

# Modulräume $(1,p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit Level-2-Struktur

Vom Fachbereich Mathematik  
der Universität Hannover  
zur Erlangung des Grades

Doktor der Naturwissenschaften  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation  
von

Dipl. Math. Michael Friedland  
geboren am 5. 7. 1966 in Hannover

2002

Referent:	Prof. Dr. K. Hulek, Hannover
Korreferent:	Dr. G. K. Sankaran, Bath, United Kingdom
Tag der Promotion:	27.06.2002
Datum der Veröffentlichung:	Juli 2002

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird Mumfords Methode der toroidalen Kompaktifizierung auf den Modulraum der  $(1, p)$ -polarisierten abelschen Flächen mit Level-2-Struktur  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) = \Gamma_{1,p}^\circ(2) \backslash \mathbb{H}_2$  bzgl. der Voronoi-Zerlegung angewandt ( $p \geq 3$ , prim). Es stellt sich zunächst die Aufgabe, den singulären Ort auf dem kompaktifizierten Raum  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  zu untersuchen. Dabei stellt sich heraus, daß lediglich bestimmte isolierte Quotientensingularitäten auf dem Rand auftreten, die explizit beschrieben werden können. Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist ein Graph, der bekannterweise die Nachbarschaftsrelationen der rationalen Randkomponenten in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  angibt. In unserem Fall ist dies eine  $(30_3, 15_6)$ -Konfiguration. Es wird eine Beschreibung der 15 Korang-2-Randkomponenten als Konfiguration von endlich vielen projektiven Geraden angeben. Die 30 (offenen) Korang-1-Randkomponenten werden als offene Kummerische Modulflächen zur Stufe 2 beschrieben. Dabei treten zwei Typen von Korang-1-Randkomponenten auf, die sich durch verschiedene Abschlüsse in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  unterscheiden. Im weiteren wird die Gruppe  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  mittels einer Involution zu einer maximalen diskreten Gruppe  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  in  $\mathrm{SP}(4, \mathbb{R})$  erweitert. Diese Gruppe operiert auf  $\mathbb{H}_2$  und der Quotient hat weiterhin modultheoretische Bedeutung. Speziell im Fall  $p = 3$  gibt es eine Spitzenform  $\Delta_1^3$  vom Gewicht 3 bezüglich  $\Gamma_{1,3}^\circ(2)$ . Es wird gezeigt, daß diese auch eine Spitzenform bezüglich  $\Gamma_{1,3}^*(2)$  ist. Allerdings operiert  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  nicht auf dem Rand von  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ , was zur Angabe einer alternativen Kegelzerlegung führt. Diese Zerlegung ergibt sich als Verfeinerung der ursprünglichen Voronoi-Kegelzerlegung und führt zu einem veränderten singulären Ort auf dem Rand. Insbesondere treten auch nicht-isolierte Singularitäten auf.

**Schlagwörter: Modulräume, toroidale Kompaktifizierung, abelsche Varietäten**

## Abstract

We apply Mumford's toroidal compactification method to the moduli space of  $(1, p)$ -polarized abelian surfaces with level-2-structure  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) = \Gamma_{1,p}^\circ(2) \backslash \mathbb{H}_2$  with resp. to the Voronoi-decomposition ( $p \geq 3$ , prime). First, we investigate the singular locus on the compactified moduli space  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . It turns out that there are only isolated quotient singularities on the boundary which can be described explicitly.

The Tits building  $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ(2))$  is a graph which gives a description of the adjacency relations of rational boundary components. In our case the Tits building is a  $(30_3, 15_6)$ -configuration, where the 15 vertices correspond to corank-2-boundary components, which are configurations of finitely many projective lines. The 30 (open) corank-1-boundary components are open Kummer moduli surfaces of level 2. Depending on the closure in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  there occur two types of these boundary components.

Next, we define a normal extension  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  of  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  of index 2 which is the maximal extension of  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  as a discrete subgroup of  $\mathrm{SP}(4, \mathbb{R})$ . This group acts on  $\mathbb{H}_2$  and the quotient still allows a moduli-theoretical interpretation.

In case  $p = 3$ , there is a cuspform  $\Delta_1^3$  of weight 3 with respect to  $\Gamma_{1,3}^\circ(2)$ . We show that  $\Delta_1^3$  is still a cuspform with respect to  $\Gamma_{1,3}^*(2)$ . However,  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  does not act on the boundary of  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ , so the question of alternative cone-decompositions arises. We construct a decomposition as a refinement of the Voronoi-decomposition which leads to a different singular locus. In particular, there will be non-isolated singularities.

**keywords: moduli spaces, toroidal compactification, abelian varieties**



## Einleitung

Modulräume polarisierter abelscher Varietäten der Dimension  $n$  erhält man als Quotienten der Siegelschen oberen Halbebene zur Stufe  $n$  nach arithmetischen Untergruppen der symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{Q})$ . Solche Quotienten sind quasiprojektive Varietäten mit schlimmstenfalls Quotientensingularitäten. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach einer Kompaktifizierung, so daß der Rand eine modultheoretische Bedeutung bekommt. Für den Fall der prinzipal polarisierten abelschen Flächen wurde von Satake eine Antwort nach der Kompaktifizierung gegeben, die trotz einiger guter Eigenschaften auf dem Rand hochgradig singular ist. Durch Mumfords Konzept der toroidalen Kompaktifizierung wird dieser Schwachpunkt ausgeglichen. Der auf diese Weise kompaktifizierte Modulraum ist normal und es treten lediglich Quotientensingularitäten auf. Der Nachteil dieser Kompaktifizierung liegt allerdings darin, daß diese nicht eindeutig bestimmt ist, sondern von gewissen zulässigen Kegelzerlegungen abhängt, die nach der Problemstellung variieren können.

Für  $p \geq 3$  prim wurde die durch die Voronoi-Zerlegung des Kegels der positiv definiten Matrizen definierte Kompaktifizierung des Modulraums der  $(1, p)$ -polarisierten abelschen Flächen mit kanonischer Level- $p$ -Struktur  $\Gamma_{1,p} \backslash \mathbb{H}_2$  bzw. des Modulraums der  $(1, p)$ -polarisierten abelschen Flächen  $\Gamma_{1,p}^\circ \backslash \mathbb{H}_2$  eingehend in dem Buch von Hulek, Kahn, Weintraub [HKW1] bzw. in der Dissertation von Brasch [Br] untersucht. Diese Arbeiten sind eine unentbehrliche Grundlage für die Beschreibung des Modulraums  $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit Level-2-Struktur  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) = \Gamma_{1,p}^\circ(2) \backslash \mathbb{H}_2$  und des kompaktifizierten Modulraums  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ , die im Mittelpunkt dieser Arbeit steht. Es bietet sich an, den Modulraum  $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit Level-2-Struktur und zusätzlicher kanonischer Level- $p$ -Struktur  $\mathcal{A}_{1,p}(2) = \Gamma_{1,p}(2) \backslash \mathbb{H}_2$  in die Untersuchung aufzunehmen. Die arithmetischen Untergruppen  $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ , die diese Modulräume definieren, stehen durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{1,p} & \triangleleft & \Gamma_{1,p}^\circ \\ \nabla & & \nabla \\ \Gamma_{1,p}(2) & \triangleleft & \Gamma_{1,p}^\circ(2) \end{array}$$

in Beziehung, die die verzweigte Überlagerungssituation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{1,p} & \longrightarrow & \mathcal{A}_{1,p}^\circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{1,p}(2) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) \end{array}$$

induzieren. Bezüglich dieses Diagramms kann der Modulraum  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  als Faserprodukt

$$\mathcal{A}_{1,p}(2) = \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) \times_{\mathcal{A}_{1,p}^\circ} \mathcal{A}_{1,p}$$

aufgefaßt werden. Die Kompaktifizierungen der Modulräume sind so konstruiert, daß sich die Operationen der jeweiligen Quotienten (der definierenden arithmetischen Untergruppen) auf den Rand fortsetzen läßt. Dabei stellt sich heraus, daß sich auch der kompaktifizierte Modulraum  $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$  als Faserprodukt

$$(\mathcal{A}_{1,p}(2))^* = (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^* \times_{(\mathcal{A}_{1,p}^\circ)^*} \mathcal{A}_{1,p}^*$$

ergibt.

Der Fall  $p = 3$  wird eine besondere Rolle spielen, aus der sich die wesentliche Motivation der Untersuchung des Modulraum  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  ableitet. Barth und Nieto studierten in [BN] die Quintik

$$N = \left\{ \sum_{i=0}^5 u_i = \sum_{i=0}^5 \frac{1}{u_i} = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^5.$$

Es ist  $N$  birational zum Raum der Kummerflächen, die zu abelschen Flächen mit  $(1, 3)$ -Polarisierung und Level-2-Struktur korrespondieren. Darüberhinaus besitzt  $N$  ein glattes Modell, welches Calabi-Yau ist. Daraus kann man ableiten, daß der Modulraum  $\mathcal{A}_{1,3}^\circ(2)$  auch ein glattes Modell besitzt, welches Calabi-Yau ist. Damit stellt sich die Frage nach der Bestimmung der (bis auf skalare Vielfache) eindeutig bestimmten Spitzenform vom Gewicht 3 bezüglich der arithmetischen Untergruppe  $\Gamma_{1,3}^\circ(2) \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ , die den Modulraum  $\mathcal{A}_{1,3}^\circ(2)$  definiert. Diese Spitzenform wurde in [GH1] als  $\Delta_1^3$  angegeben, wobei  $\Delta_1$  eine Spitzenform vom Gewicht 1 bezüglich der paramodularen Gruppe  $\Gamma_{1,3}^\circ \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  mit einem Charakter der Ordnung 6 ist. In [GH2] wird festgehalten, daß die zu einer  $(1, p)$ -polarisierten abelschen Fläche und die zu ihrer dualen polarisierten abelschen Fläche zugehörigen Kummerschen Modulflächen isomorph sind. Das lenkt die Aufmerksamkeit

auf die *Fricke-Involution*, die die Gruppe  $\Gamma_{1,p}^\circ$  zu einer Gruppe  $\Gamma_{1,p}^*$  erweitert. Diese Involution bewirkt die Identifikation einer polarisierten abelschen Fläche mit ihrer dualen abelschen Fläche. Das wirft die Fragen auf, ob  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  in der Weise zu einer Gruppe  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  erweitert werden kann, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{1,p}^\circ(2) & \hookrightarrow & \Gamma_{1,p}^*(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_{1,p}^\circ & \hookrightarrow & \Gamma_{1,p}^* \end{array}$$

kommutiert. Wenn dies der Fall ist, ist dann  $\Delta_1^3$  auch eine Spitzenform bezüglich  $\Gamma_{1,3}^*(2)$ ?

Die Operation der Fricke-Involution auf  $\mathcal{A}_{1,3}^\circ(2)$  läßt sich aber nicht auf den Rand von  $(\mathcal{A}_{1,3}^\circ(2))^*$  fortsetzen. Es stellt sich also die Aufgabe, eine geeignete toroidale Kompaktifizierung zu finden. In dieser Arbeit werden wir die Antworten auf diese Fragen erarbeiten.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Durch Einführung bestimmter Untergruppen der symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  werden wir die Modulräume angeben, die für uns von besonderem Interesse sind. Dann werden einige gruppentheoretische Überlegungen angestellt, die den Zusammenhang dieser Untergruppen liefern. Wir werden uns im Anschluß einen Überblick über die Methode der toroidalen Kompaktifizierung verschaffen, was uns insbesondere zu den Grundlagen der torischen Geometrie führt.

Im darauffolgenden Kapitel werden wir Titsgebäude von bestimmten arithmetischen Untergruppen der  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  angeben. Der Rand der zu untersuchenden Modulräume besitzt eine Stratifikation von sogenannten rationalen Korang-1- und Korang-2-Randkomponenten. Dabei kommt es vor, daß der Abschluß einer rationalen Randkomponente in einer anderen liegen kann, was also in diesem Sinne eine Beschreibung der Nachbarschaftrelationen dieser Randkomponente erfordert. Diese Beschreibung ist in einem kombinatorischen Objekt, dem Titsgebäude der jeweils betrachteten arithmetischen Untergruppe, kodiert.

Danach werden die auftretenden Singularitäten im kompaktifizierten Modulraum  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  untersucht. Es stellt sich heraus, daß sich diese lediglich als isolierte Quotientensingularitäten, die auf dem Rand liegen, ergeben. Wir werden dann entscheiden, wann die auftretenden Singularitäten kanonisch sind. Das nächste Kapitel soll der Beschreibung der Korang-2-Randkomponenten dienen. Diese Randkomponenten bilden eine Konfiguration von projektiven Geraden. Zunächst werden wir diese Konfiguration für

den Modulraum  $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$  beschreiben. Die Konfiguration der projektiven Geraden auf dem Rand von  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  wird sich dann als Quotient dieser Konfiguration nach einer Gruppe der Ordnung  $\frac{p-1}{2}$  ergeben.

Wir sind dann an einem Punkt angelangt, wo wir die Fricke-Involution näher studieren werden. Durch elementare Rechnungen werden wir zeigen, daß die Gruppe  $\Gamma_{1,p}^*(2)$  im obigen Diagramm eindeutig bestimmt und die Modulform  $\Delta_1^3$  tatsächlich eine Spitzenform bezüglich  $\Gamma_{1,3}^*(2)$  ist.

Im letzten Abschnitt wird dann eine Verfeinerung der Voronoi-Kegelzerlegung angegeben. Dies resultiert in eine toroidale Kompaktifizierung, so daß die erweiterte Gruppe  $\Gamma_{1,3}^*(2)$  auf dem Rand operiert. Diese führt allerdings zu weiteren (nicht-isolierten) Singularitäten, so daß sich die Frage nach einer alternativen Kegelzerlegung stellt.

Bevor ich nun weitergehe, möchte ich mich an dieser Stelle bei all denen bedanken, die durch ihre Unterstützung dazu beigetragen haben, daß diese Arbeit entstehen konnte. Allen voran danke ich meinen Doktorvater Prof. Dr. K. Hulek für die Betreuung und Ermutigung. Ebenso gilt mein Dank den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Arbeitsgruppe in Hannover, sowie insbesondere PD Dr. J. Spandaw, Dr. M. Lönne und Dr. Ch. Alpert für hilfreiche Gespräche und Kommentare.



# Inhaltsverzeichnis

Einleitung . . . . .	i
1 Modurräume abelscher Flächen . . . . .	1
2 Einige gruppentheoretische Überlegungen . . . . .	5
2.1 Der Quotient $\Gamma_{1,p}^\circ/\Gamma_{1,p}(2)$ . . . . .	7
2.2 Die Permutationsgruppe $S_6$ und $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$ . . . . .	11
3 Toroidale Kompaktifizierung nach Mumford . . . . .	12
3.1 Toruseinbettungen . . . . .	12
3.1.1 Bestimmte äquivariante holomorphe Abbildungen . . . . .	16
3.2 Toroidale Kompaktifizierung von $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$ und $\mathcal{A}_{1,p}(2)$ . . . . .	16
3.3 Die Stabilisatoren $\mathcal{P}(U^{(i)})$ , $i = 0, 1, 2$ . . . . .	21
3.3.1 Korang-1-Randkomponenten . . . . .	24
3.3.2 Korang-2-Randkomponenten und der Legendre-Fächer . . . . .	27
4 Das Titsgebäude bestimmter Untergruppen von $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$ . . . . .	35
4.1 Das Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ(2))$ . . . . .	37
4.2 Die Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ)$ und $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p})$ . . . . .	39
4.3 Das Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}(2))$ . . . . .	40
5 Singularitäten auf $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . . . . .	48
5.1 Quotientensingularitäten . . . . .	48
5.2 Die Situation auf $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$ . . . . .	51
5.3 Singularitäten auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . . . . .	52
6 Die Geometrie auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ und $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . . . . .	66
6.1 Die Konfiguration von projektiven Geraden auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ . . . . .	66
6.2 Der Fall $p = 3$ . . . . .	81
6.3 Die Konfiguration von projektiven Geraden auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . . . . .	89
7 Der Abschluß der Korang-1-Randkomponenten in $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ . . . . .	95

7.1	Verklebungsabbildungen . . . . .	95
8	Die Erweiterung $\Gamma_{1,p}^*(2)$ und die Modulform $\Delta_1^3$ . . . . .	103
8.1	Die maximale Erweiterung $\Gamma_{1,p}^*$ von $\Gamma_{1,p}^\circ$ in $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{R})$ .	103
8.2	Die Modulform $\Delta_1^3$ . . . . .	109
8.3	Eine Verfeinerung des Legendre-Fächers im Fall $p = 3$	110
	Symbolverzeichnis . . . . .	115
	Literatur . . . . .	117

## 1 Modulräume abelscher Flächen

Eine abelsche Fläche über  $\mathbb{C}$  ist ein zweidimensionaler komplexer Torus  $\mathbb{C}^2/L$  ( $L$  ist ein Gitter von maximalen Rang 4), der zugleich projektiv-algebraisch ist, das heißt, auf dem ein amples Geradenbündel  $\mathcal{L}$  existiert. Die 1. Chernklasse  $c_1(\mathcal{L})$  kann als positiv definite hermitsche Form  $H : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  aufgefaßt werden, deren Imaginärteil auf dem Gitter  $L$  ganzzahlig ist. Jede hermitsche Form mit diesen Eigenschaften definiert umgekehrt ein bis auf Translation eindeutig bestimmtes amples Geradenbündel  $\mathcal{L}$  von  $\mathbb{C}^2/L$ . Die Form  $H$  bzw. das Geradenbündel  $\mathcal{L}$  nennt man dann *Polarisierung* von  $X$ . Für eine geeignete Wahl einer Basis von  $L$  kann man nun erreichen, daß sich  $\text{Im}(H)$  durch eine schiefsymmetrische Matrix

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

mit  $E = \text{diag}(e_1, e_2)$  und  $0 < e_1 \leq e_2, e_1 | e_2$  beschreiben läßt. Das Tupel  $(e_1, e_2)$  ist durch das Geradenbündel  $\mathcal{L}$  eindeutig bestimmt und wird der *Typ der Polarisation* genannt. Ist  $e_1 = e_2 = 1$ , so wird die Polarisation *prinzipal* genannt. Eine (*prinzipal*) *polarisierte abelsche Fläche* ist ein Paar  $(A, H_A)$  bestehend aus einem Torus  $A$  und einer (prinzipalen) Polarisation  $H_A$ .

Mit dem Symbol  $\mathbb{H}_2$  werden wir die *Siegelsche obere Halbebene zur Stufe 2* bezeichnen:

$$\mathbb{H}_2 = \{ \tau \in \text{Mat}(2, \mathbb{C}) \mid \tau = {}^t\tau, \text{Im}(\tau) > 0 \}$$

(Hier und im weiteren werden wir  $H > 0$  bzw.  $H \geq 0$  für die Eigenschaft, daß eine Matrix  $H$  positiv definit bzw. positiv semi-definit ist, schreiben.) Jeder Punkt  $\tau$  aus  $\mathbb{H}_2$  bestimmt ein Gitter  $L_\tau := (E, \tau) \cdot \mathbb{Z}^4$  in  $\mathbb{C}^2$ . Bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{C}^2$  definiert  $(\text{Im } \tau)^{-1}$  eine positiv definite hermitsche Form  $H_\tau$ . Die Abbildung  $\text{Im } H_\tau|_{L_\tau \times L_\tau}$  wird dann bezüglich der Spaltenvektoren von  $(E, \tau)$  durch die Matrix  $\Lambda$  beschrieben. Umgekehrt erhält man jede polarisierte abelsche Fläche vom Typ  $(e_1, e_2)$  auf diese Weise [I, pp. 73-74]. Ist  $\mathbb{C}^2/L$  ein komplexer Torus, so kann durch die Operation von  $\text{GL}(2, \mathbb{C})$  (Matrixmultiplikation von links, wobei  $\mathbb{C}^2$  als Spaltenvektorraum aufgefaßt ist) erreicht werden, daß die ersten beiden Vektoren von der Form  $\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}$  sind. Wir erhalten so eine normalisierte Periodenmatrix für das Gitter  $L$ . Dann ist leicht zu sehen, daß  $\mathbb{C}^2/L$  genau dann eine abelsche Fläche ist, falls  $\tau \in \mathbb{H}_2$  ist.

Insgesamt haben wir also für einen festen Typ der Polarisation  $(e_1, e_2)$  eine

Surjektion

$$\mathbb{H}_2 \mapsto \{(A, H_A); (A, H_A) \text{ ist eine } (e_1, e_2)\text{-polarisierte abelsche Fläche}\} / \text{Isom.}$$

Um die Isomorphieklassen zu beschreiben, betrachten wir die Automorphismen des Gitters  $L$ , die die Form  $\Lambda$  respektieren. Diese Automorphismen bilden die *symplektische Gruppe bezüglich  $\Lambda$* , also

$$\tilde{\Gamma}_{e_1, e_2}^\circ := \text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z}) = \{g \in \text{GL}(4, \mathbb{Z}) \mid g\Lambda^t g = \Lambda\}.$$

Schreiben wir ein Element aus  $\text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$  als Matrix von  $2 \times 2$ -Blöcken, so operiert diese durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \tau \mapsto (A\tau + BE)(C\tau + DE)^{-1}E$$

auf  $\mathbb{H}_2$ .

Der Quotient  $\mathcal{A}_{e_1, e_2}^\circ := \tilde{\Gamma}_{e_1, e_2}^\circ \backslash \mathbb{H}_2$  parametrisiert dann die Isomorphieklassen von  $(e_1, e_2)$ -polarisierten abelschen Flächen, das heißt,  $\mathcal{A}_{e_1, e_2}^\circ$  wird zu einem Modulraum  $(e_1, e_2)$ -polarisierter abelscher Flächen (siehe dazu etwa [HKW1, I]). Zunächst werden wir die Untergruppen der  $\text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$  einführen, die für uns von besonderem Interesse sind. Dazu sei  $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^4$  das Gitter, auf dem  $\Lambda$  eine symplektische Form definiert, und weiterhin

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^\vee &= \{y \in \mathbb{L} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \Lambda(x, y) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } x \in \mathbb{L}\} \\ &= \frac{1}{e_1}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_2}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_1}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{e_2}\mathbb{Z} \end{aligned}$$

das duale Gitter von  $\mathbb{L}$  bezüglich  $\Lambda$ .

Es gilt  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{L}^\vee$  und der Quotient  $\mathbb{L}^\vee/\mathbb{L}$  ist eine endliche Gruppe, die isomorph zu  $(\mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2})^2$  ist. Diese trägt eine alternierende Form  $\alpha$ , die in den kanonischen Erzeugenden durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & E^{-1} \\ -E^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmt ist. Eine *kanonische Level-Struktur* auf einer polarisierten abelschen Fläche  $(A, H_A)$  ist ein Isomorphismus

$$\mathbb{L}^\vee/\mathbb{L} \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2})^2,$$

der die durch  $\Lambda$  auf  $\mathbb{L}^\vee/\mathbb{L}$  induzierte alternierende Form in die Form  $\alpha$  überführt.

Eine *allgemeine Level- $n$ -Struktur* auf einer polarisierten abelschen Fläche

$(A, H_A)$  ist eine kanonische Level-Struktur im obigen Sinne für die Polarisation  $n\Lambda$ .

Jede Polarisierung  $\mathcal{L}$  vom Typ  $(e_1, e_2)$  ist die  $e_1$ -te Potenz einer eindeutig bestimmten Polarisierung vom Typ  $(1, \frac{e_2}{e_1})$ . Für Modulprobleme reicht es also aus, Polarisierungen vom Typ  $(1, e)$  zu betrachten. Wir werden uns auf den Fall  $e = p$  für  $p \geq 3$  prim spezialisieren. Im weiteren sei also

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 1.1** Alternativ kann man  $\mathcal{A}_{1,e}^\circ$  mit Hilfe folgender Untergruppe der rationalen symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q}) = \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Q})$  definieren, wobei  $J$  die gewöhnliche symplektische Form

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Es sei  $R_e = \mathrm{diag}(1, 1, 1, e)$  und

$$\Gamma_{1,e}^\circ := R_e^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,e}^\circ R_e \subset \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Q})$$

Dann operiert  $\Gamma_{1,e}^\circ$  auf  $\mathbb{H}_2$  durch

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \tau \rightarrow (A\tau + B)(C\tau + D)^{-1}$$

und es gilt

$$\mathcal{A}_{1,e}^\circ = \tilde{\Gamma}_{1,e}^\circ \backslash \mathbb{H}_2 \cong \Gamma_{1,e}^\circ \backslash \mathbb{H}_2$$

**Notation** Je nach Aufgabenstellung werden wir mit  $\tilde{\Gamma}_{1,e}^\circ$  oder  $\Gamma_{1,e}^\circ$  arbeiten. Um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir die Objekte, die sich auf  $\tilde{\Gamma}_{1,e}^\circ$  beziehen, mit  $\tilde{\alpha}$  bezeichnen.

Wir betrachten für eine ganze Zahl  $n \geq 1$ ,  $\mathrm{ggT}(n, e) = 1$  das zu  $\mathbb{L}$  bezüglich  $n\Lambda$  duale Gitter

$$\mathbb{L}_n^\vee := \frac{1}{n} \cdot \mathbb{L}^\vee$$

und definieren:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{1,p} &:= \left\{ g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \mid vg \equiv v \pmod{\mathbb{L}} \text{ für alle } v \in \mathbb{L}^\vee \right\} \\ \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(n) &:= \left\{ g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \mid vg \equiv v \pmod{\mathbb{L}} \text{ für alle } v \in \mathbb{L}_n^\vee \right\} \\ \tilde{\Gamma}_{1,p}(n) &:= \tilde{\Gamma}_{1,p} \cap \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(n)\end{aligned}$$

**Bemerkung 1.2** Es ist leicht einzusehen, daß ein Element  $g$  aus  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  genau dann in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(n)$  ist, falls die Kongruenz  $g \equiv \mathbf{1}_4 \pmod{n}$  gilt.

Wir erhalten die folgenden Untergruppen von  $\mathrm{Sp}(J, \mathbb{Q})$ :

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,p} &:= R_p^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,p} R_p \\ \Gamma_{1,p}^\circ(n) &:= R_p^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(n) R_p \\ \Gamma_{1,p}(n) &:= R_p^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,p}(n) R_p,\end{aligned}$$

beziehungsweise folgende Modulräume:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{1,p} &:= \tilde{\Gamma}_{1,p} \backslash \mathbb{H}_2 = \Gamma_{1,p} \backslash \mathbb{H}_2 \\ \mathcal{A}_{1,p}^\circ(n) &:= \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(n) \backslash \mathbb{H}_2 = \Gamma_{1,p}^\circ(n) \backslash \mathbb{H}_2 \\ \mathcal{A}_{1,p}(n) &:= \tilde{\Gamma}_{1,p}(n) \backslash \mathbb{H}_2 = \Gamma_{1,p}(n) \backslash \mathbb{H}_2,\end{aligned}$$

die die folgende geometrische Bedeutung haben:

- (i)  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ = \left\{ (A, H_A) \mid \begin{array}{l} A \text{ ist abelsche Fläche,} \\ H_A \text{ ist Polarisierung vom Typ } (1, p) \end{array} \right\}$
- (ii)  $\mathcal{A}_{1,p} = \{(A, H_A, \alpha) \mid \alpha \text{ ist eine kanonische Levelstruktur}\}$
- (iii)  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(n) = \{(A, H_A, \beta) \mid \beta \text{ ist eine allgemeine Level-}n\text{-Struktur}\}$
- (iv)  $\mathcal{A}_{1,e}(n) = \{(A, H_A, \alpha, \beta)\}$ .

Die Modulräume  $\mathcal{A}_{1,p}$  und  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ$  wurden schon eingehend in [HKW1] und [Br] beschrieben. Diese Räume besitzen „milde“ Singularitäten, daß heißt lediglich endliche Quotientensingularitäten. Für eine Beschreibung der Singularitäten von  $\mathcal{A}_{1,p}$  bzw.  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ$  sei auf [HKW2] bzw. auf [Br] hingewiesen. Wir werden den Fall  $n = 2$  untersuchen. Unser Augenmerk gilt also den Modulräumen  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  und  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$ .

## 2 Einige gruppentheoretische Überlegungen

Wir werden hier einige Eigenschaften der Gruppen zusammenfassen, die wir zur Einführung der offenen Modulräume definierten. Die Quotienten  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ/\Gamma$ ,  $\Gamma = \tilde{\Gamma}_{1,p}, \tilde{\Gamma}_{1,p}(2), \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  induzieren verzweigte Überlagerungen auf den korrespondierenden offenen Modulräumen. Wir werden später Kompaktifizierungen dieser Modulräume so konstruieren, daß sich diese Quotientenabbildungen auf den Rand fortsetzen, was ein genaueres Studium des Zusammenhangs der betrachteten Gruppen erfordert.

**Notation.** Im weiteren Verlauf sei mit  $\bar{A}$  die Reduktion modulo 2 irgendeiner ganzzahligen Matrix  $A$  bezeichnet. Mit  $\Gamma_1(n)$  bezeichnen wir die Hauptkongruenzgruppe zur Stufe  $n$  in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ , also

$$\Gamma_1(n) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{n} \right\}.$$

Mit  $\Gamma_0(n)$  sei die Gruppe der Matrizen in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  mit  $c \equiv 0 \pmod{n}$  bezeichnet.

**Proposition 2.1** *Die Gruppen  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  und  $\Gamma_{1,p}(2)$  beschreiben sich wie folgt:*

$$\begin{aligned} \Gamma_{1,p}^\circ(2) &= \left\{ g \in \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Q}) \mid g \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & \frac{2}{p}\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\} \\ \Gamma_{1,p}(2) &= \left\{ g \in \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Q}) \mid g - \mathbf{1}_4 \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} & 2p^2\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Als direkte Folge aus den Berechnungen in [HKW1, Proposition I.1.16] haben die Elemente  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  die Eigenschaft

$$\begin{aligned} m_{21} &\equiv m_{23} \equiv m_{41} \equiv m_{43} \equiv 0 \pmod{p} \\ m_{22}m_{44} - m_{24}m_{42} &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

und  $M$  ist genau dann in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ , falls

$$m_{22} - 1 \equiv m_{44} - 1 \equiv m_{24} \equiv m_{42} \equiv 0 \pmod{p}$$

gilt. Beachtet man zusätzlich, daß  $M \equiv \mathbf{1}_4 \pmod{2}$  für alle  $M \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  gilt, so folgt die Aussage direkt durch Berechnung von  $R_p^{-1}\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)R_p$  bzw.

$$R_p^{-1} \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) R_p.$$

□

**Bemerkung 2.2** Nach [HKW1, Proposition I.1.20] sind schon die Einträge der Matrizen in  $\Gamma_{1,p}$  ganzzahlig, so daß  $\Gamma_{1,p}$  eine Untergruppe der  $\mathrm{Sp}(J, \mathbb{Z})$  ist. Die Gruppe  $\Gamma_{1,p}(2)$  ist sogar eine Untergruppe der Kongruenzuntergruppe

$$\Gamma(2) := \{g \in \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Z}) \mid g \equiv \mathbf{1}_4 \pmod{2}\} = \ker\{ \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Z}) \xrightarrow{(\mathrm{mod} 2)} \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \}.$$

**Hilfssatz 2.3** (i) Für  $n \geq 1$  ist die Abbildung

$$\phi_n^1 : \begin{cases} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) & \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_n) \\ M & \mapsto M \pmod{n} \end{cases}$$

ein Epimorphismus mit Kern  $\Gamma_1(n)$ .

(ii) Für  $p \geq 3$  ist die Abbildung

$$\phi_2^p : \begin{cases} \Gamma_1(p) & \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \\ M & \mapsto \overline{M} \end{cases}$$

ein Epimorphismus mit Kern  $\Gamma_1(2p)$ .

(iii) Die Abbildung

$$\begin{cases} \Gamma_0(p) & \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (d \pmod{p}, \overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}) \end{cases}$$

ist surjektiv.

(iv) Die Abbildung

$$\begin{cases} \Gamma_1(2) & \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{p} \end{cases}$$

ist ein Epimorphismus.

*Beweis.* Der Punkt (i) wurde in [Sh, Lemma 1.38] bewiesen.

Die Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & p^2+1 \end{pmatrix}$  sind aus  $\Gamma_1(p)$  und die Gruppe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$

wird von  $\overline{\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$  und  $\overline{\begin{pmatrix} 1 & p \\ p & p^2+1 \end{pmatrix}}$  erzeugt, so daß (ii) folgt.



Zu (iii) sei  $(\delta, \overline{M}) \in \mathbb{Z}_p^* \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Nach (i) liftet das Element  $\begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$  aus  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  zu einem Element  $g$  in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$  und wegen (ii) gibt es ein  $g'$  aus  $\Gamma_1(p)$  mit  $\overline{g'} = \overline{(g)}^{-1} \cdot \overline{M}$ . Dann ist

$$g \cdot g' \equiv \begin{pmatrix} \delta^{-1} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$$

$$g \cdot g' \equiv \overline{M} \pmod{2}$$

Also ist  $g \cdot g' \in \Gamma_0(p)$  und liegt im Urbild von  $(\delta, \overline{M})$ .

Zu (iv) sei  $\tilde{g} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  und  $g \in (\phi_p^1)^{-1}(\tilde{g}) \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ . Wir wählen ein  $g' \in \Gamma_1(p)$ , so daß  $\phi_2^p(g') = (\phi_2^p(g))^{-1}$  ist. Dann ist  $g' \cdot g \in \Gamma_1(2)$  und  $g' \cdot g \equiv g \pmod{p} = \tilde{g}$ . □

## 2.1 Der Quotient $\Gamma_{1,p}^\circ / \Gamma_{1,p}(2)$

**Proposition 2.4** *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{(I)} & & \text{(II)} & & \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow 1 & & \\
 \text{(III)} & 1 \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p} & \xrightarrow{\phi|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}} & \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 \text{(IV)} & 1 \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow \gamma|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)} & & \downarrow \gamma & & \\
 & & \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) & \equiv & \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

mit

$$\phi : \begin{cases} \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ & \rightarrow \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \\ M & \mapsto \overline{M} \end{cases}$$

und

$$\gamma : \begin{cases} \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ & \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \\ (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} & \mapsto \begin{pmatrix} m_{22} & m_{24} \\ m_{42} & m_{44} \end{pmatrix} \pmod{p} \end{cases}$$

ist kommutativ mit exakten Zeilen und Spalten.

*Beweis.* Die Exaktheit der Sequenz **(II)** wurde schon in [HW, lemma 0.5] gezeigt.

Zunächst ist  $\phi$  wohldefiniert:

Für jedes  $\overline{M} \in \phi(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  ist  $\overline{M} \overline{\Lambda} {}^t \overline{M} = \overline{\Lambda}$  und es ist  $\overline{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$ . Insbesondere ist  $\phi(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ) \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$ .

Die Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  (bzw.  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ ) ist der Kern der Reduktionabbildung modulo 2 von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$  (bzw.  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ ), so daß zum Beweis der Exaktheit von **(III)** und **(IV)** lediglich die Surjektivität von  $\phi|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  gezeigt werden muß.

Nach [F, A.5.2] wird die Gruppe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  von  $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \overline{S} \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$  mit  $S = E \cdot \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} \in E \cdot \mathrm{Sym}(2, \mathbb{Z})$  erzeugt.

Nach Hilfssatz 2.3 (ii) können wir  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(p)$  mit  $\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$  wählen. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 & s_2 \\ 0 & 1 & ps_2 & ps_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

liegen im Urbild von  $\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$  beziehungsweise  $\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & \overline{S} \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix}$  unter  $\phi|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$ . Die Abbildung  $\phi|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  ist also surjektiv.

Betrachte nun die Sequenz **(I)**.

Die Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  beschreibt sich als

$$\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) = \left\{ (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) \mid \begin{pmatrix} m_{22} & m_{24} \\ m_{42} & m_{44} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{p} \right\},$$

so daß lediglich die Surjektivität von  $\gamma|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}$  gezeigt werden muß.

Es sei  $\tilde{g} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ . Dann gibt es wegen der Exaktheit von **(II)** ein  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4} \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , so daß  $\gamma(M) = \tilde{g}$  ist. Es sei weiter  $M' \in \tilde{\Gamma}_{1,p}$ , so daß

$\phi(M') = \phi(M)^{-1}$  ist (Existenz von  $M'$  folgt aus der Exaktheit von **III**).  
Dann ist

$$\begin{aligned} M \cdot M' &\in \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}(2) && \text{und} \\ \gamma(M \cdot M') &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

das heißt,  $\gamma|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}(2)}$  ist surjektiv. □

**Korollar 2.5** *Es gilt  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  mit Quotienten*

$$\tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ} / \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \times \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2).$$

*Beweis.* Wir werden zeigen, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \hookrightarrow \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ} \xrightarrow{(\gamma, \phi)} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \times \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \rightarrow 0$$

exakt ist.

i)  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) = \ker((\gamma, \phi))$ :

Folgt sofort daraus, daß  $\tilde{\Gamma}_{1,p} \cap \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}(2) = \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  und die Sequenzen **(II)** und **(IV)** exakt sind.

ii)  $(\gamma, \phi)$  ist surjektiv:

Sei  $w \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  und  $x \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$ . Wir wählen ein  $y \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  mit  $\phi(y) = x$  und definieren das Element

$$v := \gamma(y)^{-1} \cdot w \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$$

mit Urbild  $z \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}(2)$  unter  $\gamma|_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}(2)}$ .

Dann liegt  $y \cdot z \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  im Urbild von  $(w, x)$ :

Es ist

$$\begin{aligned} \gamma(y \cdot z) &= \gamma(y) \cdot \gamma(z) = \gamma(y) \cdot v = w \\ \phi(y \cdot z) &= \phi(y) \cdot \phi(z) = \phi(y) = x. \end{aligned}$$

□

**Bemerkungen 2.6** i) Es gibt eine verzweigte Überlagerung

$$\mathcal{A}_{1,p}(2) \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{1,p}^{\circ}(2)$$

von Modulräumen, die von der Operation von  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) / \{\pm 1\}$  induziert wird. Das ist klar, da

$$\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) = \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) \backslash \mathbb{H}_2 = (\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) / \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)) \backslash (\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \backslash \mathbb{H}_2)$$

und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) / \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ . Die Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  operiert zwar effektiv auf  $\mathbb{H}_2$ , jedoch operiert  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  mit Kern  $\{\pm 1_4\}$ , so daß die Überlagerungsgruppe durch  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$  und der Grad dieser Überlagerung durch die Ordnung  $\#\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) = p(p^2 - 1)/2$  bestimmt ist. Die Projektion von  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  auf den Quotienten  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  korrespondiert dabei zum Vergessen der kanonischen Levelstruktur einer abelschen Fläche, während die allgemeine Level-2-Struktur und der Typ der Polarisierung erhalten bleiben.

ii) Die Projektion von  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  auf den Quotienten  $\mathcal{A}_{1,p}$  korrespondiert zum Vergessen der allgemeinen Level-2-Struktur auf einer abelschen Fläche, während die kanonische Levelstruktur und der Typ der Polarisierung erhalten bleiben.

Wie oben haben wir eine verzweigte Überlagerungssituation, die von der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p} / \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \simeq \mathrm{SL}(4, \mathbb{Z}_2)$  auf  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  induziert wird. Beide Gruppen  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$  und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  operieren effektiv auf  $\mathbb{H}_2$ , so daß sich der Überlagerungsgrad durch  $\#\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) = 720$  bestimmt.

Insgesamt liefert also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{1,p} & \triangleleft & \Gamma_{1,p}^\circ \\ \nabla & & \nabla \\ \Gamma_{1,p}(2) & \triangleleft & \Gamma_{1,p}^\circ(2) \end{array}$$

ein Diagramm von verzweigten Überlagerungen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{1,p} & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_{1,p}^\circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{A}_{1,p}(2) & \twoheadrightarrow & \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) \end{array}$$

iii) Bezeichnen wir mit  $\pi_1$  und  $\pi_2$  die durch  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  bzw.  $\mathrm{SL}(4, \mathbb{Z}_2)$  induzierten Quotientenabbildungen auf  $\mathcal{A}_{1,p}$  bzw.  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$ , so kann  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  bezüglich des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) \\ & & \downarrow \pi_2 \\ \mathcal{A}_{1,p} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{A}_{1,p}^\circ \end{array}$$

als das Faserprodukt von  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  und  $\mathcal{A}_{1,p}$  über  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ$  aufgefaßt werden und  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ/\widetilde{\Gamma}_{1,p}(2) \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \times \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  operiert komponentenweise auf  $\mathcal{A}_{1,p}(2) \simeq \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2) \times_{\mathcal{A}_{1,p}^\circ} \mathcal{A}_{1,p}$  mit Quotienten  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ$ .

## 2.2 Die Permutationsgruppe $S_6$ und $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$

Bekanntlich ist die Permutationsgruppe  $S_6$  isomorph zur symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$ . Wir werden kurz daran erinnern, wie ein Isomorphismus konstruiert werden kann (nach [vdG]).

Eine maximale Menge von eindimensionalen linearen Unterräumen im 4-dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{Z}_2^4$  über  $\mathbb{Z}_2$ , von denen je zwei nicht in einer isotropen Ebene liegen, besteht aus 5 Elementen. Es gibt genau 6 dieser Mengen:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\} \\ M_2 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\} \\ M_3 &= \{(1, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, 0)\} \\ M_4 &= \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\} \\ M_5 &= \{(0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0)\} \\ M_6 &= \{(0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\} \end{aligned}$$

Jeder eindimensionale Unterraum liegt in genau zwei maximalen Mengen. Durch Festlegung der Bezeichnungen dieser Mengen korrespondiert also jeder eindimensionale Unterraum in  $\mathbb{Z}_2^4$  zu einem Paar  $\{i, j\} \subset \{1, \dots, 6\}$ . Jeder zweidimensionale isotrope Unterraum enthält drei eindimensionale Unterräume und korrespondiert zu einer Partition  $(ij)(kl)(mn)$  von  $\{1, \dots, 6\}$ . Zum Beispiel korrespondiert die isotrope Ebene  $(1, 0, 0, 0) \wedge (0, 1, 0, 0)$  zur Partition  $(12)(35)(46)$ . Die Gruppe  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  permutiert die sechs maximalen Mengen  $M_i$  durch Multiplikation von rechts und führt so zu einem Isomorphismus mit  $S_6$ .

Mit Hilfe dieses Isomorphismus können wir den Signumcharakter von  $S_6$  auf Matrizen aus  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  übertragen.

Betrachte zum Beispiel die Involution

$$\iota = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2),$$

die auf den Mengen  $M_i$  durch  $M_1 \mapsto M_6 \mapsto M_1$ ,  $M_2 \mapsto M_4 \mapsto M_2$ ,  $M_3 \mapsto M_5 \mapsto M_3$  operiert. Damit entspricht diese also dem Zykel  $(16)(24)(35)$  und es ist  $\mathrm{sgn}(\iota) = -1$ .

### 3 Toroidale Kompaktifizierung nach Mumford

Wir werden in diesem Kapitel die Methode der toroidalen Kompaktifizierung beschreiben, die wir dann auf die Modulräume  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  und  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$  anwenden werden. Wir erhalten mit dieser Methode Kompaktifizierungen  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  und  $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ , die schlimmstenfalls Quotientensingularitäten enthalten. Im ersten Abschnitt führen wir die Begriffe und Notationen ein, die für die Beschreibung der toroidalen Kompaktifizierung wesentlich sind. Zunächst aber ein kurzer Abriß der Aufgaben, die sich stellen:

Es wird  $\mathbb{H}_2$  als beschränkter Bereich  $\mathfrak{D}_2$  vermöge der Cayley-Abbildung realisiert. Diese kann als Verallgemeinerung der Realisierung von  $\mathbb{H}_1$  als offene Einheitskreisscheibe  $\mathfrak{D}_1$  angesehen werden. Der Rand  $\overline{\mathfrak{D}_2} \setminus \mathfrak{D}_2$  wird dann in topologische Randkomponenten zerlegt und die Operation der betrachteten arithmetischen Untergruppe  $\Gamma$  auf  $\mathbb{H}_2$  induziert eine Operation auf  $\mathfrak{D}_2$ , die sich in natürlicher Weise auf den topologischen Abschluß  $\overline{\mathfrak{D}_2}$  fortsetzen läßt. Auf dem Rand wird sich dann auf die Randkomponenten beschränkt, deren Stabilisator  $P$  über  $\mathbb{Q}$  definiert ist. Diese Randkomponenten haben ihre Entsprechung in dem Bild von  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  auf dem Rand  $\overline{\mathfrak{D}_1} \setminus \mathfrak{D}_1$ .

