Lokalbeschränkte Körpertopologien

Von dem Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Peter Vorländer
geboren am 22.Juli 1970 in Grevenbroich

2002

Referent: Prof. Dr. J. Heine
Korreferent: Prof. Dr. H. Weber
Tag der Promotion: 20.12.2001

Abstract

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass es auf jedem Körper K, der nicht absolut algebraisch oder globaler Körper ist, $2^{card\, K}$ viele lokalbeschränkte Körpertopologien gibt. Weiter werden die Körper, auf denen Lokalbeschränktheit einer Körpertopologie Normierbarkeit impliziert algebraisch charakterisiert: es sind genau die algebraischen Erweiterungen von globalen oder absolut algebraischen Körpern. Zuletzt wird bewiesen, dass jede hausdorffsche Körpertopologie auf dem Quotientenkörper eines beschränkten Dedekindbereiches Supremum von reellen Bewertungstopologien ist. Innerhalb der Klasse der Krullbereiche sind die Dedekindbereiche durch diese Eigenschaft bestimmt.

In this paper it will be shown, that on every field K, that is not absolut algebraic or a global field, there exist $2^{card\, K}$ many locally bounded field topologies. Further a characterization of that fields, on that locally boundedness of a field topology implies the normability of the field topology is given by algebraic means: those fields are exactly the algebraic extensions of global and absolut algebraic fields. At last it will be proven, that every hausdorff fieldtopologie on the quotient field of a bounded dedkind domain is a supremum of real valuation topologies. Among the class of krull domains the dedekind domains are characterized by that property.

Schlagwörter

Topologie, Topologische Körper, lokalbeschränkt
topology, topological fields, locally boundedness

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Hensels Entdeckung der p-adischen Zahlenkörper markiert den Beginn der Untersuchungen von topologischen Körpern und Ringen. Ein berühmtes Resultat von Pontrjagin charakterisiert die lokalkompakten topologischen Körper. Jeder lokalkompakte topologische Körper ist auch lokalbeschränkt, die Charakterisierung sämtlicher lokalbeschränkter topologischer Körper hat sich jedoch als wesentlich umfangreicher erwiesen, selbst Anzahlprobleme sind bis heute noch nicht vollständig gelöst.
So hat zum Beispiel Kiltinen nach der Anzahl lokalbeschränkter Körpertopologien auf einem Körper gefragt. Aufgrund verschiedener Ergebnisse von Kiltinen, Weber, Cohen und Maiwald bleibt dieses Problem nur noch für unendliche algebraische Körpererweiterungen eines einfachen Funktionenkörpers mit Charakteristik ungleich null zu klären. Dies geschieht im zweiten Kapitel (Korollar 2.5).
Jede lokalkompakte Körpertopologie wird von einer reellen Bewertung induziert. Ebenso ist von Interesse, wann eine Ringtopologie durch reelle Bewertungen beschrieben werden kann. Dies kann im wesentlichen auf zwei Arten geschehen: als vom Durchschnitt der zugehörigen Ganzheitsbereiche induzierte Topologien, diese sind lokalbeschränkt, aber im allgemeinen keine Körpertopologien; oder als Supremum der induzierten Topologien, diese sind dann Körpertopologien, im allgemeinen aber nicht lokalbeschränkt. Nach einem wichtigen Resultat von Weber können alle lokalbeschränkten Ringtopologien genau auf absolut algebraischen und globalen Körpern durch reelle Bewertungen beschrieben werden. In anderen Fällen müssen also Einschränkungen an die zu beschreibenden Topologien gemacht werden. Cohen zum Beispiel bewies, dass jede Körpertopologie auf dem Quotientenkörper eines beschränkten Dedekindbereiches R mit endlicher Klassenzahl Supremum von p-adischen Bewertungstopologien ist. Wiesław hat die Frage gestellt, ob die Forderung der endlichen Klassenzahl notwendig ist. Diese Frage wird im fünften Kapitel beantwortet. Dazu wird das Problem in zwei Schritten vereinfacht: Zunächst wird bewiesen, dass man nur den Verband der *lokalbeschränkten* Körpertopologien auf Darstellbarkeit durch reelle Bewertungstopologien durchmustern muß, genauer gesagt nur Topologien, welche von Integritätsbereichen der Form $\frac{R}{1+aR}$ (wobei a eine von 0 verschiedene Nichteinheit in R ist) induziert werden (Satz 5.3). Im zweiten Schritt wird das Problem auf die Untersuchung der Lokalisationen $R_{\mathfrak{m}}$ (wobei $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal in R ist) reduziert (Satz 5.8).
Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Beweisführung ist das topologische Radikal $Rad(\tau)$, also die Menge aller topologisch nilpotenten Elemente. Daher werden im dritten Kapitel zunächst wichtige Eigenschaften von $Rad(\tau)$ hergeleitet. Zum Beispiel wird der Prozeß der Spektralnormbildung auf nicht notwendig lokalbeschränkte Ringtopologien verallgemeinert. Mit Hilfe dieses Ergebnisses wird eine algebraische Darstellung des topologischen Radikals aus der erzeugenden Fastordnung berechnet.

Eine schwächere Forderung als die Darstellbarkeit einer Ringtopologie durch reelle Bewertungstopologien ist die Normierbarkeit. Jede normierbare Ringtopologie ist eine lokalbeschränkte Körpertopologie, umgekehrt muß nicht jede lokalbeschränkte Körpertopologie normierbar sein. Im vierten Kapitel wird der Frage nachgegangen, auf welchen Körpern Lokalbeschränktheit einer Körpertopologie Normierbarkeit impliziert. Es stellt sich heraus, dass es genau die algebraischen Erweiterungen globaler Körper und die absolut algebraischen Körper sind.

An dieser Stelle möchte ich Professor Dr. J. Heine für die Unterstützung und Förderung während meines Studiums danken. Zudem gilt ihm und Herrn Professor Dr. H. Weber mein Dank für die Begutachtung dieser Arbeit und die wertvollen Korrekturvorschläge.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Vereinbarungen, Schreibweisen

Zunächst werden, um Mißverständnissen vorzubeugen, einige Bezeichnungen in tabellarischer Kurzform aufgelistet.

Mengentheoretische Schreibweisen

$\subseteq$	Teilmenge
$\subsetneq$	echte Teilmenge
$\setminus$	Mengendifferenz
$A \times B$, $\prod\limits_{i \in I} A_i$	kartesisches Produkt
$f\|M$	Restriktion
$f[M]$	$:= \{ f(m) \mid m \in M \}$ das Bild von M unter f
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ etc.	wie üblich
$\mathbb{N}$	$:= \mathbb{Z}_{\geq 0}$
M^*	$:= \{ m \in M \mid m \neq 0 \}$
$card\ M$	Kardinalzahl der Menge M
$\aleph_0$	$:= card\ \mathbb{Q}$

Algebraische Bezeichnungen

Ring	schließt in dieser Arbeit immer die Kommutativität und die Existenz eines Einselementes $1 \neq 0$ mit ein
Integritätsbereich	nullteilerfreier Ring
$a\|_S b$	a teilt b in S
$ggT(a, b)$	größter gemeinsamer Teiler von a und b
$Q(R)$	Quotientenkörper des Integritätsbereiches R
$E(R)$	Menge der Einheiten von R
$Ker\ j$	$:= \{ r \in R \mid j(r) = 0 \}$ der Kern von $j : R \to S$

$A+B$	$:= \{ a+b \mid a \in A, b \in B \}$
$a+B$	$:= \{a\} + B$
AB, aB	entsprechend
$A^1 := A$ und $A^{n+1} := A^n A$	für alle $n \in \mathbb{N}^*$
$A^{-1} := \frac{1}{A}$	$:= \{ 1/a \in Q(R) \mid a \in A \}$
Primideal $\mathfrak{p}$	beinhaltet $\mathfrak{p} \neq R$
$spec(R)$	$:= \{ \mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p}$ Primideal in $R \}$
$spec^*(R)$	$:= spec(R) \setminus \{\{0\}\}$
$spec^1(R)$	$:= \{ \mathfrak{p} \in spec^*(R) \mid \forall \mathfrak{q} \in spec^*(R) : \mathfrak{q} \not\subseteq \mathfrak{p} \}$
$max(R)$	$:= \{ \mathfrak{m} \subsetneq R \mid \mathfrak{m}$ maximales Ideal in $R \}$
R eindimensional	$:\Leftrightarrow R \neq Q(R)$ und $spec^*(R) = max(R)$.
$char(R)$	Charakteristik des Integritätsbereiches R
$Jac(R)$	$:= \bigcap max(R)$ heißt **Jacobsonradikal** von R
$Rad^*(R)$	$:= \bigcap spec^*(R)$ heißt **Pseudoradikal** von R
G-Bereich R	Integritätsbereich mit $Rad^*(R) \neq \{0\}$
$\overline{R}^{ganz}$	ganzer Abschluß von R in $Q(R)$
$\overline{R}^{ganz\ in\ L}$	ganzer Abschluß von R in L
$\overline{R}^{comp}$	$:= \{ x \in Q(R) \mid \exists b \in R^* \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad bx^n \in R \}$ heißt **vollständiger ganzer Abschluß** von R in $Q(R)$
$\overline{R}^{\infty comp}$	$R_1 := \overline{R}^{comp}$, $R_{n+1} := \overline{R_n}^{comp}$, $\overline{R}^{\infty comp} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$
multiplikatives System S	$0 \notin S$, $1 \in S$, $SS \subseteq S$
R_S	$:= \{ r/s \in Q(R) \mid r \in R, s \in S \}$
$R_\mathfrak{p}$	**Lokalisation** von R nach Primideal $\mathfrak{p}$, also $R_\mathfrak{p} := R_{R \setminus \mathfrak{p}}$
$Rad(I)$	$:= \{ a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : \quad a^n \in I \}$ heißt **Radikal** des Ideals I
I Radikalideal	$:\Leftrightarrow rad(I) = I$
$con(R \leq S)$	$:= \{ a \in Q(S) \mid aS \subseteq R \}$ heißt **Konduktor von R in S**
$R[x]$	Polynomring mit Koeffizienten in R
$R[x,y] := R[x][y]$	Polynomring in den Unbekannten x und y
$R[[x]]$	Ring der formalen Potenzreihen
$K((x))$	Körper der formalen Laurentreihen
$K(x)$	$:= Q(K[x])$
L/K	Körpererweiterung L über K
$[L:K]$	Grad der Körpererweiterung L über K
GF_q	Endlicher Körper mit q Elementen
$trdeg\ L/K$	Transzendenzgrad von L über K
globaler Körper	endliche algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ oder von einer einfach transzendenten Körpererweiterung eines endlichen Körpers
absolut alg. Körper	algebraische Körpererweiterung eines endlichen Körpers
$K(A)$	K adjungiert A
$grad_K(p)$	grad des Polynoms über Körper K, $grad_K(0) := -\infty$
R lokal noethersch	Integritätsbereich, so dass $\forall \mathfrak{m} \in max(R) : \quad R_\mathfrak{m}$ noethersch

Topologische Bezeichnungen

τ_{indis}, τ_{dis}	Indiskrete bzw. diskrete Topologie
$\mathfrak{U}_\tau(x)$	Umgebungssystem von x in der Topologie τ
$\tau\|S$	Spurtopologie
$\sup\limits_{i\in I} \tau_i$	Supremum von Topologien, dabei $\sup\limits_{i\in\emptyset} \tau_i = \tau_{indis}$
$\overline{\mathcal{F}}^{filter}$	der von der Filterbasis $\mathcal{F}$ erzeugte Filter
τ ist feiner als σ	$\tau \supseteq \sigma$
τ gröber als σ	$\tau \subseteq \sigma$

Im Verlauf der Arbeit eingeführte Bezeichnungen

τ_O	von Fastordnung O induzierte Topologie (1.6 und 1.9)
τ_R	von Integritätsbereich R auf $Q(R)$ induzierte Topologie (1.6 und 1.9)
τ_φ	von Norm φ induzierte Topologie (1.16)
R_φ, $\mathfrak{m}_\varphi$	Bewertungsring mit maximalem Ideal (1.17)
φ_{sp}	Spektralnorm (1.20)
$\overline{O}^{comp}$	siehe 3.6
SP_τ	Spektralfastordnung (3.7)
τ_{sp}	Spektraltopologie (3.7)
$O(S)$, $\tau(S)$	siehe der Abschnitt nach 1.21
$(E.S), (A.S)$	siehe 1.23
(M*)-Bedingung	siehe 5.5

1.2 Ring- und Körpertopologien

In diesem Abschnitt sind grundlegende Tatsachen über Ring- und Körpertopologien, die in dieser Arbeit wiederholte Verwendung finden, als Zitate zusammengestellt. Diese werden in den folgenden Kapiteln als bekannt vorausgesetzt.

Eine Topologie τ auf einem Ring R, bezüglich der Addition, Subtraktion und Multiplikation stetige Abbildungen sind, heißt **Ringtopologie**, das Paar (R, τ) heißt dann **topologischer Ring**.
Ist τ eine Ringtopologie auf einem Körper K, bezüglich der die Inversion auf K^* stetig ist, so heißt τ **Körpertopologie** und das Paar (K, τ) **topologischer Körper**.
Für Ringtopologien auf Körpern gelten:

1.1 Satz *(Shell, 1990, S.9, Theorem 1.3.1(3))*
Jede Ringtopologie auf einem Körper ist entweder hausdorffsch oder indiskret.

1.2 Satz *(Shell, 1990, S.4, Theorem 1.1.1 und S.5, Theorem 1.1.2)*

(a) *Sei (R, τ) ein topologischer Ring und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis des Nullumgebungsfilters $\mathcal{U}_\tau(0)$. Dann sind die folgenden Aussagen erfüllt:*

(U1) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \exists V \in \mathcal{B}: \quad V + V \subseteq U$

(U2) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \exists V \in \mathcal{B}: \quad VV \subseteq U$

(U3) $\forall U \in \mathcal{B} \quad \forall a \in R \quad \exists V \in \mathcal{B}: \quad aV \subseteq U$

(b) *Sei R ein Ring und $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf R, welche (U1), (U2) und (U3) erfüllt. Dann gibt es genau eine Ringtopologie τ auf R mit $\mathcal{U}_\tau(0) = \overline{\mathcal{B}}^{filter}$.*

(c) *Ein topologischer Ring (R, τ) ist genau dann hausdorffsch, wenn für jede Filterbasis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{U}_\tau(0)$ stets $\bigcap \mathcal{B} = \{0\}$ gilt.*

(d) *Sei τ eine hausdorffsche Ringtopologie auf einem Körper K. Dann gilt:*
Äq: *(i)* τ *ist eine Körpertopologie*
(ii) $\forall U \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \exists W \in \mathcal{U}_\tau(0): \quad W/(1+W) \subseteq U$
(iii) $\forall U \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \exists V \in \mathcal{U}_\tau(0): \quad 1/(1+V) \subseteq 1 + U$

(e) *Sei τ eine nichtdiskrete Ringtopologie auf einem Körper K und $U \in \mathcal{U}_\tau(0)$. Dann gilt: $U(U^*)^{-1} = K$*

1.3 Satz *(Shell, 1990, S.32, Theorem 3.2.1)*
Es sei $\mathcal{B}$ Nullumgebungsbasis für eine hausdorffsche Ringtopologie τ auf einem Körper K. Zu $E \subseteq K$ definiere man

$$\widetilde{E} := \tfrac{E}{1+E\setminus\{-1\}}$$

und setze $\widetilde{\mathcal{B}} := \left\{ \widetilde{B} \mid B \in \mathcal{B} \right\}$. Dann gelten:

(a) $\widetilde{\mathcal{B}}$ ist Nullumgebungsbasis einer hausdorffschen Körpertopologie $\widetilde{\tau}$ auf K.

(b) $\widetilde{\tau}$ ist die feinste Körpertopologie auf K, welche gröber ist als τ.

1.4 Satz *(Shell, 1990, S.30, Theorem 3.1.1)*
Es sei R ein Ring (Körper) und $(\tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ring-(Körper-)topologien. Dann ist $\sup\limits_{i\in I} \tau_i$ eine Ring-(Körper-)topologie.

1.3 Lokalbeschränktheit, Fastordnungen

Eine Teilmenge B eines topologischen Ringes (R, τ) heißt $\tau-$**beschränkt**, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall U \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \exists V \in \mathcal{U}_\tau(0): \quad VB \subseteq U$$

Gemäß(Shell, 1990, S.41, Theorem 4.1.1) sind Teilmengen, topologische Hüllen, endliche Vereinigungen, Produkte, Summen und Durchschnitte beschränkter Mengen wieder beschränkt. Ist $(a_n)_n$ eine Nullfolge in R und $\{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ $\tau-$beschränkt, so ist auch $(a_n b_n)_n$ eine Nullfolge.
Sei $(\tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von Ringtopologien auf R, $\tau := \sup\limits_{i\in I} \tau_i$ und $B \subseteq R$. Ist für jedes $i \in I$ die Menge B τ_i-beschränkt, so ist B auch $\tau-$beschränkt.
Beschränktheit in Körpern läßt sich wie folgt charakterisieren:

1.5 Satz *(Shell, 1990, S.42, Theorem 4.1.3)*
Es sei τ eine nichtdiskrete Ringtopologie auf einem Körper K und $B \subseteq K$. Dann gilt:
Äq:(i) B ist $\tau-$beschränkt
(ii) $\forall U \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \exists x \in K^*: \quad xB \subseteq U$

1.6 Definition *vgl. (Shell, 1990, S.43, Definition 4.2.1)*
Ein topologischer Ring (R, τ) heißt genau dann **lokalbeschränkt**, *wenn es eine $\tau-$beschränkte Nullumgebung von R gibt. Auch τ nennt man dann* **lokalbeschränkt**.

Sei K ein Körper und $U \subseteq K$. Ist $\{ xU \mid x \in K^* \}$ Nullumgebungsbasis einer Ringtopologie τ_U auf K, so sagt man: U **erzeugt** *τ_U. Es ist dann U eine τ_U-beschränkte Menge, also τ_U lokalbeschränkt.*
Ist umgekehrt τ eine nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf einem Körper K und U eine beschränkte Nullumgebung von τ, so wird τ von U erzeugt.

1.7 Definition *(Shell, 1990, S.44, Definition 4.3.1)*
Sei K ein Körper und $O \subseteq K$, $z \in O^*$. Die Menge O heißt genau dann **Fastordnung (mit 2-Addiator z)**, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(O1) $0, 1 \in O$

(O2) $OO \subseteq O$

(O3) $K = O(O^*)^{-1}$

(O4) $z(O \pm O) \subseteq O$

1.8 Satz *(Kowalsky and Dürbaum, 1953, S.143f, Satz 5 und Satz 6)*

(a) *Jede nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie τ auf einem Körper K wird von einer Fastordnung O von K erzeugt.*
Ist τ hausdorffsch, so gilt $O \neq K$.

(b) *Jede Fastordnung eines Körpers K erzeugt eine nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie τ_O auf K.*
Gilt zusätzlich $O \neq K$, so ist τ_O hausdorffsch.

1.9 Bemerkung
Ist O eine Fastordnung auf einem Körper K, so gilt:

$$\mathfrak{U}_\tau(0) = \overline{\{ aO \mid a \in O^* \}}^{filter} = \overline{\{ aO \mid a \in K^* \}}^{filter}$$

[Sei $a \in K^*$, etwa $x, y \in O^*$ mit $a = x/y$. Man erhält $xO = ayO \subseteq aOO \subseteq aO$]

Ist R ein Integritätsbereich, so ist R eine Fastordnung auf dem Quotientenkörper $Q(R)$ (mit 2-Addiator 1). Mit τ_R ist immer die von R erzeugte nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf $Q(R)$ gemeint.

1.10 Lemma *(Balcerzyk and Józefiak, 1989, S.16, Theorem 1.1.6)*
Es sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt:

$$Jac(R) = \bigcap max(R) = \{ a \in R \mid 1 - aR \subseteq E(R) \}$$

1.11 Satz *(Heckmanns, 1991, S.144, Lemma 1)*
Es sei R ein Integritätsbereich.
Äq:(i) $Jac(R) \neq \{0\}$
(ii) τ_R *ist eine Körpertopologie*
(iii) $E(R) \in \tau_R$

1.12 Satz *(Shell, 1990, S.57, Theorem 4.5.5)*
Es sei K ein Körper, $(\tau_i)_{i \in I}$ eine Familie von lokalbeschränkten Ringtopologien auf K und $\tau := \sup\limits_{i \in I} \tau_i$. Es gelten:

(a) Ist I endlich, so ist τ lokalbeschränkt.

(b) Ist τ lokalbeschränkt, so existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau = \sup\limits_{i \in J} \tau_i$.

