

Rekorde in der Erneuerungstheorie

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr. rer. nat.

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Math. ANKE REIMERS
geboren am 30. Dezember 1971 in Hannover

2001

Referent: Prof. Dr. Rudolf Grübel, Universität Hannover
Korreferent: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer, Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Tag der Promotion: 21.11.2000
Datum der Veröffentlichung: Januar 2001

Zusammenfassung

Das erste Kapitel der Arbeit befaßt sich mit dem Algorithmus der von Neumann-Paralleladdition, der zu zwei Zahlen in Binärdarstellung die Summe berechnet. Wir zeigen, daß die hier im Mittelpunkt stehende benötigte Schrittzahl A_n bei zwei unabhängigen und auf $\{0, 1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, gleichverteilten Zufallsvektoren mit der nicht notwendigerweise abgeschlossenen Rekordlebensdauer eines alternierenden Erneuerungsprozesses bis einschließlich zum Zeitpunkt n zusammenhängt. Wir beweisen, daß die Verteilung von $A_{m_k} - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 1$, mit $m_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^{k+2}} = \beta \in (1, 2)$, für $k \rightarrow \infty$ in Totalvariation gegen die Verteilung von $\lceil Z + \log_2 \beta \rceil$ konvergiert, wobei Z eine mit Parameter $\log 2$ Gumbel-verteilte Zufallsvariable ist. Außerdem konvergiert der Erwartungswert von $A_{m_k} - \log_2 m_k$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $\varphi(\beta) + \frac{\gamma}{\log 2} - 1$. Hierbei ist γ die Euler-Mascheroni-Konstante und φ eine Funktion in $\beta \in (1, 2)$. Weiter zeigen wir dann, daß $\varphi(\beta)$ in $\beta \in (1, 2)$ nicht konstant ist; insbesondere konvergiert $E(A_n) - \log_2 n$ für $n \rightarrow \infty$ nicht.

Im zweiten Kapitel betrachten wir einen Erneuerungsprozeß mit auf $\{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, gleichverteilten Lebensdauern $X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, \dots$ und untersuchen das asymptotische Verhalten der Anzahl $Y^{(N)}$ der sich ergebenden Rekordlebensdauern und der in diesen Rekorden verbrachten Zeit $Z^{(N)}$ mit $N \rightarrow \infty$. Es ergibt sich, daß sowohl $Y^{(N)}$ als auch $Z^{(N)}$ für $N \rightarrow \infty$ jeweils um ihren Erwartungswert konzentriert sind, daß also $Y^{(N)}/E(Y^{(N)}) \xrightarrow{P} 1$ und $Z^{(N)}/E(Z^{(N)}) \xrightarrow{P} 1$ für $N \rightarrow \infty$ gilt. Darüberhinaus erhält man sogar $(Y^{(N)} - E(Y^{(N)}))/\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})} \xrightarrow{D} Z$ und $(Z^{(N)} - E(Z^{(N)}))/\sqrt{\text{Var}(Z^{(N)})} \xrightarrow{D} Z$ für $N \rightarrow \infty$ und $Z \sim N(0, 1)$. Auf dem Weg zum asymptotischen Verhalten der in Rekorden verbrachten Zeit $Z^{(N)}$ wird dabei eine weitere Zufallsvariable $\tilde{Z}^{(N)}$ definiert, die die Summe der jeweils zum Zeitpunkt ihres Auftretens kleinsten Lebensdauern innerhalb der Folge $(N - X_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ angibt. Wir beweisen, daß $(\tilde{Z}^{(N)} - N)/N$ für $N \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen $-1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i U_j$ konvergiert, wobei $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen ist. Dies liefert unter anderem, daß $\tilde{Z}^{(N)}$ im Gegensatz zu $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ weder asymptotisch um seinen Erwartungswert konzentriert noch asymptotisch normalverteilt ist.

Im letzten Kapitel steht der Poisson-Prozeß mit Rate $\lambda > 0$ im Mittelpunkt. Wir zeigen, daß sich der Anteil der in Rekorden verbrachten Zeit bis t für $t \rightarrow \infty$ wie $\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2$ verhält. Auf dem Weg dorthin wird das Verhalten der Summe Z_n der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern und dazu auch das der Summe T_n der ersten n Rekordlebensdauern analysiert. Während für T_n sowohl Massekonzentration als auch ein Zentraler Grenzwertsatz für $n \rightarrow \infty$ nachgewiesen werden kann, ergibt sich für Z_n nur die Konzentration um den Mittelwert für $n \rightarrow \infty$ und die stochastische Beschränktheit von $(Z_n - \frac{(\log n)^2}{2\lambda})/\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}$.

Schlagwörter: Erneuerungstheorie, von Neumann-Paralleladdition, Poisson-Prozeß

Abstract

The first chapter of the thesis deals with the von Neumann parallel addition, an algorithm that computes the sum of two binary integers. We show that for two independent random vectors which are uniformly distributed on $\{0, 1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, the number A_n of steps required by the algorithm, which is the main focus here, is connected with the possibly uncompleted record lifetime of an alternating renewal process up to time n . We prove that the distribution of $A_{m_k} - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 1$ with $m_k \in \mathbb{N}$ for all $k \in \mathbb{N}$ and $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^{k+2}} = \beta \in (1, 2)$ converges with $k \rightarrow \infty$ in total variation distance to the distribution of $\lceil Z + \log_2 \beta \rceil$ where Z is a Gumbel($\log 2$)-distributed random variable. Also, the expected value of $A_{m_k} - \log_2 m_k$ converges to $\varphi(\beta) + \frac{\gamma}{\log 2} - 1$. Here γ is the Euler-Mascheroni-constant and φ is a function in $\beta \in (1, 2)$. Further we show that $\varphi(\beta)$ is not constant in $\beta \in (1, 2)$; in particular $E(A_n) - \log_2 n$ does not converge with $n \rightarrow \infty$.

In the second chapter we consider a renewal process with lifetimes $X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, \dots$ that are uniformly distributed on $\{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, and analyse the asymptotic behaviour of the number $Y^{(N)}$ of resulting record lifetimes and of the total amount $Z^{(N)}$ of time spent in these records as $N \rightarrow \infty$. It follows that $Y^{(N)}$ as well as $Z^{(N)}$ are each concentrated about their expected value, i.e. we have $Y^{(N)}/E(Y^{(N)}) \xrightarrow{P} 1$ and $Z^{(N)}/E(Z^{(N)}) \xrightarrow{P} 1$ with $N \rightarrow \infty$. Furthermore, we even get $(Y^{(N)} - E(Y^{(N)}))/\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ and $(Z^{(N)} - E(Z^{(N)}))/\sqrt{\text{Var}(Z^{(N)})} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ with $N \rightarrow \infty$ and $Z \sim N(0, 1)$. To obtain the asymptotic behaviour of $Z^{(N)}$ we define a random variable $\tilde{Z}^{(N)}$ which describes the sum of those lifetimes in the sequence $(N - X_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ that are smallest at the time of their appearance. We show that $(\tilde{Z}^{(N)} - N)/N$ converges with $N \rightarrow \infty$ to $-1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i U_j$ where $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is a sequence of independent and on $(0, 1)$ uniformly distributed random variables. Among other things, it follows that $\tilde{Z}^{(N)}$, contrary to $Y^{(N)}$ and $Z^{(N)}$, is neither asymptotically concentrated about its mean nor asymptotically normally distributed.

In the last chapter the main focus is on the Poisson process with rate $\lambda > 0$. We prove that the total amount of time spent in record lifetimes up to time t behaves as $\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2$ with $t \rightarrow \infty$. To obtain this result we analyse the behaviour of the sum Z_n of the record lifetimes within the first n lifetimes and also the sum T_n of the first n record lifetimes. While for T_n we can show concentration about the mean as well as a central limit theorem, for Z_n we only have the concentration about its mean and the stochastic boundedness of $(Z_n - \frac{(\log n)^2}{2\lambda})/\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}$.

Keywords: renewal theory, von Neumann parallel addition, Poisson process

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Die von Neumann-Paralleladdition	13
2.1	Der Algorithmus	14
2.2	Zusammenhang mit der Erneuerungstheorie	17
2.3	Das asymptotische Verhalten des Maximums geometrisch verteilter Zufallsvariablen	21
2.4	Das asymptotische Verhalten der Anzahl der Additionsschritte	28
3	Auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilte Lebensdauern	42
3.1	Definition von $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$	43
3.2	Asymptotisches Verhalten von $Y^{(N)}$	52
3.3	Asymptotisches Verhalten von $NY^{(N)} - Z^{(N)}$	58
3.4	Asymptotisches Verhalten von $Z^{(N)}$	73
3.5	Rekursionsformeln	76
4	Rekorde beim Poisson-Prozeß	80
4.1	Rekorde unter den ersten n Lebensdauern	81
4.2	Summe der ersten n Rekordlebensdauern	85
4.3	Zugang über funktionale Grenzwertsätze	90
4.4	Die in Rekorden verbrachte Zeit	96
A	Hilfsmittel für Kapitel 2	99
B	C-Programme für Kapitel 3	101
B.1	Berechnung der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion zu $Z^{(N)}$	101
B.2	Näherungsweise Berechnung der Dichte zu R	105
	Literaturverzeichnis	109

Kapitel 1

Einleitung

In der Erneuerungstheorie geht es um Folgen von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und deren Summenprozesse $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $S_0 = 0$ und $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \geq 1$. Interpretieren läßt sich die Zufallsvariable X_k mit $k \in \mathbb{N}$ als Lebensdauer eines Objektes, das nach seinem Ausfall sofort durch ein gleichartiges neues Objekt mit Lebensdauer X_{k+1} ersetzt wird. Der zugehörige Prozeß S_n gibt somit die Zeitpunkte der aufeinanderfolgenden Erneuerungen an und wird deshalb Erneuerungsprozeß genannt. Hat man zusätzlich zu $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ noch eine davon unabhängige Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so nennt man den Prozeß, der entsteht, wenn die Lebensdauern abwechselnd aus einer der beiden Folgen entstammen, einen alternierenden Erneuerungsprozeß. Hier bietet sich die Interpretation der sich abwechselnden Zufallsvariablen als Reparatur- bzw. Lebensdauern eines Objektes an, das nach seinem Ausfall nicht wie eben ersetzt, sondern wieder repariert und neu eingesetzt wird. Klassisch, und gerade mit Blick auf die Interpretation der aufeinanderfolgenden Zufallsvariablen als Lebensdauern eines Objektes naheliegend, ist die Frage nach der erwarteten Anzahl von Erneuerungen bis zu einem Zeitpunkt t und dem zugehörigen Verhalten für $t \rightarrow \infty$.

In Abbildung 1.1 wird die klassische Situation der Erneuerungstheorie dargestellt. Wichtige Standardreferenzen zu dem Thema „Erneuerungstheorie“ sind die

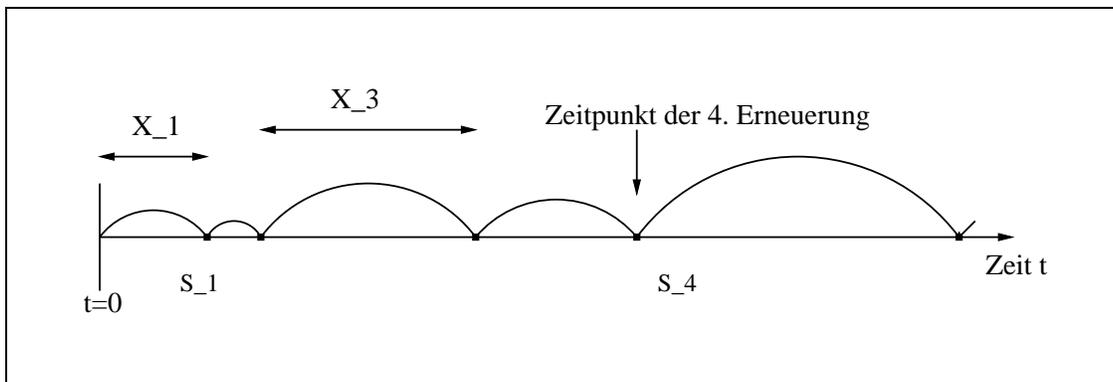


Abbildung 1.1: Beispiel für einen Erneuerungsprozeß

Bücher von W.FELLER (Kapitel 13 in [Fe1] und Kapitel 11 in [Fe2]) und von G.ALSMEYER ([A]), sowie das Buch von D.R.COX ([Co]).

Neben der Überlegung, wie oft man zum Beispiel Glühbirnen in einem bestimmten Zeitabschnitt auswechseln muß, scheint in diesem Zusammenhang auch die Frage nach den zum Zeitpunkt ihres Auftretens größten Lebensdauern, also die Frage nach Rekorden, interessant zu sein. In den folgenden drei Kapiteln dieser Arbeit geht es um auftretende Rekorde bei drei sehr unterschiedlichen Erneuerungsprozessen.

Dem Titel des zweiten Kapitels sieht man auf den ersten Blick die Verbindung zur Erneuerungstheorie gar nicht an. Es geht hier um die von Neumann-Paralleladdition, die auf A.W.BURKS, H.H.GOLDSTINE und J.VON NEUMANN ([BGN]) zurückgeht. Dieser Algorithmus liefert zu zwei in Binärdarstellung gegebenen Zahlen die zugehörige Summe. Der Vorteil dieses Algorithmus ist der, daß er bestimmte Additionsschritte parallel ausführt und aus diesem Grund der sequentiell durchgeführten Schulmethode gerade bei großen Zahlen mit Blick auf die Schnelligkeit vorzuziehen ist. Ziel dieses zweiten Kapitels ist es, Aussagen zum Verhalten der Anzahl der Schritte zu liefern, wenn man zwei auf $\{0, 1\}^n$ gleichverteilte Zufallsvektoren mit dem Algorithmus addiert und n gegen Unendlich konvergieren läßt. In den letzten Jahrzehnten haben sich damit einige Autoren auseinandergesetzt, so zum Beispiel V.CLAUS in [Cl], D.E.KNUTH etwas allgemeiner in [K] oder auch G.SCHAY in [Scha]. Mit Hilfe von klassischen Verfahren der Wahrscheinlichkeitstheorie, die darin bestehen, unmittelbar Rekursionsformeln für die zur Schrittzahl gehörigen Wahrscheinlichkeiten zu finden und diese über erzeugende Funktionen und andere analytische Mittel zu analysieren, wird dort unter anderem das asymptotische Verhalten der erwarteten Anzahl von nötigen Additionsschritten untersucht. Hier soll nicht nur auf diese sich voneinander unterscheidenden Ergebnisse eingegangen werden, sondern mit mehr probabilistischen Mitteln sogar Aussagen zum asymptotischen Verhalten der zur Schrittzahl gehörigen Verteilung gemacht werden. Dazu werden die beiden zu addierenden auf $\{0, 1\}^n$ gleichverteilten Zufallsvektoren gemeinsam mit einer Folge von n unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Wertebereich identifiziert. Man wird sehen, daß für die Anzahl der Schritte die Länge der längsten Serie bestimmter aufeinanderfolgender Werte innerhalb dieser n Zufallsvariablen verantwortlich ist, die sich damit in die „uns interessierenden Serien“ und den Rest unterteilen lassen. Außerdem wird deutlich werden, daß es sich um geometrisch verteilte Serien-Längen handelt. Trägt man für wachsendes n die Längen dieser sich abwechselnden Serien auf der Zeitachse ab, so entsteht ein alternierender Erneuerungsprozeß, bei dem die oben erwähnten Reparaturdauern gerade den Längen der uns interessierenden Serien entsprechen. Offensichtlich können dabei die Lebensdauern auch den Wert Null annehmen, da zwei oder mehrere von den für uns interessanten Serien direkt aufeinanderfolgen können. Will man nun Aussagen zum Verhalten der Anzahl der Schritte bei der von Neumann-Paralleladdition für zwei auf $\{0, 1\}^n$ gleichverteilte Zufallsvektoren für wachsendes n

machen, so muß man die längste, nicht notwendigerweise abgeschlossene, Reparaturdauer dieses alternierenden Erneuerungsprozesses bis einschließlich zum Zeitpunkt n für $n \rightarrow \infty$ untersuchen. An dieser Stelle wird der Zusammenhang mit dem generellen Thema dieser Arbeit deutlich. Zu dem Verhalten der Verteilung des Maximums n unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $n \rightarrow \infty$ gibt es viele bekannte Resultate. Im Gegensatz zu diesem klassischen Problem ist die hier beschriebene erneuerungstheoretische Situation schwieriger, denn es soll das Maximum einer zufälligen Anzahl von unabhängigen Zufallsvariablen bis zum Zeitpunkt n betrachtet werden, wobei die letzte Lebensdauer möglicherweise zum betrachteten Zeitpunkt noch nicht beendet ist und die zufällige Anzahl von der Größe der Lebensdauern abhängt. Im Laufe des Kapitels wird sich jedoch herausstellen, daß man dieses Problem auf die Betrachtung des Maximums von n unabhängigen und in unserem Fall geometrisch verteilten Zufallsvariablen zurückführen kann. Das Verhalten dieses Maximums ist schon von einigen Autoren untersucht worden. Beispielsweise erzielen F.T.BRUSS und C.O'CONNOR in [BC] und L.GORDON, M.F.SCHILLING und M.S.WATERMAN in [GSW] ähnliche Ergebnisse wie wir im dritten Abschnitt dieses Kapitels. Die Abbildung 1.2 soll den oben beschriebenen alternierenden Erneuerungsprozeß und das im Mittelpunkt stehende Problem veranschaulichen.

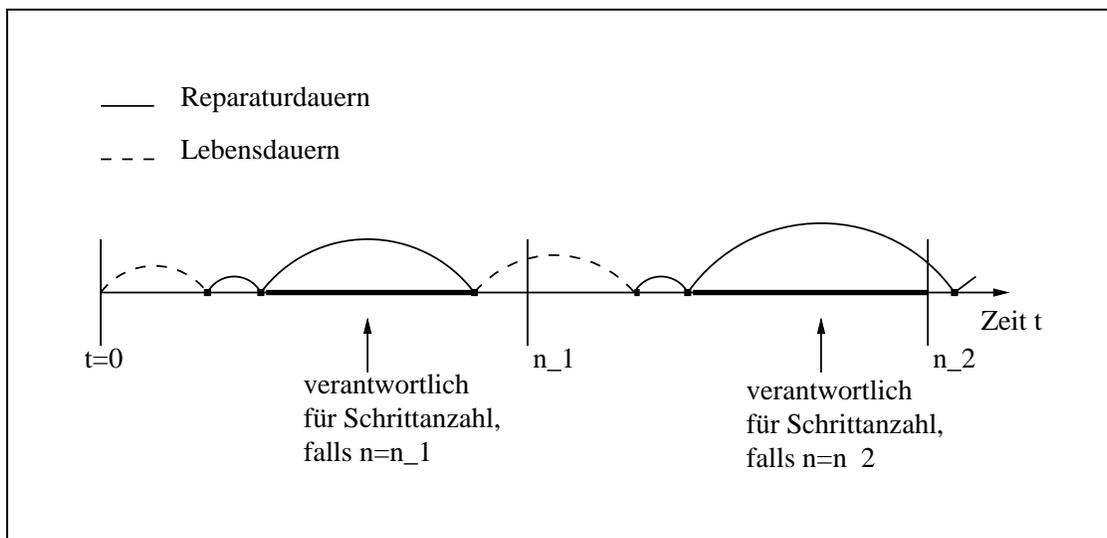


Abbildung 1.2: Zusammenhang von Schrittzahl und Erneuerungsprozeß

Im dritten Kapitel stehen auf der Menge $\{1, \dots, N\}$, $N \in \mathbb{N}$, gleichverteilte Lebensdauern im Mittelpunkt. In Abbildung 1.3 ist dazu ein Beispiel für $N = 6$ zu sehen. Anders als im vorangegangenen Kapitel können die Lebensdauern des betrachteten Erneuerungsprozesses hier nur endlich viele Werte annehmen. Damit ist auch die Anzahl der zum Zeitpunkt ihres Auftretens größten Lebensdauern, also der Rekorde, endlich. Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel ist es daher nicht interessant, die größte Lebensdauer bis zu einem wachsenden Zeitpunkt zu betrachten.

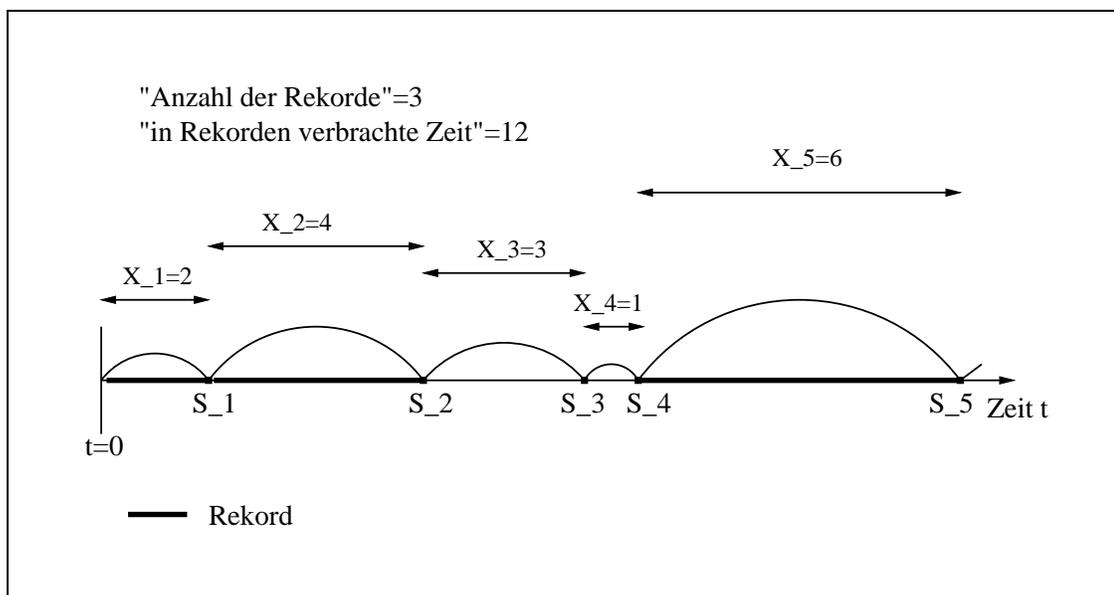


Abbildung 1.3: Erneuerungsprozeß mit auf $\{1, \dots, 6\}$ gleichverteilten Lebensdauern

Dafür stellt sich hier die Frage nach der Anzahl aller Rekorde und nach der insgesamt in Rekorde verbrachten Zeit für $N \rightarrow \infty$. In diesem Fall betrachten wir also die gesamte Zeitachse und lassen die Anzahl der Werte der Lebensdauern und damit der möglichen Rekorde wachsen. Im Laufe des Kapitels wird zunächst die Asymptotik der Anzahl der auftretenden Rekorde untersucht, wobei für $N \rightarrow \infty$ sowohl Konzentration um den Mittelwert als auch ein Zentraler Grenzwertsatz nachgewiesen werden können. Um diese Ergebnisse auch für die Summe der Rekorde, also für die insgesamt in Rekorde verbrachte Zeit, erhalten zu können, werden dann Aussagen zur Summe der zum Zeitpunkt ihres Auftretens kleinsten Lebensdauern innerhalb einer Folge von auf $\{0, \dots, N-1\}$ gleichverteilten Lebensdauern benötigt. Interessanterweise verhält sich diese Zufallsvariable für $N \rightarrow \infty$ ganz anders als die beiden Größen „Rekordanzahl“ und „in Rekorde verbrachte Zeit“. Hier kann man zeigen, daß der Quotient aus Zufallsvariable und zugehörigem Erwartungswert nicht in Wahrscheinlichkeit gegen Eins konvergiert und daß sich bei entsprechender Normierung im Gegensatz zu den anderen beiden betrachteten Zufallsvariablen eine Grenzverteilung ergibt, die sich von der Normalverteilung unterscheidet.

Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit dem klassischen Poisson-Prozeß, also mit exponentialverteilten Lebensdauern. Im Vergleich zum dritten Kapitel ergibt sich eine völlig neue Situation, denn nun ist die auf der gesamten Zeitachse in Rekorde verbrachte Zeit offensichtlich unendlich. Aus diesem Grund ist es das Ziel des vierten Kapitels herauszufinden, wie sich der Anteil der in Rekorde verbrachten Zeit bis t für $t \rightarrow \infty$ verhält. Abbildung 1.4 soll diese Situation veranschaulichen. In diesem Zusammenhang ist ein Blick auf die Brownsche Bewegung interessant. Dort teilen die Längen der Exkursionen die Zeitachse von Null bis Unendlich in Ab-

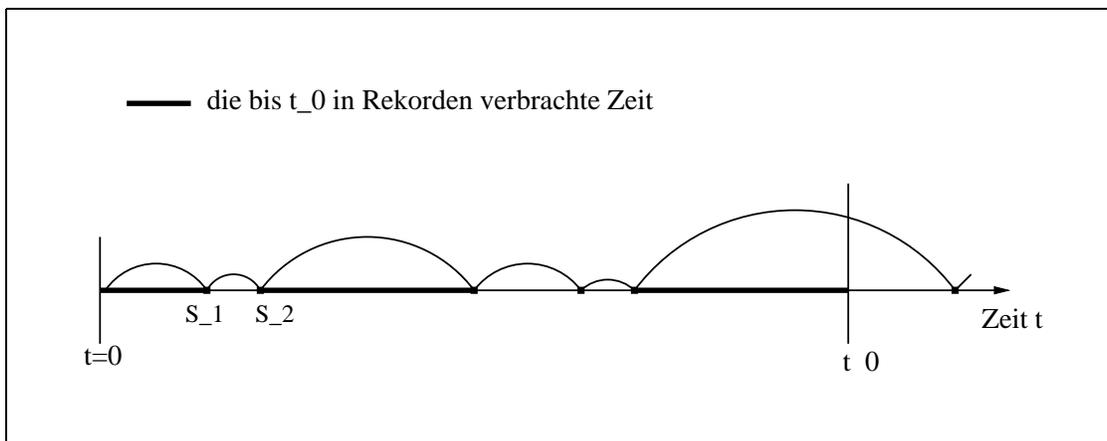


Abbildung 1.4: Situation im vierten Kapitel

schnitte ein, und ein $t > 0$ wird bezüglich des gewählten Wahrscheinlichkeitsmaßes fast sicher von so einer Exkursionslänge echt überdeckt. Die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, mit der diese t überdeckende Exkursionslänge ein Rekord ist, wird in [Sche] und in [Re] beantwortet. Bemerkenswert ist dabei die Tatsache, daß diese Wahrscheinlichkeit nicht von t abhängt. Im Gegensatz zur Brownschen Bewegung hängt beim Poisson-Prozeß der bis zum Zeitpunkt t in Rekorden verbrachte Anteil offensichtlich von t ab. Der Weg zur Antwort auf die Frage nach dem „Wie“ führt über die Analyse der Summe der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern. Dies wiederum gelingt mit Hilfe der Betrachtung der Summe der ersten n Rekorde. Wie im dritten Kapitel wird auch hier unter anderem Massekonzentration und Verteilungskonvergenz nachgewiesen. Der letzte Abschnitt des Kapitels liefert schließlich die Aussage, daß sich der Anteil der in Rekorden verbrachten Zeit bis t bei einem Poisson-Prozeß mit Rate $\lambda > 0$ für $t \rightarrow \infty$ wie $\frac{(\log t)^2}{2\lambda}$ verhält und daß das Stück zwischen dem betrachteten Zeitpunkt t und der davorliegenden letzten Erneuerung für $t \rightarrow \infty$ „vernachlässigbar“ ist.

Die drei folgenden Kapitel beschäftigen sich also mit sehr unterschiedlichen Erneuerungsprozessen, haben aber alle das Interesse an bestimmten Rekorden innerhalb der aufeinanderfolgenden Lebensdauern gemeinsam.

Zuletzt findet man in Anhang A einige nützliche Ungleichungen zum zweiten Kapitel und in Anhang B die C-Programme, die für das dritte Kapitel die Werte zu den Abbildungen geliefert haben.

Bezeichnungen

Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

- Mit $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(p)$ bzw. $\text{Geom}_{\mathbb{N}_0}(p)$ ist für $p \in [0, 1]$ die geometrische Verteilung auf \mathbb{N} bzw. auf \mathbb{N}_0 gemeint, also gilt für die Zufallsvariable X

$$X \sim \text{Geom}_{\mathbb{N}}(p) \quad \Leftrightarrow \quad P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

bzw.

$$X \sim \text{Geom}_{\mathbb{N}_0}(p) \quad \Leftrightarrow \quad P(X = k) = (1 - p)^k p \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

- Wir schreiben $N(\mu, \sigma^2)$ für die Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma > 0$, $\text{unif}(0, 1)$ für die Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall, $\text{unif}(\{1, \dots, N\})$ für die Gleichverteilung auf der Menge $\{1, \dots, N\}$ mit $N \in \mathbb{N}$, $\text{Exp}(\lambda)$ für die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ und $\text{Bin}(n, p)$ für die Binomialverteilung mit den Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$.
- Es ist „ \xrightarrow{P} “ das Symbol für Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, es gilt also für die Zufallsvariablen X, X_1, X_2, \dots

$$X_n \xrightarrow{P} X \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Außerdem bedeutet $X_n \xrightarrow{D} X$ für $n \rightarrow \infty$, daß die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert, daß also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $P(X = x) = 0$ gilt.

- Für zwei Zufallsvariablen X und Y bedeutet $X \stackrel{D}{=} Y$, daß sie dieselbe Verteilung besitzen.
- Ist $A \subset \mathbb{R}$, so ist mit $\mathfrak{P}(A)$ die Potenzmenge von A gemeint.
- Für $A \subset \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Für die Zufallsvariable X ist $\mathcal{L}(X)$ die zugehörige Verteilung. Zwischen der Verteilung und der Verteilungsfunktion wird gelegentlich nicht unterschieden; in solchen Fällen sollte aus dem Zusammenhang hervorgehen, was gemeint ist.

- Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Dann ist

$$a_n \sim b_n \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

- Mit „ $\log x$ “ ist der natürliche Logarithmus von $x > 0$ gemeint. Außerdem bezeichnen wir mit „ $\log_b x$ “ zu $x > 0$ den Logarithmus zur Basis b .

- Es sei für $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$$

und

$$\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}.$$

- Es bezeichnet

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

die n -te harmonische Zahl; es ist bekannt, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = \gamma$$

gilt, wobei $\gamma = 0.57721\dots$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist.

- Neben den Landau-Symbolen $o(\cdot)$ und $O(\cdot)$ verwenden wir die Begriffe $o_P(\cdot)$ und $O_P(\cdot)$, die wie in [P] auf Seite 189 definiert sind. Für zwei Folgen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen schreiben wir $X_n = o_P(Y_n)$ mit $n \rightarrow \infty$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$P(|X_n| \geq M|Y_n|) < \varepsilon$$

für alle genügend großen n , und $X_n = o_P(Y_n)$, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| \geq \varepsilon|Y_n|) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt. Ist $X_n = O_P(1)$, so nennen wir $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch beschränkt.

Kapitel 2

Die von Neumann-Paralleladdition

Dieses Kapitel behandelt den Algorithmus der von Neumann-Paralleladdition und den Zusammenhang mit bestimmten Rekorden in der Erneuerungstheorie. Betrachtet man zur Erläuterung ein konkretes Beispiel mit den Zahlen

$$a := 27 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

und

$$b := 25 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4,$$

so erkennt man, daß der Summand 2^i , $i \in \{0, \dots, 5\}$, in

$$c := a + b = 52 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$$

genau dann vorkommt, wenn in den Binärdarstellungen von a und b , also

$$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) := (1, 1, 0, 1, 1)$$

und

$$(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) := (1, 0, 0, 1, 1),$$

ganz bestimmte Kombinationen aus Nullen und Einsen in den Positionen bis (a_i, b_i) vorhanden sind. Der kleinste Summand in c ist 2^2 , da sich aus der Summe zweier 2^0 -Summanden ein 2^1 -Summand ergibt, der zusammen mit dem nur in a vorkommenden 2^1 -Summanden eine 2^2 liefert, die weder in a noch in b zu finden ist. Hätte man stattdessen sowohl in a als auch in b einen 2^2 -Summanden, so würde sich aus drei 2^2 -Summanden in c ebenfalls eine 2^2 und zusätzlich ein 2^3 -Summand ergeben. Man erkennt, daß an der Stelle, an der zwei Einsen aufeinandertreffen, ein Übertrag entsteht, der so lange von links nach rechts „durchgereicht“ wird, bis er auf keine weitere Eins trifft, also dort, wo anfänglich zwei Nullen oder zwei Einsen zu finden waren. An dieser Stelle ergibt sich dann im Ergebnisvektor eine Eins. In anderen Komponenten, die nicht von so einer „Übertrags-Serie“, von denen es natürlich mehr als eine geben kann, „durchwandert“ werden, erscheint im Ergebnis nur dann eine Eins, wenn eine der zu addierenden Komponenten eine Eins aufweist.

