierte Halbgruppen kann die Übereinstimmung der aus der iterierten Faltung herrührenden Limites mit den gleichmäßigen kontinuierlichen Cesàro Grenzwerten $P_1 U := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r U(\cdot - x) dx$ bewiesen werden. Dies unterstreicht noch einmal die Interpretation der Faltungspotenzen P_μ^n als Mittelungen. Anschließend werden kontinuierliche Faltungshalbgruppen $\{w_t : t > 0\}$ betrachtet. Die Äquivalenz „ $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n * U$ existiert $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n w_k * U$ existiert“ kann um ein weiteres Taubersches Element ergänzt werden: Im Falle der Meßbarkeit der $L^1(\mathbb{R})$ -wertigen Funktion $t \mapsto w_t$ ist auch die Existenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t w_u * U du$ bereits hinreichend für die Existenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t * U$.

Wesentlich für diese Beweise ist jeweils die Ausnutzung der Charakterisierung des Kernes von Q_g durch integralbeschränkte Funktionen.

Mit der speziellen Wahl von U als Orbit einer gleichmäßig beschränkten C_0 -Halbgruppe bzw. C_0 -Gruppe von Operatoren $T(t) \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ (also $U(t) = T(t)x$ für ein festes $x \in \mathcal{X}$) gelingt es, Konvergenzaussagen in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit solchen in \mathcal{X} zu vergleichen. Kern und Abschluß des Bildes des Erzeugers A von $T(\cdot)$ können so durch Teilmengen von $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ charakterisiert werden. Zudem kann ein bekannter Ergodensatz um punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz gewisser Faltungsprozesse erweitert werden.

Im Zusammenhang mit Markoffoperatoren führt die Betrachtung kontinuierlicher Übergangswahrscheinlichkeiten zum einen auf den äquivalenten Begriff der auf skalarwertigen C_0 -Räumen operierenden, positiven Feller-Halbgruppen [10]. Zum anderen gelangt man darüber zu dem von S.Bochner [5] eingeführten Prinzip der Nachordnung („Subordi-

nation“), das von R.S.Phillips [43] ausgebaut wurde. Damit können neue Halbgruppen aus alten konstruiert werden, die auch eng mit der Definition gebrochener Potenzen von Operatoren verbunden sind. In diesem Zusammenhang sei auf eine jüngere Arbeit von R.L.Schilling [45] hingewiesen. Die Untersuchung des Grenzverhaltens der so erzeugten Halbgruppen fällt in den allgemeinen Rahmen des asymptotischen Verhaltens von Halbgruppen. In diesem Forschungsbereich sind in den letzten zwanzig Jahren zahlreiche Ergebnisse erzielt worden. In [40] sind Resultate u.a. von W.Arendt, C.J.K.Batty, G.Greiner und R.Nagel zusammengefaßt. Neuere Ergebnisse von teils denselben Autoren, aber auch u.a. von R.Chill, F.Rübiger, L.Weis und J.v.Neerven finden sich im Buch [42] des letztgenannten Autors. In beiden Bänden steht der enge Zusammenhang der asymptotischen Konvergenz einer C_0 -Halbgruppe mit dem spektralen Verhalten seines Erzeugers im Vordergrund der Untersuchungen.

Speziell für nachgeordnete Halbgruppen läßt sich das asymptotische Verhalten nachgeordneter Halbgruppen in natürlicher Weise aus den vorhergehenden Ergebnissen und ohne spektrale Überlegungen entwickeln. Damit erhält man u.a. Aussagen zur Stabilität und zur Ergodizität von Vektoren unter nachgeordneten Halbgruppen. Die Auswertung des zuvor entwickelten Taubersatzes zeigt zudem, daß der Abschluß des Bildes des Erzeugers der ursprünglichen Halbgruppe mit dem des Erzeugers der nachgeordneten Halbgruppe übereinstimmt und auch die jeweiligen Kerne gleich sind. Dies verallmeint das Resultat über speziell mit den Lévy'schen Dichtefunktionen gebildete nachgeordnete Halbgruppen, die von den gebrochenen Potenzen $-(-A)^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, erzeugt werden. Die Tatsache, daß jede äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe von einer derartigen Potenz erzeugt wird, erlaubt die Interpretation der über nachgeordnete Halbgruppen erzielten Ergebnisse für beschränkte analytische Halbgruppen. Damit ergibt sich z.B., daß deren Bahnen jeweils entweder injektiv oder konstant sind.

Mit der Verallgemeinerung des in dieser Arbeit tragenden Satzes 2.13 auf solche nicht absolut stetigen Maße, deren absolut stetiger Anteil nicht verschwindet, wird zum Abschluß der Weg zur Verallgemeinerung auch der anderen Ergebnisse geebnet.

0. Bezeichnungen

Es seien $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ sowie $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ wie gewöhnlich definiert. $\mathbb{R}_{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ sei die Menge aller nichtnegativen reellen Zahlen. Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl z werden mit $\Re z$ bzw. $\Im z$ notiert. Ist M irgendeine Menge, so bezeichne $M^{\mathbb{N}} := \{f : \mathbb{N} \rightarrow M\}$ den Folgenraum in M .

Zu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ oder \mathbb{R}^2 sei $\chi_\Omega : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ die charakteristische (oder auch „Indikator-“) Funktion auf Ω . Für eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Theta \subseteq \Omega$ sei $f|_\Theta$ die Einschränkung von f auf Θ ; der Träger von f wird mit $\text{Tr}(f)$ bezeichnet. Fourier- bzw. Laplacetransformation sind für entsprechend geeignete Funktionen f durch

$$\mathcal{F}(f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t) dt \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

definiert.

Den wie gewöhnlich definierten und mit Norm $\|\cdot\|_p$ versehenen Lebesgueschen Funktionenräumen $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, ebenso wie dem Adverb „fast überall“ (oder auch dem Attribut „fast alle“) liegt grundsätzlich stillschweigend das Lebesguemaß λ auf \mathbb{R} (bzw. \mathbb{R}^2) zugrunde; die Sigmaalgebra der Lebesguemengen auf \mathbb{R} wird mit \mathfrak{M} notiert.

Grundsätzlich sei $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein reeller oder komplexer Banachraum. Der Raum aller beschränkten, gleichmäßig stetigen Funktionen $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ wird mit $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ notiert; hier wie auch bei allen anderen topologischen Aussagen in bezug auf \mathcal{X} liegt jeweils die Normtopologie zugrunde, in bezug auf \mathbb{R} wird die vom Betrag induzierte Topologie vorausgesetzt. Ist $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{X}$, so meint $\overline{\mathcal{W}}$ den Abschluß, also die Menge aller Berührungspunkte von \mathcal{W} . Sind $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subseteq \mathcal{X}$ Untervektorräume von \mathcal{X} mit $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \{0\}$, so wird mit $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} := \{u + v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$ die direkte Summe der beiden Räume notiert.

$\mathcal{L}(\mathcal{X})$ bezeichne den mit der Operatornorm $\|L\| := \sup\{\|Lx\| : x \in \mathcal{X}, \|x\| \leq 1\}$ ausgestatteten Raum aller stetigen (beschränkten) linearen Operatoren $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$. $I \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ sei der Identitätsoperator. Ist A ein auf einem Teilraum von \mathcal{X} definierter linearer Operator, so seien

- $\mathcal{D}(A)$ die Definitionsmenge,
- $\mathcal{N}(A)$ der Kern,
- $\mathcal{R}(A)$ das Bild,
- $\text{fix} A := \{x \in \mathcal{D}(A) : Ax = x\}$ die Fixpunktmenge und
- $\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{X})\}$ die Resolventenmenge

von A ; dabei sei $(\lambda - A)^{-1} := (\lambda I - A)^{-1}$ die Umkehrfunktion von $\lambda I - A$ (Resolvente von A in λ) im Falle ihrer Existenz.

1. Vorbemerkungen

Es sollen zunächst einige Grundlagen, soweit sie für das Verständnis der folgenden Kapitel unabdingbar sind, bereitgestellt werden; in der vorliegenden Form sind sie weitgehend [2] entnommen. Keinesfalls kann hier eine vollständige oder umfassende Behandlung dieser Themen angestrebt werden; derartige Ausführungen ebenso wie Beweise der hier angeführten Sätze finden sich in der angegebenen Literatur, insbesondere in [2],[15] und [30]. $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ sei stets ein Banachraum.

§1 Einiges zum Bochnerintegral

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ oder $I \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes oder unbeschränktes Intervall. Eine Funktion $U : I \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *meßbar*, wenn sie fast überall auf I als Grenzwert $U(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)$ einfacher Funktionen U_n dargestellt werden kann; dabei heißt eine Funktion $V : I \rightarrow \mathcal{X}$ *einfach*, wenn $V(t) = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{\Omega_k}(t)$ für gewisse $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathcal{X}$ und $\Omega_k \subseteq I$ mit $\lambda(\Omega_k) < \infty$ gilt. Rechts- bzw. linksseitig stetige Funktionen sind meßbar, ebenso die Summe zweier \mathcal{X} -wertiger meßbarer Abbildungen und das Produkt einer meßbaren komplexwertigen mit einer meßbaren banachraumwertigen Funktion.

1.1 Definition: Die Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *bochnerintegrierbar auf I* , wenn es eine Folge $(U_n)_n$ einfacher Funktionen $U_n : I \rightarrow \mathcal{X}$ derart gibt, daß $U(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(t)$ für fast alle $t \in I$ erfüllt und zudem $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|U(t) - U_n(t)\| dt = 0$ ist. Dann ist das *Bochnerintegral von U auf I* definiert durch

$$\int_I U(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I U_n(t) dt.$$

Beim Nachweis der Bochnerintegrierbarkeit einer Abbildung ist der folgende Satz oft hilfreich:

1.2 Satz (Bochner): *Eine Funktion $U : I \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann bochnerintegrierbar, wenn sie meßbar und ihre Normfunktion $t \mapsto \|U(t)\|$ integrierbar ist. In diesem Falle ist*

$$\left\| \int_I U(t) dt \right\| \leq \int_I \|U(t)\| dt.$$

Ist $1 \leq p \leq \infty$, so ist der Funktionenraum $L^p(I, \mathcal{X})$ definiert als die Menge aller meßbaren Funktionen $U : I \rightarrow \mathcal{X}$, für die $\|U\|_p := \left(\int_I \|U(t)\|^p dt \right)^{1/p} < \infty$ (im Falle $p < \infty$) bzw. $\|U\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{t \in I} \|U(t)\| < \infty$ ist. Mit den üblichen Identifikationen hinsichtlich Lebesguenullmengen ist $(L^p(I, \mathcal{X}), \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Im Falle $\mathcal{X} = \mathbb{C}$ wird auch $L^p(\mathbb{R})$ geschrieben.

Analog zur klassischen Integrationstheorie gelten der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz und der Satz von Fubini.

Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so heißt eine Funktion $U : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ *absolut stetig*, wenn

es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart gibt, daß für je endlich viele disjunkte Intervalle $(a_i, b_i) \subseteq [a, b]$ mit $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ gilt $\sum_i \|U(b_i) - U(a_i)\| < \varepsilon$. Eine Funktion $U : I \rightarrow \mathcal{X}$ auf einem beliebigen Intervall I heißt absolut stetig, wenn jede Einschränkung von U auf ein kompaktes Intervall absolut stetig ist.

U heißt *lipschitzstetig*, wenn es ein $M > 0$ gibt, so daß $\|U(t) - U(s)\| \leq M|t - s|$ für alle $s, t \in I$. Man sagt, der Raum \mathcal{X} habe die *Radon-Nikodym-Eigenschaft*, wenn jede absolut stetige (bzw: äquivalent: jede lipschitzstetige) Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ fast überall differenzierbar ist. In [15, 217f] ist eine Reihe äquivalenter Formulierungen angegeben. Jeder reflexive Raum hat die Radon-Nikodym-Eigenschaft.

1.3 Satz: Seien $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $u : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ eine bochnerintegrierbare Funktion. Ist dann $U : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$, $U(t) = \int_a^t u(s) ds$, so ist U fast überall differenzierbar mit $U' = f.ü. u$, und es gilt für fast alle $t \in [a, b]$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|u(s) - u(t)\| ds = 0.$$

Ist $V : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$ absolut stetig, und existiert $v(x) := V'(x)$ fast überall in $[a, b]$, so ist v bochnerintegrierbar, und für alle $x \in [a, b]$ gilt $V(x) = V(a) + \int_a^x v(s) ds$.

Daraus erhält man insbesondere, daß eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, fast überall verschwindet, wenn für alle $a < b$ gilt $\int_a^b u(y) dy = 0$.

Über das Verhalten des Bochnerintegrals unter stetigen linearen Operatoren gibt der folgende Satz Auskunft:

1.4 Satz: Seien \mathcal{Y} ein weiterer Banachraum und $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ein stetiger linearer Operator, sei ferner $U : I \rightarrow \mathcal{X}$ bochnerintegrierbar. Dann ist auch $L \circ U : t \mapsto LU(t)$ bochnerintegrierbar auf I , und man hat $L \int_I U(t) dt = \int_I LU(t) dt$.

§2 Die Faltung $g * U$

In Übertragung der Konstruktion des Faltungsproduktes

$$(g * h)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)h(s) ds$$

zweier $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen g und h ist die Faltung von g mit der meßbaren banachraumwertigen Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ durch

$$(g * U)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} g(t-s)U(s) ds$$

definiert, sofern das Integral existiert.

Der folgende Satz gibt Auskunft über Existenz und einige Eigenschaften von $g * U$:

1.5 Satz:

- a) (Youngs Ungleichung) Genügen $1 \leq p, q, r \leq \infty$ der Bedingung $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, und sind $g \in L^p(\mathbb{R})$ sowie $U \in L^q(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, so ist $g * U \in L^r(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, und es gilt $\|g * U\|_r \leq \|g\|_p \|U\|_q$.
- b) Sind $g, h \in L^1(\mathbb{R})$ und $U \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit $1 \leq p \leq \infty$, so ist $(h * g) * U = h * (g * U)$.
- c) Sind $g \in L^1(\mathbb{R})$ und $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, so ist $g * U \in BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

2. Gewisse Faltungsprozesse und deren gleichmäßige Konvergenz

Im folgenden sei stets $g \in L^1(\mathbb{R})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, d.h. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} g(y)dy = 1$. Bekanntlich wird durch $\mu : \begin{cases} \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ B \mapsto \int_B g(y)dy \end{cases}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R} definiert; es wird hier als „das zu g gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß“ bezeichnet.

Die Faltung $g_1 * g_2 : y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g_1(y-s)g_2(s)ds$ zweier Wahrscheinlichkeitsdichten g_1, g_2 ist wieder eine solche. Das mehrfache Falten von g mit sich selbst führt auf die induktiv durch $g^{*1} := g$ und $g^{*(n+1)} := g^{*n} * g$ definierten Faltungspotenzen. Für $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ gilt gemäß Satz 1.5

$$g^{*(n+m)} * U = g^{*n} * (g^{*m} * U),$$

daher wird durch die Potenzen eine diskrete Faltungshalbgruppe auf $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ definiert. Die Untersuchung des Grenzverhaltens der singulären Integrale $g^{*n} * U = \int_{-\infty}^{\infty} U(\cdot - y)g^{*n}(y)dy$ für $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $n \rightarrow \infty$ einerseits und der Cesàrogrenzwerte bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ andererseits ist wesentlicher Bestandteil dieses ersten Kapitels und - für spezielles U - der gesamten Arbeit. Zur Vereinfachung der Notation sei $g^{*0} * U := U$ definiert.

In §1 wird zunächst das Grenzverhalten des diskreten Cesàromittelwertes

$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n g^{*k} * U$ mit Hilfe des Ergodensatzes im Mittel behandelt. Die anschließenden Paragraphen zwei bis vier dienen der Bereitstellung von Hilfsmitteln, die im Beweis des in diesem Kapitel zentralen Satzes 2.13 benötigt werden. Mit dessen und der Hilfe eines Ergodensatzes für einfach integrierte Halbgruppen können in §9 notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz und Übereinstimmung verschiedener durch Faltung mit U konstruierter Grenzprozesse angegeben werden. Die Betrachtung kontinuierlicher Faltungspotenzen führt in §11 auf einen Taubersatz für derartige Prozesse. Zuvor sollen noch die jeweiligen Faltungspotenzen dreier wichtiger Wahrscheinlichkeitsdichten konkret angegeben werden:

2.1 Beispiel:

- a) Sei $g(t) = e^{-t}$ für $t \geq 0$ und $g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$
- $$g^{*n}(s) = \begin{cases} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-s} & \text{falls } s \geq 0 \\ 0 & \text{falls } s < 0, \end{cases} \quad \text{wie man durch vollständige Induktion zeigt.}$$
- b) Ist $g = \chi_{[0,1]}$ die charakteristische Funktion des Einheitsintervalls, so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0$:

$$g^{*n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)_+^{n-1},$$

während $g^{*n}|_{(-\infty,0)} \equiv 0$ ist. Dies zeigt man ebenfalls induktiv oder auch mit Hilfe der für alle $w \in \mathbb{C}$ mit positivem Realteil gültigen Identität für die

Laplace-transformierten

$$\left(\mathcal{L}(g^{*n})\right)(w) = \left(\mathcal{L}(g)(w)\right)^n = \left(\int_0^1 e^{-wx} dx\right)^n = \left(\frac{1}{w}(1 - e^{-w})\right)^n,$$

siehe dazu auch §10.

- c) Ist g die zur Gaußschen Standardnormalverteilung gehörige Dichte $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, so erhält man (ebenfalls induktiv oder auch mit Hilfe der Fouriertransformation, siehe 2.29b)), daß $g^{*n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}e^{-x^2/2n}$ ist.

Für weitere Beispiele siehe §10.

§1 Der Operator L_g und der Ergodensatz im Mittel

Die Thematik der „Ergodentheorie“ ist schwer zu charakterisieren; in [12] werden die ethymologische Bedeutung des Wortes und die Sichtweise verschiedener Fachgebiete diskutiert. In dieser Arbeit betrachteten Zusammenhang befassen sich Fragen aus diesem Themenkreis mit der Konvergenz von geeigneten Mittelwerten von Funktionen als der notwendigen Voraussetzung für deren asymptotische Konvergenz.

Der folgende Ergodensatz zur Existenz des diskreten Cesàromittelwertes wird z.B. in [33, S.73f] bewiesen; in verschiedenen Versionen stammt er von von Neumann, Lorch und Yosida. Aus ihm erhält man den Beginn einer Äquivalenzkette, die in Satz 2.26 formuliert und ein Hauptergebnis dieser Arbeit ist.

2.2 Satz (Ergodensatz im Mittel): *Ist $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ potenzbeschränkt, d.h. gibt es ein $M \geq 0$ derart, daß $\|L^n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so existiert $Px := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n L^k x$ genau für $x \in \mathcal{N}(I - L) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L)} =: \mathcal{X}_0$, und P ist die Projektion von \mathcal{X}_0 auf $\mathcal{N}(I - L)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(I - L)}$.*

Existiert der genannte Grenzwert auf ganz \mathcal{X} , so heißt der Operator L *ergodisch*. Im Falle der Reflexivität von \mathcal{X} ist jeder potenzbeschränkte Operator ergodisch.

V.Fonf, M.Lin und P.Wojtaszyk [23] bewiesen jüngst, daß umgekehrt jeder Banachraum \mathcal{X} mit Schauderbasis reflexiv ist, sofern jeder potenzbeschränkte Operator L auf \mathcal{X} ergodisch ist.

Im Zusammenhang mit den hier untersuchten Faltungsoperatoren erhält man aus Satz 2.2 unmittelbar das folgende Resultat; nach wie vor sei dabei g eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

2.3 Beispiel: *Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dann sind äquivalent:*

- (i) $P_g U(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (g^{*k} * U)(\cdot)$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert
- (ii) $U \in \mathcal{N}(I - L_g) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$;

dabei sei die Kontraktion $L_g : L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ durch $L_g V := g * V$ definiert. Weiterhin ist P_g die Projektion von $\mathcal{N}(I - L_g) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$ auf $\mathcal{N}(I - L_g)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$.

In Satz 2.26 wird u.a. gezeigt werden, daß Existenz und Wert von $P_g U$ nicht von der Wahl der Wahrscheinlichkeitsdichte g abhängen, die Menge $\mathcal{N}(I - L_g) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$ wird dort unabhängig von g dargestellt. Der Beweis führt über Satz 2.13 als wesentliche Station; in ihm wird die gleichmäßige Konvergenz von $g^{*n} * U$ gegen die Nullfunktion für die Klasse der in §4 eingeführten *integralbeschränkten* Funktionen $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ gezeigt. Zunächst ist dafür einige Vorarbeit nötig; diese wird in den nächsten drei Paragraphen geleistet.

