(C_0)-Gruppen von Operatoren: zentrale Differenzen und gebrochene Potenzen

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik

der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften

Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. Mathias Neubauer

geboren am 07.Juli 1972 in Hannover

2002

Referent:	Prof. Dr. U. Schmidt-Westphal
Korreferent:	Prof. Dr. H. Berens
	Univ. Erlangen-Nürnberg
Tag der Promotion:	06. Februar 2002

Zusammenfassung. Auf der Grundlage neuer zentraler Differenzen werden gebrochene Potenzen von Operatoren untersucht, die im Zusammenhang mit (C_0)-Gruppen auf einem Banachraum auftreten. Insbesondere werden Darstellungen vom Grünwald-Letnikov-Typ und Taylorformeln angegeben sowie K-Funktionale über Stetigkeitsmoduln charakterisiert. Der Schwerpunkt liegt auf dem abstrakten Riesz-Differential $\bar{R}^\alpha$, das die gebrochenen Potenzen des Laplace-Operators verallgemeinert. Wesentlicher Bestandteil dieser Arbeit ist die konsequente Verwendung eines Funktionalkalküls nach L. Schwartz.

Schlagwörter: Gruppen von Operatoren, gebrochene Potenzen, zentrale Differenzen.

Abstract. Using new central differences, those fractional powers of operators are discussed which arise from (C_0)-groups of operators on a Banach space. In particular, representations of Grünwald-Letnikov-type and Taylor expansions are derived as well as characterizations of K-functionals in terms of moduli of continuity. Special emphasis is laid on a generalization of the fractional powers of the Laplacian, namely, the abstract Riesz differential $\bar{R}^\alpha$. Throughout this thesis, investigations take place within the framework of an operational calculus due to L. Schwartz.

Key words: groups of operators, fractional powers, central differences.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Gebrochene Potenzen von Operatoren lassen sich auf verschiedene Arten einführen. Von Interesse ist vor allem der Fall unbeschränkter Operatoren. Für Halbgruppenerzeuger formulierte Phillips [36] eine erste allgemeine Definition, die auf Ideen von Bochner [8] und Feller [23] zurückgeht. Demnach treten die gebrochenen Potenzen als Erzeuger bestimmter, im Bochnerschen Sinne untergeordneter Halbgruppen auf. Diese indirekte Methode eignet sich allerdings nur für Exponenten aus dem Intervall $(0, 1)$.

Ende der 1950er Jahre setzte ein reges Interesse an gebrochenen Potenzen von Operatoren ein, und in der Folge wurde eine Vielzahl von Konstruktionen entwickelt, die sogar allgemeinere Operatoren als Halbgruppenerzeuger einbeziehen. Stellvertretend seien hier die Beiträge von Balakrishnan [2, 3, 4], die Arbeiten von Hille und Phillips weiterentwikkeln, und von Komatsu [31] genannt. Eine Übersicht zu den verschiedenen Zugängen findet man in [22, 47, 59].

Überwiegend werden gebrochene Potenzen mit einem Abschließungsargument definiert: Zunächst wird eine Darstellung des zu konstruierenden Operators auf einer Teilmenge des Definitionsbereiches angegeben. Anschließend wird gezeigt, daß der so definierte Operator abschließbar ist, und die kleinste abgeschlossene Fortsetzung ist der gesuchte Operator. Auf diesem Prinzip beruhen z.B. die Konstruktionen in [2, 3, 31, 34, 35].

Erzeugt nun der betrachtete Operator eine Halbgruppe von Operatoren, so stehen einige direkte Approximationsmethoden zur Verfügung, bei denen die gebrochene Potenz auf ihrem gesamten Definitionsbereich dargestellt wird. Die Approximation geschieht durch Marchaud-Integrale [56], durch Differenzenquotienten gebrochener Ordnung [57] oder — im Rahmen eines Funktionalkalküls nach L. Schwartz — mit Hilfe der Regularisierung von Distributionen [19, 32, 59].

Der soeben genannte Funktionalkalkül geht aus einer viel allgemeineren Darstellungstheorie topologischer Halbgruppen von L. Schwartz [43] hervor. Er erweitert den bekannten Kalkül von Hille-Phillips [27, Ch. XV], indem er Laplacetransformierten nicht nur von Maßen, sondern auch von Distributionen einer geeigneten Klasse einen Operator zuordnet. Auf diese Weise erhält man auch unbeschränkte abgeschlossene Operatoren. Insbesondere sind die Laplacetransformierten $F(z) = z^\alpha$ eingeschlossen, über die sich gebrochene Potenzen $(-A)^\alpha$ des Halbgruppenerzeugers einführen lassen. Diese Möglichkeit erwähnt z.B. Faraut [19]; den ganzzahligen Fall diskutieren Lions-Peetre [33]. Systematische Untersuchungen gebrochener Potenzen auf der Grundlage des Schwartz'schen Kalküls wurden von Lanford-Robinson [32] und Westphal [59] durchgeführt.

Es ist aber auch möglich, gebrochene Potenzen mit Laplace-Transformationsmethoden zu behandeln, bei denen ausschließlich Transformierte integrierbarer Funktionen eingehen. Dies wurde in [6, 56, 57, 58] getan; hier liegen die Wurzeln von [59] und [32].

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit gebrochenen Potenzen von Operatoren, die typisch für mehrparametrige (C_0)-Gruppen von Operatoren sind. Im Mittelpunkt des Interesses stehen die in [4], [56, II] eingeführten Operatoren, nämlich das abstrakte Rieszpotential negativer Ordnung $\bar{R}^\alpha$ $(\alpha > 0)$, das die gebrochenen Potenzen $(-\Delta)^{\alpha/2}$ des Laplace-Operators verallgemeinert, sowie im einparametrigen Fall der konjugierte

Operator $\tilde{R}^\alpha$. Während diese Operatoren in den genannten Quellen bereits gut über Marchaud-Integrale erschlossen sind, fehlen bisher eingehendere Untersuchungen, die die Idee des Differentialquotienten (*Grünwald-Letnikov-Zugang*) aufgreifen. Hauptanliegen dieser Arbeit ist es, diesen Aspekt genauer zu studieren. Dazu werden bislang nicht in der Literatur verwendete zentrale Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ gebrochener Ordnung verwendet, die diejenigen ganzzahliger Ordnung interpolieren und charakteristische Eigenschaften der gruppenspezifischen Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ widerspiegeln. Dagegen werden sonst die gebrochenen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die den Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ entsprechen, durch Kombinationen einseitiger Differenzenquotienten approximiert (siehe z.B. [40, 25, 26, 55]), was dem Rückgang auf die Halbgruppensituation entspricht.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der Funktionalkalkül von L. Schwartz in einer Fassung für n-parametrige Gruppen. Dabei übernimmt die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ die Rolle der im Halbgruppenfall benutzten Laplacetransformation, und die einfließende Klasse von Distributionen ist der Raum $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ integrierbarer Distributionen [44]. Der Kalkül ordnet dann einer integrierbaren Distribution bzw. ihrer Fouriertransformierten $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einen abgeschlossenen, dicht definierten Operator zu. Beispielsweise ist der Operator $\bar{R}^\alpha$ über die Fouriertransformierte $F(\xi) = \|\xi\|_2^\alpha$ bestimmt. Die zugrunde liegende Idee sei an einem elementaren Beispiel illustriert: Erzeugt der Operator A eine einparametrige Gruppe $\{T(\tau);\, \tau \in \mathbb{R}\}$ auf dem Banachraum X und ist μ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}$, so motiviert die formale Zuordnung $e^{iv\tau} \sim T(\tau) = e^{\tau A}$ die Interpretation

$$\int_{-\infty}^{\infty} T(\tau)x\, d\mu(\tau) = \mathcal{F}[\mu](-iA)x, \quad x \in X.$$

Die fundamentale Eigenschaft des Funktionalkalküls ist der Faltungssatz: Die Faltung von Distributionen (bzw. das Produkt ihrer Fouriertransformierten) geht in die Verkettung der Operatoren über. Auf diese Weise lassen sich Identitäten für Distributionen, die bequem in fouriertransformierter Gestalt verifiziert werden können, auf die Operatorebene übertragen. Diese Methode werden wir konsequent einsetzen. Der entscheidende Schritt in vielen Beweisen ist jedoch der Nachweis, daß gewisse Funktionen Fouriertransformierte absolut integrierbarer Funktionen sind und daher beschränkte Operatoren induzieren. Im Verlauf der Arbeit werden dazu mehrere Darstellungsaussagen für die Fouriertransformation herangezogen [9, 11, 51, 15, 37, 38, 41].

Kapitel 1 bietet eine kurze Einführung in den Funktionalkalkül und rekapituliert in diesem Rahmen einige Aussagen über gebrochene Potenzen von Halbgruppenerzeugern, die im folgenden von Bedeutung sein werden. Anschließend werden Beispiele gegeben. Insbesondere werden die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ eingeführt.

Im nächsten Kapitel geht es um die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ im Fall einer einparametrigen Gruppe. Die angekündigten zentralen Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ werden besprochen und mit ihrer Hilfe die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ charakterisiert. Es werden Taylorformeln mit Integralrestglied für die Differenzen entwickelt und in dem Zusammenhang Potenzeigenschaften der Operatoren behandelt. Schließlich wird die Äquivalenz von K-Funktionalen und Stetigkeitsmoduln, die mit den Operatoren bzw. den Differenzen gebildet werden, bewiesen und approximationstheoretisch gedeutet.

Kapitel 3 stellt analoge zentrale Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$ bereit, mit denen der Operator $\bar{R}^\alpha$ im mehrparametrigen Fall dargestellt werden kann. Die Realisierung ist technisch erheblich aufwendiger als in der eindimensionalen Situation. Als Anwendung wird auch hier ein K-Funktional zu $\bar{R}^\alpha$ charakterisiert ($0 < \alpha < 2$) und so ein Ergebnis von Ditzian [17] mit vollkommen anderen Methoden verallgemeinert.

Das letzte Kapitel schlägt eine andere Richtung ein, indem es an die anfangs erwähnte Definition gebrochener Potenzen von Phillips anknüpft. In Verallgemeinerung von $\bar{R}^\alpha$ werden die Operatoren $\bar{R}_p^\alpha$ über die Fouriertransformierte $F(\xi) = \|\xi\|_p^\alpha$ eingeführt ($0 < p < \infty$), speziell ist also $\bar{R}_2^\alpha = \bar{R}^\alpha$. Dann erweist sich $-\bar{R}_p^\alpha$ als Erzeuger einer untergeordneten Halbgruppe vom Gauß-Weierstraß-Typ, und es gilt $(\bar{R}_p^\alpha)^\beta = \bar{R}_p^{\alpha\beta}$ für alle $\alpha, \beta > 0$.

An dieser Stelle möchte ich Frau Prof. Dr. U. Schmidt-Westphal ganz herzlich für die zahlreichen Anregungen und die wertvolle Unterstützung während der Arbeiten zu dieser Dissertation danken. Herrn Prof. Dr. H. Berens danke ich für seine freundliche Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen. Von Herrn Prof. Dr. W. Trebels stammen wichtige Literaturhinweise zur Fouriertransformation; auch ihm gilt mein Dank.

Notation und Grundlagen

In Bezug auf den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ bezeichnen $e^1, \dots, e^n$ die kanonischen Einheitsvektoren, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt und $\| \cdot \|_p$ die klassischen l^p-Normen ($1 \le p \le \infty$) bzw. -Quasinormen ($0 < p < 1$). Es sei $L^1(\mathbb{R}^n)$ der Raum der komplexwertigen integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Die Fouriertransformierte einer Funktion $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[f](\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{i\langle \xi, t \rangle}\, dt, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Ist $\mathcal{F}[f](0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, dt = 1$, so nennen wir f *normalisiert*. Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ kann zu einem topologischen Isomorphismus auf dem Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ der temperierten Distributionen, ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, fortgesetzt werden. Für die allgemeine Distributionentheorie sei auf die bekannten Monographien [24, 28, 44] verwiesen; einige speziellere Begriffe und Aussagen sind hier zusammengestellt.

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Distributionenschar $\{U_\alpha;\, \alpha \in \Omega\} \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ heißt *analytisch*, falls für jedes Testelement $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\alpha \mapsto \langle U_\alpha, \varphi \rangle$ auf Ω holomorph ist. Differentiation nach dem Parameter α liefert die analytische Schar $\{\frac{\partial}{\partial\alpha} U_\alpha;\, \alpha \in \Omega\}$, wobei $\langle \frac{\partial}{\partial\alpha} U_\alpha, \varphi \rangle = \frac{\partial}{\partial\alpha} \langle U_\alpha, \varphi \rangle$. Es gilt der Identitätssatz: Ist $\{V_\alpha;\, \alpha \in \Omega\}$ eine weitere analytische Schar, die mit $\{U_\alpha\}$ auf einer unendlichen kompakten Menge $A \subseteq \Omega$ übereinstimmt, so folgt bereits $U_\alpha = V_\alpha$ für alle $\alpha \in \Omega$. Dieses Argument wird gelegentlich bei der Bestimmung von Fouriertransformierten vor dem Hintergrund benutzt, daß die transformierten Scharen $\{\mathcal{F}[U_\alpha]\}$ und $\{\mathcal{F}[\frac{\partial}{\partial\alpha} U_\alpha] = \frac{\partial}{\partial\alpha} \mathcal{F}[U_\alpha];\, \alpha \in \Omega\}$ ebenfalls analytisch sind.

Wie üblich unterscheiden wir nicht zwischen einer lokal integrierbaren Funktion $f \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$ und der von ihr induzierten regulären Distribution $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Dagegen werden separate Bezeichnungsweisen für die klassische und die distributionelle Ableitung verwendet: Ist $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex der Länge $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, so wird die Ableitung $D^\beta U$

der Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert durch

$$\langle D^\beta U, \varphi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle U, \partial^\beta \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Dabei ist $\partial^\beta \varphi = \partial_1^{\beta_1} \dots \partial_n^{\beta_n} \varphi$ die gewöhnliche (klassische) Ableitung von φ. Für $\beta = e^k$ schreiben wir kurz ∂_k bzw. D_k $(k = 1, \dots, n)$.

Von Bedeutung wird die Klasse $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ der integrierbaren Distributionen sein [44, VI,§ 8]. Eine Distribution $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt *integrierbar*, wenn sie als endliche Summe von Ableitungen integrierbarer Funktionen dargestellt werden kann, etwa

$$U = \sum_{|\beta| \le m} D^\beta f_\beta \tag{$*$}$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $f_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Äquivalent ist die Forderung, daß für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die Faltung $U * \varphi$ zu $L^1(\mathbb{R}^n)$ gehört. In diesem Fall trifft $U * \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ sogar für alle $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zu. Man beachte $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; die Fouriertransformierten integrierbarer Distributionen sind stetige Funktionen. Zu je zwei Distributionen $U, V \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ ist die Faltung $U * V$ wohldefiniert und wieder Element von $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$. Es gilt der Produktsatz für die Fouriertransformation:

$$\mathcal{F}[U * V](\xi) = \mathcal{F}[U](\xi) \cdot \mathcal{F}[V](\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Auch bezüglich Tensorbildung sind integrierbare Distributionen stabil. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $n = n_1 + n_2$. Das Tensorprodukt $U_1 \otimes U_2$ von $U_1 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_1})$, $U_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_2})$ ist die eindeutig bestimmte Distribution in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die der Bedingung

$$\langle U_1 \otimes U_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2 \rangle = \langle U_1, \varphi_1 \rangle \langle U_2, \varphi_2 \rangle \quad (\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1}), \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2}))$$

genügt. Dabei bezeichnet $\varphi_1 \otimes \varphi_2 : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{C}$ die durch $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(t^1, t^2) = \varphi_1(t^1)\varphi_2(t^2)$ erklärte Funktion. Sind U_1, U_2 integrierbar, so erbt $U_1 \otimes U_2$ in Anbetracht von $(*)$ diese Eigenschaft. Die Tensorformel für die Fouriertransformation nimmt dann die einfache Gestalt

$$\mathcal{F}[U_1 \otimes U_2](\xi^1, \xi^2) = \mathcal{F}[U_1](\xi^1) \cdot \mathcal{F}[U_2](\xi^2)$$

an $((\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^n)$.

Im Fall $n = 1$ arbeitet man bisweilen mit der Klasse $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ derjenigen integrierbaren Distributionen U, deren Träger supp (U) im Intervall $[0, \infty)$ enthalten ist. Zu solchen Distributionen existieren Darstellungen der Form $(*)$, bei denen die Funktionen f_β zu $L^1(0, \infty)$ gehören; zum Beweis dieser Aussage vgl. [19, S. 298, Prop. 0.5]. Es ist dann zweckmäßig, an Stelle der Fouriertransformation die Laplacetransformation

$$\mathcal{L}[U](v) := \langle U(u), e^{-vu} \rangle, \quad v > 0,$$

zu benutzen. Für $U \in L^1(0, \infty)$ erhält man selbstverständlich das klassische Laplace-Integral.

Zu den wichtigsten Vertretern integrierbarer Distributionen zählen die Diracmaße. Es bezeichne $\underline{\delta}_{\{u\}}$ das Diracmaß auf $\mathbb{R}^n$ mit Masse im Punkt u. Speziell setzen wir $\underline{\delta} := \underline{\delta}_n := \underline{\delta}_{\{0\}}$. In der eindimensionalen Situation $(n = 1)$ bevorzugen wir die Varianten $\delta_u := \underline{\delta}_{\{u\}}$, $\delta := \delta_0$ und schreiben wie üblich $\delta^k = D^k \delta$ $(k \in \mathbb{N})$.

1 Funktionalkalkül nach L. Schwartz

Abschnitt 1.1 bietet eine kurze Einführung in den Kalkül in der Fassung für n-parametrige Gruppen. Die Darstellung hält sich eng an [59], hinzu kommt der Tensorsatz. Nach einem Exkurs über gebrochene Potenzen von Halbgruppenerzeugern schließen sich zwei Abschnitte mit ausführlich kommentierten Beispielen an.

Die Gruppenfassung des Kalküls ist bislang nur in der Arbeit [60] verwendet worden (einparametriger Fall).

1.1 Funktionalkalkül

Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein komplexer Banachraum und $\mathcal{E}(X)$ die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf X. Wir betrachten eine gleichmäßig beschränkte n-parametrige (C_0)-Gruppe auf X, also eine Familie $\{T(t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$ linearer Operatoren in $\mathcal{E}(X)$ mit den folgenden Eigenschaften:

$$T(t+s) = T(t)T(s) \text{ für } t, s \in \mathbb{R}^n, \quad T(0) = I \text{ (Identität)},$$

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)x - x\| = 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

$$\sup\left\{\|T(t)\|; t \in \mathbb{R}^n\right\} < \infty.$$

Der angekündigte Funktionalkalkül wird in zwei Schritten konstruiert. Zunächst definiert man für ein endliches komplexes Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ den Operator $G(\mu) \in \mathcal{E}(X)$ durch

$$G(\mu)x := \int_{\mathbb{R}^n} T(t)x\, d\mu(t) \quad (x \in X).$$

Beispielsweise liefert das Diracmaß $\underline{\delta}_{\{t\}}$ mit Masse in $t \in \mathbb{R}^n$ den Operator $G(\underline{\delta}_{\{t\}}) = T(t)$. Die Abbildung $\mu \mapsto G(\mu)$ ist ein Homomorphismus von der Faltungsalgebra der beschränkten Borelmaße auf $\mathbb{R}^n$ in die Banachalgebra $\mathcal{E}(X)$. Besitzt μ eine Dichte bzgl. des Lebesgue-Maßes, etwa $d\mu(t) = f(t)\, dt$ mit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so schreiben wir auch

$$G(f)x := G(\mu)x = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\, T(t)x\, dt \quad (x \in X).$$

Speziell kann man den Operator $G(U * \varphi) \in \mathcal{E}(X)$ betrachten, wann immer $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist.

Bis jetzt ist $G(\mu)$ nur für endliche Borelmaße μ erklärt. Mit einem geeigneten Grenzprozeß kann man nun auch integrierbare Distributionen einbeziehen. Dazu sei $\mathcal{H}$ derjenige Filter auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, der von den folgenden Mengen H_ε ($\varepsilon > 0$) erzeugt wird:

$$H_\varepsilon := \left\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n);\, \varphi \geq 0,\, \varphi(t) = 0 \quad \text{falls } \|t\|_2 \geq \varepsilon,\, \left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t)\, dt - 1\right| < \varepsilon\right\}.$$

Im Raum $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert $\mathcal{H}$ gegen das Diracmaß $\underline{\delta}$. Für $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in X$ bildet das System von Mengen

$$\{G(U * \varphi)x; \varphi \in H\}, \quad H \in \mathcal{H}$$

eine Filterbasis auf X. Konvergiert diese, wird der Grenzwert mit $\lim_{\mathcal{H}} G(U*\varphi)x$ bezeichnet. Wir sprechen auch vom Grenzübergang $\varphi \to \underline{\delta}$ bzgl. $\mathcal{H}$.

Definition 1.1. *Sei $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$. Der Operator $G(U)$ mit dem Definitionsbereich*

$$D(G(U)) := \{x \in X;\ \lim_{\mathcal{H}} G(U*\varphi)x \text{ existiert}\}$$

ist erklärt durch

$$G(U)x = \lim_{\mathcal{H}} G(U*\varphi)x, \quad x \in D(G(U)).$$

Für ein endliches Borelmaß μ ist Definition 1.1 konsistent mit dem oben eingeführten Operator $G(\mu)$. Insbesondere gilt für das Diracmaß $\underline{\delta}$ auf $\mathbb{R}^n$

$$G(\underline{\delta})x = \lim_{\mathcal{H}} G(\varphi)x = x \quad (x \in X).$$

Das herausragende Merkmal des Funktionalkalküls G ist der *Faltungssatz*:

Satz 1.2. *Seien $U, V \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in D(G(V))$. Dann gilt*

$$x \in D(G(U*V)) \Longleftrightarrow G(V)x \in D(G(U)).$$

In diesem Fall ist $G(U*V)x = G(U)G(V)x$.

Der Beweis wird wie im Halbgruppenfall geführt; siehe [43] oder [59]. Aus Satz 1.2 folgen leicht die typischen Eigenschaften eines Operators $G(U)$.

Satz 1.3. *Sei $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$.*

(i) Für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in X$ gehört $G(\varphi)x$ zum Definitionsbereich von $G(U)$, und

$$G(U)G(\varphi)x = G(U*\varphi)x.$$

Im Fall $x \in D(G(U))$ gilt auch

$$G(\varphi)G(U)x = G(U*\varphi)x.$$

(ii) Der Operator $G(U)$ ist abgeschlossen, und sein Definitionsbereich $D(G(U))$ liegt dicht in X.

Mit diesem Satz kann man sich rasch klarmachen, daß in Definition 1.1 äquivalent auch ein feinerer Filter als $\mathcal{H}$ verwendet werden kann (vgl. [43, S. 104]). Nimmt man speziell eine nichtnegative normalisierte Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und setzt $\varphi_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ $(\varepsilon > 0)$, so gilt für jedes $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$:

$$D(G(U)) = \{x \in X;\ \lim_{\varepsilon \to 0^+} G(U*\varphi_\varepsilon)x \text{ existiert}\},$$

$$G(U)x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} G(U*\varphi_\varepsilon)x \quad (x \in D(G(U)).$$

Wir bereiten nun den Tensorsatz vor. Die Gruppe $\{T(t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$ sei mindestens zweiparametrig, also $n \geq 2$. Zur Zerlegung $n = n_1 + n_2$ ($n_1,\, n_2 \in \mathbb{N}$) betrachten wir die gleichmäßig beschränkten (C_0)-Gruppen

$$\{T^1(t^1);\, t^1 \in \mathbb{R}^{n_1}\}, \quad \{T^2(t^2);\, t^2 \in \mathbb{R}^{n_2}\},$$

definiert durch

$$\begin{aligned} T^1(t^1) &:= T(t^1, 0) \qquad (t^1 \in \mathbb{R}^{n_1}), \\ T^2(t^2) &:= T(0, t^2) \qquad (t^2 \in \mathbb{R}^{n_2}). \end{aligned}$$

Schreibt man $t = (t^1, t^2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, so hat man die Zerlegung $T(t) = T^1(t^1)T^2(t^2)$. Die Funktionalkalküle zu den Gruppen T^1, T^2 werden mit G_1 bzw. G_2 bezeichnet. Für integrierbare Distributionen $U_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_1})$, $U_2 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_2})$ sind dann die abgeschlossenen Operatoren $G_1(U_1)$ und $G_2(U_2)$ erklärt.

Der Tensorsatz ist eine unmittelbare Konsequenz aus dem Faltungssatz und dem folgenden Lemma.

Lemma 1.4. *Seien $U_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_1})$, $U_2 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_2})$. Dann gilt*

$$G_1(U_1) = G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) \text{ und } G_2(U_2) = G(\underline{\delta}_{n_1} \otimes U_2).$$

Beweis. Wir beweisen die erste Identität; die zweite zeigt man analog.

Für jede Funktion $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^{n_1})$ ist $f_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}$ ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$ und

$$G(f_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) = G_1(f_1).$$

Sei $x \in D(G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}))$ und $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$. Durch Übergang zu den Fouriertransformierten verifiziert man rasch, daß

$$(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * (\varphi_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) = (U_1 * \varphi_1) \otimes \underline{\delta}_{n_2}$$

(vgl. auch [28, S. 399]). Mit dem Faltungssatz ergibt sich

$$\begin{aligned} G_1(\varphi_1)G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2})x &= G(\varphi_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2})G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2})x \\ &= G((U_1 * \varphi_1) \otimes \underline{\delta}_{n_2})x \\ &= G_1(U_1 * \varphi_1)x. \end{aligned}$$

Grenzübergang $\varphi_1 \to \underline{\delta}_{n_1}$ bzgl. desjenigen Filters $\mathcal{H}_1$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$, mit dem der Kalkül G_1 konstruiert wird, liefert $x \in D(G_1(U_1))$ und $G_1(U_1)x = G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2})x$.