1.13 Lemma *(Weber, 1979b, Lemma 1.2)*
Sei K ein Körper, $U \subseteq K$, $0 \in U$ und $z \in K$ mit $z(U + U) \subseteq U$. Dann gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad \sum_{k=1}^{n} z^k U \subseteq U$$

1.14 Satz *(Warner, 1989, S.127, Exercise 16.14)* bzw. *(Weber, 1979b, S.168, Bemerkung 1.3)*
Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und τ eine lokalbeschränkte, nichtdiskrete Ringtopologie auf L, $U \in \mathfrak{U}_\tau(0)$ sei τ-beschränkt und $V := K \cap U$. Dann gilt:
Äq: (i) $\tau | K$ *ist nichtdiskret*
(ii) $K = V(V^*)^{-1}$

1.4 Normen und Bewertungen

1.15 Definition *(vgl.(Shell, 1990, S.63, Definition 5.1.1))*
Es sei R ein Ring. Eine Abbildung $\varphi : R \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt genau dann **Norm (auf** R**)***, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

(N1) $\forall a \in R : \quad \varphi(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(N2) $\forall a, b \in R : \quad \varphi(a \cdot b) \leq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

(N3) $\forall a, b \in R : \quad \varphi(a - b) \leq \varphi(a) + \varphi(b)$

Ist φ darüberhinaus sogar multiplikativ, d.h. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für alle $a, b \in R$, so heißt φ **reelle Bewertung (auf** R**)**.
Eine Norm heißt **nichtarchimedisch**, *wenn sie sogar die scharfe Dreiecksungleichung erfüllt:*

$$\forall a, b \in R : \quad \varphi(a - b) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}$$

Sonst heißt φ **archimedisch**.
Man nennt ein Norm genau dann **homogen**, *wenn sie die Bedingung*

$$\forall a \in R \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad \varphi(a^n) = (\varphi(a))^n$$

erfüllt.
*Zu $\varepsilon > 0$ definiert man wie gewöhnlich $K_\varepsilon^\varphi(0) := \{\, x \in R \mid \varphi(x) < \varepsilon \,\}$, die sogenannte $\varepsilon-$***Kugel zu** φ **um** 0, *und es sei $\widetilde{K}_\varepsilon^\varphi(0) := \{\, x \in R \mid \varphi(x) \leq \varepsilon \,\}$.*

1.16 Satz *(Shell, 1990, S.64f, Theorem 5.1.1 und Theorem 5.1.2)*
Sei $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf einem Körper K. Dann gelten:

(a) $\mathcal{B} := \{\, K_\varepsilon^\varphi(0) \mid \varepsilon > 0 \,\}$ ist Basis des Nullumgebungsfilters einer lokalbeschränkten, hausdorffschen Körpertopologie τ_φ auf K.

(b) Ist $\tau_\varphi \neq \tau_{dis}$, so ist eine Teilmenge B von K genau dann $\tau_\varphi-$beschränkt, wenn $\varphi[B]$ beschränkt ist.

Ist eine Topologie von einer Norm (bzw. reellen Bewertung) induzierbar, so nennt man sie **normierbar** (bzw. **reelle Bewertungstopologie**).
Zwei Normen $\varphi, \psi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißen genau dann **äquivalent**, wenn sie die gleiche Topologie induzieren, in Zeichen $\varphi \sim \psi$.
Eine Norm heißt **trivial**, wenn sie die diskrete Topologie induziert, sonst heißt sie **nichttrivial** [1].

[1] Die reelle Bewertung $\varphi_{triv} : \begin{cases} K & \to \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \\ k & \mapsto \quad \begin{cases} 1 & \text{falls } k \in K^* \\ 0 & \text{falls } k = 0 \end{cases} \end{cases}$ heißt auch **triviale Bewertung** und induziert offenbar die diskrete Topologie auf K.

1.17 Satz
Es seien φ, ψ nichtarchimedische reelle Bewertungen auf einem Körper K. Man setze $R_\varphi := \widetilde{K}_1^\varphi(0)$ und $\mathfrak{m}_\varphi := K_1^\varphi(0)$.

(a) *(Ribenboim, 1999, S.57, Definition 3, S.56 Theorem A und S.61, Theorem D)*
Ist φ nichttrivial, so ist R_φ ein Integritätsbereich und $max(R_\varphi) = \{\mathfrak{m}_\varphi\}$.
R_φ heißt **Bewertungsring** *von φ.*

(b) *(Ribenboim, 1999, S.10, Theorem C und S.20, Theorem L)*
$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0$ mit $\varphi = \psi^\varepsilon$

(c) $\tau_\varphi = \tau_{dis} \Leftrightarrow \varphi | K^* \equiv 1$
[*klar*]

1.18 Definition
Es sei (R, τ) ein topologischer Ring. Ein Element $a \in R$ heißt genau dann $\tau-$**nilpotent**, *wenn $(a^n)_n \to_\tau 0$ gilt. Die Menge*

$$Rad(\tau) := \{\ a \in R \mid a \text{ ist } \tau - \text{nilpotent}\ \}$$

heißt das **Radikal von** τ *oder* **topologisches Radikal von** (R, τ). *Es gelten:*

(a) *(Shell, 1990, S.66, Theorem 5.2.1)*

$$a \in Rad(\tau) \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* : \quad a^n \in Rad(\tau)$$

(b) *Ist $(\tau_i)_{i \in I}$ eine Familie von Ringtopologien auf R, so gilt:*

$$Rad\left(\sup_{i \in I} \tau_i\right) = \bigcap_{i \in I} Rad(\tau_i)$$

(c) $Rad(\tau)Rad(\tau) \subseteq Rad(\tau)$

(d) *Für jedes $x \in Rad(\tau)$ und jede $\tau-$beschränkte Menge $B \subseteq K$ gilt:*

$$\forall U \in \mathfrak{U}_\tau(0) \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, m \geq n : \quad x^m B \subseteq U$$

[*Da B $\tau-$beschränkt ist, gibt es ein $S \in \mathfrak{U}_\tau(0)$ mit $SB \subseteq U$. Da $(x^n)_n$ gegen 0 konvergiert, gibt es ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $x^n \in S$.*]

1.19 Satz *(Shell, 1990, S.66, Theorem 5.2.2)*
Es sei K ein Körper und τ eine nichtdiskrete, hausdorffsche Ringtopologie auf K. Dann gilt:
Äq: (i) *Es existiert ein Norm φ mit $\tau = \tau_\varphi$*
(ii) *τ ist lokalbeschränkt und $Rad(\tau) \neq \{0\}$*
(iii) *τ ist lokalbeschränkt und $Rad(\tau) \in \mathfrak{U}_\tau(0)$*

1.20 Satz *(Shell, 1990, S.127f, Definition 14.3.2, Theorem 14.3.3 Beweis und Corollary 14.3.3.1)*
Es sei K ein Körper und φ eine Norm auf K.

$$\varphi_{sp} : \begin{cases} K & \rightarrow & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi(x^n)} \end{cases}$$

ist eine homogene Norm auf K und heißt **Spektralnorm (von φ)**. *Es gilt:*

$$Rad(\tau_\varphi) = Rad(\tau_{\varphi_{sp}}) = K_1^{\varphi_{sp}}(0)$$

1.21 Satz *(Ribenboim, 1999, S. 18 ,Theorem I)*
Es sei $\tau \neq \tau_{dis}$ eine Ringtopologie auf einem Körper K, welche Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien ist. Dann ist $Rad(\tau) \neq \{0\}$.

Als nächstes werden zwei Aussagen über Ringtopologien auf globalen Körpern zitiert. Dafür wird folgende Notation benötigt:

Es sei K ein Körper und S_0 eine Menge paarweise nichtäquivalenter, nichttrivialer, reeller Bewertungen auf K. Für $S \subseteq S_0$ sei

$$O(S) := \bigcap_{\varphi \in S} \widetilde{K}_1^\varphi(0).$$

Wenn $O(S)$ eine Ringtopologie auf K erzeugt, so sei diese mit $\tau(S)$ bezeichnet. Es gilt:

1.22 Satz
Sei K ein globaler Körper, S_0 ein Repräsentantensystem (bzgl. Äquivalenz von Seite 11) aller nichttrivialen, reellen Bewertungen auf K.

(a) *vgl. (Weber, 1979a, S. 198, Satz 1.8 und S.196, Punkt(1) unten)*
Sei $S \subsetneq S_0$.
Äq: (i) $\tau(S)$ ist nichtdiskrete Körpertopologie
(ii) S ist endlich

(b) *(Weber, 1979a, S. 203, Satz 3.3)*
Sei τ eine nichtdiskrete Ringtopologie auf K.
Äq: (i) τ ist lokalbeschränkt
(ii) es existiert $S \subsetneq S_0$ mit $\tau = \tau(S)$

1.23 Satz
Es sei K ein Körper, x transzendent über K, $L/K(x)$ eine endliche algebraische Körpererweiterung und S_0 ein Repräsentantensystem sämtlicher nichttrivialen, reellen Bewertungen auf L, welche auf K trivial sind. Es gilt:
Für jede nichtdiskrete, lokalbeschränkte Körpertopologie τ auf L, bezüglich der K beschränkt ist, existiert eine endliche Teilmenge $S \subsetneq S_0$ mit $\tau = \tau(S)$.

Beweis: (Mit den Bezeichnungen von (Weber, 1979b) und (Weber, 1979a) gilt:) Laut Beweis zu (Weber, 1979b, S. 175, Folgerung 4.4) gibt es eine Teilmenge $S \subsetneq S_0$ mit $\tau = \tau(S)$ und S erfüllt $(E.S)$ [2] und $(A.S)$ [3]. Die Endlichkeit von S ergibt sich nun aus (Weber, 1979a, S. 198, Satz (1.8))]. □

1.5 V-Topologien und Unabhängigkeit

1.24 Definition *(Weber, 1982, S.380 oben)*
Es sei $(\tau_i)_{i\in I}$ eine Familie von Topologien auf einer nichtleeren Menge R. $(\tau_i)_{i\in I}$ heißt genau dann **unabhängig**, *wenn für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ und alle offenen Mengen $O_i \in \tau_i \backslash \{\emptyset\}$ stets $\bigcap\limits_{i\in J} O_i \neq \emptyset$ gilt.*

Sei K ein Körper und τ eine hausdorffsche Ringtopologie auf K. τ heißt genau dann **minimal**, *wenn für jede hausdorffsche Ringtopologie σ auf K mit $\sigma \subsetneq \tau$ bereits $\sigma = \tau_{indis}$ gilt.*

1.25 Satz *(Weber, 1982, S.385, Folgerung (2.4))*
Es seien R ein Integritätsbereich, $(\tau_i)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von minimalen Ringtopologien auf R und τ eine Ringtopologie auf R mit $\tau \subseteq \sup\limits_{i\in I} \tau_i$. Dann gibt es eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

---

[2] $(E.S)$ $\forall a \in L: \quad \{\, \varphi \in S \mid \varphi(a) \neq 1 \,\}$ endlich
[3] $(A.S)$ $\forall S' \subseteq S \quad \forall\, a, b \in L^*: \quad aO(S') \cap (1 + bO(S\backslash S')) \neq \emptyset$

1.26 Definition und Satz
Es sei K ein Körper und τ eine hausdorffsche, nichtdiskrete Ringtopologie auf K. τ heißt genau dann **V-Topologie**, *wenn für jede Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}_\tau(0)$ die Menge $(K \backslash U)^{-1}$ $\tau-$beschränkt ist. Es gelten:*

(a) *(Kowalsky and Dürbaum, 1953, S.145, Satz 7 und Satz 8)*
Jede V-Topologie auf einem Körper ist eine lokalbeschränkte Körpertopologie.

(b) *(Shell, 1990, S.156, Theorem 16.3.4 und S.117, Theorem 14.1.1)*
Jede V-Topologie auf einem Körper ist minimal.

(c) *(Weber, 1978, S.133, Folgerung (2.3))*
Ist $(\tau_i)_{i \in I}$ eine Familie paarweise verschiedener V-Topologien auf K, so ist $(\tau_i)_{i \in I}$ unabhängig.

(d) *(Kowalsky and Dürbaum, 1953, S.144, Beginn von Kapitel III)*
Ist $\tau \neq \tau_{dis}$ eine reelle Bewertungstopologie, so ist τ eine V-Topologie.

Kapitel 2

Die Anzahl lokalbeschränkter Körpertopologien

In (Kiltinen, 1973, S.35, Frage 1) wird nach der Anzahl lokalbeschränkter Körpertopologien auf einem Körper K gefragt. Es wird gezeigt werden (Tabelle nach Korollar 2.5), dass es auf einem Körper K, der weder absolut algebraisch noch globaler Körper ist, genau $2^{card\,K}$ paarweise verschiedene lokalbeschränkte Körpertopologien gibt. Aufgrund der Ergebnisse aus (Kiltinen, 1973), (Weber, 1979a), (Cohen, 1984) und (Maiwald, 1996) ist die Behauptung nur noch für unendlich algebraische Erweiterungen von rationalen Funktionenkörpern in einer Variable über einem endlichen Körper zu zeigen. Dies geschieht über eine allgemeinere Aussage über die Anzahl paarweise nichtäquivalenter Normfortsetzungen auf algebraische Körpererweiterungen(2.4).

2.1 Normfortsetzung auf algebraische Erweiterungen

Die folgenden Sätze beschäftigen sich mit dem Problem der Fortsetzung einer Norm auf algebraische Körpererweiterungen. Zwar gibt es bereits Fortsetzungsmethoden, aber für den weiteren Verlauf wird die spezielle Art der hier konstruierten Fortsetzung benötigt.

2.1 Satz
Es sei a algebraisch über dem Körper K mit $[K(a) : K] =: n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm, $\alpha_0, ..., \alpha_{n-1} \in K$ mit

$$a^n = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i.$$

Man setze

$$p(x) := \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha_i)x^i \in \mathbb{R}[x],\ q(x) := x^n \in \mathbb{R}[x].$$

Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit* $q(t) > p(t)$ *ist durch*

$$\Phi_t : \begin{cases} K(a) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i & \mapsto & \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b_i)t^i \end{cases}$$

eine Norm auf $K(a)$ *gegeben, welche* φ *fortsetzt.*

Beweis: Es ist $a^0, a^1, ..., a^{n-1}$ eine $K-$Vektorraumbasis der Körpererweiterung $K(a)$ über K. Jedes $b \in K(a)$ läßt sich also eindeutig in der Form $b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i$ mit $b_0, ..., b_{n-1} \in K$ schreiben, und es ist $\varphi(b_i)t^i \geq 0$ für $i = 0, ..., n-1$. Also ist Φ_t wohldefiniert.

- Da $t^i > 0$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_t(b) = 0 \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b_i)t^i = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0, ..., n-1\}: \quad \varphi(b_i) = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad \forall i \in \{0, ..., n-1\}: \quad b_i = 0 \\ & \Leftrightarrow \quad b = 0 \end{aligned}$$

  Also ist Φ_t definit.

- Φ_t erfüllt (N3): [1]

  Seien $b, c \in K(a)$ mit den Darstellungen $b = \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i$ und $c = \sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \Phi_t(b-c) &= \Phi_t\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i - \sum_{i=0}^{n-1} c_i a^i\right) \\ &= \Phi_t\left(\sum_{i=0}^{n-1} (b_i - c_i)a^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b_i - c_i)t^i \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (\varphi(b_i) + \varphi(c_i))t^i \\ &= \Phi_t(b) + \Phi_t(c) \end{aligned}$$

[1] vgl. 1.15

- Um die Submultiplikativität (N2) zu zeigen, wird zunächst die folgende Hilfsaussage bewiesen:

$$(*) \qquad \forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, b \in K : \quad \Phi_t(ba^k) \leq \varphi(b) t^k$$

[Beweis von (*) durch vollständige Induktion über k. Für $k \in \{0, ..., n-1\}$ gilt sogar Gleichheit in (*). Für $k = n$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\Phi_t(ba^n) &= \Phi_t\left(\sum_{i=0}^{n-1} b\alpha_i a^i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b\alpha_i) t^i \\
&\leq \varphi(b) \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha_i) t^i \\
&= \varphi(b) \cdot p(t) \leq \varphi(b) \cdot q(t) = \varphi(b) t^n
\end{aligned}$$

Induktionsschritt: Sei $k+1 > n$, und die Behauptung gelte für alle natürlichen Zahlen kleiner oder gleich k.

$$\begin{aligned}
\Phi_t(ba^{k+1}) &= \Phi_t(ba^{n+(k+1-n)}) \\
&= \Phi_t\left(b\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i a^i\right) a^{k+1-n}\right) \\
&\overset{(N3)}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_t(b\alpha_i a^{k+1-n+i})
\end{aligned}$$

Da für $i = 0, ..., n-1$ die Ungleichung $0 < k+1-n \leq k+1-n+i \leq k$ gilt, kann die Induktionsvoraussetzung angewandt werden, und man erhält weiter:

$$\begin{aligned}
\Phi_t(ba^{k+1}) &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b\alpha_i) t^{k+1-n+i} \\
&\leq \varphi(b) \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha_i) t^i\right) t^{k+1-n} \\
&= \varphi(b) \cdot p(t) \cdot t^{k+1-n} \\
&\leq \varphi(b) \cdot q(t) \cdot t^{k+1-n} \\
&= \varphi(b) \cdot t^{k+1}
\end{aligned}$$

Also gilt (*).]

- Φ_t erfüllt (N2):

$$\begin{aligned}
\Phi_t(bc) &= \Phi_t\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j a^j\right)\right) \\
&= \Phi_t\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} b_i c_j a^{i+j}\right) \\
&\overset{(N3)}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \Phi_t(b_i c_j a^{i+j}) \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(b_i c_j) t^{i+j} \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(b_i)\varphi(c_j) t^{i+j} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(b_i) t^i\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(c_j) t^j\right) \\
&= \Phi_t(b) \cdot \Phi_t(c)
\end{aligned}$$

Die Fortsetzungseigenschaft von Φ_t ist direkt aus der Definition ersichtlich. □

2.2 Bemerkung

(a) *Ist $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtarchimedische Norm, so setze man $q(x) := x^n \in R[x]$ und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $p(x) := \max_{i=0}^{n-1} \varphi(\alpha_i) x^i$.*

Für jede Zahl $t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $q(t) > p(t)$ ist durch

$$\Phi_t : \begin{cases} K(a) & \to \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \sum_{i=0}^{n-1} b_i a^i & \mapsto \quad \max_{i=0}^{n-1} \varphi(b_i) t^i \end{cases}$$

eine nichtarchimedische Norm auf $K(a)$ gegeben, welche φ fortsetzt.
[Der Beweis verläuft analog zum Beweis von 2.1.]

(b) *Nicht jede Körpertopologie, welche τ_φ fortsetzt, läßt sich durch eine solcherart konstruierte Norm induzieren:*
Sei φ der gewöhnliche Betrag auf $\mathbb{Q}$, $a = \sqrt{2}$ und $(a_n)_n$ eine Folge von Elementen aus $\mathbb{Q}$ mit $(a_n)_n \to_{\tau_{|\,|}} a$. Es konvergiert $(a_n - \sqrt{2})_n$ zwar in der Betragstopologie gegen Null, aber für kein zulässiges $t \in \mathbb{R}$ in der von Φ_t induzierten Topologie auf $\mathbb{Q}(a)$.

2.3 Satz Normfortsetzungssatz
Es sei L/K eine algebraische Körpererweiterung und $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm. Dann gibt es eine Norm $\Phi : L \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\Phi|K = \varphi$.
Ist φ nichtarchimedisch, so kann Φ nichtarchimedisch gewählt werden.

Beweis: Man setze

$$M := \left\{ \varphi_F \subseteq L \times \mathbb{R}_{\geq 0} \mid \begin{array}{c} \varphi_F : F \to \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ Norm,} \varphi_F|K = \varphi \text{ und } F \text{ ist} \\ \text{Zwischenkörper von } L \text{ und } K \end{array} \right\}.$$

M ist bezüglich Inklusion geordnet, besitzt also ein maximales Element φ_F. Es gilt $L = F$, denn wäre $a \in L \backslash F$, so gäbe es vermöge 2.1 eine Norm $\Phi_t : F(a) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\Phi_t|F = \varphi_F$, also wäre $\varphi_F \subsetneq \Phi_t$ und $\Phi_t \in M$ im Widerspruch zur Maximalität von φ_F.
Der Beweis für den nichtarchimedischen Fall verläuft analog mit Hilfe von 2.2.□

2.2 Das Anzahlproblem

Durch Variation des verwendeten $t \in \mathbb{R}_{>0}$ können auf unendlich algebraischen Körpererweiterungen nichtäqivalente Normfortsetzungen konstruiert werden:

2.4 Satz
Es sei L/K eine unendliche algebraische Körpererweiterung. Jede nichttriviale Norm φ auf K besitzt mindestens $2^{\aleph_0}$ paarweise nichtäquivalente Normfortsetzungen auf L.

