Zur endlichen Behandlung der Beweistheorie schwacher Fragmente der Mengenlehre: $\mathbf{KP} + \Pi_3$-Reflexion

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Universität Hannover
zur Erlangung des Grades
Doktor der Naturwissenschaften
Dr.rer.nat.

genehmigte Dissertation von
Dipl.-Math. Markus Michelbrink
geboren am 10.09.1968 in Wuppertal

Hannover, 27.11.2000

Referent: Prof. Dr. Helmut Pfeiffer
Korreferent: Prof. Dr. Karsten Steffens
Tag der Promotion: 16.02.2001
Datum der Veröffentlichung: 12.04.2001

Zusammenfassung

In der Arbeit werden Bezeichnungssysteme für unendliche Herleitungen zur beweistheoretischen Behandlung der Mengenlehre von Kripke-Platek mit Π_3-Reflexionsschema ($KP+\Pi_3-Refl$) angegeben. Mit Hilfe dieser Bezeichnungssysteme werden die beweisbar rekursiven (beweisbar totalen) Funktionen von $KP+\Pi_3-Refl$ als $<$-rekursive Funktionen erkannt, wobei $<$ die Ordnung auf dem Rathjenschen Ordinalzahlbezeichnungssystem $\mathcal{T}(K)$ ist.
Darüberhinaus wird ein Konservativitätsresultat für Π^0_2-Sätze erzielt:
Beweist $KP+\Pi_3-Refl$ den Satz

$$\forall z(''z=HF'' \longrightarrow \forall x \in z \exists y \in z\phi(x,y)),$$

dann beweist $PRA+PRWO(<)$

$$\forall x \exists y U(\phi(x,y)).$$

Dabei ist $\phi \in \Delta_0$, $''z=HF''$ drückt aus, daß es sich bei z um die Menge der erblich endlichen Mengen handelt. PRA ist die von Skolem eingeführte, beweistheoretisch schwache Theorie Primitiv Rekursive Arithmetik. $PRWO(<)$ besagt, daß es in $\mathcal{T}(K)$ keine unendlich absteigenden primitiv rekursiven Folgen gibt und $U(\phi(x,y))$ ist eine naheliegende Übersetzung der mengentheoretischen Formel ϕ in eine arithmetische Formel.
Das letzte Kapital enthält außerdem einen Beweis dafür, daß gegen primitive Rekursion abgeschlossene Funktionenklassen auch gegen mehrfache ungeschachtelte Rekursionen abgeschlossen sind.

Schlagwörter: Endliche Beweistheorie, Ordinalzahlanalyse, Imprädikative Theorien

Mathematics Classification Scheme 2000: 03F03, 03F05, 03F07, 03F15, 03F25, 03F35, 03D20

Abstract

In this work Denotation systems for infinitary derivations for the proof theoretic treatment of Kripke-Platek set theory with Π_3-Reflection ($KP + \Pi_3 - Refl$) are developed. The provably recursive functions of $KP + \Pi_3 - Refl$ are characterized as $<$-recursive functions, where $<$ is the ordering on Rathjen's Ordinal denotation system $\mathcal{T}(K)$.
Further a conservativity result for Π^0_2 sentences is shown:
Proves $KP + \Pi_3 - Refl$ the sentence

$$\forall z(''z = HF'' \longrightarrow \forall x \in z \exists y \in z \phi(x, y)),$$

then proves $PRA + PRWO(<)$

$$\forall x \exists y U(\phi(x, y)),$$

where $\phi \in \Delta_0$ and $''z = HF''$ means that z is the set of hereditarily finite sets. PRA is the theory primitive recursive arithmetic, $PRWO(<)$ is the scheme $\exists y f(x, y) \not< f(x, y + 1)$, where f runs about all primitive recursive functions and $<$ is the ordering on $\mathcal{T}(K)$, and $U(\phi(x, y))$ is a natural translation of the set theoretical formula $\phi(x, y)$ into arithmetic.
The last chapter contains a proof of the fact that the primitive recursive functions are closed under multiple recursion.

Key words: Finitary Proof Theory, Ordinal Analysis, Impredicative Theories

Mathematics Classification Scheme 2000: 03F03, 03F05, 03F07, 03F15, 03F25, 03F35, 03D20

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Entdeckung einer Reihe von Antinomien, deren populärste wohl die Russelsche Antinomie der Menge der Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten, ist, löste zu Beginn des 20. Jahrhunderts eine Grundlagenkrise in der Mathematik aus. Die Entdeckungen dieser Antinomien hatten deshalb so dramatische Auswirkungen auf die Mathematik, weil erst kurz vorher Cantors Mengenlehre ihren Siegeszug angetreten hatte und nun ein gemeinsames Fundament der verschiedenen mathematischen Teilgebiete bildete. Mit der neuen abstrakten Sichtweise hielten neue Methoden Einzug in die Mathematik, die zu neuen Ergebnissen und einer starken Vereinheitlichung führten. Diese mengentheoretischen Methoden erzeugten aber auch eine allgemeine Verunsicherung. So mißtraute Lebesque seinem, mit Hilfe eines einfachen Kardinalitätsargumentes geführten Beweis der Existenz einer nicht analytisch darstellbaren reellen Funktion, da ihm dieser Beweis nicht erlaubte, eine derartige Funktion auch anzugeben, und Zermelos Beweis der Wohlordenbarkeit des Kontinuums rief scharfe Reaktionen unter den Mathematikern hervor.
In der nun enstandenen Diskussion um die in der Mathematik erlaubten Methoden vertraten eine Anzahl ernstzunehmender Mathematiker und Philosophen Standpunkte, die die Mittel, mit denen die neuen Ergebnisse erzielt wurden, stark angriffen. Damit waren Teile des Gesamtbestandes der Mathematik in Frage gestellt, da nicht klar war, ob sich die Ergebnisse auch mit den eingeschränkten, von den Kritikern als zulässig erachteten, Methoden erzielen lassen.
Diese Arbeit ist der Beweistheorie zuzurechnen. Die Beweistheorie entstand Anfang des 20. Jahrhunderts auf Initiative David Hilberts. Ihre ursprüngliche Zielsetzung war die Überwindung der mathematischen Grundlagenkrise und die Verteidigung der Mathematik in ihrem vollen mengentheoretischen Umfang:

> „Fruchtbaren Begriffsbildungen und Schlußweisen wollen wir, wo immer die geringste Aussicht sich bietet, sorgfältig nachspüren und sie pflegen, stützen und gebrauchsfähig machen. Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben.“[1]

wobei es nötig ist,

> „... durchweg dieselbe Sicherheit des Schließens herzustellen, wie sie in der gewöhnlichen Zahlentheorie vorhanden ist ...“[2]

Dazu mußte geklärt werden, in welcher Form aktual unendliche Gesamtheiten in der Mathematik verwendet werden. Schien Weierstraß mit seiner „Epsilontik“ das aktual Unendliche aus der Analysis verbannt und die Infinitesimalrechnung auf eine feste Grundlage gestellt zu haben, so führte Cantor mit seinen Mengen diese aktual unendlichen Gesamtheiten wieder in die Mathematik ein, und ein genauerer Blick offenbarte, daß sie auch in der Analysis in Form unendlicher Zahlenfolgen oder Dedekindscher Schnitte, welche die reellen Zahlen definieren oder in Form der Gesamtheit der reellen Zahlen nie verschwunden waren.
Hilberts Antwort auf die Frage nach der Verwendung des aktual Unendlichen in der Mathematik bestand darin, die in der Mathematik gemachten Aussagen in zwei disjunkte Teile zu teilen: Seiner Auffassung nach wird die Mathematik „zu einem Bestande von Formeln und zwar erstens

[1] Hilbert, David. Über das Unendliche. Mathematische Annalen Bd. 95. 1925.
[2] Ebd.

solchen, denen inhaltliche Mitteilungen finiter Aussagen entsprechen und zweitens von weiteren Formeln, die nichts bedeuten und die idealen Gebilde unserer Theorie sind.“[3] Finite Aussagen sind nach dieser Auffassung Aussagen, in denen keine aktual unendlichen Gesamtheiten vorkommen. Insbesondere dürfen keine unbeschränkten Existenzquantoren auftreten.

> „Allgemein hat vom finiten Standpunkt eine existentiale Aussage, von der Form: es gibt eine Zahl von der und der Eigenschaft, nur als Partialaussage einen Sinn, d.h. als Teil einer näher bestimmten Aussage, deren Inhalt jedoch für viele Anwendungen unwesentlich ist.“[4]

Da in den Formeln andererseits „Mitteilungszeichen“ (freie Variablen) zugelassen sind, lassen sich finite Aussagen in moderner Terminologie als Π^0_1-Aussagen auffassen, d.h. Aussagen der Form $\forall x R(x)$, wobei R ein primitiv rekursives Prädikat ist. Finite Aussagen sind demnach die realen Aussagen der Mathematik, denen eine Bedeutung zukommt. Typische Beispiele sind Fermats Satz, die Goldbachsche Vermutung, der Vierfarbensatz, aber auch die Widerspruchsfreiheit der Mengenlehre, da Formeln endliche Objekte darstellen. Die in diesen Behauptungen auftretenden Existenzquantoren können durch beschränkte Quantoren ersetzt werden.
Da Aussagen, in denen unbeschränkte Existenzquantoren auftreten, nach Hilberts Auffassung im allgemeinen keine finiten Aussagen darstellen, gibt es finite Aussagen, die „vom finiten Standpunkt nicht negationsfähig“ sind. Damit verlieren aber die einfachsten logischen Gesetze ihre Gültigkeit:

> „Wenn wir im Bereiche der finiten Aussagen bleiben, wie wir doch müssen, so walten da sehr unübersichtliche logische Verhältnisse ob, und diese Unübersichtlichkeit steigert sich zur Unerträglichkeit, wenn das „alle“ und „es gibt“ kombiniert und in eingeschachtelten Sätzen auftritt. Jedenfalls diejenigen logischen Gesetze, die die Menschen, seit sie denken, stets gebraucht haben, und die eben Aristoteles gelehrt hat, gelten nicht.“[5]

Um nun „die formal einfachen Regeln der üblichen Aristotelischen Logik zu erhalten“ haben wir „zu den finiten Aussagen die idealen Aussagen zu adjungieren.“[6] Ideale Aussagen sind alle Aussagen, in denen aktual unendliche Gesamtheiten auftreten. Dies können z.B. Hilberträume, Filter oder Ideale sein. Abstrakte Methoden sind nun nur ein Mittel, eine façon de parler, um Beweise elegant zu formulieren. Sie sind dann zulässig, wenn sich mit ihrer Hilfe keine falschen realen Aussagen herleiten lassen. Die abstrakten Methoden in den Beweisen realer Aussagen sollten sich (zumindest theoretisch) durch finite Methoden ersetzen lassen[7]. Mit anderen Worten, die abstrakten Methoden sollten sich als konservativ über den finiten Methoden nachweisen lassen: Mit ihrer Hilfe sollten sich nicht mehr reale Aussagen beweisen lassen als mit finiten Mitteln. Dies ist aber äquivalent dazu, mit finiten Methoden nachzuweisen, daß sich mit den gewählten Prinzipien kein Widerspruch erzeugen läßt. Nehmen wir nämlich an, wir hätten dies nachgewiesen und mit unseren abstrakten Prinzipien die reale Aussage $\forall x R(x)$ bewiesen, dann würde die Existenz einer natürlichen Zahl n mit $\neg R(n)$ im Widerspruch zur Konsistenz der Prinzipien die Beweisbarkeit der Aussage $\exists x \neg R(x)$ nach sich ziehen.
Das Hilbertsche Programm läßt sich also wie folgt zusammenfassen:

1. Formalisiere die Axiome und Schlußweisen, auf denen die Mathematik beruht.

2. Zeige mit finiten Mitteln, daß sich durch die Anwendung der Schlußweisen auf die Axiome kein Widerspruch herleiten läßt.

Der erste Punkt dieses Programmes ist heute komplett durchgeführt. Es ist heutzutage selbstverständlich, für jedes neue mathematische Gebiet Axiome aufzustellen, und diese axiomatische

[3] Ebd.
[4] Ebd. Dem entspricht es, daß in schnittfreien Beweisen die einzige Möglichkeit der Einführung eines $\exists$-Quantors der Partialaussage $\exists x R(x)$ darin besteht, bereits vorher eine bestimmte Aussage $R(n)$ hergeleitet zu haben. Vgl. Gentzen [Ge35].
[5] Hilbert, David. Über das Unendliche.A.a.O.
[6] Ebd.
[7] Vgl. auch [Smo77] und die Einleitung von [Gir87].

Methode hat sich als eine der fruchtbarsten Methoden in der Mathematik erwiesen, obwohl sie häufig den Blick auf das ursprüngliche Problem verstellt und Neueinsteigern die Motivation der Axiome zunächst oft verborgen bleibt.
Der zweite Punkt erwies sich sehr schnell als nicht durchführbar. 1931 zeigte Gödel in seiner berühmt gewordenen Arbeit „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme“[Goe31], daß eine widerspruchsfreie Theorie, die einen Grundbestand an Arithmetik umfaßt, nicht in der Lage ist, ihre eigene Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Dennoch publizierte Gerhard Gentzen 1935 [Ge35] und 1938 [Ge38b] in Kenntnis der Gödelschen Sätze einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Zahlentheorie[8]. Die von Gentzen analysierte Theorie wird heute meist als Peanoarithmetik **PA** bezeichnet. Das bemerkenswerte am Gentzenschen Beweis war, daß er nur an einem einzigen Punkt über den finiten Standpunkt hinausging: Um die Widerspruchsfreiheit von **PA** zu beweisen, benutzte er transfinite Induktion bis ϵ_0 - genauer, einer primitiv rekursiven Wohlordnung, deren Ordnungstyp ϵ_0 ist[9]. Da sich andererseits transfinite Induktion für jedes echte Anfangsstück dieser Wohlordnung in **PA** beweisen läßt, folgt mit dem Gödelschen Satz, daß dieses Ergebnis in gewisser Hinsicht scharf ist. Damit war das erste Mal eine Beziehung zwischen einer logischen Theorie und einer Ordinalzahl hergestellt. Es ist nun naheliegend zu versuchen, logische Theorien T auf diese Art und Weise zu charakterisieren und allgemein zu definieren:

$$|T|_{Con} := \min\{\alpha : \mathbf{F} + TI(\alpha) \vdash Con(T)\},$$

wobei $\mathbf{F}$ eine vom finiten Standpunkt akzeptierbare Basistheorie ist, $TI(\alpha)$ transfinite Induktion bis α und $Con(T)$ die Widerspruchsfreiheit der Theorie T ausdrückt. Diese Definition erweist sich jedoch schnell als unzureichend[10]: Betrachten wir eine Aufzählung p aller Beweise von T und definieren

$$n <_T m : gdw \begin{cases} n < m & \text{und für kein } i < m \text{ beweist } p(i) \text{ die Formel } 0 = 1 \\ m < n & \text{und für ein } i < n \text{ beweist } p(i) \text{ die Formel } 0 = 1, \end{cases}$$

dann ist die Konsistenz von T offensichtlich äquivalent über $\mathbf{F}$ zu $TI(<_T)$, wenn $\mathbf{F}$ vollständige Induktion erlaubt. Mehr noch, die Konsistenz von T ist äquivalent dazu, daß $<_T$ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp ω ist und mit p und $Bew_T(x, y)$ ist auch $<_T$ primitiv rekursiv[11].
Die beweistheoretische Ordinalzahl einer Theorie wird heutzutage häufig durch

$$|T|_{Sup} := \sup\{otyp(<) : < \text{ ist primitiv rekursiv und } T \vdash TI(<)\}$$

definiert. Obwohl diese Definition den Vorteil hat, davon unabhängig zu sein, auf welche Art und Weise die Ordnung $<$ in T repräsentiert wird, hat sie ebenfalls erhebliche Nachteile. So läßt sich auf einfache Weise eine primitiv rekursive Wohlordnung angeben, deren Ordnungstyp $|T|_{Sup}$ ist, wenn T primitiv rekursiv axiomatisierbar ist[12]. Die Elemente dieser Wohlordnung sind im wesentlichen Tupel aus Wohlordnungsbeweisen d von T und den Elementen des Feldes der Relation $\prec$, deren Wohlordenbarkeit in d bewiesen wird. Die lexikographische Ordnung auf diesen Tupeln, wobei in der zweiten Komponente nach der Ordnung in $\prec$ geordnet wird, entspricht dann $|T|_{Sup}$.

[8]Gentzen selbst betrachtete seine Methoden als im Einklang mit dem finiten Standpunkt:„Man nahm nämlich an - und es sprachen auch einige Gesichtspunkte dafür -, daß die für Widerspruchsfreiheitsbeweise zugelassenen „finiten“ bzw. „konstruktiven“ Schlußweisen nur einen Teil der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden und genau formulierbaren Schlußweisen darstellten ... Ich bin jedoch der Meinung, daß es Schlußweisen gibt, die durchaus mit der konstruktiven Auffassung des Unendlichen im Einklang sind und andererseits doch nicht dem Rahmen der formalisierten Zahlentheorie angehören ...“ Gentzen, Gerhard. Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge, 4. 1938.

[9]Girard zitiert in [Gir87] einen namentlich nicht weiter benannten Franzosen, der meinte, Gentzen sei derjenige gewesen, der die Widerspruchsfreiheit der Zahlentheorie, d.h. Induktion bis ω, durch Induktion bis ϵ_0 bewies.

[10]Vgl. [Rat99]

[11]Tatsächlich ist jede Formel $\forall x A(x)$ äquivalent zu einem Schema transfiniter Induktion einer Ordnung $<_A$ vom Ordnungstyp ω. Definiere: $n <_A m$:gdw $(n < m \wedge \forall z < m A(z)) \vee (m < n \wedge \exists z < n \neg A(z))$. Diese Äquivalenz läßt sich in Theorien beweisen, die vollständige Induktion erlauben. Vgl. [KrL68]

[12]Vgl. [Se99]

Diese triviale Ordinalzahlanalyse gibt jedoch weder Informationen über den Ordnungstyp von $|T|_{Sup}$, noch erhalten wir irgendwelche Einsichten in die Beweisstärke von T. Darüberhinaus hat die Ordinalzahl $|T|_{Sup}$ den Nachteil, daß sie sich häufig nicht ändert, wenn wir zu T wahre Σ^1_1-Sätze hinzunehmen[13]. In [Poh98] bezeichnet Pohlers daher eine Ordinalzahlanalyse als profund, wenn sie die Ordinalzahl $|T|_{Sup}$ berechnet und darüberhinaus eine primitiv rekursive Wohlordnung $\prec$ vom Ordnungstyp $|T|_{Sup}$ liefert, so daß T und **PA** mit transfiniter Induktion über alle Anfangsstücke von $\prec$ dieselben arithmetischen Sätze beweisen. Derartige Konservativitätsergebnisse lassen sich erhalten, wenn wir die Ordinalzahlanalyse einer Theorie mit sog. „natürlichen" Wohlordnungen durchführen. Haben wir ein hinreichend starkes natürliches Bezeichnungssystem $(A, \prec)$ gefunden, so läßt sich die beweistheoretische Ordinalzahl von T für klassische Theorien durch

$$|T|_{(A,\prec)} := \min\{\alpha \in A : T \equiv \mathbf{PA} + TI(\prec_\alpha)\}$$

definieren, wobei $\equiv$ hier dafür steht, daß die beiden Theorien dieselben arithmetischen Sätze beweisen und $TI(\prec_\alpha)$ das Schema der transfiniten Induktion für alle Anfangsstücke von A unterhalb von α bezeichne[14]. Obwohl $|T|_{(A,\prec)}$ im Gegensatz zu $|T|_{Sup}$ nicht immer existieren muss[15], drückt diese Definition doch am deutlichsten aus, was die Ordinalzahlanalyse einer Theorie leisten sollte. Häufig bilden Ordinalzahlanalysen den einzigen bekannten Weg, um verschiedene Theorien aufeinander zurückzuführen. So ist z.B. dafür, daß $\Delta^1_2 - \mathbf{CA} + \mathbf{BI}$, **KPI** und Fefermans System für explizite Mathematik $\mathbf{T_0}$ dieselben Sätze im negativen Fragment der Arithmetik beweisen[16], bisher kein Beweis bekannt, der nicht Ordinalzahlbezeichnungssysteme benutzt[17]. Darüberhinaus können Ordinalzahlanalysen weiter als Widerspruchsfreiheitsbeweise interpretiert werden, liefern kombinatorische Unabhängigkeitsresultate und Charakterisierungen der beweisbar rekursiven Funktionen einer Theorie.

Bei der Methode, die dabei eingesetzt wird und die bereits von Gentzen verwendet worden ist, handelt es sich um die Schnittelimination. Schnittfreie Beweise haben die wichtige Eigenschaft, daß im Beweis nur Gentzensche Teilformeln der hergeleiteten Formeln auftreten. Diese Eigenschaft nennt man auch die Teilformeleigenschaft.

Schütte zeigte in seiner 1951 erschienenen Arbeit [Sch51], daß sich die Schnittelimination für **PA** radikal vereinfachen läßt, wenn man zu einem unendlichen Kalkül übergeht, der die Einbettung von **PA** erlaubt. Dies geschieht einfach, indem man die Generalisierungsregel im endlichen Kalkül durch die unendliche ω-Regel

$$\frac{\cdots A(\bar{n}) \cdots (n \in IN)}{\forall x A(x)}$$

ersetzt und nur Sätze betrachtet. Bei den den unendlichen Herleitungen zugewiesenen Ordinalzahlen handelt es sich dann einfach um die Herleitungstiefe. Damit war die Beziehung zwischen ϵ_0 und **PA** klar herausgearbeitet.

Die erste Ordinalzahlanalyse einer imprädikativen Theorie gelang 1967 Takeuti [Tak67] für das Teilsystem der Arithmetik zweiter Stufe mit Π^1_1-Komprehension und Bar-Induktion, 1973 gefolgt von der Ordinalzahlanalyse von Δ^1_2-Komprehension [TaYa73]. Beide Analysen beruhten auf Schnittelimination für endliche Herleitungen. Dies brachte erneut eine sehr undurchsichtige Zuordnung der Ordinalzahlen mit sich. In [BuSc88] behandeln Buchholz und Schütte eine Reihe von Theorien zwischen Π^1_1-Komprehension und Δ^1_2-Komprehension mit Bar-Rule mit Hilfe weiterer unendlicher Schlußregeln. Mittlerweile hatte Jäger [Jaeg86] gezeigt, daß sich schwache Fragmente der Mengenlehre gut zur Ordinalzahlanalyse imprädikativer Theorien eignen. Jäger und Pohlers [JaPo82] gelang auf diesem Umweg die Analyse von $\Delta^1_2 - \mathbf{CA} + \mathbf{BI}$, indem sie die Mengenlehre **KPI** analysierten, in die sich $\Delta^1_2 - \mathbf{CA} + \mathbf{BI}$ kanonisch einbetten läßt[18]. Das stärkste System, für das eine

[13] Vgl. [Rat99]

[14] Für intuitionistische Theorien kann hier **PA** durch **HA** ersetzt werden.

[15] Sie existiert z.B. nicht für $\mathbf{PA} + Con(\mathbf{PA})$.

[16] Vgl. [Fef75],[Jaeg83], [JaPo82].

[17] Vgl. [Rat99]

[18] Die hier angegebenen Resultate stellen nur einen Bruchteil der erzielten Ergebnisse dar. Sie skizzieren jedoch grob den Weg zu der in dieser Arbeit behandelten Theorie und die Bedeutung unendlicher Kalküle für die Beweistheorie.

Ordinalzahlanalyse mit Hilfe eines unendlichen Kalküls veröffentlicht ist, ist die von Michael Rathjen [Rat92] analysierte Mengenlehre von Kripke-Platek mit Π_3-Reflexion.
Obwohl die unendlichen Kalküle durch ihre relative Einfachheit sehr zur Durchsichtigkeit der durchgeführten Ordinalzahlanalysen beigetragen haben, geht durch den Übergang zu den unendlichen Herleitungen etwas verloren[19]. So liefert Gentzens Methode u.a. Grenzen für die beweisbar rekursiven Funktionen oder die Unbeweisbarkeit von $PRWO(\epsilon_0)$[20]. Zwar lassen sich diese Ergebnisse anscheinend mit Hilfe des Rekursionssatzes zurückgewinnen[21], indem man sich auf primitiv rekursive Beweisbäume beschränkt. Um dies durchzuführen, bedarf es jedoch einer schwerfälligen Arithmetisierung. Ein anderer Ansatz ist von Buchholz [Bu91] aufgezeigt worden. Der Grundgedanke besteht darin, nur diejenigen unendlichen Herleitungen zu betrachten, die bei der Einbettung des endlichen Kalküls in den unendlichen und der anschließenden Schnitteliminationsprozedur auch auftreten. Die endlichen Herleitungen werden nun quasi als Konstantensymbole betrachtet, die die unendlichen Herleitungen, die durch ihre Einbettung entstehen, bezeichnen. Die Schnittelimination kann als Operator auf den unendlichen Herleitungen aufgefasst werden. Mit Hilfe von Funktionssymbolen für die einzelnen Schnitteliminationsoperatoren erhält man Bezeichnungen für alle notwendigen unendlichen Herleitungen und kann die Argumentation statt auf den unendlichen Herleitungen auf deren endlichen Bezeichnungen durchführen. Dieser Ansatz läßt sich auch für stärkere Systeme durchführen[22]. In dieser Arbeit wird ein Bezeichnungssystem für unendliche Herleitungen zur Analyse von $\mathbf{KP} + \Pi_3$-Reflexion (im folgenden auch Π_3-Reflexion) vorgestellt. Π_3-Reflexion ist von Michael Rathjen analysiert worden und stellt, wie bereits oben erwähnt, die stärkste mit unendlichen Methoden bearbeitete Theorie dar, deren Analyse vollständig veröffentlicht ist[23]. Sie besteht aus den Axiomen von Kripke-Platek mit Unendlichkeitsaxiom

(Ext)	$\forall x \forall y \forall z (x = y \to (x \in z \to y \in z))$
(Fund)	$\forall \vec{z} \forall x_0 (\forall x (\forall y \in x \varphi(y, \vec{z}) \to \varphi(x, \vec{z})) \to \varphi(x_0, \vec{z}))$
(Paar)	$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$
(Ver)	$\forall x \exists y \forall z \in x (z \subseteq y)$
(Unend)	$\forall x \exists y \ \mathrm{infin}(y)$
(φ-Sep)	$\forall \vec{z} \forall w \exists y (\forall x \in y (x \in w \wedge \varphi(x, \vec{z})) \wedge \forall x \in w (\varphi(x, \vec{z}) \to x \in y))$ für $\varphi \in \Delta_0$
(φ-Col)	$\forall \vec{z} \forall w (\forall x \in w \exists y \varphi(x, y, \vec{z}) \to \exists u \forall x \in w \exists y \in u (\varphi(x, y, \vec{z}))$ für $\varphi \in \Delta_0$

sowie dem Π_3-Reflexionsschema

(Π_3-Ref) $\quad \forall \vec{z} (\varphi(\vec{z}) \to \exists x (\mathrm{tran}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \varphi(\vec{z})^x))$ für $\varphi \in \Pi_3$

Da (φ-Col) für $\varphi \in \Delta_0$ aus (Π_3-Ref) folgt, kann auf (φ-Col) auch verzichtet werden. Die Theorie **KP** stammt ursprünglich aus der verallgemeinerten Rekursionstheorie und dient dort zur Charakterisierung zulässiger Ordinalzahlen[24]. Eine transitive Menge heißt zulässig, wenn sie ein Modell von **KP** ist. Eine Ordinalzahl α heißt zulässig, wenn die zugehörige Stufe der konstruktiblen Hierarchie L_α ein Modell von **KP** ist. Ihre Bedeutung für die Beweistheorie gewinnt die Theorie daher, da sie ein Schritt zur Analyse von $\Pi^1_2 - \mathbf{CA}$ und damit zur vollen Analysis darstellt. Auf der mengentheoretischen Seite entspricht $\Pi^1_2 - \mathbf{CA} + \mathbf{BI}$ die Theorie **KP** mit Σ-Aussonderung. Die Modelle L_α von **KP** mit Σ-Aussonderung werden genau von den nichtprojizierbaren Ordinalzahlen gebildet[25]. Eine Ordinalzahl β heißt α-stabil, wenn $\beta \leq \alpha$ ist und L_β eine Σ_1-elementare Unterstruktur von L_α bildet. Die α-stabilen Ordinalzahlen liegen kofinal in einer nichtprojizierbaren Ordinalzahl α[26].

[19] Vgl. [Bu91] und auch [Bu97],[Bu01a]
[20] D.h. **PA** beweist nicht, daß es keine (bzgl. der Ordnungsbeziehung auf der oben erwähnten Wohlordnung vom Ordnungstyp ϵ_0) unendlichen absteigenden primitiv rekursiven Funktionen gibt
[21] Vgl. [Schw77]
[22] Vgl. [Bu01b].
[23] Seit 1995 hat Michael Rathjen die Analyse von $\Pi^1_2 - \mathbf{CA}$ angekündigt [Rat95]
[24] Vgl. [Mak77],[Bar75].
[25] Vgl. Theorem 6.3 in [Bar75].
[26] Vgl. Theorem 7.11 und Corollary 7.12 in [Bar75].

Eine Σ_1-elementare Unterstruktur L_β von L_α mit $\beta < \alpha$ hat aber starke Reflexionseigenschaften:

$$L_\beta \models \phi \quad \succ \quad L_\alpha \models \exists \gamma \phi^{L_\gamma} \quad \succ \quad L_\beta \models \exists \gamma \phi^{L_\gamma},$$

wobei ϕ eine beliebige mengentheoretische Formel sein kann. Damit bedingt die Analyse von $\Pi^1_2 - \mathbf{CA}$ die beweistheoretische Behandlung allgemeiner Reflexionen.
Die zur Behandlung mengentheoretischer Theorien verwendeten unendlichen Kalküle beruhen auf der Modellbeziehung in der konstruktiblen Hierarchie, die durch weitere Regeln angereichert wird, um die endlichen Kalküle einzubetten. Die beweistheoretische Behandlung besteht dann im wesentlichen darin, diese Regeln wieder aus den unendlichen Herleitungen zu entfernen. Dies geschieht im unendlichen Fall durch transfinite Induktion. Dabei wird die Induktionsvoraussetzung direkt oder nach einigen Transformationen auf die Teilherleitungen angewandt. Wie bereits erwähnt, können diese Transformationen, wie im übrigen auch die endlichen Regeln, als Operationen aufgefasst werden. Die grundlegende Idee, um für eine endliche Argumentation ausreichend Bezeichnungen zu erhalten, besteht nun darin, für jede unendliche Regel, die zwischen der Induktionsvoraussetzung und der gewünschten Behauptung vorkommt, eine Hilfsoperation zu definieren. Diese Hilfsoperationen erlauben es, Teilherleitungen in Herleitungen der Folgerung dieser unendlichen Regel zu transformieren. Mit Hilfe von Funktionssymbolen (endliche Regeln) für jede dieser Operationen bekommt man endliche Bezeichnungen für unendliche Herleitungen. Für die Argumentation wesentlich ist, daß man auch Bezeichnungen für gewisse Teilherleitungen erhält und die Bezeichnungen der Teilherleitungen von h sich durch vollständige Induktion über die Länge der Bezeichnung von h definieren lassen. Dafür, daß dies gelingt, spielt es eine wichtige Rolle, daß der unendliche Kalkül die Repetitionsregel (*Rep*) enthält. Aus der Bezeichnung einer unendlichen Herleitung, soll abgelesen werden können, welche unendliche Regel als letztes verwendet wurde. Bei den Beweistransformationen kann dies von den jeweiligen Teilherleitungen abhängen. Dies stellt bei der unendlichen Behandlung kein Problem dar, da hier die neue Herleitung durch transfinite Rekursion definiert wird, und die Teilherleitungen eine kleinere Ordinalzahlindizierung besitzen. Bei der endlichen Behandlung erfolgt die Definition durch vollständige Induktion über die Länge der Bezeichnung. Die Bezeichnungen für Teilherleitungen müssen aber nicht kürzer sein als die Bezeichnungen der Herleitung. Die Repetitionsregel (*Rep*) wiederholt einfach nur die Prämisse. Sie erlaubt damit quasi die Entscheidung darüber, welche Regel des unendlichen Kalküls zuletzt in der einer Bezeichnung h zugehörigen unendlichen Herleitung angewendet wurde, aufzuschieben. Die Repetitionsregel ist das erste Mal in [Min75] explizit angegeben. Implizit findet sie sich auch in [Schw77] als uneigentliche (unechte) ω-Regel.
In dieser Arbeit wird ein Bezeichnungssystem für unendliche Herleitungen zur Behandlung von Π_3-Reflexion angegeben. Die Arbeit gliedert sich wie folgt:
In Kapitel 1 wird das Ordinalzahlbezeichnungssystem $\mathcal{T}(K)$ beschrieben. In Kapitel 2 wird die Sprache $\mathcal{L}_{RS}$ und das unendliche Beweissystem $RS(\mathcal{K})$ eingeführt, sowie definiert, was unter einem Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen zu verstehen ist. Kapitel 3 enthält eine Beschreibung der Bezeichnungssysteme $\mathbf{RS^0}$ und $\mathbf{RS}^+$ zur Einbettung von Π_3-Reflexion. $\mathbf{RS^0}$ dient zur Einbettung der Axiome und $\mathbf{RS}^+$ zur Einbettung der rein logischen Herleitungen. Da sich hier im Vergleich zu [Bu01b] kaum etwas ändert, wurde hier auf eine vollständige Beschreibung verzichtet. Stattdessen sind nur die grundsätzlichen Definitionen und die Änderungen zu [Bu01b] angegeben. Kapitel 4 umfasst den Hauptteil dieser Arbeit. Hier werden die Bezeichnungssysteme $\mathbf{H}_\delta$ für die Schnittelimination und Kollabierung definiert. Die Beschreibung beginnt mit der Definition der notwendigen Regeln (Funktionssymbole) Definition 4.1.1, gefolgt von der Ordinalzahlindizierung der bezeichneten unendlichen Herleitungen, den Definitionen der Bezeichnungen der Teilherleitungen und der Angabe, in welchem Kontext die Regeln verwendet werden (Definition 4.4.1). Die Bezeichnungen der Teilherleitungen sind im Anhang noch einmal in anderer Schreibweise zusammengefasst. Kapitel 4 beinhaltet auch die Hauptaussage dieser Arbeit: Den Nachweis, daß es sich bei diesen Festlegungen um Bezeichnungssysteme für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen handelt (Satz 4.4.1). Darüberhinaus wird bewiesen, daß damit für bestimmte in $\mathbf{KP} + \Pi_3$-Reflexion herleitbare Sätze eine Bezeichnung für eine schnittfreie Herleitung existiert, die die Einbettung des bewiesenen Satzes herleitet (Satz 4.4.2).

Kapitel 5 befasst sich mit einigen Folgerungen aus diesen Ergebnissen. Genauso wie in [Bu01b] für **KPI** erhalten wir eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen von $\mathbf{KP} + \Pi_3$-Reflexion. Darüberhinaus wird ein ähnliches Konservativitätsergebnis wie in [Bu91] erzielt. Das Kapitel enthält insbesondere auch einen eleganten[27] Beweis für die Abgeschlossenheit der primitiv rekursiven Funktionen gegen mehrfache ungeschachtelte Rekursionen.

Ich danke den folgenden Personen für ihre fachliche Unterstützung:
Wilfried Buchholz, Michael Holz, Helmut Pfeiffer, Michael Rathjen, Robert Solovay und Andreas Weiermann

Besonders bedanken möchte ich mich bei Anton Setzer und Stefan Neumann, sowie bei meiner Lebensgefährtin Susanne Böhlke, der ich oft eine Menge Geduld abverlangt habe.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu den in dieser Arbeit verwendeteten Notationen und Bezeichnungen: Es ist mir aufgefallen, daß ich eine Reihe von Zeichen synonym verwendet habe. So stehen $A \to B, A \Rightarrow B, A \succ B$ allesamt für aus A folgt B. Andererseits verwende ich einige Symbole doppelt ($<$ steht an einigen Stellen für die natürliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen, an anderen Stellen für die Ordnungsbeziehung des Ordinalzahlbezeichnungssystems $\mathcal{T}(K)$). Leider fehlte mir die Zeit, dies zu korrigieren. Es sollte aber leicht aus dem Zusammenhang erkennbar sein, was gemeint ist.

Hannover, 27.11.2000

[27] Für meinen Geschmack.

Kapitel 1

Das Ordinalzahlbezeichnungssystem $\mathcal{T}(K)$

In diesem Abschnitt soll eine primitiv rekursive Menge $\mathcal{T}(K)$ und eine Wohlordnung $<$ auf dieser Menge definiert werden, die ebenfalls primitiv rekursiv ist. $\mathcal{T}(K)$ wird später dazu dienen, Namen für Mengen der gestuften Mengenlehre *RS* bereitzustellen und unsere unendlichen Herleitungsbäume bzw. deren Bezeichnungen zu indizieren. Zur Definition von $\mathcal{T}(K)$ betrachten wir eine Reihe von Ordinalzahlfunktionen, die eine eindeutige Darstellung von Ordinalzahlen und deren Größenvergleich durch Größenvergleich der Argumente (Teilterme) erlauben. Indem wir den Abschluss von $\{0, \mathcal{K}\}$ (die Definition von $\mathcal{K}$ erfolgt in diesem Abschnitt) unter diesen Funktionen betrachten, erhalten wir eine Menge von Ordinalzahlen, die ordnungsisomorph zu einer primitiv rekursiven Teilmenge von $I\!N$ ist und deren Ordnungsbeziehung ebenfalls primitiv rekursiv ist.

1.1 Grundlagen, Bezeichnungen

$On, Kard, Lim$ bezeichne die Klasse der Ordinalzahlen, der unendlichen Kardinalzahlen bzw. Limeszahlen. Kleine griechische Buchstaben (mit Ausnahme von φ) bezeichnen im folgenden immer Ordinalzahlen. $<$ bezeichne die Ordnungsbeziehung auf On, $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta]$ offene, halboffene bzw. abgeschlossene Intervalle von Ordinalzahlen.
Für eine Klasse M von Ordinalzahlen sei ord_M die Aufzählungsfunktion von M. Insbesondere sei $\alpha \longmapsto \Omega_\alpha$ die Aufzählungsfunktion von $Kard$. Es ist $Db(ord_M) = On$ genau dann, wenn M unbeschränkt in On liegt.
Eine Funktion $f : M \longrightarrow On$ mit $M \subseteq On$ heißt stetig, wenn sie stetig bzgl. der Ordnungstopologie auf On ist. Eine streng wachsende, stetige Funktion f, deren Definitionsbereich On ist, heißt Normalfunktion, eine streng wachsende, stetige Funktion f, deren Definitions- und Wertebereich eine reguläre Ordinalzahl ρ ist, Normalfunktion auf ρ . Dies ist äquivalent dazu, daß f die Aufzählungsfunktion einer bzgl. der Ordnungstopologie abgeschlossenen und in On (in ρ) unbeschränkten Klasse von Ordinalzahlen ist. Derartige Klassen werden im folgenden auch Club (in ρ) genannt. M heißt stationär in On (in ρ), wenn M mit jedem Club (in ρ) einen nichtleeren Durchschnitt hat. Äquivalent dazu ist, daß jede Normalfunktion (auf ρ) einen Fixpunkt in M besitzt.
Eine Ordinalzahl ρ heißt regulär, wenn die Kofinalität von ρ gleich ρ ist. Dies ist äquivalent dazu, daß jede Teilmenge von ρ kleinerer Mächtigkeit beschränkt in ρ ist. Die Fixpunkte einer Normalfunktion auf $\rho > \omega$ bilden einen Club. Die Klasse der regulären Kardinalzahlen größer ω bezeichnen wir mit Reg. Im folgenden werden die kleinen griechischen Buchstaben π, τ, κ evtl. mit Indices ausschließlich für reguläre Kardinalzahlen $< \mathcal{K}$ verwendet, ohne daß noch einmal erwähnt wird, daß diese Zahlen regulär sind.
Eine Ordinalzahl $\gamma > 0$ heißt eine (additive) Hauptzahl, wenn sie bzgl. der ordinalen Addition abgeschlossen ist, d.h. $\forall \alpha, \beta < \gamma . \alpha + \beta < \gamma$. H bezeichne die Klasse der additiven Hauptzahlen. $\alpha \longmapsto \omega^\alpha$ ist die Aufzählungsfunktion der additiven Hauptzahlen.

Lemma 1.1.1 Für alle $\alpha \notin H \cup \{0\}$ existieren eindeutig bestimmte $\alpha_1, ...\alpha_n \in H$ mit $\alpha_n \leq ... \leq \alpha_1 < \alpha$ und $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Definition 1.1.1 (Cantorsche Normalform)
$\alpha =_{NF} \alpha_1 + ... + \alpha_n$:gdw $\alpha = \alpha_1 + ... + \alpha_n$, $\alpha_1, ...\alpha_n \in H$ und $\alpha_n \leq ... \leq \alpha_1 < \alpha$.

Definition 1.1.2 (Veblen Hierarchie) Wir definieren durch transfinite Induktion bzgl. α

$$\varphi_\alpha := ord_{\{\xi \in H : \forall \eta < \alpha . \varphi_\eta(\xi) = \xi\}}$$

und schreiben $\varphi\alpha\beta$ für $\varphi_\alpha(\beta)$.

φ_α ist eine Normalfunktion auf On für alle $\alpha \in On$.

Lemma 1.1.2 Es gilt:

(a) $\varphi\alpha\beta \in H$

(b) $\xi < \alpha \succ \varphi\xi(\varphi\alpha\beta) = \varphi\alpha\beta$

(b) $\beta < \gamma \succ \varphi\alpha\beta < \varphi\alpha\gamma$

(c) $\alpha < \beta \succ \varphi\alpha 0 < \varphi\beta 0$

(d) $\alpha, \beta \leq \varphi\alpha\beta$.