In unserem Fall stellt sich im Vergleich zur Situation auf  $\mathbb{H}_1$  allerdings die Aufgabe, die Angrenzungsrelation der rationalen Randkomponenten zu diskutieren (angrenzen in dem Sinne, daß der Abschluß einer rationalen Randkomponente in einer anderen liegen kann). Durch die Beschreibung des Titsgebäudes der entsprechenden arithmetischen Untergruppe  $\Gamma$  wird diese Aufgabe vollständig gelöst.

Für jede rationale Randkomponente wird dann das Zentrum des unipotenten Radikals  $P'$  der Stabilisatorgruppe  $P$  bestimmt, die die partielle Quotientenabbildung  $e : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_2/P' \subset (\text{triviales}) \text{ Torusbündel}$  liefert. Es wird mit Hilfe von geeigneten Toruseinbettungen eine toroidale Einbettung von  $\mathbb{H}_2/P'$  so definiert, daß die Faktorgruppe  $P/P'$  darauf operiert. Der Quotient ist dann die partielle Kompaktifizierung in Richtung dieser Randkomponente. Letzlich werden die so definierten partiellen Kompaktifizierungen verklebt, was aufgrund der Angrenzungsrelation zusätzliche Bedingungen an die Familie von Fächern stellt, die die partiellen Kompaktifizierungen definieren.

#### 3.1 Toruseinbettungen

Hier werden wir uns einen kurzen Überblick über die Basisbegriffe der Theorie torischer Varietäten verschaffen. Als Leitfaden sollen uns dabei die einführenden Kapitel von [Od] dienen.

Eine torische Varietät ist eine normale Varietät  $X$ , die einen algebraischen

Torus  $T = (\mathbb{C}^*)^r$  als offene und dichte Teilmenge enthält, zusammen mit einer Operation  $T \times X \rightarrow X$ , die die Operation von  $T$  auf sich fortsetzt.

Für einen freien Modul  $N$  vom Rang  $r \geq 1$  über  $\mathbb{Z}$  sei  $M := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$  der zu  $N$  duale  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M \times N \rightarrow \mathbb{Z}$  die kanonische Paarung. Dann läßt sich ein algebraischer Torus  $T_N := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*) \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^*$  definieren. Jedes  $m \in M$  liefert einen Homomorphismus  $e(m) : T_N \rightarrow \mathbb{C}^*$ , definiert durch

$$e(m)(t) := t(m).$$

Es gilt insbesondere  $e(m + m') = e(m) \cdot e(m')$ . Damit kann  $M$  als *Gruppe der Charaktere von  $T_N$*  aufgefaßt werden.

Für ein  $n \in N$  sei  $\gamma_n : \mathbb{C}^* \rightarrow T_N$  der Homomorphismus, der durch

$$\gamma_n(\lambda)(m) := \lambda^{\langle m, n \rangle}, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad m \in M$$

definiert ist. Dann ist  $\gamma_{n+n'} = \gamma_n \cdot \gamma_{n'}$  für  $n, n' \in N$ , so daß also  $N$  als Gruppe der *1-Parameteruntergruppen von  $T_N$*  interpretiert werden kann.

Durch skalare Erweiterung  $N_{\mathbb{R}} := N \otimes \mathbb{R}$  und  $M_{\mathbb{R}} := M \otimes \mathbb{R}$  erhalten wir  $r$ -dimensionale Vektorräume mit ganzer Struktur und kanonischer Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Eine Teilmenge  $\sigma$  von  $N_{\mathbb{R}}$  heißt *streng konvexer, rationaler, polyedraler Kegel* (kurz: skrp. Kegel), falls es endlich viele Elemente  $n_1, \dots, n_s$  in  $N$  gibt, so daß

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}n_s$$

und  $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$  ist.

Der zu  $\sigma$  duale Kegel  $\sigma^{\vee}$  wird durch

$$\sigma^{\vee} = \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \text{ für alle } y \in \sigma\}$$

definiert. Dies ist wieder ein skrp. Kegel, falls  $\sigma$  von maximaler Dimension ist.

Eine Teilmenge  $\tau$  von  $\sigma$  heißt *Seite* von  $\sigma$  ( $\tau \prec \sigma$ ), falls es ein  $m_0$  in  $\sigma^{\vee}$  gibt, so daß

$$\tau = \{y \in \sigma \mid \langle m_0, y \rangle = 0\}$$

ist.

Ein *Fächer* in  $N$  ist eine nichtleere Menge  $\Sigma_N$  von skrp. Kegeln mit den Eigenschaften

i)  $\sigma \in \Sigma_N, \tau \prec \sigma \Rightarrow \tau \in \Sigma_N$ .

ii)  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_N \Rightarrow \sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_1$  und  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_2$

$M \cap \sigma^\vee$  ist eine saturierte, endlich erzeugte, additive Halbgruppe mit 0. Jeder skrp. Kegel  $\sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  definiert eine Halbgruppenalgebra

$$\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee] := \bigoplus_{m \in M \cap \sigma^\vee} \mathbb{C}e(m)$$

in  $\mathbb{C}[M]$ , versehen mit der Multiplikationsregel  $e(m) \cdot e(m') := e(m + m')$ . Damit wird die *affine Toruseinbettung*  $T_\sigma$  durch

$$T_\sigma := \{ \phi \mid \phi : \mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee] \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist Algebrenhomomorphismus} \}$$

definiert. Ist nun  $\tau$  eine Seite von  $\sigma$ , so ist  $\tau^\vee \cap M \supset \sigma^\vee \cap M$  und die induzierte Abbildung  $T_\tau \rightarrow T_\sigma$  ist injektiv, offen und dicht.

Die durch einen Fächer  $\Sigma_N$  definierte Toruseinbettung  $T_{\Sigma_N}$  ist der Identifikationsraum

$$T_{\Sigma_N} = \coprod_{\sigma \in \Sigma} T_\sigma / \sim ,$$

wobei  $x_1 \sim x_2$  für  $x_1 \in T_{\sigma_1}, x_2 \in T_{\sigma_2}$  genau dann gilt, wenn es einen Kegel  $\xi \in \Sigma_N$  mit  $\xi \subset \sigma_1 \cap \sigma_2$  gibt, so daß  $x_i \in T_\xi \subset T_{\sigma_i}, i = 1, 2$  und  $x_1 = x_2$  in  $T_\xi$  gilt.

$T_{\Sigma_N}$  ist ein normaler, irreduzibler Hausdorffraum, der den algebraischen Torus  $T_N \simeq T_{\{0\}}$  als offene, dichte Teilmenge enthält.  $T_N$  operiert auf  $T_{\Sigma_N}$  : für  $t \in T_N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$  und  $\phi \in T_\sigma$  ist  $t \cdot \phi \in T_\sigma$ , wobei

$$(t \cdot \phi)(m) := t(m) \cdot \phi(m).$$

Die  $T_N$ -Orbiten können dann wie folgt beschrieben werden. Für einen skrp. Kegel  $\sigma$  definieren wir

$$\text{orb}(\sigma, N) := \left\{ \tilde{\varphi} : M \cap \sigma^\perp \rightarrow \mathbb{C}^* \mid \tilde{\varphi} \text{ ist Gruppenhomomorphismus} \right\},$$

wobei  $\sigma^\perp$  der größte  $\mathbb{R}$ -lineare Unterraum in  $\sigma^\vee$  ist. Jeden dieser Gruppenhomomorphismen  $\tilde{\varphi} : M \cap \sigma^\perp \rightarrow \mathbb{C}^*$  kann man dann eindeutig zu einem  $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : M \cap \sigma^\vee \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\tilde{\varphi}(m) = 0$  für alle  $m \in M \cap \sigma^\vee \setminus (M \cap \sigma^\perp)$  erweitern, so daß wir in natürlicher Weise  $\text{orb}(\sigma, N)$  als Teilmenge von  $T_\sigma$  auffassen können.



Daß  $\text{orb}(\sigma, N)$  ein Torus ist, sieht man leicht: Es sei  $N_\sigma$  das Gitter, daß (als Gruppe) von  $\sigma \cap N$  erzeugt wird. Weiter sei

$$N(\sigma) := N/N_\sigma$$

das Quotientengitter mit dualen Gitter  $(N(\sigma))^\vee \simeq \sigma^\perp \cap M$ . Dann ist

$$\text{orb}(\sigma, N) = \text{Hom}(M(\tau), \mathbb{C}^*) = T_{N(\sigma)}$$

Die Tori  $\text{orb}(\sigma, N)$  sind unter der Operation von  $T_N$  invariant und bilden sogar einen Orbit in  $T_\sigma$ . Aber mehr noch: die Toruseinbettung  $T_{\Sigma_N}$  besitzt eine Stratifikation in  $T_N$ -Bahnen  $T_{\Sigma_N} = \coprod_{\sigma \in \Sigma} \text{orb}(\sigma, N)$  mit den Eigenschaften

$$T_\sigma = \coprod_{\tau \prec \sigma} \text{orb}(\tau) \text{ und } \tau \prec \sigma \Leftrightarrow \text{orb } \sigma \subseteq \overline{\text{orb}(\tau)}.$$

Der *Stern* eines Kegels  $\xi$  in einem Fächer  $\Sigma$  kann abstrakt als Menge der Kegel in  $\Sigma$  definiert werden, die  $\xi$  als Seite haben. Diese Kegel  $\sigma$  sind durch ihre Bilder in  $N(\xi)$  bestimmt, das heißt durch

$$\bar{\sigma} = (\sigma + (N_\xi)_\mathbb{R}) / (N_\xi)_\mathbb{R} \subset N_\mathbb{R} / (N_\xi)_\mathbb{R} = N(\xi)_\mathbb{R}.$$

Die Kegel  $\{\bar{\sigma} \mid \xi \prec \sigma, \sigma \in \Sigma\}$  bilden einen Fächer in  $N(\xi)_\mathbb{R}$ , der als Stern( $\xi$ ) bezeichnet wird.

Im weiteren Verlauf wählen wir die Identifikation  $M_\mathbb{R} \simeq N_\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ , bei denen jedes Element aus  $M_\mathbb{R}$  als Zeilen- und jedes Element aus  $N_\mathbb{R}$  als Spaltenvektor geschrieben wird, so daß die Paarung  $\langle, \rangle$  das übliche Skalarprodukt ist. Es sei  $G$  eine Gruppe, die von links auf dem Torus  $T_N$  algebraisch operiert, das heißt, ein Element  $g \in G$  operiert durch

$$g : T_N \rightarrow T_N, \quad (t_1, \dots, t_r) \mapsto (t_1^{a_{11}} \dots t_r^{a_{1r}}, \dots, t_1^{a_{r1}} \dots t_r^{a_{rr}})$$

mit ganzzahligen Exponenten  $a_{ij}$ . Die Operation auf dem Torus  $T_N$  induziert Operationen auf  $N$  und  $M$ . Schreiben wir  $A(g) = (a_{ij})$ , so sind diese durch

$$\begin{aligned} g : N &\rightarrow N, & n &\mapsto A(g) \cdot n \\ g : M &\rightarrow M, & m &\mapsto {}^t A(g)^{-1} \cdot m \end{aligned}$$

gegeben, die sich linear auf  $N_\mathbb{R}$  bzw.  $M_\mathbb{R}$  erweitern lassen. Die Operation  $G \times T_N \rightarrow T_N$  läßt sich dann zu einer Operation  $G \times T_\Sigma^N \rightarrow T_\Sigma^N$  erweitern, wenn wir an den Fächer  $\Sigma$  die zusätzliche Forderung  $g(N) = N$  stellen (siehe [HKW1, Proposition I.2.8]).

### 3.1.1 Bestimmte äquivariante holomorphe Abbildungen

Eine *Fächerabbildung*  $\varphi : \Sigma'_{N'} \rightarrow \Sigma_N$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -linearer Homomorphismus  $\varphi : N' \rightarrow N$ , dessen skalare Erweiterung  $\varphi : N'_{\mathbb{R}} \rightarrow N_{\mathbb{R}}$  die folgende Eigenschaft hat: Für jedes  $\sigma' \in \Sigma'_{N'}$  gibt es ein  $\sigma \in \Sigma_N$ , so daß  $\varphi(\sigma') \subset \sigma$ . Jede Fächerabbildung  $\varphi : \Sigma'_{N'} \rightarrow \Sigma_N$  liefert eine holomorphe Abbildung

$$\varphi_* : T_{\Sigma'_{N'}} \rightarrow T_{\Sigma_N},$$

deren Einschränkung auf dem Torus  $T_{N'}$  mit dem Homomorphismus

$$\varphi \otimes \text{id}_{\mathbb{C}^*} : T_{N'} = N' \otimes \mathbb{C}^* \rightarrow T_N = N \otimes \mathbb{C}^*$$

übereinstimmt. Durch diesen Homomorphismus ist  $\varphi_*$  äquivariant bezüglich der Operationen von  $T_{N'}$  und  $T_N$  auf den torischen Varietäten  $T_{\Sigma'_{N'}}$  und  $T_{\Sigma_N}$ . Im Spezialfall, daß  $N' \subset N$  ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul von endlichem Index ist, kann jeder Fächer in  $N$  auch als Fächer in  $N'$  aufgefaßt werden (da  $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ ). Die Fächerabbildung  $\text{id} : \Sigma_{N'} \rightarrow \Sigma_N$  liefert dann die äquivariante holomorphe Abbildung

$$\text{id}_* : T_{\Sigma'_{N'}} \rightarrow T_{\Sigma_N},$$

die mit der Quotientenabbildung von  $T_{\Sigma'_{N'}}$  bezüglich der natürlichen Operation der endlichen Gruppe  $\ker[T_{N'} \rightarrow T_N] = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M'/M, \mathbb{C}^*) \simeq N/N'$  übereinstimmt.

Ist nun  $G$  eine Gruppe von linearen Abbildungen in  $N_{\mathbb{R}}$  wie oben, die zusätzlich  $g(N') = N'$  erfüllt, so ist als unmittelbare Folgerung die Abbildung  $\text{id}_*$  äquivariant bezüglich der Operationen  $G \times T_{\Sigma'_{N'}} \rightarrow T_{\Sigma'_{N'}}$  und  $G \times T_{\Sigma_N} \rightarrow T_{\Sigma_N}$ . Für die Beweise der Aussagen dieses Abschnitts sei auf [Br, Seite 110-111] hingewiesen.

## 3.2 Toroidale Kompaktifizierung von $\mathcal{A}_{1,p}^{\circ}(2)$ und $\mathcal{A}_{1,p}(2)$

Vermöge der *Cayley-Transformation*

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow \text{Sym}(2, \mathbb{C}) \\ \tau & \mapsto (\tau - \mathbf{1}_2)(\tau + i\mathbf{1}_2)^{-1} \end{cases}$$

wird  $\mathbb{H}_2$  isomorph auf den beschränkten Bereich

$$\mathfrak{D}_2 = \{ Z \in \text{Sym}(2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{1}_2 - Z\bar{Z} > 0 \}$$

abgebildet. Die Operation von  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}_2$  induziert eine Operation auf  $\mathfrak{D}_2$ , die sich auf den topologischen Abschluß

$$\overline{\mathfrak{D}}_2 = \{ Z \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{1}_2 - Z\bar{Z} \geq 1 \}$$

fortsetzen läßt. Dabei ist die Operation von  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & -i\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & i\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & -i\mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & i\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

gegeben (siehe dazu [HKW1, Proposition I.3.3]).

Auf  $\overline{\mathfrak{D}}_2$  wird dann folgende Stratifikation eingeführt:

**Definition 3.1** Eine *Randkomponente*  $F$  von  $\mathfrak{D}_2$  ist eine Äquivalenzklasse von Punkten auf  $\overline{\mathfrak{D}}_2$ , die wie folgt definiert sei:

Zwei Punkte  $p, q \in \overline{\mathfrak{D}}_2$  seien äquivalent, falls sie durch endlich viele holomorphe Kurven in  $\overline{\mathfrak{D}}_2$  verbunden werden können, das heißt es gibt endlich viele holomorphe Abbildungen  $\varphi_i : \mathfrak{D}_1 \rightarrow \overline{\mathfrak{D}}_2$ ,  $i = 1, \dots, n$  mit  $p \in \varphi_1(\mathfrak{D}_1)$ ,  $q \in \varphi_n(\mathfrak{D}_1)$ ,  $\varphi_i(\mathfrak{D}_1) \cap \varphi_{i+1}(\mathfrak{D}_1) \neq \emptyset$  für  $i = 1, \dots, n-1$  (wobei mit  $\mathfrak{D}_1$  die offenen Einheitskreisscheibe bezeichnet sei).

Die so definierten Randkomponenten sind zusammenhängend und mit  $F$  ist auch  $g(F)$ ,  $g \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  eine Randkomponente, so daß  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  nicht nur auf  $\overline{\mathfrak{D}}_2$  operiert, sondern auch die Randkomponenten permutiert.

**Definition 3.2** i) Mit  $\mathcal{P}(F)$  wird die Stabilisatorgruppe der Randkomponente  $F$  bezeichnet, also

$$\mathcal{P}(F) = \{ g \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}) \mid g(F) = F \}$$

ii) Eine Randkomponente  $F$  heißt *rational* (kurz: rat. RK), falls  $\mathcal{P}(F)$  über  $\mathbb{Q}$  definiert ist.

iii) Eine Randkomponente  $F$  *grenzt* an die Randkomponente  $F'$ , falls  $F \neq F'$  und  $F \subset F'$  gilt (Schreibweise:  $F \prec F'$ ).

Nach [AMRT, III.3] definiert  $F \mapsto \mathcal{P}(F)$  eine bijektive Korrespondenz zwischen (rationalen) Randkomponenten von  $\mathfrak{D}_2$  und maximalen (rationalen) parabolischen Untergruppen von  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ . Diese wiederum stehen in bijektiver Korrespondenz mit Fahnen von  $J$ -isotropen Unterräumen des  $\mathbb{R}^4$  (bzw.  $\mathbb{Q}^4$ ), die dadurch zustande kommt, daß einer Fahne die jeweilige

Stabilisatorgruppe zugeordnet wird. Insbesondere entsprechen dann maximale parabolische Untergruppen von  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  nichttrivialen isotropen Unterräumen und eine (rationale) Randkomponente  $F$  grenzt an die (rationale) Randkomponente  $F'$ , falls für die korrespondierenden (rationalen) isotropen Unterräume  $U_{F'} \subset U_F$  gilt. Durch diese Korrespondenz läßt sich die Operation von  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  auf der Menge der Randkomponenten von  $\mathfrak{D}_2$  durch die Operation  $U \mapsto U \cdot g^{-1}$  von  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  auf der Menge der isotropen Unterräume von  $\mathbb{R}^4$  ausdrücken.

Betrachte nun die folgenden Randkomponenten:

$$F^{(0)} := \{\mathbf{1}_2\}, \quad F^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid |z| < 1 \right\}, \quad F^{(2)} = \mathfrak{D}_2$$

Diese korrespondieren zu den  $J$ -isotropen Unterräumen

$$U^{(0)} := \mathbb{R}(0, 0, 1, 0) + \mathbb{R}(0, 0, 0, 1), \quad U^{(1)} := \mathbb{R}(0, 0, 0, 1), \quad U^{(2)} := \{0\}$$

(siehe dazu [HKW1, Lemma I.3.10]). Für jede rationale Randkomponente  $F$  läßt sich ein  $g$  in  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  mit der Eigenschaft  $F = g(F^{(i)})$  finden.  $F$  heißt dann Korang- $(2-i)$ -Randkomponente von  $\mathfrak{D}_2$ . Für  $\mathcal{P}(F)$  werden wir im weiteren Verlauf  $\mathcal{P}(U_F)$  schreiben, wenn  $U_F$  der zugehörige  $J$ -isotrope Unterraum von  $F$  ist. In dieser Schreibweise ist dann

$$\mathcal{P}(g(F)) = \mathcal{P}(g(U_F)) = \mathcal{P}(U_F \cdot g^{-1}).$$

**Definition 3.3** Mit  $\mathcal{P}'(U_F)$  bezeichnen wir das Zentrum des unipotenten Radikals  $R_u(\mathcal{P}(U_F))$  von  $\mathcal{P}(U_F)$ . Weiterhin sei  $\mathcal{P}''(U_F) := \mathcal{P}(U_F)/\mathcal{P}'(U_F)$  und für eine arithmetische Untergruppe  $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} P(U_F, \Gamma) &= \mathcal{P}(U_F) \cap \Gamma, \\ P'(U_F, \Gamma) &= \mathcal{P}'(U_F) \cap \Gamma, \\ P''(U_F, \Gamma) &= P(U_F, \Gamma)/P'(U_F, \Gamma). \end{aligned}$$

Die Gruppe  $P(U_F, \Gamma)$  operiert natürlich durch Konjugation auf  $P'(U_F, \Gamma)$  und das epimorphe Bild von  $P(U_F, \Gamma)$  in  $\mathrm{Aut}(P'(U_F, \Gamma))$  für die adjungierte Operation auf  $P'(U_F, \Gamma)$  wird mit  $\bar{P}(U_F, \Gamma)$  bezeichnet. Mit

$$e(U_F, \Gamma) : \mathfrak{D}_2 \rightarrow \mathfrak{D}_2/P'(U_F, \Gamma) =: X(F, \Gamma)$$

wird die zum isotropen Unterraum  $U_F$  korrespondierende partielle Quotientenabbildung bezeichnet.

Es sei  $V(U_F)$  der komplexe Vektorraum  $R_u(\mathcal{P}(U_F))/\mathcal{P}'(U_F)$ . Nach [AMRT, III.4] läßt sich für jede rationale Randkomponente  $F$  von  $\mathfrak{D}_2$  ein triviales Torusbündel  $\mathcal{X}(F)$  mit Basisraum  $F \times V(U_F)$  und Faser  $T = (P'(U_F, \Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})/P'(U_F, \Gamma)$  finden, so daß  $X(F)$  isomorph zu einer offenen Teilmenge von  $\mathcal{X}(F)$  ist. Die Operation von  $P''(U_F, \Gamma)$  läßt sich dann auf  $\mathcal{X}(F)$  fortsetzen. Für eine rationale Randkomponente  $F = \tilde{g}F^{(i)}$ ,  $i = 0, 1, 2$  sei der offene, homogene Kegel  $C(U_F)$  in  $\mathcal{P}(F)$  wie folgt definiert:

$$C(U_F) := \left\{ g \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S_{(i)} \\ 0_2 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in \mathcal{P}(U_F)\tilde{g}, S_{(i)} = \begin{pmatrix} 0_i & \\ & \mathbf{1}_{2-i} \end{pmatrix} \right\},$$

**Satz 3.4** (i) Für Randkomponenten  $F = g(F')$  mit  $g$  aus einer arithmetischen Untergruppe  $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$  gelten die Transformationsregeln:

$$\mathcal{P}(F) = g\mathcal{P}(U_{F'})g^{-1}, \quad \mathcal{P}'(U_F) = g\mathcal{P}'(U_{F'})g^{-1}, \quad \mathcal{P}''(U_F) = g\mathcal{P}''(U_{F'})g^{-1}.$$

(ii) Ist  $F \prec F'$ , so ist  $\mathcal{P}'(U_{F'})$  ein Unterraum von  $\mathcal{P}'(U_F)$  und  $C(U_{F'}) = (\overline{C(U_F)} \cap \mathcal{P}'(U_{F'}))^\circ$ , wobei der Abschluß in  $\mathcal{P}'(U_F)$  und das Innere in  $\mathcal{P}'(U_{F'})$  gebildet wird.

*Beweis.* [AMRT, III.4.3]

□

**Definition 3.5** Mit

$$C(U_F)^{rc} := C(U_F) \cup \bigcup_{\substack{F' \text{ rat. Rk.} \\ F \prec F'}} C(U_{F'})$$

wird der *rationale Abschluß* von  $C(U_F)$  bezeichnet.

Ein Fächer  $\Sigma$  in  $\mathcal{P}'(U_F)$  heißt *zulässig* bezüglich  $\Gamma$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = C(U_F)^{rc}$ .
- (ii)  $\sigma \in \Sigma$ ,  $g \in \bar{P}(U_F, \Gamma) \Rightarrow g(\sigma) \in \Sigma$ .
- (iii)  $\Sigma/\bar{P}(U_F)$  ist eine endliche Menge.

Nach [HKW1, Proposition I.3.62] stellt die Zulässigkeit eines Fächer  $\Sigma$  sicher, daß sich die induzierte Operation von  $P''(U_F, \Gamma)$  auf  $X(F)$  eindeutig zu einer eigentlich diskontinuierlichen Operation von  $P''(U_F, \Gamma)$  auf  $X_\Sigma(F) := (\overline{X(F)})^\circ$  im assoziierten Faserbündel  $\mathcal{X}_\Sigma(F) := \mathcal{X}(F) \times_T T_\Sigma$  fortsetzen läßt. Der Quotientenraum

$$Y_\Sigma(F) := X_\Sigma(F)/P''(U_F, \Gamma)$$

ist eine analytische Varietät und enthält  $\mathfrak{D}_2/P(F)$  als offene, dichte Untervarietät und der Rand  $Y_\Sigma(F) \setminus \mathfrak{D}_2/P(F)$  ist eine rein 1-kodimensionale Untervarietät.

Die natürliche Quotientenabbildung

$$p(F) : \mathfrak{D}_2/P(U_F) \twoheadrightarrow \mathfrak{D}_2/\Gamma$$

ist, eingeschränkt auf eine geeignete  $P(U_F)$ -invariante innere Umgebung, ein Isomorphismus. Somit läßt sich  $Y_\Sigma(F)$  als *partielle Kompaktifizierung von  $\mathfrak{D}_2/\Gamma$  in Richtung  $F$*  verstehen.

**Definition 3.6** Eine Familie

$$\bar{\Sigma} = \{ \Sigma(F) \mid F \text{ ist rationale Randkomponente} \}$$

von Fächern  $\Sigma(F) \subset \mathcal{P}'(F)$  heißt *zulässig*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- 1)  $\Sigma(F)$  ist zulässig für jede rationale Randkomponente  $F$ .
- 2) Ist  $F = g(F')$  für ein  $g \in \Gamma$ , so folgt  $\Sigma(F) = g(\Sigma(F')) = \{g\sigma g^{-1} \mid \sigma \in \Sigma(F')\}$ .
- 3) Ist  $F' \prec F$ , so ist  $\Sigma(F') = \Sigma(F) \cap \mathcal{P}'(F')$ .

Die Theorie der toroidalen Kompaktifizierung wurde schon eingehend in [HKW1] behandelt. Um nun die durch eine zulässige Familie definierte toroidale Kompaktifizierung  $(\Gamma \backslash \mathfrak{D}_2)^*$  von  $\Gamma \backslash \mathfrak{D}_2$  zu definieren, werden wir auf einige Ergebnisse in [HKW1, I.3] hinweisen.

Seien  $F, F'$  zwei rationale Randkomponenten mit  $F = g(F')$ ,  $g \in \Gamma_{1,p}^\circ$ . Dann werden durch  $g$  natürliche Isomorphismen  $\tilde{g} : X_{\Sigma(F')}(F') \xrightarrow{\sim} X_{\Sigma(F)}(F)$  und  $\bar{g} : Y_{\Sigma(F')}(F') \xrightarrow{\sim} Y_{\Sigma(F)}(F)$  induziert, so daß die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma(F')}(F') & \xrightarrow{\tilde{g}} & X_{\Sigma(F)}(F) & & Y_{\Sigma(F')}(F') & \xrightarrow{\bar{g}} & Y_{\Sigma(F)}(F) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ P'(F') \backslash \mathfrak{D}_2 & \xrightarrow{g} & P'(F) \backslash \mathfrak{D}_2 & & P'(F') \backslash \mathfrak{D}_2 & \xrightarrow{g} & P'(F) \backslash \mathfrak{D}_2 \end{array}$$

kommutieren.

Ist  $F' \succ F$  ein Paar von angrenzenden rationalen Randkomponenten, so gibt es wegen  $P'(F') \subset P'(F)$  eine Quotientenabbildung

$$\pi_0(F', F) : X(F) \rightarrow X(F'),$$

die sich in natürlicher Weise zu einer glatten Abbildung

$$\pi(F', F) : X_{\Sigma(F')}(F') \rightarrow X_{\Sigma(F)}(F)$$

mit diskreten Fasern fortsetzen läßt.

Weiter läßt sich feststellen, daß die Abbildung  $\pi$  verträglich mit der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  ist in dem Sinne, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma(F')} (F') & \xrightarrow{\pi(F',F)} & X_{\Sigma(F)} (F) \\ \downarrow \tilde{g} & & \downarrow \tilde{g} \\ X_{g(\Sigma(F'))} (g(F')) & \xrightarrow{\pi(g(F'),g(F))} & X_{g(\Sigma(F))} (g(F)) \end{array}$$

kommutiert.

Für eine zulässige Familie  $\tilde{\Sigma}$  sei

$$X(\tilde{\Sigma}) = \coprod_{F \text{ rat. RK}} X_{\Sigma(F)} (F).$$

**Definition 3.7** Wir führen auf  $X(\tilde{\Sigma})$  folgende Äquivalenzrelation  $\sim$  ein:

Es seien  $x \in X_{\Sigma(F)} (F)$ ,  $x' \in X_{\Sigma(F')} (F')$ . Dann gelte

- (i)  $x \sim x'$ , falls es ein  $g \in \Gamma$  mit  $F = g(F')$  und  $x = \tilde{g}(x')$  gibt.
- (ii)  $x \sim x'$ , falls  $F' \succ F$  und  $\pi(F', F)(x') = x$  ist.

Damit können wir letztlich die *durch  $\tilde{\Sigma}$  bestimmte toroidale Kompaktifizierung*  $(\Gamma \backslash \mathcal{D}_2)^*$  von  $\Gamma \backslash \mathcal{D}_2$  durch den Quotientenraum  $X(\tilde{\Sigma}) / \sim$  (versehen mit der Quotiententopologie) definieren.

**Bemerkung 3.8** Die so definierte Kompaktifizierung ist nicht eindeutig, sondern hängt von der Wahl von  $\tilde{\Sigma}$  ab. Fordern wir, daß  $\tilde{\Sigma}$  die Eigenschaft projektiv hat (zur Definition siehe [Na, Definition 7.22]), so ist nach [AMRT, Theorem IV.2.1] sichergestellt, daß die durch  $\tilde{\Sigma}$  definierte toroidale Kompaktifizierung  $X(\tilde{\Sigma}) / \sim$  eine projektive Varietät ist.

### 3.3 Die Stabilisatoren $\mathcal{P}(U^{(i)})$ , $i = 0, 1, 2$

Wir haben im vorherigen Abschnitt gesehen, daß bei der partiellen toroidalen Kompaktifizierung in Richtung einer rationalen Randkomponente  $F$  die Stabilisatorgruppen  $\mathcal{P}(U_F)$ , gewisse Untergruppen und bestimmte epimorphe Bilder eine besondere Rolle spielen. Wir werden zunächst diese für die Standardrandkomponenten  $F^{(0)}, F^{(1)}, F^{(2)}$  in  $\overline{\mathcal{D}}_2$  angeben, die zu den Unterräumen  $U^{(0)}, U^{(1)}$  und  $U^{(2)}$  korrespondieren.

**Satz 3.9** Betrachte folgende Matrizen in  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ :

$$g_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2i, \mathbb{R})$$

$$g_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^tQ^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{pmatrix} \quad \text{mit } Q \in \mathrm{GL}(2-i, \mathbb{R}),$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & {}^tN \\ M & \mathbf{1} & N & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -{}^tM \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{mit } M, N \in \mathrm{Mat}((2-i) \times i, \mathbb{R}), \\ M{}^tN = {}^t(M{}^tN), \end{array}$$

$$g_4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & S \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } S \in \mathrm{Sym}(2-i, \mathbb{R})$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

(i)  $\mathcal{P}(U^{(i)}) = \{g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \mid g_j \text{ wie oben}\}$

$\mathcal{P}'(U^{(i)}) = \{g_4 \mid g_4 \text{ wie oben}\}$

(ii) Die Abbildung  $\pi : \mathcal{P}(U^{(i)}) \rightarrow \mathrm{GL}(2+i, \mathbb{R})$ , definiert auf den Erzeugern durch

$$\pi(g_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & A & B \\ 0 & C & D \end{pmatrix}, \quad \pi(g_2) = \begin{pmatrix} {}^tQ^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$\pi(g_3) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & M & N \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \pi(g_4) = \mathbf{1}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus mit  $\mathrm{Ker} \pi = \mathcal{P}'(U^{(i)})$ . Insbesondere ist das Bild von  $\pi$  isomorph zur Faktorgruppe  $\mathcal{P}''(U^{(i)})$ .

(iii) Wird  $\mathcal{P}'(U^{(i)})$  mit  $\mathrm{Sym}(2-i, \mathbb{R})$  identifiziert, so läßt sich die adjungierte Operation von  $\mathcal{P}(U^{(i)})$  auf  $\mathcal{P}'(U^{(i)})$  wie folgt beschreiben:

Die Erzeuger  $g_1, g_3, g_4$  operieren trivial und das Element  $g_2$  operiert durch

$$g_2(S) = {}^tQ^{-1}SQ^{-1}, \quad S \in \mathrm{Sym}(2-i, \mathbb{R})$$



(iv) Unter den Identifikationen in iii) beschreibt sich der offene Kegel  $C(U^{(i)})$  als Menge der positiv definiten Matrizen  $\text{Sym}_+(2-i, \mathbb{R})$ .

*Beweis.* [HKW1, Proposition I.3.87–I.3.90]

□

**Korollar 3.10** Für die rationalen Geraden  $l_0 := \mathbb{Q}(0, 0, 1, 0)$  und  $l_{(0,1)} := \mathbb{Q}(0, 0, 0, 1)$  gilt:

$$(i) \quad P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} \varepsilon & m & s & n \\ 0 & a & * & b \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & c & * & d \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1}\Gamma_1(2)E \\ m, s \in 2\mathbb{Z}, n \in 2p\mathbb{Z} \\ \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right. \right\}$$

$$P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \left| B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, s \in 2\mathbb{Z} \right. \right\}$$

$$(ii) \quad P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} a & 0 & b & * \\ m & 1 & n & s \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1(2) \\ m, n, s \in 2p\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

$$P'(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cc} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \left| B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}, s \in 2p\mathbb{Z} \right. \right\}$$

$$(iii) \quad P(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) = \left\{ g = \left( \begin{array}{cccc} \varepsilon & m & s & n \\ 0 & a & * & b \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & c & * & d \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} g \in P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1}\Gamma_1(2p)E \end{array} \right. \right\}$$

$$P'(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) = P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$$

$$(iv) \quad P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) = \left\{ g = \left( \begin{array}{cccc} a & 0 & b & * \\ m & 1 & n & s \\ c & 0 & d & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} g \in P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \\ s \in 2p^2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

$$P'(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) = \left\{ g = \left( \begin{array}{cc} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \left| \begin{array}{l} g \in P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \\ s \in 2p^2\mathbb{Z} \end{array} \right. \right\}$$

wobei die Einträge  $,, * \text{“}$  gerade ganze Zahlen sind, die sich aus der symplektischen Bedingung ergeben.

*Beweis.* Die Stabilisatorgruppe  $\mathcal{P}(l_{(0,1)})$  und  $\mathcal{P}'(l_{(0,1)})$  wurden schon in 3.9 angegeben. Durch Konjugation mit

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(J, \mathbb{Z})$$

erhalten wir dann  $\mathcal{P}(l_0)$  und  $\mathcal{P}'(l_0)$ , also  $\mathcal{P}(l_0) = T\mathcal{P}(l_{(0,1)})T^{-1}$  und  $\mathcal{P}'(l_0) = T\mathcal{P}'(l_{(0,1)})T^{-1}$ . Die angegebenen Gruppen ergeben sich dann als Schnitt dieser Gruppen mit der arithmetischen Gruppe  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  bzw.  $\Gamma_{1,p}(2)$ , so daß die Aussage direkt aus der Beschreibung von  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  und  $\Gamma_{1,p}(2)$  in Proposition 2.1 folgt. □

### 3.3.1 Korang-1-Randkomponenten

Zunächst werden wir zulässige Fächer für die Geraden  $l_0, l_{(0,1)}$  bestimmen. Im Gegensatz zum Fall der zweidimensionalen isotropen Unterräume stellt sich heraus, daß diese Fächer und damit die partiellen Kompaktifizierungen eindeutig bestimmt sind.

**Proposition 3.11** *Für die Geraden  $l = l_0, l_{(0,1)}$  sind die partiellen Quotientenabbildungen wie folgt:*

$$\begin{aligned} e(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) &: \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow X(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \subseteq \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (\tau_1, \tau_2, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_3}) \end{cases} \\ e(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) &: \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow X(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1 \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_1}, \tau_2, \tau_3) \end{cases} \\ e(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) &: \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow X(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) \subseteq \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (\tau_1, \tau_2, e^{\frac{2\pi i}{2p^2} \cdot \tau_3}) \end{cases} \\ e(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) &: \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow X(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1 \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_1}, \tau_2, \tau_3) \end{cases} \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Quotientenabbildungen ergeben sich sofort aus den Berechnungen von  $P'(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  und  $P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  bzw.  $P'(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2))$  und

$P'(l_0, \Gamma_{1,p}(2))$ , die als Gitter vom Rang 1 durch Translation auf  $\mathbb{H}_2$  operieren.

□

Um nun zu einer zu den beiden Geraden  $l = l_0, l_{(0,1)}$  zugehörigen partiellen Kompaktifizierung zu gelangen, müssen wir einen zulässigen Fächer in  $\mathcal{P}'(l, \Gamma)$ ,  $\Gamma = \Gamma_{1,p}^\circ(2), \Gamma_{1,p}(2)$  finden. Hier aber ist der Fächer  $\Sigma(l) = \{\{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}\}$  der einzig zulässige:

In beiden Fällen ist  $\mathcal{X}(l) \simeq \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$  ein triviales Torusbündel mit Faser  $\mathbb{C}^*$  und Basis  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{C}$ . Es ist  $\mathcal{P}'(l, \Gamma) \simeq \mathbb{R}$ ,  $C(l) \simeq \mathbb{R}_{>0}$  und die Operation von  $P(l, \Gamma)$  auf  $C(l)$  ist trivial (als Folgerung aus Satz 3.9). Der Fächer  $\Sigma(l)$  ergibt sich in beiden Fällen als der einzige zulässige Fächer mit Träger  $C(l)^{rc} \simeq \mathbb{R}_{\geq 0}$ , der die affine Toruseinbettung  $\mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$  repräsentiert, so daß  $\mathcal{X}(l)$  in das assoziierte Bündel  $\mathcal{X}_{\Sigma(l)} \simeq \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  mit Faser  $\mathbb{C}$  eingebettet ist. Damit besteht also die mengentheoretische Identifikation

$$X_{\Sigma(l)}(l) \simeq X(l) \cup \{\mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \{0\}\}.$$

Um die Korang-1-Randkomponenten in unserem Fall zu beschreiben, werden wir zunächst die folgende Terminologie einführen. Es sei  $H$  eine arithmetische Untergruppe von  $SL(2, \mathbb{Q})$  und  $L \subset \mathbb{Q}^2$  ein  $H$ -invariantes Gitter, wobei  $H$  durch Matrixmultiplikation von rechts auf  $\mathbb{Q}^2$  operiere. Mit  $H_L$  bezeichnen wir die Matrixgruppe

$$H_L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H, (m, n) \in L \right\},$$

die auf  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  durch

$$\begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z + m\tau + n)/(c\tau + d) \\ (a\tau + b)/(c\tau + d) \end{pmatrix}$$

operiert. Der Quotient  $H_L \backslash \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1 =: D^\circ(H_L)$  heißt *offene Modulfläche*. Im Fall  $-1_2 \notin H$  sind die Fasern der Projektion  $D^\circ(H_L) \rightarrow X^\circ(H) := H \backslash \mathbb{H}_1$  elliptische Kurven und  $D^\circ(H_L)$  heißt *elliptische Modulfläche*; im Fall  $-1_2 \in H$  sind die Fasern dieser Projektion Kummerkurven, das heißt rationale Kurven, die sich als Quotient von elliptischen Kurven nach der Involution  $x \mapsto -x$  (bezüglich der Gruppenstruktur auf der elliptischen Kurve) ergeben.  $D^\circ(H_L)$  heißt dann *Kummersche Modulfläche*.

**Notation** Ist  $H = \Gamma_1(k)$ ,  $k \geq 1$  und  $L = k\mathbb{Z} \times k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^2$ , so bezeichnen

wir  $D^\circ(H_L)$  mit  $S^\circ(k)$ . Die Fläche  $S^\circ(k)$  heißt dann (*offene*) *Shiodasche Modulfläche zur Stufe  $k$* . In den Fällen  $k = 1, 2$  ist  $-1_2 \in H$  und die Fläche wird mit  $K^\circ(k)$  bezeichnet. Ist  $H = \pm\Gamma_1(k)$ ,  $k \geq 2$  und  $L = k\mathbb{Z} \times k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^2$ , so bezeichnen wir  $D^\circ(H_L)$  mit  $K^\circ(k)$ . Diese Fläche heißt dann (*offene*) *Kummersche Modulfläche zur Stufe  $k$* .

**Proposition 3.12** (i) *Der Rand  $D^\circ(l, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) := (Y_{\Sigma(l)} \setminus \mathbb{H}_2) / P(l, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$ ,  $l = l_0, l_{(0,1)}$  ist analytisch isomorph zur offenen Kummerschen Modulfläche  $K^\circ(2)$  zur Stufe 2.*

(ii) *Der Rand  $D^\circ(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) := (Y_{\Sigma(l_{(0,1)})} \setminus \mathbb{H}_2) / P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2))$  ist analytisch isomorph zur offenen Kummerschen Modulfläche  $K^\circ(2)$  zur Stufe 2.*

(iii) *Der Rand  $D^\circ(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) := (Y_{\Sigma(l_0)} \setminus \mathbb{H}_2) / P(l_0, \Gamma_{1,p}(2))$  ist analytisch isomorph zur offenen Kummerschen Modulfläche  $K^\circ(2p)$  zur Stufe  $2p$ .*

*Beweis.* Die Gruppe  $P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  beschreibt sich nach Satz 3.9 und Korollar 3.10 als

$$P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \simeq \left\{ \left( \begin{array}{ccc} \varepsilon & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1}\Gamma_1(2)E \\ m \in 2\mathbb{Z}, n \in 2p\mathbb{Z}, \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

und die induzierte Operation auf dem Basisraum  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  ist für die Erzeuger von  $P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  durch

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & : (\tau_2, \tau_3) \mapsto (\varepsilon\tau_2, \tau_3) \\ (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & : (\tau_2, \tau_3) \mapsto (\tau_2 + m\tau_3 + n, \tau_3) \\ (3) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} & : (\tau_2, \tau_3) \mapsto (\tau_2(c\tau_3 + d)^{-1}, (a\tau_3 + b)(c\tau_3 + d)^{-1}) \end{aligned}$$

gegeben. Da  $-1_3$  trivial operiert, ist die Operation von (1) im Fall (3) enthalten und wir erhalten

$$P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1 \simeq D^\circ(H_L)$$

mit  $H = E^{-1}\Gamma_1(2)E$  und  $L = 2\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$ . Es ist  $-1_2 \in H$  und  $D^\circ(H_L)$  eine Kummersche Modulfläche über  $Y^\circ(2) = H \setminus \mathbb{H}_1$  und Anwendung von

[HKW1, Proposition I.2.35] (mit  $g = E$  und  $k = 1$ ) liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D^\circ(H_L) & \xrightarrow{\simeq} & K^\circ(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y^\circ(2) & \xrightarrow{\simeq} & X^\circ(2) \end{array}$$

Die anderen Fälle behandelt man analog, wobei sich  $H$  und  $L$  wie folgt ergeben:

l	$\Gamma$	$H$	$L$	$D^\circ(H_L)$
$l_0$	$\Gamma_{1,p}^\circ(2)$	$E^{-1}\Gamma_1(2)E$	$2\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$	$K^\circ(2)$
$l_{(0,1)}$	$\Gamma_{1,p}^\circ(2)$	$\Gamma_1(2)$	$2p\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$	$K^\circ(2)$
$l_0$	$\Gamma_{1,p}(2)$	$\pm E^{-1}\Gamma_1(2p)E$	$2\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$	$K^\circ(2p)$
$l_{(0,1)}$	$\Gamma_{1,p}(2)$	$\Gamma_1(2)$	$2p\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$	$K^\circ(2)$

□

**Bemerkung 3.13** Nach Korollar 3.10 ist

$$P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))/P(l_0, \Gamma_{1,p}(2)) \simeq \Gamma_1(2)/\pm\Gamma_1(2p) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$$

und

$$P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))/P(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}(2)) \simeq 2p\mathbb{Z}/2p^2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_p$$

### 3.3.2 Korang-2-Randkomponenten und der Legendre-Fächer

Für die ausgezeichnete isotrope Ebene  $h = U^{(0)}$  ist nach Satz 3.9  $\mathcal{P}''(h) \simeq \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ ,  $C(h) \simeq \mathrm{Sym}_+(2, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{P}'(h)$  und die adjungierte Operation von  $\mathcal{P}''(h)$  auf  $\mathcal{P}'(h)$  wird durch

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) \\ (Q, S) &\mapsto {}^t Q^{-1} S Q^{-1} \end{aligned} \quad (\dagger)$$

gegeben.