Beweis: Man setze $L_0 := K$ und wähle induktiv $a_n \in L$ mit $L_n := L_{n-1}(a_n) \neq L_{n-1}$. Offensichtlich ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ ein Unterkörper von L, aufgrund von 2.3 kann oBdA $L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} L_n$ angenommen werden.
Es sei $m_n(x) = \sum_{k=0}^{g_n} \alpha_{nk} x^k \in L_{n-1}[x]$ das normierte Minimalpolynom von a_n über L_{n-1} mit $grad_{L_{n-1}}\, m_n(x) = g_n$.
Man wähle eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{N}^* =: \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$, für die jede Menge N_i unendlich ist [z.B. $N_i := 2^i(2\mathbb{N}+1)$].
Da φ nichttrivial ist, gibt es ein $y \in K^*$ mit $\varphi(y) < \frac{1}{2}$. Man setze $\Phi_0 := \varphi$ und konstruiere induktiv für jedes $n \in \mathbb{N}^*$

$$p_n(x), q_n(x) \in \mathbb{R}[x],\ \widetilde{c_n} \in \mathbb{R},\ h_n \in \mathbb{N},\ c_n, s_n \in \mathbb{R}_{>0},\ \Phi_n : L_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

wie folgt:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1}(-\alpha_{nk})x^k \in \mathbb{R}[x],\ q_n(x) := x^{g_n} \in \mathbb{R}[x].$$
(vgl. die Form der Darstellung in 2.1)

Es sei $\widetilde{c_n} \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall\, c > \widetilde{c_n} : \quad q_n(c) > p_n(c)$$

und $h_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi\left(y^{h_n}\right) < \tfrac{1}{\widetilde{c_n}},$$

weiter sei $c_n := \frac{1}{\varphi\left(y^{h_n}\right)}$.
Also gilt $c_n > \widetilde{c_n}$ und erst recht

$$s_n := c_n \cdot n > \widetilde{c_n}.$$

Aus Satz 2.1 ergibt sich, dass

$$\Phi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} L_n & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \sum\limits_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1}(b_k) s_n^k \end{array} \right. \qquad (\text{ mit } b_0, ..., b_{g_n-1} \in L_{n-1})$$

eine Norm auf L_n ist, welche Φ_{n-1} fortsetzt.
Für $A \subseteq \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{N}^*$ definiere man

$$t_{n,A} := \left\{ \begin{array}{cl} c_n \cdot n & \text{falls } n \in \bigcup\limits_{i \in A} N_i \\ c_n & \text{falls } n \in \bigcup\limits_{i \notin A} N_i \end{array} \right.$$

und $\Phi_{0,A} := \varphi$,

$$\Phi_{n,A} : \left\{ \begin{array}{ccc} L_n & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \sum\limits_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k & \mapsto & \sum\limits_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,A}(b_k)(t_{n,A})^k \end{array} \right. .$$

Wegen $s_n = c_n \cdot n \geq t_{n,A}$ folgt $\Phi_n \geq \Phi_{n,A}$ durch Induktion über n:

$$\begin{aligned} \Phi_n\left(\sum_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k\right) &= \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1}(b_k) s_n^k \\ &\geq \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1}(b_k)(t_{n,A})^k \\ &\overset{Ind.}{\geq} \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,A}(b_k)(t_{n,A})^k \\ &= \Phi_{n,A}\left(\sum_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k\right) \end{aligned}$$

Daher gilt für $c \geq \widetilde{c_n}$

$$\begin{aligned} q_n(c) &> p_n(c) = \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1}(\alpha_{nk}) c^k \\ &\geq \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,A}(\alpha_{nk}) c^k. \end{aligned}$$

Insbesondere ist wegen $t_{n,A} \geq c_n > \widetilde{c_n}$ mit den Bezeichnungen $q_{n,A}(c) := q_n(c)$ und $p_{n,A}(c) := \sum\limits_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,A}(\alpha_{nk})c^k$, gemäß 2.1 $\Phi_{n,A}$ eine Norm auf L_n mit $\Phi_{n,A}|L_{n-1} = \Phi_{n-1,A}$. Folglich ist $\Phi_A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Phi_{n,A}$ eine Norm auf L mit $\Phi_A|K = \varphi$.
Behauptung: $A \neq B \quad \Rightarrow \tau_{\Phi_A} \neq \tau_{\Phi_B}$
Man setze $M_i := \left\{ y^{h_n} \cdot a_n \mid n \in N_i \right\}$.
Es gilt: $\forall i \in \mathbb{N}^* \backslash A : \quad \Phi_A[M_i] = \{1\}$:
[Sei $i \in \mathbb{N}^* \backslash A$ und $n \in N_i$, also erhält man:

$$\begin{aligned} \Phi_A\left(y^{h_n} a_n\right) &= \Phi_{n,A}\left(y^{h_n} a_n\right) \\ &= \varphi\left(y^{h_n}\right) \cdot t_{n,A} \\ &= \varphi\left(y^{h_n}\right) \cdot c_n = 1 \qquad] \end{aligned}$$

und: $\forall i \in A : \quad \Phi_A[M_i]$ unbeschränkt
[Sei $i \in A$, $n \in N_i$, also

$$\Phi_A\left(y^{h_n} a_n\right) = ... = \varphi\left(y^{h_n}\right) \cdot n \cdot c_n = n$$

Da N_i unendlich ist, folgt die Behauptung.]
Sind $A, B \subseteq \mathbb{N}^*$ mit $A \neq B$, etwa oBdA $i \in A \backslash B$, so ist M_i τ_{Φ_A}-unbeschränkt, aber τ_{Φ_B}-beschränkt. Folglich gilt $\tau_{\Phi_A} \neq \tau_{\Phi_B}$. □

2.5 Korollar
Es sei K ein endlicher Körper, x transzendent über K und $L/K(x)$ eine unendlich algebraische Körpererweiterung. Dann gibt es genau $2^{\aleph_0}$ viele verschiedene lokalbeschränkte Körpertopologien auf L.

Beweis: Gemäß 2.4 besitzt die x-adische [2]Bewertung auf $K(x)$ $2^{\aleph_0}$ paarweise nichtäquivalente Normfortsetzungen auf L.

---

[2]Dabei ist $\varphi_x : \left\{ \begin{array}{ccl} K(x) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \frac{p(x)}{q(x)} & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 2^{-n} & \text{für } p(x) \neq 0 \\ 0 & \text{für } p(x) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$, wobei $\frac{p(x)}{q(x)} = x^n \cdot \frac{p'(x)}{q'(x)}$ mit $ggT(p'(x), x) = 1 = ggT(q'(x), x)$ gilt. φ_x ist eine nichtarchimedische reelle Bewertung, die sogenannte $x-$adische Bewertung.

Da jede nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf L von einer Fastordnung, also einer Teilmenge von L erzeugt wird, kann es höchstens $2^{\aleph_0}$ viele paarweise verschiedene lokalbeschränkte Ringtopologien auf L geben. □

Damit ist die in (Kiltinen, 1973) gestellte Frage nach der Anzahl lokalbeschränkter Körpertopologien durch folgende Übersicht beantwortet:
Es sei K ein Körper mit Primkörper P und B eine Transzendenzbasis von K über P.

algebraische Situation	Anz.lb KT auf K	Quelle
K absolut algebraisch	2	(Kiltinen, 1973)
K globaler Körper	$\aleph_0$	(Weber, 1979a)
$card\ B \geq \aleph_0$	$2^{card\ K}$	(Kiltinen, 1973)
$char\ K = 0$, $B = \emptyset$, K/P unendlich	$2^{card\ K}$	(Maiwald, 1996)
$char\ K = 0$, $card\ B \in \mathbb{N}^*$	$2^{card\ K}$	(Cohen, 1984)
$char\ K \neq 0$, $card\ B \geq 2$	$2^{card\ K}$	(Cohen, 1984)
$char\ K \neq 0$, $card\ B = 1$, $K/P(B)$ unendlich	$2^{card\ K}$	Korollar 2.5

Die Konstruktion aus 2.4 wird jetzt noch verwendet, um ein Beispiel für das nächste Kapitel bereitzustellen.

2.6 Beispiel
Es gibt einen Körper L und eine hausdorffsche Körpertopologie τ auf L, welche nicht lokalbeschränkt (und daher nicht normierbar), aber deren topologisches Radikal eine offene Nullumgebung und additiv abgeschlossen ist.

Beweis: Es sei P ein endlicher Körper mit algebraischem Abschluß $F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, wobei $F_0 := P$, $a_{n+1} \in F_{n+1}$ und $F_{n+1} = F_n(a_{n+1})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gelten möge. Weiter sei x transzendent über F, $L_n := F_n(x)$ und $L := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n = F(x)$. Mit φ_x sei die x-adische Bewertung auf $F(x)$ bezeichnet.
Zu $\varphi := \varphi_x|L_0$, $A \subseteq \mathbb{N}^*$ und $n \in \mathbb{N}$ konstruiere man wie in 2.4 die Normen $\Phi_{n,A}$ auf L_n und Φ_A auf L. Im folgenden werden die Bezeichnungen aus dem Beweis von 2.4 übernommen.

- $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}^* \quad \Rightarrow \Phi_A \leq \Phi_B$, also $\tau_{\Phi_A} \subseteq \tau_{\Phi_B}$
  Beweis durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ für die Normen $\Phi_{n,A}$ und $\Phi_{n,B}$:

- $n = 0$: $\Phi_{0,A} = \varphi = \Phi_{0,B}$
- $n \to n+1$:

$$\begin{aligned}\Phi_{n,A}\left(\sum_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k\right) &= \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,A}(b_k)(t_{n,A})^k \\ &\le \sum_{k=0}^{g_n-1} \Phi_{n-1,B}(b_k)(t_{n,B})^k \\ &= \Phi_{n,B}\left(\sum_{k=0}^{g_n-1} b_k a_n^k\right)\end{aligned}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\Phi_{n,A}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2}$, also x $\tau_{\Phi_{n,A}}$-nilpotent. Es ist $\tau_{\varphi_x}|L_n$ die einzige lokalbeschränkte hausdorffsche Ringtopologie σ auf L_n, für die x σ-nilpotent ist (Cohen, 1977, S.125, Theorem 1). Folglich gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \tau_{\Phi_{n,A}} = \tau_{\varphi_x}|L_n.$$

Demnach ist

$$Rad(\tau_{\Phi_A}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Rad(\tau_{\Phi_{n,A}}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Rad\left(\tau_{\varphi_x|L_n}\right) = Rad(\tau_{\varphi_x}).$$

Wegen $K_1^{\Phi_A}(0) \subseteq Rad(\tau_{\phi_A})$ gilt $Rad(\tau_{\Phi_A}) \in \mathfrak{U}_{\tau_{\Phi_A}}(0)$ Man setze nun für $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\tau_m := \tau_{\Phi_{\{1,\ldots,m\}}}$$

und

$$\tau := \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \tau_m.$$

Als Supremum von hausdorffschen Körpertopologien ist τ hausdorffsche Körpertopologie, wegen

$$\tau = \sup_{m\in\mathbb{N}^*} \tau_m \subseteq \tau_{\Phi_{\mathbb{N}^*}}$$

ist τ nichtdiskret. Es ist

$$Rad(\tau) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}^*} Rad(\tau_m) = Rad(\tau_{\varphi_x}) \in \mathfrak{U}_\tau(0).$$

Wäre τ lokalbeschränkt, so gäbe es aufgrund von 1.12(b) ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\tau = \sup_{i=1}^{m} \tau_i = \tau_m \subsetneq \tau_{m+1} \subseteq \tau$$

-Widerspruch!

Kapitel 3

Das topologische Radikal

In diesem Kapitel soll das topologische Radikal zunächst allgemein untersucht werden. Als erstes geht es um die Fragestellung, wann das topologische Radikal additiv abgeschlossen ist.
Anschließend wird mit Hilfe des topologischen Radikals der Prozeß der Spektralnormbildung auf nicht notwendig lokalbeschränkte Ringtopologien verallgemeinert.
Im darauf folgenden Abschnitt wird eine algebraische Berechnung des topologischen Radikals aus einer die Topologie erzeugenden Fastordnung vorgenommen. Diese Berechnungsmethode wird in den weiteren Kapiteln eine wesentliche Rolle spielen.

3.1 Algebraische Eigenschaften von $Rad(\tau)$

Zunächst wird dieser Hilfsatz benötigt:

3.1 Lemma
Es sei τ eine Ringtopologie auf einem Körper K und τ Supremum von lokalbeschränkten Topologien. Dann gilt:

$$\forall a \in Rad(\tau) \quad \forall U \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \exists V \in \mathcal{U}_\tau(0) \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=0}^{n} a^i V \subseteq U$$

Beweis:

- Zunächst sei τ lokalbeschränkt: Seien $a \in Rad(\tau)$ und $U \in \mathcal{U}_\tau(0)$. OBdA sei $a \neq 0$ und U $\tau-$beschränkt. Man wähle $W \in \mathcal{U}_\tau(0)$ mit $W + W \subseteq U$ und $k \in \mathbb{N}^*$ mit $a^k U \subseteq W$ gemäß 1.18(d). Man bestimme $S, T \in \mathcal{U}_\tau(0)$ mit $\sum_{i=0}^{k-1} S \subseteq U$ und $\{a^0, a^1, ..., a^{k-1}\}T \subseteq S$, also gelten

$$(*) \quad T + aT + ... + a^{k-1}T \subseteq S + ... + S \subseteq U \text{ und}$$
$$(**) \quad a^k(U + U) \subseteq W + W \subseteq U.$$

Man wähle ein $m \in \mathbb{N}^*$ mit $a^m U \subseteq T$ [1.18(d)] und setze $V := a^{m+k}U$. Da a^{m+k} invertierbar ist, ist die Abbildung $x \mapsto a^{m+k}x$ ein Homöomorphismus, also gilt $V \in \mathcal{U}_\tau(0)$. Man erhält:

$$(***) \qquad \forall\, p \in \mathbb{N} : \quad \sum_{i=0}^{p} a^{ki}V \subseteq a^m U$$

[Beweis durch vollständige Induktion über p:

- $p = 0$: $\quad V = a^{m+k}U = a^m \cdot a^k U \overset{(**)}{\subseteq} a^m U$
- $p \to p+1$: $\quad \sum_{i=0}^{p+1} a^{ki}V = V + \sum_{i=1}^{p+1} a^{ki}V = a^m a^k U + a^k \sum_{i=0}^{p} a^{ki}V \subseteq a^m a^k U +$ $a^k a^m U = a^m(a^k(U+U)) \overset{(**)}{\subseteq} a^m U$]

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Man wähle ein $l \in \mathbb{N}^*$ mit $lk - 1 \geq n$. Die Behauptung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a^i V \quad & \subseteq \quad \sum_{i=0}^{lk-1} a^i V = \sum_{r=0}^{k-1} a^r \sum_{s=0}^{l-1} a^{sk} V \\ & \overset{(***)}{\subseteq} \quad \sum_{r=0}^{k-1} a^r a^m U \subseteq \sum_{r=0}^{k-1} a^r T \overset{(*)}{\subseteq} U \end{aligned}$$

- Nun der allgemeine Fall: Sei $\tau = \sup_{i \in I} \tau_i$ und für jedes $i \in I$ sei τ_i lokalbeschränkt. Sei $a \in Rad(\tau) \overset{1.18(b)}{=} \bigcap Rad(\tau_i)$ und $U \in \mathcal{U}_{\sup_{i\in I} \tau_i}(0)$, etwa $m \in \mathbb{N}$, $i_1, ..., i_m \in I$, $U_{i_1} \in \mathcal{U}_{\tau_{i_1}}(0), ..., U_{i_m} \in \mathcal{U}_{\tau_{i_m}}(0)$ mit $\bigcap_{k=1}^{m} U_{i_k} \subseteq U$. Gemäß dem Spezialfall wähle man Nullumgebungen $V_{i_k} \in \mathcal{U}_{\tau_{i_k}}(0)$ mit

$$\forall k = 1, ..., m \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{i=0}^{n} a^i V_{i_k} \subseteq U_{i_k}$$

Für $V := \bigcap_{k=1}^{m} V_{i_k} \in \mathcal{U}_{\sup_{i\in I} \tau_i}(0)$ erhält man

$$\forall k = 1, ..., m \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \sum_{i=0}^{n} a^i V \subseteq \sum_{i=0}^{n} a^i V_{i_k} \subseteq U_{i_k},$$

also auch $\sum_{i=0}^{n} a^i V \subseteq \bigcap_{k=1}^{m} U_{i_k} \subseteq U$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. $\square$

3.2 Satz
Es sei τ Supremum von lokalbeschränkten Ringtopologien auf einem Körper K, und $\mathbb{Z} \cdot 1$ sei $\tau-$beschränkt. Dann gilt:

$$Rad(\tau) + Rad(\tau) = Rad(\tau)$$

Beweis: : Wegen $0 \in Rad(\tau)$ braucht nur "$\subseteq$" gezeigt zu werden. Es seien $a, b \in Rad(\tau)$ und $U \in \mathfrak{U}_\tau(0)$. Man wähle $S, V, W, T \in \mathfrak{U}_\tau(0)$ mit $S + S \subseteq U$, $\sum_{k=0}^{n} a^k V \subseteq S$, $\sum_{k=0}^{n} b^k W \subseteq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gemäß 3.1 und $(\mathbb{Z} \cdot 1)T \subseteq V \cap W$. Da a, b $\tau-$nilpotent sind, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall n \geq n_0 : \quad a^n, b^n \in T.$$

Daraus ergibt sich für $n \geq n_0$:
[hierbei meint $n \cdot T = \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right) \cdot T$]

$$\begin{aligned}
(a+b)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^k b^{2n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} b^{2n-k} a^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} a^{2n-k} b^k \\
&\in \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} T a^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} T b^k \\
&\subseteq \sum_{k=0}^{n} (\mathbb{Z} \cdot 1) T a^k + \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{Z} \cdot 1) T b^k \\
&\subseteq \sum_{k=0}^{n} a^k V + \sum_{k=0}^{n-1} b^k W \\
&\subseteq S + S \subseteq U
\end{aligned}$$

Also ist $(a+b)^2 \in Rad(\tau)$, wegen 1.18(a) gilt die Behauptung. □

3.3 Satz
Es sei K ein Körper und O eine Fastordnung auf K mit 2-Addiator z. Dann gilt:

$$z \cdot (Rad(\tau_O) + Rad(\tau_O)) \subseteq Rad(\tau_O)$$

Beweis: Seien $a, b \in Rad(\tau_O)$ und $U \in \mathfrak{U}_{\tau_O}(0)$. Man wähle $x \in O^*$ mit $xO \subseteq U$. Die Mengen $A := \{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ und $B := \{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ sind offenbar τ_O-beschränkt, es sei $V \in \mathfrak{U}_{\tau_O}(0)$ mit $VA \subseteq xO$ und $VB \subseteq xO$. Man wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$, so dass für alle $n \geq n_0$ stets $a^n, b^n \in V$ gilt. Damit bekommt man:

$$\begin{aligned}
(z(a+b))^{2n} &= z^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} a^{2n-k} b^k \\
&= z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} b^{2n-k} a^k + z^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} a^{2n-k} b^k \\
&\in z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} VA + z^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} VB \\
&\subseteq z^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} xO + z^{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2n-k} xO \\
&= xz^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} O \subseteq xz^{2n} \sum_{k=1}^{2^{2n}} O.
\end{aligned}$$

Es gilt: $\forall k \in \mathbb{N}: \quad z^k \sum_{i=1}^{2^k} O \subseteq O$

Vollständige Induktion über k:

- $k = 0$: nichts zu zeigen
- $k \mapsto k+1$: $\quad z^{k+1} \sum_{i=1}^{2^{k+1}} O = z \left(z^k \sum_{i=1}^{2^k} O + z^k \sum_{i=1}^{2^k} O \right) \subseteq z(O+O) \subseteq O$

Also ergibt sich $(z(a+b))^{2n} \in xO \subseteq U$ für jedes $n \geq n_0$, d.h. $(z(a+b))^2$ ist τ_O-nilpotent, wegen 1.18(a) folgt die Behauptung. □

Umgekehrt kann man die Frage stellen, ob für jedes $z \in K$ mit

$$z \cdot (Rad(\tau_O) + Rad(\tau_O)) \subseteq Rad(\tau_O)$$

eine τ_O erzeugende Fastordnung O' mit 2-Addiator z existiert. Dabei ist der Spezialfall $z = 1$ von eigentlichem Interesse. Diese Frage wird in Beispiel 3.5(b) verneint.

Für die Konstruktion des Beispiels wird zunächst folgender Hilfsatz zitiert:

3.4 Lemma *(Cohen, 1983, S.82, Lemma 1)*

Es sei K ein unendlicher Körper. Dann existiert eine Folge von Integritätsbereichen $(R_n)_n$ mit $1 \in R_n \subsetneq R_{n+1}$ für jede natürliche Zahl n und $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$.

3.5 Beispiel

(a) Es sei x transzendent über dem Körper K, $\varphi : K \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Norm auf K und

$$\Phi : \begin{cases} K((X)) & \to & \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \\ \sum\limits_{i=z}^{\infty} a_i x^i & \mapsto & \sum\limits_{i=z}^{\infty} \varphi(a_i) 2^{-i} \end{cases},$$

$$R := \{ \, r \in K((X)) \mid \Phi(r) < \infty \, \}.$$

Dann gilt: $\Phi|R$ ist eine Norm auf dem Integritätsbereich R.

(b) Es sei K ein unendlicher Körper und x transzendent über K. Dann gibt es eine Norm ψ auf $K(x)$ mit

$$Rad(\tau_\psi) + Rad(\tau_\psi) = Rad(\tau_\psi) = K^1_{\varphi_x}(0),\ ^1$$

und $\mathfrak{U}_{\tau_\psi}(0)$ besitzt keine Basis aus additiv abgeschlossenen Mengen, insbesondere ist 1 kein 2-Addiator zu einer τ_ψ erzeugenden Fastordnung.