§2 Eigenschaften der Faltungspotenzen

Sei weiterhin g eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Die zunehmende Ausdehnung der zu den Faltungspotenzen g^{*n} gehörigen Trägermengen auf Obermengen von Intervallen beliebig vorgegebener Länge ist eine wichtige Übereinstimmung der Potenzenfamilie $\{g^{*n} : n \in \mathbb{N}\}$ mit der zur Bildung des gleichmäßigen Cesàrogrenzwertes herangezogenen Familie $\{\frac{1}{t}\chi_{[0,t]}(\cdot) : t > 0\}$; daß die zugehörigen Faltungen $g^{*n} * U$ und $(\frac{1}{t}\chi_{[0,t]} * U)$ im Falle der Konvergenz mit $n \rightarrow \infty$ bzw. $t \rightarrow \infty$ sogar denselben Grenzwert haben, wird in Satz 2.26 bewiesen.

2.4 Lemma: *Zu jedem $K > 0$ gibt es Zahlen $k \in \mathbb{N}$, $\sigma, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ derart, daß $\gamma - \beta > K$ und $g^{*k}|_{[\beta, \gamma]} \geq \sigma > 0$.*

Beweis: Da g meßbar und sein Integral positiv ist, gibt es $c > 0$ und $A \in \mathfrak{M}$ so, daß $\lambda(A) > 0$ und $g \geq c\chi_A =: \varphi$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $g^{*n} \geq \varphi^{*n}$. Sei $K > 0$. Da φ^{*2} stetig mit $\int \varphi^{*2} > 0$ ist, gibt es $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ so, daß $\varphi^{*2}|_{[a, b]} > 0$ ist. Durch vollständige Induktion zeigt man, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi^{*2j}|_{[ja, jb]} > 0$. Wählt man dann $j \in \mathbb{N}$ so groß, daß $j(b - a) \geq K$ ist und setzt $k := 2j$, $\beta := ja$, $\gamma := jb$, so folgt aus der Stetigkeit von φ^{*k} , daß $g^{*k}|_{[\beta, \gamma]} \geq \varphi^{*k}|_{[\beta, \gamma]} \geq \min\{\varphi^{*k}(x) : x \in [\beta, \gamma]\} =: \sigma > 0$.

Die für $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ nach Satz 1.5 c) vorliegende gleichmäßige Stetigkeit von $g * U$ überträgt sich gleichförmig auf die entsprechenden Faltungspotenzen:

2.5 Lemma: *Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dann ist die Funktionenfamilie $(g^{*n} * U)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $g \in L^1(\mathbb{R})$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $s, y \in \mathbb{R}$ mit $|s - y| < \delta$ gilt $\int |g(s - x) - g(y - x)| dx < \frac{\varepsilon}{\|U\|_\infty + 1}$. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $s, y \in \mathbb{R}$, $|s - y| < \delta$

$$\left\| (g^{*(n+1)} * U)(s) - (g^{*(n+1)} * U)(y) \right\| \leq \|U\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |g(s - x) - g(y - x)| dx < \varepsilon.$$

Für jede Folge $(w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist dann auch die Familie $(t \mapsto \|(g^{*n} * U)(w_n - t)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gleichgradig stetig. In dieser Form wird Lemma 2.5 im Beweis von Satz 2.13 gebraucht.

§3 Vertauschbarkeit von Norm und Integral in Grenzprozessen

Gemäß Satz 1.2 gilt $\left\| \int_{-\infty}^{\infty} V(t) dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|V(t)\| dt$ für jede bochnerintegrierbare Funktion $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$. Hat man für eine Funktion V sogar die Gleichheit oder auch nur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} V_n(t) dt \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|V_n(t)\| dt$$

für eine Folge $(V_n)_n \in (L^1(\mathbb{R}, \mathcal{X}))^{\mathbb{N}}$, so lassen sich weitere Eigenschaften der Integranden folgern; einige davon werden im Beweis von Satz 2.13 benötigt. Der folgende, allgemein in Banachräumen geltende Sachverhalt ist in der unter Lemma 2.7 b) angegebenen Form ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis von Satz 2.13:

2.6 Lemma: Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 0$. Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ sei $(x_{n,j})_n \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,j}\| \in \mathbb{R}$ ist. Gilt dann

weiter $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^k x_{n,j} \right\| = \sum_{j=1}^k \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,j}\|$, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j x_{n,j} \right\| = \sum_{j=1}^k \alpha_j \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n,j}\| \right).$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß $\alpha_k > 0$ ist und $\alpha_\nu \leq \alpha_k$ für alle $\nu = 1, 2, \dots, k-1$ gilt. Für $\nu = 1, 2, \dots, k-1$ sei $\alpha'_\nu := \frac{\alpha_\nu}{\alpha_k}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei weiter $h_n : \mathbb{R}_{\geq 0}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h_n(s_1, s_2, \dots, s_{k-1}) := \sum_{\nu=1}^{k-1} s_\nu \|x_{n,\nu}\| + \|x_{n,k}\| - \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} s_\nu x_{n,\nu} + x_{n,k} \right\|$$

Nach der Dreiecksungleichung nimmt h_n nur nichtnegative Werte an, nach Voraussetzung ist $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(1, 1, \dots, 1) = 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt ferner

$$\begin{aligned} & h_n(1, 1, \dots, 1) - h_n(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{k-1}) \\ &= \sum_{\nu=1}^{k-1} (1 - \alpha'_\nu) \|x_{n,\nu}\| - \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} \left((1 - \alpha'_\nu) x_{n,\nu} + \alpha'_\nu x_{n,\nu} \right) + x_{n,\nu} \right\| \\ & \quad + \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha'_\nu x_{n,\nu} + x_{n,k} \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{\nu=1}^{k-1} (1 - \alpha'_\nu) \|x_{n,\nu}\| - \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} (1 - \alpha'_\nu) x_{n,\nu} \right\| - \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha'_\nu x_{n,\nu} + x_{n,k} \right\| \\
&\quad + \left\| \sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha'_\nu x_{n,\nu} + x_{n,k} \right\| \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Folglich ist $h_n(1, \dots, 1) \geq h_n(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k-1}) \geq 0$ und also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_k} \left(\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu \|x_{n,\nu}\| - \left\| \sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu x_{n,\nu} \right\| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\alpha'_1, \dots, \alpha'_{k-1}) = 0,$$

was die Behauptung beweist.

Die beiden nächsten Lemmata zeigen Konsequenzen der Vertauschbarkeit von Norm und Integral im Grenzwert, die beim Beweis von Satz 2.13 herangezogen werden.

2.7 Lemma: Sei $(V_n)_n$ eine Folge bochnerintegrierbarer Funktionen $V_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \|V_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \|V_n\| \in \mathbb{R}$.

a) Ist $B \subseteq \mathbb{R}$ eine lebesguemeßbare Menge derart, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \|V_n\|$ existiert, so

$$\text{gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \|V_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B \|V_n\|.$$

b) Sind $B_1, B_2, \dots, B_k \subseteq \mathbb{R}$ paarweise disjunkte, lebesguemeßbare Mengen so, daß die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_j} \|V_n\|$ für $j = 1, 2, \dots, k$ existieren, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^k \int_{B_j} V_n \right\| = \sum_{j=1}^k \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{B_j} V_n \right\| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \int_{B_j} \|V_n\|.$$

Gemäß Lemma 2.6 folgt somit die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{B_j} V_n \right\| = \sum_{j=1}^k \left(\alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{B_j} V_n \right\| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \alpha_j \int_{B_j} \|V_n\|$$

für beliebige $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \geq 0$.

Beweis: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist mit $B^c := \mathbb{R} \setminus B$

$$\int_{\mathbb{R}} \|V_n\| = \int_B \|V_n\| + \int_{B^c} \|V_n\| \geq \left\| \int_B V_n \right\| + \left\| \int_{B^c} V_n \right\| \geq \left\| \int_{\mathbb{R}} V_n \right\|.$$

Da rechte und linke Seite mit $n \rightarrow \infty$ gegen denselben Wert konvergieren, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_B f V_n + \int_{B^c} f V_n \right)$ und daher

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_B f V_n &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_B f V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f V_n - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B^c} f V_n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f V_n - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{B^c} f V_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_B f V_n. \end{aligned}$$

Das ergibt Teil a).

Mit $C := \bigcup_{j=1}^k B_j$ erhält man daraus Teil b).

Daß die Vertauschbarkeit von Norm und Integral unter bestimmten Bedingungen auch nach Abspaltung einer positivwertigen Funktion erhalten bleibt, ist im Beweis von Satz 2.13 wichtig, um zu einem Widerspruch zu gelangen. Dort wird die Rolle der im folgenden Lemma 2.8 mit f bezeichneten Funktion von einer gemäß Lemma 2.4 geeignet wählbaren Faltungspotenz g^{*k} übernommen.

2.8 Lemma: Sei $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $V_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$. Die Folge der Funktionen $\|V_n(\cdot)\| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei lokal gleichmäßig konvergent und durch $K > 0$ beschränkt. Gibt es dann eine integrierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ so, daß $f|_{[\beta, \gamma]} \geq \sigma > 0$ ist, gilt ferner $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} V_n f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|V_n\| f$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta}^{\gamma} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta}^{\gamma} \|V_n\|,$$

insbesondere existiert der linke Grenzwert.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da $f|_{[\beta, \gamma]}$ meßbar ist, gibt es eine Folge $(\phi_k)_k$ von einfachen Funktionen $\phi_k : [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq \sigma}$, die gegen $f|_{[\beta, \gamma]}$ konvergiert. Sei $\phi_k = \sum_{j=1}^{m_k} c_{k,j} \chi_{B_{k,j}}$ die kanonische Darstellung, alle $c_{k,j} \geq \sigma$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $\left(\frac{1}{\phi_k} f = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{1}{c_{k,j}} f \chi_{B_{k,j}} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[\beta, \gamma]$ mit $k \rightarrow \infty$ gegen die konstante Einsfunktion. Nach dem Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz ist $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\beta}^{\gamma} |1 - \frac{1}{\phi_k} f| = 0$, also gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\int_{\beta}^{\gamma} |1 - \frac{1}{\phi_{k_0}} f| < \frac{\varepsilon}{3K}$ ist. Nach Lemma 2.7 ist nun

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{\phi_{k_0}} f \|V_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m_{k_0}} \frac{1}{c_{k_0,j}} \int_{B_{k_0,j}} f \|V_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{m_{k_0}} \frac{1}{c_{k_0,j}} \int_{B_{k_0,j}} f V_n \right\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{\phi_{k_0}} f V_n \right\|. \end{aligned}$$

Daher existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß $\left| \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{\phi_{k_0}} f \|V_n\| - \int_{\beta}^{\gamma} \frac{1}{\phi_{k_0}} f V_n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_0$ erfüllt ist. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man daraus

$$\forall n \geq n_0 : \left| \int_{\beta}^{\gamma} \|V_n\| - \int_{\beta}^{\gamma} V_n \right| < \varepsilon.$$

§4 Integralbeschränkte Abbildungen

Die in diesem Paragraphen formulierte und im Zusammenhang mit dem Verschwinden des gleichmäßigen Cesàromittels $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - s) ds$ so natürliche Eigenschaft einer Funktion $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ist gemäß Satz 2.13 hinreichend auch für die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $g^{*n} * U$ gegen die Nullfunktion. Damit wird die entscheidende Verbindung zwischen beiden Grenzprozessen hergestellt, deren Limites sich in Satz 2.26 sogar als identisch erweisen.

2.9 Definition: Eine lokal integrierbare Abbildung $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *integralbeschränkt*, falls es ein $L \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$ gilt $\left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(u) du \right\| \leq L$. In diesem Falle heißt L *Integralschranke* zu U .

2.10 Bemerkung: Da für $\alpha < \beta$ gilt

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(u) du \right\| = \left\| \int_0^{\beta} U(u) du - \int_0^{\alpha} U(u) du \right\|,$$

erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung, daß U genau dann integralbeschränkt ist, wenn die Abbildung $t \mapsto \left\| \int_0^t U(u) du \right\|$ ($t \in \mathbb{R}$) beschränkt ist.

2.11 Beispiele: Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

a) Ist $U \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, so gilt offensichtlich für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(u) du \right\| \leq \int_{\alpha}^{\beta} \|U(u)\| du \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|U(u)\| du = \|U\|_1,$$

also ist U integralbeschränkt.

b) Ist U periodisch mit Periode $a > 0$, und setzt man $c := \frac{1}{a} \int_0^a U(u) du$, so ist die Abbildung $u \mapsto U(u) - c$ integralbeschränkt mit Integralschranke $a(\|U\|_\infty + \|c\|)$: Sind nämlich $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$ sowie $j \in \mathbb{N}_0, \gamma \in [0, a)$ so, daß $\beta - \alpha = ja + \gamma$ ist, so gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\alpha}^{\beta} (U(u) - c) du \right\| &\leq \left\| \int_{\alpha+ja}^{\beta} (U(u) - c) du \right\| \leq (\|U\|_\infty + \|c\|) \gamma \\ &< a(\|U\|_\infty + \|c\|). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, daß die Menge der integralbeschränkten Funktionen ein Unterraum von $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ist. Sind $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ und $c_1, c_2 \in \mathcal{X}$ derart, daß $U - c_1$ und $U - c_2$ integralbeschränkt mit Integralschranken L_1 bzw. L_2 sind, so ist $c_1 = c_2$: Dies folgt daraus, daß für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha| \|c_1 - c_2\| &= \left\| \int_{\alpha}^{\beta} (c_1 - c_2) \, du \right\| = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} ((U(u) - c_1) - (U(u) - c_2)) \, du \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\alpha}^{\beta} (U(u) - c_1) \, du \right\| + \left\| \int_{\alpha}^{\beta} (U(u) - c_2) \, du \right\| \\ &\leq L_1 + L_2. \end{aligned}$$

Von Bedeutung ist im Beweis von Satz 2.13 die folgende Verträglichkeit der betrachteten Eigenschaft mit der Faltung mit Wahrscheinlichkeitsdichten:

2.12 Lemma: Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ integralbeschränkt mit Integralschranke $L \geq 0$. Dann ist auch $g * U$ integralbeschränkt mit Integralschranke L .

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Dann erhält man mit dem Satz von Fubini

$$\left\| \int_{\alpha}^{\beta} (g * U)(v) \, dv \right\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(g(y) \left\| \int_{\alpha}^{\beta} U(v - y) \, dv \right\| \right) dy \leq L.$$

Insbesondere haben also mit U auch alle Faltungen $g^{*n} * U$ die Integralschranke L ; daraus ergibt sich im Beweis von Satz 2.13 der benötigte Widerspruch.

§5 Das Grenzverhalten von $g^{*n} * U$ für integralbeschränkte Funktionen U

Der nach den Vorarbeiten der letzten Paragraphen in diesem Abschnitt bewiesene Satz 2.13 ist Grundlage für die mit Satz 2.26 gegebene vollständige Charakterisierung der Menge aller Funktionen U , für die der gleichmäßige Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ existiert. Er dient zudem wiederholt als Hilfsmittel in weiterführenden Beweisen dieser Arbeit. Die Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ sei weiterhin eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

2.13 Satz: Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ integralbeschränkt mit Integralschranke $L > 0$. Dann konvergiert die Funktionenfolge $(g^{*n} * U)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.

Beweis: Gemäß Satz 1.5 ist die Folge $(\|g^{*n} * U\|_\infty)_n \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathbb{N}}$ monoton fallend, also konvergent.

Angenommen, es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U\|_\infty > 0$.

Dann gibt es ein $\alpha \in (0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U\|_\infty)$. Gemäß Lemma 2.4 wähle $k \in \mathbb{N}$ und $\beta, \gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ derart, daß $\gamma - \beta > \frac{2}{\alpha}L + 1$ und $g^{*k}|_{[\beta, \gamma]} \geq \sigma > 0$ ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$

sei $w_n \in \mathbb{R}$ so, daß $\|(g^{*(n+k)} * U)(w_n)\| \geq \|g^{*(n+k)} * U\|_\infty \cdot (1 - \frac{1}{n})$ ist. Bezeichnet dann μ^{*k} das zu g^{*k} gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\begin{aligned} \|g^{*(n+k)} * U\|_\infty - \alpha &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\| (g^{*(n+k)} * U)(w_n) \right\| - \alpha \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| (g^{*n} * U)(w_n - y) \right\| g^{*k}(y) dy - \alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\| (g^{*n} * U)(w_n - y) \right\| - \alpha \right) d\mu^{*k}(y) \\ &\leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \|g^{*n} * U\|_\infty - \alpha \right) \mu^{*k}(B_n), \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

$B_n := \left\{ y \in \mathbb{R} : \|(g^{*n} * U)(w_n - y)\| > \frac{\alpha}{2} \right\} \supseteq \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \|g^{*n} * U(w_n - y)\| > \alpha \right\}$ ist.

Also folgt

$$1 \geq \mu^{*k}(B_n) \geq \frac{\|g^{*(n+k)} * U\|_\infty - \alpha}{\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \|g^{*n} * U\|_\infty - \alpha},$$

und da die rechte Seite mit $n \rightarrow \infty$ gegen eins strebt, hat man sowohl

(i) daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*k}(\mathbb{R} \setminus B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^{*k} \left(\left\{ y \in \mathbb{R} : \|(g^{*n} * U)(w_n - y)\| \leq \frac{\alpha}{2} \right\} \right) = 0$$

ist, als auch

(ii) daß der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in der obigen Ungleichungskette Gleichheit liefert, d.h. insbesondere, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (g^{*n} * U)(w_n - v) g^{*k}(v) dv \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|(g^{*n} * U)(w_n - v)\| g^{*k}(v) dv$$

ist.

Aus (i) folgt nun wegen

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \mu^{*k}(\mathbb{R} \setminus B_n) &\geq \mu^{*k}([\beta, \gamma] \setminus B_n) = \int_{[\beta, \gamma] \setminus B_n} g^{*k}(y) dy \\ &\geq \min\{g^{*k}(y) : y \in [\beta, \gamma]\} \cdot \lambda([\beta, \gamma] \setminus B_n), \end{aligned}$$

daß auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([\beta, \gamma] \setminus B_n) = 0$ ist. Insbesondere gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\lambda([\beta, \gamma] \setminus B_n) = \lambda \left(\left\{ y \in [\beta, \gamma] : \|(g^{*n} * U)(w_n - y)\| \leq \frac{\alpha}{2} \right\} \right) < 1.$$

Es folgt $\lambda([\beta, \gamma] \cap B_n) = \lambda([\beta, \gamma]) - \lambda([\beta, \gamma] \setminus B_n) \geq \gamma - \beta - 1$ und damit für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\beta}^{\gamma} \|(g^{*n} * U)(w_n - y)\| \, dy &\geq \int_{[\beta, \gamma] \cap B_n} \|(g^{*n} * U)(w_n - y)\| \, dy \\ &\geq (\gamma - \beta - 1) \frac{\alpha}{2} > L. \quad (\star) \end{aligned}$$

Ist nun aber $V_n : s \mapsto (g^{*n} * U)(w_n - s)$, so ist die Familie $(s \mapsto \|V_n(s)\|)_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß Lemma 2.5 gleichmäßig gleichgradig stetig. Wegen $\|V_n\|_{\infty} = \|g^{*n} * U\|_{\infty} \leq \|U\|_{\infty}$ ist sie auch gleichmäßig beschränkt, also gibt es nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge $(\|V_{n_j}(\cdot)\|)_{j \in \mathbb{N}}$. Gemäß (ii) und Lemma 2.8 ist daher

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\beta}^{\gamma} \|(g^{*n_j} * U)(w_{n_j} - y)\| \, dy = \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \int_{\beta}^{\gamma} (g^{*n_j} * U)(w_{n_j} - y) \, dy \right\| \stackrel{2.12}{\leq} L$$

im Widerspruch zu (\star) . Folglich ist die obige Annahme falsch, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U\|_{\infty} = 0.$$

q.e.d.

Es ist leicht zu sehen, daß $g^{*n} * U$ im Falle der Integralbeschränktheit von $U - c$ für eine Konstante $c \in \mathcal{X}$ gleichmäßig gegen diese Konstante konvergiert; insbesondere existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ damit nach Beispiel 2.11 für jede periodische L^{∞} -Funktion U .

