Moduln mit aufsteigender Kettenbedingung für n-erzeugte Untermoduln und bestimmte Annihilatoren

Vom Fachbereich Mathematik der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades

DOKTOR DER NATURWISSENSCHAFTEN
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation
von

Dipl.-Math. Daniel Frohn

geboren am 9.5.1974 in Hannover

2002

Referent:	Prof. Dr. J. Reineke, Universität Hannover
Korreferent:	Prof. Dr. D. Lantz, Colgate University, Hamilton, N.Y.
Tag der Promotion:	11.7.2002

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation werden gewisse aufsteigende Kettenbedingungen im Bereich der kommutativen Algebra untersucht. Im Folgenden sei also immer R ein *kommutativer* Ring mit *Einselement* $1 \neq 0$ und M ein *unitärer* R-Modul. Zwei Definitionen sind grundlegend zum Verständnis der erzielten Ergebnisse:

a) *M erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung (acc) für d-Colons*, falls für jeden Untermodul N von M und jede Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus R die aufsteigende Kette $N : a_1 \subseteq N : a_1 a_2 \subseteq \dots$ stationär wird. Dabei ist $N : a := \{x \in M : ax \in N\}$ für jedes $a \in R$.

b) *M erfüllt n-acc*, falls jede aufsteigende Folge von Untermoduln von M, die von $\leq n$ Elementen erzeugt werden, stationär wird.

Für einen R-Modul M mit acc für d-Colons wird gezeigt:

1) Für jeden Untermodul N ist die Menge $Z(M/N)$ der Nullteiler von M/N eine endliche Vereinigung von Primidealen.
2) Sei $J(R)$ das Jacobson-Radikal von R. Dann gilt das Lemma von Nakayama: Ist $N \leq M$ und $J(R)N = N$, so ist $N = \{0\}$.
3) Eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M wird stationär, falls dies in jeder Lokalisierung nach einem maximalen Ideal von R gilt.
4) M erfüllt pan-acc, d.h. n-acc für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Außerdem wird für einen Ring R mit acc für d-Colons bewiesen:

5) R erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale.
6) Jede R-Folge (eine Folge von Elementen $x_1, x_2, \dots \in R$ mit $1 \notin (x_1, x_2, \dots)$ und $x_n \notin Z(R/(x_1, \dots, x_{n-1})))$ hat endliche Länge.

Ferner wird für die Bedingung „n-acc“ gezeigt:

7) Erfüllt R 1-acc, so auch jeder freie R-Modul.
8) Hat R acc für d-Colons, so erfüllt jeder freie R-Modul pan-acc.
9) Ist R noethersch und I eine beliebige Menge, so erfüllt der R-Modul R^I pan-acc.
10) Erfüllt R 1-acc, so muss der formale Potenzreihenring $R[[x]]$ nicht 1-acc erfüllen.
11) Hat R 1-acc und nur endlich viele schwach assoziierte Primideale, so erfüllt auch der Polynomring $R[x]$ 1-acc. Dabei heißt ein Primideal P von R *schwach assoziert*, falls es ein $a \in R$ gibt, so dass P ein minimales Primideal über $\mathrm{Ann}(a) := \{r \in R : ra = 0\}$ ist.

Abstract

In the dissertation we study certain ascending chain conditions in the mathematical field of Commutative Algebra. So in the following we always denote by R a *commutative* ring with *unity* $1 \neq 0$ and by M a *unitary* R-module. Two definitions are fundamentally for the comprehension of the results presented in this dissertation:

a) *M satisfies the ascending chain condition (acc) on d-colons*, if, for every submodule N of M and every sequence $(a_n)_n$ of elements of R, the ascending chain $N : a_1 \subseteq N : a_1 a_2 \subseteq \dots$ becomes stationary, where it is $N : a := \{x \in M : ax \in N\}$ for every $a \in R$.

b) *M satisfies n-acc*, if every ascending chain of submodules of M, which can be generated by $\leq n$ elements, becomes stationary.

For an R-module M satisfying acc on d-colons we show the following:

1) For every submodule N the set $Z(M/N)$ of zero-divisors of M/N is a finite union of prime ideals.
2) Let $J(R)$ be the Jacobson-radical of R. Then Nakayama's Lemma holds: If $N \leq M$ and $J(R)N = N$, we have $N = \{0\}$.
3) An ascending chain of submodules of M becomes stationary if becomes stationary in every localization by a maximal ideal of R.
4) M satisfies pan-acc, i.e. n-acc for every $n \in \mathbb{N}$.

Moreover, it is shown for a ring R satisfying acc on d-colons:

5) R satisfies the ascending chain condition on prime ideals.
6) Every R-sequence (a sequence of elements $x_1, x_2, \dots \in R$ such that $1 \notin (x_1, x_2, \dots)$ and $x_n \notin Z(R/(x_1, \dots, x_{n-1})))$ has finite length.

Finally, the following results are proved concerning the property „n-acc“:

7) If R satisfies 1-acc, so does every free R-module.
8) If R satisfies acc on d-colons, then every free R-modul satisfies pan-acc.
9) If R is noetherian and I an arbitrary set, then the R-module R^I satisfies pan-acc.
10) If R satisfies 1-acc, this does not have to hold in the ring of formal power series $R[[x]]$.
11) If R has 1-acc and only finitely many weakly-associated primes, then the polynomial ring $R[x]$ also satisfies 1-acc (a prime ideal P of R is called *weakly-associated*, if there is some $a \in R$, such that P is a minimal prime ideal containing $\mathrm{Ann}(a) := \{r \in R : ra = 0\}$).

Schlagworte zum Inhalt

- kommutativer Ring
- aufsteigende Kettenbedingung
- Annihilator

Keywords

- commutative ring
- ascending chain condition
- annihilator

Inhaltsverzeichnis

1 Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren **10**

1.1 Grundlegende Eigenschaften 10

1.2 Polynome und Potenzreihen 18

2 Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Colons **27**

2.1 ACC für d-Colons impliziert pan-acc 27

2.2 Weitere Eigenschaften von Ringen mit acc für d-Colons 32

2.3 R-Folgen 38

2.4 T-stark laskersche Moduln und P-Ringe 42

3 Die aufsteigende Kettenbedingung für n-erzeugte Untermoduln bei freien Moduln und dem R-Modul R^I **47**

3.1 Freie Moduln 47

3.2 Der R-Modul R^I 49

4 Polynome und Potenzreihen über accp-Ringen **53**

4.1 Ein Gegenbeispiel für Potenzreihenringe 53

4.2 Hinreichende Kriterien 56

4.3 Lokalisierungen 65

Literaturverzeichnis **68**

Abkürzungsverzeichnis

acc	=	ascending chain condition, aufsteigende Kettenbedingung
oBdA	=	ohne Beschränkung der Allgemeinheit

Einleitung

Aufsteigende Kettenbedingungen spielen in der Algebra eine große Rolle, denn erfüllt eine algebraische Struktur eine solche Bedingung, so lassen sich häufig Endlichkeitsaussagen über diese Struktur machen. Ein klassisches Beispiel hierfür sind endlichdimensionale Vektorräume, die man dadurch charakterisieren kann, dass in ihnen keine unendlichen echt aufsteigenden Ketten von Untervektorräumen existieren können. Unter einer aufsteigenden Kettenbedingung (englisch: „ascending chain condition“, kurz: acc) versteht man im weitesten Sinne folgendes:

Sei A eine algebraische Struktur und $\mathcal{M}$ eine Menge von Unterstrukturen von A. Dann sagt man *„A erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Elemente aus $\mathcal{M}$“*, falls gilt: Für jede aufsteigende Kette (oder besser: Folge) $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots$ von Unterstrukturen $U_i \in \mathcal{M}$ existiert ein Index $n \in \mathbb{N}$, so daß $U_i = U_n$ ist für alle $i \geq n$. In diesem Fall sagt man auch: Jede aufsteigende Folge von Unterstrukturen aus $\mathcal{M}$ *wird stationär* (oder: *bricht ab*).

In der vorliegenden Dissertation werden gewisse aufsteigende Kettenbedingungen im Bereich der kommutativen Algebra untersucht. Dabei steht der Begriff „Ring“ im Folgenden immer für einen *kommutativen* Ring mit *Einselement* $1 \neq 0$, und es werden ausschließlich *unitäre* Moduln über kommutativen Ringen betrachtet.
Ein grundlegender Begriff der kommutativen Algebra ist der der noetherschen Ringe, die gerade dadurch charakterisiert sind, dass sie die aufsteigende Kettenbedingung für Ideale erfüllen. Die Theorie der noetherschen Ringe ist im 20. Jahrhundert sehr weit entwickelt worden und in vielen Bereichen der Mathematik (z.B. der algebraischen Geometrie oder der Zahlentheorie) von Bedeutung. Häufig werden aber auch schwächere Kettenbedingungen untersucht, wie etwa accp, die aufsteigende Kettenbedingung für Hauptideale („ascending chain condition on principal ideals“). So sind z.B. die ZPE-Ringe dadurch charakterisiert, daß sie accp erfüllen und jedes irreduzible Element prim ist. Eine Verallgemeinerung von „accp“ ist die Bedingung

„n-acc“ für ein $n \in \mathbb{N}$:

Ein Modul erfüllt *n-acc*, falls er die aufsteigende Kettenbedingung für die von (höchstens) n Elementen erzeugten Untermoduln erfüllt.

Dabei wird dieser Begriff (wie auch bei allen anderen Definitionen dieser Art) für einen Ring verwendet, falls dieser als Modul über sich selbst die entsprechende Eigenschaft hat. In dieser Terminologie ist dann also „1-acc“ dasselbe wie „accp“.

Ausgangspunkt dieser Dissertation war zunächst die weitere Untersuchung der Eigenschaft „n-acc“, anknüpfend an Arbeiten von W. Heinzer und D. Lantz ([15],[17]), A.M. Nicolas ([24]) und G. Renault ([28]). Insbesondere wurde der Übergang von 1-acc zum Polynom- bzw. Potenzreihenring sowie zu freien Moduln untersucht. Dabei stellte sich heraus, dass die Struktur der Nullteiler $Z(R)$ eines Ringes R in diesem Zusammenhang von entscheidender Bedeutung ist. Dies führte zur Betrachtung von aufsteigenden Kettenbedingungen für gewisse Annihilatorideale bzw. Annihilatoruntermoduln:

Sei R ein Ring, M ein R-Modul und $A \subseteq R$ sowie $N \subseteq M$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}(N) := \mathrm{Ann}_R(N) := \{a \in R : \forall x \in N \text{ ist } ax = 0\} = 0 : N$$

ein Ideal von R, ein sogenanntes *Annihilatorideal*. Ferner ist

$$\mathrm{Ann}(A) := \mathrm{Ann}_M(A) := \{x \in M : \forall a \in A \text{ ist } ax = 0\} = 0 : A$$

ein Untermodul von M, ein sogenannter *Annihilatoruntermodul*.

Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren bei einem R-Modul M, bei der man fordert, dass für jede Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus R die Folge $\mathrm{Ann}(a_1) \subseteq \mathrm{Ann}(a_1 a_2) \subseteq \ldots$ abbricht, lieferte dann viele Aussagen über die Struktur der Nullteiler, die schon aus dem noetherschen Fall bekannt sind. Es ergab sich nun auf natürliche Weise die Klasse der Moduln mit acc für d-Colons: Moduln, für die jeder Faktormodul acc für d-Annihilatoren erfüllt. Diese wurden dann ausführlich untersucht, und dabei stellte sich heraus, dass viele Eigenschaften von noetherschen Moduln auch noch für diese Moduln gelten. Insbesondere konnte die n-acc-Eigenschaft für jedes n nachgewiesen werden, so dass wieder ein Bezug zur ursprünglichen Problemstellung hergestellt wurde.

Die Arbeit besteht aus 4 Kapiteln. In Kapitel 1 wird die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren und ihr Übergang auf den Polynom- bzw. Potenzreihenring untersucht. Als wichtigstes Resultat über Moduln mit acc für d-Annihilatoren wird gezeigt, dass die Menge der Nullteiler stets eine endliche Vereinigung von Primidealen ist. Ferner überträgt sich für nulldimensionale oder reduzierte Ringe die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren auch auf den Polynomring. Die gefundenen Eigenschaften über die Struktur der Nullteiler bilden die Grundlage für die weiteren Ergebnisse in Kapitel 2.
Dort wird für Moduln mit acc für d-Colons gezeigt, dass sie pan-acc (d.h. n-acc für jedes n) erfüllen. Die entwickelten Methoden beinhalten ein verallgemeinertes „Lemma von Nakayama“ und ein Kriterium, wie man vom lokalen auf den globalen Fall schließen kann. Dieses lautet wie folgt: Ist $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge endlich erzeugter Untermoduln eines R-Moduls, die in jeder Lokalisierung nach einem maximalen Ideal stationär wird, und ist weiterhin $Z(M/N_i)$ für alle i in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen enthalten, so wird $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ stationär. Ferner wird für Ringe R mit acc für d-Colons die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale nachgewiesen und gefolgert, dass jede R-Folge endliche Länge hat. Damit kann dann die Theorie der R-Folgen aus dem noetherschen Fall auf diese größere Klasse von Ringen verallgemeinert werden.
In Kapitel 3 wird der Übergang von n-acc auf freie Moduln und den R-Modul R^I untersucht. Dabei gibt es 3 Hauptergebnisse:
(i) Jeder freie Modul über einem accp-Ring erfüllt 1-acc.
(ii) Jeder freie Modul über einem Ring mit acc für d-Colons erfüllt pan-acc.
(iii) Für einen noetherschen Ring R und eine beliebige Menge I erfüllt R^I pan-acc.
Hierzu war bisher nur bekannt, dass (i) für Integritätsringe, (ii) für noethersche Ringe und (iii) für reduzierte noethersche Ringe gilt.
In Kapitel 4 werden Polynom- und Potenzreihenringe über accp-Ringen betrachtet. Die Frage, ob für einen accp-Ring stets auch der Ring der formalen Potenzreihen accp erfüllt, wird durch ein Gegenbeispiel negativ beantwortet: Es wird sogar ein Ring R mit pan-acc konstruiert, für den sowohl der Ring $R[[x]]$ als auch der Modul $R^{\mathbb{N}}$ nicht 1-acc erfüllen. Weiterhin wird ein hinreichendes Kriterium für den Übergang von accp auf den Polynomring angegeben, dass alle bisher bekannten Kriterien impliziert: Ist R ein accp-Ring mit nur endlich vielen schwach assoziierten Primidealen, so erfüllt auch der Polynomring $R[X]$ accp.

Aus Prioritätsgründen wurden einige Ergebnisse dieser Dissertation schon zur Veröffentlichung eingereicht, und zwar in den Artikeln „A counterexample concerning accp in power series rings“ und „Modules with n-acc and the acc on certain types of annihilators" ([10] bzw. [11]). Allerdings wurden einige der dortigen Resultate für diese Arbeit noch verfeinert bzw. ergänzt, oder es wurden elegantere Beweise gefunden. Ferner sind die kompletten Abschnitte 2.2, 2.3, 2.4, und 4.2 mit Ausnahme von Beispiel 4.7 nicht dort enthalten.

Wir verwenden die gebräuchlichen Begriffe der kommutativen Algebra aus Standardwerken wie [3], [12], [20] oder [31]. Unter einem lokalen Ring verstehen wir aber nicht notwendig einen noetherschen Ring, sondern lediglich einen Ring mit genau einem maximalen Ideal. Die Zeichen $\subset$ bzw. $\supset$ bedeuten stets *echte* Inklusionen. $\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen ohne Null und $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Kapitel 1

Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren

1.1 Grundlegende Eigenschaften

In diesem Kapitel betrachten wir Moduln, die die aufsteigende Kettenbedingung (acc) für eine bestimmte Art von Annihilatoren erfüllen. Solche Moduln wurden erstmals in [30] von S. Visweswaran untersucht. Er definierte das folgende: Ein R-Modul M erfüllt (C), falls für jeden Untermodul N von M und jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus R die aufsteigende Folge $N : a_1 \subseteq N : a_1a_2 \subseteq \dots$ von Untermoduln stationär wird. Wir wollen hier den Fall $N = \{0\}$ gesondert betrachten und eine etwas suggestivere Bezeichnung einführen. Dies führt uns zur folgenden Definition:

Definition Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir sagen *„M erfüllt acc für d-Annihilatoren"*, falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus R die Folge $\operatorname{Ann}(a_1) \subseteq \operatorname{Ann}(a_1a_2) \subseteq \dots$ in M stationär wird. Wir sagen *„M erfüllt acc für d-Colons"*, falls für jeden Untermodul N von M der Modul M/N acc für d-Annihilatoren erfüllt, d.h. $N : a_1 \subseteq N : a_1a_2 \subseteq \dots$ wird stationär für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in R.

Diese Definition erinnert an die Definition von T-nilpotenten Idealen (Ideale A, für die für jede Folge $(a_n)_n \subseteq A$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_1 \cdots a_k = 0$). In der Tat werden wir später einige Zusammenhänge dieser beiden Eigenschaften sehen. Man beachte auch, dass jede absteigende Folge von Hauptidealen eines Ringes von der Form $(a_1) \supseteq (a_1a_2) \supseteq \dots$ ist, denn ist $(x_1) \supseteq (x_2) \supseteq \dots$ und etwa $x_{i+1} = x_ib_i$, so ist $x_2 = x_1b_1$, $x_3 = x_1b_1b_2$ etc., also induktiv $x_{i+1} = x_1b_1 \cdots b_i$. Die Bezeichnung

„d-Annihilatoren“ ist an „descending chains of principal ideals“ angelehnt. Ein Ring heißt perfekt, falls er die absteigende Kettenbedingung für Hauptideale erfüllt. Es ist damit unmittelbar klar, dass jeder Modul über einem perfekten Ring acc für d-Colons erfüllt (dies wurde in [30] etwas umständlich gezeigt).
In [3] (Chapter IV §2, Exercises 23-29) werden laskersche bzw. stark laskersche Moduln definiert und untersucht. Ein endlich erzeugter R-Modul M heißt *laskersch*, falls jeder echte Untermodul endlicher Durchschnitt von primären Untermoduln ist. Dabei heißt ein echter Untermodul Q von M *primär*, falls für $a \in R$ und $x \in M \setminus Q$ aus $ax \in Q$ stets $a \in \mathrm{rad}(Q) := \mathrm{rad}(Q : M) = \{r \in R : \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } r^n M \subseteq Q\}$ folgt. Weiterhin heißt Q *stark primär*, falls zusätzlich ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mathrm{rad}(Q)^n M \subseteq Q$, und M heißt *stark laskersch*, falls M laskersch ist und jeder primäre Untermodul stark primär ist.
Unter anderem wird in [3] gezeigt, dass stark laskersche Moduln der folgenden Bedingung genügen:

(LA_{III}) *Für jede Folge (B_n) von Idealen von R und jeden Untermodul N von M wird $N : B_1 \subseteq N : B_1 B_2 \subseteq \ldots$ stationär.*

Daher erfüllt jeder stark laskersche Modul acc für d-Colons. Da bei der Definition von laskerschen Moduln der Modul stets als endlich erzeugt vorausgesetzt wird, gilt natürlich nicht die Umkehrung: Man wählt einfach einen beliebigen nicht endlich erzeugten Modul über einem perfekten Ring. Aber auch für endlich erzeugte Moduln impliziert „acc für d-Colons“ nicht „stark laskersch“, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1.1 *Seien K ein Körper und x_n ($n \in \mathbb{N}$) Unbestimmte über K. Sei I das Ideal von $K[[x_n : n \in \mathbb{N}]]$, das von allen Elementen der Form $x_i x_j$ ($i \neq j$) erzeugt wird, und $R := K[[x_n : n \in \mathbb{N}]]/I$. Dann ist R nicht laskersch, erfüllt aber acc für d-Colons.*

Beweis Sei J ein Ideal, das I enthält und f eine Nichteinheit von $K[[x_n : n \in \mathbb{N}]]$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f \in K[[x_1, \ldots, x_m]]$. Aus $I \subseteq J$ und der Definition von I folgt $J : f \supseteq (x_n : n > m)$, und somit ist $K[[x_n : n \in \mathbb{N}]]/(J : f)$ als Faktorstruktur des noetherschen Ringes $K[[x_1, \ldots, x_m]]$ selbst noethersch. Daher bricht jede aufsteigende Folge von Idealen oberhalb von $J : f$ ab, und da J und f beliebig waren, erfüllt also R acc für d-Colons. R hat aber unendlich viele minimale Primideale: Ist P ein minimales Primideal über I und existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $x_i \notin P$, so folgt wegen $x_i x_j \in I \subseteq P$ sofort $x_j \in P$ für alle $j \neq i$, d.h. $P_i := (x_j : j \neq i)$ sind die unendlich vielen minimalen Primideale über I. Ein laskerscher Ring besitzt aber aufgrund der endlichen Primärzerlegung des Nullideals nur endlich viele minimale Primideale. Also ist R nicht laskersch. Auch obige Bedingung ($\mathrm{LA}_{\mathrm{III}}$) ist nicht erfüllt: Es ist $I : P_1 \subset I : P_1P_2 \subset \dots$, da $x_{i+1}P_1 \cdots P_{i+1} \subseteq I$, aber $x_{i+1}P_1 \cdots P_i \not\subseteq I$, da $x_{i+1}^{i+1} \notin I$.$\square$

Die Konstruktion in Beispiel 1.1 liefert allerdings keinen Ring mit acc für d-Colons, falls man von einem Polynomring ausgeht. Dazu betrachten wir den Ring $R := K[x_n : n \in \mathbb{N}]/(x_ix_j : i \neq j) + (x_n(1 - x_n) : n \in \mathbb{N})$ der ja ein Faktorring von $K[x_n : n \in \mathbb{N}]/(x_ix_j : i \neq j)$ ist. In R ist x_n für alle $n \in \mathbb{N}$ idempotent. Ferner ist $x_n \neq 0$, denn wäre $x_n \in (x_ix_j : i \neq j) + (x_n(1-x_n) : n \in \mathbb{N})$ in $K[x_n : n \in \mathbb{N}]$, so würde das Einsetzen von 0 für alle x_j mit $j \neq n$ den Widerspruch $x_n \in x_n(1 - x_n)K[x_n]$ liefern. Allgemein gilt nun für einen Ring T und ein Idempotentes $e \in T$ stets $\mathrm{Ann}(e) = (1 - e)$ wegen $T = (e) \oplus (1 - e)$. Daher ist in R $\mathrm{Ann}((1 - x_1) \cdots (1 - x_n)) = (1 - (1 - x_1) \cdots (1 - x_n)) = (1 - (1 - x_1 - \cdots - x_n)) = (x_1 + \cdots + x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und wegen $x_i = x_i(x_1 + \cdots + x_n)$ ist dies gleich $(x_1, \dots, x_n)$. Ferner ist $x_n \notin (x_1, \dots, x_{n-1})$, denn sonst würde die Multiplikation mit x_n den Widerspruch $x_n = 0$ ergeben. Somit ist $\mathrm{Ann}(1 - x_1) \subset \mathrm{Ann}((1 - x_1)(1 - x_2)) \subset \dots$ eine echt aufsteigende Folge in R, d.h. R erfüllt nicht acc für d-Annihilatoren. Der Ring $T := K[x_n : n \in \mathbb{N}]/(x_ix_j : i \neq j)$ erfüllt aber natürlich acc für d-Annihilatoren, wie man analog zu Beispiel 1.1 unter Verwendung von $Z(T) = (x_n : n \in \mathbb{N})$ zeigen kann.

Wir fassen nun einfache Eigenschaften von Moduln mit acc für d-Annihilatoren im folgenden Lemma zusammen. Dazu sei kurz an die Definition der Begriffe „assoziiertes Primideal" bzw. „schwach assoziiertes Primideal" erinnert: Ist R ein Ring und M ein R-Modul, so heißt ein Primideal P von R *assoziert*, falls es von der Form $\mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $x \in M$ ist, und es heißt *schwach assoziert*, falls es ein minimales Primideal über einem Ideal der Form $\mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $x \in M$ ist.

Lemma 1.2 *Sei R ein Ring und $M \neq \{0\}$ ein R-Modul mit acc für d-Annihilatoren. Dann gilt:*
a) Ist $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen, so existiert ein $s \in S$ mit $Kern(M \to M_S) = Ann(s)$, und M_S erfüllt ebenfalls acc für d-Annihilatoren.
b) Für jedes $A \subseteq R$ erfüllt der Faktormodul $M/Ann(A)$ acc für d-Annihilatoren.
c) Für jeden Untermodul N von M und jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen aus R wird die aufsteigende Folge $Ann_R(a_1N) \subseteq Ann_R(a_1a_2N) \subseteq \dots$ in R stationär, d.h. für $N \neq \{0\}$ erfüllt der Ring $R/Ann_R(N)$ acc für d-Annihilatoren.
d) Jedes minimale Primideal P von R mit $M_P \neq \{0\}$ ist ein assoziiertes Primideal von M.
e) Jedes schwach assoziierte Primideal von M ist ein assoziiertes Primideal.
f) Jeder Untermodul von M hat acc für d-Annihilatoren.

Beweis a) Sei $x_1 \in N := \mathrm{Kern}(M \to M_S)$. Dann existiert ein $s_1 \in S$ mit $s_1x_1 = 0$.

Ist $\mathrm{Ann}(s_1) = N$, so gilt die Behauptung. Andernfalls existiert ein $x_2 \in N \setminus \mathrm{Ann}(s_1)$ und ein $s_2 \in S$ mit $s_2 x_2 = 0$, d.h. $\mathrm{Ann}(s_1) \subset \mathrm{Ann}(s_1 s_2)$. Nach Voraussetzung bricht dieser Prozess ab, so dass wir ein $s \in S$ finden mit $N = \mathrm{Ann}(s)$. Wir betrachten nun eine aufsteigende Folge $\mathrm{Ann}(\frac{a_1}{1}) \subseteq \mathrm{Ann}(\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{1}) \subseteq \ldots$ in M_S und nehmen oBdA an, dass die Folge $\mathrm{Ann}(sa_1) \subseteq \mathrm{Ann}(sa_1a_2) \subseteq \ldots$ in M bereits an der ersten Stelle abbricht. Aus $\frac{x}{1} \in \mathrm{Ann}(\frac{a_1}{1}\frac{a_2}{1})$ folgt nun $sxa_1a_2 = 0$, also $x \in \mathrm{Ann}(sa_1a_2) = \mathrm{Ann}(sa_1)$ und somit $\frac{x}{1} \in \mathrm{Ann}(\frac{a_1}{1})$. Daher erfüllt auch M_S acc für d-Annihilatoren.
b) Dies folgt sofort aus der folgenden Aussage: Ist $\mathrm{Ann}(b) = \mathrm{Ann}(bc)$ $(b, c \in R)$, so ist $\mathrm{Ann}(A) : b = \mathrm{Ann}(b) : A = \mathrm{Ann}(bc) : A = \mathrm{Ann}(A) : bc$.
c) Wir können oBdA $\mathrm{Ann}(a_1) = \mathrm{Ann}(a_1a_2) = \ldots$ in M annehmen. Ist nun $b \in \mathrm{Ann}_R(a_1a_2N)$, so folgt $bN \subseteq \mathrm{Ann}(a_1a_2) = \mathrm{Ann}(a_1)$, d.h. $b \in \mathrm{Ann}_R(a_1N)$.
d) Ist P ein Primideal von R derart, dass P_P ein assoziiertes Primideal von M_P ist, so ist P bereits ein assoziiertes Primideal von M: Denn ist $P_P = \mathrm{Ann}_{R_P}(\frac{x}{1}) = \mathrm{Ann}_R(x)_P$ und $\mathrm{Kern}(M \to M_P) = \mathrm{Ann}(s)$, so folgt $P = \mathrm{Ann}_R(sx)$. Sei also P ein minimales Primideal von R mit $M_P \neq \{0\}$. Nach obigem können wir nach P lokalisieren und somit oBdA annehmen, dass P das einzige Primideal von R ist. Sei nun $y \in M \setminus \{0\}$, also $\mathrm{Ann}_R(y) \subseteq P$. Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren in $R/\mathrm{Ann}_R(y)$ (nach c)) liefert die Existenz eines $x \in M$ derart, dass $\mathrm{Ann}_R(x) \subseteq P$ und $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathrm{Ann}_R(ax)$ für jedes $a \in R \setminus \mathrm{Ann}_R(x)$. Dies bedeutet aber gerade, dass $\mathrm{Ann}_R(x)$ ein Primideal und somit gleich P ist. Daher ist P ein assoziiertes Primideal von M.
e) Ist P ein minimales Primideal über $\mathrm{Ann}_R(x)$ für ein $x \in M \setminus \{0\}$, so folgt aus c) und d) die Existenz eines $a \in R$ mit $P = \mathrm{Ann}_R(x) : a = \mathrm{Ann}_R(ax)$.
f) Dies folgt direkt aus der Gleichung $\mathrm{Ann}_N(a) = \mathrm{Ann}_M(a) \cap N$ für jedes $a \in R$ und jeden Untermodul N von M. □

In [30] wurde die Äquivalenz folgender Aussagen für einen Ring R gezeigt:

(i) *R ist perfekt.*
(ii) *$\dim(R) = 0$ und R erfüllt acc für d-Colons.*
(iii) *Jeder R-Modul erfüllt acc für d-Colons.*

Eine Überprüfung des dortigen Beweises liefert, dass man jeweils „d-Colons“ durch „d-Annihilatoren“ ersetzen kann. Das folgende Lemma liefert einen alternativen Beweis für die Äquivalenz von (i) und (ii). Ferner werden weitere Eigenschaften von Ringen mit acc für d-Annihilatoren aufgeführt. Dazu wiederholen wir noch die Charakterisierung perfekter Ringe durch H. Bass (siehe [2]):

(iv) R ist semilokal und J(R) (das Jacobson-Radikal von R) ist T-nilpotent.