Wir wenden uns nun der Inklusion $D(G_1(U_1)) \subseteq D(G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}))$ zu. Für beliebige $\psi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$, $\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ besteht die Identität

$$(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * \psi = (U_1 * \psi_1) \otimes \psi_2 \quad (\psi = \psi_1 \otimes \psi_2),$$

die sich auf die Operatorebene in der Form

$$G((U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * \psi) = G_2(\psi_2)G_1(U_1 * \psi_1)$$

überträgt. Seien $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_1})$, $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_2})$ nichtnegative normalisierte Funktionen. Dann ist auch $\varphi := \varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nichtnegativ und normalisiert. Man beobachtet

$$\varphi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^{n_1}}\varphi_1\Big(\frac{t^1}{\varepsilon}\Big)\,\frac{1}{\varepsilon^{n_2}}\varphi_2\Big(\frac{t^2}{\varepsilon}\Big) = (\varphi_{1,\varepsilon} \otimes \varphi_{2,\varepsilon})(t^1, t^2).$$

Damit ergibt sich für $x \in D(G_1(U_1))$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &G((U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * \varphi_\varepsilon)x - G_1(U_1)x \\ &\qquad = G_2(\varphi_{2,\varepsilon})\big[G_1(U_1 * \varphi_{1,\varepsilon})x - G_1(U_1)x\big] + \big[G_2(\varphi_{2,\varepsilon})G_1(U_1)x - G_1(U_1)x\big]. \end{aligned}$$

Da die Operatoren $G_2(\varphi_{2,\varepsilon})$ gleichmäßig beschränkt sind, folgt

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} G((U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * \varphi_\varepsilon)x - G_1(U_1)x = 0,$$

also $x \in D(G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}))$ und $G(U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2})x = G_1(U_1)x$. □

Das voangegangene Lemma besagt, daß die Kalküle G_1, G_2 im Kalkül G enthalten sind. Der allgemeine Tensorsatz lautet nun

Satz 1.5. *Seien $U_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_1})$ und $U_2 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^{n_2})$.*

(i) Für $x \in D(G_1(U_1))$ gilt

$$x \in D(G(U_1 \otimes U_2)) \Longleftrightarrow G_1(U_1)x \in D(G_2(U_2)).$$

In diesem Fall ist $G(U_1 \otimes U_2)x = G_2(U_2)G_1(U_1)x$.

(ii) Entsprechend gilt für $x \in D(G_2(U_2))$

$$x \in D(G(U_1 \otimes U_2)) \Longleftrightarrow G_2(U_2)x \in D(G_1(U_1)).$$

In diesem Fall ist $G(U_1 \otimes U_2)x = G_1(U_1)G_2(U_2)x$.

Beweis. Dies folgt mit dem Faltungssatz 1.2 aus der Identität

$$U_1 \otimes U_2 = (U_1 \otimes \underline{\delta}_{n_2}) * (\underline{\delta}_{n_1} \otimes U_2). \qquad □$$

An dieser Stelle sei auf einen anderen Funktionalkalkül für mehrparametrige (C_0)-Gruppen hingewiesen. Der in [1] beschriebene Kalkül, bei dem auch polynomial wachsende Gruppen zugelassen sind, verwendet auch die Fouriertransformation und wird ebenfalls in zwei Schritten konstruiert. Um auch nicht beschränkte Operatoren zu erhalten, werden Interpolationsmethoden eingesetzt.

1.2 Gebrochene Potenzen von Halbgruppenerzeugern

An einigen Stellen werden Halbgruppen von Operatoren und gebrochene Potenzen ihres infinitesimalen Erzeugers betrachtet werden. Das benötigte Hintergrundwissen fassen wir in diesem Abschnitt zusammen. Gebrochene Potenzen lassen sich auf verschiedene Arten einführen; hier bietet sich der Zugang über den Funktionalkalkül im Halbgruppenfall an. Eine ausführliche Darstellung findet man in [59]. Zwei nützliche Propositionen vermitteln einen ersten Eindruck, wie durchsichtig im Rahmen des Kalküls argumentiert werden kann.

Sei $\{S(\sigma);\, \sigma \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe auf dem Banachraum X. Für $U \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ definiert man den dicht definierten, abgeschlossenen Operator $G^+(U)$ auf X durch

$$G^+(U)x := \lim_{\mathcal{H}^+} \int_0^\infty (U * \varphi)(\sigma)\, S(\sigma)x\, d\sigma,$$

wann immer der Grenzwert existiert. Der Limes wird bzgl. des Filters $\mathcal{H}^+$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ausgeführt; eine Basis für $\mathcal{H}^+$ ist das Mengensystem $\{H_\varepsilon^+;\, \varepsilon > 0\}$, wobei

$$H_\varepsilon^+ := \Big\{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R});\ \varphi \geq 0,\ \mathrm{supp}\ (\varphi) \subseteq [0, \varepsilon),\ \Big| \int_0^\infty \varphi(\sigma)\, d\sigma - 1 \Big| \leq \varepsilon \Big\}.$$

Die Sätze 1.2 (Faltungssatz) und 1.3 gelten entsprechend für den Kalkül G^+. In Satz 1.3 muß man selbstverständlich supp $(\varphi) \subseteq [0, \infty)$ fordern. In der Definition des Operators $G^+(U)$ darf man $\mathcal{H}^+$ durch einen feineren Filter ersetzen.

Der infinitesimale Erzeuger A der Halbgruppe $S(\sigma)$ ist durch den Definitionsbereich

$$D(A) := \{x \in X;\ \lim_{\sigma \to 0^+} \sigma^{-1}[S(\sigma)x - x] \quad \text{existiert}\}$$

und die Zuordnung

$$Ax := \lim_{\sigma \to 0^+} \sigma^{-1}[S(\sigma)x - x], \quad x \in D(A)$$

bestimmt. Man kann leicht zeigen, daß

$$G^+(\delta^n) = (-A)^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Allgemein lassen sich gebrochene Potenzen $(-A)^\alpha$, $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, des Erzeugers A mit Hilfe der gebrochenen Ableitungen δ^α des Diracmaßes definieren. Für eine komplexe Zahl α mit $\mathrm{Re}\,\alpha < 0$ ist δ^α die reguläre Distribution

$$\langle \delta^\alpha, \varphi \rangle := \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{-\alpha-1} \varphi(\sigma)\, d\sigma \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})).$$

Durch analytische Fortsetzung erhält man eine analytische Schar $\{\delta^\alpha;\, \alpha \in \mathbb{C}\}$ temperierter Distributionen [24, I, §3]; für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ gewinnt man das Diracmaß und seine gewöhnlichen Ableitungen zurück. Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, so gilt

$$\langle \delta^\alpha, \varphi \rangle = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^\infty \sigma^{m-\alpha-1} \varphi^{(m)}(\sigma)\, d\sigma \tag{1.1}$$

($\mathrm{Re}\,\alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$) und

$$\langle \delta^\alpha, \varphi \rangle = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{-\alpha-1} \Big[\varphi(\sigma) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\sigma^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) \Big]\, d\sigma$$

($m - 1 < \mathrm{Re}\,\alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$). Anhand der ersten Darstellung macht man sich rasch klar, daß im Fall $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ die Distribution δ^α zu $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ gehört. Man kann also gebrochene Potenzen des Halbgruppenerzeugers A durch

$$(-A)^\alpha := G^+(\delta^\alpha) \quad (\mathrm{Re}\,\alpha > 0)$$

einführen, was den Sachverhalt $\mathcal{L}[\delta^\alpha](z) = z^\alpha$ ($\mathrm{Re}\, z > 0$) wiedergibt. Wir werden nur positive reelle α betrachten. Es gilt $D((-A)^\gamma) \subseteq D((-A)^\alpha)$ ($\gamma > \alpha$) und das typische additive Potenzgesetz:

$$(-A)^\alpha (-A)^\beta = (-A)^{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Die angegebene Definition gebrochener Potenzen ist äquivalent zu den Konstruktionen mit Marchaud-Integralen und mit gebrochenen Differenzen nach Grünwald-Letnikov [59], ferner ist sie mit den allgemeineren Definitionen von Balakrishnan [3] und Komatsu [31] verträglich.

Da der Operator $A - I$ die exponentiell fallende (C_0)-Halbgruppe $\{e^{-\sigma} S(\sigma);\, \sigma \geq 0\}$ erzeugt, können auch die gebrochenen Potenzen $(I - A)^\alpha$ gebildet werden ($\alpha > 0$). Es ist $(I - A)^\alpha = G^+(e^{-\bullet}\delta^\alpha)$ mit der Distribution $e^{-\bullet}\delta^\alpha \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$, die durch

$$\langle e^{-\bullet}\delta^\alpha, \varphi \rangle = \langle \delta^\alpha(\sigma), e^{-\sigma}\varphi(\sigma) \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

gegeben ist. Der abgeschlossene Operator $(I-A)^\alpha$ bildet seinen Definitionsbereich bijektiv auf X ab und besitzt daher eine stetige Inverse, und zwar [31, I, Prop. 11.1]

$$(I - A)^{-\alpha} x := G^+(e^{-\bullet}\delta^{-\alpha}) x = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \sigma^{\alpha-1} e^{-\sigma}\, S(\sigma) x \, d\sigma \quad (x \in X).$$

Dies kann man sich auch mit dem Faltungssatz für den Kalkül G^+ bequem überlegen.

Setzt man

$$\begin{aligned} H^\alpha &:= (I - A)^{-\alpha}[X] = D((I - A)^\alpha), \\ \|x\|_\alpha &:= \|(I - A)^\alpha x\| \quad (x \in H^\alpha), \end{aligned}$$

so läßt sich der Banachraum $(H^\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ als abstrakter Bessel-Potentialraum auffassen, siehe [20, 21] für eine Einordnung in neuere Entwicklungen der stochastischen Analysis und Potentialtheorie sowie der Theorie partieller Differentialgleichungen. Die Menge

$$M := \{G^+(\varphi)x;\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \mathrm{supp}\ (\varphi) \subseteq [0, \infty),\ x \in X\}$$

liegt dicht in H^α, denn für $x \in H^\alpha$ ergibt sich

$$\lim_{\mathcal{H}^+} \|G^+(\varphi)x - x\|_\alpha = \lim_{\mathcal{H}^+} \|G^+(\varphi)(I - A)^\alpha x - (I - A)^\alpha x\| = 0.$$

Die folgende Proposition wurde schon von Komatsu [31, I,Th. 6.4] für eine allgemeinere Klasse von Operatoren bewiesen. Es handelt sich dabei um eine abstrakte Version eines bekannten Prinzips aus der Fourieranalysis, nämlich der engen Wechselwirkung zwischen Riesz- und Besselpotentialen, siehe etwa [45, S. 133]. Der folgende ökonomische Beweis ist eine Adaption von [32, Th. 5.1]. In [21] wird das Ergebnis mit einem Funktionalkalkül gewonnen, der vollständigen Bernsteinfunktionen f den Erzeuger $f(A)$ einer untergeordneten Halbgruppe (im Sinne von Bochner) zuordnet und dann auf die erzeugte Funktionenalgebra fortgesetzt wird. Zu Einzelheiten dieser Konstruktion gebrochener Potenzen siehe [42].

Proposition 1.6. *Sei $\alpha > 0$.*

(i) Es ist $D((I-A)^\alpha) = D((-A)^\alpha)$, und H^α läßt sich äquivalent normieren durch

$$|||x|||_\alpha = \|x\| + \|(-A)^\alpha x\|.$$

(ii) Die Räume H^β $(\beta > \alpha)$ sind stetig und dicht in H^α eingebettet.

Beweis. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Funktion

$$z \longmapsto \left(\frac{z}{1+z}\right)^\varepsilon \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

die Laplacetransformierte eines endlichen Borelmaßes μ_ε auf $[0,\infty)$, wie gliedweise Rücktransformation der Entwicklung

$$\left(1 - \frac{1}{1+z}\right)^\varepsilon = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \binom{\varepsilon}{k} \left(\frac{1}{1+z}\right)^k$$

zeigt. Insbesondere ist $G^+(\mu_\varepsilon) \in \mathcal{E}(X)$. Sei $\varepsilon \in [0,1)$ derart, daß $\alpha + \varepsilon =: m \in \mathbb{N}$. Aus

$$\mathcal{L}[e^{-\bullet}\delta^\alpha](z) = (1+z)^\alpha = \frac{1}{(1+z)^\varepsilon} + \left(\frac{z}{1+z}\right)^\varepsilon \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} z^{k-\varepsilon}$$

folgt

$$(I-A)^\alpha x = (I-A)^{-\varepsilon} x + G^+(\mu_\varepsilon) \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{m-k} (-A)^{\alpha-k} x$$

für jedes $x \in D((-A)^\alpha)$ und somit $D((-A)^\alpha) \subseteq D((I-A)^\alpha)$. Die umgekehrte Inklusion gilt wegen $z^\alpha = \big(z/(1+z)\big)^\alpha (1+z)^\alpha$ und

$$(-A)^\alpha x = G^+(\mu_\alpha)(I-A)^\alpha x, \quad x \in D((I-A)^\alpha).$$

Ist $(x_n)_n$ eine Folge in H^α mit $\|x_n\|_\alpha \to 0$, so konvergieren auch $\|x_n\| \to 0$ und $\|(-A)^\alpha x_n\| \to 0$. Also ist $(x_n)_n$ Nullfolge im Banachraum $(H^\alpha, |||\cdot|||_\alpha)$, und die Normen $\|\cdot\|_\alpha$, $|||\cdot|||_\alpha$ auf H^α sind äquivalent.

Wegen $(I-A)^\alpha = (I-A)^{-(\beta-\alpha)}(I-A)^\beta$ bestehen die behaupteten Einbettungen. Sie sind dicht, weil die oben angegebene Menge $M \subseteq H^\beta$ dicht in H^α liegt. □

Gelegentlich treten Halbgruppenerzeuger der Bauart $B - cI$ mit $B \in \mathcal{E}(X)$ auf. Die zugehörige Halbgruppe

$$S(\sigma) = e^{-c\sigma} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma^l}{l!} B^l, \quad \sigma \geq 0$$

ist sogar gleichmäßig stetig. Unter geeigneten Voraussetzungen lassen sich die gebrochenen Potenzen $(cI - B)^\alpha$ als Binomialreihe darstellen:

Proposition 1.7. *Seien $B \in \mathcal{E}(X)$ und $c > 0$. Es gebe ein $L > 0$, so daß $\|B^l\| \leq L\, c^l$ für jedes $l \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die von $B - cI$ erzeugte Halbgruppe gleichmäßig beschränkt. Für $\alpha > 0$ gilt*

$$(cI - B)^\alpha = c^\alpha \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{\alpha}{m} \frac{B^m}{c^m} \in \mathcal{E}(X).$$

Die Reihe konvergiert sogar in der Operatornorm.

Beweis. Sei oBdA c=1. Offensichtlich ist $\|S(\sigma)\| \leq L$ für alle $\sigma \geq 0$, so daß die gebrochenen Potenzen $(I - B)^\alpha$ definiert sind. Sei $x \in X$ und $\varphi \in D(\mathbb{R})$, supp $(\varphi) \subseteq [0, \infty)$. Man hat

$$\int_0^\infty (\delta^\alpha * \varphi)(\sigma)\, S(\sigma)x \, d\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \Big(\int_0^\infty (\delta^\alpha * \varphi)(\sigma)\, e^{-\sigma} \frac{\sigma^l}{l!} \, d\sigma \Big) B^l x.$$

Der Koeffizient bei B^l ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big[\frac{\sigma^l}{l!}(\delta^\alpha * \varphi)(\sigma)\Big](1) &= \frac{(-1)^l}{l!} \Big(\frac{d}{d\lambda}\Big)^l \Big\{ \lambda^\alpha\, \mathcal{L}[\varphi](\lambda) \Big\}_{\lambda=1} \\
&= \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{1}{(l-k)!} \int_0^\infty \sigma^{l-k} \varphi(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^\infty (\delta^\alpha * \varphi)(\sigma) S(\sigma)x \, d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} B^k \int_0^\infty \varphi(\sigma)\, S(\sigma)x \, d\sigma.$$

Grenzübergang $\varphi \to \delta$ bzgl. des Filters $\mathcal{H}^+$ liefert die Behauptung. □

1.3 Beispiele zum Kalkül für einparametrige Gruppen

In diesem Abschnitt sei $\{T(\tau);\, \tau \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte einparametrige (C_0)-Gruppe auf dem Banachraum X. Ihr infinitesimaler Erzeuger A ist gegeben durch

$$Ax := \lim_{\tau \to 0} \frac{T(\tau)x - x}{\tau}, \quad x \in D(A),$$

wobei der Definitionsbereich $D(A)$ genau diejenigen $x \in X$ umfaßt, für die der Grenzwert existiert. Die Operatoren A, $-A$ erzeugen die gleichmäßig beschränkten (C_0)-Halbgruppen $\{T(\tau);\, \tau \geq 0\}$ bzw. $\{T(-\tau);\, \tau \geq 0\}$.

In der Konstruktion des Funktionalkalküls G zur Gruppe $T(\tau)$ darf der Filter $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ durch den feineren Filter $\mathcal{H}^+$ ersetzt werden. Daher stimmt die Einschränkung von G auf $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$ mit dem Kalkül G^+ zur Halbgruppe $\{T(\tau);\, \tau \geq 0\}$ überein, so daß

$$G(\delta^\alpha) = G^+(\delta^\alpha) = (-A)^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Die Distribution $\check{\delta}^\alpha \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ geht aus δ^α durch Spiegelung hervor, d.h. $\langle \check{\delta}^\alpha, \varphi \rangle = \langle \delta^\alpha(\tau), \varphi(-\tau) \rangle$ ($\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$). Offensichtlich ist

$$G(\check{\delta}^\alpha) = A^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

Man beachte

$$\mathcal{F}[\delta^\alpha](v) = (-iv)^\alpha, \quad \mathcal{F}[\check{\delta}^\alpha](v) = (iv)^\alpha \quad (\alpha > 0, v \in \mathbb{R}).$$

Es sollen nun Summen und Differenzen der Operatoren $(-A)^\alpha$, A^α betrachtet werden. Ausgangspunkt sind die Distributionen $\bar{V}^\alpha$, $\tilde{V}^\alpha \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R})$ ($\alpha > 0$), die durch die Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}[\bar{V}^\alpha](v) = |v|^\alpha, \quad \mathcal{F}[\tilde{V}^\alpha](v) = -\mathrm{sgn}\,(v)|v|^\alpha$$

charakterisiert sind. Dies bedeutet

$$\bar{V}^\alpha = \frac{\delta^\alpha + \check{\delta}^\alpha}{2\,\cos(\alpha\pi/2)}, \quad \tilde{V}^\alpha = \frac{\delta^\alpha - \check{\delta}^\alpha}{2i\,\sin(\alpha\pi/2)},$$

sofern der Nenner verschieden von Null ist. Im Intervall $2m - 2 < \alpha < 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) hat $\bar{V}^\alpha$ die Darstellung

$$\langle \bar{V}^\alpha, \varphi \rangle = \frac{1}{C_\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{-\alpha-1} \Big[\varphi(u) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{u^{2j}}{(2j)!} \varphi^{(2j)}(0)\Big]\, du \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$$

mit der Konstanten $C_\alpha = 2\,\Gamma(-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)$, falls $\alpha \neq 2m-1$, bzw. $C_{2m-1} = (-1)^m\pi \cdot ((2m-1)!)^{-1}$. Eine entsprechende Darstellung ergibt sich für $\tilde{V}^\alpha$. Speziell beobachtet man $\bar{V}^{2m} = (-1)^m\delta^{2m}$ und $\tilde{V}^{2m-1} = (-1)^m i\,\delta^{2m-1}$ ($m \in \mathbb{N}$).

Definition 1.8. *Die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ auf X sind definiert durch*

$$\bar{R}^\alpha := G(\bar{V}^\alpha), \quad \tilde{R}^\alpha := G(\tilde{V}^\alpha) \quad (\alpha > 0).$$

Diese Operatoren wurden in [56, II] über Marchaud-Integrale eingeführt. In der Tat besteht für $0 < \alpha < m$, $m \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\frac{1}{K_{\alpha,m}} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \tau^{-\alpha-1} \Big[T\Big(\frac{\tau}{2}\Big) - T\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^m x\, d\tau = \begin{cases} \bar{R}^\alpha x, \text{ falls } m \text{ gerade,} \\ \tilde{R}^\alpha x, \text{ falls } m \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Der Limes existiert genau für $x \in D(\bar{R}^\alpha)$ bzw. $x \in D(\tilde{R}^\alpha)$. Es ist

$$K_{\alpha,m} = (-i)^m 2^{m-\alpha} \int_0^\infty \tau^{-\alpha-1} \sin^m(\tau)\, d\tau.$$

Die Marchauddarstellungen für $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ beweist man wie die entprechende Aussage für $(-A)^\alpha$ (siehe [59, §3]); die benötigten Hilfsfunktionen finden sich in [56, II].

Bei der Translationsgruppe auf den Funktionenräumen $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$, kann man die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ mit der Fouriertransformation bequem beschreiben. Sei also $T(\tau)f = f(\bullet - \tau)$ für jedes Element $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ irgendeine nichtnegative normalisierte Testfunktion. Nach Definition 1.8 ist für jedes $1 \leq p < \infty$

$$\bar{R}^\alpha f = L^p(\mathbb{R}) - \lim_{\varepsilon \to 0+} (\bar{V}^\alpha * \varphi_\varepsilon) * f, \quad f \in \mathcal{D}(\bar{R}^\alpha), \tag{1.3}$$

und entsprechend für den Operator $\tilde{R}^\alpha$. Die Definitionsbereiche ergeben sich im Fall $1 \leq p \leq 2$ zu

$$\begin{aligned} D(\bar{R}^\alpha) &= \{f \in L^p(\mathbb{R});\, \mathcal{F}[g](v) = |v|^\alpha \mathcal{F}[f](v) \quad \text{für ein } g \in L^p(\mathbb{R})\}, \\ D(\tilde{R}^\alpha) &= \{f \in L^p(\mathbb{R});\, \mathcal{F}[g](v) = -\mathrm{sgn}\,(v)|v|^\alpha \mathcal{F}[f](v) \quad \text{für ein } g \in L^p(\mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

In dieser Notation ist natürlich $\bar{R}^\alpha f = g$ bzw. $\tilde{R}^\alpha f = g$. Mit der Signumregel für die Hilberttransformation H [11, S. 324] stellt man $D(\bar{R}^\alpha) = D(\tilde{R}^\alpha)$ und $\tilde{R}^\alpha f = i\, H \bar{R}^\alpha f$ fest $(1 < p \leq 2)$. Ein typisches Dichteargument dehnt diese Aussage auf $1 < p < \infty$ aus. Dagegen sind die Definitionsbereiche $D(\bar{R}^\alpha)$, $D(\tilde{R}^\alpha)$ verschieden, wenn man den Raum $L^1(\mathbb{R})$ zugrunde legt: Ist nämlich $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ gerade, $\chi(v) = 1$ für $|v| < 1$, und erklärt man f durch $\mathcal{F}[f](v) = (1 - \chi(v))|v|^{-\alpha}(1 + \log(1 + |v|))^{-1}$, so gehört f zwar zu $D(\bar{R}^\alpha)$ (vgl. [51]), wegen

$$\sup_{b \to \infty} \left| \int_1^b \frac{dv}{v \log(1 + |v|)} \right| = \infty$$

aber nicht zu $D(\tilde{R}^\alpha)$ (vgl. [46, S. 31]).

Die Verknüpfung $\mathcal{F}[g](v) = |v|^\alpha \mathcal{F}[f](v)$ beinhaltet qualitativ, daß f das Rieszpotential der Ordnung α von g ist, siehe z.B. [45, S. 117]. Balakrishnan [4] bezeichnet daher den Operator $\bar{R}^\alpha$ auf dem Banachraum X als abstraktes Rieszpotential negativer Ordnung. Feller [23] und Bochner [8] führen $\bar{R}^\alpha$ als Halbgruppenerzeuger auf Funktionenklassen ein; während Feller vom Standpunkt der Rieszpotentiale ausgeht, stößt Bochner bei seinen Untersuchungen des Diffusionsprozesses auf die Interpretation $\bar{R}^\alpha = (-d^2/du^2)^{\alpha/2}$. Die verschiedenen Sichtweisen werden in [59, §6] deutlich herausgearbeitet; bzgl. der Rieszableitung siehe auch die Übersicht in [14, § 3.7].

Als unmittelbare Konsequenz von Satz 1.3 notieren wir den folgenden Zusammenhang zwischen den Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ und $(-A)^\alpha$, A^α.

Proposition 1.9. *Sei $\alpha > 0$.*

(i) Für $\alpha \neq 1, 3, 5, \ldots$ ist der Operator $\big(2\cos(\alpha\pi/2)\big)^{-1}\big[(-A)^\alpha + A^\alpha\big]$ abschließbar, und die kleinste abgeschlossene Fortsetzung ist $\bar{R}^\alpha$.

(ii) Für $\alpha \neq 2, 4, 6, \dots$ ist der Operator $\big(2i\,\sin(\alpha\pi/2)\big)^{-1}\big[(-A)^\alpha - A^\alpha\big]$ abschließbar, und die kleinste abgeschlossene Fortsetzung ist $\tilde{R}^\alpha$.

Teil (i) der Proposition bezieht sich auf die Tatsache, daß das klassische eindimensionale Rieszpotential in zwei gebrochene Riemann-Liouville-Integrale zerlegt werden kann. Feller verallgemeinerte in seiner bereits erwähnten Arbeit das Rieszpotential; seine neuen Integraloperatoren sind ebenfalls Linearkombinationen gebrochener Integrale. Von daher bietet es sich an, mit den integrierbaren Distributionen

$$\bar{V}^\alpha_{(\gamma)} := \frac{\sin(\alpha\pi/2+\alpha\gamma)}{\sin(\alpha\pi)}\,\delta^\alpha + \frac{\sin(\alpha\pi/2-\alpha\gamma)}{\sin(\alpha\pi)}\,\breve{\delta}^\alpha$$

($\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$) und $\bar{V}^\alpha_{(0)} := \bar{V}^\alpha$ ($\alpha > 0$) die abstrakten Feller-Potentiale $\bar{R}^\alpha_{(\gamma)} := G(\bar{V}^\alpha_{(\gamma)})$ negativer Ordnung zu definieren. Butzer-Trebels [13] behandeln im Detail die zu $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$, $\bar{R}^\alpha_{(\gamma)}$ gehörigen Integraloperatoren auf verschiedenen Funktionenklassen. In mehreren neueren Arbeiten beschäftigen sich Gorenflo-Mainardi mit einer Diffusionsgleichung, die eine räumliche Feller-Ableitung enthält, siehe etwa [25, 26]. Diese Autoren interessieren sich vor allem für numerische bzw. stochastische Aspekte und arbeiten von daher mit einem *random walk*-Modell.