Mit $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ und $U = g$ erhält man zudem, daß die Folge $(g^{*n})_n$ im Falle der wesentlichen Beschränktheit von g gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Dieses Ergebnis läßt sich noch verallgemeinern: Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R})$, so gilt nach dem Satz von Plancherel auch für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(g) \in L^2(\mathbb{R})$. Daher folgt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|g^{*2}(x)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}(g)(u))^2 e^{ixu} \, du \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(g)\|_2,$$

d.h. es ist $g^{*2} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Satz 2.13 liefert daher die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} = 0.$$

Im allgemeinen konvergiert die Folge g^{*n} aber nicht bezüglich $\|\cdot\|_{\infty}$ gegen die Nullfunktion:

2.14 Beispiel: Sei $h(x) = \frac{1}{\log(e+|x|)}$, ($x \in \mathbb{R}$). Als gerade, konvexe $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ -Funktion ist h die Fouriertransformierte $h = \mathcal{F}(g_h)$ einer geraden, nichtnegativen L^1 -Funktion g_h (siehe z.B. [8, S.251]). Somit ist $g := \frac{1}{\|g_h\|_1} g_h$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit Fouriertransformierter $\mathcal{F}(g) = \frac{1}{\|g_h\|_1} h$.

Wäre nun $g^{*(2n-1)} \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so wäre $g^{*2n} \in BUC(\mathbb{R})$, insbesondere

$g^{*2n}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (g^{*n}(x))^2 dx \in \mathbb{R}$, also $g^{*n} \in L^2(\mathbb{R})$. Nach dem Plancherelschen Satz folgte $\mathcal{F}(g^{*n}) = \mathcal{F}(g)^n \in L^2(\mathbb{R})$ und damit $\frac{1}{\|g_h\|_1} h = \mathcal{F}(g) \in L^{2n}(\mathbb{R})$, was nicht der Fall ist.

Bevor auf die Bedeutung der Voraussetzungen an g als nichtnegative Dichtefunktion eingegangen wird, soll das folgende Korollar zur $\|\cdot\|_{\infty}$ -Konvergenz der genannten Operatoren für Funktionen aus $L^{\infty} \cap L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ formuliert werden; zur $\|\cdot\|_p$ -Konvergenz sei auf Korollar 3.14 verwiesen.

2.15 Korollar: *Seien $p \in [1, \infty)$ und $U \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \cap L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dann konvergiert $g^{*n} * U$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion.*

Beweis: Ist $p = 1$, so folgt die Behauptung mit Beispiel 2.11 sofort aus Satz 2.13. Sei also $p > 1$. Für jedes $v \in \mathbb{R}$ ist dann nach der Hölderschen Ungleichung

$$\|(g^{*n} * U)(v)\| \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|U(v-w)\|^p g^{*n}(w) dw \right)^{\frac{1}{p}} = \left((g^{*n} * \|U\|^p)(v) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Da nach Voraussetzung $\|U\|^p \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ ist, konvergiert die Funktionenfolge $(g^{*n} * \|U\|^p)_n$ gemäß Beispiel 2.11 und Satz 2.13 gleichmäßig gegen die Nullfunktion, also gilt das auch für die Folge $(g^{*n} * U)_n$.

Am Beispiel des durch $\delta_0(B) := \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ definierten Diracmaßes auf \mathbb{R} wird

deutlich, daß die Aussage von Satz 2.13 nicht auf Faltungspotenzen von beliebigen Maßen verallgemeinert werden kann: Für jede Funktion $U \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\delta_0^{*n} * U = U$. In Kapitel 4 wird aber die Möglichkeit der Verallgemeinerung der Aussage von Satz 2.13 auf nicht absolut stetige Wahrscheinlichkeitsmaße gezeigt, sofern sie eine gewisse Ausdehnungsbedingung erfüllen.

Auf die Nichtnegativität von $g \in L^1(\mathbb{R})$ in Satz 2.13 kann i.a. nicht verzichtet werden:

2.16 Beispiel: Sei $h(\cdot) := 2\chi_{[0,1]}(\cdot) - \frac{1}{k}\chi_{(1,1+k]}(\cdot)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, das der Ungleichung $1 - 2e^{-1} \geq \frac{1}{k}(e^{-1} - e^{-(1+k)})$ genügt. Dann ist $h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = 1$, aber für die Laplacetransformierte von h an der Stelle 1 gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(h)(1) &= 2 \int_0^1 e^{-s} ds - \frac{1}{k} \int_1^{1+k} e^{-s} ds = 2 - 2e^{-1} - \frac{1}{k}(e^{-1} - e^{-(1+k)}) \\ &\geq 2 - 2e^{-1} - (1 - 2e^{-1}) = 1. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist daher $\mathcal{L}(h^{*n})(1) = (\mathcal{L}(h)(1))^n \geq 1$. Konvergierte aber h^{*n} gleichmäßig gegen die Nullfunktion, so müßte nach dem Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz auch $\mathcal{L}(h^{*n})(1)$ gegen Null konvergieren.

§6 Zum Fall $U \notin L^\infty$

Es scheint natürlich, auch nach der Möglichkeit einer Verallgemeinerung der Aussage von Satz 2.13 auf nicht wesentlich beschränkte Funktionen U zu fragen. Unter geeigneten Umständen kann $g^{*n} * U$ für hinreichend großes n auch im Falle $U \notin L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ (wesentlich) beschränkt sein; dann ist die Frage nach $\|\cdot\|_\infty$ -Konvergenz sinnvoll und kann mit Satz 2.13 (bzw. Satz 2.26) beantwortet werden. Hier sollen nur kurz derartige Möglichkeiten anhand von zwei Beispielen aufgezeigt werden:

Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte g beschränkt und U integrierbar, so hat man nach Satz 1.5

$$\|g * U\|_\infty \leq \|g\|_\infty \|U\|_1.$$

Da weiterhin $g * U$ analog zu Lemma 2.12 integralbeschränkt ist, folgt nach Satz 2.13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U = \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * (g * U) \equiv 0$$

hinsichtlich $\|\cdot\|_\infty$.

Ist $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$ integralbeschränkt und lokal beschränkt, so ist

$$\forall x \in \mathbb{R} : \|\chi_{[0,1]} * U(x)\| = \left\| \int_0^1 U(x-v) dv \right\| \leq L \text{ und}$$

$$\forall \alpha < \beta : \left\| \int_\alpha^\beta \chi_{[0,1]} * U(x) dx \right\| \leq \int_0^1 \left\| \int_\alpha^\beta U(x-v) dx \right\| dv < L,$$

daher konvergiert $\chi_{[0,1]}^{*n} * U$ in $\|\cdot\|_\infty$ gegen die Nullfunktion.

2.17 Beispiel: Ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin(x^2)$, so konvergiert $\chi_{[0,1]}^{*n} * f$ mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist nämlich

$$\left| \int_\alpha^\beta x \sin(x^2) dx \right| = \frac{1}{2} |\cos(\alpha^2) - \cos(\beta^2)| \leq 1,$$

d.h. f ist integralbeschränkt.

§7 Der Operator Q_g

Satz 2.13 hilft, den als Operator Q_g auf $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ aufgefaßten Grenzprozeß $U \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U$ aus funktionalanalytischer Sicht zu beleuchten. Im nächsten Satz wird gezeigt, daß Q_g eine Projektion ist und nicht von g abhängt, insbesondere daß für jede Wahrscheinlichkeitsdichte h gilt $\mathcal{D}(Q_g) = \mathcal{D}(Q_h)$.

2.18 Satz: Die Menge $\mathcal{D}(Q_g) := \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : (g^{*n} * U)_n \text{ ist glm. konvergent}\}$ ist abgeschlossen in $(L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}), \|\cdot\|_\infty)$, und $Q_g : \begin{cases} \mathcal{D}(Q_g) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ U \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U \end{cases}$ ist linear

und stetig. Darüber hinaus ist Q_g die Projektion von $\mathcal{D}(Q_g)$ auf ihre Bildmenge $\mathcal{R}(Q_g) = \{V \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : V \text{ f.ü. konstant}\} \subseteq \mathcal{D}(Q_g)$ entlang

$$\mathcal{N}(Q_g) = \overline{\{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ integralbeschränkt}\}}.$$

Beweis: Man sieht leicht, daß für den $\|\cdot\|_\infty$ -Grenzwert U einer Folge aus $\mathcal{D}(Q_g)$ auch die Folge $(g^{*n} * U)_n$ eine Cauchyfolge und damit konvergent sein muß.

Die Linearität von Q_g ist klar; seine Stetigkeit folgt aus der Gültigkeit der Ungleichung $\|Q_g U\|_\infty \leq \|U\|_\infty$ für jedes $U \in \mathcal{D}(Q_g)$.

Sei nun $V \in \mathcal{R}(Q_g)$, $V = Q_g U$ für ein $U \in \mathcal{D}(Q_g)$. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ und beliebige $x, y \in \mathbb{R}$, o.B.d.A. $x \leq y$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t (U(y+u) - U(x+u)) du \right\| &= \left\| \int_y^{y+t} U(w) dw - \int_x^{x+t} U(w) dw \right\| \\ &= \left\| \int_{x+t}^{y+t} U(w) dw - \int_x^y U(w) dw \right\| \\ &\leq 2|y-x| \|U\|_\infty, \end{aligned}$$

d.h. die Funktion $F_{xy} : u \mapsto U(y+u) - U(x+u)$ ist integralbeschränkt. Demnach gilt gemäß Satz 2.13:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * F_{xy})(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u) F_{xy}(-u) du \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u) (U(y-u) - U(x-u)) du \\ &= V(y) - V(x). \end{aligned}$$

Da $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt worden waren, muß $V = Q_g U$ konstant sein.

Ist umgekehrt $U \equiv_{\text{f.ü.}} c \in \mathcal{X}$, so ist $g^{*n} * U \equiv c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus $U \in \mathcal{D}(Q_g)$ und $Q_g U = U$, also $U \in \mathcal{R}(Q_g)$ folgt. Damit erhält man, daß $\mathcal{R}(Q_g) = \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ f.ü. konstant}\} = \text{fix}(Q_g)$, also Q_g eine Projektion ist.

Es bleibt noch die Darstellung des Kernes von Q_g zu beweisen:

Sei $\mathcal{M}_1 := \overline{\{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ integralbeschränkt}\}}$. Dann gilt $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{N}(Q_g)$ nach Satz 2.13 und wegen der Stetigkeit von Q_g . Sei nun $U \in \mathcal{N}(Q_g)$. Sei $(K_n)_n$ eine Folge kompakter Teilmengen von \mathbb{R} derart, daß jeweils $\int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(u) du < \frac{1}{n}$ gilt. Für

jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(u) du \cdot U$. Offensichtlich konvergiert U_n gleichmäßig

gegen die Nullfunktion.

Sei weiter für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$V_n(\cdot) := \int_{K_n} g^{*n}(v) U(\cdot - v) dv = \int_{\mathbb{R}} g^{*n}(v) U(\cdot - v) dv - \int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(v) U(\cdot - v) dv.$$

Wegen

$$\left\| \int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(v) U(\cdot - v) dv \right\| \leq \int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(v) \|U\|_\infty dv < \frac{1}{n} \|U\|_\infty$$

erhält man aus $U \in \mathcal{N}(Q_g)$, daß auch die Funktionenfolge $(V_n)_n$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Folglich ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (U - U_n - V_n) = U$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Es wird nun gezeigt, daß jedes $U - U_n - V_n$ integralbeschränkt ist; daraus folgt dann, daß $U \in \mathcal{M}_1$, insgesamt, daß $\mathcal{N}(Q_g) \subseteq \mathcal{M}_1$ ist.

Seien also $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$. Wegen $U - U_n = \int_{K_n} g^{*n}(v) dv \cdot U$ erhält man mit dem

Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t (U - U_n - V_n)(w) dw \right\| &= \left\| \int_{K_n} \int_0^t g^{*n}(v) (U(w) - U(w - v)) dw dv \right\| \\ &\leq \int_{K_n} \left[g^{*n}(v) \left\| \int_0^t U(w) dw - \int_{-v}^{t-v} U(w) dw \right\| \right] dv \\ &= \int_{K_n} \left[g^{*n}(v) \left\| \int_{t-v}^t U(w) dw - \int_{-v}^0 U(w) dw \right\| \right] dv \\ &\leq \int_{K_n} g^{*n}(v) 2|v| \|U\|_\infty dv, \end{aligned}$$

wobei der letzte Term unabhängig von t und wegen der Kompaktheit von K_n endlich ist.

Aus Satz 2.18 folgt nun unmittelbar

2.19 Korollar: *Unabhängig von g ist*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(Q_g) &= \overline{\{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ integralbeschränkt}\}} \\ &\quad \oplus \{V \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : V \text{ f.ü. konst.}\} \end{aligned}$$

und $Q_g = Q_h$ für jede Wahrscheinlichkeitsdichte $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Der Beweis von Satz 2.18 zeigt insbesondere auch, daß die Existenz des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * U)(s_0) = x_0 \in \mathcal{X}$ in einem Punkt $s_0 \in \mathbb{R}$ bereits die punktweise Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * U)(\cdot) \equiv x_0$ auf der ganzen reellen Achse impliziert. Daß die Betrachtung punktwieser Konvergenz in diesem Zusammenhang i.a. aber nicht zu denselben Ergebnissen führt wie die Untersuchung gleichmäßiger Limites, zeigt das folgende Beispiel.

2.20 Beispiel: Die punktweise Konvergenz von $g^{*n} * U$ ist nicht unabhängig von der Wahrscheinlichkeitsdichte g :

Seien z.B. $c \in \mathcal{X}$, $c \neq 0$ und $U|_{\{x \in \mathbb{R}: x < 0\}} \equiv c$ und $U|_{\{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}} \equiv 0$. Für alle g mit Träger $\text{Tr}(g) \subseteq (-\infty, -\alpha]$ für ein $\alpha > 0$ ist $\text{Tr}(g^{*n}) \subseteq (-\infty, -n\alpha]$, also

$$(g^{*n} * U)(s) = \int_{s+n\alpha}^{\infty} U(w)g^{*n}(s-w)dw = \begin{cases} 0 & \text{falls } n\alpha > -s \\ \star & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * U)(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Ist dagegen $\text{Tr}(g) \subseteq [\alpha, \infty)$, $\alpha > 0$, also $\text{Tr}(g^{*n}) \subseteq [n\alpha, \infty)$, so ist

$$(g^{*n} * U)(s) = \int_{-\infty}^{s-n\alpha} U(w)g^{*n}(s-w)dw = \begin{cases} c & \text{falls } n\alpha > s \\ \star & \text{sonst} \end{cases}$$

und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * U)(s) = c$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

Zum Abschluß dieses Paragraphen soll der Umfang der Funktionenklasse $\mathcal{D}(Q_g)$ anhand von drei Beispielen beleuchtet werden:

2.21 Beispiele:

a) Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ so, daß $\lim_{t \rightarrow -\infty} U(t) = c = \lim_{t \rightarrow \infty} U(t) \in \mathcal{X}$. Ist dann $g \in L^1(\mathbb{R})$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte, so konvergiert $(g^{*n} * U)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion $V \equiv c$.

Sei nämlich $U_k := (U - c)\chi_{[-k, k]}$. Dann konvergiert $(U_k)_k$ gleichmäßig gegen $U - c$, und als integrierbare Abbildung ist jedes U_k integralbeschränkt, d.h. $(g^{*n} * U_k)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Nach Satz 2.18 folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * (U - c) = 0$ bezüglich gleichmäßiger Konvergenz, was die Behauptung ergibt.

b) Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ eine „außen periodische“ Funktion in dem Sinne, daß $t_0, a, b > 0$ existieren derart, daß

$$(i) \quad \forall t \geq t_0 : U(t+a) = U(t)$$

$$(ii) \quad \forall t \leq -t_0 : U(t-b) = U(t)$$

Gilt dann $\frac{1}{a} \int_{t_0}^{t_0+a} U(u)du = \frac{1}{b} \int_{-t_0-b}^{-t_0} U(u)du =: c \in \mathcal{X}$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U \equiv c$ und die Konvergenz gleichmäßig.

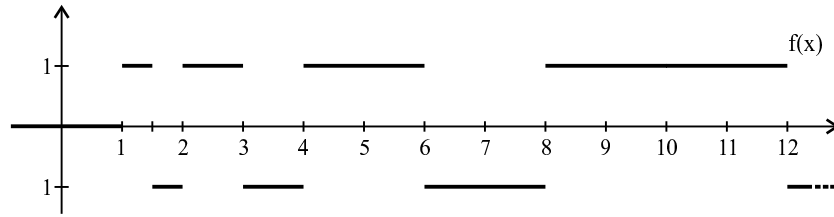
Beweis: Es ist $U - c = U_1 + U_2 + U_3$ mit $U_1 := (U - c) \cdot \chi_{(t_0, \infty)}$, $U_2 := (U - c) \cdot \chi_{(-\infty, -t_0)}$ und $U_3 := (U - c) \cdot \chi_{[-t_0, t_0]}$. Als integrierbare Funktion ist zunächst U_3 integralbeschränkt, also $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U_3 \equiv 0$ nach Satz 2.13.

Ist ferner $t \in (-\infty, t_0]$, so ist $\|\int_0^t U_1(u)du\| = 0$; ist $t \in (t_0, \infty)$, so ist analog zu Beispiel 2.11

$$\|\int_0^t U_1(u)du\| \leq a\|U\|_\infty + a\|c\|.$$

Somit ist auch U_1 integralbeschränkt und daher ebenfalls $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * U_1 \equiv 0$. Da dasselbe völlig analog auch für U_2 gilt, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * (U - c) \equiv 0$, woraus die Behauptung folgt.

- c) Seien $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ und $g = \chi_{[0,1]}$ die charakteristische Funktion des Einheitsintervalls. Dann ist $[0, n]$ der Träger von g^{*n} . Für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ seien $a_j := 2^j$ und $b_j := 2^j + 2^{j-1}$. Sei $f|_{[a_j, b_j]} = 1$ und $f|_{[b_j, a_{j+1}]} = -1$ sowie $f|_{\mathbb{R}_{<1}} = 0$.



Ist $x \in (0, a_j)$, so ist $4a_j - x = 2^{j+2} - x \in (2^{j+2} - 2^j, 2^{j+2}) = (b_{j+1}, a_{j+2})$, also $f(4a_j - x) = -1$.
 Ist $x \in (0, b_j)$, so ist $4b_j - x = 2^{j+2} + 2^{j+1} - x \in (2^{j+2} + 2^{j+1} - 2^j - 2^{j-1}, 2^{j+2} + 2^{j+1}) = (2^{j+2} + 2^{j-1}, b_{j+2}) \subseteq (a_{j+2}, b_{j+2})$, also $f(4b_j - x) = 1$. Also ist

$$\begin{aligned}
 g^{*n} * f(4n) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(4n - x)g^{*n}(x) dx = \int_0^n f(4n - x)g^{*n}(x) dx \\
 &= \begin{cases} 1 & \text{falls } n = b_j \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{falls } n = a_j \text{ für ein } j \in \mathbb{N} \\ * & \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Folglich ist $f \notin \mathcal{D}(Q_g)$ und also $f \notin \mathcal{D}(Q_h)$ auch für jede andere Wahrscheinlichkeitsdichte h .

Durch Multiplikation der Funktion f aus Teil c) des letzten Beispiels (oder auch der Funktion $\chi_{[0,\infty)}$) mit einem beliebigen Vektor $c \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$ erhält man insbesondere, daß für jeden Banachraum $\mathcal{X} \neq \{0\}$ gilt $\mathcal{D}(Q_g) \subsetneq L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$.

Mit b) und dem Beispiel $U(t) := \begin{cases} c \sin t & \text{falls } t \geq 0 \\ 2c \sin t & \text{falls } t < 0 \end{cases}$, $c \neq 0$ sieht man, daß $\mathcal{D}(Q_g) \cap BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ eine echte Obermenge der Klasse der fastperiodischen Funktionen ist.

§8 Einfach integrierte Halbgruppen

Um die Übereinstimmung der bisher behandelten Grenzoperatoren mit dem gleichmäßigen Cesàro Grenzwert zu beweisen, wird ein Ergodensatz für einfach integrierte Halbgruppen herangezogen. Letztere stellen den Spezialfall $k = 1$ der von W. Arendt eingeführten k -fach integrierten Halbgruppen dar. In dieser Arbeit sollen nur die zu deren weiterem Verständnis notwendigen, spezielleren Tatsachen angeführt werden; für Genaueres zu

diesem Thema siehe z.B. [1], [2], [28].