Da ein nulldimensionaler semilokaler Ring stets eine endliche direkte Summe von nulldimensionalen lokalen Ringen ist (siehe [27]), ist (iv) wiederum äquivalent zu

(v) R ist isomorph zu einem endlichen Produkt von lokalen Ringen mit T-nilpotentem maximalen Ideal.

Lemma 1.3 *Sei R ein Ring, der acc für d-Annihilatoren erfüllt. Dann gilt:*
a) Jeder Unterring T von R erfüllt acc für d-Annihilatoren. Umgekehrt gilt für einen beliebigen Ring S: Erfüllt jeder abzählbare Unterring von S acc für d-Annihilatoren, so auch S.
b) Das Radikal rad(R) von R ist ein Annihilatorideal und T-nilpotent.
c) R besitzt nur endlich viele Idempotente und ist isomorph zu einem endlichen Produkt von unzerlegbaren Ringen.
d) Ist dim$(R) = 0$, so ist R perfekt. Umgekehrt ist natürlich jeder perfekte Ring nulldimensional und erfüllt acc für d-Colons.

Beweis a) Die erste Aussage folgt wieder direkt aus der Gleichung $\mathrm{Ann}_T(a) = \mathrm{Ann}_R(a) \cap T$ für jedes $a \in T$. Für die zweite Aussage nehmen wir indirekt an, das eine echt aufsteigende Folge $\mathrm{Ann}(a_1) \subset \mathrm{Ann}(a_1a_2) \subset \ldots$ mit $a_i \in S$ existiert. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $b_i \in S$ mit $b_i \in \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_{i+1}) \setminus \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_i)$. Der Unterring von S, der von 1, den a_i's und den b_i's erzeugt wird, ist abzählbar, erfüllt aber nach Konstruktion nicht acc für d-Annihilatoren im Widerspruch zur Voraussetzung.
b) Nach Lemma 1.2 d) ist jedes minimale Primideal von R ein Annihilatorideal, also auch rad(R) als Durchschnitt von Annihilatoridealen. Dass rad(R) T-nilpotent ist, wurde schon in [30] gezeigt: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus rad(R) und oBdA sei $\mathrm{Ann}(a_1) = \mathrm{Ann}(a_1a_2) = \ldots$. Da a_2 nilpotent ist, existiert ein minimales $m \in \mathbb{N}_0$ mit $a_2^m a_1 = 0$. Wäre $m \geq 1$, so folgte $a_2^{m-1} \in \mathrm{Ann}(a_1a_2) = \mathrm{Ann}(a_1)$, ein Widerspruch. Somit ist $m = 0$, d.h. $a_1 = 0$ und daher rad(R) T-nilpotent.
c) Diese Aussage kann man analog zu Lemma 1.11 von [27] beweisen; der Beweis sei hier deshalb nur kurz skizziert: Man macht $B(R) := \{a \in R : a \text{ idempotent}\}$ zu einem Ring mittels der gewöhnlichen Multiplikation und der Addition $a \oplus b := a + b - 2ab$. $B(R)$ ist dann ein von-Neumann-regulärer Ring der Charakteristik 2 und für alle $a, b \in B(R)$ gilt $aB(R) \supseteq bB(R) \Leftrightarrow b = ab \Leftrightarrow \mathrm{Ann}_R(a) \subseteq \mathrm{Ann}_R(b)$ (denn aus $1 - a \in \mathrm{Ann}_R(a) \subseteq \mathrm{Ann}_R(b)$ folgt $b = ab$). Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren in R impliziert also, dass $B(R)$ perfekt, also semilokal und somit als von-Neumann-regulärer Ring ein endliches Produkt von Körpern ist. Da diese Körper

nur aus Idempotenten bestehen, ist $B(R)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_2^n$. Daher hat R nur endlich viele Idempotente und die Zerlegung in ein endliches Produkt von unzerlegbaren Ringen ist eine wohlbekannte Tatsache.
d) Nach Teil c) sei R oBdA unzerlegbar. Ein nulldimensionaler unzerlegbarer Ring ist bekanntlich lokal, etwa mit einzigem Primideal P. Nach Teil b) ist P T-nilpotent und somit R perfekt. $\square$

Ein weiterer alternativer Beweis zu obiger Aussage d) geht so: Da $\mathrm{rad}(R)$ T-nilpotent nach b), reicht zu zeigen, dass R semilokal ist (dies folgt z.B. auch nach dem späteren Satz 1.6). Nach b) und Lemma 1.2 b) oder c) erfüllt $R/\mathrm{rad}(R)$ ebenfalls acc für d-Annihilatoren. Also sei oBdA $\mathrm{rad}(R) = (0)$ und damit R von-Neumann-regulär. Dann ist $\mathrm{Kern}(R \to R_P) = P$ für jedes Primideal P von R, und somit ist nach Lemma 1.2 a) $P = \mathrm{Ann}(s)$ für ein $s \in R \setminus P$. Da R regulär, ist $(s) = (e)$ für ein Idempotentes $e \in R$ und daher $P = \mathrm{Ann}(s) = \mathrm{Ann}(e) = (1-e)$, wie sofort aus $R = eR \oplus (1-e)R$ folgt. Also ist jedes Primideal ein Hauptideal und folglich ist R ein Hauptidealring, d.h. sogar endliches Produkt von Körpern und semilokal.

Wir wollen an dieser Stelle noch eine weitere Charakterisierung der perfekten Ringe geben. Dazu bemerken wir das folgende: Ist R ein Ring mit acc für d-Colons, so existiert nach Lemma 1.2 d) zu jedem Ideal A von R und jedem über A minimalen Primideal P von R ein $x \in R \setminus A$ mit $P = A : x$. Diese Eigenschaft, die wir kurz mit „(MPA)“ („minimale Primideale sind assoziiert“) bezeichnen wollen, charakterisiert zusammen mit der Nulldimensionalität bereits die perfekten Ringe:

Satz 1.4 *Ein Ring R ist perfekt genau dann, wenn R nulldimensional ist und (MPA) erfüllt.*

Beweis Die Notwendigkeit der Bedingung gilt nach obigem. Sei also R ein nulldimensionaler Ring, der (MPA) erfüllt. Dann gilt dies auch für jede Faktorstruktur von R. Somit ist $R/\mathrm{rad}(R)$ ein von-Neumann-regulärer Ring, in dem jedes Primideal ein Annihilatorideal ist. Daraus folgt wie in den Ausführungen nach Lemma 1.3, dass $R/\mathrm{rad}(R)$ und damit R semilokal ist. Da R nulldimensional, ist R endliche direkte Summe von lokalen Ringen mit genau einem Primideal. Es ist nun ein leichte Übungsaufgabe, dass jeder dieser Ringe wieder (MPA) erfüllt. Daher sei oBdA R lokal mit einzigem Primideal P.
Wir haben nun zu zeigen, dass P T-nilpotent ist. Dafür definieren wir durch transfinite Induktion für jede Ordinalzahl α Teilmengen A_α von R. Sei $A_0 := (0)$, $A_{\alpha+1} := A_\alpha : P$ und $A_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, falls α eine Limeszahl ist. Ist $A_\alpha \subset P$ und $x \in R \setminus A_\alpha$ mit

$P = A_\alpha : x$, so ist $x \in P \setminus A_\alpha$ und $x \in A_\alpha : P = A_{\alpha+1}$, d.h. $A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subseteq P$. Da P als Menge eine Kardinalität besitzt, existiert somit eine Ordinalzahl α_0 mit $A_{\alpha_0} = P$. Daher ist für jedes $a \in P$ die Ordinalzahl $h(a) := \min\{\alpha : a \in A_\alpha\}$ definiert, und es ist klar, dass $h(a)$ niemals eine Limeszahl ist. Für $a, b \in P$, $a \neq 0$ sei daher $h(a) = \alpha + 1$, d.h. $aP \subseteq A_\alpha$ und $a \notin A_\alpha$. Dann ist $ab \in A_\alpha$ und folglich $h(ab) \leq \alpha < \alpha + 1 = h(a)$. Induktiv ist also $h(a_1) > h(a_1 a_2) > \cdots > h(a_1 \cdots a_n)$ für jede Folge $(a_n)_n$ von Elementen aus P, falls $a_1 \cdots a_n \neq 0$. Die Wohlordnung von α_0 liefert also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 \cdots a_n = 0$, d.h. P ist T-nilpotent. □

Eine etwas stärkere Bedingung als acc für d-Annihilatoren wird in [9] mit *accpa* (ascending chain condition on point annihilators) bezeichnet: Jede nichtleere Teilmenge von Idealen der Form $\mathrm{Ann}(a)$ besitzt ein maximales Element. Das nächste Beispiel zeigt, dass diese Bedingung echt stärker ist.

Beispiel 1.5 *Seien $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ Mengen von Unbestimmten über einem Körper K und $R := K[X,Y]/(x_n y_k : 1 \leq n \leq k) + (X,Y)^3$. Dann erfüllt R acc für d-Colons, aber nicht accpa.*

Beweis Sei $I := (x_n y_k : 1 \leq n \leq k) + (X,Y)^3$ in $K[X,Y]$. Ist $y_k f \in I$ für ein $f \in K[X,Y]$, so bestehe f wegen $(X,Y)^3 \subseteq I$ oBdA nur aus linearen Termen. Koeffizientenvergleich liefert dann $f \in Kx_1 + \cdots + Kx_k$, d.h. es ist $\mathrm{Ann}(y_k) = (x_1, \ldots, x_k) + (X,Y)^2$ in R. Somit erfüllt R nicht accpa, denn $\mathrm{Ann}(y_1) \subset \mathrm{Ann}(y_2) \subset \ldots$ ist eine echt aufsteigende Folge. Als lokaler Ring mit nilpotentem maximalen Ideal erfüllt R aber trivialerweise acc für d-Colons. □

Der Beweis des folgenden Satzes ist sehr ähnlich zum Beweis von Theorem 7 in [4]. Dort wurde gezeigt: Erfüllt R accpa und ist jede Nichteinheit ein Nullteiler, so ist R semilokal.

Satz 1.6 *Sei R ein Ring und $M \neq \{0\}$ ein R-Modul mit acc für d-Annihilatoren. Dann ist $Z(M)$ eine endliche Vereinigung von Primidealen.*

Beweis Nach Lemma 1.2 a) können wir nach der regulären Menge $R \setminus Z(M)$ lokalisieren. Daher sei oBdA jede Nichteinheit von R aus $Z(M)$, und zu zeigen ist, dass R semilokal ist. Es gilt nun die folgende Aussage:

($*$) *Für jedes $b \in R \setminus J(R)$ existiert ein $r \in R$, so dass $\mathrm{Ann}(b) \subset \mathrm{Ann}(b(1-rb))$ in M ist.*

Denn ist $b \in R \setminus J(R)$, so existiert ein $r \in R$ mit $1 - rb \in R \setminus E(R)$, und dann ist $(1 - rb)x = 0$ für ein $x \in M \setminus \{0\}$, aber $bx \neq 0$.
Wir bezeichnen mit $\overline{a}$ das Bild von Elementen $a \in R$ in $\overline{R} := R/J(R)$ und wählen dann $a \in R$ so, dass $\overline{a}$ ein idempotentes Element ungleich Null von $\overline{R}$ ist. Wir zeigen nun die Existenz eines $a' \in aR$ mit folgenden Eigenschaften: $\mathrm{Ann}(a) \subset \mathrm{Ann}(a')$ in M, $\overline{1} - \overline{a}, \overline{a} - \overline{a'}, \overline{a'}$ sind paarweise orthogonale Idempotente in $\overline{R}$, und $(\overline{a} - \overline{a'})\overline{R}$ ist ein Körper.
Da M acc für d-Annihilatoren erfüllt, existiert $ab \in aR \setminus J(R)$ derart, dass $\mathrm{Ann}(ab) = \mathrm{Ann}(abc)$ in M für jedes $c \in R$ mit $abc \notin J(R)$. Nach $(*)$ ist $\mathrm{Ann}(ab) \subset \mathrm{Ann}(ab(1-rab))$ für ein $r \in R$, und wir setzen $a' := a(1 - rab)$. Dann ist $\mathrm{Ann}(a) \subset \mathrm{Ann}(a')$, denn im Falle der Gleichheit wäre ja auch $\mathrm{Ann}(ab) = \mathrm{Ann}(a'b) = \mathrm{Ann}(ab(1 - rab)$. Weiterhin ist $ab(1 - rab) \in J(R)$ nach Wahl von ab, so dass $\overline{ra}\overline{b} = \overline{a} - \overline{a'}$ idempotent in $\overline{R}$ ist. Ferner ist $\overline{a'}$ als Produkt von zwei Idempotenten idempotent, und wegen $\overline{a}\overline{a'} = \overline{a'}$ sind $\overline{1} - \overline{a}, \overline{a} - \overline{a'}, \overline{a'}$ paarweise orthogonal. Nun ist $(\overline{a} - \overline{a'})\overline{R} = \overline{a}\overline{b}\overline{R} \neq (\overline{0})$, denn $\overline{a} - \overline{a'} = \overline{ra}\overline{b}$, $\overline{a}\overline{b} = \overline{ra}\overline{b}^2$, und $ab \notin J(R)$. Wähle $\overline{a}\overline{b}\overline{d} \in \overline{a}\overline{b}\overline{R} \setminus (\overline{0})$. Wegen $(*)$ existiert ein $s \in R$ mit $\mathrm{Ann}(abd) \subset \mathrm{Ann}(abd(1 - sabd))$, also insbesondere $\mathrm{Ann}(ab) \subset \mathrm{Ann}(ab(1 - sabd))$, und nach Wahl von ab ist $ab(1 - sabd) \in J(R)$. Es folgt $\overline{a}\overline{b} = \overline{a}\overline{b}\overline{s}\overline{a}\overline{b}\overline{d}$, d.h. $\overline{ra}\overline{b}\overline{d}$ ist eine Einheit von $\overline{ra}\overline{b}\overline{R}$, und $(\overline{a} - \overline{a'})\overline{R} = \overline{ra}\overline{b}\overline{R}$ ist ein Körper.
Nun wenden wir die obige Konstruktion auf $a_0 := 1$ an und erhalten $a_1 \in a_0R$ mit $\mathrm{Ann}(a_0) \subset \mathrm{Ann}(a_1)$ in M. Ist $\overline{a_1} \neq \overline{0}$ in $\overline{R}$, so setzen wir diesen Prozess fort. Nach Voraussetzung bricht dies aber nach endlich vielen Schritten ab, d.h. $\overline{a_{n+1}} = \overline{0}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da nach obigem $\overline{a_i}\overline{a_{i+1}} = \overline{a_{i+1}}$ für alle $i = 0, \ldots, n$, folgt induktiv sofort $\overline{a_i}\overline{a_j} = \overline{a_j}$ für alle $0 \leq i < j \leq n+1$. Damit sieht man leicht, dass $\overline{a_0} - \overline{a_1}, \overline{a_1} - \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n} - \overline{a_{n+1}}$ paarweise orthogonale Idempotente in $\overline{R}$ sind. Ferner gilt $\overline{R} \cong (\overline{a_0} - \overline{a_1})\overline{R} \oplus \cdots \oplus (\overline{a_{n-1}} - \overline{a_n})\overline{R} \oplus \overline{a_{n+1}}\overline{R}$, denn $\overline{a_i}\overline{R} \cong (\overline{a_i} - \overline{a_{i+1}})\overline{R} \oplus \overline{a_{i+1}}\overline{R}$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Da $\overline{a_{n+1}} = \overline{0}$ und $(\overline{a_i} - \overline{a_{i+1}})\overline{R}$ für alle $i = 0, \ldots, n$ ein Körper ist, ist $\overline{R}$ ein endliches Produkt von Körpern, d.h. R ist semilokal. $\square$

Ein ZD-Modul ist nach Definition (siehe [8]) ein Modul M, für den $Z(M/N)$ für jeden Untermodul N von M eine endliche Vereinigung von Primidealen ist. Mit dieser Bezeichnung liefert Satz 1.6:

Korollar 1.7 *Sei M ein R-Modul, der acc für d-Colons erfüllt. Dann ist M ein ZD-Modul.*

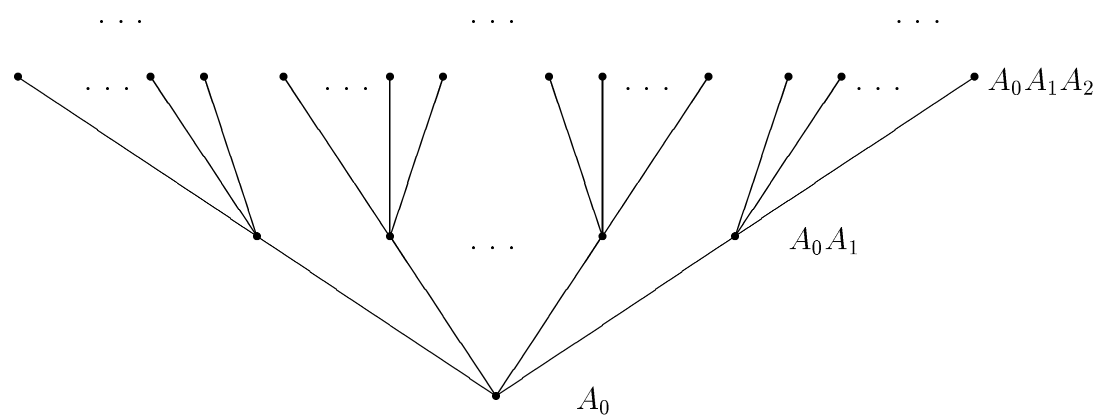
1.2 Polynome und Potenzreihen

In diesem Abschnitt betrachten wir zumeist Polynomringe über Ringen mit acc für d-Annihilatoren und geben 3 hinreichende Kriterien dafür, dass mit R auch $R[X]$ acc für d-Annihilatoren erfüllt: R ist Unterring eines perfekten Ringes (Korollar 1.11), R ist reduziert (Korollar 1.17) oder R enthält einen überabzählbaren Körper (Korollar 1.19). Die allgemeine Antwort für dieses Problem bleibt allerdings offen. Ferner geben wir ein Beispiel dafür, dass accpa nicht auf den Polynomring übergeht.
Ist A ein Ideal von R und X eine Menge von Unbestimmten über R, so ist ja wegen $A[X]^n \subseteq A^n[X]$ mit A auch $A[X]$ nilpotent. Wir zeigen nun, dass die analoge Aussage auch für „T-nilpotent“ gilt. Dazu dient der folgende Satz:

Satz 1.8 *Sei R ein Ring und A ein T-nilpotentes Ideal von R. Dann existiert für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlich erzeugten in A enthaltenen Idealen ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_1 \cdots A_n = (0)$.*

Beweis Da wir zu den Erzeugenden der Ideale A_n übergehen können, genügt es, obige Aussage für endliche Mengen A_n zu zeigen. Dabei sind dann Produkte einfach als komplexe Mengenmultiplikationen zu deuten, und es sei $aB := \{a\}B$ für $a \in R$, $B \subseteq R$. Angenommen, es gilt $A_1 \cdots A_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen induktiv: Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $a_n \in A_n$, so dass $a_0 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_m \neq \{0\}$ für alle $m \geq n$, wobei wir $A_0 := \{1\}$ und $a_0 := 1$ setzen.
Der Induktionsanfang gilt für $n = 0$ nach Annahme. Sei nun etwa $b_m \in a_0 \cdots a_{n-1} A_n \cdots A_m \setminus \{0\}$ für jedes $m \geq n-1$. Da A_n endlich ist, existiert ein $a_n \in A_n$, so dass $b_m \in a_0 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_m$ für unendlich viele $m \geq n$. Da stets $b_m \neq 0$, folgt $a_0 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_m \neq \{0\}$ für alle $m \geq n$, und der Induktionsschluss ist gezeigt.
Insbesondere ist also $a_1 \cdots a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur T-Nilpotenz von A. □

Bemerkung Satz 1.8 lässt sich auch auf eine graphentheoretische Aussage, das Lemma von D. König, zurückführen. Dazu deutet man die jeweils endlich vielen von Null verschiedenen erzeugenden Elemente der Ideale $A_0 := (1)$, A_0A_1, ..., $A_0 \cdots A_n$, ... als Ecken eines (zunächst möglicherweise unendlichen) Baumes:



Die T-Nilpotenz von A liefert dann, dass jeder Weg in diesem Baum endliche Länge hat, und das Lemma von D. König sagt aus, dass dann auch der Baum endlich ist. Somit existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_1 \cdots A_n = (0)$.

Für ein Polynom $f \in R[X]$ betrachten wir im Folgenden häufig das zugehörige Inhaltsideal, das von den Koeffizienten von f in R erzeugt wird. Wir bezeichnen es stets mit A_f.

Korollar 1.9 *Sei $A \subseteq R$ ein T-nilpotentes Ideal. Dann ist auch $A[X]$ für jede Menge X von Unbestimmten T-nilpotent.*

Beweis Sei (f_n) eine Folge von Elementen aus $A[X]$. Nach Satz 1.8 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_{f_1} \cdots A_{f_n} = 0$, und somit ist $f_1 \cdots f_n = 0$. $\square$

Dieses Resultat liefert das erste angekündigte hinreichende Kriterium dafür, dass mit R auch $R[X]$ acc für d-Annihilatoren erfüllt. Dazu betrachten wir noch den Fall eines primären Ringes gesondert:

Lemma 1.10 *Sei R ein primärer Ring (d.h. rad$(R) = Z(R)$). Dann erfüllt R acc für d-Annihilatoren genau dann, wenn rad(R) T-nilpotent ist.*

Beweis Die Notwendigkeit der T-Nilpotenz von $\text{rad}(R)$ wurde bereits in Lemma 1.3 b) gezeigt. Ist umgekehrt $\text{rad}(R) = Z(R)$ T-nilpotent, so folgt die Aussage direkt aus der Tatsache, dass $\text{Ann}(ab) = \text{Ann}(a)$ für jeden Nichtnullteiler $b \in R$ gilt. $\square$

Korollar 1.11 *Ist R Unterring eines perfekten Ringes (und erfüllt somit nach Lemma 1.3 a) acc für d-Annihilatoren), so erfüllt $R[X]$ für jede Menge X von Unbestimmten ebenfalls acc für d-Annihilatoren.*

Beweis Sei $R \leq T$ und T perfekt. Wegen $R[X] \leq T[X]$ und Lemma 1.3 a) genügt es, die Aussage für T zu zeigen. Daher sei oBdA $R = T$ ein lokaler Ring mit T-nilpotentem maximalen Ideal P. Wegen $\mathrm{rad}(R[X]) = \mathrm{rad}(R)[X]$ ist dann $R[X]$ primär mit T-nilpotentem Radikal $P[X]$ und erfüllt somit nach Lemma 1.10 acc für d-Annihilatoren. □

Bemerkung Korollar 1.11 ist zum Beispiel anwendbar, wenn R acc für d-Annihilatoren erfüllt und der totale Quotientenring T von R nulldimensional ist, da T dann als Lokalisierung von R ebenfalls acc für d-Annihilatoren erfüllt und somit perfekt ist.

In der Literatur wird für einen Ring R und eine Menge X von Unbestimmten über R häufig auch der Ring $R(X)$ betrachtet (siehe z.B. [12]). Nach Definition ist $R(X) := R[X]_S$, wobei $S := \{f \in R[X] : A_f = R\}$. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

Korollar 1.12 *Ist R perfekt, so auch $R(X)$.*

Beweis R habe die endlich vielen maximalen Ideale $M_1, \ldots, M_n$. Dann ist $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^n M_i[X]$. Somit sind $M_1[X]_S, \ldots, M_n[X]_S$ die maximalen Ideale von $R(X)$. Da $J(R) = \bigcap_{i=1}^n M_i$ T-nilpotent, ist nach Kor 1.9 auch $(\bigcap_{i=1}^n M_i)[X]$ T-nilpotent. Daher ist auch $(\bigcap_{i=1}^n M_i)[X]_S = (\bigcap_{i=1}^n M_i[X])_S = \bigcap_{i=1}^n M_i[X]_S = J(R(X))$ T-nilpotent, d.h. $R(X)$ ist perfekt. □

Nun zeigen wir die zu Satz 1.8 analoge Aussage für Moduln mit acc für d-Annihilatoren.

Satz 1.13 *Sei M ein R-Modul mit acc für d-Annihilatoren. Dann wird für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von endlich erzeugten Idealen von R die aufsteigende Folge $Ann(A_1) \subseteq Ann(A_1A_2) \subseteq \ldots$ in M stationär.*

Beweis Es genügt wieder, die Aussage für endliche Mengen A_n zu zeigen. Angenommen, es gilt $\mathrm{Ann}(A_1) \subset \mathrm{Ann}(A_1A_2) \subset \ldots$ in M. Wir zeigen nun induktiv: Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ existiert ein $a_n \in A_n$ derart, dass die Folge $\mathrm{Ann}(a_0) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Ann}(a_0 \cdots a_n) \subseteq \mathrm{Ann}(a_0 \cdots a_n A_{n+1}) \subseteq \mathrm{Ann}(a_0 \cdots a_n A_{n+1} A_{n+2}) \subseteq \ldots$ nicht stationär wird, wobei wir wieder $A_0 := \{1\}$ und $a_0 := 1$ setzen.
Der Induktionsanfang $n = 0$ gilt nach Annahme. Nun nehmen wir an, dass

für unendlich viele $m \geq n-1$ ein $x_m \in \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_{n-1} A_n \cdots A_{m+1})$ und ein $b_m \in a_1 \cdots a_{n-1} A_n \cdots A_m$ existieren mit $b_m x_m \neq 0$. Da A_n endlich ist, existiert ein $a_n \in A_n$, so dass $b_m \in a_1 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_m$ für unendlich viele $m \geq n$. Daher ist $x_m \in \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_{m+1}) \setminus \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_n A_{n+1} \cdots A_m)$ unendlich oft und wir haben den Induktionsschluss gezeigt.
Nach Voraussetzung wird aber die Folge $\mathrm{Ann}(a_1) \subseteq \mathrm{Ann}(a_1 a_2) \subseteq \ldots$ in M stationär, etwa bei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist aber wegen $\mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_k A_{k+1} \cdots A_m) \subseteq \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_m)$ $(m \geq k)$ auch $\mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_k) = \mathrm{Ann}(a_1 \cdots a_k A_{k+1}) = \ldots$ im Widerspruch zum oben gezeigten. □

Wir verwenden im Beweis von Lemma 1.14 und in der gesamten Arbeit folgende Schreibweise für Elemente aus Polynomringen $R[X]$ mit beliebig vielen Unbestimmten: Für endlich viele Polynome aus $R[X]$ existieren ja $x_1, \ldots, x_m \in X$, so daß diese Polynome in $R[x_1, \ldots, x_m]$ liegen. Ein $f \in R[x_1, \ldots, x_m]$ schreiben wir dann auf folgende Weise: Für $a := (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei $X^a := x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}$ und damit $f = \sum_{a \in \mathbb{N}_0^m} f_a X^a$ mit $f_a \in R$. Dabei verwenden wir nicht (wie sonst häufig in der Literatur) die lexikographische Ordnung auf $\mathbb{N}_0^m$, sondern führen eine zu ω isomorphe Ordnung $\preceq$ auf $\mathbb{N}_0^m$ ein: Für $c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{N}_0^m$ sei $|c| := c_1 + \cdots + c_m$; und für $c, c' \in \mathbb{N}_0^m$ sei $c \preceq c'$, falls $(|c|, c_1, \ldots, c_m) \leq (|c'|, c'_1, \ldots, c'_m)$ bezüglich der lexikographischen Ordnung in $\mathbb{N}_0^{m+1}$ ist.
Da $\mathbb{N}_0^m$ abzählbar ist und jedes Element $c \in \mathbb{N}_0^m \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ bezüglich $\preceq$ einen Vorgänger $V(c)$ besitzt (denn es gibt ja nur endlich viele $c' \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|c'| = |c|$), sieht man leicht, dass $\preceq$ als Ordnung isomorph zu ω ist. Ferner gilt, dass $\preceq$ mit der komponentenweisen Addition auf $\mathbb{N}_0^m$ verträglich ist (dies überträgt sich von der lexikographischen Ordnung). Diese Ordnung ermöglicht es, Polynome in endlich vielen Unbestimmten im wesentlichen wie Polynome in einer Unbestimmten zu behandeln.

