

**Eindeutigkeitssätze  
für langsam wachsende Funktionen  
im Einheitskreis**

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik der Universität Hannover

zur Erlangung des Grades  
Doktor der Naturwissenschaften  
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation  
von

Dipl.-Math. Frank Titzhoff  
geboren am 2.8.1970 in Homberg/Niederrhein

2001

Referent: Prof. Dr. E. Mues, Hannover  
Korreferent: Prof. Dr. G. Frank, Berlin  
Tag der Promotion: 26.1.2001  
Datum der Veröffentlichung: Februar 2001

# Zusammenfassung

Man sagt, daß zwei meromorphe Funktionen einen Wert der Riemannschen Zahlenkugel teilen, wenn die Urbilder dieses Wertes unter beiden Funktionen als Mengen gleich sind.

Man sagt, daß sie ihn mit Vielfachheit (CM) teilen, wenn die Vielfachheiten in jedem Punkt dieser Mengen übereinstimmen.

Betrachtet man langsam wachsende Funktionen im Einheitskreis, so ist es nicht mehr möglich, die genaue Anzahl der geteilten Werte zweier meromorpher Funktionen zu bestimmen, die deren Gleichheit impliziert (Im klassischen Fall der komplexen Zahlenebene ist 5 diese Zahl, wie der sogenannte Fünf-Werte-Satz zeigt.). Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, daß der sonst unerhebliche logarithmische Anteil des Restgliedes im zweiten Hauptsatz von Nevanlinna (aus dem Eindeutigkeitsaussagen üblicherweise hergeleitet werden) von der gleichen Größenordnung wie die Charakteristik der langsam wachsenden Funktion ist.

Diese Arbeit führt Verbindungen zwischen dem logarithmischen Anteil des Restgliedes und der möglichen Anzahl geteilter Werte ein. Man kann diese Verbindungen als Analoga zum Fünf-Werte-Satz auffassen.

Danach wird der sogenannte Vier-Werte-Satz in der komplexen Zahlenebene, der

*Teilen zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen vier Werte CM, so sind sie Möbius-Transformationen voneinander, zwei der geteilten Werte sind Picardsche Ausnahmewerte beider Funktionen und die zwei Werte, die wirklich angenommen werden, sind die Fixpunkte der Möbius-Transformation.*

lautet, auf die folgende Aussage für Funktionen aus einer gewissen Teilklasse der Klasse der langsam wachsenden Funktionen übertragen:

*Teilen zwei meromorphe Funktionen aus dieser speziellen Teilklasse  $q \geq 5$  Werte CM, so sind sie Möbius-Transformationen voneinander,  $q - 2$  der geteilten Werte sind Picardsche Ausnahmewerte beider Funktionen und die zwei Werte, die wirklich angenommen werden, sind die Fixpunkte der Möbius-Transformation.*

Da es diverse Verfeinerungen des Vier-Werte-Satzes gibt, in denen die Voraussetzungen dahingehend abgeschwächt werden, daß die Anzahl derjenigen als CM geteilt vorausgesetzten Werte reduziert wird, können auch diese Verfeinerungen auf die betrachtete Teilklasse der Klasse der langsam wachsenden Funktionen übertragen werden.

**Schlagnworte:** Nevanlinna-Theorie, Eindeutigkeit meromorpher Funktionen, langsam wachsende Funktionen im Einheitskreis

# Abstract

Two meromorphic functions are said to share a value of the Riemann sphere if the preimages of this value under both functions are equal as sets.

They are said to share it counting multiplicities (CM) if the multiplicities coincide in each point of these sets.

If one is dealing with slowly growing functions in the unit disk it is not possible any more to deduce the exact number of shared values of two meromorphic functions inducing their equality (This number is five in the classical case of the complex plane as shown by the so-called Five-point-theorem.). This is a consequence of the fact that the otherwise insignificant logarithmic part of the error term in Nevanlinna's second main theorem (from which uniqueness properties are usually deduced) is of the same order of growth as the characteristic function of the slowly growing function.

This thesis introduces connections between the logarithmic part of the error term and the possible number of shared values. One can consider these connections as analogies to the Five-point-theorem.

Next the so-called Four-point-theorem in the complex plane reading

*If two non-constant meromorphic functions share four values CM they are Möbius transformations of each other, two of the shared values are Picard exceptional values of both of them, and the two actually taken values are the fix-points of the Möbius transformation.*

is transferred to the following theorem for functions contained in a special subclass of the class of slowly growing functions reading

*If two meromorphic functions from this special subclass share  $q \geq 5$  values CM they are Möbius transformations of each other,  $q - 2$  of the shared values are Picard exceptional values of both of them, and the two actually taken values are the fix-points of the Möbius transformation.*

As there are several refinements of the Four-point-theorem reducing the number of values shared CM in their assumptions, these refinements may be transferred to analogous results for the considered subclass of the class of slowly growing functions too.

**keywords:** Nevanlinna theory, uniqueness of meromorphic functions, slowly growing functions in the unit disk

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Symbolverzeichnis	iii
Einleitung	v
<b>1 Wertverteilungslehre im Einheitskreis</b>	<b>1</b>
1.1 Wertverteilungsgrößen und der erste Hauptsatz . . . . .	1
1.2 Eine Abschätzung von Gol'dberg und Grinstein . . . . .	4
1.3 Der Satz über die Schmiegungsfunktion der logarithmischen Ableitung . . . . .	13
1.4 Kleine Funktionen . . . . .	17
1.5 Eigenschaften logarithmischer Ableitungen . . . . .	18
1.6 Der zweite Hauptsatz . . . . .	20
1.7 Zulässigkeit . . . . .	22
1.8 Defekt- und Verzweigungsrelationen . . . . .	25
<b>2 Eindeutigkeit meromorpher Funktionen</b>	<b>27</b>
2.1 Zum Begriff des Werteteilens . . . . .	27
2.2 Werteteilens bei zulässigen Funktionen . . . . .	30
2.3 Werteteilens zwischen einer zulässigen und einer unzulässigen Funktion . . . . .	32
2.4 Die Funktionenklasse $\mathcal{G}$ . . . . .	33
2.5 Die Funktionenklasse $\mathcal{L}$ . . . . .	40
<b>3 Werteteilens bei unzulässigen Funktionen</b>	<b>43</b>
3.1 Unzulässige Funktionen, die $q$ Werte teilen . . . . .	43
3.2 Unzulässige Funktionen, die $q$ Werte "CM" teilen . . . . .	48
3.3 Einer der $q$ Werte wird nur IM geteilt . . . . .	50
<b>4 Funktionen, die nur zwei Werte "CM" teilen</b>	<b>53</b>
4.1 Allgemeine Hilfsaussagen . . . . .	53
4.2 Weitere Hilfsaussagen für den Fall $b = -a$ . . . . .	59
4.3 Beweis im Fall $b = -a$ . . . . .	61
4.4 Weitere Hilfsaussagen für den Fall $b \neq -a$ . . . . .	64
4.5 Beweis im Fall $b \neq -a$ . . . . .	73
<b>5 Sätze mit dem Teilungsindex</b>	<b>77</b>
5.1 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.1 . . . . .	78
5.2 Beweis von Satz 5.1 . . . . .	79
5.3 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.2 . . . . .	81
5.4 Beweis von Satz 5.2 . . . . .	83

5.5	Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.3 . . . . .	86
5.6	Beweis von Satz 5.3 . . . . .	88
5.7	Verbesserungen der Sätze bei bekanntem Doppelverhältnis . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Das "1CM-(<math>q - 1</math>)IM-Problem"</b>	<b>93</b>
6.1	Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 6.1 . . . . .	94
6.2	Beweis von Satz 6.1 . . . . .	95
6.3	Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 6.2 . . . . .	97
6.4	Beweis von Satz 6.2 . . . . .	98
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>100</b>

# Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	
$\mathbb{C}^*$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	
$\widehat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$	
$\mathbb{D}$	$\{z \in \mathbb{C} :  z  < 1\}$ , der komplexe Einheitskreis	
$N(r, f)$	Anzahlfunktion (der Polstellen)	Definition 1.3 a)
$m(r, f)$	Schmiegunsfunktion	Definition 1.3 b)
$T(r, f)$	Charakteristik	Definition 1.3 c)
$S(r, f)$		Definition 1.18
$S(r)$		Definition 1.20
$\overline{N}(r, f)$	Gequerte Anzahlfunktion (der Polstellen)	Definition 1.22
$N_1(r, f)$	Anzahlfunktion der mehrfachen Polstellen	Definition 1.24
$\overline{N}_1(r, f)$	Gequerte Anzahlfunktion der mehrfachen Polstellen	S. 21
$\overline{N}_2(r, f)$		Lemma 2.12
$\overline{N}_3(r, f)$		Lemma 2.15
$\overline{N}_E(r, f)$	und verwandte Anzahlfunktionen	Definition 2.3
$N_0\left(r, \frac{1}{f}\right)$		Lemma 2.13
$N^*(r)$		Lemma 2.22
$\alpha(f)$	(oberer) Unzulässigkeitsindex	Definition 1.26
$\ell(f)$	unterer Unzulässigkeitsindex	Definition 1.26
$\Delta(a, f)$	Valiron-Defekt von $a$	Definition 1.32
$\tau(a, f)$	Teilungsindex von $a$	Definition 2.6
$N$	Nevanlinna-Klasse	Definition 1.4
$\mathcal{F}$	Klasse der unzulässigen Funktionen	Definition 1.31
$\mathcal{F}_+$	Klasse der positiv unzulässigen Funktionen	Definition 1.31
$\mathcal{G}$	Klasse der Funktionen mit "Gleichheit im 2. Hauptsatz"	Definition 2.10
$\mathcal{L}$	Klasse der relativ zulässigen Funktionen	Definition 2.19





# Einleitung

Diejenige Größe, die für die Beschreibung der Wertverteilung einer in einem endlichen Kreis ( o.B.d.A. der Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ) meromorphen Funktion  $f$  wesentlich ist, ist der Grenzwert

$$\alpha(f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1-} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}.$$

Da ( z.B. mit Hilfe einer Abschätzung von Gol'dberg und Grinstein aus [3], die in dieser Abhandlung leicht verbessert werden konnte ) für die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung einer Funktion  $f$  in  $\mathbb{D}$  immer

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) = O \left( \log T(r, f) + \log \frac{1}{1-r} \right) \quad (r \rightarrow 1-)$$

evtl. außerhalb einer Ausnahmemenge  $E$  endlichen Maßes gilt, impliziert  $\alpha(f) = \infty$ , daß

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) = o(T(r, f)) \quad (r \rightarrow 1- , r \notin E) \quad (1)$$

gilt. Im Gegensatz zu  $\mathbb{D}$  gilt die Eigenschaft (1) in  $\mathbb{C}$  für **jede** meromorphe Funktion und ist dort eine entscheidende Zutat im Beweis des zweiten Hauptsatzes und seiner Folgerungen.

Somit gelten in  $\mathbb{D}$  für alle Funktionen  $f$  mit  $\alpha(f) = \infty$ , die man zulässige Funktionen nennt, bis auf die Änderung des Grenzüberganges und der Vergleichsfunktion analoge Aussagen zur Ebene.

Funktionen mit  $\alpha(f) < \infty$  haben offensichtlich die Eigenschaft, daß ihre Charakteristik höchstens so stark wächst wie ein konstantes Vielfaches der Funktion  $\log \frac{1}{1-r}$ , was den Begriff der "langsam wachsenden Funktion" aus dem Titel dieser Abhandlung rechtfertigt.

Mit den "Eindeutigkeitssätzen" aus dem Titel dieser Abhandlung sind Eindeutigkeitssätze im folgenden Sinne gemeint:

Ist ein Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  vorgegeben und betrachtet man für zwei meromorphe Funktionen  $f$  und  $g$  die Urbildmengen des Wertes  $a$  unter  $f$  bzw. unter  $g$ , so "teilen"  $f$  und  $g$  den Wert  $a$ , wenn die Urbildmengen gleich sind.

Stimmen auch in jedem Punkt, wo  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  annehmen, die Vielfachheiten des Wertes überein, so sagt man, daß der Wert  $a$  CM (counting multiplicities) geteilt wird. Gilt diese Aussage in einem gewissen Sinne nur fast überall, so sagt man, daß der Wert  $a$  "CM" geteilt wird.

$f$  und  $g$  teilen den Wert  $a$  DM (different multiplicities), wenn  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  in **jedem** Punkt mit verschiedenen Vielfachheiten annehmen.

Statt "Teilen" sagt man auch "Teilen IM" (ignoring multiplicities).

Die klassischen Eindeutigkeitssätze für meromorphe Funktionen in der Ebene sind der Fünf-Werte-Satz von Nevanlinna:

Teilen zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen  $f$  und  $g$  fünf paarweise verschiedene Werte, so ist  $f \equiv g$ .

und der Vier-Werte-Satz von Nevanlinna:

Teilen zwei verschiedene nichtkonstante meromorphe Funktionen  $f$  und  $g$  vier paarweise verschiedene Werte  $CM$ , so ist  $f \equiv M \circ g$  mit einer Möbius-Transformation  $M$ , für die zwei der geteilten Werte Fixpunkte sind, während die beiden anderen Picardsche Ausnahmewerte von  $f$  und  $g$  sind.

Ziel dieser Abhandlung ist es, Eindeutigkeitssätze dieser Form auch für langsam wachsende Funktionen im Einheitskreis zu finden. Dabei darf man aufgrund bekannter Eigenschaften langsam wachsender Funktionen erwarten, daß die mögliche Anzahl der geteilten Werte höher ist als für Funktionen in der Ebene.

Schon R. Nevanlinna hat ein Beispiel für zwei verschiedene Funktionen  $f$  und  $g$  angegeben, die in  $\mathbb{D}$  fünf Werte teilen und für die  $\alpha(f) = \alpha(g) = 1$  gilt ( [15], S. 159 ).

In dieser Abhandlung wird zunächst gezeigt, daß dieses Beispiel maximal ist, denn aus der für unzulässige Funktionen  $f$  ( also  $f$  mit  $\alpha(f) < \infty$  ) bestmöglichen Form ( der  $\overline{N}$ -Version ) des zweiten Hauptsatzes ( [18], Ungleichung (9) auf S. 251 )

$$(q - 2) \cdot T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + \log \frac{1}{1 - r} + S(r, f)$$

folgt lediglich unter Ausnutzung der Definition des Limes superior

$$\alpha(f) \leq \frac{1}{q - 4} \quad \text{und} \quad \alpha(g) \leq \frac{1}{q - 4}, \quad (2)$$

wenn man verlangt, daß  $f$  und  $g$  Funktionen sind, die  $q$  Werte teilen.

Allerdings muß man aus technischen Gründen mit

$$\ell(f) = \lim_{r \rightarrow 1-} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

zusätzlich voraussetzen, daß

$$\alpha(f) = \ell(f) \quad (3)$$

und die analoge Aussage in  $g$  gilt, was man in Analogie zum Begriff des regulären Wachstums einer meromorphen Funktion hier "reguläre Unzulässigkeit" nennen kann. Die Bedingung (3) scheint eher unwesentlich zu sein, da in der vorliegenden Literatur kein Beispiel einer Funktion zu finden ist, für die (3) nicht gilt.

Die Bedingung (2) schließt nicht aus, daß auch  $\alpha(f) \neq \alpha(g)$  gelten könnte ( wofür man sogar zahlreiche Beispiele konstruieren kann ). Mit einer etwas anderen Beweisführung als derjenigen, die zu (2) führt, erhält man das genauere

$$q - 3 - \frac{1}{\alpha(f)} \leq \frac{1}{q - 3 - \frac{1}{\alpha(g)}}, \quad (4)$$

falls man verlangt, daß  $f$  und  $g$ , für die (3) bzw. dessen Analogon in  $g$  gilt,  $q$  Werte teilen, und für ein nach (2) erlaubtes  $\alpha(f)$  oder  $\alpha(g)$  die Werte so einsetzt, daß die rechte Seite von (4)

positiv ist.

Setzt man  $q = 5$  in (2) ein, so erhält man das o.g. Beispiel von Nevanlinna, so daß sich der Fünf-Werte-Satz auf alle in  $\mathbb{D}$  meromorphen Funktionen  $f$  mit  $\alpha(f) > 1$  ausdehnt. Mit (2) und (4) wird er zum  $q$ -Werte-Satz in Abhängigkeit von  $\alpha(f)$  und  $\alpha(g)$ .

Da nun ein Analogon zum Fünf-Werte-Satz vorliegt, liegt es nahe, auch die Herleitung eines Analogons zum Vier-Werte-Satz zu versuchen. Die zwei zusätzlichen Hauptzutaten für den Beweis des Vier-Werte-Satzes in der Ebene sind

$$T(r, f) = T(r, g) + S(r), \quad (5)$$

was man direkt aus dem zweiten Hauptsatz für  $q = 4$  erhält, und die Bedingung (1), die alle Hilfsfunktionen "klein" macht.

Fordert man nun, daß eine zu (5) analoge Bedingung ( die automatisch dafür sorgt, daß (3) gilt und in (2) jeweils das Gleichheitszeichen steht ) gilt und daß die betrachteten Funktionen "relativ zulässig" sind, d.h. daß für  $f$  zwar  $\alpha(f) < \infty$ , aber trotzdem die Bedingung (1) gilt, so erhält man das folgende Analogon zum Vier-Werte-Satz:

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse, in der die einschränkenden Bedingungen gelten,  $q$  Werte "CM", so geht die eine aus der anderen durch eine Möbius-Transformation hervor, deren Fixpunkte von beiden Funktionen in denselben Stellen angenommen werden, während die restlichen  $q - 2$  Werte Picardsche Ausnahmewerte sind, die von der Möbius-Transformation permutiert werden ( Bei der Wahl der Fixpunkte 0 und  $\infty$  stellen sie sich im Beweisverlauf als die  $(q - 2)$ -ten Einheitswurzeln heraus, die um eine nichttriviale  $(q - 2)$ -te Einheitswurzel gedreht werden. ). Die Anzahl der Picardschen Ausnahmewerte ist maximal, da nach R. Nevanlinna für eine Funktion  $f$  mit  $\alpha(f) < \infty$ , die  $p$  Ausnahmewerte hat,  $\alpha(f) = \frac{1}{p-2}$  gelten muß ( vgl. [15], S. 152/3 ).

Im Fall  $q = 5$  haben wir also das o.g. Beispiel von Nevanlinna rekonstruiert.

Wie in der Ebene für vier Werte kann man nun versuchen, dasselbe Ergebnis unter der Voraussetzung herzuleiten, daß man von so wenigen Werten wie möglich verlangt, daß sie "CM" geteilt werden. Dies funktioniert auch hier.

Seien also zwei Funktionen gegeben, die  $q$  Werte teilen. Dann lautet die Liste der Aussagen, die unter Abschwächungen der Voraussetzungen hergeleitet werden können:

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse  $q - 1$  Werte "CM" und einen Wert IM, so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen drei Werte "CM" und einen Wert IM, so teilen sie alle vier Werte CM.*  
in der Ebene ( vgl. [9], S. 85/6 ).

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse zwei Werte "CM" und  $q - 2$  Werte IM, so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen zwei Werte "CM" und zwei Werte IM, so teilen sie alle vier Werte CM.*

in der Ebene ( vgl. [6] ).

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse einen Wert  $a$  "CM" und einen weiteren Wert

$b$  mit  $\tau(b) > \frac{2}{3}$ , wobei die Größe  $\tau$  wie in [13] definiert sei, so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen einen Wert  $a$  "CM" und einen weiteren Wert  $b$  mit  $\tau(b) > \frac{2}{3}$ , so teilen sie alle vier Werte CM.*

in der Ebene ( vgl. [13] ).

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse einen Wert  $a$  mit  $\tau(a) > \frac{4}{5}$  und einen weiteren Wert  $b$  mit  $\tau(b) > \frac{4}{5}$ , so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen einen Wert  $a$  mit  $\tau(a) > \frac{4}{5}$  und einen weiteren Wert  $b$  mit  $\tau(b) > \frac{4}{5}$ , so teilen sie alle vier Werte CM.*

in der Ebene ( vgl. [21] ).

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse einen Wert  $a$  mit  $\tau(a) > \frac{2}{3}$  und einen weiteren Wert  $b$  mit  $\tau(b) > \frac{2 \cdot \tau(a)}{5 \cdot \tau(a) - 2}$ , so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen einen Wert  $a$  mit  $\tau(a) > \frac{2}{3}$  und einen weiteren Wert  $b$  mit  $\tau(b) > \frac{2 \cdot \tau(a)}{5 \cdot \tau(a) - 2}$ , so teilen sie alle vier Werte CM.*

in der Ebene ( vgl. [22] ).

Teilen zwei Funktionen aus der erwähnten Klasse einen Wert  $a$  "CM", für den zusätzlich  $\Delta(a) < \frac{q-3}{q+1}$  mit dem Valiron-Defekt  $\Delta$  gilt, so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Dies entspricht dem Satz

*Teilen zwei Funktionen einen Wert  $a$  CM, für den zusätzlich  $\Delta(a) < \frac{1}{5}$  gilt, so teilen sie alle vier Werte CM.*

in der Ebene ( vgl. [7] ).

Es gibt kein Paar holomorpher Funktionen in der erwähnten Klasse, das einen Wert "CM" und alle anderen  $q - 1$  Werte DM teilt.

Dies entspricht dem Satz

*Es gibt kein Paar ganzer Funktionen, das einen Wert CM und drei Werte DM teilt.*

in der Ebene ( vgl. [12] ).

Ich danke Herrn Prof. Dr. E. Mues für die trotz widriger Umstände hervorragende Betreuung und Unterstützung dieser Arbeit.

Herrn Prof. Dr. G. Frank danke ich für die Übernahme des Korreferates und alle damit verbundenen Mühen.

Insbesondere danke ich Herrn PD Dr. A. Sauer für zahlreiche fachliche Diskussionen, die diese Arbeit in dieser Form erst möglich gemacht haben.

# Kapitel 1

## Wertverteilungslehre im Einheitskreis

In dieser Abhandlung werden wir meromorphe Funktionen betrachten, deren Definitionsbereich der Einheitskreis  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  ist. Die dazu gehörende Wertverteilungslehre hat viele Gemeinsamkeiten, aber auch wesentliche Unterschiede zu derjenigen für Funktionen in  $\mathbb{C}$ , die traditionell wesentlich bekannter ist.

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe und Sätze der Wertverteilungslehre im Einheitskreis zusammengestellt, soweit sie in dieser Abhandlung benötigt werden. Dabei beweisen wir insbesondere diejenigen Aussagen, die für die zu betrachtenden "langsam wachsenden" Funktionen vom sogenannten "zulässigen" Fall abweichen. Eine ausführliche Darstellung der Theorie im zulässigen Fall findet man insbesondere in [16], [20] und [8].

### 1.1 Wertverteilungsgrößen und der erste Hauptsatz

In diesem Abschnitt werden zunächst diejenigen Aussagen gesammelt, die für Ebene und Einheitskreis (bis auf den Grenzübergang  $r \rightarrow 1-$  statt  $r \rightarrow \infty$  und die Variablentransformation  $r \rightarrow \frac{1}{1-r}$  für die Vergleichsfunktionen) gleich sind.

#### Definition 1.1 (Anzahlfunktion einer Folge)

$(z_k)$  sei eine (evtl. endliche) Folge in  $\mathbb{D}$ , die keinen Häufungspunkt in  $\mathbb{D}$  hat.

Für  $t \in [0, 1)$  sei  $n(t)$  die Anzahl derjenigen  $z_k$  mit  $|z_k| \leq t$ .

Für  $r \in (0, 1)$  heißt dann

$$N(r) := \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \log r \quad (1.1)$$

Anzahlfunktion der Folge  $(z_k)$ .

#### Definition 1.2

Die Funktion  $\log^+ : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$\log^+ x := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0, 1] \text{ ,} \\ \log x & \text{für } x \in (1, \infty) \text{ .} \end{cases}$$

Sie heißt **Pluslogarithmus**.

**Definition 1.3 (Wertverteilungsgrößen einer meromorphen Funktion)**

$f$  sei meromorph in  $\mathbb{D}$ .

- a)  $N(r, f)$  sei die Anzahlfunktion der Folge der Polstellen von  $f$ , wobei jede Polstelle so oft gezählt wird, wie ihre Vielfachheit angibt.

$N(r, f)$  heißt die **Anzahlfunktion (der Polstellen)** von  $f$ .

Offensichtlich ist für  $a \in \mathbb{C}$  dann  $N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$  die Anzahlfunktion der  $a$ -Stellen von  $f$ .

- b) Für  $r \in (0, 1)$  ist

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi$$

die **Schmiegungsfunktion** von  $f$ .

- c) Die Funktion

$$T(r, f) := m(r, f) + N(r, f)$$

heißt **Charakteristik** von  $f$ .

**Bemerkung:**

$N(r, f)$  und  $T(r, f)$  sind monoton wachsend in  $r$  und konvex in  $\log r$ .

$m(r, f)$  ist für alle  $r \in (0, 1)$  nichtnegativ.

Da  $T(r, f)$  wachsend ist, existiert  $\lim_{r \rightarrow 1^-} T(r, f)$  und ist entweder endlich oder unendlich.

Wir interessieren uns in dieser Abhandlung **nur** für den **unendlichen** Fall und verwenden die folgende

**Definition 1.4**

Eine in  $\mathbb{D}$  meromorphe Funktion heißt **beschränktartig**, wenn

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} T(r, f) < \infty$$

gilt. Die Menge der beschränktartigen Funktionen

$$N := \left\{ f \text{ meromorph in } \mathbb{D} : \lim_{r \rightarrow 1^-} T(r, f) < \infty \right\}$$

wird auch **Nevanlinna-Klasse** genannt.

Ab jetzt betrachten wir also Funktionen  $f$ , die **nicht** aus der Nevanlinna-Klasse sind, d.h.  $f \notin N$ .

Jede Einschränkung einer in ganz  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktion auf  $\mathbb{D}$  ist wegen des Wachsens der Charakteristik in der Nevanlinna-Klasse. Damit sind insbesondere alle rationalen Funktionen in der Nevanlinna-Klasse, und durch die Voraussetzung  $f \notin N$  schließen wir ab jetzt die in der Ebene häufig nötige Voraussetzung aus, daß  $f$  nichtkonstant sein muß.

**Satz 1.5 (Rechenregeln)**

Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $n$  Funktionen  $f_k \notin N$  ( $k \in \{1, \dots, n\}$ ) gegeben. Dann gelten für  $r \rightarrow 1-$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} N\left(r, \prod_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k) + O(1), \\ N\left(r, \sum_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k) + O(1), \\ m\left(r, \prod_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k), \\ m\left(r, \sum_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k) + \log n, \\ T\left(r, \prod_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k) + O(1), \\ T\left(r, \sum_{k=1}^n f_k\right) &\leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k) + O(1). \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

Nach Definition 1.1 sind die Anzahlfunktionen aus Satz 1.5 in  $\mathbb{D}$  nicht notwendig nichtnegativ, falls es ein  $k \in \{1, \dots, n\}$  mit  $f_k(0) = \infty$  gibt. Der additive Term in (1.1), der sich auf die mögliche Polstelle in 0 bezieht, ist für  $r \rightarrow 1-$  jedoch beschränkt, so daß die Abschätzungen für die Anzahlfunktionen in der angegebenen modifizierten Form gelten.

**Satz 1.6 (Erster Hauptsatz)**

Sei  $r \in (0, 1)$ . Ist  $f \notin N$ , so gilt für jedes  $a \in \mathbb{C}$  die Abschätzung

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1) \quad \text{für } r \rightarrow 1-.$$

Gilt für die Funktion  $f$  insbesondere  $|f(0)| = 1$ , so haben wir sogar

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) \quad \text{für } r \rightarrow 1-. \quad (1.2)$$

**Bemerkung:**

Das Wegfallen des Restgliedes in (1.2) ist bei der Abschätzung von  $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$  oft von entscheidender Bedeutung (vgl. [17], [4]).

**Satz 1.7**

Ist  $f \notin N$  und  $M$  eine Möbius-Transformation, so gilt

$$T(r, M \circ f) = T(r, f) + O(1) \quad \text{für } r \rightarrow 1-.$$

**Satz 1.8**

Es sei  $f \notin N$  und  $P$  ein Polynom vom Grad  $d$ . Dann ist

$$T(r, P \circ f) = d \cdot T(r, f) + O(1) \quad \text{für } r \rightarrow 1-.$$

### Definition 1.9

Es sei  $f \notin N$ . Dann heißt

$$\lambda(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

die **Wachstumsordnung** (Ordnung) von  $f$ .

$$\mu(f) := \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\log^+ T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

heißt die **untere Wachstumsordnung** (untere Ordnung) von  $f$ .

Gilt  $\lambda(f) = \mu(f)$ , so heißt  $f$  **Funktion von regulärem Wachstum**.

Gilt  $\lambda(f) > \mu(f)$ , so heißt  $f$  **Funktion von irregulärem Wachstum**.

## 1.2 Eine Abschätzung von Gol'dberg und Grinstein

Die klassische Methode zur Herleitung des zweiten Hauptsatzes benötigt eine Abschätzung der Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung einer Funktion (vgl. [16]). In einem gewissen Sinne, der an späterer Stelle dargelegt werden wird, ist eine Abschätzung bestmöglich, die auf Gol'dberg und Grinstein (vgl. [3]) zurückgeht und zu deren Beweis hier zunächst die nötigen Hilfssätze bereitgestellt werden sollen.

Der erste der Hilfssätze ist eine zuerst von Ngoan und Ostrowski verwendete Abschätzung für Summen nichtnegativer Zahlen, sofern man ihre Potenzen mit Exponenten betrachtet, die kleiner als Eins sind (vgl. [17]).

### Lemma 1.10

Gegeben seien endlich viele Zahlen  $x_1, \dots, x_p \in [0, \infty)$  und ein  $\alpha \in (0, 1)$ . Dann gilt

$$\left( \sum_{\nu=1}^p x_\nu \right)^\alpha \leq \sum_{\nu=1}^p (x_\nu)^\alpha .$$

### Beweis:

Setze

$$S := \sum_{\nu=1}^p x_\nu .$$

Für  $S = 0$  ist die Aussage trivialerweise wahr, so daß wir  $S > 0$  annehmen dürfen. Es gilt

$$\frac{x_\nu}{S} \leq 1$$

für jedes  $\nu \in \{1, \dots, p\}$ , also

$$\left( \frac{x_\nu}{S} \right)^\alpha \geq \frac{x_\nu}{S}$$

wegen  $\alpha < 1$ . Daraus folgt

$$\frac{1}{S^\alpha} \sum_{\nu=1}^p (x_\nu)^\alpha \geq \sum_{\nu=1}^p \frac{x_\nu}{S} = 1 ,$$



also

$$\sum_{\nu=1}^p (x_\nu)^\alpha \geq S^\alpha = \left( \sum_{\nu=1}^p x_\nu \right)^\alpha .$$

□

Wir benötigen ferner einen Spezialfall von (vgl. [11], S.54)

**Lemma 1.11 (Höldersche Ungleichung für Integrale)**

Sei  $p \in (1, \infty)$  und  $q \in \mathbb{R}$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Sind für  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Funktionen  $|f|^p$  und  $|g|^q$  auf  $[a, b]$  integrierbar, so gilt

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} .$$

Dieser lautet

**Korollar 1.12**

Ist  $|F|$  auf  $[0, 2\pi]$  integrierbar und  $\alpha \in (0, 1)$ , so gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(x)|^\alpha dx \leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(x)| dx \right)^\alpha .$$

**Beweis:**

Wähle  $a = 0$ ,  $b = 2\pi$ ,  $f(x) = (F(x))^{\frac{1}{p}}$  und  $g(x) \equiv 1$  in Lemma 1.11. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} |F(x)|^{\frac{1}{p}} dx \leq \left( \int_0^{2\pi} |F(x)| dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot (2\pi)^{1-\frac{1}{p}} .$$

Wegen  $p > 1$  darf man  $\alpha := \frac{1}{p}$  setzen, und die richtige Verteilung der  $2\pi$ -Faktoren ergibt die Behauptung. □

Ferner benötigen wir die Abschätzung des Integrals über den Pluslogarithmus einer Funktion gegen den Pluslogarithmus des Integrals dieser Funktion (vgl. [4]). ( Normalerweise wird nur das Integral über den Logarithmus einer Funktion gegen den Logarithmus des Integrals dieser Funktion abgeschätzt. )

**Lemma 1.13**

Seien  $f$  und  $g$  auf dem Intervall  $[a, b]$  nichtnegative und meßbare Funktionen und

$$A = \int_a^b g(x) dx > 0 .$$

Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{A} \int_a^b \{\log^+ f(x)\} g(x) dx \leq \log^+ \left\{ \frac{1}{A} \int_a^b f(x)g(x) dx \right\} + \log 2 .$$

Setzt man insbesondere  $g \equiv 1$ , so folgt

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \log^+ f(x) dx \leq \log^+ \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right\} + \log 2 .$$

**Beweis:**

Setze

$$\mu := \frac{1}{A} \int_a^b \max \{f(x), 1\} g(x) dx \tag{1.3}$$

und

$$\varphi(x) := \max \{f(x), 1\} - \mu .$$

Beachte, daß wegen der Monotonie der Integrale  $\mu \geq 1$  gilt. Offensichtlich ist

$$\int_a^b \varphi(x) g(x) dx = 0 .$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \int_a^b \{\log^+ f(x)\} g(x) dx &= \frac{1}{A} \int_a^b \log \{\max \{f(x), 1\}\} g(x) dx \\ &= \frac{1}{A} \int_a^b \log \{\mu + \varphi(x)\} g(x) dx \\ &= \frac{1}{A} \int_a^b \log \left\{ \mu \left( 1 + \frac{\varphi(x)}{\mu} \right) \right\} g(x) dx \\ &= \log \mu + \frac{1}{A} \int_a^b \log \left( 1 + \frac{\varphi(x)}{\mu} \right) g(x) dx \\ &\leq \log \mu + \frac{1}{A} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{\mu} g(x) dx \\ &= \log^+ \mu \end{aligned}$$

wegen  $\log(1+x) \leq x$  für  $x \in [0, \infty)$ . Nach (1.3) folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \int_a^b \log \{ \max \{ f(x), 1 \} \} g(x) dx &\leq \log^+ \left\{ \frac{1}{A} \int_a^b \max \{ f(x), 1 \} g(x) dx \right\} \\
&\leq \log^+ \left\{ \frac{1}{A} \int_a^b [f(x) + 1] g(x) dx \right\} \\
&= \log^+ \left\{ \frac{1}{A} \int_a^b f(x) g(x) dx + 1 \right\} \\
&\leq \log^+ \left\{ \frac{1}{A} \int_a^b f(x) g(x) dx \right\} + \log 2 .
\end{aligned}$$

□

Das nächste Resultat ist eine (ebenfalls in [4] mehrfach verwendete) Möglichkeit, das Integral über eine Funktion, die mit einem Exponenten potenziert wird, der kleiner als Eins ist, unter einer geeigneten Bedingung gegen eine Konstante abzuschätzen.