Satz 1.1.1 $\varphi\alpha_1\beta_1 = \varphi\alpha_2\beta_2$ gdw einer der folgenden Fälle gilt:

(i) $\alpha_1 < \alpha_2$ und $\beta_1 = \varphi\alpha_2\beta_2$,

(ii) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$,

(iii) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\beta_2 = \varphi\alpha_1\beta_1$.

Satz 1.1.2 $\varphi\alpha_1\beta_1 < \varphi\alpha_2\beta_2$ gdw einer der folgenden Fälle gilt:

(i) $\alpha_1 < \alpha_2$ und $\beta_1 < \varphi\alpha_2\beta_2$,

(ii) $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 < \beta_2$,

(iii) $\alpha_2 < \alpha_1$ und $\varphi\alpha_1\beta_1 < \beta_2$.

Satz 1.1.3 $\forall \gamma \in H . \exists! \alpha, \beta . \gamma = \varphi\alpha\beta$ und $\beta < \gamma$.

Definition 1.1.3 Eine Ordinalzahl γ heißt streng kritisch, wenn $\varphi\gamma 0 = \gamma$ ist. S bezeichne die Klasse der streng kritischen Zahlen.

Dies ist äquivalent dazu, daß $\gamma \neq 0$ abgeschlossen gegenüber der φ-Funktion ist, d.h. $\forall \alpha, \beta < \gamma . \varphi\alpha\beta < \gamma$.

Lemma 1.1.3 $\forall \gamma \in H \setminus S . \exists! \alpha, \beta < \gamma . \gamma = \varphi\alpha\beta$.

Definition 1.1.4 $\gamma =_{NF} \varphi\alpha\beta$:gdw $\gamma = \varphi\alpha\beta$ und $\alpha, \beta < \gamma$

Definition 1.1.5 Wir definieren eine endliche Menge $S(\gamma)$ durch:

1. $S(\gamma) := \{\gamma\}$ für $\gamma \in S \cup \{0\}$,
2. $S(\gamma) := \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ für $\gamma =_{NF} \gamma_1 + ... + \gamma_n \notin H$,
3. $S(\gamma) := \{\alpha, \beta\}$ für $\gamma =_{NF} \varphi\alpha\beta \in H \setminus S$.

Lemma 1.1.4 $\gamma \notin S \cup \{0\}$ gdw $S(\gamma) < \gamma$.

Beweise für die obigen Behauptungen können z.B. in [Sch77] oder [Poh89] gefunden werden. Es gilt:

$$Reg \cup \{\omega\} \subseteq Kard \subseteq S \subseteq H \subseteq Lim \subseteq On.$$

1.2 Große Kardinalzahlen

In der klassischen Beweistheorie wird viel Aufwand und Energie auf die Entwicklung und den Vergleich von Bezeichnungssystemen für Ordinalzahlen verwendet. Bezeichnungssysteme für Ordinalzahlen bilden sozusagen den Grundbaustein für die Ordinalzahlanalyse jeder Theorie. Das von Rathjen [Rat92] entwickelte Bezeichnungssystem für Π_3-Reflexion ergibt sich aus den Eigenschaften gewisser partieller Funktionen unter der Annahme der Existenz bestimmter großer Kardinalzahlen. Die folgenden Resultate sollen die Rolle großer Kardinalzahlen bei der Ordinalzahlanalyse von Π_3-Reflexion motivieren und andeuten, daß sich große Kardinalzahlen durch ihre rekursiven Analoga ersetzen lassen. Die einfachen Kardinalitätsargumente sind dann durch Argumente zu ersetzten, die sich wesentlich auf die Komplexität der beteiligten Formeln stützen (vgl. dazu auch die leider nicht ganz fehlerfreie Darstellung in [Schl93]).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache der Prädikatenlogik mit Konstantensymbolen für jede Menge und Relationssymbolen für jede Klasse (diese riesige Sprache ist hier nur der Einfachheit halber gewählt). Wir identifizieren die Symbole mit ihren Mengen/Klassen. Sind $R_1, \ldots, R_n, a_1, \ldots, a_m$ die Relations- bzw. Konstantensymbole, die in ϕ vorkommen, dann stehe $A \models \phi$ für die Gültigkeit von ϕ in der Struktur $\langle A, R_1 \cap A^{i_1}, \ldots, R_n \cap A^{i_n}, a_1, \ldots, a_m \rangle$ (i_j Stelligkeit von R_j), wobei die Menge A als nichtleer und $a_1, \ldots a_m \in A$ vorausgesetzt sind. Π^n_m, Σ^n_m-Formeln sind wie üblich definiert, wobei beschränkte Quantoren $\forall x \in y, \exists x \in y$ nicht mitgezählt werden. Wir können nun die (schwach) unbeschreibbaren Ordinalzahlen definieren:

Definition 1.2.1 Sei $X \subseteq On$, $\alpha \in On$ und $\phi \in \mathcal{L}$.
α reflektiert ϕ auf X :gdw

$$\text{aus } \alpha \models \phi \text{ folgt, es gibt } \beta \in X \cap \alpha \text{ mit } \beta \models \phi.$$

Für $X = On$ sagen wir auch α reflektiert ϕ.
α ist $\Pi^n_m(\Sigma^n_m)$-unbeschreibbar (auf X), wenn α jeden $\Pi^n_m(\Sigma^n_m)$-Satz reflektiert (auf X).

Indem wir in der Definition α, β durch die von-Neumannschen Stufen V_α, V_β ersetzen, erhalten wir die starke Version dieser Begriffe. Unter der Annahme von GCH stimmen beide Definitionen für $n > 0$ überein (vgl. Richter/Aczel [RiAc74]). Wir sagen α ist Mahlo auf X, wenn es für jede Funktion $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ ein gegenüber f abgeschlossenes $\beta \in (X \cap \alpha) \setminus \{0\}$ gibt. Beweise für die folgenden Sätze finden sich bei Levy [Lev71].

Satz 1.2.1

$$\alpha \text{ ist } \Pi^0_2\text{-unbeschreibbar gdw } \alpha \in Reg.$$

Satz 1.2.2

i) Es ist äquivalent:
   a) α ist Π^0_0-unbeschreibbar auf X,
   b) α ist Σ^0_2-unbeschreibbar auf X,
   c) $\alpha = \sup(X \cap \alpha)$.

ii) Es ist äquivalent:
   a) α ist Π^0_2-unbeschreibbar auf X,
   b) α ist Π^1_0-unbeschreibbar auf X,
   c) α ist Mahlo auf X.

iii) α ist Π^1_n-unbeschreibbar auf X gdw α ist Σ^1_{n+1}-unbeschreibbar auf X.

Indem wir die Operatoren

$$L(X) := \{\alpha \in X : \alpha = \sup(X \cap \alpha)\} \text{ und } M(X) := \{\alpha \in X : \alpha \text{ ist Mahlo auf } X\}$$

iterieren, lassen sich ganze Hierarchien großer Kardinalzahlen definieren, die sich dann durch Diagonalisierung noch weiter fortsetzen lassen. Wir erhalten die rekursiven Gegenstücke dieser großen Kardinalzahlen, indem wir in Definition 1.2.1 α, β durch die entsprechenden Anfangsstücke L_α, L_β der konstruktiblen Hierarchie ersetzen und statt $\mathcal{L}$ die Sprache $\mathcal{L}_\in$ verwenden, die als einziges Relationssymbol $\in$ besitzt.

Definition 1.2.2 Sei $X \subseteq On$, $\alpha \in On$ und $\phi \in \mathcal{L}_\in$.
L_α reflektiert ϕ auf X :gdw

$$\text{aus } L_\alpha \models \phi \text{ folgt, es gibt } \beta \in X \cap \alpha \text{ mit } L_\beta \models \phi.$$

Für $X = On$ sagen wir auch L_α reflektiert ϕ.
α ist $\Pi^n_m(\Sigma^n_m)$-reflektierend (auf X), wenn L_α jeden $\Pi^n_m(\Sigma^n_m)$-Satz (von $\mathcal{L}_\in$) reflektiert (auf X).

Eine Ordinalzahl $\alpha > \omega$ heißt per Definition zulässig, wenn L_α ein Modell von KP ist. Eine Funktion $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ heißt α-rekursiv, wenn ihr Graph Σ^0_1-definierbar in L_α ist. Eine zulässige Ordinalzahl α heißt rekursiv Mahlo auf X, wenn es zu jeder α-rekursiven Funktion $f : \alpha \longrightarrow \alpha$ ein gegenüber f abgeschlossenes $\beta \in (X \cap \alpha) \setminus \{0\}$ gibt. Mit diesen Begriffen lassen sich nun die folgenden Analoga der oben angegebenen Sätze beweisen (vgl. Richter/Aczel [RiAc74]):

Satz 1.2.3

$$\alpha \text{ ist } \Pi^0_2\text{-reflektierend gdw } \alpha \text{ ist zulässig.}$$

Satz 1.2.4

i) Es ist äquivalent:
   a) α ist Π^0_0-reflektierend auf X,
   b) α ist Σ^0_2-reflektierend auf X,
   c) $\alpha = \sup(X \cap \alpha)$.

ii) Es ist äquivalent:
   a) α ist Π^0_2-reflektierend auf X,
   c) α ist rekursiv Mahlo auf X.

iii) α ist Π^0_n-reflektierend auf X gdw α ist Σ^0_{n+1}-reflektierend auf X.

Indem wir zu Operationen höheren Typs übergehen, lassen sich noch mehr Parallelitäten angeben. Die für die Verwendung der Π^1_1-unbeschreibbaren Kardinalzahlen ausschlaggebende Analogie wird in den folgenden beiden Sätzen wiedergegeben. Für die genauen Definitionen der Begriffe und die Beweise verweise ich auf Richter/Aczel [RiAc74].

Satz 1.2.5

$$\kappa \text{ ist 2-regulär gdw } \kappa \text{ ist stark } \Pi^1_1\text{-unbeschreibbar.}$$

Satz 1.2.6

$$\kappa \text{ ist 2-zulässig gdw } \kappa \text{ ist } \Pi^0_3\text{-reflektierend.}$$

Wir halten also fest:
Die zulässigen Ordinalzahlen entsprechen den regulären Kardinalzahlen, die rekursiven Mahlozahlen den Mahlozahlen und die Π_3-reflektierenden Ordinalzahlen den Π^1_1-unbeschreibbaren Kardinalzahlen.

1.3 Das Ordinalzahlbezeichnungssystem $\mathcal{T}(K)$

Wir gehen in diesem Abschnitt von der Existenz einer schwach kompakten Kardinalzahl $\mathcal{K}$ aus. Schwach kompakte Kardinalzahlen sind insbesondere Π_1^1-unbeschreibbar (vgl. [Jech97]). Da dies die einzige Eigenschaft von $\mathcal{K}$ ist, die wir auch nur an einer einzigen Stelle benötigen, die folgenden Sätze allesamt aus [Rat92] zitiert werden und uns die Beweise nicht weiter zu interessieren brauchen, verzichte ich auf die exakte Definition dieser Begriffe. Sie können z.B. in [Dra74] nachgelesen werden (vgl. auch [Lev71]). Die hier zitierten Sätze und Lemmata werden im Beweis von Satz 4.4.1 laufend verwendet.

Definition 1.3.1 Durch Rekursion nach α mit einer anschließenden vollständigen Induktion nach n definieren wir Mengen $C^n(\alpha,\beta), C(\alpha,\beta), M^\alpha$ und Ordinalzahlen $\Xi(\alpha), \Psi_\pi^\xi(\alpha)$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
C^0(\alpha,\beta) &:= \beta \cup \{0,\mathcal{K}\} \\
C^{n+1}(\alpha,\beta) &:= C^n(\alpha,\beta) \cup \{\xi+\eta : \xi,\eta \in C^n(\alpha,\beta)\} \\
&\quad \cup\{\varphi\xi\eta : \xi,\eta \in C^n(\alpha,\beta)\} \\
&\quad \cup\{\Omega_\xi : \xi < \mathcal{K} \wedge \xi \in C^n(\alpha,\beta)\} \\
&\quad \cup\{\Xi(\xi) : \xi < \alpha \wedge \xi \in C^n(\alpha,\beta)\} \\
&\quad \cup\{\Psi_\pi^\xi(\delta) : \xi \le \delta < \alpha \wedge \xi,\pi,\delta \in C^n(\alpha,\beta)\}
\end{aligned}$$

$$C(\alpha,\beta) := \bigcup_{n<\omega} C^n(\alpha,\beta)$$

$$\begin{aligned}
M^0 &:= \mathcal{K} \cap Lim \\
M^\alpha &:= \{\pi < \mathcal{K} : C(\alpha,\pi) \cap \mathcal{K} = \pi \wedge \forall \xi \in C(\alpha,\pi) \cap \alpha . M^\xi \text{ stationär in } \pi \wedge \alpha \in C(\alpha,\pi)\} \\
&\quad \text{für } \alpha > 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Xi(\alpha) &:= \min(M^\alpha \cup \{\mathcal{K}\}) \\
\Psi_\pi^\xi(\alpha) &:= \min(\{\rho \in M^\xi \cap \pi : C(\alpha,\rho) \cap \pi = \rho \wedge \pi, \alpha \in C(\alpha,\rho)\} \cup \{\pi\}) \\
&\quad \text{für } \xi \le \alpha
\end{aligned}$$

$C(\alpha,\beta)$ ist der Abschluß von $\beta \cup \{0,\mathcal{K}\}$ unter den (partiellen) Funktionen $+, \varphi, \xi \longmapsto \Omega_\xi, \Xi, \Psi$, soweit diese bereits definiert sind. M^1 ist die Klasse der Mahlozahlen $M(Reg)$. Für $\xi < \mathcal{K}$ ist M^ξ das Bild von Reg unter der ξ-ten Iterierten des im vorigen Abschnitt definierten Operators M. An der Stelle $\mathcal{K}$ wird das erste Mal diagonalisiert. $M^{\mathcal{K}+1}$ ist dann wieder $M(M^{\mathcal{K}})$ usw.

Lemma 1.3.1 Es gilt:

i) $\alpha \le \alpha' \wedge \beta \le \beta' \Rightarrow C(\alpha,\beta) \subseteq C(\alpha',\beta')$.

ii) $\beta < \pi \Rightarrow |C(\alpha,\beta)| < \pi$.

iii) $\lambda \in Lim \Rightarrow C(\alpha,\lambda) = \bigcup_{\eta<\lambda} C(\alpha,\eta) \wedge C(\lambda,\alpha) = \bigcup_{\eta<\lambda} C(\eta,\alpha)$.

iv) $C(\alpha,\Xi(\alpha)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\alpha)$.

v) $C(\alpha,\Psi_\pi^\xi(\alpha)) \cap \pi = \Psi_\pi^\xi(\alpha)$.

vi) $\{\pi : \pi \in M^\alpha \wedge \xi \in C(\alpha,\pi) \cap \alpha\} \subseteq M^\xi$.

vii) Ist M^ξ stationär in π, so ist $\pi \in M^\xi$.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Sei $\mathcal{K}^\Gamma := \min\{\alpha > \mathcal{K} : \forall \xi,\eta < \alpha . \varphi\xi\eta < \alpha\}$.

Satz 1.3.1 M^α ist stationär in $\mathcal{K}$ für $\alpha < \mathcal{K}^\Gamma$.

Beweis: Im Beweis dieses Satzes macht man sich die Π_1^1-Unbeschreibbarkeit von $\mathcal{K}$ zunutze. Es ist der einzige Punkt, an dem man eine stärkere Eigenschaft als die Regularität von $\mathcal{K}$ braucht. Alle folgenden Aussagen folgen nun relativ einfach aus diesem Satz den Definitionen und dem vorangegangenen Lemma. Zum Beweis siehe [Rat92]. □

Aus der Definition von $\Xi(\alpha)$ folgt nun unmittelbar:
Folgerung: $\alpha \in C(\alpha, \Xi(\alpha))$ und $\Xi(\alpha) < \mathcal{K}$ für $\alpha < \mathcal{K}^\Gamma$.

Von nun an betrachten wir nur noch Ordinalzahlen $< \mathcal{K}^\Gamma$.

Lemma 1.3.2 $\Xi(\alpha) < \Xi(\beta)$ gdw $(\alpha < \beta \wedge \alpha \in C(\beta, \Xi(\beta))) \vee (\beta < \alpha \wedge \beta \notin C(\alpha, \Xi(\alpha)))$

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Folgerung: $\alpha \neq \beta \Rightarrow \Xi(\alpha) \neq \Xi(\beta)$.

Satz 1.3.2 Sei M^ξ stationär in π, $\xi \leq \alpha$ und $\xi, \pi, \alpha \in C(\alpha, \pi)$. Dann gilt

$$\Psi_\pi^\xi(\alpha) \in M^\xi \cap \pi.$$

Desweiteren ist M^ξ nicht stationär in $\Psi_\pi^\xi(\alpha)$ für $\xi > 0$.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Satz 1.3.3 Es gilt:

i) $\Psi_\pi^\xi(\alpha) < \pi \Rightarrow \Psi_\pi^\xi(\alpha) \neq \Xi(\beta)$.

ii) $\Psi_\pi^\xi(\alpha) < \pi \wedge \Psi_\kappa^\sigma(\beta) < \kappa \wedge \Psi_\pi^\xi(\alpha) = \Psi_\kappa^\sigma(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta \wedge \pi = \kappa \wedge \xi = \sigma$.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Lemma 1.3.3

i) $\gamma \in C(\alpha, \beta)$ gdw $S(\gamma) \in C(\alpha, \beta)$

ii) Für $\sigma < \mathcal{K}$ ist

$$\sigma \in C(\alpha, \beta) \text{ gdw } \Omega_\sigma \in C(\alpha, \beta)$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus den Abgeschlossenheitseigenschaften von $C(\alpha, \beta)$. □

Lemma 1.3.4

i) $0 < \alpha \wedge \pi \in M^\alpha \Rightarrow \Omega_\pi = \pi$.

ii) $\pi \in M^1 \Rightarrow \Omega_{\Psi_\pi^0(\alpha)} = \Psi_\pi^0(\alpha)$.

iii) $\pi = \Omega_{\zeta+1} \wedge \alpha \in C(\alpha, \pi) \Rightarrow \Omega_\zeta < \Psi_\pi^0(\alpha) < \Omega_{\zeta+1}$.

iv) $\Psi_\pi^0(\alpha) < \pi \Rightarrow \Psi_\pi^0(\alpha) \notin Reg$.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Satz 1.3.4 Sei $\Psi_\pi^\xi(\alpha) < \pi$ und $\Psi_\kappa^\sigma(\beta) < \pi \cap \kappa$. Dann gilt

$$\Psi_\pi^\xi(\alpha) < \Psi_\kappa^\sigma(\beta)$$

genau dann, wenn

i) $\alpha < \beta \wedge \alpha, \xi, \pi \in C(\beta, \Psi_\kappa^\sigma(\beta)) \wedge \Psi_\pi^\xi(\alpha) < \kappa$,

ii) $\beta \leq \alpha \wedge \{\beta, \sigma, \kappa\} \not\subseteq C(\alpha, \Psi_\pi^\xi(\alpha))$,

iii) $\alpha = \beta \wedge \kappa = \pi \wedge \xi < \sigma \wedge \xi \in C(\beta, \Psi_\kappa^\sigma(\beta))$ oder

iv) $\sigma < \xi \wedge \sigma \notin C(\xi, \Psi_\pi^\xi(\alpha))$.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Satz 1.3.5

$$\Psi_\pi^\xi(\alpha) < \Xi(\beta) \text{ gdw } \pi \leq \Xi(\beta) \vee (\beta < \alpha \wedge \beta \notin C(\alpha, \Psi_\pi^\xi(\alpha)))$$

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Definition 1.3.2 Wir definieren induktiv eine Menge $\mathcal{T}(K)$ von Ordinalzahlen und eine Funktion

$$m : \mathcal{T}(K) \cap Reg \longrightarrow \mathcal{T}(K)$$

durch die folgenden Klauseln:

(T1) $0, \mathcal{K} \in \mathcal{T}(K)$

(T2) Ist $S(\alpha) \subseteq \mathcal{T}(K)$, dann ist auch $\alpha \in \mathcal{T}(K)$

(T3) Ist $\xi \in \mathcal{T}(K) \cap \mathcal{K}$ und $0 < \xi < \Omega_\xi$, dann ist auch $\Omega_\xi \in \mathcal{T}(K)$.
Ist $\Omega_\xi \in Reg$, dann ist $m(\Omega_\xi) = 1$.

(T4) Ist $\alpha \in \mathcal{T}(K) \cap \mathcal{K}$ und $0 < \alpha$, dann ist auch $\Xi(\alpha) \in \mathcal{T}(K)$.
Es sei $m(\Xi(\alpha)) = \alpha$.

(T5) Sind $\alpha, \xi, \pi \in \mathcal{T}(K) \cap C(\alpha, \pi)$, $\xi \leq \alpha$ und $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$, dann ist $\Psi_\pi^\xi(\alpha) \in \mathcal{T}(K)$.
Für $\xi > 0$, ist $m(\Psi_\pi^\xi(\alpha)) = \xi$.

$m(\pi)$ heißt dann auch der Mahlograd von π.

Lemma 1.3.5

i) Für $\delta \in \mathcal{T}(K)$ gilt:

   a) $\delta \in C(\mathcal{K}^\Gamma, 0)$

   b) Ist δ unerreichbar und $\delta < \mathcal{K}$, dann ist $\delta \in M^{m(\delta)}$, aber $M^{m(\delta)}$ nicht stationär in δ. Ausserdem ist $m(\delta) = \sup\{\beta : \delta \in M^\beta\}$.

ii) Für $\pi \in \mathcal{T}(K) \cap Reg$ und $\xi \in \mathcal{T}(K)$ gilt:

$$M^\xi \text{ stationär in } \pi \text{ gdw } \xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi).$$

iii) Jede Ordinalzahl $\beta \in \mathcal{T}(K)$ besitzt eine eindeutige Darstellung in den Symbolen 0, $\mathcal{K}$, $+$, φ, Ω, Ξ, Ψ.

Beweis: Siehe [Rat92]. □

Definition 1.3.3 Wir definieren eine endliche Menge $K_\delta(\alpha)$ induktiv über den Aufbau von $\alpha \in \mathcal{T}(K)$:

(K1) $K_\delta(0) := K_\delta(\mathcal{K}) := \emptyset$

(K2) Für $\alpha \notin S$ sei $K_\delta(\alpha) := \bigcup_{\beta \in S(\alpha)} K_\delta(\beta)$.

(K3) Für $0 < \xi < \Omega_\xi < \mathcal{K}$ sei $K_\delta(\Omega_\xi) := K_\delta(\xi)$.

(K4)

$$K_\delta(\Xi(\beta)) := \begin{cases} \emptyset & \text{für } \Xi(\beta) < \delta \\ K_\delta(\beta) \cup \{\beta\} & \text{sonst} \end{cases}$$

(K5) Für $\alpha =_{NF} \Psi^\sigma_\kappa(\beta)$ sei

$$K_\delta(\alpha) := \begin{cases} \emptyset & \text{für } \alpha < \delta \\ K_\delta(\kappa) \cup K_\delta(\sigma) \cup K_\delta(\beta) \cup \{\beta\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 1.3.6 Für $\alpha \in \mathcal{T}(K)$ gilt:

$$\alpha \in C(\gamma, \delta) \text{ gdw } K_\delta(\alpha) < \gamma.$$

Beweis: Dies folgt unmittelbar durch Induktion über den Aufbau von $\alpha \in T(\mathcal{K})$. $\Box$

Damit läßt sich $\alpha \in \mathcal{T}(K)$ primitiv rekursiv entscheiden. Wenn wir im folgenden von Ordinalzahlen reden, sind immer Elemente aus $\mathcal{T}(K)$ gemeint. Man beachte, daß obige Lemmata und Sätze insbesondere auch primitiv rekursive Entscheidungsverfahren für die folgenden Aussagen liefern: $\alpha < \beta, \alpha \in Lim, \alpha \in H, \alpha \in S, \alpha \in Kard, \alpha \in Reg, \alpha$ unerreichbar, $\alpha \in M^\xi, \alpha \in C(\gamma, \delta)$ und M^ξ stationär in π.
Für den Rest dieser Arbeit fassen wir $\mathcal{T}(K)$ und die entsprechenden Relationen als primitiv rekursive Teilmengen von $I\!N^n$ auf. Wir zeigen noch, daß sich bestimmte ordinalzahlarithmetische Hilfsoperationen auf $\mathcal{T}(K)$, die wir später benötigen, primitiv rekursiv definieren lassen. Dies ist klar für die in die Definition des Bezeichnungssystems eingehenden Funktionen $+, \varphi, \alpha \longmapsto \Omega_\alpha, \Xi$ und Ψ, sowie für $\omega^\alpha := \varphi 0 \alpha$ und $\omega_k(\alpha)$ mit $\omega_0(\alpha) := \alpha$ und $\omega_{k+1}(\alpha) := \omega^{\omega_k(\alpha)}$. Über die Cantorsche Normalform erhalten wir die natürliche Summe $\#$. Um die Multiplikation $\cdot$ zu definieren, ist nur zu klären, was $\alpha \cdot \omega^\beta$ ist, da $\alpha \cdot 0 = 0$ und $\alpha \cdot (\omega^{\beta_0} + \ldots + \omega^{\beta_n}) = \alpha \cdot \omega^{\beta_0} + \ldots + \alpha \cdot \omega^{\beta_n}$ ist.
Sei $\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot a_0 + \ldots + \omega^{\alpha_n} \cdot a_n$ mit $\alpha_0 > \ldots > \alpha_n$, $a_0, \ldots, a_n < \omega$. Dann ist

$$\alpha \cdot \omega^0 = \alpha$$

und

$$\alpha \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha_0} \cdot \omega^\beta = \omega^{\alpha_0 + \beta} \text{ für } \beta > 0.$$

Wir definieren eine Verallgemeinerung der Veblenfunktionen $\hat{\varphi}$ durch

$$\hat{\varphi}_0 := id \quad \text{und} \quad \hat{\varphi}_\alpha := \varphi_{\alpha_0} \circ \ldots \circ \varphi_{\alpha_n}$$

für $\alpha =_{NF} \omega^{\alpha_0} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ und mit Hilfe der Eigenschaften von φ ist leicht

$$\hat{\varphi}_\alpha(\beta) < \hat{\varphi}(\gamma) \text{ für } \beta < \gamma \text{ und } \hat{\varphi}_{\alpha+\beta} = \hat{\varphi}_\alpha \circ \hat{\varphi}_\beta$$

einzusehen. Die kleinste reguläre Kardinalzahl oberhalb von α (die Stufe von α) läßt sich wie folgt aus α berechnen:

Ist $\alpha \notin S$, dann sei $St(\alpha) := St(\max S(\alpha))$. Sonst sei

$$St(0) := \Omega_1 \qquad St(\mathcal{K}) := \Omega_{\mathcal{K}+1} \qquad St(\Omega_\xi) := \Omega_{\xi+1}$$

$$St(\Xi(0)) := \Omega_1 \quad St(\Xi(\alpha)) := \Omega_{\Xi(\alpha)+1}$$

$$St(\Psi^0_\pi(\alpha)) := \Omega_{\Psi^0_\pi(\alpha)+1} \text{ für } \pi \in M^1$$

$$St(\Psi^0_\pi(\alpha)) := \Omega_{\xi+1} \text{ für } \pi = \Omega_{\xi+1}$$

$$St(\Psi^\xi_\pi(\alpha)) := \Omega_{\Psi^\xi_\pi(\alpha)+1} \text{ für } \xi > 0$$

Statt $St(\alpha)$ schreiben wir auch α^R. Wir setzen $\pi^- := \Omega_\xi$ für $\pi = \Omega_{\xi+1}$ und $NF(\alpha, \beta)$ stehe für $\alpha_n \leq \beta_0$ für $\alpha =_{NF} \omega^{\alpha_0} + \ldots + \omega^{\alpha_n}$ und $\beta =_{NF} \omega^{\beta_0} + \ldots + \omega^{\beta_m}$. Dies werden wir später benötigen, um aus $\alpha + \beta \in C(\gamma, \delta)$ auf $\alpha \in C(\gamma, \delta)$ schließen zu können. Für $\mu \in Kard$ sei noch

$$\bar{\mu} := \begin{cases} \mu + 1 & \text{falls } \mu \in Reg \cup \{\mathcal{K}\} \\ \mu & \text{sonst} \end{cases} .$$

Kapitel 2

Die Sprache $\mathcal{L}_{RS}$ der gestuften Mengenlehre und das unendliche Beweissystem $RS(\mathcal{K})$

2.1 Die Sprache $\mathcal{L}_{RS}$ der gestuften Mengenlehre

Sei $\mathcal{L}_{\in}$ die Sprache der Mengenlehre 1. Stufe ohne Negation, die aus den beiden zweistelligen Prädikatsymbolen $\in, \notin$ gebildet ist. Sei weiter $\mathcal{L}_{Ad}$ die Sprache die wir aus $\mathcal{L}_{\in}$ erhalten, wenn wir für $\xi \in \mathcal{T}(K)$ einstellige Prädikatsymbole $Ad^{\xi}, \neg Ad^{\xi}$ hinzufügen. Die Negation $\neg\phi$ einer Formel ϕ sei mit Hilfe der de Morganschen Regeln definiert. Die Sprache $\mathcal{L}_{RS}$ der gestuften Mengenlehre entsteht aus $\mathcal{L}_{Ad}$ indem wir Elemente der konstruktiblen Hierarchie als weitere Terme zulassen. Ich schreibe im folgenden $\phi(x_0, \ldots, x_n)$ für $FV(\phi) \subseteq \{x_0, \ldots, x_n\}$ und $\phi(t)$ um anzudeuten, daß der Term t in ϕ für eine Variable x substituiert wird. Für Terme t stehe ϕ^t für die Formel, die aus ϕ entsteht, wenn man in ϕ alle unbeschränkten Quantoren $\forall x, \exists x$ durch $\forall x \in t, \exists x \in t$ ersetzt. Wir definieren zunächst die RS-Terme $\mathcal{T}$:

Definition 2.1.1 (*RS*-**Term**)

1. Für $\alpha \in \mathcal{T}(K)$ ist $L_\alpha \in \mathcal{T}$ der Schicht α.
2. Ist $\phi(x_0, \ldots, x_n) \in \mathcal{L}_{Ad}$ und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{T}$ mit Schicht $< \alpha$, dann ist
$$[x \in L_\alpha : \phi(x, a_1, \ldots, a_n)^{L_\alpha}] \in \mathcal{T}$$
mit Schicht α.

Die Menge der RS-Terme mit Schicht kleiner α bezeichnen wir auch mit $\mathcal{T}_\alpha$. Man beachte, daß RS-Terme keine freien Variablen haben. Für $t \equiv [x \in L_\alpha : \phi(x, a_1, \ldots, a_n)^{L_\alpha}]$ nenne ich ϕ das Skelett von t und die Anzahl der in ϕ vorkommenden logischen Zeichen den äußeren Rang von t. Die RS-Formeln entstehen nun aus den Δ_0-Formeln der Sprache $\mathcal{L}_{Ad}$, also Formeln in denen nur beschränkte Quantoren vorkommen, indem für freie Variablen RS-Terme eingesetzt werden:

Definition 2.1.2 (*RS*-**Formel**)

1. $u \in v, u \notin v, Ad^{\xi}(v), \neg Ad^{\xi}(v)$ sind RS-Formeln für $\xi \in \mathcal{T}(K)$ und $u, v \in \mathcal{T} \cup Var$.
2. Sind A, B RS-Formeln, dann sind auch $A \wedge B$ und $A \vee B$ RS-Formeln.
3. Ist A eine RS-Formel und $x \in Var \setminus \{u\}$, dann sind auch $\forall x(x \notin u \vee A)$ und $\exists x(x \in u \wedge A)$ RS-Formeln.

Skelett und äußerer Rang sind genau wie bei den Termen definiert. Die Negation einer Formel ist wieder über die de Morganschen Regeln definiert. Im folgenden werden die üblichen Abkürzungen $A \to B$ für $\neg A \vee B$, $\forall x \in vB$ für $\forall x(x \in v \to B)$ etc. benutzt. Insbesondere schreiben wir $\mathrm{tran}(u)$ für $\forall x \in u.x \subseteq u$ und $\mathrm{infin}(u)$ für $\exists x \in u(x \subseteq x) \wedge \forall x \in u \forall y \in u \exists z \in u(x \in z \wedge y \in z)$.
Große lateinische Buchstaben stehen meist für RS-Formeln, während die griechischen Buchstaben ϕ, ψ, χ für $\mathcal{L}_{Ad}$-Formeln verwendet werden. Sind s, t RS-Terme, dann bezeichnet $A^{(s,t)}$ die RS-Formel, die aus der RS-Formel A entsteht, wenn wir in A alle auf t beschränkten Quantoren $Qx \in t$ durch $Qx \in s$ ersetzen. Wir schreiben $A^{(s,\alpha)}$ statt $A^{(s,L_\alpha)}$ und $A^{(\beta,\alpha)}$ statt $A^{(L_\beta,L_\alpha)}$. Für beschränkte Quantoren der Form $Qx \in L_\alpha$ wird im folgenden auch die abkürzende Schreibweise Qx^α verwendet.

Definition 2.1.3 Für θ RS-Term oder RS-Formel sei

$$k(\theta) := \{\alpha \in \mathcal{T}(K) : L_\alpha \text{ kommt in } \theta \text{ vor }\} \qquad lev(\theta) := |\theta| := \max(k(\theta) \cup \{0\})$$

Aus technischen Gründen sei noch $k(0) := k(1) := \emptyset$ und $lev(0) := lev(1) := 0$, wobei $0, 1$ hier nicht als Ordinalzahlen betrachtet werden und $k(\alpha) := \{\alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathcal{T}(K)$.
Für RS-Terme t ist $lev(t)$ die Schicht von t und somit

$$\mathcal{T}_\alpha = \{t \in \mathcal{T} : lev(t) < \alpha\}.$$

Wir schreiben $\mathcal{T}_t$ für $\mathcal{T}_{lev(t)}$.

Definition 2.1.4 Für RS-Terme a, b mit $lev(a) < lev(b)$ sei

$$a \overset{o}{\in} b :\equiv \begin{cases} B(a) & \text{für } b \equiv [x \in L_\beta : B(x)] \\ \top & \text{für } b \equiv L_\beta \end{cases} \qquad a \overset{o}{\notin} b :\equiv \neg(a \overset{o}{\in} b), \text{ wobei } \neg\top :\equiv \bot$$

und $\top, \bot$ keine RS-Formeln sind. Stattdessen definieren wir $\top \to A :\equiv \top \wedge A :\equiv \bot \vee A :\equiv A$.

Definition 2.1.5 Wir fassen jeden RS-Satz A als eine (möglicherweise unendliche) Konjunktion $\bigwedge(A_i)_{i\in J}$ oder Disjunktion $\bigvee(A_i)_{i\in J}$ von RS-Sätzen auf und schreiben hierfür $A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}$ bzw. $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$.

1. $Ad^\alpha(t) :\simeq \bigvee(L_\rho = t)_{\rho \in M^\alpha \cap (|t|+1)}$
2. $a \in b :\simeq \bigvee(t \overset{o}{\in} b \wedge t = a)_{t \in \mathcal{T}_b}$
3. $\exists x \in bA(x) :\simeq \bigvee(t \overset{o}{\in} b \wedge A(t))_{t \in \mathcal{T}_b}$
4. $(A_0 \vee A_1) :\simeq \bigvee(A_i)_{i \in \{0,1\}}$
5. $\neg A :\simeq \bigwedge(\neg A_i)_{i \in J}$ für $A \simeq \bigvee(A_i)_{i \in J}$.

Wir weisen nun jedem RS-Term und jedem RS-Satz eine Ordinalzahl aus $\mathcal{T}(K)$ zu:

Definition 2.1.6 des Ranges $rk(\theta)$ für RS-Terme und RS-Formeln durch primitive Rekursion über die Anzahl der in θ vorkommenden Symbole:

1. $rk(L_\alpha) := \omega \cdot \alpha$
2. $rk([x \in L_\alpha : A(x)]) := \max\{\omega \cdot \alpha + 1, rk(A(L_0)) + 2\}$
3. $rk(Ad^\xi(a)) := rk(\neg Ad^\xi(a)) := rk(a) + 5$
4. $rk(a \in b) := rk(a \notin b) := \max\{rk(a) + 6, rk(b) + 1\}$
5. $rk(\exists x \in bA(x)) := rk(\forall x \in bA(x)) := \max\{rk(b), rk(A(L_0)) + 2\}$

6. $rk(A \wedge B) := rk(A \vee B) := \max\{rk(A), rk(B)\} + 1$

Die wesentlichen Eigenschaften des Ranges sind im folgenden Lemma zusammengefasst:

Lemma 2.1.1 Sei $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$ oder $A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}$, dann gilt

a) Es existiert $n \in \omega$ mit $rk(A) = \omega \cdot lev(A) + n$.

b) Für alle $i \in J$ gilt $rk(A_i) < rk(A)$.

c) Für alle $i \in J$ gilt $k(A_i) \subseteq K(A) \cup k(i)$

d) Ist $rk(A) = \omega \cdot \alpha$, dann ist $A \equiv \exists x \in L_\alpha B(x)$ oder $A \equiv \forall x \in L_\alpha B(x)$.

e) $rk(A) = rk(\neg A)$.

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Eine RS-Formel A ist in $\Delta_0(\alpha)$, wenn $k(A) \subseteq \alpha$ ist. Eine RS-Formel ist in $\Pi_k(\alpha)$, wenn sie von der Gestalt

$$\forall x_1 \in L_\alpha \ldots Qx_k \in L_\alpha F(x_1, \ldots, x_k)$$

ist, wobei $\forall x_1, \ldots, Qx_k$ alternierende Quantoren sind und $F(L_0, \ldots, L_0)$ eine $\Delta_0(\alpha)$-Formel ist. $\Sigma_k(\alpha)$ ist entsprechend definiert.

2.2 Regeln, Herleitungen, Beweissysteme

Wir nennen endliche Mengen von RS-Formeln Sequenzen und bezeichnen diese mit Γ, Γ', Δ. Desweiteren werden die üblichen abkürzenden Schreibweisen für Sequenzen verwendet: $A_1, \ldots, A_n$ für $\{A_1, \ldots, A_n\}$, A, Γ, Γ' für $\{A\} \cup \Gamma \cup \Gamma'$ etc.
Wir setzen noch

$$k(\Gamma) := \bigcup_{A\in\Gamma} k(A).$$

Definition 2.2.1 (Regel) Eine Regel $\mathcal{I}$ besteht aus

1. einer Indexmenge $|\mathcal{I}|$ für die Prämissen von $\mathcal{I}$,
2. einer Sequenz $\Delta(\mathcal{I})$, den Hauptformeln von $\mathcal{I}$,
3. einer Familie von Sequenzen $(\Delta_i(\mathcal{I}))_{i\in|\mathcal{I}|}$, den Nebenformeln von $\mathcal{I}$,
4. einer Menge $Eig(\mathcal{I})$, die entweder leer ist oder ein Singleton $\{y\}$ mit $y \notin FV(\Delta(\mathcal{I}))$; y heißt dann die Eigenvariable von $\mathcal{I}$,
5. einer endlichen Menge $k(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{K})$.

Wir können nun induktiv definieren, was eine Herleitung ist:

Definition 2.2.2 (Herleitung)
Ist $\mathcal{I}$ eine Regel und $(d_i)_{i\in|\mathcal{I}|}$ eine Familie von Herleitungen mit $Eig(\mathcal{I}) \cap FV(\Gamma) = \emptyset$ und

$$\Gamma := \Delta(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{i\in|\mathcal{I}|} (End(d_i) \setminus \Delta_i(\mathcal{I})) \text{ ist endlich,}$$

dann ist $d := \mathcal{I}(d_i)_{i\in|\mathcal{I}|}$ eine Herleitung mit $End(d) := \Gamma$, $depth(d) := \sup\{depth(d_i) + 1 : i \in |\mathcal{I}|\}$. $End(d)$ heißt die Endsequenz von d.

Eine Regel $\mathcal{I}$ heißt endlich, wenn $|\mathcal{I}| = \{0, \ldots, n-1\} \in \omega$.
Eine Herleitung d heißt endlich, wenn alle in d verwendeten Regeln endlich sind.

Bezeichnungen:

1. $$(\mathcal{I})\frac{\ldots \Delta_i \ldots (i \in J)}{\Delta}[!y!]$$
   steht für $\mathcal{I}$ ist eine Regel mit $|\mathcal{I}| = J, \Delta(\mathcal{I}) = \Delta, \Delta_i(\mathcal{I}) = \Delta_i$ und $Eig(\mathcal{I}) = \emptyset$ bzw. $Eig(\mathcal{I}) = \{y\}$.

2. Ist $|\mathcal{I}| = \{0, \ldots, n\}$, so schreiben wir auch
   $$(\mathcal{I})\frac{\Delta_0 \ldots \Delta_n}{\Delta}$$
   und ist $|\mathcal{I}| = \emptyset$ auch
   $$(\mathcal{I})\Delta.$$

3. Regeln mit $|\mathcal{I}| = \emptyset$ nennen wir auch Axiome oder atomare Herleitungen.

4. Ist $|\mathcal{I}| = \{0, \ldots, n\}$, schreiben wir auch $d = \mathcal{I}d_0 \ldots d_n$ statt $d = \mathcal{I}(d_i)_{i \in |\mathcal{I}|}$.

Bemerkung: Ist $d = \mathcal{I}(d_i)_{i \in |\mathcal{I}|}$ eine Herleitung mit $\Delta(\mathcal{I}) \subseteq \Gamma$ und f.a. $i \in |\mathcal{I}|$ ist $End(d_i) \subseteq \Gamma \cup (\Delta_i)(\mathcal{I})$, dann ist $End(d) \subseteq \Gamma$.