Darlegung:

- Zu (a): Seien $a, b \in R$, etwa $a = \sum\limits_{i=z_a}^{\infty} a_i x^i$, $b = \sum\limits_{i=z_b}^{\infty} b_i x^i$.
  - zu (N1): $\Phi(a) = 0 \Leftrightarrow \quad \forall\, i \geq z_a : \quad \varphi(a_i) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
  - zu (N2):

$$\begin{aligned}
\Phi(a \cdot b) &= \Phi\left(\left(\sum_{i=z_a}^{\infty} a_i x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=z_b}^{\infty} b_j x^j\right)\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{k=z_a+z_b}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) x^k\right) \\
&= \sum_{k=z_a+z_b}^{\infty} \varphi\left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) 2^{-k} \\
&\leq \sum_{k=z_a+z_b}^{\infty} \sum_{i+j=k} \varphi(a_i)\varphi(b_j) 2^{-i} 2^{-j} \\
&= \left(\sum_{i=z_a}^{\infty} \varphi(a_i) 2^{-i}\right) \cdot \left(\sum_{j=z_b}^{\infty} \varphi(b_j) 2^{-j}\right) \\
&= \Phi(a)\Phi(b) < \infty
\end{aligned}$$

  Also ist $a \cdot b \in R$, und Φ erfüllt $(N2)$.

[1] zur Definition der x-adischen Bewertung φ_x siehe die Fußnote auf Seite 22

- zu (N3): OBdA sei $z_a = z_b =: z$.

$$\begin{aligned}
\Phi(a-b) &= \Phi\left(\left(\sum_{i=z_a}^{\infty} a_i x^i\right) - \left(\sum_{i=z_b}^{\infty} b_i x^i\right)\right) \\
&= \Phi\left(\sum_{i=z}^{\infty} (a_i - b_i) x^i\right) \\
&= \sum_{i=z}^{\infty} \varphi(a_i - b_i) 2^{-i} \\
&\leq \sum_{i=z}^{\infty} \varphi(a_i) 2^{-i} + \sum_{i=z}^{\infty} \varphi(b_i) 2^{-i} \\
&= \Phi(a) + \Phi(b) < \infty,
\end{aligned}$$

  also gilt $a - b \in R$, und Φ erfüllt (N3).
  Offenbar ist $1 \in R$, und R ist nullteilerfrei.

- zu (b): Gemäß 3.4 wähle man eine echt aufsteigende Folge $(R_n)_n$ von Integritätsbereichen mit $K = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} R_n$ und setze

$$\varphi : \begin{cases} K & \to \quad \mathbb{R}_{\geq 0} \\ k & \mapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } k = 0 \\ 2^{\min\{\, n \in \mathbb{N} \mid k \in R_n \,\}} & \text{falls } k \neq 0 \end{cases} \end{cases}$$

  - φ ist eine Norm auf K:
    - zu (N1): $\varphi(k) = 0 \Leftrightarrow k = 0$ nach Definition
    - zu (N2),(N3): Für $a \in R_0$ oder $b \in R_0$ ist nichts zu zeigen. Sonst sei etwa $a \in R_n \backslash R_{n-1}$ und $b \in R_m \backslash R_{m-1}$, also $\varphi(a) = 2^n$ und $\varphi(b) = 2^m$. OBdA sei $n \geq m$. Dann gilt $a - b, ab \in R_n$, also ist

$$\varphi(ab) \leq 2^n \leq 2^n \cdot 2^m = \varphi(a)\varphi(b)$$

      und

$$\varphi(a-b) \leq 2^n \leq 2^n + 2^m = \varphi(a) + \varphi(b).$$

  Nun konstruiere man Φ und R wie in Teil (a) diese Beispiels.

  - Es gilt $K(x) \subseteq R$: Sei $a \in K(x)$, etwa $a = \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p, q \in K[x]$, $q = \sum\limits_{i=m}^{m+n} q_i x^i$ und $q_m \neq 0$. Also gilt

$$q(x) = x^m \cdot q_m \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i+m}}{q_m} x^i\right).$$

Es sei $b := -\sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i+m}}{q_m} x^i$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $\{\frac{q_{1+m}}{q_m}, ..., \frac{q_{n+m}}{q_m}\} \subseteq R_k$. Also gilt $b \in R_k[x]$ und $(1-b)^{-1} \in E(R_k[[x]]) \subseteq E(R)$[2].
Wegen $x^{-m}, \frac{1}{q_m}, p(x) \in R$ ist auch $a = \frac{p(x)}{q(x)} \in R$.

Man setze $\psi := \Phi|K(x)$.

- Es gilt: $Rad(\tau_\psi) = K^1_{\varphi_x}(0)$.
  Sei $a \in K(x)$, etwa $a = x^m \frac{p(x)}{q(x)}$ mit $p(x), q(x) \in K[x]$, $ggT(p(x), x) = 1 = ggT(q(x), x)$ und $m \in \mathbb{Z}$. Für jedes Polynom $s(x) \in R_k[x]$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\psi(s(x)^m) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-i} = 2^{k+1}.$$

  Also ist $(q(x)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\tau_\psi-$und $\tau_{\varphi_x}-$beschränkte Folge. Deshalb gilt:

$$a \in Rad(\tau_\psi) \Leftrightarrow x^m p(x) \in Rad(\tau_\psi).$$

  Wegen

$$a \in Rad(\tau_{\varphi_x}) = K_1^{\varphi_x}(0) \Leftrightarrow x^m p(x) \in K_1^{\varphi_x}(0) \Leftrightarrow m \geq 1.$$

  reicht es zu zeigen: $x^m p(x) \in Rad(\tau_\psi) \Leftrightarrow m \geq 1$

  - Fall 1: $m \geq 1$
    $\psi((x^m p(x))^n) = \psi(x^{mn}(p(x))^n) \leq 2^{-mn} 2^{k+1} \rightarrow_{n\to\infty} 0$, wobei k eine natürliche Zahl mit $p(x) \in R_k[x]$ sei.
  - Fall 2: $m < 1$
    Es gilt

$$\psi((p(x))^n) = \psi\left(p(x)^n x^{nm} \left(\frac{1}{x}\right)^{mn}\right) \leq \psi\left((p(x)x^m)^n\right) \psi\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{mn}\right),$$

    also

$$\frac{\psi((p(x))^n)}{\psi((\frac{1}{x})^{mn})} \leq \psi((p(x)x^m)^n).$$

    Weiter gilt für $m < 1$

$$\psi\left(\left(\tfrac{1}{x}\right)^{n*m}\right) = \psi\left(x^{|m|n}\right) \leq 1,$$

    also

$$\psi\left((p(x))^n\right) \leq \tfrac{\psi((p(x))^n)}{\psi((\frac{1}{x})^{mn})}.$$

    Da $(p(x))^n$ einen von 0 verschiedenen konstanten Term a_0^n hat, ist

[2]Es ist $(1-b)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} b^i \in R_k[[x]] \subseteq R$. Siehe auch (Bosch, 1993, S.31, Aufgabe 7)

$$\psi((p(x))^n) = \Phi((p(x))^n) \geq \varphi(a_0^m)2^0 \geq 1.$$

Insgesamt ergibt sich $1 \leq \psi((p(x)x^m)n)$.

- Es gibt keine Basis von $\mathfrak{U}_{\tau_\psi}(0)$ aus additiv abgeschlossenen Mengen: Zu $m \in \mathbb{N}^*$ bestimme man $n \in \mathbb{N}^*$ mit $2^{n-1} \leq m \leq 2^n - 1$ und wähle ein $a_m \in K$ mit $\varphi(a_m) = \frac{2^m}{2^{n-1}}$. Also gilt $\psi(a_m x^m) = \frac{1}{2^{n-1}}$ und daher $\tau_\psi - \lim\limits_{m\to\infty} a_m x^m = 0$. Weiter gilt wegen $\varphi(a_i)2^{-i} = \frac{1}{2^n}$ für $2^{n-1} \leq i \leq 2^n - 1$:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\sum_{i=1}^{2^n-1} a_i x^i\right) &= \sum_{i=1}^{2^1-1} \varphi(a_i)2^{-i} + \sum_{i=2^1}^{2^2-1} \varphi(a_i)2^{-i} + ... \\
&\quad ... + \sum_{i=2^{n-2}}^{2^{n-1}-1} \varphi(a_i)2^{-i} + \sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} \varphi(a_i)2^{-i} \\
&= 1 + ((2^2-1) - (2^1-1)) \cdot \frac{1}{2} + ... \\
&\quad ... + ((2^{n-1}-1) - (2^{n-2}-1)) \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + \\
&\quad +((2^n-1) - (2^{n-1}-1)) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\
&= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + ... + 2^{n-2} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = n,
\end{aligned}$$

  also ist $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x^i \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ τ_ψ−unbeschränkt.

  Annahme: Es gibt eine Basis von $\mathfrak{U}_{\tau_\psi}(0)$ aus additiv abgeschlossenen Mengen. Zu $K_1^\psi(0)$ wähle $V, W \in \mathfrak{U}_{\tau_\psi}(0)$, $m_0 \in \mathbb{N}^*, z \in V^*$ mit $W + W \subseteq W \subseteq K_1^\psi(0)$, $VV \subseteq W$, $V \subseteq W$,

$$\begin{aligned}
&\forall m \geq m_0 : \quad a_m x^m \in V \\
&\text{und } z \cdot \left(\sum_{i=0}^{m_0-1} a_i x^i\right) \in V.
\end{aligned}$$

  Für $m \geq m_0$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} a_i x^i &= \frac{1}{z}\left(z \sum_{i=0}^{m_0-1} a_i x^i\right) + \frac{1}{z} \sum_{i=m_0}^{m} a_i x^i z \\
&\subseteq \frac{1}{z} \cdot V + \frac{1}{z} \sum_{i=m_0}^{m} VV \\
&\subseteq \frac{1}{z} W + \frac{1}{z} \sum_{i=m_0}^{m} W \\
&\subseteq \frac{1}{z} W \subseteq \frac{1}{z} K_1^\psi(0).
\end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \sum\limits_{i=1}^{m} a_i x^i \mid m \in \mathbb{N} \right\}$ $\tau_\psi-$beschränkt - Widerspruch! $\square$

Als nächstes wird aus dem topologischen Radikal eine lokalbeschränkte Topologie konstruiert, die unter gewissen Voraussetzungen (siehe 3.7 und 3.8) das gleiche topologische Radikal besitzt. Dafür wird die folgende Aussage verwendet; der eingeführte Begriff wird auch bei der Berechnung des Radikals Anwendung finden (vgl. 3.12).

3.6 Satz und Bezeichnung
Es sei O eine Fastordnung mit 2-Addiator z auf einem Körper K.
Die Menge

$$\begin{aligned} \overline{O}^{comp} &:= \{ x \in K \mid \{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \} \text{ ist } \tau_O - \text{beschränkt} \} \\ &= \{ x \in K \mid \quad \exists\, r \in O^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad rx^n \in O \} \\ &= \{ x \in K \mid \quad \exists\, r \in K^* \quad \forall\, n \in \mathbb{N}: \quad rx^n \in O \} \end{aligned}$$

ist eine Fastordnung auf K mit 2-Addiator z, und es gilt $O \subseteq \overline{O}^{comp}$.

Beweis: Offenbar sind $0, 1 \in O$ und $K = \overline{O}^{comp} \left(\left(\overline{O}^{comp} \right)^* \right)^{-1}$, da $O \subseteq \overline{O}^{comp}$ gilt. Seien $x, y \in \overline{O}^{comp}$, etwa $r, s \in O^*$ mit $r \{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq O$ und $s \{ y^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq O$. Dann gilt $rs \{ (xy)^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq OO \subseteq O$, also ist $\overline{O}^{comp}$ multiplikativ abgeschlossen. Weiter gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} rs(z(x+y))^n &= z^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} r x^{n-k} s y^k \\ &\in z^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} OO \subseteq z^n \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=1}^{\binom{n}{k}} O \\ &\subseteq z^n \sum_{k=1}^{2^n} O \subseteq O, \end{aligned}$$

also auch $z \left(\overline{O}^{comp} + \overline{O}^{comp} \right) \subseteq \overline{O}^{comp}$.
Da $\{ (-y)^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq \{ y^n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ -y^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ τ_O-beschränkt ist, gilt $-\overline{O}^{comp} \subseteq \overline{O}^{comp}$, also gilt auch $z \left(\overline{O}^{comp} - \overline{O}^{comp} \right) \subseteq \overline{O}^{comp}$. $\square$

3.7 Satz
Es sei τ eine Ringtopologie auf einem Körper K, $z \in K^*$ mit

$$\begin{array}{rl} & z(Rad(\tau) + Rad(\tau)) \subseteq Rad(\tau) \\ \text{und} & Rad(\tau)\,(Rad(\tau)^*)^{-1} = K. \end{array}$$

Dann gelten:

(a) $Rad(\tau) \subseteq SP_\tau := \{\, x \in K \mid xRad(\tau) \subseteq Rad(\tau) \,\}$ *ist eine Fastordnung mit 2-Addiator z auf K. (Diese heiße* **Spektralfastordnung zu** τ*, die von ihr erzeugt Topologie $\tau_{(SP_\tau)}$ werde mit τ_{sp} bezeichnet und heiße* **Spektraltopologie zu** τ*.)*

(b) *Ist P eine Fastordnung auf K mit $Rad(\tau) = Rad(\tau_P)$, so folgt $P \subseteq SP_\tau$. Ist P eine Fastordnung auf K mit $Rad(\tau) \subseteq P \subseteq SP_\tau$, so gilt $\tau_P = \tau_{sp}$.*

(c) $Rad(\tau_{sp}) \subseteq Rad(\tau) \subseteq SP_\tau$

(d) *Äq:* (i) $Rad(\tau_{sp}) = Rad(\tau)$
(ii) *es existiert eine lokalbeschränkte Ringtopologie σ mit* $Rad(\tau) = Rad(\sigma)$
(iii) *es existiert eine Ringtopologie σ mit* $Rad(\tau) = Rad(\sigma) \in \mathcal{U}_\sigma(0)$
(iv) $\forall x \in K \quad \forall\, a \in Rad(\tau) \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad a^n x \in Rad(\tau)$

(e) $Rad(\tau_{sp}) \neq \{0\} \quad \Rightarrow \tau_{sp} = (\tau_{sp})_{sp}$

Beweis:

- zu (a): Offenbar gilt $0, 1, z \in SP_\tau$ und $(SP_\tau)(SP_\tau) \subseteq SP_\tau$. Seien $a, b \in SP_\tau$, dann gilt:

$$\begin{aligned} z(a+b)Rad(\tau) &\subseteq z((aRad(\tau) + bRad(\tau)) \\ &\subseteq z\,(Rad(\tau) + Rad(\tau)) \subseteq Rad(\tau), \end{aligned}$$

  also ist $z(a+b) \in SP_\tau$, ebenso zeigt man $z(a-b) \in SP_\tau$. Wegen $Rad(\tau) \subseteq SP_\tau$ ist auch $SP_\tau\,(SP_\tau^*)^{-1} = K$.

- zu (b): Sei $p \in P$, dann ist $\{\, p^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ eine τ_P-beschränkte Menge, und daher gilt $((ap)^n)_n \to_{\tau_P} 0$ für jedes $a \in Rad(\tau) = Rad(\tau_P)$, d.h. $p \in SP_\tau$. Die zweite Aussage ergibt sich wie folgt: Sei $a \in Rad(\tau)^*$, dann ist $aP \subseteq a(SP_\tau) \subseteq Rad(\tau)(SP_\tau) \subseteq Rad(\tau)$, also gilt $Rad(\tau) \in \mathcal{U}_{\tau_P}(0)$, und $Rad(\tau)$ ist τ_P-beschränkt. Genauso ist $Rad(\tau)$ auch beschränkte Nullumgebung in τ_{sp}. Daher gilt $\tau_P = \tau_{sp}$.

- zu (c): Sei $a \in Rad(\tau_{sp})$ und $b \in Rad(\tau)^*$. Wegen $bSP_\tau \in \mathfrak{U}_{\tau_{sp}}(0)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $a^n \in bSP_\tau$, also gilt

$$\begin{aligned} a^n &= \frac{a^n}{b} \cdot b \in \frac{a^n}{b} \cdot Rad(\tau) \\ &\subseteq SP_\tau \cdot Rad(\tau) \subseteq Rad(\tau). \end{aligned}$$

  Gemäß 1.18(a) gilt also auch $a \in Rad(\tau)$.

- zu (d): (i)⇒(ii) Wähle $\sigma := \tau_{sp}$.
  (ii)⇒(iii) Sei σ eine lokalbeschränkte Ringtopologie mit $Rad(\tau) = Rad(\sigma)$. Da $Rad(\tau) \neq \{0\}$ gilt, ist σ nichtdiskret. Falls σ hausdorffsch ist, so gilt $Rad(\sigma) \in \mathfrak{U}_\sigma(0)$ gemäß 1.19, sonst ist $\sigma = \tau_{indis}$, also gilt $Rad(\sigma) = K = \mathfrak{U}_\sigma(0)$.
  (iii)⇒(iv) Folgt mit 1.18(d).
  (iv)⇒(i) Sei $a \in Rad(\tau)$ und $x \in SP_\tau^*$. Gemäß (iv) sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a^{n_0}\frac{1}{x} \in Rad(\tau)$. Für jedes $n > n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} a^n \frac{1}{x} Rad(\tau) &= a^{n-n_0} \cdot a^{n_0} \frac{1}{x} \cdot Rad(\tau) \\ &\subseteq Rad(\tau) \cdot Rad(\tau) \cdot Rad(\tau) \subseteq Rad(\tau), \end{aligned}$$

  also $a^n \frac{1}{x} \in SP_\tau$, d.h. $a^n \in xSP_\tau$. Folglich ist a $\tau_{sp}-$nilpotent.

- zu (e): OBdA sei τ_{sp} hausdorffsch. Wegen $Rad(\tau_{sp}) \neq \{0\}$ gilt (siehe 1.19) $Rad(\tau_{sp}) \in \mathfrak{U}_{\tau_{sp}}(0)$. Aufgrund von 3.3 erfüllt τ_{sp} die Voraussetzungen von 3.7. Wegen (d) gilt $Rad(\tau_{sp}) = Rad((\tau_{sp})_{sp})$, also $Rad(\tau_{sp}) \overset{3.7(c)}{\subseteq} SP_\tau \overset{3.7(b)}{\subseteq} SP_{(\tau_{sp})}$. Mit 3.7(b) angewandt auf τ_{sp} folgt $\tau_{sp} = (\tau_{sp})_{sp}$. □

Ist τ eine nichtdiskrete, lokalbeschränkte, hausdorffsche Ringtopologie auf K mit $Rad(\tau) \in \mathfrak{U}_\tau(0)$, so sind die Voraussetzungen des folgenden Korollars erfüllt: Gem. 1.19 gilt, dass τ, etwa durch φ, normierbar ist. Sei O eine τ erzeugende Fastordnung mit 2-Addiator z, dann gilt wegen 3.3

$$z(Rad(\tau) + Rad(\tau)) \subseteq Rad(\tau) \in \mathfrak{U}_\tau(0)$$

Wegen 1.20 gibt es eine homogene Norm φ_{sp} mit

$$Rad(\tau_{\varphi_{sp}}) = Rad(\tau).$$

Teil (a) erweitert diese Aussage auf den nicht lokalbeschränkten Fall und rechtfertigt den Namen Spektraltopologie. Dass es sich um eine echte Verallgemeinerung handelt, wird durch das Beispiel 2.6 belegt.

3.8 Korollar
Es sei τ eine nichtdiskrete, hausdorffsche Ringtopologie auf einem Körper K und $z \in K^*$ mit

$$z\,(Rad(\tau) + Rad(\tau)) \subseteq Rad(\tau) \in \mathcal{U}_\tau(0)$$

Dann gelten:

(a) *Es existiert eine homogene Norm φ mit $Rad(\tau_\varphi) = Rad(\tau)$ und $\tau_\varphi = \tau_{sp}$.*

(b) *char $K \neq 0 \quad \Rightarrow \; Rad(\tau) + Rad(\tau) = Rad(\tau)$.*

Beweis: Da $Rad(\tau)$ eine $\tau-$Nullumgebung ist, gilt $Rad(\tau)\,(Rad(\tau)^*)^{-1} = K$ (vgl. Seite 7, Satz 1.2(e)), mit 3.7(d) folgt $Rad(\tau_{sp}) = Rad(\tau)$.

- zu (a): Es sei $x \in \overline{SP_\tau}^{comp}$, also ist $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ τ_{sp}-beschränkt. Für jedes $a \in Rad(\tau) = Rad(\tau_{sp})$ gilt

$$ax \in Rad(\tau_{sp}) = Rad(\tau),$$
$$\text{also } x \cdot Rad(\tau) \subseteq Rad(\tau), \text{ d.h. } x \in SP_\tau.$$

  Mit den Bezeichnungen aus (Cohn, P.M., 1954,) gilt also $\overline{SP_\tau}^{copm} = SP_\tau$, d.h. SP_τ ist eine regulre Gaugemenge. Weiter ist wegen τ hausdorffsch $Rad(\tau_{sp}) = Rad(\tau) \neq K$. Also folgt die Behauptung aus (Cohn, P.M., 1954, S.169, Theorem 9.4).