**Lemma 1.14 (Smirnovsche Ungleichung)**

Hat der Realteil oder der Imaginärteil der in  $\{|z| < R\}$  holomorphen Funktion  $f(z)$  konstantes Vorzeichen, und setzen wir

$$u(\varphi) := \lim_{\substack{z \rightarrow Re^{i\varphi} \\ |z| < R}} |f(z)|, \tag{1.4}$$

so gilt für jedes  $\alpha \in (0, 1)$  die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{u(\varphi)\}^\alpha d\varphi \leq \frac{|f(0)|^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} .$$

**Beweis:**

O.B.d.A. nehmen wir an, daß  $\operatorname{Re} f(z) > 0$  in  $\{|z| < R\}$  gilt. Da die Funktion  $f(z)$  dann in  $\{|z| < R\}$  keine Nullstelle hat, können wir einen Zweig von  $\arg f(z)$  so wählen, daß dort  $|\arg f(z)| < \frac{\pi}{2}$  gilt. Die Funktion

$$\{f(z)\}^\alpha = |f(z)|^\alpha \exp \{i\alpha \arg f(z)\}$$

ist in  $\{|z| < R\}$  holomorph, und folglich ist  $\operatorname{Re} \{f(z)\}^\alpha$  dort harmonisch. Wegen  $|\arg f(z)| < \frac{\pi}{2}$  ist  $\alpha |\arg f(z)| < \frac{\pi\alpha}{2}$ , also  $\cos(\alpha \arg f(z)) \geq \cos \frac{\pi\alpha}{2}$ , und damit

$$\operatorname{Re} \{f(z)\}^\alpha = |f(z)|^\alpha \cos(\alpha \arg f(z)) \geq |f(z)|^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} .$$

Somit gilt auch

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \leq \frac{1}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \{f(re^{i\varphi})\}^\alpha d\varphi = \frac{2\pi}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \operatorname{Re} \{f(0)\}^\alpha$$

mit der Mittelwertegenschaft harmonischer Funktionen für  $r < R$ . Damit haben wir sogar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \leq \frac{|f(0)|^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}.$$

Mit dem Grenzübergang  $r \rightarrow R$  und (1.4) folgt dann die Behauptung.  $\square$

Nun sind wir in der Lage, die angekündigte Abschätzung von Gol'dberg und Grinstein zu beweisen.

**Satz 1.15**

Sei  $f(z)$  eine in  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$  ( $0 < R \leq \infty$ ) meromorphe Funktion mit  $f(0) = 1$ . Dann gilt

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) < \log^+ \left\{ \frac{T(\varrho, f)}{r} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} \right\} + 5.614227532 \quad (1.5)$$

für alle  $r, \varrho \in (0, R)$  mit  $r < \varrho$ .

**Beweis:**

Setze  $s = \frac{r+\varrho}{2}$ . Dann gilt  $s - r = \varrho - s = \frac{\varrho-r}{2}$ .

Sei  $c_k$  die Folge der Null- und Polstellen von  $f(z)$ , wobei jede Stelle gemäß ihrer Vielfachheit gezählt wird. Setze  $\delta_k = 1$ , wenn  $c_k$  eine Nullstelle von  $f(z)$  ist, und  $\delta_k = -1$ , wenn  $c_k$  eine Polstelle von  $f(z)$  ist.

Dann gilt für  $z = re^{i\varphi}$  die Formel

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(se^{i\vartheta})| \frac{2se^{i\vartheta}}{(se^{i\vartheta} - z)^2} d\vartheta + \sum_{|c_k| < s} \delta_k \left( \frac{\overline{c_k}}{s^2 - \overline{c_k}z} + \frac{1}{z - c_k} \right).$$

Nach der Dreiecksungleichung folgt also

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| \frac{2s}{|se^{i\vartheta} - z|^2} d\vartheta + \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k \overline{c_k}}{s^2 - \overline{c_k}z} \right| + \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k}{z - c_k} \right|. \quad (1.6)$$

Das Potenzieren von (1.6) mit  $\alpha \in (0, 1)$  liefert unter Anwendung von Lemma 1.10 die Abschätzung

$$\left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right|^\alpha \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| \frac{2s}{|se^{i\vartheta} - z|^2} d\vartheta \right\}^\alpha + \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k \overline{c_k}}{s^2 - \overline{c_k}z} \right|^\alpha + \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k}{z - c_k} \right|^\alpha. \quad (1.7)$$

Wir integrieren (1.7) bezüglich  $\varphi$  von 0 bis  $2\pi$  und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| \frac{2s}{|se^{i\vartheta} - re^{i\varphi}|^2} d\vartheta \right\}^\alpha d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k \overline{c_k}}{s^2 - \overline{c_k}re^{i\varphi}} \right|^\alpha d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k}{re^{i\varphi} - c_k} \right|^\alpha d\varphi \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Zunächst wird  $I_1$  abgeschätzt: Nach Korollar 1.12 gilt

$$I_1 \leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| \frac{2s}{|se^{i\vartheta} - re^{i\varphi}|^2} d\vartheta \right) d\varphi \right\}^\alpha .$$

Nun vertauschen wir die Integrationsreihenfolge und wenden die Poisson-Formel an. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2s}{|se^{i\vartheta} - re^{i\varphi}|^2} d\varphi \right) d\vartheta \right\}^\alpha \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\log |f(se^{i\vartheta})|| d\vartheta \cdot \frac{2s}{s^2 - r^2} \right\}^\alpha . \end{aligned}$$

Dieses Integral kann durch  $2 \cdot T(s, f)$  abgeschätzt werden, da wegen  $f(0) = 1$  der Fehlerterm im ersten Hauptsatz verschwindet (vgl. (1.2) in Satz 1.6). Wir haben also

$$I_1 \leq \left\{ \frac{4s}{s^2 - r^2} \cdot T(s, f) \right\}^\alpha .$$

Ersetzen wir nun noch  $s$  durch  $\frac{\varrho+r}{2}$  und berücksichtigen wir die wegen  $r < \varrho$  gültige Abschätzung

$$\frac{2(\varrho + r)}{\varrho + 3r} \leq \frac{\varrho}{r} ,$$

so erhalten wir wegen des Wachsens der Charakteristik

$$I_1 \leq \left\{ \frac{8(\varrho + r)}{(\varrho - r)(\varrho + 3r)} \cdot T(s, f) \right\}^\alpha \leq \left\{ \frac{4}{\varrho - r} \cdot \frac{\varrho}{r} \cdot T(\varrho, f) \right\}^\alpha = 2^{2\alpha} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^\alpha \left( \frac{T(\varrho, f)}{r} \right)^\alpha . \quad (1.9)$$

Zur Abschätzung von  $I_2$  setze

$$\begin{aligned} \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k \overline{c_k}}{s^2 - \overline{c_k} z} &= \sum_{|c_k| < s} \frac{\{\operatorname{Re}(\delta_k \overline{c_k})\}^+}{s^2 - \overline{c_k} z} - \sum_{|c_k| < s} \frac{\{-\operatorname{Re}(\delta_k \overline{c_k})\}^+}{s^2 - \overline{c_k} z} \\ &\quad + i \sum_{|c_k| < s} \frac{\{\operatorname{Im}(\delta_k \overline{c_k})\}^+}{s^2 - \overline{c_k} z} - i \sum_{|c_k| < s} \frac{\{-\operatorname{Im}(\delta_k \overline{c_k})\}^+}{s^2 - \overline{c_k} z} \\ &=: \Phi_1(z) - \Phi_2(z) + i\Phi_3(z) - i\Phi_4(z) . \end{aligned} \quad (1.10)$$

Dann gilt

$$I_2 \leq \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\Phi_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi . \quad (1.11)$$

Wegen

$$\operatorname{Re}(c_k \overline{z}) \leq |c_k \overline{z}| = r|c_k| < s^2$$

für  $r < s$  und  $|c_k| < s$  ist

$$\operatorname{Re} \left( \frac{1}{s^2 - \overline{c_k} z} \right) = \frac{\operatorname{Re}(s^2 - c_k \overline{z})}{|s^2 - \overline{c_k} z|^2} > 0, \quad (1.12)$$

also auch  $\operatorname{Re} \Phi_j(re^{i\varphi}) > 0$  für  $j = 1, 2, 3, 4$ . Damit dürfen wir zur Abschätzung der Integrale auf der rechten Seite von (1.11) die Smirnovsche Ungleichung (Lemma 1.14) anwenden und erhalten

$$I_2 \leq \sum_{j=1}^4 \frac{|\Phi_j(0)|^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \quad (1.13)$$

Setzt man nun den Wert  $z = 0$  in (1.10) und dies dann auf der rechten Seite von (1.13) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{\left\{ \left( \sum_{\substack{|c_k| < s \\ \operatorname{Re}(\delta_k \overline{c_k}) > 0}} |c_k| \right)^\alpha + \left( \sum_{\substack{|c_k| < s \\ \operatorname{Re}(\delta_k \overline{c_k}) \leq 0}} |c_k| \right)^\alpha + \left( \sum_{\substack{|c_k| < s \\ \operatorname{Im}(\delta_k \overline{c_k}) > 0}} |c_k| \right)^\alpha + \left( \sum_{\substack{|c_k| < s \\ \operatorname{Im}(\delta_k \overline{c_k}) \leq 0}} |c_k| \right)^\alpha \right\}}{s^{2\alpha} \cdot \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &\leq \frac{\{(\theta_1 n(s, 0, \infty))^\alpha + ((1 - \theta_1) n(s, 0, \infty))^\alpha + (\theta_2 n(s, 0, \infty))^\alpha + ((1 - \theta_2) n(s, 0, \infty))^\alpha\}}{s^\alpha \cdot \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &= \left( \frac{n(s, 0, \infty)}{s} \right)^\alpha \frac{\{\theta_1^\alpha + (1 - \theta_1)^\alpha + \theta_2^\alpha + (1 - \theta_2)^\alpha\}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $n(s, 0, \infty)$  erwartungsgemäß die Anzahl der Null- und Polstellen von  $f(z)$  im Kreis  $\{|z| < s\}$ , während  $0 \leq \theta_j = \theta_j(s) \leq 1$  für  $j = 1, 2$  den Anteil derjenigen Null- und Polstellen mit positivem bzw. negativem Real- bzw. Imaginärteil angibt. Wegen

$$\theta_j^\alpha + (1 - \theta_j)^\alpha \leq \left( \frac{1}{2} \right)^\alpha + \left( \frac{1}{2} \right)^\alpha = 2 \cdot 2^{-\alpha} = 2^{1-\alpha} \quad (1.14)$$

und

$$n(s, 0, \infty) \leq \frac{\varrho}{\varrho - s} \cdot N(\varrho, 0, \infty) \leq \frac{4\varrho}{\varrho - r} \cdot T(\varrho, f)$$

haben wir

$$I_2 \leq \frac{2^{2-\alpha} \left( \frac{n(s, 0, \infty)}{s} \right)^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \leq \frac{2^{2+\alpha} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^\alpha (T(\varrho, f))^\alpha}{r^\alpha \cdot \cos \frac{\pi\alpha}{2}} = \frac{2^{2+\alpha}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^\alpha \left( \frac{T(\varrho, f)}{r} \right)^\alpha. \quad (1.15)$$

Zur Abschätzung von  $I_3$  setze  $\vartheta_k = \arg c_k$  und stelle die Zähler der Summanden in  $I_3$  in der Form  $\delta_k = e^{i\vartheta_k} \cdot \delta_k \cdot e^{-i\vartheta_k}$  dar. Um später die Smirnovsche Ungleichung erfolgreich anwenden zu können, muß für  $\delta_k e^{-i\vartheta_k} = \delta_k (\cos \vartheta_k - i \sin \vartheta_k)$  unterschieden werden, wo die Terme  $e^{i\vartheta_k} \cdot \delta_k \cos \vartheta_k$  bzw.  $e^{i\vartheta_k} \cdot \delta_k \sin \vartheta_k$  positiv bzw. negativ sind. Für  $0 < r < s$  setze also

$$\begin{aligned} \sum_{|c_k| < s} \frac{\delta_k}{z - c_k} &= \sum_{|c_k| > r} \frac{\{e^{i\vartheta_k} \delta_k \cos \vartheta_k\}^+}{z - c_k} - \sum_{|c_k| > r} \frac{\{-e^{i\vartheta_k} \delta_k \cos \vartheta_k\}^+}{z - c_k} \\ &\quad + i \sum_{|c_k| > r} \frac{\{-e^{i\vartheta_k} \delta_k \sin \vartheta_k\}^+}{z - c_k} - i \sum_{|c_k| > r} \frac{\{e^{i\vartheta_k} \delta_k \sin \vartheta_k\}^+}{z - c_k} \\ &\quad + \sum_{|c_k| \leq r} \frac{\{\delta_k\}^+}{z - c_k} - \sum_{|c_k| \leq r} \frac{\{-\delta_k\}^+}{z - c_k} \\ &=: F_1(z) + F_2(z) + F_3(z) + F_4(z) + F_5(z) + F_6(z). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Für  $|c_k| > r$  und  $|z| < r$  haben wir

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\vartheta_k}}{z - c_k} \right) < 0$$

wegen

$$\operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\vartheta_k}}{z - |c_k|e^{i\vartheta_k}} \right) = \frac{\operatorname{Re}(e^{i\vartheta_k} \cdot (\bar{z} - |c_k|e^{-i\vartheta_k}))}{|z - |c_k|e^{i\vartheta_k}|^2}$$

und

$$\begin{aligned} e^{i\vartheta_k} \cdot (\bar{z} - |c_k|e^{-i\vartheta_k}) &= \bar{z} \cdot e^{i\vartheta_k} - |c_k| \\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\bar{z}e^{i\vartheta_k} - |c_k|) &< \operatorname{Re}(\bar{z}e^{i\vartheta_k}) - r \\ &\leq |\bar{z}e^{i\vartheta_k}| - r \\ &< r - r \\ &= 0. \end{aligned}$$

Damit genügen die Funktionen  $F_j(z)$  für  $j = 1, 2, 3, 4$  den Voraussetzungen der Smirnovschen Ungleichung (Lemma 1.14), und wir haben

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \leq \frac{|F_j(0)|^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}$$

für  $j = 1, 2, 3, 4$ . Setzen wir nun  $z = 0$  in (1.16) für  $j = 1, 2, 3, 4$ , so folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi &\leq \frac{1}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left\{ \left( \sum_{\substack{|c_k|>r \\ \operatorname{Re}(\delta_k e^{-i\vartheta_k})>0}} \frac{1}{|c_k|} \right)^\alpha + \left( \sum_{\substack{|c_k|>r \\ \operatorname{Re}(\delta_k e^{-i\vartheta_k})<0}} \frac{1}{|c_k|} \right)^\alpha \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{\substack{|c_k|>r \\ \operatorname{Im}(\delta_k e^{-i\vartheta_k})>0}} \frac{1}{|c_k|} \right)^\alpha + \left( \sum_{\substack{|c_k|>r \\ \operatorname{Im}(\delta_k e^{-i\vartheta_k})<0}} \frac{1}{|c_k|} \right)^\alpha \right\} \\ &\leq \frac{\{(\theta_1[n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)])^\alpha + ((1 - \theta_1)[n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)])^\alpha\}}{r^\alpha \cdot \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &\quad + \frac{(\theta_2[n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)])^\alpha + ((1 - \theta_2)[n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)])^\alpha}{r^\alpha \cdot \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &= \left( \frac{n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)}{r} \right)^\alpha \frac{\{\theta_1^\alpha + (1 - \theta_1)^\alpha + \theta_2^\alpha + (1 - \theta_2)^\alpha\}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Während wie bei der Abschätzung von  $I_2$  auch hier

$$\theta_j^\alpha + (1 - \theta_j)^\alpha \leq 2^{1-\alpha}$$

und

$$n(s, 0, \infty) \leq \frac{4\varrho}{\varrho - r} \cdot T(\varrho, f)$$

gilt, erhalten wir für  $n(r, 0, \infty)$  die Abschätzung

$$n(r, 0, \infty) \leq \frac{\varrho}{\varrho - r} \cdot N(\varrho, 0, \infty) \leq \frac{2\varrho}{\varrho - r} \cdot T(\varrho, f).$$

Damit folgt für die ersten vier Summanden

$$\sum_{j=1}^4 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \leq \frac{2^{2-\alpha} \left( \frac{n(s, 0, \infty) - n(r, 0, \infty)}{r} \right)^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \leq \frac{4}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^\alpha \left( \frac{T(\varrho, f)}{r} \right)^\alpha.$$

Die Summanden  $F_5$  und  $F_6$  erfüllen nicht unmittelbar die Voraussetzungen der Smirnovschen Ungleichung. Betrachten wir aber stattdessen die Funktionen

$$F_5^{(1)}(z) = \sum_{\substack{|c_k| \leq r \\ f(c_k) = 0}} \frac{r}{r^2 - \overline{c_k}z}$$

und

$$F_6^{(1)}(z) = \sum_{\substack{|c_k| \leq r \\ f(c_k) = \infty}} \frac{r}{r^2 - \overline{c_k}z},$$

so ist einerseits

$$\operatorname{Re} \left( \frac{r}{r^2 - \overline{c_k}z} \right) > 0$$

für  $|c_k| \leq r$  und  $|z| < r$  in völliger Analogie zu (1.12). Andererseits haben wir

$$\left| \sum_{|c_k| \leq r} \frac{1}{z - c_k} \right| = \left| \sum_{|c_k| \leq r} \frac{r}{r^2 - \overline{c_k}z} \right|$$

für  $|z| = r$ , womit

$$\left| F_j^{(1)}(re^{i\varphi}) \right| = |F_j(re^{i\varphi})|$$

für alle  $\varphi \in [0, 2\pi)$  folgt. Da der Betrag der Randwerte der Funktionen gleich ist, gilt für die restlichen zwei Summanden also doch die Smirnovsche Ungleichung, und es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=5}^6 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi &= \sum_{j=5}^6 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| F_j^{(1)}(re^{i\varphi}) \right|^\alpha d\varphi \\ &\leq \sum_{j=5}^6 \frac{\left| F_j^{(1)}(0) \right|^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &= \frac{(\theta n(r, 0, \infty))^\alpha + ((1 - \theta)n(r, 0, \infty))^\alpha}{r^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &\leq \left( \frac{n(r, 0, \infty)}{r} \right)^\alpha \frac{2^{1-\alpha}}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \\ &\leq \frac{2}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}} \left( \frac{\varrho}{\varrho - r} \right)^\alpha \left( \frac{T(\varrho, f)}{r} \right)^\alpha. \end{aligned}$$



Insgesamt haben wir

$$I_3 \leq \sum_{j=1}^6 \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F_j(re^{i\varphi})|^\alpha d\varphi \leq \frac{6 \left(\frac{\varrho}{\varrho-r}\right)^\alpha (T(\varrho, f))^\alpha}{r^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}}. \quad (1.17)$$

Aus (1.8), (1.9), (1.15) und (1.17) erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi \leq K(\alpha) \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho-r}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{T(\varrho, f)}{r}\right)^\alpha \quad (1.18)$$

mit  $K(\alpha) := 2^{2\alpha} + \frac{2^{2+\alpha}+6}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}$ .

Mit Lemma 1.13 folgt aus (1.18) für die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) &\leq \frac{1}{\alpha} \left\{ \log^+ \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f'(re^{i\varphi})}{f(re^{i\varphi})} \right|^\alpha d\varphi \right] + \log 2 \right\} \\ &\leq \log^+ \left( \frac{T(\varrho, f)}{r} \cdot \frac{\varrho}{\varrho-r} \right) + \frac{\log(2K(\alpha))}{\alpha}. \end{aligned}$$

Für  $\alpha \in (0, 1)$  hat die Funktion  $\frac{\log(2K(\alpha))}{\alpha}$  bei  $\alpha = 0,8233939678\dots$  das Minimum  $5,614227532\dots$ . Daraus folgt (1.5).  $\square$

### Bemerkung:

Satz 1.15 ist nicht die Originalabschätzung von Gol'dberg und Grinstein in [3]. Denn um  $I_3$  abzuschätzen, verwenden sie die Ungleichung

$$I_3 \leq \frac{2 + 2^{2+\alpha}}{r^\alpha} \cdot \frac{\left(\frac{\varrho}{\varrho-r}\right)^\alpha (T(\varrho, f))^\alpha}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}, \quad (1.19)$$

die sie Kolokol'nikov [10] zuschreiben, obwohl dieser sie aufgrund der groberen Abschätzung

$$\theta_j^\alpha + (1 - \theta_j)^\alpha \leq 1 + 1 = 2$$

statt (1.14) nur mit einem zusätzlichen Faktor  $2^\alpha$  auf der rechten Seite herleiten konnte. Da sie eine weitere zu grobe Abschätzung in der Kolokol'nikovschen Beweisführung übernommen haben, erhalten sie (1.19) statt (1.17) und damit auch einen etwas größeren konstanten Term in (1.5).

## 1.3 Der Satz über die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung

Als einfache Anwendung von Satz 1.15 beweisen wir nun den Satz über die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung.

### Lemma 1.16

Die Funktion  $h : [r_0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig und wachsend ( $\leq$ ). Weiter sei  $h(r_0) \geq 1$ . Dann gibt es eine Menge  $E \subset [r_0, 1)$  mit folgender Eigenschaft:

Es ist

$$\int_E \frac{dr}{1-r} \leq 2$$

und

$$h\left(r + \frac{1-r}{e \cdot h(r)}\right) < 2 \cdot h(r) \quad \text{für alle } r \notin E. \quad (1.20)$$

**Satz 1.17 (Satz über die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung)**

a) Es sei  $f \notin N$ .

Dann gibt es eine Menge  $E \subset (0, 1)$  mit  $\int_E \frac{dr}{1-r} \leq 2$ , so daß

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log T(r, f) + \log \frac{1}{1-r}\right)$$

für  $r \rightarrow 1-$ ,  $r \notin E$  gilt.

b) Es sei  $f \notin N$  von der endlichen Ordnung  $\lambda$  (vgl. Definition 1.9). Dann ist

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1-} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq \lambda + 1. \quad (1.21)$$

Insbesondere ist also in diesem Fall

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right) \quad \text{für } r \rightarrow 1-.$$

(Es tritt keine Ausnahmemenge auf!)

c) Es sei  $f \notin N$  von der endlichen unteren Ordnung  $\mu$  (vgl. Definition 1.9). Dann ist

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow 1-} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq \mu + 1.$$

**Beweis:**

Im Gegensatz zur sonst üblichen Vorgehensweise leiten wir alle drei Aussagen aus der Abschätzung von Gol'dberg und Grinstein in der Formulierung von Satz 1.15 her.

a) Wenn  $f(0) \neq 1$  ist, dann gibt es ein  $c \in \mathbb{C}^*$  und ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so daß für die durch  $F(z) = c \cdot z^k \cdot f(z)$  definierte Funktion  $F(0) = 1$  gilt. Wegen  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{k}{z}$  folgt

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + \log^+ \frac{|k|}{r} + \log 2 = m\left(r, \frac{F'}{F}\right) + O(1) \quad (1.22)$$

für  $r \rightarrow 1-$ . Ferner ist

$$T(r, F) \leq T(r, f) + |k| \log^+ r + O(1) = T(r, f) + O(1) \quad (1.23)$$

für  $r \rightarrow 1-$ . Da  $F(0) = 1$  ist, gilt nach Satz 1.15 die Abschätzung

$$m\left(r, \frac{F'}{F}\right) \leq \log^+ \left\{ \frac{T(\varrho, F)}{r} \cdot \frac{\varrho}{\varrho - r} \right\} + O(1),$$

woraus mit

$$\varrho = r + \frac{1 - r}{e \cdot T(r, F)},$$

also

$$\varrho - r = \frac{1 - r}{e \cdot T(r, F)}$$

und

$$\frac{\varrho}{\varrho - r} = 1 + \frac{e \cdot r \cdot T(r, F)}{1 - r}$$

nach (1.20) in Lemma 1.16 die Abschätzung

$$T(\varrho, F) < 2 \cdot T(r, F)$$

außerhalb einer Ausnahmemenge  $E \subset (0, 1)$  mit  $\int_E \frac{dr}{1-r} \leq 2$  folgt. Außerhalb dieser Menge  $E$  gilt damit

$$m\left(r, \frac{F'}{F}\right) = O\left(\log T(r, F) + \log \frac{1}{1-r}\right),$$

nach (1.22) und (1.23) also auch

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log T(r, f) + \log \frac{1}{1-r}\right).$$

b) Nach Definition der Ordnung  $\lambda$  (Definition 1.9) gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $r_0(\varepsilon)$ , so daß für alle  $r \in (0, 1)$  mit  $r \geq r_0$  die Ungleichung

$$T(r, f) < \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+\varepsilon}$$

gilt. Wählt man  $\varrho = \frac{r+1}{2}$  in Satz 1.15, so folgt mit

$$\varrho - r = \frac{1 - r}{2},$$

also

$$\frac{\varrho}{\varrho - r} = \frac{r+1}{1-r}$$

und

$$\frac{1}{1-\varrho} = \frac{2}{1-r}$$

die Abschätzung

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq \log^+ \left\{ 2^{\lambda+\varepsilon} \cdot \frac{r+1}{r} \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right)^{\lambda+\varepsilon+1} \right\}.$$

Damit gilt ohne Ausnahmемenge

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$$

und genauer

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq \lambda + \varepsilon + 1.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r}} \leq \lambda + 1.$$

c) Nach Definition der unteren Ordnung  $\mu$  (Definition 1.9) gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Folge  $(r_n)$ , so daß die Ungleichung

$$T(r_n, f) < \left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\mu+\varepsilon}$$

für unendlich viele  $r_n$  gilt. Eine analoge Überlegung wie in b) liefert die Abschätzung

$$m\left(r_n, \frac{f'}{f}\right) \leq \log^+ \left\{ 2^{\mu+\varepsilon} \cdot \frac{r_n+1}{r_n} \cdot \left(\frac{1}{1-r_n}\right)^{\mu+\varepsilon+1} \right\}$$

auf diesen unendlich vielen Folgengliedern. Läßt man diese gegen 1 streben, so ergibt sich

$$\underline{\lim}_{r_n \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r_n, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r_n}} \leq \mu + \varepsilon + 1.$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt

$$\underline{\lim}_{r_n \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r_n, \frac{f'}{f}\right)}{\log \frac{1}{1-r_n}} \leq \mu + 1.$$

□

**Bemerkung:**

Ein Beispiel von Shea und Sons in [18] zeigt, daß für  $\lambda = 0$  in (1.21) tatsächlich Gleichheit auftreten kann.

Insbesondere zeigt dieses Beispiel, daß es im Einheitskreis Funktionen mit  $T(r, f) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$

**und**  $m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$ , d.h.  $m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \neq o(T(r, f))$  gibt.

## 1.4 Kleine Funktionen

In Analogie zum ebenen Fall soll nun definiert werden, wann eine Funktion in dem in der Wertverteilungslehre üblichen Sinne "klein" ist.

### Definition 1.18

Es sei  $f \notin N$ . Mit  $S(r, f)$  wird jede Funktion  $\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet, für die es eine Menge  $E \subset (0, 1)$  mit  $\int_E \frac{dr}{1-r} \leq 2$  gibt, so daß

$$\varphi(r) = o(T(r, f)) \quad \text{für } r \rightarrow 1-, r \notin E$$

gilt. Man spricht dann im Einklang mit dem Titel dieses Abschnitts davon, daß die Funktion  $S(r, f)$  **klein** (gegenüber der Charakteristik von  $f$ ) ist.

Es folgt ein einfaches Kriterium dafür, wann eine Funktion gegenüber der Charakteristik zweier verschiedener Funktionen klein sein kann.

### Lemma 1.19

Es seien  $f, g \notin N$ . Wenn es ein  $K \in (0, \infty)$  mit

$$T(r, f) \leq K \cdot T(r, g) + S(r, f) + S(r, g) \quad (1.24)$$

gibt, dann ist jedes  $S(r, f)$  auch ein  $S(r, g)$ .

### Beweis:

Nach (1.24) gilt

$$\frac{S(r, f)}{T(r, g)} = \frac{S(r, f)}{T(r, f)} \cdot \frac{T(r, f)}{T(r, g)} \leq \frac{S(r, f)}{T(r, f)} \left( K + \frac{S(r, f)}{T(r, g)} + \frac{S(r, g)}{T(r, g)} \right).$$

Dies ist äquivalent zu

$$\left( 1 - \frac{S(r, f)}{T(r, f)} \right) \cdot \frac{S(r, f)}{T(r, g)} \leq \left( K + \frac{S(r, g)}{T(r, g)} \right) \cdot \frac{S(r, f)}{T(r, f)}. \quad (1.25)$$

Nach Definition 1.18 gilt einerseits

$$\frac{S(r, f)}{T(r, f)} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 1-, r \notin E_1$$

mit einer Ausnahmemenge  $E_1$  und andererseits

$$\frac{S(r, g)}{T(r, g)} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 1-, r \notin E_2$$

mit einer Ausnahmemenge  $E_2$ , so daß aus (1.25) die Abschätzung

$$(1 - o(1)) \cdot \frac{S(r, f)}{T(r, g)} \leq (K + o(1)) \cdot o(1) \quad \text{für } r \rightarrow 1-, r \notin E_1 \cup E_2,$$

also

$$\frac{S(r, f)}{T(r, g)} \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow 1-, r \notin E_1 \cup E_2$$

folgt. Damit ist jedes  $S(r, f)$  auch ein  $S(r, g)$ . □

### Definition 1.20

In Fällen, wo jedes  $S(r, f)$  ein  $S(r, g)$  und umgekehrt auch jedes  $S(r, g)$  ein  $S(r, f)$  ist, setzen wir

$$S(r) := S(r, f) = S(r, g).$$

## 1.5 Eigenschaften logarithmischer Ableitungen

Wir sammeln nun die Eigenschaften der logarithmischen Ableitung  $\frac{f'}{f}$  einer meromorphen Funktion  $f$ , die im Laufe dieser Abhandlung wiederholt benötigt werden, insbesondere das Aussehen ihrer Laurent-Koeffizienten in vorgegebenen Stellen von  $f$ .

### Lemma 1.21

Sei  $f$  eine meromorphe Funktion.

- a) Hat  $f$  im Punkt  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$ , so hat die logarithmische Ableitung  $\frac{f'}{f}$  von  $f$  im Punkt  $z_0$  die Laurent-Entwicklung

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{f^{(k)}(z_0)}.$$

Für  $k = 1$  gilt ferner

$$a_1 = \frac{f'''(z_0)}{3 \cdot f'(z_0)} - \left( \frac{f''(z_0)}{2 \cdot f'(z_0)} \right)^2.$$

- b) Hat  $f$  im Punkt  $z_\infty$  eine einfache Polstelle mit dem Residuum  $\mu$ , ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-1}{z - z_\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_\infty)^n$$

die Laurent-Entwicklung ihrer logarithmischen Ableitung und ist  $\xi \in \mathbb{C}$  eine fest vorgegebene Konstante, so haben wir um  $z_\infty$  die Laurent-Entwicklungen

$$\frac{f'(z)}{f(z) - \xi} = \frac{-1}{z - z_\infty} + a_0 - \frac{\xi}{\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_\infty)^n$$

und

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{-2}{z - z_\infty} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_\infty)^n.$$

### Beweis:

Wir beweisen exemplarisch die Aussage a).

Die Aussage b) folgt analog, wenn man mit Laurent-Reihen statt Taylor-Reihen ansetzt.

Mit der Voraussetzung

$$f(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad , \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0$$

haben wir die Taylor-Entwicklungen

$$f(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0)^{k+1} + \dots$$

und

$$f'(z) = \frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^{k-1} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \dots$$

Damit bilden wir

$$\begin{aligned} (z-z_0) \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-1)!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k+1} + \dots}{\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0)^{k+1} + \dots} \\ &= \frac{(z-z_0)^k \cdot \left( \frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-1)!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0) + \dots \right)}{(z-z_0)^k \cdot \left( \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \dots \right)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n, \end{aligned}$$

denn der Quotient der Potenzreihen ist wieder eine Potenzreihe, da die konstanten Terme nach Voraussetzung nicht verschwinden. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen erhalten wir die unbekanntenen Koeffizienten  $b_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) durch Koeffizientenvergleich in

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-1)!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!}(z-z_0) + \dots \\ &= \left( \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!}(z-z_0) + \dots \right) (b_0 + b_1(z-z_0) + b_2(z-z_0)^2 + \dots). \end{aligned}$$

Es ergeben sich also

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{(k-1)!} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_0 \iff b_0 = k,$$

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!} &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_1 + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \cdot b_0 \\ &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_1 + \frac{k \cdot f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_1 &= \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{k!} - \frac{k \cdot f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \\ &= \frac{(k+1) \cdot f^{(k+1)}(z_0) - k \cdot f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \\ &= \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \\ \iff b_1 &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{f^{(k)}(z_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+1)!} &= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_2 + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \cdot b_1 + \frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} \cdot b_0 \\
&= \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_2 + \frac{(f^{(k+1)}(z_0))^2}{(k+1) \cdot (k+1)! \cdot f^{(k)}(z_0)} + \frac{k \cdot f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} \\
\iff \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \cdot b_2 &= \frac{f^{(k+2)}(z_0)}{(k+1)!} - \frac{(f^{(k+1)}(z_0))^2}{(k+1) \cdot (k+1)! \cdot f^{(k)}(z_0)} - \frac{k \cdot f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} \\
&= \frac{(k+2) \cdot f^{(k+2)}(z_0) - k \cdot f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} - \frac{(f^{(k+1)}(z_0))^2}{(k+1) \cdot (k+1)! \cdot f^{(k)}(z_0)} \\
&= \frac{2 \cdot f^{(k+2)}(z_0)}{(k+2)!} - \frac{(f^{(k+1)}(z_0))^2}{(k+1) \cdot (k+1)! \cdot f^{(k)}(z_0)} \\
\iff b_2 &= \frac{2}{(k+1)(k+2)} \frac{f^{(k+2)}(z_0)}{f^{(k)}(z_0)} - \left( \frac{1}{k+1} \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{f^{(k)}(z_0)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt  $a_{n-1} = b_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), woraus die Behauptungen folgen.  $\square$

Für weitere Aussagen führen wir eine neue Anzahlfunktion ein.

**Definition 1.22**

Es sei  $f \notin N$ . Für  $t \in (0, 1)$  bezeichne  $\bar{n}(t, f)$  die Anzahl der Polstellen von  $f$  in  $\{z : |z| \leq t\}$ , wobei aber jede Stelle ohne Berücksichtigung ihrer Vielfachheit nur einfach gezählt wird.