Definition 2.2.3 Sei $d = \mathcal{I}d_0 \ldots d_{n-1}$ eine endliche Herleitung, dann seien

$$k(d) := k(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{i<n} k(d_i), \quad k_c(d) := (k(\mathcal{I}) \setminus k(\Delta(\mathcal{I}))) \cup \bigcup_{i<n} k_c(d_i).$$

Lemma 2.2.1 Ist d eine endliche Herleitung, so daß $k(\Delta_i(\mathcal{I})) \subseteq k(\mathcal{I}) \cup k(\Delta(\mathcal{I}))$ f.a. Regeln $\mathcal{I}$ in d und alle $i \in |\mathcal{I}|$ gilt, dann ist $k(d) \subseteq k(End(d)) \cup k_c(d)$.

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Definition 2.2.4 (Beweissystem)
Ein Beweissystem ist eine Menge von Regeln.
Ein Beweissystem $\mathcal{S}$ heißt endlich, wenn alle Regeln von $\mathcal{S}$ endlich sind.
Eine Herleitung d heißt eine $\mathcal{S}$-Herleitung, wenn alle Regeln, die in d vorkommen zu $\mathcal{S}$ gehören.

2.3 Das Beweissystem $RS(\mathcal{K})$

Die Gültigkeitsbeziehung in einer Struktur $\langle M, \ldots \rangle$ läßt sich als Herleitungskalkül auffassen: Die Formel $\forall x \phi(x)$ ist gültig, wenn die möglicherweise unendlich vielen Prämissen $\phi(a)$ für $a \in M$ gültig sind. Dieser Kalkül ist natürlich korrekt in dem Sinne, daß er von (in der Struktur) gültigen Formeln zu gültigen Formeln führt. Er bleibt auch korrekt, wenn wir zu diesem Kalkül weitere Regeln zufügen, die in der gewählten Struktur gültig sind. Bei der hier vorliegenden Struktur handelt es sich um ein Anfangsstück der konstruktiblen Hierarchie. Die Regeln Cut_C und $Ref_{\mathcal{K}}A$ dienen dazu, unseren endlichen Kalkül in den unendlichen Kalkül einzubetten. Wir nennen eine (unendliche) Herleitung schnittfrei, wenn sie keine Regel Cut_C enthält. Schnittfreie Herleitungen haben insbesondere die Eigenschaft, daß in der gesamten Herleitung nur Gentzensche Teilformeln der Formeln der Endsequenz verwendet werden. Diese wichtige Eigenschaft, die man auch die Teilformeleigenschaft nennt, wollen wir uns später zunutze machen. Betrachten wir den unendlichen Kalkül, der aus den Regeln $\bigwedge_A, \bigvee_A^{i_0}$ und Cut_C besteht, so ist leicht zu sehen, daß sich wegen der Symmetrie der Regeln Schnitte leicht eliminieren lassen. Dies sieht anders aus, wenn wir noch die für die Einbettung der Π_3-Reflexionen notwendige Regel $Ref_{\mathcal{K}}A$ hinzunehmen. Um in diesem Kalkül unter bestimmten Voraussetzungen Schnitte vom Rang $\mathcal{K}$ zu eliminieren, verwenden wir die Regel $Ref_{\pi}^{\xi}A(s)$. Sie erlaubt es aus gewissen Herleitungen $Ref_{\mathcal{K}}A$-Schlüsse zu entfernen, indem wir neue $Ref_{\pi}^{\xi}A(s)$-Schlüsse einführen, die wiederum einfacher zu handhaben sind (vgl. [Rat94]).

Regeln von $RS(\mathcal{K})$:

$(\bigwedge_A)$ $$\frac{\cdots A_i \cdots (i \in J)}{A}$$ falls $A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}$

$(\bigvee_A^{i_0})$ $$\frac{A_{i_0}}{A}$$ falls $A \simeq \bigvee(A_i)_{i\in J}$ und $i_0 \in J$

(Cut_C) $$\frac{C \quad \neg C}{\emptyset}$$

$(Ref_{\mathcal{K}}A)$ $$\frac{A}{\exists z \in L_{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(z) \wedge z \neq \emptyset \wedge A^{(z,\mathcal{K})})}$$ falls $A \in \Pi_3(\mathcal{K})$

$(Ref_{\pi}^{\xi}A(s))$ $$\frac{A(s)}{\exists z \in L_\pi(Ad^\xi(z) \wedge \exists u \in zA(u)^{(z,\pi)})}$$

falls $A(s) \in \Pi_2(\pi)$ und $\xi \in C(m(\pi),\pi) \cap m(\pi)$

(Rep) $$\frac{\emptyset}{\emptyset}$$

$$k(\mathcal{I}) := \begin{cases} k(\Delta(\mathcal{I})) \cup k(i_0) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = \bigvee_A^{i_0} \\ k(C) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Cut_C \\ k(\Delta(\mathcal{I})) & \text{sonst} \end{cases}$$

Man beachte: $k(\Delta(\mathcal{I})) \subseteq k(\mathcal{I})$

2.4 Bezeichnungssysteme

$RS(\mathcal{K})$-Herleitungen sind im allgemeinen keine endlichen Objekte. Um weiter von einem finiten Standpunkt aus zu argumentieren, führen wir daher Bezeichnungen für einige $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen ein und arbeiten dann nur noch mit diesen Bezeichnungen. Wir geben zunächst an, was ein Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen ist:

Definition 2.4.1 (Bezeichnungssysteme)
Ein Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen besteht aus einer nichtleeren Menge $\mathcal{D}$ endlicher Herleitungen d mit $FV(End(d)) = \emptyset$ und Abbildungen
$o, deg, Ref : \mathcal{D} \longrightarrow On$,
$tp : \mathcal{D} \longrightarrow RS(\mathcal{K})$,
$[] : \{(d,i) : d \in \mathcal{D}$ und $i \in |tp(d)|\} \longrightarrow \mathcal{D}$ (wir schreiben $d[i]$ für $[](d,i)$),
so daß f.a. $d \in \mathcal{D}$ gilt:

a) $\Delta(tp(d)) \subseteq End(d)$

b) $End(d[i]) \subseteq End(d), \Delta_i(tp(d))$ f.a. $i \in |tp(d)|$

c) $o(d[i]) < o(d)$ f.a. $i \in |tp(d)|$

d) $deg(d[i]) \leq deg(d)$ f.a. $i \in |tp(d)|$

e) $Ref(d[i]) \leq Ref(d)$ f.a. $i \in |tp(d)|$

f) $tp(d) = Cut_C \Rightarrow rk(C) < deg(d)$

g) $tp(d) = \bigvee_A^{i_0} \Rightarrow k(i_0) < o(d)$

h) $tp(d) = \bigwedge_A \Rightarrow k(i) < o(d)$ f.a. $i \in |tp(d)|$

i) $tp(d) = Ref_{\mathcal{K}}A \Rightarrow \mathcal{K} < o(d)$.

j) $tp(d) = Ref_\tau^\sigma A(s) \Rightarrow \sigma < Ref(d)$ und $\tau, o(d[0]) + 1 < o(d)$ und $\sigma \in C(m(\tau), \tau) \cap m(\tau)$.

Ein Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen heißt normal, wenn

k) $k(End(d)) \subseteq k(d)$ f.a. $d \in \mathcal{D}$.

Ein Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen heißt kontrolliert durch den Operator $\mathcal{H} : \mathcal{P}(On) \longrightarrow \mathcal{P}(On)$, wenn f.a. $d \in \mathcal{D}$ gilt:

l) $k(tp(d)) \cup \{o(d)\} \subseteq \mathcal{H}(k(d))$

m) $k(d[i]) \cup \{o(d[i])\} \subseteq \mathcal{H}(k(d) \cup k(i))$ f.a. $i \in |tp(d)|$.

$tp(d)$ ist die letzte Regel die in der von d bezeichneten unendlichen Herleitung angewendet wurde, $d[i]$ ist eine Bezeichnung der i-ten Teilherleitung, o ist die Ordinalzahlindizierung und $deg(d)$ bzw. $Ref(d)$ sind Schranken für die in d vorkommenden Cut- bzw. Π_2-Reflexions-Schlüsse. Diese Definition entspricht im wesentlichen der aus [Bu01b]. Neu gegenüber [Bu01b] ist die Funktion $Ref : \mathcal{D} \longrightarrow On$ zusammen mit den Bedingungen e),j), die besagen: Für die Ref_τ^σ-Schlüsse, die in der von d bezeichneten unendlichen Herleitung auftreten, ist $Ref(d)$ eine obere Schranke für σ und die σ-Mahlo-Zahlen sind stationär in τ. Neu sind auch die Bedingungen h),i),k) und die Forderung

$$o(d[i]) \in \mathcal{H}(k(d) \cup k(i)).$$

Das Konzept der operatorkontrollierten Herleitungen stammt ebenfalls von Buchholz [Bu92].
Wenn $(\mathcal{D}, o, deg, Ref, tp, [])$ ein Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen ist, dann läßt sich $d \in \mathcal{D}$ durch transfinite Rekursion über $o(d)$ zu einer unendlichen $RS(\mathcal{K})$-Herleitung

$$d^\infty := tp(d)(d[i]^\infty)_{i \in |tp(d)|}$$

entfalten. Es ist leicht einzusehen, daß d^∞ eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung mit

$$End(d^\infty) \subseteq End(d), depth(d^\infty) \leq o(d), rk(C) < deg(d) \text{ f.a. } Cut_C \text{ in } d^\infty \text{ und g)-j) entsprechend}$$

ist. Wir werden im folgenden nur noch mit Bezeichnungen unendlicher Herleitungen argumentieren und statt transfiniter Rekursion primitive Rekursion verwenden.

Kapitel 3

Die Bezeichnungssysteme $\mathbf{RS}^0$ und $\mathbf{RS}^+$

3.1 Das Bezeichnungssystem $\mathbf{RS}^0$

Wir definieren nun zunächst ein Bezeichnungssystem, das es uns erlaubt, alle Axiome von Π_3-Reflexion einzubetten, d.h. wir haben für jedes Axiom von Π_3-Reflexion eine Bezeichnung für eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung, die dieses Axiom herleitet.

Definition 3.1.1 (Axiomensystem für Π_3-Reflexion)

(Ext)	$\forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow (x \in z \rightarrow y \in z))$
(Fund)	$\forall \vec{z} \forall x_0 (\forall x (\forall y \in x . \varphi(y, \vec{z}) \rightarrow \varphi(x, \vec{z})) \rightarrow \varphi(x_0, \vec{z}))$
(Paar)	$\forall x \forall y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$
(Ver)	$\forall x \exists y \forall z \in x (z \subseteq y)$
(Unend)	$\forall x \exists y \mathrm{infin}(y)$
(φ-Sep)	$\forall \vec{z} \forall w \exists y (\forall x \in y (x \in w \wedge \varphi(x, \vec{z})) \wedge \forall x \in w (\varphi(x, \vec{z}) \rightarrow x \in y))$ für $\varphi \in \Delta_0$
(Π_3-Ref)	$\forall \vec{z} (\varphi(\vec{z}) \rightarrow \exists x (\mathrm{tran}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \varphi(\vec{z})^x))$ für $\varphi \in \Pi_3$

Definition 3.1.2 (Die Sequenzenmenge $\mathcal{AX}^0$) Sei $\mathcal{AX}^0$ die Menge endlicher Sequenzen von RS-Sätzen, die durch die Schemata 1-17 gegeben werden:

(1) $(\forall x_k \varphi(a_0, \ldots, a_{k-1}, x_k))^\lambda$
falls $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathcal{T}_\lambda$ und $\forall x_0 \ldots x_k \varphi(x_0, \ldots, x_k)$ ein Axiom (Ext), (Fund), (Paar), (Ver), (φ-Sep) mit $\lambda \in Lim$ oder (Unend) mit $\lambda \in R$.

(2) $\forall z_k \in L_\mathcal{K} (\varphi(a_0, \ldots, a_{k_1}, z_k)^\mathcal{K} \rightarrow \exists x \in L_\mathcal{K} (\mathrm{tran}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \varphi(a_0, \ldots, a_{k_1}, z_k)^x)$
falls $a_0, \ldots, a_{k_1} \in \mathcal{T}_\mathcal{K}$ und $\forall \vec{z} (\varphi(\vec{z}) \rightarrow \exists x (\mathrm{tran}(x) \wedge x \neq \emptyset \wedge \varphi(\vec{z})^x))$ ein Axiom (Π_3-Ref).

(3) $a = a$

(4) $a \subseteq a$

(5) $b \subseteq L_\alpha$ falls $lev(b) \leq \alpha$

(6) $\forall x \in a (x \subseteq L_\alpha)$ falls $lev(a) \leq \alpha + 1$

(7) $\forall x \in b F(x)$ falls $b \equiv [x \in L_\beta : F(x)]$

(8) $\forall x \in a (F(x) \rightarrow x \in b)$ falls $b \equiv [x \in L_\beta : x \in a \wedge F(x)]$

(9) $\exists x \in L_\alpha (\forall y \in x A(y) \wedge \neg A(x)), \forall x \in a A(x)$ falls $lev(a) \leq \alpha$

(10) $[s_1 \neq t_1], \ldots, [s_n \neq t_n], \neg A(\vec{s}), A(\vec{t})$ falls in $A(\vec{x})$ jede Variable aus $\vec{x}$ höchstens einmal vorkommt

(11) $[s_1 \neq t_1], \ldots, [s_n \neq t_n], a \notin t_n, \neg B(s_1, \ldots, s_{n-1}, a), A(\vec{t})$ falls $A(\vec{x}) \equiv \exists y \in x_n B(x_1, \ldots, x_{n-1}, y)$ und in $A(\vec{x})$ jede Variable aus $\vec{x}$ höchstens einmal vorkommt

(12) $[s_1 \neq t_1], a \notin t_2, a \neq s_1, t_1 \in t_2$

(13) $a \not\subseteq b, L_\beta \notin a$ falls $lev(b) \leq \beta$

(14) $L_\beta \not\subseteq s, s \notin b$, falls $lev(b) \leq \beta$

(15) $\forall y \in L_\omega \exists u \in L_\omega(\exists y \in u(x \in y) \wedge \mathcal{A}(u)$ mit $\mathcal{A}(u) :\equiv \forall x \in u(\forall y \in x(y \neq y) \vee \mathcal{B}(u,x))$ und $\mathcal{B}(u,x) :\equiv \exists x_0 \in u(x_0 \in x \wedge \forall y \in x(y \subseteq x_0))$

(16) $\mathcal{A}(a_n)$ mit $a_n := [x \in L_{n+1} : x = L_0 \vee \ldots \vee x = L_n]$

(17) $\forall y \in L_0(y \neq y)$

Sei $\Pi = (A_1, \ldots, A_n)$.

$$o(\Pi) := \begin{cases} \omega^{rk(\varphi(\vec{a})^\lambda)} \# \omega \cdot \lambda & \text{falls} \quad \Pi = (\varphi(\vec{a})^\lambda) \text{ von der Art } (1)(Fund) \\ \omega^{rk(\forall x \in a A(x))} \# \omega \cdot lev(a) & \text{falls} \quad \Pi = (F, \forall x \in aA) \text{ von der Art } (9) \\ \omega^{rk(A_1)} \# \ldots \# \omega^{rk(A_n)} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$deg(\Pi) := \begin{cases} \omega \cdot 2 & \text{falls} \quad \Pi \text{ von der Art (15) oder (16)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für jedes $\Pi = (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{AX}^0$ der Art (j) definieren wir eine Regel $Ax_j^*\Pi$ mit $|Ax_j^*\Pi| := \emptyset$, $\Delta(Ax_j^*\Pi) := \{A_1, \ldots, A_n\}$, $k(Ax_j^*\Pi) := k(\Delta(Ax_j^*\Pi))$.

Definition 3.1.3 (Das endliche Beweissystem RS^0)
Formeln: RS-Sätze
Regeln: $Ax_j^*\Pi$ und $\bigwedge_{A_0 \wedge A_1}$, $\bigvee_A^{i_0}$, Cut_C, $Ref_{\mathcal{K}}A$

Definition 3.1.4 (Das Bezeichnungssystem $\mathbf{RS^0}$)
$\mathbf{RS^0} := (\mathcal{D}_0, o, deg, Ref, tp, [])$ mit
$\mathcal{D}_0$:=Menge aller RS^0-Herleitungen

$$o(\mathcal{I}d_0 \ldots d_n) := \begin{cases} o(\Pi) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Ax_j^*\Pi \\ \max\{o(d_0), lev(i_0)\} + 1 & \text{falls} \quad \mathcal{I} = \bigvee_A^{i_0} \\ \max\{o(d_0), \mathcal{K}\} + 1 & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Ref_{\mathcal{K}}A \\ \max\{o(d_0), \ldots, o(d_n)\} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$deg(\mathcal{I}d_0 \ldots d_n) := \begin{cases} deg(\Pi) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Ax_j^*\Pi \\ \max\{deg(d_0), deg(d_1), rk(C) + 1\} & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Cut_C \\ \max\{deg(d_0), \ldots, deg(d_n)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$Ref(\mathcal{I}d_0 \ldots d_n) = 0$

Ist $d = \mathcal{I}d_0 \ldots d_n$ mit $\mathcal{I} \neq Ax_j^*\Pi$, dann sei $tp(d) := \mathcal{I}$ und $d[i] := d_i$.

Ist $d = Ax_j^*\Pi$, dann sei $tp(d) := \bigwedge_A$, wobei A diejenige $\bigwedge$-Formel A_i mit dem kleinsten Index i in $\Pi = (A_1, \ldots, A_n)$ sei.
$d[i]$ sei (mit einer etwas anderen Bezeichnung der Axiome, da wir weniger Axiome und damit eine

andere Numerierung haben) definiert wie in [Bu01b].
Neu ist nur $d = Ax_1^*\Pi$ mit

$$\Pi = (\forall z \in L_{\mathcal{K}}(\varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, z) \to \exists x \in L_{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(x) \land x \neq \emptyset \land \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, z)^x))$$

und $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$.
Für diesen Fall sei

$$d[a_n] := \bigvee\nolimits^*_{A_{a_n}} Ref_{\mathcal{K}}\varphi(a_0, \dots, a_n)^{\mathcal{K}} Ax_{10}^*(\neg\varphi(a_0, \dots, a_n), \varphi(a_0, \dots, a_n))$$

für $a_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{K}}$.

Satz 3.1.1 $\mathbf{RS^0}$ ist ein normales Bezeichnungssystem für RS($\mathcal{K}$)- Herleitungen und wird durch jeden Operator kontrolliert, der abgeschlossen gegenüber den Funktionen $\lambda x, y.x\#\mathrm{y}$, $\lambda\mathrm{x}.\omega \cdot \mathrm{x}$, $\lambda\mathrm{x}.\omega^{\mathrm{x}}$ und $\lambda x.x^R$ ist.

Beweis: Man sieht leicht, daß $\mathbf{RS^0}$ normal ist. Im Vergleich zu [Bu01b] sind die Bedingungen für Bezeichnungssysteme nur noch für $d = (Ref_{\mathcal{K}})Ad_0$ und $d = Ax_1^*\Pi$, wobei Π aus einem $\Pi_3 - Ref$-Axiom hervorgegangen ist, nachzurechnen und zu überprüfen, daß auch für alle anderen Herleitungen die schärfere Bedingung $o(d[i]) \in \mathcal{H}(k(d) \cup k(i))$ erfüllt ist. Die zusätzlichen Forderungen e) und j) an Bezeichnungssysteme sind hier trivialerweise erfüllt, und auch die zusätzlichen Forderungen h) und i) lassen sich leicht verifizieren. Die einfachen Beweise, soweit sie nicht bereits in [Bu01b] ausgeführt sind, seien dem Leser überlassen. □

3.2 Das Bezeichnungssystem RS$^+$

Im nächsten Schritt definieren wir endliche Beweissysteme RS$^\lambda$, die es uns erlauben Bezeichnungen für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen anzugeben, die die Tautologien der Prädikatenlogik 1. Stufe herleiten. Zusammen mit unserem Bezeichnungssystem RS^0 und der Schnittregel ist damit Π_3-Reflexion eingebettet.

Definition 3.2.1 (RS$_\lambda$**-Formeln)**

1. $u, v \in \mathcal{T}_\lambda \cup Var, \xi \in On \Rightarrow u \in v, u \notin v, Ad^\xi(u), \neg Ad^\xi(u)$ RS_λ-Formeln
2. A, B RS_λ-Formeln $\Rightarrow A \land B, A \lor B, \forall x \in L_\lambda A, \exists x \in L_\lambda A$ RS_λ-Formeln
3. A, B RS_λ-Formeln und $x \neq u, u \in \mathcal{T}_\lambda \cup Var \Rightarrow \forall x \in uA, \exists x \in uA$ RS_λ-Formeln

Definition 3.2.2 $rk_0(A)$ für A RS_λ-Formel

1. $rk_0(A) = rk_0(\neg A) = 0$ für A atomar
2. $rk_0(A \land B) = rk_0(A \lor B) = \max\{rk_0(A), rk_0(B)\} + 1$
3. $rk_0(\forall x \in aA) = rk_0(\exists x \in aA) = rk_0(A) + 2$

Lemma 3.2.1 $rk(A) < \lambda + rk_0(A)$ für $\lambda = \omega^\lambda$ und A RS_λ-Satz.

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Definition 3.2.3 Das endliche Beweissystem RS^λ besteht aus den folgenden Regeln:

$(Ax^\lambda_{\neg A,A})$ $\quad \neg A, A$

$(Ax^\lambda_{\forall x\in uA})$ $\quad \neg\forall x \in L_\lambda(x \in u \to A), \forall x \in uA$ falls $u \in \mathcal{T}_\lambda \cup Var, u \neq x$

$(Ax^\lambda_{\exists x\in uA})$ $\quad \neg\exists x \in L_\lambda(x \in u \wedge A), \exists x \in uA$ falls $u \in \mathcal{T}_\lambda \cup Var, u \neq x$

$(\bigwedge_{A_0\wedge A_1})$ $\quad \dfrac{A_0 \quad A_1}{A_0 \wedge A_1}$ $\qquad (\bigvee^k_{A_0\vee A_1})$ $\quad \dfrac{A_k}{A_0 \vee A_1}$

$(\forall^y_{\forall x\in L_\lambda A})$ $\quad \dfrac{A_x(y)}{\forall x \in L_\lambda A}!y!$ $\qquad (\exists^v_{\exists x\in L_\lambda A})$ $\quad \dfrac{A_x(v)}{\exists x \in L_\lambda A}$

falls $v \in \mathcal{T}_\lambda \cup Var$

(Cut_C) $\quad \dfrac{C \quad \neg C}{\emptyset}$

$$k(\mathcal{I}) := \begin{cases} k(A) \cup k(i_0) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = \exists^{i_0}_A \\ k(C) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Cut_C \\ k(\Delta(\mathcal{I})) & \text{sonst} \end{cases}$$

Vereinbarung: d, d_i bezeichnen in diesem Abschnitt RS^λ- Herleitungen und für λ gelte $\omega^\lambda = \lambda$.

Definition 3.2.4 $o(d), deg(d)$
$o(Ax^\lambda_{\neg A,A}) := o(Ax^\lambda_{Qx\in uA}) := \omega^{\lambda+rk_0(A)+2}$, $o(\mathcal{I}d_0 \dots d_n) := \max\{o(d_0), \dots, o(d_n)\} + 1$

$$deg(\mathcal{I}d_0 \dots d_n) := \begin{cases} \max\{\lambda + rk_0(C), deg(d_0), deg(d_1)\} & \text{falls} \quad \mathcal{I} = Cut_C \\ \max\{0, deg(d_0), \dots, deg(d_n)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.2.5 $FV(d)$
$FV(\mathcal{I}d_0 \dots d_n) := FV(\mathcal{I}) \cup \bigcup_{i=0}^n (FV(d_i) \setminus Eig(\mathcal{I}))$ mit

$$FV(\mathcal{I}) := \begin{cases} FV(\Delta(\mathcal{I})) \cup FV(v) & \text{falls} \quad \mathcal{I} = \exists^v_A \\ FV(\Delta(\mathcal{I})) & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$Eig(\mathcal{I}) := \begin{cases} \{y\} & \text{falls} \quad \mathcal{I} = \forall^y_A \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 3.2.6 Herleitungen d mit $FV(d) = \emptyset$ heißen geschlossen.

Definition 3.2.7 $d(z/t)$ für $t \in \mathcal{T}_\lambda$

$$(\mathcal{I}d_0 \dots d_n)(z/t) := \begin{cases} \mathcal{I}d_0 \dots d_n & \text{falls} \quad Eig(\mathcal{I}) = \{z\} \\ \mathcal{I}(z/t)d_0(z/t) \dots d_n(z/t) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$Ax^\lambda_{\neg A,A}(z/t) := Ax^\lambda_{\neg A_z(t),A_z(t)} \quad Ax^\lambda_{Qx\in uA}(z/t) := (Ax^\lambda_{(Qx\in uA)_z(t)})$$
$$\bigwedge_{A_0\wedge A_1} := \bigwedge_{{A_0}_z(t)\wedge {A_1}_z(t)} \quad \bigvee^k_{A_0\vee A_1}(z/t) := \bigvee^k_{{A_0}_z(t)\vee {A_1}_z(t)}$$
$$Cut_C(z/t) := Cut_{C_z(t)}$$
$$\forall^y_A(z/t) := \forall^y_{A_z(t)} \quad \exists^v_A(z/t) := \exists^{v_z(t)}_{A_z(t)}$$

Lemma 3.2.2 Ist d eine RS$^\lambda$-Herleitung und $t \in \mathcal{T}_\lambda$, dann ist $d(z/t)$ eine RS$^\lambda$-Herleitung mit $End(d(z/t)) \subseteq End(d)_z(t)$, $deg(d(z/t)) = deg(d)$, $o(d(z/t)) = o(d)$ und $k(d(z/t)) \subseteq k(d) \cup k(t)$.

Beweis: Induktion über die Länge der Herleitung d. □

Lemma 3.2.3 a) $FV(End(d)) \subseteq FV(d)$

b) $FV(d(z/t)) = FV(d) \setminus \{z\}$ für $t \in \mathcal{T}_\lambda$.

Beweis: Induktion über die Länge der Herleitung d. Für Details siehe [Bu01b]. □

Lemma 3.2.4 a) Zu jeder RS^λ-Herleitung d existiert eine (aus d berechenbare) RS^λ-Herleitung d' mit $End(d') \subseteq End(d)$, $deg(d') = deg(d)$, $o(d') = o(d)$ und $FV(d') = FV(End(d))$.

b) Wenn $d = \mathcal{I}d_0 \dots d_n$ geschlossen ist und $Eig(\mathcal{I}) = \emptyset$, dann sind auch $d_0 \dots d_n$ geschlossen.

c) Wenn $d = \forall^x_A d_0$ geschlossen ist, dann ist auch $d_0(x/t)$ geschlossen für $t \in \mathcal{T}_\lambda$.

Beweis: a) Induktion über die Mächtigkeit von $FV(d) \setminus FV(End(d))$. Für Details siehe [Bu01b].
b) Folgt aus $FV(d_i) \subseteq FV(d) \cup Eig(\mathcal{I})$.
c) Folgt mit dem vorangegangenem Lemma aus $FV(d_0) \subseteq FV(d) \cup Eig(\mathcal{I}) = \{x\}$. □

Definition 3.2.8 Das Bezeichnungssystem **RS**$^+$
$\mathcal{D}_0 :=$ Menge der RS^0-Herleitungen.
$\mathcal{D}_\lambda :=$ Menge der geschlossenen RS$^\lambda$-Herleitungen.
$\mathcal{D}_1 := \bigcup\{\mathcal{D}_\lambda : \lambda = \omega^\lambda\}$.
$\mathcal{D}^+ := \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1$
RS$^+$ $:= (\mathcal{D}^+, o, deg, Ref, tp, [])$ mit $o(d)$, $deg(d)$, $Ref(d)$, $tp(d)$, $d[i]$ für $d \in \mathcal{D}_0$ wie im vorhergehenden Abschnitt und $o(d)$, $deg(d)$ für $d \in \mathcal{D}_1$ wie oben definiert.
Für $d \in \mathcal{D}_1$ sei $Ref(d) := 0$ und $tp(d)$, $d[i]$ seien definiert wie in [Bu01b] (wobei natürlich I durch λ ersetzt werden muß).

Satz 3.2.1 **RS**$^+$ ist ein normales Bezeichnungssystem für RS($\mathcal{K}$)- Herleitungen und wird durch jeden Operator kontrolliert, der abgeschlossen gegenüber den Funktionen $\lambda x, y.x\#\mathrm{y}$, $\lambda \mathrm{x}.\omega \cdot \mathrm{x}$, $\lambda \mathrm{x}.\omega^{\mathrm{x}}$ und $\lambda x.x^R$ ist.

Beweis: Der Beweis erfolgt wieder induktiv nach der Länge der Herleitung. Man sieht wieder leicht ein, daß **RS**$^+$ normal ist und auch die Forderungen an operatorkontrollierte Bezeichnungssysteme sind einfach zu verifizieren. Einige Hinweise finden sich in [Bu01b], der Rest sei dem Leser überlassen. □

Satz 3.2.2 Wenn $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine im Sinne der Prädikatenlogik 1. Stufe gültige Sequenz von Formeln der Sprache $(\in, (Ad^\xi)_{\xi \in On})$ ist, dann existiert eine (effektiv angebbare) RS$^\lambda$-Herleitung d mit $End(d) \subseteq \{\phi_1^\lambda, \dots, \phi_n^\lambda\}$, $FV(d) = FV(End(d))$ und $k(d) \subseteq \{0, \lambda\}$.

Beweis: Dazu wählt man einen geeigneten schnittfreien Sequenzenkalkül (z.B. einen Tait-Kalkül) und zeigt durch Induktion über die Länge der Herleitungen, daß die Aussage des Satzes für jede in diesem Kalkül herleitbare Sequenz gilt. Für Details siehe [Bu01b]. □

Bemerkung: Zu jeder RS$^\lambda$ Herleitung d existieren natürliche Zahlen k, m, n mit $o(d) = \omega^{\lambda+n} + m$ und $deg(d) \leq \lambda + k$.

Kapitel 4

Die Bezeichnungssysteme $\mathbf{H}_\delta$

Wir definieren nun Bezeichnungssysteme $\mathbf{H}_\delta$ ($\delta \in \mathcal{T}(K)$) für die Kollabierung und Schnittelimination. Wir beginnen zunächst damit, weitere Regeln einzuführen.

4.1 Das endliche Beweissystem $\mathcal{D}^*$

Definition 4.1.1 (Neue Regeln)

Allgemeine Hilfsregeln:

$$(\forall_w^{\beta,\alpha} F(x)) \quad \frac{\forall x^\alpha F(x)}{\forall x^\beta F(x)} \qquad \text{falls } \beta \leq \alpha$$

$$(I_{i_0}^A) \quad \frac{A}{A_{i_0}} \qquad \text{falls } A \simeq \bigwedge (A_i)_{i \in J} \text{ und } i_0 \in J$$

$$(S^{\forall x^\alpha F(x)}) \quad \frac{\forall x^\alpha F(x)}{\emptyset}$$

$$(B_A^{\beta,\kappa}) \quad \frac{A}{A^{\beta,\kappa}} \qquad \text{falls } A \in \Sigma_1(\kappa), \beta < \kappa \in \mathit{Reg} \cup \{\mathcal{K}\}$$

Prädikative Schnittelimination:

$$(R_C) \quad \frac{C \quad \neg C}{\emptyset} \qquad \text{falls } rk(C) \notin \mathit{Reg}$$

$$(E_\rho^\sigma) \quad \frac{\emptyset}{\emptyset} \qquad \text{falls } \rho \leq \sigma \text{ und } [\rho, \sigma[\cap \mathit{Reg} = \emptyset$$

Σ_3-Reflexion:

$$(8.9)^{\xi,\pi}_{A} \qquad \frac{A}{\exists z^\pi (Ad^\xi(z) \wedge A^{(z,\pi)})}$$

falls $A \in \Sigma_3(\pi), \xi \in C(m(\pi),\pi) \cap m(\pi)$

$$(8.10)^{\xi,\pi}_{A_1\wedge\ldots\wedge A_k} \qquad \frac{A_1,\ldots,A_k}{\exists z^\pi (Ad^\xi(z) \wedge A_1^{(z,\pi)} \wedge \ldots \wedge A_k^{(z,\pi)})}$$

falls $A_1,\ldots,A_k$ Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln und
$\xi \in C(m(\pi),\pi) \cap m(\pi), \xi > 0$

$$(N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t) \qquad \neg Ad^\xi(t), \neg C[\vec{s}]^t, \exists z^\pi (Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)$$

falls $B[\vec{s}]$ Konjunktion von Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln und
$C[\vec{s}]$ Normalform von $B[\vec{s}]$,[1]
$\xi \in C(m(\pi),\pi) \cap m(\pi), \xi > 0, t \in \mathcal{T}_\pi$

$$(N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]} \qquad \forall z^\pi (\neg Ad^\xi(z) \vee \neg C[\vec{s}]^z), \exists z^\pi (Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)$$

falls $B[\vec{s}]$ Konjunktion von Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln und
$C[\vec{s}]$ Normalform von $B[\vec{s}], \xi \in C(m(\pi),\pi) \cap m(\pi), \xi > 0$

Stationäres Kollabieren:

$$(H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} \qquad \frac{\Gamma, B}{\forall v^\pi (Ad^\alpha(v) \to \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})}), C^{(\pi,\mathcal{K})}}$$

falls $B \in \Pi_3(\mathcal{K})$ und
$C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$ und
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln

$$(H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) \qquad \frac{\Gamma, B}{\neg Ad^\alpha(s), \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}}$$

falls $B \in \Pi_3(\mathcal{K})$ und
$C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln und $s \in \mathcal{T}_\pi$

$$(10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} \qquad \frac{\Gamma}{\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}}$$

falls Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln

[1] Vgl. Seite 37.

Imprädikative Schnittelimination:

$$(H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}A(s) \quad \frac{A(s)}{A(s)^{(\eta,\pi)}}$$

falls $A(s) \in \Pi_2(\pi)$ und $\eta := \Psi^\sigma_\pi(\gamma + \omega^{\mu\cdot\zeta+\pi})$

$$(10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} \qquad \frac{\emptyset}{\emptyset}$$

$$\begin{array}{lcl} k(\forall^{\beta,\alpha}_w F(x)) & := & k(\forall x^\beta F(x)) \\ k(I^A_{i_0}) & := & k(A) \cup k(i_0) \\ k(S^{\forall x^\alpha F(x)}) & := & \emptyset \\ k(B^{\beta,\kappa}_A) & := & k(A^{(\beta,\kappa)}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} k(R_C) & := & \emptyset \\ k(E^\sigma_\rho) & := & \{\sigma\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} k((8.9)^{\xi,\pi}_A) & := & \{\xi,\pi\} \cup k(A) \\ k((8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k}) & := & \{\xi,\pi\} \cup k(A_1) \cup \ldots \cup k(A_k) \\ k((N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)) & := & \{\xi,\pi\} \cup k(\vec{s}) \cup k(t) \\ k((N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}) & := & \{\xi,\pi\} \cup k(\vec{s}) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} k((H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}) & := & \{\gamma,\pi\} \cup k(\Gamma) \cup k(B) \\ k((H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s)) & := & \{\gamma,\pi\} \cup k(\Gamma) \cup k(B) \cup k(s) \\ k((10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma}) & := & \{\gamma,\pi\} \cup k(\Gamma) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} k((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}A(s)) & := & \{\gamma,\mu,\pi,\sigma,\eta\} \cup k(A(s)) \\ k((10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma}) & := & \{\gamma,\mu,\pi,\xi\} \end{array}$$

Die meisten dieser Regeln sind im allgemeinen natürlich falsch. Wir werden sie nur unter bestimmten Umständen verwenden. $(\forall^{\beta,\alpha}_w F(x))$ dient dazu, aus einer Bezeichnung für eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung eine Bezeichnung für eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung zu machen, in der sämtliche Schlüsse $\frac{\ldots F(t) \ldots (t \in \mathcal{T}_\alpha)}{\forall x^\alpha F(x)}$ durch $\frac{\ldots F(t) \ldots (t \in \mathcal{T}_\beta)}{\forall x^\beta F(x)}$ ersetzt sind. $I^A_{i_0}$ erzeugt eine Bezeichnung für eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung, in der die Formel A durch A_{i_0} und alle Schlüsse $\frac{\ldots A_i \ldots (i \in J)}{A}$ durch *Rep* ersetzt sind. $S^{\forall x^\alpha F(x)}$ werden wir nur verwenden, wenn $o(h) < \alpha$ ist. In dieser Situation kann $\forall x^\alpha F(x)$ niemals Hauptformel einer Regelanwendung gewesen sein. $B^{\beta,\kappa}_A$ verwenden wir nur falls $o(h) < \beta$ ist. Da $o(h)$ insbesondere die Zeugen i_0 von $\bigvee^{i_0}_A$-Schlüssen majorisiert, läßt sich in der entsprechenden $RS(\mathcal{K})$-Herleitung jeder $\bigvee^{i_0}_A$-Schluß durch $\bigvee^{i_0}_{A^{(\beta,\kappa)}}$ ersetzen. Die Regeln (R_C) und (E^σ_ρ) entsprechen der bekannten prädikativen Schnitteliminationsprozedur. Die restlichen Regeln sind nach den Sätzen in [Rat92] benannt, die die Beweistransformation der zugehörigen unendlichen Pendants behandeln. Die Aufgabe von $(8.9)^{\xi,\pi}_A$ besteht darin, $\Pi_2(\pi)$-Reflexion auf $\Sigma_3(\pi)$-Reflexion hochzuziehen und mit $(8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k}$ können wir auch Formeln reflektieren, deren Konjunktion zu einer $\Sigma_3(\pi)$-Formel äquivalent ist. An dieser Stelle kommen die neuen Regelanwendungen $Ref^\xi_\pi A(s)$ ins Spiel. Die Axiome $(N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)$, $(N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}$ erlauben uns entsprechende Teilherleitungen zu bezeichnen.

Die Regel $(10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma}$ stellt gewissermaßen den Schlüssel für diese Kollabierungs- und Schnittelimationstechnik dar. Um sie zu motivieren, betrachten wir die Beweistransformationen auf den entsprechenden unendlichen Gegenstücken. Wir wollen aus einer $RS(\mathcal{K})$-Herleitung von Teilformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln Γ mit Schnittrang $< \mathcal{K}+1$ eine $RS(\mathcal{K})$-Herleitung von $\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$ konstruieren. Gleichzeitig soll die Ordinalzahlindizierung zusammengeschoben (kollabiert) und der Rang der durchgeführten Schnitte verringert werden. Im unendlichen Fall geschieht dies durch transfinite Rekursion. In den Fällen, in denen die letzte Regelanwendung $\bigwedge_A$, $\bigvee_A^{i_0}$, $Ref^{\xi}_{\pi}(A(s))$ oder Cut_A ist, läßt sich die Induktionsvoraussetzung ohne Schwierigkeiten auf die Teilherleitungen anwenden. Wenn wir sichern, daß im Falle eines $\bigvee_A^{i_0}$-Schlusses der Zeuge i_0 unterhalb von π und der neuen Ordinalzahlindizierung und im Falle Cut_A in A außer $\mathcal{K}$ keine Ordinalzahlen oberhalb der neuen Ordinalzahlindizierung auftreten, erhalten wir die gesuchte $RS(\mathcal{K})$-Herleitung mit derselben Regel. Probleme bereitet lediglich der Fall, daß die letzte Regelanwendung $Ref_{\mathcal{K}}B$ ist. Für diesen Fall seien hier die wesentlichen Beweistransformationen skizziert, wobei $\vdots$ für unwesentliche Teile des neuen Herleitungsbaumes stehen und ich Γ der Einfachheit halber als Formel auffasse:

$$
\dfrac{\dfrac{\vdots \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots \quad \dfrac{\Gamma, B}{\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, B^{(\tau,\mathcal{K})}}\ I.V.}{\vdots}}{\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \exists u^{\pi}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})}\ \vdots}{\dots L_{\tau} \neq s, \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, \exists u^{\pi}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \dots (\tau \in M^{\alpha_0} \cap (|s|+1))}\ \bigwedge}{\neg Ad^{\alpha_0}(s), \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, \exists u^{\pi}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})}
$$

$$
\dfrac{\dots Ad^{\alpha_0}(s) \to \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, \exists u^{\pi}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \dots (s \in \mathcal{T}_{\pi})}{\forall x^{\pi}(Ad^{\alpha_0}(x) \to \Gamma^{(x,\mathcal{K})}), \exists u^{\pi}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})}\ \bigwedge
$$

Die Regeln $(H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s)$ und $(H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}$ erlauben nun die erste bzw. zweite unendliche Regel in diesem Teilbaum zu überspringen. $(8.10)^{\xi,\pi}_{\Gamma}$ liefert das Gegenstück $\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, \neg\forall x^{\pi}(Ad^{\alpha_0}(x) \to \Gamma^{(x,\mathcal{K})})$, um mit einem Schnitt das gewünschte Ergebnis zu erzielen. Aus der Skizze sollte auch deutlich werden, warum wir die Transformation für alle $\pi \in M^{\alpha}$ durchführen.
$(10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma}$ steht für die eigentliche Schnittelimination, die wiederum eine Kollabierung erfordert. Hier wird im Falle eines Schnittes mit Rang $\mathcal{K}$ auf $(10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma}$ zurückgegriffen. Der wesentliche Grund dafür, daß die Kollabierung möglich ist, liegt darin, daß wir nur Herleitungen betrachten deren Endsequenz aus $\Sigma(\pi)$-Formeln besteht, und die damit keine π-fache Verzweigung haben. Die problematischen Fälle sind hier die $Ref^{\xi}_{\pi}A(s)$-Schlüsse, die aber noch relativ einfach zu handhaben sind (vgl. auch [Rat94]). Dies läuft im wesentlichen so, daß wir unsere $\Pi_2(\pi)$-Formel erst invertieren (Regel $I_t^{A(s)}$), die Induktionsvoraussetzung anwenden, um dann auszunutzen, daß unsere Ordinalzahlindizierung kleiner geworden ist, damit der Zeuge für unsere $\Sigma_1(\pi)$-Formel weit unterhalb von π liegt und sich so π durch ein kleineres η ersetzen läßt (Regel $B^{(\eta,\pi)}_{A(s)_t}$). Mit der Regel $(H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}A(s)$ erhalten wir die nötigen Bezeichnungen für diese Transformationen.