.

1.4 Beispiele zum Kalkül für n-parametrige Gruppen

Wir betrachten nun eine gleichmäßig beschränkte n-parametrige (C_0)-Gruppe $\{T(t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$ von Operatoren ($n \geq 2$). Solch eine Gruppe setzt sich aus n kommutierenden einparametrigen Gruppen $\{T_k(\tau);\, \tau \in \mathbb{R}\}$ ($k = 1, \dots, n$) zusammen, wobei

$$T_k(\tau) := T(\tau\, e^k).$$

Die Erzeuger dieser *Partialgruppen* seien mit $A_1, \dots, A_n$ bezeichnet.

Aufgrund des Tensorsatzes bzw. Lemma 1.4 ist

$$(-A_1)^\alpha = G(D_1^\alpha \underline{\delta}) = G_1(\delta^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

mit der gebrochenen partiellen Ableitung

$$D_1^\alpha \underline{\delta} := \delta^\alpha \otimes \underline{\delta}_{n-1} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$$

des Diracmaßes. Die entsprechend gebauten Distributionen $D_2^\alpha\underline{\delta}, \dots, D_n^\alpha\underline{\delta}$ liefern die Operatoren $(-A_2)^\alpha, \dots, (-A_n)^\alpha$, wie man von den Transformationspaaren

$$\mathcal{F}[D_k^\alpha \underline{\delta}](\xi) = (-i\,\xi_k)^\alpha \quad (\alpha > 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n,\, k \in \{1, \dots, n\})$$

her auch erwartet.

Richtungsableitungen gebrochener Ordnung des Diracmaßes können ebenfalls herangezogen werden. Sei $\nu \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ ein normierter Vektor und Q_ν eine beliebige reelle orthogonale Matrix mit $Q_\nu \nu = e^1$. Für $\alpha > 0$ ist die Distribution $D_\nu^\alpha \underline{\delta} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ erklärt durch

$$\langle D_\nu^\alpha \underline{\delta}, \varphi \rangle = \langle D_1^\alpha \underline{\delta},\, \varphi \circ Q_\nu^{\mathrm{T}} \rangle \quad (\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$$

und besitzt die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[D_\nu^\alpha \underline{\delta}](\xi) = \big(- i\langle \nu, \xi \rangle \big)^\alpha, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Die Operatoren $G(D_\nu^\alpha \underline{\delta})$ sind in naheliegender Weise charakterisiert:

Proposition 1.10. *Sei $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ normiert und $D_\nu \underline{\delta} := D_\nu^1 \underline{\delta} = \nu_1 D_1 \underline{\delta} + \cdots + \nu_n D_n \underline{\delta}$. Dann ist $\tilde{A}_\nu := G(-D_\nu \underline{\delta})$ der infinitesimale Erzeuger der gleichmäßig beschränkten einparametrigen (C_0)-Gruppe $\{\tilde{T}(\tau);\, \tau \in \mathbb{R}\}$ mit $\tilde{T}(\tau) = T(\tau\, \nu)$. Es gilt*

$$(-\tilde{A}_\nu)^\alpha = G(D_\nu^\alpha \underline{\delta}), \quad \alpha > 0.$$

Beweis. Sei G' der Kalkül zur Gruppe $\{T'(t) = T(Q_\nu^{\mathrm{T}} t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in X$ ist

$$G(D_\nu^\alpha \underline{\delta} * \varphi)x = G'\big(D_1^\alpha \underline{\delta} * (\varphi \circ Q_\nu^{\mathrm{T}})\big)x.$$

Da der Filter $\mathcal{H}$ unter der Isometrie Q_ν^{T} invariant ist, führt der Limes $\varphi \to \underline{\delta}$ auf

$$G(D_\nu^\alpha \underline{\delta}) = G'(D_1^\alpha \underline{\delta}) = G_1'(\delta^\alpha).$$

Bezeichne ferner $\tilde{G}$ den Kalkül zur Gruppe $\tilde{T}(\tau)$. Aus

$$G_1'(\delta^\alpha * \varphi_1) = \tilde{G}(\delta^\alpha * \varphi_1), \quad \varphi_1 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

folgert man $G(D_\nu^\alpha \underline{\delta}) = \tilde{G}(\delta^\alpha)$. Insbesondere ist $\tilde{A}_\nu := \tilde{G}(-\delta') = G(-D_\nu \underline{\delta})$ der infinitesimale Erzeuger der Gruppe $\tilde{T}(\tau)$. $\square$

Die bisherigen Beispiele ließen sich auf die Situation einer einparametrigen Gruppe zurückführen. Dies gilt nicht für das Analogon zum Operator $\bar{R}^\alpha$ aus Definition 1.8, das nun vorgestellt werden soll. Benötigt werden dazu die Distributionen $\bar{V}_n^\alpha \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ mit der Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}[\bar{V}_n^\alpha](\xi) = \|\xi\|_2^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Für $m \in \mathbb{N}$ ist $\bar{V}_n^{2m} = (-\Delta)^m \underline{\delta}$. Darüberhinaus entnimmt man dem Buch [24], daß

$$\bar{V}_n^\alpha = 2^\alpha\, \pi^{-n/2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+n}{2})}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})}\, r^{-\alpha-n} \quad (\alpha > 0,\ \alpha \neq 2, 4, \dots). \tag{1.4}$$

Die Distribution $r^{-\alpha-n}$ ist im Fall $\alpha \notin \mathbb{N}$ gegeben durch

$$\langle r^{-\alpha-n}, \varphi \rangle = \Gamma(-\alpha) \langle \delta^\alpha, \tilde{S}_\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.5}$$

wobei der Testfunktion $\tilde{S}_\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ die Idee des sphärischen Mittels zugrunde liegt: $\tilde{S}_\varphi(\tau) = \int_{\|t\|_2=1} \varphi(|\tau| t)\, d\omega_t$, $\tau \in \mathbb{R}$. Aus (1.1) folgt die Darstellung

$$\langle r^{-\alpha-n}, \varphi \rangle = (-1)^m \frac{\Gamma(-\alpha)}{\Gamma(m-\alpha)} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} \|t\|_2^{-\alpha-n}\, t^\beta\, (\partial^\beta \varphi)(t)\, dt$$

($m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha < m$, $\alpha \neq 1, 2, \dots$), und mit analytischer Fortsetzung erhält man für $a < m$, $a = 1, 3, \dots$

$$\langle r^{-a-n}, \varphi \rangle = \frac{(-1)^{m+1}}{a!(m-a-1)!} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} \log \|t\|_2 \cdot \|t\|_2^{-a-n}\, t^\beta\, (\partial^\beta \varphi)(t)\, dt.$$

Wegen (1.5) zeigt das folgende Lemma, daß die Distributionen $\bar{V}_n^\alpha$ für $\alpha \in (0,1)$ — und damit für alle $\alpha > 0$ — zum Raum $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ gehören.

Lemma 1.11. *Sei $U_1 \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}_+)$. Dann definiert*

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \langle U, \varphi \rangle := \langle U_1, \tilde{S}_\varphi \rangle \end{cases}$$

eine Distribution aus $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Distribution U_1 kann als endliche Summe $U_1 = \sum_0^m D^k f_k$ mit $f_k \in L^1(0,\infty)$ geschrieben werden. Sei daher oBdA $U_1 = D^m f$, $f \in L^1(0,\infty)$. Für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ rechnet man

$$\begin{aligned} (-1)^m \langle U, \varphi \rangle &= \int_0^\infty dr\, f(r) \Big\{ \int_{\|t\|_2=1} \Big(\frac{d}{dr}\Big)^m \varphi(rt)\, d\omega_t \Big\} \\ &= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} \int_0^\infty dr\, f(r) \Big\{ \int_{\|t\|_2=1} (\partial^\beta \varphi)(rt)\, t^\beta\, d\omega_t \Big\} \\ &= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} \int_{\mathbb{R}^n} F_\beta(t)\, (\partial^\beta \varphi)(t)\, dt, \end{aligned}$$

wobei $F_\beta(t) = f(\|t\|_2) \cdot \|t\|_2^{1-n-m} t^\beta$. Für jeden Multiindex β der Länge m ist $F_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F_\beta(t)|\, dt = \Big\{ \int_0^\infty |f(r)|\, dr \Big\} \Big\{ \int_{\|t\|_2=1} |t^\beta|\, d\omega_t \Big\} < \infty.$$

Somit

$$U = \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} D^\beta F_\beta \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n).$$

□

Im Gegensatz zu den Distributionen $\bar{V}_n^\alpha$ verzichten wir bei der Bezeichnung des Operators $\bar{R}^\alpha$ auf den Dimensionsindex n.

Definition 1.12. *Für $\alpha > 0$ setzen wir $\bar{R}^\alpha := G(\bar{V}_n^\alpha)$.*

Auch hier ist eine äquivalente Definition über Marchaud-Integrale der Bauart

$$G(\mu_\varepsilon^{\alpha,2m})x = \frac{1}{K_{\alpha,2m}} \int_{\|t\|_2 > \varepsilon} \|t\|_2^{-\alpha-n} \Big[T\Big(\frac{t}{2}\Big) - T\Big(-\frac{t}{2}\Big) \Big]^{2m} x\, dt \quad (x \in X)$$

möglich. Dabei ist $\mu_\varepsilon^{\alpha,2m}$ ($0 < \alpha < 2m$, $\varepsilon > 0$) ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, beschrieben durch

$$\langle \mu_\varepsilon^{\alpha,2m}, \varphi \rangle = \frac{1}{K_{\alpha,2m}} \int_{\|t\|_2 > \varepsilon} \|t\|_2^{-\alpha-n} \big(\Delta_t^{2m} \varphi\big)(0)\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

mit der zentralen Differenz

$$\big(\Delta_t^{2m}\varphi\big)(s) = \sum_{l=0}^{2m} (-1)^l \binom{2m}{l} \varphi\big(s - (l-m)t\big), \quad s \in \mathbb{R}^n.$$

Die Konstante

$$K_{\alpha,2m} = (-1)^m 2^{2m-\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \|t\|_2^{-\alpha-n} \sin^{2m}(t_1)\, dt$$

ist so gewählt, daß

$$\mathcal{F}[q_{\alpha,2m}](\xi) = \frac{(-1)^m 2^{2m}}{K_{\alpha,2m}} \, \|\xi\|_2^{-\alpha} \int_{\|t\|_2 > 1} \|t\|_2^{-\alpha-n} \sin^{2m}\Big(\frac{\langle \xi, t\rangle}{2}\Big)\, dt \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

die Fouriertransformierte einer normalisierten Funktion $q_{\alpha,2m} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ vorgibt [30]. Die Integrierbarkeit von $q_{\alpha,2m}$ läßt sich auch mit einem Kriterium für radiale Multiplikatoren von Trebels [51] begründen. Explizit wird $q_{\alpha,2m}$ bei Samko [38] angegeben, siehe auch [40, § 26.3].

Die normalisierten Funktionen $q_{\alpha,2m}$ stellen den Zusammenhang

$$\bar{V}_n^\alpha * \frac{1}{\varepsilon^n} q_{\alpha,2m}\Big(\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big) = \mu_\varepsilon^{\alpha,2m} \tag{1.6}$$

zwischen den Distributionen $\bar{V}_n^\alpha$ und den Maßen $\mu_\varepsilon^{\alpha,2m}$ her. Derartige Identitäten, die man in fouriertransformierter Gestalt leicht verifiziert, lassen sich mit dem Funktionalkalkül bequem handhaben und führen unmittelbar auf Charakterisierungsaussagen wie der folgenden.

Satz 1.13. *Sei $0 < \alpha < 2m$ ($m \in \mathbb{N}$).*

(i) Für jedes $x \in X$, $\varepsilon > 0$ gehört das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha,2m}(\frac{t}{\varepsilon}) T(t)x \frac{dt}{\varepsilon^n}$ zu $D(\bar{R}^\alpha)$, und

$$\bar{R}^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha,2m}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\, T(t)x\, \frac{dt}{\varepsilon^n} = \frac{1}{K_{\alpha,2m}} \int_{\|t\|_2 > \varepsilon} \|t\|_2^{-\alpha-n} \Big[T\Big(\frac{t}{2}\Big) - T\Big(-\frac{t}{2}\Big)\Big]^{2m} x\, dt.$$

Im Fall $x \in D(\bar{R}^\alpha)$ gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha,2m}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\, T(t)\bar{R}^\alpha x\, \frac{dt}{\varepsilon^n} = \frac{1}{K_{\alpha,2m}} \int_{\|t\|_2 > \varepsilon} \|t\|_2^{-\alpha-n} \Big[T\Big(\frac{t}{2}\Big) - T\Big(-\frac{t}{2}\Big)\Big]^{2m} x\, dt.$$

(ii) Der Operator $\bar{R}^\alpha$ ist charakterisiert durch

$$\bar{R}^\alpha x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{K_{\alpha,2m}} \int_{\|t\|_2 > \varepsilon} \|t\|_2^{-\alpha-n} \Big[T\Big(\frac{t}{2}\Big) - T\Big(-\frac{t}{2}\Big)\Big]^{2m} x\, dt.$$

Der Grenzwert existiert genau für $x \in D(\bar{R}^\alpha)$.

Beweis. Man wendet den Funktionalkalkül auf Identität (1.6) an. Teil (i) ist dann nach dem Faltungssatz 1.2 klar. Da $\bar{R}^\alpha$ ein abgeschlossener Operator ist und

$$\int_{\mathbb{R}^n} q_{\alpha,2m}\Big(\frac{t}{\varepsilon}\Big)\, T(t)x\,\frac{dt}{\varepsilon^n} \longrightarrow x \quad (\varepsilon \to 0^+)$$

für jedes $x \in X$ konvergiert, folgt Behauptung (ii). □

Aufgrund dieses Satzes erkennen wir im Operator $\bar{R}^\alpha$ die abstrakten Rieszpotentiale negativer Ordnung, die von Balakrishnan [4] als gebrochene Potenzen des Erzeugers einer Gauß-Weierstraß-Halbgruppe eingeführt wurden. Allerdings beschränkte er sich bei der Darstellung in Satz 1.13 (ii) auf den Spezialfall $x \in D(\bar{R}^{2m})$. Wir kommen in Kapitel 4 ausführlich auf diesen Themenkreis zurück und begnügen uns hier mit einer einfachen Beobachtung:

Proposition 1.14. *Der Operator $-\bar{R}^2$ ist die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $A_1^2 + \cdots + A_n^2$:*

$$\bar{R}^2 = -\overline{[A_1^2 + \cdots + A_n^2]}.$$

Beweis. Bedenkt man $\|\xi\|_2^2 = |\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2$, so erschließt sich mit dem Tensorsatz

$$-\bar{R}^2 x = A_1^2 x + \cdots + A_n^2 x, \quad x \in \bigcap_{k=1}^{n} D(A_k^2).$$

Diese Identität gilt insbesondere für die Elemente $x = G(\varphi)y$ mit (normalisiertem) $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $y \in X$, so daß die Behauptung folgt. □

Für die Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ kann man den Operator $\bar{R}^\alpha$ analog zu (1.3) beschreiben und im Fall $1 \le p \le 2$ den Definitionsbereich in fouriertransformierter Gestalt angeben. Schreibt man dann in (1.3) auf der rechten Seite $\varepsilon^{-n}(\bar{V}^\alpha * \varphi)_\varepsilon$, so sollten sich für geeignete genügend glatte normalisierte Funktionen $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ einfache Faltungskerne $q_\alpha = \bar{V}^\alpha * \varphi$ finden lassen. Diese Fragestellung diskutiert Samko in der Arbeit [39], die einige Kerne q_α der gewünschten Art bereitstellt.

2 Die Operatoren $\bar{R}^\alpha$ und $\tilde{R}^\alpha$ für einparametrige Gruppen

In diesem Kapitel sei durchgehend $\{T(\tau);\, \tau \in \mathbb{R}\}$ eine gleichmäßig beschränkte einparametrige (C_0)-Gruppe auf dem Banachraum X und G der zugehörige Funktionalkalkül.

Die gebrochenen Potenzen $(-A)^\alpha$, $\alpha > 0$, des Gruppenerzeugers A lassen sich nach [57, 59] über Differenzenquotienten gebrochener Ordnung charakterisieren:

$$(-A)^\alpha x = \lim_{\tau\to 0^+} \tau^{-\alpha}[I - T(\tau)]^\alpha x, \quad x \in D((-A)^\alpha). \tag{2.1}$$

Solch ein Zugang zu Ableitungen nicht ganzer Ordnung wird heute mit den Namen von Liouville, Grünwald und Letnikov verbunden [40, 14]. Hier ist gemäß Prop. 1.7

$$[I - T(\tau)]^\alpha = G(\mu_\tau^\alpha) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} T(j\tau)$$

mit dem endlichen Borelmaß

$$\mu_\tau^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{j} \delta_{j\tau}.$$

Die Maße $\tau^{-\alpha}\mu_\tau^\alpha$ approximieren die gebrochenen Ableitungen δ^α des Diracmaßes, denn für $\tau \to 0^+$ konvergiert im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[\tau^{-\alpha}\mu_\tau^\alpha](v) = \tau^{-\alpha}\big(1 - e^{i\tau v}\big)^\alpha \longrightarrow (-iv)^\alpha = \mathcal{F}[\delta^\alpha](v).$$

Diese Beobachtung macht (2.1) plausibel.

Ein Anliegen dieses Kapitels ist es, Grünwald-Letnikov-Darstellungen für die gruppenspezifischen Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ bereitzustellen. Dabei übernehmen geeignete zentrale Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ die Rolle der einseitigen Differenz $[I - T(\tau)]^\alpha$ in (2.1). Im Fall des Operators $\bar{R}^\alpha$ kommt man auf die Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, indem man $\bar{V}^\alpha = \mathcal{F}^{-1}[|v|^\alpha]$ durch die endlichen Borelmaße $\tau^{-\alpha}\bar{\nu}_\tau^\alpha$ auf $\mathbb{R}$ nähert, die die Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}[\tau^{-\alpha}\bar{\nu}_\tau^\alpha](v) = 2^\alpha \left|\frac{\sin(\tau v/2)}{\tau}\right|^\alpha$$

besitzen ($\tau > 0$). Es wird sich herausstellen, daß

$$\bar{\nu}_\tau^\alpha = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} \delta_{j\tau}$$

und daß sich die Operatoren $G(\bar{\nu}_\tau^\alpha) \in \mathcal{E}(X)$ als gebrochene Potenzen eines Halbgruppenerzeugers deuten lassen, nämlich

$$G(\bar{\nu}_\tau^\alpha) = \Big(- \Big[T\Big(\frac{\tau}{2}\Big) - T\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^2\Big)^{\alpha/2}.$$

Durch $\overline{\Delta}_\tau^\alpha := G(\bar{\nu}_\tau^\alpha)$ werden also in angemessener Weise zentrale Differenzen gebrochener Ordnung beschrieben, die auf den Operator $\bar{R}^\alpha$ zugeschnitten sind.

In Abschnitt 2.1 werden die integrierbaren normalisierten Hilfsfunktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ eingeführt, die die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen legen. Es handelt sich um Verallgemeinerungen der in [56, II,Def. 8.1] angegebenen Funktionen und geeignete Modifizierungen der in [57, § 2.3] für den Halbgruppenfall benutzten Funktionen. In der letztgenannten Arbeit konnte die Integrierbarkeit direkt mit Hilfe einer asymptotischen Formel für Potenzfunktionen von Ingham verifiziert werden und anschließend alles im Rahmen der halbgruppentypischen Laplacetransformation hergeleitet werden. Im Fall einer Gruppe von Operatoren ist die Fouriertransformation das geeignete Werkzeug; für diese steht aber eine Reihe praktischer $L^1(\mathbb{R})$-Multiplikatorkriterien zur Verfügung, siehe etwa den Übersichtsartikel [41]. Tatsächlich werden wir nur mit den Fouriertransformierten $\mathcal{F}[\bar{p}_{\alpha\beta}]$, $\mathcal{F}[\tilde{p}_{\alpha\beta}]$ arbeiten. Die expliziten Darstellungen von $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ ergänzen jedoch gut die bereits erwähnte Familie von Funktionen, die beim Studium gebrochener Potenzen eine Rolle spielen. Bei der Bestimmung der Fouriertransformierten von $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ wird man um distributionentheoretische Methoden nicht umhinkommen. Die folgende Darstellung ist jedoch so angelegt, daß man mit der Klasse der temperierten Distributionen auskommt und nicht auf den weniger bekannten Lizorkinraum verallgemeinerter Funktionen zurückgreifen muß, der bei der Untersuchung von Rieszpotentialen gern benutzt wird (vgl. [40]).

Der folgende Abschnitt bringt die Details zum eingangs skizzierten Programm. Nach Einführung und Diskussion der zentralen Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ geraden bzw. ungeraden Typs lassen sich unmittelbar die Grünwald-Letnikov-Darstellung der Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ sowie eine weitere interessante Identität folgern.

Anschließend werden die vorhandenen Identitäten zu Taylorformeln mit Integralrestglied weiterentwickelt. Das Vorbild ist die in [58] angegebene Taylorformel im Halbgruppenfall. Ein Beweis ist jedoch nur für die Formel erster Ordnung veröffentlicht worden [57]. Nimmt man den Gebrauch der Fouriertransformation in Kauf, so kann man die allgemeine Taylorformel wie das Gegenstück für Gruppen (Satz 2.13) beweisen. Auch das Konvergenzkriterium für die Taylorreihe (Satz 2.14) gilt entsprechend im Halbgruppenfall.

2.1 Hilfsfunktionen

Sei $\alpha > 0$ und $0 < \operatorname{Re}\beta < \alpha + 1$. Die gerade Funktion $f_{\alpha\beta}$ ist definiert durch

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta}(u) &:= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} |u-j|^{\beta-1} \\ &= \binom{\alpha}{\alpha/2} + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} \big\{ |u-j|^{\beta-1} + |u+j|^{\beta-1} \big\}. \end{aligned}$$

Die Reihe konvergiert mindestens für $u \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$, weil die Binomialkoeffizienten

$$\binom{\alpha}{\alpha/2 - j} = \binom{\alpha}{\alpha/2 + j} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha/2 - j + 1)\,\Gamma(\alpha/2 + j + 1)}$$

der Asymptotik $O(|j|^{-\alpha-1})$ genügen ($|j| \to \infty$). Die Funktionen $f_{\alpha\beta}$ induzieren reguläre temperierte Distributionen. Um ihre Fouriertransformierten zu bestimmen, arbeiten wir mit den Partialsummen

$$f_{\alpha\beta}^N(u) := \sum_{-N}^{N} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} |u-j|^{\beta-1}$$

und setzen schließlich ein Analytizitätsargument ein.

Für jedes $N \in \mathbb{N}$ ist $\{f_{\alpha\beta}^N;\ 0 < \operatorname{Re}\beta < \alpha+1\}$ eine analytische Schar regulärer temperierter Distributionen. Die Analytizität der Grenzschar $f_{\alpha\beta}$ läßt sich mit den folgenden Abschätzungen streng begründen.

Lemma 2.1. *Sei $\alpha > 0$. Zu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gibt es eine Konstante $L > 0$, so daß*

$$\forall\, \gamma \in (0,1)\, \forall\, j \in \mathbb{Z}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| \cdot |u-j|^{\gamma-1}\, du \le L\, \gamma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha-2}$$

und

$$\forall\, \gamma \in [1, \alpha+1)\, \forall\, j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| \cdot |u-j|^{\gamma-1}\, du \le L \cdot 2^\gamma\, |j|^{\gamma-1}.$$

Beweis. Mit einer genügend großen Konstanten $c > 0$ erreicht man $|\varphi(u)| \le c|u|^{-\alpha-2}$, wann immer $|u| \ge 1$. Sei $0 < \gamma < 1$. Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{Z}$ fällt

$$\int_k^{k+1} |u-j|^{\gamma-1}\, du \le \int_0^1 u^{\gamma-1}\, du = \gamma^{-1}$$

aus. Daher gilt

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| \cdot |u-j|^{\gamma-1}\, du \\ &\le \quad \|\varphi\|_\infty \int_{-1}^{1} |u-j|^{\gamma-1}\, du + c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha-2} \int_{k<|u|<k+1} |u-j|^{\gamma-1}\, du \\ &\le \quad 2\gamma^{-1}\, \|\varphi\|_\infty + 2c\gamma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

Die gewünschte Abschätzung folgt. Im Fall $\gamma \in [1, \alpha+1)$, $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ist

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| \cdot |u-j|^{\gamma-1}\, du \le \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u)| \cdot \big(|u| + |j|\big)^{\gamma-1}\, du \\ &\le 2\|\varphi\|_\infty |j|^{\gamma-1} \int_0^1 (u+1)^{\gamma-1}\, du + 2c \cdot |j|^{\gamma-1} \int_1^{\infty} u^{-\alpha-2} (2u)^{\gamma-1}\, du \\ &\le 2^\gamma\, |j|^{\gamma-1} \big(\|\varphi\|_\infty + c\big). \end{aligned}$$

□

Lemma 2.2. *Seien $\alpha > 0$ und $0 < \mathrm{Re}\,\beta < \alpha+1$. Im Raum $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ konvergiert $f^N_{\alpha\beta} \longrightarrow f_{\alpha\beta}$. Bei $\{f_{\alpha\beta};\, 0 < \mathrm{Re}\,\beta < \alpha+1\}$ handelt es sich um eine analytische Schar regulärer temperierter Distributionen. Differentiation nach dem Scharparameter liefert die regulären Distributionen*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\alpha\beta}\Big)(u) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} \log|u-j| \cdot |u-j|^{\beta-1},$$

wobei die Reihe mindestens für $u \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ konvergiert.