Bei der Berechnung der Binärdarstellung von $c = a + b$ ist es also wichtig, die Positionen der $(1, 1)$ -Kombinationen in $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots$ und die Länge der darauffolgenden Serien von $(0, 1)$ - und $(1, 0)$ -Tupeln zu bestimmen.

Der von Neumann-Algorithmus liefert zu zwei binär dargestellten Zahlen die zugehörige Summe in Binärdarstellung und macht sich genau diese Zusammenhänge zunutze. Ziel dieses Kapitels ist es, etwas über das Verhalten der Anzahl A_n der Additionsschritte auszusagen, die nötig sind, wenn man mit diesem Algorithmus die Summe zweier zufällig gewählter Zahlen mit n -stelliger Binärdarstellung berechnet. Dies geschieht, indem man die beiden Binärdarstellungen mit einer Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen identifiziert. Dabei wird auch näher auf die Vermutung von V. CLAUS in [Cl], daß sich die erwartete Anzahl der benötigten Additionsschritte bei zwei n -stelligen 0-1-Folgen für $n \rightarrow \infty$ wie $\log_2 n + \frac{1}{3}$ verhält, eingegangen. Im ersten Abschnitt wird zunächst der von Neumann-Algorithmus vorgestellt und erklärt. Der zweite Abschnitt stellt dann über die Definition einer Folge von Zufallsvariablen den Zusammenhang mit der Erneuerungstheorie her und macht deutlich, was die Frage nach der Anzahl der Additionsschritte mit einem Rekord in der Erneuerungstheorie zu tun hat. An dieser Stelle kommt das Maximum geometrisch verteilter Zufallsvariablen ins Spiel, dessen asymptotisches Verhalten im dritten Abschnitt untersucht wird. Mit Hilfe der Ergebnisse aus dem dritten Abschnitt werden dann im vierten Teil dieses Kapitels Aussagen zum asymptotischen Verhalten der Verteilung und des Erwartungswertes von A_n erhalten.

2.1 Der Algorithmus

Es seien (a_0, \dots, a_{n-1}) und (b_0, \dots, b_{n-1}) aus $\{0, 1\}^n$ die Binärdarstellungen von $a := \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$ und $b := \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$. Die von Neumann-Paralleladdition liefert schrittweise die $(n+1)$ -stellige 0-1-Folge (c_0, \dots, c_n) , wobei $c := \sum_{i=0}^n c_i 2^i$ die Summe von a und b ist. Dabei geht man folgendermaßen vor:

- Zunächst seien

$$a^{(0)} := (a_0, \dots, a_{n-1}, 0)$$

und

$$b^{(0)} := (b_0, \dots, b_{n-1}, 0).$$

- Im $(k+1)$ -ten Schritt definiert man bei gegebenen $a^{(k)} = (a_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)})$ und $b^{(k)} = (b_0^{(k)}, \dots, b_n^{(k)})$ für $k \in \mathbb{N}_0$

$$a^{(k+1)} := (a_0^{(k)} \oplus b_0^{(k)}, \dots, a_n^{(k)} \oplus b_n^{(k)})$$

und

$$b^{(k+1)} := (0, a_0^{(k)} \wedge b_0^{(k)}, \dots, a_{n-1}^{(k)} \wedge b_{n-1}^{(k)}).$$

Hierbei gilt für $x, y \in \{0, 1\}$

$$x \oplus y = x + y \bmod 2$$

und

$$x \wedge y = x \cdot y.$$

- Nach

$$j := \inf\{k \in \mathbb{N} : b_0^{(k)} = \dots = b_n^{(k)} = 0\}$$

Schritten ist man fertig, denn dann gilt $(c_0, \dots, c_n) = a^{(j)}$.

Es wird in jedem Schritt in dem „ a -Vektor“ das Ergebnis der komponentenweisen Addition modulo 2 gespeichert, während man dem „ b -Vektor“ die Positionen der Überträge für den nächsten Schritt entnehmen kann. Aus diesem Grund hat der Algorithmus eine endliche Laufzeit, denn findet man im „ b -Vektor“ keine Eins mehr, so bedeutet dies, daß alle Übertrags-Serien von links nach rechts „abgearbeitet“ sind und man das Ergebnis im „ a -Vektor“ ablesen kann. Die zusätzliche $n + 1$ -te Komponente der Vektoren sorgt dafür, daß ein möglicher Überlauf berücksichtigt werden kann. Durch das parallele „Abarbeiten“ aller Übertrags-Serien hängt die Anzahl der Additionsschritte, die nötig sind, um zum Ergebnis zu gelangen, von der Länge der längsten auf eine $(1, 1)$ -Position folgende Serie von $(0, 1)$ - und $(1, 0)$ -Positionen in $(a_0, b_0), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1})$ ab. Es sei $L_n(a, b) := 0$, falls $(a_0, b_0) \neq (1, 1), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1}) \neq (1, 1)$, und sonst

$$L_n(a, b) := 1 + \max\{j \in \{0, \dots, n-1\} : \exists k \in \{0, \dots, n-1-j\} \text{ mit} \\ (a_k, b_k) = (1, 1), (a_{k+1}, b_{k+1}), \dots, (a_{k+j}, b_{k+j}) \in \{(1, 0), (0, 1)\}\}.$$

Dann liefert $L_n(a, b)$ offensichtlich die Länge dieser Serie inklusive des $(1, 1)$ -Tupels und gibt an, wieviele Schritte $k \in \mathbb{N}$ nötig sind, bis keine $(1, 1)$ -Kombinationen mehr in $(a_0^{(k)}, b_0^{(k)}), \dots, (a_n^{(k)}, b_n^{(k)})$ vorhanden sind. Im Fall $(b_0, \dots, b_{n-1}) \neq (0, \dots, 0)$ ist noch ein weiterer Schritt zu machen, um die letzten Überträge in den Vektor $a^{(k+1)}$ zu addieren und so $b^{(k+1)} = (0, \dots, 0)$ zu erhalten, also gibt

$$A_n(a, b) := L_n(a, b) + z_n(a, b)$$

mit

$$z_n(a, b) := \begin{cases} 0, & \text{falls } b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

die Anzahl der nötigen Additionsschritte des von Neumann-Algorithmus an. Im folgenden Beispiel wird der Ablauf des Algorithmus am konkreten Beispiel deutlich gemacht.

Beispiel 2.1. Wir betrachten die Zahlen $a = 212$ und $b = 397$. Es gilt

$$a = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^8$$

und

$$b = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^8,$$

also $L_9(a, b) = 3$, und damit sind $A_9(a, b) = 4$ Schritte nötig, um das Ergebnis $a + b$ in Binärdarstellung mit dem von Neumann-Algorithmus zu erhalten. Es ist

$$a^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0)$$

und

$$b^{(0)} = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0).$$

Damit ergibt sich

$$a^{(1)} = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0),$$

$$b^{(1)} = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0),$$

und

$$a^{(2)} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0),$$

$$b^{(2)} = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1),$$

und

$$a^{(3)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1),$$

$$b^{(3)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0),$$

und

$$a^{(4)} = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1),$$

$$b^{(4)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Es sind also wirklich, wie vorher berechnet, vier Additionsschritte gemacht worden, und es folgt

$$c = a + b = 2^0 + 2^5 + 2^6 + 2^9 = 609.$$

Bemerkung 2.2. Der Vorteil des von Neumann-Algorithmus gegenüber der bekannten Schulmethode liegt also in der parallelen Abwicklung bestimmter Additionsschritte. Während man für zwei n -stellige 0-1-Folgen mit der Schulmethode immer n Schritte benötigt, kommt dies bei der von Neumann-Paralleladdition nur im „worst case“ vor, zum Beispiel für $a = (1, 1, \dots, 1)$ und $b = (1, 0, 0, \dots, 0)$. (Hier benötigt der eben beschriebene Algorithmus sogar $n + 1$ Schritte, denn es wurde eine zusätzliche $n + 1$ -te Stelle eingeführt, um einen eventuellen Überlauf zu berücksichtigen.) Bei auf $\{0, 1\}^n$ gleichverteilten, n -stelligen 0-1-Folgen ist in [BGN] jedoch für die erwartete Länge der für die Anzahl der Schritte verantwortlichen Serie die Oberschranke $\log_2 n$ gefunden worden. In [Cl] (hier wird bei der Additionsdauer ein

möglicher Überlauf nicht berücksichtigt) wird für die erwartete Anzahl der Schritte zusätzlich die Unterschranke $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ hergeleitet, so daß sich insgesamt ergibt, daß die erwartete Anzahl der Schritte für $n \rightarrow \infty$ nur wie $\log n$ wächst. Dies macht den Vorteil der von Neumann-Paralleladdition gegenüber der Schulmethode gerade für große zu addierende Zahlen deutlich. Der große Unterschied zwischen dem „worst case“-Verhalten und dem „average case“-Verhalten motiviert auch die nachfolgenden Betrachtungen zum asymptotischen Verhalten der Verteilung der Anzahl der benötigten Schritte.

2.2 Zusammenhang mit der Erneuerungstheorie

Bis jetzt haben wir die Binärdarstellungen zweier fester natürlicher Zahlen a und b betrachtet und mit Hilfe des von Neumann-Algorithmus die Binärdarstellung der Summe berechnet. Im weiteren Verlauf des Kapitels steht nun das Verhalten der Anzahl der nötigen Schritte im Mittelpunkt, wenn man den Algorithmus auf zwei zufällige, n -stellige 0-1-Folgen anwendet und n immer größer werden läßt. Dazu müssen zunächst Annahmen an die zugrundeliegende „stochastische Struktur“ gemacht werden. Es sei also $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die einzelnen Positionen der unabhängigen Zufallsvektoren

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^n$$

und

$$(b_0, \dots, b_{n-1}) : \Omega \rightarrow \{0, 1\}^n$$

mit $n \in \mathbb{N}$ seien je unabhängig und identisch verteilt, wobei

$$P(a_0 = 0) = P(a_0 = 1) = \frac{1}{2}$$

und

$$P(b_0 = 0) = P(b_0 = 1) = \frac{1}{2}$$

gelten soll. Im Gegensatz zum ersten Abschnitt werden jetzt also „zufällig ausgewählte“, nämlich auf $\{0, 1\}^n$ gleichverteilte, n -stellige 0-1-Folgen betrachtet. Um nun die Verbindung zur Erneuerungstheorie herzustellen, definieren wir die Abbildung $X_k : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2\}$ für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ durch

$$X_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } (a_k, b_k) = (0, 0), \\ 1, & \text{falls } (a_k, b_k) = (1, 1), \\ 2, & \text{falls } (a_k, b_k) \in \{(0, 1), (1, 0)\}. \end{cases}$$

Damit ergibt sich offensichtlich

Lemma 2.3. *Es sind X_0, X_1, \dots, X_{n-1} unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit*

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{4}$$

und

$$P(X_1 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung 2.4. Die uns interessierende Schrittzahl, die der von Neumann-Algorithmus benötigt, um zum Ergebnis zu kommen, hängt im wesentlichen von der längsten auf eine $(1,1)$ -Kombination folgende Serie von $(1,0)$ - und $(0,1)$ -Tupeln ab. Dies kann man nun umformulieren in die Frage nach der längsten auf eine Eins folgende Serie von Zweien in X_0, X_1, \dots, X_{n-1} . Damit teilt sich die Folge X_0, X_1, \dots, X_{n-1} auf in die entscheidenden auf eine Eins folgenden und diese einschließenden Serien von Zweien und den „dazwischenliegenden“ Rest. Interpretieren kann man die Längen der uns interessierenden Serien (also die Anzahl der Zufallsvariablen, aus denen diese Serien bestehen) als Reparaturdauern und die Längen der „dazwischenliegenden“ Abschnitte als Lebensdauern eines bestimmten Objektes. Offensichtlich erhält man so zwei voneinander unabhängige Folgen von Zufallsvariablen, wobei die Lebensdauern eine Folge von unabhängigen und $\text{Geom}_{\mathbb{N}_0}(\frac{1}{4})$ -verteilten Zufallsvariablen bilden, während die voneinander unabhängigen Reparaturdauern $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(\frac{1}{2})$ -verteilt sind. Es entsteht mit wachsendem n ein Prozeß, bei dem sich unabhängige, $\text{Geom}_{\mathbb{N}_0}(\frac{1}{4})$ - und $\text{Geom}_{\mathbb{N}}(\frac{1}{2})$ -verteilte Zufallsvariablen „abwechseln“, also ein alternierender Erneuerungsprozeß. Hierbei ist es bemerkenswert, daß auch zwei für uns interessante Serien bzw. die entsprechenden Reparaturdauern direkt hintereinander folgen können, so daß die Lebensdauern in diesem Erneuerungsprozeß den Wert Null annehmen können. Mit Blick auf die Anzahl der Schritte geht es uns bei diesem Erneuerungsprozeß um die längste, nicht notwendigerweise abgeschlossene Reparaturdauer bis zum Zeitpunkt n . In Abbildung 1.2 werden diese Zusammenhänge dargestellt. Im Laufe des Kapitels wird deutlich werden, daß es bei unseren Betrachtungen für $n \rightarrow \infty$ keine Rolle spielt, ob man nur alle bis n beendeten Reparaturdauern betrachtet, oder auch die letzte, möglicherweise nicht abgeschlossene Reparaturdauer hinzunimmt.

Die Zufallsvariable $L_n : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\}$ mit $L_n := 0$, falls $X_0 \neq 1, \dots, X_{n-1} \neq 1$, und sonst

$$L_n := 1 + \max\{0 \leq j \leq n-1 : \exists 0 \leq k \leq n-1-j \ X_k = 1, X_{k+1} = \dots = X_{j+k} = 2\}$$

liefert analog zu Abschnitt 2.1 die Länge der längsten auf ein $(1,1)$ -Tupel folgende Serie von $(0,1)$ - und $(1,0)$ -Tupeln in der Folge $(a_0, b_0), \dots, (a_{n-1}, b_{n-1})$ bzw. die der längsten auf eine Eins folgende Serie von Zweien in X_0, \dots, X_{n-1} . Definiert man ebenfalls analog zu Abschnitt 2.1 die Zufallsvariable $z_n : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$z_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } b_0 = \dots = b_{n-1} = 0, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(z_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0, \quad (2.1)$$

und die Zufallsvariable $A_n : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n+1\}$ mit

$$A_n := L_n + z_n \quad (2.2)$$

gibt die Anzahl der Schritte an, die mit dem von Neumann-Algorithmus nötig sind, um zwei zufällige Zahlen mit den Binärdarstellungen (a_0, \dots, a_{n-1}) und (b_0, \dots, b_{n-1}) zu addieren.

In [Cl] beschäftigt sich V.CLAUS ebenfalls mit der Anzahl der nötigen Schritte dieses Algorithmus. Zu $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ wird dort mit $q_n(i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß die Addition zweier zufällig gewählter n -stelliger Binärzahlen mit dem von Neumann-Algorithmus mindestens i Schritte erfordert. Im Gegensatz zu der oben definierten Zufallsvariablen A_n kann hier die Anzahl der nötigen Schritte höchstens den Wert n annehmen. Das liegt an der Tatsache, daß die Summe zweier n -stelliger 0-1-Folgen eventuell eine $(n+1)$ -stellige Binärzahl sein kann und dieser „Überlauf“ in [Cl] bei der Berechnung der Additionsdauer zwar erkannt, aber nicht wie oben durch die zusätzliche $(n+1)$ -te Stelle in $a^{(0)}$ und $b^{(0)}$ berücksichtigt wird. Bei der Betrachtung des im Mittelpunkt stehenden asymptotischen Verhaltens der Anzahl der Schritte spielt dieser Unterschied jedoch offensichtlich keine Rolle. Zunächst werden in [Cl] dann Rekursionsformeln für $q_n(i)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{0, \dots, n\}$ bewiesen und mit deren Hilfe für den Erwartungswert der Additionsdauer die schon aus [BGN] bekannte Oberschranke $\lceil \log_2 n \rceil + 1$ und die Unterschranke $\lceil \log_2 n \rceil - 1$ hergeleitet. Die Rekursionsformeln für $q_n(i)$ führen außerdem auf die Möglichkeit, den Erwartungswert der Anzahl der notwendigen Additionsschritte rekursiv zu berechnen. Die errechneten Werte für n zwischen 1 und 2000, die in [Cl] im Anhang zu finden sind, haben V.CLAUS vermuten lassen, daß sich der Erwartungswert der Additionsdauer für $n \rightarrow \infty$ wie $\log_2 n + \frac{1}{3}$ verhält.

Bemerkung 2.5. Auch in anderen Arbeiten steht der von Neumann-Algorithmus und die Anzahl der nötigen Schritte im Mittelpunkt. So beschäftigt sich G.SCHAY in [Scha] mit der Länge der längsten auf ein $(1, 1)$ -Tupel folgende und dieses Tupel einschließende Serie von $(0, 1)$ - und $(1, 0)$ -Tupeln. Dabei ist q_{nr} für $n \in \mathbb{N}$ und $r = 0, \dots, n$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Länge dieser Serie bei zwei zufällig ausgewählten, $(n+1)$ -stelligen Binärzahlen größer als r ist. Es wird eine Rekursionsformel für q_{nr} hergeleitet, die dann über erzeugende Funktionen Näherungswerte für q_{nr} und so auch für die erwartete Länge dieser längsten, auf ein $(1, 1)$ -Tupel folgenden, $\{(0, 1), (1, 0)\}$ -Serie liefert. Hier wird behauptet, daß sich die erwartete Anzahl von Schritten beim von Neumann-Algorithmus bei $(n+1)$ -stelligen zufälligen 0-1-Folgen mit $n \rightarrow \infty$ wie $\log_2 n + 0.35$ verhält. Im Gegensatz dazu erkennt D.E.KNUTH in [K], daß die Differenz von erwarteter Additionsdauer und $\log_2 n$ für $n \rightarrow \infty$ nicht konvergiert, sondern noch von einer logarithmisch periodischen Funktion $f(n)$ abhängt. Im vierten Abschnitt dieses Kapitels wird darauf noch näher eingegangen.

Unser Ziel ist es hier nun, nicht nur etwas über das asymptotische Verhalten des Erwartungswertes von A_n auszusagen, sondern darüber hinaus mit probabilistischen Mitteln eine Antwort auf die Frage nach einer möglichen Konvergenz in Verteilung zu erhalten. Dies würde mehr Information liefern, denn man ist dann mit Hilfe der Quantile der Grenzverteilung in der Lage, Aussagen über die Wahrscheinlichkeiten sehr großer Laufzeiten des Algorithmus zu machen. In unserem Fall werden die Untersuchungen bestimmter Teilfolgen von $A_n - \log_2 n$ auf verschobene und diskretisierte Gumbelverteilungen als Grenzverteilungen hinauslaufen. Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit L_n und dem zugehörigen asymptotischen Verhalten im Falle $n \rightarrow \infty$ und übertragen die Ergebnisse dann mit Hilfe von (2.1), (2.2) und der sich daraus ergebenden Gleichung

$$E(A_n) = E(L_n) + 1 + o(1) \quad (2.3)$$

für $n \rightarrow \infty$ auf A_n . Wie angekündigt kommt hier nun das Maximum geometrisch verteilter Zufallsvariablen ins Spiel. Ist nämlich X_k^* für $k \in \mathbb{N}$ die in Bemerkung 2.4 schon erwähnte Länge der k -ten auf eine Eins folgende und diese Eins einschließende Serie von Zweien in X_0, X_1, X_2, \dots , so erhält man offensichtlich

Lemma 2.6. *Es ist $(X_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit*

$$X_1^* \sim \text{Geom}_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Definiert man nun die Zufallsvariable $\rho_n : \Omega \rightarrow \{0, \dots, n\}$ durch

$$\rho_n := \#\{0 \leq k \leq n-1 : X_k = 1\},$$

so folgt

Lemma 2.7. *Es ist für $n \in \mathbb{N}$*

$$\rho_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{4}\right).$$

Definiert man dann $M_0 := 0$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$M_n := \max\{X_1^*, \dots, X_n^*\},$$

so erhält man das wichtige

Lemma 2.8. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$M_{\rho_n-1} \leq L_n \leq M_{\rho_n}.$$

Es liegt also die Vermutung nahe, daß man anhand der Asymptotik der Verteilung von M_{ρ_n} und M_{ρ_n-1} und deren Erwartungswerten Aussagen über das Verhalten der Verteilung von L_n und über das Verhalten von $E(L_n)$ für $n \rightarrow \infty$ machen kann. Aus diesem Grund beschäftigt sich der kommende Abschnitt zunächst mit der Zufallsvariablen M_n .

2.3 Das asymptotische Verhalten des Maximums geometrisch verteilter Zufallsvariablen

In diesem Abschnitt steht die Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und die Frage nach ihrem asymptotischen Verhalten im Mittelpunkt. Dazu werden wir zunächst überprüfen, ob es zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $b_n > 0$ geben kann, so daß $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ für $n \rightarrow \infty$ in Verteilung gegen eine „nichtdegenerierte“ Zufallsvariable konvergiert. Es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(X_1^* = k)}{\sum_{j=k}^{\infty} P(X_1^* = j)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

also kann es laut Korollar 2.4.1. in [Ga] die oben erwähnten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht geben. Im weiteren Verlauf des Abschnitts wird jedoch gezeigt, daß sich das ändert, wenn man zu bestimmten Teilfolgen von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ übergeht. Ein erster Schritt dorthin ist das folgende Lemma.

Lemma 2.9. *Es sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $n_k \in \mathbb{N}$ für $k \in \mathbb{N}$ und*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{2^k} = \beta \in (1, 2).$$

Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\lfloor \log_2 n_k \rfloor = k$ für alle $k \geq k_0$ gilt.

Beweis. Man erhält

$$\log_2 n_k = \log_2 \left(\frac{n_k}{\beta 2^k} \beta 2^k \right) = \log_2 \left(\frac{n_k}{\beta 2^k} \right) + \log_2 \beta + k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{k \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{n_k}{\beta 2^k} \right) = 0$ und $0 < \log_2 \beta < 1$ gilt, findet man damit ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\log_2 n_k > k$$

für alle $k \geq k_1$ und ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\log_2 n_k < k + 1$$

für alle $k \geq k_2$. Dies liefert die Behauptung mit $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$. □

Es sei nun Z_{\log_2} eine Gumbel($\log 2$)-verteilte Zufallsvariable, also

$$P(Z_{\log_2} \leq x) = \exp(-e^{-(\log 2)x})$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhält man

Satz 2.10. *Es sei $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{2^k} = \beta$ für $\beta \in (1, 2)$. Dann gilt für $j \in \mathbb{Z}$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = j) = P(\lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil = j).$$

Beweis. Es sei $1 < \beta < 2$ und $j \in \mathbb{Z}$. Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 1 - j$ gilt dann

$$\begin{aligned}
P(M_{n_k} - k \leq j) &= (P(X_1^* \leq j + k))^{n_k} \\
&= \left(\sum_{l=1}^{j+k} \left(\frac{1}{2}\right)^l \right)^{n_k} \\
&= \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{j+k+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right)^{n_k} \\
&= (1 - 2^{-j-k})^{n_k} \\
&= \exp(n_k \log(1 - 2^{-j-k})).
\end{aligned}$$

Es ist wegen $\log(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für $|x| < 1$

$$\begin{aligned}
n_k \log(1 - 2^{-j-k}) &= -n_k \left(2^{-j-k} + \frac{2^{-2j} 2^{-2k}}{2} + o(2^{-2k}) \right) \\
&= -\frac{n_k}{2^k} 2^{-j} + o(1)
\end{aligned}$$

für $k \rightarrow \infty$. Das ergibt mit Lemma 2.9

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) &= \lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} - k \leq j) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{n_k}{2^k} 2^{-j} + o(1)\right) \\
&= \exp(-\beta e^{-j \log 2}).
\end{aligned}$$

Wegen $P(Z_{\log 2} + \log_2 \beta \leq x) = \exp(-\beta e^{-(\log 2)x})$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung. \square

Nach dem Satz von Scheffé (siehe Theorem 16.12 in [Bi2]) folgt aus Satz 2.10

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = j) - P(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil = j)| = 0,$$

also nicht nur die Konvergenz in Verteilung von $M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor$ gegen die „diskrete Gumbelverteilung“, sondern sogar die Konvergenz in Totalvariation. Man erkennt, daß dabei die Grenzverteilungen für unterschiedliche β aus der Verschiebung der Gumbelverteilung mit Parameter $\log 2$ um $\log_2 \beta$ entstehen. Diese Erkenntnis soll im nächsten Abschnitt mit Hilfe von Lemma 2.8 auf die Verteilung der Zufallsvariablen L_n übertragen werden. Da sich daneben auch eine Aussage zum asymptotischen Verhalten des zugehörigen Erwartungswertes ergeben soll, liefert das folgende Lemma 2.11 zunächst den Erwartungswert zu $\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil$. Dabei bezeichnen wir mit γ die Euler-Mascheroni-Konstante.

Lemma 2.11. *Für $\beta \in (1, 2)$ gilt*

$$E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil) = \log_2 \beta + \frac{\gamma}{\log 2} + \varphi(\beta)$$

mit

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &:= \int_0^\infty (\lceil \log_2 \beta - \log_2 z \rceil - (\log_2 \beta - \log_2 z)) e^{-z} dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) - \log_2 \beta - \frac{\gamma}{\log 2}.\end{aligned}$$

Beweis. Es sei $\beta \in (1, 2)$. Dann erhält man mit Hilfe der Substitution $y = e^{-(\log 2)x}$ und mit $E(Z_{\log 2}) = \frac{\gamma}{\log 2}$ (siehe Seite 278 in [JK])

$$\begin{aligned}E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil) &= E(Z_{\log 2}) + \log_2 \beta + E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil - (Z_{\log 2} + \log_2 \beta)) \\ &= \frac{\gamma}{\log 2} + \log_2 \beta \\ &\quad + (\log 2) \int_{-\infty}^\infty (\lceil x + \log_2 \beta \rceil - (x + \log_2 \beta)) e^{-(\log 2)x} \exp(-e^{-(\log 2)x}) dx \\ &= \frac{\gamma}{\log 2} + \log_2 \beta + \int_0^\infty (\lceil \log_2 \beta - \log_2 y \rceil - (\log_2 \beta - \log_2 y)) e^{-y} dy \\ &= \frac{\gamma}{\log 2} + \log_2 \beta + \varphi(\beta).\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\varphi(\beta) &= \int_0^\infty (\lceil \log_2 \beta - \log_2 y \rceil) e^{-y} dy - \int_0^\infty (\log_2 \beta - \log_2 y) e^{-y} dy \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty \int_{2^{(\log_2 \beta + k)}}^{2^{(\log_2 \beta + k + 1)}} (-k) e^{-y} dy - \left(\log_2 \beta + \frac{\gamma}{\log 2} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^\infty (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) - \log_2 \beta - \frac{\gamma}{\log 2},\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. \square

Im Beweis zu Lemma 2.11 wird deutlich, daß $E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil)$ wegen

$$0 \leq E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil - (Z_{\log 2} + \log_2 \beta)) < 1$$

endlich ist. Nun stellt sich die Frage, ob der Erwartungswert von $M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor$ gegen den Erwartungswert der Grenzverteilung, also gegen $E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil)$ konvergiert. Dazu sei abkürzend $Z^{(\beta)} := \lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil$.

Satz 2.12. *Ist $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{2^k} = \beta$ für $\beta \in (1, 2)$, so gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |E(M_{n_k}) - \lfloor \log_2 n_k \rfloor - E(Z^{(\beta)})| = 0.$$

Beweis. Zu zeigen ist wegen Lemma 2.9

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{n_k} - k) - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| = 0.$$

Es gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(M_{n_k} - k) - \mathbb{E}(Z^{(\beta)}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} [P(M_{n_k} - k \geq j) - P(Z^{(\beta)} \geq j)] - \sum_{j=-\infty}^{-1} [P(M_{n_k} - k \leq j) - P(Z^{(\beta)} \leq j)] \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} [P(Z^{(\beta)} \leq j) - P(M_{n_k} - k \leq j)], \end{aligned}$$

wobei man aufgrund der Existenz der Erwartungswerte $\mathbb{E}(M_{n_k})$ und $\mathbb{E}(Z^{(\beta)})$ die beteiligten Summen beliebig zusammenfassen kann. Offensichtlich gilt für $j \leq -k$

$$P(M_{n_k} - k \leq j) = 0,$$

also erhält man

$$\mathbb{E}(M_{n_k} - k) - \mathbb{E}(Z^{(\beta)}) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} [P(Z^{(\beta)} \leq j) - P(M_{n_k} - k \leq j)] + \sum_{j=-\infty}^{-k} P(Z^{(\beta)} \leq j).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(M_{n_k} - k) - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| \tag{2.4} \\ & \leq \sum_{j=-k+1}^{\infty} |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| + \sum_{j=-\infty}^{-k} \exp(-\beta e^{-j \log 2}). \end{aligned}$$

Mit Lemma A.3 (ii) erhält man

$$0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\beta e^{j \log 2}) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\beta(1 + j \log 2)) = \frac{e^{-\beta}}{1 - e^{-\beta \log 2}} < \infty,$$

und dies liefert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=-\infty}^{-k} \exp(-\beta e^{-j \log 2}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=k}^{\infty} \exp(-\beta e^{j \log 2}) = 0. \tag{2.5}$$

Wir betrachten nun den ersten Summanden auf der rechten Seite der Ungleichung (2.4). Dazu sei $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$ mit $j \leq k - 1$. Dann gilt

$$|(1 - 2^{j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{j \log 2})| \leq \exp(n_k \log(1 - 2^{j-k})) + \exp(-\beta e^{j \log 2}).$$

Wegen $j \leq k-1$ gilt $2^{j-k} \leq \frac{1}{2}$, und so folgt aus Lemma A.3 (i) für genügend große $k \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n_k}{2^k} \geq 1$

$$\exp(n_k \log(1 - 2^{j-k})) \leq \exp(n_k(-2^{j-k})) \leq \exp(-2^j).$$

Damit ergibt sich wegen $\exp(-\beta e^{j \log 2}) \leq \exp(-e^{j \log 2})$

$$|(1 - 2^{j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{j \log 2})| \leq 2 \exp(-e^{j \log 2}).$$

Da wir in früheren Berechnungen

$$0 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-e^{j \log 2}) < \infty$$

erhalten haben, folgt mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium (siehe hierzu Satz 105.3 in [H]), daß

$$\sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{1, \dots, k-1\}}(j) |(1 - 2^{j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{j \log 2})|$$

gleichmäßig in k konvergiert. Aus diesem Grund kann man laut Satz 104.5 in [H] Summation und Grenzübergang vertauschen und erhält

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=-k+1}^{-1} |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{1, \dots, k-1\}}(j) |(1 - 2^{j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{j \log 2})| \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} |(1 - 2^{j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{j \log 2})| \\ &= 0, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=-k+1}^{-1} |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| = 0. \quad (2.6)$$

Im weiteren Verlauf des Beweises sei wieder $k \in \mathbb{N}$ und $j \geq 0$. Man erhält

$$\begin{aligned} & |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| \\ &= \exp(-\beta e^{-j \log 2}) |\exp(n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}) - 1|. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Weiter ist

$$|n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}| \leq |n_k(\log(1 - 2^{-j-k}) + 2^{-j-k})| + |\beta 2^{-j} - n_k 2^{-j-k}|,$$

und wegen $|-2^{-j-k}| \leq \frac{1}{2}$ liefert Lemma A.1 ein $C > 0$ mit

$$|\log(1 - 2^{-j-k}) + 2^{-j-k}| \leq C(2^{-j-k})^2.$$

Da

$$|\beta 2^{-j} - n_k 2^{-j-k}| = 2^{-j} \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right|$$

gilt, folgt insgesamt

$$|n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}| \leq \frac{n_k}{2^k} C 2^{-2j} 2^{-k} + 2^{-j} \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right|. \quad (2.8)$$

Da $j \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich für genügend große $k \in \mathbb{N}$ sogar

$$|n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}| \leq C + \frac{1}{2},$$

so daß sich mit Hilfe von Lemma A.2 für $D := e^{C+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} |\exp(n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}) - 1| &\leq D |n_k \log(1 - 2^{-j-k}) + \beta 2^{-j}| \\ &\stackrel{(2.8)}{\leq} D \left(C \frac{n_k}{2^k} 2^{-2j} 2^{-k} + 2^{-j} \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right| \right). \end{aligned}$$

ergibt. Damit folgt aus (2.7)

$$\begin{aligned} &|(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| \\ &\leq \exp(-\beta e^{-j \log 2}) D \left(C \frac{n_k}{2^k} 2^{-2j} 2^{-k} + 2^{-j} \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right| \right) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} D \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-\beta e^{-j \log 2}) \left(C \frac{n_k}{2^k} 2^{-2j} 2^{-k} + 2^{-j} \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right| \right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} D \left(C \frac{n_k}{2^k} 2^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^j + \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^j \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} D \left(C \frac{n_k}{2^k} 2^{-k} \frac{4}{3} + 2 \left| \beta - \frac{n_k}{2^k} \right| \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{\infty} |(1 - 2^{-j-k})^{n_k} - \exp(-\beta e^{-j \log 2})| = 0. \quad (2.9)$$

Mit (2.5), (2.6) und (2.9) folgt dann aus (2.4)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{n_k} - k) - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| = 0,$$

also die Behauptung. \square

Es konvergiert also $\mathbb{E}(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor)$ für $k \rightarrow \infty$ gegen den Erwartungswert von $\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil$, wenn die Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 2.12 definiert ist. Da laut Lemma 2.9 für genügend große $k \in \mathbb{N}$

$$\lfloor \log_2 n_k \rfloor = k$$

gilt und man so

$$\log_2 n_k - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = \log_2 \left(\frac{n_k}{2^k} \right) + k - k = \log_2 \beta + o(1),$$

also

$$\lfloor \log_2 n_k \rfloor = \log_2 n_k - \log_2 \beta + o(1), \quad (2.10)$$

erhält, folgt demnach

Korollar 2.13. *Ist die Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in Satz 2.12 definiert, so gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{n_k}) - \log_2 n_k - \mathbb{E}(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil) + \log_2 \beta| = 0.$$

Bemerkung 2.14. Die hier verwendete Methode läßt sich auf gewichtete Konvergenzaussagen, also auf Verschärfungen des Ergebnisses aus Satz 2.10 zu Aussagen der Form

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho(j) |P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = j) - P(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil = j)| = 0$$

mit einer Gewichtsfunktion $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow [1, \infty)$, $\rho(k) \rightarrow \infty$ mit $k \rightarrow \pm\infty$, verallgemeinern.