Mit dieser gequerten "kleinen" Anzahlfunktion sei dann

$$\bar{N}(r, f) = \int_0^r \frac{\bar{n}(t, f) - \bar{n}(0, f)}{t} dt + \bar{n}(0, f) \log r$$

für  $r \in (0, 1)$ . Analog sei  $\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$  für  $a \in \mathbb{C}$  definiert.

Die wichtigsten Eigenschaften der logarithmischen Ableitung einer meromorphen Funktion  $f$  sind:

- a) Alle Polstellen von  $\frac{f'}{f}$  sind einfach und liegen entweder in Pol- oder in Nullstellen von  $f$ .
- b) Alle Nullstellen von  $\frac{f'}{f}$  liegen in Nullstellen von  $f'$ , die keine Nullstellen von  $f$  sind.

Mit der Anzahlfunktion  $\bar{N}$  aus Definition 1.22 lauten diese Eigenschaften

**Lemma 1.23**

- a) Es ist  $N\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \bar{N}(r, f) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$ .
- b) Es ist  $N\left(r, \frac{f}{f'}\right) = N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f}\right)$ .

## 1.6 Der zweite Hauptsatz

Zur Formulierung des zweiten Hauptsatzes benötigen wir noch eine weitere Anzahlfunktion.



**Definition 1.24**

Es sei  $f \notin N$ . Dann sei

$$N_1(r, f) := N(r, f) - \overline{N}(r, f)$$

und analog

$$N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) := N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right).$$

für  $a \in \mathbb{C}$ .

**Beachte:**

- a)  $N_1(r, f)$  (bzw.  $N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ ) zählt die **mehrfachen** Polstellen (bzw.  $a$ -Stellen) von  $f$ , und zwar mit einer um Eins verminderten Vielfachheit.
- b) Sind für ein  $q \in \mathbb{N}$  die Zahlen  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden, dann ist stets

$$\sum_{j=1}^q N_1\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f'}\right),$$

denn jede mehrfache Stelle erzeugt eine Nullstelle der Ableitung, die entsprechend oft gezählt wird.

- c)  $\overline{N}_1(r, f)$  (bzw.  $\overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ ) zählt in Übereinstimmung mit den Definitionen 1.22 und 1.24 die mehrfachen Polstellen (bzw.  $a$ -Stellen) von  $f$ , und zwar jeweils **nur einfach**.

**Satz 1.25 (Zweiter Hauptsatz)**

Es sei  $f \notin N$ . Für ein  $q \in \mathbb{N}$  seien  $a_1, a_2, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden. Dann ist

$$N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + m(r, f) \leq 2 \cdot T(r, f) + \log \frac{1}{1-r} + S(r, f) \quad (1.26)$$

für  $r \rightarrow 1-, r \notin E$ , wobei  $E \subset (0, 1)$  eine evtl. auftretende Ausnahmemenge mit

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$$

ist. Das Restglied hängt von den  $a_j$  und von  $q$  ab.

Dagegen hängt die Ausnahmemenge nur von  $f$ , aber **nicht** von den  $a_j$  oder von  $q$  ab.

Hat  $f$  endliche Ordnung, dann ist das Restglied ein  $O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$  ohne Ausnahmemenge.

Äquivalente Fassungen von (1.26) sind

$$N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (q-1) \cdot T(r, f) \leq N(r, f) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r, f), \quad (1.27)$$

$$(q-1) \cdot T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r, f),$$

und

$$(q-2) \cdot T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r, f). \quad (1.28)$$

für  $q \geq 2$ .

**Beweis:**

Die Abschätzung (1.26) läßt sich mit einer durch Shea und Sons in [18] verfeinerten Methode von Ahlfors aus [1] beweisen. Die anderen Abschätzungen kann man leicht aus (1.26) herleiten.  $\square$

**Bemerkung:**

Die Methode von Shea und Sons ist die einzige dem Autor bekannte Methode, die in (1.26) den kleinstmöglichen Faktor Eins beim  $\log \frac{1}{1-r}$ -Term erzeugt. Dieselbe Methode liefert für die Schmiegunfunktion der logarithmischen Ableitung einer in  $\mathbb{D}$  meromorphen Funktion  $f$  mit  $T(r, f) = O \left( \log \frac{1}{1-r} \right)$  die Abschätzung

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) \leq \log \frac{1}{1-r} + 2 \cdot \log \log \frac{1}{1-r} + o \left( \log \log \frac{1}{1-r} \right),$$

während Satz 1.15 für eine solche Funktion

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) \leq \log \frac{1}{1-r} + \log \log \frac{1}{1-r} + O(1)$$

ergibt. Wie schon in Abschnitt 1.2 angedeutet wurde, ist Satz 1.15 in diesem Sinne bestmöglich, da Shea und Sons in [18] eine Funktion mit

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) > \log \frac{1}{1-r} + \log \log \frac{1}{1-r}$$

konstruieren.

## 1.7 Zulässigkeit

Schon in Abschnitt 1.3 wurde angedeutet, daß es im Einheitskreis Funktionen  $f$  gibt, so daß

$$T(r, f) = O \left( \log \frac{1}{1-r} \right)$$

und

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) = O \left( \log \frac{1}{1-r} \right)$$

gilt. Für solche Funktionen ist die sonst kleine logarithmische Ableitung offensichtlich kein  $S(r, f)$ , da sie auch von der Größenordnung der Vergleichsfunktion  $\log \frac{1}{1-r}$  ist. Weil diese Vergleichsfunktion jedoch ein natürlicher Bestandteil des Satzes über die Schmiegunfunktion der logarithmischen Ableitung ist, liegt es nahe, Funktionen im Einheitskreis nach ihrem Verhältnis zu dieser Vergleichsfunktion zu unterscheiden.

**Definition 1.26**

Es sei  $f \notin N$ . Dann heißt

$$\alpha(f) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

(oberer) **Unzulässigkeitsindex** von  $f$ .

Gilt  $\alpha(f) = \infty$ , so nennen wir  $f$  **zulässig**.

Gilt  $\alpha(f) < \infty$ , so nennen wir  $f$  **unzulässig**.

Gilt  $\alpha(f) \in (0, \infty)$ , so heißt  $f$  **positiv unzulässig**.

Gilt  $\alpha(f) = 0$ , so heißt  $f$  **nullunzulässig**.

Ferner heißt die Zahl

$$\ell(f) := \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

**unterer Unzulässigkeitsindex** von  $f$ .

Gilt  $\alpha(f) = \ell(f)$ , so heißt  $f$  **Funktion von regulärer Unzulässigkeit**.

Gilt  $\alpha(f) > \ell(f)$ , so heißt  $f$  **Funktion von irregulärer Unzulässigkeit**.

Der Begriff der Zulässigkeit sorgt dafür, daß in allen Aussagen, in denen Restglieder der Form  $S(r, f)$  vorkommen, nun auch die  $\log \frac{1}{1-r}$ -Terme in diese Restglieder einfließen.

Somit lautet der Satz über die Schmiegunsfunktion der logarithmischen Ableitung jetzt

**Satz 1.27**

Es sei  $f \notin N$  zulässig. Dann ist

$$m \left( r, \frac{f'}{f} \right) = S(r, f) .$$

Seine Verallgemeinerungen sind

**Satz 1.28**

Es sei  $f \notin N$  zulässig. Dann gilt

$$a) \quad m \left( r, \frac{f^{(k)}}{f} \right) = S(r, f) \text{ für jedes } k \in \mathbb{N}_0 .$$

$$b) \quad T(r, f^{(k)}) \leq T(r, f^{(j)}) + (k - j) \cdot \overline{N}(r, f) + S(r, f^{(j)}) \text{ für alle } j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } j \leq k .$$

$$c) \quad m \left( r, \frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}} \right) = S(r, f^{(j)}) \text{ für alle } j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } j \leq k . \text{ Dabei ist } f^{(0)} := f .$$

**Korollar 1.29**

Es sei  $f \notin N$  zulässig. Es seien  $p, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $p < k$ . Dann ist

$$m \left( r, \frac{f^{(k)}}{f^{(p)}} \right) = S(r, f^{(j)}) \text{ für } 0 \leq j \leq p .$$

Der zweite Hauptsatz für zulässige Funktionen lautet

**Satz 1.30 (Zweiter Hauptsatz für zulässige Funktionen)**

Es sei  $f \notin N$  zulässig. Für  $q \in \mathbb{N}$  seien  $a_1, a_2, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  paarweise verschieden. Dann ist

$$N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \sum_{j=1}^q m\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + m(r, f) \leq 2 \cdot T(r, f) + S(r, f) \quad (1.29)$$

für  $r \rightarrow 1-, r \notin E$ , wobei  $E \subset (0, 1)$  eine evtl. auftretende Ausnahmemenge mit

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < \infty$$

ist. Das Restglied hängt von den  $a_j$  und von  $q$  ab.

Dagegen hängt die Ausnahmemenge nur von  $f$ , aber **nicht** von den  $a_j$  oder von  $q$  ab.

Hat  $f$  endliche Ordnung, dann ist das Restglied  $S(r, f)$  ein  $O\left(\log \frac{1}{1-r}\right)$  ohne Ausnahmemenge.

Äquivalente Fassungen von (1.29) sind

$$N_1(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (q-1) \cdot T(r, f) \leq N(r, f) + \sum_{j=1}^q N\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f),$$

$$(q-1) \cdot T(r, f) \leq \overline{N}(r, f) + \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f),$$

und

$$(q-2) \cdot T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r, f) \quad (1.30)$$

für  $q \geq 2$ .

Offensichtlich erben zulässige Funktionen alle Eigenschaften, die Funktionen in der Ebene haben. Deswegen konzentrieren wir uns ab jetzt auf unzulässige Funktionen. Dazu noch folgende

**Definition 1.31**

Es bezeichne

$$\mathcal{F} := \{f \notin N : \alpha(f) < \infty\}$$

die Klasse der unzulässigen Funktionen und

$$\mathcal{F}_+ := \{f \notin N : 0 < \alpha(f) < \infty\}$$

die Klasse der positiv unzulässigen Funktionen.

**Bemerkung:**

- a) Unzulässige Funktionen werden auch häufig "langsam wachsende" Funktionen genannt, was den Titel dieser Abhandlung rechtfertigt.
- b) Im Gegensatz zur sonst üblichen Definition der Klasse  $\mathcal{F}$  (vgl. [18]) enthält diese bei uns **nicht** die beschränktartigen Funktionen.

- c) Offensichtlich gibt es nullunzulässige Funktionen  $f \notin N$ , so daß  $\mathcal{F}_+ \subsetneq \mathcal{F}$  gilt. In  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_+$  liegen z.B. die Bloch-Funktionen, die nach [2] der Bedingung

$$T(r, f) = O\left(\log \log \frac{1}{1-r}\right)$$

genügen.

- d) Wir werden uns in dieser Abhandlung ausschließlich mit Funktionen von regulärer Unzulässigkeit beschäftigen. In der Tat ist dem Autor kein Beispiel einer Funktion von irregulärer Unzulässigkeit bekannt.

## 1.8 Defekt- und Verzweigungsrelationen

Als erstes neuartiges Ergebnis für unzulässige Funktionen stellt sich heraus, daß sie mehr als zwei Picardsche Ausnahmewerte haben können, da der Unzulässigkeitsindex auf natürliche Weise in die Verzweigungsrelation eingeht.

### Definition 1.32

Es sei  $f \in \mathcal{F}$ . Für  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  heißt

$$\delta(a, f) = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$$

**Defekt** des Wertes  $a$ ,

$$\Delta(a, f) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$$

**Valiron-Defekt** des Wertes  $a$ ,

$$\theta(a, f) = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$$

**Verzweigungsindex** des Wertes  $a$ ,

$$\Theta(a, f) = 1 - \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)}$$

**Verzweigkeit** von  $a$ ,

$$\mathbb{T}(f) = \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \delta(a, f)$$

**totaler Defekt** der Funktion  $f$ .

### Satz 1.33

Ist  $f \in \mathcal{F}_+$ , dann ist die Menge  $\{a \in \widehat{\mathbb{C}} : \Theta(a, f) > 0\}$  höchstens abzählbar, und es gilt

$$\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \Theta(a, f) \leq 2 + \frac{1}{\alpha(f)} \quad (\text{Verzweigungsrelation}) \quad (1.31)$$

mit dem Unzulässigkeitsindex  $\alpha(f)$ .

Insbesondere ist also auch  $\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \theta(a, f) + \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2 + \frac{1}{\alpha(f)}$  und daher auch

$$\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \theta(a, f) \leq 2 + \frac{1}{\alpha(f)} \quad , \quad \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \delta(a, f) \leq 2 + \frac{1}{\alpha(f)} \quad (\text{Defektrelation}).$$

**Beweis:**

Die Verzweigungsrelation (1.31) mit  $\ell(f)$  statt  $\alpha(f)$  folgt leicht, wenn man (1.28) durch  $T(r, f)$  dividiert. In [18] wird ohne Beweis behauptet, daß sogar die bessere Abschätzung mit  $\alpha(f)$  gilt. Da wir uns in dieser Abhandlung ausschließlich mit Funktionen von regulärer Unzulässigkeit beschäftigen werden, ist dieser Unterschied für uns unerheblich.

Ist  $\alpha(f) > 0$ , so enthält die Menge

$$\left\{ a \in \widehat{\mathbb{C}} : \Theta(a, f) > \frac{1}{n} \right\}$$

für  $n \in \mathbb{N}$  höchstens  $\left(2 + \frac{1}{\alpha(f)}\right) n$  Elemente. Damit ist die Menge

$$\left\{ a \in \widehat{\mathbb{C}} : \Theta(a, f) > 0 \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{1}{n} > \Theta(a, f) > \frac{1}{n+1} \right\}$$

höchstens abzählbar. □

Mit diesem Satz stehen der Unzulässigkeitsindex und die mögliche Anzahl der Picardschen Ausnahmewerte einer Funktion nach [15] in folgender Korrespondenz.

**Satz 1.34**

Gilt  $\mathbb{T}(f) = p > 2$  für eine Funktion  $f \in \mathcal{F}$ , so folgt

$$\alpha(f) \leq \frac{1}{p-2}.$$

Insbesondere steht das Gleichheitszeichen, wenn  $p$  Picardsche Ausnahmewerte vorliegen.

**Beweis:**

vgl. [15], S.151-153. □

**Bemerkung:**

a) Gilt  $\mathbb{T}(f) = \infty$  für eine Funktion  $f \in \mathcal{F}$ , so muß  $f$  nach [15], S.152 nullunzulässig sein. Insbesondere ist  $f$  nullunzulässig, wenn  $f$  unendlich viele Picardsche Ausnahmewerte hat.

b) In [15], S.154 sind Bedingungen dafür angegeben, die für eine Funktion  $f \in \mathcal{F}$  mit unendlich vielen Picardschen Ausnahmewerten implizieren, daß

$$T(r, f) = O\left(\log \log \frac{1}{1-r}\right)$$

gilt.

c) Nach [15], S.155 muß eine Funktion  $f$  mit überabzählbar vielen Picardschen Ausnahmewerten von beschränkter Charakteristik sein.

# Kapitel 2

## Eindeutigkeit meromorpher Funktionen

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit Paaren meromorpher Funktionen, deren Eigenschaft, gewisse Werte an den gleichen Stellen anzunehmen, dafür sorgt, daß sie bereits identisch sind oder durch eine Möbius-Transformation auseinander hervorgehen.

Solche Eindeutigkeitseigenschaften lassen sich für zulässige Funktionen (analog zu Funktionen in  $\mathbb{C}$ ) insbesondere aus zwei Eigenschaften herleiten, die für zulässige Funktionen automatisch erfüllt sind. Die eine davon ist, daß für solche Funktionen Gleichheit in der  $\overline{N}$ -Version (1.30) des zweiten Hauptsatzes gilt, und die andere, daß die Schmiegunsfunktion ihrer logarithmischen Ableitung klein gegenüber ihrer Charakteristik ist (Dies ist Satz 1.27.).

Für Funktionen der Klasse  $\mathcal{F}$  sind beide Eigenschaften nicht notwendig gegeben. Betrachtet man jedoch eine geeignete Teilklasse, in der die obigen Eigenschaften gelten, so kann man analoge Ergebnisse zum ebenen bzw. zulässigen Fall herleiten, wobei allerdings der für unzulässige Funktionen charakteristische Effekt auftritt, daß eine beliebig große endliche Anzahl von Werten geteilt werden kann, sobald der Unzulässigkeitsindex hinreichend klein ist.

Zunächst soll jedoch der Begriff des "Werteteilens" präzisiert werden.

### 2.1 Zum Begriff des Werteteilens

#### Definition 2.1

Seien  $f$  und  $g$  zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen und  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ .

Bekanntlich heißt jedes  $z_a \in \mathbb{C}$  mit  $f(z_a) = a$  eine  $a$ -Stelle der Funktion  $f$ .

Gilt für ein  $k \in \mathbb{N}$  zusätzlich  $f'(z_a) = \dots = f^{(k-1)}(z_a) = 0$  und  $f^{(k)}(z_a) \neq 0$ , so heißt  $z_a$  eine  $a$ -Stelle der Vielfachheit  $k$ .

- a) Ist jede  $a$ -Stelle von  $f$  eine  $a$ -Stelle von  $g$  **und** jede  $a$ -Stelle von  $g$  eine  $a$ -Stelle von  $f$ , so sagen wir, daß  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  **teilen**.  
Soll ausdrücklich betont werden, daß der Wert  $a$  ohne Berücksichtigung der Vielfachheit geteilt wird, so sagen wir auch, daß er **IM** (für "ignoring multiplicities") geteilt wird.
- b) Teilen  $f$  und  $g$  den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  und haben **alle**  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  die gleiche (von  $z_a$  abhängige) Vielfachheit, so sagen wir, daß  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  **CM** (für "counting multiplicities") teilen.
- c) Teilen  $f$  und  $g$  den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  und haben **alle**  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  verschiedene (von  $z_a$  abhängige) Vielfachheiten, so sagen wir, daß  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  **DM** (für "different multiplicities") teilen.

**Beachte:**

”Teilen DM” bedeutet in dieser Abhandlung, daß in **jedem** Punkt die Vielfachheiten, mit denen  $f$  und  $g$  den geteilten Wert in diesem Punkt annehmen, voneinander verschieden sind. Bei manchen Autoren heißt ”Teilen DM” nur, daß in mindestens einem Punkt die Vielfachheiten voneinander verschieden sind, also ”Teilen IM, aber nicht CM”.

Elementare Eigenschaften von Möbius-Transformationen ergeben leicht

**Lemma 2.2**

*Ist  $M$  eine Möbius-Transformation, so teilen  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  (IM, CM, DM) genau dann, wenn  $M \circ f$  und  $M \circ g$  den Wert  $M(a)$  (IM, CM, DM) teilen.*

Es besteht die theoretische Möglichkeit, daß zwei Funktionen einen Wert teilen, indem sie ihn in einem gewissen Anteil von Punkten CM und im Komplementäranteil nicht CM teilen. Das bisher einzige bekannte Paar solcher Funktionen in  $\mathbb{C}$  ist aus einem Satz in [19] über drei Funktionen, die vier Werte teilen, herleitbar. In diesem Sinne sind ”Teilen CM” und ”Teilen DM” zwei Extreme für den ”Grad”, mit dem zwei Funktionen einen Wert CM teilen. Um dieses Konzept zu präzisieren, müssen geeignete neue Anzahlfunktionen eingeführt werden.

**Definition 2.3**

Seien  $f$  und  $g$  zwei meromorphe Funktionen, die den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  IM teilen. Ist dabei  $z_a \in \mathbb{C}$  eine  $a$ -Stelle von  $f$  und  $g$ , so sei  $p \in \mathbb{N}$  die Vielfachheit der  $a$ -Stelle  $z_a$  von  $f$  und  $q \in \mathbb{N}$  die Vielfachheit der  $a$ -Stelle  $z_a$  von  $g$ .

- a) Die Anzahlfunktion  $\bar{n}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  zähle diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  in  $\{|z| \leq r\}$  mit  $p < q$ . Dabei steht der Index  $S$  dafür, daß nur diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  gezählt werden, wo diejenigen von  $f$  eine kleinere Vielfachheit (”smaller multiplicity”) als diejenigen von  $g$  haben.  
Wie in Definition 1.1 wird damit die große Anzahlfunktion  $\bar{N}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  definiert.
- b) In Analogie zu a) bezieht sich die Anzahlfunktion  $\bar{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  auf diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  mit  $p = q$ . Dabei steht der Index  $E$  dafür, daß nur diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  gezählt werden, die die gleiche Vielfachheit (”equal multiplicities”) haben.
- c) Die Anzahlfunktion  $\bar{N}_L \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  ”zählt” diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  mit  $p > q$ . Dabei steht der Index  $L$  dafür, daß nur diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  gezählt werden, wo diejenigen von  $f$  eine größere Vielfachheit (”larger multiplicity”) als diejenigen von  $g$  haben.
- d) Die Anzahlfunktion  $\bar{N}_{S \geq m} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  ”zählt” für ein fest vorgegebenes  $m \in \mathbb{N}$  diejenigen  $a$ -Stellen in  $\bar{N}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  mit  $p \geq m$ , also nur diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$  mit  $m \leq p < q$ .
- e) Die Anzahlfunktion  $\bar{N}_{S \leq m} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  ”zählt” für ein fest vorgegebenes  $m \in \mathbb{N}$  diejenigen  $a$ -Stellen in  $\bar{N}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$  mit  $p \leq m$ , also nur diejenigen  $a$ -Stellen von  $f$ , wo gleichzeitig  $p < q$  und  $p \leq m$  gilt.

Natürlich gelten auch für die Funktionen aus b) und c) Aussagen, die zu d) und e) analog sind.



Schöpft man alle Möglichkeiten von Beziehungen aus, die zwischen den Vielfachheiten der  $a$ -Stellen der Funktionen  $f$  und  $g$  bestehen können, so erhält man leicht

**Lemma 2.4**

Die Anzahlfunktionen aus Definition 2.3 erfüllen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\overline{N}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &= \overline{N}_L \left( r, \frac{1}{g-a} \right) \\
\overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &= \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{g-a} \right) \\
\overline{N}_L \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &= \overline{N}_S \left( r, \frac{1}{g-a} \right) \\
\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &= \overline{N}_S \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_L \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \\
&= \overline{N}_L \left( r, \frac{1}{g-a} \right) + \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{g-a} \right) + \overline{N}_S \left( r, \frac{1}{g-a} \right) \\
&= \overline{N} \left( r, \frac{1}{g-a} \right) \\
\overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &= \overline{N}_{E \leq m-1} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_{E \geq m} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{g-a} \right) = \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right) ,$$

wenn der Wert  $a$  CM geteilt wird. Ferner haben wir

$$\overline{N}_1 \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = \overline{N}_{S \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_{E \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_{L \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$$

für die im Anschluß an Definition 1.24 erklärte Anzahlfunktion.

**Beweis:**

Unmittelbare Folgerungen aus Definition 2.3 □

Mit der Anzahlfunktion aus Definition 2.3 b) liegt es nun nahe, den Begriff des CM-Teilens wie folgt zu verallgemeinern.

**Definition 2.5**

Teilen die Funktionen  $f, g \notin N$  den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  und gilt zusätzlich

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right) = S(r, f) \tag{2.1}$$

und

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{g-a} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{g-a} \right) = S(r, g) \quad , \tag{2.2}$$

so sagen wir, daß  $f$  und  $g$  diesen Wert "CM" teilen.

CM geteilte Werte werden auch "CM" geteilt, da die Anzahlfunktionen auf der linken Seite von (2.1) und (2.2) nach Lemma 2.4 genau dieselben Stellen zählen, sich also annullieren, so daß die rechte Seite von (2.1) und (2.2) als Nullfunktion trivialerweise klein ist.

Offenbar ist "CM"-Teilen eine Verallgemeinerung von CM-Teilen, da man in demjenigen Sinne wenige Ausnahmen zuläßt, daß die Anzahlfunktion derjenigen Punkte, in denen der Wert nicht CM geteilt wird, klein ist, solche Punkte also fast nie auftreten.

Nun kommen wir zu der Möglichkeit, den "Grad" des Teilens zu messen.

**Definition 2.6**

Teilen die Funktionen  $f, g \notin N$  den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  IM, so setzen wir

$$\tau(a) = \tau(a, f) = \tau(a, g) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{\overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f-a} \right)}{\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)}, \tag{2.3}$$

falls  $\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \neq 0$  gilt, und

$$\tau(a) = 1, \tag{2.4}$$

falls  $\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \equiv 0$  gilt, und nennen  $\tau(a)$  den **Teilungsindex** von  $a$ .

Man sieht leicht, daß "CM" (und damit auch CM) geteilte Werte den Teilungsindex 1 und DM geteilte Werte den Teilungsindex 0 haben.

Falls Picardsche Ausnahmewerte geteilt werden, werden sie immer CM und damit auch "CM" geteilt, womit sie den Teilungsindex 1 haben.

Der Fall, daß ein Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  gar nicht angenommen wird, so daß die Anzahlfunktion im Nenner des Grenzwertes in (2.3) verschwinden würde, dieser also nicht definiert wäre, wird damit durch (2.4) auf natürliche Weise erfaßt.

Offenbar ist der Teilungsindex ein Maß dafür, wie groß der Anteil der mit gleicher Vielfachheit geteilten Werte in der Menge der überhaupt geteilten Werte der Funktionen  $f$  und  $g$  ist. Er mißt also wie gewünscht den "Grad" des Teilens.

Das bereits erwähnte Beispiel aus [19] ist (für  $\mathbb{C}$ ) das einzig bekannte, wo

$$\tau(a_j) \in (0, 1) \text{ für } j = 1, 2, 3, 4$$

gilt, wobei der genaue Wert jedes einzelnen  $\tau(a_j)$  nicht bekannt ist, man jedoch weiß, daß

$$\sum_{j=1}^4 \tau(a_j) = \frac{1}{3}$$

gilt.

## 2.2 Werteteilen bei zulässigen Funktionen

Da sich in  $\mathbb{D}$  zulässige Funktionen wie Funktionen in  $\mathbb{C}$  verhalten, gilt für sie auch der aus der Ebene wohlbekannte Fünf-Werte-Satz.

**Satz 2.7**

*Sind die Funktionen  $f, g \notin N$  zulässig und teilen sie fünf paarweise verschiedene Werte, dann ist  $f \equiv g$ .*

**Beweis:**

Dies ist der Anfang eines simultanen Beweises für den Fünf- **und** den Vier-Werte-Satz, weswegen wir annehmen, daß  $q \geq 4$  für die Zahl  $q \in \mathbb{N}$  gelte.

Die  $q \geq 4$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  seien paarweise verschiedene von  $f$  und  $g$  geteilte Werte, die o.B.d.A. alle endlich sein dürfen, da wir sonst die Funktionen  $\frac{1}{f-b}$  und  $\frac{1}{g-b}$  mit  $b \notin \{a_1, \dots, a_q\}$  betrachten. Wir nehmen an, daß  $f - g \not\equiv 0$  gilt.

Da obige Werte Nullstellen der Funktion  $f - g$  sind, gilt mit (1.30) die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} (q-2) \cdot T(r, f) &\leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-g} \right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f-g) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + T(r, g) + S(r, f) \end{aligned} \quad (2.5)$$

außerhalb einer Ausnahmemenge  $E_1$ . Also haben wir

$$(q-3) \cdot T(r, f) \leq T(r, g) + S(r, f) \quad (2.6)$$

außerhalb von  $E_1$ . Vertauschen wir in der obigen Argumentation die Rollen von  $f$  und  $g$ , so erhalten wir analog

$$(q-3) \cdot T(r, g) \leq T(r, f) + S(r, g) \quad (2.7)$$

außerhalb einer Ausnahmemenge  $E_2$ . Mit (2.6) liefert Lemma 1.19, daß jedes  $S(r, f)$  ein  $S(r, g)$  ist, und mit (2.7), daß jedes  $S(r, g)$  ein  $S(r, f)$  ist, und nach Definition 1.20 schreiben wir

$$(q-3) \cdot T(r, f) \leq T(r, g) + S(r) \quad (2.8)$$

und

$$(q-3) \cdot T(r, g) \leq T(r, f) + S(r) . \quad (2.9)$$

Mit Division durch  $T(r, f)$  folgt aus (2.8) die Abschätzung

$$q-3 \leq \frac{T(r, g)}{T(r, f)} + \frac{S(r)}{T(r, f)} \quad (2.10)$$

außerhalb von  $E_1$ . Stürzen von (2.9) liefert

$$\frac{1}{T(r, f)} \leq \frac{1}{(q-3) \cdot T(r, g) + S(r)} .$$

Multiplizieren wir dies mit  $T(r, g)$ , so erhalten wir

$$\frac{T(r, g)}{T(r, f)} \leq \frac{1}{q-3 + \frac{S(r)}{T(r, g)}} \quad (2.11)$$

außerhalb von  $E_2$ . Setzt man (2.11) in (2.10) ein, so folgt

$$q-3 \leq \frac{1}{q-3 + \frac{S(r)}{T(r, g)}} + \frac{S(r)}{T(r, f)} ,$$

also

$$q - 3 \leq \frac{1}{q - 3} \quad (2.12)$$

für  $r \rightarrow 1-$  außerhalb der Ausnahmemenge  $E_1 \cup E_2$ . Die Ungleichung (2.12) ist für  $q \geq 5$  unmöglich, so daß der Fünf-Werte-Satz gilt.  $\square$

Der Fall  $q = 4$  wurde in diesem Beweis nicht näher untersucht. Analysiert man ihn wie in [14] genauer, so erhält man den sogenannten Vier-Werte-Satz.

**Satz 2.8**

*Sind die Funktionen  $f, g \notin N$  zulässig und teilen sie die vier Werte  $a_1, a_2, a_3, a_4$  "CM", so ist entweder  $f \equiv g$  oder es liegt der folgende Fall vor:*

$$\begin{aligned} &\exists \text{ eine Möbius-Transformation } M \text{ mit } g = M \circ f, \\ &M(a_1) = a_1, \quad M(a_2) = a_2, \quad M(a_3) = a_4, \quad M(a_4) = a_3. \end{aligned}$$

*Hieraus folgt dann, daß  $a_3$  und  $a_4$  Picardsche Ausnahmewerte von  $f$  und  $g$  sind.*

*Weiter ist  $DV(a_1, a_2, a_3, a_4) = -1$ .*

## 2.3 Werteteilen zwischen einer zulässigen und einer unzulässigen Funktion

Da zwei zulässige Funktionen, die hinreichend viele Werte teilen, Ungleichungen der Form (2.8) und (2.9) erfüllen, folgt aus Lemma 1.19, daß sie von der gleichen Wachstumsordnung im Sinne von Definition 1.9 sein müssen.

Unzulässige Funktionen sind definitionsgemäß von der Ordnung Null. Es gibt aber auch zulässige Funktionen der Ordnung Null.

Der folgende Satz sagt jedoch aus, daß eine unzulässige Funktion nur mit einer zweiten **unzulässigen** Funktion hinreichend viele Werte teilen kann.

**Satz 2.9**

*Ist  $f \notin N$  zulässig und  $g \notin N$  unzulässig, so können  $f$  und  $g$  höchstens drei Werte teilen.*

**Beweis:**

Wir nehmen an, daß  $f$  und  $g$  die  $q \geq 4$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  teilen. Nach (1.30) gilt

$$\begin{aligned} (q - 2) \cdot T(r, f) &\leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + S(r, f) \\ &\leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - g} \right) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f - g) + S(r, f) \\ &\leq T(r, f) + T(r, g) + S(r, f), \end{aligned}$$

also

$$T(r, f) \leq \frac{1}{q - 3} \cdot T(r, g) + S(r, f).$$

Für  $q \geq 4$  ist dies eine Ungleichung der Form (1.24) mit  $K = \frac{1}{q-3}$ .  
 Deswegen ist nach Lemma 1.19 **jedes**  $S(r, f)$  auch ein  $S(r, g)$ .  
 Nach Definition der Zulässigkeit (Definition 1.26) ist jedoch

$$T(r, g) = S(r, f)$$

und damit

$$T(r, g) = S(r, g) = o(T(r, g)) ,$$

was für  $g \notin N$  ein Widerspruch ist. □

## 2.4 Die Funktionenklasse $\mathcal{G}$

Der in Abschnitt 2.2 zitierte simultane Beweis des Fünf- und des Vier-Werte-Satzes, den wir dort beendet hatten, als die Aussage des Fünf-Werte-Satzes gezeigt war, geht zur Herleitung des Vier-Werte-Satzes wie folgt weiter:

Für zulässige Funktionen  $f, g \notin N$  mit  $f \not\equiv g$ , die **vier** Werte IM teilen, folgt durch Einsetzen der Zahl  $q = 4$  aus (2.8) die Abschätzung

$$T(r, f) \leq T(r, g) + S(r) \tag{2.13}$$

außerhalb von  $E_1$  und aus (2.9) die Abschätzung

$$T(r, g) \leq T(r, f) + S(r) \tag{2.14}$$

außerhalb von  $E_2$ , womit wir durch Einsetzen von (2.14) in (2.13) die Gleichheit

$$T(r, f) = T(r, g) + S(r) \tag{2.15}$$

außerhalb von  $E_1 \cup E_2$  erhalten.

Die Gleichheit in (2.15) bedeutet insbesondere, daß überall in der Ungleichungskette (2.5) das Gleichheitszeichen steht, also auch in (1.30), d.h. es gilt

$$\sum_{j=1}^4 \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) = 2 \cdot T(r, f) + S(r) .$$

Daraus erhält man diverse Folgerungen, die für den weiteren Beweis des Vier-Werte-Satzes wesentlich sind.

Wir interessieren uns jedoch für Funktionen der Klasse  $\mathcal{F}_+$ .

Gilt  $f, g \in \mathcal{F}_+$ , also insbesondere

$$T(r, f) = O \left( \log \frac{1}{1-r} \right) \text{ und } T(r, g) = O \left( \log \frac{1}{1-r} \right) ,$$

so erfüllen beide Funktionen eine Abschätzung der Form (1.24), so daß jedes  $S(r, f)$  ein  $S(r, g)$  ist und umgekehrt und wir für Funktionenpaare aus  $\mathcal{F}_+$  nach Definition 1.20 ab jetzt  $S(r)$  schreiben dürfen.

Insbesondere benötigt man für dieses  $S(r)$  keine Ausnahmemengen mehr, da Funktionen aus  $\mathcal{F}_+$  definitionsgemäß von der Ordnung Null sind.

Teilen  $f, g \in \mathcal{F}_+$  die  $q \geq 5$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  (Sie dürfen mit derselben Begründung wie im Beweis von Satz 2.7 alle endlich sein.), so gilt

$$\begin{aligned}
(q-2) \cdot T(r, f) &\leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \\
&\leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - g} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \\
&\leq T(r, f - g) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \\
&\leq T(r, f) + T(r, g) + \log \frac{1}{1-r} + S(r)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

nach (1.28). Also haben wir

$$(q-3) \cdot T(r, f) \leq T(r, g) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \tag{2.17}$$

und

$$(q-3) \cdot T(r, g) \leq T(r, f) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \tag{2.18}$$

durch Vertauschen der Rollen von  $f$  und  $g$ .