- zu (b): Ist *char* $K \neq 0$, so ist $\mathbb{Z} \cdot 1$ endlich, also $\tau_\varphi-$beschränkt. Die Behauptung ergibt sich aus 3.2 und (a). □

3.2 Algebraische Berechnung des topologischen Radikals für lokalbeschränkte Ringtopologien

Ziel dieses Abschnittes ist die Berechnung des topologischen Radikals aus Kenntnis der erzeugenden Fastordnung. Untersucht man zunächst Topologien, welche von Integritätsbereichen erzeugt werden, so spielt der Begriff des Pseudoradikals eine besondere Rolle (vgl. 3.14). Da der Begriff des Primideals in Fastordnungen nicht zur Verfügung steht, wird zunächst eine alternative Darstellung des Pseudoradikals gegeben:

3.9 Satz
Es sei R ein Integritätsbereich. Für das Pseudoradikal von R (vgl. Seite 5) gilt:

$$Rad^*(R) = \{\ a \in R^* \mid R[\tfrac{1}{a}] = Q(R)\ \} \cup \{0\}$$

Beweis:

- "$\subseteq$" Sei $a \in Rad^*(R)$, oBdA $a \neq 0$. Für das multiplikative System $S := \{\ a^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ gilt:

  $$\forall \mathfrak{p} \in spec^*(R): \quad a \in \mathfrak{p} \cap S$$

  Folglich ist $spec(R_S) = \{\{0\}\}$ (vgl. etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 41, Theorem 1.4.8)), das heißt R_S ist ein Körper, also gilt $R[\frac{1}{a}] = R_S = Q(R)$.

- "$\supseteq$" Sei $a \in R^*$ mit $R[\frac{1}{a}] = Q(R)$, $\mathfrak{p} \in spec^*(R)$ und $S := \{\ a^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$. Dann gilt $Q(R) = \mathfrak{p}Q(R) = \mathfrak{p}R_S$, also auch $\mathfrak{p} \cap S \neq \emptyset$ [es ist $1 \in \mathfrak{p}R_S$, also existieren $p \in \mathfrak{p}$, $n \in \mathbb{N}$ und $r \in R$ mit $1 = \frac{p}{a^n}r$, also ist $a^n = pr \in \mathfrak{p}$]. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, gilt $a \in \mathfrak{p}$, folglich ist $a \in \bigcap spec^*(R) = Rad^*(R)$. □

In dieser Form läßt sich der Begriff des Pseudoradikals auf Fastordnungen verallgemeinern:

3.10 Definition
Es sei O eine Fastordnung auf einem Körper K und $x \in O^*$. Man setze

$$O[\tfrac{1}{x}] := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tfrac{1}{x^n} O$$

$$\textit{und } Rad^*(O) := \{\ x \in O^* \mid O[\tfrac{1}{x}] = K\ \} \cup \{0\}.$$

In Anlehnung an den Begriff **G-Bereich** *heiße O genau dann* **G-Fastordnung**, *wenn $Rad^*(O) \neq \{0\}$ gilt.*
Faßt man gemäß 1.9 einen Integritätsbereich R als Fastordnung auf $Q(R)$ auf, so stimmen die neuen Bezeichnungen mit den bisherigen (siehe Seite 5) überein. [3]

[3] In (Sankaran and Yadav, 1979) sind Theorem 2 und Theorem 5 falsch, wie man leicht am Beispiel des gewöhnlichen Betrages auf den rationalen Zahlen sehen kann. Die Ergebnisse dort lassen sich korrigieren, indem man überall "G-Bereich" durch "G-Fastordnungen" ersetzt. Die Beweise müssen dazu nur geringfügig modifiziert werden.

3.11 Satz
Seien O und P Fastordnungen auf einem Körper K. Dann gelten:

(a) *Ist $O \subseteq P$, so gilt auch $Rad^*(O) \subseteq Rad^*(P)$.*

(b) *$Rad(\tau_O) \cap O = Rad^*(O)$*

(c) *Äq: (i) $Rad(\tau_O) \neq \{0\}$*
(ii) O ist G-Fastordnung

Sind R und S Integritätsbereiche, so gelten auch die folgenden Aussagen:

(d) *Ist $R \subseteq S$ und S ganz über R, so gilt:*

$$Rad^*(S) \neq \{0\} \quad \Rightarrow Rad^*(R) \neq \{0\}$$

(e) *$Rad^*(R) \neq \{0\} \Leftrightarrow Rad^*\left(\overline{R}^{ganz}\right) \neq \{0\}$*

Beweis:

- zu (a): klar
- zu (b):
  - "$\subseteq$" Sei $r \in Rad(\tau_O) \cap O$, oBdA $r \neq 0$, und sei $x \in K$. Da r τ_O-nilpotent ist, existiert aufgrund von 1.18(d) ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r^n x \in O$, also ist $x \in \frac{1}{r^n}O \subseteq O[\frac{1}{r}]$.
  - "$\supseteq$" Sei $a \in Rad^*(O)$, oBdA $a \neq 0$, und sei $x \in O^*$. Folglich existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $t \in O$ mit $\frac{1}{x} = \frac{t}{a^{n_0}}$. Für $n \geq n_0$ gilt $a^n = a^{n_0} \cdot a^{n-n_0} \in a^{n_0}O = txO \subseteq xO$, also gilt $(a^n)_n \to_{\tau_O} 0$.
- zu (c):
  - (i)$\Rightarrow$(ii) Sei $\frac{a}{b} \in Rad(\tau_O) \backslash \{0\}$ mit $a, b \in O^*$. Wegen $b \in O$ ist $\{ b^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq O$ eine τ_O-beschränkte Menge, also gilt $(a^n)_n = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot b^n\right)_n \to_{\tau_O} 0$. Deswegen ist $a \in Rad(\tau_O) \cap O \overset{(b)}{=} Rad^*(O)$.
  - (ii)$\Rightarrow$(i) klar wegen (b).
- zu (d): Sei $s \in Rad^*(S) \backslash \{0\}$. Da S ganz über R ist, existieren $n \in N^*$, $r_0, ..., r_{n-1} \in R$ mit

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + ... + r_1 s + r_0 = 0.$$

OBdA sei n minimal gewählt, also gilt $r_0 \neq 0$. Wegen $s \in Rad^*(S) \overset{(b)}{=} Rad(\tau_S) \cap S$ sind $s, s^2, ..., s^n$ τ_S-nilpotent. Wegen $R \subseteq S$ ist R eine τ_S-beschränkte Menge, also gilt auch s^n, $r_{n-1}s^{n-1}$,...,$r_1 s \in Rad(\tau_S)$. Aufgrund von 3.3 gilt $Rad(\tau_S)+Rad(\tau_S) \subseteq Rad(\tau_S)$, also ist $r := -r_0 \in Rad(\tau_S) \cap S = Rad^*(S)$.
Annahme: $r \notin Rad^*(R)$: Dann gibt es ein $\mathfrak{p} \in spec^*(R)$ mit $r \notin \mathfrak{p}$. Da S ganz über R ist, gibt es (siehe. z.B. (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 111, Theorem 3.1.16)) ein $\mathfrak{q} \in spec(S)$ mit $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$; weil $\mathfrak{p} \neq \{0\}$ gilt, ist auch $\mathfrak{q} \neq \{0\}$. Da $r \in R$ und $r \notin \mathfrak{p}$ gilt, ist $r \notin \mathfrak{q}$, also gilt $r \notin Rad^*(S)$ im Widerspruch zu obiger Herleitung.

- zu (e): klar mit (a) und (d). □

Zu einer Fastordnung O mit 2-Addiator z setze man

$$\overline{O}^{1comp} := \overline{O}^{comp}$$

und für $n > 1$

$$\overline{O}^{ncomp} := \overline{\overline{O}^{(n-1)comp}}^{comp}.$$

Weiter sei $\overline{O}^{\infty comp} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{O}^{ncomp}$. Gemäß 3.6 ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\overline{O}^{ncomp}$ eine Fastordnung mit 2-Addiator z, ebenso auch $\overline{O}^{\infty comp}$.
In (Hill, 1972) wurde gezeigt, dass es für jedes natürliche Zahl n einen Integritätsbereich R_n mit

$$\overline{R_n}^{ncomp} \neq \overline{R_n}^{(n+1)comp} = \overline{R_n}^{(n+2)comp}$$

gibt. In (Singh, 1975) wurde ein Beispiel eines G-Bereiches R angegeben, für den $\overline{R}^{comp} \neq \overline{R}^{2comp}$ gilt. (Dies widerlegte eine Behauptung aus (Cohn, P.M., 1954), die Autoren konnten die Aussagen von Cohn aber modifizieren, indem sie statt des Hüllenoperators $-comp$ den Hüllenoperator $-\infty comp$ verwendeten. Darauf bezieht sich Teil (d) des folgenden Korollars.)
Die Aussage (c) verallgemeinert (Singh and Manchanda, 1989, S. 885, Theorem 2.2) von G-Bereichen auf G-Fastordnungen.

3.12 Korollar
Es sei O eine G-Fastordnung mit 2-Addiator z auf einem Körper K. Dann gelten:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \quad Rad(\tau_O) = Rad(\tau_{\overline{O}^{ncomp}}) = Rad^*\left(\overline{O}^{ncomp}\right)$

(b) $\left\{ x \in K \mid x\overline{O}^{comp} \subseteq Rad(\tau_O) \right\} \neq \{0\}$ und $\tau_{\overline{O}^{comp}} = \tau_{\overline{O}^{2comp}} = (\tau_O)_{sp}$

(c) $\overline{O}^{2comp} = \overline{O}^{3comp} = SP_{(\tau_O)}$
Insbesondere gilt $\overline{SP_{(\tau_O)}}^{comp} = SP_{(\tau_O)}$.

(d) $Rad(\tau_O) = Rad\left(\tau_{\overline{O}^{\infty comp}}\right) = Rad^*\left(\overline{O}^{\infty comp}\right)$

Beweis: Falls $O = K$ gilt, so sind alle Aussagen trivial. Sei also oBdA $O \neq K$, d.h. gemäß 1.8 ist τ_O eine hausdorffsche, nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf K mit $Rad(\tau_O) \neq \{0\}$, aufgrund von 1.19 ist also $Rad(\tau_O) \in \mathcal{U}_{\tau_O}(0)$. Also sind für τ_O die Voraussetzungen von 3.7 und 3.8 erfüllt.

- zu (a): Sei zunächst $n = 1$: Ist $a \in Rad(\tau_O)$, so ist $\{ a^i \mid i \in \mathbb{N} \}$ τ_O-beschränkt, also gilt $a \in \overline{O}^{comp}$.
  Für $x \in \overline{O}^{comp}$ ist $\{ x^i \mid i \in \mathbb{N} \}$ τ_O-beschränkt, also gilt $xRad(\tau_O) \subseteq Rad(\tau_O)$, insgesamt
  $$Rad(\tau_O) \subseteq \overline{O}^{comp} \subseteq SP_{(\tau_O)}.$$
  Damit ergibt sich aus 3.7(b) $\tau_{\overline{O}^{comp}} = (\tau_O)_{sp}$, also erhält man:
  $$\begin{aligned} Rad(\tau_O) &\overset{3.7(d)}{=} Rad((\tau_O)_{sp}) \\ &= Rad(\tau_{\overline{O}^{comp}}) \\ &= Rad\left(\tau_{\overline{O}^{comp}}\right) \cap \overline{O}^{comp} \\ &\overset{3.11(b)}{=} Rad^*\left(\overline{O}^{comp}\right) \end{aligned}$$
  Die Behauptung für $n > 1$ ergibt sich durch Induktion.

- zu (b): Sei $a \in Rad(\tau_O) \backslash \{0\}$. Dann gilt:
  $$a \cdot \overline{O}^{comp} \subseteq a \cdot SP_{(\tau_O)} \subseteq Rad(\tau_O) \cdot SP_{(\tau_O)} \subseteq Rad(\tau_O)$$
  Anwendung auf die $G-$Fastordnung $\overline{O}^{comp}$ ergibt
  $$\left\{ x \in K \mid x\overline{O}^{2comp} \subseteq Rad(\tau_{\overline{O}^{comp}}) \right\} \neq \{0\}.$$
  Wegen $Rad(\tau_{\overline{O}^{comp}}) \overset{(a)}{=} Rad(\tau_O) \subseteq \overline{O}^{comp}$ folgt

$$\left\{ x \in K \mid x\overline{O}^{2comp} \subseteq \overline{O}^{comp} \right\} \neq \{0\},$$

also gilt $\tau_{\overline{O}^{2comp}} = \tau_{\overline{O}^{comp}} \overset{s.o.}{=} (\tau_O)_{sp}$.

- zu (c):
    - $\overline{O}^{2comp} = \overline{O}^{3comp}$: Gemäß (b) existiert ein $s \in K^*$ mit $s\overline{O}^{2comp} \subseteq \overline{O}^{comp}$. Zu $a \in \overline{O}^{3comp}$ existiert nach Definition ein $r \in \left(\overline{O}^{2comp}\right)^*$ mit $r \cdot \{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq \overline{O}^{2comp}$. Daher ist $rs\{ a^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq s\overline{O}^{2comp} \subseteq \overline{O}^{comp}$, also $a \in \overline{O}^{2comp}$.
    - $\overline{O}^{2comp} = SP_{(\tau_O)}$: Aufgrund von (a) und 3.7(b) gilt: $\overline{O}^{2comp} \subseteq SP_{(\tau_O)}$. Für $x \in SP_{(\tau_O)}$ ist $\{ x^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq SP_{(\tau_O)}$ eine $(\tau_O)_{sp}$−beschränkte Menge, also wegen $(\tau_O)_{sp} = \tau_{\overline{O}^{comp}}$ auch $\tau_{\overline{O}^{comp}}$−beschränkt. Folglich gilt $x \in \overline{O}^{2comp}$.
- zu (d): Es gilt $\overline{O}^{\infty comp} \overset{(c)}{=} \overline{O}^{2comp}$, die Behauptung folgt mit (a). □

3.13 Korollar
Ist O eine Fastordnung auf einem Körper K und $K \neq Rad(\tau_{\overline{O}^{comp}}) \neq \{0\}$, so gibt es eine homogene Norm φ mit $\tau_\varphi = \tau_{\overline{O}^{comp}}$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen von (Cohn, P.M., 1954): Aufgrund von 3.11(c) ist $\overline{O}^{comp}$ eine Gaugemenge, wegen 3.12(b) ist $\overline{O}^{comp}$ regulär. Die Behauptung folgt aus (Cohn, P.M., 1954, S.169, Theorem 9.4).

3.14 Satz
Es sei R ein Integritätsbereich. Dann gilt:

$$Rad(\tau_R) = Rad^*\left(\overline{R}^{ganz}\right)$$

Beweis: Fall 1: $Rad(\tau_R) = Q(R)$: Dann ist $R = Q(R)$.
Fall 2: $Rad(\tau_R) = \{0\}$: Aufgrund von 3.11(c) gilt $Rad^*(R) = \{0\} \overset{3.11(e)}{=} Rad^*\left(\overline{R}^{ganz}\right)$.
Fall 3: Sonst: τ_R ist eine nichtdiskrete, hausdorffsche, lokalbeschränkte Ringtopologie auf K, also sind gemäß 1.19 die Voraussetzungen von 3.7 und 3.8 erfüllt.
Es gilt: $Rad(\tau_R) \subseteq \overline{R}^{ganz}$:
[Für $a \in Rad(\tau_R)$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}^*$ mit $a^{n_0} \in R$, etwa $a^{n_0} = r$, also $a^{n_0} - r = 0$].
Wegen $R \subseteq SP_{(\tau_R)}$ gilt mit (Balcerzyk and Józefiak, 1989, Bemerkungen nach Corollary 3.1.9 Seite 108/109)

$$\overline{R}^{ganz} \subseteq \overline{SP_{(\tau_R)}}^{ganz} \subseteq \overline{SP_{(\tau_R)}}^{comp} \overset{3.12(c)}{=} SP_{(\tau_R)}.$$

Mit 3.8(a) erhält man $Rad(\tau_R) = Rad((\tau_R)_{sp})$, wegen 3.7(b) gilt $\tau_{\overline{R}^{ganz}} = (\tau_R)_{sp}$. Also ist

$$Rad(\tau_{\overline{R}^{ganz}}) = Rad((\tau_R)_{sp}) \overset{3.7(c)}{\subseteq} Rad(\tau_R) \subseteq \overline{R}^{ganz}$$

und deswegen

$$\begin{aligned} Rad(\tau_R) &= Rad\left(\tau_{\overline{R}^{ganz}}\right) \\ &= Rad(\tau_{\overline{R}^{ganz}}) \cap \overline{R}^{ganz} \\ &\overset{3.11(b)}{=} Rad^*\left(\overline{R}^{ganz}\right) \end{aligned}$$

□

Kapitel 4

Normierbarkeit lokalbeschränkter Körpertopologien

Jede Norm φ auf einem Körper K erzeugt eine lokalbeschränkte Körpertopologie auf K, aber nicht jede hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie auf einem Körper muß normierbar sein (vgl. z.B. (Shell, 1990, p.68, Example 2)).
In diesem Kapitel geht es um Bedingungen an K, so dass jede hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie auf K bereits durch eine Norm induziert wird. Aus bekannten Resultaten für globale Körper (siehe 1.22) folgt, dass jede nichtdiskrete, hausdorffsche und lokalbeschränkte Körpertopologie τ Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien ist, also ist gemäß 1.21 $Rad(\tau) \neq \{0\}$ und damit τ normierbar.
Die Normierbarkeit sämtlicher lokalbeschränkter Körpertopologien wird hier verallgemeinert auf algebraische Erweiterungen von globalen Körpern (siehe 4.3 und 4.5). Anschließend werden nicht normierbare, lokabeschränkte Körpertopologien konstruiert. Mit deren Hilfe ergibt sich eine Charakterisierung sämtliche Körper, für die alle hausdorffschen, lokalbeschränkten Körpertopologien normierbar sind (siehe 4.8).

4.1 Normierbare lokalbeschränkte Körpertopologien

Das nächste Lemma ist der technische Kern für die folgenden Sätze:

4.1 Lemma
Es sei R ein Integritätsbereich, $L/Q(R)$ algebraisch und τ eine nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf L. Weiter sei $O \in \mathfrak{U}_\tau(0)$ eine $\tau-$beschränkte Menge, $z \in L^*$ mit $z(O+O) \subseteq O$, $b \in O^* \cap Q(R)$, und es gelte:

$$\forall r \in R \quad \exists m \in \mathbb{N}: \quad bz^m r \in O.$$

Dann ist $\tau|Q(R)(z)$ nichtdiskret.

Beweis: Wegen $z \in L$ ist z algebraisch über $Q(R)$. Zu $x \in Q(R)(z)$ existieren also $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in R$, $b_0, ..., b_n \in R^*$ mit

$$x = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{a_k}{b_k} z^k.$$

Für $k \in \{0, ..., n\}$ wähle man $m_k \in \mathbb{N}$ mit

$$bz^{m_k} a_k \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} b_j \in O$$

und $m_{n+1} \in \mathbb{N}$ mit

$$bz^{m_{n+1}} \prod_{k=0}^{n} b_k \in O.$$

Setzt man $m := \max\{m_0, ..., m_{n+1}\}$, so ergibt sich für $k = 0, ..., n$:

$$bz^m a_k \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} b_j \in O \text{ und } bz^m \prod_{i=0}^{n} b_i \in O.$$

Also gilt $bz^{m+1} \prod\limits_{i=0}^{n} b_i \in (O \cap Q(R)(z))^*$ und

$$\begin{aligned} b \cdot z^{m+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} b_j \right) z^k &= \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} bz^m a_k \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} b_j \\ &\in \left(\sum_{k=0}^{n} z^{k+1} O \right) \cap Q(R)(z) \\ &\overset{1.13}{\subseteq} O \cap Q(R)(z) =: V. \end{aligned}$$

Daher ist

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_k} z^k = \frac{bz^{m+1} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \left(\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} b_j \right) z^k}{bz^{m+1} \left(\prod\limits_{k=0}^{n} b_k \right)} \in V(V^*)^{-1}.$$

Aus 1.14 folgt die Behauptung. □

4.2 Korollar
Es sei R ein Integritätsbereich und $L/Q(R)$ eine algebraische Körpererweiterung. Ist τ eine nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf L mit erzeugender Fastordnung O und 2-Addiator z, für die R $\tau-$beschränkt ist, so gilt:

$$\tau|Q(R)(z) \text{ ist nichtdiskret.}$$

Beweis: Da R $\tau-$beschränkt ist, gibt es ein $b \in O^*$ mit $bR = bz^0R \subseteq O$. Durch Anwendung von 4.1 ergibt sich die Behauptung. □

Nun erhält man als Ergänzung von Satz 4.3 aus (Maiwald, 1996, S. 51):

4.3 Satz
Sei $L/\mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung und τ eine hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie auf L. Dann ist τ normierbar.

