

Der $N=2$ String auf nicht trivialen Hintergründen

Vom Fachbereich Physik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.
genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Phys. Bernd Spendig
geboren am 14. Juni 1972 in Verden/Aller

2002

Referent: Prof. Dr. Lechtenfeld
Korreferent: Prof. Dr. Lewenstein

Tag der Promotion: 29. Mai 2002

Jetzt wird dergleichen von den meisten gering geschätzt und niedergehalten, von den Gelehrten aber trotz dieser Hindernisse und, obwohl sie den eigentlichen Wert nicht sehen, des Reizes wegen, den es hat, mit Macht gefördert.

Platon (Politeia)

Zusammenfassung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Physik des $N=2$ Superstrings auf nicht trivialen Hintergründen. Nach einem einführenden Kapitel in die Fragestellung der Arbeit (Kapitel 1) folgt eine kurze Erläuterung der Grundlagen des $N=2$ Strings (Kapitel 2) und seiner effektiven Feldtheorien (Kapitel 3).

Im Anschluss an eine kurze Darstellung von D-Branes in der bosonischen und der $N=1$ Superstringtheorie (Kapitel 4) untersuchen wir die physikalische Bedeutung der D-Branes für den $N=2$ String (Kapitel 5). Während in der $N=1$ Stringtheorie D-Branes als Träger der RR-Ladung eine wichtige Funktion für das Verständnis nichtperturbativer Effekte einnehmen, ist ihre Rolle beim $N=2$ String aufgrund des Fehlens sämtlicher Felder im Spektrum des Strings, an die D-Branes auf natürliche Weise koppeln, unklar. Wir betrachten daher D-Branes als künstlich hinzugefügte Hintergrundobjekte und untersuchen mittels einer Analyse von Streuamplituden, inwieweit diese konsistent mit der $N=2$ Stringtheorie sind. Es zeigt sich, dass nur D-Branes, die *nicht* die komplexe Struktur des Targetraums brechen, physikalisch sinnvolle Streuamplituden liefern, welche keine bzw. nur masselose Pole aufweisen.

Wir untersuchen als nächsten zentralen Aspekt dieser Arbeit den Effekt, den das Vorhandensein eines konstanten B -Feld-Hintergrunds auf die effektive Feldtheorie des $N=2$ Strings hat (Kapitel 6) und zeigen durch einen Vergleich der Streuamplituden von String- und Feldtheorie, dass man im Seiberg-Witten-Limes eine nichtkommutative Version der selbstdualen Yang-Mills-Theorie erhält. Zusätzlich analysieren wir die Bedingungen, die sich aus der Forderung nach Supersymmetrieminvarianz an die Wirkung des $N=2$ Strings ergeben, wenn ein B -Feld an die Materiefelder gekoppelt wird. Es zeigt sich, dass die Wirkung ihre Invarianz unter Supersymmetrietransformationen am Rand der Weltfläche genau dann behält, wenn das B -Feld eine Kähler-Zwei-Form und die Metrik selbstdual ist.

Im Folgenden beschreiben wir die effektiven Feldtheorien, die entstehen, wenn konstante B -Felder auf niedriger-dimensionalen D-Branes vorhanden sind. Besonderes Augenmerk gilt der Konstruktion von solitonischen Lösungen auf der $(2+1)$ -Brane (Kapitel 7). Für die beiden einfachsten Fälle, die Eichgruppen $U(1)$ und die $U(2)$, konstruieren wir mittels der „dressing“-Methode Ein-Soliton-Lösungen und bestimmen explizit deren Energie. Eine Diskussion der Ergebnisse beschließt diese Arbeit.

Schlagwörter: $N=2$ Superstring, D-Branes, Nichtkommutative Feldtheorien, Solitonen

Abstract

This thesis deals with the physics of the $N=2$ superstring in non-trivial backgrounds. After an introductory chapter that contains a motivation of the issues under consideration in this thesis (chapter 1) we briefly explain the basic ideas of the $N=2$ string (chapter 2) and its effective field theories (chapter 3).

A short description of D-branes in the bosonic and the $N=1$ superstring theory (chapter 4) is followed by the investigation of the physical importance of D-Branes for the $N=2$ string (chapter 5). While in $N=1$ string theory D-branes are charged under the RR-forms and play an important role for our understanding of non-perturbative effects, their role in the $N=2$ string theory is unclear, since in the spectrum of the $N=2$ string there are no fields that D-branes could couple to minimally. We therefore consider D-branes as artificially added background objects and – by analyzing scattering amplitudes – explore their physical consistency with the $N=2$ string theory. It turns out that only D-branes that do *not* break the complex structure of the target space yield physically sensible scattering amplitudes with no or massless poles, respectively.

As another central topic of this thesis we investigate the effect of a constant B -field background on the effective field theory of the $N=2$ string (chapter 6). By comparison of the scattering amplitudes of the string and the field theory we show that in the Seiberg-Witten limit a noncommutative version of the self-dual Yang-Mills theory arises. Furthermore we analyze the conditions that follow from demanding invariance of the action of the $N=2$ string under supersymmetry transformations in the presence of a B -field coupled to the matter fields. We show that the action keeps its invariance under these transformations at the boundary of the world-sheet if and only if the B -field is a Kähler two-form and the metric is self-dual.

We proceed by describing the effective field theories that arise when B -fields are turned on on lower-dimensional D-branes. Special attention is directed to the construction of solitonic solutions on the $(2+1)$ -brane (chapter 7). For the case of the two simplest examples, the gauge groups $U(1)$ and $U(2)$, we construct one-soliton solutions using the “dressing”-approach and determine explicitly their energies. A discussion of the results concludes this thesis.

Keywords: $N=2$ Superstring, D-branes, Noncommutative field theories, Solitons

INHALTSVERZEICHNIS

1	Einleitung	9
2	Der N=2 String	15
2.1	Wirkung und Symmetrien	15
2.2	Die Symmetrieströme	17
2.3	Spektralfluss	19
2.4	BRST-Quantisierung	20
2.5	Das Spektrum	22
2.6	Streuamplituden	23
2.7	Chan-Paton-Faktoren	24
2.8	Bosonisierung	25
3	Die effektiven Wirkungen des N=2 Strings	29
3.1	Selbstduale Yang-Mills-Theorie	30
3.2	Selbstduale Gravitation	32
3.3	SDYM gekoppelt an SDG	34
4	D-Branes	37
4.1	T-Dualität geschlossener Strings	37
4.2	T-Dualität bei offenen Strings: D-Branes	39
4.3	Chan-Paton-Faktoren und Wilson-Linien	40
4.4	D-Branes des N=1 Superstrings	41
4.5	Die effektive Wirkung von D-Branes	42
5	D-Branes in N=2 Stringtheorie	45
5.1	Konventionen	45
5.2	D-Brane-Streuung von N=2 Strings	46
5.2.1	Die Amplitude A_{cc}	47
5.2.2	Die Amplitude A_{occ}	48
5.3	Streuamplituden für jeden D-Brane-Typ	49
5.3.1	Die (2+2)-Brane	49
5.3.2	Die (1+2)-Brane	49
5.3.3	Die (1+1)-Brane	50
5.3.4	Die (2+0)-Brane	51
5.3.5	Die (1+0)-Brane	52
5.3.6	Die (0+0)-Brane / Das D-Instanton	52

5.3.7	Die Amplitude A_{ooc}	53
5.4	Resultate	53
6	Nichtkommutative Feldtheorie	55
6.1	B-Felder auf D-Branes	55
6.2	Offene N=2 Strings	58
6.3	N=2 supersymmetrische Randbedingungen	59
6.4	Der Seiberg-Witten-Limes	60
6.5	Faktorisierung von Tree-Amplituden offener Strings	62
6.6	Nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie	64
6.7	Die Vierpunkt-Amplitude: Das Beispiel U(2)	66
7	Solitonen	69
7.1	Der Ansatz	70
7.2	Effektive Feldtheorien auf D-Brane-Weltvolumina	71
7.3	Nichtkommutative Solitonen in 2+1 Dimensionen	73
7.4	Solitonen in 1+1 und Instantonen in 2+0 Dimensionen	80
8	Zusammenfassung und Ausblick	83
A	Symmetrien des N=2 Strings	87
B	Notation	89
B.1	Reelle Notation	89
B.2	Komplexe \pm -Notation	89
B.3	Komplexe Lichtkegelkoordinaten	89
B.4	<i>Van der Waerden</i> -Index-Notation	90
C	Vertexoperatoren des N=2 Strings	91

Abbildungsverzeichnis

4.1	D-Branes an verschiedenen Positionen	41
5.1	Streuung geschlossener Strings an einer D-Brane im t -Kanal	48
5.2	Der gleiche Streuprozess aus Sicht des s -Kanals	48

Tabellenverzeichnis

1.1	Masselose Anregungen der verschiedenen N=1 Stringtheorien	11
3.1	Tree-Level-Amplituden des N=2 Strings	34

KAPITEL 1

EINLEITUNG

Die moderne Hochenergiephysik ist auf der Suche nach einer vereinheitlichten Beschreibung der inneren Struktur der Materie und der wirkenden Kräfte. In Beschleunigerexperimenten werden heutzutage Theorien getestet, die auf Quantenfeldtheorien basieren und die in der Lage sind, drei der vier grundlegenden Kräfte zu beschreiben, namentlich die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Ausgehend von den Erkenntnissen in den niedrigen Energiebereichen, welche in den heute existierenden Beschleunigern erreicht werden können, wird allgemein angenommen, dass bei mittleren Energien die drei eben genannten Kräfte im Rahmen einer vereinheitlichten Theorie beschreibbar sind.

Bei Energieskalen in der Größenordnung der Planck-Länge (10^{-33} cm) wird erwartet, dass auch die Gravitation konsistent in eine *große* vereinheitlichte Theorie eingebunden werden kann. Welche Form diese Theorie haben wird, ist jedoch zur Zeit noch unbekannt. Als einer der Favoriten werden in zunehmendem Maße Superstringtheorien angesehen, deren grundlegendes Paradigma ist, dass die fundamentalen Objekte in der Natur nicht die Punktteilchen der Quantenfeldtheorien sind, sondern ausgedehnte, eindimensionale Objekte, die Strings. Ein wesentliches Argument für die Relevanz der Stringtheorien ist, dass die Theorie explizit Gravitation umfasst. Allerdings liegen ihre Vorhersagen derzeit typischerweise in Energiebereichen der Planck-Skala, was eine experimentelle Verifizierung in üblichen Hochenergiephysikexperimenten unmöglich macht. Der Weg, den Stringtheoretiker daher beschreiten, ist die Theorie auf innerer Konsistenz und Schönheit aufzubauen. Im Niedrigenergielimes muss sie zudem die heute anerkannten Quantenfeldtheorien und die allgemeine Relativitätstheorie reproduzieren, wobei ein wirklicher Durchbruch hier jedoch bislang nicht gelungen ist.

Die Stringtheorien nahmen ihren Ausgangspunkt in den 60er Jahren des letzten Jahrhunderts aus den sogenannten „dualen Modellen“, die der Beschreibung von Hadron-Amplituden und damit der Beschreibung der starken Wechselwirkung dienen sollten. Allerdings zeigte sich schnell, dass das Spektrum der Theorie neben den erwünschten Teilchen, wie den Gluonen, auch Teilchen von beliebig hohem Spin beinhaltet, die in der Theorie der starken Wechselwirkung keinen adäquaten Platz finden. Spätestens durch die Erfolge der Quantenchromodynamik wurden die dualen Modelle daher aus dem Blickfeld der Hochenergiephysik verdrängt.

Dieser Zustand änderte sich jedoch im Jahr 1974, als die dualen Modelle eine Umdeutung als Stringtheorie erfuhren, die im Folgenden als Theorie *aller* fundamen-

taler Kräfte und Teilchen interpretiert wurde. Jetzt erwies es sich als Vorteil, dass im Spektrum des Strings Teilchen höheren Spins vorhanden waren, da insbesondere das von einer Theorie der Quantengravitation geforderte masselose Spin-2-Teilchen, das Graviton, zwangsläufig in der Theorie enthalten ist.

Ein wichtiges Merkmal von Stringtheorien ist es, dass für eine konsistente Quantisierung der Theorie eine genau festgelegte Dimension der Raumzeit gewählt werden muss. Für den bosonischen String erhält man $D = 26$ und für den $N=1$ Superstring, der neben Raumzeitbosonen auch Raumzeitfermionen beschreibt, $D = 10$. Durch die Fixierung der Raumzeitdimensionalität ist zudem das Spektrum des Strings vollständig festgelegt. Neben den bereits erwähnten unendlich vielen massiven Anregungen zählt auch ein tachyonischer Zustand zum Spektrum. Während der bosonische String nicht von diesem unphysikalischen Zustand befreit werden kann, gelang es Gliozzi, Scherk und Olive [1] mittels der nach ihnen benannten GSO-Projektion das Tachyon aus dem Spektrum des $N=1$ Strings zu beseitigen, indem explizit Raumzeit-Supersymmetrie gefordert wird. Im Fall des $N=1$ Strings gehorchen also nicht nur die Felder auf der Weltfläche, sondern auch das Spektrum in zehn Dimensionen der Supersymmetrie, die Fermionen und Bosonen miteinander verbindet.

Mitte der 80er Jahre kam es zu einer Belebung des Interesses an Superstringtheorien durch die sogenannte „erste Stringrevolution“. Green und Schwarz [2] gelang eine explizit raumzeit-supersymmetrische Formulierung des Superstrings, der GS-String, der äquivalent zur üblichen Neveu-Schwarz-Ramond-Formulierung (NSR-Formulierung) des Superstrings ist. Sie konnten zeigen, dass ihre Superstringtheorie endliche Amplituden auf Ein-Loop-Niveau liefert und Divergenzen wahrscheinlich für alle höheren Ordnungen ebenfalls nicht vorhanden sind. Gross et al. [3] führten zudem den aus phänomenologischer Sicht sehr interessanten heterotischen String ein, der eine Kombination aus $N=1$ Superstring und bosonischem String darstellt. Der supersymmetrische Anteil bewirkt, dass der heterotische String weiterhin über die positiven Eigenschaften des Superstrings verfügt, während es der bosonische Sektor ermöglicht, das Spektrum als Darstellung entweder der Gruppe $SO(32)$ oder der Gruppe $E_8 \times E_8$ aufzufassen. Diese beiden heterotischen Stringtheorien traten Mitte der 80er Jahre neben die drei anderen bereits vorher bekannten Superstringtheorien IIA, IIB (beide mit $N=2$ chiraler bzw. nicht-chiraler Raumzeit-Supersymmetrie) und einer Theorie offener und geschlossener Strings mit $N=1$ Supersymmetrie und Eichgruppe $SO(32)$, dem Typ I Superstring, und erweiterten die Zahl der *möglichen* Superstringtheorien auf fünf. Die Tabelle auf der folgenden Seite [4] zeigt die masselosen Anregungen der verschiedenen Stringtheorien in den beiden bosonischen Sektoren, namentlich dem Neveu-Schwarz-Neveu-Schwarz-Sektor (NS-NS-Sektor) und dem Ramond-Ramond-Sektor. $G_{\mu\nu}$, Φ und $B_{\mu\nu}$ bezeichnen das Graviton, das Dilaton bzw. den antisymmetrischen Tensor, im Ramond-Ramond-Sektor finden sich verschiedene p -Form-Potentiale und die konstante Feldstärke $H^{(0)}$.

Neben der Frage, welche Kompaktifizierung der überschüssigen sechs Raumdimensionen zu wählen sei, stellte vor allem dieses Überangebot an in sich konsistenten Stringtheorien ein Problem dar. Welche dieser fünf Theorien ist in unserer Welt tatsächlich realisiert und aus welchem tieferliegenden Grund, bzw. wie Edward Witten es formuliert hat: „Wer lebt in den anderen vier Welten?“. Bedingt durch

	NS-NS	Ramond-Ramond
Typ-IIA	$G_{\mu\nu}, \Phi, B_{\mu\nu}$	$C_\mu, C_{\mu\nu\rho} ; H^{(0)}$
Typ-IIB	$G_{\mu\nu}, \Phi, B_{\mu\nu}$	$C, C_{\mu\nu}, C_{\mu\nu\rho\tau}$
Typ-I	$G_{\mu\nu}, \Phi$	$C_{\mu\nu}$
heterotisch	$G_{\mu\nu}, \Phi, B_{\mu\nu}$	

Tabelle 1.1: Masselose Anregungen der verschiedenen N=1 Stringtheorien

diese Probleme erlahmte das Interesse an den Superstringtheorien Anfang der 90er Jahre.

Erst im Kontext der „zweiten Stringrevolution“, die 1995 durch eine bahnbrechende Arbeit von Witten [5] hervorgerufen wurde, änderte sich dieser Zustand wieder. In dieser Arbeit postulierte er, dass basierend auf gewissen Dualitäten, die z.B. Strings in Bereichen starker Kopplung mit anderen Strings im Bereich schwacher Kopplung in Verbindung bringen, alle fünf Stringtheorien auf einer grundlegenden elfdimensionalen Theorie, der M-Theorie, basieren. In den letzten Jahren wurden eine Vielzahl von Resultaten erzielt, die diese Hypothese unterstützen. Welche Form die M-Theorie haben wird, ist jedoch weiterhin unbekannt. Sicher ist nur, dass der Niederenergielimes der M-Theorie die eindeutige $N=1$ Supergravitationstheorie in elf Dimensionen sein muss.

Das Dualitätskonzept, auf das sich Witten bei seiner M-Theorie-Hypothese stützte, war zum Zeitpunkt der zweiten Stringrevolution größtenteils bekannt. Eine der Dualitäten, die bereits Ende der 80er Jahre intensiver untersucht worden war und die die Grundlage der näher zu beleuchtenden D-Branes liefert, ist die T-Dualität. Diese Dualität manifestiert sich bereits auf perturbativem Niveau und wirkt auf Stringtheorien, die auf bestimmten d -dimensionalen Tori kompaktifiziert werden. Insbesondere existiert eine Beziehung zwischen der IIA-Theorie und der IIB-Theorie bei Kompaktifizierung auf einem Kreis und entsprechender Identifizierung der Parameter.

Ein weiterer Durchbruch gelang Polchinski, ebenfalls 1995, als er die lange gesuchten Träger der Ramond-Ramond-Ladung mit Dp -Branes (oder kurz D-Branes), nichtperturbativen solitonischen Lösungen der den Stringtheorien zugrunde liegenden Supergravitationstheorien, identifizierte. Die Entdeckung dieser ausgedehnten p -dimensionalen Objekte eröffnete die Möglichkeit, Superstrings in nichtperturbativem Regime der Kopplungskonstanten zu studieren. Insbesondere nehmen sie eine

wesentliche Stellung in der oben erwähnten M-Theorie ein. In den letzten Jahren spielten D-Branes daher die herausragende Rolle in den wissenschaftlichen Veröffentlichungen der Stringtheorie, wobei zunehmend auch kosmologische Szenarien basierend auf D-Brane-Dynamiken in den Mittelpunkt des Interesses rücken, die an Kühnheit der Spekulation Theorien wie die der *kosmischen Inflation* bei weitem übertreffen (siehe z.B. [6, 7]).

Während man für die kritische Dimension des bosonischen Strings $D = 26$ findet, ergibt sich für den $N=1$ Superstring $D = 10$. Die naheliegende Frage ist daher, ob durch Einführung einer weiteren Supersymmetrie auf der Weltfläche die phänomenologisch relevante Dimension $D = 4$ des Targetraums erhalten werden kann. Tatsächlich ergibt sich für den zuerst von Ademello et al. [8] untersuchten $N=2$ String, der ursprünglich konstruiert worden war, um die Stringtheorie mit einer die Farbladungen der Quarks repräsentierende $U(1)$ -Symmetrie zu ergänzen, eine kritische Dimension von $D = 4$. D’Adda und Lizzi konnten allerdings zeigen [9], dass die Signatur des $N=2$ Strings $(2, 2)$ ist und daher zwei Zeitrichtungen umfasst. Das Spektrum des $N=2$ Strings enthält keine angeregten Zustände, sondern nur ein einziges masseloses skalares Feld und alle n -Punkt-Streuamplituden verschwinden für $n > 3$. Phänomenologisch ist der $N=2$ String daher irrelevant und wurde folglich lange Zeit als Randerscheinung behandelt. Dies änderte sich erst wieder in Folge einer Veröffentlichung von Ooguri und Vafa [10], die 1990 zeigen konnten, dass sich der skalare Freiheitsgrad im Fall des geschlossenen Strings als Deformation einer Ricci-flachen Kähler-Metrik beschreiben lässt. Damit ist selbstduale Gravitation als Theorie der effektiven Wirkung des geschlossenen $N=2$ Strings ableitbar. Für den offenen String ergibt sich eine Äquivalenz zu einer anderen selbstdualen Feldtheorie, der selbstdualen Yang-Mills-Theorie. Diese Theorie ist vom mathematischen Standpunkt aus besonders interessant, da angenommen wird, dass alle integrierbaren Modelle aus der selbstdualen Yang-Mills-Theorie ableitbar sind.

Viele Quantenfeldtheorien auf nichtkommutativer Raumzeit lassen sich in einem bestimmten „zero-slope“-Limes aus den effektiven Feldtheorien von offenen Strings in bestimmten NS-NS Zwei-Form- („ B -Feld“-)Hintergründen ableiten [11]. In moderner Sprechweise bedeutet dies, dass die Dynamik offener Strings innerhalb des Weltvolumens von D-Branes studiert wird, auf denen ein konstantes B -Feld durch die äquivalente Beschreibung mittels effektiver Nichtkommutativität und einer deformierten Metrik ersetzt wird. Stringtheorien bieten auf diese Weise die (kommutative) Bühne für das Studium nichtkommutativer Feldtheorien. Insbesondere solitonische Lösungen der Bewegungsgleichungen der kommutativen Feldtheorien und ihrer nichtkommutativen Erweiterungen spielen eine wesentliche Rolle für das Verständnis von Stringtheorien jenseits der Störungstheorie.

Die Forschung hat sich in den letzten Jahren bei der Untersuchung obiger Aspekte bislang auf den bosonischen und den $N=1$ String konzentriert. Dies erscheint nicht gerechtfertigt, da gerade der $N=2$ String mit seiner vergleichsweise einfachen Struktur eine gute Möglichkeit des Testens von stringspezifischen Hypothesen bietet, darüberhinaus aber aufgrund seiner Relation zu den selbstdualen Theorien sehr interessante eigenständige Resultate erwarten lässt. Zentrales Anliegen dieser Arbeit ist daher die Beschreibung von $N=2$ Strings im Hintergrund von B -Feldern auf D-Branes und eine Untersuchung der Auswirkung von Nichtkommutativität auf

den String und seine effektiven Feldtheorien.

Nach einer Einführung in den $N=2$ String (Kapitel 2) und seine effektiven Feldtheorien (Kapitel 3) untersuchen wir zunächst, welche physikalische Bedeutung D-Branes, die eine herausragende Stellung in der $N=1$ Stringtheorie einnehmen, für den $N=2$ String haben. Zu diesem Zweck berechnen wir nach einer Einführung in bosonische und D-Branes des $N=1$ Strings (Kapitel 4) in Kapitel 5 D-Brane-Streuamplituden und leiten ab, inwiefern die verschiedenen D-Brane-Typen konsistent mit der $N=2$ Stringtheorie sind. In Kapitel 6 widmen wir uns dann dem Effekt, den das Einschalten eines konstanten B -Feldes auf der raumzeitfüllenden $(2+2)$ -Brane auf die effektive Feldtheorie des $N=2$ Strings hat. Kapitel 7 beschreibt die effektiven Feldtheorien, die sich im Niederenergielimes bei konstanten B -Feldern auf niedriger-dimensionalen D-Branes ergeben. Besonderes Augenmerk gilt der Konstruktion von solitonischen Lösungen in diesen nichtkommutativen Feldtheorien. Eine Diskussion der Ergebnisse beschließt diese Arbeit.

KAPITEL 2

DER N=2 STRING

In diesem Kapitel stellen wir die Grundlagen des $N=2$ Strings vor. Die erste Untersuchung des $N=2$ Strings geht zurück auf Ademello et al. [8, 12], dabei wird die String-Weltfläche in eine Raumzeit mit D Dimensionen eingebettet. Nach anfänglichen Problemen wurde die richtige kritische Dimension schließlich von d'Adda und Lizzi [9] gefunden und mit $D=4$ angegeben. Die Signatur der Raumzeitmetrik ist dabei $(2, 2)$. Die Einbettung des $N=2$ Strings in die Raumzeit erfolgt durch die skalaren Weltflächenfelder X^μ und deren supersymmetrische Partner ψ^μ , die beide Raumzeitvektoren sind.

2.1 Wirkung und Symmetrien

Aufgrund der Struktur der Wirkung des $N=2$ Strings erweist es sich als vorteilhaft, die reellen $(2, 2)$ -Vektoren (mit Metrik $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, -, +)$) zu komplexen $(1, 1)$ -Vektoren (mit Metrik $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +)$) zusammenzufassen.

In dieser komplexen \pm -Notation (siehe Anhang B) hat die *Brink-Schwarz*-Wirkung des $N=2$ Strings die Form [13, 14]

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2z e \left\{ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^+ \cdot \partial_\beta X^- + \frac{i}{2} \bar{\psi}^+ \cdot \gamma^\alpha \overleftrightarrow{D}_\alpha \psi^- + A_\alpha \bar{\psi}^+ \cdot \gamma^\alpha \psi^- \right. \\ \left. + (\partial_\alpha X^+ + \bar{\psi}^+ \chi_\alpha^-) \cdot \bar{\chi}_\beta^+ \gamma^\alpha \gamma^\beta \psi^- + (\partial_\alpha X^- + \bar{\chi}_\alpha \psi^-) \cdot \bar{\psi}^+ \gamma^\beta \gamma^\alpha \chi_\beta^- \right\}. \quad (2.1)$$

Dabei sind die Materiefelder $X^{\pm\mu}$ und $\psi^{\pm\mu}$ an das $N=2$ Supergravitationsmultiplett bestehend aus dem Zweibein e_a^b (der Zusammenhang mit der Weltflächenmetrik $h_{\alpha\beta}$ ist $h_{\alpha\beta} = \eta_{ab} e_\alpha^a e_\beta^b$), den komplexen Gravitini χ_α^\pm und der $U(1)$ -Konnektion A_α gekoppelt. Mit $D_\alpha = \nabla_\alpha - iA_\alpha$ bezeichnen wir die $U(1)$ -kovariante Ableitung, die auf den unter der $U(1)$ geladenen Feldern ψ^+ und χ_α^+ wirkt. Hierbei ist ∇_α die übliche kovariante Ableitung mit Torsion auf der Weltfläche. Die γ -Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra $\{\gamma^\alpha, \gamma^\beta\} = 2h^{\alpha\beta}$.

Betrachtet man die Signatur der Raumzeitmetrik $(2, 2)$, so sollte man als Lorentzgruppe des $N=2$ Strings $SO(2, 2)$ (bzw. $Spin(2, 2) \cong SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})'$) erwarten. Die Brink-Schwarz-Wirkung ist allerdings nicht invariant unter Lorentztransformationen in $2+2$ Dimensionen, was sich auch auf Ebene der Streuamplituden zeigt. Die komplexe Struktur des Targetraums führt dazu, dass ein Teil der Lorentzgruppe zu einer $U(1)$ -Gruppe gebrochen wird:

$$Spin(2, 2) \cong SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})' \longrightarrow U(1) \times SL(2, \mathbb{R})' \cong U(1, 1).$$

Die Brink-Schwarz-Wirkung ist invariant unter einer Reihe von lokalen Symmetrietransformationen (für eine ausführliche Darstellung dieser Symmetrien siehe Anhang A), die es ermöglichen, alle Freiheitsgrade des Supergravitationsmultipletts lokal wegzueichen. In dieser *superkonformen Eichung* nimmt die Wirkung die Form

$$S = \frac{1}{\pi} \int d^2 z (\partial_z X^- \cdot \partial_{\bar{z}} X^+ + \partial_{\bar{z}} X^- \cdot \partial_z X^+ + \psi_{\uparrow}^- \cdot \overleftrightarrow{D}_z \psi_{\uparrow}^+ + \psi_{\downarrow}^- \cdot \overleftrightarrow{D}_{\bar{z}} \psi_{\downarrow}^+) \quad (2.2)$$

an, wobei

$$\psi^{\pm\mu} = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}^{\pm\mu} \\ \psi_{\downarrow}^{\pm\mu} \end{pmatrix}.$$

Dieses ist die Wirkung einer freien, zweidimensionalen Feldtheorie.

Die Bewegungsgleichungen der Materiefelder

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} X^{\pm}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.3)$$

$$\partial_z \psi_{\uparrow}^{\pm}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\partial_{\bar{z}} \psi_{\downarrow}^{\pm}(z, \bar{z}) = 0 \quad (2.5)$$

führen auf eine Zerlegung der Felder in Links- und Rechtsläufer, die unabhängig voneinander sind. Alle weiteren Betrachtungen beschränken sich aus diesem Grund zumeist auf den holomorphen Anteil; für die Rechtsläufer gelten äquivalente Gleichungen.

Fordert man, dass bei der Variation der Wirkung die Randterme verschwinden, so muss der geschlossene String in Bezug auf die räumliche Koordinate σ des bosonischen Felds 2π -periodisch sein: $X(\tau, \sigma + 2\pi) = X(\tau, \sigma)$. Im Fall des offenen Strings ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Neumann- bzw. die Dirichlet-Randbedingungen, die zu einem Verschwinden der Randterme führen

$$\partial_{\sigma} X|_{\sigma=0 \vee \pi} = 0 \quad \text{Neumann-Randbedingung} \quad (2.6)$$

$$X|_{\sigma=0 \vee \pi} = \text{const.} \quad \text{Dirichlet-Randbedingung.} \quad (2.7)$$

Die Randbedingungen auf der komplexen Ebene sind im Falle des Fermions nicht eindeutig festgelegt, sondern es ergeben sich kontinuierliche Randbedingungen, die durch einen Parameter $\rho \in [0, 1]$ gekennzeichnet sind¹

$$\psi_{\downarrow}^{\pm}(e^{2\pi i} z) = e^{\mp 2\pi i \rho} \psi_{\downarrow}^{\pm}(z). \quad (2.8)$$

Beide Felder haben die übliche Modenenentwicklung (in (2,2)-Schreibweise $\mu = 0, 1, 2, 3$)

$$X_L^{\mu}(z) = \frac{q^{\mu}}{2} - i(p^{\mu} \ln(z)) + i \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{n} \alpha_n^{\mu} z^{-n} \quad (2.9)$$

$$\psi_{\downarrow}^{\mu}(z) = -i \sum_{n \in \mathbb{Z} + \rho} \psi_n^{\mu} z^{-n-1/2}. \quad (2.10)$$

¹Diese kontinuierlichen Randbedingungen sind eine Spezialität des N=2 Strings. Im Fall des N=1 Strings sind nur periodische oder antiperiodische Randbedingungen möglich. Die beiden Möglichkeiten werden als Neveu-Schwarz- (periodisch auf der komplexen Ebene) bzw. Ramond-Randbedingungen bezeichnet.

Bei der Quantisierung der Stringtheorie setzt man analog der Quantenmechanik die Vertauschungsrelationen zwischen den Koordinaten und den kanonisch konjugierten Impulsen an, die im Stringfall zu einer festen Zeit definiert werden. Setzt man in die grundlegenden Kommutatoren bzw. Antikommutatoren die Modenentwicklung der Materiefelder ein, so erhält man die folgenden (Anti-) Kommutatorrelationen der Moden

$$\begin{aligned} [\alpha_n^\mu, \alpha_m^\nu] &= \eta^{\mu\nu} n \delta_{n+m,0} \\ \{\psi_n^\mu, \psi_m^\nu\} &= \eta^{\mu\nu} \delta_{n+m,0}. \end{aligned}$$

Damit erhält man die Operatorproduktentwicklungen

$$X^\mu(z)X^\nu(w) \sim -\eta^{\mu\nu} \ln(z-w) \quad (2.11)$$

$$\psi_\downarrow^\mu(z)\psi_\downarrow^\nu(w) \sim -\frac{\eta^{\mu\nu}}{z-w}. \quad (2.12)$$

In der komplexen (1,1)-Notation gilt also:

$$X^{\pm\mu}(z)X^{\mp\nu}(w) \sim -2\eta^{\mu\nu} \ln(z-w) \quad (2.13)$$

$$\psi_\downarrow^{\pm\mu}(z)\psi_\downarrow^{\mp\nu}(w) \sim -\frac{2\eta^{\mu\nu}}{z-w}. \quad (2.14)$$

Man beachte, dass in der komplexen (1,1)-Notation gilt $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-, +)$.

2.2 Die Symmetrieströme

Die $N=2$ Supergravitations-Transformationen werden durch die Generatoren T_{mn} , G_m^\pm und J_m erzeugt, diese zerfallen ebenfalls in holomorphe und antiholomorphe Komponenten. Die holomorphen Anteile erzeugen die (residuellen) superkonformen Transformationen [14]:

$$T_{zz} = -\frac{1}{2}\partial_z X^- \partial_z X^+ - \frac{1}{4}\partial_z \psi_\downarrow^- \psi_\downarrow^+ - \frac{1}{4}\partial_z \psi_\downarrow^+ \psi_\downarrow^- \quad (\text{Reparametrisierungen}) \quad (2.15)$$

$$G_{z\downarrow}^\pm = \partial_z X^\mp \psi_\downarrow^\pm \quad (N=2 \text{ Supersymmetrie}) \quad (2.16)$$

$$J_z = -\frac{1}{2}\psi_\downarrow^- \psi_\downarrow^+ \quad (\text{U(1)-Symmetrie}). \quad (2.17)$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, definieren wir jetzt $T(z) := T_{zz}$, $G^\pm(z) := G_{z\downarrow}^\pm$ und $J(z) := J_z$. Die Generatoren haben die folgende Modenentwicklung:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n z^{-n-2} \quad (2.18)$$

$$G^\pm(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} \mp \rho} G_r z^{-r-\frac{3}{2}} \quad (2.19)$$

$$J(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n z^{-n-1}. \quad (2.20)$$

Das ρ in der Modenentwicklung von G^\pm ist mit dem Parameter in Gleichung (2.8) identisch.