Um in der Ungleichungskette (2.16) überall das Gleichheitszeichen zu erzeugen, müssen wir also voraussetzen, daß in (2.17) **und** (2.18) das Gleichheitszeichen steht.

Dies führt uns zu folgender Definition.

**Definition 2.10**

Seien  $f, g \in \mathcal{F}_+$  zwei Funktionen, die  $q \geq 5$  Werte teilen, so daß

$$(q-3) \cdot T(r, f) = T(r, g) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \tag{2.19}$$

und

$$(q-3) \cdot T(r, g) = T(r, f) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \tag{2.20}$$

gilt. Dann setzen wir

$$\mathcal{G} := \{f \in \mathcal{F}_+ : \exists g \in \mathcal{F}_+, \text{ so daß (2.19) und (2.20) gelten}\}.$$

Man erhält leicht die folgenden zusätzlichen Eigenschaften von Funktionen aus der Klasse  $\mathcal{G}$ .

**Lemma 2.11**

Eine Funktion  $f \in \mathcal{G}$  ist von regulärer Unzulässigkeit mit  $\alpha(f) = \ell(f) = \frac{1}{q-4}$ . Insbesondere gilt für sie

$$\sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) = 2 \cdot T(r, f) + S(r).$$

**Beweis:**

Dividieren wir (2.20) durch  $q - 3$  und setzen dies in (2.19) ein, so ergibt sich

$$(q - 3) \cdot T(r, f) = \frac{1}{q - 3} \cdot T(r, f) + \left(1 + \frac{1}{q - 3}\right) \log \frac{1}{1 - r} + S(r),$$

also

$$\frac{(q - 3)^2 - 1}{q - 3} \cdot T(r, f) = \frac{q - 2}{q - 3} \log \frac{1}{1 - r} + S(r).$$

Elementares Umformen ergibt

$$\frac{(q - 2)(q - 4)}{q - 3} \cdot T(r, f) = \frac{q - 2}{q - 3} \log \frac{1}{1 - r} + S(r),$$

also

$$T(r, f) = \frac{1}{q - 4} \log \frac{1}{1 - r} + S(r),$$

d.h.

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, f)}{\log \frac{1}{1 - r}} = \frac{1}{q - 4}.$$

Damit gilt

$$\alpha(f) = \ell(f) = \frac{1}{q - 4}.$$

Da in (2.16) das Gleichheitszeichen steht, gilt insbesondere

$$(q - 2) \cdot T(r, f) = \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + \log \frac{1}{1 - r} + S(r).$$

Wegen  $T(r, f) = \frac{1}{q-4} \log \frac{1}{1-r} + S(r)$  bedeutet dies

$$\left( \frac{q - 2}{q - 4} - 1 \right) \log \frac{1}{1 - r} = \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + S(r),$$

also

$$\sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) = \frac{2}{q - 4} \log \frac{1}{1 - r} + S(r) = 2 \cdot T(r, f) + S(r).$$

□

Im nächsten Kapitel wird sich erweisen, daß alle Funktionen, die  $q$  Werte teilen, zu den Funktionen aus der Klasse  $\mathcal{G}$  "subordiniert" sind.

Für Funktionen aus der Klasse  $\mathcal{G}$  gelten folgende Aussagen, die den Aussagen für zulässige Funktionen, die vier Werte teilen, entsprechen.

Zunächst gibt es außer den vorgeschriebenen  $q$  Werten keine weiteren Werte, die von den Funktionen geteilt werden.

**Lemma 2.12**

Sind  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  IM teilen, so gilt

$$\overline{N}_2 \left( r, \frac{1}{f-g} \right) = \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) - \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) = S(r) \quad , \quad (2.21)$$

falls  $\overline{N}_2$  nur diejenigen gemeinsamen Stellen von  $f$  und  $g$  zählt, die von  $a_1, \dots, a_q$  verschieden sind.

**Beweis:**

Da in (2.16) überall das Gleichheitszeichen steht, gilt insbesondere

$$\sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-g} \right) + S(r) \quad ,$$

so daß keine anderen Stellen Nullstellen von  $f-g$  hervorrufen und (2.21) gilt.  $\square$

Weiterhin können höchstens diejenigen Werte, die von den Funktionen geteilt werden, für eine der Funktionen mehrfach sein.

**Lemma 2.13**

Seien  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  IM teilen. Sei  $N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right)$  die Anzahlfunktion, die diejenigen Nullstellen von  $f'$  zählt, wo  $f$  die Werte  $a_1, \dots, a_q$  nicht annimmt, d.h.

$$\begin{aligned} N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) &= \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} \left( \overline{N}_{S \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_{E \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + \overline{N}_{L \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^q \left( \overline{N}_{S \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + \overline{N}_{E \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + \overline{N}_{L \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) \right) . \end{aligned}$$

Dann gilt

$$N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) = S(r)$$

und

$$N_0 \left( r, \frac{1}{g'} \right) = S(r) .$$

**Beweis:**

Aus (1.27) leitet man leicht

$$(q-2) \cdot T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) - N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r)$$

her. Mit der Gleichheit in (2.16) folgt

$$\sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \leq \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) - N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \quad ,$$



also

$$N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) = S(r) .$$

Das Vertauschen der Rollen von  $f$  und  $g$  liefert die analoge Aussage für  $g$ . □

Ferner sind alle Nullstellen der Differenzfunktion einfach.

**Lemma 2.14**

Sind  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  teilen, so gilt

$$N \left( r, \frac{1}{f-g} \right) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-g} \right) + S(r) . \quad (2.22)$$

**Beweis:**

Da in (2.16) das Gleichheitszeichen steht, gilt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-g} \right) = N \left( r, \frac{1}{f-g} \right) + S(r) .$$

□

Die Eigenschaft (2.22) kann man auch wie folgt ausdrücken:

Betrachtet man einen geteilten Wert, so nimmt ihn mindestens eine der beiden Funktionen nur einfach an.

**Lemma 2.15**

Seien  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$   $IM$  teilen. Für ein festes  $k \in \{1, \dots, q\}$  setze

$$\overline{N}_3 \left( r, \frac{1}{f-a_k} \right) = \overline{N}_{E \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a_k} \right) + \overline{N}_{S \geq 2} \left( r, \frac{1}{f-a_k} \right) + \overline{N}_{S \geq 2} \left( r, \frac{1}{g-a_k} \right) .$$

Die Anzahlfunktion  $\overline{N}_3$  zählt also diejenigen Stellen, wo **beide** Funktionen einen der geteilten Werte mehrfach annehmen. Sei  $N_3$  die entsprechende Anzahlfunktion, die diesen geteilten Wert mit der kleineren der beiden Vielfachheiten zählt. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^q N_3 \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) = S(r) . \quad (2.23)$$

**Beweis:**

Sei  $z_{a_k}$  eine  $a_k$ -Stelle der Vielfachheit  $\ell \geq 2$  für  $f$  und der Vielfachheit  $m \geq 2$  für  $g$ . Setze  $n = \min(\ell, m)$ . Dann ist  $z_{a_k}$  eine mindestens  $n$ -fache Nullstelle von  $f-g$ . Da  $z_{a_k}$  in  $N_3$  genau  $n$ -mal gezählt wird, gilt

$$\sum_{j=1}^q \left( N_3 \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) - \overline{N}_3 \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) \right) + \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) \leq N \left( r, \frac{1}{f-g} \right) .$$

Nach (2.22) gilt

$$N \left( r, \frac{1}{f-g} \right) = \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a_j} \right) + S(r) ,$$

woraus

$$\sum_{j=1}^q \left( N_3 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) - \bar{N}_3 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) \right) \leq S(r)$$

also wegen

$$N_3 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) \geq 2 \cdot \bar{N}_3 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right)$$

für die geteilten Werte auch

$$\sum_{j=1}^q N_3 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) = S(r)$$

folgt. □

Jeder nicht geteilte Wert ist von voller Charakteristik, also kein Borelscher Ausnahmewert.

**Lemma 2.16**

Sind  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  teilen, so gelten für jeden Wert  $c \notin \{a_j : j = 1, \dots, q\}$  die Bedingungen

$$\bar{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) + S(r) = T(r, f) \quad \text{und} \quad \bar{N} \left( r, \frac{1}{g - c} \right) + S(r) = T(r, g) .$$

**Beweis:**

Wir betrachten  $q + 1$  Werte, und zwar die  $q$  geteilten und  $c$ . Nach (1.28) für diese  $q + 1$  Werte gilt

$$(q - 1) \cdot T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q \bar{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + \bar{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) + \log \frac{1}{1 - r} + S(r, f) ,$$

wegen der Gleichheit in (2.16) also

$$(q - 1) \cdot T(r, f) \leq \bar{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) + (q - 2) \cdot T(r, f) + S(r, f) .$$

Daraus folgt

$$\bar{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) \geq T(r, f) + S(r, f) ,$$

was nach Definition der Charakteristik und dem ersten Hauptsatz

$$\bar{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) = T(r, f) + S(r, f)$$

impliziert. □

Ein mit gleicher Vielfachheit geteilter Wert muß von beiden Funktionen einfach angenommen werden, was (2.22) und (2.23) entspricht.

**Lemma 2.17**

Sind  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  teilen, und wird von diesen  $q$  Werten der Wert  $a_k$  "CM" geteilt, so gilt

$$N\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) = N\left(r, \frac{1}{g - a_k}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) + S(r). \quad (2.24)$$

**Beweis:**

Wird der Wert  $a_k$  mit der Vielfachheit  $m$  "CM" geteilt, so hat  $f - g$  eine mindestens  $m$ -fache Nullstelle, woraus

$$N_1\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) + \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f - g}\right)$$

folgt, da  $N_1$  nach den Definitionen 1.24 und 2.5 alle "CM" geteilten Werte mit einer um Eins verringerten Vielfachheit zählt. Nach (2.22) ist

$$N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) = \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r),$$

also

$$N_1\left(r, \frac{1}{f - a_k}\right) \leq S(r).$$

Daraus folgt (2.24). □

Auch diverse Schmiegunsfunktionen sind für Funktionen aus der Klasse  $\mathcal{G}$  klein.

**Lemma 2.18**

Sind  $f, g \in \mathcal{G}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  teilen, so gilt

$$m\left(r, \frac{1}{f - g}\right) = m\left(r, \frac{f}{f - g}\right) = m\left(r, \frac{g}{f - g}\right) = m\left(r, \frac{fg}{f - g}\right) = S(r). \quad (2.25)$$

**Beweis:**

Wegen der Gleichheit in (2.16) gilt

$$N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) = T\left(r, \frac{1}{f - g}\right) + S(r),$$

nach Definition der Charakteristik also

$$m\left(r, \frac{1}{f - g}\right) = S(r). \quad (2.26)$$

Sind  $f$  und  $g$  zwei Funktionen, die  $q$  Werte teilen, so sind nach Lemma 2.2 auch  $F = \frac{1}{f}$  und  $G = \frac{1}{g}$  zwei Funktionen, die  $q$  Werte teilen. Es ist

$$\frac{fg}{f - g} = \frac{1}{G - F},$$

so daß

$$m\left(r, \frac{fg}{f-g}\right) = S(r)$$

durch Anwendung von (2.26) auf  $G$  und  $F$  folgt. Nun ist

$$\left(\frac{f}{f-g}\right)^2 = \frac{f}{f-g} + \frac{fg}{(f-g)^2},$$

so daß mit den Rechenregeln für die Schmiegungsfunktion

$$2 \cdot m\left(r, \frac{f}{f-g}\right) \leq m\left(r, \frac{f}{f-g}\right) + m\left(r, \frac{fg}{f-g}\right) + m\left(r, \frac{1}{f-g}\right) + O(1)$$

folgt. Damit ist auch

$$m\left(r, \frac{f}{f-g}\right) = S(r),$$

und das Vertauschen der Rollen von  $f$  und  $g$  liefert analog

$$m\left(r, \frac{g}{f-g}\right) = S(r).$$

□

## 2.5 Die Funktionenklasse $\mathcal{L}$

Für den Beweis des Vier-Werte-Satzes ist es weiterhin wesentlich, daß für in  $\mathbb{D}$  zulässige meromorphe Funktionen immer

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = o(T(r, f)) \quad (2.27)$$

gilt. Dies ist für unzulässige Funktionen natürlich nicht mehr uneingeschränkt der Fall, wie das bereits zitierte Beispiel von Shea und Sons aus [18] zeigt. Erfüllt eine Funktion  $f \in \mathcal{F}_+$  jedoch die Bedingung (2.27), so sind die darauf beruhenden Methoden aus dem Beweis des Vier-Werte-Satzes auch auf diese Klasse unzulässiger Funktionen anwendbar. Zur Vereinfachung der Terminologie bekommt diese Funktionenklasse den folgenden Namen.

### Definition 2.19

Es bezeichne

$$\mathcal{L} := \left\{ f \in \mathcal{F}_+ : m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = o(T(r, f)) \right\}$$

die Klasse der **relativ zulässigen** unzulässigen Funktionen, d.h. derjenigen unzulässigen Funktionen, die die Eigenschaft besitzen, daß die Schmiegungsfunktion ihrer logarithmischen Ableitung von geringerem Wachstum als ihre Charakteristik ist.

Für relativ zulässige Funktionen gelten insbesondere Satz 1.28 und Korollar 1.29. Weiterhin haben sie die folgende Eigenschaft, sofern sie gleichzeitig zur Klasse  $\mathcal{G}$  gehören.

**Lemma 2.20**

Sind  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$  zwei verschiedene Funktionen, die die  $q$  Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  teilen, so gilt

$$m\left(r, \frac{f'}{f-g}\right) = m\left(r, \frac{g'}{f-g}\right) = m\left(r, \frac{f'g'}{f-g}\right) = S(r).$$

**Beweis:**

Wegen  $f \in \mathcal{L}$  und nach (2.25) gilt

$$m\left(r, \frac{f'}{f-g}\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{f}{f-g}\right) = S(r),$$

und das Vertauschen der Rollen von  $f$  und  $g$  liefert analog

$$m\left(r, \frac{g'}{f-g}\right) = S(r),$$

falls  $g \in \mathcal{L}$  ist. Schließlich ist dank der Rechenregeln für die Schmiegunsfunktion

$$m\left(r, \frac{f'g'}{f-g}\right) \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + m\left(r, \frac{fg}{f-g}\right) = S(r)$$

wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  und nach (2.25). □

Ferner gelten für Funktionen aus  $\mathcal{L}$ , die vier Werte teilen, noch folgende Aussagen.

**Lemma 2.21**

Teilen die Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}$  die vier Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$ , so erfüllt die Hilfsfunktion

$$\psi = \frac{f'g'(f-g)^2}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)}$$

die Abschätzung

$$T(r, \psi) = S(r).$$

**Beweis:**

Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung sieht man, daß  $\psi$  ein Produkt von Linearkombinationen logarithmischer Ableitungen ist. Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  haben wir somit

$$m(r, \psi) = S(r).$$

Ist  $z^*$  eine  $k$ -fache Null-, Eins-, Pol- oder  $c$ -Stelle von  $f$  und eine  $m$ -fache Null-, Eins-, Pol- oder  $c$ -Stelle von  $g$ , so gilt

$$\psi(z) = O\left((z - z^*)^{2\min(k,m)-2}\right).$$

Da Null-, Eins-, Pol- oder  $c$ -Stellen mit verschiedener Vielfachheit für  $f$  und  $g$  die einzigen Stellen sind, wo  $\psi$  Polstellen haben könnte, sieht man, daß  $\psi$  eine holomorphe Funktion ist.

Es gilt also  $N(r, \psi) = S(r)$ , woraus  $T(r, \psi) = S(r)$  folgt. □

**Lemma 2.22**

Seien  $f, g \in \mathcal{L}$  zwei Funktionen, die die vier Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  teilen.

Betrachte die Menge derjenigen Punkte, wo  $f$  oder  $g$  einen Wert mehrfach annehmen, den sie nicht teilen, und die Menge derjenigen Punkte, wo  $f$  und  $g$  einen der geteilten Werte **beide** mehrfach annehmen.

Bezeichne mit  $N^*(r)$  die Anzahlfunktion der Punkte in der Vereinigung dieser beiden Mengen, wobei jeder Punkt in der ersten Menge mit der Vielfachheit  $k - 1$  gezählt wird, wenn  $k$  die Vielfachheit des entsprechenden Wertes ist, und jeder Punkt in der zweiten Menge mit der Vielfachheit  $\min(\ell, m) - 1$  gezählt wird, wenn  $\ell$  und  $m$  die Vielfachheiten des entsprechenden Wertes sind.

Dann gilt

$$N^*(r) = S(r) . \quad (2.28)$$

**Beweis:**

Die Punkte, die  $N^*(r)$  zählt, sind Nullstellen der Hilfsfunktion  $\psi$  aus Lemma 2.21 mit der korrekten Vielfachheit. Nach Lemma 2.21 gilt (2.28) wegen

$$N^*(r) \leq N \left( r, \frac{1}{\psi} \right) \leq T(r, \psi) + O(1) = S(r) .$$

□

**Bemerkung:**

Lemma 2.22 ist eine Zusammenfassung von Lemma 2.13 und Lemma 2.15, die allein aus der Gestalt der Hilfsfunktion  $\psi$  aus Lemma 2.21 hergeleitet wird.

**Lemma 2.23**

Teilen die Funktionen  $f, g \in \mathcal{L}$  die vier Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  "CM", so ist die Hilfsfunktion

$$H = \frac{f''}{f'} - \frac{g''}{g'}$$

holomorph und hat Nullstellen in den einfachen Polstellen von  $f$  und  $g$ .

**Beweis:**

Polstellen kann  $H$  nur in denjenigen Nullstellen von  $f'$  und  $g'$  haben, die von der Anzahlfunktion  $N^*(r)$  aus Lemma 2.22 gezählt werden, also fast nie auftreten.

Aus Lemma 1.21 folgt, daß  $H$  in einfachen Polstellen von  $f$  ( und  $g$  ) verschwindet.

Da das Residuum von  $\frac{f''}{f'}$  in einer mehrfachen Polstelle von  $f$  nur von der Vielfachheit der Polstelle abhängt, heben sich die Residuen von  $\frac{f''}{f'}$  und  $\frac{g''}{g'}$  immer weg, da die Polstellen "CM" geteilt werden. In mehrfachen Polstellen von  $f$  ( und  $g$  ) hat  $H$  also keine Polstelle. □

# Kapitel 3

## Werteteilen bei unzulässigen Funktionen

Nachdem wir im vorangegangenen Kapitel alle Voraussetzungen dargestellt haben, die wir für die Untersuchung des Werteteilens bei unzulässigen Funktionen benötigen, leiten wir nun grundsätzliche Aussagen über das Werteteilen her, d.h. Antworten auf die Frage, wie groß  $\alpha(f)$  und  $\alpha(g)$  sein dürfen, wenn man verlangt, daß  $q$  Werte IM geteilt werden.

Anschließend wird untersucht, was geschieht, wenn man verlangt, daß alle Werte "CM" im Sinne von Definition 2.5 geteilt werden.

Wie in der Ebene wird danach versucht, die Voraussetzungen, die man zur Herleitung des Ergebnisses im "CM"-Fall benötigt, so weit wie möglich abzuschwächen, ohne ein anderes Ergebnis zu erhalten.

### 3.1 Unzulässige Funktionen, die $q$ Werte teilen

Geht man wie in Abschnitt 2.4 vor, so erhält man die Ungleichungskette (2.16). Wir haben dort gesehen, daß die gleichzeitige Gültigkeit der Gleichungen (2.19) und (2.20) im unzulässigen Fall der Gültigkeit der Gleichung (2.15) im zulässigen Fall entspricht.

Hat man jedoch nur (2.17) und (2.18), so erhält man mit derselben Beweisidee wie in Satz 2.7 die folgende Aussage, die den Fünf-Werte-Satz, dessen Gültigkeit für zulässige Funktionen bekannt ist, auf unzulässige Funktionen  $f$  und  $g$  von regulärer Unzulässigkeit mit  $\alpha(f) > 1$  und  $\alpha(g) > 1$  ausdehnt.

#### Satz 3.1

Seien  $f, g \in \mathcal{F}_+$  zwei Funktionen von regulärer Unzulässigkeit. Sei  $q \in \mathbb{N}$  mit  $q \geq 5$ .

Teilen  $f$  und  $g$  dann  $q$  Werte, so gilt

$$\alpha(f) \leq \frac{1}{q-4} \quad \text{und} \quad \alpha(g) \leq \frac{1}{q-4}.$$

#### Beweis:

Nach der Definition von  $\alpha(f)$  (Definition 1.26) gilt:

Für alle  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $r_0(\varepsilon)$ , so daß alle  $r \in (0, 1)$  mit  $r \geq r_0(\varepsilon)$  die Abschätzung

$$T(r, f) \leq (\alpha(f) + \varepsilon) \cdot \log \frac{1}{1-r}$$

erfüllen. Damit folgt

$$(q-3) \cdot T(r, f) \leq T(r, g) + \log \frac{1}{1-r} + S(r) \leq (\alpha(g) + 1 + \varepsilon) \cdot \log \frac{1}{1-r} + S(r)$$

aus (2.17). Division durch  $\log \frac{1}{1-r}$  liefert mit der regulären Unzulässigkeit von  $f$  die Ungleichung

$$(q-3) \cdot \alpha(f) \leq \alpha(g) + 1 + \varepsilon . \quad (3.1)$$

Analog liefert (2.18) mit der regulären Unzulässigkeit von  $g$  die Ungleichung

$$(q-3) \cdot \alpha(g) \leq \alpha(f) + 1 + \varepsilon ,$$

also

$$\alpha(g) \leq \frac{\alpha(f) + 1 + \varepsilon}{q-3} .$$

Setzen wir dies in (3.1) ein, so gilt

$$(q-3) \cdot \alpha(f) \leq \frac{\alpha(f) + 1 + \varepsilon}{q-3} + 1 + \varepsilon ,$$

also

$$(q-3)^2 \cdot \alpha(f) \leq \alpha(f) + 1 + \varepsilon + (q-3)(1 + \varepsilon)$$

und damit

$$[(q-3)^2 - 1] \cdot \alpha(f) \leq (q-2)(1 + \varepsilon) .$$

Durch elementares Umformen folgt daraus

$$\alpha(f) \leq \frac{(q-2)(1 + \varepsilon)}{q^2 - 6q + 9 - 1} = \frac{(q-2)(1 + \varepsilon)}{(q-2)(q-4)} = \frac{1 + \varepsilon}{q-4} .$$

Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt daraus die Behauptung für  $\alpha(f)$ . Fängt man analog mit (2.18) an, so erhält man

$$\alpha(g) \leq \frac{1}{q-4} .$$

□

Satz 3.1 kann man auch so deuten, daß die Vorgabe an zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{F}_+$ , vier Werte zu teilen, der Größe von  $\alpha(f)$  und  $\alpha(g)$  keine Beschränkungen auferlegt, da aus Satz 3.1 durch formales Einsetzen von  $q = 4$  die Bedingungen  $\alpha(f) \leq \infty$  und  $\alpha(g) \leq \infty$  folgen würden.

Für  $q = 5$  erhalten wir  $\alpha(f) \leq 1$  und  $\alpha(g) \leq 1$ , und das folgende Beispiel zeigt, daß diese Abschätzungen scharf sind. Durch das so erhaltene "größte Gegenbeispiel" ist die Satz 3.1 vorangeschickte Bemerkung bestätigt, daß der Fünf-Werte-Satz für alle Funktionen  $f$  und  $g$  mit  $\alpha(f) > 1$  und  $\alpha(g) > 1$  gilt, sobald sie von regulärer Unzulässigkeit sind.

### Beispiel 3.2

Das gewünschte Beispiel ist schon in [15] zu finden, allerdings in einer Form, die die in b) anzugebende Verallgemeinerungsmöglichkeit verschleiert. Deswegen geben wir das Beispiel aus [15] in a) in einer Form wieder, die diese Verallgemeinerung sofort nahelegt.



- a) Betrachtet man eine Funktion  $f$ , die die dritten Einheitswurzeln und sonst keine weiteren Werte aus  $\widehat{\mathbb{C}}$  ausläßt (Diese geht durch eine geeignete Möbius-Transformation aus der elliptischen Modulfunktion hervor, die die Werte  $0, 1$  und  $\infty$  ausläßt.), und setzt man  $g = \eta \cdot f$  mit einer nichttrivialen dritten Einheitswurzel  $\eta$ , so teilen  $f$  und  $g$  die Werte  $0$  und  $\infty$  und haben jeweils die dritten Einheitswurzeln als Picardsche Ausnahmewerte, teilen insgesamt also fünf Werte.

Im Beispiel in [15] ist  $F$  die elliptische Modulfunktion und  $G = M \circ F$  mit einer Möbius-Transformation  $M$ , die  $0, 1$  und  $\infty$  permutiert. Diese beiden Funktionen teilen die drei ausgelassenen Werte und die beiden Fixpunkte der Möbius-Transformation  $M$ . Da  $M$  zu einer Drehung um eine nichttriviale dritte Einheitswurzel konjugiert ist, ist unser Beispiel zu demjenigen aus [15] äquivalent.

Da nach [15] die elliptische Modulfunktion  $F$  der Bedingung  $\alpha(F) = 1$  genügt und unsere Funktionen  $f$  und  $g$  durch Möbius-Transformationen aus ihr hervorgehen, gilt  $\alpha(f) = 1$  und  $\alpha(g) = 1$  nach Satz 1.7.

Damit ist das angekündigte "größte Gegenbeispiel" zu Satz 2.7 gefunden.

- b) Sei nun  $f$  eine Funktion, die für  $q \geq 6$  die  $(q - 2)$ -ten Einheitswurzeln und sonst keine weiteren Werte aus  $\widehat{\mathbb{C}}$  ausläßt (Dies ist eine geeignete sogenannte linear polymorphe Funktion.). Setzt man  $g = \eta \cdot f$  mit einer nichttrivialen  $(q - 2)$ -ten Einheitswurzel  $\eta$ , so teilen  $f$  und  $g$  die Werte  $0$  und  $\infty$  und haben jeweils die  $(q - 2)$ -ten Einheitswurzeln als Picardsche Ausnahmewerte.

Da beide Funktionen genau  $q - 2$  Picardsche Ausnahmewerte haben, gilt  $\alpha(f) = \frac{1}{q-4}$  und  $\alpha(g) = \frac{1}{q-4}$  nach Satz 1.34.

Für die Funktionenklassen aus den Abschnitten 2.4 und 2.5, denen die Funktionen aus diesem Beispiel in Abhängigkeit vom jeweiligen  $q$  tatsächlich angehören, wird im nächsten Abschnitt sogar gezeigt, daß dieses Beispiel in Analogie zum Beispiel  $e^z$  und  $e^{-z}$  in der Ebene (Dieses entspricht dem Fall, daß die zweiten Einheitswurzeln ausgelassen werden.) charakteristisch für Funktionen ist, die im Einheitskreis  $q \geq 5$  Werte "CM" teilen.

In Beispiel 3.2 werden nur Funktionenpaare mit  $\alpha(f) = \alpha(g)$  konstruiert. Da Satz 3.1 jedoch obere Abschätzungen liefert, kann es auch Beispiele mit  $\alpha(f) \neq \alpha(g)$  geben. Diese lassen sich in der Tat ähnlich wie in Beispiel 3.2 konstruieren.

### Beispiel 3.3

Seien  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p \neq q$ . Dabei seien  $p$  und  $q$  **nicht** teilerfremd.

Sei  $f$  eine Funktion, die die  $p$ -ten Einheitswurzeln und sonst keine weiteren Werte aus  $\widehat{\mathbb{C}}$  ausläßt. Für diese gilt

$$\alpha(f) = \frac{1}{p-2}$$

nach Satz 1.34.

Sei  $g$  eine Funktion, die die  $q$ -ten Einheitswurzeln und sonst keine weiteren Werte aus  $\widehat{\mathbb{C}}$  ausläßt. Für diese gilt

$$\alpha(g) = \frac{1}{q-2} \neq \alpha(f)$$

nach Satz 1.34.

Die Funktionen  $f$  und  $g$  teilen offensichtlich die ggT( $p, q$ )-ten Einheitswurzeln. Da sie sonst

jeweils keinen weiteren Wert auslassen, gilt nach dem zweiten Hauptsatz

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + S(r) = \frac{1}{p-2} \log \frac{1}{1-r} + S(r),$$

falls  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  keine  $p$ -te Einheitswurzel ist, und

$$N\left(r, \frac{1}{g-a}\right) = T(r, g) + S(r) = \frac{1}{q-2} \log \frac{1}{1-r} + S(r),$$

falls  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  keine  $q$ -te Einheitswurzel ist. Wegen

$$\frac{1}{p-2} \neq \frac{1}{q-2}$$

folgt daher

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \neq N\left(r, \frac{1}{g-a}\right)$$

für alle  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ , die keine  $\text{ggT}(p, q)$ -ten Einheitswurzeln sind.

Also teilen  $f$  und  $g$  **nur** die  $\text{ggT}(p, q)$ -ten Einheitswurzeln.

Nach Satz 3.1 gilt

$$\alpha(f) \leq \frac{1}{\text{ggT}(p, q) - 4} \quad \text{und} \quad \alpha(g) \leq \frac{1}{\text{ggT}(p, q) - 4}.$$

Da  $p$  und  $q$  verschieden und nicht teilerfremd sind, gilt

$$\text{ggT}(p, q) < \max(p, q).$$

O.B.d.A. sei  $p < q$ , also  $\max(p, q) = q$  und  $\text{ggT}(p, q) - 2 < \text{ggT}(p, q) < q$ . Nach Satz 1.34 gilt

$$\alpha(g) = \frac{1}{q-2} < \frac{1}{\text{ggT}(p, q) - 4},$$

so daß hier im Gegensatz zu Beispiel 3.2 in der Abschätzung aus Satz 3.1 **nicht** das Gleichheitszeichen steht.

Nach Beispiel 3.3 kann also auch  $\alpha(f) \neq \alpha(g)$  gelten, wenn  $f$  und  $g$  zwei Funktionen sind, die  $q$  Werte teilen. Alle möglichen nach Satz 3.1 erlaubten Kombinationen von  $\alpha(f)$  und  $\alpha(g)$  dürfen jedoch nicht auftreten, denn  $f$  und  $g$  sind noch zusätzlich der folgenden Bedingung unterworfen.

**Satz 3.4**

Seien  $f, g \in \mathcal{F}_+$  Funktionen von regulärer Unzulässigkeit. Sei  $q \in \mathbb{N}$  mit  $q \geq 4$ . Teilen  $f$  und  $g$  dann  $q$  Werte, so gilt

$$q - 3 - \frac{1}{\alpha(f)} \leq \frac{1}{q - 3 - \frac{1}{\alpha(g)}}, \tag{3.2}$$

sofern die rechte Seite dieser Abschätzung positiv ist.

Sollte der Nenner der rechten Seite verschwinden, d.h.  $\alpha(g) = \frac{1}{q-3}$  sein, so wird die rechte Seite  $= \infty$  gesetzt.

**Beweis:**

Teilen wir (2.17) durch  $T(r, f)$ , so erhalten wir

$$q - 3 \leq \frac{T(r, g)}{T(r, f)} + \frac{\log \frac{1}{1-r}}{T(r, f)} + \frac{S(r)}{T(r, f)},$$

also insbesondere

$$q - 3 \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} + \frac{1}{\ell(f)},$$

was wir als

$$q - 3 - \frac{1}{\ell(f)} \leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} \quad (3.3)$$

festhalten. Nun lösen wir (2.18) nach  $T(r, f)$  auf und erhalten

$$T(r, f) \geq (q - 3) \cdot T(r, g) - \log \frac{1}{1-r} + S(r). \quad (3.4)$$

Falls die rechte Seite von (3.4) positiv ist, ergibt sich daraus durch Stürzen

$$\frac{1}{T(r, f)} \leq \frac{1}{(q - 3) \cdot T(r, g) - \log \frac{1}{1-r} + S(r)}.$$

Durch Multiplikation mit  $T(r, g)$  erhält man

$$\frac{T(r, g)}{T(r, f)} \leq \frac{1}{q - 3 - \frac{\log \frac{1}{1-r}}{T(r, g)} + \frac{S(r)}{T(r, g)}},$$

also insbesondere

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} \leq \frac{1}{q - 3 - \frac{1}{\ell(g)}}, \quad (3.5)$$

wobei die rechte Seite dieser Abschätzung aufgrund des Vorzeichenverhaltens beim Stürzen von (3.4) positiv ist.

Die reguläre Unzulässigkeit beider Funktionen impliziert

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} \leq \frac{\alpha(g)}{\ell(f)} = \frac{\ell(g)}{\alpha(f)} \leq \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)}$$

und damit

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} = \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} = \overline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} = \frac{\alpha(g)}{\alpha(f)}.$$

Aus (3.3) und (3.5) erhalten wir also

$$q - 3 - \frac{1}{\alpha(f)} \leq \underline{\lim}_{r \rightarrow 1^-} \frac{T(r, g)}{T(r, f)} \leq \frac{1}{q - 3 - \frac{1}{\alpha(g)}},$$

wobei die rechte Seite dieser Abschätzung positiv sein muß.

Verswindet die rechte Seite in (3.4), so muß in (3.5) und damit auch in (3.2) die rechte Seite  $= \infty$  gesetzt werden.  $\square$

Setzt man in der Abschätzung (3.2) formal  $\alpha(f) = \alpha(g) = \infty$ , so erhält man

$$q - 3 \leq \frac{1}{q - 3} .$$

Dies ist die bekannte Abschätzung (2.12), die man beim Beweis des Fünf-Werte-Satzes für zulässige Funktionen erhält. Man dürfte also auch die zulässigen Funktionen mit in die Voraussetzung von Satz 3.4 aufnehmen, worauf wir jedoch verzichtet haben.

## 3.2 Unzulässige Funktionen, die $q$ Werte "CM" teilen

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, daß die Forderung an zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{F}_+$  von regulärer Unzulässigkeit,  $q$  Werte zu teilen, notwendige Bedingungen für die Größe von  $\alpha(f)$  und  $\alpha(g)$  hervorruft, wobei  $\alpha(f)$  nicht notwendig gleich  $\alpha(g)$  zu sein braucht. Stellt man jedoch die Bedingung  $f, g \in \mathcal{G}$ , so erhält man nach Bemerkung 2.11 automatisch  $\alpha(f) = \alpha(g) = \frac{1}{q-4}$ , und mit der Zusatzvoraussetzung  $f, g \in \mathcal{L}$  erhält man zwei (genauer gesagt  $q - 2$ ) Funktionen aus  $\mathcal{F}_+$ , die  $q$  Werte "CM" teilen, ohne identisch zu sein. Es sind die Funktionenpaare aus Beispiel 3.2, die man auf diese Weise wiederfindet.