Beweis: OBdA sei $\tau \neq \tau_{dis}$. Es sei O eine τ erzeugende Fastordnung mit 2-Addiator z. Für $a \in \mathbb{N}$ gilt:

$$z^{a+1}a1 = z^{a+1}\sum_{i=1}^{a} 1 \in \sum_{i=1}^{a+1} z^iO \overset{1.13}{\subseteq} O$$

und

$$z^{a+2}(-a1) = -z(z^{a+1}a1) \in -zO \subseteq O.$$

Gemäß 4.1 mit $b = 1$ ist $\tau|Q(\mathbb{Z})(z)$ nichtdiskret. Da $\mathbb{Q}(z)$ ein globaler Körper ist, existieren aufgrund von 1.22 ein $n \in \mathbb{N}$ und reelle Bewertungen $\varphi_0, ..., \varphi_n$ auf $\mathbb{Q}(z)$ mit $\tau|\mathbb{Q}(z) = \sup_{i=0}^{n} \tau_{\varphi_i}$. Aus 1.21 folgt die Existenz eines $\tau|\mathbb{Q}(z)$-nilpotenten Elementes $x \neq 0$. Die Normierbarkeit von τ ergibt sich dann direkt aus 1.19. □

Die entsprechende Situation bei algebraischen Erweiterungen von $K = GF_q(x)$ läßt sich allgemeiner behandeln.

4.4 Satz
Es sei x transzendent über dem Körper K und $L/K(x)$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann gilt:
Jede hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie τ auf L, für die K $\tau-$beschränkt ist, wird durch eine Norm induziert.

Beweis: OBdA sei $\tau \neq \tau_{dis}$. Nach 1.8 wird τ von einer Fastordnung $O \neq L$ mit 2-Addiator z erzeugt. Man wähle ein über K transzendentes Element $y \in O$, dies ist möglich, weil sonst $L = O(O^*)^{-1}$ algebraisch über K wäre. Da K $\tau-$beschränkt ist, gibt es ein $b \in O^*$ mit $bK \subseteq O$. Das Element b ist algebraisch über $K(y)$, also gibt es [vgl. (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 106, Theorem 3.1.4)] ein $p \in K[y]^*$, so dass pb ganz über $K[y]$ ist. Daher ist [siehe (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 107, Theorem 3.1.6)] $R := K[y][pb]$ ein endlich erzeugter $K[y]$-Modul. Zunächst gilt:

$$(*) \qquad \forall\, q \in K[y] \quad \exists\, m \in \mathbb{N}: \quad bz^m q \in O$$

[Sei etwa $q = \sum\limits_{k=0}^{m} q_k y^k$ mit $q_0, ..., q_m \in K$. Man erhält:

$$\begin{aligned} bz^{m+1}q &= \sum_{k=0}^{m} b \cdot q_k \cdot y^k \cdot z^{m+1} \\ &\in \sum_{k=0}^{m} b \cdot K \cdot O \cdot z^{m+1} \\ &\subseteq \sum_{k=0}^{m} z^{m+1}O \subseteq \sum_{k=1}^{m+1} z^k O \overset{1.13}{\subseteq} O] \end{aligned}$$

Speziell wähle man zu oben bestimmten $p \in K[y]^*$ ein $e \in \mathbb{N}$ mit $z^e bp \in O$. Sei nun $r \in R$, etwa $r = \sum\limits_{i=0}^{l} q_i (pb)^i$ mit $q_0, ..., q_l \in K[y]$. Gemäß (*) seien $m_i \in \mathbb{N}$ mit $bz^{m_i} q_i \in O$ für $i = 0, ..., l$ bestimmt, es sei $M := \max\{m_0, ..., m_l\}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} bz^{e \cdot l + M + l + 1} r &= \sum_{i=0}^{l} bz^M q_i \cdot (pb)^i z^{e \cdot l} \cdot z^{l+1} \\ &\in \sum_{i=0}^{l} O \cdot (pbz^e)^i \cdot z^{e(l-i)} z^{l+1} \\ &\in \sum_{i=0}^{l} z^{l+1} O \subseteq \sum_{i=1}^{l+1} z^i O \overset{1.13}{\subseteq} O \end{aligned}$$

Nach Wahl von b gilt $b \in O^* \cap Q(R)$, also sind die Voraussetzungen von 4.1 erfüllt, folglich gilt:

$$\tau | Q(R)(z) \text{ ist nichtdiskret.}$$

Mit 1.23 folgt die Existenz endlich vieler reeller Bewertungen $\varphi_0, ..., \varphi_n$ auf $Q(R)(z)$ mit

$$\tau | Q(R)(z) = \tau(\{\varphi_0, ..., \varphi_n\}) = \sup_{i=0}^{n} \tau_{\varphi_i}.$$

Aus 1.21 folgt $Rad(\tau|Q(R)(z)) \neq \{0\}$. Also ist auch $Rad(\tau) \neq \{0\}$ und damit τ normierbar gemäß 1.19. $\square$

Sofort ergibt sich das folgende Korollar:

4.5 Korollar
Sei P ein endlicher Körper, x transzendent über P und $L/P(x)$ eine algebraische Körpererweiterung. Jede hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie auf L ist normierbar.

4.2 Nicht normierbare lokalbeschränkte Körpertopologien

Zunächst wird die Existenz nicht normierbarer, lokalbeschränkter Körpertopologien auf algebraischen Erweiterungen untersucht:

4.6 Satz
Es sei R ein Integritätsbereich, so dass τ_R eine nichtdiskrete, hausdorffsche, lokalbeschränkte, nicht normierbare Körpertopologie auf $Q(R)$ ist.
Für jede algebraische Körpererweiterung $L/Q(R)$ erzeugt $S := \overline{R}^{ganz\ in\ L}$ eine nichtdiskrete, hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie τ_S, welche nicht normierbar ist.

BEWEIS:

- Offenbar[1] gilt $Q(S) = L$, und es ist $S \neq L$:
  [Wäre $S = L$, so wäre für alle $x \in R^*$ das Inverse x^{-1} ganz über R, also etwa

  $$x^{-n} + r_{n-1}x^{-(n-1)} + ... + r_1x^{-1} + r_0 = 0.$$

  Damit folgt durch Multiplikation mit x^n

  $$1 + r_{n-1}x + ... + r_1x^{n-1} + r_0x^n = 0,$$
  $$\text{also } x(-r_{n-1} - r_{n-2}x - ... - r_0x^{n-1}) = 1.$$

  Folglich ist $x^{-1} \in R$ und damit $R = Q(R)$, also wäre τ_R im Widerspruch zur Voraussetzung nicht hausdorffsch.]
  Daher erzeugt S eine hausdorffsche, nichtdiskrete, lokalbeschränkte Ringtopologie auf L (vgl. 1.8).

[1](Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 106, Theorem 3.1.4)

- τ_S ist Körpertopologie: Da τ_R eine Körpertopologie ist, existiert gemäß 1.11 ein $a \in Jac(R)^*$. Ist $\mathfrak{q} \in max(S)$, so gilt $\mathfrak{q} \cap R \in max(R)$ (siehe (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 110, Theorem 3.1.12)), also $a \in \mathfrak{q}$. Folglich ist $a \in Jac(S)^*$ und daher τ_S eine Körpertopologie (1.11).

- τ_S ist nicht normierbar: Sonst wäre $Rad(\tau_S) \neq \{0\}$ (1.19), also S ein G-Bereich (3.11(c)), wegen 3.11(d) also auch R ein G-Bereich und damit τ_R normierbar im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Es folgen zwei konkrete Beispiele. Diese werden auch im Beweis von 4.8 benötigt.

4.7 Beispiel
Es sei entweder

(a) K *ein Körper und* $S := K[x, y]$

oder

(b) $S := \mathbb{Z}[x]$.

Man setze $R := \frac{S}{1+xS}$. *Dann ist* τ_R *eine nichtdiskrete, hausdorffsche, lokalbeschränkte Körpertopologie auf* $Q(R)$, *welche nicht normierbar ist.*

Beweis: Offenbar ist R ein Integritätsbereich und $R \neq Q(R)$, also erzeugt R eine nichtdiskrete, hausdorffsche, lokalbeschränkte Ringtopologie auf $Q(R)$.

- Es gilt $x \in Jac(R)^*$(vgl. 1.10): Seien $s_1, s_2 \in S$. Es gilt $1 \notin xR$ und

$$\frac{1}{1 - x\left(\frac{s_1}{1+xs_2}\right)} = \frac{1 + xs_2}{1 + x(s_2 - s_1)} \in \frac{S}{1 + xS} = R.$$

  Wegen 1.11 ist also τ_R eine Körpertopologie.

- R hat unendlich viele Primelemente:

  - zu (a):

    - Fall 1: K endlich: Der algebraische Abschluß von K ist unendlich, also gibt es unendlich viele irreduzible Polynome $q \in K[y]$. Es ist jedes solche q auch irreduzibel in $K[x, y]$, also ein Primelement in S (S ist ein ZPE-Ring). Daher ist qS ein Primideal in S, und es gilt $qS \cap (1+xS) = \emptyset$ (Koeffizientenvergleich bei den Potenzen x^0, dann y^i). Also ist qR ein Primideal in R [2], d.h. q ist ein Primelement in R.

[2](Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 41, Corollary 1.4.8)

- Fall 2: K unendlich: Für jedes $k \in K$ ist $q_k(y) = y - k \in K[y]$ irreduzibel in $K[y]$. Der Rest verläuft analog zu Fall 1.

- zu (b): Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, also ist p Primelement in S, d.h. $pS \in spec^*(S)$. Wegen $pS \cap (1 + xS) = \emptyset$ ist pR Primideal in R, also p Primelement in R.

- τ_R ist nicht normierbar: Sonst wäre $Rad(\tau_R) \neq \{0\}$, seien etwa $s, s' \in S$ mit $\frac{s}{1+xs'} \neq 0$ τ_R-nilpotent. Da $\{ (1+xs')^n \mid n \in \mathbb{N} \} \subseteq S$ τ_R-beschränkt ist, gilt $(s^n)_n \to_{\tau_R} 0$. R ist als Lokalisation eines ZPE-Bereiches selber ein ZPE-Bereich, seien also $p_1, ..., p_n$ Primelemente aus R mit $s = p_1 \cdot ... \cdot p_n$ und p ein von $p_1, ..., p_n$ verschiedenes Primelement. Dann gilt:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad s^n \notin pR$$

[Sonst gäbe es $s_1, s_2 \in S$ mit $s^n = \frac{ps_1}{1+xs_2}$, also $s^n(1 + xs_2) = ps_1$. Es gilt $p \nmid_R (1 + xs_2)$, denn sonst wäre p invertierbar in R. Nach Wahl von p gilt aber auch $p \nmid_R s^n$-Widerspruch!]
Wegen $pR \in \mathcal{U}_{\tau_R}(0)$ ist dies ein Widerspruch zur τ_R-Nilpotenz von s. $\square$

Damit gelangt man nun zu den folgenden Charakterisierungen:

4.8 Satz

(a) *Es sei K ein Körper.*
Äq: (i) Jede lokalbeschränkte, hausdorffsche Körpertopologie auf K ist normierbar.
(ii) K ist absolut algebraisch oder K ist eine algebraische Körpererweiterung über einem globalen Körper.

(b) *Es sei L/K eine Körpererweiterung.*
Äq: (i) Jede lokalbeschränkte, hausdorffsche Körpertopologie τ auf L, für die K $\tau-$beschränkt ist, läßt sich durch eine Norm induzieren.
(ii) $trdeg\ L/K \leq 1$

Beweis:

- zu (a):

  - (i)⇒(ii): Sei P der Primkörper von K und B eine Transzendenzbasis von K/P, also ist K algebraisch über $P(B)$.
  Annahme: K ist weder absolut algebraisch, noch algebraisch über einem globalen Körper

    - Fall 1: $card(B) \geq 2$, etwa $x, y \in B$, $x \neq y$. Setze $F := P(B \backslash \{x, y\})$ und $R := \frac{F[x,y]}{1+xF[x,y]}$. Gemäß 4.7 und 4.6 ergibt sich ein Widerspruch zu (i).
    - Fall 2: $card(B) = 1$, dann ist $P = \mathbb{Q}$, sei $x \in B$. Man setze $R := \frac{\mathbb{Z}[x]}{1+x\mathbb{Z}[x]}$. Wie in Fall 1 ergibt sich ein Widerspruch zu (i).
  - (ii)⇒(i): Falls K absolut algebraisch ist, so sind die einzigen lokalbeschränkten Ringtopologien auf K τ_{dis} und τ_{indis} (siehe (Kiltinen, 1968, S. 159/160, Theorem 6.1)).
    Sonst folgt die Behauptung aus 4.3 und 4.5.

- zu (b):

  - (i)⇒(ii): Sei B Tranzendenzbasis von L/K und $card\ B \geq 2$, etwa $x \neq y$ mit $x, y \in B$. Setze $F := K(B \backslash \{x, y\})$, $R := \frac{F[x,y]}{1+xF[x,y]}$ und $S := \overline{R}^{ganz\ in\ L}$. Es ist L algebraisch über $Q(R) = K(B)$, mit 4.7 und 4.6 folgt ein Widerspruch zu (i).
  - (ii)⇒(i): Ist L/K algebraisch, so ist τ_{dis} die einzige hausdorffsche, lokalbeschränkte Ringtopologie, bezüglich der K beschränkt ist(siehe (Weber, 1979b, S. 175, Satz (4.6))). Sonst ergibt sich (i) aus 4.4. □

Ein weiterer Satz zu diesem Themenkreis wird im 5.Kapitel bewiesen werden (siehe 5.13 und 5.14).

Kapitel 5

Körpertopologien auf Quotientenkörpern beschränkter Integritätsbereiche

In vielen Arbeiten wurde zu einem Integritätsbereich R das System der R-linearen[1] Ringtopologien auf $Q(R)$ untersucht, meist unter Annahme spezieller algebraischer Anforderungen an R, so z.B in (Heine and Warner, 1973) für Dedekindbereiche R. In (Cohen, 1985) wurde die Voraussetzung "R-lineare Körpertopologie" zu "Körpertopologie mit beschränktem R" abgeschwächt und folgende Aussage bewiesen (Cohen, 1985, S.53, Theorem 1):
Sei $R \neq Q(R)$ ein Dedekindbereich mit endlicher Klassenzahl und τ eine nicht-diskrete hausdorffsche Körpertopologie auf $Q(R)$ mit τ-beschränktem R. Dann ist τ Supremum einer Familie $\mathfrak{p}$-adischer reeller Bewertungstopologien[2].
In (Wiesław, 1992, S.516, Problem 4) wird die Frage gestellt, ob die Endlichkeit der Klassenzahl eine notwendige Voraussetzung ist. Inhalt dieses Kapitels ist die Analyse des folgenden Problems:
Unter welchen algebraischen Bedingungen an R ist jede hausdorffsche Körpertopologie mit beschränktem R Supremum von reellen Bewertungstopologien?
Dieses Problem wird in zwei Schritten reduziert: Zunächst wird gezeigt, dass man bei der Analyse nur *lokalbeschränkte* hausdorffsche Körpertopologien zu berücksichtigen braucht(siehe Satz 5.3).
Im zweiten Abschnitt wird (unter einer algebraischen Einschränkung an R) gezeigt, dass man nur die lokalbeschränkten Körpertopologien zu untersuchen braucht, die von den Lokalisierungen $R_{\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m} \in max(R)$ erzeugt werden(siehe 5.8).
Im dritten Abschnitt wird diese Methode in einigen konkreten algebraischen Situationen angewandt. Unter anderem wird die oben zitierte Frage durch Satz 5.12

[1] Eine Ringtopologie τ auf $Q(R)$ heißt genau dann $R-$linear, wenn die offenen $R-$Moduln eine Nullumgebungsbasis von τ bilden. Offenbar impliziert dies die $\tau-$Beschränktheit von R.

[2] zur Definition von $\mathfrak{p}$-adischen reellen Bewertungen siehe z.B. (Shell, 1990, S.19, Example 5)

beantwortet.

5.1 Reduktion auf den lokalbeschränkten Fall

Für die weiteren Untersuchungen wird zu einem Integritätsbereich R die feinste nichtdiskrete Körpertopologie σ_R, für die R eine τ-beschränkte Menge ist, verwendet. Deswegen werden zunächst Eigenschaften dieser Topologie σ_R hergeleitet.

5.1 Lemma
Es sei O eine Fastordnung auf einem Körper K und τ eine nichtdiskrete Ringtopologie auf K. Dann gilt:
Äq: (i) $\tau \subseteq \tau_O$
(ii) O ist $\tau-$beschränkt

Beweis:

$$\begin{aligned} \tau \subseteq \tau_O &\Leftrightarrow \mathfrak{U}_\tau(0) \subseteq \mathfrak{U}_{\tau_O}(0) \\ &\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U}_\tau(0) \quad \exists\, a \in K^*: \quad aO \subseteq U \\ &\overset{1.5}{\Leftrightarrow} O\ \tau - \text{beschränkt} \end{aligned}$$

□

5.2 Satz
Es sei $R \neq Q(R)$ ein Integritätsbereich. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Man setze

$$\mathcal{B} := \left\{ \tfrac{aR}{1+aR} \mid a \in R^* \backslash E(R) \right\}.$$

$\mathcal{B}$ ist Basis für den Nullumgebungsfilter einer hausdorffschen, nichtdiskreten Körpertopologie $\sigma_R \subseteq \tau_R$ auf $Q(R)$.

(b) σ_R ist die feinste, nichtdiskrete Körpertopologie τ bezüglich der R beschränkt ist.

(c) Für jedes $a \in R^* \backslash E(R)$ ist $1+aR$ ein multiplikatives System, $\frac{R}{1+aR} \neq Q(R)$, und es gilt die folgende Inklusion:

$$\tfrac{aR}{1+aR} \subseteq Jac\left(\tfrac{R}{1+aR}\right)$$

Insbesondere ist $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}$ eine nichtdiskrete, hausdorffsche, R-lineare, lokalbeschränkte Körpertopologie auf $Q(R)$.

(d) σ_R *besitzt die folgende Darstellung:*

$$\sigma_R = \sup_{a \in R^* \backslash E(R)} \tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}$$

BEWEIS: :

- zu (a): Gemäß 1.3 ist

  $$\mathcal{B}' := \left\{ \frac{aR}{1+aR\backslash\{-1\}} \mid a \in R^* \right\}$$

  Nullumgebungsbasis einer hausdorffschen Körpertopologie $\sigma_R \subseteq \tau_R$ auf $Q(R)$. Es gilt: $\overline{\mathcal{B}}^{filter} = \overline{\mathcal{B}'}^{filter} [= \mathcal{U}_{\sigma_R}(0)]$

  - "$\subseteq$"Sei $a \in R^* \backslash E(R)$, dann ist $1 \notin -aR$, also gilt $1 + aR = 1 + aR\backslash\{-1\}$.
  - "$\supseteq$"Zu $U \in \mathcal{U}_{\sigma_R}(0)$ wähle man gemäß 1.2(d) ein $V \in \mathcal{U}_{\sigma_R}(0)$ mit $\frac{V}{1+V} \subseteq U$, insbesondere gilt $-1 \notin V$. Wegen $\sigma_R \subseteq \tau_R$ existiert ein $a \in R^*$ mit $aR \subseteq V$, und a ist keine Einheit von R, da sonst $-1 \in V$ wäre.

- zu (b): Wegen $\sigma_R \subseteq \tau_R$ ist R gemäß 5.1 σ_R-beschränkt. Ist τ eine nichtdiskrete Körpertopologie bezüglich der R $\tau-$beschränkt ist, so gilt $\tau \overset{5.1}{\subseteq} \tau_R$. Da σ_R die feinste Körpertopologie τ' mit $\tau' \subseteq \tau_R$ ist (1.3), folgt $\tau \subseteq \sigma_R$.

- zu (c): Sei $a \in R^* \backslash E(R)$. Offenbar ist $1 + aR$ ein multiplikatives System, also $\frac{R}{1+aR}$ ein Integritätsbereich. Wegen $a \notin E(R)$ ist $\frac{1}{a} \in Q(R) \backslash \frac{R}{1+aR}$.
  Da $Jac\left(\frac{R}{1+aR}\right)$ ein Ideal in $\frac{R}{1+aR}$ ist, reicht es $a \in Jac\left(\frac{R}{1+aR}\right)$ zu zeigen. Für $r_1, r_2 \in R$ gilt

  $$\begin{aligned} \left(1 - \frac{ar_1}{1+ar_2}\right)^{-1} &= \left(\frac{1+ar_2-ar_1}{1+ar_2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1+ar_2}{1+ar_2-ar_1} \\ &\in \frac{R}{1+aR}. \end{aligned}$$

  Also ist $1 - a\frac{R}{1+aR} \subseteq E(\frac{R}{1+ar})$, d.h. (vgl. 1.10) $a \in Jac\left(\frac{R}{1+aR}\right)$. Wegen 1.8 und 1.11 hat $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}$ die behaupteten Eigenschaften.