Aus den Operatorproduktentwicklungen der Materiefelder lassen sich die entsprechenden Entwicklungen für die Symmetrieströme berechnen. Für den jeweils holomorphen Anteil der Symmetriegeneratoren ergibt sich die $N=2$ superkonforme Algebra mit zentraler Ladung c :

$$T(z)T(w) \sim \frac{c}{2}(z-w)^{-4} + 2(z-w)^{-2}T(w) + (z-w)^{-1}\partial_w T(w) \quad (2.21)$$

$$T(z)G^\pm(w) \sim \frac{3}{2}(z-w)^{-2}G^\pm(w) + (z-w)^{-1}\partial_w G^\pm(w) \quad (2.22)$$

$$T(z)J(w) \sim (z-w)^{-2}J(w) + (z-w)^{-1}\partial_w J(w) \quad (2.23)$$

$$G^+(z)G^-(w) \sim \frac{4c}{3}(z-w)^{-3} - 4(z-w)^{-2}J(w) + 4(z-w)^{-1}(T(w) - \frac{1}{2}\partial_w J(w)) \quad (2.24)$$

$$G^\pm G^\pm \sim 0 \quad (2.25)$$

$$J(z)G^\pm(w) \sim \pm(z-w)^{-1}G^\pm(w) \quad (2.26)$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{c}{3}(z-w)^{-2}. \quad (2.27)$$

In $D = 4$ ist die zentrale Ladung $c = 6$. Da das konforme Gewicht h eines primären konformen Feldes $\phi(z)$ aus seiner Operatorproduktentwicklung mit dem Energie-Impuls-Tensor mittels

$$T(z)\phi(w) \sim h(z-w)^{-2}\phi(w) + (z-w)^{-1}\partial_w\phi(w)$$

ablesbar ist, ergibt sich demnach (unter Vernachlässigung des $(z-w)^{-4}$ -Terms im ersteren Fall), dass die Symmetrieströme T, G^\pm und J konforme Felder vom Gewicht $h = 2, 3/2$ bzw. 1 sind.

Um aus den Operatorproduktentwicklungen der Symmetrieströme die Algebra der Laurent-Moden zu erhalten, invertiert man zunächst die Modenzerlegung (2.18)-(2.20) mittels der Cauchy-Riemann-Integralformel:

$$L_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{n+1} T(z) \quad (2.28)$$

$$G_r^\pm = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{r+1/2} G^\pm(z) \quad (2.29)$$

$$J_n = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^n J(z). \quad (2.30)$$

Setzt man in diese Gleichungen die Materiefelder mittels (2.15)-(2.17) ein, so erhält man die Laurent-Moden der Symmetrieströme als Funktion der Oszillatormoden

[15]:

$$L_n = \eta_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-m}^{-\mu} \alpha_m^{+\nu} - \frac{1}{4} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \rho} r (\psi_r^{-\mu} \psi_{n-r}^{+\nu} + \psi_r^{+\mu} \psi_{n-r}^{-\nu}) \right) \quad (2.31)$$

$$G_r^+ = \eta_{\mu\nu} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m^{-\mu} \psi_{r-m}^{+\nu} \quad (2.32)$$

$$G_r^- = \eta_{\mu\nu} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m^{+\mu} \psi_{r-m}^{-\nu} \quad (2.33)$$

$$J_n = -\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \rho} \psi_{n-r}^{-\mu} \psi_r^{+\nu}. \quad (2.34)$$

Damit erhält man schließlich die Algebra der Laurent-Moden:

$$[L_n, L_m] = \frac{1}{12} cn(n^2 - 1) \delta_{n+m,0} + (n - m) L_{n+m} \quad (2.35)$$

$$[L_n, G_r^\pm] = \left(\frac{1}{2}n - r\right) G_{n+r}^\pm \quad (2.36)$$

$$[L_n, J_m] = -m J_{m+n} \quad (2.37)$$

$$\{G_r^\pm, G_s^\mp\} = \frac{2}{3} c \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) \delta_{r+s,0} + 4L_{r+s} + 2(r - s) J_{r+s} \quad (2.38)$$

$$[J_n, G_r^\pm] = \mp G_{n+r}^\pm \quad (2.39)$$

$$[J_n, J_m] = \frac{1}{3} cn \delta_{n+m,0}, \quad (2.40)$$

Bislang konzentrierte sich unsere Einführung auf den geschlossenen $N=2$ String. Für den offenen String sind holomorphe und antiholomorpher Anteil der Symmetrieströme nicht mehr länger unabhängig. Um die Symmetrieströme in den Laurent-Moden entwickeln zu können, bedarf es jetzt der Hinzunahme des auf der unteren Halbebene $\{\bar{z}\}$ definierten antiholomorphen Symmetriestroms. Mittels des sogenannten Verdoppelungstricks (für eine eingehende Beschreibung siehe [15]) ist es allerdings möglich, die Laurent-Moden weiterhin in der Form (2.31)-(2.34) darzustellen, die dann ebenfalls die $N=2$ superkonforme Algebra (2.35)-(2.40) erfüllen.

2.3 Spektralfluss

Die Wahl der Randbedingungen der fermionischen Felder ψ bestimmt die Randbedingungen der Symmetrieströme G^\pm und entsprechend den Laufbereich der Laurent-Moden G_r^\pm . Aufgrund des *Spektralflusses*, eines Automorphismus der Algebra der Laurent-Moden (2.35)-(2.40), der die Algebren für verschiedene Randbedingungen ρ aufeinander abbildet, haben die unterschiedlichen Randbedingungen keinen physikalischen Einfluss. Dieser Spektralflussoperator ist gegeben durch

$$SFO(\Theta) = \exp \left(\Theta \oint \frac{dz}{2\pi i} \ln z J(z) \right) \quad (2.41)$$

und wirkt auf die Laurent-Mode L_n mittels $SFO(\Theta)L_nSFO(\Theta)^{-1}$ (analog für die anderen Fälle). Die explizite Wirkung des Automorphismus ist gegeben durch:

$$L_n \rightarrow L_n + \Theta J_n + \frac{c}{6} \Theta^2 \delta_n \quad (2.42)$$

$$G_r^\pm \rightarrow G_{r \pm \Theta}^\pm \quad (2.43)$$

$$J_n \rightarrow J_n + \frac{c}{3} \Theta \delta_n. \quad (2.44)$$

Die entsprechende Verschiebung der Symmetrieströme kann daraus leicht berechnet werden:

$$T(z) \rightarrow T(z) + \frac{\Theta}{z} J(z) + \frac{c}{6} \frac{\Theta^2}{z^2} \quad (2.45)$$

$$G^\pm(z) \rightarrow z^{\pm\Theta} G^\pm(z) \quad (2.46)$$

$$J(z) \rightarrow J(z) + \frac{c}{3} \frac{\Theta}{z}. \quad (2.47)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die verschobenen Symmetrieströme wiederum die Operatorproduktentwicklungen (2.21)-(2.27) erfüllen.

2.4 BRST-Quantisierung

Die Algebra-Relationen (2.35) - (2.40) werden bei der Quantisierung der Stringtheorie als Zwangsbedingungen für die Identifizierung der physikalischen Zustände berücksichtigt. Es treten in der Algebra jedoch Anomalien in Form der *zentralen Erweiterung* c auf. Bei der üblichen Pfadintegral-Quantisierung werden diese Anomalien dadurch zum Verschwinden gebracht, dass zu jedem Symmetrie-Generator ein Geist/Antigeist-Paar eingeführt wird. Für den N=2 String erhält man also *vier* Geist/Antigeist-Paare:

$$c_n, b_n : \quad \{c_n, b_m\} = \delta_{m+n,0} \quad (\text{konforme Geister}) \quad (2.48)$$

$$\gamma_s^\pm, \beta_r^\pm : \quad [\beta_r^\pm, \gamma_s^\mp] = \delta_{r+s,0} \quad (\text{SUSY-Geister}) \quad (2.49)$$

$$\tilde{c}_n, \tilde{b}_n : \quad \{\tilde{c}_n, \tilde{b}_m\} = \delta_{m+n,0} \quad (\text{U(1)-Geister}). \quad (2.50)$$

Analog führt man für den antiholomorphen Anteil des geschlossenen Strings vier Geist/Antigeist-Paare $\bar{c}/\bar{b}, \bar{\beta}/\bar{\gamma}, \bar{\tilde{c}}/\bar{\tilde{b}}$ ein.

Die Antigeister sind in der adjungierten Darstellung der Symmetriegruppe definiert und besitzen folglich das gleiche konforme Gewicht λ wie die Symmetrieströme. Da aus den Vertauschungsrelationen von Geist und Antigeist folgt, dass die Summe ihrer konformen Gewichte Eins ergeben muss, besitzen die Geister das konforme Gewicht $1 - \lambda$.

Wir leiten daraus die folgende Modenentwicklung ab:

$$c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n+1}, \quad b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-2}, \quad (2.51)$$

$$\gamma^\pm(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} \pm \rho} \gamma_r^\pm z^{-n+\frac{1}{2}}, \quad \beta^\mp(z) = \sum_{r \in \mathbb{Z} \mp \rho} \beta_r^\mp z^{-n-\frac{3}{2}}, \quad (2.52)$$

$$\tilde{c}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n z^{-n}, \quad \tilde{b}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_n z^{-n-1}. \quad (2.53)$$

Die Moden lassen sich entsprechend ihrer Wirkung auf das Vakuum der Theorie in Erzeuger und Vernichter unterteilen. Eine sinnvolle Wahl des Vakuums ist:

$$c_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n > 1 \quad (2.54)$$

$$b_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n > -2 \quad (2.55)$$

$$\tilde{c}_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n > 0 \quad (2.56)$$

$$\tilde{b}_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n > -1. \quad (2.57)$$

Unter Beachtung von $c_n^\dagger = c_{-n}$ sieht man, dass gilt $c_{-1}|0\rangle, c_0|0\rangle, c_1|0\rangle \neq 0$. Dies ist bedingt durch das Auftreten von konformen Killing-Vektoren auf der Sphäre. Folglich bedarf es einer weiteren definitonischen Gleichung für das fundamentale Skalarprodukt, um dieses zu einem Höchstgewichtszustand der Algebra der Geistmoden zu machen. Diese Gleichung ist gegeben durch

$$\langle 0 | c_1 c_0 c_{-1} | 0 \rangle = 1. \quad (2.58)$$

Von fundamentaler Bedeutung für die späteren Rechnungen sind die Operatorproduktentwicklungen der jeweiligen Paare:

$$c(z)b(w) \sim \frac{1}{z-w} \quad (2.59)$$

$$\beta^\pm(z)\gamma^\mp(w) \sim \frac{-1}{z-w} \quad (2.60)$$

$$\tilde{c}(z)\tilde{b}(w) \sim \frac{1}{z-w}. \quad (2.61)$$

Es zeigt sich, dass die konformen Anomalien nach Hinzunahme der Geist/Antigeist-Paare zum Verschwinden gebracht werden können, wenn die Dimension der Raumzeit mit $D = 2$ (D komplex!) gewählt wird.

Im Folgenden geben wir die Geistbeiträge zu den Laurent-Moden der Symme-

trieströme an:

$$L_n^{gh} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} ((m-n)c_{-m}b_{m+n} + m\tilde{c}_{-m}\tilde{b}_{m+n}) \quad (2.62)$$

$$+ \sum_{r \in \mathbb{Z} + \rho} \left(\frac{n}{2} (\gamma_{-s}^- \beta_{n+s}^+ \gamma_s^+ \beta_{n-s}^- - s(\gamma_{-s}^- \beta_{n+s}^+ - \gamma_s^+ \beta_{n-s}^-)) \right) \quad (2.63)$$

$$G_r^{gh, \pm} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\left(\frac{1}{2}m - r \right) c_{-m} \beta_{m+n}^{\pm} \pm \tilde{c}_{-m} \beta_{m+r}^{\pm} \right) \quad (2.64)$$

$$- 2 \sum_{s \in \mathbb{Z} \mp \rho} (2\gamma_{-s}^{\pm} b_{r+s} \pm (r-s)\gamma_{-s}^{\pm} \tilde{b}_{r+s}) \quad (2.65)$$

$$J_n^{gh} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} n c_{-m} \tilde{b}_{m+n} + \sum_{s \in \mathbb{Z} - \rho} (\gamma_{-s}^+ \beta_{n+s}^- - \gamma_s^- \beta_{n-s}^+). \quad (2.66)$$

Das Vakuum $|0\rangle$ der N=2 superkonformen Feldtheorie wird durch die Wirkung der Symmetriegeneratormoden definiert:

$$\hat{L}_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq -1 \quad (2.67)$$

$$\hat{G}_r |0\rangle = 0 \quad \text{für } r \geq -\frac{1}{2} \quad (2.68)$$

$$\hat{J}_n |0\rangle = 0 \quad \text{für } n \geq 0. \quad (2.69)$$

Dabei bedeutet \hat{L} etc., dass die Generatoren geisterweitert sind, so dass die Algebra in der kritischen Dimension anomaliefrei ist.

2.5 Das Spektrum

Die Einführung der Geist/Antigeist-Paare hat zu einer Vergrößerung des Fockraums geführt. Im BRST-Formalismus wird deshalb ein nilpotenter Operator Q konstruiert, der es ermöglicht, die physikalischen Zustände durch die Forderung $Q|phys\rangle = 0$ zu identifizieren. Zustände, die sich gerade um ein $Q|\lambda\rangle$ ($|\lambda\rangle$ beliebiger Zustand) unterscheiden, sind physikalisch äquivalent: $|phys\rangle \sim |phys'\rangle$, falls $|phys\rangle - |phys'\rangle = Q|\lambda\rangle$. In der N=2 Stringtheorie ergibt sich der BRST-Operator Q zu:

$$\begin{aligned} Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} & \left[cT + \gamma^+ G^- + \gamma^- G^+ \tilde{c}J + c\partial c b + c\partial \tilde{c} \tilde{b} \right. \\ & - 4\gamma^+ \gamma^- b + 2\partial \gamma^- \gamma^+ \tilde{b} - 2\partial \gamma^+ \gamma^- \tilde{b} + \frac{3}{4} \partial c (\gamma^+ \beta^- + \gamma^- \beta^+) \\ & - \frac{3}{4} c (\partial \gamma^+ \beta^- + \partial \gamma^- \beta^+) + \frac{1}{4} c (\gamma^+ \partial \beta^- + \gamma^- \partial \beta^+) \\ & \left. + \tilde{c} (\gamma^+ \beta^- - \partial \gamma^- \beta^+) \right]. \quad (2.70) \end{aligned}$$

Die Bestimmung des Spektrums des N=2 Strings erfolgt durch die Betrachtung der BRST-Kohomologie, d.h. der Äquivalenzklassen $\ker Q / \text{im } Q$. Da die Nullmoden der fermionischen Geister bzw. -antigeister c_0 und b_0 sowie \tilde{c}_0 und \tilde{b}_0 mit dem Hamiltonoperator der Theorie \hat{L}_0 vertauschen, ist das Spektrum des N=2 Strings vierfach

entartet [16, 17]. Diese Entartung wird aufgehoben, wenn man die *relative* Kohomologie [18]

$$H_{\text{rel}} = \frac{\ker Q}{\text{im } Q} \quad \text{auf} \quad \ker b_0 \cap \ker \tilde{b}_0 \quad (2.71)$$

betrachtet, d.h. fordert, dass alle physikalischen Zustände von den fermionischen Antigeistnullmoden vernichtet werden

Bezeichnen wir den physikalischen Grundzustand mit Impuls p^μ mit $|0, p^\mu\rangle$, so folgt aus der Forderung, dass der BRST-Operator Q diesen Grundzustand vernichtet

$$0 = Q|0, p^\mu\rangle = c_0 p^\mu p_\mu |0, p^\mu\rangle \quad (2.72)$$

die Bedingung $p^\mu p_\mu = 0$, d.h. der Grundzustand ist masselos. Wie in [10] gezeigt, gibt es im Spektrum des $N=2$ Strings außer diesem einen Zustand keine weiteren Targetraumanregungen. Man erhält folglich sowohl im offenen wie geschlossenen Fall ein sehr einfaches Spektrum (beim offenen String müssen noch die entsprechenden Chan-Paton-Faktoren – siehe nächster Abschnitt – berücksichtigt werden). Insbesondere fehlen alle höheren Formen im Spektrum, eine Einschränkung, die bei der Betrachtung der D-Branes in Kapitel 5 wesentlich sein wird.

2.6 Streuamplituden

Bei der Berechnung von Streuamplituden verwendet man primäre Felder der auf der Weltfläche definierten konformen Feldtheorie. Diese Felder erzeugen als sogenannte Vertexoperatoren die physikalischen Zustände und müssen daher mit dem BRST-Operator der Stringtheorie vertauschen. Wie erwähnt ist die String-Wirkung invariant unter einer konformen Reskalierung der Weltflächenmetrik. Aufgrund dessen ist es möglich, externe Stringzustände auf Punkte auf kompakten Riemann-Flächen abzubilden. Dabei gehen die Quantenzahlen (wie Impuls und Spin) des entsprechenden Stringzustands $|\Lambda\rangle$ auf einen lokalen Vertexoperator V_Λ an diesem Punkt über. Die Riemann-Flächen werden durch die *Euler-Charakteristik* χ klassifiziert. Diese ist gegeben durch $\chi = 2 - 2g - b - k$, wobei g der Genus, b die Zahl der Ränder („boundaries“) und k die Zahl der Kreuzkappen der Weltfläche ist.

Die n -Punkt-Streuamplitude des geschlossenen Strings wird auf Tree-Niveau durch Vertexoperatoren auf der Riemann-Sphäre S^2 ($g = b = k = 0$) beschrieben. Eine erneute konforme Abbildung projiziert die S^2 stereographisch auf die komplexe Ebene. Für den offenen String hat die Weltfläche Ränder, an denen die Vertexoperatoren „angeklebt“ werden. Auf Tree-Niveau entspricht diese Weltfläche der *Scheibe* ($g = k = 0, b = 1$), die konform auf die komplexe obere Halbebene abgebildet wird. Der Rand, auf dem sich die Vertexoperatoren befinden, ist die reelle Achse.

Um Streuamplituden zu berechnen, integriert man - bis auf konforme Invarianz - die Korrelationsfunktionen der Vertexoperatoren über alle möglichen Orte auf der Weltfläche. Die Gruppe der konformen Isometrien der S^2 ist die $SL(2, \mathbb{C})$, eine Untergruppe der konformen Gruppe. Dies erlaubt es, drei der Vertexoperatoren auf Werte z_i ($i=1,2,3$) zu fixieren. Die entsprechende Invarianzgruppe der Scheibe bzw. oberen Halbebene ist die $SL(2, \mathbb{R})$, was ebenfalls die Fixierung dreier Vertexoperatoren (jetzt auf der reellen Achse) ermöglicht.

Korrekturen höherer Ordnung werden durch Integrationen über Riemann-Flächen kleinerer Euler-Charakteristik beschrieben. Dabei muss differenziert werden, ob es sich um orientierte oder nicht-orientierte Strings handelt. Für Weltflächen orientierter Strings gilt immer $k = 0$, bei nicht-orientierten ist auch $k \neq 0$ möglich. Die Ein-Loop-Korrekturen werden im offenen wie geschlossenen Fall durch Flächen mit $\chi = 0$ beschrieben. Daneben gibt es für den geschlossenen String *Tree-Amplituden höherer Ordnung* auf Riemann-Flächen mit Euler-Charakteristik $\chi = 1$. Für orientierte wie für nicht-orientierte geschlossene Strings ist dieses zum einen die Amplitude auf der Scheibe. Für nicht-orientierte Strings gibt es noch einen zweiten Beitrag in dieser Ordnung, die *Projektive Ebene* RP_2 ($g = b = 0, k = 1$). Neben den reinen Amplituden bedarf es auch der Betrachtung gemischter Amplituden von n_c geschlossenen und n_o offenen Strings, da in jeder offenen Theorie automatisch geschlossene Strings auftauchen (vgl. auch Kapitel 3).

Eine wichtige topologische Invariante in der $N=2$ Stringtheorie ist die Instantanzahl $c = \frac{1}{2\pi} \int F$, wobei $F = dA$ die Feldstärke der $U(1)$ -Konnektion A_α ist [19]. Die vollständigen Streuamplituden ergeben sich durch gewichtete Summation über die verschiedenen Instantonsektoren, d.h. das Stringpfadintegral für die (n_c, n_o) -Punkt-Funktion $A^{(n_c, n_o)}$ umfasst neben der Summe über die verschiedenen Weltflächentopologien J^2 , gewichtet mit der Stringkopplung g der entsprechenden Ordnung, auch die endliche Summe über die verschiedenen Instantonsektoren c , gewichtet mit $e^{i\theta}$ [20]:

$$A^{(n_c, n_o)}(g, \theta) = \sum_{J \geq 2n_c + n_o - 4} g^J \sum_{c=-J}^{+J} \binom{2J}{J+c} \sin^{J-c} \frac{\theta}{2} \cos^{J+c} \frac{\theta}{2} A_{J,c}^{(n_c, n_o)}. \quad (2.73)$$

Die offene Kopplungskonstante g ist eine Eichkopplungskonstante und damit dimensionslos in 2+2 Dimensionen. Die Kopplungskonstante des geschlossenen Strings κ hat als gravitative Kopplung eine Dimension $[\kappa] = \text{m}$. Die Beziehung zwischen den beiden Kopplungen ist gegeben durch

$$\kappa = g^2 / \sqrt{T},$$

wobei T die Stringspannung bezeichnet.

2.7 Chan-Paton-Faktoren

In der Theorie des offenen Strings ist es möglich, unter Wahrung der Poincaré-Invarianz der Raumzeit und der konformen Invarianz der Weltfläche, nichtdynamische Freiheitsgrade an den Enden des Strings anzubringen (beschrieben durch Quantenzahlen a_i einer Eichgruppe [21] ($i = 1, \dots, N$; mit $N = \dim(R)$, R fundamentale Darstellung der Eichgruppe)). Ihr Hamiltonian verschwindet, so dass diese Freiheitsgrade keine Dynamik besitzen. Ein Stringende in einem bestimmten Zustand verbleibt in diesem Zustand. Offene Vertexoperatoren sind mit dem Generator

²Anstelle der Euler Charakteristik verwenden wir hier die „Spin“ Variable [20] $J = 2n_c + n_o - 4 + 4g + 2b + 2k \in \mathbb{Z}$.

λ^a der Eichgruppe zu verzieren. Die vollständige n-Punkt-Amplitude $T(1, \dots, n)$ ist dann gegeben durch

$$T(1, \dots, n) = \sum tr(\lambda^1 \dots \lambda^n) A(1, \dots, n), \quad (2.74)$$

wobei $A(1, \dots, n)$ die n-Punkt-Amplitude ohne Berücksichtigung der Quantenzahlen ist. Die Summe läuft über alle $(n-1)!$ zyklisch inäquivalenten Permutationen der Vertexoperatoren. Die Spur wird als *Chan-Paton-Faktor* bezeichnet.

Die Spur und damit die Amplitude ist invariant unter einer $U(N)$ -Symmetrie³

$$\lambda^i \rightarrow U \lambda^i U^{-1}, \quad (2.75)$$

unter der die Stringendpunkte wie N (fundamentale Darstellung) und \bar{N} (komplex konjugierte Darstellung) transformieren.

Um die Rechnungen übersichtlicher zu gestalten, werden im Folgenden die zusätzlichen Indizes an den Vertexoperatoren unterdrückt (vgl. aber Kapitel 6, wo die Chan-Paton-Faktoren eine wesentliche Rolle spielen). Zum Ergebnis der Amplitudenberechnung ist der entsprechende Chan-Paton-Faktor hinzuzufügen.

2.8 Bosonisierung

Um die Konstruktion der Vertexoperatoren zu erleichtern, werden in supersymmetrischen Stringtheorien die Geistsysteme bosonisiert. Dieses Verfahren wird üblicherweise verwendet, um fermionische Felder durch bosonische auszudrücken (dass dieses überhaupt möglich ist, liegt daran, dass in der Stringtheorie eine zweidimensionale konforme Feldtheorie betrachtet wird) und auf diese dann den üblichen Rechenapparat der CFT anwenden zu können. Für die Reparametrisierungsgeister erhalten wir die Bosonisierungsvorschrift [14, 22]

$$c \cong e^{+\sigma}, \quad b \cong e^{-\sigma}, \quad (2.76)$$

wobei das bosonische Feld σ die Operatorproduktentwicklung

$$\sigma(z)\sigma(w) \sim \ln(z-w) \quad (2.77)$$

besitzt. Für die fermionischen U(1)-Geister erhält man analog

$$\tilde{c} \cong e^{+\tilde{\sigma}}, \quad \tilde{b} \cong e^{-\tilde{\sigma}} \quad (2.78)$$

mit

$$\tilde{\sigma}(z)\tilde{\sigma}(w) \sim \ln(z-w). \quad (2.79)$$

Auch die Supersymmetriegeister lassen sich bosonisieren

$$\gamma^\pm \cong \eta^\pm e^{+\varphi^\pm}, \quad \beta^\mp \cong e^{-\varphi^\pm} \partial \xi^\mp, \quad (2.80)$$

³Die Amplituden selber sind sogar invariant unter $GL(N)$, jedoch gilt dies nicht für die Norm der Zustände.

wobei die Felder φ , η und ξ die folgenden OPE haben:

$$\varphi^\pm(z)\varphi^\pm(w) \sim -\ln(z-w) \quad (2.81)$$

$$\xi^\mp(z)\eta^\pm(w) \sim \frac{1}{z-w}. \quad (2.82)$$

Auch η und ξ können noch mittels

$$\eta^\pm \cong e^{-\chi^\pm}, \quad \xi^\mp \cong e^{\chi^\pm}, \quad (2.83)$$

$$\text{wobei } \chi^\pm(z)\chi^\pm(w) \sim \ln(z-w) \quad (2.84)$$

bosonisiert werden.

Entscheidend ist nun, dass β und γ bereits bosonische Felder sind, also Bosonen „bosonisiert“ werden; dieses führt zum Phänomen der sogenannten *Bildentartung*, das wir jetzt kurz diskutieren wollen.

In der Bosonisierung des γ/β -Geistsystems treten die zusätzlichen Felder ξ und η auf. Diese werden aufgrund der Differenz der Hintergrundladungen des φ -Systems ($c_\varphi = 1 + 3Q$) und des γ/β -Geistsystems ($c = -(1 - 3Q)$) benötigt. Als zusätzliche Freiheitsgrade führen sie zu einer Entartung der Stringzustände und damit auch der Vertexoperatoren. In die Bosonisierung der Supersymmetriegeister geht im Exponenten nur die Differenz der Felder φ und χ ein. Andere Kombinationen von φ und χ liefern Zustände, die *bildentartet* sind. Das entsprechende Etikett ist durch die Eigenwerte π^\pm (die *Bildladungen*) des *Bildoperators*

$$\Pi^\pm = -\frac{1}{4\pi i} \oint [\beta^\pm \gamma^\mp + \eta^\pm \xi^\mp] = -\frac{1}{4\pi i} \oint [-\partial\varphi^\pm + \partial\chi^\pm] \quad (2.85)$$

gegeben. Insbesondere hat der Operator $e^{q^\pm \varphi^\mp}$ die Bildladungen $\pi^\pm = q^\pm$.

Der Übergang von einem Bild in ein äquivalentes Bild mit anderen Bildladungszahlen erfolgt mittels des Bildwechseloperators

$$BWO^\pm = \{Q, \xi^\pm\} = -c\partial_z \xi^\pm + e^{+\varphi^\mp} (G^\pm - 4\gamma^\pm b \pm 4\partial_z \gamma^\pm \tilde{b} \pm 2\gamma^\pm \partial_z \tilde{b}). \quad (2.86)$$

Die Anwendung des Operators BWO^\pm erhöht den Eigenwert des Operators Π^\pm um Eins. Neben den Bildwechseloperatoren hat auch der Spektralflussoperator $SFO(\Theta)$ einen Einfluss auf die Eigenwerte und zwar $(\pi^+, \pi^-) \rightarrow (\pi^+ + \Theta, \pi^- - \Theta)$. Es ist folglich möglich in jedes beliebige Bild zu wechseln. Aus diesem Grund ist es unproblematisch, sich in den folgenden Rechnungen auf die einfacher zu handhabenden NS-Vertexoperatoren zu beschränken. Eine Übersicht über die Vertexoperatoren in den verschiedenen Bildern gibt Anhang C.

Offene Vertexoperatoren sind von der Form $V^o = V(z)$, geschlossene von der Form $V^{cl} = V(z)V(\bar{z})$, wobei die $V(z)$ in beiden Fällen gleich aussehen, sie unterscheiden sich durch den Definitionsbereich der Stringvariable z (offen: reelle Achse, geschlossen: komplexe Ebene). Aufgrund der Unabhängigkeit (mögliche Kontaktterme $\langle \partial X \bar{\partial} X \rangle \sim \delta^2(z - \bar{z})$ tragen hier nicht bei) von z und \bar{z} lassen sich die Amplituden des geschlossenen Strings schreiben als

$$A_n = \langle : V(z_1) : \cdots : V(z_n) : \rangle \langle : V(\bar{z}_1) : \cdots : V(\bar{z}_n) : \rangle, \quad (2.87)$$

also als Produkt der Korrelationsfunktionen des holomorphen und des antiholomorphen Anteils der Vertexoperatoren. Bei der Berechnung der Amplituden müssen bestimmte Auswahlregeln beachtet werden. Auf Tree-Niveau müssen die Vertexoperatoren die Hintergrundladung Q kompensieren [22]. Die freien Bosonen aus der Bosonisierung der Geistsysteme haben die Hintergrundladungen

$$\tilde{Q}_\sigma = 3, \tilde{Q}_{\bar{\sigma}} = 1, \tilde{Q}_{\varphi^\pm} = -2, \tilde{Q}_{\chi^\pm} = 1.$$

Da ξ_0 nicht Element des Fockraums ist, wird der Beitrag des χ -Bosons abgesättigt und man erhält effektiv $\tilde{Q}_{\chi^\pm} = 0$. Damit folgt [21]: Für die n -Punkt-Funktion des offenen Strings muss die Summe aller Bildladungen $(\sum \pi^+, \sum \pi^-) = (-2, -2)$ ergeben. Ferner müssen in den Amplituden auf die zu fixierenden Vertexoperatoren drei Reparametrisierungsgeister c und ein $U(1)$ -Geist \tilde{c} verteilt werden. Über die Positionen der verbleibenden $n-3$ Vertexoperatoren wird integriert. Diese Auswahlregeln gelten im Fall der geschlossenen Strings auf der Sphäre für den holomorphen bzw. antiholomorphen Anteil jeweils separat, wobei die Bildladungen in beiden Teilen unabhängig voneinander verteilt werden können.

Für den $N=2$ String ergibt eine genauere Analyse, dass alle Tree-Level-Amplituden für $n > 3$ im offenen wie geschlossenen Fall verschwinden [23]. Das Verschwinden sämtlicher Loop-Amplituden für $n > 3$ ist vor kurzem in [24] gezeigt worden.

KAPITEL 3

DIE EFFEKTIVEN WIRKUNGEN DES N=2 STRINGS

Die effektive Wirkung einer Stringtheorie wird so konstruiert, dass diese als Feldtheorie interpretiert auf Tree-Niveau die gleichen Amplituden wie die Stringtheorie besitzt. Die Feldtheorie lässt sich insofern als Niederenergie-Limes der Stringtheorie interpretieren. Da der $N=2$ String wie in Kapitel 2 erläutert keine massiven Anregungen besitzt, ist für diesen die effektive Feldtheorie eine **exakte** Theorie, was dem $N=2$ String eine Sonderstellung unter den Stringtheorien verleiht. Perturbationen im Targetraum werden durch Quellen in der Weltflächenwirkung der Form

$$\int d^2\xi V^r(X(\xi)) \phi_r(X(\xi)) \quad (3.1)$$

induziert, d.h. es werden Vertexoperatoren V^r an Targetraumanregungen $\phi_r(X)$ gekoppelt. X bezeichnet ein allgemeines Weltflächenfeld. Es besteht folglich eine eins-zu-eins Beziehung zwischen physikalischen Stringzuständen $|r; k\rangle$ und Raumzeitfeldern $\phi_r(x)$. Die on-shell Dynamik der Felder ϕ_r wird durch Tree-Niveau Stringstreuamplituden $\langle V^r V^s \dots \rangle$ bestimmt, aus denen die Kopplungskonstanten in der effektiven Targetraumwirkung erhalten werden können. Insbesondere liefert die Dreipunkt-Funktion des Strings sofort den kubischen Term in der effektiven Wirkung

$$\int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \langle V^r V^s V^t \rangle(k_i) \tilde{\phi}_r(k_1) \tilde{\phi}_s(k_2) \tilde{\phi}_t(k_3) \delta(k_1+k_2+k_3), \quad (3.2)$$

wobei die Wirkung hier im Impulsraum dargestellt wurde. Da alle Tree-Niveau Amplituden des $N=2$ Strings für mehr als drei äußere Beine verschwinden, müssen die Beiträge iterierter kubischer Vertizes zu $(n>3)$ -Punkt-Funktionen entweder automatisch verschwinden oder durch weitere Terme in der effektiven Wirkung zum Verschwinden gebracht werden.

Die bahnbrechende Arbeit von Ooguri und Vafa [10] zeigte eine enge Beziehung zwischen selbstdualen Feldtheorien und der $N=2$ Stringtheorie formuliert in vier Dimensionen. Die effektive Theorie des geschlossenen Strings ist selbstduale Gravitation (SDG) [10], dem offenen String entspricht selbstduale Yang-Mills-Theorie (SDYM) [25]. Im Folgenden charakterisieren wir diese beiden Feldtheorien. Zunächst betrachten wir die Yang-Mills-Theorie, wobei wir die Wirkung dieser Theorie, die

sogenannte Leznov-Wirkung, aus der allgemeinen Form einer Eichwirkung herleiten. Im zweiten Abschnitt geht es dann um Eigenschaften der selbstdualen Gravitation in $2+2$ Dimensionen. Der letzte Abschnitt ist der gemischten Theorie von offenen und geschlossenen Strings gewidmet, was auf dem Niveau der Feldtheorie einer Kopplung von SDYM und SDG entspricht.

3.1 Selbstduale Yang-Mills-Theorie

Zunächst gilt unser Augenmerk selbstdualer Yang-Mills-Theorie (SDYM), der effektiven Theorie des offenen $N=2$ Strings. Ihre Bedeutung ziehen die selbstdualen Yang-Mills-Gleichungen vor allem aus der Hypothese [26], dass SDYM alle universalen integrablen Modelle beschreibt. Es konnte gezeigt werden, dass fast alle (möglichweise alle) integrablen Gleichungen in $1 \leq D \leq 3$ Dimensionen aus den SDYM-Gleichungen mittels geeigneter Reduktionen (siehe hierzu [26, 27, 28, 29]) abgeleitet werden können. Daher könnte der offene $N=2$ String eine Möglichkeit der konsistenten Quantisierung der integrablen Modelle in $1 \leq D \leq 3$ Dimensionen darstellen.