Lemma 1.14 *Sei R ein reduzierter Ring, X eine Menge von Unbestimmten und $f, g, h \in R[X]$ mit $f = gh$. Sei ferner $f = \sum_c f_c X^c$, $g = \sum_c g_c X^c$, $h = \sum_c h_c X^c$ und d maximal bezüglich $\preceq$ mit $f_d \neq 0$ (ist $f = 0$, so sei $d := -\infty$ im Sinne von $-\infty \prec 0 = (0, \ldots, 0)$).*
Dann ist $g_b h_c = 0$ für alle b, c mit $d \prec b + c$.

Beweis Angenommen, die Menge $M := \{a : d \prec a$, es gibt b, c mit $b + c = a$ und $g_b h_c \neq 0\}$ ist nichtleer. Dann sei $\overline{a}$ maximal in M und $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$, wobei $\overline{b}$ minimal in $\{b :$ es gibt ein c mit $b + c = \overline{a}$ und $g_b h_c \neq 0\}$ sei. Der Koeffizientenvergleich bei $X^{\overline{a}}$ liefert wegen $d \prec \overline{a}$

$$\sum_{b+c=\overline{a}} g_b h_c = 0 \; .$$

Nach Wahl von $\overline{b}$ sind hierin die Summanden mit $b \prec \overline{b}$ gleich Null, und multipliziert man die Gleichung mit $h_{\overline{c}}$, so erhält man $g_{\overline{b}} h_{\overline{c}}^2 = 0$, denn nach Wahl von $\overline{a}$ ist $g_b h_{\overline{c}} = 0$ für $\overline{b} \prec b$. Da R reduziert ist, folgt $g_{\overline{b}} h_{\overline{c}} = 0$ im Widerspruch zur Wahl von $\overline{b}$ und $\overline{c}$. $\square$

Bemerkung Lemma 1.14 gilt ebenfalls (mit dem selben Beweis), falls man statt $\preceq$ die lexikographische Ordnung verwendet. Dies werden wir noch später beim Beweis von Satz 4.8 ausnutzen.

Korollar 1.15 *Sei R ein reduzierter Ring und X eine Menge von Unbestimmten. Dann ist $Ann_{R[X]}(g) = Ann_R(A_g)[X]$ für alle $g \in R[X]$.*

Beweis Es ist stets $\mathrm{Ann}_R(A_g)[X] \subseteq \mathrm{Ann}_{R[X]}(g)$. Sei also $h = \sum_c h_c X^c \in \mathrm{Ann}_{R[X]}(g)$ und $g = \sum_c g_c X^c$. Dann folgt aus Lemma 1.14 mit $f = 0$, dass $g_b h_c = 0$ für alle b, c gilt. Somit ist $h_c \in \mathrm{Ann}_R(A_g)$ für alle c, d.h. $h \in \mathrm{Ann}_R(A_g)[X]$. $\square$

Sehr hilfreich für die weiteren Untersuchungen in diesem Abschnitt ist ferner noch ein Satz von R. Gilmer (Corollary 28.3 in [12]), den wir hier ohne Beweis mit aufführen wollen:

Satz 1.16 (Gilmer) *Seien R ein Ring, X eine beliebige Menge von Unbestimmten über R und $f, g \in R[X]$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $A_f^{m+1} A_g = A_f^m A_{fg}$.*

Korollar 1.17 *Ist R ein reduzierter Ring mit acc für d-Annihilatoren, so erfüllt auch $R[X]$ acc für d-Annihilatoren.*

Beweis Da R reduziert ist, gilt $\mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(A^m)$ für jedes Ideal $A \subseteq R$ und jedes $m \in \mathbb{N}$; denn ist $rA^m = \{0\}$ und $a \in A$, so ist $ra^m = 0$, also $ra = 0$ und somit $r \in \mathrm{Ann}(A)$. Seien nun $f, g \in R[X]$. Nach Satz 1.16 existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $A_f^{m+1} A_g = A_f^m A_{fg}$. Es folgt $\mathrm{Ann}(A_f A_g) = \mathrm{Ann}(A_f^{m+1} A_g) = \mathrm{Ann}(A_f^m A_{fg}) \supseteq \mathrm{Ann}(A_{fg})$ und daher $\mathrm{Ann}(A_f A_g) = \mathrm{Ann}(A_{fg})$. Ist nun $\mathrm{Ann}(A_f) = \mathrm{Ann}(A_f A_g)$ in R, so folgt also nach Korollar 1.15 $\mathrm{Ann}_{R[X]}(f) = \mathrm{Ann}_R(A_f)[X] = \mathrm{Ann}_R(A_{fg})[X] = \mathrm{Ann}_{R[X]}(fg)$. Somit liefert Satz 1.13 die Behauptung. $\square$

Nun zitieren wir noch einen Satz von V. Camillo und R. Guralnick aus [5], der mit Lemma 1.3 a) sofort ein weiteres hinreichendes Kriterium liefert.

Satz 1.18 (Camillo/Guralnick) *Sei R ein Ring, der einen überabzählbaren Körper enthält, und (E) eine Eigenschaft, für die gilt: Ein Ring T erfüllt (E) genau dann, wenn jeder abzählbare Unterring von T (E) erfüllt. Dann erfüllt R (E) genau dann, wenn $R[X]$ (E) erfüllt.*

Korollar 1.19 *R erfülle acc für d-Annihilatoren und enthalte einen überabzählbaren Körper. Dann hat auch $R[X]$ acc für d-Annihilatoren.*

Es bleibt aber die allgemeine Frage offen, ob die aufsteigende Kettenbedingung für d-Annihilatoren auf den Polynomring übergeht.
In [22] und [23] wurden R-Moduln M mit der Eigenschaft (accr) betrachtet: Für jeden Untermodul N und jedes $a \in R$ wird die Folge $N : a \subseteq N : a^2 \subseteq \ldots$ stationär. Dies ist offensichtlich eine schwächere Eigenschaft als acc für d-Colons, und es gilt für eine Unbestimmte x über R, dass R bereits noethersch ist, falls $R[x]$ (accr) erfüllt (Theorem 2 in [23]). Für aufsteigende Folgen von *Annihilatoren* dieser Art können wir aber das folgende Resultat zeigen:

Satz 1.20 *Sei R ein Ring, in dem für jedes $a \in R$ die Folge $Ann(a) \subseteq Ann(a^2) \subseteq \ldots$ stationär wird. Dann wird auch für jedes $f \in R[X]$ die Folge $Ann(f) \subseteq Ann(f^2) \subseteq \ldots$ in $R[X]$ stationär.*

Beweis Analog zum Beweis von Theorem 1 in [22] sieht man, dass für jedes endlich erzeugte Ideal A von R die Folge $\mathrm{Ann}(A) \subseteq \mathrm{Ann}(A^2) \subseteq \ldots$ abbricht. Daher existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{Ann}(A_f^n) = \mathrm{Ann}(A_f^m)$ für alle $m \geq n$. Nach Satz 1.16 existiert ferner zu jedem $g \in R[X]$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_g^{k+2} = A_g^k A_{g^2}$. Wende dies auf $g = f, f^2, \ldots, f^{2^l}, \ldots$ an und bezeichne das zugehörige k mit k_l. ObdA sei $n \geq k_0$. Dann folgt $\mathrm{Ann}(A_f^n) = \mathrm{Ann}(A_f^{n+2}) = \mathrm{Ann}(A_f^n A_{f^2}) = \cdots = \mathrm{Ann}(A_f^n A_{f^2}^{k_1+2}) = \mathrm{Ann}(A_f^n A_{f^2}^{k_1} A_{f^4}) = \cdots = \mathrm{Ann}(A_f^n A_{f^2}^{k_1} \cdots A_{f^{2^{r-1}}}^{k_{r-1}} A_{f^{2^r}})$. Ist hierin $2^r \geq n$, so ist $\mathrm{Ann}(A_{f^n}) \subseteq \mathrm{Ann}(A_{f^{2^r}}) \subseteq \mathrm{Ann}(A_f^n) \subseteq \mathrm{Ann}(A_{f^n})$, d.h. $\mathrm{Ann}(A_f^n) = \mathrm{Ann}(A_f^m) = \mathrm{Ann}(A_{f^m})$ für alle $m \geq n$.
Sei nun $g \in \mathrm{Ann}(f^m)$ in $R[X]$. Dann ist $A_{f^m g} = (0)$ in R. Nach Satz 1.16 existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_{f^m}^{k+1} A_g = A_{f^m}^k A_{f^m g} = (0)$. Daher ist $A_g \subseteq \mathrm{Ann}(A_{f^m}^{k+1}) = \mathrm{Ann}(A_{f^n})$ und somit $g \in \mathrm{Ann}(f^n)$. Also gilt $\mathrm{Ann}(f^n) = \mathrm{Ann}(f^{n+1}) = \ldots$ in $R[X]$. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass viele der in diesem Abschnitt für Polynomringe bewiesenen Aussagen für Potenzreihenringe im Allgemeinen nicht gelten:

Beispiel 1.21 *Seien K ein Körper und x_n ($n \in \mathbb{N}_0$) Unbestimmte über K. Sei $R := K[x_n : n \in \mathbb{N}_0]/(x_n^{n+2} : n \in \mathbb{N}_0) + (x_i x_j : i \neq j)$ und a_n das Bild von x_n in R. Dann gilt:*
a) R ist lokal mit T-nilpotentem maximalen Ideal $P := (a_n : n \in \mathbb{N}_0)$.
b) $P[[x]]$ ist nicht T-nilpotent im Potenzreihenring $R[[x]]$.
c) Für $p := \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ist $Ann(p) \subset Ann(p^2) \subset \ldots$ in $R[[x]]$, d.h. $R[[x]]$ erfüllt nicht acc für d-Annihilatoren.

Beweis a) P ist offensichtlich das einzige Primideal von R. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen aus P und $k \in \mathbb{N}$ mit $f_1 \in (a_1, \ldots, a_k)$. Dann ist $f_1 \cdots f_{k+2} = 0$ nach Konstruktion von R, d.h. P ist T-nilpotent (P ist aber nicht nilpotent, wie aus b) bzw. c) folgt).
b) folgt sofort aus c); mehr noch: Es ist sogar $P[[x]] \not\subseteq \mathrm{rad}(R[[x]])$.
c) Induktiv zeigt man leicht: $p^n = \sum_{i=n-1}^{\infty} a_i^n x^{ni}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber $a_{n-1} \in \mathrm{Ann}(p^n) \setminus \mathrm{Ann}(p^{n-1})$, denn $a_{n-1}^n \neq 0$ ist ein Koeffizient von $a_{n-1}p^{n-1}$. □

Bemerkung Ist A ein T-nilpotentes Ideal eines Ringes R, so ist aber stets $A \cdot R[[x]]$ T-nilpotent: Zu jedem Element $f \in A \cdot R[[x]]$ existieren ja $a_1, \ldots, a_k \in A$ mit $A_f \subseteq (a_1, \ldots, a_k)$, und wir können die Aussage analog zu Korollar 1.9 beweisen.

Nun geben wir noch ein Beispiel dafür, dass accpa nicht auf den Polynomring übergeht. Kerr gab in [21] das erste Gegenbeispiel für die analoge Fragestellung bei acc für Annihilatoren (aufsteigende Kettenbedingung für *alle* Annihilatorideale). Costa modifizierte dieses Beispiel in [7], und unsere Konstruktion ist hieran angelehnt.

Beispiel 1.22 *Seien* $S := \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, $T := \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, $U := \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, $V := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, $W := \{w_n : n \in \mathbb{N}\}$ *Mengen von Unbestimmten über* $K := \mathbb{Z}_2$. *Sei* $I := (SU) + (TW) + (s_k v_n + t_k u_n : n \le k) + (s_k w_n + t_k v_n : n \le k) + (s_k v_n + t_k u_n + s_k w_n + t_k v_n : n, k \in \mathbb{N}) + (S, T, U, V, W)^3$ *in* $K[S, T, U, V, W]$ *und* $R := K[S, T, U, V, W]/I$. *Dann erfüllt* R *acc für Annihilatoren, und der Polynomring* $R[x]$ *in einer Unbestimmten erfüllt nicht accpa.*

Beweis Sei P das maximale Ideal von $K[S, T, U, V, W]$, das von den Unbestimmten aus S, T, U, V, W erzeugt wird, L die additive Untergruppe der homogenen Polynome vom Grad 1 und Q die der homogenen Polynome vom Grad 2 in $K[S, T, U, V, W]$. Wir zeigen zunächst für alle $k \in \mathbb{N}$:
(i) $I : s_k = \sum_i K u_i + P^2$ (ii) $I : t_k = \sum_i K w_i + P^2$ (iii) $I : u_k = \sum_i K s_i + P^2$
(iv) $I : v_k = P^2$ (v) $I : w_k = \sum_i K t_i + P^2$ (vi) $I : (s_k + t_k) = \sum_i K(u_i + v_i + w_i) + P^2$
(vii) $I : (u_k + v_k + w_k) = \sum_i K(s_i + t_i) + P^2$ (viii) $I : P^2 = P$
Dazu genügt wegen $P^3 \subseteq I$ z.B. bei (i) zu zeigen, dass $(I : s_k) \cap L = \sum_i K u_i$ ist (und analog bei (ii)-(viii)). Da I von homogenen Polynomen erzeugt wird, sieht man leicht, dass

$$\begin{aligned} I \cap Q &= \sum_{n,k\in\mathbb{N}} K s_k u_n + \sum_{n,k\in\mathbb{N}} K t_k w_n + \sum_{n\le k} K(s_k v_n + t_k u_n) + \sum_{n\le k} K(s_k w_n + t_k v_n) \\ &\quad + \sum_{n,k\in\mathbb{N}} K(s_k v_n + t_k u_n + s_k w_n + t_k v_n) \end{aligned}$$

ist. Insbesondere gilt also

$$I \cap Q \subseteq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} K s_k u_n + \sum_{n,k \in \mathbb{N}} K t_k w_n + \sum_{n,k \in \mathbb{N}} K(s_k v_n + t_k u_n) + \sum_{n,k \in \mathbb{N}} K(s_k w_n + t_k v_n) \qquad (*) .$$

Zu (i): Nach Definition von I ist $\sum_i K u_i \subseteq I : s_k$. Sei $f \in L$ mit $s_k f \in I$, also $s_k f \in I \cap Q$. Angenommen, es ist $f \notin \sum_i K u_i$. Dann komme oBdA keine Unbestimmte u_i in f vor, und der Koeffizientenvergleich in $(*)$ liefert sofort, dass kein s_i und kein t_i in f vorkommt. Käme ein v_i bzw. ein w_i in f vor, so auch der Term $t_k u_i$ bzw. $t_k v_i$ in $s_k f$, Widerspruch. Daher ist doch $f \in \sum_i K u_i$.
Die Fälle (ii)-(vii) behandelt man ganz analog, und (viii) ist trivial. Um den Leser nicht zu langweilen, sei hier etwa noch der Fall (vi) aufgeführt:
Zu (vi): Nach Definition von I ist $\sum_i K(u_i + v_i + w_i) \subseteq I : (s_k + t_k)$. Sei $f \in L$ mit $(s_k + t_k) f \in I$, also $(s_k + t_k) f \in I \cap Q$. Angenommen, es ist $f \notin \sum_i K(u_i + v_i + w_i)$. Dann komme oBdA kein Term der Form $u_i + v_i + w_i$ in f vor. Nach Koeffizientenvergleich in $(*)$ kommt kein s_i und kein t_i in f vor. Kommt ein u_n in f vor, so auch $s_k v_n$ in $(s_k + t_k) f$ und somit v_n in f. Analog gilt: Kommt w_n in f vor, so auch v_n. Kommt aber v_n in f vor, so auch $t_k u_n$ und $s_k w_n$ in $(s_k + t_k) f$, also auch u_n und w_n in f. Daher ist (wegen $K = \mathbb{Z}_2$) doch $f \in \sum_n K(u_n + v_n + w_n)$.
Man sieht leicht, dass ein beliebiger Durchschnitt von Idealen der Form (i)-(viii) wieder von dieser Form ist. Um nun die aufsteigende Kettenbedingung für Annihilatoren in R nachzuweisen, reicht es daher aus zu zeigen, dass jedes Ideal $I : f$ mit $f \in P$ gleich einem Ideal aus (i)-(viii) ist; denn wegen $I : F = \bigcap_{f \in F} I : f$ für $F \subseteq P$ sind ja dann (i)-(viii) alle echten Annihilatorideale in R.
Sei also $g \in I : f$ mit oBdA $f \in L$ (denn ist $f \in P \setminus L$, so sei oBdA $f = l + q \in L + Q$ mit $l \neq 0$, da sonst $I : f = P$ von der Form (viii), und dann ist $gf \in I \Leftrightarrow gl \in I$). Ferner sei oBdA $g \in L$, d.h. es ist $gf \in I \cap Q$.
1. Fall: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ derart, dass s_k in f vorkommt, aber t_k nicht. Durch Koeffizientenvergleich liest man dann das folgende ab: Kein s_n und kein t_n kommt in g vor. Ferner kommt kein v_n in g vor, denn sonst müsste mit $s_k v_n$ auch der Term $t_k u_n$ in gf vorkommen; t_k kommt aber weder in g noch in f vor. Analog kommt kein w_n in g vor. Also ist $g \in \sum_i K u_i$ und $I : f = \sum_i K u_i + P^2$ von der Form (i).
2. Fall: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass t_k in f vorkommt, aber s_k nicht. Man geht dann analog zum 1. Fall vor und erhält $g \in \sum_i K w_i$ und $I : f = \sum_i K w_i + P^2$ von der Form (ii).
3. Fall: Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $s_k + t_k$ in f vorkommt. Durch Koeffizientenvergleich liest man wieder ab, dass kein s_n und kein t_n in g vorkommt. Kommt ein u_n in g vor, so auch $t_k u_n$ in gf, also auch $s_k v_n$ in gf und somit v_n in g (da s_k nicht in g vorkommt). Analog gilt: Kommt w_n in g vor, so auch v_n. Kommt aber v_n in g vor, so auch $s_k v_n$

und $t_k v_n$ in gf, also auch $t_k u_n$ und $s_k w_n$ in gf und somit u_n und w_n in g. Daher ist (wegen $K = \mathbb{Z}_2$) $g \in \sum_i K(u_i + v_i + w_i)$ und $I : f = \sum_i K(u_i + v_i + w_i) + P^2$ von der Form (vi).
Die weiteren Fälle behandelt man analog:
4. Fall: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass u_n in f vorkommt, aber nicht auch v_n und w_n. Dann ist $g \in \sum_i Ks_i$ und $I : f = \sum_i Ks_i + P^2$ von der Form (iii).
5. Fall: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass v_n in f vorkommt, aber nicht auch u_n und w_n. Dann ist $g = 0$ und $I : f = P^2$ von der Form (iv).
6. Fall: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass w_n in f vorkommt, aber nicht auch u_n und v_n. Dann ist $g \in \sum_i Kt_i$ und $I : f = \sum_i Kt_i + P^2$ von der Form (v).
7. Fall: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $u_n+v_n+w_n$ in f vorkommt. Dann ist $g \in \sum_i K(s_i+t_i)$ und $I : f = \sum_i K(s_i + t_i) + P^2$ von der Form (vii).
Wegen $K = \mathbb{Z}_2$ und $f \in L$ sind dies alle zu betrachtenden Fälle. Somit sind alle Annihilatorideale von R bestimmt und die aufsteigende Kettenbedingung für Annihilatoren in R ist nachgewiesen.
Wir behaupten nun, dass $R[x]$ nicht accpa erfüllt. Dazu genügt es, $I[x] : (s_k + t_k x) = (u_n + v_n x + w_n x^2 \ : \ n \leq k) + P^2[x]$ in $K[S, T, U, V, W][x]$ zu zeigen, da dann $\mathrm{Ann}(\overline{s_1} + \overline{t_1}x) \subset \mathrm{Ann}(\overline{s_2} + \overline{t_2}x) \subset \ldots$ in $R[x]$ gilt.
Nach Konstruktion ist $(u_n + v_n x + w_n x^2 : n \leq k) + P^2[x] \subseteq I[x] : (s_k + t_k x)$. Angenommen, es existiert ein $f \in I[x] : (s_k + t_k x)$ mit $f \notin (u_n + v_n x + w_n x^2 : n \leq k) + P^2[x]$. Dann seien oBdA alle Koeffizienten von f aus L (da $P^2(s_k + t_k x) \subseteq I[x]$), und wir wählen $f = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i$ mit einer minimalen Anzahl von Termen, die insgesamt in $f_0, \ldots, f_m$ auftreten, wobei $f_i \in K[S, T, U, V, W]$. Sei ferner durch eventuelles Ausklammern einer Potenz von x oBdA $f_0 \neq 0$. Nach Koeffizientenvergleich bezüglich x sind $s_k f_0, s_k f_1 + t_k f_0, s_k f_2 + t_k f_1 \in I \cap Q$. Es folgt $f_0 \in \sum_i K u_i$ nach (i). Es komme etwa u_n in f_0 vor. Durch Koeffizientenvergleich in $s_k f_1 + t_k f_0 \in I \cap Q$ mittels der Darstellung von $I \cap Q$ folgt dann, dass v_n in f_1 vorkommt, u_n aber nicht (nach Wahl von f). Ebenso folgt durch Koeffizientenvergleich in $s_k f_2 + t_k f_1 \in I \cap Q$ mittels der Darstellung von $I \cap Q$, dass $n \leq k$ sein muss, sowie dass w_n in f_2 vorkommt. Dann ist $g := f + (u_n + v_n x + w_n x^2) \in I[x] : (s_k + t_k x)$ und $g \notin (u_n + v_n x + w_n x^2 : n \leq k) + P^2[x]$ im Widerspruch zur Wahl von f. Daher ist $I[x] : (s_k + t_k x) = (u_n + v_n x + w_n x^2 : n \leq k) + P^2[x]$, was noch zu zeigen war. □

Kapitel 2

Die aufsteigende Kettenbedingung für d-Colons

2.1 ACC für d-Colons impliziert pan-acc

Als Hauptergebnis in diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass jeder Modul mit acc für d-Colons pan-acc erfüllt, d.h. er erfüllt n-acc für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit anderen Worten: Jede aufsteigende Folge von endlich erzeugten Untermoduln, für die die Folge der Mächtigkeiten der Erzeugendensysteme beschränkt bleibt, wird stationär. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Resultats von W. Heinzer und D. Lantz, die in [15] die pan-acc-Eigenschaft für stark laskersche Moduln nachwiesen. Auch andere Ergebnisse aus der Literatur werden hierdurch verallgemeinert:
D. Jonah zeigte in [19], dass jeder Modul über einem perfekten Ring pan-acc erfüllt, und S. Visweswaran zeigte in [30], dass ein Integritätsring mit acc für d-Colons accp erfüllt.
Ein wichtiges Hilfsmittel erhalten wir durch die Tatsache, dass die Aussage des Lemmas von Nakayama auch in Moduln mit acc für d-Colons gültig ist (Satz 2.3). Um dies zu zeigen, benötigen wir ein Ergebnis von C.P. Lu aus [23]:

Proposition 2.1 (Lu) *Sei M ein Modul, der (accr) erfüllt. Dann besitzt jeder echte Untermodul eine (evtl. unendliche) Zerlegung in primäre Untermoduln.*

Die folgende Aussage zeigten Heinzer und Lantz für laskersche Moduln (Proposition 3.1. in [14]). Die Endlichkeit der Primärzerlegung wird aber in ihrem Beweis gar nicht verwendet. Deshalb gilt mit dem gleichen Beweis (den wir der Vollständigkeit halber hier mit anführen) auch:

Proposition 2.2 *Sei M ein R-Modul, in dem jeder echte Untermodul eine (evtl. unendliche) Zerlegung in primäre Untermoduln besitzt. Dann ist $\{0\}$ der Durchschnitt aller primären Untermoduln, deren Radikal ein maximales Ideal in R ist.*

Beweis Angenommen, es existiert ein $x \neq 0$, das in allen primären Untermoduln von M enthalten ist, deren Radikal maximal in R ist. Dann sei P ein maximales Ideal von R mit $P \supseteq \mathrm{Ann}(x)$. Wäre $x \in Px$, so wäre etwa $x = ax$ für ein $a \in P$, also $(1-a)x = 0$ und folglich $1 - a \in \mathrm{Ann}(x) \subseteq P$ im Widerspruch zu $a \in P$. Daher ist $x \notin Px$. Nach Voraussetzung existieren primäre Untermoduln Q_i von M mit $Px = \bigcap_{i \in I} Q_i$, und nach obigem ist $x \notin Q_j$ für ein $j \in I$. Wegen $Px \subseteq Q_j$ und Q_j primär folgt $P \subseteq \mathrm{rad}(Q_j)$. Da P maximal, ist $\mathrm{rad}(Q_j) = P$ maximal und somit doch $x \in Q_j$ nach Wahl von x, ein Widerspruch. □

Wir zeigen nun, dass die Aussage des Lemmas von Nakayama, die ja klassischerweise für noethersche Ringe bzw. Moduln gilt, allgemein in Moduln mit acc für d-Colons richtig ist.

Definition Ein R-Modul M erfüllt *Nakayama's Lemma* (kurz: „M erfüllt *(NL)*“), falls $\{0\}$ der einzige Untermodul N von M ist mit $J(R)N = N$.

Satz 2.3 *Ein Modul mit acc für d-Colons erfüllt (NL).*

Beweis Sei M ein R-Modul mit acc für d-Colons und N ein Untermodul von M mit $J(R)N = N$. Zu zeigen ist $N = \{0\}$. Dazu reicht es nach Proposition 2.2 aus zu zeigen, dass N in jedem primären Untermodul enthalten ist, dessen Radikal ein maximales Ideal von R ist. Nehmen wir also an, es existiert ein maximales Ideal P von R und ein P-primärer Untermodul Q von M mit $N \nsubseteq Q$. Dann ist $Q : N$ ein P-primäres Ideal in R, wie man unmittelbar nachrechnet. Wegen $J(R)N = N$ ist erst recht $PN = N$, und daher ist $(Q : N) : P = Q : PN = Q : N$. Nun folgt aus Exercise 27 a), Chapter IV §2 von [3] die Existenz eines $a_1 \in P$, so dass $(Q : N) : a_1 = Q : a_1N$ ein P-primäres Ideal von R mit $Q : a_1N \supset Q : N$ ist. Es ist aber wieder $(Q : a_1N) : P = Q : a_1N$ wegen $PN = N$. Daher lässt sich dieser Prozess fortsetzen, und wir finden Elemente $a_1, a_2, \dots \in R$ mit $(Q : N) : a_1 \subset (Q : N) : a_1a_2 \subset \dots$ in R. Da aber M/Q acc für d-Annihilatoren erfüllt, hat nach Lemma 1.2 c) auch der Ring $R/(Q : N)$ acc für d-Annihilatoren, ein Widerspruch. □

Wir wollen die pan-acc-Eigenschaft für Moduln mit acc für d-Colons zunächst im Spezialfall eines Moduls M über einem lokalen Ring (R, P) zeigen. Das Hilfsmittel, das

Heinzer und Lantz entwickelten und zum Nachweis von pan-acc für stark laskersche Moduln verwendeten, verlangte $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k M/N = \{0\}$ für jeden endlich erzeugten Untermodul N von M. Wir bemerken hier zunächst, dass $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k M = \{0\}$ sogar schon für Moduln mit der Eigenschaft (LA_{III}), die am Anfang von Kapitel 1 erwähnt wurde, gilt:
Ist Q ein primärer Untermodul von M mit $\mathrm{rad}(Q) = P$, so betrachte die Folge $Q : P \subseteq Q : P^2 \subseteq \ldots$, und es sei etwa $Q : P^k = Q : P^{k+1}$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $Q' := Q : P^k$. Wäre $Q' \subset M$, so wäre auch Q' P-primär, und aus $Q' : P = Q'$ folgte wie in obigem Beweis ein Widerspruch mit der Übungsaufgabe aus [3]. Daher ist $Q' = M$, d.h. $P^k M \subseteq Q$. Somit folgt $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k M \subseteq \bigcap\{Q \leq M : Q$ primär und $\mathrm{rad}(Q) = P\} = \{0\}$ nach Proposition 2.2.
Diese Technik genügt für Moduln mit acc für d-Colons jedoch nicht, denn es gibt ja beispielsweise lokale perfekte Ringe (R, P) mit $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k \neq (0)$ (etwa der Ring $K[x_n : n \in \mathbb{N}_0]/Q$ mit $Q := (x_0 - x_m x_{k_1} \cdots x_{k_m} : 1 \leq m < k_1 < \cdots < k_m) + (x_n^2 : n \in \mathbb{N}_0)$; siehe Bsp. b) vor Kor. 1.17 in [27]). Da offensichtlich *(NL)* in M erfüllt ist, wenn $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k M = \{0\}$ gilt, bietet sich eine Verallgemeinerung von Proposition 2.1 von [15] mit Hilfe des Lemmas von Nakayama an. Dies leistet Proposition 2.4 mit einem ähnlichen Beweis.