Die Beweisanordnung ist dem Beweis des Vier-Werte-Satzes für Funktionen in  $\mathbb{C}$  aus [14] nachempfunden.

### Satz 3.5

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$  mit  $f \not\equiv g$ , die  $q \geq 5$  (paarweise verschiedene) Werte  $a_1, \dots, a_q \in \widehat{\mathbb{C}}$  "CM" teilen.

Dann gibt es eine Möbius-Transformation  $M$ , so daß

$$g = M \circ f$$

gilt. Diese Möbius-Transformation erfüllt

$$M(a_1) = a_1, \quad M(a_2) = a_2, \quad M(a_3) = a_4, \quad M(a_4) = a_5, \quad \dots, \quad M(a_{q-1}) = a_q, \quad M(a_q) = a_3 .$$

Hieraus folgt dann, daß  $a_3, \dots, a_q$  Picardsche Ausnahmewerte von  $f$  und  $g$  sind.

### Beweis:

Da alle  $q$  Werte "CM" geteilt werden, werden sie nach Lemma 2.17 von beiden Funktionen fast überall einfach angenommen. Ferner folgt aus Lemma 2.13, daß alle Werte  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  fast nur einfach angenommen werden.

Wähle eine Möbius-Transformation  $M_1$  so, daß

$$M_1(a_1) = 0, \quad M_1(a_2) = \infty, \quad M_1(a_3) = 1$$

gilt, und setze  $F = M_1 \circ f$  und  $G = M_1 \circ g$ .

Nach Lemma 2.2 teilen  $F$  und  $G$  die Werte  $0, \infty$  und  $1$ , sowie  $q - 3$  andere Werte.

Da zwei Funktionen  $F$  und  $G$ , die  $q$  Werte teilen, nach Satz 3.1 den Bedingungen

$$\alpha(F) \leq \frac{1}{q-4} \quad \text{und} \quad \alpha(G) \leq \frac{1}{q-4}$$

genügen müssen, andererseits aber nach Satz 1.34 Funktionen  $f$  mit  $\alpha(f) = \frac{1}{p}$  höchstens  $p + 2$  Picardsche Ausnahmewerte haben können, können  $F$  und  $G$  jeweils höchstens  $q - 2$  Picardsche Ausnahmewerte besitzen, so daß wir

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{F} \right) \neq o \left( \log \frac{1}{1-r} \right) \quad \text{und} \quad \overline{N}(r, F) \neq o \left( \log \frac{1}{1-r} \right) \quad (3.6)$$

annehmen dürfen. Nach Satz 1.7 gilt ferner

$$T(r, F) = T(r, f) + O(1) \text{ und } T(r, G) = T(r, g) + O(1),$$

so daß  $S(r, F) = S(r, f) = S(r)$  und  $S(r, G) = S(r, g) = S(r)$  gilt.

Betrachte die Hilfsfunktion

$$H(z) = \frac{F''(z)}{F'(z)} - \frac{G''(z)}{G'(z)}.$$

Zunächst nehmen wir  $H \not\equiv 0$  an. Nach der Voraussetzung  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, H) = m\left(r, \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}\right) \leq m\left(r, \frac{F''}{F'}\right) + m\left(r, \frac{G''}{G'}\right) + O(1) = S(r).$$

Da  $f$  und  $g$  ( und damit auch  $F$  und  $G$  ) alle Werte fast nur einfach annehmen, könnte  $H$  höchstens in Polstellen von  $F$  und  $G$  Polstellen besitzen, hat in einfachen Polstellen der Funktionen  $F$  und  $G$  jedoch immer eine Nullstelle, da sich nach Lemma 2.23 die Residuen wegheben. Also gilt  $N(r, H) = S(r)$ , woraus  $T(r, H) = S(r)$  folgt. Damit haben wir aber

$$\overline{N}(r, F) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{H}\right) + S(r) \leq T(r, H) + S(r) = S(r)$$

im Widerspruch dazu, daß die Polstellen von  $F$  keine Picardschen Ausnahmewerte sind.

Also gilt  $H \equiv 0$ .

$H \equiv 0$  bedeutet  $\frac{F''}{F'} = \frac{G''}{G'}$ , woraus durch Integration

$$F' = A \cdot G'$$

mit konstantem  $A \in \mathbb{C}^*$  folgt. Nochmaliges Integrieren liefert

$$F(z) = A \cdot G(z) + B$$

mit Konstanten  $A, B \in \mathbb{C}^*$ . Da es nach (3.6) Nullstellen  $z^*$  von  $F$  gibt, gilt

$$F(z^*) = 0 \implies G(z^*) = 0 \implies 0 = A \cdot 0 + B \implies B = 0.$$

Wir haben also

$$F(z) = A \cdot G(z). \tag{3.7}$$

Die Konstante  $A$  darf nicht  $= 1$  sein, weil sonst  $F \equiv G \iff f \equiv g$  gelten würde, was wir als Voraussetzung ausgeschlossen hatten.

Damit sind die geteilten Werte  $1, M_1(a_4), \dots, M_1(a_q)$  allesamt Picardsche Ausnahmewerte beider Funktionen.

Eine  $A$ -Stelle von  $F$  ist nach (3.7) eine 1-Stelle von  $G$ , womit  $A$  einer der Picardschen Ausnahmewerte von  $F$  sein muß.

Eine  $\frac{1}{A}$ -Stelle von  $G$  ist nach (3.7) eine 1-Stelle von  $F$ , womit  $\frac{1}{A}$  einer der Picardschen Ausnahmewerte von  $G$  sein muß.

Ist nun o.B.d.A.  $A = c_4 = M_1(a_4)$ , so folgt durch Einsetzen der  $c_4$ -Stellen von  $F$  in (3.7) die Bedingung

$$c_5 = c_4^2$$

und durch Einsetzen der  $c_5$ -Stellen,  $c_6$ -Stellen usw. o.B.d.A. die Bedingungen

$$\begin{aligned} c_6 &= c_4^3 \\ c_7 &= c_4^4 \\ &\vdots \\ c_q &= c_4^{q-3}, \end{aligned}$$

woraus man insbesondere  $c_4^{q-2} = 1$  erhält. Beginnt man mit

$$G = \frac{1}{c_4} F$$

anstelle von (3.7), so ergeben sich durch Einsetzen der  $c_4$ -Stellen von  $F$  die Picardschen Ausnahmewerte

$$\frac{1}{c_4^2}, \dots, \frac{1}{c_4^{q-3}}$$

von  $G$ , woraus man  $c_4^{-(q-2)} = 1$  erhält.

Zusammen hat man  $|c_4|^{q-2} = 1$ , also  $c_4 = \eta$  mit einer nichttrivialen (sonst wäre  $f \equiv g$ )  $(q-2)$ -ten Einheitswurzel.

Wir haben also  $F = \eta \cdot G$  und damit  $M_1 \circ f = \eta \cdot (M_1 \circ g)$ .

Wendet man darauf die Möbius-Transformation  $M_1^{-1}$  an, so erhält man

$$f = M \circ g$$

mit  $M = M_1^{-1} \circ (\eta \cdot M_1)$ . Insbesondere sind  $a_1$  und  $a_2$  Fixpunkte von  $M$ , da 0 und  $\infty$  Fixpunkte der Möbius-Transformation  $M_2(z) = \eta \cdot z$  sind. Die restlichen geteilten Werte sind die Picardschen Ausnahmewerte, die permutiert werden.  $\square$

### 3.3 Einer der $q$ Werte wird nur IM geteilt

In der Ebene gibt es Beispiele für Funktionen, die vier Werte IM teilen, jedoch keinen davon CM. Das erste und einfachste davon ist aus [5] und lautet

#### Beispiel 3.6

Die Funktionen

$$f(z) = \frac{e^z + 1}{(e^z - 1)^2} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{(e^z + 1)^2}{8 \cdot (e^z - 1)} \quad (3.8)$$

teilen die Werte  $0, 1, -\frac{1}{8}$  und  $\infty$  in jedem in Frage kommenden Punkt DM; genauer gesagt nimmt  $f$  die Werte 0 und 1 einfach an, wo  $g$  sie doppelt annimmt, während  $g$  die Werte  $-\frac{1}{8}$  und  $\infty$  einfach annimmt, wo  $f$  sie doppelt annimmt.

Offensichtlich gilt für die Funktionen aus (3.8) nicht der Vier-Werte-Satz, denn  $f$  ist keine Möbius-Transformation von  $g$ .

Ein solches Beispiel zeigt, daß der Vier-Werte-Satz unter der allgemeinsten Voraussetzung (vier Werte werden IM geteilt) nicht mehr gilt. Man kann sich jedoch die Frage stellen, ob er noch gilt, wenn man an so wenige Werte wie möglich die Bedingung stellt, daß sie "CM" geteilt werden.

In der Ebene konnte in dieser Hinsicht zunächst gezeigt werden, daß es genügt, lediglich an drei Werte die Bedingung zu stellen, daß sie "CM" geteilt werden, um die Folgerung des Vier-Werte-Satzes zu erhalten. Später wurde dieses Resultat noch verbessert, indem man nur an zwei Werte diese Bedingung stellt, bzw. nur an einen Wert, während für einen zweiten Wert etwas gelten muß, was mit dem Teilungsindex  $\tau$  aus Definition 2.6 formuliert wird.

Auch für unzulässige Funktionen kann man untersuchen, ob Satz 3.5 noch gilt, wenn so wenige Werte wie möglich "CM" geteilt werden. Der Aussage, daß zwei Funktionen in der Ebene, die drei Werte "CM" und einen Wert IM teilen, alle vier Werte CM teilen müssen (und die ebenfalls aus [5] stammt), entspricht der folgende Satz.

Wir folgen hier jedoch einer Beweisanordnung, die in [9] zu finden ist und der Theorie des Werteteilens besser angepaßt ist als diejenige in [5].

**Satz 3.7**

*Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.*

*Teilen sie von diesen Werten  $q - 1$  Werte "CM" und einen Wert IM, so teilen sie alle  $q$  Werte CM (und die Folgerung aus Satz 3.5 gilt).*

**Beweis:**

Sei o.B.d.A.  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  der IM geteilte Wert, während  $0, 1$  und  $\infty$  drei der  $q - 1$  "CM" geteilten Werte sind.

Wir definieren eine Hilfsfunktion  $F$  durch

$$F = \frac{f'(f - c)}{f(f - 1)} - \frac{g'(g - c)}{g(g - 1)} .$$

Ist  $F \equiv 0$ , so muß auch der Wert  $c$  CM geteilt werden, und wir sind fertig.

Ist  $F \not\equiv 0$ , so erhält man

$$F = \frac{f'}{f - 1} - c \cdot \frac{f'}{f(f - 1)} - \frac{g'}{g - 1} + c \cdot \frac{g'}{g(g - 1)} ,$$

indem man eine Partialbruchzerlegung von  $F$  vornimmt.

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  folgt  $m(r, F) = S(r)$ .

Die Funktion  $F$  ist holomorph, da die Werte  $0, 1$  und  $\infty$  "CM" geteilt werden. Also gilt

$$T(r, F) = S(r) .$$

Damit ergibt sich

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f - c} \right) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{g - c} \right) \leq N \left( r, \frac{1}{F} \right) \leq T(r, F) + O(1) = S(r) . \quad (3.9)$$

Es gelte weiter o.B.d.A.  $\overline{N} \left( r, \frac{1}{f - 1} \right) \neq S(r)$ , da mindestens einer der  $q - 1$  "CM" geteilten Werte nach Satz 1.34 kein Picardscher Ausnahmewert sein kann. Setzt man

$$G = \frac{f'(f - 1)}{f(f - c)} - \frac{g'(g - 1)}{g(g - c)} , \quad (3.10)$$

so können wir  $G \not\equiv 0$  annehmen, da im Fall  $G \equiv 0$  wieder alle  $c$ -Stellen CM geteilt werden würden. Die Partialbruchzerlegung von  $G$  lautet

$$G = \frac{f'}{f - c} - \frac{f'}{f(f - c)} - \frac{g'}{g - c} + \frac{g'}{g(g - c)} ,$$

so daß  $m(r, G) = S(r)$  gilt, und zwar wiederum wegen  $f, g \in \mathcal{L}$ .

Da der Wert  $c$  nicht notwendig "CM" geteilt wird, kann  $G$  dort Polstellen haben, wo  $f$  und  $g$  den Wert  $c$  mit verschiedenen Vielfachheiten teilen. Damit gilt  $N(r, G) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-c}\right)$  und daher  $T(r, G) = S(r)$  wegen (3.9). Da  $G$  nach (3.10) in den Einsstellen von  $f$  und  $g$ , die es nach der Voraussetzung  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \neq S(r)$  auch tatsächlich gibt, Nullstellen hat, folgt aber

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{G}\right) \leq T(r, G) + O(1) = S(r),$$

was einen Widerspruch zu genau dieser Voraussetzung  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-1}\right) \neq S(r)$  darstellt.

Da der Fall  $F \neq 0$  und  $G \neq 0$  zwingend zu einem Widerspruch führt, muß  $F$  oder  $G$  identisch verschwinden, was bedeutet, daß auch der Wert  $c$  CM geteilt werden muß.  $\square$

**Bemerkung:**

Da in Satz 3.5 hergeleitet wird, daß  $f$  und  $g$  durch eine Möbius-Transformation auseinander hervorgehen müssen und dies im Falle  $f \equiv g$  trivialerweise gilt, wird die Bedingung  $f \not\equiv g$  aus den Voraussetzungen von Satz 3.5 in den folgenden Kapiteln nicht mehr explizit aufgeführt.

Ferner wird in den folgenden Kapiteln nicht mehr jedes Mal wie in Satz 3.7 betont, daß die Herleitung des CM-Teilens aller  $q$  Werte die Folgerungen von Satz 3.5 nach sich zieht.



# Kapitel 4

## Funktionen, die nur zwei Werte "CM" teilen

Ein noch immer offenes Problem in der Theorie der in  $\mathbb{C}$  meromorphen Funktionen, die vier Werte teilen, ist dasjenige, die Lücke zwischen Beispiel 3.6 und Satz 2.8 so weit wie möglich zu schließen. Eine erste Verbesserung des Analogons zu Satz 3.7 ist ein Satz, in dem die Bedingung  $3 \times \text{CM}$  und  $1 \times \text{IM}$  durch  $2 \times \text{CM}$  und  $2 \times \text{IM}$  ersetzt wird. Im Beweis dieses Satzes in [6] wird ein Widerspruch zu der Annahme hergeleitet, daß zwei in  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktionen, die vier Werte IM teilen, zwei Werte davon "CM" und einen davon nicht "CM" teilen. Damit ist dieselbe Beweisidee auf unzulässige meromorphe Funktionen in  $\mathbb{D}$  übertragbar, die von  $q$  geteilten Werten nur zwei "CM" teilen.

### Satz 4.1

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie von diesen  $q$  Werten zwei "CM" und  $(q - 2)$  IM, so teilen sie alle  $q$  Werte CM.

Wir sammeln zunächst einige Hilfsaussagen, die wir für den Beweis dieses Satzes benötigen.

### 4.1 Allgemeine Hilfsaussagen

#### Lemma 4.2

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen. Teilen sie davon die Werte 0 und  $\infty$  "CM" und gehören  $a, b \in \mathbb{C}^*$  zu den restlichen  $(q - 2)$  IM geteilten Werten, so erfüllt die Hilfsfunktion

$$\psi = \frac{f'(f - a)}{f(f - b)} - \frac{g'(g - a)}{g(g - b)}$$

die Abschätzung

$$T(r, \psi) \leq \bar{N}_1 \left( r, \frac{1}{f - b} \right) + \bar{N}_1 \left( r, \frac{1}{g - b} \right) + S(r).$$

#### Beweis:

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \psi) = S(r).$$

Da  $f$  und  $g$  die Werte 0 und  $\infty$  "CM" teilen, hat  $\psi$  in den Null- und Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen. Ferner hat  $\psi$  in den  $b$ -Stellen, die für  $f$  und  $g$  einfach sind, keine Polstellen.

Also kann  $\psi$  nur in den mehrfachen  $b$ -Stellen von  $f$  und  $g$  Polstellen haben, und es gilt

$$N(r, \psi) \leq \overline{N}_1 \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + \overline{N}_1 \left( r, \frac{1}{g-b} \right) .$$

Zusammen folgt

$$T(r, \psi) \leq \overline{N}_1 \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + \overline{N}_1 \left( r, \frac{1}{g-b} \right) + S(r) .$$

□

### Lemma 4.3

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

- a) Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" und gehören  $a, b \in \mathbb{C}^*$  zu den restlichen  $(q-2)$  IM geteilten Werten, so erfüllt die Hilfsfunktion

$$\phi_1 = \frac{f''}{f'} - \left( \frac{f'}{f-a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{f'}{f-b} + 2 \cdot \frac{f'}{f} \right) - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( \frac{g'}{g-a} - \frac{b}{a} \cdot \frac{g'}{g-b} + 2 \cdot \frac{g'}{g} \right) \right\}$$

die Abschätzung

$$T(r, \phi_1) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + S(r) ,$$

wenn  $b \neq \pm a$  gilt.

- b) Teilen  $f$  und  $g$  die Werte  $0, \infty$  "CM" und gilt  $b = -a$  im Gegensatz zu a), so wird die Hilfsfunktion  $\phi_1$  aus a) zu

$$\gamma_1 = \frac{f''}{f'} - \left( \frac{f'}{f-a} + \frac{f'}{f+a} + 2 \cdot \frac{f'}{f} \right) - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( \frac{g'}{g-a} + \frac{g'}{g+a} + 2 \cdot \frac{g'}{g} \right) \right\} ,$$

und es gilt

$$T(r, \gamma_1) = S(r) .$$

- c) Für  $\gamma_1 \neq 0$  gilt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r) .$$

- d) Setzt man  $F = \frac{1}{f}$ ,  $G = \frac{1}{g}$ ,  $A = \frac{1}{a}$  und

$$\gamma_2 = \frac{F''}{F'} - \left( \frac{F'}{F-A} + \frac{F'}{F+A} + 2 \cdot \frac{F'}{F} \right) - \left\{ \frac{G''}{G'} - \left( \frac{G'}{G-A} + \frac{G'}{G+A} + 2 \cdot \frac{G'}{G} \right) \right\} ,$$

so gilt

$$\overline{N}(r, f) = S(r)$$

für  $\gamma_2 \neq 0$ .

**Beweis:**

Alle Eigenschaften werden daraus hergeleitet, daß  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$  gilt.

a) Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \phi_1) = S(r) .$$

Ferner hat  $\phi_1$  in  $a$ -, Null- und Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen. Aus Lemma 2.13 folgt deswegen

$$N(r, \phi_1) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) + N_0 \left( r, \frac{1}{g'} \right) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + S(r) ,$$

womit wir die Abschätzung

$$T(r, \phi_1) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-b} \right) + S(r)$$

erhalten.

b) Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \gamma_1) = S(r) .$$

Da  $\gamma_1$  die logarithmische Ableitung von

$$H = \frac{f'(g-a)(g+a)g^2}{g'(f-a)(f+a)f^2}$$

ist, gilt

$$N(r, \gamma_1) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{H} \right) + \overline{N}(r, H)$$

nach Lemma 1.23. Da  $f$  und  $g$  die Werte  $0, \infty$  "CM" und die Werte  $a, -a$  IM teilen, folgt aus der Definition von  $H$ , daß  $H$  nur in denjenigen Nullstellen von  $f'$  Nullstellen haben kann, wo  $f$  keinen der geteilten Werte annimmt. Nach Lemma 2.13 gilt deswegen

$$N \left( r, \frac{1}{H} \right) \leq N_0 \left( r, \frac{1}{f'} \right) = S(r) .$$

Ferner kann die Hilfsfunktion  $H$  nur dort Polstellen haben, wo  $g'$  Nullstellen hat, aber  $g$  die geteilten Werte nicht annimmt. Aus Lemma 2.13 folgt damit

$$N(r, H) \leq N_0 \left( r, \frac{1}{g'} \right) = S(r) .$$

Zusammen haben wir also

$$N(r, \gamma_1) = S(r) ,$$

woraus

$$T(r, \gamma_1) = S(r)$$

folgt.

c) Sei  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$ . Da  $z_0$  weder eine Null- noch eine Polstelle der Hilfsfunktion  $H$  aus b) ist, hat  $\gamma_1$  als logarithmische Ableitung von  $H$  in  $z_0$  keine Polstelle. Es gilt sogar

$$\gamma_1(z_0) = 0$$

nach Lemma 1.21.

Wir nehmen nun  $\gamma_1 \not\equiv 0$  an. Da  $\gamma_1$  in einfachen Nullstellen von  $f$  und  $g$  verschwindet, haben wir dann

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{\gamma_1}\right) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right).$$

Die Definition der Charakteristik, der erste Hauptsatz und b) liefern

$$N\left(r, \frac{1}{\gamma_1}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{\gamma_1}\right) = T(r, \gamma_1) + O(1) = S(r).$$

Da  $f$  und  $g$  den Wert 0 "CM" teilen, gilt

$$N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$$

nach Lemma 2.17. Zusammen folgt also

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r).$$

d) Die Funktionen  $F$  und  $G$  genügen den Voraussetzungen von b), und durch Vergleich der Definitionen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  folgt

$$\bar{N}(r, f) = S(r)$$

analog zu c).

□

#### Lemma 4.4

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte 0 und  $\infty$  "CM", gehören  $a, b \in \mathbb{C}^*$  zu den restlichen  $(q-2)$  IM geteilten Werten und wird einer der Werte  $a$  und  $b$  **nicht** "CM" geteilt, so gilt

$$\bar{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \bar{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = S(r), \quad (4.1)$$

wobei  $\bar{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$  (bzw.  $\bar{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-b}\right)$ ) gemäß Definition 2.3 e) nur diejenigen  $a$ -Stellen (bzw.  $b$ -Stellen) zählt, die für  $f$  **und**  $g$  einfach sind.

Für  $b \neq \pm a$  gilt zusätzlich

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r) \geq \frac{2}{q} \cdot T(r, f) \quad (4.2)$$

und

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r) \geq \frac{2}{q} \cdot T(r, f).$$

Insbesondere ist  $\left[\frac{q}{2}\right]$  die Höchstvielfachheit derjenigen geteilten Werte von  $f$  und  $g$ , die für eine der Funktionen mehrfach sind.

**Beweis:**

Gilt  $\psi \equiv 0$  mit der Hilfsfunktion  $\psi$  aus Lemma 4.2, so teilen  $f$  und  $g$  die Werte  $a$  und  $b$  CM, was unserer Annahme widerspricht.

Deswegen dürfen wir  $\psi \not\equiv 0$  annehmen. Da  $\psi$  in den  $a$ -Stellen von  $f$  Nullstellen und in den mehrfachen  $b$ -Stellen beider Funktionen Polstellen hat, folgt aus Lemma 2.15 und Lemma 4.2 dann

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &\leq \overline{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-a}\right) \\
&= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_3\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \\
&\leq N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r) \\
&\leq T(r, \psi) + S(r) \\
&\leq \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-b}\right) + S(r) \\
&\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_3\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r) \\
&= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Vertauschen wir  $a$  und  $b$  in der Definition von  $\psi$ , so folgt analog zu (4.3) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) &\leq \overline{N}_{E \leq 1}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-b}\right) \\
&= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_3\left(r, \frac{1}{f-b}\right) \\
&\leq N\left(r, \frac{1}{\psi}\right) + S(r) \\
&\leq T(r, \psi) + S(r) \\
&\leq \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-a}\right) + S(r) \\
&\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_3\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r) \\
&= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Damit steht in den Ungleichungsketten (4.3) und (4.4) überall das Gleichheitszeichen, so daß wir die folgenden drei Eigenschaften erhalten:

$$\begin{aligned}
\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r); \\
\overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-a}\right) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r); \\
\overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{g-b}\right) &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Mit Lemma 2.4 folgt (4.1) aus den beiden unteren Gleichungen.

Sei nun  $a + b \neq 0$ .

Sei  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$ . Aus Lemma 1.21 folgt dann

$$\phi_1(z_0) = 0 .$$

Sei nun sogar  $\phi_1 \equiv 0$ . Ist  $z_b$  eine  $b$ -Stelle der Ordnung  $k$  für  $f$  und der Ordnung  $m$  für  $g$  und setzen wir den Hauptteil von  $\phi_1$  in  $z_b$  gleich Null, so erhalten wir

$$(k - m) \left( \frac{b}{a} + 1 \right) .$$

Da nach Annahme  $a + b \neq 0$  gilt, muß  $k = m$  gelten. Dann teilen  $f$  und  $g$  den Wert  $b$  CM.

Definieren wir nun die Hilfsfunktion  $\eta_1$  dadurch, daß wir in der Definition von  $\phi_1$  die Werte  $a$  und  $b$  vertauschen, so liefert die Annahme  $\eta_1 \equiv 0$  analog, daß  $f$  und  $g$  den Wert  $a$  CM teilen.

Da beides gleichzeitig unserer Voraussetzung widersprechen würde, muß entweder  $\phi_1 \not\equiv 0$  oder  $\eta_1 \not\equiv 0$  gelten.

Sei  $\phi_1 \not\equiv 0$ . Da die Nullstellen "CM" geteilt werden, gilt

$$N \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

nach Lemma 2.17. Da  $\phi_1$  in einfachen Nullstellen von  $f$  verschwindet, folgt damit

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\phi_1} \right) + S(r) \leq T(r, \phi_1) + S(r) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - b} \right) + S(r)$$

aus Lemma 4.3 a).

Für  $\eta_1 \not\equiv 0$  folgt analog

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a} \right) + S(r)$$

aus Lemma 4.3 a).

Wegen (4.5) gilt also unabhängig vom Verhalten der Hilfsfunktionen  $\phi_1$  und  $\eta_1$  **immer**

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a} \right) + S(r) . \quad (4.6)$$

Definieren wir nun die Hilfsfunktion  $\phi_2$  dadurch, daß wir in der Definition von  $\phi_1$  die Größen  $f, g, a, b$  durch  $F = \frac{1}{f}, G = \frac{1}{g}, A = \frac{1}{a}, B = \frac{1}{b}$  ersetzen, so erhalten wir analog

$$\overline{N}(r, f) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a} \right) + S(r) . \quad (4.7)$$

Wenden wir nun Lemma 2.11 an, so gilt mit (4.6) und (4.7) die Abschätzung

$$2 \cdot T(r, f) = \sum_{j=1}^q \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + S(r) \leq q \cdot \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a} \right) + S(r) ,$$

da (4.5) unabhängig von der Wahl von  $b$  ist. Mit Division durch  $q$  erhalten wir also (4.2) und das Analogon für jedes  $b \neq \pm a$ .

Nach der Definition der Charakteristik und dem ersten Hauptsatz folgt

$$N \left( r, \frac{1}{f - a} \right) \leq T \left( r, \frac{1}{f - a} \right) = T(r, f) + O(1) \leq \frac{q}{2} \cdot \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a} \right) + S(r)$$

aus (4.2), was die Aussage über die Höchstvielfachheit impliziert.  $\square$

## 4.2 Weitere Hilfsaussagen für den Fall $b = -a$

Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 4.3 b) bis d) bekannt, daß

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r) = T(r, f) \quad , \quad \overline{N}\left(r, \frac{1}{f+a}\right) + S(r) = T(r, f) \quad (4.8)$$

gilt, so folgt aus Definition 1.24 und dem ersten Hauptsatz

$$N_1\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S(r) \quad , \quad N_1\left(r, \frac{1}{g-a}\right) = S(r) \quad (4.9)$$

und

$$N_1\left(r, \frac{1}{f+a}\right) = S(r) \quad , \quad N_1\left(r, \frac{1}{g+a}\right) = S(r) \quad . \quad (4.10)$$

Damit kann man die folgenden Aussagen herleiten.

### Lemma 4.5

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte 0 und  $\infty$  "CM", gibt es unter den restlichen  $q-2$  geteilten Werten ein  $a \in \mathbb{C}^*$ , so daß mit  $a$  auch  $-a$  zu diesen IM geteilten Werten gehört, und gelten die Bedingungen (4.8), so genügen die Hilfsfunktionen

$$\gamma_3 = \frac{f'(f+a)}{f(f-a)} - \frac{g'(g+a)}{g(g-a)}$$

und

$$\gamma_4 = \frac{f'(f-a)}{f(f+a)} - \frac{g'(g-a)}{g(g+a)}$$

den Bedingungen

$$T(r, \gamma_j) = S(r)$$

für  $j = 3, 4$ .

### Beweis:

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \gamma_j) = S(r) \quad \text{für} \quad j = 3, 4 \quad .$$

Ist  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $k$  von  $f$  und  $g$ , dann folgt aus den Definitionen der Funktionen  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$ , daß die Hauptteile von  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  in  $z_0$  jeweils

$$-\frac{k}{z-z_0} + \frac{k}{z-z_0} = 0$$

betragen. Somit haben  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  in den Nullstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen, und analog haben sie auch in den Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen.

Ferner haben sie keine Polstellen in den  $a$ - und  $-a$ -Stellen von  $f$  und  $g$ , die für  $f$  und  $g$  einfach sind.

Deswegen können  $\gamma_3$  und  $\gamma_4$  nur dort Polstellen haben, wo  $a$ - oder  $-a$ -Stellen für mindestens eine der Funktionen  $f$  und  $g$  mehrfach sind.

Aus (4.9) und (4.10) folgt damit, daß

$$N(r, \gamma_j) = S(r) \quad \text{für} \quad j = 3, 4$$

gilt. Somit haben wir

$$T(r, \gamma_j) = S(r) \quad \text{für} \quad j = 3, 4 .$$

□

#### Lemma 4.6

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0, \infty$  "CM", gibt es ein  $a \in \mathbb{C}^*$ , so daß sie die Werte  $a, -a$  IM teilen, und gelten zusätzlich (4.9) und (4.10), so folgt

$$(g - a)^2(f + a)^2 \equiv (f - a)^2(g + a)^2 , \quad (4.11)$$

was insbesondere bedeutet, daß die Werte  $a$  und  $-a$  CM geteilt werden.

#### Beweis:

Ist  $\gamma_3 \neq 0$  für die Hilfsfunktion  $\gamma_3$  aus Lemma 4.5, so folgt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f+a} \right) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\gamma_3} \right) \leq T \left( r, \frac{1}{\gamma_3} \right) = T(r, \gamma_3) + O(1) = S(r)$$

aus Lemma 4.5, da die Funktion  $\gamma_3$  in den  $-a$ -Stellen von  $f$  Nullstellen hat. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung (4.10), die zu (4.8) für die  $-a$ -Stellen äquivalent ist und bedeutet, daß die  $-a$ -Stellen gerade keine Picardschen Ausnahmewerte sind.

Damit muß  $\gamma_3 \equiv 0$  gelten. Da man analog  $\gamma_4 \equiv 0$  herleiten kann, folgt (4.11), indem man  $\gamma_3 \equiv 0$  z.B. nach  $\frac{f'}{f}$  auflöst und dies in  $\gamma_4 \equiv 0$  einsetzt. □

#### Lemma 4.7

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" und gibt es unter den restlichen  $q - 2$  geteilten Werten ein  $a \in \mathbb{C}^*$ , so daß mit  $a$  auch  $-a$  zu diesen IM geteilten Werten gehört, so genügt die Hilfsfunktion

$$\gamma_5 = \frac{f'f}{(f-a)(f+a)} - C \cdot \frac{g'g}{(g-a)(g+a)} \quad (4.12)$$

mit  $C \in \mathbb{N}$  der Bedingung

$$T(r, \gamma_5) = S(r) ,$$

falls  $\gamma_2 \neq 0$  für die Hilfsfunktion  $\gamma_2$  aus Lemma 4.3 d) gilt.

#### Beweis:

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \gamma_5) = S(r) .$$



Die Funktion  $\gamma_5$  hat in  $a$ - und  $-a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen. Da sie nur in den Polstellen von  $f$  und  $g$  Polstellen haben kann, gilt

$$N(r, \gamma_5) \leq \overline{N}(r, f) .$$

Für  $\gamma_2 \neq 0$  haben wir jedoch

$$\overline{N}(r, f) = S(r)$$

nach Lemma 4.3 d), also auch

$$N(r, \gamma_5) = S(r) .$$

Insgesamt gilt damit

$$T(r, \gamma_5) = S(r) .$$

□

### 4.3 Beweis im Fall $b = -a$

Wir haben folgende vier Fälle zu unterscheiden.

**Fall 1:**  $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv 0$ .

Durch Integration von  $\gamma_1 \equiv 0$  erhalten wir

$$\frac{f'(g^2 - a^2)g^2}{g'(f^2 - a^2)f^2} \equiv C \tag{4.13}$$

mit einer Konstanten  $C \in \mathbb{C}^*$ , und durch Integration von  $\gamma_2 \equiv 0$  erhalten wir

$$\frac{f'(g^2 - a^2)f^2}{g'(f^2 - a^2)g^2} \equiv K$$

mit einer Konstanten  $K \in \mathbb{C}^*$ . Das Einsetzen dieser Identitäten ineinander ergibt

$$Cf^4 \equiv Kg^4 ,$$

woraus folgt, daß  $f$  und  $g$  die Werte  $a$  und  $-a$  CM teilen müssen.

**Fall 2:**  $\gamma_1 \neq 0$  und  $\gamma_2 \neq 0$ .

Nach Lemma 4.3 c) und d) gelten die Beziehungen  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$  und  $\overline{N}(r, f) = S(r)$ .

Sei  $a_j \neq 0, \infty$  für  $j = 1, \dots, q-2$  einer der restlichen  $(q-2)$  IM geteilten Werte. Betrachte die Hilfsfunktion

$$\gamma_6 = \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f - a_j} - \left( \frac{g''}{g'} - \frac{g'}{g - a_j} \right) .$$

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \gamma_6) = S(r) .$$

In den  $a_j$ -Stellen von  $f$  und  $g$  hat  $\gamma_6$  keine Polstellen, und wegen  $\overline{N}(r, f) = S(r)$  für  $\gamma_2 \neq 0$  hat  $\gamma_6$  auch in den Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen. Damit gilt

$$N(r, \gamma_6) = S(r),$$

also zusammen

$$T(r, \gamma_6) = S(r).$$

Es gelte nun  $\gamma_6 \neq 0$ .