Ausgangspunkt ist der Feldstärketensor

$$\mathcal{F}_{mn} = g^{-1} [\mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n] = \partial_{[m} \mathcal{A}_{n]} + g [\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_n] , \quad (3.3)$$

mit der kovarianten Ableitung $\mathcal{D}_m = \partial_m + g \mathcal{A}_m$.

Jede Zwei-Form-Feldstärke $F = dA + A \wedge A$ lässt sich als Summe eines selbstdualen und eines antiselbstdualen Anteils schreiben, wobei die Selbstdualitätsbedingung für den Feldstärketensor die Form

$$\mathcal{F}_{mn} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{mn}{}^{kl} \mathcal{F}_{kl} \quad (3.4)$$

annimmt. Wir schreiben nun die Vektorindizes des Feldstärketensors mittels Multiplikation mit Sigma-Matrizen in Spinorindizes um (für eine detaillierte Definition dieser Bispinor- oder *van der Waerden-Index-Notation* (siehe Anhang B). Auf diese Art erhalten wir drei Gleichungen, die wir in der Folge lösen werden. Konkret nutzen wir

$$\mathcal{F}_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = \epsilon_{\alpha\beta} \mathcal{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} + \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{F}_{\alpha\beta} . \quad (3.5)$$

Der Feldstärketensor ist antisymmetrisch in den Vektorindizes. Dies erlaubt die Zerlegung in einen ungepunkteten in den Indizes (α, β) symmetrischen Anteil $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ und einen gepunkteten in den Indizes $(\dot{\alpha}, \dot{\beta})$ symmetrischen Anteil $\mathcal{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}$

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_{(\alpha} \dot{\gamma} \mathcal{A}_{\beta)\dot{\gamma}} + g \left[\mathcal{A}_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{\beta\dot{\gamma}} \right] = \epsilon_{\beta\gamma} \mathcal{F}^{mn} \sigma_{mn\alpha}{}^{\gamma} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \partial^{\gamma} (\dot{\alpha} \mathcal{A}_{\gamma\dot{\beta}}) + g \left[\mathcal{A}_{\dot{\alpha}}^{\gamma} \mathcal{A}_{\gamma\dot{\beta}} \right] = -\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}} \mathcal{F}^{mn} \bar{\sigma}_{mn}{}^{\dot{\gamma}}{}_{\dot{\beta}} . \quad (3.7)$$

Die Forderung der Selbstdualität lautet jetzt

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta} = \partial_{(\alpha} \dot{\gamma} \mathcal{A}_{\beta)\dot{\gamma}} + g \left[\mathcal{A}_{\alpha}^{\dot{\gamma}} \mathcal{A}_{\beta\dot{\gamma}} \right] = 0 . \quad (3.8)$$

Diese Gleichungen für den Eichzusammenhang A vereinfachen sich, wenn man in die Lichtkegeleichung

$$A_{+\dot{\gamma}} = 0. \quad (3.9)$$

geht. Diese Eichung bricht die „Lorentz-Invarianz“ [20]

$$\text{Spin}(2, 2) = SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})' \longrightarrow U(1) \times SL(2, \mathbb{R})'. \quad (3.10)$$

Die verbleibenden Gleichungen für $A_{-\dot{\gamma}}$ sind

$$0 = \partial_+^{\dot{\gamma}} A_{-\dot{\gamma}} \quad (3.11)$$

$$0 = \partial_-^{\dot{\gamma}} A_{-\dot{\gamma}} + \frac{g}{2} [A_-^{\dot{\gamma}}, A_{-\dot{\gamma}}]. \quad (3.12)$$

Gleichung (3.11) lässt sich durch das Einführen eines Präpotentials Φ , das durch

$$A_{-\dot{\gamma}} = \partial_{+\dot{\gamma}} \Phi \quad (3.13)$$

definiert ist, lösen. Hierdurch geht (3.12) über in

$$0 = -\square\Phi + \frac{g}{2} [\partial_+^{\dot{\gamma}}\Phi, \partial_{+\dot{\gamma}}\Phi]. \quad (3.14)$$

Man erhält für die Feldstärke

$$\mathcal{F}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \partial_{+\dot{\gamma}} \partial_{+\dot{\delta}} \Phi. \quad (3.15)$$

(3.14) ist die sogenannte Leznov-Gleichung, die als Bewegungsgleichung des folgenden Leznov-Wirkungsfunktional [30, 31] interpretiert werden kann:

$$S_L = \text{tr} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \Phi \square \Phi + \frac{g}{6} \Phi (\partial_+^{\dot{\alpha}} \Phi) (\partial_{+\dot{\alpha}} \Phi) \right]. \quad (3.16)$$

Φ ist hierbei ein Lie-Algebra-wertiges antihermitesches Feld. Die Dreipunkt-Funktion des offenen $N=2$ Strings kann aus dieser Leznov-Wirkung hergeleitet werden, ebenso wie alle Amplituden mit mehr als drei äußeren Beinen für obige Wirkung verschwinden [32]. Damit ist selbstduale Yang-Mills-Theorie die effektive Feldtheorie des offenen Strings.

Es existiert eine alternative Parametrisierung der selbstdualen Eichfelder. In der Lichtkegeleichung $A_{+\dot{\gamma}} = 0$ wird Gleichung (3.12) durch Einführen eines nicht-abelschen Präpotentials ϕ via

$$A_{-\dot{\gamma}} = e^{-\phi} \partial_{-\dot{\gamma}} e^{\phi} \quad (3.17)$$

gelöst. Für (3.11) erhalten wir dann die Yang-Gleichung [33]

$$\partial_{(+\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} (e^{-\phi} \partial_{-\dot{\alpha}} e^{\phi}) = 0. \quad (3.18)$$

Die entsprechende Wirkung ist die nichtpolynomiale Yang-Wirkung [34]

$$S_Y = \text{tr} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \phi \square \phi + \frac{i}{3\mu} \phi (\partial_{(+\dot{\alpha}}^{\dot{\alpha}} \phi) (\partial_{-\dot{\alpha}} \phi) + O(\phi^4) \right]. \quad (3.19)$$

Diese Wirkung reproduziert den Instanton-Sektor mit Instanton-Zahl Null ($c=0$) des offenen $N=2$ Strings. Da die volle String-Amplitude notwendigerweise Beiträge von Eichinstantonen enthält, ist die angemessene effektive Wirkung des $N=2$ Strings jedoch vom polynomialen Leznovtyp.

3.2 Selbstduale Gravitation

Wenden wir uns jetzt selbstdualer Gravitation zu. Auf Tree-Niveau ist der geschlossene String im Prinzip nichts anderes als das Quadrat des offenen Strings, so dass sich die dortigen Überlegungen auf den geschlossenen String übertragen lassen. In selbstdualer Gravitation wird die Selbstdualitätsbedingung an den Riemannstensor gestellt. Zudem fordert man das Verschwinden der Torsion. Um diese beiden Größen zu konstruieren, verwendet man die kovariante Ableitung

$$\mathcal{D}_a = E_a^m \partial_m + w_{abc} \Gamma^{bc} = E_a + w_a, \quad (3.20)$$

die die Spinkonnektion w_a und das Vielbein E_a^m – definiert durch $g^{mn} = \eta^{ab} E_a^m E_b^n$ – enthält. Für die Definition der Generatoren Γ^{ab} der Lorentz-Gruppe siehe den Anhang von [15]. Der Kommutator der kovarianten Ableitung gibt

$$[\mathcal{D}_a, \mathcal{D}_b] = \mathcal{R}_{ab}{}^{cd} \Gamma_{cd} + \mathcal{T}_{ab}{}^c \mathcal{D}_c = \mathcal{R}_{ab} + \mathcal{T}_{ab}, \quad (3.21)$$

mit dem Riemannstensor

$$\mathcal{R}_{ab}{}^{cd} = E_{[a}^m \partial_m w_{b]}{}^{cd} + w_{[a}{}^{ce} w_{b]e}{}^d - E_{[a}^m \left(\partial_m E_{b]}^n \right) E_n{}^e w_e{}^{cd} \quad (3.22)$$

und der Torsion

$$\mathcal{T}_{ab}{}^c = w_{[ab]}{}^c - E_{[a}^m \left(\partial_m E_{b]}^n \right) E_n{}^c. \quad (3.23)$$

Wiederum nutzen wir, dass beide Tensoren antisymmetrisch in den ersten beiden Indizes sind, um in Spinorschreibweise die Tensoren in einen selbstdualen und einen antiselbstdualen Anteil zu zerlegen

$$\mathcal{R}_{\alpha\dot{\alpha}\beta\dot{\beta}} = \varepsilon_{\alpha\beta} \mathcal{R}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} + \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \mathcal{R}_{(\alpha\beta)}, \quad (3.24)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\dot{\alpha}\dot{\beta})} &= E_{(\dot{\alpha}}^\alpha{}^m \partial_m w_{\alpha\dot{\beta})} + w_{(\dot{\alpha}}^\alpha{} w_{\alpha\dot{\beta})} \\ &\quad - 2E_{(\dot{\alpha}}^\alpha{}^m \left(\partial_m E_{\alpha\dot{\beta})}^n \right) E_n{}^{\gamma\dot{\gamma}} w_{\gamma\dot{\gamma}} \end{aligned} \quad (3.25)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(\alpha\beta)} &= E_{(\alpha}^{\dot{\alpha}}{}^m \partial_m w_{\beta\dot{\alpha})} + w_{(\alpha}^{\dot{\alpha}} w_{\beta\dot{\alpha})} \\ &\quad - 2E_{(\alpha}^{\dot{\alpha}}{}^m \left(\partial_m E_{\beta\dot{\alpha})}^n \right) E_n{}^{\gamma\dot{\gamma}} w_{\gamma\dot{\gamma}}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Der zweite - antiselbstduale - Anteil muss Null sein.

Bei verschwindender Torsion und in der Lichtkegeleleichung

$$\omega_{+\dot{\alpha}\dot{\gamma}\dot{\delta}} \Gamma^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0 \quad (3.27)$$

vereinfachen sich die Gleichungen für die Spinkonnektion ω zu

$$\partial_{+[\dot{\beta}} \omega_{-\dot{\alpha}]\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0 \quad (3.28)$$

$$\omega_{-[\dot{\alpha}\dot{\gamma}]\dot{\delta}} = 0 \quad (3.29)$$

$$\omega_{-\dot{\alpha}[\dot{\gamma}\dot{\delta}]} = 0 \quad (3.30)$$

$$(D_{-[\dot{\alpha}} \omega_{-\dot{\beta}]})_{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = 0, \quad (3.31)$$

wobei D die gravitative kovariante Ableitung ist. Die ersten drei dieser Gleichungen lassen sich durch Einführen eines Präpotentials Ψ via

$$\omega_{-\dot{\alpha}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\gamma}} \partial_{+\dot{\delta}} \Psi \quad (3.32)$$

lösen. Die vierte Gleichung kann dann wie folgt geschrieben werden:

$$0 = -\square\Psi + \frac{\kappa}{2} \partial_{+\dot{\gamma}} \partial_{+\dot{\delta}} \Psi \partial_{+\dot{\gamma}} \partial_{+\dot{\delta}} \Psi. \quad (3.33)$$

Dieses ist die sogenannte *zweite Plebanski-Gleichung*. Für den selbstdualen Weyl-Tensor erhalten wir in dieser Parametrisierung

$$C_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}} = \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \partial_{+\dot{\gamma}} \partial_{+\dot{\delta}} \Psi. \quad (3.34)$$

Die zur Plebanskigleichung (3.33) gehörende kubische Wirkung ist [35]

$$S_P = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \Psi \square \Psi + \frac{\kappa}{6} \Psi (\partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \Psi) (\partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \Psi) \right]. \quad (3.35)$$

Neben obiger Lösung existiert eine alternative Möglichkeit ein Präpotential ψ zu wählen, dass ebenfalls drei der vier Gleichungen (3.28- 3.31) löst. Die verbleibende Gleichung ist die *erste Plebanski-Gleichung* und führt zu einer Wirkung vom Leznov-Typ [36]

$$S'_L = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \psi \square \psi + \frac{\kappa}{6} \psi (\partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{-\dot{\beta}} \psi) (\partial_{-\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \psi) \right]. \quad (3.36)$$

Hier bezeichnet ψ die Kähler-Deformation der selbstdualen Gravitation [10].

Wir wollen als Randbemerkung hinzufügen, dass nach dem Theorem von Atiyah, Hitchin und Singer selbstduale Mannigfaltigkeiten in vier Dimensionen eine Kählerform besitzen und die Metrik Ricci-flach ist. Das heißt in komplexen Koordinaten

$$z^1 = x^0 + ix^1, \quad \bar{z}^1 = x^0 - ix^1, \quad z^2 = x^2 + ix^3, \quad \bar{z}^2 = x^2 - ix^3$$

ist die Metrik von der Form

$$g_{a\bar{b}} = \frac{\partial^2 K}{\partial z^a \partial \bar{z}^b} = \eta_{a\bar{b}} + \partial_a \bar{\partial}_{\bar{b}} \psi, \quad (3.37)$$

$$g_{ab} = g_{\bar{a}\bar{b}} = 0, \quad (3.38)$$

wobei sich das Kähler-Potential ergibt als

$$K = \sum_{a=1}^2 z^a \bar{z}^a + \psi, \quad (3.39)$$

mit beliebiger skalarer Funktion $\psi(z, \bar{z})$.

3.3 SDYM gekoppelt an SDG

Die offene $N=2$ Stringtheorie enthält auch immer geschlossene Strings, da sich die Enden der offenen Strings bei Streuprozessen schließen können und so geschlossene Zwischenzustände auftreten. Dies lässt sich beispielhaft am Nichtverschwinden der gemischten Drei-Punktamplitude $\langle ooc \rangle$ ablesen. Auf der Ebene der Feldtheorie sollte also eine mit den gemischten Streuamplituden konsistente Kopplung von selbstdualer Yang-Mills-Theorie mit selbstdualer Gravitation gefunden werden. Bei der Konstruktion dieses Mischterms in der effektiven Wirkung, der das geschlossene Feld Ψ und das offene Feld Φ enthält, lässt man sich von den gemischten Tree-Level-Amplituden [37] des $N=2$ Strings leiten. Im Folgenden geben wir eine Übersicht über die bekannten Amplituden. Der Übersichtlichkeit halber führen wir folgende abkürzende Notation ein [20]

$$d \hat{=} \partial_{+\dot{\alpha}}, \partial_{+\dot{\beta}}, \dots \quad \text{und} \quad \wedge \hat{=} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} \dots \quad (3.40)$$

Die Tabelle ist [35] entlehnt. Offensichtlich treten in der Lagrangedichte vier fun-

	n_c	n_o	J	Topologie	$g^J \tilde{A}_{J,J}^{(n_c, n_o)}$	$\mathcal{L}(\Psi, \Phi)$
$\langle ccc \rangle$	3	0	2	Sphäre	$\kappa (k_1 \wedge k_2)^2$	$\Psi dd\Psi \wedge dd\Psi$
			4	Scheibe, $\mathbb{R}P_2$	$\gamma \kappa (k_1 \wedge k_2)^4$	$\Psi dddd\Psi \wedge dddd\Psi$
$\langle cco \rangle$	2	1	3	Scheibe	0	—
$\langle coo \rangle$	1	2	2	Scheibe	$k^{ab} \kappa (k_1 \wedge k_2)^2$	$\Psi dd\Phi \wedge dd\Phi$
$\langle ooo \rangle$	0	3	1	Scheibe	$f^{abc} g (k_1 \wedge k_2)$	$\Phi [d\Phi, \wedge d\Phi]$
$\langle c^{n \geq 4} \rangle$	≥ 4	0	$2n-4$	Sphäre	0	—
$\langle o^{n \geq 4} \rangle$	0	≥ 4	$n-2$	Scheibe	0	—

Tabelle 3.1: Tree-Level-Amplituden des $N=2$ Strings

damentale kubische Vertizes auf. Der Koeffizient γ ist eine endliche Konstante mit Dimension $[\gamma] = m^4$. Offene Strings tragen zusätzlich Chan-Paton-Faktoren a, b, \dots , die in der Killing-Form k^{ab} und den Strukturkonstanten f^{abc} der Eichgruppe auftauchen. Es wird weitgehend angenommen, dass alle gemischten Amplituden für $n \geq 4$ verschwinden, gezeigt werden konnte dies allerdings bislang nur für $\langle ccco \rangle$ und $\langle cooo \rangle$ [25, 37]. Um auf Ebene der effektiven Wirkung ebenfalls verschwindende Amplituden für $n \geq 4$ zu erhalten, bedarf es normalerweise weiterer Vertizes, die die iterierten Beiträge der fundamentalen Vertizes gerade aufheben. In diesem speziellen Fall zeigt sich jedoch, dass alle Tree-Level-Amplituden jenseits von $n=3$ nur auf den vier kubischen Vertizes basierend bereits verschwinden und es keiner weiteren Terme bedarf.

Da die Felder in der effektiven Wirkung nicht-kanonische Längendimensionen $[\Phi] = m^0$ bzw. $[\Psi] = m^1$ besitzen, benötigen wir eine dimensionsbehaftete Konstante (T bzw. T^2) vor der Wirkung.

Mit den entsprechenden Kopplungskonstanten vor den fundamentalen Vertices sieht die Lagrangedichte der effektiven Wirkung damit wie folgt aus [35]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = T \operatorname{tr} \left\{ -\frac{1}{2} \Phi \square \Phi + \frac{g}{6} \Phi [d\Phi, \wedge d\Phi] + \frac{\kappa}{2} \Psi dd\Phi \wedge dd\Phi \right\} \\ + T^2 \left\{ -\frac{1}{2} \Psi \square \Psi + \frac{\kappa}{6} \Psi dd\Psi \wedge dd\Psi + \gamma \frac{\kappa}{6} \Psi dddd\Psi \wedge dddd\Psi \right\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Der Koeffizient γ ist von der Ordnung T^{-2} . Aus dieser Lagrangedichte erhalten wir die folgenden zwei Bewegungsgleichungen

$$-\square \Phi + \frac{g}{2} [d\Phi, \wedge d\Phi] + \kappa dd\Psi \wedge dd\Phi = 0 \quad (3.42)$$

$$-\square \Psi + \frac{\kappa}{2} dd\Psi \wedge dd\Psi = -\frac{1}{T} \frac{\kappa}{2} dd\Phi \wedge dd\Phi - \gamma \frac{\kappa}{2} dddd\Psi \wedge dddd\Psi. \quad (3.43)$$

Im Limes $T \rightarrow \infty$ gehen diese Gleichungen (in ausführlicher Schreibweise) über in

$$-\square \Phi^a + \frac{g}{2} f^{abc} \partial_+^{\dot{\alpha}} \Phi^b \partial_{+\dot{\alpha}} \Phi^c + \kappa \partial_+^{\dot{\alpha}} \partial_+^{\dot{\beta}} \Psi \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \Phi^a = 0 \quad (3.44)$$

$$-\square \Psi + \frac{\kappa}{2} \partial_+^{\dot{\alpha}} \partial_+^{\dot{\beta}} \Psi \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \Psi = 0. \quad (3.45)$$

Die Gleichungen (3.44) und (3.45) sind in der in der Mathematik der integrablen Modelle als *gekrümmte Leznov Gleichung* [30] bzw. als *zweite Plebanski Gleichung* [38] bekannt. Sie beschreiben die Kopplung selbstdualer Yang-Mills-Theorie an selbstduale Gravitation in 2+2 Dimensionen. Dies erkennt man daran, dass beim Auswerten der Selbstdualitätsbedingung $F_{\alpha\beta}=0$ implizit das Vierbein verwendet wird, d.h. ein gekrümmter Hintergrund beeinflusst die Form der Yang-Mills-Selbstdualität. Alle Ableitungen gehen in ihre kovariante Form über, insbesondere $-\square \rightarrow D_{-\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\alpha}}$, was gerade zum Kopplungsterm

$$\kappa \partial_+^{\dot{\alpha}} \partial_+^{\dot{\beta}} \Psi \partial_{+\dot{\alpha}} \partial_{+\dot{\beta}} \Phi \quad (3.46)$$

in Leznovs Gleichung führt. Wir sehen zudem, dass der Energie-Impuls-Tensor der selbstdualen Yang-Mills-Theorie keine Rückwirkung auf die Metrik hat.

KAPITEL 4

D-BRANES

Neben der Hypothese Wittens, dass alle $N=1$ Superstringtheorien einen gemeinsamen Ursprung in der elfdimensionalen M-Theorie haben, ist vor allem die Identifizierung der D-Branes als Träger der Ramond-Ramond-Ladung durch Polchinski [39] das Signal zu einer stürmischen Wiederentdeckung der Stringtheorie als ernsthaftem Kandidaten für eine vereinheitlichte Theorie gewesen. D-Branes ermöglichen Aussagen über die nicht perturbative Struktur der Stringtheorien und öffnen, so scheint es derzeit, das Tor zu einem vollständigen Verständnis der Stringtheorie jenseits der Störungstheorie. In den Untersuchungen nichtkommutativer Feldtheorien, wie sie auch im Zentrum dieser Arbeit stehen, spielen D-Branes zudem eine grundlegende Rolle, da das konstante B -Feld, das letztlich zur Nichtkommutativität der Koordinaten führt, *auf* D-Branes verschiedener Dimensionalität eingeschaltet wird.

In den letzten Jahren ist eine Vielzahl von Veröffentlichungen zu diversen Aspekten von D-Branes erschienen. Da wir uns im Rahmen dieser Arbeit zwangsläufig knapp fassen, verweisen wir den interessierten Leser auf die sehr gut lesbaren Zusammenfassungen [40, 41, 42].

Wir führen D-Branes auf dem klassischen Weg via T-Dualität ein und konzentrieren uns zunächst der Einfachheit halber auf bosonische Strings, bevor wir D-Branes des $N=1$ Superstrings beschreiben. Wir zeigen, welche Rolle sie für das Verständnis nichtperturbativer Aspekte dieser Stringtheorien spielen. Dann wenden wir uns im nächsten Kapitel den D-Branes in der $N=2$ Stringtheorie zu. Wie in Kapitel 2 gezeigt, verfügt der $N=2$ String über keine Ramond-Ramond Felder, an die D-Branes in dieser Theorie auf natürliche Art koppeln könnten. Eine formale Definition von D-Branes in der $N=2$ Stringtheorie ist dennoch möglich. Wir untersuchen durch Berechnung von Streuamplituden, inwiefern $N=2$ Strings die Anwesenheit dieser ausgedehnten Objekte spüren.

4.1 T-Dualität geschlossener Strings

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist die eichfixierte Wirkung des bosonischen Strings

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma \partial_a X^\mu \partial^a X_\mu. \quad (4.1)$$

Die Stringkoordinaten X^μ leben in flacher $D = 26$ -dimensionaler Raumzeit, $\mu = 0, 1, \dots, 25$. Die Weltfläche wird durch die zeitartige Größe $\tau = \sigma^0$ und die raum-

artige Größe $\sigma = \sigma^1 \in [0, \pi]$ parametrisiert. Die Wirkung ist symmetrisch unter $SO(1, 25)$ in der Raumzeit, unter $SO(1, 1)$ auf der Weltfläche und besitzt eine residuelle zweidimensionale konforme Symmetrie [21, 43].

In konformer Eichung ist die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen des geschlossenen Strings, die sich aus der Wirkung (4.1) ergibt, als Summe von Rechts- und Linksläufern durch $X^\mu(\sigma, \tau) = X_R^\mu(\sigma^-) + X_L^\mu(\sigma^+)$ darstellbar, wobei $\sigma^\pm = \sigma \pm \tau$. Wir kompaktifizieren jetzt die 25te Koordinate X^{25} auf einem Kreis von Radius R , d.h. wir identifizieren X^{25} mit $X^{25} + 2\pi R w$. Die Größe $w \in \mathbb{Z}$ wird *Windungszahl* genannt und gibt an, wie oft sich der geschlossene String um die kompaktifizierte Dimension aufgewickelt hat. Für diese Quantenzahl gibt es bei Punktteilchen kein Analogon.

Unter der obigen Kompaktifizierungsbedingung ist die allgemeine Lösung für X^{25} gegeben durch

$$\begin{aligned} X_R^{25}(\sigma^-) &= x_{0R}^{25} + \frac{\alpha'}{2} p_R^{25}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_{R,l}^{25} \exp\left(-il(\tau - \sigma)\right), \\ X_L^{25}(\sigma^+) &= x_{0L}^{25} + \frac{\alpha'}{2} p_L^{25}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_{L,l}^{25} \exp\left(-il(\tau + \sigma)\right), \end{aligned} \quad (4.2)$$

wobei

$$p_{L,R}^{25} = \left(\frac{n}{R} \pm \frac{Rw}{\alpha'} \right). \quad (4.3)$$

n ist ganzzahlig und beschreibt den diskreten Kaluza-Klein-Impuls in der kompaktifizierten Richtung $p_{KK}^{25} = \frac{n}{R}$. Aufgrund der Massenschalenbedingung lässt sich die Masse der perturbativen Zustände schreiben als $M^2 = M_L^2 + M_R^2$, wobei

$$M_{L,R}^2 = -\frac{1}{2} p^\mu p_\mu = \frac{1}{2} (p_{L,R}^{25})^2 + \frac{2}{\alpha'} (N_{L,R} - 1). \quad (4.4)$$

Insgesamt ergibt sich

$$M^2 = \frac{n^2}{R^2} + \frac{w^2 R^2}{\alpha'^2} + \frac{2}{\alpha'} (N_L + N_R - 2). \quad (4.5)$$

Für alle Zustände mit Windungszahl $w \neq 0$ erhalten wir im Limes $R \rightarrow \infty$ eine unendliche Masse, während Zustände mit $w = 0$ in diesem Limes ein Kontinuum bilden. Im Limes $R \rightarrow 0$ werden die Zustände mit $n \neq 0$ unendlich massiv. Zustände mit $n = 0$ formen wiederum ein Kontinuum. In diesem Limes verschwindet die kompaktifizierte Dimension.

Wie sich leicht nachrechnen lässt, ist das Massenspektrum der Theorie invariant unter der Ersetzung des Kompaktifizierungsradius $R \leftrightarrow \frac{\alpha'}{R}$ bei gleichzeitiger Identifizierung von $n \leftrightarrow w$. Diese Symmetrie ist als *T-Dualität* bekannt.

Gleichung (4.3) zeigt, dass die Ersetzung $n \leftrightarrow w$ äquivalent ist zur Identifizierung

$$p_L^{25} \rightarrow p_L^{25}, \quad p_R^{25} \rightarrow -p_R^{25}. \quad (4.6)$$

Um in der dualen Theorie die gleichen Operatorproduktentwicklungen für das bosonische Feld zu erhalten, betrachtet man anstelle des Feldes X^{25} das Feld

$$\tilde{X}^{25}(\sigma, \tau) = X_L^{25}(\sigma, \tau) - X_R^{25}(\sigma, \tau), \quad (4.7)$$

bei dem gegenüber X^{25} die Linksläufer der Theorie invariant gelassen werden, das Vorzeichen der Rechtsläufer aber vertauscht wird

$$X_L^{25} \rightarrow X_L^{25}, \quad X_R^{25} \rightarrow -X_R^{25}. \quad (4.8)$$

4.2 T-Dualität bei offenen Strings: D-Branes

Wir betrachten jetzt *offene Strings* mit Neumann-Randbedingungen. Wiederum kompaktifizieren wir die 25te Koordinate auf einem Kreis mit Radius R . Der Schwerpunktimpuls in der kompaktifizierten Richtung nimmt erneut nur diskrete Werte $p_{KK}^{25} = \frac{n}{R}$ an. Es gibt beim offenen String allerdings kein Analogon zur Windungszahl des geschlossenen Strings. Dies hat zur Folge, dass im Limes verschwindenden Radius $R \rightarrow 0$ die Masse aller Zustände mit nichtverschwindendem Impuls nach Unendlich strebt, sich für $n = 0$ allerdings kein Kontinuum an Zuständen bildet. Die allgemeine Lösung ist

$$X_R^{25} = \frac{x_0^{25}}{2} - \frac{a}{2} + \alpha' p^{25}(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_l^{25} \exp\left(-i2l(\tau - \sigma)\right), \quad (4.9)$$

$$X_L^{25} = \frac{x_0^{25}}{2} + \frac{a}{2} + \alpha' p^{25}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{l \neq 0} \frac{1}{l} \alpha_l^{25} \exp\left(-i2l(\tau + \sigma)\right), \quad (4.10)$$

wobei a eine Konstante ist. Folglich können wir schreiben $X^{25}(\sigma, \tau) = X_R^{25}(\sigma^-) + X_L^{25}(\sigma^+) = x_0^{25} + \frac{2\alpha'n}{R}\tau + \text{Oszillatoren}$. Im Limes $R \rightarrow 0$ verbleiben nur die Zustände mit $n = 0$ im Spektrum.

Betrachten wir die duale Koordinate

$$\tilde{X}^{25}(\sigma, \tau) = X_L^{25}(\sigma, \tau) - X_R^{25}(\sigma, \tau), \quad (4.11)$$

so zeigt sich, dass gilt

$$\partial_\sigma X^{25} = -i\partial_\tau \tilde{X}^{25}. \quad (4.12)$$

T-Dualität bewirkt folglich, dass für die Koordinate in Richtung der kompaktifizierten Dimension die Neumann-Randbedingungen in Dirichlet-Randbedingungen überführt werden. Mit dem T-dualen Radius $\tilde{R} = \frac{\alpha'}{R}$ erhalten wir $\tilde{X}^{25}(\sigma, \tau) = a + 2\tilde{R}\sigma n + \text{Oszillatoren}$. Es folgt

$$\tilde{X}^{25}(\sigma, \tau) |_{\sigma=0} = a, \quad (4.13)$$

$$\tilde{X}^{25}(\sigma, \tau) |_{\sigma=\pi} = a + 2\pi\tilde{R}n. \quad (4.14)$$

Strings mit $n = 0$ leben folglich auf einer 24-dimensionalen Hyperfläche, die als D24-Brane bezeichnet wird. Strings mit $n \neq 0$ haben einen Endpunkt auf einer Hyperfläche und den anderen auf einer zweiten, die $2\pi\tilde{R}n$ in Richtung X^{25} entfernt von der ersten ist. Kompaktifiziert man p Koordinaten auf einem Torus T^p , so erhält man Untermannigfaltigkeiten niedriger Dimensionalität, die als D(25 - p)-Branes bezeichnet werden. Senkrechte Richtungen zur D-Brane erfüllen Dirichlet-Randbedingungen, Koordinaten auf dem (25 - ($p + 1$))-dimensionalen Weltvolumen

der D-Brane Neumann-Randbedingungen. Durch explizites Fordern von Dirichlet-Randbedingungen in bestimmte Koordinatenrichtungen lassen sich folglich D-Branes formal definieren. D-Branes brechen explizit die Poincaré-Invarianz der Raumzeittheorie.

4.3 Chan-Paton-Faktoren und Wilson-Linien

Wir berücksichtigen jetzt zusätzlich die Chan-Paton-Faktoren des offenen Strings. Wir haben in Kapitel 2 gesehen, dass diese zu einer $U(N)$ -Eichsymmetrie der Stringtheorie führen. Kompaktifizieren wir in Richtung X^{25} , können wir eine sogenannte *Wilson-Linie* $A_{25} = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)/2\pi R$ einfügen, die lokal komplett weggeecho werden kann

$$A_{25} = -i\Lambda^{-1}\partial_{25}\Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(e^{iX^{25}\theta_1/2\pi R}, e^{iX^{25}\theta_2/2\pi R}, \dots, e^{iX^{25}\theta_N/2\pi R}). \quad (4.15)$$

Wie wir im Folgenden zeigen, bricht die Wilson-Linie im allgemeinen die $U(N)$ -Symmetrie.

Zunächst sehen wir, dass sich A_{25} zwar wegheichen lässt, da aber die Eichtransformation *nicht* periodisch ist, erhält das Feld X^{25} unter $X^{25} \rightarrow X^{25} + 2\pi R$ eine Phase [43]

$$\text{diag}\{e^{-i\theta_1}, e^{-i\theta_2}, \dots, e^{-i\theta_N}\}. \quad (4.16)$$

Aufgrund dieser Phase nehmen die Impulse des offenen Strings gebrochenezahlige Werte an. Dies legt die Interpretation nahe, dass die Endpunkte des Strings nicht länger auf der gleichen Hyperfläche liegen. Bezeichnen wir den Stringzustand mit Chan-Paton-Faktoren i und j mit $|ij\rangle$, so sehen wir, dass dieser mit einer Phase $e^{i(\theta_j - \theta_i)}$ multipliziert wird, so dass wir für den Impuls erhalten

$$p^{25} \rightarrow p^{25} = (2\pi n + \theta_j - \theta_i)/2\pi R. \quad (4.17)$$

Die duale Koordinate geht über in

$$\tilde{X}^{25}(\pi) - \tilde{X}^{25}(0) = (2\pi n + \theta_j - \theta_i)\tilde{R} \quad (4.18)$$

mit dem dualen Radius \tilde{R} . Dies bedeutet folglich, dass der Endpunkt des Strings in Zustand i sich an Position

$$\tilde{X}^{25} = \theta_i\tilde{R} = 2\pi\alpha' A_{25,ii} \quad (4.19)$$

befindet (siehe Abbildung 4.1). Wir zeigen jetzt, dass D-Branes dynamische Objekte sind. Hierzu betrachten wir im dualen Bild das masselose Spektrum für den Fall, dass eine einzige Koordinate kompaktifiziert ist. Die Masse in $(D-1)$ Dimensionen ist

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{2}(p^{25})^2 + \frac{2}{\alpha'}(N-1) \\ &= \left(\frac{\frac{1}{2}[2\pi n + (\theta_i - \theta_j)]\tilde{R}}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{2}{\alpha'}(N-1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

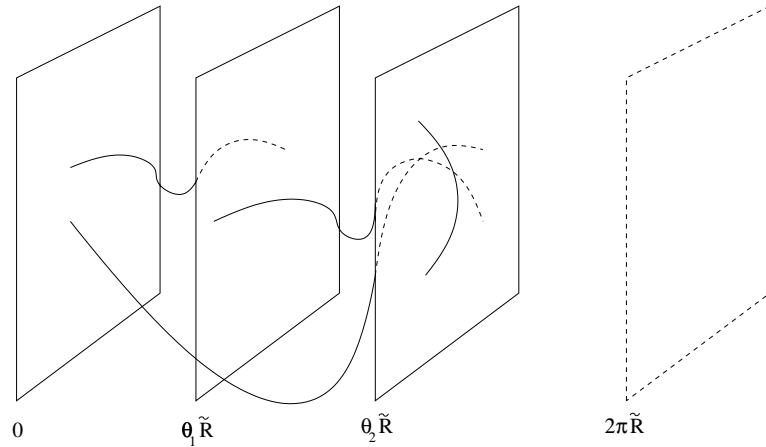


Abbildung 4.1: D-Branes an verschiedenen Positionen

Masselose Zustände erhalten wir nur für Zustände mit $n = 0$, d.h. offene Strings, deren Endpunkte auf der gleichen D-Brane enden, da die Stringspannung einen Beitrag zur Energie gespannter Strings liefert.