Beweis. Zu $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $N \in \mathbb{N}$ bezeichne h_N die holomorphe Funktion

$$h_N : \{0 < \mathrm{Re}\,\beta < \alpha+1\} \to \mathbb{C}, \quad h_N(\beta) := \langle f^N_{\alpha\beta}, \varphi\rangle.$$

Die Folge $(h_N)_N$ konvergiert auf den Streifen $\delta < \mathrm{Re}\,\beta < \alpha + 1 - \delta$ gleichmäßig, wie das Weierstraßsche Kriterium für Funktionenreihen zeigt. Lemma 2.1 und die Asymptotik der Binomialkoeffizienten ermöglichen nämlich die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\sum_{|j|\geq 1} \left|\binom{\alpha}{\alpha/2 - j}\right| \cdot \sup_{\delta\leq \mathrm{Re}\,\beta\leq\alpha+1-\delta} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)|u-j|^{\beta-1}\,du \right| \\ &\leq \sum_{|j|\geq 1} \left|\binom{\alpha}{\alpha/2 - j}\right| \cdot \sup_{\delta\leq\gamma\leq\alpha+1-\delta} \Big\{ L\gamma^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha-2} + L \cdot 2^\gamma |j|^{\gamma-1} \Big\} < \infty. \end{aligned}$$

Die Grenzfunktion $h := \lim_{N\to\infty} h_N$ ist also holomorph. Mit dem Satz über majorisierte Konvergenz bestätigt man

$$h_N(\beta) = \langle f^N_{\alpha\beta}, \varphi\rangle \longrightarrow \langle f_{\alpha\beta}, \varphi\rangle = h(\beta)$$

und die angegebene Formel für $\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\alpha\beta}$. Insbesondere ist $\{f_{\alpha\beta};\, 0 < \mathrm{Re}\,\beta < \alpha+1\}$ eine analytische Schar regulärer temperierter Distributionen. □

Wir bestimmen nun die Fouriertransformierten der Distributionen $f_{\alpha\beta}$. Zunächst notieren wir die absolut und gleichmäßig konvergente Fourierentwicklung

$$2^\alpha \left|\sin\frac{v}{2}\right|^\alpha = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} e^{ijv} \quad (\alpha > 0), \tag{2.2}$$

die aus dem tabellierten Integral [18, S. 12, Gl. (29)] hervorgeht. Außerdem sei an das Transformationspaar

$$\mathcal{F}\big[|u|^{\gamma-1}\big](v) = 2\,\Gamma(\gamma)\cos(\gamma\pi/2)\,|v|^{-\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1, \tag{2.3}$$

mit den regulären Distributionen $|u|^{\gamma-1}$, $|v|^{-\gamma}$ erinnert [24]. Für $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ ergibt sich

$$\mathcal{F}[f_{\alpha\beta}] = \mathcal{S}'(\mathbb{R}) - \lim_{N\to\infty} \mathcal{F}[f^N_{\alpha\beta}] = 2\,\Gamma(\beta)\cos(\beta\pi/2)\,|v|^{-\beta}\,2^\alpha|\sin(v/2)|^\alpha.$$

Aus Analytizitätsgründen ist

$$\mathcal{F}[f_{\alpha\beta}] = 2\,\Gamma(\beta)\cos(\beta\pi/2)\,|v|^{\alpha-\beta}\,2^\alpha\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha$$

im gesamten Streifen $0 < \operatorname{Re}\beta < \alpha + 1$. Mit der Produktregel bestimmt man dann $\mathcal{F}[\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\alpha\beta}]$. Von Interesse wird nur der Fall $\beta = 2k + 1$ sein:

$$\mathcal{F}\Big[\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\alpha\beta}\Big|_{\beta=2k+1}\Big] = (-1)^{k+1}\pi(2k)!\,|v|^{\alpha-2k-1}\,2^\alpha\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha$$

($k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 2k$).

Nach diesen Vorbereitungen können die Fouriertransformierten der Hilfsfunktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$ sofort angegeben werden.

Definition 2.3. *Sei $0 < \beta < \alpha + 1$. Die Funktion $\bar{p}_{\alpha\beta}$ ist definiert durch*

$$\bar{p}_{\alpha\beta}(u) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\,\Gamma(\beta)\cos(\beta\pi/2)} \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} |u-j|^{\beta-1}, & \beta \neq 1, 3, \ldots, \\ \dfrac{(-1)^{(\beta+1)/2}}{\pi(\beta-1)!} \displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} \log|u-j| \cdot |u-j|^{\beta-1}, & \beta = 1, 3, \ldots \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = \beta$ schreiben wir auch $\bar{p}_\alpha := \bar{p}_{\alpha\alpha}$.

Die Funktion $\bar{p}_2$ ist der aus der Approximationstheorie bekannte Féjer-Kern. Wie die nächste Proposition zeigt, entsteht $\bar{p}_{2m}$ durch m-fache Faltung von $\bar{p}_2$ mit sich selbst ($m \in \mathbb{N}$). Insbesondere haben die Funktionen $\bar{p}_{2m}$ kompakten Träger; genauer gilt $\operatorname{supp}(\bar{p}_{2m}) \subseteq [-m, m]$.

Proposition 2.4. *Sei $0 < \beta \leq \alpha$. Die Funktion $\bar{p}_{\alpha\beta}$ ist gerade, gehört zu $L^1(\mathbb{R})$ und hat die Fouriertransformierte*

$$\mathcal{F}[\bar{p}_{\alpha\beta}](v) = |v|^{\alpha-\beta} 2^\alpha \Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha \quad (v \in \mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $\bar{p}_\alpha = \bar{p}_{\alpha\alpha}$ normalisiert.

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß $\bar{p}_{\alpha\beta} \in L^1(\mathbb{R})$. Dazu benutzen wir die folgenden Kriterien von Boman [9]:

(i) Ist $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und gibt es ein $\delta > 0$, so daß $h(v) = O(|v|^{-\delta})$ und $h'(v) = O(|v|^{-\delta-1})$ für $|v| \to \infty$, so existiert eine Funktion $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{F}[g] = h$.

(ii) Die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei stetig mit kompaktem Träger und auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar. Mit einem geeigneten $\delta > 0$ gelte $h(v) = O(|v|^\delta)$ und $h'(v) = O(|v|^{\delta-1})$ ($|v| \to 0$). Dann ist h die Fouriertransformierte einer L^1- Funktion.

Man zerlegt nun

$$|v|^{\alpha-\beta}2^\alpha\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha = 2^\alpha|v|^{\alpha-\beta}\,\chi(v)\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha + \frac{1-\chi(v)}{|v|^\beta}\,2^\alpha|\sin(v/2)|^\alpha,$$

wobei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine gerade Funktion mit $\chi(v) = 1$, falls $|v| \le 1$, und supp $(\chi) \subseteq [-2,2]$ ist. Der erste Summand erfüllt Kriterium (ii), weil $\chi(v)|v^{-1}\sin(v/2)|^\alpha$ unendlich oft differenzierbar ist. Hinsichtlich des zweiten Summanden garantiert Kriterium (i) die Existenz einer Funktion $g_\beta \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\mathcal{F}[g_\beta](v) = |v|^{-\beta}\big(1-\chi(v)\big)$. Dann ist die Funktion

$$u \longmapsto \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\alpha/2-j}g_\beta(u-j)$$

integrierbar und hat die Fouriertransformierte $|v|^{-\beta}\big(1-\chi(v)\big)\cdot 2^\alpha|\sin(v/2)|^\alpha$. □

Bei den Funktionen $\tilde{p}_{\alpha\beta}$, die nun behandelt werden sollen, kann man im wesentlichen wie bei den Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$ vorgehen. An die Stelle der Fourierentwicklung (2.2) tritt

$$i\,2^\alpha\mathrm{sgn}\,\Big(\sin\frac{v}{2}\Big)\Big|\sin\frac{v}{2}\Big|^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2}-j}\Big[e^{i(j+\frac12)v}-e^{-i(j+\frac12)v}\Big] \quad (\alpha>0). \tag{2.4}$$

Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, weil die Binomialkoeffizienten wie $j^{-\alpha-1}$ abklingen ($j\to\infty$). Man beachte, daß hier eine 4π-periodische Funktion entwickelt wird. Die angegebene Fourierreihe berechnet man für $\alpha > 1$ unmittelbar mit (2.2) und nutzt dann die analytische Abhängigkeit der Fourierkoeffizienten von $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ aus.

Definition 2.5. *Sei $0 < \beta < \alpha + 1$. Die Funktion $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ ist definiert durch*

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(u) := \frac{1}{2\,\Gamma(\beta)\sin(\beta\pi/2)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2}-j}\Big\{\mathrm{sgn}\,(u+j+\tfrac12)|u+j+\tfrac12|^{\beta-1} - \mathrm{sgn}\,(u-j-\tfrac12)|u-j-\tfrac12|^{\beta-1}\Big\}$$

($\beta \ne 2,4,\dots$) bzw.

$$\tilde{p}_{\alpha\beta}(u) := \frac{(-1)^{\beta/2}}{\pi(\beta-1)!}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2}-j}\Big\{\mathrm{sgn}\,(u+j+\tfrac12)\log|u+j+\tfrac12|\cdot|u+j+\tfrac12|^{\beta-1} - \mathrm{sgn}\,(u-j-\tfrac12)\log|u-j-\tfrac12|\cdot|u-j-\tfrac12|^{\beta-1}\Big\}$$

($\beta = 2,4,\dots$). Darüberhinaus wird $\tilde{p}_\alpha := \tilde{p}_{\alpha\alpha}$ gesetzt.

Auch hier konvergieren die Reihen für alle bis auf höchstens abzählbar viele $u \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.6. *Sei $0 < \beta \le \alpha$. Die Funktion $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ ist gerade, gehört zu $L^1(\mathbb{R})$ und hat die Fouriertransformierte*

$$\mathcal{F}[\tilde{p}_{\alpha\beta}](v) = |v|^{\alpha-\beta}\cdot 2^\alpha\mathrm{sgn}\,\Big(\frac{\sin(v/2)}{v}\Big)\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\alpha \quad (v\in\mathbb{R}).$$

Insbesondere ist $\tilde{p}_\alpha = \tilde{p}_{\alpha\alpha}$ normalisiert.

Beweis. Zur Bestimmung von $\mathcal{F}[\tilde{p}_{\alpha\beta}]$ greift man auf das Transformationspaar [24]

$$\mathcal{F}\big[\mathrm{sgn}\,(u)|u|^{\gamma-1}\big](v) = 2i\,\Gamma(\gamma)\sin(\gamma\pi/2)\,\mathrm{sgn}\,(v)|v|^{-\gamma}, \quad 0<\gamma<1,$$

zurück und modifiziert die Überlegungen zu den Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$. Entscheidend ist, daß die in der Definition von $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ auftretenden Binomialkoeffizienten dasselbe asymptotische Verhalten aufweisen. Den Sachverhalt $\tilde{p}_{\alpha\beta} \in L^1(\mathbb{R})$ beweist man wie in Prop. 2.4. □

Es sei noch bemerkt, daß $\tilde{p}_1$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ ist.

2.2 Zentrale Differenzen und Grünwald-Letnikov-Darstellungen

Sei $\alpha>0$. Die endlichen Borelmaße $\bar{\nu}_\tau^\alpha$ auf $\mathbb{R}$ sind für jedes $\tau \neq 0$ über die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[\bar{\nu}_\tau^\alpha](v) = 2^\alpha|\sin(\tau v/2)|^\alpha = \big(-[e^{i\tau v/2}-e^{-i\tau v/2}]^2\big)^{\alpha/2}$$

erklärt. Unter Beachtung der absolut konvergenten Fourierentwicklung (2.2) ist

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_\tau^\alpha &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\alpha/2-j}\delta_{j\tau}\\ &= 2^{\alpha/2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha/2}{k}2^{-k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\delta_{(k-2j)\tau}.\end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen den Maßen $\bar{\nu}_\tau^\alpha$ und dem Operator $\bar{R}^\alpha$ ist bereits im Vorspann dieses Kapitels erläutert worden. Berücksichtigt man, daß $[T(\tau/2)-T(-\tau/2)]^2 = T(\tau)+T(-\tau)-2I$ eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe erzeugt (vgl. Prop. 1.7), so liefert der Funktionalkalkül die beschränkten linearen Operatoren

$$\begin{aligned}G(\bar{\nu}_\tau^\alpha) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\alpha/2-j}T(j\tau)\\ &= 2^{\alpha/2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha/2}{k}2^{-k}[T(\tau)+T(-\tau)]^k\\ &= \Big(-\Big[T\Big(\frac{\tau}{2}\Big)-T\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^2\Big)^{\alpha/2}.\end{aligned}$$

Als gebrochene Potenzen des Halbgruppenerzeugers $[T(\tau/2)-T(-\tau/2)]^2$ interpolieren die Operatoren $i^\alpha\,G(\bar{\nu}_\tau^\alpha)$ also in natürlicher Weise die zentralen Differenzen $[T(\tau/2)-T(-\tau/2)]^{2m}$ gerader Ordnung ($m=1,2,\dots$).

In ähnlicher Weise kann man gebrochene Differenzen finden, die mit dem Operator $\tilde{R}^\alpha$ verwandt sind: Man approximiert die Distribution $\tilde{V}^\alpha$ durch die endlichen Borelmaße

$$\tilde{\nu}_\tau^\alpha := i\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2}-j}\Big[\delta_{(j+\frac{1}{2})|\tau|}-\delta_{-(j+\frac{1}{2})|\tau|}\Big],$$

deren Fouriertransformierten sich aus (2.4) ergeben, nämlich

$$\mathcal{F}[\tilde{\nu}_\tau^\alpha](v) = -2^\alpha \operatorname{sgn}\Big(\sin\frac{|\tau| v}{2}\Big)\Big|\sin\frac{\tau v}{2}\Big|^\alpha.$$

Definition 2.7. *Sei $\alpha > 0$ und $\tau \neq 0$. Die zentralen Differenzen geraden Typs sind definiert durch*

$$\overline{\Delta}_\tau^\alpha := G(\bar{\nu}_\tau^\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\alpha/2 - j} T(j\tau)$$

und die zentralen Differenzen ungeraden Typs durch

$$\tilde{\Delta}_\tau^\alpha := G(\tilde{\nu}_\tau^\alpha) = i\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2} - j}\Big[T\big((j+\tfrac{1}{2})|\tau|\big) - T\big(-(j+\tfrac{1}{2})|\tau|\big)\Big].$$

Infolge der Faltungseigenschaften der Maße $\bar{\nu}_\tau^\alpha$ und $\tilde{\nu}_\tau^\alpha$, die man aus den Fouriertransformierten erschließt, ergeben sich die Rechenregeln

$$\overline{\Delta}_\tau^{\alpha+\beta} = \overline{\Delta}_\tau^\alpha \overline{\Delta}_\tau^\beta = \tilde{\Delta}_\tau^\alpha \tilde{\Delta}_\tau^\beta, \quad \tilde{\Delta}_\tau^{\alpha+\beta} = \tilde{\Delta}_\tau^\alpha \overline{\Delta}_\tau^\beta = \overline{\Delta}_\tau^\alpha \tilde{\Delta}_\tau^\beta \tag{2.5}$$

$(\alpha, \beta > 0)$ und — falls $\gamma > 1$ —

$$\tilde{\Delta}_\tau^\gamma = \tilde{\Delta}_\tau^1 \overline{\Delta}_\tau^{\gamma-1} = i\Big[T\Big(\frac{|\tau|}{2}\Big) - T\Big(-\frac{|\tau|}{2}\Big)\Big]\Big(-\Big[T\Big(\frac{\tau}{2}\Big) - T\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^2\Big)^{(\gamma-1)/2}.$$

Wir wollen nun die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ mit Hilfe der gebrochenen Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ charakterisieren. Grundlage sind die nach Prop. 2.4, 2.6 bestehenden Identitäten

$$|\tau|^{-\alpha}\bar{\nu}_\tau^\alpha = \bar{V}^\alpha * \frac{1}{|\tau|}\bar{p}_\alpha\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big), \quad |\tau|^{-\alpha}\tilde{\nu}_\tau^\alpha = \tilde{V}^\alpha * \frac{1}{|\tau|}\tilde{p}_\alpha\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big),$$

die eine Regularisierung der Distributionen $\bar{V}^\alpha$, $\tilde{V}^\alpha$ mit den normalisierten L^1-Funktionen $\bar{p}_\alpha$, $\tilde{p}_\alpha$ ausdrücken. Wendet man den Funktionalkalkül auf diese Identitäten an, so ist nach dem Faltungssatz 1.2 Aussage (i) des folgenden Satzes klar. Teil (ii) ist die angestrebte Grünwald-Letnikov-Darstellung des Operators $\bar{R}^\alpha$.

Satz 2.8. *Sei $\alpha > 0$ und $(R^\alpha, p_\alpha, \Delta_\tau^\alpha) = (\bar{R}^\alpha, \bar{p}_\alpha, \overline{\Delta}_\tau^\alpha)$ oder $(\tilde{R}^\alpha, \tilde{p}_\alpha, \tilde{\Delta}_\tau^\alpha)$.*

(i) Für jedes $x \in X$ und jedes $\tau \neq 0$ gehört das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\frac{u}{\tau})\, T(u)x\, \frac{du}{|\tau|}$ zum Definitionsbereich von R^α, und

$$R^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)x\, \frac{du}{|\tau|} = |\tau|^{-\alpha}\Delta_\tau^\alpha x.$$

Im Fall $x \in D(R^\alpha)$ gilt auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)R^\alpha x\, \frac{du}{|\tau|} = |\tau|^{-\alpha}\Delta_\tau^\alpha x.$$

(ii) Der Operator R^α ist charakterisiert durch

$$R^\alpha x = \lim_{\tau\to 0} |\tau|^{-\alpha}\Delta_\tau^\alpha x,$$

wobei der Limes genau für $x \in D(R^\alpha)$ existiert.

Beweis. Für jedes $x \in X$ konvergiert $\int_{-\infty}^{\infty} p_\alpha(\frac{u}{\tau})T(u)x \frac{du}{|\tau|}$ gegen x ($\tau \to 0$). Da der Operator R^α abgeschlossen ist, folgt Behauptung (ii) aus (i). $\square$

Eine andere Idee, die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ über gebrochene Differentialquotienten zu charakterisieren, wird durch Prop. 1.9 nahegelegt und kann analog zu Satz 2.8 bewiesen werden. So gilt beispielsweise für $\alpha \neq 1, 3, 5, \dots$

$$\bar{R}^\alpha x = \frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)} \lim_{\tau\to 0} \frac{[I - T(\tau)]^\alpha x + [I - T(-\tau)]^\alpha x}{|\tau|^\alpha}$$

genau für $x \in D(\bar{R}^\alpha)$. Diese Möglichkeit der Darstellung wird in der Literatur zur gebrochenen Differentiation durchaus in Erwägung gezogen, vgl. [40, S. 374]. Derartige Differenzen für die Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ haben jedoch den Nachteil, nicht alle Exponenten α erfassen zu können. Darüberhinaus gehen die Rechenregeln (2.5) verloren, die aber gerade mit Blick auf Prop. 2.11 den Charakter der Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ treffen.

Auch die abstrakten Feller-Potentiale aus Abschnitt 1.3 lassen sich in der Art von Satz 2.8 beschreiben, wobei die eingehenden zentralen Differenzen entsprechende Linearkombinationen von $[I-T(\tau)]^\alpha$, $[I-T(-\tau)]^\alpha$ sind. Die Fouriertransformierten der erforderlichen Hilfsfunktionen sind im Ursprung stetig, aber nicht differenzierbar. Sie können wie im Beweis von Prop. 2.4 behandelt werden, wenn man zusätzlich [11, Prop. 6.3.10] heranzieht. Gorenflo-Mainardi konstruieren mit solchen Differenzen ein *random walk*-Modell für eine gebrochene Diffusionsgleichung, aus dem sich ein neuer Zugang zu den stabilen (Lévyschen) Wahrscheinlichkeitsverteilungen ergibt [25, 26]. Führt man ihr *random walk*-Modell mit den gebrochenen Differenzen aus Definition 2.7 aus ($0 < \alpha < 2$), so gelangt man auf die symmetrischen stabilen Verteilungen, wobei man nunmehr auch den bislang ausgeschlossenen Fall $\alpha = 1$ behandeln kann.

Da die Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$, $\tilde{p}_{\alpha\beta}$ für $0 < \beta \le \alpha$ integrierbar sind und den Identitäten

$$|\tau|^{-\beta}\bar{\nu}_\tau^\alpha = \bar{V}^\beta * \frac{1}{|\tau|}\bar{p}_{\alpha\beta}\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big), \quad |\tau|^{-\beta}\tilde{\nu}_\tau^\alpha = \tilde{V}^\beta * \frac{1}{|\tau|}\tilde{p}_{\alpha\beta}\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big)$$

genügen, können wir den ersten Teil von Satz 2.8 wie folgt verallgemeinern:

Proposition 2.9. *Seien* $0 < \beta \le \alpha$ *und* $(R^\beta, p_{\alpha\beta}, \Delta_\tau^\alpha) = (\bar{R}^\beta, \bar{p}_{\alpha\beta}, \overline{\Delta}_\tau^\alpha)$ *oder* $(\tilde{R}^\beta, \tilde{p}_{\alpha\beta}, \tilde{\Delta}_\tau^\alpha)$. *Dann gilt*

$$|\tau|^{-\beta}\Delta_\tau^\alpha x = \begin{cases} R^\beta \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha\beta}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)x\,\frac{du}{|\tau|}, & x \in X, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_{\alpha\beta}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)R^\beta x\,\frac{du}{|\tau|}, & x \in D(R^\beta). \end{cases}$$

2.3 Taylorformeln

Seien α, β positive reelle Zahlen mit $0 < \alpha - \beta \le 2$. Schreibt man

$$\mathcal{F}[\bar{\nu}_1^\beta](v) = 2^\beta \Big|\sin\frac{v}{2}\Big|^\beta = |v|^\beta + |v|^\alpha\, \frac{\mathcal{F}[\bar{p}_\beta](v) - 1}{|v|^{\alpha-\beta}},$$

so kommt man auf die Faltungsidentität

$$\bar{\nu}_1^\beta = \bar{V}^\beta + \bar{V}^\alpha * \bar{r}_{\beta\alpha}.$$

Da sich $\bar{r}_{\beta\alpha}$ als eine integrierbare gerade Funktion erweisen wird, liefert der Funktionalkalkül eine Taylorformel mit Integral-Restglied:

$$\overline{\Delta}_\tau^\beta x = |\tau|^\beta \bar{R}^\beta x + |\tau|^\alpha \bar{R}^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \bar{r}_{\beta\alpha}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)x\, \frac{du}{|\tau|}$$

($\tau \neq 0$, $x \in D(\bar{R}^\beta)$). Indem man von $\mathcal{F}[\bar{p}_\beta]$ Taylorpolynome höherer Ordnung abspaltet, produziert man entsprechend kompliziertere Taylorformeln.

Wir werden Taylorentwicklungen für die zentralen Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\beta$ und $\tilde{\Delta}_\tau^\beta$ angeben. Die Existenz der für die Restglieder erforderlichen L^1-Funktionen wird durch das folgende Lemma gesichert:

Lemma 2.10. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ gerade und $g := \mathcal{F}[f]$ im Ursprung analytisch mit der Taylorreihe $g(v) = \sum_0^\infty a_{2k} v^{2k}$. Sei ferner $r \in \mathbb{N}$ und $2r-2 < \gamma \leq 2r$. Dann ist die Funktion*

$$g_\gamma(v) := |v|^{-\gamma}\Big\{g(v) - \sum_{k=0}^{r-1} a_{2k} v^{2k}\Big\}$$

die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion. Das gilt auch für sgn $(v) \cdot g_\gamma(v)$, *sofern $2r-2 < \gamma < 2r$.*

Beweis. Die Taylorreihe von g konvergiere auf dem Intervall $(-3\varepsilon, 3\varepsilon)$. Sei $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ eine gerade Funktion mit $\chi(v) = 1$, falls $|v| \leq \varepsilon$, und supp $(\chi) \subseteq [-2\varepsilon, 2\varepsilon]$. Wir zerlegen

$$g_\gamma(v) = |v|^{2r-\gamma}\chi(v) \sum_{k=0}^{\infty} a_{2r+2k} v^{2k} + \frac{1-\chi(v)}{|v|^\gamma}\mathcal{F}[f](v) - \sum_{k=0}^{r-1} a_{2k} \frac{1-\chi(v)}{|v|^{\gamma-2k}}.$$

Nach den im Beweis von Prop. 2.4 zitierten Kriterien ist der erste Summand die Fouriertransformierte einer L^1-Funktion, und auch auf die Funktionen $(1-\chi(v))/|v|^{\gamma-2k}$ trifft dies zu ($k = 0, 1, \ldots, r-1$). Damit folgt die Behauptung über g_γ, und ganz analog erledigt man sgn $(v) \cdot g_\gamma(v)$. □

Das Lemma wird nun auf die Funktionen $\bar{p}_\beta$, $\tilde{p}_\beta$ ($\beta > 0$) angewendet, deren Fouriertransformierten auf dem Intervall $(-2\pi, 2\pi)$ die Reihendarstellung

$$\mathcal{F}[\bar{p}_\beta](v) = \mathcal{F}[\tilde{p}_\beta](v) = 2^\beta \Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}^{(\beta)} v^{2k} \tag{2.6}$$

haben. Ist $r \in \mathbb{N}$ und $2r-2 < \alpha - \beta \leq 2r$, so gibt es gerade Funktionen $\bar{r}_{\beta\alpha}$, $\tilde{r}_{\beta\alpha} \in L^1(\mathbb{R})$ mit

$$\mathcal{F}[\bar{r}_{\beta\alpha}](v) = |v|^{\beta-\alpha}\Big\{2^\beta \Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\beta - \sum_{k=0}^{r-1} b_{2k}^{(\beta)} v^{2k}\Big\},$$

$$\mathcal{F}[\tilde{r}_{\beta\alpha}](v) = |v|^{\beta-\alpha}\Big\{2^\beta \operatorname{sgn}\Big(\frac{\sin(v/2)}{v}\Big)\Big|\frac{\sin(v/2)}{v}\Big|^\beta - \sum_{k=0}^{r-1} b_{2k}^{(\beta)} v^{2k}\Big\}.$$

Für $0 < \alpha - \beta < 1$ kann man $\bar{r}_{\beta\alpha}$, $\tilde{r}_{\beta\alpha}$ explizit angeben, denn mit den Funktionen $\bar{p}_{\beta\alpha}$, $\tilde{p}_{\beta\alpha}$ aus Abschnitt 2.1, dem Transformationspaar (2.3) und $b_0^{(\beta)} = 1$ wird

$$\bar{r}_{\beta\alpha}(u) - \bar{p}_{\beta\alpha}(u) = \tilde{r}_{\beta\alpha}(u) - \tilde{p}_{\beta\alpha}(u) = -\frac{|u|^{\alpha-\beta-1}}{2\,\Gamma(\alpha-\beta)\cos((\alpha-\beta)\pi/2)}.$$

Es ist zweckmäßig, an dieser Stelle die Potenzeigenschaften der Operatoren $\bar{R}^\alpha$, $\tilde{R}^\alpha$ zu behandeln. Wie üblich macht man die Definitionsbereiche $D(\bar{R}^\alpha)$, $D(\tilde{R}^\alpha)$ durch die Graphennormen $\|x\| + \|\bar{R}^\alpha x\|$ bzw. $\|x\| + \|\tilde{R}^\alpha x\|$ zu Banachräumen.