Sei  $z_{a_j}$  eine  $a_j$ -Stelle der Vielfachheit  $k$  für  $f$  und der Vielfachheit 1 für  $g$  (Nach Lemma 2.15 hat mindestens eine der Funktionen die Vielfachheit 1 in den geteilten Werten.). Dann hat  $\frac{f''}{f'}$  dort die Laurent-Entwicklung

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{k-1}{z-z_{a_j}} + \frac{1}{k} \frac{f^{(k)}(z_{a_j})}{f^{(k-1)}(z_{a_j})} + O(z-z_{a_j})$$

und  $\frac{f'}{f-a_j}$  die Laurent-Entwicklung

$$\frac{f'(z)}{f(z)-a_j} = \frac{k}{z-z_{a_j}} + \frac{1}{k+1} \frac{f^{(k+1)}(z_{a_j})}{f^{(k)}(z_{a_j})} + O(z-z_{a_j}).$$

Weiterhin hat  $\frac{g'}{g-a_j}$  die Laurent-Entwicklung

$$\frac{g'(z)}{g(z)-a_j} = \frac{1}{z-z_{a_j}} + \frac{1}{2} \frac{g''(z_{a_j})}{g'(z_{a_j})} + O(z-z_{a_j}),$$

während  $\frac{g''}{g'}$  den Wert  $\frac{g''(z_{a_j})}{g'(z_{a_j})}$  annimmt. Insgesamt nimmt  $\gamma_6$  in  $z_{a_j}$  also den Wert

$$\gamma_6(z_{a_j}) = \frac{1}{k} \frac{f^{(k)}(z_{a_j})}{f^{(k-1)}(z_{a_j})} - \frac{1}{k+1} \frac{f^{(k+1)}(z_{a_j})}{f^{(k)}(z_{a_j})} - \frac{1}{2} \frac{g''(z_{a_j})}{g'(z_{a_j})} = A_k$$

an, der von der Vielfachheit  $k$  der betrachteten  $a_j$ -Stelle  $z_{a_j}$  abhängt. Analog gilt

$$\gamma_6(z_{a_j}) = \frac{1}{2} \frac{f''(z_{a_j})}{f'(z_{a_j})} - \left( \frac{1}{k} \frac{g^{(k)}(z_{a_j})}{g^{(k-1)}(z_{a_j})} - \frac{1}{k+1} \frac{g^{(k+1)}(z_{a_j})}{g^{(k)}(z_{a_j})} \right) = B_k,$$

wenn die  $a_j$ -Stelle für  $f$  einfach und für  $g$  von der Vielfachheit  $k$  ist.

Mit den bereits bekannten Bedingungen  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$  und  $\overline{N}(r, f) = S(r)$  gilt nach Lemma 2.11 und (4.5) die Gleichung

$$2 \cdot T(r, f) = \sum_{j=1}^{q-2} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) + S(r) = (q-2) \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r),$$

da (4.5) unabhängig von der Wahl von  $b$  ist. Mit Division durch  $q-2$  erhalten wir also

$$N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1) = \frac{q-2}{2} \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + S(r)$$

nach der Definition der Charakteristik und dem ersten Hauptsatz. Da  $a \in \{a_1, \dots, a_{q-2}\}$  beliebig gewählt war, hat jeder der  $q - 2$  geteilten Werte neben 0 und  $\infty$  die Höchstvielfachheit  $\left[\frac{q-2}{2}\right]$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) &\leq \sum_{k=2}^{\left[\frac{q-2}{2}\right]} \overline{N}\left(r, \frac{1}{\gamma_6 - A_k}\right) + \sum_{k=2}^{\left[\frac{q-2}{2}\right]} \overline{N}\left(r, \frac{1}{\gamma_6 - B_k}\right) \\ &\leq \left(\left[\frac{q-2}{2}\right] - 1\right) T(r, \gamma_6) + \left(\left[\frac{q-2}{2}\right] - 1\right) T(r, \gamma_6) \\ &= S(r) \end{aligned}$$

für jedes  $a_j \neq a, -a$ , da es wegen  $f, g \in \mathcal{G}$  (woraus  $T(r, f) = T(r, g) = \frac{1}{q-4} \log \frac{1}{1-r}$  folgt,) und Satz 1.34 höchstens  $q - 2$  Picardsche Ausnahmewerte geben kann. Damit folgt (4.8) aus Lemma 2.11. Da die Beziehungen (4.8) gelten, folgt aus Lemma 4.6, daß (4.11) gilt, womit auch die Werte  $a$  und  $-a$  CM geteilt werden müssen.

Gilt  $\gamma_6 \equiv 0$ , so folgt

$$\frac{f'}{f - a_j} \equiv \lambda \cdot \frac{g'}{g - a_j}$$

durch Integration.

Wir machen nun die Widerspruchsannahme, daß nicht alle Werte "CM" geteilt werden. Dann gibt es mindestens ein  $a_j$ , für das  $\lambda = \frac{m}{k}$  mit  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $m \neq k$  gilt. Für dieses  $a_j$  liefert eine weitere Integration

$$(f - a_j)^k = (g - a_j)^m,$$

woraus

$$k \cdot T(r, f) = m \cdot T(r, g)$$

nach Satz 1.8 folgt. Wegen  $f, g \in \mathcal{G}$  impliziert dies jedoch den Widerspruch

$$m = k.$$

Dies bedeutet, daß alle  $q$  Werte CM geteilt werden.

**Fall 3:**  $\gamma_1 \equiv 0$  und  $\gamma_2 \neq 0$ .

Ist  $z_0$  eine  $a$ - oder  $-a$ -Stelle der Ordnung  $k$  für  $f$  und der Ordnung  $m$  für  $g$ , so folgt

$$k = C \cdot m$$

aus (4.13). Ist dann  $\gamma_5 \equiv 0$  für die Hilfsfunktion  $\gamma_5$  aus Lemma 4.7, so folgt  $f^3 \equiv g^3$  aus (4.12) und (4.13). Somit teilen  $f$  und  $g$  die Werte  $a$  und  $-a$  CM.

Nehmen wir nun  $\gamma_5 \neq 0$  an, so erhalten wir

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\gamma_5}\right) \leq T\left(r, \frac{1}{\gamma_5}\right) = T(r, \gamma_5) + O(1) = S(r)$$

aus Lemma 4.7, da Nullstellen von  $f$  auch Nullstellen von  $\gamma_5$  sind. Damit und aus Lemma 4.3 d) folgt analog zu Fall 2, daß (4.8) gilt und  $f$  und  $g$  nach Lemma 4.6 alle  $q$  Werte CM teilen.

**Fall 4:**  $\gamma_1 \neq 0$  und  $\gamma_2 \equiv 0$ .

Dieser Fall verläuft analog zu Fall 3.

Da wir in allen vier Fällen herausgefunden haben, daß  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM teilen, ist die Behauptung bewiesen.

## 4.4 Weitere Hilfsaussagen für den Fall $b \neq -a$

Da der Fall  $b = -a$  bereits bewiesen ist, wird ab hier generell  $b \neq -a$  vorausgesetzt. Wir nehmen an, daß  $f$  und  $g$  die Werte  $0, \infty$  "CM" und entweder  $a$  oder  $b$  nicht "CM" teilen. Dann gibt es eine in  $\mathbb{D}$  holomorphe Funktion  $w$ , so daß

$$f = e^w \cdot g \quad (4.14)$$

gilt. Aus (4.14) erhalten wir

$$T(r, e^w) \leq T(r, f) + T(r, g) + O(1) = 2 \cdot T(r, f) + S(r). \quad (4.15)$$

Die logarithmische Ableitung von  $e^w = \frac{f}{g}$  ist  $w' = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$ . Es folgt also

$$m(r, w') \leq m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + O(1).$$

Da  $w'$  holomorph ist, gilt mit  $f, g \in \mathcal{L}$  daher

$$T(r, w') = S(r). \quad (4.16)$$

Nun kann (4.14) zu

$$e^w - 1 = \frac{f - g}{g} \quad (4.17)$$

umgeformt werden. Natürlich gilt  $f \not\equiv g$  und damit  $e^w \not\equiv 1$ .

Ist  $z_0$  eine Nullstelle von  $f$  und  $g$ , so daß  $e^{w(z_0)} = 1$  gilt, so folgt aus (4.17), daß  $z_0$  eine mehrfache Nullstelle von  $f - g$  sein muß.

Aus (4.14) folgt ebenfalls

$$\frac{1}{g} = e^w \cdot \frac{1}{f}.$$

Ist dann  $z_\infty$  eine Polstelle von  $f$  und  $g$ , so daß  $e^{w(z_\infty)} = 1$  gilt, so muß  $z_\infty$  eine mehrfache Nullstelle von  $\frac{1}{g} - \frac{1}{f}$  sein.

Aus (4.17) folgt deswegen

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{e^w - 1}\right) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - b}\right) + N\left(r, \frac{1}{f - g}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - g}\right) \\ &\quad + N\left(r, \frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}\right) + \overline{N}_2\left(r, \frac{1}{f - g}\right), \end{aligned}$$

wobei  $\overline{N}_2\left(r, \frac{1}{f - g}\right)$  wie in Lemma 2.12 definiert ist.

Da  $\frac{1}{g}$  und  $\frac{1}{f}$  nach Lemma 2.2 gleichviele Werte wie  $f$  und  $g$  teilen, liefert die Anwendung von Lemma 2.14 und Lemma 2.12 die Vereinfachung

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{e^w - 1}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - b}\right) + S(r).$$

Nach (4.14) gilt offensichtlich

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{e^w-1}\right),$$

so daß insgesamt

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{e^w-1}\right) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) + S(r) \quad (4.18)$$

folgt.

**Lemma 4.8**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon  $0, \infty$  "CM" und von  $a, b \in \mathbb{C}^*$  mit  $b \neq \pm a$  mindestens einen nicht "CM", so genügen die Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{f''}{f'} - \frac{f'}{f-a} - \frac{f'}{f-b} + \frac{w'e^w}{e^w-1}, \\ \alpha_2 &= \frac{g''}{g'} - \frac{g'}{g-a} - \frac{g'}{g-b} + \frac{w'e^w}{e^w-1} \end{aligned}$$

den Bedingungen

$$T(r, \alpha_j) = S(r)$$

für  $j = 1, 2$ .

**Beweis:**

Aus (4.15) erhalten wir

$$m(r, \alpha_1) \leq S(r, f) + S(r, e^w - 1) \leq S(r, f) = S(r).$$

Da  $\alpha_1$  die logarithmische Ableitung von

$$H_1 = \frac{f'(e^w - 1)}{(f-a)(f-b)}$$

ist, haben wir

$$N(r, \alpha_1) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{H_1}\right) + \overline{N}(r, H_1)$$

nach Lemma 1.23. Da nach (4.14) die  $a$ - und  $b$ -Stellen von  $f$  Einsstellen von  $e^w$  sind, sehen wir, daß  $H_1$  gar keine Polstellen hat.

Ist andererseits  $z_0$  eine Nullstelle von  $H_1$ , so kann man an der Definition von  $H_1$  erkennen, daß  $z_0$  eine der vier folgenden Bedingungen erfüllen muß:

- a)  $z_0$  ist eine mehrfache Polstelle von  $f$ .
- b)  $f'(z_0) = 0$  und  $f(z_0) \neq a, b$ .
- c)  $e^{w(z_0)} = 1$  und  $f(z_0) \neq a, b$ .

d)  $z_0$  ist eine mehrfache Einsstelle von  $e^w$ .

Dann darf  $z_0$  sogar eine  $a$ - oder eine  $b$ -Stelle von  $f$  sein.

Nach (4.14) gilt  $w' \neq 0$ , und wegen  $N(r, \alpha_1) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{H_1}\right)$  folgt

$$\begin{aligned} N(r, \alpha_1) \leq & N(r, f) - \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ & + \overline{N}\left(r, \frac{1}{e^w - 1}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - b}\right) + N\left(r, \frac{1}{w'}\right), \end{aligned}$$

wobei  $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$  wie in Lemma 2.13 definiert ist.

Aus Lemma 2.17 mit  $a_1 = 0$  und  $a_2 = \infty$ , Lemma 2.13, (4.18) und (4.16) folgt damit

$$N(r, \alpha_1) = S(r),$$

womit wir

$$T(r, \alpha_1) = S(r)$$

erhalten. Analog ergibt sich

$$T(r, \alpha_2) = S(r),$$

da die Definitionen von  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  symmetrisch in  $f$  und  $g$  sind. □

#### Lemma 4.9

Ist  $z_a$  eine einfache  $a$ -Stelle von  $f$  und eine doppelte  $a$ -Stelle von  $g$ , so hat die Hilfsfunktion  $\alpha_1$  aus Lemma 4.8 in  $z_a$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha_1'(z_a) = \beta_1(z_a) \tag{4.19}$$

mit einer Funktion

$$\begin{aligned} \beta_1 = & \frac{w'''}{w'} + 4h_1 + 8\frac{h_1 h_2}{w'} + \left(\frac{5}{2} + \frac{a}{a-b}\right) w'' + \left(\frac{3}{4} - \frac{ab}{(a-b)^2}\right) (w')^2 \\ & - \frac{3}{4} \left(2\alpha_1 + \frac{a+b}{a-b} w' - \frac{w''}{w'}\right)^2 - \frac{2aw'\alpha_1}{a-b} - \frac{1}{4} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2, \end{aligned} \tag{4.20}$$

wobei  $h_1$  und  $h_2$  die Gestalten

$$h_1 = w'\alpha_1 + \frac{b(w')^2}{a-b} - w'' \quad \text{und} \quad h_2 = \alpha_2 - \frac{1}{2} \frac{w''}{w'} - \frac{1}{2} w' \tag{4.21}$$

haben.

#### Beweis:

Ist  $z_a$  eine  $a$ -Stelle, die für eine der Funktionen einfach und für die andere Funktion mehrfach ist, so erhalten wir

$$e^{w(z_a)} = 1 \quad \text{und} \quad w'(z_a) \neq 0 \tag{4.22}$$

durch Ableiten von (4.17).

Wir nehmen an, daß  $z_a$  eine einfache  $a$ -Stelle von  $f$  und eine doppelte  $a$ -Stelle von  $g$  ist. Aus (4.22) folgt, daß  $\alpha_1$  in  $z_a$  keine Polstelle haben kann. Wenden wir Lemma 1.21 auf die Funktionen  $f - a$  und  $e^w - 1$  an, so lautet der Koeffizient von  $z - z_a$  in der Taylor-Reihe von  $\alpha_1$  um  $z_a$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \alpha_1'(z_a) = & \frac{2}{3} \frac{f'''(z_a)}{f'(z_a)} - \frac{3}{4} \left( \frac{f''(z_a)}{f'(z_a)} \right)^2 - \frac{f''(z_a)}{a-b} + \frac{(f'(z_a))^2}{(a-b)^2} \\ & + \frac{w'''(z_a)}{3 \cdot w'(z_a)} + \frac{1}{2} w''(z_a) + \frac{1}{12} (w'(z_a))^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{w''(z_a)}{w'(z_a)} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Differenzieren wir nun (4.14) dreimal, ersetzen dort  $z$  durch  $z_a$  und verwenden  $e^{w(z_a)} = 1$  und  $g'(z_a) = 0$ , so erhalten wir die drei Gleichungen

$$f'(z_a) = a \cdot w'(z_a) \quad (4.24)$$

$$f''(z_a) = a \cdot w''(z_a) + g''(z_a) + a(w'(z_a))^2 \quad (4.25)$$

$$f'''(z_a) = a \cdot w'''(z_a) + 3 \cdot w'(z_a)g''(z_a) + g'''(z_a) + 3a \cdot w'(z_a)w''(z_a) + a(w'(z_a))^3 \quad (4.26)$$

Die Anwendung von Lemma 1.21 auf  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  liefert die Darstellungen

$$\alpha_1(z_a) = \frac{f''(z_a)}{2 \cdot f'(z_a)} - \frac{f'(z_a)}{a-b} + \frac{w''(z_a) + (w'(z_a))^2}{2 \cdot w'(z_a)} \quad (4.27)$$

$$\alpha_2(z_a) = \frac{g'''(z_a)}{6 \cdot g''(z_a)} + \frac{w''(z_a) + (w'(z_a))^2}{2 \cdot w'(z_a)} \quad (4.28)$$

Setzen wir nun (4.24) in (4.27) ein, so erhalten wir

$$f''(z_a) = 2aw'(z_a)\alpha_1(z_a) + \frac{2a^2(w'(z_a))^2}{a-b} - aw''(z_a) - a(w'(z_a))^2. \quad (4.29)$$

Dann liefert Einsetzen von (4.29) in (4.25) die Darstellung

$$g''(z_a) = 2ah_1(z_a), \quad (4.30)$$

wobei  $h_1$  wie in (4.21) definiert ist. Aus (4.30) und (4.28) erhalten wir

$$g'''(z_a) = 12ah_1(z_a)h_2(z_a), \quad (4.31)$$

wobei  $h_2$  ebenfalls in (4.21) definiert ist. Setzen wir nun (4.31) und (4.30) in (4.26) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f'''(z_a) = & aw'''(z_a) + 6aw'(z_a)h_1(z_a) + 12ah_1(z_a)h_2(z_a) \\ & 3aw'(z_a)w''(z_a) + a(w'(z_a))^3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Setzen wir schließlich (4.32), (4.29) und (4.24) in (4.23) ein, so vereinfacht sich dies zu der Gleichung  $\alpha_1'(z_a) = \beta_1(z_a)$ , wobei  $\beta_1$  durch (4.20) gegeben ist. Damit ist (4.19) bewiesen.  $\square$

#### Lemma 4.10

Die Hilfsfunktionen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  aus Lemma 4.8 weisen in  $a$ - und  $b$ -Stellen, die für eine der Funktionen  $f$  und  $g$  mindestens dreifach sind, folgendes Verhalten auf.

a) Ist  $z_a$  eine  $a$ -Stelle, die für  $f$  einfach und für  $g$  mindestens dreifach ist, so hat  $\alpha_1$  in  $z_a$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha_1(z_a) = \frac{w''(z_a)}{w'(z_a)} + \frac{bw'(z_a)}{b-a}. \quad (4.33)$$

b) Ist  $z_b$  eine  $b$ -Stelle, die für  $f$  einfach und für  $g$  mindestens dreifach ist, so hat  $\alpha_1$  in  $z_b$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha_1(z_b) = \frac{w''(z_b)}{w'(z_b)} + \frac{aw'(z_b)}{a-b}.$$

c) Ist  $z_a$  eine  $a$ -Stelle, die für  $g$  einfach und für  $f$  mindestens dreifach ist, so hat  $\alpha_2$  in  $z_a$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha_2(z_a) = \frac{w''(z_a)}{w'(z_a)} + \frac{aw'(z_a)}{a-b}.$$

d) Ist  $z_b$  eine  $b$ -Stelle, die für  $g$  einfach und für  $f$  mindestens dreifach ist, so hat  $\alpha_2$  in  $z_b$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha_2(z_b) = \frac{w''(z_b)}{w'(z_b)} + \frac{bw'(z_b)}{b-a}.$$

### Beweis:

Wir beweisen exemplarisch die Aussage a). Die drei anderen folgen analog.

Da  $z_a$  eine  $a$ -Stelle ist, die für  $f$  einfach und für  $g$  mindestens dreifach ist, hat  $\alpha_1$  nach (4.22) in  $z_a$  keine Polstelle. Wenden wir Lemma 1.21 auf  $\alpha_1$  an, so erhalten wir

$$\alpha_1(z_a) = \frac{1}{2} \frac{f''(z_a)}{f'(z_a)} - \frac{f'(z_a)}{a-b} + \frac{w''(z_a) + (w'(z_a))^2}{2w'(z_a)}. \quad (4.34)$$

Da ferner aus (4.14) die Darstellungen

$$f'(z_a) = aw'(z_a) \quad \text{und} \quad f''(z_a) = aw''(z_a) + a(w'(z_a))^2 \quad (4.35)$$

folgen, ergibt sich (4.33) aus dem Einsetzen von (4.35) in (4.34).  $\square$

### Lemma 4.11

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM", gilt für jedes Paar  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , das unter den restlichen  $(q-2)$  IM geteilten Werten vorkommt, die Bedingung  $b \neq \pm a$ , und teilen  $f$  und  $g$  entweder  $a$  oder  $b$  nicht "CM", so gilt

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \quad (4.36)$$

für die Hilfsfunktionen aus Lemma 4.8.



**Beweis:**

Wir nehmen  $\alpha_1 \equiv \alpha_2$  an. Integrieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{f'(g-a)(g-b)}{g'(f-a)(f-b)} \equiv C$$

mit  $C \in \mathbb{C}^*$ . Für eine  $a$ -Stelle (oder  $b$ -Stelle) der Vielfachheit  $k$  für  $f$  und der Vielfachheit  $m$  für  $g$  folgt daraus

$$k = C \cdot m .$$

Nun wird entweder  $a$  oder  $b$  nicht "CM" geteilt, und weder  $a$  noch  $b$  ist nach (4.2) ein Picardscher Ausnahmewert von  $f$  und  $g$ . Da nach Lemma 2.15 entweder  $k = 1$  oder  $m = 1$  gilt, ist  $C \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  oder von der Form  $\frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .

Zuerst nehmen wir  $C > \left[\frac{q}{2}\right]$  an. Dann gilt

$$\left(\left[\frac{q}{2}\right] + 1\right) \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq T(r, f) + O(1) ,$$

was Lemma 4.4 widerspricht, da  $\left[\frac{q}{2}\right]$  die größtmögliche Vielfachheit der mehrfachen Stellen von  $f$  und  $g$  ist.

Analog können wir herleiten, daß  $C < \left[\frac{q}{2}\right]^{-1}$  unmöglich ist.

Also haben wir gezeigt,  $C = n$  oder  $C = \frac{1}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $n \leq \left[\frac{q}{2}\right]$  gilt.

Wir benötigen nun die folgende Aussage über eine Hilfsfunktion, die wir o.B.d.A. für  $C = \frac{1}{2}$  zeigen.

**Lemma 4.12**

*Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.*

*Teilen sie davon die Werte 0 und  $\infty$  "CM", gilt für jedes Paar  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , das unter den restlichen  $q - 2$  IM geteilten Werten vorkommt, die Bedingung  $b \neq \pm a$ , und ist  $C = \frac{1}{2}$ , so genügt die Hilfsfunktion*

$$\alpha = 2 \cdot \frac{f'}{f-a} + 2 \cdot \frac{f'}{f-b} - 3 \cdot \frac{g'}{g-a} - 3 \cdot \frac{g'}{g-b} + 2 \cdot \frac{w'e^w}{e^w-1} - \frac{f''}{f'} + 2 \cdot \frac{g''}{g'}$$

*der Bedingung*

$$T(r, \alpha) = S(r) .$$

**Beweis:**

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \alpha) = S(r) .$$

Mit  $C = \frac{1}{2}$  haben wir die beiden folgenden Bedingungen:

Ist  $z_0$  eine einfache  $a$ -Stelle ( $b$ -Stelle) von  $f$ ,  
so ist  $z_0$  eine doppelte  $a$ -Stelle ( $b$ -Stelle) von  $g$ . (4.37)  
Nach (4.22) hat  $\alpha$  in  $z_0$  keine Polstelle.

Ist  $z_0$  eine mehrfache  $a$ -Stelle ( $b$ -Stelle) von  $f$ ,  
so ist  $z_0$  eine mehrfache  $a$ -Stelle ( $b$ -Stelle) von  $g$ . (4.38)

Ferner hat  $\alpha$  in einfachen Polstellen von  $f$  und  $g$ , die keine Einsstellen von  $e^w$  sind, keine Polstellen.

Deswegen können wir herleiten, daß  $z_0$  eine der folgenden Bedingungen erfüllen muß, um eine Polstelle von  $\alpha$  sein zu können:

- a)  $z_0$  ist entweder eine  $a$ -Stelle,  $b$ -Stelle, Polstelle oder Nullstelle von  $f$  und  $g$ , die für beide mehrfach ist.
- b)  $e^{w(z_0)} = 1$  und  $f(z_0) \neq a, b$ .
- c)  $f'(z_0) = 0$  und  $f(z_0) \neq 0, a, b$ .
- d)  $g'(z_0) = 0$  und  $g(z_0) \neq 0, a, b$ .

Berücksichtigen wir dies, so folgt

$$N(r, \alpha) = S(r)$$

aus Lemma 2.15, (4.18) und Lemma 2.13. Zusammen erhalten wir

$$T(r, \alpha) = S(r) .$$

□

Da Lemma 4.12 gezeigt ist, fahren wir nun mit dem Beweis von Lemma 4.11 fort.

Sei  $C = \frac{1}{2}$  und  $z_a$  eine einfache  $a$ -Stelle von  $f$  und eine doppelte  $a$ -Stelle von  $g$ . Nach (4.37) und (4.38) hat  $\alpha$  in  $z_a$  keine Polstelle, und nach (4.14) gilt  $f'(z_a) = aw'(z_a)$ . Wenden wir dann Lemma 1.21 auf  $\alpha$  an, so folgt

$$\alpha(z_a) = \frac{2aw'(z_a)}{a-b} + \frac{w''(z_a) + (w'(z_a))^2}{w'(z_a)} . \quad (4.39)$$

Ist  $\alpha \not\equiv \frac{2aw'}{a-b} + \frac{w''}{w'} + w'$  (Wegen (4.14) gilt  $w' \not\equiv 0!$ ), so folgt

$$\begin{aligned} \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &\leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha - \frac{2aw'}{a-b} - \frac{w''}{w'} - w'} \right) + \overline{N}_3 \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \\ &\leq T \left( r, \alpha - \frac{2aw'}{a-b} - \frac{w''}{w'} - w' \right) + S(r) \\ &= S(r) \end{aligned}$$

aus (4.39), (4.37), (4.38), Lemma 4.12, (4.16) und Lemma 2.15, widerspricht jedoch (4.2). Also muß

$$\alpha \equiv \frac{2aw'}{a-b} + \frac{w''}{w'} + w'$$

gelten. Betrachten wir nun eine  $b$ -Stelle, die für  $f$  einfach und für  $g$  doppelt ist, folgt analog

$$\alpha \equiv \frac{2bw'}{b-a} + \frac{w''}{w'} + w' .$$

Daraus folgt jedoch  $a+b=0$  im Widerspruch zu unserer Annahme. Deswegen gilt (4.36). □

**Beachte:**

Analog folgt (4.36) in den anderen möglichen Fällen für  $C$ , wobei man in der Definition der Funktion  $\alpha$  die Koeffizienten von  $f$  und  $g$  dem jeweiligen  $C$  anzupassen hat.

**Lemma 4.13**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" und gilt für jedes Paar  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , das unter den restlichen  $q - 2$  IM geteilten Werten vorkommt, die Bedingung  $b \neq \pm a$ , so erfüllt die Hilfsfunktion

$$\mu = \frac{f'(f-g)^2 g'}{f(f-a)(f-b)g(g-a)(g-b)}$$

die Abschätzung

$$T(r, \mu) = S(r) .$$

**Beweis:**

Ersetzt man in der Definition der Funktion  $\psi$  aus Lemma 2.21 die Werte  $1$  und  $c$  durch  $a$  und  $b$ , so erhält man die Funktion  $\mu$ . Damit folgt die Behauptung aus Lemma 2.21.  $\square$

Nun nehmen wir an, daß eine  $a$ -Stelle oder  $b$ -Stelle von  $f$  und  $g$  einfach für eine der beiden Funktionen und doppelt für die andere ist. Analog zu Lemma 4.9 kann man dann herleiten:

Ist  $z_b$  eine einfache  $b$ -Stelle von  $f$  und eine doppelte  $b$ -Stelle von  $g$ , dann hat  $\alpha_1$  keine Polstelle in  $z_b$ , und es gilt

$$\alpha'_1(z_b) = \beta_2(z_b) , \quad (4.40)$$

wobei  $\beta_2$  aus  $\beta_1$  in (4.20) entsteht, indem man dort und in (4.21) die Zahlen  $a$  und  $b$  vertauscht. Ist  $z_a$  eine einfache  $a$ -Stelle von  $g$  und eine doppelte  $a$ -Stelle von  $f$ , so hat  $\alpha_2$  aus Lemma 4.8 in  $z_a$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha'_2(z_a) = \beta_3(z_a) \quad (4.41)$$

mit

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \frac{w'''}{w'} + 4H_1 - 8\frac{H_1 H_2}{w'} + \left(\frac{a}{b-a} - \frac{3}{2}\right) w'' + \left(\frac{3}{4} + \frac{ab - 2a^2}{(a-b)^2}\right) (w')^2 \\ & - \frac{3}{4} \left(2\alpha_2 + \frac{b-3a}{a-b} w' - \frac{w''}{w'}\right)^2 - \frac{2aw'\alpha_2}{b-a} - \frac{1}{4} \left(\frac{w''}{w'}\right)^2 , \end{aligned} \quad (4.42)$$

wobei

$$H_1 = -w'\alpha_2 + \frac{a(w')^2}{a-b} + w'' \quad \text{und} \quad H_2 = \alpha_1 - \frac{1}{2} \frac{w''}{w'} - \frac{1}{2} w' \quad (4.43)$$

gilt.

Ist  $z_b$  eine einfache  $b$ -Stelle von  $g$  und eine doppelte  $b$ -Stelle von  $f$ , so hat  $\alpha_2$  in  $z_b$  keine Polstelle, und es gilt

$$\alpha'_2(z_b) = \beta_4(z_b) , \quad (4.44)$$

wobei  $\beta_4$  aus  $\beta_3$  in (4.42) dadurch entsteht, daß man dort und in (4.43) die Zahlen  $a$  und  $b$  vertauscht.

**Lemma 4.14**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" und gilt für jedes Paar  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , das unter den restlichen  $q - 2$  IM geteilten Werten vorkommt, die Bedingung  $b \neq \pm a$ , so genügen die Hilfsfunktionen  $\beta_j$  für  $j = 1, 2, 3, 4$  den Bedingungen

$$T(r, \beta_j) = S(r) \quad \text{für } j = 1, 2, 3, 4 .$$

**Beweis:**

Die Behauptung folgt aus  $f, g \in \mathcal{L}$  und (4.16). □

**Lemma 4.15**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Teilen sie davon die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" und gilt für jedes Paar  $a, b \in \mathbb{C}^*$ , das unter den restlichen  $q - 2$  IM geteilten Werten vorkommt, die Bedingung  $b \neq \pm a$ , und gelten für die Hilfsfunktionen  $\alpha_1, \alpha_2$  und  $\beta_j$  für  $j = 1, 2, 3, 4$  die Identitäten

$$\alpha'_1 \equiv \beta_1 \neq \beta_2 \quad \text{und} \quad \alpha'_2 \equiv \beta_4 \neq \beta_3 ,$$

so genügt die Hilfsfunktion

$$\beta = 2 \cdot \frac{f''}{f'} - 3 \cdot \frac{f'}{f-b} - 2 \cdot \frac{g''}{g'} + 3 \cdot \frac{g'}{g-a} - 4 \cdot \frac{f'}{f-a} + 4 \cdot \frac{g'}{g-b}$$

der Bedingung

$$T(r, \beta) = S(r) ,$$

falls die Werte  $a$  und  $b$  jeweils einfach für die eine und doppelt für die andere Funktion sind.

**Beweis:**

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \beta) = S(r) .$$

Wir sehen ferner, daß  $\beta$  in

- a) Polstellen von  $f$  und  $g$
- b)  $a$ -Stellen, die für  $f$  einfach und für  $g$  doppelt sind,
- c)  $b$ -Stellen, die für  $f$  doppelt und für  $g$  einfach sind,

keine Polstellen hat. Damit hat  $\beta$  nur dort Polstellen, wo die  $a$ -Stellen für  $f$  doppelt und für  $g$  einfach und wo die  $b$ -Stellen für  $f$  einfach und für  $g$  doppelt sind.

Die  $a$ -Stellen, die für  $f$  doppelt und für  $g$  einfach sind, sind Nullstellen von  $\alpha'_2 - \beta_3$ .

Die  $b$ -Stellen, die für  $f$  einfach und für  $g$  doppelt sind, sind Nullstellen von  $\alpha'_1 - \beta_2$ .

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  folgt damit die Abschätzung

$$N(r, \beta) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha'_2 - \beta_3} \right) + \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha'_1 - \beta_2} \right) + S(r) \leq S(r)$$

aus Lemma 4.8 und Lemma 4.14. Damit haben wir

$$T(r, \beta) = S(r) .$$

□

## 4.5 Beweis im Fall $b \neq -a$

Wir nehmen an, daß entweder  $a$  oder  $b$  nicht "CM" geteilt wird. Wegen Lemma 2.15 und (4.1) sind fast alle  $a$ - und  $b$ -Stellen von  $f$  und  $g$  für eine der Funktionen einfach und für die andere mehrfach.

Können wir nun zeigen, daß entweder  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = S(r)$  oder  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-b}\right) = S(r)$  gilt, so erhalten einen Widerspruch zu (4.2).

Sei  $z_0$  entweder eine  $a$ -Stelle oder eine  $b$ -Stelle der Ordnung  $k$  für  $f$  und der Ordnung  $m$  für  $g$ . Aus (4.14) folgt dann

$$\mu(z_0) = \frac{2km(w'(z_0))^2}{(a-b)^2}$$

für die Hilfsfunktion  $\mu$  aus Lemma 4.13. Ferner gelte

$$\mu \neq \frac{2\ell(w')^2}{(a-b)^2}$$

für  $\ell = 2, \dots, \left[\frac{q}{2}\right]$ .

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt dann

$$\begin{aligned} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) &\leq \sum_{\ell=2}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \overline{N}\left(r, \frac{1}{\mu - \frac{2\ell(w')^2}{(a-b)^2}}\right) \\ &\leq \left(\left[\frac{q}{2}\right] - 1\right) \cdot T(r, \mu) + 2 \left(\left[\frac{q}{2}\right] - 1\right) \cdot T(r, w') \\ &\leq S(r) \end{aligned}$$

nach Lemma 4.13 und (4.16), was (4.2) widerspricht.

Deswegen gilt

$$\mu \equiv \frac{2\ell(w')^2}{(a-b)^2}$$

für ein  $\ell = 2, \dots, \left[\frac{q}{2}\right]$ .

Es folgt, daß einer der beiden folgenden Fälle auftreten muß:

- 1. Fall:** Eine  $a$ -Stelle oder  $b$ -Stelle von  $f$  und  $g$  ist einfach für eine der beiden Funktionen und doppelt für die andere.
- 2. Fall:** Eine  $a$ -Stelle oder  $b$ -Stelle von  $f$  und  $g$  einfach für eine der beiden Funktionen und mindestens dreifach für die andere.

Der Fall, daß  $a$ -Stellen oder  $b$ -Stellen für beide Funktionen mehrfach sind, ist nach Lemma 2.15 unmöglich.

Wir betrachten zunächst den 1.Fall:

Es gelte  $\alpha'_1 \not\equiv \beta_1$  und  $\alpha'_2 \not\equiv \beta_3$ . Aus Lemma 4.9, (4.41), Lemma 4.14 und Lemma 4.8 können wir dann

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a}\right) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\alpha'_1 - \beta_1}\right) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{\alpha'_2 - \beta_3}\right) \leq S(r)$$

herleiten, was (4.2) widerspricht.

Also gilt entweder  $\alpha'_1 \equiv \beta_1$  oder  $\alpha'_2 \equiv \beta_3$ .