Für eine allgemeine Dp -Brane finden wir daher die folgenden masselosen Zustände mit ihren Vertexoperatoren V im Spektrum [41]:

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}^{\mu} |k; ii\rangle, & \quad V = \partial_t X^{\mu}, \\ \alpha_{-1}^m |k; ii\rangle, & \quad V = \partial_t X^m = \partial_n \tilde{X}^m. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der erste Zustand ist das Eichfeld auf der D-Brane, d.h. mit p Komponenten tangential zur Brane, $A^{\mu}(\xi^a)$, $\mu, a = 0, \dots, p$, wobei die $\xi^{\mu} = x^{\mu}$ Koordinaten auf dem D-Brane-Weltvolumen sind. Der zweite Zustand ist das Eichfeld in der (den) Richtung(en) senkrecht zur Brane. In der dualen Theorie interpretiert man dieses Feld als transversale Position der D-Brane. Aus Sicht der Weltvolumentheorie ist das Feld eine Familie skalarer Felder $\Phi^m(\xi^a)$, ($m = p + 1, \dots, D - 1$) [39].

Im dualen Bild manifestiert sich explizit die Brechung der $U(N)$ -Symmetrie. Wenn alle D-Branes voneinander getrennt sind, haben wir jeweils lediglich einen masselosen Vektor für die Branes, d.h. wir beschreiben die Eichgruppe $U(1)^N$. Falls k Branes übereinanderliegen, finden wir neue masselose Zustände, da die zwischen den Branes gespannten Strings verschwindende Länge haben können. Diese k^2 Vektoren bilden die adjungierte Darstellung einer $U(k)$ -Eichgruppe [39, 41]. Übereinanderliegende Branes werden durch $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_k$ beschrieben, d.h. die Theorie der Wilson-Linien lässt eine $U(k)$ -Untergruppe ungebrochen. Falls alle N Branes zusammenfallen, finden wir die ursprüngliche $U(N)$ -Eichsymmetrie des offenen Strings.

4.4 D-Branes des N=1 Superstrings

Wie im Fall der bosonischen Stringtheorie werden die D-Branes des $N=1$ Superstrings durch Dirichlet-Randbedingungen auf der Weltfläche des Strings in Richtungen senkrecht zum Weltvolumen der Brane definiert. Zusätzlich zu den üblichen

bosonischen Randbedingungen müssen jetzt auch die fermionischen Randbedingungen mit der Supersymmetrie kompatibel sein. In komplexen Koordinaten auf der komplexen euklidischen Ebene $z = \exp(\tau + i\sigma)$ lassen sich die Randbedingungen in kompakter Form schreiben [4, 39]

$$\begin{aligned}\partial X^\mu &= \bar{\partial} X^\mu|_{Im\ z=0} \\ \partial X^m &= -\bar{\partial} X^m|_{Im\ z=0}\end{aligned}\quad (4.22)$$

für die bosonischen Koordinaten und

$$\psi^\mu = \bar{\psi}^\mu|_{Im\ z=0}, \quad \psi^m = -\bar{\psi}^m|_{Im\ z=0}, \quad (\text{Ramond}) \quad (4.23)$$

$$\psi^\mu = -\bar{\psi}^\mu|_{Im\ z=0}, \quad \psi^m = \bar{\psi}^m|_{Im\ z=0}, \quad (\text{Neveu-Schwarz}) \quad (4.24)$$

für die fermionischen Koordinaten, wobei $\mu = 0, 1, \dots, p$ und $m = p + 1, \dots, 9$.

Als ausgedehnte Objekte brechen D-Branes typischerweise die Symmetrien der Stringtheorie. In Analogie zum bosonischen Fall, bei dem die Poincaré-Symmetrie gebrochen wurde, brechen D-Branes im supersymmetrischen Fall die Raumzeitsymmetrie $SO(1, 9) \rightarrow SO(1, p) \times SO(9 - p)$.

D-Branes sind sogenannte *BPS-Zustände*, das heißt, sie brechen die Hälfte der Supersymmetrie. Je nach Chiralität der Stringtheorie sind unterschiedliche D-Branes stabil:

Theorie	Dp-Branes	
Typ IIA	$p = 0, 2, 4, 6, 8$	(4.25)
Typ IIB	$p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$	
Typ I	$p = 1, 5, 9$	

Die ($p = -1$)-Brane kann als Instanton interpretiert werden. Der Fall $p = 9$, bei dem der String frei in der Raumzeit propagieren kann, nimmt eine Sonderstellung ein und ist nur mit der Typ I-Theorie konsistent [4].

Andere D-Brane-Konfigurationen sind denkbar, die die Supersymmetrie zu $1/2, 1/4$, usw. brechen. Es existieren auch sogenannte non-BPS-Branes, die die Supersymmetrie vollständig brechen (vgl. [4, 39, 41, 44]).

4.5 Die effektive Wirkung von D-Branes

Es war lange Zeit ein ungelöstes Problem, welche Objekte die Träger der Ramond-Ramond-Ladungen sind. In der Superstringtheorie werden Ladungen üblicherweise von BRST-invarianten Vertexoperatoren der entsprechenden physikalischen Zustände getragen.

Ein $(p + 1)$ -Form-Potential koppelt im NS-Sektor auf natürliche Art an eine p -Brane, d.h. eine Anregung, die sich in p räumlichen Dimensionen erstreckt. Parametrisiere $Y^\mu(\zeta^a)$ das Weltvolumen der Brane ($a = 0, \dots, p$) und sei

$$\widehat{C}^{(p+1)} \equiv C_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}}(Y) \partial_0 Y^{\mu_1} \dots \partial_p Y^{\mu_{p+1}} \quad (4.26)$$

der pull-back der $(p+1)$ -Form auf das Weltvolumen. Die natürliche (auch „elektrisch“ genannte) Kopplung ist gegeben durch das Integral [4]

$$I_{WZ} = \rho_{(p)} \int d^{p+1} \zeta \widehat{C}^{(p+1)}, \quad (4.27)$$

wobei $\rho_{(p)}$ die Ladungsdichte der Brane bezeichnet. Bekannte Beispiele sind die Kopplung eines Punktteilchens („0-Brane“) an ein Vektorpotential und die Kopplung eines Strings („1-Brane“) an den antisymmetrischen Tensor zweiter Ordnung. Es existiert auch eine „magnetische“ Art der Kopplung an eine $(6-p)$ -Brane, da das Duale eines $(p+1)$ -Form-Potentials in zehn Dimensionen durch ein $(7-p)$ -Form-Potential gegeben ist¹. Die Quellen für die Feldgleichungen und die Bianchi-Identität im NS-Sektor einer $(p+1)$ -Form sind daher p -Branes und $(6-p)$ -Branes.

Innerhalb der Typ II-Störungstheorie existieren keine derartigen elementaren RR-Ladungen, die jedoch von den meisten nichtperturbativen Dualitäten² verlangt werden. Dies liegt daran, dass im Vergleich zum NS-NS-Sektor die Situation im Ramond-Ramond-Sektor anders aussieht. Der entscheidende Punkt ist hier, dass die BRST-Invarianz von Vertexoperatoren im RR-Sektor nur dann gegeben ist, wenn der Operator an die RR-Feldstärke statt an das RR-Eichpotential koppelt. Die BRST-Invarianz-Bedingung ist dabei das Äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen für die RR-Feldstärke. Insofern können aufgrund ihrer „falschen“ Kopplung RR-Vertexoperatoren nicht als Träger der RR-Ladung angesehen werden.

Ein weiteres einfaches Argument skizzieren wir in Anlehnung an Bachas [4]. Falls ein geschlossener Stringzustand existierte, der eine Quelle für eine RR $(p+1)$ -Form darstellte, so würde die trilineare Kopplung

$$\langle \text{geschlossen} | C^{(p+1)} | \text{geschlossen} \rangle$$

nicht verschwinden. Dies ist jedoch unmöglich, da diese Kopplung eine ungerade Zahl links- und rechtslaufender fermionischer Vertizes besitzt, so dass der entsprechende Korrelator automatisch auf jeder geschlossenen Riemann-Fläche verschwindet. Dieses Argument zeigt insbesondere, dass der fundamentale geschlossene String nicht „elektrisch“ an die Ramond-Ramond-Zwei-Form koppelt. Entscheidend ist, dass dieses simple Argument versagt, sobald die Weltfläche des Strings Ränder besitzt.

Die Lösung des Problems der fehlenden RR-Ladungsträger gelang schließlich Polchinski in seiner bahnbrechenden Arbeit [39], in der er zeigen konnte, dass die RR-Ladungen durch solitonische nichtperturbative Objekte, den D-Branes, gegeben sind. Der Grund ist, dass die RR-Eichpotentiale in den WZ-Termen der Dirac-Born-Infeld-Wirkung der Dp -Branes auftauchen und auf natürliche Art an das Weltvolumen der $(p+1)$ -Formen koppeln. Betrachten wir dazu die effektive Wirkung einer D-Brane näher. Die verallgemeinerte effektive Wirkung einer D-Brane, die die Dynamik des Weltvolumen-Eichfelds und die Kopplung an beliebige Supergravitationshintergründe beinhaltet, lautet:

$$I_{Dp} = \int d^{p+1}\zeta (\mathcal{L}_{\text{DBI}} + \mathcal{L}_{\text{WZ}} + \dots), \quad (4.28)$$

wobei die Dirac-Born-Infeld- und Wess-Zumino-(bzw. Chern-Simons-) Lagrangedichte

¹Es gilt, dass die duale Feldstärke einer $(p+2)$ -Feldstärke-Form in zehn Dimensionen eine $(10-(p+2))$ -Feldstärke-Form ist.

²Für eine detaillierte Übersicht über Dualitäten in Stringtheorien und der Rolle, die D-Branes dabei spielen, siehe [45, 46, 47].

ten gegeben sind durch

$$\mathcal{L}_{\text{DBI}} = T_{(p)} e^{-\Phi} \sqrt{-\det \left(\widehat{G}_{\alpha\beta} + \widehat{B}_{\alpha\beta} + 2\pi\alpha' F_{\alpha\beta} \right)} \quad (4.29)$$

und

$$\mathcal{L}_{\text{WZ}} = T_{(p)} \widehat{C} \wedge e^{2\pi\alpha' F} \wedge \mathcal{G} \Big|_{(p+1)\text{-Form}}. \quad (4.30)$$

Hierbei ist $\widehat{B}_{\alpha\beta}$ und $\widehat{G}_{\alpha\beta}$ ist der pull-back der Neveu-Schwarz-Zwei-Form bzw. Targetraummetrik auf das Weltvolumen der D-Brane³.

$$\widehat{C} \equiv \sum_n \frac{1}{n!} \widehat{C}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} d\zeta^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d\zeta^{\alpha_n} \quad (4.31)$$

ist der pull-back der Summe über alle elektrischen und magnetischen RR-Form-Potentiale. Die Feldstärke-Zwei-Form $F = dA$ ist derart normiert, dass die Kopplung am Rand der Stringweltfläche durch $\oint A_\alpha dX^\alpha$ gegeben ist.

Die Dirac-Born-Infeld-Lagrangedichte ist eine Verallgemeinerung des geometrischen Volumens der Brane-Trajektorie in Anwesenheit des Neveu-Schwarz antisymmetrischen Tensors und von Eichfeldern auf dem Weltvolumen [48]. Die Lagrangedichte wurde erstmals im Kontext der Typ I-Stringtheorie in zehn Dimensionen von Fradkin und Tseytlin [49] hergeleitet. Der Wess-Zumino-Term verallgemeinert die Kopplung von Dp-Branes an Ramond-Ramond-(p + 1)-Formen. Die genaue Abhängigkeit dieses Terms von den Eichfeldern wurde von Li [50] und Douglas [51] hergeleitet. Im Gegensatz zu \mathcal{L}_{WZ} , der aufgrund seiner Beziehung zu Anomalien als exakt angesehen wird, erfährt der „kinetische“ Teil der Wirkung Korrekturen durch Ausdrücke, die höhere Potenzen des Riemannschen Krümmungstensors und Ableitungen des Feldstärkehintergrunds beinhalten [52, 53]. Die vollständige Wirkung besitzt außerdem einen fermionischen Anteil, der kompatibel mit Targetraumsupersymmetrie und mit der κ -Symmetrie auf dem Weltvolumen der Brane sein muss [54, 55, 56].

Die RR-Ladung der Dp-Brane lässt sich explizit durch Integration über die duale Feldstärke berechnen:

$$e_{p+1} = \int_{S^{8-p}} *F_{8-p}. \quad (4.32)$$

Der Integrationsweg ist hierbei auf einer Sphäre im Raum senkrecht zur D-Brane. Analog hierzu erhält man die magnetische Ladung der Brane durch

$$g_{7-p} = \int_{S^{p+2}} F_{p+2}. \quad (4.33)$$

Die Dimension der Mannigfaltigkeit, über die integriert wird, muss dem Rang der Form im Integranden entsprechen.

³Die Größe \mathcal{G} enthält Krümmungsterme; zur Definition siehe [4]

KAPITEL 5

D-BRANES IN N=2 STRINGTHEORIE

Wie in Kapitel 2 gezeigt, verfügt der $N=2$ String über keine Ramond-Ramond Felder, an die D-Branes in dieser Theorie auf natürliche Art koppeln könnten. Eine formale Definition von D-Branes in der $N=2$ Stringtheorie ist dennoch möglich, indem Dirichlet-Randbedingungen in bestimmte Raumzeitrichtungen gefordert werden können. Die naheliegende Frage ist, ob der $N=2$ String die Anwesenheit dieser Objekte spürt. Eine erste Antwort auf diese Frage gibt eine Analyse von Streuamplituden des $N=2$ Strings an den D-Branes. In der Folge untersuchen wir in Anlehnung an [57, 58] verschiedene Streuamplituden geschlossener Strings an D-Branes [59].

Die wichtigste Eigenschaft von D-Branes im Zusammenhang mit Streuamplituden ist, dass ihre Quantenfluktuationen durch offene Strings, die sich auf der Brane bewegen, beschrieben werden (vgl. Kapitel 4). Dies ermöglicht es, Amplituden für die Streuung von geschlossenen Strings an D-Branes oder der Emission geschlossener Strings mittels herkömmlicher „vorrevolutionärer“ Verfahren (siehe Kapitel 2) zu berechnen. Für den $N=1$ String wurden diese Rechnungen in [57, 60, 61, 62, 63] durchgeführt, wir folgen in unserer Notation so weit angebracht diesen Arbeiten.

5.1 Konventionen

Neben den üblichen Bedingungen und Konventionen an die Metrik und Raumzeit-Vektorfelder X und ψ führen wir die Matrix J ein

$$k^+ \cdot p^- = k \cdot p + ik \cdot J \cdot p \quad (5.1)$$

die als selbstduale komplexe Struktur wirkt. Es ist $J_{02} = J_{13} = 1$, $J_{13} = J_{02} = -1$, alle anderen Elemente sind Null. Des Weiteren vereinfacht die Matrix

$$D^{\mu\nu} = \text{diag}(D^{00}, D^{11}, D^{22}, D^{33}). \quad (5.2)$$

die Notation erheblich. Diese Matrix D erhält man aus der flachen Raumzeitmetrik η durch einen Vorzeichenwechsel in Richtungen *senkrecht* zur jeweilig betrachteten D-Brane. Sei zum Beispiel x^2 die einzige Richtung senkrecht zur D-Brane. Dann finden wir ausgehend von $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, -, +)$ für $D = \text{diag}(-, +, +, +)$.

Bei der Berechnung der Streuamplituden geht man wie im Fall einfacher Streuamplituden unter Neumann-Randbedingungen vor (vgl. [37]). Durch die Anwesenheit der D-Branes erhält man einen Rand. Die offenen Strings, deren Endpunkte

die Position der D-Brane bestimmen, werden durch Vertexoperatoren auf der reellen Achse dargestellt. Zur Ermittlung von Streuamplituden geschlossener Strings an den D-Branes benötigt man folglich die Berechnung von Korrelationsfunktionen auf der oberen komplexen Halbebene. Die geschlossenen Vertexoperatoren faktorisieren dabei wie üblich in einen holomorphen und einen antiholomorphen Anteil

$$V^{cl}(z, \bar{z}, p) =: V(z, p/2) :: V(\bar{z}, p/2) : . \quad (5.3)$$

Dabei ist $z \in H^+$.

Die Summe der Bildladungen beträgt bei nicht verschwindenden Skalarprodukten wie üblich bei Streuamplituden auf offenen Topologien -2 . Im Folgenden verwenden wir Vertexoperatoren im $(-1, -1)$, $(-1, 0)$ und $(0, -1)$ Bild (siehe Anhang C)

$$\begin{aligned} V_{(-1,-1)}(k, z) &= e^{-\varphi^- - \varphi^+} e^{ik \cdot X}(z) \\ V_{(-1,0)}(k, z) &= k^+ \cdot \psi^- e^{-\varphi^-} e^{ik \cdot X}(z) \\ V_{(0,-1)}(k, z) &= k^- \cdot \psi^+ e^{-\varphi^+} e^{ik \cdot X}(z). \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2 D-Brane-Streuung von N=2 Strings

Für die separaten Propagatoren der holomorphen und antiholomorphen Felder findet man die bekannten Resultate. Die Anwesenheit des Weltflächenrands führt jedoch auch zu nicht verschwindenden Korrelationsfunktionen zwischen holomorphen und antiholomorphen Feldern

$$\begin{aligned} \langle X^\mu(z) X^\nu(\bar{w}) \rangle &= -D^{\mu\nu} \ln(z - \bar{w}) \\ \langle \psi^\mu(z) \psi^\nu(\bar{w}) \rangle &= -\frac{D^{\mu\nu}}{z - \bar{w}} \\ \langle \varphi^\pm(z) \varphi^\pm(\bar{w}) \rangle &= -\ln(z - \bar{w}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Am Beispiel der fermionischen Felder sei aufgezeigt wie diese Korrelationsfunktionen in der $\{\pm\}$ -Basis aussehen

$$\begin{aligned} k^- \cdot \psi^+(z) p^- \cdot \psi^+(\bar{w}) &\sim -\frac{1}{z - \bar{w}} k^- \cdot (G_+ \cdot p)^+ \\ k^+ \cdot \psi^-(z) p^+ \cdot \psi^-(\bar{w}) &\sim -\frac{1}{z - \bar{w}} k^+ \cdot (G_+ \cdot p)^- \\ k^+ \cdot \psi^-(z) p^- \cdot \psi^+(\bar{w}) &\sim -\frac{1}{z - \bar{w}} k^+ \cdot (G_- \cdot p)^- \\ k^- \cdot \psi^+(z) p^+ \cdot \psi^-(\bar{w}) &\sim -\frac{1}{z - \bar{w}} k^- \cdot (G_- \cdot p)^+. \end{aligned} \quad (5.6)$$

mit der Definition $G_\pm = D \pm J \cdot D \cdot J$. Die D-Brane bricht die komplexe Struktur des Targetraums genau dann *nicht*, wenn $G_+ = 0$, d.h. wenn gilt $D = -J \cdot D \cdot J$.

Schon bei gemischten Amplituden zwischen geschlossenen und offenen Strings (unter Neumann-Randbedingungen) ergeben sich bekanntlicherweise nicht verschwindende Propagatoren zwischen holomorphem und antiholomorphem Anteil

[37]. Neu ist bei den D-Brane-Berechnungen allerdings, dass unter Dirichlet-Randbedingungen auch Operator-Produkt-Entwicklungen zwischen holomorphen und antiholomorphen Feldern, die beide einen „+“- oder „-“-Index tragen, nicht verschwinden.

5.2.1 Die Amplitude A_{cc}

Wie in [57] gezeigt, erhält man die Streuamplitude zweier geschlossener $N=1$ Strings an einer D-Brane aus der $N=1$ Vierpunkt-Funktion durch einfachen Austausch bestimmter Impulse. Dies bedeutet, dass die Amplitude die Form einer Euler-Beta-Funktion in Mandelstam-Variablen annimmt, die als unendliche Reihe von geschlossenen Stringpolen im t -Kanal oder von offenen Stringpolen im s -Kanal entwickelt werden kann. Dies führt zum „weichen“ Ultraviolettverhalten der Amplitude [60]. Dieses Resultat ist intuitiv klar, da die Wechselwirkung von geschlossenen Strings mit D-Branes entweder durch den Austausch von geschlossenen Strings zwischen String und Brane beschrieben wird oder – via Weltflächendualität – durch offene Strings, die sich auf der D-Brane bewegen. Dieses Argument sollte auch im Fall der $N=2$ Stringtheorie zutreffen. Allerdings ist unklar, wie eine duale Amplitude in einer Theorie mit nur einem Freiheitsgrad aussehen sollte. Der Schluss liegt daher nahe, dass die Streuamplituden in einer konsistenten Theorie verschwinden müssen¹.

Die Streuamplitude von zwei geschlossenen Strings an einer D-Brane ist gegeben durch die Integration der Korrelationsfunktion zweier geschlossener Vertexoperatoren mit den korrekten Quantenzahlen über die obere komplexe Halbebene H^+ :

$$A_{cc}(p_1, p_2) \sim \int_{H^+} d^2z d^2w \times \langle V_{(-1,0)}(z, p_1/2) V_{(-1,0)}(\bar{z}, p_1/2) V_{(0,-1)}(w, p_2/2) V_{(0,-1)}(\bar{w}, p_2/2) \rangle. \quad (5.7)$$

Impulserhaltung gilt nur in Richtungen parallel zur Brane:

$$\frac{p_1}{2} + \frac{D \cdot p_1}{2} + \frac{p_2}{2} + \frac{D \cdot p_2}{2} = 0, \quad p_1^2 = p_2^2 = 0, \quad (5.8)$$

wobei mit p_1 und p_2 die Impulse des eingehenden bzw. ausgehenden Strings bezeichnet werden. (Vorsicht! Es gilt $D \cdot p = D_\nu^\mu p^\nu = D^{\mu\rho} \eta_{\rho\nu} p^\nu$.)

Analog zur Vierpunkt-Amplitude kann die Amplitude durch die Mandelstam-Variablen

$$s = \left(\frac{p_1}{2} + \frac{D \cdot p_1}{2}\right)^2, \quad t = \left(\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2}\right)^2, \quad u = \left(\frac{p_1}{2} + \frac{D \cdot p_2}{2}\right)^2 \quad (5.9)$$

parametrisiert werden. s ist offensichtlich der Impulsübertrag entlang der Brane, t entspricht dem Impulsbetrag, der von der Brane absorbiert wird. Die Wechselwirkung im t -Kanal findet durch den Austausch eines virtuellen geschlossenen Strings statt. Wie üblich ergibt sich $s + t + u = 0$.

¹Das D-Instanton bildet eine Ausnahme, da in diesem Fall, die Betrachtung aus Sicht des s -Kanals keinen Sinn macht und die Streuamplitude nicht dual sein muss. Tatsächlich wird in der Folge gezeigt, dass die Amplitude mit einer Potenz von t abfällt, wie es typisch für punktförmige Objekte ist.

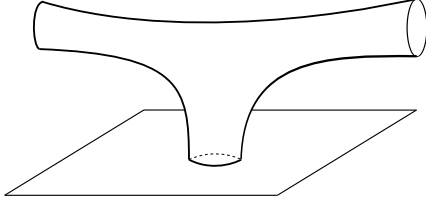


Abbildung 5.1: Streuung geschlossener Strings an einer D-Brane im t -Kanal.

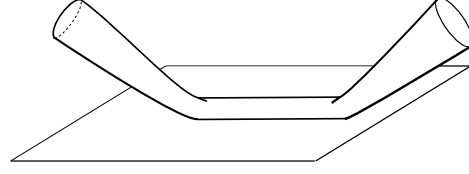


Abbildung 5.2: Der gleiche Streuprozess aus Sicht des s -Kanals.

Die $SL(2, R)$ -Invarianz der Korrelationsfunktionen auf der oberen Halbebene erlaubt die Fixierung von drei der vier Variablen der Vertexoperatoren auf der oberen Halbebene. Für die Amplitude A_{cc} erweist es sich als vorteilhaft $z = iy$ ($y \in \mathbb{R}^+$) und $w = i$ zu fixieren. Das korrekte Integrationsmaß ist $\int_0^1 dy(1 - y^2)$. Der resultierende Ausdruck kann durch die „Wunder“-Substitution

$$y = \frac{1 - x^{1/2}}{1 + x^{1/2}} \quad (5.10)$$

in die bekannte Integral-Darstellung der Euler-Beta-Funktion überführt werden. Letztendlich erhält man

$$A_{cc} \sim A \frac{\Gamma(s-1)\Gamma(t+1)}{\Gamma(s+t)} + B \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} - C \frac{\Gamma(s)\Gamma(t+1)}{\Gamma(s+t+1)} \quad (5.11)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= p_1^+ \cdot (G_+ \cdot p_1)^- p_2^- \cdot (G_+ \cdot p_2)^+, & B &= 4(p_1^+ \cdot p_2^-)^2, \\ C &= (p_1^+ \cdot (G_- \cdot p_2)^-)^2. \end{aligned}$$

5.2.2 Die Amplitude A_{ooc}

Diese Amplitude beschreibt zwei offene Strings (auf der D-Brane), die in einen ausgehenden geschlossenen Stringzustand übergehen, der von der Brane emittiert wird. Nach den üblichen Regeln bedarf es der Berechnung des folgenden Integrals

$$\begin{aligned} A_{ooc}(k_1, k_2, p) &\sim \int_{\mathbb{R}, x < y} dx dy \int_{H^+} d^2 z \\ &\times \langle V_{(-1,0)}(x, k_1) V_{(-1,0)}(y, k_2) V_{(0,-1)}(z, p/2) V_{(0,-1)}(\bar{z}, p/2) \rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

x und y werden so entlang der reellen Achse integriert, dass x immer kleiner als y ist. Die Impulse k_i der offenen Strings liegen parallel zur Brane, d.h. es gilt die Gleichung $k_i = D \cdot k_i$. Die Impulserhaltung nimmt folglich die Form an

$$k_1 + k_2 + \frac{p}{2} + \frac{1}{2} D \cdot p = 0 \quad (5.13)$$

Es gibt nur eine kinematische Variable $s = k_1 \cdot k_2 = \frac{1}{4} p \cdot D \cdot p = -\frac{1}{2} p \cdot k_1 = -\frac{1}{2} p \cdot k_2$.

Um die Amplitude A_{ooc} zu berechnen, setzen wir $z = i$ und $x = -y$ ($x, y \in \mathbb{R}$) und verwenden $2s = -u = -t$. Die vorkommenden Integrale können alle mit der Formeln

$$\int_0^\infty dy \frac{y^a}{(1+y^2)^b} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(b + \frac{1}{2})\Gamma(a+1)\Gamma(2b-a-1)}{\Gamma(2b)\Gamma(\frac{1}{2}a+1)\Gamma(b-\frac{1}{2}a)} \quad (5.14)$$

und $\Gamma(a + \frac{1}{2})\Gamma(a) = \sqrt{\pi}2^{1-2a}\Gamma(2a)$ berechnet werden. Als Endergebnis erhalten wir

$$A_{ooc} \sim (k_1^+ \cdot p^-) k_2^+ (G_- \cdot p)^- \cdot \frac{\Gamma(1-2t)}{\Gamma^2(1-t)}. \quad (5.15)$$

Dieser Ausdruck steht in völliger Analogie zum bekannten Ergebnis für den $N=1$ String.

5.3 Streuamplituden für jeden D-Brane-Typ

In diesem Abschnitt werden die gerade berechneten Amplituden für jeden Typ von D-Brane ausgewertet. Aufgrund der speziellen Signatur $(2, 2)$ der Raumzeit klassifizieren wir abweichend von der $N=1$ -Notation die D-Branes mit $(p+q)$, wobei p die Zahl der räumlichen und q die Zahl der zeitlichen Richtungen angibt, in der sich das Weltvolumen der D-Brane erstreckt.

5.3.1 Die (2+2)-Brane

A_{cc}

Diese Brane füllt mit ihrem Weltvolumen die gesamte Raumzeit, so dass wir die übliche Wechselwirkung zwischen offenen und geschlossenen Strings vorliegen haben. A_{cc} wird als Korrektur der niedrigsten Ordnung zur Propagation geschlossener Strings interpretiert. Impulserhaltung gilt bei dieser Streuamplitude in allen Raumzeitrichtungen. Aus Gleichung (5.11) erhalten wir als Resultat für diesen Korrekturterm

$$A_{cc} = 0. \quad (5.16)$$

A_{ooc}

Impulserhaltung impliziert für diese Amplitude, dass $p \cdot k_1 = p \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 = 0$. Da $s = \frac{1}{4}p^2 = 0$ reduziert sich die Amplitude (5.15) auf

$$A_{ooc} \sim (k_1^+ \cdot k_2^-)^2, \quad (5.17)$$

in Übereinstimmung mit dem bekannten Resultat.

5.3.2 Die (1+2)-Brane

A_{cc}

Die (1+2) Brane teilt die Raumzeit in zwei Hälften und ist das Analogon zur 8-Brane in der $N=1$ Stringtheorie. Es gibt nur eine zur D-Brane senkrechte Richtung, für die

wir hier x^3 wählen. Die Impulserhaltung zusammen mit der Massenschalenbedingung legt die Impulse fast vollständig fest. Es sind lediglich zwei Möglichkeiten zu unterscheiden. Wir vernachlässigen hier den physikalisch uninteressanten Fall, dass überhaupt keine Streuung stattfindet, d.h., dass gilt $p_1 = -p_2$. Der zweite Fall, der in der Folge betrachtet werden soll, ist

$$p_1^0 = -p_2^0, \quad p_1^1 = -p_2^1, \quad p_1^2 = -p_2^2, \quad p_1^3 = p_2^3. \quad (5.18)$$

Die Mandelstam-Variable sind $s = -t = \frac{1}{2}(p_1^3)^2$ und $u = 0$. Aus Gleichung (5.11) finden wir, dass die ersten beiden Terme dort verschwinden, da der Nenner bei $u = 0$ divergiert. Der dritte Term reduziert sich auf

$$A_{cc} \sim -(p_1^+(G \cdot p_2)^-)^2 \Gamma(s) \Gamma(1-s) = -4[(p_1^0)^2 + (p_1^2)^2] \Gamma(s) \Gamma(1-s). \quad (5.19)$$

Unter Verwendung von

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$$

sieht man, dass der Ausdruck unendlich viele einfache massive Pole beinhaltet

$$A_{cc} \sim \frac{[(p_1^0)^2 + (p_1^2)^2]^2}{\sin(\pi s)}.$$

A_{ooc}

Wiederum verlangt man Dirichlet-Randbedingungen in die 3-Richtung. Es ist dann $G_- = \text{diag}(0, -2, 0, -2)$. Die Stringkinematik vereinfacht sich aufgrund von $k_1^3 = k_2^3 = 0$. Es muss zwischen zwei Fällen unterschieden werden.

a) $p^3 = 0$

Hierbei ist $t = 0$, so dass das Resultat die endliche Amplitude

$$A_{ooc} \sim k_1^+ p^- k_2^+ \cdot (G_- \cdot p)^-$$

ist.

b) $p^3 \neq 0$

Man erhält

$$A_{ooc} \sim \frac{\Gamma(1-2t)}{\Gamma^2(1-t)} \sim \frac{\Gamma(1/2-t)}{\Gamma(1-t)} \sim \cos(\pi \cdot (1/2-t)) \Gamma(1/2-t) \Gamma(t).$$

Diese Amplitude hat einen tachyonischen Pol.

5.3.3 Die (1+1)-Brane

A_{cc}

Für diese Art von Brane erfüllt die Matrix D die Beziehung $D = J \cdot D \cdot J$, wodurch

folgt, dass $G_- = C = 0$ und $G_+ = 2D$ gilt. Für die Streuamplitude der geschlossenen Strings erhält man

$$A_{cc} \sim \left\{ \frac{p_1^+ \cdot (D \cdot p_1)^- p_2^- \cdot (D \cdot p_2)^+}{s-1} t + (p_1^+ p_2^-)^2 \right\} \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}. \quad (5.20)$$

Der kinematische Vorfaktor lässt sich weiter analysieren, wenn man zu Hilfe nimmt, dass in 2+2 Dimensionen vier Impulsvektoren, für die gilt $\sum_1^4 k_i = k_i^2 = 0$, folgende Gleichung erfüllen [23]:

$$(k_1^+ \cdot k_3^-)(k_2^+ \cdot k_4^-)k_1 \cdot k_4 + (k_1^+ \cdot k_4^-)(k_2^+ \cdot k_3^-)k_1 \cdot k_3 = 0. \quad (5.21)$$

Es ist diese Gleichung, die verantwortlich dafür ist, dass die Vierpunkt-Funktion in der offenen und geschlossenen $N=2$ Stringtheorie verschwindet.

Setzt man

$$k_1 = p_1, \quad k_2 = D \cdot p_2, \quad k_3 = D \cdot p_1, \quad k_4 = p_2$$

und verwendet zudem, dass $(Dp_1)^- \cdot (Dp_2)^+ = p_1^+ \cdot p_2^-$ für diese spezielle Art von D-Brane erfüllt ist, so erhält man

$$(p_1^+ \cdot (D \cdot p_1)^- p_2^- \cdot (D \cdot p_2)^+) t + (p_1^+ p_2^-)^2 s = 0. \quad (5.22)$$

Es verbleibt

$$A_{cc} \sim (p_1^+ \cdot p_2^-)^2 \frac{\Gamma(s-1)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}. \quad (5.23)$$

Der kinematische Vorfaktor verschwindet im allgemeinen nicht und die resultierende Amplitude hat wiederum massive Pole.