Proposition 2.4 *Sei (R, P) ein lokaler Ring und M ein R-Modul. Erfüllt M/N für jeden $(n-1)$-erzeugten Untermodul N von M Nakayama's Lemma, so erfüllt M n-acc.*

Beweis Sei zunächst $n = 1$, d.h. M erfüllt *(NL)*. Angenommen, es gibt Elemente $x_j \in M$ mit $\{0\} \subset Rx_1 \subset Rx_2 \subset \ldots$, etwa $x_j = r_j x_{j+1}$ mit $r_j \in P$. Dann sei N der von den x_j $(j \in \mathbb{N})$ erzeugte Untermodul von M. Nun ist aber $N = PN$ im Widerspruch zu *(NL)*.
Die Behauptung gelte nun für ein $n \in \mathbb{N}$, und M/N erfülle für jeden n-erzeugten Untermodul N von M Nakayama's Lemma. Angenommen, es gibt Untermoduln $N_k = Rx_{1,k} + \cdots + Rx_{n+1,k}$ von M mit $x_{j,k} \in M$ und $\{0\} \subset N_1 \subset N_2 \subset \ldots$.
1.Fall: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $N_1 \not\subseteq PN_k$. Dann existiert zu jedem k ein erzeugendes Element von N_1, das nicht in PN_k enthalten ist. Da N_1 endlich erzeugt ist, sei oBdA $x := x_{1,1} \notin PN_k$ für unendlich viele k, also oBdA (durch Auswählen der entsprechenden Teilfolge) für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $x \in N_k$, sei $x = r_{1,k}x_{1,k} + \cdots + r_{n+1,k}x_{n+1,k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $r_{j,k} \in R$. Wegen $x \notin PN_k$ existiert dann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein j_k mit $r_{j_k,k} \notin P$. Daher kann man $x_{j_k,k}$ durch x als erzeugendes Element von N_k ersetzen. Somit ist $N_1/Rx \subset N_2/Rx \subset \ldots$ eine aufsteigende Folge von n-erzeugten Untermoduln in M/Rx. Ist nun U/Rx ein $(n-1)$-erzeugter Untermodul von M/Rx, so ist $U + Rx$ ein n-erzeugter Untermodul von M, so dass nach Voraussetzung

$M/(U+Rx) \cong (M/Rx)/(U/Rx)$ *(NL)* erfüllt. Nach Induktionsvoraussetzung hat also M/Rx n-acc im Widerspruch zu $N_1/Rx \subset N_2/Rx \subset \dots$.
2. Fall: Es ist $N_1 \subseteq PN_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei oBdA k=2, und nach dem 1.Fall sei oBdA $N_2 \subseteq PN_3$ etc. Sei nun $N := \bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$. Dann ist offenbar $N = PN$, aber nach Voraussetzung erfüllt M *(NL)*. Dies liefert den Widerspruch $N = \{0\}$. □

Da die aufsteigende Kettenbedingung für d-Colons ja nach Definition auch in jeder Faktorstruktur erhalten bleibt, liefern Satz 2.3 und Proposition 2.4:

Korollar 2.5 *Ist (R,P) ein lokaler Ring und M ein R-Modul mit acc für d-Colons, so erfüllt M pan-acc.*

Nun wollen wir vom lokalen auf den globalen Fall schließen. Die Resultate von Heinzer und Lantz sind für unsere Zwecke wiederum nicht ausreichend. Um zu zeigen, dass eine aufsteigende Folge von Untermoduln abbricht, falls dies in jeder Lokalisierung nach einem maximalen Ideal der Fall ist, dürfen bei ihrer Methode die beteiligten Untermoduln jeweils nur endlich viele schwach assoziierte Primideale besitzen, oder der zu Grunde liegende Ring muss endliche Krulldimension haben (Corollary 3.3 und Theorem 3.4 in [15]).
Der folgende Satz ermöglicht nun die Globalisierung von Korollar 2.5:

Satz 2.6 *Sei M ein R-Modul und $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von Untermoduln von M derart, dass für jedes maximale Ideal P von R die Folge $(N_1)_P \subseteq (N_2)_P \subseteq \dots$ in M_P stationär wird. Dann wird die Folge auch in M stationär, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*
a) M erfüllt acc für d-Colons.
b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist N_n endlich erzeugt und $Z(M/N_n)$ enthalten in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen von R.

Beweis Wir beweisen beide Fälle simultan und müssen nur an einer Stelle für a) bzw. b) unterschiedlich argumentieren. In beiden Fällen ist stets $Z(M/N_n)$ enthalten in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen von R (nach Korollar 1.7). Wir nehmen indirekt $N_1 \subset N_2 \subset \dots$ an. Nun konstruieren wir induktiv eine Teilfolge $(M_n)_n$ von $(N_n)_n$ und multiplikativ abgeschlossene Mengen S_n mit folgenden Eigenschaften: Es ist $(M_1)_{S_n} \subset \dots \subset (M_{n+1})_{S_n} = (M_{n+2})_{S_n} = \dots$ und S_n ist der Durchschnitt von S_{n-1} mit dem Komplement einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen in R, die $Z(M/M_n)$ überdecken, wobei $S_0 := R$.
Dazu sei $M_1 := N_1$ und k_1 der Index, ab dem die Folge $(N_1)_{S_1} \subseteq (N_2)_{S_1} \subseteq \dots$

stationär wird (die Existenz von k_1 folgt aus der bekannten Tatsache, dass eine aufsteigende Folge von Untermoduln über einem semilokalen Ring abbricht, falls dies für jede Lokalisierung nach einem maximalen Ideal gilt). Wäre $(N_1)_{S_1} = (N_2)_{S_1}$, so existierte zu $x \in N_2 \setminus N_1$ ein $s \in S_1$ mit $sx \in N_1$ im Widerspruch zu $s \notin Z(M/N_1)$. Daher ist $k_1 > 1$, und mit $M_2 := N_{k_1}$ gilt $(M_1)_{S_1} \subset (M_2)_{S_1} = (N_{k_1+1})_{S_1} = \dots$. Analog sei etwa k_{n-1} so, dass $M_n = N_{k_{n-1}}$ gewählt wurde. Dann sei k_n der Index, ab dem $(N_1)_{S_n} \subseteq (N_2)_{S_n} \subseteq \dots$ stationär wird. Aus $S_n \cap Z(M/M_n) = \emptyset$ folgt dann wieder $k_n > k_{n-1}$. Nun setzen wir $M_{n+1} := N_{k_n}$, und wegen $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ und der Induktionsvoraussetzung folgt $(M_1)_{S_n} \subset \dots \subset (M_{n+1})_{S_n} = (M_{n+2})_{S_n} = \dots$. Somit ist die Teilfolge (M_n) mit den obigen Eigenschaften konstruiert.
Wir zeigen nun $M_n : M_{n+1} = M_n : M_k$ in R für jedes $k > n$. Dazu sei $a \in M_n : M_{n+1}$. Wegen $(M_{n+1})_{S_n} = (M_k)_{S_n}$ ist $\frac{a}{1} \in (M_n)_{S_n} : (M_k)_{S_n}$ in R_{S_n}. Sowohl im Fall a) als auch im Fall b) existiert ein globales $s \in S_n$ mit $saM_k \subseteq M_n$:
a) Ist $a \in M_n : M_k$, so wähle $s = 1$. Andernfalls existiert ein $x_1 \in M_k$ mit $ax_1 \notin M_n$. Zu x_1 existiert aber ein $s_1 \in S_n$ mit $s_1 a x_1 \in M_n$. Daher ist $M_n : a \subset M_n : s_1 a$. Ist $s_1 a \in M_n : M_k$, so wähle $s = s_1$. Andernfalls setze diesen Prozess wie oben fort. Da M acc für d-Colons erfüllt, bricht dies ab und man erhält ein $s \in S_n$ mit $sa \in M_n : M_k$.
b) Ist $M_k = Rx_1 + \dots + Rx_m$ endlich erzeugt und $s_i \in S_n$ mit $s_i a x_i \in M_n$ für alle $i = 1, \dots, m$, so gilt $saM_k \subseteq M_n$ mit $s := s_1 \cdots s_m$.
Aus $s \notin Z(M/M_n)$ folgt dann wieder in beiden Fällen $aM_k \subseteq M_n$, d.h. $a \in M_n : M_k$.
Es gilt also $M_n : M_{n+1} = M_n : M_{n+2} = \dots = M_n : N$ für jedes n, wobei $N := \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.
Nun betrachten wir die Folge $M_1 : N \subseteq M_2 : N \subseteq \dots$ in R und wählen ein maximales Ideal P von R, das diese Kette enthält (dies geht wegen $M_n \subset N$ für alle n). Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(M_n)_P = (M_{n+1})_P = \dots$, und mit der gleichen Argumentation wie oben für die Fälle a) bzw. b) existiert wieder ein globales $s \in R \setminus P$ mit $sM_{n+1} \subseteq M_n$. Dann ist aber $s \in M_n : M_{n+1} = M_n : N \subseteq P$, ein Widerspruch. □

Satz 2.6 und Korollar 2.5 liefern unser Hauptergebnis in diesem Abschnitt:

Korollar 2.7 *Jeder Modul mit acc für d-Colons erfüllt pan-acc.*

Ferner folgt aus Satz 2.6 ebenfalls:

Korollar 2.8 *In einem ZD-Modul wird eine aufsteigende Folge endlich erzeugter Untermoduln genau dann stationär, wenn dies in jeder Lokalisierung nach einem maximalen Ideal der Fall ist.*

Man beachte, dass wir hier auch einen alternativen Beweis für die Tatsache erhalten haben, dass ein ZD-Ring R mit noetherschen Lokalisierungen R_P für jedes maximale

Ideal P bereits selbst noethersch ist (gezeigt von W. HEINZER und J. OHM in [18]), denn es genügt ja, die aufsteigende Kettenbedingung für endlich erzeugte Ideale zu zeigen.

2.2 Weitere Eigenschaften von Ringen mit acc für d-Colons

Wie wir bereits gesehen haben, gelten in Moduln mit acc für d-Colons viele der klassischen Aussagen aus der Theorie der noetherschen Moduln: Schwach assoziierte Primideale sind bereits assoziierte Primideale, die Nullteiler sind eine endliche Vereinigung von Primidealen (ZD-Eigenschaft), das Lemma von Nakayama gilt, und als aufsteigende Kettenbedingung bleibt zumindest die pan-acc-Eigenschaft erhalten. Für Ringe mit acc für d-Colons wollen wir nun weitere Eigenschaften wie etwa die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale nachweisen und auch einige hinreichende Kriterien angeben, für die der Ring bereits noethersch ist.
Zunächst zeigen wir aber auf klassische Weise naheliegende Aussagen für den Übergang von R zu endlich erzeugten R-Moduln. Satz 2.9 wurde in [30] ohne expliziten Beweis angemerkt; wir führen den Beweis hier mit auf.

Satz 2.9 *Sei M ein R-Modul und N ein Untermodul von M. Dann sind äquivalent:*
(i) M erfüllt acc für d-Colons.
(ii) N und M/N erfüllen acc für d-Colons.

Beweis Trivialerweise folgt (ii) aus (i) mit Lemma 1.2 f). Es gelte nun (ii), und wir betrachten eine aufsteigende Folge $L : a_1 \subseteq L : a_1a_2 \subseteq \ldots$ in M, wobei L ein Untermodul von M ist und $a_i \in R$ für alle i. Wegen $(L+N)/N :_{M/N} b = ((L+N) :_M b)/N$ für alle $b \in R$ sei oBdA $(L+N) : a_1 = (L+N) : a_1a_2 = \ldots$ in M und $(L \cap N) :_N a_2 = (L \cap N) :_N a_2a_3 = \ldots$ in N. Sei nun $x \in L : a_1 \cdots a_k$ für ein $k \geq 2$. Dann ist $x \in (L+N) : a_1 \cdots a_k = (L+N) : a_1$, d.h. $a_1x = y + z$ für gewisse $y \in L$, $z \in N$. Nach Wahl von x ist daher $a_2 \cdots a_k z \in L \cap N$ und somit $a_2 z \in L \cap N$ (da $z \in N$). Es folgt $a_1a_2x = a_2y + a_2z \in L$, d.h. $x \in L : a_1a_2$, und die Folge bricht ab.□

Insbesondere liefert Satz 2.9, dass für zwei R-Moduln M und N mit acc für d-Colons auch $M \oplus N$ acc für d-Colons erfüllt. Daraus folgt induktiv: Erfüllt R acc für d-Colons, so auch der R-Modul R^n für alle $n \in \mathbb{N}$. Da jeder n-erzeugte R-Modul ein homomorphes Bild von R^n ist, erhalten wir:

Korollar 2.10 *Sei R ein Ring mit acc für d-Colons. Dann hat auch jeder endlich erzeugte R-Modul diese Eigenschaft.*

Auch bei der Umkehrung gilt die zum noetherschen Fall analoge Aussage:

Korollar 2.11 *Ist M ein endlich erzeugter R-Modul mit acc für d-Colons, so erfüllt auch $R/Ann(M)$ acc für d-Colons. Ist also insbesondere M ein treuer R-Modul (d.h. $Ann(M) = (0)$), so erfüllt R acc für d-Colons.*

Beweis Sei $M = Rx_1 + \cdots + Rx_n$. Dann ist $\mathrm{Ann}(M) = \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ann}(x_i)$ und $R/\mathrm{Ann}(x_i) \cong Rx_i$ als R-Moduln. Daher erfüllt $R/\mathrm{Ann}(x_i)$ acc für d-Colons für alle i, also auch ihre direkte Summe nach der Bemerkung nach Satz 2.9. Da $R/\mathrm{Ann}(M) \leq \bigoplus_{i=1}^n R/\mathrm{Ann}(x_i)$ als R-Moduln, folgt die Behauptung. □

Nach [13] hat jeder laskersche Ring noethersches Spektrum, d.h. er erfüllt die aufsteigende Kettenbedingung für Radikalideale. Dies ist äquivalent dazu, dass er die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale erfüllt und über jedem Ideal nur endlich viele minimale Primideale liegen [25]. Wie wir schon gesehen haben, kann ein Ring mit acc für d-Colons durchaus unendlich viele minimale Primideale besitzen. Es stellt sich daher die Frage, ob in diesem Fall zumindest die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale erfüllt ist. Dies ist tatsächlich der Fall, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2.12 *Erfüllt R acc für d-Colons, so erfüllt R auch die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale.*

Beweis Wir nehmen indirekt an, dass es eine echt aufsteigende Folge $P_0 \subset P_1 \subset \ldots$ von Primidealen in R gibt. Dann wähle für $i \geq 1$ Elemente $x_i \in P_i \setminus P_{i-1}$. Setze $I := (x_1 \cdots x_{i-1}x_i^2 : i \geq 1)$. Wir zeigen $x_1 \cdots x_m \notin I$ für alle $m \geq 1$.
Angenommen $x_1 \cdots x_m \in I$. Dann existieren ein $n > m$ und $r_1, \ldots, r_n \in R$ mit $x_1 \cdots x_m = \sum_{i=1}^n r_i x_1 \cdots x_{i-1}x_i^2$. Wir zeigen nun $x_k \cdots x_m - \sum_{i=k}^n r_i x_k \cdots x_{i-1}x_i^2 \in P_{k-1}$ induktiv über k, wobei $1 \leq k \leq m+1$. Der Induktionsanfang $k = 1$ ist trivial. Daher sei $1 \leq k < m+1$ und $x_k \cdots x_m - \sum_{i=k}^n r_i x_k \cdots x_{i-1}x_i^2 \in P_{k-1}$. Da $x_k \notin P_{k-1}$, erhalten wir $x_{k+1} \cdots x_m - r_k x_k - \sum_{i=k+1}^n r_i x_{k+1} \cdots x_{i-1}x_i^2 \in P_{k-1} \subseteq P_k$, und da $x_k \in P_k$, folgt der Induktionsschluss $x_{k+1} \cdots x_m - \sum_{i=k}^n r_i x_{k+1} \cdots x_{i-1}x_i^2 \in P_k$. Speziell $k = m+1$ liefert nun $1 - \sum_{i=m+1}^n r_i x_{m+1} \cdots x_{i-1}x_i^2 \in P_m \subseteq P_{m+1}$, und wegen $x_{m+1} \in P_{m+1}$ ergibt sich der Widerspruch $1 \in P_{m+1}$.
Aus dem Gezeigten folgt nun sofort $x_m \in (I : x_1 \cdots x_m) \setminus (I : x_1 \cdots x_{m-1})$ für alle $m \geq 1$, d.h. es ist $I \subset I : x_1 \subset I : x_1x_2 \subset \ldots$ im Widerspruch zur Voraussetzung. □

Man könnte nun vermuten, dass in einem Ring R, der acc für d-Annihilatoren erfüllt, die aufsteigende Kettenbedingung für die in $Z(R)$ enthaltenen Primideale gilt. Beispiel 2.13 zeigt aber, dass sogar eine unendliche echt aufsteigende Folge von assoziierten Primidealen existieren kann.

Beispiel 2.13 *Seien K ein Körper, $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $Y := \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ Mengen von Unbestimmten über K und $R := K[X,Y]/(X)^2 + (y_n x_k : n \leq k)$. Dann erfüllt R acc für d-Annihilatoren und $Ann(\overline{x_1}) \subset Ann(\overline{x_2}) \subset \ldots$ ist eine echt aufsteigende Folge von assoziierten Primidealen von R.*

Beweis Ein Polynomring durchgeteilt nach einem homogenen Ideal ist ein graduierter Ring (siehe Chapter VII §2 in [32]). Daher ist $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$ (direkte Summe von abelschen Gruppen mit $R_i R_j \subseteq R_{i+j}$), wobei R_i aus den homomorphen Bildern der homogenen Polynome vom Grad i besteht. Wir vereinfachen die Schreibweise, indem wir die Bilder von x_n bzw. y_n in R weiterhin mit x_n bzw. y_n bezeichnen. Nun gilt $R_0 = K$ und man prüft leicht nach, dass R_i für $i \geq 1$ von der Form

$$R_i = \bigoplus_{\substack{(j,j_1,\ldots,j_{i-1})\in\mathbb{N}^i \\ j<j_1\leq\cdots\leq j_{i-1}}} K x_j y_{j_1} \cdots y_{j_{i-1}} \oplus \bigoplus_{\substack{(j_1,\ldots,j_i)\in\mathbb{N}^i \\ j_1\leq\cdots\leq j_i}} K y_{j_1} \cdots y_{j_i}$$

ist (direkte Summe von K-Vektorräumen). Es ist also $R_i = S_i \oplus T_i$ für $i \geq 1$, wobei S_i die homogenen Elemente vom Grad i enthält, in denen ein x_j vorkommt, und T_i diejenigen, in denen kein x_j vorkommt. Nun ist $M := \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_i = (X,Y)$ ein maximales Ideal von R, und mit $S := \bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ und $T := \bigoplus_{i=1}^{\infty} T_i$ ist $M = S \oplus T$. Da $R_0 = K$ und $K \setminus \{0\} \subseteq E(R)$ ist wegen der Graduierung $Z(R) \subseteq M$. Andererseits ist für $f \in M$ und etwa $f \in (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ offenbar $x_{n+1} f = 0$, d.h. $M = Z(R)$. Wir bestimmen nun $\operatorname{Ann}(f)$ für jedes $f = g \oplus h \in M$, wobei $g \in S$ und $h \in T$:

1. Fall: $h \neq 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $h \in (y_1, \ldots, y_n) \setminus (y_1, \ldots, y_{n-1})$, und es lässt sich $h = y_n h_n \oplus \cdots \oplus y_1 h_1$ schreiben, wobei $h_j \in K \oplus T$, $h_n \neq 0$ und in h_j nur Terme in $y_j, y_{j+1}, \ldots$ auftreten. Es sind nach Konstruktion von R sicherlich $x_n, x_{n+1}, \cdots \in \operatorname{Ann}(f)$. Wir zeigen nun $\operatorname{Ann}(f) = (x_k : k \geq n)$: Sei $f' = g' \oplus h' \in \operatorname{Ann}(f)$. Dann ist wegen $gg' = 0$ also $0 = ff' = (gh' + g'h) \oplus hh'$, d.h. $hh' = 0$. Da $h, h' \in T$ und $h \neq 0$ folgt $h' = 0$, denn $\operatorname{Ann}(T) \cap T = (0)$. Somit ist $g'h = 0$. Angenommen $g' \notin (x_k : k \geq n)$. Dann treten oBdA keine Terme mit x_k und $k \geq n$ in der Darstellung von g' auf, und wir können $g' = x_l g_l \oplus \cdots \oplus x_{n-1} g_{n-1}$ schreiben ($l \leq n-1$), wobei $g_j \in K \oplus T$, $g_l \neq 0$ und in g_j nur Terme in $y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots$ auftreten. Sortiert man nun in der Darstellung von $g'h$ nach den x_j, so tritt bei l der Term $x_l g_l (y_{l+1} h_{l+1} + \cdots + y_n h_n) \neq 0$ auf, Widerspruch. Daher ist $\operatorname{Ann}(f) = (x_k : k \geq n)$.

2. Fall: $h = 0$. Dann sei oBdA $f = g \neq 0$. Schreibe $f = x_n g_n \oplus \cdots \oplus x_m g_m$, wobei $g_j \in K \oplus T$, $g_n \neq 0$ und in g_j nur Terme in $y_{j+1}, y_{j+2}, \ldots$ auftreten. Nach Konstruktion von R ist dann $(X) + (y_1, \ldots, y_n) \subseteq \mathrm{Ann}(f)$. Angenommen, es existiert ein $f' = g' \oplus h' \in \mathrm{Ann}(f) \setminus ((X) + (y_1, \ldots, y_n))$. Dann können wir oBdA annehmen, dass $g' = 0$ ist (d.h. $f' = h' \in T$) und keine Terme mit y_k und $k \leq n$ in der Darstellung von f' auftreten. Dann lässt sich f' schreiben als $f' = y_l h_l \oplus \cdots \oplus y_r h_r$, wobei $n+1 \leq l \leq r$, $h_j \in K \oplus T$, $h_l \neq 0$ und in h_j nur Terme in $y_j, y_{j+1}, \ldots$ auftreten. Nun ergibt sich wieder ein Widerspruch durch Betrachten des Terms $x_n g_n (y_l h_l + \cdots + y_r h_r) \neq 0$ in der Darstellung von $ff' = 0$. Daher ist $\mathrm{Ann}(f) = (X) + (y_1, \ldots, y_n)$.
Annahme: Es existieren $f_j = g_j \oplus h_j \in M$ mit $\mathrm{Ann}(f_1) \subset \mathrm{Ann}(f_1 f_2) \subset \ldots$ in R. Dann zeigen die Überlegungen in obigem 1. Fall, dass nicht $h_j \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gelten kann. Daher sei oBdA $h_1 = 0$. Dann ist nach obigem 2. Fall etwa $\mathrm{Ann}(f_1) = (X) + (y_1, \ldots, y_n)$, was offensichtlich ein Primideal von R ist. Somit ist $\mathrm{Ann}(f_1) \subset \mathrm{Ann}(f_1 f_2) = R$ und die Folge bricht im Widerspruch zur Annahme doch ab, d.h. R erfüllt acc für d-Annihilatoren.
Ferner haben wir oben insbesondere $\mathrm{Ann}(x_j) = (X) + (y_1, \ldots, y_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gezeigt, und dies sind alles Primideale. Daher existiert eine unendliche echt aufsteigende Kette von assoziierten Primidealen in R. □

Wir untersuchen nun die Einbettbarkeit von Ringen mit acc für d-Colons in nulldimensionale Ringe. Wie bereits erwähnt, ist in einem Ring mit acc für d-Colons jedes Ideal (evtl. unendlicher) Durchschnitt von Primäridealen. Für einen Ring R, in dem (0) eine *endliche* Primärzerlegung besitzt (etwa $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ mit Q_i P_i-primär), sieht man leicht, dass

$$R \leq \bigoplus_{i=1}^{n} R/Q_i \leq \bigoplus_{i=1}^{n} (R/Q_i)_{P_i/Q_i}$$

gilt. Da $(R/Q_i)_{P_i/Q_i}$ jeweils nulldimensional ist und daher auch die direkte Summe dieser Ringe, ist also R in einen nulldimensionalen Ring einbettbar. Somit sind insbesondere laskersche Ringe in nulldimensionale Ringe einbettbar. Es ist nun eine naheliegende Frage, ob dies auch für Ringe mit acc für d-Colons gilt.
M. Arapovic zeigte in [1] die folgende Äquivalenz:

Satz 2.14 (Arapovic) *Ein Ring R ist in einen nulldimensionalen Ring einbettbar genau dann, wenn eine Familie $\{Q_i : i \in I\}$ von primären Idealen von R existiert mit*
1) $\bigcap_{i \in I} Q_i = (0)$ und
2) Für alle $a \in R$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n \notin \bigcup_{i \in I} (P_i \setminus Q_i)$, wobei $P_i := rad(Q_i)$.

Hiermit können wir die Einbettbarkeit eines Ringes mit acc für d-Colons in einen nulldimensionalen Ring unter einer Zusatzvoraussetzung zeigen:

Korollar 2.15 *Sei R ein Ring mit acc für d-Colons und $(0) = \bigcap_{i \in I} Q_i$ mit P_i-primären Idealen Q_i von R. Sind nur endlich viele der Primideale P_i keine minimalen Primideale, so ist R in einen nulldimensionalen Ring einbettbar.*

Beweis Ist P ein minimales Primideal, so ist $I := \mathrm{Kern}(R \to R_P)$ das kleinste P-primäre Ideal von R: Für $a \in P$ ist $\frac{a}{1}$ nilpotent in R_P, also a nilpotent modulo I, d.h. $\mathrm{rad}(I) = P$; und für $ab \in I$ und $a \notin I$ ist $\frac{ab}{1} = \frac{0}{1}$ und $\frac{a}{1} \neq \frac{0}{1}$, also $b \in P$. Ferner ist für jedes P-primäre Ideal Q und $a \in I$ wegen $sa = 0 \in Q$ für ein $s \notin P = \mathrm{rad}(Q)$ dann $a \in Q$, d.h. $I \subseteq Q$.
Daher sei $(0) = (\bigcap_P \mathrm{Kern}(R \to R_P)) \cap Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$, wobei P alle minimalen Primideale durchläuft und Q_i P_i-primär mit P_i nicht minimal für $i = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 1.2 a) ist weiterhin jeweils $\mathrm{Kern}(R \to R_P) = \mathrm{Ann}(s_P)$ mit $s_P \notin P$. Sei nun $a \in R$ und etwa $\mathrm{Ann}(a^k) = \mathrm{Ann}(a^{k+1}) = \ldots$ wegen acc für d-Colons in R. Ist P ein minimales Primideal mit $a \in P$, so existiert ein m mit $a^m \in \mathrm{Ann}(s_P)$, und oBdA sei $m \geq k$. Dann ist $s_P \in \mathrm{Ann}(a^m) = \mathrm{Ann}(a^k)$, d.h. es ist $a^k \in \mathrm{Kern}(R \to R_P)$ für alle minimalen Primideale P mit $a \in P$. Da ferner $Q_1, \ldots, Q_n$ nur endlich viele Primärideale sind, existiert ein $r \geq k$ mit $a^r \notin \bigcup_{i=1}^n (P_i \setminus Q_i)$. Insgesamt ist also $a^r \notin \bigcup_P (P \setminus \mathrm{Kern}(R \to R_P)) \cup \bigcup_{i=1}^n (P_i \setminus Q_i)$, wobei P wieder die minimalen Primideale von R durchläuft. Es folgt die Behauptung. $\square$

Leider bleibt das Problem ohne die Zusatzvoraussetzung in Korollar 2.15 aber offen.

Es folgen nun einige Ergebnisse zur Fragestellung: Unter welchen Bedingungen ist ein Ring mit acc für d-Colons bereits noethersch? Die Aussage von Korollar 2.16 wurde in [30] nur für Integritätsringe gezeigt. Mit unseren Ergebnissen aus Abschnitt 2.1 erhalten wir diese Verallgemeinerung. Unter einem Prüfer-Ring verstehen wir dabei ganz allgemein einen Ring, für den jede Lokalisierung nach einem maximalen Ideal ein Bewertungsring ist.

Korollar 2.16 *Sei R ein Prüfer-Ring mit acc für d-Colons. Dann ist R bereits noethersch.*

Beweis Jede Lokalisierung von R nach einem Primideal ist ein Bewertungsring mit acc für d-Colons, erfüllt also insbesondere accp nach Korollar 2.5. Daher ist R_P noethersch für jedes Primideal P von R. Als ZD-Ring ist dann R selbst noethersch, wie schon im Anschluss an Korollar 2.8 bemerkt. $\square$

In [22], Theorem 4, wurde unter anderem gezeigt, dass ein lokaler Ring, in dem das maximale Ideal endlich erzeugt ist, bereits noethersch ist, falls er (accr) erfüllt. Aufgrund der ZD-Eigenschaft erhalten wir eine globale Aussage für Ringe mit acc für d-Colons.

Korollar 2.17 *Sei R ein Ring. Dann sind äquivalent:*
(i) R ist noethersch.
(ii) R erfüllt acc für d-Colons und jedes maximale Ideal von R ist endlich erzeugt.