Wenn der Banachraum \mathcal{X} die Radon-Nikodym-Eigenschaft hat, ist $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ der stetige Duale von $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. In diesem Falle würde man möglicherweise auch mit einem Ergodensatz im Mittel für duale Halbgruppen argumentieren können.

2.22 Definition: Seien $\mathcal{D}(B) \subseteq \mathcal{X}$ und $B : \mathcal{D}(B) \rightarrow \mathcal{X}$ ein linearer Operator. Gibt es ein $\omega \geq 0$ und eine stark stetige Funktion $S : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ derart,

$$\begin{aligned} \text{da\ss} \quad (i) \quad & \forall \lambda > \omega \quad \forall x \in \mathcal{X} : \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \text{ existiert} \\ (ii) \quad & (\omega, \infty) \subseteq \rho(B) \quad \text{und} \\ (iii) \quad & \forall \lambda > \omega \quad \forall x \in \mathcal{X} : (\lambda - B)^{-1}x = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt. \end{aligned}$$

so hei\ss en $S(\cdot)$ eine einfach integrierte Halbgruppe und B ihr Erzeuger.

Der n\ac hste Satz kann zum Beweis dienen, da\ss eine stark stetige Funktion $S : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ eine einfach integrierte Halbgruppe mit einem Erzeuger B ist:

2.23 Satz: Sei $S : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ stark stetig mit der Eigenschaft $S(\cdot)x \equiv 0 \Leftrightarrow x = 0$. Existieren dann $M, \omega \geq 0$ derart, da\ss f\ur t ≥ 0 stets $\| \int_0^t S(s)ds \| \leq Me^{\omega t}$ gilt, und hat man f\ur alle $s, t \geq 0$

$$S(t)S(s) = \int_t^{t+s} S(r)dr - \int_0^s S(r)dr, \quad (*)$$

so ist $S(\cdot)$ eine einfach integrierte Halbgruppe.

Ein **Beweis** findet sich in [2, S.126].

Insbesondere Teil c) der folgenden Eigenschaften einfach integrierter Halbgruppen liefert zusammen mit Beispiel 2.25 den nach den Vorarbeiten der letzten Paragraphen noch fehlenden, letzten Schritt zum Beweis von Satz 2.26.

2.24 Satz: Sei $S(\cdot)$ eine einfach integrierte Halbgruppe mit Erzeuger B . Dann gilt:

a) Sind $x \in \mathcal{X}$ und $t \geq 0$, so ist $\int_0^t S(s)x ds \in \mathcal{D}(B)$, und es ist

$$B \int_0^t S(s)x ds = S(t)x - tx;$$

insbesondere ist $S(0) = 0$.

- b) Es ist $x \in \mathcal{D}(B)$ mit $Bx = y$ genau dann, wenn für alle $t \geq 0$ gilt $\int_0^t S(s)y ds = S(t)x - tx$. In diesem Falle ist insbesondere $\frac{d}{dt}(S(t)x) = S(t)Bx + x$
- c) Ist $S(\cdot)$ lipschitzstetig, so ist $(0, \infty) \subseteq \rho(B)$, und die Existenz des Cesàro-grenzwertes $P_1x := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} S(t)x$ ist äquivalent zu der des Abelmittels $P_2x := \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda(\lambda - B)^{-1}x = \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt$ und zu $x \in \mathcal{N}(B) \oplus \overline{\mathcal{R}(B)}$. In diesem Falle ist P die Projektion auf $\mathcal{N}(B)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(B)}$.

Zum **Beweis** siehe [2, S.125] für die Teile a), b), c) und [2, S.267] für Teil c).

2.25 Beispiel: Es sei $S : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}))$ definiert durch

$$S(t)U := \left(x \mapsto \int_0^t U(x-u) du \right).$$

Dann ist $S(\cdot)$ eine lipschitzstetige einfach integrierte Halbgruppe mit Erzeuger $B : U \mapsto -U'$; dieser ist für alle $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ definiert, die (unter Berücksichtigung der üblichen f.ü.-Identifikationen) lipschitzstetig und fast überall differenzierbar sind.

Weiterhin ist jedes $S(t)U$ lipschitzstetig, und es gilt $B U = 0 \Leftrightarrow \exists c \in \mathcal{X} : U \equiv_{f.ü.} c$.

Beweis: Für jedes $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $t \geq 0$ und $x, x' \in \mathbb{R}$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|S(t)U(x) - S(t)U(x')\| &\leq 2|x - x'| \|U\|_\infty & \text{und} \\ \|S(t)U\|_\infty &\leq t \|U\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit ist sowohl bewiesen, daß $S(t)U$ eine beschränkte, lipschitzstetige Abbildung ist als auch, daß $S(t)$ ein beschränkter linearer Operator ist.

Wegen $\|S(t)U - S(s)U\|_\infty \leq |t - s| \|U\|_\infty$ ist auch die operatorwertige Funktion $S : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}))$ lipschitzstetig.

Es soll nun die Gültigkeit der Voraussetzungen aus Satz 2.23 überprüft werden:

Zunächst gibt es zu jedem $\omega > 0$ ein $M > 0$ derart, daß $\|\int_0^t S(s) ds\| \leq \frac{1}{2}t^2 \leq M e^{\omega t}$.

Weiterhin schließt man, daß $\|S(t)U\|_\infty = 0$ nur dann für alle $t \geq 0$ gelten kann, wenn $\forall a, b \in \mathbb{R} : \int_a^b U(w) dw = 0$ und damit $U = 0$ ist.

Schließlich erhält man für alle $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} S(t)S(s)U(x) &= \int_0^t \int_y^{y+s} U(x-w) dw dy \\ &= \int_0^t \int_0^{y+s} U(x-u) du dy - \int_0^t \int_0^y U(x-u) du dy \\ &= \left(\int_t^{t+s} S(r) dr - \int_0^s S(r) dr \right) U(x) \end{aligned}$$

Somit ist $S(\cdot)$ ein einfach integrierte Halbgruppe. Sei B ihr Erzeuger. Definiert man $e_\lambda(t) := \begin{cases} e^{-\lambda t} & \text{if } t \geq 0 \\ 0 & \text{if } t < 0 \end{cases}$, so erhält man mit Hilfe des Satzes von Fubini für beliebige $\lambda > 0$ und $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$

$$(\lambda - B)^{-1}U = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)U dt = e_\lambda * U.$$

Da nun $V := e_\lambda * U = \left(x \mapsto e^{-\lambda x} \int_{-\infty}^x e^{\lambda w} U(w) dw\right)$ lipschitzstetig und fast überall differenzierbar mit Ableitung $V' = -\lambda V(x) + U(x)$ ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(B) &= \mathcal{R}((\lambda - B)^{-1}) \\ &\subseteq \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ lipschitzstetig und f.ü. diffbar mit } U' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})\}. \end{aligned}$$

Ist umgekehrt V Element der letzteren Menge, so ist $U := \lambda V + V' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, und partielle Integration liefert

$$(\lambda - B)^{-1}U = e_\lambda * U = \lambda(e_\lambda * V) + e_\lambda * V' = V.$$

Dies führt auf $V \in \mathcal{D}(B)$ mit $BV = \lambda V - U = -V'$.

Gemäß Satz 1.3 gilt schließlich $U(x) = U(0) + \int_0^x U'(u) du$ für jedes $U \in \mathcal{D}(B)$ und alle $x \in \mathbb{R}$, was die Äquivalenz $BV = -V' = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : U(x) = U(0)$ beweist.

Hat \mathcal{X} die Radon-Nikodym-Eigenschaft, so wird die in der Definitionsmenge von B extra geforderte f.ü.-Differenzierbarkeit offensichtlich redundant; dies ist insbesondere in reflexiven Räumen der Fall (siehe Kapitel 1).

Ist $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ integralbeschränkt, so gilt für den gleichmäßigen Cesàrogrenzwert trivialerweise $P_1 U(\cdot) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} S(t)U = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - u) du \equiv 0$; nach Satz 2.24 zieht dies $U \in \overline{\mathcal{R}(B)}$ nach sich. Ist umgekehrt $U = -V' \in \mathcal{R}(B)$, so gilt $\|\int_0^t U(s) ds\| \leq 2\|V\|_\infty$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, d.h. U ist integralbeschränkt. Damit erhält man

$$\mathcal{R}(B) \subseteq \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : \sup\{\|\int_0^t U(u) du\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty\} \subseteq \overline{\mathcal{R}(B)}.$$

Dies steht in Analogie zur sich bei der Betrachtung der diskreten Cesàromittel in §1 ergebenden Inklusionskette

$$\mathcal{R}(I - L) \subseteq \{x \in \mathcal{X} : \sup\{\|\sum_{k=0}^n L^k x\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\} \subseteq \overline{\mathcal{R}(I - L)}.$$

Noch deutlicher wird diese Korrespondenz zwischen „diskreter“ und „kontinuierlicher“ Integralbeschränktheit bei der Betrachtung von Halbgruppen im dritten Kapitel.

§9 Die Gleichheit der verschiedenen Mittelwerte

Mit dem folgenden Satz werden die bisherigen Resultate zu einer einzigen Äquivalenzkette zusammengefaßt. Sie führt im nächsten Paragraphen auf einen Taubersatz für mit

Hilfe bestimmter Familien von Wahrscheinlichkeitsdichten konstruierte Funktionenklassen und im dritten Kapitel auf Ergebnisse in der Theorie der C_0 -Halbgruppen. Damit kann u.a. in Korollar 3.14 gezeigt werden, daß eine Satz 2.26 entsprechende Äquivalenz hinsichtlich $\|\cdot\|_p$ -Konvergenz für $1 \leq p < \infty$ und Funktionen $U \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ gilt.

Wie in Beispiel 2.25 bezeichne B den Erzeuger der dort definierten einfach integrierten Halbgruppe $\{S(t) : t \geq 0\}$ auf $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dem ersten Paragraphen entsprechend sei der Operator $L_g : L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ durch $L_g U := g * U$ definiert.

2.26 Satz: Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dann sind äquivalent:

- (i) $P_1 U(\cdot) := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - u) du$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert
- (ii) $P_2 U(\cdot) := \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} U(\cdot - u) du$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert
- (iii) $Q_g U(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * U)(\cdot)$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert
- (iv) $P_g U(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (g^{*k} * U)(\cdot)$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert
- (v) $U \in \mathcal{N}(I - L_g) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$
- (vi) $U \in \mathcal{N}(B) \oplus \overline{\mathcal{R}(B)}$.

Im Falle der Gültigkeit der Bedingungen (i) – (vi) stimmen alle Grenzwerte $P_1 U$, $P_2 U$, $Q_g U$ und $P_g U$ überein und sind gleich der Projektion der in (v) (bzw. (vi)) angegebenen direkten Summe auf $\mathcal{N}(B)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(B)}$. Insbesondere gelten die Gleichungen $Q_g = Q_h = P_g = P_h$ sowie

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Q_g) = \mathcal{N}(B) &= \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ f.ü. konstant}\} \\ &= \mathcal{N}(I - L_g) = \mathcal{N}(I - L_h) \quad \text{und} \\ \mathcal{N}(Q_g) = \overline{\mathcal{R}(B)} &= \overline{\{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ integralbeschränkt}\}} \\ &= \overline{\mathcal{R}(I - L_g)} = \overline{\mathcal{R}(I - L_h)} \end{aligned}$$

für jede Wahrscheinlichkeitsdichte $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Beweis: Die Äquivalenzen (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (vi) gelten nach Beispiel 2.25 und Satz 2.24 c). Gemäß Satz 2.18 und Beispiel 2.25 ist $\mathcal{R}(Q_g) = \mathcal{N}(B)$, und $\mathcal{N}(Q_g) = \overline{\mathcal{R}(B)}$ gilt mit Satz 2.13 und den Ausführungen am Ende des Paragraphen 8. Das ergibt die Darstellungen für Kern und Bild von Q_g sowie mit Satz 2.18 die Gleichwertigkeit der Aussagen (iii) und (vi). Die Äquivalenz (iv) \Leftrightarrow (v) gilt laut Beispiel 2.3. Es wird nun gezeigt, daß $\mathcal{R}(Q_g) = \mathcal{N}(I - L_g)$ und $\mathcal{N}(Q_g) = \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$ ist. Damit folgt die Äquivalenz (v) \Leftrightarrow (vi) aus der Eindeutigkeit der Projektion. Ist $U \in \mathcal{R}(Q_g)$, also f.ü. konstant, so ist $U \in \mathcal{N}(I - L_g)$. Ist umgekehrt $(I - L_g)U = 0$, so ist $g^{*n} * U = U$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $U = Q_g U(\cdot) \in \overline{\mathcal{R}(Q_g)}$. Wegen $\mathcal{N}(Q_g) \subseteq \mathcal{N}(P_g) = \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$ bleibt nur noch $\overline{\mathcal{R}(I - L_g)} \subseteq \mathcal{N}(Q_g)$ zu zeigen. Sei dazu $\{K_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge von Kompakta derart, daß stets $\int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g(u) du < \frac{1}{n}$ ist. Sei $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, und sei für jedes $n \in \mathbb{N}$

$V_n(\cdot) := \int_{K_n} g(u)(U(\cdot) - U(\cdot - u))du$. Dann ist $(I - L_g)U = U - g * U = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, und da für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t V_n(x)dx \right\| &= \left\| \int_{K_n} g(u) \left(\int_{t-u}^t U(x)dx - \int_{-u}^0 U(x)dx \right) du \right\| \\ &\leq 2\|U\|_\infty \int_{K_n} g(u)|u|du, \end{aligned}$$

ist $(I - L_g)U \in \mathcal{N}(Q_g)$ gemäß den Sätzen 2.13 und 2.18. Somit hat man $\mathcal{R}(I - L_g) \subseteq \mathcal{N}(Q_g)$ und wegen der Stetigkeit von Q_g diese Teilmengenbeziehung auch für den Abschluß.

q.e.d.

Insbesondere erhält man, daß für jedes $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ die Differenz $U - g * U$ durch integralbeschränkte Funktionen in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm approximiert werden kann. Das bedeutet, daß stets $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U - g^{*(n+1)} * U\|_\infty = 0$ ist; diese als „Fastinvarianz“ bezeichnete Eigenschaft der n-fach iterierten Faltungen wird in [14] für Darstellungen von Gruppen auf gleichmäßig konvexen Räumen untersucht; siehe auch [36].

Es liegt nahe, die Übereinstimmung der obigen Grenzwerte auf Gemeinsamkeiten der für die jeweiligen Faltungen herangezogenen Funktionenfolgen $(\frac{1}{n}\chi_{[0,n]})_n$ und $(g^{*n})_n$ zurückführen zu wollen. Im Falle der Beschränktheit von g handelt es sich in beiden Fällen um Familien von Wahrscheinlichkeitsdichten, die gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren und deren Trägermengen bei großem n ein Intervall beliebig vorgegebener Länge enthalten (vgl. Lemma 2.4). Diese Eigenschaften einer Funktionenfolge $(f_n)_n$ reichen jedoch nicht aus, um die Übereinstimmung des Grenzwertes $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n * U$ für $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit P_1U zu gewährleisten:

2.27 Beispiel: Seien $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(-x)$. Dann ist f gemäß Beispiel 2.11 integralbeschränkt und daher nach Satz 2.26 insbesondere $P_1f(0) = 0$. Mit $I_k := [2k\pi, (2k+1)\pi)$ und $J_k := [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$ für $k \in \mathbb{N}$ sei nun die Folge $(f_n)_n \in L^1(\mathbb{R})$ definiert durch

$$f_n(x) := \frac{1}{(n+2)\pi} \sum_{k=0}^n \chi_{I_k}(x) + \frac{1}{(n+2)(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \chi_{J_k}(x)$$

Dann ist jedes f_n eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit Träger $\text{Tr}(f_n) = [0, (2n+2)\pi]$, und die Folge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion. Aber

$$\begin{aligned} (f_n * f)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \sin x dx = \frac{1}{(n+2)\pi} \sum_{k=0}^n \left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x dx \right) \\ &\quad + \frac{1}{(n+2)(n+1)\pi} \sum_{k=0}^n \left(\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin x dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+2} \right) \rightarrow \frac{2}{\pi} \neq 0 \text{ mit } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

§10 Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten

In diesem Paragraphen sollen die diskreten Potenzen g^{*n} , $n \in \mathbb{N}$, durch geeignete kontinuierliche Faltungsprozesse w_t , $t > 0$, ersetzt werden.

2.28 Definition: Eine *Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten* ist eine Familie $\{w_t : t > 0\}$ ebensolcher Dichten mit der Eigenschaft

$$\forall s, t > 0 : w_s * w_t = w_{s+t}.$$

Zunächst sollen einige Beispiele derartiger Faltungshalbgruppen genannt werden; da offensichtlich jeweils $(w_a)^{*n} = w_{an}$ für alle positiven Zahlen a gilt, wird damit insbesondere Beispiel 2.1 ergänzt.

2.29 Beispiele: Alle genannten Familien werden mit $t > 0$ indiziert:

a) Zu $\alpha > 0$ sind die *Gammadichten der Ordnung α* auf \mathbb{R} durch

$$g_{\alpha,t}(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ \frac{1}{\Gamma(t)} \alpha^t x^{t-1} e^{-\alpha x} & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

definiert. Jedes $g_{\alpha,t}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte, und für alle $s, t > 0$ gilt $g_{\alpha,s} * g_{\alpha,t} = g_{\alpha,s+t}$: siehe dazu [20, S.46]. Somit ist die Familie $\{g_{\alpha,t} : t > 0\}$ für jedes positive α eine Faltungshalbgruppe.

b) Die *verallgemeinerten Weierstraß-Dichten* $w_{\alpha,t}$ (auch: „*stabile symmetrische Dichten*“) der Ordnung $\alpha \in (0, 2]$ sind über ihre Fouriertransformierte gegeben: Für alle $v \in \mathbb{R}$ sei

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv} w_{\alpha,t}(x) dx = e^{-t|v|^\alpha}.$$

In [8, S.257ff] wird gezeigt, daß es sich jeweils um Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten handelt, wohingegen die für $\alpha > 2$ analog definierten Funktionen zwar die Faltungseigenschaft und alle ein auf eins normiertes Integral haben, aber nicht $\mathbb{R}_{\geq 0}$ -wertig und damit keine Wahrscheinlichkeitsdichten sind (siehe dazu z.B. [4, S.76f]).

Speziell erhält man

b1) im Falle $\alpha = 1$ die *Cauchy-Poisson-Dichten*

$$w_{1,t}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}$$

b2) im Falle $\alpha = 2$ die *Gauß-Weierstraß-Dichten*

$$w_{2,t}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

- c) Analog zu Teil b) sind für $\alpha \in (0, 1)$, $t > 0$ die Lévydichten $f_{\alpha,t} \in L^1(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}_{>0}$ durch die zugehörige Laplacetransformation definiert:

$$\forall \Re z \geq 0 : e^{-tz^\alpha} = \int_0^\infty e^{-zu} f_{\alpha,t}(u) du.$$

Weiter sei $f_{\alpha,t}|_{\mathbb{R}_{<0}} = 0$. Daß es sich hierbei jeweils um Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten handelt, wird z.B. in [50, S.259f] gezeigt.

Ebenso sind auch paarweise Faltungskombinationen der genannten Halbgruppen offensichtlich weitere derartige Familien.

Auch die in Verallgemeinerung der Faltungspotenzen

$$\chi_{[0,1]}^{*n}(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (x-j)_+^{n-1}$$

aus Beispiel 2.1b) definierten Abbildungen

$$g_t(x) := \frac{1}{\Gamma(t)} \sum_{0 \leq j < x} (-1)^j \binom{t}{j} (x-j)^{t-1}$$

sind $L^1(\mathbb{R})$ -Funktionen mit $\int_{-\infty}^\infty g_t(x) dx = 1$; dies wird z.B. in [49] gezeigt, ebenso, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\Re z > 0$

$$\mathcal{L}(g_t)(z) = \frac{1}{z^t} (1 - e^{-z})^t$$

ist. Damit erhält man auch hier die Identität $g_s * g_t = g_{s+t}$ für alle positiven s, t . Es handelt sich aber nicht um eine Familie von Wahrscheinlichkeitsdichten, da z.B. für $x \in (\frac{9}{5}, 2)$ gilt $g_{3/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} (\sqrt{x} - \frac{3}{2}\sqrt{x-1}) < 0$.

Faltungspotenzen lassen sich somit nicht ohne weiteres in eine Faltungshalbgruppen einbetten; dies hängt mit der im allgemeinen nicht gegebenen „unbegrenzten Teilbarkeit“ eines Wahrscheinlichkeitsmaßes zusammen, siehe z.B. [17], [20].