Proposition 2.11. *(i) Sei $0 < \beta < \alpha < \gamma$. Dann bestehen die Inklusionen $D(\tilde{R}^\gamma) \subseteq D(\bar{R}^\alpha) \subseteq D(\tilde{R}^\beta)$ mit stetigen Einbettungen.*

(ii) Für alle α, $\beta > 0$ gelten die additiven Potenzgesetze $\bar{R}^\alpha \bar{R}^\beta = \bar{R}^{\alpha+\beta} = \tilde{R}^\alpha \tilde{R}^\beta$ und $\tilde{R}^\alpha \bar{R}^\beta = \tilde{R}^{\alpha+\beta} = \bar{R}^\alpha \tilde{R}^\beta$.

Beweis. (i) OBdA sei $0 < \alpha - \beta, \gamma - \alpha < 2$. Nach Lemma 2.10 existieren Funktionen $\tilde{\tilde{r}}_{\beta\alpha}$, $\bar{\bar{r}}_{\beta\alpha} \in L^1(\mathbb{R})$, so daß $\mathcal{F}[\tilde{\tilde{r}}_{\beta\alpha}](v) = -\mathrm{sgn}\;(v)\mathcal{F}[\tilde{r}_{\beta\alpha}](v)$ und $\mathcal{F}[\bar{\bar{r}}_{\beta\alpha}](v) = -\mathrm{sgn}\;(v)\mathcal{F}[\bar{r}_{\beta\alpha}](v)$. Aus den Identitäten

$$\tilde{\nu}_1^\beta = \tilde{V}^\beta + \tilde{\tilde{r}}_{\beta\alpha} * \bar{V}^\alpha, \quad \bar{\nu}_1^\beta = \bar{V}^\alpha + \bar{\bar{r}}_{\alpha\gamma} * \tilde{V}^\gamma$$

folgen die behaupteten Inklusionen. Ist $(x_n)_n$ eine Nullfolge in $D(\bar{R}^\alpha)$, so ergibt sich mit der ersten Identität, daß $\|x_n\| + \|\tilde{R}^\beta x_n\|$ gegen Null konvergiert und somit $D(\bar{R}^\alpha)$ stetig in $D(\tilde{R}^\beta)$ eingebettet ist. Analog zeigt man die Stetigkeit der Einbettung $D(\tilde{R}^\gamma) \subseteq D(\bar{R}^\alpha)$.

(ii) Es gilt $\bar{V}^\alpha * \bar{V}^\beta = \bar{V}^{\alpha+\beta} = \tilde{V}^\alpha * \tilde{V}^\beta$ und $\tilde{V}^\alpha * \bar{V}^\beta = \tilde{V}^{\alpha+\beta} = \bar{V}^\alpha * \tilde{V}^\beta$. Berücksichtigt man noch $D(\bar{R}^{\alpha+\beta}), D(\tilde{R}^{\alpha+\beta}) \subseteq D(\bar{R}^\beta) \cap D(\tilde{R}^\beta)$, so ist (ii) nach dem Faltungssatz 1.2 klar. □

Die Gauß-Weierstraß-Integrale

$$W(\sigma)x = \frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/4\sigma}\, T(u)x\, du \quad (\sigma > 0,\, x \in X)$$

formen eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe $\{W(\sigma);\, \sigma > 0\}$ mit infinitesimalem Erzeuger A^2. Es ist bekannt, daß $\bar{R}^\alpha = (-A^2)^{\alpha/2}$ [60]. Daher haben wir das

Korollar 2.12. *Für $\alpha > 0$ ist $\bar{R}^\alpha = (-A^2)^{\alpha/2}$ und $\tilde{R}^{\alpha+1} = (iA)(-A^2)^{\alpha/2}$.*

Dieses Korollar ist die ausschlaggebende Motivation für die Definition der zentralen Differenzen geraden und ungeraden Typs. Im Unterschied zu [56, II] wurden die Potenzregeln in Prop. 2.11 direkt ohne Verwendung der Aussage von Korollar 2.12 gewonnen.

Die in Prop. 2.11 (i) festgestellten Inklusionen werden in den folgenden Taylorformeln für die Differenzen $\overline{\Delta}_\tau^\beta$, $\tilde{\Delta}_\tau^\beta$ stillschweigend ausgenutzt.

Satz 2.13. *Seien $\tau \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$ sowie α, β positive reelle Zahlen, so daß $2r-2 < \alpha-\beta \leq 2r$. Bezeichne $(\Delta_\tau^\beta, R^{\beta+2k}, R^\alpha, r_{\beta\alpha}) = (\overline{\Delta}_\tau^\beta, \bar{R}^{\beta+2k}, \bar{R}^\alpha, \bar{r}_{\beta\alpha})$ oder $(\tilde{\Delta}_\tau^\beta, \tilde{R}^{\beta+2k}, \tilde{R}^\alpha, \tilde{r}_{\beta\alpha})$. Dann gilt*

$$\Delta_\tau^\beta x = \sum_{k=0}^{r-1} b_{2k}^{(\beta)} |\tau|^{\beta+2k}\, R^{\beta+2k} x + \begin{cases} |\tau|^\alpha R^\alpha \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} r_{\beta\alpha}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u) x \,\frac{du}{|\tau|}, & x \in D(R^{\beta+2r-2}), \\ |\tau|^\alpha \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} r_{\beta\alpha}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u) R^\alpha x \,\frac{du}{|\tau|}, & x \in D(R^\alpha). \end{cases}$$

Dabei entstammen die Koeffizienten $b_{2k}^{(\beta)}$ der Taylorentwicklung (2.6).

Beweis. Dies folgt aus den Identitäten

$$\bar{\nu}_\tau^\beta = \sum_{k=0}^{r-1} b_{2k}^{(\beta)} |\tau|^{\beta+2k} \bar{V}^{\beta+2k} + |\tau|^\alpha \bar{V}^\alpha * \frac{1}{|\tau|} \bar{r}_{\beta\alpha}\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big) \quad \text{bzw.}$$
$$\tilde{\nu}_\tau^\beta = \sum_{k=0}^{r-1} b_{2k}^{(\beta)} |\tau|^{\beta+2k} \tilde{V}^{\beta+2k} + |\tau|^\alpha \tilde{V}^\alpha * \frac{1}{|\tau|} \tilde{r}_{\beta\alpha}\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big).$$
□

Ergänzend bemerken wir, daß im Fall $2r-2 < \alpha-\beta < 2r$ das Restglied in der Taylorformel zur Differenz $\overline{\Delta}_\tau^\beta$ auch in der Form

$$\begin{cases} |\tau|^\alpha \tilde{R}^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{r}}_{\beta\alpha}(\frac{u}{|\tau|})\, T(u) x \,\frac{du}{|\tau|}, & x \in D(\bar{R}^{\beta+2r-2}), \\ |\tau|^\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{r}}_{\beta\alpha}(\frac{u}{|\tau|})\, T(u) \tilde{R}^\alpha x \,\frac{du}{|\tau|}, & x \in D(\tilde{R}^\alpha) \end{cases}$$

geschrieben werden kann. Die Funktion $\bar{\bar{r}}_{\beta\alpha}$ hat die Fouriertransformierte $-\mathrm{sgn}\,(v)\cdot \mathcal{F}[\bar{r}_{\beta\alpha}](v)$ und ist nach Lemma 2.10 integrabel. Bezüglich der Differenz $\tilde{\Delta}_\tau^\beta$ gilt eine entsprechende Aussage.

Die wohl bekannteste Taylorformel für den Halbgruppenerzeuger A ist

$$T(\tau)x = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\tau^k}{k!} A^k x + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^\tau (\tau-u)^{r-1} T(u)\, A^r x \, du,$$

siehe z.B. [10, S. 11]. Um Formeln zu erhalten, die gebrochene Potenzen enthalten, muß man statt $T(\tau)$ einen geeigneten anderen Ausdruck entwickeln, etwa $[I - T(\tau)]^\alpha$. Dies wurde in [58], ausgehend von einer Grünwald-Letnikov-Darstellung für $(-A)^\alpha$, getan. Satz 2.13 liegt derselben Idee zugrunde. Martinez-Sanz-Marco [34] betrachten nicht notwendig dicht definierte nichtnegative Operatoren B und geben für den Ausdruck

$$B^\alpha x - \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \varepsilon^k \binom{\alpha}{k} \big[(B+\varepsilon)^{-1}\big]^k (B+\varepsilon)^\alpha x$$

zwei verschiedene Integraldarstellungen an. Ihre Überlegungen lassen sich in großen Teilen auch in Fréchet-Räumen durchführen [35]. Die Bedeutung der erwähnten Formeln liegt vor allem darin, daß mit ihnen die Definitionsbereiche gebrochener Potenzen verglichen werden können, vgl. Prop. 2.11.

Es stellt sich nun die Frage, ob für geeignete $x \in X$ die Taylorformeln mit Restglied in konvergente Taylorreihen übergehen. Eine notwendige Bedingung dafür ist selbstverständlich, daß x für jedes $\alpha > 0$ zu $D(\bar{R}^\alpha) \cap D(\tilde{R}^\alpha)$ gehört. Es bieten sich also die Elemente $x = G(\varphi)y$ mit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $y \in X$ an. Geschickter ist jedoch der Ansatz $x = G(f)y$, wobei die Fouriertransformierte der integrierbaren Funktion f kompakten Träger hat und stetig differenzierbar ist. Das Kriterium von Boman (siehe Beweis von Prop. 2.4) sichert $\bar{V}^\alpha * f$, $\tilde{V}^\alpha * f \in L^1(\mathbb{R})$ und damit $G(f)y \in D(\bar{R}^\alpha) \cap D(\tilde{R}^\alpha)$ $(\alpha > 0)$.

Satz 2.14. *Die Fouriertransformierte der Funktion $f \in L^1(\mathbb{R})$ sei stetig differenzierbar und habe kompakten Träger, etwa* $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subseteq [-K, K]$. *Sei $y \in X$ und $x := G(f)y$. Dann gilt für $\beta > 0$ und $0 < |\tau| < 2\pi/K$, daß*

$$\overline{\Delta}_\tau^\beta x = \sum_{k=0}^\infty b_{2k}^{(\beta)} |\tau|^{\beta+2k} \bar{R}^{\beta+2k} x \quad \textit{und} \quad \tilde{\Delta}_\tau^\beta x = \sum_{k=0}^\infty b_{2k}^{(\beta)} |\tau|^{\beta+2k} \tilde{R}^{\beta+2k} x.$$

Beweis. Wir gebrauchen die Bezeichnungen $\Delta_\tau^\beta, R^{\beta+2k}, R^\alpha, r_{\beta\alpha}$ wie in Satz 2.13. Zu zeigen ist, daß in den dort angegebenen Taylorformeln das Restglied

$$|\tau|^\alpha \, R^\alpha \int_{-\infty}^\infty r_{\beta\alpha}\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u) G(f) y \,\frac{du}{|\tau|}$$

für $\alpha \to \infty$ gegen Null konvergiert. Sei $\alpha > \beta$. Das Restglied kann in der Form

$$G(q_{\beta\alpha})y = |\tau|^\alpha G\Big(V^\alpha * f * \frac{1}{|\tau|} r_{\beta\alpha}\big(\frac{\cdot}{\tau}\big)\Big) y$$

geschrieben werden. Wegen $\operatorname{supp} \mathcal{F}[f] \subseteq [-K, K]$ und der Taylorentwicklung (2.6) hat die integrierbare Funktion $q_{\beta\alpha}$ die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[q_{\beta\alpha}](v) = |\tau v|^\beta \mathcal{F}[f](v) \sum_{k=r}^\infty b_{2k}^{(\beta)} \tau^{2k} v^{2k},$$

wobei $2r - 2 < \alpha - \beta \leq 2r$. Im Raum $L^2(\mathbb{R})$ konvergieren offensichtlich $\mathcal{F}[q_{\beta\alpha}]$ und $\frac{d}{dv}\mathcal{F}[q_{\beta\alpha}]$ gegen die Nullfunktion $(\alpha \to \infty)$. Mit der Hölderschen Ungleichung und der Plancherel-Identität schätzt man nun ab

$$\begin{aligned} \|q_{\beta\alpha}\|_{L^1} \leq \Big(\int_{-1}^1 du\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_{-\infty}^\infty |q_{\beta\alpha}(u)|^2 \, du\Big)^{1/2} \\ + \Big(\int_{|u|\geq 1} u^{-2} \, du\Big)^{1/2} \cdot \Big(\int_{-\infty}^\infty |u \, q_{\beta\alpha}(u)|^2 \, du\Big)^{1/2} \\ \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Big(\|\mathcal{F}[q_{\beta\alpha}]\|_{L^2} + \Big\|\frac{d}{dv}\mathcal{F}[q_{\beta\alpha}]\Big\|_{L^2}\Big). \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{\alpha\to\infty} \|q_{\beta\alpha}\|_{L^1} = 0$. Das Restglied $G(q_{\beta\alpha})y$ in den Taylorformeln geht also für $\alpha \to \infty$ gegen Null. □

Man kommt in Satz 2.14 mit etwas schwächeren Differenzierbarkeitsvoraussetzungen an $\mathcal{F}[f]$ aus, wenn man im Beweis mit der Ungleichung von Hausdorff-Young an Stelle der Plancherel-Identität abschätzt. Tatsächlich entspricht dieses Vorgehen im wesentlichen der Herleitung eines Multiplikatorkriteriums von Dappa-Trebels [15, Lemma 2], siehe auch [38, Lemma 2.1]. Zweckmäßig ist hier der folgende Spezialfall des Kriteriums: Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei absolut stetig mit kompaktem Träger derart, daß $g' \in L^p(\mathbb{R})$ für ein $p \in (1, 2]$. Dann ist $f := \mathcal{F}^{-1}[g] \in L^1(\mathbb{R})$, und mit einer nur von p abhängigen Konstanten C_p fällt $\|f\|_{L^1} \le C_p\big(\|g\|_{L^p} + \|g'\|_{L^p}\big)$ aus. Für jedes $\alpha > 0$, $y \in X$ folgt dann, daß $x = G(f)y$ zu $D(\bar{R}^\alpha) \cap D(\tilde{R}^\alpha)$ gehört, und es gilt die Aussage von Satz 2.14. Beispielsweise kann man für g den Féjer-Kern

$$g(u) = \begin{cases} 1 - |u| & |u| \le 1, \\ 0, & |u| > 1 \end{cases}, \quad f(v) = \mathcal{F}^{-1}[g](v) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\sin(v/2)}{v}\Big)^2 \tag{2.7}$$

nehmen. Für das Beispiel der Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$ (siehe Abschnitt 1.3) ergeben sich so für jedes $h \in L^p(\mathbb{R})$ die Reihen

$$\overline{\Delta}_\tau^\beta(f * h) = \sum_{k=0}^\infty b_{2k}^{(\beta)}\,(\bar{V}^{\beta+2k} * f) * h,$$
$$\tilde{\Delta}_\tau^\beta(f * h) = \sum_{k=0}^\infty b_{2k}^{(\beta)}\,(\tilde{V}^{\beta+2k} * f) * h$$

(Konvergenz bzgl. der $L^p(\mathbb{R})$-Norm).

Die Idee, Differenzen von Funktionen nach Ableitungen zu entwickeln, ist schon in älterer Literatur verfolgt worden, siehe etwa [29, S. 190]. Die angegebenen Formeln sind jedoch in erster Linie formal zu verstehen. Umgekehrt könnte man jetzt die Operatoren $\bar{R}^\beta$, $\tilde{R}^\beta$ nach Differenzen des jeweiligen Typs entwickeln und so ein Analogon zu [29, S. 165] formulieren. Auf eine weitergehende Diskussion wollen wir hier verzichten und merken lediglich an, daß die erforderlichen Koeffizienten vor den Differenzen der Taylorreihe

$$2^\beta\Big(\frac{\arcsin(v/2)}{v}\Big)^\beta = \sum_{k=0}^\infty d_{2k}^{(\beta)} v^{2k} \quad (|v| < 1)$$

zu entnehmen sind.

2.4 Anwendung in der Approximationstheorie

Sei $\alpha > 0$. Die stetigen linearen Operatoren $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$ konvergieren für $\tau \to 0$ punktweise gegen den Nulloperator auf X. Wie Satz 2.8 zeigt, liegt in jedem Element $x \in D(\bar{R}^\alpha)$ die Konvergenzordnung $O(\tau^\alpha)$ vor. Dabei erzwingt $\|\overline{\Delta}_\tau^\alpha x\| = o(\tau^\alpha)$, daß x zum Kern des Operators $\bar{R}^\alpha$ gehört. Entsprechende Aussagen gelten für die Differenzen $\tilde{\Delta}_\tau^\alpha$. Die Approximationsprozesse $I + \overline{\Delta}_\tau^\alpha$, $I + \tilde{\Delta}_\tau^\alpha$ sind also *saturiert* von der Ordnung $O(\tau^\alpha)$; zu dieser Terminologie vgl. [10, 11]. Neben dieser optimalen Konvergenzrate gilt es, auch langsamere Konvergenzgeschwindigkeiten quantitativ zu erfassen.

Im Halbgruppenfall ist die beschriebene Fragestellung mit den Differenzen $[I-T(\tau)]^m$, $m \in \mathbb{N}$, umfassend studiert worden, siehe [10, Ch. 3] und die dort zitierte Literatur. Differenzen gebrochener Ordnung behandeln Westphal [57] und Trebels-Westphal [53].

Grundlegend zur Beschreibung sowohl der optimalen (Saturation) als auch der nicht-optimalen Konvergenz ist die Idee des K-Funktionals, das bei der Approximation von Funktionen das ideale Bindeglied zwischen dem Grad der Stetigkeit bzw. *smoothness* und der Approximationsgeschwindigkeit darstellt [54]. Grundlage unserer Überlegungen ist denn auch die Äquivalenz der K-Funktionale

$$\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) := \inf_{y\in D(\bar{R}^\alpha)} \{\|x-y\| + \tau^\alpha \|\bar{R}^\alpha y\|\}, \quad \tilde{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) := \inf_{y\in D(\tilde{R}^\alpha)} \{\|x-y\| + \tau^\alpha \|\tilde{R}^\alpha y\|\}$$

mit den jeweiligen Stetigkeitsmoduln

$$\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) := \sup_{0<\sigma\le\tau} \|\overline{\Delta}^\alpha_\tau x\| \text{ bzw. } \tilde{\omega}_\alpha(\tau, x) := \sup_{0<\sigma\le\tau} \|\tilde{\Delta}^\alpha_\tau x\|.$$

Dabei heißen zwei Funktionen H_1, $H_2 : (0,\infty)\times X \to \mathbb{R}$ *äquivalent*, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß $C^{-1}H_2(\tau, x) \le H_1(\tau, x) \le C\, H_2(\tau, x)$ für alle τ, x ausfällt.

Satz 2.15. *Sei $\alpha > 0$. Dann ist das K-Funktional $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$ äquivalent zum Stetigkeitsmodul $\bar{\omega}_\alpha(\tau, x)$. Ebenso sind $\tilde{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$, $\tilde{\omega}_\alpha(\tau, x)$ äquivalent.*

Dieser Satz wird wie das analoge Resultat für Halbgruppen bewiesen (siehe [53]). Zur Vereinfachung bezeichne $M :=\sup\{\|T(\tau)\|;\ \tau \in \mathbb{R}\}$,

$$\bar{M}_\alpha := \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{\alpha/2 - j}\right| \quad \text{und } \tilde{M}_\alpha := 2\sum_{j=0}^{\infty} \left|\binom{\alpha}{\frac{\alpha-1}{2} - j}\right|.$$

Beweis von Satz 2.15. Seien $x \in X$, $y \in D(\bar{R}^\alpha)$ und $\sigma > 0$. Nach der Grünwald-Letnikov-Formel aus Satz 2.8 gilt

$$\begin{aligned}\|\overline{\Delta}^\alpha_\sigma x\| &\le \|\overline{\Delta}^\alpha_\sigma(x-y)\| + \|\overline{\Delta}^\alpha_\sigma y\| \\ &\le M \cdot \bar{M}_\alpha\, \|x-y\| + M\|\bar{p}_\alpha\|_{L^1} \cdot \sigma^\alpha \|\bar{R}^\alpha y\|\end{aligned}$$

und daher

$$\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) \le M(\bar{M}_\alpha + \|\bar{p}_\alpha\|_{L^1})\, \bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x), \quad \tau > 0, x \in X.$$

Analog zeigt man die entsprechende Ungleichung zwischen $\tilde{\omega}_\alpha(\tau, x)$ und $\tilde{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$.

Zum Nachweis der umgekehrten Abschätzungen wählt man eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit $2m > \alpha$ und erklärt zu $x \in X$, $\tau > 0$ das Element $y_\tau \in X$ durch

$$x - y_\tau = \binom{2m}{m}^{-1} \int_{-m}^{m} \bar{p}_{2m}(u) \overline{\Delta}^{2m}_{\tau u/m} x\, du. \tag{2.8}$$

Es bestehen die Abschätzungen

$$\|x - y_\tau\| \le \binom{2m}{m}^{-1} M \|\bar{p}_{2m}\|_{L^1} \begin{cases} \bar{M}_{2m-\alpha}\, \bar{\omega}_\alpha(\tau, x), \\ \tilde{M}_{2m-\alpha}\, \tilde{\omega}_\alpha(\tau, x). \end{cases}$$

Da der Träger der normalisierten L^1-Funktion $\bar{p}_{2m}$ im Intervall $[-m, m]$ enthalten ist, findet man

$$y_\tau = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{1 \le |j| \le m} (-1)^{j+1} \binom{2m}{m-j} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_{2m}\Big(\frac{mu}{j\tau}\Big) T(u)x \,\frac{m\,du}{|j|\tau}.$$

Die Faltungsidentitäten $\bar{p}_{2m} = \bar{p}_{2m-\alpha} * \bar{p}_\alpha = \tilde{p}_{2m-\alpha} * \tilde{p}_\alpha$ ermöglichen die Zerlegung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_{2m}\Big(\frac{mu}{j\tau}\Big) T(u)x \,\frac{m\,du}{|j|\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\,du}{|j|\tau} \bar{p}_{2m-\alpha}\Big(\frac{mu}{j\tau}\Big) T(u) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\,dv}{|j|\tau} \bar{p}_\alpha\Big(\frac{mv}{j\tau}\Big) T(v)x$$

und die entsprechende Zerlegung mit $\tilde{p}_{2m-\alpha}$, $\tilde{p}_\alpha$. Satz 2.8 zeigt nun $y_\tau \in D(\bar{R}^\alpha) \cap D(\tilde{R}^\alpha)$ und

$$\begin{aligned} \tau^\alpha \|\bar{R}^\alpha y_\tau\| &\le \binom{2m}{m}^{-1} M \|\bar{p}_{2m-\alpha}\|_{L^1} \sum_{1 \le |j| \le m} \binom{2m}{m-j} \Big|\frac{j}{m}\Big|^{-\alpha} \|\overline{\Delta}^\alpha_{j\tau/m} x\| \\ &\le \binom{2m}{m}^{-1} M \|\bar{p}_{2m-\alpha}\|_{L^1}\, m^\alpha \cdot 2^{2m}\, \bar{\omega}_\alpha(\tau, x) \end{aligned}$$

und das Analogon für $\tau^\alpha \|\tilde{R}^\alpha y_\tau\|$. Hieraus und der oben angegebenen Abschätzung für $\|x - y_\tau\|$ beschafft man sich eine Konstante $C > 0$, mit der die gewünschten Abschätzungen

$$\begin{array}{rcccl} \bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) & \le & \|x - y_\tau\| + \tau^\alpha \|\bar{R}^\alpha y_\tau\| & \le & C\, \bar{\omega}_\alpha(\tau, x), \\ \tilde{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) & \le & \|x - y_\tau\| + \tau^\alpha \|\tilde{R}^\alpha y_\tau\| & \le & C\, \tilde{\omega}_\alpha(\tau, x) \end{array} \tag{2.9}$$

für alle $\tau > 0$, $x \in X$ erfüllt sind. □

Nach dem Vorbild des Halbgruppenfalls [10, 5, 57] läßt sich die nicht-optimale Konvergenz der Differenzen $\overline{\Delta}^\alpha_\tau$ in geeigneter Weise mit den Ausdrücken

$$\|x\|^{-}_{\beta,(\alpha);q} := \|x\| + \begin{cases} \Big(\displaystyle\int_0^\infty \{\tau^{-\beta}\, \bar{\omega}_\alpha(\tau, x)\}^q \frac{d\tau}{\tau} \Big)^{1/q} & (1 \le q < \infty) \\ \displaystyle\sup_{0<\tau<\infty} \{\tau^{-\beta}\, \bar{\omega}_\alpha(\tau, x)\} & (q = \infty) \end{cases}$$

messen ($0 < \beta < \alpha$). Alle Elemente $x \in X$, für die dieser Ausdruck endlich ist, werden zum Banachraum $(\bar{X}_{\beta,(\alpha);q}, \|\cdot\|^{-}_{\beta,(\alpha);q})$ zusammengefaßt.