Beweis Es gelte (ii). Sei M ein maximales Ideal von R. Da M endlich erzeugt ist, ist R_M ein lokaler Ring mit endlich erzeugtem maximalen Ideal, der insbesondere (accr) erfüllt. Daher ist nach obigem jede Lokalisierung von R nach einem maximalen Ideal noethersch. Dies liefert die Behauptung. Die andere Richtung ist trivial. □

In der homologischen Algebra ist der Begriff eines *koherenten* Ringes von Bedeutung. Auf die homologische Definition soll hier aber nicht weiter eingegangen werden, denn es gibt rein ringtheoretische Charakterisierungen. Eine davon ist die folgende (Bedingung (V) in [26]; dort mit Verweis auf [3],[6]):

Ein Ring R ist koherent genau dann, wenn für jedes endlich erzeugte Ideal I von R und jedes $a \in R$ das Ideal $I : a$ endlich erzeugt ist.

Jeder noethersche Ring ist offensichtlich koherent. N. Radu zeigte in [26], dass stark laskersche koherente Ringe bereits noethersch sind. Wir verallgemeinern dies:

Satz 2.18 *Sei R ein koherenter Ring. Dann sind äquivalent:*
(i) R ist noethersch.
(ii) R erfüllt acc für d-Colons.
(iii) R erfüllt acc für Primideale und (MPA).

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii) ist trivial, und (ii)$\Rightarrow$(iii) gilt nach Satz 2.12 und Lemma 1.2 d). Sei nun R ein koherenter Ring mit (iii) und P ein Primideal von R. Angenommen, P ist nicht endlich erzeugt. Dann konstruieren wir induktiv über n eine echt aufsteigende Folge $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ von endlich erzeugten in P enthaltenen Primidealen. Zum Induktionsanfang sei $n = 0$ und es ist nichts zu zeigen. Sind nun $P_1 \subset \cdots \subset P_n$ konstruiert, so ist $P_n \subset P$, da P_n endlich erzeugt und P nicht endlich erzeugt. Sei $a \in P \setminus P_n$. Dann ist $A := (P_n, a)$ endlich erzeugt und $A \subset P$. Wähle nun ein über A minimales Primideal $P_{n+1} \subseteq P$. Dies ist nach Voraussetzung von der Form $P_{n+1} = A : x$ und somit endlich erzeugt, da R koherent ist. Somit erhalten wir eine echt aufsteigende unendliche Folge von Primidealen in R im Widerspruch zu (iii). Daher ist jedes Primideal endlich erzeugt und somit R noethersch. □

2.3 R-Folgen

In diesem Abschnitt beziehen wir uns auf Section 3-1 in I. Kaplansky's Buch „Commutative Rings“ [20]. Dort werden für R-Moduln M sogenannte R-Folgen von M betrachtet: Eine Folge $x_1, \ldots, x_n$ von Elementen von R heißt R-Folge von M, falls gilt:

(1) $(x_1, \ldots, x_n)M \subset M$

(2) $x_1 \notin Z(M)$ und für jedes $i = 1, \ldots, n-1$ ist $x_{i+1} \notin Z(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$.

Zunächst werden dort einige einfache Resultate über R-Folgen für beliebige R-Moduln gezeigt. Für stärkere Aussagen braucht man aber Methoden aus der Theorie der noetherschen Ringe, und daher werden dort dann endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen betrachtet. Eine Durchsicht der Beweise zeigt, dass meistens nur die ZD-Eigenschaft von noetherschen Moduln verwendet wird, so dass sich eine Verallgemeinerung für ZD-Moduln anbietet. Dies wurde auch von Evans in [8] getan: Er zeigte, dass für einen ZD-Modul M und ein Ideal I von R mit $IM \subset M$ je zwei maximale in I enthaltene R-Folgen von M die gleiche Länge haben. Allerdings werden hierbei auch unendliche R-Folgen (die analog definiert werden) zugelassen, wobei noch offen ist, ob solche unendlichen R-Folgen bei ZD-Moduln existieren.
Als Hauptergebnis in diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass für einen endlich erzeugten Modul M über einem Ring R mit acc für d-Colons (der ja nach Korollar 2.10 selbst acc für d-Colons erfüllt und damit insbesondere ein ZD-Modul ist) jede R-Folge von M endliche Länge hat. Mit Hilfe dieser Aussage läßt sich dann die komplette Section 3-1 aus I. Kaplansky's Buch übertragen, indem man dort, wo endlich erzeugte Moduln über noetherschen Ringen vorausgesetzt werden, endlich erzeugte Moduln über Ringen mit acc für d-Colons betrachtet. Meistens funktioniert dies mit wörtlich den selben Beweisen. Daher tragen wir nun nur diejenigen Resultate zusammen, die etwas modifizierte Beweise erfordern.

Wir beginnen mit einer Verallgemeinerung von Theorem 126 von [20]: Ist R noethersch, M ein endlich erzeugter R-Modul, $x \in J(R) \setminus Z(M)$ und I ein Ideal mit $I \subseteq Z(M)$, so ist $(I, x) \subseteq Z(M/xM)$. Unter schwächeren Voraussetzungen gilt aber bereits eine stärkere Aussage:

Lemma 2.19 *Sei M ein R-Modul, der 1-acc erfüllt und $x \in J(R) \setminus Z(M)$. Dann ist $Z(M) \subseteq Z(M/xM)$.*

Beweis Angenommen, es gibt ein $y \in Z(M) \setminus Z(M/xM)$. Da $y \in Z(M)$, existiert ein $m_1 \in M \setminus \{0\}$ mit $ym_1 = 0$. Da $y \notin Z(M/xM)$, ist $m_1 \in xM$, also etwa $m_1 = xm_2$.

Somit ist $Rm_1 \subset Rm_2$ (wegen $x \in J(R)$), und aus $yxm_2 = 0$ und $x \notin Z(M)$ folgt $ym_2 = 0$. Durch Iteration erhalten wir eine echt aufsteigende Folge von zyklischen Untermoduln in M im Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Insbesondere ist also für ein Ideal $I \subseteq Z(M)$ auch $I \subseteq Z(M/xM)$ und somit $(I, x) \subseteq Z(M/xM)$.
Nun folgt analog eine Verallgemeinerung von Theorem 119 von [20].

Korollar 2.20 *Sei M ein R-Modul mit 1-acc und $x_1, \ldots, x_n$ eine in $J(R)$ enthaltene R-Folge von M. Dann ist jede Permutation der x_i's ebenfalls eine R-Folge von M.*

Beweis Wie im dortigen Beweis reicht zu zeigen: Ist x, y eine in $J(R)$ enthaltene R-Folge von M, so ist $y \notin Z(M)$. Wegen $x \in J(R) \setminus Z(M)$ folgt aber aus Lemma 2.19 und der Definition von R-Folgen sofort $y \notin Z(M/xM) \supseteq Z(M)$. $\square$

Mit Lemma 2.19 können wir jetzt die endliche Länge von R-Folgen nachweisen. Dies war ja für noethersche Ringe trivial, da stets $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots$ für R-Folgen von M gilt.

Satz 2.21 *Sei R ein Ring mit acc für d-Colons und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann hat jede R-Folge von M endliche Länge.*

Beweis Wir nehmen indirekt an, dass eine unendliche R-Folge $x_1, x_2, \ldots$ von M existiert. Da $(x_1, x_2, \ldots)M \subset M$, existiert ein maximales Ideal P von R mit $(x_1, x_2, \ldots)_P M_P \subset M_P$. Nach Theorem 133 von [20] ist dann $\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{1}, \ldots$ eine R_P-Folge von M_P. Daher sei oBdA (R, P) ein lokaler Ring. Da die R-Moduln $M, M/x_1M, M/(x_1, x_2)M, \ldots$ nach Korollar 2.7 1-acc erfüllen, ist nach Lemma 2.19 $Z(M) \subseteq Z(M/x_1M) \subseteq Z(M/(x_1, x_2)M) \subseteq \ldots$. Da M ein ZD-Modul ist, ist $Z(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ für alle i eine endliche Vereinigung von Primidealen. Nun erhalten wir induktiv eine echt aufsteigende Folge von Primidealen, die $\operatorname{Ann}(M)$ enthalten: Wegen $\operatorname{Ann}(M) \subseteq Z(M)$ existiert ein Primideal P_0 maximal in $Z(M)$ mit $\operatorname{Ann}(M) \subseteq P_0$. Sind $P_0 \subset \cdots \subset P_n$ konstruiert, wobei $P_i \supseteq (P_{i-1}, x_i)$ maximal in $Z(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ ist für $i = 1, \ldots, n$, so existiert wegen $Z(M/(x_1, \ldots, x_n)M) \subseteq Z(M/(x_1, \ldots, x_{n+1})M)$ (also $(P_n, x_{n+1}) \subseteq Z(M/(x_1, \ldots, x_{n+1})M)$) ein Primideal P_{n+1} maximal in $Z(M/(x_1, \ldots, x_{n+1})M)$ mit $(P_n, x_{n+1}) \subseteq P_{n+1}$. Dann ist aber $x_{n+1} \in P_{n+1} \setminus P_n$, da $x_{n+1} \notin Z(M/(x_1, \ldots, x_n)M) \supseteq P_n$. Somit ist die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale in $R/\operatorname{Ann}(M)$ verletzt, im Widerspruch zu Kor 2.11 und Satz 2.12. $\square$

Zieht man nun das oben bereits erwähnte Ergebnis von Evans hinzu, so folgt unmittelbar die analoge Aussage zu Kaplansky's Theorem 121.

Korollar 2.22 *Sei R ein Ring mit acc für d-Colons, I ein Ideal von R, M ein endlich erzeugter R-Modul und $IM \subset M$. Dann haben je zwei in I maximale R-Folgen von M die gleiche (endliche) Länge.*

Daher lässt sich auch in unserem Fall der Grad $G(I, M)$ als die gemeinsame Länge aller maximalen in I enthaltenen R-Folgen von M definieren.
Bis auf Theorem 135 lassen sich nun wieder unmittelbar alle Aussagen über den Grad übertragen. Die Schwierigkeit bei Theorem 135 liegt darin, dass wir nicht wie im noetherschen Fall schlussfolgern können, dass für jedes Ideal $A \subseteq Z(M)$ von R schon ein $x \in M \setminus \{0\}$ existiert mit $Ax = \{0\}$ (denn die in $Z(M)$ maximalen Primideale müssen ja keine assoziierten Primideale von M sein, falls M nur acc für d-Colons erfüllt). Aber Lemma 14 von [8] besagt, dass für ein *endlich erzeugtes* Ideal $A \subseteq Z(M)$ und einen ZD-Modul M stets ein $x \in M \setminus \{0\}$ existiert mit $Ax = \{0\}$. Damit zeigen wir:

Lemma 2.23 *Sei M ein R-Modul, M ZD und I ein Ideal von R mit $I \subseteq Z(M)$. Dann existiert ein maximales Ideal P von R mit $I_P \subseteq Z(M_P)$.*

Beweis Sei $Z(M) \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_n$ mit maximalen Idealen P_i von R. Annahme: Für alle $i = 1, \ldots, n$ ist $I_{P_i} \not\subseteq Z(M_{P_i})$. Dann wähle jeweils ein $a_i \in I$ mit $\frac{a_i}{1} \notin Z(M_{P_i})$ und setze $A := (a_1, \ldots, a_n)$. Wegen $A \subseteq Z(M)$ existiert ein $x \in M \setminus \{0\}$ mit $Ax = \{0\}$. Sei oBdA $\mathrm{Ann}(x) \subseteq P_1 =: P$. Dann ist aber $\frac{x}{1} \neq \frac{0}{1}$ in M_P und $A_P \frac{x}{1} = \{\frac{0}{1}\}$, d.h. $A_P \subseteq Z(M_P)$ im Widerspruch zu $\frac{a_1}{1} \notin Z(M_P)$. □

Nun folgt auch die Verallgemeinerung von Theorem 135:

Korollar 2.24 *Erfüllt R acc für d-Colons und ist I ein echtes Ideal von R, so existiert ein maximales Ideal P von R mit $G(I) = G(I_P)$*

Beweis Sei $x_1, \ldots, x_n$ eine maximale R-Folge in I, d.h. $I \subseteq Z(R/(x_1, \ldots, x_n))$. Nach Lemma 2.23 existiert ein maximales Ideal P von R mit $I_P \subseteq Z(R_P/(x_1, \ldots, x_n)_P)$. Somit ist $\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}$ eine maximale R_P-Folge in I_P, d.h. $G(I_P) = n = G(I)$. □

Es bietet sich folgende Definition an:

Definition Sei R ein Ring mit acc für d-Colons. R heißt *verallgemeinerter Macauley-Ring*, falls $G(M) = \mathrm{rang}(M)$ für jedes maximale Ideal M von R gilt.

Diese Definition impliziert insbesondere, dass jedes maximale Ideal in einem verallgemeinerten Macauley-Ring endlichen Rang hat. Theoreme 136-141 von [20] gelten dann wieder mit den gleichen Beweisen für verallgemeinerte Macauley-Ringe. Man beachte, dass im Beweis von Theorem 136 („Grad und Rang stimmen für jedes Ideal überein"), der indirekt geführt wird, ein maximales Gegenbeispiel unter den Primidealen gewählt wird, was auch in unserem Fall aufgrund der aufsteigenden Kettenbedingung für Primideale möglich ist. Wir halten also fest:

Satz 2.25 *In einem verallgemeinerten Macauley-Ring gilt $G(I) = rang(I)$ für jedes echte Ideal I.*

Eine weitere Verallgemeinerung der Resultate aus Kapitel 3 von [20] ist jedoch nicht ohne weiteres möglich, da die Aussage des Krull'schen Hauptidealsatzes schon in stark laskerschen Ringen nicht mehr gilt. Ein Beispiel dafür liefert Example 4.2 von [14], wo für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein nichtnoetherscher laskerscher Ring der Dimension $n+1$ konstruiert wird. Dort wird allerdings nur gezeigt, dass der betreffende Ring laskersch ist. Daher führen wir dieses Beispiel hier noch einmal kurz im Spezialfall $n = 1$ an.

Beispiel 2.26 *Seien k ein Körper, x, y, z Unbestimmte über k und $K := k(y)$. Dann ist $V := K[z]_{(z)}$ bekanntlich ein diskreter Bewertungsring von der Form $K + M$ mit maximalem Ideal $M := zV$. Sei $D := k + M$ und $R := D(x) = D[x]_{M[x]}$. Dann ist R ein stark laskerscher nicht noetherscher Ring der Dimension 2, der nicht die Aussage des Krull'schen Hauptidealsatzes erfüllt.*

Beweis Es ist offenbar M auch das einzige maximale Ideal von D. Ist $A \neq (0)$ ein echtes Ideal von D, so ist $(0) \neq AV \subseteq MV = M$, d.h. es ist $M^n \subseteq AV$ für ein n, und es folgt $M^{n+1} \subseteq AM \subseteq A$. Somit ist D stark laskersch und M einziges Primideal $\neq (0)$ von D. D ist aber nicht noethersch, da $(z) \subset (z, zy) \subset (z, zy, zy^2) \subset \ldots$ echt aufsteigend in D ist. In [14] wurde schon nachgewiesen, dass R laskersch ist. Ferner wurde dort auch im Beweis von Lemma 2.5 gezeigt, dass für einen Ring, in dem jedes primäre Ideal stark primär ist, auch der Polynomring diese Eigenschaft erfüllt. Da auch jede Lokalisierung eines stark primären Ideals stark primär ist, ist also R sogar stark laskersch.
Wir zeigen nun, dass R die Dimension 2 hat: Sei $P := (x - y)V[x]$. P ist ein Primideal von $V[x]$ mit $Q := P \cap D[x] \subseteq M[x]$, denn für $(x - y)g \in D[x]$ und $g = \sum_{i=0}^{r}(u_i + m_i)x^i \in V[x]$ ($u_i \in K$, $m_i \in M$) liefert der Koeffizientenvergleich $(u_0 + m_0)y \in D$ und $u_i + m_i - (u_{i+1} + m_{i+1})y \in D$, so dass wegen $D \cap K = k$ und $yM \subseteq D$ sukzessive $u_0 = u_1 = \cdots = u_r = 0$, also $(x - y)g \in M[x]$, folgt. Ferner ist

$(0) \subset Q \subset M[x]$, denn es ist $zx - zy \in Q \setminus (0)$ und $zx \in M[x] \setminus Q$ (wäre $zx \in Q \subseteq P$, so auch $zy \in P$, Widerspruch). Daher ist die Dimension von R mindestens zwei. Seien nun Q_1, Q_2 Primideale von $D[x]$ mit $(0) \subset Q_1 \subset Q_2 \subseteq M[x]$. Betrachtet man hierin die Kontraktion nach D und verwendet die Tatsache, dass es keine echte Kette von drei Primidealen im Polynomring mit der gleichen Kontraktion in den Koeffizientenring gibt, so erhält man $Q_2 \cap D \neq (0)$ und somit $Q_2 \cap D = M$. Es folgt $Q_2 = M[x]$, d.h. $\dim(R) = 2$.
Dass R nicht der Aussage des Krull'schen Hauptidealsatzes genügt, sieht man schließlich daran, dass nach obigem $zx \in M[x]$ und $\mathrm{rang}(M[x]) = 2$ gilt, wegen $x(M[x])^2 \subseteq xM^2[x] = xzM[x] \subseteq xzD[x]$ und $x \notin M[x]$ aber $M[x]$ minimal über zx ist. □

2.4 T-stark laskersche Moduln und P-Ringe

Wie bereits erwähnt, sind endlich erzeugte Moduln mit acc für d-Colons im allgemeinen nicht laskersch. Dies wirft die Frage auf, unter welcher Zusatzbedingung dies dennoch stets der Fall ist. Wir werden in diesem Abschnitt einige Charakterisierungen dieser Moduln geben und führen dazu den Begriff eines T-stark primären Untermoduls ein. Zur Motivation erinnern wir an die Definition der stark laskerschen Moduln. Ein laskerscher R-Modul M heißt ja stark laskersch, falls jeder primäre Untermodul $Q \subset M$ stark primär ist; d.h. es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $P^n M \subseteq Q$, wobei $P := \mathrm{rad}(Q : M)$ ein Primideal von R ist (da Q primär). Anders ausgedrückt: $P/(Q : M)$ ist nilpotent in $R/(Q : M)$, bzw. „P ist nilpotent modulo $Q : M$“. Erfüllt aber nun M nur acc für d-Colons, so hat ja für einen primären Untermodul $Q \subset M$ der Ring $R/\mathrm{Ann}_R(M/Q) = R/(Q : M)$ nach Lemma 1.2 c) acc für d-Annihilatoren, so dass nach Lemma 1.3 b) $P := \mathrm{rad}(Q : M)$ T-nilpotent modulo $Q : M$ ist (aber nicht unbedingt nilpotent). Wir definieren also:

Definition Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Ein primärer Untermodul $Q \subset M$ heißt *T-stark primär*, falls $P := \mathrm{rad}(Q : M)$ T-nilpotent modulo $Q : M$ ist. Ist M laskersch, so heißt M *T-stark laskersch*, falls jeder primäre Untermodul T-stark primär ist.

Ein lokaler Ring mit T-nilpotentem, aber nicht nilpotentem maximalen Ideal (siehe etwa Beispiel 1.21) ist ein Beispiel für einen T-stark laskerschen, aber nicht stark laskerschen Ring, und ein lokaler Ring mit einzigem Primideal P, das nicht T-nilpotent ist, ein Beispiel für einen laskerschen, aber nicht T-stark laskerschen Ring.
In Exercise 23, Chapter IV §2 von [3] wurde eine Charakterisierung von laskerschen Moduln gegeben:

Ein endlich erzeugter R-Modul M ist laskersch genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(LA_I) *Zu jedem Untermodul N von M und jedem Primideal P von R existiert ein $a \in R \setminus P$ mit $Sat_P(N) := \{x \in M : sx \in N$ für ein $s \in R \setminus P\} = N : a$.*

(LA_{II}) *Für jeden Untermodul N von M und jede Folge $S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots$ von multiplikativ abgeschlossenen Teilmengen von R wird die Folge $Sat_{S_1}(N) \supseteq Sat_{S_2}(N) \supseteq \dots$ stationär, wobei für $S \subseteq R$ multiplikativ abgeschlossen $Sat_S(N) := \{x \in M : sx \in N$ für ein $s \in S\}$ sei.*

Weiterhin sind stark laskersche Moduln durch die Bedingungen (LA_{II}) und (LA_{III}) (siehe Kapitel 1) charakterisiert. Entsprechend ergibt sich folgende Charakterisierung für T-stark laskersche Moduln:

Korollar 2.27 *Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann sind äquivalent:*
(i) M ist T-stark laskersch.
(ii) M ist laskersch und erfüllt acc für d-Colons.
(iii) M erfüllt (LA_{II}) und acc für d-Colons.

Beweis Es gelte (i), und es sei N ein echter Untermodul von M mit Primärzerlegung $N = Q_1 \cap \dots \cap Q_n$, sowie $a_1, a_2, \dots \in R$. Da die Untermoduln Q_i nach Voraussetzung T-stark primär sind, werden analog zu Lemma 1.10 für $i = 1, \dots, n$ die Folgen $Q_i : a_1 \subseteq Q_i : a_1a_2 \subseteq \dots$ stationär, also auch die Folge $N : a_1 \subseteq N : a_1a_2 \subseteq \dots$ wegen $N : a = (Q_1 : a) \cap \dots \cap (Q_n : a)$ für alle $a \in R$. Somit erfüllt M acc für d-Colons und es gilt (ii). Umgekehrt folgt (i) aus (ii) aus den Ausführungen vor der Definition von T-stark primären Untermoduln. Ferner ergibt sich die Äquivalenz von (ii) und (iii) direkt aus dem gerade zitierten Ergebnis aus [3] und der Tatsache, dass nach Lemma 1.2 a) jeder Modul mit acc für d-Colons auch (LA_{I}) erfüllt. □

Analog zu Satz 2.9 und Korollar 2.10 in dieser Arbeit bzw. Exercise 23 (e) von [3] gilt wieder:
Sind $N \leq M$ endlich erzeugte R-Moduln, so ist M T-stark laskersch genau dann, wenn N und M/N T-stark laskersch sind.
Ist R ein T-stark laskerscher Ring, so ist jeder endlich erzeugte R-Modul T-stark laskersch.
Ferner ist sicherlich jeder perfekte Ring T-stark laskersch als endliche direkte Summe von lokalen Ringen mit T-nilpotentem maximalen Ideal.

Im Beweis von Korollar 2.15 zeigten wir: Ist R ein Ring und P ein minimales Primideal von R, so ist $\mathrm{Sat}_P(0) = \mathrm{Kern}(R \to R_P)$ das kleinste P-primäre Ideal von R. Analog gilt für jeden R Modul M: Ist $N \subset M$ ein echter Untermodul von M und P ein minimales Primideal über $N : M$, so ist $\mathrm{Sat}_P(N)$ der kleinste P-primäre Untermodul von M. Erfüllt M zusätzlich noch acc für d-Colons, so existiert also ein $a \in R \setminus P$ derart, dass $N : a = \mathrm{Sat}_P(N)$ P-primär ist. Damit erhalten wir eine weitere Charakterisierung der T-stark laskerschen Moduln, die auf Proposition 2.1 von [14] basiert.

Korollar 2.28 *Sei R ein Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Dann ist M T-stark laskersch genau dann, wenn M acc für d-Colons erfüllt und über jedem Ideal $A \supseteq Ann(M)$ von R nur endlich viele minimale Primideale existieren.*

Beweis Ist M T-stark laskersch, so ist der Ring $R/\mathrm{Ann}(M)$ laskersch. Also existieren über jedem Ideal $A \supseteq \mathrm{Ann}(M)$ von R nur endlich viele minimale Primideale, und nach Korollar 2.27 erfüllt M acc für d-Colons. Gelten umgekehrt diese beiden Bedingungen, so erfüllt nach Korollar 2.11 auch der Ring $R/\mathrm{Ann}(M)$ acc für d-Colons und somit nach Satz 2.12 die aufsteigende Kettenbedingung für Primideale. Dies bedeutet wegen der Voraussetzung, dass $R/\mathrm{Ann}(M)$ noethersches Spektrum hat, und somit ist nach Proposition 2.1 von [14] M laskersch. Also ist nach Korollar 2.27 M T-stark laskersch.□

W. Heinzer und D. Lantz untersuchten in [16] N-Ringe. Nach Definition ist ein N-Ring ein Ring R, für den zu jedem Ideal $I \subseteq R$ ein noetherscher Oberring S von R und ein Ideal A von S existieren mit $I = A \cap R$. Dies ist äquivalent dazu, dass R/I für jedes Ideal I von R in einen noetherschen Ring einbettbar ist. Wir wollen analog P-Ringe mit „perfekt“ anstelle von „noethersch“ untersuchen.

Definition Ein Ring R heißt P-Ring, falls für jedes Ideal $I \subseteq R$ ein perfekter Oberring S von R und ein Ideal A von S existieren mit $I = A \cap R$.

Lemma 2.29 *R ist ein P-Ring genau dann, wenn R/I für jedes Ideal I von R in einen perfekten Ring einbettbar ist.*

Beweis Der Beweis verläuft analog zu dem bei N-Ringen: Sei R ein P-Ring und I ein Ideal von R. Nach Voraussetzung existieren dann ein perfekter Ring $S \geq R$ und ein Ideal A von S mit $I = A \cap R$. Dann ist S/A perfekt und offenbar $R/I \leq S/A$. Sei nun umgekehrt R/B für jedes Ideal B von R in einen perfekten Ring einbettbar und I ein Ideal von R. Dann wende die Voraussetzung für $B = (0)$ und $B = I$ an, d.h. es existieren perfekte Ringe S_1 und S_2 mit $R \leq S_1$ und $R/I \leq S_2$. Setzt man

$S := S_1 \oplus S_2$, so ist S perfekt, und man kann R in S einbetten mittels $r \to (r, r+I)$ für $r \in R$. Dann ist $IS \cap R = I$ (denn $IS = IS_1$), d.h. R ist ein P-Ring. $\square$

Für N-Ringe wurde in [16] eine Charakterisierung mit Hilfe von Kettenbedingungen gefunden (Theorem 2.3): R ist ein N-Ring genau dann, wenn R acc für Colons erfüllt (d.h. jeder Faktorring von R erfüllt acc für Annihilatorideale). Nach der Charakterisierung der stark laskerschen Ringe in [3] durch die entsprechenden Bedingungen ($\mathrm{LA}_{\mathrm{II}}$) und ($\mathrm{LA}_{\mathrm{III}}$) ist ein N-Ring insbesondere stark laskersch.
Sehr viel einfacher zu zeigen ist eine Charakterisierung der P-Ringe (Korollar 2.31), die mittels Lemma 2.29 sofort aus Lemma 2.30 folgt.

Lemma 2.30 *Sei R ein Ring. Dann ist R einbettbar in einen perfekten Ring genau dann, wenn T-stark primäre Ideale $Q_1, \ldots, Q_n$ von R existieren mit $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$.*

Beweis Sei $R \leq S$ und S perfekt mit maximalen Idealen $M_1, \ldots, M_n$. Dann ist $A_i := \mathrm{Sat}_{M_i}(0)$ das kleinste M_i-primäre Ideal von S und somit $(0) = \bigcap_{i=1}^n A_i$ in S. Ferner ist A_i T-stark primär, da S perfekt. Es ist nun nicht schwer zu sehen, dass auch $Q_i := A_i \cap R$ T-stark primär ist, und es ist $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ in R.
Ist umgekehrt $(0) = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ für T-stark primäre Ideale $Q_1, \ldots, Q_n$ von R mit $P_i := \mathrm{rad}(Q_i)$, so ist

$$R \leq (R/Q_1) \oplus \cdots \oplus (R/Q_n) \leq (R/Q_1)_{P_1/Q_1} \oplus \cdots \oplus (R/Q_n)_{P_n/Q_n} =: S \ ,$$

und S ist perfekt als endliche direkte Summe von lokalen Ringen mit T-nilpotentem maximalen Ideal. Folglich ist R ein P-Ring. $\square$

Korollar 2.31 *Ein Ring R ist ein P-Ring genau dann, wenn R T-stark laskersch ist.*

Es gelten also folgende Implikationen:

noethersch $\Rightarrow$ N-Ring $\Leftrightarrow$ acc für Colons $\Rightarrow$ stark laskersch $\Rightarrow$ P-Ring $\Leftrightarrow$ T-stark laskersch $\Rightarrow$ laskersch

Dabei gilt für die Implikationen „$\Rightarrow$“ jeweils nicht die Umkehrung, wie Beispiele aus dieser Arbeit bzw. aus [16] zeigen.

Im Beweis von Lemma 2.5 von [14] wurde gezeigt: Ist R ein Ring, in dem jedes Primärideal stark primär ist, so ist dies auch im Polynomring $R[x]$ für eine Unbestimmte x der Fall. Wir beweisen nun das Analogon für „T-stark primär“.