Im folgenden Paragraphen soll das asymptotische Verhalten der über die Halbgruppe $\{w_t : t > 0\}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten auf $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ definierten Abbildung $t \mapsto w_t * U$ für untersucht werden. Dabei kann man sich auf die Betrachtung von Faltungspotenzen beschränken:

2.30 Lemma: Sei $\{w_t : t > 0\} \subseteq L^1(\mathbb{R})$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten. Ist $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, so existiert der gleichmäßige Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} w_t * U$ genau dann, wenn es $a \geq 0, b > 0$ gibt derart, daß der gleichmäßige Limes $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{a+bn} * U$ existiert.

Beweis: Sei $V = \lim_{n \rightarrow \infty} w_{a+bn} * U = \lim_{n \rightarrow \infty} w_b^{*n} * (w_a * U)$. Nach Satz 2.26 ist V konstant, also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} w_{a+bn} * (U - V) = 0$. Damit folgt die Behauptung aus der Tatsache, daß $\|(w_{a+bn+s} * U) - V\|_\infty = \|w_{a+bn+s} * (U - V)\|_\infty \leq \|w_{a+bn} * (U - V)\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \geq 0$ gilt.

§11 Ein Taubersatz für Faltungsprozesse

In sogenannten „Abelschen Sätzen“ wird gezeigt, daß die asymptotische Konvergenz einer Funktion auch diejenige eines entsprechenden Mittelwertes impliziert. Auch wird durch solche Sätze allgemeiner eine Hierarchie unter den verschiedenen Grenzprozessen aufgestellt. „Taubersche Sätze“ dagegen behandeln die Situation, daß das Implikationsgefälle aufgehoben ist, d.h. daß man aus der normalerweise schwächeren Konvergenzaussage auf die stärkere schließen kann. In diesen Fällen ist eine zusätzliche, die sogenannte „Tauberberingung“ erfüllt.

Schon in Satz 2.26 war mit der Äquivalenz der dortigen Bedingungen (iii) und (iv) ein Ergebnis dieser Art gezeigt worden. Mit Hilfe von Lemma 2.30 kann nun der folgende Taubersatz bewiesen werden. Entscheidende neue Implikation ist dabei die Tatsache, daß die Existenz des kontinuierlichen Cesàrogrenzwertes (oder auch die des Abelschen Grenzwertes) bereits hinreichend für die asymptotische Konvergenz ist. Als Tauberbedingung können hier die Meßbarkeit der Abbildung und ihre Darstellbarkeit als Faltungshalbgruppe gesehen werden. Der Operator B sei wie bisher definiert, und $L_{w_1} := (V \mapsto w_1 * V)$.

2.31 Satz: Sei $\{w_t : t > 0\}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten

derart, daß die Abbildung $H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ t \mapsto w_t \end{cases}$ meßbar ist. Zu $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$

sei $W_U : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ t \mapsto w_t * U \end{cases}$. Zudem sei o.B.d.A $W_U(0) := U$ definiert. Dann sind die folgenden Aussagen (i) – (vii) äquivalent; ihnen liegt jeweils die von der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm induzierte Konvergenz zugrunde:

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} W_U(t)$ existiert

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} W_U(n)$ existiert

(iii) der Abelsche Mittelwert $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} (w_u * U) du$ existiert

(iv) der kontinuierliche Cesàromittelwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t W_U(u) du$ existiert

(v) der diskrete Cesàromittelwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n W_U(k)$ existiert

(vi) $U \in \mathcal{N}(B) \oplus \overline{\mathcal{R}(B)}$

(vii) $U \in \mathcal{N}(I - L_{w_1}) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_{w_1})}$

Im Falle der Gültigkeit einer und damit jeder Bedingung sind alle auftretenden Grenzwerte gleich.

Beweis: Aufgrund der für jedes $V \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ vorliegenden Stetigkeit der Operatoren $G_V : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) \rightarrow BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ g \mapsto g * V \end{cases}$ sind zunächst auch die Funktionen

$W_V = G_V \circ H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ t \mapsto w_t * V \end{cases}$ meßbar und gemäß Satz 1.2 wegen

$\|G_V \circ H\|_\infty \leq \|V\|_\infty$ auch lokal integrierbar. Insbesondere sind die $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ -wertigen Bochnerintegrale in (iii) und (iv) wohldefiniert.

Die Äquivalenzen (i) \Leftrightarrow (ii) und (ii) \Leftrightarrow (v) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (vii) gelten nun Lemma 2.30 bzw. Satz 2.26 zufolge, während die Gleichheit von Abelschem und kontinuierlichem Cesàrogrenzwert für beschränkte Funktionen ebenso wie die Implikation (i) \Rightarrow (iv) immer gilt; siehe [2, S.246ff]. Es soll nun (iv) \Rightarrow (v) bewiesen werden. Da für jedes $v > 0$ gilt $W_U(v) \in BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, folgt zunächst mit Satz 1.4, daß

$$(*) \quad \forall y \in \mathbb{R} : \left(\int_0^1 W_U(v) dv \right)(y) = \left(\int_0^1 w_v * U dv \right)(y) = \int_0^1 (w_v * U)(y) dv.$$

Sei nun $S : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ v \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[k, k+1)}(v) W_U(k) \end{cases}$, d.h. es ist $S(v) = W_U(k)$ für $v \in [k, k+1)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann nach Satz 1.4

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \int_0^{n+1} (W_U(v) - S(v)) dv &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_k^{k+1} (w_v * U - w_k * U) dv \\ (\bullet) \quad &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n w_k * \left(\int_0^1 w_v * U dv - U \right). \end{aligned}$$

Behauptung: Die Abbildung $\int_0^1 w_v * U dv - U$ kann bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ von integralbeschränkten Funktionen approximiert werden. Daraus folgt dann gemäß Satz 2.26, daß der Mittelwert auf der rechten Seite der Gleichungskette mit $n \rightarrow \infty$ gegen die Nullfunktion strebt. Aus der Voraussetzung (iv) erhält man damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{n+1} W_U(v) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \int_0^{n+1} S(v) dv = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n W_U(k).$$

Der Beweis der Behauptung erfolgt ähnlich dem von Satz 2.18: Aufgrund der Meßbarkeit von H sind zunächst die Abbildungen

$$\begin{aligned} U_n(\cdot) &:= \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) dr dv \cdot U(\cdot) \quad \text{und} \\ V_n(\cdot) &:= \int_0^1 \left((\chi_{[-n, n]} \cdot w_v) * U \right)(\cdot) dv = \int_0^1 \int_{-n}^n w_v(r) U(\cdot - r) dr dv \\ &= \int_0^1 \left[(w_v * U)(\cdot) - \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) U(\cdot - r) dr \right] dv \end{aligned}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert. Nach dem Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz strebt $\|U_n\|_\infty$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null; wegen

$$\begin{aligned} \|V_n(\cdot) - \left(\int_0^1 w_v * U dv\right)(\cdot)\|_\infty &\stackrel{(*)}{=} \|V_n(\cdot) - \int_0^1 (w_v * U)(\cdot) dv\|_\infty \\ &= \left\| \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) U(\cdot - r) dr dv \right\|_\infty \\ &\leq \|U\|_\infty \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) dr dv \rightarrow 0 \end{aligned}$$

folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n + V_n - U) = \int_0^1 w_v * U dv - U$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Und jedes $U_n + V_n - U$ ist integralbeschränkt, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ erhält man durch geeignetes Zusammenfassen und mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t (U_n + V_n - U)(y) dy \right\| \\ &= \left\| \int_0^t \left\{ \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) dr dv \cdot U(y) - \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) U(y - r) dr dv \right\} dy \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \left\{ \int_0^1 (w_v * U)(y) dv - U(y) \right\} dy \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \int_{\mathbb{R} \setminus [-n, n]} w_v(r) \left(\int_0^t U(y) dy - \int_0^t U(y - r) dy \right) dr dv \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_{-\infty}^\infty w_v(r) \left(\int_0^t U(y - r) dy - \int_0^t U(y) dy \right) dr dv \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \int_{-n}^n w_v(r) \left(\int_{-r}^{t-r} U(s) ds - \int_0^t U(s) ds \right) dr dv \right\| \leq \|U\|_\infty \int_0^1 \int_{-n}^n w_v(r) 2|r| dr dv \\ &\leq 2\|U\|_\infty n. \qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2.32 Bemerkung: Existiert mit den Bezeichnungen des obigen Satzes der kontinuierliche Cesàromittelwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (w_u * U)(t_0) du =: c$ in einem Punkt $t_0 \in \mathbb{R}$, so ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (w_k * U)(t_0) = c$; das geht aus dem obigen Beweis, insbesondere den Gleichungen (\bullet) und $(*)$ hervor. Diese Tatsache wird im Beweis von Satz 3.15 verwendet.

Das Beispiel $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_{I_k}(x)$ (mit $I_k = [k - \frac{1}{2k^2}, k + \frac{1}{2k^2}]$, $a_k = 1 \Leftrightarrow 2^{2j} \leq k < 2^{2j+1}$ für ein $j \in \mathbb{N}_0$, $a_k = -1$ sonst) zeigt, daß die Existenz des kontinuierlichen Cesàrogrenzwertes i.a. nicht die des diskreten impliziert.

Die in Satz 2.31 geforderte Meßbarkeit von $H : t \mapsto w_t$ ist für Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten nicht redundant; für das folgende Beispiel sei Herrn Prof.Dr.L.Baringhaus gedankt:

2.33 Beispiel: Gemäß [26, S.116ff] gibt es eine nicht meßbare Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$\varphi(s+t) = \varphi(s) + \varphi(t), \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Für jedes positive t sei nun die Dichte $w_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ definiert durch

$$w_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-\varphi(t))^2}{2t}}$$

w_t ist also die Normalverteilung mit Parametern $\varphi(t)$ und t , vgl. Beispiel 2.29 b2). Alle w_t sind Wahrscheinlichkeitsdichten, und mit Hilfe der Fouriertransformierten (bzw. „charakteristischen Funktionen“)

$$\mathcal{F}(w_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} w_t(u) du = e^{-ix\varphi(t)} e^{-tx^2/2}$$

sowie deren Eindeutigkeit sieht man, daß es sich um eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten handelt.

Angenommen die Abbildung $H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ t \mapsto w_t \end{cases}$ sei meßbar. Aufgrund der

Stetigkeit der Abbildung $M : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_{-\infty}^0 f(x) dx \end{cases}$ ist dann auch die Funktion

$M \circ H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \int_{-\infty}^0 w_t(x) dx \end{cases}$ meßbar. Für alle positiven t ist nun aber

$$(M \circ H)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(x-\varphi(t))^2}{2t}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \Phi\left(-\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}}\right),$$

wobei $\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow (0, 1) \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \end{cases}$ die Verteilungsfunktion der Standardnormal-

verteilung bezeichnet. Da deren Umkehrfunktion Φ^{-1} stetig und damit meßbar ist, folgt die Meßbarkeit von

$$t \mapsto -\sqrt{t}\Phi^{-1}((M \circ H)(t)) = \varphi(t)$$

im Widerspruch zur Wahl von φ .

Ist die Faltungshalbgruppe $\{w_t : t > 0\}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten aber eine *approximierende Identität* für $t \rightarrow 0$, d.h. ist

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du = 1,$$

so gilt gemäß [8, S.121] für jedes $t_0 > 0$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \|w_{t+t_0} - w_{t_0}\|_1 = \lim_{t \rightarrow 0+} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} w_{t_0}(\cdot - u) w_t(u) du - w_{t_0}(\cdot) \right\|_1 = 0.$$

In diesem Falle ist die $L^1(\mathbb{R})$ -wertige Funktion $H : t \mapsto w_t$ also stetig von rechts¹ und somit insbesondere meßbar.

Dieser Sachverhalt ist auch bei der Betrachtung der in Beispiel 2.29 genannten Faltungshalbgruppen $\{w_{\alpha,t} : t > 0\}$ hilfreich:

2.34 Beispiel: Sei $H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ t \mapsto w_t \end{cases}$ für die jeweils angegebenen Familien von Wahrscheinlichkeitsdichten.

- a) Mit Hilfe partieller Integration erhält man für die Gammadichten $g_{\alpha,t}$ der Ordnung $\alpha > 0$ für jedes $\delta > 0$:

$$1 \geq \int_{-\delta}^{\delta} g_{\alpha,t}(u) du = 1 - \frac{\alpha^t}{\Gamma(t)} \int_{\delta}^{\infty} u^{t-1} e^{-\alpha u} du \geq \frac{(\alpha\delta)^t}{\Gamma(t+1)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1,$$

also ist die obige Abbildung H in diesem Falle meßbar.

- b) Für die verallgemeinerten Weierstraßdichten der Ordnung $\alpha \in (0, 2]$ gilt

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : w_{\alpha,t}(x) = \frac{1}{t^{1/\alpha}} w_{\alpha,1}(xt^{-1/\alpha}) \quad (\bullet)$$

Damit berechnet man für beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} w_{\alpha,t}(x) dx &= \frac{1}{t^{1/\alpha}} \int_{-\delta}^{\delta} w_{\alpha,1}(xt^{-1/\alpha}) dx = \int_{-\delta t^{-1/\alpha}}^{\delta t^{-1/\alpha}} w_{\alpha,1}(x) dx \\ &\rightarrow 1 \text{ mit } t \rightarrow 0, \end{aligned}$$

also handelt es sich bei der genannten Abbildung H auch hier um eine meßbare Funktion.

- c) Da dieselbe Identität (\bullet) auch für die in Beispiel 2.29 c) genannten Levydichten gilt, ist die Meßbarkeit von H auch hier gegeben.

¹Es folgt sogar die Stetigkeit von H ; siehe dazu das nächste Kapitel

Sei $\{w_t : t > 0\}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten, und sei jeweils μ_t das zu w_t gehörige absolut stetige Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann wird durch

$$P_t(x, B) := \mu_t(B - x) \quad x \in \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R} \text{ borelmeßbar}$$

nach [3, S.303f] eine *Markoffsche Halbgruppe von Kernen auf \mathbb{R}* definiert; die Faltungseigenschaft $\mu_t * \mu_s = \mu_{s+t}$ bedeutet dabei, daß die *Chapman-Kolmogoroff-Gleichung* erfüllt ist. Dann ist mit den Bezeichnungen aus Satz 2.31 für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (W(t)U)(x) &:= W_U(t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(y)w_t(x-y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} U(y)P_t(x, dy) := \int_{-\infty}^{\infty} U(\cdot)dP_t(x, \cdot) \end{aligned}$$

Vermöge dieser Einordnung wird die Verwandtschaft des obigen Satzes 2.31 zu einem in [40, S.213f] bewiesenen Ergebnis deutlich: Dort wird gezeigt, daß die auf $\mathcal{C}(K)$ (der Menge der auf dem Kompaktum K stetigen, komplexwertigen Funktionen) definierte Halbgruppe

$$(T(t)f)(x) := \int_K f(y)P_t(x, dy) \quad (x \in K)$$

in der Operatornorm mit $t \rightarrow \infty$ gegen eine Projektion konvergiert. Dabei ist $P_t(\cdot, \cdot)$ eine beliebige Markoffsche Halbgruppe von Kernen auf K .

3. Ergodizität und asymptotisches Verhalten beschränkter C_0 -Halbgruppen unter Faltungsprozessen

In diesem Kapitel werden die bisherigen Ergebnisse unter der zusätzlichen Voraussetzung untersucht und erweitert, daß die Funktion $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ von spezieller Gestalt ist, nämlich $U(\cdot) = T(\cdot)x$ für ein $x \in \mathcal{X}$. Dabei ist $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe linearer Operatoren, deren Definition und benötigte Eigenschaften kurz eingeführt werden sollen; für eine allgemeinere Behandlung sowie für Beweise der angegebenen Fakten sei auf die Literatur verwiesen, z.B. [2], [7] oder [18].

Nach der Bereitstellung von Hilfsmitteln und einigen Vorüberlegungen kann in §6 ein bekannter Ergodensatz um Grenzübergänge von Faltungsprozessen auf der einen und um Limites in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ auf der anderen Seite erweitert werden. Anschließend werden in den Paragraphen sieben und acht analog zum ersten Kapitel kontinuierliche Faltungsprozesse und mit ihnen gebildete nachgeordnete Halbgruppen betrachtet. Deren spezielle Konstruktion und die mit Satz 2.31 erzielten Ergebnisse lassen dann Schlüsse über ihr asymptotisches Verhalten zu. Zuletzt werden als Spezialfälle Halbgruppen betrachtet, die von den gebrochenen Potenzen $-(-A)^\alpha$ von Erzeugern A generiert werden; daraus ergeben sich im letzten Paragraphen Aussagen für äquibeschränkte holomorphe Halbgruppen von Operatoren.

§1 Zu Halbgruppen von Operatoren

3.1 Definitionen: Eine Familie $\{T(t) : t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$ heißt eine *stark stetige* oder auch *C_0 -Halbgruppe*, wenn gilt:

- (i) $T(0) = I$
- (ii) für alle $s, t \geq 0$ ist $T(s+t) = T(s)T(t)$ und
- (iii) für alle $x \in \mathcal{X}$ sind die Abbildungen $t \mapsto T(t)x$ stetig.

Bedingung (ii) heißt die „Halbgruppen-“ und Bedingung (iii) die „ C_0 -Eigenschaft“. Ist der Zusammenhang klar, wird auf den Zusatz „ C_0 “ gelegentlich verzichtet.

Der (*infinitesimale*) *Erzeuger* der stark stetigen Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ ist der Operator $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{X}$, definiert durch

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t}(T(t) - I)x;$$

dabei ist per def. $x \in \mathcal{D}(A)$ genau dann, wenn der genannte Grenzwert existiert.

Eine C_0 -Gruppe auf \mathcal{X} ist eine Familie $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$, die die obigen Bedingungen (i) – (iii) für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllt. Der Erzeuger A von $\{T(t) : t \geq 0\}$ heißt dann der Erzeuger auch der Gruppe.

Zu jeder stark stetigen Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ gibt es Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ derart, daß für alle $t \geq 0$ gilt $T(t) \leq Me^{\omega t}$. Die Halbgruppe heißt „gleichmäßig beschränkt“, wenn $\omega = 0$ gewählt werden kann.

Bedingung (iii) der obigen Definition kann auf die Forderung nach der Stetigkeit im Nullpunkt abgeschwächt werden; dies spiegelt sich in der Namensgebung „ C_0 “ wider.

Die Bahnen $t \mapsto T(t)x$ mit $x \in \mathcal{D}(A)$ sind gerade die klassischen Lösungen des abstrakten Cauchyproblems

$$\forall t \geq 0 : u'(t) = Au(t) \quad \text{und} \quad u(0) = x;$$

dabei heißt eine Funktion $u : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{X}$ klassische Lösung, wenn sie stetig differenzierbar mit Werten in $\mathcal{D}(A)$ ist und das obige Anfangswertproblem löst. Asymptotische Aussagen über $T(t)x$ lassen sich also als Informationen über das Grenzverhalten dieser Lösungsfunktion interpretieren.

Eine Halbgruppe ist durch ihren Erzeuger eindeutig bestimmt. Nach dem Satz von Hille-Yosida erzeugt ein Operator A in \mathcal{X} genau dann eine C_0 -Halbgruppe $T(t)$, wenn er abgeschlossen und dicht definiert ist und es Konstanten $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ gibt derart, daß $(\omega, \infty) \subseteq \rho(A)$ und

$$\|(\lambda - A)^{-m}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^m} \quad (\lambda > \omega, m \in \mathbb{N}).$$

In diesem Falle ist $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$.

Ist $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine stark stetige Halbgruppe mit Erzeuger A , und ist $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, so folgt leicht, daß $\{S(t) : t \geq 0\}$ mit $S(t) := e^{-\omega t}T(t)$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger $A - \omega I$ ist.

Benötigt wird im folgenden noch, daß für alle $t \geq 0$ und $y \in \mathcal{D}(A)$ gilt $\int_0^t T(u)Aydu = T(t)y - y$.

3.2 Beispiel: Ist $\mathcal{X} = BUC(\mathbb{R})$ und mit der Supremumsnorm versehen, so sind durch die Translationen

$$T_1(t)f := (s \mapsto f(s+t)) \quad \text{und} \quad T_2(t)f := (s \mapsto f(s-t))$$

stark stetige Gruppen gegeben. Ihre Erzeuger sind die Differentiationsoperatoren $A_1f = f'$ bzw. $A_2f = -f'$ mit Definitionsmenge $\mathcal{D}(A_{1/2}) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ absolut stetig, } f' \in \mathcal{X}\}$.