Wie angekündigt soll nun im folgenden Abschnitt mit Hilfe von Satz 2.10 etwas über das Verhalten der Verteilung von L_n bzw. A_n für $n \rightarrow \infty$ ausgesagt werden. Dabei liegt die Vermutung nahe, daß sich auch hier für unterschiedliche Teilfolgen unterschiedliche Grenzverteilungen ergeben, die man durch Verschiebung der Gumbelverteilung mit Parameter $\log 2$ erhält. Daneben soll auf die Vermutung von V. CLAUS in [Cl] eingegangen werden, indem mit numerischen Mitteln gezeigt wird, daß nicht alle Teilfolgen von $\mathbb{E}(L_n) - \log_2 n$ bzw. von $\mathbb{E}(A_n) - \log_2 n$ denselben Grenzwert besitzen.

2.4 Das asymptotische Verhalten der Anzahl der Additionsschritte

Es sei im folgenden $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von natürlichen Zahlen, also $m_k \in \mathbb{N}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^{k+2}} = \beta,$$

wobei $\beta \in (1, 2)$ gelten soll. Dann liefert Lemma 2.8

Lemma 2.15. *Für $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$M_{\rho_{m_k}-1} \leq L_{m_k} \leq M_{\rho_{m_k}}.$$

Um Aussagen über das Verhalten von L_{m_k} für $k \rightarrow \infty$ zu erhalten, muß man offensichtlich mit Hilfe des letzten Abschnitts die Zufallsvariablen $M_{\rho_{m_k}-1}$ und $M_{\rho_{m_k}}$ näher betrachten. Definiert man dazu für $k \in \mathbb{N}$

$$n_k := \left\lfloor \frac{m_k}{4} - m_k^{\frac{3}{4}} \right\rfloor, n'_k := \left\lceil \frac{m_k}{4} + m_k^{\frac{3}{4}} \right\rceil$$

und

$$r_k := n_k - 1, r'_k := n'_k - 1,$$

so ergibt sich

Lemma 2.16. *Es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n'_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r'_k}{2^k} = \beta.$$

Beweis. Es gibt für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $R_k \in [0, 1)$, so daß

$$n_k = \frac{m_k}{4} - m_k^{\frac{3}{4}} - R_k$$

gilt, also hat man

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{m_k}{2^{k+2}} - 4 \frac{m_k}{2^{k+2}} \frac{1}{m_k^{\frac{1}{4}}} - \frac{R_k}{2^k} \right) = \beta.$$

Analog lassen sich die übrigen Aussagen zeigen. □

Zusätzlich erhält man für die oben definierten Folgen

Lemma 2.17. *Es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(n_k \leq \rho_{m_k} \leq n'_k) = 1,$$

also auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(r_k \leq \rho_{m_k} - 1 \leq r'_k) = 1.$$

Beweis. Mit der Ungleichung von Chebychev folgt wegen $\rho_{m_k} \sim \text{Bin}(m_k, \frac{1}{4})$

$$P\left(\left|\rho_{m_k} - \frac{m_k}{4}\right| \geq m_k^{\frac{3}{4}}\right) \leq \frac{1}{m_k^{\frac{3}{2}}} \text{Var}(\rho_{m_k}) = \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{m_k}}, \quad (2.11)$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\left|\rho_{m_k} - \frac{m_k}{4}\right| \geq m_k^{\frac{3}{4}}\right) = 0,$$

und das ist wegen $n_k \leq \frac{m_k}{4} - m_k^{\frac{3}{4}}$ und $n'_k \geq \frac{m_k}{4} + m_k^{\frac{3}{4}}$ die Behauptung. \square

Aus Lemma 2.17 ergibt sich der für unsere Ziele wichtige

Satz 2.18. *Es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}) = 1$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{r_k} \leq M_{\rho_{m_k}-1} \leq M_{r'_k}) = 1.$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt mit $A_k := \{n_k \leq \rho_{m_k} \leq n'_k\}$

$$\begin{aligned} & P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}) \\ &= P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}, A_k) + P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}, A_k^c) \\ &\geq P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}, A_k) \\ &= P(A_k), \end{aligned}$$

also mit Lemma 2.17

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}) = 1.$$

Analog folgt die zweite Aussage. \square

Bevor wir nun für $M_{\rho_{m_k}-1}$ und $M_{\rho_{m_k}}$ eine analoge Aussage zu Satz 2.10 beweisen, benötigen wir folgendes Lemma, das sich aus Lemma 2.9 und Lemma 2.16 ergibt.

Lemma 2.19. *Für genügend große $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lfloor \log_2 n_k \rfloor = \lfloor \log_2 n'_k \rfloor = \lfloor \log_2 r_k \rfloor = \lfloor \log_2 r'_k \rfloor = k.$$

Damit erhält man

Satz 2.20. *Es gilt für $j \in \mathbb{Z}$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = j) = P(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil = j)$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{\rho_{m_k}-1} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor = j) = P(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil = j).$$

Beweis. Es sei $j \in \mathbb{Z}$ und $B_k := \{M_{n_k} \leq M_{\rho_{m_k}} \leq M_{n'_k}\}$. Dann folgt für genügend große $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) &\geq P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j, B_k) \\ &\geq P(M_{n'_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j, B_k) \\ &= P(M_{n'_k} - \lfloor \log_2 n'_k \rfloor \leq j) - P(M_{n'_k} - \lfloor \log_2 n'_k \rfloor \leq j, B_k^c) \\ &\geq P(M_{n'_k} - \lfloor \log_2 n'_k \rfloor \leq j) - P(B_k^c), \end{aligned}$$

also mit Satz 2.18

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n'_k} - \lfloor \log_2 n'_k \rfloor \leq j).$$

Außerdem erhält man

$$\begin{aligned} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) &= P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j, B_k) + P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j, B_k^c) \\ &\leq P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) + P(B_k^c) \end{aligned}$$

und so mit Hilfe von Satz 2.18

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{n_k} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j).$$

Aus Satz 2.10 und Lemma 2.16 ergibt sich somit für alle $j \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(M_{\rho_{m_k}} - \lfloor \log_2 n_k \rfloor \leq j) = \exp(-\beta e^{-j \log 2})$$

und damit die erste Behauptung. Analog folgt die Aussage für $M_{\rho_{m_k}-1}$. \square

Es läßt sich offensichtlich ein $k_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$\lfloor \log_2 n_k \rfloor = \lfloor \log_2 m_k \rfloor - 2 \tag{2.12}$$

für alle $k \geq k_0$. Dies liefert zusammen mit Satz 2.20 und Lemma 2.15

Korollar 2.21. *Für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(L_{m_k} - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 = j) = P(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil = j).$$

Wie erwartet entstehen die Grenzverteilungen zu bestimmten Teilfolgen von $L_n - \lfloor \log_2 n \rfloor$ aus der Verschiebung einer Gumbelverteilung, wobei auch hier mit dem Satz von Scheffé sogar die Konvergenz in Totalvariation folgt. Wie im vorangegangenen Abschnitt wenden wir uns nun noch den zugehörigen Erwartungswerten zu. Um zu zeigen, daß $E(L_{m_k}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2$ für $k \rightarrow \infty$ gegen $E(\lceil Z_{\log 2} + \log_2 \beta \rceil)$ konvergiert, ist unter anderem eine Aussage zum asymptotischen Verhalten von $E(M_{m_k}^2)$ für $k \rightarrow \infty$ notwendig. Dazu ist das folgende Lemma hilfreich.

Lemma 2.22. Ist $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit $Y_1 \sim \text{Exp}(1)$ und definiert man $\tilde{M}_n := \max\{Y_1, \dots, Y_n\}$ für $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$M_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left\lfloor \frac{\tilde{M}_n}{\log 2} \right\rfloor + 1.$$

Beweis. Zunächst gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$P\left(\left\lfloor \frac{Y_1}{\log 2} + 1 \right\rfloor = k\right) = P\left(k-1 \leq \frac{Y_1}{\log 2} < k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{(k-1)} \frac{1}{2},$$

also

$$\left\lfloor \frac{Y_1}{\log 2} + 1 \right\rfloor \sim \text{Geom}_{\mathbb{N}}\left(\frac{1}{2}\right).$$

Damit erhält man

$$M_n \stackrel{\mathcal{D}}{=} \max\left\{\left\lfloor \frac{Y_1}{\log 2} + 1 \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{Y_n}{\log 2} + 1 \right\rfloor\right\} = \left\lfloor \frac{\tilde{M}_n}{\log 2} \right\rfloor + 1.$$

□

Damit ergibt sich

Satz 2.23. Für $k \rightarrow \infty$ gilt

$$E(M_{m_k}^2) = O((\log m_k)^2).$$

Beweis. Lemma 2.22 liefert

$$E(M_{m_k}^2) \leq \frac{1}{(\log 2)^2} E(\tilde{M}_{m_k}^2) + \frac{2}{\log 2} E(\tilde{M}_{m_k}) + 1. \quad (2.13)$$

Aus diesem Grund betrachten wir zunächst $E(\tilde{M}_{m_k})$ und dann $E(\tilde{M}_{m_k}^2)$. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} E(\tilde{M}_{m_k}) &= \int_0^\infty (1 - P(\tilde{M}_{m_k} \leq x)) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx \\ &= \int_0^{\log m_k} (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx + \int_{\log m_k}^\infty (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx. \end{aligned}$$

Da die Funktion $x \mapsto (1 - (1 - e^{-x})^{m_k})$ in $x \in \mathbb{R}$ fällt, gilt

$$\int_0^{\log m_k} (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx \leq \int_0^{\log m_k} dx = \log m_k.$$

Mit Hilfe der Substitution $y = x - \log m_k$ erhält man

$$\int_{\log m_k}^{\infty} (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx = \int_0^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{e^{-y}}{m_k}\right)^{m_k}\right) dy.$$

Es ist $e^{-y} \in (0, 1)$ für $y \in (0, \infty)$, also folgt mit Lemma A.4 für $k \in \mathbb{N}$ mit $m_k \geq 2$

$$\left(1 - \frac{e^{-y}}{m_k}\right)^{m_k} \geq e^{-2e^{-y}}.$$

Damit ergibt sich für genügend große $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \int_0^{\infty} \left(1 - \left(1 - \frac{e^{-y}}{m_k}\right)^{m_k}\right) dy \leq \int_0^{\infty} (1 - \exp(-2e^{-y})) dy,$$

also

$$E(\tilde{M}_{m_k}) \leq \log m_k + \int_0^{\infty} (1 - \exp(-2e^{-y})) dy.$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} E(\tilde{M}_{m_k}^2) &= 2 \int_0^{\infty} x (1 - (1 - e^{-x})^{m_k}) dx \\ &\leq 2(\log m_k)^2 + 2 \int_0^{\infty} y (1 - \exp(-2e^{-y})) dy + 2 \log m_k \int_0^{\infty} (1 - \exp(-2e^{-y})) dy. \end{aligned}$$

Mit Lemma A.3 (ii) folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$1 - e^{-x} \leq x,$$

also

$$\int_0^{\infty} (1 - \exp(-2e^{-y})) dy \leq 2 \int_0^{\infty} e^{-y} dy < \infty$$

und

$$\int_0^{\infty} y (1 - \exp(-2e^{-y})) dy \leq 2 \int_0^{\infty} ye^{-y} dy < \infty.$$

Damit erhält man für $k \in \mathbb{N}$

$$E(\tilde{M}_{m_k}) \leq \log m_k + o(\log m_k)$$

und

$$E(\tilde{M}_{m_k}^2) \leq 2(\log m_k)^2 + o((\log m_k)^2).$$

Dies liefert zusammen mit Gleichung (2.13) die Behauptung. \square

Mit Hilfe von Satz 2.23 ist der Beweis des folgenden Satzes möglich.

Satz 2.24. *Es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 - \mathbb{E}(\lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil)| = 0$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}-1}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 - \mathbb{E}(\lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil)| = 0.$$

Beweis. Auch hier sei abkürzend $Z^{(\beta)} := \lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil$. Es ist für genügend große $k \in \mathbb{N}$ mit Gleichung (2.12)

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| \\ & \leq |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}}) - \mathbb{E}(M_{n_k})| + |\mathbb{E}(M_{n_k}) - \lfloor \log_2 n_k \rfloor - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})|. \end{aligned}$$

Wegen Satz 2.12 muß zum Beweis der ersten Behauptung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}}) - \mathbb{E}(M_{n_k})| = 0$$

gezeigt werden. Definiert man

$$A_{m_k} := \{n_k \leq \rho_{m_k} \leq n'_k\},$$

so ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} P(A_{m_k}^c) &= P\left(\left\{\rho_{m_k} < \left\lfloor \frac{m_k}{4} - m_k^{\frac{3}{4}} \right\rfloor\right\} \cup \left\{\rho_{m_k} > \left\lceil \frac{m_k}{4} + m_k^{\frac{3}{4}} \right\rceil\right\}\right) \\ &\leq P\left(\left|\rho_{m_k} - \frac{m_k}{4}\right| \geq m_k^{\frac{3}{4}}\right) \end{aligned}$$

zusammen mit Gleichung (2.11)

$$P(A_{m_k}^c) \leq \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{m_k}}. \quad (2.14)$$

Es ist

$$\mathbb{E}(|M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) = \mathbb{E}(1_{A_{m_k}} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) + \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|).$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann mit Gleichung (2.14) und mit $n_k \leq m_k$ für genügend große $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) &\leq \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} M_{\rho_{m_k}}) + \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} M_{n_k}) \\ &\leq \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} M_{m_k}) + \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} M_{m_k}) \\ &= 2\mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} M_{m_k}) \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c}^2)} \sqrt{\mathbb{E}(M_{m_k}^2)} \\ &= \sqrt{P(A_{m_k}^c)} \sqrt{\mathbb{E}(M_{m_k}^2)} \\ &\leq \sqrt{\frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{m_k}}} \sqrt{\mathbb{E}(M_{m_k}^2)}. \end{aligned}$$

Mit Satz 2.23 ergibt sich

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{A_{m_k}^c} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) = 0.$$

Außerdem erhält man mit Satz 2.12

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{A_{m_k}} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{A_{m_k}} |M_{n'_k} - M_{n_k}|) \\ & \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|M_{n'_k} - M_{n_k}|) \\ & = 0, \end{aligned}$$

also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}(1_{A_{m_k}} |M_{\rho_{m_k}} - M_{n_k}|) = 0.$$

Dies bedeutet insgesamt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| = 0.$$

Analog läßt sich auch

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(M_{\rho_{m_k}-1}) - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 2 - \mathbb{E}(Z^{(\beta)})| = 0$$

beweisen. □

Schließlich ergibt sich daraus mit Lemma 2.15 und der Gleichung

$$\lfloor \log_2 m_k \rfloor = \log_2 m_k - \log_2 \beta + o(1)$$

Korollar 2.25. *Es ist*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(L_{m_k}) - \log_2 m_k + \log_2 \beta + 2 - \mathbb{E}(\lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil)| = 0.$$

Ist also $\beta \in (1, 2)$ und $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{2^{k+2}} = \beta$, so kann man nun mit den Gleichungen (2.1) und (2.3) die Ergebnisse aus Korollar 2.21 und Korollar 2.25 auf die Anzahl A_{m_k} der nötigen Additionsschritte übertragen. Für das asymptotische Verhalten der Verteilung von A_{m_k} ergibt sich

Korollar 2.26. *Es gilt für $j \in \mathbb{Z}$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_{m_k} - \lfloor \log_2 m_k \rfloor + 1 = j) = P(\lceil Z_{\log_2} + \log_2 \beta \rceil = j).$$

Im Falle des Erwartungswertes von A_{m_k} erhält man

Korollar 2.27. *Es gilt*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\mathbb{E}(A_{m_k}) - \log_2 m_k + 1 - \frac{\gamma}{\log 2} - \varphi(\beta)| = 0.$$

Bemerkung 2.28. In [K] beschäftigt sich D.E.KNUTH nur mit dem Erwartungswert der Anzahl von Additionsschritten, die der von Neumann-Algorithmus benötigt. Hier werden jedoch nicht nur Binärdarstellungen, sondern allgemeiner Zahlen zur Basis b betrachtet¹. Für die erwartete Anzahl t_n von Schritten bei n -stelligen Darstellungen ergibt sich dort unter Verwendung von klassischen Verfahren der asymptotischen Analysis

$$t_n = \log_b n + \frac{\gamma}{\log b} + \frac{1}{2} + \log_b \left(\frac{b-1}{2} \right) - f(n) + O \left(\frac{(\log n)^4}{n} \right), \quad (2.15)$$

wobei $f(n) = f(bn)$ gilt. Laut [K] ist $f(n)$ sehr klein und nicht konstant, was dort aber nicht explizit bewiesen wird. Die Gleichung (2.15) deutet darauf hin, daß speziell im Fall $b = 2$ die Folge $t_n - \log_2 n$, also $E(A_n) - \log_2 n$, für $n \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert besitzt, jedoch für große n Werte in einer bestimmten „kleinen“ Umgebung von $\frac{\gamma}{\log 2} - \frac{1}{2} \approx 0.333$ annimmt.

Hier ist sogar gezeigt worden, daß die Verteilungen von bestimmten Teilfolgen von $A_n - \log_2 n$ gegen durch Verschiebung aus der Gumbelverteilung entstehende Grenzverteilungen konvergieren. Kann man nun mit Blick auf [K] zeigen, daß $\varphi(\beta)$ in $\beta \in (1, 2)$ nicht konstant ist, so ist klar, daß $E(A_n) - \log_2 n$ für $n \rightarrow \infty$ keinen Grenzwert besitzen kann. Außerdem liegt es nahe, logarithmische Periodizität und Wertebereich von $\varphi(\beta)$ auf $(1, 2)$ zu untersuchen. Dazu betrachten wir die mit Hilfe von MAPLE erstellte Abbildung 2.1 auf Seite 40, in der die Funktion $\varphi_{(k_1, k_2)}^* : (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_{(k_1, k_2)}^*(\beta) := \sum_{k=-k_1}^{k_2} (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) - \log_2 \beta - \frac{\gamma}{\log 2},$$

also eine Näherung von $\varphi(\beta)$ für alle $\beta \in (1, 2)$, für $k_1 = 40$ und $k_2 = 30$ zu sehen ist.

Offensichtlich ist $\varphi(\beta)$ nicht konstant. Man erkennt jedoch auch, daß sich die Werte von $\varphi(\beta)$ voraussichtlich in einer Umgebung der Größenordnung 10^{-5} um $\frac{1}{2}$ befinden. Dies würde bedeuten, daß die Grenzwerte der von uns betrachteten Teilfolgen von $E(A_n) - \log_2 n$ in einer 10^{-5} -Umgebung von $-1 + \frac{\gamma}{\log 2} + \frac{1}{2} \approx 0.333$ zu finden sind und so die Vermutung von V.CLAUS in [Cl] nahegelegen hat und nachzuvollziehen ist. Es soll nun gezeigt werden, daß $\varphi(\beta)$ nicht konstant ist. Dazu betrachten wir den folgenden Satz.

¹Da uns die Arbeit von D.E.KNUTH erst nach Fertigstellung der ersten Version dieses Kapitels bekannt wurde, wird hier auf diese allgemeinere Situation nicht eingegangen.

Satz 2.29. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 + 2(n-1))$$

und

$$\left| \sum_{k=-\infty}^{-n} (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) \right| \leq 2e \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 + 2(n-1)).$$

Beweis. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann erhält man mit Lemma A.3 (ii)

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=n}^{\infty} (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) \right| \\ & \leq \sum_{k=n}^{\infty} k \exp(-e^{(\log_2 2)(\log_2 \beta + k)}) \\ & \leq \sum_{k=n}^{\infty} k e^{-(1+(\log_2 2)(\log_2 \beta + k))} \\ & \leq \sum_{k=n}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 + 2(n-1)). \end{aligned}$$

Außerdem ergibt sich mit Lemma A.2

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=-\infty}^{-n} (-k) \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta + k)})) \right| \\ & = \sum_{k=n}^{\infty} k \exp(-2^{(\log_2 \beta - k)}) (1 - \exp(-2^{(\log_2 \beta - k)})) \\ & \leq e \sum_{k=n}^{\infty} k e^{(\log_2 \beta - k) \log 2} \\ & \leq 2e \sum_{k=n}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ & = 2e \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 + 2(n-1)). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe von Satz 2.29 ist man in der Lage, zumindest auf numerischem Wege mit MAPLE zu bestätigen, daß $\varphi(\beta)$ in β nicht konstant ist und $E(A_n) - \log_2 n$ somit

nicht konvergiert. Es gilt für $\beta_1 = 2^{0.1}$ und $\beta_2 = 2^{0.5}$

$$\varphi_{(40,30)}^*(\beta_1) = 0.5000015658$$

und

$$\varphi_{(40,30)}^*(\beta_2) = 0.4999987928.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \varphi_{(40,30)}^*(\beta_2) + \left(\frac{1}{2}\right)^{31} (4 + 2 \cdot 30) + 2e \left(\frac{1}{2}\right)^{41} (4 + 2 \cdot 40) &= 0.4999988228 \\ < \varphi_{(40,30)}^*(\beta_1) - \left(\frac{1}{2}\right)^{31} (4 + 2 \cdot 30) - 2e \left(\frac{1}{2}\right)^{41} (4 + 2 \cdot 40) &= 0.5000015358, \end{aligned}$$

also haben wir mit „numerischen Argumenten“

$$\varphi(\beta_1) > \varphi(\beta_2)$$

gezeigt.

Im folgenden wenden wir uns nun der Frage nach einer gewissen Periodizität von $\varphi(\beta)$ zu. Man erkennt schnell

Lemma 2.30. *Für $\beta \in (1, \infty)$ gilt*

$$\varphi(\beta) = \varphi(2\beta).$$

Definiert man also die Funktion $\Psi : (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ durch

$$\Psi(\eta) := \varphi(2^\eta) = \int_0^\infty (\lceil \eta - \log_2 z \rceil - (\eta - \log_2 z)) e^{-z} dz,$$

so ist Ψ offensichtlich periodisch mit

$$\Psi(\eta) = \Psi(\eta + 1).$$

Damit liegt es nahe, die Funktion Ψ durch ein trigonometrisches Polynom zu approximieren und schließlich η durch $\log_2 \beta$ zu ersetzen, um so den Verlauf von $\varphi_{(40,30)}^*(\beta)$ in Abbildung 2.1 besser zu verstehen. Aus diesem Grund werden im folgenden Lemma die ersten Fourier-Koeffizienten zu Ψ bestimmt.

Lemma 2.31. *Für*

$$a_0 := 2 \int_0^1 \Psi(\eta) d\eta,$$

$$a_1 := 2 \int_0^1 \Psi(\eta) \cos(2\pi\eta) d\eta$$

und

$$b_1 := 2 \int_0^1 \Psi(\eta) \sin(2\pi\eta) d\eta$$

gilt

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -2 \int_0^\infty e^{-z} \frac{\sin((\lceil -\log_2 z \rceil + \log_2 z)\pi) \cos((\lceil -\log_2 z \rceil + \log_2 z)\pi)}{\pi} dz$$

und

$$b_1 = \int_0^\infty e^{-z} \frac{2 \cos((\lceil -\log_2 z \rceil + \log_2 z)\pi)^2 - 1}{\pi} dz.$$

Beweis. Es sei abkürzend $B(z) := \lceil -\log_2 z \rceil + \log_2 z$ für $z \in [0, \infty)$. Mit dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \int_0^\infty e^{-z} \int_0^1 (\lceil \eta - \log_2 z \rceil - (\eta - \log_2 z)) \cos(2\pi\eta) d\eta dz \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-z} \left[\int_0^{B(z)} (B(z) - \eta) \cos(2\pi\eta) d\eta + \int_{B(z)}^1 (B(z) + 1 - \eta) \cos(2\pi\eta) d\eta \right] dz \\ &= -2 \int_0^\infty e^{-z} \frac{\sin(B(z)\pi) \cos(B(z)\pi)}{\pi} dz. \end{aligned}$$

Analog erhält man a_0 und b_1 . □

In dieser neuen Form lassen sich a_1 und b_1 mit Hilfe von MAPLE numerisch bestimmen. Es ergibt sich

$$a_1 \approx 0.1205155606 \cdot 10^{-5}$$

und

$$b_1 \approx 0.1011150393 \cdot 10^{-5}.$$

Die Abbildung 2.2 auf Seite 41 zeigt die zugehörige Approximation an die Funktion

$$p(\beta) := \frac{1}{2} + a_1 \cos(2\pi \log_2 \beta) + b_1 \sin(2\pi \log_2 \beta)$$

in $\beta \in (1, 2)$.

Offensichtlich ist $p(\beta)$ eine gute Näherung für $\varphi(\beta)$, denn man erhält mit MAPLE

$$\sup_{1 < \beta < 2} |p(\beta) - \varphi^*(\beta)| \leq 8 \cdot 10^{-11}.$$

Dies liegt daran, daß die nachfolgenden Fourierkoeffizienten von Ψ schnell sehr klein werden; zum Beispiel ergibt sich mit denselben Methoden wie im Beweis zu Lemma 2.31

$$a_2 := 2 \int_0^1 \Psi(\eta) \cos(4\pi\eta) d\eta \approx 0.426 \cdot 10^{-12}$$

und

$$b_2 := 2 \int_0^1 \Psi(\eta) \sin(4\pi\eta) d\eta \approx -0.59096 \cdot 10^{-12}.$$

Insgesamt ist deutlich geworden, warum die betrachteten Teilfolgen von $E(A_n) - \log_2 n$ zwar nicht denselben Grenzwert besitzen, aber alle gegen einen Wert in einer Umgebung der Größenordnung 10^{-5} von 0.333 konvergieren.

Bemerkung 2.32. Definiert man für $x \in \mathbb{R}$

$$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor,$$

so gilt

$$\varphi(\beta) = E(1 - \{Z_{\log_2} + \log_2 \beta\}).$$

Neben der Interpretation von $1 - \varphi(\beta)$ als Erwartungswert des „fractional parts“ der um $\log_2 \beta$ verschobenen Gumbelverteilung mit Parameter $\log 2$ ermöglicht diese Darstellung von φ einen mit probabilistischen Mitteln und ganz ohne numerische Argumente durchgeführten Beweis, daß $\varphi(\beta)$ in $\beta \in (1, 2)$ nicht konstant ist. Dies gelingt, indem man zeigt, daß der „fractional part“ $\{Z_{\log_2} + \log_2 \beta\}$ von $Z_{\log_2} + \log_2 \beta$ nicht auf $(0, 1)$ gleichverteilt ist und so $\varphi(\beta)$ nicht konstant sein kann. Die Tatsache, daß sich $\varphi(\beta)$ in einer 10^{-5} -Umgebung von $\frac{1}{2}$ bewegt, läßt sich mit den Fourier-Koeffizienten a_k der Dichte zu $\{Z_{\log_2} + \log_2 \beta\}$ erklären. Sie ergeben sich, indem man die charakteristische Funktion von $Z_{\log_2} + \log_2 \beta$ an den Stellen $2\pi k$ auswertet und werden schnell sehr klein. Dies macht deutlich, daß sich $\{Z_{\log_2} + \log_2 \beta\}$ „fast wie eine $\text{unif}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariable“ verhält, die $\varphi(\beta) = \frac{1}{2}$ liefern würde.