A_{ooc}

Da $G_- = 0$ gilt, folgt trivialerweise

$$A_{ooc} = 0.$$

5.3.4 Die (2+0)-Brane

A_{cc}

In diesem Fall haben wir zwei *Zeitrichtungen* mit Dirichlet-Randbedingungen, was $D = -J \cdot D \cdot J$ impliziert. Hieraus folgt $G_+ = A = 0$ und $G_- = 2D = 2\text{diag}(+, +, +, +)$. Die Streuamplitude reduziert sich daher auf

$$A_{cc} \sim [(p_1^+ \cdot p_2^-)^2 u + (p_1 \cdot (Dp_2)^-)^2 t] \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t+1)}. \quad (5.24)$$

Bemerkenswerterweise lässt sich der Vorfaktor dieser Amplitude durch die Ersetzungen

$$k_1 \rightarrow p_1, \quad k_2 \rightarrow D \cdot p_1, \quad k_3 \rightarrow p_2, \quad k_4 \rightarrow D \cdot p_2 \quad (5.25)$$

und unter Verwendung von $(Dp_1)^+ \cdot (Dp_2)^- = p_1^+ \cdot p_2^-$ mit dem Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (5.21) identifizieren, er verschwindet folglich. Für den Fall,

dass die Brane die komplexe Struktur des Targetraums nicht bricht, verschwindet also die Streuamplitude:

$$A_{cc} = 0. \quad (5.26)$$

A_{ooc}

Offene Strings auf der (2+0)-Brane sind nicht-dynamische Objekte, da die Metrik auf der Brane euklidisch ist, was in Verbindung mit der Masselosigkeit der Stringzustände nur das identische Verschwinden der Impulse erlaubt. Da die Dynamik der D-Brane durch die Fluktuationen der offenen Strings beschrieben wird, kann die (2+0)-Brane daher als vollständig starres Objekt gedacht werden. Wie sich leicht vom kinematischen Vorfaktor in Gleichung (5.15) ablesen lässt, verschwindet die Amplitude für die Emission eines geschlossenen Strings:

$$A_{ooc} = 0.$$

5.3.5 Die (1+0)-Brane

A_{cc}

Alle drei Terme in Gleichung (5.11) tragen zur Streuamplitude A_{cc} bei, die zu

$$A_{cc} \sim \frac{1}{u(s-1)} (Atu + Bu(s-1) + Ct(s-1)) \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad (5.27)$$

umgeschrieben werden kann. Der kinematische Vorfaktor verschwindet bei den Werten von s and t , bei der die Beta-Funktion ihre Pole hat, nicht. Damit besitzt auch diese Amplitude eine massive Polstruktur.

A_{ooc}

Diese Amplitude verschwindet wiederum trivialerweise.

5.3.6 Die (0+0)-Brane / Das D-Instanton

A_{cc}

Fordert man für alle Raumzeitrichtungen Dirichlet-Randbedingungen, so bedeutet dies, dass zwischen den Impulsen des eingehenden und des ausgehenden Strings keine Beziehung mehr besteht. Aufgrund von $D = -\eta$ erhalten wir für die Mandelstam-Variablen und die kinematischen Vorfaktoren

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{4} p_1 \cdot D p_2 = 0, & t &= -u = \frac{1}{4} p_1 \cdot p_2, \\ A &= 0, & B &= C = 4(p_1^+ \cdot p_2^-)^2. \end{aligned}$$

Die Streuamplitude in diesem Fall ist

$$A_{cc} \sim (p_1^+ \cdot p_2^-)^2 \left(\frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} - \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s+1)} \right). \quad (5.28)$$

Dies führt zu einem einfachen Pol $\frac{1}{t}$ bei $t = 0$. Diesen Pol enthält man entweder durch den Limes $s \rightarrow 0$ in Gleichung (5.28) oder indem man bei der Amplitudenberechnung von vorneherein $s = 0$ setzt.

Dieser einfache Pol bei $t = 0$ lässt sich als Austausch eines geschlossenen Strings zwischen dem geschlossenen String und dem D-Instanton interpretieren. Der kinematische Vorfaktor $(p_1^+ \cdot p_2^-)^2$ entspricht genau der Dreipunkt-Funktion der selbstdualen Gravitation, wie sie durch die Plebanski-Gleichung beschrieben wird.

Aus feldtheoretischer Sicht sollte der Prozess daher als Streuung von Gravitonen an einer punktförmigen – in Raum und Zeit(en) – Quelle interpretiert werden, die mit dem D-Instanton identifiziert werden kann.

A_{ooc}

Trivialerweise verschwindet die Amplitude für die Emission eines geschlossenen Strings vom D-Instanton.

5.3.7 Die Amplitude A_{ooc}

Diese Amplitude beschreibt die Interaktion dreier Strings auf der Brane und anschließende Emission eines geschlossenen Strings. Für alle Branes außer der (1+2)-Brane findet man, dass $A_{ooc} = 0$. Im letzteren Fall erhält man ein Integral vom Typ

$$\int dx \int dy \frac{1}{y(x+iy)} (x^2 + y^2)^\alpha ((1-x)^2 + y^2)^\beta \quad (5.29)$$

($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), dessen explizite Lösung nicht gelungen ist.

5.4 Resultate

Es zeigt sich, dass es, sobald die D-Brane die komplexe Struktur des Targetraums bricht, zusätzliche Korrelationsfunktionen gibt, die bei den üblichen Neumann-Randbedingungen nicht vorhanden sind. Trotzdem ergibt auch für die Amplitude A_{cc} die typische Form einer Euler-Beta-Funktion multipliziert mit einem kinematischen Vorfaktor. Eine genauere Betrachtung dieses Vorfaktors zeigt, dass er für die (2+2)- und die (2+0)-Brane verschwindet. Im Fall des D-Instantons besitzt die Amplitude einen einfachen Pol bei $t = 0$, der auf den Austausch eines geschlossenen Strings zurückgeht. Sämtliche Streuamplituden für Branes, die die komplexe Struktur des Targetraums brechen, d.h. die (1+2)-, die (1+1)- und die (1+0)-Brane zeigen massive Pole, die keinem Zustand im Spektrum des $N=2$ Strings zuordenbar sind.

Wie lassen sich diese Ergebnisse interpretieren? In den vorhergehenden Ausführungen wurde der $N=2$ String in seiner eichfixierten NSR Formulierung betrachtet. Massive Pole im Streuspektrum scheinen nicht konsistent mit dieser Art von String zu sein. Diese Inkonsistenz lässt sich damit erklären, dass die Anwesenheit der Branes im Widerspruch zur $N=2$ Weltflächensupersymmetrie steht. Dies hat seine Ursache darin, dass ein Fermion ψ , welches Dirichlet-Randbedingungen erfüllt, nicht im gleichen Multiplett sein kann, wie ein Fermion, das Neumann-Randbedingungen erfüllt. Das Brechen der $N=2$ Weltflächensupersymmetrie scheint keinen Platz für diese Art von Branes in der eichfixierten NSR Formulierung des $N=2$ Strings zu lassen.

Dieses Resultat ist auch mit T-Dualitätsüberlegungen konsistent. Unter T-Dualität werden Neumann- und Dirichlet-Randbedingungen durch eine Dua-

litätstransformation in einer toroidal kompaktifizierten Raumzeit vertauscht. Wie bereits gezeigt, sind für $N=2$ Strings jedoch nur Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeiten mit der Signatur $(2, 2)$ erlaubt. Dieses lässt nur die Möglichkeit, eine oder beide *komplexe* Richtungen zu kompaktifizieren. Kompaktifizierung von einer oder drei *reellen* Koordinaten bricht die komplexe Struktur und führt zu einem verbotenen Hintergrund. Glücklicherweise bilden alle drei relevanten Branes, d.h. die $(2+2)$ - und $(2+0)$ -Brane sowie das D-Instanton eine abgeschlossene Menge unter der Wirkung von T-Dualität.

Abgesehen von der $(2+2)$ -Brane sind die anderen relevanten Branes alle nicht-dynamisch, da die offenen Strings, die die Dynamik der Brane beschreiben, verschwindende Impulse haben². Dies bedeutet, dass *dynamische* D-Branes in der NSR Formulierung des $N=2$ Strings in Übereinstimmung mit dem Nichtvorhandensein der korrespondierenden Differentialformen nicht existieren. Allerdings ist diese Formulierung nicht die einzig mögliche. Wie Berkovitz und Vafa [64] sowie Siegel [65] gezeigt haben, existiert auch eine allgemeinere Formulierung des $N=2$ Strings in Form des sogenannten *topologischen* $N = 4$ Strings. Diese Formulierung verfügt über zusätzliche Freiheitsgrade und folglich könnte hier ein Weg vorhanden sein, die *verbotenen* Branes auf konsistente Art und Weise in die $N=2$ Stringtheorie zu integrieren. Ein Versuch in diese Richtung ist allerdings bislang nicht unternommen worden.

²Man beachte, dass die dimensionale Reduktion abelscher selbstdualer Yang-Mills-Theorie zu zwei zeitartigen oder zu null Dimensionen zu einer verschwindenden Krümmungs-Zwei-Form führt.

KAPITEL 6

NICHTKOMMUTATIVE FELDTHEORIE

In den letzten Jahren ist in einer Vielzahl von Veröffentlichungen untersucht worden, auf welche Art ein konstanter NS-NS Zwei-Form-Hintergrund bei Anwesenheit von D-Branes die zugrunde liegende Stringtheorie modifiziert [66, 67, 68, 69, 70].

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir kurz umreißen, dass offene Strings, die auf n übereinanderliegenden D-Branes enden, eine deformierte Raumzeit-Metrik G_{ij} sehen und mittels eines Nichtkommutativitätsparameters θ^{ij} beschrieben werden können, der widerspiegelt, dass das die $U(n)$ Yang-Mills-Felder tragende D-Brane-Weltvolumen nichtkommutativ wird. Im Seiberg-Witten-Limes $\alpha' \rightarrow 0$, bei dem die oben genannten offenen String-Parameter konstant gehalten werden, wird die Niederenergiephysik des Strings durch eine nichtkommutative $U(n)$ -Eichtheorie auf der Brane beschrieben [11]. Eine Beschränkung auf $SO(n)$ -oder $Sp(n)$ -Untergruppen ist möglich und lässt sich durch eine Orientifold-Projektion beschreiben [71].

Im Folgenden wenden wir diese Analyse auf den $N=2$ String an [72]. Es ist in diesem Fall wiederum zu erwarten, dass das Einschalten eines konstanten B -Feld-Hintergrunds die selbstduale effektive Feldtheorie des Strings nichtkommutativ werden lässt. Dieses Einschalten des B -Feldes steht jedoch im Widerspruch zur globalen Weltflächensupersymmetrie des fermionischen Strings in der superkonformen Eichung [73]. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels zeigen wir daher, dass ein Randterm zur Wirkung des $N=2$ Strings hinzu addiert werden muss, um die Supersymmetrie auch im Fall $B_{\mu\nu} \neq 0$ zu erhalten. Zusätzlich zeigen wir, dass $B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ eine Kähler-Zwei-Form sein muss.

Im dritten Abschnitt wird die Übereinstimmung von offenen $N=2$ Strings in einem konstanten B -Feld-Hintergrund und nichtkommutativer selbstdualer Yang-Mills-Theorie diskutiert. Diesem Zweck dient die Diskussion der Faktorisierung von offenen String-Tree-Amplituden. Als konkretes Beispiel dient die Vierpunkt-Amplitude der nichtkommutativen selbstdualen Eichtheorie, die in Übereinstimmung mit der Stringtheorie verschwindet. Die Einschränkung von $U(n)$ auf $SU(n)$ ist nicht konsistent möglich, wie am Beispiel von $U(2)$ gezeigt wird [71, 74, 75, 76].

6.1 B-Felder auf D-Branes

In diesem Abschnitt zeigen wir in aller Kürze, wie es zu Nichtkommutativität in Theorien mit B -Feldern auf D-Branes kommt. Wir konzentrieren uns der Einfach-

heit halber auf den bosonischen String und verwenden die in der $N=1$ Stringtheorie übliche Notation. Die Unterschiede zum $N=2$ String liegen vor allem in der Notation und der unterschiedlichen Dimensionalität des Targetraums, der die möglichen B -Felder beim $N=2$ String stärker eingrenzt.

Ausgangspunkt ist die Wirkung des offenen bosonischen Strings in einem B -Feld Hintergrund, d.h. wir betrachten D-Branes und es gilt $B_{ij} \neq 0$ für $i, j = 1, \dots, r$ auf der Brane:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} (g_{ij} \partial_a X^i \partial^a X^j - 2\pi\alpha' B_{ij} \epsilon^{ab} \partial_a X^i \partial_b X^j) \\ &= -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} g_{ij} \partial_a X^i \partial^a X^j + \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} B_{ij} X^i \partial_t X^j. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Σ bezeichnet die Stringweltfläche mit Weltflächenkoordinaten σ und τ . ∂_t ist die Tangentialableitung entlang des Weltflächenrandes $\partial\Sigma$. Die Anwesenheit der D-Branes ist entscheidend, da bei konstantem B die Wechselwirkung lediglich ein Oberflächen-term ist und das B -Feld ohne Ränder weggeeeicht werden könnte. Auf Weltflächen mit Rand trifft das nicht mehr zu: beim Versuch, B_{ij} mittels der Eichtransformation

$$B \rightarrow B + d\Lambda$$

wegzueichen, erzeugt man ein Eichfeld A_i auf der D-Brane, dessen Feldstärke F_{ij} exakt gleich B_{ij} ist.

Die Variation der Wirkung (6.1) führt auf die Randbedingungen

$$(g_{ij} \partial_n X^j + 2\pi\alpha' B_{ij} \partial_t X^j) \Big|_{\partial\Sigma} = 0. \quad (6.2)$$

Hierbei bezeichnet ∂_n die Normalenableitung zu $\partial\Sigma$. Wir merken an, dass sich die Randbedingungen für $B = 0$ auf die üblichen Neumann-Bedingungen reduzieren. Der zusätzliche B -abhängige Term induziert eine Mischung zwischen „Impuls“ und Koordinaten und führt zur Nichtkommutativität. Für B mit Rang $r = p$ dominiert im Limes $B \rightarrow \infty$ bzw. äquivalent hierzu $g_{ij} \rightarrow 0$ der zweite Term in (6.2). Da B invertierbar ist, reduziert sich (6.2) auf $\partial_t X^j = 0$ und wir erhalten Dirichlet-Randbedingungen. Indem für einige Komponenten des B -Feldes der Limes $B_{ij} \rightarrow \infty$ durchgeführt wird, ist es folglich möglich, niedriger-dimensionale D-Branes zu erzeugen.

Die kanonisch konjugierten Impulse sind gegeben durch

$$P_i = \frac{1}{2\pi\alpha'} (g_{ij} \partial_t X^j + 2\pi\alpha' B_{ij} \partial_\sigma X^j). \quad (6.3)$$

Fordern wir die Randbedingung (6.2), so erhalten wir die folgende Modenentwicklung des bosonischen Feldes auf dem D-Brane-Weltvolumen:

$$\begin{aligned} X^i &= x^i + 2\alpha' (g^{ij} p_j t - 2\pi\alpha' B^{ij} p_j \sigma) \\ &\quad + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-int}}{n} (i g^{ij} \alpha_{jn} \cos n\sigma - 2\pi\alpha' B^{ij} \alpha_{jn} \sin n\sigma). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Interessanterweise vertauschen zwar, wie wir gleich zeigen, die Koordinaten nicht mehr, die Impulse mit Modenzerlegung

$$2\pi\alpha'P_i = [g^2 + (2\pi\alpha'B)^2]_{ik} \left[2\alpha'p^k + \sqrt{2\alpha'} \sum_n e^{-int} i\alpha_n^k \cos n\sigma \right], \quad (6.5)$$

kommutieren jedoch weiterhin.

Im einfachsten Fall entspricht die Weltfläche Σ der Scheibe. Diese kann durch eine konforme Abbildung auf die obere komplexe Halbebene abgebildet werden. In dieser Beschreibung erhalten wir für die Randbedingungen (6.2)

$$(g_{ij}(\partial - \bar{\partial})X^j + 2\pi\alpha'B_{ij}(\partial + \bar{\partial})X^j)|_{z=\bar{z}} = 0. \quad (6.6)$$

Hierbei ist $\partial = \partial/\partial z$, $\bar{\partial} = \partial/\partial \bar{z}$, $\text{Im } z \geq 0$. Die Korrelationsfunktionen lassen sich wie folgt schreiben [49, 77]

$$\begin{aligned} \langle X^i(z)X^j(z') \rangle &= -\alpha' \left[g^{ij} \log|z - z'| - g^{ij} \log|z - \bar{z}'| \right. \\ &\quad \left. + G^{ij} \log|z - \bar{z}'|^2 + \frac{1}{2\pi\alpha'} \theta^{ij} \log \frac{z - \bar{z}'}{\bar{z} - z'} + D^{ij} \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

wobei D^{ij} eine Konstante ist, die von B aber nicht von z oder \bar{z} abhängen kann.

Vertexoperatoren des offenen Strings werden am Rand der Weltfläche Σ eingesetzt. Beschränken wir uns auf reelle z und z' und bezeichnen diese mit τ und τ' , so finden wir folgende Korrelationsfunktion

$$\langle X^i(\tau)X^j(\tau') \rangle = -\alpha' G^{ij} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2} \theta^{ij} \epsilon(\tau - \tau'), \quad (6.8)$$

wobei $\epsilon(t) = -1, 0, +1$ für $t < 0, t = 0, t > 0$. Es ist

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} \right)_S^{ij} = \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} g \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{ij}, \\ G_{ij} &= g_{ij} - (2\pi\alpha')^2 (B g^{-1} B)_{ij}, \\ \theta^{ij} &= 2\pi\alpha' \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} \right)_A^{ij} = -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha'B} B \frac{1}{g - 2\pi\alpha'B} \right)^{ij}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

$(\)_S$ und $(\)_A$ bezeichnen den symmetrischen bzw. antisymmetrischen Anteil.

Die Größe G_{ij} lässt sich auf einfache Art interpretieren. Der führende Term des Propagators zwischen Feldern des geschlossenen Strings im Inneren der Weltfläche Σ ist gegeben durch $\langle X^i(z)X^j(z') \rangle = -\alpha' g^{ij} \log|z - z'|$. Der Koeffizient des Logarithmus bestimmt die anomale Dimension des Vertexoperators des geschlossenen Strings. Dieser taucht in der Massenschalenbedingung auf und daher wird g_{ij} als Metrik des geschlossenen Strings bezeichnet. Anomale Dimensionen der Vertexoperatoren des offenen Strings werden durch den Koeffizienten von $\log(\tau - \tau')^2$ festgelegt. G_{ij} spielt hier die selbe Rolle, die g_{ij} für $\theta = 0$ spielen würde und wird dementsprechend als effektive Metrik des offenen Strings bezeichnet.

Auch der Koeffizient θ^{ij} im Propagator besitzt eine einfache Interpretation. In konformen Feldtheorien berechnet man Kommutatoren von Operatoren, indem das

zeitgeordnete Operatorprodukt bei kurzen Abständen betrachtet wird. Interpretieren wir τ als Zeitkoordinate, so sehen wir, dass

$$[X^i(\tau), X^j(\tau)] = T (x^i(\tau)x^j(\tau^-) - x^i(\tau)x^j(\tau^+)) = i\theta^{ij}. \quad (6.10)$$

Dies bedeutet, dass die X^i als Koordinaten auf einem nichtkommutativen Raum mit Nichtkommutativitätsparameter θ deutbar sind.

Die Stringkopplungskonstante g_s geht bei nicht verschwindendem B -Feld über in die effektive Kopplung offener Strings G_s , die gegeben ist durch

$$G_s = g_s \det(2\pi\alpha' Bg^{-1})^{1/2}. \quad (6.11)$$

Der Korrelator (6.8) führt zu folgender Wechselwirkung zwischen offenen Vertexoperatoren [78]

$$V_p(\tau)V_q(\tau') = (\tau - \tau')^{2\alpha' G^{ij} p_i q_j} e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} p_i q_j} V_{p+q}(s). \quad (6.12)$$

Der führende singuläre Term hängt von $\tau - \tau'$ ab und daher ergibt sich für die Operatoren keine assoziative Algebra. Um dennoch eine assoziative Algebra zu erhalten, betrachten Seiberg und Witten [11] den Limes $\alpha' \rightarrow 0$ der Regge-Steigung, wobei gleichzeitig die Parameter des offenen Strings G und θ konstant gehalten werden. In diesem Skalierungslimes (Seiberg-Witten-Limes)

$$\begin{aligned} \alpha' &\sim \epsilon^{1/2} \rightarrow 0, \\ g_{ij} &\sim \epsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

geht der Korrelator (6.12) über in das Moyal-Weyl- bzw. Stern-Produkt

$$V_p V_q = e^{-\frac{i}{2}\theta^{ij} p_i q_j} V_{p+q}. \quad (6.14)$$

Dieses Produkt ist in der Tat assoziativ aber weiterhin nichtkommutativ. Die massiven und geschlossenen Stringzustände entkoppeln und wir erhalten eine effektive Theorie, die nur die masselosen Anregungen beschreibt. Im Fall des $N=1$ Strings ist diese effektive Theorie eine nichtkommutative supersymmetrische Yang-Mills-Theorie (NCSYM).

6.2 Offene N=2 Strings

Wir gehen von der Brink-Schwarz-Wirkung [13] in komplexen Lichtkegelkoordinaten (siehe Anhang B) aus¹

$$\begin{aligned} S = & -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2 \xi e \left\{ \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \bar{X}^{\bar{a}} \partial_\beta X^a + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{-\bar{a}} \rho^\alpha \overleftrightarrow{D}_\alpha \psi^{+a} \right. \\ & + A_\alpha \bar{\psi}^{-\bar{a}} \rho^\alpha \psi^{+a} + (\partial_\alpha X^a + \bar{\chi}_\alpha^- \psi^{+a}) \bar{\psi}^{-\bar{a}} \rho^\beta \rho^\alpha \chi_\beta^+ \\ & \left. + (\partial_\alpha \bar{X}^{\bar{a}} + \bar{\psi}^{-\bar{a}} \chi_\alpha^+) \bar{\chi}_\beta^- \rho^\alpha \rho^\beta \psi^{+a} \right\} \eta_{a\bar{a}}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

¹Wir verwenden $\rho^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\{\rho^m, \rho^n\} = 2\eta^{mn}$, $(\eta^{mn}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$. Die Raum-Zeit-Metrik ist $(\eta_{a\bar{a}}) = \zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, wobei $\zeta > 0$ ein reeller Skalierungsfaktor ist. Für die Definition von $D_\alpha, \bar{\psi}, \bar{\chi}, e$ siehe [14].

Die Materiefelder X^a und ψ^{+a} sind komplex ($\bar{X}^{\bar{a}}=(X^a)^*$, $\psi^{-\bar{a}}=(\psi^{+a})^*$), so dass die Raum-Zeit Indizes $a, \bar{a} = 1, 2$ nur zwei Werte annehmen. Das $N=2$ Supergravitationsmultiplett besteht aus dem Zweibein e_α^n (es gilt $h_{\alpha\beta} = \eta_{mn}e_\alpha^m e_\beta^n$), den komplexen Gravitini χ_α^\pm und der $U(1)$ -Konnektion A_α . In der superkonformen Eichung geht die Wirkung über in

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \bar{X}^{\bar{a}} \partial_\beta X^a + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{-\bar{a}} \rho_\alpha \partial_\beta \psi^{+a} + \frac{i}{2} \bar{\psi}^{+a} \rho_\alpha \partial_\beta \psi^{-\bar{a}}) \eta_{a\bar{a}}. \quad (6.16)$$

Es erweist sich als vorteilhaft, in eine reelle Notation mittels $(a\bar{a}) \rightarrow (\mu)$, mit $\mu, \nu, \dots = 1, 2, 3, 4$ überzugehen. Konkret verwenden wir

$$\begin{aligned} X^1 &:= \frac{1}{2}(X^1 + \bar{X}^{\bar{1}}), & X^2 &:= \frac{1}{2i}(X^1 - \bar{X}^{\bar{1}}), \\ X^3 &:= \frac{1}{2}(X^2 + \bar{X}^{\bar{2}}), & X^4 &:= \frac{1}{2i}(X^2 - \bar{X}^{\bar{2}}), \end{aligned} \quad (6.17)$$

(analog für die fermionischen Felder). Das Wirkungsfunktional nimmt dann die Form

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \eta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + i \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi^\nu) g_{\mu\nu}, \quad (6.18)$$

an, wobei $(g_{\mu\nu}) = \zeta \text{diag}(+1, +1, -1, -1)$. Diese Wirkung ist noch invariant unter $N=2$ superkonformen Transformationen.

Die starren $N=2$ Supersymmetrie-Transformationen haben die Form [79, 80]

$$\begin{aligned} \delta X^\mu &= \bar{\varepsilon}_1 \psi^\mu + J_\nu^\mu \bar{\varepsilon}_2 \psi^\nu, \\ \delta \psi^\mu &= -i \rho^\alpha \partial_\alpha X^\mu \varepsilon_1 + i J_\nu^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha X^\nu \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (6.19)$$

(J_ν^μ) ist eine konstante komplexe Struktur, die mit der gewählten Metrik kompatibel ist, das heißt $g_{\mu\nu} J_\lambda^\nu + J_\mu^\nu g_{\lambda\nu} = 0$.

6.3 $N=2$ supersymmetrische Randbedingungen

Wir betrachten jetzt offene $N=2$ Strings in einem B -Feld-Hintergrund. Da B -Feld-Komponenten, die nicht parallel zum D -Brane-Weltvolumen sind, weggeeeicht werden können, konzentriert sich die Untersuchung im Folgenden auf n übereinanderliegende $(2+2)$ -Branes, um so die allgemeinsten B -Feld-Konfigurationen untersuchen zu können.

Wie kann ein B -Feld konsistent an supersymmetrische zweidimensionale Materiefelder gekoppelt werden, so dass die Wirkung immer noch global supersymmetrisch ist? Das eichfixierte Wirkungsfunktional, das man aus der Standard-Superfeld-Wirkung erhält, ist

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi (\eta^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + \varepsilon^{\alpha\beta} 2\pi\alpha' B_{\mu\nu}) (\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + i \bar{\psi}^\mu \rho_\alpha \partial_\beta \psi^\nu). \quad (6.20)$$

Die Randbedingungen für X^μ , die aus dieser Wirkung folgen, haben die Form

$$(E_{\nu\mu} \partial_+ X^\nu - E_{\mu\nu} \partial_- X^\nu)|_{\partial\Sigma} = 0, \quad (6.21)$$

wobei

$$E_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' B_{\mu\nu} \quad (6.22)$$

und $\partial\Sigma = \{\xi^1=0, \pi\}$. Wir verwenden weiterhin die Abkürzungen $\partial_{++} = \partial_0 + \partial_1$ und $\partial_{--} = \partial_0 - \partial_1$. Die Randbedingungen für ψ^μ müssen unter den Supersymmetrietransformationen auf (6.21) abgebildet werden. Die entsprechenden fermionischen Randbedingungen sind (siehe [11, 73])

$$(E_{\nu\mu}\psi_+^\nu - \gamma E_{\mu\nu}\psi_-^\nu)|_{\partial\Sigma} = 0. \quad (6.23)$$

Hierbei wird verwendet², dass gilt $\varepsilon_i^- = \varepsilon_i^+$ für $\sigma=0$ und $\varepsilon_i^- = \gamma\varepsilon_i^+$ für $\sigma=\pi$ ($\gamma=+1$ für den Ramond Sektor, $\gamma=-1$ für den Neveu-Schwarz Sektor).

Eine kurze Rechnung zeigt, dass die aus (6.20) abgeleiteten fermionischen Randbedingungen *inkonsistent* mit (6.23) sind. Haggi-Mani et al. haben gezeigt [73], dass für den $N=1$ fermionischen String die Supersymmetrie genau dann erhalten ist, wenn zwei B -abhängige Randterme zu obiger Wirkung hinzuaddiert werden. Dieses führt auf den folgenden Ausdruck für die $N=1$ String-Wirkung:

$$S = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi [(\eta^{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + \varepsilon^{\alpha\beta} 2\pi\alpha' B_{\mu\nu}) \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu + i E_{\nu\mu} \bar{\psi}^\mu \rho^\alpha \partial_\alpha \psi^\nu]. \quad (6.24)$$

Für den $N=2$ String findet man das gleiche Resultat. Die zweite Supersymmetrietransformation führt zu weiteren Gleichungen

$$(E_{\nu\mu} J_\lambda^\nu \partial_{++} X^\lambda - E_{\mu\nu} J_\lambda^\nu \partial_{--} X^\lambda)|_{\partial\Sigma} = 0. \quad (6.25)$$

Diese Bedingungen sind äquivalent zu (6.21) und führen genau dann zu keiner weiteren Zwangsbedingung, wenn wir verlangen, dass

$$g_{\mu\nu} J_\lambda^\nu + J_\mu^\nu g_{\lambda\nu} = 0 \quad \text{und} \quad B_{\mu\nu} J_\lambda^\nu - J_\mu^\nu B_{\lambda\nu} = 0. \quad (6.26)$$

Dies bedeutet, dass $(g_{\mu\nu})$ eine Hermitesche Metrik und $B_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ eine Kähler-Zwei-Form auf $\mathbb{R}^{2,2}$ ist, also eine geschlossene Zwei-Form kompatibel mit der komplexen Struktur $J=(J_\mu^\nu)$. Wir betonen ausdrücklich, dass das Wirkungsfunktional (6.24) nicht alleine durch Superfelder ausgedrückt werden kann.

In einer weiteren Arbeit haben Haggi-Mani et al. gezeigt [73], dass eine Addition anderer Terme zur Wirkung möglich ist, die zu äquivalenten Resultaten wie oben führt, jedoch weiterhin eine Superfeldformulierung der Wirkung erlaubt.

6.4 Der Seiberg-Witten-Limes

Im Folgenden wird der Einfluss eines Hintergrund- B -Felds auf offene $N=2$ Strings und deren effektive Feldtheorie untersucht. Der Ausgangspunkt sind die Korrelationsfunktionen für offene Strings [11, 69]

$$\langle X^\mu(\tau) X^\nu(\tau') \rangle = -\alpha' G^{\mu\nu} \ln(\tau - \tau')^2 + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \varepsilon(\tau - \tau'), \quad (6.27)$$

$$\langle \psi^\mu(\tau) \psi^\nu(\tau') \rangle = \frac{G^{\mu\nu}}{\tau - \tau'}, \quad (6.28)$$

²Ein Majorana-Spinor φ (in 1+1 Dimensionen) besitzt zwei Komponenten $\varphi^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \rho^1 \rho^0)\varphi$. Des Weiteren gilt, $\bar{\varphi} \equiv (\varphi_+, \varphi_-) = \varphi^\dagger \rho^0$.

für $\tau, \tau' \in \partial\Sigma$. Durch $[E^{-1}]^{\mu\nu} \equiv [(g + 2\pi\alpha' B)^{-1}]^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} + \frac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{\mu\nu}$ erhalten wir die effektive Metrik $G_{\mu\nu}$, wie sie von den offenen Strings gesehen wird und es ergibt sich zudem der Nichtkommutativitätsparameter $\theta^{\mu\nu}$, der in $[X^\mu(\tau), X^\nu(\tau)] = i\theta^{\mu\nu}$ auftaucht [69]. Bei angemessener Wahl der $SO(2,2)$ -Generatoren [29], kann man die Matrizen J und B durch die Generatoren einer $U(1) \times U(1)$ -Untergruppe der $SO(2,2)$ beschreiben. In diesem Fall können die komplexe Struktur J und das allgemeinste „magnetische“ B -Feld durch

$$J = (J_\nu^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (6.29)$$

$$B = (B_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 & 0 \\ -B_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & -B_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

ausgedrückt werden. In dieser Basis erhält man

$$(G^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{\zeta}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\zeta}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\zeta}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\zeta}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_2)^2} \end{pmatrix}, \quad (6.31)$$

$$(\theta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{(2\pi\alpha')^2 B_1}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_1)^2} & 0 & 0 \\ \frac{(2\pi\alpha')^2 B_1}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{(2\pi\alpha')^2 B_2}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_2)^2} \\ 0 & 0 & \frac{(2\pi\alpha')^2 B_2}{\zeta^2 + (2\pi\alpha' B_2)^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.32)$$

Man beachte, dass für $B_2 = -B_1$ der Hintergrund selbstdual und die Wirkung (6.24) $N=4$ supersymmetrisch ist [80].

Zusätzlich führen wir das Vierbein $e_{\hat{\mu}} = (e_{\hat{\mu}}^\nu)$ ein, das folgende Beziehung zur Metrik G hat:

$$G^{\mu\nu} = e_{\hat{\sigma}}^\mu e_{\hat{\lambda}}^\nu \eta^{\hat{\sigma}\hat{\lambda}}, \quad (6.33)$$

wobei $(\eta^{\hat{\mu}\hat{\nu}}) = \text{diag}(+1, +1, -1, -1)$ die Metrik im orthonormalen Bezugssystem und $\hat{\mu}, \hat{\nu} = 1, \dots, 4$ Lorentz-Indizes sind.

Unser nächstes Augenmerk gilt der Berechnung der effektiven offenen String-Kopplung G_s , welche mit der String-Kopplung geschlossener Strings g_s über $G_s = g_s[\det G / \det(g + 2\pi\alpha' B)]^{1/2}$ zusammenhängt. Wir erhalten

$$G_s = g_s \left[\left(1 + (2\pi\frac{\alpha'}{\zeta} B_1)^2\right) \left(1 + (2\pi\frac{\alpha'}{\zeta} B_2)^2\right) \right]^{1/2}. \quad (6.34)$$

Im Seiberg-Witten-Limes führen wir $\alpha' \rightarrow 0$ durch, während $\zeta \sim (\alpha')^2 \rightarrow 0$ (und daher $g_{\mu\nu} \rightarrow 0$), so dass G , G^{-1} , und θ endlich bleiben. Man erhält so folgende

effektive Kopplung offener Strings

$$G_s \rightarrow \frac{g_{\text{YM}}^2}{2\pi} \equiv 4\pi^2 |B_1 B_2| = \text{const.}, \quad (6.35)$$

da $g_s \sim \zeta \sim (\alpha')^2$. Die inverse offene Stringmetrik ($G^{\mu\nu}$) und die Matrix ($\theta^{\mu\nu}$) gehen über in

$$(G^{\mu\nu}) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{(2\pi B_1)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(2\pi B_1)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{(2\pi B_2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{(2\pi B_2)^2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (6.36)$$

$$(\theta^{\mu\nu}) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{B_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{B_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{B_2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{B_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Wir wollen am Rande erwähnen, dass ein B -Feld mit nichtverschwindenden Komponenten sowohl in Raum- als auch Zeitrichtung, wie im Fall der bereits diskutierten (1+1)-Brane dem „elektrischen“ Typ der Zwei-Form entspricht. In [81] wurde dieser Feldtyp eingehend untersucht und gezeigt, dass er keinen „zero-slope“-Limes besitzt, der eine konsistente Feldtheorie auf nichtkommutativer Raumzeit zulässt.