Wir definieren folgende Liste von Kegeln in  $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ :

$$\xi_1 := \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 := \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 := \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für  $i \neq j$  aus  $\{1, 2, 3\}$  sei  $\xi_{ij} := \xi_i + \xi_j$  und  $\sigma_0 := \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$  und für  $r \in \mathbb{Z}$  definieren wir den Kegel  $\sigma_r$  durch  $\sigma_r := g^r(\sigma_0)$  mit  $g := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\tilde{\sigma} = \tilde{g}(\sigma_0)$  mit  $\tilde{g} := \begin{pmatrix} 2-p & 1-p \\ p-1 & p \end{pmatrix}$ .

**Definition 3.14** Die Menge der Kegel in  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$

$$\Sigma_L := \{\tau \mid \tau = g(\sigma_0) \text{ oder } \tau \prec g(\sigma_0) \text{ für ein } g \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})\}$$

heißt *Legendre-Fächer*.

Die Bedeutung dieser Menge wird unmittelbar aus dem folgenden Hilfssatz klar.

**Hilfssatz 3.15**  $\Sigma_L$  ist ein zulässiger Fächer in  $\mathcal{P}(h)$ .

*Beweis.* [HKW1, Proposition I.3.118]

□

**Definition 3.16** Es sei  $\tilde{\Sigma}_L$  die durch den Legendre-Fächer abgeleitete Familie von Fächern, die wie folgt definiert ist:

Für jeden 2-dimensionalen rationalen Unterraum  $U$  von  $\mathbb{Q}^4$  sei  $\Sigma(U) = \gamma(\Sigma_L)$ , wobei  $\gamma$  aus  $\Gamma_{1,p}^\circ$  so bestimmt ist, daß  $\gamma(U^0) = U$  gilt. Ist  $U$  ein rationaler Unterraum von  $\mathbb{Q}^4$  der Dimension  $\leq 1$ , so sei  $\Sigma(U) = \Sigma(U_1) \cap \mathcal{P}'(U)$ , wobei  $U_1$  eine rationale isotrope Ebene ist, die  $U$  enthält.

**Bemerkung 3.17** Nach [HKW1, Remark I.3.141, Proposition I.3.142] ist diese Konstruktion wohldefiniert und  $\tilde{\Sigma}_L$  ist eine zulässige Familie von Fächern im Sinn von Definition 3.6, so daß folgende Definition Sinn macht.

**Definition 3.18** Die toroidale Kompaktifizierung

$$(\Gamma_{1,p}^\circ(2) \backslash \mathbb{H}_2)^* \text{ und } (\Gamma_{1,p}(2) \backslash \mathbb{H}_2)^*$$

des Modulraums  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  (bzw.  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$ ), die durch die Familie  $\tilde{\Sigma}(L)$  bestimmt ist, heißt *Igusa Kompaktifizierung von  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$*  (bzw.  $\mathcal{A}_{1,p}(2)$ ) und wird mit  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  (bzw.  $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ ) bezeichnet.

**Bemerkung 3.19** Namikawa zeigt in [Na, §7B, §8], daß die Familie  $\tilde{\Sigma}(L)$  projektiv ist, so daß die kompaktifizierten Modulräume  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  und  $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$  projektive Varietäten sind.

**Hilfssatz 3.20** (i) Der Stabilisator  $\text{Stab}(\sigma_0)$  von  $\sigma_0$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  wird von  $M_0 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $N_0 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  und  $-\mathbf{1}_2$  erzeugt.

(ii) Der Stabilisator von  $\xi_{13}$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  wird von  $N_0$ ,  $V_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  und  $-\mathbf{1}_2$  erzeugt.

(iii) Der Stabilisator von  $\xi_3$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  wird von  $V_0$ ,  $R_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $-\mathbf{1}_2$  erzeugt.

(iv) Das Element  $-\mathbf{1}_2$  operiert trivial. Es ist  $\text{Stab}(\sigma_0)/\{\pm\mathbf{1}_2\}$  isomorph zur symmetrischen Gruppe  $S_3$  sowie  $\text{Stab}(\xi_{13})/\{\pm\mathbf{1}_2\}$  isomorph zur Kleinschen Vierergruppe und  $\text{Stab}(\xi_3)/\{\pm\mathbf{1}_2\}$  isomorph zur unendlichen Dihedralgruppe.

*Beweis.* Dies ist eine direkte Folgerung aus [Br, Hilfssatz 2.2.4]. Hier ist allerdings zu beachten, daß in [Br] die Gruppe  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  durch  $(Q, S) \mapsto QS^tQ$  auf  $\text{Sym}(2, \mathbb{Z})$  operiert. Durch  $Q \mapsto {}^tQ^{-1}$  und  $S \mapsto S$  ist aber ein äquivarianter Isomorphismus dieser Operation mit der Operation  $(\dagger)$  gegeben.

□

Es sei  $\tilde{G}^\circ := \langle \Gamma_0(p), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$  und  $\tilde{F}^\circ := \ker[\tilde{G}^\circ \xrightarrow{(\text{mod } 2)} \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)]$ . Diese Gruppen werden in den kommenden Abschnitten eine wesentliche Rolle spielen. Wir werden hier auf einige Eigenschaften dieser Gruppen aufmerksam machen, die für uns nützlich sein werden.

Für  $\mathcal{G} = \tilde{G}^\circ, \tilde{F}^\circ$  sei  $\mathcal{R}_{\mathcal{G}}$  die Menge der Rechtsnebenklassen von  $\mathcal{G}$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  und für  $g \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$  bezeichne  $[g]_{\mathcal{G}}$  die Rechtsnebenklasse  $\mathcal{G} \cdot g$  von  $g$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ .

**Hilfssatz 3.21** Es gilt  $[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}]_{\tilde{G}^\circ} = [\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}]_{\tilde{G}^\circ}$  falls entweder  $d \equiv d' \equiv 0 \pmod{p}$  oder  $d, d' \not\equiv 0 \pmod{p}$  und  $cd^{-1} \equiv c'd'^{-1} \pmod{p}$  gilt.

*Beweis.* Es sei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ . Da  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \tilde{G}^\circ$ , können wir ohne Einschränkung  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$  annehmen.

1.  $d \not\equiv 0 \pmod{p}$

Es sei  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  mit  $r \equiv cd^{-1} \pmod{p}$ . Dann ist  $\begin{pmatrix} d & -b \\ rd-c & a-rb \end{pmatrix} \in \tilde{G}^\circ$  und  $\begin{pmatrix} d & -b \\ rd-c & a-rb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$ .

2.  $d \equiv 0 \pmod{p}$

Dann ist  $\begin{pmatrix} -c & a \\ d & -b \end{pmatrix} \in \tilde{G}^\circ$  und  $\begin{pmatrix} -c & a \\ d & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

□

**Hilfssatz 3.22** *Es gilt*

$$\mathcal{R}_{\tilde{F}^\circ} \xleftarrow{1:1} \mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2).$$

*Beweis.* Die Abbildung

$$\nu : \begin{cases} \mathcal{R}_{\tilde{F}^\circ} & \rightarrow \mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \\ [g]_{\tilde{F}^\circ} & \mapsto ([g]_{\tilde{G}^\circ}, \bar{g}) \end{cases}$$

ist wohldefiniert und bijektiv. Die Gruppe  $\tilde{F}^\circ$  ist der Kern des Reduktionshomomorphismus  $\phi : \tilde{G}^\circ \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ ,  $\phi(g) = \bar{g}$ . Damit ist die Wohldefiniertheit klar, da  $\tilde{F}^\circ \triangleleft \tilde{G}^\circ$  und  $\bar{f} = \mathrm{id}$  für alle  $f \in \tilde{F}^\circ$ .

Die Abbildung  $\phi$  läßt sich zu einem Homomorphismus  $\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  erweitern, so daß wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) & & & \\ & & & \downarrow & \searrow \varphi & & \\ 1 & \longrightarrow & \tilde{F}^\circ & \longrightarrow & \tilde{G}^\circ & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \longrightarrow 1 \end{array}$$

haben. Zur Surjektivität sei  $\tilde{h} \in [h]_{\tilde{G}^\circ}$  und  $f \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Da  $\phi$  nach Hilfssatz 2.3 (iii) surjektiv ist, gibt es ein  $g \in \tilde{G}^\circ$  mit  $\phi(g) = \varphi(h)^{-1} \cdot f$  und  $[g \cdot \tilde{h}]_{\tilde{F}^\circ}$  liegt im Urbild von  $([h]_{\tilde{G}^\circ}, f)$ .

Die Injektivität ist auch klar:

Es seien  $h, \tilde{h} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  mit  $[h]_{\tilde{G}^\circ} = [\tilde{h}]_{\tilde{G}^\circ}$  und  $\varphi(h) = \varphi(\tilde{h})$ . Dann ist  $h = g \cdot \tilde{h}$  für ein  $g \in \tilde{G}^\circ$  und  $\varphi(g) = \varphi(h) \cdot \varphi(\tilde{h})^{-1} = \mathrm{id}$ , woraus  $g \in \tilde{F}^\circ$  folgt, also  $[h]_{\tilde{F}^\circ} = [\tilde{h}]_{\tilde{F}^\circ}$ . □

Wir betrachten folgende Operation des Stabilisators in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  eines Kegels  $\sigma$  auf den Rechtsnebenklassen von  $\tilde{F}^\circ$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ :

$$\phi_\sigma : \begin{cases} \mathrm{Stab}(\sigma) \times \mathcal{R}_{\tilde{F}^\circ} & \rightarrow \mathcal{R}_{\tilde{F}^\circ} \\ (s, [f]_{\tilde{F}^\circ}) & \mapsto [f \cdot s^{-1}]_{\tilde{F}^\circ} \end{cases}$$

und zusätzlich

$$\hat{\phi}_\sigma : \begin{cases} \mathrm{Stab}(\sigma) \times (\mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)) & \rightarrow \mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \\ (s, ([g]_{\tilde{G}^\circ}, f)) & \mapsto ([g \cdot s^{-1}]_{\tilde{G}^\circ}, f \cdot (\bar{s})^{-1}) \end{cases} \quad (\dagger\dagger)$$

von  $\mathrm{Stab}(\sigma)$  auf  $\mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Dann ist leicht zu sehen, daß

$$\psi(s, [f]_{\tilde{F}^\circ}) := (s, \nu([f]_{\tilde{F}^\circ})) = (s, ([f]_{\tilde{G}^\circ}, \bar{f}))$$

ein äquivarianter Isomorphismus von  $\phi_\sigma$  nach  $\hat{\phi}_\sigma$  ist.



**Satz 3.23** (i) Zwei 3-dimensionale Kegel  $g(\sigma_0)$  und  $g'(\sigma_0)$  sind genau dann  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent, falls  $[g]_{\tilde{F}^\circ}$  und  $[g']_{\tilde{F}^\circ}$  in derselben Bahn unter der Operation  $\phi_{\sigma_0}$  liegen. Die Menge der Rechtsnebenklassen von  $\tilde{F}^\circ$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  zerfällt unter dieser Operation in genau  $p + 1$  Bahnen der Länge 6.

(ii) Zwei 2-dimensionale Kegel  $g(\xi_{13})$  und  $g'(\xi_{13})$  sind genau dann  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent, falls  $[g]_{\tilde{F}^\circ}$  und  $[g']_{\tilde{F}^\circ}$  in derselben Bahn unter der Operation  $\phi_{\xi_{13}}$  liegen. Die Menge der Rechtsnebenklassen von  $\tilde{F}^\circ$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  zerfällt dabei in genau  $\frac{3}{2}(p - 1) + 6$  Bahnen. Dabei haben  $\frac{3}{2}(p - 1)$  Bahnen die Länge 4 und 6 Bahnen die Länge 2.

(iii) Zwei 1-dimensionale Kegel  $g(\xi_3)$  und  $g'(\xi_3)$  sind genau dann  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent, falls  $[g]_{\tilde{F}^\circ}$  und  $[g']_{\tilde{F}^\circ}$  in derselben Bahn unter der Operation  $\phi_{\xi_3}$  liegen. Die Menge der Rechtsnebenklassen von  $\tilde{F}^\circ$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  zerfällt dabei in genau 6 Bahnen. Dabei haben 3 Bahnen die Länge  $2p$  und 3 Bahnen die Länge 2.

*Beweis.* Da  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  transitiv auf den Kegeln gleicher Dimension operiert ([Br, Folgerung 2.5]), ist jeder Kegel  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent zu einem Kegel der Form  $g(\sigma)$ , wobei  $\sigma \in \{\sigma_0, \xi_{13}, \xi_3\}$  und  $g$  ein System von Rechtsnebenklassen von  $\tilde{F}^\circ$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  durchläuft.

Zwei Kegel  $g_1(\sigma)$ ,  $g_2(\sigma)$  aus dem Legendre-Fächer sind genau dann  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent, falls es ein  $g \in \tilde{F}^\circ$  gibt, so daß  $g_2^{-1} \cdot g \cdot g_1$  aus dem Stabilisator  $\mathrm{Stab}(\sigma)$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  ist, was äquivalent zur Identität  $[g_1 \cdot s^{-1}]_{\tilde{F}^\circ} = [g_2]_{\tilde{F}^\circ}$  für ein  $s \in \mathrm{Stab}(\sigma)$  ist. Nutzen wir den äquivarianten Isomorphismus  $\psi$ , so sind also die Kegel  $g_1(\sigma)$  und  $g_2(\sigma)$  genau dann äquivalent, falls es ein  $s \in \mathrm{Stab}(\sigma)$  gibt, so daß  $([g_1 \cdot s^{-1}]_{\tilde{G}^\circ}, \overline{g_1 \cdot s^{-1}}) = ([g_2]_{\tilde{G}^\circ}, \overline{g_2})$  ist.

Man beachte, daß die Operation von  $-\mathbf{1}_2 \in \mathrm{Stab}(\sigma)$  trivial ist, so daß wir uns lediglich auf  $\mathrm{Stab}(\sigma)_\pm := \mathrm{Stab}(\sigma) / \{\pm \mathbf{1}_2\}$  konzentrieren müssen.

- $\sigma = \sigma_0$

Hier ist  $\mathrm{Stab}_\pm(\sigma_0) \stackrel{(\mathrm{mod} 2)}{\simeq} \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Die Operation  $(\dagger\dagger)$  ist auf der zweiten Komponente transitiv und frei und somit frei auf  $\mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Die Gruppe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  hat die Ordnung 6 und damit ergeben sich genau  $p + 1$  Bahnen der Länge 6:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \right) \right\} \\ & \left\{ \left( \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \right) \right\} \end{aligned} \quad \text{mit } r \in \{0, \dots, p-1\}, g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$$

- $\sigma = \xi_{13}$

Die Elemente  $N_0$  und  $V_0$  operieren durch

$$N_0 : \begin{cases} ([(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto ([(\frac{1}{r^{-1}} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0})) \text{ für } r \neq 0 \\ ([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto ([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0})) \end{cases}$$

$$V_0 : \begin{cases} ([(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto ([(\frac{1}{-r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) \\ ([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto ([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) \end{cases}$$

Zur Operation von  $N_0$  beachte, daß

$$[(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ} \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0})_{\tilde{G}^\circ} = [(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ} = [(\frac{1}{r^{-1}} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}$$

nach Hilfsatz 3.21 gilt. Das Element  $N_0$  hat die Ordnung 2 und operiert frei auf der zweiten Komponente. Weiter ist  $V_0 N_0$  konjugiert zu  $V_0$ , so daß wir nur die Fixpunkte von  $V_0$  bestimmen müssen. Dieses fixiert genau die Nebenklassen  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$  und  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$ .

Bahnen der Länge 4:

$$\left\{ \left( [(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( [(\frac{1}{r^{-1}} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0}) \right), \right. \\ \left. \left( [(\frac{1}{-r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( [(\frac{1}{-r^{-1}} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0}) \right) \right\}, \\ r = 1, \dots, p-1, \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$$

Bahnen der Länge 2:

$$\left\{ \left( [(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( [(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot (\frac{0}{1} \ \frac{1}{0}) \right) \right\}, \quad g \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$$

- $\sigma = \xi_3$

Ein Element  $(\frac{1}{0} \ \frac{k}{1})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  aus dem Stabilisator  $\text{Stab}(\xi_3)$  operiert durch

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{cases} ([(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto \left( [(\frac{1}{r} \ \frac{-k}{1-rk})]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \overline{(\frac{1}{0} \ \frac{k}{1})} \right) \\ ([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g) & \mapsto \left( [(\frac{0}{1} \ \frac{-k}{-k})]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \overline{(\frac{1}{0} \ \frac{k}{1})} \right) \end{cases}.$$

Insbesondere ist für  $r \not\equiv 0 \pmod{p}$  die Nebenklasse  $([(\frac{1}{r} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$  äquivalent zu  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$  (wähle  $k \in \mathbb{Z}$  so, daß  $k \equiv r^{-1} \pmod{p}$  und  $k$  gerade ist). Weiter ist  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$  äquivalent zu  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \overline{(\frac{1}{0} \ \frac{1}{1})})$  (wähle  $k = p$ ).

Für  $r \equiv 0 \pmod{p}$  ist  $([(\frac{1}{0} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g)$  äquivalent zu  $([(\frac{0}{1} \ 0)]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \overline{(\frac{1}{0} \ \frac{1}{1})})$

und die Operation von  $V_0$  liefert keine weiteren Identifikationen. Insgesamt haben wir

drei Bahnen der Länge  $2p$  :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \right. \\ & \left. \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), r = 1, \dots, p-1 \right\} \\ & g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2) \end{aligned}$$

drei Bahnen der Länge 2:

$$\left\{ \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \right), \left( \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]_{\tilde{G}^\circ}, g \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}, g \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$$

□

**Korollar 3.24** *Es sei  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $r = 0, \dots, p-1$ . Die  $\tilde{F}^\circ$ -Bahnen dreidimensionaler Kegel im Legendre-Fächer werden von den Kegeln  $\sigma_r$  und  $\tilde{\sigma}$  repräsentiert.*

*Beweis.* Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\tilde{g}, g^r\} & \rightarrow (\mathcal{R}_{\tilde{G}^\circ} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)) / \mathrm{Stab}(\sigma_0) \\ g & \mapsto ([g]_{\tilde{G}^\circ}, \bar{g}) \end{aligned}$$

$r = 0, \dots, p-1$  bijektiv ist. Nach Satz 3.23 haben nämlich beide Mengen die gleiche Mächtigkeit und nach Hilfssatz 3.21 ist die Abbildung injektiv. □

**Hilfssatz 3.25** (i) *Der Durchschnitt  $\mathrm{Stab}(g(\sigma_0)) \cap \tilde{F}^\circ$  ist für jedes  $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  trivial.*

(ii) *Der Durchschnitt  $\mathrm{Stab}(g(\xi_{13})) \cap \tilde{F}^\circ$  ist genau dann nicht trivial, falls  $g \in \left\langle \tilde{G}^\circ, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$  ist. Dieser ist von der Ordnung 2 und wird von  $g \cdot V_0 \cdot g^{-1}$  erzeugt.*

*Beweis.* Zunächst ist  $\mathrm{Stab}(g(\sigma)) = g \cdot \mathrm{Stab}(\sigma) \cdot g^{-1}$  und nach Hilfssatz 3.20 ist  $\mathrm{Stab}(\sigma_0) = \langle M_0, N_0 \rangle$  und  $\mathrm{Stab}(\xi_{13}) = \langle N_0, V_0 \rangle$  in  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ . Da  $\bar{f} = \mathrm{id}$  für alle  $f \in \tilde{F}^\circ$ , muß notwendigerweise  $gsg^{-1} = \mathrm{id} \Leftrightarrow \bar{s} = \mathrm{id}$  für ein  $s \in \mathrm{Stab}(\sigma)$  sein.

Im Fall  $\sigma = \sigma_0$  ist  $s = \mathrm{id}$  das einzige Element aus  $\mathrm{Stab}(\sigma_0)$  mit dieser Eigenschaft.

Im Fall  $\sigma = \xi_{13}$  ist  $V_0$  das einzige nichttriviale Element mit der Eigenschaft, daß die Reduktion modulo 2 die Identität ist.

Für  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$  ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 2cd & * \end{pmatrix} \in \tilde{F}^\circ$$
$$\Leftrightarrow c \equiv 0 \pmod{p} \text{ oder } d \equiv 0 \pmod{p}.$$

□

## 4 Das Titsgebäude bestimmter Untergruppen von $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$

Die Berechnung des Titsgebäudes einer arithmetischen Gruppe  $\tilde{\Gamma} \subset \mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$  spielt bei der Beschreibung der Kompaktifizierung des Quotienten  $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{H}_2$  eine wesentliche Rolle. Da eine rationale Randkomponenten von  $\mathbb{H}_2$  im Abschluß einer anderen liegen kann, ist es notwendig, die korrespondierenden partiellen Kompaktifizierungen zu verkleben, um eine volle Kompaktifizierung von  $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{H}_2$  zu erhalten. Es stellt sich also die Aufgabe, eine Beschreibung der  $\tilde{\Gamma}$ -Bahnen von rationalen Randkomponenten und deren Nachbarschaftsrelationen zu finden. Durch Angabe des entsprechenden Titsgebäudes  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$  wird diese Aufgabe gelöst.

Zur Definition des Titsgebäudes  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$ : Es sei  $(X, <)$  eine teilgeordnete Menge. Dann definieren wir *die simpliziale Darstellung*  $\mathrm{SR}(X, <)$  von  $(X, <)$  als den simplizialen Komplex, der aus allen Simplizes  $(x_0, \dots, x_n)$  besteht, wobei  $x_0, \dots, x_n \in X, n \geq 0$  und  $x_0 < x_1 < \dots < x_n$  gelte. Ist nun  $G$  eine Gruppe von Automorphismen auf  $(X, <)$ , so induziert die Operation von  $G$  auf  $(X, <)$  eine Operation von  $G$  auf  $\mathrm{SR}(X, <)$ , gegeben durch  $g_*(x_0, \dots, x_n) = (g(x_0), \dots, g(x_n))$ . Dann wird  $G \backslash \mathrm{SR}(X, <)$  als der simpliziale Komplex definiert, dessen Ecken Orbiten  $x^* = Gx$  von Elementen aus  $X$  und Simplizes  $(x_0^*, \dots, x_n^*)$  besteht, wobei es für jeden Eintrag  $x_i^*$  einen Repräsentanten  $x_i$  aus  $\mathrm{SR}(X)$  gibt mit  $x_i^* = Gx_i$  und  $x_0 < \dots < x_n$ .

Das Titsgebäude  $\mathcal{T}$  von  $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$  wird dann als simpliziale Darstellung von

$$(X_1, <) := (\{\text{nicht triviale } \Lambda\text{-isotrope Unterräume von } \mathbb{Q}^4\}, \subsetneq)$$

definiert. Wir werden im weiteren den Begriff isotrop als  $\Lambda$ -isotrop verstehen. Ist  $\tilde{\Gamma}$  eine arithmetische Untergruppe von  $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$ , so wird das Titsgebäude von  $\tilde{\Gamma}$  als Quotient  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}) = \tilde{\Gamma} \backslash \mathcal{T}$  definiert.

Für zwei arithmetische Untergruppen  $\tilde{\Gamma}_1, \tilde{\Gamma}_2$ , die komponentenweise auf dem Produkt  $X_1 \times X_1$  operieren, macht es dann Sinn, das Produkt von  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_1)$  und  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_2)$  als

$$\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_1) \times \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_2) = (\tilde{\Gamma}_1 \times \tilde{\Gamma}_2) \backslash \mathrm{SR}(X_1 \times X_1, <'),$$

einzuführen, wobei die Teilordnung durch

$$(x_0, x_1) <' (x'_0, x'_1) :\Leftrightarrow x_0 < x'_0 \text{ und } x_1 < x'_1$$

definiert sei.

Für eine weitergehende Diskussion von Titsgebäuden sei auf [HKW1, I.3B]

und [Bro, V.6] hingewiesen.

Die in Definition 3.2 eingeführten rationalen Randkomponenten stehen in 1:1-Korrespondenz zu isotropen Unterräumen des  $\mathbb{Q}^4$ . Darüberhinaus ist eine Randkomponente  $F'$  genau dann echt im Abschluß einer Randkomponente  $F$  enthalten, falls der zugehörige Unterraum  $U_{F'}$  den Unterraum  $U_F$  zu  $F$  echt enthält.

Interessieren wir uns für  $\tilde{\Gamma} \backslash \mathbb{H}_2$ , so stehen die Bahnen rationaler Randkomponenten modulo  $\tilde{\Gamma}$  in 1:1-Beziehung zu den  $\tilde{\Gamma}$ -Bahnen isotroper Unterräume von  $\mathbb{Q}^4$  stehen, wobei  $\tilde{\Gamma}$  durch Rechtsmultiplikation operiert.

Es seien die Mengen  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_0$  wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &:= \{l \mid l \text{ ist eine Gerade in } \mathbb{Q}^4\} \\ \mathcal{P}_2 &:= \{h \mid h \text{ ist eine isotrope Ebene in } \mathbb{Q}^4\} \\ \mathcal{P}_0 &:= \{(l, h) \mid l \in \mathcal{P}_1, h \in \mathcal{P}_2, l \subset h\} \end{aligned}$$

Da  $\Lambda$  eine nicht ausgeartete schiefsymmetrische Form ist, hat jeder isotrope Unterraum des  $\mathbb{Q}^4$  höchstens die Dimension 2. Der simpliziale Komplex  $\mathcal{T}$  ist also 1-dimensional, das heißt ein Graph.

Mit  $[\tilde{U}]_{\tilde{\Gamma}}$  sei die Bahn des isotropen Unterrums  $\tilde{U}$  in  $\mathbb{Q}^4$  und mit  $\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma})$  und  $\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma})$  seien vollständige Repräsentantensysteme von isotropen Geraden bzw. Ebenen bezeichnet. Mit  $\mathcal{P}_0(\tilde{\Gamma})$  bezeichnen wir ein vollständiges Repräsentantensystem von Fahnen  $l \subset h$  isotroper Unterräume.

Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma})$  ist also ein Graph, dessen Ecken  $[\tilde{U}]_{\tilde{\Gamma}}$  Bahnen nicht-trivialen isotropen Unterräumen entsprechen. Je zwei Ecken  $[\tilde{U}_1]_{\tilde{\Gamma}}$  und  $[\tilde{U}_2]_{\tilde{\Gamma}}$  werden genau dann mit einer Kante verbunden, wenn es ein  $\gamma \in \tilde{\Gamma}$  gibt, so daß  $\gamma(\tilde{U}_1) \subset \tilde{U}_2$  oder  $\gamma(\tilde{U}_2) \subset \tilde{U}_1$  gilt. Das Titsgebäude gibt damit die Konfiguration der rationalen Randkomponenten des jeweils betrachteten Modulraums wieder.

Für eine arithmetische Untergruppen  $\tilde{\Gamma} \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  gibt es eine natürliche Abbildung  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$ , die mit der Quotientenabbildung, induziert durch  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ/\tilde{\Gamma}$ , übereinstimmt. Wir betrachten die Gruppen  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ , die beide Normalteiler der arithmetischen Untergruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  sind mit Quotienten  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ/\tilde{\Gamma}_{1,p} \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ/\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) \simeq \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$ . In dieser Situation haben wir ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) & \\ & \downarrow \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) & \\ \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}) & \xrightarrow{\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p)} & \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ) \end{array}$$

so daß wir bezüglich dieser Abbildungen das Faserprodukt

$$\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ (u, v) \in \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \mid \begin{array}{l} \text{es gibt ein } g \in \text{Sp}(2, \mathbb{Z}_p) \text{ und ein} \\ h \in \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2), \text{ so daß } g(u) = h(v) \end{array} \right\}$$

einführen können.

Da wir uns lediglich für rationale Unterräume des  $\mathbb{R}^4$  interessieren, macht es Sinn, die Operation der jeweiligen arithmetischen Untergruppe von  $\text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$  auf der Menge der primitiven Vektoren zu studieren. Jede Gerade  $l \subset \mathbb{Q}^4$  enthält genau zwei primitive Vektor aus  $\mathbb{Z}^4$ , die wir mit  $\pm v_l = \pm(v_1, v_2, v_3, v_4)$  bezeichnen.

**Definition 4.1** Ein primitiver Vektor  $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{Z}^4$  heißt *lang*, falls  $(v_1, v_3) \equiv 0 \pmod{p}$  ist, anderenfalls *kurz*.

Es ist leicht zu sehen, daß jede isotrope Ebene in  $\mathbb{Q}^4$  von einem kurzen und einem langen Vektor erzeugt wird (siehe dazu etwa [FS, Korollar 2.6.]). Im Folgenden seien die primitiven Vektoren  $v_0 := (0, 0, 1, 0)$  sowie  $v_{(a,b)} = (0, a, 0, b)$  für ein teilerfremdes Paar  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  definiert.

#### 4.1 Das Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ(2))$

In diesem Abschnitt werden wir lediglich das Ergebnis aus [FS] zitieren. Dort wurde das Titsgebäude von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  berechnet. Betrachte folgende Mengen:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_1 &= \{l \in \mathbb{Z}_2^4 \mid l \neq 0\} \\ \overline{\mathcal{P}}_2 &= \{h = l_1 \wedge l_2 \subset \Lambda^2 \mathbb{Z}_2^4 \mid h \neq 0 \text{ und } h \text{ ist isotrop in } \mathbb{Z}_2^4\} \\ \overline{\mathcal{P}}_0 &= \{(l, h) \mid l \in \overline{\mathcal{P}}_1, h \in \overline{\mathcal{P}}_2, l \subset h\} \end{aligned}$$

**Bemerkung 4.2** Mit der in 2.2 eingeführten Indizierung lassen sich dann die folgenden Korrespondenzen feststellen:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}}_1 &\leftrightarrow \{\{i, j\} \subset (1, \dots, 6)\} \\ \overline{\mathcal{P}}_2 &\leftrightarrow \{(ij)(kl)(mn) \text{ ist Partition von } (1, \dots, 6)\} \\ \overline{\mathcal{P}}_0 &\leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{\{i, j\} \in \overline{\mathcal{P}}_1, (i'j')(k'l')(m'n') \in \overline{\mathcal{P}}_2\}, \\ \{i, j\} \in \{\{i', j'\}, \{k', l'\}, \{m', n'\}\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

**Satz 4.3** *i) Die Menge der  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ -Bahnen eindimensionaler isotroper Unterräume wird von*

$$\{\text{kurz, lang}\} \times \overline{\mathcal{P}}_1$$

*parametrisiert. Dabei sind zwei isotrope eindimensionale Unterräume  $l_1, l_2$  in  $\mathbb{Q}^4$  unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  genau dann äquivalent, falls  $\bar{v}_{l_1} = \bar{v}_{l_2}$  und  $v_{l_1}, v_{l_2}$  entweder beide kurz oder beide lang sind. Damit zerfallen die eindimensionalen isotropen Unterräume von  $\mathbb{Q}^4$  unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  in genau 30 Bahnen.*

*ii) Die Menge der  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ -Bahnen von zweidimensionalen isotropen Unterräumen wird von  $\overline{\mathcal{P}}_2$  parametrisiert.*

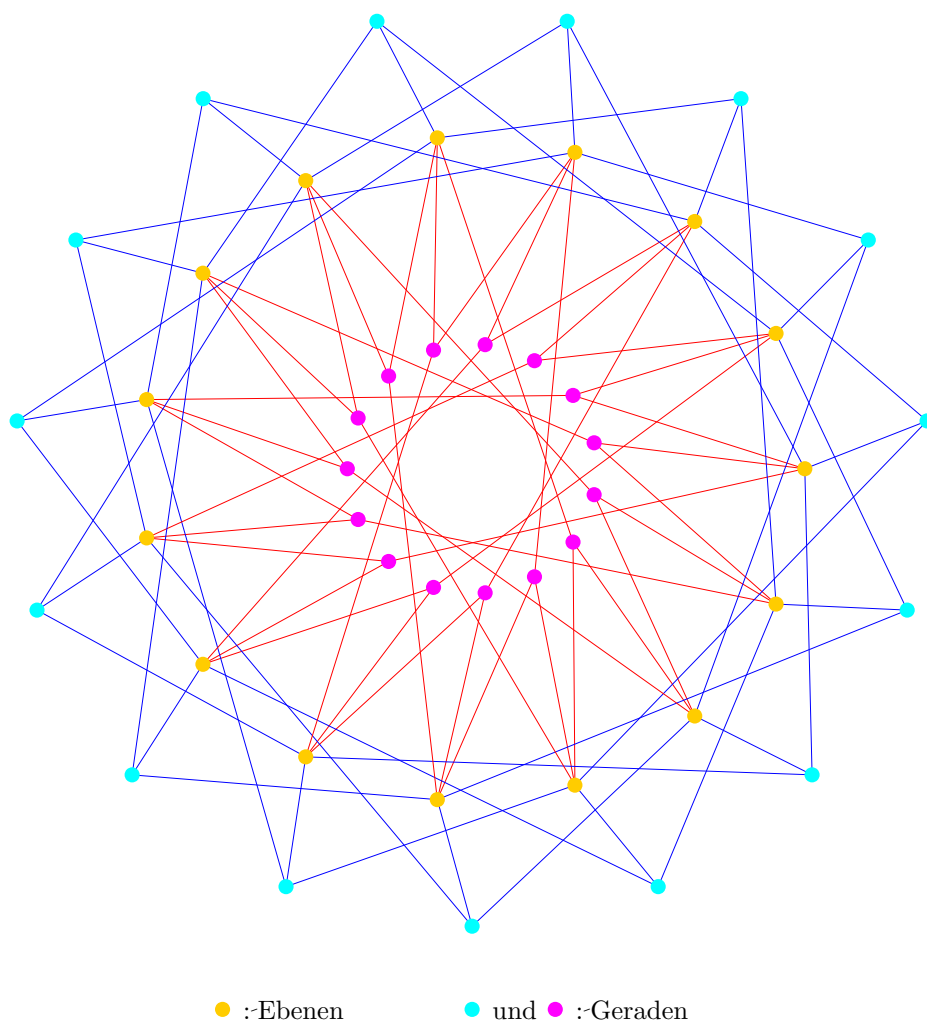
*Zwei isotrope Ebenen  $h = v_{l_1} \wedge v_{l_2}$ ,  $h' = v_{l'_1} \wedge v_{l'_2}$  sind dabei genau dann  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ -äquivalent, falls  $\bar{v}_{l_1} \wedge \bar{v}_{l_2} = \bar{v}_{l'_1} \wedge \bar{v}_{l'_2}$  in  $\Lambda^2 \mathbb{Z}_2^4$  gilt. Es gibt also genau 15 Bahnen isotroper Ebenen des  $\mathbb{Q}^4$  unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ .*

*iii) Im Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  werden zwei Ecken  $[l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}, [l_1 \wedge l_2]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}$  genau dann miteinander verbunden, falls  $(\bar{v}_l, \bar{v}_{l_1} \wedge \bar{v}_{l_2}) \in \overline{\mathcal{P}}_0$  gilt (siehe Abbildung 4.1).*

*Beweis.* [FS, Satz 3.5–3.9]

□





## 4.2 Die Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}^\circ)$ und $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p})$

Auch hier werden wir lediglich Ergebnisse, diesmal aus [HKW1, I.3B], zitieren. Zunächst führen wir zur Beschreibung des Titsgebäudes  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  die folgenden Mengen ein:

Es sei  $\mathcal{P}_1^{\text{kurz}} := \{v_0\}$  und  $\mathcal{P}_1^{\text{lang}} = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p - \{(0,0)\}) / \{\pm 1\}$ .

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) &\rightarrow \mathcal{P}_1^{\text{kurz}} \cup \mathcal{P}_1^{\text{lang}} \\ [l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} &\mapsto \begin{cases} v_0 \\ \pm(v_2, v_4) \pmod{p} \end{cases} \quad \text{falls } \begin{array}{l} v_l \text{ kurz ist} \\ v_l \text{ lang ist} \end{array} \end{aligned}$$

ist eine Bijektion, das heißt, die  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ -Bahnen isotroper Geraden in  $\mathbb{Q}^4$  werden von

$$\mathcal{P}_1^{\text{kurz}} \cup \mathcal{P}_1^{\text{lang}}$$

parametrisiert. Bis auf  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ -Äquivalenz kann jeder zweidimensionale isotrope Unterraum von  $\mathbb{Q}^4$  durch  $l_0$  und einem langen Vektor  $l_{(a,b)}$  aufgespannt werden. Zwei Geraden  $l_{(a,b)}$  und  $l_{(a',b')}$  definieren dabei genau dann dieselbe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ -Bahn von Ebenen, wenn  $[a : b] = [a' : b']$  in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$  gilt. Für jede Bahn einer Geraden  $l_{(a,b)} \in \mathcal{P}_1^{\text{lang}}$  definieren wir einen Repräsentanten  $h_{[a:b]} = l_0 \wedge l_{(a,b)}$ . Die Menge

$$\{ h_{[a:b]} \mid [a : b] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \}$$

steht dann in bijektiver Beziehung zu  $\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p})$ .

Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  läßt sich wie folgt beschreiben:

**Satz 4.4** *i) Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  ist ein Graph mit  $1 + \frac{1}{2}(p^2 - 1) + p + 1$  Ecken, die von den Elementen in  $\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \cup \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  repräsentiert werden. Jede Ecke  $h_{[a:b]}$  wird mit  $l_0$  verbunden und genau dann mit  $l_{(a',b')} \in \mathcal{P}_2^{\text{lang}}$  verbunden, falls  $[a : b] = [a' : b']$  in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$  gilt.*

*ii) Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  ist der Quotient  $G \backslash \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$ ,  $G = \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ / \tilde{\Gamma}_{1,p} \simeq \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  und ist ein Graph mit drei Ecken, die von  $l_0$ ,  $l_{(0,1)}$  und  $h_{[0:1]}$  repräsentiert werden und zwei Kanten, die  $l_0$  mit  $h_{[0:1]}$  und  $l_{(0,1)}$  mit  $h_{[0:1]}$  verbinden.*

*Beweis.* [HKW1, Theorem I.3.40]

□

### 4.3 Das Titsgebäude $\mathcal{T}(\Gamma_{1,p}(2))$

Auf der Suche nach Invarianten von eindimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{Q}^4$  unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  können wir zunächst festhalten, daß die Eigenschaft kurz bzw. lang eines primitiven Vektor von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  respektiert wird. Diese Eigenschaft bleibt nämlich insbesondere unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \supset \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  erhalten (siehe [HKW1, Proposition I.3.38]).

Zunächst wollen wir auf eine zahlentheoretische Überlegung hinweisen, die sich schon bei der Berechnung der Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  und  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  als sehr nützlich erwiesen hat:

**Lemma 4.5** *Es seien  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$  und  $x_2 \neq 0$ . Dann gibt es  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ , so daß  $\text{ggT}(x_1 + \lambda x_3 + \mu x_4, x_2) = 1$  ist.*

*Beweis.* [HKW1, Lemma I.3.35]

□

Wir führen die folgenden Matrizen aus  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  ein:

Für  $k \in 2\mathbb{Z}$  sei

$$M_1(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -pk & 1 \end{pmatrix} \quad M_2(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & 1 & pk & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_3(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -pk & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betrachte die folgende Einbettung:

$$\chi : \begin{cases} \Gamma_1(2) \times \Gamma_1(2p) & \rightarrow \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \\ \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) & \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c' & 0 & d' \end{pmatrix} \end{cases}$$

**Lemma 4.6** *Es seien  $x, y \in \mathbb{Z}^4$  kurze und primitive Vektoren. Dann sind  $x$  und  $y$  genau dann  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ -äquivalent, falls  $x \equiv y \pmod{2}$  gilt.*

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ : Ist klar, da  $\bar{g} = \mathbf{1}_4$  für alle  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ .

„ $\Leftarrow$ “ : Es sei zunächst  $x \equiv (1, 0, 0, 0) \pmod{2}$ .

Dann ist  $\text{ggT}(x_1, x_3)$  prim zu  $2p \text{ggT}(x_2, x_4)$  und  $(x_3, x_1, 2px_2, -2px_4)$  ist primitiv, so daß es nach Lemma 4.5 ganze Zahlen  $\lambda, \mu$  gibt mit  $\text{ggT}(x_1, x_3 + \lambda 2px_2 - \mu 2px_4) = 1$ . Unter Anwendung der Matrix  $M_1(2\mu)M_2(2\lambda)$  werden die Einträge  $(x_1, x_3)$  nach  $(x_1, x_3 + \lambda 2px_2 - \mu 2px_4 + \lambda\mu 4px_1)$  transformiert und es gilt  $\text{ggT}(x_1, x_3 + \lambda 2px_2 - \mu 2px_4 + \lambda\mu 4px_1) = 1$ , so daß wir ohne Einschränkung  $\text{ggT}(x_1, x_3) = 1$  annehmen dürfen. Da zusätzlich  $x_1$  ungerade ist, können wir ganze Zahlen  $\lambda', \mu'$  mit  $\lambda'x_1 + \mu'2x_3 = 1$  wählen. Die Matrix  $\begin{pmatrix} \lambda' & -x_3 \\ 2\mu' & x_1 \end{pmatrix}$  ist aus  $\Gamma_1(2)$  und  $\chi\left(\begin{pmatrix} \lambda' & -x_3 \\ 2\mu' & x_1 \end{pmatrix}, \mathbf{1}_2\right)$  transformiert  $x$  nach

$(1, x_2, 0, x_4)$ , der via  $M_2(-x_4)$  nach  $(1, x_2, -px_2x_4, 0)$  geht. Letztlich führt ein geeignetes Element aus  $\chi(\Gamma_1(2), \mathbf{1}_2)$  diesen nach  $(1, x_2, 0, 0)$ , der durch  $M_1(-x_2)$  nach  $(1, 0, 0, 0)$  geht.

Für zwei beliebige kurze Vektoren  $x', y'$  mit  $x' \equiv y' \pmod{2}$  argumentiert man dann mit der Normalteilereigenschaft von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ . Nach [HKW1, Proposition I.3.38] gibt es ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}$ , so daß  $g(x') = v_0$  ist. Dann ist  $g(x') \equiv g(y') \equiv v_0 \pmod{2}$  und nach den obigen Ausführungen gibt es ein  $h \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ , so daß  $(h \cdot g)(x') = g(y')$  ist. Da  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}$  ist  $g^{-1}hg \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  und überführt  $x'$  nach  $y'$ . □

**Lemma 4.7** *Zwei lange primitive Vektoren  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  und  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  sind genau dann  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ -äquivalent, falls  $x \equiv y \pmod{2}$  und  $(x_2, x_4) \equiv (y_2, y_4) \pmod{p}$  ist.*

*Beweis.*

„  $\Rightarrow$  “ : Folgt sofort, da  $\bar{\gamma} = \text{id}$  für alle  $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  und die Restklassen  $(x_2, x_4) \pmod{p}$  eines primitiven Vektors  $x$  bleiben unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p} \supset \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  erhalten.

„  $\Leftarrow$  “ : Da  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  transitiv auf der Menge der langen Vektoren operiert und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $x$  die Eigenschaften  $x \equiv v_{(1,0)} \pmod{2}$  und  $(x_2, x_4) \equiv (1, 0) \pmod{p}$  hat.