Analog kann man aus (4.40), (4.44) und (4.2) herleiten, daß entweder  $\alpha'_1 \equiv \beta_2$  oder  $\alpha'_2 \equiv \beta_4$  gilt.

Sei nun  $\beta_1 \equiv \beta_2$ . Dann liefern die passende Verwendung von (4.20) und das Herauskürzen identischer Terme in  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Identität

$$\begin{aligned} \frac{4b(w')^2}{a-b} &+ \frac{8b \cdot w'}{a-b} \left( \alpha_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{w''}{w'} - \frac{1}{2} \cdot w' \right) + \frac{a}{a-b} \cdot w'' \\ &- \frac{3}{4} \left( 4\alpha_1 \frac{a+b}{a-b} w' - 2 \frac{a+b}{a-b} w'' \right) - \frac{2a \cdot w' \alpha_1}{a-b} \\ \equiv &\frac{4a(w')^2}{b-a} + \frac{8a \cdot w'}{b-a} \left( \alpha_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{w''}{w'} - \frac{1}{2} \cdot w' \right) + \frac{b}{b-a} \cdot w'' \\ &- \frac{3}{4} \left( 4\alpha_1 \frac{b+a}{b-a} w' - 2 \frac{b+a}{b-a} w'' \right) - \frac{2b \cdot w' \alpha_1}{b-a} . \end{aligned}$$

Diese kann man zu  $(a+b)w'(\alpha_1 - \alpha_2) \equiv 0$  vereinfachen, was ein Widerspruch zu Lemma 4.11 ist, da  $w' \neq 0$  nach (4.14) und  $a+b \neq 0$  nach Voraussetzung gilt.

Also gilt  $\beta_1 \not\equiv \beta_2$ . Analog kann man auch  $\beta_3 \not\equiv \beta_4$  herleiten.

Insgesamt kann also nur einer der beiden folgenden Fälle auftreten:

$$\alpha'_1 \equiv \beta_1 \not\equiv \beta_2 \quad \text{und} \quad \alpha'_2 \equiv \beta_4 \not\equiv \beta_3 ; \quad (4.45)$$

$$\alpha'_1 \equiv \beta_2 \not\equiv \beta_1 \quad \text{und} \quad \alpha'_2 \equiv \beta_3 \not\equiv \beta_4 . \quad (4.46)$$

Sei nun  $z_a$  eine einfache  $a$ -Stelle von  $f$  und eine doppelte  $a$ -Stelle von  $g$ . Aus Lemma 1.21 und (4.24) erhalten wir dann  $\beta(z_a) = \frac{3aw'(z_a)}{b-a}$ .

Ist nun  $\beta \not\equiv \frac{3aw'}{b-a}$ , so folgt aus (4.45), (4.41), Lemma 4.15, (4.16), Lemma 4.8 und Lemma 4.14 die Abschätzung

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\beta - \frac{3aw'}{b-a}} \right) + \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha'_2 - \beta_3} \right) \leq S(r) ,$$

was (4.2) widerspricht.

Also gilt  $\beta \equiv \frac{3aw'}{b-a}$ .

Betrachten wir eine  $b$ -Stelle, die für  $f$  doppelt und für  $g$  einfach ist, so folgt analog  $\beta \equiv \frac{3bw'}{a-b}$ .

Also gilt mit  $(a+b)w' \equiv 0$  ein Widerspruch.

Also kann der ganze Fall (4.45) nicht gelten.

Analog folgt, daß Fall (4.46) nicht gelten kann, womit insgesamt der 1. Fall nicht gilt.

Im 2. Fall sei nun  $\alpha_1 \not\equiv \frac{w''}{w'} + \frac{bw'}{b-a}$  und  $\alpha_2 \not\equiv \frac{w''}{w'} + \frac{aw'}{a-b}$ .

Aus Lemma 4.10 a) und c), Lemma 4.8 und Lemma 2.15 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) &\leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha_1 - \frac{w''}{w'} - \frac{bw'}{b-a}} \right) + \overline{N} \left( r, \frac{1}{\alpha_2 - \frac{w''}{w'} - \frac{aw'}{a-b}} \right) + S(r) \\ &\leq S(r) , \end{aligned}$$

was (4.2) widerspricht. Deswegen gilt

$$\text{entweder } \alpha_1 \equiv \frac{w''}{w'} + \frac{bw'}{b-a} \text{ oder } \alpha_2 \equiv \frac{w''}{w'} + \frac{aw'}{a-b}. \quad (4.47)$$

Aus Lemma 4.10 b) und d) und (4.2) ergibt sich analog

$$\text{entweder } \alpha_1 \equiv \frac{w''}{w'} + \frac{aw'}{a-b} \text{ oder } \alpha_2 \equiv \frac{w''}{w'} + \frac{bw'}{b-a}. \quad (4.48)$$

Wegen Lemma 4.11 gilt  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Damit liefern  $a + b \neq 0$ , (4.47) und (4.48) einen Widerspruch. Also kann auch der 2. Fall nicht gelten.

Da wir gezeigt haben, daß beide Fälle nicht gelten können, bedeutet dies, daß schon unsere Annahme, daß entweder  $a$  oder  $b$  nicht "CM" geteilt wird, falsch gewesen sein muß. Dies beweist die Behauptung, daß alle  $q$  Werte CM geteilt werden.





# Kapitel 5

## Sätze mit dem Teilungsindex

Der nächste Schritt bei der Herleitung von Satz 3.5 unter noch schwächeren Voraussetzungen ist es, den Teilungsindex aus Definition 2.6 ins Spiel zu bringen. Damit kann Satz 4.1 auf die folgenden Weisen verallgemeinert werden. Zunächst behält man analog zu [13] für einen der geteilten Werte die Bedingung, daß er "CM" geteilt wird, und stellt an einen zweiten Wert die Bedingung, daß sein Teilungsindex größer als  $\frac{2}{3}$  ist.

### Satz 5.1

*Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.*

*Teilen sie davon den Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  "CM" und den Wert  $b \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$  unter der Bedingung  $\tau(b) > \frac{2}{3}$ , so teilen sie alle  $q$  Werte CM.*

Die zweite Verallgemeinerungsmöglichkeit ist es, an beide Werte eine Bedingung für den Teilungsindex zu stellen. Im Vergleich zu Satz 5.1 wird dabei analog zu [21] einer der Teilungsindizes größer und der andere kleiner (, da für den "CM"-geteilten Wert der Teilungsindex ja gleich Eins ist), so daß man bei der Bedingung landet, daß beide größer als  $\frac{4}{5}$  sein sollen.

### Satz 5.2

*Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.*

*Sind  $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$  zwei dieser Werte und gelten die Bedingungen  $\tau(a) > \frac{4}{5}$  und  $\tau(b) > \frac{4}{5}$ , so teilen  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM.*

Eine weitere Verallgemeinerungsmöglichkeit ist es, die Abhängigkeit der Teilungsindizes voneinander zu untersuchen. Dabei kommt eine geometrische Interpretationsmöglichkeit zum Vorschein. Beide Teilungsindizes "leben" im abgeschlossenen Einheitsquadrat der  $(\tau(a), \tau(b))$ -Ebene, wobei die Symmetrie in der Wahl von  $a$  und  $b$  bewirkt, daß alle zu betrachtenden Mengen symmetrisch zur Winkelhalbierenden sind. Satz 4.1 und seine Verallgemeinerungen liefern nun Mengen in dieser Ebene, in denen die Folgerungen von Satz 3.5 gelten. Im Einzelnen heißt dies:

Satz 4.1 liefert mit  $\tau(a) = \tau(b) = 1$  die rechte obere Ecke des Quadrates.

Beispiel 3.6 liefert mit  $\tau(a) = \tau(b) = 0$  die linke untere Ecke des Quadrates, also eine Menge, wo die Folgerungen von Satz 3.5 nicht gelten.

Satz 5.1 liefert zwei Geradenstücke auf dem Rand  $\tau(a) = 1$  bzw.  $\tau(b) = 1$  des Quadrates.

Satz 5.2 liefert ein halboffenes Quadrat mit den Ecken  $(1, \frac{4}{5})$ ,  $(1, 1)$ ,  $(\frac{4}{5}, 1)$  und  $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ .

Wie in [22] ist es nun möglich, die Punkte  $(\frac{2}{3}, 1)$  und  $(1, \frac{2}{3})$  aus Satz 5.1 und den Punkt  $(\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$  aus Satz 5.2 durch die Hyperbel

$$\tau(b) = \frac{2 \cdot \tau(a)}{5 \cdot \tau(a) - 2}$$

zu verbinden. Daß für alle Punkte, die oberhalb des Graphen dieser Hyperbel liegen, auch die

Folgerungen von Satz 3.5 gelten, liefert der folgende Satz.

**Satz 5.3**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Sind  $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$  zwei dieser Werte und gelten die Bedingungen  $\tau(a) > \frac{2}{3}$  und  $\tau(b) > \frac{2 \cdot \tau(a)}{5 \cdot \tau(a) - 2}$ , so teilen  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM.

## 5.1 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.1

**Lemma 5.4**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gehören die Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu den  $q$  geteilten Werten und wird der Wert  $\infty$  "CM" geteilt, so genügt die Hilfsfunktion

$$\alpha = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

der Bedingung

$$T(r, \alpha) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r),$$

falls  $\alpha \neq 0$  gilt.

**Beweis:**

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt offensichtlich  $m(r, \alpha) = S(r)$ . Da  $\infty$  "CM" geteilt wird, hat  $\alpha$  in den Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen. In einer "CM" geteilten Nullstelle von  $f$  und  $g$  hat  $\alpha$  ebenfalls keine Polstelle, da sich die Residuen wegheben. Damit gilt

$$N(r, \alpha) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right),$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Lemma 5.5**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gehören die Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu den  $q$  geteilten Werten und wird der Wert  $\infty$  "CM" geteilt, so genügt die Hilfsfunktion

$$\delta = \frac{f''}{f'} - \left( \frac{f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( \frac{g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) \right\}$$

der Bedingung

$$T(r, \delta) = S(r),$$

falls  $\delta \neq 0$ .

**Beweis:**

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt  $m(r, \delta) = S(r)$ .

Ist  $f(z^*) = g(z^*) = 0, 1$  oder  $c$ , so haben der  $f$ -Teil und der  $g$ -Teil von  $\delta$  jeweils eine einfache Polstelle mit dem Residuum  $-1$ . Da sich diese Residuen wegheben, besitzt  $\delta$  in  $z^*$  keine Polstelle.

Analog folgt, daß  $\delta$  in allen Polstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstelle hat, da  $\infty$  "CM" geteilt wird. Damit kann  $\delta$  nur dort Polstellen haben, wo  $f'$  oder  $g'$  Nullstellen haben, die Werte 0, 1 oder  $c$  von  $f$  und  $g$  aber nicht angenommen werden. Nach Lemma 2.13 ist die Anzahlfunktion dieser Stellen ein  $S(r)$ . Damit gilt auch  $N(r, \delta) = S(r)$ .

Zusammen folgt die Behauptung.  $\square$

Die in Lemma 2.21, Lemma 5.4 und Lemma 5.5 definierten Hilfsfunktionen haben in einfachen Null- und Polstellen von  $f$  und  $g$  folgende Eigenschaften.

**Lemma 5.6**

Ist  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$ , so gilt

$$\psi(z_0) = \frac{(f'(z_0) - g'(z_0))^2}{c^2}$$

und

$$(\delta - \alpha)(z_0) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) (f'(z_0) - g'(z_0)) .$$

Ist  $z_\infty$  eine einfache Polstelle von  $f$  und  $g$ , so daß  $f$  und  $g$  die Laurent-Entwicklungen

$$f(z) = \frac{\varrho}{z - z_\infty} + A + O(z - z_\infty)$$

und

$$g(z) = \frac{\sigma}{z - z_\infty} + B + O(z - z_\infty)$$

haben, dann gilt

$$\psi(z_\infty) = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}\right)^2 ,$$

$$\delta(z_\infty) = -3 \left(\frac{A}{\varrho} - \frac{B}{\sigma}\right) + (1 + c) \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma}\right)$$

und

$$\alpha(z_\infty) = \frac{A}{\varrho} - \frac{B}{\sigma} .$$

**Beweis:**

Durch elementares Rechnen mit Taylor- und Laurent-Entwicklungen wie in Lemma 1.21.  $\square$

## 5.2 Beweis von Satz 5.1

Wir nehmen an, daß 0, 1,  $\infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  vier der geteilten Werte sind, wobei  $\infty$  derjenige Wert ist, der "CM" geteilt wird, und 0 derjenige mit  $\tau(0) > \frac{2}{3}$ . Nach Lemma 2.17 gilt

$$N(r, f) = \overline{N}(r, f) + S(r) .$$

Definieren wir mit den Hilfsfunktionen aus Lemma 2.21, 5.4 und 5.5 die Funktionen

$$\beta = (3\alpha + \delta)^2 - (1 + c)^2\psi \quad , \quad \gamma = (\delta - \alpha)^2 - (1 + c)^2\psi ,$$

so sind vier Fälle zu unterscheiden:

**Fall 1:**  $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$

Aus Lemma 5.6 folgt  $\gamma(z_0) = 0$  für eine einfache Nullstelle  $z_0$  von  $f$  und  $g$ . Ferner gilt

$$\begin{aligned} \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) - S(r) &\leq T(r, (\delta - \alpha)^2 - (1 + c)^2 \psi) + O(1) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \alpha) + S(r) \\ &= 2 \cdot \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - 2 \cdot \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r) \end{aligned} \quad (5.1)$$

nach Lemma 2.22, Lemma 5.5 und Lemma 5.4. Mit  $\tau(0) > \frac{2}{3}$  folgt daraus

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

und damit

$$T(r, \alpha) = S(r). \quad (5.2)$$

Hat  $f$  gar keine einfachen Nullstellen, so haben wir  $\overline{N}(r, \alpha) = S(r)$  nach Lemma 5.4, womit (5.2) auch gültig ist.

Aus Lemma 5.6 folgt  $\beta(z_\infty) = 0$  in einfachen Polstellen  $z_\infty$  von  $f$  und  $g$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, f) - S(r) &\leq T(r, (3\alpha + \delta)^2 - (1 + c)^2 \psi) + O(1) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \alpha) + S(r) \\ &= S(r) \end{aligned}$$

nach Lemma 2.22, Lemma 5.5, Lemma 5.4 und (5.2). Die Abschätzung bleibt nach Lemma 5.4 auch dann wahr, wenn  $f$  gar keine einfachen Polstellen hat.

Da die Null- und Polstellen Picardsche Ausnahmewerte sind, also "CM" geteilt werden, folgt die Behauptung aus Satz 4.1.

**Fall 2:**  $\beta \neq 0, \gamma \equiv 0$

Für  $\gamma \equiv 0$  folgt

$$T(r, \alpha) = S(r)$$

aus Lemma 2.22 und Lemma 5.5. Damit folgt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

aus Lemma 5.4. Dies bedeutet, daß die Nullstellen "CM" geteilt werden. Da auch die Polstellen nach Voraussetzung "CM" geteilt werden, folgt die Behauptung aus Satz 4.1.

**Fall 3:**  $\beta \equiv 0, \gamma \neq 0$

Für  $\beta \equiv 0$  folgt

$$T(r, \alpha) = S(r)$$

aus Lemma 2.22 und Lemma 5.5. Damit folgt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

aus Lemma 5.4. Dies bedeutet, daß die Nullstellen "CM" geteilt werden. Da auch die Polstellen nach Voraussetzung "CM" geteilt werden, folgt die Behauptung aus Satz 4.1.

**Fall 4:**  $\beta \equiv 0, \gamma \equiv 0$

Durch Gleichsetzen folgt  $\alpha(\alpha + \delta) \equiv 0$ .

Ist  $\alpha \equiv 0$ , so werden alle  $q$  Werte CM geteilt.

Ist  $\alpha + \delta \equiv 0$ , so folgt durch Integration

$$\frac{f'}{(f-1)(f-c)} = \lambda \cdot \frac{g'}{(g-1)(g-c)}$$

mit einer Konstanten  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Werden o.B.d.A. die Einsstellen nicht "CM" geteilt, so muß  $\lambda = \frac{k}{m}$  mit  $k, m \in \mathbb{N}, k \neq m$  gelten. Eine weitere Integration ergibt

$$\left(\frac{f-1}{f-c}\right)^m = D \cdot \left(\frac{g-1}{g-c}\right)^k$$

mit einer Konstanten  $D \in \mathbb{C}^*$ . Aus Satz 1.8 folgt damit  $m \cdot T(r, f) = k \cdot T(r, g) + O(1)$ , und da wegen  $f, g \in \mathcal{G}$  die Bedingung

$$T(r, f) = T(r, g) = \frac{1}{q-4} \log \frac{1}{1-r}$$

gilt, folgt  $m = k$ , d.h.  $\lambda = 1$  im Widerspruch zur Annahme des Nicht-"CM"-Teils.

Da es also zwei Werte gibt, die "CM" geteilt werden, werden nach Satz 4.1 alle  $q$  Werte CM geteilt.

Da in allen vier Fällen alle  $q$  Werte CM geteilt werden, ist die Behauptung bewiesen.

## 5.3 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.2

### Lemma 5.7

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gehören die Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu den  $q$  geteilten Werten und sind für

$$A = \frac{f'f(g-1)(g-c)}{g'g(f-1)(f-c)} \quad \text{und} \quad B = \frac{f'g(g-1)(g-c)}{g'f(f-1)(f-c)}$$

die Hilfsfunktionen  $G$  und  $H$  durch

$$G = \frac{A'}{A} \quad \text{und} \quad H = \frac{B'}{B}$$

definiert, so genügen diese den Bedingungen

$$T(r, G) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r)$$

$$T(r, H) = \overline{N}(r, f) - \overline{N}_E(r, f) + S(r),$$

falls  $G \neq 0$  bzw.  $H \neq 0$  gilt.

### Beweis:

Da  $G$  und  $H$  symmetrisch sind, beweisen wir exemplarisch die Aussage für  $G$ .

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt  $m(r, G) = S(r)$ . Mit Lemma 1.23 gilt weiter

$$N(r, G) = \overline{N}(r, A) + \overline{N} \left( r, \frac{1}{A} \right).$$

In Pol-, Eins- oder  $c$ -Stellen von  $f$  und  $g$  hat  $A$  weder Null- noch Polstellen. Ferner hat  $A$  keine Null- oder Polstelle in denjenigen Nullstellen, die  $f$  und  $g$  mit gleicher Vielfachheit teilen. Damit kann  $A$  nur dort Null- und Polstellen haben, wo  $f$  und  $g$  Nullstellen mit verschiedenen Vielfachheiten teilen und wo  $f'$  oder  $g'$  Nullstellen haben, aber keiner der geteilten Werte angenommen wird. Also gilt

$$\begin{aligned} N(r, G) &= \overline{N}(r, A) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{A}\right) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{f'}\right) + \overline{N}_0\left(r, \frac{1}{g'}\right) \\ &= \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r) \end{aligned}$$

nach Lemma 2.13. □

Die in Lemma 5.7 definierten Hilfsfunktionen haben in einfachen Null- und Polstellen von  $f$  und  $g$  folgende Eigenschaften.

**Lemma 5.8**

*Ist  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$ , so gilt*

$$G(z_0) = \frac{3}{2} \left( \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{g''(z_0)}{g'(z_0)} \right) + \left( 1 + \frac{1}{c} \right) (f'(z_0) - g'(z_0))$$

und

$$H(z_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{g''(z_0)}{g'(z_0)} \right) + \left( 1 + \frac{1}{c} \right) (f'(z_0) - g'(z_0)) .$$

*Ist  $z_\infty$  eine einfache Polstelle von  $f$  und  $g$ , so daß  $f$  und  $g$  die Laurent-Entwicklungen*

$$f(z) = \frac{\varrho}{z - z_\infty} + A + O(z - z_\infty)$$

und

$$g(z) = \frac{\sigma}{z - z_\infty} + B + O(z - z_\infty)$$

*haben, dann gilt*

$$G(z_\infty) = (1 + c) \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} \right) - \left( \frac{A}{\varrho} - \frac{B}{\sigma} \right)$$

und

$$H(z_\infty) = (1 + c) \left( \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sigma} \right) - 3 \left( \frac{A}{\varrho} - \frac{B}{\sigma} \right) .$$

**Beweis:**

Durch elementares Rechnen mit Taylor- und Laurent-Entwicklungen wie in Lemma 1.21. □

## 5.4 Beweis von Satz 5.2

Wir nehmen an, daß  $0, 1, \infty$  und  $c$  vier der geteilten Werte sind und daß  $\tau(0) > \frac{4}{5}$  und  $\tau(\infty) > \frac{4}{5}$  gilt.

Zunächst dürfen wir annehmen, daß  $G \not\equiv 0$  und  $H \not\equiv 0$  für die Hilfsfunktionen  $G$  und  $H$  aus Lemma 5.7 gilt.

Denn wäre  $G \equiv 0$ , so hätten wir  $A \equiv C$  mit konstantem  $C \in \mathbb{C}^*$ , d.h.

$$\frac{f'f(g-1)(g-c)}{g'g(f-1)(f-c)} \equiv C,$$

was zeigt, daß der Wert 0 CM geteilt wird.

Da damit ein Wert CM und ein zweiter mit einem Teilungsindex, der größer als  $\frac{2}{3}$  ist, geteilt werden, folgt die Behauptung aus Satz 5.1.

Analog folgt die Behauptung, falls  $H \equiv 0$  vorausgesetzt wird.

Die Entwicklungen der Hilfsfunktionen  $\psi$ ,  $G$  und  $H$  in einfachen Null- und Polstellen von  $f$  und  $g$  (vgl. Lemma 5.8) legen nahe, mit den Hilfsfunktionen

$$\begin{aligned}\beta &= (3G - H)^2 - 4(1 + c)^2\psi, \\ \gamma &= (3H - G)^2 - 4(1 + c)^2\psi\end{aligned}$$

weiterzuarbeiten. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

**Fall 1:**  $\beta \not\equiv 0$  und  $\gamma \not\equiv 0$

In diesem Fall haben wir vier Unterfälle bezüglich der Existenz von  $z_0$  und  $z_\infty$  zu unterscheiden:

**Unterfall (i):** Es gibt sowohl Punkte  $z_0$  als auch Punkte  $z_\infty$ .

Aus den Entwicklungen der Hilfsfunktionen folgt  $\gamma(z_0) = 0$  und  $\beta(z_\infty) = 0$ . Damit folgen

$$\begin{aligned}\overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) - S(r) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\gamma}\right) \\ &\leq T(r, \gamma) \\ &= 2 \cdot T(r, G) + 2 \cdot T(r, H) + S(r)\end{aligned}\tag{5.3}$$

und

$$\begin{aligned}\overline{N}_E(r, f) - S(r) &\leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{\beta}\right) \\ &\leq T(r, \beta) \\ &= 2 \cdot T(r, G) + 2 \cdot T(r, H) + S(r)\end{aligned}$$

mit Lemma 2.15 und Lemma 2.21. Mit Lemma 5.7 folgt durch Addition dieser Abschätzungen

$$\begin{aligned}\overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) + \overline{N}_E(r, f) &\leq 4 \cdot T(r, G) + 4 \cdot T(r, H) + S(r) \\ &= 4 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + 4 \cdot \overline{N}(r, f) - 4 \cdot \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) - 4 \cdot \overline{N}_E(r, f) + S(r),\end{aligned}$$

d.h.

$$5 \cdot \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) + 5 \cdot \overline{N}_E(r, f) \leq 4 \cdot \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) + 4 \cdot \overline{N}(r, f) + S(r). \quad (5.4)$$

Mit  $\tau(0) > \frac{4}{5}$  und  $\tau(\infty) > \frac{4}{5}$  folgt daraus

$$\overline{N}(r, f) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r).$$

**Unterfall (ii):** Es gibt Punkte  $z_0$ , aber keine Punkte  $z_\infty$ .

Gibt es keine Punkte  $z_\infty$ , so gilt  $\overline{N}_{E \leq 1}(r, f) = 0$ .

Deswegen folgt

$$\overline{N}_E(r, f) = \overline{N}_{E \leq 1}(r, f) + \overline{N}_{E \geq 2}(r, f) = S(r)$$

aus Lemma 2.15, und die Bedingung  $\tau(\infty) > 0$  liefert  $\overline{N}(r, f) = S(r)$ .

Nach Lemma 5.7 gilt  $T(r, H) = S(r)$  in diesem Unterfall, und mit (5.3) folgt

$$3 \cdot \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) \leq 2 \cdot \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r),$$

so daß wegen  $\tau(0) > \frac{4}{5}$  auch

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

gilt. Somit haben wir auch in diesem Unterfall

$$\overline{N}(r, f) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

gezeigt.

**Unterfall (iii):**  $z_\infty$  existiert, während  $z_0$  nicht existiert.

Analog zu Unterfall (ii) können wir auch hier

$$\overline{N}(r, f) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

herleiten.

**Unterfall (iv):** Es gibt weder Punkte  $z_0$  noch Punkte  $z_\infty$ .

Analog zur ersten Hälfte von Unterfall (ii) erhalten wir

$$\overline{N}_E(r, f) = \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r),$$

woraus

$$\overline{N}(r, f) = \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$$

wegen  $\tau(0) > 0$  und  $\tau(\infty) > 0$  folgt.



Insgesamt folgt in Fall 1 also immer

$$\overline{N}(r, f) = \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r) .$$

Dies bedeutet, daß zwei Werte "CM" geteilt werden, so daß aus Satz 4.1 folgt, daß alle  $q$  Werte CM geteilt werden.

**Fall 2:**  $\beta \equiv 0$

Aus der Definition von  $\beta$  folgt in diesem Fall

$$\left(\frac{D'}{D}\right)^2 = 4(1+c)^2\psi , \quad (5.5)$$

wobei  $D = \frac{A^3}{B}$ , d.h.

$$D = \frac{(f')^2 f^4 (g-1)^2 (g-c)^2}{(g')^2 g^4 (f-1)^2 (f-c)^2}$$

gilt. Weil  $\psi$  holomorph ist, folgt

$$D = e^\alpha$$

aus (5.5), d.h.

$$\frac{(f')^2 f^4 (g-1)^2 (g-c)^2}{(g')^2 g^4 (f-1)^2 (f-c)^2} = e^\alpha \quad (5.6)$$

mit einer holomorphen Funktion  $\alpha$ .

Der Gleichung (5.6) sieht man leicht an, daß  $f$  und  $g$  die Werte 0 und  $\infty$  CM teilen. Deswegen folgt die Behauptung aus Satz 4.1.

**Fall 3:**  $\gamma \equiv 0$

Analog zu Fall 2 können wir hier

$$\frac{B^3}{A} = e^\delta ,$$

d.h.

$$\frac{(f')^2 g^4 (g-1)^2 (g-c)^2}{(g')^2 f^4 (f-1)^2 (f-c)^2} = e^\delta \quad (5.7)$$

mit einer holomorphen Funktion  $\delta$  herleiten. Gleichung (5.7) zeigt, daß  $f$  und  $g$  die Werte 0 und  $\infty$  CM teilen, womit die Behauptung aus Satz 4.1 folgt.

Damit ist die Behauptung in allen drei Fällen bewiesen.

## 5.5 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 5.3

### Lemma 5.9

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gehören die Werte  $0, 1, \infty$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu den  $q$  geteilten Werten, so erfüllen die Hilfsfunktionen

$$\alpha = \left\{ \frac{f''}{f'} - \left( 2 \cdot \frac{f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) \right\} - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( 2 \cdot \frac{g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) \right\}$$

und

$$\beta = \left\{ \frac{f''}{f'} - \left( (-2) \cdot \frac{f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) \right\} - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( (-2) \cdot \frac{g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) \right\}$$

die Abschätzungen

$$T(r, \alpha) \leq \bar{N}_1(r, f) + \bar{N}_1\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r)$$

$$T(r, \beta) \leq \bar{N}_1(r, f) + \bar{N}_1\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r),$$

falls  $\alpha \not\equiv 0$  bzw.  $\beta \not\equiv 0$  gilt.

### Beweis:

Wir führen den Beweis nur für die Hilfsfunktion  $\alpha$ , da derjenige für die Hilfsfunktion  $\beta$  völlig analog verläuft. Es gilt offensichtlich

$$m(r, \alpha) = S(r)$$

wegen  $f, g \in \mathcal{L}$ .

Nach Definition der Funktion  $\alpha$  könnte diese in Null-, Eins-, Pol- und  $c$ -Stellen von  $f$  und  $g$  Polstellen besitzen. Sei also  $z_1$  eine Einsstelle von  $f$  und  $g$ . Ist diese  $k$ -fach für  $f$  und  $m$ -fach für  $g$ , so lauten dort die Taylor-Entwicklungen

$$f(z) = 1 + b_k(z - z_1)^k + b_{k+1}(z - z_1)^{k+1} + \dots \quad (b_k \neq 0)$$

und

$$g(z) = 1 + c_m(z - z_1)^m + b_{m+1}(z - z_1)^{m+1} + \dots \quad (c_m \neq 0).$$

Setzt man dies in die Definition von  $\alpha$  ein, so folgt

$$\alpha(z) = \left\{ \frac{-1}{z - z_1} + O(1) \right\} - \left\{ \frac{-1}{z - z_1} + O(1) \right\} = O(1)$$

aus Lemma 1.21, also daß  $\alpha$  in Einsstellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen hat.

Analog erhält man, daß  $\alpha$  in  $c$ -Stellen von  $f$  und  $g$  keine Polstellen hat.

Da  $\alpha$  ferner in allen Null- und Polstellen, die für  $f$  und  $g$  die gleiche Vielfachheit haben, nach Lemma 2.17 also für beide Funktionen einfach sind, ebenfalls keine Polstellen hat, folgt die Behauptung, da die einzigen Polstellen von  $\alpha$  in den mehrfachen Null- und Polstellen von  $f$  oder  $g$  liegen können.  $\square$

**Lemma 5.10***Die Hilfsfunktion*

$$\lambda = \alpha^2 - (1+c)^2\psi$$

*hat in einfachen Nullstellen von  $f$  und  $g$  eine Nullstelle.**Die Hilfsfunktion*

$$\mu = \beta^2 - (1+c)^2\psi$$

*hat in einfachen Polstellen von  $f$  und  $g$  eine Nullstelle.***Beweis:**Sei  $z_0$  eine einfache Nullstelle von  $f$  und  $g$ . Dann gelten die Taylor-Entwicklungen

$$f(z) = b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (b_1 \neq 0)$$

und

$$g(z) = c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (c_1 \neq 0).$$

Mit Lemma 1.21 folgt daraus

$$\psi(z_0) = \frac{(b_1 - c_1)^2}{c^2}$$

und

$$\alpha(z_0) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) (b_1 - c_1),$$

also

$$\lambda(z_0) = (\alpha(z_0))^2 - (1+c)^2\psi(z_0) = 0.$$

Sei  $z_\infty$  eine einfache Polstelle von  $f$  und  $g$ . Dann gelten die Laurent-Entwicklungen

$$f(z) = \frac{d_1}{z - z_\infty} + d_0 + O(z - z_\infty) \quad (d_1 \neq 0)$$

und

$$g(z) = \frac{e_1}{z - z_\infty} + e_0 + O(z - z_\infty) \quad (e_1 \neq 0).$$

Mit Lemma 1.21 folgt daraus

$$\psi(z_\infty) = \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{e_1}\right)^2$$

und

$$\beta(z_\infty) = (1+c) \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{e_1}\right),$$

also

$$\mu(z_\infty) = (\beta(z_\infty))^2 - (1+c)^2\psi(z_\infty) = 0.$$

□

Eine offensichtliche Folgerung ist

**Lemma 5.11***Gilt  $c = -1$  in Lemma 5.10, so folgt schon*

$$\alpha(z_0) = 0 \text{ und } \beta(z_\infty) = 0.$$

## 5.6 Beweis von Satz 5.3

Setze o.B.d.A.  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = \infty$ ,  $a_3 = 1$  und  $a_4 = c$ , so daß 0 der Wert ist, für den  $\tau(0) > \frac{2}{3}$  gilt, und  $\infty$  der Wert ist, für den

$$\tau(\infty) > \frac{2 \cdot \tau(0)}{5 \cdot \tau(0) - 2}$$

gilt. Zu unterscheiden sind drei Fälle.

**Fall 1:**  $\lambda \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$

Für  $\lambda \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{\lambda}\right) \\ &\leq T(r, \lambda) + O(1) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \alpha) + T(r, \psi) + O(1) \end{aligned}$$

nach Lemma 5.10. Aus Lemma 2.17, Lemma 2.21 und Lemma 5.9 folgt damit

$$\begin{aligned} \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq 2 \cdot T(r, \alpha) + T(r, \psi) + S(r) \\ &= 2 \cdot T(r, \alpha) + S(r) \\ &\leq 2 \cdot \overline{N}(r, f) - 2 \cdot \overline{N}_E(r, f) + 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - 2 \cdot \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r), \end{aligned}$$

also

$$3 \cdot \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) - 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2 \cdot \overline{N}(r, f) - 2 \cdot \overline{N}_E(r, f) + S(r).$$

Klammert man auf der linken Seite  $3 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$  und auf der rechten Seite  $2 \cdot \overline{N}(r, f)$  aus (Wegen  $\tau(0) > \frac{2}{3}$  wird nicht durch Null dividiert.), so erhält man

$$3 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \cdot \left(\frac{\overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)} - \frac{2}{3}\right) \leq 2 \cdot \overline{N}(r, f) \cdot \left(1 - \frac{\overline{N}_E(r, f)}{\overline{N}(r, f)}\right) + S(r).$$

Für  $r \rightarrow 1-$  ergibt sich

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{2 \cdot (1 - \tau(\infty))}{3 \cdot (\tau(0) - \frac{2}{3})} \overline{N}(r, f) + S(r). \quad (5.8)$$

Für  $\mu \neq 0$  erhält man analog

$$\overline{N}(r, f) \leq \frac{2 \cdot (1 - \tau(0))}{3 \cdot (\tau(\infty) - \frac{2}{3})} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r). \quad (5.9)$$

Setzt man (5.9) in (5.8) ein, so folgt

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{4 \cdot (1 - \tau(\infty))(1 - \tau(0))}{9 \cdot (\tau(\infty) - \frac{2}{3})(\tau(0) - \frac{2}{3})} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r).$$

Für  $\tau(\infty) > \frac{2 \cdot \tau(0)}{5 \cdot \tau(0) - 2}$  gilt

$$\frac{4 \cdot (1 - \tau(\infty))(1 - \tau(0))}{9 \cdot \left(\tau(\infty) - \frac{2}{3}\right) \left(\tau(0) - \frac{2}{3}\right)} < 1,$$

woraus  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$  folgt.