Das Peetresche K-Funktional zum Interpolationspaar $(X, D(\bar{R}^\alpha))$ ist gegeben durch

$$K(\tau, x; X, D(\bar{R}^\alpha)) := \inf_{y \in D(\bar{R}^\alpha)} \{\|x - y\| + \tau\|y\| + \tau\|\bar{R}^\alpha y\|\}.$$

Nach Satz 2.15 existiert eine Konstante $C > 0$, so daß

$$C^{-1}\,\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) \leq K(\tau^\alpha, x; X, D(\bar{R}^\alpha)) \leq C\,\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) + C \min(1, \tau^\alpha)\|x\|.$$

Bezeichnet $(\cdot,\cdot)_{\vartheta,q}$ den Interpolationsfunktor zur K-Methode, so ergibt sich

$$\bar{X}_{\beta,(\alpha);q} = (X, D(\bar{R}^\alpha))_{\beta/\alpha,q}$$

mit äquivalenten Normen. Definiert man zu $x \in X$ die Elemente y_τ wie in (2.8) und nutzt (2.9), so kann man leicht nachweisen, daß $\bar{X}_{\beta,(\alpha);q}$ äquivalent durch

$$\|x\|^-_{\beta,(\alpha);q} := \|x\| + \Big(\int_0^\infty \{\tau^{-\beta}\,\|\overline{\Delta}^\alpha_\tau x\|\}^q\,\frac{d\tau}{\tau}\Big)^{1/q}$$

normiert werden kann. Sei nun $0 < \beta < \alpha < 2m$ ($m \in \mathbb{N}$). Die Marchauddarstellung (1.2) und Prop. 2.9 zeigen, daß $\bar{X}_{\beta,(2m);1} \subseteq D(\bar{R}^\alpha) \subseteq \bar{X}_{\beta,(2m);\infty}$ mit stetigen Einbettungen. Damit sind die Voraussetzungen des Reiterationssatzes [10, S. 178] erfüllt, und es folgt

$$\bar{X}_{\beta,(\alpha);q} = (X, D(\bar{R}^\alpha))_{\beta/\alpha,q} = (X, D(\bar{R}^{2m}))_{\beta/(2m),q} = \bar{X}_{\beta,(2m);q}$$

mit äquivalenten Normen. Die Räume $\bar{X}_{\beta,(\alpha);q}$ hängen also gar nicht vom Parameter $\alpha > \beta$ ab, weswegen er geklammert ist.

Entsprechend kann man Banachräume $(\tilde{X}_{\beta,(\alpha);q}, \|\cdot\|^\sim_{\beta,(\alpha);q})$ zu den zentralen Differenzen ungeraden Typs definieren, mit $(X, D(\tilde{R}^\alpha))_{\beta/\alpha,q}$ identifizieren und eine weitere äquivalente Norm angeben. Auch hier spielt die Wahl von $\alpha > \beta$ keine Rolle.

Berücksichtigt man $\bar{R}^{2m} = (-A^2)^m$, $\tilde{R}^{2m+1} = (iA)(-A^2)^m$ ($m \in \mathbb{N}$) und [5, Satz 4.5], so ergibt sich die Isomorphie der vier Räume $\bar{X}_{\beta,(\alpha);q}$, $\tilde{X}_{\beta,(\alpha);q}$, $(X, D((-A)^\alpha))_{\beta/\alpha,q}$, $(X, D(A^\alpha))_{\beta/\alpha,q}$. Die Differenzen $\overline{\Delta}^\alpha_\tau$, $\tilde{\Delta}^\alpha_\tau$, $[I - T(\tau)]^\alpha$, $[I - T(-\tau)]^\alpha$ zeigen also dasselbe nicht-optimale Konvergenzverhalten.

Sehr wahrscheinlich stimmen auch die Saturationsklassen der vier genannten Differenzen überein. Im Falle eines reflexiven Banachraums X würde dies insbesondere die Gleichheit der Definitionsbereiche $D(\bar{R}^\alpha)$, $D(\tilde{R}^\alpha)$ nach sich ziehen, was im Beispiel der Translationsgruppe aus Abschnitt 1.3 ja auch tatsächlich der Fall ist. Einstweilen notieren wir das folgende Korollar zu Satz 2.15:

Satz 2.16. *Sei $\alpha > 0$, $x \in X$ und $(\Delta^\alpha_\tau, \omega_\alpha, K_\alpha) = (\overline{\Delta}^\alpha_\tau, \bar{\omega}_\alpha, \bar{K}_\alpha)$ oder $(\tilde{\Delta}^\alpha_\tau, \tilde{\omega}_\alpha, \tilde{K}_\alpha)$. Dann sind für $\tau \to 0^+$ die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\|\Delta^\alpha_\tau\| = O(\tau^\alpha)$.

(ii) $\omega(\tau, x) = O(\tau^\alpha)$.

(iii) $K_\alpha(\tau, x) = O(\tau)$.

Trebels-Westphal [53] charakterisieren das K-Funktional $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$ über Marchaud-Integrale: Sie zeigen die Äquivalenz von

$$\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) \quad \text{und} \quad \tau^\alpha \Big\| \int_\tau^\infty u^{-\alpha-1}\overline{\Delta}^{2m}_\tau x\,du \Big\| \quad (2m > \alpha),$$

und dies ist nach dem hier Gezeigten äquivalent zu $\bar{\omega}_\alpha(\tau, x)$. Die Marchaud-Integrale bieten die Möglichkeit, das Konvergenzverhalten verallgemeinerter Weierstraß-Mittel zu beschreiben, siehe [53, Cor. 1.7].

3 Der Operator $\bar{R}^\alpha$ für n-parametrige Gruppen

In diesem Kapitel wollen wir eine Grünwald-Letnikov-Darstellung für den Operator $\bar{R}^\alpha$ im Fall einer n-parametrigen Gruppe entwickeln. Das Vorgehen entspricht dem des vorhergehenden Kapitels, die Ausführung der Details ist aber erheblich aufwendiger. Insbesondere werden in Verallgemeinerung von (2.2) geeignete zentrale Differenzen aus der Fourierentwicklung der unten angegebenen Funktion h_α gewonnen. Im Unterschied zur eindimensionalen Situation ist uns ein zweckmäßiger geschlossener Ausdruck für die Fourierkoeffizienten (3.1) bislang nicht bekannt.

Der vorbereitende Abschnitt 3.1 behandelt neben der erwähnten Fourierentwicklung die Hilfsfunktionen $\bar{p}_{\alpha\beta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Auch hier verifizieren wir die Integrierbarkeit von $\bar{p}_{\alpha\beta}$ durch das Studium der Fouriertransformierten $\mathcal{F}[\bar{p}_{\alpha\beta}]$, die nicht radialsymmetrisch, sondern lediglich in jeder Variablen gerade ist und daher nicht vom bequemen Kriterium [51, Th. 1] erfaßt wird. Zwar kann man andere bekannte $L^1(\mathbb{R}^n)$-Multiplikatorkriterien anwenden [9, 51, 61, 41], zur Überprüfung der Voraussetzungen sind aber erst einmal Überlegungen der hier betriebenen Art erforderlich. Wir haben uns daher für eine elementare, weitgehend in sich abgeschlossene Argumentation entschieden.

In Abschnitt 3.2 werden die angekündigten zentralen Differenzen und die Grünwald-Letnikov-Darstellung von $\bar{R}^\alpha$ besprochen. Als interessante Anwendung geben wir eine mehrdimensionale Version von Satz 2.15 an.

Teilweise benutzen wir dieselben Bezeichnungen wie im einparametrigen Fall. Mißverständnisse sind jedoch nicht zu befürchten.

3.1 Vorbereitungen

Sei $n \in \{2, 3, \dots\}$ und $\alpha > 0$. Dann ist

$$h_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad h_\alpha(\xi) := 2^\alpha \left[\sum_{k=1}^{n} \sin^2\left(\frac{\xi_k}{2}\right) \right]^{\alpha/2}$$

eine in jeder Koordinate 2π-periodische stetige Funktion. Mit Hilfe der Binomialreihe kann man nachrechnen, daß h_α in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickelt werden kann; dieser Weg wird qualitativ im nächsten Abschnitt beschritten. Hier soll jedoch eine schärfere asymptotische Aussage über die Fourierkoeffizienten von h_α bewiesen werden, die einerseits ein für den Fall $n = 1$ bekanntes Ergebnis verallgemeinert (vgl. (2.2)), andererseits eine mehrdimensionale Version der Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$ aus Definition 2.3 erlaubt.

Lemma 3.1. *Für jedes $\alpha > 0$ ist die Funktion h_α in eine absolut und gleichmäßig konvergente Fourierreihe*

$$h_\alpha(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\, e^{i\langle \xi, j \rangle}$$

entwickelbar. Genauer gilt

$$c_{\alpha,j} = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \int_{[-\pi,\pi]^n} h_\alpha(u)\, e^{-i\langle u,j\rangle}\, du = O(\|j\|_\infty^{-\alpha-n}) \tag{3.1}$$

($\|j\|_\infty \to \infty$). Falls α eine gerade natürliche Zahl ist, verschwinden fast alle Koeffizienten $c_{\alpha,j}$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir für den eindimensionalen Torus $T := [-\pi,\pi]$. Zu zeigen ist lediglich die asymptotische Aussage (3.1). Das entscheidende Hilfsmittel ist der folgende Sachverhalt:

Zu jedem $m \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Konstante $C_{\alpha,m} > 0$, so daß

$$\forall\, \xi \in T^n \backslash \{0\} : \quad |(\partial_n^m h_\alpha)(\xi)| \le C_{\alpha,m} \|\xi\|_2^{\alpha-m}. \tag{3.2}$$

Diese Abschätzung beweist man induktiv, wobei man sich oBdA auf die gelochte Kugel $0 < \|\xi\|_2 < 1$ beschränken darf. Beim Induktionsschritt geht man von der Beziehung $(\partial_n^m h_\alpha)(\xi) = \alpha \partial_n^{m-1}\{h_{\alpha-2}(\xi)\sin(\xi_n)\}$ aus, wendet auf der rechten Seite die Leibnizregel und dann die Induktionsvoraussetzung an.

Bezeichne N diejenige natürliche Zahl, für die

$$\alpha + n - 1 \le N < \alpha + n$$

ausfällt. Wir behandeln nacheinander die Fälle "N gerade" und "N ungerade".

1. Fall: Die Zahl N ist gerade. Für jedes $u^* \in T^{n-1}\backslash\{0\}$ ist

$$h_\alpha(u^*,\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u_n \mapsto h_\alpha(u^*, u_n)$$

eine gerade 2π-periodische C^∞-Funktion. Sei $j = (j^*, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $j_n > 0$. Wir integrieren $(N+1)$-mal partiell bzgl. der Variablen u_n; die Randterme verschwinden wegen der Periodizität.

$$\begin{aligned} c_{\alpha,j} &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \int_{T^{n-1}} du^*\, e^{-i\langle u^*,j^*\rangle} \int_{-\pi}^{\pi} du_n\, e^{-ij_n u_n} h_\alpha(u^*, u_n) \\ &= \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \frac{(-1)^{N+1}}{(-ij_n)^{N+1}} \int_{T^{n-1}} du^* e^{-i\langle u^*,j^*\rangle} \int_{-\pi}^{\pi} du_n\, e^{-ij_n u_n} \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)(u^*, u_n). \end{aligned}$$

Da $\big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)(u^*,\cdot)$ eine ungerade Funktion ist, erhält man

$$|c_{\alpha,j}| \le 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n j_n^{-N-1} \int_{T^{n-1}} du^* \Big| \int_0^\pi du_n\, \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)(u^*, u_n)\, \sin(j_n u_n)\Big|.$$

Mit der Substitution $v^* = j_n u^*$, $v_n = j_n u_n$, $v = (v^*, v_n)$ ergibt sich weiter

$$|c_{\alpha,j}| \le 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n j_n^{-N-n-1} \int_{(j_nT)^{n-1}} dv^* \Big| \int_0^{j_n\pi} dv_n \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)\Big(\frac{v^*}{j_n}, \frac{v_n}{j_n}\Big)\, \sin(v_n)\Big|$$

$$\le 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n j_n^{-N-n-1} \cdot \Big\{ \int_{(j_nT)^{n-1}} \int_0^{\pi/2} \Big| \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)\Big(\frac{v}{j_n}\Big) \sin(v_n) \Big| \, dv$$
$$+ \int_{(j_nT)^{n-1}} \int_{j_n\pi-\pi/2}^{j_n\pi} \Big| \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)\Big(\frac{v}{j_n}\Big) \sin(v_n) \Big| \, dv$$
$$+ \int_{(j_nT)^{n-1}} dv^* \Big| \int_{\pi/2}^{j_n\pi-\pi/2} dv_n \big(\partial_n^{N+1} h_\alpha\big)\Big(\frac{v^*}{j_n}, \frac{v_n}{j_n}\Big) \sin(v_n) \Big| \Big\}.$$

Die ersten beiden Integrale schätzt man mit (3.2) ab, wobei das vordere die größere Schranke liefert. Beim dritten Integral führt man noch eine partielle Integration bzgl. v_n aus, ehe man (3.2) verwendet.

$$|c_{\alpha,j}| \le 2\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n j_n^{-\alpha-n} \Big\{ 2\, C_{\alpha,N+1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\pi/2} \|v\|_2^{\alpha-N-1} |\sin(v_n)| \, dv$$
$$+ C_{\alpha,N+2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\pi/2}^{\infty} \|v\|_2^{\alpha-N-2} |\cos(v_n)| \, dv \Big\}.$$

Wegen $\alpha + n - 1 \le N < \alpha + n$ ist der Ausdruck in geschweiften Klammern endlich. Infolgedessen gilt mit einer von j unabhängigen Konstanten L, daß

$$|c_{\alpha,j}| \le L \cdot j_n^{-\alpha-n} \quad (j \in \mathbb{Z}^n,\ j_n > 0).$$

Da h_α in jedem Argument gerade und invariant unter Koordinatenpermutationen ist, folgt

$$|c_{\alpha,j}| \le L \cdot \|j\|_\infty^{-\alpha-n}, \quad j \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}.$$

Für den 1. Fall ist damit (3.1) verifiziert.

2. Fall: Die Zahl N ist ungerade. Die Funktion

$$\tilde{h}_\alpha : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}, \quad \tilde{h}_\alpha(\tilde{\xi}) = 2^\alpha \Big[\sum_{k=1}^{n+1} \sin^2\Big(\frac{\xi_k}{2}\Big) \Big]^{\alpha/2}$$

läßt sich nach dem 1. Fall in eine absolut konvergente Fourierreihe

$$\tilde{h}_\alpha(\tilde{\xi}) = \sum_{J \in \mathbb{Z}^{n+1}} \tilde{c}_{\alpha,J}\, e^{i\langle \tilde{\xi}, J\rangle}$$

entwickeln, also auch h_α. Schreibt man $J = (j,m) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$, so besteht zwischen den Fourierkoeffizienten von h_α, $\tilde{h}_\alpha$ der Zusammenhang

$$c_{\alpha,j} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_{\alpha,(j,m)}.$$

Ebenfalls nach dem 1. Fall existiert eine Konstante $\tilde{L} > 0$, so daß

$$\forall\, j \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}\ \forall\, m \in \mathbb{Z} : \quad |\tilde{c}_{\alpha,(j,m)}| \le \tilde{L}\, \max\{\|j\|_\infty, |m|\}^{-\alpha-n-1}.$$

Dies ermöglicht die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|c_{\alpha,j}| &\le \tilde{L} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \max\{\|j\|_\infty, |m|\}^{-\alpha-n-1} \\
&\le \tilde{L} \Big\{ \sum_{|m|\le\|j\|_\infty} \|j\|_\infty^{-\alpha-n-1} + \sum_{l=1}^{\infty} \big(2\|j\|_\infty\big)\big(l\|j\|_\infty\big)^{-\alpha-n-1} \Big\} \\
&\le \|j\|_\infty^{-\alpha-n} \cdot 2\tilde{L} \cdot \Big\{ 1 + \sum_{l=1}^{\infty} l^{-\alpha-n-1} \Big\}.
\end{aligned}$$

Damit ist (3.1) auch für den 2. Fall bewiesen. □

Nach dem Vorbild der Überlegungen im Abschnitt 2.1 kann man Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta} \in L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \beta < \alpha + n$, über die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[\bar{p}_{\alpha\beta}](\xi) = \|\xi\|_2^{\alpha-\beta} \cdot 2^\alpha \left| \frac{\sum_1^n \sin^2\left(\frac{\xi_k}{2}\right)}{\sum_1^n \xi_k^2} \right|^{\alpha/2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n) \tag{3.3}$$

einführen. Explizite Darstellungen für $\bar{p}_{\alpha\beta}$ bestimmt man wie in der eindimensionalen Situation, indem man die durch (1.4) erklärten Distributionen $\bar{V}^{-\gamma} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \cap L^1_{\text{lok}}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \gamma < n$, verwendet. Mit den Fourierkoeffizienten $c_{\alpha,j}$ aus (3.1) wird

$$\bar{p}_{\alpha\beta}(u) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n-\beta}{2})}{\pi^{n/2}\,\Gamma(\frac{\beta}{2})} \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j} \|u-j\|_2^{\beta-n}, & \beta \ne n, n+2, \dots, \\[2ex] \dfrac{(-1)^{(\beta-n)/2}}{2^\beta\,\Gamma(\frac{\beta}{2})\Gamma(\frac{\beta-n}{2})} \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j} \log\|u-j\|_2 \cdot \|u-j\|_2^{\beta-n}, & \beta = n, n+2, \dots \end{cases}$$

Die Reihen konvergieren mindestens für $u \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Z}^n$.

Die Funktion $\bar{p}_{22}$ wird in geringfügiger Modifikation bei Trebels [48, Lemma 2.5] untersucht, der einen eleganten Beweis für die Integrierbarkeit angibt. Damit ist im wesentlichen $\bar{p}_{2m,\beta} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ für $0 < \beta \le 2m$, $m \in \mathbb{N}$, gezeigt. Um nachzuweisen, daß allgemein für $0 < \beta \le \alpha$ die Funktion $\bar{p}_{\alpha\beta}$ integrierbar ist, analysieren wir das Verhalten der Fouriertransformierten (3.3) im Ursprung. Zunächst halten wir fest:

Lemma 3.2. *Sei $l \in \mathbb{N}_0$ und*

$$g_{2,l}(\xi) := \frac{\xi_1^{2l} + \cdots + \xi_n^{2l}}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}).$$

Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$

$$(\partial_n^m g_{2,l})(\xi) = O(\rho^{2l-2-m}) \quad (\rho = \|\xi\|_2 \to 0).$$

Beweis. Es ist

$$(\partial_n^m g_{2,l})(\xi) = \frac{P_m(\xi)}{(\sum_1^n \xi_k^2)^{m+1}}$$

mit einem homogenen Polynom $P_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vom Grad $2l + m$. Übergang zu n-dimensionalen Kugelkoordinaten $\rho = \|\xi\|_2, \varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}$ führt zu

$$P_m(\xi) = \rho^{2l+m} \tilde{P}_m(\varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2}),$$

wobei $\tilde{P}_m$ als trigonometrisches Polynom geschrieben werden kann. Es folgt $(\partial_n^m g_{2,l})(\xi) = \rho^{2l-2-m} \tilde{P}_m(\varphi, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-2})$ und damit die Behauptung. □

Der vorangegangene Beweis läßt sich unmittelbar für gemischte Ableitungen von $g_{2,l}$ modifizieren. Man stellt dann fest, daß im Fall $l \geq 2$ die Funktion $g_{2,l}$ im Ursprung $(2l-3)$-mal stetig differenzierbar mit verschwindender Ableitung ist. Dagegen kann $\partial_n^{2l-2} g_{2,l}$ in $\xi = 0$ nicht stetig fortgesetzt werden.

Lemma 3.3. *Die Funktion $g_2 : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch*

$$g_2(\xi) = \frac{\sum_1^n \sin^2\left(\frac{\xi_k}{2}\right)}{\sum_1^n \xi_k^2}.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ verhält sich die partielle Ableitung $\partial_n^m g_2$ am Ursprung wie $O(\|\xi\|_2^{2-m})$.

Beweis. Es ist

$$g_2(\xi) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} (\xi_1^{2l} + \cdots + \xi_n^{2l}). \tag{3.4}$$

Mit der Leibnizregel erhält man

$$(\partial_n^m g_2)(\xi) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \partial_n^k \Big(\frac{1}{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} \Big) \, \partial_n^{m-k} \Big(\sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} (\xi_1^{2l} + \cdots + \xi_n^{2l}) \Big).$$

Die innere Reihe kann man leicht gliedweise differenzieren. Geht man dann zu Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^n$ über ($\rho = \|\xi\|_2$), so folgt mit Hilfe von Lemma 3.2 die Behauptung:

$$(\partial_n^m g_2)(\xi) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} O(\rho^{-2-k}) O(\rho^{4-(m-k)}) = O(\rho^{2-m}), \quad \rho \to 0.$$ □

Durch die Fortsetzung $g_2(0) := \frac{1}{4}$ kann man zwar g_2 zu einer auf $\mathbb{R}^n$ stetig differenzierbaren Funktion machen, aber schon die partielle Ableitung $\partial_n^2 g_2$ läßt sich im Ursprung nicht mehr stetig ergänzen. Spaltet man nämlich in (3.4) von der Reihe den ersten Summanden ab und verfährt dann wie anschließend beschrieben, so ergibt sich mit Lemma 3.2, daß

$$(\partial_n^2 g_2)(\xi) = -\frac{1}{48} (\partial_n^2 g_{2,2})(\xi) + O(\rho^2) \quad (\rho = \|\xi\|_2 \to 0).$$

Wie bereits erwähnt, ist $\partial_n^2 g_{2,2}$ in $\xi = 0$ nicht stetig fortsetzbar.

Wir können jetzt das Studium der durch die Fouriertransformierten (3.3) charakterisierten Funktionen $\bar{p}_{\alpha\beta}$ weiterführen.

Proposition 3.4. *Für $0 < \beta \leq \alpha$ gehört die Funktion $\bar{p}_{\alpha\beta}$ zu $L^1(\mathbb{R}^n)$. Speziell ist $\bar{p}_\alpha := \bar{p}_{\alpha\alpha}$ normalisiert.*

Beweis. Mit der Funktion g_2 aus Lemma 3.3 ist

$$\mathcal{F}[\bar{p}_{\alpha\beta}](\xi) = \|\xi\|_2^{\alpha-\beta}\, 2^\alpha \big[g_2(\xi)\big]^\alpha =: g_{\alpha\beta}(\xi).$$

Sei $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ eine radialsymmetrische Testfunktion, so daß $\mu(\xi) = 1$ ($\|\xi\|_2 \leq \frac{\pi}{2}$) und supp $(\mu) \subseteq T^n = [-\pi, \pi]^n$. Wir integrieren das Fourier-Umkehrintegral der Funktion $\mu \cdot g_{\alpha\beta}$ wiederholt partiell nach der Variablen ξ_n, vgl. das Vorgehen im Beweis von Lemma 3.1. Für $u = (u^*, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $u_n \neq 0$ gelangt man so auf

$$\mathcal{F}^{-1}[\mu{\cdot}g_{\alpha\beta}](u) = \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \frac{(-1)^{n+1}}{(-iu_n)^{n+1}} \int_{T^{n-1}} d\xi^*\, e^{-i\langle u^*,\xi^*\rangle} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi_n\, e^{-iu_n\xi_n} \big(\partial_n^{n+1}\{\mu{\cdot}g_{\alpha\beta}\}\big)(\xi^*, \xi_n).$$

Lemma 3.3 gewährleistet, daß $\partial_n^{n+1}\{\mu \cdot g_{\alpha\beta}\} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Da außerdem $\mu \cdot g_{\alpha\beta}$ invariant unter Variablenpermutationen ist, folgt für jedes $u \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ die Abschätzung

$$\big|\mathcal{F}^{-1}[\mu \cdot g_{\alpha\beta}](u)\big| \leq \|u\|_\infty^{-n-1} \Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^n \big\|\partial_n^{n+1}\{\mu \cdot g_{\alpha\beta}\}\big\|_{L^1}.$$

Die Funktion $\mu \cdot g_{\alpha\beta}$ ist also die Fouriertransformierte einer L^1- Funktion. Gelingt es, diese Eigenschaft auch für die Differenz $g_{\alpha\beta} - \mu \cdot g_{\alpha\beta}$ nachzuweisen, ist die Proposition bewiesen. Man schreibt dazu

$$g_{\alpha\beta}(\xi) - \mu(\xi)g_{\alpha\beta}(\xi) = \frac{1-\mu(\xi)}{\|\xi\|_2^\beta} \cdot 2^\alpha \Big[\sum_{k=1}^n \sin^2\Big(\frac{\xi_k}{2}\Big)\Big]^{\alpha/2}.$$

Nach [51] existiert eine radialsymmetrische Funktion $m_\beta \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{F}[m_\beta](\xi) = \|\xi\|_2^{-\beta}(1-\mu(\xi))$. Berücksichtigt man noch die Fourierentwicklung aus Lemma 3.1, so ist $g_{\alpha\beta} - \mu \cdot g_{\alpha\beta}$ die Fouriertransformierte der integrierbaren Funktion

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\, m_\beta(u-j).$$

□

3.2 Grünwald-Letnikov-Darstellung für den Operator $\bar{R}^\alpha$

Sei $\{T(t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$ eine gleichmäßig beschränkte n-parametrige (C_0)-Gruppe auf dem Banachraum X und seien $T_1, \ldots, T_n$ die zugehörigen Partialgruppen (siehe Abschnitt 1.4). Bezeichne G den Funktionalkalkül zur Gruppe T. Um einen Ausdruck für zentrale Differenzen zu erhalten, mit denen man den Operator $\bar{R}^\alpha$ charakterisieren kann, orientieren wir uns an den Überlegungen in der Einleitung zu Kapitel 2. Die tragende Rolle spielt hier die absolut konvergente Fourierentwicklung

$$\begin{aligned} h_\alpha(\xi) = 2^\alpha\Big[\sum_{k=1}^n \sin^2\Big(\frac{\xi_k}{2}\Big)\Big]^{\alpha/2} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\, e^{i\langle\xi,j\rangle} \\ &= (2n)^{\alpha/2} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \binom{\alpha/2}{m} \Big\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \cos(\xi_k)\Big\}^m, \end{aligned}$$

vgl. Lemma 3.1. Für jedes $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist dann

$$\bar{\nu}_\tau^\alpha = \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\,\underline{\delta}_{\{\tau j\}} = (2n)^{\alpha/2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{\alpha/2}{m}\Big\{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big[\underline{\delta}_{\{\tau e^k\}}+\underline{\delta}_{\{-\tau e^k\}}\big]\Big\}^{*m}$$

ein endliches Borelmaß auf $\mathbb{R}^n$, das die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[\bar{\nu}_\tau^\alpha](\xi) = h_\alpha(\tau\xi)$ besitzt. Hier bezeichnet μ^{*m} die m-fache Faltung eines Maßes μ mit sich selbst.