Definition 4.1.2 (Induktive Definition der Menge $\mathcal{D}^*$ endlicher Herleitungen)

1. $\mathcal{D}^+ \subseteq \mathcal{D}^*$
2. $(N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t), (N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]} \in \mathcal{D}^*$
3. $h_0, h_1 \in \mathcal{D}^* \to \bigwedge_{A_0 \wedge A_1} h_0 h_1, \bigvee_A^{i_0} h_0, Cut_C h_0 h_1, \forall^{\beta,\alpha}_w F(x) h_0, I^A_{i_0} h_0, S^{\forall x^{\alpha} F(x)} h_0, B^{\beta,\kappa}_A h_0,$ $R_C h_0 h_1, E^{\sigma}_{\rho} h_0, (8.9)^{\xi,\pi}_A h_0, (8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\dots,A_k} h_0, (H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} h_0, (H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0,$ $(10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0, (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0, (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0 \in \mathcal{D}^*$

wobei die Ordinalzahlen und Formeln den in den Regeln angegebenen Nebenbedingungen genügen sollen.

4.2 Induktive Definition von $o(h), deg(h)$ und $Ref(h)$ für $h \in \mathcal{D}^*$

Für $h \in \mathcal{D}^+$ sind $o(h), deg(h)$ und $Ref(h)$ bereits definiert.

$$\begin{array}{lcl} o((N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)) & := & \pi^\omega \\ deg((N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)) & := & \pi+\omega \\ Ref((N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)) & := & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}) & := & \pi^\omega+3 \\ deg((N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}) & := & \pi+\omega \\ Ref((N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}) & := & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(\bigwedge_{A_0\wedge A_1} h_0h_1) & := & \max\{o(h_0), o(h_1)\}+1 \\ deg(\bigwedge_{A_0\wedge A_1} h_0h_1) & := & \max\{deg(h_0), deg(h_1)\} \\ Ref(\bigwedge_{A_0\wedge A_1} h_0h_1) & := & \max\{Ref(h_0), Ref(h_1)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(\bigvee^{i_0}_A h_0) & := & o(h_0)+1 \\ deg(\bigvee^{i_0}_A h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref(\bigvee^{i_0}_A h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(Cut_C h_0h_1) & := & \max\{o(h_0), o(h_1)\}+1 \\ deg(Cut_C h_0h_1) & := & \max\{rk(C)+1, deg(h_0), deg(h_1)\} \\ Ref(Cut_C h_0h_1) & := & \max\{Ref(h_0), Ref(h_1)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(\forall^{\beta,\alpha}_w F(x)h_0) & := & o(h_0) \\ deg(\forall^{\beta,\alpha}_w F(x)h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref(\forall^{\beta,\alpha}_w F(x)h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(I^A_{i_0}h_0) & := & o(h_0) \\ deg(I^A_{i_0}h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref(I^A_{i_0}h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(S^{\forall x^\alpha F(x)}h_0) & := & o(h_0) \\ deg(S^{\forall x^\alpha F(x)}h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref(S^{\forall x^\alpha F(x)}h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(B^{\beta,\kappa}_A h_0) & := & o(h_0) \\ deg(B^{\beta,\kappa}_A h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref(B^{\beta,\kappa}_A h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(R_C h_0h_1) & := & o(h_0)\#\mathrm{o}(\mathrm{h}_1) \\ deg(R_C h_0h_1) & := & \max\{rk(C), deg(h_0), deg(h_1)\} \\ Ref(R_C h_0h_1) & := & \max\{Ref(h_0), Ref(h_1)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o(E^\sigma_\rho h_0) & := & \hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \rho} o(h_0) \\ deg(E^\sigma_\rho h_0) & := & \rho \\ Ref(E^\sigma_\rho h_0) & := & Ref(h_0) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((8.9)^{\xi,\pi}_A h_0) & := & \pi^{o(h_0)} \\ deg((8.9)^{\xi,\pi}_A h_0) & := & deg(h_0) \\ Ref((8.9)^{\xi,\pi}_A h_0) & := & \xi + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k} h_0) & := & \max\{\varepsilon_{\pi+1}, o(h_0)+2\} \\ deg((8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k} h_0) & := & \max\{\pi+\omega, deg(h_0)\} \\ Ref((8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k} h_0) & := & \xi + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} h_0) & := & \Xi(\alpha+\pi) \\ deg((H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} h_0) & := & \Xi(\alpha+\pi) \\ Ref((H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} h_0) & := & \max\{\alpha, Ref(h_0)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0) & := & \Xi(\alpha+|s|)+\omega \\ deg((H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0) & := & \Xi(\alpha+\pi) \\ Ref((H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0) & := & \max\{\alpha, Ref(h_0)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0) & := & \Xi(\gamma+\mathcal{K}^{o(h_0)}+\pi) \\ deg((10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0) & := & \Xi(\gamma+\mathcal{K}^{o(h_0)}+\pi) \\ Ref((10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0) & := & \max\{\gamma+\mathcal{K}^{o(h_0)}, Ref(h_0)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0) & := & \Psi^\sigma_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)+\pi}) \\ deg((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0) & := & \Psi^\sigma_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)+\pi}) \\ Ref((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0) & := & \max\{\gamma+\omega^{\mu\cdot(o(h_0)+1)}, Ref(h_0)\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} o((10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0) & := & \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}) \\ deg((10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0) & := & \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}) \\ Ref((10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0) & := & \max\{\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} \end{array}$$

Man beachte: $\pi^\omega = (\omega^\pi)^\omega = \omega^{\pi\cdot\omega} = \varphi 0(\pi\cdot\omega)$.

4.3 Induktive Definition von $tp(h)$ und $h[i]$ für $h \in \mathcal{D}^*, i \in |tp(h)|$

Für $h \in \mathcal{D}^+$ sind $tp(h)$ und $h[i]$ bereits definiert. Die folgenden Definitionen von $h[i]$ sind teilweise sehr komplex. Sie sind im Anhang noch einmal in einer suggestiveren Schreibweise wiederholt.

Ist $A \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ eine Konjunktion von Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln, dann existiert eine $\mathcal{L}_{Ad}$-Formel $B[\vec{a}] \equiv B_1[\vec{a}] \wedge \ldots \wedge B_n[\vec{a}]$ und $\vec{s} \in \mathcal{T}_\pi^{<\omega}$ mit $A \equiv B[\vec{s}]^\pi$. Sei GML die Theorie in $\mathcal{L}_{Ad}$, die aus den Axiomen (Ext), (Paar), (Ver) und dem Axiomenschema $\varphi - Sep, \varphi \in \Delta_0$ (auf die reichere Sprache übertragen!) besteht. Zu $B[\vec{a}]$ existiert eine weitere $\mathcal{L}_{Ad}$-Formel $C[\vec{a}]$ in Σ_3-Gestalt, so daß die Äquivalenz von $B[\vec{a}]$ und $C[\vec{a}]$ in GML beweisbar ist. Es gibt also endlich viele Axiome $\phi_1, \ldots, \phi_k$ aus GML, so daß die Sequenz

$$\neg\phi_1, \ldots, \neg\phi_k, \neg B[\vec{a}], C[\vec{a}]$$

rein logisch herleitbar ist.
Da für die Kodierung von Mengentupeln nur das Paarmengenaxiom erforderlich ist, läßt sich $C[\vec{a}]$ so wählen, daß auch die Äquivalenz von $C[\vec{a}]^y$, $B[\vec{a}]^y$ in GML beweisbar ist, wenn y eine nichtleere transitive Menge ist, die das Paarmengenaxiom erfüllt. Es gibt also weitere Axiome $\psi_1, \ldots, \psi_l$ aus GML, so daß die Sequenz

$$\neg\psi_1, \ldots, \neg\psi_l, \neg(\mathrm{tran}(y) \wedge y \neq \emptyset \wedge (Paar)^y), \neg C[\vec{a}]^y, B[\vec{a}]^y$$

rein logisch herleitbar ist.
Lt. Satz 3.2.2 existieren also RS$^\pi$-Herleitungen d_0, d_1 von

$$\neg\phi_1^\pi, \ldots, \neg\phi_k^\pi, \neg B[\vec{a}]^\pi, C[\vec{a}]^\pi$$

und

$$\neg\psi_1^\pi, \ldots, \neg\psi_l^\pi, \neg(\mathrm{tran}(y) \wedge y \neq \emptyset \wedge (Paar)^y), \neg C[\vec{a}]^y, B[\vec{a}]^y$$

mit $FV(d_0) \subseteq \{a_0, \ldots, a_m\}$ und $FV(d_1) \subseteq \{a_0, \ldots, a_m, y\}$. Da $s_0, \ldots, s_m, L_\tau \in \mathcal{T}_\pi$ sind, sind auch $d_0(\vec{a}/\vec{s}), d_1(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau)$ RS$^\pi$-Herleitungen für $\tau < \pi$. Alle diese Dinge lassen sich effektiv aus A bzw. B berechnen. Wir bezeichnen $C[\vec{s}]$ dann auch als Normalform von $B[\vec{s}]$.
Wir definieren:

$$tp((N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)) := \bigwedge\nolimits_{\neg Ad^\xi(t)}$$

und

$$(N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)[\tau] := Cut_{C[\vec{s}]^\tau}(d_a, d_b) \text{ für } \tau \in M^\xi \cap |t|$$

mit

$$d_a := Ax^*_{10}(L_\tau \neq t, \neg C[\vec{s}]^t, C[\vec{s}]^\tau)$$

$$d_b := \bigvee\nolimits^\tau_{F_0} \bigwedge\nolimits_{F_1} (Cut_{\psi_0}(d_{b_1}, d_{b_2}), \bigvee\nolimits^\tau_{Ad^\xi(L_\tau)} Ax^*_3(L_\tau = L_\tau))$$

$$d_{b_1} := \bigwedge\nolimits^*_{\psi_0}((Ax^*_6(\mathrm{tran}(L_\tau)), \bigvee\nolimits^0_{L_\tau \neq \emptyset} Ax^*_3(L_0 = L_0)), Ax^*_1(Paar^\tau))$$

$$d_{b_2} := Cut_{\psi_1^\pi}(Ax^*_1(\psi_1^\pi), \ldots, Cut_{\psi_l^\pi}(Ax^*_1(\psi_l^\pi), d_1(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau)) \ldots)$$

$$\psi_0 :\equiv \mathrm{tran}(L_\tau) \wedge L_\tau \neq \emptyset \wedge Paar^\tau$$

$$F_0 :\equiv \exists z^\pi (Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)$$

$$F_1 :\equiv Ad^\xi(L_\tau) \wedge B[\vec{s}]^\tau$$

$$tp((N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}) := \bigwedge\nolimits_{\forall z^\pi(\neg Ad^\xi(z) \vee \neg C[\vec{s}]^z)}$$

$$(N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}[t] := \bigvee\nolimits^*_{\neg Ad^\xi(t) \vee \neg C[\vec{s}]^t} (N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)$$

für $t \in \mathcal{T}_\pi$.

Für $h = \mathcal{I} h_0 \ldots h_n$ mit $\mathcal{I} = \bigwedge_{A_0 \wedge A_1}$, $\mathcal{I} = \bigvee^{i_0}_A$ oder $\mathcal{I} = Cut_C$ sei $tp(h) := \mathcal{I}$ und $h[i] := h_i$ für $i \in tp(h)$.

Für $h = \forall_w^{\beta,\alpha} F(x) h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} \bigwedge_{\forall x^\beta F(x)} & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigwedge_{\forall x^\alpha F(x)} \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[i] := \forall_w^{\beta,\alpha} F(x)(h_0[i])$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = I_{i_0}^A h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} Rep & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigwedge_A \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[i] := I_{i_0}^A(h_0[i])$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = S^{\forall x^\alpha F(x)} h_0$ sei

$$tp(h) := tp(h_0) \text{ und } h[i] := S^{\forall x^\alpha F(x)}(h_0[i])$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = B_A^{\beta,\kappa} h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} \bigvee_{A(\beta,\kappa)}^{i_0} & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigvee_A^{i_0} \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[i] := B_A^{\beta,\kappa}(h_0[i])$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = R_C h_0 h_1$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} tp(h_0) & \text{falls} \quad C \notin \Delta(tp(h_0)) \\ tp(h_1) & \text{falls} \quad \neg C \notin \Delta(tp(h_1)) \\ Cut_{C_{i_0}} & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_1) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \\ Cut_{\neg C_{i_0}} & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_0) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \end{cases}$$

$$h[i] := \begin{cases} R_C h_0[i] h_1 & \text{falls} \quad C \notin \Delta(tp(h_0)) \\ R_C h_0 h_1[i] & \text{falls} \quad \neg C \notin \Delta(tp(h_1)) \end{cases}$$

$$h[0] := \begin{cases} R_C h_0[i_0] h_1 & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_1) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \\ R_C h_0 h_1[i_0] & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_0) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \end{cases}$$

$$h[1] := \begin{cases} R_C h_0[0] h_1 & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_0) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \\ R_C h_0 h_1[0] & \text{falls} \quad C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_1) = \bigvee_{\neg C}^{i_0} \end{cases}$$

Für $h = E_\rho^\sigma h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} Rep & \text{falls} \quad tp(h_0) = Cut_C \text{ mit } \rho \le \nu := rk(C) < \sigma \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[i] := \begin{cases} E^{\nu}_{\rho} R_C E^{\sigma}_{\nu} h_0[0] E^{\sigma}_{\nu} h_0[1] & \text{falls} \quad tp(h_0) = Cut_C \text{ mit } \rho \leq \nu := rk(C) < \sigma \\ E^{\nu}_{\rho} h_0[i] & \text{sonst} \end{cases}$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = (8.9)^{\xi,\pi}_{A} h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} Ref^{\xi}_{\pi}(A_s) & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigvee^{s}_{A} \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h[i] := (8.9)^{\xi,\pi}_{A}(h_0[i])$$

für $i \in |tp(h)|$.

Für $h = (8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_n} h_0$ sei

$$tp(h) := Cut_{\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})}$$

$$h[0] := Cut_{B[\vec{s}]^{\pi}}(h_0, (8.9)^{\xi,\pi}_{C[\vec{s}]^{\pi}} d)$$

mit

$$d := Cut_{\phi^{\pi}_{1}}(Ax^{*}_{1}(\phi^{\pi}_{1}), \ldots, Cut_{\phi^{\pi}_{k}}(Ax^{*}_{1}(\phi^{\pi}_{k}), d_0(\vec{a}/\vec{s})) \ldots)$$

wobei B die $\mathcal{L}_{Ad}$-Formel und d_0 die Herleitung von Seite 37 für $A \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ seien.

$$h[1] := (N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}$$

Für $h := (H_1 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B} h_0$ sei

$$tp(h) := \bigwedge_{\forall v^{\pi}(Ad^{\alpha}(v) \rightarrow \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})})}$$

$$h[s] := \bigvee^{*}_{\neg Ad^{\alpha}(s) \vee \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}} (H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0$$

für $s \in \mathcal{T}_{\pi}$.

Für $h := (H_2 10.1)^{\pi,\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0$ sei

$$tp(h) := \bigwedge_{\neg Ad^{\alpha}(s)}$$

$$h[\tau] := Cut_{\bigwedge \neg \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}}(d_1, \bigvee^{\tau}_{C^{(\pi,\mathcal{K})}} \bigwedge_{G}(d_2, \bigvee^{*} (10.1)^{\tau}_{\gamma,\Gamma,B} h_0))$$

für $\tau \in M^{\alpha} \cap |s|$ mit

$$C :\equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$$

$$G :\equiv (\mathrm{tran}(L_{\tau}) \wedge L_{\tau} \neq \emptyset) \wedge B^{(\tau,\mathcal{K})}$$

$$d_1 := Ax^{*}_{10}(L_{\tau} \neq s, \bigwedge \neg \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})})$$

$$d_2 := \bigwedge (Ax^{*}_{6}(\mathrm{tran}(L_{\tau})), \bigvee^{0}_{L_{\tau} \neq \emptyset} \bigvee^{0}_{L_0 \in L_{\tau}} Ax^{*}_{3}(L_0 = L_0))$$

Für $h := (10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0$ sei

$$tp(h) := \begin{cases} Cut_F & \text{falls} \quad tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B) \\ \bigwedge_{A^{(\pi,\mathcal{K})}} & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigwedge_A \\ \bigvee^{i_0}_{A^{(\pi,\mathcal{K})}} & \text{falls} \quad tp(h_0) = \bigvee^{i_0}_A \\ Cut_{D^{(\pi,\mathcal{K})}} & \text{falls} \quad tp(h_0) = Cut_D \\ tp(h_0) & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $F :\equiv \exists v^{\pi}(Ad^{\hat{\alpha_0}}(v) \wedge \bigwedge \neg End(h_0)^{(v,\mathcal{K})})$, $\hat{\alpha_0} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[0])}$.
Falls $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$ sei

$$h[0] := (8.10)^{\pi,\hat{\alpha_0}}_{\neg End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})}} d_0$$

$$h[1] := (H_1 10.1)^{\pi,\hat{\alpha_0}}_{\gamma,End(h_0),B} h_0[0]$$

mit $End(h_0) = \{F_1, \ldots, F_m\}$ und

$$\begin{array}{rcl} d_0 & := & \bigwedge_{\neg F_1^{(\pi,\mathcal{K})} \wedge \ldots \wedge \neg F_m^{(\pi,\mathcal{K})}} (Ax^*_{10}(\neg F_1^{(\pi,\mathcal{K})}, F_1^{(\pi,\mathcal{K})}), \ldots \\ & & \bigwedge_{\neg F_{m-1}^{(\pi,\mathcal{K})} \wedge \neg F_m^{(\pi,\mathcal{K})}} (Ax^*_{10}(\neg F_{m-1}^{(\pi,\mathcal{K})}, F_{m-1}^{(\pi,\mathcal{K})}), (Ax^*_{10}(\neg F_m^{(\pi,\mathcal{K})}, F_m^{(\pi,\mathcal{K})}) \ldots). \end{array}$$

Sonst sei

$$h[i] := (10.1)^{\pi}_{\gamma^*,End(h_0[i])} h_0[i]$$

für $i \in |tp(h)|$, wobei

$$\gamma^* := \gamma_i := \gamma + \omega^{\mathcal{K} \cdot o(h_0[i]) + |i|}$$

falls $tp(h_0) = \bigwedge_{\forall x^{\mathcal{K}} F(x)}$ und $\gamma^* = \gamma$ sonst.

Für $h := (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0$ sei

$$tp(h) := \bigwedge\nolimits_{A(s)^{(\eta,\pi)}}$$

mit $\eta := \Psi^{\sigma}_{\pi}(\gamma + \omega^{\mu \cdot \zeta + \pi})$.

$$h[t] := B^{\eta,\pi}_{A(s)_t} (10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma_t} I^{A(s)}_t h_0$$

für $t \in \mathcal{T}_{\eta}$ mit $\gamma_t := \gamma + \omega^{\mu \cdot \zeta + |t|}$.
Man beachte: $A(s)_t \equiv \exists x^{\pi} G(s,t,x)$ für $A(s) \equiv \forall y^{\pi} \exists x^{\pi} G(s,y,x)$.

Für $h := (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0$ mit $tp(h_0) = Ref^{\sigma}_{\pi} A(s)$ sei

$$tp(h) := \bigvee\nolimits^{\eta}_{\exists z^{\pi}(Ad^{\sigma}(z) \wedge \exists u \in z A(u)^{(z,\pi)})}$$

mit $\eta := \Psi^{\sigma}_{\pi}(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi})$,

$$h[0] := \bigwedge\nolimits_{F_1} (\bigvee\nolimits^{\eta}_{Ad^{\sigma}(L_{\eta})} Ax^*_3(L_{\eta} = L_{\eta}), \bigvee\nolimits^{s}_{F_2} (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0[0])$$

mit $\zeta := o(h_0[0])$ und

$$F_1 :\equiv Ad^{\sigma}(L_{\eta}) \wedge \exists u \in L_{\eta} A(u)^{(\eta,\pi)}$$

$$F_2 :\equiv \exists u \in L_{\eta} A(u)^{(\eta,\pi)}.$$

Für den Rest des Abschnitts sei $\alpha_0 := \max\{o(h_0[0]), o(h_0[1])\}$.

Für $h := (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0$ mit $tp(h_0) = Cut_A$ und $\pi \leq rk(A)$ sei $tp(h) := Rep$.

Ist $rk(A) = \mathcal{K}$, dann sei

$$h[0] := (10.2)^{\mu',\pi,\xi}_{\gamma'}(Cut_{A^{(\kappa,\mathcal{K})}}((10.1)^{\kappa}_{\gamma,\Gamma,A} h_0[0], (10.1)^{\kappa}_{\gamma,\Gamma,\neg A} h_0[1]))$$

mit $\kappa := \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0})$, $\gamma' := \gamma + \omega^{\mathcal{K}\cdot\alpha_0} \cdot 2$, $\mu' := \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa)$ und $\Gamma := End(h_0)$.

Ist $\pi < rk(A) \notin Reg$, dann sei

$$h[0] := (10.2)^{\nu,\pi,\xi}_{\hat{\alpha_0}} E^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0})}_{\bar{\nu}}(Cut_A((10.2)^{\nu,\tau,0}_{\gamma} h_0[0], (10.2)^{\nu,\tau,0}_{\gamma} h_0[1]))$$

mit $\hat{\alpha_0} := \gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}$, $\tau := St(rk(A))$ und $\nu := St(rk(A))^-$.

Ist $\pi \leq rk(A) \in Reg$ und $\alpha_0 < rk(A) =: \tau$, dann sei

$$h[0] := \begin{cases} (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} S_{\neg A} h_0[1] & \text{falls} \quad A \equiv \exists x^\tau F(x) \\ (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} S_A h_0[0] & \text{falls} \quad A \equiv \forall x^\tau F(x) \end{cases}$$

Ist $\pi \leq rk(A) \in Reg$ und $\pi = \tau \leq \alpha_0$, dann sei

$$h[0] := Cut_{A^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}),\tau)}}(d_1, d_2)$$

mit

$$d_1 := B_A^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}),\tau}(10.2)^{\mu,\tau,0}_{\gamma} h_0[0]$$

$$d_2 := (10.2)^{\mu,\tau,0}_{\hat{\alpha_0}}(\forall_w^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}),\tau} F(x)) h_0[1]),$$

wobei o.B.d.A. $\neg A \equiv \forall x^\tau F(x)$.

Ist $\pi \leq rk(A) \in Reg$ und $\pi < \tau \leq \alpha_0$, dann sei

$$h[0] := (10.2)^{\nu,\pi,\xi}_{\gamma'} E^{\Psi^0_\tau(\delta')}_{\bar{\nu}} Cut_{A^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha_0}),\tau)}}(d_1, d_2)$$

mit d_1, d_2 wie oben und $\delta' := \hat{\alpha_0} + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}$, $\gamma' := \delta' + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}$, $\nu := St(\Psi^0_\tau(\delta'))^-$.
In allen übrigen Fällen, d.h. wenn $tp(h_0) \neq Ref^\sigma_\pi A(s)$ und ($tp(h_0) \neq Cut_A$ oder $rk(A) < \pi$) gilt, ist

$$tp(h) := tp(h_0) \text{ und } h[i] := (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0[i] \text{ für } i \in |tp(h)|.$$

4.4 Induktive Definition von $\mathbf{H}_\delta$

Definition 4.4.1 (Die Bezeichnungssysteme $\mathbf{H}_\delta$ für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen)

1. $\mathcal{D}^+ \subseteq \mathbf{H}_\delta \subseteq \mathcal{D}^*$
2. $h_0, h_1 \in \mathbf{H}_\delta \to \bigwedge_{A_0 \wedge A_1} h_0 h_1, \bigvee_A^{i_0} h_0, Cut_C h_0 h_1 \in \mathbf{H}_\delta$
3. $h_0 \in \mathbf{H}_\delta, \beta \leq \alpha \to \forall_w^{\beta,\alpha} F(x) h_0 \in \mathbf{H}_\delta$
4. $h_0 \in \mathbf{H}_\delta, A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J}, i_0 \in J \to I^A_{i_0} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$
5. $h_0 \in \mathbf{H}_\delta, o(h_0) < \alpha \to S^{\forall x^\alpha F(x)} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$
6. $h_0, h_1 \in \mathbf{H}_\delta, rk(C) \notin Reg \to R_C h_0 h_1 \in \mathbf{H}_\delta$

7. $h_0 \in \mathbf{H}_\delta,\ \rho \leq \sigma,\ [\rho, \sigma[\cap Reg = \emptyset,\ deg(h_0) \leq \sigma \rightarrow E^\sigma_\rho h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

8. $h_0 \in \mathbf{H}_\delta, A \in \Sigma_1(\kappa), o(h_0) \leq \beta < \kappa \in Reg \cup \{\mathcal{K}\} \rightarrow B^{\beta,\kappa}_A h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

9. $t \in \mathcal{T}_\pi$, $B[\vec{s}]$ Konjunktion von Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln $\rightarrow (N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t), (N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]} \in \mathbf{H}_\delta$

10. $h_0 \in \mathcal{D}^+,\ \xi \in C(m(\pi), \pi) \cap \pi,\ A \in \Sigma_3(\pi) \rightarrow (8.9)^{\xi,\pi}_A h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

11. $h_0 \in \mathcal{D}^+,\ \xi \in C(m(\pi), \pi) \cap \pi,\ \xi > 0,\ A_1, \ldots, A_k$ Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln, $\rightarrow (8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

12. $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha_0} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha_0}},\ s \in \mathcal{T}_\pi,\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln, $B \in \Pi_3(\mathcal{K}), C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \in \Gamma$,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma, B,\ \hat{\alpha_0} + \pi \leq \delta\ \rightarrow\ (H_2 10.1)^{\pi,\hat{\alpha_0}}_{\gamma,\Gamma,B}(s) h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

13. $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha_0} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha_0}},\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln, $B \in \Pi_3(\mathcal{K}),\ C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \in \Gamma$,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma, B,\ \hat{\alpha_0} + \pi \leq \delta\ \rightarrow\ (H_1 10.1)^{\pi,\hat{\alpha_0}}_{\gamma,\Gamma,B} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

14. $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha}},\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)}),\ deg(h_0) \leq \mathcal{K} + 1$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma,\ \hat{\alpha} + \pi \leq \delta\ \rightarrow\ (10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

15. $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha} := \gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0},\ \alpha_0 := \max\{o(h_0) + 1, \pi\} + 1,\ \mu \in Kard,\ \pi \leq \mu$,
$\sigma \leq \gamma,\ NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)}),\ \sigma \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi),\ deg(h_0) \leq \bar{\mu}$,
$\{\gamma, \pi, \sigma, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \bigcap\{C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$
$End(h_0) \setminus \{A(s)\} \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi),\ A(s) \in \Pi_2(\pi)$,
$Ref(h_0) \leq \gamma,\ \zeta = o(h_0),\ \hat{\alpha} \leq \delta\ \rightarrow (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s) h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

16. $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha} := \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)},\ \mu \in Kard,\ \pi \leq \mu$,
$\xi \leq \gamma,\ NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)}),\ \xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi),\ deg(h_0) \leq \bar{\mu}$
$\{\gamma, \pi, \xi, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \bigcap\{C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$
$End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$,
$Ref(h_0) \leq \gamma,\ \hat{\alpha} \leq \delta\ \rightarrow (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma} h_0 \in \mathbf{H}_\delta$

Erst jetzt ist die Definition von $\mathbf{H}_\delta$ abgeschlossen und präzisiert, in welchem Kontext wir die zu Beginn dieses Abschnittes eingeführten Regeln benutzen wollen. Zur Bedeutung der hier angegebenen Bedingungen vgl. man auch die Ausführungen am Anfang dieses Abschnittes. Bei der Forderung $k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$ in 12.-14. und der Forderung $\{\gamma, \pi, \xi, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \bigcap\{C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$ in 15. und 16. handelt es sich um die bereits erwähnten Einschränkungen, die notwendig sind, um die in den Zeugen auftretenden Ordinalzahlen unterhalb der kollabierten Ordinalzahlindizierung der neuen Herleitung zu halten und dafür zu sorgen, daß Schnittformeln der Induktionsvoraussetzung genügen. $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ wird uns diverse Male erlauben, auf $\gamma \in C(\alpha, \beta)$ zu schließen und $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ ist gleichbedeutend mit M^ξ stationär in π, wie wir bereits gesehen hatten. Man beachte auch, daß die Regeln $(8.9)^{\xi,\pi}_A$ und $(8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k}$ nur auf Herleitungen $h_0 \in \mathcal{D}^+$ anwendbar sind.

Definition 4.4.2 (Die Operatoren $\mathcal{H}_\delta$)
Die Operatoren $\mathcal{H}_\delta$ sind durch

$$\mathcal{H}_\delta(X) := \bigcap\{C(\alpha, \beta) : X \subseteq C(\alpha, \beta) \wedge \delta < \alpha\}$$

definiert.

Die Hauptaufgabe der Operatoren liegt darin, dafür zu sorgen, daß die Ordinalzahlindizierung nach dem Kollabieren streng monoton ist, d.h. hier den gewählten Bezeichnungen für Teilbäume muß eine kleinere Ordinalzahl zugewiesen sein als der Bezeichnung des Baumes. Das Konzept der operatorkontrollierten Herleitungen ist zuerst in [Bu92] eingeführt worden. Das nächste Lemma faßt die für uns wesentlichen Eigenschaften der Operatoren zusammen:

Lemma 4.4.1

i) $\mathcal{H}_\delta(X) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(X)$ für $\delta < \gamma$.

ii) Die Operatoren $\mathcal{H}_\delta$ sind abgeschlossen gegenüber $+, \#, \cdot, \varphi, \hat{\varphi}$ und $(\sigma \longmapsto \Omega_\sigma)_{\sigma<\mathcal{K}}$.

iii) Ist $\xi, \pi, \alpha \in \mathcal{H}_\delta(X)$ und $\xi \leq \alpha \leq \delta$, dann ist $\Psi^\xi_\pi(\alpha) \in \mathcal{H}_\delta(X)$.

iv) Ist $\Omega_\sigma \leq \eta < \Omega_{\sigma+1} < \mathcal{K}$ und $\eta \in \mathcal{H}_\delta(X)$, dann sind $\sigma, \Omega_\sigma, \Omega_{\sigma+1} \in \mathcal{H}_\delta(X)$.

Beweis: Siehe [Rat92] □

Der nächste Satz beinhaltet die zentrale Aussage dieser Arbeit:

Satz 4.4.1 $(\mathbf{H}_\delta, o, deg, Ref, tp, [])$ ist ein normales Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen und wird durch den Operator $\mathcal{H}_\delta$ kontrolliert.

Beweis: Es sind die Bedingungen a)-m) für operatorkontrollierte Herleitungen aus Definition 2.4.1 zu zeigen und es ist zu zeigen, daß die Funktion [] nicht aus $\mathbf{H}_\delta$ herausführt, d.h.

n) $h[i] \in \mathbf{H}_\delta$ für $h \in \mathbf{H}_\delta$ und $i \in |tp(h)|$.

Der Beweis erfolgt wieder durch vollständige Induktion über die Länge der Herleitung $h \in \mathbf{H}_\delta$. Soweit nicht anders angegeben, werden die Bezeichnungen aus den Definitionen von Seite 36 bis 42 verwendet. Die Fälle entsprechen den zur Definition von $h[i]$ vorgenommenen Fallunterscheidungen, wobei die Reihenfolge aus Definition 4.4.1 beibehalten wurde.

Für $h \in \mathcal{D}^+$ gilt die Behauptung lt. Satz 3.2.1.
Ist $h = \bigwedge_{A_0 \wedge A_1} h_0 h_1, h = \bigvee_A^{i_0} h_0$ oder $h = Cut_C h_0 h_1$, so folgen a)-n) unmittelbar aus der Induktionsvoraussetzung.

I. $h = \forall_w^{\beta,\alpha} F(x) h_0$
a) Für $\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(h_0))$ folgt die Beh. aus der I.V. und sonst ist

$$\Delta(tp(h)) = \{\forall x^\beta F(x)\} = \Delta(\forall_w^{\beta,\alpha} F(x)) \subseteq End(h).$$

b) Lt. I.V. gilt

$$\begin{aligned} End(h[i]) &= End(h_0[i]) \setminus \{\forall x^\alpha F(x)\} \cup \{\forall x^\beta F(x)\} \\ &\subseteq (End(h_0), \Delta_i(tp(h_0))) \setminus \{\forall x^\alpha F(x)\} \cup \{\forall x^\beta F(x)\} \\ &\subseteq End(h) \cup \Delta_i(tp(h)), \end{aligned}$$

da $\Delta_i(tp(h)) = \Delta_i(tp(h_0))$ für $i \in |tp(h)|$.
c) Lt. I.V. gilt

$$o(h[i]) = o(h_0[i]) < o(h_0) = o(h)$$

f.a. $i \in |tp(h_0)| \supseteq |tp(h)|$.
d),e) analog zu c).

f)-j) folgen unmittelbar aus der I.V..
k) Lt. I.V. gilt

$$k(End(h)) \subseteq k(End(h_0)) \cup k(\forall x^\beta F(x)) \subseteq k(h_0) \cup k(\forall x^\beta F(x)) = k(h)$$

l) Für $tp(h) = tp(h_0)$ folgt die Beh. aus der I.V. da $\mathcal{H}_\delta(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ wg. $k(h_0) \subseteq k(h)$ und sonst ist

$$k(tp(h)) = k(\forall x^\beta F(x)) \subseteq k(h) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$$

m) Für $tp(h) = tp(h_0)$ folgt die Beh. wieder aus der I.V. und sonst ist

$$k(h[i]) = k(\forall x^\beta F(x)) \cup k(h_0[i]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(i))$$

für $i \in |tp(h)| \subseteq |tp(h_0)|$ ebenfalls lt I.V..
n) Lt. I.V. gilt $h_0[i] \in \mathbf{H}_\delta$, also auch $h[i] \in \mathbf{H}_\delta$.

II. $h = I_{i_0}^A h_0$
a)-k) folgen trivialerweise (wenn $tp(h) = Rep$) oder analog zum vorherigen Fall.
l) Folgt unmittelbar aus der I.V., da $tp(h) = Rep$ oder $tp(h) = tp(h_0)$ und $o(h) = o(h_0)$.
m) Da $k(A) \subseteq k(h)$ und $k(h_0[i]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_0) \cup k(i)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(i))$ folgt die Behauptung.
n) folgt analog zum vorherigen Fall.

III. $h = S^{\forall x^\alpha F(x)} h_0$
a) Da $o(h_0) < \alpha$ folgt aus der I.V. h) $tp(h_0) \neq \bigwedge_{\forall x^\alpha F(x)}$ und somit lt. I.V. a)

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(h_0)) \subseteq End(h_0) \setminus \{\forall x^\alpha F(x)\} = End(h)$$

b)-m) folgen unmittelbar aus der I.V. bzw. analog zu oben.
n) Lt. I.V. c) ist $o(h_0[i]) < o(h_0) < \alpha$.

IV. $h = B_A^{\beta,\kappa} h_0$
a) Wäre $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}} B$ oder $tp(h_0) = Ref_\kappa^\xi B$ mit $\Delta(tp(h_0)) = \{A\}$, dann wäre lt. I.V. i) bzw. j) $\kappa < o(h_0)$ im Widerspruch zu $o(h_0) < \kappa$.
Ist $tp(h_0) = \bigvee_A^{i_0}$, dann gilt

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(\bigvee\nolimits_{A^{(\beta,\kappa)}}^{i_0}) = \{A^{(\beta,\kappa)}\} \subseteq End(h).$$

Sonst gilt lt. I.V.

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(h_0)) \subseteq End(h_0) \setminus \{A\} \subseteq End(h).$$

b)-n) folgen unmittelbar aus der I.V. bzw. analog zu oben.

V. $h = R_C h_0 h_1$
Wir betrachten nur die beiden Fälle

$$C \notin \Delta(tp(h_0)) \text{ und } C \in \Delta(tp(h_0)), \neg C \in \Delta(tp(h_1)), tp(h_1) = \bigvee\nolimits_{\neg C}^{i_0}.$$

Die Beweise für die anderen Fälle verlaufen analog.
a) Ist $C \notin \Delta(tp(h_0))$, dann gilt lt. I.V.

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(h_0)) \subseteq End(h_0) \setminus \{C\} \subseteq End(h).$$

Sonst ist $\Delta(tp(h)) = \emptyset$.
b) Ist $C \notin \Delta(tp(h_0))$, dann gilt lt. I.V.

$$\begin{aligned} End(h[i]) &= End(R_C h_0[i] h_1) \\ &= End(h_0[i]) \setminus \{C\} \cup End(h_1) \setminus \{\neg C\} \\ &\subseteq End(h_0) \setminus \{C\} \cup End(h_1) \setminus \{\neg C\} \cup \Delta_i(tp(h_0)) \\ &= End(h) \cup \Delta_i(tp(h_0)). \end{aligned}$$

Sonst ist

$$\begin{aligned} End(h[0]) &= End(R_C h_0[i_0] h_1) \\ &= End(h_0[i_0]) \setminus \{C\} \cup End(h_1) \setminus \{\neg C\} \\ &\subseteq End(h_0) \setminus \{C\} \cup End(h_1) \setminus \{\neg C\} \cup \Delta_{i_0}(tp(h_0)) \\ &= End(h) \cup \{C_{i_0}\} \\ &= End(h) \cup \Delta_0(tp(h)) \end{aligned}$$

Für $End(h[1])$ folgt die Beh. analog.
c) folgt mit der I.V. aus der strengen Monotonie von # in beiden Argumenten.
d) und e) folgen unmittelbar aus der I.V..
f) Ist $tp(h) = Cut_D$, dann ist $D \equiv C_{i_0}$, $D \equiv \neg C_{i_0}$, $tp(h) = tp(h_0)$ oder $tp(h) = tp(h_1)$. Da $rk(C_{i_0}) = rk(\neg C_{i_0}) < rk(C)$ und lt. I.V. in den anderen Fällen

$$rk(D) < \max\{deg(h_0), deg(h_1)\} \leq deg(h),$$

folgt die Behauptung.
g)-k) folgen unmittelbar aus der I.V..
l) Der erste Fall folgt analog zu den vorangegangenen Beweisen. Sonst ist

$$k(tp(h)) = k(C_{i_0}) \subseteq k(C) \cup k(i_0) = k(tp(h_1)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_1)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(h(h))$$

m) Im ersten Fall folgt die Behautung wieder analog zu oben. Ansonsten gilt

$$k(h[0]) = k(h_0[i_0]) \cup k(h_1)$$

und es ist $k(h_0[i_0]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_0) \cup k(i_0))$ lt. I.V.. Da $k(i_0) \subseteq k(tp(h_1)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_1))$ lt I.V. l) folgt

$$\mathcal{H}_\delta(k(h_0) \cup k(i_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

n) folgt unmittelbar aus der I.V..

VI. $h = E_\nu^\sigma h_0$
a) und b) folgen trivialerweise oder unmittelbar aus der I.V..
c) Mit der I.V. folgt im Fall $tp(h_0) = Cut_C$:

$$\hat{\varphi}_{\nu \dot{-} \rho}(\hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \nu}(o(h_0[0]) \# \hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \nu}(\mathrm{o}(\mathrm{h}_0[1])))) < \hat{\varphi}_{\nu \dot{-} \rho}(\hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \nu}(\mathrm{o}(\mathrm{h}_0))) = \hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \rho}(\mathrm{o}(\mathrm{h}_0)) = \mathrm{o}(\mathrm{h})$$

und sonst folgt die Beh. direkt aus der I.V. mit der Monotonie von $\hat{\varphi}_{\sigma \dot{-} \rho}$.
d) $deg(h[i]) = \rho = deg(h)$
e)-l) folgen entweder direkt aus der I.V. oder sind trivial.
m) Ist $tp(h) = Cut_C$ dann gilt lt. I.V. $k(C) = k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_0))$ und somit

$$\nu = rk(C) \in \mathcal{H}_\delta(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Mit der I.V. folgt

$$k(h[0]) = k(h_0[0]) \cup k(h_0[1]) \cup \{\nu, \sigma\} \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_0) \cup \{\sigma\}) = \mathcal{H}_\delta(k(h))$$

n) Im Fall $tp(h) = tp(h_0)$ folgt die Behauptung aus der I.V.. Sonst folgt die Beh. mit der I.V. und $([\rho, \nu[\cup[\nu, \sigma[) \cap Reg = [\rho, \sigma[\cap Reg = \emptyset$ und $\nu \notin Reg$.