6.5 Faktorisierung von Tree-Amplituden offener Strings

Ohne einen B -Feld-Hintergrund ($\theta=0$) limitieren die Faktorisierungseigenschaften der offenen String-Amplituden (von denen im $N=1$ Fall Unitarität verlangt wird) die möglichen Chan-Paton-Eichgruppen auf $U(n)$, $SO(n)$ und $Sp(n)$ [21]. Daneben lässt sich zeigen [43], dass der $U(1)$ -Anteil der $U(n)$ von allen Amplituden abkoppelt; folglich ist auch $SU(n)$ erlaubt.

Eine naheliegende Frage ist, ob das Einschalten eines nicht verschwindenden konstanten B -Feld-Hintergrunds die möglichen Chan-Paton-Gruppen weiter einschränkt. Eine Antwort hierauf findet sich im Anhang von [74] (korrekt für $U(n)$) und in [71] (für $SO(n)$ und $Sp(n)$): diese klassischen Lie-Gruppen sind weiterhin möglich. Die Einschränkung von $U(n) \rightarrow SU(n)$ ist jedoch, wie die Analyse in [74] sofort zeigt und eingehender in [71] erläutert wird, nicht länger erlaubt, da der $U(1)$ Freiheitsgrad nicht länger entkoppelt. Dieses Argument sei hier kurz für $U(n)$ skizziert.

Die komplette offene M -String-Streuamplitude auf Tree-Niveau ist gegeben durch

$$T(1, 2, \dots, M) = A(1, 2, \dots, M) \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M) E(1, 2, \dots, M) \\ + \text{nicht-zyklische Permutationen}, \quad (6.38)$$

wobei $A(1, 2, \dots, M)$ die Amplitude für $\theta=0$ ohne Berücksichtigung der Chan-Paton-Faktoren bezeichnet, die man aus dem Scheibendiagramm mit externer Ordnung

der Beine $(1, 2, \dots, M)$ erhält. Die anti-hermiteschen Matrizen $\lambda_i \in u(n)$ bezeichnen die Gruppenquantenzahlen des i -ten äußeren Teilchens, $i=1, 2, \dots, M$. Der einzige Effekt des B -Feld-Hintergrunds besteht in der Multiplikation jeder primitiven Amplitude mit einer Phase [11]

$$E(1, 2, \dots, M) := \prod_{1 \leq j < \ell \leq M} e^{-\frac{i}{2} k_{j\mu} \theta^{\mu\nu} k_{\ell\nu}}. \quad (6.39)$$

Diese Phase ist ebenso wie die zwei Faktoren, die sie multiplizieren, aufgrund von Impulserhaltung zyklisch invariant.

Die Faktorisierung sei näher untersucht. Immer wenn eine Teilsumme der äußeren Impulse on-shell ist, entwickelt die Amplitude T einen Pol, dessen Residuum in die T -Amplituden für die beiden Hälften des zerschnittenen Diagramms faktorisiert. Für einen gegebenen Pol trägt eine Teilmenge der Permutationen in (6.38) bei. Allgemein ist

$$A(1, 2, \dots, M) \sim \frac{1}{m^2 - s} \sum_X A(1, 2, \dots, P, X) A(X, P+1, \dots, M), \quad (6.40)$$

wobei $s = -(k_1 + k_2 + \dots + k_P)^2$ und X über alle Zustände im Spektrum mit Masse m läuft. Auf die gleiche Art erhält man für $u(n)$ (jedoch nicht für $su(n)$!)

$$\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_M) = -2 \sum_x \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_P \lambda_x) \text{tr}(\lambda_x \lambda_{P+1} \dots \lambda_M), \quad (6.41)$$

wobei mit x die auf $\text{tr}(\lambda_x \lambda_y) = -\frac{1}{2} \delta_{xy}$ normierte Basis von anti-hermiteschen $u(n)$ -Generatoren indiziert wird. Man beachte, dass das Produkt $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_L \notin u(n)$ ist, aber in der universellen einhüllenden Algebra liegt.

Impulserhaltung führt schließlich zur Faktorisierung

$$E(1, 2, \dots, M) = E(1, 2, \dots, P) E(P+1, \dots, M). \quad (6.42)$$

Zusammen betrachtet sieht man, dass jeder Term in (6.38) im Fall einer $U(n)$ -Chan-Paton-Gruppe korrekt faktorisiert. Die T -Amplituden-Faktorisierung funktioniert allerdings auch unter etwas schwächeren Bedingungen. Da die primitive Amplituden A bei verschiedenen Anordnungen der Beine mittels

$$A(L, \dots, 2, 1) = (-1)^L A(1, 2, \dots, L) \quad (6.43)$$

in Beziehung stehen (L sind masselose äußere Zustände), kann man die Permutationen in (6.38) in Quartette gruppieren. Verwendet man

$$E(L, \dots, 2, 1) = E(1, 2, \dots, L)^*, \quad (6.44)$$

so liefert die natürliche Kombination

$$\begin{aligned} & (1, \dots, P, P+1, \dots, M) + (P, \dots, 1, P+1, \dots, M) \\ & + (1, \dots, P, M, \dots, P+1) + (P, \dots, 1, M, \dots, P+1) \end{aligned}$$

einen Faktor $\text{tr}[\Lambda(1, \dots, P) \Lambda(P+1, \dots, M)]$, wobei

$$\begin{aligned} \Lambda(1, 2, \dots, L) &:= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_L E(1, 2, \dots, L) \\ &\quad - l_L \dots \lambda_2 \lambda_1 E(1, 2, \dots, L)^* \in u(n) \end{aligned} \quad (6.45)$$

die rechte Seite von (6.40) multipliziert. Folglich ist eine Untergruppe $\mathcal{G} \subset U(n)$ mit der Faktorisierung kompatibel, falls $\lambda_i \in \text{Lie}(\mathcal{G})$ impliziert, dass $\Lambda(1, 2, \dots, L) \in \text{Lie}(\mathcal{G})$, also die Spur durch Einfügen einer vollständigen Basis aufgespalten werden kann.

Gilt $\theta=0$, so ist $E=1$, und obige Bedingung ist für die klassischen Gruppen $U(n)$, $SO(n)$ und $Sp(n)$ erfüllt. In einem B -Feld-Hintergrund wird diese Bedingung bereits für $L=2$ nicht trivial

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \text{Lie}(\mathcal{G}) \stackrel{?}{\implies} \Lambda(1, 2) \equiv \lambda_1 \lambda_2 E(1, 2) - \lambda_2 \lambda_1 E(1, 2)^* \in \text{Lie}(\mathcal{G}). \quad (6.46)$$

Dieses scheint $SO(n)$ - und $Sp(n)$ -Gruppen auszuschließen [74]. Eine genauere Analyse unter Zuhilfenahme der Orientifold-Konstruktion für nicht-orientierbare offene Strings führt allerdings zu einer modifizierten Faktorisierungsbedingung, welche von $SO(n)$ und $Sp(n)$ [71] tatsächlich erfüllt wird. Im Gegensatz dazu ist eine Reduktion von $U(n)$ zu $SU(n)$ im orientierbaren Fall nicht möglich, da bereits $\text{tr}[\Lambda(1, 2)] \neq 0$. Dieses deutet die Fusion zweier Zustände mit $SU(n)$ -Ladung zu einem Zustand mit $U(1)$ -Ladung an.

Wie oben erwähnt, reduziert sich im Seiberg-Witten-Limes ($\alpha' \rightarrow 0$ bei gleichzeitigem Festhalten der offenen Stringparameter) die Stringtheorie auf eine nicht-kommutative Feldtheorie. Es überrascht daher nicht, dass die Liste der erlaubten offenen String-Eichgruppen für $\theta \neq 0$ in perfekter Übereinstimmung mit der Liste möglicher nichtkommutativer Yang-Mills-Theorien steht. Besonders sei darauf verwiesen, dass die Nichtabgeschlossenheit des Moyal-Kommutators $f \star g - g \star f$ in $su(n)$ signalisiert, dass ein zusätzliches $U(1)$ -Eichboson angekoppelt werden muss, um so $SU(n)$ zu $U(n)$ [75, 76] zu vergrößern.

6.6 Nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie

Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, verschwinden jenseits der Dreipunkt-Amplitude alle Tree-Niveau-Amplituden des $N=2$ fermionischen Strings. Die vollständigen $N=2$ String-Amplituden beinhalten schon auf Tree-Niveau eine Summation über Weltflächensektoren, die durch die erste Chern-Zahl des $U(1)$ -Bündels der R-Symmetrie charakterisiert werden. Dadurch wird jede primitive Amplitude in eine Funktion $A(G_s, \vartheta)$ nicht nur der offenen String-Kopplung G_s , sondern eines Instanton-(Theta)-Winkels ϑ [36] überführt. Überraschenderweise verhält sich $\sqrt{G_s}(\cos \frac{\vartheta}{2}, \sin \frac{\vartheta}{2})$ unter $SO(2, 2)$ -„Lorentz“-Transformationen wie ein $(\frac{1}{2}, 0)$ Spinor, so dass in einem geeigneten Lorentz-System $G_s=1$ und $\vartheta=0$ gesetzt werden kann [36]. Die resultierende Drei-String-Amplitude³ (in flachem $\mathbb{R}^{2,2}$ mit $B=0$)

$$\begin{aligned} T_3(1, 2, 3) &= A_3(1, 2, 3) \text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) + A_3(2, 1, 3) \text{tr}(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3) \\ &= k_1^+ \wedge k_2^+ \text{tr}(\lambda_{[1} \lambda_{2]}) \lambda_3, \end{aligned} \quad (6.47)$$

³ $k_i^+ \wedge k_j^+ := k_{i4} k_{j1} - k_{i4} k_{j3} + k_{i2} k_{j1} - k_{i2} k_{j3} - (i \leftrightarrow j)$

stellt die total-symmetrische kubische Wechselwirkung des Leznov-Präpotentials ϕ [30] für selbstduale Yang-Mills-Theorie dar [36] (vgl. Kapitel 3). Für mehr als drei äußere Beine verschwindet jede Tree-Niveau-Streuamplitude des $N=2$ Strings aufgrund der kinematischen Identität

$$k_1^+ \wedge k_2^+ \frac{1}{s_{12}} k_3^+ \wedge k_4^+ + k_2^+ \wedge k_3^+ \frac{1}{s_{23}} k_1^+ \wedge k_4^+ + k_3^+ \wedge k_1^+ \frac{1}{s_{31}} k_2^+ \wedge k_4^+ = 0 \quad (6.48)$$

bereits auf dem Niveau der *einfachen* Amplituden, d.h. $A(1, 2, \dots, L > 3) = 0$. Die kinematische Beziehung ist nur in 2+2 Dimensionen [10, 23] gültig und führt dazu, dass die Identität

$$\bar{A}_4(1, 2, 3, 4) := k_1^+ \wedge k_2^+ \frac{1}{s_{12}} k_3^+ \wedge k_4^+ \quad (6.49)$$

total-antisymmetrisch in allen Indizes ist.

Das Verschwinden von Amplituden kann mit der Existenz von Symmetrien in Verbindung gebracht werden (und vice versa). Für den $N=2$ String verschwindet eine unendliche Anzahl von Tree-Niveau-Streuamplituden und daher ist eine unendliche Anzahl von Symmetrien zu erwarten. Für offene $N=2$ Strings sind diese Symmetrien in [82, 83] beschrieben worden.

Durch Beschränkung auf den Null-Instanton-Sektor (oder äquivalent hierzu durch Mittelung über ϑ) lässt sich auch die gewöhnlich verwendete Yang-Eichung [33] erhalten. Die totalen $N=2$ String-Amplituden produzieren jedoch eine selbstduale Yang-Mills-Theorie in der *Leznov-Eichung*. Letztere bietet sich aufgrund der einfacheren Feldgleichungen an, die in diesem Fall lediglich quadratisch sind und folglich nicht zu weiteren Feldtheorie-Vertizes als den kubischen in (6.47) führen (vgl. hierzu Kapitel 3). Durch Verwenden der „magischen“ Identität (6.48) ist tatsächlich einfach zu beweisen, dass die Summe der *s*-, *t*-, und *u*-Kanal-Diagramme bereits für die Feldtheorie-Vierpunkt-Funktion verschwindet, was keinen Platz für einen quartischen Vertex lässt [31]. Dieses Resultat kann auf alle Tree-Amplituden verallgemeinert werden (siehe hierzu [32]).

Die Verallgemeinerung auf einen Hintergrund mit nicht verschwindendem konstanten B -Feld ist einfach. Es werden im Folgenden nur „magnetische“ Komponenten des B Felds eingeschaltet, um so die Möglichkeit eines sinnvollen Seiberg-Witten-Übergangs zur nichtkommutativen Eichtheorie zu haben.

Die Drei-String-(Leznov-)Amplitude wird modifiziert zu

$$T_3(1, 2, 3) = A_3(1, 2, 3) [\text{tr}(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) E(1, 2, 3) - \text{tr}(\lambda_2 \lambda_1 \lambda_3) E(2, 1, 3)], \quad (6.50)$$

während das „dressing“ der höheren einfachen Amplituden A mit Phasenfaktoren E nichts an ihrem Verschwinden ändert. Dies führt zur kubischen Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi + \frac{1}{3} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \text{tr} \phi \star \hat{\partial}_{0\dot{\alpha}} \phi \star \hat{\partial}_{0\dot{\beta}} \phi \quad (6.51)$$

mit nichtkommutativem \star Produkt. Es ist $\hat{\partial}_{00} := \hat{\partial}_2 + \hat{\partial}_4$ und $\hat{\partial}_{0i} := \hat{\partial}_1 - \hat{\partial}_3$, wobei $\hat{\partial}_{\hat{\mu}} := e_{\hat{\mu}}^\nu \partial_\nu$ mit der Hilfe des Vierbeins (6.33) definiert wird.

In Übereinstimmung mit der allgemeinen Diskussion [11] erwartet man, dass der $N=2$ String in einem konstanten B -Feld-Hintergrund identisch zu nichtkommutativer selbstdualer Yang-Mills-Theorie [84, 85] in der Leznov-Eichung (beschrieben

durch den Lagrangedichte (6.51)) ist. Letztere besitzt nur einen kubischen Wechselwirkungsverteck (für das Leznov-Präpotential ϕ), daher sollten alle Feldtheorie-Amplituden auf Tree-Niveau (mit mehr als drei äußeren Beinen), die man mittels der auf (6.50) basierenden Feynman Regeln erhält, Null sein. Als nicht triviale Überprüfung dieser Annahme wird jetzt das Verschwinden der Vierpunkt-Funktion für nichtkommutative selbstduale $U(n)$ -Yang-Mills-Theorie gezeigt.

Die *Feldtheorie*-Vierpunkt-Funktion T_4^{Leznov} für das Leznov Präpotential $\phi \in u(n)$ ist eine Summe über 24 Permutationen von

$$\begin{aligned} T_3(1, 2, \cdot) \frac{-1}{s} T_3(\cdot, 3, 4) &= \\ &= \frac{-1}{s} A_3(1, 2, \cdot) A_3(\cdot, 3, 4) \sum_x \text{tr}[\Lambda(1, 2)\lambda_x] \text{tr}[\lambda_x \Lambda(3, 4)] \\ &= \frac{1}{2} \bar{A}_4(1, 2, 3, 4) \text{tr}[\Lambda(1, 2)\Lambda(3, 4)], \end{aligned} \quad (6.52)$$

wobei die letzte Gleichung unter Verwendung von (6.41) erhalten wird. Aufgrund der totalen Antisymmetrie der Permutationssumme kann \bar{A}_4 aus dieser herausgezogen werden, die damit die Form

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_4} (-)^\pi \text{tr}[\Lambda(\pi_1, \pi_2)\Lambda(\pi_3, \pi_4)] &= \\ &= 4 \sum_{\pi \in \mathcal{S}_4} (-)^\pi \text{tr}[\lambda_{\pi_1} \lambda_{\pi_2} \lambda_{\pi_3} \lambda_{\pi_4}] E(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \end{aligned} \quad (6.53)$$

hat. Jeder Term unter der Summe ist zyklisch invariant, so dass sich die vier Beiträge zu jedem Zyklus paarweise aufheben. Es ergibt sich also

$$T_4^{\text{Leznov}}(1, 2, 3, 4) = 0. \quad (6.54)$$

Die Yang-Eichung führt selbstverständlich auf das gleiche Resultat. Da der Gradient von ϕ auf das Yang-Mills-Eichpotential führt, erhält man aus T_4^{Leznov} die Vier-Gluon-Amplitude durch Multiplikation der Beinfaktoren. Diese verschwindet folglich auch im nichtkommutativen Fall.

6.7 Die Vierpunkt-Amplitude: Das Beispiel $U(2)$

In diesem Fall besteht das Leznov-Präpotential aus einem $su(2)$ -Triplet ϕ^T und einem $su(2)$ -Singulett ϕ^S , das vom $U(1)$ -Eichboson stammt. Als Generatoren seien $\lambda_a = \frac{i}{2} \sigma_a$, $a=1, 2, 3$ und $\lambda_0 = \frac{i}{2} \mathbf{1}$ gewählt.

Folgende Vertizes beinhalten Triplet-Zustände:

$$\begin{aligned} T_3^{TTT}(1, 2, 3) &= \frac{1}{2} k_1^+ \wedge k_2^+ c_{12} \epsilon_{123} \quad \text{und} \\ T_3^{TTS}(1, 2, 3) &= -\frac{1}{2} k_1^+ \wedge k_2^+ s_{12} \delta_{12}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

wobei

$$c_{ij} := \cos(\frac{1}{2} k_i \theta k_j) \quad \text{und} \quad s_{ij} := \sin(\frac{1}{2} k_i \theta k_j). \quad (6.56)$$

Jetzt setzen wir die Vier-Triplett-Amplitude T_4^{Leznov} zusammen. Triplett-Austausch im s -, t -, und u -Kanal führt zu

$$\begin{aligned} T_4^{(T)} &= -\frac{1}{4} \bar{A}_4(1, 2, 3, 4) \times \\ &\quad \sum_{x=1,2,3} [c_{12}c_{34} \epsilon_{12x}\epsilon_{x34} + c_{23}c_{14} \epsilon_{23x}\epsilon_{x14} + c_{31}c_{24} \epsilon_{31x}\epsilon_{x24}] \\ &= -\frac{1}{4} \bar{A}_4(1, 2, 3, 4) [\delta_{12}\delta_{34}(c_{23}c_{14} - c_{31}c_{24}) + \delta_{23}\delta_{14}(c_{31}c_{24} - c_{12}c_{34}) \\ &\quad + \delta_{31}\delta_{24}(c_{12}c_{34} - c_{23}c_{14})], \end{aligned} \quad (6.57)$$

während der Singulett-Austausch

$$T_4^{(S)} = -\frac{1}{4} \bar{A}_4(1, 2, 3, 4) [s_{12}s_{34} \delta_{12}\delta_{34} + s_{23}s_{14} \delta_{23}\delta_{14} + s_{31}s_{24} \delta_{31}\delta_{24}] \quad (6.58)$$

produziert. Obwohl die einzelnen Summen nicht verschwinden (für $\theta \neq 0$), verschwindet ihre Summe $T_4^{\text{Leznov}} = T_4^{(T)} + T_4^{(S)}$, wie man mittels

$$c_{23}c_{14} - c_{31}c_{24} + s_{12}s_{34} = 0 \quad (6.59)$$

unter Verwendung von Impulserhaltung leicht zeigen kann. Für $\mathcal{G}=U(n)$, $\epsilon_{abc} \rightarrow f_{abc}$, tauchen aufgrund des Nichtverschwindens des symmetrischen $SU(n)$ -Rang-Dreitensors d_{abc} zusätzliche kubische Kopplungen auf.

Als Resultat dieses Kapitels können wir zusammenfassen, dass nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie (auf Tree-Niveau) identisch zum $N=2$ String in einem konstanten B -Feld ist, solange man keine reine $SU(n)$ oder eine „exzeptionelle“ Eichgruppe verwendet.

KAPITEL 7

SOLITONEN

Solitonische Lösungen von Bewegungsgleichungen spielen eine wesentliche Rolle in unserem Verständnis von Feld- und Stringtheorien jenseits der Störungstheorie. Dieses gilt auch für die nichtkommutative Erweiterung von skalaren und Eichfeldtheorien, die sich in letzter Zeit besonderen Interesses erfreuen, da sie auf natürliche Art und Weise in Stringtheorien auftauchen [66, 67, 68, 69, 70].

Im vorherigen Kapitel betrachteten wir B -Felder auf $(2+2)$ -Branes und zeigten, dass die effektive Wirkung der nichtkommutativen $N=2$ Stringtheorie durch nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie gegeben ist.

Ausgehend von den $(2+2)$ -Branes, deren Weltvolumina den flachen Targetraum $\mathbb{R}^{2,2}$ ausfüllen, ist es interessant, niedriger-dimensionale D-Branes zu betrachten und die effektiven Feldtheorien zu beschreiben, die im Seiberg-Witten-Limes auf deren jeweiligen Weltvolumina entstehen. Wir zeigen im Folgenden zunächst, dass offene $N=2$ Strings in einem B -Feld-Hintergrund auf n übereinanderliegenden $(2+1)$ -Branes eine nichtkommutative Verallgemeinerung eines modifizierten $U(n)$ -Sigma-Modells (mit einem Term vom Wess-Zumino-Typ) [26] induzieren. Dieses Modell ist äquivalent zu nichtrelativistischer Chern-Simons-Theorie, die an Higgs-Felder gekoppelt ist [86]. Für n übereinanderliegende $(1+1)$ -Branes bzw. $(2+0)$ -Branes erhalten wir das Standard- $U(n)$ -Sigma-Modell in $1+1$ Dimensionen bzw. seine euklidische Variante.

In der Vergangenheit sind eine Vielzahl von solitonischen Lösungen für nichtkommutative Yang-Mills- und Yang-Mills-Higgs-Theorien konstruiert worden (siehe [87] und dort zitierte Literatur). Viele dieser Lösungen wurden mittels einer „Lösungsgenerierungstechnik“, wie sie in [88] vorgeschlagen wurde, gefunden. Wir zeigen im Folgenden für „*integrable*“ nichtkommutative Feldtheorien eine alternative und bessere Möglichkeit. Immer dann, wenn Bewegungsgleichungen als hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit einer *linearen* Gleichung geschrieben werden können, existiert eine allgemeinere Technik, mittels derer aus alten Lösungen neue konstruiert werden können. Dieses Verfahren ist in der Literatur als „*dressing*“-Methode bekannt [89, 90, 91].

Wir übertragen diese Methode auf den nichtkommutativen Fall und wenden ihn auf das oben erwähnte nichtkommutative modifizierte Sigma-Modell in $2+1$ Dimensionen an. Wir skizzieren, wie *Multi*-Soliton-Konfigurationen mit zufälligen relativen Bewegungen der individuellen „Energieklumpen“ konstruiert werden können. Explizit illustrieren wir das Schema am Beispiel der Ein-Soliton-Lösungen für die

Eichgruppen $U(1)$ und $U(2)$ und berechnen deren Energie.

Da das Modell weder relativistische noch Rotationsinvarianz besitzt, hängt die Energie des nichtkommutativen Solitons von seiner Bewegungsrichtung ab. In einigen Richtungen fällt die Energie sogar *unter* die Ruheenergie. Setzt man alle Geschwindigkeiten auf Null, erhält man statische Konfigurationen, die die Instantonen des nichtkommutativen zweidimensionalen Sigma-Modells darstellen. Im allgemeinen Fall entsprechen die Solitonen auf String-Niveau (0+1)-Branes, die sich innerhalb von (2+1)-Branes bewegen.

7.1 Der Ansatz

Unsere Metrik hat die Form

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(\xi_1, \xi_1, -\xi_2, -\xi_2), \quad (7.1)$$

wobei $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}_+$ Skalenparameter sind. Wir betrachten n übereinanderliegende Dp -Branes für $p = 2, 3$ (d.h. die (2+2)-, (2+1)- und (1+1)-Brane) und eichen alle B -Feld Komponenten senkrecht zum D -Brane Weltvolumen zu Null.

Das allgemeinste nicht triviale „magnetische“ Feld $B = (B_{\mu\nu})$ besitzt die Komponenten

$$B_{12} = -B_{21} =: B_1, \quad B_{34} = -B_{43} =: B_2. \quad (7.2)$$

Jedoch kann abhängig von der Dimension und der Orientierung der D -Branes einer der beiden Parameter Null sein. Für die effektive offene Kopplungskonstante G_s (siehe Kapitel 6) erhalten wir

$$G_s = g_s \left[\left(1 + \left(2\pi \frac{\alpha'}{\xi_1} B_1\right)^2\right) \left(1 + \left(2\pi \frac{\alpha'}{\xi_2} B_2\right)^2\right) \right]^{1/2} = (2\pi)^{2-p} (\alpha')^{\frac{3-p}{2}} g_{\text{YM}}^2. \quad (7.3)$$

g_{YM} ist hierbei die Yang-Mills Kopplung auf der Dp -Brane [11].

(2+2)-Branes.

Wir betrachten n übereinanderliegende (2+2)-Branes mit Weltvolumensignatur $(++--)$. Im Seiberg-Witten-Limes $\alpha' \rightarrow 0$ finden wir $\xi_1 = \xi_2 = (\alpha')^2 \rightarrow 0$ (und daher $g_{\mu\nu} \rightarrow 0$), wobei G , G^{-1} und θ endlich bleiben. Wir reskalieren jetzt die Koordinaten

$$x^1 \rightarrow 2\pi B_1 x^1, \quad x^2 \rightarrow 2\pi B_1 x^2, \quad x^3 \rightarrow 2\pi B_2 x^3, \quad x^4 \rightarrow 2\pi B_2 x^4 \quad (7.4)$$

und bezeichnen sie in der Folge mit demselben Buchstaben x^μ . Die Komponenten von G und θ müssen entsprechend transformiert werden, da sie Tensoren vom Rang zwei sind

$$(G^{\mu\nu}) \rightarrow (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, +1, -1, -1) \quad ,$$

$$\theta^{12} = -\theta^{21} \rightarrow -4\pi^2 B_1, \quad \theta^{34} = -\theta^{43} \rightarrow -4\pi^2 B_2. \quad (7.5)$$

In diesen Koordinaten entspricht der kommutative Limes $\theta \rightarrow 0$ dem Grenzübergang $B \rightarrow 0$.

(2+1)-Branes.

Als nächstes gilt unser Augenmerk n übereinanderliegenden (2+1)-Branes mit Weltvolumen in (x^1, x^2, x^4) -Richtung. In diesem Fall setzen wir $\xi_1 = (\alpha')^2$, aber $\xi_2 = 1$. Der Seiberg-Witten-Limes ist wiederum $\alpha' \rightarrow 0$. Die Reskalierung

$$x^1 \rightarrow 2\pi B_1 x^1, \quad x^2 \rightarrow 2\pi B_1 x^2, \quad x^3 \rightarrow x^3, \quad x^4 \rightarrow x^4 \quad (7.6)$$

lässt in diesem Fall die inverse offene String-Metrik und den Nichtkommutativitätsparameter übergehen in

$$(G^{\mu\nu}) \rightarrow (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, +1, -1, -1), \quad \theta^{12} = -\theta^{21} \rightarrow -4\pi^2 B_1 =: \theta \quad (7.7)$$

(es ist $\theta^{34}=0$). Offensichtlich kann die (2+1)-Brane aus den (2+2)-Brane-Gleichungen durch die Forderung $B_2 \equiv 0$ erhalten werden. Man beachte, dass wir für die euklidische (2+0)-Brane wieder die Gleichungen (7.7) erhalten.

7.2 Effektive Feldtheorien auf D-Brane-Weltvolumina

Wie in Kapitel 6 gezeigt, führt das Einschalten eines nicht verschwindenden konstanten B -Feld-Hintergrunds zu *nichtkommutativer* selbstdualer Yang-Mills-Theorie als effektiver Feldtheorie im Targetraum. Wir führen diese Analyse nun für den Fall fort, dass das B -Feld auf dem Weltvolumen niedriger-dimensionaler D -Branes liegt.

Das Einschalten des B -Felds bewirkt zum einen, dass in den Propagatoren $g \rightarrow G$ ersetzt wird. Der einzige weitere Effekt ist, dass jede einfache offene String-Amplitude, die man bei $\theta=0$ aus einem Scheibendiagramm mit fixierter Ordnung der äußeren Beine $(1, 2, \dots, M)$ erhält, mit einem Faktor

$$\prod_{1 \leq j < \ell \leq M} \exp \left\{ -\frac{i}{2} k_{j\mu} \theta^{\mu\nu} k_{\ell\nu} \right\} \quad (7.8)$$

multipliziert wird. Mit k_j bezeichnen wir hier den Impuls des j ten äußeren Beins. Wie in [11] ausführlich dargelegt, kann der Effekt dieser Phase (7.8) in der effektiven Weltvolumentheorie dadurch beschrieben werden, dass man das normale Produkt durch das Moyal-Weyl-Produkt ersetzt.

(2+2)-Branes.

Der kubische Lagrangedichte für das $u(n)$ -wertige Leznov-Präpotential ϕ ist

$$L = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu \phi \star \partial_\nu \phi + \frac{1}{3} \text{tr} \phi \star [(\partial_2 + \partial_4) \phi \star (\partial_1 - \partial_3) \phi - (\partial_1 - \partial_3) \phi \star (\partial_2 + \partial_4) \phi], \quad (7.9)$$

wobei „tr“ die Spur über die $u(n)$ -Algebra ist und die Multiplikation der Felder mittels des nichtkommutativen Sternprodukts

$$(f \star g)(x) = f(x) \exp \left\{ \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right\} g(x) \quad (7.10)$$

vorzunehmen ist.

(2+1)-Branes.

Für den Fall von n übereinanderliegenden (2+1)-Branes führen unsere Überlegungen zur Lagrangedichte

$$L = \frac{1}{2} \eta^{ab} \text{tr} \partial_a \phi \star \partial_b \phi + \frac{1}{3} \text{tr} \phi \star [(\partial_2 + \partial_4) \phi \star \partial_1 \phi - \partial_1 \phi \star (\partial_2 + \partial_4) \phi], \quad (7.11)$$

wobei $a, b, \dots = 1, 2, 4$. In Übereinstimmung mit obiger Diskussion kann die Lagrangedichte (7.11) aus (7.9) erhalten werden kann, indem die Theorie von einem (2+2)-Brane-Weltvolumen zu einem (2+1)-Brane-Weltvolumen durch die Bedingung $\partial_3\phi = 0$ dimensional reduziert wird. Unsere Wahl des B -Feldes impliziert dann (siehe (7.7)), dass die Zeitkoordinate x^4 kommutativ wird.

Für die folgenden Schritte benennen wir die Koordinaten wie folgt um:

$$x = x^1, \quad y = x^2, \quad t = -x^4. \quad (7.12)$$

Die Lagrangedichte (7.11) produziert eine Bewegungsgleichung vom Leznov-Typ

$$\partial_x^2\phi - \partial_u\partial_v\phi + \partial_v\phi \star \partial_x\phi - \partial_x\phi \star \partial_v\phi = 0, \quad (7.13)$$

wobei wir definiert haben

$$u := \frac{1}{2}(t+y), \quad v := \frac{1}{2}(t-y), \quad \partial_u = \partial_t + \partial_y, \quad \partial_v = \partial_t - \partial_y. \quad (7.14)$$

(1+1)-Branes.

Wir betrachten jetzt offene $N=2$ Strings, die auf n übereinanderliegenden (1+1)-Branes enden, welche sich in die x -Richtung erstrecken. Im Seiberg-Witten-Limes erhalten wir eine effektive Feldtheorie auf dem (1+1)-Brane-Weltvolumen $\mathbb{R}^{1,1}$, charakterisiert durch die folgenden Bewegungsgleichung

$$\partial_x^2\phi - \partial_t^2\phi + \partial_t\phi \star \partial_x\phi - \partial_x\phi \star \partial_t\phi = 0. \quad (7.15)$$

Alternativ sehen wir, dass für (2+0)-Branes die effektive skalare Feldtheorie auf $\mathbb{R}^{2,0}$ die Gleichung

$$\partial_x^2\phi + \partial_y^2\phi + \partial_x\phi \star \partial_y\phi - \partial_y\phi \star \partial_x\phi = 0 \quad (7.16)$$

erfüllt. Offensichtlich erhält man die Gleichungen (7.15) und (7.16) aus Gleichung (7.13) durch die Forderung $\partial_y\phi = 0$ beziehungsweise $\partial_t\phi = 0$.

Operator-Formalismus.

Im Folgenden konzentrieren wir uns auf eine nichtkommutative Feldtheorie in 2+1 Dimensionen (7.11), die im Seiberg-Witten Limes offener $N=2$ Strings mit n übereinanderliegenden (2+1)-Branes und einem konstanten B -Feld-Hintergrund entsteht. Es ist bekannt, dass das Sternprodukt in ein normales Produkt überführt werden kann, wenn man den Übergang zu nichtkommutativen Koordinaten durchführt, wobei die Relation $x^\mu \rightarrow \hat{x}^\mu$, mit der Relation $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$ gilt. Im Kontext der (2+1)-Branes bedeutet dies, dass $(t, x, y) \rightarrow (t, \hat{x}, \hat{y})$, wobei gilt

$$[t, \hat{x}] = [t, \hat{y}] = 0, \quad [\hat{x}, \hat{y}] = i\theta \quad \text{mit} \quad \theta = -4\pi^2 B_1 > 0. \quad (7.17)$$

Die Metrik $(\eta_{ab}) = \text{diag}(+1, +1, -1)$ und der Parameter θ lassen sich aus Gleichung (7.7) ablesen.

Mittels komplexer nichtkommutativer Koordinaten $\hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}$ und $\hat{\bar{z}} = \hat{x} - i\hat{y}$ lassen sich Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren definieren durch

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \hat{z} \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \hat{\bar{z}}, \quad \text{so dass} \quad [a, a^\dagger] = 1. \quad (7.18)$$

Diese wirken wie üblich auf den Fock-Raum \mathcal{H} mit der orthonormalen Basis $\{|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots\}$

$$a|0\rangle = 0, \quad a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \quad (7.19)$$

Jede Funktion $f(t, z, \bar{z})$ kann so zu einer operatorwertigen Funktion $\hat{f}(t)$, die auf \mathcal{H} wirkt, mittels der Moyal-Weyl-Abbildung (vgl. [92, 93])

$$f(t, z, \bar{z}) \longrightarrow \hat{f}(t) = \int \frac{2i \, dp \, d\bar{p}}{(2\pi)^2} \tilde{f}(t, p, \bar{p}) e^{-i\sqrt{2\theta}(\bar{p}a + pa^\dagger)}, \quad (7.20)$$

in Bezug gesetzt werden. Hierbei ist $\tilde{f}(t, p, \bar{p})$ die Fourier-Transformierte bezüglich (z, \bar{z}) von $f(t, z, \bar{z})$. Unter dieser Abbildung erhalten wir $f \star g \rightarrow \hat{f} \hat{g}$ und

$$\int dx \, dy \, f \longrightarrow 2\pi\theta \, \text{Tr} \, \hat{f} = 2\pi\theta \sum_{n \geq 0} \langle n | \hat{f} | n \rangle, \quad (7.21)$$

wobei „Tr“ die Spur über den Fock-Raum \mathcal{H} bezeichnet. Die Operator-Formulierung macht aus räumlichen Ableitungen Kommutatoren

$$\partial_x f \longrightarrow \frac{i}{\theta} [\hat{y}, \hat{f}] =: \hat{\partial}_x \hat{f} \quad \text{und} \quad \partial_y f \longrightarrow -\frac{i}{\theta} [\hat{x}, \hat{f}] =: \hat{\partial}_y \hat{f}. \quad (7.22)$$

Um die Notation übersichtlich zu halten, verzichten wir in der Folge auf den Hut über den Operatoren.