Entsprechendes gilt auf $\mathcal{X} = L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ und banachraumwertigen Funktionenräumen.

3.3 Beispiel: Sei $\{w_t : t > 0\}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten. Seien $W_1 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X}))$ und $W_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X}))$ (mit $1 \leq p < \infty$) definiert durch

$$W_i(0) := I \quad \text{und} \quad W_i(t) := (U \mapsto w_t * U) \quad \text{falls } t > 0, \quad (i = 1, 2).$$

Genau dann ist $\{W_i(t) : t \geq 0\}$ eine C_0 -Halbgruppe auf $BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ bzw. $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, wenn

$$\forall \delta > 0 : \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du = 1 \quad (\star)$$

ist. Der infinitesimale Erzeuger der Halbgruppe ist im allgemeinen nicht ohne weiteres anzugeben (siehe [45]).

Beweis: Gilt (\star) , so folgt die Gültigkeit der Halbgruppeneigenschaft aus Satz 1.5, und die Stetigkeit wird in [11, S.57] bewiesen.

Handelt es sich umgekehrt bei $W_1(t)$ um eine C_0 -Halbgruppe, so wähle man zu $\delta > 0$ eine gleichmäßig stetige Funktion $f_\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_\delta(0) = 1 = \max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ und $\text{Tr}(f) \subseteq [-\delta, \delta]$. Ist dann noch $c \in \mathcal{X}$ mit $\|c\| = 1$, so ist $F_\delta := (x \mapsto f(x) \cdot c) \in BUC(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, und man erhält

$$\begin{aligned} 1 &\geq \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du = \|F_\delta\|_\infty \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du \geq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} w_t(u) F_\delta(-u) du \right\| \\ &\rightarrow_{t \rightarrow 0} \|F_\delta(0)\| = 1 \quad \text{aufgrund der } C_0\text{-Eigenschaft.} \end{aligned}$$

Ist $W_2(t)$ eine C_0 -Halbgruppe, so sei zu beliebig vorgegebenem $\delta > 0$ wie oben ein Einheitsvektor $c \in \mathcal{X}$ gewählt und damit $F_\delta := \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \cdot c$ definiert. Dann folgt aus der C_0 -Eigenschaft

$$\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(1 - w_t * \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(y)\right)^p dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left|\chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(y) - w_t * \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(y)\right|^p dy \rightarrow_{t \rightarrow 0} 0$$

und andererseits mit der Jensenschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(1 - w_t * \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(y)\right)^p dy &\geq \frac{1}{\delta^{p-1}} \left(\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} (1 - w_t * \chi_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]}(y)) dy \right)^p \\ &\geq \frac{1}{\delta^{p-1}} \left(\int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du\right) dy \right)^p = \delta \left(1 - \int_{-\delta}^{\delta} w_t(u) du\right)^p. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich (\star) .

3.4 Definition: Die Faltungshalbgruppe $\{w_t : t > 0\}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten heißt schwach stetig, wenn sie Bedingung (\star) aus Beispiel 3.3 genügt.

Insbesondere sind die in Beispiel 2.34 genannten Faltungshalbgruppen schwach stetig.

3.5 Beispiel: Zu $t > 0$ sei $g_t(u) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-\frac{u^2}{4t})$; in der Notation von Beispiel 2.29 ist also $g_t = g_{2,t}$. Die *Gauß-Weierstraß-Halbgruppe* auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, ist definiert durch

$$\forall f \in \mathcal{X} : \quad T(0)f := f, \quad T(t)f = g_t * f \quad (t > 0).$$

Es ist bekannt, daß $T(t)$ eine C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A ist, definiert durch

$$Af = f'' \text{ für}$$

$$f \in \mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f, f' \text{ f.ü. differenzierbar mit } f', f'' \in \mathcal{X}\},$$

und daß $u(\cdot, t) := T(t)u_0 = g_t * u_0$, $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, die eindeutige Lösung ist, die der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

genügt. Ist $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$ wesentlich beschränkt, so konvergiert $u(x, t)$ mit $t \rightarrow \infty$ gleichmäßig in x gegen die Nullfunktion; dies folgt mit Korollar 2.15 und Lemma 2.30 oder direkt mit Hilfe der Hölderungleichung.

Korollar 3.14 wird zeigen, daß die Bedingung

$$„u_0 \in \overline{\{f' \in L^1(\mathbb{R}) : f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ absolut stetig}\}}“$$

notwendig und hinreichend für die Existenz von $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ ist, und daß im Falle ihrer Gültigkeit der Grenzwert die Nullfunktion ist. Demgegenüber gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(x, t)\|_p = 0$ stets für $1 < p < \infty$.

§2 Ein Ergodensatz für gleichmäßig beschränkte Halbgruppen von Operatoren

3.6 Satz: Sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A . Dann gilt:

- a) $\mathcal{N}(A) \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \{0\}$
- b) Ist $x \in \mathcal{X}$, so sind äquivalent:
 - (i) $P_1^{[T]}x := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r T(u)x du$ existiert
 - (ii) $P_2^{[T]}x := \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u)x du$ existiert
 - (iii) $x \in \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Im Falle der Gültigkeit der Bedingungen ist $P_1^{[T]}x = P_2^{[T]}x$.

- c) $\mathcal{N}(P_1^{[T]}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ und $\mathcal{R}(P_1^{[T]}) = \mathcal{N}(A) = \bigcap_{t \geq 0} \text{fix} T(t)$.

$P_1^{[T]}$ ist also die Projektion von $\mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ auf $\mathcal{N}(A)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Zum **Beweis** siehe z.B. [2, S.246].

Die gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe $T(t)$ heißt *ergodisch*, wenn $P_1^{[T]}$ auf ganz \mathcal{X} existiert; dies ist in reflexiven Räumen stets der Fall. In [40, S.340ff] finden sich neben dem Beweis dieser Tatsache auch Bedingungen für die *gleichmäßige Ergodizität* der Halbgruppe, was bedeutet, daß die Operatoren $x \mapsto \frac{1}{t} \int_0^t T(u)xdu$ in der Operatornorm konvergieren. Entsprechend läßt sich individuelle Ergodizität von Vektoren definieren:

3.7 Definitionen: $x \in \mathcal{X}$ heißt *ergodisch* unter der gleichmäßig beschränkten C_0 -Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$, wenn der kontinuierliche Cesàrogrenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(u)xdu =: P_1^{[T]}x$$

existiert.

x heißt *total ergodisch* unter $T(\cdot)$, wenn für jedes $\eta \in \mathbb{R}$ der Cesàrogrenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta u} T(u)xdu$ existiert, d.h. wenn x ergodisch unter jedem $e^{i\eta \cdot} T(\cdot)$ ist.

Ist der zugrundeliegende Raum \mathcal{X} reflexiv, so ist jeder Vektor $x \in \mathcal{X}$ total ergodisch unter jeder gleichmäßig beschränkten Halbgruppe $T(t)$; dies ergibt sich leicht aus der obigen Bemerkung.

§3 Vorüberlegungen

Im folgenden sei nun $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$ entweder

- (I) eine gleichmäßig durch $M \geq 1$ beschränkte C_0 -Gruppe mit Erzeuger A oder
- (II) eine symmetrisch durch $T(-t) := T(t)$ ($t > 0$) auf die ganze reelle Achse fortgesetzte, gleichmäßig durch $M \geq 1$ beschränkte Halbgruppe mit Erzeuger A .

Zudem sei $T_x(\cdot) = (t \mapsto T(t)x)$ für jedes $x \in \mathcal{X}$ dessen Orbit (Bahn) unter $T(t)$.

Die folgende Inklusionskette gilt in beiden Fällen (I) und (II); sie ist wohlbekannt, ihr kurzer Beweis ist zum besseren Verständnis angefügt.

3.8 Lemma: *Es ist $\mathcal{R}(A) \subseteq \{x \in \mathcal{X} : \sup\{\|\int_0^t T(u)xdu\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty\} \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$*

Beweis: Ist $x = Ay \in \mathcal{R}(A)$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ $\|\int_0^t T(u)xdu\| = \|T(t)y - y\| \leq (M + 1)\|y\|$.

Ist andererseits $x \in \mathcal{X}$ mit $\sup\{\|\int_0^t T(u)xdu\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$, so ist offensichtlich $P_1^{[T]}x = 0$ und daher $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ nach Satz 3.6c).

Daraus folgt, daß sich die Bahnen der Elemente $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ gleichmäßig durch integralbeschränkte Funktionen approximieren lassen. Ist umgekehrt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(\cdot - u)xdu \equiv 0$, so folgt insbesondere $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t T(-u)xdu = 0$ und daher mit Satz 3.6, daß $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ ist.

3.9 Korollar zu Satz 2.26: *Es sind äquivalent:*

(i) $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$

(ii) *Es gibt eine bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen $T_x(\cdot)$ konvergente Folge $(V_n)_n$ von $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ -Funktionen derart, daß*

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sup\{\|\int_0^t V_n(u)du\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

(iii) *Es gibt eine Folge $(U_n)_n \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})^{\mathbb{N}}$ lipschitzstetiger, f.ü. differenzierbarer Funktionen derart, daß die Folge der Ableitungen $(U'_n)_n \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})^{\mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen $T_x(\cdot)$ konvergiert.*

Beweis: Dies folgt gemäß Lemma 3.8 und Satz 2.26 aus den gegebenen Darstellungen für $\overline{\mathcal{R}(B)}$ mit dem dort definierten Operator B .

Die „Position“ des Orbits $T_x(\cdot)$ als Element von $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ gibt also bereits Auskunft über die Zugehörigkeit von x zu $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Es gilt auch die Äquivalenz

$$x \in \mathcal{N}(A) \Leftrightarrow T_x(\cdot) \text{ konstant} \Leftrightarrow T_x(\cdot) \in \mathcal{N}(B).$$

Damit lassen sich mit Hilfe von Satz 2.26 bereits mehrere äquivalente Aussagen an den Ergodensatz 3.6 anfügen; bevor der entsprechende Satz mit 3.12 formuliert wird, sollen noch einige Hilfsmittel bereitgestellt werden; damit kann die Äquivalenzkette noch weiter verlängert werden.

Es werden dazu die beiden Typen (I) und (II) betrachteter Familien $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ getrennt untersucht. Zur Vereinfachung der Notation seien jeweils

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^{*0}(u)T(u)xdu := x \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} g^{*0}(u)T(\cdot - u)xdu := T_x(\cdot)$$

definiert.

§4 Typ(I)

Seien $x \in \mathcal{X}$ und $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Gruppe mit Erzeuger A .

3.10 Lemma: *Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$\begin{aligned} a) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)xdu =: Q_g^{[T]}x \text{ existiert} \\ & \Leftrightarrow Q_g T_x(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(\cdot - u)xdu \text{ existiert bezüglich } \|\cdot\|_\infty. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist $Q_g T_x(\cdot) \equiv Q_g^{[T]}x$.

- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} g^{*k}(u)T(u)xdu =: P_g^{[T]}x$ existiert
 $\Leftrightarrow P_g T_x(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} g^{*k}(u)T(\cdot - u)xdu$ existiert als gleichmäßiger Grenzwert.
 In diesem Falle ist $P_g T_x(\cdot) \equiv P_g^{[T]}x$.

Beweis:

- a) Sei $h \in L^1(\mathbb{R})$ definiert durch $h(u) := g(-u)$. Existiert $Q_g^{[T]}x$, und ist $\varepsilon > 0$, so gilt für alle $v \in \mathbb{R}$ und alle hinreichend großen n

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} h^{*n}(w)T(v-w)xdw - T(v)Q_g^{[T]}x \right\| \\ = \left\| T(v) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)xdu - Q_g^{[T]}x \right) \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

was die Existenz des gleichmäßigen Grenzwertes $Q_h T_x(\cdot)$ beweist. Nach Satz 2.26 existiert auch $Q_g T_x(\cdot)$ und stimmt mit $Q_h T_x(\cdot)$ überein. Umgekehrt liefert die Existenz von $Q_g T_x(\cdot)$ nach dem genannten Satz diejenige von $Q_h T_x(\cdot)$ und damit insbesondere die von $Q_h T_x(0) = Q_g^{[T]}x$.

- b) Dies folgt völlig analog zu Teil b).

Die Konstanz der Limites $P_1 T_x(\cdot)$, $Q_g T_x(\cdot)$ und $P_g T_x(\cdot)$ (und auch ihre Gleichheit) ist mit Satz 2.26 gezeigt.

§5 Typ (II)

Wird $\{T(t) : t > 0\}$ symmetrisch durch $T(-t) := T(t)$ ($t > 0$) auf die negative reelle Achse fortgesetzt und um $T(0) := I$ erweitert, so kann die Halbgruppeneigenschaft nicht wie in §4 ohne weiteres angewandt werden. Andere Überlegungen scheinen daher notwendig, um zu denselben Ergebnissen wie im vorangehenden Abschnitt zu gelangen.

3.11 Lemma: Seien $\mathcal{B}_g := \{x \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)xdu \text{ existiert}\}$ und

$\mathcal{C}_g := \{x \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^{*k}(u)T(u)xdu \right) \text{ existiert}\}$. Dann gilt:

- a) \mathcal{B}_g und \mathcal{C}_g sind abgeschlossene Unterräume von \mathcal{X} , und

$$Q_g^{[T]} : \begin{cases} \mathcal{B}_g \rightarrow \mathcal{X} \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)xdu = \lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * T_x)(0) \end{cases} \text{ sowie}$$

$$P_g^{[T]} : \begin{cases} \mathcal{C}_g \rightarrow \mathcal{X} \\ x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\infty}^{\infty} g^{*k}(u)T(u)xdu \right) \end{cases} \text{ sind beschränkte lineare Operatoren.}$$

- b) Es ist $\mathcal{R}(Q_g^{[T]}) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(P_g^{[T]})$, und $y \in \mathcal{N}(A)$ impliziert $Q_g^{[T]}y = y = P_g^{[T]}y$.
- c) $\mathcal{N}(Q_g^{[T]}) = \mathcal{N}(P_g^{[T]}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Somit ist $Q_g^{[T]} = P_g^{[T]}$ die Projektion von $\mathcal{B}_g = \mathcal{C}_g = \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ auf $\mathcal{N}(A)$ längs $\overline{\mathcal{R}(A)}$, was nach Satz 3.6 bedeutet $Q_g^{[T]} = P_g^{[T]} = P_1^{[T]} = P_2^{[T]}$. Insbesondere gilt $Q_g^{[T]} = Q_h^{[T]}$ und $P_g^{[T]} = P_h^{[T]}$ für jede Wahrscheinlichkeitsdichte $h \in L^1(\mathbb{R})$.

Beweis:

- a) Ist $(x_n)_n$ eine gegen $x \in \mathcal{X}$ konvergente Folge in \mathcal{B}_g , so folgt mit Hilfe eines gewöhnlichen 3ε -Arguments, daß $(\int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)xdu)_n$ eine Cauchyfolge in \mathcal{X} , daß also $x \in \mathcal{B}_g$ ist; genauso argumentiert man auch für \mathcal{C}_g . Die Linearität von \mathcal{B}_g und \mathcal{C}_g bzw. $Q_g^{[T]}$ und $P_g^{[T]}$ ist klar, ebenso die Beschränktheit der beiden Operatoren.
- b) Die Inklusionen „ $\mathcal{R}(Q_g^{[T]}) \supseteq \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{R}(P_g^{[T]})$ “ folgen sofort aus der Tatsache, daß $\mathcal{N}(A) = \bigcap_{t \geq 0} \text{fix}T(t)$ gemäß Satz 3.6c). Zum Beweis der umgekehrten Teilmengenbeziehung sei zunächst bemerkt, daß aufgrund der Halbgruppeneigenschaft für jedes $y \in \mathcal{X}$ und alle $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \forall r \in \mathbb{R} : \left\| \int_0^r T(u)(I - T(t))ydu \right\| &= \left\| \int_0^t T(u)(I - T(r))ydu \right\| \\ &\leq 2M\|y\|t. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.26 folgt

$$\forall t \geq 0 : 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^{*n}(u)T(u)(I - T(t))ydu = Q_g^{[T]}(I - T(t))y,$$

woraus man auch $P_g^{[T]}(I - T(t))y = 0$ schließt. Insbesondere erhält man $\mathcal{R}(Q_g^{[T]}) \cup \mathcal{R}(P_g^{[T]}) \subseteq \bigcap_{t \geq 0} \text{fix}T(t) \stackrel{3.6c)}{=} \mathcal{N}(A)$.

- c) Ist $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, so folgt nach Lemma 3.8 und Satz 2.26 die gleichmäßige Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{*n} * T_x(\cdot) \equiv 0$ und insbesondere $Q_g^{[T]}x = \lim_{n \rightarrow \infty} (g^{*n} * T_x)(0) = 0$, d.h. $x \in \mathcal{N}(Q_g^{[T]}) \subseteq \mathcal{N}(P_g^{[T]})$.

Ist umgekehrt $x \in \mathcal{N}(P_g^{[T]})$, so sei $(K_n)_n$ eine Folge kompakter Teilmengen von \mathbb{R} dergestalt, daß jeweils $\int_{\mathbb{R} \setminus K_n} g^{*n}(u)du < \frac{1}{(n+1)^2}$ ist.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien

$$\begin{aligned} x_n &:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_{\mathbb{R} \setminus K_j} g^{*j}(u)du \cdot x \text{ und} \\ y_n &:= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_{K_j} g^{*j}(u)T(u)xdu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_{\mathbb{R}} g^{*j}(u) T(u) x du \\
&\quad - \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \int_{\mathbb{R} \setminus K_j} g^{*j}(u) T(u) x du.
\end{aligned}$$

Dann konvergieren die Folgen $(x_n)_n$ und $(y_n)_n$ jeweils gegen Null, so daß also $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - x_n - y_n)$ ist. Es wird gezeigt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup\{\|\int_0^t T(u)(x - x_n - y_n) du\| : t \in \mathbb{R}\} < \infty$; nach Lemma 3.8 beweist dies $x \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, und insgesamt folgt so $\mathcal{N}(Q_g^{[T]}) \subseteq \mathcal{N}(P_g^{[T]}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$. Sei also $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini ergibt sich für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^t T(u)(x - x_n - y_n) du \right\| \\
&= \frac{1}{n+1} \left\| \int_0^{|t|} T(u) \left(x \cdot \sum_{j=0}^n \int_{K_j} g^{*j}(v) dv - \sum_{j=0}^n \int_{K_j} g^{*j}(v) T(v) x dv \right) du \right\| \\
&= \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{j=0}^n \int_{K_j} g^{*j}(v) \int_0^{|v|} (I - T(|t|)) T(u) x du dv \right\| \\
&\leq \frac{1}{n+1} 2M \|x\| \sum_{j=0}^n \int_{K_j} |v| g^{*j}(v) dv,
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

§6 Ein Ergodensatz und Folgerungen

Unter Beibehaltung der bisherigen Notation sei B der lineare Operator $BU := -U'$, definiert auf $\mathcal{D}(B) := \{U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : U \text{ lipschitzstetig und f.ü. differenzierbar mit } U' \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})\}$. Ferner sei der Operator $L_g \in \mathcal{L}(L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}))$ definiert durch $L_g U := g * U$.

Die angekündigte Erweiterung von Satz 3.6 kann nun simultan für beide Typen (I) und (II) formuliert werden:

3.12 Satz: Sei $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ vom Typ (I) oder (II) wie in §3 eingeführt, und sei $x \in \mathcal{X}$. Dann sind äquivalent:

(i) $P_1^{[T]} x := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r T(u) x du$ existiert

(ii) Der gleichmäßige Grenzwert $P_1 T_x(\cdot) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_0^r T(\cdot - u) x du$ existiert

(iii) $P_2^{[T]} x := \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(u) x du$ existiert

- (iv) Der gleichmäßige Grenzwert $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} T(\cdot - u)x du$ existiert
- (v) $Q_g^{[T]}x := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty g^{*n}(u)T(u)x du$ existiert
- (vi) Der gleichmäßige Grenzwert $Q_g T_x(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty g^{*n}(u)T(\cdot - u)x du$ existiert
- (vii) $P_g^{[T]}x := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^\infty g^{*k}(u)T(u)x du$ existiert
- (viii) Der gleichmäßige Grenzwert $P_g T_x(\cdot) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \int_{-\infty}^\infty g^{*k}(u)T(\cdot - u)x du$ existiert
- (ix) $x \in \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ (wobei der Abschluß in \mathcal{X} erfolgt)
- (x) $T_x(\cdot) \in \mathcal{N}(B) \oplus \overline{\mathcal{R}(B)}$ (wobei der Abschluß in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ erfolgt)
- (xi) $T_x(\cdot) \in \mathcal{N}(I - L_g) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_g)}$ (wobei der Abschluß in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ erfolgt)

Im diesem Falle stimmen die gleichmäßigen Limites in (ii), (iv), (vi), (viii) überein und sind gleich der konstanten Funktion $Q_g T_x(\cdot) \equiv P_1^{[T]}x = P_2^{[T]}x = Q_g^{[T]}x = P_g^{[T]}x$. Weiterhin hat man $\mathcal{N}(Q_g^{[T]}) = \mathcal{N}(P_g^{[T]}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ und $\mathcal{R}(Q_g^{[T]}) = \mathcal{N}(A) = \{y \in \mathcal{X} : T_y(\cdot) \text{ ist konstant}\}$.