VII. $h = (N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)$
a)

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(\bigwedge\nolimits_{\neg Ad^{\xi}(t)}) = \{\neg Ad^{\xi}(t)\} \subseteq End(h)$$

b)

$$\begin{array}{rcl} End(h[\tau]) & = & \{L^{\tau} \neq t, \neg C[\vec{s}]^{t}, \exists z(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z})\} \\ & \subseteq & End(h) \cup \{L^{\tau} \neq t\} \\ & = & End(h) \cup \Delta_{\tau}(tp(h)) \end{array}$$

c) Es ist

$$o(d_a), o(\bigwedge\nolimits^{\tau}_{Ad^{\xi}(L_{\tau})} Ax^{*}_{3}(L_{\tau} = L_{\tau})) < \tau^{\omega}$$

und

$$o(d_1(\vec{a}/\vec{s}, y/L_{\tau})) < \pi^{\omega}$$

sowie

$$o(Ax^{*}_{1}(\psi^{\pi}_{i})) < \pi^{\omega} \text{ für } i = 1, \ldots, l.$$

Also folgt insgesamt $o(h[\tau]) < \pi^{\omega} = o(h)$.
d) Es ist

$$deg(d_1(\vec{a}/\vec{s}, y/L_{\tau})) < \pi + \omega$$

und zu $i = 1, \ldots, l$ existieren n_i mit

$$rk(\psi^{\pi}_{i}) = \pi + n_i.$$

Weiter existiert ein n mit

$$rk(\psi_0) = \omega \cdot \tau + n$$

und es ist

$$rk(C[\vec{s}]^{\tau}) < \pi$$

wg. $lev(C[\vec{s}]^{\tau}) < \pi$. Es folgt

$$deg(h[\tau]) < \pi + \omega = deg(h).$$

e)-g) sind trivial.
h) Es ist $\tau < |t| < \pi < o(h)$.
i) und j) sind trivial.
k) Folgt aus $k(C[\vec{s}]) = k(B[\vec{s}]) = k(\vec{s})$.
l)

$$k(tp(h)) \cup \{o(h)\} = k(t) \cup \{\pi^{\omega}\} \subseteq \mathcal{H}_{\delta}(k(t) \cup \{\pi\}) \subseteq \mathcal{H}_{\delta}(k(h))$$

m) Lt. der Bemerkung auf Seite 30 existieren $n, m < \omega$ mit

$$o(h[\tau]) = \omega^{\pi+n} + m.$$

Da $\pi \in k(h)$ folgt

$$o(h[\tau]) \in \mathcal{H}_{\delta}(k(h) \cup \{\tau\}).$$

Ansonsten gilt

$$k(\bigvee\nolimits^{\tau}_{Ad^{\xi}(L_{\tau})} Ax^{*}_{3}(L_{\tau} = L_{\tau})) = \{\tau\},$$

$$k(d_1[\vec{a}/\vec{s}, y/L_{\tau}]) \subseteq \{0, \pi, \tau\} \cup k(\vec{s}),$$

$$k(d_{b_1}) = \{0, \tau\}, \quad k(d_a) = \{\tau\} \cup k(t) \cup k(\vec{s}),$$

$$k(\psi_0) = \{\tau\} \text{ und } k(\psi_i^\pi) = \{\pi\} \text{ für } i = 1, \ldots, l.$$

Also ist $k(h[\tau]) = k(h) \cup \{\tau\} \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup \{\tau\})$.
n) Es ist $h[\tau] \in \mathcal{D}^+ \subseteq \mathcal{H}_\delta$.

VIII. $h := (N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}$
a)

$$\Delta(tp(h)) = \{\forall z^\pi(\neg Ad^\xi(z) \vee \neg C[\vec{s}]^z)\} \subseteq End(h)$$

b)

$$\begin{aligned} End(h[\tau]) &= \{\neg Ad^\xi(t) \vee \neg C[\vec{s}]^t, \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \vee B[\vec{s}]^z)\} \\ &\subseteq End(h) \cup \{\neg Ad^\xi(t) \wedge \neg C[\vec{s}]^t\} \\ &= End(h) \cup \Delta_t(tp(h)) \end{aligned}$$

c)

$$o(h[\tau]) = \pi^\omega + 2 < \pi^\omega + 3 = o(h)$$

d)

$$deg(h[t]) = \pi + \omega = deg(h)$$

e)-g) sind trivial.
h)

$$k(t) \leq |t| < \pi < o(h)$$

i) und j) sind trivial.
k)

$$k(\forall z^\pi(\neg Ad^\xi(z) \vee \neg C[\vec{s}]^z), \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)) \subseteq \{\xi, \pi\} \cup k(\vec{s}) = k(h)$$

l)

$$k(tp(h)) \cup \{o(h)\} = \{\pi, \pi^\omega + 3\} \cup k(\vec{s}) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$$

m)

$$k(h[t]) = k(t) \cup k(\vec{s}) \cup \{\xi, \pi\} \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(t))$$

n) Folgt aus $(N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t) \in \mathbf{H}_\delta$ mit 2. aus der Definition von $\mathbf{H}_\delta$.

IX. $h = (8.9)^{\xi,\pi}_A h_0$
a) Da $lev(A) \leq \pi < \mathcal{K}$ folgt aus $tp(h_0) = Ref_\mathcal{K} B$, daß $A \notin \Delta(tp(h_0))$.
Da $h_0 \in \mathcal{D}^+$ ist $Ref(h_0) = 0$ und damit $tp(h_0) \neq Ref^\sigma_\tau B(s)$.
Ist $tp(h_0) \neq \bigvee^s_A$, dann ist lt. I.V.

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(h_0)) = \Delta(tp(h_0)) \setminus \{A\} \subseteq End(h_0) \setminus \{A\} \subseteq End(h).$$

Ist $tp(h_0) = \bigvee^s_A$ mit $A \equiv \exists u^\pi \forall y^\pi \exists x^\pi F(u, y, x)$, dann ist

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(Ref^\xi_\pi(\forall y^\pi \exists x^\pi F(s, y, x))) = \{\exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge A^{(z,\pi)})\} \subseteq End(h).$$

b) Folgt unmittelbar aus der I.V..
c)

$$o(h[i]) = \pi^{o(h_0[i])} < \pi^{o(h_0)} = o(h)$$

d) und e) folgen unmittelbar aus der I.V..
f) Aus $tp(h) = Cut_C$ folgt $tp(h_0) = Cut_C$ und damit $rk(C) < deg(h_0) = deg(h)$ lt. I.V..

g)-i) folgen analog zu f).
j) Ist $tp(h) = Ref^{\sigma}_{\tau} B$, dann ist

$$tp(h) = Ref^{\xi}_{\pi}(\forall y^{\pi} \exists x^{\pi} F(s, y, x))$$

und damit $\xi < Ref(h)$. Lt. I.V. ist $0 < o(h_0[0]) < o(h_0)$ und damit auch

$$o(h[0]) + 1 = \pi^{o(h_0[0])} + 1 < \pi^{o(h_0)} = o(h) \text{ und } \pi < o(h).$$

Lt. Voraussetzung gilt $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$.
k)

$$k(End(h)) \subseteq \{\pi\} \cup k(A) \subseteq k(h)$$

l) Es ist $o(h_0) \in \mathcal{H}_\delta(k(h_0))$ lt. I.V.. Da $\pi \in k(h)$ folgt $o(h) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Ist $tp(h) = tp(h_0)$ so folgt die Beh. aus der I.V..
Ist $tp(h) = Ref^{\xi}_{\pi} A(s)$ dann folgt die Beh. aus k) mit $k(tp(h)) \subseteq k(End(h))$.
m) folgt analog zu oben aus der I.V..
n) folgt ebenfalls unmittelbar aus der I.V..

X. $h = (8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_k} h_0$
a) $\emptyset \subseteq End(h)$
b)

$$End(h[0]) = End(h_0) \setminus \{B[\vec{s}]^{\pi}\} \cup \{\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})\} \subseteq End(h) \cup \Delta_0(tp(h))$$

$$End(h[1]) = \{\forall z^{\pi}(\neg Ad^{\xi}(z) \vee \neg C[\vec{s}]^{z}), \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z})\} \subseteq End(h) \cup \Delta_1(tp(h))$$

c)

$$o(h[0]) = \max\{o(h_0), \pi^{(\omega^{\pi+k_1}+k_2)}\} + 1 < \max\{o(h_0) + 2, \varepsilon_{\pi+1}\} = o(h)$$

$$o(h[1]) = \pi^{\omega} + 3 < \varepsilon_{\pi+1} \leq o(h)$$

d)

$$deg(h[0]) \leq \max\{deg(h_0), \pi + \omega\} = deg(h)$$

$$deg(h[1]) = \pi + \omega \leq \max\{deg(h_0), \pi + \omega\} = deg(h)$$

e)

$$Ref(h[0]) = \xi + 1 = Ref(h)$$

$$Ref(h[1]) = 0 \leq Ref(h)$$

f)

$$rk(\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})) = \pi + n < \pi + \omega \leq deg(h)$$

g)-k) sind trivial.
l) folgt da lt. I.V. $o(h_0) \in \mathcal{H}_\delta(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und $k(tp(h)) \subseteq k(h)$.
m) Es ist $k(h[i]) \subseteq k(h)$ für $i = 0, 1$ und aus $\pi \in k(h)$ folgt auch $o(h[i]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
n) folgt unmittelbar aus $1., 2., 9.$ und 10. der Definition von $\mathbf{H}_\delta$.

XI. $h = (H_1 10.1)^{\pi,\hat{\alpha_0}}_{\gamma,\Gamma,B} h_0$
Dann gilt $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha_0} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha_0}},\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln, $B \in \Pi_3(\mathcal{K})$, $C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\text{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \in \Gamma$,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma, B,\ \hat{\alpha_0} + \pi \leq \delta$.

a)

$$\Delta(tp(h)) = \{\forall v^{\pi}(Ad^{\hat{\alpha_0}}(v) \rightarrow \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})})\} \subseteq End(h)$$

b)

$$End(h[s]) = \{\neg Ad^{\hat{\alpha}_0}(v) \vee \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})}\} \cup \{C^{(\pi,\mathcal{K})}\} \subseteq End(h) \cup \Delta_s(tp(h))$$

c)

$$o(h[s]) = \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) + \omega + 2 < \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi) = o(h),$$

da $|s| \in \pi \in C(\hat{\alpha}_0 + \pi, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)$ und somit $\hat{\alpha}_0 + |s| \in C(\hat{\alpha}_0 + \pi, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi))$ wg. $NF(\hat{\alpha}_0, \pi)$.
d)

$$deg(h[s]) = deg((H_2 10.1)^{\pi,\hat{\alpha}_0}_{\gamma,\Gamma,B}(s)h_0) = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi) = deg(h)$$

e)

$$Ref(h[s]) = \max\{\hat{\alpha}_0, Ref(h_0)\} = Ref(h)$$

f) und g) sind trivial.
h)

$$|s| < \pi \in C(\hat{\alpha} + \pi, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi) = o(h)$$

i) und j) sind trivial.
k) folgt aus $k(C) = k(B)$ und $k(\Gamma) \cup \{\pi\} \subseteq k(h)$.
l) Es ist

$$k(tp(h)) = \{\pi\} \cup k(\Gamma) \setminus \{\mathcal{K}\} \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$$

und wg. $\hat{\alpha}_0 + \pi \leq \delta$ folgt auch

$$o(h) = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi) \in \mathcal{H}_\delta(k(h)),$$

da $\hat{\alpha}_0 = \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
m) Es ist $k(h[s]) \subseteq k(s) \cup k(h)$ und analog zu oben folgt

$$o(h[s]) = \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) + \omega + 2 \in \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(s)).$$

n) folgt unmittelbar aus 12. der Definition von $\mathbf{H}_\delta$ mit der I.V..

XII. $h = (H_2 10.1)^{\pi,\hat{\alpha}_0}_{\gamma,\Gamma,B}(s)h_0$
Dann gilt $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha_0} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha_0}},\ s \in \mathcal{T}_\pi,\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$,
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln, $B \in \Pi_3(\mathcal{K}), C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \in \Gamma$,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma, B,\ \hat{\alpha_0} + \pi \leq \delta$.

a)

$$\{\neg Ad^{\hat{\alpha}_0}(s)\} \subseteq End(h)$$

b)

$$\begin{aligned} End(h[\tau]) &\subseteq End(h), L_\tau \neq s \\ &= End(h) \cup \Delta_\tau(tp(h)) \end{aligned}$$

c) Da $\hat{\alpha}_0 + |s| < \mathcal{K}^\Gamma$ gilt $\hat{\alpha}_0 + |s| \in C(\hat{\alpha}_0 + |s|, \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|))$ und so

$$|s| \in C(\hat{\alpha}_0 + |s|, \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|).$$

Also ist $\tau \in \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) = C(\hat{\alpha}_0 + |s|, \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)) \cap \mathcal{K}$ und weiter $\hat{\alpha}_0 + \tau \in C(\hat{\alpha}_0 + |s|, \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|))$, woraus

$$\Xi(\hat{\alpha}_0 + \tau) \leq \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)$$

folgt. Also gilt

$$o((10.1)^{\tau,\hat{\alpha}_0}_{\gamma,\Gamma,B}h_0) < o(h).$$

Da $|s| \in \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)$ und $k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1))$ folgt

$$k(L_\tau \neq s, \bigwedge \neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, \bigvee \neg\Gamma^{(s,\mathcal{K})}) \subseteq C(\hat{\alpha}_0 + |s|, \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)) \cap \mathcal{K}.$$

Also $o(d_1) < o(h)$. Ebenso folgt $o(d_2) < o(h)$ und somit

$$o(h[\tau]) < o(h)$$

d) Es ist $\pi \in C(\hat{\alpha}_0+\pi, \Xi(\hat{\alpha}_0+\pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}_0+\pi)$. Also $|s| \in \pi \subseteq \Xi(\hat{\alpha}_0+\pi) \subseteq C(\hat{\alpha}_0+\pi, \Xi(\hat{\alpha}_0+\pi))$ und weiter $\hat{\alpha}_0 + |s| \in C(\hat{\alpha}_0 + \pi, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi))$ womit

$$\Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) < \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)$$

folgt.
Aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ folgt $\gamma \in C(\hat{\alpha}_0+\pi, \Xi(\hat{\alpha}_0+\pi))$ und damit $\Xi(\gamma+1) < \Xi(\hat{\alpha}_0+|s|)$. Da $\tau \in \Xi(\hat{\alpha}_0+|s|)$ und $k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1))$ folgt

$$k(\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}) \subseteq C(\hat{\alpha}_0 + \pi, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi))$$

Also

$$rk(\bigwedge \neg\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}) < \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) < \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)$$

e)

$$Ref(h[\tau]) = \max\{\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, Ref(h_0)\} = \max\{\hat{\alpha}_0, Ref(h_0)\} = Ref(h)$$

f) und g) sind trivial.
h) Es wurde bereits $\tau < \Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|)$ gezeigt.
i) und j) sind trivial.
k) folgt aus $k(C) = k(B)$.
l) Es ist

$$k(tp(h)) = k(s) \subseteq k(h) \text{ und lt. I.V. } o(h_0) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)),$$

womit $\hat{\alpha}_0 + |s| \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und wg. $\hat{\alpha}_0 + |s| < \hat{\alpha}_0 + \pi \leq \delta$ auch $\Xi(\hat{\alpha}_0 + |s|) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ folgt. Also gilt $o(h) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
m) Es ist

$$k(d_1) = k(s) \cup k(\tau) \cup k(\Gamma) \setminus \{\mathcal{K}\} \subseteq k(h) \cup \{\tau\}$$

und damit

$$\{o(d_1)\} \cup k(d_1) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup \{\tau\}).$$

Auf dieselbe Weise folgt $\{o(d_2)\} \cup k(d_2) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup \{\tau\})$. Weiter ist

$$k((10.1)^{\tau,\hat{\alpha}_0}_{\gamma,\Gamma,B} h_0) = \{\gamma, \tau\} \cup k(\Gamma) \cup k(B) \cup k(h_0) \subseteq k(h) \cup \{\tau\}$$

und analog zu l) folgt

$$o((10.1)^{\tau,\hat{\alpha}_0}_{\gamma,\Gamma,B} h_0) \in \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup \{\tau\}).$$

Also $o(h[\tau]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
n) folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen.

XIII. $h = (10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma} h_0$
Dann gilt $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)},\ \pi \in M^{\hat{\alpha}},\ NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)}),\ deg(h_0) \leq \mathcal{K} + 1,$
Γ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln,
$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)),\ End(h_0) \subseteq \Gamma,\ \hat{\alpha} + \pi \leq \delta.$

a) Ist $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}B$, dann ist $tp(h) \in Cut$ und somit $\Delta(tp(h)) = \emptyset \subseteq End(h)$.
Für $tp(h_0) = \bigwedge_A$ oder $tp(h_0) = \bigvee_A^{i_0}$ ist $A \in End(h_0)$ lt. I.V. und so

$$\Delta(tp(h)) = \{A^{(\pi,\mathcal{K})}\} \subseteq End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})} \subseteq \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})} = End(h).$$

Für $tp(h_0) = Cut_D$ oder $tp(h_0) = Rep$ ist nichts zu zeigen.
Ist $tp(h_0) = Ref_\tau^\sigma A(s)$, dann ist $A(s) \in \Pi_2(\tau)$ und so

$$\begin{array}{rcl}\Delta(tp(h)) & = & \{\exists z \in L_\tau(Ad^\sigma(z) \wedge \exists u \in zA(u)^{(z,\tau)})\} \\ & = & \{(\exists z \in L_\tau(Ad^\sigma(z) \wedge \exists u \in zA(u)^{(z,\tau)}))^{(\pi,\mathcal{K})}\} \\ & \subseteq & End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})} \\ & \subseteq & \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})} = End(h).\end{array}$$

b) Ist $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}B$, dann ist $tp(h) = Cut_F$ mit

$$F :\equiv \exists v^\pi(Ad^{\hat{\alpha}_0}(v) \wedge \bigwedge \neg End(h_0)^{(v,\mathcal{K})}), \quad \hat{\alpha}_0 := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[0])}.$$

Es folgt

$$\begin{array}{rcl}End(h[0]) & = & End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})}, \exists v^\pi(Ad^{\hat{\alpha}_0}(v) \wedge \bigwedge \neg End(h_0)^{(v,\mathcal{K})}) \\ & \subseteq & \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, F = End(h) \cup \Delta_0(Cut_F)\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}End(h[1]) & = & End(h_0[0]) \setminus (End(h_0) \cup \{B\}) \cup \{\neg F\} \cup \{C^{(\pi,\mathcal{K})}\} \\ & \subseteq & \{\neg F\} \cup \{C^{(\pi,\mathcal{K})}\} \\ & \subseteq & \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, \neg F = End(h) \cup \Delta_1(Cut_F)\end{array}$$

mit $C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$ wg. $C^{(\pi,\mathcal{K})} \in \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$.
In den anderen Fällen folgt

$$\begin{array}{rcl}End(h[i]) & = & End((10.1)^\pi_{\gamma^*,End(h_0[i])}h_0[i]) \\ & = & End(h_0[i])^{(\pi,\mathcal{K})} \\ & \subseteq & End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})} \cup \Delta_i(tp(h_0))^{(\pi,\mathcal{K})} \\ & \subseteq & \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})} \cup \Delta_i(tp(h)) \\ & = & End(h) \cup \Delta_i(tp(h))\end{array}$$

f.a. $i \in |tp(h)|$, wobei $\gamma^* := \gamma_i = \gamma + \omega^{\mathcal{K}\cdot o(h_0[i])+|i|}$ falls $tp(h_0) = \bigwedge_{\forall x^{\mathcal{K}} F(x)}$ und $\gamma^* := \gamma$ sonst.
c) Ist $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}B$, dann ist

$$o(h[0]) = \max\{\varepsilon_{\pi+1}, \omega^\nu \cdot 2 + n\} < o(h)$$

für $\nu := \max\{rk(F_i^{(\pi,\mathcal{K})}) : F_i \in End(h_0)\}$, $n \in \omega$, da aus $\hat{\alpha}_0 + \pi \in C(\hat{\alpha}_0, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi))$

$$\pi \in C(\hat{\alpha}_0, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)$$

und aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ $\gamma \in C(\hat{\alpha}_0, \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi))$ und somit

$$\begin{array}{rcl}k(End(h_0)) \setminus \{\mathcal{K}\} & \subseteq & k(\Gamma) \setminus \{\mathcal{K}\} \\ & \subseteq & C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi)\end{array}$$

folgt. Weiter ist

$$o(h[1]) = \Xi(\hat{\alpha}_0 + \pi) < \Xi(\hat{\alpha} + \pi) = o(h),$$

da lt. I.V. $o(h_0[0]) < o(h_0)$ und $o(h_0[0]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$ und somit $\hat{\alpha}_0 + \pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi))$ für $\hat{\alpha} := \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}$.
Ist $tp(h_0) = \bigwedge_{\forall x^{\mathcal{K}} F(x)}$, dann sei $\beta_i := \gamma_i + \omega^{\mathcal{K}\cdot o(h_0[i])} = \gamma + \omega^{\mathcal{K}\cdot o(h_0[i])+|i|} + \omega^{\mathcal{K}\cdot o(h_0[i])}$.
Aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ folgt $\gamma \in C(\hat{\alpha}, \Xi(\hat{\alpha}))$.
Da $\pi \in M^{\hat{\alpha}}$ ist, ist $\Xi(\hat{\alpha}) \leq \pi$.
Es folgt

$$k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \subseteq C(\hat{\alpha}, \Xi(\hat{\alpha})) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi)$$

und $k(i) < \pi \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi)$.
Also mit I.V. m)

$$o(h_0[i]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0) \cup k(i)) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi).$$

Damit ist $\gamma_i \in C(\hat{\alpha}, \pi)$ und weiter

$$\beta_i \in C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \hat{\alpha}.$$

Da $\pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$ folgt $\beta_i, \pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi))$ und so

$$\beta_i + \pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi)) \cap (\hat{\alpha}+\pi),$$

d.h. $o(h[i]) = \Xi(\beta_i + \pi) < \Xi(\hat{\alpha}+\pi) = o(h)$.
In den übrigen Fällen ist $|tp(h)| \subseteq \{0,1\}$ oder $|tp(h)| \subseteq \mathcal{T}_\beta$ für ein $\beta \in k(\Delta(tp(h_0)))$.
Es folgt mit I.V. l)

$$\beta \in k(\Delta(tp(h_0))) \subseteq k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$$

und so $\beta \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\gamma+1)$.
Also ist $k(i) \subseteq \Xi(\gamma+1) \subseteq \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$.
Es folgt mit I.V. m)

$$o(h_0[i]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0) \cup k(i)) \subseteq C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi))$$

und somit wg. $\gamma, \pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi))$

$$o(h[i]) = \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[i])} + \pi) < \Xi(\hat{\alpha}+\pi) = o(h),$$

da lt. I.V. $o(h_0[i]) < o(h_0)$.
d) Für $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$ ist $deg(h[0]) = 0 \leq deg(h)$ und $deg(h[1]) = o(h[1]) < o(h) = deg(h)$.
Sonst ist $deg(h[i]) = o(h[i]) < o(h) = deg(h)$.
e) Für $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$ ist

$$Ref(h[0]) = \hat{\alpha}_0 + 1 < \hat{\alpha} \leq Ref(h)$$

und

$$Ref(h[1]) = \max\{\hat{\alpha}_0, Ref(h_0[0])\} \leq \max\{\hat{\alpha}, Ref(h_0)\} = Ref(h).$$

Sonst ist

$$Ref(h[i]) = \max\{\gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])}, Ref(h_0[i])\} \leq \max\{\hat{\alpha}, Ref(h_0)\} = Ref(h).$$

f) Ist $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$, dann ist $k(\Gamma) \setminus \{\mathcal{K}\} \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\gamma+1)$. Also ist

$$k(\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}) \subseteq C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}+\pi).$$

Damit folgt $rk(F) < \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$ wg. $End(h_0) \subseteq \Gamma$.
Ist $tp(h_0) = Cut_D$, dann ist nach I.V. $rk(D) < deg(h_0) \leq \mathcal{K}+1$.
Ist $rk(D) = \mathcal{K}$, dann hat D die Form $Qx \in L_{\mathcal{K}} F(x)$ mit $Q \in \{\forall, \exists\}$ und $rk(F(L_0)) < \mathcal{K}$.
Da lt. I.V. l)

$$k(D) = k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$$

folgt

$$rk(F(L_0)) \in C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha}+\pi).$$

Da $\hat{\alpha}+\pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi))$ folgt auch $\pi \in C(\hat{\alpha}+\pi, \Xi(\hat{\alpha}+\pi)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$.
Also

$$rk(D^{(\pi,\mathcal{K})}) = \max\{\pi, rk(F(L_0))+2\} < \Xi(\hat{\alpha}+\pi).$$

Ist $rk(D) < \mathcal{K}$, dann ist $D^{(\pi,\mathcal{K})} \equiv D$ und so

$$rk(D^{(\pi,\mathcal{K})}) = rk(D) = \omega \cdot |D| + n \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \cap \mathcal{K} \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\hat{\alpha}+\pi).$$

g) Ist $tp(h_0) = \bigvee_A^{i_0}$ mit $i_0 \in |tp(h_0)|$, dann ist $tp(h) = \bigvee_{A^{(\pi,\mathcal{K})}}^{i_0}$.
Da A Unterformel einer $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formel ist, ist $|i_0| < \mathcal{K}$ und somit lt. I.V. l)

$$k(i_0) \subseteq k(tp(h_0)) \cap \mathcal{K} \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \cap \mathcal{K} \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\gamma+1) < \pi < \Xi(\hat{\alpha}+\pi),$$

d.h. $\bigvee_{A^{(\pi,\mathcal{K})}}^{i_0}$ ist eine Regel aus $RS(\mathcal{K})$ und es ist $k(i_0) < o(h)$.
h) Ist $tp(h_0) = \bigwedge_A$ und $A \equiv \forall x^{\mathcal{K}} F(x)$, dann folgt

$$k(i) < \pi < \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$$

f.a. $i \in |tp(h)| = |\bigwedge_{A^{(\pi,\mathcal{K})}}|$.
Für alle übrigen Fälle hatten wir in c) bereits $k(i) < \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$ eingesehen.
i) ist trivial.
j) Ist $tp(h_0) = Ref_\tau^\sigma(A(s))$, dann ist lt. I.V. $\sigma < Ref(h_0) \leq Ref(h)$ und $\sigma \in C(m(\tau), \tau) \cap m(\tau)$.
Es ist $\tau \in k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \cap \mathcal{K} \subseteq \Xi(\gamma+1)$ und so $\tau < \Xi(\hat{\alpha}+\pi)$.
Außerdem hatten wir bereits in a) $o(h[0]) + 1 < o(h)$ eingesehen.
k) ist trivial.
l) Ist $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$, dann ist

$$k(tp(h)) = k(F) \subseteq k(\Gamma) \cup \{\pi\} \subseteq k(h)$$

und

$$o(h) = \Xi(\hat{\alpha}+\pi) \in \mathcal{H}_\delta(k(h)),$$

wg. $\hat{\alpha}+\pi \leq \delta$.
Die anderen Fälle folgen analog.
m) Ist $tp(h) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$, dann ist

$$k(h[0]) = \{\pi\} \cup k(End(h_0)) \subseteq k(\Gamma) \cup \{\pi\} \subseteq k(h)$$

und

$$k(h[1]) = k(h_0[0]) \cup \{\gamma, \pi\} \cup k(End(h_0)) \cup k(B) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Aus $o(h_0[0]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0))$ und $\gamma, \pi \in k(h)$ folgt auch $o(h[i]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ für $i = 0, 1$.
In den übrigen Fällen ist ebenfalls lt. I.V.

$$o(h_0[i]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0) \cup k(i))$$

und wg. $\{\gamma, \pi\} \cup k(h_0) \subseteq k(h)$ folgt

$$\gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])} + \pi \in \mathcal{H}_\gamma(k(h) \cup k(i))$$

und wg. $\gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])} + \pi < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} + \pi \leq \delta$ folgt

$$o(h[i]) = \Xi(\gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])} + \pi) \in \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(i))$$

mit $\gamma^* = \gamma_i$ oder $\gamma^* = \gamma$.
Außerdem gilt lt. I.V. b),k),l) und m)

$$\begin{array}{rcl} k(h[i]) & = & \{\pi, \gamma^*\} \cup k(End(h_0[i]) \cup k(h_0[i]) \\ & \subseteq & \{\pi, \gamma^*\} \cup k(End(h_0)) \cup k(\Delta_i(tp(h_0)) \cup k(h_0[i]) \\ & \subseteq & \{\pi, \gamma^*\} \cup k(h_0) \cup k(\Delta_i(tp(h_0))) \cup k(h_0[i]) \\ & \subseteq & \{\pi, \gamma^*\} \cup k(h_0) \cup k(tp(h_0)) \cup k(i) \cup k(h_0[i]) \\ & \subseteq & \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(i)) \end{array}$$

wg. $\{\pi, \gamma\} \cup k(h_0) \subseteq k(h)$ und $\gamma_i \in \mathcal{H}_\gamma(k(h) \cup k(i))$.
n) Sei zunächst $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$.
Für $h[0] \in \mathbf{H}_\delta$ ist $\hat{\alpha}_0 \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ und $\neg End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})}$ Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln zu zeigen.
Lt. I.V. h) ist $o(h_0[0]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0))$ und lt. Voraussetzung

$$k(h_0) \cup k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)).$$

Da $\pi \in M^{\hat{\alpha}}$ ist, ist $\Xi(\hat{\alpha}) \le \pi$ und somit

$$\hat{\alpha} \in C(\hat{\alpha}, \Xi(\hat{\alpha})) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi).$$

Also auch $\gamma \in C(\hat{\alpha}, \pi)$ wg. $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ und somit

$$\Xi(\gamma + 1) \in C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \mathcal{K} = \pi,$$

da $\gamma + 1 < \hat{\alpha}$. Nach Def. von $\mathcal{H}_\gamma$ folgt

$$o(h_0[0]) \in C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi)$$

und somit

$$\hat{\alpha}_0 \in C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \hat{\alpha},$$

d.h. $M^{\hat{\alpha}_0}$ stationär in π. Also $\hat{\alpha}_0 \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$.
Es ist

$$k(\Gamma) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi)$$

und somit

$$k(\Gamma) \setminus \{\mathcal{K}\} \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \mathcal{K} = \pi.$$

Also sind $\neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$ Unterformeln von $\Sigma_3(\pi)$-Formeln und damit auch $\neg End(h_0)^{(\pi,\mathcal{K})} \subseteq \neg\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$.
Für $h[1] \in \mathbf{H}_\delta$ ist $h_0[0] \in \mathbf{H}_\gamma$, $\pi \in M^{\hat{\alpha}_0}$ $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0[0])})$, $End(h_0), B$ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln, $k(h_0[0]) \cup k(End(h_0), B) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1))$, $End(h_0[0]) \subseteq End(h_0), B$ und $\hat{\alpha}_0 + \pi \le \delta$ zu zeigen.
Lt. I.V. gilt $h_0[0] \in \mathbf{H}_\gamma$.
Es ist $\pi \in M^{\hat{\alpha}}$ und so $\hat{\alpha} \in C(\hat{\alpha}, \pi)$. Es folgt $\gamma \in C(\hat{\alpha}, \pi)$ wg. $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ und somit

$$\gamma + 1 \in C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \alpha,$$

d.h. $M^{\gamma+1}$ stationär in π.
Dann ist aber $\Xi(\gamma + 1) = \min M^{\gamma+1} < \pi$ und somit lt. I.V. m)

$$o(h_0[0]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi),$$

da lt. Voraussetzung $k(h_0) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1))$ gilt.
Insgesamt folgt $\hat{\alpha}_0 \in C(\hat{\alpha}, \pi) \cap \hat{\alpha}$ und somit $\pi \in M^{\hat{\alpha}_0}$.
$NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0[0])})$ folgt unmittelbar aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ mit der I.V. c) $o(h_0[0]) < o(h_0)$.

Da lt Vor. $End(h_0) \subseteq \Gamma$ sind $End(h_0), B$ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln.
Lt. Voraussetzung gilt $k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$ und somit lt. I.V. l)

$$k(h_0[0]) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)).$$

Es ist $k(End(h_0)) \subseteq k(\Gamma) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$ und $k(B) = k(C) \subseteq k(\Gamma)$.
Da $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$ folgt $End(h_0[0]) \subseteq End(h_0), B$ lt. I.V. b) und es ist $\hat{\alpha}_0 + \pi < \hat{\alpha} + \pi \leq \delta$ lt. I.V. c).
In den übrigen Fällen ist $h_0[i] \in \mathbf{H}_\gamma$ lt. I.V. und für $\hat{\alpha}_0 = \gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])}$ folgt wg.

$$o(h_0[i]) \in C(\hat{\alpha}, \pi) \quad \text{ und } \quad |i| \in \pi \subseteq C(\hat{\alpha}, \pi)$$

$\hat{\alpha}_0 \in C(\hat{\alpha}, \pi)$ und somit $\pi \in M^{\hat{\alpha}_0}$, da $\pi \in M^{\hat{\alpha}}$ und $\hat{\alpha}_0 < \hat{\alpha}$.
Aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ folgt mit $o(h_0[i]) < o(h_0)$ $NF(\gamma^*, \mathcal{K}^{o(h_0)})$.
Lt. I.V. d) ist $deg(h_0[i]) \leq deg(h_0) < \mathcal{K}+1$.
Lt. I.V. b) gilt

$$End(h_0[i]) \subseteq End(h_0) \cup \Delta_i(tp(h_0))$$

und lt. Voraussetzung sind $End(h_0) \subseteq \Gamma$ Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln. Ist $tp(h_0) = Cut_D$, dann folgt mit I.V. f) $rk(D) \leq \mathcal{K}$ und damit, daß D Unterformel einer $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formel ist. Ist $tp(h_0) = \bigwedge_A$ oder $tp(h_0) = \bigvee_A^i$, dann folgt, daß A_i eine Unterformel einer $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formel ist, daraus, daß A eine $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formel ist. Ist $tp(h_0) = Ref_\tau^\sigma A(s)$, dann ist $A(s) \in \Pi_2(\tau) \subseteq \Delta_0(\mathcal{K})$ und für $tp(h_0) = Rep$ ist $\Delta_0(tp(h_0)) = \emptyset$.
Aus $\gamma^* \in C(\gamma^*+1, \Xi(\gamma^*+1))$ folgt $|i| \in C(\gamma^*+1, \Xi(\gamma^*+1)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\gamma^*+1)$ und somit

$$k(i) \in C(\gamma^*+1, \Xi(\gamma^*+1)).$$

Also ist wg. $k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1))$ lt. I.V. m)

$$k(h_0[i]) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0) \cup k(i)) \subseteq C(\gamma^*+1, \Xi(\gamma^*+1)).$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} k(End(h_0[i])) &\subseteq k(End(h_0)) \cup k(\Delta_i(tp(h_0))) \\ &\subseteq k(h_0) \cup k(tp(h_0)) \cup k(i) \\ &\subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0) \cup k(i)) \subseteq C(\gamma^*+1, \Xi(\gamma^*+1)) \end{aligned}$$

mit I.V. a),k),l).
Da auch $\gamma^* + \mathcal{K}^{o(h_0[i])} + \pi < \hat{\alpha} + \pi \leq \delta$ folgt $h[i] \in \mathbf{H}_\delta$.

XIV. $h = (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}(A(s))h_0$
Dann gilt $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma$, $\hat{\alpha} := \gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}$, $\alpha_0 := \max\{o(h_0)+1, \pi\}+1$, $\mu \in Kard$, $\pi \leq \mu$, $\sigma \leq \gamma$, $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$, $\sigma \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$, $deg(h_0) \leq \bar{\mu}$,
$\{\gamma, \pi, \sigma, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \cap \bigcap\{C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$
$End(h_0) \setminus \{A(s)\} \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$, $A(s) \in \Pi_2(\pi)$,
$Ref(h_0) \leq \gamma$, $\zeta = o(h_0)$, $\hat{\alpha} \leq \delta$.

a)

$$\begin{aligned} \Delta(tp(h)) &= \{A(s)^{(\eta,\pi)}\} \\ &= \Delta((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}(A(s))) \\ &\subseteq End(h) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} End(h[t]) &= End(h_0) \setminus \{A(s)\} \cup \{A(s)_t^{(\eta,\pi)}\} \\ &\subseteq End(h), \Delta_t(\bigwedge A(s)^{(\eta,\pi)}) \end{aligned}$$

c) und d) Es ist

$$\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} < \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}$$

für $t \in \mathcal{T}_\eta \subseteq \mathcal{T}_\pi$.
Lt. Voraussetzung ist

$$\{\gamma, \mu, \pi, \sigma\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma + 1, \Psi_\pi^0(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}, \pi)$$

und lt. I.V. l)

$$o(h_0) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}, \pi).$$

Damit ist

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi} \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}, \pi)$$

und da wg. $t \in \mathcal{T}_\pi$ auch $k(t) \subseteq C(\gamma + 1, \pi)$ gilt, folgt analog

$$\sigma, \pi, \gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \in C(\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \pi).$$

Aus $\sigma \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ folgt M^σ stationär in π und mit $\sigma \leq \gamma < \gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} < \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}$ folgt lt. Satz 1.3.2

$$\Psi_\pi^\sigma(\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}), \Psi_\pi^\sigma(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}) < \pi.$$

Da

$$C(\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \pi) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}, \pi),$$

folgt schließlich mit Satz 1.3.4(i)

$$deg(h[t]) = o(h[t]) = \Psi_\pi^\sigma(\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}) < \Psi_\pi^\sigma(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}) = o(h) = deg(h).$$

e) Es ist

$$Ref(h[t]) = \max\{\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} \leq \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot (o(h_0)+1)}, Ref(h_0)\} = Ref(h),$$

da $|t| < \pi \leq \mu$.
f) und g) sind trivial.
h) Es ist $k(t) < \eta = o(h)$ für $t \in \mathcal{T}_\eta$.
i) und j) sind trivial.
k)

$$k(End(h)) \subseteq k(End(h_0)) \cup k(A(s)) \cup \{\eta\} \subseteq k(h)$$

l) Es sind $\sigma, \mu, \pi \in k(h)$ und lt. I.V. ist

$$o(h_0) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Da $\pi \leq \mu$ ist, ist

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi} \leq \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\mu} \leq \gamma + \omega^{\mu \cdot (o(h_0)+1)} \leq \gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \leq \delta$$

und so

$$o(h) = \Psi_\pi^\sigma(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)+\pi}) \in \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Aus $k(A(s)) \subseteq k(h)$ folgt $k(tp(h)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
m) Es ist

$$k(h[t]) = \{\eta, \mu, \pi, \sigma, \gamma_t\} \cup k(t) \cup k(h_0)$$

und damit
$$k(h[t]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(t)).$$
Aus $\gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} < \delta$ folgt auch
$$o(h[t]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h) \cup k(t)).$$
n) Es ist $h_0 \in \mathcal{H}_\gamma$, $\mu \in Kard$, $\pi \leq \mu$, $\sigma \leq \gamma < \gamma_t$, $NF(\gamma_t, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$, $\sigma \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$,
$$\{\gamma, \pi, \sigma, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma_t + 1, \Xi(\gamma_t + 1))$$
und
$$\{\gamma, \pi, \sigma, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq \bigcap\{C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)) : \pi \leq \tau < \mathcal{K}\},$$
da für $\Psi^0_\tau(\gamma_t + 1) < \tau$ aus der Definition von $\Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)$ und mit $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$ folgt $\gamma, \tau \in C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1))$ und damit lt. Satz 1.3.4(i) $\Psi^0_\tau(\gamma + 1) < \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)$, d.h. in jedem Fall
$$C(\gamma + 1, \Psi^0_\tau(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)).$$
Ist $\Psi^0_\tau(\gamma_t + 1) = \tau$, dann ist
$$|t| \in C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)),$$
wg. $|t| < \pi \leq \tau$.
Ist $\Psi^0_\tau(\gamma_t + 1) < \tau$, dann ist
$$\gamma_t + 1 \in C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1)).$$
Also in jedem Fall $\gamma_t \in C(\gamma_t + 1, \Psi^0_\tau(\gamma_t + 1))$. Ausserdem gilt $\gamma_t \in C(\gamma_t + 1, \Xi(\gamma_t + 1))$.
Weiter ist $End(I_t^{A(s)} h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$ und $Ref(h_0) \leq \gamma < \gamma_t$, sowie
$$\begin{array}{rcl} \gamma_t + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} & = & \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0) + |t|} + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \\ & \leq & \gamma + \omega^{\mu \cdot (o(h_0)+1)} + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \\ & \leq & \gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \leq \delta \end{array}$$
Da $A(s) \in \Pi_2(\pi)$ ist, ist $A(s)_t \in \Sigma_1(\pi)$ und es ist
$$o((10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma_t} I_t^{A(s)} h_0) = o(h[t]) < o(h) = \eta < \pi \in Reg.$$

XV. $h = (10.2)^{\mu,\pi,\xi}_\gamma h_0$
Dann gilt $h_0 \in \mathbf{H}_\gamma,\ \hat{\alpha} := \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)},\ \mu \in Kard,\ \pi \leq \mu,$
$\xi \leq \gamma,\ NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)}),\ \xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi),\ deg(h_0) \leq \bar{\mu}$
$\{\gamma, \pi, \xi, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \cap \bigcap\{C(\gamma + 1, \Psi^0_\tau(\gamma + 1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$
$End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$,
$Ref(h_0) \leq \gamma,\ \hat{\alpha} \leq \delta.$

XV.1. $tp(h_0) = Ref^\sigma_\pi(A(s))$
a)
$$\Delta(tp(h)) = \{\exists z^\pi (Ad^\sigma(z) \wedge \exists u \in z A(u)^{(z,\pi)})\} = \Delta(tp(h_0)) \subseteq End(h_0) = End(h)$$
b)
$$End(h[0]) = \{Ad^\sigma(L_\eta) \wedge \exists u \in L_\eta A(u)^{\eta,\pi}\} = \Delta_0(tp(h))$$
c) Da $tp(h_0) = Ref^\sigma_\pi(A(s))$ ist, gilt lt. I.V. j) $o(h_0[0]) + 1 < o(h_0)$, und mit $\pi \leq \mu$ folgt
$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi} < \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}.$$

Sei $d := h_0$ oder $d := h_0[0]$. Dann sind $\gamma, \pi, \xi, \mu \in C(\gamma + 1, \Psi^0_\pi(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(d)}, \pi)$ und lt. I.V. l),m) ist $o(d) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(d)}, \pi)$.
Es folgt

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(d)(+\pi)} \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(d)}, \pi).$$

Da $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ ist lt. 1.3.2

$$\Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(d)}) < \pi$$

und somit folgt nacheinander

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \pi, \gamma \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}))$$

aus der Definition der Ψ-Funktion und $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$. Damit ist

$$\Psi^0_\pi(\gamma + 1) \leq \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$$

und so

$$\mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + 1, \Psi^0_\pi(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})).$$

Da $tp(h_0) = Ref^\sigma_\pi(A(s))$ ist $\sigma \in tp(h_0)$ und wir erhalten

$$\gamma, \pi, \mu, \sigma, o(h_0[0]) \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}))$$

und schließlich

$$\Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi})) < \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})).$$

Da $o(h) = \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}))$ eine streng kritische Ordinalzahl ist, folgt die Behauptung.
d) ist Teilbeweis von c).
e) Es ist lt. I.V..

$$Ref(h[0]) = \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot (o(h_0[0])+1)}, Ref(h_0[0])\} \leq \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} = Ref(h).$$

f) ist trivial.
g) Wie bereits in c) gezeigt ist $\eta = \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi})) < o(h)$.
h)-j) sind trivial.
k) Es ist $k(End(h)) = k(End(h_0)) \subseteq k(h_0) \subseteq k(h)$ lt. I.V..
l) Es ist $k(tp(h)) = \{\eta\} \cup k(tp(h_0))$. Lt. I.V. l),m) gilt

$$\{o(h_0), o(h_0[0])\} \cup k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Da $\gamma, \mu, \pi, \xi \in k(h)$ und $\sigma \in k(h_0) \subseteq k(h)$ folgt mit $\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi} < \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \leq \delta$

$$o(h), \eta \in \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

m) Lt. I.V. ist $k(h_0[0]) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0))$ und damit folgt $k(h[0]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$. In l) hatten wir bereits $\eta \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ eingesehen. Daraus folgt $o(h[0]) = \omega^{\eta+1} + 1 \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
n) Sei

$$C := C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \cap \bigcap \{C(\gamma + 1, \Psi^0_\tau(\gamma + 1)) : \pi \leq \tau < \mathcal{K}\}.$$

Lt. I.V. ist $h_0[0] \in \mathbf{H}_\gamma$ und lt. Vor. gilt $\mu \in Kard, \pi \leq \mu$.
Da $tp(h_0) = Ref^\sigma_\pi(A(s))$ ist , folgt mit I.V. j) und der Vor.

$$\sigma \leq Ref(h_0) \leq \gamma \text{ und } \sigma \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi).$$

Aus $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$ folgt wg. $\pi \leq \mu$ mit I.V. c) $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0[0]) + \pi})$ und aus $k(h_0) \subseteq C$ folgt $\mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$ woraus mit I.V. m)

$$k(h_0[0]) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$$

folgt.
Da $\sigma \in k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$ lt. I.V. l) folgt mit der Voraussetzung $\{\gamma, \pi, \sigma, \mu\} \cup k(h_0) \subseteq C$.
Weiter ist

$$End(h_0[0]) \setminus \{A(s)\} \subseteq End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$$

lt. I.V. b), $A(s) \in \Pi_2(\pi)$ und $Ref(h_0[0]) \leq Ref(h_0) \leq \gamma$ lt. I.V. e) und schliesslich $o(h_0[0])+1, \pi < o(h_0)$ wg. $tp(h_0) = Ref_\pi^\sigma(A(s))$ lt. I.V. j), womit

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \leq \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \leq \delta$$

für $\alpha_0 := \max\{o(h_0[0]) + 1, \pi\} + 1$ ist.