Dann ist  $\text{gg}\Gamma(x_4, x_2, 2x_1, 2x_3) = 1$  und durch Anwendung von Lemma 4.5 finden wir ganze Zahlen  $\lambda, \mu$ , so daß  $\text{gg}\Gamma(x_2, x_4 + \lambda \cdot 2x_1 + \mu \cdot 2x_3) = 1$  ist. Durch Anwendung von zunächst  $M_2(2\lambda)$  und dann  $M_3(2\mu)$  wird  $x$  auf einen Vektor mit  $x_2, x_4$  teilerfremd transformiert und durch ein geeignetes Element aus  $\chi(\mathbf{1}_2, \Gamma_1(2p))$  können wir auf  $x = (x_1, 1, x_3, 0)$  reduzieren. Dann ist  $2p$  Teiler von  $\text{gg}\Gamma(x_1, x_3)$ , da  $x \equiv (0, 1, 0, 0) \pmod{2}$  und lang ist. Es sei  $x_1 = 2px'_1$  und  $x_3 = 2px'_3$ . Wenden wir  $M_2(2\mu)$  gefolgt von einem Element aus  $\chi(\mathbf{1}_2, \Gamma_1(2p))$  an, so können wir mit  $(x_1, 1, x_3 + \mu \cdot 2p, 0)$  arbeiten. Durch Wahl eines geeigneten  $\mu$  können wir dann annehmen, daß  $x = (x_1, 1, x_3, 0)$  mit  $\text{gg}\Gamma(x'_1, x'_3) = 1$  und  $x_3 \neq 0$  ist. Dieser wird unter  $M_2(-2x'_3)$  gefolgt von  $M_3(2x'_1)$  nach  $(0, 1, 0, 0)$  transformiert. □

**Satz 4.8** *Die  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ -Bahnen isotroper Geraden werden von*

$$\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$$

*parametrisiert.*

Unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  gibt es also genau  $15(1 + \frac{1}{2}(p^2 - 1))$  Bahnen eindimensionaler isotroper Unterräume des  $\mathbb{Q}^4$ .

*Beweis.* Betrachte die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)) & \rightarrow \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \\ [l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)} & \mapsto ([l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}, [l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}) \end{cases}$$

Da  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) = \tilde{\Gamma}_{1,p} \cap \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Surjektivität sei das Paar  $([l_1]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}, [l_2]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)})$  gegeben und  $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_4)$ ,  $v' = (v'_1, \dots, v'_4)$  die bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten primitiven Vektoren, die die Geraden  $l_1$  und  $l_2$  aufspannen. Dann ist zu zeigen, daß es einen primitiven Vektor  $v_l = (v_1, \dots, v_4)$  gibt mit den Eigenschaften  $\overline{v_l} = \overline{v'}$  und

$$v_l \text{ kurz, falls } \tilde{v} \text{ kurz ist}$$

bzw.

$$v_l \text{ lang und } (v_2, v_4) \equiv \pm(\tilde{v}_2, \tilde{v}_4) \pmod{p}, \text{ falls } \tilde{v} \text{ lang ist.}$$

Im Fall, daß  $\tilde{v}$  kurz ist, betrachte den kurzen Vektor  $v_0$ . Da  $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  transitiv auf  $\overline{\mathcal{P}}_1$  operiert und  $\phi : \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \rightarrow \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  surjektiv ist, können wir ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  wählen, so daß  $\overline{g(v_0)} = \overline{v'}$  gilt. Da die Eigenschaft kurz unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  erhalten bleibt, ist in diesem Fall nichts weiter zu zeigen. Es sei  $\tilde{v}$  lang. Betrachte den langen Vektor  $v_{(0,1)}$ . Dann gibt es mit der gleichen Argumentation wie im obigen Fall ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , so daß  $\overline{g(v_{(0,1)})} = \overline{v'}$  gilt. Es sei  $g(v_{(0,1)}) = (w_1, \dots, w_4)$ . Da  $g(v_{(0,1)})$  lang ist, ist insbesondere  $(w_2, w_4) \not\equiv (0, 0) \pmod{p}$ , so daß wir nun ein  $f \in \Gamma_1(2)$  wählen können mit  $(w_2, w_4) \cdot f^{-1} \equiv (\tilde{v}_2, \tilde{v}_4) \pmod{p}$ . Beachte dazu, daß  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$  transitiv auf  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p - \{(0, 0)\}$  operiert. Dann sei  $g' \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  im Urbild von  $f$  unter der Projektion  $\gamma_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)} : \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p)$ . Damit ist  $(g' \cdot g)(v_{(0,1)})$  ein primitiver Vektor mit den gewünschten Eigenschaften.

Die Injektivität folgt sofort aus Lemma 4.6 und Lemma 4.7. □

**Lemma 4.9** *Zwei isotrope Ebenen  $h, h'$  sind genau dann in derselben  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ -Bahn, falls es zu jedem kurzen bzw. langen Vektor  $v'$  aus  $h'$  einen kurzen bzw. langen Vektor  $v$  aus  $h$  gibt, so daß  $\overline{v} = \overline{v'}$  und  $[v']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} = [v]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  ist.*

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “ : Ist klar, da  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \subset \tilde{\Gamma}_{1,p}$  und  $\overline{\gamma} = \text{id}$  für alle  $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ .

„ $\Leftarrow$ “ :

i) Es sei zunächst  $h' = l_0 \wedge l_{(0,1)}$ .

Nach Voraussetzung existiert in  $h$  ein kurzer Vektor  $v$  mit  $\bar{v} = (0, 0, 1, 0)$  und ein langer Vektor  $w$  mit  $\bar{w} = (0, 0, 0, 1)$  und  $(w_2, w_4) \equiv (0, 1) \pmod{p}$ . Nach Lemma 4.6 gibt es ein  $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  mit  $\gamma(v) = v_0$ . Wir setzen  $\tilde{w} := \gamma(w)$ . Aus der Isotropieeigenschaft folgt  $\tilde{w}_1 = 0$ . Das Gitter  $\tilde{h}_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\gamma(v) \oplus \mathbb{Z}\gamma(w)$  wird von  $v_0$  und  $\tilde{w} - \tilde{w}_3 v_0$  erzeugt, so daß wir weiter (ohne die Restklasse  $\bar{w}$  zu ändern)  $\tilde{w}_3 = 0$  annehmen können. Wie  $w$  ist auch  $\tilde{w}$  primitiv, also  $\text{ggT}(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) = 1$ . Da  $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \subset \tilde{\Gamma}_{1,p}$ , ist insbesondere die Restklasse  $(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) \pmod{p}$  invariant. Darüberhinaus ist  $\bar{\gamma} = \text{id}$ , so daß insgesamt

$$(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) \equiv (w_2, w_4) \equiv (1, 0) \pmod{2p}$$

ist. Unter einem geeigneten Element aus  $\chi(\mathbf{1}_2, \Gamma_1(2p)) \subset \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  wird  $\tilde{w}$  auf  $w$  und  $l_0$  wiederum auf  $l_0$  abgebildet und damit  $\tilde{h} = \tilde{h}_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}$  auf  $h'$  gebracht.

ii) Es seien nun  $\tilde{h}, \hat{h}$  zwei beliebige isotrope Ebenen mit den (obigen) Eigenschaften:

i) Es gibt kurze Vektoren  $\tilde{v} \in \tilde{h}, \hat{v} \in \hat{h}$  und lange Vektoren  $\tilde{w} \in \tilde{h}, \hat{w} \in \hat{h}$ , so daß  $[\tilde{v}]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} = [\hat{v}]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  und  $[\tilde{w}]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} = [\hat{w}]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$ .

ii)  $\bar{\tilde{v}} = \bar{\hat{v}}, \bar{\tilde{w}} = \bar{\hat{w}}$

Da  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  transitiv auf der Menge der isotropen Ebenen operiert, gibt es ein  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$ , so daß  $\tilde{\gamma}(\tilde{h}) = h'$  ist. Betrachte die isotrope Ebene  $\tilde{\gamma}(\hat{h})$ , die den kurzen Vektor  $\tilde{\gamma}(\hat{v})$  und den langen Vektor  $\tilde{\gamma}(\hat{w})$  enthält. Dann gilt natürlich  $\overline{\tilde{\gamma}(\tilde{v})} = \overline{\tilde{\gamma}(\hat{v})}$  und  $\overline{\tilde{\gamma}(\tilde{w})} = \overline{\tilde{\gamma}(\hat{w})}$ . Darüberhinaus ist  $[\tilde{\gamma}(\tilde{v})]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} = [\tilde{\gamma}(\hat{v})]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  und  $[\tilde{\gamma}(\tilde{w})]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}} = [\tilde{\gamma}(\hat{w})]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$ :

Nach Voraussetzung existieren  $g_1, g_2 \in \tilde{\Gamma}_{1,p}$ , so daß  $g_1(\tilde{v}) = \hat{v}$  und  $g_2(\tilde{w}) = \hat{w}$  ist. Dann ist aufgrund der Normalteilereigenschaft von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$  in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  die Matrix  $\tilde{\gamma}g_i\tilde{\gamma}^{-1}$  aus  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$ , die  $\tilde{\gamma}(\tilde{v})$  mit  $\tilde{\gamma}(\hat{v})$  bzw.  $\tilde{\gamma}(\tilde{w})$  mit  $\tilde{\gamma}(\hat{w})$  identifiziert.

Nach den Berechnungen im ersten Fall gibt es ein  $\gamma \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ , so daß  $\gamma(\tilde{\gamma}(\hat{h})) = \tilde{\gamma}(\hat{h})$  ist. Die Matrix  $\tilde{\gamma}^{-1}\gamma\tilde{\gamma}$  ist aus  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \triangleleft \tilde{\Gamma}_{1,p}^{\circ}$  und überführt  $\tilde{h}$  nach  $\hat{h}$ .

□

**Satz 4.10** Die Menge der  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ -Bahnen isotroper Ebenen  $\mathcal{P}_2/\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  wird von

$$\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) = \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$$

parametrisiert.

*Beweis.* Zunächst ist die Gleichheit der Mengen klar, da  $\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  lediglich aus einem Element besteht (siehe Satz 4.4). Wir schreiben jede isotrope Ebene als Erzeugnis eines kurzen Vektor  $v$  und eines langen Vektors  $w$  und betrachten die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{P}_2 & \rightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p) \times \overline{\mathcal{P}}_2 \\ v \wedge w & \mapsto ([w_2 : w_4], \bar{v} \wedge \bar{w}) \end{cases}$$

Das Bild einer isotropen Ebene ist nach Satz 4.3 und 4.4 nicht von der Wahl der erzeugenden Vektoren  $v, w$  abhängig ist und ist damit wohldefiniert. Da sowohl die Restklasse  $[w_2 : w_4]$  als auch  $\bar{v} \wedge \bar{w}$  unter der Operation von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  invariant ist, kann diese Abbildung von  $\mathcal{P}_2$  nach  $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p) \times \overline{\mathcal{P}}_2$  durch die von der Operation der Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  induzierten Quotientenabbildung faktorisiert werden:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & \mathcal{P}_2/\tilde{\Gamma}_{1,p}(2) \\ & \searrow & \downarrow \psi \\ & & \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p) \times \overline{\mathcal{P}}_2 \end{array}$$

Es ist zu zeigen, daß  $\psi$  eine Bijektion ist.

- $\psi$  ist surjektiv:  
Es sei  $([a : b], \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p) \times \overline{\mathcal{P}}_2$  gegeben und  $h = v_0 \wedge v_{(0,1)}$ . Da  $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  transitiv auf  $\overline{\mathcal{P}}_2$  operiert und  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \xrightarrow{\text{mod } 2} \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  surjektiv ist, gibt es ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , so daß  $\overline{g(v_0)} \wedge \overline{g(v_{(0,1)})} = \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2$  ist. Betrachte den langen Vektor  $g(v_{(0,1)}) = w$ . Da dieser lang ist, ist insbesondere  $(w_2, w_4) \not\equiv (0, 0) \pmod{p}$  und wir können wie im Beweis zu 4.8 ein  $g' \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  wählen, so daß  $g'(w) \equiv (*, a, *, b) \pmod{p}$  ist. Die isotrope Ebene  $(g' \cdot g)(h)$  liegt also im Urbild von  $([a : b], \bar{l}_1 \wedge \bar{l}_2)$  unter  $\psi$ .
- $\psi$  ist injektiv:  
Es seien  $h = v \wedge w$  und  $h' = v' \wedge w'$  zwei isotrope Ebenen ( $v, v'$  kurz und  $w, w'$  lang), so daß  $\bar{v} \wedge \bar{w} = \bar{v}' \wedge \bar{w}'$  und  $[w_2 : w_4] = [w'_2 : w'_4]$  in  $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_p)$  ist. Zu zeigen ist, daß dann  $[h]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)} = [h']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)}$  ist.

Es sei  $k \in \mathbb{Z}_p^*$ , so daß  $(w_2, w_4) \equiv k(w'_2, w'_4) \pmod{p}$  ist und ferner  $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ , so daß

$$\begin{aligned}\bar{v} &= g_{11} \cdot \bar{v}' + g_{12} \cdot \bar{w}' \\ \bar{w} &= g_{21} \cdot \bar{v}' + g_{22} \cdot \bar{w}'.\end{aligned}$$

Weiter sei  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$  so gewählt, daß

$$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} = g \text{ und } k^{-1} \equiv d \pmod{p}$$

gilt (die Existenz einer solchen Matrix stellt Hilfssatz 2.3 (iii) sicher). Dann sind die Vektoren

$$\begin{aligned}\tilde{v} &= a \cdot v' + b \cdot w' \\ \tilde{w} &= c \cdot v' + d \cdot w'\end{aligned}$$

aus  $h'$ . Der Vektor  $\tilde{v}$  ist kurz, da  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  und  $\tilde{w}$  ist lang, da  $c \equiv 0 \pmod{p}$  ist. Es gilt  $\bar{\tilde{v}} = \bar{v}$  sowie  $\bar{\tilde{w}} = \bar{w}$  und  $(\tilde{w}_2, \tilde{w}_4) \equiv (w_2, w_4) \pmod{p}$ . Dann folgt  $[h]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)} = [h']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)}$  aus Lemma 4.9.

□

**Satz 4.11** *Das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  ist ein Graph mit  $15(1 + \frac{1}{2}(p^2 - 1) + p + 1)$  Ecken, die von*

$$\left( \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \right) \cup \left( \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \right)$$

parametrisiert werden.

Eine Ecke  $\left( [l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}, [l']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)} \right) \in \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_1(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  wird genau dann mit einer Ecke  $\left( [h]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}, [h']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)} \right) \in \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{P}_2(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  verbunden, falls

- die Ecken  $[l]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  und  $[h]_{\tilde{\Gamma}_{1,p}}$  im Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p})$  und
- die Ecken  $[l']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}$  und  $[h']_{\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)}$  im Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$

verbunden werden.

Damit kann das Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  als Faserprodukt

$$\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}) \times_{\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)} \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$$

aufgefaßt werden.



*Beweis.* Es sei  $l$  eine Gerade und  $h = v \wedge w$  eine isotrope Ebene mit  $v$  kurz und  $w$  lang. Wir nehmen an, daß es ein  $g' \in \tilde{\Gamma}_{1,p}$  gibt mit  $g'(l) \subset h$  und daß  $l$  von einem primitiven Vektor  $v_l = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  erzeugt wird, so daß  $\overline{v_l} \subset \overline{v} \wedge \overline{w}$  ist. Es ist zu zeigen, daß es dann ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$  gibt, so daß  $g(l) \subset h$  ist.

1. Fall:  $v_l$  ist kurz.

Es sei  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ein teilerfremdes Paar, so daß  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  und  $\overline{av + bw} = \overline{v_l}$  ist. Der Vektor  $av + bw$  ist aus  $h$  und insbesondere kurz. Nach Lemma 4.6 gibt es ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ , so daß  $g(v_l) = av + bw$ , also  $g(l) \subset h$  ist.

2. Fall  $v_l$  ist lang.

Nach Lemma 4.7 müssen wir zeigen, daß es in  $h$  einen langen Vektor  $\tilde{v}$  mit der Eigenschaft  $\tilde{v} = \overline{v_l}$  und  $(v_2, v_4) \equiv \pm(\tilde{v}_2, \tilde{v}_4) \pmod{p}$  gibt. Nach Voraussetzung gibt es ein  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}$ , so daß  $g(l) \subset h$  ist. Dann ist  $w' = g(v_l)$  ein langer Vektor aus  $h$  mit der Eigenschaft  $(w'_2, w'_4) \equiv \pm(v_2, v_4) \pmod{p}$ . Es sei  $v'$  ein kurzer Vektor in  $h$ , so daß  $h = v' \wedge w'$  und  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ein teilerfremdes Paar, so daß  $a \equiv b - 1 \equiv 0 \pmod{p}$  und  $\overline{v_l} = \overline{av' + bw'}$  gilt. Der Vektor  $av' + bw'$  ist lang und es gilt  $(av'_2 + bw'_2, av'_4 + bw'_4) \equiv \pm(v_2, v_4) \pmod{p}$ .

□

## 5 Singularitäten auf $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$

In diesem Kapitel werden wir die Singularitäten von  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  bestimmen. Im Gegensatz zur Situation ohne Levelstruktur wird sich herausstellen, daß wir uns lediglich auf den Rand  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^* \setminus \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  konzentrieren müssen. Die einzigen Elemente in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  endlicher Ordnung sind nämlich Involuntionen, die lokal als Quasireflectionen operieren. Auch auf dem Rand bietet uns die Einführung der Level-2-Struktur Vorteile. Während in der Situation ohne Levelstruktur noch beachtet werden muß, daß die Stabilisatoren in  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  bestimmter Kegel nicht trivial sind und möglicherweise zu Singularitäten führen können, ist die Situation auf  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  einfacher. Wir haben schon in Hilfssatz 3.25 gesehen, daß der Stabilisator in  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  nur für bestimmte zweidimensionale Kegel nicht-trivial ist. Es wird sich herausstellen, daß diese Stabilisatoren lediglich als Quasireflectionen operieren, so daß der Quotient glatt ist.

Die auftretenden Singularitäten korrespondieren zu Orbits von dreidimensionalen Kegeln. Für diese Kegel  $\sigma$  gibt es keine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\{n'_1, n'_2, n'_3\}$  des Gitters  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$ , so daß  $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}n'_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}n'_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}n'_3$  ist. Zur Beschreibung der Singularitäten betrachten wir das  $\mathbb{Z}$ -Untermodul  $N' = 2p\mathbb{Z}^3$  in  $N$  vom Index  $p$ . Die Varietät  $X' = X_{\Sigma_{N'}}$  wird dann von affinen Varietäten  $X'_\sigma \simeq \mathbb{C}^3$  überdeckt und ist damit glatt. Der Quotient  $N/N'$  operiert zyklisch auf den affinen Varietäten  $X'_\sigma$  und wird eine Beschreibung der Quotientensingularitäten liefern.

### 5.1 Quotientensingularitäten

**Notation** Mit  $V_{\frac{1}{k}(a,b,c)}$  sei für eine  $k$ -te Einheitswurzel  $\xi$  die Quotientensingularität von  $\mathbb{C}^3 / \langle (x, y, z) \mapsto (\xi^a \cdot x, \xi^b \cdot y, \xi^c \cdot z) \rangle$  in dem zum Ursprung entsprechenden Punkt bezeichnet.

Zunächst werden wir einige spezielle Singularitäten von Varietäten einführen, die eine wesentliche Bedeutung bei der Frage nach der Fortsetzbarkeit von plurikanonischen Differentialformen haben (siehe Satz 5.2).

**Definition 5.1** Eine normale, quasiprojektive Varietät  $X$  besitzt *kanonische Singularitäten*, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- i) Für eine ganze Zahl  $r \geq 1$  ist der Weil Divisor  $rK_X$  Cartier Divisor.
- ii) Ist  $f : Y \rightarrow X$  eine Auflösung von  $X$  und  $\{E_i\}$  die Familie von exzep-

tionellen Primdivisoren, so ist

$$rK_Y = f^*(rK_X) + \sum a_i E_i \quad \text{mit } a_i \geq 0$$

Gilt sogar  $a_i > 0$  für jeden exzeptionellen Divisor  $E_i$ , so besitzt  $X$  *terminale Singularitäten*. Die kleinste Zahl  $r$ , für die  $rK_X$  Cartier ist, heißt *Index* der kanonischen (terminalen) Singularität.

**Satz 5.2** *Es sei  $\omega$  eine plurikanonische Form des  $\mathbb{C}^3$ , die bezüglich einer Gruppe  $G$ , die linear und frei in Kodimension 1 auf  $\mathbb{C}^3$  operiert, invariant ist. Dann läßt sich  $\omega^G$  zu einem nichtsingulärem Modell von  $\mathbb{C}^3/G$  fortsetzen, falls für jedes Element  $g$  jede Singularität von  $\mathbb{C}^3/\langle g \rangle$  kanonisch ist.*

*Beweis.* [Tai, Theorem 3.3] □

Die folgenden beiden Sätze geben uns zahlentheoretisches Kriterium zur Hand, um zu entscheiden, wann eine Quotientensingularität von dieser besonderen Art ist.

**Satz 5.3** *Eine Singularität vom Typ  $V_{\frac{1}{k}(a,b,c)}$  ist genau dann terminal (bzw. kanonisch), falls*

$$\overline{ma} + \overline{mb} + \overline{mc} > k \quad (\text{bzw. } \geq k)$$

für alle  $m = 1, \dots, k-1$  gilt, wobei für eine ganze Zahl  $x$  mit  $\bar{x}$  der Rest von  $x$  aus dem Bereich der Zahlen  $0, \dots, k-1$  bezeichnet ist.

*Beweis.* [R1, Theorem 4.11] □

**Bemerkung 5.4** Nach Lemma [R1, Lemma 5.3] ist die Eigenschaft terminal für eine Singularität vom Typ  $V_{\frac{1}{k}(a,b,c)}$  äquivalent dazu, daß die Gleichung

$$\overline{am} + \overline{bm} + \overline{cm} = \overline{(a+b+c)m} + k$$

für alle  $m = 1, \dots, k-1$  erfüllt ist.

**Satz 5.5 (Terminal Lemma)** *Es seien  $q, n, m \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft  $n \equiv m \pmod{2}$  und  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}(a_i, q) = \text{ggT}(b_j, q) = 1$ . Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

$$(i) \quad \sum_{i=1}^n \overline{a_i k} = \sum_{i=1}^m \overline{b_i k} + \frac{n-m}{2} \cdot q \quad \text{für } k = 1, \dots, q-1$$

(ii) Die Menge  $\{a_i, b_j\}$  kann in  $\frac{n+m}{2}$  disjunkte Paare der Form

$$\begin{array}{lll} (a_i, a_{i'}) & \text{mit} & a_i \equiv -a_{i'} \pmod{q} \quad \text{oder} \\ (b_j, b_{j'}) & \text{mit} & b_j \equiv -b_{j'} \pmod{q} \quad \text{oder} \\ (a_i, b_j) & \text{mit} & a_i \equiv b_j \pmod{q} \end{array}$$

partitioniert werden.

*Beweis.* [R1, Theorem 5.4] □

**Satz 5.6** Eine isolierte Singularität  $P$  vom Typ  $V_{\frac{1}{k}(a,b,c)}$  ist genau dann kanonisch, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i)  $P$  ist terminal
- (ii)  $a + b + c \equiv 0 \pmod{k}$
- (iii)  $P$  ist zu einer Singularität vom Typ  $V_{\frac{1}{9}(1,4,7)}$  oder  $V_{\frac{1}{14}(1,9,11)}$  isomorph.

*Beweis.* [M, Theorem 4] □

**Bemerkung 5.7** Der Fall (iii) kann nur dann auftreten, falls  $k$  nicht prim ist. Angenommen, es gilt weder (i) noch (ii) für eine kanonische Singularität vom Typ  $V_{\frac{1}{p}(a,b,c)}$  mit  $p$  prim. Dann gibt es nach Satz 5.3 ein  $m \in \{1, \dots, p-1\}$ , so daß

$$\overline{am} + \overline{bm} + \overline{cm} = p$$

ist. Es gilt  $\overline{am} + \overline{bm} + \overline{cm} \equiv m(a+b+c) \pmod{p}$ , so daß damit schon  $a+b+c \equiv 0 \pmod{p}$ , also (ii) gelten muß.

Für den Fall, daß  $X$  eine torische Varietät ist, läßt sich der Typ einer Quotientensingularität aus dem folgenden Satz bestimmen.

**Satz 5.8** Für ein  $r$ -dimensionalen streng konvexen rationalen polyhedralen Kegel  $\sigma$  in  $N_{\mathbb{R}}$  sei  $\{n'_1, \dots, n'_s\}$  die Menge der primitiven Elemente von  $N$  ( $r$  sei der Rang des Gitters  $N$ ), die auf den eindimensionalen Kegeln von  $\sigma$  liegen. Es sei  $j > 0$  eine ganze Zahl.

- i)  $T_{\sigma}$  hat im Punkt  $\text{orb}(\sigma)$  genau dann eine kanonische Singularität vom Index  $j$ , falls es ein primitives Element  $m_0$  in  $M$  gibt, so daß

$$\begin{aligned} \langle m_0, n'_1 \rangle &= \dots = \langle m_0, n'_s \rangle = j \quad \text{und} \\ \langle m_0, n \rangle &\geq j \quad \text{für alle } n \in \sigma \cap N \setminus \{0\} \end{aligned}$$

gilt.

i)  $T_\sigma$  hat im Punkt  $\text{orb}(\sigma, N)$  genau dann eine terminale Singularität vom Index  $j$ , falls es ein primitives Element  $m_0$  in  $M$  gibt, so daß

$$\langle m_0, n'_1 \rangle = \cdots = \langle m_0, n'_s \rangle = j \quad \text{und} \\ \langle m_0, n \rangle > j \quad \text{für alle } n \in \sigma \cap N \setminus \{0, n'_1, \dots, n'_s\}$$

gilt.

*Beweis.* [R2, p. 294]

□

## 5.2 Die Situation auf $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$

**Lemma 5.9** Die einzigen Elemente endlicher Ordnung in  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  sind bis auf Konjugation mit Elementen aus  $\Gamma_{1,p}^\circ$  die Matrizen  $\pm \mathbf{1}_4$  und  $\pm I$  mit  $I = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ .

*Beweis.* Der Fall  $p = 3$  wurde schon in [GH1, Lemma 2. 3] bewiesen und läßt sich leicht verallgemeinern:

Jedes Element  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  ist von der Form

$$g = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 + A & B \\ C & \mathbf{1}_2 + D \end{pmatrix}$$

mit  $A, B, C, D \equiv 0 \pmod{2}$  und damit  $g^2 \equiv \mathbf{1}_4 \pmod{4}$ . Für ein Element  $g$  endlicher Ordnung muß dann notwendigerweise  $g^2 = \mathbf{1}_4$  sein, das heißt,  $g$  ist eine Involution. Nach [Br, Kapitel 2, Folgerung 2.9] sind die einzigen Involutionen in  $\Gamma_{1,p}^\circ$  bis auf Konjugation die Elemente  $\pm \mathbf{1}_4, \pm I$  und

$$\pm \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Involution ist nicht in  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$ , so daß die Aussage folgt.

□

**Satz 5.10**  $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  ist glatt.

*Beweis.* Nach [Br, Kapitel 2, Folgerung 2.2] operieren die obigen Involutionen lokal als Quasirefektionen.

□

### 5.3 Singularitäten auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$

Da  $\Gamma_{1,p}^\circ$  nach Satz 4.4 ii) transitiv auf der Menge der kurzen bzw. langen Vektoren und transitiv auf der Menge der isotropen Ebenen operiert, werden wir uns bei der Untersuchung der Singularitäten auf dem Rand  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^* \setminus \mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$  auf die zu den isotropen Geraden  $l_0, l_{(0,1)}$  und der isotropen Ebene  $h = l_0 \wedge l_{(0,1)}$  korrespondierenden Randkomponenten beschränken. Nach Korollar 3.10 ist die Stabilisatorgruppe von  $l_0$  in  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$

$$P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & m & s & n \\ 0 & a & * & b \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & c & * & d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1}\Gamma_1(2)E \\ m, s \in 2\mathbb{Z}, n \in 2p\mathbb{Z}, \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

wobei die Einträge „\*“ gerade ganze Zahlen sind, die sich aus der symplektischen Bedingung ergeben.

Das Zentrum des unipotenten Radikals  $P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  von  $P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist

$$P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \middle| B = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, s \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

und liefert die korrespondierende partielle Quotientenabbildung für die Gerade  $l_0$ :

$$e_{l_0} : \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \longrightarrow X(l_0) \subseteq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1 \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_1}, \tau_2, \tau_3) \end{cases}$$

Eine offene Umgebung von  $D^\circ(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  erhält man dann als Quotienten einer Umgebung von  $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  nach der induzierten Operation von  $P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = P(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))/P'(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  auf  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$ , die wie folgt beschrieben werden kann:

Es ist

$$P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \simeq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon m & \varepsilon n \\ 0 & \varepsilon a & \varepsilon b \\ 0 & \varepsilon c & \varepsilon d \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1}\Gamma_1(2)E \\ m \in 2\mathbb{Z}, n \in 2p\mathbb{Z}, \varepsilon = \pm 1 \end{array} \right\}$$

und  $P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  operiert auf  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  (mit Koordinaten  $t_1 := e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_1}, \tau_2, \tau_3$ ) durch

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon m & \varepsilon n \\ 0 & \varepsilon a & \varepsilon b \\ 0 & \varepsilon c & \varepsilon d \end{pmatrix} : (t_1, \tau_2, \tau_3) \rightarrow \begin{pmatrix} t_1' \\ \tau_2' \\ \tau_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 e^{\pi i \varepsilon [m\tau_2 - \tau_2'(c\tau_2 + c\varepsilon n - d\varepsilon m)]} \\ (\varepsilon\tau_2 + m\tau_3 + n)(c\tau_3 + d)^{-1} \\ (a\tau_3 + b)(c\tau_3 + d)^{-1} \end{pmatrix}$$

**Proposition 5.11**  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  ist lokal um  $D^\circ(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  und  $D^\circ(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  glatt.

*Beweis.* Da sich die Beweisführung in den Fällen der beiden isotropen Geraden ähnelt, werden wir uns hier lediglich auf die Untersuchung von  $D^\circ(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  beschränken.

Es sei  $(t_1, \tau_2, \tau_3) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  und  $g = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon m & \varepsilon n \\ 0 & \varepsilon a & \varepsilon b \\ 0 & \varepsilon c & \varepsilon d \end{pmatrix} \in P''(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$ , so

daß  $g(t_1, \tau_2, \tau_3) = (t_1, \tau_2, \tau_3)$  ist. Aus der Invarianz von  $\tau_3$  liest man

$$\tau_3 = (a\tau_3 + b)(c\tau_3 + d)^{-1} \text{ für } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E^{-1} \cdot \Gamma_1(2) \cdot E$$

ab.

Die Operation von  $E^{-1} \cdot \Gamma_1(2) \cdot E$  auf  $\mathbb{H}_1$  kann via

$$\tau \mapsto \tau/p \quad \text{und} \quad E^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot E \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

durch die linear gebrochene Operation von  $\Gamma_1(2)$  auf  $\mathbb{H}_1$  äquivariant beschrieben werden. Dann ist also  $\tau_3$  genau dann fix unter der Operation von  $E^{-1} \cdot \Gamma_1(2) \cdot E$ , falls  $\tau_3/p$  ein Fixpunkt unter der Operation von  $\Gamma_1(2)$  auf  $\mathbb{H}_1$  ist, so daß also entweder  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{1}_2$  oder  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathbf{1}_2$  ist.

Im ersten Fall haben wir entweder  $\varepsilon = 1$  oder  $\varepsilon = -1$ .

Im Fall  $\varepsilon = 1$  ist  $\tau_2 = \tau_2 + m\tau_3 + n$ , also  $m = n = 0$  und damit  $g = \mathbf{1}_3$ .

Der Fall  $\varepsilon = -1$  liefert den Fixort

$$\tau_2 = -\tau_2 - m\tau_3 - n \Leftrightarrow 2\tau_2 = -m\tau_3 - n \in \tau_3 2\mathbb{Z} + 2p\mathbb{Z}.$$

Das Element  $g$  operiert durch

$$g(t_1, \tau_2, \tau_3) = (t_1 e^{-2\pi i m(2\tau_2 - m\tau_3 - n)}, -\tau_2 + m\tau_3 + n, \tau_3),$$

was lokal um  $\tau_2 = -\frac{m\tau_3 + n}{2}$  einer Quasireflection entspricht und somit zu glatten Punkten in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  führt. Diese Punkte entstehen durch die Kummerinvolution:

Das Element  $g = \begin{pmatrix} 1 & -m & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  entspricht dem Element

$$\begin{pmatrix} 1 & -m & 0 & n \\ 0 & 1 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ in } \Gamma_{1,p}^\circ(2),$$

welches konjugiert zu  $I$  ist.

Im Fall  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$  liefert  $\varepsilon = -1$  die Identität und  $\varepsilon = 1$  führt wieder zur Kurve  $2\tau_2 = -m\tau_3 - n$ .

□

Bleibt also, die Korang-2-Randkomponenten zu betrachten.

Die Stabilisatorgruppe von  $h$  in  $\Gamma_{1,p}^\circ(2)$  ist

$$P(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cc|cc} {}^t A^{-1} & 0 & & \\ 0 & A & & \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}), \\ A - \mathbf{1}_2 \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \cdot P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2)),$$

wobei  $P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  das Zentrum des unipotenten Radikals von  $P(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist und durch

$$P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{cc|c} \mathbf{1}_2 & B & \\ 0 & \mathbf{1} & \end{array} \right) \mid B \in N \right\}$$

mit

$$N = \left\{ B \in \mathrm{Sym}(2, \mathbb{Z}) \mid B \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben ist.

Die korrespondierende toroidale Umgebung im Unendlichen ist das Bild von  $\mathbb{H}_2$  unter der durch  $P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  induzierten partiellen Quotientenabbildung

$$e_h : \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{H}_2 & \longrightarrow T = (\mathbb{C})^* \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_1}, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_2}, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_3}) \end{array} \right.$$

Es sei  $\pi : P(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  durch

$$\pi \left( \left( \begin{array}{cc|cc} {}^t A^{-1} & 0 & & \\ 0 & A & & \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \right) = A$$

definiert. Dann wird  $P''(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) = P(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))/P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  mit der Untergruppe

$$F^\circ := \left\{ A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid A - \mathbf{1}_2 \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}$$

von  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  identifiziert.

Es sei  $\varphi : \mathcal{P}'(h) \longrightarrow \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ , definiert durch

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & B \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \right) = B.$$



Dann ist  $\varphi(P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))) = N \subset \text{Sym}(2, \mathbb{R})$ . Unter diesen Identifikationen ergibt sich dann die adjungierte Operation von  $P''(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  auf  $P'(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  durch

$$A : B \mapsto {}^t A^{-1} B A^{-1}.$$

**Bemerkung 5.12** Identifizieren wir  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$  durch

$$\eta : \begin{cases} \text{Sym}(2, \mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_2 & s_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

mit  $\mathbb{R}^3$  und führen  $\mu$  als das zweite symmetrische Produkt der Darstellung  $g \rightarrow \frac{1}{\det(g)} \cdot g^{-1}$  von  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  ein, also

$$\mu : \begin{cases} \text{GL}(2, \mathbb{R}) & \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \frac{1}{(\det(g))^2} \begin{pmatrix} d^2 & -2cd & c^2 \\ -bd & ad+bc & -ac \\ b^2 & -2ab & a^2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

so ist durch  $B \mapsto \eta(B)$ ,  $B \in \text{Sym}(2, \mathbb{R})$  und  $A \mapsto \mu(A)$ ,  $A \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  ein äquivarianter Isomorphismus bezüglich der Operationen von  $\text{GL}(3, \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{R}^3$  (Matrizenmultiplikation von links) und der Operation  $B \mapsto {}^t A^{-1} B A^{-1}$  von  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$  auf  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$  gegeben.

Bei der Berechnung des Titsgebäudes haben wir die  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$ -Orbiten von  $\Lambda$ -isotropen Unterräumen indiziert. Um weiterhin auf diese Indizierung und insbesondere auf die Berechnungen in [HKW1, I.4A] Bezugnehmen zu können, werden wir die entsprechende Stabilisatorgruppe  $P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  bestimmen. Diese bestimmt sich durch Konjugation der Stabilisatorgruppe  $P(h, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  mit  $R_p$ . Die Stabilisatorgruppe  $P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) \subset \text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$  ist

$$P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} Q' & 0 \\ 0 & Q \end{array} \right) \middle| \begin{array}{l} Q' = E^t Q^{-1} E^{-1} \\ Q \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \\ Q - \mathbf{1}_2 \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \cdot P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$$

wobei  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  das Gitter

$$P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{1}_2 & S \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{array} \right) \middle| S \in N \cdot E^{-1} \right\}$$

ist.

Es sei

$$\tilde{\pi} : \begin{cases} P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) & \rightarrow \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \\ \begin{pmatrix} E^t Q^{-1} E^{-1} & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} & \mapsto Q \end{cases}$$

und

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathcal{P}(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) & \rightarrow \text{Sym}(2, \mathbb{R}) \cdot E^{-1} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} & \mapsto S \end{cases}$$

Dann wird  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) = P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))/P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit der Gruppe

$$\tilde{F}^\circ = \left\{ Q \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid Q - \mathbf{1}_2 \in \begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}$$

identifiziert und es ist  $\tilde{\varphi}(P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))) = N \cdot E^{-1}$ . Unter diesen Identifikationen wird die Operation von  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  auf  $\mathcal{P}(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  durch

$$Q : S \mapsto E^t Q^{-1} E^{-1} S Q^{-1}$$

gegeben.

Es sei  $E' := p \cdot E^{-1} = \begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix}$  und

$$\tilde{N} := E' \cdot N \cdot E^{-1} = \left\{ B \in \text{Sym}(2, \mathbb{Z}) \mid B \in \begin{pmatrix} 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}$$

**Proposition 5.13** *Betrachte die folgenden Gruppenoperationen:*

$$\begin{aligned} \phi & : F^\circ \times N & \longrightarrow & N, & \phi(Q, S) & = {}^t Q^{-1} S Q^{-1} \\ \tilde{\phi} & : \tilde{F}^\circ \times N \cdot E^{-1} & \longrightarrow & N \cdot E^{-1}, & \tilde{\phi}(Q, S) & = E^t Q^{-1} E^{-1} S Q^{-1} \\ \hat{\phi} & : \tilde{F}^\circ \times \tilde{N} & \longrightarrow & \tilde{N}, & \hat{\phi}(Q, S) & = {}^t Q^{-1} S Q^{-1} \end{aligned}$$

(i) Die Abbildung  $\psi(Q, S) = (\psi_1(Q), \psi_2(S))$  mit  $\psi_1(Q) = EQE^{-1}$  und  $\psi_2(S) = E'SE^{-1}$  definiert einen äquivalenten Isomorphismus von  $\phi$  nach  $\hat{\phi}$ .

(ii) Die Abbildung  $\tilde{\psi}(Q, S) = (\tilde{\psi}_1(Q), \tilde{\psi}_2(S))$  mit  $\tilde{\psi}_1(Q) = Q$  und  $\tilde{\psi}_2(S) = E'^{-1}S$  definiert einen äquivalenten Isomorphismus von  $\tilde{\phi}$  nach  $\hat{\phi}$ .

*Beweis.* Es ist nur zu zeigen, daß  $\psi_2(\phi(Q, S)) = \hat{\phi}(\psi(Q, S))$  für alle  $(Q, S) \in F^\circ \times \tilde{N}$  bzw.  $\tilde{\psi}_2(\tilde{\phi}(Q, S)) = \hat{\phi}(\tilde{\psi}(Q, S))$  für alle  $(Q, S) \in \tilde{F}^\circ \times N \cdot E^{-1}$  gilt, was leicht nachzurechnen ist.  $\square$

Betrachten wir die Situation in  $\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$ , so ergibt sich analog eine Identifikation von  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}(2)) \subset P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit dem Gitter

$$\tilde{N}' = \left\{ B \in \text{Sym}(2, \mathbb{Z}) \mid B \in \begin{pmatrix} 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \\ 2p\mathbb{Z} & 2p\mathbb{Z} \end{pmatrix} \right\}$$

und von  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  mit der Gruppe

$$\tilde{F} := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{F}^\circ \mid d \equiv 1 \pmod{p} \right\},$$

die auf  $\tilde{N}'$  durch  $(f, S) \mapsto {}^t f^{-1} \cdot S \cdot f^{-1}$ ,  $f \in \tilde{F}$ ,  $M \in \tilde{N}'$  operiert.

**Bemerkung 5.14** Die Gruppe  $\tilde{F}$  ist der Kern des Homomorphismus

$$\begin{cases} \tilde{F}^\circ & \rightarrow \mathbb{Z}_p^* \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto d \pmod{p} \end{cases}$$

und damit normal in  $\tilde{F}^\circ$  (vom Index  $(p-1)$ ).

Wir werden im weiteren Verlauf mit der Gruppe  $\tilde{F}^\circ$  arbeiten, die auf dem zu  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  korrespondierenden Gitter

$$\tilde{N} = \mathbb{Z}\tilde{N}_1 + \mathbb{Z}\tilde{N}_2 + \mathbb{Z}\tilde{N}_3 \subset \text{Sym}(2, \mathbb{Z})$$

mit

$$\tilde{N}_1 = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2p & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

operiert. Der zugehörige Torus ist  $T := P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \otimes \mathbb{C} / P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \simeq (\mathbb{C}^*)^3$ , so daß  $\tilde{N}$  die Gruppe der 1-Parameteruntergruppen und das duale Gitter

$$\tilde{M} := \mathbb{Z}\tilde{M}_1 + \mathbb{Z}\tilde{M}_2 + \mathbb{Z}\tilde{M}_3$$

mit

$$\tilde{M}_1 = \begin{pmatrix} (2p)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & (2p)^{-1} \\ (2p)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$$

die Gruppe der Charaktere von  $T$  beschreibt. Es sei  $\Sigma_L^{\tilde{N}} \subset \tilde{N}_{\mathbb{R}}$  der durch die Legendrezerlegung induzierte Fächer. Dann wird die partielle Quotientenabbildung durch

$$e_h : \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \longrightarrow \mathbb{H}_2/P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \subset T \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \longmapsto (e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau}, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_2}, e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_3}) \end{cases}$$

gegeben.

Der Fächer  $\Sigma_L^{\tilde{N}}$  definiert eine Toruseinbettung  $T_{\tilde{N}} \subset T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}$ . Nach [Od, Th. 1.10] führt die Toruseinbettung  $T_{\tilde{N}} \subset T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}$  möglicherweise zu Singularitäten, die sich wie folgt beschreiben lassen:

Das Gitter  $\tilde{N}'$  ist ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul vom Index  $p$  in  $\tilde{N}$  mit dualem Gitter  $\tilde{M}' = \frac{1}{2p} \text{Sym}(2, \mathbb{Z})$ . Es sei  $X' := \mathbb{H}_2/\tilde{N}' \subset T' := \mathbb{C}^3/\tilde{N}'$  und  $e'_h : \mathbb{H}_2 \rightarrow X'$  die zugehörige Quotientenabbildung sowie  $\Sigma_L^{\tilde{N}'}$  der durch die Legendrezerlegung induzierte Fächer, der eine Toruseinbettung  $T_{\tilde{N}'} \subset T'_{\Sigma_L^{\tilde{N}'}}$  definiert.

Da  $\tilde{N}'_{\mathbb{R}} = \tilde{N}_{\mathbb{R}}$  ist, können wir den Fächer  $\Sigma_L^{\tilde{N}}$  auch als Fächer bezüglich  $\tilde{N}'$  auffassen. Damit erhalten wir eine Fächerabbildung  $\varphi : \Sigma_L^{\tilde{N}'} \rightarrow \Sigma_L^{\tilde{N}}$  und die korrespondierende, holomorphe Abbildung

$$\varphi_* : T'_{\Sigma_L^{\tilde{N}'}} \longrightarrow T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}},$$

die mit der Projektion auf den Quotienten von  $T'_{\Sigma_L^{\tilde{N}'}}$  nach der natürlichen Operation von  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{M}'/\tilde{M}, \mathbb{C}^*) \simeq \tilde{N}/\tilde{N}'$  übereinstimmt (siehe dazu Abschnitt 3.1.1).