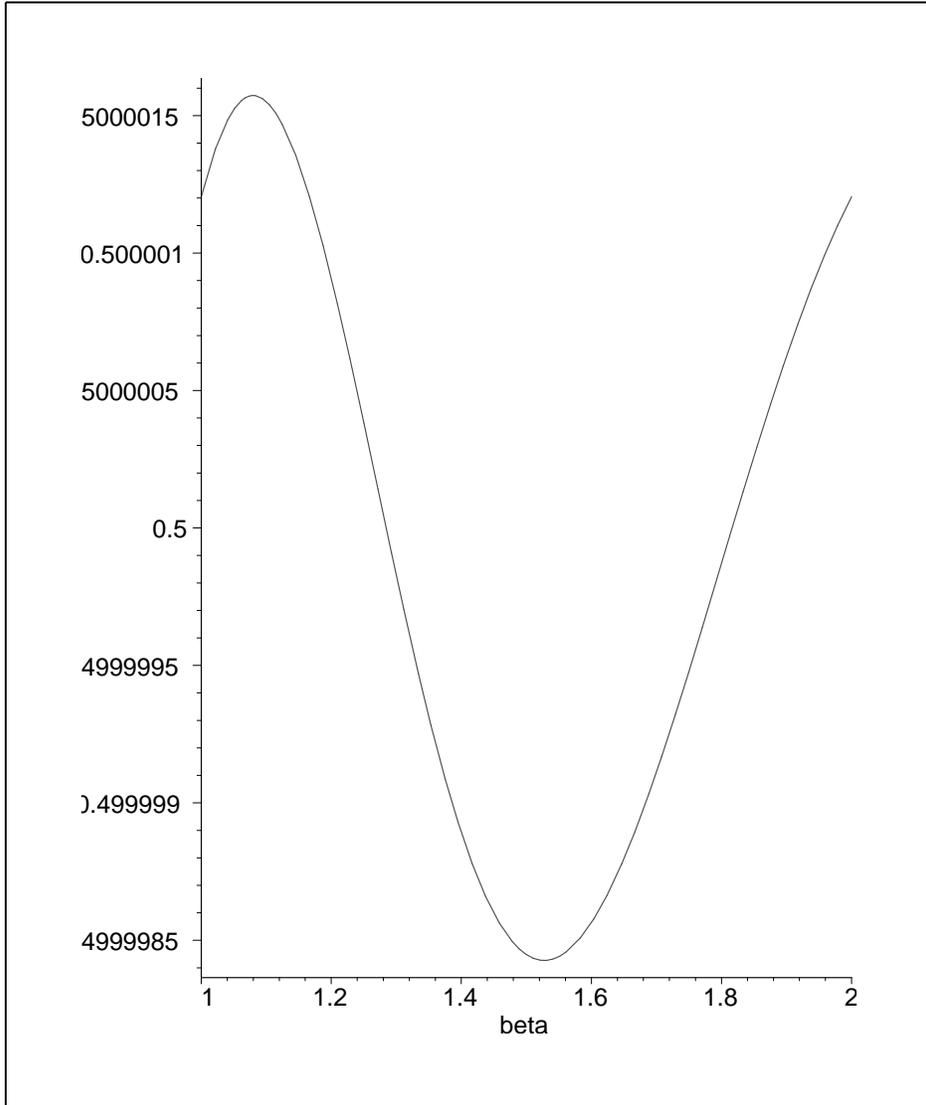


Abbildung 2.1: $\varphi_{(40,30)}^*(\beta)$

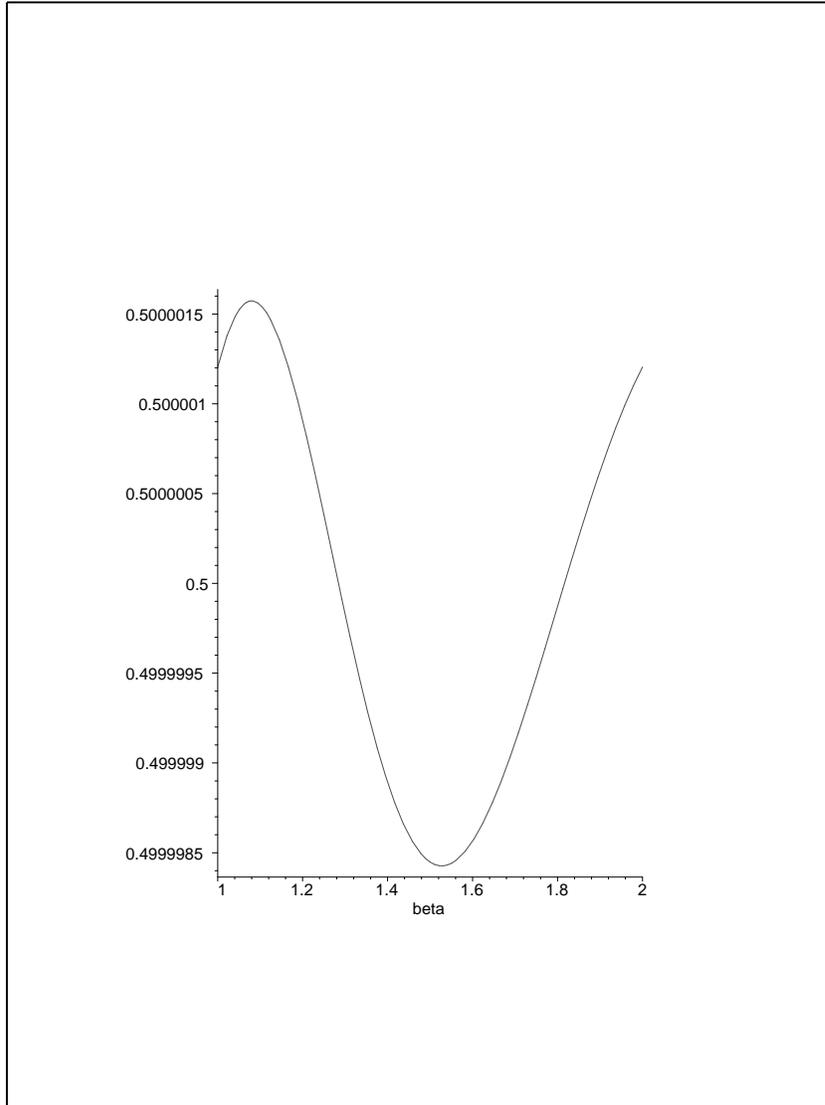


Abbildung 2.2: Approximation an $p(\beta)$

Kapitel 3

Auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilte Lebensdauern

In diesem Kapitel stehen eine Folge von unabhängigen, auf einer diskreten Menge gleichverteilten Zufallsvariablen und die Frage nach Anzahl und Summe von Rekorden unter diesen Zufallsvariablen im Mittelpunkt. Umschreiben läßt sich dies anhand eines Spiels, bei dem zwei Personen, Spieler A und Spieler B, einen fairen „Würfel mit $N \in \mathbb{N}$ Seiten“ so lange werfen, bis zum ersten Mal die Zahl N gefallen ist. Dabei werden die Augenzahlen aller Rekordwürfe, also der Würfe, deren Augenzahl größer als die der davorliegenden ist, zusammengezählt, und diese Summe erhält Spieler B von Spieler A in Euro. In der erneuerungstheoretischen Interpretation entspricht die Summe der insgesamt in Rekorden verbrachten Zeit. In den folgenden Abschnitten von Kapitel 3 kann man sich unter der Folge der unabhängigen und auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen also eine Folge von Augenzahlen vorstellen, die sich ergibt, wenn man einen fairen „ N -seitigen Würfel“ wirft. Neben der Summe der Rekord-Augenzahlen, im folgenden mit $Z^{(N)}$ bezeichnet, ist natürlich auch die Anzahl der Rekordwürfe interessant. Die Zufallsvariable $Y^{(N)}$ gibt dabei im weiteren Verlauf des Kapitels diese Anzahl an. Im ersten Abschnitt werden die Zufallsvariablen $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ definiert und die zugehörigen Erwartungswerte und Varianzen berechnet. Anhand dieser Werte könnte Spieler A einen Preis für das Spiel festsetzen, den Spieler B zu Beginn bezahlen muß. In den weiteren drei Abschnitten geht es dann hauptsächlich um die Frage, wie sich die Verteilungen von $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ für $N \rightarrow \infty$ verhalten. Im letzten Abschnitt werden unter anderem Rekursionsformeln zu den Verteilungen von $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ hergeleitet und interpretiert. Sie erlauben die Berechnung der Verteilungen und werden für die Abbildungen 3.1 bis 3.7 bzw. 3.9 und 3.10 verwendet.

Man nennt $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ für $n \in \mathbb{N}$ die n -te harmonische Zahl; es gilt bekanntlich $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = \gamma$, wobei $\gamma = 0.57721\dots$ die Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet.

3.1 Definition von $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$

Es sei also $(X_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ für $N \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit

$$X_1^{(N)} \sim \text{unif}(\{1, \dots, N\})$$

auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Außerdem seien für $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $N_1 \neq N_2$ die Folgen $(X_k^{(N_1)})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(X_k^{(N_2)})_{k \in \mathbb{N}}$ unabhängig. Definiert man $R_1^{(N)} := 1$ und für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

$$R_k^{(N)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } X_k^{(N)} > X_j^{(N)} \text{ für } j = 1, \dots, k-1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

so gibt die Zufallsvariable $R_k^{(N)}$ an, ob die k -te Lebensdauer $X_k^{(N)}$ ein Rekord ist oder nicht. Damit liefert

$$Y_n^{(N)} := \sum_{k=1}^n R_k^{(N)}$$

für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern $X_1^{(N)}, \dots, X_n^{(N)}$ und

$$Z_n^{(N)} := \sum_{k=1}^n R_k^{(N)} X_k^{(N)}$$

die Summe der zugehörigen Lebensdauern. Die Zufallsvariablen $Y_n^{(N)}$ und $Z_n^{(N)}$ wären also die Anzahl und die Summe der Rekordwürfe in dem oben beschriebenen Spiel, wenn exakt n -mal gewürfelt wird. Es sollen nun Erwartungswert und Varianz zu $Y_n^{(N)}$ und $Z_n^{(N)}$ berechnet werden. Wir betrachten zunächst die Anzahl der Rekordwürfe.

Satz 3.1. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\mathbb{E}(Y_n^{(N)}) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j}$$

und

$$\begin{aligned} & \text{Var}(Y_n^{(N)}) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j} + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N - q + 1} \frac{1}{N - r + 1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\ & \quad - \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{\left(\frac{q-1}{N}\right)^{n-1}}{N - q + 1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{q-1}\right)^{n-1}\right) \frac{q-1}{q-r} - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j}\right)^2. \end{aligned}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(R_k^{(N)}) &= P(X_k^{(N)} > X_1^{(N)}, \dots, X_k^{(N)} > X_{k-1}^{(N)}) \\
&= \sum_{j=1}^N P(X_k^{(N)} > X_1^{(N)}, \dots, X_k^{(N)} > X_{k-1}^{(N)}, X_k^{(N)} = j) \\
&= \frac{1}{N^k} \sum_{j=0}^{N-1} j^{k-1}
\end{aligned}$$

und so

$$\mathbb{E}(Y_n^{(N)}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{N^k} \sum_{j=0}^{N-1} j^{k-1} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j}.$$

Im Fall $i < j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ erhält man analog mit einer Zerlegung nach den Werten von $X_i^{(N)}$ und $X_j^{(N)}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(R_i^{(N)} R_j^{(N)}) \\
&= P(X_1^{(N)} < X_i^{(N)}, \dots, X_{i-1}^{(N)} < X_i^{(N)}, X_i^{(N)} < X_j^{(N)}, \dots, X_{j-1}^{(N)} < X_j^{(N)}) \\
&= \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \left(\frac{r-1}{N}\right)^{i-1} \frac{1}{N} \left(\frac{q-1}{N}\right)^{j-i-1} \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y_n^{(N)}) &= \mathbb{E}((Y_n^{(N)})^2) - (\mathbb{E}(Y_n^{(N)}))^2 \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(R_j^{(N)})^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}(R_i^{(N)} R_j^{(N)}) - (\mathbb{E}(Y_n^{(N)}))^2 \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}(R_i^{(N)} R_j^{(N)}) - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N - j}\right)^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}(R_i^{(N)} R_j^{(N)}) \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \left(\frac{r-1}{N}\right)^{i-1} \frac{1}{N} \left(\frac{q-1}{N}\right)^{j-i-1} \frac{1}{N} \\
&= \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \left(\frac{r-1}{N}\right)^{i-1} \sum_{j=i+1}^n \left(\frac{q-1}{N}\right)^{j-i-1} \\
&= \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \left(\frac{r-1}{N}\right)^{i-1} \frac{1 - \left(\frac{q-1}{N}\right)^{n-i}}{1 - \frac{q-1}{N}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N-q+1} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{r-1}{N}\right)^{i-1} \left(1 - \left(\frac{q-1}{N}\right)^{n-i}\right) \\
&= 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N-q+1} \frac{1}{N-r+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{\left(\frac{q-1}{N}\right)^{n-1}}{N-q+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{q-1}\right)^{n-1}\right) \frac{q-1}{q-r}
\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}
&\text{Var}(Y_n^{(N)}) \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N-j} + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N-q+1} \frac{1}{N-r+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - \frac{2}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{\left(\frac{q-1}{N}\right)^{n-1}}{N-q+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{q-1}\right)^{n-1}\right) \frac{q-1}{q-r} - \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1 - \left(\frac{j}{N}\right)^n}{N-j}\right)^2,
\end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Mit ähnlichen Überlegungen erhält man Formeln für Erwartungswert und Varianz der Summe der Rekordwürfe.

Satz 3.2. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}(Z_n^{(N)}) = \sum_{j=1}^N j \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n}{N-j+1}$$

und

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n^{(N)}) &= \sum_{j=1}^N j^2 \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n}{N-j+1} \\
&\quad + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N-r+1} \frac{1}{N-s+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N} \frac{1}{N-s+1} \frac{s-1}{s-r} \left(\frac{s-1}{N}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{s-1}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^N j \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n}{N-j+1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ ergibt eine Zerlegung nach dem Wert von $X_k^{(N)}$

$$\mathbb{E}(R_k^{(N)} X_k^{(N)}) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{j-1}{N} \right)^{k-1} j,$$

also folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(Z_n^{(N)}) = \sum_{j=1}^N \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{j-1}{N} \right)^k = \sum_{j=1}^N j \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N} \right)^n}{N - j + 1}.$$

Weiter gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Var}(Z_n^{(N)}) = \mathbb{E}((Z_n^{(N)})^2) - (\mathbb{E}(Z_n^{(N)}))^2.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((Z_n^{(N)})^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^n R_k^{(N)} X_k^{(N)} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(R_k^{(N)} (X_k^{(N)})^2) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbb{E}(R_k^{(N)} X_k^{(N)} R_j^{(N)} X_j^{(N)}), \end{aligned}$$

wobei für $k \in \mathbb{N}$ mit einer Zerlegung nach dem Wert von $X_k^{(N)}$

$$\mathbb{E}(R_k^{(N)} (X_k^{(N)})^2) = \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{j-1}{N} \right)^{k-1} j^2$$

und für $j > k$ mit $j, k \in \mathbb{N}$ und einer Zerlegung nach den Werten von $X_k^{(N)}$ und $X_j^{(N)}$

$$\mathbb{E}(R_k^{(N)} X_k^{(N)} R_j^{(N)} X_j^{(N)}) = \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{r-1}{N} \right)^{k-1} r \frac{1}{N} \left(\frac{s-1}{N} \right)^{j-k-1} s$$

gilt. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(R_k^{(N)} (X_k^{(N)})^2) &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^N \frac{1}{N} \left(\frac{j-1}{N} \right)^{k-1} j^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{j^2}{N} \sum_{k=1}^n \left(\frac{j-1}{N} \right)^{k-1} \\ &= \sum_{j=1}^N j^2 \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N} \right)^n}{N - j + 1} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n \mathbb{E}(R_k^{(N)} X_k^{(N)} R_j^{(N)} X_j^{(N)}) \\
&= 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N^2} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{r-1}{N}\right)^{k-1} \sum_{j=k+1}^n \left(\frac{s-1}{N}\right)^{j-k-1} \\
&= 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{r-1}{N}\right)^{k-1} \frac{1 - \left(\frac{s-1}{N}\right)^{n-k}}{N-s+1} \\
&= 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N-r+1} \frac{1}{N-s+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N} \frac{1}{N-s+1} \frac{s-1}{s-r} \left(\frac{s-1}{N}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{s-1}\right)^{n-1}\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt liefert dies

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n^{(N)}) &= \sum_{j=1}^N j^2 \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n}{N-j+1} \\
&\quad + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N-r+1} \frac{1}{N-s+1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{N}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{rs}{N} \frac{1}{N-s+1} \frac{s-1}{s-r} \left(\frac{s-1}{N}\right)^{n-1} \left(1 - \left(\frac{r-1}{s-1}\right)^{n-1}\right) \\
&\quad - \left(\sum_{j=1}^N j \frac{1 - \left(\frac{j-1}{N}\right)^n}{N-j+1}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

Betrachte nun

$$Y^{(N)} = Y_\infty^{(N)} := \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(N)}$$

und

$$Z^{(N)} = Z_\infty^{(N)} := \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(N)} X_k^{(N)}.$$

Damit gibt $Y^{(N)}$ die gesamte Anzahl von Rekorden an, die bei einer Folge von unabhängigen und auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen auftreten können. Offensichtlich kann $Y^{(N)}$ nur die Werte 1 bis N annehmen. Die Zufallsvariable $Z^{(N)}$

liefert die zugehörige Summe der Rekordlängen, also gilt

$$P\left(Z^{(N)} \in \left\{N, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\right\}\right) = 1.$$

In Abbildung 1.3 ist $Y^{(6)} = 3$ und $Z^{(6)} = 12$. Der Satz von der monotonen Konvergenz liefert

$$E(Y^{(N)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(Y_n^{(N)}) \quad (3.1)$$

und die analogen Aussagen für $\text{Var}(Y^{(N)})$, $E(Z^{(N)})$ und $\text{Var}(Z^{(N)})$, also folgt

Satz 3.3. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$E(Y^{(N)}) = H_N$$

und

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = H_N - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

sowie

$$E(Z^{(N)}) = (N+1)H_N - N$$

und

$$\text{Var}(Z^{(N)}) = (N^2 + 4N + 3)H_N - \frac{3}{2}N^2 - \frac{5}{2}N - (N^2 + 2N + 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Beweis. Die Formel für $E(Y^{(N)})$ ergibt sich unmittelbar aus (3.1) und Satz 3.1. Die zu (3.1) analoge Aussage für $\text{Var}(Y^{(N)})$ liefert mit Satz 3.1

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = H_N + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N-q+1} \frac{1}{N-r+1} - H_N^2.$$

Mit Indexverschiebung und Vertauschung der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$\sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{N-q+1} \frac{1}{N-r+1} = \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{r} \frac{1}{q}.$$

Wegen

$$H_N^2 = \left(\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \right)^2 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{q=r+1}^N \frac{1}{r} \frac{1}{q}$$

erhält man damit

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = H_N - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Aus Satz 3.2 und den zu (3.1) analogen Aussagen für den Erwartungswert und für die Varianz von $Z^{(N)}$ ergibt sich

$$\mathbb{E}(Z^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \frac{N-k+1}{k} = (N+1)H_N - N$$

und

$$\text{Var}(Z^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \frac{(N-k+1)^2}{k} + 2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{r}{N-r+1} \frac{s}{N-s+1} - \left(\sum_{k=1}^N \frac{N-k+1}{k} \right)^2.$$

Mit Indexverschiebung und Vertauschung der Summationsreihenfolge erhält man

$$2 \sum_{r=1}^{N-1} \sum_{s=r+1}^N \frac{r}{N-r+1} \frac{s}{N-s+1} = \left(\sum_{k=1}^N \frac{N-k+1}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^N \left(\frac{N-k+1}{k} \right)^2,$$

also ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z^{(N)}) &= \sum_{k=1}^N \frac{(N-k+1)^2}{k} - \sum_{k=1}^N \left(\frac{N-k+1}{k} \right)^2 \\ &= (N^2 + 4N + 3)H_N - \frac{3}{2}N^2 - \frac{5}{2}N - (N^2 + 2N + 1) \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}, \end{aligned}$$

und das war die Behauptung. \square

Mit Hilfe von einigen C-Programmen, die im Anhang B zu finden sind und sich auf die Rekursionsformeln aus Abschnitt 3.5 stützen, kann man nun zusätzlich die Werte der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen und der Verteilungsfunktionen zu $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ erhalten. Dies könnte für die folgenden Abschnitte über das asymptotische Verhalten von $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ nützlich sein und eine Vermutung zu möglichen Grenzverteilungen dieser Zufallsvariablen liefern.

In den Abbildungen 3.1 und 3.2 werden die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Y und die Verteilungsfunktion F_Y zu $Y^{(N)}$ im Fall $N = 30$ dargestellt.¹ Die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Anzahl K von Rekorden zu erhalten, hängt davon ab, wieviele Kombinationen der möglichen Zahlen zu K Rekorden führen und wie wahrscheinlich diese einzelnen Kombinationen sind. Es ergibt sich eine unimodale Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion.

Im Gegensatz dazu erscheint dem Betrachter die Form der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Z zu $Z^{(N)}$ im Fall $N = 30$ in Abbildung 3.3 wesentlich erstaunlicher. Insbesondere erhält man nun eine Funktion mit mehreren lokalen Maxima.

¹In den Abbildungen 3.1 und 3.5 sollten die Markierungen nicht mit den Stäben des Stabdiagramms verwechselt werden.

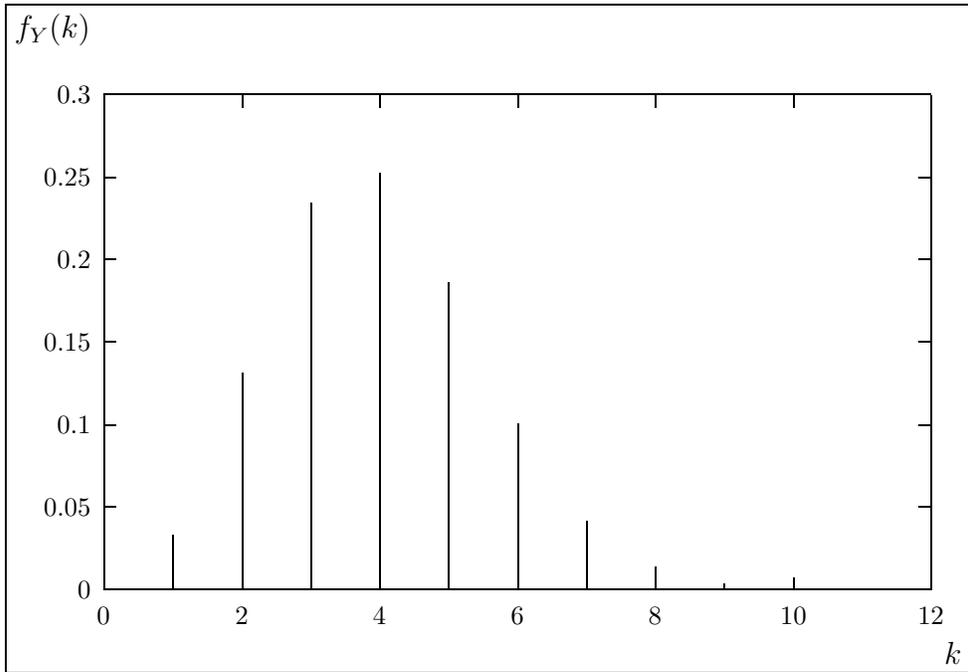


Abbildung 3.1: Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Y zu $Y^{(30)}$

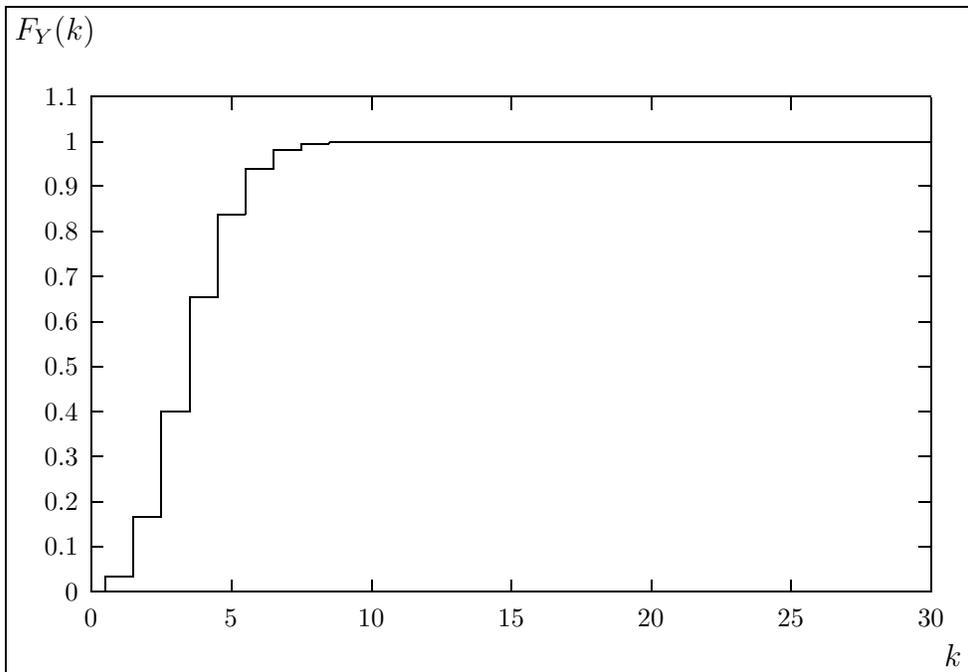


Abbildung 3.2: Verteilungsfunktion F_Y von $Y^{(30)}$

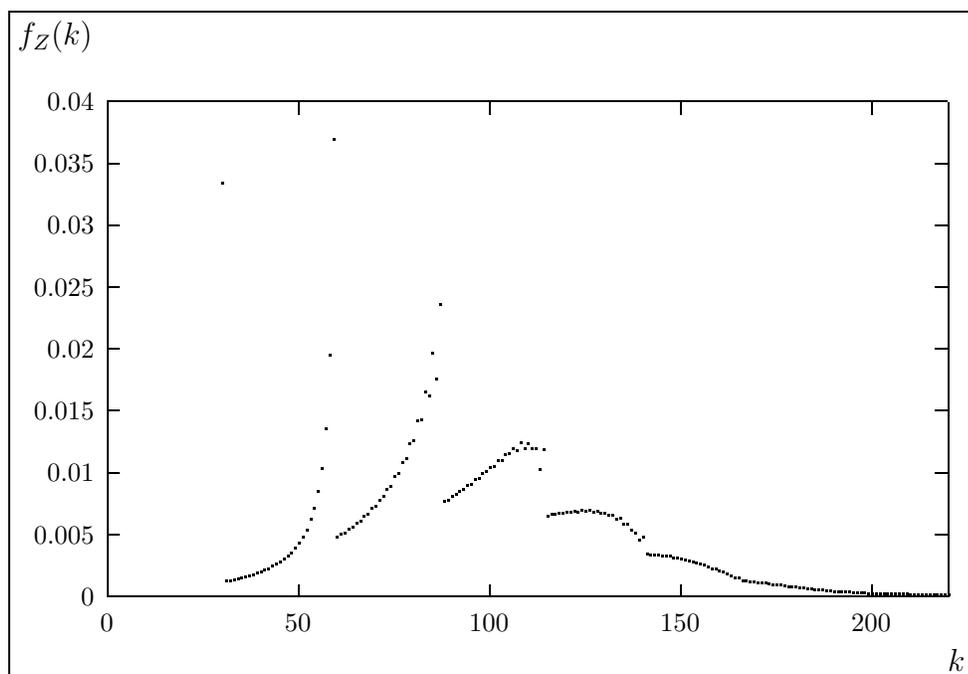


Abbildung 3.3: Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Z zu $Z^{(30)}$

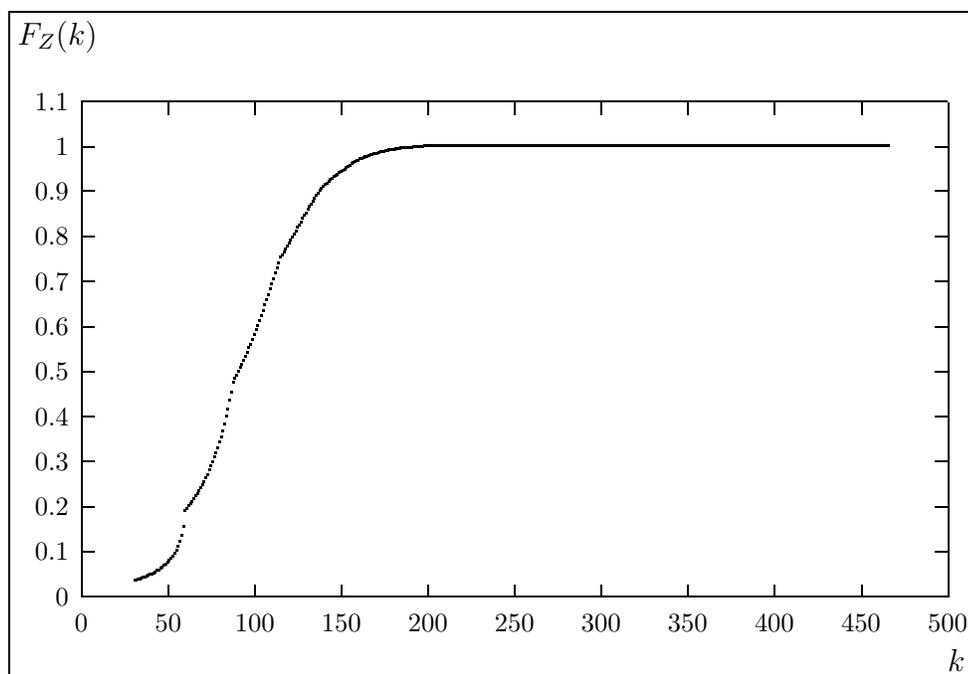


Abbildung 3.4: Verteilungsfunktion F_Z von $Z^{(30)}$

Zunächst fällt der Wert für $k = 30$, also die Wahrscheinlichkeit, daß man die kleinste mögliche Summe erhält, ins Auge. Die Wahrscheinlichkeit für „ $Z^{(30)} = 30$ “ ist $\frac{1}{30}$, da man sofort die Zahl 30 „werfen“ muß. Dabei ist zu beachten, daß in der $Z^{(N)}$ -Summe der letzte (größte) Summand N sein muß. Auf „ $Z^{(30)} = 31$ “ führt deshalb nur die Rekordfolge (1, 30), die zugehörige Wahrscheinlichkeit beträgt dann also $\frac{1}{30} \cdot \frac{1}{29}$. Die Wahrscheinlichkeit für „ $Z^{(30)} = 31$ “ ist also deshalb so auffällig kleiner, weil dazu zwei Rekordwürfe nötig sind und damit die Wahrscheinlichkeit durch den Faktor $\frac{1}{29}$ vermindert wird. Da zunächst für größer werdende Werte immer mehr und zum Teil wahrscheinlichere Kombinationen in Frage kommen, „wächst“ der Graph der betrachteten Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion bis zum nächsten „Ausreißer“ bei $k = 59$. Dies geschieht natürlich nicht ganz monoton, denn es ist nicht nur die Anzahl der Kombinationen, die auf dieselbe Summe führen, entscheidend, sondern auch die Länge der Rekordfolgen. Der Sprung findet offensichtlich bei dem Wert statt, der nur noch mit Hilfe von mindestens drei Rekorden erhalten werden kann, da sich die Wahrscheinlichkeiten hier nun aus mindestens drei Faktoren zusammensetzen. Insgesamt wird deutlich, daß es immer bei den Werten Sprünge gibt, bei denen die minimale Anzahl an Rekorden, die nötig sind, um diesen Wert als Summe zu erhalten, wächst. Klar ist auch, daß der Graph ab einem bestimmten Wert zwischen zwei Sprüngen nicht mehr „wachsen“ kann, sondern „fällt“, denn die Anzahl der möglichen Rekordkombinationen mit einer festen Summe nimmt wieder ab, und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten werden kleiner.

In Abbildung 3.4 ist schließlich die Verteilungsfunktion F_Z von $Z^{(30)}$ zu sehen. Nähere Informationen zu den Programmen, die die Daten zu den Abbildungen 3.1 bis 3.4 liefern, findet man im Anhang.