- zu (d): Sei $a \in R^* \backslash E(R)$. Da R offenbar $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}$-beschränkt ist, folgt aus (c) und (b) $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)} \subseteq \sigma_R$, daher gilt auch $\sup_{a \in R^* \backslash E(R)} \tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)} \subseteq \sigma_R$. Andererseits ist

$$\frac{aR}{1+aR} \in \mathfrak{U}_{\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}}(0) \subseteq \mathfrak{U}_{\left(\sup\limits_{a\in R^*\setminus E(R)} \tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)}\right)}(0).$$

5.3 Satz *(Reduktion auf den lokalbeschränkten Fall)*
Es sei $R \neq Q(R)$ ein Integritätsbereich und $(\tau_i)_{i\in I}$ eine unabhängige Familie von lokalbeschränkten minimalen Ringtopologien. Dann gilt:

Äq: (i) Für jede nichtdiskrete Körpertopologie τ auf $Q(R)$, bezüglich der R beschränkt ist, existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

(ii) Für jede nichtdiskrete, lokalbeschränkte Körpertopologie τ auf $Q(R)$, bezüglich der R beschränkt ist, existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

(iii) Für alle $a \in R^*\setminus E(R)$ existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)} = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

(iv)Es existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\sigma_R = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

(v) Für jede nichtdiskrete $R-$lineare Körpertopologie τ auf $Q(R)$ existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$.

Beweis:

- (i)$\Rightarrow$(ii) trivial
- (ii)$\Rightarrow$(iii) Sei $a \in R^*\setminus E(R)$. Wegen 5.2(c) und (ii) existiert eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)} = \sup\limits_{i\in J} \tau_i$. Aufgrund von 1.12(b) kann J oBdA endlich gewählt werden.
- (iii)$\Rightarrow$(iv) Für jedes $a \in R^*\setminus E(R)$ wähle man $J_a \subseteq I$ mit $\tau_{\left(\frac{R}{1+aR}\right)} = \sup\limits_{i\in J_a} \tau_i$ und setze $J := \bigcup\limits_{a\in R^*\setminus E(R)} J_a$. Mit 5.2(d) folgt die Behautung.
- (iv)$\Rightarrow$(i) Sei τ eine nichtdiskrete Körpertopologie auf $Q(R)$ und R $\tau-$beschränkt. Aufgrund von 5.2(b) gilt $\tau \subseteq \sigma_R$, die Behauptung folgt aus 1.25.
- Die Implikationen (i)$\Rightarrow$(v) und (v)$\Rightarrow$(iii) sind offensichtlich. $\square$

5.2 Reduktion auf den lokalen Fall

Ziel dieses Abschnittes ist die Reduktion auf die Fragestellung, ob jede Topologie $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ mit $\mathfrak{m} \in max(R)$ Supremum von reellen Bewertungstopologien ist (siehe Satz 5.8).
Dafür wird als erstes der Zusammenhang zwischen $max(R)$ und $max\left(\frac{R}{1+aR}\right)$ mit $a \in R^*\backslash E(R)$ beschrieben:

5.4 Lemma
Es seien $R \neq Q(R)$ ein Integritätsbereich, $a \in R^*\backslash E(R)$, $S := 1 + aR$ und T ein multiplikatives System in R. Dann gelten:

(a) $\forall \mathfrak{p} \in spec(R): \quad a \in \mathfrak{p} \quad \Rightarrow S \cap \mathfrak{p} = \emptyset$

(b) $\forall \mathfrak{m} \in max(R): \quad a \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow S \cap \mathfrak{m} = \emptyset$

(c) $\varphi : \begin{cases} max(R_S) & \rightarrow \quad \{\, \mathfrak{m} \in max(R) \mid a \in \mathfrak{m} \,\} \\ \mathfrak{M} & \mapsto \quad \mathfrak{M} \cap R \end{cases}$ *ist eine Bijektion*

(d) $\forall \mathfrak{M} \in max\,(R_T): \quad (R_T)_\mathfrak{M} = R_{(\mathfrak{M} \cap R)}$

Beweis:

- zu (a): Wäre $r \in R$ mit $1 + ar \in \mathfrak{p}$, so wäre $1 \in \mathfrak{p} + aR \subseteq \mathfrak{p}$, also würde $R = \mathfrak{p}$ folgen.

- zu (b): Wegen (a) ist nur noch "$\Leftarrow$"zu zeigen. Man setze $\mathfrak{M} := \mathfrak{m} + aR$. $\mathfrak{M}$ ist ein Ideal in R, und es gilt $1 \notin \mathfrak{M}$ [Sonst gäbe es ein $m \in \mathfrak{m}$ und ein $r \in R$ mit $1 = m + ar$, also $1 - ar = m$ im Widerspruch zu $S \cap \mathfrak{m} = \emptyset$]. Da $\mathfrak{m} \in max(R)$ gilt, folgt $\mathfrak{m} = \mathfrak{M}$, also ist $a \in \mathfrak{m}$.

- zu (c):

  - φ ist wohldefiniert: Sei $\mathfrak{M} \in max(R_S)$, dann gilt $\mathfrak{m} := R \cap \mathfrak{M} \in spec^*(R)$ und $\mathfrak{m}$ ist maximal unter den Primidealen von R, die zu S disjunkt liegen (siehe etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 41, Corollary 1.4.8)). Gemäß 5.2(c) ist $a \in Jac\,(R_S) \subseteq \mathfrak{M}$, also gilt $a \in \mathfrak{m}$. Wäre $\mathfrak{m} \notin max(R)$, etwa $\mathfrak{m}' \in max(R)$ mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{m}'$, so wäre $\mathfrak{m}' \cap S \neq \emptyset$. Aufgrund von (b) ergibt sich $a \notin \mathfrak{m}'$ - Widerspruch!

  - φ ist surjektiv: Seien $\mathfrak{m} \in max(R)$ und $a \in \mathfrak{m}$, dann gilt $\mathfrak{m} \cap S = \emptyset$, also $\mathfrak{m}R_S \in max(R_S)$ und $\mathfrak{m}R_S \cap R = \mathfrak{m}$ (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S.40 Theorem 1.4.7(v)).

- φ ist injektiv als Einschränkung der Injektion
  $: \begin{cases} spec(R_S) & \to & \{\, \mathfrak{p} \in spec(R) \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \,\} \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap R \end{cases}$

- zu (d): Sei $\mathfrak{M} \in max(R_T)$ und $\mathfrak{m} := \mathfrak{M} \cap R$, also gilt $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}R_T$ (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S.40, Theorem 1.4.7(i)).

  - "$\subseteq$"Es sei $a \in \frac{R_T}{R_T \backslash \mathfrak{M}}$, etwa $a = \frac{\frac{r_1}{t_1}}{\frac{r_2}{t_2}}$ mit $r_1, r_2 \in R^*$, $t_1, t_2 \in T$ und $\frac{r_2}{t_2} \notin \mathfrak{m}R_T$, also $r_2 \notin \mathfrak{m}$. Es gilt

  $$a = \frac{\frac{r_1}{t_1}}{\frac{r_2}{t_2}} = \frac{r_1 \cdot t_2}{t_1 \cdot r_2} \in \frac{R}{R \backslash \mathfrak{m}},$$

  denn wäre $t_1 \cdot r_2 \in \mathfrak{m}$, so würde $t_1 \in \mathfrak{m}$ (oder $r_2 \in \mathfrak{m}$) gelten, da $\mathfrak{m}$ ein Primideal ist. Aber es ist $T \cap \mathfrak{m} = \emptyset$.

  - "$\supseteq$"Für $r \in R \backslash \mathfrak{m}$ gilt $r \notin \mathfrak{M}$, denn sonst wäre $r \in \mathfrak{M} \cap R = \mathfrak{m}$. Also gilt

  $$\tfrac{R}{R \backslash \mathfrak{m}} \subseteq \tfrac{R}{R_T \backslash \mathfrak{M}} \subseteq (R_T)_{\mathfrak{M}}.$$

$\square$

In (Abouabdillah, 1983) heißt eine Topologie τ auf dem Quotientenkörper eines Integritätsbereiches R $\mathfrak{p}$-adisch, wenn es ein Primideal $\mathfrak{p} \in spec^*(R)$ mit $\tau = \tau_{R_\mathfrak{p}}$ gibt. Dort wird untersucht, wann jede R-lineare Körpertopologie Supremum von derartigen $\mathfrak{p}-$adischen Topologien ist. Dazu wird die folgende Bedingung eingeführt:

$$\text{(P*)} \qquad \forall\, \mathfrak{p} \in spec(R) \quad \forall\, x \in \mathfrak{p} : \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} x^n R_\mathfrak{p} = \{0\}$$

In Anlehnung daran wird in dieser Arbeit die folgende schwächere Bedingung definiert:

5.5 Definition
Es sei R ein Integritätsbereich. R **erfüllt die (M*)-Bedingung** *genau dann wenn*

$$\text{(M*)} \qquad \forall\, \mathfrak{m} \in max(R) \quad \forall\, x \in \mathfrak{m} : \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} x^n R_\mathfrak{m} = \{0\}$$

gültig ist.

Dies ist in vielen algebraischen Situationen gegeben, z.B. für

(a) R lokal noethersch [Krullscher Durchschnittssatz, siehe etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 83, Corollary 2.5.6)]

(b) $\forall \mathfrak{m} \in max(R): \quad R_{\mathfrak{m}} = \overline{R_{\mathfrak{m}}}^{comp}$ [siehe z.B. (Larsen and McCarthy, 1971, S. 94, Corollary 4.21)]

(c) $R = \overline{R}^{comp}$ [(b) und (Larsen and McCarthy, 1971, S. 97, Exercise 12)]

(d) R Krullbereich [Speziallfall von (c), vgl. (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 161, Theorem 4.2.5)]

(e) R eindimensional [Sei $\mathfrak{m} \in max(R)$, $x \in \mathfrak{m}^*$. Da R eindimensional ist, gilt $spec^*(R_{\mathfrak{m}}) = max(R_{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}\}$, also ist $x \in Rad^*(R_{\mathfrak{m}}) \overset{3.11(b)}{\subseteq} Rad\,(\tau_{R_{\mathfrak{m}}})$. Folglich ist $\left\{ \frac{1}{x^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ $\tau_{R_{\mathfrak{m}}}$-unbeschränkt. Für jedes $a \in K^*$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x^n} \notin \frac{1}{a}R_{\mathfrak{m}}$, d.h. $a \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n R_{\mathfrak{m}}$.]

Die (M*)-Bedingung überträgt sich auf Lokalisationen:

5.6 Lemma
Es sei $R \neq Q(R)$ ein Integritätsbereich und T ein multiplikatives System. Wenn R die (M)-Bedingung erfüllt, so auch R_T.*

Beweis: Sei $x \in \mathfrak{M} \in max(R_T)$ und $\mathfrak{m} := \mathfrak{M} \cap R$. Wegen $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}R_T$ existieren $m \in \mathfrak{m}$ und $t \in T$ mit $x = \frac{m}{t}$. Man erhält:

$$\begin{aligned} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} x^n\,(R_T)_{\mathfrak{M}} &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{m^n}{t^n}\right)(R_T)_{\mathfrak{M}} \\ &= \bigcap_{n\in\mathbb{N}} m^n\,(R_T)_{\mathfrak{M}} \\ &\overset{5.4(d)}{=} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} m^n R_{\mathfrak{m}} \\ &\overset{(M*)}{=} \{0\} \end{aligned}$$

□

5.7 Satz
Es sei R ein Integritätsbereich, welcher die (M)-Bedingung erfüllt, und τ_R sei Supremum von reellen Bewertungstopologien. Dann ist $max(R)$ endlich.*

Beweis: Es sei oBdA $R \neq Q(R)$. Man setze $S := R \backslash \Big(\bigcup\limits_{\mathfrak{m}\in max(R)} \mathfrak{m}\Big) = \bigcap\limits_{\mathfrak{m}\in max(R)} (R \backslash \mathfrak{m})$. Wegen $\tau_{R_S} \subseteq \tau_R$ ist auch τ_{R_S} Supremum von reellen Bewertungstopologien gemäß 1.26(d),(b),(c) und 1.25. Da τ_{R_S} lokalbeschränkt ist, gibt es gemäß 1.12(b) ein $n \in \mathbb{N}$, $v_0, ..., v_n$ paarweise nichtäquivalente, nichttriviale reelle Bewertungen mit $\tau_{R_S} = \sup\limits_{i=0}^{n} \tau_{v_i}$. Wegen $E(R) = S$ gilt $R = R_S$. Man setze

$$\mathfrak{q}_i := \{ \, r \in R \mid v_i(r) < 1 \, \}$$

- Es gilt für i=0,...,n: $\mathfrak{q}_i \in spec(R)$ und $R_{\mathfrak{q}_i} \subseteq \widetilde{K}_1^{v_i}(0)$
  [Da $\mathbb{Z} \cdot 1$ τ_R-beschränkt ist, muß $\mathbb{Z} \cdot 1$ auch in der gröberen Topologie τ_{v_i} beschränkt sein. Also ist v_i nichtarchimedisch [siehe z.B. (Ribenboim, 1999, S. 11, Theorem E)] und $v_i[R] \subseteq [0, 1]$. Folglich ist $\mathfrak{q}_i$ ein Primideal in R. Sei $x \in R_{\mathfrak{q}_i}$, etwa $a \in R$, $b \in R \backslash \mathfrak{q}_i$ mit $x = \frac{a}{b}$. Folglich gilt $v_i(b) \geq 1$, d.h. $v_i(\frac{1}{b}) = \frac{1}{v_i(b)} \leq 1$. Daraus folgt $v_i\left(\frac{a}{b}\right) = v_i(a) \cdot v_i\left(\frac{1}{b}\right) \leq 1$.]

- Man setze $T := R \backslash \left(\bigcup\limits_{i=0}^{n} \mathfrak{q}_i \right)$, also gilt $T = \bigcap\limits_{j=0}^{n} R \backslash \mathfrak{q}_j \subseteq R \backslash \mathfrak{q}_i$ für $i = 0, ..., n$ und somit $R_T \subseteq R_{\mathfrak{q}_i}$. Man erhält:

$$\tau_R = \tau_{R_S} = \sup_{i=0}^{n} \tau_{v_i} = \sup_{i=0}^{n} \tau_{\left(\widetilde{K}_1^{v_i}(0)\right)} \subseteq \sup_{i=0}^{n} \tau_{R_{\mathfrak{q}_i}} \subseteq \tau_{R_T} \subseteq \tau_R.$$

- Sei $\mathfrak{m} \in max(R)$, also $\tau_{R_\mathfrak{m}} \subseteq \tau_R = \tau_{R_T}$.
  Es gilt: $\mathfrak{m} \subseteq R \backslash T = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \mathfrak{q}_i$
  [Sonst sei $t \in T \cap \mathfrak{m}$. Wegen $\tau_{R_\mathfrak{m}} \subseteq \tau_{R_T}$ gibt es ein $x \in R_T^*$ mit $xR_T \subseteq R_\mathfrak{m}$. Wegen $\tau_{R_T} \subseteq \tau_R$ ist $xR_T \cap R \neq \{0\}$, sei etwa $y \in (xR_T \cap R)^*$. Dann gilt $yR_T \subseteq xR_T \subseteq R_\mathfrak{m}$. Es ergibt sich weiter $y \left\{ \frac{1}{t^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subseteq R_\mathfrak{m}$, also gilt $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} t^n R_\mathfrak{m} \neq \{0\}$. Aufgrund der (M*)-Bedingung impliziert dies $t \notin \mathfrak{m}$ im Widerspruch zur Annahme.]
  Wenn ein Ideal in einer Vereinigung von endlich vielen Primidealen enthalten ist, so ist es bereits in einem der Primideale enthalten[3]. Sei etwa $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{q}_j$. Da $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal ist, gilt $\mathfrak{m} = \mathfrak{q}_j$. Folglich gilt $max(R) \subseteq \{\mathfrak{q}_0, ..., \mathfrak{q}_n\}$.

$\square$

5.8 Satz *Lokalisierungssatz*
Es sei $R \neq Q(R)$ ein Integritätsbereich, der die (M)-Bedingung erfüllt. Dann gilt:*

Äq: (i) Jede hausdorffsche Körpertopologie τ auf $Q(R)$ für die R $\tau-$beschränkt ist, läßt sich als Supremum von reellen Bewertungstopologien darstellen.

(ii) Für alle $a \in R^*$ ist $\{ \, \mathfrak{m} \in max(R) \mid a \in \mathfrak{m} \, \}$ endlich, und für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien.

[3](Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 16, Corollary 1.1.8)

Beweis:

- (i)⇒(ii) Sei $a \in R^*$. Falls a eine Einheit von R ist, so ist a in keinem maximalen Ideal enthalten. Falls $a \in R^* \backslash E(R)$ ist, so setze man $S := 1 + aR$. Laut 5.6 erfüllt auch R_S die (M*)-Bedingung, und τ_{R_S} ist Supremum von reellen Bewertungstopologien gemäß 5.2(c) und (i). Wegen 5.7 ist $max(R_S)$ endlich. Aus 5.4(c) folgt die Endlichkeit von $\{\, \mathfrak{m} \in max(R) \mid a \in \mathfrak{m} \,\}$.
  Es sei $\mathfrak{m} \in max(R)$. Wegen $R \neq Q(R)$ ist $\mathfrak{m} \neq \{0\}$, also gilt wegen 1.10 $Jac(R_\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}R_\mathfrak{m} \neq \{0\}$. Mit 1.11 und 1.8 folgt: $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ ist eine nichtdiskrete hausdorffsche Körpertopologie auf $Q(R)$, für die R $\tau_{R_\mathfrak{m}}$-beschränkt ist. Wegen (i) und 1.12(b) ist $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien.

- (ii)⇒(i) Ist τ diskret, so wird τ von der trivialen Bewertung induziert. Sonst sei $a \in R^* \backslash E(R)$, $S := 1 + aR$. Aufgrund von 5.4(c) ist $max(R_S)$ endlich, sei etwa $max(R_S) = \{\mathfrak{M}_1, ..., \mathfrak{M}_n\}$. Weiter gilt $R_S = \bigcap\limits_{\mathfrak{M} \in max(R_S)} (R_S)_\mathfrak{M}$[4]. Man setze $\mathfrak{m}_i := \mathfrak{M}_i \cap R \overset{5.4(c)}{\in} max(R)$, also gilt

$$R_S \overset{5.4(d)}{=} \bigcap_{i=1}^{n} R_{\mathfrak{m}_i}, \text{ also } \tau_{R_S} = \sup_{i=1}^{n} \tau_{R_{\mathfrak{m}_i}}.$$

  Da jede Topologie $\tau_{R_{\mathfrak{m}_i}}$ Supremum von reellen Bewertungstopologien ist, folgt die Behauptung mit 5.3. □

Bemerkung Wie aus dem Beweis hervorgeht, ist für die Richtung (ii)⇒(i) die (M*)-Bedingung nicht erforderlich.

5.3 Anwendungen

5.9 Definition *vgl. (Gilmer, 1992, S. 523/524 und S. 529 Corollary 43.9)*
Sei R ein Integritätsbereich mit

(K1) $R = \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in spec^1(R)} R_\mathfrak{p}$

(K2) $\forall x \in Q(R)^* : \quad \{\, \mathfrak{p} \in spec^1(R) \mid x \notin E(R_\mathfrak{p}) \,\}$ *endlich*

(K3) Für jedes $\mathfrak{p} \in spec^1(R)$ existiert eine reelle Bewertung $v_\mathfrak{p}$ mit $R_\mathfrak{p} = \widetilde{K}_1^{v_\mathfrak{p}}(0)$

Dann heißt R ein **verallgemeinerter Krullbereich***.*

[4] siehe etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 41, Theorem 1.4.10)

Teil (b) des nachfolgenden Satzes ist eine Ergänzung zum zweiten Teil von (Gilmer, 1966, S.278, Theorem 1).

5.10 Satz
Es sei $R \neq Q(R)$ ein verallgemeinerter Krullbereich und S ein multiplikatives System in R. Dann gelten:

(a) R_S *ist ein verallgemeinerter Krullbereich*

(b) Wenn R auch ein G-Bereich ist, so ist $spec^*(R)$ endlich und R eindimensional.

Beweis:

zu (a): siehe (Gilmer, 1992, S. 528, Corollary (43.6))

zu (b): Sei $x \in (Rad^*(R))^* \subseteq \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in spec^1(R)} \mathfrak{p}^*$. Offenbar gilt für jedes Primideal $\mathfrak{p}$: $\quad x \notin E(R_\mathfrak{p}) \Leftrightarrow x \in \mathfrak{p}$.
Folglich gilt nach Wahl von x:

$$\{\, \mathfrak{p} \in spec^1(R) \mid x \notin E(R_\mathfrak{p}) \,\} = \{\, \mathfrak{p} \in spec^1(R) \mid x \in \mathfrak{p} \,\} = spec^1(R),$$

gemäß (K2) ist $spec^1(R)$ endlich, wegen (K1) ist R Durchschnitt von endlich vielen reellen Bewertungsringen[5], aus (Kaplansky, 1974, S. 77, Theorem 105) folgt $spec^1(R) = max(R)$. Also ist R eindimensional.

□

5.11 Satz
Es sei $R \neq Q(R)$ ein verallgemeinerter Krullbereich. Dann gilt:

Äq: (i) Jede hausdorffsche Körpertopologie τ auf $Q(R)$ mit $\tau-$beschränktem R ist Supremum von reellen Bewertungstopologien.

(ii) R ist eindimensional

[5] Ein Ring R ist genau dann ein reeller Bewertungsring, wenn es eine reelle Bewertung $v : Q(R) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $R = R_v = \widetilde{K}_1^v(0)$ gibt.