In unserem Fall ist  $\zeta := (1, 1, e^{\frac{2\pi i}{p}})$  ein zyklischer Erzeuger von  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\tilde{M}'/\tilde{M}, \mathbb{C}^*)$ . Der algebraische Torus  $T'$  sei mit den Koordinaten  $t_1, t_2, t_3$  versehen, die zur Basis

$$\tilde{N}'_1 = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tilde{N}'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2p \\ 2p & 0 \end{pmatrix}, \tilde{N}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2p \end{pmatrix}$$

von  $\tilde{N}'$  korrespondieren.

**Hilfssatz 5.15** *Die affinen Toruseinbettungen  $T'_\sigma$ , die zu dreidimensionalen Kegeln  $\sigma$  aus dem Legendre-Fächer korrespondieren, sind isomorph zu  $\mathbb{C}^3$  und insbesondere ist  $T'_{\Sigma_L^{\tilde{N}'}}$  eine glatte, komplexe Mannigfaltigkeit.*

*Beweis.* Folgt sofort aus [Od, Theorem 1.9], da jede affine Toruseinbettung  $T'_\sigma$  unter der Operation von  $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  isomorph zu  $T'_{\sigma_0}$  ist und  $\sigma_0$  von einer Basis des Gitters  $\widetilde{N}'$  erzeugt wird. □

**Hilfssatz 5.16** (i) Für ein  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$  ist bezüglich der gewählten Koordinaten  $(t_1, t_2, t_3)$  die Einbettung  $i_{g(\sigma_0)} : T' = (\mathbb{C}^*)^3 \hookrightarrow T'_{g(\sigma_0)} = \mathbb{C}^3$  durch die Abbildungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1^{a(a-b)} \cdot t_2^{c(a-b)+a(c-d)} \cdot t_3^{c(c-d)} \\ t_1^{ab} \cdot t_2^{ad+bc} \cdot t_3^{cd} \\ t_1^{b(b-a)} \cdot t_2^{b(d-c)+d(b-a)} \cdot t_3^{d(d-c)} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Die Einbettung  $T' = (\mathbb{C}^*)^3 \hookrightarrow T'_{g(\xi_{13})} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  wird durch

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t_1^{a^2} \cdot t_2^{2ac} \cdot t_3^{c^2} \\ t_1^{ab} \cdot t_2^{ad+bc} \cdot t_3^{cd} \\ t_1^{b^2} \cdot t_2^{2bd} \cdot t_3^{d^2} \end{pmatrix}$$

gegeben.

*Beweis.* Eine elementare Rechnung liefert für den Kegel  $\sigma_0$  den dualen Kegel

$$\sigma_0^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

so daß

$$\sigma_0^\vee \cap \widetilde{M}' = \mathbb{Z}_{\geq 0}(\widetilde{M}'_1 - \widetilde{M}'_2) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(\widetilde{M}'_2) + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-\widetilde{M}'_2 + \widetilde{M}'_3)$$

ist.

Um nun  $g(\sigma_0)^\vee \cap \widetilde{M}'$  zu berechnen, nutzen wir die in Bemerkung 5.12 eingeführte Äquivarianz. Da  $\mu(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}))$  das Gitter  $\eta(\widetilde{N}') = 2p\mathbb{Z}^3$  und damit auch das Gitter  $\eta(\widetilde{M}')$  durch Rechtsmultiplikation invariant läßt, folgt:

$$\begin{aligned} \eta(g(\sigma_0)^\vee \cap \widetilde{M}') &= \eta((\sigma_0^\vee \cap \widetilde{M}') \cdot \mu(g)^{-1}) \\ &= \eta(\mathbb{Z}_{\geq 0}(a(a-b)\widetilde{M}'_1 + (2ca - (ad+bc))\widetilde{M}'_2 + c(c-d)\widetilde{M}'_3) \\ &\quad + \mathbb{Z}_{\geq 0}(ab\widetilde{M}'_1 + (ad+bc)\widetilde{M}'_2 + cd\widetilde{M}'_3) \\ &\quad + \mathbb{Z}_{\geq 0}(-b(b-a)\widetilde{M}'_1 + (2bd - (ad+bc))\widetilde{M}'_2 + d(d-c)\widetilde{M}'_3)) \end{aligned}$$

Weiter berechnet man leicht

$$\xi_{13}^\vee \cap M' = \mathbb{Z}_{\geq 0}M'_1 + \mathbb{Z}M'_2 + \mathbb{Z}_{\geq 0}M'_3$$

und wie oben ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta(g(\xi_{13})^\vee \cap \widetilde{M}') &= \eta(\mathbb{Z}_{\geq 0}(a^2\widetilde{M}'_1 + 2ac\widetilde{M}'_2 + c^2\widetilde{M}'_3) \\ &\quad + \mathbb{Z}_{\geq 0}(ab\widetilde{M}'_1 + (ad + bc)\widetilde{M}'_2 + cd\widetilde{M}'_3) \\ &\quad + \mathbb{Z}_{\geq 0}(b^2\widetilde{M}'_1 + 2bd\widetilde{M}'_2 + d^2\widetilde{M}'_3)) \end{aligned}$$

□

Unter diesen Abbildungen ergibt sich das Bild von  $\zeta$  in  $T'_{g(\sigma_0)}$  und  $T'_{g(\xi_{13})}$  als

$$\begin{aligned} \zeta_{g(\sigma_0)} &= (e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot c(c-d)}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot cd}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot d(d-c)}) \\ \zeta_{g(\xi_{13})} &= (e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot c^2}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot cd}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot d^2}) \end{aligned}$$

**Lemma 5.17** *Ist  $\tau$  ein zweidimensionaler Kegel aus dem Legendre-Fächer, so ist*

$$\varphi_* \Big|_{\overline{\text{orb}(\tau, \widetilde{N}')}} : \overline{\text{orb}(\tau, \widetilde{N}')} \longrightarrow \overline{\text{orb}(\tau, \widetilde{N})}$$

*ein surjektiver Morphismus von glatten, rationalen Kurven.*

*Beweis.* Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von [Br, Folgerung 5.17], den wir lediglich auf unsere Situation anpassen müssen. Zunächst werden wir zeigen, daß  $\overline{\text{orb}(\tau, \widetilde{N}')}$  eine glatte, rationale Kurve  $\mathbb{P}_1$  ist. Wegen der Transitivität von  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  auf der Menge der zweidimensionalen Kegel im Legendre-Fächer läßt sich  $\tau = \xi_{13} = \sigma_0 \cap \sigma_{-1}$  annehmen. Dann sind die Einbettungen  $i_0 : T'_{\xi_{13}} \hookrightarrow T'_{\sigma_0}$  und  $T'_{\xi_{13}} \hookrightarrow T'_{\sigma_{-1}}$  zu betrachten. Ist  $(\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2, \widetilde{U}_3)$  die duale Basis von  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  in  $\widetilde{M}'$ , so ist

$$\sigma_0^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\widetilde{U}_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\widetilde{U}_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}\widetilde{U}_3$$

und es läßt sich leicht

$$\sigma_{-1}^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}(\widetilde{U}_1 + 2\widetilde{U}_2) + \mathbb{R}_{\geq 0}(2\widetilde{U}_2 + \widetilde{U}_3) + \mathbb{R}_{\geq 0}(-\widetilde{U}_2)$$

berechnen, woraus sich die Einbettungen

$$\begin{aligned} i_0 : T'_{\xi_{13}} &= \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \hookrightarrow T'_{\sigma_0} = \mathbb{C}^3, (s_1, s_2, s_3) \mapsto (s_1, s_2, s_3) \\ i_{-1} : T'_{\xi_{13}} &= \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \hookrightarrow T'_{\sigma_{-1}} = \mathbb{C}^3, (s_1, s_2, s_3) \mapsto (s_1 s_2^2, s_2^2 s_3, s_2^{-1}) \end{aligned}$$

ergeben. Die Identifikation von  $T'_{\sigma_0}$  mit  $T'_{\sigma_{-1}}$  entlang  $T'_{\xi_{13}}$  liefert dann eine projektive Gerade:

Es ist  $\text{orb}(\xi_{13}, \widetilde{N}') = \{0\} \times \mathbb{C}^* \times \{0\}$  in  $T'_{\xi_{13}}$  und  $t \in \text{orb}(\xi_{13}, \widetilde{N}')$  wird unter den Einbettungen  $i_0$  und  $i_{-1}$  auf das Koordinatentripel  $(0, t, 0)$  bzw.  $(0, 0, t^{-1})$  abgebildet, so daß

$$\overline{\text{orb}(\xi_{13}, \widetilde{N}')} = \text{orb}(\xi_{13}, \widetilde{N}') \cup \text{orb}(\sigma_0, \widetilde{N}') \cup \text{orb}(\sigma_{-1}, \widetilde{N}')$$

in  $T'_{\Sigma_L \widetilde{N}'}$  eine projektive Gerade ist.

Es sei  $g(\xi_{13})$  mit  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$  ein zweidimensionaler Kegel im Legendre-Fächer. Dann ist  $g(\xi_{13}) = g(\sigma_0) \cap g(\sigma_{-1})$  und  $\text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}')$  wird bezüglich gewählter Koordinaten von  $T'_{g(\sigma_0)}$  durch

$$\begin{aligned} \text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}') &\rightarrow T'_{g(\sigma_0)} \\ t &\mapsto (0, t, 0) \\ \\ \text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}') &\rightarrow T'_{g(\sigma_{-1})} \\ t &\mapsto (0, 0, t^{-1}) \end{aligned}$$

eingebettet. Die Operation von  $\zeta_{g(\sigma_0)}$  auf  $\text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}') \subset T'_{g(\sigma_0)}$  ist dann durch

$$\begin{aligned} t &\mapsto t \cdot e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot cd} && \text{bzw.} \\ t^{-1} &\mapsto t^{-1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (-cd)} \end{aligned}$$

gegeben, so daß sich insgesamt unter der Identifikation  $\overline{\text{orb}(\xi_{13}, \widetilde{N}')} = \mathbb{P}_1$  die Abbildung  $\varphi_* \Big|_{\overline{\text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}')}}$  als Quotientenabbildung

$$[x_0 : x_1] \mapsto \left[ x_0 \cdot e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot cd} : x_1 \right]$$

nach der von  $e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot cd}$  erzeugten zyklischen Gruppe auffassen läßt. Damit folgt die Aussage aus der Tatsache, daß der Quotient einer projektiven Gerade nach einer zyklischen Automorphismengruppe wieder eine projektive Gerade ist.

□

**Korollar 5.18** *Ist  $P$  ein Punkt in einem Orbit  $\text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}')$ , so ist das Bild von  $P$  unter der Abbildung  $\varphi_*$  in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  glatt.*

*Beweis.* Nach Lemma 5.17 hat  $\varphi_*(P)$  eine offene Umgebung  $T_{g(\xi_{13})}$  in  $T_{\Sigma_L^{\widetilde{N}}}$ , die glatt ist, so daß  $P$  nur dann zu einer Singularität führen kann, wenn  $P$  Fixpunkt eines nichttrivialen Elements aus dem Durchschnitt  $\text{Stab}(g(\xi_{13})) \cap \widetilde{F}^\circ = (g \cdot \text{Stab}(\xi_{13}) \cdot g^{-1}) \cap \widetilde{F}^\circ$  ist. Nach Hilfsatz 3.25 sind nur die Kegel  $g(\xi_{13})$  mit  $c \equiv 0 \pmod{p}$  oder  $d \equiv 0 \pmod{p}$  zu betrachten. Der Stabilisator von  $g(\xi_{13})$  wird von  $g \cdot V_0 \cdot g^{-1}$  erzeugt und  $g \cdot V_0 \cdot g^{-1}$  operiert auf  $T'_{g(\xi_{13})} \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  durch

$$g \cdot V_0 \cdot g^{-1} : \begin{cases} T'_{g(\xi_{13})} & \rightarrow T'_{g(\xi_{13})} \\ (t_1, t_2, t_3) & \mapsto (t_1, t_2^{-1}, t_3) \end{cases}$$

als Quasirefektion (mit Fixpunktmenge  $\{\mathbb{C} \times \{\pm 1\} \times \mathbb{C}\}$ ). Wir haben dann  $\zeta_{g(\xi_{13})} = (e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot c^2}, 1, 1)$  im Fall  $d \equiv 0 \pmod{p}$  bzw.  $\zeta_{g(\xi_{13})} = (1, 1, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot d^2})$  im Fall  $c \equiv 0 \pmod{p}$ , die auf  $T'_{g(\xi_{13})}$  durch

$$\begin{aligned} (t_1, t_2, t_3) & \mapsto (t_1 \cdot e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot c^2}, t_2, t_3) \text{ bzw.} \\ (t_1, t_2, t_3) & \mapsto (t_1, t_2, t_3 \cdot e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot d^2}) \end{aligned}$$

operieren, so daß der Quotient glatt ist. □

Bleibt nun noch, die zu dreidimensionalen Kegeln in  $\Sigma_L^{\widetilde{N}}$  korrespondierenden Orbiten zu untersuchen. In Korollar 3.24 wurde gezeigt, daß wir uns bis auf  $P''(h, \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$ -Äquivalenz auf die Liste der Kegel

$$\begin{aligned} \sigma_r &= g^r(\sigma_0), \quad r = 0, \dots, p-1 \\ \sigma' &= g'(\sigma_0) \end{aligned}$$

mit  $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$  und  $g' = \begin{pmatrix} 2-p & 1-p \\ p-1 & p \end{pmatrix}$  beschränken können.

**Satz 5.19** *Die affine Toruseinbettung  $T_{\Sigma_L^{\widetilde{N}}}$  besitzt genau  $p-2$  isolierte Quotientensingularitäten.*

*Beweis.* Um die Singularitäten in  $T_{\Sigma_L^{\widetilde{N}}}$  zu bestimmen, müssen wir die Operation von  $\zeta$  auf den affinen Toruseinbettungen  $T'_{\sigma_r}$ ,  $r = 0, \dots, p-1$  und  $T'_{\sigma'}$  untersuchen. Das Bild von  $\zeta \in T'$  in  $T'_{\sigma_r}$  (bzw.  $T'_{\sigma'}$ ) wird durch

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma_r} &= (e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (r^2+r)}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (-r)}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (r+1)}) \text{ bzw.} \\ \zeta_{\sigma'} &= (e^{\frac{2\pi i}{p}}, 1, 1) \end{aligned}$$



gegeben. Ein klassisches Resultat von Chevalley besagt, daß nur der Nullpunkt von  $T'_{\sigma_r} \simeq \mathbb{C}^3$  zu einer Singularität führen kann und dies auch nur dann, wenn  $\zeta_{\sigma_r}$  keine Quasireflection ist, das heißt wenn der Rang der Matrix

$$\operatorname{rg} \left( \operatorname{diag} \left( e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (r^2+r)}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (-r)}, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot (r+1)} \right) - \mathbf{1}_3 \right) > 1$$

ist. Es ist also  $\zeta_{\sigma_r}$  genau dann eine Quasireflection, falls

$$r \equiv 0 \pmod{p} \text{ oder } r + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ist. Die Kegel  $g^r(\sigma_0)$ ,  $r \neq 0, p-1$  führen also zu Quotientensingularitäten. Der Fall  $g^1(\sigma_0)$  führt zu einer Quasireflection, da  $\operatorname{rg} \left( \operatorname{diag} \left( e^{\frac{2\pi i}{p}}, 1, 1 \right) - \mathbf{1}_3 \right) = 1$  ist.

□

**Korollar 5.20** *Die Varietät  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  hat genau  $15(p-2)$  isolierte Quotientensingularitäten. Dabei sind je 15 vom Typ  $V_{\frac{1}{p}(r(r+1), -r, r+1)}$ ,  $r = 1, \dots, p-2$ . Im Fall  $p = 3$  sind diese kanonisch vom Index 1. Für  $p \neq 3$  sind diese genau dann kanonisch, falls  $r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  sind.*

*Beweis.* Zunächst ist festzuhalten, daß der Stabilisator in  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  für jeden dreidimensionalen Kegel nach Hilfssatz 3.25 trivial ist. Die Singularitäten auf  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  sind dann lediglich die Punkte, die durch die Operation von  $\zeta$  auf den jeweiligen affinen Toruseinbettungen entstehen. Nach Satz 5.19 liefert jede Korang-2-Randkomponente genau  $(p-2)$  Quotientensingularitäten, die jeweils vom Typ  $V_{\frac{1}{p}(r(r+1), -r, r+1)}$ ,  $r = 1, \dots, p-2$  sind. Nach Satz 4.3 ii) gibt es genau 15 Korang-2-Randkomponenten in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ , so daß die Aussage über die Anzahl der Singularitäten folgt.

Zur Bestimmung des Types der Singularitäten:

- $p = 3$

Nach Satz 5.19 führt der Kegel

$$\sigma_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in  $\tilde{N}_{\mathbb{R}}$  zu einer Quotientensingularität. Dieser Kegel wird von den primitiven Elementen

$$\begin{aligned} n'_1 &= \tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + 3\tilde{N}_3 \\ n'_2 &= 4\tilde{N}_1 + 2\tilde{N}_2 + 3\tilde{N}_3 \\ n'_3 &= \tilde{N}_1 \end{aligned}$$

in  $\tilde{N}$  erzeugt. Es sei  $S$  der Tetraeder mit Eckpunkten  $O, n'_1, n'_2, n'_3$  in  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$ . Betrachte das primitive Element  $m_0 = \tilde{M}_1 - 3\tilde{M}_2 + \tilde{M}_3$  in  $\tilde{M}$ . Dann ist  $\langle m_0, n'_i \rangle = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Eine einfache Rechnung liefert dann  $S \cap \tilde{N} = \{0, n'_1, n'_2, n'_3, n'_4\}$  mit  $n'_4 = 2\tilde{N}_1 + \tilde{N}_2 + 2\tilde{N}_3$  und es ist  $\langle m_0, n'_4 \rangle = 1$ . Nach Satz 5.8 ist damit  $\text{orb}(\sigma_1, \tilde{N})$  eine kanonische Quotientensingularität vom Index 1. Beachte, daß sich diese Singularität lokal als Spitze des affinen Kegels über der Veronese-Fläche in  $\mathbb{P}_9$  beschreiben läßt.

- $p \geq 5$

Das Kriterium in Satz 5.19 führt auf unhandliche Ungleichungen, so daß wir mit Satz 5.3 und 5.6 argumentieren werden. Den Fall (iii) in Satz 5.6 können wir nach der Bemerkung 5.7 ausschließen, so daß die Singularitäten  $V_{\frac{1}{p}(r(r+1), -r, r+1)}$ ,  $r = 1, \dots, p-2$  genau dann zu kanonischen Singularitäten führen, falls  $r(r+1) + -r + r + 1 = r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ist oder falls  $V_{\frac{1}{p}(r(r+1), -r, r+1)}$ ,  $r^2 + r + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  schon eine terminale Singularität ist. Wir nutzen das Terminal Lemma (mit  $a_1 = r(r+1)$ ,  $a_2 = -r$ ,  $a_3 = r+1$  und  $b_1 = r^2 + r + 1$ ), um zu beweisen, daß  $V_{\frac{1}{p}(r(r+1), -r, r+1)}$ ,  $r^2 + r + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  keine terminale Singularität ist. Es reicht aus zu zeigen, daß sich die Einträge der Paare  $(a_1, a_2)$ ,  $(a_1, a_3)$ ,  $(a_2, a_3)$  nicht zu einer Zahl summieren, die ein Vielfaches von  $p$  ist. Es ist

$$\begin{aligned} (i) \quad & r(r+1) - r \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ und} \\ (ii) \quad & r(r+1) + r + 1 \not\equiv 0 \pmod{p} \text{ und} \\ (iii) \quad & -r + r + 1 \not\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

für alle  $r \in \{1, \dots, p-2\}$ ,  $r^2 + r + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ , was leicht nachzurechnen ist. Der Fall (iii) ist trivial. Im Fall (i) muß schon  $r \equiv 0 \pmod{p}$  und im Fall (ii)  $r \equiv -1 \pmod{p}$  sein, was nicht möglich ist.

□

Es sei  $S$  der Tetraeder in  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$ , der von den primitiven Vektoren  $\{n'_1, n'_2, n'_3\}$  und  $\{0\}$  aufgespannt wird, wobei  $\sigma_r = \mathbb{R}_{\geq 0}n'_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}n'_2 + \mathbb{R}_{\geq 0}n'_3$  sei. Dann führt der Kegel  $\sigma_r$  nach Satz 5.8 genau dann zu einer nichtkanonischen Singularität, falls es Gitterpunkte in  $\tilde{N} \setminus \{0\}$  gibt, die im Inneren des Tetraeders  $S$  liegen. Mit Angabe der folgenden Tabelle verifizieren wir die Aussage über den Typ der Singularitäten für die Fälle  $p = 5, 7, 11$ .

$p$	Kegel $\sigma_r$	Punkte im Inneren von S	
5	$\sigma_1$	$2 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 3 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_2$	$3 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 2 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_3$	$7 \cdot \widetilde{N}_1 + 2 \cdot \widetilde{N}_2 + 3 \cdot \widetilde{N}_3$	
7	$\sigma_1$	$2 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 4 \cdot \widetilde{N}_3$	$r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{7}$
	$\sigma_2$	-	
	$\sigma_3$	$4 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 2 \cdot \widetilde{N}_3$	$r^2 + r + 1 \equiv 0 \pmod{7}$
	$\sigma_4$	-	
	$\sigma_5$	$16 \cdot \widetilde{N}_1 + 3 \cdot \widetilde{N}_2 + 4 \cdot \widetilde{N}_3$	
11	$\sigma_1$	$2 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 6 \cdot \widetilde{N}_3$ $2 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 7 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_2$	$3 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 4 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_3$	$4 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 3 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_4$	$9 \cdot \widetilde{N}_1 + 2 \cdot \widetilde{N}_2 + 5 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_5$	$6 \cdot \widetilde{N}_1 + 1 \cdot \widetilde{N}_2 + 2 \cdot \widetilde{N}_3$ $17 \cdot \widetilde{N}_1 + 3 \cdot \widetilde{N}_2 + 6 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_6$	$20 \cdot \widetilde{N}_1 + 3 \cdot \widetilde{N}_2 + 5 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_7$	$15 \cdot \widetilde{N}_1 + 2 \cdot \widetilde{N}_2 + 3 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_8$	$25 \cdot \widetilde{N}_1 + 3 \cdot \widetilde{N}_2 + 4 \cdot \widetilde{N}_3$	
	$\sigma_9$	$46 \cdot \widetilde{N}_1 + 3 \cdot 5\widetilde{N}_2 + 6 \cdot \widetilde{N}_3$ $57 \cdot \widetilde{N}_1 + 6 \cdot \widetilde{N}_2 + 7 \cdot \widetilde{N}_3$	

**Bemerkung 5.21** Bei der Untersuchung des Typs der Singularitäten ist als Nebenprodukt das Programm TETRACOUNT entstanden. Es steht unter der Adresse

[http://www.ifm.math.uni-hannover.de/~hulek/AG/preprints\\_de.html](http://www.ifm.math.uni-hannover.de/~hulek/AG/preprints_de.html)

zur Verfügung.

## 6 Die Geometrie auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ und $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$

### 6.1 Die Konfiguration von projektiven Geraden auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$

Wie wir bereits in Kapitel 5 erwähnt haben, ist die Vereinigung der Bilder der Koordinatenachsen in allen affinen Toruseinbettungen  $T'_\sigma, \sigma \in \Sigma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{N}'}$  in  $T'_{\Sigma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{N}'}}$  eine Konfiguration von projektiven Geraden. Wie in [HKW1, I.4A] werden wir diese Konfiguration im folgenden mit  $\mathcal{C}$  bezeichnen, also

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\widetilde{L}}^{\widetilde{N}'} \\ \dim(\sigma) = 2}} \overline{\text{orb}(\sigma, \widetilde{N}' )}$$

Aus der Berechnung des Titsgebäude  $\mathcal{T}(\widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ)$  sehen wir, daß  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  transitiv auf der Menge der Korang-2-Randkomponenten operiert, so daß wir uns auf die zur  $\Lambda$ -isotopen Ebene  $h = l_0 \wedge l_{(0,1)}$  korrespondierenden Randkomponente beschränken können. Wir werden also den Quotienten  $P''(h, \widetilde{\Gamma}_{1,p}(2)) \setminus \mathcal{C}$  beschreiben. Dabei verwenden wir die Identifikation von  $P''(h, \widetilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  mit der Gruppe

$$\widetilde{F} = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid \begin{array}{l} g \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{2}, \\ c \equiv 0 \pmod{p}, d \equiv 1 \pmod{p} \end{array} \right\},$$

die auf  $\text{Sym}_+(2, \mathbb{R})$  durch  $g(M) = {}^t g^{-1} M g^{-1}$ ,  $M \in \text{Sym}_+(2, \mathbb{R})$  operiert. Nach [HKW1, Remark I.3.124] gibt es eine äquivariante Identifikation der rationalen eindimensionalen Kegel in  $\text{Sym}_+(2, \mathbb{R})$  mit der obigen Operation und der Menge  $\mathcal{M}(1) := \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2, \text{ggT}(a, b) = 1\} / \{\pm 1\}$  mit der Operation  $g(a, b) = (a, b) \cdot g^{-1}$  von  $\widetilde{F}$ .

Wir werden die Operation von  $\widetilde{F}$  in mehreren Schritten analysieren und nutzen aus, daß in [HKW1, I.4A] die Quotienten der Gruppen

$$\widetilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{p}, d \equiv 1 \pmod{p} \right\}$$

und  $\widetilde{G}^+ = \widetilde{G} \cap \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  schon beschrieben wurden. Diese Berechnungen werden uns im Folgenden als Leitfaden dienen. Wir betrachten also die Operation der Untergruppe

$$\widetilde{F} = \left\{ f \in \widetilde{G} \mid f \equiv \text{id} \pmod{2} \right\}$$

In [HKW1, I.4A] werden die exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \tilde{G}_1^+ & \longrightarrow & \tilde{G}^+ & \xrightarrow{(\text{mod } p)} & \tilde{G}_2^+ \longrightarrow 1 \text{ bzw.} \\ 1 & \longrightarrow & \tilde{G}_1^+ & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{(\text{mod } p)} & \tilde{G}_2 \longrightarrow 1 \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{G}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}_p) \mid b \in \mathbb{Z}_p \right\} \\ \tilde{G}_2^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}_p) \mid b \in \mathbb{Z}_p \right\} \simeq \mathbb{Z}_p \end{aligned}$$

und  $\tilde{G}_1^+ = \Gamma_1(p)$  betrachtet.

In unserem Fall haben wir die exakten Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \tilde{F}_1^+ & \longrightarrow & \tilde{F}^+ & \xrightarrow{(\text{mod } 2p)} & \tilde{F}_2^+ \longrightarrow 1 \text{ bzw.} \\ 1 & \longrightarrow & \tilde{F}_1^+ & \longrightarrow & \tilde{F} & \xrightarrow{(\text{mod } 2p)} & \tilde{F}_2 \longrightarrow 1 \end{array}$$

mit  $\tilde{F}_1^+ = \Gamma_1(2p)$  und

$$\begin{aligned} \tilde{F}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}_{2p}) \mid b \in (2) \subset \mathbb{Z}_{2p} \right\} \\ \tilde{F}_2^+ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}_{2p}) \mid b \in (2) \subset \mathbb{Z}_{2p} \right\}, \end{aligned}$$

wobei mit  $(2)$  das von 2 erzeugte Ideal in  $\mathbb{Z}_{2p}$  bezeichnet sei.

Die Zuordnung

$$\tilde{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{Z}_{2p} & \longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ a \pmod{2p} & \longmapsto a \pmod{p} \end{cases}$$

induziert einen Gruppenisomorphismus  $\psi^+ : \tilde{F}_2^+ \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_2^+$ ,  $\psi^+ \left( \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\varphi}(b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , der sich zu einem Isomorphismus  $\psi : \tilde{F}_2 \xrightarrow{\sim} \tilde{G}_2$  erweitern läßt. Insgesamt beschreibt das folgende Diagramm den Zusammenhang mit un-

serer Situation:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \tilde{F}_1^{(+)} & \longrightarrow & \tilde{F} & \longrightarrow & \tilde{F}_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi^{(+)} \\
 1 & \longrightarrow & \tilde{G}_1^{(+)} & \longrightarrow & \tilde{G} & \longrightarrow & \tilde{G}_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) & \xlongequal{\quad} & \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_p) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

Für  $n \geq 2$  definieren wir die Menge der Nicht-Torsionselemente in  $\mathbb{Z}_n^2$  bis auf Vorzeichen

$$\mathcal{M}(n) := \{v \in \mathbb{Z}_n^2 : \lambda v \neq 0 \text{ falls } \lambda \neq 0 \in \mathbb{Z}_n\} / \{\pm 1\}.$$

Die Elemente von  $\mathcal{M}(n)$  werden wir abkürzend mit  $\pm(\alpha, \beta)_n$  bezeichnen. Zunächst werden wir die in [HKW1] gebräuchliche Notation einführen. Die Geraden in  $h$  werden von bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten primitiven ganzen Zahlenpaaren  $(a, b)$ , also von  $\mathcal{M}(1)$  parametrisiert. Die Menge dieser Geraden korrespondieren 1:1 zur Menge der Flächen in der partiellen Kompaktifizierung  $T_{\Sigma_{\tilde{L}}}$ . Zwei dieser Flächen  $(a, b)$  und  $(c, d)$  schneiden sich genau dann (und in diesem Fall ist der Schnitt eine projektive Gerade), falls  $(0, 0, a, b) \wedge (0, 0, c, d) = h$  ist, also genau dann, wenn  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$  ist. Wir erinnern uns an die invariante Eigenschaft *kurz* bzw. *lang* einer isotropen Geraden im Titsgebäude  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$ . Da nun die Operation von  $\tilde{F}$  diese Eigenschaften erhält, macht die folgende Notation Sinn. Eine projektive Gerade werden wir mit  $cc\text{-}\mathbb{P}_1$  bezeichnen, falls sowohl  $(a, b)$  als auch  $(c, d)$  kurze Geraden repräsentieren. Anderenfalls nennen wir die projektive Gerade  $cp\text{-}\mathbb{P}_1$ . Dies sind die Geraden, die von Paaren  $(a, b)$  und  $(c, d)$  repräsentiert werden, wobei entweder  $a \equiv 0 \pmod{p}$  oder  $c \equiv 0 \pmod{p}$  ist. Jeder *tiefste Punkt* ist der Schnitt dreier projektiver Geraden, repräsentiert durch  $\{\pm(a, b), \pm(c, d)\}$ ,  $\{\pm(c, d), \pm(e, f)\}$  und  $\{\pm(a, b), \pm(e, f)\}$  mit der Eigenschaft  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$ ,  $\det \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \pm 1$  und  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} = \pm 1$ . Es können dabei entweder alle drei Paare kurze Geraden oder ein Paar lange Geraden und die anderen beiden kurze Geraden repräsentieren. Im ersten Fall

nennen wir den tiefsten Punkt  $cc$ -tiefsten Punkt und im anderen Fall  $cp$ -tiefsten Punkt. Jede projektive Gerade hat zwei tiefste Punkte. Sind diese tiefsten Punkte zwei  $cc$ -tiefste Punkte, so ist diese Gerade ein  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ . Wir nennen eine projektive Gerade *benachbarten*  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ , falls dieser einen  $cc$ - und einen  $cp$ -tiefsten Punkt enthält. Der  $cc$ -tiefste Punkt heißt dann *benachbarter*  $cc$ -tiefster Punkt. Alle anderen projektiven Geraden und tiefsten Punkte nennen wir *nicht benachbart*.

**Bemerkungen 6.1** i) Für die Paare  $\pm(a, b), \pm(c, d), \pm(e, f)$ , die die tiefsten Punkte in  $\mathcal{C}$  repräsentieren, ist  $h = (a, b) \wedge (c, d)$  und  $(e, f) \subset h$ . Damit ist  $(e, f) = k(a, b) + k'(c, d), k, k' \in \mathbb{Z}$ . Da  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix} = \pm 1$  und  $\det \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \pm 1$  ist  $k, k' \in \{-1, 1\}$ . Es ergibt sich also für die parametrisierenden Paare der tiefsten Punkte die Gleichung

$$\pm(a, b) \pm (c, d) = \pm(e, f)$$

mit geeignetem gewähltem Vorzeichen.

ii) Die  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en sind gerade die Abschlüsse der Orbits  $\text{orb}(g(\xi_{13}), \widetilde{N}')$  in  $T_{\Sigma, \widetilde{N}'}$  mit  $g \in \langle \widetilde{G}^\circ, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subset \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ .

**Satz 6.2** *Es gibt eine Zerlegung von  $\widetilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  in  $\frac{3}{2}(p^2 - 1)$   $2p$ -Ecke, so daß jede projektive Gerade in  $\widetilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  in genau zwei und jeder tiefste Punkt in genau drei  $2p$ -Ecken enthalten ist. Zwei verschiedene  $2p$ -Ecke schneiden sich in einer einzigen projektiven Gerade oder sind disjunkt. Drei  $2p$ -Ecke haben höchstens einen tiefsten Punkt gemeinsam.*

*Beweis.* Die Operation von  $\widetilde{F}_1^+$  auf  $\mathcal{M}(1)$  liefert genau  $\frac{3}{2}(p^2 - 1)$  Bahnen. Nach [Sh, Lemma 1.41] sind nämlich zwei Paare  $(a, b), (c, d)$  mit der Eigenschaft  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(c, d) = 1$  genau dann äquivalent, falls  $\pm(a, b) \equiv (c, d) \pmod{2p}$  gilt.

Die Bahnen werden von der Menge  $\mathcal{M}(2p)$  parametrisiert, mit Quotientenabbildung  $\pm(a, b) \mapsto \pm(a, b) \pmod{2p}$ . Die Mächtigkeit von  $\mathcal{M}(2p)$  wurde in [Zi, Hilfssatz 1.2.3] mit  $\frac{3}{2}(p^2 - 1)$  bestimmt.

Eine projektive Gerade in  $\mathcal{C}$  ist durch  $\{\pm(a, b), \pm(c, d)\}$  mit  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$  bestimmt. Das Bild dieser Geraden in  $\widetilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  ist durch  $\{\pm(\alpha, \beta)_{2p}, \pm(\gamma, \delta)_{2p}\}$  mit  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}$  gegeben (wobei mit  $(\alpha, \beta)_{2p}$  und  $(\gamma, \delta)_{2p}$  die Restklassen von  $(a, b)$  bzw.  $(c, d)$  modulo  $2p$  bezeichnet seien). Für festes  $\pm(\alpha, \beta)_{2p}$  gibt es genau  $2p$  Wahlen von  $\pm(\gamma, \delta)_{2p}$  mit dieser Eigenschaft. Ist nämlich  $\pm(\gamma, \delta)_{2p}$  eine solche Wahl (die es immer gibt), dann sind alle weiteren durch  $\pm(\gamma + k\alpha, \delta + k\beta)_{2p}, k = 0, \dots, 2p - 1$  gegeben.

Diese sind in einem  $2p$ -Eck angeordnet:

Notiert man korrespondierend zu den Werten von  $k$  die projektiven Geraden mit  $R_0, \dots, R_{2p-1}$ , dann haben  $R_k$  und  $R_{k+1}$  den tiefsten Punkt

$$\{\pm(\alpha, \beta)_{2p}, \pm(\gamma + k\alpha, \delta + k\beta)_{2p}, \pm(\gamma + (k+1)\alpha, \delta + (k+1)\beta)_{2p}\}$$

gemeinsam, wobei  $k$  modulo  $2p$  zu verstehen ist.

Ist nun  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ , dann haben die  $2p$ -Ecke, die zu  $(\alpha, \beta)_{2p}$  bzw.  $(\gamma, \delta)_{2p}$  gehören, genau die projektive Gerade gemeinsam, die zum Paar  $\{\pm(\alpha, \beta)_{2p}, \pm(\gamma, \delta)_{2p}\}$  gehört und haben sonst keine gemeinsamen Geraden. Die  $2p$ -Ecke, die zu  $(\alpha, \beta)_{2p}$ ,  $(\gamma, \delta)_{2p}$  und  $(\varepsilon, \zeta)_{2p}$  gehören, haben genau dann einen tiefsten Punkt gemein, falls die Bedingungen

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} &\equiv \pm 1 \pmod{2p}, \quad \det \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}, \\ \det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varepsilon & \zeta \end{pmatrix} &\equiv \pm 1 \pmod{2p} \end{aligned}$$

erfüllt sind. Dann muß die Kongruenz  $\pm(\alpha, \beta) \pm (\gamma, \delta) \equiv \pm(\varepsilon, \zeta) \pmod{2p}$  gelten, die für festes  $\pm(\alpha, \beta)$  und  $\pm(\gamma, \delta)$  genau zwei Lösungen hat. Es reicht aus, dies für den Fall zu zeigen, daß alle drei Determinanten einen Wert  $1 \pmod{2p}$  ergeben. Dann ist

$$\begin{aligned} (\alpha - \gamma) &= -((\gamma\zeta - 1)\alpha - (\alpha\zeta - 1)\gamma) \\ &\equiv -(\varepsilon\delta\alpha - \beta\varepsilon\gamma) \pmod{2p} \\ &\equiv -(\varepsilon(\alpha\delta - \beta\gamma)) \pmod{2p} \\ &\equiv -\varepsilon \pmod{2p} \end{aligned}$$

und analog  $(\beta - \delta) \equiv -\zeta \pmod{2p}$ . □

Nach [Sh, Lemma 1.41] werden die Bahnen von  $\mathcal{M}(1)$  unter der Operation von  $\Gamma(n)$  (Rechtsmultiplikation) von den Restklassen in  $\mathcal{M}(n)$  parametrisiert. Insbesondere ergibt sich im Fall  $\tilde{G}_1^+ = \Gamma_1(p)$  der Quotient  $\mathcal{M}(p)$ .

Betrachte die kanonischen Projektionen

$$\pi_p : \begin{cases} \mathcal{M}(2p) &\rightarrow \mathcal{M}(p) \\ (a, b)_{2p} &\mapsto (a, b)_p \end{cases} \quad \text{und} \quad \pi_2 : \begin{cases} \mathcal{M}(2p) &\rightarrow \mathcal{M}(2) \\ (a, b)_{2p} &\mapsto (a, b)_2 \end{cases}$$

Diese liefern via

$$(\pi_p, \pi_2) : (a, b)_{2p} \mapsto ((a, b)_p, (a, b)_2)$$



eine Bijektion von  $\mathcal{M}(2p)$  und  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$ . Nummerieren wir die Restklassen  $(1, 0)_2, (1, 1)_2$  und  $(0, 1)_2$  mit  $i = 1, 2, 3$ , so werden wir ein Paar  $(\alpha, \beta)_{2p}$  in  $\mathcal{M}(2p)$  mit  $(\alpha, \beta)_i$  bezeichnen, wobei sich  $i$  aus der Projektion auf  $\mathcal{M}(2)$  ergibt und die Einträge nun modulo  $p$  zu verstehen sind. Zwei Paare  $(\alpha, \beta)_i$  und  $(\alpha', \beta')_j$  repräsentieren also genau dann das gleiche Element in  $\mathcal{M}(2p)$ , falls sie sowohl von ganzen Zahlen  $(a, b)$  und  $(a', b')$  aus  $\mathbb{Z}^2$  mit  $(a, b) \equiv \pm(a', b') \pmod{p}$  repräsentiert werden, als auch  $i = i'$  gilt.

Wie im Beweis zu Satz 6.2 schon erwähnt wurde, wird für ein  $2p$ -Eck  $(\alpha, \beta)_{2p}$  durch Wahl eines Paares  $(\gamma, \delta)_{2p}$  mit  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1$  eine Indizierung  $k = 0, \dots, 2p - 1$  der projektiven Geraden im  $2p$ -Eck  $(\alpha, \beta)_{2p}$  gegeben. Durch Einführung der Bezeichnung  $(\alpha, \beta)_i$  sind diese projektiven Geraden dann durch

$$\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma + k'\alpha, \delta + k'\beta)_j\}$$

gegeben, wobei nun  $j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$  und  $k' = 0, \dots, p - 1$  ist.

Die Gruppe  $\tilde{G}_1^+$  operiert auf  $\mathcal{C}$  und induziert eine Operation von  $\tilde{G}_1^+/\tilde{F}_1^+ \simeq \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  auf  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ . Die  $2p$ -Ecke in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  werden von  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  parametrisiert. Die Gruppe  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  operiert dann auf der zweiten Komponente durch

$$h : \begin{cases} \mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2) & \rightarrow \mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2) \\ ((a, b)_p, (c, d)_2) & \mapsto ((a, b)_p, (c, d)_2 \cdot h^{-1}) \end{cases}$$

für ein Element  $h$  in  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ .

Betrachte zunächst die Operation von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  auf der Menge der  $2p$ -Ecke in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ .

Es ist klar, daß  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  transitiv auf  $\mathcal{M}(2)$  operiert. Damit werden also die  $2p$ -Ecke in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , die von Paaren mit gleicher Restklasse modulo  $p$  repräsentiert werden, miteinander identifiziert. Da es lediglich 3 verschiedene Restklassen modulo 2 gibt, die Ordnung von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  jedoch 6 ist, hat jedes Element  $(a, b)_{2p}$  einen Stabilisator der Ordnung 2 in  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Dies führt zu einer Operation von  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  auf der Menge der projektiven Geraden in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , die sich wie folgt beschreiben läßt:

Es sei  $\{(\alpha, \beta)_{2p}, (\gamma, \delta)_{2p}\}$  eine projektive Gerade im  $2p$ -Eck  $(\alpha, \beta)_{2p}$  und  $(a, b), (c, d)$  mit  $(a, b) \equiv (\alpha, \beta) \pmod{2p}$ ,  $(c, d) \equiv (\gamma, \delta) \pmod{2p}$  Repräsentanten aus  $\mathbb{Z}^2$ . Da  $ad - bc \equiv \pm 1 \pmod{2p}$ , sind insbesondere die Restklassen modulo 2 von  $(a, b)$  und  $(c, d)$  verschieden. Sei etwa die Restklassen modulo 2 von  $(a, b)$  durch  $i$  und die von  $(c, d)$  durch  $j$  repräsentiert. Dann entspricht also das Element  $(\alpha, \beta)_{2p}$  dem Element  $(\alpha, \beta)_i$  in  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  (bzw.  $(\gamma, \delta)_{2p}$

dem Element  $(\gamma, \delta)_j$ .

Betrachte das Paar  $(c', d') = (c + pa, d + pb)$  aus  $\mathbb{Z}^2$ . Dieses repräsentiert das Element  $(\gamma, \delta)_l$  mit  $l \neq i, j$  und wegen  $ad' - bc' = ad - bc \equiv \pm 1 \pmod{2p}$  liegt  $\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_l\}$  auch im  $2p$ -Eck  $(\alpha, \beta)_i$ . Dann wird die projektive Gerade  $\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_j\}$  unter der Operation des Stabilisators von  $(\alpha, \beta)_i$  in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  mit  $\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_l\}$  identifiziert. Ein Element der Ordnung 2 aus  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ , was ein Element aus  $\mathcal{M}(2)$  (hier repräsentiert durch  $i$ ) stabilisiert, muß nämlich die verbleibenden Elemente (repräsentiert durch  $j$  und  $l$ ) ineinander überführen, da es sonst trivial ist.

Unter der Operation des Stabilisators eines  $2p$ -Ecks  $(\alpha, \beta)_{2p}$  in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  werden also zwei projektive Geraden, die sich durch die von  $k = 0, \dots, 2p - 1$  gegebene Indizierung um  $p$  in  $\mathbb{Z}_{2p}$  unterscheiden (wir sagen dann, daß diese projektive Geraden im  $2p$ -Eck *diametral* zueinander liegen), miteinander identifiziert, was ein  $p$ -Eck als Quotienten ergibt (vergleiche [HKW1, Lemma I.4.4]). Wie oben erwähnt, werden die projektiven Geraden in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  von Paaren  $\{(\alpha, \beta)_{2p}, (\gamma, \delta)_{2p}\}$  aus  $\mathcal{M}(2p) \times \mathcal{M}(2p)$  mit  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}$  repräsentiert.