Beweis: Die Äquivalenzen (i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (vi) \Leftrightarrow (viii) \Leftrightarrow (ix) \Leftrightarrow (x) \Leftrightarrow (xi) ergeben sich mit Satz 2.26 aus Lemma 3.8 und der an Korollar 3.9 anschließenden Bemerkung über den Kern von A .

Ist nun $T(\cdot)$ vom Typ (I), so können (v) und (vii) gemäß Lemma 3.10 in diese Kette eingereiht werden. Ist $T(\cdot)$ vom Typ (II), so folgt der Rest nach Lemma 3.11. q.e.d.

Der entscheidende Unterschied zwischen Bahnen T_x und gewöhnlichen L^∞ -Funktionen U , der im Kontext von Satz 3.12 die Übereinstimmung von punktwiser und gleichmäßiger Konvergenz bedingt, ist die Halbgruppeneigenschaft: Ihretwegen sind das Verhalten der Bahnen vorhersehbar und Verschiebungen kontrollierbar.

3.13 Bemerkung: Ist $T(\cdot)x$ nicht injektiv, so folgt mit Satz 3.12 bereits, daß $x \in \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$ ist: Sind nämlich $0 \leq t_1 < t_2$ mit $T(t_1)x = T(t_2)x$, so erhält man aus der Halbgruppeneigenschaft von $T(t)$, daß mit $b := t_2 - t_1$ für alle $s \geq t_1$ gilt $T(s + b)x = T(s)x$, daß also $T(\cdot)x$ in $\mathbb{R}_{\geq t_1}$ periodisch (oder konstant) ist. Definiert man $c := \frac{1}{b} \int_{t_1}^{t_1+b} T(u)x du$, so folgt wie im ersten Kapitel, daß $(T(\cdot)x - c)$ integralbeschränkt und somit $P_1^{[T]}x = c$ ist.

Aus Satz 3.12 kann auch ein Analogon zu Satz 2.26 für L^p -Konvergenz, $1 \leq p < \infty$, geschlossen werden, vgl. [13]:

3.14 Korollar: Seien $1 \leq p < \infty$ und $U \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t U(\cdot - u) du$ existiert bezüglich $\|\cdot\|_p$
- (ii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda u} U(\cdot - u) du$ existiert bezüglich $\|\cdot\|_p$
- (iii) $(g^{*n} * U)_n$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_p$
- (iv) $(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (g^{*k} * U))_n$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_p$
- (v) $U \in \overline{\{V' \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : V \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \text{ absolut stetig und f.ü. diffbar}\}}$
- (vi) $U \in \overline{\{V - g * V : V \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})\}}$

In diesem Falle stimmen die Grenzwerte in (i), (ii) und (iii) überein und sind gleich der Nullfunktion.

Im Fall $p \neq 1$ sind alle Bedingungen (i) – (vi) erfüllt.

Beweis: Wie im reellwertigen Fall beweist man, daß die Translationen

$$T(t)V := (s \mapsto V(s - t)), \quad t \in \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Gruppe auf $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ bilden, deren Erzeuger

$$A : V \mapsto -V' \quad \text{auf}$$

$\mathcal{D}(A) = \{V \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : V \text{ absolut stetig und f.ü. diffbar, } V' \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})\}$ definiert ist; siehe dazu [2, S.14].

Folglich ist $U(\cdot - u) = T_U(u)(\cdot)$ der U -Orbit von $T(\cdot)$, und da die in $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ gebildeten obigen Bochnerintegrale gemäß [2, S.27] f.ü. mit den entsprechenden punktweise definierten Faltungen übereinstimmen, folgt die Behauptung wegen

$$\mathcal{N}(A) \stackrel{3.6}{=} \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \text{fix} T(t) = \{V \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X}) : V \text{ f.ü. konstant}\} = \{0\}$$

aus Satz 3.12 und Beispiel 2.3.

Sei nun $p \neq 1$, und sei $f(x) := \|U(x)\|$, ($x \in \mathbb{R}$). Wegen der Reflexivität von $L^p(\mathbb{R})$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n g^{*k} * f$, also folgt aus dem bisher Gezeigten $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * U\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g^{*n} * f\|_p = 0$, die Behauptung.

§7 Kontinuierliche Faltungsprozesse mit Halbgruppen

So wie Satz 3.12 aus Satz 2.26 durch Betrachtung des Spezialfalls $U = T_x$ hervorging und Grenzübergänge in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ mit solchen in \mathcal{X} in Beziehung bringt, kann auch die Kette der einander äquivalenten Bedingungen in Satz 2.31 für derartige Funktionen $U = T_x$ um die jeweils punktweisen Konvergenzen erweitert werden; wie gehabt seien dabei $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ vom Typ (I) oder (II) mit Erzeuger A sowie B und L_{w_1} wie in Satz 2.31 definiert.

3.15 Satz: Sei $\{w_t : t > 0\}$ eine Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten

derart, daß die Abbildung $H : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^1(\mathbb{R}) \\ t \mapsto w_t \end{cases}$ meßbar ist. Zu $x \in \mathcal{X}$ seien

$$W_{T_x} : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X}) \\ t \mapsto w_t * T_x \end{cases} \quad \text{und } W(\cdot)x : \begin{cases} \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{X} \\ t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} w_t(u)T(u)xdu \end{cases} \quad . \text{ Au\ss}erdem$$

seien o.B.d.A $W_{T_x}(0) := T_x$ und $W(0)x := x$ gesetzt.

Dann sind die folgenden Aussagen \u00e4quivalent; dabei liegt Grenzüberg\u00e4ngen in \mathcal{X} die $\|\cdot\|$ - und solchen in $L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ die $\|\cdot\|_\infty$ -Norm zugrunde:

- (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} W_{T_x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (w_t * T_x)$ existiert
- (i') $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_t(u)T(u)xdu$ existiert
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{T_x}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_n * T_x)$ existiert
- (ii') $\lim_{n \rightarrow \infty} W(n)x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_n(u)T(u)xdu$ existiert
- (iii) $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} (w_u * T_x) du$ existiert
- (iii') $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} W(u)xdu$ existiert
- (iv) der kontinuierliche Ces\u00e0rogrenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t W_{T_x}(u) du$ existiert
- (iv') $P_1^{[W]}x := \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t W(u)xdu$ existiert
- (v) der diskrete Ces\u00e0rogrenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n W_{T_x}(k)$ existiert
- (v') $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n W(k)x$ existiert
- (vi) $T_x(\cdot) \in \mathcal{N}(B) \oplus \overline{\mathcal{R}(B)}$
- (vi') $x \in \mathcal{N}(A) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)}$
- (vii) $T_x(\cdot) \in \mathcal{N}(I - L_{w_1}) \oplus \overline{\mathcal{R}(I - L_{w_1})}$

Im Falle der G\u00fcltigkeit der Aussagen sind alle Grenzwerte in \mathcal{X} gleich der Projektion der direkten Summe in (vi') auf $\mathcal{N}(A)$ entlang $\overline{\mathcal{R}(A)}$. Ebenso stimmen alle gleichm\u00e4\u00dfigen Limites \u00fcberein; sie sind konstant gleich dem bei der punktweisen Betrachtung auftretenden Grenzwert.

Beweis: Die \u00c4quivalenz der nicht apostrophierten Bedingungen ist Aussage von Satz 2.31; gilt nun (i), so existiert wegen der Unabh\u00e4ngigkeit der \u00e4quivalenten Aussage (vi) von der jeweiligen Wahl der Faltungshalbgruppe auch

$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_t(-u)T_x(u)du = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} w_t(y)T_x(y)dy$. Das ergibt (i'). Mit Hilfe der trivialen Implikationen sowie der nach Satz 3.12 geltenden \u00c4quivalenzen (ii') \Leftrightarrow (v') \Leftrightarrow (vi') \Leftrightarrow (vi) reihen sich so die Aussagen (i'), (ii'), (v') und (vi') in die genannte \u00c4quivalenzkette ein.

Ebenfalls klar ist die Implikation (i') \Rightarrow (iv'), und (iii') \Leftrightarrow (iv') gilt wegen der Beschr\u00e4nktheit der Funktion $W(\cdot)x$. Schlie\u00dflich gilt (iv') \Rightarrow (v') Bemerkung 2.32 zufolge.

Ist $\{w_t : t > 0\}$ eine schwach stetige Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten, so wird nach Beispiel 3.3 durch $W : t \mapsto w_t * U$ eine C_0 -Halbgruppe auf $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{X})$, $1 \leq p < \infty$ definiert. Mit Korollar 3.14 und dem obigen Satz erhält man nun im Falle $p > 1$, daß diese Halbgruppe stark stabil ist:

3.16 Definition: Die gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ heißt *stark stabil*, wenn für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = 0$.

Ist $\mathcal{X} = \mathbb{C}$, so liefert ein Ergebnis von L. Weis [46], daß für positive C_0 -Halbgruppen $T(t)$ auf $L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, ($1 \leq p < \infty$) mit Erzeuger A gilt

$$s(A) := \sup\{\Re \lambda : \lambda \in \sigma(A)\} = \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \sup_{t>0} e^{-\omega t} \|T(t)\| < \infty\} =: \omega(T).$$

$s(A)$ heißt *Spektralschranke* von A und $\omega(T)$ *Wachstumsschranke* von $T(t)$.

Ist nun $s(A) < 0$, so folgt daraus die Stabilität der Halbgruppe.

Speziell bei den oben betrachteten Halbgruppen W ist es aber im allgemeinen nicht klar, ob die Spektralschranke ihres Erzeugers negativ ist, so daß das hiesige Ergebnis in diesem Sonderfall günstiger ist.

§8 Ergodizitäts- und Stabilitätsresultate für nachgeordnete Halbgruppen

Beispiel 3.3 läßt sich verallgemeinern:

3.17 Satz: Seien $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ vom Typ (I) oder (II) und $\{w_t : t \geq 0\}$ eine schwach stetige Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten. Sei weiter $W : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X})$ definiert durch $W(0) := I$ und

$$\forall t > 0 : W(t) : \left(x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} w_t(u) T(u) x du \right).$$

Ist dann

- a) $\forall t > 0 : w_t|_{(-\infty, 0)} \equiv 0$ oder
- b) $\{T(t) : t \in \mathbb{R}\}$ vom Typ (I),

so ist $\{W(t) : t \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe.

Beweis: Die starke Stetigkeit erhält man aus Beispiel 3.3, die Halbgruppeneigenschaft (ii) folgt leicht mit den Bedingungen a) bzw. b). Schließlich gilt offensichtlich für alle $x \in \mathcal{X}$:

$$\forall t > 0 : \|W(t)x\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} w_t(u) \|T(u)x\| du \leq \sup\{\|T(u)x\| : u \in \mathbb{R}\} \cdot 1,$$

d.h. $W(t)$ ist gleichmäßig beschränkt.

3.18 Definition: Die in der in Satz 3.17 angegebenen Weise mit Hilfe schwach stetiger Faltungshalbgruppen von Wahrscheinlichkeitsdichten konstruierten C_0 -Halbgruppen heißen *nachgeordnete Halbgruppen*.

Die Frage, inwieweit sich der Erzeuger einer nachgeordneten Halbgruppe aus dem der zugrundeliegenden Halbgruppe darstellen läßt, ist im allgemeinen nicht ohne weiteres zu beantworten. Hier soll darauf nur in dem Falle eingegangen werden, daß es sich bei der Faltungshalbgruppe von Wahrscheinlichkeitsdichten um eine Familie von Lévydichten handelt: siehe Satz 3.22. Zum allgemeinen Fall sei auf [43] und [45] verwiesen

Der folgende Satz verallgemeinert in Teilen ein für gebrochene Potenzen von Operatoren bekanntes Resultat, vgl. Korollar 3.23:

3.19 Satz: Sei $\{W(t) : t \geq 0\} \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{X})$ eine der gleichmäßig beschränkten C_0 - (Halb)Gruppe $T(t)$ nachgeordnete Halbgruppe mit Erzeuger A_W . Dann sind $\mathcal{N}(A_W) = \mathcal{N}(A)$ und $\overline{\mathcal{R}(A_W)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$; dabei bezeichnet A den Erzeuger von $T(t)$. Insbesondere läßt sich die Äquivalenzkette in Satz 3.15 um die den Bedingungen (i) – (vii) gleichwertige Aussage

$$(vii') \quad x \in \mathcal{N}(A_W) \oplus \overline{\mathcal{R}(A_W)}$$

erweitern.

Beweis: Gemäß Satz 3.6 gelten $(iv') \Leftrightarrow (vii')$ sowie $\mathcal{N}(A_W) = \mathcal{R}(P_1^{[W]}) \stackrel{3.15}{=} \mathcal{N}(A)$ und $\overline{\mathcal{R}(A_W)} = \overline{\mathcal{R}(P_1^{[W]})} \stackrel{3.15}{=} \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Satz 3.15 kann nun in bezug auf gleichmäßig beschränkte nachgeordnete C_0 -Halbgruppen ausgewertet werden. Ist \mathcal{X} reflexiv, so existiert nach Satz 3.15 der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x$ für jede nachgeordneten Halbgruppe $W(t)$ und jedes $x \in \mathcal{X}$. Der nächste Satz gibt Auskunft über das diesbezügliche Verhalten in allgemeinen, also auch nicht reflexiven Banachräumen; die Definitionen der individuellen Ergodizität wurden in §2 gegeben.

3.20 Satz: Seien $T(t)$ vom Typ (I) oder (II) und $W(t)$ eine ihr nachgeordnete Halbgruppe mit Erzeuger A_W . Sei weiter $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt:

- a) Gibt es $a \geq 0, b > 0$ derart, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} W(a + bn)x = c \in \mathcal{X}$ existiert, so ist $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x = c$.
- b) Ist $T(\cdot)x$ nicht injektiv, so existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x$.
- c) Es sind äquivalent:
 - (i) $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x$ existiert
 - (ii) x ist ergodisch unter $T(\cdot)$.

(iii) x ist ergodisch unter $W(\cdot)$

(iv) x ist total ergodisch unter $W(\cdot)$.

In diesem Falle ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, $x_2 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, und die betrachteten Cesàrogrenzwerte in (ii) und (iii) stimmen mit dem Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x = x_1 \text{ überein, wohingegen für alle } \eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ gilt}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta s} W(s)x ds = 0.$$

d) $W(\cdot)$ ist genau dann stark stabil, wenn $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{X}$ gilt.

Beweis:

a) Dies ist eine Konsequenz aus den Satz 3.15.

b) ergibt sich unmittelbar aus Bemerkung 3.13 und Satz 3.15.

c) Die Äquivalenz „(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)“ und der erste Teil der anschließenden Bemerkung folgen aus den Satz 3.15.

Ist $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t)x = x_1$, sind $\eta \in \mathbb{R}$ und $t > 0$, so folgt

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta s} W(s)x ds \right\| \leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta s} (W(s)x - x_1) ds \right\| + \left\| \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta s} x_1 ds \right\|.$$

Für $\eta \neq 0$ strebt der zweite Summand mit $t \rightarrow \infty$ gegen Null, und der erste Integrand konvergiert mit $s \rightarrow \infty$ gegen Null, also gilt dies auch für seinen Cesàromittelwert; für $\eta = 0$ argumentiert man analog gleich für die linke Seite der Ungleichung. Damit folgen „(i) \Rightarrow (iv)“ und der zweite Teil des Zusatzes. Die Implikation „(iv) \Rightarrow (iii)“ ist trivial.

d) folgt aus Satz 3.15.

§9 Zu gebrochenen Potenzen von Operatoren

Eine allgemeinere Behandlung des hier angeschnittenen Themas und der verschiedenen zueinander äquivalenten Definitionen findet sich z.B. in [37], [47], [48] und [50, Kap.IX,11].

Auch weiterhin sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte C_0 -Halbgruppe mit Erzeuger A .

3.21 Definition: Zu $m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < m$ sei $C_{\alpha,m} := \int_0^\infty t^{-\alpha-1} (1 - e^{-t})^m dt$. Dann sei die gebrochene Potenz $(-A)^\alpha$ durch

$$(-A)^\alpha x := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{C_{\alpha,m}} \int_\varepsilon^\infty t^{-\alpha-1} [I - T(t)]^m x dt$$

definiert (Marchaud-Darstellung). Dabei ist per def. $x \in \mathcal{D}((-A)^\alpha)$, sofern der Grenzwert existiert.

Mit dem nächsten Satz wird die Verbindung der Theorie dieser Potenzen zu der der nachgeordneten Halbgruppen deutlich:

3.22 Satz und Definition: Seien $\alpha \in (0, 1)$ und $\{f_{\alpha,t} : t > 0\}$ die in Beispiel 2.29 c) eingeführte Familie der Lévydichten der Ordnung α . Dann heißt die nachgeordnete Halbgruppe

$$T_\alpha(0) := I \quad \text{und} \quad \forall t > 0, x \in \mathcal{X} : T_\alpha(t)x = \int_0^\infty f_{\alpha,t}(u)T(u)xdu$$

die zu $\{T(t) : t \geq 0\}$ und α gehörige Lévyhalbgruppe. Bezeichnet A_α deren Erzeuger, so gilt $A_\alpha = -(-A)^\alpha$.

Für einen **Beweis** siehe [50, S.264] oder [47].

Aus Korollar 3.19 erhält man damit:

3.23 Korollar: Für alle $\alpha \in (0, 1)$ sind $\overline{\mathcal{R}((-A)^\alpha)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ und $\mathcal{N}((-A)^\alpha) = \mathcal{N}(A)$.

Diese Aussage gilt sogar für alle $\alpha > 0$: siehe [48].

§10 Folgerungen für äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppen

3.24 Definition: Zu $0 < \omega \leq \frac{\pi}{2}$ sei

$$\Sigma_\omega := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \omega\}.$$

Die C_0 -Halbgruppe $\{S(t) : t \geq 0\}$ heißt *holomorph* (oder *analytisch*) vom Winkel ω , wenn sie eine Fortsetzung $\{S(z) : z \in \Sigma_\omega \cup \{0\}\} \subseteq \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ hat derart, daß

- (i) $\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\omega : S(z_1 + z_2) = S(z_1)S(z_2)$,
- (ii) $\forall x \in \mathcal{X} \forall \tau \in (0, \omega) : \lim_{z \in \Sigma_\tau, z \rightarrow 0} S(z)x = x$ und
- (iii) die Funktion $z \mapsto S(z)$ holomorph von Σ_ω in $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$ ist.

Die holomorphe C_0 -Halbgruppe $S(t)$ heißt *äquibeschränkt*, wenn

$$\forall \varepsilon \in (0, \omega) : \sup\{\|S(z)\| : z \in \Sigma_{\omega-\varepsilon}\} < \infty.$$

Die zur gleichmäßig beschränkten Halbgruppe $\{T(t) : t \geq 0\}$ und $\alpha \in (0, 1)$ gehörige Lévyhalbgruppe $T_\alpha(\cdot)$ ist eine äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe; das wird z.B. in [50, S.263] bewiesen. Damit erhält man mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse das folgende Resultat:

3.25 Satz: Seien $\alpha \in (0, 1)$ und $x \in \mathcal{X}$. Dann ist der Orbit $t \mapsto T_\alpha(t)x$ entweder injektiv oder konstant; der letztere Fall tritt genau dann ein, wenn $x \in \mathcal{N}(A)$ ist.