Beweis:

- (i)⇒(ii) Annahme: Es sei R nicht eindimensional, also existieren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \in spec^*(R)$ mit $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$. Man wähle ein $a \in \mathfrak{p}^*$, also gilt $a \in R^* \backslash E(R)$, und setze $S := 1 + aR$. Aufgrund von 5.10(a) ist R_S verallgemeinerter Krullbereich, wegen 1.12(b) und 1.21 gilt $Rad(\tau_{R_S}) \neq \{0\}$, also ist R_S auch ein G-Bereich(vgl. 3.11(c)). Gemäß 5.4(a) und (Balcerzyk and Józefiak, 1989, Corollary 1.4.8) gilt $\mathfrak{p}R_S, \mathfrak{q}R_S \in spec(R_S)$ und $\mathfrak{p}R_S \subsetneq \mathfrak{q}R_S$ [6]. Also ist mit 5.2(c)R_S nicht eindimensional im Widerspruch zu 5.10(b).

- (ii)⇒(i) Sei R eindimensional, also erfüllt R die (M*)-Bedingung (siehe 5.5(e)). Weiter gilt für jedes $a \in R^*$:

$$\{ \mathfrak{m} \in max(R) \mid a \in \mathfrak{m} \} = \{ \mathfrak{p} \in spec^1(R) \mid a \notin E(R_{\mathfrak{p}}) \}$$

  Die letzte Menge ist nach Voraussetzung endlich. Also folgt die Behauptung mit Hilfe von 5.8 und 5.9(K3). □

5.12 Korollar
Sei R ein Krullbereich. Dann gilt:

Äq: (i) Jede hausdorffsche Körpertopologie τ auf $Q(R)$ mit beschränktem R ist Supremum von reellen Bewertungstopologien.

(ii) R ist ein Dedekindbereich.

Beweis: OBdA sei $R \neq Q(R)$.

- (i)⇒(ii) R ist ein eindimensionaler Krullbereich gemäß 5.11, also ein Dedekindbereich[7].

- (ii)⇒(i) Jeder Dedekindbereich $R \neq Q(R)$ ist eindimensional, also folgt die Behauptung aus 5.11. □

Da jeder Dedekindbereich R auch ein Krullbereich und jede reelle Bewertung φ auf $Q(R)$ mit beschränktem R eine p-adische Bewertung ist (Zariski and Samuel, 1975, Seite 39), wurde damit insbesondere eine Vermutung von Wiesław aus (Wiesław, 1992, S. 516, Problem 4) widerlegt.[8]
Das folgende Korollar ist eine Ergänzung zum Themenkreis des vierten Kapitels.

[6] siehe z.B. (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 41, Corollary 1.4.8)
[7] siehe etwa (Gilmer, 1992, S. 536, (43.16) Theorem)
[8] Die Aussage ergibt sich anders auch direkt aus 5.3 in Verbindung mit (Jebli, 1971, S. A1173, Theoreme 1).

5.13 Korollar
Sei R ein Dedekindbereich, $L/Q(R)$ algebraisch und τ eine hausdorffsche, lokalbeschränkte Ringtopologie auf L, für die R $\tau-$beschränkt ist. Dann gilt:
Äq: (i) τ ist eine Körpertopologie
(ii) τ ist normierbar

Beweis:

- (ii)$\Rightarrow$(i) 1.16(a)
- (i)$\Rightarrow$(ii) Sei oBdA $\tau \neq \tau_{dis}$, also ist $R \neq Q(R)$ (Weber, 1979b, S.175, Satz (4.6)). Gemäß 1.8(a) gibt es eine Fastordnung O mit 2-Addiator z, welche τ erzeugt.
  OBdA sei z separabel über $Q(R)$:
  [Sonst gilt $char\ L = p \neq 0$ für eine Primzahl p. Es sei M der separable Abschluß von $Q(R)$ in $Q(R)(z)$, also ist z rein inseparabel über M, d.h. es existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ mit $z^{(p^n)} \in M$[9]. Wegen

  $$z^{(p^n)}(O \pm O) = z^{(p^n-1)} \cdot z(O \pm O) \subseteq O$$

  ist $z^{(p^n)}$ ein über $Q(R)$ separabler 2-Addiator von O.]
  Man wähle ein $r \in R^*$, so dass rz ganz über R ist (vgl. (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 106, Theorem 3.1.4)) und setze

  $$K := Q(R)(z) \text{ und } S := \overline{R}^{ganz\ in\ K}.$$

  Es ist rz separabel über $Q(R)$. Daher ist S in einem endlich erzeugtem R-Modul enthalten (siehe etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 116, Theorem 3.2.5)). Daher ist S $\tau-$beschränkt, also auch $\tau|K$-beschränkt. Gemäß 4.2 ist $\tau|K \neq \tau_{dis}$.
  S ist ein Dedekindbereich (siehe (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 124, Theorem 3.3.12)), also ergibt sich aus 5.12, dass $\tau|K$ Supremum von reellen Bewertungstopologien ist. Aufgrund der Lokalbeschränktheit von $\tau|K$ ergibt sich aus 1.12(b) und 1.21 die Existenz eines $\tau|K$-nilpotenten Elementes $a \neq 0$. Wegen 1.19 ist τ normierbar. □

5.14 Bemerkung
Es seien K,L,x und τ wie in Satz 4.4 und φ eine τ induzierende Norm. Falls $\tau \neq \tau_{dis}$ gilt, so ist $Rad(\tau) \in \mathfrak{U}_\tau(0)$, also $Rad(\tau) \cdot (Rad(\tau)^*)^{-1} = L$. Insbesondere gibt es ein $\tau-$nilpotentes Element y, welches transzendent über K ist, oBdA sei $\varphi(y) < 1$. Für jedes $p \in K[y]$, etwa $p(y) = \sum_{i=0}^{n} k_i y^i$ gilt:

[9] siehe etwa (Bosch, 1993, S. 118, Satz 4)

$$\begin{aligned}
\varphi(p) &= \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} k_i y^i\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n} \varphi(k_i)\varphi(y)^i \\
&\leq \sup \varphi[K] \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(y)^i \\
&\leq \sup \varphi[K] \frac{1}{1-\varphi(y)}.
\end{aligned}$$

Folglich ist $K[y]$ ein $\tau-$beschränkter Dedekindbereich. Insofern kann 5.13 als eine Verallgemeinerung von 4.4 angesehen werden.

5.15 Satz *vgl.(Kaplansky, 1974, S. 107, Theorem 146)*
Es sei $R \neq Q(R)$ ein noetherscher G-Bereich. Dann ist R eindimensional und $spec(R)$ endlich.

5.16 Satz *Es sei $R \neq Q(R)$ ein noetherscher Integritätsbereich. Dann gilt:*

Äq: (i) Jede hausdorffsche Körpertopologie τ mit beschränktem R ist Supremum von reellen Bewertungstopologien.

(ii) Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien.

Beweis:

- (i)⇒(ii) klar
- (ii)⇒(i) Sei $a \in R^*\backslash E(R)$ und $S := 1 + aR$. R_S ist noethersch (siehe etwa (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 57, Theorem 2.1.11)) und G-Bereich gemäß 1.21 und 3.11(c), also ist R_S eindimensional und $spec(R_S)$ endlich wegen 5.15. Aufgrund von 5.4(c) ist $\{ \mathfrak{m} \in max(R) \mid a \in \mathfrak{m} \}$ endlich, mit 5.8 und 5.5(a) folgt die Behauptung.

Es stellt sich die Frage, ob die Bedingung "$\forall \mathfrak{m} \in max(R) : \quad \tau_{R_\mathfrak{m}}$ ist Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien" ersetzt werden kann durch "$\forall \mathfrak{m} \in max(R) : \quad \tau_{R_\mathfrak{m}}$ ist eine reelle Bewertungstopologie" [10]. Dass dies nicht der Fall ist, wird durch das folgende Beispiel dokumentiert.

[10] vgl. dazu den Begriff "topologically pruferian" in (Abouabdillah, 1983)

5.17 Beispiel
Es gibt einen Integritätsbereich $R \neq Q(R)$, so dass zwar für alle $\mathfrak{m} \in max(R)$ die Topologie $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ Supremum von endlich vielen reellen Bewertungstopologien ist. Aber für kein $\mathfrak{m} \in max(R)$ ist $\tau_{R_\mathfrak{m}}$ keine reelle Bewertungstopologie:

Es sei v eine nichtarchimedische, nichttriviale reelle Bewertung auf einem Körper K, $V := \widetilde{K}_1^v(0)$, $\mathfrak{m} := K_1^v(0)$. Da $\mathfrak{m} \in max(V)$ aufgrund von 1.17(a) gilt, ist $V/\mathfrak{m}$ ein Körper.
Es sei L/K eine endliche algebraische Körpererweiterung, so dass v genau $n \geq 2$ paarweise verschiedene reelle Bewertungsfortsetzungen $v_1, ..., v_n$ auf L besitzt. [11]
Da v auf K nichttrivial ist, sind $v_1, ..., v_n$ auf L paarweise nichtäquivalent (siehe 1.17(b)). Man setze

$$T := \overline{V}^{ganz\ in\ L} = \bigcap_{i=1}^{n} \widetilde{K}_1^{v_i}(0).^{12}$$

Es ist τ_T wegen $n \geq 2$ und

$$\tau_{indis} \subsetneq \tau_{v_1} \subsetneq \sup_{i=1}^{n} \tau_{v_i} = \tau_T$$

nicht minimal, also gemäß 1.26(d) und (b) keine Bewertungstopologie. Es gelten die folgenden Aussagen:

- $\forall \mathfrak{p} \in spec^*(T): \quad \mathfrak{p} \cap V = \mathfrak{m}$
  [Wegen $V \subseteq T$ gilt $\mathfrak{p} \cap V \in spec(V)$, gemäß (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 111, Corollary 3.1.14) ist $\{0\} \neq \mathfrak{p} \cap V$]
  Folglich gilt $\mathfrak{m} \subseteq Rad^*(T)$ und $\mathfrak{m} = Rad^*(T) \cap V$.

- Die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} V/\mathfrak{m} & \rightarrow & T/Rad^*(T) \\ v + \mathfrak{m} & \mapsto & v + Rad^*(T) \end{cases}$$

  ist also wohldefiniert.

- Man setze

$$R := \{ \ (v + \mathfrak{m}, t) \in (V/\mathfrak{m}) \times T \mid v - t \in Rad^*(T) \ \}$$

---

[11] Eine konkrete Realisation dieser Situation ist etwa $K := \mathbb{Q}$, $L := \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, v die 19-adische Bewertung auf K. Diese besitzt 2 Fortsetzungen auf L. Dies ergibt sich aus $4 \equiv 19 \mod 5$ in Verbindung mit (Neukirch, 1999, S. 166, Exercise 1.3 und S. 50, Definition des Legendre Symbols)

[12] (Ribenboim, 1999, S. 119, Theorem 2)

und versehe R mit den koordinatenweisen Verknüpfungen [13]. Dann ist R wohldefiniert und ein Ring mit $1 = (1 + \mathfrak{m}, 1)$.
[Es reicht die Abgeschlossenheit von Addition und Multiplikation zu zeigen: Seien $(v + \mathfrak{m}, t)$, $(w + \mathfrak{m}, s) \in R$. Wegen $v - t, w - s \in \mathit{Rad}^*(T)$ gilt $v + w - (t + s) \in \mathit{Rad}^*(T)$, also ist $(v + w + \mathfrak{m}, t + s) \in R$.
Aufgrund von

$$\begin{aligned} vw - st &= vw - vs + vs - st \\ &= v(w - s) + s(v - t) \in \mathit{Rad}^*(T) \end{aligned}$$

gilt auch $(v + \mathfrak{m}, t) \cdot (w + \mathfrak{m}, s) \in R$.]

- Die kanonische Projektion

$$i : \begin{cases} R & \to \quad T \\ (v + \mathfrak{m}, t) & \mapsto \quad t \end{cases}$$

ist ein Ringmonomorphismus, insbesondere ist R also ein Integritätsbereich.
[Sei $(v + \mathfrak{m}, t) \in \mathit{Ker}\ i$, also gilt $v = v - t \in \mathit{Rad}^*(T) \cap V = \mathfrak{m}$.]

- Es sei

$$j : \begin{cases} R & \to \quad V/\mathfrak{m} \\ (v + \mathfrak{m}, t) & \mapsto \quad v + \mathfrak{m} \end{cases} .$$

Dann gilt:

$$\mathit{Ker}\ j = \{\mathfrak{m}\} \times \mathit{Rad}^*(T) \in \mathit{max}(R)$$

[“$\subseteq$“: Sei $(v + \mathfrak{m}, t) \in \mathit{Ker}\ j$, also gilt $v \in \mathfrak{m}$ und daher $t = t - v + v \in \mathit{Rad}^*(T) + \mathfrak{m} = \mathit{Rad}^*(T)$.
“$\supseteq$“: ist klar
Aufgrund des Homomorphiesatzes (j ist offenbar surjektiv) ist $R/(\mathit{Ker}\ j)$ kanonisch isomorph zum Körper $V/\mathfrak{m}$, also ist $\mathit{Ker}\ j$ ein maximales Ideal.]

- Es gilt $\mathit{spec}^*(R) = \{\mathit{Ker}\ j\}$
[Annahme: es existiert ein $\mathfrak{p} \in \mathit{spec}^*(R)$ mit $\mathit{Ker}\ j \not\subseteq \mathfrak{p}$, sei etwa $(v+\mathfrak{m}, s) \in (\mathit{Ker}\ j)\backslash\mathfrak{p}$. Insbesondere gilt $(v + \mathfrak{m}, s) \neq (\mathfrak{m}, 0)$, also ist

[13] R ist also der Pullback von φ entlang der kanonischen Projektion $\pi_{\mathit{Rad}^*(T)}$ gemäß des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i"'] & V/\mathfrak{m} \arrow[d, "\varphi"] \\ T \arrow[r, "\pi_{\mathit{Rad}^*(T)}"'] & T/\mathit{Rad}^*(T) \end{tikzcd}$$

$$S := \{ \ (v + \mathfrak{m}, s)^n \mid n \in \mathbb{N} \ \}$$

ein multiplikatives Sytem in R und

$$i[S] = \{ \ s^n \mid n \in \mathbb{N} \ \}$$

ein multiplikatives System in T.
Die Ringhomomorphismus

$$\Phi : \begin{cases} R_S & \to & T_{i[S]} \\ \frac{(w+\mathfrak{m},t)}{(v+\mathfrak{m},s)^n} & \mapsto & \frac{t}{s^n} \end{cases}$$

ist bijektiv:

- Φ injektiv: Ist $\frac{t}{s^n} = 0$, so folgt $t = 0$, also gilt $w = w - t \in Rad^*(T) \cap V = \mathfrak{m}$
- Φ surjektiv: Sei $\frac{t}{s^n} \in T_{i[S]}$. Wegen $(v + \mathfrak{m}, s) \in Ker\ j$ gilt $s \in Rad^*(T)$, also ist auch $ts \in Rad^*(T)$ und somit $(\mathfrak{m}, ts) \in R$. Man erhält

$$\Phi\left(\frac{(\mathfrak{m}, ts)}{(v + \mathfrak{m}, s)^{n+1}}\right) = \frac{ts}{s^{n+1}} = \frac{t}{s^n}$$

Wegen $i[(v + \mathfrak{m}, s)] = s \in Rad^*(T)\backslash\{0\}$ gilt $T_{i[S]} \overset{3.9}{=} Q(T)$. Andererseits ist $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, also $\mathfrak{p}R_S \in spec^*(R_S)$ und damit $\Phi[\mathfrak{p}R_S] \in spec^*(T_{i[S]}) = \emptyset$. Also muss die Annahme falsch sein, d.h. für jedes Primideal $\mathfrak{p} \in spec^*(R)$ gilt $Ker\ j \subseteq \mathfrak{p}$, aufgrund der Maximalität von $Ker\ j$ ist $Ker\ j = \mathfrak{p}$.]

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} Rad(\tau_T) &\overset{3.14}{=} Rad^*(T) \\ &= i[\{\mathfrak{m}\} \times Rad^*(T)] \\ &= i[Ker\ j] \\ &\subseteq i[R] \\ &\subseteq T \subseteq \overline{T}^{comp} \overset{3.12(c)}{\subseteq} SP_{(\tau_T)}. \end{aligned}$$

Aufgrund von 3.7(b) gilt daher:

$$\tau_{i[R]} = \tau_T.$$

Da $max(i[R]) = \{i[Ker\ j]\}$ ist, gilt

$$i[R]_{i[Ker\ j]} = i[R].^{14}$$

Also ist $\tau_{(i[R]_{i[Ker\ j]})} = \tau_{i[R]} = \tau_T = \sup_{i=1}^{n} \tau_{v_i}$, aber keine reelle Bewertungstopologie.

[14] (Balcerzyk and Józefiak, 1989, S. 39, Corollary 1.4.5)

Bibliography

Abouabdillah, D. (1983). Topologies de corps A linéaires. *Pacific Journal of Mathematics*, 107(2):257–266.

Balcerzyk, S. and Józefiak, T. (1989). *Commutative Noetherian and Krull rings.* Prentice Hall, Inc.

Bosch, S. (1993). *Algebra.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Cohen, J.-A. (1977). Locally bounded Topologies on F(x). *Pacific Journal of Mathematics*, 70(1):125–132.

Cohen, J.-A. (1983). Norms on F(X). *Pacific Journal of Mathematics*, 109(1):81–87.

Cohen, J.-A. (1984). On the number of locally bounded field topologies. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 90(2):207–210.

Cohen, J.-A. (1985). Topologies on the quotient field of a dedekind domain. *Pacific Journal of Mathematics*, 117(1):51–67.

Cohn, P.M. (1954). An invariant characterization of pseudovaluations on a field. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 50:159–177.

Gilmer, R. (1966). The pseudo-radical of a commutative ring. *Pacific Journal of Mathematics*, 19(2):275–284.

Gilmer, R. (1992). *Multiplicative ideal theory.* Queen's University, Kingston.

Heckmanns, U. (1991). Beispiel eines topologischen Körpers, dessen Vervollständigung ein Integritätsring, aber kein Körper ist. *Arch. Math.*, 57:144–148.

Heine, J. and Warner, S. (1973). Ring topologies on the quotient field of a dedekind domain. *Duke Math. J.*, 40:473–486.

Hill, P. (1972). On the complete integral closure of a domain. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 36(1):26–30.

Jebli, A. (1971). Topologies et valuations essentielles. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. Séries A et B*, 272:A1173–A1174.

Kaplansky, I. (1974). *Commutative Rings.* The University of Chicago Press.

Kiltinen, J. O. (1968). Inductive ring topologies. *Transactions of the AMS*, 134:149–169.

Kiltinen, J. O. (1973). On the number of field topologies. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 40(1):30–36.

Kowalsky, H.-J. and Dürbaum, H. (1953). Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 191:135–152.

Larsen, M. D. and McCarthy, P. J. (1971). *Multiplicative theory of ideals.* Academic Press, New York-London.

Maiwald, B. (1996). *Lokalbeschränkte Ringtopologien auf unendlich algebraischen Körpererweiterungen des rationalen Zahlkörpers.* PhD thesis, Universität Hannover.

Neukirch, J. (1999). *Algebraic Number Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

Ribenboim, P. (1999). *The theory of classical valuations.* Springer-Verlag.

Sankaran, N. and Yadav, R. A. (1979). G-domains and pseudovaluations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 61:33–38.

Shell, N. (1990). *Topological Fields and Near Valuations.* Marcel Dekker, Inc.

Singh, S. (1975). Note on a paper of P.M. Cohn. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78:211–213.

Singh, S. and Manchanda, P. (1989). On complete integral closure of g-domain. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 20(9):884–886.

Warner, S. (1989). *Topological fields.* North-Holland Publishing Co.

Weber, H. (1978). Zu einem Problem von H.J.Kowalsky. *Abhandlungen der Braunschweigischen wissenschaftlichen Gesellschaft*, 29:127–134.

Weber, H. (1979a). Charakterisierung der lokalbeschränkten Rintopologien auf globalen Körpern. *Mathematische Annalen*, 239:193–205.

Weber, H. (1979b). Topologische Charakterisierung globaler Körper und algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen. *Mathematische Zeitschrift*, 169:167–177.

Weber, H. (1982). Unabhängige Topologien, Zerlegung von Ringtopologien. *Mathematische Zeitschrift*, 180(3):379–393.

Wiesław, W. (1992). Topological fields - results and problems. *Contemporary Mathematics*, 131:509–517.

Zariski, O. and Samuel, P. (1975). *Commutative Algebra Vol.2.* Springer.

Index

Lebenslauf

Name	Peter Vorländer
Geburtsort und -tag	Grevenbroich, 22.7.1970
Eltern	Rose und Erwin Vorländer
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	ledig
Schulausbildung	1976-1989
Schulabschluß	Abitur 1989
Zivildienst	3/1990-5/1991
Universitätsausbildung	
10/1991-7/1997	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität Hannover
seit 1994	wissenschaftliche Hilfskraft an verschiedenen Instituten des Fachbereichs Mathematik
7/1997	Abschluß als Diplom Mathematiker
Berufstätigkeit	
seit 10/1997	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für angewandte Mathematik der Universität Hannover
12/2001	Promotion