Bezeichnen wir  $(\alpha, \beta)_{2p}$  und  $(\gamma, \delta)_{2p}$  mit  $(\alpha, \beta)_i$  und  $(\gamma, \delta)_j$ , so liefert das Paar  $\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_j\}$  genau dann eine projektive Gerade in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , falls  $\{(\alpha, \beta)_p, (\gamma, \delta)_p\}$  eine projektive in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  ist und zusätzlich  $i \neq j$  gilt.

Sind nämlich  $a, b, c, d$  Repräsentanten von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , so gilt die Kongruenz  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}$  genau dann, wenn  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{p}$  und zusätzlich  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ungerade ist, also  $(a, b) \not\equiv (c, d) \pmod{2}$ .

Über jeder projektiven Gerade  $\{(\alpha, \beta)_p, (\gamma, \delta)_p\}$  in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  liegen damit 6 verschiedene projektive Geraden in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , nämlich

$$\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_j\}$$

mit  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ .

Eine maximale Menge von projektiven Geraden in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$ , die im selben  $2p$ -Eck liegen und von der gleichen Restklasse modulo  $p$  repräsentiert werden, besteht aus genau zwei Elementen. Es gibt genau drei dieser maximalen Mengen. Die Gruppe  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  permutiert diese und führt so zu einem Isomorphismus von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  mit der symmetrischen Gruppe  $S_3$ .

Im Fall der tiefsten Punkte verläuft die Argumentation analog. Hier korrespondieren zu jedem tiefsten Punkt  $\{(\alpha, \beta)_p, (\gamma, \delta)_p, (\varepsilon, \zeta)_p\}$  in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  die sechs tiefsten Punkte

$$\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma, \delta)_j, (\varepsilon, \zeta)_l\}$$

in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , wobei die Indizes die sechs verschiedenen Anordnungen von  $\{1, 2, 3\}$  durchläuft.

Zusammengefaßt ergibt die Operation von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  auf dem Quotienten  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  also folgendes Bild:

$$\begin{array}{ccc} \left\{ 2p\text{-Ecke in } \tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} & \left\{ \mathbb{P}_1\text{en in } \tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} & \left\{ \text{tiefste Punkte in } \tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} \\ \begin{array}{c} \text{3:1} \downarrow \\ \left\{ p\text{-Ecke in } \tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6:1} \downarrow \\ \left\{ \mathbb{P}_1\text{en in } \tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} \end{array} & \begin{array}{c} \text{6:1} \downarrow \\ \left\{ \text{tiefste Punkte in } \tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C} \right\} \end{array} \end{array}$$

Wir sagen, daß zwei Ecke *benachbart* sind oder *aneinander grenzen*, falls es eine projektive Gerade gibt, die in beiden Ecken liegt.

In [HKW1] wurde  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  in  $(p-1)/2$  Unterkonfigurationen (oder *Konstellationen*) auf folgender Weise eingeteilt:

Für jedes  $b = 1, \dots, (p-1)/2$  sei  $a$  eine ganze Zahl mit  $ab \equiv 1 \pmod{p}$ . Setzt man nun  $\alpha = a \pmod{p}$ ,  $\beta \equiv b \pmod{p}$ , so erhält man die Unterkonfiguration in  $\Gamma(p) \setminus \mathcal{C}$ , die aus dem  $p$ -Eck korrespondierend zu  $(0, \beta)_p$  und allen  $p$ -Ecken, die an dieses grenzen, besteht. Wie in [HKW1, Fig.4.1] zu sehen ist, werden diese angrenzenden  $p$ -Ecke durch  $(\alpha, k\beta)_p$ ,  $k = 0, \dots, p-1$  repräsentiert.

Die Konstellationen werden also von den Restklassen in  $\mathbb{Z}_p^* / \{\pm 1\}$  parametrisiert.

Dies induziert eine Zerlegung von  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ :

Eine Konstellation in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  ist durch ein Paar  $(0, \beta)_p, \beta \in \mathbb{Z}_p^* / \{\pm 1\}$  bestimmt. Dies führt zu einer Konstellation  $(0, \beta)$  in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ , die wir als die Menge der  $2p$ -Ecke  $(0, \beta)_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  und allen angrenzenden  $2p$ -Ecke in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  definieren, also das Urbild der Konstellation  $(0, \beta)_p$  in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  unter der Operation von  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$ . Damit operiert  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  auf der Konstellation  $(0, \beta)$  und hat als Quotienten die Konstellation  $(0, \beta)_p$  in  $\tilde{G}_1^+ \setminus \mathcal{C}$ . Als Beispiel ist in der Abbildung 1 die (einzige) Konstellation  $(0, 1)$  für  $p = 3$  angegeben. Die projektiven Geraden mit gleichen Buchstaben werden dabei identifiziert.

Das  $2p$ -Eck, das zum Paar  $\pm(\alpha, \beta)_{2p} \in \mathcal{M}(2p)$  korrespondiert, werden wir abkürzend mit  $(\alpha, \beta)_{2p}$ -Eck bezeichnen. Weiter werden wir in Anlehnung an die Notation in [HKW1] ein  $(\alpha, \beta)_{2p}$ -Eck, das von Paaren  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $a \equiv 0 \pmod{p}$  repräsentiert wird, als *peripheres* (in der Abbildung 1 sind die peripheren Ecke hervorgehoben) und alle weiteren mit *zentrales* Eck bezeichnen.

Jede Konstellation  $(0, \beta)$  in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  besteht also aus den drei peripheren  $2p$ -Ecken  $(0, \beta)_i$  und den  $3p$  zentralen  $2p$ -Ecken  $(\alpha, k\beta)_i$ ,  $k = 0, \dots, p-1$  und

$i \in \{1, 2, 3\}$ .

Man beachte, daß zwei periphere  $2p$ -Ecke nicht benachbart sind. Gäbe es nämlich eine projektive Gerade  $\{\pm(\alpha, \beta)_{2p}, \pm(\gamma, \delta)_{2p}\}$ , so daß  $\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{p}$  ist, so wäre die zusätzliche Bedingung  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{2p}$  verletzt.

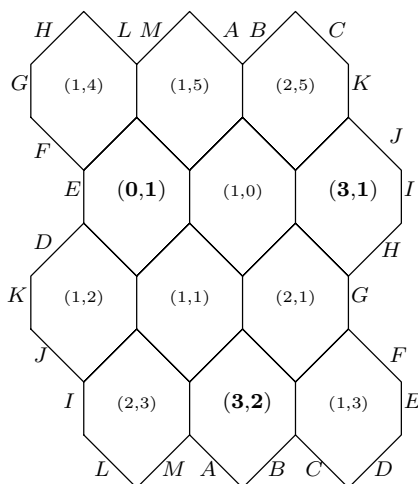


Abbildung 1: Die Konstellation  $(0, 1)$  im Fall  $p = 3$

Durch diese Aufteilung in Konstellationen ist sichergestellt, daß jedes zentrale  $2p$ -Eck in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  in genau einer Konstellation liegt:

**Hilfssatz 6.3** *In jedem zentralen  $2p$ -Eck in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  gibt es genau  $2$   $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en. Diese ergeben sich als Schnitt des zentralen Ecks mit zwei verschiedenen peripheren  $2p$ -Ecke in der gleichen Konstellation.*

*Beweis.* Es sei  $(\alpha, \beta)_i$  ein zentrales  $2p$ -Eck. Dann sind die projektiven Geraden in diesem Eck von der Form  $\{(\alpha, \beta)_i, (\gamma + k\alpha, \delta + k\beta)_j\}$  mit der Eigenschaft  $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \pm 1 \pmod{p}$  und  $i \neq j$ . Ein  $cp$ - $\mathbb{P}_1$  ist dadurch ausgezeichnet, daß  $\gamma + k\alpha \equiv 0 \pmod{p}$ , also  $k \equiv -\gamma\alpha^{-1} \pmod{p}$  ist. Dann ist also  $(\gamma + k\alpha, \delta + k\beta)_j = (0, \alpha^{-1})_j$ . Daraus folgt die Behauptung, wenn man zusätzlich beachtet, daß es für  $j$  genau zwei Wahlen gibt. □

Wir werden noch abschließend ein peripheres  $2p$ -Eck zusammen mit seinen angrenzenden zentralen  $2p$ -Ecken als *Unterkonstellation* bezeichnen (Abbildung 2). Jede Konstellation hat also genau drei Unterkonstellationen und nach Hilfssatz 6.3 liegt jedes zentrale  $2p$ -Eck in genau zwei Unterkonstellationen.

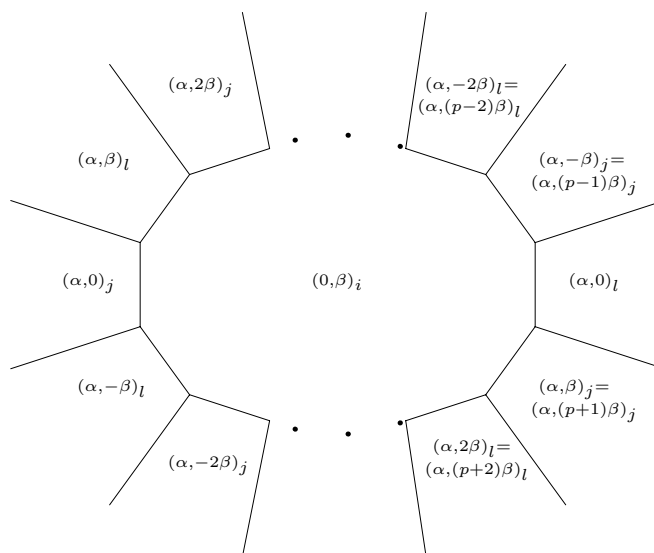


Abbildung 2: Eine Unterkonstellation

**Bemerkung 6.4** Diese Zerlegung in Konstellationen hat folgenden Hintergrund: Ein Paar  $(a, b) \in \mathcal{M}(1)$ , das einen langen Vektor repräsentiert, korrespondiert zu einer peripheren Randkomponente, wohingegen alle anderen Paare zu zentralen Randkomponente führen. (Dabei wird eine (offene) Randkomponente  $D^\circ(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  als zentral bezeichnet, falls  $l$  äquivalent zu  $l_0$  unter  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  ist. Anderenfalls heißt  $D^\circ(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}(2))$  peripher.) Damit wird das Bild des  $2p$ -Ecks repräsentiert durch  $(0, *)$  bzw.  $(p, *)$  in  $\mathcal{M}(2p)$  unter der durch  $\tilde{F}_2$  induzierten Quotientenabbildung im Abschluß einer peripheren Randkomponente liegen, wohingegen alle weiteren im Abschluß von zentralen Randkomponenten liegen.

Die Gruppe  $\tilde{F}_2$  operiert durch

$$(\alpha, \beta)_{2p} \mapsto (\alpha, \beta)_{2p} \cdot f^{-1}$$

für ein Element  $f$  aus  $\tilde{F}_2$  auf  $\mathcal{M}(2p)$ .

Darüberhinaus definieren wir eine Operation von  $\tilde{G}_2$  auf  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  durch

$$((\alpha, \beta)_p, (\gamma, \delta)_2) \mapsto ((\alpha, \beta)_p \cdot g^{-1}, (\gamma, \delta)_2)$$

für ein Element  $g$  aus  $\tilde{G}_2$ . Dann beschreibt sich durch

$$\begin{cases} \tilde{F}_2 \times \mathcal{M}(2p) & \rightarrow \tilde{G}_2 \times (\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)) \\ (f, (\alpha, \beta)_{2p}) & \rightarrow (\psi(f), (\pi_p, \pi_2)((\alpha, \beta)_{2p})) \end{cases}$$

ein äquivarianter Isomorphismus dieser Operationen, den wir im weiteren ausnutzen werden.

Da  $\psi(\tilde{F}_2^+) = \tilde{G}_2^+$  läßt sich weiterhin die Operation von  $\tilde{F}_2^+$  auf  $\mathcal{M}(2p)$  durch die Operation von  $\tilde{G}_2^+$  auf  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  beschreiben.

**Satz 6.5** (i) Zwei zentrale Ecke  $(\gamma, \delta)_i$  und  $(\varepsilon, \zeta)_j$  in  $\tilde{F}_1 \setminus \mathcal{C}$  liegen genau dann im gleichen Orbit unter der Operation von  $\tilde{F}_2^+$  und  $\tilde{F}_2$ , falls  $\gamma = \varepsilon$  in  $\mathbb{Z}_p^* / \pm 1$  und  $i = j$  gilt.

(ii) Die peripheren Ecke in  $\tilde{F}_1 \setminus \mathcal{C}$  bleiben unter der Operation von  $\tilde{F}_2$  invariant.

(iii) Es gibt genau  $\frac{3}{2}(p-1)$  periphere Ecke und  $\frac{3}{2}(p-1)$  zentrale Ecke sowohl in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  als auch in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$ .

(iv) Im Fall  $p \geq 5$  ist der Stabilisator in  $\tilde{F}_2^+$  jeder projektiven Gerade und jedes tiefsten Punktes in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  trivial.

*Beweis.* Es sei  $(0, \beta)_i$  eine Unterkonstellation und  $\alpha = \beta^{-1}$  in  $\mathbb{Z}_p^*$ . Dann sind die angrenzenden zentralen  $2p$ -Ecke von der Form  $(\alpha, k\beta)_j$  mit  $j \neq i$  und  $k = 0, \dots, p-1$ . Wir werden den obigen äquivarianten Isomorphismus nutzen und die Operation von  $\tilde{G}_2^+$  bzw.  $\tilde{G}_2$  untersuchen. Jede Unterkonstellation ist invariant unter der Operation von  $\tilde{G}_2$ . Für ein Element  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  aus  $\tilde{G}_2$  ist nämlich

$$\pm(0, \beta)_i \cdot \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \pm(0, \beta)_i$$

und für die angrenzenden zentralen Ecke ist

$$\pm(\alpha, k\beta)_j \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \pm(\alpha, k\beta - b\alpha)_j$$

und

$$\pm(\alpha, k\beta)_j \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \pm(-\alpha, k\beta)_j = \pm(\alpha, (p-k)\beta)_j$$

Die Operation von  $\tilde{G}_2$  ist also transitiv auf der Menge der zentralen Ecke in dieser Unterkonstellation, die von Paaren mit gleicher Restklasse modulo 2 repräsentiert werden und läßt das periphere Eck invariant. Die Operation von  $\tilde{G}_2^+$  ist sogar frei auf dieser Menge. Die erste Aussage folgt dann daraus, daß das zentrale Eck  $(\alpha, k\beta)_j$  mit  $(\pm\alpha, 0)_j$  identifiziert wird und der Eintrag  $\pm\alpha$  invariant ist.

Es gibt genau  $\frac{1}{2}(p-1)$  Konstellationen in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  und in jeder dieser Konstellationen gibt es genau drei Bahnen peripherer und drei Bahnen zentraler Ecke. Die Bahnen zentraler Ecke werden von den Paaren  $(\alpha, 0)_i$  repräsentiert und die peripheren von  $(0, \beta)_i$ , wobei  $\alpha$  und damit auch  $\beta$  alle Restklassen in  $\mathbb{Z}_p^* / \{\pm 1\}$  durchläuft und  $i \in \{1, 2, 3\}$  ist. Es gibt demnach genau  $\frac{3}{2}(p-1)$  periphere, sowie  $\frac{3}{2}(p-1)$  zentrale Ecke in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  und  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$ .

Zu (iv) beachte, daß jede projektive Gerade in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  in genau zwei Ecken liegt, etwa in  $(\alpha, \beta)_i$  und  $(\gamma, \delta)_j$  mit  $i \neq j$ . Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß  $(\alpha, \beta)_i$  ein zentrales Eck ist. Gäbe es nun ein Element aus  $\tilde{F}_2^+$ , das diese projektive Gerade stabilisiert, müsste dieses entweder  $(\alpha, \beta)_i$  und  $(\gamma, \delta)_j$  permutieren oder schon das zentrale Eck  $(\alpha, \beta)_i$  stabilisieren. Beides ist nicht möglich, da zum einen  $i \neq j$  und zum anderen der Stabilisator für jedes zentrale Eck trivial ist.

Da  $\tilde{F}_2^+$  die Ordnung  $p$  hat und sich jeder tiefste Punkt in  $\tilde{F}_2^+ \setminus \mathcal{C}$  als Schnitt von 3 projektiven Geraden ergibt, folgt aus der Tatsache  $\text{ggT}(3, p) = 1$  für  $p \geq 5$ , daß jeder tiefste Punkt in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  trivialen Stabilisator hat. □

In den folgenden Bildern sind tiefste Punkte als  $\bullet$  bezeichnet.

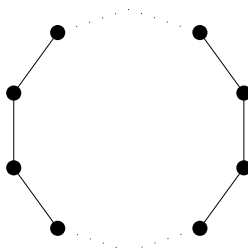
**Satz 6.6** (i) Jede projektive Gerade sowohl in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  als auch  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  liegt in einem zentralen Eck.

(ii) Sowohl in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  als auch in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  sind je zwei periphere Ecke disjunkt.

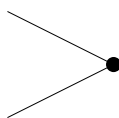
(iii) Jedes periphere Eck in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  ist ein 2-Eck mit zwei tiefsten Punkten wie folgt:



(iv) Jedes zentrale Eck in  $\tilde{F}^+\setminus\mathcal{C}$  ist ein  $2p$ -Eck.



(v) Jedes periphere Eck in  $\tilde{F}\setminus\mathcal{C}$  ist ein gefaltetes 2-Eck mit einem tiefsten Punkt wie folgt:



(vi) Jedes zentrale Eck in  $\tilde{F}\setminus\mathcal{C}$  ist ein gefaltetes  $2p$ -Eck mit  $p$  tiefsten Punkten:



(vii) Sowohl in  $\tilde{F}^+\setminus\mathcal{C}$  als auch in  $\tilde{F}\setminus\mathcal{C}$  schneidet jedes zentrale Eck genau 2 verschiedene periphere Ecke in jeweils genau einer projektiven Gerade. Insbesondere liegen die beiden projektiven Geraden in einem peripheren Eck in 2 verschiedenen zentralen Ecken.

In der Konfigurationen (iv) liegen diese Geraden diametral zueinander und können mit dem linken und rechten  $\mathbb{P}_1$  identifiziert werden. In der Konfiguration (vi) sind diese durch den linken und rechten  $\mathbb{P}_1$  repräsentiert, das heißt, die jeweils linken und rechten  $\mathbb{P}_1$ en sind  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en. Die jeweiligen projektiven Geraden in diesen Konfigurationen, die sich mit diesen  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en schneiden, sind benachbarte  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, während alle weiteren nicht benachbarte  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en sind.

*Beweis.* Da jede projektive Gerade in  $\tilde{F}^+\setminus\mathcal{C}$  in einem zentralen Eck liegt und die peripheren Ecke unter der Operation von  $\tilde{G}_2$  invariant sind, liegt auch jede projektive Gerade im Quotienten  $\tilde{F}\setminus\mathcal{C}$  in einem zentralen Eck, woraus (i) folgt.

Weil die peripheren Ecke in  $\tilde{F}_1^+\setminus\mathcal{C}$  nicht benachbart sind und diese invariant unter der Operation von  $\tilde{F}_2$  sind, gilt dies auch im Quotienten  $\tilde{F}^+\setminus\mathcal{C}$  und



$\tilde{F}\backslash\mathcal{C}$ , womit (i) gezeigt ist.

Betrachten wir nun eine feste Unterkonstellation, die zum Paar  $(0, \beta)_i$  korrespondiert. Wählen wir  $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & -2\beta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  als Erzeuger von  $\tilde{F}_2^+$ , so operiert dieser frei durch

$$\{(0, \beta)_i, (\alpha, k\beta)_j\} \mapsto \{(0, \beta)_i, (\alpha, k\beta + 2\beta^2\alpha)_j\} = \{(0, \beta)_i, (\alpha, \beta(k+2))_j\}$$

auf dem peripheren Eck  $(0, \beta)_i$ . Jede projektive Gerade im peripheren Eck  $(0, \beta)_i$  wird also mit der „übernächsten“ projektiven Gerade identifiziert und jeder tiefste Punkt damit mit dem „übernächsten“ tiefsten Punkt, was eine Konfiguration von 2 Geraden, die sich in zwei tiefsten Punkten schneiden, als Quotienten ergibt. Hier beachte man schon, daß die Bilder der projektiven Geraden im peripheren Eck  $(0, \beta)_i$  im Bild zweier verschiedener zentraler Ecke (repräsentiert durch  $(\alpha, 0)_j$  und  $(\alpha, 0)_l$ ) liegen. Die Bilder der  $cp$ -tiefsten Punkte jedoch liegen im Schnitt der Bilder dieser zentralen Ecke.

Unter dieser Operation wird jedes zentrale  $2p$ -Eck  $(\alpha, k\beta)_j$  mit  $(\alpha, 0)_j$  identifiziert wird, auf dem es keine weiteren Identifikationen gibt. Läge nämlich eine projektive Gerade  $\{(\alpha, 0)_j, (k\alpha, \beta)_i\}$  im  $2p$ -Eck  $(\alpha, 0)_j$  im Bild einer projektiven Gerade  $\{(\alpha, 0)_j, (k'\alpha, \beta)_{i'}\}$  unter der Operation eines Elementes aus  $\tilde{F}_2^+$ , so muß dieses schon das Eck  $(\alpha, 0)_j$  stabilisieren, da ja die Restklassen modulo 2 invariant sind. Damit folgt Punkt (iv), da  $\tilde{F}_2^+$  frei auf der Menge der zentralen Ecke operiert.

Insbesondere gibt es nach Hilfssatz 6.3 genau 2  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en, die im  $2p$ -Eck  $(\alpha, 0)_j$  diametral zueinander liegen. Identifizieren wir nun diese 2  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en in der Konfiguration (iv) mit dem linken und rechten  $\mathbb{P}_1$ , so kann die Operation von  $\tilde{G}_2/\tilde{G}_2^+ \simeq \mathbb{Z}_2$  als Reflektion an der horizontalen Achse aufgefaßt werden. Damit erhalten wir aus (iii) den Punkt (v) und aus (iv) den Punkt (vi). Beachte hier, daß dabei die  $cp$ -tiefsten Punkte, die im Schnitt der zentralen Ecke, repräsentiert durch  $(\alpha, 0)_j$  und  $(\alpha, 0)_l$  liegen, miteinander identifiziert werden.

□

**Lemma 6.7** *Es sei  $p \geq 5$ . Unter der Operation von  $\tilde{F}_2^+$  liegt das Bild eines  $cc$ - $\mathbb{P}_1$  in  $\tilde{F}_1^+\backslash\mathcal{C}$  im Schnitt der Bilder zweier zentraler Ecke. Das Bild eines  $cc$ -tiefsten Punkt in  $\tilde{F}_1^+\backslash\mathcal{C}$  liegt im Schnitt der Bilder dreier verschiedener zentraler Ecke.*

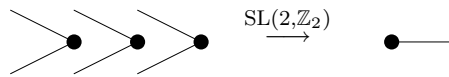
*Beweis.* Das Bild eines zentralen Ecks in  $\tilde{F}_1^+\backslash\mathcal{C}$  unter der Operation von  $\tilde{F}_2^+$  ist nach Satz 6.6 iv) wieder ein  $2p$ -Eck. Die Bilder der  $2p$ -Ecke werden von  $\pm(\alpha, 0)_i$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ ,  $i = 1, 2, 3$  indiziert. Damit wird also der Orbit

einer projektive Gerade in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  von einer projektive Geraden der Form  $\{(\alpha, 0)_i, (k\alpha, \alpha^{-1})_j\}$  mit  $k = 0, \dots, p-1, i \neq j$  repräsentiert.

Es sei  $\{(\alpha, 0)_i, (k\alpha, \alpha^{-1})_j\}$  ein  $cc$ - $\mathbb{P}_1$  im zentralen Eck  $(\alpha, 0)_i$  in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$ . Es ist  $k \neq 0$ , da es sonst ein  $cp$ - $\mathbb{P}_1$  wäre. Dann liegt das Bild von  $\{(\alpha, 0)_i, (k\alpha, \alpha^{-1})_j\}$  im Bild der zentralen Ecke  $(\alpha, 0)_i$  und  $(k\alpha, 0)_j$ .

Analog argumentiert man im Fall der  $cc$ -tiefsten Punkte. Diese sind im zentralen Eck  $(\alpha, 0)_i$  von der Form  $\{(\alpha, 0)_i, (k\alpha, \alpha^{-1})_j, ((k+1)\alpha, \alpha^{-1})_l\}$ , wobei  $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$  paarweise verschieden sind und  $k \not\equiv 0, -1 \pmod{p}$  ist. Dann liegt der Orbit dieses tiefsten Punktes im Orbit der zentralen Ecke  $(\alpha, 0)_i, (k\alpha, 0)_j$  und  $((k+1)\alpha, 0)_l$ . □

**Bemerkung 6.8** In jeder Konstellation in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  gibt es genau drei periphere Ecke. Diese sind disjunkt und bestehen jeweils aus zwei projektiven Geraden, die sich in einem tiefsten Punkt schneiden. Diese projektiven Geraden werden von Paaren  $\{(\alpha, 0)_i, (0, \alpha^{-1})_j\}$  mit  $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$  repräsentiert. Ein Element der Ordnung zwei in  $SL(2, \mathbb{Z}_2)$  identifiziert nun zwei projektive Geraden, die sich in einem tiefsten Punkt schneiden, so daß es genau drei Kopien von projektiven Geraden mit einem tiefsten Punkt gibt, die unter der Operation eines Elementes der Ordnung drei ineinander übergehen. Als Quotient ergibt sich also eine projektive Gerade mit einem tiefsten Punkt, wie er schon in [HKW1, Theorem I.4.6 (vi)] beschrieben wurde.



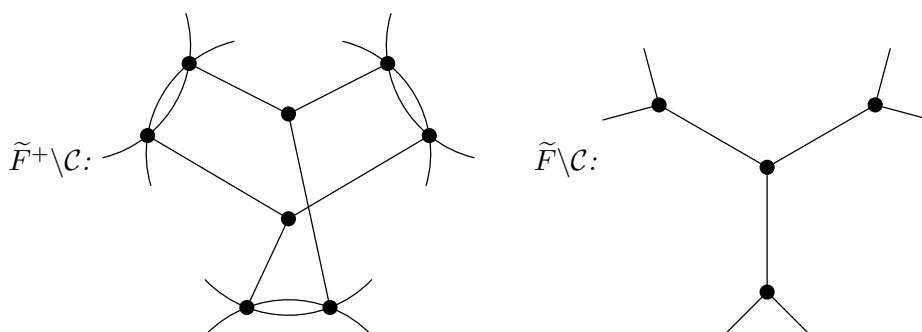
Es gibt genau drei Bahnen zentraler Ecke in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$ , die eine Kette von  $p+1$  projektiven Geraden mit  $p$  tiefsten Punkten bilden. Die Bahnen projektiver Geraden werden von  $\{(\alpha, 0)_i, (k\alpha, \alpha^{-1})_j\}, k = 0, \dots, (p-1)/2, i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$  repräsentiert.

Ein Element der Ordnung drei in  $SL(2, \mathbb{Z}_2)$  identifiziert nun diese drei Ketten und ein Element der Ordnung zwei entspricht einer Spiegelung an der vertikalen Achse, so daß wir als Quotienten das gefaltete  $p$ -Eck in [HKW1, Theorem I.4.6 (vii)] erhalten.



## 6.2 Der Fall $p = 3$

**Satz 6.9** Für  $p = 3$  ergeben sich die Konfigurationen  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  und  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  wie folgt:



*Beweis.* Der Quotient  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  besteht aus den 3 Unterkonstellationen, wie sie in Abbildung 3 dargestellt sind. Nun partitioniert die Operation der Gruppe  $\tilde{F}_2^+$  die projektiven Geraden in genau 12 Orbits, wobei genau die Geraden in einem Orbit liegen, die vom selben Groß- bzw. Kleinbuchstaben in der Abbildung 3 indiziert werden, so daß sich die Konstellation  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  ergibt. Beachte, daß mit den Kleinbuchstaben die  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en und mit Großbuchstaben die  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, die in diesem Fall alle benachbarte  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en sind, bezeichnet sind.

Unter der Operation von  $\tilde{F}/\tilde{F}^+$  werden jeweils die Orbits  $[A_1], [B_1], [C_1]$  und  $[D_1], [E_1], [F_1]$  identifiziert und die Orbits  $[a_1], \dots, [f_1]$  sind invariant, woraus sich die Aussage ergibt.

□

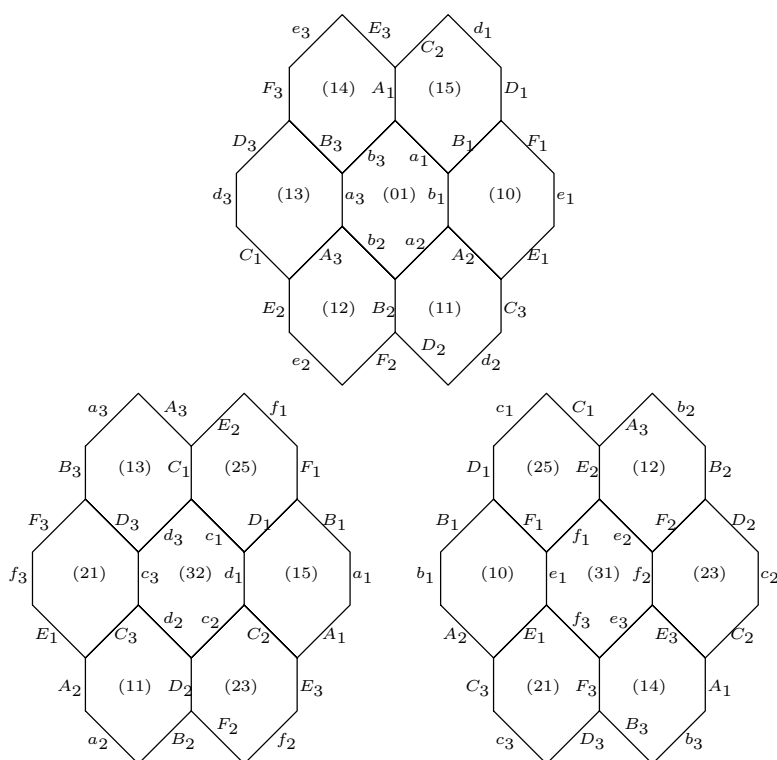
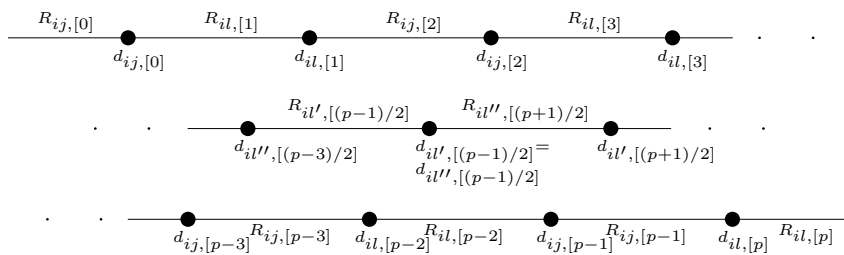


Abbildung 3: Identifikationen in der Konstellation  $(0,1)$  unter  $\tilde{F}_2^+$  im Fall  $p = 3$

**Notation** Für eine ganze Zahl  $x$  bezeichne  $[x]$  den Rest von  $x$  modulo  $\pm p$  im Bereich von  $0$  bis  $\frac{p-1}{2}$ . Wir betrachten zusätzlich folgende Anordnungen der Menge  $\{1, 2, 3\}$ :

$i$	$j$	$l$
1	2	3
2	3	1
3	1	2

Damit werden wir die projektiven Geraden und tiefsten Punkte in jedem zentralen Eck  $(\alpha, 0)_i$  in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  wie folgt bezeichnen:



wobei  $l' = j$ ,  $l'' = l$  falls  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und  $l' = l$ ,  $l'' = j$  sonst zu wählen sind. Damit liegt also der tiefste Punkt  $d_{ij,k}$  im Schnitt der projektiven Geraden  $R_{ij,k}$  und  $R_{il,k+1}$ . Mit dieser Bezeichnung sind  $R_{ij,[0]}$  und  $R_{il,[p]}$  die  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en sowie  $d_{ij,[0]}$  und  $d_{il,[p]}$  die  $cp$ -tiefsten Punkte im zentralen Eck  $(\alpha, 0)_i$  in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$ .

**Proposition 6.10** *Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der verschiedenen Objekte in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  und  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  für  $p > 3$  an. Insbesondere ist die durch  $\tilde{F}_2 / \tilde{F}_2^+$  induzierte Abbildung von der Menge der  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  in die Menge der  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  eine Bijektion, wohingegen die Abbildung der Menge der benachbarten, nicht benachbarten projektiven Geraden bzw. nicht benachbarten  $cc$ -, benachbarten  $cc$ - und  $cp$ -tiefsten Punkte in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  in die entsprechenden Mengen in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  eine 2:1 Abbildung ist.*

Objekt	$\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$	$\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$
$\mathbb{P}_1$ en total	$\frac{3}{2}(p^2 - 1)$	$\frac{3}{4}(p - 1)(p + 3)$
$cp$ - $\mathbb{P}_1$ en	$3(p - 1)$	$3(p - 1)$
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en total	$\frac{3}{2}(p - 1)^2$	$\frac{3}{4}(p - 1)^2$
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, ben.	$3(p - 1)$	$\frac{3}{2}(p - 1)$
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, n.ben.	$\frac{3}{2}(p - 1)(p - 3)$	$\frac{3}{4}(p - 1)(p - 3)$
tiefste Punkte total	$p^2 - 1$	$\frac{1}{2}(p^2 - 1)$
$cp$ -tiefste Punkte	$3(p - 1)$	$\frac{3}{2}(p - 1)$
$cc$ -tiefste Punkte total	$(p - 1)(p - 2)$	$\frac{1}{2}(p - 1)(p - 2)$
$cc$ -tiefste Punkte, ben.	$3(p - 1)$	$\frac{3}{2}(p - 1)$
$cc$ -tiefste Punkte n.ben.	$(p - 1)(p - 5)$	$\frac{1}{2}(p - 1)(p - 5)$

*Beweis.* Nach Satz 6.2 gibt es in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  genau  $\frac{3}{2}(p^2 - 1)$   $2p$ -Ecke mit jeweils  $2p$  projektiven Geraden und  $2p$  tiefsten Punkten. Jede projektive Gerade bzw. jeder tiefste Punkt liegt in genau zwei bzw. drei  $2p$ -Ecken, so daß  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  genau  $\frac{3}{2}p(p^2 - 1)$  projektive Geraden bzw.  $p(p^2 - 1)$  tiefste Punkte enthält. Da jede projektive Gerade und jeder tiefste Punkt in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  nach Satz 6.5 (iv) nur trivialen Stabilisator hat, haben wir also insgesamt  $\frac{3}{2}(p^2 - 1)$  projektive Geraden und  $p^2 - 1$  tiefste Punkte in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$ .

In  $\tilde{F}_2^+ \setminus \mathcal{C}$  gibt es nach Satz 6.5  $\frac{3}{2}(p - 1)$  periphere Ecke, die jeweils eine Konfiguration von 2  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en bilden, die sich in zwei  $cp$ -tiefsten Punkten schneiden. Diese Konfigurationen sind disjunkt, so daß wir in  $\tilde{F}_2^+ \setminus \mathcal{C}$  genau  $3(p - 1)$   $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en und  $3(p - 1)$   $cp$ -tiefste Punkte haben. Weiter gibt es in jedem zentralen Eck in  $F^+ \setminus \mathcal{C}$  (von denen es  $\frac{3}{2}(p - 1)$  gibt) genau vier benachbarte  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, die jeweils in zwei zentrale Ecke liegen und zu jedem  $cp$ -tiefsten Punkt gibt es einen  $cc$  benachbarten tiefsten Punkt. Damit haben wir also  $\frac{3}{2}(p - 1) \cdot \frac{4}{2}$  benachbarte  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, sowie  $3(p - 1)$  benachbarte  $cc$ -tiefste Punkte, womit die Angaben in der linken Spalte folgen.

Die Operation von  $\tilde{F}/\tilde{F}^+ \simeq \mathbb{Z}_2$  auf den zentralen Ecke in  $\tilde{F}^+ \setminus \mathcal{C}$  kann als Spiegelung an der horizontalen Achse (wenn wir die linke und rechte projektive Gerade jeweils als  $cp$ - $\mathbb{P}_1$  auszeichnen) aufgefaßt werden. Dabei werden lediglich die beiden  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en in den zentralen Ecken stabilisiert, woraus sich die Angaben in der zweiten Spalte ergeben.

□

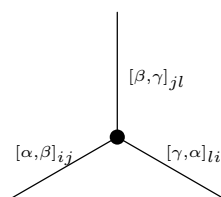
Wir bezeichnen die projektiven Geraden  $R_{ij,k}$  im gefalteten  $2p$ -Eck  $(\alpha, 0)_i$  mit  $[\alpha, k\alpha]_{ij}$ . Dabei seien die Einträge modulo  $p$  und bis auf unabhängiges Vorzeichen zu verstehen, so das wir uns im folgenden auf Einträge zwischen 0 und  $(p - 1)/2$  beschränken können.

Für das gefaltete  $2p$ -Eck, das zum Paar  $(\alpha, 0)_i$  korrespondiert, ergeben sich dann folgende Benennungen der projektiven Geraden:

$$\frac{[\alpha, 0]_{ij}}{\bullet} \frac{[\alpha, \alpha]_{il}}{\bullet} \frac{[\alpha, 2\alpha]_{ij}}{\bullet} \frac{[\alpha, 3\alpha]_{il}}{\bullet} \dots \dots \frac{[\alpha, 2\alpha]_{il}}{\bullet} \frac{[\alpha, \alpha]_{ij}}{\bullet} \frac{[\alpha, 0]_{il}}{\bullet} \quad (\dagger)$$

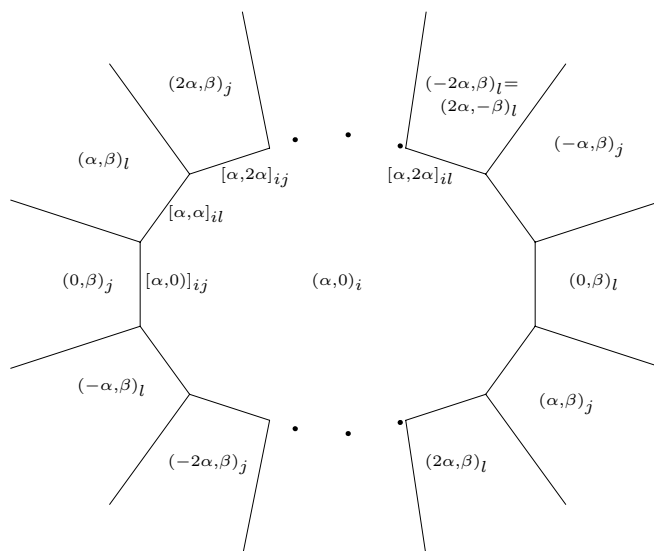
**Satz 6.11** Für  $p > 3$  erhält man den Quotienten  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  durch Identifikation der zu  $(\alpha, 0)_i, \alpha = 1, \dots, (p - 1)/2, i = 1, 2, 3$  korrespondierenden gefalteten  $2p$ -Ecke (mit Bezeichnungen wie in Abbildung  $(\dagger)$  nach den Regeln:

- (a) Zwei projektive Gerade  $[\gamma, \delta]_{ij}$  und  $[\delta, \gamma]_{ji}$  werden miteinander identifiziert.
- (b) Die Bezeichnungen der projektiven Geraden, die sich in einem tiefsten Punkt schneiden, sind:



**Bemerkung 6.12** Die Bedingung (b) stellt sicher, daß sich jedes gefaltete  $2p$ -Eck in den Quotienten  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  einbetten läßt. Dies ist notwendig, da die Bedingung (a) zwei Möglichkeiten gibt, projektive Geraden miteinander zu identifizieren.

*Beweis.* Wir werden die projektiven Geraden im Eck  $(\alpha, 0)_i$  in  $\tilde{F}_1^+ \setminus \mathcal{C}$  wie in folgender Abbildung benennen (dabei sei  $\beta = \alpha^{-1}$  in  $\mathbb{Z}_p^*$ ):



Die projektive Gerade  $[\alpha, k\alpha]_{i,j}$  ist sowohl im Eck  $(\alpha, 0)_i$  als auch in  $(k\alpha, \beta)_j$  bzw.  $[k\alpha, \alpha]_{j,i}$  im Eck  $(k\alpha, 0)_j$  und  $(\alpha, (k\alpha)^{-1})_i = (\alpha, k^{-1}\beta)_i$ .

Mit Angabe des folgenden Elementes in  $\tilde{F}_2$  zeigen wir, daß diese beiden Geraden im selben Orbit in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  liegen. Es sei

$$\gamma = \psi \left( \begin{pmatrix} -1 & -k^{-1}\beta^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \in \tilde{F}_2$$

Dann ist  $\gamma = \gamma^{-1}$  und

$$\begin{aligned} (\alpha, 0)_i \cdot \gamma &= (-\alpha, -k^{-1}\alpha\beta^2)_i \\ &= (\alpha, k^{-1}\beta)_i \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}(k\alpha, \beta)_i \cdot \gamma &= (-k\alpha, -k\beta k^{-1} + \beta)_i \\ &= (k\alpha, 0)_i\end{aligned}$$

Die Matrix  $\gamma$  leistet also das Gewünschte.

Es ist noch anzumerken, daß die Bezeichnungen nur bis auf unabhängiges Vorzeichen definiert sind. Der Stabilisator von  $(\alpha, 0)_i$  wird nämlich von  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  erzeugt und identifiziert  $[\alpha, k\alpha]_{ij}$  mit  $[\alpha, -k\alpha]_{ij}$ . □

Als Beispiel folgen die Konfigurationen  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  im Fall  $p = 3, 5, 7$ .