3.2 Asymptotisches Verhalten von $Y^{(N)}$

In diesem Abschnitt soll nun das asymptotische Verhalten von $Y^{(N)}$ mit $N \rightarrow \infty$ untersucht werden. Die Abbildungen 3.5 bzw. 3.6 ermöglichen einen Vergleich der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion bzw. der Verteilungsfunktion von $Y^{(N)}$ im Fall $N = 10000$ mit der Dichtefunktion bzw. der Verteilungsfunktion zur Normalverteilung mit Erwartungswert $E(Y^{(N)})$ und Varianz $\text{Var}(Y^{(N)})$. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird die asymptotische Normalität von $Y^{(N)}$ nachgewiesen. Dies läßt die nicht sehr gute Annäherung in Abbildung 3.6 nicht vermuten und macht deutlich, daß die zu beweisene Konvergenz eher „langsam“ sein muß. Ziel ist es also nun, die asymptotische Normalität von $Y^{(N)}$ zu beweisen. Dazu sei $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit $\eta_i \sim \text{Exp}(1)$ für $i \in \mathbb{N}$. Definiert man zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen $(\xi_i^{(N)})_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\xi_i^{(N)} := \lceil N(1 - e^{-\eta_i}) \rceil, \quad (3.2)$$

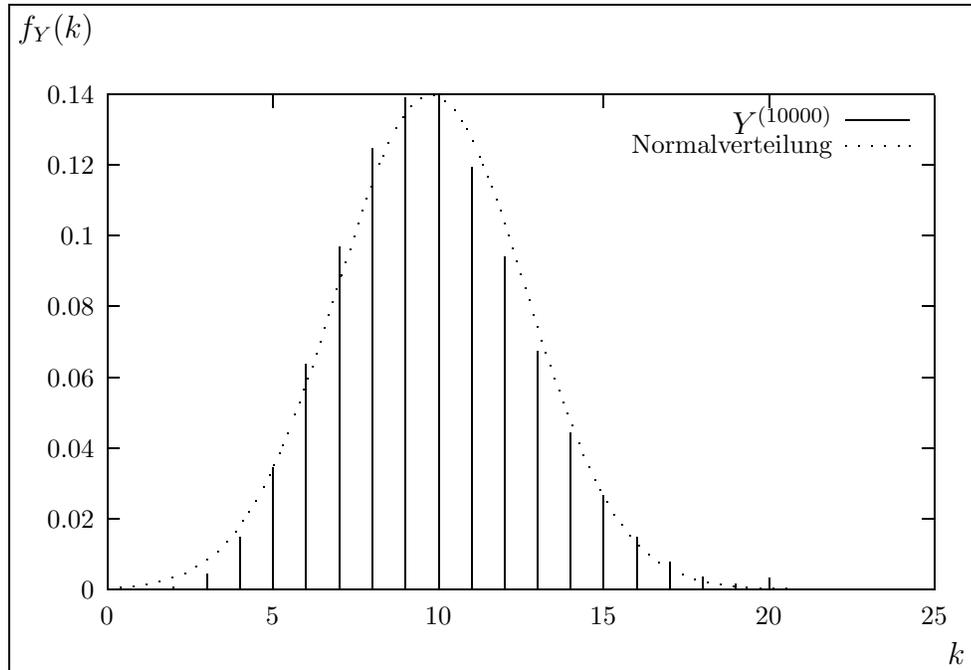


Abbildung 3.5: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Y von $Y^{(10000)}$ mit der Dichte der zugehörigen Normalverteilung

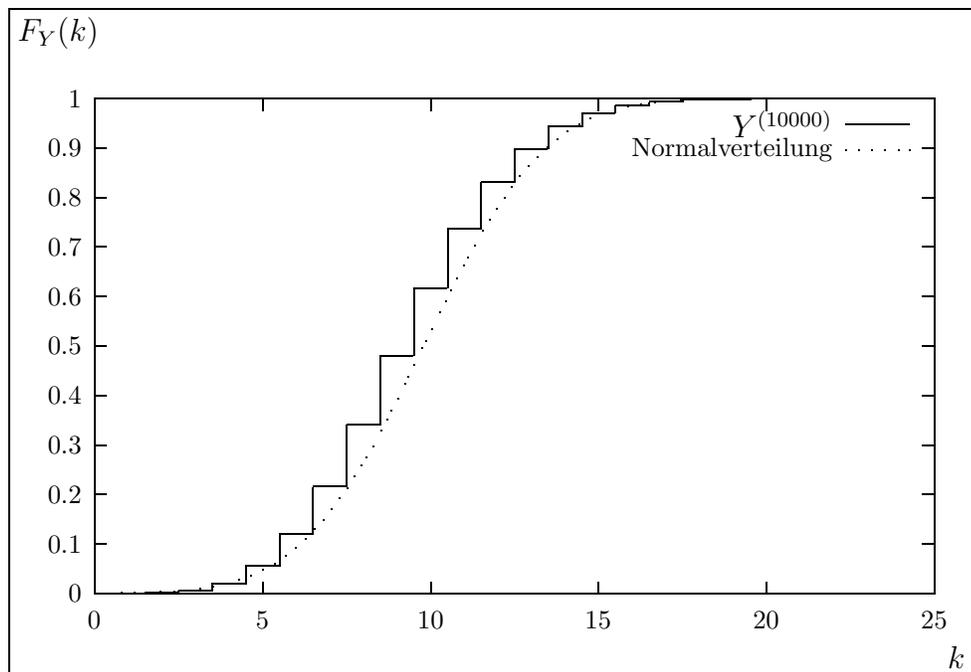


Abbildung 3.6: Vergleich der Verteilungsfunktionen F_Y von $Y^{(10000)}$ und der zugehörigen Normalverteilung

so gilt für $k \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}
P(\xi_i^{(N)} = k) &= P(k-1 < N(1 - e^{-\eta_i}) \leq k) \\
&= P\left(-\log\left(1 - \frac{k-1}{N}\right) < \eta_i \leq -\log\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\left(-\log\left(1 - \frac{k}{N}\right)\right)\right) - \left(1 - \exp\left(-\left(-\log\left(1 - \frac{k-1}{N}\right)\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{N},
\end{aligned}$$

also erhält man

Lemma 3.4. *Es ist*

$$\xi_i^{(N)} \sim \text{unif}(\{1, \dots, N\})$$

für $i \in \mathbb{N}$.

Man kann nun zum Beispiel in [ETV] den Satz von Ignatov nachlesen, nach dem der zu $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gehörige Rekordprozeß, also der Erneuerungsprozeß, dessen Lebensdauern aus den Differenzen der aufeinanderfolgenden Rekorde gebildet werden, wieder ein Poissonprozeß mit dem Lebesgue-Maß als Intensitätsmaß ist. Es sei für $k \in \{0, \dots, N-1\}$

$$a_k^{(N)} := -\log\left(1 - \frac{k}{N}\right)$$

und

$$a_N^{(N)} := \infty.$$

Ist für $k = 1, \dots, N$ in dem Intervall $(a_{k-1}^{(N)}, a_k^{(N)}]$ mindestens ein Rekord von $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so ist dies wegen (3.2) äquivalent dazu, daß bei der Folge $(\xi_i^{(N)})_{i \in \mathbb{N}}$ von unabhängigen und auf $\{1, \dots, N\}$ gleichverteilten Zufallsvariablen der Rekordwert k auftritt. Die Anzahl $W_k^{(N)}$ der Rekorde von $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $(a_{k-1}^{(N)}, a_k^{(N)}]$ ist poissonverteilt mit Parameter $a_k^{(N)} - a_{k-1}^{(N)}$. Offensichtlich sind $W_1^{(N)}, \dots, W_N^{(N)}$ unabhängig. Da wir uns für die Rekorde bei $(\xi_i^{(N)})_{i \in \mathbb{N}}$ interessieren, also für die Tatsache, ob $W_k^{(N)}$ positiv ist, definieren wir für $k = 1, \dots, N$

$$V_k^{(N)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } W_k^{(N)} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Natürlich sind auch $V_1^{(N)}, \dots, V_N^{(N)}$ unabhängig, und es gilt für $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned}
 P(V_k^{(N)} = 1) &= P(W_k^{(N)} > 0) \\
 &= 1 - P(W_k^{(N)} = 0) \\
 &= 1 - \exp(-(a_k^{(N)} - a_{k-1}^{(N)})) \\
 &= 1 - \exp\left(\log\left(\frac{1 - \frac{k}{N}}{1 - \frac{k-1}{N}}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{N - k + 1}.
 \end{aligned}$$

Für $k \in \{1, \dots, N\}$ gibt $V_k^{(N)}$ an, ob der mögliche Rekordwert k bei der Folge $(\xi_i^{(N)})_{i \in \mathbb{N}}$ tatsächlich vorkommt. Damit gilt offensichtlich

$$Y^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{k=1}^N V_k^{(N)}.$$

Wir berechnen zunächst Erwartungswert und Varianz zu $V_k^{(N)}$ für $k = 1, \dots, N$. Man erhält

Lemma 3.5. *Es gilt für $k = 1, \dots, N$*

$$\mathbb{E}(V_k^{(N)}) = \frac{1}{N - k + 1}$$

und

$$\text{Var}(V_k^{(N)}) = \frac{N - k}{(N - k + 1)^2}.$$

Beweis. Für $k = 1, \dots, N$ ergibt sich

$$\mathbb{E}(V_k^{(N)}) = P(V_k^{(N)} = 1) = \frac{1}{N - k + 1}$$

und

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(V_k^{(N)}) &= \mathbb{E}((V_k^{(N)})^2) - (\mathbb{E}(V_k^{(N)}))^2 \\
 &= \mathbb{E}(V_k^{(N)}) - (\mathbb{E}(V_k^{(N)}))^2 \\
 &= \frac{1}{N - k + 1} - \frac{1}{(N - k + 1)^2} \\
 &= \frac{N - k}{(N - k + 1)^2},
 \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Damit erhält man noch einmal die Aussagen von Satz 3.3 für $Y^{(N)}$, also

$$\mathbb{E}(Y^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(V_k^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = H_N$$

und

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = \sum_{k=1}^N \text{Var}(V_k^{(N)}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{(k+1)^2} = H_N - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}.$$

Aus dem bekannten Verhalten der harmonischen Zahlen folgt mit $N \rightarrow \infty$

$$\mathbb{E}(Y^{(N)}) = \log N + O(1) \quad (3.3)$$

und

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = \log N + O(1),$$

also hat man

$$\text{Var}(Y^{(N)}) = o((\mathbb{E}(Y^{(N)}))^2). \quad (3.4)$$

Hiermit folgt

Satz 3.6. Für $N \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{Y^{(N)}}{\mathbb{E}(Y^{(N)})} \xrightarrow{P} 1.$$

Beweis. Mit der Chebychev'schen Ungleichung erhält man für $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{Y^{(N)}}{\mathbb{E}(Y^{(N)})} - 1\right| \geq \varepsilon\right) &= P(|Y^{(N)} - \mathbb{E}(Y^{(N)})| \geq \varepsilon \mathbb{E}(Y^{(N)})) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2 (\mathbb{E}(Y^{(N)}))^2} \text{Var}(Y^{(N)}), \end{aligned}$$

also mit Gleichung (3.4)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Y^{(N)}}{\mathbb{E}(Y^{(N)})} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

□

Mit (3.3) bedeutet Satz 3.6

$$\frac{Y^{(N)}}{\log N} \xrightarrow{P} 1$$

für $N \rightarrow \infty$. Es tritt bei $Y^{(N)}$ also eine „Massekonzentration“ auf, das heißt, daß mit wachsendem N die Zufallsvariable $Y^{(N)}$, relativ gesehen, immer stärker um ihren Erwartungswert konzentriert ist. Man hat sogar

Satz 3.7. Für $N \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{Y^{(N)} - \mathbb{E}(Y^{(N)})}{\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Beweis. Da sich für $k = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| V_k^{(N)} - \frac{1}{N-k+1} \right|^3 \\ &= \mathbb{E} \left(\left| V_k^{(N)} - \frac{1}{N-k+1} \right|^3 \mathbf{1}_{\{V_k^{(N)}=1\}} \right) + \mathbb{E} \left(\left| V_k^{(N)} - \frac{1}{N-k+1} \right|^3 \mathbf{1}_{\{V_k^{(N)}=0\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\left| V_k^{(N)} \right|^3 \mathbf{1}_{\{V_k^{(N)}=1\}} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{1}{(N-k+1)^3} \mathbf{1}_{\{V_k^{(N)}=0\}} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(V_k^{(N)} \right) + \frac{1}{(N-k+1)^3} \end{aligned}$$

ergibt, folgt mit $\sum_{k=1}^N \mathbb{E}(V_k^{(N)}) = \mathbb{E}(Y^{(N)})$ und $\sum_{k=1}^N \text{Var}(V_k^{(N)}) = \text{Var}(Y^{(N)})$ sowie dem bekannten Verhalten der harmonischen Zahlen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\sqrt{\sum_{k=1}^N \text{Var}(V_k^{(N)})} \right)^3} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} |V_k^{(N)} - \mathbb{E}(V_k^{(N)})|^3 \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})} \right)^3} \sum_{k=1}^N \mathbb{E} \left| V_k^{(N)} - \frac{1}{N-k+1} \right|^3 \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(Y^{(N)})}{\left(\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})} \right)^3} + \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3}}{\left(\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})} \right)^3} \\ &= \frac{H_N}{\left(\sqrt{H_N - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}} \right)^3} + \frac{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3}}{\left(\sqrt{H_N - \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}} \right)^3} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

also ist die Lyapunov-Bedingung (siehe dazu zum Beispiel [Ba1], Seite 239, oder [Bi2], Seite 362) im Fall $\delta = 1$ erfüllt und so gilt für $N \rightarrow \infty$

$$\frac{Y^{(N)} - \mathbb{E}(Y^{(N)})}{\sqrt{\text{Var}(Y^{(N)})}} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{\sum_{k=1}^N V_k^{(N)} - \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(V_k^{(N)})}{\sqrt{\sum_{k=1}^N \text{Var}(V_k^{(N)})}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

□

Wegen $E(Y^{(N)}) = \log N + O(1)$ und $\text{Var}(Y^{(N)}) = \log N + O(1)$ liefert dies

$$\frac{Y^{(N)} - \log N}{\sqrt{\log N}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \sim N(0, 1).$$

3.3 Asymptotisches Verhalten von $NY^{(N)} - Z^{(N)}$

Im letzten Abschnitt stand das asymptotische Verhalten von $Y^{(N)}$ im Mittelpunkt. Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob auch $Z^{(N)}$ asymptotisch normalverteilt ist. Um diese Frage im nächsten Abschnitt beantworten zu können, erweist sich eine weitere Zufallsvariable $\tilde{Z}^{(N)}$ als hilfreich. Dazu sei $(X_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $N \in \mathbb{N}$ wieder eine Folge von unabhängigen und $\text{unif}(\{1, \dots, N\})$ -verteilten Zufallsvariablen. Definiert man für $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{X}_k^{(N)} := N - X_k^{(N)},$$

so ist $(\tilde{X}_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und $\text{unif}(\{0, \dots, N-1\})$ -verteilten Zufallsvariablen. Ist $\tilde{Z}^{(N)}$ dazu die Summe der jeweils zum Zeitpunkt ihres Auftretens kleinsten Lebensdauern, so gilt

$$\tilde{Z}^{(N)} = NY^{(N)} - Z^{(N)}.$$

Analog zum ersten Abschnitt erhält man mit $\tilde{R}_1^{(N)} := 1$ und

$$\tilde{R}_k^{(N)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \tilde{X}_k^{(N)} < \tilde{X}_j^{(N)} \text{ für } j = 1, \dots, k-1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, auch

$$\tilde{Z}^{(N)} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{R}_k^{(N)} \tilde{X}_k^{(N)}.$$

Mit Hilfe der Spiel-Interpretation vom Anfang des Kapitels kann man sich einen weiteren Zusammenhang klarmachen. Neu ist hier, daß es sich um einen „ N -seitigen Würfel“ handelt, dessen Seiten mit den Ziffern $0, \dots, N-1$ durchnummeriert sind und die Auszahlung $\tilde{Z}^{(N)}$ aus der Summe der zum Zeitpunkt ihres Auftretens kleinsten Augenzahlen besteht. Geht man davon aus, daß im ersten Wurf die Augenzahl k , $k \in \{0, \dots, N-1\}$, gefallen ist, so ist klar, daß zu der Summe $\tilde{Z}^{(N)}$ höchstens noch Werte hinzukommen können, die kleiner als k sind und die natürlich alle mit derselben Wahrscheinlichkeit auftreten. Dies bedeutet also im Fall $\tilde{X}_1^{(N)} = k$, daß $\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} k + \tilde{Z}^{(k)}$ gelten muß. Dabei sei $\tilde{X}_k^{(0)} := 0$ und $\tilde{R}_k^{(0)} := 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit diesen Überlegungen erhält man

Satz 3.8. *Es ist*

$$\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}_1^{(N)} + \tilde{Z}^{(\tilde{X}_1^{(N)})}, \quad (3.5)$$

wobei $\tilde{Z}^{(0)} = 0, \tilde{Z}^{(1)}, \dots, \tilde{Z}^{(N-1)}, \tilde{X}_1^{(N)}$ unabhängig sind.

Beweis. Die Unabhängigkeit ergibt sich aus den Voraussetzungen in Abschnitt 3.1. Es sei nun für $l = 1, \dots, N - 1$

$$A_l := \{0, \dots, l - 1\}$$

und $A_0 := \{0\}$. Definiert man für $l \in \{0, \dots, N - 1\}$

$$\tau_1^l := \min\{k \in \mathbb{N} : \tilde{X}_k^{(N)} \in A_l\}$$

und für $m \in \mathbb{N}$

$$\tau_{m+1}^l := \min\{k \in \mathbb{N} : k > \tau_m^l, \tilde{X}_k^{(N)} \in A_l\},$$

so gilt offensichtlich für $k \in \{0, \dots, N - 1\}$ und $A \in \mathfrak{P}\left(\left\{0, \dots, \frac{(N-1)N}{2}\right\}\right)$

$$P\left(\sum_{l=2}^{\infty} \tilde{X}_l^{(N)} \tilde{R}_l^{(N)} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) = P\left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{X}_{\tau_l^k}^{(N)} \tilde{R}_{\tau_l^k}^{(N)} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \quad (3.6)$$

mit

$$\tilde{R}_{\tau_l^k}^{(N)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \tilde{X}_{\tau_l^k}^{(N)} < \tilde{X}_{\tau_j^k}^{(N)} \text{ für } j = 1, \dots, l - 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $l > 1$ und $\tilde{R}_{\tau_1^k}^{(N)} := 1$, denn

$$\begin{aligned} & P\left(\sum_{l=2}^{\infty} \tilde{X}_l^{(N)} \tilde{R}_l^{(N)} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\ &= P\left(\sum_{l=2}^{\infty} \tilde{X}_l^{(N)} \prod_{j=1}^{l-1} 1_{\{\tilde{X}_l^{(N)} < \tilde{X}_j^{(N)}\}} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\ &= P\left(\sum_{l=2}^{\infty} \left(\tilde{X}_l^{(N)} \prod_{j=2}^{l-1} 1_{\{\tilde{X}_l^{(N)} < \tilde{X}_j^{(N)}\}}\right) 1_{\{\tilde{X}_l^{(N)} \in A_k\}} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{\infty} \tilde{X}_{\tau_l^k}^{(N)} \tilde{R}_{\tau_l^k}^{(N)} \in A \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k\right). \end{aligned}$$

Es sei $(Y_l^{(N,k)})_{l \in \mathbb{N}} := (\tilde{X}_{\tau_l^k}^{(N)})_{l \in \mathbb{N}}$ für $k \in \{0, \dots, N - 1\}$. Dann folgt für $i_1, \dots, i_l \in \{0, \dots, k - 1\}$ und $k \in \{1, \dots, N - 1\}$

$$\begin{aligned} & P(Y_1^{(N,k)} = i_1, \dots, Y_l^{(N,k)} = i_l \mid \tilde{X}_1^{(N)} = k) \\ &= NP(Y_1^{(N,k)} = i_1, \dots, Y_l^{(N,k)} = i_l, \tilde{X}_1^{(N)} = k) \\ &= N \sum_{2 \leq k_1 < \dots < k_l} P(\tilde{X}_1^{(N)} = k, \tilde{X}_2^{(N)} \geq k, \dots, \tilde{X}_{k_1-1}^{(N)} \geq k, \tilde{X}_{k_1}^{(N)} = i_1, \\ & \quad \tilde{X}_{k_1+1}^{(N)} \geq k, \dots, \tilde{X}_{k_2-1}^{(N)} \geq k, \tilde{X}_{k_2}^{(N)} = i_2, \dots, \tilde{X}_{k_l}^{(N)} = i_l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N \sum_{2 \leq k_1 < \dots < k_l} \frac{1}{N} \left(\frac{N-k}{N} \right)^{k_l - l - 1} \left(\frac{1}{N} \right)^l \\
&= \left(\frac{1}{N} \right)^l \sum_{k_l = l+1}^{\infty} \binom{k_l - 1 - 1}{l-1} \left(\frac{N-k}{N} \right)^{k_l - 1 - l} \\
&= \left(\frac{1}{k} \right)^l,
\end{aligned}$$

bzw.

$$P(Y_1^{(N,0)} = 0, \dots, Y_l^{(N,0)} = 0 | \tilde{X}_1^{(N)} = 0) = 1.$$

Analog zeigt man für $k \in \{1, \dots, N-1\}$

$$P(Y_1^{(N,k)} = i_1, \dots, Y_l^{(N,k)} = i_l) = \left(\frac{1}{k} \right)^l,$$

bzw.

$$P(Y_1^{(N,0)} = 0, \dots, Y_l^{(N,0)} = 0) = 1,$$

also ist $(Y_l^{(N,k)})_{l \in \mathbb{N}}$ für $k \in \{1, \dots, N-1\}$ bzw. $k = 0$ eine von $\tilde{X}_1^{(N)}$ unabhängige Folge von unabhängigen und $\text{unif}(\{0, \dots, k-1\})$ - bzw. $\text{unif}(\{0\})$ -verteilten Zufallsvariablen. Damit ergibt sich für $A \in \mathfrak{P}(\{0, \dots, \frac{(N-1)N}{2}\})$ mit Hilfe von Gleichung (3.6)

$$\begin{aligned}
P(\tilde{Z}^{(N)} \in A) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} P(\tilde{Z}^{(N)} \in A | \tilde{X}_1^{(N)} = k) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(k + \sum_{l=2}^{\infty} \tilde{X}_l^{(N)} \tilde{R}_l^{(N)} \in A | \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\
&\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(k + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{X}_{\tau_l^k}^{(N)} \tilde{R}_{\tau_l^k}^{(N)} \in A | \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(k + \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{X}_l^{(k)} \tilde{R}_l^{(k)} \in A | \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\
&= P(\tilde{X}_1^{(N)} + \tilde{Z}^{(\tilde{X}_1^{(N)})} \in A),
\end{aligned}$$

also

$$\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}_1^{(N)} + \tilde{Z}^{(\tilde{X}_1^{(N)})}.$$

□

Bemerkung 3.9. Eleganter läßt sich die Tatsache, daß $(Y_l^{(N,k)})_{l \in \mathbb{N}}$ für $0 \leq k \leq N-1$ eine Folge von unabhängigen und gleichverteilten Zufallsvariablen ist, mit Hilfe der Punktprozeß-Theorie beweisen. Dazu konstruiert man aus der Folge $(\tilde{X}_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ und

einem davon unabhängigen, auf \mathbb{R}_+ definierten Poisson-Prozeß mit Rate 1 einen markierten Punktprozeß, wobei $(\tilde{X}_k^{(N)})_{k \in \mathbb{N}}$ die Marken liefert. Dieser neue Punktprozeß ist wieder ein Poisson-Prozeß. „Löscht“ man nun alle Punkte dieses Prozesses, die nicht in $\mathbb{R}_+ \times \{0, \dots, k-1\}$ liegen, so ergibt sich erneut ein Poisson-Prozeß, dessen Intensitätsmaß die Verteilung der „übriggebliebenen“ Marken, also der Zufallsvariablen $Y_1^{(N,k)}, Y_2^{(N,k)}, \dots$ liefert. Punktprozesse werden beispielsweise in [KS] behandelt.

Bemerkung 3.10. Analog kann man zu den Zufallsvariablen $Y^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ die Gleichung

$$(Y^{(N)}, Z^{(N)}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}, X_1^{(N)}(1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}) + Z^{(N-X_1^{(N)})})$$

mit $Y^{(0)} := 0$ und $Z^{(0)} := 0$ zeigen. Auch hier kann man sich das mit Hilfe der Spiel-Interpretation klarmachen. Ist im ersten Wurf die Augenzahl k , $k \in \{1, \dots, N\}$, gefallen, so können höchstens noch $N - k$ Rekorde folgen, also gilt dann

$$Y^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} 1 + Y^{(N-k)}.$$

Die Werte, die zu $Z^{(N)}$ noch hinzukommen können, haben die Form $k + m$ mit $m \in \{1, \dots, N - k\}$, also hat man hier

$$Z^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} k(1 + Y^{(N-k)}) + Z^{(N-k)}.$$

In Abschnitt 3.5 werden aus diesen Gleichungen Rekursionsformeln zu $Y^{(N)}, Z^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ hergeleitet, die dann die Basis der C-Programme liefern, die die zugehörigen Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen und Verteilungsfunktionen berechnen.

Ähnlich wie im letzten Abschnitt ergibt sich

Satz 3.11. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}) = N - H_N$$

und

$$\text{Var}(\tilde{Z}^{(N)}) = \frac{N^2}{2} - \frac{5}{2}N + 3H_N - \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2} - 1.$$

Beweis. Es ergibt sich wegen

$$\tilde{Z}^{(N)} = NY^{(N)} - Z^{(N)}$$

mit Abschnitt 3.1

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}) = NH_N - (N+1)H_N + N = N - H_N.$$

Für $k \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\mathbb{E}(\tilde{R}_k^{(N)}(\tilde{X}_k^{(N)})^2) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} j^2 \left(\frac{N-1-j}{N} \right)^{k-1}$$

und so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{R}_k^{(N)}(\tilde{X}_k^{(N)})^2) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} j^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{N-1-j}{N} \right)^k = \sum_{j=2}^N \frac{(j-1)^2}{j} = \frac{N^2}{2} - \frac{3}{2}N + H_N.$$

Betrachtet man $j < r$ mit $j, r \in \mathbb{N}$, so ergibt sich analog mit einer Zerlegung nach den Werten von $\tilde{X}_j^{(N)}$ und $\tilde{X}_r^{(N)}$

$$\mathbb{E}(\tilde{R}_j^{(N)} \tilde{X}_j^{(N)} \tilde{R}_r^{(N)} \tilde{X}_r^{(N)}) = \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{q=0}^{l-1} lq \left(\frac{N-1-l}{N} \right)^{j-1} \left(\frac{N-1-q}{N} \right)^{r-j-1}$$

und dies liefert

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{R}_j^{(N)} \tilde{X}_j^{(N)} \tilde{R}_r^{(N)} \tilde{X}_r^{(N)}) \\ &= 2 \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{q=0}^{l-1} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} lq \left(\frac{N-1-l}{N} \right)^{j-1} \left(\frac{N-1-q}{N} \right)^{r-j-1} \\ &= 2 \frac{1}{N^2} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{q=0}^{l-1} lq \frac{N}{q+1} \frac{N}{l+1} \\ &= 2 \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{q=0}^{l-1} \frac{q}{q+1} \frac{l}{l+1}. \end{aligned}$$

Mit Vertauschung der Summationsreihenfolge ergibt sich

$$\begin{aligned} 2 \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{q=0}^{l-1} \frac{q}{q+1} \frac{l}{l+1} &= 2 \sum_{q=0}^{N-2} \sum_{l=q+1}^{N-1} \frac{q}{q+1} \frac{l}{l+1} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{j+1} \right)^2 - \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{j}{j+1} \right)^2 \\ &= (N - H_N)^2 - \left(N + 1 - 2H_N + \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2} \right). \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man wegen

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{R}_k^{(N)}(\tilde{X}_k^{(N)})^2) + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=j+1}^{\infty} \mathbb{E}(\tilde{R}_j^{(N)} \tilde{X}_j^{(N)} \tilde{R}_r^{(N)} \tilde{X}_r^{(N)})$$

schließlich

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\tilde{Z}^{(N)}) &= \mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)})^2 - (\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}))^2 \\
&= \frac{N^2}{2} - \frac{3}{2}N + H_N - \left(N + 1 - 2H_N + \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2} \right) \\
&= \frac{N^2}{2} - \frac{5}{2}N + 3H_N - \sum_{j=2}^N \frac{1}{j^2} - 1.
\end{aligned}$$

□

Es folgt aus dem bekannten Verhalten der harmonischen Zahlen

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}) = N + O(\log N)$$

und

$$\text{Var}(\tilde{Z}^{(N)}) = \frac{N^2}{2} + O(N).$$

Dies bedeutet, daß man hier nicht wie im Beweis zu Satz 3.6 die Ungleichung von Chebychev heranziehen kann, um eine mögliche Massekonzentration nachzuweisen. Dies wird auch auf anderem Wege nicht gelingen, denn im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird mit Korollar 3.19 ein Grenzwertsatz für $\tilde{Z}^{(N)}$ bewiesen, der deutlich macht, daß in diesem Fall keine Massekonzentration vorhanden ist. Um nun die Frage nach dem asymptotischen Verhalten von $\tilde{Z}^{(N)}$ beantworten zu können, verwenden wir Argumente wie U.RÖSLER in [R]. Dazu motivieren wir das weitere Vorgehen durch einige heuristische Vorüberlegungen. Wir nehmen zunächst an, daß es eine Zufallsvariable \tilde{V} gibt mit

$$\frac{\tilde{Z}^{(N)} - \varphi(N)}{N} \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{V} \tag{3.7}$$

für $N \rightarrow \infty$, wobei

$$\varphi(N) := \mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}).$$

Definiert man

$$W_N := \frac{\tilde{Z}^{(N)} - \varphi(N)}{N},$$

so gilt wegen (3.5)

$$\mathcal{L}(W_N) = \mathcal{L} \left(W_{\tilde{X}_1^{(N)}} \frac{\tilde{X}_1^{(N)}}{N} + C_N(\tilde{X}_1^{(N)}) \right)$$

mit

$$C_N(i) := \frac{i + \mathbb{E}(\tilde{Z}^{(i)}) - \mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)})}{N}.$$

Für eine genauere Analyse von W_N sind nun die folgenden Beobachtungen von Bedeutung.

- Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\tilde{X}_1^{(N)}| \leq k) = 0,$$

also hat man für $N \rightarrow \infty$

$$\tilde{X}_1^{(N)} \xrightarrow{P} \infty.$$

- Für $x \in \mathbb{R}$ ergibt sich aus der Unabhängigkeit von $\tilde{X}_1^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(k)}$ mit $k \in \{0, \dots, N-1\}$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\tilde{Z}(\tilde{X}_1^{(N)}) - \varphi(\tilde{X}_1^{(N)})}{\tilde{X}_1^{(N)}} \leq x\right) &= \sum_{k=0}^{N-1} P\left(\frac{\tilde{Z}(\tilde{X}_1^{(N)}) - \varphi(\tilde{X}_1^{(N)})}{\tilde{X}_1^{(N)}} \leq x, \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} P\left(\frac{\tilde{Z}^{(k)} - \varphi(k)}{k} \leq x, \tilde{X}_1^{(N)} = k\right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(\frac{\tilde{Z}^{(k)} - \varphi(k)}{k} \leq x\right). \end{aligned}$$

Gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{\tilde{Z}^{(N)} - \varphi(N)}{N} \leq x\right) = P(\tilde{V} \leq x),$$

so folgt mit dem Cauchyschen Grenzwertsatz (siehe zum Beispiel [H], Seite 177)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P\left(\frac{\tilde{Z}^{(k)} - \varphi(k)}{k} \leq x\right) = P(\tilde{V} \leq x).$$

Aus (3.7) ergibt sich also mit $N \rightarrow \infty$

$$W_{\tilde{X}_1^{(N)}} \xrightarrow{D} \tilde{V}.$$

- Da für $x \in (0, 1)$

$$P\left(\frac{\tilde{X}_1^{(N)}}{N} \leq x\right) = \frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N}$$

gilt, folgt außerdem

$$\frac{\tilde{X}_1^{(N)}}{N} \xrightarrow{P} U$$

für $N \rightarrow \infty$ mit $U \sim \text{unif}(0, 1)$.

- Wegen $E(\tilde{Z}^{(N)}) \sim N$ erhält man für $x \in (0, 1)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N(\lfloor Nx \rfloor - 1) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2(\lfloor Nx \rfloor - 1) - N}{N} = 2x - 1 =: C(x).$$

Ist U^* eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable, so ist $\lceil NU^* \rceil - 1$ auf $\{0, \dots, N - 1\}$ gleichverteilt, und es gilt

$$C_N(\lceil NU^* \rceil - 1) \xrightarrow{\mathcal{D}} C(U^*).$$

Dies ergibt

$$C_N(\tilde{X}_1^{(N)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} C(U).$$

Insgesamt könnte dies auf

$$W_{\tilde{X}_1^{(N)}} \frac{\tilde{X}_1^{(N)}}{N} + C_N(\tilde{X}_1^{(N)}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \tilde{V}U + 2U - 1.$$

führen. Existiert also eine Zufallsvariable \tilde{V} mit (3.7), so sollte die zugehörige Verteilung damit die Fixpunktgleichung

$$\mathcal{L}(\tilde{V}) = \mathcal{L}(\tilde{V}U + 2U - 1), \tag{3.8}$$

mit U und \tilde{V} unabhängig, erfüllen. Hiermit sind unsere heuristischen Betrachtungen beendet, denn es ist deutlich geworden, warum im weiteren Verlauf dieses Abschnitts gezeigt werden soll, daß es eine eindeutige Zufallsvariable W gibt, die (3.8) erfüllt, und daß die Folge $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tatsächlich in Verteilung gegen W konvergiert. Dazu sei \mathcal{V} die Menge aller Verteilungsfunktionen $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int xF(dx) = 0$$

und

$$\int x^2F(dx) < \infty.$$

Definiert man hierauf die Wasserstein-Metrik d durch

$$d(F, G)^2 := \inf\{E(X - Y)^2 : \mathcal{L}(X) = F, \mathcal{L}(Y) = G\},$$

so ist Konvergenz bezüglich d äquivalent zur Konvergenz in Verteilung mit gleichzeitiger Konvergenz der zweiten Momente. Wir betrachten nun den Operator $S : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ mit

$$S(F) := \mathcal{L}(XU + 2U - 1),$$

wobei $\mathcal{L}(X) = F$, $\mathcal{L}(U) = \text{unif}(0, 1)$ und X und U unabhängig sind.² Offensichtlich führt S nicht aus \mathcal{V} hinaus. Ziel ist es nun, die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes von S nachzuweisen. Dazu ist der folgende Satz hilfreich, der sich aus [GG] ergibt. Es gilt

²Wir identifizieren gelegentlich eine Verteilung mit der zugehörigen Verteilungsfunktion.