In der Operatorsprache kann die Gleichung vom Leznov-Typ (7.13) in folgender Form geschrieben werden

$$\partial_x^2 \phi - \partial_u \partial_v \phi + [\partial_v \phi, \partial_x \phi] = 0. \quad (7.23)$$

Die Elemente der $u(n)$ Matrizen ϕ sind t -abhängige Operatoren im Fock-Raum \mathcal{H} , die Ableitungen ∂_x , $\partial_u = \partial_t + \partial_y$ und $\partial_v = \partial_t - \partial_y$ sind wie in (7.22) zu verstehen.

7.3 Nichtkommutative Solitonen in 2+1 Dimensionen

Aufbauend auf dem vorherigen Abschnitt konstruieren wir jetzt klassische solitonische Konfigurationen für die effektive Feldtheorie der offenen $N=2$ Strings auf übereinanderliegenden nichtkommutativen (2+1)-Branes. Wir bedienen uns, wie bereits erwähnt, der „dressing“-Methode, deren Anwendung auf integrable Modelle zurück geht auf [89, 90, 91]. Nach einer detaillierten Beschreibung des Lösungsprinzips übertragen wir die Methode auf den nichtkommutativen Fall. Explizit leiten wir Ein-Soliton-Konfigurationen für $U(1)$ - und $U(2)$ -Eichgruppen her und berechnen deren Energie.

Lineares System.

Ausgangspunkt sind die beiden linearen Gleichungen

$$(\zeta \partial_x - \partial_u) \psi = A \psi \quad \text{und} \quad (\zeta \partial_v - \partial_x) \psi = B \psi, \quad (7.24)$$

die man durch Eichfixierung und die Forderung $\partial_3\psi = 0$ aus dem Lax-Paar für selbstduale Yang-Mills-Gleichungen in $\mathbb{R}^{2,2}$ erhält [82].

ψ hängt von (t, x, y, ζ) bzw. äquivalent hierzu von (x, u, v, ζ) ab und ist eine $n \times n$ -Matrix, deren Elemente als Operatoren im Fock-Raum \mathcal{H} wirken. Die Matrizen A und B sind vom gleichen Typ wie ψ , hängen jedoch nicht von ζ ab. Der Spektral-Parameter ζ liegt in der erweiterten komplexen Ebene. Für die Matrix ψ fordern wir die folgende Realitätsbedingung [26]:

$$\psi(t, x, y, \zeta) [\psi(t, x, y, \bar{\zeta})]^\dagger = 1, \quad (7.25)$$

wobei „ \dagger “ die hermitesche Konjugation bezeichnet. Wir fordern für ψ die übliche Asymptotik [82]

$$\psi(t, x, y, \zeta \rightarrow \infty) = 1 + \zeta^{-1}\phi(t, x, y) + O(\zeta^{-2}), \quad (7.26)$$

$$\psi(t, x, y, \zeta \rightarrow 0) = \Phi^{-1}(t, x, y) + O(\zeta). \quad (7.27)$$

Kompatibilitätsbedingungen.

Die Kompatibilitätsbedingungen für das lineare System von Differentialgleichungen (7.24) sind

$$\partial_x B - \partial_v A = 0, \quad (7.28)$$

$$\partial_x A - \partial_u B - [A, B] = 0. \quad (7.29)$$

Eine Lösung zu (7.28) ist gegeben durch

$$A = \partial_x \phi \quad \text{und} \quad B = \partial_v \phi. \quad (7.30)$$

ϕ ist die gleiche Matrix wie in (7.26). Setzt man (7.30) in (7.29) ein, reproduziert man die Gleichung zweiter Ordnung (7.23), wodurch ϕ als das Leznov-Feld identifiziert wird.

Alternativ kann man zuerst (7.29) durch

$$A = \Phi^{-1} \partial_u \Phi \quad \text{und} \quad B = \Phi^{-1} \partial_x \Phi \quad (7.31)$$

lösen, wobei Φ^{-1} der Matrix in (7.27) entspricht. Durch Einsetzen von (7.31) in die verbleibende Bedingung (7.28) erhält man eine äquivalente Form unserer Feld-Gleichung vom Yang-Typ (7.23). Konkret finden wir

$$\partial_x(\Phi^{-1} \partial_x \Phi) - \partial_v(\Phi^{-1} \partial_u \Phi) = 0. \quad (7.32)$$

Bei Rücktransformation in die Originalkoordinaten

$$\partial_x(\Phi^{-1} \partial_x \Phi) + \partial_y(\Phi^{-1} \partial_y \Phi) - \partial_t(\Phi^{-1} \partial_t \Phi) + \partial_y(\Phi^{-1} \partial_t \Phi) - \partial_t(\Phi^{-1} \partial_y \Phi) = 0, \quad (7.33)$$

stellt man fest, dass diese Gleichung nicht $SO(2,1)$ -Lorentz-invariant ist. Die Gleichung ist die integrable Bewegungsgleichung eines modifizierten Sigma-Modells in 2+1 Dimensionen [26]. Wir wollen abschließend anmerken, dass (7.30) und (7.31)

auch direkt aus (7.24) und den asymptotischen Bedingungen (7.26) und (7.27) folgen.

Lösungen.

Um Lösungen der Gleichungen (7.23) und (7.32) zu finden, verwenden wir die „dressing“-Methode, d.h. wir suchen nach Lösungen zum System (7.24) der Form

$$\psi(t, x, y, \zeta) = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\zeta - \mu_k} P_k(t, x, y) \quad (7.34)$$

mit der Bedingung (7.25). Die μ_k sind komplexe Konstanten (wir wählen $\text{Im } \mu_k < 0$ für alle k) und die Matrizen P_k unabhängig von ζ . Im kommutativen Fall beschreibt ψ *m sich bewegende* Solitonen, die trivial streuen und deren Geschwindigkeiten durch die Konstanten μ_k determiniert sind. Unterwerfen wir den Ansatz (7.34) der Realitätsbedingung (7.25), so finden wir, dass die P_k bestimmte algebraische Gleichungen erfüllen müssen. Eine Lösung dieser Gleichungen findet man, indem die P_k als paarweise orthogonale hermitesche Projektoren gewählt werden:

$$P_k^\dagger = P_k, \quad P_k^2 = P_k, \quad P_{k_1} P_{k_2} = 0 \quad \text{für } k_1 \neq k_2. \quad (7.35)$$

Ausgehend von (7.24) und (7.25) erkennen wir, dass gilt

$$A(t, x, y) = (\zeta \partial_x \psi - \partial_u \psi)(t, x, y, \zeta) [\psi(t, x, y, \bar{\zeta})]^\dagger, \quad (7.36)$$

$$B(t, x, y) = (\zeta \partial_v \psi - \partial_x \psi)(t, x, y, \zeta) [\psi(t, x, y, \bar{\zeta})]^\dagger. \quad (7.37)$$

Die Matrizen A und B sind von ζ unabhängig; daher müssen die Pole bei $\zeta = \mu_k$ auf der rechten Seite von (7.36) und (7.37) hebbbar sein. Dies führt auf die folgenden Differentialgleichungen für die Projektoren P_k

$$(\mu_k \partial_x P_k - \partial_u P_k) \left(1 - \sum_{\ell=1}^m \frac{\mu_\ell - \bar{\mu}_\ell}{\mu_k - \bar{\mu}_\ell} P_\ell \right) = 0 \quad (7.38)$$

beziehungsweise

$$(\mu_k \partial_v P_k - \partial_x P_k) \left(1 - \sum_{\ell=1}^m \frac{\mu_\ell - \bar{\mu}_\ell}{\mu_k - \bar{\mu}_\ell} P_\ell \right) = 0. \quad (7.39)$$

Sei r_k der Rang der Matrix P_k und $n \geq 2$, dann lässt sich P_k immer in der Form

$$P_k = T_k (T_k^\dagger T_k)^{-1} T_k^\dagger \quad \text{für } k = 1, \dots, m \quad (7.40)$$

schreiben, wobei die T_k beliebige $n \times r_k$ Matrizen sind, welche die Bedingung $T_k^\dagger T_\ell = 0$ für $k \neq \ell$ erfüllen. Wie zuvor sind die Elemente von T_k, T_k^\dagger und P_k Fock-Raum-Operatoren. Durch Einsetzen von (7.40) in (7.38) bzw. (7.39) finden wir, dass die Gleichungen (7.38), (7.39) dann erfüllt sind, wenn für die T_k^\dagger folgende Gleichungen gelten:

$$\mu_k \partial_x T_k^\dagger - \partial_u T_k^\dagger = 0 \quad \text{und} \quad \mu_k \partial_v T_k^\dagger - \partial_x T_k^\dagger = 0. \quad (7.41)$$

Die *allgemeine* Lösung zu diesen Gleichungen ist $T_k^\dagger = T_k^\dagger(\bar{w}_k)$, wobei wir definieren

$$w_k := x + \bar{\mu}_k u + \bar{\mu}_k^{-1} v = x + \frac{1}{2}(\bar{\mu}_k - \bar{\mu}_k^{-1}) y + \frac{1}{2}(\bar{\mu}_k + \bar{\mu}_k^{-1}) t. \quad (7.42)$$

Folglich gilt: falls die Matrixelemente von T_k beliebige holomorphe Funktionen der komplexen Linearkombination w_k der Koordinaten t, x, y sind, dann erfüllen die Projektoren (7.40) die Differentialgleichungen (7.38).

Der Ansatz (7.35) schränkt die Möglichkeiten der Beschreibung von *Multi-Soliton-Konfigurationen* zu sehr ein. Besser ist die Wahl (vgl. [26, 91])

$$P_k = \sum_{\ell=1}^m T_\ell \frac{\Gamma^{\ell k}}{\mu_k - \bar{\mu}_k} T_k^\dagger \quad \text{für } k = 1, \dots, m. \quad (7.43)$$

Die $T_k(t, x, y)$ sind jetzt nicht weiter festgelegte $n \times r$ Matrizen, während die $\Gamma^{\ell k}(t, x, y)$ $r \times r$ Matrizen mit $r \geq 1$ sind, so dass

$$\psi(t, x, y, \zeta) = 1 + \sum_{k,\ell=1}^m \frac{1}{\zeta - \mu_k} T_\ell \Gamma^{\ell k} T_k^\dagger \quad (7.44)$$

gilt. Durch Einsetzen von (7.44) in (7.25) erkennt man, dass die $\Gamma^{\ell k}$ die $r \times r$ Matrizen

$$\tilde{\Gamma}_{kp} = \frac{1}{\mu_k - \bar{\mu}_p} T_k^\dagger T_p \quad (7.45)$$

invertieren müssen, d.h.

$$\sum_{k=1}^m \Gamma^{\ell k} \tilde{\Gamma}_{kp} = \delta_p^\ell. \quad (7.46)$$

Verlangt man wiederum das Verschwinden der Residuen der Pole bei $\zeta = \mu_k$ auf der rechten Seite von (7.36) und (7.37), so erhält man die gleichen Differentialgleichungen wie zuvor, d.h. (7.41), jetzt jedoch mit den T_k^\dagger aus Ansatz (7.44). Folglich stellt auch hier wieder jede Kollektion von holomorphen Matrixfunktionen $T_k(w_k)$ eine Lösung dar.

Wir wollen anmerken, dass das Einsetzen des Ansatzes (7.34) in die Formeln (7.26) und (7.27) die Lösungen

$$\phi = \sum_{k=1}^m (\mu_k - \bar{\mu}_k) P_k \quad \text{und} \quad \Phi^{-1} = \Phi^\dagger = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{\mu_k - \bar{\mu}_k}{\mu_k} P_k \quad (7.47)$$

der Gleichungen (7.23) und (7.32) als Projektoren liefert. Für den Fall (7.43) nehmen die Lösungen die Form

$$\phi = \sum_{k,\ell=1}^m T_\ell \Gamma^{\ell k} T_k^\dagger \quad \text{und} \quad \Phi^{-1} = \Phi^\dagger = 1 - \sum_{k,\ell=1}^m \frac{1}{\mu_k} T_\ell \Gamma^{\ell k} T_k^\dagger \quad (7.48)$$

an. Man beachte, dass die Nichtkommutativität für unsere Betrachtungen nie Relevanz hatte.

Solitonen.

Die Formeln (7.47) und (7.48) repräsentieren zwei sehr allgemeine Klassen von expliziten Lösungen zu unseren Feldgleichungen vom Leznov- (7.23) und Yang-Typ (7.32). Als Lösungen zu den dimensional-reduzierten nichtkommutativen selbstdualen Yang-Mills-Gleichungen sind sie vom BPS-Typ. Durch die Forderung, dass die Energie einer solchen Feldkonfiguration endlich ist, spezialisieren wir uns auf *Solitonen* (d.h. sich bewegende „Energieklumpen“). Die folgenden Überlegungen werden erleichtert, wenn wir von der Leznov- in die Yang-Beschreibung wechseln, die vom $U(n)$ -wertigen Feld $\Phi(t, x, y)$ Gebrauch macht. Die Berechnung der Energie erfordert bereits im kommutativen Limes sehr viel Aufwand, wenn die Soliton-Konfiguration Φ zeitabhängig ist [26, 94, 95, 96]. Auf *Multi-Soliton*-Konfigurationen trifft dies in noch größerem Ausmaß zu. Um die Rechnungen handhabbarer zu machen, konzentrieren wir uns daher auf *Ein-Soliton* Lösungen für die Eichgruppen $U(1)$ und $U(2)$.

Wir setzen daher $m=1$, vernachlässigen die Indizes und erhalten folglich $\Gamma = \frac{\mu - \bar{\mu}}{T + T}$. Die Lösungen (7.47) und (7.48) vereinfachen sich zu

$$\phi = (\mu - \bar{\mu})P \quad \text{und} \quad \Phi = 1 + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\bar{\mu}}P. \quad (7.49)$$

Wir setzen voraus, dass μ nicht reell ist. Darüberhinaus ergibt sich $\partial_x = \partial_w + \partial_{\bar{w}}$ und

$$\begin{aligned} \partial_t &= \frac{1}{2}(\bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1})\partial_w + \frac{1}{2}(\mu + \mu^{-1})\partial_{\bar{w}}, \\ \partial_y &= \frac{1}{2}(\bar{\mu} - \bar{\mu}^{-1})\partial_w + \frac{1}{2}(\mu - \mu^{-1})\partial_{\bar{w}}, \end{aligned} \quad (7.50)$$

so dass sich (7.38) auf

$$(\partial_w P)(1 - P) = 0 \quad \implies \quad (1 - P)\partial_{\bar{w}}P = 0 \quad (7.51)$$

reduziert.

Wie erwähnt, hängen die Lösungen Φ nur durch w und \bar{w} von t, x, y ab. Es ist daher bequemer, statt z, \bar{z} (wie sie in Abschnitt 7.2 verwendet wurden) die „mitbewegten“ Koordinaten w, \bar{w} zu benutzen. Für letztere gilt im Operator-Formalismus

$$[w, \bar{w}] = \frac{i}{2}\theta(\mu - \bar{\mu} - \mu^{-1} + \bar{\mu}^{-1}) =: 2\beta > 0 \quad \text{für} \quad \text{Im} \mu < 0. \quad (7.52)$$

Man beachte, dass für $\mu = i$ gilt $w \equiv z$ und $\beta = \theta$ (*statischer* Fall).

Wir führen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren c^\dagger und c zusammen mit dem Fock-Raum \mathcal{H}_t ein, die zu den „mitbewegten“ Koordinaten w, \bar{w} via

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{\sqrt{2\beta}}w, & c^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\beta}}\bar{w}, & |n\rangle_t &:= \frac{(c^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle_t, \\ c|0\rangle_t &= 0, & c|n\rangle_t &= \sqrt{n}|n-1\rangle_t, & c^\dagger|n\rangle_t &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle_t \end{aligned} \quad (7.53)$$

in Beziehung stehen. Koordinatenableitungen werden dann in der üblichen Art und Weise durch [92, 93]

$$\sqrt{2\beta}\partial_w \longrightarrow -[c^\dagger, \cdot], \quad \sqrt{2\beta}\partial_{\bar{w}} \longrightarrow [c, \cdot]. \quad (7.54)$$

dargestellt. Für den Fall kommutativer Raumzeit-Koordinaten existieren keine glatten Soliton-Lösungen von Feldern, die ihre Werte in der abelschen $U(1)$ -Gruppe oder deren Lie Algebra annehmen, da in diesem Fall die Gleichungen (7.23) und (7.32) linear sind. Im nichtkommutativen Fall ist dies nicht länger gegeben. Um (7.51) für den $U(1)$ -Fall zu lösen, kann man als einfachstes P

$$P_0 = |0\rangle_t \langle 0|_t \quad (7.55)$$

verwenden, d.h. den Projektor auf einen eindimensionalen Unterraum des Fockraums \mathcal{H}_t . Es ist unschwer zu erkennen, dass P_0 die Bedingung (7.51) erfüllt. Folglich erfüllen Konfigurationen (7.49) mit $P=P_0$ die Gleichungen (7.23) bzw. (7.32).

Wenden wir uns jetzt der Ein-Soliton-Lösung für die Gruppe $U(2)$ zu. In dieser Situation gilt $n = 2$ und der ($r=1$)-Projektor P kann ausgehend von einer 2×1 Matrix T konstruiert werden. Eine einfache Möglichkeit ist

$$T = \begin{pmatrix} \lambda \\ c \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (7.56)$$

wodurch der Projektor

$$P = T \frac{1}{T^\dagger T} T^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{\lambda \bar{\lambda}}{N + \lambda \bar{\lambda}} & \frac{\lambda}{N + \lambda \bar{\lambda}} c^\dagger \\ c \frac{\bar{\lambda}}{N + \lambda \bar{\lambda}} & c \frac{1}{N + \lambda \bar{\lambda}} c^\dagger \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

festgelegt wird. Dieser erfüllt (7.51), wobei $N := c^\dagger c$. Die Gleichungen (7.49) liefern nun Lösungen zu den Feldgleichungen (7.23) und (7.32).

Energien.

Wie im kommutativen Fall [26] besitzt auch das Modell (7.11) eine erhaltene Energie-Impuls-Dichte

$$\mathcal{P}_a = (\delta_a^b \delta_0^c - \frac{1}{2} \eta_{a0} \eta^{bc}) \text{tr } \partial_b \Phi^\dagger \star \partial_c \Phi, \quad (7.58)$$

die zum Energiefunktional

$$\begin{aligned} E &= \int dx dy \mathcal{P}_0 \\ &= \frac{1}{2} \int dx dy \text{tr} \left(\partial_t \Phi^\dagger \star \partial_t \Phi + \partial_x \Phi^\dagger \star \partial_x \Phi + \partial_y \Phi^\dagger \star \partial_y \Phi \right) \\ &= \frac{1}{4} \int dx dy \text{tr} \left[(\bar{\mu} + \bar{\mu}^{-1})^2 \partial_w \Phi^\dagger \star \partial_w \Phi + (\mu + \mu^{-1})^2 \partial_{\bar{w}} \Phi^\dagger \star \partial_{\bar{w}} \Phi \right. \\ &\quad \left. + (2 + \mu \bar{\mu} + \mu^{-1} \bar{\mu}^{-1}) (\partial_w \Phi^\dagger \star \partial_{\bar{w}} \Phi + \partial_{\bar{w}} \Phi^\dagger \star \partial_w \Phi) \right] \quad (7.59) \end{aligned}$$

führt, wobei der letzte Ausdruck nur für den Ein-Soliton-Fall gültig ist. Die Integration wird über die raumartige Fläche $t = \text{const.}$ durchgeführt und hängt nicht von t ab.

Verwendet man (7.53) sowie (7.54) und ersetzt $\int dx dy \operatorname{tr} \rightarrow 2\pi\theta \operatorname{Tr} \equiv 2\pi\theta \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}_t}$, kann man die Energie (7.59) des abelschen Solitons $\Phi = 1 + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} P_0$ berechnen:

$$\begin{aligned} E(\mu)|_{U(1)} &= \frac{1}{4} \frac{(\mu - \bar{\mu})(\bar{\mu} - \mu)(1 + \mu\bar{\mu})^2}{(\mu\bar{\mu})^2} \cdot \frac{4}{i(\mu - \bar{\mu} - \mu^{-1} + \bar{\mu}^{-1})} \times \\ &\quad \times 2\pi\beta \operatorname{Tr} (\partial_w P_0 \partial_{\bar{w}} P_0 + \partial_{\bar{w}} P_0 \partial_w P_0) \\ &= \frac{2\pi(\bar{\mu} - \mu)(1 + \mu\bar{\mu})}{i\mu\bar{\mu}} \cdot \underbrace{\operatorname{Tr} [c, P_0] [P_0, c^\dagger]}_{=1} = 8\pi\gamma \sin^2 \varphi. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Um den letzten Ausdruck zu erhalten, führt man eine Polarkoordinatenzerlegung

$$\mu = \alpha e^{-i\varphi} \quad (7.61)$$

durch und definiert

$$\gamma = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha \sin \varphi}. \quad (7.62)$$

Die Geschwindigkeit des Solitons in der xy Ebene ist (vgl. [26])

$$(v_x, v_y) = -\left(\frac{2\alpha \cos \varphi}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right), \quad (7.63)$$

so dass gilt

$$\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}. \quad (7.64)$$

Wir wiederholen diese Rechnung für das $U(2)$ Soliton, das wir mittels (7.57) konstruieren. Dazu differenzieren wir $\Phi = 1 + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\mu} P$ unter Zuhilfenahme von (7.54) und verwenden wiederholt die Identitäten $f(N)c = cf(N-1)$ und $c^\dagger f(N) = f(N-1)c^\dagger$. Setzen wir dies in (7.59) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} E(\mu)|_{U(2)} &= \frac{2\pi(\bar{\mu} - \mu)(1 + \mu\bar{\mu})}{i\mu\bar{\mu}} \cdot \operatorname{Tr} [c, P] [P, c^\dagger] \\ &= 8\pi\gamma \sin^2 \varphi \operatorname{Tr} \left| \begin{pmatrix} c \frac{-\lambda\bar{\lambda}}{(N-1+\lambda\bar{\lambda})(N+\lambda\bar{\lambda})} & \frac{\lambda\lambda\bar{\lambda}}{(N+\lambda\bar{\lambda})(N+1+\lambda\bar{\lambda})} \\ c c \frac{-\bar{\lambda}}{(N-1+\lambda\bar{\lambda})(N+\lambda\bar{\lambda})} & c \frac{\lambda\bar{\lambda}}{(N+\lambda\bar{\lambda})(N+1+\lambda\bar{\lambda})} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= 8\pi\gamma \sin^2 \varphi \operatorname{Tr} \left\{ \frac{(\lambda\bar{\lambda})^2}{(N+\lambda\bar{\lambda})(N+1+\lambda\bar{\lambda})^2} + \frac{\lambda\bar{\lambda} N}{(N-1+\lambda\bar{\lambda})(N+\lambda\bar{\lambda})^2} \right\} \\ &= 8\pi\gamma \sin^2 \varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda\bar{\lambda}}{(n+\lambda\bar{\lambda})(n+1+\lambda\bar{\lambda})} = 8\pi\gamma \sin^2 \varphi, \end{aligned} \quad (7.65)$$

Wir merken an, dass für $|\lambda| = 1$ etwas Vorsicht bei der Berechnung geboten ist. Wir erkennen, dass die Energien der Ein-Soliton-Lösungen für die Gruppen $U(1)$ und $U(2)$ endlich sind und von der Geschwindigkeit (7.63) der Solitonen abhängen. Man beachte, dass die Energien nicht von θ abhängen und dem kommutativen Resultat für $SU(2)$ [26] entsprechen.

Um eine Lösung zu erhalten, die m Solitonen beschreibt, die sich alle mit der *gleichen* Geschwindigkeit bewegen, sollte man in (7.56) zwei Polynome in c vom Grade m verwenden. Allgemeinere Multi-Soliton-Lösungen mit nicht verschwindender *relativer* Geschwindigkeit der individuellen „Energieklumpen“ können konstruiert werden, indem m *verschiedene* Matrizen T_k und die Gleichungen (7.44)-(7.48) mit (7.42) verwendet werden. Für diese sich *bewegenden* Solitonen können wir eine Brane-Interpretation angeben. Da m -Soliton-Lösungen einer effektiven $U(n)$ -Yang-Mills-Higgs-Theorie in 2+1 Dimensionen zu m D0-Branes innerhalb von n übereinanderliegenden D2-Branes korrespondieren, erkennen wir, dass unsere Solitonen (0+1)-Branes beschreiben, die sich innerhalb von (2+1)-Branes bewegen.

7.4 Solitonen in 1+1 und Instantonen in 2+0 Dimensionen

Wir betrachten die effektive Feldtheorie auf dem (1+1)-Brane-Weltvolumen, das wir kurz in Abschnitt 7.2 diskutiert haben. Nach einem Wechsel der Feldvariablen via $\partial_x\phi = \Phi^{-1}\partial_t\Phi$ und $\partial_t\phi = \Phi^{-1}\partial_x\Phi$ nehmen die Bewegungsgleichungen die Form

$$\partial_x(\Phi^{-1}\partial_x\Phi) - \partial_t(\Phi^{-1}\partial_t\Phi) = 0 \quad (7.66)$$

an. Dieses ist die Feldgleichung des generischen Sigma-Modells in 1+1 Dimensionen, wobei das Feld Φ Werte in der Gruppe $U(n)$ annimmt.

Offensichtlich führt unsere Wahl (7.2) des B -Felds zu einem kommutativen $\mathbb{R}^{1,1}$, wobei $f\star g = fg$, d.h. es taucht weder in (7.66) noch in (7.15) das Sternprodukt auf. Prinzipiell kann man auch einen allgemeineren B -Feld-Hintergrund mit nicht verschwindenden „*elektrischen*“ Komponenten $B_{14} = -B_{41}$ betrachten. In [81] wurde dieser Feldtyp detailliert untersucht. Es zeigt sich, dass unter diesen Bedingungen kein „zero-slope“-Limes existiert, der eine Feldtheorie auf nichtkommutativer Raumzeit produzieren kann. Folglich liefern offene $N=2$ Strings nur das Sigma-Modell auf dem *kommutativen* $\mathbb{R}^{1,1}$. Um solitonische Lösungen der Gleichungen (7.15) und (7.66) zu erhalten, braucht man einfach nur die y -Abhängigkeit aus allen Gleichungen in Abschnitt 7.3 zu streichen (d.h. man fordert $\partial_y = 0$ für alle Felder).

Zum Abschluss dieses Kapitels werfen wir noch einen Blick auf die effektive Feldtheorie auf dem *euklidischen* (2+0)-Brane-Weltvolumen. Es ist offensichtlich, dass nach den Feldredefinitionen $\partial_x\phi = \Phi^{-1}\partial_y\Phi$ und $\partial_y\phi = -\Phi^{-1}\partial_x\Phi$ die Bewegungsgleichungen folgende Form annehmen:

$$\partial_x(\Phi^{-1}\star\partial_x\Phi) + \partial_y(\Phi^{-1}\star\partial_y\Phi) = 0. \quad (7.67)$$

Diese Gleichung beschreibt das $U(n)$ -Sigma-Modell auf dem *nichtkommutativen* euklidischen Raum $\mathbb{R}^{2,0}$. Interessanterweise kann diese Gleichung durch Reduktion der nichtkommutativen selbstdualen Yang-Mills-Gleichungen auf $\mathbb{R}^{2,2}$, aber nicht von seiner euklidischen Variante auf $\mathbb{R}^{4,0}$ abgeleitet werden (siehe [29]). Lösungen von (7.67) lassen sich aus den Lösungen in 2+1 Dimensionen, wie sie in Abschnitt 7.3 formuliert wurden, herleiten. Dafür setzt man in den entsprechenden Gleichungen einfach $\mu_k = -i$ für alle k . Dann gilt $w_k = x+iy = z$ und

$\bar{w}_k = x - iy = \bar{z}$, d.h. Instanton-Lösungen von nichtkommutativen zweidimensionalen Sigma-Modellen sind *statische* Lösungen des modifizierten Sigma-Modells in 2+1 Dimensionen. Falls wir in (7.49) Projektoren vom Rang Eins betrachten, erhalten wir das chirale CP^n -Modell auf einer nichtkommutativen Ebene. Die zugehörigen Lösungen der Feldgleichungen sind in [97] untersucht worden.

KAPITEL 8

ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

In dieser Arbeit wurde ein erster Schritt in Richtung der Beschreibung des $N=2$ Strings auf nicht trivialen Hintergründen unternommen. Besonderes Augenmerk galt dabei zunächst der Untersuchung der physikalischen Relevanz von D-Branes in der $N=2$ Stringtheorie. Während in der $N=1$ Stringtheorie D-Branes als Träger der RR-Ladung eine herausragende Rolle beim Verständnis insbesondere nichtperturbativer Effekte einnehmen, ist ihre Rolle aufgrund des Fehlens sämtlicher Felder, an die D-Branes auf natürliche Weise koppeln, beim $N=2$ String unklar.

Wir betrachteten daher D-Branes als künstlich hinzugefügte Hintergrundobjekte und untersuchten mittels einer Analyse von Streuamplituden, inwieweit diese Hintergrundobjekte konsistent mit der $N=2$ Stringtheorie sind. Es zeigte sich, dass neben der raumzeitfüllenden $(2+2)$ -Brane nur das D-Instanton (in unserer Notation die $(0+0)$ -Brane) und die D-Instanton-Fläche ($(2+0)$ -Brane) physikalisch sinnvoll erscheinende Streuamplituden liefern, welche keine bzw. nur masselose Pole zeigen.

Im Folgenden untersuchten wir den Einfluss eines Hintergrund- B -Feldes auf der $(2+2)$ -Brane auf den $N=2$ String und insbesondere seine effektive Feldtheorie. Durch das Einschalten eines konstanten B -Feldes werden die Koordinaten auf der D-Brane, die in diesem Fall den üblichen Raumzeitkoordinaten entsprechen, nichtkommutativ. Für die effektive Wirkung konnten wir zeigen, dass bei Anwesenheit eines konstanten B -Feldes die $N=2$ Stringtheorie im Seiberg-Witten-Limes $\alpha' \rightarrow 0$ durch eine nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie beschreibbar ist. Zusätzlich untersuchten wir die Bedingungen, die sich aus der Supersymmetrieminvarianzforderung an die Wirkung des $N=2$ Strings ergeben, wenn ein B -Feld an die Materiefelder gekoppelt wird. Es zeigte sich, dass die Wirkung ihre Invarianz unter Supersymmetrietransformationen am Rand genau dann behält, wenn das B -Feld eine Kähler Zwei-Form und die Metrik selbstdual ist.

Für die effektive Wirkung konnten wir zeigen, dass bei Anwesenheit eines konstanten B -Feldes die $N=2$ Stringtheorie im Seiberg-Witten-Limes $\alpha' \rightarrow 0$ durch nichtkommutative selbstduale Yang-Mills-Theorie beschreibbar ist.

Im letzten Abschnitt dieser Arbeit untersuchten wir B -Felder auf niedrigerdimensionalen Branen, genauer der $(2+1)$ -, der $(1+1)$ - und der $(2+0)$ -Brane. Es gelang uns die effektiven Feldtheorien des $N=2$ Strings in diesem nicht trivialen Hintergrund zu beschreiben. Für die nichtkommutative effektive Theorie auf der $(2+1)$ -Brane suchten wir in der Folge nach solitonischen Lösungen. Für die beiden einfachsten Fälle, die $U(1)$ und die $U(2)$, gelang es uns, mittels der aus dem kommu-

tativen Fall bekannten „dressing“-Methode Ein-Solitonen-Lösungen zu konstruieren und deren Energie explizit anzugeben.

Diese Dissertation ist gedacht als erster Schritt in Richtung der Beschreibung von $N=2$ Strings in Anwesenheit von nicht trivialen Hintergrundfeldern. Viele Fragen müssen im Rahmen einer solchen Arbeit zwangsläufig unbeantwortet bleiben und liefern somit Material für weitergehende und vertiefende Analysen. Wir wollen kurz umreißen, welche Aspekte noch ungeklärt sind und an welchen Stellen wir Herausforderungen sehen, die eine tiefergehende Beschäftigung mit dem Thema sinnvoll erscheinen lassen:

- Wir definierten D-Branes als Objekte, auf denen die Randpunkte offener Strings liegen. Die natürliche Art der Beschreibung ist, in Richtungen senkrecht zur D-Brane Dirichlet-Randbedingungen zu fordern und die modifizierten Operatorproduktentwicklungen der Materiefelder zu berechnen. Ein alternativer Ansatz ist die Beschreibung der D-Branes als sogenannte „boundary states“. Dieser Ansatz erlaubt insbesondere die Berechnung der D-Brane Spannung durch den Vergleich der Zustandssumme des offenen Strings mit dem Austausch eines geschlossenen Strings zwischen zwei D-Branes (für eine detaillierte Beschreibung siehe [43]).
- In der $N=1$ Stringtheorie ergibt sich für D-Branes eine Beschreibung bei niedrigen Energien mittels einer effektiven Wirkung, der Dirac-Born-Infeld-Wirkung (siehe Kapitel 4). Angesichts der fehlenden Anregungen im String-Spektrum ist unklar, ob sich ein nicht triviales Pendant für den $N=2$ String finden lässt.
- In zwei kürzlich erschienenen Arbeiten untersuchen Albertsson et al. das der $N=1$ Stringtheorie zugrunde liegende $(1, 1)$ -supersymmetrische Sigma-Modell bei Anwesenheit eines Randes [98, 99] bzw. darüberhinaus eines konstanten B -Feldes. Neben der Wirkung untersuchen die Autoren die Bedingungen an die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit, die sich aus der Algebra der Symmetrieströme ergibt. Eine analoge Untersuchung für das $(2, 2)$ -Sigma-Modell, das dem $N=2$ String zugrunde liegt, könnte aufschlussreiche Ergebnisse über eine eventuell existierende nichtkommutativ verzerrte Version der Kähler-Mannigfaltigkeit geben.
- Wie mehrfach erwähnt, existieren in der $N=2$ Stringtheorie nicht die benötigten p -Formen, an die D-Branes auf natürliche Art und Weise koppeln. Es bedarf daher einer weiteren Untersuchung, welche Rolle D-Branes beim $N=2$ String spielen und wie insbesondere die massiven Pole in den Streuamplituden an einigen D-Branes zu interpretieren sind. Ein wesentliches Merkmal des $N=2$ Strings sind seine beiden Zeitrichtungen. Die massiven Pole treten genau bei den Branen auf, bei denen in eine der Zeitrichtungen Dirichlet-Randbedingungen gefordert werden. Diese Branen spielen daher die Rolle der sogenannten SD-Branes in der $N=1$ Stringtheorie [100], deren Weltvolumen allerdings euklidisch ist. Auch bei diesem Typ treten Singularitäten auf, deren Rolle trotz vielversprechender neuerer Ansätze nach wie vor unklar ist (siehe Diskussion in [101]).