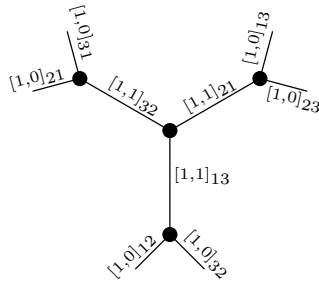


Abbildung 4: Korang-2-Randkomponente für  $p = 3$



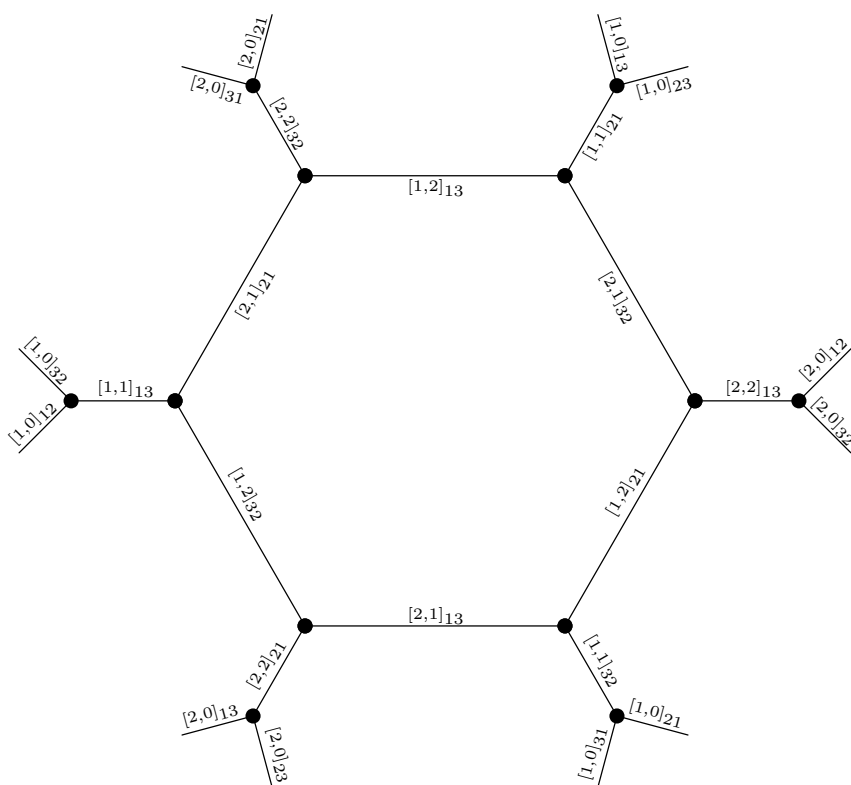


Abbildung 5: Korang-2-Randkomponente für  $p = 5$

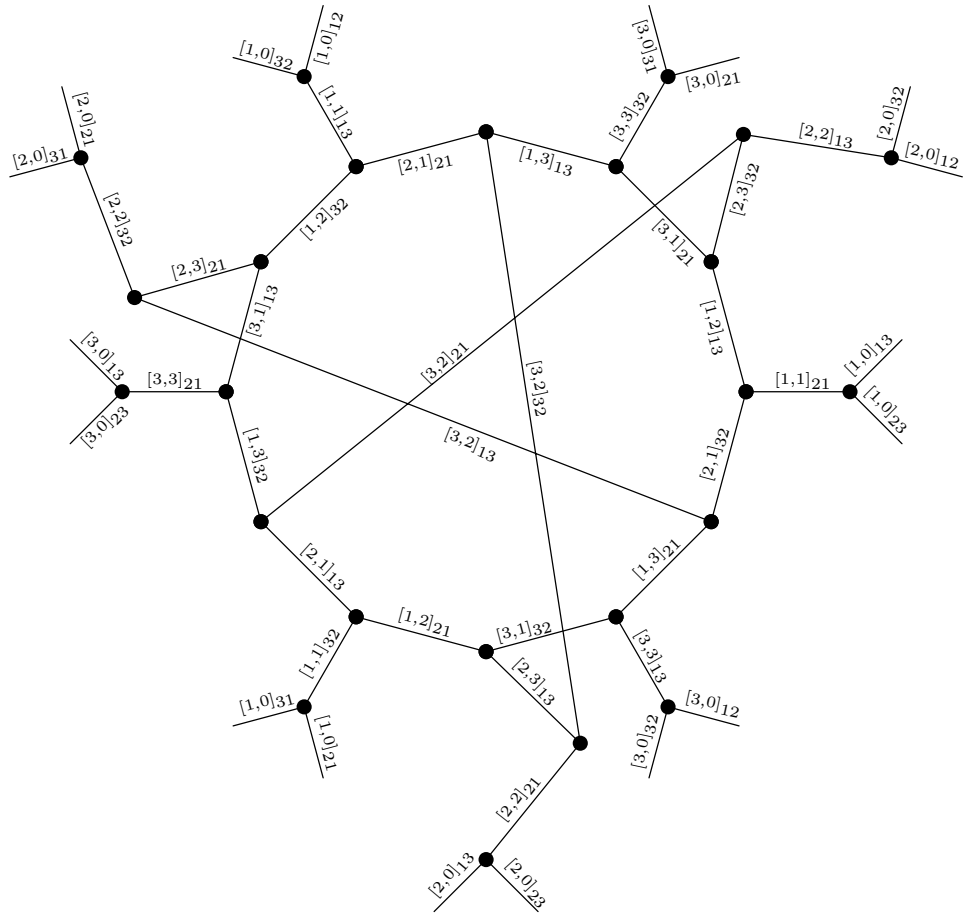


Abbildung 6: Korang-2-Randkomponente für  $p = 7$

### 6.3 Die Konfiguration von projektiven Geraden auf dem Rand von $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$

Wir werden hier die Operation von  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  auf

$$\mathcal{C}^\circ = \bigcup_{\substack{\sigma \in \Sigma_{\tilde{N}}^L \\ \dim(\sigma) = 2}} \overline{\text{orb}(\sigma, \tilde{N})}$$

untersuchen.

Die Konfiguration  $\mathcal{C}^\circ$  entsteht dabei als Quotient unter der Operation der Gruppe  $\text{Hom}(\tilde{M}'/\tilde{M}, \mathbb{C}^*)$  auf  $\mathcal{C}$ , die nach Lemma 5.17 die projektiven Geraden in  $\mathcal{C}$  invariant läßt und als Quotient wieder eine projektive Gerade (als Quotient einer projektiven Gerade nach einer zyklischen Automorphismengruppe) liefert. Wir können also zur Beschreibung der Konfiguration  $\mathcal{C}^\circ$  die Indizierung der projektiven Geraden in  $\mathcal{C}$  nutzen und werden den Quotienten  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \backslash \mathcal{C}$  beschreiben.

Die Faktorgruppe  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  haben wir in Kapitel 5 mit der Gruppe

$$\tilde{F}^\circ = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid g \equiv \mathbf{1}_2 \pmod{2}, c \equiv 0 \pmod{p} \right\}$$

identifiziert.

Diese enthält  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \simeq \tilde{F}$  als Normalteiler mit Quotienten isomorph zu  $\mathbb{Z}_p^*$ . Da  $-\mathbf{1}_2 \in \tilde{F}^\circ$  trivial operiert, betrachten wir den Quotienten

$$\tilde{F}^\circ / \pm \tilde{F} \simeq \mathbb{Z}_p^* / \{\pm 1\} := H.$$

Das ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $\frac{1}{2}(p-1)$  und ein Erzeuger dieser Gruppe werden wir als *semi-primitive Wurzel* von  $H$  bezeichnen.

Wenden wir uns zunächst der Operation von  $\tilde{F}^\circ$  auf  $\mathcal{M}(1)$  zu. Es ist  $\tilde{F}^\circ \backslash \mathcal{M}(1) = (\tilde{F}^\circ / \tilde{F}) \backslash (\tilde{F} \backslash \mathcal{M}(1))$ , so daß wir die induzierte Operation von  $H$  auf  $\tilde{F} \backslash \mathcal{M}(1)$  zu untersuchen haben. Es sei  $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2} \in \text{GL}(2, \mathbb{Z})$  mit  $g \equiv \begin{pmatrix} r^{-1} & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \pmod{p}$  und  $\bar{g} = \text{id}$  ein Repräsentant der zur semi-primitiven Wurzel  $r$  korrespondierenden Nebenklasse. Dann operiert  $g$  auf  $\mathcal{M}(1)$  durch

$$g : \pm(a, b) \mapsto \pm(a, b) \cdot g^{-1} = \pm(ag_{22} - bg_{21}, bg_{11} - ag_{12})$$

und es ist

$$\pm(a, b) \cdot g^{-1} \equiv \pm(ra, r^{-1}b) \pmod{p},$$

so daß die induzierte Operation von  $H$  auf dem Quotienten  $\tilde{F}_1 \backslash \mathcal{M}(1) = \mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  durch:

$$r : ((a, b)_p, (a, b)_2) \mapsto ((a, b)_p \cdot \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, (a, b)_2), \quad r \in H$$

beschrieben ist. Diese Operation normalisiert die Operation von  $\tilde{F}_2$  auf  $\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2)$  und führt so zur Operation von  $H$  auf  $\tilde{F} \backslash (\mathcal{M}(p) \times \mathcal{M}(2))$ .

**Lemma 6.13** *Der Quotient  $\tilde{F}^\circ / \tilde{F}$  operiert transitiv und frei auf den Bahnen der zentralen Ecke in  $\tilde{F} \backslash \mathcal{C}$ , die von Paaren gleicher Restklasse modulo 2 parametrisiert werden.*

*Beweis.* Wir haben gesehen, daß die Bahnen zentraler Ecke in  $\tilde{F} \backslash \mathcal{C}^\circ$  von  $(\alpha, 0)_i$  mit  $\alpha = 1, \dots, (p-1)/2, i = 1, 2, 3$  parametrisiert werden. Der Index  $i$  bleibt invariant und die Paare  $(\alpha, 0)_i$  werden offensichtlich permutiert.  $\square$

**Lemma 6.14** *Die Operation von  $H$  auf der Menge der projektiven Geraden in  $\tilde{F} \backslash \mathcal{C}$  wird für eine semi-primitive Wurzel  $r \in H$  durch*

$$r : [\alpha, \beta]_{ij} \mapsto [r\alpha, r\beta]_{ij}$$

gegeben.

*Beweis.* Die projektive Gerade mit der Bezeichnung  $[\alpha, \beta]_{ij}$  liegt bis auf  $\tilde{F}$ -Äquivalenz in den gefalteten  $2p$ -Ecke

$$(\alpha, 0)_i \text{ und } (\beta, \alpha^{-1})_j$$

Unter der Operation von  $r$  gehen diese über nach

$$(r\alpha, 0)_i \text{ und } (r\beta, (r\alpha)^{-1})_j$$

die sich in der projektiven Gerade mit der Bezeichnung  $[r\alpha, r\beta]_{i,j}$  schneiden.  $\square$

**Korollar 6.15** *Die Operation von  $H$  ist frei auf der Menge der projektiven Geraden und tiefsten Punkten in  $\tilde{F} \backslash \mathcal{C}$ .*

*Beweis.* Es ist  $[\alpha, \beta]_{ij} = [r\alpha, r\beta]_{ij} = [r\beta, r\alpha]_{ji}$  genau dann, wenn  $r = \pm 1$ , also jede projektive Gerade in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  hat trivialen Stabilisator.

Jeder tiefste Punkt in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  ist der Schnitt von drei projektiven Geraden  $[\alpha, \beta]_{ij}$ ,  $[\beta, \gamma]_{jl}$  und  $[\gamma, \alpha]_{li}$ . Die Aussage folgt dann aus der Tatsache, daß  $\{i, j\}$ ,  $\{j, l\}$ ,  $\{l, i\}$  paarweise verschieden sind.  $\square$

**Korollar 6.16** *Die folgende Tabelle gibt die Anzahl der verschiedenen projektiven Geraden und tiefsten Punkte in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  an:*

	$p > 3$	$p = 3$
$\mathbb{P}_1$ en total :	$\frac{3}{2}(p-1) + 6$	9
$cp$ - $\mathbb{P}_1$ en :	6	6
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en total :	$\frac{3}{2}(p-1)$	3
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, ben. :	3	3
$cc$ - $\mathbb{P}_1$ en, n. ben. :	$\frac{3}{2}(p-3)$	—
tiefste Punkte total :	$p + 1$	4
$cp$ -tiefste Punkte :	3	3
$cc$ -tiefste Punkte total :	$p - 2$	1
$cc$ -tiefste Punkte, ben. :	3	1
$cc$ -tiefste Punkte n. ben. :	$p - 5$	—

*Beweis.* Da  $H$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $\frac{p-1}{2}$  ist und nach Korollar 6.15 frei auf der Menge der projektiven Geraden und tiefsten Punkte in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  operiert, folgen die Angaben der ersten Spalte aus den Berechnungen in Proposition 6.10. Im Fall  $p = 3$  operiert  $H$  trivial und die Angaben lassen sich aus Abschnitt 6.2 ablesen.  $\square$



Es sei  $2 \leq k \leq p-2$ . Das Bild eines tiefsten Punktes  $d_{ij,[k]}$  in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  ist ein Punkt, der im Schnitt der Geraden mit den Bezeichnungen  $[1, k]_{ij}$ ,  $[k+1, 1]_{li}$  und  $[k, k+1]_{jl}$  liegt. Die projektiven Gerade  $[k+1, 1]_{li}$  und  $[1, k_5]_{li}$  sowie  $[k, k+1]_{jl}$  und  $[1, k_6]_{jl}$  liegen im gleichen Orbit unter der Operation von  $H$  und werden von den projektiven Geraden  $R_{li,[k_5]}$  beziehungsweise  $R_{jl,[k_6]}$  repräsentiert. Die Bilder der Geraden  $R_{ij,[k_1]}$ ,  $R_{li,[k_5]}$  und  $R_{li,[k_6]}$  schneiden sich also im Bild des tiefsten Punktes  $d_{ij,[k]}$ . Nun ist

$$\begin{aligned} [1, k_1]_{ij} &= [k_1, 1]_{ji} = [1, k_4]_{ji} \\ [1, k_5]_{li} &= [k_5, 1]_{il} = [1, k_2]_{il} \\ [1, k_6]_{jl} &= [k_6, 1]_{jl} = [1, k_3]_{lj}. \end{aligned}$$

so daß sich zusätzlich die Bilder der projektiven Geraden  $R_{ji,[k_4]}$ ,  $R_{il,[k_2]}$  und  $R_{lj,[k_3]}$  im Bild des tiefsten Punktes  $d_{ij,[k]}$  schneiden. Das Bild des tiefsten Punktes  $d_{ij,[0]}$  in  $\tilde{F} \setminus \mathcal{C}$  ist der Schnitt der projektiven Geraden mit den Bezeichnungen  $[1, 0]_{ij}$ ,  $[1, 1]_{li}$ ,  $[0, 1]_{jl}$  und es ist  $[1, 1]_{li} = [1, 1]_{il}$ , so daß sich die Bilder von  $R_{ij,[0]}$ ,  $R_{li,[1]}$ ,  $R_{jl,[0]}$ ,  $R_{il,[1]}$  im tiefsten Punkt  $d_{ij,[0]}$  schneiden.  $\square$

**Bemerkung 6.18** Nach den obigen Berechnung gibt es auf der Menge der  $cp$ - $\mathbb{P}_1$ en in den zentralen Ecken  $(1, 0)_i$  keine weiteren Identifikationen.

Als Beispiel sind im Folgenden die Konfigurationen der projektiven Geraden im Fall  $p = 3, 5, 7$  aufgeführt.

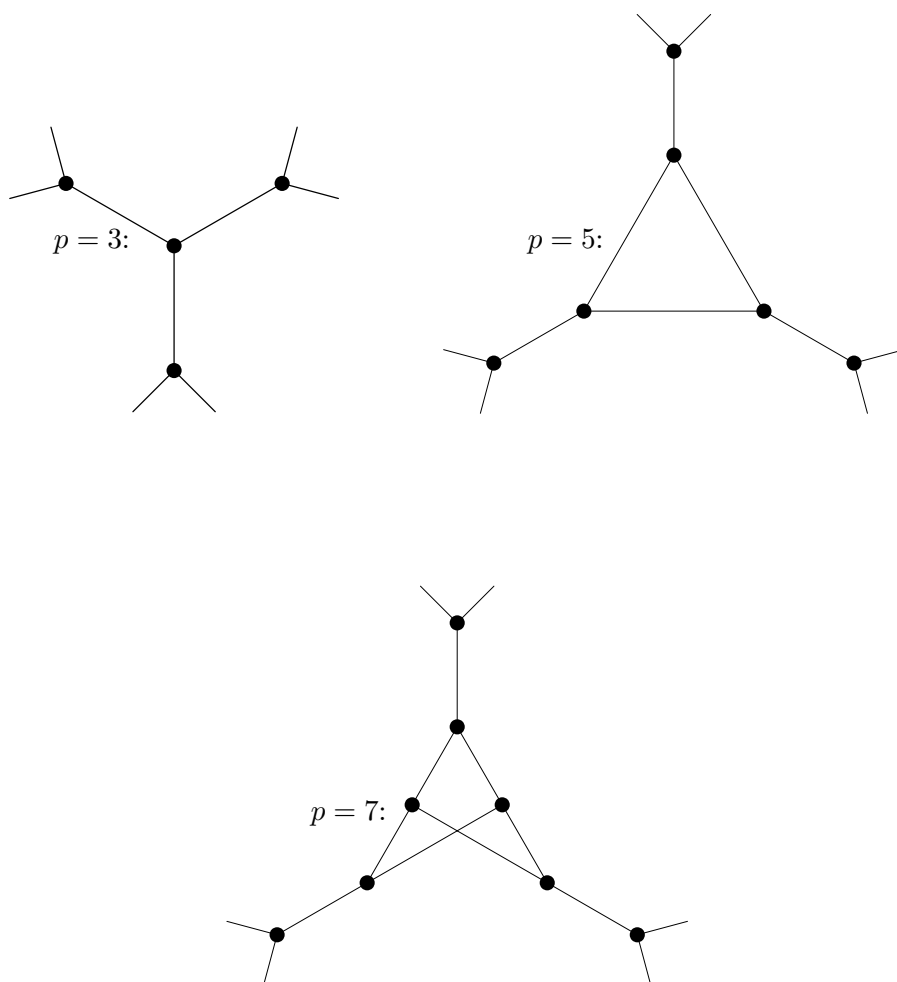


Abbildung 7: Korang-2-Randkomponenten in den Fällen  $p = 3, 5, 7$



## 7 Der Abschluß der Korang-1-Randkomponenten in $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$

Nach Proposition 3.12 existieren für  $l = l_0, l_{(0,1)}$  offene, analytische Einbettungen  $f_l^\circ$  der offenen Kumperschen Modulflächen  $K^\circ(2) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$ , die als Bilder die offenen Korang-1-Randkomponenten  $D^\circ(l, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  haben. A priori ist nicht klar, daß der Abschluß von  $D^\circ(l, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  isomorph zur kompaktifizierten Kumperschen Modulfläche  $K(2)$  ist. Wir werden sehen, daß sich die Einbettung  $f_{l_{(0,1)}}^\circ$  zu einer analytischen Abbildungen  $K(2) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  erweitern lassen, deren Bild die abgeschlossene Randkomponente  $D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist. Im Fall  $l = l_0$  betrachten wir die offene Kumpersche Modulfläche  $K^\circ(2p)$  zur Stufe  $2p$ . Der Quotient  $\Gamma_1(2)/\pm\Gamma_1(2p) \simeq \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$  operiert dann auf  $K^\circ(2p)$  mit Quotienten  $K^\circ(2)$ . Diese Operation läßt sich zu einer eigentlich diskontinuierlichen Operation auf  $K(2p)$  fortsetzen und  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)\backslash K(2p)$  ist eine Kompaktifizierung von  $K^\circ(2)$ , die nicht isomorph zu  $K(2)$  ist. Wenn wir die Modulfläche auf diese Weise kompaktifizieren, wird sich herausstellen, daß sich  $f_{l_0}^\circ$  zu einer analytischen Abbildung  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)\backslash K(2p) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  mit Bild die abgeschlossene Randkomponente  $D(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  fortsetzen läßt. Die Bestimmung der Konfiguration von projektiven Geraden auf dem Rand von  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  wird uns dann liefern, daß nur im Fall  $l = l_{(0,1)}$  die Fortsetzung  $f_l$  tatsächlich eine Einbettung ist. Diese Tatsache wird dadurch erklärt, daß im Fall  $l = l_{(0,1)}$  die durch die Äquivalenzrelation  $\sim$  induzierten Identifikationen lediglich vom Stabilisator des rationalen Strahls  $\xi_3$  herrühren, wohingegen im Fall  $l = l_0$  noch zusätzliche Identifikationen neben der Gruppenwirkung des Stabilisators von  $\xi_1$  auftreten.

Zur Angabe der obigen Erweiterungen bedarf es zunächst ein Studium der Verklebungsabbildungen.

### 7.1 Verklebungsabbildungen

**Satz 7.1** *i) Für einen isotropen Unterraum  $U$  in  $\mathbb{Q}^4$  ist die Verklebungsabbildung  $\pi(\{0\}, U)$  durch die Komposition von Abbildungen*

$$\pi(\{0\}, U) : X_{\Sigma(\{0\})}(\{0\}) = \mathbb{H}_2 \rightarrow P'(U, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))\backslash\mathbb{H}_2 = X(U) \hookrightarrow X_{\Sigma(U)}(U)$$

*gegeben.*

*ii) Für  $l = l_0, l_{(0,1)}$  ist das Bild von  $X_{\Sigma(l)}(l)$  unter der Verklebungsabbildung  $\pi(l, h)$  in der affinen Toruseinbettung  $T_{\sigma_0} \subset \mathcal{X}_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  enthalten.*

iii) Die Verklebungsabbildung  $\pi(l_0, h)$  ist durch die Einschränkung auf  $X_{\Sigma(l_0)}(l_0)$  der Komposition von Abbildungen

$$e'(l_0) : \begin{cases} \mathcal{X}_{\Sigma(l_0)}(l_0) \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H} & \rightarrow T_{\xi_1} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \\ (t_1, \tau_2, \tau_3) & \mapsto (t_1, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_2}, e^{\frac{2\pi i}{2} \cdot \tau_3}) \end{cases}$$

mit der Inklusion  $T_{\xi_1} \hookrightarrow T_{\sigma_0} \subset T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}} = \mathcal{X}_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  bestimmt.

iv) Die Verklebungsabbildung  $\pi(l_{(0,1)}, h)$  ist durch Einschränkung auf  $X_{\Sigma(l_0)}(l_{(0,1)})$  der Komposition von Abbildungen

$$e'(l_{(0,1)}) : \begin{cases} \mathcal{X}_{\Sigma(l_{(0,1)})}(l_{(0,1)}) \cong \mathbb{H} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \rightarrow T_{\xi_3} = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (\tau_1, \tau_2, t_3) & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_1}, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau_2}, t_3) \end{cases}$$

mit der Inklusion  $T_{\xi_3} \hookrightarrow T_{\sigma_0} \subset T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}} = \mathcal{X}_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  bestimmt.

*Beweis.* Der Punkt i) wurde in [HKW1, Proposition I.3.144] bewiesen. Dort wurden insbesondere die Verklebungsabbildungen für den Fall  $\tilde{\Gamma}_{1,p}$  berechnet. Wir werden auf diese Berechnungen Bezug nehmen und die nötigen Anpassungen machen.

Die zu betrachtenden Fächer sind  $\Sigma(l) = \{\{0\}, \xi_1\}$  falls  $l = l_0$  oder  $\Sigma(l) = \{\{0\}, \xi_3\}$  falls  $l = l_{(0,1)}$  ist, sowie  $\Sigma(h) = \Sigma_L^{\tilde{N}}$ , der durch die Legendre-Zerlegung induzierte Fächer. Es sei  $\hat{T} \simeq \mathbb{C}^*$  der zum Gitter  $P'(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  korrespondierende Torus und  $P$  die Faktorgruppe  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))/P'(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$ . Die Verklebungsabbildung  $\pi(l, h)$  ergibt sich dann als Komposition der Abbildungen  $e_3 \circ e_2 \circ e_1 : \mathcal{X}_{\Sigma(l)}(l) \rightarrow \mathcal{X}_{\Sigma(h)}(h)$  eingeschränkt auf die Teilmenge  $X_{\Sigma(l)}(l)$ , wobei sich die Abbildungen  $e_i$  wie folgt beschreiben:

$$\mathcal{X}(l) \times_{\hat{T}} \hat{T}_{\Sigma(l)} = \mathcal{X}_{\Sigma(l)}(l) \xrightarrow{e_1} \mathcal{X}(H) \times_{\hat{T}} \hat{T}_{\Sigma(l)} \xrightarrow{e_2} T_{\Sigma(l)} \xrightarrow{e_3} \mathcal{X}_{\Sigma(h)}(h)$$

Da  $\mathcal{X}(h)$  ein triviales Torusbündel ist, folgt insbesondere  $T_{\Sigma(h)} = \mathcal{X}_{\Sigma(h)}(h)$ . Die Fächer  $\Sigma(l)$  sind im Legendre-Fächer enthalten, so daß sich die Abbildung  $e_3$  als die durch  $\Sigma(l) \subset \Sigma(h)$  induzierte Einbettung  $T_{\Sigma(l)} \hookrightarrow T_{\Sigma(h)}$  beschreibt. Wir halten fest, daß das Bild von  $T_{\Sigma(l)} = T_\xi$  aufgrund der Seitenrelation  $\xi \prec \sigma_0$  in  $T_{\sigma_0}$  liegt.

Die Abbildung  $e_2$  ist ein Isomorphismus, wie er in [HKW1, Proposition I.3.71i)] beschrieben wird. In unserem Fall ist das leicht einzusehen, da

$$\mathcal{X}(h) \times_{\hat{T}} \hat{T}_{\Sigma(l)} \cong (\mathbb{C}^*)^3 \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C} \cong (\mathbb{C}^*)^2 \times \mathbb{C} \cong T_\xi = T_{\Sigma(l)}$$

ist.

Letztlich ist  $e_1$  die durch  $P$  induzierte Quotientenabbildung, wobei  $P$  in

der Weise operiert, daß die Operation auf der Faser  $\hat{T}_{\Sigma(l)}$  trivial ist und auf  $\mathcal{X}(l)$  mit Quotienten  $\mathcal{X}(h)$  operiert (aufgrund  $P'(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \subset P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  wird eine natürliche Operation auf  $\mathcal{X}(l)$  induziert). Damit ergibt sich also die Abbildungen  $e'(l)$  in ii) und iii) als Komposition  $e_1 \circ e_2$ . Beachte man nun, daß unter der Identifikation von  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit dem Gitter  $\tilde{N}$  die Gruppe  $P'(l_0, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit  $\left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in N \right\} \simeq 2p\mathbb{Z}$  bzw.  $P'(l_{(0,1)}, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \in N \right\} \simeq 2\mathbb{Z}$  identifiziert wird, folgen die Aussagen in ii) und iii).  $\square$

**Bemerkung 7.2** Unter der (mengentheoretischen) Identifikation von  $X_{\Sigma(l)}(l)$  mit  $X(l) \cup \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  wird unter der Verklebungsabbildung  $\pi(l, h)$  die Menge  $X(l)$  auf  $X(h)$  abgebildet und der Rand  $\{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{H}_1$  hat als Bild unter  $e'(l)$  die Menge  $\{0\} \times \mathbb{C}^* \times \mathfrak{D}_1^* \subseteq \text{orb}(\xi, N)$ .

Es sei  $\Sigma_1$  der Fächer, der aus allen zweidimensionalen Kegeln der Form  $\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}(k, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0}(k+1, 1)$  und deren Seiten für alle  $k \in \mathbb{Z}$  besteht.

Die durch diesen Fächer bestimmte toroidale Kompaktifizierung der Modulfläche  $K^\circ(2)$  läßt sich dann wie folgt beschreiben. Die Basiskurve  $X(2) = \Gamma(2) \backslash (\mathbb{H}_1 \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\})$  hat drei Spitzen und die singuläre Faser über jeder Spitze ist eine Konfiguration von zwei projektiven Geraden, die sich transversal in einem Punkt schneiden (siehe dazu etwa [vdG]). Wir werden im Beweis zu Satz 7.3 noch näher auf diese Kompaktifizierung eingehen.

Eine weitere Möglichkeit, die offene Kummersche Modulfläche zu kompaktifizieren, besteht in folgender Konstruktion:

Betrachte die offene Kummersche Modulfläche  $K^\circ(2p)$  zur Stufe  $2p$ . Die durch den Fächer  $\Sigma_1$  bestimmte partielle Kompaktifizierung über der Spitze  $\infty$  ist ein gefaltetes  $2p$ -Eck, das heißt eine Konfiguration von  $p+1$  projektiven Geraden, die sich in  $p$  Punkten schneiden, wie folgt:



Es sei  $H = \pm\Gamma_1(2p)$ ,  $\bar{H} = \Gamma_1(2)$  und  $\bar{L} = 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$ , so daß  $D^\circ(H_{\bar{L}}) \simeq K^\circ(2p)$  und  $D^\circ(\bar{H}_{\bar{L}}) \simeq K^\circ(2)$  ist. Dann ist  $H_{\bar{L}} \triangleleft \bar{H}_{\bar{L}}$  mit Quotienten  $\bar{H}_{\bar{L}}/H_{\bar{L}} \simeq \Gamma_1(2)/\pm\Gamma_1(2p) \simeq \text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$ . Die Gruppe  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$  operiert auf  $K^\circ(2p)$  mit Quotienten  $K^\circ(2)$  und die Operation von  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$  läßt sich nach [HKW1, Proposition I.2.40] zu einer eigentlich diskontinuierlichen Operation auf  $K(2p)$  fortsetzen. Diese Operation liefert also eine Erweiterung der Quotientenabbildung  $K^\circ(2p) \rightarrow K^\circ(2)$  der Form  $K(2p) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) \backslash K(2p)$ , wobei  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) \backslash K(2p)$  eine Kompaktifizierung von  $K^\circ(2)$  ist.

Die Operation von  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p)$  auf  $K(2p) \backslash K^\circ(2p)$  läßt sich wie folgt beschreiben. Es sei  $T$  der zum Gitter  $P'(\infty, H_{\bar{L}}) \simeq \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2p \end{pmatrix}$  korrespondierende

Torus. Weiter sei

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\nu \\ 0 & 1 & 2\beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu, \beta \in \mathbb{Z}$$

ein Element aus der Gruppe  $P'(\bar{H}_L, \infty)$ . Dieses operiert durch

$$g : T \rightarrow T, \quad g(u, v) = (u, e^{\frac{2\pi i}{p} \cdot \beta} \cdot v)$$

auf  $T$  und induziert eine Operation von  $P'(\bar{H}_L, \infty)$  auf  $T_{\Sigma_1}$ . Es ist weiterhin  $P''(\bar{H}_L, \infty) = P''(H_L, \infty)$ , so daß sich in dieser Situation feststellen läßt, daß über der Spitze  $\infty$  von  $X(2)$  ein gefaltetes  $2p$ -Eck hinzugeklebt wird, wie es oben beschrieben ist. Für Details dieser Konstruktion sei auf [HKW1, Proposition I.2.40] hingewiesen.

**Satz 7.3** (i) Die Einbettung  $f_{(0,1)}^\circ : K^\circ(2) \hookrightarrow D^\circ(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \subset (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  läßt sich zu einer analytischen Abbildung

$$f_{(0,1)} : K(2) \rightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$$

mit Bild  $D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  fortsetzen.

(ii) Die Einbettung  $f_0^\circ : K^\circ(2) \hookrightarrow D^\circ(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \subset (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  läßt sich zu einer analytischen Abbildung

$$f_0 : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) \backslash K(2p) \rightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$$

mit Bild  $D(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  fortsetzen.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall  $l = l_{(0,1)}$ . In Proposition 3.12 haben wir festgestellt, daß sich  $D^\circ(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2)) \simeq K^\circ(2)$  als Quotient von  $\mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \{0\}$  nach der Operation von  $(2p\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}) \rtimes \Gamma_1(2)$  ergibt. Wir werden die partielle Kompaktifizierung von  $K^\circ(2)$  über der Spitze  $\infty$  näher betrachten (vergleiche die Ausführungen in [HKW1, I 2B]).

Es sei

$$\begin{aligned} H &= E^{-1} \cdot \Gamma_1(2) \cdot E \quad \text{und} \\ L &= \frac{1}{p} \cdot (2p\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}) \cdot E = 2\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

so daß  $K(2) \simeq D(H_L)$  (nach [HKW1, Proposition I.2.35]) ist.

Die Stabilisatorgruppe von  $\infty$  in  $H_L$  beschreibt sich als

$$P(H_L, \infty) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a & bp \\ 0 & \frac{c}{p} & d \end{pmatrix}; (m, n) \in L, \begin{pmatrix} a & bp \\ \frac{c}{p} & d \end{pmatrix} \in H \right\}$$

Dann betrachte die Untergruppe

$$P'(H_L, \infty) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & bp \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P(H_L, \infty) \right\} \simeq N_3 := \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2p \\ 0 \end{pmatrix},$$

die partielle Quotientenabbildung

$$e(\infty) : \begin{cases} \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} & \rightarrow X(\infty) \subset T_3 = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \\ (\tau, z) & \mapsto (e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot \tau}, e^{\frac{2\pi i}{2p} \cdot z}) \end{cases}$$

liefert.

Der Torus  $T_3$  kann als  $\text{orb}(\xi_3, \tilde{N})$  in  $T_{\sigma_0}$  aufgefaßt werden. Das ist klar, denn vermöge des Modulisomorphismus

$$\begin{cases} \tilde{N}(\xi_3) & \rightarrow N_3 \\ \left[ \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_2 & n_3 \end{pmatrix} \right] & \mapsto \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

kann  $\tilde{N}(\xi_3)$  mit  $N_3$  und damit der zum Gitter  $N_3$  korrespondierende Torus  $T_3$  mit dem Quotiententorus

$$\text{Hom}(\tilde{M}(\xi_3), \mathbb{C}^*) = \text{Hom}(\tilde{M} \cap \xi_3^\perp, \mathbb{C}^*) = \text{orb}(\xi_3, \tilde{N})$$

identifiziert werden.

Beachte, daß sich aus der Berechnung der Verklebungsabbildung  $\pi(l_{(0,1)}, h)$  in Satz 7.1 iv) das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{H}_1 \times \mathbb{C} \times \{0\} & \subset X_{\Sigma(l_{(0,1)})}(l_{(0,1)}) \\ \downarrow e(\infty) & & \downarrow e'(l_{(0,1)}) & \\ X(\infty) & \xrightarrow{\pi(l_{(0,1)}, h)} & X(\infty) \times \{0\} & \\ \downarrow & & \downarrow & \\ T_3 \hat{=} \text{orb}(\xi_3, \tilde{N}) & \hookrightarrow & T_{\sigma_0} & \end{array}$$

ergibt.

Es sei  $X_{\Sigma_1}$  die toroidale Einbettung  $\mathbb{C} \times \mathcal{D}_1^* \subset \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* = \text{orb}(\xi_3, \tilde{N})$ , die durch den Fächer  $\Sigma_1$  bestimmt ist. Der Quotient  $P''(\infty, H_L) = P(\infty, H_L)/P'(\infty, H_L)$  operiert dann auf  $X_{\Sigma_1}$  und  $P''(\infty, H_L) \setminus X_{\Sigma_1}$  ist die partielle Kompaktifizierung von  $D^\circ(H_L)$  über der Spitze  $\infty$ .

Wir werden nun die Einbettung  $X(\infty) \hookrightarrow T_{\sigma_0}$  zu einer Einbettung  $X_{\Sigma_1}(\infty) \hookrightarrow X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  erweitern. Beachte, daß  $X(\infty)$  im Torus  $\text{orb}(\xi_3, N)$  liegt, der unter der Einbettung  $T_{\xi_3} \hookrightarrow T_{\sigma_0}$  als Teilmenge des Randes von  $X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}} \subset T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}$  realisiert ist. Nach [HKW1, Proposition I.2.11] ist der Abschluß von  $\text{orb}(\xi_3, \tilde{N})$  in  $T_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}$  isomorph zur Toruseinbettung von  $\text{orb}(\xi_3, \tilde{N})$ , der durch den Fächer bestimmt ist, der aus allen Kegeln (und deren Seiten) besteht, die  $\xi_3$  als Seite haben. Wir müssen also  $\text{Stern}(\xi_3)$  in  $\Sigma_L^{\tilde{N}}$  bestimmen und es ist einfach zu sehen, daß dieser mit  $\Sigma_1$  übereinstimmt:

Der Stabilisator von  $\xi_3$  in  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  wurde in Hilfssatz 3.20 iii) als

$$\text{Stab}(\xi_3) = \pm \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{Z} \right\}$$

bestimmt.

Damit ergibt sich also  $\text{Stern}(\xi_3)$  als der Fächer

$$\left\{ \overline{g(\sigma_0)} \mid g \in \text{Stab}(\xi_3) \right\} = \{ \bar{\sigma}_r \mid r \in \mathbb{Z} \} \simeq \Sigma_1.$$

wobei  $\overline{g(\sigma_0)}$  die Projektion des Kegels  $g(\sigma_0)$  nach  $\tilde{N}(\xi_3)_{\mathbb{R}}$  bezeichnet.

Klarerweise ist die so bestimmte Einbettung  $X_{\Sigma_1}(\infty) \hookrightarrow X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  äquivariant bezüglich der Operation von

$$P''(\infty, H_L) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \mid m \in 2\mathbb{Z}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$$

auf  $X_{\Sigma_1}(\infty)$  und der Operation von

$$\text{Stab}(\xi_3) \cap \tilde{F}^\circ = \pm \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in 2\mathbb{Z} \right\}$$

auf  $X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  (Beachte, daß  $\pm \mathbf{1}_2$  auf  $X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h)$  trivial operiert). Das liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X_{\Sigma_1}(\infty) & \hookrightarrow & X_{\Sigma_L^{\tilde{N}}}(h) \\ \text{mod } P''(\infty, H_L) \downarrow & & \downarrow \text{mod } \sim \\ P''(\infty, H_L) \backslash X_{\Sigma_1}(\infty) & \hookrightarrow & (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^* \end{array}$$

und wir erhalten eine analytische Abbildung lokal um die singuläre Faser über  $\infty$ . Mit den beiden weiteren singulären Fasern von  $K(2)$  verfährt man

analog. Dazu ist allerdings zu beachten, daß nach Berechnung des Titsgebäudes von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  die Bilder dieser singulären Fasern in verschiedenen Korang-2-Randkomponenten in  $(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  liegen. Insgesamt erhalten wir also eine analytische Abbildung  $f_{(0,1)} : K(2) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$ , die die Einbettung  $f_{(0,1)}^\circ : K^\circ(2) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$  fortsetzt. Das Bild  $f_{(0,1)}(K(2))$  liegt dicht im Abschluß  $D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$ , so daß  $f_{(0,1)}(K(2)) = D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist, da sowohl  $f_{(0,1)}(K(2))$  als auch  $D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  Abschlüsse von  $f_{(0,1)}^\circ(K(2)) = D^\circ(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  sind.

Im Fall  $l = l_0$  wird die obige Konstruktion der analytischen Erweiterung aber fehlschlagen. Analog zum obigen Fall können wir den zum Gitter  $P'(\infty, H_L)$  korrespondierenden Torus mit  $\text{orb}(\xi_1, \tilde{N})$  in  $T_{\sigma_0}$  identifizieren. Die Bestimmung von  $\text{Stern}(\xi_1)$  in  $\tilde{N}$  kann auch mit  $\Sigma_1$  identifiziert werden, jedoch gibt es keine Äquivarianz der Operation von

$$\text{Stab}(\xi_1) \cap \tilde{F}^\circ = \pm \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mid r \in 2p\mathbb{Z} \right\}$$

auf  $X_{\Sigma_{\tilde{L}}}(h)$  und der Operation von  $P''(\infty, H_L)$  auf  $X_{\Sigma_1}(\infty)$ .

Wir werden deshalb die Gruppe  $\tilde{H} = \pm\Gamma_1(2p)$  und das Gitter  $\tilde{L} = 2p\mathbb{Z} \times 2p\mathbb{Z}$  betrachten.

Es ist

$$P(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & n \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} ; (m, n) \in \tilde{L}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tilde{H} \right\}$$

und

$$P'(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in P(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}}) \right\} \simeq N_1 := \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2p \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2p \end{pmatrix}.$$

Der zu  $N_1$  korrespondierende Torus  $T_1$  läßt sich dann mit  $\text{orb}(\xi_1, \tilde{N}')$  in  $T'_{\sigma_0}$  identifizieren. Beachte, daß sich der Torus  $T_{\sigma_0}$  als Quotient  $T'_{\sigma_0}/\zeta_{\sigma_0}$ , mit  $\zeta_{\sigma_0} = (1, 1, e^{\frac{2\pi i}{p}})$  beschreiben läßt. Unter dieser Identifikation ist  $\text{orb}(\xi_1, \tilde{N}) = \text{orb}(\xi_1, \tilde{N}')/\zeta_{\sigma_0}$ . Die Operation vom  $\zeta_{\sigma_0}$  auf  $T'_{\sigma_0}$  ist durch

$$\zeta_{\sigma_0} : \begin{cases} T'_{\sigma_0} & \rightarrow & T'_{\sigma_0} \\ (t_1, t_2, t_3) & \mapsto & (t_1, t_2, e^{\frac{2\pi i}{p}} \cdot t_3) \end{cases}$$

gegeben, so daß sich  $\text{orb}(\xi_1, \tilde{N})$  als Quotient nach der Operation von  $\zeta_{\sigma_0}$  auf dem Orbit  $\text{orb}(\xi_1, \tilde{N}') = \{0\} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$  beschreibt. Diese Operation stimmt

gerade mit der Operation von  $P'(\infty, H_{\tilde{L}})$  auf  $T_1$  überein.

Der Rest ist nun klar. Die Operation von  $P''(\infty, H_{\tilde{L}}) = P''(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}})$  liefert keine weiteren Identifikationen auf  $P''(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}}) \backslash X_{\Sigma_1}(\infty)$ . Es ist

$$P''(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \mid m \in 2p\mathbb{Z}, \varepsilon \in \{\pm 1\} \right\}$$

und die Operation von  $P''(\infty, \tilde{H}_{\tilde{L}})$  auf  $X_{\Sigma_1}(\infty)$  ist äquivariant zur Operation von

$$\text{Stab}(\xi_1) \cap \tilde{F}^\circ = \pm \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix} \mid r \in 2p\mathbb{Z} \right\}$$

auf  $X_{\Sigma_{\tilde{L}}}(\tilde{h})$ .

□

**Satz 7.4** (i) Die Abbildung  $f_{(0,1)} : K(2) \rightarrow D(l_{(0,1)}, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist ein Isomorphismus.

(ii) Die Abbildung  $f_{(0)} : \text{PSL}(2, \mathbb{Z}_p) \backslash K(2p) \rightarrow D(l_0, \Gamma_{1,p}^\circ(2))$  ist lediglich eine Immersion.

*Beweis.* Die Basiskurve  $X(2)$  einer Korang-1-Randkomponente hat genau drei Spitzen und nach Berechnung des Titsgebäudes  $\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  liegen die singulären Fasern über den Spitzen in genau drei verschiedenen Korang-2-Randkomponenten. Es liegt genau dann kein Isomorphismus vor, wenn es auf den singulären Faser der Kummerschen Flächen noch zusätzliche Identifikationen gibt. Dazu beachte man, daß die lokalen Umkehrabbildungen der analytischen Abbildungen  $f_l$  in Satz 7.3 analytisch außerhalb Kodimension 1 sind und somit überall analytisch nach dem Riemannschen Hebbarkeitsatz sind. Hier benutzt man, daß das Bild einer Umgebung eines Punktes auf der singulären Faser normal ist. Das ist klar, da sich die Bilder dieser Umgebungen als Quotienten von  $\mathbb{C}^2$  nach einer endlichen Gruppe ergeben, so daß diese wieder normal sind. Im Fall der peripheren Randkomponente ist die singuläre Faser eine Konfiguration von zwei projektiven Geraden, die sich in einem glatten tiefsten Punkt schneiden. Auf dieser Konfiguration gibt es keine weiteren Identifikationen. Dann folgt (i) aus der Tatsache, daß eine bijektive Abbildung kompakter, glatter Flächen schon ein Isomorphismus ist. Im Fall der zentralen Randkomponente liegt deshalb nur ein lokaler Isomorphismus vor, weil es neben der Gruppenwirkung von  $\text{Stab}(\xi_1) \cap \tilde{F}^\circ$  nach Satz 6.17 noch weitere Identifikationen auf den singulären Fasern gibt.

□



## 8 Die Erweiterung $\Gamma_{1,p}^*(2)$ und die Modulform $\Delta_1^3$

### 8.1 Die maximale Erweiterung $\Gamma_{1,p}^*$ von $\Gamma_{1,p}^\circ$ in $\mathrm{Sp}(\Lambda, \mathbb{R})$

In [GH2] wurde eine maximale diskrete Erweiterung  $\Gamma_{1,p}^*$  der Gruppe  $\Gamma_{1,p}^\circ$  in  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$  definiert. Diese Gruppe operiert auf  $\mathbb{H}_2$  und der Quotient  $\Gamma_{1,p}^* \backslash \mathbb{H}_2$  besitzt eine modultheoretische Bedeutung: Dieser ist isomorph zum Modulraum von K3-Flächen  $X$  mit Polarisierungsgrad  $2p$  und einer zusätzlichen Bedingung an  $\mathrm{Pic}(X)$ . Eingehend wurde der Quotient in [GH2] beschrieben. In diesem Abschnitt werden wir in natürlicher Weise eine Erweiterung  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2)$  der Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  konstruieren.

Zunächst fassen wir die Konstruktion der Gruppe  $\Gamma_{1,p}^*$  zusammen.

Für ganze Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$ , die die Relation  $xp - y = 1$  erfüllen, betrachten wir die Matrix

$$\widehat{V}_p = \begin{pmatrix} px & -1 & 0 & 0 \\ -yp & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & yp \\ 0 & 0 & 1 & px \end{pmatrix}$$

und setzen

$$V_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \widehat{V}_p \in \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$$

Dann sieht man leicht, daß  $V_p^2 \in \Gamma_{1,p}^\circ$  und  $V_p \Gamma_{1,p}^\circ V_p = \Gamma_{1,p}^\circ$  gilt. Die Matrix  $V_p$  definiert also eine Involution modulo  $\Gamma_{1,p}^\circ$  und  $\Gamma_{1,p}^* := \langle \Gamma_{1,p}^\circ, V_p \rangle$  ist eine normale Erweiterung von  $\Gamma_{1,p}^\circ$  vom Index 2. Nach [K] ist eine diskrete Erweiterung von  $\Gamma_{1,p}^\circ$  in  $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ , die  $\Gamma_{1,p}^\circ$  als Normalteiler enthält, sogar eindeutig bestimmt.