Satz 2.32 *Sei R ein Ring, in dem jedes Primärideal T-stark primär ist, und $x_1, \ldots, x_m$ Unbestimmte über R. Dann ist auch in $R[x_1, \ldots, x_m]$ jedes Primärideal T-stark primär.*

Beweis Wir können uns auf den Fall $m = 1$ beschränken. Sei also Q ein P-primäres Ideal in $R[x]$ und $P' := P \cap R$. Dann ist $Q' := Q \cap R$ ein P'-primäres Ideal von R, und nach Voraussetzung ist P' T-nilpotent modulo Q'. Nach Korollar 1.9 ist dann $P'[x]$ T-nilpotent modulo $Q'[x]$, also erst recht modulo Q. Ist nun P_S T-nilpotent modulo Q_S, wobei $S := R \setminus P'$, so existiert zu jeder Folge $(f_n)_n$ von Elementen aus P ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $s \in S$ mit $sf_1 \cdots f_n \in Q$, also $f_1 \cdots f_n \in Q$ wegen Q P-primär und $s \notin P$. Daher ist dann auch P T-nilpotent modulo Q. Somit können wir durch Lokalisierung oBdA R als lokal mit einzigem maximalen Ideal P' annehmen. Wir zeigen jetzt zunächst, dass P sogar nilpotent modulo $Q + P'[x]$ ist: Wegen $\mathrm{rad}(Q) = P$ und $P'[x] \subseteq P$ ist auch $\mathrm{rad}(Q + P'[x]) = P$, und da der Ring $R/P'[x] \cong (R/P')[x]$ ein Hauptidealring ist, ist $P/P'[x]$ nilpotent modulo $(Q + P'[x])/P'[x]$. Somit ist auch P nilpotent modulo $Q + P'[x]$.
Hiermit zeigen wir schließlich die Behauptung: Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Elementen aus P und $P^k \subseteq Q + P'[x]$ für ein $k \in \mathbb{N}$ nach obigem. Dann ist $f_{ik+1} \cdots f_{(i+1)k} \in Q + P'[x]$ für jedes $i \in \mathbb{N}_0$. Sei also $f_{ik+1} \cdots f_{(i+1)k} = q_i + p_i$ mit $q_i \in Q$ und $p_i \in P'[x]$. Da $P'[x]$ T-nilpotent modulo Q ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $p_1 \cdots p_n \in Q$. Somit ist $f_1 \cdots f_{(n+1)k} = (q_1 + p_1) \cdots (q_n + p_n) \in Q$, d.h. P ist T-nilpotent modulo Q. □

Hiermit erhalten wir, dass endliche ganze Erweiterungen von P-Ringen wieder P-Ringe sind:

Korollar 2.33 *Ist R ein P-Ring, $R \leq S$ und S ein endlich erzeugter R-Modul, so ist auch S ein P-Ring.*

Beweis Da R laskersch, ist nach Theorem 2.4 von [14] auch S laskersch. Es bleibt also zu zeigen, dass in S jedes Primärideal T-stark primär ist. Da aber S ein Faktorring von $R[x_1, \ldots, x_m]$ ist und die Eigenschaft „T-stark primär" offenbar unter Homomorphismen erhalten bleibt, folgt dies aus Satz 2.32. □

Ob auch die Umkehrung von Korollar 2.33 gilt, bleibt offen, wie auch schon im Fall der N-Ringe und der stark laskerschen Ringe (siehe [16]). Der Abstieg der Eigenschaften „noethersch", „artinsch" und „perfekt" bei endlichen ganzen Erweiterungen gilt aber bekanntlich (Satz von Eakin bzw. [27]).
Eine weitere offene Frage ist, ob die entsprechende Aussage aus Korollar 2.33 auch für Ringe mit acc für d-Colons richtig ist.

Kapitel 3

Die aufsteigende Kettenbedingung für n-erzeugte Untermoduln bei freien Moduln und dem R-Modul R^I

3.1 Freie Moduln

Die allgemeine Frage, ob für Moduln M, N mit n-acc auch $M \oplus N$ n-acc erfüllt (siehe [15]), konnte bisher nicht beantwortet werden. Für $n = 1$ ist die Frage allerdings sehr leicht zu beantworten; wir bemerken dies in Korollar 3.2. Eine ähnliche Frage, nämlich ob für einen Ring R mit n-acc auch jeder freie R-Modul n-acc erfüllt, ist ebenfalls noch ungelöst. Im Fall von Integritätsringen wurde hierzu schon einiges gezeigt:
(i) Für $n = 1$ und $n = 2$ gilt, dass mit R auch jeder freie R-Modul n-acc erfüllt (siehe Proposition 1.4 in [24] und Corollary 2.7 in [29]).
(ii) In Theorem 2.6 von [29] wurde gezeigt, dass schon jeder freie R-Modul n-acc erfüllt, falls nur der R-Modul R^{n-1} n-acc erfüllt.
Wir werden den Fall $n = 1$ allgemein lösen, ohne Integritätsring vorauszusetzen (Satz 3.4).
Eine weitere Aufgabenstellung in diesem Zusammenhang kann sein, möglichst große Klassen von Ringen R anzugeben, für die jeder freie R-Modul pan-acc erfüllt. In [28], Corollaire 3.3, ist dies für noethersche Ringe gezeigt worden, und viele weitere Ergebnisse hierzu findet man in [29]. In Satz 3.5 zeigen wir, dass jeder freie R-modul pan-acc erfüllt, falls R acc für d-Colons hat.

Lemma 3.1 *Seien R ein Ring, $M_1, \dots, M_n$ R-Moduln und $x_i, y_i \in M_i$ für $1 \leq i \leq n$. Ferner gebe es $a, b_1, \dots, b_n \in R$ mit $x_i = ay_i$ und $y_i = b_i x_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. Dann existiert bereits ein gemeinsamer Faktor $c \in R$, so dass $y_i = cx_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.*

Beweis Es reicht aus, die Aussage für $n = 2$ zu zeigen; der Rest folgt dann sofort durch Induktion. Setze $c := b_1 + b_2 - ab_1b_2$. Dann ist $cx_1 = y_1 + b_2x_1 - b_2x_1 = y_1$ und analog $cx_2 = y_2$. □

Korollar 3.2 *Seien R ein Ring und $M_1, \dots, M_n$ R-Moduln mit 1-acc. Dann erfüllt auch $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ 1-acc.*

Beweis Sei wieder oBdA $n = 2$, also M, N R-Moduln mit 1-acc. Ist $R(x_1, y_1) \subseteq R(x_2, y_2) \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge zyklischer Untermoduln in $M \oplus N$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $Rx_n = Rx_{n+1} = \dots$ und $Ry_n = Ry_{n+1} = \dots$ in M bzw. N, und Lemma 3.1 liefert sofort die Behauptung. □

Korollar 3.3 *Sei R ein accp-Ring. Dann erfüllt der R-Modul R^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ 1-acc.*

Satz 3.4 *Sei R ein accp-Ring. Dann erfüllt jeder freie R-Modul 1-acc.*

Beweis Wir betrachten den R-Modul $\oplus_{i \in I} R$ für eine beliebige Menge I. Sei $Rx_n \subseteq Rx_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von zyklischen Untermoduln von $\oplus_{i \in I} R$ und $x_{i,n}$ $(i \in I)$ sei die i-te Komponente von x_n. Angenommen, die Inklusionen sind echt. Induktiv konstruieren wir dann eine echt aufsteigende Folge $R(a_{0,n}, \dots, a_{n,n}, 0, \dots) \subset R(a_{0,n+1}, \dots, a_{n,n+1}, a_{n+1,n+1}, 0, \dots)$ in $\oplus_{i \in \mathbb{N}} R$ mit der Eigenschaft, dass $(0) \neq a_{n,n}R = a_{n,n+1}R = \dots$ für jedes $n \in \mathbb{N}$: Wähle $i_0 \in I$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $(0) \neq x_{i_0,n_0}R = x_{i_0,n_0+1}R = \dots$ und setze $a_{0,0} := x_{i_0,n_0}$. Da $\oplus_{i \in J} R$ für jede endliche Teilmenge J von I nach Korollar 3.3 1-acc erfüllt, ist die Menge $\{i \in I : \exists n \ a_{i,n} \neq 0\}$ unendlich. Es ist $I_0 := \{i \in I : x_{i,n_0} \neq 0\}$ endlich. Wähle $i_1 \in I \setminus I_0$ und $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass $(0) \neq x_{i_1,n_1}R = x_{i_1,n_1+1}R = \dots$ (d.h. $n_1 > n_0$), und setze $a_{0,1} := x_{i_0,n_1}$ und $a_{1,1} := x_{i_1,n_1}$. Sind nun $a_{j,m} = x_{i_j,n_m}$ für alle $j \leq m \leq k$ konstruiert, so sei analog $I_k := \{i \in I : x_{i,n_k} \neq 0\}$ (I_k ist endlich) und wähle $i_{k+1} \in I \setminus I_k$ und n_{k+1} derart, dass $(0) \neq x_{i_{k+1},n_{k+1}}R = a_{i_{k+1},n_{k+1}+1}R = \dots$ (d.h. $n_{k+1} > n_k$). Dann setze $a_{j,k+1} = x_{i_j,n_{k+1}}$ für alle $j = 0, \dots, k+1$.
Somit haben wir die echt aufsteigende Folge $R(a_{0,0}, 0, \dots) \subset R(a_{0,1}, a_{1,1}, 0, \dots) \subset \dots$ in $\oplus_{i \in \mathbb{N}} R$ konstruiert. Da ferner $a_{0,0}R \subseteq (a_{0,1} + a_{1,1})R \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in R ist, sei etwa $a_{0,n+1} + \dots + a_{n,n+1} + a_{n+1,n+1} \in (a_{0,n} + \dots + a_{n,n})R$.

Wegen $a_{i,n+1} \in a_{i,n}R$ für $i = 0, \ldots, n$ existiert nach Lemma 3.1 ein gemeinsamer Faktor c mit $a_{i,n+1} = ca_{i,n}$. Somit ist $a_{0,n+1} + \cdots + a_{n,n+1} \in (a_{0,n} + \cdots + a_{n,n})R$ und folglich $a_{n+1,n+1} = r(a_{0,n} + \cdots + a_{n,n}) \quad (*)$ für ein $r \in R$. Schließlich sei etwa $(a_{0,n}, \ldots, a_{n,n}, 0, \ldots) = b(a_{0,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}, a_{n+1,n+1}, 0, \ldots)$, woraus $a_{i,n} = bca_{i,n}$ für alle $i = 0, \ldots, n$ folgt. Multiplikation von $(*)$ mit bc liefert dann den Widerspruch $0 = r(a_{0,n} + \cdots + a_{n,n}) = a_{n+1,n+1}$. □

Wir wollen nun zeigen, daß jeder freie Modul über einem Ring R mit acc für d-Colons pan-acc erfüllt, und benötigen dafür zunächst, dass jeder endlich erzeugte (freie) R-Modul wieder acc für d-Colons erfüllt. Dies haben wir bereits in Korollar 2.10 gezeigt.

Satz 3.5 *Jeder freie Modul über einem Ring mit acc für d-Colons erfüllt pan-acc.*

Beweis R erfülle acc für d-Colons und es sei $M := \oplus_{i \in I} R$ für eine Menge I. Wir zeigen zunächst, dass für jedes maximale Ideal P von R die Lokalisierung M_P pan-acc erfüllt. Da $M_P \cong \oplus_{i \in I} R_P$, sei hierfür oBdA (R, P) ein lokaler Ring. Wir verwenden Proposition 2.4, d.h. wir müssen zeigen, dass M/N für jeden endlich erzeugten Untermodul N von M *(NL)* erfüllt. Sei also U ein Untermodul von M, der N enthält, und $U/N = P(U/N)$. Sei $x \in U$. Da N endlich erzeugt ist, existiert eine endliche Teilmenge J von I mit $N + Rx \leq \oplus_{j \in J} R =: M'$. Nach Korollar 2.10 erfüllt M'/N acc für d-Colons und somit auch *(NL)*. Sei nun $p : M \longrightarrow M'$ die kanonische Projektion. Dann folgt $p(U)/N = P(p(U)/N) = N/N$ und (da $x \in p(U)$) $x \in N$. Somit ist $U = N$, was zu zeigen war. Daher erfüllt jede Lokalisierung von M nach einem maximalen Ideal von R pan-acc.
Wir wollen nun Satz 2.6 verwenden und müssen dazu zeigen, dass $Z(M/N)$ für jeden endlich erzeugten Untermodul N von M in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen enthalten ist. Dies ist nach Satz 1.6 der Fall, falls M/N acc für d-Annihilatoren erfüllt. Sei wieder J eine endliche Teilmenge von I derart, dass $N \leq \oplus_{j \in J} R =: M'$ ist, und $p : M \longrightarrow M'$ die kanonische Projektion. Betrachte die Folge $N : a_1 \subseteq N : a_1 a_2 \subseteq \ldots$ in M für beliebige $a_n \in R$. Da R und M' jeweils acc für d-Colons erfüllen, können wir oBdA $p(N) : a_1 = p(N) : a_1 a_2 = \ldots$ in M' und $\mathrm{Ann}_R(a_1) = \mathrm{Ann}_R(a_1 a_2) = \ldots$ in R annehmen. Sei nun $x \in N : a_1 a_2$. Dann ist $p(x) \in p(N) : a_1 a_2 = p(N) : a_1 \subseteq N : a_1$ und $x_i \in \mathrm{Ann}\ _R(a_1 a_2) = \mathrm{Ann}_R(a_1)$ für jede Komponente x_i von x mit $i \notin J$. Daraus folgt $x \in N : a_1$, d.h. M/N hat acc für d-Annihilatoren, was noch zu zeigen war. □

3.2 Der R-Modul R^I

Wir wollen nun die folgenden beiden Resultate für einen Ring R und eine beliebige Menge I zeigen:

(i) Ist R noethersch, so erfüllt R^I pan-acc.
(ii) Erfüllt R accp und acc für Annihilatoren, so erfüllt R^I 1-acc.
Aussage (i) ist für *reduzierte* noethersche Ringe von RENAULT gezeigt worden (Corollaire 2.3 in [28]). Aussage (ii) gilt ohne die Voraussetzung acc für Annihilatoren nicht, wie das spätere Beispiel 4.1 zeigt. Wir beginnen mit zwei Lemmata zu dem Modul R^I über einem noetherschen Ring R, und betrachten gleich etwas allgemeiner auch Lokalisierungen. Diese allgemeineren Formulierungen brauchen wir zwar nicht zum Beweis des Satzes 3.8; wir verwenden sie aber in der sich daran anschließenden Bemerkung.

Lemma 3.6 *Sei R noethersch, S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R, I eine beliebige Menge und M ein endlich erzeugter Untermodul des R_S-Moduls $(R^I)_S$. Dann existiert eine endliche Teilmenge J von I derart, dass die Projektion $p : (R^I)_S \longrightarrow (R^J)_S$ auf M injektiv ist.*

Beweis Sei M erzeugt von $x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}$, und y_i $(i \in I)$ seien die i-ten Projektionen von $y \in (R^I)_S$ auf R_S. Sei U der von allen n-Tupeln $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)})$ erzeugte Untermodul von R_S^n $(i \in I)$. Da R_S noethersch ist, ist R_S^n ein noetherscher R_S-Modul, und somit existiert eine endliche Teilmenge J von I mit $U = \sum_{j \in J} R_S(x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)})$. Ist nun $y \in M\cap$ Ker(p), so ist $y = \sum_{k=1}^n r_k x^{(k)}$ für gewisse $r_k \in R_S$ und $y_j = \sum_{k=1}^n r_k x_j^{(k)} = 0$ für jedes $j \in J$. Ferner gibt es für ein festes $i \in I$ Elemente $a_j \in R_S$ mit $(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}) = \sum_{j \in J} a_j (x_j^{(1)}, \ldots, x_j^{(n)})$. Somit haben wir $y_i = \sum_{k=1}^n r_k x_i^{(k)} = \sum_{k=1}^n r_k \sum_{j \in J} a_j x_j^{(k)} = \sum_{j \in J} a_j \sum_{k=1}^n r_k x_j^{(k)} = 0$, d.h. es ist $M\cap$ Ker$(p) = \{0\}$. □

Lemma 3.7 *Seien R, S, I, M wie in Lemma 3.6. Dann existieren nur endlich viele Primideale, die maximal in $Z((R^I)_S/M)$ sind.*

Beweis Nach Lemma 3.6 existiert eine endliche Teilmenge J von I derart, dass die Projektion $p : (R^I)_S \longrightarrow (R^J)_S$ injektiv auf M ist. Da R_S noethersch ist, hat die Menge $\Delta := \{M : z \mid z \in (R^I)_S \setminus M\}$ maximale Elemente (denn oBdA sei $M \subset (R^I)_S$), und jedes davon ist trivialerweise ein Primideal. Wir haben zu zeigen, dass es nur endlich viele maximale Elemente in Δ gibt. Sei also $M : x$ maximal in Δ. Ist $(M + R_S x)\cap$ Ker$(p) = \{0\}$, so ist $M : x = p(M) : p(x)$, und somit ist $M : x$ eines der endlich vielen assoziierten Primideale des noetherschen Moduls $(R^J)_S/p(M)$. Daher gebe es oBdA ein $y \in (M + R_S x) \setminus \{0\}$ mit $p(y) = 0$. Dann ist $M : x \subseteq M : y$, und wegen $y \notin M$ und der Maximalität von $M : x$ gilt sogar Gleichheit. Ferner folgt aus $p(y) = 0$ sofort $M : y = \mathrm{Ann}(y)$ in R_S, denn $a \in M : y$ und $p(ay) = 0$ impliziert $ay = 0$. Das von den Komponenten von y in R_S erzeugte Ideal ist endlich erzeugt, so dass es $y_1, \ldots, y_n \in R_S$

gibt mit $\mathrm{Ann}(y) = \mathrm{Ann}(y_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ann}(y_n)$. Da $M : x$ ein Primideal ist, folgt etwa $M : x = M : y = \mathrm{Ann}(y_1)$, d.h. in diesem Fall ist $M : x$ eines der endlich vielen assoziierten Primideale von R_S. $\square$

Satz 3.8 *Sei R ein noetherscher Ring und I eine beliebige Menge. Dann erfüllt der R-Modul R^I pan-acc.*

Beweis Wir zeigen zunächst, dass jede Lokalisierung von R^I nach einem maximalen Ideal P pan-acc erfüllt. Sei $\varphi : (R^I)_P \longrightarrow R_P^I$ definiert durch $\varphi(\frac{x}{s}) := (\frac{x_i}{s})_{i\in I}$ für jedes $x = (x_i)_{i\in I} \in R^I$, $s \in R \setminus P$. Da R noethersch ist, ist $\mathrm{Kern}(R \to R_P) = \mathrm{Ann}(t)$ für ein $t \in R \setminus P$. Ist nun $\frac{x}{s} \in \mathrm{Kern}(\varphi)$, so ist $x_i \in \mathrm{Ann}(t)$ für alle $i \in I$, d.h. $\frac{x}{s} = \frac{0}{1}$ in $(R^I)_P$. Somit lässt sich $(R^I)_P$ in R_P^I einbetten. Daher genügt zu zeigen, dass R_P^I pan-acc erfüllt, und wir nehmen dafür oBdA R als lokal mit einzigem maximalen Ideal P an. Dazu verwenden wir Proposition 2.1 aus [15] bzw. unsere Proposition 2.4 und zeigen $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k(R^I/M) = \{M\}$ für jeden endlich erzeugten Untermodul M von R^I. Sei $x + M \in \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k(R^I/M)$. Nach Lemma 3.6 existiert eine endliche Teilmenge J von I derart, dass die Projektion $p : R^I \longrightarrow R^J$ injektiv auf $M + Rx$ ist. Dann folgt $p(x) + p(M) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k(R^J/p(M)) = \{p(M)\}$, und $p(x) \in p(M)$ liefert $x \in M$, d.h. $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k(R^I/M) = \{M\}$.
Um Satz 2.6 anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, dass $Z(R^I/M)$ für jeden endlich erzeugten Untermodul M von R^I in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen enthalten ist. Dies folgt aber direkt aus Lemma 3.7. $\square$

Bemerkung Es gilt sogar noch eine stärkere Aussage als Lemma 3.7: Tatsächlich hat $(R^I)_S/M_S$ sogar nur endlich viele schwach assoziierte Primideale für jeden endlich erzeugten Untermodul M von R^I, so dass Satz 3.8 auch aus dem Globalisierungskriterium von Heinzer und Lantz folgt (Theorem 3.4 in [15]). Um dies zu zeigen, bezeichnen wir die Menge der schwach assoziierten Primideale eines Moduls N mit $\mathrm{Ass}(N)$ und nehmen indirekt an, dass $\mathrm{Ass}((R^I)_S/M_S)$ unendlich ist. Nun gehen wir wie im Beweis von Proposition 3.7 in [15] vor: Nach Lemma 3.7 existieren nur endlich viele Primideale, die maximal in $Z((R^I)_S/M_S)$ sind. Da schwach assoziierte Primideale bei Lokalisierungen wieder in schwach assoziierte Primideale übergehen (siehe Chapter IV §1, Exercise 17 in [3]), existiert ein Primideal P_S von R_S maximal in $Z((R^I)_S/M_S)$, so dass $\mathrm{Ass}((R^I)_P/M_P)$ unendlich ist. Sei etwa P_P erzeugt von $x_1, \ldots, x_n$. Ist nun $Q_P \neq P_P$ ein schwach assoziiertes Primideal von $(R^I)_P/M_P$, so ist $x_k \notin Q_P$ für ein k, und mit $S_k := \{x_k^j : j \in \mathbb{N}_0\}$ ist dann $(Q_P)_{S_k} \in \mathrm{Ass}(((R^I)_P)_{S_k}/(M_P)_{S_k})$. Somit existiert ein k derart, dass $\mathrm{Ass}(((R^I)_P)_{S_k}/(M_P)_{S_k})$ unendlich ist, und jedes Element daraus ist (als Primideal in R betrachtet) echt in P enthalten. Da $((R^I)_P)_{S_k}$ eine

Lokalisierung von R^I ist, lässt sich diese Konstruktion mittels Lemma 3.7 iterieren. Dadurch erhalten wir eine echt absteigende Folge von Primidealen in R, was in noetherschen Ringen bekanntlich nicht möglich ist.

Nun wollen wir noch ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, dass R^I 1-acc erfüllt, falls R accp erfüllt. Der gleiche Beweis wie in Proposition 1.4 von [24] zeigt, dass z.B. „R Integritätsring" eine solche hinreichende Bedingung ist. Untersucht man den Beweis genauer, so stellt man fest, dass nur die Tatsache verwendet wird, dass für $(a) = (b) \neq (0)$ und $a = rb$ stets $r \in E(R)$ gilt. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $Z(R) \subseteq J(R)$ gilt, wie man leicht nachrechnet (siehe auch [27]; dort heißen Ringe R mit $Z(R) \subseteq J(R)$ *schwach primär*). Dies ist ja beispielsweise auch für primäre oder lokale Ringe erfüllt. Da nulldimensionale accp-Ringe eine endliche direkte Summe von lokalen accp-Ringen sind (siehe [27]), ist also auch „R nulldimensional" hinreichend.
Wir setzen jetzt acc für Annihilatoren voraus. Dafür erinnern wir noch an die folgende Äquivalenz, etwa aus [7]:

Für einen Ring R sind äquivalent:
(i) *R erfüllt acc für Annihilatoren.*
(ii) *R erfüllt dcc (absteigende Kettenbedingung) für Annihilatoren.*
(iii) *Für jede Teilmenge A von R existiert eine endliche Teilmenge A' von A mit $Ann(A) = Ann(A')$.*

Satz 3.9 *Erfüllt R accp und acc für Annihilatoren, so erfüllt auch der R-Modul R^I 1-acc für jede Menge I.*

Beweis Sei $Rx_1 \subseteq Rx_2 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge zyklischer Untermoduln von R^I, etwa $x_n = r_n x_{n+1}$ für gewisse $r_n \in R$. Seien $x_{n,i}$ $(i \in I)$ die Komponenten von x_n and A_n das Ideal von R, dass von $\{x_{n,i} : i \in I\}$ erzeugt wird. Wegen $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ und dcc für Annihilatoren in R können wir oBdA $A := \mathrm{Ann}(A_1) = \mathrm{Ann}(A_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Ferner gibt es $i_1, \ldots, i_m \in I$ mit $A = \mathrm{Ann}(x_{1,i_1}, \ldots, x_{1,i_m})$, und dann folgt auch $A = \mathrm{Ann}(x_{n,i_1}, \ldots, x_{n,i_m})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach Korollar 3.3 erfüllt für $J := \{i_1, \ldots, i_m\}$ der R-Modul R^J 1-acc, und somit existieren ab einem gewissen Index Elemente $s_n \in R$ mit $x_{n+1,i_k} = s_n x_{n,i_k}$ für alle $k = 1, \ldots, m$. Daher ist $(1 - r_n s_n) x_{n,i_k} = 0$, d.h. $1 - r_n s_n \in A$. Daraus folgt aber $(1 - r_n s_n) x_{n+1} = 0$, also $x_{n+1} = s_n x_n$. Die Folge wird also stationär. $\square$

Kapitel 4

Polynome und Potenzreihen über accp-Ringen

4.1 Ein Gegenbeispiel für Potenzreihenringe

Es ist eine natürliche Frage, ob für einen accp-Ring R auch der Potenzreihenring $R[[X]]$ accp erfüllt. Dabei ist für eine beliebige Menge X von Unbestimmten $R[[X]] := \bigcup\{R[[Y]] : Y$ endliche Teilmenge von $X\}$. Für die analoge Fragestellung bei Polynomringen gaben Heinzer und Lantz in [17] ein Gegenbeispiel. Wir werden in diesem Abschnitt ein Beispiel für einen Ring mit pan-acc konstruieren, dessen Potenzreihenring in einer Unbestimmten nicht accp erfüllt. Dazu ist es zunächst sinnvoll, sich alle bekannten hinreichenden Bedingungen in Erinnerung zu rufen. Es wurde in [15] darauf hingewiesen, dass für Integritätsringe oder lokale Ringe mit accp auch der Potenzreihenring accp erfüllt. Wie bei der analogen Fragestellung für R^I am Ende von Kapitel 3 (siehe die Ausführungen vor Satz 3.9) zeigt sich, dass schon die Bedingung „$Z(R) \subseteq J(R)$" hinreichend ist, genauso wie die Bedingung „R nulldimensional". Wir werden in Satz 4.9 außerdem noch die dem Satz 3.9 entsprechende Aussage für Potenzreihenringe beweisen. In diese Analogie zwischen dem R-Modul R^I und dem Potenzreihenring $R[[X]]$ passt auch das folgende Gegenbeispiel, denn wir konstruieren einen semilokalen (aber nicht lokalen) Ring R_S mit pan-acc, für den sowohl der Potenzreihenring $R_S[[x]]$ als auch der R_S-Modul $R_S^{\mathbb{N}_0}$ nicht 1-acc erfüllen.

Beispiel 4.1 *Seien K ein Körper und A_n, B_n ($n \in \mathbb{N}_0$) Unbestimmte über K. Setze $A := \{A_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $B := \{B_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, $I := (A_k(B_n - 1) : n \geq k)K[A, B]$, $M := (A, B)K[A, B]$, $Q := (A, B_0 - 1, B_1 - 1, \dots)K[A, B]$, $R := K[A, B]/I$ und*

$S := R \setminus (M/I \cup Q/I)$. Dann erfüllt R_S pan-acc, aber $R_S[[x]]$ und $R_S^{\mathbb{N}_0}$ erfüllen nicht 1-acc.

Beweis Es ist nicht schwer zu sehen, dass $P_i := (\{A_n : n < i\} \cup \{B_n - 1 : n \geq i\})K[A,B]$ $(i \geq 0)$ und $P := AK[A,B]$ genau die minimalen Primideale über I sind: Ist nämlich $Q \supseteq I$ ein Primideal und existiert ein $k \in \mathbb{N}_0$ mit $A_k \notin Q$, so sei $i \in \mathbb{N}_0$ minimal mit dieser Eigenschaft. Dann sind $A_0, \ldots, A_{i-1} \in Q$ und wegen $A_i(B_n - 1) \in I \subseteq Q$ für alle $n \geq i$ folgt $B_n - 1 \in Q$, d.h. $P_i \subseteq Q$. Ist aber $A_k \in Q$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist $P \subseteq Q$. Da P und P_i Primideale sind, sind es also genau die minimalen Primideale über I.

1) Wir zeigen, dass $\bigcap_{i=0}^{\infty} P_i = I$ gilt. Dafür zeigen wir zunächst $\bigcap_{i=0}^{m} P_i = (I, B_m - 1, B_{m+1} - 1, \ldots)K[A,B]$ für jedes $m \in \mathbb{N}_0$. Der Fall $m = 0$ ist trivial, daher gelte die Gleichung für $m-1$, also $\bigcap_{i=0}^{m} P_i = (I, B_{m-1} - 1, B_m - 1, \ldots)K[A,B] \cap P_m$. Sei $f = (B_{m-1} - 1)g + h$ aus diesem Durchschnitt ($g \in K[A,B]$, $h \in (I, B_m - 1, B_{m+1} - 1, \ldots)K[A,B] \subseteq P_m$). Dann folgt $g \in P_m$ (da $B_{m-1} - 1 \notin P_m$) und somit $f \in (I, B_m - 1, B_{m+1} - 1, \ldots)K[A,B]$. Wählen wir nun $p \in \bigcap_{i=0}^{\infty} P_i$, so existiert ein m mit $p \in K[A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m]$, und wegen $p \in (I, B_{m+1} - 1, B_{m+2} - 1, \ldots)K[A,B]$ haben wir $p \in I$ gezeigt. Daher ist I der Durchschnitt der minimal über I liegenden Primideale, d.h. I ist ein Radikalideal und somit R ein reduzierter Ring. Daraus folgt sofort, dass $Z(R)$ gleich der Vereinigung der minimalen Primideale von R ist, also $Z(R) \subseteq Q/I$. Somit können wir R in R_S einbetten.