XV.2. $tp(h_0) = Cut_A$ und $rk(A) = \mathcal{K}$:
a)

$$\Delta(tp(h)) = \Delta(tp(Rep)) = \emptyset \subseteq End(h)$$

b) Aus $NF(\gamma, \omega^{\mathcal{K} \cdot o(h_0)})$ folgt $NF(\gamma, \mathcal{K}^{\alpha_0})$ für $\alpha_0 := \max\{o(h_0[0]), o(h_0[1])\}$.
Also ist $\gamma + 1 \in C(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}, \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}))$ und so

$$\Xi(\gamma + 1) < \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}) =: \kappa.$$

Da

$$\pi \in C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \cap \mathcal{K} \subseteq C(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}, \kappa) \cap \mathcal{K} = \kappa$$

ist, folgt

$$\Gamma := End(h_0) = End(h_0)^{(\kappa, \mathcal{K})} = \Gamma^{(\kappa, \mathcal{K})}$$

aus $End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$.
Es folgt

$$End(h[0]) = End(h_0) = End(h).$$

c) Sei

$$C := C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \cap \bigcap \{C(\gamma + 1, \Psi_\tau^0(\gamma + 1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}.$$

Es ist $o(h[0]) = \Psi_\pi^\xi(\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)})$ mit $\gamma' := \gamma + \omega^{\mathcal{K} \cdot \alpha_0} \cdot 2$, $\mu' := \Xi(\hat{\alpha}_0 + \kappa)$ und $o(h) = \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$.
Sei $\eta := \gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}$.
Lt. Vor. und I.V. m) gilt

$$o(h_0[0]), o(h_0[1]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C.$$

Also ist $\alpha_0 \in C$ und da lt. Vor. auch $\gamma \in C$, folgt $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \in C$. Mit I.V. l) folgt auch $\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} \in C$ und wg. $C \subseteq C(\gamma + 1, \pi)$

$$\Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}) < \pi,$$

da M^ξ wg. $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ stationär in π ist. Da $\kappa = \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}) \in C(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \cdot 2 + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}, \pi)$ folgt auch

$$\Psi_\pi^\xi(\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}) < \pi.$$

Da $\gamma + 1 \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$ folgt

$$C \subseteq C(\gamma + 1, \Psi_\pi^0(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)})).$$

Also $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$. Da lt. I.V. $\alpha_0 < o(h_0)$ folgt $\kappa \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$. Es folgt $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$ und wg. $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}$ auch $\mu' \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$.
Schließlich folgt $\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)} \in C(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}))$ und wg. $\pi, \xi \in C$ und $\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)} < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}$ auch

$$o(h[0]) = \Psi_\pi^\xi(\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}) < \Psi_\pi^\xi(\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)}) = o(h).$$

d)

$$deg(h[0]) = o(h[0]) < o(h) = deg(h)$$

e) Es ist $\mu = \mathcal{K}$ und so

$$\begin{aligned} Ref(h[0]) &= \max\{\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[0])}, \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[1])}, \gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}, Ref(h_0[0]), Ref(h_0[1])\} \\ &\leq \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} \\ &= Ref(h), \end{aligned}$$

da $\mu' < \mathcal{K}$ und lt. I.V. c) $\gamma' < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} = \gamma + \omega^{\mathcal{K} \cdot o(h_0)}$ ist.
f)-j) sind trivial.
k) folgt aus der I.V..
l) Es ist $k(tp(h)) = \emptyset$ und $o(h) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ wurde bereits oben bewiesen.
m) Es ist $k(h[0]) = \{\mu', \pi, \xi, \gamma', \gamma, \kappa\} \cup k(A^{(\kappa,\mathcal{K})}) \cup k(End(h_0))$. Da $tp(h_0) = Cut_A$ ist, folgt lt. I.V. l) $k(A) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$. Ausserdem ist $k(End(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ lt. I.V. k). Es sind $\pi, \xi, \gamma \in k(h)$ und lt. I.V. ist $\alpha_0 \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und somit auch $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Da $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} \leq \delta$ folgt

$$\kappa = \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$$

und damit auch $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und wg. $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa < \gamma + \mathcal{K}^{o(h_0)} \leq \delta$

$$\mu' = \Xi(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa) \in \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

Da auch $\gamma' = \gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \cdot 2 \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ folgt $\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und somit wg. $\xi, \pi \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und $\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)} < \delta$ auch

$$o(h[0]) = \Psi^\xi_\pi(\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)}) \in \mathcal{H}_\delta(k(h)).$$

n) Lt. I.V. sind $h_0[0], h_0[1] \in \mathcal{H}_\gamma$. Da $\pi < \kappa$ und lt. I.V. m) $o(h_0[0]), o(h_0[1]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + 1, \pi)$ sind, folgt $\alpha_1 \in C(\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}, \kappa)$ für $\alpha_1 := \min\{o(h_0[0]), o(h_0[1])\}$.
Da $\kappa \in M^{\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}}$ folgt damit auch $\kappa \in M^{\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_1}}$, d.h. $\kappa \in M^{\gamma + \mathcal{K}^{o(h_0[i])}}$ für $i = 0, 1$.
Aus $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0)})$ und I.V. c) folgt $NF(\gamma, \mathcal{K}^{o(h_0[i])})$ und es ist $deg(h_0[i]) \leq deg(h_0) \leq \bar{\mu} = \mathcal{K} + 1$ lt. I.V. d) für $i = 0, 1$.
Da $rk(A) = \mathcal{K}$ und $End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$, folgt $End(h_0), (\neg)A$ sind Unterformeln von $\Pi_3(\mathcal{K})$-Formeln.
Mit I.V. k),l),m) folgt

$$\begin{aligned} k(h_0[i]) \cup k(End(h_0)) \cup k(A) &\subseteq k(h_0[i]) \cup k(h_0) \cup k(tp(h_0)) \\ &\subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h_0)) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \end{aligned}$$

Da $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_i} + \kappa < \gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \cdot 2$ folgt

$$(10.1)^\kappa_{\gamma,\Gamma,A} h_0[0], (10.1)^\kappa_{\gamma,\Gamma,\neg A} h_0[1] \in \mathbf{H}_{\gamma'}.$$

Es ist $\mu' \in Kard$ und da $\kappa \in C(\hat{\alpha_0} + \kappa, \Xi(\hat{\alpha_0} + \kappa))$ und $\pi < \kappa$ wie bereits in b) gezeigt, folgt

$$\pi \in C(\hat{\alpha_0} + \kappa, \Xi(\hat{\alpha_0} + \kappa)) \cap \mathcal{K} = \Xi(\hat{\alpha_0} + \kappa) = \mu'.$$

Es gilt $\xi \leq \gamma < \gamma'$ und $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ lt. Voraussetzung und auch $NF(\gamma', \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)})$ wg. $\mu' < \mathcal{K}$.
Weiter ist

$$deg(\underbrace{Cut_{A^{(\kappa,\mathcal{K})}}(10.1^\kappa_{\gamma,\Gamma,A} h_0[0], 10.1^\kappa_{\gamma,\Gamma,\neg A} h_0[1])}_{=:h_1}) = \mu'.$$

Sei $C' := C(\gamma'+1, \Xi(\gamma'+1)) \cap \bigcap\{C(\gamma'+1, \Psi^0_\tau(\gamma'+1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}$.
Da $\gamma \in C(\gamma'+1, \Xi(\gamma'+1))$ wg. $NF(\gamma, \mathcal{K}^{\alpha_0})$ folgt $C(\gamma+1, \Xi(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma'+1, \Xi(\gamma'+1))$.
Ist $\Psi^0_\tau(\gamma'+1) = \tau$, dann ist $\Psi^0_\tau(\gamma+1) \leq \Psi^0_\tau(\gamma'+1)$ und so

$$C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma'+1, \Psi^0_\tau(\gamma'+1)).$$

Ist $\Psi^0_\tau(\gamma'+1) < \tau$, dann sind $\gamma', \tau \in C(\gamma'+1, \Psi^0_\tau(\gamma'+1))$ und somit wg. $NF(\gamma, \mathcal{K}^{\alpha_0})$ auch $\gamma \in C(\gamma'+1, \Psi^0_\tau(\gamma'+1))$. Es folgt $\Psi^0_\tau(\gamma+1) < \Psi^0_\tau(\gamma'+1)$ und daher auch in diesem Fall

$$C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma'+1, \Psi^0_\tau(\gamma'+1)).$$

Also ist $C \subseteq C'$. Aus $\gamma \in C$ und $o(h_0[0]), o(h_0[1]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$ folgt somit $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} \in C'$ und da $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} < \gamma'$ auch $\kappa \in C'$ und genauso wg. $\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0} + \kappa < \gamma'$ schliesslich $\mu' \in C'$.
Wir haben also insgesamt

$$\{\gamma', \pi, \xi, \mu'\} \cup k(h_1) = \{\gamma', \pi, \xi, \mu', \gamma\} \cup k(h_0[0]) \cup k(h_0[1]) \cup k(\Gamma, A) \subseteq C'.$$

Da $End(h_1) = End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$ und

$$Ref(h_1) = \max\{\gamma + \mathcal{K}^{\alpha_0}, Ref(h_0[0]), Ref(h_0[1])\} < \gamma'$$

wg. $Ref(h_0[i]) \leq Ref(h_0) \leq \gamma$ für $i = 0, 1$, sowie $\gamma' + \omega^{\mu' \cdot (\mu'+1)} < \gamma + \omega^{\mathcal{K} \cdot o(h_0)} \leq \delta$ folgt $h[0] \in \mathbf{H}_\delta$.

XV.3. $tp(h_0) = Cut_A$ und $\pi < rk(A) \notin Reg$:
a) $\emptyset \subseteq End(h)$
b)

$$End(h[0]) = End(h_0[0]) \setminus \{A\} \cup End(h_0[1]) \setminus \{\neg A\} \subseteq End(h_0) = End(h)$$

c)+d) Es ist $o(h[0]) = deg(h[0]) = \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} + \omega^{\nu \cdot \varphi\eta(\eta+1)})$ mit

$$\eta := \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0})$$

$$\alpha_0 := \max\{o(h_0[0]), o(h_0[1])\}$$

$$\tau := St(rk(A)) \text{ und } \nu := St(rk(A))^-$$

und $deg(h) = o(h) = \Psi^\xi_\pi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$.
Es ist

$$\pi \leq \nu \leq rk(A) < \tau \leq \mu$$

und da

$$\begin{aligned} k(A) &= k(tp(h_0)) \subseteq k(h_0) \subseteq C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) \\ &\subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0})) \end{aligned}$$

folgt $\tau, \nu \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}))$.
Lt. I.V. m) sind auch

$$\begin{aligned} o(h_0[0]), o(h_0[1]) &\in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) \\ &\subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0})) \end{aligned}$$

und weiter lt. Vor. $\gamma, \mu \in C(\gamma+1, \Psi^0_\tau(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}))$.
Es folgt

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0})) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}, \tau)$$

und somit

$$\Psi^0_\tau(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}) = \eta < \tau \leq \mu.$$

Lt. I.V. ist $\alpha_0 < o(h_0)$ und damit

$$\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)} < \omega^{\mu\cdot o(h_0)}.$$

Analog zu oben folgt

$$\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)} \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}))$$

und wg. $\xi, \pi \in\subseteq C(\gamma+1, \Psi_\tau^0(\gamma+1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}))$ folgt

$$\Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)}) < \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}).$$

e)

$$\begin{aligned}
Ref(h[0]) &= \max\{\gamma + \omega^{\nu\cdot o(h_0[0])}, \gamma + \omega^{\nu\cdot o(h_0[1])}, Ref(h_0[0]), Ref(h_0[1]), \gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)}\} \\
&\leq \max\{\gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} \\
&= Ref(h)
\end{aligned}$$

f)-j) sind trivial.
k) unterscheidet sich nicht von den anderen Fällen.
l) ist trivial bzw. wurde bereits gezeigt.
m) Es ist

$$k(h[0]) = \{\nu, \pi, \xi, \tau, \mu, \gamma, \gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}\} \cup k(A) \cup k(h_0[0]) \cup k(h_0[1]).$$

Lt. I.V. ist $k(h_0[0]) \cup k(h_0[1]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Da $tp(h_0) = Cut_A$ folgt lt. I.V. l) $k(A) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und damit auch $\nu, \tau \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Es sind $\xi, \pi, \mu, \gamma \in k(h)$ und lt. I.V. ist $\alpha_0 \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$. Es folgt $\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und da $\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} < \gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}$ auch $\eta = \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Da $\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)} < \gamma + \omega^{\mu\cdot o(h_0)}$ folgt auch $o(h[0]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
n) Lt. I.V. sind $h_0[0], h_0[1] \in \mathbf{H}_\gamma$. Lt. Vor. ist $\mu \in Kard$ und in c)+d) wurde bereits $\tau \leq \mu$ gezeigt.
Es ist $0 \leq \tau$ und aus $NF(\gamma, \omega^{\mu\cdot o(h_0)})$ folgt mit I.V. c) $NF(\gamma, \omega^{\mu\cdot o(h_0[i])})$ für $i = 0, 1$.
Weiter ist $0 \in C(m(\tau), \tau) \cap m(\tau)$ und $deg(h_0[i]) \leq deg(h_0) \leq \mu$.
In c) wurde bereits $\tau \in C$ gezeigt und aus $k(h_0) \subseteq C$ folgt mit I.V. m) $k(h_0[i]) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$ für $i = 0, 1$. Lt. Vor. gilt auch $\gamma, \mu \in C$.
Es ist $End(h_0[0]) \subseteq End(h_0) \cup \{A\} \subseteq \Sigma_1(\tau) \cup \Delta_0(\tau)$ und $End(h_0[1]) \subseteq End(h_0) \cup \{\neg A\} \subseteq \Sigma_1(\tau) \cup \Delta_0(\tau)$.
Weiter gilt $Ref(h_0[i]) \leq Ref(h_0) \leq \gamma$ lt. I.V. e) und somit ist

$$(10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[i] \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}}$$

für $i = 0, 1$.
Aus

$$rk(A) \in C(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}, \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})) \cap \tau = \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})$$

folgt

$$deg(Cut_A((10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[0], (10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[1])) = \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})$$

und da $\bar{\nu} \leq \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})$ und $[\bar{\nu}, \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})[\cap R = \emptyset$ folgt

$$\underbrace{E_{\bar{\nu}}^{\Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0})}(Cut_A((10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[0], (10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[1]))}_{=:h_1} \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}}.$$

Weiter ist $\nu \in Kard$, $\nu < \mu$, $\xi \leq \gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0}$, $NF(\gamma, \omega^{\nu\cdot\varphi\eta(\eta+1)})$, $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi))$, $deg(h_1) = \bar{\eta} < \mu$, analog zum entsprechenden Teilbeweis in c)+d) folgt

$$\begin{aligned}
k(h_1) &= \{\bar{\nu}, \mu, \tau, \gamma\} \cup k(A) \cup k(h_0[0]) \cup k(h_0[1]) \\
&\subseteq C(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + 1, \Xi(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + 1)) \cap \bigcap\{C(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + 1, \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu\cdot\alpha_0} + 1)) : \pi \leq \tau \leq \mathcal{K}\}
\end{aligned}$$

und mit der I.V. b)

$$End(h_1) = End(h_0[0]) \setminus \{A\} \cup End(h_0[1]) \setminus \{\neg A\} \subseteq End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi).$$

Da

$$\begin{array}{rcl} Ref(h_1) & = & \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0])}, \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])}, Ref(h_0[0]), Ref(h_0[1])\} \\ & \leq & \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} \leq \delta \end{array}$$

und $\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} + \omega^{\mu \cdot \varphi\eta(\eta+1)} < \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \leq \delta$ folgt $h[0] \in \mathbf{H}_\delta$.

XV.4. $h = (10.2)_\gamma^{\mu,\pi,\xi} h_0$ mit $tp(h_0) = Cut_A$, $\pi < rk(A) \in Reg$ und $\alpha_0 < rk(A) = \tau$:
Wir betrachten nur den Fall $A \equiv \exists x^\tau F(x)$.
a) $End(tp(h)) = \emptyset$
b)

$$End(h[0]) = End(h_0[1]) \setminus \{\neg A\} \subseteq End(h_0) = End(h)$$

c)+d) Es ist $o(h[0]) = deg(h[0]) = \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])})$ und $o(h) = deg(h) = \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$.
Da lt. I.V. $o(h_0[1]) < o(h_0)$ folgt

$$\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])} < \gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}$$

und da $o(h_0[1]) \in \mathcal{H}_\gamma(k(h_0))$ lt. I.V. l) und $k(h_0) \subseteq C(\gamma + 1, \Psi_\pi^0(\gamma + 1)) \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}))$ folgt $\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)} \in C(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}))$ und somit

$$\Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])}) < \Psi_\pi^\xi(\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}).$$

e)

$$Ref(h_0[1]) = \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])}, Ref(h_0[1])\} \leq \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0)}, Ref(h_0)\} = Ref(h)$$

f)-j) sind trivial.
k)+l) wurden bereits in den anderen Fällen gezeigt.
m) folgt analog zu den anderen Fällen.
n) folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen und der Induktionsvoraussetzung.

XV.5. $h = (10.2)_\gamma^{\mu,\pi,\xi} h_0$ mit $tp(h_0) = Cut_A$, $\pi < rk(A) \in Reg$ und $\tau \leq \alpha_0$:
O.B.d.A. $\neg A \equiv \forall x^\tau F(x)$.
a) $End(tp(h)) = \emptyset$
b)

$$\begin{array}{rcl} End(h[0]) & = & (End(h_0[0]) \setminus \{A\} \cup \{A^{(\eta,\tau)}\}) \setminus \{A^{(\eta,\tau)}\} \cup (End(h_0[1]) \setminus \{\neg A\} \cup \{\neg A^{(\eta,\tau)}\}) \setminus \{\neg A^{(\eta,\tau)}\} \\ & \subseteq & End(h_0) = End(h) \end{array}$$

c)+d) Sei $d := Cut_{A^{(\Psi_\tau^0(\hat{\alpha}_0),\tau)}}(d_1, d_2)$, dann ist

$$deg(d) = \max\{rk(A^{(\Psi_\tau^0(\hat{\alpha}_0),\tau)}), deg(d_1), deg(d_2)\}$$

mit $d_1 = B^{\Psi_\tau^0(\hat{\alpha}_0),\tau}(10.2)_\gamma^{\mu,\tau,0} h_0[0]$, $d_2 = (10.2)_{\hat{\alpha}_0}^{\mu,\tau,0}(\forall_w^{(\Psi_\tau^0(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x)) h_0[1]$ und $\eta := \Psi_\tau^0(\hat{\alpha}_0)$.
Es ist $k(A) = k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0)) \subseteq C$ und damit

$$k(A) \setminus \{\tau\} \subseteq C \cap \tau \subseteq C(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2, \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2)) \cap \tau = \Psi_\tau^0(\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2).$$

Aus $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0} < \gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2$ und $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0} \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2, \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2))$ folgt $\eta < \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2)$ und somit auch $rk(A^{(\eta,\tau)}) < \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2)$.
Da auch

$$deg(d_1), deg(d_2) < \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2)$$

folgt

$$deg(d) < \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2).$$

Es ist $o(d) \leq deg(d)+1 \leq \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2)$.
Für den Fall $\pi = \tau$, ist

$$\Psi^0_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2) < \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)})$$

zu zeigen. Dies folgt analog zu oben aus

$$\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2 < \gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}$$

und

$$0, \pi, \gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 2 \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)})).$$

Für den Fall $\pi < \tau$, ist

$$\Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)})) < \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)})$$

mit $\eta' := \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3)$ und $\nu := St(\eta')^-$ zu zeigen.
Es ist $\tau = rk(A) < deg(h_0) \leq \mu$ lt. I.V. f).
Damit folgt $\nu \leq \eta' \leq \tau < \mu$ und auch $\varphi\eta'(\eta'+1) < \mu$.
Da $\alpha_0 < o(h_0)$ lt. I.V. c) folgt

$$\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)} < \gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}.$$

Aus $k(A) = k(tp(h_0)) \subseteq \mathcal{H}_\gamma(k(h_0))$ lt. I.V. l) folgt mit $k(h_0) \subseteq C \subseteq C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}))$

$$\tau \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)})).$$

Da $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3 \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}))$ und $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3 < \gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}$ folgt $\eta', \nu \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}))$ und schliesslich

$$\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)} \in C(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)}, \Psi^\xi_\pi(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)})).$$

Damit folgt die Behauptung.
e)

$$\begin{aligned} Ref(h[0]) &\leq \max\{Ref(d_1), Ref(d_2), \gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)}\} \\ &\leq \max\{\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0), Ref(h_0)}, Ref(h_0)\} = Ref(h) \end{aligned}$$

f)-l) s.o.
m) Es ist $k(h[i]) = k(h_0[0]) \cup k(h_0[0]) \cup \{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0), \mu, \tau, \hat{\alpha}_0, \gamma\} \cup k(A)$, falls $\pi = \tau$.
Es gilt $k(h_0[0]) \cup k(h_0[0]) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ lt. I.V. und da $tp(h_0) = Cut_A$ folgt lt. I.V. l) $k(A) \subseteq \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und somit auch $\tau \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Es sind $\gamma, \mu \in k(h)$ und somit $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ lt. I.V..
Da $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0} < \gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)} \leq \delta$ folgt $\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Ebenso folgt $\Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0[0])}), \Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0+\omega^{\mu\cdot o(h_0[1])}) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Ist $\pi = \tau$, so sind wir fertig.
Ist $\pi < \tau$ so folgt analog zu oben $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3 \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und $\eta' = \Psi^0_\tau(\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
damit gilt auch $\nu := St(\eta')^- \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$ und so $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)} \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
Da $\gamma+\omega^{\mu\cdot\alpha_0}\cdot 3+\omega^{\nu\cdot\varphi\eta'(\eta'+1)} < \gamma+\omega^{\mu\cdot o(h_0)} \leq \delta$ folgt $o(h[0]) \in \mathcal{H}_\delta(k(h))$.
n) Lt. I.V. sind $h_0[i] \in \mathbf{H}_\gamma$ für $i = 0, 1$.

Da $\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0) \leq \tau$ ist auch $(\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1] \in \mathbf{H}_\gamma$.
Es ist $\mu \in Kard$ lt. Voraussetzung und $\tau = rk(A) < deg(h_0) \leq \mu$.
Da $o((\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1]) = o(h_0[1]) \leq \alpha_0 < o(h_0)$ folgt aus $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$, daß $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0[0])})$ und $NF(\hat{\alpha}_0, \omega^{\mu \cdot o((\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1])})$.
Natürlich ist $0 \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ und $deg(h_0[i]) \leq deg(h_0) \leq \bar{\mu}$.
Analog zu oben folgt

$$\{\gamma, \tau, \mu, 0\} \cup k(h_0[0]) \subseteq C(\gamma + 1, \Xi(\gamma + 1)) \cap \bigcap \{C(\gamma + 1, \Psi^0_{\tau'}(\gamma + 1)) : \tau \leq \tau' \leq \mathcal{K}\}$$

und

$$\begin{array}{rl} \{\hat{\alpha}_0, \tau, \mu, 0\} \cup k((\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1]) & \subseteq \\ \{\hat{\alpha}_0, \tau, \mu, 0\} \cup k(A) \cup \{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)\} \cup k(h_0[1]) & \subseteq \\ C(\hat{\alpha}_0 + 1, \Xi(\hat{\alpha}_0 + 1)) \cap \bigcap \{C(\hat{\alpha}_0 + 1, \Psi^0_{\tau'}(\hat{\alpha}_0 + 1)) : \tau \leq \tau' \leq \mathcal{K}\} & \end{array}$$

Es ist $End(h_0[0]) \subseteq End(h_0) \cup \{A\} \subseteq \Sigma_1(\tau) \cup \Delta_0(\tau)$ und $End((\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1])) \subseteq End(h_0) \cup \{\neg A^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)}\} \subseteq \Sigma_1(\tau) \cup \Delta_0(\tau)$.
Weiter ist $Ref(h_0[0]), Ref((\forall_w^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} F(x))h_0[1]) \leq Ref(h_0) \leq \gamma < \hat{\alpha}_0$ und da $A \in \Sigma_1(\tau)$, $o((10.2)^{\mu,\tau,0}_\gamma h_0[0]) \leq \Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0) < \tau \in Reg$ folgt

$$d_1 \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0}} \text{ und } d_2 \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2}.$$

Ist $\pi = \tau$, dann folgt $h_0[0] \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2} \subseteq \mathbf{H}_\delta$.
Ist $\pi < \tau$ dann folgt zunächst

$$d := E_{\bar{\nu}}^{\Psi^0_\tau(\delta')} Cut_{A^{(\Psi^0_\tau(\delta'),\tau)}}(d_1, d_2) \in \mathbf{H}_{\gamma + \omega^{\mu \cdot \alpha_0} \cdot 2},$$

da $[\bar{\nu}, \Psi^0_\tau(\delta')[\cap Reg = \emptyset$.
Es ist $\nu \in Kard$ und aus $\pi < \tau$ folgt $\pi \leq \nu$.
Weiter ist $\xi \leq \gamma'$ und aus $NF(\gamma, \omega^{\mu \cdot o(h_0)})$ folgt $NF(\gamma', \omega^{\nu \cdot \varphi \eta'(\eta'+1)})$, da $\nu < \mu$ und $\eta' < \tau \leq \alpha_0$ gilt. Lt. Vor. ist $\xi \in C(m(\pi), \pi) \cap m(\pi)$ und es ist $deg(d) = \bar{\nu}$.
Wie oben folgt

$$\{\gamma', \pi, \xi, \nu\} \cup k(d) \subseteq C(\gamma' + 1, \Xi(\gamma' + 1)) \cap \bigcap \{C(\gamma' + 1, \Psi^0_{\tau'}(\gamma' + 1) : \pi \leq \tau' \leq \mathcal{K}\}.$$

Es ist $End(d) \subseteq End(h_0) \subseteq \Sigma_1(\pi) \cup \Delta_0(\pi)$ und

$$Ref(d) = \max\{\gamma + \omega^{\mu \cdot o(h_0[0])}, \hat{\alpha}_0 + \omega^{\mu \cdot o(h_0[1])}, Ref(h_0[0]), Ref(h_0[1])\} \leq \gamma'$$

und $\gamma' + \omega^{\nu \cdot \varphi \eta'(\eta'+1)} < \hat{\alpha} \leq \delta$ und so $h[0] \in \mathbf{H}_\delta$.

Die restlichen Fälle, d.h. für $tp(h_0) \neq Ref^\sigma_\pi A(s)$ und $(tp(h_0) \neq Cut_A$ oder $rk(A) < \pi)$, seien dem Leser überlassen. $\Box$

Satz 4.4.2 $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \phi^z)$ mit $FV(\phi) = \emptyset$, dann existiert ein $\delta < \varepsilon_{\mathcal{K}+1}$ und ein $h \in \mathbf{H}_\delta$ mit $o(h) < \Psi^0_\Omega(\varepsilon_{\mathcal{K}+1})$, $deg(h) = 0$ und $End(h) \subseteq \{\phi^{L_\omega}\}$.

Beweis: Gilt $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \phi^z)$, dann ex. eine Konjunktion χ von Axiomen von $\Pi_3 - Refl$, so daß die Sequenz

$$\neg(\chi \wedge'' z = HF''), \phi^z$$

rein logisch herleitbar ist.
Lt. Satz 3.2.2 ex. also eine $RS^{\mathcal{K}}$-Herleitung h_0 und $n, m < \omega$ mit

$$End(h_0) \subseteq \{\neg(\chi \wedge'' z = HF''), \phi^z\}$$

$FV(h_0) = \{z\}, k(h_0) \subseteq \{0, \mathcal{K}\}, o(h_0) \leq \omega^{\mathcal{K}+n} + m, deg(h_0) < \mathcal{K} + \omega.$
Lt. Lemma 3.2.2 ist $h_1 := h_0(z/L_\omega)$ eine geschlossene $RS^{\mathcal{K}}$-Herleitung (d.h. $h_1 \in \mathcal{D}^+$) mit

$$End(h_1) \subseteq \{\neg(\chi \wedge \text{“}L_\omega = HF\text{“}), \phi^{L_\omega}\}$$

$k(h_1) \subseteq \{0, \mathcal{K}\}, o(h_0) \leq \omega^{\mathcal{K}+n} + m, deg(h_0) < \mathcal{K} + \omega.$
Außerdem existiert eine RS^0-Herleitung h_1' mit

$$End(h_1') \subseteq \{\chi^{\mathcal{K}} \wedge'' L_\omega = HF''\}$$

$o(h_1') < \omega^{\mathcal{K}+\omega}, deg(h_1') \leq \mathcal{K}$ und $k(h_1') \subseteq \{0, \omega, \mathcal{K}\}$ (für $\chi = \chi_1 \wedge \ldots \wedge \chi_l$ ist h_1' aufgebaut aus $\bigwedge$-Schlüssen und den RS^0-Herleitungen $Ax_1^*(Paar)^\omega$, $Ax_1^*(Ver)^\omega$, $Ax_6^*(\mathrm{tran}(L_\omega))$, $Ax_{15}^*(\forall x \in L_\omega \exists u \in L_\omega(\exists y \in u(x \in y) \wedge \mathcal{A}(u)$, $Ax_1^*((x \in z_1 \vee x = z_2) - Sep)^\omega$, sowie $Ax_j^* \chi_i^{\mathcal{K}}$ für $i = 1, \ldots, l$ und $j = 1$ oder $j = 2$ je nachdem welcher Art χ_i ist).
Es ist $deg(\underbrace{\chi^{\mathcal{K}} \wedge'' L_\omega = HF''}_{=:C}) < \mathcal{K} + \omega$. Sei $\mathcal{K} + k := \min\{deg(C), deg(h_1), deg(h_1'), \mathcal{K} + 1\}$ und

$$h := E_0^{\Psi^0_{\Omega_1}(\mathcal{K}^\alpha)}(10.2)_0^{\mathcal{K},\Omega_1,0} E_{\mathcal{K}+1}^{\mathcal{K}+k} Cut_C(h_1', h_1)$$

mit $\alpha := \omega_{k \dot- 1}(\max\{o(h_1) + 1, o(h_1') + 1\})$.
Da $h_1, h_1' \in \mathcal{D}^+$ folgt $h_1, h_1' \in \mathbf{H}_0$ und somit auch $h_2 := Cut_C(h_1', h_1) \in \mathbf{H}_0$.
es ist $deg(h_2) \leq \mathcal{K} + k$ und somit auch $h_3 := E_{\mathcal{K}+1}^{\mathcal{K}+k} h_2 \in \mathbf{H}_0$.
Man überprüft leicht die Voraussetzungen für

$$h_4 := (10.2)_0^{\mathcal{K},\Omega_1,0} h_3 \in \mathbf{H}_{\omega^{\mathcal{K} \cdot \alpha}}$$

und erhält somit auch $h = E_0^{\Psi^0_{\Omega_1}(\mathcal{K}^\alpha)} h_4 \in \mathbf{H}_{\omega^{\mathcal{K} \cdot \alpha}}$. □

Kapitel 5

Folgerungen und Anwendungen

5.1 Eine Einhüllende für die Π_2^0-Skolem-Funktionen von Π_3-Reflexion

Als erste Anwendung der Bezeichnungssysteme $\mathbf{H}_\delta$ werden wir eine zweistellige rekursive Funktion f mit $\models \forall x \in L_n \exists y \in L_{f(h,n)} \phi(x,y)$ für $h \in \mathbf{H}_\delta$ mit $End(h) \subseteq \{\forall x \in L_\omega \exists y \in L_\omega \phi(x,y)\}$, $deg(h) = 0$, $\phi(x,y) \in \Delta_0$ angeben, wobei $\models$ die Gültigkeit in der Struktur der erblich endlichen Mengen ausdrückt. Mit Satz 4.4.2 folgt dann aus $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \forall x \in z \forall y \in z\phi(x,y))$, $\phi(x,y) \in \Delta_0$ auch $\models \forall x \in L_n \exists y \in L_{f(h,n)} \phi(x,y)$ für ein geeignetes $h \in \mathbf{H}_\delta$. Da f durch <-Rekursion im Sinne von Takeuti [Tak87] definiert ist, die rekursiv aufzählbaren Teilmengen in der Struktur der erblich endlichen Mengen genau die Σ_1-definierbaren Teilmengen von $I\!N$ sind (vgl. Barwise [Bar75]) und eine partielle Funktion genau dann rekursiv ist, wenn ihr Graph rekursiv aufzählbar ist (vgl. z.B. Rogers [Rog67]), läßt sich dies als Charakterisierung der beweisbar rekursiven (beweisbar totalen) Funktionen von $\Pi_3 - Refl$ interpretieren. Alternativ dazu lassen sich mit Hilfe der Ordinalzahlbezeichnungssysteme Hierarchien zahlentheoretische Funktionen definieren, die ebenfalls eine Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen liefern. Diese Hierarchien sind natürlich stark von den Fundamentalfolgen abhängig, die für die Limeszahlen gewählt werden (vgl. [Wei97]). Für stärkere Ordinalzahlbezeichnungssysteme erhält man mittels Einführung einer sogenannten Normfunktion (vgl. Buchholz/Cichon/Weiermann [BCW94]) eine sehr natürliche Wahl von Fundmentalfolgen. In Blankertz [Bl97] wird dies mit Hilfe verfeinerter Operatoren zur Charakterisierung der beweisbar rekursiven Funktionen von Π_3-Reflexion genutzt. In [BCW94] wird auch gezeigt, daß die <-rekursiven mit den rekursiven Funktionen übereinstimmen, die sich schließlich durch Funktionen der Hierarchie majorisieren lassen, wenn das Ordinalzahlbezeichnungssystem einige natürliche Voraussetzungen erfüllt. Weitere Arbeiten jüngeren Datums in dem Gebiet sind [Wei96] und [FrS95].
Dieser Abschnitt ist der einzige Abschnitt, in dem transfinite Induktion verwendet wird. Da wir vollkommen analog zu [Bu01b] vorgehen können, sind hier nur (soweit sich nichts ändert) die Sätze und Hilfssätze wiedergegeben. Einige Lemmata werden ohnehin im nächsten Abschnitt noch weiter präzisiert.

Definition 5.1.1 $2_0 := 0, 2_{m+1} := 2^{2_m}$

$$s_n := \begin{cases} L_0 & \text{falls} \quad n = 0 \\ [x \in L_{l+1} : x = s_{n_0} \vee \ldots \vee x = s_{n_k}] & \text{falls} \quad n = 2^{n_0} + \ldots + 2^{n_k}, n_0 > \ldots > n_k, l := lev(s_{n_0}) \end{cases}$$

Lemma 5.1.1 a) s_n ist ein RS-Term mit $lev(s_n) < \omega$,

b) $lev(s_n) < m$ gdw $n < 2_m$

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Definition 5.1.2 $\mathcal{T}_m^* := \{s_n : lev(s_n) < m\} = \{s_n : n < 2_m\}$

Man beachte, daß $\mathcal{T}_m^*$ im Gegensatz zu $\mathcal{T}_m$ eine endliche Menge ist.

Definition 5.1.3 $\models A$: gdw $\begin{cases} \forall i \in J \models A_i & \text{falls} \quad A \equiv \bigwedge(A_i)_{i\in J} \\ \exists i \in J \models A_i & \text{falls} \quad A \equiv \bigvee(A_i)_{i\in J} \end{cases}$

$\models \Gamma$:gdw $\exists A \in \Gamma \models A$

Lemma 5.1.2 a) $\models \neg A$ gdw $\not\models A$

b) $\models s \neq t, \neg A(s), A(t)$

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Lemma 5.1.3 Für jedes $a \in \mathcal{T}_\omega$ existiert ein $n < \omega$ mit

$$\models a = s_n \text{ und } lev(s_n) \leq lev(a).$$

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Lemma 5.1.4 Für $A \equiv \bigwedge(A_i)_{i\in\mathcal{T}_m}$ gilt

$$\models A \quad \text{gdw} \quad \models A_i \text{ f.a. } i \in \mathcal{T}_m^*.$$

Beweis: Siehe [Bu01b]. □

Definition 5.1.4 Die $<$-rekursiven Funktionen sind die kleinste Klasse arithmetischer Funktionen, die die Nullfunktion, die Projektionen und die Nachfolgerfunktion enthält und abgeschlossen ist gegen Superpositionen, primitive Rekursion und $<$-Rekursion, d.h. mit h,g, θ ist auch f mit

$$f(\vec{x}, y) := \begin{cases} h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, \theta(\vec{x}, y))) & \text{falls } \theta(\vec{x}, y) < y \\ g(\vec{x}, y) & \text{sonst} \end{cases}$$

$<$-rekursiv.

Bemerkung: $<$ bezeichnet hier die Ordnung auf $\mathcal{T}(K)$.

Definition 5.1.5 von $f(h, n)$ für $h \in \mathbf{H}_\delta$ und $n \in I\!N$

$$\text{Für } A \simeq \bigwedge(A_i)_{i\in J} \text{ sei } \mid A \mid^n := \begin{cases} \mathcal{T}_m^* & \text{falls} & J = \mathcal{T}_m \\ \mathcal{T}_n^* & \text{falls} & J = \mathcal{T}_\omega \\ J & \text{falls} & J = \{0, 1\} \\ \emptyset & \text{sonst} & \end{cases}$$

$$f(h, n) := \begin{cases} f(h[0], n) & \text{falls} & tp(h) = Rep \\ \max\{f(h[0], n), lev(i_0) + 1\} & \text{falls} & tp(h) = \bigvee_A^{i_0}, lev(i_0) < \omega \\ \max\{f(h[i], n) : i \in \mid A \mid^n\} & \text{falls} & tp(h) = \bigwedge_A \\ 0 & \text{sonst} & \end{cases}$$

Definition 5.1.6 Sei $A^{n,k}$ die RS-Formel die man erhält, wenn man in A jeden beschränkten Quantor der Form $\forall x \in L_\omega$ durch $\forall x \in L_n$ und jeden beschränkten Quantor der Form $\exists x \in L_\omega$ durch $\exists x \in L_k$ ersetzt.
$\Gamma^{n,k} := \{A^{n,k} : A \in \Gamma\}$

Lemma 5.1.5 Ist $h \in \mathbf{H}_\delta$, $End(h) \subseteq RS_\omega, deg(h) = 0$ und $f(h, n) \leq k$, dann gilt $\models End(h)^{n,k}$.