Satz 3.12 ([GG], S.466). *Ist U, U_1, U_2, \dots eine Folge von unabhängigen und auf $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen, so ist die Verteilung von*

$$R := 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i U_j$$

eindeutige Lösung der Fixpunktgleichung

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(UX + 1),$$

wobei U und X unabhängig sind.

Definiert man

$$W := R - 2,$$

so folgt damit

Korollar 3.13. *Es ist $\mathcal{L}(W)$ eindeutiger Fixpunkt von S .*

Nun ist noch die Frage offen, ob die Folge $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tatsächlich in Verteilung gegen diesen Fixpunkt W von S konvergiert. Auch hier betrachten wir deshalb zunächst zwei Abbildungen, die diese Konvergenz nahelegen. In den Abbildungen 3.7 und 3.8 sind das durch ein C-Programm berechnete N -fache der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion $f_{\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N}}$ zu $\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N}$ im Fall $N = 100$ und zum Vergleich die ebenfalls anhand eines C-Programmes näherungsweise berechnete Lebesgue-Dichte f_{R-2} zu $R - 2$ zu sehen. Wegen

$$\int_{-1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\frac{(N-1)N}{2}} f_{\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N}} \left(\frac{k}{N} - 1 \right) 1_{[-1 + \frac{k}{N}, -1 + \frac{k+1}{N})}(x) \right) dx = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{(N-1)N}{2}} P(\tilde{Z}^{(N)} = k) = \frac{1}{N}$$

betrachten wir in Abbildung 3.7 die standardisierte Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion. Erst mit Hilfe dieser Umskalierung ist ein Vergleich mit der Dichte zu $R-2$ sinnvoll, denn dann gilt $\int_{-1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\frac{(N-1)N}{2}} N f_{\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N}} \left(\frac{k}{N} - 1 \right) 1_{[-1 + \frac{k}{N}, -1 + \frac{k+1}{N})}(x) \right) dx = 1$. Mehr Informationen zu den verwendeten Programmen findet man im Anhang.

Bemerkung 3.14. Es wurde bis jetzt ganz selbstverständlich vorausgesetzt, daß die Zufallsvariable R eine Lebesgue-Dichte besitzt. Diese Existenz folgt schnell mit Hilfe des Satzes von Radon-Nikodym ([Ba2], Seite 116 oder [Bi2], Seite 422). Angenommen, R besitzt keine Lebesgue-Dichte. Nach dem Satz von Radon-Nikodym

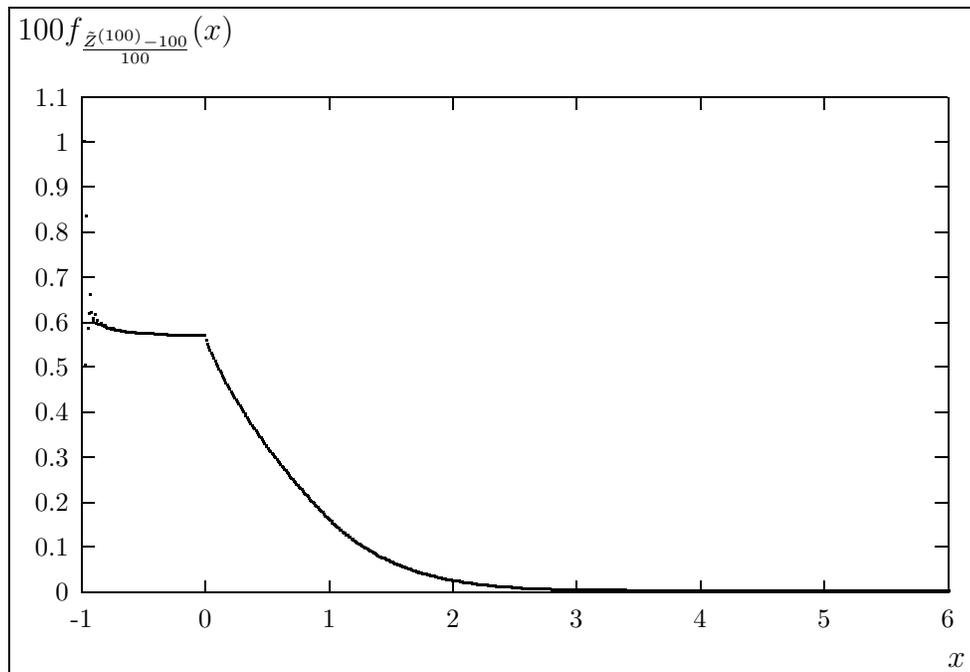


Abbildung 3.7: standardisierte Massenfunktion $100f_{\frac{\tilde{Z}^{(100)}-100}{100}}$ zu $\frac{\tilde{Z}^{(100)}-100}{100}$

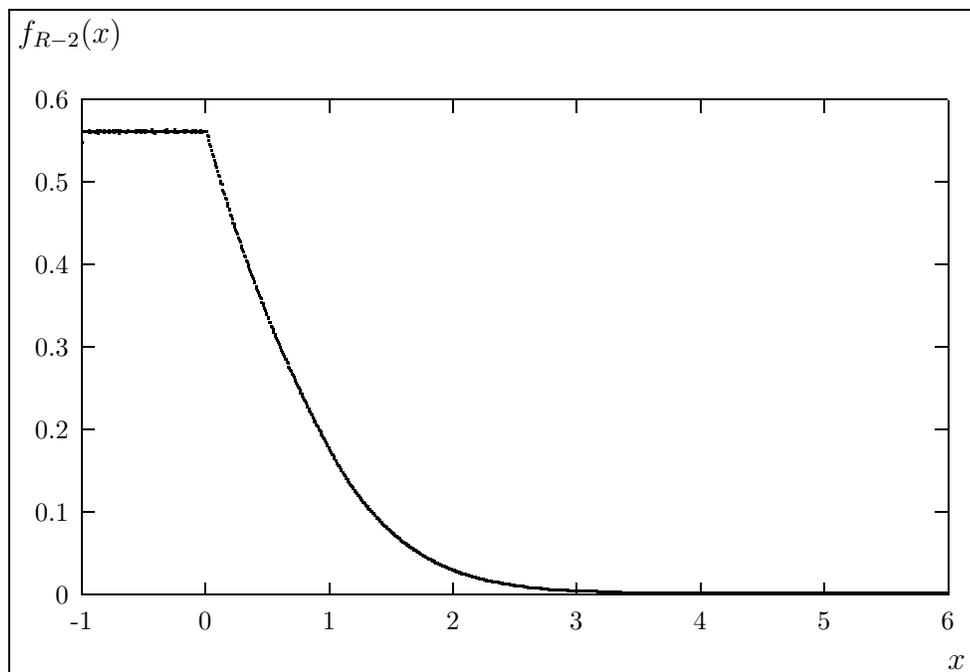


Abbildung 3.8: Lebesgue-Dichte f_{R-2} zu $R - 2$

existiert dann eine Borel-Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit $\ell(M) = 0$ und $P^R(M) > 0$. Hierbei bezeichnet ℓ das Lebesgue-Maß. Dann folgt

$$\begin{aligned}
0 &< P^R(M) \\
&= P(R \in M) \\
&= P(UR + 1 \in M) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} P(Ur + 1 \in M) P^R(dr) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^1 1_{\frac{1}{r}(M-1)}(u) du P^R(dr) \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \ell\left(\frac{1}{r}(M-1)\right) P^R(dr) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|r|} \ell(M) P^R(dr) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

und dies ist ein Widerspruch. Mit R besitzt auch $W = R - 2$ eine Lebesgue-Dichte.

Bemerkung 3.15. Durch Abbildung 3.8 wird die Vermutung nahegelegt, daß die Lebesgue-Dichte f_W zu der Zufallsvariablen W auf dem Intervall $(-1, 0)$ konstant ist. Dies macht man sich leicht klar. Wegen

$$\mathcal{L}(W) = \mathcal{L}(WU + 2U - 1)$$

und der Unabhängigkeit von U und W folgt für alle $w \in \mathbb{R}$ mit dem Satz von Fubini und der Substitution $z = u(x + 2) - 1$

$$\begin{aligned}
P(W \leq w) &= P(U(W + 2) - 1 \leq w) \\
&= P\left(W \leq \frac{w + 1}{U} - 2\right) \\
&= \int_0^1 P\left(W \leq \frac{w + 1}{u} - 2\right) du \\
&= \int_0^{\min(w+1,1)} P\left(W \leq \frac{w + 1}{u} - 2\right) du \\
&= \int_0^{\min(w+1,1)} \int_{-1}^{\frac{w+1}{u}-2} f_W(x) dx du \\
&= \int_0^{\min(w+1,1)} \int_{u-1}^w f_W\left(\frac{z+1}{u} - 2\right) \frac{1}{u} dz du \\
&= \int_{-1}^w \int_0^{\min(w+1,1)} 1_{(0,z+1)}(u) f_W\left(\frac{z+1}{u} - 2\right) \frac{1}{u} du dz \\
&= \int_{-1}^w \int_0^{\min(z+1,1)} f_W\left(\frac{z+1}{u} - 2\right) \frac{1}{u} du dz.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$f_W(z) = \int_0^{\min(z+1,1)} f_W\left(\frac{z+1}{u} - 2\right) \frac{1}{u} du.$$

Es sei nun $z \in (-1, 0)$. Mit Hilfe der Substitution $y = \frac{u}{z+1}$ erhält man

$$f_W(z) = \int_0^1 \frac{1}{y} f_W\left(\frac{1}{y} - 2\right) dy,$$

und somit ist $f_W(z)$ auf $(-1, 0)$ konstant.

Ein Vergleich der beiden Abbildungen läßt vermuten, daß die Folge $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$ tatsächlich gegen W konvergiert. Um dies zu beweisen, gehen wir ähnlich vor wie U.RÖSLER in [R]. Man erhält

Lemma 3.16 ([R], Proposition 3.3). *Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen von reellen Zahlen mit $b_n \geq 0$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

und

$$0 \leq a_n \leq \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^2}{n^2} a_i + b_n.$$

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Damit folgt mit den üblichen Bezeichnungen

Satz 3.17. *Ist W der eindeutige Fixpunkt von S , so gilt*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d(\mathcal{L}(W_N), \mathcal{L}(W)) = 0.$$

Beweis. Mit Satz 3.8 wissen wir, daß $\tilde{X}_1^{(N)}, W_0, \dots, W_{N-1}$ unabhängig sind, wobei $W_0 := 0$ gelten soll. Wähle zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ Versionen von W_0, \dots, W_{N-1} so, daß

$$d(\mathcal{L}(W_i), \mathcal{L}(W))^2 + \varepsilon \geq E(W_i - W)^2$$

für $i = 0, \dots, N-1$ gilt. Definiert man für $x \in (0, 1)$

$$V(x) := \sum_{i=1}^N 1_{(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]}(x) W_{i-1}$$

und ist $U \sim \text{unif}(0, 1)$ unabhängig von W und W_0, \dots, W_{N-1} , so folgt

$$\mathcal{L}(W_N) = \mathcal{L}\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} + C_N([NU] - 1)\right).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{L}(W_N), \mathcal{L}(W))^2 &\leq \mathbb{E} \left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW + C_N([NU] - 1) - C(U) \right)^2 \\
&= \mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right)^2 \right) \\
&\quad + 2\mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right) (C_N([NU] - 1) - C(U)) \right) \\
&\quad + \mathbb{E} \left((C_N([NU] - 1) - C(U))^2 \right).
\end{aligned}$$

Da W von U unabhängig ist mit $\mathbb{E}(W) = 0$ und wegen

$$\mathbb{E} \left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} C(U) \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[V(U) \frac{[NU] - 1}{N} C(U) \mid U \right] \right) = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} C_N([NU] - 1) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[V(U) \frac{[NU] - 1}{N} C_N([NU] - 1) \mid U \right] \right) = 0
\end{aligned}$$

ergibt sich

$$2\mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right) (C_N([NU] - 1) - C(U)) \right) = 0.$$

Dies liefert

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{L}(W_N), \mathcal{L}(W))^2 & \tag{3.9} \\
&\leq \mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right)^2 \right) + \mathbb{E} \left((C_N([NU] - 1) - C(U))^2 \right).
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{N \rightarrow \infty} (C_N([Nx] - 1) - C(x))^2 = 0$ für alle $x \in (0, 1)$ liefert der Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\mathbb{E} \left((C_N([NU] - 1) - C(U))^2 \right) = o(1)$$

für $N \rightarrow \infty$. Weiter erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right)^2 \right) &= \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N 1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N} W_{i-1} - UW \right)^2 \right) \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N} W_{i-1} - UW \right)^2 \right).
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\frac{i-1}{N}W_{i-1} - UW &= \frac{i-1}{N}W_{i-1} - \frac{i-1}{N}W + \frac{i-1}{N}W - UW \\ &= \frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W) + W\left(\frac{i-1}{N} - U\right),\end{aligned}$$

und so folgt für $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &\left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N}W_{i-1} - UW\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W) + W\left(\frac{i-1}{N} - U\right)\right)^2\right) \\ &= \mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)^2\right) \\ &\quad + \mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(W\left(\frac{i-1}{N} - U\right)\right)^2\right) \\ &\quad + 2\mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\left(\frac{i-1}{N} - U\right) \left(W\left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Es folgt eine Betrachtung der einzelnen Summanden. Zunächst erhält man aus den vorausgesetzten Unabhängigkeiten

$$\mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)^2\right) = \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)^2\right).$$

Außerdem erhält man wegen $\mathcal{L}(W) \in \mathcal{V}$

$$\mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(W\left(\frac{i-1}{N} - U\right)\right)^2\right) \leq \frac{1}{N^3} \mathbb{E}(W^2) = o\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

mit $N \rightarrow \infty$. Schließlich ergibt sich ebenfalls aus den vorausgesetzten Unabhängigkeiten und $\mathcal{L}(W) \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}2\mathbb{E} &\left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\left(\frac{i-1}{N} - U\right) \left(W\left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)\right)\right)\right) \\ &= 2\mathbb{E} \left(1_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\left(\frac{i-1}{N} - U\right)\right)\right) \mathbb{E} \left(\left(W\left(\frac{i-1}{N}(W_{i-1} - W)\right)\right)\right) \\ &= 2 \left(\left(\frac{2(i-1) - i^2 + (i-1)^2}{2N^2}\right) \left(\frac{i-1}{N}(\mathbb{E}W)(\mathbb{E}(W_{i-1})) - \frac{i-1}{N}\mathbb{E}(W^2)\right)\right) \\ &= o\left(\frac{1}{N}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt führt dies auf

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right]}(U) \left(\frac{i-1}{N} W_{i-1} - UW \right)^2 \right) \leq \frac{1}{N} \mathbb{E} \left(\left(\frac{i-1}{N} (W_{i-1} - W) \right)^2 \right) + o \left(\frac{1}{N} \right)$$

und so

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(\left(V(U) \frac{[NU] - 1}{N} - UW \right)^2 \right) \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E} \left(\left(\frac{i-1}{N} (W_{i-1} - W) \right)^2 \right) + o(1) \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i-1}{N} \right)^2 \mathbb{E}((W_{i-1} - W)^2) + o(1) \\ & \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i-1}{N} \right)^2 d(\mathcal{L}(W_{i-1}), \mathcal{L}(W))^2 + \varepsilon + o(1). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (3.9) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\mathcal{L}(W_N), \mathcal{L}(W))^2 & \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{i-1}{N} \right)^2 d(\mathcal{L}(W_{i-1}), \mathcal{L}(W))^2 + \varepsilon + o(1) \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{i}{N} \right)^2 d(\mathcal{L}(W_i), \mathcal{L}(W))^2 + \varepsilon + o(1). \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, ergibt sich daraus mit Lemma 3.16

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d(\mathcal{L}(W_N), \mathcal{L}(W)) = 0.$$

□

Bemerkung 3.18. Am Anfang des Beweises zu Satz 3.17 wurden die Versionen von W_0, \dots, W_{N-1} so gewählt, daß zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$

$$d(\mathcal{L}(W_i), \mathcal{L}(W))^2 + \varepsilon \geq \mathbb{E}(W_i - W)^2$$

für alle $i = 0, \dots, N-1$ gilt. Weniger umständlich wäre es gewesen, wenn man stattdessen die Versionen von W_0 bis W_{N-1} betrachtet hätte, für die

$$d(\mathcal{L}(W_i), \mathcal{L}(W))^2 = \mathbb{E}(W_i - W)^2$$

gilt. Dies ist zwar möglich, denn laut [R] (oder siehe zum Beispiel [CSS]) wird das Infimum der Menge $\{\mathbb{E}(X - Y)^2 : \mathcal{L}(X) = F, \mathcal{L}(Y) = G\}$ mit $F, G \in \mathcal{V}$ angenommen, allerdings ist der hier gegebene Beweis auf Situationen übertragbar, bei denen das Infimum nicht angenommen wird.

Da Konvergenz bezüglich der Wasserstein-Metrik die Konvergenz in Verteilung zur Folge hat, ergibt sich

Korollar 3.19. *Für $N \rightarrow \infty$ gilt*

$$W_N = \frac{\tilde{Z}^{(N)} - \mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)})}{N} \xrightarrow{\mathcal{D}} W,$$

wobei W eindeutiger Fixpunkt von S ist.

Wegen $\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}) \sim N$ liefert das

$$\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N} \xrightarrow{\mathcal{D}} W.$$

Bemerkung 3.20. Aus Korollar 3.19 ergibt sich mit $\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)}) \sim N$ für $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{Z}^{(N)}}{\mathbb{E}(\tilde{Z}^{(N)})} \xrightarrow{\mathcal{D}} W + 1,$$

also tritt in diesem Fall keine Massekonzentration auf.

Offensichtlich ist bei $\tilde{Z}^{(N)}$ im Gegensatz zu $Y^{(N)}$ keine asymptotische Normalität vorhanden, denn der Träger von W ist das Intervall $(-1, \infty)$ und nicht ganz \mathbb{R} wie bei der Normalverteilung, also kann W nicht normalverteilt sein.

3.4 Asymptotisches Verhalten von $Z^{(N)}$

Mit Hilfe der vorangegangenen beiden Abschnitte soll nun hier die asymptotische Normalität von $Z^{(N)}$ nachgewiesen werden. Aus dem bekannten Verhalten der harmonischen Zahlen folgt mit Satz 3.3

$$\mathbb{E}(Z^{(N)}) = N \log N + O(N) \tag{3.10}$$

und

$$\text{Var}(Z^{(N)}) = N^2 \log N + O(N^2). \tag{3.11}$$

Man erhält also auch hier wieder mit der Chebychevschen Ungleichung

Satz 3.21. *Es gilt für $N \rightarrow \infty$*

$$\frac{Z^{(N)}}{\mathbb{E}(Z^{(N)})} \xrightarrow{P} 1.$$

Genau wie $Y^{(N)}$ ist hier $Z^{(N)}$ um seinen Mittelwert konzentriert. Wegen (3.10) bedeutet Satz 3.21 für $N \rightarrow \infty$

$$\frac{Z^{(N)}}{N \log N} \xrightarrow{P} 1.$$

In Abbildung 3.9 ist zunächst ein Vergleich der Dichtefunktion zur Normalverteilung mit Erwartungswert $E(Z^{(N)})$ und Varianz $\text{Var}(Z^{(N)})$ mit der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Z zu $Z^{(N)}$ im Fall $N = 100$ zu sehen. Eine Umskalierung ist hier im Gegensatz zu Abbildung 3.7 nicht nötig, da $Z^{(N)}$ anders als $\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N}$ ganzzahlig ist. Danach folgt in Abbildung 3.10 ein Vergleich der zugehörigen Verteilungsfunktionen.

Auch hier sind zugehörige Programmtexte im Anhang zu finden. Anschließend soll nun die nicht unbedingt offensichtliche asymptotische Normalität von $Z^{(N)}$ bewiesen werden. Aus den letzten Abschnitten ergibt sich

Satz 3.22. *Für $N \rightarrow \infty$ gilt*

$$\frac{Z^{(N)} - N \log N}{N \sqrt{\log N}} \xrightarrow{D} Z$$

mit $Z \sim N(0, 1)$.

Beweis. Wegen $Z^{(N)} = NY^{(N)} - \tilde{Z}^{(N)}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{Z^{(N)} - N \log N}{N \sqrt{\log N}} &= \frac{NY^{(N)} - \tilde{Z}^{(N)} - N \log N}{N \sqrt{\log N}} \\ &= \frac{Y^{(N)} - \log N}{\sqrt{\log N}} - \frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N \sqrt{\log N}} - \frac{1}{\sqrt{\log N}}. \end{aligned}$$

Aus den letzten zwei Abschnitten ist

$$\frac{Y^{(N)} - \log N}{\sqrt{\log N}} \xrightarrow{D} Z$$

mit $Z \sim N(0, 1)$ bekannt und auch

$$\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N} \xrightarrow{D} \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^i U_j - 1,$$

wobei U_1, U_2, \dots unabhängig und $\text{unif}(0, 1)$ -verteilt sind; insbesondere gilt für $N \rightarrow \infty$

$$\frac{\tilde{Z}^{(N)} - N}{N \sqrt{\log N}} = o_P(1).$$

Dies liefert die Behauptung. □

Wegen (3.10) und (3.11) liefert Satz 3.22

$$\frac{Z^{(N)} - E(Z^{(N)})}{\sqrt{\text{Var}(Z^{(N)})}} \xrightarrow{D} Z.$$

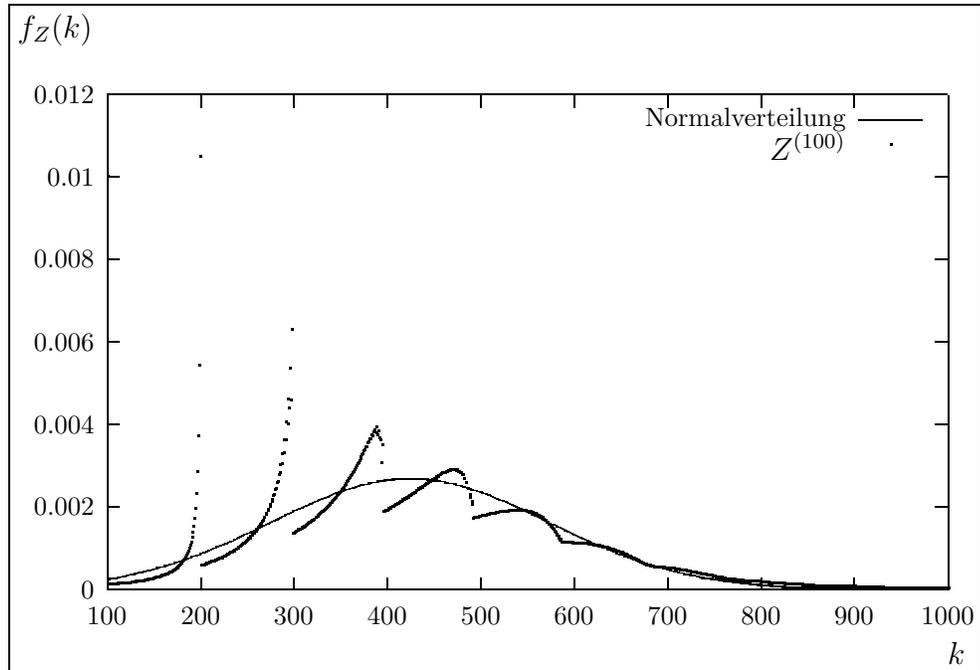


Abbildung 3.9: Vergleich der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion f_Z von $Z^{(100)}$ mit der Dichte zu der zugehörigen Normalverteilung

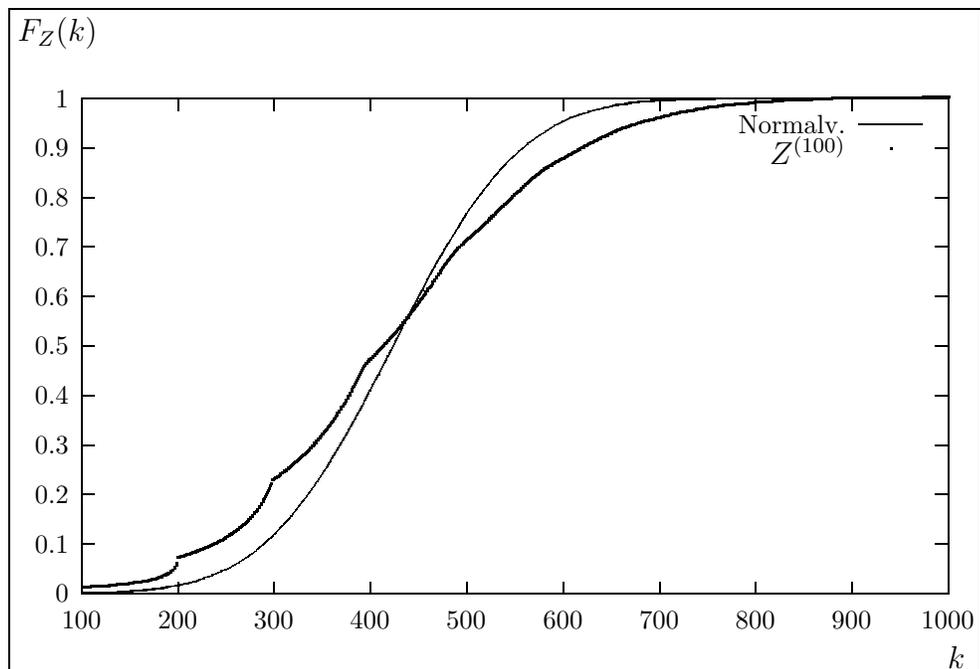


Abbildung 3.10: Vergleich der Verteilungsfunktion F_Z von $Z^{(100)}$ mit der Verteilungsfunktion der zugehörigen Normalverteilung

Bemerkung 3.23. In Satz 3.22 wird die asymptotische Normalität von $Z^{(N)}$ mit Hilfe der beiden vorausgegangenen Abschnitte bewiesen. Die deutliche „Diskrepanz“ zwischen diesem Satz und den Abbildungen 3.9 und 3.10 läßt vermuten, daß die Konvergenzgeschwindigkeit in Satz 3.22 gering ist.

3.5 Rekursionsformeln

Ziel dieses Abschnittes ist es, anhand der in Abschnitt 3.3 hergeleiteten Gleichungen

$$(Y^{(N)}, Z^{(N)}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}, X_1^{(N)}(1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}) + Z^{(N-X_1^{(N)})}),$$

und

$$\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}_1^{(N)} + \tilde{Z}^{(\tilde{X}_1^{(N)})}$$

Rekursionsformeln für die Verteilungen von $Y^{(N)}$, $\tilde{Z}^{(N)}$ und $Z^{(N)}$ in Abhängigkeit von N zu finden. Man erkennt, daß über den ersten Wurf, also $X_1^{(N)}$ bzw. $\tilde{X}_1^{(N)}$, ein Zusammenhang von $Y^{(N)}$, $Z^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ zu $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$ und $\tilde{Z}^{(k)}$ für $k < N$ hergestellt werden kann. Der Beweis zu folgendem Satz macht sich diese Tatsache zunutze. Hierbei sei $Y^{(0)} := 0$ und $Z^{(0)} := 0$.

Satz 3.24. *Es sei für $N \in \mathbb{N}$ und $j, k \in \mathbb{Z}$*

$$a(N, k, j) := P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j).$$

Dann gilt

$$a(N, k, j) = \frac{N-1}{N} a(N-1, k-j, j) + \frac{1}{N} a(N-1, k-j, j-1).$$

Beweis. Es gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$(Y^{(N)}, Z^{(N)}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}, X_1^{(N)}(1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}) + Z^{(N-X_1^{(N)})}),$$

wobei nach Voraussetzung $X_1^{(N)}$ von

$$Y^{(0)}, Y^{(1)}, \dots, Y^{(N-1)}$$

und von

$$Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(N-1)}$$

unabhängig ist. Damit folgt für $k, j \in \mathbb{Z}$ mit einer Zerlegung nach dem Wert von $X_1^{(N)}$

$$\begin{aligned} & P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j | X_1^{(N)} = l) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(X_1^{(N)}(1 + Y^{(N-X_1^{(N)})}) + Z^{(N-X_1^{(N)})} = k, 1 + Y^{(N-X_1^{(N)})} = j | X_1^{(N)} = l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(l(1 + Y^{(N-l)}) + Z^{(N-l)} = k, 1 + Y^{(N-l)} = j | X_1^{(N)} = l) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(Z^{(N-l)} = k - lj, Y^{(N-l)} = j - 1),
\end{aligned}$$

also für alle $N \in \mathbb{N}$

$$P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(Z^{(N-l)} = k - lj, Y^{(N-l)} = j - 1). \quad (3.12)$$

Weiter ergibt sich mit Hilfe einer Indexverschiebung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N P(Z^{(N-l)} = k - lj, Y^{(N-l)} = j - 1) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{l=2}^N P(Z^{(N-l)} = k - lj, Y^{(N-l)} = j - 1) \right. \\
&\quad \left. + P(Z^{(N-1)} = k - j, Y^{(N-1)} = j - 1) \right) \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{l=1}^{N-1} P(Z^{(N-1-l)} = k - j - lj, Y^{(N-1-l)} = j - 1) \right. \\
&\quad \left. + P(Z^{(N-1)} = k - j, Y^{(N-1)} = j - 1) \right).
\end{aligned}$$

Für $N = 1$ gilt

$$\sum_{l=1}^{N-1} P(Z^{(N-1-l)} = k - j - lj, Y^{(N-1-l)} = j - 1) = 0,$$

sonst erhält man mit (3.12) angewendet auf $Y^{(N-1)}$ und $Z^{(N-1)}$

$$\sum_{l=1}^{N-1} P(Z^{(N-1-l)} = k - j - lj, Y^{(N-1-l)} = j - 1) = (N-1)P(Z^{(N-1)} = k - j, Y^{(N-1)} = j),$$

also folgt insgesamt für $N \in \mathbb{N}$ und $j, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j) \\
&= \frac{N-1}{N} P(Z^{(N-1)} = k - j, Y^{(N-1)} = j) + \frac{1}{N} P(Z^{(N-1)} = k - j, Y^{(N-1)} = j - 1),
\end{aligned}$$

und das war zu zeigen. \square

Auf diesem Wege erhält man

Satz 3.25. Für $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$P(Y^{(N)} = k) = \frac{N-1}{N}P(Y^{(N-1)} = k) + \frac{1}{N}P(Y^{(N-1)} = k-1).$$

Es sei $\tilde{Z}^{(0)} := 0$. Mit denselben Argumenten wie im Beweis zu Satz 3.24 ergibt sich

Satz 3.26. Für $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$P(\tilde{Z}^{(N)} = k) = \frac{N-1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k) + \frac{1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k - N + 1).$$

Beweis. Für alle $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ergibt sich mit $\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{X}_1^{(N)} + \tilde{Z}^{(\tilde{X}_1^{(N)})}$ und der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $\tilde{X}_1^{(N)}$ von $\tilde{Z}^{(0)}, \dots, \tilde{Z}^{(N-1)}$

$$P(\tilde{Z}^{(N)} = k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} P(\tilde{Z}^{(l)} = k - l). \quad (3.13)$$

Die Gleichung (3.13) liefert

$$\sum_{l=0}^{N-1} P(\tilde{Z}^{(l)} = k - l) = (N-1)P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k) + P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k - N + 1),$$

also

$$P(\tilde{Z}^{(N)} = k) = \frac{N-1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k) + \frac{1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k - N + 1).$$

□

Betrachtet man diese drei Rekursionsformeln näher, so erkennt man, daß es sich hierbei um Formeln von der totalen Wahrscheinlichkeit handelt. Dies kann man sich am Beispiel von Satz 3.25 klarmachen, denn da für $k \in \{1, \dots, N\}$ wegen der Unabhängigkeit von $X_1^{(N)}$ und $Y^{(N-1)}$

$$\begin{aligned} & P(Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}} = k) \\ &= \frac{1}{N}P(Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}} = k | X_1^{(N)} = 1) \\ & \quad + \frac{N-1}{N}P(Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}} = k | X_1^{(N)} \neq 1) \\ &= \frac{1}{N}P(Y^{(N-1)} = k-1) + \frac{N-1}{N}P(Y^{(N-1)} = k) \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich der Zusammenhang

$$Y^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}},$$

und so erhält man

$$\frac{1}{N}P(Y^{(N-1)} = k-1) = P(X_1^{(N)} = 1)P(Y^{(N)} = k|X_1^{(N)} = 1)$$

und

$$\frac{N-1}{N}P(Y^{(N-1)} = k) = P(X_1^{(N)} \neq 1)P(Y^{(N)} = k|X_1^{(N)} \neq 1).$$

Dieses Ergebnis war zu erwarten, denn unter der Bedingung „ $X_1^{(N)} \neq 1$ “ nimmt $Y^{(N)}$ offensichtlich mit derselben Wahrscheinlichkeit einen Wert aus $\{1, \dots, N-1\}$ an wie $Y^{(N-1)}$, wogegen im Fall „ $X_1^{(N)} = 1$ “ bei $Y^{(N)}$ im Vergleich zu $Y^{(N-1)}$ genau ein Rekord hinzukommt. Außerdem ergibt sich

$$(Y^{(N)}, Z^{(N)}) \stackrel{\mathcal{D}}{=} (Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}}, Z^{(N-1)} + Y^{(N-1)} + 1_{\{X_1^{(N)}=1\}}),$$

also

$$\frac{1}{N}P(Z^{(N-1)} = k-j, Y^{(N-1)} = j-1) = P(X_1^{(N)} = 1)P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j|X_1^{(N)} = 1)$$

und

$$\frac{N-1}{N}P(Z^{(N-1)} = k-j, Y^{(N-1)} = j) = P(X_1^{(N)} \neq 1)P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j|X_1^{(N)} \neq 1)$$

bzw.

$$\tilde{Z}^{(N)} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \tilde{Z}^{(N-1)} + (N-1)1_{\{\tilde{X}_1^{(N)}=N-1\}},$$

also

$$\frac{1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k - N + 1) = P(\tilde{X}_1^{(N)} = N-1)P(\tilde{Z}^{(N)} = k|\tilde{X}_1^{(N)} = N-1)$$

und

$$\frac{N-1}{N}P(\tilde{Z}^{(N-1)} = k) = P(\tilde{X}_1^{(N)} \neq N-1)P(\tilde{Z}^{(N)} = k|\tilde{X}_1^{(N)} \neq N-1).$$

Mit Hilfe der Sätze 3.24 bis 3.26 sind die C-Programme entwickelt worden, die die Werte der Wahrscheinlichkeitsmassen- und der Verteilungsfunktionen zu $Y^{(N)}$, $Z^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ berechnen. Eine Auflistung und mehr Information zu den Programmtexten findet man im Anhang B.1.