Analog erhält man  $\overline{N}(r, f) = S(r)$ , wenn man (5.8) in (5.9) einsetzt. Da es also mit 0 und  $\infty$  zwei Werte gibt, die "CM" geteilt werden, folgt aus Satz 4.1, daß alle  $q$  Werte CM geteilt werden.

**Fall 2:**  $\lambda \equiv 0$

Dann gilt  $\alpha^2 \equiv (1 + c)^2 \psi$ . Da  $\alpha$  die logarithmische Ableitung der Hilfsfunktion

$$\delta = \frac{f' g^2 (g - 1)(g - c)}{g' f^2 (f - 1)(f - c)}$$

und  $\psi$  holomorph ist, sind 0 und  $\infty$  Picardsche Ausnahmewerte von  $\delta$ . Es gibt also eine holomorphe Funktion  $G$  mit

$$\frac{f' g^2 (g - 1)(g - c)}{g' f^2 (f - 1)(f - c)} = e^G,$$

woraus folgt, daß  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM teilen.

**Fall 3:**  $\mu \equiv 0$

Dann gilt  $\beta^2 \equiv (1 + c)^2 \psi$ . Da  $\beta$  die logarithmische Ableitung der Hilfsfunktion

$$\zeta = \frac{f' f^2 (g - 1)(g - c)}{g' g^2 (f - 1)(f - c)}$$

und  $\psi$  holomorph ist, sind 0 und  $\infty$  Picardsche Ausnahmewerte von  $\zeta$ . Es gibt also eine holomorphe Funktion  $H$  mit

$$\frac{f' f^2 (g - 1)(g - c)}{g' g^2 (f - 1)(f - c)} = e^H,$$

woraus folgt, daß  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM teilen.

Damit ist die Behauptung in allen drei Fällen bewiesen. □

**Bemerkung:**

Yi und Zhou verwenden in [22] die Aussage

"Teilen zwei in  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktionen vier Werte (o.B.d.A. 0, 1,  $\infty$  und  $c$ ) unter den Bedingungen

$$\overline{N}(r, f) = S(r) \text{ und } \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r),$$

so teilen sie alle vier Werte CM.",

die sie mühevoll beweisen. Offensichtlich haben sie nicht bemerkt, daß ihre Bedingungen implizieren, daß die Werte 0 und  $\infty$  "CM" geteilt werden, so daß dieselbe Behauptung aus dem 2-2-Satz von Gundersen (vgl. [6] und die Bemerkung auf S. 103/4 in [7]) folgt.

Die Aussage von Yi und Zhou entspricht jedoch der schon im Beweis von Satz 4.1 verwendeten Aussage, daß bereits das Vorhandensein von zwei Picardschen Ausnahmewerten das CM-Teilen aller  $q$  Werte impliziert.

## 5.7 Verbesserungen der Sätze bei bekanntem Doppelverhältnis

Die Sätze 5.1 bis 5.3 können für kleinere Teilungsindizes bewiesen werden, sobald bekannt ist, daß es unter den geteilten Werten ein Quadrupel gibt, so daß für eine geeignete Permutation dieser vier Werte das Doppelverhältnis den Wert  $-1$  hat. Damit kann Satz 5.1 verbessert werden zu

### Satz 5.12

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gibt es unter den  $q$  Werten vier Werte, so daß eine geeignete Permutation dieser vier Werte das Doppelverhältnis  $-1$  hat, wird von diesen vier Werten der Wert  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$  "CM" geteilt und erfüllt von ihnen der Wert  $b \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\}$  die Bedingung  $\tau(b) > \frac{1}{2}$ , so teilen  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM.

### Beweis:

Die Voraussetzung ist z.B. erfüllt, wenn  $0, 1$  und  $\infty$  drei der vier Werte sind und  $c = -1$  gewählt wird. Mit dieser Wahl verschwindet die Hilfsfunktion  $\delta - \alpha$  in den Punkten  $z_0$  aus Lemma 5.6. Damit kann man in Fall 1 des Beweises von Satz 5.1 die Anzahlfunktion  $\overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right)$  durch  $N\left(r, \frac{1}{\delta - \alpha}\right)$  statt durch  $N\left(r, \frac{1}{\gamma}\right)$  nach oben abschätzen, so daß am Ende der Ungleichungskette (5.1) auf der rechten Seite der Faktor 1 statt 2 steht. Dies genügt, um mit  $\tau(0) > \frac{1}{2}$  die gewünschte Eigenschaft

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$$

herzuleiten. □

Die Verbesserung von Satz 5.2 lautet

### Satz 5.13

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gibt es unter den  $q$  Werten vier Werte, so daß eine geeignete Permutation dieser vier Werte das Doppelverhältnis  $-1$  hat, und sind  $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$  zwei dieser vier Werte, die den Bedingungen  $\tau(a) > \frac{2}{3}$  und  $\tau(b) > \frac{2}{3}$  genügen, so werden alle  $q$  Werte CM geteilt.

### Beweis:

Wir nehmen an, daß  $0, \infty$  und  $1$  drei der geteilten Werte sind, so daß z.B. die Wahl  $c = -1$  die Voraussetzung liefert, und daß  $\tau(0) > \frac{2}{3}$  und  $\tau(\infty) > \frac{2}{3}$  gilt. Damit folgt bereits

$$(3H - G)(z_0) = 0 \text{ und } (3G - H)(z_\infty) = 0$$

für die Funktionen aus Lemma 5.7. In Fall 1 haben wir deswegen

$$3 \cdot \overline{N}_E(r, f) + 3 \cdot \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq 2 \cdot \overline{N}(r, f) + 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r)$$

anstelle von (5.4), was genügt, um schon aus den Bedingungen  $\tau(0) > \frac{2}{3}$  und  $\tau(\infty) > \frac{2}{3}$  herzuleiten, daß die Werte  $0$  und  $\infty$  "CM" geteilt werden. Der Rest des Beweises von Satz 5.2 kann dann übernommen werden. □

Die Verbesserung von Satz 5.3 lautet

**Satz 5.14**

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gibt es unter den  $q$  Werten vier Werte, so daß eine geeignete Permutation dieser vier Werte das Doppelverhältnis  $-1$  hat, und sind  $a, b \in \widehat{\mathbb{C}}$  zwei dieser vier Werte, die den Bedingungen  $\tau(a) > \frac{1}{2}$  und  $\tau(b) > \frac{\tau(a)}{3 \cdot \tau(a) - 1}$  genügen, so werden alle  $q$  Werte CM geteilt.

**Beweis:**

Soll für die vier Werte  $0, \infty, 1$  und  $c$  ein Doppelverhältnis  $-1$  sein, so kann man z.B.  $c = -1$  wählen. Dieselbe Fallunterscheidung wie im Beweis von Satz 5.3 liefert wegen Lemma 5.11 dann

**Fall 1:**  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

Für  $\alpha \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} N\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_1\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq N\left(r, \frac{1}{\alpha}\right) \\ &\leq T(r, \alpha) + O(1) \end{aligned}$$

nach Lemma 5.11. Aus Lemma 2.17 und Lemma 5.9 folgt damit

$$\begin{aligned} \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) &\leq T(r, \alpha) + S(r) \\ &\leq \overline{N}(r, f) - \overline{N}_E(r, f) + \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r), \end{aligned}$$

also

$$2 \cdot \overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right) - \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \overline{N}(r, f) - \overline{N}_E(r, f) + S(r).$$

Klammert man auf der linken Seite  $2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$  und auf der rechten Seite  $\overline{N}(r, f)$  aus (Wegen  $\tau(0) > \frac{1}{2}$  wird nicht durch Null dividiert.), so erhält man

$$2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \cdot \left(\frac{\overline{N}_E\left(r, \frac{1}{f}\right)}{\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)} - \frac{1}{2}\right) \leq \overline{N}(r, f) \cdot \left(1 - \frac{\overline{N}_E(r, f)}{\overline{N}(r, f)}\right) + S(r).$$

Für  $r \rightarrow 1-$  ergibt sich

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1 - \tau(\infty)}{2 \cdot \tau(0) - 1} \overline{N}(r, f) + S(r). \quad (5.10)$$

Für  $\beta \neq 0$  erhält man analog

$$\overline{N}(r, f) \leq \frac{1 - \tau(0)}{2 \cdot \tau(\infty) - 1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r). \quad (5.11)$$

Setzt man (5.11) in (5.10) ein, so folgt

$$\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{(1 - \tau(\infty))(1 - \tau(0))}{(2 \cdot \tau(\infty) - 1)(2 \cdot \tau(0) - 1)} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r).$$

Für  $\tau(\infty) > \frac{\tau(0)}{3 \cdot \tau(0) - 1}$  gilt

$$\frac{(1 - \tau(\infty))(1 - \tau(0))}{(2 \cdot \tau(\infty) - 1)(2 \cdot \tau(0) - 1)} < 1,$$

woraus  $\overline{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) = S(r)$  folgt.

Analog erhält man  $\overline{N}(r, f) = S(r)$ , wenn man (5.10) in (5.11) einsetzt. Da es also mit 0 und  $\infty$  zwei Werte gibt, die "CM" geteilt werden, folgt aus Satz 4.1, daß alle  $q$  Werte CM geteilt werden.

**Fall 2:**  $\alpha \equiv 0$

Die Integration dieser Bedingung liefert

$$\frac{f'}{f^2(f-1)(f-c)} = A \cdot \frac{g'}{g^2(g-1)(g-c)}$$

mit einer Konstanten  $A \in \mathbb{C}^*$ . Diese Gleichung impliziert, daß  $f$  und  $g$  die Werte 0 und  $\infty$  CM teilen, so daß sie nach Satz 4.1 alle  $q$  Werte CM teilen.

**Fall 3:**  $\beta \equiv 0$

Die Integration dieser Bedingung liefert

$$\frac{f' f^2}{(f-1)(f-c)} = B \cdot \frac{g' g^2}{(g-1)(g-c)}$$

mit einer Konstanten  $B \in \mathbb{C}^*$ . Diese Gleichung impliziert, daß  $f$  und  $g$  die Werte 0 und  $\infty$  CM teilen, so daß sie nach Satz 4.1 alle  $q$  Werte CM teilen.

Damit ist die Behauptung in allen drei Fällen bewiesen. □



# Kapitel 6

## Das "1CM-( $q - 1$ )IM-Problem"

Die bekannten Beispiele für Funktionen in der Ebene, die vier Werte IM, aber keinen davon "CM" teilen, legen die Vermutung nahe, daß zwei Funktionen vier Werte CM teilen, sobald man weiß, daß einer dieser Werte "CM" geteilt wird.

Das "1CM-3IM-Problem" in der Ebene lautet damit, unter möglichst wenigen Zusatzbedingungen herzuleiten, daß zwei Funktionen, die vier Werte teilen, alle vier Werte CM teilen, sobald man weiß, daß einer davon "CM" geteilt wird.

Analog dazu lautet das "1CM-( $q-1$ )IM-Problem" aus dem Titel dieses Kapitels, unter möglichst wenigen Zusatzbedingungen herzuleiten, daß zwei unzulässige Funktionen, die  $q$  Werte teilen, alle  $q$  Werte CM teilen, sobald man weiß, daß einer davon "CM" geteilt wird.

Die Lösung des Problems in der Ebene ist unter der Zusatzbedingung, daß  $\Delta(a, f) < \frac{1}{5}$  für den "CM" geteilten Wert  $a$  gilt, bereits gelungen (vgl. [7]).

Das Analogon dazu für unzulässige Funktionen lautet

### Satz 6.1

*Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.*

*Wird davon der Wert  $a$  "CM" geteilt **und** gilt  $\Delta(a, f) < \frac{q-3}{q+1}$ , so teilen  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM.*

Weiß man also, daß der "CM" geteilte Wert genügend weit davon entfernt ist, ein Picardscher Ausnahmewert zu sein, so werden alle Werte CM geteilt. Offen bleibt in der Ebene der Fall  $\Delta(a, f) \geq \frac{1}{5}$ , wobei man im Fall  $\Delta(a, f) = 1$  nur noch eine Aussage dafür zu finden hat, daß mindestens einer der restlichen Werte nicht DM geteilt wird, da in der Ebene auch der folgende Satz bekannt ist:

"Zwei verschiedene ganze Funktionen, die drei endliche Werte teilen, können nicht alle dieser drei Werte DM teilen" (vgl. [12]).

Da der Picardsche Ausnahmewert  $\infty$  durch eine Möbius-Transformation auf einen beliebigen endlichen Wert abgebildet werden kann und sich dadurch nach Lemma 2.2 nichts am Teilungsverhalten der Funktionen ändert, bedeutet dies für beliebige verschiedene meromorphe Funktionen, daß das 1CM-3IM-Problem auch in diesem Fall gelöst ist, da gezeigt wurde, daß dieser Fall gar nicht eintreten kann.

Das Analogon dazu für unzulässige Funktionen lautet

### Satz 6.2

*Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q - 1$  endliche Werte teilen.*

*Dann teilen sie nicht alle  $q - 1$  Werte DM.*

## 6.1 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 6.1

### Lemma 6.3

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Gehören die vier Werte  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  und  $\infty$  zu den geteilten Werten, so genügt die Hilfsfunktion

$$\phi = \frac{f'g'(f-g)^2}{(f-a_1)(f-a_2)(f-a_3)(g-a_1)(g-a_2)(g-a_3)}$$

der Bedingung

$$T(r, \phi) = S(r).$$

### Beweis:

Für  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  und  $a_3 = c$  ist dies die Hilfsfunktion  $\psi$  aus Lemma 2.21, dessen Beweis nach diesen Bezeichnungsänderungen wörtlich übertragen werden kann.  $\square$

### Lemma 6.4

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Wird davon der Wert  $\infty$  "CM" geteilt, so erfüllt die Hilfsfunktion

$$\Omega = \frac{f'}{f-a} - \frac{g'}{g-a}$$

für jeden anderen geteilten Wert  $a \in \mathbb{C}$  die Abschätzung

$$T(r, \Omega) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right) + S(r).$$

### Beweis:

Wegen  $f, g \in \mathcal{L}$  gilt

$$m(r, \Omega) = S(r).$$

Da der Wert  $\infty$  "CM" geteilt wird, kann  $\Omega$  nur in den  $a$ -Stellen von  $f$  und  $g$  Polstellen besitzen, so daß

$$N(r, \Omega) \leq \overline{N} \left( r, \frac{1}{f-a} \right)$$

und damit die Behauptung folgt.  $\square$

### Lemma 6.5

Gegeben seien zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q$  Werte teilen.

Werden davon der Wert  $\infty$  "CM" und die Werte  $a_1, a_2$  und  $a_3$  IM geteilt, so genügt die Hilfsfunktion

$$\psi = \frac{f''}{f'} - \left( \frac{f'}{f-a_1} + \frac{f'}{f-a_2} + \frac{f'}{f-a_3} \right) - \left\{ \frac{g''}{g'} - \left( \frac{g'}{g-a_1} + \frac{g'}{g-a_2} + \frac{g'}{g-a_3} \right) \right\}$$

der Bedingung

$$T(r, \psi) = S(r),$$

falls  $\psi \neq 0$  gilt.

### Beweis:

Für  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 1$  und  $a_3 = c$  ist dies die Hilfsfunktion  $\delta$  aus Lemma 5.5, aus dessen Beweis nach diesen Bezeichnungsänderungen die Behauptung folgt, da wir verlangen, daß der Wert  $\infty$  "CM" geteilt wird.  $\square$

## 6.2 Beweis von Satz 6.1

Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß der Wert  $\infty$  "CM" geteilt wird. Sei  $z_\infty$  eine einfache Polstelle von  $f$  und  $g$ . Setze

$$\alpha = \operatorname{Res}(f, z_\infty) \quad \text{und} \quad \beta = \operatorname{Res}(g, z_\infty)$$

und betrachte die Laurent-Entwicklungen

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= -\frac{1}{z - z_\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k (z - z_\infty)^k ; \\ \frac{g'(z)}{g(z)} &= -\frac{1}{z - z_\infty} + \sum_{k=0}^{\infty} E_k (z - z_\infty)^k . \end{aligned}$$

um  $z_\infty$ . Mit Lemma 1.21 erhalten wir

$$\Omega(z_\infty) = A_0 - E_0 - a_1 \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

und

$$\psi(z_\infty) = -3(A_0 - E_0) + (a_1 + a_2 + a_3) \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right)$$

für die Hilfsfunktionen aus Lemma 6.4 und 6.5, woraus

$$3 \cdot \Omega(z_\infty) + \psi(z_\infty) = (2 \cdot a_1 - a_2 - a_3) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right)$$

folgt. Betrachte nun die Hilfsfunktion  $\phi$  aus Lemma 6.3. Diese hat in einer einfachen Polstelle  $z_\infty$  von  $f$  und  $g$  den Wert

$$\phi(z_\infty) = \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right)^2 ,$$

woraus

$$(3 \cdot \Omega(z_\infty) + \psi(z_\infty))^2 = (2 \cdot a_1 - a_2 - a_3)^2 \phi(z_\infty)$$

folgt.

Wir nehmen zunächst

$$(3 \cdot \Omega + \psi)^2 \equiv (2 \cdot a_1 - a_2 - a_3)^2 \phi \tag{6.1}$$

an. Aus Lemma 6.3 und Lemma 6.5 folgt dann

$$N(r, \Omega) = S(r) .$$

Wir betrachten nun die Hilfsfunktion  $\Omega$  aus Lemma 6.4 für  $a = a_1$ . Da sie insbesondere in den  $a_1$ -Stellen, die für  $f$  mehrfach sind, Polstellen hat, gilt

$$\overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_1} \right) - \overline{N}_E \left( r, \frac{1}{f - a_1} \right) \leq N(r, \Omega) = S(r) ,$$

womit  $f$  und  $g$  den Wert  $a_1$  "CM" teilen. Da  $f$  und  $g$  den Wert  $\infty$  nach Voraussetzung "CM" teilen, folgt aus Satz 4.1, daß  $f$  und  $g$  alle  $q$  Werte CM teilen.

Deswegen nehmen wir nun

$$(3 \cdot \Omega + \psi)^2 \not\equiv (2 \cdot a_1 - a_2 - a_3)^2 \phi$$

an. Da die Differenzfunktion der linken und der rechten Seite in einfachen Polstellen von  $f$  und  $g$  Nullstellen hat, folgt

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, f) &\leq N\left(r, \frac{1}{(3 \cdot \Omega + \psi)^2 - (2 \cdot a_1 - a_2 - a_3)^2 \phi}\right) + S(r) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \Omega) + 2 \cdot T(r, \psi) + T(r, \phi) + S(r) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \Omega) + S(r) \end{aligned}$$

aus Lemma 6.3 und Lemma 6.5. Nach Lemma 6.4 für  $a = a_1$  haben wir also

$$\overline{N}(r, f) \leq 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_1}\right) + S(r).$$

Beginnen wir nun entweder mit  $a_2$  oder mit  $a_3$  anstelle von  $a_1$  in Lemma 6.4 und verfolgen analog den ganzen Beweisgang, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \overline{N}(r, f) &\leq 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_2}\right) + S(r); \\ \overline{N}(r, f) &\leq 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_3}\right) + S(r). \end{aligned}$$

Definieren wir die Hilfsfunktionen  $\phi$  und  $\psi$  mit beliebigen anderen Tripeln aus der Menge der  $q - 1$  geteilten endlichen Werte, so erhalten wir analog

$$\overline{N}(r, f) \leq 2 \cdot \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r)$$

für jedes  $j = 1, \dots, q - 1$ . Addieren wir diese  $q - 1$  Ungleichungen, so folgt

$$(q - 1) \cdot \overline{N}(r, f) \leq 2 \cdot \sum_{j=1}^{q-1} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r).$$

Addieren wir nun noch  $2 \cdot \overline{N}(r, f)$  auf beiden Seiten und setzen  $a_q = \infty$ , so folgt

$$(q + 1) \cdot \overline{N}(r, f) \leq 2 \cdot \sum_{j=1}^q \overline{N}\left(r, \frac{1}{f - a_j}\right) + S(r) = 4 \cdot T(r, f) + S(r)$$

nach Lemma 2.11. Da  $f$  und  $g$  den Wert  $\infty$  "CM" teilen, folgt

$$N(r, f) = \overline{N}(r, f) + S(r)$$

nach Lemma 2.17. Also haben wir

$$(q + 1) \cdot N(r, f) \leq 4 \cdot T(r, f) + S(r).$$

Dies widerspricht jedoch der Bedingung

$$\Delta(\infty, f) = 1 - \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} < \frac{q-3}{q+1} = 1 - \frac{4}{q+1},$$

da aus dieser nach Definition 1.32 das Gegenteil, nämlich

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{N(r, f)}{T(r, f)} > \frac{4}{q+1}$$

folgt.

Dieser Widerspruch zeigt, daß nur die Identität (6.1) möglich ist, also alle  $q$  Werte CM geteilt werden müssen.

## 6.3 Hilfsfunktionen für den Beweis von Satz 6.2

### Lemma 6.6

Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q-1$  endliche Werte teilen. Gehören die drei Werte  $0, 1$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu diesen  $q-1$  geteilten Werten, so genügt die Hilfsfunktion

$$\chi = \frac{(f')^2(g')^2(f-g)}{f(f-1)(f-c)g(g-1)(g-c)}$$

der Bedingung

$$T(r, \chi) = S(r).$$

### Beweis:

Sei  $z^*$  eine Stelle, in der  $f$  einen der geteilten Werte mit der Vielfachheit  $k$  und  $g$  denselben Wert mit der Vielfachheit  $m$  annimmt. Dann ist

$$\chi(z) = O((z - z^*)^t) \quad \text{mit } t = k + m - 4 + \min(k, m). \quad (6.2)$$

Sei o.B.d.A.  $k > m$ . Damit ist  $t \geq 3m + 1 - 4 = 3(m-1) \geq 0$ , und  $\chi$  hat keine Polstellen, denn Polstellen von  $\chi$  können höchstens an den Stellen  $z^*$  auftreten.

Mit der Hilfsfunktion  $\psi$  aus Lemma 2.21 gilt

$$\chi = \frac{f'g'}{f-g} \cdot \psi.$$

Nach Lemma 2.21 gilt  $T(r, \psi) = S(r)$ , also

$$T(r, \chi) = m(r, \chi) \leq m \left( r, \frac{f'g'}{f-g} \right) + m(r, \psi) = S(r)$$

mit Hilfe von Lemma 2.20. □

### Lemma 6.7

Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ , die  $q-1$  endliche Werte teilen. Gehören die drei Werte  $0, 1$  und  $c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$  zu den  $q$  geteilten Werten, so genügt die Hilfsfunktion

$$\Omega = 2 \cdot \frac{f''}{f'} - 3 \cdot \left( \frac{f'}{f} + \frac{f'}{f-1} + \frac{f'}{f-c} \right) - 2 \cdot \frac{g''}{g'} + 2 \cdot \left( \frac{g'}{g} + \frac{g'}{g-1} + \frac{g'}{g-c} \right) + \frac{f' - 2 \cdot g'}{f-g}$$

der Bedingung

$$T(r, \Omega) = S(r) .$$

**Beweis:**

Sei  $z^*$  eine Null-, Eins- oder  $c$ -Stelle der Vielfachheit  $k$  für  $f$  und der Vielfachheit  $m$  für  $g$ . Gilt ( $k = 2$  und  $m = 1$ ) oder ( $k = 1$  und  $m = 2$ ), so hat die Hilfsfunktion  $\Omega$  in  $z^*$  keine Polstelle. Damit kann  $\Omega$  nur dort Polstellen haben, wo  $\psi$  Nullstellen hat oder wo  $z^*$  für  $f$  **und**  $g$  mehrfach ist. Solche Punkte werden von der Anzahlfunktion  $N^*(r)$  aus Lemma 2.22 gezählt, und zwar mit der korrekten Vielfachheit. Nach Lemma 2.22 gilt  $N^*(r) = S(r)$ . Da  $T(r, \psi) = S(r)$  nach Lemma 2.21 gilt, folgt  $N(r, \Omega) = S(r)$ . Nach Lemma 2.20 ist außerdem

$$m(r, \Omega) = S(r) + m \left( r, \frac{f' - 2 \cdot g'}{f - g} \right) = S(r) .$$

Es folgt  $T(r, \Omega) = S(r)$ . □

## 6.4 Beweis von Satz 6.2

Seien  $f, g \in \mathcal{G} \cap \mathcal{L}$  holomorphe Funktionen, die  $q - 1$  endliche Werte DM teilen. Wir nehmen an, daß

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1 \quad \text{und} \quad a_3 = c \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$$

drei der geteilten Werte sind. Die anderen seien  $a_4, \dots, a_{q-1}$ .

Nach Lemma 2.15 nimmt eine der Funktionen einen der geteilten Werte einfach an, während die andere Funktion ihn mindestens mit der Vielfachheit zwei annimmt. Ist also  $z^*$  eine Stelle, wo  $f$  einen der geteilten Werte mit der Vielfachheit  $k$  und  $g$  denselben Wert mit der Vielfachheit  $m$  annimmt, so gilt entweder  $k = 1$  oder  $m = 1$ .

Diejenigen Stellen  $z^*$ , für die ( $k \geq 3$  und  $m = 1$ ) oder ( $m \geq 3$  und  $k = 1$ ) ist, sind wegen (6.2) Nullstellen der Hilfsfunktion  $\chi$  aus Lemma 6.6. Nach eben diesem Lemma 6.6 gilt  $T(r, \chi) = S(r)$ . Wegen

$$N \left( r, \frac{1}{\chi} \right) \leq T(r, \chi) + O(1) = S(r)$$

treten die Stellen, wo eine der Funktionen mindestens die Vielfachheit 3 hat, fast nie auf. Betrachte nun diejenigen Stellen  $z^*$ , für die ( $k = 2$  und  $m = 1$ ) oder ( $k = 1$  und  $m = 2$ ) gilt. Jede dieser Stellen liefert eine einfache Nullstelle von  $f'$  oder  $g'$ . Weitere Nullstellen von  $f'$  und  $g'$  treten wegen  $N^*(r) = S(r)$  fast nie auf. Damit ist

$$\sum_{j=1}^{q-1} \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) = N \left( r, \frac{1}{f'} \right) + N \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) .$$

Nach Lemma 2.11 folgt wegen  $N(r, f) \equiv 0$  und  $f, g \in \mathcal{L}$  daraus

$$\begin{aligned}
2 \cdot T(r, f) &= \sum_{j=1}^{q-1} \overline{N} \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) + S(r) \\
&= N \left( r, \frac{1}{f'} \right) + N \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) \\
&= m(r, f') + m(r, g') - m \left( r, \frac{1}{f'} \right) - m \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) \\
&= m \left( r, f' \cdot \frac{f}{f} \right) + m \left( r, g' \cdot \frac{g}{g} \right) - m \left( r, \frac{1}{f'} \right) - m \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) \\
&\leq m \left( r, \frac{f'}{f} \right) + m(r, f) + m \left( r, \frac{g'}{g} \right) + m(r, g) - m \left( r, \frac{1}{f'} \right) - m \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) \\
&= m(r, f) + m(r, g) - m \left( r, \frac{1}{f'} \right) - m \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r) \\
&= 2 \cdot T(r, f) - m \left( r, \frac{1}{f'} \right) - m \left( r, \frac{1}{g'} \right) + S(r),
\end{aligned}$$

also  $m \left( r, \frac{1}{f'} \right) + m \left( r, \frac{1}{g'} \right) = S(r)$ . Hieraus folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q-1} m \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right) &= \sum_{j=1}^{q-1} m \left( r, \frac{f'}{f - a_j} \cdot \frac{1}{f'} \right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{q-1} m \left( r, \frac{f'}{f - a_j} \right) + (q-1) \cdot m \left( r, \frac{1}{f'} \right) \\
&= S(r).
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, daß  $N_1 \left( r, \frac{1}{f - a_j} \right)$  für kein  $j = 1, \dots, q-1$  klein sein kann:

O.B.d.A. sei  $N_1 \left( r, \frac{1}{f} \right) = S(r)$ . Dann sind fast alle Nullstellen von  $f$  einfach und fast alle Nullstellen von  $g$  doppelt. Es folgt mit

$$\begin{aligned}
T(r, f) &= N(r, f) + m(r, f) \\
&= N \left( r, \frac{1}{f} \right) + m \left( r, \frac{1}{f} \right) + O(1) \\
&= N \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r) \\
&= \overline{N} \left( r, \frac{1}{f} \right) + S(r) \\
&= \overline{N} \left( r, \frac{1}{g} \right) + S(r) \\
&= \frac{1}{2} N \left( r, \frac{1}{g} \right) + S(r) \\
&\leq \frac{1}{2} T(r, g) + S(r) \\
&= \frac{1}{2} T(r, f) + S(r)
\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Analog folgt  $N_1\left(r, \frac{1}{f-a_j}\right) \neq S(r)$  für  $j = 2, \dots, q-1$ .

Sei nun  $z_0$  eine gemeinsame Nullstelle von  $f$  und  $g$  mit  $k = 2$  und  $m = 1$ , d.h.

$$f(z_0) = f'(z_0) = 0 \neq f''(z_0) \cdot g'(z_0).$$

Einsetzen liefert

$$\Omega(z_0) = -2 \cdot g'(z_0) \left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

und

$$\psi(z_0) = \frac{2}{c^2} g'^2(z_0).$$

Damit ist

$$\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi}(z_0) = (c+1)^2.$$

Ist nun  $\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi} - (c+1)^2 \neq 0$ , so folgt

$$\begin{aligned} N_1\left(r, \frac{1}{f}\right) - S(r) &\leq N\left(r, \frac{1}{\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi} - (c+1)^2}\right) \\ &\leq T\left(r, \frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi}\right) + O(1) \\ &\leq 2 \cdot T(r, \Omega) + T(r, \psi) + O(1) \\ &= S(r) \end{aligned}$$

aus Lemma 2.21 und Lemma 6.7. Dies ist ein Widerspruch, da die Anzahlfunktion der mehrfachen geteilten Werte nicht klein sein darf.

Also gilt

$$\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi} \equiv (c+1)^2. \quad (6.3)$$

Ist nun  $z_1$  eine gemeinsame Einstelle von  $f$  und  $g$  mit  $k = 2$  und  $m = 1$ , so gilt

$$\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi}(z_1) = (2-c)^2. \quad (6.4)$$

Ist  $z_c$  eine gemeinsame  $c$ -Stelle von  $f$  und  $g$  mit  $k = 2$  und  $m = 1$ , so gilt

$$\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi}(z_c) = (2c-1)^2. \quad (6.5)$$

Da  $\frac{\Omega^2}{2 \cdot \psi}$  nach (6.3) konstant ist, liefert das Gleichsetzen von (6.3) und (6.4) die Bedingung  $c = \frac{1}{2}$ , während das Gleichsetzen von (6.3) und (6.5) im Widerspruch dazu die Bedingung  $c = 2$  liefert.



# Literaturverzeichnis

- [1] L. AHLFORS,  
*Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen*,  
Soc. Sci. Fenn. Comm. Phys.-Math. **8** no.10 (1935), 1-14
- [2] J.M. ANDERSON, J. CLUNIE, CH. POMMERENKE,  
*On Bloch functions and normal functions*,  
J. reine angew. Math. **270** (1974), 12-37
- [3] A.A. GOL'DBERG, V.A. GRINSTEIN,  
*On the logarithmic derivative of a meromorphic function*,  
Math. Notes **19** (1976), 320-323
- [4] A.A. GOL'DBERG, I.V. OSTROVSKII,  
*Wertverteilung Meromorpher Funktionen* (Russisch),  
Izdat. Nauka, Moskau, 1970
- [5] G.G. GUNDERSEN,  
*Meromorphic functions that share three or four values*,  
J. London Math. Soc. **20** (1979), 457-465
- [6] G.G. GUNDERSEN,  
*Meromorphic functions that share four values*,  
Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 545-567  
und  
*Correction to "Meromorphic functions that share four values"*,  
Trans. Amer. Math. Soc. **304** (1987), 847-850
- [7] G.G. GUNDERSEN,  
*Meromorphic Functions That Share Three Values  $IM$  and a Fourth Value  $CM$* ,  
Complex Variables **20** (1992), 99-106
- [8] W.K. HAYMAN,  
*Meromorphic Functions (2nd reprint with appendix)*,  
Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1975
- [9] G. JANK, L. VOLKMANN,  
*Meromorphe Funktionen und Differentialgleichungen*,  
Birkhäuser, Basel, 1985
- [10] A.S. KOLOKOL'NIKOV,  
*The logarithmic derivative of a meromorphic function*,  
Math. Notes **15** (1974), 425-429

- [11] D.S. MITRINOVIĆ,  
*Analytic Inequalities*,  
Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
- [12] E. MUES,  
*Bemerkungen zum Vier-Punkte-Satz*,  
in *Complex Methods on Partial Differential Equations*, 109-117,  
*Math. Res.* **53**, Akademie-Verlag, Berlin, 1989
- [13] E. MUES,  
*Meromorphic Functions Sharing Four Values*,  
*Complex Variables* **12** (1989), 169-179
- [14] E. MUES,  
*Shared value problems for meromorphic functions*,  
Value distribution theory and complex differential equations, Joensuu 1994, 17-43,  
*Joensuun Yliop. Luonnont. Julk.* **53**, Univ. Joensuu, 1995
- [15] R. NEVANLINNA,  
*Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*,  
Gauthier-Villars, Paris, 1929
- [16] R. NEVANLINNA,  
*Analytic Functions (Revised translation of the 2nd ed. 1953)*,  
Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
- [17] V. NGOAN, I.V. OSTROVSKII,  
*Die logarithmische Ableitung einer meromorphen Funktion (Russisch)*,  
*Akad. Nauk. Armjan. SSR Dokl.* **41** (1965), 272-277
- [18] D.F. SHEA, L.R. SONS,  
*Value distribution theory for meromorphic functions of slow growth in the disk*,  
*Houston Journal of Mathematics* **12** (1986), 249-266
- [19] N. STEINMETZ,  
*A uniqueness theorem for three meromorphic functions*,  
*Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I* **13** (1988), 93-110
- [20] M. TSUJI,  
*Potential Theory in Modern Function Theory*,  
Maruzen, Tokio, 1959
- [21] WANG SHU-PEI,  
*On Meromorphic Functions That Share Four Values*,  
*J. of Math. Anal. and Appl.* **173** (1993), 359-369
- [22] YI HONGXUN, ZHOU CHANGTONG,  
*Meromorphic functions that share four values (Chinese)*,  
*J. of Shandong Univ.* **31** (1996), 121-128

# Lebenslauf

02.08.1970	geboren in Homberg/Niederrhein, jetzt Duisburg-Homberg
1976 - 1980	Grundschule in Duisburg-Homberg
1980 - 1989	Käthe-Kollwitz-Gymnasium in Duisburg-Ruhrort
1989	Allgemeine Hochschulreife
Wintersem. 89/90	Beginn des Studiums der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der Universität-Gesamthochschule Duisburg
1993	Vordiplom
1996	Diplom
seit 1.4.1997	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Universität Hannover

Hannover, im Februar 2001