Definition 3.5. *Sei $\alpha > 0$ und $\tau \neq 0$. Die zentrale Differenz $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$ ist der beschränkte Operator*

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}_\tau^\alpha := G(\bar{\nu}_\tau^\alpha) &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\,T(\tau j)\\ &= (2n)^{\alpha/2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\binom{\alpha/2}{m}\Big\{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\big[T_k(\tau)+T_k(-\tau)\big]\Big\}^{m}\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten $c_{\alpha,j}$ aus (3.1).

Wie im Fall einer einparametrigen Gruppe läßt sich $\overline{\Delta}_\tau^\alpha$ als gebrochene Potenz eines Halbgruppenerzeugers deuten, nämlich von

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[T_k\Big(\frac{\tau}{2}\Big)-T_k\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^2.$$

Daß dieser Operator tatsächlich eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe erzeugt, kann man mit Prop. 1.7 bequem nachrechnen: Setzt man

$$B := \sum_{k=1}^{n}\big[T_k(\tau)+T_k(-\tau)\big], \quad M := \sup_{t\in\mathbb{R}^n}\|T(t)\|,$$

so genügen die Potenzen

$$B^l = \sum_{|\beta|=l}\Big(\frac{l!}{\beta!}\prod_{k=1}^{n}\Big\{\sum_{i=0}^{\beta_k}\binom{\beta_k}{i}T_k\big((2i-\beta_k)\tau\big)\Big\}\Big)$$

der Abschätzung

$$\|B^l\| \le M\cdot 2^l\sum_{|\beta|=l}\frac{l!}{\beta!} = M\cdot(2n)^l, \quad l\in\mathbb{N}.$$

Der Operator $B-2nI$ hat also die gewünschte Erzeugereigenschaft. Die gebrochenen Potenzen von $B-2nI$ errechnen sich mit der Binomialreihe zu

$$\Big(-\sum_{k=1}^{n}\Big[T_k\Big(\frac{\tau}{2}\Big)-T_k\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)\Big]^2\Big)^{\alpha/2} = \overline{\Delta}_\tau^\alpha.$$

Wendet man den Funktionalkalkül auf die Faltungsidentität

$$\bar{\nu}_\tau^\alpha = |\tau|^\alpha \, \bar{V}_n^\alpha * \frac{1}{|\tau|^n}\bar{p}_\alpha\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big)$$

mit der normalisierten, in jeder Variablen geraden Funktion $\bar{p}_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^n)$ an, so gelangt man zu der folgenden Grünwald-Letnikov-Charakterisierung des Operators $\bar{R}^\alpha$.

Satz 3.6. *(i) Sei $\tau \neq 0$. Dann gilt*

$$|\tau|^{-\alpha}\overline{\Delta}_\tau^\alpha x = \begin{cases} \bar{R}^\alpha \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \bar{p}_\alpha\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)x\,\frac{du}{|\tau|^n}, & x \in X, \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \bar{p}_\alpha\Big(\frac{u}{\tau}\Big)\, T(u)\bar{R}^\alpha x\,\frac{du}{|\tau|^n}, & x \in D(\bar{R}^\alpha). \end{cases}$$

(ii) Der Operator $\bar{R}^\alpha$ ist charakterisiert durch

$$\bar{R}^\alpha x = \lim_{\tau\to 0} |\tau|^{-\alpha}\overline{\Delta}_\tau^\alpha x.$$

Der Limes existiert genau für $x \in D(\bar{R}^\alpha)$. □

Im Beispiel der Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, ist $-\bar{R}^2$ der distributionentheoretische Laplace-Operator Δ und

$$D(\bar{R}^2) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n);\ \Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bei seinen Untersuchungen zur Rieszableitung und zu Besselpotentialen bemerkte Trebels ([48],[49, II]), daß

$$\Delta f = L^p(\mathbb{R}^n) - \lim_{\tau\to 0} \tau^{-2}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\big[f(\cdot) - 2f(\cdot + \tau e^k) + f(\cdot + 2\tau e^k)\big]\Big\}$$

genau für $f \in D(\bar{R}^2)$ zutrifft und in diesem Sinne der distributionentheoretische Laplace-Operator im klassischen Rahmen gedeutet werden kann. Wesentliches Hilfsmittel seiner Überlegungen ist die $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion mit der Fouriertransformierten

$$|v|^{-2}\sum_{k=1}^{n}(e^{i\xi_k} - 1)^2 = \Big(\frac{\sum_1^n (e^{i\xi_k} - 1)}{v}\Big)^2.$$

Auf diese Weise kann man offenbar alle Operatoren $\bar{R}^{2m}$, $m \in \mathbb{N}$, über Differenzen beschreiben, aber nicht den gebrochenen Fall behandeln. Zahlreiche verwandte Charakterisierungen von $D(\bar{R}^{2m})$ findet man in [48]. Den gebrochenen Fall behandelt Trebels durch Kombination von Differenzenbildung und Faltung mit geeigneten Kernen [49]. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß $D(\bar{R}^\alpha)$ genau der klassische Raum der Besselpotentiale ist, siehe Kap. 4.

Die umfassende Monographie von Samko et al. streift nur kurz den Grünwald-Letnikov-Zugang für partielle und gemischte Ableitungen [40, S. 479,587], gibt im Zusammenhang mit der Rieszableitung aber keinen Kommentar.

Der Vollständigkeit halber notieren wir noch das Analogon zu Prop. 2.9: Für $0 < \beta \leq \alpha$, $\tau \neq 0$ gilt

$$|\tau|^{-\beta}\overline{\Delta}_\tau^\alpha x = \begin{cases} \bar{R}^\beta \int_{\mathbb{R}^n} \bar{p}_{\alpha\beta}\big(\frac{u}{\tau}\big)\, T(u)x \,\frac{du}{|\tau|^n}, & x \in X, \\ \int_{\mathbb{R}^n} \bar{p}_{\alpha\beta}\big(\frac{u}{\tau}\big)\, T(u)\bar{R}^\beta x \,\frac{du}{|\tau|^n}, & x \in D(\bar{R}^\beta). \end{cases}$$

Die Taylorformel aus Abschnitt 2.3 läßt sich nicht auf die n-dimensionale Situation übertragen, weil die Funktion $\mathcal{F}[\bar{p}_\alpha]$ im Ursprung nicht in eine Potenzreihe entwickelt werden kann, siehe die Bemerkungen nach Lemma 3.3.

3.3 Charakterisierung des K-Funktionals $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$

Sei $0 < \alpha \leq 2$. In diesem Abschnitt werden wir das K-Funktional

$$\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) := \inf_{y \in D(\bar{R}^\alpha)} \{\|x - y\| + \tau^\alpha \|\bar{R}^\alpha y\|\} \quad (\tau > 0, x \in X)$$

mit dem Stetigkeitsmodul

$$\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) = \sup_{0<\sigma\leq\tau} \|\overline{\Delta}_\sigma^\alpha x\|$$

vergleichen. Wie man von Satz 2.15 her erwartet, werden sich K-Funktional und Stetigkeitsmodul in dem Sinn als äquivalent erweisen, daß für alle $\tau > 0, x \in X$

$$C^{-1}\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) \leq \bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) \leq C\,\bar{\omega}_\alpha(\tau, x) \tag{3.5}$$

ausfällt. Dabei hängt die Konstante C nur von α ab.

Ditzian [17] bewies (3.5) für $\alpha = 2$ im Fall der Translationsgruppe auf gewissen Banachräumen von Funktionen und Distributionen. Seine Argumentation hat ausgeprägt kombinatorischen Charakter. Ein durchsichtiger Beweis mit typischen Methoden der Fourieranalysis wurde jüngst von Trebels-Westphal [54] gefunden; er enthält bereits die wesentlichen Ideen, um den gebrochenen Fall zu behandeln. So können wir das folgende Lemma, das innerhalb des Beweises von [54, Th. 1] am Beispiel des Féjer-Kerns (2.7) verifiziert wurde, übernehmen.

Lemma 3.7. *Sei $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\|g\|_{L^1} \leq 1$ und $f := \mathcal{F}[g]$. Dann existiert eine gerade Funktion $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und ein endliches Borelmaß μ auf $\mathbb{R}^n$ derart, daß*

$$\mathcal{F}[\mu](\xi) = \frac{1 - \chi(\xi_1)\ldots\chi(\xi_n)}{1 - \frac{1}{n}\sum_1^n f(\xi_k)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad \square$$

Wir werden das Lemma mit der Stufenfunktion $g = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$ anwenden.

Satz 3.8. *Sei $0 < \alpha \leq 2$. Dann sind das K-Funktional $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$ und der Stetigkeitsmodul $\bar{\omega}_\alpha(\tau, x)$ im Sinne von (3.5) äquivalent.*

Beweis. Bezeichne $M := \sup\{\|T(t)\|;\, t \in \mathbb{R}^n\}$. Seien $x \in X$ und $y \in D(\bar{R}^\alpha)$. Mit Satz 3.6 schätzt man ab:

$$\begin{aligned}\|\overline{\Delta}_\sigma^\alpha x\| &\leq \|\overline{\Delta}_\sigma^\alpha (x-y)\| + M\,\sigma^\alpha \|\bar{p}_\alpha\|_{L^1} \|\bar{R}^\alpha y\| \\ &\leq M\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |c_{\alpha,j}| + \|\bar{p}_\alpha\|_{L^1}\Big)\,(\|x-y\| + \sigma^\alpha \|\bar{R}^\alpha y\|).\end{aligned}$$

Folglich ist $\bar{\omega}_\alpha(\tau,x) \leq C\,\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha,x)$ mit der Konstanten $C = M(\sum |c_{\alpha,j}| + \|\bar{p}_\alpha\|_{L^1})$. Es bleibt die umgekehrte Ungleichung zu zeigen.

Zu $\tau > 0$ definieren wir endliche Borelmaße λ_τ^α auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$\langle \lambda_\tau^\alpha, \varphi\rangle = \int_{-1}^1 \sum_{j\in\mathbb{Z}^n} c_{\alpha,j}\,\varphi(\tau u j)\,du, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Man findet

$$\mathcal{F}[\lambda_\tau^\alpha](\xi) = \int_{-1}^1 2^\alpha \Big[\sum_{k=1}^n \sin^2\Big(\frac{\tau u \xi_k}{2}\Big)\Big]^{\alpha/2} du.$$

Unter Verwendung der Funktion g_2 aus Lemma 3.3 schreiben wir

$$\frac{\mathcal{F}[\lambda_1^\alpha](\xi)}{\|\xi\|_2^\alpha} = \int_{-1}^1 2^\alpha u^\alpha \big[g_2(u\xi)\big]^{\alpha/2}\,du =: \mathcal{F}[H](\xi).$$

Die Funktion $\mathcal{F}[H]$ ist auf $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ unendlich oft nach ξ_n differenzierbar, wie man mit Hilfe des eben genannten Lemmas und der Abschätzung (3.2) rasch einsieht. Die partiellen Ableitungen $\partial_n^m \mathcal{F}[H]$, $m \geq 1$, verhalten sich am Ursprung wie $O(\|\xi\|_2^{2-m})$. Nach dem Vorbild von Prop. 3.4 überlegt man sich, daß $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Seien χ, μ wie in Lemma 3.7 ($g = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$) und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ diejenige Testfunktion, die die Fouriertransformierte $\mathcal{F}[\varphi](\xi) = \chi(\xi_1)\ldots\chi(\xi_n)$ besitzt. Dann gehören die Elemente

$$y_\tau = G(\varphi_\tau)x, \quad \varphi_\tau = \frac{1}{\tau^n}\varphi\Big(\frac{\cdot}{\tau}\Big) \quad (\tau > 0, x \in X)$$

zum Definitionsbereich des Operators $\bar{R}^\alpha$. Da $\mathcal{F}[H]$ nullstellenfrei ist und $\mathcal{F}[\varphi]$ kompakten Träger hat, existiert nach dem Lemma von Wiener [37, Lemma 1.4.2] eine Funktion $\Psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so daß $H * \Psi = \varphi$. Berücksichtigt man $\tau^\alpha \bar{V}_n^\alpha * H_\tau = \lambda_\tau^\alpha$ und $\|\Psi_\tau\|_{L^1} = \|\Psi\|_{L^1}$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\tau^\alpha \bar{R}^\alpha y_\tau\| =& \|\tau^\alpha\, G(\bar{V}_n^\alpha * H_\tau * \Psi_\tau)x\| \leq \|G(\Psi_\tau)\| \cdot \|G(\lambda_\tau^\alpha)x\| \\ &\leq M\|\Psi\|_{L^1} \cdot \Big\| \int_{-1}^1 \overline{\Delta}_{\tau u}^\alpha x\,du\Big\| \leq 2M\|\Psi\|_{L^1} \cdot \bar{\omega}_\alpha(\tau,x).\end{aligned}$$

Nach Wahl von μ ist $4n(\delta - \varphi) = \mu * \lambda_1^2$ und daher

$$\begin{aligned}4n\|x - y_\tau\| &\leq M\Big(\int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|\Big)\|G(\lambda_\tau^2)x\| \\ &\leq M\Big(\int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|\Big)\sup_{\sigma>0}\|\overline{\Delta}_\sigma^{2-\alpha}\| \cdot \Big\|\int_{-1}^1 \overline{\Delta}_{\tau u}^\alpha x\,du\Big\| \\ &\leq 2\,M^2\Big(\int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|\Big)\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}^n} |c_{2-\alpha,j}|\Big)\,\bar{\omega}_\alpha(\tau,x).\end{aligned}$$

Zusammen mit dem Vorhergehenden gelangt man auf

$$\|x - y_\tau\| + \tau^\alpha \|\bar{R}^\alpha y_\tau\| \leq C\,\bar{\omega}_\alpha(\tau, x)$$

mit einer von τ, x unabhängigen Konstanten C. Es folgt $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x) \leq C\,\bar{\omega}_\alpha(\tau, x)$. □

Satz 3.8 ließe sich unmittelbar auf beliebige $\alpha > 0$ verallgemeinern, wenn man die Aussage von Lemma 3.7 für die Brüche

$$\frac{1 - \chi(\xi_1) \ldots \chi(\xi_n)}{\mathcal{F}[\lambda_1^{2m}](\xi)}, \quad m \in \mathbb{N}$$

garantieren könnte. Der Fall $m = 1$ ist in Lemma 3.7 enthalten ($g = \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]}$).

Zu weiteren Charakterisierungen von $\bar{K}_\alpha(\tau^\alpha, x)$ für beliebige $\alpha > 0$, insbesondere über Marchaud-Integrale (vgl. Satz 1.13), siehe [54] und die dort zitierte Literatur.

4 Die Operatoren $\bar{R}_p^\alpha$ und Halbgruppen vom Gauß-Weierstraß-Typ

Für eine gleichmäßig beschränkte n-parametrige (C_0)-Gruppe $\{T(t);\, t \in \mathbb{R}^n\}$ auf dem Banachraum X haben wir den Operator $\bar{R}^\alpha := G(\bar{V}_n^\alpha)$ definiert. Die integrierbare Distribution $\bar{V}_n^\alpha$ ist durch die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[\bar{V}_n^\alpha](\xi) = \|\xi\|_2^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n)$$

charakterisiert und erlaubt die Interpretation $\bar{V}_n^\alpha = (-\Delta)^{\alpha/2}\underline{\delta}$. Bezeichnen $A_1, \ldots, A_n$ die Erzeuger der Partialgruppen $T_1, \ldots, T_n$, so liegt wegen Prop. 1.14 und Korollar 2.12 die Vermutung

$$\bar{R}^\alpha = \left(\bar{R}^2\right)^{\alpha/2} = \left(-\overline{[A_1^2 + \cdots + A_n^2]}\right)^{\alpha/2}$$

mit dem mutmaßlichen Halbgruppenerzeuger $-\bar{R}^2 = \overline{A_1^2 + \cdots + A_n^2}$ nahe. Dieser Zusammenhang geht auf Balakrishnan [4] zurück, der den Operator $-\bar{R}^2$ als Erzeuger einer abstrakten Gauß-Weierstraß-Halbgruppe erkannte und damit sofort die Marchauddarstellung des Operators $\bar{R}^\alpha$ in schwächerer Form als in Satz 1.13 erhielt.

In diesem Kapitel werden wir allgemeiner zu $p, \alpha > 0$ den Operator $\bar{R}_p^\alpha := G(\bar{V}_{n,p}^\alpha)$ mit der durch $\mathcal{F}[\bar{V}_{n,p}^\alpha](\xi) = \|\xi\|_p^\alpha$ bestimmten integrierbaren Distribution $\bar{V}_{n,p}^\alpha$ betrachten und für ihn das eben angedeutete Programm abarbeiten. Es wird sich zeigen, daß für jedes $\alpha > 0$ der Operator $-\bar{R}_p^\alpha$ eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe vom Gauß-Weierstraß-Typ erzeugt. Darüberhinaus gilt

$$\left(\bar{R}_p^\alpha\right)^\beta = \left(\bar{R}_p^\beta\right)^\alpha = \bar{R}_p^{\alpha\beta} = \left(\overline{\left[(-A_1^2)^{p/2} + \cdots + (-A_n^2)^{p/2}\right]}\right)^{\alpha\beta/p} \quad (\alpha, \beta, p > 0).$$

Im Gegensatz zu einem Halbgruppenerzeuger A, bei dem der Ausdruck $((-A)^\alpha)^\beta$ im wesentlichen nur für $0 < \alpha \leq 1$ sinnvoll ist, besteht hier immer die Multiplikativität der Exponenten.

Man beachte, daß $\|\cdot\|_p$ für $0 < p < 1$ keine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist. Das spielt bei unseren Überlegungen aber keine Rolle; tatsächlich kann man statt $\|\cdot\|_p$ auch jede beliebige Distanzfunktion

$$\xi \longrightarrow \left(|\xi_1|^{p_1} + \cdots + |\xi_n|^{p_n}\right)$$

nehmen $(p_1, \ldots, p_n > 0)$. Wir werden uns jedoch auf den Spezialfall $\|\cdot\|_p$ beschränken, weil man schon dabei alle typischen Details sieht.

Die erwähnten Halbgruppen vom Gauß-Weierstraß-Typ werden mit Integralkernen, die die Faltungseigenschaft haben, konstruiert und sind daher Beispiele sogenannter untergeordneter Halbgruppen. Die Idee, auf diese Weise aus gegebenen Halbgruppen neue zu gewinnen, geht auf Bochner [8] zurück und wurde von Phillips [36], Balakrishnan [2] und Faraut [19] weiterentwickelt, wobei die zuletzt genannte Arbeit den Bezug zum Funktionalkalkül nach L. Schwartz aufzeigt. Neuere Arbeiten zu diesem Thema sind [7, 42].

Da wir Gruppen von Operatoren betrachten, ist die Klasse der in Frage kommenden Integralkerne größer. So kann man im einparametrigen Fall die Kerne mit der Fouriertransformierten $e^{-|v|^\alpha}$ für beliebige $\alpha > 0$ verwenden. Im Fall $0 < \alpha \leq 2$ sind die Kerne die aus der Stochastik bekannten symmetrischen stabilen Lévy-Dichtefunktionen.

Die Integralkerne $a_{p,\alpha,1}$ der hier behandelten abstrakten Gauß-Weierstraß-Halbgruppen haben die l^p-radialen Fouriertransformierten

$$\mathcal{F}[a_{p,\alpha,1}](\xi) = e^{-\|\xi\|_p^\alpha} \quad (\alpha, p > 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n);$$

der klassische Fall ist $p = 2$. In Abschnitt 4.1 wird die absolute Integrierbarkeit von $a_{\alpha,p,1}$ und weiterer Funktionen mit Hilfe eines Kriteriums von Dappa-Trebels [15] gezeigt, das die Untersuchung sogenannter quasiradialer Fouriertransformierten ermöglicht. Ferner verifizieren wir den Sachverhalt $\bar{V}^\alpha_{n,p} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$. Der folgende Abschnitt 4.2 widmet sich dann den Operatoren $-\bar{R}^\alpha_p$ und den von ihnen erzeugten Halbgruppen. Das Vorgehen orientiert sich an [59, §4] und [60].

4.1 Darstellungsaussagen für die Fouriertransformation

Wie bereits angekündigt, definieren wir für $\alpha, p > 0$ die Distribution $\bar{V}^\alpha_{n,p} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ über die Fouriertransformierte

$$\mathcal{F}[\bar{V}^\alpha_{n,p}](\xi) = \|\xi\|_p^\alpha \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Die Distributionen $\bar{V}^\alpha_{n,p}$ gehören zum Raum $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$. Um dies zu zeigen, benutzen wir ein Lemma von Samko [38, Lemma 2.1], siehe auch [15, Lemma 2]. Teil (ii) des Lemmas ist eine distributionenfreie Formulierung von Samkos Originalfassung.

Lemma 4.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $r \in (1, 2]$.*

(i) Für jeden Multiindex $j \in \{0,1\}^n \backslash \{0\}$ gelte $D^j f \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Dann ist f die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion.

(ii) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Nullmenge, so daß für jeden Multiindex $j \in \{0,1\}^n \backslash \{0\}$ die klassische Ableitung $\partial^j f$ auf $\mathbb{R}^n \backslash A$ existiert und zu $L^r(\mathbb{R}^n)$ gehört. Außerdem gelte: Für jeden Multiindex $j \in \{0,1\}^n \backslash \{e^1 + \cdots + e^n\}$, für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $j_k = 0$ und fast jeden Vektor $(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ stimmt die Funktion $\xi_k \mapsto (\partial^j f)(\xi_1, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n)$ f.ü. mit einer auf $\mathbb{R}$ lokal absolut stetigen Funktion überein. Dann ist f die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion. □

Proposition 4.2. *Für alle $\alpha, p > 0$ ist $\bar{V}^\alpha_{n,p} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$.*

Beweis. Da $\mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$ abgeschlossen bzgl. der Faltungsoperation $*$ ist, kann man oBdA $0 < \alpha < p$ annehmen. Gezeigt wird, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die Funktion $\xi \mapsto \|\xi\|_p^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)$ die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist. Daraus folgt insbesondere $\bar{V}^\alpha_{n,p} \in \mathcal{D}'_{L^1}(\mathbb{R}^n)$.

Sei $A := \{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \xi_1, \ldots, \xi_n \neq 0\}$ und $j \in \{0,1\}^n \backslash \{0\}$. Für $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash A$ ist

$$\left(\partial^j \|\cdot\|_p^\alpha\right)(\xi) = K_j \operatorname{sgn}^j(\xi) \cdot (|\xi|)^{(p-1)j} \|\xi\|_p^{\alpha - |j|p}, \tag{4.1}$$

wobei $\operatorname{sgn}(\xi) = (\operatorname{sgn}(\xi_1), \ldots, \operatorname{sgn}(\xi_n))$, $(|\xi|) = (|\xi_1|, \ldots, |\xi_n|)$ und

$$K_j = \frac{\alpha}{p}\Big(\frac{\alpha}{p} - 1\Big) \ldots \Big(\frac{\alpha}{p} - |j| + 1\Big) \cdot p^{|j|}.$$

Unter Beachtung von $0 < \alpha < p$ schätzt man ab:

$$\begin{aligned}\left|\left(\partial^j \|\cdot\|_p^\alpha\right)(\xi)\right| &= |K_j| \cdot (|\xi|)^{(p-1)j} \left(\|\xi\|_p^{\alpha/|j|-p}\right)^{|j|} \\ &\le |K_j| \cdot (|\xi|)^{(p-1)j} \Bigg(\prod_{\substack{1\le k\le n\\ j_k=1}} |\xi_k|^{\alpha/|j|-p} \Bigg) \\ &= |K_j| \cdot (|\xi|)^{(\alpha/|j|-1)j}.\end{aligned}$$

Sei $r \in (1,2]$ derart, daß $(\frac{\alpha}{n} - 1)r > -1$. Für jede Funktion $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\left(\partial^j \|\cdot\|_p^\alpha\right)(\xi) \cdot \mathcal{F}[\varphi](\xi) \in L^r(\mathbb{R}^n).$$

Mit der Leibnizregel und dem Vorhergehenden überlegt man sich nun weiter, daß $\partial^j\left(\|\cdot\|_p^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\cdot)\right) \in L^r(\mathbb{R}^n)$ für jeden Multiindex $j \in \{0,1\}^n \setminus \{0\}$ ist. Die Funktion $\xi \mapsto \|\xi\|_p^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\xi)$ erfüllt also die erste Bedingung in Lemma 4.1(ii).In Anbetracht von (4.1) ist auch die zweite Bedingung klar und damit $\|\cdot\|_p^\alpha \mathcal{F}[\varphi](\cdot)$ die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion. □

Die im nächsten Abschnitt zu behandelnden Gauß-Weierstraß-Integrale werden mit den Faltungskernen $a_{p,\alpha,\tau}$ gebildet, die man mit

$$\mathcal{F}[a_{p,\alpha,\tau}](\xi) = e^{-\tau\|\xi\|_p^\alpha} \quad (p,\alpha,\tau > 0;\ \xi \in \mathbb{R}^n) \tag{4.2}$$

ansetzt. Der Zusammenhang zwischen den Kernen $a_{p,\alpha,\tau}$ und den Operatoren $\bar{R}_p^\alpha = G(\bar{V}_{n,p}^\alpha)$ wird aus der Beziehung

$$\lim_{\tau\to 0^+} \frac{1 - e^{-\tau\|\xi\|_p^\alpha}}{\tau} = \|\xi\|_p^\alpha$$

ersichtlich. Doch zunächst müssen wir prüfen, ob die Kerne $a_{p,\alpha,\tau}$ absolut integrierbar sind. Dies läßt sich bequem mit einem Multiplikatorkriterium von Dappa-Trebels [15, Theorem 8] bewerkstelligen, das wir hier in vereinfachter Fassung wiedergeben.

Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine stetige Funktion $m : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ gehört zur Klasse BV_{k+1}, falls

(i) $\lim_{s\to\infty} m(s) = 0$;

(ii) $m, m', \ldots, m^{(k-1)}$ sind auf $(0,\infty)$ lokal absolut stetig, und $m^{(k)}$ ist auf $(0,\infty)$ lokal von beschränkter Variation;

(iii) $\int_0^\infty s^k\, |dm^{(k)}(s)| < \infty$.

Solch eine Funktion besitzt die Darstellung

$$m(r) = \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \int_r^\infty (s-r)^k\, dm^{(k)}(s), \quad r > 0. \tag{4.3}$$

Die Klassen BV_{k+1} werden ausführlich bei Trebels [50] diskutiert.

Seien $p_1, \ldots, p_n > 0$. Eine stetige Funktion $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt P_τ-homogene Distanzfunktion, falls $\rho(\xi) > 0$ $(\xi \neq 0)$ und

$$\forall \tau > 0 \; \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \quad \rho(\tau^{p_1}\xi_1, \ldots, \tau^{p_n}\xi_n) = \tau\,\rho(\xi).$$

Das Kriterium von Dappa-Trebels bezieht sich auf ρ-radiale ("quasiradiale") Funktionen. Die Voraussetzung stellt eine Forderung an einen Rieszkern, was wegen der Darstellung (4.3) einleuchtet. Hinsichtlich Vorläufern dieses Kriteriums für die euklidische Norm siehe insbesondere [12].

Satz 4.3. *Sei ρ eine P_τ-homogene Distanzfunktion auf $\mathbb{R}^n$ und $N \in \mathbb{N}$. Ist*

$$\xi \longrightarrow \big(1 - \rho(\xi)\big)_+^N = \begin{cases} 1 - \rho(\xi), & \rho(\xi) \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion, so hat für jedes $m \in BV_{N+1}$ auch die Funktion $m \circ \rho$ diese Eigenschaft. □

Aufgrund des folgenden Lemmas kann man Satz 4.3 mit der P_τ-homogenen Distanzfunktion $\rho(\xi) = \|\xi\|_p^p$ und $N := n$ anwenden.

Lemma 4.4. *Sei $p > 0$. Dann ist $(1 - \|\xi\|_p^p)_+^n$ die Fouriertransformierte einer $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion.*

Beweis. Wir verifizieren die Bedingungen aus Lemma 4.1(ii). Es ist

$$(1 - \|\xi\|_p^p)_+^n = \chi_K(\xi) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \|\xi\|_p^{kp}$$

mit der charakteristischen Funktion χ_K zur Menge $\{\xi \in \mathbb{R}^n;\ \|\xi\|_p \leq 1\}$. Die Überlegungen im Beweis von Prop. 4.2 zeigen, daß mit einem geeigneten $r \in (1, 2]$ gilt:

$$\forall \alpha > 0 \; \forall j \in \{0,1\}^n \backslash \{0\} : \partial^j \big(\chi_K(\cdot) \| \cdot \|_p^\alpha\big) \in L^r(\mathbb{R}^n).$$

Folglich erfüllt $(1 - \| \cdot \|_p^p)_+^n$ die erste Bedingung in Lemma 4.1(ii). Die zweite Bedingung überprüft man leicht anhand der Ableitungen

$$\partial^j (1 - \|\xi\|_p^p)_+^n = (-1)^{|j|} p^{|j|}\, n(n-1) \ldots (n - |j| + 1) \cdot \operatorname{sgn}^{\,j}(\xi)(|\xi|)^{(p-1)j}\, (1 - \|\xi\|_p^p)_+^n,$$

wobei $\operatorname{sgn}(\xi)$, $(|\xi|)$ wie in (4.1) zu verstehen sind. □

Seien $\alpha, \beta, p > 0$. Die folgenden Funktionen h_1, h_2, $h_3 : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ gehören für jedes $k \in \mathbb{N}$ zur Klasse BV_{k+1}:

$$h_1(s) = e^{-s^{\alpha/p}}, \quad h_2(s) = \frac{1 - e^{-s^{\alpha/p}}}{s^{\alpha/p}}, \quad h_3(s) = (1 + s^{\beta/p})^{-\alpha}.$$

Mit der Distanzfunktion $\rho(\xi) = \|\xi\|_p^p$ liefert Satz 4.3 daher die

Folgerung 4.5. *Zu $\alpha, p > 0$ existieren Funktionen $a_{p,\alpha,1}$, $g_{p,\alpha,1}$, $b_{p,\beta,\alpha} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ derart, daß*

$$\mathcal{F}[a_{p,\alpha,1}](\xi) = e^{-\|\xi\|_p^\alpha}, \quad \mathcal{F}[g_{p,\alpha,1}](\xi) = \frac{1 - e^{-\|\xi\|_p^\alpha}}{\|\xi\|_p^\alpha}$$

und

$$\mathcal{F}[b_{p,\beta,\alpha}](\xi) = (1 + \|\xi\|_p^\beta)^{-\alpha} \quad (\xi \in \mathbb{R}^n). \qquad \square$$

Mit der Skalierung

$$a_{p,\alpha,\tau} := \tau^{-n/\alpha}\, a_{p,\alpha,1}\Big(\frac{\cdot}{\tau^{1/\alpha}}\Big), \quad g_{p,\alpha,\tau} := \tau^{-n/\alpha}\, g_{p,\alpha,1}\Big(\frac{\cdot}{\tau^{1/\alpha}}\Big) \tag{4.4}$$

$(\tau > 0)$ erzielt man dann

$$\mathcal{F}[a_{p,\alpha,\tau}](\xi) = e^{-\tau\|\xi\|_p^\alpha}, \quad \mathcal{F}[g_{p,\alpha,\tau}](\xi) = \frac{1 - e^{-\tau\|\xi\|_p^\alpha}}{\tau\|\xi\|_p^\alpha}.$$

Die Kerne $a_{p,\alpha,\tau}$, $g_{p,\alpha,\tau}$ sind normalisierte $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktionen. Darüberhinaus haben die Gauß-Weierstraß-Kerne $a_{p,\alpha,\tau}$ die Faltungseigenschaft bzgl. τ:

$$a_{p,\alpha,\sigma} * a_{p,\alpha,\tau} = a_{p,\alpha,\sigma+\tau} \quad (\sigma, \tau > 0). \tag{4.5}$$

Die Funktionen $b_{p,\beta,\alpha}$ sind Verallgemeinerungen der wohlbekannten Besselkerne $G_{2,\alpha} = b_{2,2,\alpha}$, siehe z.B. [45, S. 132].

4.2 Die Operatoren $-\bar{R}_p^\alpha$ als Erzeuger abstrakter Gauß-Weierstraß-Halbgruppen

Wir gehen jetzt detailliert auf den in der Einleitung zu diesem Kapitel skizzierten Ideenkreis ein. Zur Gruppe $T(t)$ auf dem Banachraum X betrachten wir also die Operatoren

$$\bar{R}_p^\alpha := G(\bar{V}_{n,p}^\alpha) \quad (\alpha, p > 0).$$

Mit Blick auf Korollar 2.12 überträgt sich Prop. 1.14 auf die nun vorliegende Situation:

Proposition 4.6. *Der Operator $\bar{R}_p^p$ ist die kleinste abgeschlossene Fortsetzung von $(-A_1^2)^{p/2} + \cdots + (-A_n^2)^{p/2}$:*

$$\bar{R}_p^p = \overline{[(-A_1^2)^{p/2} + \cdots + (-A_n^2)^{p/2}]}. \qquad \square$$

Das abstrakte (p, α)-Gauß-Weierstraß-Integral wird mit den normalisierten Kernfunktionen $a_{p,\alpha,\tau}$ durch

$$W_{p,\alpha}(\tau)x := G(a_{p,\alpha,\tau})x = \int_{\mathbb{R}^n} a_{p,\alpha,\tau}(u)T(u)x\,du$$

definiert $(\tau > 0,\ x \in X)$. Ergänzend setzt man $W_{p,\alpha}(0) = I$. Wegen (4.4), (4.5) ist dann $\{W_{p,\alpha}(\tau);\ \tau \geq 0\}$ eine gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe von Operatoren auf X. Bezeichne $A_{p,\alpha}$ den Erzeuger dieser Halbgruppe.

Satz 4.7. *Es ist* $A_{p,\alpha} = -\bar{R}_p^\alpha$.

Beweis. Mit der normalisierten $L^1(\mathbb{R}^n)$-Funktion $g_{p,\alpha,\tau}$ gilt

$$\frac{1}{\tau}\big[a_{p,\alpha,\tau} - \underline{\delta}\big] = -\bar{V}_{n,p}^\alpha * g_{p,\alpha,\tau}.$$

Anwendung des Funktionalkalküls (Faltungssatz 1.2) liefert

$$\frac{W_{p,\alpha}(\tau)x - x}{\tau} = -\bar{R}_p^\alpha\, G(g_{p,\alpha,\tau})x \quad (\tau > 0,\, x \in X).$$

Wegen (4.4) konvergiert $G(g_{p,\alpha,\tau})x \to x$ $(\tau \to 0^+)$. Da die Operatoren $A_{p,\alpha}$, $\bar{R}_p^\alpha$ abgeschlossen sind, folgt $D(A_{p,\alpha}) \subseteq D(\bar{R}_p^\alpha)$ und $-\bar{R}_p^\alpha x = A_{p,\alpha}x$, sofern $x \in D(A_{p,\alpha})$. Ist dagegen $x \in D(\bar{R}_p^\alpha)$, so schließt man zusammen mit

$$\bar{R}_p^\alpha\, G(g_{p,\alpha,\tau})x = G(g_{p,\alpha,\tau})\,\bar{R}_p^\alpha x \to \bar{R}_p^\alpha x \quad (\tau \to 0^+)$$

auf $x \in D(A_{p,\alpha})$ und $A_{p,\alpha}x = -\bar{R}_p^\alpha x$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Da $-\bar{R}_p^\alpha$ die gleichmäßig beschränkte (C_0)-Halbgruppe $W_{p,\alpha}(\tau)$ erzeugt, können die gebrochenen Potenzen $(\bar{R}_p^\alpha)^\beta$ mit beliebigen $\alpha, \beta > 0$ gebildet werden. Sie genügen dem Potenzgesetz der Multiplikativität der Exponenten:

Satz 4.8. *Sei* $p > 0$. *Für alle* $\alpha, \beta > 0$ *gilt* $(\bar{R}_p^\alpha)^\beta = \bar{R}_p^{\alpha\beta}$.

Beweis. Sei $G_{p,\alpha}$ der Funktionalkalkül zur Halbgruppe $\{W_{p,\alpha}(\tau);\, \tau \geq 0\}$, der ja mit dem Filter $\mathcal{H}^+$ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ konstruiert wird. Nach Definition ist

$$\big(\bar{R}_p^\alpha\big)^\beta x = \lim_{\mathcal{H}^+} G_{p,\alpha}(\delta^\beta * \varphi)x$$

genau für $x \in D((\bar{R}_p^\alpha)^\beta)$.

Zu $h \in L^1(0,\infty)$ bilden wir die Funktion

$$h^\sim : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad h^\sim(u) = \int_0^\infty h(\tau) a_{p,\alpha,\tau}(u)\, d\tau.$$

Es ist $h^\sim \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und

$$\mathcal{F}[h^\sim](\xi) = \mathcal{L}[h](\|\xi\|_p^\alpha).$$

Auf der Operatorebene lautet die entsprechende Identität

$$G_{p,\alpha}(h)x = G(h^\sim)x, \quad x \in X.$$

Ferner gilt $(\delta^\beta * h)^\sim = \bar{V}_{n,p}^{\alpha\beta} * h^\sim$, denn

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(\delta^\beta * h)^\sim](\xi) &= \mathcal{L}[\delta^\beta * h](\|\xi\|_p^\alpha) = \|\xi\|_p^{\alpha\beta}\,\mathcal{L}[h](\|\xi\|_p^\alpha)\\ &= \|\xi\|_p^{\alpha\beta}\,\mathcal{F}[h^\sim](\xi) = \mathcal{F}[\bar{V}_{n,p}^{\alpha\beta} * h^\sim](\xi).\end{aligned}$$

Unter Beachtung des Faltungssatzes 1.2 erhält man

$$G_{p,\alpha}(\delta^\beta * h)x = \begin{cases} \bar{R}_p^{\alpha\beta} G_{p,\alpha}(h)x, & x \in X; \\ G_{p,\alpha}(h)\bar{R}_p^{\alpha\beta}x, & x \in D(\bar{R}_p^{\alpha\beta}). \end{cases}$$

Führt man den Limes $h \to \delta$ bzgl. der in Abschnitt 1.2 angegebenen Basis $\{H_\varepsilon^+;\, \varepsilon > 0\}$ für den Filter $\mathcal{H}^+$ aus, so ergibt sich $(\bar{R}_p^\alpha)^\beta = \bar{R}_p^{\alpha\beta}$. □

Satz 4.8 rechtfertigt die prägnante Aussage

$$\bar{R}_p^\alpha = \left(\bar{R}_p^p\right)^{\alpha/p} = \left(\overline{[(-A_1^2)^{p/2} + \cdots + (-A_n^2)^{p/2}]}\right)^{\alpha/p} \quad (\alpha, p > 0).$$

Außerdem können wir das Potenzgesetz der Additivität der Exponenten folgern:

Korollar 4.9. *Für $p, \alpha, \beta > 0$ gilt $\bar{R}_p^\alpha \bar{R}_p^\beta = \bar{R}_p^{\alpha+\beta}$.*

Beweis. Für den Halbgruppenerzeuger $-\bar{R}_p^1$ gilt das Potenzgesetz $(\bar{R}_p^1)^\alpha(\bar{R}_p^1)^\beta = (\bar{R}_p^1)^{\alpha+\beta}$. Die Behauptung folgt mit Satz 4.8. □

Das nächste Korollar charakterisiert den Definitionsbereich $D(\bar{R}_p^\alpha)$ als Raum von Besselpotentialen.

Korollar 4.10. *Seien $p, \alpha, \beta > 0$. Dann gilt:*

(i) $D(\bar{R}_p^\alpha) = D((I + \bar{R}_p^p)^{\alpha/p}) = D((I + \bar{R}_p^\beta)^{\alpha/\beta})$.

(ii) $D(\bar{R}_p^\alpha) = \{G(b_{p,p,\alpha/p})x;\, x \in X\} = \{G(b_{p,\beta,\alpha/\beta})x;\, x \in X\}$.

Beweis. Bei Teil (i) handelt es sich um eine Anwendung von Prop. 1.6. Nach den Ausführungen im Abschnitt 1.2 ist die stetige Inverse des Operators $(I + \bar{R}_p^\beta)^{\alpha/\beta}$ gegeben durch

$$(I + \bar{R}_p^\beta)^{-\alpha/\beta}x = \frac{1}{\Gamma(\frac{\alpha}{\beta})} \int_0^\infty \tau^{\alpha/\beta - 1}\, e^{-\tau}\, W_{p,\beta}(\tau)x\, d\tau = G(h^\sim)x, \quad x \in X.$$

Dabei bezeichnet $h \in L^1(0,\infty)$ die Funktion $h(\tau) = \Gamma(\frac{\alpha}{\beta})^{-1}\, \tau^{\alpha/\beta-1} e^{-\tau}$, und $h^\sim$ ist wie im Beweis von Satz 4.8 zu verstehen. Man hat dann

$$\mathcal{F}[h^\sim](\xi) = \mathcal{L}[h](\|\xi\|_p^\beta) = \left(1 + \|\xi\|_p^\beta\right)^{-\alpha/\beta},$$

also $h^\sim = b_{p,\beta,\alpha/\beta}$. Damit folgt

$$D\left(\left(I + \bar{R}_p^\beta\right)^{\alpha/\beta}\right) = \{G(b_{p,\beta,\alpha/\beta})x;\, x \in X\}.$$ □

Im Beispiel der Translationsgruppe auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ erkennt man nun, daß der Definitionsbereich $D(\bar{R}_2^\alpha)$ der klassische Raum der Besselpotentiale ist, siehe z.B. [45]. Der Fall $p \neq 2$ führt auf anisotrope Besselpotentiale, die vor allem für Distanzfunktionen, die auf $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ genügend oft differenzierbar sind, untersucht worden sind. Für nähere Informationen siehe den Übersichtsartikel [16].

Literaturverzeichnis

[1] W. Amrein, A.B. de Monvel and V. Georgescu, *(C_0)-Groups, Commutator Methods and Spectral Theory of N-Body Hamiltonians*, Birkhäuser-Verlag, Basel 1995.

[2] A.V. Balakrishnan, An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **91** (1959), 330–353.

[3] A.V. Balakrishnan, Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them, *Pacific J. Math.* **10** (1960), 419–437.

[4] A.V. Balakrishnan, Representation of abstract Riesz potentials of the elliptic type, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64**, no. 5 (1958), 288–289.

[5] H. Berens, *Interpolationsmethoden zur Behandlung von Approximationsprozessen auf Banachräumen*, Springer-Verlag, Berlin 1968 (Lecture Notes in Mathematics, 64).

[6] H. Berens, P.L. Butzer and U. Westphal, Representation of fractional powers of infinitesimal generators of semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 191–196.

[7] C. Berg, K. Boyadzhiev and R. deLaubenfels, Generation of generators of holomorphic semigroups, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **55** (1993), 246–269.

[8] S. Bochner, Diffusion equation and stochastic processes, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **35** (1949), 368–370.

[9] J. Boman, Saturation Problems and Distribution Theory, in: *Topics in Approximation Theory*, ed. by H.S. Shapiro, Springer Verlag, Berlin 1971, pp. 249–266 (Lecture notes in mathematics, 187).

[10] P.L. Butzer and H. Berens, *Semi-Groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin 1967 (Grundlehren Math. Wiss., 145).

[11] P.L. Butzer and R.J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation I*, Birkhäuser-Verlag, Basel 1971.

[12] P.L. Butzer, R.J. Nessel and W. Trebels, On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces II: Saturation theorems, *Tôhoku Math. J.* **24** (1972), 551–569.

[13] P.L. Butzer und W. Trebels, *Hilberttransformation, gebrochene Integration und Differentiation*, Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen 1968.

[14] P.L. Butzer and U. Westphal, An Introduction to Fractional Calculus, in: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, ed. by R. Hilfer, World Scientific, Singapore 2000, pp. 1–85.

[15] H. Dappa and W. Trebels, On L^1-criteria for quasi-radial Fourier multipliers with applications to some anisotropic function spaces, *Anal. Math.* **9** (1983), 275–289.

[16] H. Dappa and W. Trebels, On anisotropic Besov and Bessel potential spaces, *Banach Center Publ.* **22** (1989), 69–87.

[17] Z. Ditzian, A measure of smoothness related to the Laplacian, *Trans. Amer. Math. Soc.* **326** (1991), 407–422.

[18] A. Erdélyi (editor), *Higher Transcendental Functions*, Vol. I, McGraw-Hill, New York 1953.

[19] J. Faraut, Semi-groupes de mesures complexes et calcul symbolique sur les générateurs infinitesimaux de semi-groupes d'opérateurs, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **20** (1970), 235–301.

[20] W. Farkas, N. Jacob and R.L. Schilling, Feller semigroups, L^p-sub-Markovian semigroups, and applications to pseudo-differential operators with negative definite symbols, *Forum Math.* **13** (2001), 51–90.

[21] W. Farkas, N. Jacob and R.L. Schilling, Function spaces related to continuous negative definite functions: ψ-Bessel potential spaces, *Dissertationes Mathematicae* **CCCXCIII** (2001).

[22] H.O. Fattorini, *The Cauchy Problem*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts 1983 (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 18).

[23] W. Feller, On a generalization of Marcel Riesz' potentials and the semi-groups generated by them, *Comm. Sém. Math. Univ. Lund, Tome Supplémentaire* (1952), 72–81.

[24] I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press Inc., New York 1964.

[25] R. Gorenflo and F. Mainardi, Random walk models for space-fractional diffusion processes, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **1** (1998),167–191.

[26] R. Gorenflo and F. Mainardi, Approximation of Lévy-Feller-Diffusion by Random Walk, *Z. Anal. Anwendungen* **18** (1999), 231–246.

[27] E. Hille and R.S. Phillips, *Functional Analysis and Semi-Groups*, Providence, R.I. 1957 (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 31).

[28] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions I*, Addison-Wesley, Reading 1966.

[29] Ch. Jordan, *Calculus of finite differences*, Chelsea Publishing Company, New York 1950.

[30] M. Kojima and G.-I. Sunouchi, Characterization of saturation classes in $L(\mathbb{R}^n)$, *Studia Math.* **48** (1971), 71–81.

[31] H. Komatsu, Fractional powers of operators, *Pacific J. Math.* **19** (1966), 285–346, II: Interpolation spaces, *Pacific J. Math.* **21** (1967), 89–111, III: Negative powers, *J. Math. Soc. Japan* **21** (1969), 205–220, IV: Potential operators, *J. Math. Soc. Japan* **21** (1969), 221–228, V: Dual operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sec. I A, **17** (1970), 373–396, VI: Interpolation of non-negative operators and imbedding theorems, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* **19** (1972), 1–63.

[32] O.E. Lanford and D.W. Robinson, Fractional powers of generators of equicontinuous semigroups and fractional derivatives, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **46** (1989), 473–504.

[33] J.L. Lions et J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolation, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **19** (1964), 5–68.

[34] C. Martinez, M. Sanz and L. Marco, Fractional powers of operators, *J. Math. Soc. Japan* **40** (1988), 331–347.

[35] C. Martinez, M. Sanz and V. Calvo, Fractional powers of non-negative operators in Fréchet spaces, *Internat. J. Math. Math. Sci.* **12** (1989), 309–320.

[36] R.S. Phillips, On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific J. Math.* **2** (1952), 343–369.

[37] H. Reiter and J.D. Stegeman, *Classical harmonic analysis and locally compact groups*, Clarendon Press, Oxford 2000.

[38] S.G. Samko, The spaces $L^{\alpha}_{p,r}(\mathbb{R}^n)$ and hypersingular integrals (Russian), *Studia Math.* **61** (1977), 193–230.

[39] S.G. Samko, A new approach to the inversion of the Riesz potential operator, *Fract. Calc. Appl. Anal.* **1** (1998), 225–245, Ergänzung *ibidem* **2** (1999), 63-66.

[40] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam 1993.

[41] S.G. Samko and G.S. Kostetskaya, Absolute Integrability of Fourier Integrals, *Vestnik Ross. Univ. Druzh. Narodow (Ser. Mat.)* **1** (1994), 138–168.

[42] R.L. Schilling, Subordination in the sense of Bochner and a related functional calculus, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **64** (1998), 368–396.

[43] L. Schwartz, *Lectures on Mixed Problems in Partial Differential Equations and Representations of Semi-Groups*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1958.

[44] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris 1966.

[45] E.M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[46] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton university press, 1971.

[47] H. Tanabe, *Equations of Evolution*, Pitman, London 1979.

[48] W. Trebels, Besselpotentiale gerader Ordnung und äquivalente Lipschitzräume, *Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen* **2157** (1970), 3–22.

[49] W. Trebels, Generalized Lipschitz Conditions and Riesz Derivatives on the Space of Bessel Potentials L^p_α, I: Conditions for Elements of L^p_α and their Riesz Transforms $0 < \alpha \leq 2$, *Appl. Anal.* **1** (1971), 75–99, II: The case $\alpha > 1$; Riesz Derivatives, *Appl. Anal.* **6** (1977), 91–107.

[50] W. Trebels, *Multipliers for (C,α)-bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation*, Springer-Verlag, Berlin 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 329).

[51] W. Trebels, On a Fourier $L^1(E_n)$-multiplier criterion, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **35** (1973), 21–26.

[52] W. Trebels, On the approximation behavior of the Riesz means in $L^p(\mathbb{R}^n)$, in: *Approximation Theory* (Bonn 1976), ed. by R. Schaback et al., Springer-Verlag, Berlin 1976, pp. 428–438 (Lecture Notes in Mathematics, 556).

[53] W. Trebels and U. Westphal, Characterization of K-functionals built from fractional powers of infinitesimal generators of semigroups, *Constr. Approx.* (to appear).

[54] W. Trebels and U. Westphal, K-functionals on $L^1(\mathbb{R}^n)$ related to the Laplacian, to appear in: *Proceedings of the Summer Research Conference on Harmonic Analysis* (Mount Holyoke/South Hadley, Mass. 2001), ed. by W. Beckner et. al. (Contemporary Mathematics).

[55] B.J. West and P. Grigolini, Fractional differences, derivatives and fractal time series, in: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, ed. by R. Hilfer, World Scientific, Singapore 2000, pp. 171–201.

[56] U. Westphal, Ein Kalkül für gebrochene Potenzen infinitesimaler Erzeuger von Halbgruppen und Gruppen von Operatoren, Teil I: Halbgruppenerzeuger, *Compositio Math.* **22** (1970), 67–103, Teil II: Gruppenerzeuger, *Compositio Math.* **22** (1970), 104–136.

[57] U. Westphal, An approach to fractional powers of operators via fractional differences, *Proc. London Math. Soc. (3)* **29** (1974), 557–576.

[58] U. Westphal, Gebrochene Potenzen abgeschlossener Operatoren, definiert mit Hilfe gebrochener Differenzen, in: *Linear Operators and Approximation II* (Oberwolfach 1974), ed. by P.L. Butzer and B. Sz.-Nagy, Birkhäuser, Basel, Stuttgart 1974, pp. 23–27.

[59] U. Westphal, Fractional powers of infinitesimal generators of semigroups, in: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, ed. by R. Hilfer, World Scientific, Singapore 2000, pp. 131–170.

[60] U. Westphal and M. Neubauer, Fractional powers of group-generators via fractional central differences, *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.* **68** (2002), 897–909.

[61] G. Wilmes, Mehrdimensionale Fourier Multiplikatoren vom iterierten Typ, *Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen* **2645** (1977), 1–47.