2) Wir behaupten nun, dass der Potenzreihenring $R_S[[x]]$ nicht accp erfüllt.
Dafür bezeichne a_n bzw. b_n das Bild von A_n bzw. B_n in R. Setzt man

$$f_n := \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\prod_{j=n}^{i-1} b_j\Big) a_i x^i \in R_S[[x]], \text{ so gilt } f_n = \sum_{i=0}^{\infty} \Big(\prod_{j=n+1}^{i-1} b_j\Big) b_n a_i x^i = b_n f_{n+1} ,$$

da $b_n a_i = a_i$ für jedes $n \geq i$ ($\prod_{j=n}^{i-1} b_j := 1$, falls $i \leq n$). Daher ist $(f_0) \subseteq (f_1) \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R_S[[x]]$. Angenommen, es existiert ein $g = \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i \in R_S[[x]]$ mit $f_{n+1} = g f_n$ für ein $n \geq 1$. Der Koeffizientenvergleich bei x^k liefert

$$\Big(\prod_{j=n+1}^{k-1} b_j\Big) a_k = \sum_{i=0}^{k} g_i \Big(\prod_{j=n}^{k-i-1} b_j\Big) a_{k-i} .$$

Sei nun P'_m das Bild von P_m in R_S. Wir zeigen, dass $g_l \in P'_m$ für alle $l \geq 1$ und $m \geq 0$ gilt:

Sei $m = 0$, $l = 1$. Wegen $a_0 = g_0 a_0$ liefert die Multiplikation von $a_1 = g_0 a_1 + g_1 a_0$ mit a_0 die Gleichung $g_1 a_0^2 = 0$, also $g_1 \in P_0'$. Seien nun $g_1, \ldots, g_{l-1} \in P_0'$, also $g_1 a_0 = \cdots = g_{l-1} a_0 = 0$. Daher liefert die Multiplikation von

$$(\prod_{j=n+1}^{l-1} b_j) a_l = \sum_{i=0}^{l} g_i (\prod_{j=n}^{l-i-1} b_j) a_{l-i}$$

mit a_0 sofort $g_l a_0^2 = 0$, also $g_l \in P_0'$.
Induktiv sei jetzt $g_i \in \bigcap_{j=0}^{m-1} P_j'$ für jedes $i \geq 1$. Wegen $\bigcap_{j=0}^{m-1} P_j' = (b_{m-1} - 1, b_m - 1, \ldots) R_S$ ist $g_i a_0 = \cdots = g_i a_{m-1} = 0$ und somit liefern die Koeffizienten von x^m

$$(\prod_{j=n+1}^{m-1} b_j) a_m = g_0 (\prod_{j=n}^{m-1} b_j) a_m \qquad (*) \ .$$

Wiederum zeigen wir $g_l \in P_m'$ durch Induktion über l. Ist $l = 1$, so multiplizieren wir

$$(\prod_{j=n+1}^{m} b_j) a_{m+1} = g_0 (\prod_{j=n}^{m} b_j) a_{m+1} + g_1 (\prod_{j=n}^{m-1} b_j) a_m$$

mit a_m und erhalten (unter Verwendung von $(*)$) $g_1 (\prod_{j=n}^{m-1} b_j) a_m^2 = 0 \in P_m'$ und folglich $g_1 \in P_m'$.
Nun seien $g_1, \ldots, g_{l-1} \in \bigcap_{j=0}^{m} P_j' = (b_m - 1, b_{m+1} - 1, \ldots) R_S$, also $g_1 a_m = \cdots = g_{l-1} a_m = 0$, und wir betrachten die Koeffizienten von x^{l+m}. Dies zeigt

$$(\prod_{j=n+1}^{l+m-1} b_j) a_{l+m} = \sum_{i=0}^{l} g_i (\prod_{j=n}^{l+m-i-1} b_j) a_{l+m-i} \ ,$$

da $g_i a_0 = \cdots = g_i a_{m-1} = 0$ für jedes $i \geq 1$. Schließlich liefert die Multiplikation dieser Gleichung mit a_m unter Verwendung von $(*)$ $g_l (\prod_{j=n}^{m-1} b_j) a_m^2 = 0 \in P_m'$, also $g_l \in P_m'$.
Wir haben damit $g_l \in \bigcap_{m=0}^{\infty} P_m' = (0)$ für jedes $l \geq 1$ gezeigt. Somit ist $g = g_0 \in R_S$, und es bleibt das Gleichungssystem $(\prod_{j=n+1}^{k-1} b_j) a_k = g (\prod_{j=n}^{k-1} b_j) a_k$ $(k \geq 0)$ zum Widerspruch zu führen. Sei etwa $g = \frac{h'}{s'}$, wobei s' bzw. h' die homomorphen Bilder von gewissen Polynomen s bzw. h aus $K[A, B]$ seien. Wähle ein $k \geq n$ mit $s \in K[A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_k]$. Der Koeffizientenvergleich bei x^{k+1} liefert

$$s (\prod_{j=n+1}^{k} B_j) A_{k+1} - h (\prod_{j=n}^{k} B_j) A_{k+1} \in I \ .$$

Wir betrachten nun den Homomorphismus $v : K[A, B] \longrightarrow K[A_{k+1}, B_{n+1}, \ldots, B_k]$ definiert durch $v(A_{k+1}) = A_{k+1}$, $v(A_i) = 0$ für alle $i \neq k+1$, $v(B_0) = \cdots = v(B_n) = 0$, $v(B_j) = B_j$ für alle $j = n+1, \ldots, k$ und $v(B_j) = 1$ für alle $j \geq k+1$. Dann ist $v(I) = (0)$ und folglich $v(s)(\prod_{j=n+1}^{k} B_j)A_{k+1} = 0$ in $K[A_{k+1}, B_{n+1}, \ldots, B_k]$. Somit ist $s \in \mathrm{Kern}(v) \subseteq (A, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1} - 1, B_{k+2} - 1, \ldots)K[A, B]$, und da $s \in K[A_0, \ldots, A_k, B_0, \ldots, B_k]$, erhalten wir den Widerspruch $s \in (A, B_1, \ldots, B_k)K[A, B] \subseteq M$.
Somit erfüllt $R_S[[x]]$ nicht accp, und der gleiche Beweis zeigt (indem wir die Potenzreihen als Folgen deuten), dass auch $R_S^{\mathbb{N}_0}$ nicht 1-acc erfüllt.

3) Nun zeigen wir, dass R_S pan-acc erfüllt. Bekanntlich bricht eine aufsteigende Folge in einem semilokalen Ring ab, falls sie in jeder Lokalisierung nach einem maximalen Ideal stationär wird. Zu zeigen ist also, dass $R_{Q/I}$ und $R_{M/I}$ pan-acc erfüllen. Hinreichend hierfür ist der Nachweis von $\bigcap_{n=0}^{\infty}(Q/J)_{Q/J}^n = (0)$ bzw. $\bigcap_{n=0}^{\infty}(M/J)_{M/J}^n = (0)$ für jedes Ideal $J \supseteq I$ mit J/I endlich erzeugt in R und $J \subseteq Q$ bzw. $J \subseteq M$. Sei also zunächst $J = (I, h_1, \ldots, h_k)K[A, B] \subseteq Q$ und $\frac{f'}{1} \in \bigcap_{n=0}^{\infty}(Q/I)_{Q/I}^n$. Sei $f \in K[A, B]$ derart, dass $f' \in R$ das homomorphe Bild von f ist. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $f, h_1, \ldots, h_k \in T := K[A_0, \ldots, A_m, B_0, \ldots, B_m]$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $s_n \in K[A, B] \setminus Q$ mit $s_n f \in Q^n + I$. Sei $Q' := Q \cap T$ und $I' := I \cap T$. Setzt man nun $A_n = 0$ und $B_n = 1$ für alle $n > m$, so erhalten wir Polynome $t_n \in T \setminus Q'$ mit $t_n f \in (Q')^n + I'$. Somit ist $\frac{f'}{1} \in \bigcap_{n=0}^{\infty}(Q'/I')_{Q'/I'}^n = (0)$ im noetherschen lokalen Ring $(T/I')_{Q'/I'}$, d.h. es gibt ein $t \in T \setminus Q'$ mit $tf \in I'$ Wegen $I' \subseteq I$ und $Q' := Q \cap T$ ist dann auch $\frac{f'}{1} = 0$ in $R_{Q/I}$. Analog zeigt man $\bigcap_{n=0}^{\infty}(M/J)_{M/J}^n = (0)$, indem man entsprechend $A_n = B_n = 0$ setzt für alle $n > m$. □

Es ist noch interessant zu bemerken, dass der Ring R_S in Beispiel 4.1 unendliche Krulldimension hat, denn es ist ja z.B. mit obigen Bezeichnungen $R/P \cong K[B]$ unendlichdimensional. Es stellt sich daher die Frage, ob vielleicht auch ein endlichdimensionales Gegenbeispiel existiert.

4.2 Hinreichende Kriterien

Es ist allgemein bekannt und nicht schwer zu zeigen, dass „R Integritätsring" ein hinreichendes Kriterium dafür ist, dass mit R auch $R[X]$ accp erfüllt. Heinzer und Lantz gaben in [15] weitere hinreichende Bedingungen zu dieser Fragestellung an:
(i) R ist lokal mit nur endlich vielen schwach assoziierten Primidealen.
(ii) R ist nulldimensional.

Dabei zeigt eine Betrachtung des Beweises, dass bei (i) statt „R lokal“ wieder „$Z(R) \subseteq J(R)$“ ausreichend ist. Wir werden in diesem Abschnitt in Satz 4.6 ein hinreichendes Kriterium beweisen, das alle genannten (und bekannten) Aussagen impliziert: accp geht auf den Polynomring über, falls R nur endlich viele schwach assoziierte Primideale besitzt. Wie schon zu Beginn dieses Kapitels bemerkt, erfüllt aber $R[X]$ ohne zusätzliche Voraussetzungen im allgemeinen nicht accp.
Die entwickelten Techniken zum Beweis von Satz 4.6 lassen sich teilweise auch für Potenzreihenringe verwenden. Auf diese Weise können wir noch zeigen, dass für einen accp-Ring, der die (aufsteigende) Kettenbedingung für Annihilatorideale erfüllt, auch der Potenzreihenring accp erfüllt.

Dass der Übergang der accp-Eigenschaft zum Polynomring im wesentlichen von den Nullteilern des Ringes abhängt, zeigt auch die folgende Überlegung: Sei R ein accp-Ring, x eine Unbestimmte und $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \dots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[x]$, wobei unendlich viele Leitkoeffizienten der f_i keine Nullteiler seien. Dann seien durch Auswählen der entsprechenden Teilfolge oBdA alle Leitkoeffizienten keine Nullteiler in R. Die Folge der Grade der f_i ist dann nach der Gradformel monoton fallend, so dass man $n := \operatorname{grad}(f_1) = \operatorname{grad}(f_2) = \dots$ annehmen kann. Da die Leitkoeffizienten keine Nullteiler sind, sind in $f_i = g_i f_{i+1}$ die Faktoren $g_i \in R$, so dass man die Folge auch als aufsteigende Folge zyklischer Untermoduln im R-Modul R^n auffassen kann. Da aber R^n nach Korollar 3.3 1-acc erfüllt, bricht dann auch die Folge in $R[x]$ ab.

Für eine beliebige Menge X von Unbestimmten und eine aufsteigende Folge $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \dots$ von Hauptidealen in $R[X]$ bilden stets auch die Inhaltsideale eine aufsteigende Folge $A_{f_1} \subseteq A_{f_2} \subseteq \dots$ in R. Bei dem Beispiel in [17] ist diese Folge der Inhaltsideale stationär; denn dort ist der konstante Koeffizient der beteiligten Polynome gleich 1, also $A_{f_n} = R$ für alle n. Es stellt sich daher die Frage, ob für einen accp-Ring R und eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[X]$ zumindest noch die Folge der Inhaltsideale stationär wird. Nimmt man wieder die Zusatzvoraussetzung $Z(R) \subseteq J(R)$ hinzu, so gilt dies mit einer analogen Überlegung wie im Beweis von Proposition 3.8. von [15]:
Sei $f_n = g_n f_{n+1}$. Für jedes $x \in X$ bilden die Ordnungen der f_n bzgl. x (also die höchste Potenz von x, die f_n teilt) eine absteigende Folge in $\mathbb{N}_0$. Da in f_1 nur endlich viele Unbestimmte vorkommen, existiert also ein k derart, dass alle Folgen der Ordnungen von $f_k, f_{k+1}, \dots$ stationär sind. Durch Kürzen der jeweiligen Potenz von x ist dann $(f_k(0)) \neq (0)$, und wegen accp in R sei ferner oBdA $(f_k(0)) = (f_{k+1}(0)) = \dots$, so dass wegen $Z(R) \subseteq J(R)$ dann $g_n(0)$ eine Einheit in R für alle $n \geq k$ ist. Nun überlegt

man sich leicht direkt $A_{f_k} = A_{f_{k+1}} = \dots$ (oder verwendet (28.4) von [12]).

Der allgemeine Fall ist allerdings sehr viel unübersichtlicher. Mit den vor Lemma 1.14 eingeführten Bezeichnungen zeigen wir die folgende technische Aussage:

Lemma 4.2 *Seien R ein accp-Ring und $f_n = \sum_c f_{n,c}X^c$, $g_n = \sum_c g_{n,c}X^c \in R[x_1, \dots, x_m]$ mit $f_n = g_n f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $b \in \mathbb{N}_0^m$ sei ferner $A_{n,b}$ das Ideal in R, das von den Koeffizienten $f_{n,c}$ mit $c \preceq b$ erzeugt wird. Dann gilt:*
Zu jedem $b \in \mathbb{N}_0^m$ existiert ein $k_b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k_b$ gilt: $A_{n,b} = A_{k_b,b}$ und $A_{n,b} = g_{n,0}A_{n,b}$.

Beweis Zunächst bemerken wir, dass aufgrund der Verträglichkeit von $\preceq$ mit der komponentenweisen Addition auf $\mathbb{N}_0^m$ der Koeffizientenvergleich bei X^b stets $f_{n,b} \in A_{n+1,b}$ und somit $A_{n,b} \subseteq A_{n+1,b}$ liefert.
Wir führen nun den Beweis durch Induktion über b. Sei also zunächst $b = 0 = (0, \dots, 0)$. Da R accp erfüllt, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $(f_{k_0,0}) = (f_{k_0+1,0}) = \dots$, d.h. $A_{n,0} = A_{k_0,0}$ für alle $n \geq k_0$. Ferner existiert für jedes $n \geq k_0$ ein $r_n \in R$ mit $f_{n,0} = g_{n,0}f_{n+1,0} = g_{n,0}r_n f_{n,0}$, also $A_{n,0} = g_{n,0}A_{n,0}$.
Nun sei $b \succ 0$ und die Behauptung gelte für den Vorgänger $V(b)$ von b. Für $n \geq k_{V(b)}$ liefert der Koeffizientenvergleich bei X^b:

$$f_{n,b} = \sum_{c \preceq b} g_{n,c}f_{n+1,b-c} \in g_{n,0}f_{n+1,b} + A_{n+1,V(b)}$$

Ferner ist nach Induktionsvoraussetzung $A_{n+1,V(b)} = A_{n,V(b)} = g_{n,0}A_{n,V(b)} = g_{n,0}A_{n+1,V(b)}$ für $n \geq k := k_{V(b)}$, d.h. es ist

$$f_{n,b} \in g_{n,0}(f_{n+1,b} + A_{n+1,V(b)}) \qquad (*) .$$

Wir konstruieren nun induktiv eine Folge $(f_{k,b} + a_k) \subseteq (f_{k+1,b} + a_{k+1}) \subseteq \dots$, wobei $a_n \in A_{n,V(b)}$ für alle $n \geq k$. Dafür setze $a_k := 0$, und es seien dann $a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ mit obigen Eigenschaften bereits konstruiert. Wegen $(*)$ und $a_n \in A_{n,V(b)} = A_{n+1,V(b)} = g_{n,0}A_{n+1,V(b)}$ folgt $f_{n,b} + a_n \in g_{n,0}(f_{n+1,b} + A_{n+1,V(b)})$. Daher existiert ein $a_{n+1} \in A_{n+1,V(b)}$ mit $f_{n,b} + a_n = g_{n,0}(f_{n+1,b} + a_{n+1})$, und die Folge ist konstruiert. Da R accp erfüllt, existiert ein $k_b \geq k = k_{V(b)}$, so dass

$$(f_{n,b} + a_n) = (f_{k_b,b} + a_{k_b})$$

für alle $n \geq k_b$. Wegen $A_{n,V(b)} = A_{k_b,V(b)}$ ist also $f_{n,b} \in (f_{k_b,b}, A_{k_b,V(b)}) = A_{k_b,b}$ und somit (da $A_{n,V(b)} \subseteq A_{k_b,b}$) gilt $A_{n,b} = A_{k_b,b}$ für alle $n \geq k_b$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $A_{n,b} = g_{n,0}A_{n,b}$ für $n \geq k_b$ gilt.
Wegen $A_{n,V(b)} = g_{n,0}A_{n,V(b)} \subseteq g_{n,0}A_{n,b}$ reicht $f_{n,b} \in g_{n,0}A_{n,b}$ zu zeigen. Dies folgt aus $(*)$: Es ist $f_{n,b} \in g_{n,0}(f_{n+1,b}, A_{n+1,V(b)}) = g_{n,0}A_{n+1,b} = g_{n,0}A_{n,b}$. □

Hat (mit obigen Bezeichnungen) f_n den totalen Grad d, so ist $A_{f_n} = A_{n,b}$ für alle $b \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|b| > d$. Da nur endlich viele $b \in \mathbb{N}_0^m$ existieren mit $|b| \leq d$, folgt das folgende Korollar:

Korollar 4.3 *Sei R ein accp-Ring und $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[x_1, \ldots, x_m]$. Ist die Folge der (totalen) Grade der f_n beschränkt, so wird $A_{f_1} \subseteq A_{f_2} \subseteq \ldots$ in R stationär.*

Ohne die Zusatzvoraussetzung über die Grade bleibt das Problem aber leider offen.
Im Folgenden verwenden wir häufig Theorem 76 von [20]: Ist R ein beliebiger Ring, I ein Ideal von R und A ein endlich erzeugtes Ideal von R mit $A = IA$, so existiert ein $y \in I$ mit $(1 + y)A = (0)$. Im Spezialfall $I = (g)$ Hauptideal bedeutet dies, dass ein $r \in R$ existiert mit $(1 - rg)A = (0)$, d.h. $a = rga$ für alle $a \in A$.

Lemma 4.4 *Sei R ein accp-Ring, X eine beliebige Menge von Unbestimmten und $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[X]$. Wird nun die Folge $Ann(A_{f_1}) \supseteq Ann(A_{f_2}) \supseteq \ldots$ stationär, so gilt dies auch schon für die Folge $A_{f_1} \subseteq A_{f_2} \subseteq \ldots$.*

Beweis Es sei oBdA $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) = \mathrm{Ann}(A_{f_2}) = \ldots$. Angenommen, die Folge der Inhaltsideale ist echt aufsteigend und nicht stationär. Dann wähle $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $f_1 \in R[x_1, \ldots, x_m]$. Sei nun f_n' das Bild von f_n unter dem Einsetzhomomorphismus $R[X] \longrightarrow R[x_1, \ldots, x_m]$, der $x = 0$ setzt für alle $x \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$. Dann ist $(f_1) \subseteq (f_2') \subseteq (f_3') \subseteq \ldots$ in $R[x_1, \ldots, x_m]$ und $A_{f_n'} \subseteq A_{f_n}$. Zu f_n' sei das Ideal $A_{n,b}$ für $b \in \mathbb{N}_0^m$ wie in Lemma 4.2 definiert. Da f_1 als Polynom nur endlich viele Koeffizienten $\neq 0$ hat, existiert ein b mit $A_{f_1} = A_{1,b}$. Nach Lemma 4.2 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A_{n,b} = A_{n+1,b} = \ldots$ und $A_{n,b} = g_n(0)A_{n,b}$ (wobei $f_n = g_n f_{n+1}$), und nach obiger Bemerkung existiert ein $r \in R$ mit $(1 - rg_n(0))A_{n,b} = (0)$. Daher folgt $1 - rg_n(0) \in \mathrm{Ann}(A_{n,b}) \subseteq \mathrm{Ann}(A_{1,b}) = \mathrm{Ann}(A_{f_1}) = \mathrm{Ann}(A_{f_{n+1}})$. Seien nun $x_{m+1}, \ldots, x_k \in X$ so, dass $f_n, f_{n+1} \in R[x_1, \ldots, x_k]$, und schreibe $f_n = \sum_c r_c X^c$, $f_{n+1} = \sum_c s_c X^c$. Wir verwenden nun die entsprechende Ordnung $\preceq$ auf $\mathbb{N}_0^k$ und zeigen induktiv $s_c \in A_{f_n}$ für alle $c \in \mathbb{N}_0^k$ (hier könnten wir aber auch die gewöhnliche lexikographische Ordnung verwenden). Wegen $f_{n+1}(0) \in A_{n+1,b} = A_{n,b} \subseteq A_{f_n}$ gilt der Induktionsanfang $s_0 \in A_{f_n}$. Gilt nun $s_{c'} \in A_{f_n}$ für alle $c' \prec c$, so liefert der Koeffizientenvergleich bei X^c in der Gleichung $f_n = g_n f_{n+1}$

mit der Induktionsvoraussetzung $r_c \in g_n(0)s_c + A_{f_n}$. Multiplikation mit r liefert dann wegen $s_c = rg_n(0)s_c$ den Induktionsschluss $s_c \in A_{f_n}$. Damit folgt $A_{f_{n+1}} = A_{f_n}$ im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Lemma 4.5 *Sei R ein accp-Ring derart, dass $Z(R)$ in einer endlichen Vereinigung von Primidealen enthalten ist, und X eine Menge von Unbestimmten. Dann wird für jede aufsteigende Folge $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \ldots$ von Hauptidealen in $R[X]$ die Folge $A_{f_1} \subseteq A_{f_2} \subseteq \ldots$ der Inhaltsideale stationär.*

Beweis Seien $P_1, \ldots, P_l$ Primideale von R mit $Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} P_i$ und $f_n = g_n f_{n+1}$. Liegen für jedes $i \in \{1, \ldots, l\}$ nur endlich viele $g_n(0)$ in P_i, so sei durch Weglassen eines endlichen Anfangsstückes oBdA $g_n(0) \in R \setminus \bigcup_{i=1}^{l} P_i$ für alle n. Liegen aber unendlich viele $g_n(0)$ in einem P_i, etwa in P_1, so kann man durch Auswählen der entsprechenden Teilfolge oBdA $g_n(0) \in P_1$ für alle n annehmen (dies ist zulässig, da beim Übergang zu einer Teilfolge die neuen Faktoren g'_n Produkte von endlich vielen alten Faktoren g_n sind und dies dann ja auch für die konstanten Koeffizienten gilt). Nun prüfen wir wieder, ob für ein $i \in \{2, \ldots, l\}$ unendlich oft $g_n(0) \in P_i$ gilt und verfahren analog. Durch dieses Vorgehen können wir schließlich oBdA annehmen, dass ein $k \in \{0, \ldots, l\}$ existiert mit $g_n(0) \in \bigcap_{i=1}^{k} P_i \setminus \bigcup_{i=k+1}^{l} P_i$. für alle $n \in \mathbb{N}$.
Nach Lemma 4.4 haben wir nur zu zeigen, dass die absteigende Folge der Annihilatoren der Inhaltsideale stationär wird. Wir nehmen dafür indirekt $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) \supset \mathrm{Ann}(A_{f_2}) \supset \ldots$ an. Seien $f_1, f_2 \in R[x_1, \ldots, x_m]$ und sämtliche Bezeichnungen wie im Beweis von Lemma 4.4. Seien ferner $f_{n,b}$ die Koeffizienten von f'_n und $r \in \mathrm{Ann}(A_{f_1}) \setminus \mathrm{Ann}(A_{f_2})$. Dann existiert ein $b \in \mathbb{N}_0^m$ minimal mit der Eigenschaft, dass $r \in \mathrm{Ann}(f_{n,c} : c \prec b; n \in \mathbb{N}) \setminus \mathrm{Ann}(f_{n,b} : b \preceq c; n \in \mathbb{N})$. Sei also $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $r \notin \mathrm{Ann}(A_{n,b})$ und zusätzlich n so groß, dass $A_{n,b} = A_{n+1,b} = \ldots$ und $A_{n,b} = g_n(0)A_{n,b}$. Sei ferner B das Ideal in R, das von allen $f_{j,c}$ mit $c \prec b$ erzeugt wird. Koeffizientenvergleich liefert nun $f_{1,b} \in g_1(0) \cdots g_n(0) f_{n+1,b} + B$. Da $r \in \mathrm{Ann}(A_{f_1})$ und $r \in \mathrm{Ann}(B)$, folgt $rg_1(0) \cdots g_n(0) f_{n+1,b} = 0$ durch Multiplikation mit r. Außerdem ist $rf_{n+1,b} \neq 0$ wegen $r \in \mathrm{Ann}(B) \setminus \mathrm{Ann}(A_{n+1,b})$. Es folgt $\mathrm{Ann}(rf_{n+1,b}) \subseteq Z(R) \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} P_i$, also $\mathrm{Ann}(rf_{n+1,b}) \subseteq P_i$ für ein i, und da $g_1(0) \cdots g_n(0) \in \mathrm{Ann}(rf_{n+1,b})$, ist $i \in \{1, \ldots, k\}$. Andererseits existiert wegen $A_{n+1,b} = g_n(0)A_{n+1,b}$ ein $s \in R$ mit $f_{n+1,b} = sg_n(0)f_{n+1,b}$, d.h. $1 - sg_n(0) \in \mathrm{Ann}(f_{n+1,b}) \subseteq \mathrm{Ann}(rf_{n+1,b}) \subseteq P_i$. Da aber $g_n(0) \in P_i$, folgt der Widerspruch $1 \in P_i$. $\square$

Nun zeigen wir den angekündigten Satz, dass accp auf den Polynomring übergeht, falls der Ring nur endlich viele schwach assoziierte Primideale besitzt. Eine wichtige Anwendung der schwach assoziierten Primideale besteht darin, dass ihre Vereinigung gerade die Menge der Nullteiler ergibt (dies ist eine Übungsaufgabe in [3]). Daher ist Lemma 4.5 auf die Situation im folgenden Satz anwendbar.