- Nichtkommutative D-Branes scheinen abweichend von der oben skizzierten Problematik konsistent formulierbar zu sein. Die Abwesenheit von RR-Eichfeldern könnte in diesem Zusammenhang eher von Nutzen sein, wie eine neue Arbeit über den $N=1$ String nahe legt [102]. Es zeigt sich, dass D-Branes im konstanten B -Feld-Hintergrund nicht unter Erhaltung der Lorentz-Invarianz der Wirkung an die RR-Eichfelder gekoppelt werden können, es vielmehr eines „screening“ durch weitere D-Branes bedarf. Ein Vergleich der Resultate des $N=2$ Strings im Hintergrund der entsprechenden D-Branes könnte Hinweise auf die Ursache dieses überraschenden Ergebnisses geben.

ANHANG A

SYMMETRIEN DES N=2 STRINGS

Wir stellen an dieser Stelle die lokalen Symmetrietransformationen dar, unter denen die Brink-Schwarz-Wirkung invariant ist [15].

- **Weltflächendiffeomorphismen:**

Die Brink-Schwarz-Wirkung ist per constructio invariant unter Reparametrisierungen der Weltflächenkoordinaten $\sigma^\alpha \rightarrow \sigma^\alpha + \xi^\alpha(\sigma)$. Explizit transformieren sich die Weltflächenfelder wie folgt:

$$\delta X^{+\mu} = \xi^\alpha \partial_\alpha X^{+\mu} \quad (\text{A.1})$$

$$\delta \psi^{+\mu} = \xi^\alpha \partial_\alpha \psi^{+\mu} \quad (\text{A.2})$$

$$\delta e_\alpha^a = \xi^\beta \partial_\beta e_\alpha^a + e_\beta^a \partial_\alpha \xi^\beta \quad (\text{A.3})$$

$$\delta \chi_\alpha^+ = \xi^\beta \partial_\beta \chi_\alpha^+ + \chi_\beta^+ \partial_\alpha \xi^\beta \quad (\text{A.4})$$

$$\delta A_\alpha = \xi^\beta \partial_\beta A_\alpha + A_\beta \partial_\alpha \xi^\beta. \quad (\text{A.5})$$

- **N=2 Super-Weyl-Transformationen:**

Die Invarianz unter dieser Symmetrie ist Ausdruck der Skaleninvarianz der Brink-Schwarz-Wirkung und lässt sich mittels des koordinatenabhängigen komplexen Spinor auf der Weltfläche $\eta^+(\sigma)$ schreiben als:

$$\delta X^{+\mu} = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$\delta \psi^{+\mu} = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\delta e_\alpha^a = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\delta \chi_\alpha^+ = \rho_\alpha \eta^+ \quad (\text{A.9})$$

$$\delta A_\alpha = \bar{\chi}^- \rho_\alpha \rho^\beta \eta^+ + \bar{\eta}^- \rho^\beta \rho_\alpha \chi_\beta^+. \quad (\text{A.10})$$

- **N=2 Supersymmetrie:**

Mit dem koordinatenabhängigen komplexen Spinor auf der Weltfläche $\varepsilon^+(\sigma)$ als Transformationsparameter lassen sich die Supersymmetrietransformationen schreiben als

$$\delta X^{+\mu} = \bar{\varepsilon}^- \psi^{+\mu}$$

$$\delta \psi^{+\mu} = -i \rho^\beta \varepsilon^+ (\delta_\beta X^{+\mu} + 2 \bar{\chi}_\beta^- \psi^{+\mu})$$

$$\delta e_\alpha^a = 2i (\bar{\chi}_\alpha^- \rho^\alpha \varepsilon^+ - \bar{\varepsilon}^- \rho^\alpha \chi_\alpha^+)$$

$$\delta \chi_\alpha^+ = D_\alpha \varepsilon^+$$

$$\delta A_\alpha = \varepsilon^{\beta\gamma} (\bar{\varepsilon}^- \bar{\rho} \rho_\alpha D_\beta \chi_\gamma^+ + D_\gamma \bar{\chi}_\gamma^- \rho_\alpha \bar{\rho} \varepsilon^+).$$

- **bosonische Weyl-Transformationen:**

Diese sind quasi ein Überbleibsel des bosonischen Strings, wobei $\Lambda(\sigma)$ der bei Weyl-Transformationen übliche Skalierungsfaktor der Metrik ist

$$\begin{aligned}\delta X^{+\mu} &= 0 \\ \delta \psi^{+\mu} &= -\frac{1}{2}\Lambda\psi^{+\mu} \\ \delta e_\alpha^a &= \Lambda e_\alpha^a \\ \delta \chi_\alpha^+ &= \frac{1}{2}\Lambda\chi_\alpha^+ \\ \delta A_\alpha &= 0.\end{aligned}$$

- **zweidimensionale Lorentztransformationen:**

Bedingt durch die Einführung des Zweibeins e_α^a in der Brink-Schwarz-Wirkung gibt es zusätzliche Freiheitsgrade, die durch die Invarianz unter folgenden lokalen Lorentztransformationen gerade kompensiert werden

$$\begin{aligned}\delta X^{+\mu} &= 0 \\ \delta \psi^{+\mu} &= \frac{1}{2}l\bar{\rho}\psi^{+\mu} \\ \delta e_\alpha^a &= l\varepsilon^{\alpha\beta}e_{\alpha b} \\ \delta \chi_\alpha^+ &= -\frac{1}{2}l\bar{\rho}\chi_\alpha^+ \\ \delta A_\alpha &= 0.\end{aligned}$$

$l(\sigma)$ ist eine skalare Funktion der Weltflächenkoordinaten.

- **axiale U(1)-Transformationen:**

Bezeichnen wir mit $\lambda(\sigma)$ den Eichparameter der axialen Transformation des U(1)-Feldes A_α , so sind die entsprechenden Transformationen zu schreiben als

$$\begin{aligned}\delta X^{+\mu} &= 0 \\ \delta \psi^{+\mu} &= i\lambda\bar{\rho}\psi^{+\mu} \\ \delta e_\alpha^a &= 0 \\ \delta \chi_\alpha^+ &= -i\lambda\bar{\rho}\chi_\alpha^+ \\ \delta A_\alpha &= \varepsilon_{\alpha\beta}\delta^\beta\lambda.\end{aligned}$$

- **vektorielle U(1)-Transformationen:**

Mit dem Eichparameter $\lambda'(\sigma)$ der vektoriellen Transformation des U(1)-Feldes A_α lassen sich diese schreiben als

$$\begin{aligned}\delta X^{+\mu} &= 0 \\ \delta \psi^\mu &= i\lambda'\psi^\mu \\ \delta e_\alpha^a &= 0 \\ \delta \chi_\alpha^+ &= i\lambda'\chi_\alpha^+ \\ \delta A_\alpha &= \partial_\alpha\lambda'.\end{aligned}$$

ANHANG B

NOTATION

In dieser Arbeit haben wir verschiedene Möglichkeiten der Beschreibung des $N=2$ Strings im Targetraum verwendet. Der Übersichtlichkeit halber stellen wir an dieser Stelle die verschiedenen Notationen nebeneinander dar.

B.1 Reelle Notation

Ausgangspunkt aller Notationen ist die *reelle Notation*, bei der die Targetraumfelder des $N=2$ Strings mit griechischen Indizes $\mu = 0, 1, 2, 3$ versehen werden, auf die die Metrik $\eta_{\mu\nu}$ mit Signatur $(2,2)$ wirkt.

B.2 Komplexe \pm -Notation

In dieser Notation werden die reellen Vektoren $(2,2)$ -Vektoren zu komplexen $(1,1)$ -Vektoren zusammengefasst. Sei die Metrik in der reellen Notation $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, -, +)$. Dann definieren wir

$$X^\pm = (X^{\pm 0}, X^{\pm 1}) = (X^0 \pm iX^2, X^1 \pm iX^3). \quad (\text{B.1})$$

Das $(2,2)$ -Skalarprodukt lautet in Komponenten

$$X_1 \cdot X_2 = \frac{1}{2}(X_1^+ \cdot X_2^- + X_1^- \cdot X_2^+).$$

Das $(1,1)$ -Skalarprodukt ist gegeben durch

$$X_1^+ \cdot X_2^- = \frac{1}{2}(X_1^{++} X_2^{--} + X_1^{+-} X_2^{-+}),$$

wobei $X^{\pm\pm} = X^{\pm 0} + X^{\pm 1}$ und $X^{\pm-} = -X^{\pm 0} + X^{\pm 1}$. Die Metrik in der $(1,1)$ -Schreibweise ist folglich $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +)$.

B.3 Komplexe Lichtkegelkoordinaten

Auch hier werden die reellen $(2,2)$ -Vektoren zu komplexen Vektoren zusammengefasst. Sei wiederum die reelle Metrik gegeben durch $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, -, +)$, dann

definieren wir

$$\begin{aligned} Z^0 &= X^0 + iX^2, & \Psi^{+0} &= \psi^0 + i\psi^2, \\ Z^1 &= X^1 + iX^3, & \Psi^{+1} &= \psi^1 + i\psi^3. \end{aligned}$$

Die komplex konjugierten Größen werden mit $\bar{Z}^{\bar{a}}$ und $\Psi^{-\bar{a}}$ bezeichnet. Die Metrik ist gegeben durch

$$\eta^{a\bar{a}} = \text{diag}(-, +). \quad (\text{B.2})$$

Das Skalarprodukt zweier reeller Vierervektoren nimmt in diesen Koordinaten die Form

$$\eta_{\mu\nu} Y^\mu Z^\nu = Y^a \bar{Z}^{\bar{a}} \eta_{a\bar{a}} \quad (\text{B.3})$$

an

B.4 Van der Waerden-Index-Notation

Die Signatur $(2, 2)$ der Targetraummetrik des $N=2$ Strings ermöglicht im flachen Raum $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2,2}$ eine Beschreibung der Targetraumfelder in der *van der Waerden-Index-Notation*, die auch Bispinor-Notation genannt wird. Hierbei werden die $SO(2, 2)$ Vektor-Indizes μ in zwei $SL(2, \mathbb{R})$ -Spinor-Indizes α und $\dot{\alpha}$ aufgespalten¹:

$$X^{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}} X^\mu = \begin{pmatrix} X^0 + X^3 & X^1 + X^2 \\ X^1 - X^2 & X^0 - X^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \{+, -\} \quad \dot{\alpha} \in \{\dot{+}, \dot{-}\}. \quad (\text{B.4})$$

Hierbei bezeichnen die $\sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}$, ($\mu = 0, \dots, 3$) chirale Gamma-Matrizen, die der Raumzeitmetrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, -, +)$ entsprechend gewählt worden sind.

Spinor-Indizes werden mittels Epsilon-Tensor nach oben bzw. unten gezogen. Mit $\varepsilon^{+-} = \varepsilon^{\dot{+}\dot{-}} = +1$ lässt sich das Skalarprodukt zweier reeller Vierervektoren in der Bispinor-Notation schreiben als

$$\eta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} X^{\alpha\dot{\alpha}} Y^{\beta\dot{\beta}} = X_{\alpha\dot{\alpha}} Y^{\beta\dot{\beta}}. \quad (\text{B.5})$$

Vektoren besitzen folglich das unter $SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R})'$ -Transformationen invariante Längenquadrat

$$X^2 = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} X^{\alpha\dot{\alpha}} X^{\beta\dot{\beta}} = -\det X^{\alpha\dot{\alpha}}. \quad (\text{B.6})$$

Masselose Bispinoren $k^{\alpha\dot{\alpha}}$ mit $-\det k^{\alpha\dot{\alpha}} = 0$ lassen sich durch $k^{\alpha\dot{\alpha}} = k^\alpha k^{\dot{\alpha}}$ in das Produkt zweier $SL(2, \mathbb{R})$ -Spinoren zerlegen.

¹Metriken mit Signatur (r, r) werden „Kleinsche“ Metriken genannt. Für $r=2$ folgt aus der Selbst-Dualität des metrischen Hintergrundes Ricci-Flachheit und $SL(2, \mathbb{R})$ -Holonomie. Derartige Räume werden hypersymplektisch genannt und besitzen eine komplexe und zwei reelle Strukturen, die jeweils kovariant konstant sind.

ANHANG C

VERTEXOPERATOREN DES N=2 STRINGS

In diesem Anhang listen wir die Vertexoperatoren des masselosen Zustands des offenen $N=2$ Strings in der holomorphen Basis auf [103]. Wir betrachten hierbei Vertexoperatoren für $0 \leq v \leq 2$ ¹ in allen Bildern $-2 < \pi \leq 0$ im Neveu-Schwarz-Sektor. Die Normalisierung der Operatoren ebenso wie der universelle exponentielle Faktor $e^{ik \cdot X}$, der alle Vertexoperatoren multipliziert, werden unterdrückt.

$$\begin{aligned}
 & (\pi_+, \pi_-) = (-1, -1) : \\
 v = 0 : & \quad \int e^{-\varphi^- - \varphi^+} \\
 v = 1 : & \quad c e^{-\varphi^- - \varphi^+} \\
 v = 2 : & \quad c \partial c e^{-\varphi^- - \varphi^+}
 \end{aligned} \tag{C.1}$$

$$\begin{aligned}
 & (\pi_+, \pi_-) = (0, -1) : \\
 v = 0 : & \quad \int k^- \cdot \psi^+ e^{-\varphi^+} \\
 v = 1 : & \quad c k^- \cdot \psi^+ e^{-\varphi^+} \\
 v = 2 : & \quad c \partial c k^- \cdot \psi^+ e^{-\varphi^+} - 2ic\eta^+
 \end{aligned} \tag{C.2}$$

¹Die Größe $v = u - \pi_+ - \pi_-$ mit u der Geitzahl des Vertexoperators ist bildwechselinvariant und damit geeignet zur Indizierung der verschiedenen Bildäquivalenzklassen. Die Summe der v -Ladungen in Tree-Level Korrelationsfunktionen muss 4 ergeben.

$$\begin{aligned}
& (\pi_+, \pi_-) = (-1, 0) : \\
v = 0 : & \int k^+ \cdot \psi^- e^{-\varphi^-} \\
v = 1 : & c k^+ \cdot \psi^- e^{-\varphi^-} \\
v = 2 : & c \partial c k^+ \cdot \psi^- e^{-\varphi^-} - 2i c \eta^-
\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}
& (\pi_+, \pi_-) = (0, 0) : \\
v = 0 : & \int \left\{ (k^+ \cdot \partial X^- - k^- \cdot \partial X^+) - i(k^+ \cdot \psi^-)(k^- \cdot \psi^+) \right\} \\
v = 1 : & c \left\{ (k^+ \cdot \partial X^- - k^- \cdot \partial X^+) - i(k^+ \cdot \psi^-)(k^- \cdot \psi^+) \right\} - (\gamma^+ k^+ \cdot \psi^- - \gamma^- k^- \cdot \psi^+) \\
v = 2 : & (c \partial c + \gamma^+ \gamma^-) \left\{ (k^+ \cdot \partial X^- - k^- \cdot \partial X^+) - i(k^+ \cdot \psi^-)(k^- \cdot \psi^+) \right\}
\end{aligned} \tag{C.4}$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] F. Gliozzi, J. Scherk, D. Olive: *Supergravity and the spinor dual model*, Phys. Lett. **65B** (1976) 282; *Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model*, Nucl. Phys. **B122** (1977) 253.
- [2] M.B. Green, J.H. Schwarz: *Supersymmetrical String Theories*, Phys. Lett. **109B** (1982) 444.
- [3] D.J. Gross, J.A. Harvey, E. Martinec, R. Rohm: *Heterotic String Theory*, Nucl. Phys. *B256* (1985) 253.
- [4] C. P. Bachas: *Lectures on D-Branes*, Proceedings of the 31st International Symposium Ahrenshoop in Buckow, hep-th/9806199.
- [5] E. Witten: *String Theory Dynamics In Various Dimensions*, Nucl. Phys. **B443** (1995) 85.
- [6] L. Randall, R. Sundrum: *Out of This World Supersymmetry Breaking*, Nucl.Phys. **B557** (1999) 79.
- [7] J. Khoury, B.A. Ovrut, P.J. Steinhardt, N. Turok: *The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang*, Phys.Rev. **D64** (2001) 123522.
- [8] M. Ademello et al.: *Dual Strings with $U(1)$ Colour Symmetry*, Nucl. Phys. **B111** (1976) 77.
- [9] D'Adda, Lizzi: *Space Dimensions from Supersymmetry for the $N=2$ Spinning String: A Four Dimensional Model*, Phys. Lett. **B191** (1987) 85.
- [10] H. Ooguri, C. Vafa: *Geometry of $N=2$ Strings*, Nucl. Phys. **B361** (1991) 469; *Self-Duality and $N=2$ String Magic*, Mod. Phys. Lett. **A5** (1990) 1389.
- [11] N. Seiberg, E. Witten: *String theory and Noncommutative Geometry*, JHEP **9909** (1999) 032.
- [12] M. Ademello et al.: *Supersymmetric String and Colour Confinement*, Phys. Lett. **62B** (1976) 1.
- [13] L. Brink, J.H. Schwarz: *Local complex supersymmetry in two dimensions*, Nucl. Phys. **B121** (1977) 285.

- [14] J. Bischoff: *Moduli und Amplituden des $N=2$ Strings*, Dissertation ITP Hannover (1996).
- [15] B. Niemeier: *$N=2$ Strings und Selbstduale Feldtheorien*, Dissertation, ITP Hannover (2001).
- [16] K. Jünemann, O. Lechtenfeld, A.D. Popov: *Non-Local Symmetries of the Closed $N=2$ String*, Nucl. Phys. **B548** (1999) 449.
- [17] O. Lechtenfeld, A.D. Popov: *Closed $N=2$ Strings: Picture-Changing, Hidden Symmetries and SDG Hierarchy*, Int. J. Mod. Phys. **A15** (2000).
- [18] K. Jünemann, O. Lechtenfeld: *Chiral BRST Cohomology of the $N=2$ String at Arbitrary Ghost and Picture Number*, Comm. Math. Phys. **203** (1999) 53.
- [19] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten, *Superstring theory*, Vol. 2, Cambridge University Press, 1987.
- [20] O. Lechtenfeld: *Mathematics and Physics of $N=2$ Strings*, hep-th/9912281.
- [21] M.B. Green, J.H. Schwarz, E. Witten: *Superstring theory*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1987.
- [22] D. Friedan, E. Martinec, S. Shenker: *Conformal Invariance, Supersymmetry and String Theory*, Nucl. Phys. **B271** (1986) 93.
- [23] R. Hippmann: *Tree-Level Amplituden des $N=2$ String*, Diplomarbeit ITP Hannover (1997)
<http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Theses/hippmann.ps>.
- [24] G. Chalmers, O. Lechtenfeld, B. Niemeier: *$N=2$ Quantum String Scattering*, Nucl. Phys. **B591** (2000) 39.
- [25] N. Marcus: *The $N=2$ Open String*, Nucl. Phys. **B 387** (1992) 263.
- [26] R.S. Ward: *Soliton Solutions in an Integrable Chiral Model in $2+1$ Dimensions*, J. Math. Phys. **29** (1988) 386; *Classical Solutions of the Chiral Model, Unitons, and Holomorphic Vector Bundles*, Commun. Math. Phys. **128** (1990) 319.
- [27] L.J. Mason, G.A.J. Sparling: *Nonlinear Schrödinger and Korteweg de Vries are Reductions of Self-Dual Yang-Mills*, Phys. Lett. **A137** (1989) 29.
- [28] L.J. Mason, N.M.J. Woodhouse: *Integrability, Self-duality and Twistor Theory*, Oxford University Press (1996).
- [29] T.A. Ivanova, A.D. Popov: *Self-Dual Yang-Mills Fields in $D=4$ and Integrable Systems in $1 \leq D \leq 3$* , Theor. Math. Phys. **102** (1995) 280.
- [30] A.N. Leznov: *On Equivalence of Four-Dimensional Self-Duality Equations to Continual Analog of the Main Chiral Field Problem*, Theor. Math. Phys. **73** (1987) 1233.

- [31] A. Parkes: *A Cubic Action For Self-Dual Yang-Mills*, Phys. Lett. **B286** (1992) 265.
- [32] M. Marquart: *Streuamplituden Selbstdualer Feldtheorien*, Diplomarbeit ITP Hannover (1999),
<http://www.itp.uni-hannover.de/~lechtenf/Theses/marquart.ps>.
- [33] C.N. Yang: *Condition of Self-Duality for $SU(n)$ Gauge Fields on Euclidean Four-Dimensional Space*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1377.
- [34] S. Donaldson, V.P. Nair, J. Schiff: *A Kähler-Chern-Simons Theory and Quantization of Instanton Moduli Spaces*, Phys. Lett. **B246** (1990) 423.
- [35] C. Devchand, O. Lechtenfeld: *Extended Self-Dual Yang-Mills From The $N=2$ String*, Nucl. Phys. **B539** (1999) 309.
- [36] O. Lechtenfeld, W. Siegel: *The $N=2$ String Yields Self-Dual Yang-Mills*, Nucl. Phys. **B405** (1997) 49.
- [37] B. Spendig: *Gemischte Amplituden des $N=2$ Strings*, Diplomarbeit ITP Hannover (1998),
<http://www.itp.uni-hannover.de/~spendig/works/prolog1.ps>
- [38] J.F. Plebański: *Some Solutions of Complex Einstein Equations*, J. Math. Phys. **16** (1975) 2395.
- [39] J. Polchinski: *Dirichlet-Branes and Ramond-Ramond Charges*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 4724.
- [40] J. Polchinski: *TASI Lectures on D-Branes*, Lectures at TASI 96, hep-th/9611050.
- [41] C. Johnson: *D-Brane Primer*, hep-th/0007170.
- [42] I.V. Vanea: *Introductory Lectures on D-Branes*, hep-th/0109029.
- [43] J. Polchinski: *String Theory, Vol. 1*, Cambridge University Press (1998).
- [44] P. Di Vecchia, A. Liccardo: *D-Branes in String Theory, I*, hep-th/9912161.
- [45] A. Sen: *An Introduction to Non-Perturbative String Theory*, hep-th/9802051.
- [46] R. Dijkgraaf: *Les Houches Lectures on Fields, Strings and Duality*, hep-th/9703136.
- [47] P.K. Townsend: *M-Theory from its Superalgebra*, hep-th/9712001.
- [48] R.G. Leigh: *Dirac-Born-Infeld Action for Dirichlet σ -Models*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2767.
- [49] E.S. Fradkin, A. Tseytlin: *Non-linear Electrodynamics from Quantized Strings*, Phys. Lett. **B163** (1985) 1.

- [50] M. Li: *Boundary States of D-Branes and D-Strings*, Nucl. Phys. **B460** (1996) 351.
- [51] M. Douglas: *D-Branes in Curved Space*, hep-th/9703056.
- [52] O.D. Andreev, A.A. Tseytlin: *Partition Function Representation for the Open Superstring Effective Action*, Nucl. Phys. **B311** (1988) 205.
- [53] Y. Kitazawa: *Effective Lagrangian for the Open Superstring from a 5-Point Function*, Nucl. Phys. **B289** (1987) 599.
- [54] E. Bergshoeff, P.K. Townsend: *Super D-Branes*, Nucl. Phys. **B490**, (1997) 145.
- [55] M. Cederwall: *Aspects of D-Brane Actions*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **B56** (1997) 61.
- [56] M. Abou Zeid, C.M. Hull: *Intrinsic Geometry of D-Branes*, Phys. Lett. **B404**, (1997) 264.
- [57] M.R. Garousi, R.C. Myers: *Superstring Scattering from D-Branes*, Nucl. Phys. **B 475** (1996) 193.
- [58] S. Hyun et al.: *Closed Strings Interacting with Noncommutative D-Branes*, Nucl.Phys. **B569** (2000) 262.
- [59] K. Jünemann, B. Spendig: *D-Brane Scattering of $N=2$ Strings*, Phys.Lett. **B520** (2001) 163.
- [60] I.R. Klebanov, L. Thorlacius: *The Size of p -Branes*, Phys. Lett. **B 371** (1996) 51.
- [61] S.S. Gubser et al.: *Gravitational Lensing by p -Branes*, Nucl. Phys. **B 472** (1996) 231.
- [62] A. Hashimoto, I.R. Klebanov: *Decay of Excited D-branes*, Phys. Lett. **B 381** (1996) 437.
- [63] A. Hashimoto, I.R. Klebanov: *Scattering of Strings from D-branes*, Nucl.Phys. Proc. Suppl. **55B** (1997) 118.
- [64] N. Berkovits, C. Vafa: *$N=4$ Topological Strings*, Nucl. Phys. **B433** (1995) 123.
- [65] W. Siegel: *The $N=4$ String is the Same as the $N=2$ String*, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1493.
- [66] M.R. Douglas, C. Hull: *D-Branes and the Noncommutative Torus*, JHEP **9802** (1998) 008.
- [67] Y.-K. E. Cheung, M. Krogh: *Noncommutative Geometry from 0-Branes in a Background B-Field*, Nucl. Phys. **B528** (1998) 185.
- [68] C.-S. Chu, P.-M. Ho: *Noncommutative Open String and D-Brane*, Nucl. Phys. **B550** (1999) 151.

- [69] V. Schomerus: *D-branes and Deformation Quantization*, JHEP **9906** (1999) 030.
- [70] F. Ardalan, H. Arfaei, M.M. Sheikh-Jabbari: *Dirac Quantization of Open Strings and Noncommutativity in Branes*, Nucl. Phys. **B576** (2000) 578.
- [71] L. Bonora, M. Schnabl, M.M. Sheikh-Jabbari, A. Tomasiello, *Noncommutative $SO(n)$ and $Sp(n)$ Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B589** (2000) 461.
- [72] O. Lechtenfeld, A.D. Popov, B. Spendig: *Open $N=2$ Strings in a B-Field Background and Noncommutative Self-Dual Yang-Mills*, Phys. Lett. **B507** (2001) 317.
- [73] P. Haggi-Mani, U. Lindström, M. Zabzine: *Boundary Conditions, Supersymmetry and A-Field Coupling For an Open String in a B-Field Background*, Phys. Lett. **B483** (2000) 443.
- [74] O. Andreev, H. Dorn: *Diagrams of Noncommutative Φ^3 Theory from String Theory*, Nucl. Phys. **B583** (2000) 145.
- [75] K. Matsubara: *Restrictions on Gauge Groups in Noncommutative Gauge Theory*, Phys. Lett. **B482** (2000) 417.
- [76] A. Armoni: *Comments on Perturbative Dynamics of Noncommutative Yang-Mills Theory*, Nucl. Phys. **B593** (2001) 229.
- [77] C.G. Callan, C. Lovelace, C.R. Nappi, S.A. Yost: *String Loop Corrections To Beta Functions*, Nucl. Phys. **B288** (1987) 525.
- [78] N.A. Nekrasov: *Trieste Lectures on Solitons in Noncommutative Gauge Theories*, hep-th/0011095.
- [79] B. Zumino: *Supersymmetry and Kähler Manifolds*, Phys. Lett. **B87** (1979) 203.
- [80] L. Alvarez-Gaumé, D.Z. Freedman: *Geometrical Structure and Ultraviolet Finiteness in the Supersymmetric Sigma Model*, Commun. Math. Phys. **80** (1981) 443.
- [81] N. Seiberg, L. Susskind, N. Toumbas: *Strings in Background Electric Field, Space/Time Noncommutativity and a New Noncritical String Theory*, JHEP **0006** (2000) 021.
- [82] T.A. Ivanova, O. Lechtenfeld: *Hidden Symmetries of the Open $N=2$ String*, Int. J. Mod. Phys. **A16** 303.
- [83] O. Lechtenfeld, A.D. Popov: *On the Integrability of Covariant Field Theory for Open $N=2$ Strings*, Phys. Lett. **B494** (2000) 148.
- [84] K. Takasaki: *Anti-Self-Dual Yang-Mills Equations on Noncommutative Space-Time*, J. Geom. Phys. **37** (2001) 291.

- [85] M. Legaré: *Noncommutative Generalized NS and Super Matrix KdV Systems From a Noncommutative Version of (Anti-)Self-Dual Yang-Mills Equations*, hep-th/0012077
- [86] G. Dunne, R. Jackiw, S.-Y. Pi, C. Trugenberger: *Selfdual Chern-Simons Solitons and Two-Dimensional Nonlinear Equations*, Phys. Rev. **D43** (1991) 1332; *Erratum*, Phys. Rev. **D45** (1992) 3012.
- [87] J.A. Harvey: *Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes*, hep-th/0102076.
- [88] J.A. Harvey, P. Kraus, F. Larsen: *Exact Noncommutative Solitons*, JHEP **0012** (2000) 024.
- [89] V.E. Zakharov, A.V. Mikhailov: *Example of Nontrivial Soliton Interaction in Two-Dimensional Classical Field Theory*, Sov. Phys. JETP **47** (1978) 1017.
- [90] V.E. Zakharov, A.B. Shabat: *Funct. Anal. Appl.* **13** (1979) 166.
- [91] P. Forgács, Z. Horváth, L. Palla: *Solution Generating Technique for Selfdual Monopoles*, Nucl. Phys. **B229** (1983) 77.
- [92] D.J. Gross, N. A. Nekrasov: *Solitons in Noncommutative Gauge Theory*, JHEP **0103** (2001) 044..
- [93] L. Alvarez-Gaumé, S.R. Wadia: *Gauge Theory on a Quantum Phase Space*, Phys. Lett. **B501** (2001) 319.
- [94] P.M. Sutcliffe: *Nontrivial Soliton Scattering in an Integrable Chiral Model in (2+1)-Dimensions*, J. Math. Phys. **33** (1992) 2269; *Yang-Mills Higgs Solitons in (2+1)-Dimensions*, Phys. Rev. **D47** (1993) 5470.
- [95] T. Ioannidou: *Soliton Solutions and Nontrivial Scattering in an Integrable Chiral Model in (2+1) Dimensions* J. Math. Phys. **37** (1996) 3422.
- [96] T. Ioannidou, J. Zakrzewski: *Solutions of the Modified Chiral Model in (2+1) Dimensions*, J. Math. Phys. **39** (1998) 2693.
- [97] B.-H. Lee, K. Lee, H.S. Yang: *The CP(n) Model on Noncommutative Plane*, Phys. Lett. **B498** (2001) 277.
- [98] C. Albertsson, U. Lindström, M. Zabzine: *N=1 Supersymmetric Sigma Model with Boundaries I*, hep-th/0111161.
- [99] C. Albertsson, U. Lindström, M. Zabzine: *N=1 Supersymmetric Sigma Model with Boundaries II*, hep-th/02020069.
- [100] C.M. Hull: *Timelike T-Duality, de Sitter Space, Large N Gauge Theories and Topological Field Theory*, JHEP **9807** (1998) 21.
- [101] M. Gutperle, A. Strominger: *Spacelike Branes*, hep-th/0202210.

- [102] M. Chaichian, D. Polyakov: *On Noncommutativity in String Theory and D-Branes*, hep-th/0202209.
- [103] J. Bischoff, S.V. Ketov, O. Lechtenfeld: *The GSO Projection, BRST Cohomology and Picture-Changing in N=2 String Theory*, Nucl. Phys. **B438** (1995) 373.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Lechtenfeld für die Vergabe des Themas, zahlreiche Diskussionen und die nette Arbeitsatmosphäre bedanken. Darüberhinaus gilt mein besonderer Dank Alexander Popov, der mich in einer schwierigen Phase meiner Promotionszeit unterstützt und angetrieben hat und der an einem wesentlichen Teil der Ergebnisse mitgewirkt hat. Erwähnung finden natürlich auch meine Korrektoren Henrik Ehlers, Matthias Ihl, Bernd Niemeyer, Klaus Osterloh und Sebastian Uhlmann sowie Helge Dennhardt für die Bereitstellung des Layouts dieser Arbeit.

Da diese Dissertation (zunächst) den Abschluss meiner akademischen Karriere darstellt, möchte ich die Gelegenheit nutzen und allen meinen Mitstreitern der letzten Jahre danken. Besonders erwähnt seien an dieser Stelle Helge Dennhardt, Bernd Niemeyer, Matthias Ihl, Klaus Jünemann, Alexander Kling, Oleksiy Maznytsya, Monika Marquardt, Jakob Nielsen und Sebastian Uhlmann, mit denen ich viele Diskussionen, nicht nur über physikalische Probleme, führen konnte, die oftmals auch weiter geholfen haben. Für die Geduld und die moralische Unterstützung in den letzten Monaten meiner Dissertation möchte ich mich bei Ursula bedanken. Last but not least gilt mein Dank meinen Eltern für ihre finanzielle Unterstützung, die mir hierdurch erst mein Studium ermöglicht haben.

Lebenslauf

- 14.06.1972 Geboren in Verden/Aller
- 1978-1982 Besuch der Grundschule in Verden/Aller
- 1982-1984 Besuch der Orientierungsstufe II in Verden/Aller
- 1984-1991 Besuch des Gymnasiums am Wall, Verden/Aller
- 14.06.1991 Abitur
- 07/91-09/92 Zivildienst in Verden/Aller
- 1992-1998 Studium der Physik an der Universität Hannover
und der Purdue University, West Lafayette, IN, USA
- 04.05.1996 Master of Science (Purdue University)
- 23.07.1998 Diplom in Physik (Universität Hannover)
- 10/98-03/99 Praktika
- seit 04/99 Doktorand bei Prof. Dr. O. Lechtenfeld
- 10/99-01/02 Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Hannover
- 31.01.01 Diplom in Wirtschaftswissenschaften