Beweis: Sei $T_\alpha(\cdot)x$ nicht injektiv. Wie in Bemerkung 3.13 und mit den dortigen Bezeichnungen erhält man induktiv, daß $T_\alpha(s + nb)x = T_\alpha(s)x$ für alle $s \geq t_1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Satz 3.20a) folgt also für alle $s \geq t_1$, daß $\lim_{t \rightarrow \infty} T_\alpha(t)x = T_\alpha(s)x$ ist,

was die Konstanz von $T_\alpha(t)x$ für $t \geq t_1$ bedeutet; da $T_\alpha(\cdot)x$ holomorph fortgesetzt werden kann, liefert der Identitätssatz, daß $T_\alpha(\cdot)x \equiv T_\alpha(0)x = x$.

Somit ist $x \in \mathcal{N}(A_\alpha) \stackrel{3.23}{=} \mathcal{N}(A) = \bigcap_{t \geq 0} \text{fix}T(t)$ nach Satz 3.6c). Der umgekehrte Schluß ist klar.

3.26 Beispiel: Sei A der Erzeuger der gleichmäßig beschränkten, stark stetigen Halbgruppe $T(t)$. Ist $x \in \mathcal{D}(A)$, und ist $u(t)$ die eindeutige beschränkte, klassische Lösung des Cauchyproblems

$$u(0) = x \quad \text{und} \quad u''(t) = -Au(t) \text{ für } t \geq 0,$$

so ist $u(t)$ injektiv oder $x \in \mathcal{N}(A)$ und $u(t) \equiv x$. Weiterhin existiert $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ genau dann, wenn x eine Darstellung $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, $x_2 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$ besitzt, und dann ist $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = x_1$: Es ist nämlich $u(t) := S(t)x$, wobei $S(\cdot)$

durch $S(0) = I$ und $\forall t > 0, y \in \mathcal{X} : S(t)y := \int_0^\infty \frac{te^{-z^2/4s}}{2\sqrt{\pi s}^{3/2}} T(s)y ds$ definiert und die von $-(-A)^{1/2}$ erzeugte C_0 -Halbgruppe ist (siehe z.B. [2, S.170]) . Damit folgt die Behauptung unmittelbar aus den Sätzen 3.22, 3.25 und 3.15.

Ein Beweis des folgenden Satzes findet sich in [37, S.123]:

3.27 Satz: Ist $T(t)$ eine äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe vom Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$, sind ferner $\omega \in (\frac{\pi}{2} - \theta, \pi]$ und $0 < \alpha\omega < \frac{\pi}{2}$, so ist $-(-A)^\alpha =: B$ der Erzeuger einer äquibeschränkten holomorphen C_0 -Halbgruppe $\{S(t) : t \geq 0\}$. Weiterhin gilt $((-A)^\alpha)^\beta = (-A)^{\alpha\beta}$ für alle $\beta > 0$.

Unter den Voraussetzungen von Satz 3.27 läßt sich also $\alpha > 1$ wählen, d.h. $\beta := \frac{1}{\alpha} \in (0, 1)$. Bezeichnet dann B_β wie in Satz 3.22 den Erzeuger der zu $S(t)$ und β gehörigen Lévyhalbgruppe, so folgt wegen $-A = ((-A)^\alpha)^\beta = (-B)^\beta = -B_\beta$, daß $T(t) = S_\beta(t)$ ist. Somit lassen sich die obigen Ergebnisse neu formulieren:

3.28 Satz: Sei $\{T(t) : t \geq 0\}$ eine äquibeschränkte holomorphe C_0 -Halbgruppe. Dann gilt:

a) Gibt es $a \geq 0, b > 0$ derart, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} T(a + bn)x = c \in \mathcal{X}$ existiert, so ist $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x = c$.

b) Es sind äquivalent:

(i) $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t)x$ existiert

(ii) x ist ergodisch unter $T(\cdot)$

(iii) x ist total ergodisch unter $T(\cdot)$

In diesem Falle ist $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{N}(A)$, $x_2 \in \overline{\mathcal{R}(A)}$, und die Grenzwerte in (i) und (ii) stimmen beide mit x_1 überein, wohingegen für alle $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t e^{-i\eta s} T(s)x ds = 0$.

- c) $T(\cdot)$ ist genau dann stark stabil, wenn $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{X}$ ist.
- d) Der Orbit $t \mapsto T(t)x$ ist entweder injektiv oder konstant.

Es sei erwähnt, daß man die Aussagen b),c) und d) dieses Satzes auch mit Hilfe eines Taubersatzes von W.Arendt und C.J.K.Batty herleiten kann: siehe dafür [2, S.275ff].

4. Verallgemeinerung auf eine Klasse nicht absolut stetiger Maße

Die Faltung zweier nichtnegativer, endlicher Borelmaße μ, ν auf \mathbb{R} ist definiert durch

$$(\mu * \nu)(B) := \int \mu(B - t) d\nu(t) \quad (B \text{ borelmeßbar});$$

$\mu * \nu$ ist wieder ein Borelmaß, und es gilt $(\mu * \nu)(\mathbb{R}) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R})$; insbesondere ist die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße wieder ein solches. Sind μ und ν absolut stetig mit Dichten g bzw. h , so ist $\mu * \nu$ absolut stetig mit Dichte $g * h$. Im folgenden ist mit „Maß“ stets „nichtnegatives, endliches Borelmaß auf \mathbb{R} “ gemeint.

Sind $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ und μ ein Maß, so existiert für λ -fast alle $x \in \mathbb{R}$ das Integral

$$(U * \mu)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} U(x - y) d\mu(y).$$

Es ist $U * \mu \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ und $\|U * \mu\|_\infty \leq \|U\|_\infty \mu(\mathbb{R})$.

Ist μ ein bezüglich λ nicht singuläres Maß, so gibt es nach dem Lebesgueschen Zerlegungs- sowie dem Satz von Radon-Nikodym Maße μ_s, μ_g derart, daß μ_s singulär, $\mu_g \neq 0$ absolut stetig bezüglich λ und

$$\mu = \mu_s + \mu_g$$

ist. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $g \in L^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ die Dichte zu μ_g . Die Faltungspotenz μ^{*k} hat dann die Darstellung $\mu^{*k} = \mu_1 + \mu_{g^{*k}}$ für ein Maß μ_1 und ein Maß $\mu_{g^{*k}}$ mit Dichte g^{*k} . Lemma 2.4 läßt sich somit auf g anwenden und liefert eine entsprechende Ausdehnungseigenschaft für die Folge $(\mu^{*k})_k$.

Die Nichtsingularität von μ ist im reellen Falle das, was u.a. in [14] englisch bzw. französisch als „spread-out“ bzw. „étagée“ bezeichnet wird und auch dort in dem in der Einleitung zitierten Satz zur gleichmäßigen Konvergenz von $f * \mu^{*n}$, $f \in \mathcal{C}_0(G)$ für lokal kompakte Gruppen G vorausgesetzt werden muß.

Mit dem folgenden Ergebnis wird Satz 2.13 auf derartige Wahrscheinlichkeitsmaße verallgemeinert:

4.1 Satz: *Ist das Wahrscheinlichkeitsmaß μ nicht singulär bezüglich λ , und ist $U \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{X})$ integralbeschränkt, so ist*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U * \mu^{*n}\|_\infty = 0.$$

Beweis: Seien $L > 0$ Integralschranke zu U und $\mu = \mu_s + \mu_g$ wie oben zerlegt. Wie im Beweis von Satz 2.13 wird zunächst angenommen, daß die monoton fallende Folge $\|U * \mu^{*n}\|_\infty$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen eine positive Zahl τ konvergiert, ebenso seien $\alpha \in (0, \tau)$ und $k \in \mathbb{N}, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ wie dort zur Dichte g gewählt. Dann ist $\mu^{*k} = \mu_1 + \mu_{g^{*k}}$ für ein Maß μ_1 und induktiv für $n \geq 2$

$$\mu^{*kn} = \mu_1^{*n} + \mu_{g^{*k}} * \nu_n$$

für gewisse Maße ν_n . Wegen $\mu_1(\mathbb{R}) < 1$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_1^{*n} * U\|_\infty = 0$.

Da weiterhin für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \|\mu^{*nk} * U\|_\infty - \|\mu_1^{*n} * U\|_\infty \right| \leq \|\nu_n * \mu_{g^{*k}} * U\|_\infty \leq \|\mu^{*nk} * U\|_\infty + \|\mu_1^{*n} * U\|_\infty,$$

ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n * g^{*k} * U\|_\infty = \tau > \alpha$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} \|\mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) &\geq \|\mu_{g^{*k}} * \mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty \\ &= \|(\mu^{*k} - \mu_1) * \mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty \\ &\geq \|\mu^{*k} * (\mu_{g^{*k}} * \nu_n) * U\|_\infty - \|\mu_1 * \mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty \\ &\geq \|\mu^{*k} * (\mu^{*nk} - \mu_1^n) * U\|_\infty - \|\mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty \mu_1(\mathbb{R}) \\ &\geq \|\mu^{*k} * \mu^{*nk} * U\|_\infty - \|\mu^{*k} * \mu_1^{*n} * U\|_\infty \\ &\quad - \|\mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty (\mu^{*k}(\mathbb{R}) - \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R})) \\ &\geq \|\mu^{*(n+1)k} * U\|_\infty - \|\mu^{*k} * U\|_\infty \mu_1(\mathbb{R})^n \\ &\quad - \|\mu_{g^{*k}} * \nu_n * U\|_\infty (1 - \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R})) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tau - \tau (1 - \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R})) = \tau \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Da die linke Seite gegen denselben Wert strebt, erhält man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n * U * g^{*2k}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_{g^{*2k}} * \nu_n * U\|_\infty = \tau \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}).$$

Werden jetzt wieder Zahlen $w_n \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß jeweils

$\|(\nu_n * U * g^{*2k})(w_n)\| \geq \|\nu_n * U * g^{*2k}\|_\infty (1 - \frac{1}{n})$ ist, so folgt für $n \geq 2$ völlig analog zum Beweis von Satz 2.13

$$\begin{aligned} \|\nu_n * U * g^{*2k}\|_\infty - \alpha \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} \nu_n * U * g^{*k}(w_n - y) g^{*k}(y) dy \right\| - \alpha \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) \\ &\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \|\nu_n * U * g^{*k}(w_n - y)\| |g^{*k}(y)| dy - \alpha \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) \\ &\leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \|\nu_n * U * g^{*k}\|_\infty - \alpha \right) \mu_{g^{*k}}(B_n) \end{aligned}$$

mit $B_n := \{y \in \mathbb{R} : \|(\nu_n * U * g^{*k})(w_n - y)\| > \frac{\alpha}{2}\}$. Also ist

$$\mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) \geq \mu_{g^{*k}}(B_n) \geq \frac{\|\nu_n * U * g^{*2k}\|_\infty - \alpha \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R})}{\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \|\nu_n * U * g^{*k}\|_\infty - \alpha},$$

und da die rechte Seite gegen $\mu_{g^{*k}}(\mathbb{R})$ konvergiert, hat man wie im Beweis von Satz 2.13

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R} \setminus B_n) = 0.$$

Damit folgt nun wieder

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda([\beta, \gamma] \setminus B_n) = 0$ und
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\nu_n * U * g^{*k})(w_n - y) g^{*k}(y) dy \right\|$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \|(\nu_n * U * g^{*k})(w_n - y)\| g^{*k}(y) dy.$

Bedingung (i) führt auf die Abschätzung

$$\int_{\beta}^{\gamma} \|\nu_n * U * g^{*k}(w_n - y)\| dy > L$$

für hinreichend große n ; um wie gehabt zum Widerspruch zu kommen, ist noch festzustellen, daß wegen

$$1 = \mu^{*kn}(\mathbb{R}) = (\mu_1(\mathbb{R}))^n + \mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}) \cdot \nu_n(\mathbb{R})$$

folgt, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n(\mathbb{R}) = (\mu_{g^{*k}}(\mathbb{R}))^{-1}$ ist; damit erhält man wie in Lemma 2.5 die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen $V_n : s \mapsto \|\nu_n * U * g^{*k}(s)\|$ und die letzten Schlüsse wie im absolut stetigen Fall. q.e.d.

Literaturverzeichnis

- [1] W.Arendt: *Resolvent positive operators and integrated semigroups*, Semesterbericht Funktionalanalysis, Univ.Tübingen(1984), 73-101
- [2] W.Arendt, C.J.K.Batty, M.Hieber, F.Neubrander: *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Monographs in Mathematics, Band 96, Birkhäuser 2001
- [3] H.Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, de Gruyter, Berlin 1968
- [4] S.Bochner: *Fouriersche Integrale*, Chelsea Publishing Company, New York 1948
- [5] S.Bochner: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, University of California Press, California Monographs in Math., Berkeley, CA 1955
- [6] P.Bougerol: *Fonctions de concentration sur certains groupes localment compacts*, Z.Wahr. 45 (1978), S.135-157
- [7] P.L.Butzer, H.Berens: *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Grundlehren math. Wiss., Band 145, Springer 1967
- [8] P.L.Butzer, R.J.Nessel: *Fourier Analysis and Approximation I*, Birkhäuser, Basel 1971
- [9] P.L.Butzer, U.Westphal: *Ein Operatoralkül für das approximationstheoretische Verhalten des Ergodensatzes im Mittel*, Linear Operators and Approximation, Proceedings of the Conference in Oberwolfach August 14-22, Birkhäuser Verlag Basel und Stuttgart 1971
- [10] J.A.van Casteren: *Generators of strongly continuous semigroups*, Research Notes in Mathematics 115, Pitman Publishing, Boston 1985
- [11] E.B.Davies: *One-parameter Semigroups*, Academic Press, London 1980
- [12] R.Derndinger, R.Nagel, G.Palm: *Ergodic Theory in the perspective of Functional Analysis*, Vorlesungsmanuskript Tübingen 1987
- [13] Y.Derriennic, M.Lin: *Sur le comportement des puissances de convolution d'une probabilité*, Ann.Inst.Henri Poincaré 20 (1984) Nr.2, S.127-132

- [14] Y.Derriennic, M.Lin: *Convergence of Iterates of Averages of Certain Operator Representations and of Convolution Powers*, J.Funct.Anal. 85 (1989), S.86-102
- [15] J.Diestel, J.J.Uhl: *Vector Measures*, Mathematical Surveys 15, Amer. Math. Soc., Providence 1977
- [16] J.Dieudonné: *Grundzüge der modernen Analysis*, Logik und Grundlagen der Mathematik Band 2, Vieweg 1975
- [17] R.M.Dudley: *Real Analysis and Probability*, Wadsworth & Brooks/Cole, Pacific Grove 1989
- [18] K.-J.Engel, R.Nagel: *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Texts in Mathematics Band 194, Springer 2000
- [19] W.Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Band 1, J.Wiley& Sons,Inc., New York 1965²
- [20] W.Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Band 2, J.Wiley& Sons,Inc., New York 1966
- [21] S.R.Foguel: *On Iterates of Convolutions*, Proc.Am.Math.Soc 47, Nr.2 (1975), S.368-370
- [22] G.B.Folland: *Real Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1984
- [23] V.Fonf, M.Lin, P.Wojtaszczyk: *Ergodic characterizations of reflexivity of Banach spaces*, J.Funct.Anal.187(2001) Nr.1, S.146-162
- [24] A.Gessinger: *Der Zusammenhang zwischen approximations- und ergodentheoretischem Verhalten von Halbgruppen und Kosinusoperatorfunktionen; neue Anwendungen der Kosinusoperatortheorie*, Diss., Shaker Verlag, Aachen 1997
- [25] J.A.Goldstein: *Semigroups of Linear Operators and Applications*, Oxford Univ. Press, Oxford 1985
- [26] H.Hahn, A.Rosenthal: *Set Functions*, University of New Mexico Press, New Mexico 1948
- [27] E.Hewitt, K.Stromberg: *Real and Abstract Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Band 25, Springer-Verlag Berlin 1965
- [28] M.Hieber, H.Kellermann: *Integrated Semigroups*, J.Funct.Anal.84 (1989), 160-180
- [29] R.Hilfer: *Fractional Time Evolution*, in: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, hrsg. von R.Hilfer, World Scientific Publishing Co. Singapur 2000
- [30] E.Hille, R.S.Phillips: *Functional Analysis and Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Providence 1957
- [31] K.Hofmann, A.Mukherjea: *Concentration functions and a class of noncompact groups*, Math.Ann.256 (1981),S.535-548

- [32] I.A.Ibragimov, Yu.V.Linnik: *Independent and Stationary Sequences of Random Variables*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen 1971
- [33] U.Krengel: *Ergodic Theorems*, de Gruyter, Berlin 1985
- [34] H.Komatsu: *Fractional Powers of Operators*, Pacific J.Math.19, 1966, S.285-346
- [35] M.Lin: *Ergodic properties of an operator obtained from a continuous representation*, Ann.Inst.Henri Poincaré 13, Nr.4 (1977), S.321-331
- [36] M.Lin, R.Wittmann: *Convergence of Representation Averages and of Convolution Powers*, Israel J.Math.88 (1994), S.125-157
- [37] C.Martínez, M.Sanz: *The Theory of Fractional Powers of Operators*, North-Holland Mathematics Studies 187, Amsterdam 2001
- [38] A.C.McBride: *Semigroups of Linear Operators: an Introduction*, Pitman Res.Notes Math.Ser.156, 1987
- [39] P.J.Miana: *Cálculo funcional fraccionario asociado al problema de Cauchy*, Diss., Monografías del seminario matemático „García de Galdeano“ 24, Zaragoza 2002
- [40] R.Nagel (Hrsg.): *One-parameter Semigroups of Positive Operators*, Lecture Notes in Math.1184, Springer-Verlag, Berlin 1986
- [41] R.Nagel, U.Schlotterbeck, M.P.H.Wolff: *Aspects of Positivity in Functional Analysis*, Mathematics Studies 122, North-Holland, Amsterdam 1986
- [42] J.v.Neerven: *Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Birkhäuser, Basel 1996
- [43] R.S.Phillips: *On the Generation of Semigroups of Linear Operators*, Pacific J.Math 2, 1952, S.343-369
- [44] W.Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1966
- [45] R.L.Schilling: *On the domain of the generator of a subordinate semigroup*, J.Potential Theory-ICPT 94 (Kouly 1994), de Gruyter, Berlin 1996, S.449-462
- [46] L.Weis: *The stability of positive semigroups on L^p spaces*, Proc. Am. Math. Soc.123 (1995), S.3089-3094
- [47] U.Westphal: *Fractional Powers of Infinitesimal Generators of Semigroups*, in: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, hrsg. von R.Hilfer, World Scientific Publishing Co. Singapur 2000
- [48] U.Westphal: *A Generalized Version of the Abelian Mean Ergodic Theorem with Rates for Semigroup Operators and Fractional Powers of Infinitesimal Generators*, Results in Mathematics 34, 1998, S.381-394
- [49] U.Westphal: *An Approach to Fractional Powers of Operators via Fractional Differences*, Proc.London Math.Soc.(3)29, 1974, S.557-576

- [50] K.Yosida: *Functional Analysis*, Grundlehren math. Wiss. Band 123, Springer-Verlag, Berlin 1965
- [51] V.M.Zolotarev: *One-dimensional Stable Distributions*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 65, American Mathematical Society, 1986

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Maren Hedwig Schmalmack
Geburt: am 1. August 1969 in Wolfenbüttel, als zweites von drei Kindern von Dr. Jörn Schmalmack und Ute Schmalmack, geb. Sachse, verstorben 1982
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: ledig

Bildungsweg:

1975-1988 Schulbesuch in Clausthal-Zellerfeld
Mai 1988 **Abitur**
1988-1994 Musikstudium im Studiengang Musikerziehung (Hauptfach Klavier), ab 1989 an der Hochschule für Musik und Theater Hannover
Oktober 1993 Beginn des Mathematikstudiums an der Universität Hannover; Nebenfach: Betriebswirtschaftslehre
Mai 1995 externer Abschluß des Musikstudiums, Erwerb des Grades einer **Diplom-Musiklehrerin**
Herbst 1995 Vordiplom in Mathematik und Aufnahme in die **Studienstiftung des Deutschen Volkes**
1995-1999 während der Vorlesungszeiten hilfswissenschaftliche Tätigkeit an den Instituten für Mathematik und für Angewandte Mathematik der Universität Hannover
Dez.1997-Jun.1998 Diplomarbeit in Funktionentheorie mit dem Titel: „Über punktweise Approximierbarkeit beschränkter Funktionen durch gleichmäßig beschränkte Polynome auf gewissen kompakten Teilmengen von \mathbb{C} “
Januar 1999 **Diplom** in Mathematik
seit April 1999 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Mathematik der Universität Hannover
Februar 2003 **Promotion** in Mathematik