Beweis: Transfinite Induktion über $o(h)$.
Sei $h \in \mathbf{H}_\delta, End(h) \subseteq RS_\omega, deg(h) = 0$ und $f(h, n) \leq k$.
Da $End(h) \subseteq RS_\omega$ ist, ist $tp(h) \neq Ref_\mathcal{K} A$ und $tp(h) \neq Ref_\pi^\xi(A(s))$. Damit folgt das Lemma analog zu [Bu01b]. □

Satz 5.1.1 Gilt $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \to \forall x \in z \forall y \in z \phi(x, y))$ mit $\phi(x, y) \in \Delta_0$, dann existiert ein $h \in \mathbf{H}_\delta$ mit $o(h) < \Psi_\Omega^0(\epsilon_{\mathcal{K}+1})$ und f.a. $n \in I\!N \models \forall x \in L_n \exists y \in L_{f(h,n)} \phi(x, y)$.

Beweis: Dies folgt mit Satz 4.4.2 aus dem vorangegangenem Lemma. □

5.2 Ein Konservativitätsresultat

Bekanntlich lassen sich Aussagen über erblich endliche Mengen als arithmetische Aussagen auffassen. Wir wollen beweisen, daß für $\phi \in \Delta_0$ aus $KP + \Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \forall x \in z \exists y \in z \phi(x, y))$ bereits $PRA + PRWO(<) \vdash \forall x \exists y U(\phi(x, y))$ folgt, wobei $U(\phi)$ eine naheliegende Übersetzung der mengentheoretischen Formel ϕ in eine arithmetische Formel ist.
$PRWO(<)$ ist die Aussage, daß es keine bzgl. $<$ unendlich absteigende primitiv rekursive Funktion gibt. $PRWO(<)$ kann durch die Formeln $\exists n f(n+1) \not< f(n)$ axiomatisiert werden, wobei f über alle primitiv rekursiven Funktionen läuft und evtl. weitere Parameter enthalten kann. Man beachte, daß es primitiv rekursive Wohlordnungen gibt, die keine Wohlordnungen sind: vgl. z.B. Troelstra/Schwichtenberg [TrS96] S.279-284 für ein Beispiel einer zweistelligen nichtfundierten Relation, die keine unendlich absteigenden arithmetischen Sequenzen hat.
PRA ist in einer Sprache der Prädikatenlogik 1. Stufe formuliert. Die Funktionssymbole und Axiome sind analog zu den primitiv rekursiven Funktionen und ihren definierenden Gleichungen gebildet. $=$ ist das einzige Relations- und 0 das einzige Konstantensymbol der Sprache. Darüberhinaus erlaubt PRA vollständige Induktion über quantorenfreie Formeln, d.h. Δ_0-Formeln der Sprache. Die Theorie PRA wurde 1923 von Skolem [Sk67] als ein informelles (quantorenfreies) System eingeführt. Sie wird in Hilbert/Bernays [HB68] ausgiebig diskutiert und dient dort als Beispiel finiten Schließens. Der quantorenfreie Teil der Theorie hat eine Reihe interessanter Eigenschaften. Insbesondere ist er unabhängig von der zugrunde gelegten Logik: Intuitionistisch lassen sich aus den Axiomen dieselben Sätze beweisen, wie mit klassischer Logik. Damit ist diese Theorie im hohen Maße konstruktiv. Zur Bedeutung von PRA siehe auch Troelstra/van Dalen [TrD88].
Um das oben angekündigte Resultat zu erhalten, werden wir grob gesprochen wie folgt argumentieren: Mit $KP + \Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \forall x \in z \exists y \in z \phi(x, y))$ erhalten wir eine Bezeichnung für eine unendliche schnittfreie Herleitung h mit $End(h) \subseteq \{\forall x \in L_\omega \exists y \in L_\omega \phi(x, y)\}$. Für jedes $n \in IN$ liefert uns der Invertierungsoperator eine Bezeichnung $h(n) := I_{s_n}^{\forall x \in L_\omega \exists y \in L_\omega \phi(x,y)} h$ für eine unendliche Herleitung mit $End(h(n)) \subseteq \{\exists y \in L_\omega \phi(s_n, y)\}$. Wenn wir annehmen, daß die Endformel von $h(n)$ falsch ist, dann muß eine der Prämissen der letzten Regelanwendung falsch sein. Wir wählen die „kleinste“ und erhalten eine Bezeichnung für eine schnittfreie unendliche Herleitung, deren Endsequenz nur aus falschen Formeln besteht und eine kleinere Ordinalzahl hat. Indem wir diesen Vorgang iterieren erhalten wir eine unendlich absteigende primitiv rekursive Folge, da wir die „Wahl“ primitiv rekursiv beschränken können. Also muss $\exists y \in L_\omega \phi(s_n, y)$ wahr sein und mit Hilfe eines partiellen Wahrheitsprädikates lässt sich das Ergebnis auf die Übersetzung übertragen.

5.2.1 Der Kern der Argumentation

Sei $dp(m, n) := Mod(Div_2^{(m)}(n), 2)$ mit $Div_2^{(0)}(n) := n$ und $Div_2^{(m+1)}(n) := Div(Div_2^{(m)}(n), 2)$, wobei Div, Mod die üblichen elementaren zahlentheoretischen Funktionen mit $m = Div(m, k) \cdot k + Mod(m, k)$ bezeichne.
Für $a_0, \ldots, a_m \leq 1$ gilt

$$dp(i, \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot 2^j) = 1 \quad gdw \quad i \leq m \text{ und } a_i = 1.$$

Definition 5.2.1 Definition von $Name([x \in L_n : \psi(a_0, \ldots, a_m, x)])$ durch Induktion über n und Nebeninduktion über den Rang von ψ:

$Name(L_n) := 2_{n+1} - 1$

$$Name([x \in L_n : Ad^{\xi}(x)]) := 0$$

$$Name([x \in L_n : x \in x]) := 0$$

$$Name([x \in L_n : x \in a]) := Name(a)$$

$$Name([x \in L_n : a \in x]) := \sum_{m=0}^{2_n-1} dp(Name(a), m) \cdot 2^m$$

$$Name([x \in L_n : \phi \wedge \psi]) := Name([x \in L_n : \phi]) \cdot Name([x \in L_n : \psi])$$

$$Name([x \in L_n : \forall y \in L_n \psi(y)]) := \sum_{i=0}^{2_n-1} (\prod_{j=0}^{2_n-1} dp(i, Name([x \in L_n : \psi(s_j)]))) \cdot 2^i$$

$$Name([x \in L_n : \neg\psi]) := Name(L_n) - Name([x \in L_n : \psi])$$

wobei $\sum_{i=0}^{2_0-1}(\ldots) := 0$ und $\prod_{i=0}^{2_0-1}(\ldots) := 1$ sei.

Mit Hilfe von Name lässt sich nun ein partielles Wahrheitsprädikat $True_0$ für $\Delta_0(\omega)$-Sätze definieren:

Definition 5.2.2

$$true_0(Ad^{\xi}(t)) := 0$$

$$true_0(s \in t) := dp(Name(s), Name(t))$$

$$true_0(\phi \wedge \psi) := true_0(\phi) \cdot true_0(\psi)$$

$$true_0(\forall y \in t\psi(y)) := \prod_{j=0}^{2_{lev(t)}-1} sg(1 - dp(j, Name(t)) + true_0(\psi(s_j)))$$

$$true_0(\neg\psi) := 1 - true_0(\psi)$$

wobei wieder $\prod_{i=0}^{2_0-1}(\ldots) := 1$ sei.

Lemma 5.2.1 Es gilt:

1. $Name(t) < 2_n \quad gdw \quad t \in \mathcal{T}_n \quad gdw \quad true_0(t \in L_n) = 1$
2. $true_0(t \in s) = true_0(s \in L_m) = 1 \Longrightarrow true_0(t \in L_m) = 1$
3. Für $m \geq lev(t)$ ist $Name(t) = \sum_{i=0}^{2_m-1} true_0(s_i \in t) \cdot 2^i$.
4. $true_0(t \subseteq s) = 1 \quad \Longrightarrow \quad Name(t) \leq Name(s)$
5. $true_0(t = s) = 1 \quad \Longrightarrow \quad Name(t) = Name(s)$
6. $Name(t) = Name(s) \quad \Longrightarrow \quad true_0(\phi(t)) = true_0(\phi(s))$
7. $true_0(t = s) = 1 \quad gdw \quad Name(t) = Name(s)$
8. $true_0(s \in L_m) = true_0(\phi(s)) = 1 \quad gdw \quad true_0(s \in [x \in L_m : \phi(x)]) = 1$

Beweis: 3. Vollst. Induktion über $lev(t)$ mit einer Nebeninduktion über den Aufbau des Skeletts von t.
Es ist $true_0(s_i \in t) = dp(i, Name(t))$.
Ich zeige nur die Fälle $t = [x \in L_n : x \in a]$ und $t = [x \in L_n : a \in x]$, die restlichen Fälle verlaufen analog.

$$Name([x \in L_n : x \in a]) = Name(a) \overset{I.V.}{=} \sum_{i=0}^{2_m-1} dp(i, Name(a)) \cdot 2^i$$

$$\begin{aligned} Name([x \in L_n : a \in x]) &= \sum_{j=0}^{2_n-1} dp(Name(a), j) \cdot 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{2_m-1} dp(i, \sum_{j=0}^{2_n-1} dp(Name(a), j) \cdot 2^i) \cdot 2^i \end{aligned}$$

4. Mit $m = lev(t)$ folgt

$$\begin{aligned} 1 &= true_0(t \subseteq s) \\ &= true_0(\forall x \in t.x \in s) \\ &= \prod_{i=0}^{2_m-1} sg(1 - dp(i, Name(t)) + true_0(s_i \in s)) \\ &= \prod_{i=0}^{2_m-1} sg(1 - true_0(s_i \in t) + true_0(s_i \in s)) \end{aligned}$$

d.h.

$$true_0(s_i \in t) = 1 \Longrightarrow true_0(s_i \in s) = 1.$$

Mit 3. folgt die Behauptung.
5. folgt aus 4.
6. Vollständige Induktion über den Aufbau von ϕ.
7. Durch Hauptinduktion nach $lev(t)$ und Nebeninduktion über den Aufbau des Skeletts von t folgt $true_0(t = t) = 1$ und mit 6. folgt die Behauptung.
8. Hauptinduktion nach m, Nebeninduktion über den Aufbau von ϕ. □

Damit folgt nun

Lemma 5.2.2

1. Für $A \simeq \bigwedge(A_s)_{s \in \mathcal{T}_m}$ gilt

$$true_0(A) = 1 \quad gdw \quad f.a.\ s \in \mathcal{T}_m^*\ true_0(A_s) = 1.$$

2. Für $A \simeq \bigvee(A_s)_{s \in \mathcal{T}_m}$ gilt

$$true_0(A) = 1 \quad gdw \quad ex.\ s \in \mathcal{T}_m^*\ true_0(A_s) = 1.$$

Beweis: 1. Sei $A \equiv t \notin [x \in L_m : \phi(x)]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} true_0(A) = 1 \quad & gdw \quad true_0(\neg A) = 0 \\ & \overset{L.5.2.1.8.}{gdw} \quad true_0(t \in L_m) = 0 \text{ oder } true_0(\phi(t)) = 0 \\ & \overset{!}{gdw} \quad f.a.\ s \in \mathcal{T}_m^*\ true_0(t = s) = 1 \Rightarrow true_0(\phi(s)) = 0 \\ & gdw \quad f.a.\ s \in \mathcal{T}_m^*\ true_0(t \neq s \vee \neg\phi(s)) = 1 \end{aligned}$$

zu (!): "$\Leftarrow$" Gelte $true_0(t \in L_m) = 1$, dann gilt $t \in \mathcal{T}_m$ und $s_{Name(t)} \in \mathcal{T}_m^*$ sowie $true_0(t = s_{Name(t)}) = 1$ wg. $Name(s_{Name(t)}) = Name(t)$. Also $0 = true_0(\phi(s_{Name(t)}) = true_0(\phi(t))$.
"$\Rightarrow$" Ist $true_0(t = s) = 1$, dann folgt $true_0(\phi(s)) = true_0(\phi(t)) = 0$.
Für $A \equiv \forall x \in L_m \phi(x)$ folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition von $true_0$.
2. Folgt unmittelbar aus 1. □

$True_0 := \{A \in \Delta_0(\omega) : true_0(A) = 1\}$, $False_0 := \Delta_0(\omega) \setminus True_0$.

Definition 5.2.3 Für $B = \exists x \in L_\omega A(x)$ mit $A(L_0) \in \Delta_0(\omega)$ sei

$$\mathbf{H}^*_\delta(B) := \{h \in \mathbf{H}_\delta : deg(h) = 0 \text{ und } End(h) \subseteq \{B\} \cup False_0\}.$$

Definition 5.2.4 Definition von $red(h)$ für $h \in \mathbf{H}^*_\delta(B)$

$$red(h) := \begin{cases} h & \text{falls} \quad tp(h) = \bigwedge, A \simeq \bigwedge(A_s)_{s \in \mathcal{T}_0} \\ h[s_n] & \text{falls} \quad tp(h) = \bigwedge_A, A \simeq \bigwedge(A_s)_{s \in \mathcal{T}_{m+1}}, n := \mu i < 2_{m+1}(true_0(A_{s_i}) = 0) \\ h[n] & \text{falls} \quad tp(h) = \bigwedge_{A_0 \wedge A_1}, n := \mu i < 2(true_0(A_i) = 0) \\ h[0] & \text{falls} \quad tp(h) = \bigvee^i_A \end{cases}$$

Lemma 5.2.3 Gilt f.a. n $A(s_n) \in False_0$, dann gilt

$$h \in \mathbf{H}^*_\delta(B) \Longrightarrow red(h) \in \mathbf{H}^*_\delta(B) \text{ und } o(red(h)) < o(h).$$

Beweis: Ist $tp(h) = \bigvee^s_B$, dann ist

$$End(red(h)) = End(h[0]) \subseteq End(h) \cup \{A(s)\} \subseteq \{B\} \cup False_0$$

lt. Voraussetzung und $true_0(A(s)) = true_0(A(s_m))$ für $m = Name(s)$.
Die übrigen Fälle verlaufen analog. □

Lemma 5.2.4 Gilt f.a. n $A(s_n) \in False_0$, dann gilt f.a. m

$$h \in \mathbf{H}^*_\delta(B) \Longrightarrow red(h)^{(m)} \in \mathbf{H}^*_\delta(B)$$

Beweis: Dies folgt durch vollständige Induktion nach m aus dem vorangegangenen Lemma. □

Lemma 5.2.5

$$h \in \mathbf{H}^*_\delta(B) \text{ und es ex.} n \; o(red^{n+1}(h)) \not< o(red^n(h)) \Longrightarrow \text{ ex.} n \; A(s_n) \in True_0$$

Beweis: Dies folgt aus den beiden vorangegangenen Lemmata. □

Mit Hilfe von $Name$ lässt sich nun auch eine arithmetische Übersetzung der $\Delta_0(\omega)$-Formeln angeben. $\bar{n}$ stehe für den arithmetischen Term $\underbrace{S \dots S}_{n-mal} 0$.

Definition 5.2.5

$$U(x \in y) :\equiv dp(x, y) = 1$$

$$U(x \in a) :\equiv dp(x, \overline{Name(a)}) = 1$$

$$U(a \in b) :\equiv dp(\overline{Name(a)}, \overline{Name(b)}) = 1$$

$$U(A \wedge B) :\equiv U(A) \wedge U(B)$$

$$U(\forall x \in yA) :\equiv \forall x < 2_{lev(Num(y))}(dp(x, y) = 0 \vee U(A))$$

$$U(\forall x \in tA) :\equiv \forall x < 2_{\overline{lev(t)}}(dp(x, \overline{Name(t)}) = 0 \vee U(A))$$

$$U(\neg A) := \neg U(A)$$

Man beachte, daß damit auch eine Übersetzung mengentheoretischer Δ_0-Formeln in arithmetische Δ_0-Formeln definiert ist und die Übersetzung die gleichen freien Variablen, wie die Ursprungsformel hat. Zur Definition von Num siehe die nächste Seite. Im folgenden soll gezeigt werden, daß PRA beweist, daß $true_0$ ein partielles Wahrheitsprädikat für $\Delta_0(\omega)$-Sätze ist. Um die Feinheiten der folgenden Argumentation herauszuarbeiten, werden wir an dieser Stelle genau zwischen den syntaktischen Objekten Formeln, Terme, Variablen und ihren Gödelnummern unterscheiden. D.h. wir betrachten die Funktionen $Name$ und $true_0$ nun als auf den Gödelnummern definiert, während der Definitionsbereich von U weiterhin die Menge der $\Delta_0(\omega)$-Formeln ist.
Da wir für die zu beweisende Aussage einige elementare Eigenschaften der Gödelisierung von RS-Termen und Sätzen brauchen, gebe ich der Kürze halber eine an. Wir nehmen also an, wir hätten bereits eine Gödelisierung der logischen und nichtlogischen Zeichen sowie der Variablen und $\in$-Formeln.

Definition 5.2.6

$$gn(s \in t) := \langle gn(\in), gn(s), gn(t) \rangle$$

$$gn(s \notin t) := \langle gn(\notin), gn(s), gn(t) \rangle$$

$$gn(A \wedge B) := \langle gn(\wedge), gn(A), gn(B) \rangle$$

$$gn(A \vee B) := \langle gn(\vee), gn(A), gn(B) \rangle$$

$$gn(\forall x \in t A) := \langle gn(\forall), gn(x), gn(t), gn(A) \rangle$$

$$gn(\exists x \in t A) := \langle gn(\exists), gn(x), gn(t), gn(A) \rangle$$

$$gn([x \in L_n : \phi(a_1, \ldots, a_m, x)]) := \langle gn(L_n), gn(x), gn(\phi), gn(a_1), \ldots, gn(a_m) \rangle$$

Das folgende Lemma ist als Erinnerung gedacht:

Lemma 5.2.6

1. $PRA \vdash x \leq \bar{n} \leftrightarrow x = \bar{0} \vee \ldots \vee x = \bar{n}$
2. $PRA \vdash \prod_{x=\bar{0}}^{\bar{n}} f(x) = 1 \leftrightarrow f(\bar{0}) = 1 \wedge \ldots \wedge f(\bar{n}) = 1$
3. $PRA \vdash \sum_{x=\bar{0}}^{\bar{n}} f(x) \geq 0 \leftrightarrow f(\bar{0}) \geq 1 \vee \ldots \vee f(\bar{n}) \geq 1$
4. $PRA \vdash \forall x \leq \bar{n} \phi(x) \leftrightarrow \phi(\bar{0}) \wedge \ldots \wedge \phi(\bar{n})$
5. $PRA \vdash \exists x \leq \bar{n} \phi(x) \leftrightarrow \phi(\bar{0}) \vee \ldots \vee \phi(\bar{n})$

$\square$

Sei Num eine[1] primitiv rekursive Funktion mit $Num(n) := gn(s_n)$ und

$$PRA \vdash Name(Num(x)) = x.$$

Sei weiter sb eine primitiv rekursive Funktion mit

$$sb(gn(A), gn(x), gn(t)) = gn(A_x(t))$$

für RS-Formeln A, Variablen x und RS-Terme t. Wir schreiben $A(\dot{x})$ für den arithmetischen Term

$$sb(\overline{gn(A)}, \overline{gn(x)}, Num(x)).$$

[1] Für den Beweisgang werden hier und bei anderen Funktionen einige Eigenschaften verwendet, die von der intensionalen Darstellung der Funktion abhängen. Darum steht hier und im folgenden "eine". Aus einer extensionalen Sicht heraus ist es natürlich die Funktion.

Man beachte, daß die Variable x in diesem Term nur an der letzten Stelle frei vorkommt.[2]
Mit Hilfe von sb läßt sich die Definition von $true_0$ auf den Gödelnummern von $\Delta_0(\omega)$-Sätzen nun wie folgt angeben:

Definition 5.2.7

$$true_0(\langle gn(\in), x, y\rangle) := dp(Name(x), Name(y))$$

$$true_0(\langle gn(\wedge), x, y\rangle) := true_0(x) \cdot true_0(y)$$

$$true_0(\langle gn(\forall), x, y, z\rangle) := \prod_{j=0}^{2_{lev\, y}-1} sg((1 - dp(j, Name(y)) + true_0(sb(z, x, Num(j))))$$

Der Grund für die an dieser Stelle übertrieben wirkende Ausführlichkeit ist der, daß wir im Beweis des nachfolgenden Lemmas eine etwas hintergründige Eigenschaft der Funktionen $true_0, gn$ und sb brauchen. Es soll nämlich in PRA einsehbar sein, daß sich bestimmte Aussagen über die Funktionswerte $true_0(x)$ machen lassen, obwohl das Argument x nicht vollständig bekannt ist. Anhand der hier gegebenen Definitionen läßt sich nun einfach überprüfen, daß die Definitionen der Funktionen $true_0, gn$ und sb die für den Beweis des nächsten Lemmas notwendigen Eigenschaften haben.

Lemma 5.2.7 Für $\Delta_0(\omega)$-Formeln A gilt

$$PRA \vdash true_0(A(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m)) = 1 \leftrightarrow U(A(x_0, \ldots, x_m))$$

Beweis: Sei $A \equiv \phi(a_0, \ldots, a_n, x_0, \ldots, x_m)$. Induktion über den Aufbau von ϕ.
Wir betrachten nur die beiden Fälle mit den Allquantoren. Da die RS-Terme $a_0, \ldots, a_n$ keine Rolle bei der Argumentation spielen, lassen wir sie ebenfalls weg.
Sei $\phi(x_0, \ldots, x_m) \equiv \forall x_{m+1} \in t.\psi(x_0, \ldots, x_{m+1})$.
Lt. I.V. gilt

$$PRA \vdash true_0(\psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m+1})) = 1 \leftrightarrow U(\psi(x_0, \ldots, x_{m+1})).$$

Damit lässt sich in PRA nun wie folgt argumentieren:

$$\begin{aligned}
1 = \quad & true_0(\phi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m)) = true(\langle \overline{gn(\forall)}, \overline{gn(x_{m+1})}, \overline{gn(t)}, \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m)\rangle) \\
= & \prod_{x_{m+1}=0}^{2_{lev(\overline{gn(t)})}-1} sg(1 - dp(x_{m+1}, Name(\overline{gn(t)})) + true_0(sb(\psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m), \overline{gn(x_{m+1})}, Num(x_{m+1})) \\
& gdw \\
& \forall x_{m+1} < 2_{lev(\overline{gn(t)})} dp(x_{m+1}, \overline{Name(t)}) = 1 \longrightarrow true_0(\psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m+1})) \\
& \overset{I.V.}{gdw} \\
& \forall x_{m+1} < 2_{\overline{lev(t)}} dp(x_{m+1}, \overline{Name(t)}) = 1 \longrightarrow U(\psi(x_0, \ldots, x_{m+1})) \\
& gdw \\
& U(\phi(x_0, \ldots, x_m))
\end{aligned}$$

Für den Fall $\phi(x_0, \ldots, x_m) \equiv \forall x_{m+1} \in x_j \psi(x_0, \ldots, x_{m+1})$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
1 = \quad & true_0(\phi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m)) = true(\langle \overline{gn(\forall)}, \overline{gn(x_{m+1})}, Num(x_j), \psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m)\rangle) \\
= & \prod_{x_{m+1}=0}^{2_{lev(Num(x_j))}-1} sg(1 - dp(x_{m+1}, Name(Num(x_j))) + true_0(sb(\psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_m), \overline{gn(x_{m+1})}, Num(x_{m+1})) \\
& gdw
\end{aligned}$$

[2] Derartige für meinen Geschmack etwas unglückliche Formulierungen sind in der Literatur üblich vgl. z.B. [HaP93], [Tr73] und ermöglichen erst die Herausstreichung der doppelten Rolle von x (als Metavariable und Variable des Terms) durch die bündige Formulierung $A(\dot{x})$.

$\forall x_{m+1} < 2_{lev(Num(x_j))} dp(x_{m+1}, x_j) = 1 \longrightarrow true_0(\psi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{m+1}))$

$\overset{I.V.}{gdw}$

$\forall x_{m+1} < 2_{lev(Num(x_j))} dp(x_{m+1}, x_j) = 1 \longrightarrow U(\psi(x_0, \ldots, x_{m+1}))$

gdw

$U(\phi(x_0, \ldots, x_m))$

wg. $PRA \vdash Name(Num(x_j)) = x_j$. □

Folgerung: Für $\Delta_0(\omega)$-Sätze A gilt

$$PRA \vdash true_0(\overline{gn(A)}) = 1 \leftrightarrow U(A).$$

5.2.2 Primitive Rekursion

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich unsere Argumentation tatsächlich in PRA durchführen läßt, d.h., daß die verwendeten Prädikate und Funktionen primitiv rekursiv sind. Ein Blick auf die Beweise zeigt dann, daß in den Beweisen höchstens Δ_0-Induktion (gemeint sind hier Δ_0-Formeln in der Sprache von PRA, also primitiv rekursive Prädikate) verwendet wurde. Um nachzuweisen, daß die verwendeten Prädikate und Funktionen primitiv rekursiv sind, werde ich zeigen, daß die verwendeten Rekursionsschemata nicht aus dem Bereich der primitiv rekursiven Funktionen herausführen. Dies ist klar für $o, deg, Ref, tp, []$ und für $\mathbf{H}_\delta$: $o(d), deg(d), Ref(d), tp(d), d[i]$ und $d \in \mathbf{H}_\delta$ sind induktiv über die Länge der Zeichenkette d definiert. Der Beweis der arithmetischen Aussage, daß $\mathbf{H}_\delta$ ein operatorkontrolliertes Bezeichnungssystem für $RS(\mathcal{K})$-Herleitungen ist, d.h. der Nachweis der Δ_0-Bedingungen a)-n) läuft ebenso induktiv über die Länge der Zeichenkette, wie die Beweise aller dafür notwendigen Lemmata und Sätze, die ebenfalls als Δ_0-Aussagen aufgefaßt werden können.
Anders sieht die Sache bei den Funktionen $true_0$ und $Name$ aus. Daraus daß $Name$ primitiv rekursiv ist, folgt offensichtlich, daß $true_0$ primitiv rekursiv ist. $Name(t)$ ergibt sich rekursiv aus Funktionswerten von $Name$ an Argumentstellen, die entweder ein kleineres Level oder einen kleineren äußeren Rang als t haben, also in $\omega \times \omega$ bzgl. der lexikographischen Ordnung vor t liegen. Da die Anzahl der Argumente zur Berechnung von $Name(t)$ im Rekursionsschritt abhängig von t variiert, handelt es sich dem Augenschein nach um eine Wertverlaufsrekursion. Dies wirft insofern ein Problem auf, da der Wertverlauf der Werte einer Funktion an Argumentstellen, die lexikographisch vor einem Argument y liegen, im allgemeinen nicht vollständig in einer natürlichen Zahl kodiert werden kann, da y unendlich viele Vorgänger haben kann. Bevor ich die Frage nach den Rekursionsprinzipien, mit denen $Name$ definiert ist, weiter erörtere, möchte ich die notwendigen Hilfsmittel für den Nachweis, daß diese Prinzipien aus dem Bereich des Primitiv-Rekursiven nicht herausführen, bereitstellen. Leider werden in der Literatur nur sehr wenige Werkzeuge bereitgestellt, um von einer konkreten Funktion zu zeigen, daß sie primitiv rekursiv ist. Die größte Fundgrube in diesem Gebiet stellt sicher immer noch das Standardwerk von Rosza Peter [Pet57] dar, bei dem es sich allerdings mehr um eine (sehr umfangreiche) Sammlung von Einzelfällen handelt, deren Behandlung sich häufig nicht oder nur schwer auf allgemeinere Fälle übertragen läßt. Einige neuere Ergebnisse auf diesem Gebiet finden sich in Felscher [Fel93], u.a. eine Charakterisierung der primitiv rekursiven Funktionen durch "times-Schleifen". In [Si88] charakterisiert Simmons die primitiv rekursiven Funktionen als Fixpunkte bestimmter Funktionale. In [CiW97] fassen Cichon/Weiermann bestimmte Rekursionsschemata als Termersetzungssysteme auf, wobei die wesentliche Aufgabe dann darin besteht, die Länge der Reduktionssequenzen primitiv rekursiv abzuschätzen.
Als Nebenergebnisse dieser Arbeit werden sich in diesem Abschnitt elegante Beweise dafür ergeben, daß die primitiv rekursiven Funktionen abgeschlossen gegen die zweifache ungeschachtelte Rekursion mit Parametersubstitution und die dreifache ungeschachtelte Rekursion sind[3]. Die hier

[3]Erstere läßt sich natürlich als Spezialfall der dreifachen ungeschachtelten Rekursion auffassen. Es geht mir in diesem Abschnitt darum anzudeuten, wie sich der Beweis verallgemeinern läßt.

verwendete Beweismethode läßt sich problemlos auf mehrfache ungeschachtelte Rekursionen und wahrscheinlich auch auf eine Vielzahl anderer Rekursionsschemata übertragen.
$f, g, h, \ldots$ seien im Folgenden immer Funktionen mit Definitionsbereich $I\!N^n$ für ein n und Wertebereich $I\!N$. Wir betrachten nur die Fälle mit der geringsten Anzahl von Argumenten. Mithilfe der Paarfunktion $\langle , \rangle$ oder durch einfaches Übertragen der Beweise, lassen sich die Resultate dann auch für die mehrstelligen Fälle beweisen. Bis auf den letzten Satz bezeichnet $<$ in diesem Abschnitt die natürliche Ordnung auf $I\!N$. Wir beginnen zunächst mit der primitiven Rekursion mit Parametersubstitution. Die Beweisidee ist aus Rose [Ros84] entnommen.

Lemma 5.2.8 Gelte

$$\begin{aligned} f(x,0) &= g(x) \\ f(x,y+1) &= h(x,y,f(j(x,y),y)), \end{aligned}$$

dann ist mit g, h, j auch f primitiv rekursiv.

Beweis: Wir definieren durch primitive Rekursion zwei dreistellige Funktionen J, F:

$$\begin{aligned} J(x,y,0) &:= x \\ J(x,y,t+1) &:= j(J(x,y,t), y \dot{-} t) \\ F(x,y,0) &:= g(J(x,y \dot{-} 1, y)) \\ F(x,y,t+1) &:= h(J(x,y \dot{-} 1, y \dot{-} (t+1)), t, F(x,y,t)) \end{aligned}$$

Durch vollständige Induktion nach t folgt nun:

$$t \leq y \longrightarrow F(x,y,t) = f(J(x, y \dot{-} 1, y \dot{-} t), t)$$

$t = 0$

$$F(x,y,0) = g(J(x,y \dot{-} 1, y)) = f(J(x, y \dot{-} 1, y), 0)$$

$t \to t+1$
Ist $t+1 \leq y$, dann ist $y \dot{-} t \geq 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} F(x,y,t+1) &= h(\underbrace{J(x,y \dot{-} 1, y \dot{-} (t+1))}_{=:k}, t, F(x,y,t)) \\ &\overset{I.V.}{=} h(k,t,f(J(x,y \dot{-} 1, y \dot{-} t), t)) \\ &= h(k,t,f(j(J(x,y \dot{-} 1, y \dot{-} (t+1)), (y \dot{-} 1) \dot{-} (y \dot{-} (t+1))), t)) \\ &= h(k,t,f(j(k,t),t)) \\ &= f(J(x,y \dot{-} 1, y \dot{-} (t+1)), t+1) \end{aligned}$$

Mit $t = y$ folgt

$$f(x,y) = F(x,y,y).$$

□

Wir können nun direkt die zweifache ungeschachtelte Rekursion mit Parametersubstitution in Angriff nehmen:

Definition 5.2.8 Eine Funktionenmenge F heißt abgeschlossen gegen zweifache ungeschachtelte Rekursion mit Parametersubstitution, wenn aus $g, h_0, h_1, j_0, j_1, t_0, t_1, s \in F$ und

$$\begin{aligned} f(k,0,n) &= g(k,n) \\ f(k,m,0) &= h_0(k,m,f(j_0(k,m,0), t_0(k,m,0), s(k,m,0))) \text{ für } m > 0 \\ f(k,m,n) &= h_1(k,m,n,f(j_0(k,m,n), t_0(k,m,n), s(k,m,n)), f(j_1(k,m,n), m, t_1(k,m,n)) \\ &\quad \text{für } m > 0, n > 0 \end{aligned}$$

mit $t_0(k,m,n) \leq m \dot{-} 1$ und $t_1(k,m,n) \leq n \dot{-} 1$, $f \in F$ folgt.

Cichon/Weiermann bezeichnen in [CiW97] das Schema

$$f(x+1,y+1) = h(x,y,f(x,p(x,y)),f(x+1,y))$$

als mehrfache ungeschachtelte Rekursion mit Parametersubstitution. Da sie zudem $f(0,y) = g_0(y)$ und $f(x,0) = g_1(x)$ setzen, handelt es sich hierbei in unserer Terminologie um einen Spezialfall der zweifachen ungeschachtelten Rekursion (ohne Parametersubstitution). Das oben angegebene Schema unterscheidet sich von dem in Felscher [Fel93] behandelten, durch die Parameterfunktionen j_0, j_1 und dadurch, daß die Regressionsfunktion t_0 bereits im Rekursionsschritt für den Fall $n = 0$ auftaucht. Dadurch ist der Beweis mit Hilfe der von Peter [Pet36] entwickelten Lateralkonstruktion nicht mehr so einfach durchzuführen.
Für die Dauer des Nachweises, daß obiges Schema nicht aus dem Primitiv-Rekursiven hinausführt, werden wir folgende Bezeichnungen verwenden:

$$\begin{array}{ll} k_l := j_0(k,m,n) & k_r := j_1(k,m,n) \\ m_l := t_0(k,m,n) & m_r := m \\ n_l := s(k,m,n) & n_r := t_1(k,m,n) \end{array}$$

$k_l, \ldots, n_r$ sind natürlich von k, m, n abhängig. Es wird aber aus dem Kontext hervorgehen, welche k, m, n gemeint sind. Mit diesen Abkürzungen definieren wir nun:

$$F(k,m,n,0) \quad := \quad \begin{cases} g(k,n)+1 & : \quad m = 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(k,m,n,i+1) \quad := \quad \begin{cases} F(k,m,n,i) & : \quad F(k,m,n,i) \neq 0 \\ h_0(k,m,F(k_l,m_l,n_l,i) \dot{-} 1)+1 & : \quad \begin{array}{l} F(k,m,n,i) = 0, \\ n = 0, m > 0 \text{ und} \\ F(k_l,m_l,n_l,i) \neq 0 \end{array} \\ h_1(k,m,n,F(k_l,m_l,n_l,i) \dot{-} 1, F(k_r,m_r,n_r,i) \dot{-} 1)+1 & \\ & : \quad \begin{array}{l} F(k,m,n,i) = 0, \\ n > 0, m > 0, \\ F(k_l,m_l,n_l,i) \neq 0 \text{ und} \\ F(k_r,m_r,n_r,i) \neq 0 \end{array} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Bei der Definition von F handelt es sich um eine primitive Rekursion mit Parametersubstitution. F ist dementsprechend primitiv rekursiv in $g, h_0, h_1, j_0, j_1, t_0, t_1, s$, wie wir weiter oben gesehen hatten. Desweiteren gilt:

$$F(k,m,n,i) \neq 0 \longrightarrow F(k,m,n,i+1) = F(k,m,n,i) = f(k,m,n)+1$$

Beweis durch vollständige Induktion nach i:
Für $i = 0$ folgt aus $F(k,m,n,0) \neq 0$, daß $m = 0$ und so

$$F(k,m,n,1) = F(k,m,n,0) = g(k,n)+1 = f(k,m,n)+1.$$

Ist $F(k,m,n,i) \neq 0$, dann folgt lt. I.V.

$$F(k,m,n,i+1) = F(k,m,n,i) = f(k,m,n)+1.$$

Sei $F(k,m,n,i) = 0$.
Ist $n = 0, m > 0, F(k_l,m_l,n_l,i) \neq 0$, dann folgt lt. I.V.

$$\begin{aligned} F(k,m,n,i+1) &= h_0(k,m,F(k_l,m_l,i) \dot{-} 1)+1 \\ &= h_0(k,m,f(k_l,m_l,n_l))+1 \\ &= f(k,m,n)+1 \end{aligned}$$

Für $n > 0, m > 0, F(k_l, m_l, n_l, i) \neq 0 \neq F(k_r, m_r, n_r, i)$ folgt die Behauptung analog und im „sonst“ Fall ist die Behauptung trivial. □

Nun besteht unsere Aufgabe darin, eine primitiv rekursive Funktion z mit $F(k, m, n, z(k, m, n)) \neq 0$ zu konstruieren. Bei der nächsten Definition handelt es sich um eine simultane Wertverlaufsrekursion:

$$\begin{array}{lcl} p_0(k,m,n,0) := k \quad p_1(k,m,n,0) := m \quad p_2(k,m,n,0) := n \\ p_0(k,m,n,2i+1) & := & j_0(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_0(k,m,n,2(i+1)) & := & j_1(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_1(k,m,n,2i+1) & := & t_0(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_1(k,m,n,2(i+1)) & := & p_1(k,m,n,i) \\ p_2(k,m,n,2i+1) & := & s(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_2(k,m,n,2(i+1)) & := & t_1(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \end{array}$$

Wir definieren weiter zwei primitiv rekursive Funktionen $N*, E*$, die uns dabei helfen, durch den Berechnungsbaum zu navigieren:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} N*0 & := & 1 & E*0 & := & 2 \\ N*(2i+1) & := & 2\cdot(N*i)+1 & E*(2i+1) & := & 2\cdot(E*i)+1 \\ N*(2(i+1)) & := & 2\cdot(N*(i+1)) & E*(2(i+1)) & := & 2\cdot(E*(i+1)) \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{array}{rcl} p_0(k_l, m_l, n_l) & = & p_0(k,m,n,N*i) \\ p_0(k_r, m_r, n_r) & = & p_0(k,m,n,E*i) \\ p_1(k_l, m_l, n_l) & = & p_1(k,m,n,N*i) \\ p_1(k_r, m_r, n_r) & = & p_1(k,m,n,E*i) \\ p_2(k_l, m_l, n_l) & = & p_2(k,m,n,N*i) \\ p_2(k_r, m_r, n_r) & = & p_2(k,m,n,E*i) \end{array}$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcl} p_0(k,m,n,N*0) & = & p_0(k,m,n,1) \\ & = & j_0(p_0(k,m,n,0), p_1(k,m,n,0), p_2(k,m,n,0)) \\ & = & j_0(k,m,n) \\ & = & k_l \\ & = & p_0(k_l, m_l, n_l, 0) \end{array}$$

und vollkommen analog folgt der Induktionsanfang für alle anderen Fälle.

$$\begin{array}{rcl} p_0(k,m,n,N*(2i+1)) & = & p_0(k,m,n,2\cdot(N*i)+1) \\ & = & j_0(p_0(k,m,n,N*i), p_1(k,m,n,N*i), p_2(k,m,n,N*i)) \\ & \overset{I.V.}{=} & j_0(p_0(k_l,m_l,n_l,i), p_1(k_l,m_l,n_l,i), p_2(k_l,m_l,n_l,i)) \\ & = & p_0(k_l,m_l,n_l,2i+1) \end{array}$$

und auch hier folgt der Induktionsschritt in den restlichen 15 Fällen vollkommen analog. □

Für $a \geq 1$ gilt

$$i \leq a \longrightarrow N*i, E*i < 8a$$

Beweis: Es sind $N*0, n*1, E*0, E*1 \leq 5 < 8$.
Für $i = 2j+1$ bzw. $i = 2(j+1)$ folgt

$$j \leq Div(a,2) \text{ bzw. } j+1 \leq Div(a,2).$$

Also lt. I.V.

$$N * j, E * j < 8 \cdot Div(a,2) \leq 4 \cdot a \text{ bzw. } N * (j+1), E * (j+1) < 8 \cdot Div(a,2) \leq 4 \cdot a.$$

Da $a \geq 1$ ist, folgt

$$\begin{aligned} N * i = &\quad 2(N * j) + 1 &< 8a \\ E * i = &\quad 2(E * j) + 1 &< 8a \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} N * i = &\quad 2(N * (j+1)) &< 8a \\ E * i = &\quad 2(E * (j+1)) &< 8a. \end{aligned}$$

□

Wir definieren nun z durch:

$$\begin{array}{lll} z_1(k,m,n,a) & := & (\sum_{i=0}^{a} p_2(k,m,n,i)) + 1 \\ z_2(k,m,n,0) & := & n+1 \\ z_2(k,m,n,a+1) & := & z_2(k,m,n,a) + z_1(k,m,n,8^{z_2(k,m,n,a)+1}) \\ z(k,m,n) := z_2(k,m,n,m) & & \end{array}$$

Für $a \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} z_1(k_l,m_l,n_l,a) &\leq z_1(k,m,n,8 \cdot a) \\ z_1(k_r,m_r,n_r,a) &\leq z_1(k,m,n,8 \cdot a) \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt aus $N * i, E * i < 8a$ und

$$\begin{aligned} p_2(k_l,m_l,n_l) &= p_2(k,m,n,N * i) \\ p_2(k_r,m_r,n_r) &= p_2(k,m,n,E * i) \end{aligned}$$

□

Desweiteren gilt:

$$z_2(k_l,m_l,n_l,a) < z_2(k,m,n,a+1)$$

Beweis durch vollständige Induktion über a:
„$a = 0$"

$$\begin{aligned} z_2(k_l,m_l,n_l,0) &= n_l + 1 \\ &= p_2(k,m,n,1) + 1 \\ &\leq \left(\sum_{i=0}^{1} p_2(k,m,n,1)\right) + 1 \\ &= z_1(k,m,n,1) \\ &< z_2(k,m,n,1) \end{aligned}$$

„$a \to a+1$"

$$\begin{aligned} z_2(k_l,m_l,n_l,a+1) &= z_2(k_l,m_l,n_l,a) + z_1(k_l,m_l,n_l,8^{z_2(k_l,m_l,n_l,a)+1}) \\ &\leq z_2(k_l,m_l,n_l,a) + z_1(k,m,n,8^{z_2(k_l,m_l,n_l,a)+2}) \\ &\overset{I.V.}{<} z_2(k,m,n,a+1) + z_1(k,m,n,8^{z_2(k,m,n,a+1)+1}) \\ &= z_2(k,m,n,a+2) \end{aligned}$$

$\square$

Für $n > 0$ gilt:

$$z_2(k_r, m_r, n_r, a) < z_2(k, m, n, a)$$

Beweis durch vollständige Induktion über a:
„$a = 0$“

$$\begin{aligned} z_2(k_r, m_r, n_r, 0) &= n_r + 1 \\ &= t_1(k, m, n) + 1 \\ &< n + 1 \\ &= z_2(k, m, n, 0) \end{aligned}$$

„$a \to a + 1$“

$$\begin{aligned} z_2(k_r, m_r, n_r, a+1) &= z_2(k_r, m_r, n_r, a) + z_1(k_r, m_r, n_r, 8^{z_2(k_r, m_r, n_r, a) + 1}) \\ &< z_2(k_r, m_r, n_r, a) + z_1(k, m, n, 8^{z_2(k_r, m_r, n_r, a) + 2}) \\ &\overset{I.V.}{<} z_2(k, m, n, a) + z_1(k, m, n, 8^{z_2(k, m, n, a) + 1}) \\ &= z_2(k, m, n, a+1) \end{aligned}$$

$\square$

Schließlich ergibt sich:

$$\begin{aligned} z(k_l, m_l, n_l) &< z(k, m, n) \text{ für } m > 0 \text{ und} \\ z(k_r, m_r, n_r) &< z(k, m, n) \text{ für } n > 0 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z(k_l, m_l, n_l) &= z_2(k_l, m_l, n_l, m_l) \\ &\leq z_2(k_l, m_l, n_l, m \dot{-} 1) \\ &< z_2(k, m, n, m) \\ &= z(k, m, n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(k_r, m_r, n_r) &= z_2(k_r, m_r, n_r, m) \\ &< z_2(k, m, n, m) \\ &= z(k, m, n) \end{aligned}$$

$\square$

Wir haben nun alle Eigenschaften von z beisammen, um den Beweis abzuschließen:

$$F(k, m, n, z(k, m, n)) \neq 0$$

Beweis: Hauptinduktion über m, Nebeninduktion über n
Ist $F(k, m, n, z(k, m, n) \dot{-} 1) \neq 0$, dann ist nichts zu zeigen. Sei also $F(k, m, n, z(k, m, n) \dot{-} 1) = 0$.
Für $m = 0$ ist $F(k, m, n, z(k, m, n)) \neq 0$.
Sei $m > 0, n = 0$.
Dann ist $t_1(k, m, 0) < m$ und lt. I.V.

$$F(k_l, m_l, n_l, z(k_l, m_l, n_l)) = F(k_l, m_l, n_l, z(k, m, n) \dot{-} 1) \neq 0.$$

Also ist

$$F(k,m,n,z(k,m,n)) = h_0(k,m,F(k_l,m_l,n_l,z(k,m,n)\dot{-}1)+1 \neq 0.$$

Die anderen Fälle folgen analog. □

Da $f(k,m,n) = F(k,m,n,z(k,m,n))\dot{-}1$ ist, ist damit der folgende Satz bewiesen:

Satz 5.2.1 Die primitiv rekursiven Funktionen sind abgeschlossen gegen zweifache ungeschachtelte Rekursion mit Parametersubstitution.