Satz 4.6 *Sei R ein accp Ring mit nur endlich vielen schwach assoziierten Primidealen und X eine Menge von Unbestimmten. Dann erfüllt auch $R[X]$ accp.*

Beweis Sei $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \dots$ mit $f_n = g_n f_{n+1}$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[X]$ und nach obiger Bemerkung oBdA $(0) \neq A := A_{f_1} = A_{f_2} = \dots$. Wir wählen nun wieder $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $f_1 \in R[x_1, \dots, x_m]$ und verwenden die Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 4.4, also $A = A_{f_1} = A_{1,b}$ für ein $b \in \mathbb{N}_0^m$. Es ist $A = A_{1,b} \subseteq A_{n,b} \subseteq A_{f_n'} \subseteq A_{f_n} = A$ für alle n, d.h. es gilt sogar die Gleicheit. Nach Lemma 4.2 existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_{n,b} = g_n(0)A_{n,b}$ für alle $n \geq k$. Daher ist $A = g_n(0)A$ für alle $n \geq k$, und oBdA sei $k = 1$. Dann existiert zu jedem n ein $r_n \in R$ mit $(1 - r_n g_n(0))A = (0)$, d.h. $g_n(0)$ ist eine Einheit modulo $\operatorname{Ann}(A)$. Ferner ist $A = (a_1, \dots, a_k)$ endlich erzeugt, so dass jedes minimale Primideal P über $\operatorname{Ann}(A) = \operatorname{Ann}(a_1) \cap \dots \cap \operatorname{Ann}(a_k)$ ein minimales Primideal über Ann (a_i) für ein i und somit ein schwach assoziiertes Primideal von R ist. Daher hat der Ring $\overline{R} := R/\operatorname{Ann}(A)$ nur endlich viele minimale Primideale. Wir betrachten nun die Folge $(\overline{f_1}) \subseteq (\overline{f_2}) \subseteq \dots$ in $\overline{R}[X]$. Da $\overline{g_n(0)} \in E(\overline{R})$, liefert die gleiche Überlegung wie im Beweis von Proposition 3.8 von [15], dass ab einem gewissen Index alle Koeffizienten von $\overline{g_n}$ außer $\overline{g_n(0)}$ in jedem minimalen Primideal liegen und daher nilpotent sind. Bekanntlich bedeutet dies, dass $\overline{g_n}$ eine Einheit in $\overline{R}[X]$ ist, und dies gelte wieder oBdA für alle n. Es existieren also Polynome $q_n \in R[X]$ mit $\overline{q_n g_n} = \overline{1}$ in $\overline{R}[X]$, also $1 - q_n g_n \in \operatorname{Ann}(A)[X]$. Daraus folgt nun $(1 - q_n g_n) f_{n+1} = 0$, d.h. $f_{n+1} = q_n g_n f_{n+1} = q_n f_n \in (f_n)$.□

Man beachte, dass die Voraussetzungen von Satz 4.6 beispielsweise für einen stark laskerschen Ring erfüllt sind, aber nicht mehr für einen Ring mit acc für d-Colons, da ja dort unendlich viele minimale Primideale existieren können. Daher stellt sich die Frage, ob für jeden Ring mit acc für d-Colons der Polynomring accp erfüllt. Dies bleibt aber bisher ungelöst.
Ein weiterer Fall, in dem die Voraussetzungen von Satz 4.6 erfüllt sind, ist der Fall eines accp-Ringes mit acc für Annihilatoren (Theorem 2.1 in [7]). Die (aufsteigende) Kettenbedingung für Annihilatoren ist ja zum Beispiel für Unterringe von noetherschen Ringen oder reduzierte Ringe mit nur endlich vielen minimalen Primidealen erfüllt [7]. Da für Polynome über reduzierten Ringen häufig gewisse Vereinfachungen auftreten, wirft dies die Frage auf, ob vielleicht für jeden reduzierten Ring accp auf den Polynomring übergeht. Dies ist aber nicht der Fall, wie man durch eine Modifizierung des Beispiels von Heinzer und Lantz sieht:

Beispiel 4.7 *Seien K ein Körper und $A_1, A_2, \dots$ Unbestimmte über K. Setze $A := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$, $I := (A_n(A_{k-1} - A_k) : 1 < k \leq n)K[A]$, $P := AK[A]$ und $R := (K[A]/I)_{P/I}$. Dann ist R ein reduzierter accp-Ring, aber $R[x]$ erfüllt nicht accp.*

Beweis Man sieht leicht (analog zu Beispiel 4.1), dass $Q_i := (\{A_{n-1} - A_n : 1 < n \leq i\} \cup \{A_n : n > i\})K[A]$ $(i \in \mathbb{N})$ und $Q := (A_{n-1} - A_n : n > 1)K[A]$ genau die minimalen Primideale über I sind. Wir zeigen, dass $\bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i = I$ gilt. Dafür zeigen wir zunächst $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = (I, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)K[A]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Der Fall $n = 1$ ist trivial, daher gelte die Gleichung für $n-1$, also $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i = (I, A_n, A_{n+1}, \dots)K[A] \cap Q_n$. Sei $f = A_n g + h$ aus diesem Durchschnitt ($g \in K[A]$, $h \in (I, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)K[A] \subseteq Q_n$). Dann folgt $g \in Q_n$ (da $A_n \notin Q_n$) und somit $f \in (I, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)K[A]$. Wählen wir nun $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} Q_i$, so existiert ein n mit $p \in K[A_1, \dots, A_n]$, und wegen $p \in (I, A_{n+1}, A_{n+2}, \dots)K[A]$ haben wir $p \in I$ gezeigt. Also ist I ein Radikalideal und somit R reduziert. Es folgt $Z(K[A]/I) = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i/I \subseteq P/I$ und somit $K[A]/I \leq R$. Nun lässt sich mit dem gleichen Beweis wie in [17] zeigen, dass R accp erfüllt, aber $R[x]$ nicht. $\square$

Weiterhin offen bleibt das Problem einer vollständigen Charakterisierung derjenigen accp-Ringe R, für die auch $R[X]$ accp erfüllt. Eine notwendige Bedingung für den Ring R müsste ja so beschaffen sein, dass man, wenn diese Bedingung verletzt wäre, stets ein „Gegenbeispiel" vorliegen hätte. Die Konstruktion von Gegenbeispielen dieser Art ist aber erfahrungsgemäß sehr schwierig. Wir werden jedenfalls gleich zeigen, dass die Endlichkeit der Menge der schwach assoziierten Primideale keine notwendige Bedingung ist, da z.B. der Polynomring über dem Ring aus Beispiel 1.1 accp erfüllt. Dies zeigen wir gleich etwas allgemeiner im Satz 4.8. Im Beweis verwenden wir folgende einfache Tatsache: Ist R reduziert und $g(f - gh) = 0$ für gewisse $f, g, h \in R$, so ist $\mathrm{Ann}(f) \subseteq \mathrm{Ann}(f - gh)$. Denn ist $af = 0$, so ist $0 = ag(f - gh) = ag^2h$, also $agh = 0$ und somit $a(f - gh) = 0$.

Satz 4.8 *Sei R ein reduzierter accp-Ring, der auch accpa erfüllt (ascending chain condition on point annihilators, siehe Kapitel 1). Dann erfüllt $R[X]$ für jede Menge X von Unbestimmten accp.*

Beweis Nach Satz 1.6 ist $Z(R)$ in einer endlichen Menge von Primidealen enthalten. Für eine aufsteigende Folge $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \dots$ von Hauptidealen in $R[X]$ können wir nach Lemma 4.5 und dem Beweis von Satz 4.6 somit oBdA $A := A_{f_1} = A_{f_2} = \dots$ und $A = g_n(0)A$ annehmen, wobei $f_n = g_n f_{n+1}$. Seien $x_1, \dots, x_m \in X$ mit $f_1 \in R[x_1, \dots, x_m]$. Wir zeigen zunächst $f_n \in R[x_1, \dots, x_m]$ für alle $n \geq 1$: Angenommen,

$f_n \notin R[x_1, \dots, x_m]$. Dann wähle $y_1, \dots, y_k \in X$ mit $f_n \in R[y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_m]$ und einen Koeffizienten $a \neq 0$ eines Monoms von f_n, in dem ein y_i vorkommt. Wir verwenden nun die lexikographische Ordnung von $\mathbb{N}_0^{k+m}$, in der die Exponenten von $y_1, \dots, y_k$ die ersten k „Buchstaben" bilden. Wegen $g_1 \cdots g_n(0)a \neq 0$ (denn $a \in A$ impliziert $g_i(0)aR = aR$) ist dies aber ein Widerspruch zu Lemma 1.14 in Verbindung mit der sich daran anschließenden Bemerkung.
Daher sei oBdA $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, und wir schreiben $f_n = \sum_c f_{n,c}X^c$, $g_n = \sum_c g_{n,c}X^c$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei jeweils d_n maximal bezüglich $\preceq$ mit $f_{n,d_n} \neq 0$. Wegen $g_n(0)a \neq 0$ für alle $a \in A \setminus (0)$ folgt aus Lemma 1.14 wie oben $d_1 \succeq d_2 \succeq \dots$, also oBdA $0 \prec d := d_1 = d_2 = \dots$. Wir zeigen nun das folgende:
Für alle $c \succ 0$ existiert ein $k_c \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k_c$ gilt:
1) Für alle $b \succeq c$ ist $\mathrm{Ann}(f_{n,b}) = \mathrm{Ann}(f_{k_c,b})$.
2) Für alle a, b mit $0 \prec a$ und $c \preceq a + b$ ist $g_{n,a}f_{n+1,b} = 0$.
Beweis: Die Behauptung gilt für alle $c \succ d$: Mit $k_c := 1$ ist 1) trivial, und 2) gilt nach Lemma 1.14. Sei also $c \preceq d$ und die Behauptung gelte induktiv für den Nachfolger c' von c. Sei $k := k_{c'}$ und $n \geq k$. Für alle $0 \preceq b \prec c$ liefert nun die Multiplikation von

$$f_{n,c} = \sum_{a=0}^{c} g_{n,c-a}f_{n+1,a} \qquad (*)$$

mit $g_{n,c-b}$ unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung $g_{n,c-b}(f_{n,c} - \sum_{a=0}^{b} g_{n,c-a}f_{n+1,a}) = 0$. Nach der Bemerkung vor diesem Satz ist daher $\mathrm{Ann}(f_{n,c}) \subseteq \mathrm{Ann}(f_{n,c} - g_{n,c}f_{n+1,0})$ und $\mathrm{Ann}(f_{n,c} - \sum_{a=0}^{V(b)} g_{n,c-a}f_{n+1,a}) \subseteq \mathrm{Ann}(f_{n,c} - \sum_{a=0}^{b} g_{n,c-a}f_{n+1,a})$ für $0 \prec b \prec c$. Es folgt also $\mathrm{Ann}(f_{n,c}) \subseteq \mathrm{Ann}(f_{n,c} - g_{n,c}f_{n+1,0}) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{Ann}(f_{n,c} - \sum_{a=0}^{V(c)} g_{n,c-a}f_{n+1,a}) = \mathrm{Ann}(g_{n,0}f_{n+1,c}) = \mathrm{Ann}(f_{n+1,c})$. Nach Voraussetzung wird die Folge $\mathrm{Ann}(f_{n,c}) \subseteq \mathrm{Ann}(f_{n+1,c}) \subseteq \dots$ stationär, etwa bei k_c, und damit ist 1) gezeigt.
Sei $n \geq k_c$. Für 2) bleibt nun noch $g_{n,c-b}f_{n+1,b} = 0$ für $0 \preceq b \prec c$ zu zeigen. Ist $b = 0$, so multipliziere $(*)$ mit $g_{n,c}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $g_{n,c}f_{n+1,a} = 0$ für $0 \prec a$, insbesondere also $g_{n,c}f_{n+1,c} = 0$, d.h. $g_{n,c}f_{n,c} = 0$. Dies liefert also $g_{n,c}^2 f_{n+1,0} = 0$, also $g_{n,c}f_{n+1,0} = 0$. Gilt nun $g_{n,c-\bar{b}}f_{n+1,\bar{b}} = 0$ für $0 \preceq \bar{b} \prec b$, so vereinfacht sich $(*)$ zu

$$f_{n,c} = \sum_{a=b}^{c} g_{n,c-a}f_{n+1,a}$$

Durch Multiplikation mit $g_{n,c-b}$ erhält man dann wieder $g_{n,c-b}^2 f_{n+1,b} = 0$ und $g_{n,c-b}f_{n+1,b} = 0$, was den Induktionsschluss über b und damit auch 2), d.h den Induktionsschluss über c zeigt.

Es existiert somit ein $k \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq k$ stets $g_{n,a} \in \mathrm{Ann}(A)$ für $0 \prec a$ ist, d.h. alle Koeffizienten von g_n bis auf $g_n(0)$ liegen in $\mathrm{Ann}(A)$. Wie im Beweis von Satz 4.6 folgt nun $(f_k) = (f_{k+1}) = \ldots$ in $R[X]$. $\square$

Bemerkung Der Ring $R := K[[x_n : n \in \mathbb{N}]]/(x_i x_j : i \neq j)$ aus Beispiel 1.1 erfüllt die Voraussetzungen von obigem Satz: Da R acc für d-Colons erfüllt, ist R ein accp-Ring. Im Beweis von Beispiel 1.1 wurde insbesondere gezeigt, dass $R/\mathrm{Ann}(a)$ für jedes $a \in R$ noethersch ist, d.h. R erfüllt accpa. Ferner zeigen wir mit den dortigen Bezeichnungen, dass $\bigcap_{i=1}^{\infty} P_i = I$ gilt und somit R reduziert ist: Sei $f \in \bigcap_{i=1}^{\infty} P_i$ und etwa $f \in x_i K[[x_1, \ldots, x_n]]$. Dann lässt sich (nach Definition von I) f schreiben als $f = f_1 + \cdots + f_n + g$, wobei $f_i \in K[[x_i]]$ und $g \in I$. Für $i = 1, \ldots, n$ ist $f \in P_i$, $f_j \in P_i$ $(j \neq i)$ und $g \in I \subseteq P_i$, also $f_i \in P_i$. Da $x_i \notin P_i$, folgt $f_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$ und somit $f \in I$.
R besitzt aber unendlich viele assoziierte Primideale und genügt somit nicht den Voraussetzungen von Satz 4.6.

Nun wenden wir uns noch einmal dem Potenzreihenring zu. Betrachtet man Lemma 4.2, so stellt man fest, dass dort eine Aussage über jeweils endlich viele Koeffizienten der Polynome f_n gemacht wird. Es wird aber die Endlichkeit der Menge der Koeffizienten $\neq 0$ überhaupt nicht verwendet. Daher gilt Lemma 4.2 genauso für Potenzreihen, und dies verwenden wir für den folgenden Satz. Dabei beachte man die Analogie zu Satz 3.9.

Satz 4.9 *Sei R ein accp-Ring mit acc für Annihilatoren und X eine Menge von Unbestimmten. Dann erfüllt auch $R[[X]]$ accp.*

Beweis Sei $(f_1) \subseteq (f_2) \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Folge von Hauptidealen in $R[[X]]$, wobei etwa $f_n = g_n f_{n+1}$ gelte. Analog zu Polynomen bezeichnen wir mit A_{f_n} das von den Koeffizienten von f_n erzeugte Ideal. Wegen $A_{f_1} \subseteq A_{f_2} \subseteq \ldots$ ist $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) \supseteq \mathrm{Ann}(A_{f_2}) \supseteq \ldots$ in R, und nach Voraussetzung wird dies stationär. OBdA sei also $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) = \mathrm{Ann}(A_{f_2}) = \ldots$. Nun wählen wir wieder $x_1, \ldots, x_m \in X$ mit $f_1 \in R[[x_1, \ldots, x_m]]$ und alle Bezeichnungen wie im Beweis von Lemma 4.4. Nach Voraussetzung existiert ferner eine endliche Teilmenge A von A_{f_1} mit $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) = \mathrm{Ann}(A)$. Da die Elemente von A jeweils durch endlich viele Koeffizienten von f_1 darstellbar sind, existiert ein $b \in \mathbb{N}_0^m$ mit $\mathrm{Ann}(A_{f_1}) = \mathrm{Ann}(A) = \mathrm{Ann}(A_{1,b})$. Ferner ist $\mathrm{Ann}(A_{1,b}) \supseteq \mathrm{Ann}(A_{n,b}) \supseteq \mathrm{Ann}(A_{f_n}) = \mathrm{Ann}(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass hierin die Gleichheit gilt. Nach Lemma 4.2 existiert nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A_{n,b} = A_{k,b}$ und $A_{n,b} = g_n(0) A_{n,b}$ für alle $n \geq k$. Mit der gleichen Argumentation wie bei Polynomen ist nun wieder $g_n(0)$

eine Einheit modulo $\mathrm{Ann}(A)$. Somit ist $\overline{g_n}$ eine Einheit in $(R/\mathrm{Ann}(A))[[X]]$, d.h. es existieren Potenzreihen $q_n \in R[[X]]$ mit $1 - q_n g_n \in \mathrm{Ann}(A)[[X]] = \mathrm{Ann}(A_{f_{n+1}})[[X]]$. Also folgt $f_{n+1} = q_n g_n f_{n+1} = q_n f_n \in (f_n)$. □

4.3 Lokalisierungen

In diesem Abschnitt betrachten wir Lokalisierungen von Polynom- bzw. Potenzreihenringen über accp-Ringen. Wir zeigen unter anderem, dass einige dieser Lokalisierungen accp erfüllen, falls der zu Grunde liegende Ring stark laskersch ist. Ferner gilt ja nach Satz 4.6, dass $R[X]$ accp erfüllt, falls R stark laskersch ist.
Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass für einen lokalen Ring (R, P) mit $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k = (0)$ und ein Primideal Q von $R[X]$ mit $Q \cap R = P$ die Lokalisierung $R[X]_Q$ accp erfüllt.

Satz 4.10 *Sei (R, P) ein lokaler Ring mit $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k = (0)$ und Q ein Primideal von $R[X]$ mit $Q \cap R = P$. Dann ist auch $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_Q^k = (0)$ in $R[X]_Q$.*

Beweis (i) Sei zunächst $X = \{x\}$ und $\frac{g}{1} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_Q^k$. Ist $Q = P[x]$, so existiert zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $s_k \in R[x] \setminus P[x]$ mit $s_k g \in P[x]^k \subseteq P^k[x]$. Da P maximal in R ist, ist P^k P-primär und somit auch $P^k[x]$ $P[x]$-primär in $R[x]$. Also ist $g \in \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k[x] = (\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k)[x] = (0)$ nach Voraussetzung. Daher sei $Q \supset P[x]$. Folglich ist $Q = (P, f)$ ein maximales Ideal von $R[x]$, wobei das Bild von f unter dem kanonischen Homomorphismus ein irreduzibles Polynom vom Grad ≥ 1 im Hauptidealbereich $(R/P)[x]$ ist. In diesem Fall ist wieder Q^k Q-primär und somit $g \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k$. Angenommen, es ist $g \neq 0$. Dann existiert wegen $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k[x] = (0)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g \notin P^n[x]$, und wir gehen zum Ring $\overline{R} := R[x]/P^n[x] \cong (R/P^n)[x]$ über. Es ist $Q^k = (P^k, fP^{k-1}, \ldots, f^{k-1}P, f^k)$ in $R[x]$, also $\overline{Q^k} \subseteq \overline{f}^{k-n+1}\overline{R}$ in $\overline{R}$ für alle $k \geq n$, und somit ist $\overline{g} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{f}^k \overline{R}$. Sei $\overline{g} = u_k \overline{f}^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Da $f \notin P[x]$, ist $\overline{f}$ kein Nullteiler in $\overline{R}$, und wir erhalten aus $u_1 \overline{f} = u_2 \overline{f}^2 = \ldots$ die aufsteigende Folge $(u_1) \subseteq (u_2) \subseteq \ldots$ von Hauptidealen in $\overline{R}$. R/P^n erfüllt als lokaler Ring mit nilpotentem maximalen Ideal accp. Also ist auch $\overline{R}$ als Polynomring darüber ein accp-Ring (denn R/P^n ist ja nulldimensional). Somit haben wir $u_{k+1} = \overline{w} u_k$ in $\overline{R}$ für ein $w \in R[x]$ und ein $k \in \mathbb{N}$. Es folgt $\overline{g} = u_{k+1} \overline{f}^{k+1} = \overline{w} u_k \overline{f}^{k+1} = \overline{w}\overline{f}\overline{g}$ im primären Ring $\overline{R}$, in dem $\overline{g} \neq 0$ ist. Also ist $1 - wf \in P[x] \subseteq Q$, und dies liefert wegen $f \in Q$ den Widerspruch $1 \in Q$.
(ii) Nun sei induktiv $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, und die Behauptung gelte für Polynomringe in $n-1$ Unbestimmten. Es sei $R' := R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ und $P' := Q \cap R'$. Dann ist

$R[x_1,\dots,x_n]_Q \cong (R'_{P'}[x_n])_{Q_{P'}}$, wobei $Q_{P'} := \{\frac{f}{s} \in R'_{P'}[x_n] : s \in R' \setminus P', f \in Q\}$. Wegen $P' \cap R = P$ ist nach Induktionsvoraussetzung $\bigcap_{k=1}^{\infty} P'^k_{P'} = (0)$ in $R'_{P'}$, und wegen $Q_{P'} \cap R'_{P'} = P'_{P'}$ folgt aus (i) $\bigcap_{k=1}^{\infty} (Q^k_{P'})_{Q_{P'}} = (0)$ in $(R'_{P'}[x_n])_{Q_{P'}}$. Aus obiger Isomorphie folgt dann auch $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k_Q = (0)$ in $R[X]_Q$.
(iii) Ist X eine unendliche Menge von Unbestimmten, so wähle $\frac{g}{1} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q^k_Q$, und da nur endlich viele Unbestimmte in g auftreten, kann man mit den gleichen Überlegungen wie in (ii) oBdA $g \in R$ annehmen. Wegen der Voraussetzung $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k = (0)$ und $g \in Q^{(k)} := \{f \in R[X] : \frac{f}{1} \in Q^k_Q\}$ für alle k reicht also $Q^{(k)} \cap R \subseteq P^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Dies zeigt man wie im Beweis von Theorem 2.5 von [15], und dazu betrachten wir wieder zunächst den Fall $X = \{x\}$. Ist $Q = P[x]$ und $a \in Q^{(k)} \cap R$, so existiert ein $s \in R[x] \setminus P[x]$ mit $sa \in P[x]^k \subseteq P^k[x]$, also $a \in P^k$, da $P^k[x]$ primär ist. Ist $Q \supset P[x]$, so ist wieder $Q = (P, f)$ maximal in $R[x]$ und f irreduzibel vom Grad ≥ 1 in $(R/P)[x]$. Sei $a \in Q^{(k)} \cap R$. Da Q maximal, ist $Q^{(k)} = Q^k$, also $a \in Q^k \subseteq (P^k, f)$. In $(R/P^k)[x]$ ist also $\overline{a} \in \overline{f}(R/P^k)[x]$, da aber darin $\overline{f}$ vom Grad ≥ 1 und $\overline{a}$ vom Grad 0 ist, folgt $a \in P^k$. Mit vollständiger Induktion zeigt man nun $Q^{(k)} \cap R \subseteq P^k$ wie in (ii) auch für $X = \{x_1, \dots, x_n\}$. Ist schließlich X beliebig und $a \in Q^{(k)} \cap R$, so gibt es $s \in R[X] \setminus Q$ und $q_{ij} \in Q$ mit $sa = \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{k} q_{ij}$. Sei dann $Y \subseteq X$ endlich, so dass alle darin auftretenden Polynome aus $R[Y]$ sind und $A := Q \cap R[Y]$. Dann ist $a \in A^{(k)} \cap R$ in $R[Y]$, also $a \in P^k$ nach obigem. Dies beendet den Beweis. $\square$

Korollar 4.11 *Sei R ein stark laskerscher Ring. Dann erfüllt $R[X]_Q$ accp für jedes Primideal Q von $R[X]$.*

Beweis Durch Lokalisierung nach $Q \cap R$ können wir oBdA R als lokal mit einzigem maximalen Ideal $P = Q \cap R$ annehmen, und nach Proposition 3.1 von [14] ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} P^k = (0)$. $\square$

In [15] wurde die Frage aufgeworfen, ob für einen stark laskerschen Ring R und beliebiges $f \in R[X]$ stets $R[X]/(f)$ nur endlich viele schwach assoziierte Primideale besitzt. Dies (oder schon die schwächere Aussage, dass $Z(R[X]/(f))$ in einer endlichen Vereinigung von maximalen Idealen enthalten ist) würde ja dann mit Korollar 4.11 und Satz 2.6 einen alternativen Beweis dafür liefern, dass $R[X]$ accp erfüllt.
Wir wenden uns nun Potenzreihenringen zu, für die eine zu Korollar 4.11 ähnliche Aussage gilt:

Lemma 4.12 *Sei R ein Ring mit der Eigenschaft, dass für jedes maximale Ideal P von R ein $s \notin P$ existiert mit $Kern(R \to R_P) = Ann(s)$. Erfüllt dann R_P accp für jedes maximale Ideal P von R, dann hat auch $R[[X]]_M$ accp für jedes maximale Ideal M von $R[[X]]$.*

Beweis Bekanntlich hat jedes maximale Ideal M von $R[[X]]$ die Gestalt $M = (P, X)$, wobei P maximal in R ist. Wegen $\mathrm{Kern}(R \to R_P) = \mathrm{Ann}(s)$ für ein $s \notin P$ ist $R[[X]]_M$ ein Unterring von $T := R_P[[X]]$: Sind $f, s \in R[[X]]$ und $s \notin M$, so ist $s(0) \in R \setminus P$, also $\frac{s}{1} \in E(T)$, wobei $E(T)$ die Einheiten von T bezeichne. Somit können wir $\frac{f}{s} \in R[[X]]_M$ auf $\frac{f}{1}/\frac{s}{1} \in T$ abbilden. Diese Abbildung ist dann ein Monomorphismus, denn ist $\frac{f}{1} = \frac{0}{1}$ in T, so ist jeder Koeffizient von f aus $\mathrm{Kern}(R \to R_P) = \mathrm{Ann}(s)$, also $sf = 0$ und $s \notin M$, d.h. $\frac{f}{1} = \frac{0}{1}$ in $R[[X]]_M$.
Nach Voraussetzung ist R_P ein lokaler accp-Ring und somit auch T (siehe die Bemerkungen zu Beginn dieses Kapitels). Ferner gilt $E(R[[X]]_M) = \{\frac{f}{s} \in R[[X]]_M : f \notin M\} = \{\frac{f}{s} \in R[[X]]_M : f(0) \notin P\} = E(T) \cap R[[X]]_M$. Ist nun $f_n = g_n f_{n+1}$ in $R[[X]]_M$, so sei, da T accp erfüllt, oBdA $f_1 T = f_2 T = \ldots$. Da T lokal ist, sind dann alle $g_n \in E(T) \cap R[[X]]_M = E(R[[X]]_M)$, und die Folge bricht ab. $\square$

Mittels unserer Ergebnisse aus Kapitel 1 und 2 folgern wir aus Lemma 4.12 zum Abschluss noch:

Korollar 4.13 *Erfüllt R acc für d-Colons, so erfüllt $R[[X]]_M$ für jedes maximale Ideal M von $R[[X]]$ accp. Ist also zusätzlich R semilokal, so hat auch $R[[X]]$ accp.*

Literaturverzeichnis

[1] M. Arapovic, On the imbedding of a commutative ring into a 0-dimensional ring, Glas. Mat. 18 (1983), 53-59

[2] H. Bass, Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466-488

[3] N. Bourbaki, Commutative Algebra, Hermann, Paris, 1972

[4] R. Camps und W. Dicks, On semilocal rings, Isr. J. Math. 81 (1993), 203-211

[5] V. Camillo und R. Guralnick, Polynomial rings over Goldie rings are often Goldie, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 567-568

[6] ST. V. Chase, Direct produit of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457-473

[7] D. L. Costa, Some remarks on the acc on annihilators, Comm. in Alg. 18 (1990), 635-658

[8] E. G. Evans, Jr., Zero divisors in Noetherian-like rings, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971), 505-512

[9] C. Faith, Commutative Rings with Acc on Irreducible Ideals, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 201, 157-178, Marcel-Dekker, New York, 1998

[10] D. Frohn, A counterexample concerning accp in power series rings, erscheint in Comm. in Alg.

[11] D. Frohn, Modules with n-acc and the acc on certain types of annihilators, erscheint in J. Alg.

[12] R. Gilmer, Multiplicative Ideal Theory, Marcel-Dekker, New York, 1972

[13] R. Gilmer und W. Heinzer, The Laskerian property, power series rings and Noetherian spectra, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 13-16

[14] W. Heinzer und D. Lantz, The Laskerian property in commutative rings, J. Alg. 72 (1981), 101-114

[15] W. Heinzer und D. Lantz, Commutative Rings with ACC on n-Generated Ideals, J. Alg. 80 (1983), 261-278

[16] W. Heinzer und D. Lantz, N-rings and ACC on colon ideals, J. Pure Appl. Algebra 32 (1984), 115-127

[17] W. Heinzer und D. Lantz, ACCP in polynomial rings: A counterexample, Proc. Amer. Math. Soc. 121 (1994), 975-977

[18] W. Heinzer und J. Ohm, On the Noetherian-like rings of E. G. Evans, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 73-74

[19] D. Jonah, Rings with the minimum condition for principal right ideals have the maximum condition for principal left ideals, Math. Z. 113 (1970), 106-112

[20] I. Kaplansky, Commutative Rings, Allyn and Bacon, Boston, 1970

[21] J.W. Kerr, The polynomial ring over a Goldie ring need not be a Goldie ring, J. Alg. 134 (1990), 344-352

[22] C.P. Lu, Modules satisfying ACC on a certain type of colons, Pacific J. Math. 131 (1988), 303-318

[23] C.P. Lu, Modules and rings satisfying (accr), Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 117, No. 2 (1993), 5-10

[24] A.M. Nicolas, Sur les modules tels que toute suite croissante de sous-modules engendrés par n générateurs soit stationnaire, J. Alg. 60 (1979), 249-260

[25] J. Ohm and R. Pendleton, Rings with noetherian Spectrum, Duke Math. J. 35(1968), 631-640

[26] N. Radu, Sur les anneaux cohérents Laskeriens, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 11 (1966), 865-867

[27] J. Reineke, Vorlesung “Kommutative Ringtheorie“, Universität Hannover, 1997/98

[28] G. Renault, Sur des conditions de chaines ascendantes dans des modules libres, J. Alg. 47 (1977), 268-275

[29] M.E.A. Simões und P.F. Smith, Rings whose free modules satisfy the ascending chain condition on submodules with a bounded number of generators, J. Pure Appl. Algebra 123 (1998), 51-66

[30] S. Visweswaran, Some results on modules satisfying (C), J. Ramanujan Math. Soc. Vol. 11, No. 2 (1996), 161-174

[31] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. I, Van Nostrand, Princeton, 1958

[32] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. II, Van Nostrand, Princeton, 1960