Ist

$$\bar{V}_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so kann die Nebenklasse  $V_p \Gamma_{1,p}^\circ$  auch in der Form

$$V_p \Gamma_{1,p}^\circ = \bar{V}_p \Gamma_{1,p}^\circ$$

geschrieben werden.

Die Matrix  $\bar{V}_p$  operiert auf  $\mathbb{H}_2$  durch

$$\bar{V}_p : \begin{cases} \mathbb{H}_2 & \rightarrow \mathbb{H}_2 \\ \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p}^{-1} \\ \sqrt{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ \sqrt{p}^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Es sei  $\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & \tau_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_2$  ein zu der  $(1, p)$ -polarisierten abelschen Fläche  $X = \mathbb{C}^2/L$  korrespondierender Punkt, wobei das Gitter  $L$  durch die Periodenmatrix  $\Omega = (E, \tau)$  und die hermitsche Form  $H$ , die die Polarisierung von  $X$  definiert, durch  $(\text{Im } \tau)^{-1}$  bezüglich der Standardbasis von  $\mathbb{C}^2$  gegeben ist. Die Polarisierung  $H$  definiert eine Isogenie

$$\lambda_H : \begin{cases} X & \rightarrow \hat{A} = \text{Pic}^\circ A \\ x & \mapsto T_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \end{cases}$$

wobei  $\mathcal{L}$  ein Geradenbündel ist, das die Polarisierung  $H$  repräsentiert und  $T_x$  die Translation um  $x$  ist. Die Abbildung  $\lambda_H$  hängt dabei lediglich von der Polarisierung  $H$ , jedoch nicht von der Wahl des Geradenbündels  $\mathcal{L}$  ab. Der Kern von  $\lambda_H$  ist (nicht kanonisch) isomorph zu  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ , so daß dies eine Quotientenabbildung

$$\lambda_p : X \rightarrow X / \ker \lambda_H = \hat{X}$$

definiert. Dabei ist  $\hat{X}$  die zu  $X$  duale abelsche Fläche, die zur Periodenmatrix

$$\Omega' = \begin{pmatrix} p & 0 & p\tau_1 & \tau_2 \\ 0 & 1 & \tau_2 & \tau_3/p \end{pmatrix}$$

korrespondiert, und es gilt die Identität

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & p\tau_1 & \tau_2 \\ 0 & 1 & \tau_2 & \tau_3/p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0_2 \\ 0_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}, \bar{V}_p(\tau) \right).$$

Insbesondere trägt  $\hat{A}$  eine Polarisierung vom Typ  $(1, p)$  und die Operation von  $\bar{V}_p$  induziert einen Morphismus

$$\varphi(p) : \begin{cases} \mathcal{A}_{1,p}^\circ & \rightarrow \mathcal{A}_{1,p}^\circ \\ (X, H) & \mapsto (\hat{X}, \hat{H}) \end{cases}$$

der einer abelschen Fläche ihre duale abelsche Fläche zuordnet.

Da wir vorzugsweise mit Untergruppen von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  arbeiten, werden wir mit

der zu  $\bar{V}_p$  konjugierten Matrix

$$\widetilde{W}_p = R_p \bar{V}_p R_p^{-1} = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

arbeiten und definieren  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^* := \langle \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ, \widetilde{W}_p \rangle$ . Wir erinnern uns daran, daß  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  als Kern der surjektiven Abbildung  $\pi : \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \rightarrow \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \simeq S_6$ ,  $\pi(M) = \overline{M}$  definiert ist.

**Lemma 8.1** *Durch  $\pi(g) := \pi(g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota$  für  $g \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^* \setminus \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  und*

$$\iota = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0_2 \\ 0_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

*wird  $\pi$  zu einem Homomorphismus auf  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^*$  fortgesetzt.*

*Beweis.* Es sei

$$\pi^* : \begin{cases} \widetilde{\Gamma}_{1,p}^* & \rightarrow \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \\ g & \mapsto \begin{cases} \pi(g) & \text{falls } g \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \\ \pi(g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota & \text{falls } g \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^* \setminus \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \end{cases} \end{cases}$$

Zunächst rechnet man nach, daß die Gleichung

$$\iota \cdot \pi^*(\widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota = \pi^*(g) \quad \text{für alle } g \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \quad (*)$$

erfüllt ist.

Es gilt nämlich für  $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ ,  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}, \dots, D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  (Nach [HKW1, Proposition I.1.16] ist  $a_{21} \equiv b_{21} \equiv c_{21} \equiv d_{21} \equiv 0 \pmod{p}$ )

$$\begin{aligned} \iota \cdot \pi^*(\widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota &= \iota \cdot \pi(\widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\ &= \iota \cdot \pi \left( \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \\ \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \cdot C \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} & \frac{1}{p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \cdot D \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right) \cdot \iota \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iota \cdot \left( \frac{\overline{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21}/p \\ pa_{12} & a_{11} \end{pmatrix}}}{\overline{\begin{pmatrix} c_{22} & c_{21}/p \\ pc_{12} & c_{11} \end{pmatrix}}} \cdot \frac{\overline{\begin{pmatrix} b_{22} & b_{21}/p \\ pb_{12} & b_{11} \end{pmatrix}}}{\overline{\begin{pmatrix} d_{22} & d_{21}/p \\ pd_{12} & d_{11} \end{pmatrix}}} \right) \cdot \iota \\
&= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} \\ a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} b_{22} & b_{21} \\ b_{12} & b_{11} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&\quad \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} c_{22} & c_{21} \\ c_{12} & c_{11} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} d_{22} & d_{21} \\ d_{12} & d_{11} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \\
&= \left( \frac{\overline{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}}{\overline{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}} \quad \frac{\overline{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}}}{\overline{\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}}} \right) \\
&= \pi^*(g)
\end{aligned}$$

Da  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  normal in  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^*$  ist und  $\widetilde{W}_p^2 = \mathbf{1}_4$  gilt, ist (\*) äquivalent zur Gleichung

$$\iota \cdot \pi^*(\widetilde{W}_p \cdot h) = \pi^*(h \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \quad \text{für alle } h \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^* \setminus \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ. \quad (**)$$

Es seien  $g \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ ,  $h_1, h_2 \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^* \setminus \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
(i) \quad \pi^*(g \cdot h_1) &= \pi(g \cdot h_1 \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi(g) \cdot \pi(h_1 \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi^*(g) \cdot \pi^*(h_1) \\
(ii) \quad \pi^*(h_1 \cdot g) &= \pi(h_1 \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi(h_1 \cdot \widetilde{W}_p \cdot \widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi(h_1 \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \pi(\widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi^*(h_1) \cdot \iota \cdot \pi(\widetilde{W}_p \cdot g \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&\stackrel{(*)}{=} \pi^*(h_1) \cdot \pi^*(g) \\
(iii) \quad \pi^*(h_1 \cdot h_2) &= \pi^*(h_1 \cdot \widetilde{W}_p \cdot \widetilde{W}_p \cdot h_2) \\
&= \pi^*(h_1 \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \pi^*(\widetilde{W}_p \cdot h_2) \\
&= \pi^*(h_1) \cdot \iota \cdot \pi^*(\widetilde{W}_p \cdot h_2) \\
&\stackrel{(**)}{=} \pi^*(h_1) \cdot \pi^*(h_2 \cdot \widetilde{W}_p) \cdot \iota \\
&= \pi^*(h_1) \cdot \pi^*(h_2).
\end{aligned}$$

□

**Satz 8.2** Es gibt genau eine Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2)$ , so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2) & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 1 & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ & \longrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) & \equiv & \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & & 
 \end{array}$$

kommutiert mit exakten Zeilen und Spalten.

*Beweis.* Es sei  $\varphi$  ein Homomorphismus, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ & \hookrightarrow & \tilde{\Gamma}_{1,p}^* \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \varphi \\
 \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) & \equiv & \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)
 \end{array}$$

kommutiert.

Wir werden zeigen, daß  $\varphi(\tilde{W}_p) = \pi^*(\tilde{W}_p) = \iota$  gelten muß.

Da  $\tilde{W}_p^2 = \mathbf{1}_4$ , muß insbesondere  $\varphi(\tilde{W}_p)$  eine Involution in  $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  sein. Darüberhinaus muß

$$\varphi(g \cdot \tilde{W}_p \cdot g^{-1}) = \pi(g) \cdot \varphi(\tilde{W}_p) \cdot \pi(g)^{-1} \quad (*)$$

für alle  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  gelten, woraus man die Bedingung

$$g \in \text{Zentr}(\tilde{W}_p, \tilde{\Gamma}_{1,p}^*) \Rightarrow \pi(g) \in \text{Zentr}(\varphi(\tilde{W}_p), \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2))$$

abliest (wobei mit  $\text{Zentr}(x, G)$  der Zentralisator von  $x$  in  $G$  bezeichnet sei). Eine elementare Rechnung liefert dann

$$\text{Zentr}(\tilde{W}_p, \tilde{\Gamma}_{1,p}^*) = \left\langle \left\{ g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ \mid g \in \begin{pmatrix} a & a' & b & b' \\ pa' & a & pb' & b \\ c & c' & d & d' \\ pc' & c & pd' & d \end{pmatrix} \right\}, \tilde{W}_p \right\rangle$$

mit  $a, a', \dots, d, d' \in \mathbb{Z}$ .

Insbesondere sind

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ p & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus  $\text{Zentr}(\widetilde{W}_p, \widetilde{\Gamma}_{1,p}^*)$ .

Da nun

$$\pi(h_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aus  $\text{Zentr}(\varphi(\widetilde{W}_p), \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2))$  sein muß, folgt für  $\varphi(\widetilde{W}_p) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , daß  $C = 0_2$  sein. Genauso argumentiert man mit  $\pi(h_2)$ , daß notwendigerweise  $B = 0_2$  sein muß.

Da  $\varphi(\widetilde{W}_p)$  eine Involution in  $\text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$  sein muß, kommen für  $A, D$  nur die Involutionen  $\{\mathbf{1}_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$  in  $\text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)$  in Frage.

Unter Ausnutzung von (\*) sind man leicht, daß  $A = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sein muß: Wäre etwa  $A = \mathbf{1}_2$  (und damit  $D = \mathbf{1}_2$ ), so müßte  $\pi(\widetilde{W}_p \cdot h \cdot \widetilde{W}_p) = \pi(h)$  für alle  $h \in \widetilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  gelten, was für die Matrix

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$

zum Widerspruch führt. Den Fall  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (bzw.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ) führt man analog mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(bzw. mit  $h$ ) zum Widerspruch.

Damit kommt lediglich die Gruppe  $\widetilde{\Gamma}_{1,p}^*(2) = \ker(\pi^*)$  in Frage.

□

Der Kern  $\ker(\pi^*)$  wird von  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$  und  $\tilde{\kappa}_p$  mit  $\tilde{\kappa}_p = \tilde{W}_p \cdot g$  und  $g \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ ,  $\pi^*(g) = \iota$  erzeugt. Natürlich gilt  $G = \langle \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2), \tilde{W}_p \cdot g_1 \rangle = \langle \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2), \tilde{W}_p \cdot g_2 \rangle$  für  $g_1, g_2 \in \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$  mit  $\pi^*(g_1) = \pi^*(g_2) = \iota$ , so daß wir

$$\begin{aligned} \tilde{\kappa}_p &= \tilde{W}_p \cdot \begin{pmatrix} p-1 & 2-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p-1 & 1 \\ 0 & 0 & p(2-p) & 1-p \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}} \tilde{V}_p, \quad \tilde{V}_p = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p(p-1) & p(2-p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(2-p) & 1-p \\ 0 & 0 & p(p-1) & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wählen können.

## 8.2 Die Modulform $\Delta_1^3$

In [GN] wurde gezeigt, daß

$$\Delta_1(\tau) = q^{1/6} r^{1/2} s^{1/2} \prod_{\substack{n \geq 0, m \geq 0, l \in \mathbb{Z} \\ (l < 0 \text{ falls } n=m=0)}} (1 - q^n r^l s^{3m})^{f(nm,l)}$$

mit  $q = e^{2\pi i \tau_1}$ ,  $r = e^{2\pi i \tau_2}$ ,  $s = e^{2\pi i \tau_3}$  und

$$\sum_{n \geq 0, l} f(n, l) q^n r^l = r^{-1} \left( \prod_{n \geq 1} (1 + q^{n-1} r) (1 + q^n r^{-1}) (1 - q^{2n-1} r^2) (1 - q^{2n-1} r^{-2}) \right)^2$$

eine Spitzenform vom Gewicht 1 bezüglich  $\Gamma_{1,3}^\circ$  mit einem Charakter  $\chi_6$  der Ordnung 6 ist. Nach [GH2] ist  $\Delta_1^3$  eine Spitzenform bezüglich  $\Gamma_{1,3}^*$  mit einem Charakter  $\chi_{(2,-)}$  der Ordnung 2, der auf  $\bar{V}_3$  den Wert  $-1$  annimmt. Der Charakter  $\chi_{(2,-)|\Gamma_{1,3}^\circ}$  ergibt sich nach [GH2, Theorem 2.1] aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma_{1,3}^\circ(2) & \longrightarrow & \Gamma_{1,3}^\circ & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Sp}(4, \mathbb{Z}_2) \simeq S_6 \longrightarrow 1 \\ & & & & & \searrow \chi_{(2,-)} & \downarrow \mathrm{sgn} \\ & & & & & & \{\pm 1\} \end{array}$$

Betrachte die Erweiterung  $\Gamma_{1,3}^*(2) = \langle \Gamma_{1,3}^\circ(2), R_3^{-1} \cdot \tilde{\kappa}_3 \cdot R_3 \rangle$ . Aus dem obigen

Diagramm lesen wir  $\chi_{(2,-)|\Gamma_{1,3}^\circ(2)} \equiv 1$  ab. Es ist  $R_3^{-1} \cdot \tilde{\kappa}_3 \cdot R_3 = \bar{V}_3 \cdot g$  mit

$$g = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \Gamma_{1,3}^\circ.$$

Weiter haben wir  $\pi(g) = \iota$  und nach der Berechnung auf Seite 11 ist  $\text{sgn}(\iota) = -1$ . Damit ist also

$$\begin{aligned} \chi_{(2,-)}(R_3^{-1} \cdot \tilde{\kappa}_3 \cdot R_3) &= \chi_{(2,-)}(\bar{V}_3) \cdot \chi_{(2,-)}(g) \\ &= -1 \cdot \text{sgn}(\iota) \\ &= 1. \end{aligned}$$

**Satz 8.3** *Es sei  $S_3(\Gamma_{1,3}^*(2))$  der Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht 3 bezüglich  $\Gamma_{1,3}^*(2)$ . Dann gilt*

$$S_3(\Gamma_{1,3}^*(2)) = \mathbb{C} \cdot \Delta_1^3.$$

*Beweis.* Nach den obigen Berechnungen ist  $\Delta_1^3 \in S_3(\Gamma_{1,3}^*(2))$ . Die Aussage folgt, da nach [BN]  $\Gamma_{1,3}^*(2) \backslash \mathbb{H}_2$  birational äquivalent zu einer Calabi-Yau Varietät ist. □

### 8.3 Eine Verfeinerung des Legendre-Fächers im Fall $p = 3$

Bei der Untersuchung der Korang-2-Randkomponenten haben wir schon darauf hingewiesen, daß jeder  $\mathbb{P}_1$  in  $\mathcal{C}^\circ$  von Paaren  $(a, b), (c, d)$  in  $\mathcal{M}(1)$  mit der Eigenschaft  $\det(a, b, c, d) = \pm 1$  bestimmt ist.

Ist etwa ein  $\mathbb{P}_1$  in  $\mathcal{C}^\circ$  durch die Paare  $(a, b), (c, d)$  mit  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$  und  $c \not\equiv 0 \pmod{p}$  bestimmt (diese projektive Gerade ist ein  $cc$ - $\mathbb{P}_1$ ), so wird diese unter  $\tilde{\kappa}_p$  auf Paare  $(a', b'), (c', d')$  mit  $a' \equiv b' \equiv 0 \pmod{p}$  abgebildet, die natürlich nicht die zusätzliche Determinanteneigenschaft erfüllen können. In diesem Sinn ist die Legendre-Zerlegung nicht für eine toroidale Kompaktifizierung geeignet. Das Ziel ist, eine minimale Verfeinerung des Legendre-Fächers anzugeben, so daß die Gruppe  $\tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2)$  auf dieser Verfeinerung operiert.

Als direkte Konsequenz aus den Berechnungen in Satz 3.9 ergibt sich zunächst:

**Hilfssatz 8.4** *Für  $l = l_0, l_{(0,1)}$  ist  $P(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2)) = P(l, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$*



In Kapitel 5 haben wir das Gitter  $P'(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  mit  $\tilde{N}$  und die Faktorgruppe  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2))$  durch die Projektion

$$\left\{ \begin{array}{l} P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)) \rightarrow \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \\ \left( \begin{array}{cc} E^t Q^{-1} E^{-1} & 0_2 \\ 0_2 & Q \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & S \\ 0_2 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \mapsto Q \end{array} \right.$$

mit  $\tilde{F}^\circ = \{Q \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \mid Q - \mathbf{1}_2 \in \left(\frac{2\mathbb{Z}}{2p\mathbb{Z}}, \frac{2\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\right)\}$  identifiziert. Erweitern wir diese Projektion auf  $P(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2))$ , so ergibt sich eine Identifikation von  $P''(h, \tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2))$  mit

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \supset \langle \tilde{F}^\circ, I_p \rangle, \quad I_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} p(2-p) & 1-p \\ p(p-1) & p \end{pmatrix}$$

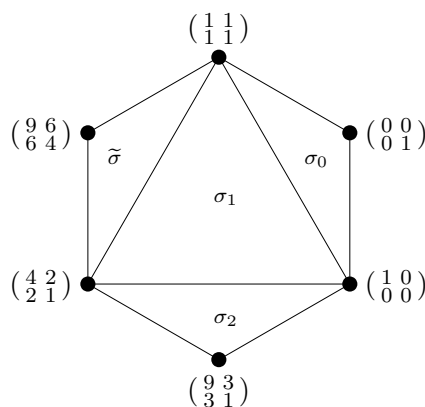
Um den kombinatorischen Aufwand im angemessenen Rahmen zu halten, werden wir uns im weiteren Verlauf auf den Fall  $p = 3$  beschränken, der ja wie in der Einleitung schon erwähnt wurde, von besonderem Interesse ist, weil er im Zusammenhang mit der *Barth-Nieto Quintik* steht.

Im Fall  $p = 3$  haben wir also die Matrix  $I_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ , die auf dem Gitter  $\tilde{N}$   $\mathbb{Z}$ -linear durch

$$I_3 : \begin{cases} \tilde{N}_1 \mapsto 3 \cdot \tilde{N}_1 + 2 \cdot \tilde{N}_2 + 4 \cdot \tilde{N}_3 \\ \tilde{N}_2 \mapsto -12 \cdot \tilde{N}_1 - 7 \cdot \tilde{N}_2 - 12 \cdot \tilde{N}_3 \\ \tilde{N}_3 \mapsto 4 \cdot \tilde{N}_1 + 2 \cdot \tilde{N}_2 + 3 \cdot \tilde{N}_3 \end{cases}$$

operiert.

Betrachte die folgende Konfiguration  $\mathcal{X}$  von Kegeln in  $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$ :



Es sei folgender skrp. Kegel in  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$  definiert:

$$\hat{\sigma} := \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten folgende Menge von skrp. Kegel in  $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$ :

$$\mathcal{Y} := \tilde{\sigma} \cap \hat{\sigma} \cup \bigcup_{i=1,2,3} \sigma_i \cap \hat{\sigma}$$

und werden die Kegel wie in Abbildung 8 bezeichnen.

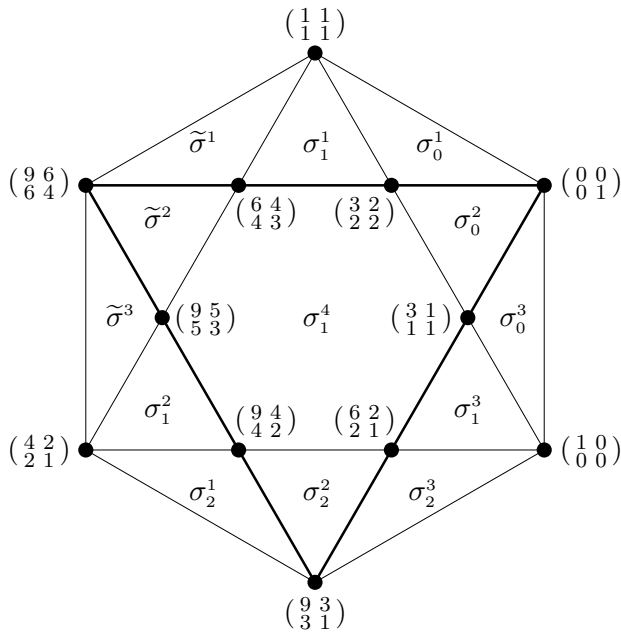


Abbildung 8: Eine Verfeinerung der Konfiguration  $\mathcal{X}$

**Satz 8.5** Für den Fall  $p = 3$  ist die Menge der skrp. Kegel

$$\tilde{\Sigma}_L^{\tilde{N}} := \left\{ \tau \mid \tau = f(\sigma) \text{ oder } \tau \prec f(\sigma) \text{ für ein } f \in \langle \tilde{F}^\circ, I_3 \rangle \text{ und } \sigma \in \mathcal{Y} \right\}$$

eine Verfeinerung des Legendre-Fächers, auf der  $\langle \tilde{F}^\circ, I_3 \rangle$  operiert.

*Beweis.* Nach Satz 3.23 ist jeder Kegel im Legendre-Fächer  $\tilde{F}^\circ$ -äquivalent zu genau einem Kegel in der Konfiguration  $\mathcal{X}$ . Für die dreidimensionalen

Kegel ist das wegen Satz 3.24 klar. Im Fall der zweidimensionalen Kegel haben wir

2-dim. Kegel $g(\xi_{13})$ in $\mathcal{X}$	$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$cd^{-1} \pmod{3}$	$\overline{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	0	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

und nach Satz 3.23 (ii) bilden diese ein vollständiges Repräsentantensystem der Kegel im Legendre-Fächer bezüglich der Operation von  $\tilde{F}^\circ$ . Im Fall der eindimensionalen Strahlen argumentiert man analog mit Satz 3.23 (iii).

Da  $\langle \tilde{F}^\circ, I_3 \rangle$  eine normale Erweiterung von  $\tilde{F}^\circ$  ist, reicht es daher aus zu zeigen, daß  $I_3$  auf  $\mathcal{Y}$  operiert, was leicht zu zeigen ist.

Die Operation von  $I_3$  führt auf der Menge der Strahlen in  $\mathcal{Y}$  zu den Identifikationen :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} & \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} &\leftrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese Operation auf den Strahlen in  $\mathcal{Y}$  induziert eine Operation auf den zwei- und dreidimensionalen Kegeln, die man sich als „diametrale“ Identifikationen der Kegel in  $\mathcal{Y}$  vorstellen kann. Für die dreidimensionalen Kegel in  $\mathcal{Y}$  etwa ergeben sich die Identifikationen:

$$\begin{aligned} \sigma_1^1 &\leftrightarrow \sigma_2^2 & \sigma_0^2 &\leftrightarrow \sigma_1^2 \\ \sigma_0^1 &\leftrightarrow \sigma_2^1 & \sigma_0^3 &\leftrightarrow \tilde{\sigma}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \sigma_1^3 \leftrightarrow \tilde{\sigma}^2 \\ \sigma_2^3 \leftrightarrow \tilde{\sigma}^1 \end{array} \quad \sigma_1^4 \leftrightarrow \sigma_1^4$$

□

Wir haben in Abschnitt 5 gesehen, daß lediglich der Orbit  $\text{orb}(\sigma_1, \tilde{N})$  zu einer isolierten kanonischen Singularität führt. Die singuläre Situation ändert sich aber wesentlich, wenn wir zur oben konstruierten Verfeinerung übergehen. Zunächst ist klar, daß der Orbit von  $\sigma_1^4$  schon zu einer Singularität führt, da dieser Kegel nicht simplizial ist. Aber auch die Punkte, die zu den dreidimensionalen Kegeln in  $\mathcal{Y}$  korrespondieren, führen zu Singularitäten, die insbesondere nicht isoliert sind. Da die Berechnungen des Typs der Singularitäten ähnlich sind, werden wir lediglich den Punkt  $\text{orb}(\sigma_1^1, \tilde{N})$  genauer untersuchen. Es ist

$$(\sigma_1^1)^\vee \cap \tilde{M}' = \mathbb{Z}_{\geq 0} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_{\geq 0} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},$$

so daß der Torus  $T'$  durch

$$i_{\sigma_1^1} : \begin{cases} T' & \rightarrow T'_{\sigma_1^1} \\ (t_1, t_2, t_3) & \mapsto (t_1^{-2} \cdot t_2^3, t_2 \cdot t_3^{-1}, t_1 \cdot t_2^{-3} \cdot t_3^2) \end{cases}$$

eingebettet ist. Dann ist das Bild des zyklischen Erzeuger  $\zeta = (1, 1, e^{\frac{2\pi i}{3}})$  von  $\text{Hom}(\tilde{M}'/\tilde{M}, \mathbb{C}^*)$  in  $T'_{\sigma_1^1}$  durch  $\zeta_{\sigma_1^1} = (1, e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot (-1)}, e^{\frac{2\pi i}{3} \cdot 2})$  gegeben.

Damit ist klar, daß  $\zeta_{\sigma_1^1}$  nicht als Quasireflektion operiert, da

$$\text{rg}(\text{diag}(\zeta_{\sigma_1^1}) - \mathbf{1}_3) = 2 > 1$$

ist. Wir erhalten eine nicht isolierte Singularität vom Typ  $V_{\frac{1}{3}(0,1,1)}$ , also eine Singularität, die sich als zum Ursprung entsprechenden Punkt von

$$\mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 / \langle (x, y) \mapsto (\rho \cdot x, \rho \cdot y) \rangle)$$

mit  $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  beschreibt.



## Symbolverzeichnis

$E = \text{diag}(e_1, e_2)$	Typ der Polarisierung einer abelschen Fläche	Kap. 1,	S. 1
$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$	die zur Polarisierung $E$ zugehörige alternierende Matrix	Kap. 1,	S. 1
$\mathbb{H}_2$	Siegelsche obere Halbebene zur Stufe 2	Kap. 1,	S. 1
$J$	die gewöhnliche symplektische Form	Kap. 1.1,	S. 3
$R_e$	die Matrix $\text{diag}(1, 1, 1, e)$	Kap. 1.1,	S. 3
$\text{Sp}(J, \mathbb{Q})$	die bezüglich $J$ definierte symplektische Gruppe über $\mathbb{Q}$	Kap. 1.1,	S. 3
$\tilde{\Gamma}_{e_1, e_2}^\circ = \text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Z})$	die bezüglich $\Lambda$ definierte symplektische Gruppe über $\mathbb{Z}$	Kap. 1,	S. 2
$\tilde{\Gamma}_{1,p}$	Untergruppe von $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , die die kanonische Levelstruktur erhält	Kap. 1,	S. 4
$\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ(2)$	Untergruppe von $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , die die allg. Level-2-Struktur erhält	Kap. 1,	S. 4
$\tilde{\Gamma}_{1,p}(2)$	Untergruppe von $\tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ$ , die die kanonische Levelstruktur und die allg. Level-2-Struktur erhält	Kap. 1,	S. 4
$\Gamma_{1,p}^\circ, \Gamma_{1,p}, \Gamma_{1,p}^\circ(2), \Gamma_{1,p}(2)$	zu den obigen Gruppen mittels $R_p$ konjugierte Gruppen in $\text{Sp}(J, \mathbb{Q})$	Kap. 1,	S. 4
$\mathcal{A}_{1,p}^\circ$	Modulraum $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen	Kap. 1,	S. 4
$\mathcal{A}_{1,p}$	Modulraum $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit kanonischer Levelstruktur	Kap. 1,	S. 4
$\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$	Modulraum $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit allg. Level-2-Struktur	Kap. 1,	S. 4
$\mathcal{A}_{1,p}(2)$	Modulraum $(1, p)$ -polarisierter abelscher Flächen mit kanonischer Levelstruktur und allg. Level-2-Struktur	Kap. 1,	S. 4
$\bar{A}$	Reduktion modulo 2 einer ganzzahligen Matrix $A$	Kap. 2,	S. 5
$\Gamma_1(n)$	Hauptkongruenzgruppe zur Stufe $n$ in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$	Kap. 2,	S. 5
$\Gamma_0(n)$	Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen modulo $n$ in $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$	Kap. 2,	S. 5
$N, N_{\mathbb{R}}$	freier Modul über $\mathbb{Z}$ und der von $N$ erzeugte reelle Vektorraum $N \otimes \mathbb{R}$	Kap. 3.1,	S. 13
$M, M_{\mathbb{R}}$	das zu $N$ duale Gitter und der zu $N_{\mathbb{R}}$ duale Vektorraum	Kap. 3.1,	S. 13
$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$	die kanonische Paarung der dualen Vektorräume	Kap. 3.1,	S. 13
$T_N$	der algebraische Torus $\text{Hom}(M, \mathbb{C}^*)$	Kap. 3.1,	S. 13
$e(m)$	der zu $m \in M$ zugehörige Homomorphismus $\mathbb{C}^* \rightarrow T_N$	Kap. 3.1,	S. 13
$\sigma$	ein von Vektoren in $N$ erzeugter streng konvexer, rationaler, polyedraler Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ , der keine Gerade enthält	Kap. 3.1,	S. 13
$\sigma^\vee$	der zu $\sigma$ duale Kegel in $M_{\mathbb{R}}$	Kap. 3.1,	S. 13
$\tau \prec \sigma$	der Kegel $\tau$ ist eine Seite des Kegels $\sigma$	Kap. 3.1,	S. 13
$\Sigma_N$	Bezeichnung für einen Fächer in $N$	Kap. 3.1,	S. 13
$\mathbb{C}[M \cap \sigma^\vee]$	die durch $\sigma$ definierte Halbgruppenalgebra	Kap. 3.1,	S. 14
$T_\sigma$	die zum Kegel $\sigma$ zugehörige affine Toruseinbettung	Kap. 3.1,	S. 14
$\text{orb}(\sigma, N)$	durch den Kegel $\sigma$ bestimmter $T_N$ -Orbit in $T_\sigma$	Kap. 3.1,	S. 14
$\mathfrak{D}_2$	der beschränkte Bereich $\{Z \in \text{Sym}(2, \mathbb{C}) \mid \mathbf{1}_2 - Z\bar{Z} > 0\}$	Kap. 3.2,	S. 16
$\mathfrak{D}_1^{(*)}$	(punktierter) offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$	Kap. 3.1,	S. 17
$\mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(U_F)$	Die Stabilisatorgruppe in $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$ einer Randkomponente $F$	Kap. 3.2,	S. 17
$\mathcal{P}'(U_F)$	Zentrum des unipotenten Radikals von $\mathcal{P}(U_F)$	Kap. 3.3,	S. 18
$\mathcal{P}''(U_F)$	Die Faktorgruppe $\mathcal{P}(U_F)/\mathcal{P}'(U_F)$	Kap. 3.3,	S. 18
$\mathcal{P}(U_F, \Gamma), \mathcal{P}'(U_F, \Gamma)$	$\mathcal{P}(U_F) \cap \Gamma, \mathcal{P}'(U_F) \cap \Gamma$ für eine arith. Untergruppe $\Gamma$ von $\text{Sp}(4, \mathbb{Q})$	Kap. 3.3,	S. 18

$e(U_F, \Gamma)$	die zu $U_F$ korrespondierende partielle Quotientenabbildung	Kap. 3.3,	S. 18
$X(F, \Gamma)$	der Quotient $\mathfrak{D}_2/P'(U_F, \Gamma)$	Kap. 3.3,	S. 18
$\mathcal{X}(F)$	triviales Torusbündel	Kap. 3.2,	S. 19
$C(F)$	ein offener, homogener Kegel in $\mathcal{P}(F)$	Kap. 3.2,	S. 19
$\mathcal{X}_\Sigma(F)$	das assoziierte Faserbündel $\mathcal{X}(F) \times_T T_\Sigma$	Kap. 3.2,	S. 19
$X_\Sigma(F)$	die offene Menge $(\overline{X(F)})^\circ$ in $\mathcal{X}_\Sigma(F)$	Kap. 3.2,	S. 19
$Y_\Sigma(F)$	partielle Kompaktifizierung von $\mathfrak{D}_2/\Gamma$ in Richtung $F$	Kap. 3.2,	S. 19
$C(F)^{rc}$	der rationale Abschluß von $C(F)$	Kap. 3.5,	S. 19
$\text{Sym}_+(2-i, \mathbb{R})$	Menge der positiv definiten $(2-i) \times (2-i)$ Matrizen	Kap. 3.9,	S. 23
$l_0, l_{(0,1)}$	die Geraden $\mathbb{Q}(0,0,1,0)$ und $\mathbb{Q}(0,0,0,1)$ in $\mathbb{Q}^4$	Kap. 3.10,	S. 23
$D^\circ(l, \Gamma), l = l_0, l_{(0,1)}$	der (offene) Rand $(Y_{\Sigma(l)} \setminus \mathbb{H}_2)/P(l, \Gamma)$	Kap. 3.12,	S. 26
$\xi_1, \xi_2, \xi_3$	spezielle eindimensionale Kegel in $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$	Kap. 3.3.2,	S. 27
$\xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{23}$	spezielle zweidimensionale Kegel in $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$	Kap. 3.3.2,	S. 27
$\sigma_0$	spezieller dreidimensionaler Kegel in $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$	Kap. 3.3.2,	S. 27
$\Sigma_L$	der Legendre-Fächer	Kap. 3.14,	S. 28
$(\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*, (\mathcal{A}_{1,p}(2))^*$	die Igusa-Kompaktifizierung von $\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2)$ bzw. $\mathcal{A}_{1,p}(2)$	Kap. 3.18,	S. 28
$\tilde{G}^\circ$	die Gruppe $\langle \Gamma_0(p), \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rangle$	Kap. 3.3.2,	S. 29
$\tilde{F}^\circ$	Der Kern $\ker[\tilde{G}^\circ \xrightarrow{(\text{mod } 2)} \text{SL}(2, \mathbb{Z}_2)]$	Kap. 3.3.2,	S. 29
$\mathcal{R}_g$	Menge der Rechtsnebenklassen einer Untergruppe $\mathcal{G} < \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ in $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$	Kap. 3.3.2,	S. 29
$\text{SR}(X, <)$	simpliciale Darstellung einer teilgeordneten Menge $(X, <)$	Kap. 4,	S. 35
$\mathcal{T}(\Gamma)$	Das Titsgebäude einer arith. Untergruppe $\Gamma \subset \text{Sp}(\Lambda, \mathbb{Q})$	Kap. 4,	S. 35
$\mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_1) \times \mathcal{T}(\tilde{\Gamma}_2)$	Produkt zweier Titsgebäude	Kap. 4,	S. 35
$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_0$	Mengen von Fahnen $\Lambda$ -isotroper Unterräume in $\mathbb{Q}^4$	Kap. 4,	S. 36
$\eta$	Vektorraumisomorphismus $\text{Sym}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3$	Kap. 5.12,	S. 55
$\mu$	2. symmetrische Produkt der Darstellung $g \rightarrow \frac{1}{\det(g)} \cdot g^{-1}$ von $\text{GL}(2, \mathbb{R})$	Kap. 5.12,	S. 55
$\tilde{N}', \tilde{N}$	spezielle Gitter in $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$	Kap. 5.3,	S. 56
$\tilde{F}^\circ, \tilde{F}$	Bestimmte Untergruppen der $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$ , die auf $\tilde{N}$ bzw. $\tilde{N}'$ operieren	Kap. 5.3,	S. 56
$\zeta$	Erzeuger von $\text{Hom}(M'/M, \mathbb{C}^*)$ vom Index $p$	Kap. 5.3,	S. 58
$\zeta_{g(\sigma)}$	Bild von $\zeta$ im affinen Torus $T_{g(\sigma)}$	Kap. 5.3,	S. 60
$\mathcal{C}$	Konfiguration von projektiven Geraden in $T'_{\Sigma_L \tilde{N}'}$	Kap. 6.1,	S. 66
$\mathcal{C}^\circ$	Konfiguration von projektiven Geraden in $T'_{\Sigma_L \tilde{N}}$	Kap. 6.3,	S. 89
$H$	die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}_p^*/\{\pm 1\}$	Kap. 6.3,	S. 89
$f_{(0,1)}^\circ, f_0^\circ$	Einbettungen $K^\circ(2) \hookrightarrow (\mathcal{A}_{1,p}^\circ(2))^*$	Kap. 7.3,	S. 98
$f_{(0,1)}, f_0$	analytische Fortsetzungen von $f_{(0,1)}^\circ, f_0^\circ$	Kap. 7.3,	S. 98
$\Gamma_{1,p}^*$	diskrete Erweiterung der Gruppe $\Gamma_{1,p}^\circ$	Kap. 8.1,	S. 103
$V_p, \tilde{V}_p$	spezielle Involution in $\text{Sp}(4, \mathbb{R})$	Kap. 8.1,	S. 103
$\tilde{W}_p$	zu $\tilde{V}_p$ konjugierte Matrix $R_p \tilde{V}_p R_p^{-1}$ in $\text{Sp}(\Lambda, \mathbb{R})$	Kap. 8.1,	S. 105
$\tilde{\Gamma}_{1,p}^*$	die Gruppe $\langle \tilde{\Gamma}_{1,p}^\circ, \tilde{W}_p \rangle$	Kap. 8.1,	S. 105
$\pi^*$	Homomorphismus $\tilde{\Gamma}_{1,p}^* \rightarrow \text{Sp}(4, \mathbb{Z}_2)$	Kap. 8.1,	S. 105
$\tilde{\Gamma}_{1,p}^*(2)$	der Kern von $\pi^*$	Kap. 8.1,	S. 108
$\Delta_1$	Spitzenform vom Gewicht 1 bzgl. $\Gamma_{1,3}^\circ$	Kap. 8.2,	S. 109
$\chi_6$	Charakter der Ordnung 6	Kap. 8.2,	S. 109
$\chi(2, -)$	Charakter der Ordnung 2	Kap. 8.2,	S. 109
$I_p$	Die Matrix $\frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} p(2-p) & 1-p \\ p(p-1) & p \end{pmatrix}$ in $\text{GL}(2, \mathbb{R})$	Kap. 8.3,	S. 111
$\mathcal{X}$	eine Konfiguration von Kegeln in $\text{Sym}(2, \mathbb{R})$	Kap. 8.3,	S. 111
$\mathcal{Y}$	eine Verfeinerung von $\mathcal{X}$	Kap. 8.3,	S. 112





# Literaturverzeichnis

- [AMRT] A. Ash, D. Mumford, M. Rapoport, Y. Tai, *Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties*, Brookline: Math Sci Press (1975).
- [BN] W. Barth, I. Nieto, *Abelian surfaces of type (1, 3) and quartic surfaces with 16 skew lines*, J. Alg. Geom **3** (1994), 173–222.
- [Br] H. J. Brasch, *Singularitäten von Modulräumen abelscher Flächen mit Polarisierung vom Typ (1, p)*, Dissertation, Erlangen (1994).
- [Bro] K. S. Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, New York (1989).
- [F] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren 254, Springer, Berlin (1983).
- [Fr] M. Friedland, *Das Titsgebäude von Siegelischen Modulgruppen vom Geschlecht 2*, Diplomarbeit, Hannover (1997).
- [FS] M. Friedland, G.K. Sankaran *Das Titsgebäude von Siegelischen Modulgruppen vom Geschlecht 2*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **71** (2001).
- [Fu] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Math. Studies **131**, Princeton University Press, Princeton (1993).
- [vdG] G. van de Geer, *On the geometry of a Siegel modular threefold*, Math. Ann. **260** (1982) 317–350.
- [GH1] V. Gritsenko, K. Hulek, *The Modular Form of the Barth-Nieto Quintic*, International Mathematics Research Notices **17** (1999).
- [GH2] V. Gritsenko, K. Hulek, *Minimal Siegel modular threefolds* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **123** (1998) 461–485
- [GH3] V. Gritsenko, K. Hulek, *Commutator Coverings of Siegel threefolds* Duke Math. J. **94** (1998), 509–542
- [GN] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac-Moody algebras, II* Internat. J. Math. **9** (1998), 201–575
- [H] K. Hulek, *Elliptische Kurven, abelsche Flächen und das Ikosaeder*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **91** (1989), 126–147.
- [HW] K. Hulek, S. H. Weintraub, *Bielliptic abelian surfaces*, Math. Ann. **283** (1989), 411–429.
- [HKW1] K. Hulek, C. Kahn, S. Weintraub, *Moduli spaces of abelian surfaces: Compactification, degenerations and theta functions*, de Gruyter (1993).

- [HKW2] K. Hulek, C. Kahn, S. Weintraub, *Singularities of the moduli spaces of certain abelian surfaces*, *Composio Math.* **79** (1991) 231–253
- [I] J.-I. Igusa, *Theta Functions*, Grundlehren Math. Wiss. **194** Berlin: Springer Verlag (1972).
- [K] G. Köhler, *Erweiterungsfähigkeit paramodularer Gruppen*, *Nachr. d. Akad. d. Wiss. in Göttingen II* **20** (1967) 228–238.
- [LB] H. Lange, C. Birkenhake, *Complex Abelian Varieties*, Grundlehren Math. Wiss. 302. Berlin: Springer-Verlag (1992).
- [LW1] R. Lee, S. H. Weintraub, *Cohomology of  $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$  and related groups and spaces*, *Topology* **24,4**,(1985), 391–410 .
- [LW2] R. Lee, S. H. Weintraub, *Topology of the Siegel space of degree two and their compactifications*, *Topology Proceedings* **11**, (1986), 115–175.
- [M] D. R. Morrison, *Canonical Quotient Singularities in Dimension three and four*, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **93**, No. 3, (1985), 393–396.
- [MS] D. R. Morrison, G. Stevens, *Terminal Quotient Singularities in Dimension three and four*, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* **90**, No. 1, (1984), 15–20.
- [Na] I. Namikawa, *Toroidal Compactification of Siegel Spaces*, *Lecture Notes in Math.* **812**. Berlin: Springer-Verlag(1980).
- [Od] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry. An Introduction to the Theory of Toric Varieties*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.*, 3. Folge, 15. Berlin: Springer-Verlag (1988)
- [R1] M. Reid, *Young Person's Guide to Canonical Singularities*, *Proc. of Symp. in Pure Math.* **46**, (1987), 345–414.
- [R2] M. Reid, *Canonical 3-folds*, *Journées de Géométrie Algébrique d'Angers*, Sitjhoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, the Netherlands and Rockville, M. D. U. S. A.(1980), 273–310.
- [Tai] Y. Tai, *On the Kodaira Dimension of the Moduli Space of Abelian Varieties*, *Invent. math.* **68**,(1982), 425–439.
- [W] S. H. Weintraub *Symmetries of a moduli space of abelian surfaces*, *Abelian Varieties* (Egloffstein, 1993), de Gruyter, Berlin, (1995), 323–341.
- [Sa] I. Satake, *On the compactification of the Siegel space*, Princeton: Princeton University Press (1971).
- [Sh] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic function*, Princeton University Press (1971).
- [Zi] J. Zintl, *Invarianten von kompaktifizierten Modulräumen polarisierter abelscher Flächen*, Dissertation, Hannover (1996).





# Lebenslauf

## Persönliche Daten:

Name: Michael Friedland  
Geburtsdatum: 05.07.1966  
Geburtsort: Hannover  
Eltern: Anita und Manfred Friedland  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Familienstand: ledig

## Ausbildung:

08/73 - 07/77 Grundschule Saturnring (Garbsen)  
08/77 - 07/79 Orientierungsstufe Garbsen  
08/79 - 07/86 Gymnasium Garbsen  
Abschluß: Abitur  
01/87 - 01/89 Wehrdienst auf Zeit beim Nachschubbataillon 1 (Hannover)  
10/89 - 05/98 Studium an der Universität Hannover  
Studiengang: Mathematik mit Nebenfach Informatik  
Vordiplom im Oktober 1992  
Diplom im Mai 1998

## Tätigkeit:

seit 10/98 Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der  
Universität Hannover