Anhand der dreifachen ungeschachtelten Rekursion möchte ich noch skizzieren, wie leicht sich dieser Beweis auf mehrfache ungeschachtelte Rekursionen übertragen läßt.

Definition 5.2.9 Eine Funktionenmenge F heißt abgeschlossen gegen dreifache ungeschachtelte Rekursion, wenn aus $g, h_0, h_1, h_2, h_3, t_0, t_1, t_2, s_0, s_1, s_2 \in F$ und

$$\begin{aligned}
f(0,m,n) &= g(m,n)\\
f(k,0,0) &= h_0(k, f(t_0(k,0,0), s_0(k,0,0), s_1(k,0,0))) \text{ für } k > 0\\
f(k,0,n) &= h_1(k,n,f(t_0(k,0,n), s_0(k,0,n), s_1(k,0,n)), f(k,0,t_2(k,0,n)))\\
&\quad \text{für } k > 0, n > 0\\
f(k,m,0) &= h_2(k,m,f(t_0(k,m,0), s_0(k,m,0), s_1(k,m,0)), f(k,t_1(k,m,0), s_2(k,m,0)))\\
&\quad \text{für } k > 0, m > 0\\
f(k,m,n) &= h_3(k,m,n,f(t_0(k,m,n), s_0(k,m,n), s_1(k,m,n)), f(k,t_1(k,m,n), s_2(k,m,n)),\\
&\qquad f(k,m,t_2(k,m,n))) \text{ für } k > 0, m > 0, n > 0
\end{aligned}$$

mit $t_0(k,m,n) \le k\dot{-}1, t_1(k,m,n) \le m\dot{-}1$ und $t_2(k,m,n) \le n\dot{-}1$, $f \in F$ folgt.

Wir verwenden wieder einige abkürzende Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lll}
k_l := t_0(k,m,n) & k_m := k & k_r := k\\
m_l := s_0(k,m,n) & m_m := t_1(k,m,n) & m_r := m\\
n_l := s_1(k,m,n) & n_m := s_2(k,m,n) & n_r := t_2(k,m,n)
\end{array}$$

wobei $k_l, \ldots, n_r$ natürlich wieder von k, m, n abhängig sind. Mit diesen Abkürzungen definieren wir nun analog zu oben:

$$F(k,m,n,0) := \begin{cases} g(m,n)+1 & : \quad k=0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(k,m,n,i+1) := \begin{cases} F(k,m,n,i) & : \quad F(k,m,n,i) \neq 0 \\ h_0(k, F(k_l,m_l,n_l,i) \dot{-} 1)+1 & : \quad F(k,m,n,i)=0, \\ & \quad\;\; k>0, n=0, m=0 \text{ und} \\ & \quad\;\; F(k_l,m_l,n_l,i) \neq 0 \\ h_1(k,n,F(k_l,m_l,n_l,i)\dot{-}1, F(k_r,m_r,n_r,i)\dot{-}1)+1 & \\ & : \quad F(k,m,n,i)=0, \\ & \quad\;\; k>0, m=0, n>0 \\ & \quad\;\; F(k_l,m_l,n_l,i)\neq 0 \text{ und} \\ & \quad\;\; F(k_r,m_r,n_r,i) \neq 0 \\ h_2(k,m,F(k_l,m_l,n_l,i)\dot{-}1, F(k_m,m_m,n_m,i)\dot{-}1)+1 & \\ & : \quad F(k,m,n,i)=0, \\ & \quad\;\; k>0, m>0, n=0 \\ & \quad\;\; F(k_l,m_l,n_l,i)\neq 0 \text{ und} \\ & \quad\;\; F(k_m,m_m,n_m,i) \neq 0 \\ h_3(k,m,n,F(k_l,m_l,n_l,i)\dot{-}1, F(k_m,m_m,n_m,i)\dot{-}1, F(k_r,m_r,n_r,i)\dot{-}1)+1 & \\ & : \quad F(k,m,n,i)=0, \\ & \quad\;\; k>0, m>0, n=0 \\ & \quad\;\; F(k_l,m_l,n_l,i)\neq 0, \\ & \quad\;\; F(k_m,m_m,n_m,i) \neq 0 \text{ und} \\ & \quad\;\; F(k_r,m_r,n_r,i) \neq 0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

F ist wieder primitiv rekursiv in $g, h_0, h_1, h_2, h_3, t_0, t_1, t_2, s_0, s_1, s_2$ und es gilt:

$$F(k,m,n,i) \neq 0 \longrightarrow F(k,m,n,i+1) = F(k,m,n,i) = f(k,m,n)+1.$$

Wir konstruieren wieder eine primitiv rekursive Funktion z mit $F(k,m,n,z(k,m,n)) \neq 0$.

$$\begin{array}{lcl} p_0(k,m,n,0) := k \quad p_1(k,m,n,0) := m \quad p_2(k,m,n,0) := n & & \\ p_0(k,m,n,3i+1) & := & t_0(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_0(k,m,n,3i+2) & := & p_0(k,m,n,i) \\ p_0(k,m,n,3(i+1)) & := & p_0(k,m,n,i) \\ p_1(k,m,n,3i+1) & := & s_1(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_1(k,m,n,3i+2) & := & t_1(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_1(k,m,n,3(i+1)) & := & p_1(k,m,n,i) \\ p_2(k,m,n,3i+1) & := & s_2(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_2(k,m,n,3i+2) & := & s_3(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \\ p_2(k,m,n,3(i+1)) & := & t_2(p_0(k,m,n,i), p_1(k,m,n,i), p_2(k,m,n)) \end{array}$$

Wir definieren diesmal drei primitiv rekursive Funktionen $N*, E*, Z*$, um durch den Berechnungsbaum zu navigieren:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} N*0 & := & 1 & E*0 & := & 2 \\ N*(3i+1) & := & 3\cdot(N*i)+1 & E*(3i+1) & := & 3\cdot(E*i)+1 \\ N*(3i+2) & := & 3\cdot(N*i)+2 & E*(3i+2) & := & 3\cdot(E*i)+2 \\ N*(3(i+1)) & := & 3\cdot(N*(i+1)) & E*(3(i+1)) & := & 3\cdot(E*(i+1)) \\ Z*0 & := & 3 & & & \\ Z*(3i+1) & := & 3\cdot(Z*i)+1 & & & \\ Z*(3i+2) & := & 3\cdot(Z*i)+2 & & & \\ Z*(3(i+1)) & := & 3\cdot(Z*(i+1)) & & & \end{array}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
p_0(k_l, m_l, n_l) &= p_0(k, m, n, N * i) \\
p_0(k_m, m_m, n_m) &= p_0(k, m, n, E * i) \\
p_0(k_r, m_r, n_r) &= p_0(k, m, n, Z * i) \\
p_1(k_l, m_l, n_l) &= p_1(k, m, n, N * i) \\
p_1(k_m, m_m, n_m) &= p_1(k, m, n, E * i) \\
p_1(k_r, m_r, n_r) &= p_1(k, m, n, Z * i) \\
p_2(k_l, m_l, n_l) &= p_2(k, m, n, N * i) \\
p_2(k_m, m_m, n_m) &= p_2(k, m, n, E * i) \\
p_2(k_r, m_r, n_r) &= p_2(k, m, n, Z * i)
\end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ können wir wiederum grob abschätzen:

$$i \leq a \longrightarrow N * i, E * i < 27a$$

Wir definieren nun z durch:

$$\begin{aligned}
z_1(k, m, n, a) &:= \left(\sum_{i=0}^{a} p_2(k, m, n, i)\right) + 1 \\
z_2(k, m, n, 0) &:= n + 1 \\
z_2(k, m, n, a + 1) &:= z_2(k, m, n, a) + z_1(k, m, n, 27^{z_2(k, m, n, a) + 1}) \\
z_3(k, m, n, a) &:= \sum_{i=0}^{a} z_2(p_0(k, m, n, i), p_1(k, m, n, i), p_2(k, m, n, i), p_1(k, m, n, i)) \\
z_4(k, m, n, 0) &:= z_2(k, m, n, m) \\
z_4(k, m, n, a + 1) &:= z_4(k, m, n, a) + z_3(k, m, n, 27^{z_4(k, m, n, a) + 1}) \\
z(k, m, n) &:= z_4(k, m, n, k)
\end{aligned}$$

Für $a \geq 1$ gilt nun

$$\begin{aligned}
z_1(k_l, m_l, n_l, a) &\leq z_1(k, m, n, 27 \cdot a) \\
z_1(k_m, m_m, n_m, a) &\leq z_1(k, m, n, 27 \cdot a) \\
z_1(k_r, m_r, n_r, a) &\leq z_1(k, m, n, 27 \cdot a)
\end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned}
z_2(k_l, m_l, n_l, a) &< z_2(k, m, n, a + 1) \\
z_2(k_m, m_m, n_m, a) &< z_2(k, m, n, a + 1) \text{ und} \\
z_2(k_r, m_r, n_r, a) &< z_2(k, m, n, a) \text{ für } n > 0
\end{aligned}$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned}
z_4(k_l, m_l, n_l, a) &< z_4(k, m, n, a + 1) \\
z_4(k_m, m_m, n_m, a) &< z_4(k, m, n, a) \text{ für } m > 0 \text{ und} \\
z_4(k_r, m_r, n_r, a) &< z_4(k, m, n, a) \text{ für } n > 0
\end{aligned}$$

Und schließlich folgt

$$\begin{aligned}
z(k_l, m_l, n_l) &< z(k, m, n) \text{ für } k > 0 \\
z(k_m, m_m, n_m) &< z(k, m, n) \text{ für } m > 0 \text{ und} \\
z(k_r, m_r, n_r) &< z(k, m, n) \text{ für } n > 0
\end{aligned}$$

womit wir dann analog zu oben

$$F(k,m,n,z(k,m,n)) \neq 0$$

beweisen können. Wir können also den folgenden allgemeinen Satz formulieren:

Satz 5.2.2 Die primitiv rekursiven Funktionen sind abgeschlossen gegen mehrfache ungeschachtelte Rekursion.

Es ist noch zu klären, warum sich daraus ergibt, daß $Name$ und damit auch $true_0$ primitiv rekursiv sind. Dazu betrachten wir die Funktion f, die definiert ist durch

$$\begin{array}{rcl} f(0) & := & m \\ f(x) & := & f(t(0,x)) + \ldots + f(t(k(x),x)), \end{array}$$

wobei t, k primitiv rekursive Funktionen sind und $t(i,x)$ für $i \leq k(x)$ lexikographisch vor x liegen soll, wenn man beide Werte als geordnete Tupel auffasst. Wir definieren nun eine weitere Funktion F durch

$$\begin{array}{rcl} F(0,i) & := & m \\ F(x,0) & := & F(t(0,x),k(t(0,x))) \\ F(x,i+1) & := & F(x,i) + F(t(i+1,x),k(t(i+1,x))) \end{array}$$

und mit der Funktion $case$

$$case(a,b,c) := \begin{cases} b & \text{falls} \quad a = 0 \\ c & \text{sonst} \end{cases},$$

und der Paarfunktion $\langle , \rangle$ folgt, daß es sich hierbei um eine dreifache ungeschachtelte Rekursion handelt. Nun gilt:

$$i \leq k(x) \longrightarrow F(x,i) = \sum_{j=0}^{i} f(t(j,x)) \text{ für } x > 0$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Hauptinduktion über x und Nebeninduktion über i.
Für $i = 0$ folgt

$$f(t(0,x)) \overset{I.V.}{=} F(t(0,x),k(t(0,x))) = F(x,0).$$

Für $i+1 \leq k(x)$ folgt

$$\begin{array}{rcl} \sum_{j=0}^{i+1} f(t(j,x)) & = & f(t(i+1,x)) + \sum_{j=0}^{i} f(t(j,x)) \\ & \overset{I.V.}{=} & f(t(i+1,x)) + F(x,i) \\ & \overset{I.V.}{=} & F(t(i+1,x),k(t(i+1,x))) + F(x,i) \\ & = & F(x,i+1). \end{array}$$

□

Mit $i = k(x)$ folgt

$$f(x) = F(x,k(x))$$

und somit ist f primitiv rekursiv. Genauso läßt sich einsehen, daß die komplizierter anmutende Funktion f mit

$$\begin{array}{rcl} f(0) & := & m \\ f(x) & := & \begin{array}{ccc} f(t(0,0,x)) \cdot & \ldots & \cdot f(t(s(x),0,x)) + \\ \vdots & & \vdots \\ f(t(0,k(x),x)) \cdot & \ldots & \cdot f(t(s(x),k(x),x)) \end{array} \end{array}$$

wobei t, k, s wieder primitiv rekursive Funktionen sind und $t(i,j,x)$ für $j \leq k(x), i \leq s(x)$ lexikographisch vor x liegen soll, primitiv rekursiv ist. Dazu definiert man sich durch vierfache ungeschachtelte Rekursion simultan zwei Funktionen F_0, F_1:

$$\begin{array}{rcl} F_0(0,i,j) & := & m \\ F_0(x,0,j) & := & F_1(t(0,j,x), s(t(0,j,x)), k(t(0,j,x))) \text{ für } x > 0 \\ F_0(x,i+1,j) & := & F_0(x,i,j) \cdot F_1(t(i+1,j,x), s(t(i+1,j,x)), k(t(i+1,j,x))) \text{ für } x > 0 \\ F_1(0,i,j) & := & m \\ F_1(x,i,0) & := & F_0(x,i,0) \text{ für } x > 0 \\ F_1(x,i,j+1) & := & F_1(x,i,j) + F_0(x,i,j+1) \text{ für } x > 0 \end{array}$$

und beweist wie oben simultan durch Hauptinduktion über x, Nebeninduktion über i und j

$$F_1(x, s(x), k(x)) = f(x)$$

$$i \leq s(x), j \leq k(x) \quad \longrightarrow \quad F_0(x,i,j) = \prod_{j'=0}^{j} f(t(i,j',x))$$

$$i \leq s(x), j \leq k(x) \quad \longrightarrow \quad F_1(x,i,j) = \sum_{i'=0}^{i} \left(\prod_{j'=0}^{j} f(t(i',j',x)) \right).$$

Abgesehen von den einfach zu behandelnden Fallunterscheidungen, sind dies genau die Rekursionsschemata, mit denen $Name$ definiert ist. Wir erhalten also:

Lemma 5.2.9 $Name$ und $true_0$ sind primitiv rekursiv.

□

D.h. auch die Aussagen der Lemmata am Anfang dieses Paragraphen lassen sich in PRA beweisen. Insbesondere haben wir in Lemma 5.2.4 nur Δ_0-Induktion verwendet. Wir sind nun in der Lage, den abschliessenden Satz zu beweisen:

Satz 5.2.3 Aus $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \forall x \in z \exists y \in z \phi(x,y))$ mit $\phi \in \Delta_0$ folgt $PRA + PRWO(<) \vdash \forall n \exists m U(\phi(n,m))$.

Beweis: Wir bezeichnen das Funktionssymbol, das die primitiv rekursive Funktion I mit $I(gn(A), gn(t), gn(h)) = gn(I_t^A h)$ repräsentiert, ebenfalls mit I.
Gelte $\Pi_3 - Refl \vdash \forall z(''z = HF'' \rightarrow \forall x \in z \exists y \in z \phi(x,y))$ mit $\phi \in \Delta_0$.
Lt. Satz 4.4.2 existiert ein δ und ein $h \in \mathbf{H}_\delta$ mit $deg(h) = 0$ und

$$End(h) \subseteq \{\forall x \in L_\omega \exists y \in L_\omega \phi(x,y)\}.$$

Sei $h(\dot{n})$ der Term $I(\overline{gn(\forall x \in L_\omega \exists y \in L_\omega \phi(x,y))}, Num(n), \overline{gn(h)})$.
Es gilt

$$PRA \vdash h(\dot{n}) \in \mathbf{H}_\delta^*(\exists y \in L_\omega \phi(\dot{n}, y))$$

und

$$PRA + PRWO(<) \vdash \exists m\, o(red^{m+1}(h(\dot{n}))) \not< o(red^m(h)).$$

Mit Lemma 5.2.5 folgt

$$PRA + PRWO(<) \vdash \exists m\, true_0(\phi(\dot{n}, \dot{m})) = 1$$

und wg. $PRA \vdash true_0(\phi(\dot{n}, \dot{m})) = 1 \leftrightarrow U(\phi(n,m))$ damit

$$PRA + PRWO(<) \vdash \exists m U(\phi(n,m)).$$

Mit der Generalisierungsregel folgt die Behauptung. □

Anhang A

Die Bezeichnungen für die Teilherleitungen

Wir schreiben $d : \Gamma$ für $End(d) \subseteq \Gamma$.

Zu $h := (N1)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}(t)$:

$$\Gamma(\vec{s}, L_\tau) := \neg\psi_1^\pi, \ldots, \neg\psi_l^\pi, \neg(\mathrm{tran}(L_\tau) \wedge L_\tau \neq \emptyset \wedge Paar^\tau), \neg C[\vec{s}], B[\vec{s}]$$

$d_{b_2} :=$

$$\dfrac{1 : \psi_l^\pi \qquad \dfrac{1 : \psi_1^\pi \quad d_1(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau) : \Gamma(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau)}{\vdots}\ Cut_{\psi_1^\pi}}{\Gamma(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau) \setminus \{\neg\psi_1^\pi, \ldots, \neg\psi_l^\pi\}}\ Cut_{\psi_l^\pi}$$

$d_b :=$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{d_{b_2} : \Gamma(\vec{a}/\vec{s}, y/L_\tau) \setminus \{\neg\psi_1^\pi, \ldots, \neg\psi_l^\pi\} \quad d_{b_1} : \mathrm{tran}(L_\tau) \wedge L_\tau \neq \emptyset \wedge Paar^\tau}{\neg C[\vec{s}]^\tau, B[\vec{s}]^\tau}\ Cut \qquad \dfrac{3 : L_\tau = L_\tau}{Ad^\xi(L_\tau)}}{\vdots}}{\neg C[\vec{s}]^\tau, \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)}$$

$h[\tau] :=$

$$\dfrac{d_b : \neg C[\vec{s}]^\tau, \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z) \quad 10 : L_\tau \neq t, \neg C[\vec{s}]^t, C[\vec{s}]^\tau}{L_\tau \neq t, \neg C[\vec{s}]^t, \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z)}\ Cut$$

Mit $\bigwedge_{\neg Ad^\xi(t)} = tp(h)$ folgt die Konklusion von h

$$\neg Ad^\xi(t), \neg C[\vec{s}]^t, \exists z^\pi(Ad^\xi(z) \wedge B[\vec{s}]^z).$$

Zu $h := (N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]}$:

$h[t] :=$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Ad^{\xi}(t), \neg C[\vec{s}]^{t}, \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z})}{\vdots}}{\neg Ad^{\xi}(t) \wedge \neg C[\vec{s}]^{t}, \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z})}$$

Mit $tp(h) = \bigwedge_{\forall z^{\pi}(\neg Ad^{\xi}(z) \vee \neg C[\vec{s}]^{z})}$ folgt

$$\forall z^{\pi}(\neg Ad^{\xi}(z) \vee \neg C[\vec{s}]^{z}), \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z}).$$

Sei $\Gamma := End(h_0)$.

Zu $h := ((8.9)^{\xi,\pi}_{A})h_0$:

$tp(h_0) = \bigvee^{s}_{A}$:

$h[0] :=$

$$\dfrac{h_0[0] : A_s, \Gamma}{\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge A^{(z,\pi)}), (A_s, \Gamma) \setminus \{A\}} \; (8.9)^{\xi,\pi}_{A}$$

Mit $tp(h) = Ref^{\xi}_{\pi}A(s)$ folgt hieraus

$$\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge A^{(z,\pi)}), \Gamma \setminus \{A\}.$$

Zu $h := ((8.10)^{\xi,\pi}_{A_1,\ldots,A_n})h_0$:

Man beachte $A \equiv A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \equiv B[\vec{s}]^{\pi}$ (vgl. S. 36).

$d :=$

$$\dfrac{1 : \phi^{\pi}_{k} \qquad \dfrac{\dfrac{1 : \phi^{\pi}_{1} \quad d_0(\vec{a}/\vec{s}) : \neg\phi^{\pi}_{1}, \ldots \neg\phi^{\pi}_{k}, \neg B[\vec{s}]^{\pi}, C[\vec{s}]^{\pi}}{} \; Cut_{\phi^{\pi}_{1}}}{\vdots}}{\neg B[\vec{s}]^{\pi}, C[\vec{s}]^{\pi}} \; Cut_{\phi^{\pi}_{k}}$$

$h[0] :=$

$$\dfrac{h_0 : \Gamma \qquad \dfrac{d : \neg B[\vec{s}]^{\pi}, C[\vec{s}]^{\pi}}{\neg B[\vec{s}]^{\pi}, \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})} \; (8.9)^{\xi,\pi}_{C[\vec{s}]^{\pi}}}{\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z}), \Gamma \setminus \{B[\vec{s}]\})} \; Cut_{B[\vec{s}]}$$

$h[1] :=$

$$(N2)^{\xi,\pi}_{B[\vec{s}]} : \neg(\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})), \exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z})$$

Mit $tp(h) = Cut_{\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge C[\vec{s}]^{z})}$ folgt

$$\exists z^{\pi}(Ad^{\xi}(z) \wedge B[\vec{s}]^{z}), \Gamma \setminus \{B[\vec{s}]\}.$$

Zu $h := ((H_1 10.1)^{\pi;\alpha}_{\gamma,\Gamma,B})h_0$:

Man beachte $C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$.

$h[s] :=$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_0 : \Gamma, B}{\neg Ad^{\alpha}(s), \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}}\ (H_2 10.1)^{\pi;\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s)}{\vdots}}{\neg Ad^{\alpha}(s) \vee \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}}$$

Mit $tp(h) = \bigwedge_{\forall v^{\pi} \neg Ad^{\alpha}(v) \vee \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})}}$ folgt

$$\forall v^{\pi}(\neg Ad^{\alpha}(v) \vee \bigvee \Gamma^{(v,\mathcal{K})}), C^{(\pi,\mathcal{K})}.$$

Zu $h := ((H_2 10.1)^{\pi;\alpha}_{\gamma,\Gamma,B}(s))h_0$:

Man beachte $C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})})$
und $G \equiv \mathrm{tran}(L_\tau) \wedge L_\tau \neq \emptyset \wedge B^{(\tau,\mathcal{K})}$.

$$\dfrac{d_1 : L_\tau \neq s, \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, \bigwedge \neg \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})} \qquad \dfrac{\dfrac{d_2 : \mathrm{tran}(L_\tau) \wedge L_\tau \neq \emptyset \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{h_0 : \Gamma, B}{\Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, B^{(\tau,\mathcal{K})}}\ (10.1)^{\tau}_{\gamma,G,B}}{\vdots}}{\bigvee \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, B^{(\tau,\mathcal{K})}}}{\bigvee \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, G}}{\bigvee \Gamma^{(\tau,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}}}{L_\tau \neq s, \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}}\ Cut$$

Mit $tp(h) = \bigwedge_{\neg Ad^{\alpha}(s)}$ folgt

$$\neg Ad^{\alpha}(s), \bigvee \Gamma^{(s,\mathcal{K})}, C^{(\pi,\mathcal{K})}.$$

Zu $h := ((10.1)^{\pi}_{\gamma,\Gamma})h_0$:

$tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$:

Man beachte $C \equiv \exists u^{\mathcal{K}}(\mathrm{tran}(u) \wedge u \neq \emptyset \wedge B^{(u,\mathcal{K})}) \in \Gamma = End(h_0)$ wg. $tp(h_0) = Ref_{\mathcal{K}}(B)$.

$h[0] :=$

$$\dfrac{d_0 : \bigwedge \neg \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}, \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}}{\exists z^{\pi}(Ad^{\hat{\alpha}_0}(z) \wedge \bigwedge \neg \Gamma^{(z,\mathcal{K})}), \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}}\ (8.10)^{\pi,\hat{\alpha}_0}_{\neg \Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}}$$

$h[1] :=$

$$\frac{h_0[0] : \Gamma, B}{\neg\exists z^\pi(Ad^{\hat{\alpha}_0}(z) \wedge \bigwedge \neg\Gamma^{(z,\mathcal{K})}), C^{(\pi,\mathcal{K})}} \ (H_1 10.1)^{\pi\hat{\alpha}_0}$$

Mit $tp(h) = Cut_{\exists z^\pi(Ad^{\hat{\alpha}_0}(z)\wedge\bigwedge \neg G^{(z,\mathcal{K})})}$ folgt daraus

$$\Gamma^{(\pi,\mathcal{K})}$$

Zu $h := ((H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta} A(s))h_0$:

Für $A(s) \equiv \forall y^\pi \exists x^\pi G(s,y,x)$ ist $A(s)_t \equiv \exists x^\pi G(s,t,x)$.
Sei $\Gamma := End(h_0) \setminus \{A(s)\}$.

$h[t] :=$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_0 : \Gamma, \forall y^\pi \exists x^\pi G(s,y,x)}{\Gamma, \exists x^\pi G(s,t,x)} \ I_t^{A(s)}}{\Gamma, \exists x^\pi G(s,t,x)} \ (10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma_t}}{\Gamma, \exists x^\eta G(s,t,x)} \ B^{(\eta,\pi)}_{A(s)_t}$$

Mit $tp(h) = \bigwedge_{A(s)^{(\eta,\pi)}}$ folgt daraus $\Gamma, A(s)^{(\eta,\pi)}$.

Zu $h = ((10.2)^{\mu,\pi,\xi}_\gamma)h_0$:

$tp(h_0) = Ref^\sigma_\pi A(s)$:
Sei $\Gamma := End(h_0) \setminus \{A(s)\}$, $A(s)$ wie oben.

$h[0] :=$

$$\cfrac{\cfrac{L_\eta = L_\eta}{Ad^\sigma(L_\eta)} \quad \cfrac{\cfrac{h_0[0] : \Gamma, \forall y^\pi \exists x^\pi G(s,y,x)}{\Gamma, \forall y^\eta \exists x^\eta G(s,y,x)} \ (H10.2)^{\mu,\pi,\sigma}_{\gamma,\zeta}}{\Gamma, \exists u^\eta \forall y^\eta \exists x^\eta G(u,y,x)}}{\Gamma, Ad^\sigma(L_\eta) \wedge \exists u^\eta \forall y^\eta \exists x^\eta G(u,y,x)}$$

Mit $tp(h) = \bigvee^\eta_{\exists z^\pi(Ad^\sigma(z)\wedge\exists u^z \forall y^z \exists x^z G(u,y,x)}$ folgt $End(h_0)$.

$tp(h_0) = Cut_A$:
Sei $\Gamma_0 := End(h_0[0]) \setminus \{A\}$ und $\Gamma_1 := End(h_0[1]) \setminus \{\neg A\}$.

$rk(A) = \mathcal{K}$:

$h[0] :=$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{h_0[0] : \Gamma_0, A}{\Gamma_0, A^{(\kappa,\mathcal{K})}} \ (10.1)^\kappa_{\gamma,\Gamma,A} \quad \cfrac{h_0[1] : \Gamma_1, \neg A}{\Gamma_1, \neg A^{(\kappa,\mathcal{K})}} \ (10.1)^\kappa_{\gamma,\Gamma,\neg A}}{End(h_0)} \ Cut_{A^{(\kappa,\mathcal{K})}}}{End(h_0)} \ (10.2)^{\mu',\pi,\xi}_{\gamma'}$$

Mit *Rep* folgt daraus $End(h_0)$.

$\pi < rk(A) \notin Reg$:

$h[0] :=$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_0[0] : \Gamma_0, A}{\Gamma_0, A}\,(10.2)^{\nu,\tau,0}_{\gamma} \qquad \dfrac{h_0[1] : \Gamma_1, \neg A}{\Gamma_1, \neg A}\,(10.2)^{\nu,\tau,0}_{\gamma}}{End(h_0)}\,Cut_A}{\dfrac{End(h_0)}{End(h_0)}\,(10.2)^{\nu,\pi,\xi}_{\hat{\alpha}_0}}\,E^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)}_{\bar{\nu}}
$$

Mit *Rep* folgt daraus $End(h_0)$.

$\pi \leq rk(A) \in Reg$, $\alpha_0 < rk(A) =: \tau$, o.B.d.A. $A \equiv \exists x^\tau \neg F(x)$:

$h[0] :=$

$$
\dfrac{\dfrac{h_0[1] : End(h_0), \forall x^\tau F(x)}{End(h_0)}\,S_{\neg A}}{End(h_0)}\,(10.2)^{\mu,\pi,\xi}_{\gamma}
$$

Mit *Rep* folgt daraus $End(h_0)$.

$\pi \leq rk(A) \in Reg$, $\pi = \tau \leq \alpha_0$, o.B.d.A. $A \equiv \exists x^\tau \neg F(x)$:

$h[0] :=$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{h_0[0] : \Gamma_0, \exists x^\tau \neg F(x)}{\Gamma_0, \exists x^\tau \neg F(x)}\,(10.2)^{\mu,\tau,0}_{\gamma}}{\Gamma_0, \exists x^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)} \neg F(x)}\,B_A^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)} \qquad \dfrac{\dfrac{h_0[1] : \Gamma_1, \forall x^\tau F(x)}{\Gamma_1, \forall x^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)} F(x)}\,\forall_w^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)} F(x)}{\Gamma_1, \forall x^{\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0)} F(x)}\,(10.2)^{\mu,\tau,0}_{\hat{\alpha}_0}}{End(h_0)}\,Cut_{A^{(\Psi^0_\tau(\hat{\alpha}_0),\tau)}}
$$

Mit *Rep* folgt daraus $End(h_0)$.

Literaturverzeichnis

[Acz92] Aczel/Simmons/Wainer (Hg.). Proof Theory, Leeds 1990. Cambridge University Press. 1992.

[Bar75] Barwise, Jon. Admissible Sets and Structures. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1975.

[Bar77] Barwise, Jon (Hg.). Handbook of Mathematical Logic. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, N.Y., Oxford. 1977.

[Bl97] Blankertz, Benjamin. Beweistheoretische Techniken zur Bestimmung von Π^0_2-Skolem Funktionen. Dissertation. Münster. 1997.

[Bu91] Buchholz, Wilfried. Notation systems for infinitary derivations. Archive for Mathematical Logic 30. 1991.

[Bu92] Buchholz, Wilfried. A simplivied version of local predicativity. In: Aczel/Simmons/Wainer [Acz92].

[Bu97] Buchholz, Wilfried. Explaining Gentzen's Consistency Proof within infinitary Proof Theory. In: Gottlob, G./ Leitsch, A./ Mundici D. (Hg.). Computational Logic and Proof Theory [GLM97].

[Bu01a] Buchholz, Wilfried. Explanation the Gentzen-Takeuti reduction steps. Erscheint in AML.

[Bu01b] Buchholz, Wilfried. Finitary treatment of operator controlled derivations. Erscheint in MLQ.

[BCW94] Buchholz, Wilfried/ Cichon, Adam/ Weiermann, Andreas. A Uniform Approach to Fundamental Sequences and Hierarchies. Mathematical Logic Quarterly 40. 1994.

[BuSc88] Buchholz, Wilfried/ Schütte, Kurt. Proof Theory of impredicative Subsystems of Analysis. Bibliopolis. Neapel. 1988.

[Bus98] Buss, Samuel R.(Hg.). Handbook of Proof Theory. Elsevier Science B.V. Amsterdam.1998.

[CiW97] Cichon, E./Weiermann, A.. Term rewriting theory for the primitive rekursive functions. APAL 83. 1997.

[CoTr99] Cooper, S.B./ Truss, J.K. (Hg.). Sets and Proofs. Cambridge University Press. 1999.

[Dra74] Drake, Frank. Set Theory: An Introduktion to Large Cardinals. North-Holland Publishing Company. Amsterdam, London. 1974.

[Fef75] Feferman, Solomon. A Language and Axioms for Explicit Mathematics. Springer Verlag. Berlin. 1975.

[Fel93] Felscher, Walter. Berechenbarkeit. Rekursive und Programmierbare Funktionen. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1993.

[Fen74] Fenstad, Jens Erik/ Hinman, Peter (Hg.). Generalized Recursion Theory I, Oslo 1972. North-Holland Publishing Company. Amsterdam. 1974.

[FrS95] Friedman, Harvey/ Sheard, Michael. Elementary descent recursion and proof theory. APAL 71. 1995.

[Ge35] Gentzen, Gerhard. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. Mathematische Annalen 112. 1935.

[Ge38a] Gentzen, Gerhard. Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge, 4. 1938.

[Ge38b] Gentzen, Gerhard. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften. Neue Folge, 4. 1938.

[Gir87] Girard, Jean-Yves. Proof Theory and Logical Complexity. Bibliopolis. Neapel. 1987.

[Goe31] Gödel, Kurt. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38. 1931.

[GLM97] Gottlob, G./ Leitsch, A./ Mundici D. (Hg.). Computational Logic and Proof Theory [GLM97]. 5th Kurt Gödel Colloqium, KGC'97. Springer Verlag. 1997.

[HaP93] Hajek, Petr/ Pudlak, Pavel. Metamathematics of First-Order Arithmetic. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg. 1993.

[Hei67] Heienoort, J. van (Hg.). From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931. Harvard University Press. 1967.

[Hil25] Hilbert, David. Über das Unendliche. Mathematische Annalen Bd. 95. 1925.

[HB68] Hilbert, David/ Bernays, Paul. Grundlagen der Mathematik. Zweite Auflage. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1968.

[Jaeg83] Jäger, Gerhard. A well-ordering proof for Feferman's theory T_0. Archiv für Mathematische Logik 23. 1983.

[Jaeg86] Jäger, Gerhard. Theories for Admissble Sets: A unifying Approach to Proof Theory. Bibliopolis. Neapel. 1986.

[JaPo82] Jäger, Gerhard/ Pohlers, Wolfram. Eine beweistheoretische Untersuchung von $\Delta^1_2{-}\mathbf{CA}{+}$ $\mathbf{BI}$ und verwandter Systeme. Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse. 1982.

[Jech97] Jech, Thomas. Set Theory. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1997.

[KrL68] Kreisel, George/ Levy. Azriel. Reflection Principles and their use for establishing the complexity of axiomatic systems. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 14. 1968.

[Lev71] Levy, Azriel. The Size of the Indescribable Cardinals. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XII, Part 1. 1971.

[Mak77] Makkai, M.. Admissible sets and infinitary logic. In: Barwise, Jon (Hg.). Handbook of Mathematical Logic [Bar77].

[Min75] Mints, Grigorii E.. Finite Investigations of Transfinite Derivations. In: Mints, Grigorii E.. Selected Papers in Proof Theory [Min92].

[Min92] Mints, Grigorii E.. Selected Papers in Proof Theory. Bibliopolis/ North-Holland Publishing Company. Neapel, Amsterdam. 1992.

[Pet36] Peter, Roza. Über die mehrfache Rekursion. Mathematische Annalen 113. 1936.

[Pet57] Peter, Roza. Rekursive Funktionen. Akademie-Verlag. Berlin. 1957.

[Poh89] Pohlers, Wolfram. Proof Theory: An Introduction. Springer Verlag. Berlin. 1989.

[Poh98] Pohlers, Wolfram. Subsystems of Set Theory and Second Order Number Theory. In: Buss, Samuel R. (Hg.). Handbook of Proof Theory [Bus98].

[Pra94] Prawitz, D./Skyrms B./ Westerstahl (Hg.). Logic, Methodology and Philosophy of Science IX. Elsevier Science B.V. 1994.

[Rat92] Rathjen, Michael. Eine Ordinalzahlanalyse der Π_3-Reflexion. Habilitationsschrift. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Münster. 1992.

[Rat94] Rathjen, Michael. Admissible proof theory and beyond. In: Prawitz/Skyrms/Westerstahl (Hg.) [Pra94]

[Rat95] Rathjen, Michael. Recent advances in ordinal analysis: $\Pi^1_2 - CA$ and related systems. Bulletin of Symbolic Logic 1. 1995.

[Rat99] Rathjen, Michael. The Realm of Ordinal Analysis. In: Cooper, S.B./ Truss, J.K. (Hg.). Sets and Proofs [CoTr99].

[RiAc74] Richter, Wayne H./ Aczel, Peter. Inductive Definitions and reflecting properties of admissible ordinals. In: Fenstad/Hinman [Fen74].

[Rog67] Rogers, Hartley, Jr. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. McGraw-Hill Book Company. New York, St. Louis, San Francisco, Toronto, London, Sydney. 1967.

[Ros84] Rose, H.E. Subrecursion. Functions and hierarchies. Clarendon Press. Oxford. 1984.

[Schl93] Schlüter, Andreas. Zur Mengenexistenz in formalen Theorien der Mengenlehre. Dissertation. Westfälische Wilhelms-Universität Münster. Münster. 1993.

[Schw77] Schwichtenberg, Helmut. Proof theory: Some applications of cut-elimination. In: Barwise, Jon (Hg.). Hanbook of Mathematical Logic [Bar77].

[Se99] Setzer, Anton. Ordinalsystems. In: Cooper, S.B./ Truss, J.K. (Hg.). Sets and Proofs [CoTr99].

[Si88] Simmons, Harold. The Realm of Primitive Recursion. Archive for Mathematical Logic 27. 1988.

[Smo77] Smorinski, C.. The Incompleteness Theorems. In: Barwise, Jon. Handbook of Mathematical Logic [Bar77].

[Sch51] Schütte, Kurt. Beweistheoretische Erfassung der unendlichen Induktion in der Zahlentheorie. Mathematische Annalen 122. 1951.

[Sch77] Schütte, Kurt. Proof Theory. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York. 1977.

[Sk67] Skolem, T. Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlicher mit unendlichen Ausdehnungsbereich. In: van Heijenoort [Hei67].

[Tak67] Takeuti, Gaisi. Consistency proofs of subsystems of classical analysis. Ann. Math. 86. 1967.

[Tak87] Takeuti, Gaisi. Proof Theory. Second Edition. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo. 1987.

[TaYa73] Takeuti, Gaisi/ Yasugi, Mariko. The ordinals of the systems of second order arithmetic with the provably Δ^1_2-comprehension and the Δ^1_2-comprehension axiom respectively. Japanese Journal of Mathematics 41. 1973.

[Tr73] Troelstra, A. S. Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis. Springer Verlag. Berlin. 1973.

[TrD88] Troelstra, A. S./ Dalen, D. van. Constructivism in Mathematics. An Introduction. Vol. I. Elsevier Science Publishers B.V. Amsterdam, New York, Oxford, Tokyo. 1988.

[TrS96] Troelstra, A. S./ Schwichtenberg, H. Basic Proof Theory. Cambridge University Press. 1996.

[Wei96] Weiermann, Andreas. How to characterize provably total functions by local predicativity. JSL Vol. 61, Nr. 1. 1996.

[Wei97] Weiermann, Andreas. Sometimes slow growing is fast growing. APAL 90. 1997.