Kapitel 4

Rekorde beim Poisson-Prozeß

In den letzten beiden Kapiteln sind Erneuerungsprozesse mit diskret verteilten Lebensdauern betrachtet worden. Im Fall der $\text{unif}(\{1, \dots, N\})$ -verteilten Zufallsvariablen in Kapitel 3 waren höchstens N , also sogar nur endlich viele Rekordlebensdauern möglich. Dies ändert sich, wenn man wie hier stattdessen einen Poisson-Prozeß mit Rate $\lambda > 0$, also $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilte Lebensdauern, betrachtet. Hier ist die auf der gesamten Zeitachse in Rekorden verbrachte Zeit unendlich und der bis zum Zeitpunkt t in Rekorden verbrachte Anteil W_t hängt anders als bei der Brownschen Bewegung von t ab. Ziel ist es, etwas über das Verhalten von W_t für $t \rightarrow \infty$ auszusagen. Dazu wird W_t mit Hilfe der Summe Z_n der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern analysiert. Im ersten Abschnitt werden Erwartungswert und Varianz zu Z_n bestimmt. Während zum asymptotischen Verhalten der Anzahl A_n der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern bereits Ergebnisse bekannt sind, ist es im Fall von Z_n schwierig, Aussagen über mögliche Massekonzentration und asymptotische Normalität zu machen. Aus diesem Grund wird im zweiten Abschnitt eine Zufallsvariable T_n definiert, die die Summe der ersten n Rekordlebensdauern liefert. Die sich für T_n ergebende Massekonzentration liefert mit Hilfe des Zusammenhangs $Z_n = T_{A_n}$ die Massekonzentration von Z_n . In Abbildung 1.4 wird dieser Zusammenhang deutlich; dort ist $A_4 = 2$ und damit $Z_4 = T_2$. Während im zweiten Abschnitt außerdem der Zentrale Grenzwertsatz für T_n bewiesen wird, ergibt sich im dritten Abschnitt ein allgemeineres Ergebnis, das unter anderem aufgrund dieser eben erwähnten Zusammenhänge eine Aussage zu dem asymptotischen Verhalten der Verteilung von Z_n abwirft. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels steht dann die bis zum Zeitpunkt t in Rekorden verbrachte Zeit W_t und ihr Verhalten für $t \rightarrow \infty$ im Mittelpunkt.

Im Gegensatz zu Kapitel 3, in dem die Anzahl der möglichen Werte der Lebensdauern erhöht worden ist, wird hier die Anzahl der betrachteten Lebensdauern beziehungsweise das betrachtete Zeitintervall vergrößert und in Abhängigkeit davon das Verhalten der interessierenden Größen untersucht.

4.1 Rekorde unter den ersten n Lebensdauern

Es sei nun $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_1 \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Es gibt die Zufallsvariable R_k mit $R_1 := 1$ und

$$R_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } X_k > X_j \text{ für } j = 1, \dots, k-1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ auch hier an, ob die k -te Lebensdauer X_k ein Rekord ist. Damit liefert

$$A_n := \sum_{k=1}^n R_k$$

die Anzahl und

$$Z_n := \sum_{k=1}^n R_k X_k$$

die Summe der Rekorde unter den ersten n Lebensdauern. In diesem Zusammenhang sind schon einige Ergebnisse bekannt. So sind zum Beispiel laut [ABN] (Seite 23 bis Seite 25) die Zufallsvariablen R_1, R_2, \dots unabhängig mit

$$P(R_n = 1) = \frac{1}{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$, so daß

$$E(A_n) = H_n = \log n + O(1)$$

und

$$\text{Var}(A_n) = H_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \log n + O(1)$$

für $n \rightarrow \infty$ folgt. Außerdem liest man nach, daß $\frac{A_n}{E(A_n)} \xrightarrow{P} 1$ und $\frac{A_n - E(A_n)}{\sqrt{\text{Var}(A_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ mit $Z \sim N(0, 1)$ für $n \rightarrow \infty$, also

$$\frac{A_n}{\log n} \xrightarrow{P} 1 \tag{4.1}$$

und

$$\frac{A_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z \tag{4.2}$$

gilt. Laut [ABN] hängt die Verteilung von R_n und damit die von A_n nicht von der Verteilung von X_1 ab, solange diese stetig ist. Da es einen vergleichbaren vereinfachenden Sachverhalt bei der Summe Z_n nicht gibt, ist es hier schwieriger, Aussagen über Massekonzentration und Verteilungskonvergenz zu machen. Es stellt sich also die Frage, ob man analoge Aussagen zu (4.1) und (4.2) auch für Z_n erhalten kann. Dazu berechnen wir zunächst den zugehörigen Erwartungswert und die Varianz. Es ergibt sich

Satz 4.1. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}(Z_n) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{H_k}{k}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) = & \frac{1}{\lambda^2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} + \sum_{k=1}^n \frac{H_k^2}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{H_k^2}{k^2} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{H_{l-k}}{l-k} \frac{H_k}{k} \right. \\ & - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_{j+l}}{j(j+l)} \\ & + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{H_{j+l}}{(j+l-k)(j+l)} \\ & \left. - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{H_k}{k} \frac{H_l}{l} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich ist λX_i für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$ Exp(1)-verteilt. Da die Verteilung der Folge $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ außerdem nicht von λ abhängt, gehen wir hier im Beweis vereinfachend von Exp(1)-verteilten Lebensdauern X_1, X_2, \dots aus. Um dann die Ergebnisse im allgemeinen Fall zu erhalten, muß der sich so ergebende Erwartungswert mit $\frac{1}{\lambda}$ und die Varianz mit $\frac{1}{\lambda^2}$ multipliziert werden.

Man erhält zunächst $\mathbb{E}(R_1 X_1) = 1$ und für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, mit Hilfe einer Formel aus [GR1] (Seite 583) und [GR2] (Seite 337 und Seite 343)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(R_k X_k) &= \mathbb{E} \left(X_k \prod_{j=1}^{k-1} 1_{\{X_k > X_j\}} \right) \\ &= \int_0^{\infty} x (1 - e^{-x})^{k-1} e^{-x} dx \\ &= - \int_0^1 (1-y)^{k-1} \log y \, dy \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{k+j} \right) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}.$$

Um nun die Varianz zu Z_n berechnen zu können, benötigt man $E(R_k X_k)^2$ und $E(R_l X_l R_k X_k)$ für $l, k \in \mathbb{N}$ mit $l \neq k$, denn

$$\begin{aligned} \text{Var}(Z_n) &= \sum_{k=1}^n \text{Var}(R_k X_k) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \text{Cov}(R_k X_k, R_l X_l) \\ &= \sum_{k=1}^n E((R_k X_k)^2) - \sum_{k=1}^n (E(R_k X_k))^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n E(R_k X_k R_l X_l) \\ &\quad - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n E(R_k X_k) E(R_l X_l). \end{aligned}$$

Ebenfalls mit Hilfe einer Formel aus [GR1] (Seite 587) und [GR2] (Seite 337 und Seite 343) ergibt sich

$$\begin{aligned} E((R_k X_k)^2) &= E(R_k X_k^2) \\ &= \int_0^\infty x^2 (1 - e^{-x})^{k-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^1 (\log y)^2 (1 - y)^{k-1} dy \\ &= \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} + \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Für $l > k$ erhält man

$$E(R_l X_l R_k X_k) = \int_0^\infty x e^{-x} (1 - e^{-x})^{k-1} \int_x^\infty y e^{-y} (1 - e^{-y})^{l-k-1} dy dx.$$

Betrachtet man zunächst für ein $x > 0$ das innere Integral, so ergibt sich mit zwei Substitutionen und $\log(1 - y) = -\sum_{j=1}^\infty \frac{y^j}{j}$ für $0 < y < 1$

$$\int_x^\infty y e^{-y} (1 - e^{-y})^{l-k-1} dy = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} \left(\frac{1}{j+l-k} - \frac{(1 - e^{-x})^{j+l-k}}{j+l-k} \right),$$

also erhält man

$$\begin{aligned} E(R_l X_l R_k X_k) &= \int_0^\infty x e^{-x} (1 - e^{-x})^{k-1} \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} \left(\frac{1}{j+l-k} - \frac{(1 - e^{-x})^{j+l-k}}{j+l-k} \right) dx \\ &= \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} \frac{1}{j+l-k} \int_0^\infty x e^{-x} (1 - e^{-x})^{k-1} dx \\ &\quad - \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} \frac{1}{j+l-k} \int_0^\infty x e^{-x} (1 - e^{-x})^{j+l-1} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+l-k)} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+l-k)} \left(\frac{1}{j+l} \sum_{r=1}^{j+l} \frac{1}{r} \right) \\
&= \left(\frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{l-k} \frac{1}{j} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \left(\frac{1}{j+l} \sum_{r=1}^{j+l} \frac{1}{r} \right) \\
&\quad + \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j+l-k} \left(\frac{1}{j+l} \sum_{r=1}^{j+l} \frac{1}{r} \right).
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Z_n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j^2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)^2 \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \left(\frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{l-k} \frac{1}{j} \right) \left(\frac{1}{k} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+l)} \sum_{r=1}^{j+l} \frac{1}{r} \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \frac{1}{l-k} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(j+l-k)(j+l)} \sum_{r=1}^{j+l} \frac{1}{r} \\
&\quad - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \left(\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right) \left(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^l \frac{1}{j} \right).
\end{aligned}$$

□

Dies liefert den nachfolgenden Satz zum Verhalten von $E(Z_n)$ für $n \rightarrow \infty$.

Satz 4.2. *Es gilt*

$$E(Z_n) = \frac{(\log n)^2}{2\lambda} + O(\log n)$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Zunächst erhält man für $k \in \mathbb{N}$

$$H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \geq \int_1^k \frac{1}{x} dx = \log k \quad (4.3)$$

und

$$H_k = \sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x} dx = 1 + \log k. \quad (4.4)$$

Dies liefert

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} \leq \mathbb{E}(Z_n) \leq \frac{1}{\lambda} \left(H_n + \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} \right). \quad (4.5)$$

Da $\frac{\log k}{k}$ für $k \geq 3$ monoton fallend ist, folgt für genügend große $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} &\geq \frac{\log 2}{2} + \int_3^n \frac{\log x}{x} dx \\ &= \frac{\log 2}{2} + \frac{(\log n)^2}{2} - \frac{(\log 3)^2}{2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} &\leq \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \int_3^n \frac{\log x}{x} dx \\ &= \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} + \frac{(\log n)^2}{2} - \frac{(\log 3)^2}{2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n \frac{\log k}{k} = \frac{(\log n)^2}{2} + O(1).$$

Wegen $H_n = \log n + O(1)$ und (4.5) ist damit die Behauptung bewiesen. \square

Könnte man nun zeigen, daß $\text{Var}(Z_n) = o((\mathbb{E}(Z_n))^2)$ gilt, so würde mit der Chebyschev'schen Ungleichung die Massekonzentration von Z_n folgen. Mit Blick auf die komplizierte Form von $\text{Var}(Z_n)$ werden wir hier jedoch stattdessen die Zufallsvariable T_n einführen, mit deren Hilfe sogar eine stärkere Aussage zum asymptotischen Verhalten von Z_n erhalten wird.

4.2 Summe der ersten n Rekordlebensdauern

In diesem Abschnitt steht die Summe T_n der ersten n Rekordlebensdauern im Mittelpunkt. Ist $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Rekorde von $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so folgt wie in Kapitel 3 mit dem Satz von Ignatov (siehe [ETV]), daß die Zufallsvariablen Y_1, Y_2, \dots dann Lebensdauern eines Poisson-Prozesses mit Rate λ sind. Damit ist $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ also eine Folge von unabhängigen und $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen, und es gilt

Lemma 4.3. *Für $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$T_n = \sum_{k=1}^n (n+1-k) Y_k.$$

Wie anfangs schon erwähnt gilt mit den Definitionen von A_n , Z_n und T_n offensichtlich

$$Z_n = T_{A_n}. \quad (4.6)$$

Dieser Zusammenhang wird später hilfreich sein, wenn es darum geht, beim asymptotischen Verhalten von T_n auf Z_n zu schließen. Man erhält mit Lemma 4.3

Satz 4.4. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}(T_n) = \frac{n(n+1)}{2\lambda}$$

und

$$\text{Var}(T_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\lambda^2}.$$

Dies liefert wie im vorangegangenen Kapitel wegen $\text{Var}(T_n) = o((\mathbb{E}(T_n))^2)$ mit der Chebyschischen Ungleichung

Satz 4.5. Für $n \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{T_n}{\mathbb{E}(T_n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Zusammen mit Satz 4.4 liefert Satz 4.5 für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_n}{\frac{1}{2\lambda}n(n+1)} \xrightarrow{P} 1. \quad (4.7)$$

Während daraus für jede Funktion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ sofort

$$\frac{T_{\varphi(n)}}{\frac{1}{2\lambda}\varphi(n)(\varphi(n)+1)} \xrightarrow{P} 1 \quad (4.8)$$

folgt, bleibt die entsprechende Aussage für $\frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}A_n(A_n+1)}$ noch zu beweisen. Dies geschieht im Beweis zu folgendem Satz, der insgesamt die analoge Aussage zu Satz 4.5 für Z_n liefert.

Satz 4.6. Es gilt

$$\frac{Z_n}{\mathbb{E}(Z_n)} \xrightarrow{P} 1$$

für $n \rightarrow \infty$.

Beweis. Es seien $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < 1$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} & P \left(\left| \frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}A_n(A_n+1)} - 1 \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq P \left(\left| T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda} \right| > \varepsilon \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}, \left| \frac{A_n}{\log n} - 1 \right| < \delta \right) \\ & \quad + P \left(\left| \frac{A_n}{\log n} - 1 \right| > \delta \right). \end{aligned}$$

Mit (4.1) ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{A_n}{\log n} - 1 \right| > \delta \right) = 0.$$

Andererseits erhält man mit der pfadweisen Monotonie von T_n für genügend große $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha := 1 - \delta$ und $\beta := 1 + \delta$

$$\begin{aligned} & P \left(\left| T_{A_n} - \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda} \right| > \varepsilon \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda}, \left| \frac{A_n}{\log n} - 1 \right| < \delta \right) \\ = & P \left(T_{A_n} - \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda} > \varepsilon \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda}, \alpha \log n < A_n < \beta \log n \right) \\ + & P \left(T_{A_n} - \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda} < -\varepsilon \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda}, \alpha \log n < A_n < \beta \log n \right) \\ \leq & P \left(T_{\lfloor \beta \log n \rfloor} - \frac{\lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)}{2\lambda} > \varepsilon \frac{\lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)}{2\lambda} \right) \\ + & P \left(T_{\lfloor \alpha \log n \rfloor} - \frac{\lceil \beta \log n \rceil (\lceil \beta \log n \rceil + 1)}{2\lambda} < -\varepsilon \frac{\lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)}{2\lambda} \right) \\ = & P \left(\frac{T_{\lfloor \beta \log n \rfloor}}{\frac{1}{2\lambda} \lceil \beta \log n \rceil (\lceil \beta \log n \rceil + 1)} - 1 > (1 + \varepsilon) \frac{\lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)}{\lceil \beta \log n \rceil (\lceil \beta \log n \rceil + 1)} - 1 \right) \\ + & P \left(1 - \frac{T_{\lfloor \alpha \log n \rfloor}}{\frac{1}{2\lambda} \lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)} > \varepsilon + 1 - \frac{\lceil \beta \log n \rceil (\lceil \beta \log n \rceil + 1)}{\lfloor \alpha \log n \rfloor (\lfloor \alpha \log n \rfloor + 1)} \right). \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor (\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor + 1)}{\lceil (1 + \delta) \log n \rceil (\lceil (1 + \delta) \log n \rceil + 1)} = \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^2$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lceil (1 + \delta) \log n \rceil (\lceil (1 + \delta) \log n \rceil + 1)}{\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor (\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor + 1)} = \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)^2$$

und

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \delta}{1 + \delta} \right)^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \delta}{1 - \delta} \right)^2 = 1$$

kann man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $0 < \delta_0 < 1$ finden, so daß für alle $n \geq n_0$ und $0 < \delta \leq \delta_0$

$$(1 + \varepsilon) \frac{\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor (\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor + 1)}{\lceil (1 + \delta) \log n \rceil (\lceil (1 + \delta) \log n \rceil + 1)} - 1 > \frac{\varepsilon}{2}$$

und

$$\varepsilon + 1 - \frac{\lceil (1 + \delta) \log n \rceil (\lceil (1 + \delta) \log n \rceil + 1)}{\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor (\lfloor (1 - \delta) \log n \rfloor + 1)} > \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Im weiteren Verlauf des Beweises sei δ beliebig aus $(0, \delta_0)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
& P \left(\left| T_{A_n} - \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda} \right| > \varepsilon \frac{A_n(A_n + 1)}{2\lambda}, \left| \frac{A_n}{\log n} - 1 \right| < \delta \right) \\
& \leq P \left(\frac{T_{\lceil(1+\delta)\log n\rceil}}{\frac{1}{2\lambda}\lceil(1+\delta)\log n\rceil(\lceil(1+\delta)\log n\rceil + 1)} - 1 > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
& \quad + P \left(1 - \frac{T_{\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor}}{\frac{1}{2\lambda}\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor(\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor + 1)} > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
& \leq P \left(\left| \frac{T_{\lceil(1+\delta)\log n\rceil}}{\frac{1}{2\lambda}\lceil(1+\delta)\log n\rceil(\lceil(1+\delta)\log n\rceil + 1)} - 1 \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
& \quad + P \left(\left| 1 - \frac{T_{\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor}}{\frac{1}{2\lambda}\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor(\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor + 1)} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right).
\end{aligned}$$

Aus (4.8) mit $\varphi_1(n) = \lceil(1+\delta)\log n\rceil$ beziehungsweise $\varphi_2(n) = \lfloor(1-\delta)\log n\rfloor$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{T_{\lceil(1+\delta)\log n\rceil}}{\frac{1}{2\lambda}\lceil(1+\delta)\log n\rceil(\lceil(1+\delta)\log n\rceil + 1)} - 1 \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| 1 - \frac{T_{\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor}}{\frac{1}{2\lambda}\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor(\lfloor(1-\delta)\log n\rfloor + 1)} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}A_n(A_n + 1)} - 1 \right| > \varepsilon \right) = 0,$$

also

$$\frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}A_n(A_n + 1)} \xrightarrow{P} 1. \tag{4.9}$$

Außerdem erhält man mit (4.1) für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{(A_n)^2}{(\log n)^2} \xrightarrow{P} 1 \tag{4.10}$$

und

$$\frac{A_n}{(\log n)^2} \xrightarrow{P} 0. \tag{4.11}$$

Wegen

$$\frac{A_n(A_n + 1)}{(\log n)^2} = \frac{(A_n)^2}{(\log n)^2} + \frac{A_n}{(\log n)^2}$$

ergibt sich aus (4.10) und (4.11) für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{A_n(A_n + 1)}{(\log n)^2} \xrightarrow{P} 1.$$

Dies liefert zusammen mit (4.9) wegen

$$\frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}(\log n)^2} = \frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}A_n(A_n + 1)} \cdot \frac{A_n(A_n + 1)}{(\log n)^2}$$

für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_{A_n}}{\frac{1}{2\lambda}(\log n)^2} \xrightarrow{P} 1.$$

Mit Gleichung (4.6) folgt dann

$$\frac{Z_n}{\frac{1}{2\lambda}(\log n)^2} \xrightarrow{P} 1 \tag{4.12}$$

und so wegen Satz 4.2

$$\frac{Z_n}{\mathbb{E}(Z_n)} \xrightarrow{P} 1$$

für $n \rightarrow \infty$. □

Damit ist es uns gelungen, die Tatsache, daß T_n für $n \rightarrow \infty$ um seinen Mittelwert konzentriert ist, auf die Zufallsvariable Z_n zu übertragen. Der folgende Satz liefert nun sogar die asymptotische Normalität von T_n , die man allerdings nicht ohne weiteres auch für Z_n erhält. Dazu wird im nächsten Abschnitt ein weiterreichendes Ergebnis zu T_n bewiesen. Zunächst erhält man

Satz 4.7. *Für $n \rightarrow \infty$ gilt*

$$\frac{T_n - \mathbb{E}(T_n)}{\sqrt{\text{Var}(T_n)}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z,$$

wobei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Beweis. Mit derselben Argumentation wie im Beweis zu Satz 4.1 können wir hier o.B.d.A. annehmen, daß $\lambda = 1$ gilt, denn es ist

$$\frac{T_n - \mathbb{E}(T_n)}{\sqrt{\text{Var}(T_n)}} = \frac{\sum_{k=1}^n (n+1-k)\lambda Y_k - \mathbb{E}(\sum_{k=1}^n (n+1-k)\lambda Y_k)}{\sqrt{\text{Var}(\sum_{k=1}^n (n+1-k)\lambda Y_k)}}$$

und $\lambda Y_k \sim \text{Exp}(1)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \sum_{j=1}^n \int_{|(n+1-j)Y_j - (n+1-j)| \geq \varepsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}} (n+1-j)^2 (Y_j - 1)^2 dP \\
&= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{j=1}^n (n+1-j)^2 \int_{(n+1-j)|Y_1-1| \geq \varepsilon \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} (Y_1 - 1)^2 dP \\
&= \frac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sum_{j=1}^n j^2 \int_{|Y_1-1| \geq \frac{\varepsilon}{j} \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}} (Y_1 - 1)^2 dP \\
&\leq \frac{6}{n^3} n^2 n \int_{|Y_1-1| \geq \frac{\varepsilon}{n} \sqrt{\frac{n^3}{6}}} (Y_1 - 1)^2 dP \\
&= 6 \int_{|Y_1-1| \geq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{6}}} (Y_1 - 1)^2 dP
\end{aligned}$$

und so

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^n k^2} \sum_{j=1}^n \int_{|(n+1-j)Y_j - (n+1-j)| \geq \varepsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2}} (n+1-j)^2 (Y_j - 1)^2 dP = 0.$$

Das ist aber die Lindeberg-Bedingung, und es folgt zum Beispiel mit Theorem 27.2. aus [Bi2] die Behauptung. \square

4.3 Zugang über funktionale Grenzwertsätze

Im folgenden seien $C[0, 1]$ beziehungsweise $D[0, 1]$ die Mengen der auf $[0, 1]$ definierten und reellwertigen Funktionen, die stetig beziehungsweise mit existierendem linksseitigen Grenzwert rechtsseitig stetig sind. Mit W bezeichnen wir dann die Zufallsgröße auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Werten in $D[0, 1]$, deren Verteilung das Wiener-Maß ist. Üblicherweise ist das Wiener-Maß zwar auf $C[0, 1]$ definiert, man kann es jedoch laut [Bi1] (S.137) auch auf $D[0, 1]$ betrachten, indem jeder Menge A aus $D[0, 1]$ der zu $A \cap C[0, 1]$ gehörige Wert zugeordnet wird. Diese Überlegungen sind notwendig, um später eine spezielle Version des Satzes von Donsker anwenden zu können. Dazu betrachten wir wieder die aus unabhängigen und $\text{Exp}(\lambda)$ -verteilten Zufallsvariablen bestehende Folge $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus dem zweiten Abschnitt und definieren $S_0 := 0$ und zu $n \in \mathbb{N}$

$$S_n := \sum_{j=1}^n Y_j.$$

Damit sei die Zufallsgröße $W_n : \Omega \rightarrow D[0, 1]$ definiert durch

$$W_n(t) := \frac{S_{[nt]} - \frac{[nt]}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} \sqrt{n}}.$$

Nach dem Satz von Donsker (Theorem 16.1 in [Bi1]) konvergiert W_n dann in Verteilung gegen W , man erhält also

Satz 4.8. *Für $n \rightarrow \infty$ gilt*

$$W_n \xrightarrow{\mathcal{D}} W.$$

Bemerkung 4.9. Es konvergiert die Folge W_n in Verteilung gegen W , wenn die zugehörigen Verteilungen P^{W_n} schwach gegen die Verteilung P^W von W konvergieren. Dies bedeutet in [Bi1] definitionsgemäß, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f dP^{W_n} = \int f dP^W$$

für alle auf $D[0, 1]$ stetigen, beschränkten und reellwertigen Funktionen f gilt. Die Menge $D[0, 1]$ ist wie in [Bi1] mit der Skorohod-Topologie versehen. Wegen der speziellen Eigenschaften des Wiener-Maßes liefert Satz 4.8 außerdem für alle $t \in [0, 1]$ und $n \rightarrow \infty$

$$W_n(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} W_t,$$

siehe hierzu zum Beispiel die Seiten 123 und 124 in [Bi1].

Definiert man für $t \in [0, 1]$ und $f \in D[0, 1]$

$$\Psi(f)(t) := \int_0^t f(s) ds$$

und betrachtet wie in [Bi1] auf $C[0, 1]$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz, so gilt offensichtlich

Lemma 4.10. *Es ist Ψ eine stetige Abbildung von $D[0, 1]$ nach $C[0, 1]$.*

Bemerkung 4.11. Laut [Bi1] (S.110) gilt für jedes $f \in D[0, 1]$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| < \infty.$$

Damit folgt, daß Ψ Werte in $C[0, 1]$ annimmt. Die Stetigkeit der Abbildung Ψ folgt wie in [Bi1]. Dort wird auf Seite 121 begründet, warum die Funktion $h_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} x(s) ds$ mit $x \in D[0, 1]$ und $\varepsilon > 0$ stetig ist. Dabei spielt die Tatsache, daß Konvergenz in der Skorohod-Topologie die punktweise Konvergenz mit Ausnahme einer Lebesgue-Nullmenge nach sich zieht, eine wesentliche Rolle.

Mit Hilfe von Korollar 1 zu Theorem 5.1. in [Bi1] ergibt sich aus Satz 4.8

Satz 4.12. *Für $n \rightarrow \infty$ erhält man*

$$\Psi(W_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi(W).$$

Untersucht man die Zufallsgröße $\Psi(W_n)$ näher, so ergibt sich

Lemma 4.13. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$ gilt

$$\Psi(W_{n+1})\left(\frac{k+1}{n+1}\right) = \frac{T_k - \frac{k(k+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}(n+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Beweis. Es ist für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \Psi(W_{n+1})\left(\frac{k+1}{n+1}\right) &= \int_0^{\frac{k+1}{n+1}} W_{n+1}(s) ds \\ &= \int_0^{\frac{k+1}{n+1}} \frac{S_{\lfloor (n+1)s \rfloor} - \frac{\lfloor (n+1)s \rfloor}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{n+1}} ds \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{n+1}} \left(\int_0^{\frac{k+1}{n+1}} S_{\lfloor (n+1)s \rfloor} ds - \int_0^{\frac{k+1}{n+1}} \frac{\lfloor (n+1)s \rfloor}{\lambda} ds \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^k S_l - \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{l=0}^k l \right) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^k (k+1-j) Y_j - \frac{k(k+1)}{2\lambda(n+1)} \right) \\ &= \frac{T_k - \frac{k(k+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}(n+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

und dies ist die Behauptung. □

Kann man nun Aussagen zur Verteilung von $\Psi(W)$ machen, so liefert Lemma 4.13 Informationen zum asymptotischen Verhalten von T_n für $n \rightarrow \infty$. Man erhält

Satz 4.14. Es gilt für $t \in [0, 1]$

$$\Psi(W)(t) \sim N\left(0, \frac{1}{3}t^3\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Psi(W)(t) &= \int_0^t W_s ds \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n W_{\frac{k}{n}t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \left(W_{\frac{k}{n}t} - W_{\frac{k-1}{n}t} \right). \end{aligned}$$

Da der Wiener-Prozeß¹ $(W_t)_{t \in [0,1]}$ unabhängige und normalverteilte Zuwächse besitzt, ist

$$C_n := \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \left(W_{\frac{k}{n}t} - W_{\frac{k-1}{n}t} \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ als Summe unabhängiger und normalverteilter Zufallsvariablen ebenfalls normalverteilt. Es gilt

$$E(C_n) = 0$$

und

$$\text{Var}(C_n) = \frac{t^3}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^2.$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(C_n) = 0$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(C_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^3}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n-k+1}{n} \right)^2 = t^3 \int_0^1 (1-x)^2 dx = \frac{t^3}{3}.$$

Die interessierende Zufallsvariable $\Psi(W)(t)$ ist der P -fast sichere Grenzwert, also auch der Verteilungsgrenzwert von C_n . Mit Hilfe von charakteristischen Funktionen kann man zeigen, daß als Verteilungsgrenzwert von normalverteilten Zufallsvariablen nur wieder eine Normalverteilung in Frage kommt. Damit folgt die Behauptung. \square

Ersetzt man nun in Lemma 4.13 k durch n , so ergibt sich wie in Bemerkung 4.9 für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_n - \frac{n(n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}(n+1)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi(W)(1), \quad (4.13)$$

wobei nach Satz 4.14

$$\Psi(W)(1) \sim N\left(0, \frac{1}{3}\right)$$

gilt. Wegen

$$E(T_n) = \frac{n(n+1)}{2\lambda}$$

und

$$\text{Var}(T_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6\lambda^2}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda}(n+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6\lambda^2}}} = \sqrt{3}$$

liefert (4.13) noch einmal die Aussage von Satz 4.7.

¹Wir verwenden die Begriffe „Brownsche Bewegung“ und „Wiener-Prozeß“ synonym.

Nun soll ein analoges Ergebnis für T_{A_n} hergeleitet werden. Zusammen mit (4.1) ergibt sich aus Theorem 17.1. in [Bi1] für $n \rightarrow \infty$

$$W_{A_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} W.$$

Analog zu Satz 4.12 folgt dann aus Korollar 1 zu Theorem 5.1 in [Bi1]

$$\Psi(W_{A_n}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \Psi(W).$$

Da man außerdem für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \dots, A_n$ wie eben

$$\Psi(W_{A_{n+1}}) \left(\frac{k+1}{A_n+1} \right) = \frac{T_k - \frac{k(k+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}(A_n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

zeigen kann, folgt

Satz 4.15. *Es gilt*

$$\frac{T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}(A_n+1)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z\left(\frac{1}{3}\right)$$

für $n \rightarrow \infty$ mit $Z\left(\frac{1}{3}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Aus Gleichung (4.1) ergibt sich $\frac{\frac{1}{\lambda}(A_n+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\lambda}(\log n)^{\frac{3}{2}}} \xrightarrow{P} 1$ für $n \rightarrow \infty$, also folgt aus Satz 4.15

$$\frac{T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4.14)$$

für $n \rightarrow \infty$ mit $Z\left(\frac{1}{3}\right) \sim N\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Hilfreich für unsere Ziele ist das folgende Lemma.

Lemma 4.16. *Es gilt*

$$\frac{A_n(A_n+1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$$

mit $n \rightarrow \infty$ und $Z \sim N(0, 1)$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man

$$\begin{aligned} \frac{A_n(A_n+1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} &= \frac{A_n^2 - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} + \frac{A_n}{2\sqrt{(\log n)^3}} \\ &= \frac{(A_n - \log n)(A_n + \log n)}{2\sqrt{(\log n)^3}} + \frac{A_n}{\log n} \frac{1}{2\sqrt{\log n}} \\ &= \frac{A_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \left(\frac{A_n}{2\log n} + \frac{1}{2} \right) + \frac{A_n}{\log n} \frac{1}{2\sqrt{\log n}}. \end{aligned}$$

Verwendet man nun die Gleichungen (4.1) und (4.2), so folgt für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{A_n(A_n + 1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$$

mit $Z \sim N(0, 1)$, also die Behauptung. \square

Mit Hilfe der vorangegangenen Ergebnisse kann nun etwas über das asymptotische Verhalten der Verteilung von Z_n gesagt werden.

Satz 4.17. *Für $n \rightarrow \infty$ gilt*

$$\frac{Z_n - \frac{(\log n)^2}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} = O_P(1).$$

Beweis. Aus (4.14) und Lemma 4.16 ergibt sich für $n \rightarrow \infty$

$$\frac{T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} = O_P(1)$$

und

$$\frac{A_n(A_n + 1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} = O_P(1).$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{Z_n - \frac{(\log n)^2}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} &= \frac{T_{A_n} - \frac{(\log n)^2}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} \\ &= \frac{T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}} + \frac{A_n(A_n + 1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}} \end{aligned}$$

liefert dies die Behauptung. \square

Bemerkung 4.18. Mit Satz 4.17 wissen wir nun nicht nur, daß Z_n um seinen Mittelwert konzentriert ist (siehe Satz 4.6), sondern daß sogar $\frac{Z_n - \frac{(\log n)^2}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}}$ stochastisch beschränkt ist. Wünschenswert wäre jedoch eine Aussage zur Verteilungskonvergenz, die uns aufgrund der fehlenden Unabhängigkeit von $\frac{T_{A_n} - \frac{A_n(A_n+1)}{2\lambda}}{\frac{1}{\lambda}\sqrt{(\log n)^3}}$ und $\frac{A_n(A_n+1) - (\log n)^2}{2\sqrt{(\log n)^3}}$ nicht gelungen ist.

4.4 Die in Rekorden verbrachte Zeit

Nachdem in den letzten Abschnitten Anzahl und Summe von bestimmten Rekordlebensdauern untersucht worden sind, soll hier das Verhalten der bis $t > 0$ in Rekorden verbrachten Zeit für $t \rightarrow \infty$ betrachtet werden. Dazu sei $S_0^* := 0$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$S_n^* := \sum_{i=1}^n X_i,$$

wobei die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels unabhängig und mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt sind. Dann gibt

$$N_t := \sup\{n \in \mathbb{N} : S_n^* \leq t\}$$

für $t \geq 0$ die Anzahl der Erneuerungen bis zum Zeitpunkt t an, und

$$W_t := Z_{N_t} + (t - S_{N_t}^*)R_{N_t+1}$$

liefert die zum Zeitpunkt t insgesamt in Rekorden verbrachte Zeit. Ziel ist es, eine Aussage der Form $\frac{W_t}{\varphi(t)} \xrightarrow{P} 1$ mit $\varphi(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$ zu erhalten. Wir betrachten dazu das folgende Lemma.

Lemma 4.19. *Für $t \rightarrow \infty$ gilt*

$$\frac{(t - S_{N_t}^*)R_{N_t+1}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} \xrightarrow{P} 0.$$

Beweis. Es ist $t - S_{N_t}^* > u$ für $0 < u < t$ äquivalent dazu, daß der zu $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ gehörige Poisson-Prozeß keine Punkte im Intervall $[t - u, t]$ besitzt, also gilt

$$P(t - S_{N_t}^* > u) = e^{-\lambda u}.$$

Damit folgt für ein beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{(t - S_{N_t}^*)R_{N_t+1}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2}\right| > \varepsilon\right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\left((t - S_{N_t}^*)R_{N_t+1} > \frac{\varepsilon(\log t)^2}{2\lambda}\right) \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(t - S_{N_t}^* > \frac{\varepsilon(\log t)^2}{2\lambda}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\varepsilon(\log t)^2}{2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

Im nächsten Schritt soll etwas über die Asymptotik von $\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2}$ ausgesagt werden.

Satz 4.20. Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} \xrightarrow{P} 1.$$

Beweis. Es ergibt sich für $\varepsilon > 0$ und $0 < \delta < 1$

$$\begin{aligned} & P\left(\left|\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} - 1\right| > \varepsilon\right) \\ & \leq P\left(\left|\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} - 1\right| > \varepsilon, \left|\frac{N_t}{\lambda t} - 1\right| < \delta\right) + P\left(\left|\frac{N_t}{\lambda t} - 1\right| \geq \delta\right). \end{aligned}$$

Bekanntlich gilt $N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t)$, also $\text{Var}(N_t) = o((E(N_t))^2)$, so daß sich mit der üblichen Argumentation aus der Chebychevschen Ungleichung $\frac{N_t}{\lambda t} \xrightarrow{P} 1$ für $t \rightarrow \infty$ ergibt. Dies liefert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{N_t}{\lambda t} - 1\right| \geq \delta\right) = 0.$$

Außerdem erhält man mit der pfadweisen Monotonie der Abbildungen $t \mapsto Z_{N_t}$ und $t \mapsto \frac{1}{2\lambda}(\log t)^2$ für genügend große t

$$\begin{aligned} & P\left(\left|\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} - 1\right| > \varepsilon, \left|\frac{N_t}{\lambda t} - 1\right| < \delta\right) \\ & \leq P\left(\left|\frac{Z_{\lceil(1+\delta)\lambda t\rceil}}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lceil(1+\delta)\lambda t\rceil))^2} - 1\right| > \varepsilon\right) + P\left(\left|\frac{Z_{\lfloor(1-\delta)\lambda t\rfloor}}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lfloor(1-\delta)\lambda t\rfloor))^2} - 1\right| > \varepsilon\right). \end{aligned}$$

Mit der Gleichung (4.12) ergibt sich

$$\frac{Z_{\lceil(1+\delta)\lambda t\rceil}}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lceil(1+\delta)\lambda t\rceil))^2} \xrightarrow{P} 1$$

und

$$\frac{Z_{\lfloor(1-\delta)\lambda t\rfloor}}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lfloor(1-\delta)\lambda t\rfloor))^2} \xrightarrow{P} 1$$

für $t \rightarrow \infty$. Dies liefert wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\lambda}(\log((1-\delta)\lambda t))^2}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lceil(1+\delta)\lambda t\rceil))^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\lambda}(\log((1+\delta)\lambda t))^2}{\frac{1}{2\lambda}(\log(\lfloor(1-\delta)\lambda t\rfloor))^2} = 1$$

für $t \rightarrow \infty$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0,$$

also

$$\frac{Z_{N_t}}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} \xrightarrow{P} 1.$$

□

Zusammen liefern Lemma 4.19 und Satz 4.20 offensichtlich die gewünschte Aussage.

Korollar 4.21. Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$\frac{W_t}{\frac{1}{2\lambda}(\log t)^2} \xrightarrow{P} 1.$$

Zusammenfassend kann man also sagen, daß sich die bis zum Zeitpunkt t in Rekorden verbrachte Zeit für $t \rightarrow \infty$ analog zu Z_n wie $\frac{(\log t)^2}{2\lambda}$ verhält und daß die letzte bis t möglicherweise nicht beendete Lebensdauer „vernachlässigbar“ ist.

Anhang A

Hilfsmittel für Kapitel 2

In den Abschnitten 2.3 und 2.4 werden einige Ungleichungen zu der Exponentialfunktion und zum natürlichen Logarithmus benötigt. Es folgt zunächst

Lemma A.1. *Es existiert zu jedem $0 < K < 1$ ein $C > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq K$ gilt*

$$|\log(1+x) - x| \leq Cx^2.$$

Beweis. Es sei $0 < K < 1$. Für alle $|x| \leq K$ erhält man

$$|\log(1+x) - x| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|x|^{n-2}}{n} \leq x^2 \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \leq x^2 \frac{1}{1-K},$$

wähle also zum Beispiel $C := \frac{1}{1-K}$. □

Das nächste Lemma liefert eine Abschätzung zur Exponentialfunktion.

Lemma A.2. *Für jedes $K > 0$ gilt*

$$|e^x - 1| \leq e^K |x|$$

für alle $|x| \leq K$.

Beweis. Es sei $K > 0$. Für $|x| \leq K$ folgt dann

$$|e^x - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{n!} \leq |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!} \leq |x| e^K.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Außerdem gilt

Lemma A.3. (i) *Für alle $x \in (-\infty, 1)$ gilt*

$$\log(1-x) \leq -x.$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x \geq 1 + x.$$

Beweis. Es ist $t_1(x) := -x$ die Tangente an die Funktion $f_1(x) := \log(1 - x)$ im Punkt 0. Da die Funktion f_1 auf $(-\infty, 1)$ konkav ist, folgt $t_1(x) \geq f_1(x)$ für $x \in (-\infty, 1)$, also (i). Analog ist $t_2(x) := 1 + x$ die Tangente an $f_2(x) := e^x$ in 0. Da f_2 konvex auf \mathbb{R} ist, ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichung $t_2(x) \leq f_2(x)$, und das ist (ii). \square

Schließlich wird in Abschnitt 2.4 noch das folgende Lemma benötigt.

Lemma A.4. Für $x \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$n \log \left(1 - \frac{x}{n} \right) \geq -2x.$$

Beweis. Es ist für $x \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\log \left(1 - \frac{x}{n} \right) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n} \right)^k}{k} = -\frac{x}{n} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{n^k k}.$$

Wegen

$$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}$$

folgt für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$

$$\frac{1}{n^k k} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1}.$$

Da außerdem $x^k \leq x$ gilt, folgt

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{n^k k} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x}{n} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} = \frac{x}{n} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = \frac{x}{n},$$

und so erhält man

$$\log \left(1 - \frac{x}{n} \right) \geq -\frac{x}{n} - \frac{x}{n} = -2\frac{x}{n},$$

also

$$n \log \left(1 - \frac{x}{n} \right) \geq -2x.$$

\square

Anhang B

C-Programme für Kapitel 3

In Kapitel 3 wurden die Werte der Verteilungs- und Wahrscheinlichkeitsmassenfunktionen von $Y^{(N)}$, $Z^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ benötigt. Diese erhält man durch entsprechende C-Programme. Will man zum Beispiel die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Rekordsummen, $P(Z^{(N)} = k)$, für $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \left\{N, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\right\}$ bestimmen, so gibt es zwei Möglichkeiten, die sich sehr in ihrer Laufzeit unterscheiden. Im ersten Abschnitt des Anhangs werden beide Möglichkeiten vorgestellt und außerdem wird deutlich gemacht, wie man die zweite Variante analog auf $Y^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ anwenden kann. Im zweiten Abschnitt steht dann die Dichte der Zufallsvariablen R aus Abschnitt 3.3 im Mittelpunkt.

B.1 Berechnung der Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion zu $Z^{(N)}$

Zunächst einmal ist klar, daß der Wert N in jeder Rekordfolge vorkommt. Den Rest dieser Folge kann man mit einer bestimmten Teilmenge von $\{1, \dots, N-1\}$ mit Hilfe einer bijektiven Abbildung identifizieren. Wir betrachten also die Potenzmenge

$$\mathfrak{P}(\{1, \dots, N-1\}),$$

deren Elemente gerade jeweils eine Rekordfolge darstellen. Hierbei steht die leere Menge dafür, daß sofort die Zahl N gefallen ist, also daß $X_1^{(N)} = N$ gilt. Die Menge $\{1, 2, N-1\}$ symbolisiert zum Beispiel die Rekordfolge

$$(1, 2, N-1, N).$$

Definiert man nun die Abbildungen $\varphi : \mathfrak{P}(\{1, \dots, N-1\}) \rightarrow \{0, 1\}^{N-1}$ und $\psi : \{0, 1\}^{N-1} \rightarrow \{0, \dots, 2^{N-1} - 1\}$ durch

$$\varphi(A) := (\delta_1(A), \dots, \delta_{N-1}(A))$$

und

$$\psi((x_1, \dots, x_{N-1})) := \sum_{i=1}^{N-1} x_i 2^{i-1},$$

so sind φ und ψ bijektiv, und man kann die Elemente von $\mathfrak{P}(\{1, \dots, N-1\})$, also die möglichen Rekordfolgen, durch $\psi \circ \varphi$ auf $\{0, \dots, 2^{N-1} - 1\}$ abbilden. Jede Zahl zwischen 0 und $2^{N-1} - 1$ stellt also eine Rekordfolge dar. Das Programm `reksum.c` durchläuft nun genau diese 2^{N-1} Zahlen und berechnet die Summe und die Wahrscheinlichkeit der zugehörigen Rekordfolge und gibt diese aus. Dabei „durchsucht“ die Funktion `summe` zu einer Zahl zwischen 0 und $2^{N-1} - 1$ mit Hilfe von Bit-Operatoren die zugehörige Binärdarstellung nach Stellen, in denen eine 1 vorkommt. Die Nummern dieser Stellen werden schließlich zur Zahl N dazuaddiert und das Ergebnis, also die zu der eingegebenen Zahl gehörige Rekordsumme, ausgegeben. Die Funktion `wahrsch` geht ähnlich vor und liefert zu jeder Zahl zwischen 0 und $2^{N-1} - 1$ die Wahrscheinlichkeit p der zugehörigen Rekordsumme. Dazu weist die Funktion der Variablen p zunächst den Wert $\frac{1}{N}$ zu. Ist an der k -ten Stelle, $k \in \{1, \dots, N-1\}$, der Binärdarstellung dieser Zahl eine 1, so entsteht der neue Wert von p durch Multiplikation des alten Wertes von p mit $\frac{1}{N-k}$, da für den nächsten Rekord noch $N-k$ Möglichkeiten bestehen. Es folgt nun das beschriebene Programm.

```
/* Programmname: reksum.c */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define n 10

unsigned int summe( unsigned int , int);
double wahrsch( unsigned int , int);

void main() /*Hauptprogramm */
{
  unsigned int z;
  unsigned int anzahl;
  double gewahr[(int)((pow(n,2)-n)/2)+1];
  int j;
  z=0;
  anzahl=((pow(n,2)-n)/2)+1;
  for(j=0;j<=anzahl-1;j++) gewahr[j]=0;
  for(z=0;z<=(pow(2,n-1)-1);z++) gewahr[summe(z,n)-n]+=wahrsch(z,n);
  for(j=0;j<=anzahl-1;j++) printf(“\t%i\t\t%.60lf\n”,j+n,gewahr[j]);
}
```

```

unsigned int summe(unsigned int zahl, int m)
{
  unsigned int k=1;
  unsigned int s=m;
  while(zahl>0)
  {
    s+=((zahl&1)*k);
    k++;
    zahl=(zahl>>1);
  }
  return s;
}

```

```

double wahrsch(unsigned int zahl, int m)
{
  unsigned int k=1;
  double p;
  p=((double)1/m);
  while((zahl>0)&&(k<=m-1))
  {
    if((zahl&1)==1) p=p*((double) 1/(m-k));
    k++;
    zahl=(zahl>>1);
  }
  return p;
}

```

Man erkennt schnell, daß sich die Laufzeit dieses Programmes beim Übergang von N auf $N + 1$ stets verdoppelt. Es ist nun unser Ziel, diese Laufzeit zu reduzieren. Dazu betrachten wir für

$$a(N, k, j) = P(Z^{(N)} = k, Y^{(N)} = j)$$

die Formel aus Satz 3.24. Es gilt

$$a(N, k, j) = \frac{N-1}{N} a(N-1, k-j, j) + \frac{1}{N} a(N-1, k-j, j-1).$$

Das C-Programm `rekursiv.c` berechnet mit Hilfe dieser Rekursionsformel die Werte $a(N, k, j)$ für $N \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\}$ und $j \in \{0, \dots, N\}$, wobei den nicht möglichen Kombinationen von k und j der Wert 0 zugewiesen wird. Am Ende wird dann für jedes $k \in \{N, \dots, \frac{N(N+1)}{2}\}$ der Wert $P(Z^{(N)} = k)$ mit Hilfe von

$$P(Z^{(N)} = k) = \sum_{j=1}^N a(N, k, j)$$

ausgegeben. Hier ist der Zeitaufwand schon erheblich reduziert, Schwierigkeiten macht aber noch der grosse Speicherplatzbedarf für die notwendige $\left(\frac{N(N+1)}{2} + 1\right) \times (N+1)$ -Matrix. Man erkennt jedoch, daß die Werte $P(Z^{(N)} = k)$ für große k nahezu bei Null liegen und man sich deshalb auf kleinere k und aus diesem Grund auch auf Matrizen mit weniger Einträgen beschränken kann.

```

/* Programmname: rekursiv.c                                     */

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define N 30

int i,j,n;
double W;
double a[(N*(N+1)/2)+1][N+1];
double b[(N*(N+1)/2)+1][N+1];

void main()
{
int c=N*(N+1)/2;
a[0][0]=1;
for(i=1; i<=N; i=i+1)
{
for(j=1; j<=c; j=j+1) a[j][i]=0;
}
for(i=1; i<=N; i=i+1) a[0][i]=0;
for(j=1; j<=c; j=j+1) a[j][0]=0;
for(n=1; n<=N; n=n+1)
{
for(j=0; j<=c; j=j+1) b[j][0]=0;
for(i=1; i<=N; i=i+1)
{
for(j=0; j<=c; j=j+1)
{
b[j][i]=0;
if(j-i>=0) b[j][i]+=(a[j-i][i-1]/n)+(n-1)*a[j-i][i]/n;
}
}
}
for(i=0; i<=N; i=i+1)
{
for(j=0; j<=c; j=j+1) a[j][i]=b[j][i];
}
}
}

```

```

    }
  }
  for(j=N; j<=(N*(N+1)/2); j=j+1)
  {
    W=0;
    for(i=1; i<=N; i=i+1) W+=a[j][i];
    printf(“\n%i\t%.60lf\n”, j, W);
  }
}

```

Will man nun die Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten von $Y^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ berechnen, so kann man das analog zur Vorgehensweise in `rekursiv.c` mit Hilfe der Formeln aus Satz 3.25 und 3.26 tun. Ist nicht die Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion, sondern die Verteilungsfunktion zu $Z^{(N)}$ gefragt, so erhält man ein passendes C-Programm aus `rekursiv.c`, indem die Variable W nach der Berechnung von $P(Z^{(N)} = j)$ für $j = N, \dots, \frac{N(N+1)}{2}$ nicht wieder auf Null gesetzt wird, sondern den aktuellen Wert behält. Bei den Zufallsvariablen $Y^{(N)}$ und $\tilde{Z}^{(N)}$ verfährt man genauso.

B.2 Näherungsweise Berechnung der Dichte zu R

Wie angekündigt folgt nun ein C-Programm zur näherungsweisen Berechnung der Dichte f_R der Zufallsvariablen R , deren Verteilung in der Versicherungsmathematik mit „Perpetuity“ bezeichnet wird und die in Abschnitt 3.3 vorkommt. Das C-Programm `perpdichte.c` liefert Näherungen von f_R in $NX = 1001$ äquidistanten Punkten in dem Intervall $[1, \text{RIGHT}]$ mit $\text{RIGHT} = 8.0$. Dazu wird mit Hilfe der Gleichung

$$\begin{aligned}
 &P(1 + U_1 + U_1U_2 + \dots + U_1U_2 \cdot \dots \cdot U_n \leq x) \\
 &= P(U_1(1 + U_2 + \dots + U_2 \cdot \dots \cdot U_n) \leq x - 1) \\
 &= \int_0^1 P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_{n-1} \leq \frac{x-1}{u}\right) du
 \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 &P\left(R \leq 1 + \frac{i(\text{RIGHT} - 1)}{NX}\right) \\
 &\approx P\left(1 + U_1 + \dots + U_1U_2 \cdot \dots \cdot U_{\text{NITER}} \leq 1 + \frac{i(\text{RIGHT} - 1)}{NX}\right)
 \end{aligned}$$

in $\text{NITER} = 100$ Iterationsschritten für $i = 0, \dots, NX$ näherungsweise bestimmt. Hierbei werden die vorkommenden Integrale durch eine Trapezsumme mit $\text{NINT}+1 =$

5001 äquidistanten Stützstellen approximiert, also

$$\int_0^1 P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_n \leq \frac{x-1}{u}\right) du$$

$$\approx \frac{0.5}{\text{NINT}} \sum_{j=0}^{\text{NINT}-1} \left(P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_n \leq \frac{x-1}{j}\right)^{\text{NINT}} \right. \\ \left. + P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_n \leq \frac{x-1}{j+1}\right)^{\text{NINT}} \right)$$

für $x \in [1, \text{RIGHT}]$ und $n \in \mathbb{N}$. (Dabei wird in folgendem C-Programm für alle $n \in \mathbb{N}$ $P(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_n \leq y) = 1$ für $y > \text{RIGHT}$ und $P(1 + U_1 + \dots + U_1 \cdot \dots \cdot U_n \leq y) = 0$ für $y < 1$ gesetzt.) Schließlich ergibt sich eine Näherung von f_R in $x = 1 + \frac{i(\text{RIGHT}-1)}{\text{NX}}$ für $i = 0, \dots, \text{NX} - 1$ durch

$$\frac{P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 U_2 \cdot \dots \cdot U_{\text{NITER}} \leq 1 + \frac{(i+1)(\text{RIGHT}-1)}{\text{NX}}\right)}{\frac{\text{RIGHT}-1}{\text{NX}}} \\ - \frac{P\left(1 + U_1 + \dots + U_1 U_2 \cdot \dots \cdot U_{\text{NITER}} \leq 1 + \frac{i(\text{RIGHT}-1)}{\text{NX}}\right)}{\frac{\text{RIGHT}-1}{\text{NX}}}$$

Es folgt der Programmtext zu `perpdichte.c`.

```
/* name: perpdichte.c */

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <stdlib.h>

#define NX      1001
#define RIGHT   8.0
#define NINT    5000
#define NITER   100

double *fold, *fnew;

int main(int argc, char *argv[])
{
    int nx = NX, nint = NINT, niter = NITER, i, j, iter = 0, ind;
    double right = RIGHT, hx, hint, sum, t, dev, x, temp;
    hx = (right - 1.0) / ((double) nx);
    hint = 1.0 / ((double) nint);
    fold = (double *) calloc(nx + 1, sizeof(double));
```

```

fnew = (double *) calloc(nx + 1, sizeof(double));
if ((fold == 0) || (fnew == 0))
{
    fprintf(stderr, "\n Not enough memory.\n");
    exit(1);
}
for (i = 0; i <= nx; ++i) fold[i] = 1.0;
for (iter = 0; iter < niter; ++iter)
{
    for (i = 0; i <= nx; ++i)
    {
        sum = 0.5;
        for (j = 1; j < nint; ++j)
        {
            ind = (int) floor(((double) i) / ((double) j) * nint
                - 1.0 / hx);
            if (ind > nx) sum += 1.0;
            else
                if (ind >= 0) sum += fold[ind];
        }
        ind = (int) floor((double) i - 1.0 / hx);
        if (ind > nx) sum += 0.5;
        else
            if (ind >= 0) sum += 0.5 * fold[ind];
        fnew[i] = hint * sum;
    }
    dev = 0;
    for (i = 0; i <= nx; ++i)
    {
        temp = fabs(fnew[i] - fold[i]);
        if (dev < temp) dev = temp;
    }
    for (i = 0; i <= nx; ++i) fold[i] = fnew[i];
    fprintf(stderr, "\n current iteration: %d,
        deviation: %12.9lf", iter, dev);
}
fprintf(stderr, "\n\n");
printf("# results produced by program perpdichte.c\n");
printf("# with parameters nx = %d, right = %lf\n", nx, right);
printf("# number of iterations: %d\n", niter);
printf("# List: t, d/dt(prob(perp(unif(0,1)) <= t)) \n#\n");
for (i = 0; i <= nx-1; ++i)
{

```

```
    t = 1.0 + ((double) i) * hx;  
    printf('\n %8.3lf %12.5lf', t, (fnew[i+1]-fnew[i])/hx);  
  }  
}
```

In Abschnitt 3.3 wird allerdings nicht die Dichte zu R selbst, sondern die Dichte f_W zu $W = R - 2$ benötigt. Die Näherungen der Werte von f_W erhält man aus `perpdichte.c` mit Hilfe der Formel

$$f_W(x) = f_R(x + 2)$$

für $x > -1$.

Literaturverzeichnis

- [A] G.Alsmeyer, *Erneuerungstheorie*, B.G.Teubner Stuttgart 1991
- [ABN] B.C.Arnold, N.Balakrishnan, H.N.Nagaraja, *Records*, John Wiley & Sons 1998
- [Ba1] H.Bauer, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4.Auflage, de Gruyter 1991
- [Ba2] H.Bauer, *Maß- und Integrationstheorie*, 2.Auflage, de Gruyter 1992
- [BC] F.T.Bruss, C.O'Conneide, *On the Maximum and its Uniqueness for Geometric Random Samples*, J. Appl. Prob. 27, S.598-S.610 (1990)
- [BGN] A.W.Burks, H.H.Goldstine, J.von Neumann, *Preliminary Discussion of the Logical Design of an Electronic Computing Instrument*, Second Edition, John von Neumann Collected Works, Volume V, S.34-S.79, Pergamon Press 1963
- [Bi1] P.Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley & Sons 1968
- [Bi2] P.Billingsley, *Probability and Measure*, Third Edition, John Wiley & Sons 1995
- [Cl] V.Claus, *Die mittlere Additionsdauer eines Paralleladdierwerks*, Acta Informatica 2, S.283-S.291 (1973)
- [Co] D.R.Cox, *Erneuerungstheorie*, R.Oldenbourg Verlag 1966
- [CSS] S.Cambanis, G.Simons, W.Stout, *Inequalities for $E_k(X, Y)$ when the Marginals are Fixed*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 36, no.4, S.285-S.294 (1976)
- [ETV] R.Engelen, P.Tommassen, W.Vervaat, *Ignatov's Theorem: A New and Short Proof*, Journal of Applied Probability, Special Volume 25A, S.229-S.236 (1988)
- [Fe1] W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume I*, Third Edition, John Wiley & Sons 1968
- [Fe2] W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II*, Second Corrected Printing, John Wiley & Sons 1966

- [Ga] J.Galambos, *The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics*, Second Edition, Robert E. Krieger Publishing Company 1987
- [GG] C.M.Goldie, R.Grübel, *Perpetuities with Thin Tails*, Adv. Appl. Prob. 28, S.463-S.480 (1996)
- [GR1] I.S.Gradstein, I.M.Ryshik, *Tables of Series, Products and Integrals, Volume 1*, 1.Auflage, Verlag Harri Deutsch 1981
- [GR2] I.S.Gradstein, I.M.Ryshik, *Tables of Series, Products and Integrals, Volume 2*, 1.Auflage, Verlag Harri Deutsch 1981
- [GSW] L.Gordon, M.F.Schilling, M.S.Waterman, *An Extreme Value Theory for Long Head Runs*, Probab. Th. Rel. Fields 72, S.279-S.287 (1986)
- [H] H.Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 7.Auflage, B.G Teubner Stuttgart 1990
- [JK] N.L. Johnson, S.Kotz, *Continuous Univariate Distributions-1*, Houghton Mifflin Company 1970
- [K] D.E.Knuth, *The Average Time for Carry Propagation*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 40, no.2, S.238-S.242 (1978)
- [KS] D.König, V.Schmidt, *Zufällige Punktprozesse*, B.G. Teubner Stuttgart 1992
- [P] D.Pollard, *Convergence of Stochastic Processes*, Springer-Verlag 1984
- [R] U.Rösler, *A Limit Theorem for "Quicksort"*, Informatique théorique et Applications 25, no.1, S.85-S.100 (1991)
- [Re] A.Reimers, *Rekordexkursionen der Brownschen Bewegung*, Diplomarbeit, Universität Hannover (1996)
- [Scha] G.Schay, *How to Add Fast - on Average*, Amer. Math. Monthly 102, no.8, S.725-S.730 (1995)
- [Sche] C.L.Scheffer, *The rank of the present excursion*, Stochastic Processes and their Applications 55 (1995)

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Rudolf Grübel für sein Interesse an dieser Arbeit und die große Unterstützung bedanken.

Auch allen anderen Mitgliedern des Instituts für Mathematische Stochastik, besonders Herrn Prof. Dr. Ludwig Baringhaus, sei auf diesem Wege für die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre gedankt.

Außerdem gilt mein Dank den Herren Dr. Christian Alpert, Dipl.-Math. Boris Buchmann und Dipl.-Math. Bernd Buchwald, die das Manuskript sehr aufmerksam gelesen haben.

Schließlich möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Gerold Alsmeyer für die Übernahme des Korreferates bedanken.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Reimers
Vorname	Anke
Geburtstag	30. Dezember 1971
Geburtsort	Hannover
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulbildung

1978-1982	Besuch der Grundschule in Hannover
1982-1984	Besuch der Orientierungsstufe in Hannover
1984-1991	Besuch des Gymnasiums in Hannover, Abitur am 15.06.1991

Praktika

29.07.1991-06.09.1991	bei der dvg in Hannover
01.08.1995-15.09.1995	bei der LBS in Hannover

Studium

14.10.1991-13.12.1996	Diplomstudiengang Mathematik mit dem Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Universität Hannover
07.10.1993	Diplom-Vorprüfung an der Universität Hannover
13.12.1996	Diplom-Hauptprüfung an der Universität Hannover

Hochschultätigkeit

15.10.1993-15.02.1994	Tätigkeit als studentische Hilfskraft am Institut für Angewandte Mathematik an der Universität Hannover
01.04.1994-31.07.1994	
01.10.1994-31.07.1996	
01.10.1996-31.12.1996	Tätigkeit als studentische Hilfskraft am Institut für Mathematische Stochastik an der Universität Hannover
01.01.1997-31.01.1997	Tätigkeit als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Mathematische Stochastik an der Universität Hannover
seit 01.02.1997	Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Mathematische Stochastik an der Universität Hannover